Estatística
Lista 6 — Distribuições de Probabilidade

Gabriel Vasconcelos Ferreira

11 de junho de 2025

Distribuição Binomial

1) A probabilidade de um atirador acertar o alvo é de 2/3. Se ele atirar 5 vezes, qual é a probabilidade de acertar exatamente 2 tiros?

$$P(X=k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$
$$P(X=2) = \frac{5!}{2!(5-2)!} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{5-2}$$
$$P(X=2) = \frac{120}{2 \cdot 6} \cdot \left(\frac{4}{9}\right) \cdot \left(\frac{1}{27}\right)$$
$$P(X=2) = 10 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{27}$$
$$P(X=2) = 10 \cdot \frac{4}{243} = \frac{40}{243} \approx 0.1646 \approx \boxed{16.46\%}$$

2) Dois times de futebol A e B jogam entre si 6 vezes. Encontre a probabilidade de o time A ganhar 2 ou 3 jogos.

$$P(X=k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

$$P(X=2) = \frac{6!}{2!(6-2)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6-2}$$
$$P(X=2) = \frac{6!}{2!4!} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16}$$
$$P(X=2) = \frac{720}{2 \cdot 24} \cdot \frac{1}{64}$$
$$P(X=2) = \frac{720}{48} \cdot \frac{1}{64}$$
$$P(X=2) = \frac{720}{3072}$$

$$P(X=3) = \frac{6!}{3!(6-3)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6-3}$$
$$P(X=3) = \frac{720}{3!3!} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8}$$
$$P(X=3) = \frac{720}{6 \cdot 6} \cdot \frac{1}{64}$$
$$P(X=3) = \frac{720}{36} \cdot \frac{1}{64}$$
$$P(X=3) = \frac{720}{2304}$$

$$P(X=2) + P(X=3) = \frac{720}{3072} + \frac{720}{2304}$$
$$P(X=2) + P(X=3) = \frac{720 \cdot 3}{9216} + \frac{720 \cdot 4}{9216}$$
$$P(X=2) + P(X=3) = \frac{2160 + 2880}{9216}$$
$$P(X=2) + P(X=3) = \frac{5040}{9216}$$
$$P(X=2) + P(X=3) = \frac{35}{64} \approx 0.546875 \approx \boxed{54.69\%}$$

3) Num hospital 5 pacientes devem submeter-se a um tipo de operação, da qual 80% sobrevivem. Qual a probabilidade que todos sobrevivam?

$$P(X = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$
$$P(X = 5) = \frac{\cancel{5!}}{\cancel{5!}\cancel{(5-5)!}} \cdot (0.8)^5 \cdot (0.2)^{5-5}$$
$$P(X = 5) = 1 \cdot (0.8)^5 \cdot \cancel{(0.2)^0}$$
$$P(X = 5) = (0.8)^5$$
$$P(X = 5) = 0.32768 \approx \boxed{32.77\%}$$

4) Se 20% dos parafusos produzidos por uma máquina são defeituosos, determine a probabilidade, entre 4 parafusos escolhidos ao acaso:

a) nenhum ser defeituoso.

$$P(X = 0) = \frac{4!}{0!(4-0)!} \cdot (0.2)^0 \cdot (0.8)^4$$
$$P(X = 0) = \frac{4!}{0!4!} \cdot 1 \cdot (0.8)^4$$
$$P(X = 0) = 1 \cdot (0.8)^4$$
$$P(X = 0) = (0.8)^4$$
$$P(X = 0) = 0.4096 \approx \boxed{40.96\%}$$

b) no máximo dois terem defeito.

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$
$$P(X = 0) = (0.8)^4$$
$$P(X = 1) = \frac{4!}{1!(4-1)!} \cdot (0.2)^1 \cdot (0.8)^3$$
$$P(X = 1) = \frac{4!}{1!3!} \cdot (0.2)^1 \cdot (0.8)^3$$
$$P(X = 1) = 4 \cdot (0.2) \cdot (0.512)$$
$$P(X = 1) = 4 \cdot 0.1024 = 0.4096$$
$$P(X = 2) = \frac{4!}{2!(4-2)!} \cdot (0.2)^2 \cdot (0.8)^2$$
$$P(X = 2) = \frac{4!}{2!2!} \cdot (0.04) \cdot (0.64)$$
$$P(X = 2) = 6 \cdot (0.04) \cdot (0.64)$$
$$P(X = 2) = 6 \cdot 0.0256 = 0.1536$$
$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$
$$P(X \leq 2) = 0.4096 + 0.4096 + 0.1536$$
$$P(X \leq 2) = 0.9728 \approx \boxed{97.28\%}$$

