Geometria Analítica
Prof. Jahina Fagundes de Assis Hattori
20/04/2025
Lista de Exercícios #3

Gabriel dos Santos Schmitz
(RA: 2487438)

Este documento foi criado usando LaTeX
https://github.com/gabrielzschmitz/uni/tree/main/ga/lista3.

1 Introdução

Irei neste documento debruçar-me-ei sobre a Geometria Analítica desde a noção intuitiva de tratamento geométrico até o produto misto entre vetores. Farei isto baseando-me nos livros *Vetores e Geometria Analítica* [1] e *Geometria Analítica* [2]. Conforme a bibliografia usada no curso Geometria Analítica na UTFPR de Toledo.

2 Produto Escalar

2.1 Definição Algébrica

Chama-se produto escalar de dois vetores $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, e se representa por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, ao número real

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \tag{1}$$

O produto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ também é indicado por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ e se lê "$\vec{u}$ escalar $\vec{v}$".

Exemplos

1 Dados os vetores $\vec{u} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 8\vec{k}$ e $\vec{v} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$, tem-se:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3(4) - 5(-2) + 8(-1) = 12 + 10 - 8 = 14$$

2 Sejam os vetores $\vec{u} = (3, 2, 1)$ e $\vec{v} = (-1, -4, -1)$. Calcular:

(a) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (2\vec{u} - \vec{v}) = 2(7) - 2(8) + 0(3) = 14 - 16 + 0 = -2$

(b) $\vec{u} \cdot \vec{u} = (3)^2 + (2)^2 + (1)^2 = 9 + 4 + 1 = 14$

(c) $\vec{0} \cdot \vec{u} = (0)(3) + (0)(2) + (0)(1) = 0 + 0 + 0 = 0$

2.2 Propriedades do Produto Escalar

Para quaisquer vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ e o número real α, valem as seguintes propriedades do produto escalar:

I) **Comutatividade**:
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
Seja $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Então:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3 = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

II) **Distributividade em relação à soma vetorial**:
$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
e $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
Usando coordenadas, temos:

$$\vec{v} + \vec{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$$

Então:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = u_1(v_1 + w_1) + u_2(v_2 + w_2) + u_3(v_3 + w_3) = u_1v_1 + u_1w_1 + u_2v_2 + u_2w_2 + u_3v_3 + u_3w_3$$

Agrupando:

$$= (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) + (u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

A outra igualdade é análoga.

III) **Associatividade com multiplicação por escalar**:
$\alpha(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (\alpha\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot(\alpha\vec{v})$

Seja $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Então:

$$(\alpha\vec{u})\cdot\vec{v} = (\alpha u_1)v_1 + (\alpha u_2)v_2 + (\alpha u_3)v_3 = \alpha(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) = \alpha(\vec{u}\cdot\vec{v})$$

A outra igualdade é análoga.

IV) **Definição positiva**:
$\vec{u}\cdot\vec{u} > 0$ se $\vec{u} \neq \vec{0}$
e $\vec{u}\cdot\vec{u} = 0$ se $\vec{u} = \vec{0} = (0,0,0)$

$$\vec{u}\cdot\vec{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, então pelo menos um dos termos $u_i^2 > 0$, logo $\vec{u}\cdot\vec{u} > 0$.

Se $\vec{u} = (0,0,0)$, então:

$$\vec{u}\cdot\vec{u} = 0^2 + 0^2 + 0^2 = 0$$

V) **Relação com a norma**:
$\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

Por definição da norma de um vetor:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Logo:

$$\|\vec{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \vec{u}\cdot\vec{u}$$

De fato, vimos que o módulo do vetor $\vec{u} = (x, y, z)$ é dado por

$$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Tendo em vista que

$$\vec{u}\cdot\vec{u} = (x, y, z)\cdot(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

conclui-se que

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$$

ou, de modo equivalente,

$$\vec{u}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|^2.$$

Exemplos

1 Sendo $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 2$ e $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3$, calcular $(3\vec{u} - 2\vec{v})\cdot(-4\vec{u} + \vec{v})$.

