

Problema da programação e roteamento da Mão de Obra

Workforce Scheduling and Routing
Problem (WSRP)

ARTIGO UTILIZADO:

Workforce Scheduling Linear Programming Formulation

T. Garaix**, M. Gondran*, P. Lacomme*, E. Mura***, N. Tchernev*

1) Université Clermont-Auvergne, LIMOS, UMR CNRS 6158, Campus des Cézeaux, 63178 Aubière Cedex France
(e-mail: (gondran, placomme, tchernev}@isima.fr).

2) Ecole des Mines de Saint-Etienne, 158 cours Fauriel, 42000 Saint-Etienne

France (e-mail: garaix@emse.fr).

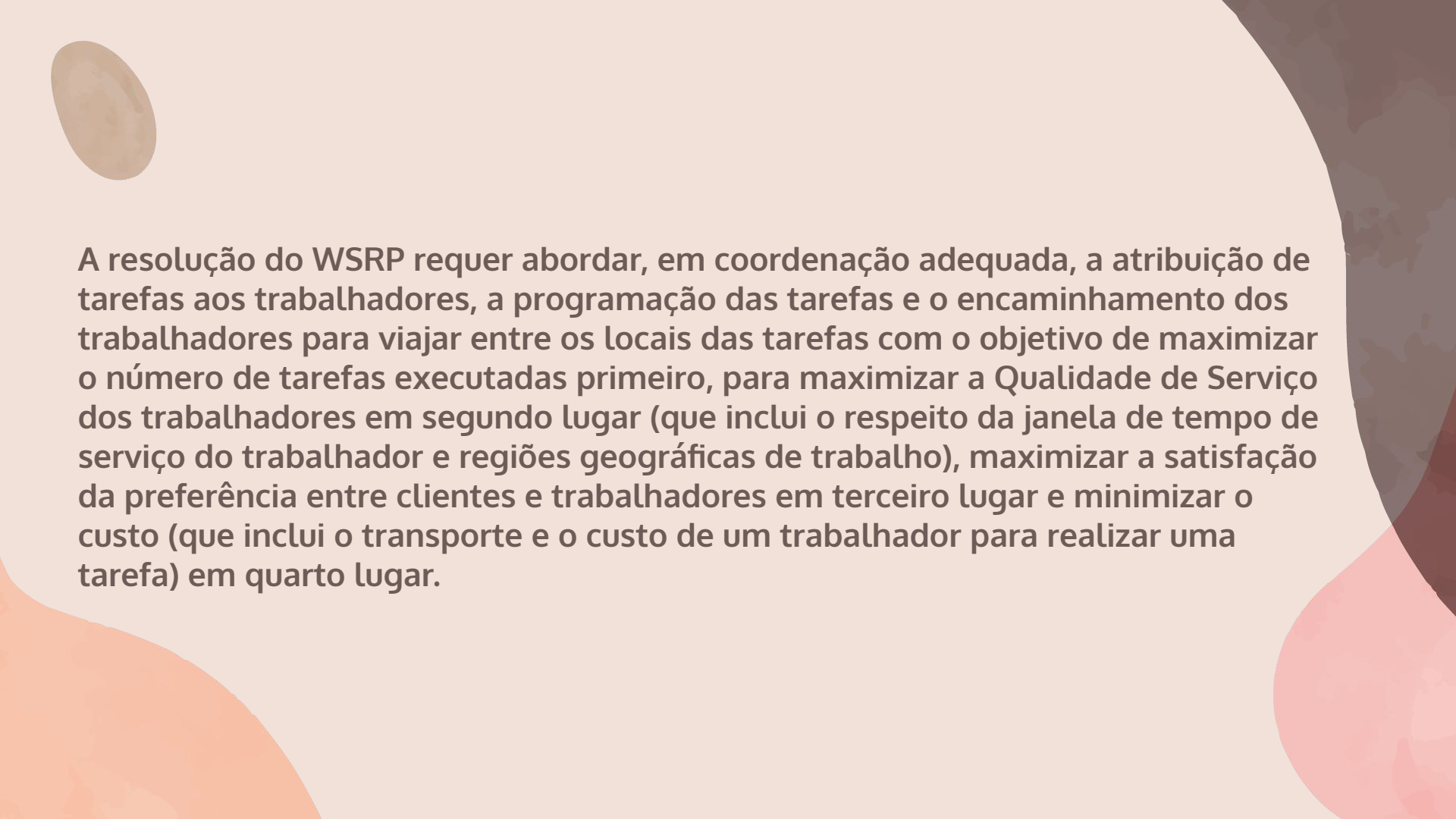
3) Université de Technologie de Troyes, ICD-LOSI, UMR CNRS 6281, 12 rue Marie Curie, CS 42060, 10004 Troyes
Cedex, France (e-mail: enzy,mura@utt.fr).

