1. Prove que $1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2$ para todo inteiro positivo $n \geq 1$.

Base: $n=1$. $1^3=1$ e $(1)^2=1$ $\therefore$ $P(1)$ vale.

Hipótese: $P(k)$ vale para $1 \leq k < n$

Passo: $n>1$. Seja $1^3+2^3+\ldots+n^3=\star$. Note que $\star=1^3+2^3+\ldots+(n-1)^3+n^3$, por hipótese $\star=(1+2+\ldots+(n-1))^2+n^3$. Agora note que $(1+2+\ldots+(n-1))^2+n^3=(1+2+\ldots+(n-1))^2+n^3+n^2-n^2=(1+2+\ldots+(n-1))^2+n^2(n-1)+n^2=(1+2+\ldots+(n-1))^2+\frac{2}{2}n.n(n-1)+n^2=(1+2+\ldots+(n-1))^2+2\frac{n^2(n-1)}{2}+n^2=(1+2+\ldots+(n-1))^2+2(1+\ldots+(n-1))n+n^2=(1+2+\ldots+n)^2$

CQD

outra forma

Por hipótese de indução, vale que $1^3+2^3+\ldots+(n-1)^3=(1+2+\ldots+(n-1))^2 \Rightarrow 1^3+2^3+\ldots+(n-1)^3+n^3=(1+2+\ldots+(n-1))^2+n^3 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \ldots=(1+2+\ldots+n)^2$.

2. Prove que para todo real x, se $x>0$ então existe y real tal que $y(y+1)=x$.

$$y(y+1) \stackrel{?}{=} x$$

$$y^2+y-x=0$$

existe se $1+4x \geq 0 \Rightarrow 4x \geq -1 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{4}$

$$y=\frac{-1 \pm \sqrt{1^2-4.1.(-x)}}{2}=\frac{-1 \pm \sqrt{1+4x}}{2}$$

3. Exercício do tabuleiro, triminós, ladrilhos.