UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Geometria Analítica
Prof. Jahina Fagundes de Assis Hattori
14/04/2025
Lista de Exercícios #2

Gabriel dos Santos Schmitz
(RA: 2487438)

Este documento foi criado usando LaTeX
https://github.com/gabrielzschmitz/uni/tree/main/ga/lista2.

1 Introdução

Irei neste documento debruçar-me-ei sobre a Geometria Analítica desde a noção intuitiva de tratamento geométrico até o produto misto entre vetores. Farei isto baseando-me nos livros *Vetores e Geometria Analítica* [1] e *Geometria Analítica* [2]. Conforme a bibliografia usada no curso Geometria Analítica na UTFPR de Toledo.

2 Tratamento Algébrico

2.1 Vetores no Plano

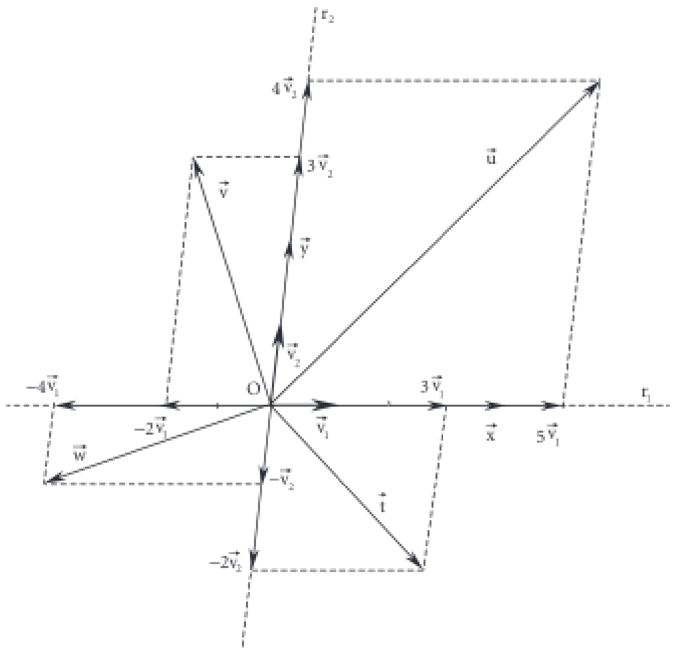

Fig. 1: Vetores expressos em $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$

Na Figura 1, os vetores são combinações lineares de $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$:

$$\begin{cases} \vec{u} = 5\vec{v_1} + 4\vec{v_2} \\ \vec{v} = 2\vec{v_1} - 3\vec{v_2} \\ \vec{w} = -4\vec{v_1} - 3\vec{v_2} \\ \vec{t} = \vec{v_1} + 2\vec{v_2} \\ \vec{x} = 3\vec{v_1} - 2\vec{v_2} \\ \vec{y} = 4\vec{v_2} \end{cases}$$

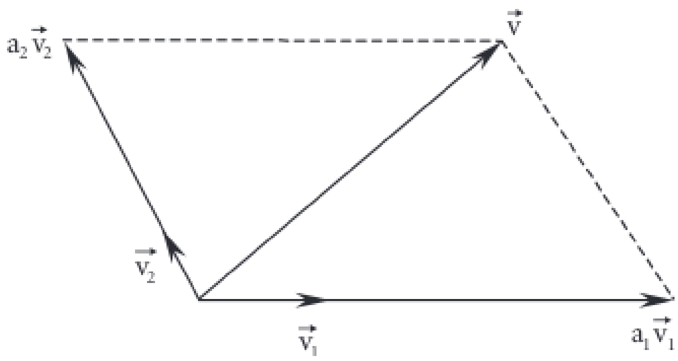

Fig. 2: Representação vetorial no plano

Para quaisquer $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não paralelos (Figura 2), todo vetor $\vec{v}$ do plano pode ser expresso como:

$$\vec{v} = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} \tag{1}$$

O conjunto $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ forma uma base, onde $(a_1, a_2)_\mathcal{B}$ são as coordenadas de $\vec{v}$. Bases ortonormais satisfazem $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ com $\|\vec{e}_i\| = 1$.