Link do artigo: [Workforce Scheduling Linear Programming Formulation](#)

CARACTERIZAÇÃO DO PROBLEMA:

- O **WSRP** refere-se à **correspondência de trabalhadores com tarefas exigidas pelos clientes**;
- A atribuição dos trabalhadores com competências a uma série de tarefas em diferentes localizações deve ser realizada de acordo com as **competências exigidas para a execução das tarefas** e das **competências dos trabalhadores** e dos **desejos dos trabalhadores relativamente à localização geográfica onde querem (ou não querem) trabalhar**;
- O WSRP abrange problemas encontrados na logística de **Home Health Care (HHC)** onde as demandas incluem transporte de medicamentos/dispositivos médicos entre o depósito e a casa dos pacientes, entrega de medicamentos do hospital para os pacientes ou amostras de sangue dos pacientes para o laboratório. Uma alta qualidade de serviço deve ser definida considerando tanto clientes (ou pacientes) quanto veículos (gestores de saúde) assumindo padrões de transporte constantemente **otimizados** e organizações flexíveis, **minimizando custos**. Para proporcionar **flexibilidade e eficiência**, uma forte cooperação entre **programação e roteamento** deve ser garantida.

- O objetivo no planejamento de saúde domiciliar (HHC) é atribuir a cada trabalhador, um conjunto de tarefas a serem executadas, onde cada tarefa geralmente está em uma localização geográfica diferente (ou seja, a casa do paciente).
- Um caminho é uma série de tarefas a serem executadas por um trabalhador dentro do período de planejamento. Uma solução para uma instância de problema HHC é uma coleção de caminhos que cobrem o conjunto de tarefas.
- A solução também deve atender a outras condições, como requisitos de tarefas, horários de atendimento, qualificações e habilidades necessárias dos trabalhadores, disponibilidade de trabalhadores, regiões de trabalho restritas, limites de tempo de trabalho, etc.



A resolução do WSRP requer abordar, em coordenação adequada, a atribuição de tarefas aos trabalhadores, a programação das tarefas e o encaminhamento dos trabalhadores para viajar entre os locais das tarefas com o objetivo de maximizar o número de tarefas executadas primeiro, para maximizar a Qualidade de Serviço dos trabalhadores em segundo lugar (que inclui o respeito da janela de tempo de serviço do trabalhador e regiões geográficas de trabalho), maximizar a satisfação da preferência entre clientes e trabalhadores em terceiro lugar e minimizar o custo (que inclui o transporte e o custo de um trabalhador para realizar uma tarefa) em quarto lugar.

MODELANDO O PROBLEMA - TRABALHADOR:

- Uma janela de tempo de trabalho $[TW_{inf}^w, TW_{sup}^w]$, um trabalhador w está disponível apenas nesse período. A definição da janela de tempo de trabalho pode variar em diferentes cenários: o tempo de viagem é considerado como tempo de trabalho; um trabalhador pode ser forçado a violar suas janelas de tempo de trabalho se for necessário executar uma tarefa. No artigo, o tempo de viagem não é considerado como tempo de trabalho e um trabalhador pode trabalhar além de sua janela de tempo se necessário, mas essas horas extras são penalizadas na função objetivo.
- Locais de partida e chegada: são os locais onde os trabalhadores iniciam e terminam suas viagens. Esses locais podem ser um depósito único ou vários locais, assumindo que cada trabalhador pode começar em sua própria casa. Diferentes cenários são possíveis, por exemplo, a política de algumas empresas pode obrigar os trabalhadores a iniciar seu horário de trabalho no escritório principal, mas eles podem voltar para casa diretamente após a última tarefa realizada.
- Habilidades: cada trabalhador tem habilidades diferentes.
- Agrupamento: algumas tarefas podem exigir a execução de vários trabalhadores e só podem ser iniciadas quando todos os trabalhadores estiverem juntos.
- Regiões disponíveis: os trabalhadores têm regiões de preferência para trabalhar e regiões desprezadas.

