Exercices d'analyses niveau $L2$.

Gabriel Singer *

Contents

*(correspondence, gabriel.singer@estp.fr).

1 Séance 1 Généralités

Exercice 1 Soit $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{e_x} - \overrightarrow{e_y}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{e_y} - \overrightarrow{e_z}$ et $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{e_x} - \overrightarrow{e_z}$.
On pose $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.
Calculer

$$\overrightarrow{n} \quad \overrightarrow{n}.\overrightarrow{k} \quad ||\overrightarrow{n}||.$$

Corrigé :
Un calcul directe donne :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} &= (3\overrightarrow{e_x} - \overrightarrow{e_y}) \wedge (\overrightarrow{e_y} - \overrightarrow{e_z}) \\
&= 3\overrightarrow{e_x} \wedge \overrightarrow{e_y} + 3\overrightarrow{e_x} \wedge (-\overrightarrow{e_z}) - \overrightarrow{e_y} \wedge \overrightarrow{e_y} - \overrightarrow{e_y} \wedge (-\overrightarrow{e_z}) \\
&= 3\overrightarrow{e_x} \wedge \overrightarrow{e_y} + 3\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{e_y} \wedge \overrightarrow{e_z} \\
&= 3\overrightarrow{e_z} + 3\overrightarrow{e_y} + \overrightarrow{e_x} \\
&= \overrightarrow{e_x} + 3\overrightarrow{e_y} + 3\overrightarrow{e_z}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{e_x} + 3\overrightarrow{e_y} + 3\overrightarrow{e_z}. \tag{1}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{n}.\overrightarrow{k} &= (\overrightarrow{e_x} + 3\overrightarrow{e_y} + 3\overrightarrow{e_z}).(\overrightarrow{e_x} - \overrightarrow{e_z}) \\
&= \overrightarrow{e_x}.\overrightarrow{e_x} - \overrightarrow{e_x}.\overrightarrow{e_z} + 3\overrightarrow{e_y}.\overrightarrow{e_x} - 3\overrightarrow{e_y}.\overrightarrow{e_z} + 3\overrightarrow{e_z}\overrightarrow{e_x} - 3\overrightarrow{e_z}.\overrightarrow{e_z} \\
&= \overrightarrow{e_x}.\overrightarrow{e_x} - 3\overrightarrow{e_z}.\overrightarrow{e_z} \\
&= ||\overrightarrow{e_x}||^2 - 3\,||\overrightarrow{e_z}||^2 \\
&= -2.
\end{aligned}$$

Enfin, d'après (1), on a

$$||\overrightarrow{n}|| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{19}.$$

Exercice 2
Soit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{e_x} - \overrightarrow{e_z}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{e_y} + \overrightarrow{e_z}$
Calculer

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} \quad ||\overrightarrow{u}|| \quad ||\overrightarrow{v}|| \quad \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \quad \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}.$$

Trouver une relation entre $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}$.
Corrigé : On applique les définitions du cours :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} &= (\overrightarrow{e_x} - \overrightarrow{e_z}).(\overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{e_y} + \overrightarrow{e_z}) \\
&= \overrightarrow{e_x}.\overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{e_x}.\overrightarrow{e_y} + \overrightarrow{e_x}.\overrightarrow{e_z} - \overrightarrow{e_z}\overrightarrow{e_x} - \overrightarrow{e_z}.\overrightarrow{e_y} - \overrightarrow{e_z}.\overrightarrow{e_z} \\
&= \overrightarrow{e_x}.\overrightarrow{e_x} - \overrightarrow{e_z}.\overrightarrow{e_z} \\
&= ||\overrightarrow{e_x}||^2 - ||\overrightarrow{e_z}||^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Puis,

$$||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \quad ||\overrightarrow{v}|| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} &= (\overrightarrow{e_x} - \overrightarrow{e_z}) \wedge (\overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{e_y} + \overrightarrow{e_z}) \\
&= \overrightarrow{e_x} \wedge \overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{e_x} \wedge \overrightarrow{e_y} + \overrightarrow{e_x} \wedge \overrightarrow{e_z} - \overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{e_x} - \overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{e_y} - \overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{e_z} \\
&= \overrightarrow{e_z} - \overrightarrow{e_y} - \overrightarrow{e_y} + \overrightarrow{e_x}. \\
&= \overrightarrow{e_z} - 2\overrightarrow{e_y} + \overrightarrow{e_x}. \\
&= \overrightarrow{e_x} - 2\overrightarrow{e_y} + \overrightarrow{e_z}.
\end{aligned}$$

De la même manière on trouve :

$$\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{e_x} + 2\overrightarrow{e_y} - \overrightarrow{e_z}.$$

On vérifie immédiatement que :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}.$$

Exercice 3

Soit $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{e_x} - \overrightarrow{e_y}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{e_y} - \overrightarrow{e_z}$.

Calculer $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ puis montrer que

$$(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \, . \, \overrightarrow{u} = 0, \quad (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \, . \, \overrightarrow{v} = 0.$$

Corrigé :

On a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} &= (3\overrightarrow{e_x} - \overrightarrow{e_y}) \wedge (\overrightarrow{e_y} - \overrightarrow{e_z}) \\
&= 3\overrightarrow{e_x} \wedge \overrightarrow{e_y} + 3\overrightarrow{e_x} \wedge (-\overrightarrow{e_z}) - \overrightarrow{e_y} \wedge \overrightarrow{e_y} - \overrightarrow{e_y} \wedge (-\overrightarrow{e_z}) \\
&= 3\overrightarrow{e_x} \wedge \overrightarrow{e_y} + 3\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{e_y} \wedge \overrightarrow{e_z} \\
&= 3\overrightarrow{e_z} + 3\overrightarrow{e_y} + \overrightarrow{e_x} \\
&= \overrightarrow{e_x} + 3\overrightarrow{e_y} + 3\overrightarrow{e_z}
\end{aligned}$$

On trouve alors,

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \, . \, \overrightarrow{u} &= (\overrightarrow{e_x} + 3\overrightarrow{e_y} + 3\overrightarrow{e_z}) \, .(3\overrightarrow{e_x} - \overrightarrow{e_y}) \\
&= 3\overrightarrow{e_x}.\overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{e_x}.(-\overrightarrow{e_y}) + 9\overrightarrow{e_y}.\overrightarrow{e_x} - 3\overrightarrow{e_y}.\overrightarrow{e_y} + 3\overrightarrow{e_z}.\overrightarrow{e_x} - 3\overrightarrow{e_z}.\overrightarrow{e_y} \\
&= 3\overrightarrow{e_x}.\overrightarrow{e_x} - 3\overrightarrow{e_y}.\overrightarrow{e_y} \\
&= 3 - 3 \\
&= 0
\end{aligned}$$

En échangeant le rôle de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans la relation précédente on trouve la seconde relation, ou bien on refait le calcul.

2 Séance 2 Système de coordonnées

Exercice 1

On considère le vecteur

$$\overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\sqrt{3} \\ -2 \end{pmatrix}$$

dont les coordonnées sont données dans le repère cartésien. Donner ses coordonnées dans le repère sphérique.

Corrigé : On a

$$r = \sqrt{0^2 + (2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{16} = 4.$$

De plus

$$\cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2},$$

donc

$$\theta = \frac{2\pi}{3} (\in [0, \pi]).$$

Reste à déterminer ψ, on sait également que :

$$\cos\psi = \frac{x}{r\sin\theta} = 0$$

et puisque $y = 2\sqrt{3} > 0$ on en déduit que $\psi = \frac{\pi}{2}$. Finalement dans la base sphérique,

$$\overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{2\pi}{3} \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 Soit $r > 0$ on se donne $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{e_r} + r\overrightarrow{e_\theta}$.
Sans utiliser les matrices de passages, exprimer $\overrightarrow{B}$ en coordonnées cartésienne.
Corrigé : On écrit que :

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad z = z$$

on trouve alors que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

De plus on sait que

$$\overrightarrow{e_r} = \cos\theta\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\overrightarrow{e_y} \quad \overrightarrow{e_\theta} = -\sin\theta\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\overrightarrow{e_y}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{B} &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\overrightarrow{e_x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\overrightarrow{e_y} + \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\overrightarrow{e_x} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\overrightarrow{e_y}\right) \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\overrightarrow{e_x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\overrightarrow{e_y} - y\overrightarrow{e_x} + x\overrightarrow{e_y} \\
&= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - y\right)\overrightarrow{e_x} + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x\right)\overrightarrow{e_y}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{B} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - y \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 Soit V le champs vectoriel défini par

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}_\star^+ \times]0, 2\pi] \quad \overrightarrow{V}(r,\theta) = r\overrightarrow{e_r} + \theta\overrightarrow{e_\theta}.$$

Montrer que pour $x \neq 0$ et $y > 0$ on a, en coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{V}(x,y) = \left(x - \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\overrightarrow{e_x} + \left(y - \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\overrightarrow{e_y}.$$

Corrigé ; Soit $x \neq 0$ et $y > 0$;

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V}(x,y) &= r(\cos\theta\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\overrightarrow{e_y}) + \theta(-\sin\theta\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\overrightarrow{e_y}) \\ &= (r\cos\theta - \theta\sin\theta)\overrightarrow{e_x} + (r\sin\theta + \theta\cos\theta)\overrightarrow{e_y} \\ &= \left(x - \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\overrightarrow{e_x} + \left(y - \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\overrightarrow{e_y}.\end{aligned}$$

En effet, traitons le terme $\theta\sin\theta$, l'autre s'obtient de la même façon.

On sait que $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ donc, puisque $x \neq 0$, $\frac{y}{x} = \tan\theta$ et comme $y = r\sin\theta > 0$ on en déduit finalement que

$$\theta = \arctan\frac{y}{x}.$$

Enfin, on sait que $r^2 = x^2 + y^2$ donc

$$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Ainsi,

$$r\cos\theta - \theta\sin\theta = x - \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

De même, on trouve que

$$r\sin\theta + \theta\cos\theta = y - \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3 Séance 3 Continuité

Exercice 1 Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall x, y \neq 0 \quad f(x,y) := (x+y)\sin\left(\frac{1}{x^{10}-y}\right) \quad f(0,0) = \alpha.$$

Trouver α tel que cette fonction soit continue sur $\mathbb{R}^2$.

Corrigé : f est clairement continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ car c'est le produit de $g : (x,y) \mapsto x + y$ qui est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ par $h : (x,y) \mapsto \sin\left(\frac{1}{x^{10}-y}\right)$ qui est continue par composition de $u \mapsto \sin u$ et $(x,y) \mapsto \frac{1}{x^{10}-y}$ qui sont continues respectivement sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$. Ensuite puisque

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad |\sin u| \leq 1$$

en se donnant $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ quelconques et en appliquant l'inégalité précédente à $u = \frac{1}{x^{10}-y}$ on trouve que

$$\left|\sin\frac{1}{x^{10}-y}\right| \leq 1,$$

ce qui donne

$$|f(x,y)| = \left|(x+y)\sin\left(\frac{1}{x^{10}-y}\right)\right| \leq |x+y|.$$

Par continuité de la fonction $x, y \mapsto |x+y|$ on a que

$$\lim_{(x,y)\to 0}|x+y| = \left|\lim_{(x,y)\to 0}(x+y)\right| = 0.$$

Donc,

$$\lim_{(x,y)\to 0} |f(x,y)| = 0.$$

Ainsi, $\alpha = 0$ est l'unique valeur qui convient.

Exercice 2 En utilisant le développement limité de la fonction $\cos(.)$ au visnage de 0 montrer que la fonction f définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \quad f(x,y) = \frac{1-\cos xy}{xy^2} \quad f(0,0) = \frac{1}{2}$$

est continue.

Corrigé : La continuité sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ est immédiate par quotient de fonction continue sur ce domaine.

On a, au voisinage de 0, $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o\left(t^2\right)$ donc

$$\frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2} + o(1) \Leftrightarrow \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2}.$$

Pour

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \quad f(x,y) = x\frac{1-\cos xy}{(xy)^2}$$

Donc d'après ce qui précède, puisque $\lim_{(x,y)\to 0} xy = 0$, on a

$$\lim_{(x,y)\to 0} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to 0} x\frac{1}{2} = 0.$$

Exercice 3 Soit $\alpha > 1$ et f la fonction définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \quad f(x,y) = \frac{\sin(xy)x^{2\alpha}}{x^2+y^2} \quad f(0,0) = 0.$$

Montrer que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |x| \leq \sqrt{x^2+y^2}. \tag{2}$$

A partir de (17) montrer que f est continue.

Corrigé : Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ puisque $y^2 \geq 0$ on a que $0 \leq |x|^2 \leq |x|^2 + |y|^2 = x^2 + y^2$ et par croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}^+$ on a

$$|x| = \sqrt{|x|^2} \leq \sqrt{x^2+y^2}.$$

On en élevant à la puissant $2\alpha > 0$ on a

$$|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}^{\alpha} = \left(x^2+y^2\right)^{\alpha}. \tag{3}$$

Et puisque

$$|\sin xy| \leq 1$$

on a, en utilisant (26),

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \quad |f(x,y)| = \left|\frac{\sin(xy)x^{2\alpha}}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{\left(x^2+y^2\right)^{\alpha}}{x^2+y^2} = \left(x^2+y^2\right)^{\alpha-1}.$$

Puisque $\alpha > 1$ ou encore que $\alpha - 1 > 0$ on a bien :

$$\lim_{(x,y)\to 0} \left(x^2+y^2\right)^{\alpha-1} = 0,$$

et donc que

$$\lim_{(x,y)\to 0} |f(x,y)| = 0.$$

4 Séance 4 Dérivées partielles et fonctions C^1

Exercice 1 Soit $\Psi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \Psi(x,y) = x^2 - y^2.$$

Montrer que Ψ vérifie l'équation (de Laplace)

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} F(x,y) = 0. \tag{4}$$

Puis montrer que la fonction $\phi : \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \quad \phi(x,y) = \ln\left(x^2 + y^2\right)$$

est solution de

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} F(x,y) = 0. \tag{5}$$

.

Corrigé : Il suffit de calculer les dérivées partielles qui existent car dans les deux cas ce sont des fonctions C^∞. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(x,y) = 2x \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} 2x = 2.$$

De la même manière,

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}(x,y) = -2$$

Donc

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Psi(x,y) = 2 - 2 = 0.$$

Ainsi, Ψ est solution de (4).

En ce qui concerne ϕ, soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, on a,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}.$$

De plus on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial \frac{2x}{x^2+y^2}}{\partial x}(x,y) \\
&= 2\frac{x^2+y^2 - x*2*x}{(x^2+y^2)^2} \\
&= 2\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial \frac{2y}{x^2+y^2}}{\partial x}(x,y) \\
&= 2\frac{x^2+y^2 - y*2*y}{(x^2+y^2)^2} \\
&= 2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

En sommant les deux expressions précédentes on trouve bien ce qui est demandé.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \quad f(x,y) = x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \quad f(0,0) = 0.$$

Montrer que f est continue puis en étudiant

$$\frac{\partial f}{\partial y}(u,v)$$

pour des valeurs de u, v bien choisies, montrer que f n'est pas C^1.

Corrigé :

f est clairement continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ comme produit de fonction continue.

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ on a, en utilisant l'inégalité triangulaire,

$$0 \leq |f(x,y)| = \left|x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right| \leq |x| \frac{\left|x^2\right| + \left|y^2\right|}{x^2+y^2} = |x| \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = |x|$$

Donc,

$$\lim_{(x,y)\to 0} |f(x,y)| = 0 = f(0,0).$$

Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Ensuite, pour $(x,y) \neq (0,0)$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-4yx^3}{(x^2+y^2)^2},$$

donc pour $u \neq 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(u,u) = \frac{-4u^4}{(u^2+u^2)^2} = -1.$$

Mais,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(u,0) = 0.$$

Donc f n'est pas C^1.

Exercice 3 Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}^\star \quad g(t) = e^{-\frac{1}{t^2}} \quad g(0) = 0$$

Après avoir rapidement justifié la continuité de g, montrer que g est C^1 sur $\mathbb{R}$ puis donner la valeur de $g'(0)$.

En déduire que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \setminus (0,0) \quad f(x,y) = e^{-\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)^2} \quad f(0,0) = 0$$

est C^1.

Corrigé : g est C^1 (donc continue) sur $\mathbb{R}^\star$ en tant que composée de fonction C^1 et on a

$$\lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{t\to 0} e^{-\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to\infty} e^{-t} = 0 = g(0).$$

$$\forall t \neq 0 \quad g'(t) = \frac{2}{t^3} e^{-\frac{1}{t^2}}$$

Or

$$\lim_{t\to 0} g'(t) = \lim_{t\to 0} \frac{2}{t^3} e^{-\frac{1}{t^2}} = 0.$$

Ainsi, g est C^1 avec $g'(0) = 0$.

Enfin, f est C^1 par composition de g qui est C^1 et de $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$ qui est C^1.

5 Séance 5 Différentielles

Exercice 1 Montrer que les fonctions ci-dessous sont différentiables puis calculer leur différentielle.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = e^{xy}(x + y)$$
$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad g(x, y, z) = xy + yz + zx.$$

Corrigé : Par produit de fonctions $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ on a

$$f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}),$$

donc f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

De plus

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{xy}(y(y + x) + 1) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{xy}(x(x + y) + 1).$$
$$df = e^{xy}(y(y + x) + 1)dx + e^{xy}(x(x + y) + 1)dy.$$

Pour ce qui est de g, elle est polynomiale donc $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ donc différentiable.

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z) = y + z \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, z) = x + z \quad \frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = y + x.$$

Ainsi,

$$dg = (y + z)dx + (x + z)dy + (y + x)dz.$$

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0) \quad f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad f(0, 0) = 0.$$

Cette fonction est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? Est-elle différentiable en $(0, 0)$?

Corrigé : Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f(x, x) = \frac{1}{2},$$

donc il est impossible d'avoir

$$\lim_{(x,y)\to 0} f(x, y) = 0.$$

Donc f n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$ et n'est donc pas différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0) \quad f(x, y) = \frac{x^p y^q}{x^2 - xy + y^2} \quad f(0, 0) = 0,$$

où $p, q \in \mathbb{N}$ avec $p + q = 2$.

Montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |xy| \leq x^2 - xy + y^2,$$

En déduire que f n'est pas différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Corrigé :

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ puisque $(x - y)^2 \geq 0$, c'est équivalent à écrire que,

$$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$$

ou encore que

$$x^2 - xy + y^2 \geq xy \tag{6}$$

Ensuite, puisque $x^2 + y^2 \geq 0$ on trouve immédiatement :

$$-x^2 + xy - y^2 \leq xy \tag{7}$$

En combinant (6) et (7) on a bien montré l'inégalité de l'énoncé.

Il suffit de montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$. Pour $x \in \mathbb{R}$ quelconque on a

$$f(x,x) = \frac{x^{p+q}}{x^2 - x^2 + x^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Donc, il est impossible d'avoir

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0.$$

f n'est donc pas continue en $(0,0)$ donc pas différentiable en $(0,0)$ donc pas différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Dans ce qui suit les exercices sont plus difficiles et demandent plus de travail. Ils correspondent aux exercices des séances 1 à 6

6 Généralités

Exercice 1 Supposons que $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = 0$, avec $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ non nuls.

