Geometria Analítica
Prof. Jahina Fagundes de Assis Hattori
14/04/2025
Lista de Exercícios #2

Gabriel dos Santos Schmitz
(RA: 2487438)

Este documento foi criado usando LaTeX
https://github.com/gabrielzschmitz/uni/tree/main/ga/lista2.

1 Introdução

Irei neste documento debruçar-me-ei sobre a Geometria Analítica desde a noção intuitiva de tratamento geométrico até o produto misto entre vetores. Farei isto baseando-me nos livros *Vetores e Geometria Analítica* [1] e *Geometria Analítica* [2]. Conforme a bibliografia usada no curso Geometria Analítica na UTFPR de Toledo.

2 Tratamento Algébrico

2.1 Vetores no Plano

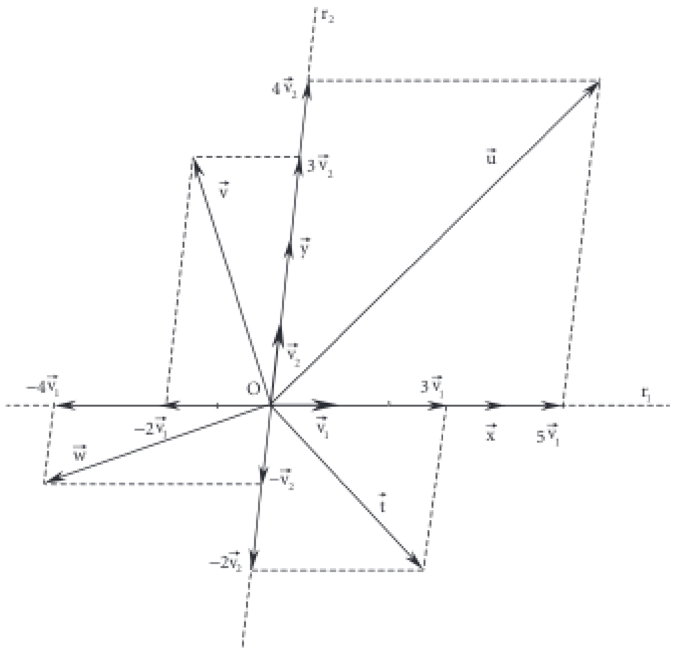

Fig. 1: Vetores expressos em $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$

Na Figura 1, os vetores são combinações lineares de $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$:

$$\begin{cases} \vec{u} = 5\vec{v_1} + 4\vec{v_2} \\ \vec{v} = 2\vec{v_1} - 3\vec{v_2} \\ \vec{w} = -4\vec{v_1} - 3\vec{v_2} \\ \vec{t} = \vec{v_1} + 2\vec{v_2} \\ \vec{x} = 3\vec{v_1} - 2\vec{v_2} \\ \vec{y} = 4\vec{v_2} \end{cases}$$

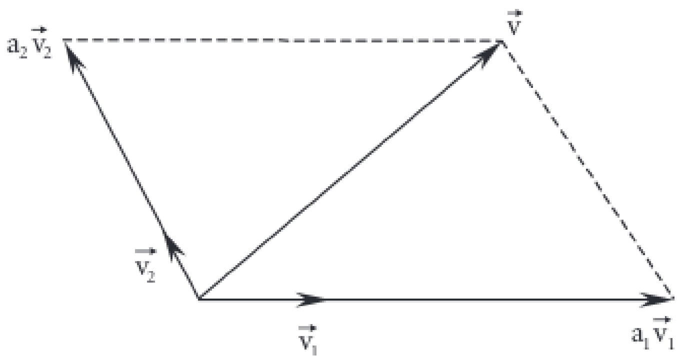

Fig. 2: Representação vetorial no plano

Para quaisquer $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não paralelos (Figura 2), todo vetor $\vec{v}$ do plano pode ser expresso como:

$$\vec{v} = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} \tag{1}$$

O conjunto $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ forma uma base, onde $(a_1, a_2)_\mathcal{B}$ são as coordenadas de $\vec{v}$. Bases ortonormais satisfazem $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ com $\|\vec{e}_i\| = 1$.

