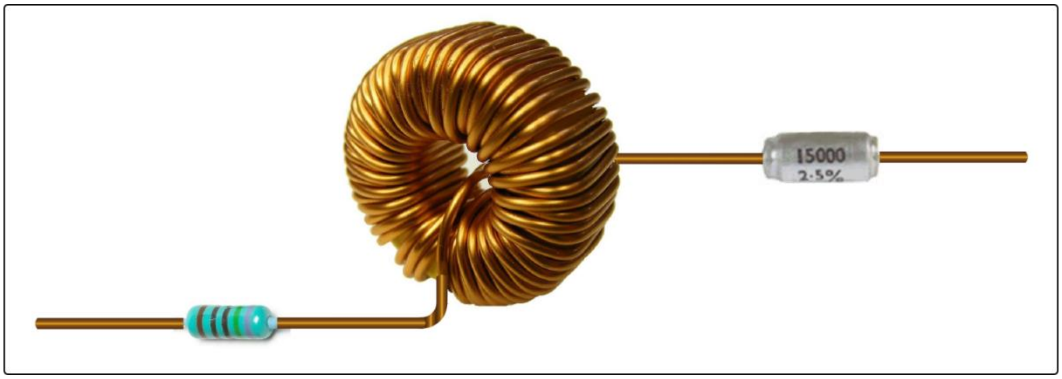
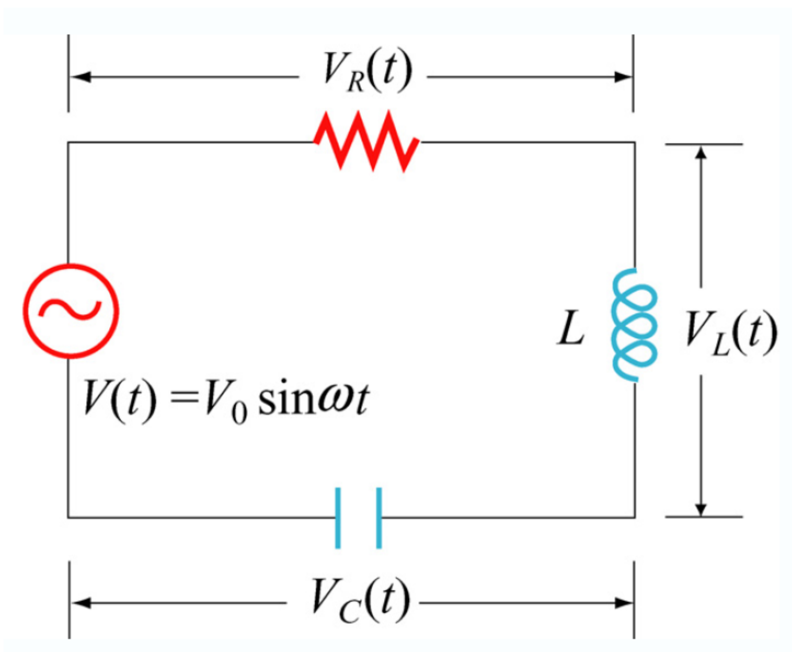
O CIRCUITO RLC SÉRIE

O circuito RLC constitui um exemplo importante e ilustrativo de um oscilador harmônico amortecido, e que nos possibilita introduzir uma discussão quantitativa acerca de temas como *oscilações forçadas*, *resposta transiente*, *resposta estacionária*, *ressonância*, etc.



RLC series (2010–SpinningSpark) (commons.wikimedia.org)



Circuito RLC série alimentado por uma fonte de força eletromotriz altermada
[*Alternating-Current Circuits* (web.mit.edu)]