MODELANDO O PROBLEMA - TAREFA:

- Janela de tempo $[e_j, l_j]$ para executar uma tarefa j : se um trabalhador chega antes da janela de tempo, a tarefa não pode começar e um tempo de espera é incorrido.
- Requisitos de habilidade: uma tarefa requer uma ou várias habilidades específicas. Para realizar uma tarefa, um trabalhador deve ter pelo menos uma habilidade exigida pela tarefa.
- O tempo de processamento é o tempo para executar uma tarefa. O tempo de processamento geralmente é considerado uma duração fixa, mas pode ser dependente do trabalhador ou estocástico.
- Localização: cada tarefa tem uma localização e, portanto, deve-se levar em conta o tempo de transporte de um local para outro.

MODELANDO O PROBLEMA - WSRP:

- Cada cliente tem uma lista de preferências entre os trabalhadores que podem realizar a tarefa necessária.
- Cada tarefa está incluída em um acordo entre o cliente e a empresa, este contrato também inclui uma lista de trabalhadores que estão autorizados a realizar a tarefa.

MODELANDO O PROBLEMA - ROTEAMENTO:

- Definimos um grafo $G = (V, E)$;
- Onde V é o conjunto de nós e E o conjunto de arestas;
- $V = T \cup D \cup D'$ é composto pelo conjunto D de locais de partida dos trabalhadores (os trabalhadores podem iniciar sua viagem de sua casa ou de um depósito), o conjunto D' de locais de chegada dos trabalhadores (e observações semelhantes valem para os locais de partida e para o local de chegada das viagens), e o conjunto T de tarefas caracterizadas pelo seu tempo de processamento e pela sua localização.
- Uma tarefa $j \in T$ precisa ser alcançada por r_j trabalhadores; se $r_j > 1$, a tarefa é representada por r_j nós no grafo. Uma aresta entre os dois nós representa a viagem de um trabalhador entre a localização de ambas as tarefas: uma aresta entre duas tarefas significa que ambas as tarefas são executadas pelo mesmo trabalhador. O tempo de transporte entre duas tarefas i e j é $dist_{i,j}$
- $W = \{w_1, w_i, \dots, w_{|W|}\}$ é o conjunto de trabalhadores disponíveis. Para uma tarefa j e um trabalhador w existem três tipos de preferências: satisfação emparelhamento trabalhador-cliente: p_{sj}^w ; regiões de satisfação do trabalhador: pa_j^w e as habilidades de satisfação do cliente: pw_j^w . Essas três preferências são agregadas em $p_j^w = (pa_j^w + pw_j^w + ps_j^w)$. Além disso, p_j^w é o custo do trabalhador w realizando a tarefa j de acordo com o compromisso entre o cliente e a empresa. Tanto os trabalhadores quanto as tarefas têm janela de tempo: uma tarefa j deve ser iniciada durante sua janela de tempo $[e_i, l_i]$ (mas pode ser concluída na janela de tempo se o tempo de processamento for muito longo); e um trabalhador w pode trabalhar apenas durante sua janela de tempo de trabalho $[TW_{inf}^w, TW_{sup}^w]$ o tempo de viagem não é considerado como tempo de trabalho neste artigo.