Montrer que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

Corrigé : En notant $\theta := Arg(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ on a

$$0 = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}||\, ||\overrightarrow{v}|| \sin\theta \overrightarrow{n}.$$

Les vecteurs ci-dessus étant non nuls, on a nécessairement $\sin\theta = 0$ et donc $\theta = 0$ modulo π. Ce qui veut bien dire que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

Exercice 2 Soit $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ on pose $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$. Montrer que

$$\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{v} \tag{8}$$

Corrigé : Par anti-symétrie du produit vectoriel, il suffit de traiter l'un des deux cas. Lorsqu'on parle d'orthogonalité, on pense tout de suite au produit scalaire. Ainsi, montrer que $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{u}$ équivaut à montrer que

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{u} = 0.$$

On commence par calculer $\overrightarrow{n}$,

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} yc - zb \\ -(xc - za) \\ xb - ya \end{pmatrix}$$

puis

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} yc - zb \\ -(xc - za) \\ xb - ya \end{pmatrix}.\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x(yc - zb) - y(xc - za) + z(xb - ya) = 0.$$

Exercice 3 Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, montrer la relation suivante :

$$||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}||^2 + ||\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}||^2 = ||u||^2\, ||v||^2 .$$

Corrigé : Par définition on a :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}||\, ||\overrightarrow{v}|| \sin\theta \overrightarrow{n}, \quad \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}||\, ||\overrightarrow{u}|| \cos\theta,$$

ainsi,

$$||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}||^2 + ||\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}||^2 = (||\overrightarrow{u}||\, ||\overrightarrow{v}|| \sin\theta)^2 + (||\overrightarrow{u}||\, ||\overrightarrow{u}|| \cos\theta)^2 = ||\overrightarrow{u}||^2\, ||\overrightarrow{u}||^2 .$$

7 Systèmes de coordonées

Exercice 1 Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{A} = \cos\theta \overrightarrow{e_r} + \sin\theta \overrightarrow{e_\theta}$.

Montrer que dans la base cartésienne $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$

$$\overrightarrow{A} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Corrigé : Soit P la matrice de passage de la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ à la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$.
Notons A_x, A_y, A_z les coordonnées de $\overrightarrow{B}$ dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.
Alors

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 Soit $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{A}(t) = a_1(t)\overrightarrow{e_x} + a_2(t)\overrightarrow{e_y} + a_3(t)\overrightarrow{e_z},$$

où a_1, a_2, a_3 sont des fonctions $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On définit la dérivée de $\overrightarrow{A}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad A'(t) = a_1'(t)\overrightarrow{e_x} + a_2'(t)\overrightarrow{e_y} + a_3'(t)\overrightarrow{e_z}.$$

On définit le vecteur position par

$$\forall t \geq 0 \quad \overrightarrow{OM}(t) := x(t)\overrightarrow{e_x} + y(t)\overrightarrow{e_y} + z(t)\overrightarrow{e_z}.$$

Montrer que en coordonnées cylindriques :

$$\forall t \geq 0 \quad \overrightarrow{OM}(t) = r(t)\overrightarrow{e_r} + z(t)\overrightarrow{e_z} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM}'(t) = r'(t)\overrightarrow{e_r} + r(t)\theta'(t)\overrightarrow{e_\theta} + +z'(t)\overrightarrow{e_z}.$$

Corrigé ; D'après le cours on sait que

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad z = z$$

ce qui donne immédiatement la première relation. Attention le vecteur $\overrightarrow{e_r} = \cos\theta(t)\overrightarrow{e_x} + \sin\theta(t)\overrightarrow{e_y}$ dépend du temps et $\overrightarrow{e_\theta}$ aussi, donc il faut revenir à la définition de $\overrightarrow{OM}$ pour pouvoir avancer dans les calculs. On a,

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\overrightarrow{e_x} + y(t)\overrightarrow{e_y} + z(t)\overrightarrow{e_z},$$

donc,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM}'(t) &= x'(t)\overrightarrow{e_x} + y'(t)\overrightarrow{e_y} + z'(t)\overrightarrow{e_z} \\
&= (r'(t)\cos\theta(t) - r(t)\theta'(t)\sin\theta(t))\overrightarrow{e_x} + (r'(t)\sin\theta(t) + r(t)\theta'(t)\cos\theta(t))\overrightarrow{e_y} + z'(t)\overrightarrow{e_z} \\
&= r'(t)(\cos\theta(t)\overrightarrow{e_x} + \sin\theta(t)\overrightarrow{e_y}) + r(t)\theta'(t)(-\sin\theta(t)\overrightarrow{e_x} + \cos\theta(t)\overrightarrow{e_y}) + z'(t)\overrightarrow{e_z} \\
&= r'(t)\overrightarrow{e_r} + r(t)\theta'(t)\overrightarrow{e_\theta} + +z'(t)\overrightarrow{e_z}.
\end{aligned}$$

Exercice 3 Donner la définition d'une sphère de rayon $R > 0$ en coordonnées cartésiennes puis en sphériques et enfin en cylindriques.
Corrigé : En coordonnées cartésiennes on a ;

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2\right\}.$$

En coordonnées sphériques on a

$$\left\{(R\cos\theta\cos\phi, R\sin\theta\cos\phi, R\sin\phi) \quad \theta \in [-\pi, \pi] \quad \phi \in [\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]\right\}.$$

En coordonnées cylindriques on a ;

$$\left\{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \quad r^2 + z^2 = R^2\right\}.$$

8 Continuité

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $C^1(\mathbb{R})$. On se donne $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \neq y \quad F(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}, \quad F(x,x) = f'(x) \quad \text{si} \quad x = y.$$

Démontrer que F est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Indication : Utiliser le théorème des accroissements finis.

Corrigé : Pour $x \neq y$ le dénominateur ne s'annule pas et puisque $f \in C^1 \subset C^0$ on trouve que F est continue. Reste à montrer la continuité de F en tout point de la forme (u,u) pour $u \in \mathbb{R}$.

Soit $u \in \mathbb{R}$ et $x \neq y$, sans perte de généralité on peut supposer que $x < y$. Par le théorème des accroissement finis appliqué à f sur l'intervalle $]x,y[$, il existe $c(x,y) \in]x,y[$ tel que

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c(x,y)) \Longleftrightarrow F(x,y) = f'(c(x,y)).$$

Si maintenant $(x,y) \to (u,u)$ on a, $c(x,y) \to u$ et par continuité de f' puisque $f \in C^1$, on trouve que

$$\lim_{(x,y)\to(u,u)} F(x,y) = \lim_{(x,y)\to(u,u)} f'(c(x,y)) = \lim_{v\to u} f'(v) = f'(u) = F(u,u).$$

Exercice 2 Soit $F : \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x,y) := \begin{cases} \frac{x\sin y - y \sin x}{x^2+y^2} & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

En passant en coordonnées polaires puis en faisant en développement limité à l'ordre 3 de la fonction sin au voisinage de 0 lorsque $r \to 0$, montrer que

$$\frac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2} = \frac{1}{6} r^2 \sin\theta\cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + o(r^2).$$

En déduire que F est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Corrigé : En coordonnées polaires on a : $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ qui tendent bien vers 0 lorsque $r \to 0$, donc par composition des développements limités on a :

$$\sin r\sin\theta = r\sin\theta - \frac{(r\sin\theta)^3}{6} + o((r\sin\theta)^3) \quad \sin r\cos\theta = r\cos\theta - \frac{(r\cos\theta)^3}{6} + o((r\cos\theta)^3),$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2} &= \frac{r\cos\theta(r\sin\theta - \frac{(r\sin\theta)^3}{6} + o((r\sin\theta)^3)) - r\sin\theta(r\cos\theta - \frac{(r\cos\theta)^3}{6} + o((r\cos\theta)^3))}{r^2} \\
&= \frac{(-r\cos\theta\frac{(r\sin\theta)^3}{6} + o(r^4)) + r\sin\theta\frac{r\cos\theta^3}{6} + o(r^4)}{r^2} \\
&= -r^2\cos\theta\frac{\sin^3\theta}{6} + r^2\sin\theta\frac{\cos^3\theta}{6} + o(r^2) \\
&= \frac{r^2}{6}\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + o(r^2).
\end{aligned}$$

En faisant tendre $r \to 0$ on en conclut que

$$\lim_{(x,y)\to 0} F(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{r^2}{6}\cos\theta\sin\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + o(r^2) = 0 = F(0,0).$$

Exercice 3 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x,y) := \begin{cases} \frac{y^4}{x^2+y^2-xy} & (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & x = (0,0) \end{cases}$$

Justifier F est bien définie sur $\mathbb{R}^2$ puis déterminer α tel que F soit continue.

Corrigé : On a une barre de fraction, donc on doit vérifier que le dénominateur ne s'annule qu'en $(0,0)$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a (Si l'élève bloque, lui demander de montrer cette inégalité !)

$$x^2 + y^2 - xy \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \tag{9}$$

donc,

$$x^2 + y^2 - xy = 0 \iff \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = 0 \iff x = y = 0.$$

Ainsi, F est bien définie.

D'après (9),

$$0 \leq F(x,y) \leq \frac{2y^4}{x^2+y^2} \leq \frac{2(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2} = 2(x^2+y^2).$$

Donc,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 + y^2 = 0.$$

Ainsi,

$$\alpha = 0.$$

9 Dérivées partielles et fonctions de classe C^1

Exercice 1 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction C^2. On dit que f est harmonique si elle vérifie l'équation

$$\forall (x,y) \in U \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0. \tag{10}$$

Supposons $f \in C^3$ et f harmonique, montrer que les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont des fonctions harmoniques. Donner un exemple de fonction harmonique.

Indication : Chercher du coté des fonctions polynomiales en deux indéterminées !

Corrigé :

Il suffit de calculer en appliquant les règles classiques de dérivation.

Soit $(x,y) \in U$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(x,y) + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(x,y) \\ &= \frac{\partial 0}{\partial x}(x,y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Même chose pour

$$\frac{\partial f}{\partial y}(.,.).$$

Il y en a beaucoup, pour commencer la fonction nulle est bien harmonique mais aussi

$$(x,y) \mapsto x^2 - y^2 \quad (x,y) \mapsto \ln\sqrt{x^2+y^2}.$$

Exercice 2 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction C^2. On dit que f est harmonique si elle vérifie l'équation

$$\forall (x,y) \in U \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0. \tag{11}$$

Soit $f \in C^3$ telle que f soit harmonique, montrer que la fonction

$$(x,y) \mapsto x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

est harmonique.

Corrigé : Soit $(x,y) \in U$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) + \frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + y\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y).\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + y\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y)\right)\\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + x\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) + y\frac{\partial^3 f}{\partial xxy}(x,y).\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)\\ &= x\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).\end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right)\\ &= x\frac{\partial^3 f}{\partial xyy}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) + y\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y).\end{aligned}$$

Tout ceci donne ;

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = 2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + x\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) + y\frac{\partial^3 f}{\partial xxy}(x,y). \tag{12}$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) = x\frac{\partial^3 f}{\partial xyy}(x,y) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) + y\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y). \tag{13}$$

En sommant (12) et (13) on trouve

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)=$$
$$2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right)+x\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y)+y\frac{\partial^3 f}{\partial xxy}(x,y)+x\frac{\partial^3 f}{\partial xyy}(x,y)+y\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y)=$$
$$x\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y)+y\frac{\partial^3 f}{\partial xxy}(x,y)+x\frac{\partial^3 f}{\partial xyy}(x,y)+y\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y)$$

Enfin, on remarque que,

$$\begin{aligned}
y\frac{\partial^3 f}{\partial xxy}(x,y)+y\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y)&=y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(x,y)\\
&=y\frac{\partial 0}{\partial y}(x,y)\\
&=0.
\end{aligned}$$

De même,

$$x\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y)+x\frac{\partial^3 f}{\partial xyy}(x,y)=0.$$

Finalement tous les termes de (12)+(13) sont nuls.

Exercice 3 Soit c la vitesse de la lumière on définit l'équation d'onde (t désigne la variable temps) :

$$\forall (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\quad c^2\frac{\partial f^2}{\partial x^2}(x,t)=\frac{\partial f^2}{\partial t^2}(x,t)\tag{14}$$

où $f:(x,t)\mapsto f(x,t)$.

Soit $(\phi,\psi)\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})\times C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, montrer que la fonction

$$f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$$

définie par

$$\forall (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\quad f(x,t)=\phi(x-ct)+\psi(x+ct),$$

est solution de (14).

Soit $(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ on a

$$\begin{aligned}
c^2\frac{\partial f^2}{\partial x^2}(x,t)&=c^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}(\phi(x-ct)+\psi(x+ct))\right)\\
&=c^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi'(x-ct)+\psi'(x+ct)\right)\\
&=c^2\phi''(x-ct)+c^2\psi''(x+ct).
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f^2}{\partial t^2}(x,t)&=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}(\phi(x-ct)+\psi(x+ct))\right)\\
&=c\frac{\partial}{\partial t}\left(-\phi'(x-ct)+\psi'(x+ct)\right)\\
&=c^2\phi''(x-ct)+c^2\psi''(x+ct).
\end{aligned}$$

10 Différentielles

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ différentiable. On définit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad g(x) = (x, x).$$

Où $(.,.)$ désigne le produit scalaire usuelle sur $\mathbb{R}^n$. On définit en suite : $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad u(x) = (f(x), f(x)).$$

Calculer le différentielle de g puis celle de u.

Corrigé : Soit $y, h \in \mathbb{R}^n$ on a

$$(y+h, y+h) = (y,y) + 2(y,h) + (h,h) = (y,y) + 2(y,h) + ||h||^2.$$

Donc par définition de la différentielle on a :

$$dg_y(h) = 2(y,h).$$

On remarque que $u = g \circ f$ et donc que

$$du_x(h) = dg_{f(x)} \circ df_x(h) = 2(f(x), df_x(h)).$$

Exercice 2 La période d'oscillation T d'un pendule simple dépend de la longueur du pendule l, et est donné par

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Calculer la différentielle de g.

Corrigé : On doit donc d'abord exprimé g en fonction de T et l ce qui est immédiat par la relation donnée dans l'énoncé :

$$g(T,l) = l\frac{4\pi^2}{T^2}.$$

g est différentiable et l'on a :

$$dg = \frac{\partial g}{\partial l}(T,l)dl + \frac{\partial g}{\partial T}(T,l)dT = \frac{4\pi^2}{T^2}dl - 2\frac{4\pi^2 l}{T^3}dT. \tag{15}$$

Exercice 3 On se donne l'équation des gazs parfaits :

$$PV = nRT \tag{16}$$

où R et n sont fixés. On définit la différentielle logarithmique d'une fonction $f \in C^1$ ne s'annulant pas, par

$$d\ln f = \frac{df}{f}.$$

Montrer que

$$\frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T} \tag{17}$$

$$VdP + PdV = nRdT \tag{18}$$

Puis monter que (17) implique (26).

Corrigé: En prenant le log de (16) on a

$$\ln P + \ln V = C + \ln T$$

puis on différentie :

$$d\ln P + d\ln V = d\ln T \Longrightarrow \frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}.$$

Ce donne (17). Enfin on différentie directement (16) donc

$$d(PV) = d(nRT) = nRdT \Longrightarrow VdP + PdV = nRdT.$$

Ce qui donne (26).

Supposons qu'on ait (17). Alors,

$$\frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}$$

ou encore que

$$\frac{VdP + PdV}{PV} = \frac{dT}{T}$$

mais d'après l'équation des gazs parfaits (16) on a

$$\frac{VdP + PdV}{nRT} = \frac{dT}{T}$$

donc,

$$VdP + PdV = dT.$$

Ainsi, (26) est vérifiée.

A partir d'ici vous trouverez les exercices des séances 6 à 24.

11 Séance 6, Différentiabilité

Exercice 1 En utilisant la définition étudier la differentiabilité sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction f définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = \sin x - y.$$

Corrigé:

A première vue c'est clairement une fonction $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ donc il ne doit pas y avoir de soucis.

Soit $x = (a,b)$ et $h = (h_1, h_2)$ on a $x + h = (a + h_1, b + h_2)$,

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \sin(a - b + h_1 - h_2) \\ &= \sin(a-b)\cos(h_1 - h_2) + \sin(h_1 - h_2)\cos(a-b). \end{aligned}$$

Lorsque $h = (h_1, h_2)$ tend vers 0 on a $h_1 - h_2$ qui tend vers 0 et donc d'après le DL de cos et sin en 0 on sait qu'il existe deux fonctions ϵ_1, ϵ_2 qui tendent vers 0 en 0 telles que :

$$\begin{aligned} \cos(h_1 - h_2) &= 1 + (h_1 - h_2)\epsilon_1(h_1 - h_2) \\ \sin(h_1 - h_2) &= h_1 - h_2 + (h_1 - h_2)\epsilon_2(h_1 - h_2) \end{aligned}$$

Donc

$$f(a+h) = \sin(a-b) + \sin(a-b)(h_1-h_2)\epsilon_1(h_1-h_2) + (h_1-h_2)\cos(a-b) + \cos(a-b)(h_1-h_2)\epsilon_2(h_1-h_2) \tag{19}$$

Posant

$$R(h) = \cos(a-b)(h_1 - h_2)\epsilon_1(h_1 - h_2) + \sin(a-b)(h_1 - h_2)\epsilon_2(h_1 - h_2)$$

et $L(h) = (h_1 - h_2)\cos a - b$ on a que (19) s'écrit,

$$f(x+h) = f(a,b) + L(h) + R(h).$$

On vérifie facilement que $L(.)$ est linéaire (en h). Reste à montrer que

$$\lim_{(h_1,h_2)\to 0} |R(h_1,h_2)| = o(||h||).$$

Les fonctions *cos* et *sin* étant bornée par 1 on a que

$$R(h) \le (h_1 - h_2)(\epsilon_1(h_1 - h_2) + \epsilon_2(h_1 - h_2))$$

Ensuite on a

$$\forall (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \quad |h_1| + |h_2| \le 3\sqrt{h_2^2 + h_1^2}$$

Donc,

$$\forall (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \quad |R(h)| \le 3\,||h||\,|\epsilon_1(h_1 - h_2) + \epsilon_2(h_1 - h_2)|$$

En utilisant la définition de ϵ_1 et ϵ_2 on a :

$$\begin{aligned} \lim_{(h_1,h_2)\to 0} \frac{|R(h)|}{||h||} &\le 3 \lim_{(h_1,h_2)\to 0} |\epsilon_1(h_1 - h_2) + \epsilon_2(h_1 - h_2)| \\ &= 3\left| \lim_{(h_1,h_2)\to 0} \epsilon_1(h_1 - h_2) + \epsilon_2(h_1 - h_2) \right| \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, f est bien differentiable en a et sa différentielle est l'application linéaire définie par :

$$df(a,b) : (h_1, h_1) \mapsto (h_1 - h_2)\cos a - b.$$

Exercice 2 [Difficile] Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = (x+y, xy).$$

Soit $a \in \mathbb{R}^3$ montrer, en utilisant la définition, que f est différentiable en a.
Indication :
On commencera par démontrer que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad 2xy \leq x^2 + y^2.$$

