Cálculo
Lista 1 - Funções

Gabriel Vasconcelos Ferreira

6 de abril de 2024

Capítulo 1

Função constante / Função de 1º grau

Problema 1. Faça o gráfico das funções:

(a) $y = \pi$

(b) $y = -\frac{3}{2}$

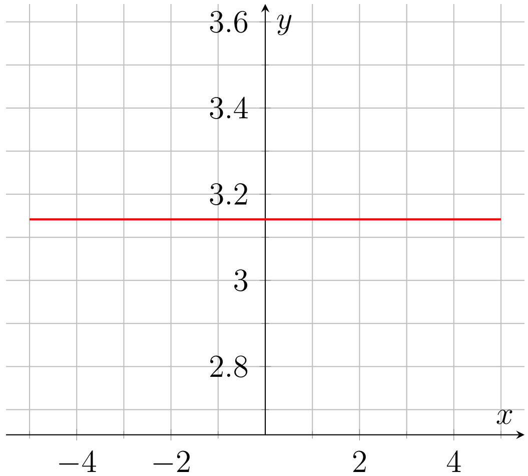
(c) $y = -x + 5$

(d) $y = 2x + 4$

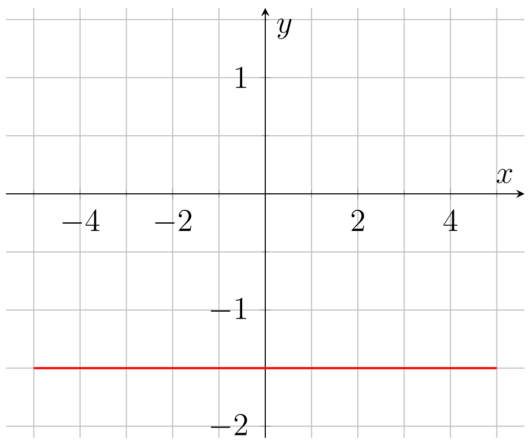
Problema 2. A tarifa de táxi comum em São Paulo, em outubro de 2023, foi definida da seguinte forma: R\$ 6,00 de bandeirada (custo fixo) mais R\$ 4,25 por km rodado (custo variável). Qual é a fórmula ou regra que descreve essa situação? Apresente o gráfico dessa situação. Determine o valor a ser pago (custo total) por uma corrida relativa a um percurso de 5 km.

Problema 1:

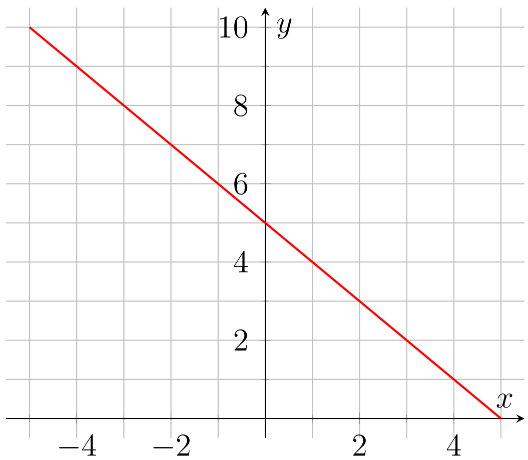
A) $y = \pi$



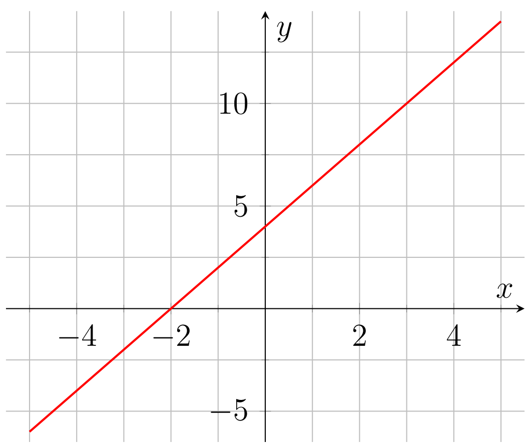
B) $y = -\frac{3}{2}$



C) $y = -x + 5$



D) $y = 2x + 4$



Problema 2:

