

Problème isopérimétrique  
Travail Encadré de Recherche  
Sous la direction de Jimmy Lamboley  
Master 1  
Sorbonne Université

Gabriel Singer



Je souhaite remercier Monsieur Lamboley d'avoir accepté d'encadrer ce travail de recherche et surtout de m'accorder de son temps pour m'apprendre de nouveaux concepts mathématiques (que je ne comprends pas toujours tout de suite...).

Un grand merci également à Madame Croce et Monsieur Mazzola de faire partie du jury.

## 1 Introduction

Ce travail de recherche m'a permis de découvrir une infime partie du monde des inégalités isopérimétriques dans  $\mathbb{R}^n$ .

Il existe beaucoup de façons différentes de définir la notion de périmètre. Celles-ci dépendent du type d'ensemble qu'on considère (régulier, mesurable, compact) et de la fonction qu'on utilise (mesure de Hausdorff, périmètre de De Giorgi, périmètre de Minkowski).

Nous avons d'abord montré l'équivalence entre trois formulations du problème isopérimétrique dans  $\mathbb{R}^n$  : que nous avons résumé dans le lemme (1). Ensuite nous avons étudié le cas de la dimension 2 au travers de la preuve de Hurwitz, puis une autre preuve qui utilise les polygones.

Une partie de ce travail aura été, entre autres, de répondre aux questions suivantes :

- Etant donné l'inégalité isopérimétrique sur les polygones peut-on en déduire l'inégalité isopérimétrique pour une courbe simple  $C^1$  ?
- Peut-on coder un ou des algorithmes qui "résolvent" dans le cas polygonale l'inégalité isopérimétrique pour le triangle, le quadrilatère et le pentagone ?
- Peut-on généraliser l'inégalité isopérimétrique dans le cas de la dimension 2 aux fonctions de type Sobolev ? Et l'inégalité de Wirtinger ?
- Que se passe-t-il si l'on supprime telle ou telle condition dans tel ou tel théorème ou proposition ?

Ensuite, nous avons étudié différentes preuves de l'inégalité isopérimétrique dans  $\mathbb{R}^n$  pour  $n \geq 3$  avec différents périmètres. D'abord il nous fallait comprendre les preuves puis détailler les passages considérés comme évidents par les mathématiciens. Ce qui donnait souvent lieu à de jolis exercices.

Vous trouverez ces passages dans les différents encadrés.

### Le problème isopérimétrique, de l'antiquité à nos jours.

Le problème isopérimétrique est un problème qui remonte à l'Antiquité.

Il est connu sous le nom "Problème de la reine Didon". Dans l'ouvrage "l'Enéide" écrit par Virgile vers -30 avant JC, on y lit que la reine Didon, après s'être enfuie de Tyr, arrive sur les lieux qu'on appellera plus tard Carthage. Le maître des lieux lui accorde alors le territoire qu'elle peut se délimiter par d'une peau de Boeuf. Elle décide alors de découper la peau de Boeuf en lanière très fine et de délimiter un territoire dont une partie longe les côtes et l'autre dessiner avec la lanière un arc de cercle.

On se donne un domaine du plan  $\Omega$  d'aire finie  $V(\Omega)$  et pour un périmètre  $P(\Omega)$  donné on cherche à maximiser son aire. Ce qui donne l'inégalité :

$$V(\Omega) \leq \frac{1}{4\pi} P(\Omega)^2.$$

On peut aussi inverser le rôle de l'aire et du périmètre, c'est à dire chercher à minimiser le périmètre pour une valeur de l'aire fixée.

Bien que ces problèmes s'énoncent de façon très simple en dimension quelconque toutes les preuves en jeu sont très sophistiquées.

Ce n'est qu'au *XIX*ème siècle que le mathématicien Suisse Steiner (1796 – 1863) donne plusieurs preuves très élégantes mais incomplètes car il suppose, sans le montrer, l'existence d'une solution au problème isopérimétrique.

En 1879 Weierstrass donne une preuve complète de l'inégalité isopérimétrique en dimension 2. Néanmoins cette preuve n'a jamais été publiée, on en retrouve une trace dans les notes d'un de ses élèves, [19].

En 1907 Carathéodory et Study complètent l'une des preuves de Steiner [21].

En 1939 Schmidt donne la première preuve complète en dimension quelconque, [20]. On retrouve dans l'article [1], une preuve en dimension deux, de la preuve de Schmidt.

Depuis l'inégalité isopérimétrique a été étudiée dans d'autres cadres que celui de la géométrie euclidienne. On trouve par exemple l'inégalité isopérimétrique en théorie du transport optimal [18].

## 2 Enoncé du problème isopérimétrique.

### Objectif

L'objectif de cette section est essentiellement de voir qu'on peut énoncer de plusieurs façons équivalentes le problème isopérimétrique sur  $\mathbb{R}^n$ , à périmètre fixé.

Le problème isopérimétrique consiste à chercher à résoudre le problème d'optimisation de forme suivant :

$$\min \left\{ P(\Omega), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad V(\Omega) = m \right\} \quad (1)$$

où  $P(\Omega)$  est le "périmètre" de  $\Omega$ ,  $V(\cdot)$  son volume, et  $m \in ]0, +\infty[$ .

On peut également s'intéresser au problème isopérimétrique suivant ;

$$\max \left\{ V(\Omega), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad P(\Omega) = m \right\} \quad (2)$$

Pour  $R > 0$  on note  $B_n(0, R) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < R\}$  la boule ouverte de  $\mathbb{R}^n$  de centre 0 et de rayon  $R$  où  $|\cdot|$ .

**Lemme 1.** Soit  $n \geq 1$  un entier. On considère les deux problèmes suivants

$$\forall \Omega \in D_P, \quad \frac{P(\Omega)}{V(\Omega)^{\frac{n-1}{n}}} \geq \frac{P(B(0, 1))}{V(B(0, 1))^{\frac{n-1}{n}}}. \quad (3)$$

$$\forall m > 0 \quad \inf \left\{ P(\Omega), \quad \Omega \in D_P, \quad V(\Omega) = m \right\} = P(B(0, R)) \quad (4)$$

$$\forall m > 0 \quad \sup \left\{ V(\Omega), \quad \Omega \in D_P, \quad P(\Omega) = m \right\} = V(B(0, R)) \quad (5)$$

Où  $B(0, R)$  est telle que  $V(B(0, R)) = m$ . Alors (3) et (4) et (5) sont trois problèmes équivalents.  $D_P$  désigne l'ensemble de définition de  $P$ , voir 2.

En effet,

*Proof.* Supposons que (3) soit vérifiée. Soit  $m > 0$ , posons

$$\mu_m := \inf \left\{ P(\Omega), \quad \Omega \in D_P, \quad V(\Omega) = m \right\}.$$

Soit  $R > 0$  tel que  $V(B(0, R)) = m$

Par définition de l'inf on a

$$\mu_m \leq P(B(0, R)).$$

Il suffit de montrer que

$$\left( \frac{m}{V(B(0, 1))} \right)^{\frac{n-1}{n}} P(B(0, 1)) = P(B(0, R)) \quad (6)$$

De sorte que pour un ouvert  $\Omega$  de volume égale à  $m$  on aura d'après (3) et (6),

$$P(\Omega) \geq \left( \frac{m}{V(B(0, 1))} \right)^{\frac{n-1}{n}} P(B(0, 1)) = P(B(0, R))$$

en passant à l'inf :

$$\mu_m \geq P(B(0, R)).$$

On sait que

$$P(B(0, R)) = \frac{R^{n-1} 2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \quad V(B(0, R)) = \frac{R^n P(B(0, 1))}{n}$$

Par hypothèse  $V(B(0, R)) = m$  ce qui donne

$$m = \frac{R^n 2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma(\frac{n}{2})}$$

En remplaçant par la valeur de  $m$  dans le membre de gauche de (6) on retrouve bien (6). Ainsi,

$$\mu_m = P(B(0, R)).$$

Réciproquement, soit  $m \in \mathbb{R}_+^*$  tels que

$$\mu_m = P(B(0, R)).$$

On se donne  $\Omega$  un ouvert régulier. Posons  $\lambda_* = \left( \frac{m}{V(\Omega)} \right)^{\frac{1}{n}}$  et  $\Omega^* = \lambda_* \Omega$ .

On a alors

$$V(\Omega^*) = m$$

et donc

$$P(\Omega_*) \geq \mu_m = P(B(0, R))$$

Mais d'après (6) et le fait que

$$P(\Omega_*) = P(\lambda_* \Omega) = \lambda_*^{n-1} P(\Omega) = \left( \frac{m}{V(\Omega)} \right)^{\frac{n-1}{n}} P(\Omega)$$

l'inégalité précédente se réécrit :

$$\left(\frac{m}{V(\Omega)}\right)^{\frac{n-1}{n}} P(\Omega) \geq \left(\frac{m}{V(B(0,1))}\right)^{\frac{n-1}{n}} P(B(0,1))$$

Donc,

$$\frac{P(\Omega)}{V(\Omega)^{\frac{n-1}{n}}} \geq \frac{P(B(0,1))}{V(B(0,1))^{\frac{n-1}{n}}}.$$

Finalement (4) et (3) sont équivalents et de la même manière (3) et (5) sont équivalents, ce qui conclut la preuve.  $\square$

**Remarques 1.** Le lemme précédent nous servira plus tard dans la partie 6, il permet de passer d'un problème d'optimisation (non linéaire) sous contrainte (4) à un problème de minimisation de fonction dans  $\mathbb{R}^n$  (3).

Nous résumons ici quelques informations au sujet des différents périmètres :

Périmètres	Expression	Ensemble de définition
Polygône	$\sum_{0 \leq k \leq n-1}  z_{k+1} - z_k $	$\mathcal{P}$
Longueur d'une courbe	$\int_{]0,1[}  \gamma'(t)  dt$	$C^1([0,1])$
Minkowski	$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{V(A+B_\varepsilon) - V(A)}{\varepsilon}$	compact
De Giorgi	$\sup \left\{ \int_{\Omega} \operatorname{div} \phi(x) dx; \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \ \phi\ _\infty \leq 1 \right\}$	Lebesgue-mesurables
Surface du bord	$\int_{\partial\Omega} d\sigma.$	Bord Lipschitzien

### 3 Cas de la dimension deux

#### 3.1 Définition de la longueur d'une courbe $C^1$ et preuve de Hurwitz.

##### Objectif

Dans cette section on se propose d'étudier le cas de l'inégalité isopérimétrique en dimension deux pour des courbes simples  $C^1$ . Nous présentons la preuve d'Hurwitz de [3] qui utilise l'inégalité de Wirtinger. Ensuite on étudie le cas de l'inégalité isopérimétrique pour les polygones et on montre qu'on peut en déduire l'inégalité isopérimétrique pour des courbes simples  $C^1$ . Enfin on étudie certains résultats dans le cas  $W^{1,p}([0,1], \mathbb{R})$  pour  $p \in [1, \infty]$ .

Soit  $\Gamma$  une courbe de  $\mathbb{R}^2$ . C'est à dire qu'on peut trouver un  $a > 0$  et une fonction injective continue  $\gamma : [0, a] \mapsto \mathbb{R}^2$  tels que  $\Gamma = \operatorname{Im}(\gamma([0, a]))$ .

**Définition 1** ([7]). On définit la longueur de  $\gamma$  sur  $[0, a]$  notée  $l(\gamma, [0, a])$

$$l(\gamma, [0, a]) := \sup \left\{ \sum_{0 \leq k \leq N-1} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \quad 0 = t_0 < t_{k-1} < t_k < t_N = a, N \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Cette définition ne dépendant pas du choix de  $\gamma$  [7], et

$$l(\Gamma) := l(\gamma, [0, a]).$$

**Proposition 1** ([7]). Si  $\gamma$  est de classe  $C^1([0, 1])$  on a

$$l(\Gamma) = \int_{[0,1]} |\gamma'(t)| dt.$$

En effet,

*Proof.* Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$  une subdivision adaptée à  $\gamma$ . On considère

$$S_n := \sum_{k=0}^{n-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|.$$

L'égalité des accroissements finis nous dit que pour chaque  $i \in [1, n]$  il existe  $u_i \in [t_i, t_{i+1}]$  tel que

$$|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| = |\gamma'(u_i)(t_{i+1} - t_i)|.$$

On reconnait une somme de Rieman associée à  $\gamma$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} |\gamma'(u_i)| (t_{i+1} - t_i) = \int_{[0,1]} |\gamma'(t)| dt,$$

de sorte que

$$l(\Gamma) = \int_{[0,1]} |\gamma'(t)| dt.$$

□

Soit  $\gamma : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^2$  injective,  $C^1$ , telle que  $|\gamma'| \neq 0$  avec  $\gamma(0) = \gamma(1)$ . Avec ces hypothèses on peut appliquer le théorème de Jordan qui affirme alors que  $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Im}(\gamma)$  possède deux composantes connexes, l'une bornée qu'on appelle l'intérieur de la courbe et l'autre non bornée. On notera  $\Omega$  l'intérieur de la courbe, qui est un ouvert.

Le volume de  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  en dimension deux que l'on note  $V(\Omega)$  est défini par sa mesure deux dimensionnelles de Lebesgue.

Le périmètre que nous considérons est

$$P(\Omega) = \int_0^1 |\gamma'(t)| dt. \quad (7)$$

### 3.1.1 Inégalité de Wirtinger

Il s'agit de démontrer l'inégalité de Wirtinger pour des fonctions  $C^1$  périodiques. De cette inégalité découle l'inégalité isopérimétrique dans le plan 2.

