

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

BC1419 Cálculo Numérico (1º 2020) - LISTA 2

Entrega: 05/06/2020

Prof. André Pierro de Camargo

1 Orientações gerais

Para os exercícios práticos:

- A linguagem de programação utilizada na implementação dos métodos é de livre escolha.
- Peça ajuda ao professor sempre que necessário.
- Realize testes preliminares com cada método para identificar possíveis erros de implementação. Por exemplo: teste o método de eliminação de Gauss em sistemas de equações cuja solução seja previamente conhecida e veja se o resultado obtido é coerente.
- Discuta com os outros grupos e também com o professor caso encontre resultados aparentemente sem sentido. Isso pode (ou não) ser um erro de implementação, ou mesmo um indicativo de que o método utilizado possui as suas limitações.

Cada grupo deverá entregar

- Um relatório contendo a resolução dos exercícios teóricos e **TUDO** o que foi solicitado nos exercícios práticos (leiam a descrição com bastante atenção).
- O arquivo contendo o código fonte utilizado nos exercícios práticos.

Enviar o material por e-mail para andre.camargo@ufabc.edu.br, especificando o número do grupo.

2 Exercícios práticos

2.1 Primeiro exercício (3.0)

Na tabela abaixo encontram-se as medidas da distância percorrida (x) por um objeto em queda livre em função do tempo de queda (t).

i =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
t_i (1/60) s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i (cm)	0.0	1	2.4	4.1	6	8.2	10.6	13.4	16.4	19.7
i =	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
t_i (1/60) s	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
x_i (cm)	23.3	27	31.2	35.5	40.1	45	50.2	55.6	61.3	67.3
i =	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
t_i (1/60) s	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
x_i (cm)	73.6	80.1	86.9	94	101.3	109	116.9	125	133.4	142.1

Tabela 1: Dados experimentais sobre o movimento de um corpo em queda livre (cedido pelo IF-USP).

O objetivo desse exercício é modelar a posição do objeto (x) em função do tempo de queda (t) por uma função da forma

$$f(t) = \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + \alpha_3 f_3(t) \quad (1)$$

com $f_1(t) = 1$; $f_2(t) = t$; e $f_3(t) = t^2$, pelo método dos mínimos quadrados discreto e exiba o valor da aceleração da gravidade $a = 2\alpha_3$ nas unidades do Sistema Internacional

Lembrete: Os coeficientes de mínimos quadrados ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$) são a solução do sistema de equações

$$\begin{bmatrix} \langle f_1, f_1 \rangle & \langle f_1, f_2 \rangle & \langle f_1, f_3 \rangle \\ \langle f_2, f_1 \rangle & \langle f_2, f_2 \rangle & \langle f_2, f_3 \rangle \\ \langle f_3, f_1 \rangle & \langle f_3, f_2 \rangle & \langle f_3, f_3 \rangle \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f_1, x \rangle \\ \langle f_2, x \rangle \\ \langle f_3, x \rangle \end{bmatrix}, \quad (2)$$

com

$$\langle f_i, f_j \rangle = \sum_{k=0}^{29} f_i(t_k) f_j(t_k), \quad \langle f_i, x \rangle = \sum_{k=0}^{29} f_i(t_k) x_k. \quad (3)$$

2.1.1 Especificações

O sistema (2) deve ser resolvido computacionalmente, utilizando o método da Eliminação de Gauss implementado nas etapas anteriores do curso. No relatório deverá constar

- A matriz e o vetor de termos independentes do sistema.
- Os coeficientes do sistema obtidos computacionalmente. Exiba com **TODOS** os dígitos da máquina utilizada.
- Um gráfico com os dados amostrais utilizados e a função de mínimos quadrados obtida (plotar os dois juntos).

2.2 Segundo exercício (4.0)

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua cujos valores são conhecidos em uma partição $\mathbf{X} : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ de $[a, b]$. Vimos, em sala de aula, que podemos utilizar o Interpolador polinomial de Lagrange ($p_n(\mathbf{X}, f, x)$), que satisfaz

$$p_n(\mathbf{X}, f, x_i) = f(x_i), i = 1, \dots, n,$$

para aproximar f . O objetivo desse exercício é verificar a eficiência desse interpolador para diferentes funções f , com relação ao poder de aproximação.