Para compreender que um circuito RLC é um oscilador harmônico amortecido, considere um circuito RLC série, isto é, uma associação em série de uma resistência *R*, uma indutância *L* e uma capacitância *C*, alimentada por uma força eletromotriz *V*(*t*) dependente do tempo *t*. A equação de circuito é

$$V(t) = RI(t) + L\frac{dI(t)}{dt} + \frac{Q(t)}{C}, \qquad (1)$$

onde *Q*(*t*) é a carga no capacitor e *I*(*t*) é a corrente no circuito. Diferenciando a última equação uma vez com relação ao tempo, e fazendo uso da relação *I*(*t*) = *dQ*(*t*)/*dt*, obtem-se

$$\frac{dV(t)}{dt} = R\frac{dI(t)}{dt} + L\frac{d^2I(t)}{dt^2} + \frac{I(t)}{C} \quad \text{ou} \quad L\frac{d^2I(t)}{dt^2} = -\frac{I(t)}{C} - R\frac{dI(t)}{dt} + \frac{dV(t)}{dt} \qquad (2)$$

Podemos comparar a equação diferencial acima com aquela obtida para um sistema massa mola (de massa *m* e constante elástica *k*) sujeito a uma força de atrito com coeficiente de amortecimento *b*, e a uma força externa *F*(*t*):

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t) - b\frac{dx(t)}{dt} + F(t)$$

Obtemos então a seguinte analogia entre os sistemas mecânico e elétrico acima considerados

Sistema Massa-Mola Amortecido	**Circuito RLC**
força externa $F(t)$	derivada temporal $\frac{dV(t)}{dt}$ da f.e.m. aplicada
deslocamento $x(t)$	corrente elétrica $I(t)$
massa *m*	indutância *L*
constante elástica *k*	recíproco da capacitância $\frac{1}{C}$
coeficiente de amortecimento *b*	resistência elétrica *R*

A equação de circuito (2) pode ser reescrita como

$$\frac{d^2I(t)}{dt^2} + \Gamma\frac{dI(t)}{dt} + \omega_0^2 I(t) = \frac{1}{L}\frac{dV(t)}{dt}, \qquad (3)$$

onde $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ e $\Gamma = \frac{R}{L}$, onde ω_0 e Γ são a *frequência natural* e a *constante de amortecimento* do circuito, respectivamente.

Neste experimento consideraremos o caso particular em que a f.e.m. $V(t)$ aplicada ao circuito é harmônica e de frequência ω, para a qual podemos escrever $V(t) = V_0$ sen ωt. Neste caso obtemos

$$\frac{d^2I(t)}{dt^2} + \Gamma\frac{dI(t)}{dt} + \omega_0^2 I(t) = \frac{\omega V_0}{L}\cos\omega t, \qquad (4)$$

Pode-se mostrar que, para este caso, a resposta mais geral $I(t)$ à excitação harmônica $V(t) = V_0$ sen ωt é dada pela superposição $I(t) = I_1(t) + I_2(t)$, de uma componente *transiente* $I_1(t)$ (isto é, que decai com o tempo), e de componente *estacionária* $I_2(t)$, onde

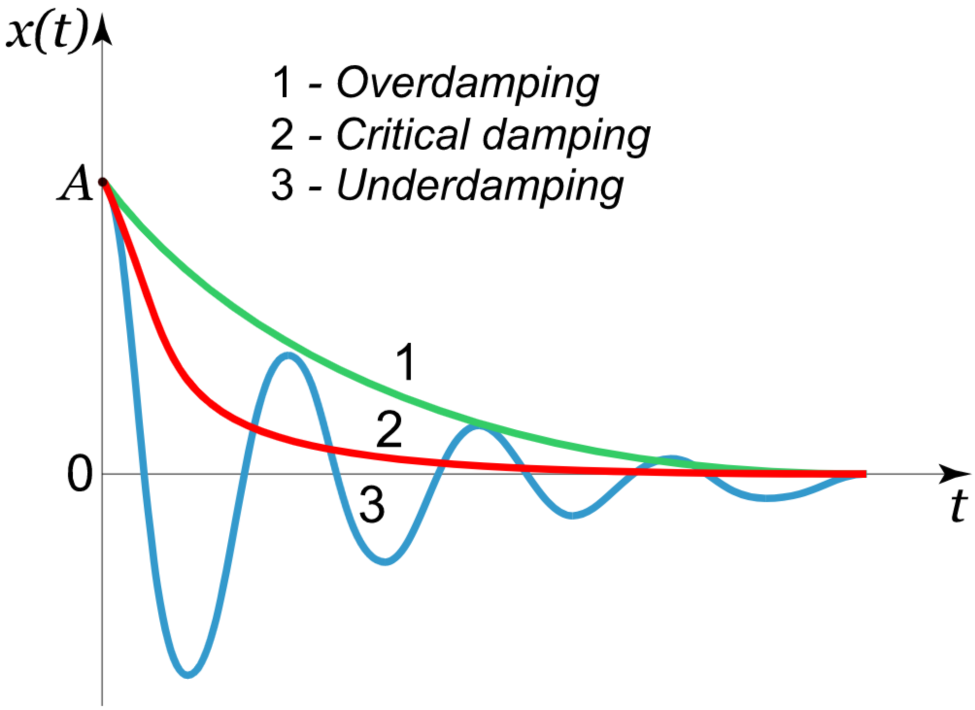
$$I_1(t) = e^{-\left(\frac{\Gamma}{2}\right)t} \times \begin{cases} A_1\text{sen}(\omega_1 t) + B_1\cos(\omega_1 t), & \text{se } \frac{\Gamma}{2} < \omega_0 \text{ (subamortecimento)} \quad (5a) \\ A_1 + B_1 t, & \text{se } \frac{\Gamma}{2} = \omega_0 \text{ (amortecimento crítico)} \quad (5b) \\ A_1 e^{\lambda_1 t} + B_1 e^{-\lambda_1 t}, & \text{se } \frac{\Gamma}{2} > \omega_0 \text{ (sobreamortecimento)} \quad (5c) \end{cases}$$

