

## Processamento Digital de Sinais

Alunos: Gabriel Victor M. de O. Vital Pablo Godoy **Professor:** Ricardo Campello

# Universidade federal de Pernambuco

Centro de Tecnologia e Geociências Departamento de Eletrônica e Sistemas

## Detecção de sinais DTMF

Relatório referente ao projeto da terceira unidade.

Alunos: Gabriel Victor Marques

Pablo Godoy

Professor: Ricardo Campello

## Conteúdo

1	Introdução	1
2	Objetivo	1
3	Parte 1: Problemas Básicos         3.1 Parte 1.1 - (a)	3
4	3.3 Parte 1.3 - (b)	<b>4</b>
5	Parte 3: Problemas Avançados         5.1 Parte 3.1 - (f)	18 18
6	Conclusão	21
7	Apendice	22
Bi	ibliografia	26

### 1 Introdução

Os sinais DTFM (Dual-TOne Multifrequency) tem diversas aplicações importantes, sendo usada em muitos sistemas de Telecomunicações, telefonia a teclado, correio de vóz, sistemas bancários interativos e comércio eletônico são exemplos de suas aplicações. A crescente demanda por taxas de transmissão cada vez mais elevadas, faz com que a velocidade de decodificação desses sinais(DTMF) tornem-se um parâmetro importante no projeto desses sistemas.

## 2 Objetivo

Neste projeto terá como objetivo demonstrar como o sistema de teclas em um telefone usa sinais de diferentes frequências para indicar qual tecla foi pressionada. A Transformada de Fourier de Tempo Discreto (TFTD) de um sinal de telefone amostrado pode ser usada para identificar essas frequências. O som que você escuta quando uma tecla é pressionada é a soma de duas senóides. A senóide de frequência mais alta indica a coluna e a de frequência mais baixa indica a linha do teclado. A figura 1 abaixo mostra um teclado juntamente com as duas frequências correspondentes a cada dígito, considerando que a forma de onda contínua é amostrada a 8192 kHz. A figura mostra ainda uma tabela contendo as frequências de cada dígito. Assim, por exemplo, o dígito 5 é representado pela equação 2.0.1 . [3]

$$d_5 = sen(0, 5906n) + sen(1, 0247n)$$
(2.0.1)

o caso geral para as frequências  $\boldsymbol{w}_i$  e  $\boldsymbol{w}_j$  listadas na tabela da figura 1 temos que:

$$d_k = sen(w_i n) + sen(w_i n) \tag{2.0.2}$$

em que k é o digito,  $w_i$  se refere a frequência da linha e  $w_j$  é referente a frequência da coluna.

	Freq. (colunas)		
Freq. (linhas)	0,9273	1,0247	1,1328
0,5346	1	2	3
0,5906	4	5	6
0,6535	7	8	9
0,7217		0	

(a)

Dígito	Frequência	Frequência
	(Linha)	(Coluna)
0	0,7217	1,0247
1	0,5346	0,9273
2	0,5346	1,0247
3	0,5346	1,1328
4	0,5906	0,9273
5	0,5906	1,0247
6	0,5906	1,1328
7	0,6535	0,9273
8	0,6535	1,0247
9	0,6535	1,1328

Figura 1: Frequências da DTFT para os tons de um telefone a teclado.

Neste projeto será mostrado como o sistema de teclas em um telefone usa sinais de diferentes frequências para indicar qual tecla foi pressionada. A Transformada de Fourier de Tempo Discreto (TFTD) de um sinal de telefone amostrado pode ser usada para identificar essas frequências. O som que você escuta quando uma tecla é pressionada é a soma de duas senóides. A senóide de frequência mais alta indica a coluna e a de frequência mais baixa indica a linha do teclado. [3]

#### 3 Parte 1: Problemas Básicos

Nesses problemas será criado tons apropriados para cada dígito e examinaremos a TFTD para verificar se os sinais tem as frequências corretas. Também definiremos um vetor contendo os tons de seu número de telefone.

#### 3.1 Parte 1.1 - (a)

Nesta parte foi implementado um script no software MATLAB para criar um vetor de linha de d0 a d9 aos quais representam 10 dígitos num intervalo  $0 \le n \le 999$ . Cada sinal foi escutado por meio da função **sound**, foi notado que os sinais são bem definidos e que é bastante claro ao analisar a equação 2.0.2 da figura 1.

