



Processamento Digital de Sinais

Alunos:

Gabriel Victor M. de O. Vital

Pablo Godoy

Professor:

Ricardo Campello

Universidade federal de
Pernambuco
Centro de Tecnologia e Geociências
Departamento de Eletrônica e Sistemas

Projeto de Filtros Digitais

Relatório referente ao projeto da segunda unidade.

**Alunos: Gabriel Victor Marques
Pablo Godoy
Professor: Ricardo Campello**

Outubro, 2020

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Parte 1: Filtros IIR	2
2.1	Parte 1.1	2
2.2	Parte 1.2	4
2.3	Parte 1.3	6
2.4	i) Qual a frequência de corte do filtro protótipo?	6
2.5	ii) Encontre $H(S)$ e esboce seu DPZ.	6
2.6	iii) Encontre $H(Z)$. Esboce a resposta em frequência, a resposta ao impulso e o DPZ de $H(Z)$.	7
3	Parte 2: Filtros FIR	9
3.1	Parte 2.1	9
3.2	i) Janela retangular	9
3.3	ii) Janela triangular	9
3.4	iii) Janela de Hamming	10
3.5	iv) Janela de Blackman	10
3.6		11
4	Conclusão	11
5	Apendice	12
	Bibliografia	13

1 Introdução

O processamento de sinais digitais é um dos processos fundamentais da engenharia de telecomunicações/eletrônica, e os filtros digitais são de grande importância para o tratamento transmissão de dados entre sistemas. Os filtros digitais são caracterizados pela sua resposta ao impulso, são divididos em duas classes, filtros Digitais cuja resposta ao impulso apresenta duração infinita (Infinite Impulse Response - IIR) e resposta ao impulso finita (Finite Impulse Response - FIR). As técnicas de processamento digital de sinais em particular o projeto de filtros digitais são de grande importância no século atual. Tais técnicas são utilizadas em diversas áreas como uma ferramenta capaz de tornar um problema relativamente complexo em um mais simples quando determinadas condições são satisfeitas.

2 Parte 1: Filtros IIR

Um filtro digital IIR (Infinite Impulse Response) pode ser expresso por meio de uma função $H(z)$ racional dado pela equação 2.0.1:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{a_0 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (2.0.1)$$

considerando sem perda de generalidade que $a_0 = 1$, a EDLCC (Equação de diferenças linear com coeficientes constantes) é obtida diretamente como sendo:

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] + \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \quad (2.0.2)$$

2.1 Parte 1.1

Nesta parte foi implementado um script no software MATLAB para projetar um filtro IIR passa-baixas de quinta ordem com frequência de corte $\omega_c = 0,6Hz$. A frequência de amostragem considerada foi $F_s = 2Hz$, a magnitude da resposta em frequência desse filtro estão representadas nas figuras [1] e [2] respectivamente. Também foi plotado o diagrama de polos e zeros do filtro e este está representado na figura [3].