sendo $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}}$, $\lambda_1 = \sqrt{\frac{\Gamma^2}{4} - \omega_0^2}$, as amplitudes A_1 e B_1 dependentes das condições iniciais, e

$$I_2(t) = \frac{\frac{\omega V_0}{L}}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \Gamma^2\omega^2}} \cos(\omega t - \delta) \qquad (6)$$

onde a fase δ é dada por $\text{tg}\delta = \frac{\omega\Gamma}{\omega_0^2 - \omega^2}$.

(Talvez seja adequado, neste ponto, recordar, da teoria de equações diferenciais ordinárias, que a solução geral de uma equação diferencial não homogênea de segunda ordem, como (3), é dada pela soma de uma solução particular arbitrária da mesma e da solução geral da equação homogênea correspondente (obtida fazendo o segundo membro da equação igual a zero). Para a equação diferencial objeto de nosso interesse (4), a solução particular da equação não homogênea é dada pela resposta estacionária $I_2(t)$, enquanto que a solução geral da equação homogênea é a resposta transiente $I_1(t)$.



Oscilações livres num circuito RLC sob diferentes graus de amortecimento
[*Damped Oscillations in Series RLC Circuit* (math24.net)].

É nosso propósito, no experimento que segue, investigar as respostas transiente e estacionária de um circuito RLC série excitado por uma f.e.m. harmônica.

Para o propósito de analisar a evolução temporal da energia armazenada no circuito, consideremos mais detalhadamente a resposta transiente $I_1(t)$. Aqui restringiremos nossa análise ao caso de *subamortecimento* ($\Gamma < 2\ \omega_0$). Neste caso podemos reexpressar esta resposta como

$$I_1(t) = C_1\, e^{-\left(\frac{\Gamma t}{2}\right)} \cos(\omega_1 t - \delta_1), \qquad (7)$$

onde C_1 e δ_1 são, respectivamente, valores de amplitude e fase (estabelecidas pelas condições iniciais). A evolução temporal da resposta consiste de uma oscilação harmônica, de frequência ω_1, modulada por uma função exponencialmente decrescente. A resposta transiente é aquela que seria obtida se o sistema fosse excitado momentaneamente (por exemplo, carregando o capacitor) e deixado, a partir de então, evoluir livremente, na ausência de uma f.e.m. externa. É interessante determinar a evolução temporal da energia total $E(t)$ armazenada no circuito RLC. Esta energia é composta das energias $E_{\mathrm{C}}(t)$ e $E_{\mathrm{L}}(t)$ armazenadas no capacitor e no indutor, respectivamente, dadas por

$$E_{\mathrm{C}}(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{C}Q_1(t)^2 \qquad \text{e} \qquad E_{\mathrm{L}}(t) = \frac{1}{2}LI_1(t)^2$$

