Problema ⋆3

Mecânica Quântica I

Gabriel F. Costa - 19.1.4047

Problema ⋆3:

Mostre que, de modo geral, a função de onda $\Psi(x,t) = \psi(x)$ não é solução da equação de Schrödinger dependente do tempo. Isso significa que um estado estacionário (por si só, sem o fator $e^{-iEt/\hbar}$) não costuma ser solução da equação para a dinâmica do sistema.

Resposta:
Para mostrar que a função de onda $\Psi(x,t) = \psi(x)$ não é uma solução da equação de Schrödinger dependente do tempo, vamos substituir essa função de onda na equação e verificar o resultado. A equação de Schrödinger dependente do tempo é dada por:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x,t)$$

Substituindo $\Psi(x,t) = \psi(x)$, temos:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x)$$

Agora, observe que o lado esquerdo da equação envolve apenas a derivada parcial com relação ao tempo $\frac{\partial \psi(x)}{\partial t}$, enquanto o lado direito envolve apenas derivadas parciais com relação à posição x. Essa igualdade só pode ser verdadeira se ambos os lados forem iguais a uma constante. Vamos considerar o lado esquerdo da equação:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} = i\hbar \frac{d\psi(x)}{dt}$$

Enquanto o lado direito é:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x)$$

Se $\psi(x)$ não depende explicitamente do tempo, ou seja, $\frac{d\psi(x)}{dt} = 0$, então o lado esquerdo se torna zero. No entanto, o lado direito não será zero, a menos que $\psi(x)$ seja uma solução estacionária da equação de Schrödinger independente do tempo. Nesse caso, a equação se reduz a:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x) = 0$$

Essa é a equação de Schrödinger independente do tempo, que descreve os estados estacionários do sistema. Portanto, podemos concluir que, em geral, a função de onda $\Psi(x,t) = \psi(x)$ não é uma solução da equação de Schrödinger dependente do tempo. Um estado estacionário por si só, sem o fator $e^{-iEt/\hbar}$, não é uma solução da equação que descreve a dinâmica do sistema. A parte temporal da função de onda é crucial para capturar a evolução temporal dos sistemas quânticos.