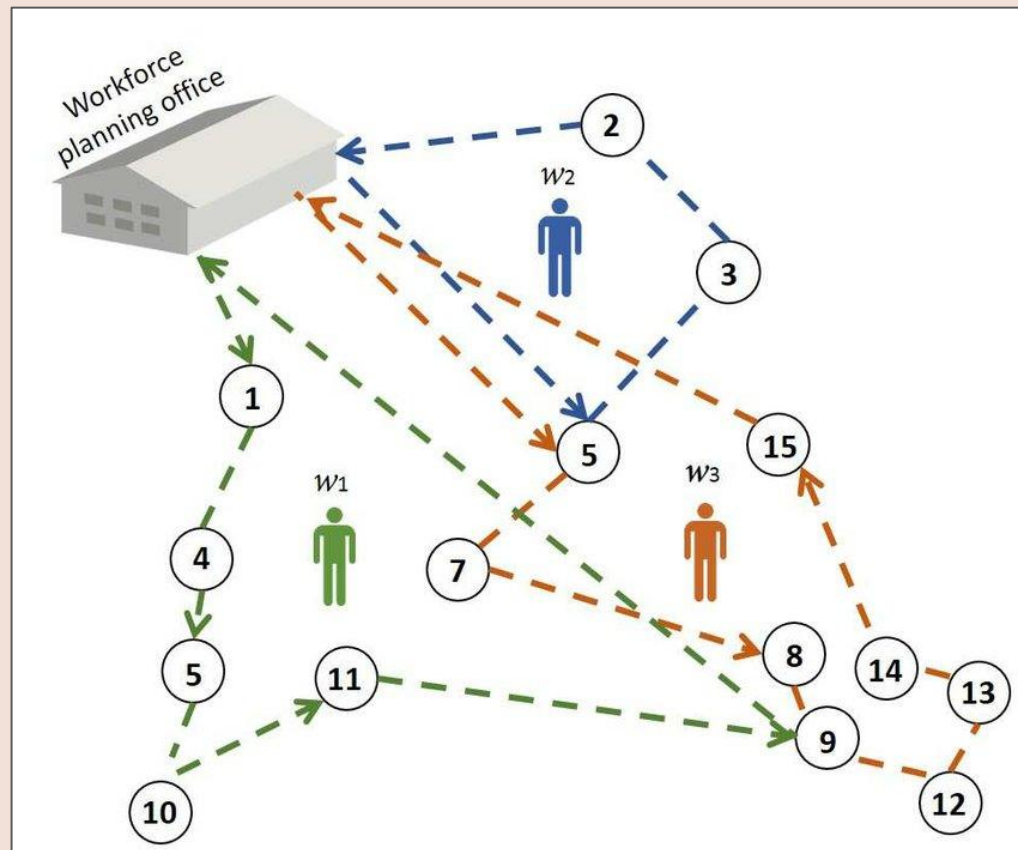
OBJETIVOS E RESTRIÇÕES NO MODELO PROPOSTO:

Objetivo	Restrições	Preferências
Custo da viagem	Habilidades requeridas	Janelas de tempo do trabalhador
Custo do salário	Contrato	Regiões disponíveis para trabalhadores
Preferências (habilidades, regiões, trabalhadores)	Janela de tempo da tarefa	Número de trabalhadores necessários para a tarefa
Tarefas não atribuídas		

- 1) Minimização do custo de viagem e do custo de trabalho dos trabalhadores,
- 2) Maximização das preferências (das regiões preferidas dos trabalhadores, habilidades preferidas dos clientes e correspondência preferida do trabalhador-tarefa). Este objetivo modela a Qualidade dos Serviços para clientes e trabalhadores.
- 3) Minimização do número total de tarefas atribuídas a trabalhadores com tempo de

