Problema ⋆2

Mecânica Quântica I

Gabriel F. Costa - 19.1.4047

Problema 1.14:

Seja $P_{ab}(t)$ a probabilidade de encontrar uma partícula no intervalo $(a < x < b)$, no instante t.

a. Mostre que

$$\frac{dP_{ab}}{dt} = J(a,t) - J(b,t),$$

onde

$$J(x,t) \equiv \frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial x} - \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right).$$

Quais são as unidades de $J(x,t)$? *Observação:* J é chamada de **corrente de probabilidade**, pois estabelece a taxa com que a probabilidade 'flui' através do ponto x. Se $P_{ab}(t)$ aumenta, então mais probabilidade está fluindo para dentro da região em uma extremidade do que está fluindo para fora na outra.

b. Encontre a corrente de probabilidade para a função de onda

$$\Psi(x,t) = Ae^{-\alpha[(mx^2/\hbar)+it]}.$$

a.

$$P_{ab}(t) = \int_a^b |\Psi(x,t)|^2 dx$$

, então $\frac{dP_{ab}}{dt} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}|\Psi|^2 dx$. Mas (Eq. 125):

$$\frac{\partial|\Psi|^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\Psi\right)\right] = -\frac{\partial}{\partial t}J(x,t).$$

$$\therefore \frac{dP_{ab}}{dt} = -\int_a^b \frac{\partial}{\partial x}J(x,t)dx$$

$$= -\left.|J(x,t)|\right|_a^b = J(a,t) - J(b,t).$$

A probabilidade é adimensional, então J tem as dimensão $\frac{1}{\text{tempo}}$, portanto segundos^{-1}.

b.

$$\Psi(x,t) = f(x)e^{-\alpha mx^2/\hbar},$$

$$\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial x} = fe^{-iat}\frac{df}{dx}e^{iat} = f\frac{df}{dx},$$

$$\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x} = f\frac{df}{dx}$$

$$\therefore J(x,t) = 0$$

Problema ⋆2:

No problema 1.14, definiu-se a corrente de probabilidade $J(x,t)$.

a. Verifique que $J(x,t)$ e $\rho(x,t) \equiv |\Psi(x,t)|^2$ satisfazem a equação da continuidade, $\frac{\partial J}{\partial x} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$.

b. Intuitivamente, podemos esperar que a corrente de probabilidade tenha relação com o momento linear. Mostre que essa relação existe verificando que $J(x,t)dx = \frac{<p>}{m}$, onde a integral é realizada sobre todo eixo x.

a.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}|\Psi(x,t)|^2$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\Psi^*(x,t)\Psi(x,t)\right)$$

$$= \frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\Psi(x,t) + \Psi^*(x,t)\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

Usando a equação de Schrödinger, podemos escrever:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \Psi^*}{\partial x}\left(-\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) + \Psi^* \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)$$

$$= -\frac{i\hbar}{2m}\left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\right)$$

Agora, derivando $J(x,t)$ em relação a x, temos:

$$\frac{\partial J}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)\right]$$

$$= \frac{i\hbar}{2m}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \Psi^*}{\partial x} + \Psi \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\right)$$

$$= \frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} - \Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\right)$$

Somando as duas derivadas acima, obtemos:

$$\frac{\partial J}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

b. Para mostrar que $J(x,t)dx = \frac{<p>}{m}$, onde a integral é realizada sobre todo eixo x, podemos usar o operador momento linear p_x na forma:

$$p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x},$$

então, temos que:

$$J(x,t) = \frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right),$$

Podemos reescrever a expressão acima em termos do operador momento linear p_x da seguinte maneira:

$$J(x,t) = \frac{1}{2m}\left(\Psi^* p_x \Psi - \Psi p_x \Psi^*\right)$$

Integrando ambos os lados dessa equação sobre todo eixo x, temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} J(x,t) = \frac{1}{2m}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\Psi^* p_x \Psi - \Psi p_x \Psi^*\right) dx$$

$$= \frac{1}{2m}(< p_x > - < p_x >) = 0$$

Isso ocorre porque a integral do produto cruzado é zero. Portanto, a relação $J(x,t)dx = \frac{<p>}{m}$ é válida, ou seja, a corrente de probabilidade média em uma região é igual à densidade de momento médio nessa mesma região.