UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Geometria Analítica
Prof. Jahina Fagundes de Assis Hattori
21/04/2025
Lista de Exercícios #4

Gabriel dos Santos Schmitz
(RA: 2487438)

Este documento foi criado usando LaTeX
https://github.com/gabrielzschmitz/uni/tree/main/ga/lista4.

1 Introdução

Irei neste documento debruçar-me-ei sobre a Geometria Analítica desde a noção intuitiva de tratamento geométrico até o produto misto entre vetores. Farei isto baseando-me nos livros *Vetores e Geometria Analítica* [1] e *Geometria Analítica* [2]. Conforme a bibliografia usada no curso Geometria Analítica na UTFPR de Toledo.

2 Produto Vetorial

2.1 Preliminares

Antes de definirmos o produto vetorial de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, faremos algumas considerações importantes:

a) O **produto vetorial** é um **vetor**, ao contrário do produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$, que é um escalar (número real).

b) Para simplicidade de cálculo do produto vetorial, faremos uso de **determinantes**. Um determinante de ordem 2 é definido como:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1$$

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = (3)(5) - (-2)(-4) = 15 - 8 = 7$$

c) Algumas propriedades dos determinantes serão utilizadas nesta seção:

c.1) **Permutação de linhas**: A troca de duas linhas inverte o sinal do determinante.
Exemplo:

$$\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (-4)(-2) - (3)(5) = 8 - 15 = -7$$

c.2) **Linhas proporcionais**: Se duas linhas forem constituídas de elementos proporcionais, o determinante é zero.
Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = (1)(6) - (3)(2) = 6 - 6 = 0$$

c.3) **Linha nula**: Se uma das linhas for constituída de zeros, o determinante é zero.
Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (5)(0) - (0)(7) = 0 - 0 = 0$$

d) Um determinante de ordem 3 pode ser calculado pelo **Teorema de Laplace**:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Exemplo:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= 3\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3(6-5) - 2(2+10) - 4(1+6) \\ &= 3(1) - 2(12) - 4(7) \\ &= 3 - 24 - 28 = -49 \end{aligned}$$

Observação: O cálculo de determinantes de ordem 3 será fundamental para a definição do produto vetorial na próxima seção. O método apresentado (Laplace) desenvolve o determinante pela primeira linha, alternando os sinais começando por positivo.

2.2 Definição do Produto Vetorial

Chama-se **produto vetorial** de dois vetores $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, tomados nessa ordem, e se representa por $\vec{u} \times \vec{v}$, ao vetor:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k} \tag{1}$$

O produto vetorial de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ também é indicado por $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e lê-se "$\vec{u}$ vetorial $\vec{v}$".

Notação Determinantal

A definição de $\vec{u} \times \vec{v}$ dada em (1) pode ser obtida do desenvolvimento segundo o Teorema de Laplace substituindo-se a primeira linha pelos vetores unitários:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \tag{2}$$

> **Observação**: O símbolo à direita de (2) não é um determinante verdadeiro, pois a primeira linha contém vetores. No entanto, esta notação mnemônica é amplamente utilizada por sua praticidade no cálculo do produto vetorial.

Exemplo de Cálculo

Calcular $\vec{u} \times \vec{v}$ para $\vec{u} = 5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} + \vec{k}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(4 \cdot 1 - 3 \cdot 0) - \vec{j}(5 \cdot 1 - 3 \cdot 1) + \vec{k}(5 \cdot 0 - 4 \cdot 1)$$

$$= 4\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$$

Portanto:

$$\vec{u} \times \vec{v} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$$

2.3 Dispositivo Prático para o Cálculo de $\vec{u} \times \vec{v}$

Método Mnemônico

Para calcular o produto vetorial de forma prática:

1. Escreva os componentes dos vetores em duas linhas
2. Repita as duas primeiras colunas à direita
3. Calcule três determinantes 2×2 conforme indicado

$$\begin{array}{cccccc} & \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ \vec{u} & 5 & 4 & 3 & 5 & 4 \\ \vec{v} & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Os componentes do produto vetorial são dados por:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (4 \cdot 1 - 3 \cdot 0)\vec{i} - (5 \cdot 1 - 3 \cdot 1)\vec{j} + (5 \cdot 0 - 4 \cdot 1)\vec{k} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$$

Propriedades Fundamentais

1. **Anti-comutatividade**:
$$\vec{v} \times \vec{u} = -(\vec{u} \times \vec{v}) \tag{3}$$
O produto vetorial não é comutativo (ao contrário do produto escalar).

