Problema ⋆1

Gabriel F. Costa - 19.1.4047

1. Seja $\Psi \propto \exp(-\alpha x^2)$:

a. Qual a dimensão da constante de normalização? Explique seu raciocínio.

b. Qual a dimensão da constante α? Explique.

c. Determine a constante de normalização usando que a intergral $\int |\Psi|^2 dx$ sobre todo o eixo x deve ser igual a 1.

d. Por meio de software, calcule as seguintes probabilidades: $p(0, 1)$, $p(1, 2)$ e $p(0, 10)$. A notação $p(a, b)$ representa a probabilidade de uma medida encontrar a particula na região $a \leq x \leq b$.

Respostas

a. A constante de normalização tem dimensão de $L^{-\frac{1}{2}}$, onde L representa a unidade de comprimento.

Isso pode ser visto a partir da equação da densidade de probabilidade, que é dada por $|\Psi(x)|^2$. Como a probabilidade deve ser uma grandeza adimensional, a dimensão de $|\Psi(x)|^2$ deve ser a inversa da dimensão do comprimento. Portanto, a dimensão da constante de normalização deve ser a raiz quadrada inversa da dimensão do comprimento.

b. A constante α tem dimensão de L^{-2}, onde L representa a unidade de comprimento.

Isso pode ser visto a partir da equação $\Psi(x) = Ae^{-\alpha x^2}$, onde $\Psi(x)$ tem dimensão de $L^{-\frac{1}{2}}$ e x tem dimensão de L.

c. Para encontrar a constante de normalização, precisamos integrar $|\Psi|^2$ sobre todo o eixo x e igualar a integral a 1, como mencionado anteriormente. Então temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx = 1$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} A^2 e^{-2\alpha x^2} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} A^2 e^{-u^2} \frac{du}{\sqrt{2\alpha}} \quad (\text{substituindo } u = \sqrt{2\alpha} x)$$

$$= \frac{A^2}{\sqrt{2\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du$$

$$= \frac{A^2\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\alpha}}.$$

Como sabemos que a integral deverá ser igual a 1, nós temos:

$$= \frac{A^2\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\alpha}} = 1$$

O que nos dá:

$$A = \sqrt{\frac{\sqrt{2\alpha}}{\sqrt{\pi}}} = \left(\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}$$

d. A implementação em Python ($\alpha = 1$), está anexada junto a folha de resposta. Resultados:

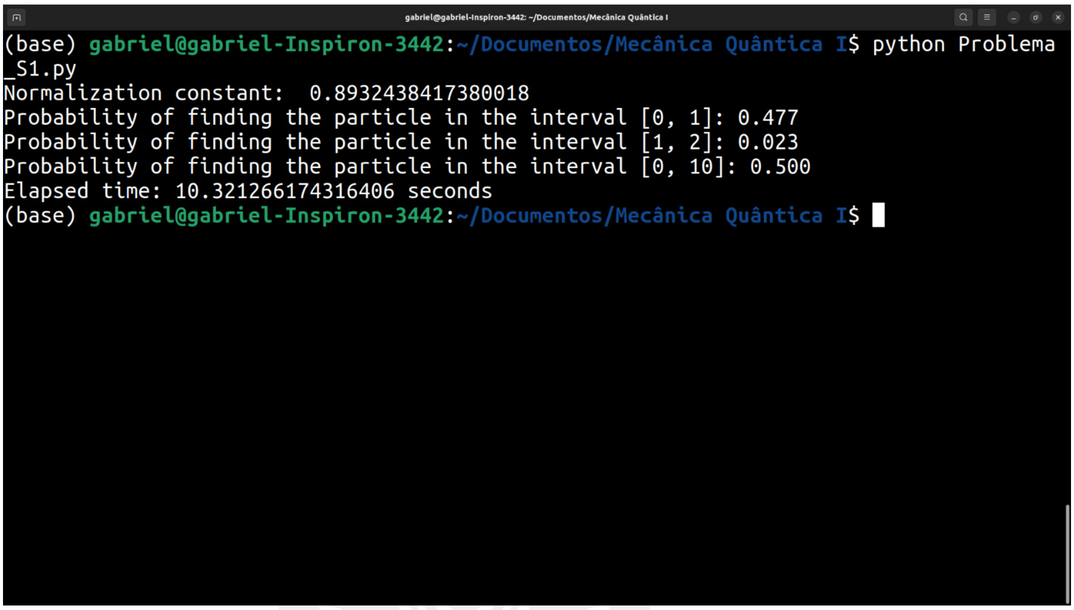

Figure 1: Terminal com os resultados

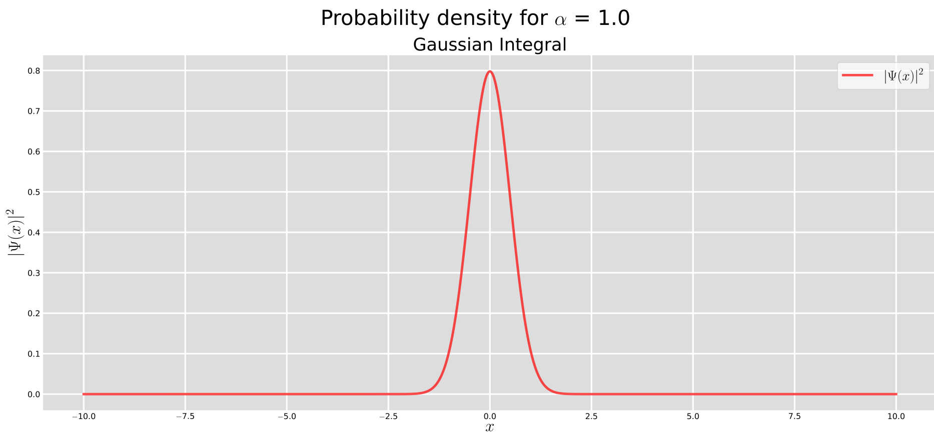

Figure 2: Densidade de Probabilidade $|\Psi(x)|^2$

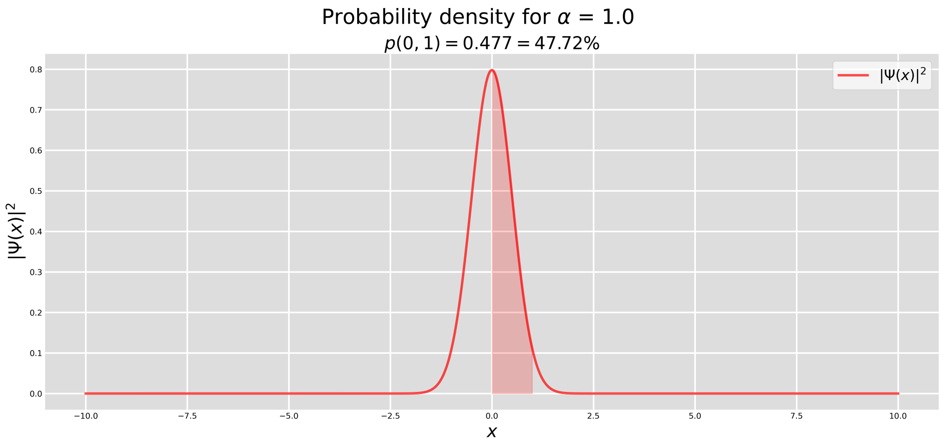

Figure 3: Probabilidade de uma partícula ser encontrada neste comprimento $[0, 1]$

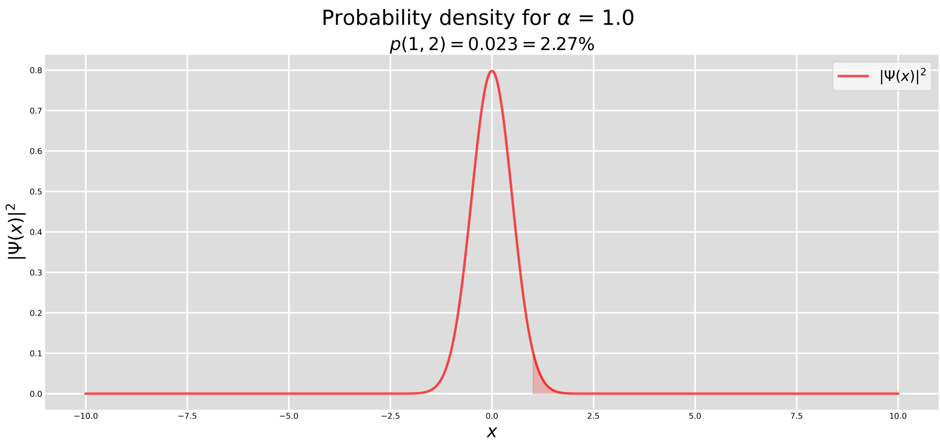

Figure 4: Probabilidade de uma partícula ser encontrada neste comprimento $[1, 2]$

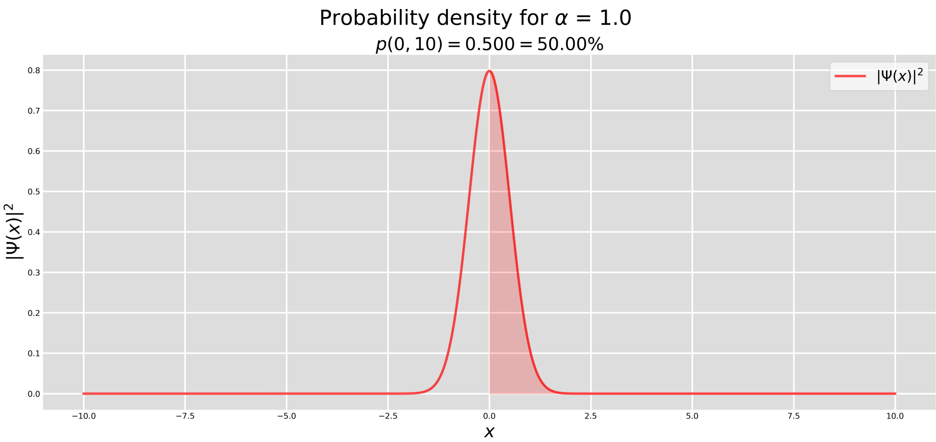

Figure 5: Probabilidade de uma partícula ser encontrada neste comprimento $[0, 10]$