

# Problème isopérimétrique

. \* Gabriel Singer <sup>†</sup>

## 1 Introduction

Bonjour, Merci beaucoup d'être venu m'écouter.

Le but de cet exposé est de présenter une partie du travail qui a été faite dans le cadre du TER encadré par Monsieur Lamboley.

Je vais d'abord introduire le contexte historique autour du problème isopérimétrique puis je vais parler du cas du périmètre de Minkowski puis du cas de la dimension 2 et des polygones.

Le problème isopérimétrique consiste à résoudre :

$$\min \left\{ P(\Omega), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad V(\Omega) = m \right\} \quad m \geq 0. \quad (1)$$

où  $P(\Omega)$  est le "périmètre" de  $\Omega$ ,  $V(\cdot)$  son volume, et  $m \in ]0, +\infty[$ .

Historiquement ce problème était étudié en dimension  $n = 2$ . Déjà à l'Antiquité pour des questions de partage des terres par exemple.

Au XIX<sup>ème</sup> siècle que le mathématicien Suisse Steiner (1796–1863) donna plusieurs preuves très élégantes mais sans montrer qu'il existe une solution au problème isopérimétrique.

En 1879 Weierstrass qui donne une preuve complète de l'inégalité isopérimétrique en dimension 2.

Néanmoins cette preuve n'a jamais été publiée, on en retrouve une trace dans les notes d'un de ses élèves, [20].

En 1907 Carathéodory et Study réparent l'une de ses preuves [22].

En 1939 Schmidt donne la première preuve complète en dimension quelconque, [21]. On retrouve dans l'article [1], une preuve en dimension deux, de la preuve de Schmidt.

Depuis l'inégalité isopérimétrique a été étudiée dans d'autres cadres que celui de la géométrie euclidienne. On trouve par exemple l'inégalité isopérimétrique en théorie du transport optimal [19].

$$\min \left\{ P(\Omega), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad V(\Omega) = m \right\} \quad (2)$$

où  $P(\Omega)$  est le "périmètre" de  $\Omega$ ,  $V(\cdot)$  son volume, et  $m \in ]0, +\infty[$ .

On peut également s'intéresser au problème isopérimétrique suivant ;

$$\max \left\{ V(\Omega), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad P(\Omega) = m \right\} \quad (3)$$

Pour  $R > 0$  on note  $B_n(0, R) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < R\}$  la boule ouverte de  $\mathbb{R}^n$  de rayon  $R$  où  $||$  désigne la norme euclidienne et pour  $m > 0$ ,  $B_m$  désigne la boule de volume égale à  $m$ .

---

\*.  
<sup>†</sup>(correspondence, gabriel.singer@estp.fr).

**Lemma 1.** Soit  $n \geq 1$  un entier. On considère les deux problèmes suivants

$$\forall \Omega \in D_P, \quad \frac{P(\Omega)}{V(\Omega)^{\frac{n-1}{n}}} \geq \frac{P(B(0,1))}{V(B(0,1))^{\frac{n-1}{n}}}. \quad (4)$$

$$\forall m > 0 \quad \inf \left\{ P(\Omega), \quad \Omega \in D_P, \quad V(\Omega) = m \right\} = P(B(0, R)) \quad (5)$$

Où  $R$  est tel que  $V(B(0, R)) = m$ . Alors (4) et (5) sont deux problèmes équivalents.  $D_P$  désigne l'ensemble de définition de  $P$ , voir 1.

**Remark 1.** Le lemme précédent nous servira plus tard dans la partie ??, il permet de passer d'un problème d'optimisation (non linéaire) sous contrainte (5) à un problème de minimisation de fonction dans  $\mathbb{R}^n$  (4).

