Cálculo
Lista 2 - Limites

Gabriel Vasconcelos Ferreira

16 de abril de 2024

Capítulo 1

Noção Intuitiva / Limites laterais

Problema 1. Dadas as funções e seus respectivos gráficos:

(a) calcule os limites laterais da $f(x)$

(b) compare os limites laterais e verifique se eles são iguais ou diferentes

(c) conclua se existe o limite da função e se existir, indique qual é o seu valor

1)

$$\lim_{x \to 0} f(x), \text{para } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{, se } x \leq 0 \\ 1 + x^2 & \text{, se } x > 0 \end{cases}$$

2)

$$\lim_{x \to 2} f(x), \text{para } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{, se } x \geq 2 \\ x + 1 & \text{, se } x < 2 \end{cases}$$

3)

$$\lim_{x \to 0} f(x), \text{para } f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3 & \text{, se } x < 0 \\ -4x + 3 & \text{, se } x \geq 0 \end{cases}$$

4)

$$\lim_{x \to 1} f(x), \text{para } f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{, se } x \neq 1 \\ 0 & \text{, se } x = 1 \end{cases}$$

1)

$$\lim_{x\to 0} f(x), \text{para } f(x) = \begin{cases} x^2 & \textbf{, se } x \leq 0 \\ 1 + x^2 & \textbf{, se } x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= x^2 \\ f(0) &= 0^2 \\ f(0) &= 0 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= 1 + x^2 \\ f(0) &= 1 + 0^2 \\ f(0) &= 1 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

2)

$$\lim_{x\to 2} f(x), \text{para } f(x) = \begin{cases} x^2 & \textbf{, se } x \geq 2 \\ x + 1 & \textbf{, se } x < 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2^-} f(x) &= x^2 \\ f(2) &= 2^2 \\ f(2) &= 4 \\ \lim_{x\to 2^-} f(x) &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lim_{x\to 2^+} f(x) &= x + 1 \\ f(2) &= 2 + 1 \\ f(2) &= 3 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) &= 3 \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

3)

$$\lim_{x\to 0} f(x), \text{para } f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3 & \textbf{, se } x < 0 \\ -4x + 3 & \textbf{, se } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} (-x^2 + 3) \\ &= -1^2 + 3 \\ &= -1 + 3 \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} (-4x + 3) \\ &= -4 * 1 + 3 \\ &= -4 + 3 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= -1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

4)

$$\lim_{x \to 1} f(x), \text{para}\, f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \textbf{, se } x \neq 1 \\ 0 & \textbf{, se } x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} f(x) &= \lim_{x \to 1} (3x+1) \\ &= 3 * 1 + 1 \\ \lim_{x \to 1} f(x) &= 4 \end{aligned}$$

Capítulo 2

Limites com indeterminação

Problema 2. **Calcule os limites, indicando o passo a passo.**

1)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$$

2)
$$\lim_{x\to 10} \frac{x^2-100}{x-10}$$

3)
$$\lim_{x\to 7} \frac{x^2-49}{x-7}$$

4)
$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2-5x-2}{x^2+3x-10}$$

5)
$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+3x+2}{x^2-1}$$

1)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x}$$

Multiplicando divisor e numerador pelo conjugado do numerador:

$$\frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x} =$$

$$\frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{3})(\sqrt{x+3} + \sqrt{3})}{x(\sqrt{x+3} + \sqrt{3})} = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{x+3} + \sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{3}}$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{0+3} + \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}}$$

Multiplicando numerador e divisor por $\sqrt{3}$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{3}} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1(\sqrt{3})}{2\sqrt{3}(\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2 * 3}$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}}$$

2)

Sabendo que $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$:

$$\lim_{x \to 10} \frac{x^2 - 100}{x - 10}$$

$$\frac{x^2 - 10^2}{x - 10} = \frac{\cancel{(x-10)}(x+10)}{\cancel{(x-10)}} = x + 10$$

$$\boxed{\lim_{x \to 10} x + 10 = 20}$$

3)

Sabendo que $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$:

$$\lim_{x \to 7} \frac{x^2 - 49}{x - 7}$$

$$\frac{x^2 - 49}{x - 7} = \frac{x^2 - 7^2}{x - 7} = \frac{\cancel{(x-7)}(x+7)}{\cancel{(x-7)}} = x + 7$$

$$\boxed{\lim_{x \to 7} x + 7 = 14}$$

4)

Sabendo que:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x1)(x - x2)$$
$$x1, x2 \equiv \text{Raízes da função}$$

Podemos usar a fórmula de báskara para achar as raízes do numerador e divisor:
$\boldsymbol{3x^2 - 5x - 2}$:

$$\{x1, x2\} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 * 3 * 2}}{2 * 3}$$
$$= \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6}$$
$$\boxed{\{x1, x2\} = \left\{\frac{12}{6}, \frac{-2}{6}\right\} = \left\{2, -\frac{1}{3}\right\}}$$

$\boldsymbol{x^2 + 3x - 10}$:

$$\{x1, x2\} = \frac{-3\sqrt{3^2 - 4 * 1 * -10}}{2 * 1}$$
$$= \frac{-3\sqrt{3^2 - 4 * 1 * -10}}{2 * 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2}$$
$$\boxed{\{x1, x2\} = \left\{\frac{4}{2}, \frac{-10}{2}\right\} = \left\{2, -5\right\}}$$

Simplificando o divisor e numerador:

$$3x^2 - 5x - 2 = 3(x - 2)(x + \frac{1}{3})$$

$$x^2 + 3x - 10 = 1(x - 2)(x + 5)$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 + 3x - 10}$$
$$\frac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 + 3x - 10} = \frac{3\cancel{(x-2)}(x + \frac{1}{3})}{\cancel{(x-2)}(x + 5)} = \frac{3(x + \frac{1}{3})}{x + 5} = \frac{3x + 1}{x + 5} = \frac{3x + 1}{x + 5} = \frac{3 * 2 + 1}{2 + 5} = \frac{7}{7}$$
$$\boxed{\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 + 3x - 10} = 1}$$

5)

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 + 3x - 10}$$

Sabendo que:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x1)(x - x2)$$
$$x1, x2 \equiv \text{Raízes da função}$$

Podemos usar a fórmula de báskara para achar as raízes do numerador: $\mathbf{3x^2 - 5x - 2}$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{-3^2 - 4 * 1 * 2}}{2 * 1} =$$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2}$$

$$\boxed{\{x1, x2\} = \left\{\frac{-2}{2}, \frac{-4}{2}\right\} = \left\{-1, -2\right\}}$$

Sabendo que $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$:

$$x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x - 1)(x + 1)$$

Podemos dizer que:

$$3x^2 - 5x - 2 = (x + 1)(x + 2)$$
$$x^2 + 3x - 10 = (x - 1)(x + 1)$$

Então:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} =$$

$$\frac{\cancel{(x + 1)}(x + 2)}{\cancel{(x + 1)}(x - 1)} = \frac{x + 2}{x - 1} = \frac{x + 2}{x - 1} = \frac{-1 + 2}{-1 - 1} = \frac{1}{-2}$$

$$\boxed{\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} = -\frac{1}{2}}$$