Cálculo
Lista 3 - Derivadas

Gabriel Vasconcelos Ferreira

15 de maio de 2024

Capítulo 1

Regras de derivação

Problema 1. Calcular a derivada das funções, usando o formulário:

1) $y = -2x + 5$	5) $0.4x^2 - 6x - 1$	9) $y = \sqrt[4]{x^2}$
2) $y = \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{x}$	6) $(3x^2 - 4x)(6x + 1)$	10) $y = \sqrt[9]{x}$
3) $y = 7x^2 - 8x - 9$	7) $(1 - x^2)(1 + x^2)$	11) $y = \frac{5}{x^3}$
4) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 5x + 7$	8) $y = \sqrt{x}$	12) $y = \frac{4x}{x-1}$

1) $y = -2x + 5$

$$\begin{aligned} y\prime &= -2\cancel{x} + \cancel{5} \\ &= \boxed{-2} \end{aligned}$$

2) $y = \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{x}$

$$\begin{aligned} y\prime &= \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{x} \\ &= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}x + \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \boxed{x + \frac{1}{2\sqrt{x}}} \end{aligned}$$

3) $y = 7x^2 - 8x - 9$

$$\begin{aligned} y\prime &= 7x^2 - 8x - 9 \\ &= 2 \cdot 7x - 8\cancel{x} - \cancel{9} \\ &= \boxed{14x - 8} \end{aligned}$$

4) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 5x + 7$

$$\begin{aligned} y\prime &= -\frac{1}{3}x^2 + 5\cancel{x} + \cancel{7} \\ &= -\frac{1}{3}2x + 5 \\ &= \boxed{-\frac{2}{3}x + 5} \end{aligned}$$

5) $y = 0.4x^2 - 6x - 1$

$$\begin{aligned} y\prime &= 0.4x^2 - 6\cancel{x} \cancel{- 1} \\ &= 0.4 \cdot 2x - 6 \\ &= \boxed{0.8x - 6} \end{aligned}$$

6) $y = (3x^2 - 4x)(6x + 1)$

Sabendo que:

$$y = u \cdot v$$

$$y\prime = u\prime v + uv\prime$$

$$y\prime = \overbrace{(3x^2 - 4x)}^{u}\overbrace{(6x + 1)}^{v}$$

$$\begin{aligned} &= (3 \cdot 2x - 4)(6x + 1) + 6(3x^2 - 4x) \\ &= (6x - 4)(6x + 1) + 18x^2 - 24x \\ &= 36x^2 + 6x - 24x - 4 + 18x^2 - 24x \\ &= 36x^2 + 18x^2 + 6x - 24x - 24x - 4 \end{aligned}$$

$$\boxed{y\prime = 54 - 42x - 4}$$

7)$(1 - x^2)(1 + x^2)$

Sabendo que:

$$y = u \cdot v$$

$$y\prime = u\prime v + uv\prime$$

$$y\prime = \overbrace{(1 - x^2)}^{u} \cdot \overbrace{(1 + x^2)}^{v}$$

$$\begin{aligned} &= -2x(1 + x^2) + 2x(1 - x^2) \\ &= \cancel{-2x} - 2x^3 + \cancel{2x} - 2x^3 \end{aligned}$$

$$\boxed{y\prime = -4x^3}$$

8) $y = \sqrt{x}$

Sabendo que:

$$\sqrt[n]{x} \implies y\prime = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$\boxed{y\prime = \frac{1}{2\sqrt{2x}}}$$

9) $y = \sqrt[4]{x^2}$

Sabendo que:

$$\sqrt[n]{x} \implies y\prime = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$y\prime = \frac{1}{4\sqrt[4]{(x^2)^3}}$$
$$y\prime = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^6}}$$

10) $y = \sqrt[9]{x}$

$$y = \sqrt[9]{x} \implies y\prime = \frac{1}{9\sqrt[9]{x^{9-1}}} = \frac{1}{9\sqrt[9]{x^8}}$$

11) $y = \frac{5}{x^3}$

Sabendo que

$$y = \frac{u}{v} \implies y\prime = \frac{u\prime v - v\prime u}{v^2}$$

então:

$$y = \frac{5}{x^3} \implies \begin{cases} u = 5 \\ v = x^3 \end{cases}$$

$$y\prime = \frac{0 \cdot x^3 - 5 \cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{-15x^2}{x^6} = -15\frac{x^2}{x^6} = -15x^{-4} = -15\frac{1}{x^4}$$

$$\boxed{y\prime = -\frac{15}{x^4}}$$

12) $y = \frac{4x}{x-1}$

Sabendo que

$$y = \frac{u}{v} \implies y\prime = \frac{u\prime v - v\prime u}{v^2}$$

então:

$$y = \frac{4x}{x-1} \implies \begin{cases} u = 4x \\ v = x-1 \end{cases} \implies y\prime = \frac{4 \cdot (x-1) - 4x \cdot (1)}{(x-1)^2}$$

$$y\prime = \frac{4 \cdot (x-1) - 4x \cdot (1)}{(x-1)^2} = \frac{\cancel{4x} - 4 - \cancel{4x}}{x^2 - 2x - 1}$$

$$\boxed{y\prime = \frac{-4}{x^2 - 2x - 1}}$$

Capítulo 2

Regra da cadeia: derivada de funções compostas

Problema 1. Determine a derivada de cada função, usando a regra da cadeia:

1) $y = (3x^3 + 7x^2 - 8x + 6)^5$

2) $y = (x^2 - 5)^{10}$

3) $y = (5x + 9)^5$

4) $\sqrt[5]{x^3 + 6x - 1}$

1) $y = (3x^3 + 7x^2 - 8x + 6)^5$

$$y = (\underbrace{3x^3 + 7x^2 - 8x + 6}_{u})^5 \implies \begin{cases} u = 3x^3 + 7x^2 - 8x + 6 & \implies u\prime_x = 9x^2 + 14x - 8 \\ y = u^5 & \implies y\prime_u = 5u^4 \end{cases}$$

Pela regra da cadeia:

$$y\prime_x = u\prime_x \cdot y\prime_u \implies y\prime_x = 5u^4(9x^2 + 14x - 8)$$

$$\boxed{y\prime = 5(3x^3 + 7x^2 - 8x + 6)^4(9x^2 + 14x - 8)}$$

2) $y = (x^2 - 5)^{10}$

$$y = (\underbrace{x^2 - 5}_{u})^{10} \implies \begin{cases} u = x^2 - 5 & \implies u\prime_x = 2x \\ y = u^{10} & \implies y\prime_u = 10u^9 \end{cases}$$

Pela regra da cadeia:

$$y\prime_x = u\prime_x \cdot y\prime_u \implies y\prime_x = 2x \cdot 10u^9 = 2x \cdot 10(x^2 - 5)^9$$

$$\boxed{y\prime = 20x \cdot (x^2 - 5)^9}$$

3) $y = (5x+9)^5$

$$y = (\underbrace{5x+9}_{u})^5 \implies \begin{cases} u = 5x+9 & \implies u\prime_x = 5 \\ y = u^5 & \implies y\prime_u = 5u^4 \end{cases}$$

Pela regra da cadeia:

$$y\prime_x = u\prime_x \cdot y\prime_u \implies y\prime_x = 5(5u^4) = 5(5(5x+9)^4)$$

$$\boxed{y\prime = 25(5x+9)^4}$$

4) $\sqrt[5]{x^3+6x-1}$

$$y = \sqrt[5]{\underbrace{x^3+6x-1}_{u}} \implies \begin{cases} u = x^3+6x-1 & \implies u\prime_x = 3x^2+6 \\ y = \sqrt[5]{u} & \implies y\prime_u = \frac{1}{5\sqrt[5]{u^4}} \end{cases}$$

Pela regra da cadeia:

$$y\prime_x = u\prime_x \cdot y\prime_u \implies y\prime_x = (3x^2+6)(\frac{1}{5\sqrt[5]{u^4}}) = \frac{3x^2+6}{5\sqrt[5]{u^4}}$$

$$\boxed{y\prime_x = \frac{3x^2+6}{5\sqrt[5]{(x^3+6x-1)^4}}}$$

Capítulo 3

Derivada de funções trigonométricas

Problema 1. **Determine a derivada das funções:**

1) $y = -\cos x$

2) $y = x^2 \cdot x$

3) $y = \frac{\cos x}{x}$

4) $y = \sin(4x)$

5) $y = \cos x \cdot \sin x$

1) $y = -\cos x$

Capítulo 4

Aplicações da derivada

Problema 1. **Suponha que a equação do espaço S (em metros) de um ponto material em função do tempo (em segundos) é $S(t) = -3t2+18t+8$. Determine a velocidade instantânea do ponto material em $t = 2$ segundos.**

Problema 2. **Suponhamos que daqui a xmeses a população de uma certa comunidade será $P(x) = x2 + 40x + 3000$ habitantes. Qual a taxa de variação instantânea da população em $x = 3$ meses?**

Problema 3. **O volume de uma esfera de raio r é dado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Qual é a taxa de variação instantânea do volume da esfera em relação ao raio para $r = 3$ cm?**

Problema 4. **A área de um círculo de raio r é dada por $A = \pi r^2$. No decorrer de uma experiência, derrama-se um líquido sobre uma superfície plana de vidro. Se o líquido vertido recobre uma região circular e o raio desta região aumenta uniformemente, qual será a taxa de crescimento da área ocupada pelo líquido, em relação à variação do raio, quando o raio for igual a 5cm?**

Problema 5.