Corolário: Todo grafo tem um número par de vértices de grau ímpar.

Prova: Seja $J \subseteq V(G)$ o conjunto dos vértices de grau ímpar de G e $P = V(G) \setminus J$ (vértices de grau par). Para cada $v \in J$, seja r_v o inteiro tal que $d(v) = 2r_v + 1$. Para cada $v \in P$, seja r_v inteiro tal que $d(v) = 2r_v$. Então

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = \sum_{v \in J} d(v) + \sum_{v \in P} d(v) = \sum_{v \in J} (2r_v + 1) + \sum_{v \in P} (2r_v) = 2\sum_{v \in J} r_v + \sum_{v \in J} 1 + 2\sum_{v \in P} r_v$$
$$= 2\left(\sum_{v \in J} d(v) + \sum_{v \in P} r_v\right) + |J|$$

Pelo Teorema do aperto de mãos,

$$2\left(\sum_{v \in J} d(v) + \sum_{v \in P} r_v\right) + |J| = 2|E(G)|$$

de onde

$$|J| = 2\left(|E(G)| - \sum_{v \in J} r_v - \sum_{v \in P} r_v\right)$$

ou seja, $|J|$ é par. ∎

—— " ——

Tipos de prova
↳ Indução
↳ Direta
↳ Contradição
↳ Contrapositiva

Teorema: Todo grafo com ao menos dois vértices possui ao menos um par de vértices com mesmo grau.

Rascunho:

$0 \le d(v) \le n-1$

→ não tem como um vértice não se ligar a nenhum outro vértice, e outro vértice se ligar a todos os outros

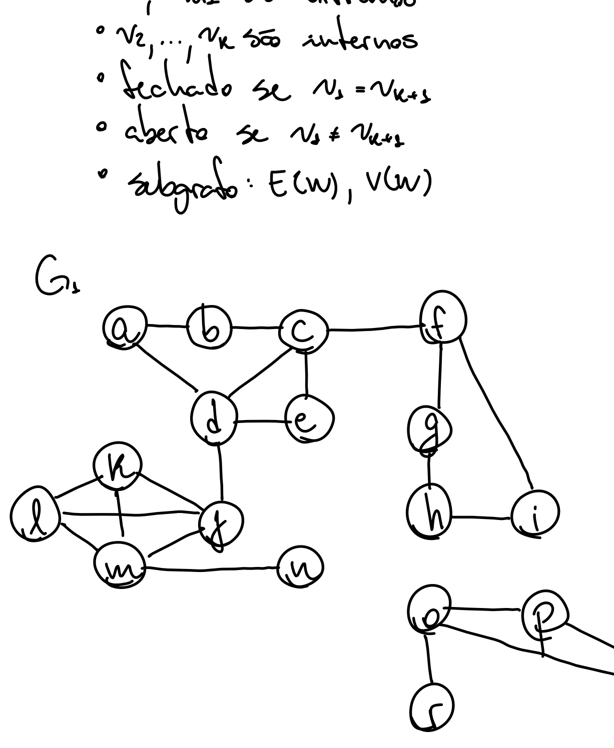
Prova: Seja G um grafo de ordem n com $n \geq 2$. Para qualquer $v \in V(G)$ vale que $0 \leq d(v) \leq n-1$. Mas note que há vértice de grau $n-1$ se e somente se não há vértice de grau 0. Assim, se $X = \{d(u) : u \in V(G)\}$, então $X \subseteq \{0, 1, \dots, n-2\}$ ou $X \subseteq \{1, 2, \dots, n-1\}$ e $\therefore |X| \leq n-1$. Então pelo Princípio da Casa dos Pombos, ao menos dois vértices devem ter o mesmo grau. ∎

Passeios, Trilhas, Caminhos e Ciclos

Walk, Trail, Path, Cycle

Seja G um grafo:
→ passeio: $W = (v_1, v_2, \dots, v_{k+1})$ com $v_i \in V(G)\ \forall\, 1 \leq i \leq k+1$ e $v_i v_{i+1} \in E(G)\ \forall\, 1 \leq i \leq k$.
- $v_1 v_{k+1}$ - passeio → nomenclatura
- comprimento = nº arestas
- v_1, v_{k+1} são extremos
- $v_2, \dots, v_k$ são internos
- fechado se $v_1 = v_{k+1}$
- aberto se $v_1 \neq v_{k+1}$
- subgrafo: $E(W)$, $V(W)$