**Théorème 1.** Soit  $f \in C_{per}^1(\mathbb{R})$  telle que  $\int_{]0,1[} f = 0$  alors on a

$$\int_{]0,1[} |f(t)|^2 dt \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{]0,1[} |f'(t)|^2 dt$$

**Remarques 2.** • *L'hypothèse*

$$\int_{]0,1[} f = 0$$

ne peut pas être supprimée, car si l'on prend la fonction constante définie par  $f(.) := 1$ , qui est bien périodique,  $C^1(\mathbb{R})$  mais ne vérifie par l'inégalité.

- L'hypothèse  $C_{per}^1(\mathbb{R})$  peut-être affaiblit. Dans le sens où l'on montre en partie 3 que pour

$$f \in W_{per}^{1,p}(]0,1[); \quad p \in [1, \infty[$$

l'inégalité est toujours vraie.

*Proof.* Soit  $f \in C_{per}^1(\mathbb{R})$  on définit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \hat{f}(n) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi n t} dt.$$

Par une intégration par partie on a immédiatement que pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\hat{f}'(n) = 2i\pi n \hat{f}(n).$$

On a les relations suivantes :

$$\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2$$

$$\|f'\|_{L^2}^2 = 4\pi^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^2 |\hat{f}(n)|^2$$

Ce qui nous donne l'inégalité souhaitée :

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(t)|^2 dt &= \|f\|_{L^2}^2 \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |\hat{f}(n)|^2 \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} |n|^2 |\hat{f}(n)|^2 \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \right|^2 \int_0^1 |f'(t)|^2 dt \end{aligned}$$

□

**Théorème 2.** Soit  $\gamma$  une fonction définie sur  $[0,1]$ . On suppose que  $\gamma \in C^1$ ,  $\gamma(0) = \gamma(1)$ ,  $\gamma$  injective et que  $\forall t \in ]0,1[ \quad |\gamma'(t)| \neq 0$ .  $\Omega$  désigne l'intérieur de la courbe  $\gamma$  au sens du théorème de Jordan. Alors :

$$P(\Omega)^2 \geq 4\pi V(\Omega)$$

Où  $P$  est la fonction périmètre définie par (7).

Hurwitz en donne une preuve directe en utilisant l'inégalité de Wirtinger [3]. On suit la présentation de [4]

**Remarques 3.** Les hypothèses 3 et 4 sont là pour pouvoir parler d'intérieur au sens du théorème de Jordan. On pourrait très bien s'en passer mais dans ce cas ce sera une inégalité fonctionnelle et l'on aurait plus le droit de parler de périmètre ni de volume au sens qu'on a donné dans ce théorème.

*Proof.* Par le lemme 1 il suffit de traiter le cas  $P(\Omega) = 2\pi$ .

Soit  $\gamma : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2$  telle que  $\gamma(\cdot) = (x(\cdot), y(\cdot))$  soit une paramétrisation par longueur d'arc de  $\partial\Omega$ . On a alors pour chaque  $t \in [0, 2\pi]$

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 1$$

$$P(\Omega) = \int_{[0,2\pi]} |\gamma'| = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = 2\pi$$

On applique l'identité de Parseval à la fonction d'une seule variable  $2\pi$  périodique  $f = \gamma'$ .  
On a alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} |\gamma'(t)|^2 dt &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{\gamma'}(n)|^2 \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^2 \left( |\widehat{x(n)}|^2 + |\widehat{y(n)}|^2 \right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

De la même manière en utilisant l'identité de Parseval et grâce à la formule de Stokes :

$$V(\Omega) = \frac{1}{2} \left| \int_{[0,2\pi]} x(t)y'(t) - x'(t)y(t) dt \right| = \pi \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \left( \widehat{x(n)} \overline{\widehat{y(n)}} - \widehat{y(n)} \overline{\widehat{x(n)}} \right) \right|.$$

Où l'on a utilisé que  $x$  et  $y$  sont à valeurs réelles donc  $\overline{\widehat{y(-n)}} = \widehat{y(-n)}$  et  $\overline{\widehat{x(-n)}} = \widehat{x(-n)}$ .

Pour chaque  $n \in \mathbb{Z}$

$$\left| \widehat{x(n)} \overline{\widehat{y(n)}} - \widehat{y(n)} \overline{\widehat{x(n)}} \right| \leq 2 \left| \widehat{x(n)} \widehat{y(n)} \right| \leq \left| \widehat{x(n)} \right|^2 + \left| \widehat{y(n)} \right|^2$$

et que  $|n| \leq |n|^2$  Donc :

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \pi \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \left( \widehat{x(n)} \overline{\widehat{y(n)}} - \widehat{y(n)} \overline{\widehat{x(n)}} \right) \right| \\ &\leq \pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n| \left( \left| \widehat{x(n)} \right|^2 + \left| \widehat{y(n)} \right|^2 \right) \\ &\leq \pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^2 \left( \left| \widehat{x(n)} \right|^2 + \left| \widehat{y(n)} \right|^2 \right) \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Ce qui montre l'inégalité isopérimétrique dans le cas  $l(\Omega) = 2\pi$ .

Supposons maintenant que  $V(\Omega) = \pi$  alors  $x(n) = y(n) = 0$  si  $n$  est différent de  $-1; 0; 1$ , donc il existe des complexes  $a_1, b_1, a_2, b_2$  tels que pour tout  $t \in [0, 2\pi]$

$$x(t) = a_1 + b_1 e^{it} + \overline{b_1} e^{-it}$$

et

$$y(t) = a_2 + b_2 e^{it} + \overline{b_2} e^{-it}$$

et puisque

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |n|^2 \left( \left| \widehat{x(n)} \right|^2 + \left| \widehat{y(n)} \right|^2 \right) = 1,$$

nécessairement

$$|b_1|^2 + |b_2|^2 = \frac{1}{2}$$

et puisque l'aire est égale à  $\pi$  on a  $|b_1| = |b_2|$  ce qui donne l'existence deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $b_1 = \frac{1}{2} e^{i\alpha}$  et  $b_2 = \frac{1}{2} e^{i\beta}$  et puisque

$$1 = 2 |b_1 \overline{b_2} - \overline{b_1} b_2|$$

donc  $\alpha - \beta = \frac{k\pi}{2}$  avec  $k \in 2\mathbb{Z} + 1$  Donc, pour tout  $t \in [0, 2\pi]$  :



$$x(t) = a_1 + \cos(t + \alpha) \quad y(t) = a_2 \pm \sin(t + \alpha).$$

Ainsi on obtient un cercle.

Réciproquement il est clair que si le bord décrit un cercle on obtient l'égalité  $V(\Omega) = \pi$ .  $\square$

**Remarques 4.** *On qualifie les deux preuves précédentes de directe car elles fournissent d'emblée une solution (le disque) au problème isopérimétrique. Une façon plus classique de procéder est de montrer d'abord l'existence puis de montrer que la solution est un disque.*

### 3.2 Inégalité isopérimétrique pour les polygones

**Définition 2** (Polygone). *Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . On se donne une fonction*

$$\gamma : \bigcup_{1 \leq k \leq p} [a_k; a_{k+1}] \mapsto \mathbb{R}^2$$

*affine par morceau, injective, continue et fermé. On note pour  $k \in \{1, \dots, p\}$ ,  $\gamma_k$  la restriction de  $\gamma$  à l'intervalle  $[a_k; a_{k+1}]$ .*

*On dira que  $Z = \text{Im}(\gamma)$  est le polygone  $Z$ .*

*On note  $\mathcal{P}_n$  l'ensemble des polygones à  $n$  cotés.*

En particulier,

$$\gamma(t) = \left( \sum_{1 \leq k \leq p} \chi_{[a_k; a_{k+1}]} \gamma_{k,1}(t); \sum_{1 \leq k \leq p} \chi_{[a_k; a_{k+1}]} \gamma_{k,2}(t) \right)$$

Au quel cas pour tout  $k \in \{1, \dots, p\}$

$$z_k = \gamma_{k,1}(a_k) + i\gamma_{k,2}(a_k)$$

sont les sommets du polygone.

**Définition 3.** *[Topologie sur les polygones] On fixe  $n \in \mathbb{N}^*$  le nombre de sommets. On dira que la suite  $(Z_k)_k = ((z_{0,k}, \dots, z_{n-1,k}))_k$  tend vers  $Z = (z_0, \dots, z_{n-1})$  si et seulement si :*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq j \leq n-1} |z_{j,k} - z_j| = 0$$

*l'application  $D : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{R}_+$  définie par*

$$\forall Z, Z' \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \quad D(Z, Z') = \sup_j |z_j - z'_j|.$$

*définit clairement une norme sur  $\mathbb{C}^n$ .*

Le polygone  $Z$  est équilatéral si  $|z_{k+1} - z_k|$  ne dépend pas de  $k$ .

De plus,  $Z$  est dit régulier si : il existe  $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$  tels que pour chaque entier  $k$  :

$$z_k = a\omega_k + b$$

ou

$$z_k = a\overline{\omega_k} + b$$

On définit l'aire d'un polygone par

$$A(Z) = \frac{1}{2} \text{Im} \left( \sum_{0 \leq k \leq n-1} z_k \overline{z_{k+1}} \right)$$

et son périmètre par

$$P(Z) = \sum_{0 \leq k \leq n-1} |z_{k+1} - z_k|. \quad (8)$$

**Théorème 3.** *Tout polygone  $Z \in \mathcal{P}_n$  vérifie*

$$\frac{P(Z)^2}{V(Z)} \geq 4n \tan \frac{\pi}{n}$$

*Avec égalité si et seulement si  $Z$  est régulier.*

**Lemme 2.** *Soit  $n$  un entier alors il existe un polygone  $Z^*$  non réduit à un point, tel que pour chaque polygone  $Z$ .*

$$\frac{P(\Omega)^2}{V(\Omega)} \geq \frac{P(\Omega^*)^2}{V(\Omega^*)}. \quad (9)$$

*Proof.* Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ,  $L > 0$

$$\Lambda_{L,n} := \{Z \in \mathcal{P} \mid z_0 = 0 \quad l(Z) = L\}$$

l'ensemble des polygones à  $n$  cotés de périmètre  $L$ .

Montrons que l'ensemble  $\Lambda_{L,n}$  est compact.

Soit  $(Z_k)_k \in (\Lambda_{L,n})^{\mathbb{N}}$ .

Soit  $(j, k) \in [[0, n-1]] \times \mathbb{N}$   $z_{j,k}$  le  $j$ -ième sommet de  $Z_k$ .

$$|z_{j,k}| \leq \sum_{0 \leq l \leq k} |z_{j,l+1} - z_{j,l}| \leq P(Z) = L.$$

Donc la suite  $(z_{j,k})_{k \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $\mathbb{C}$  et par le théorème de Weierstrass il existe donc  $z_j^*$  et une extraction  $\sigma$  tel que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |z_{j,\sigma(k)} - z_j^*| = 0.$$

Posant alors  $Z_n^* = (z_i^*)_{0 \leq i \leq n-1}$ .

On trouve que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_{\sigma(n)} = Z^*.$$

On vérifie aisément par passage à la limite dans la somme des modules (qui est continue pour D) que

$$P(Z^*) = L.$$

Ensuite, la fonction  $\Psi : Z \mapsto \frac{P(Z)^2}{V(Z)}$  est définie et continue sur l'ensemble des polygones non réduit à un point.

Par le théorème de Heine, il existe un  $\Omega_{L,n}^* \in \Lambda_{L,n}$  tel que (9) soit vérifiée. Enfin, puisque la fonction  $\Psi$  est invariante par homothétie et translation et que n'importe quel polygone se transforme en élément de  $\Lambda_{L,n}$  après homothétie et translation on conclut la preuve du lemme.  $\square$

La démonstration du théorème 3 est totalement reprise d'un devoir maison donné en classe préparatoire au Lycée Louis Le Grand. Nous n'avons pas réussi à retrouver le professeur qui a rédigé ce devoir.

De plus la preuve qui suit est "analytique" mais il existe des preuves géométriques du cas d'égalité et du cas d'existence.

En effet,

*Proof.* On définit pour  $Z = (z_0, \dots, z_{n-1}) \in \mathcal{P}_n$  le nombre :

$$E(Z) = \sum_{0 \leq k \leq n-1} |z_{k+1} - z_k|^2.$$

Supposons que  $Z$  soit régulier et calculons  $A(Z)$ ,  $E(Z)$  et  $L(Z)$ . Si  $Z$  est régulier il existe  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$  tel que pour chaque

$$k \in \mathbb{N}, \quad z_k = ae^{2ik\frac{\pi}{n}} + b.$$

Soit  $k \in [[0, n-1]]$  :

$$\begin{aligned} |z_{k+1} - z_k| &= |a(e^{2i(k+1)\frac{\pi}{n}} - e^{2ik\frac{\pi}{n}})| \\ &= |ae^{2ik\frac{\pi}{n}}| |(e^{2i\frac{\pi}{n}} - 1)| \\ &= |a| |e^{i\frac{\pi}{n}} (e^{i\frac{\pi}{n}} - e^{-i\frac{\pi}{n}})| \\ &= 2|a| \sin \frac{\pi}{n} \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} P(Z) &= 2|a|n \sin \frac{\pi}{n} \\ E(Z) &= 4|a|^2 n \sin^2 \frac{\pi}{n}. \end{aligned}$$

De la même façon on trouve

$$A(Z) = \frac{a}{2} n^2 \sin \frac{2\pi}{n}$$

De sorte que

$$\frac{A(Z)}{P(Z)^2} = \frac{1}{4n \tan \frac{\pi}{n}}, \quad \frac{A(Z)}{E(Z)} = \frac{1}{4 \tan \frac{\pi}{n}}$$

et

$$\frac{P(Z)^2}{E(Z)} = n$$

Ensuite pour tout polygone  $Z \in \mathbb{C}^n$  on a par l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\begin{aligned} P(Z)^2 &= \left( \sum_{0 \leq k \leq n-1} 1 |z_{k+1} - z_k| \right)^2 \\ &\leq \left( \sum_{0 \leq k \leq n-1} |z_{k+1} - z_k|^2 \right) \left( \sum_{0 \leq k \leq n-1} 1 \right) \\ &= nE(Z). \end{aligned}$$

Avec égalité si et seulement si il existe  $\lambda > 0$  tel que pour chaque  $k$

$$|z_{k+1} - z_k| = \lambda$$

c'est à dire  $Z$  équilatéral.