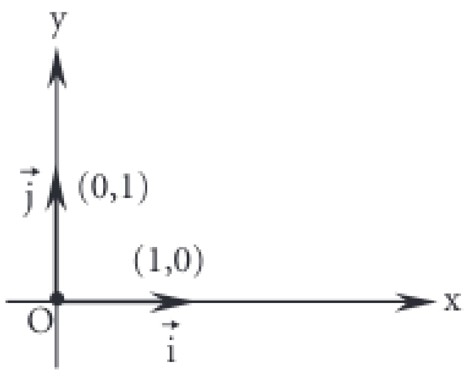

Fig. 3: Base canônica

A base canônica $\mathcal{C} = \{\vec{i} = (1,0), \vec{j} = (0,1)\}$ (Figura 3) permite expressar qualquer vetor como:

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} = (x, y) \tag{2}$$

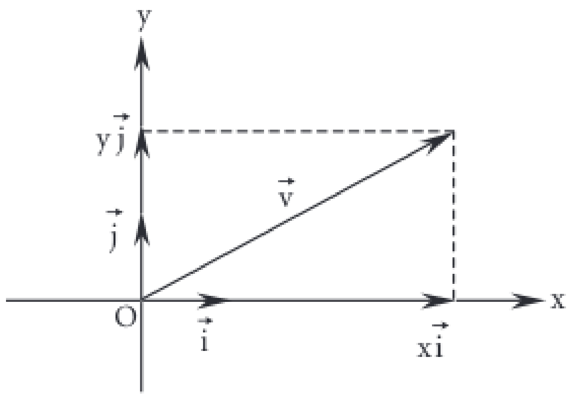

Fig. 4: Vetor no plano cartesiano

Na Figura 4, x é a abscissa e y a ordenada de $\vec{v}$. Exemplos notáveis:

$$\begin{aligned} 3\vec{i} - 5\vec{j} &= (3, -5) \\ 3\vec{j} &= (0, 3) \\ -4\vec{i} &= (-4, 0) \\ \vec{0} &= (0, 0) \end{aligned}$$

2.2 Igualdade de Vetores

Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$, escrevendo-se $\vec{u} = \vec{v}$.

Por exemplo: o vetor $\vec{u} = (x + 1, 4)$ é igual ao vetor $\vec{v} = (5, 2y - 6)$ se

$$x + 1 = 5 \quad \text{e} \quad 2y - 6 = 4$$

ou equivalentemente,

$$x = 4 \quad \text{e} \quad y = 5$$

Assim, se $\vec{u} = \vec{v}$, então $x = 4$, $y = 5$ e $\vec{u} = \vec{v} = (5, 4)$.

2.3 Operações com Vetores

Para vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, definem-se:

1. **Adição**: $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
2. **Multiplicação por escalar**: $\alpha\vec{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1)$

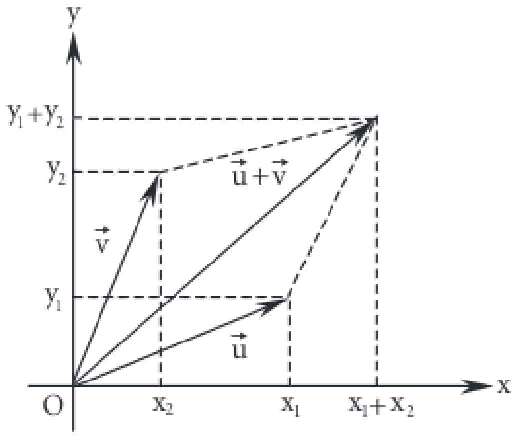

Fig. 5: Adição vetorial

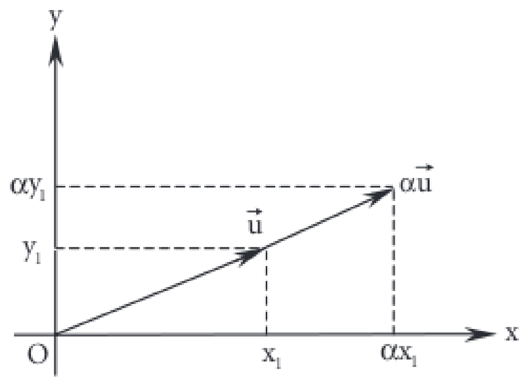

Fig. 6: Multiplicação por escalar

Operações derivadas:

$$-\vec{u} = (-x_1, -y_1)$$
$$\vec{u} - \vec{v} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