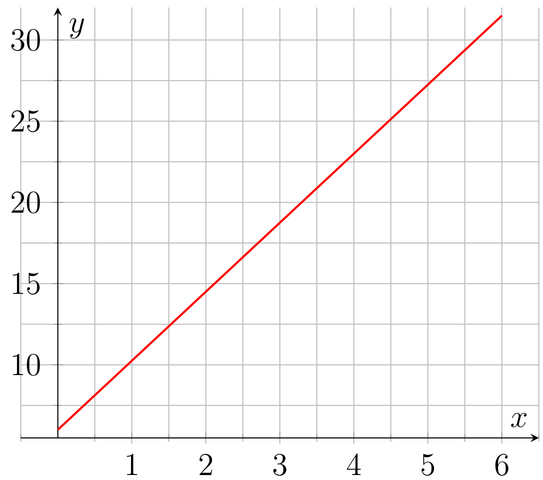
Parte (a)

Fórmula:

$$f(t) = 6 + 4.25t$$

Parte (b)

Gráfico da função:



Parte (c)

Valor para 5km:

$$f(t) = 6 + 4.25t$$
$$f(5) = 6 + 4.25 * 5$$
$$f(5) = 6 + 21.25$$
$$f(5) = 27.25$$

Capítulo 2

Função de $2^{\underline{o}}$ grau

Problema 1. Faça o gráfico das funções.

(a) $y = -x^2 + 1$

(b) $y = x^2 - 2x$

(c) $y = x^2 - 2x - 3$

(d) $y = -x^2 + 3x$

Problema 2. Um foguete e atirado para cima de modo que sua altura h, em relação ao solo, é dada, em função do tempo, pela função $h = 10 + 120t - 5t^2$, em que o tempo é dado em segundos e a altura é dada em metros. Calcule:

(a) A altura do foguete 2 segundos depois de ser lançado.

(b) O tempo necessário para o foguete atingir a altura de 485 metros.

Problema 3. A receita R de uma pequena empresa, entre os dias 1 e 30 do mês, é dada, em função do dia d do mês, pela função $R(d) = -d^2 + 31d - 30$, enquanto o custo C é dada por $C(d) = 11d - 19$.

(a) Encontre a função lucro L, sendo que o lucro é igual à Receita menos Custo, ou seja, $L(d) = R(d) - C(d)$.

(b) Em que dias o lucro da empresa é zero?

Problema 4. O saldo de uma conta bancária é dado por $S = t^2 - 11t + 24$, onde S é o saldo em reais e t é o tempo em dias. Determine:

(a) em que dias o saldo é zero;

(b) em que período o saldo é negativo;

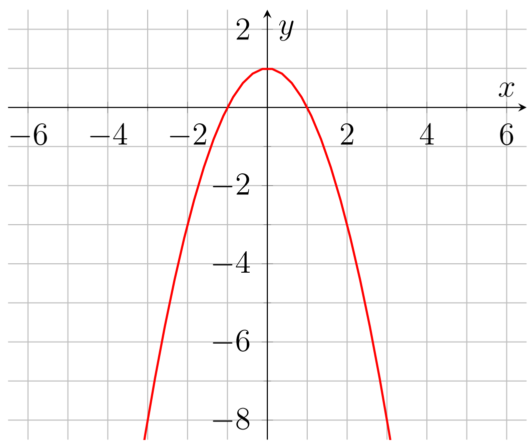
(c) em que dia o saldo é mínimo;

(d) o saldo mínimo, em reais.