Pour  $j \in [[0, n-1]]$  et  $Z$  un polygone de  $\mathbb{C}^n$  quelconque, posons ;

$$\hat{z}_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{0 \leq k \leq n-1} (e^{-\frac{2i\pi j}{n}})^k z_k$$

Un calcul direct montre que

$$z_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{0 \leq k \leq n-1} (e^{\frac{2i\pi j}{n}})^k \hat{z}_k \quad (10)$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} A(Z) &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left( \sum_{k=0}^{n-1} z_{k+1} \bar{z}_k \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{l=0}^{n-1} (\omega^{k+1})^l \hat{z}_l \times \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=0}^{n-1} (\omega^k)^m \hat{z}_m \right) \\ &= \frac{1}{2n} \operatorname{Im} \left( \sum_{0 \leq l, m \leq n-1} \omega^l \hat{z}_l \bar{\omega}^m \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^{l-m})^k \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left( \sum_{l=0}^{n-1} \omega^l |\hat{z}_l|^2 \right) \\ A(Z) &= \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{n-1} \sin \left( \frac{2l\pi}{n} \right) |\hat{z}_l|^2 \end{aligned}$$

$$A(Z) = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{n-1} \sin \left( \frac{2l\pi}{n} \right) |\hat{z}_l|^2$$

De la même façon on trouve :

$$E(Z) = \sum_{0 \leq l \leq n-1} |\hat{z}_l|^2 \sin^2 \frac{l\pi}{n}$$

et donc

$$E(Z) - 4 \tan \frac{\pi}{n} A(Z) = 4 \sum_{0 \leq k \leq n-1} \sin \frac{k\pi}{n} \left( \sin \frac{k\pi}{n} - \tan \frac{\pi}{n} \cos \frac{k\pi}{n} \right) |\hat{z}_k|^2$$

Les fonctions  $\sin$  et  $\cos$  étant respectivement croissante et décroissante sur  $[0; \frac{\pi}{2}]$  on a

$$\sin \frac{k\pi}{n} \left( \sin \frac{k\pi}{n} - \tan \frac{\pi}{n} \cos \frac{k\pi}{n} \right) \geq \sin \frac{k\pi}{n} \left( \sin \frac{\pi}{n} - \tan \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} \right) \geq 0$$

Donc  $E(Z) - 4 \tan \frac{\pi}{n} A(Z) \geq 0$  s'il y a égalité cela entraine que pour chaque  $k \geq 2$   $\hat{z}_k = 0$  de sorte que pour chaque  $j \in [[0, n-1]]$

$$z_j = \frac{1}{\sqrt{n}} (\hat{z}_0 + e^{\frac{2i\pi j}{n}} \hat{z}_1)$$

Ce qui veut dire que :

$Z$  est régulier.

On sait d'après l'étape 1 qu'il existe un polygone  $Z_0$  tel que pour tout polygone  $Z$  :

$$\frac{A(Z)}{P(Z)^2} \leq \frac{A(Z_0)}{P(Z_0)^2}.$$

Un  $n$  gones  $Z_0$  qui vérifie l'inégalité isopérimétrique est nécessairement équilatéral. Sinon on aurait un entier  $k$  tel que pour trois sommets :

$$|z_{k+1} - z_k| < |z_k - z_{k-1}| \quad (11)$$

Mais alors en considérant le nouveau point :  $z_{k,\lambda} - z_k = \lambda(z_{k+1} - z_{k-1})$  ou encore  $z_{k,\lambda} = z_k + \lambda(z_{k+1} - z_{k-1})$  on construit le polygone :  $Z_\lambda = (z_0, \dots, z_{k,\lambda}, \dots, z_n)$  possède la même aire que  $Z_0$  mais il doit également minimiser sa longueur ce qui n'est le cas que si  $|z_{k+1} - z_k| = |z_k - z_{k-1}|$ , ceci contredit (11).

Soit  $Z$  tel que

$$\frac{A(Z)}{L(Z)^2} = \frac{A(Z_0)}{L(Z_0)^2}.$$

d'après ce qui précède  $Z$  est équilatérale et alors

$$\frac{L(Z)^2}{E(Z)} = n$$

et donc  $E(Z) = 4 \tan \frac{\pi}{n} A(Z)$  et donc  $Z$  est régulier.

Ce qui conclut la preuve du théorème. □

**Remarques 5.** *L'ensemble*

$$E_1(L) := \{Z \in \mathcal{P} \mid A(Z) = a_0\} \subset \mathbb{R}^2$$

*n'est pas compact. Il suffit de prendre  $n = 3$ , et de considérer la suite de triangles  $(T_k)_k$  définie par :*

$$\forall k \geq 1 \quad (z_0 = 0; z_1 = k; z_3 = \frac{2a_0}{k}i)$$

*Pour  $k \geq 1$  on a*

$$A(T_k) = \frac{1}{2}k \left| i \frac{2a_0}{k} \right| = a_0$$

*et*

$$P(T_k) = k + \left| \frac{2a_0}{k} \right| + \sqrt{k^2 + \left( \frac{2a_0}{k} \right)^2} \sim 2k.$$

Nous nous sommes posé la question suivante :

Peut on, grâce à l'inégalité isopérimétrique pour les polygones, en déduire l'inégalité isopérimétrique (4) ?

**Lemme 3.** *Si  $Z$  est un polygone de  $\mathbb{C}^n$  avec  $n \geq 3$  et  $l$  est définie par (8) alors il vérifie l'inégalité isopérimétrique au sens ;*

$$\frac{P(Z)^2}{V(Z)} \geq 4\pi.$$

En effet,

*Proof.* C'est immédiat d'après ce qui précède. Soit  $Z$  un polygone :

$$\frac{P(Z)^2}{V(Z)} \geq 4n \tan \frac{\pi}{n} \geq 4\pi$$

Pour justifier la dernière inégalité il suffit d'étudier la fonction  $\phi : x \mapsto \tan x - x$  sur l'intervalle  $[0, \frac{\pi}{2}[$  qui y est continûment dérivable et de dérivée  $\tan^2(\cdot)$  qui est une fonction positive donc  $\phi$  est croissante et puisque  $\phi(0) = 0$ , on en déduit que pour tout  $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ ,  $\tan x \geq x$ .  $\square$

### 3.3 Généralisation de type Sobolev

Objectif

Jusqu'à présent on supposait  $\gamma \in C^1([0, 2\pi])$  et  $\gamma(0) = \gamma(1)$ , nous tentons de démontrer que le résultat reste vrai si l'on affaiblit la condition  $C^1$ .

On considère toujours le cas du plan et on voit bien que la condition d'avoir  $\Omega$  qui soit paramétré par une fonction  $C^1$  empêche d'avoir un carré par exemple.

Le carré peut être paramétré par la fonction  $f : [0, 1] \times [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^2$

$$f : (x, y) \mapsto \max x, y.$$

Que dire de l'inégalité isopérimétrique dans ce cas ? Pour cela on fait appel au espace de Sobolev.

**Définition 4.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in \mathbb{N}^*$

$$W^{n,p}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) \quad \forall k \in [0, n] \quad f^{(k)} \in L^p(\Omega)\}$$

Où la dérivée est à comprendre au sens des distributions. C'est à dire que

$$\forall k \in [0, n] \quad \exists v \in L^p(\Omega) \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \int f^{(k)} \phi = (-1)^k \int v \phi^{(k)}$$

au quel cas  $f^{(k)} = v$ .

On définit également pour  $a < b$

$$W_{per}^{n,p}([a, b])$$

l'ensemble des fonctions de  $W^{n,p}([a, b])$  qui vérifient  $f(a) = f(b)$ .

**Lemme 4.** Soit  $B$  l'application définie par

$$\forall (f, g) \in L^\infty([0, 2\pi]) \times L^\infty([0, 2\pi]) \quad B(f, g) = \int_{[0, 2\pi[} f(x)g(x)dx.$$

On a que :  $B$  est continue sur

$$L^\infty([0, 2\pi]) \times L^\infty([0, 2\pi]).$$

En effet,

*Proof.* On a clairement que  $B$  est bilinéaire (par symétrie du produit dans  $\mathbb{R}$  et linéarité de l'intégrale). De plus;  $(L^\infty(]0, 2\pi[), \|\cdot\|_\infty)$  est un espace vectoriel normé et si  $f, g \in L^\infty(]0, 2\pi[)$

$$|B(f, g)| \leq 2\pi \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

Ce qui montre la continuité de l'application  $B$ .  $\square$

**Proposition 2.** Soit  $\gamma(\cdot) = (x(\cdot); y(\cdot))$  une fonction  $W_{per}^{1,\infty}(]0, 2\pi[)$ .

$$\left( \int_{]0, 2\pi[} \sqrt{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2} dt \right)^2 \geq 4\pi \int_{]0, 2\pi[} x(t)y'(t) - y(t)x'(t) dt. \quad (12)$$

En effet,

*Proof.* Soit  $\gamma \in W_{per}^{1,\infty}(]0, 2\pi[)$  et  $(\rho_n)_n$  une approximation de l'unité. On définit pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$x_n = x \star \rho_n \quad y_n = y \star \rho_n.$$

Soit  $n \geq 0$ ,

$$x_n, y_n \in C^1(]0, 2\pi[) \quad x_n(0) = x_n(2\pi) \quad y_n(0) = y_n(2\pi).$$

Donc les hypothèses  $\star$  et  $\star\star$  sont vérifiées, ainsi :

$$\left( \int_{]0, 2\pi[} \sqrt{|x'_n(t)|^2 + |y'_n(t)|^2} dt \right)^2 \geq 4\pi \int_{]0, 2\pi[} x_n(t)y'_n(t) - y_n(t)x'_n(t) dt. \quad (13)$$

Considérons pour tout  $n \geq 0$ :

$$I_n := \int_{]0, 2\pi[} \sqrt{|x'_n(t)|^2 + |y'_n(t)|^2} dt.$$

La fonction  $\sqrt{|x'_n(\cdot)|^2 + |y'_n(\cdot)|^2}$  est mesurable et converge simplement presque partout vers  $\sqrt{|x'(\cdot)|^2 + |y'(\cdot)|^2}$ . Et on a pour chaque  $u \in ]0, 2\pi[$

$$|x'_n(u)| = |\gamma' \star \rho_n(u)| \leq \|\rho_n\|_1 \|x'\|_\infty = \|x'\|_\infty.$$

Et  $u \mapsto \|x'\|_\infty \in L^1(]0, 2\pi[)$ .

Même chose pour  $y_n$ . Donc,

$$\sqrt{|x'_n(u)|^2 + |y'_n(u)|^2} \leq 2 \max\{\|x'\|_\infty, \|y'\|_\infty\} \in L^1(]0, 2\pi[)$$

Par le théorème de convergence dominée on en déduit que ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \int_{]0, 2\pi[} \sqrt{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2} dt.$$

Enfin, puisque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_\infty = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|y'_n - y'\|_\infty = 0,$$

on a donc que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n y'_n - x y'\|_\infty = 0.$$

Il suffit décrire que pour chaque  $n \in \mathbb{N}$  et  $u \in ]0, 2\pi[$  on a :

$$x_n y'_n - xy = y'_n(x_n - x) + x(y'_n - y')$$

De sorte que

$$|x_n y'_n - xy|_\infty \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} (|y'_n|_\infty) |x_n - x|_\infty + |x|_\infty |y'_n - y'|_\infty \rightarrow 0.$$

Ainsi, par le lemme 4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{]0, 2\pi[} x_n(u) y'_n(u) du = \int_{]0, 2\pi[} x(u) y'(u) du.$$

De la même manière :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{]0, 2\pi[} y_n(u) x'_n(u) dt = \int_{]0, 2\pi[} y(u) x'(u) dt.$$

Ce qui conclut la preuve en passant à la limite dans (13).  $\square$

**Proposition 3** (Wirtinger version Sobolev.). Soit  $f \in W^{1,p}(]0, 1[)$  et  $p \in [1, +\infty[$  telle que

$$\int_{]0, 1[} f(t) dt = 0,$$

alors on a

$$\int_{]0, 1[} |f(t)|^2 dt \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{]0, 1[} |f'(t)|^2 dt$$

En effet,

*Proof.* Si  $p \in [1, \infty[$ .

Par le lemme précédent pour  $f \in W^{1,2}(]0, 1[)$  donnée on sait qu'il existe une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $C_{per}^2(]0, 1[)$  qui converge  $f$  au sens de la norme  $W^{1,2}(]0, 1[)$ . Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$  on définit  $M_n := \int_{]0, 1[} f_n(t) dt$  et on pose  $\phi_n := f_n - M_n$ . De sorte que  $\phi_n$  vérifie pour tout entier  $n$ ,

$$\int_{]0, 1[} \phi_n = 0.$$

Montrons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\phi_n - f|_2 = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\phi'_n - f'|_2 = 0.$$

En remarquant que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \phi'_n = f'_n$$

on a que

$$\forall n \geq 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |\phi'_n - f'|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} |f'_n - f'|_2 = 0.$$

Ensuite,

$$\forall n \geq 0 \quad |\phi_n - f|_2 \leq |\phi_n + M_n - f|_2 + |M_n|_2 = |f_n - f|_2 + M_n.$$

Mais,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{]0, 1[} f_n = \int_{]0, 1[} f = 0.$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\phi_n - f|_2 = 0.$$



Pour chaque  $n > 0$   $\phi_n$  vérifie les hypothèses de l'inégalité 1 donc :

$$\int_{]0,1[} |\phi_n(t)|^2 dt \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{]0,1[} |\phi'_n(t)|^2 dt \quad (14)$$

En particulier puisque la convergence en norme implique la convergence des normes on a que

$$\int_{]0,1[} |\phi_n(t)|^2 dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{]0,1[} |f(t)|^2 dt$$

et

$$\int_{]0,1[} |\phi'_n(t)|^2 dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{]0,1[} |f'(t)|^2 dt.$$

Par passage à la limite dans l'inégalité (14) on a bien le résultat annoncé.  $\square$

On en déduit que l'inégalité est vraie sur  $W^{1,p}(]0,1[)$  pour  $p \geq 2$ . En remarquant que si  $p \geq 2$  alors

$$W^{1,p}(]0,1[) \subset W^{1,2}(\Omega).$$

En effet si  $f \in L^p(]0,1[)$  alors  $|f|^2 \in L^{\frac{p}{2}}(]0,1[)$  de sorte que par l'inégalité de Hölder appliqué à  $|f|^2$  et  $\chi_{]0,1[}$  on a que  $f \in L^2(]0,1[)$ .