#### 3.2 Parte 1.2 - (b)

Nesta parte foi utilizado a função fft para computar N amostras da TFTD de um sinal de comprimento finito nas frequências de  $\omega_k = \frac{2k\pi}{N}$ , essas amostras são computadas igualmente espaçadas. A fft foi utilizada em especifico para computar amostras de  $D_2(e^{j\omega})$  e  $D_9(e^{j\omega})$  em  $\omega_k = \frac{2k\pi}{2048}$ . um vetor foi criado contendo os  $\omega_k$  para  $0 \le k \le 2047$ , a amplitude da TFTD para esses sinais foram obtidas e está disposta na figura 2.

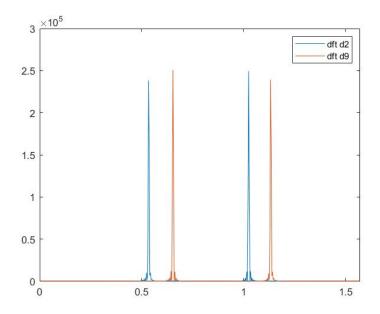


Figura 2: TFTD dos digitos  $d_2$  e  $d_9$ 

#### 3.3 Parte 1.3 - (b)

Nesta parte a função foi criado um vetor com 100 amostras com valor zero para representar o "silêncio". Foi definido um número de telefone como **fone** 

utilizando os sinais corretos que tem suas frequências dispostas na tabela da figura 1. Como exemplo, se o número é 32718210, vai ser digitado:

fone = [d3 space d2 space d7 space d1 space d8 space d2 space d1 space d0].

Por fim, foi utilizou-se a função **sound** para tocar o número digitado (fone).

#### 4 Parte 2: Problemas Intermediários

Nesta parte o desafio será decodificar números de telefone que estão dispostos no arquivo **touch.mat**. Os dados foram carregados no MATLAB utilizando o comando **load touch**, após o arquivo ser carregado corretamente fomos capazes de listar os nomes das variáveis digitando o comando **who**, as variáveis são:

#### hardx1 hardx2 x1 x2

Os vetores x1 e x2 contém versões amostradas das sequências representando dois diferentes números (as sequências são como na parte (c)). Os vetores hardx1 e hardx2 são versões discadas menos precisas dos mesmos números.

#### 4.1 Parte 2.1 - (d)

Na parte (d) utilizamos o comando fft para computar as 2048 amostras igualmente espaçadas da TFTD de cada dígito de x1. As TFTDs dos dígitos de x1 estão dispostas nas figuras 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