Problema 1

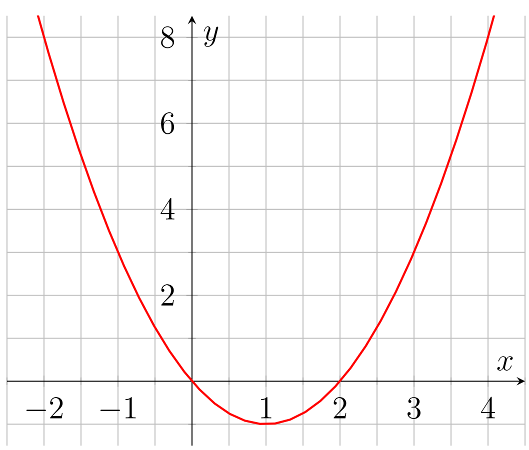
Parte (a)

$y = -x^2 + 1$



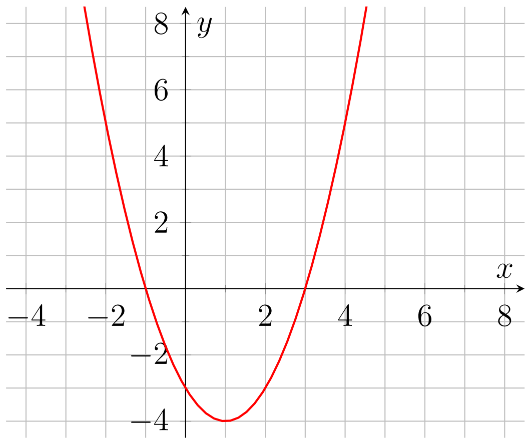
Parte (b)

$y = x^2 - 2x$



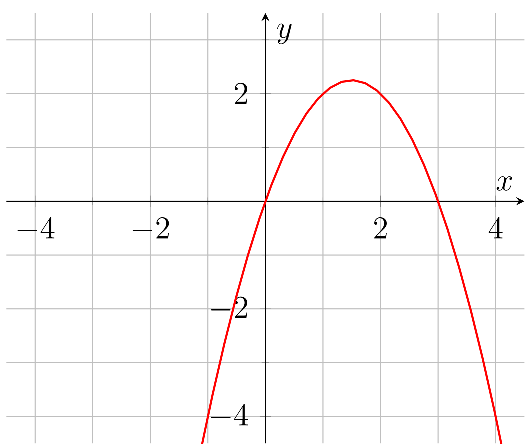
Parte (c)

$y = x^2 - 2x - 3$



Parte (d)

$y = -x^2 + 3x$



Problema 2:

$h = 10 + 120t - 5t^2$

Parte (a)

A altura do foguete 2 segundos após ser lançado:

$$h = 10 + 120t - 5t^2$$
$$h = 10 + 120 * 2 - 5(2^2)$$
$$h = 10 + 240 - 5 * 4$$
$$h = 250 - 20$$
$$h = 230 \text{ metros}$$

Parte (b)

O tempo necessário para o foguete atingir a altura de 485 metros:

$$h = 10 + 120t - 5t^2$$
$$485 = 10 + 120t - 5t^2$$
$$5t^2 + 120t - 475 = 0$$

Usando a fórmula de báskara:

$$S = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 120^2 - 4 * 10 * -475 \\ &= 1440 - (40 * -19000) \\ &= 1440 + 19000 \\ &= 20440 \\ S &= \frac{-120 \pm \sqrt{20440}}{20} \\ &= 5,19\end{aligned}$$

5 segundos.

Problema 3:

Parte (a)

Encontre a função lucro L, sendo que o lucro é igual à Receita menos Custo, ou seja, $L(d) = R(d) - C(d)$.

$$R(d) = -d^2 + 31d - 30$$
$$C(d) = 11d - 19$$
$$\begin{aligned}L(d) &= (-d^2 + 31d - 30) - (11d - 19) \\ &= -d^2 + 31d - 30 - 11d - 19 \\ &= -d^2 + 21d - 49\end{aligned} \tag{2.1}$$

Parte (b)

Em que dias o lucro da empresa é zero? Usando a equação para lucro (2.1), podemos calcular:

$$L(x) = 0$$
$$-d^2 + 21d - 49 = 0$$
$$\text{Usando a fórmula de báskara:}$$
$$S = \frac{-21 \pm \sqrt{21^2 - 4 * -1 * -49}}{2 * -1}$$
$$S = \frac{-21 \pm \sqrt{441 - 196}}{-2}$$
$$S = \frac{-21 \pm \sqrt{245}}{-2}$$
$$S = \frac{-21 + \sqrt{245}}{-2}, \frac{-21 - \sqrt{245}}{-2}$$
$$S = 2.6737\ldots, 18.3262\ldots$$

Aproximadamente nos dias 3 e 18 de cada mês.