On trouve dans [23] la preuve de l'inégalité isopérimétrique dans le cas de  $W_{per}^{1,2}(]0,2\pi[)$ .

**Proposition 4.** Soit  $\gamma(\cdot) = (x(\cdot); y(\cdot))$  une fonction  $W_{per}^{1,2}(]0,2\pi[)$ .

$$\left( \int_{]0,2\pi[} \sqrt{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2} dt \right)^2 \geq 4\pi \int_{]0,2\pi[} x(t)y'(t) - y(t)x'(t) dt. \quad (15)$$

## 4 Théorie moderne d'existence en dimension $n \geq 3$ .

### Objectif

L'objectif ici, est d'étudier l'existence en dimension  $n \geq 3$ .

On considère l'inégalité isopérimétrique en dimension  $n \geq 3$  pour le périmètre de De Giorgi. En se basant essentiellement sur l'ouvrage de Maggi [7] et celui d'Henrot et Pierre [2].

De façon assez générale on a la proposition suivante :

**Proposition 5** ([2]). On suppose que  $U_{ad}$  est muni d'une topologie  $\tau$  pour la quelle

1.  $P : U_{ad} \mapsto \mathbb{R}$  est séquentiellement semi-continue inférieurement, c'est à dire :

$$\Omega_n \xrightarrow{\tau} \Omega \Rightarrow P(\Omega) \leq \liminf P(\Omega_n).$$

2. Tout suite  $P$ -bornée est séquentiellement compact, c'est à dire :

$$\sup_n |P(\Omega_n)| < \infty \Rightarrow \exists (\Omega_{n_k})_k, \quad \exists \Omega \in U_{ad}; \Omega_{n_k} \xrightarrow{\tau} \Omega$$

Alors si  $P$  est minorée; il existe  $\Omega_\star \in U_{ad}$  tel que

$$P(\Omega_\star) = \min P(\Omega), \Omega \in U_{ad}.$$

En effet,

*Proof.* Puisque  $P$  est minorée sur  $U_{ad}$  on peut poser  $\mu$  égale l'infimum de  $P(\Omega)$  pour  $\Omega$  dans  $U_{ad}$ . De plus  $P$  étant à valeur réelle, on prend l'inf d'un sous ensemble de  $\mathbb{R}$  donc par définition de l'inf : on dispose d'une suite minimisante  $(\Omega_n)_n \in U_{ad}^{\mathbb{N}}$  tel que pour chaque  $n \in \mathbb{N}$

$$P(\Omega_n) = \mu + \varepsilon_n$$

et

$$\lim_n \varepsilon_n = 0.$$

Mais alors la suite  $(|P(\Omega_n)|)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite positive convergente donc bornée de sorte que

$$\sup_n |P(\Omega_n)| < \infty.$$

Donc par hypothèse il existe une suite extraite  $(\Omega_{n_k})_k$  et il existe  $\Omega \in U_{ad}$  tels que

$$\Omega_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\tau} \Omega.$$

Mais alors

$$\mu \leq P(\Omega) \leq \liminf_k P(\Omega_{n_k}) = \liminf_k \mu + \varepsilon_{n_k} = \mu$$

Donc

$$\mu = P(\Omega).$$

□

## 4.1 Périmètre de De Giorgi

Pour prouver l'existence d'une solution au problème (9) on est obligé d'introduire artificiellement une boîte, ce qui corrige le défaut de compacité de l'ensemble sur le quel on cherche une solution.

Commençons par quelques définitions :

**Définition 5** ([2]). Soient  $E$  et  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des ensembles mesurables de  $\mathbb{R}^n$ . On dira que  $(E_n)_n$  converge vers  $E$  au sens des fonctions caractéristiques si :

$$\chi_{E_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)} \chi_E.$$

**Définition 6.** [2] Soit  $D$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $\Omega$  un ensemble mesurable de  $D$ , on appelle périmètre de  $\Omega$  relatif à  $D$  (simplement périmètre de  $\Omega$  si  $D = \mathbb{R}^n$ ) le nombre,

$$P_D(\Omega) = \sup \left\{ \int_{\Omega} \operatorname{div} \phi(x) dx; \quad \phi \in C_c^\infty(D, \mathbb{R}^n) \quad \|\phi\|_\infty \leq 1 \right\} \quad (16)$$

La proposition suivant vise à se familiariser avec cette nouvelle définition du périmètre.

**Proposition 6.**  $P_{\mathbb{R}}([0, 1]) = 2$ .

*Proof.* Soit  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  de norme infinie égale à 1 et tel que  $[0, 1] \subset \operatorname{Supp}(\phi)$  (sinon on trouve 0.) On a que

$$\int_{[0,1]} \operatorname{div}(\phi)(x) dx = \int_{[0,1]} \phi'(x) dx.$$

Mais puisque  $\phi$  est  $C^\infty$  donc en particulier  $C^1([0, 1])$  donc on a que

$$\int_{[0,1]} \phi'(x) dx = \phi(1) - \phi(0) \leq 2. \quad (|\phi|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} (|\phi(x)|) \leq 1).$$

En fait ce sup est atteint. On considère

$$\Phi(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x)$$

où

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &:= -e\chi_{]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[}(x) \exp \frac{1}{(2x)^2 - 1} \\ \Phi_2(x) &:= e\chi_{] \frac{1}{2}, \frac{3}{2}[}(x) \exp \frac{1}{(2(x-1))^2 - 1}. \end{aligned}$$

$\Phi$  est somme de deux fonctions  $C^\infty$  à support compact donc elle est également  $C^\infty$  à support compact. De plus

$$\Phi(1) = \Phi_1(1) + \Phi_2(1) = \Phi_2(1) = 1 \quad \Phi(0) = -1.$$

Une rapide étude de fonction montre que

$$|\Phi|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{|\Phi(x)|\} = 1 \leq 1.$$

Et enfin,

$$\Phi(1) - \Phi(0) = 1 - (-1) = 2.$$

Ainsi,

$$P_{\mathbb{R}}([0, 1]) = 2.$$

□

**Proposition 7.** Si  $P$  désigne le périmètre de De Giorgi (6),  $E$  est un ensemble mesurable et  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  on trouve

$$P(\alpha E) = |\alpha|^{n-1} P(E).$$

*Proof.* Soit  $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$  de norme inférieure ou égale à 1.

On a que  $\lambda E := \Psi(E)$  où  $\Psi(\cdot) = \lambda Id(\cdot)$  donc la matrice jacobienne vaut  $\lambda I_n$  ainsi :

$$\int_{\lambda E} \text{Div}(\phi)(x) dx = |\lambda|^{n-1} \int_E \text{Div}(\phi)(u) du.$$

En passant au sup on a bien l'égalité annoncée.

□

**Proposition 8.** [7] Soit  $(E_n)_n$  une suite de périmètre finie qui tel que pour tout compact  $K$

$$\chi_{E_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)} \chi_E. \quad \limsup P_{E_n}(K) < \infty$$

Alors  $E$  est localement de périmètre fini et  $\chi_{E_n}$  converge faiblement  $\star$  vers  $\chi_E$  et pour tout ouvert  $D$

$$\liminf P_D(E) \leq \liminf P_D(\Omega_n).$$

Il existe deux preuves (très proches l'une de l'autre) du théorème suivant, l'une se trouve dans l'ouvrage de Maggi [7] et l'autre dans l'ouvrage d'Henrot-Pierre [2], c'est celle-ci que nous détaillons.

**Théorème 4.** [2] Soit  $D$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $V(D) < \infty$ , et  $V_0 \in ]0, V(D)[$ .

Le problème

$$P(\Omega^*) = \min\{P(\Omega), \quad \Omega \subset D \quad \text{mesurable}, V(\Omega) = V_0\}$$

possède une solution.

*Proof.* On commence par s'assurer que l'ensemble sur le quel on minimise ne soit pas vide.

On commence par construire un ensemble ouvert  $\Omega$  de périmètre fini et de mesure  $V_0$  et tel que  $\Omega \subset D$ .  $D$  étant ouvert il s'écrit comme une réunion de dénombrable de boules, soit  $D = \cup_{p \in \mathbb{N}} B_p$ . Pour  $k$  suffisamment grand, la réunion des  $k$  premières boules  $\omega_k := \cup_{p \leq k} B_p$  est de mesure supérieur ou égale à  $V_0$  et c'est un ouvert de périmètre fini.

En effet,

Soit  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\omega_k \subset D \Rightarrow \chi_{\omega_k} \leq \chi_D \in L^1.$$

Et puisque  $\chi_{\omega_k}$  converge simplement vers  $\chi_D$  par le théorème de convergence dominée appliquée  $(\chi_{\omega_k})_{k \in \mathbb{N}}$  on trouve que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V(\omega_k) = V(D).$$

Ensuite,

$$\omega_{k+1} = \omega_k \cup B_{k+1} \supset \omega_k$$

par croissance du volume on a que

$$V(\omega_{k+1}) \geq V(\omega_k).$$

Donc la suite  $(V(\omega_k))_k$  est croissante. Donc il existe un rang  $N_0$  tel que pour tout  $n \geq N_0$

$$V(\omega_n) \geq V_0.$$

C'est un ouvert en tant que réunion dénombrable d'ouverts et il est de périmètre fini car il n'y a qu'un nombre fini de boules.

Ensuite; il existe  $r \in ]0; \infty[$  tel que  $\omega_k \cap B(0, r)$  soit exactement de mesure  $V_0$ . On justifie cela en considérant pour chaque  $k$  fixé ; la fonction qui à

$$\phi_k : r \mapsto V(\omega_k \cap B(0, r))$$

est continue. En effet, soit  $(r_n)_n$  une suite qui tend vers  $r$ . Soit  $n \geq 0$ :

$$\phi_k(r_n) = \int \chi_{\omega_k \cap B(0, r_n)}$$

Où

$$|\chi_{\omega_k \cap B(0, r_n)}| \leq \chi_{\omega_k}$$

car  $\chi_{\omega_k \cap B(0, r_n)} \subset \omega_k$  et  $\chi_{\omega_k}(\cdot) \in L^1$  car

$$\int \chi_{\omega_k} \leq \int \chi_D = V(D) < \infty.$$

Et la fonction  $\chi_{\omega_k \cap B(0, r_n)}$  converge simplement quand  $n$  tend vers l'infini vers  $\chi_{\omega_k \cap B(0, r)}$ . Ainsi par le théorème de convergence dominée  $\phi_k$  est continue. On peut donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à  $\phi_k$ .

Et l'ensemble  $\omega_k \cap B(0, r)$  est encore de périmètre fini.

Soit maintenant  $\Omega_n$  une suite minimisante de  $P(\cdot)$ . Cette suite existe puisque  $\{P(\Omega)\}$  est minoré par 0. Par le théorème 2.30.10 [2], il existe  $\Omega^* \subset D$  mesurable et une suite extraite telle que  $\chi_{\Omega_{n_k}}$  converge dans  $L^1(D)$  vers  $\chi_{\Omega^*}$ . Donc on peut passer à la limite et puisque pour tout entier  $n \geq 0$   $V(\Omega_n) = V_0$  on a  $V(\Omega^*) = V_0$  et par semi continuité inférieure du périmètre

$$P(\Omega^*) \leq \liminf P(\Omega_{n_k}).$$

On peut donc appliquer la proposition (5) et conclure quant à l'existence d'une solution.  $\square$

Pour la suite nous faisons référence au travail de Maggi [7].

On introduit la symétrisation de Steiner.

Soit  $p : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^{n-1}$  et  $q : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  les projections canoniques. Pour chaque  $z \in \mathbb{R}^n$  on définit

$$E_z := \{t \in \mathbb{R} \mid (z, t) \in E\}$$

et

$$E^s := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid |q(x)| \leq \frac{\lambda(E_{p(x)})}{2} \right\}.$$

On a alors le théorème suivant, qui constitue la brique admise de cette partie :

**Théorème 5.** [7] *Si  $E$  est de périmètre fini dans  $\mathbb{R}^n$  avec  $V(E) < \infty$ , alors  $E^s$  est de périmètre fini avec*

$$P(E^s) \leq P(E). \quad (17)$$

1. *S'il y a égalité alors pour presque tout  $z$   $E_z$  est un intervalle.*
2. *Si  $E$  est équivalent à un ensemble convexe, alors l'égalité est vérifiée dans (17) si et seulement s'il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $E$  soit équivalent à  $E^s + ce_n$ .*

On suit la démonstration donnée dans [7]. Pour un  $t \in [0, 1]$  donné on définit l'ensemble de points de densité  $t$  de  $E$  comme étant

$$E^{(t)} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\lambda(E \cap B(x, r))}{\omega_n r^n} = t \right\}.$$

**Théorème 6.** *Soit  $m, R > 0$  le problème*

$$\inf \{P(E) \mid E \subset B(0, R) \quad V(E) = m\}$$

*possède une solution qui est une boule de volume  $m$ .*

*Proof.* Si  $m < \omega_n R^n$  on sait d'après 4 qu'il existe un minimum  $E$ .