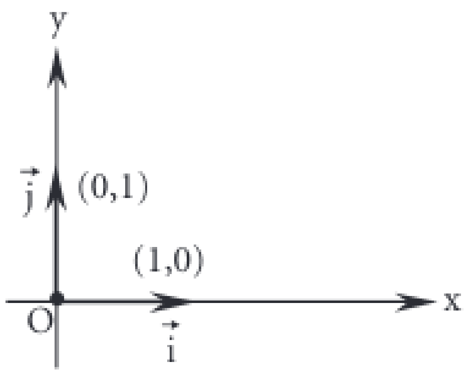

Fig. 3: Base canônica

A base canônica $\mathcal{C} = \{\vec{i} = (1,0), \vec{j} = (0,1)\}$ (Figura 3) permite expressar qualquer vetor como:

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} = (x, y) \tag{2}$$

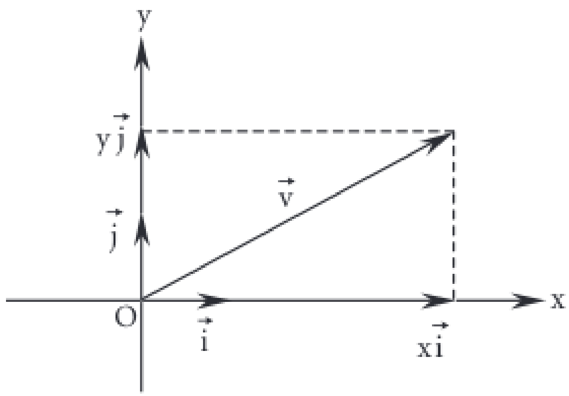

Fig. 4: Vetor no plano cartesiano

Na Figura 4, x é a abscissa e y a ordenada de $\vec{v}$. Exemplos notáveis:

$$\begin{aligned} 3\vec{i} - 5\vec{j} &= (3, -5) \\ 3\vec{j} &= (0, 3) \\ -4\vec{i} &= (-4, 0) \\ \vec{0} &= (0, 0) \end{aligned}$$

2.2 Igualdade de Vetores

Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$, escrevendo-se $\vec{u} = \vec{v}$.

Por exemplo: o vetor $\vec{u} = (x + 1, 4)$ é igual ao vetor $\vec{v} = (5, 2y - 6)$ se

$$x + 1 = 5 \quad \text{e} \quad 2y - 6 = 4$$

ou equivalentemente,

$$x = 4 \quad \text{e} \quad y = 5$$

Assim, se $\vec{u} = \vec{v}$, então $x = 4$, $y = 5$ e $\vec{u} = \vec{v} = (5, 4)$.

2.3 Operações com Vetores

Para vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, definem-se:

1. **Adição**: $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
2. **Multiplicação por escalar**: $\alpha\vec{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1)$

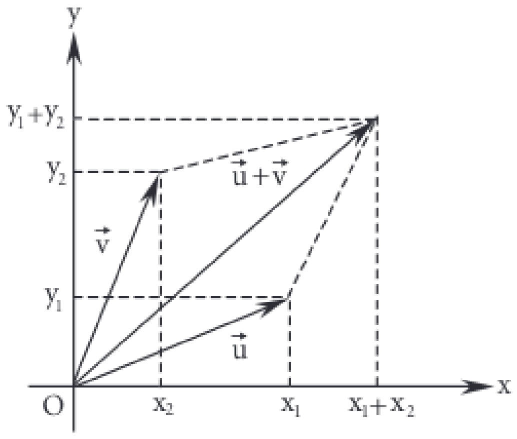

Fig. 5: Adição vetorial

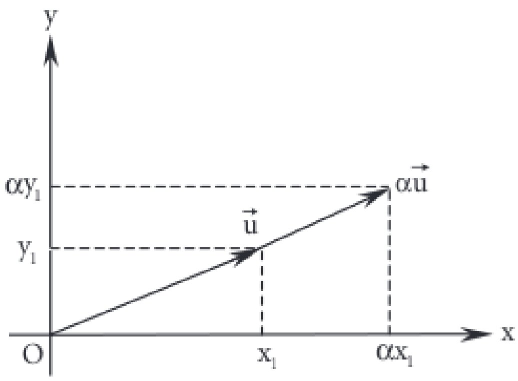

Fig. 6: Multiplicação por escalar

Operações derivadas:

$$-\vec{u} = (-x_1, -y_1)$$
$$\vec{u} - \vec{v} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

Propriedades:

a) Álgebra vetorial:

- Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- Elemento neutro: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
- Inverso aditivo: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

b) Propriedades mistas:

- $\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$
- $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$
- $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$
- Identidade: $1\vec{v} = \vec{v}$

Dedução:
Álgebra vetorial:

(a) Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

Resposta:
A adição de vetores é definida componente a componente. Como a adição de números reais é comutativa, temos:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) = (v_1 + u_1, v_2 + u_2, \dots, v_n + u_n) = \vec{v} + \vec{u}.$$

(b) Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

Resposta:
Pela associatividade da adição de números reais:

$$\begin{aligned}(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} &= (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) + (w_1, \dots, w_n) = (u_1 + v_1 + w_1, \dots, u_n + v_n + w_n) \\ &= (u_1 + (v_1 + w_1), \dots, u_n + (v_n + w_n)) = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}).\end{aligned}$$