Corrigé, soit $h = (h_1, h_2)$ et $a = (a_1, a_2)$ deux points de $\mathbb{R}^2$.

$$f(a+h) = (h_1 + a_1 + h_2 + a_2; (h_1 + a_1)(h_2 + a_2))$$

On a

$$(h_1 + a_1)(h_2 + a_2) = h_1 h_2 + h_1 a_2 + a_1 h_2 + a_1 a_2$$

Posons alors,

$$L(h) = h_1 a_2 + a_1 h_2$$
$$R(h) = h_1 h_2$$

$$\begin{aligned} f(a+h) &= (h_1 + a_1 + h_2 + a_2; a_1 a_2 + L(h) + R(h)) \\ &= (a_1 + a_2, a_1 a_2) + (h_1 + h_2; L(h) + R(h)) \\ &= f(a) + ((h_1 + h_2; L(h)) + (0, R(h)). \end{aligned}$$

Il est clair que $h = (h_1, h_2, h_3) \mapsto (h_1 + h_2; L(h))$ est linéaire

$$\left| \frac{R(h)}{||h||} \right| = \left| \frac{h_1 h_2}{||h||} \right| \leq \frac{2^{-1}(h_1^2 + h_2^2)}{||h||} = \frac{|||h|||}{2} \to 0$$

On a utilisé :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad 2xy \leq x^2 + y^2.$$

Avec $x = h_1, y = h_2$.
Donc la différentielle de f en a est l'application linéaire définie par :

$$\forall h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^3 \quad df_a(h) := (h_1 + h_2; h_1 a_2 + a_1 h_2).$$

Exercice 3 Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Soit $a \in \mathbb{R}^n$, montrer que f est différentiable en a et préciser $df(a)$.
Corrigé:
On a par linéarité de f,

$$\forall h \in \mathbb{R}^n \quad f(a+h) = f(a) + f(h)$$

donc $df = f$ et $df(a) = f(a)$.
Exercice 4
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2_\star \quad f(x,y) = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

Montrer, en utilisant la définition, que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Corrigé: Soit $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2_\star$ et $h = (h_1, h_2)$

$$\begin{aligned}
f(a+h) &= \sqrt{a_1 + h_1} - \sqrt{a_2 + h_2} \\
&= \sqrt{a_1}\sqrt{1 + \frac{h_1}{a_1}} - \sqrt{a_2}\sqrt{1 + \frac{h_1}{a_2}} \\
&= \sqrt{a_1}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{h_1}{a_1} + \frac{h_1}{a_1}\epsilon_1(\frac{h_1}{a_1})\right) - \sqrt{a_2}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{h_2}{a_2} + \frac{h_2}{a_2}\epsilon_2(\frac{h_2}{a_2})\right) \\
&= f(a) + \frac{\sqrt{a_1}}{2}\frac{h_1}{a_1} - \frac{\sqrt{a_2}}{2}\frac{h_2}{a_2} + \frac{\sqrt{a_1}h_1}{a_1}\epsilon_1(\frac{h_1}{a_1}) - \frac{\sqrt{a_2}h_2}{a_2}\epsilon_2(\frac{h_2}{a_2})
\end{aligned}$$

Posons alors,

$$L(h) = \frac{\sqrt{a_1}}{2}\frac{h_1}{a_1} - \frac{\sqrt{a_2}}{2}\frac{h_2}{a_2}, \quad r(h) = \frac{\sqrt{a_1}h_1}{a_1}\epsilon_1(\frac{h_1}{a_1}) - \frac{\sqrt{a_2}h_2}{a_2}\epsilon_2(\frac{h_2}{a_2})$$

Avec L qui est bien linéaire en h.

Reste à montrer que

$$r(h) = o(||h||).$$

En utilisant l'inégalité triangulaire :

$$|r(h)| \le \max\left(\left|\frac{\sqrt{a_1}}{a_1}\right|, \left|\frac{\sqrt{a_2}}{a_2}\right|\right)\left|h_1\epsilon_1(\frac{h_1}{a_1})\right| + \left|h_2\epsilon_2(\frac{h_2}{a_2})\right|$$

Posant $A = \max\left(\left|\frac{\sqrt{a_1}}{a_1}\right|, \left|\frac{\sqrt{a_2}}{a_2}\right|\right)$ et $\sigma(h_1, h_2) := \max \epsilon_1(\frac{h_1}{a_1}); \epsilon_2(\frac{h_2}{a_2})$ puisque les deux fonctions dont on prend le max tendent vers 0 alors σ tend aussi vers 0 et l'inégalité précédente devient :

$$|r(h)| \le A\sigma(h_1, h_2)(|h_1| + |h_2|) \le 3A\sigma(h_1, h_2)\sqrt{h_1^2 + h_2^2}.$$

Ou encore

$$\frac{|r(h)|}{||h||} \le 3A\sigma(h_1; h_2) \to 0.$$

Ainsi,

$$df_a(h) = \frac{\sqrt{a_1}}{2}\frac{h_1}{a_1} - \frac{\sqrt{a_2}}{2}\frac{h_2}{a_2}.$$

12 Séance 7, Différentiabilité et différentielle

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \in \{(U, \mathbb{R}^n)$, $a = (a_1, ..., a_n) \in U$, $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On dit que, f est dérivable en a selon le vecteur v si

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \quad \text{existe.}$$

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par,

$$f(x,y) = y^2 \ln|x| \quad \text{si} \quad x \ne 0, \quad f(x,y) = 0 \quad \text{sinon.}$$

Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$. Puis montrer qu'elle admet des dérivées en $(0,0)$ selon tout vecteurs.

Corrigé : Pour montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$ on peut par exemple considérer pour $n \ge 1$: $(f(e^{-n^2}, \frac{1}{n}))_{n\in\mathbb{N}}$. Puisque $\frac{1}{n} \ne 0$ pour $n \ge 1$ on a,

$$\lim_{n\to\infty} f(e^{-n^2}, \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} -1 = -1.$$

Or $\lim_{n\to\infty}(e^{-n^2}, \frac{1}{n}) = (0,0)$ et $f(0,0) = 0 \neq -1$. Donc f n'est pas continue en $(0,0)$.

Soit maintenant $a = (a_1, a_2) = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ fixé et $v = (v_1, v_2)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ non nul. Pour $t \neq 0$ fixé; Si $v_1 \neq 0$,

$$f(a+tv) - f(a) = f((tv_1, tv_2)) - f((0,0)) = t^2 v_2^2 \ln |tv_1|$$

sinon,

$$f(a+tv) - f(a) = 0.$$

Puisque

$$\lim_{t\to 0} t \ln |t| = 0,$$

on en déduit que f admet des dérivées en $(0,0)$ selon tout vecteur non nul, cette dérivée étant nulle.

Exercice 2 [Difficile] Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par,

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^4+y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq 0, \quad f(0,0) = 0 \quad \text{sinon.}$$

Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$. Puis montrer qu'elle admet des dérivées en $(0,0)$ selon tout vecteurs. Indication : Considérer la suite $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$.

Corrigé, On considère la suite $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)$ qui tend vers 0 à l'infini mais pourtant,

$$g\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^3\left(\frac{2}{n^4}\right)} = n \to +\infty.$$

Soit $v = (v_1, v_2)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ non nul, on a pour $t \neq 0$,

$$\frac{g(tv) - g(0)}{t} = \frac{tv_1 v_2}{\frac{1}{t^4 v_1^4} + \frac{1}{t^2 v_2^2}} = \frac{v_1^2 v_2}{tv_1^4 + v_2^2}.$$

Si $v_2 = 0$, alors

$$\frac{g(tv) - g(0)}{t} = 0$$

et donc la limite en 0 existe. Si $v_2 \neq 0$, par continuité de la fonction

$$t \mapsto \frac{v_1^2 v_2}{tv_1^4 + v_2^2}$$

on en déduit ;

$$\lim_{t\to 0} \frac{g(tv) - g(0)}{t} = \frac{v_1^2}{v_2}.$$

Ceci montre ce qu'il faut.

Exercice 3 Déterminer le gradient des fonctions suivantes :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad f(x,y,z) = xyz \sin xy.$$

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad g(x,y,z) = xy^2 - yz^2.$$

Enfin, déterminer la divergence du champ de vecteur A défini par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad A(x,y,z) = (2x^2y, 2xy^2, xy).$$

Corrigé:

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad grad(f) = (y^2 z \cos xy, x^2 z \cos xy, xy \sin xy).$$

$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad grad(f)=(y^2, 2x-z^2, -2yz).$$

$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad div(A)(x,y,z)=8xy.$$

Exercice 4 Calculer le rotationnel du champ de vecteur défini par,

$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad D(x,y,z)=y^2e_x+xze_y+xyze_z,$$

puis la divergence du champ défini cette fois par,

$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad G(x,y,z)=\arctan(x^2+y^2)e_x+ze_y.$$

Corrigé: On trouve que,

$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad rot(D)(x,y,z)=x(x-1)e_x-yze_y+(z-2y)e_z,$$

$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad div(G)(x,y,z)=\frac{2x}{1+(x^2+y^2)^2}.$$

Exercice 5 Soit $U:(x,y,z)\mapsto(y,x+z,y+2z)$ définit sur $\mathbb{R}^2$. Trouver f vérifiant

$$\overrightarrow{grad(f)}=\overrightarrow{U},$$

avec $f(0,0,0)=0$.

Corrigé,

f vérifie nécessairement

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y$$

donc il existe une constante $h(y,z)$ telle que

$$f(x,y,z)=yx+h(y,z).$$

On doit également avoir,

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x+z\Rightarrow x+\frac{\partial h}{\partial y}=x+z\Rightarrow\frac{\partial h}{\partial y}=z,$$

ce qui nous donne que

$$h(y,z)=zy+T(z).$$

f se réécrit alors

$$f(x,y,z)=yx+zy+T(z)$$

et en réinjectant cette expression dans la dernière expression que doit vérifier f à savoir,

$$\frac{\partial f}{\partial z}=y+2z$$

on trouve que

$$y+T'(z)=y+2z\Rightarrow T(z)=z^2+C.$$

Ainsi,

$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad f(x,y,z)=yx+zy+z^2+C.$$

La condition $f(0)=0$ impose $C=0$. Finalement,

$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad f(x,y,z)=yx+zy+z^2.$$

Exercice 6 Trouver f telle que

$$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad grad(f)=(2xy+z^3,x^2;3xz^3).$$

Corrigé:
Si f est solution alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy+z^3 \quad \frac{\partial f}{\partial y}=x^2 \quad \frac{\partial f}{\partial z}=3xz^3,$$

en particulier

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^2,$$

donc il existe une constante $h(x,z)$ telle que:

$$f(x,y,z)=yx^2+h(x,z).$$

Les deux autres équations donnent alors

$$f(x,y,z)=yx^2+xz^3+cste$$

13 Séance 8, Opérateurs différentiels

Exercice 1 [Difficile] On considère $\overrightarrow{A}$ le champ de vecteur défini par

$$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad \overrightarrow{A}=\frac{x^a}{1+x^2+y^2}\overrightarrow{e_x}+\frac{y^b}{1+x^2+y^2}\overrightarrow{e_y}+z\overrightarrow{e_z}.$$

Déterminer $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que $\overrightarrow{A}$ soit un champ de gradient.
Corrigé:
On a,

$$\overrightarrow{rot(\overrightarrow{A})}=\left(y^b(-2x)\frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}-x^a(-2y)\frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\right)\overrightarrow{e_z}=2\frac{x^ay-y^bx}{(1+x^2+y^2)^2}\overrightarrow{e_z}.$$

Pour que $\overrightarrow{A}$ soit un champ de gradient, on veut que son rotationnel soit nul. Si x et y sont non nuls,

$$x^ay-y^bx=0\Longrightarrow x^{a-1}=y^{b-1}$$

La seule possibilité est $a=b=1$.

Exercice 2 [Difficile] Montrer que le champ de vecteur $\overrightarrow{A}$ défini par,

$$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad \overrightarrow{A}=\frac{x}{1+x^2+y^2}\overrightarrow{e_x}+\frac{y}{1+x^2+y^2}\overrightarrow{e_y}+z\overrightarrow{e_z},$$

est un champ de gradient et déterminer le potentiel scalaire a.
Indication : montrer que

$$\forall y\in\mathbb{R} \quad x\mapsto \ln\sqrt{1+x^2+y^2}$$

est une primitive de

$$x\mapsto\frac{x}{1+x^2+y^2}.$$

Corrigé,

$$\overrightarrow{rot(\vec{A})} = \left(y(-2x)\frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} - x(-2y)\frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} \right) \vec{e_z} = \vec{0}.$$

On remarqu'à y fixé, une primitive de $x \mapsto \frac{x}{1+x^2+y^2}$ est la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{2} \ln 1 + x^2 + y^2$$

par symétrie des deux premières composantes du champ $\vec{A}$ la potentiel a doit être de la forme

$$a(x,y,z) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2+y^2) + g(z) + cste.$$

En prenant le gradient de a on trouve facilement que $g(z) = \frac{1}{2}z^2$. Finalement la solution cherchée est définie à une constante additive près par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad a(x,y,z) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2+y^2) + \frac{1}{2}z^2 + cste.$$

Exercice 3 On considère le champ de vecteur défini par

$$V(x,y,z) = (y^2 \cos x, 2y \sin x + e^{2z}, 2ye^{2z})$$

Montrer que ce champ est un champ de gradient puis trouver le potentiel dont dérive ce champ.

Corrigé, On note $P(x,y,z) = y^2 \cos x$, $Q(x,y,z) = 2y \sin x + e^{2z}$, et $R(x,y,z) = 2ye^{2z}$.

(a) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y \cos x$

(b) $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 0$

(c) $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = 2e^{2z}$.

Le champ $V(x,y,z)$ est donc un champ de gradient.

Cela nous conduit à résoudre le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = y^2 \cos x \\ \frac{\partial U}{\partial y} = 2y \sin x + e^{2z} \\ \frac{\partial U}{\partial z} = 2ye^{2z} \end{cases}$$

En intégrant la première équation par rapport à x, on trouve :

$$U(x,y,z) = y^2 \sin x + \psi(y,z).$$

Maintenant, en utilisant les deux dernières équations, on est amené à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial y} = e^{2z} \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} = 2ye^{2z} \end{cases}$$

$$psi(y,z) = e^{2z}y + c(z)$$

avec $c_0(z) = 0$. Donc $c(z) = c$ avec c une constante réelle et finalement :

$$U(x,y,z) = y^2 \sin x + e^{2z}y + c,$$

On veut que $U(0,0,0) = 1$ ce qui donne $c = 1$.

Exercice 4 [Beaucoup de dérivées.]
Soit f la fonction définie par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y,z) = \ln \frac{1}{x^2+y^2+z^2}.$$

Calculer $\overrightarrow{grad(f)}$ puis

$$\overrightarrow{rot(\overrightarrow{grad(f)})}$$

et enfin montrer que

$$div(\overrightarrow{rot(\overrightarrow{grad(f)})}) = 0.$$

Corrigé : Pour éviter de faire des calculs trop compliqués on remarque (donner cet indication à l'élève, s'il ne l'a pas trouvé tout seul):

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y,z) = -\ln (x^2+y^2+z^2).$$

Partant de là, on trouve facilement que

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad \overrightarrow{grad(f)}(x,y,z) = \left(-\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}, -\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}, -\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right).$$

Ensuite,

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad \overrightarrow{rot(\overrightarrow{grad(f)})}(x,y,z) = 0$$

Enfin, on trouve que :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad div(\overrightarrow{rot(\overrightarrow{grad(f)})}) = 0.$$

Exercice 5 Soit f la fonction définie par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad f(x,y,z) = e^{xz}\overrightarrow{e_x} + e^{x^2+y^2+z^2}\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z}.$$

Calculer

$$\overrightarrow{rot}(f) \quad div(\overrightarrow{rot}(f)).$$

Corrigé :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad \overrightarrow{rot}(f) = \left(-2e^{x^2+y^2+z^2}z, e^{xz}x, 2e^{x^2+y^2+z^2}x\right)$$

Comme toujours,

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad div(\overrightarrow{rot}(f)) = 0.$$

Encourager les élèves à avoir ce genre d'automatisme !

Exercice 6 Soit f la fonction définie par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad f(x,y,z) = xyz\overrightarrow{e_x} + zy\overrightarrow{e_y} + xz\overrightarrow{e_z}.$$

Calculer

$$\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(f)).$$

Corrigé:

On a

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad \overrightarrow{rot}(f) = (-y, xy-z, -xz),$$

puis

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(f)) = (1, z, 1+y).$$

14 Séance 9, Potentiel vecteur

Exercice 1 Soit $V = (V_1; V_2; V_3)$ le champ de vecteur défini par

$$V_1(x,y,z) = 0 \quad V_2(x,y,z) = -z \quad V_3(x,y,z) = -x$$

Trouver

$$\overrightarrow{W} \quad \textbf{tel que} \quad \overrightarrow{V} = \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{W}),$$

sous la forme,

$$W_x(x,y,z) = \psi(x,y) \quad W_y(x,y,z) = e^y \quad W_z(x,y,z) = \phi(x,z)$$

et avec,

$$W_z(0,y,z) = 0 \quad W_x(x,0,z) = 0.$$

Corrigé,

En écrivant la définition du rotationnel et en prenant en compte les conditions de l'énoncé on doit avoir,

$$-z = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$
$$-x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

En intégrant, on trouve que :

$$\phi(x,z) = -zx + C_1(z) \quad \psi(x,y) = xy + C_2(x).$$

La condition $W_z(0,y,z) = 0$ implique, $C_1(z) = 0$. Ensuite, la condition $W_x(x,0,z) = 0$ implique aussi que, $C_2(z) = 0$. Finalement le champ solution est

$$(xy, e^y, -zx).$$

Exercice 2 Soit $V = (V_1; V_2; V_3)$ le champ de vecteur défini par

$$V_1(x,y,z) = 0 \quad V_2(x,y,z) = -z^2 \quad V_3(x,y,z) = -x$$

Trouver

$$\overrightarrow{W} \quad \textbf{tel que} \quad \overrightarrow{V} = \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{W}),$$

sous la forme,

$$W_x(x,y,z) = \psi(x,y) \quad W_y(x,y,z) = e^{ye^y} \quad W_z(x,y,z) = \phi(x,z)$$

et avec,

$$W_z(0,y,z) = 1 \quad W_x(x,0,z) = -1.$$

Corrigé,

En écrivant la définition du rotationnel et en prenant en compte les conditions de l'énoncé on doit avoir,

$$-z^2 = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$
$$-x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

En intégrant, on trouve que :

$$\phi(x,z) = -z^2x + C_1(z) \quad \psi(x,y) = xy + C_2(x).$$

La condition $W_z(0,y,z) = 1$ implique, $C_1(z) = 1$. Ensuite, la condition $W_x(x,0,z) = -1$ implique aussi que, $C_2(z) = -1$. Finalement le champ solution est

$$(xy-1, e^{ye^y}, -z^2x+1).$$

Exercice 3 Soit $V = (V_1; V_2; V_3)$ le champ de vecteur défini par

$$V_1(x,y,z) = -\ln y \quad V_2(x,y,z) = 0 \quad V_3(x,y,z) = -\ln x$$

Trouver

$$\overrightarrow{V} \quad \textbf{tel que} \quad \overrightarrow{W} = \overrightarrow{rot(\overrightarrow{V})},$$

sous la forme,

$$V_x(x,y,z) = \psi(x,y) \quad V_y(x,y,z) = g(y,z) \quad V_z(x,y,z) = z$$

et avec,

$$V_z(x,y,0) = 0 \quad V_x(x,0,z) = 0.$$

Corrigé, On a par définition

$$\nabla \times \mathbf{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Ce qui se réecrit, dans notre cas :

$$\nabla \times \mathbf{V} = -\frac{\partial g}{\partial z}\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\mathbf{k}$$

Donc

$$\overrightarrow{W} = \overrightarrow{rot(\overrightarrow{V})} \iff -\frac{\partial g}{\partial z} = -\ln y \quad -\frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\ln x$$

On trouve, en intégrant, que la solution est

$$(y\ln(x), z\ln(y), z).$$

Exercice 4 [Difficile] Soit $\overrightarrow{A}$ un champ de vecteur $C^\infty(\mathbb{R}^3)$, montrer que pour chaque fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ il existe $\overrightarrow{Y_f}$ un champ de vecteur qui vérifie :

$$div(\overrightarrow{Y}_f) = 0.$$

Indication : Soit $\overrightarrow{X}$ un champ de vecteurs, que dire de

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{X} + \overrightarrow{grad(f)}\right)?$$

Corrigé, Soit $\overrightarrow{A}$ un champ de vecteur $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ et f une fonction lisse, on sait que

$$div(\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{A}) = 0.$$

En examinant le calcul proposé par l'indication a

$$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{X} + \overrightarrow{grad(f)}\right) = \overrightarrow{rot}\overrightarrow{X}.$$

Ainsi, pour répondre à l'exercice il suffit alors de poser

$$\overrightarrow{Y_f} = \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{grad(f)}\right)$$

15 Séance 10, Composition et séparation des variables

Exercice 1 [Difficile...][Mini-exo, lemme utile pour la méthode des séparations des variables] Soit f et g deux fonction $C^\infty(\mathbb{R})$ on suppose que f dépend de t et g dépend de x.