1. Etape 1 : On montre que  $E$  est équivalent à une boule. (Puisque  $\lambda(E \triangle E^{(1)}) = 0$  et  $\lambda(\mathbb{R}^n \setminus E) \triangle E^{(0)} = 0$  on peut raisonner directement sur  $E^{(1)}$ . Soit  $v \in S^{n-1}$  et  $E_v^s$  le symétrisé de Steiner  $E$  par rapport à l'hyperplan  $v^\perp$ . Puisque  $\lambda(E_v^s) = \lambda(E)$  alors  $P(E_v^s) \geq P(E)$  et par le théorème 5  $P(E_v^s) \leq P(E)$ . On déduit également (par 5) que

$$\{s \in \mathbb{R} \mid x + sv \in E\}$$

est un segment. Si maintenant  $x, y \in E$ , alors, en appliquant l'argument ci-dessus à  $v = \frac{x-y}{|x-y|}$ , on a que le segment d'extrémités  $x$  et  $y$  est contenu dans  $E$ . Ainsi,  $E$  est

convexe. Selon le second point du théorème 5, pour chaque  $\nu \in S^{n-1}$ , il existe  $c_\nu \in \mathbb{R}$  tel que :

$$E = c_\nu v + E_v^s.$$

Soit  $F = -(c_{e_1}e_1 + \dots + c_{e_n}e_n) + E$ . Ainsi, pour tout  $v \in S^{n-1}$ , il existe  $d_\nu \in \mathbb{R}$  tel que

$$F = d_\nu v + F_v^s.$$

Par construction,  $d_{e_k} = 0$  pour tout  $k = 1, \dots, n$ , c'est-à-dire que  $F$  est invariant par réflexion par rapport aux hyperplans de coordonnées  $x_k = 0$ ,  $k = 1, \dots, n$ . En particulier,  $F$  est invariant par rapport à la transformation  $x \rightarrow -x$ , de sorte que  $d_v = 0$  pour tout  $v \in S^{n-1}$ . Par conséquent,  $F$  est convexe et invariant par réflexion par rapport à tout hyperplan passant par l'origine, c'est-à-dire que  $F$  est une boule.

Traitions le cas d'égalité.

2. Etape 2 : Si  $E$  est de volume égale à celui de  $B(0, R)$ , puisqu'une boule de mesure  $m$  a un périmètre égale à  $n\omega_n^{\frac{1}{n}} m^{\frac{n-1}{n}}$  on a par l'étape précédente que

$$P(E) \geq \omega_n^{\frac{1}{n}} (\lambda(E))^{\frac{n-1}{n}}.$$

pour tout  $E$  bornée de périmètre égale à  $E$  avec égalité si et seulement si  $E$  est une boule.

Ceci démontre que l'inégalité isopérimétrique dans le cas ou  $E$  est borné.

Dans le cas  $E$  non borné. Si  $P(E) = +\infty$  l'inégalité (1) est triviale.

On conclut la preuve en montrant que si  $\lambda(E) < \infty$  et  $E^{(1)}$  est non borné alors

$$P(E) > n\omega_n^{\frac{1}{n}} (\lambda(E))^{\frac{n-1}{n}}.$$

Si ce n'est pas le cas alors

$$P(E) \leq n\omega_n^{\frac{1}{n}} (\lambda(E))^{\frac{n-1}{n}}.$$

et donc par le théorème 17  $P(E) = P(E_v^s)$  pour tout  $v \in S^{n-1}$ . En raisonnant de la même façon que dans l'étape 1 on aurait que  $E^{(1)}$  est équivalent à une boule ce qui contredit le fait que  $E^{(1)}$  soit non borné.

□

Lors de ce travail de recherche nous nous sommes posé la question suivante :

Pour un point  $x \in \mathbb{R}^2$  fixé, en notant  $H$  une droite passant par  $0_{\mathbb{R}^2}$  et  $S_H(X_0)$  le symétrique de  $X_0$  par rapport à  $H$ , qu'elle est l'ensemble  $\{S_H(X_0)\}$  lorsque  $H$  parcourt l'ensemble des droites passant par l'origine ?

**Proposition 9.** *En reprenant les notations ci-dessus,  $\{S_H(X_0)\}$  est égale au cercle de centre  $(0, 0)$  et de rayon  $|x_0|$ .*

En effet,

Soit  $H$  une droite passant par l'origine d'équation  $Y = aX$  pour  $a \in \mathbb{R}$ . Soit  $M = (x, y) = S_H(X_0)$  on suppose, sans perte de généralité que  $X_0 = (x_0, 0)$ .

Soit  $A = (x_A, y_A)$  le milieu du segment  $[M, X_0]$ .

On a que  $A = (\frac{x_0+x}{2}, \frac{y}{2})$  et par définition  $A \in H$  donc

$$y = a(x_0 + x). \quad (18)$$

De plus on a que le produit scalaire

$$\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AM} \rangle = 0.$$

Ou encore que

$$x^2 - x_0^2 + y^2 = 0 \quad (19)$$

Finalement le point  $M$  vérifie le système d'équations non linéaire suivant :

$$\begin{cases} y - a(x_0 + x) &= 0 \\ x^2 - x_0^2 + y^2 &= 0 \end{cases} \quad (20)$$

En particulier quelque soit  $a \in \mathbb{R}$

$$\|\overrightarrow{OM}\| = |x_0|.$$

On en conclut que  $\{S_H(X_0)\}$  est le cercle de centre  $(0, 0)$  et de rayon  $|x_0|$ .

## 4.2 Périmètre de Minkovski

### Objectif

On se propose d'étudier l'inégalité isopérimétrique en dimension  $n \geq 1$  pour le périmètre de Minkowski défini sur des compacts. Que l'on voit comme une conséquence de l'inégalité de Brunn-Minkovski (7). On s'appuie sur la preuve qui se trouve dans l'article de Gardner [11] donnée par Hadwiger et Ohmann [10].

Nous allons étudier le cas de l'inégalité isopérimétrique pour une autre notion de périmètre, celle de contenue de Minkovsky.

**Définition 7.** Soit  $A$  un fermé borné de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\varepsilon > 0$  ;

$$L(\partial A) := \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{V(A + \overline{B(0, \varepsilon)}) - V(A)}{\varepsilon}.$$

Où  $V$  désigne la mesure de Lebesgue  $n$  dimensionnelle.

**Proposition 10.** Si  $L$  désigne le périmètre de Minkovski défini ci-dessus et  $A$  est un ensemble compact alors si  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  on a que

$$L(\partial \alpha A) = |\alpha|^{n-1} L(\partial A)$$

### En effet,

*Proof.* Soit  $A$  compact de  $\mathbb{R}^n$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Justifions que  $\alpha A$  est également un compact de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\alpha = 0$ ,  $\alpha A = \{0\}$  qui est compact. Supposons  $\alpha \neq 0$ . Puisque  $A$  est un compact il existe un  $R > 0$  (indépendant de  $A$ ) tel que  $A \subset B(0, R)$  de sorte que

$$\alpha A \subset B(0, |\alpha| R).$$

$\alpha A$  est donc borné. Soit maintenant une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\alpha A)^{\mathbb{N}}$  et  $x \in \mathbb{R}^n$  tels que

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x$ . Montrons que  $x \in \alpha A$ .

Pour chaque  $n$ ,  $u_n \in \alpha A$  donc il existe  $a_n \in A$  tel que  $u_n = \alpha a_n$ . Ainsi  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{\alpha} = \frac{x}{\alpha}$ . Puisque  $A$  est fermé car compact on en déduit que  $\frac{x}{\alpha} \in A$ .

Donc  $x \in \alpha A$ .

$\alpha A$  est compact.

On a que pour  $\varepsilon > 0$ ,  $x \in \alpha A + \overline{B(0, \varepsilon)}$  équivaut à dire qu'il existe  $a \in A$  et  $b_\varepsilon \in \overline{B(0, \varepsilon)}$  tels que

$$x = \alpha a + b_\varepsilon = \alpha \left( a + \frac{b_\varepsilon}{\alpha} \right) = \alpha(a + u_{\varepsilon, \alpha}).$$

Avec

$$u_{\varepsilon, \alpha} := \frac{b_\varepsilon}{\alpha} \in \overline{B(0, \frac{\varepsilon}{\alpha})}.$$

On déduit donc que

$$\alpha A + \overline{B(0, \varepsilon)} = \alpha \left( A + \overline{B(0, \frac{\varepsilon}{\alpha})} \right)$$

Ainsi,

$$\frac{V(\alpha A + \overline{B(0, \varepsilon)}) - V(\alpha A)}{\varepsilon} = \frac{|\lambda|^n}{\varepsilon} (V(A + \overline{B(0, \frac{\varepsilon}{\alpha})}) - V(A)) = |\lambda|^{n-1} \frac{V(A + \overline{B(0, \frac{\varepsilon}{\alpha})}) - V(A)}{\frac{\varepsilon}{\lambda}}.$$

En passant à la limite inf on en déduit le résultat annoncé.  $\square$

**Théorème 7** (Inégalité isopérimétrique). *Soit  $A$  un compact de  $\mathbb{R}^n$*

$$\frac{L(\partial A)}{V(A)^{\frac{n-1}{n}}} \geq \frac{L(\partial B(0, 1))}{V(B(0, 1))^{\frac{n-1}{n}}}.$$

Avant de prouver ce théorème on va avoir besoin de l'inégalité de Brunn Minkovski.

**Théorème 8.** *Soit  $\lambda \in ]0, 1[$ ,  $X, Y$  deux ensembles bornés non vides et mesurables dans  $\mathbb{R}^n$  tel que  $(1 - \lambda)X + \lambda Y$  le soit également alors,*

$$V((1 - \lambda)X + \lambda Y)^{\frac{1}{n}} \geq (1 - \lambda)V(X)^{\frac{1}{n}} + \lambda V(Y)^{\frac{1}{n}}. \quad (21)$$

Cette énoncé très général n'est pas historiquement le premier. La première version de l'inégalité concerne les ensembles convexes et compacts et fut partiellement démontrée dans le cas  $n = 3$  par Brunn vers 1887. Minkowski en donne une preuve complète [8]. Ce n'est qu'en 1935 que le théorème 8 est démontré en premier par Lusternik, [9]. Vient ensuite une preuve beaucoup plus courte proposée par Hadwiger et Ohmann. C'est celle ci que nous allons présenter en nous basant sur l'article de [11].

**Lemme 5.** *l'inégalité (8) est équivalente à*

$$V(X + Y)^{\frac{1}{n}} \geq V(X)^{\frac{1}{n}} + V(Y)^{\frac{1}{n}}. \quad (22)$$

En effet,

*Proof.* En effet si (8) est établie alors en prenant  $\lambda = \frac{1}{2}$ , on a que

$$V\left(\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y\right)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{2}V(X)^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2}V(Y)^{\frac{1}{n}}.$$



Or

$$V\left(\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y\right)^{\frac{1}{n}} = V\left(\frac{1}{2}(X + Y)\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}V(X + Y)^{\frac{1}{n}}.$$

Par homogénéité de la mesure de Lebesgue. Réciproquement si l'on sait que

$$V(X + Y)^{\frac{1}{n}} \geq V(X)^{\frac{1}{n}} + V(Y)^{\frac{1}{n}}$$

est vérifié pour tout ensemble  $X$  et  $Y$  mesurable et dont la somme l'est également alors on pose pour  $\lambda \in ]0, 1[$

$$\tilde{X} := (1 - \lambda)X, \quad \tilde{Y} := \lambda Y.$$

C'est deux nouveaux ensembles vérifient les hypothèses et l'homogénéité de la mesure livre le résultat.  $\square$

*Proof.* L'idée qu'on eut Hadwiger et Ohmann est de démontrer l'inégalité (8) pour des boîtes c'est à dire des parallélépipèdes rectangulaire dont les cotes sont parallèles aux hyperplans engendrés par les vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $X$  et  $Y$  sont des boîtes dont le  $i$ ème coté de  $X$  est de longueur  $x_i$  et celui de  $Y$  est  $y_i$  alors on a

$$V(X) = \prod_{1 \leq i \leq n} x_i \quad V(Y) = \prod_{1 \leq i \leq n} y_i \quad V(X + Y) = \prod_{1 \leq i \leq n} (x_i + y_i).$$

L'inégalité arithmético-géométrique donne :

$$\left(\prod_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i}{y_i + x_i}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{1 \leq i \leq n} \frac{y_i}{y_i + x_i}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i}{y_i + x_i} + \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{y_i}{y_i + x_i} = 1. \quad (23)$$

Et puisque

$$\left(\prod_{1 \leq i \leq n} \frac{x_i}{y_i + x_i}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{V(X)^{\frac{1}{n}}}{V(X + Y)^{\frac{1}{n}}}$$

et

$$\left(\prod_{1 \leq i \leq n} \frac{y_i}{y_i + x_i}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{V(Y)^{\frac{1}{n}}}{V(X + Y)^{\frac{1}{n}}}$$

L'inégalité (23) prouve le théorème (8) pour les boîtes. Le but maintenant est de l'obtenir pour une union finie de boîtes  $X$  et  $Y$ . Soit  $X$  et  $Y$  deux unions finies de boîtes. Quitte à traduire  $X$  on peut supposer que deux boîtes de  $X$  sont séparées par l'hyperplan  $\{x_n = 0\}$ . Notons alors  $X_+$  les boîtes de  $X$  intersectées avec l'hyperplan  $\{x_n \geq 0\}$  et  $X_-$  celui avec  $\{x_n \leq 0\}$ . Maintenant on translate  $Y$  de sorte que

$$\frac{V(X_{\pm})}{V(X)} = \frac{V(Y_{\pm})}{V(Y)}. \quad (24)$$

Où  $Y_{\pm}$  sont définis de la même façon que  $X_{\pm}$ .