(c) Elemento neutro: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

Resposta:
O vetor nulo $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$ satisfaz:

$$\vec{u} + \vec{0} = (u_1 + 0, u_2 + 0, \dots, u_n + 0) = (u_1, u_2, \dots, u_n) = \vec{u}.$$

(d) Inverso aditivo: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

Resposta:
O inverso aditivo $-\vec{u} = (-u_1, -u_2, \dots, -u_n)$ satisfaz:

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = (u_1 - u_1, u_2 - u_2, \dots, u_n - u_n) = (0, 0, \dots, 0) = \vec{0}.$$

Propriedades mistas:

(e) Associatividade escalar: $\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$

Resposta:
A multiplicação escalar é definida componente a componente:

$$\alpha(\beta\vec{v}) = \alpha(\beta v_1, \beta v_2, \dots, \beta v_n) = (\alpha\beta v_1, \alpha\beta v_2, \dots, \alpha\beta v_n) = (\alpha\beta)\vec{v}.$$

(f) Distributiva de escalares: $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$

Resposta:
Pela distributividade dos números reais:

$$(\alpha + \beta)\vec{u} = ((\alpha + \beta)u_1, \dots, (\alpha + \beta)u_n) = (\alpha u_1 + \beta u_1, \dots, \alpha u_n + \beta u_n) = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}.$$

(g) Distributiva de vetores: $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

Resposta:
Pela distributividade dos números reais:

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha(u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) = (\alpha u_1 + \alpha v_1, \dots, \alpha u_n + \alpha v_n) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}.$$

(h) Identidade escalar: $1\vec{v} = \vec{v}$

Resposta:
O número 1 é o elemento neutro da multiplicação:

$$1\vec{v} = (1 \cdot v_1, 1 \cdot v_2, \dots, 1 \cdot v_n) = (v_1, v_2, \dots, v_n) = \vec{v}.$$

2.4 Vetor Defnido por Dois Pontos

Dados os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem expressão analítica:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

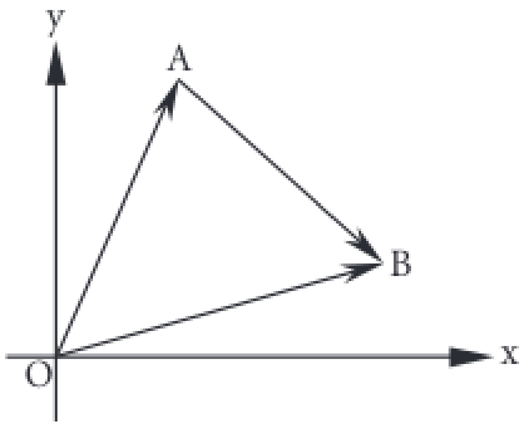

Fig. 7: Vetor $\overrightarrow{AB}$

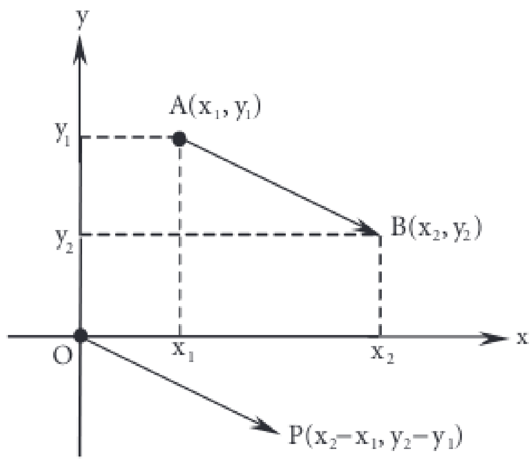

Fig. 8: Representante canônico

O representante canônico $\overrightarrow{OP}$ em $O(0, 0)$ é o vetor posição que melhor caracteriza $\overrightarrow{AB}$.

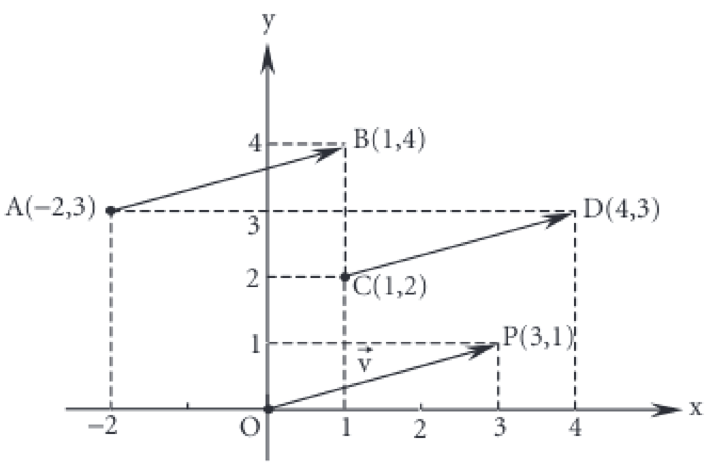

Fig. 9: Equivalência de vetores

Na Figura 9, $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ representam o mesmo vetor $\vec{v} = (3, 1)$, mostrando que a posição é irrelevante - importam apenas magnitude, direção e sentido.