onde $Q_1(t)$ é a carga no capacitor. Podemos obter $Q_1(t)$ por integração através da relação $Q_1(t) = Q_1(0) + \int_0^t I_1(t')dt'$. Através de uma escolha adequada do valor inicial $Q_1(0)$ da carga no capacitor, sem perda de generalidade, obtemos, a partir de (5a),

$$Q_1(t) = \frac{C_1}{\sqrt{\omega_1^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}}\, e^{-\left(\frac{\Gamma t}{2}\right)} \cos(\omega_1 t - \delta_1') = \frac{C_1}{\omega_0}\, e^{-\left(\frac{\Gamma t}{2}\right)} \cos(\omega_1 t - \delta_1'), \quad \text{com}$$

$$\mathrm{tg}\delta_1' = \frac{\frac{\Gamma}{2}\mathrm{tg}\delta_1 - \omega_1}{\frac{\Gamma}{2}\mathrm{tg}\delta_1 + \omega_1},$$

onde se fez uso de $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{4}}$.

(*Sugestão*: faça uso dos resultados

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}\,(a\cos bx + b\,\mathrm{sen}\,bx)}{a^2+b^2} \qquad \text{e} \qquad \int e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx\,dx = \frac{e^{ax}\,(a\,\mathrm{sen}\,bx - b\cos bx)}{a^2+b^2}$$

A energia total armazenada no circuito é então

$$E(t) = E_{\mathrm{C}}(t) + E_{\mathrm{L}}(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C\omega_0^2} + L\right)C_1^2 e^{-\Gamma t}\left[\cos^2(\omega_1 t - \delta_1') + \cos^2(\omega_1 t - \delta_1)\right]$$
$$= LC_1^2 e^{-\Gamma t}\left[\cos^2(\omega_1 t - \delta_1') + \cos^2(\omega_1 t - \delta_1)\right] \qquad (8)$$

Observamos que a evolução temporal da energia total armazenada no circuito apresenta um comportamento oscilatório (com uma frequência $2\omega_1$) e um decaimento exponencial (com uma constante de tempo $1/\Gamma$). Consideremos a média temporal $\langle E(t)\rangle$ desta energia, tomada durante um ciclo de oscilação (da carga ou corrente no circuito), de duração $2\pi / \omega_1$, dada por

$$\langle E(t)\rangle = \frac{1}{\left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)}\int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega_1}} E(t')dt'. \qquad (9)$$

No caso de amortecimento fraco ($\Gamma/\omega_0 << 1 \Rightarrow \omega_1 \approx \omega_0$ e $\Gamma/\omega_1 << 1$) é uma boa aproximação considerar o fator exponencial $e^{-\Gamma t}$ constante na integral que se obtém inserindo (8) em (9). Tendo em vista o resultado

$$\langle\cos^2(\omega t-\delta)\rangle \; = \frac{1}{\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)}\int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(\omega t'-\delta)dt' = \frac{1}{2},$$

obtemos $\langle E(t)\rangle = LC_1^2 e^{-\Gamma t}$, e a taxa de perda de energia média armazenada no circuito é $-\frac{d\langle E(t)\rangle}{dt} = \Gamma \; \langle E(t)\rangle$, o que significa que durante um período de oscilação a energia armazenada média perdida é $\Gamma\langle E(t)\rangle(2\pi/\omega_1)$. Um termo comumente usado para um sistema oscilante é o *fator de qualidade Q*, definido como o produto de 2π pela razão entre a energia (média) armazenada e a energia (média) perdida durante um período de oscilação. Obtemos então, para o caso de amortecimento fraco,

$$Q = 2\pi\frac{\langle E(t)\rangle}{\Gamma\langle E(t)\rangle(2\pi/\omega_1)} \; = \frac{\omega_1}{\Gamma} \approx \frac{\omega_0}{\Gamma}.$$

O fator de qualidade será tanto maior quanto menor for o amortecimento no sistema (no caso do circuito RLC, quanto menor for a resistência R ou a constante de amortecimento $\Gamma = \frac{R}{L}$).