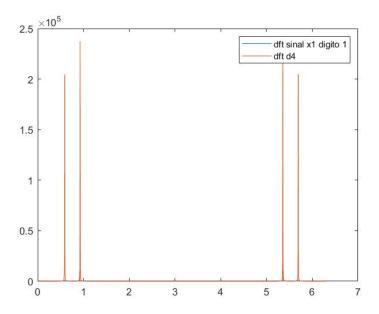


Figura 3: Magnitude da TFTD do primeiro dígito de x1

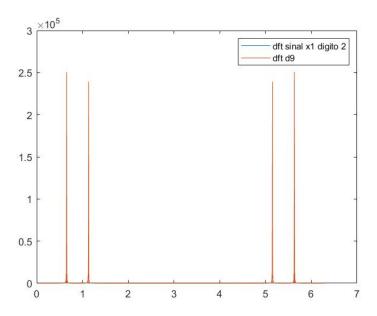


Figura 4: Magnitude da TFTD do segundo dígito de x1

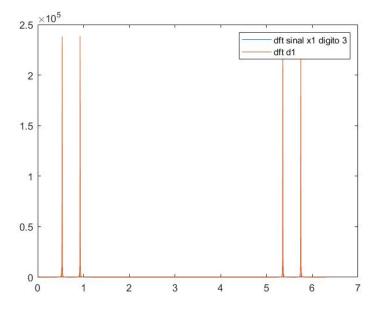


Figura 5: Magnitude da TFTD do terceiro dígito de x1

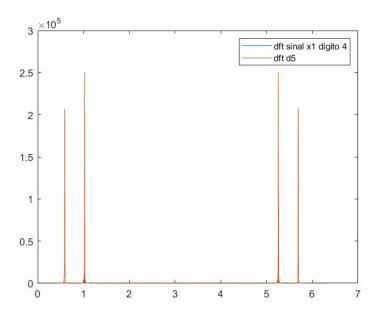


Figura 6: Magnitude da TFTD do quarto dígito de x1

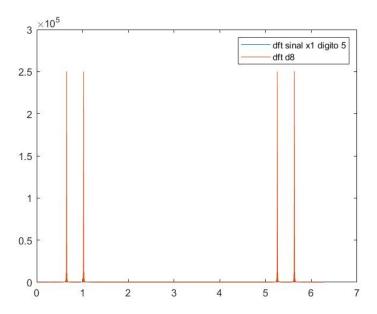


Figura 7: Magnitude da TFTD do quinto dígito de x1

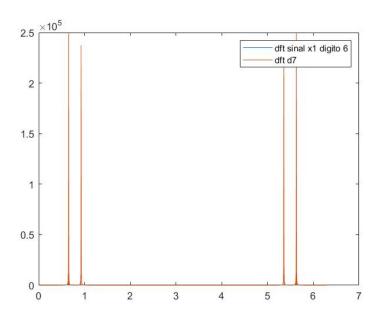


Figura 8: Magnitude da TFTD do sexto dígito de x1

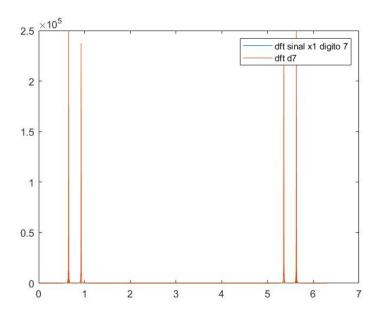


Figura 9: Magnitude da TFTD do sétimo dígito de x1

As TFTDs dos dígitos  ${\bf 0},\ {\bf 1},\ {\bf 2},\ {\bf 3},\ {\bf 4},\ {\bf 5},\ {\bf 6},\ {\bf 7},\ {\bf 8},\ {\bf 9},$  cujas frequências de linhas e colunas estão dispostas na parte (b) da figura 1, podem ser observadas

nas figuras 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 e 19.