2. **Vetores Paralelos**:
$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u} \parallel \vec{v} \tag{4}$$
Casos particulares:
   - $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$
   - $\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0}$

Exemplos de Produto Vetorial Nulo

- $3\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$
- $2\vec{u} \times (-7\vec{u}) = \vec{0}$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \times (2\vec{u} + 3\vec{v}) = \vec{0}$ se $\vec{u} \parallel \vec{v}$
- $5\vec{u} \times \vec{0} = \vec{0}$

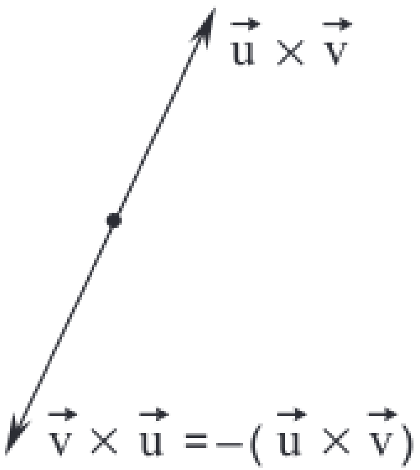


Fig. 1: Ilustração da anti-comutatividade do produto vetorial

Definição Geométrica

Para vetores não nulos e não paralelos $\vec{u}$ e $\vec{v}$, o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é completamente caracterizado por:

- **Direção**: Perpendicular ao plano formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$
- **Sentido**: Regra da mão direita
- **Módulo**: $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin\theta$

2.4 Características do Vetor $\vec{u} \times \vec{v}$

Consideremos os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$.

Direção do Vetor $\vec{u} \times \vec{v}$

O vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Para demonstrar:

$$\begin{aligned}(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_1 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} y_1 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_1 \\ &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(linhas repetidas)}\end{aligned}$$

Analogamente, demonstra-se que $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$.

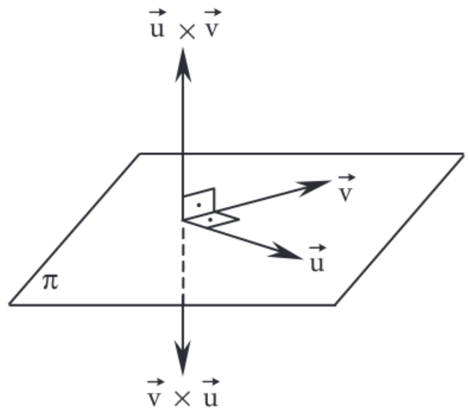


Fig. 2: Ortogonalidade do produto vetorial em relação aos vetores originais

Propriedades Geométricas

- O vetor $\vec{v} \times \vec{u} = -(\vec{u} \times \vec{v})$ tem a mesma direção mas sentido oposto
- Ambos são ortogonais ao plano π determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$
- A direção segue a **regra da mão direita**:
  1. Posicione a mão direita com os dedos apontando na direção de $\vec{u}$
  2. Dobre os dedos na direção de $\vec{v}$
  3. O polegar estendido aponta na direção de $\vec{u} \times \vec{v}$

Interpretação Geométrica

O produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ define um vetor perpendicular ao plano que contém $\vec{u}$ e $\vec{v}$, com sentido determinado pela regra da mão direita e magnitude igual à área do paralelogramo formado pelos vetores.

Comprimento do Vetor $\vec{u} \times \vec{v}$

Se θ é o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos, então:

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin\theta \tag{5}$$

Demonstração via Identidade de Lagrange

Este resultado decorre imediatamente da identidade de Lagrange:

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \tag{6}$$

Desenvolvimento Algébrico

Sabemos que:

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = (y_1 z_2 - z_1 y_2)^2 + (z_1 x_2 - x_1 z_2)^2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2 \tag{7}$$

$$\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2 \tag{8}$$

A igualdade (6) pode ser verificada expandindo ambos os lados das equações (7) e (8).