Remarquons ensuite que  $X = X_+ \cup X_-$  et que  $X_+ \cap X_- = \{0\}$  donc

$$V(X) = V(X_+ \cup X_-) = V(X_+) + V(X_-).$$

$X_+ + Y_+ \subset \{x_n \geq 0\}$  et que  $X_- + Y_- \subset \{x_n \leq 0\}$  et que le nombre de boîte de  $X_+ \cup Y_+$  et celui de  $X_- \cup Y_-$  sont tous les deux plus petits que le nombre de boîtes que possède  $X \cup Y$ . Par

réurrence sur le nombre précédent :

$$\begin{aligned}
V(X + Y) &\geq V(X_+ + Y_+) + V(X_- + Y_-) \\
&\geq (V(X_+)^{\frac{1}{n}} + V(Y_+)^{\frac{1}{n}})^n + (V(X_-)^{\frac{1}{n}} + V(Y_-)^{\frac{1}{n}})^n \\
&= V(X_+) \left(1 + \left(\frac{V(Y_+)}{V(X_+)}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^n + V(X_-) \left(1 + \left(\frac{V(Y_-)}{V(X_-)}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^n \\
&= V(X_+) \left(1 + \left(\frac{V(Y)}{V(X)}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^n + V(X_-) \left(1 + \left(\frac{V(Y)}{V(X)}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^n \\
&= \left(1 + \left(\frac{V(Y)}{V(X)}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^n (V(X_+) + V(X_-)) \\
&= \left(V(X)^{\frac{1}{n}} + V(Y)^{\frac{1}{n}}\right)^n
\end{aligned}$$

Donc le théorème (8) est vrai pour une union finie de boîte. On conclut en approchant n'importe quel ensemble borné par un recouvrement de boîte.  $\square$

**Remarques 6.** *Le passage de union finie de boîte à ensemble borné (vérifiant les hypothèses du théorème) n'est pas évident (pour moi) et n'est pas précisé dans la preuve de [11].*

C'est cette inégalité qui permet de démontrer le théorème (8). En effet :

*Proof.* Soit  $r > 0$  et  $A$  un compact alors  $A$ ,  $\overline{B(0, r)}$  et  $A + \overline{B(0, r)}$  sont mesurables et bornés donc on peut leur appliquer l'inégalité de Brunn-Minkovsky (8); sous la forme

$$V(X + Y)^{\frac{1}{n}} \geq V(X)^{\frac{1}{n}} + V(Y)^{\frac{1}{n}}$$

.

$$\begin{aligned}
V(A + \overline{B(0, r)}) &\geq \left(V(A)^{\frac{1}{n}} + V(\overline{B(0, r)})^{\frac{1}{n}}\right)^n \\
&= \left(V(A)^{\frac{1}{n}} + r\omega(n)^{\frac{1}{n}}\right)^n \\
&\geq V(A) + nV(A)^{\frac{n-1}{n}}\omega(n)^{\frac{1}{n}}r.
\end{aligned}$$

Ou bien encore

$$\frac{V(A + \overline{B(0, r)}) - V(A)}{r} \geq nV(A)^{\frac{n-1}{n}}\omega(n)^{\frac{1}{n}}$$

En faisant tendre  $r$  vers 0 on a exactement l'inégalité isopérimétrique.  $\square$

Pour la dernière inégalité on a simplement dit que pour  $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$

$$(x + y)^n = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = x^n + nxy^{n-1} + \sum_{0 \leq k \leq n-1} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

et donc que

$$(x + y)^n - (x^n + nxy^{n-1}) = \sum_{0 \leq k \leq n-1} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \geq 0.$$

Nous l'avons appliquée avec  $x := V(A)^{\frac{1}{n}} > 0$ ,  $y := r\omega(n)^{\frac{1}{n}} > 0$ . Ceci clos le cas de l'inégalité isopérimétrique de type Minkovski.

## 5 Ouvert à bord Lipschitzien

## Objectif

L'objectif de cette partie est de regrouper les résultats connus quant aux expressions des différents périmètres lorsqu'ils sont évalués sur des ensembles à bord Lipschitzien.

Pour respecter les notations des différents théorèmes on introduit ici une autre façon de calculer le périmètre d'un ensemble.

**Définition 8.** [7] Soit  $E$  un ensemble de  $\mathbb{R}^n$  et  $\delta > 0$

$$\mathcal{H}_\delta^{n-1}(E) = \inf_{\mathcal{F}} \sum_{F \in \mathcal{F}} \omega_n \left( \frac{\text{diam}(F)}{2} \right)^{n-1}$$

dans le quel  $\mathcal{F}$  désigne un recouvrement de  $E$  par des ensembles  $F$  tels que  $\text{diam} F < \delta$ . Et

$$H^{n-1}(E) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^{n-1}(E)$$

et

$$\omega_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(1 + \frac{n}{2})}$$

Où

$$\forall s > 1 \quad \Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt.$$

**Définition 9** (Bord Lipschitzien, [2]). On dit qu'un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$  est à bord lipschitzien si, pour tout  $x_0 \in \partial\Omega$  il existe dans un repère orthonormé local d'origine  $x_0$ , un cylindre  $K = K' \times ]-a, a[$  centré à l'origine, avec  $K'$  boule ouverte de  $\mathbb{R}^{N-1}$  de rayon  $r$  et une fonction  $\phi : K' \rightarrow ]-a, a[$  lipschitzienne de rapport  $L$  avec  $\phi(0) = 0$  et

$$\partial\Omega \cap K = \{(x', \phi(x'), x' \in K')\} \quad \Omega \cap K = \{(x', x_N) \in K \mid x_N > \phi(x')\}.$$

On dira que  $\Omega$  est  $C^1$  si  $\phi$  est  $C^1$

Si  $\Omega$  est un ouvert régulier on définit son périmètre par

$$P_r(\Omega) := \int_{\partial\Omega} d\sigma. \tag{25}$$

Où  $d\sigma$  est la mesure du bord. Concernant le périmètre de DeGiorgi la réponse est donnée dans l'ouvrage d'Henrot-Pierre, proposition 2.3.3, [2].

**Proposition 11.** [17] Soit  $K$  un compact  $n-1$  rectifiable. C'est à dire que  $K$  est un compact tel qu'il existe  $f : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  avec  $f$  lipschitzienne et  $C$  un compact de  $\mathbb{R}^{n-1}$  tel que  $K = f(C)$ . Alors

$$P(K) = H^{n-1}(\partial K). \tag{26}$$

Où  $P$  est le périmètre de Minkowski.

**Proposition 12.** [2] Si  $\Omega$  est un ouvert  $C^1$  on a que

$$P(\Omega) = \int_{\partial\Omega} d\sigma. \tag{27}$$

Où  $d\sigma$  est l'élément de surface sur  $\Omega$ .

Si  $\Omega$  est un ouvert lipschitzien on a que

$$P(\Omega) = \int_{\partial\Omega} d\sigma. \tag{28}$$

Où  $d\sigma$  est l'élément de surface sur  $\Omega$ .

On termine cette section par un exemple d'ensemble  $\Omega \subset \mathbb{R}$  tel que

$$P(\Omega) \neq H^0(\Omega) = L(\partial\Omega).$$

Soit

$$\Omega := \mathbb{Q} \cap [0, 1],$$

on a que

$$\partial\Omega = [0, 1]$$

de sorte que

$$P(\Omega) = 2H^0(\Omega) = \text{Card}([0, 1]) = +\infty.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , on a que

$$\Omega + \overline{B(0, \varepsilon)} = \bigcup_{x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]} \overline{B(x, \varepsilon)} = [-\varepsilon; 1 + \varepsilon],$$

$$\frac{V(\Omega + \overline{B(0, \varepsilon)}) - V(\Omega)}{\varepsilon} = \frac{1 + 2\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Ainsi,

$$L(\partial\Omega) = +\infty.$$

## 6 Partie Alogrithmique (Python)

### Objectif

Nous nous intéressons ici au cotés numérique du problème isopérimétrique pour les polygones. Nous traitons le cas particulier du triangle, du quadrilatère et du pentagone. Les codes sont écrits en Python et disponibles en Annexe.

Plus précisément d'après le résultat (??) on sait que si  $Z$  est un polygone à  $n$  cotés on a l'inégalité :

$$\frac{P(Z)^2}{V(Z)} \geq 4n \tan \frac{\pi}{n} := m_*(n) \quad (29)$$

avec égalité si et seulement si  $Z$  est le  $n$  gônes régulier. Pour le cas du triangle il y a  $n = 3$  cotés, donc la valeur minimale qu'on espère trouver informatiquement est

$$m_*(3) = 12\sqrt{3} \approx 20.784.$$

Dans le cas du polygone à 4 puis 6 cotés,

$$m_*(4) = 4 * 4 \tan \frac{\pi}{4} = 16.$$

$$m_*(6) = 4 * 5 \tan \frac{\pi}{5} \approx 14.531.$$

Enfin, nous nous sommes rapidement penché sur la complexité de l'algorithme 1.

**Proposition 13.** *Si l'on note  $d$  le nombre de variables de la fonction que l'on cherche à minimiser et  $I$  le nombre d'itérations. Alors, La compléxité de l'algorithme 4 est*

$$O(d * I).$$

*Proof.* Pour chaque itération  $k \in [1, I]$  de la boucle for il y a au maximum  $d$  composantes de la norme du gradient à vérifier dans la boucle if, d'où la formule.  $\square$

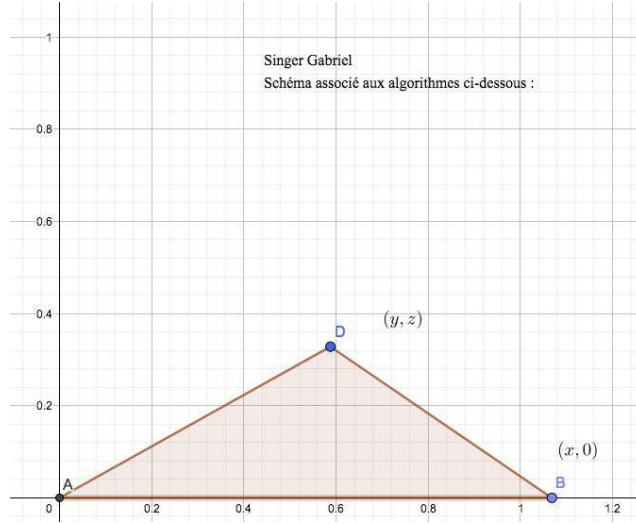


Figure 1: Schématisation du problème associé au triangle

## 6.1 Triangle

### 6.1.1 Un paramètre

Dans cette partie on fixe  $x = 1, y = \frac{1}{2}$  la fonction à minimiser est alors

$$f(z) = \frac{2 \left( 1 + 2\sqrt{\frac{1}{4} + z^2} \right)^2}{z}$$

définie sur  $\Omega := ]0, +\infty[$

**Lemme 6.**  $f$  est convexe sur  $\Omega$

*Proof.*  $f$  est  $C^2$  en tant que produit de fonction  $C^2$  sur  $\Omega$  et l'on a

$$\forall z \in \Omega \quad f^{(2)}(z) = 8 \frac{(6z^2 + (4z^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + 1)}{z^3(4z^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \geq 0$$

□

### 6.1.2 Trois paramètres

Soit

$$\psi(x, y, z) := \frac{2 \left( x + \sqrt{y^2 + z^2} + \sqrt{(y-x)^2 + z^2} \right)^2}{xz}$$

$$\begin{aligned}\nabla(\psi)_1 &= 4 \left( \frac{\left( \frac{(x-y)}{\sqrt{(x-y)^2+z^2}} + 1 \right) * (\sqrt{(x-y)^2+z^2} + x + \sqrt{y^2+z^2})}{(x * z)} - \frac{2 * (\sqrt{(x-y)^2+z^2} + x + \sqrt{y^2+z^2})^2}{x^2 z} \right) \\ \nabla(\psi)_2 &= 4 \frac{\left( \frac{(y-x)}{\sqrt{(x-y)^2+z^2}} + \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}} \right) (\sqrt{(x-y)^2+z^2} + x + \sqrt{y^2+z^2})}{xz} \\ \nabla(\psi)_3 &= 4 \left( \frac{\left( \frac{z}{\sqrt{(x-y)^2+z^2}} + \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}} \right) (\sqrt{(x-y)^2+z^2} + x + \sqrt{y^2+z^2})}{xz} - \frac{2(\sqrt{(x-y)^2+z^2} + x + \sqrt{y^2+z^2})^2}{xz^2} \right)\end{aligned}$$

On résume les résultats obtenus par les algorithmes 1 et 3 et 4. La première colonne du tableau indique le nombre de variables, la seconde indique que nous avons utilisé la descente de gradient et la troisième colonne indique qu'on a utilisé la méthode `scipy.optimize.minimize` qui est une méthode pré-programmée en Python. On rappelle que  $x_0$  désigne le point initiale.

SOM désigne la fonction pré-programmée en python : "scipy.optimize.minimize".

La fonction `scipy.optimize.minimize` prend en argument un grand nombre de paramètres. Il nous suffit de rentrer seulement :  $f$  la fonction à minimiser,  $x_0$  le point de départ. Les autres paramètres ont des valeurs par défaut.

**Remarques 7.** D'après <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.minimize.html> ) l'algorithme de minimisation choisit par défaut est celui de *Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno*.

Dans les grandes lignes c'est un algorithme de minimisation qui s'applique à des problèmes non linéaires et sans contraintes. Il utilise des information sur la courbure de la fonction pour trouver la direction de descente. Pour plus d'information on renvoie le lecteur à [15].