$$\begin{aligned}
(3\vec{u} - 2\vec{v})\cdot(-4\vec{u} + \vec{v}) &= 3\vec{u}\cdot(-4\vec{u} + \vec{v}) - 2\vec{v}\cdot(-4\vec{u} + \vec{v}) \\
&= -12\vec{u}\cdot\vec{u} + 3\vec{u}\cdot\vec{v} + 8\vec{v}\cdot\vec{u} - 2\vec{v}\cdot\vec{v} \\
&= -12\|\vec{u}\|^2 + 14\vec{u}\cdot\vec{v} - 2\|\vec{v}\|^2 \\
&= -12(4)^2 + 14(3) - 2(2)^2 \\
&= -192 + 42 - 8 \\
&= -158
\end{aligned}$$

2 Mostrar que $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

$$\begin{aligned}\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 &= (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})\\ &= \vec{u}\cdot(\vec{u}+\vec{v}) + \vec{v}\cdot(\vec{u}+\vec{v})\\ &= \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v}\\ &= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2\end{aligned}$$

2.3 Definição Geométrica de Produto Escalar

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores não nulos e θ o ângulo entre eles, então:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta \tag{2}$$

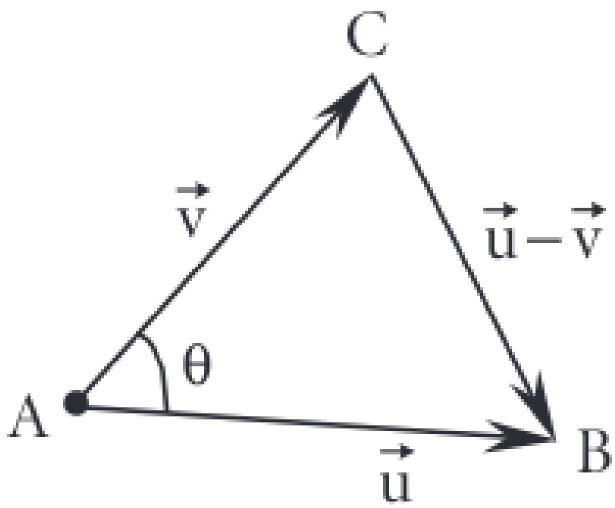


Fig. 1: Triângulo ABC formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$

Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo ABC da Figura 1, temos:

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta \tag{3}$$

Por outro lado, de acordo com o Exemplo 2 (item anterior):

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} \tag{4}$$

Comparando as igualdades (3) e (4):

$$\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$

Simplificando:

$$-2\vec{u}\cdot\vec{v} = -2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$$

E então:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta, \quad 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$$

Conclusão

O produto escalar de dois vetores não nulos é igual ao produto de seus módulos pelo cosseno do ângulo por eles formado.

Definição de Vetores Ortogonais

Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são **ortogonais** se, e somente se:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \tag{5}$$

- Pela equação (2), isso ocorre quando:
  - $\cos\theta = 0$ (ou seja, $\theta = 90°$), ou
  - Um dos vetores é o vetor nulo $\vec{0}$
- O vetor nulo é considerado ortogonal a qualquer outro vetor
- Notação: $\vec{u} \perp \vec{v}$ indica que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais

2.4 Cálculo do Ângulo de Dois Vetores

Da igualdade fundamental do produto escalar:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$$

Obtemos a fórmula para calcular o ângulo θ entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos:

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} \tag{6}$$

Propriedades Importantes

- Quando $\cos\theta > 0$ (produto escalar positivo), o ângulo θ é agudo ($0° \leq \theta < 90°$)
- Quando $\cos\theta < 0$ (produto escalar negativo), o ângulo θ é obtuso ($90° < \theta \leq 180°$)
- Quando $\cos\theta = 0$ (vetores ortogonais), $\theta = 90°$
- O ângulo θ é sempre o menor ângulo entre as direções dos vetores ($0° \leq \theta \leq 180°$)

Exemplo

Dados os vetores $\vec{u} = (1, 2, -1)$ e $\vec{v} = (0, 1, 2)$, calcular o ângulo entre eles:

1. Cálculo do produto escalar:
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1)(0) + (2)(1) + (-1)(2) = 0 + 2 - 2 = 0$$
2. Cálculo das normas:
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}, \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$
3. Aplicação da fórmula:
$$\cos\theta = \frac{0}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{5}} = 0 \Rightarrow \theta = 90°$$

Conclusão: Os vetores são ortogonais, como já era esperado pelo produto escalar nulo.