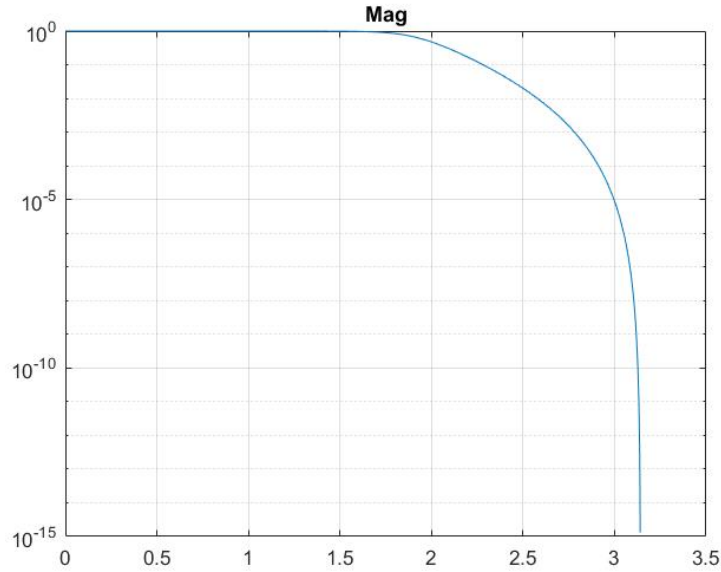


Figura 1: Magnitude da resposta em frequência do filtro

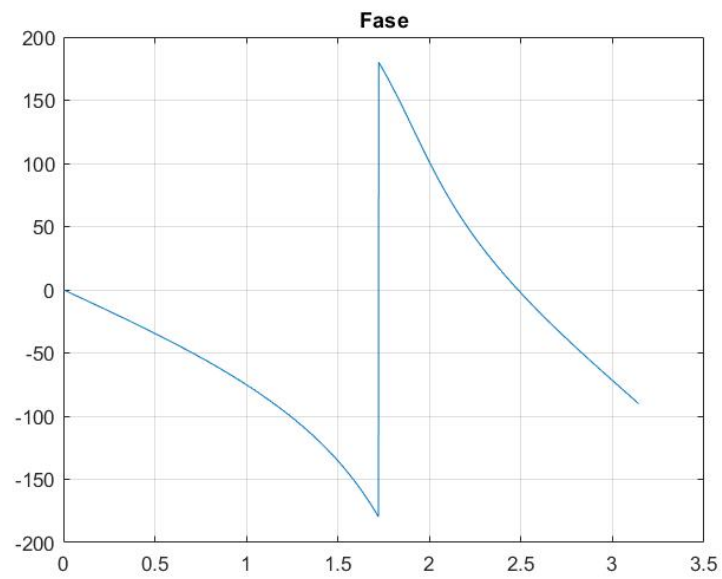


Figura 2: Fase da resposta em frequência do filtro

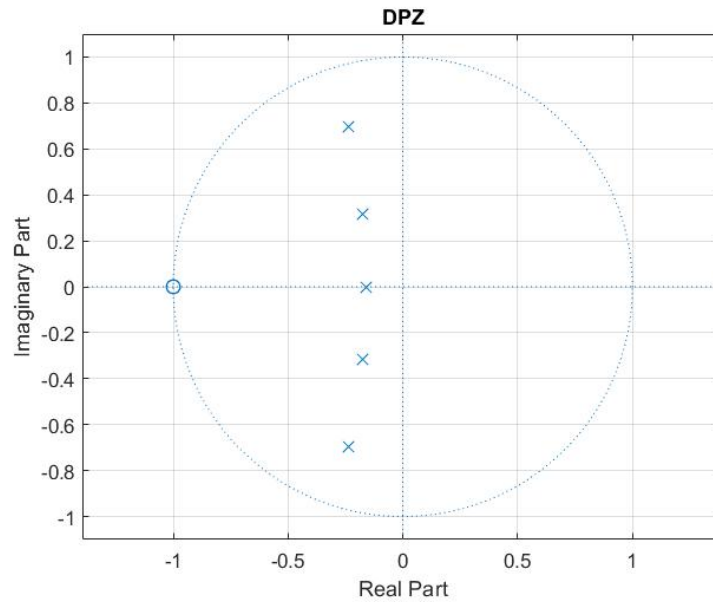


Figura 3: Diagrama de Polos e Zeros do filtro

Sim é possível obter dois gráficos a partir do terceiro, pois cada gráfico fornece informações cruciais a respeito do filtro por exemplo, considere o gráfico da

resposta ao impulso esse gráfico nos fornece a função de transferência por meio da transformada z e por meio dessa função de transferência podemos obter o Diagrama de Polos e Zeros(DPZ) e a Magnitude e Fase da resposta em frequência do filtro. O mesmo vale para os demais alternando dois a dois.