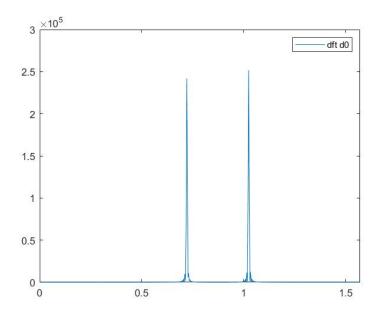


Figura 10: TFTD do dígito 0

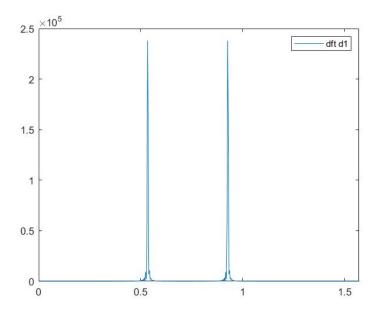


Figura 11: TFTD do dígito 1

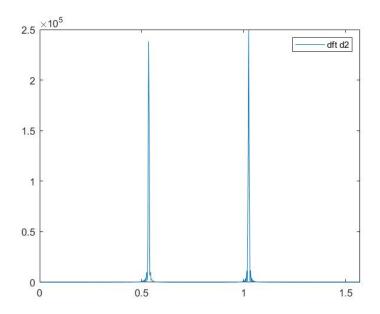


Figura 12: TFTD do dígito 2

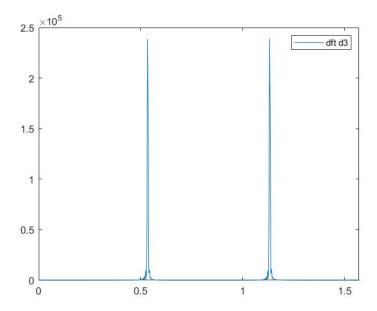


Figura 13: TFTD do dígito 3

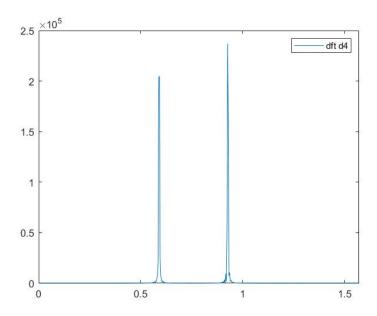


Figura 14: TFTD do dígito 4

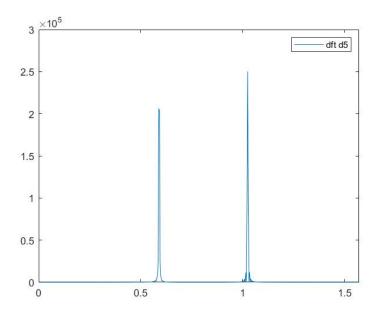


Figura 15: TFTD do dígito  $5\,$ 

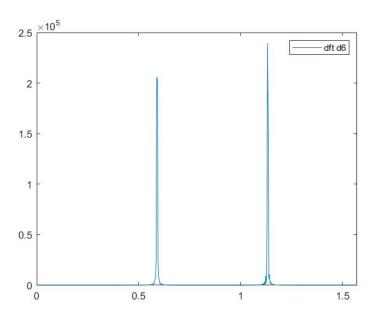


Figura 16: TFTD do dígito 6

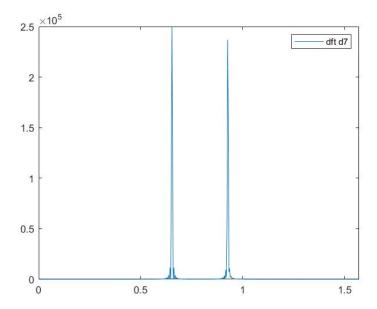


Figura 17: TFTD do dígito 7

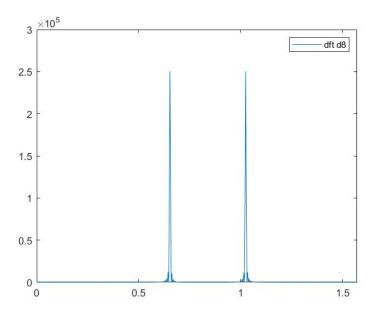


Figura 18: TFTD do dígito 8

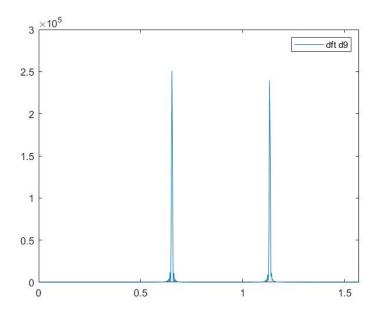


Figura 19: TFTD do dígito 9

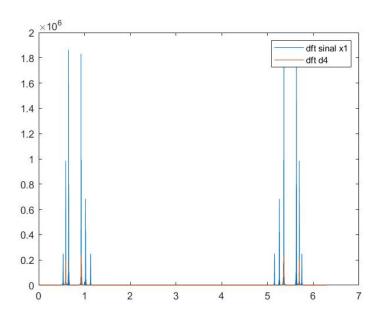


Figura 20: TFTD dos dígitos de x1

Ao comparar as TFTDs dos digitos de x1 com as TFTDs dos digitos de 0 à 9 foi possível determinar os dígitos do número de telefone que estão codificado em x1. E ao comparar as frequências de pico do sinal com aquelas da Figura 20 vimos que a soma dos dígitos do número encontrado foi 41. O número encontrado foi é  $\bf 4$   $\bf 9$   $\bf 1$   $\bf 5$   $\bf 8$   $\bf 7$   $\bf 7$ .

#### 4.2 Parte 2.1 - (e)

Foi repetido o procedimento da parte (d) para o sinal x2. As TFTDs dos dígitos de x2 estão dispostas nas figuras 21, 22, 23, 24, 25, 26 e 27.