Montrer que si

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2 \quad g(x) = f(t)$$

Alors, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2 \quad g(x) = f(t) = c.$$

Indication : Considérer l'application

$$\Psi : (x,t) \mapsto g(x) - f(t).$$

La fonction Ψ donnée dans l'énoncé est C^∞ et par hypothèse,

$$\Psi = 0$$

donc, l'on a

$$0 = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = g'(x)$$

donc il existe une constante c_1 telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = c_1.$$

Le même raisonnement en dérivant par rapport à t nous dit qu'il existe une constante c_2 telle que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = c_2$$

Mais puisque $f = g$ alors $c_1 = c_2$ et on a démontré ce qu'il faut.

Exercice 2 [Difficile]

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction diffenrentiable. On suppose que f est homogène, i.e. que

$$\forall (x,y,t) \in \mathbb{R}^3, \quad f(tx,ty) = tf(x,y).$$

Démontrer que pour tout $(x,y,t) \in \mathbb{R}^3$

$$f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)y.$$

En déduire qu'il existe deux réels α et β tels que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad f(x,y) = \alpha x + \beta y.$$

Indication : Que dire de la fonction définie par $t \mapsto f(tx,ty)$ pour tout $x,y \in \mathbb{R}^3$?

Corrigé,

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. La fonction

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \to & f(tx,ty) \end{array} \right.$$

est dérivable et

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)y.$$

- Compte tenu de l'hypothèse d'homogénétité vérifié par la fonction f, on a également

$$\forall t \in R, \quad g'(t) = f(x,y)$$

- On en déduit que, pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)x + \frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)y$$

Ensuite, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on applique le résultat de la question précédente avec $t = 0$, il vient

$$f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y.$$

Les réels $\alpha := \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\beta := \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ sont indépendants de $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Donc,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \alpha x + \beta y.$$

Exercice 3

On cherche toutes les fonctions régulières $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant:

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = a$$

où a est un réel.

On pose f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(u,v) = g\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right)$$

En utilisant le théorème de composition, montrer que

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{a}{2}.$$

Puis intégrer cette équation pour en déduire l'expression de f. Enfin, en déduire les solutions de l'équation initiale.

Corrigé, 1. Par composition, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right) \times \frac{1}{2} + \frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right) \times \frac{-1}{2}$$

Par l'équation vérifiée par g, on a en particulier avec le point $(U,V) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right)$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right) \times \frac{1}{2} + \frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right) \times \frac{-1}{2} = \frac{a}{2}$$

Donc,

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{a}{2}$$

En intégrant l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{a}{2}$$

par rapport à u on a: pour chaque $v \in \mathbb{R}$, il existe une constante $h(v)$ telle que

$$f(u,v) = \frac{au}{2} + h(v)$$

La fonction $(u,v) \mapsto f(u,v)$ étant de classe C^1, il en est de même pour $v \mapsto h(v)$.

Si g est solution de l'équation alors il existe une fonction h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 pour tout u, v, on a :

$$g\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2}\right) = \frac{au}{2} + h(v)$$

x et y, il faut procéder au changement de variables inverse, donc

$$g(x,y) = \frac{a(x-y)}{2} + h(x+y)$$

Une telle fonction est solution de l'équation aux dérivées partielles.

Exercice 4 Montrer, en passant en polaires, que les solutions de

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sont de la forme :

$$(x,y) \mapsto g(\sqrt{x^2+y^2}), \quad g \in C^1(]0,+\infty[, \mathbb{R}).$$

Corrigé, Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Posons $f(x,y) = g(r,\theta)$ où $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. L'application $(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) = (x,y)$ est un C^1-difféormorphisme de $]0,+\infty[\times[0,2\pi[$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. De plus,

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r}(f(x,y)) \\ &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial y} \\ &= \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y},\end{aligned}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(f(x,y)) = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial y} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y} = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \iff \frac{\partial g}{\partial \theta} = 0 \iff \exists h_1 \in C^1(]0,+\infty[, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall (r,\theta) \in]0,+\infty[\times[0,2\pi[, g(r,\theta) = h_1(r) \iff \exists h_1 \in C^1(]0,+\infty[, \mathbb{R})$$

telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, f(x,y) = h_1\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \iff \exists h \in C^1(]0,+\infty[, \mathbb{R})$

Les solutions sont les fonctions

$$f : (x,y) \mapsto h(x^2+y^2)$$

où

$$h \in C^1(]0,+\infty[, \mathbb{R})$$

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R}^2_\star \to \mathbb{R}$ une fonction C^2. On dit que f est harmonique si elle vérifie l'équation

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2_\star \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0. \tag{20}$$

On suppose de plus que f est définie sur $\mathbb{R}^2_\star$ et qu'il existe une fonction $\phi : \mathbb{R}_\star \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2_\star \quad f(x,y) = \phi(x^2+y^2) \tag{21}$$

Montrer que ϕ' est solution de l'équation différentielle d'ordre 1 :

$$xy'(x) + y(x) = 0$$

, la résoudre, puis en déduire les fonctions harmoniques de la forme (21) s'écrivent :

$$f(x,y) = C\ln(x^2+y^2) + D,$$

avec C et D des constantes.

Corrigé,

D'après le théorème de dérivation d'une fonction composée,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\varphi'\left(x^2+y^2\right) \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\varphi'\left(x^2+y^2\right) + 4x^2\varphi''\left(x^2+y^2\right).$$

De même,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\varphi'\left(x^2+y^2\right) + 4y^2\varphi''\left(x^2+y^2\right)$$

En posant $t = x^2+y^2$, on en déduit que, puisque f est harmonique,

$$\varphi'(t) + t\varphi''(t) = 0.$$

Les solutions de cette edo sont de la forme $x \mapsto \frac{C}{x}$, $C \in \mathbb{R}$. Donc il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \geqslant 0 \quad \varphi'(t) = \frac{C}{t}$$

ou encore en intégrant, il existe $D \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \geqslant 0 \quad \varphi(t) C\ln t + D$$

en remplaçant t par x^2+y^2 l'ensemble des solutions est de la forme

$$f(x,y) = C\ln(x^2+y^2) + D.$$

16 Séance 11, C^2 et Schwarz

Exercice 1 [Difficile]

On considère l'équation de la chaleur.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, \quad t>0, \quad x \in \mathbb{R}$$

Montrer que la solution de l'équation de la chaleur est:

$$\forall (x,t) \in (0,\infty)\times\mathbb{R} \quad u(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi k t}}\exp\left(\frac{-x^2}{4kt}\right).$$

Corrigé,

Sur $(0,\infty)\times\mathbb{R}$ la fonction proposée est C^∞. De plus,

$$\forall (x,t) \in (0,\infty)\times\mathbb{R} \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{-\frac{1}{4}ktx^2}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{kt}}\right) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4kt}}\cdot k\cdot(-2kt+x^2)}{8\sqrt{\pi}\cdot(kt)^{\frac{5}{2}}}$$

et

$$\forall (x,t)\in (0,\infty)\times\mathbb{R} \quad \frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = -\frac{e^{-\frac{x^2}{4kt}}\cdot x}{4\sqrt{\pi}\cdot (kt)^{\frac{3}{2}}}$$

et enfin,

$$\forall (x,t)\in (0,\infty)\times\mathbb{R} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4kt}}\cdot(-2kt+x^2)}{8\sqrt{\pi}\cdot (kt)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{-\frac{1}{4}ktx^2}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{kt}}\right) = \frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial t}u(x,t).$$

D'où le résultat.

Exercice 2 [Difficile]

Soit $f(x,y) = \begin{cases} y^2\sin(x/y) & \text{si } y\neq 0,\\ 0 & \text{si } y=0.\end{cases}$ On pose $D=\{(x,0)\mid x\in\mathbb{R}\}$ puis $\Omega=\mathbb{R}^2\setminus D$.
Montrer que f est C^0 sur $\Omega\cup\{(0,0)\}$ on admet que $f\in C^1(\Omega\cup\{(0,0)\})$ Vérifier que $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ existent et sont différents.

Corrigé,

Soit $D=\{(x,0)\mid x\in\mathbb{R}\}$ puis $\Omega=\mathbb{R}^2\setminus D$.

- f est définie sur $\mathbb{R}^2$.
- f est de classe C^1 sur Ω en vertu de théorèmes généraux et pour $(x,y)\in\Omega$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin\left(\frac{x}{y}\right) - x\cos\left(\frac{x}{y}\right).$$

- Étudions la continuité de f en $(0,0)$. Pour $(x,y)\neq(0,0)$,

$$|f(x,y)-f(0,0)| = \begin{cases} y^2\sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y\neq 0,\\ 0 & \text{si } y=0.\end{cases}$$

Soit $\lim_{(x,y)\to(0,0)}|f(x,y)-f(0,0)| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2\sin\left(\frac{x}{y}\right)$. Comme y^2 tend vers 0 quand $(x,y)\to(0,0)$ avec sin borné par 1, alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)}|f(x,y)-f(0,0)|=0$ et donc f est continue en $(0,0)$, puis f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

- Étudions l'existence et la valeur éventuelle de $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$. Pour $x\neq 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0-0=0.$$

Donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = 0.$$

On en déduit que $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ existe et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = 0.$$

- Étudions l'existence et la valeur éventuelle de $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$. Pour $y\neq 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{y\cos(0)}{y} = 1.$$

Donc,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y}$$

tend vers 1 quand y tend vers 0. On en déduit que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \text{ existe et } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1.$$

On a montré que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \text{ existent et sont différents.}$$

Exercice 3 Montrer qu'en coordonées cartésiennes on a :

$$\text{rot}(\nabla \overrightarrow{U}) = 0,$$

avec $\overrightarrow{U} = (U_x, U_y, U_z)$ une fonction C^2.

Corrigé,

$$\begin{aligned}
\text{rot}(\nabla \overrightarrow{U}) &= \nabla \wedge (\nabla \overrightarrow{U}) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Par le théorème de Schwarz,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} = 0 \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 0 \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = 0.$$

Ce qui démontre ce qu'on veut.

Exercice 4 Soit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On admet que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Vérifier que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et sont égales.

Corrigé;

D'abord

$$\forall (x,y) \neq 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3 y}{x^2+y^2}\right) = \frac{y(x^4 + 3x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

En passant en coordonnées polaires on a,

$$\begin{aligned}
\frac{y(x^4+3x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2} &= r^5 \sin\theta \cos^2\theta(\cos^2(\theta) + 3\sin^2(\theta)) \\
&= r^5 \sin\theta \cos^2\theta(1 + 2\sin^2(\theta))
\end{aligned}$$

Donc,
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y(x^4+3x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 0.$$
f étant C^1 on a
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$$
Le même raisonnement montre que
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$
Étudions l'existence et la valeur éventuelle de $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Pour $(x,y) \neq 0$,
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 - 0 = 0.$$
Donc
$$\lim_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = 0.$$
On en déduit que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existe et
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0.$$
Étudions l'existence $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et la valeur éventuelle de ,
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = x^3$$
Donc,
$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = x^2 = 0$$
tend vers 0 quand x tend vers 0. On en déduit que
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \text{ existe et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1.$$
On a montré que
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \text{ existent et sont égales.}$$

Exercice 5 Posons
$$f(x,y) = xy \sin\frac{1}{x}$$
si $y \neq 0$ et
$$f(x,0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}^2$? f est elle C^2 sur $\mathbb{R}^2$? Etudiez f et ses potentielles dérivées partielles sur $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \neq 0\}$ et $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$

Corrigé, Etablir que la fonction f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$.

- Continuité sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ où $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \neq 0\}$. Les fonctions $(x,y) \to xy$, $(x,y) \to \frac{1}{y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ en tant que fonctions polynomiales et fonction rationnelle, et la fonction $t \to \sin(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ en tant que produit et composition de fonctions continues. - Continuité sur Δ. Soit $(a,0)$ dans Δ avec a dans $\mathbb{R}$. On a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$:

$$|f(x,y) - f(a,0)| = \left| xy \sin\left(\frac{1}{y}\right) \right| \leq |xy|,$$

mais $\lim_{(x,y)\to(a,0)} xy = 0$, donc $\lim_{(x,y)\to(a,0)} f(x,y) - f(a,0) = 0$. D'où la continuité en $(a,0)$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que f admet des dérivées partielles premières par rapport à x et par rapport à y en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tel que $y \neq 0$, et en $(0,0)$. - Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \sin\left(\frac{1}{y}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\left(\sin\left(\frac{1}{y}\right) - \frac{1}{y}\cos\left(\frac{1}{y}\right)\right).$$

- En $(0,0)$ on a $(0,0) \in \Delta$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0 \quad \text{car} \quad f(h,0) = f(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0$$

3. Il est clair que les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$. Au point $(a,0)$ on a:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,0) - f(a,0)}{h} = 0 \quad \text{car} \quad f(a+h,0) = f(0,0) = 0.$$

Donc:

$$\lim_{(x,y)\to(a,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,0)) = \lim_{(x,y)\to(a,0)} y \sin\left(\frac{1}{y}\right) = 0,$$

D'où la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ en $(a,0)$. On a $\frac{\partial f}{\partial y}(a,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(a,k)-f(a,0)}{k} = \lim_{k\to 0} a \sin\left(\frac{1}{k}\right)$. Si $a \neq 0$, cette limite n'existe pas. Si $a = 0$, on a:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0.$$

Donc:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x \sin\left(\frac{1}{y}\right) - \frac{1}{y}\cos\left(\frac{1}{y}\right)\right).$$

Pour $x_n = y_n = \frac{1}{2n\pi}$, on a:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2n\pi}\sin(2n\pi) - \frac{2n\pi\cos(2n\pi)}{2n\pi}\right) = -1 \neq 0,$$

d'où la discontinuité de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ en $(0,0)$. Ainsi, f n'est pas C^1 sur $\mathbb{R}^2$ donc elle est encore moins C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

17 Séance 12, EDP d'ordre 2

Exercice 1 Une étude des glaciers a montré que la température T à l'instant t (mesuré en jours) et à la profondeur x (mesuré en pieds) peut être modélisé par

$$T(x,t) = T_0 + T_1 e^{-\lambda x} \sin(\omega t - \lambda x),$$

où $\omega = \frac{2\pi}{365}$ et $\lambda > 0$ et $T_1 \neq 0$.

a)Après avoir justifier que $T \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ Montrer que T vérifie l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

, donner k.

Corrigé, Dès que $\lambda, \omega, T_1, T_0$ sont constantes, on a que T est C^∞ en tant que somme et produit de fonctions C^∞.

Ainsi, pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ on a :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\lambda T_1 e^{-\lambda x} \sin(\omega t - \lambda x) + \cos(\omega t - \lambda x)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \omega T_1 e^{-\lambda x} \cos(\omega t - \lambda x)$$

Puis,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 2\lambda^2 T_1 e^{-\lambda x} \cos(\omega t - \lambda x)$$

Donc la fonction T vérifie l'équation de la chaleur avec

$$k = \frac{\omega}{2\lambda^2}.$$

Exercice 2 [Beaucoup de texte à lire mais facile!]

Soit $F \in C^2\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ vérifiant

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}(u,v) = 0 \tag{22}$$

Montrer qu'il existe $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2 \quad F(u,v) = \psi(u) + \phi(v).$$

On considère l'équation des cordes vibrantes :

$$c^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(x,t) \tag{23}$$

en appliquant le changement de variable

$$(u,v) \mapsto (x + ct, x - ct)$$

montrer que ; Si F vérifie (23) alors il existe $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = \psi(x + ct) + \phi(x - ct).$$

Corrigé,

Supposons que F vérifie,

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}(u,v) = 0$$

alors en intégrant (à v fixé) par rapport à u on sait qu'il existe une fonction h qui dépend que de u telle que

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = h(v)$$

donc, en intégrant par rapport à v l'égalité précédente, il existe une fonction g qui dépend de u telle que

$$F(u,v) = H(v) + g(u)$$

où H est une primitive de h. Ainsi les fonctions cherchées sont

$$\phi = H \quad \psi = g.$$

Résolution de (23) : On pose donc $f(x,y) = F(u,v)$ avec $u = x + ct$ et $v = x - ct$. On a donc,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - 2c^2\frac{\partial F}{\partial u \partial v} + c^2\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}.$$

L'équation (23) devient alors:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0$$

d'après la question précédente on sait qu'il existe $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2 \quad F(u,v) = \psi(u) + \phi(v).$$

Ce qui s'écrit, puisque $F(u,v) = f(x,y)$,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad (F(u,v) =) f(x,y) = \psi(x+ct) + \phi(x-ct).$$

Exercice 3

$$(E) : \begin{cases} (1+t)\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in [0,1] \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, \\ u(0,x) = x. \end{cases}$$

Résoudre le problème (E) par séparation des variables.

Corrigé, Soit $\Delta := (0,\infty) \times [0,1]$ On cherche u sous la forme

$$\forall (t,x) \in \Delta \quad u(t,x) = F(t)G(x) \quad (F,G) \in C^2((0,\infty),\mathbb{R}) \times C^2([0,1],\mathbb{R}).$$

$$\begin{aligned} (1+t)\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0 &\iff (1+t)F'(t)G(u) - F(t)G''(u) = 0 \\ &\iff (1+t)\frac{F'(t)}{F(t)} = \frac{G''(u)}{G(u)} \end{aligned}$$

On a supposé que G et F ne s'annulait pas.