2.2 Parte 1.2

A Transformação Bilinear é utilizada em processamento digital de sinais para projetar um filtro digital a partir de um filtro analógico protótipo, por meio do mapeamento dos pontos do plano S no plano Z . O semi-plano esquerdo do plano S ($Re(S) < 0$) é mapeado no interior da circunferência unitária do plano Z ($|z| < 1$). O semi-plano direito do plano S é mapeado no exterior da circunferência unitária do plano Z ($|z| > 1$), já o eixo $j\omega$ do plano S é mapeado no círculo unitário do plano Z ($|z| = 1$). A Transformação Bilinear é dada pela equação 2.2.1

$$H(z) = H(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \quad (2.2.1)$$

As afirmações feitas acima a respeito do mapeamento podem ser facilmente mostradas tomando $s = \sigma + j\Omega$ e manipulando a equação 2.2.2, escrevendo z em função de s e considerando $\sigma < 0$, $\sigma > 0$ e $\sigma = 0$ respectivamente.

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (2.2.2)$$

A relação entre ω e Ω na transformação é dada pela equação 2.2.3:

$$\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (2.2.3)$$

$$\omega = 2 \tan^{-1}\left(\frac{\Omega T}{2}\right) \quad (2.2.4)$$

Considerando três valores diferentes para o período de amostragem T , obtemos uma representação por meio do gráfico para a equação 2.2.4 e está representado na figura 4.

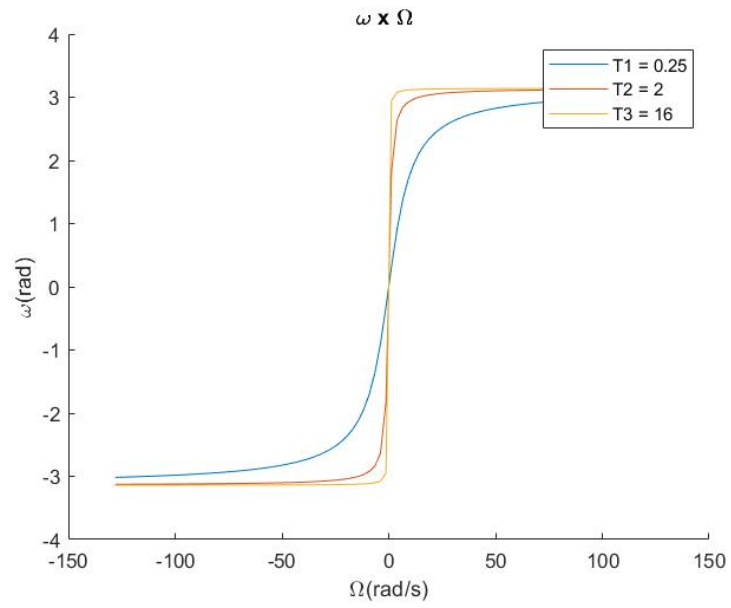


Figura 4: Relação entre Ω e ω para três valores distintos de T

Fazendo $\Omega_c = 1 \text{ rad/s}$ e um intervalo de T segundos, a relação entre ω e T está disposta na figura 5.

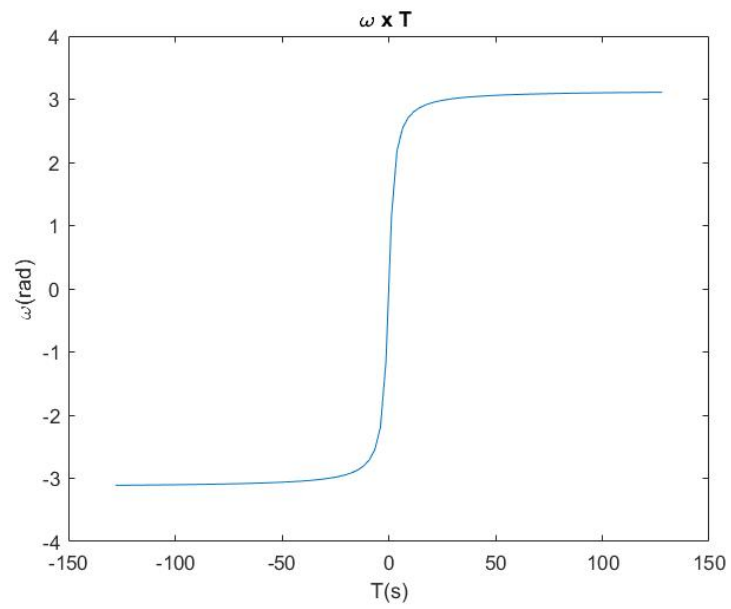


Figura 5: Relação entre ω e T para $\Omega = 1 \text{ rad/s}$

2.3 Parte 1.3

Nesta parte a função butter foi usada para projetar um filtro Butterworth protótipo de quarta ordem, com frequência de corte $f_c = 8kHz$ e frequência de amostragem de $F_s = 40kHz$.