Consideremos agora a resposta estacionária. Uma característica importante da mesma é que sua amplitude $I_0(\omega)$ definida por

$$I_2(t) = I_0(\omega)\cos(\omega t-\delta) = \frac{1}{Z(\omega)}V_0\cos(\omega t-\delta), \qquad (10)$$

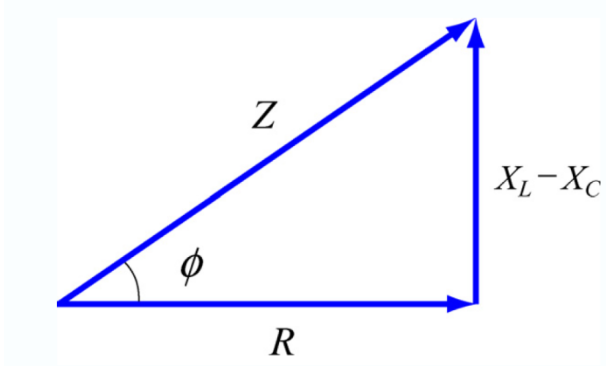
onde

$$Z(\omega) = \frac{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\Gamma^2\omega^2}}{\frac{\omega}{L}}$$

depende da frequência ω, o que gera o fenômeno de *ressonância*. Isto é facilmente compreendido mostrando que a grandeza $1 / Z(\omega)$ é uma função bem comportada da frequência ω em todo o intervalo aberto $(0, \infty)$ e possui um máximo local em $\omega = \omega_0$ (e único neste intervalo). Assim a resposta estacionária $I_2(t)$ terá uma amplitude máxima em $\omega = \omega_0$, para uma dada amplitude V_0 de f.e.m. harmônica aplicada. A grandeza $Z(\omega)$ é a chamada *impedância* do circuito (RLC). É interessante notar que $Z(\omega)$ pode ser expressa (lembrando que $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ e $\Gamma = \frac{R}{L}$) na forma

$$Z(\omega) = \sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

As grandezas $X_L = \omega L$ e $X_C = \frac{1}{\omega C}$ são denominadas reatância indutiva e reatância capacitiva, respectivamente, dos elementos indutivo e capacitivo circuito. Fica então claro que a condição de ressonância do circuito RLC série corresponde à igualdade entre as reatâncias indutiva e capacitiva de tais elementos.



Representação diagramática da relação entre Z, X_{L} e X_{C}.
[*Alternating-Current Circuits* (web.mit.edu)]

Voltando à equação (6), notamos que também podemos reescrevê-la na forma

$$I_2(t) = \frac{\frac{\omega V_0}{L}}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \Gamma^2\omega^2}}\,\text{sen}\left(\omega t - \delta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\frac{\omega V_0}{L}}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \Gamma^2\omega^2}}\ \text{sen}\,(\omega t - \phi),$$

onde $\phi = \delta - \frac{\pi}{2}$, e portanto $\text{tg}\phi = -\frac{1}{\text{tg}\delta} = -\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega\Gamma} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega\Gamma} = \frac{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R}$.

Então notamos que há um defasamento entre a voltagem [$V(t) = V_0$ sen ωt] aplicada ao circuito e a corrente $I_2(t)$ (resposta estacionária) nele produzida e esta diferença de fase ϕ, dada por

$$\text{tg}\phi = \frac{(X_L - X_C)}{R},$$

depende da resistência e das reatâncias indutiva e capacitiva do circuito.