Périmètres	Expression	Ensemble de définition
Polygône	$\sum_{0 \leq k \leq n-1}  z_{k+1} - z_k $	$\mathcal{P}$ (2)
Longueur d'une courbe	$\int_{[0,1]}  \gamma'(t)  dt$	$C^1([0, 1])$
Minkowski	$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{V(A+B_\epsilon) - V(A)}{\epsilon}$	compact
De Giorgi	$\sup \int_{\Omega} \operatorname{div} \phi(x) dx; \quad \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \ \phi\ _\infty \leq 1$	Lebesgue-mesurables
Surface du bord	$\int_{\partial\Omega} d\sigma.$	Bord Lipschitzien

## 2 Minkowski

### Objectif

On se propose d'étudier l'inégalité isopérimétrique en dimension  $n \geq 1$  pour le périmètre de Minkowski défini sur des compacts. Que l'on voit comme une conséquence de l'inégalité de Brunn-Minkovski (1). On s'appuie sur la preuve qui se trouve dans l'article de Gardner [12] donnée par Hadwiger et Ohmann [11].

Nous allons étudier le cas de l'inégalité isopérimétrique pour une autre notion de périmètre, celle de contenue de Minkovsky.

**Definition 1.** Soit  $A$  un fermé borné de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\varepsilon > 0$  ;  $B(0, \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq \varepsilon\}$

$$P(A) := \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{V(A + B_\varepsilon) - V(A)}{\varepsilon}.$$

Où  $V$  désigne la mesure de Lebesgue  $n$  dimensionnelle.

**Theorem 1** (Inégalité isopérimétrique). Soit  $A$  un compact de  $\mathbb{R}^n$

$$\frac{P(A)}{V(A)^{\frac{n-1}{n}}} \geq \frac{P(B(0,1))}{V(B(0,1))^{\frac{n-1}{n}}}.$$

Avant de prouver ce théorème on va avoir besoin de l'inégalité de Brunn Minkovski.

**Theorem 2.** Soit  $\lambda \in ]0, 1[$ ,  $X, Y$  deux ensembles bornés non vides et mesurables dans  $\mathbb{R}^n$  tel que  $(1 - \lambda)X + \lambda Y$  le soit également alors,

$$V((1 - \lambda)X + \lambda Y)^{\frac{1}{n}} \geq (1 - \lambda)V(X)^{\frac{1}{n}} + \lambda V(Y)^{\frac{1}{n}}. \quad (6)$$

Cette énoncé très général n'est pas historiquement le premier. La première version de l'inégalité concerne les ensembles convexes et compacts et fut partiellement démontrée dans le cas  $n = 3$  par Brunn vers 1887. Minkowski en donne une preuve complète [9]. Ce n'est qu'en 1935 que le théorème 2 est démontré en premier par Lusternik, [10]. Vient ensuite une preuve beaucoup plus courte proposée par Hadwiger et Ohmann. C'est celle ci que nous allons présenter en nous basant sur l'article de [12].

**Lemma 2.** *l'inégalité (2) est équivalente à*

$$V(X + Y)^{\frac{1}{n}} \geq V(X)^{\frac{1}{n}} + V(Y)^{\frac{1}{n}}. \quad (7)$$

*Proof.* L'idée qu'on eu Hadwiger et Ohmann est de démontrer l'inégalité (2) pour des boites c'est à dire des parallélépipèdes rectangulaire dont les cotes sont parallèles aux hyperplans engendrés par les vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

Donc le théorème (2) est vrai pour une union finie de boite. On conclut en approchant n'importe quel ensemble borné par un recouvrement de boite.  $\square$

**Remark 2.** *Le passage de union finie de boite à ensemble borné (vérifiant les hyptohèses du théorème) n'est pas évident (pour moi) et n'est pas précisé dans la preuve de [12].*

C'est cette inégalité qui permet de démontrer le théorème (2). En effet :

*Proof.* Soit  $r > 0$  et  $A$  un compact alors  $A$ ,  $B(0, r)$  et  $A + B(0, r)$  sont mesurables et bornés donc on peut leurs appliquer l'inégalité de Brunn-Minkovsky (2); sous la forme

$$V(X + Y)^{\frac{1}{n}} \geq V(X)^{\frac{1}{n}} + V(Y)^{\frac{1}{n}}$$

.