2.5 Ângulos Diretores e Cossenos Diretores de um Vetor

Seja o vetor $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ não nulo.

Definições

- **Ângulos diretores** de $\vec{v}$ são os ângulos α, β e γ que $\vec{v}$ forma com os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, respectivamente (Figura 2).
- **Cossenos diretores** de $\vec{v}$ são os cossenos de seus ângulos diretores, ou seja, $\cos\alpha$, $\cos\beta$ e $\cos\gamma$.

Cálculo dos Cossenos Diretores

Utilizando a fórmula (6) para o ângulo entre vetores:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}\cdot\vec{i}}{\|\vec{v}\|\|\vec{i}\|} = \frac{(x,y,z)\cdot(1,0,0)}{\|\vec{v}\|\cdot 1} = \frac{x}{\|\vec{v}\|} \tag{7}$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{j}}{\|\vec{v}\|\|\vec{j}\|} = \frac{(x,y,z)\cdot(0,1,0)}{\|\vec{v}\|\cdot 1} = \frac{y}{\|\vec{v}\|} \tag{8}$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{v}\cdot\vec{k}}{\|\vec{v}\|\|\vec{k}\|} = \frac{(x,y,z)\cdot(0,0,1)}{\|\vec{v}\|\cdot 1} = \frac{z}{\|\vec{v}\|} \tag{9}$$

Observação Importante

Os cossenos diretores de $\vec{v}$ são precisamente as componentes do versor de $\vec{v}$:

$$\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{(x,y,z)}{\|\vec{v}\|} = \left(\frac{x}{\|\vec{v}\|}, \frac{y}{\|\vec{v}\|}, \frac{z}{\|\vec{v}\|}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

Como o versor é um vetor unitário, decorre imediatamente que:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{10}$$

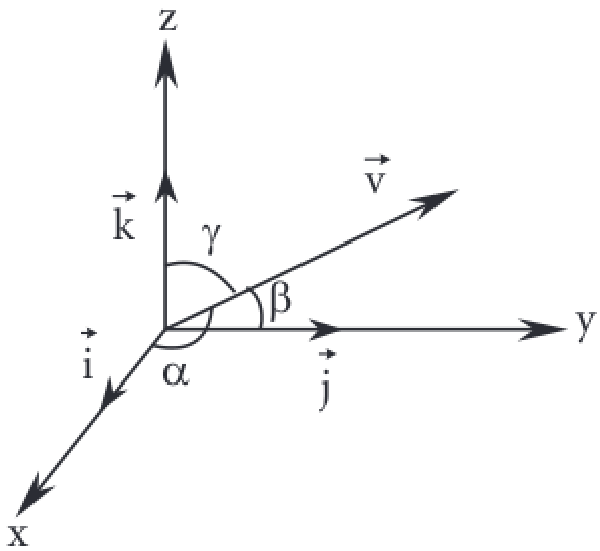


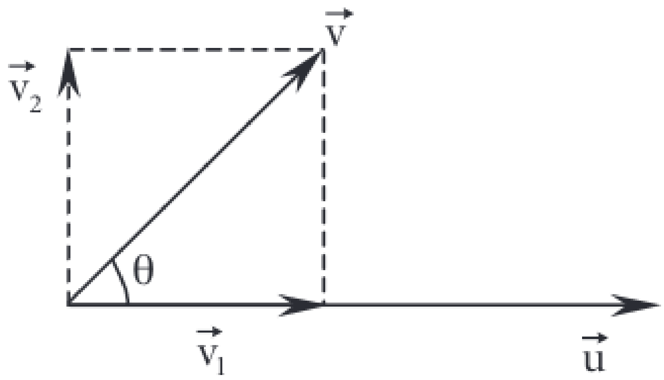
Fig. 2: Ângulos diretores α, β e γ do vetor $\vec{v}$ em relação aos eixos coordenados