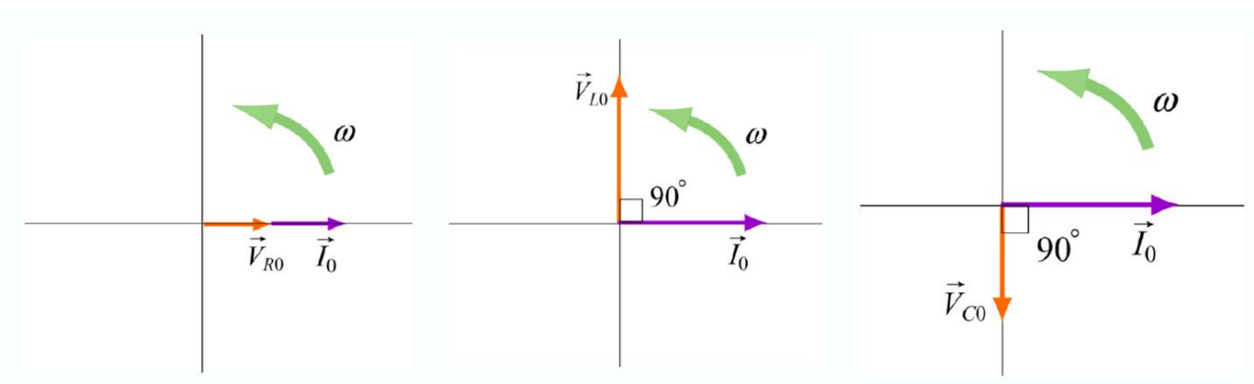


Diagrama fasorial para a relação entre corrente e voltagem no resistor, indutor e capacitor de um circuito RLC série.
[*Alternating-Current Circuits* (web.mit.edu)]

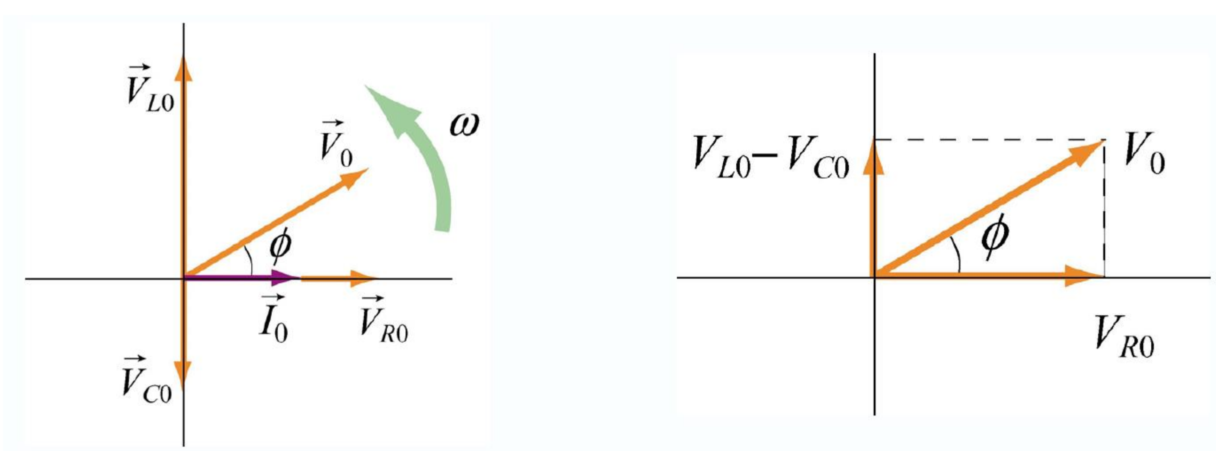
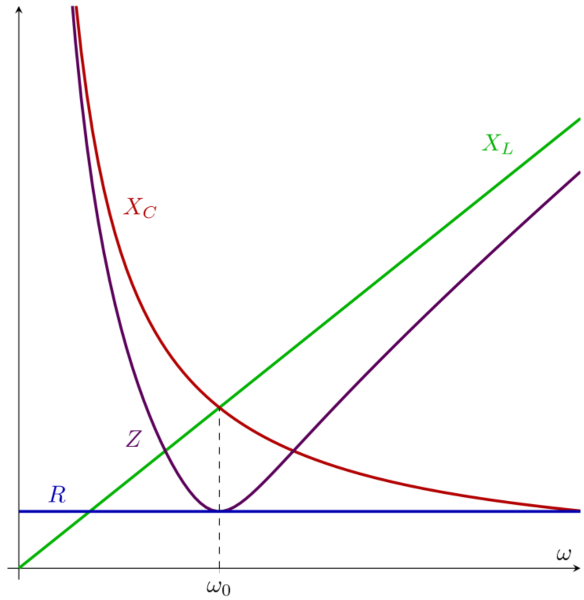
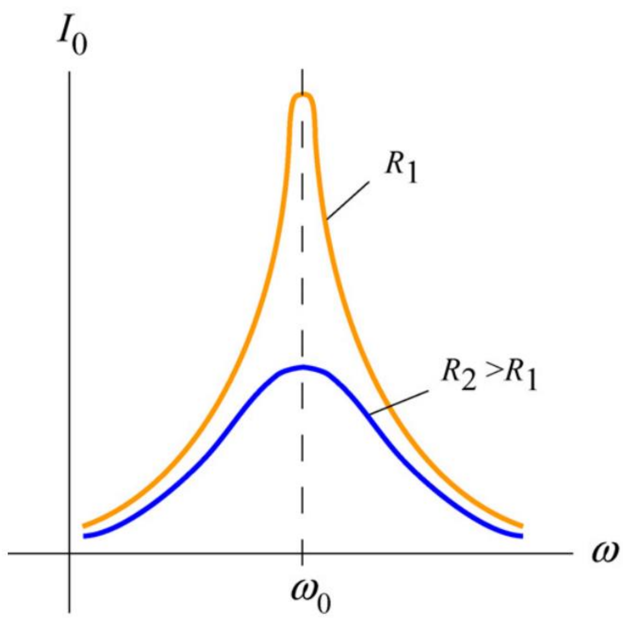