$$\begin{aligned} V(A + B(0, r)) &\geq \left( V(A)^{\frac{1}{n}} + V(B(0, r))^{\frac{1}{n}} \right)^n \\ &= \left( V(A)^{\frac{1}{n}} + r\omega(n)^{\frac{1}{n}} \right)^n \\ &\geq V(A) + nV(A)^{\frac{n-1}{n}}\omega(n)^{\frac{1}{n}}r. \end{aligned}$$

Ou bien encore

$$\frac{V(A + B(0, r)) - V(A)}{r} \geq nV(A)^{\frac{n-1}{n}}\omega(n)^{\frac{1}{n}}$$

En faisant tendre  $r$  vers 0 on a exactement l'inégalité isopérimétrique.  $\square$

Pour la dernière inégalité on a simplement dit que pour  $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$

$$(x + y)^n = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = x^n + nxy^{n-1} + \sum_{0 \leq k \leq n-1} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

et donc que

$$(x + y)^n - (x^n + nxy^{n-1}) = \sum_{0 \leq k \leq n-1} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \geq 0.$$

Nous l'avons appliquée avec  $x := V(A)^{\frac{1}{n}} > 0$ ,  $y := r\omega(n)^{\frac{1}{n}} > 0$ . Ceci clos le cas de l'inégalité isopérimétrique de type Minkovski.

### 3 Dimension 2

Soit  $\gamma : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^2$  injective,  $C^1$ , telle que  $|\gamma'| \neq 0$  avec  $\gamma(0) = \gamma(1)$ . Avec ces hypothèses on peut appliquer le théorème de Jordan qui affirme alors que  $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Im}(\gamma)$  possède deux composantes connexes, l'une bornée qu'on appelle l'intérieur de la courbe et l'autre non bornée. On notera  $\Omega$  l'intérieur de la courbe, qui est un ouvert.

Le volume de  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  en dimension deux que l'on note  $V(\Omega)$  est défini par sa mesure deux dimensionnelles de Lebesgue.

Le périmètre que nous considérons est

$$P(\Omega) = \int_0^1 |\gamma'(t)| dt. \quad (8)$$

**Theorem 3.** Soit  $\gamma$  une fonction définie sur  $[0, 1]$ . On suppose que  $\gamma \in C^1$ ,  $\gamma(0) = \gamma(1)$ ,  $\gamma$  injective et que  $\forall t \in ]0, 1[ \quad |\gamma'(t)| \neq 0$ .  $\Omega$  désigne l'intérieur de la courbe  $\gamma$  au sens du théorème de Jordan. Alors :

$$P(\Omega)^2 \geq 4\pi V(\Omega)$$

Où  $P$  est la fonction périmètre définie par (8).

Hurwitz en donne une preuve directe en utilisant les séries de Fourier [4]. L'ingrédient principale est :

#### 3.0.1 Inégalité de Wirtinger

Il s'agit de démontrer l'inégalité de Wirtinger pour des fonctions  $C^1$  périodiques. De cette inégalité découle l'inégalité isopérimétrique dans le plan 3.

**Theorem 4.** Soit  $f \in C_{per}^1(\mathbb{R})$  telle que  $\int_{]0,1[} f = 0$  alors on a

$$\int_{]0,1[} |f(t)|^2 dt \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{]0,1[} |f'(t)|^2 dt$$

#### 3.1 Inégalité isopérimétrique pour les polygones

**Definition 2** (Polygone). Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . On se donne une fonction

$$\gamma : \bigcup_{1 \leq k \leq p} [a_k; a_{k+1}] \mapsto \mathbb{R}^2$$

affine par morceau, injective, continue et fermé. On note pour  $k \in \{1, \dots, p\}$ ,  $\gamma_k$  la restriction de  $\gamma$  à l'intervalle  $[a_k; a_{k+1}]$ .

On dira que  $Z = \text{Im}(\gamma)$  est le polygone  $Z$ .

On note  $\mathcal{P}$  l'ensemble des polygones.