Relação com o Ângulo

Como $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$, podemos reescrever (6) como:

$$\begin{aligned}
\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \cos^2\theta \\
&= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 (1 - \cos^2\theta) \\
&= \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \sin^2\theta
\end{aligned}$$

Tomando a raiz quadrada e observando que $\sin\theta \geq 0$ para $0° \leq \theta \leq 180°$, obtemos:

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin\theta$$

Interpretação Geométrica

- O módulo do produto vetorial representa a **área do paralelogramo** formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$
- Para vetores paralelos ($\theta = 0°$ ou $180°$), $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = 0$
- O valor máximo ocorre quando $\theta = 90°$: $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

2.5 Interpretação Geométrica do Módulo do Produto Vetorial

Área do Paralelogramo

No paralelogramo determinado pelos vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

- Base $= \|\vec{u}\|$
- Altura $= \|\vec{v}\| \sin\theta$

Portanto, a área A do paralelogramo é:

$$A = \text{base} \times \text{altura} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \sin\theta = \|\vec{u} \times \vec{v}\| \tag{9}$$

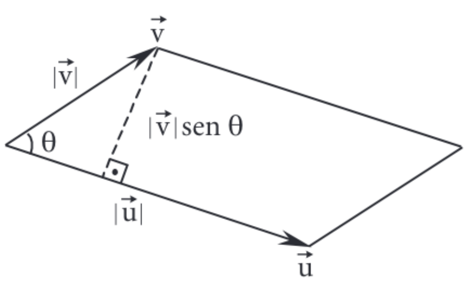


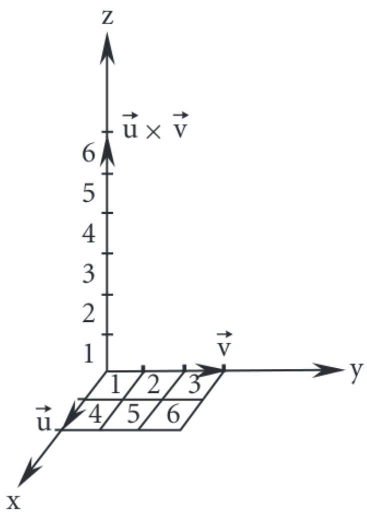
Fig. 3: Paralelogramo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com área $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$

Exemplo Ilustrativo

Considere $\vec{u} = 2\vec{i}$ e $\vec{v} = 3\vec{j}$:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 6\vec{k} \quad \text{e} \quad \|\vec{u} \times \vec{v}\| = 6$$

A área do paralelogramo é 6 u.a. (unidades de área), que coincide numericamente com o comprimento do vetor $6\vec{k}$ (6 u.c.).



Propriedades do Produto Vetorial

1. **Não associativo**:
$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$$

   Exemplo:
$$(\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \quad \text{enquanto} \quad \vec{i} \times (\vec{j} \times \vec{j}) = \vec{i} \times \vec{0} = \vec{0}$$

2. **Propriedades algébricas**:
   - Distributividade:
$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$$
$$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$$
   - Homogeneidade:
$$\alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v})$$
   - Identidade do produto misto:
$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

   Desafio: Demonstre as propriedades acima utilizando a definição do produto vetorial e propriedades de determinantes.

Demonstrações das Propriedades do Produto Vetorial

Sejam os vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

1. **Não associatividade**:

   O produto vetorial não é associativo, ou seja:
$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$$

Exemplo: Seja $\vec{u} = \vec{i}$, $\vec{v} = \vec{j}$ e $\vec{w} = \vec{j}$. Então:

$$(\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \quad \text{enquanto} \quad \vec{i} \times (\vec{j} \times \vec{j}) = \vec{i} \times \vec{0} = \vec{0}$$

Como $-\vec{i} \neq \vec{0}$, concluímos que o produto vetorial não é associativo.