G_1



$W_1 = (h, g, f, c, e, c, f, c, d)$
$W_2 = (j, m, k, j, d, a)$ → trilha
$W_3 = (j, d, c, e, d, j)$
$W_4 = (a)$ → caminho

→ trilha: Passeio que não repete arestas
→ Caminho: Passeio que não repete vértices
→ ciclo: Passeio fechado de comprimento ≥ 3 que não repete vértices internos

$P^1 = (m, j, d, c, e)$
$P^2 = (n, m, j, k, l)$
$C^1 = (m, j, k, m)$
$C^2 = (a, b, c, e, d, a)$

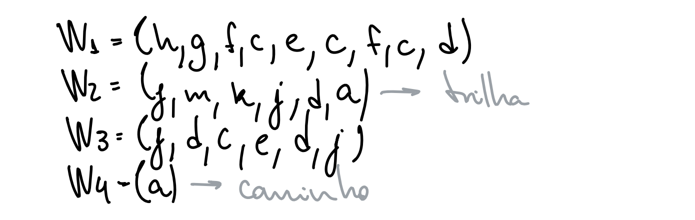
→ Um grafo que é apenas um caminho com n vértices é denotado P_n.
→ Um grafo que é apenas um ciclo com n vértices é denotado C_n.
→ Distância: Entre vértices u e v, $dist_G(u, v)$, é a menor quantidade de arestas de um uv-caminho ou ∞ se não houver uv-caminho.

Teorema: Seja G um grafo e $x, y \in V(G)$. Se existe xy-passeio em G, então existe xy-caminho.

Prova: Por indução no comprimento k do passeio. Se $k=0$, então o passeio já é um caminho e o resultado vale. Suponha que $k > 0$ e que qualquer xy-passeio com menos que k arestas contém um xy-caminho. Seja $W = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ um xy-passeio ($x = v_0$, $y = v_k$) de comprimento k em G. Se W não tem vértices repetidos, então ele já é um caminho e não há o que provar. Então suponha que existe ao menos um vértice que se repete em W, v_i e v_j, com $i < j$. Construa $Q = (v_0, \dots, v_i, v_{j+1}, \dots, v_k)$. Note que $Q \subseteq W$ é um xy-passeio com menos do que k arestas ($v_i v_{j+1} \in E(G)$ pois $v_i v_{j+1} = v_j v_{j+1}$). Por hipótese de indução, Q contém um xy-caminho e, diretamente, W também. ∎

Teorema: Se G é um grafo com $\delta(G) \geq 2$, então G contém um caminho de comprimento pelo menos $\delta(G)$ e um ciclo de comprimento pelo menos $\delta(G)+1$.

Rascunho:



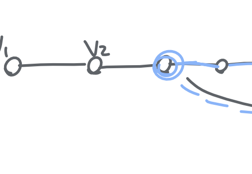
Prova: Seja $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ um caminho máximo em G. Então todo vizinho de v_k está em $V(P)$. Como $d(v_k) \geq \delta(G)$, v_k tem pelo menos $\delta(G)$ vizinhos e $|V(P)| \geq \delta(G)+1$. Logo, P tem comprimento $\geq \delta(G)$.
Seja i o menor índice tal que $v_i v_k \in E(G)$. Note que $C = (v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, v_i)$ é um ciclo com $\geq \delta(G)+1$ arestas pois contém v_k e todos os seus vizinhos. ∎

→ Cintura: $g(G)$ é a quantidade de arestas do menor ciclo de G, ou ∞ se G não tiver ciclos (g de girth).

Teorema: Se G é um grafo k-regular com $g(G) = 4$, então G tem pelo menos $2k$ vértices.

→ todos vértices tem grau k

Rascunho:



Prova: Seja $v \in V(G)$ qualquer. Note que $|N(v)| = d(v) = k$. Como G não tem triângulos, então não existem arestas em $G[N(v)]$. Então $u \in N(v)$ tem v e outros $k-1$ vértices como vizinhos fora de $N(v)$. Então

$$|V(G)| \geq \cancel{1} + k + k \cancel{-1} = 2k$$ ∎

↳ ajuda a resolver o exercício 9 da lista