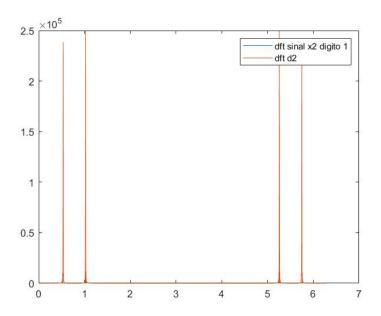


Figura 21: TFTD do primeiro dígito de x2

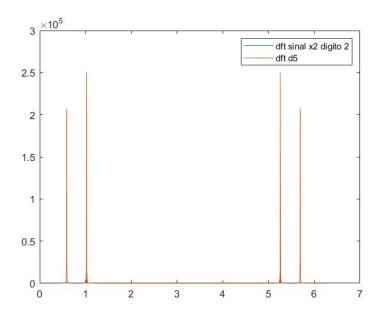


Figura 22: TFTD do segundo dígito de x2

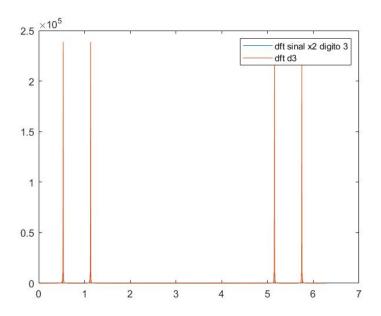


Figura 23: TFTD do terceiro dígito de x2

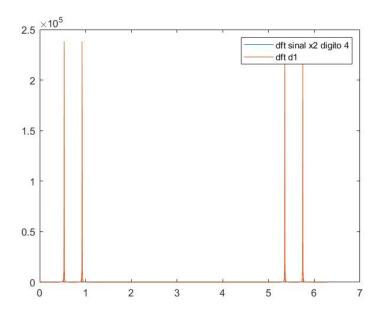


Figura 24: TFTD do quarto dígito de x2

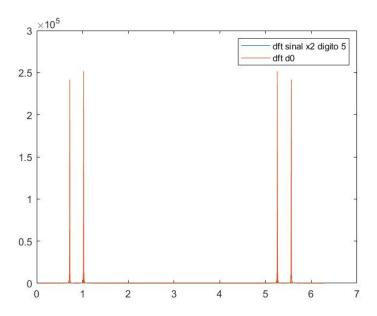


Figura 25: TFTD do quinto dígito de x2

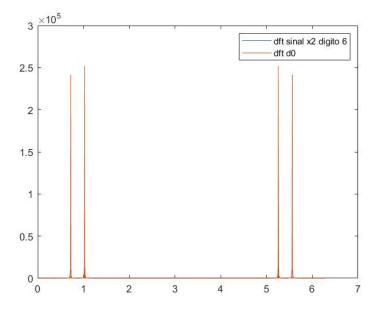


Figura 26: TFTD do sexto dígito de x2

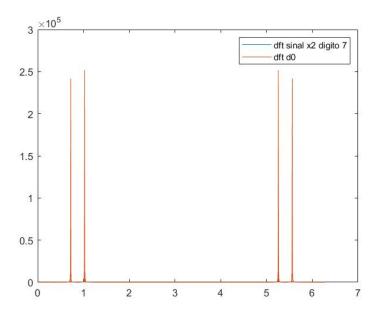


Figura 27: TFTD do sétimo dígito de x2

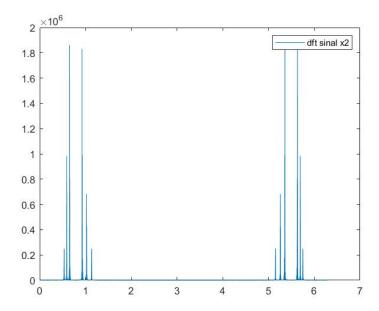


Figura 28: TFTD dos dígitos de x2

A Figura 28 mostra a TFTD de x2 e ao comparar as frequências de pico do sinal com de cada digito ,individualmente, de x2 com as TFTDs dos dígitos

de  ${\bf 0}$  à  ${\bf 9}$  o número telefônico encontrado foi  ${\bf 2}$   ${\bf 5}$   ${\bf 3}$   ${\bf 1}$   ${\bf 0}$   ${\bf 0}$  e a soma dos seus dígitos é 11.

## 5 Parte 3: Problemas Avançados

Na seção de problemas avançados escrevemos uma função para decodificar números de telefone automaticamente a partir dos tons gerados por um teclado. Para projetar o decodificador foi observado as energias dos tons em cada uma das possíveis frequências indicadas na figura 1.

#### 5.1 Parte 3.1 - (f)

Nesta parte usamos a fft para computar 2048 amostras de  $X(e^{jw})$  e foi encontrado o valor de  $w_k$  e do índice k correspondente, em que esses  $w_k's$  são as frequências dos sons e o resultado pode ser visualizado na na Tabela 1.

Tabela 1: Tabela de valores do indice k e  $W_k$ 

k	$\mathbf{w}_k$
175	0.5338
193	0.59212
214	0.65348
236	0.72097
303	0.92652
335	1.02470
370	1.13208

#### 5.2 Parte 3.2 - (g)

O valor de  $|X(e^{jw_k})|^2$  da a energia em um sinal na frequência  $w_k$ . Com isso foi calculado a DFT de  $d_8$  que foi definido como na parte 1 - (a). A saída da fft foi usada para computar  $|D_8(e^{jw})|^2$  para cada valor de  $w_k$  que foram determinados em (f). O grafico da energia do sinal está disposta na figura 29.

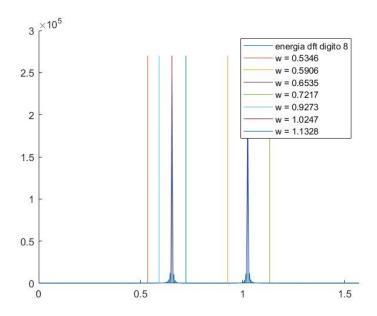


Figura 29: Energia de  $d_8$ 

### 5.3 Parte 3.2 - (h)

Nesta parte foi escrita o script de uma função que foi denominada de  $\mathbf{dectmf}$ , o script está disposto no apêndice, este tem como entrada um sinal DTMF no formado usado na parte (c) e que retorna na saída um vetor de comprimento 7 contendo o número de telefone. A função foi testada utilizando x1 e x2 como entrada e foi verificado que o retorno foram os mesmos encontrados nas partes (d) e (e) dos problemas básicos que podem ser visualizados nas figuras 20 e 28 respectivamente. Os resultados desta parte também seguem dispostos nas figuras 30 e 31.

