Cálculo
Lista 3 - Derivadas

Gabriel Vasconcelos Ferreira

3 de abril de 2025

Capítulo 1

Regras de derivação

Problema 1. Calcular a derivada das funções, usando o formulário:

1) $y = -2x + 5$

2) $y = \dfrac{1}{2}x^2 + \sqrt{x}$

3) $y = 7x^2 - 8x - 9$

4) $y = -\dfrac{1}{3}x^2 + 5x + 7$

5) $0.4x^2 - 6x - 1$

6) $(3x^2 - 4x)(6x + 1)$

7) $(1 - x^2)(1 + x^2)$

8) $y = \sqrt{x}$

9) $y = \sqrt[4]{x^2}$

10) $y = \sqrt[9]{x}$

11) $y = \dfrac{5}{x^3}$

12) $y = \dfrac{4x}{x - 1}$

1) $y = -2x + 5 \implies y' = -2\cancel{x} + \cancel{5} = \boxed{-2}$

2) $y = \dfrac{1}{2}x^2 + \sqrt{x} \implies y' = \dfrac{1}{2} \cdot \cancel{x^2}^{\,2x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \boxed{x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$

3) $y = 7x^2 - 8x - 9 \implies y' = 2 \cdot 7x - 8\cancel{x} - \cancel{9} = \boxed{14x - 8}$

4) $y = -\dfrac{1}{3}x^2 + 5x + 7 \implies y' = -\dfrac{1}{3}x^2 + 5\cancel{x} + \cancel{7} = -\dfrac{1}{3}2x + 5 = \boxed{-\dfrac{2}{3}x + 5}$

5) $y = 0.4x^2 - 6x - 1 \implies y' = 0.4x^2 - 6\cancel{x} \cancel{- 1} = 0.4 \cdot 2x - 6 = \boxed{0.8x - 6}$

6) $y = (3x^2 - 4x)(6x + 1)$

Sabendo que:

$$y = u \cdot v$$

$$y' = u'v + uv'$$

Temos:

$$y' = \overbrace{(3x^2 - 4x)}^{u}\overbrace{(6x + 1)}^{v}$$

$$\begin{aligned} &= (3 \cdot 2x - 4)(6x + 1) + 6(3x^2 - 4x) \\ &= (6x - 4)(6x + 1) + 18x^2 - 24x \\ &= 36x^2 + 6x - 24x - 4 + 18x^2 - 24x \\ &= 36x^2 + 18x^2 + 6x - 24x - 24x - 4 \end{aligned}$$

$$\boxed{y' = 54 - 42x - 4}$$

7)$(1 - x^2)(1 + x^2)$

Sabendo que:

$$y = u \cdot v$$

$$y' = u'v + uv'$$

Temos:

$$y' = \overbrace{(1 - x^2)}^{u} \cdot \overbrace{(1 + x^2)}^{v}$$

$$\begin{aligned} &= -2x(1 + x^2) + 2x(1 - x^2) \\ &= \cancel{-2x} - 2x^3 + \cancel{2x} - 2x^3 \end{aligned}$$

$$\boxed{y' = -4x^3}$$

8) $y = \sqrt{x}$

Sabendo que:

$$\sqrt[n]{x} \implies y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

Temos:

$$\boxed{y' = \frac{1}{2\sqrt{2x}}}$$

9) $y = \sqrt[4]{x^2}$

Sabendo que:

$$\sqrt[n]{x} \implies y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

Temos:

$$y' = \frac{1}{4\sqrt[4]{(x^2)^3}}$$
$$y' = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^6}}$$

10) $y = \sqrt[9]{x}$

$$y = \sqrt[9]{x} \implies y' = \frac{1}{9\sqrt[9]{x^{9-1}}} = \frac{1}{9\sqrt[9]{x^8}}$$

11) $y = \frac{5}{x^3}$

Sabendo que

$$y = \frac{u}{v} \implies y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

Temos:

$$y = \frac{5}{x^3} \implies \begin{cases} u = 5 \\ v = x^3 \end{cases}$$
$$y' = \frac{0 \cdot x^3 - 5 \cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{-15x^2}{x^6} = -15\frac{x^2}{x^6} = -15x^{-4} = -15\frac{1}{x^4}$$

$$\boxed{y' = -\frac{15}{x^4}}$$

12) $y = \frac{4x}{x-1}$

Sabendo que

$$y = \frac{u}{v} \implies y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

Temos:

$$y = \frac{4x}{x-1} \implies \begin{cases} u = 4x \\ v = x - 1 \end{cases} \implies y' = \frac{4 \cdot (x-1) - 4x \cdot (1)}{(x-1)^2}$$
$$y' = \frac{4 \cdot (x-1) - 4x \cdot (1)}{(x-1)^2} = \frac{\cancel{4x} - 4 - \cancel{4x}}{x^2 - 2x - 1}$$

$$\boxed{y' = \frac{-4}{x^2 - 2x - 1}}$$

Capítulo 2

Regra da cadeia: derivada de funções compostas

Problema 1. Determine a derivada de cada função, usando a regra da cadeia:

1) $y = (3x^3 + 7x^2 - 8x + 6)^5$

2) $y = (x^2 - 5)^{10}$

3) $y = (5x + 9)^5$

4) $\sqrt[5]{x^3 + 6x - 1}$

1) $y = (3x^3 + 7x^2 - 8x + 6)^5$

$$y = (\underbrace{3x^3 + 7x^2 - 8x + 6}_{u})^5 \implies \begin{cases} u = 3x^3 + 7x^2 - 8x + 6 & \implies u'_x = 9x^2 + 14x - 8 \\ y = u^5 & \implies y'_u = 5u^4 \end{cases}$$