Relações importantes:

- $B = A + \overrightarrow{AB}$

$$\begin{aligned} B &= (-2,3) + (3,1) = (1,4) \\ D &= (1,2) + (3,1) = (4,3) \\ P &= (0,0) + (3,1) = (3,1) \end{aligned}$$

- Para o triângulo na Figura 10:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \overrightarrow{AB} = (1,2) \\ \vec{v} &= \overrightarrow{BC} = (-2,2) \\ \vec{w} &= \overrightarrow{CA} = (1,-4) \\ \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} &= \vec{0} \end{aligned}$$

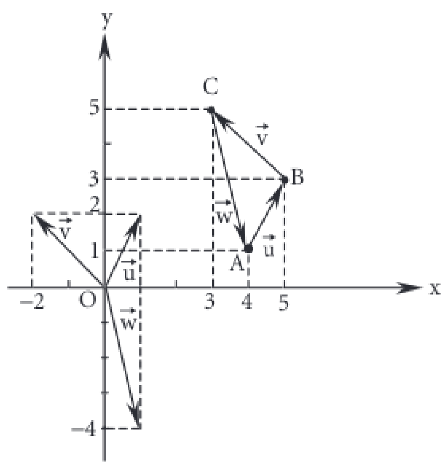

Fig. 10: Vetores em triângulo

2.5 Ponto Médio

Seja o segmento de extremos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ (Figura 11). Sendo $M(x, y)$ o ponto médio de AB, podemos expressar de forma vetorial como:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$$

ou

$$(x - x_1, y - y_1) = (x_2 - x, y_2 - y)$$

então

$$x - x_1 = x_2 - x \quad \text{e} \quad y - y_1 = y_2 - y$$

Resolvendo em relação a x e y, temos:

$$2x = x_1 + x_2 \quad \text{e} \quad 2y = y_1 + y_2$$

ou

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Portanto,

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

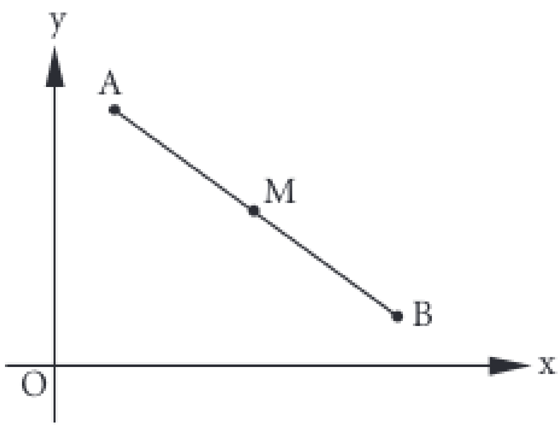

Fig. 11: Ponto médio de um segmento

2.6 Paralelismo de Dois Vetores

Vimos que, se dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são paralelos, existe um número real α tal que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$, ou seja,

$$(x_1, y_1) = \alpha(x_2, y_2)$$

ou

$$(x_1, y_1) = (\alpha x_2, \alpha y_2)$$

que pela condição de igualdade resulta em

$$x_1 = \alpha x_2 \quad \text{e} \quad y_1 = \alpha y_2$$

donde

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \alpha$$

Essa é a condição de paralelismo de dois vetores, ou seja, dois vetores são paralelos quando suas componentes forem proporcionais.

2.7 Módulo de um Vetor

Seja o vetor $\vec{v} = (x, y)$ (Figura 12). Pelo teorema de Pitágoras, vem:

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

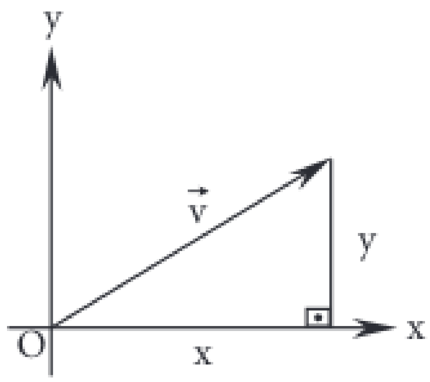

Fig. 12: Módulo de um vetor

Exemplo: Se $\vec{v} = (2, -3)$, então:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \text{ u.c. (unidades de comprimento)}$$