Problema 4: O saldo de uma conta bancária é dado por $S = t^2 - 11t + 24$ onde S é o saldo em reais e t é o tempo em dias. Determine:

Parte (a)

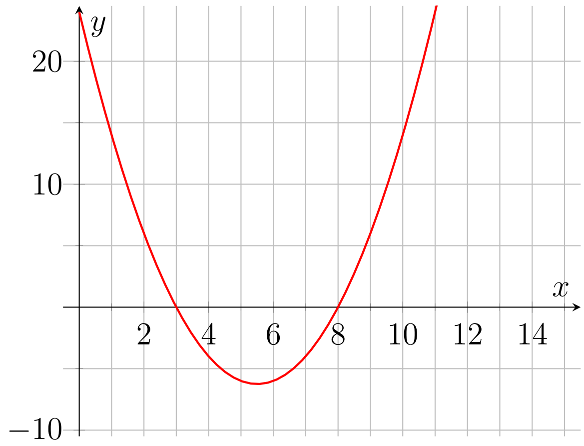
Em que dias o saldo é zero:

$$S(t) = t^2 - 11t + 24$$
$$\text{Usando a fórmula da báskara:}$$
$$S = \frac{11 \pm \sqrt{-11^2 - 4 * 1 * 24}}{2 * 1}$$
$$S = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{2}$$
$$S = \frac{11 \pm \sqrt{25}}{2}$$
$$S = \frac{11 \pm 5}{2}$$
$$S = \frac{11 + 5}{2}, \frac{11 - 5}{2}$$
$$S = \frac{16}{2}, \frac{6}{2}$$
$$S = 8, 3$$

Dias 3 e 8.

Parte (b)

Em que período o saldo é negativo:



Pelo gráfico, e sabendo que os zeros da função estão em $x = \{3, 8\}$, o saldo da conta será negativo entre os dias 3 e 8.

Parte (c)

Em que dia o saldo é mínimo:

Pela fórmula do vértice da parábola:

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$
$$x_v = -\frac{-11}{2}$$
$$x_v = 5.5$$

Entre o dia 5 e 6.

Parte (d)

O saldo mínimo, em reais:

Sabendo que o momento de saldo mínimo é 5.5:

$$S(t) = t^2 - 11t + 24$$
$$S(5.5) = 5.5^2 - 11 * 5.5 + 24$$
$$S(5.5) = 30.25 - 60.5 + 24$$
$$S(5.5) = -6.25$$

R\$6,25.

Capítulo 3

Função exponencial e logaritmica

Problema 1. Faça o gráfico das funções

(a) $y = 3^x$

(b) $y = \frac{1}{3}^x$

(c) $y = log_3(x)$

(d) $y = log_e(x) = ln(x)$

Problema 2. A função $P(t) = 300000 * 2^{0.05t}$ fornece o número P de milhares de habitantes de uma cidade, em função do tempo t, em anos, a partir do ano de 1990.

(a) Determine o número de habitantes dessa cidade tem $t = 0$, que corresponde ao ano de 1990.

(b) Quantos habitantes, aproximadamente, espera-se que ela tenha após 10 anos, ou seja, no ano 2000?

(c) Faça o gráfico da função.

Problema 3. **Ao observar, em um microscópio, uma cultura de bactérias, um cientista percebeu que elas se reproduzem como uma função exponencial. A lei de formação que relaciona a quantidade de bactérias existentes com o tempo é igual a $f(t) = Q * 2^{t-1}$, em que Q é a quantidade inicial de bactérias e t é o tempo em horas. Se nessa cultura havia, inicialmente, 700 bactérias, a quantidade de bactérias após 4 horas será de (apresente os cálculos):**

(a) 7000

(b) 8700

(c) 15300

(d) 11200

(e) 5600

Problema 4. **Vamos supor um automóvel, com valor inicial de R\$109.000,00. Para fins contábeis, a Receita Federal estipula que a taxa de depreciação de veículos é de 20% ao ano. Essa taxa só é utilizada para fins contábeis.**

(a) Apresente a função dessa situação através de uma fórmula.