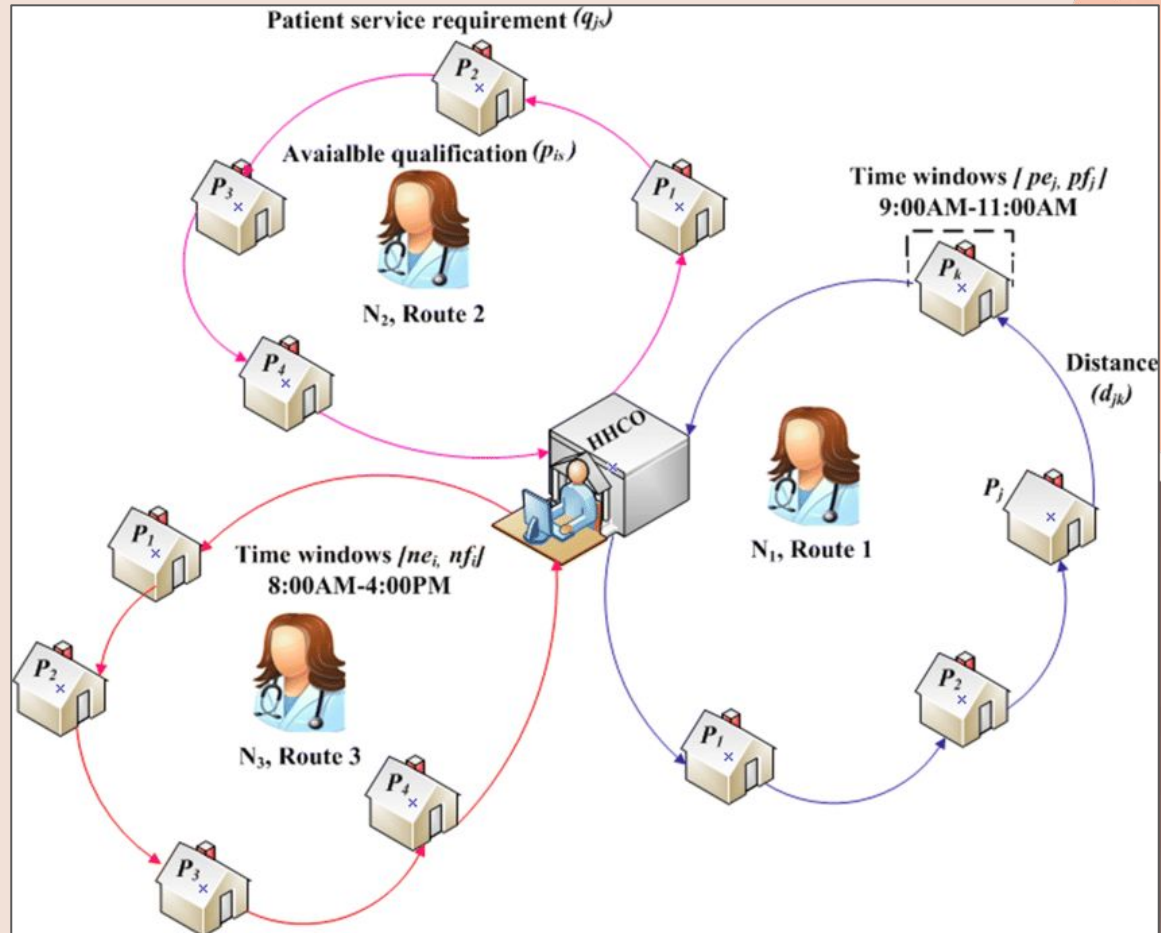
término do processo superior à janela de tempo dos trabalhadores, mais o número total de tarefas atribuídas a um trabalhador e que as tarefas estão localizadas em uma região que não se encaixa nas preferências do trabalhador.

- 4) Minimização do número de trabalhadores requeridos por uma tarefa e que não foram designados para a tarefa.



Exemplo de uma solução WSRP com 3 trabalhadores e 15 atribuições de visitas.

Problema de programação e roteamento HHC



PARÂMETROS:

- W - conjunto de trabalhadores
- T - conjunto de tarefas
- $dist_{i,j}$ - distância da tarefa i à tarefa j
- p_j^w - custo do trabalhador w para realizar j .
- Dur_j - tempo de processamento da tarefa j
- r_j - número de trabalhadores necessários para realizar a tarefa j
- pw_j^w - nível de satisfação ($pw_j^w \in [0, 1]$) quando o trabalhador w é atribuído à tarefa j
- pa_j^w - nível de satisfação ($pa_j^w \in [0, 1]$) quando o trabalhador w é atribuído à tarefa j considerando as preferências regionais (a tarefa j está localizada em uma região k)
- ps_j^w - nível de satisfação da habilidade ($ps_j^w \in [0, 1]$) com $ps_j^w = \max(ps_j^i)$ quando a tarefa j é atribuída ao trabalhador w
- $p_j^w = (pa_j^w + pw_j^w + ps_j^w) \forall w \in W, j \in T$ - é a qualidade do serviço.
- $[e_j, l_j]$ - janela de tempo da tarefa j
- $[TW_{inf}^w, TW_{sup}^w]$ - janela de tempo de trabalho do trabalhador w

VARIÁVEIS BINÁRIAS:

- $x_{i,j}^w = \begin{cases} 1, & \text{se o trabalhador } w \text{ passar da tarefa } i \text{ para } j \\ 0, & \text{senão} \end{cases}$
- $x_{0,j}^w = \begin{cases} 1, & \text{se o trabalhador } w \text{ se deslocar do local de partida para a tarefa } i \\ 0, & \text{senão} \end{cases}$
- $x_{i,0}^w = \begin{cases} 1, & \text{se o trabalhador } w \text{ passar da tarefa } i \text{ para o local de término } 0 \\ 0, & \text{senão} \end{cases}$
- $\psi_j^w = \begin{cases} 1, & \text{se o trabalhador } w \text{ for designado para uma tarefa } j \text{ situada fora da região de preferência} \\ 0, & \text{senão} \end{cases}$
- $\theta_j^w = \begin{cases} 1, & \text{se a violação da janela de tempo ocorrer quando a tarefa } j \text{ for atribuída ao trabalhador } w \\ 0, & \text{senão} \end{cases}$

VARIÁVEIS CONTÍNUAS:

- y_j - número de trabalhadores não disponíveis para realizar a tarefa j
- t_j - hora de início da tarefa j
- d_j^w - hora de saída do trabalhador w da tarefa j
- a_j^w - hora de chegada do trabalhador w à tarefa j

FUNÇÃO OBJETIVO:

A função objetivo a ser minimizada envolve quatro critérios que são balanceados por

$$\min f(s) = \lambda_1 \sum_{w=1}^W \sum_{i=0}^T \sum_{j=1}^T (dist_{i,j} + p_j^w) x_{i,j}^w + \lambda_2 \sum_{j=1}^T (3r_j - \sum_{i=0}^T \sum_{w=1}^W p_j^w x_{i,j}^w) + \lambda_3 \sum_{j=1}^T \sum_{w=1}^W (\psi_j^w + \theta_j^w) + \lambda_4 \sum_{j=1}^T y_j$$

quatro pesos (λ) correspondentes aos níveis de prioridade.

Ordem de prioridade dos pesos: $\lambda_4 \succcurlyeq \lambda_3 \succcurlyeq \lambda_2 \succcurlyeq \lambda_1$

PRIMEIRO CRITÉRIO:

$$\lambda_1 \sum_{w=1}^W \sum_{i=0}^T \sum_{j=1}^T (dist_{i,j} + p_j^w) x_{i,j}^w$$

Através do peso λ_1 , a prioridade mais baixa é dada para minimizar o custo monetário que representa o custo operacional em termos do custo total de viagem $dist_{i,j}$ e salário do trabalhador p_j^w .

SEGUNDO CRITÉRIO:

$$\lambda_2 \sum_{j=1}^T (3r_j - \sum_{i=0}^T \sum_{w=1}^W p_j^w x_{i,j}^w)$$

O peso λ_2 dá prioridade para minimizar as penalidades de preferências: emparelhamento preferido de trabalhadores-clientes, regiões preferidas de trabalhadores e habilidades preferidas dos clientes. O grau de satisfação dessas preferências quando o trabalhador w é atribuído à tarefa j é dado por $\rho_j^k = pa_j^w + pw_j^w + p_{S_j}^w$ que tem um valor no intervalo $[0, 3]$ desde a satisfação dos três tipos de preferências para cada atribuição, possui valor $pa_j^w, pw_j^w, p_{S_j}^w \in [0, 1]^3$: Um valor de 1 significa que w está totalmente satisfeito, um valor 0 que significa w não está satisfeito. O nível de satisfação é revertido para penalidade subtraindo-o da pontuação máxima de satisfação, que é $3r_j$ para cada tarefa j .

TERCEIRO CRITÉRIO:

$$\lambda_3 \sum_{j=1}^T \sum_{w=1}^W (\psi_j^w + \theta_j^w)$$

Uma vez que, em casos práticos (em particular no HHC, alguns trabalhadores devem aceitar realizar algumas tarefas que estão fora da sua janela de tempo de trabalho ou fora da sua disponibilidade de região geográfica; a segunda prioridade mais alta na função objetivo é minimizar o número de violações de disponibilidade de tempo de trabalhadores e o número de violações de preferência de região de trabalho, através do peso λ_3 .

QUARTO CRITÉRIO:

$$\lambda_4 \sum_{j=1}^T y_j$$

Como um dos objetivos mais importantes do serviço é realizar o maior número de tarefas possível, a maior prioridade na função objetivo é dada para minimizar tarefas não atribuídas por meio do peso λ_4 .

RESTRIÇÕES:

As restrições podem ser divididas em seis conjuntos: cada conjunto de equações representa um tipo das restrições do sistema.

