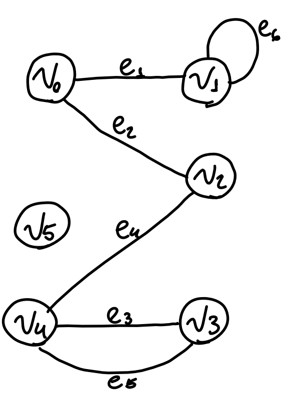
Conceitos Básicos

- Grafo: (V, E, ψ) , $V \cap E = \emptyset$
  $\psi : E \to \binom{V}{2}$
  ↳ arestas
  ↳ vértices
  - Exemplo: $H = (V, E, \psi)$, com $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ e $\psi(e_1) = \{v_0, v_1\}$, $\psi(e_2) = \{v_0, v_2\}$, $\psi(e_3) = \{v_3, v_4\}$, $\psi(e_4) = \{v_2, v_4\}$, $\psi(e_5) = \{v_3, v_4\}$ e $\psi(e_6) = \{v_1, v_1\}$.



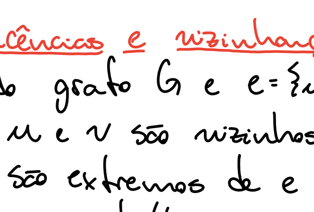
- Usaremos
  $V(G), E(G), \psi(G)$

- Ordem $= |V(G)|$

- Arestas paralelas: $\psi(e) = \psi(f)$

- Laço: $\psi(e) = \{v, v\}$

- Grafos simples: sem laços e sem arestas paralelas
  - Exemplo: J, com $V(J) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $E(J) = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{2,4\}, \{1,5\}\}$



- Grafo multigrafo: com laços e/ou com arestas paralelas

Proposição: Se G é um grafo de ordem n, então $|E(G)| \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Adjacências e vizinhanças

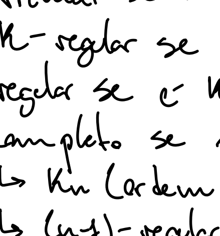
Dado grafo G e $e = \{u, v\} \in E(G)$:
- → u e v são vizinhos / adjacentes
- → são extremos de e
- → e conecta/liga u e v
- → e incide em u e v
- → $\{u, v\} = uv = vu$
- → Vizinhança de u: $N_G(u)$ ou $N(u)$ é $\{v \in V(G) : uv \in E(G)\}$
- → Arestas adjacentes: vu e vy $N_J(3) = \{1, 4\}$, $N_J(2) = \{1, 4, 5\}$

Grau

- → Grau de u: $d_G(u)$ ou $d(u)$ é o nº de arestas incidentes a u $d_J(5) = 1$, $d_J(2) = 3$
- → $d_G(u) = |N_G(u)|$
- → Se $d_G(u) = 0$, u é dito isolado
- → Grau mínimo: $\delta(G) = \min\{d_G(u) : u \in V(G)\}$
- → Grau máximo: $\Delta(G) = \max\{d_G(u) : u \in V(G)\}$ $\delta(J) = 1$, $\Delta(J) = 3$

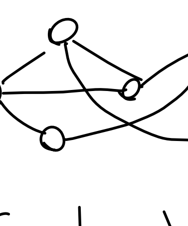
Isomorfismo

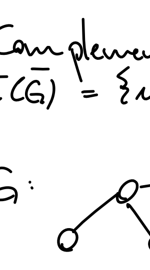
→ Dois grafos G e H:
- são idênticos se $V(G) = V(H)$ e $E(G) = E(H)$
- são isomorfos se existe bijeção $f : V(G) \to V(H)$ tal que $uv \in E(G)$ se e somente se $f(u)f(v) \in E(H)$

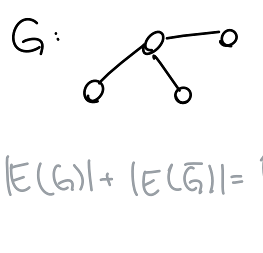


Classes de grafos

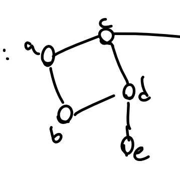
Um grafo G é:
- → vazio se $|E(G)| = 0$
- → trivial se $|V(G)| = 1$ e $E(G) \neq \emptyset$
- → k-regular se $d_G(u) = k$ $\forall u \in V(G)$
- → regular se é k-regular para algum k
- → completo se $uv \in E(G)$ $\forall u, v \in V(G)$
  - ↳ K_n (ordem n)
  - ↳ $(n-1)$-regular
  - ↳ K_3 é triângulo
- → planar se pode ser desenhado no plano sem cruzamento de arestas