Figura 30: Decodificação DTMF de x1

Figura 31: Decodificação DTMF de x2

#### 6 Conclusão

Na primeira parte, implementamos o tom correspondente a cada digito e a partir de sua TFTD usando a função  $f\!f\!t$  do MATLAB para verificar se os sinais tem as frequências de pico correspondentes as apresentadas na Figura 1, usamos também a função sound para escutar se o som correspondia a tecla determinada . Posteriormente, criamos um vetor contendo vários dígitos espaçados e escutamos seu som.

Na segunda parte, decodificamos os sinais x1 e x2 presentes no arquivo **touch.mat**. Separando os dígitos dos sinais e comparando a fft destes com a fft esperada conseguimos decodificar os 2 números presentes nestes, 4915877 para x1 e 2531000 para x2.

Na terceira parte, por meio da fft do sinal obtivemos os índices k correspondentes a cada frequência de pico do sinal e a partir da energia do sinal conseguimos observar que nestas está concentrada a maior parte da energia do sinal com essas informações implementamos a função decdtmf que decodifica automaticamente uma sequencia presente em um sinal no formato de x1 e x2. Para implementar a função separamos os dígitos e checamos se no índices correspondentes a cada pico se encontrava , na energia do sinal, um pico, assim sendo as duas frequências dos picos de energia do digito o caracterizavam.

O projeto evidenciou bem como ,usando dois sinais diferentes, se constrói o arranjo usado nas teclas de telefone e a importância da *fft* em sua implementação, além de como recuperar o sinal representado pelo sistema.