D'après l'exercice 1 de la séance 10, appliqué avec $g(u) = \frac{G''(u)}{G(u)}$ et $f(t) = (1+t)\frac{F'(t)}{F(t)}$, on sait qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$(1+t)\frac{F'(t)}{F(t)} = \frac{G''(u)}{G(u)} = c,$$

donc F est solution de l'équation différentielle

$$(1+t)y'(t) - cy(t) = 0. \tag{24}$$

Quant à G elle vérifie l'équation :

$$y''(u) - cy(u) = 0. \tag{25}$$

La résolution de (24) est immédiate, elle est de la forme

$$F : t \mapsto a \exp\left(c \ln\left(1+t\right)\right) = a(1+t)^c.$$

Pour (25) il faut faire plus attention en fonction du signe de c. Si $c < 0$ alors $-c > 0$ est donc on sait (penser à l'oscillateur harmonique) que les solutions sont de la forme :

$$u \mapsto A \cos \sqrt{-c}u + B \cos \sqrt{-c}u.$$

Si $c > 0$, les solutions (cf cours de première année) sont de la forme

$$u \mapsto Ae^{-\sqrt{c}u} + Be^{\sqrt{c}u},$$

si $c = 0$ les solutions de (25) sont de la forme :

$$u \mapsto A + Bu.$$

Il faut maintenant traiter les différents cas. Si $c > 0$ alors $G(u) = Ae^{-\sqrt{c}u} + Be^{\sqrt{c}u}$ mais la condition initiale en $x = 0$ impose $G(0) = 0 \iff A + B = 0$ ou encore,

$$G(u) = A \sinh \sqrt{c}u,$$

mais $u(0, x) = x = F(0)G(x)$ interdit $G(x) = A \sinh \sqrt{c}u$. Donc $c \leqslant 0$. Meme chose si $c < 0$. On en déduit donc que $c = 0$ et que les solutions G cherchées sont de la forme :

$$G : u \mapsto A + Bu.$$

La condition $G(0) = 0$ donne $A = 0, F(0) = B = 1$.

Pour résumé, nous avons montré que, si u est solution alors

$$\forall (x, t) \in \Delta \quad u(x, t) = F(0)x = x.$$

Réciproquement, u vérifie bien l'EDP de l'énoncé.

Exercice 4 [Difficile] En se ramenant par changement de variable à une équation différentielle à une variable, trouver les fonctions $u \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ qui vérifient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = 0. \tag{26}$$

Indication : Que dire de la fonction $v_y : x \mapsto u(x, y)$ définie pour tout $y \in \mathbb{R}$ fixé.

Corrigé, L'idée ici est de fixer $y \in \mathbb{R}$ et de considérer la fonction intermédiaire $v_y : x \mapsto u(x, y)$. Si u vérifie (26) alors v est solution de

$$v_y''(x) + v_y(x) = 0$$

. On sait alors qu'il existe deux constantes réelles $A(y)$ et $B(y)$ telles que,

$$v_y : x \mapsto A(y) \cos x + B(y) \sin x.$$

La solution cherchée est donc de la forme

$$u : (x, y) \mapsto A(y) \cos x + B(y) \sin x.$$

18 Séance 13, Equation de Laplace

Exercice 1 On considère l'équation de Laplace,

$$\Delta u = 0.$$

On se donne $\phi : (x, y) \mapsto ((x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$ pour $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $w := u \circ \phi$ est encore solution de l'équation de Laplace.

Corrigé,

$$\begin{aligned} x_0 &= x\cos\theta - y\sin\theta, \\ y_0 &= x\sin\theta + y\cos\theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(x,y)}{\partial x} &= \cos\theta\frac{\partial u}{\partial x_0}(x_0, y_0) + \sin\theta\frac{\partial u}{\partial y_0}(x_0, y_0), \\ \frac{\partial w(x,y)}{\partial y} &= -\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x_0}(x_0, y_0) + \cos\theta\frac{\partial u}{\partial y_0}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Les dérivées d'ordre 2 sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} &= \cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}(x_0, y_0) + 2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial y_0} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y_0^2}(x_0, y_0), \\ \frac{\partial^2 y w(x,y)}{\partial y^2} &= \sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}(x_0, y_0) - 2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial y_0} + \cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y_0^2}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Le laplacien de $w(x, y)$ est alors,

$$\begin{aligned} \Delta_{x,y} w(x,y) &= \frac{\partial^2 x w(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y w(x,y)}{\partial y^2} \\ &= \cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}(x_0, y_0) + 2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial y_0} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y_0^2}(x_0, y_0) \\ &\quad + \sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}(x_0, y_0) - 2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x_0 \partial y_0} + \cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y_0^2}(x_0, y_0) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 u}{\partial y_0^2}(x_0, y_0) \\ &= \Delta_{x_0, y_0} u(x_0, y_0) = 0. \end{aligned}$$

Ce qui montre bien que

$$\Delta_{x,y} w(x,y) = \Delta_{x_0,y_0} u(x_0, y_0) = 0.$$

Exercice 2 On considère l'équation de Laplace,

$$\Delta u = 0.$$

On se donne $\tau : (x, y) \mapsto (x - a, y - b)$ pour $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $u \circ \tau$ est encore solution de l'équation de Laplace.

Corrigé, La preuve se fait exactement de la même manière que dans l'exercice précédent.

Exercice 3 Soit $C_{a,b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \quad a < r < b, \theta \in [0, 2\pi[.\}$
Soit g une fonction de r, θ en coordonnées polaires, on suppose g invariantes par rotation. De quel argument r ou θ ne dépend-elle pas ?

Trouver toutes les fonctions g invariantes par rotations telles que :

$$\Delta g = 1$$

et g s'annule en $r = a \quad r = b$.

Rappel : En coordonnées polaires :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}$$

Bonus : Tracer $C_{1,2}$.

Corrigé, Lorsqu'on dit que g est invariante par translation, cela veut dire qu'elle ne dépend pas de θ. On cherche donc les solutions de la forme $g(r)$. Dans ce cas, d'après le rappel de l'énoncé, nous devons résoudre :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} = 1 \iff \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial g}{\partial r}\right) = r$$

Donc il existe une constant réelle A telle que

$$r\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{r^2}{2} + A \iff \frac{\partial g}{\partial r} = \frac{r}{2} + \frac{A}{r}.$$

En intégrant encore on trouve une constante B telle que

$$g(r) = \frac{r^2}{4} + A\ln r + B.$$

Finalement en prenant en compte les conditions $g(a) = g(b) = 0$ on trouve

$$g(r) = \frac{1}{4}\left(r^2 - a^2 - (b^2 - a^2)\frac{\log r - \log a}{\log b - \log a}\right).$$

Exercice 4 [Difficle] Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que $F : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2})$ vérifie
$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = 0$.

Pour cela, montrer que

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = f''(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}) + (n-1)\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} f'(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2})$$

Puis en déduire que l'équation $\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = 0$ est vérifiée si, et seulement si, f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle

$$f''(t) + (n-1)tf'(t) = 0.$$

Conclure (attention, traiter le cas $n = 2$ à part.)

Corrigé,

On calcule les dérivées partielles de F:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = x_i\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}f'(\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2})$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(\mathbf{x}) = x_i^2\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}f''(\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2})+\frac{x_1^2+\cdots+\overrightarrow{x_i}^2+\cdots+x_n^2}{(\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2})^3}f'(\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2})$$

On en déduit

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = f''(\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}) + (n-1)\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}f'(\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2})$$

Puisque $t = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$ parcourt $\mathbb{R}_+^*$ quand $(x_1,\dots,x_n)$ parcourt $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, l'équation

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = 0$$

est vérifiée si, et seulement si, f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle

$$f''(t) + (n-1)tf'(t) = 0.$$

Après résolution, on obtient:

Cas: $n \neq 2$.

$$f(t) = \lambda t^{n-2} + \mu$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Cas: $n = 2$.

$$f(t) = \lambda \ln(t) + \mu$$

avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

19 Séance 14, Différentielles totales et extremums

Exercice 1 Soit $\omega = (x^2+y^2+2x)dx + 2ydy$ une forme différentielle. Est-elle exacte ? Si non, déterminer un facteur intégrant.

Corrigé, Posons

$$P(x,y) = x^2+y^2+2x \quad Q(x,y) = 2y.$$

On voit facilement que

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

La forme ω n'est donc pas exacte.

Comme ω est définie sur $\mathbb{R}^2$, il suffit que $\psi\omega$ soit exacte pour que f existe. Maintenant, $\psi\omega$ est exacte si et seulement si

$$\frac{\partial(\psi(x)(x^2+y^2+2x))}{\partial y} = \frac{\partial(\psi(x)2y)}{\partial x}.$$

Ceci équivaut à $2y\psi(x) = 2y\psi'(x)$. Ainsi, $\psi(x) = \psi'(x)$ pour tout x. Donc $\psi(x) = ke^x$ avec k constante.

On peut choisir $k = 1$. Ainsi,

$$\psi\omega = e^x(x^2 + y^2 + 2x)dx + e^x(2y)dy.$$

On cherche ensuite f telle que :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = e^x(x^2 + y^2 + 2x) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = e^x(2y) \end{cases}$$

En intégrant la deuxième équation par rapport à y, on trouve

$$f(x, y) = e^x y^2 + c(x).$$

En dérivant cette expression par rapport à x et en égalisant avec la première équation du système, on obtient

$$e^x y^2 + c'(x) = e^x(x^2 + y^2 + 2x).$$

Ceci implique que

$$c'(x) = e^x(x^2 + 2x).$$

Il en résulte que

$$c(x) = \frac{x^3}{3}e^x + c$$

et donc que

$$f(x, y) = e^x(x^2 + y^2) + c.$$

avec c dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 Montrer que $\omega = x^3dx + y^3dy + z^3dz = A_1dx + A_2dx + A_3dx$ est exacte et trouver une primitive.

Corrigé,

On pose $\omega = x^3dx + y^3dy + z^3dz = A_1dx + A_2dx + A_3dx$. La forme différentielle ω est-elle fermée? ω est une forme différentielle sur $\mathbb{R}^3$ et on a pour $i \neq j$ dans $\{1, 2, 3\}$: $\frac{\partial A_i}{\partial x_j} = 0 = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}$, donc ω est fermée sur l'ouvert étoilé $\mathbb{R}^3$.

La forme différentielle ω est-elle exacte? ω est exacte sur U ssi il existe $F : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que: $dF = \omega(a)$ (pour a de U). Sur $\mathbb{R}^3$, cela correspond à:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = A_1(x, y, z) &\implies F(x, y) = \frac{x^4}{4} + a(y, z) \text{ (avec } a \text{ de classe } C^1) \\
\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = A_2(x, y, z) &\implies \frac{\partial a}{\partial y}(y, z) = \frac{y^4}{4} + b(z) \text{ (avec } b \text{ de classe } C^1) \\
\frac{\partial F}{\partial z}(x, y) = A_3(x, y, z) &\implies \frac{\partial b}{\partial z}(z) = \frac{z^4}{4} + c
\end{aligned}$$

Finalement, ω est bien exacte sur $\mathbb{R}^3$ et $\omega = dF$ avec $F(x, y) = \frac{x^4}{4} + \frac{y^4}{4} + \frac{z^4}{4} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

$$\text{On pose} \quad \omega = \frac{y}{x^2 + y^2}dx - \frac{x}{x^2 + y^2}dy,$$

avec $x > 0$.

On note $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x > 0\}$

La forme différentielle ω est-elle fermée sur U? Si non, trouver un facteur invariant.

Corrigé, On pose

$$A_1 = \frac{y}{x^2+y^2} \quad A_2 = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Sur U, on a pour $i \neq j$ dans $\{1,2\}$: $\dfrac{\partial A_i}{\partial x_j} = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{\partial A_j}{\partial x_i}$, donc ω est fermée sur l'ouvert étoilé U.

La forme différentielle ω est-elle exacte?

Sur $\mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = A_1(x,y) \implies F(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + a(y) \text{ (avec } a \text{ de classe } C^1 \text{ et } y \neq 0\text{) (avec } a \text{ de classe } C^1\text{)}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = A_2(x,y) \implies \frac{\partial a}{\partial y}(y) = -\frac{x}{x^2+y^2} + b(x) \text{ (avec } b \text{ de classe } C^1 \text{ et } y \neq 0\text{) (avec } b \text{ de classe } C^1\text{)}.$$

Finalement, ω est bien exacte sur U privé de l'axe des abscisses et $\omega = dF$ avec

$$F(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + C$$

avec

$$C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4 [Difficile...] Soit

$$\omega = \frac{1}{x^2y}dx - \frac{1}{xy^2}dy \quad \text{sur } (0,+\infty)^2$$

trouver un facteur intégrant non nul ne dépendant que de x^2+y^2.

Indication : On cherchera un facteur intégrant de la forme $h : (x,y) \mapsto g(x^2+y^2)$ où g est une fonction non nulle de classe C^1 sur $(0,+\infty)$.

Corrigé ,

ω est de classe C^1 sur $(0,+\infty)^2$ qui est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$. Donc ω est exacte sur $(0,+\infty)^2$ si et seulement si ω est fermée sur $(0,+\infty)^2$ d'après le théorème de SCHWARZ.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{xy^2}\right) = \frac{1}{x^2y^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2y}\right) = -\frac{1}{x^2y^2}.$$

Donc $\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{xy^2}\right) \neq \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2y}\right)$ et ω n'est pas exacte sur $(0,+\infty)^2$.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{xy^2}g(x^2+y^2)\right) = \frac{1}{x^2y^2}g(x^2+y^2) - 2\frac{y^2}{x^2+y^2}g'(x^2+y^2)$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2y}g(x^2+y^2)\right) = -\frac{1}{x^2y^2}g(x^2+y^2) + 2\frac{x^2}{x^2+y^2}g'(x^2+y^2).$$

ω est exacte sur $(0,+\infty)^2 \Leftrightarrow$ pour tout $(x,y) \in (0,+\infty)^2$,

$$\frac{1}{x^2y^2}g(x^2+y^2) - 2\frac{y^2}{x^2+y^2}g'(x^2+y^2) = -\frac{1}{x^2y^2}g(x^2+y^2) + 2\frac{x^2}{x^2+y^2}g'(x^2+y^2)$$

$$\Leftrightarrow \forall (x,y) \in (0,+\infty)^2, \frac{1}{x^2y^2}g(x^2+y^2) - \frac{x^2+y^2}{x^2y^2}g'(x^2+y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall t > 0, -tg'(t) + g(t) = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \forall t > 0, g(t) = \lambda t.$$

La forme différentielle $(x^2+y^2)\omega$ est exacte sur $(0,+\infty)^2$. De plus,

$$d\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{y} + \frac{y}{x^2}dx - \frac{x}{y^2}dy = (x^2+y^2)\omega.$$

20 Séance 15 Extremums locaux

Exercice 1 [Difficile si on ne donne pas g...] On désire fabriquer une boite ayant la forme d'un parallélépipède rectangle, sans couvercle sur le dessus. Le volume de cette boite doit être égal à $0.5m^3$ et pour optimiser la quantité de matière utilisée, on désire que la somme des aires des faces soit aussi petite que possible. Quelles dimensions doit-on choisir pour fabriquer la boite?

On admettra que la fonction à étudier est définie par :

$$g(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

sur l'ouvert $U =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

Corrigé, Notons x, y, et z les trois dimensions de la boite. Son volume est donc $xyz = 0.5$. On désire minimiser la fonction $f(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz$ (on a enlevé la face du dessus). Remplaçant z par $\frac{1}{2}xy$, on doit donc chercher le minimum de la fonction de deux variables:

$$g(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

sur l'ouvert $U =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. Les dérivées partielles de g sont:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = y - \frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = x - \frac{1}{y^2}.$$

On vérifie alors sans peine que le seul point critique de g sur l'ouvert U est $(1,1)$.

Reste maintenant à prouver que g admet bien un minimum global en $(1,1)$ sur U. Pour cela, on peut remarquer que $g(1,1) = 3$. De plus, si $x < \frac{1}{3}$ ou $y < \frac{1}{3}$, alors $g(x,y) > 3 = g(1,1)$. On en déduit que:

$$\inf\{g(x,y); (x,y) \in U\} = \inf\{g(x,y); (x,y) \in A\}$$

où $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geq \frac{1}{3} \text{ et } y \geq \frac{1}{3}\}$.

Mais de plus, si $(x,y) \in A$ vérifie $x > 3$ ou $y > 3$, alors $g(x,y) \geq 3 = g(1,1)$. On en déduit que:

$$\inf\{g(x,y); (x,y) \in U\} = \inf\{g(x,y); (x,y) \in K\}$$

où $K = [\frac{1}{3}, 3] \times [\frac{1}{3}, 3]$.

Or, K est compact et g est continue sur K, donc on sait que g admet un minimum sur K. Ce minimum sur K est aussi le minimum de g sur U. Or, g ne peut admettre qu'un minimum en un point critique. Donc g admet un minimum en $(1,1)$.

Ceci signifie que les trois dimensions sont $x = 1$, $y = 1$, et puisque $xyz = 0.5$ on en déduit que $z = \frac{1}{2}$.

Exercice 2 Étant donné un nuage de points (x_i, y_i) pour $i = 1, \ldots, n$, la droite des moindres carrés (ou droite de régression linéaire) est la droite d'équation $y = mx + p$ qui minimise la quantité

$$F(m,p) = \sum_{k=1}^{n} (y_k - mx_k - p)^2.$$

Démontrer que si (m,p) est un couple où ce minimum est atteint, alors (m,p) est solution du système

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} (y_k - mx_k - p) = 0, \\ \sum_{k=1}^{n} x_k (y_k - mx_k - p) = 0. \end{cases}$$

On note $\bar{x}$ et $\bar{y}$ les valeurs moyennes respectives de $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ et $(y_i)_{i=1,\dots,n}$.
Montrer que
$$p = \bar{y} - m\bar{x}$$
puis que si $\sum_n^{k=1}(x_k - \bar{x})^2 \neq 0$, alors il existe au plus une droite des moindres carrés, avec
$$m = \frac{\sum_n^{k=1}(x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})}{\sum_n^{k=1}(x_k - \bar{x})^2}.$$

Corrigé, Si (m, p) est un couple où ce minimum est atteint, alors (m, p):
$$\partial_m F(m,p) = 0 \iff \sum_{k=1}^{n} x_k(y_k - mx_k - p) = 0$$
et
$$\partial_p F(m,p) = 0 \iff \sum_{k=1}^{n}(y_k - mx_k - p) = 0.$$
En un point où le maximum est atteint, les équations précédentes donnent immédiatement
$$p = \bar{y} - m\bar{x}$$
et
$$m\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - x_k\bar{x}\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k(y_k - \bar{y}).$$
Pour conclure, il suffit de remarquer que
$$\sum_{k=1}^{n}(x_k^2 - x_k\bar{x}) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - n\bar{x}^2$$
et
$$\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2n\bar{x}\sum_{k=1}^{n} x_k + n\bar{x}^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - n\bar{x}^2.$$
Ainsi, si $\sum_n^{k=1}(x_k - \bar{x})^2 \neq 0$, il existe au plus un minimum, atteint pour
$$m = \frac{\sum_n^{k=1}(x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})}{\sum_n^{k=1}(x_k - \bar{x})^2} = \frac{\sum_n^{k=1}(x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})}{\sum_n^{k=1}(x_k^2 - x_k\bar{x})}.$$

Exercice 3 [Difficile] Soit C le cercle trigonométrique.
Quel est le périmètre maximal d'un triangle dont les sommets sont sur C ?
On suppose que l'un d'entre eux est $(1,0)$, et les deux autres repérés par des angles $0 < \alpha < \beta < 2\pi$. On admet que la fonction à étudier est
$$f : (\alpha, \beta) \mapsto 2(\sin(\alpha/2) + \sin(\beta - \alpha/2) + \sin(\beta/2))$$
sur l'ouvert
$$U = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \alpha < \beta < 2\pi\}.$$
Le maximum, qui existe, est alors point critique de cette fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Cela nous amène à résoudre le système

$$\begin{cases}\cos(\alpha/2)-\cos(\beta-\alpha/2)=0\\ \cos(\beta/2)+\cos(\beta-\alpha/2)=0\end{cases}$$

L'équation $\cos(\alpha/2) = \cos(\beta-\alpha/2)$ donne $\alpha/2 = \beta-\alpha/2 \pmod{2\pi}$ ou $\alpha/2 = \alpha-\beta/2 \pmod{2\pi}$.

