Problema ⋆2

Teoria Eletromagnética I

Gabriel F. Costa - 19.1.4047

Problema ⋆2:

A lei da gravitação universal formulada por Newton propõe que o campo gravitacional de uma massa puntifome decai com o inverso do quadrado da distância, assim como o campo elétrico de uma carga puntiforme. De modo análogo, a forma diferencial da "lei de Gauss"para o campo gravitacional g é escrita como $\nabla \cdot g(r) = -4\pi G\rho(r)$, onde G é a constante da gravitação e $\rho(r)$ é a densidade de massa.

a. Mostre que a forma integral é dada por $\int g \cdot da = -4\pi G m_{int}$ onde $m_{int} = \int \rho(r) d\tau$ é a massa no interior da "gaussiana".

Agora, considere que a distribuição de massa da Terra é esfericamente simétrica e dada por ***(i)*** $\rho(r) = \rho_0$ para $0 \le r \le 0.55R$, ***(ii)*** $\rho(r) = \frac{\rho_1}{r}$ para $0.55R \le r \le R$, e ***(iii)*** $\rho(r) = 0$ para $R \le r$.

b. Sendo a massa da Terra M e o raio R, determine as constantes ρ_0 e ρ_1 sabendo que a distribuição de massa varia de modo contínuo entre as duas regiões.

c. Usando a "lei de Gauss"gravitacional, determine o campo gravitacional $g(r)$ em todas regiões.

Atenção: Você deve discutir a simetria do problema para justificar a forma que g(r) deve ter de modo a permitir o desenvolvimento que leva de $\int g(r) \cdot da$ para $|g(r)| \times 4\pi r^2$.

d. Esboce um gráfico de $|g(r)|$ em função de r, marcando sobre os eixos os valores de $|g(r)|$ para os valores $r = 0.55R$ e R.

e. Compare este perfil do campo gravitacional com aquele previsto por modelos mais detalhados para a distribuição de massa da Terra, como o modelo de referência preliminar da Terra.

a. Pela forma diferencial da lei de Gauss para o campo gravitacional:

$$\nabla \cdot g(r) = -4\pi G\rho(r)$$

Aplicando o teorema da divergência, temos:

$$\int_V \nabla \cdot g(r) d\tau = \int_S g(r) \cdot da$$

onde V é o volume delimitado pela superfície S, e $d\tau$ é o elemento de volume. Substituindo a forma diferencial da lei de Gauss na equação acima, temos:

$$\int_V -4\pi G\rho(r) d\tau = \int_S g(r) \cdot da.$$

Note que a integral à esquerda é a massa total m contida no volume V. Podemos definir um volume V com superfície S e calcular a massa total contida dentro deste volume como $M = \int_V \rho(r) d\tau$, substituindo, temos:

$$\int_S g(r) \cdot da = -4\pi GM.$$

No entanto, essa equação nos dá a contribuição total da massa contida no volume V. Para obter a contribuição apenas da massa contida no interior da "gaussiana". Podemos dividir o volume V em duas regiões: uma região que contém a "gaussiana"V_{int}, e outra região que contém o resto do volume V_{ext}. Podemos então escrever a massa total m como:

$$M = m_{int} + m_{ext}$$

onde m_{int} é a massa no interior da "gaussiana", e m_{ext} é a massa no exterior. Como a contribuição do campo gravitacional na superfície S é afetada apenas pela massa contida dentro da "gaussiana", podemos escrever:

$$\int_S g(r) \cdot da = -4\pi G m_{int}$$

b.

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0, & 0 \le r \le 0.55R \\ \frac{\rho_1}{r}, & 0.55R \le r \le R \\ 0, & R \le r \end{cases}$$

A massa total M da Terra é dada pela integral da densidade de massa sobre todo o volume da Terra:

$$M = \int_0^R \rho(r) 4\pi r^2 dr.$$

Usando a definição de $\rho(r)$, podemos dividir essa integral em duas partes:

$$M = \int_0^{0,55R} \rho_0 4\pi r^2 dr + \int_{0,55R}^{R} \frac{\rho_1}{r} 4\pi r^2 dr.$$

$$= \frac{4}{3}\pi\rho_0 \left[\frac{r^3}{3}\right]\Bigg|_0^{0.55R} + 4\pi\rho_1 \left[\frac{r^2}{2}\right]\Bigg|_{0.55R}^{R}$$

$$= \frac{4}{3}\pi\rho_0 (0.55R)^3 + 4\pi\rho_1 \left(\frac{R^2}{2} - \frac{(0.55)^2}{2}\right)$$