2.2.1 1ª Tarefa (1.5)

O objetivo dessa tarefa é verificar se a escolha dos nós de interpolação interfere na convergência. Nessa tarefa iremos comparar o erro de interpolação

$$E(x) = f(x) - p_n(\mathbf{X}, f, x) \quad (4)$$

entre a função de Runge

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2} \quad (5)$$

e o polinômio interpolador de Lagrange $p_n(\mathbf{X}, f, x)$ para duas famílias de nós no intervalo $[-1, 1]$:

- Nós igualmente espaçados: $\mathbf{X}^{(\text{eq})} = (x_0^{(\text{eq})}, x_1^{(\text{eq})}, \dots, x_n^{(\text{eq})}); \quad x_j^{(\text{eq})} = -1 + 2j/n, \quad j = 0, 1, \dots, n.$
- Nós de Chebyshev do segundo tipo: $\mathbf{X}^{(\text{cheb})} = (x_0^{(\text{cheb})}, x_1^{(\text{cheb})}, \dots, x_n^{(\text{cheb})}); \quad x_j^{(\text{cheb})} = -\cos(j\pi/n), \quad j = 0, 1, \dots, n.$

Para cada valor de $n = 2, 3, \dots, 50$, pede-se:

1. Calcular o erro máximo (em módulo)

$$Emax_n[\mathbf{X}] = \max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - p_n(\mathbf{X}, f, x)| \quad (6)$$

entre o interpolador e a função interpolada para cada um dos tipos de nós de interpolação definidos acima. Em geral, é difícil determinar o valor correto da expressão no lado direito de (6). Para estimar esse valor, calcule o erro $|f(x) - p_n(\mathbf{X}, f, x)|$ fazendo x percorrer uma malha uniformemente espaçada em $[-1, 1]$ com 10117 pontos e guarde o maior valor encontrado.

Observações:

- Para cada n , dois valores devem ser calculados (um para cada família de nós).
- Utilize a fórmula de lagrange para calcular o polinômio.

2. Plote os valores encontrados

$$n \times \log_{10} (Emax_n[\mathbf{X}^{(\text{eq})}])$$

e

$$n \times \log_{10} (Emax_n[\mathbf{X}^{(\text{cheb})}])$$

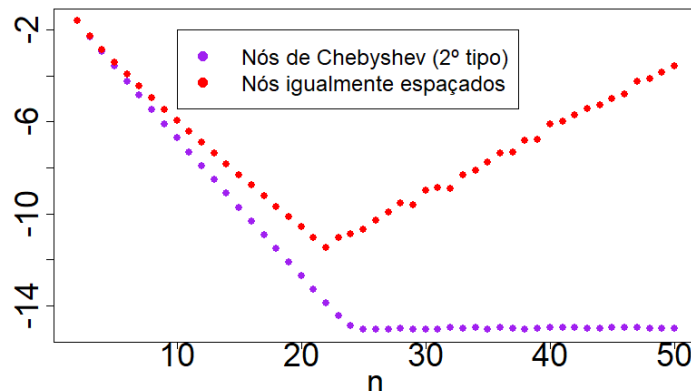


Figura 1: O erro de interpolação para a função $f(x) = \log(x + 2)$.

em um mesmo gráfico. A Figura 1 mostra um exemplo de gráfico, onde interpolamos a função $f(x) = \log(2 + x)$.

3. Para $n = 10, 20, 30, 40, 50$, exiba os valores encontrados em uma tabela com **TODOS** os dígitos da máquina utilizada.

O que acontece com o erro de interpolação em cada caso?

2.2.2 2ª Tarefa (0.5)

Repita o experimento da 1ª Tarefa, porém com a função $f(x) = \sin(x)$ ao invés da função de Runge.

2.2.3 3ª tarefa (2.0)

Repita o experimento da 1ª Tarefa com a função $f(x) = \sin(x)$ e os nós de Chebyshev, mas, dessa vez, calcule o polinômio interpolador de duas formas: pela fórmula de Lagrange e pela fórmula de Newton (ver Seção 3). Faça o comparativo para os seguintes valores de $n = 2, 3, \dots, 100$ e observe os resultados. Qual algoritmo é mais sensível a erros de arredondamento?