2. **Propriedades algébricas:**

- **Distributividade:**
$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$$
$$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$$

  Demonstração: A definição do produto vetorial via determinante nos dá:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

  Substituindo $\vec{v} + \vec{w}$ na segunda linha do determinante, e usando a linearidade da operação, obtemos a distributividade.

- **Homogeneidade:**
$$\alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v})$$

  Demonstração: Como o produto vetorial é bilinear, o escalar α pode ser colocado em evidência:
$$\alpha(u_2v_3 - u_3v_2) = (\alpha u_2)v_3 - (\alpha u_3)v_2$$

  Portanto, a multiplicação escalar pode ser aplicada a qualquer um dos vetores, mas nunca em dois ao mesmo tempo.

- **Produto misto (identidade):**

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

  Demonstração: Ambos os lados resultam no determinante:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

  que representa o volume assinado do paralelepípedo formado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

2.6 Uma Aplicação na Física

O produto vetorial é uma importante ferramenta matemática utilizada na Física. Entre suas aplicações, destaca-se o cálculo do **torque**.

Definição de Torque

O torque ($\vec{\tau}$) é uma grandeza vetorial relacionada à capacidade de uma força causar rotação em um corpo:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{10}$$

onde:

- $\vec{r}$ é o vetor posição (do eixo de rotação ao ponto de aplicação da força)
- $\vec{F}$ é a força aplicada
- $\|\vec{r}\|$ é a distância do eixo de rotação

Módulo do Torque

Pela equação (10) e usando a fórmula do módulo do produto vetorial:

$$\|\vec{\tau}\| = \|\vec{r}\|\|\vec{F}\| \sin\theta \tag{11}$$

onde θ é o ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{F}$.

Observação: Embora torque e trabalho tenham a mesma unidade (N·m), são grandezas físicas distintas - torque é vetorial enquanto trabalho é escalar.

3 Problemas

1. Dados os vetores $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{w} = -\vec{i} + \vec{k}$, determinar:

- **(a)** $|\vec{u} \times \vec{u}|$
  Resposta:

$$\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$$

- **(b)** $(2\vec{v}) \times (3\vec{v})$
  Resposta:

$$2\vec{v} \times 3\vec{v} = \vec{0}$$

- **(c)** $(\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{w} \times \vec{u})$
  Resposta:

$$\begin{gathered}(\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{w} \times \vec{u}) = \\ (\vec{u} \times \vec{w}) - (\vec{u} \times \vec{w}) = \vec{0}\end{gathered}$$

- **(d)** $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{v} \times \vec{u})$
  Resposta:

$$\begin{aligned}(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{v} \times \vec{u}) &= \\ &= -((\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{u} \times \vec{v})) \\ &= -\vec{0} \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

- **(e)** $(\vec{u} - \vec{v}) \times \vec{w}$
  Resposta:

$$\begin{aligned}\vec{u} - \vec{v} &= \vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k} \\ (\vec{u} - \vec{v}) \times \vec{w} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} & \vec{j} \\ 1 & -5 & -1 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -5\vec{i} - 5\vec{k} \\ &= (-5, 0, -5)\end{aligned}$$

2. Dados os pontos $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 1)$ e $C(2, -1, -3)$, determinar o ponto D tal que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AC}$.

Resposta:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{BC} &= C - B = (2 - 3, -1 - 0, -3 - 1) = (-1, -1, -4) \\
\overrightarrow{AC} &= C - A = (2 - 2, -1 - 1, -3 - (-1)) = (0, -2, -2) \\
\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} \\
&= \vec{i}((-1)(-2) - (-4)(-2)) - \vec{j}((-1)(-2) - (-4)(0)) + \vec{k}((-1)(-2) - (-1)(0)) \\
&= \vec{i}(2 - 8) - \vec{j}(2 - 0) + \vec{k}(2 - 0) \\
&= (-6, -2, 2) \\
\overrightarrow{AD} &= D - A = (-6, -2, 2) \\
D &= A + \overrightarrow{AD} = (2, 1, -1) + (-6, -2, 2) \\
&= (-4, -1, 1)
\end{aligned}
$$