2.8 Distância entre dois pontos

A distância entre dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ (Figura 13) é o comprimento (módulo) do vetor $\overrightarrow{AB}$, isto é:

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}|$$

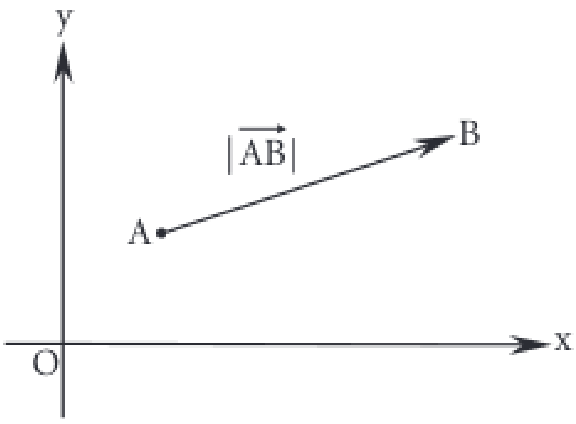

Fig. 13: Distância entre pontos

Como $\overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, temos:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Exemplo: Se $A(1, 2)$ e $B(4, 6)$, então:

$$d(A, B) = \sqrt{(4 - 1)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \text{ unidades}$$

3 Vetores no Espaço

3.1 Base Canônica e Sistema de Coordenadas

A base canônica $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ determina o sistema cartesiano ortogonal $Oxyz$ (Figura 14), onde:

- Eixo Ox (abscissas): vetor $\vec{i} = (1, 0, 0)$
- Eixo Oy (ordenadas): vetor $\vec{j} = (0, 1, 0)$
- Eixo Oz (cotas): vetor $\vec{k} = (0, 0, 1)$

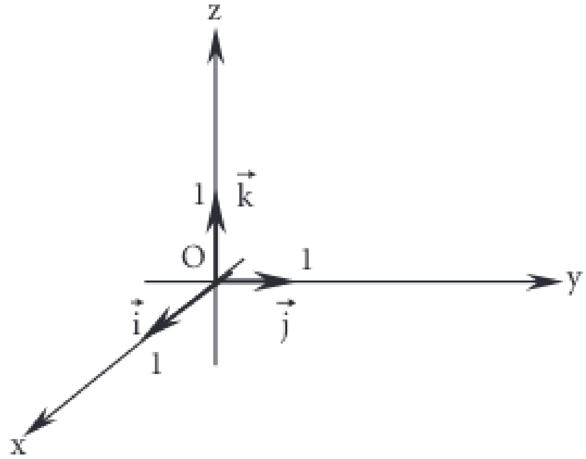

Fig. 14: Sistema de coordenadas no espaço

3.2 Planos Coordenados

Temos três planos coordenados (Figuras 15 e 16):

- Plano xy: $z = 0$
- Plano xz: $y = 0$
- Plano yz: $x = 0$

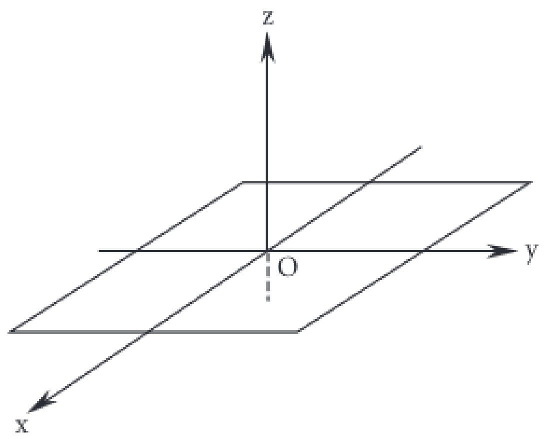

Fig. 15: Plano xy

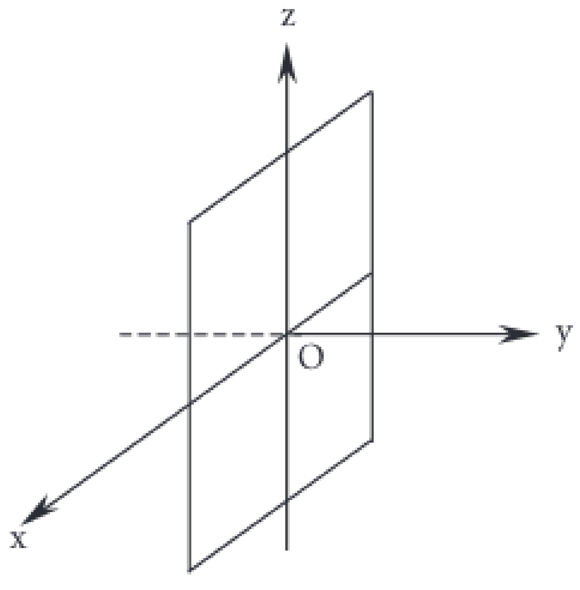

Fig. 16: Plano xz

3.3 Representação de Vetores

Para qualquer ponto $P(x, y, z)$, o vetor posição é:

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z)$$

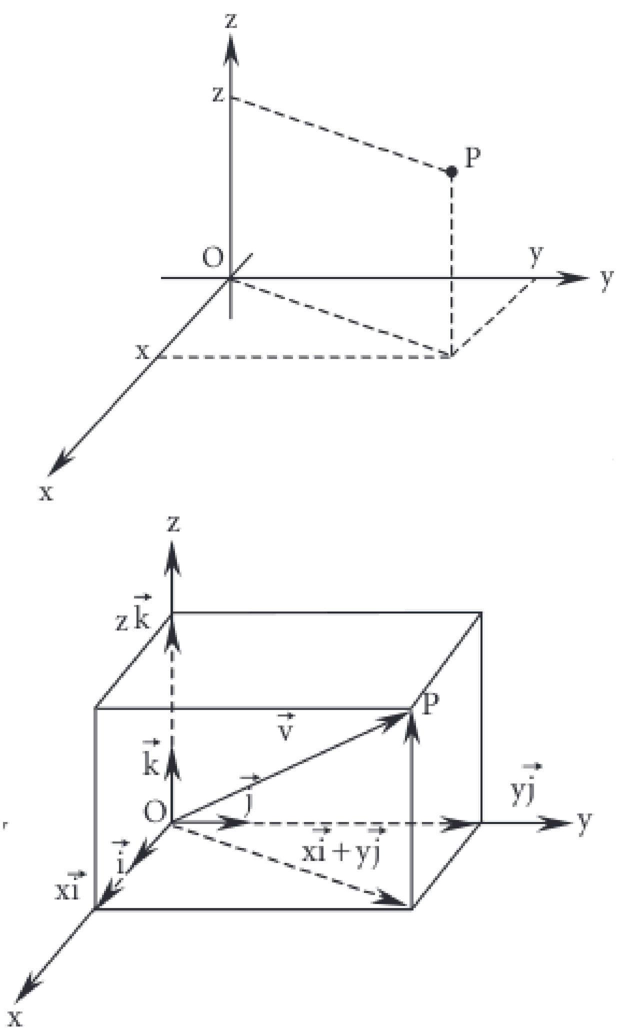

Fig. 17: Paralelepípedo e projeções

3.4 Exemplos e Casos Especiais

- $2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} = (2, -3, 1)$
- $-\vec{j} + 4\vec{k} = (0, -1, 4)$
- Vetores canônicos: $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$

3.5 Localização de Pontos

Para o paralelepípedo com $P(2, 4, 3)$ (Figura 18):

- Eixo x: $A(2, 0, 0)$
- Eixo y: $C(0, 4, 0)$
- Eixo z: $E(0, 0, 3)$
- Plano xy: $B(2, 4, 0)$
- Plano xz: $F(2, 0, 3)$
- Plano yz: $D(0, 4, 3)$

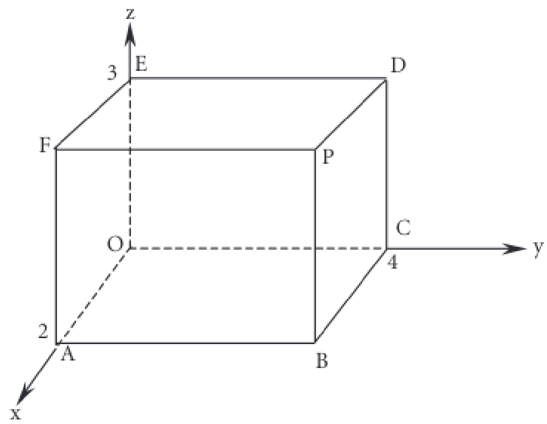

Fig. 18: Paralelepípedo e projeções

3.6 Octantes

O espaço é dividido em 8 octantes (Figura 19):

- $1^{\underline{o}}$ octante: $(+,+,+)$
- $2^{\underline{o}}$ octante: $(-,+,+)$
- $3^{\underline{o}}$ octante: $(-,-,+)$
- $4^{\underline{o}}$ octante: $(+,-,+)$
- $5^{\underline{o}}$ octante: $(+,+,-)$
- $6^{\underline{o}}$ octante: $(-,+,-)$
- $7^{\underline{o}}$ octante: $(-,-,-)$
- $8^{\underline{o}}$ octante: $(+,-,-)$