Diagrama fasorial para um circuito RLC série.
[*Alternating-Current Circuits* (web.mit.edu)]

Note que se o circuito for mais indutivo que capacitivo ($X_L > X_C$), a corrente $I_2(t)$ estará atrasada em relação à voltagem $V(t)$, e inversamente, estará adiantada em relação à voltagem se o circuito for mais capacitivo que indutivo ($X_L < X_C$). Qual será o defasamento entre $I_2(t)$ e $V(t)$ na condição de ressonância?



Dependência da impedância e das reatâncias (indutiva e capacitiva) com a frequência angular num circuito RLC série, excitado por uma força eletromotriz harmônica (*Series RLC circuit impedance* (2019–Subjektivisti) (commons.wikimedia.org)).



Curvas de ressonância para um circuito RLC série, sob diferentes graus de amortecimento [*The amplitude of the current as a function of ω in the driven RLC circuit* (web.mit.edu)].

A largura da curva de ressonância é claramente dependente do fator de amortecimento Γ. É comum quantificar esta largura considerando os pontos meia altura, isto é os valores de ω para os quais $1 / Z(\omega)$ é igual à metade de seu valor máximo. Pode-se mostrar facilmente que estes valores são dados por

$$\omega = \omega_{(+)} = \omega_0\left(\sqrt{1+\frac{3}{4}\frac{\Gamma^2}{\omega_0^2}}+\sqrt{\frac{3}{4}}\frac{\Gamma}{\omega_0}\right) \quad \text{e} \quad \omega = \omega_{(-)} = \omega_0\left(\sqrt{1+\frac{3}{4}\frac{\Gamma^2}{\omega_0^2}}-\sqrt{\frac{3}{4}}\frac{\Gamma}{\omega_0}\right). \qquad (11)$$

Uma medida quantitativa da “definição (clareza) de sintonização” da curva de ressonância (isto é, do quão pronunciado é o pico de ressonância) é dada pelo quociente entre a frequência de ressonância ω_0 e a “largura a meia altura” é $\Delta\omega = \omega_{(+)} - \omega_{(-)}$. No caso de amortecimento fraco ($\Gamma/\omega_0 << 1$), obtém-se através de (11), que este quociente é dado aproximadamente por $(1/\sqrt{3})$ (ω_0 / Γ). Então observamos que uma medida da clareza de sintonização do circuito é dada pelo fator de qualidade Q = (ω_0 / Γ), que fora definido anteriormente, no contexto de oscilações livres, como uma medida da capacidade de um sistema oscilante em manter sua energia armazenada, a despeito da presença do amortecimento.