Como conhecemos os valores de M e R, podemos resolver para as constantes ρ_0 e ρ_1:

$$\rho_0 = \frac{3M}{4\pi(0.55R)^3}$$

$$\rho_1 = \frac{M}{2\pi(0.6975R^2)}$$

c. Para determinar o campo gravitacional $g(r)$ em todas as regiões, usaremos a "lei de Gauss"gravitacional dada por $\nabla \cdot g(r) = -4\pi G\rho(r)$. Como a distribuição de massa da Terra é esfericamente simétrica, podemos assumir que o campo gravitacional $g(r)$ também é esfericamente simétrico, ou seja, depende apenas da distância do centro da Terra, r. Portanto, podemos escrever $g(r) = |g(r)|\hat{r}$, onde $\hat{r}$ é o vetor unitário na direção radial.

Usando o teorema da divergência, podemos escrever $\int g(r) \cdot da = \int (\hat{r} \cdot g(r)) da = \int (\hat{r} \cdot g(r)) r^2 sin\theta d\theta d\phi dr$. Como $g(r)$ é esfericamente simétrico, podemos escrever $\hat{r} \cdot g(r) = |g(r)|$ e, portanto,

$$\int g(r) \cdot da = \int |g(r)| r^2 sin\theta d\theta d\phi dr$$

. Pela "lei de Gauss", $\nabla \cdot g(r) = -4\pi G\rho(r)$, temos que $\frac{d}{dr}(r^2|g(r)|) = -4\pi G\rho(r) r^2$, e integrando esta equação duas vezes, obtemos:

$$|g(r)| = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi G\rho_0 r & 0 \le r \le 0.55R \\ \frac{4}{3}\pi G \frac{\rho_1 R^3}{r^2} & 0,55R \le r \le R \\ 0 & R \le r \end{cases}$$

Portanto, o campo gravitacional $g(r)$ em todas as regiões é dado por

$$g(r) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi G\rho_0 r\hat{r} & 0 \le r \le 0.55R \\ -\frac{4}{3}\pi G \frac{\rho_1 R^3}{r^2}\hat{r} & 0,55R \le r \le R \\ 0 & R \le r \end{cases}$$

Observe que na região $0.55R \le r \le R$, o campo gravitacional aponta para dentro em direção ao centro da Terra, oposto à direção do vetor unitário radial $\hat{r}$. Portanto, usamos o sinal negativo na expressão para $|g(r)|$ para indicar essa direção.

d.

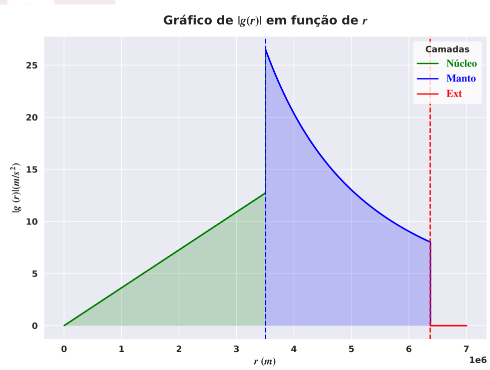

Figura 1: Gráfico de $g(r)$

e. O perfil do campo gravitacional calculado a partir desse modelo simplificado não é idêntico ao perfil obtido por modelos mais detalhados, como o modelo de referência preliminar da Terra.

No modelo simplificado, assumimos uma distribuição de massa esfericamente simétrica dividida em duas regiões com densidades diferentes. Usando a lei de Gauss gravitacional, calculamos o campo gravitacional levando em conta apenas a massa dentro de uma "gaussiana". Esse modelo nos dá uma estimativa aproximada do campo gravitacional em diferentes regiões, mas não leva em conta fatores complexos, como variações na densidade em diferentes profundidades, estrutura interna da Terra e rotação.

Por outro lado, modelos mais detalhados, como o modelo de referência preliminar da Terra, consideram informações geofísicas e geodésicas mais precisas para descrever a distribuição de massa. Esses modelos levam em conta camadas com densidades variáveis, levando em consideração a estrutura interna complexa da Terra, incluindo o núcleo, manto e crosta.