En particulier,

$$\gamma(t) = \left( \sum_{1 \leq k \leq p} \chi_{[a_k; a_{k+1}]} \gamma_{k,1}(t); \sum_{1 \leq k \leq p} \chi_{[a_k; a_{k+1}]} \gamma_{k,2}(t) \right)$$

Au quel cas pour tout  $k \in \{1, \dots, p\}$

$$z_k = \gamma_{k,1}(a_k) + i\gamma_{k,2}(a_k)$$

sont les coins du polygone.

Le polygone  $Z$  est équilatéral si  $|z_{k+1} - z_k|$  ne dépend pas de  $k$ .

De plus,  $Z$  est dit régulier si : il existe  $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$  tels que pour chaque entier  $k$  :

$$z_k = a\omega_k + b$$

ou

$$z_k = a\overline{\omega_k} + b$$

On définit l'aire d'un polygone par

$$A(Z) = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left( \sum_{0 \leq k \leq n-1} z_k \overline{z_{k+1}} \right)$$

et son périmètre par

$$P(Z) = \sum_{0 \leq k \leq n-1} |z_{k+1} - z_k|. \quad (9)$$

**Theorem 5.** *Tout polygone  $Z \in \mathcal{P}$  à  $n$  cotés vérifie*

$$\frac{P(Z)^2}{V(Z)} \geq 4n \tan \frac{\pi}{n}$$

*Avec égalité si et seulement si  $Z$  est régulier.*

**Proposition 1.** *Soit  $\gamma(\cdot) = (x(\cdot); y(\cdot))$  une fonction  $W_{per}^{1,\infty}([0, 2\pi[)$ .*

$$\left( \int_{]0, 2\pi[} \sqrt{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2} dt \right)^2 \geq 4\pi \int_{]0, 2\pi[} x(t)y'(t) - y(t)x'(t) dt. \quad (10)$$

## 4 algorithme

Plus précisément d'après le résultat (??) on sait que si  $Z$  est un polygone à  $n$  cotés on a l'inégalité :

$$\frac{P(Z)^2}{V(Z)} \geq 4n \tan \frac{\pi}{n} := m_*(n) \quad (11)$$

avec égalité si et seulement si  $Z$  est le  $n$  gônes régulier. Pour le cas du triangle il y a  $n = 3$  cotés, donc la valeur minimale qu'on espère trouver informatiquement est

$$m_*(3) = 12\sqrt{3} \approx 20.784.$$

Dans le cas du polygone à 4 puis 6 cotés,

$$m_*(4) = 4 * 4 \tan \frac{\pi}{4} = 16.$$

$$m_*(6) = 4 * 5 \tan \frac{\pi}{5} \approx 14.531.$$

Enfin, nous nous sommes rapidement penché sur la complexité de l'algorithme 1.

**Proposition 2.** *Si l'on note  $d$  le nombre de variables de la fonction que l'on cherche à minimiser et  $I$  le nombre d'itérations. Alors, La compléxité de l'algorithme 4 est*

$$O(d * I).$$

*Proof.* Pour chaque itération  $k \in [1, I]$  de la boucle for il y a au maximum  $d$  composantes de la norme du gradient à vérifier dans la boucle if, d'où la formule.  $\square$

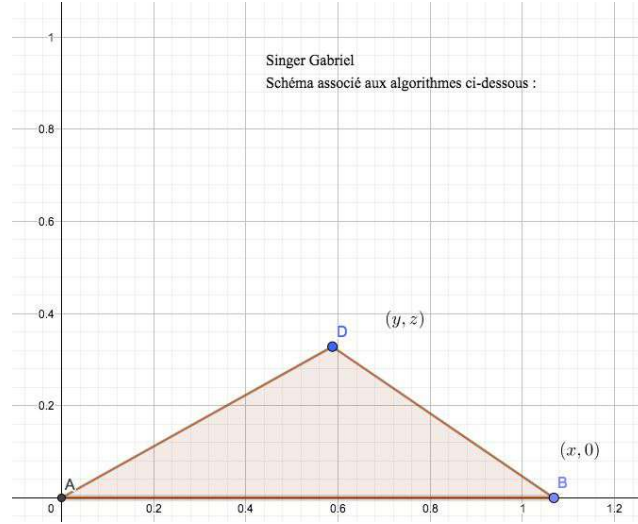


Figure 1: Schématisation du problème associé au triangle

## 4.1 Triangle

### 4.1.1 Un paramètre

Dans cette partie on fixe  $x = 1, y = \frac{1}{2}$  la fonction à minimiser est alors