L'alternative $\alpha/2 = \alpha-\beta/2 \pmod{2\pi}$ est à exclure et il reste $\beta = 2\alpha$ avec de plus $\alpha \in]0;\pi[$.

L'équation $\cos(\beta/2) = -\cos(\beta-\alpha/2)$ donne alors $\cos(\alpha) = -\cos(\alpha/2)$ d'où $\alpha = 2\pi/3$ puisque $\alpha \in]0;\pi[$.

Finalement, le triangle correspondant est équilatéral.

Exercice 4 [Difficle] Notons A, B, C les points définissant notre triangle et O le centre du cercle circonscrit.

En introduisant les mesures α, β, γ des angles $\angle COB$, $\angle BOA$ et $\angle AOC$.

L'aire algébrique du triangle ABC est alors

$f(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}r^2(\sin(\alpha)+\sin(\beta)-\sin(\alpha+\beta))$.

Quelle est la valeur maximal de l'aire du triangle ABC ?

Corrigé,

L'étude des points critiques de cette fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;2\pi[\times]0;2\pi[$ conduit à résoudre le système

$$\begin{cases}\cos(\alpha)=\cos(\alpha+\beta)\\ \cos(\beta)=\cos(\alpha+\beta)\end{cases}$$

dont les seules solutions dans $]0;2\pi[\times]0;2\pi[$ sont

$$(2\pi/3, 2\pi/3)$$

et

$$(4\pi/3, 4\pi/3).$$

Ce sont les situations des triangles équilatéraux respectivement direct et indirect.

L'extremum trouvé vaut

$$\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2.$$

Exercice 5 Pour chacune des fonctions suivantes, étudier leurs extremas locaux :

1. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$
2. $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + 6$

Corrigé : 1. (a) Point critiques. On a $\mathrm{d}f = (2x-y)\mathrm{d}x + (2y-x)\mathrm{d}y = 0$ donc $\mathrm{d}f = 0 \iff$

$$\begin{cases}2x-y=0\\ 2y-x=0\end{cases}$$

$\iff (x,y) = (0,0)$.

2. On a $\mathrm{d}f(x,y) = (2x+2y)\mathrm{d}x + (2x+2y)\mathrm{d}y$ donc $\mathrm{d}f(x,y) = 0 \iff x+y = 0$. Les points critiques sont de la forme $(a,-a)$. $f(x,y) - f(a,-a) = (x+y)^2 - (a-a)^2 = (x+y)^2 \geq 0$, d'où le point $(a,-a)$ présente un minimum local.

Exercice 6

Déterminer les extrema locaux des fonctions

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

suivantes :

1.
$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$$

2.
$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 1$$

On calcule les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y - 3,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 2y - 6.$$

L'annulation simultanée de ces dérivées partielles donne les points critiques. On trouve après résolution du système que seul $(0, 3)$ est un point critique de f. Posons $u = x$ et $v = y - 3$ pour se ramener en $(0, 0)$. Alors

$f(x, y) = u^2 + uv + v^2 - 9 = (u + v/2)^2 + 3v^2/4 - 9 \geq f(0, 3)$.

Ainsi, $(0, 3)$ est un minimum local, et même global, de f.

On trouve cette fois $(1, 1)$ comme unique point critique de f. En posant $u = x - 1$ et $v = y - 1$ (toujours dans l'idée de se ramener en $(0, 0)$), on a

$f(x, y) = u^2 + 2v^2 - 2uv = (u - v)^2 + v^2 \geq f(1, 1)$.

Ainsi, $(1, 1)$ est un minimum local, et même global, de f.

21 Séance 16 Fubini

Exercice 1 On pose $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x^2 + y^2 \geq 1\}$.
Calculer

$$\int\int_D \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}\, dx\, dy.$$

Corrigé,

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 \frac{xy}{(1 + x^2) + y^2}\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 \left[x^2 \ln(1 + x^2 + y^2)\right]\Bigg|_{\sqrt{1-x^2}}^{1} dx \\
&= \int_0^1 x^2 \ln(2 + x^2)\, dx - \int_0^1 x^2 \ln(2)\, dx \\
&= \frac{1}{4}\left[(2 + x^2)\ln(2 + x^2) - (2 + x^2)\right]\Bigg|_{x=0}^{x=1} - \frac{1}{4}\ln(2) \\
&= \frac{3}{4}\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Exercice 2 Calculer

$$\int_D f(x,y,z)dxdydz$$

lorsque

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad x^2+y^2+z^2 < 1\right\}$$

et

$$f(x,y,z) = \cos x.$$

Corrigé,

On a :

$$\int\int\int_D f(x,y,z)\,dxdydz = \int_{-1}^{1} \cos x\,dx \int\int_{D_x} dydz,$$

où D_x est l'intersection de D et du plan d'équation $X = x$. D_x est donc le disque défini par $y^2+z^2 < 1-x^2$, et $\int\int_{D_x} dxdydz$ est l'aire de D_x. On en déduit :

$$\int\int\int_D f(x,y,z)\,dxdydz = \pi \int_{-1}^{1} (1-x^2)\cos x\,dx = 4\pi(\sin 1 - \cos 1),$$

où le dernier calcul résulte d'une intégration par parties.

Exercice 3 Calculer

$$\int_D f(x,y,z)dxdydz$$

lorsque

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad x^2+y^2+z^2 < 1\right\}$$

et

$$f(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Corrigé, On a :

$$\int\int\int_D f(x,y,z)\,dxdydz = \int_0^a z\,dz \int\int_K \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,$$

où K est le domaine $K = \{(x,y) \in R^2; x^2+y^2 < a^2\}$. On a par passage en coordonnées polaires :

$$\int\int_K \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r\,dr = 2\pi a.$$

Puisque $\int_0^a z\,dz = \frac{a^2}{2}$, on en déduit que

$$\int\int\int_D f(x,y,z)\,dxdydz = \pi a^3.$$

Exercice 4 Calculer

$$\int\int_D f(x,y)dxdy$$

lorsque

$$f(x,y) = x$$

et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0, x-y+1 \geq 0, x+2y-4 \leq 0\}$ puis pour

$$f(x,y) = x+y$$

et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, \quad x^2 \leq y \leq x\}$.

Corrigé, Si $(x, y) \in D$, on a $y \geq 0$ et $y - 1 \leq x \leq 4 - 2y$. D'autre part, pour que cette inégalité ait un sens, on doit avoir $y - 1 \leq 4 - 2y \implies y \leq \frac{5}{3}$, et donc on a l'inégalité $0 \leq y \leq \frac{5}{3}$. On obtient donc :

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{5}{3}} \int_{y-1}^{4-2y} x\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{5}{3}} \left((4-2y)^2 - (y-1)^2\right)\,dy = \frac{275}{54}.$$

On a également :

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_x^{x^2} (x+y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_x^{x^2} dx = \int_0^1 \left(x^3 + \frac{x^4}{2} - x^2 - \frac{x^3}{2}\right) dx = \frac{3}{20}.$$

Exercice 5 [Difficile] Calculer

$$\int\int_D f(x,y)dxdy$$

lorsque

$$f(x,y) = \cos(xy)$$

et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x \leq 2, 0 \leq xy \leq \frac{\pi}{2}\}$ puis lorsque

$$f(x,y) = xy$$

et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, xy + x + y \leq 1\}$.

Indication : On admettra la décomposition en élément simple de la fraction rationnelle :

$$\frac{x(1-x)^2}{(1+x)^2} = \frac{x-4}{(1+x)^2} + \frac{8}{1+x} - 4$$

Corrigé, On déduit de la définition de D l'inégalité $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}x$, et on obtient :

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{2x}} \cos(xy)\,dy\,dx = \int_1^2 \left[\frac{1}{x}\sin(xy)\right]_0^{\frac{\pi}{2x}} dx = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln(2).$$

Le domaine s'écrit $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y(1 + x) \leq 1 - x \implies y \leq \frac{1-x}{1+x}$. Puisqu'il est nécessaire que $1 - x \geq 0$, on a forcément $x \leq 1$. On en déduit :

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{\frac{1-x}{1+x}} xy\,dy\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 dx$$

On décompose la fraction en éléments simples :

$$\frac{x(1-x)^2}{(1+x)^2} = \frac{x-4}{(1+x)^2} + \frac{8}{1+x} - 4$$

On trouve :

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - 4x + 8\ln(1+x) + 4\frac{1}{1+x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 4 + 8\ln(2) + 2 - 4\right) = 4\ln(2) - \frac{11}{4}.$$

22 Séance 17, Changements de variables

Exercice 1 Soit D le domaine :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 1 \text{ et } x^2 \leq y \leq 4 - x^3\}.$$

Calculer l'aire de D revient à calculer l'intégrale double définie par :

$$\text{Aire}(D) = \iint_D 1 \, dxdy.$$

Corrigé, Il suffit de raisonner par intégrations successives, en remarquant que, si $-1 \leq x \leq 1$, on a $x^2 \leq 4 - x^3$. On a donc :

$$\text{aire}(D) = \int_{-1}^{1} \int_{4-x^3}^{x^2} dydx = \int_{-1}^{1} (4 - x^3 - x^2)dx.$$

En effectuant les calculs, on trouve :

$$\text{aire}(D) = \left[\frac{4x - x^4}{4 - x^3}\right]_{-1}^{1} = \frac{22}{3}.$$

Exercice 2 [Difficile] Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y < 2x, x < y^2 < 2x\}$. Calculer

$$\iint_D \frac{y}{x} dxdy$$

en utilisant le changement de variables $u = \frac{x}{y}$ et $v = \frac{y^2}{x}$.
Corrigé, On commence par exprimer x et y en fonction de u et de v. En effet, on a

$$\begin{cases} u = \frac{x}{y} \\ v = \frac{y^2}{x} \end{cases}$$

De plus, on a $x < y < 2x \iff \frac{u}{2} < 1 < u$ et $x < \frac{y^2}{2} < 2x \iff 1 < v < 2$. Ainsi, l'application $\phi(u, v) : \left]\frac{1}{2}, 1\right[\times]1, 2[\to D$, $(u, v) \mapsto (u^2v, uv)$ est bien une bijection de classe C^1. Sa matrice jacobienne en (u, v) est $\begin{pmatrix} 2uv & u^2v \\ u & v \end{pmatrix}$. Son déterminant vaut u^2v, qui ne s'annule pas. En notant $D' = \left]\frac{1}{2}, 1\right[\times]1, 2[$, la formule du changement de variables nous dit que

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D'} f(\phi(u, v))u^2vdudv.$$

En appliquant ceci à la fonction $f(x, y) = \frac{y}{x}$, on trouve

$$\iint_D \frac{y}{x} dxdy = \iint_{D'} \frac{u}{v} dudv.$$

Comme le domaine D' est un carré, ceci se calcule par intégration successive, et on a

$$\iint_D \frac{y}{x} dxdy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\int_{1}^{2} \frac{u}{v} dv\right) du = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{3}{2} udu = \frac{9}{16}.$$

Exercice 3 Soit l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$.

Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-1, +\infty[$, on a : $\ln(1 + x) = \int_0^x \frac{dy}{1+xy}$.

En déduire que $I=\iint_D \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}dxdy$, où D est le pavé $[0,1]^2$.

En intervertissant les rôles de x et y, montrer que $2I=\iint_D \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy$.

En déduire que $I=\frac{\pi}{8}\ln(2)$.

Corrigé, La première partie est un simple calcul d'intégrale de la forme $\frac{u'(y)}{u(y)}$. Pour la seconde, on a :

$$\iint_D \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}dxdy=\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\left(\int_0^x \frac{y}{1+xy}dy\right)dx,$$

ce qui donne le résultat.

D est invariant par symétrie par rapport à la première bissectrice. Par conséquent, pour toute fonction continue sur D, on a :

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D f(y,x)dxdy.$$

Il en résulte que $I=\iint_D \frac{y}{(1+y^2)(1+xy)}dxdy$.

On a donc, en sommant les deux expressions donnant I :

$$2I=\iint_D (x+y)\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\left(\frac{1}{1+y^2}\right)dxdy=\iint_D \frac{(x+y)}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy.$$

Il suffit maintenant de calculer cette dernière intégrale double. Or, on a :

$$\iint_D x\frac{dx}{1+x^2}\frac{dy}{1+y^2}=\left(\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx\right)\left(\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2}\right)=\left[\frac{\ln(1+x^2)}{2}\right]_0^1\times[\arctan(y)]_0^1=\frac{\pi}{8}\ln(2).$$

Le même résultat est valide pour la partie en y (par symétrie), et on a bien $I=\frac{\pi}{8}\ln(2)$.

Exercice 4 Déterminer le volume intérieur à l'ellipsoide d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

où a, b et c désignent trois réels strictement positifs. Penser à effectuer le changement de variables $x=au$, $y=bv$, $z=cw$.

Corrigé, On effectue le changement de variables $x=au$, $y=bv$, $z=cw$. On note E (l'intérieur de) l'ellipsoide. Il est clair que : $(x,y,z)\in E \iff u^2+v^2+w^2\leq 1 \iff (u,v,w)\in B$, où B désigne la boule unité. La matrice jacobienne du changement de variables étant diagonale et constante, les termes sur la diagonale valant a, b et c. La formule du changement de variables donne :

$$\iiint_E dx\,dy\,dz=\iiint_B abc\,du\,dv\,dw=abc\iiint_B du\,dv\,dw.$$

La dernière intégrale vaut le volume de la boule unité, c'est-à-dire $\frac{4\pi}{3}$. Le volume de l'ellipsoïde est donc :

$$\frac{4abc\pi}{3}.$$

Exercice 5 [Difficile] On suppose pour simplifier que l'axe (Oz) est axe de symétrie de la demi-boule, et que le plan de coupe est le plan (xOy) . Par symétrie, le centre de gravité est sur l'axe (Oz). Déterminer le centre de gravité d'une demi-boule homogène de rayon R. On rappelle que le centre de gravité, noté z_G est donné par :

$$z_G = \frac{1}{Volume(B)} \iiint_B z dx dy dz.$$

On ne demande pas de recalculer le volume d'une boule, vous devez connaître la formule. Penser à faire un changement de coordonnées sphérique.

Corrigé,

On va alors passer en coordonnées sphériques, en posant

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\phi \\ y = r \sin\theta \sin\phi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

Le cas où (x, y, z) est dans la demi-boule correspond à $0 \leq r \leq R$, $-\pi \leq \phi \leq \pi$, et $0 \leq \theta \leq \pi/2$. La formule du changement de variables en coordonnées sphériques donne alors :

$$\iiint_B z\, dx\, dy\, dz = \int_{\phi=-\pi}^{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{R} r^3 \cos\theta \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= \int_{\phi=-\pi}^{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R \sin(2\theta)\, d\theta\, d\phi = \frac{R^4}{16} \int_{\phi=-\pi}^{\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin(2\theta)\, d\theta\, d\phi$$

$$= \frac{R^4}{8} \int_{\phi=-\pi}^{\pi} \left[-\frac{1}{2}\cos(2\theta)\right]_{\theta=0}^{\pi/2} d\phi = \frac{\pi R^4}{8}.$$

Puisque le volume de la demi-boule vaut $\frac{2}{3}\pi R^3$, on en déduit :

$$z_G = \frac{3R}{8}.$$

23 Séance 18, Intégrales Curvilignes

Exercice 1 On considère l'arc Γ, arc d'hélice paramétré et orienté par :

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = ht,$$

pour t variant de 0 à 2π. Calculer :

$$I = \int_\Gamma (y - z)\, dx + (z - x)\, dy + (x - y)\, dz.$$

Corrigé, On applique simplement la définition :

$$I = \int_0^{2\pi} (y(t) - z(t))x'(t) + (z(t) - x(t))y'(t) + (x(t) - y(t))z'(t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} + ht(\cos t + \sin t) + h(\cos t - \sin t)\right) dt$$

$$= -2\pi(h + 1).$$

Exercice 2 Calculer l'intégrale curviligne :

$$\int_\gamma y^2\, dx + x^2\, dy$$

lorsque γ est la courbe d'équation $x^2 + y^2 - ay = 0$, orientée dans le sens trigonométrique.

On montrera d'abord que l'équation de γ s'écrit encore :

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

On utilisera le paramétrage : On le paramètre en posant $x = \frac{a\cos(\theta)}{2}$ et $y = \frac{a}{2} + \frac{a\sin(\theta)}{2}$.
Corrigé, Il faut commencer par paramétrer γ. Remarquons que l'équation de γ s'écrit encore :

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

On reconnaît le cercle de centre $(0, a/2)$ et de rayon $a/2$. On le paramètre en posant $x = \frac{a\cos(\theta)}{2}$ et $y = \frac{a}{2} + \frac{a\sin(\theta)}{2}$. On a alors :

$$\int_\gamma y^2dx + x^2dy = \int_0^{2\pi} \left((a^2 + a^2\sin(\theta))^2 \left(-a^2\sin(\theta)\right) + \frac{a^2}{4}\cos^2(\theta)(a^2\cos(\theta))\right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{a^3\sin^2(\theta)}{4}d\theta = -\frac{a^3\pi}{4}.$$

Exercice 3 Calculer l'intégrale curviligne :

$$\int_\gamma y^2\,dx + x^2\,dy$$

lorsque γ est la courbe d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} = 0$$

orienté dans le sens trigonométrique.
Montrer que γ s'écrit :

$$(x-a)^2\frac{1}{a^2} + (y-b)^2\frac{1}{b^2} = 2.$$

où :

$$x = a\left(1 + \sqrt{2}\cos(\theta)\right), \quad y = b\left(1 + \sqrt{2}\sin(\theta)\right).$$

Corrigé,
Une autre équation de γ est :

$$(x-a)^2\frac{1}{a^2} + (y-b)^2\frac{1}{b^2} = 2.$$

On reconnaît l'équation d'une ellipse, qu'on paramètre en posant :

$$x = a\left(1 + \sqrt{2}\cos(\theta)\right), \quad y = b\left(1 + \sqrt{2}\sin(\theta)\right).$$

On a alors :

$$\int_\gamma y^2dx + x^2dy = \int_0^{2\pi} b^2\left(1 + \sqrt{2}\sin(\theta)\right)^2\left(-a\sqrt{2}\sin(\theta)\right) + a^2\left(1 + \sqrt{2}\cos(\theta)\right)^2\left(b\sqrt{2}\cos(\theta)\right)d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} -4ab^2\sin^2(\theta) + 4a^2b\cos^2(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} -4ab^2\sin^2(\theta) + 4a^2b\cos^2(\theta)d\theta = -4ab^2\pi + 4a^2b\pi = 4ab\pi(a-b).$$

Exercice 4 [Difficile] Calculer l'intégrale curviligne de $\omega = ydx + 2xdy$ sur le contour du domaine défini par :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 2y \leq 0 \end{cases}$$

parcouru une fois en sens direct.