Distribuição Geométrica

1) A probabilidade de uma máquina produzir uma peça defeituosa, num dia, e de 0,1. Qual a probabilidade de que a 10ª peça produzida no dia seja a 1ª defeituosa?

$$P(X = k) = q^{k-1} \cdot p$$
$$P(X = 10) = (0.9)^{10-1} \cdot (0.1)$$
$$P(X = 10) = (0.9)^9 \cdot (0.1)$$
$$P(X = 10) = 0.387420489 \cdot 0.1$$
$$P(X = 10) \approx 0.0387420489 \approx \boxed{3.87\%}$$

2) João deve a Antônio R\$130,00. Cada viagem de Antônio à casa de João custa R\$20,00, e a probabilidade de João ser encontrado em casa é 1/3. Se Antônio encontrar João, conseguirá cobrar a dívida. Qual a probabilidade de Antônio ter de ir mais de 3 vezes à casa de João para conseguir cobrar a dívida?

$$P(X = k) = q^{k-1} \cdot p$$
$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3)$$
$$P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$
$$P(X = 1) = \left(\frac{2}{3}\right)^0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$
$$P(X = 2) = \left(\frac{2}{3}\right)^1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$
$$P(X = 3) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$$
$$P(X \leq 3) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27}$$
$$P(X \leq 3) = \frac{9}{27} + \frac{6}{27} + \frac{4}{27}$$
$$P(X \leq 3) = \frac{19}{27}$$
$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3)$$
$$P(X > 3) = \frac{27}{27} - \frac{19}{27} = \frac{8}{27} \approx \boxed{29.63\%}$$

3) Suponha que a probabilidade de um componente de computador ser defeituoso é de 0,2. Numa mesa de testes, uma batelada é posta à prova, um a um. Determine a probabilidade de o primeiro defeito encontrado ocorrer no sétimo componente testado.

$$P(X = k) = q^{k-1} \cdot p$$
$$P(X = 7) = (0.8)^{7-1} \cdot (0.2)$$
$$P(X = 7) = (0.8)^6 \cdot (0.2)$$
$$P(X = 7) = 0.262144 \cdot 0.2$$
$$P(X = 7) \approx 0.0524288 \approx \boxed{5.24\%}$$

4) Em jogadas repetidas de um dado honesto, qual a probabilidade de o primeiro 6 ocorrer na quinta jogada?

$$P(X = k) = q^{k-1} \cdot p$$
$$P(X = 5) = \left(\frac{5}{6}\right)^{5-1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)$$
$$P(X = 5) = \left(\frac{5}{6}\right)^{4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)$$
$$P(X = 5) = \frac{625}{1296} \cdot \frac{1}{6}$$
$$P(X = 5) = \frac{625}{7776} \approx 0.0804 \approx \boxed{8.04\%}$$

Distribuição de Poisson

1) As chamadas de emergência chegam a uma delegacia de polícia á razão de 4 chamadas/hora, e podem ser aproximadas por uma distribuição de Poisson. Qual é a probabilidade de não haver nenhuma chamada no período de 30 minutos? (1/2 hora?)

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda t} \cdot (\lambda t)^x}{x!}$$

Onde:

- e é a base do logaritmo natural, aproximadamente 2.71828;
- λ é a taxa média de ocorrências por unidade de tempo (neste caso, 4 chamadas/hora);
- t é o tempo considerado (neste caso, 0.5 horas);
- x é o número de ocorrências (neste caso, 0 chamadas).

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda t} \cdot (\lambda t)^x}{x!}$$
$$P(X = 0) = \frac{e^{-\frac{4}{h} \cdot \frac{1h}{2}} \cdot \cancel{\left(\frac{4}{h} \cdot \frac{1h}{2}\right)^0}}{0!}$$
$$P(X = 0) = \frac{e^{-2} \cdot 1}{1}$$
$$P(X = 0) = e^{-2}$$
$$P(X = 0) \approx 0.1353352832 \approx \boxed{13.53\%}$$

2) Um posto telefônico recebe uma média de 10 chamadas por minuto. A distribuição é de Poisson. Pede-se a probabilidade de ocorrer menos de três chamadas em 2 minutos.