3. Determinar o vetor $\vec{x}$ tal que: $\vec{x} \cdot (1, 4, -3) = -7$ e $\vec{x} \times (4, -2, 1) = (3, 5, -2)$

Resposta:

$$
\begin{aligned}
\vec{x} &= (x_1, x_2, x_3) \\
x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= -7 \\
x_2 + 2x_3 &= 3 \\
x_1 - 4x_3 &= -5 \\
2x_1 + 4x_2 &= 2 \\
x_2 &= 3 - 2x_3 \\
x_1 &= -5 + 4x_3 \\
2(-5 + 4x_3) + 4(3 - 2x_3) &= 2 \\
-10 + 8x_3 + 12 - 8x_3 &= 2 \\
2 &= 2 \quad \text{(ok)} \\
x_3 &= 2 \\
x_2 &= 3 - 2 \cdot 2 = -1 \\
x_1 &= -5 + 4 \cdot 2 = 3 \\
\vec{x} &= (3,\ -1,\ 2)
\end{aligned}
$$

4. Resolver os sistemas:

(a)

$$\begin{cases} \vec{x} \times \vec{j} = \vec{k} \\ \vec{x} \cdot (4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) = 10 \end{cases}$$

Resposta:

1º sistema:
$= (\mathrm{x}_1, x_2, x_3)$
$\vec{x} \times \vec{j} = \vec{k} \Rightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-x_3, 0, x_1)$
$(-x_3, 0, x_1) = (0, 0, 1) \Rightarrow \begin{cases} -x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases}$
$\vec{x} \cdot (4, -2, 1) = 10 \Rightarrow 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 10 \Rightarrow 4(1) - 2x_2 + 0 = 10$
$-2x_2 = 6 \Rightarrow x_2 = -3$
$\vec{x} = (1,\ -3,\ 0)$

(b)

$$\begin{cases} \vec{x} \times (2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}) = \vec{0} \\ \vec{x} \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}) = 12 \end{cases}$$

Resposta:

2º sistema:
$= (\mathrm{x}_1, x_2, x_3)$
$\vec{x} \times (2, -1, 3) = \vec{0} \Rightarrow$ vetores paralelos $\Rightarrow \vec{x} = \lambda(2,\ -1,\ 3)$
$\vec{x} \cdot (1, 2, -2) = 12 \Rightarrow \lambda(2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot (-2)) = 12$
$\lambda(2 - 2 - 6) = 12 \Rightarrow -6\lambda = 12 \Rightarrow \lambda = -2$
$\vec{x} = (-4,\ 2,\ -6)$

5. Dados os vetores $\vec{u} = (3,\ 1,\ 1)$, $\vec{v} = (-4,\ 1,\ 3)$ e $\vec{w} = (1,\ 2,\ 0)$, determinar $\vec{x}$ de modo que $\vec{x} \perp \vec{w}$ e $\vec{x} = \vec{u} \times \vec{v}$.

Resposta:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \vec{u} \times \vec{v} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (2,\ -13,\ 7) \end{aligned}$$

$\vec{x} \cdot \vec{w} = 2 \cdot 1 + (-13) \cdot 2 + 7 \cdot 0 = -24 \neq 0$

Logo, $\vec{x} \not\perp \vec{w}$

Além disso, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot (-4) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = -12 + 1 + 3 = -8 \neq 0$

Portanto, não existe $\vec{x}$ tal que $\vec{x} = \vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{x} \perp \vec{w}$, pois $\vec{u} \not\perp \vec{v}$.

References

[1] Paulo Winterle. *Vetores e Geometria Analítica*. 2nd ed. São Paulo: Makron, 2014. ISBN: 9788543002392. URL: https://books.google.com.br/books?id=UPIyHQAACAAJ.

[2] Alfredo Steimbruch and Paulo Winterle. *Geometria Analítica*. 2nd ed. São Paulo: Pearson Universidades, 1987. ISBN: 9780074504093. URL: https://books.google.com.br/books?id=tOLfGwAACAAJ.