2.6 Projeção de um Vetor Sobre Outro

Sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos e θ o ângulo entre eles. Pretendemos decompor um dos vetores, digamos $\vec{v}$, tal que:

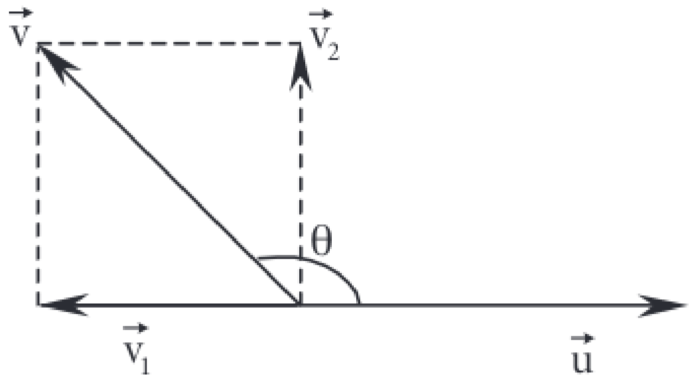
$$\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$$

sendo $\vec{v_1} \parallel \vec{u}$ e $\vec{v_2} \perp \vec{u}$.



0.45

Fig. 3: Ângulo agudo ($\theta < 90°$)



0.45

Fig. 4: Ângulo obtuso ($\theta > 90°$)

O vetor $\vec{v_1}$ é chamado **projeção ortogonal** de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ e indicado por:

$$\vec{v_1} = \text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} \tag{11}$$

Como $\vec{v_1} \parallel \vec{u}$, temos $\vec{v_1} = \alpha\vec{u}$ e como $\vec{v_2} = \vec{v} - \vec{v_1} = \vec{v} - \alpha\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{u}$, vem:

$$(\vec{v} - \alpha\vec{u}) \cdot \vec{u} = 0$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} - \alpha(\vec{u} \cdot \vec{u}) = 0$$

$$\alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

Portanto, sendo $\vec{v_1} = \alpha\vec{u}$, por (11), conclui-se que:

$$\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}\right)\vec{u} \tag{12}$$

Propriedades Importantes

- O comprimento da projeção é dado por:

$$\|\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}\| = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{u}|}{\|\vec{u}\|}$$

- Se $\vec{u}$ é unitário ($\|\vec{u}\| = 1$), a fórmula simplifica para:

$$\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{u}$$

- A projeção é linear:

$$\text{proj}_{\vec{u}}(a\vec{v} + b\vec{w}) = a\,\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} + b\,\text{proj}_{\vec{u}}\vec{w}$$

2.7 Interpretação Geométrica do Módulo do Produto Escalar

Considerando a fórmula de projeção:

$$\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}\right) \vec{u}$$

Quando $\vec{u}$ é unitário ($\|\vec{u}\| = 1$), temos:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = 1$$

Portanto, a projeção simplifica para:

$$\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{u} \tag{13}$$

Calculando o comprimento desta projeção:

$$\|\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}\| = \|(\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{u}\| = |\vec{v} \cdot \vec{u}| \cdot \|\vec{u}\| = |\vec{v} \cdot \vec{u}|$$

Conclusão Importante

O comprimento da projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ (quando $\vec{u}$ é unitário) é igual ao módulo do produto escalar $\vec{v} \cdot \vec{u}$.

$$\|\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}\| = |\vec{v} \cdot \vec{u}|$$

Interpretação Geométrica

- Quando θ é agudo ($\cos\theta > 0$), o produto escalar $\vec{v} \cdot \vec{u}$ é positivo
- Quando θ é obtuso ($\cos\theta < 0$), o produto escalar $\vec{v} \cdot \vec{u}$ é negativo
- O módulo $|\vec{v} \cdot \vec{u}|$ representa sempre o comprimento da projeção
- Para $\vec{u}$ não unitário, o comprimento é $\dfrac{|\vec{v} \cdot \vec{u}|}{\|\vec{u}\|}$

2.8 Produto Escalar no Plano

Todo o estudo feito para vetores no espaço é válido também para vetores no plano. Considerando os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$, temos:

Propriedades no Plano

a) Expressão do produto escalar:
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 \tag{14}$$

b) Valem todas as propriedades do produto escalar vistas anteriormente

c) Ângulo entre vetores:
$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}, \quad \text{para } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ e } \vec{v} \neq \vec{0} \tag{15}$$

d) Condição de ortogonalidade:
$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \tag{16}$$

e) Ângulos diretores (para $\vec{u} \neq \vec{0}$):

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{\|\vec{u}\|} \tag{17}$$
$$\cos\beta = \frac{y_1}{\|\vec{u}\|} \tag{18}$$

onde α e β são os ângulos que $\vec{u}$ forma com os eixos x e y, respectivamente

f) Relação fundamental:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1 \tag{19}$$

g) Projeção vetorial (para $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$):

$$\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\right)\vec{u} \tag{20}$$

Observações Importantes

- No plano, trabalhamos com apenas dois ângulos diretores (α e β)
- A norma de um vetor $\vec{u} = (x, y)$ é dada por $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- A relação $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$ é o análogo bidimensional da relação tridimensional
- A condição de paralelismo no plano é $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$

2.9 Uma Aplicação na Física

O produto escalar é uma importante ferramenta matemática para a Física, uma vez que inúmeras grandezas físicas são definidas com seu emprego, como, por exemplo, o *trabalho*.

Definição de Trabalho

O trabalho realizado por uma força constante $\vec{F}$ ao longo de um deslocamento $\vec{d}$ é definido como:

$$W = \vec{F}\cdot\vec{d}$$

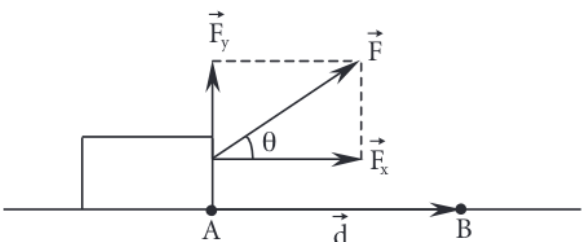


Fig. 5: Componente da força $\vec{F}$ na direção do deslocamento $\vec{d}$

Interpretação Física

- A componente efetiva da força na direção do deslocamento é:

$$\|\vec{F}_x\| = \|\vec{F}\|\cos\theta$$

  onde θ é o ângulo entre a força e o deslocamento
- O trabalho é uma grandeza **escalar**
- Unidade no SI: joule (J), onde $1\,\text{J} = 1\,\text{N}\cdot\text{m}$

Expressões Equivalentes

O trabalho pode ser calculado por:

$$W = \|\vec{F}\|\|\vec{d}\|\cos\theta$$

ou, em termos das componentes:

$$W = F_x d_x + F_y d_y + F_z d_z \quad \text{(em 3D)}$$

Casos Particulares

- Quando $\theta = 0^\circ$ (força paralela ao deslocamento):

$$W = \|\vec{F}\|\|\vec{d}\| \quad \text{(trabalho máximo)}$$

- Quando $\theta = 90^\circ$ (força perpendicular ao deslocamento):

$$W = 0$$

- Quando $180^\circ > \theta > 90^\circ$:

$$W < 0 \quad \text{(trabalho resistivo)}$$

3 Problemas

1. Dados os vetores $\vec{u} = (2, -3, -1)$ e $\vec{v} = (1, -1, 4)$, calcular:

- **(a)** $2\vec{u} \cdot (-\vec{v})$

  Resposta:

$$\begin{aligned} 2\vec{u} &= (4, -6, -2) \\ -\vec{v} &= (-1, 1, -4) \\ 2\vec{u} \cdot (-\vec{v}) &= 4 \cdot -1 - 6 \cdot (1) - 2 \cdot (-4) \\ &= -4 - 6 + 8 \\ &= -2 \end{aligned}$$

- **(b)** $(\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (\vec{v} - 2\vec{u})$

  Resposta:

$$\begin{aligned} \vec{u} + 3\vec{v} &= (2 + 3(1), -3 + 3(-1), -1 + 3(4)) \\ &= (5, -6, 11) \\ \vec{v} - 2\vec{u} &= (1 - 2(2), -1 - 2(-3), 4 - 2(-1)) \\ &= (-3, 5, 6) \\ (\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (\vec{v} - 2\vec{u}) &= \\ &= (5 * (-3), -6 * 5, 11 * 6) \\ &= (-15, -30, 66) \\ &= -15 - 30 + 66 = 21 \end{aligned}$$