Propriedades:

a) Álgebra vetorial:

- Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- Elemento neutro: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
- Inverso aditivo: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

b) Propriedades mistas:

- $\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$
- $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$
- $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$
- Identidade: $1\vec{v} = \vec{v}$

1. Demonstre todas as propriedades listadas.

Álgebra vetorial:

(a) Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

Resposta:
A adição de vetores é definida componente a componente. Como a adição de números reais é comutativa, temos:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n) = (v_1 + u_1, v_2 + u_2, \ldots, v_n + u_n) = \vec{v} + \vec{u}.$$

(b) Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

Resposta:
Pela associatividade da adição de números reais:

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n) + (w_1, \ldots, w_n) = (u_1 + v_1 + w_1, \ldots, u_n + v_n + w_n)$$
$$= (u_1 + (v_1 + w_1), \ldots, u_n + (v_n + w_n)) = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}).$$

(c) Elemento neutro: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

Resposta:
O vetor nulo $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ satisfaz:

$$\vec{u} + \vec{0} = (u_1 + 0, u_2 + 0, \ldots, u_n + 0) = (u_1, u_2, \ldots, u_n) = \vec{u}.$$

(d) Inverso aditivo: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

Resposta:
O inverso aditivo $-\vec{u} = (-u_1, -u_2, \ldots, -u_n)$ satisfaz:

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = (u_1 - u_1, u_2 - u_2, \ldots, u_n - u_n) = (0, 0, \ldots, 0) = \vec{0}.$$

Propriedades mistas:

(e) Associatividade escalar: $\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$

Resposta:
A multiplicação escalar é definida componente a componente:

$$\alpha(\beta\vec{v}) = \alpha(\beta v_1, \beta v_2, \ldots, \beta v_n) = (\alpha\beta v_1, \alpha\beta v_2, \ldots, \alpha\beta v_n) = (\alpha\beta)\vec{v}.$$

(f) Distributiva de escalares: $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$

Resposta:
Pela distributividade dos números reais:

$$(\alpha + \beta)\vec{u} = ((\alpha + \beta)u_1, \ldots, (\alpha + \beta)u_n) = (\alpha u_1 + \beta u_1, \ldots, \alpha u_n + \beta u_n) = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}.$$

(g) Distributiva de vetores: $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

Resposta:
Pela distributividade dos números reais:

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha(u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n) = (\alpha u_1 + \alpha v_1, \ldots, \alpha u_n + \alpha v_n) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}.$$

(h) Identidade escalar: $1\vec{v} = \vec{v}$

Resposta:
O número 1 é o elemento neutro da multiplicação:

$$1\vec{v} = (1 \cdot v_1, 1 \cdot v_2, \ldots, 1 \cdot v_n) = (v_1, v_2, \ldots, v_n) = \vec{v}.$$

2.4 Vetor Defnido por Dois Pontos

Dados os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem expressão analítica:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