$$f(z) = \frac{2 \left( 1 + 2\sqrt{\frac{1}{4} + z^2} \right)^2}{z}$$

définie sur  $\Omega := ]0, +\infty[$

**Lemma 3.**  $f$  est convexe sur  $\Omega$

*Proof.*  $f$  est  $C^2$  en tant que produit de fonction  $C^2$  sur  $\Omega$  et l'on a

$$\forall z \in \Omega \quad f^{(2)}(z) = 8 * \frac{(6z^2 + (4z^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + 1)}{z^3(4z^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \geq 0$$

□

#### 4.1.2 Trois paramètres

Soit

$$\psi(x, y, z) := \frac{2 \left( x + \sqrt{y^2 + z^2} + \sqrt{(y-x)^2 + z^2} \right)^2}{xz}$$

$$\nabla(\psi)_1 = 4 \left( \frac{\left( \frac{(x-y)}{\sqrt{(x-y)^2 + z^2}} + 1 \right) * (\sqrt{(x-y)^2 + z^2} + x + \sqrt{y^2 + z^2})}{(x * z)} - \frac{2 * (\sqrt{(x-y)^2 + z^2} + x + \sqrt{y^2 + z^2})^2}{x^2 z} \right)$$

$$\nabla(\psi)_2 = 4 \frac{\left( \frac{(y-x)}{\sqrt{(x-y)^2 + z^2}} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}} \right) (\sqrt{(x-y)^2 + z^2} + x + \sqrt{y^2 + z^2})}{xz}$$

$$\nabla(\psi)_3 = 4 \left( \frac{\left( \frac{z}{\sqrt{(x-y)^2 + z^2}} + \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}} \right) (\sqrt{(x-y)^2 + z^2} + x + \sqrt{y^2 + z^2})}{xz} - \frac{2(\sqrt{(x-y)^2 + z^2} + x + \sqrt{y^2 + z^2})^2}{xz^2} \right)$$

On résume les résultats obtenus par les algorithmes 1 et 3 et 4. La première colonne du tableau indique le nombre de variables, la seconde indique que nous avons utilisé la descente de gradient et la troisième colonne indique qu'on a utilisé la méthode `scipy.optimize.minimize` qui est une méthode pré-programmée en Python. On rappelle que  $x_0$  désigne le point initiale.

SOM désigne la fonction pré-programmée en python : "scipy.optimize.minimize".

La fonction `scipy.optimize.minimize` prend en argument un grand nombre de paramètres. Il nous suffit de rentrer seulement :  $f$  la fonction à minimiser,  $x_0$  le point de départ. Les autres paramètres ont des valeurs par défaut.

**Remark 3.** D'après <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.minimize.html> l'algorithme de minisation choisit par défaut est celui de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno.

Dans les grandes lignes c'est un algorithme de minimisation qui s'applique à des problèmes non linéaires et sans contraintes. Il utilise des information sur la courbure de la fonction pour trouver la direction de descente. Pour plus d'information on renvoie le lecteur à [16].

Dans les deux tableaux qui suivent  $h$  désigne le pas et  $x_{opt}$  la solution renvoyée par l'algorithme correspondant.

**Remark 4.** Le pas  $h$  ici est choisi constant, il existe des algorithme de descente de gradient à pas optimal et plus généralement il existe toute une théorie au tour du choix de  $h$ . Dans les modèles de "Machine Learning" le pas  $h$  est appelé "taux d'apprentissage". On renvoie le lecteur intéressé par le point de vue "Descente de gradient version Machine Learning" à l'excellente page : [17].