Montrer que les deux domaines sont des disques puis on utilisera le paramétrage :

$$C_1 : \quad \begin{cases} x = \cos t \\ y = 1 + \sin t \end{cases}, \quad \text{pour } t \text{ allant de } -\frac{\pi}{2} \text{ à } 0,$$

$$C_2 : \quad \begin{cases} x = 1 + \cos u \\ y = \sin u \end{cases}, \quad \text{pour } u \text{ allant de } \frac{\pi}{2} \text{ à } \pi.$$

Corrigé, Les deux domaines sont des disques. En effet,

$$x^2 + y^2 - 2x = x^2 + y^2 - 2x + 1 - 1 = (x-1)^2 + y^2 - 1$$

donc,

$$x^2 + y^2 - 2x < 0 \iff (x-1)^2 + y^2 - 1 < 0.$$

Même chose pour l'autre équation, on trouve

$$(y-1)^2 + x^2 - 1 < 0$$

que l'on paramètre en utilisant les coordonnées polaires par rapport au centre. Les points d'intersection des cercles étant $(0,0)$ et $(1,1)$, le contour est la réunion de :

$$C_1 : \quad \begin{cases} x = \cos t \\ y = 1 + \sin t \end{cases}, \quad \text{pour } t \text{ allant de } -\frac{\pi}{2} \text{ à } 0,$$

$$C_2 : \quad \begin{cases} x = 1 + \cos u \\ y = \sin u \end{cases}, \quad \text{pour } u \text{ allant de } \frac{\pi}{2} \text{ à } \pi.$$

On intègre ensuite :

$$\int_C \omega = \int_{C_1} \omega + \int_{C_2} \omega = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left(-((1+\sin t)\sin t + 2\cos^2 t)\right) dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(-\sin^2 u + 2(1+\cos u)\cos u\right) du = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Exercice 5 [Difficile] Calculer l'intégrale curviligne de $\omega = x^2 dx - xy dy$ le long des contours suivants : 1. Le segment de droite $[O,B]$ de $O(0,0)$ vers $B(1,1)$. 2. L'arc de parabole $x = y^2$, $0 \le x \le 1$, orienté dans le sens des x croissants.

Que peut-on en déduire pour la forme différentielle ω? Retrouver cela par une autre méthode.

Indication: Les calculs sont directs, en paramétrant le segment par $y = x$, $0 \le x \le 1$, et la parabole est déjà paramétrée. La forme différentielle peut-elle être exacte? Est-elle fermée?

Corrigé: On paramètre le segment en posant $y = x$, $0 \le x \le 1$. On a donc:

$$\int_{C_1} \omega = \int_0^1 (x^2 - x^2) dx = 0.$$

Un paramétrage de la parabole est déjà donné dans l'énoncé. On a:

$$\int_{C_2} \omega = \int_0^1 (2y^5 - y^3) dy = \frac{1}{12}.$$

Les deux contours précédents ont même origine et même extrémité. La forme différentielle ω ne peut donc pas être exacte, sinon son intégrale curviligne ne dépendrait pas du chemin choisi. On peut également vérifier que ω n'est pas exacte en vérifiant qu'elle n'est pas fermée. En effet, en posant $P(x,y) = x^2$ et $Q(x,y) = -xy$, on a:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -y.$$

Les dérivées partielles croisées ne sont pas égales.

24 Séance 19, Circulation d'un champ de vecteurs.

Exercice 1 Soit $V(x,y) = (-\frac{y}{y^2+x^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ un champ de vecteurs. Calculer sa circulation le long du cercle de centre O et de rayon R.

Corrigé, On paramètre le cercle par $x(t) = R\cos t$ et $y(t) = R\sin t$, où t décrit l'intervalle $[-\pi, \pi]$. On a :

$$V(x(t), y(t)) = \left(-\frac{\sin t}{R}, \frac{\cos t}{R}\right),$$

tandis que

$$(x'(t), y'(t)) = (-R\sin t, R\cos t).$$

On a donc :

$$\int_C \vec{V} \cdot d\vec{M} = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t + \cos^2 t \, dt = 2\pi.$$

Exercice 2 Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé, et $\vec{F}$ le champ de vecteurs :

$\vec{F}(x,y,z) = (x+z)\vec{i} - 3xy\vec{j} + x^2\vec{k}$.

Calculer la circulation de ce champ de vecteurs entre les points $O(0,0,0)$ et $P(1,2,-1)$ le long du chemin suivant :

$\Gamma_1 : \begin{cases} x = t^2, \\ y = 2t, \\ z = -t. \end{cases}$ Puis pour le segment $[O, P]$.

Par définiton de la circulation on a,

$$\int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot \overline{dM} = \int_0^1 \left((t^2 - t) \times 2t - 3t^2 \times 2t \times 2 + t^4 \times (-1)\right) dt = \int_0^1 (-t^4 - 10t^3 - 2t^2) dt$$

$$= -\left[\frac{t^5}{5} + \frac{5}{2}t^2 + \frac{2}{3}t^3\right]_0^1 = -\frac{101}{30}.$$

Le segment de droite [O,P] se paramètre en :

$$(t, 2t, -t).$$

On a donc :

$$\int_{[O,P]} \vec{F} \cdot \overline{dM} = \int_0^1 \left((t-t) - 12t^2 - t^2\right) dt = \int_0^1 (-13t^2) dt = -\frac{13}{3}.$$

Exercice 3 Calculer la circulation du champ vectoriel $\vec{F}$ le long de la courbe (C) dans les cas suivants:

$\vec{F} = (-y, x)$ et (C) est la demi-ellipse $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \leq t \leq \pi$, parcouru dans le sens direct.

Corrigé, On a :

$$\int_{(C)} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dM} = \int_0^{\pi} \left(ab\cos^2 t + ab\sin^2 t\right) dt = \pi ab.$$

Exercice 4 Soit

$$\overrightarrow{F(x,y)} = (3x, x+y)$$

une force agissant sur une particule $M = (x, y)$. Calculer le travail de cette force le long du cercle C de centre O et de rayon 1, parcouru dans le sens direct.

Corrigé, Mathématiquement, on considère : $\omega = 3xdx + (x + y)dy$ la forme différentielle naturellement associée à $\vec{V}(x, y)$ et considérons $x = \cos t$ et $y = \sin t$ comme paramétrage du cercle de centre O et de rayon 1 (avec $t \in [0, 2\pi]$). Il s'ensuit que la circulation $\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{l}$ n'est autre que :

$$\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{l} = \oint_C \omega = \int_0^{2\pi} (3\cos t(-\sin t) + (\cos t + \sin t)\cos t)dt.$$

Comme $\cos^2 t = \frac{\cos(2t)+1}{2}$, on obtient :

$$\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} (-2\sin t\cos t + \frac{\cos(2t) + 1}{2})dt = \left[\cos^2 t + \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi.$$

Exercice 5 [Difficile] Calculer le travail W de la force $\vec{F}(x, y, z) = (yz, zx, xy)$ le long de l'hélice H paramétrée par $x = \cos t$, $y = \sin t$, et $z = t$ où t varie de 0 à $\frac{\pi}{4}$.

Indication :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \cos 2t = \cos^2(t) - \sin^2(t).$$

Corrigé,

Notons $\omega = yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz$ la forme différentielle associée à $\vec{F}(x, y, z)$. Par définition de W, on a $W = \int_H \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_H \omega$. D'après le paramétrage donné pour H, on a :

$$W = \int_0^{\frac{\pi}{4}} yz\,dx + zxdy + xy\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \big((\sin t)t(-\sin t) + t\cos^2 t + \cos t\sin t\big)\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (t\cos(2t) + \cos t\sin t)dt.$$

On a utilisé ici la formule trigonométrique : $\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t$. En faisant une intégration par parties, on constate que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\cos(2t)\,dt = \left[\frac{t\sin(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2t)}{2}\,dt.$$

On en déduit que :

$$W = \left[\frac{t\sin(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4}\left[\cos(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\left[\sin^2(t)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

25 Séance 20, Green-Riemann

Exercice 1 Soit $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 1\}$. Soit γ son bord orienté, et ω la forme différentielle : $\omega = xy^2\,dx + 2xy\,dy$.

Calculer $\int_\gamma \omega$: 1. En utilisant un paramétrage de γ. 2. En utilisant la formule de Green-Riemann.

Corrigé,

Le bord de K peut être partagé en 3 parties :

$$C_1 = \{(t, 0); t \text{ va de } 0 \text{ à } 1\},$$

$$C_2 = \{(\cos t, \sin t); t \text{ va de } 0 \text{ à } \frac{\pi}{2}\},$$
$$C_3 = \{(0,t); t \text{ va de } 1 \text{ à } 0\}.$$

Il est facile de vérifier que l'intégrale de ω le long de C_1 ou de C_3 est nulle, puisque x ou y est nul et que ω fait toujours intervenir un produit xy. On a donc :

$$I = \int_\gamma \omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t(\sin t)^2(-\sin t) + 2(\cos t)^2 \sin t\, dt.$$

On remarque ensuite qu'une primitive de $-\cos t(\sin t)^3$ est $-(\sin t)^4/4$ et qu'une primitive de $\sin t(\cos t)^2$ est $-(\cos t)^3/3$. On a donc

$$I = \left[-(\sin t)^4/4 - 2(\cos t)^3/3\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{5}{12}.$$

On a : $P(x,y) = xy^2$ et $Q(x,y) = 2xy$. D'après la formule de Green-Riemann :

$$\int_\gamma \omega = \int\int_K (2y - 2xy)\, dx\, dy.$$

On calcule cette dernière intégrale en passant en coordonnées polaires : $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. On a $(x,y) \in K \iff 0 \le r \le 1$ et $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. D'où :

$$I = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2r\sin\theta - 2r^2\sin\theta\cos\theta) r\, d\theta\, dr = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2r^2\sin\theta - r^3\sin^2\theta)\, d\theta\, dr = \int_0^1 (2r^2 - r^3)\, dr = \frac{5}{12}.$$

Exercice 2 Calculer l'aire du domaine délimité par les axes (Ox), (Oy) et la courbe paramétrée $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
Corrigé, D'après la formule de Green-Riemann, si γ est le bord orienté du domaine, on a :

$$A = \frac{1}{2}\int_\gamma x\, dy - y\, dx.$$

On calcule ensuite l'intégrale d'une forme différentielle de la façon habituelle :

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos^3 t \cdot (3a\cos t\sin^2 t) - a\sin^3 t \cdot (-3a\sin t\cos^2 t)\, dt$$
$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t\, dt.$$

Pour calculer cette dernière intégrale, on peut factoriser par $\cos^2 t\sin^2 t$ pour trouver

$$A = \frac{3a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\sin^2 t.$$

Utilisant des formules de trigonométrie, on a alors

$$A = \frac{3a^2}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(2t))^2\, dt = \frac{3a^2}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(4t))\, dt$$
$$= \frac{3a^2\pi}{32}.$$

L'aire recherchée est donc
$$\frac{3a^2\pi}{32}$$
unités d'aire.

Exercice 3 [Difficile] Calculer
$$\int_\gamma zdx + xdy + ydz$$
où γ est le cercle défini par $x + z = 1$ et $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, avec une orientation que l'on choisira. On pensera à paramétrer le cercle en introduisant $z = x - 1$ dans la seconde équation.

Corrigé, Toute la difficulté consiste à paramétrer le cercle. On introduit $z = 1 - x$ dans la seconde équation. On obtient, après simplifications d'usages:
$$4(x - \frac{1}{2})^2 + 2y^2 = 1.$$
Le cercle se paramétrise alors en :
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\theta \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta \\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\theta \end{cases} \quad \text{, avec } \theta \in [0, 2\pi].$$
On obtient :
$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\theta\right)\left(-\frac{1}{2}\sin\theta\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\theta\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\frac{1}{2}\sin\theta d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\sqrt{2}}(\cos^2\theta + \sin^2\theta)d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Exercice 4 Calculer par deux méthodes différentes : $I = \iint_D xy\,dx\,dy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0; y > 0; x + y \leq 1\}$.

Corrigé, On rapporte le plan à un repère orthonormé direct d'origine O. D'après la formule de Green-Riemann, en choisissant de prendre $P = 0$ et $Q = x^2y$ de sorte que $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = xy$, on obtient :
$$I = \iint_D xy\,dxdy = \int_T x^2y\,dy$$
où l'on a noté T le triangle OAB orienté dans le sens direct avec $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ et $B(1, 1)$. Ainsi,
$$I = \iint_D xy\,dxdy = \int_{OA} x^2y\,dy + \int_{AB} x^2y\,dy + \int_{BO} x^2y\,dy.$$
L'intégrale curviligne d'une forme différentielle sur un chemin est indépendante du paramétrage choisi pour ce chemin. Pour le calcul, nous choisissons de paramétrer $\overline{OA}$ par $x = t$ et $y = 0$ avec t variant de 0 à 1, et ainsi $\int_{OA} x^2y\,dy = 0$. De même, nous choisissons de paramétrer $\overline{BO}$ par $x = 0$ et $y = t$ avec t variant de 1 à 0, et ainsi $\int_{BO} x^2y\,dy = 0$. Enfin, nous choisissons de paramétrer $\overline{AB}$ par $x = t$ et $y = 1 - t$ avec t allant de 1 à 0, et donc :
$$I = \iint_D xy\,dxdy = \int_{AB} x^2y\,dy = \int_0^1 t^2(1 - t)^2\,(-dt) = \frac{1}{24}.$$
On peut aussi calculer directement l'intégrale double sans utiliser la formule de Green-Riemann :
$$\iint_D xy\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} xy\,dy\right) dx = \int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 x\left(\frac{1-x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{24}.$$

26 Séance 21, Intégrales de Surfaces

Exercice 1 Calculer le flux du champ de vecteurs $w(x,y,z) = (x,y,0)$ à travers la sphère unité orientée par la normale rentrante.

Corrigé, Comme les coordonnées latitude-longitude déterminent la normale rentrante, on a :

$$\overrightarrow{w}(\overrightarrow{s}(\theta,\varphi)) \cdot \left(\frac{\partial \overrightarrow{s}}{\partial \theta}(\theta,\varphi) \wedge \frac{\partial \overrightarrow{s}}{\partial \varphi}(\theta,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cos^2\theta\cos\varphi \\ -\cos^2\theta\sin\varphi \\ -\cos\theta\sin\theta \end{pmatrix} = -\cos^3\theta,$$

et on intègre :

$$\text{flux}(\overrightarrow{w}, S) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\cos^3\theta \, d\theta \, d\varphi = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{3}{4}\cos\theta - \frac{1}{4}\cos(3\theta)\right) d\theta = 2\pi \left[\frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{12}\sin(3\theta)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{8\pi}{3}.$$

Le signe moins provient du fait que la normale rentrante fait un angle obtus avec $\overrightarrow{w}$.

Exercice 2 [Difficile] Soit S la surface définie par l'équation du $x^2+y^2 = 1$, avec $0 \leq z \leq 1$. Dessiner la surface puis calculer le flux de $\overrightarrow{V} = xz\overrightarrow{i} + yz\overrightarrow{j} + z^2\overrightarrow{k}$ sortant à travers S.

Corrigé, Calculons à présent le flux sortant de

$$\overrightarrow{V} = xz\overrightarrow{i} + yz\overrightarrow{j} + z^2\overrightarrow{k}$$

à travers S : $\phi = \iint_{S_1+S_2+S_3} \overrightarrow{V} \cdot d\overrightarrow{S} = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$

S_1: pas de flux car $\overrightarrow{n} = -\overrightarrow{k}$, donc $\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{n} = -z^2$ mais $z = 0$ en S_1 donc $\phi_1 = 0$.

S_2: $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{k}$ donc $\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{n} = z^2$ et $z = 1$ en S_2. Donc $\phi_2 = \iint_{S_2} dS = S_2 = \pi R^2 = \pi$ car $R = 1$.

S_3: on paramétrise en utilisant les coordonnées cylindriques: $\begin{cases} x = \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$ donc $\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{n} =$ $(\cos(\theta)z\overrightarrow{i} + \sin(\theta)z\overrightarrow{j} + z^2\overrightarrow{k}) \cdot (\cos(\theta)\overrightarrow{i} + \sin(\theta)\overrightarrow{j}) = \cos^2(\theta)z + \sin^2(\theta)z = z$ pour finir: $\phi_3 = \iint_{S_3} zd\theta dz = 2\pi\int_0^1 zdz = 2\pi\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1 = \pi$ Pour conclure: $\phi = 2\pi$.

Exercice 3 Soit $\overrightarrow{V}$ le champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ défini par $\overrightarrow{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xz \\ z \\ -\frac{z^2}{2} \end{pmatrix}$. Soit Σ la surface définie par l'équation $z = x^2 + y^2$, $z \leq 1$, avec un champ de vecteurs normaux étant orientée vers les z croissants. Calculer le flux du champ $\overrightarrow{V}$ à travers la surface orientée.

Corrigé, $V(x,y,f(x,y)) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ 1 \end{pmatrix} = -2x^2(x^2+y^2) - 2y(x^2+y^2) - \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2$

On passe en coordonnées polaires : $x = \rho\cos(\theta)$ $y = \rho\sin(\theta)$ avec $(\rho,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi]$.