## 7 Apendice

```
3 %1)
8 d0=sin([0:999]*0.7217)+sin([0:999]*1.0247);
9 d1=sin([0:999]*0.5346)+sin([0:999]*0.9273);
10 d2=sin([0:999]*0.5346)+sin([0:999]*1.0247);
d3=sin([0:999]*0.5346)+sin([0:999]*1.1328);
d4=sin([0:999]*0.5906)+sin([0:999]*0.9273);
d5=sin([0:999]*0.5906)+sin([0:999]*1.0247);
d6=sin([0:999]*0.5906)+sin([0:999]*1.1328);
d7=sin([0:999]*0.6535)+sin([0:999]*0.9273);
d8=sin([0:999]*0.6535)+sin([0:999]*1.0247);
d9=sin([0:999]*0.6535)+sin([0:999]*1.1328);
19
21
22
d1=sin([0:999]*0.5346)+sin([0:999]*0.9273);
d2=sin([0:999]*0.5346)+sin([0:999]*1.0247);
d3=sin([0:999]*0.5346)+sin([0:999]*1.1328);
26 d4=sin([0:999]*0.5906 )+sin([0:999]*0.9273);
d5=sin([0:999]*0.5906)+sin([0:999]*1.0247);
28 d6=sin([0:999]*0.5906)+sin([0:999]*1.1328);
d7=sin([0:999]*0.6535)+sin([0:999]*0.9273);
30 d8=sin([0:999]*0.6535)+sin([0:999]*1.0247);
d9=sin([0:999]*0.6535)+sin([0:999]*1.1328);
d0=sin([0:999]*0.7217)+sin([0:999]*1.0247);
35
36
37 om=2*pi*[0:2047]/2048;
38 fftd2=fft(d2,2048);
39 fftd9=fft(d9,2048);
40 figure (1);
plot(om, fftd2.*conj(fftd2), om,fftd9.*conj(fftd9));
42 legend('dft d2', 'dft d9');
43 xlim([0 pi/2]);
44
45 %1c)
46 fonem = [d9 [0:100]*0 d9 [0:100]*0 d9 [0:100]*0 d1 [0:100]*0 d8
     [0:100]*0 d1 [0:100]*0 d5 [0:100]*0 d8 [0:100]*0 d7];
47 fone = [d3 [0:100]*0 d2 [0:100]*0 d7 [0:100]*0 d1 [0:100]*0 d8
     [0:100]*0 d2 [0:100]*0 d1 [0:100]*0 d0];
  sound(fone);
54 %separando x1
55 size(x1):
x11=x1(:,1:1000);
57 x12=x1(:,1101:2100);
58 x13=x1(:,2201:3200);
```

```
59 x14=x1(:,3301:4300);
x15=x1(:,4401:5400);
x16=x1(:,5501:6500);
x17=x1(:,6601:7600);
64
65 %separando x2
66
67
68 size(x2);
x21=x2(:,1:1000);
70 x22=x2(:,1101:2100);
71 x23=x2(:,2201:3200);
x24=x2(:,3301:4300);
x25=x2(:,4401:5400);
74 x26=x2(:,5501:6500);
75 x27=x2(:,6601:7600);
77
78 %fftx1
80
81 fftx11=fft(x11,2048);
82 fftx12=fft(x12,2048);
83 fftx13=fft(x13,2048);
84 fftx14=fft(x14,2048);
85 fftx15=fft(x15,2048);
86 fftx16=fft(x16,2048);
87 fftx17=fft(x17,2048);
88
90 %fftx2
91
93 fftx21=fft(x21,2048);
94 fftx22=fft(x22,2048);
95 fftx23=fft(x23,2048);
96 fftx24=fft(x24,2048);
97 fftx25=fft(x25,2048);
98 fftx26=fft(x26,2048);
99 fftx27=fft(x27,2048);
100
102 %fft digitos
104
105 fftx1=fft(x1);
106 fftd1=fft(d1, 2048);
107 fftd2=fft(d2, 2048);
108 fftd3=fft(d3, 2048);
109 fftd4=fft(d4, 2048);
110 fftd5=fft(d5, 2048);
_{111} fftd6=fft(d6, 2048);
112 fftd7=fft(d7, 2048);
113 fftd8=fft(d8, 2048);
114 fftd9=fft(d9, 2048);
115 fftd0=fft(d0, 2048);
116
117
119
120
```

```
om2=2*pi*[0:7599]/7599;
122 figure(2);
plot(om2,fftx1.*conj(fftx1), om, fftd4.*conj(fftd4));
124 legend('dft sinal x1', 'dft d4');
126 figure (3);
plot(om,fftx11.*conj(fftx11), om, fftd4.*conj(fftd4));
legend('dft sinal x1 digito 1', 'dft d4');
129
130 figure (4);
plot(om, fftx12.*conj(fftx12), om, fftd9.*conj(fftd9));
132 legend('dft sinal x1 digito 2', 'dft d9');
133
134
135 figure (5);
plot(om,fftx13.*conj(fftx13), om, fftd1.*conj(fftd1));
legend('dft sinal x1 digito 3', 'dft d1');
139 figure (6):
plot(om, fftx14.*conj(fftx14), om, fftd5.*conj(fftd5));
legend('dft sinal x1 digito 4', 'dft d5');
143 figure (7);
plot(om, fftx15.*conj(fftx15), om, fftd8.*conj(fftd8));
145 legend('dft sinal x1 digito 5', 'dft d8');
147 figure (8);
plot(om,fftx16.*conj(fftx16), om, fftd7.*conj(fftd7));
legend('dft sinal x1 digito 6', 'dft d7');
150
151 figure (9);
plot(om,fftx16.*conj(fftx17), om, fftd7.*conj(fftd7));
legend('dft sinal x1 digito 7', 'dft d7');
155
156 figure (10);
plot(om2,fftx1.*conj(fftx1));
158 legend('dft sinal x2');
160 figure (11);
plot(om,fftx21.*conj(fftx21), om, fftd2.*conj(fftd2));
legend('dft sinal x2 digito 1', 'dft d2');
164 figure (12);
plot(om,fftx22.*conj(fftx22), om, fftd5.*conj(fftd5));