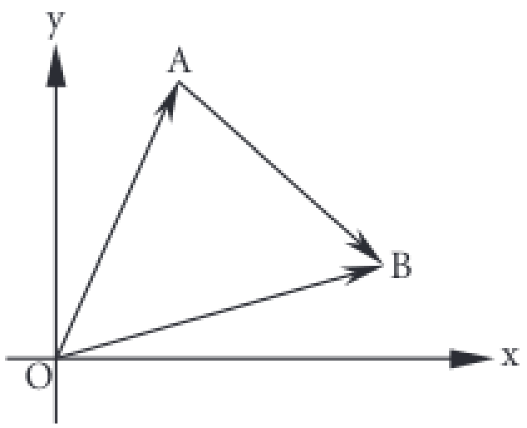

Fig. 7: Vetor $\overrightarrow{AB}$

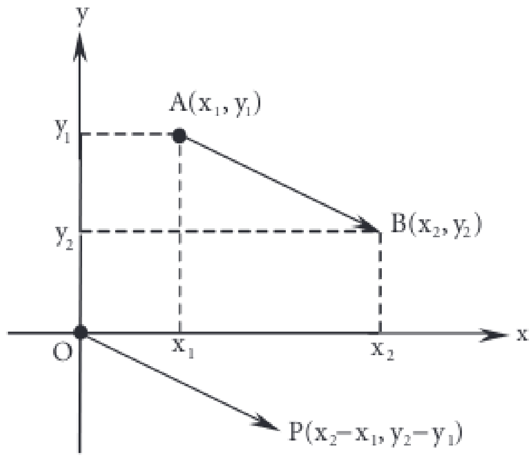

Fig. 8: Representante canônico

O representante canônico $\overrightarrow{OP}$ em $O(0, 0)$ é o vetor posição que melhor caracteriza $\overrightarrow{AB}$.

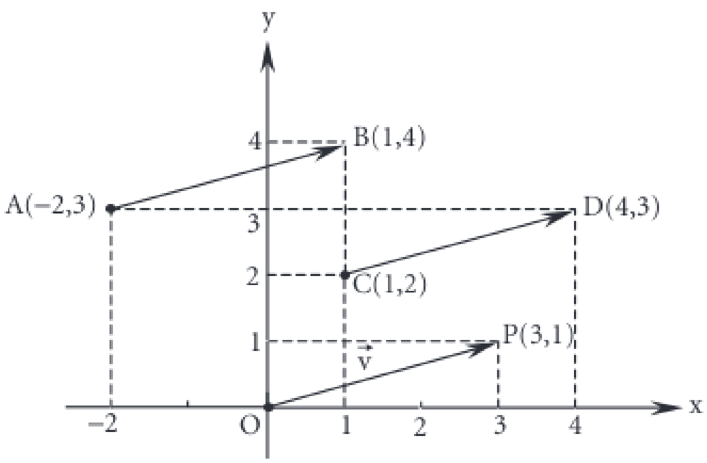

Fig. 9: Equivalência de vetores

Na Figura 9, $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ representam o mesmo vetor $\vec{v} = (3, 1)$, mostrando que a posição é irrelevante - importam apenas magnitude, direção e sentido.

Relações importantes:

- $B = A + \overrightarrow{AB}$

$$\begin{aligned} B &= (-2,3) + (3,1) = (1,4) \\ D &= (1,2) + (3,1) = (4,3) \\ P &= (0,0) + (3,1) = (3,1) \end{aligned}$$

- Para o triângulo na Figura 10:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \overrightarrow{AB} = (1,2) \\ \vec{v} &= \overrightarrow{BC} = (-2,2) \\ \vec{w} &= \overrightarrow{CA} = (1,-4) \\ \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} &= \vec{0} \end{aligned}$$

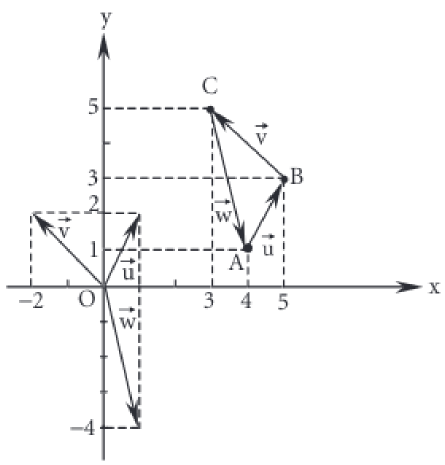

Fig. 10: Vetores em triângulo

References

[1] Paulo Winterle. *Vetores e Geometria Analítica*. 2nd ed. São Paulo: Makron, 2014. ISBN: 9788543002392. URL: `https://books.google.com.br/books?id=UPIyHQAACAAJ`.

[2] Alfredo Steimbruch and Paulo Winterle. *Geometria Analítica*. 2nd ed. São Paulo: Pearson Universidades, 1987. ISBN: 9780074504093. URL: `https://books.google.com.br/books?id=tOLfGwAACAAJ`.