1 Paramètre	$x_0$	$h$	$m_{*,algo}(3)$	$x_{opt}$	$x_{algo}$	Itérations
Descente de Gradient	4	$10^{-4}$	20.784	0.866	0.866	$10^3$
Descente de Gradient	4	$10^{-5}$	20.784	0.866	0.866	$10^5$
Descente de Gradient	4	$10^{-5}$	35.213	0.866	3.235	$10^4$
Descente de Gradient	4	$10^{-6}$	35.213	0.866	3.235	$10^6$
Descente de Gradient	4	$10^{-6}$	20.784	0.866	0.866	$10^6$

3 Paramètres	$x_0$	$h$	$m_{*,algo}(3)$	$x_{opt}$	Itérations
Descente de Gradient	[1, 1, 9]	$10^{-3}$	20.79	[6.444; 3.193; 5.598]	$7 * 10^3$
SOM	[1, 1, 9]	X	20.784	[2.193; 1.096; 1.899]	8

Entrée [309]: `isop([1,1,9])`

Une solution est `[2.19312772 1.09656388 1.89930433]` . Elle est 0.1 equilaterale.  
La fonction Rapport en ce point vaut 20.78460969082653

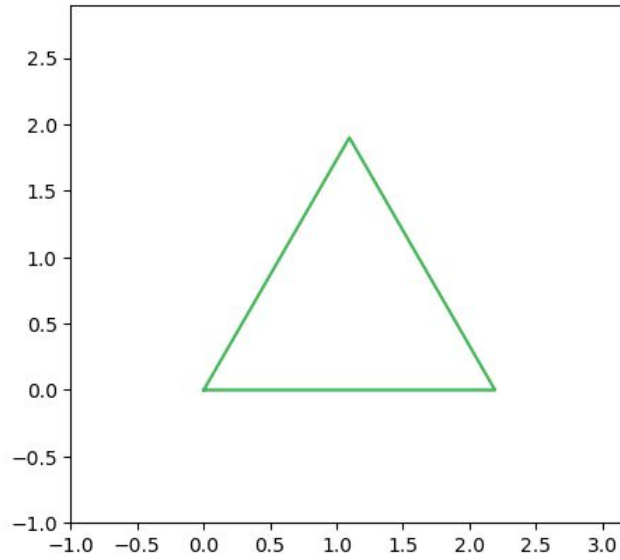
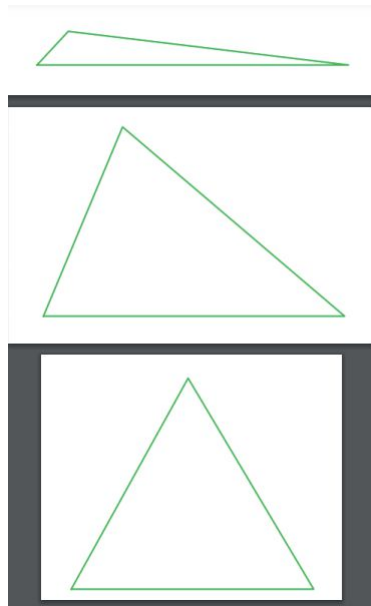


Figure 2: Résultat renvoyé par l'algorithme 4.



## 4.2 Quadrilatère

On considère le quadrilatère dont les sommets sont

$$A = (0, 0); B = (x, 0), C = (y, z), D = (0, w).$$

La fonction périmètre est définie par

$$\forall (x, y, w, z) \in \mathbb{R}^4 \quad P(x, y, w, z) := |x| + |w| + \sqrt{(x-y)^2 + z^2} + \sqrt{y^2 + (z-w)^2}.$$



La fonction volume par :

$$\forall (x, y, w, z) \in \mathbb{R}^4 \quad V(x, y, w, z) := \left| \frac{xz + wy}{2} \right|.$$

On cherche de la même manière à minimiser ;

$$\forall (x, y, w, z) \in D \quad \Psi(x, y, w, z) = \frac{P((x, y, w, z))^2}{V(x, y, w, z)} = \frac{2 \left( |x| + |w| + \sqrt{(x-y)^2 + z^2} + \sqrt{y^2 + (z-w)^2} \right)^2}{|xz + wy|}.$$