1. A atribuição de tarefas aos trabalhadores para definir viagens;
2. A atribuição de trabalhadores a tarefas considerando o número de trabalhadores necessários para cada tarefa;
3. A atribuição de tarefas dependendo das preferências dos trabalhadores;
4. A atribuição de tarefas a trabalhadores considerando as restrições herdadas, o que significa que uma tarefa pode ser atribuída apenas a trabalhadores autorizados;
5. A hora de partida e chegada dos trabalhadores às tarefas;
6. Os horários de início de cada tarefa de acordo com suas janelas de tempo e hora de chegada dos trabalhadores necessários.

CONJUNTO DE RESTRIÇÕES 1:

A viagem de um trabalhador w da tarefa i para a tarefa j é definida por $x_{i,j}^w = 1$ (tarefa 0 é o local inicial e tarefa $|T|$ é o local final). Assim, estas restrições garantem que para um trabalhador w : de uma tarefa i um trabalhador w pode viajar para no máximo uma outra tarefa (1ª restrição); para uma tarefa j um trabalhador pode viajar de no máximo uma tarefa (2ª restrição); e se w for atribuído a uma tarefa j após a tarefa i então $x_{i,j}^w = 1$ e (3ª restrição) pode ser reescrita como $\sum_{u=0}^T x_{j,u}^w = 1$ significando que w deve viajar para outra tarefa (ou para a localização final) e não pode ficar nesta posição.

- $\sum_{j=0}^T x_{i,j}^w \leq 1, \forall i = 0..|T|, w = 1..|W|$
- $\sum_{i=0}^T x_{i,j}^w \leq 1, \forall i = 0..|T|, w = 1..|W|$
- $\sum_{i=0}^T x_{i,j}^w = \sum_{u=0}^T x_{j,u}^w, \forall i = 0..|T|, w = 1..|W|$

CONJUNTO DE RESTRIÇÕES 2:

O número de trabalhadores atribuídos à tarefa j deve estar de acordo com r_j ou seja, com o número de trabalhadores necessários para realizar a tarefa j . y_j é o número de trabalhadores ausentes para a tarefa alcançada j e é definida por: $y_j = r_j - \sum_{w=1}^W \sum_{i=0}^T x_{i,j}^w$. Se uma tarefa j exigir três trabalhadores ($r_j = 3$), mas apenas um trabalhador w_1 é atribuído a j para que exista um e apenas um $x_{i,j}^w = 1$ e a restrição poderá ser reescrita como $\sum_{w=1}^W \sum_{i=0}^T x_{i,j}^w + y_j = 1 + y_j = 3$. Por consequência, $y_j = 2$ que é o número de trabalhadores ausentes para realizar a tarefa.

$$\bullet \sum_{w=1}^W \sum_{i=0}^T x_{i,j}^w + y_j = r_j, \forall j = 1..|T|$$

CONJUNTO DE RESTRIÇÕES 3:

- $\psi_j^w + M \cdot pa_j^w \geq \sum_{i=0}^T x_{i,j}^w, \forall w = 1..|W|, j = 1..|T|$
- $M \cdot \theta_j \geq t_j + Dur_j - TW_{sup}^w + (\sum_{i=0}^T x_{i,j}^w - 1) \cdot M, \forall w = 1..|W|, j = 1..|T|$
- $M \cdot \theta_j \geq TW_{inf}^w - t_j + (\sum_{i=0}^T x_{i,j}^w - 1) \cdot M, \forall w = 1..|W|, j = 1..|T|$

CONJUNTO DE RESTRIÇÕES 3:

Idealmente, um trabalhador deve ser designado para tarefas em suas regiões geográficas disponíveis. No entanto, as violações da região de preferência são possíveis e devem ser medidas para definir a terceira parte da função objetivo. Na restrição 1, se $pa_j^w = 0$, o trabalhador w é atribuído à tarefa j que está localizado em uma região não desejada, a restrição 1 pode ser reescrita como, $\psi_j^w \succcurlyeq \sum_{i=0}^T x_{i,j}^w$ implicando $\psi_j^w \succcurlyeq 1$.