$$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$
$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda t} \cdot (\lambda t)^x}{x!}$$
$$\lambda t = 10 \cdot 2 = 20$$
$$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$
$$P(X = 0) = \frac{e^{-20} \cdot (20)^0}{0!} = e^{-20}$$
$$P(X = 1) = \frac{e^{-20} \cdot (20)^1}{1!} = e^{-20} \cdot 20$$
$$P(X = 2) = \frac{e^{-20} \cdot (20)^2}{2!} = e^{-20} \cdot \frac{400}{2} = e^{-20} \cdot 200$$
$$P(X < 3) = e^{-20} + e^{-20} \cdot 20 + e^{-20} \cdot 200$$
$$P(X < 3) = e^{-20}(1 + 20 + 200)$$
$$P(X < 3) = e^{-20}(221)$$
$$P(X < 3) \approx e^{-20}(221) \approx 0.000000455514950 55892 \approx 0.0000456\%$$

3) Os clientes chegam a uma loja à razão de 6,5/h (Poisson). Determine a probabilidade de que durante qualquer 1 hora não chegue nenhum cliente.

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda t} \cdot (\lambda t)^x}{x!}$$
$$P(X = 0) = \frac{e^{-6.5} \cdot (6.5)^0}{0!}$$
$$P(X = 0) = e^{-6.5}$$
$$P(X = 0) \approx 0.0015034391929775 7245 \approx \boxed{0.15\%}$$

4) O fluxo de carros que passam em determinado pedágio é de 1,7 carros/min. Qual a probabilidade de passarem exatamente 2 carros em 2 minutos?

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda t} \cdot (\lambda t)^x}{x!}$$
$$\lambda t = 1.7 \cdot 2 = 3.4$$
$$P(X = 2) = \frac{e^{-3.4} \cdot (3.4)^2}{2!}$$
$$P(X = 2) = \frac{e^{-3.4} \cdot 11.56}{2}$$
$$P(X = 2) = e^{-3.4} \cdot 5.78$$
$$P(X = 2) \approx 0.19289750037068473939 \approx \boxed{19.28\%}$$

Distribuição Normal

1) A duração de um certo componente eletrônico tem média de vida $\overline{X} = 850$ dias e desvio padrão $\sigma = 50$ dias, sabendo-se que a duração é normalmente distribuída, calcule a probabilidade desse componente durar menos de 750 dias.

$$Z = \frac{X - \overline{X}}{\sigma}$$
$$Z = \frac{750 - 850}{50} = \frac{-100}{50} = -2$$
$$P(X < 750) = P(Z < -2)$$
$$P(Z < -2) = 0.0228 \approx \boxed{2.28\%}$$

2) O processo de empacotamento de uma companhia de cereais foi ajustado de maneira que uma média $\overline{X} = 13.0$kg é colocada em cada saco. O desvio padrão é 0.1kg. Sabe-se que a distribuição dos pesos segue uma distribuição normal. Determinar a probabilidade de que um saco escolhido aleatoriamente contenha entre 13.1 e 13.2 kg.

$$Z_1 = \frac{13.1 - 13.0}{0.1} = 1$$
$$Z_2 = \frac{13.2 - 13.0}{0.1} = 2$$
$$P(13.1 < X < 13.2) = P(1 < Z < 2)$$
$$P(Z < 2) - P(Z < 1) = 0.9772 - 0.8413 = 0.1359 \approx \boxed{13.59\%}$$

3) As vendas de um determinado produto têm apresentado distribuição normal com média de 600 unidades/mês e desvio padrão de 40 unidades/mês. Qual é a probabilidade dessa empresa atingir produção maior que 700?

$$Z = \frac{X - \overline{X}}{\sigma}$$
$$Z = \frac{700 - 600}{40} = \frac{100}{40} = 2.5$$
$$P(X > 700) = P(Z > 2.5)$$
$$P(Z > 2.5) = 1 - P(Z < 2.5) = 1 - 0.9938 = 0.0062 \approx \boxed{0.62\%}$$

4) Os pesos de 600 estudantes são normalmente distribuídos com média aritmética $\overline{X} = 65.3$kg e desvio padrão $\sigma = 5.5$kg. Determinar o número de estudantes quepesam entre 60 e 70 kg.

$$Z_1 = \frac{60 - 65.3}{5.5} = \frac{-5.3}{5.5} \approx -0.9636$$
$$Z_2 = \frac{70 - 65.3}{5.5} = \frac{4.7}{5.5} \approx 0.8545$$
$$P(60 < X < 70) = P(-0.9636 < Z < 0.8545)$$
$$P(Z < 0.8545) - P(Z < -0.9636) = 0.8033 - 0.1685 = 0.6348$$
$$N = P(60 < X < 70) \cdot 600 = 0.6348 \cdot 600 \approx 380.88 \approx \boxed{380}$$