2.4 i) Qual a frequência de corte do filtro protótipo?

A frequência de corte do filtro(Ω_c) protótipo encontrada foi $\Omega_c = 5,8123 \cdot 10^4 rad/s$, a partir da equação 2.2.4 que relaciona ω e Ω . A função de transferência do filtro passa-baixas protótipo é:

2.5 ii) Encontre H(S) e esboce seu DPZ.

$$H(S) = \frac{2.4937s^4}{s^4 + 3.2838s^3 + 5.3915s^2 + 5.1855s + 2.4937} \quad (2.5.1)$$

que tem forma fatorada dada pela equação 2.5.2

$$H(S) = \frac{2.4937s^4}{(s + 1.1610 + 0.4808j)(s + 1.1610 - 0.4808j)(s + 0.4809 + 1.161j)(s + 0.4809 - 1.1601j)} \quad (2.5.2)$$

O diagrama de Polos e Zeros de H(s) está representado na figura 6 (Os zeros da origem ficaram implícitos no gráfico).

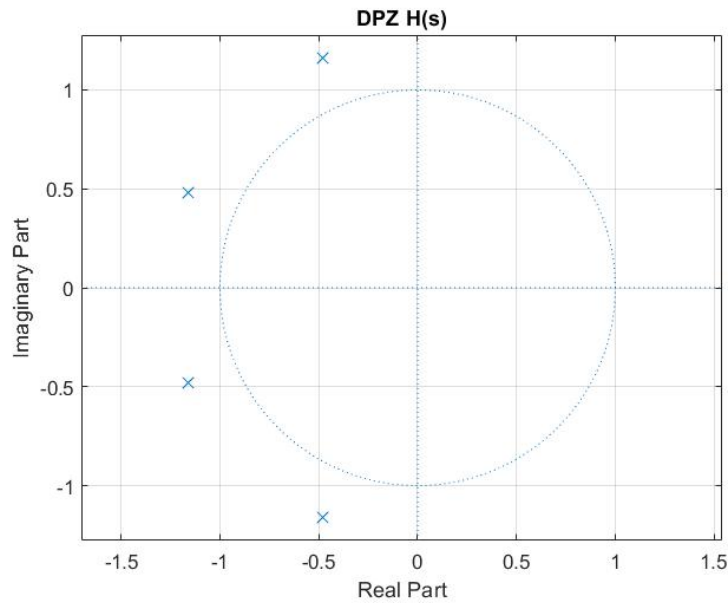


Figura 6: Diagrama de Polos e Zeros do função de transferência H(s).

2.6 iii) Encontre $H(Z)$. Esboce a resposta em frequência, a resposta ao impulso e o DPZ de $H(Z)$.

Foi utilizado a transformação bilinear que é dada pela equação 2.2.1 para encontrar $H(z)$ a partir de $H(S)$ temos que :

$$H(z) = \frac{0.032512 + 0.130047z^{-1} + 0.195070z^{-2} + 0.130047z^{-3} + 0.032512z^{-4}}{0.044572 + (-0.289792)z^{-1} + 0.884346z^{-2} + (-1.118938)z^{-3} + z^{-4}} \quad (2.6.1)$$

Note que como os polos de $H(S)$ estão no semi-plano esquerdo do plano S ($Re(S) < 0$) estes serão mapeados no interior da circunferência unitária no plano Z e isto está mostrado na figura 7, os gráficos da resposta em frequência de $H(z)$ e da resposta ao impulso $h[n]$ do filtro estão representados nas figuras 8 e 9 respectivamente.