Pela regra da cadeia:

$$y'_x = u'_x \cdot y'_u \implies y'_x = 5u^4(9x^2 + 14x - 8)$$

$$\boxed{y' = 5(3x^3 + 7x^2 - 8x + 6)^4(9x^2 + 14x - 8)}$$

2) $y = (x^2 - 5)^{10}$

$$y = (\underbrace{x^2 - 5}_{u})^{10} \implies \begin{cases} u = x^2 - 5 & \implies u'_x = 2x \\ y = u^{10} & \implies y'_u = 10u^9 \end{cases}$$

Pela regra da cadeia:

$$y'_x = u'_x \cdot y'_u \implies y'_x = 2x \cdot 10u^9 = 2x \cdot 10(x^2 - 5)^9$$

$$\boxed{y' = 20x \cdot (x^2 - 5)^9}$$

3) $y = (5x+9)^5$

$$y = (\underbrace{5x+9}_{u})^5 \implies \begin{cases} u = 5x+9 & \implies u'_x = 5 \\ y = u^5 & \implies y'_u = 5u^4 \end{cases}$$

Pela regra da cadeia:

$$y'_x = u'_x \cdot y'_u \implies y'_x = 5(5u^4) = 5(5(5x+9)^4)$$

$$\boxed{y' = 25(5x+9)^4}$$

4) $\sqrt[5]{x^3+6x-1}$

$$y = \sqrt[5]{\underbrace{x^3+6x-1}_{u}} \implies \begin{cases} u = x^3+6x-1 & \implies u'_x = 3x^2+6 \\ y = \sqrt[5]{u} & \implies y'_u = \frac{1}{5\sqrt[5]{u^4}} \end{cases}$$

Pela regra da cadeia:

$$y'_x = u'_x \cdot y'_u \implies y'_x = (3x^2+6)\left(\frac{1}{5\sqrt[5]{u^4}}\right) = \frac{3x^2+6}{5\sqrt[5]{u^4}}$$

$$\boxed{y'_x = \frac{3x^2+6}{5\sqrt[5]{(x^3+6x-1)^4}}}$$

Capítulo 3

Derivada de funções trigonométricas

Problema 1. Determine a derivada das funções:

1) $y = -\cos x$

2) $y = x^2 \cdot x$

3) $y = \dfrac{\cos x}{x}$

4) $y = \sin(4x)$

5) $y = \cos x \cdot \sin x$

1) $y = -\cos x \implies y' = -1(-\sin x) = \boxed{\sin x}$

2) $y = x^2 \cdot x \implies \boxed{y' = 3x^2}$

3) $y = \dfrac{\cos x}{x} \implies y' = \dfrac{-\sin x \cdot x - \cos x}{x^2} = \boxed{\dfrac{-x\sin x - \cos x}{x^2}}$

4) $y = \sin(\underbrace{4x}_{u}) \implies y' = u' \cos u \implies \boxed{y' = 4\cos(4x)}$

5) $y = \underbrace{\cos x}_{u} \cdot \underbrace{\sin x}_{v} \implies y' = u'v + uv' \implies y' = \boxed{-sin^2 x + \cos^2 x}$

Capítulo 4

Aplicações da derivada

Problema 1. **Suponha que a equação do espaço S (em metros) de um ponto material em função do tempo (em segundos) é $S(t) = -3t2+18t+8$. Determine a velocidade instantânea do ponto material em $t = 2$ segundos.**

Problema 2. **Suponhamos que daqui a x meses a população de uma certa comunidade será $P(x) = x^2 + 40x + 3000$ habitantes. Qual a taxa de variação instantânea da população em $x = 3$ meses?**

Problema 3. **O volume de uma esfera de raio r é dado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Qual é a taxa de variação instantânea do volume da esfera em relação ao raio para $r = 3$ cm?**

Problema 4. **A área de um círculo de raio r é dada por $A = \pi r^2$. No decorrer de uma experiência, derrama-se um líquido sobre uma superfície plana de vidro. Se o líquido vertido recobre uma região circular e o raio desta região aumenta uniformemente, qual será a taxa de crescimento da área ocupada pelo líquido, em relação à variação do raio, quando o raio for igual a 5cm?**

Problema 1:

$$S(t) = -3\cancelto{2t}{t^2} + 18\cancel{t} + \cancel{8} \implies S'(t) = -3(2t) + 18$$

$$\boxed{S(t)' = -6t + 18}$$

$$S'(2) = -6(2) + 18 = -12 + 18$$

$$= \boxed{\text{6 metros por segundo.}}$$

Problema 2:

$$P(x) = \cancelto{2x}{x^2} + 40\cancel{x} + \cancel{3000} \implies \boxed{P'(x) = 2x + 40}$$

$$P'(3) = 2(3) + 40$$

$$= \boxed{\text{46 habitantes por mês.}}$$

Problema 3:

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi\cancelto{3r^2}{r^3} \implies \boxed{V'(r) = \frac{4}{3}\pi 3r^2}$$

$$V'(3) = \frac{4}{\cancel{3}}\pi\cancel{3}(3^2) = 4\pi 9$$

$$= \boxed{36\pi\frac{\text{cm}^2}{\text{cm}}}$$

Problema 4:

$$A(r) = \pi\cancelto{2r}{r^2} \implies A'(r) = 2\pi r$$

$$A'(5) = 2\pi(5)$$

$$= \boxed{10\pi\frac{\text{cm}^2}{\text{cm}}}$$