Où

$$D := \mathbb{R}^4 \setminus V^{-1}(\{0\}).$$

Nous avons utilisé la fonction `scipy.optimize.minimize` :

4 Paramètres	$x_0$	$x_{algo}$	$m_{\star, algo}(4)$	Itérations
SOM	$[1, 1, \frac{1}{2}, 1]$	$[0.919, 0.919, 0.919, 0.919]$	16.000	6
SOM	$[2, -1, 1.3, 1/2]$	$[2.408, 2.408, 2.408, 2.408]$	16.000	13

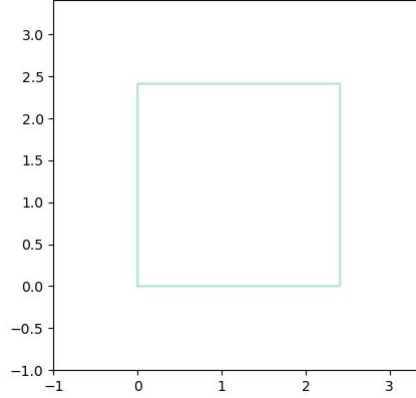


Figure 3: Résultat renvoyé par l'algorithme 5.

### 4.3 Pentagone

On considère le pentagone dont les sommets sont

$$A = (0, 0); B = (1, 0), C = (a, b), D = (c, d), (e, f).$$

La fonction périmètre est définie par

$$\forall (a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6 \quad P(a, b, c, d, e, f) := 1 + \sqrt{(a-1)^2 + b^2} + \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2} + \sqrt{(e-c)^2 + (d-f)^2} + \sqrt{e^2 + f^2}.$$

La fonction volume est quant-à elle définie par :

$$\forall (a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6 \quad V(a, b, c, d, e, f) := \left| \frac{-b + bc - da + de - cf}{2} \right|.$$

On cherche à minimiser ;

$$\forall (a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6 \setminus V^{-1}(\{0\}).$$

$$\Psi((a, b, c, d, e, f)) = \frac{P(a, b, c, d, e, f)^2}{V(a, b, c, d, e, f)} = \frac{2 \left( 1 + \sqrt{a^2 + (b-1)^2} + \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2} + \sqrt{(e-c)^2 + (d-f)^2} + \sqrt{e^2 + f^2} \right)^2}{|a + bc - da + de - cf|}$$

Nous avons utilisé la fonction `scipy.optimize.minimize` :

6 Paramètres	$x_0$	$x_{algo}$	$m_*(6)$	Itérations
SOM	[1, 2, 3, 4, 1, 2]	[1.309, 0.951, 0.500, 1.538, -0.309, 0.951]	14.530	27
SOM	[1, 1, 1/2, 1/2, 1, 2]	[2.408, 2.408, 2.408, 2.408]	16.000	13