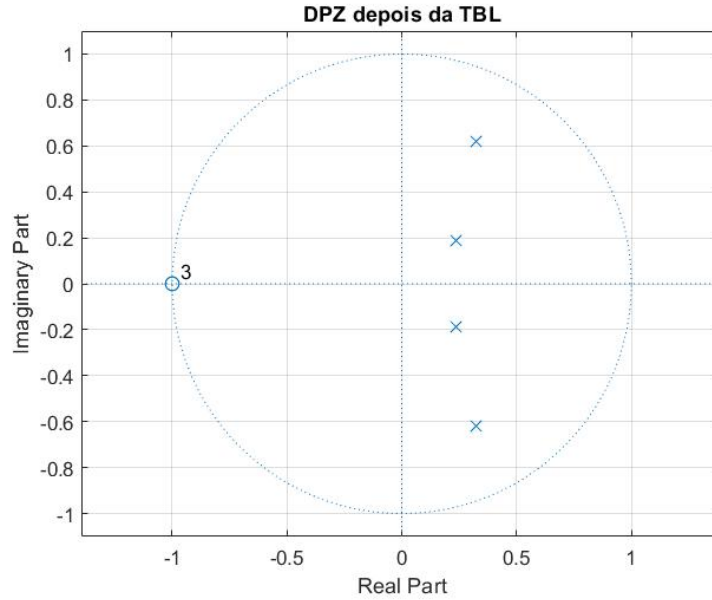


Figura 7: Diagrama de Polos e Zeros do função de transferência $H(z)$.

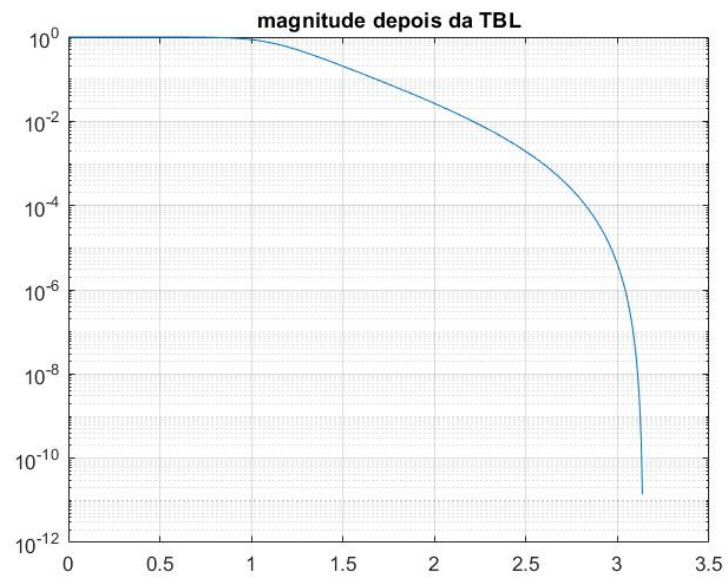


Figura 8: Magnitude da resposta em frequência de $H(z)$

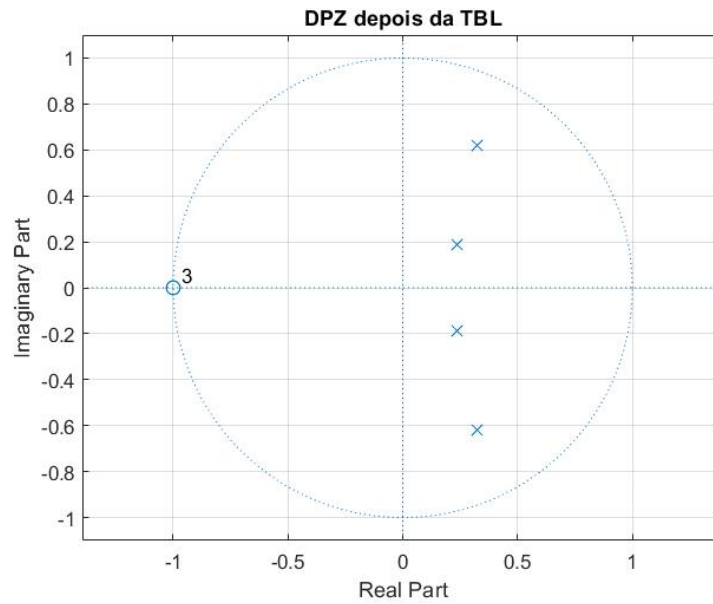


Figura 9: Fase da resposta em frequência de $H(z)$.