(b) Qual seria o valor aproximado do automóvel, 5 anos após o momento inicial?

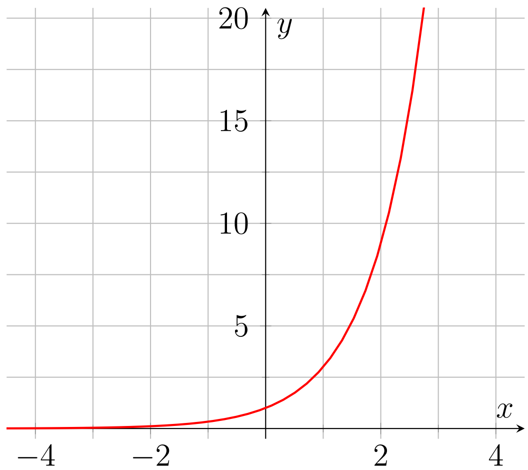
(c) Qual o valor aproximado do automóvel após 10, 15 e 20 de compra?

(d) Faça o gráfico da função.

Faça o gráfico das funções:

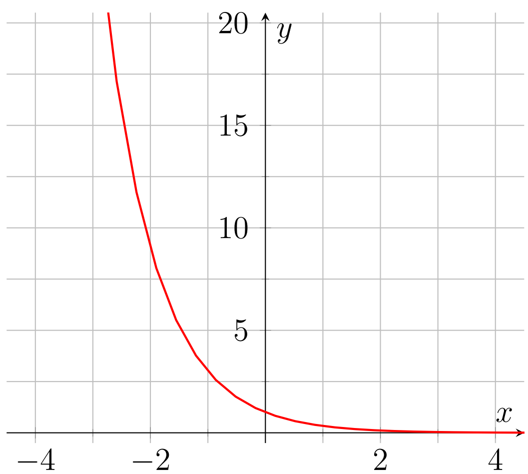
Parte (a)

$y = 3^x$



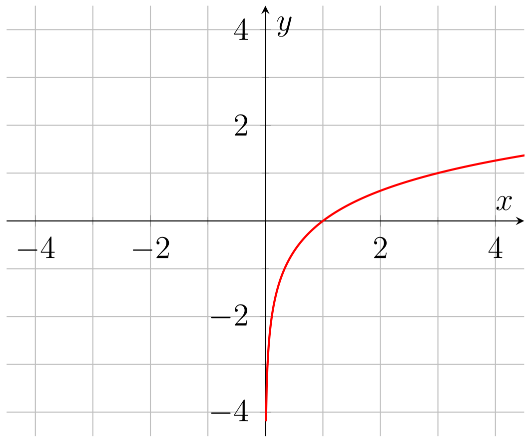
Parte (b)

$y = \frac{1}{3}^x$



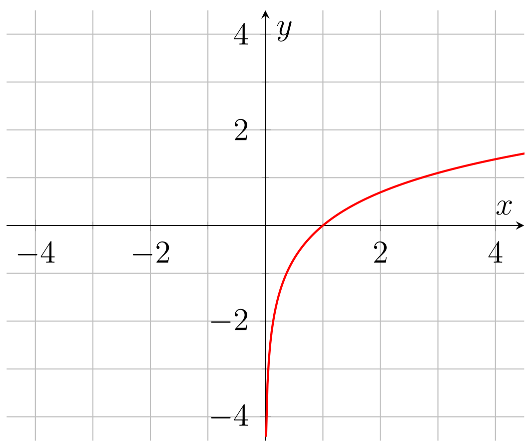
Parte (c)

$y = log_3(x)$



Parte (d)

$y = log_e(x) = ln(x)$



Problema 2: A função $P(t) = 300000 * 2^{0.05t}$ fornece o número P de milhares de habitantes de uma cidade, em função do tempo t, em anos, a partir do ano de 1990.