legend('dft sinal x2 digito 2', 'dft d5');
167
169 figure (13);
plot(om,fftx23.*conj(fftx23), om, fftd3.*conj(fftd3));
171 legend('dft sinal x2 digito 3', 'dft d3');
plot(om,fftx24.*conj(fftx24), om, fftd1.*conj(fftd1));
175 legend('dft sinal x2 digito 4', 'dft d1');
176
177 figure (15);
plot(om,fftx25.*conj(fftx25), om, fftd0.*conj(fftd0));
179 legend('dft sinal x2 digito 5', 'dft d0');
180
181 figure (16);
plot(om,fftx26.*conj(fftx26), om, fftd0.*conj(fftd0));
```

```
legend('dft sinal x2 digito 6', 'dft d0');
185 figure (17);
plot(om,fftx27.*conj(fftx27), om, fftd0.*conj(fftd0));
legend('dft sinal x2 digito 7', 'dft d0');
188
189 figure (18);
190 plot(om, fftd1.*conj(fftd1));
legend('dft d1');
192 xlim([0 pi/2]);
193
194 figure (19);
plot(om, fftd3.*conj(fftd3));
legend('dft d3');
197 xlim([0 pi/2]);
198
199 figure (20);
200 plot(om, fftd4.*conj(fftd4));
legend('dft d4');
202 xlim([0 pi/2]);
203
204 figure (21);
205 plot(om, fftd5.*conj(fftd5));
206 legend('dft d5');
207 xlim([0 pi/2]);
209 figure (22);
plot(om, fftd6.*conj(fftd6));
legend('dft d6');
212 xlim([0 pi/2]);
214 figure (23);
plot(om, fftd7.*conj(fftd7));
legend('dft d7');
217 xlim([0 pi/2]);
219 figure (24);
plot(om, fftd8.*conj(fftd8));
legend('dft d8');
222 xlim([0 pi/2]);
223
224 figure (25);
plot(om, fftd0.*conj(fftd0));
legend('dft d0');
227 xlim([0 pi/2]);
228
229 figure (26);
plot(om, fftd9.*conj(fftd9));
legend('dft d9');
232 xlim([0 pi/2]);
233
234 figure (27);
plot(om, fftd2.*conj(fftd2));
legend('dft d2');
237 xlim([0 pi/2]);
238
240
241
244 k1=[ceil(0.5346*2048/(2*pi)) ceil(2048*0.9273/(2*pi))];
```

```
245 k2=[ceil(0.5346*2048/(2*pi)) ceil(2048*1.0247/(2*pi))];
246 k3=[ceil(0.5346*2048/(2*pi)) ceil(2048*1.1328/(2*pi))];
247 k4=[ceil(0.5906*2048/(2*pi)) ceil(2048*0.9273/(2*pi))];
248 k5=[ceil(0.5906*2048/(2*pi)) ceil(2048*1.0247/(2*pi))];
249 k6=[ceil(0.5906*2048/(2*pi)) ceil(2048*1.1328/(2*pi))];
250 k7=[ceil(0.6535*2048/(2*pi)) ceil(2048*0.9273/(2*pi))];
251 k8=[ceil(0.6535*2048/(2*pi)) ceil(2048*1.0247/(2*pi))];
252 k9=[ceil(0.6535*2048/(2*pi)) ceil(2048*1.1328/(2*pi))];
253 k0=[ceil(0.7217*2048/(2*pi)) ceil(2048*1.0247/(2*pi))];
254 kn=[k1 k2 k3 k4 k5 k6 k7 k8 k9 k0];
w = [0.5346 \ 0.9273 \ 1.0247 \ 1.1328 \ 0.5906 \ 0.6535 \ 0.7217];
258
259 figure (1);
260 hold on;
261 fftd8=fft(d8, 2048);
262 p=fftd8.*conj(fftd8);
263 om=2*pi*[0:2047]/2048;
264 plot(om,p);
265 plot([w(1),w(1)],[0,270000]);
266 plot([w(2),w(2)],[0,270000]);
267 plot([w(3),w(3)],[0,270000]);
268 plot([w(4),w(4)],[0,270000]);
plot([w(5),w(5)],[0,270000]);
270 plot([w(6),w(6)],[0,270000]);
271 plot([w(7),w(7)],[0,270000]);
272 xlim([0 pi/2]);
legend('energia dft digito 8', 'w = 0.5346', 'w = 0.5906', 'w =
       0.6535', 'w = 0.7217', 'w = 0.9273', 'w = 1.0247', 'w =
       1.1328')
274 hold off;
276 function digit = decdtmf(x)
       s=(size(x)+100)/11;
277
       digit = [] ;
278
279
       for i = 0:s
280
           init = 1100*i+1;
281
           d = X(init:init+999);
282
283
          for j = 1:size(kn)
             if d(kn(j,1)) > 500 \&\& d(kn(j,2)) > 500
                 digit(end+1) = j
285
             end
286
287
          end
288
289
       {\tt end}
290 end
```

## Bibliografia

- [1] Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schafer. Discrete-Time Signal Processing, 3rd Edition
- [2] Richard Blahut . Fast Algorithms for Signal Processing
- [3] Ricardo Menezes Campello de Souza. Processamento Digital de Sinais, Projeto III (2020.3) Detecção de Sinais DTMF
- [4] Juliano Bandeira Lima. Decodificação de Sinais DTMF via transformada Aritmética de Fourier, 2004.

 ${\rm https://www.ufpe.br/documents/39830/1359036/108} {\it JulianoLima/25899ad5-c61b-4393-9329-f9cc0f64f399}$