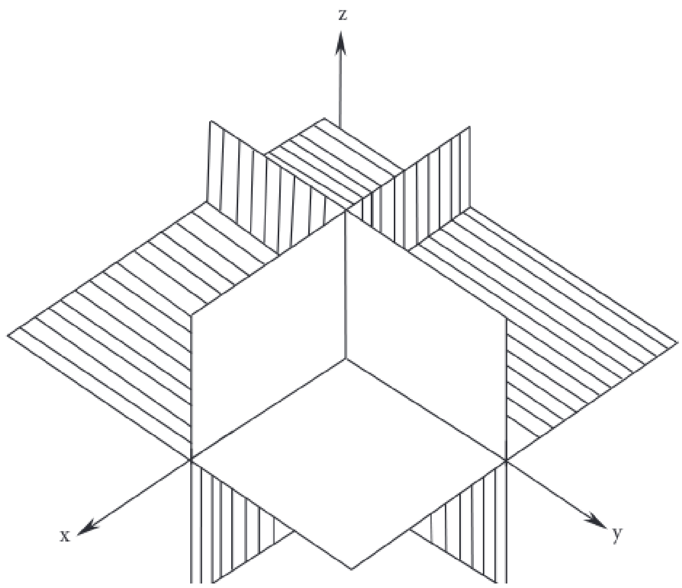

Fig. 19: Octantes do espaço

3.7 Exemplos de Pontos

- Acima do plano xy (cota +2):
  - $A(6, 4, 2)$ - 1º octante
  - $B(-5, 3, 2)$ - 2º octante
  - $C(-6, -5, 2)$ - 3º octante
  - $D(5, -3, 2)$ - 4º octante
- Abaixo do plano xy (cota -2):
  - $A'(6, 4, -2)$ - 5º octante
  - $B'(-5, 3, -2)$ - 6º octante
  - $C'(-6, -5, -2)$ - 7º octante
  - $D'(5, -3, -2)$ - 8º octante

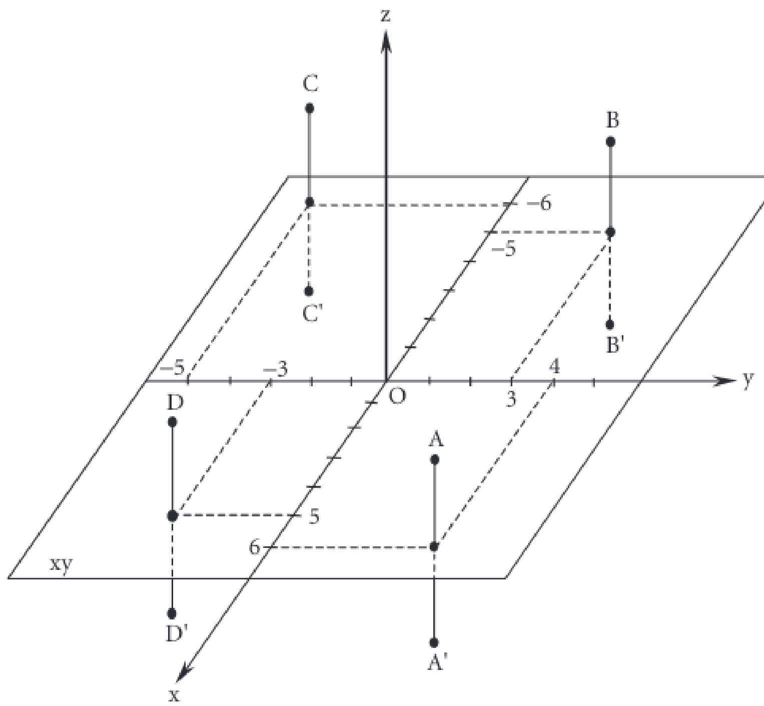

Fig. 20: Pontos em diferentes octantes

3.8 Propriedades dos Vetores no Espaço

As definições e conclusões no espaço são análogas às do plano:

1. **Igualdade de vetores**: Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ são iguais se, e somente se:

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2 \quad \text{e} \quad z_1 = z_2$$

2. **Operações básicas**: Para $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$\alpha\vec{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$$

3. **Vetor definido por dois pontos**: Para $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Se $\vec{v} = B - A$, então $B = A + \vec{v}$ (Figura 21).