3 Parte 2: Filtros FIR

Um filtro FIR(Finite impulse response) é um tipo de filtro digital caracterizado por uma resposta ao impulso que se torna nula após um tempo finito, em contraste com os filtros IIR. A EDLCC de um filtro FIR tem a forma dada pela equação ??

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n - k] \quad (3.0.1)$$

ou seja, estes não possuem polos fora de zero ou infinito (isso pode ser visto facilmente a partir do $H(z)$ da EDLCC acima). Dessa forma, as estruturas de filtros FIR não possuirão realimentação provenientes da saída (a EDLCC não contém termos de $y[n - k]$ para um k natural. Temos que $H(z)$ de um filtro FIR generico tem forma dada por 3.0.2.

$$H(z) = \sum_{k=0}^M b_k Z^{-k} \quad (3.0.2)$$

3.1 Parte 2.1

3.2 i) Janela retangular

$$\begin{aligned} h[0] &= 0.0334, h[1] = 0.0000, h[2] = -0.0409, \\ h[3] &= -0.0541, h[4] = -0.0201, h[5] = 0.0445, \\ h[6] &= 0.0909, h[7] = 0.0668, h[8] = -0.0468, \\ h[9] &= -0.2162, h[10] = -0.3679, h[11] = 1.000, \\ h[12] &= -0.3679, h[13] = -0.2162, h[14] = -0.0468. \\ h[15] &= 0.0668, h[16] = 0.0909, h[17] = 0.0445, \\ h[18] &= -0.0201, h[19] = -0.0541, h[20] = -0.0409, \\ h[21] &= 0.0000, h[22] = 0.0334 \end{aligned}$$

3.3 ii) Janela triangular

$$\begin{aligned} h[0] &= 0.0028, h[1] = 0.0000, h[2] = -0.0102, \\ h[3] &= -0.0180, h[4] = -0.0084, h[5] = 0.0223, \\ h[6] &= 0.0531, h[7] = 0.0445, h[8] = -0.0351, \\ h[9] &= -0.1802, h[10] = -0.3372, h[11] = 1.0000, \\ h[12] &= -0.3372, h[13] = -0.1802, h[14] = -0.0351. \\ h[15] &= 0.0445, h[16] = 0.0531, h[17] = 0.0223, \\ h[18] &= -0.0084, h[19] = -0.0180, h[20] = -0.0102, \\ h[21] &= 0.0000, h[22] = 0.0028 \end{aligned}$$

3.4 iii) Janela de Hamming

$$\begin{aligned}h[0] &= 0.0027, h[1] = 0.0000, h[2] = -0.0063, \\h[3] &= -0.0129, h[4] = -0.0070, h[5] = 0.0211, \\h[6] &= 0.0551, h[7] = 0.0489, h[8] = -0.0394, \\h[9] &= -0.2004, h[10] = -0.3610, h[11] = 1.0000, \\h[12] &= -0.3610, h[13] = -0.2004, h[14] = -0.0394, \\h[15] &= 0.0489, h[16] = 0.0551, h[17] = 0.0211, \\h[18] &= -0.0070, h[19] = -0.0129, h[20] = -0.0063, \\h[21] &= 0.0000, h[22] = 0.0027\end{aligned}$$

3.5 iv) Janela de Blackman

$$\begin{aligned}h[0] &= 0.0000, h[1] = 0.0000, h[2] = -0.0013, \\h[3] &= -0.0044, h[4] = -0.0032, h[5] = 0.0121, \\h[6] &= 0.0377, h[7] = 0.0384, h[8] = -0.0345, \\h[9] &= -0.1890, h[10] = -0.3558, h[11] = 1.0000, \\h[12] &= -0.3558, h[13] = -0.1890, h[14] = -0.0345, \\h[15] &= 0.0384, h[16] = 0.0377, h[17] = 0.0121, \\h[18] &= -0.0032, h[19] = -0.0044, h[20] = -0.0013, \\h[21] &= 0.0000, h[22] = 0.0000\end{aligned}$$