Dans les deux tableaux qui suivent  $h$  désigne le pas et  $x_{opt}$  la solution renvoyée par l'algorithme correspondant.

**Remarques 8.** Le pas  $h$  ici est choisi constant, il existe des algorithme de descente de gradient à pas optimal et plus généralement il existe toute une théorie au tour du choix de  $h$ . Dans les modèles de "Machine Learning" le pas  $h$  est appelé "taux d'apprentissage". On renvoie le lecteur intéressé par le point de vue "Descente de gradient version Machine Learning" à l'excellente page : [16].

1 Paramètre	$x_0$	$h$	$m_{*,algo}(3)$	$x_{opt}$	$x_{algo}$	Itérations
Descente de Gradient	4	$10^{-4}$	20.784	0.866	0.866	$10^3$
Descente de Gradient	4	$10^{-5}$	20.784	0.866	0.866	$10^5$
Descente de Gradient	4	$10^{-5}$	35.213	0.866	3.235	$10^4$
Descente de Gradient	4	$10^{-6}$	35.213	0.866	3.235	$10^6$
Descente de Gradient	4	$10^{-6}$	20.784	0.866	0.866	$10^6$

3 Paramètres	$x_0$	$h$	$m_{*,algo}(3)$	$x_{opt}$	Itérations
Descente de Gradient	[1, 1, 9]	$10^{-3}$	20.79	[6.444; 3.193; 5.598]	$7 * 10^3$
SOM	[1, 1, 9]	X	20.784	[2.193; 1.096; 1.899]	8

Entrée [309]: `isop([1,1,9])`

Une solution est `[2.19312772 1.09656388 1.89930433]` . Elle est 0.1 equilaterale.  
La fonction Rapport en ce point vaut 20.78460969082653

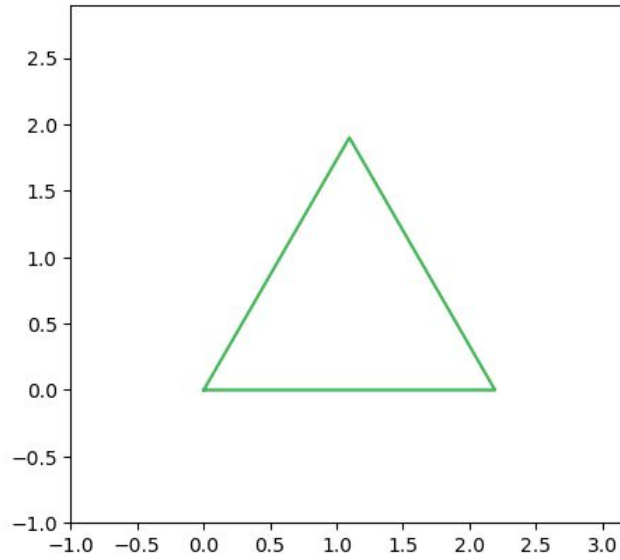
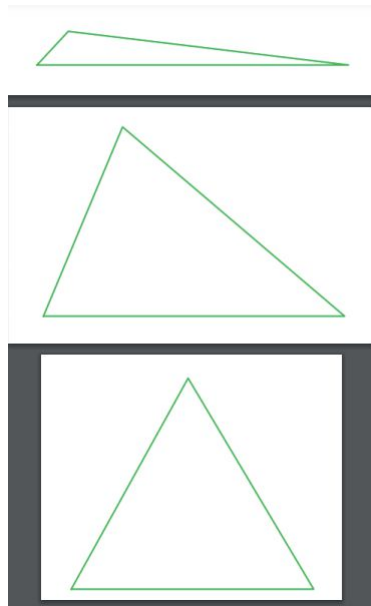


Figure 2: Résultat renvoyé par l'algorithme 4.



## 6.2 Quadrilatère

On considère le quadrilatère dont les sommets sont

$$A = (0, 0); B = (x, 0), C = (y, z), D = (0, w).$$

La fonction périmètre est définie par

$$\forall (x, y, w, z) \in \mathbb{R}^4 \quad P(x, y, w, z) := |x| + |w| + \sqrt{(x-y)^2 + z^2} + \sqrt{y^2 + (z-w)^2}.$$



La fonction volume par :

$$\forall (x, y, w, z) \in \mathbb{R}^4 \quad V(x, y, w, z) := \left| \frac{xz + wy}{2} \right|.$$

On cherche de la même manière à minimiser ;

$$\forall (x, y, w, z) \in D \quad \Psi(x, y, w, z) = \frac{P((x, y, w, z))^2}{V(x, y, w, z)} = \frac{2 \left( |x| + |w| + \sqrt{(x-y)^2 + z^2} + \sqrt{y^2 + (z-w)^2} \right)^2}{|xz + wy|}.$$

Où

$$D := \mathbb{R}^4 \setminus V^{-1}(\{0\}).$$

Nous avons utilisé la fonction `scipy.optimize.minimize` :

4 Paramètres	$x_0$	$x_{algo}$	$m_{*,algo}(4)$	Itérations
SOM	$[1, 1, \frac{1}{2}, 1]$	$[0.919, 0.919, 0.919, 0.919]$	16.000	6
SOM	$[2, -1, 1.3, 1/2]$	$[2.408, 2.408, 2.408, 2.408]$	16.000	13

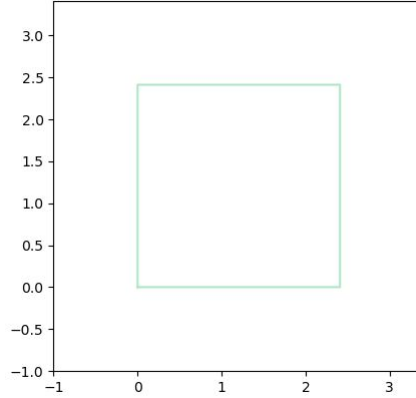


Figure 3: Résultat renvoyé par l'algorithme 5.

### 6.3 Pentagone

On considère le pentagone dont les sommets sont

$$A = (0, 0); B = (1, 0), C = (a, b), D = (c, d), (e, f).$$

La fonction périmètre est définie par

$$\forall (a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6 \quad P(a, b, c, d, e, f) := 1 + \sqrt{(a-1)^2 + b^2} + \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2} + \sqrt{(e-c)^2 + (d-f)^2} + \sqrt{e^2 + f^2}.$$

La fonction volume est quant-à elle définie par :

$$\forall (a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6 \quad V(a, b, c, d, e, f) := \left| \frac{-b + bc - da + de - cf}{2} \right|.$$

On cherche à minimiser ;

$$\forall (a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6 \setminus V^{-1}(\{0\}).$$

$$\Psi((a, b, c, d, e, f)) = \frac{P(a, b, c, d, e, f)^2}{V(a, b, c, d, e, f)} = \frac{2 \left( 1 + \sqrt{a^2 + (b-1)^2} + \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2} + \sqrt{(e-c)^2 + (d-f)^2} + \sqrt{e^2 + f^2} \right)^2}{|a + bc - da + de - cf|}$$

Nous avons utilisé la fonction `scipy.optimize.minimize` :

6 Paramètres	$x_0$	$x_{algo}$	$m_*(6)$	Itérations
SOM	[1, 2, 3, 4, 1, 2]	[1.309, 0.951, 0.500, 1.538, -0.309, 0.951]	14.530	27
SOM	[1, 1, 1/2, 1/2, 1, 2]	[2.408, 2.408, 2.408, 2.408]	16.000	13

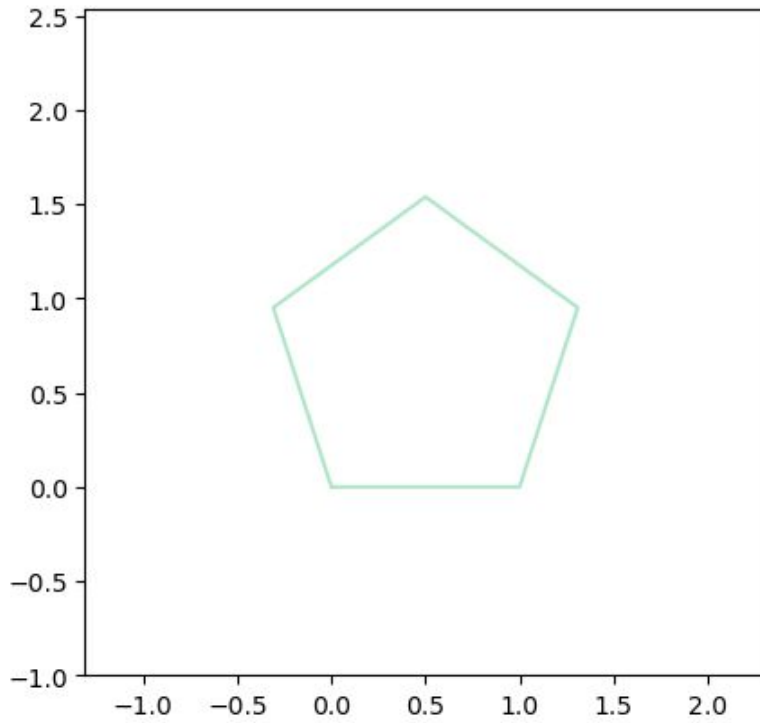


Figure 4: Pentagone régulier.

## 7 Annexe

Preuve du théorème 9 en reprenant l'exercice proposé par [6]:

En effet,

*Proof.* Par le lemme 1 on peut supposer que  $l(\Omega) = 1$ . En considérant maintenant le champ de vecteur défini par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad X(x, y) = \frac{1}{2}(x, y),$$

on a pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\operatorname{div}(X)(x, y) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} \right) = 1.$$

Et alors

$$\int_{\Omega} \operatorname{Div}(X)(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{\Omega}(x, y) \operatorname{Div}(X)(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{\Omega}(x, y) dx dy = V(\Omega).$$

Donc si l'on applique la formule de Green au champ de vecteur  $X$ , puis en faisant une intégration par partie sur le segment  $[0, 1]$  on a que :

$$\int_{[0,1]} x(t)y'(t)dt = y(1)x(1) - x(0)y(0) - \int_{[0,1]} x'(t)y(t)dt = - \int_{[0,1]} x'(t)y(t)dt$$

On a utilisé que  $\gamma(0) = \gamma(1)$ . Ainsi ;

$$V(\Omega) = \frac{2 \int_{[0,1]} x'(t)y(t)dt}{2} = \int_{[0,1]} x'(t)y(t)dt.$$

On se ramène au cas  $\int_{[0,1]} y(t)dt = 0$  en posant  $\Gamma$  par

$$\forall t \in [0, 1] \quad \tilde{\gamma}(t) = (x(t); y(t) - \beta) := (\tilde{x}(t); \tilde{y}(t))$$

où

$$\beta := \int_{[0,1]} y(t)dt.$$

De sorte que  $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1)$ . La fonction  $\tilde{y}$  (que nous noterons  $y$  dans la suite) est  $C^1$  et de moyenne nulle. Ainsi, elle vérifie les hypothèses de l'inégalité de Wirtinger, c'est à dire que :

$$\int_{[0,1]} |y(t)|^2 dt \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{[0,1]} |y'(t)|^2 dt.$$

Il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{[0,1]} (x'(t) - 2\pi y(t))^2 dt = \int_{[0,1]} |x'(t)|^2 - 4\pi \int_{[0,1]} x'(t)y(t)dt + 4\pi^2 \int_{[0,1]} |y(t)|^2 dt \\
&= \int_{[0,1]} |x'(t)|^2 - 4\pi V(\Omega) + 4\pi^2 \int_{[0,1]} |y(t)|^2 dt \\
&\leq \int_{[0,1]} |x'(t)|^2 - 4\pi V(\Omega) + \int_{[0,1]} |y'(t)|^2 dt \\
&= \int_{[0,1]} |x'(t)|^2 + |y'(t)|^2 dt - 4\pi V(\Omega) \\
&= 1 - 4\pi V(\Omega).
\end{aligned}$$

Ainsi, le résultat est montré pour  $P(\Omega) = 1$  et par le lemme (1) on a

$$P(\Omega)^2 \geq 4\pi V(\Omega).$$

□

Les algorithmes sont écrits en Python.