Quando ambas as tarefas i e j são atribuídas ao trabalhador w , $x_{i,j}^w = 1$ e a restrição 2:

$$M \cdot \theta_j \succcurlyeq t_j + Dur_j - TW_{sup}^w + (\sum_{i=0}^T x_{i,j}^w - 1) \cdot M$$

$$M \cdot \theta_j \succcurlyeq TW_{inf}^w - t_j + (\sum_{i=0}^T x_{i,j}^w - 1) \cdot M$$

pode ser reescrita como:

$$M \cdot \theta_j \succcurlyeq t_j + Dur_j - TW_{sup}^w$$

$$M \cdot \theta_j \succcurlyeq TW_{inf}^w - t_j$$

A restrição 2 garante que, se o tempo de conclusão ($t_j + Dur_j$) da tarefa j exceder TW_{sup}^w , a variável binária θ_j é definida como 1. Como $t_j + Dur_j - TW_{sup}^w > 0$, a restrição 2 é reescrita como $M \cdot \theta_j \succcurlyeq t_j + Dur_j - TW_{sup}^w > 0$ e garante que $\theta_j = 1$. A restrição 3 garante que $\theta_j = 1$, se $t_j < TW_{inf}^w$, isto é, quando $TW_{inf}^w - t_j > 0$, o que significa que o trabalhador w tem que executar tarefa j antes do final de sua janela de tempo de trabalho.

CONJUNTO DE RESTRIÇÕES 4:

Nos cenários abordados nesta apresentação, um trabalhador pode realizar uma tarefa exigida por um cliente se e somente se o trabalhador tiver sido incluído no contrato do cliente (restrição abaixo), neste caso $c_j^w = 1$, caso contrário $c_j^w = 0$ e $\sum_{i=0}^T x_{i,j}^w < 0$ que impõe $x_{i,j}^w = 0$.

$$\bullet \sum_{i=0}^T x_{i,j}^w \preceq c_j^w, \forall j = 1..|T|, w = 1..|W|$$

CONJUNTO DE RESTRIÇÕES 5:

Se um trabalhador w for atribuído a uma tarefa j após uma tarefa i , então $x_{i,j}^w = 1$, então a restrição 1 pode ser reescrita como $d_j^w \succcurlyeq (t_j + Dur_j)$ implicando que o tempo de partida d_j^w do trabalhador w da tarefa j deve ser maior que o tempo de início t_j de j mais o tempo de processamento Dur_j de j . Se $x_{i,j}^w = 0$, (restrição 1) pode ser reescrito como: $d_j^w \succcurlyeq -M$ e essa restrição é válida.

A restrição 2 garante que, se um trabalhador w for atribuído à tarefa j após a tarefa i ($x_{i,j}^w = 1$) então $a_j^w \succcurlyeq (d_i^w + dist_{i,j})$ deve manter, implicando que o tempo de chegada a_j^w de w na tarefa j está depois de seu horário de partida d_i^w da tarefa i mais a distância entre as tarefas i e j . Se $x_{i,j}^w = 0$, (restrição 2) pode ser reescrito como: $a_j^w \succcurlyeq -M$ e esta restrição é válida.

- $d_j^w \succcurlyeq (t_j + Dur_j) + (\sum_{i=0}^T x_{i,j}^w - 1) \cdot M, \forall w = 1..|W|, j = 1..|T|$
- $a_j^w \succcurlyeq (d_i^w + dist_{i,j}) + (x_{i,j}^w - 1) \cdot M, \forall w = 1..|W|, i = 0..|T|, j = 1..|T|$

CONJUNTO DE RESTRIÇÕES 6:

A hora de início t_j da tarefa j deve ser posterior à hora de chegada a_j^w de todos os trabalhadores necessários w para realizar a tarefa (restrição 1). Além disso, uma tarefa j tem uma janela de tempo $[e_j, l_j]$ e pode começar somente após o início e_j de sua janela de tempo (restrição 2) e antes do final de sua janela de tempo (restrição 3).

- $t_j \succcurlyeq a_j^w, \forall w = 1..|W|, j = 1..|T|$
- $t_j \succcurlyeq e_j, \forall j = 1..|T|$
- $t_j \preccurlyeq l_j, \forall j = 1..|T|$

CONJUNTO DE RESTRIÇÕES - DOMÍNIO DAS VARS:

$$x_{i,j}^w, \theta_j^w, \psi_j^w \in \{0, 1\}, y_j \in \mathbb{N}, t_i, a_j^w, d_j^w \in \mathbb{R}$$