Parte (a)

Determine o número de habitantes dessa cidade em $t = 0$, que corresponde ao ano de 1990.

$P(t) = 300000 * 2^{0.05t}$

$$P(0) = 300000 * 2^0$$
$$P(0) = 300000 * 1$$
$$P(0) = 300000 \text{ habitantes}$$

Parte (b)

Quantos habitantes, aproximadamente, espera-se que ela tenha após 10 anos, ou seja, no ano 2000?

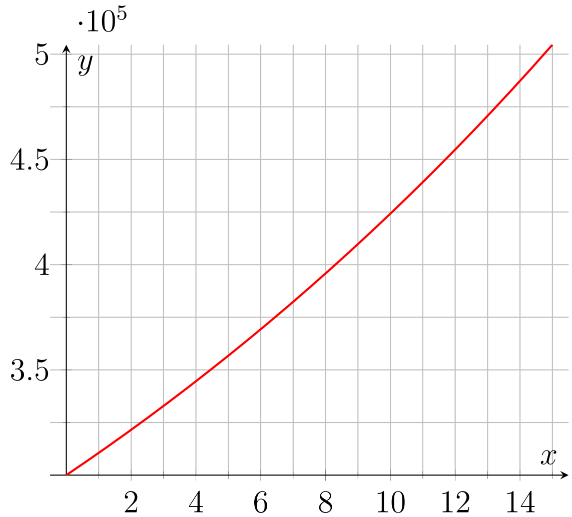
$P(t) = 300000 * 2^{0.05t}$

$$P(10) = 300000 * 2^{0.05*10}$$
$$P(10) = 300000 * 2^{0.5}$$
$$P(10) = 300000 * \sqrt{2}$$

$$P(10) = 424264 \text{ habitantes}$$

Parte (c)

Faça o gráfico da função.



Problema 3: Ao observar, em um microscópio, uma cultura de bactérias, um cientista, percebeu que elas se reproduzem como uma função exponencial. A lei de formação que relaciona a quantidade de bactérias existentes com o tempo é igual a $f(t) = Q * 2^{t-1}$, em que nessa cultura havia, inicialmente, 700 bactérias, a quantidade de bactérias após 4 horas será de:

Parte (d)

$f(t) = Q * 2^{t-1}, Q = 700$

$$f(4) = 700 * 2^{4-1}$$
$$f(4) = 700 * 2^3$$
$$f(4) = 700 * 8$$

$$f(4) = 5600 \text{ bactérias}$$

Problema 4: Vamos supor um automóvel, com valor inicial de R$109.000,00. Para fins contábeis, a Receita Federal estipula que a taxa de depreciação de veículos é de 20% ao ano. Essa taxa só é utilizada para fins contábeis.

Parte (a)

Apresente a função dessa situação através de uma fórmula.

$$M = C * (1 - i)^t$$
$$M = 109000 * (1 - 0.2)^t$$
$$M = 109000 * 0.8^t$$

Parte (b)

Qual seria o valor aproximado do automóvel, 5 anos após o momento inicial?

$$M = 109000 * 0.8^t$$
$$M = 109000 * 0.8^5$$
$$M = 109000 * 0.32768$$
$$M = 35717.12$$

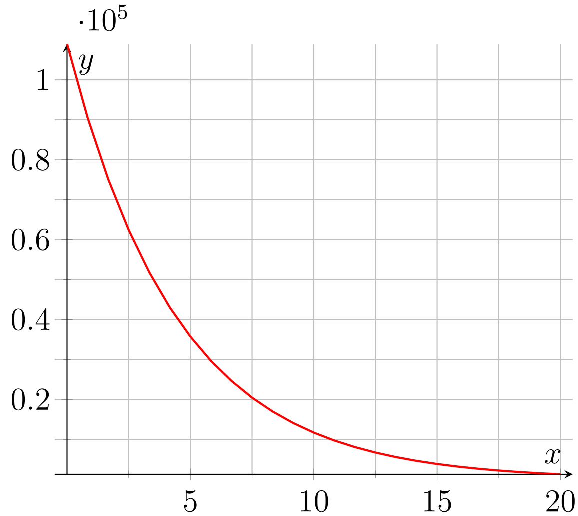
Parte (c)