2.3 Terceiro exercício (3.0)

O objetivo desse exercício é analisar a taxa de convergência das integrais fornecidas pelas regras compostas do Trapézio

$$T_n := \frac{h}{2} \left[f(x_0) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} 2f(x_i) \right) + f(x_n) \right].$$

e de Simpson $S_n :=$

$$\frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

sendo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ pontos igualmente espaçados em $[a, b]$:

$$x_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, n, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

(lembrando que n deve ser par para utilizar a regra de Simpson). Vimos que, se f é suficientemente diferenciável, existem constantes positivas c_1 e c_2 (independentes de h ou n) tais que

$$ET_n := \left| \int_a^b f(x)dx - T_n \right| \leq c_1 h^2 \quad \text{e} \quad ES_n := \left| \int_a^b f(x)dx - S_n \right| \leq c_2 h^4.$$

Pede-se para calcular o valor exato de ET_n e ES_n para a função exponencial $f(x) = \exp(x)$, com $a = 0$ e $b = 1$ para os seguintes valores de $n = 10, 20, 30, 40, \dots, 100$. Se o erro E_n ($E_n = ET_n$ ou $E_n = ES_n$) segue (aproximadamente) uma equação da forma $E_n = \mu h^p$ (com μ e p fixos), então, tomando-se os logaritmos de ambos os lados, obtemos

$$\log(E_n) = \log(\mu) + p \log(n).$$

Assim, se a relação acima é aproximadamente verdadeira, então os valores $(\log(h_1), \log(E_{n_1})), (\log(h_2), \log(E_{n_2})), \dots, (\log(h_\ell), \log(E_{n_\ell}))$ deverão estar mais ou menos alinhados e a reta que os representa deverá ter coeficiente angular próximo a p . Por exemplo, no gráfico da Figura 2 exibimos os valores transformados $(\log(h_j), \log(E_{n_j}))$ e o ajuste de mínimos quadrados correspondente para ET para a função $f(x) = \log(x+2)$. Note que o coeficiente angular da reta obtida (-1.99994) é próximo a 2.

Ajuste os valores calculados $(\log(h_1), \log(E_{n_1})), (\log(h_2), \log(E_{n_2})), \dots, (\log(h_\ell), \log(E_{n_\ell}))$ para a função $f(x) = \exp(x)$ (para $E_n = ET_n$ e para $E_n = ES_n$) por uma reta pelo método dos mínimos quadrados discreto.

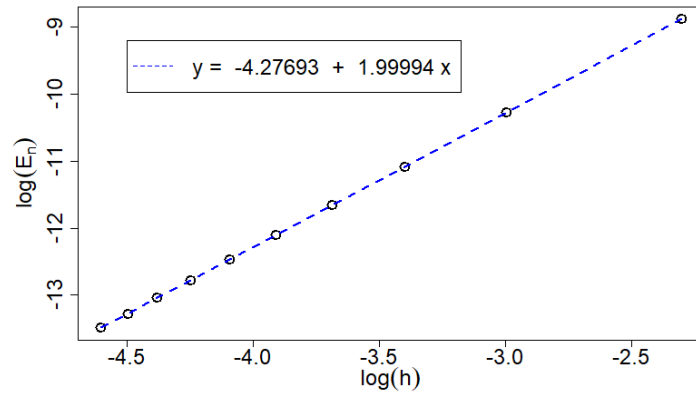


Figura 2: Erro na regra dos n trapézios para $f(x) = \log(x + 2)$.

- Exiba os valores $(\log(h_1), \log(E_{n_1})), (\log(h_2), \log(E_{n_2})), \dots, (\log(h_\ell), \log(E_{n_\ell}))$ para a função $f(x) = \exp(x)$ (para $E_n = ET_n$ e para $E_n = ES_n$) em uma Tabela.
- Faça dois gráficos como o da Figura acima (um para ET e outro para ES) utilizando os valores calculados e exiba os coeficientes de mínimos quadrados obtidos com, no mínimo, 6 casas decimais.

3 Algoritmo de Newton

Vimos que, dados $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$, existem constantes únicas $f[x_0], f[x_0, x_1], \dots, f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ tais que o polinômio $p[x_0, x_1, \dots, x_k](x)$ que satisfaz $p[x_0, x_1, \dots, x_k](x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, k$, possui a forma

$$p[x_0, x_1, \dots, x_k](x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1}).$$

Para calcular $f[x_0], f[x_0, x_1], \dots, f[x_0, x_1, x_2], \dots, f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ basta utilizar o algoritmo das diferenças divididas discutido em sala:

3.1 Algoritmo das diferenças divididas

- Defina uma matriz M de tamanho $(k + 1) \times (k + 1)$.
- Para i de 1 até $k + 1$ faça $\{M[i, 1] = y_i\}$
- Para j de 2 até $k + 1$ faça {
 - Para i de 1 até $k - j + 2$ faça {

$$M[i, j] = 1/(x_{i-1+j-1} - x_{i-1}) * (M[i + 1, j - 1] - M[i, j - 1])$$

}

}

Os coeficientes $f[x_0], f[x_0, x_1], \dots, f[x_0, x_1, x_2], \dots, f[x_0, x_1, \dots, x_k]$ estarão na primeira linha de M .