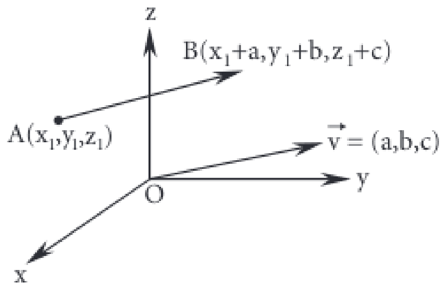

Fig. 21: Soma de ponto com vetor

4. **Ponto médio**: O ponto médio M de AB é:

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

5. **Vetores paralelos**: Se $\vec{u} \parallel \vec{v}$, então:

$$\vec{u} = \alpha\vec{v} \quad \text{ou} \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

6. **Módulo de um vetor**: Para $\vec{v} = (x, y, z)$:

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Dedução: O vetor $\vec{v} = (x, y, z)$ pode ser interpretado como um ponto no espaço tridimensional com coordenadas (x, y, z), partindo da origem $(0, 0, 0)$. O módulo de $\vec{v}$ é a distância da origem até esse ponto.

Utilizando a fórmula da distância euclidiana no $\mathbb{R}^3$, temos:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Portanto, o módulo de $\vec{v}$ é dado por:

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

4 Problemas

1. Dados os vetores $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$ e $\vec{w} = -2\vec{i} + \vec{j}$, determinar:

- **(a)** $2\vec{u} - \vec{v}$

  Resposta:

$$\begin{aligned}
2\vec{u} &= 2(2\vec{i} - 3\vec{j}) = 4\vec{i} - 6\vec{j} \\
2\vec{u} - \vec{v} &= (4\vec{i} - 6\vec{j}) - (\vec{i} - \vec{j}) \\
&= 4\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{i} + \vec{j} \\
&= (4-1)\vec{i} + (-6+1)\vec{j} \\
&= 3\vec{i} - 5\vec{j}
\end{aligned}$$

- **(b)** $\vec{v} - \vec{u} + 2\vec{w}$

  Resposta:

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \vec{i} - \vec{j} \\
-\vec{u} &= -(2\vec{i} - 3\vec{j}) = -2\vec{i} + 3\vec{j} \\
2\vec{w} &= 2(-2\vec{i} + \vec{j}) = -4\vec{i} + 2\vec{j} \\
\vec{v} - \vec{u} + 2\vec{w} &= (\vec{i} - \vec{j}) + (-2\vec{i} + 3\vec{j}) + (-4\vec{i} + 2\vec{j}) \\
&= (\vec{i} - 2\vec{i} - 4\vec{i}) + (-\vec{j} + 3\vec{j} + 2\vec{j}) \\
&= -5\vec{i} + 4\vec{j}
\end{aligned}$$

- **(c)** $\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v} - \vec{w}$

  Resposta:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\vec{u} &= \frac{1}{2}(2\vec{i} - 3\vec{j}) = \vec{i} - \frac{3}{2}\vec{j} \\
-2\vec{v} &= -2(\vec{i} - \vec{j}) = -2\vec{i} + 2\vec{j} \\
-\vec{w} &= -(-2\vec{i} + \vec{j}) = 2\vec{i} - \vec{j} \\
\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v} - \vec{w} &= (\vec{i} - \frac{3}{2}\vec{j}) + (-2\vec{i} + 2\vec{j}) + (2\vec{i} - \vec{j}) \\
&= (\vec{i} - 2\vec{i} + 2\vec{i}) + \left(-\frac{3}{2}\vec{j} + 2\vec{j} - \vec{j}\right) \\
&= \vec{i} + \left(-\frac{3}{2} + 2 - 1\right)\vec{j} \\
&= \vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}
\end{aligned}$$

- **(d)** $3\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w}$

  Resposta:

$$\begin{aligned}
3\vec{u} &= 3(2\vec{i} - 3\vec{j}) = 6\vec{i} - 9\vec{j} \\
\frac{1}{2}\vec{v} &= \frac{1}{2}(\vec{i} - \vec{j}) = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} \\
\frac{1}{2}\vec{w} &= \frac{1}{2}(-2\vec{i} + \vec{j}) = -\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} \\
3\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w} &= (6\vec{i} - 9\vec{j}) - \left(\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}\right) - \left(-\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right) \\
&= \left(6 - \frac{1}{2} + 1\right)\vec{i} + \left(-9 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\vec{j} \\
&= \frac{11}{2}\vec{i} - 9\vec{j}
\end{aligned}$$

References

[1] Paulo Winterle. *Vetores e Geometria Analítica*. 2nd ed. São Paulo: Makron, 2014. ISBN: 9788543002392. URL: `https://books.google.com.br/books?id=UPIyHQAACAAJ`.

[2] Alfredo Steimbruch and Paulo Winterle. *Geometria Analítica*. 2nd ed. São Paulo: Pearson Universidades, 1987. ISBN: 9780074504093. URL: `https://books.google.com.br/books?id=tOLfGwAACAAJ`.