$\iint_{\Sigma^+} V \cdot d\sigma = \int_0^1\int_0^{2\pi}\left(-2\rho^4\cos^2(\theta) - 2\rho^3\sin(\theta) - \frac{\rho^4}{2}\right)\rho \, d\rho \, d\theta$

$= \int_0^1\int_0^{2\pi}\left(-2\rho^5\cos^2(\theta) - 2\rho^4\sin(\theta) - \frac{\rho^5}{2}\right) d\rho \, d\theta$

$= \int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{3}\cos^3(\theta) - \frac{2}{5}\sin(\theta) - \frac{1}{12}\right) d\theta$

$= -\frac{\pi}{2}$

Exercice 4 Calculer le flux du champ

$$\vec{V} = x\overrightarrow{i} + z\overrightarrow{j} + y\overrightarrow{k}$$

suivant à travers la surface paramétrée par :

$$f(u,v) = (u, v, uv) \quad \forall (u,v) \in [0,1]^2.$$

On a $\vec{V} = \langle u\overrightarrow{i} + uv\overrightarrow{j} + v\overrightarrow{k}\rangle$ et $\vec{n}(u,v) = \frac{\partial \vec{f}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial v} = v\overrightarrow{i} + u\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$. Donc le flux de $\vec{V}$ à travers S vaut :

$$\iint_S \vec{V}\cdot d\vec{S} = \iint_{D_{uv}} \vec{V}\cdot\vec{n}\, dudv = \int_0^1\int_0^1 (u^2v+uv^2+v)\, dudv = \left[\frac{1}{3}u^3v + \frac{1}{3}uv^3 + v^2\right]_0^1 = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+1-0-0-0 = \frac{5}{3}.$$

27 Séance 22, Stokes,Ostrogradski

Exercice 1 a) Soient le cône Σ_1 paramétrisé par

$$\Phi_1 : (\theta, z) \in [0, 2\pi] \times [0,1] \mapsto \begin{pmatrix} x = z\cos(\theta) & y = z\sin(\theta) & z = z \end{pmatrix}$$

et Γ_1^+ son bord orienté dans le sens trigonométrique.
Déterminer une normale de Σ_1^+.
Soit V le champ de vecteur défini par

$$V(x,y,z) = (yz, -xz, 0).$$

Déterminer le flux de rot, V à travers Σ_1^+.
Corrigé, De par la paramétrisation Φ_1, un vecteur normal est

$$\overrightarrow{n}_1 = \begin{pmatrix} -z\sin(\theta) & z\cos(\theta) & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z\cos(\theta) & z\sin(\theta) & -z \end{pmatrix}.$$

On a

$$\int_{\Gamma_1^+} V(\gamma(\theta)) \cdot \gamma'(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} (-\sin(\theta)\sin(\theta) - \cos(\theta)\cos(\theta))\, d\theta = -2\pi.$$

$$\mathrm{rot} V = \begin{pmatrix} x & y & -2z \end{pmatrix}.$$

En appliquant la formule de Stokes (2.6) (avec le signe $-$) car incompatibilité de l'orientation, on obtient

$$\int_{\Sigma_1^+} \mathrm{rot} V \cdot d\sigma = -\int_{\Gamma_1^+} V(\gamma(\theta)), d\theta = 2\pi.$$

Exercice 2 On considère l'intégrale $\int_C (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$, où C est le cercle d'équations

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = R^2 \\ x+y+z = 0 \end{cases}$$

Calculer cette intégrale en appliquant la formule de Stokes et par un calcul direct.
Corrigé; On a d'une part $\int_C (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz = \text{circulation}(V, \overrightarrow{C})$ où $\overrightarrow{V} = (y+z)\overrightarrow{i} + (z+x)\overrightarrow{j} + (x+y)\overrightarrow{k}$, et d'autre part $\nabla \times \overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y+z \\ z+x \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Comme $\partial S = \overrightarrow{C}$, la formule de Stokes nous donne: $\int_C (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz = \text{Circulation}(V, \overrightarrow{C}) = \text{flux}(\nabla \times \overrightarrow{V}, \overrightarrow{S}) = 0.$

2. La forme $\omega = (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$ est exacte, car elle est définie sur $\mathbb{R}^3$ qui est étoilé et $\frac{\partial(y+z)}{\partial y} = 1 = \frac{\partial(z+x)}{\partial x}$, $\frac{\partial(z+x)}{\partial z} = 1 = \frac{\partial(x+y)}{\partial y}$ et $\frac{\partial(y+z)}{\partial z} = 1 = \frac{\partial(x+y)}{\partial x}$ d'où $\int_C (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz = 0$, on retrouve ainsi le résultat en 1.

Exercice 3 [Difficile]

On définit $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$.

Le champ de vecteurs $\overrightarrow{V} = (z,x,y)$.

Que vaut

$$\iiint_V \mathrm{div}\overrightarrow{V}\, dxdydz$$

?

Retrouver ce résultat en utilisant le théorème d'Ostrogradski.

On utilisera la paramétrisation suivante :

$$\begin{cases} x = R\cos\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\cos\varphi \\ z = R\sin\varphi \end{cases}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Corrigé,

$$\mathrm{div}\overrightarrow{V} = 0,$$

donc

$$\iiint_V \mathrm{div}\overrightarrow{V}\, dxdydz = 0.$$

Retrouvons ce résultat en calculant le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers la sphère S de centre O et de rayon R.

Une paramétrisation de S est :

$$\begin{cases} x = R\cos\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\cos\varphi \\ z = R\sin\varphi \end{cases}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Un vecteur normal est $\overrightarrow{n} = \left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R}\right)$.

On a donc : $\overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{n} = \frac{xz+xy+zy}{R} = R(\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi + \cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\varphi\sin\varphi)$.

D'où : $\Phi_S(\overrightarrow{V}) = R^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi + \cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\varphi\sin\varphi)\cos\varphi d\theta d\varphi$.

Or, $\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta = \int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta d\theta = \int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta = 0$,

donc on retrouve bien que le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers S est nul.

Exercice 4 Soit $\vec{V} = (2xy^2 - y)\vec{\imath} + (2x^2y - x)\vec{\jmath}$ un champ de vecteur dans le plan, qu'on regarde dans $\mathbb{R}^3$ en ajoutant une composante nulle dans la direction $\vec{k}$.

Soit le cube de $\mathbb{R}^3$ de côtés $[0,1]$, orienté par les vecteurs normaux sortant du cube. Calculer le flux de $\vec{V}$ à travers S en utilisant le théorème d'Ostrogradsky.

Corrigé,

Par le théorème d'Ostrogradsky, on sait que :

$$\iint_{\partial D} \vec{V}\cdot d\vec{S} = \iiint_D \mathrm{div}\vec{V}\, dV = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (2x^2+2y^2)\, dx\, dy\, dz = \int_0^1\int_0^1 (2x^2+2y^2)[z]_0^1\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1\int_0^1 (2x^2y + \frac{2}{3}y^3)\, dx\, dy = \int_0^1 (2x^2 + \frac{2}{3})\, dx = \frac{4}{3}$$

28 Séance 23, Flux

Exercice 1 [Difficile] Calculer le flux du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x,y,z) = x^2\overrightarrow{i} + y^2\overrightarrow{j} + z^2\overrightarrow{k}$ à travers la surface fermée S formée du cône précédent $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 3$, et du disque $x^2 + y^2 \leq 9$, $z = 3$, orientée par les vecteurs normaux sortants.

Indications : On admettra que :

$$\forall T \geq 0 \quad \int_0^T (\rho\cos\phi + \rho\sin\phi + z)\rho d\rho = \frac{T^2}{6}(3z + 2T\cos\phi + 2T\sin\phi)$$

Corrigé, Puisque la surface est fermée, on peut utiliser le théorème de Gauss:

$$\iint_S \overrightarrow{V} \cdot d\overrightarrow{S} = \iiint_\Omega \operatorname{div} \overrightarrow{V}\, dxdydz,$$

où Ω est le solide entouré par S, donc

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z^2,\ 0 \leq z \leq 3\},$$

et $\operatorname{div} \overrightarrow{V}(x,y,z) = 2x + 2y + 2z$.

En coordonnées cylindriques, on a alors:

$$\iint_S \overrightarrow{V} \cdot d\overrightarrow{S} = 2\iiint_\Omega (x + y + z)\, dx\, dy\, dz.$$

En utilisant les bornes appropriées pour les intégrations, on obtient:

$$\iint_S \overrightarrow{V} \cdot d\overrightarrow{S} = 2\int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^3 (\rho\cos\phi + \rho\sin\phi + z)\, \rho\, d\rho\, d\phi\, dz.$$

$$\forall T \geq 0; \int_0^T (\rho\cos\phi + \rho\sin\phi + z)\rho d\rho = \frac{T^2}{6}(3z + 2T\cos\phi + 2T\sin\phi)$$

Donc,

$$2\int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^3 (\rho\cos\phi + \rho\sin\phi + z)\, \rho\, d\rho\, d\phi\, dz. = 2\int_0^3 \int_0^{2\pi} \frac{9}{6}(3z + 6\cos\phi + 6\sin\phi) d\phi dz$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{9}{6}(3z + 6\cos\phi + 6\sin\phi) d\phi = 9\pi z$$

Ainsi,

$$\iint_S \overrightarrow{V} \cdot d\overrightarrow{S} = \frac{81\pi}{2}.$$

Exercice 2 Calculer le flux du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x,y,z) = x^2\overrightarrow{i} + y^2\overrightarrow{j} + z^2\overrightarrow{k}$ à travers le cône S d'équation $z^2 = x^2 + y^2$, $z \in [0,3]$, paramétré par $\overrightarrow{f}(\rho,\phi) = (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi, \rho)$ avec $\rho \in [0,3]$ et $\phi \in [0,2\pi]$.

Justifier que : S ne soit pas fermé (n'y passez pas trop de temps!) et que la divergence de V ne soit pas nulle. Utiliser alors la définition du flux pour répondre à la première question.

Corrigé,

Le cone n'englobe pas de volume donc il n'est pas fermé en ce sens. Un calcul directe montre que la divergence du champs de vecteur proposé est non nulle. Ensuite,
$\overrightarrow{V}(x,y,z) = x^2\overrightarrow{i} + y^2\overrightarrow{j} + z^2\overrightarrow{k}$ et S est paramétrisé par $\overrightarrow{f}(\rho,\phi) = (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi, \rho)$, où $\rho \in [0,3]$ et $\phi \in [0,2\pi]$, on a : $\nabla\overrightarrow{V}(\overrightarrow{f}(\rho,\phi)) = \rho^2\cos^2\phi\,\overrightarrow{i} + \rho^2\sin^2\phi\,\overrightarrow{j} + \rho^2\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\\ 1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\rho\sin\phi\\ \rho\cos\phi\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\rho\cos\phi\\ \rho\sin\phi\\ \rho\end{pmatrix}$.
Ainsi,

$$\iint_S \overrightarrow{V}\cdot d\overrightarrow{S} = \iint_{r=0}^{3}\int_{\phi=0}^{2\pi} -\rho^3\cos^3\phi - \rho^3\sin^3\phi + \rho^3\,d\phi\,d\rho = \frac{1}{4}\pi\cdot 3^4 = \frac{81}{4}\pi$$

, Car, $\int_0^{2\pi}\cos^3\phi\,d\phi = \int_0^{2\pi}\sin^3\phi\,d\phi = 0$.

Exercice 3 Soit $\overrightarrow{V}(x,y,z) = xz\overrightarrow{i} - yz\overrightarrow{j}$ un champ de vecteur, et (C) le cylindre paramétré par :

$$f(\phi,z) = (R\cos\phi, R\sin\phi, z) \quad \phi\in[0,2\pi] \quad z\in[0,H].$$

Montrer que $\overrightarrow{V}$ dérive d'un potentiel puis montrer que ce potentiel est $U(x,y,z) = xyz\overrightarrow{k}$.

On admettra que le bord de S est composé de deux cercles orientés $\alpha(t) = (R\cos t, R\sin t, 0)$ et $\beta(t) = (R\cos t, -R\sin t, H)$

Corrigé,

On a :

$$Div\overrightarrow{V}(x,y,z) = z - z = 0.$$

Puisque $\mathbb{R}^3$ est contractile, $\overrightarrow{V}$ dérive d'un potentiel U.

On vérifie facilement que

$$\overrightarrow{Rot}(\overrightarrow{U}) = \overrightarrow{V}.$$

On applique alors le théorème de Stokes :

$$\iint_S \nabla\cdot\overrightarrow{V}\cdot d\overrightarrow{S} = \iint_S \nabla\times\nabla U\cdot d\overrightarrow{S} = \oint_{\partial S}\nabla U\cdot d\overrightarrow{l}.$$

Le bord de S est composé de deux cercles orientés $\alpha(t) = (R\cos t, R\sin t, 0)$ et $\beta(t) = (R\cos t, -R\sin t, H)$, avec $\alpha'(t) = (-R\sin t, R\cos t, 0)$ et $\beta'(t) = (-R\sin t, -R\cos t, 0)$.

On a alors $\nabla U\cdot\alpha(t) = 0$ et $\nabla U\cdot\beta(t) = 0$, donc :

$$\iint_S \nabla\cdot\overrightarrow{V}\cdot d\overrightarrow{S} = 0.$$

Exercice 4 Si $\vec{V}$ est un champ avec $\operatorname{div}\vec{V} = 5$, et S est la coquille d'un œuf Ω de volume 10, calculer le flux de $\vec{V}$ entrant dans l'œuf est

:

$$\iint_S \vec{V}\cdot d\vec{S} = \iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{V}\,dx\,dy\,dz = 5\iiint_\Omega dx\,dy\,dz = 5\,\mathrm{Vol}(\Omega) = 50.$$

29 Séance 24, Flux de Rotationnel

Exercice 1 [Difficile] Calculer le flux du rotationnel de $\overrightarrow{V}(x,y,z) = x^2\overrightarrow{i} + y^2\overrightarrow{j} + z^2\overrightarrow{k}$ à travers le cône S défini par $z^2 = x^2 + y^2$, paramétré par $\overrightarrow{f}(\rho,\phi) = (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi, \rho)$, où $\rho \in [0,3]$ et $\phi \in [0,2\pi]$.

Dans un premier temps, justifier rapidement que la paramétrisation attendue est :

$$\gamma(t) = (3\cos t, -3\sin t, 3), \quad t \in [0,2\pi].$$

puis répondez à la première question.

Corrigé, Pour trouver ce flux, on utilise le théorème de Stokes :

$$\iint_S \nabla \times (\nabla \times \overrightarrow{V}) \cdot d\overrightarrow{S} = \oint_{\partial S} \overrightarrow{V} \cdot d\overrightarrow{l}$$

Et on n'a pas besoin de calculer $\nabla \times (\nabla \times \overrightarrow{V})$.

Le bord ∂S est le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 9$, $z = 3$, orienté dans le sens horaire, qu'on paramétrise par :

$$\gamma(t) = (3\cos t, -3\sin t, 3), \quad t \in [0,2\pi].$$

On a alors : $\gamma'(t) = (-3\sin t, -3\cos t, 0)$ et $\nabla \times \overrightarrow{V}(\gamma(t)) = (9\cos^2 t, 9\sin^2 t, 9)$.

Le flux de $\nabla \times (\nabla \times \overrightarrow{V})$ à travers le cône S est donc :

$$\iint_S \nabla \times (\nabla \times \overrightarrow{V}) \cdot d\overrightarrow{S} = \int_0^{2\pi} \overrightarrow{V}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} (27\cos^2 t \sin t - 27\sin^2 t \cos t)\, dt = 0.$$

Exercice 2 [Avec un paramètre et sans indications] Soit $\overrightarrow{V}(x,y,z) = x^2\overrightarrow{i} + y^2\overrightarrow{j} + z^2\overrightarrow{k}$ et S le cône défini par $z^2 = x^2 + y^2$, avec $\overrightarrow{f}(\rho,\phi) = (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi, \rho)$, où $\rho \in [0,a]$ et $\phi \in [0,2\pi]$, $a > 0$. Montrer que :

$$\iint_S Rot(\overrightarrow{V}) \cdot d\overrightarrow{S} = 0$$

Corrigé, Pour trouver ce flux, on utilise le théorème de Stokes :

$$\iint_S \nabla \times (\nabla \times \overrightarrow{V}) \cdot d\overrightarrow{S} = \oint_{\partial S} \overrightarrow{V} \cdot d\overrightarrow{l}$$

Et on n'a pas besoin de calculer $\nabla \times (\nabla \times \overrightarrow{V})$.

Le bord ∂S est le cercle d'équation $x^2 + y^2 = a^2$, $z = a$, orienté dans le sens horaire, qu'on paramétrise par :

$$\gamma(t) = (a\cos t, -a\sin t, a), \quad t \in [0,2\pi].$$

On a alors : $\gamma'(t) = (-a\sin t, -a\cos t, 0)$ et $\nabla \times \overrightarrow{V}(\gamma(t)) = (a^2\cos^2 t, a^2\sin^2 t, 9)$.

Le flux de $\nabla \times (\nabla \times \overrightarrow{V})$ à travers le cône S est donc :

$$\iint_S \nabla \times (\nabla \times \overrightarrow{V}) \cdot d\overrightarrow{S} = \int_0^{2\pi} \overrightarrow{V}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} (a^3\cos^2 t \sin t - a^3\sin^2 t \cos t)\, dt = 0.$$

Exercice 3 Soit le champ vectoriel $\vec{A}$ définit par

$$\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad \vec{A}=(-y,x,0).$$

Vérifier le théorème d'Ampère Stokes sur le disque de centre 1 et rayon $(0,0)$.

Corrigé, On doit vérifier :

$$\iint_S \nabla\times(\nabla\times\overrightarrow{A})\cdot d\overrightarrow{S}=\oint_{\partial S}\overrightarrow{A}\cdot d\overrightarrow{l}$$

avec $S=D(0,1)$ donc $\partial S=C(0,1)$. On rappel que le cercle ce paramètre naturellement ici par :

$$\gamma(t)=(\cos t,\sin t,0) \quad t\in[0,2\pi],$$

donc

$$\gamma'(t)=(-\sin t,\cos t,0), \quad t\in[0,2\pi].$$

Et puisque

$$\vec{dl}(t)=\vec{\gamma'(t)}dt,$$

on a que :

$$\oint_{\partial S}\overrightarrow{A}\cdot d\overrightarrow{l}=2\pi.$$

Ici, $\vec{dS}=dS\vec{u_z}$ où $\vec{u_z}$ est le troisième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Donc,

$$\iint_S \nabla\times(\nabla\times\overrightarrow{A})\cdot d\overrightarrow{S}=2\iint_S dS=2\pi.$$

Ce qui conclut l'exercice.

Exercice 4 Soit $\vec{U}$ un champ de vecteur tel que

$$\nabla f=\vec{U}$$

et S une surface. Montrer que :

$$\oint_{\partial S}\vec{U}\vec{dl}=0.$$

Corrigé,

On applique le théorème d'Ampère Stokes :

$$\oint_{\partial S}\vec{U}\vec{dl}=\int_S r\vec{o}t(U)ds=\int_S r\vec{o}t(\nabla f)ds=0$$

References

[1] Bibmath, *https://www.bibmath.net/*

[2] Université-Paris-Sacalay-Hugues.Auvray https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~hugues.auvray/LM256/Corriges_1112/ttelafeuille2.pdf

[3] Université-Paris-Sacalay-Hugues.Auvray *https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~hugues.auvray/LM256/Corriges_1112/ttelafeuille2.pdf*

[4] Dunot http://gery.huvent.pagesperso-orange.fr/toutes_maths/Extrait-chap28.pdf

[5] J.Plessard *https://archimede.mat.ulaval.ca/jplessard/MAT2110/exercices12.pdf*

[6] Karim.Bekka https://perso.univ-rennes1.fr/karim.bekka/OM4/Week%20by%20week/td-4.pdf

[7] EXO-7 *http://exo7.emath.fr/*

[8] F.Rabetti http://math.univ-lyon1.fr/~frabetti/Math2/Math2-diapo-chapitre4-handout.pdf

[9] *https://apc.u-paris.fr/~dodu/Telechargement/Poly_curvi.pdf*