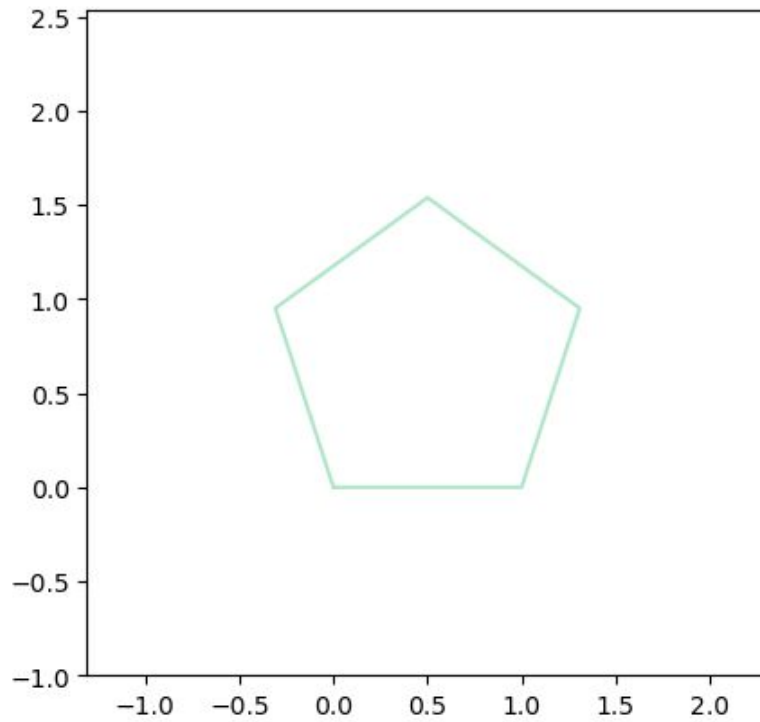


Figure 4: Pentagone régulier.

## References

- [1] V. Blåsjö, *The Isoperimetric Problem*, The American Mathematical Monthly, 112:6, 526-566
- [2] A. Henrot and M. Pierre, *Variation et optimisation de formes: une analyse géométrique*, Springer, 2005, Volume 48
- [3] Francesco Maggi, *Sets of Finite Perimeter and Geometric Variational Problems*
- [4] A. Hurwitz, *Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure 19 (1902) 357-408

- [5] E. M. Stein , R. Shakarchi, *Fourier analysis, an introduction*, Princeton Univ. Press, 2007
- [6] C.Villani, *Intégration et Analyse de Fourier Cours de première année donné à l'Ecole normale supérieure de Lyon année universitaire 2005-2006*
- [7] Thomas Ourmieres-Bonafos, *Rappels sur les séries de Fourier*
- [8] Francesco Maggi, *Sets of Finite Perimeter and Geometric Variational Problems*
- [9] R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993. MR 94d:52007
- [10] L. A. Lusternik, *Die Brunn-Minkowskische Ungleichung für beliebige messbare Mengen*, C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS 8 (1935), 55–58.
- [11] H. Hadwiger and D. Ohmann, *Brunn-Minkowskischer Satz und Isoperimetrie*, Math. Zeit. 66 (1956), 1–8. MR 18:595c
- [12] R-J Garder, *BULLETIN (New Series) OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY Volume 39, Number 3, Pages 355–405 S 0273-0979(02)00941-2 Article electronically published on April 8, 2002*
- [13] DeMason, <http://math.uchicago.edu/~may/REU2020/REUPapers/DeMason.pdf>
- [14] R.J. Gardner, R. J. Gardner, *The Brunn-Minkowski inequality: A survey with proofs*, available at <http://www.ac.wvu.edu/~gardner>.
- [15] R. Henstock and A. M. Macbeath, *On the measure of sum sets, I. The theorems of Brunn, Minkowski and Lusternik*, Proc. London Math. Soc. 3 (1953), 182–194. MR 15:109g
- [16] Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno algorithm, [https://en.wikipedia.org/wiki/Broyden%E2%80%93Fletcher%E2%80%93Goldfarb%E2%80%93Shanno\\_algorithm](https://en.wikipedia.org/wiki/Broyden%E2%80%93Fletcher%E2%80%93Goldfarb%E2%80%93Shanno_algorithm)
- [17] Nouredine Meraihi, [https://act6100.netlify.app/sgd/gradient\\_descent](https://act6100.netlify.app/sgd/gradient_descent)
- [18] Emmanuel Russ, *INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES ET ISODIAMÉTRIQUES*
- [19] Fabio Cavalletti and Davide Manini, *Isoperimetric inequality in noncompact MCP spaces*
- [20] K. Weierstrass, *Mathematische Werke*, vol. 7, Mayer Muller, Berlin, 1927
- [21] E. Schmidt, *Über das isoperimetrische Problem im Raum von  $n$  Dimensionen*, Math. Z. 44 (1939) 689– 788
- [22] C. Caratheodory and E. Study, *Zwei Beweise des Satzes, daß der Kreis unter allen Figuren gleichen ‘ Umfanges den größten Inhalt hat*, “ Math. Annalen 68 (1909) 133–140