É conveniente expressar a resposta estacionária em termos das grandezas adimensionais $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ (“frequência reduzida”) e Q:

$$\frac{I_0(\omega)}{V_0/R} = \frac{R}{Z(\omega)} = \frac{x}{\sqrt{Q^2(x^2-1)^2+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+1}} \qquad (12)$$

Observe que $I_r = V_0/R$ é o valor da amplitude da corrente estacionária $I_2(t)$ na condição de ressonância (isto é, para x = 1). Então a relação (12) nos permite expressar a curva de ressonância em termos da dependência corrente “reduzida” $I(x)$ $\left(= \frac{I_0(\omega)}{I_r} = \frac{I_0(\omega)}{V_0/R}\right)$ versus frequência “reduzida” x.

APÊNDICE – Resposta Estacionária – Solução Mediante Representação Complexa

Voltemos à equação (4):

$$\frac{d^2I(t)}{dt^2} + \Gamma\frac{dI(t)}{dt} + \omega_0^2 I(t) = \frac{\omega V_0}{L}\cos\omega t.$$

Na forma complexa ela pode ser colocada na forma

$$\frac{d^2I(t)}{dt^2} + \Gamma\frac{dI(t)}{dt} + \omega_0^2 I(t) = \frac{\omega V_0}{L}e^{i\omega t}. \qquad (4a)$$

Propondo uma solução (estacionária) na forma $I_2(t) = A\,e^{i\omega t}$, onde A é uma grandeza complexa, obtemos, substituindo $I_2(t)$ para $I(t)$ em (4a):

$$\left(-\omega^2 A\,e^{i\omega t}\right) + \Gamma\left(i\omega A\,e^{i\omega t}\right) + \omega_0^2\left(A\,e^{i\omega t}\right) = \frac{\omega V_0}{L}e^{i\omega t} \quad \text{ou}$$

$$(-\omega^2 + i\omega\Gamma + \omega_0^2)\,A\,e^{i\omega t} = \frac{\omega V_0}{L}e^{i\omega t},$$

o que nos leva a

$$A = \frac{\frac{\omega V_0}{L}}{\left(-\omega^2+i\omega\Gamma+\omega_0^2\right)} = \frac{\frac{\omega V_0}{L}\left(\omega_0^2-\omega^2-i\omega\Gamma\right)}{\left[\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\Gamma^2\omega^2\right]} = \frac{\frac{\omega V_0}{L}\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\Gamma^2\omega^2}\,e^{-i\delta}}{\left[\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\Gamma^2\omega^2\right]} = \frac{\left(\frac{\omega V_0}{L}\right)e^{-i\delta}}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\Gamma^2\omega^2}},$$

onde $\mathrm{tg}\delta = \frac{\omega\Gamma}{\omega_0^2-\omega^2}$.

(Note que fizemos uso da identidade $a + ib = \sqrt{a^2 + b^2}\,e^{i\phi}$, onde $\mathrm{tg}\phi = \frac{b}{a}$).

Então $I_2(t) = A\,e^{i\omega t} = \frac{\left(\frac{\omega V_0}{L}\right)e^{-i\delta}}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\Gamma^2\omega^2}}\;e^{i\omega t} = \frac{\left(\frac{\omega V_0}{L}\right)}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\Gamma^2\omega^2}}\;e^{i(\omega t-\delta)}$,

cuja parte real é

$$\mathrm{Re}\,\{I_2(t)\} = \frac{\frac{\omega V_0}{L}}{\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\Gamma^2\omega^2}}\;\cos\,(\omega t-\delta).$$

Note também que a relação $A = \frac{\frac{\omega V_0}{L}}{(-\omega^2 + i\omega\Gamma + \omega_0^2)}$ pode ser colocada na forma $A = \frac{V_0}{\left(-\omega L + i\Gamma L + \frac{L\omega_0^2}{\omega}\right)} = \frac{-iV_0}{\left[R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]}$, onde fizemos uso de $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ e $\Gamma = \frac{R}{L}$.

Então $A = \frac{-iV_0}{\left[R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]}$ e $I_2(t) = \frac{-iV_0}{\left[R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]}\ e^{i\omega t}$.

Notando que $-iV_0 e^{i\omega t} = V_0 \mathrm{sen}\ \omega t$ (para V_0 real) faz sentido definir a grandeza

$$Z(\omega) = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

como a impedância complexa do circuito RLC série.

Prof. Djalma Nardy Domingues
Março de 2024