2-regular


3-regular


3-regular

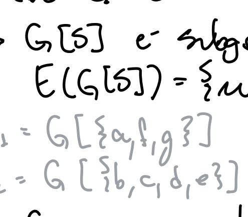
→ Complemento de G é $\bar{G}$ tal que $V(\bar{G}) = V(G)$ e $E(\bar{G}) = \{uv : uv \notin E(G)\}$

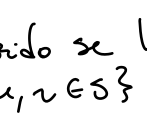
G:  $\bar{G}$:

$|E(G)| + |E(\bar{G})| = \binom{|V(G)|}{2}$

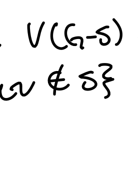
Subgrafos

→ H é subgrafo de G, $H \subseteq G$, se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$
↳ G contém / é supergrafo de H

G: 

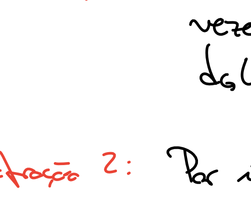
H_1: 

H_2:

H_3: 

→ Dados G e $S \subseteq V(G)$:
- ↳ $G[S]$ é subgrafo induzido se $V(G[S]) = S$ e $E(G[S]) = \{uv \in E(G) : u, v \in S\}$
  $H_1 = G[\{a, f, g\}]$
  $H_2 = G[\{b, c, d, e\}]$
- ↳ $G - S$ é o subgrafo com $V(G-S) = V(G) \setminus S$ e $E(G-S) = \{uv \in E(G) : uv \notin S\}$ (é isomorfo a $G[V(G) \setminus S]$
  $H_1 = G - \{b, c, d, e\}$

→ Dados G e $F \subseteq E(G)$:
- ↳ $G[F]$ é subgrafo induzido e $V(G[F]) = \{v : \exists v\, x \in F\}$ $E(G[F]) = F$
  $H_2 = G[\{cd, db, de\}]$
- ↳ $G - F$ é o subgrafo com $V(G-F) = V(G)$ e $E(G-F) = E(G) \setminus F$
- ↳ $G - e = G - \{e\}$

H_4:  $H_4: G - \{ab, cd, cg\}$

Teorema do Aperto de mãos: Para todo grafo G vale que

$$\sum_{u \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|$$

- **Demonstração 1:** Uma aresta $uv \in E(G)$ é contada duas vezes na soma dos graus: uma em $d_G(u)$ e outra em $d_G(v)$. CQD

- **Demonstração 2:** Por indução no número de arestas $m = |E(G)|$.

Base: $m = 0$, o que significa que $d(u) = 0$ $\forall u \in V(G)$ e, portanto, o resultado vale.

Seja G com $m = |E(G)| > 0$.

Suponha que para qualquer grafo H com $0 \leq |E(H)| < |E(G)|$ vale que $\sum_{v \in V(H)} d_H(v) = 2|E(H)|$.

Como G tem pelo menos uma aresta, seja $xy \in E(G)$. Seja $G' = G - xy$. Então por hipótese da indução vale que $\sum_{v \in V(G')} (v) = 2|E(G')|$.

Por construção, $|E(G')| = |E(G)| - 1$, $V(G') = V(G)$, $d_G(x) = d_{G'}(x) + 1$, $d_G(y) = d_{G'}(y) + 1$ e $d_G(v) = d_{G'}(v)$ $\forall v \in V(G) \setminus \{x, y\}$.

Então

$$\sum_{u \in V(G)} d_G(v) = d_G(x) + d_G(y) + \sum_{u \in V(G) \setminus \{x,y\}} d_G(v) = d_{G'}(x) + 1 + d_{G'}(y) + 1 + \sum_{v \in V(G) \setminus \{x,y\}} = 2 + \sum_{v \in V(G)} d_{G'}(v) = 2 + 2|E(G')| = 2|E(G)|.$$ CQD

Corolário: Todo grafo G tem um número par de vértices de grau ímpar.