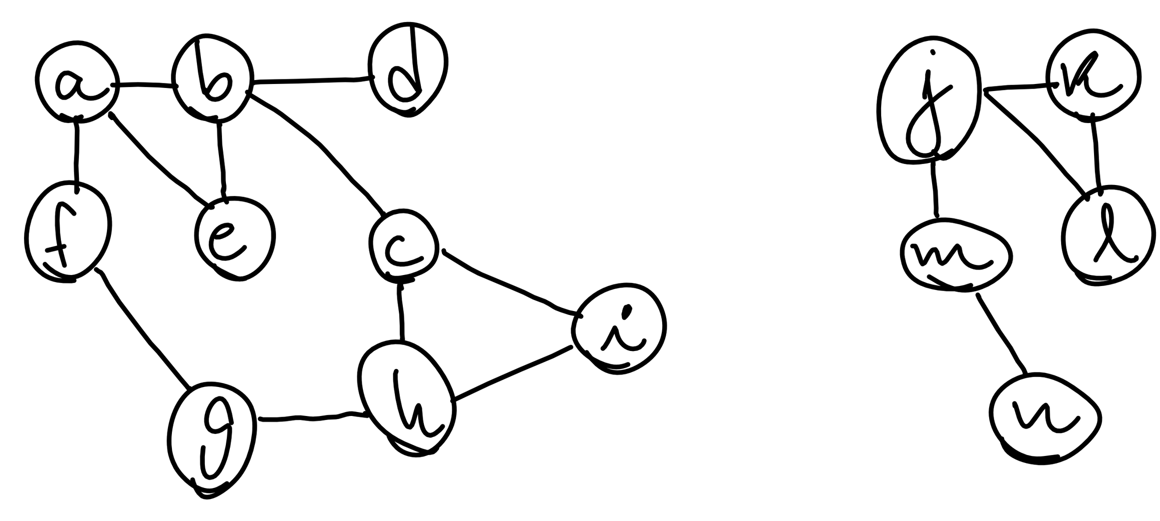
Maximal e máximo

- Maximal → inclusão
  Um subgrafo com propriedade X é maximal se não está contido em outro com mesma propriedade.

- Máximo → quantidade
  Um subgrafo com propriedade X é máximo se não há outro maior.



$P = (d, b, c, h)$ • •
(d, b, c, h, g) • •
(d, b, c, h, i) • •
$(d, b, e, a, f, g, h, i, c)$ • •
(k, j, l) • •

- não é maximal
- não é máximo
- é maximal
- é máximo

Também existe "minimal".

Conexidade

→ G é conexo se existe uv-caminho $\forall\, u, v \in V(G)$
→ Caso contrário é desconexo e contém componentes conexas, que são subgrafos conexos maximais.
→ $e \in E(G)$ é aresta de corte se $G-e$ tem mais componentes conexas do que G (ponte)
→ $v \in V(G)$ é vértice de corte se $G-v$ tem mais componentes que G.

Teorema: Se G é grafo conexo, então $|E(G)| \geq |V(G)| - 1$

Demonstração: Por indução no número de vértices $|V(G)|$.

Se $|V(G)| = 1$, então $|E(G)| = 0$.
De fato, $|E(G)| \geq |V(G)| - 1 = 1 - 1 = 0$.
Agora seja G conexo com $|V(G)| > 1$ e suponha que para qualquer grafo H conexo com $0 \leq |V(H)| < |V(G)|$ vale que $|E(H)| \geq |V(H)| - 1$.
Se $\delta(G) \geq 2$, então $2|E(G)| = \sum_{v \in V(G)} d(v) \geq \sum_{v \in V(G)} 2 = 2|V(G)|$ de onde $|E(G)| \geq |V(G)| > |V(G)| - 1$, e o resultado vale diretamente. Então podemos assumir que $\delta(G) = 1$.
Seja $v \in V(G)$ com $d(v) = 1$ e crie $G' = G - v$. Note que G' é conexo e que $|V(G')| < |V(G)|$. Então por hipótese de indução $|E(G')| \geq |V(G')| - 1$. Como $|E(G')| = |E(G)| - 1$ e $|V(G')| = |V(G)| - 1$, então $|E(G)| - 1 \geq |V(G)| - 1 - 1$, e $|E(G)| \geq |V(G)| - 1$. ▯

(Caracterização)
Teorema: Sejam G um grafo e $e \in E(G)$. A aresta e é de corte se e somente se e não pertence a um ciclo.

Demonstração: Primeiro vamos mostrar que se e é de corte, então ela não pertence a ciclos.
Suponha, para fins de contradição, que $e = xy$ pertence ao ciclo $C = (x, y, u_1, \dots, u_t, x)$.
Seja $G' = G - e$. Por definição, G' tem mais componentes conexas que G e, em particular, x está em uma delas e y em outra. Contudo, em G' ainda há xy-caminho $(y, u_1, \dots, u_T, x)$, o que é uma contradição.
Agora vamos mostrar que se $e = xy$ não pertence a nenhum ciclo, então ela é de corte.
Suponha, para fins de contradição, que e não é de corte. Então $G' = G - e$ tem o mesmo número de componentes de G, ou seja, em G' há ainda um xy-caminho (que não usa e). Esse caminho juntamente com e forma um ciclo em G que contém e, uma contradição. ▯

Proposição: Se u e v são os únicos vértices de grau ímpar em G, então existe uv-caminho em G.

Grafos Bipartidos

→ Conjunto independente (estável): $S \subseteq V(G)$ tal que $\forall\, u, v \in S$, vale que $uv \in E(G)$.
→ Grafo G é bipartido se $V(G) = X \cup Y$, $X \cap Y = \emptyset$ e X e Y são independentes.
  ↳ (X, Y)-bipartido
  ↳ $G[X, Y]$
  ↳ se $r = |X|$ e $s = |Y|$, $|E(G)| \leq rs$
→ Grafo bipartido completo: todo vértice de X é adjacente a todo de Y.
  ↳ $K_{p,q}$ se $p = |X|$ e $q = |Y|$

Proposição: Todo caminho é bipartido.

Teorema: Seja G um grafo com n vértices. Se G tem mais que $n^2/4$ arestas, então G não é bipartido.

Demonstração: Seja G com mais que $n^2/4$ arestas e suponha, para fins de contradição, que G é (X, Y)-bipartido, com $x = |X|$ e $y = |Y|$.
Então $|E(G)| > \frac{n^2}{4} = \frac{(x+y)^2}{4}$. Também vale que $|E(G)| \leq xy$.
Assim, $\frac{(x+y)^2}{4} < xy \Rightarrow (x+y)^2 < 4xy \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 - 4xy < 0$

$\Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 < 0 \Rightarrow (x-y)^2 < 0$, impossível, pois $(x-y)^2 \geq 0$. ▯

(Caracterização)
Teorema: Um grafo G é bipartido se e somente se G não contém ciclo ímpar.