## 7.1 Triangle

### 7.1.1 Un paramètre

Algorithme N°1

```

1 #Algorithme de descente de gradient en dimension 1 : (0,0),(1/2,z),(0,1)
2 def Steepest_descent_constant_step(f, grad, x0, iterations, error_point,
3     error_grad, h):
4     dim = np.max(np.shape(x0))
5     x_list = np.zeros([dim, iterations])
6     f_list = np.zeros(iterations)
7     error_point_list = np.zeros(iterations)
8     error_grad_list = np.zeros(iterations)
9     x = np.asarray(x0)
10    x_old = x
11    grad_x = grad(x)
12    for i in range(iterations):
13        x = x - h*grad(x)
14        grad_x = grad(x)
15        f_x = f(x)
16        x_list[:, i] = x
17        f_list[i] = f_x
18        error_point_list[i] = np.linalg.norm(x - x_old)
19        error_grad_list[i] = np.linalg.norm(grad_x)
20
21    #if i % 1000 == 0:
22        # print( "iter={}, x={}, f(x)={}".format(i+1, x, f(x)))
23
24    if (error_point_list[i] < error_point) | (error_grad_list[i] <
25        error_grad):
26        break
27    x_old = x
28
29    #print( "point error={}, grad error={}, iteration={}, f(x)={}".format(
30        error_point_list[i], error_grad_list[i], i+1, f(x)))
31    #return { 'x_list' : x_list[:,0:i], 'f_list' : f_list[0:i], '
32        error_point_list' : error_point_list[0:i], 'error_grad_list' :
33        error_grad_list[0:i]}
34    print(x, h)

```

```

32 #Codage du gradient du rapport isopérimétrique :
33 #Per et Grad prennent en entrée une liste.
34 def Per(X):
35     a=np.asarray(X)
36     x,y,z=a[0],a[1],a[2]
37     return (x + np.sqrt(y**2 + z**2) + np.sqrt((y - x)**2 + z**2))
38 def rapport(x):
39     a=np.asarray(x)
40     z=a[0]
41     return 2*(1 + 2*np.sqrt(1/4+z**2))**2/z
42
43     return
44 #implémentation du gradient du rapport l au carré sur volume pour un triangle
45 CF pdfTER.
46 def grad_un(X):
47     a = np.asarray(X)
48     grad = np.zeros_like(a)
49     z = a[0]
50     grad[0] = 8 - (4/np.sqrt(4* z**2 + 1) + 4)/z**2
51     return grad
52
53
54 f=rapport
55 grad=grad_un
56 x0 = np.array([4])
57 iterations = 10000
58 error_point = 1e-9
59 error_grad = 1e-9
60 h = 0.0001
61
62 Result = Steepest_descent_constant_step(f, grad, x0, iterations, error_point,
    error_grad, h)

```

### 7.1.2 Trois paramètres

Algorithme N°2

```

1     #Codage du gradient du rapport isopérimétrique :
2     #Per et Grad prennent en entrée une liste.
3     def Per(X):
4         a=np.asarray(X)
5         x,y,z=a[0],a[1],a[2]
6         return (x + np.sqrt(y**2 + z**2) + np.sqrt((y - x)**2 + z**2))
7     def Rapport(x):
8         a=np.asarray(x)
9         x,y,z=a[0],a[1],a[2]
10        return 2*((x +np.sqrt(y**2+z**2)+np.sqrt((y-x)**2+z**2))**2/(x*z))
11    #implémentation du gradient du rapport l au carré sur volume pour un triangle
12    CF pdfTER.
13    def Grad(X):
14        a = np.asarray(X)
15        grad = np.zeros_like(a)
16        x, y, z = a[0], a[1], a[2]
17        grad[0] = (4 * ((x - y) / np.sqrt((x - y) ** 2 + z ** 2) + 1) * (np.sqrt((
18            x - y) ** 2 + z ** 2) + x + np.sqrt(y ** 2 + z ** 2))) / (x * z) - (2 * (
19            np.sqrt((x - y) ** 2 + z ** 2) + x + np.sqrt(y ** 2 + z ** 2)) ** 2) / (x
20            ** 2 * z)
21        grad[1] = (4 * ((y - x) / np.sqrt((x - y) ** 2 + z ** 2) + y / np.sqrt(y
22            ** 2 + z ** 2)) * (np.sqrt((x - y) ** 2 + z ** 2) + x + np.sqrt(y ** 2 + z
23            ** 2))) / (x * z)
24        grad[2] = (4 * (z / np.sqrt((x - y) ** 2 + z ** 2) + z / np.sqrt(y ** 2 +
25            z ** 2)) * (np.sqrt((x - y) ** 2 + z ** 2) + x + np.sqrt(y ** 2 + z ** 2))
26            ) / (x * z) - (2 * (np.sqrt((x - y) ** 2 + z ** 2) + x + np.sqrt(y ** 2 + z
27            ** 2)) ** 2) / (x * z ** 2)

```

```

19     return grad
20
21
22
23 def steepest_descent_constant_step(f, grad, x0, iterations, error_point,
    error_grad, h):
24     dim = np.max(np.shape(x0))
25     x_list = np.zeros([dim, iterations])
26     f_list = np.zeros(iterations)
27     error_point_list = np.zeros(iterations)
28     error_grad_list = np.zeros(iterations)
29     x = np.asarray(x0)
30     x_old = x
31     grad_x = grad(x)
32     for i in range(iterations):
33         #x = x - h*grad(x)/np.linalg.norm(grad(x))
34         x = x - h*grad(x)
35         grad_x = grad(x)
36         f_x = f(x)
37         x_list[:, i] = x
38         f_list[i] = f_x
39         error_point_list[i] = np.linalg.norm(x - x_old)
40         error_grad_list[i] = np.linalg.norm(grad_x)
41
42         #if i % 1000 == 0:
43             #print( "iter={}, x={}, f(x)={}".format(i+1, x, f(x)))
44
45
46         #if (error_grad_list[i] < error_grad):
47             # break
48             # x_old = x
49
50         if (error_point_list[i] < error_point)|(error_grad_list[i] <
error_grad):
51             break
52             x_old = x
53
54     print( 'h', h, 'coordonnées', x)
55     #print( "point error={}, grad error={}, iteration={}, f(x)={}".format(
error_point_list[i], error_grad_list[i], i+1, f(x)))
56     #return { 'x_list' : x_list[:,0:i] , 'f_list' : f_list[0:i] , '
error_point_list' : error_point_list[0:i] , 'error_grad_list' :
error_grad_list[0:i]}
57 f=Rapport
58 grad=Grad
59 x0 = np.array([1,1,1])
60 iterations = 1000000
61 error_point = 1e-10
62 error_grad = 1e-10
63 h = 0.000002327
64 result = steepest_descent_constant_step(f, grad, x0, iterations, error_point,
error_grad, h)
65 #Solution attendue : (1,sqrt(3)/2,1/2)

```

Afin de choisir le pas optimal nous avons codé une recherche de pas aléatoire.

Algorithme N°3

```

1     #Recherche de pas aléatoire.
2 import pandas as pd
3 import random
4 def test(n):
5     for k in range(n):
6         r=random.random()
7         exposant=random.randint(0,10)
8         h=r*10**(-exposant)

```

```

9         #x_0=[random.random(),random.random(),random.random()]
10         result = steepest_descent_constant_step(f, grad, x0, iterations,
            error_point, error_grad, h)
11         #df = pandas.DataFrame({'col1': pandas.Series([result], index = ['a',
            'b', 'c']), 'col2': pandas.Series([6, 7, 8], index = ['b', 'a', 'd'])})
12     test(20)

```

#### Algorithme N°4

```

1  from scipy.optimize import fmin_cobyla
2
3  def equilateral(x,epsilon=0.01):
4      x,y,z=x[0],x[1],x[2] #coordonnées du triangle CF schéma TER
5      #calcul des cotes du triangle
6      cote1=np.abs(x)
7      cote2=np.sqrt(y**2+z**2)
8      cote3=np.sqrt((y-x)**2+z**2)
9      #De combien n'est il pas equilateral ?
10     #les deltas ci dessous nous en donnent une estimation
11     delta1=np.abs(cote1-cote2)
12     delta2=np.abs(cote2-cote3)
13     delta3=np.abs(cote3-cote1)
14     M=max(delta1,delta2,delta3)
15     if cote1==cote2==cote3 :
16         return 'oui'
17         print('Oui')
18     if M<epsilon :
19         return 'oui'
20         print('Oui à', epsilon, 'près')
21     else :
22         return 'non'
23         print('Non',delta1,delta2,delta3)
24     #Tant que la petitesse (epsilon) est trop petite on l'augmente jusqu'a ce qu'
25     #on ait la plus petite valeur
26     #Telle que le triangle soit equilaterale à epsilon près plus ou moins k
27
28 def Recherche_Combien_Equi(x):
29     X=x
30     #On initialise la variable qui controle si le triangle est equilaterale
31     #ou non
32     #On test une premiere petitesse epsilon.
33     #On augmente de k la petitesse puis on reteste tant que la variable=non.
34     # print(epsilon-0.1, Variable) #On renvoie le premier epsilon modulo la
35     #petitesse tel que variable=oui
36     Variable='non'
37     epsilon=0.1
38     if epsilon<=0:
39         print('epsilon negatif...')
40     while Variable=='non':
41         Variable=equilateral(X,epsilon)
42         if Variable=='non':
43             epsilon+=0.0001
44     #print(epsilon, Variable)
45     return epsilon
46
47 def isop(x_0=[1,1,1]):
48     result=scipy.optimize.minimize(Rapport,x_0)
49     x_optimal=result.x
50     U=Recherche_Combien_Equi(x_optimal)
51     print('Une solution est ',x_optimal,',', 'Elle est', U, 'equilaterale.')
52     print('La fonction Rapport en ce point vaut', result.fun)
53     #affichage du triangle
54
55     #On définit ses coordonnées A(0,0) B(x,0) C(y,z)
56     x,y,z=x_optimal[0],x_optimal[1],x_optimal[2]
57     abscisse, ordonnées=[0,x,y,0],[0,0,z,0] #On doit fermer la figure d ou les

```

```

    quatre points
55     fig1=plt.figure(1)
56     ax1=fig1.add_subplot(111)
57     # Plot Triangle 1
58     ax1.axis('square')
59     plt.plot(abscisse,ordonnées,color=[0/255,176/255,80/255])
60     plt.xlim(0,2)
61     plt.ylim(0,2)

```

## Algorithme N°5

```

1  def PER(X):
2      #rectangle de cote A=(0,0);B=(x,0),C=(y,z),D=(0,w)
3      X=np.asarray(X)
4      x,y,z,w=X[0],X[1],X[2],X[3]
5      return np.abs(x)+np.sqrt((x-y)**2+z**2)+np.sqrt(y**2+(z-w)**2)+np.abs(w)
6  def AIRE(X):
7      X=np.asarray(X)
8      x,y,z,w=X[0],X[1],X[2],X[3]
9      return (1/2)*np.abs(x*z+w*y)
10 def RAPPORT(X):
11     return PER(X)**2/AIRE(X)
12 def isop(x_0=[2,-1,1.3,1/2]):
13     result=scipy.optimize.minimize(RAPPORT,x_0)
14     x_optimal=result.x
15     #U=Recherche_Combien_Equi(x_optimal)
16     #print('Une solution est ',x_optimal,',', 'Elle est ', U, 'equilaterale.')
17     #print('La fonction Rapport en ce point vaut', result.fun)
18     #affichage du triangle
19
20     #On définit ses coordonées A(0,0) B(x,0) C(y,z)
21     x,y,z,w=x_optimal[0],x_optimal[1],x_optimal[2],x_optimal[3]
22     abscisse,ordonnées=[0,x,y,0],[0,0,z,w,0] #On doit fermer la figuer d ou
23     les quatre points
24     fig1=plt.figure(1)
25     ax1=fig1.add_subplot(111)
26     # Plot Triangle 1
27     ax1.axis('square')
28     plt.plot(abscisse,ordonnées,color=[0/255,176/255,80/255,80/255])
29     #On adapte la taille des axes en fonction du max et du min des coordonées
30     puis on rajout 1 pour
31     plt.xlim(min(abscisse)-1,max(abscisse)+1)
32     plt.ylim(min(ordonnées)-1,max(ordonnées)+1)
33     print(result)

```

## References

- [1] V. Blåsjö, *The Isoperimetric Problem*, The American Mathematical Monthly, 112:6, 526-566
- [2] A. Henrot and M. Pierre, *Variation et optimisation de formes: une analyse géométrique*, Springer, 2005, Volume 48
- [3] A. Hurwitz, *Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure 19 (1902) 357-408
- [4] E. M. Stein, R. Shakarchi, *Fourier analysis, an introduction*, Princeton Univ. Press, 2007



- [5] C.Villani, *Intégration et Analyse de Fourier Cours de première année donné à l'Ecole normale supérieure de Lyon année universitaire 2005-2006*
- [6] Thomas Ourmieres-Bonafos, *Rappels sur les séries de Fourier*
- [7] Francesco Maggi, *Sets of Finite Perimeter and Geometric Variational Problems*
- [8] R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993. MR 94d:52007
- [9] L. A. Lusternik, *Die Brunn-Minkowskische Ungleichung für beliebige messbare Mengen*, C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS 8 (1935), 55–58.
- [10] H. Hadwiger and D. Ohmann, *Brunn-Minkowskischer Satz und Isoperimetrie*, Math. Zeit. 66 (1956), 1–8. MR 18:595c
- [11] R-J Garder, *BULLETIN (New Series) OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY* Volume 39, Number 3, Pages 355–405 S 0273-0979(02)00941-2 Article electronically published on April 8, 2002
- [12] DeMason, <http://math.uchicago.edu/~may/REU2020/REUPapers/DeMason.pdf>
- [13] R.J. Gardner, *R. J. Gardner, The Brunn-Minkowski inequality: A survey with proofs*, available at <http://www.ac.wvu.edu/~gardner>.
- [14] R. Henstock and A. M. Macbeath, *On the measure of sum sets, I. The theorems of Brunn, Minkowski and Lusternik*, Proc. London Math. Soc. 3 (1953), 182–194. MR 15:109g
- [15] Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno algorithm, [https://en.wikipedia.org/wiki/Broyden%E2%80%93Fletcher%E2%80%93Goldfarb%E2%80%93Shanno\\_algorithm](https://en.wikipedia.org/wiki/Broyden%E2%80%93Fletcher%E2%80%93Goldfarb%E2%80%93Shanno_algorithm)
- [16] Nouredine Meraihi, [https://act6100.netlify.app/sgd/gradient\\_descent](https://act6100.netlify.app/sgd/gradient_descent)
- [17] Emmanuel Russ, *INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES ET ISODIAMÉTRIQUES*
- [18] Fabio Cavalletti and Davide Manini, *Isoperimetric inequality in noncompact MCP spaces*
- [19] K. Weierstrass, *Mathematische Werke*, vol. 7, Mayer Muller, Berlin, 1927
- [20] E. Schmidt, *Über das isoperimetrische Problem im Raum von  $n$  Dimensionen*, Math. Z. 44 (1939) 689–788
- [21] C. Caratheodory and E. Study, *Zwei Beweise des Satzes, daß der Kreis unter allen Figuren gleichen ' Umfanges den größten Inhalt hat*, " Math. Annalen 68 (1909) 133–140
- [22] HELGE TVERBERG, *A PROOF OF THE JORDAN CURVE THEOREM*
- [23] Bernard Dacorogna, *Introduction to calculus of variations*