3.6

4 Conclusão

A comparação entre os dois filtros, com valores de β distintos, e o filtro passa-faixa ideal, o filtro ideal apresenta uma seletividade maior aos demais. Neste caso, o melhor filtro entre eles seria o filtro ideal pois é mais seletivo. Entretanto, analisando a seletividade e o overshoot, à medida que o filtro é mais seletivo, ou seja, o β cresce, as áreas dos lóbulos(ondulações) permanecem constantes, e como a largura está diminuindo, a altura aumenta, para manter a área constante. Então, com esse aumento na amplitude, pode gerar o overshoot.

5 Apendice

```
1
2
3 %FIR
4 %1
5 %janelas
6 beta=5;
7 L=23;
8 kiser=besseli(0,beta*sqrt(1-(((0:L-1)-(L-1)/2)/((L-1)/2)).^2))/
    besseli(0,beta);
9 %hamming
10 hamming=0.54 - 0.46*cos(2*pi*(0:L-1)/(L-1));
11 %rect
12 re = ones(L,1);
13 %blackman
14
15 N = L-1;
16 s = (-1)^(N);
17 if s == -1
18     M=(N+1)/2;
19 else
20     M=N/2;
21
22 end
23
24 A=M
25 M=int32(A)
26 black = zeros(L,1);
27 black(1:M+1) = 0.42-0.5*cos(2*pi*(0:M)/(N))+0.08*cos(4*pi*(0:M)/(N))
    ;
28 black(M+1:22)=flip(black(2:M));
29 black(1)=0
30
31 % triang
32
33
34 tri=2*((1:(L+1)/2)/(L+1));
35 tri2=2-2*((1+(L+1)/2:L)/(L+1));
36 tria=[tri tri2];
37
38 %
39 b = sinc(0.3*(-11:11));
40 g =b.*hamming;
41 %zerophase(-g);
42 h=b.*kiser;
43 %zerophase(-h);
44 rec=b.*re';
45 %zerophase(-rec);
46 tr=b.*tria;
47 %tr=b.*triang(23)';
48 %zerophase(-tr);
49 bl=b.*black';
50 %zerophase(-bl);
51 a=hamming(23);
52 c=blackman(23);
53 d=triang(23);
54 %impz(rec);
55 %impz(bl);
56 %impz(tr);
57 %impz(g);
58 %zplane(g);
```

```

59 %zplane(rec);
60 %zplane(tr);
61 %zplane(bl);
62
63
64 %2
65
66 h = sinc(0.3*(-15:15)) - sinc(0.1*(-15:15));
67 h(16) = 0.26*pi;
68 [H, f] = freqz(h, 1, 1024, 1);
69 beta=4;
70 L=31;
71 kiser=besseli(0,beta*sqrt(1-(((0:L-1)-(L-1)/2)/((L-1)/2)).^2))/
    besseli(0,beta);
72
73 h4 = h .* kiser;
74 beta=6
75 kiser=besseli(0,beta*sqrt(1-(((0:L-1)-(L-1)/2)/((L-1)/2)).^2))/
    besseli(0,beta);
76 h6 = h .* kiser;
77 beta=9
78 kiser=besseli(0,beta*sqrt(1-(((0:L-1)-(L-1)/2)/((L-1)/2)).^2))/
    besseli(0,beta);
79 h9 = h .* kiser;
80 [H6, f6] = freqz(h6, 1, 1024, 1);
81 [H4, f4] = freqz(h4, 1, 1024, 1);
82 [H9, f9] = freqz(h9, 1, 1024, 1);
83 plot(f, abs(H))
84
85 hold on
86 plot(f4, abs(H4))
87 hold on
88 plot(f6,abs(H6))
89 hold on
90 plot(f9, abs(H9))
91 hold off
92 legend('Filtro ideal','Filtro com beta=4','filtro com beta =6','
    Filtro com beta=9');

```

Bibliografia

Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schaffer. Discrete-Time Signal Processing, 3rd Edition

Ricardo Campello, Processamento Digital de Sinais, Projeto II (2020.3) - Filtros Digitais