Qual o valor aproximado do automóvel após, 10, 15 e 20 anos de compra?

$$\begin{aligned} M &= 109000 * 0.8^{10} \\ &= 109000 * 0.10737\ldots \\ &= 11703.78\ldots \end{aligned} \qquad \begin{aligned} M &= 109000 * 0.8^{15} \\ &= 109000 * 0.03518\ldots \\ &= 3835.09\ldots \end{aligned} \qquad \begin{aligned} M &= 109000 * 0.8^{20} \\ &= 109000 * 0.01152\ldots \\ &= 1256.68\ldots \end{aligned}$$

Parte (d)

Faça o gráfico da função:



Capítulo 4

Função seno e cosseno

Problema 1. Faça o gráfico das funções:

(a) $y = 2cos(x)$

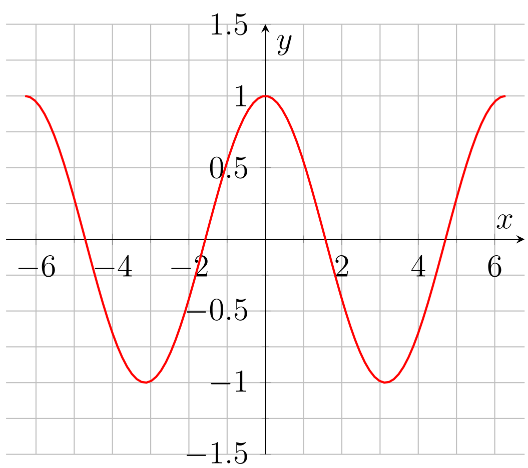
(b) $y = 1 + cos(x)$

(c) $y = 2 + sin(x)$

(d) $y = sin(\frac{x}{2})$

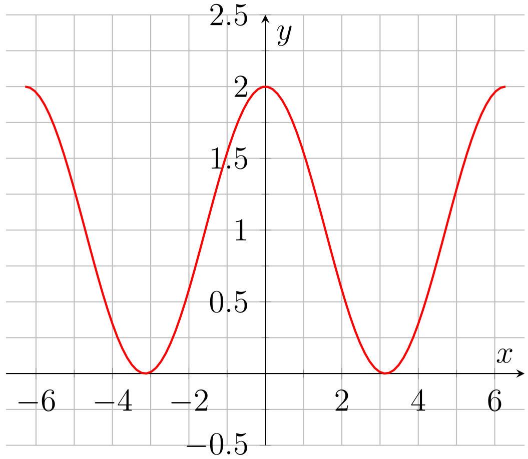
Parte (a)

$y = 2cos(x)$



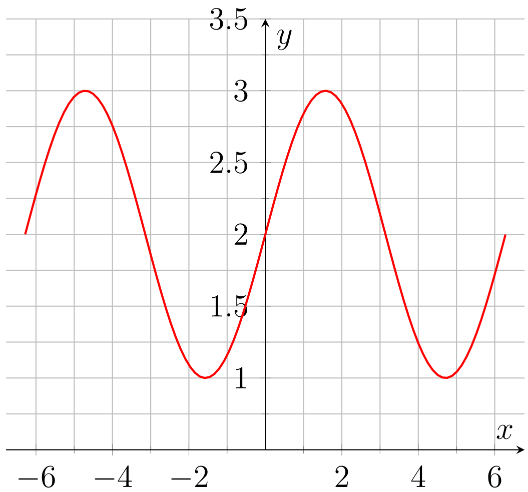
Parte (b)

$y = 1 + cos(x)$



Parte (c)

$y = 2 + sin(x)$



Parte (d)

$y = sin(\frac{x}{2})$