- **(c)** $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$

  Resposta:

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= (3, -4, 3) \\ \vec{u} - \vec{v} &= (1, -2, -5) \\ (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) &= (3 * 1, -4 * (-2), 3 * (-5)) \\ &= 3 + 8 - 15 = -4 \end{aligned}$$

- **(d)** $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} - \vec{u})$

  Resposta:

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= (3, -4, 3) \\ \vec{v} - \vec{u} &= (-1, 2, 3) \\ (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} - \vec{u})) &= (3 * (-1), -4 * 2, 3 * 3) \\ &= -3 - 8 + 9 = -2 \end{aligned}$$

2. Sejam os vetores $\vec{u} = (2, a, -1)$, $\vec{v} = (3, 1, -2)$ e $\vec{w} = (2a - 1, -2, 4)$. Determinar a de modo que: $\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} + \vec{w})$

Resposta:

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{v} &= (2 * 3) + (a * 1) + (-1 * (-2)) \\
&= (6) + (a) + (2) \\
&= 6 + a + 2 \\
&= 8 + a \\
8 + a &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} + \vec{w}) \\
&= (5, a + 1, -3) \cdot (2a + 2, -1, 2) \\
&= (5 * (2a + 2)) + ((a + 1) * -1) + (-3 * (2)) \\
&= 10a + 10 - a - 1 + -6 \\
8 + a &= 9a + 3 \\
9a - a &= 8 - 3 \\
8a &= 5 \\
a &= \frac{5}{8}
\end{aligned}$$

3. Dados os pontos $A(4, 0, -1)$, $B(2, -2, 1)$ e $C(1, 3, 2)$ e os vetores $\vec{u} = (2, 1, 1)$ e $\vec{v} = (-1, -2, 3)$, obter o vetor $\vec{x}$ tal que:

- **(a)** $3\vec{x} + 2\vec{v} = \vec{x} + (\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u})\vec{v}$

  Resposta:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= (-2, -2, 2) \\
\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} &= (-2)(2) + (-2)(1) + (2)(1) = -4 - 2 + 2 = -4 \\
3\vec{x} + 2\vec{v} &= \vec{x} + (-4)\vec{v} \\
3\vec{x} + 2\vec{v} &= \vec{x} - 4\vec{v} \\
2\vec{x} &= -6\vec{v} \\
\vec{x} &= -3\vec{v} = -3(-1, -2, 3) = (3, 6, -9)
\end{aligned}$$

- **(b)** $(\overrightarrow{BC} \cdot \vec{v})\vec{x} = (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{v} - 3\vec{x}$

  Resposta:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BC} &= (-1, 5, 1) \\
\overrightarrow{BC} \cdot \vec{v} &= 1 - 10 + 3 = -6 \\
\vec{u} \cdot \vec{v} &= -2 - 2 + 3 = -1 \\
-6\vec{x} &= -\vec{v} - 3\vec{x} \\
-3\vec{x} &= -\vec{v} \Rightarrow \vec{x} = \frac{1}{3}\vec{v} \\
\vec{x} &= \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1\right)
\end{aligned}$$

4. Determinar o vetor $\vec{v}$, paralelo ao vetor $\vec{u} = (2, -1, 3)$, tal que $\vec{v} \cdot \vec{u} = -42$.

Resposta:

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= k\vec{u} \\
\vec{v} &= k(2, -1, 3) = (2k, -k, 3k) \\
\vec{v} \cdot \vec{u} &= -42 \\
(2k, -k, 3k) \cdot (2, -1, 3) &= -42 \\
4k + k + 9k &= -42 \\
14k &= -42 \\
k &= -3\vec{v} = (-6, 3, -9)
\end{aligned}$$

5. Determinar o vetor $\vec{v}$ do espaço, sabendo que:

- $|\vec{v}| = 5$
- $\vec{v}$ é ortogonal ao eixo Ox
- $\vec{v} \cdot \vec{w} = 6$
- $\vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j}$

Resposta:

Como $\vec{v} \perp Ox \Rightarrow v_x = 0$
$\vec{v} = (0, v_y, v_z)$
$\vec{w} = (1, 2, 0)$
1. $|\vec{v}| = 5 \Rightarrow \sqrt{v_y^2 + v_z^2} = 5 \Rightarrow v_y^2 + v_z^2 = 25$
2. $\vec{v} \cdot \vec{w} = 6 \Rightarrow (0)(1) + (v_y)(2) + (v_z)(0) = 6 \Rightarrow 2v_y = 6 \Rightarrow v_y = 3$
Substituindo $v_y = 3$ na 1ª equação:
$3^2 + v_z^2 = 25 \Rightarrow 9 + v_z^2 = 25 \Rightarrow v_z^2 = 16 \Rightarrow v_z = \pm 4$
$\vec{v} = (0, 3, 4) \quad \text{e} \quad \vec{v} = (0, 3, -4)$

6. Determinar o vetor $\vec{v}$, ortogonal ao eixo Oy, sabendo que:

- $\vec{v} \cdot \vec{v}_1 = 8$ com $\vec{v}_1 = (3, 1, -2)$
- $\vec{v} \cdot \vec{v}_2 = -3$ com $\vec{v}_2 = (-1, 1, 1)$

Resposta:

Como $\vec{v} \perp Oy$, então $\vec{v} = (x, 0, z)$
$\vec{v} \cdot \vec{v}_1 = 8 \Rightarrow (x, 0, z) \cdot (3, 1, -2) = 3x - 2z = 8$
$\vec{v} \cdot \vec{v}_2 = -3 \Rightarrow (x, 0, z) \cdot (-1, 1, 1) = -x + z = -3$

$$\begin{cases} 3x - 2z = 8 \\ -x + z = -3 \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por 2: $-2x + 2z = -6$
Somando com a primeira: $x = 2$
Substituindo: $-2 + z = -3 \Rightarrow z = -1$
$\vec{v} = (2, 0, -1)$

7. Dados os vetores $\vec{u} = (1, 2, -3)$, $\vec{v} = (2, 0, -1)$ e $\vec{w} = (3, 1, 0)$, determinar o vetor $\vec{x} = (x, y, z)$ tal que:

- $\vec{x} \cdot \vec{u} = -16$
- $\vec{x} \cdot \vec{v} = 0$
- $\vec{x} \cdot \vec{w} = 3$

Resposta:

$$\begin{aligned}
&\vec{x} = (x, y, z)\\
&\vec{x} \cdot \vec{u} = -16 \Rightarrow x + 2y - 3z = -16 \quad (1)\\
&\vec{x} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow 2x - z = 0 \Rightarrow z = 2x \quad (2)\\
&\vec{x} \cdot \vec{w} = 3 \Rightarrow 3x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - 3x \quad (3)\\
&\text{Substituindo (2) e (3) em (1):}\\
&x + 2(3 - 3x) - 3(2x) = -16\\
&x + 6 - 6x - 6x = -16\\
&-11x + 6 = -16 \Rightarrow -11x = -22 \Rightarrow x = 2\\
&y = 3 - 3(2) = -3\\
&z = 2(2) = 4\\
&\vec{x} = (2, -3, 4)
\end{aligned}$$

8. Sabendo que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$, calcular:

- **(a)** $(\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot \vec{u}$

  Resposta:

$$\begin{aligned}
(\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot \vec{u} &= \vec{u} \cdot \vec{u} - 3\vec{v} \cdot \vec{u}\\
&= |\vec{u}|^2 - 3(\vec{u} \cdot \vec{v})\\
&= 4 - 3(-1)\\
&= 7
\end{aligned}$$

- **(b)** $(2\vec{v} - \vec{u}) \cdot (2\vec{v})$

  Resposta:

$$\begin{aligned}
(2\vec{v} - \vec{u}) \cdot (2\vec{v}) &= 4\vec{v} \cdot \vec{v} - 2\vec{u} \cdot \vec{v}\\
&= 4|\vec{v}|^2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v})\\
&= 36 - 2(-1)\\
&= 38
\end{aligned}$$

- **(c)** $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} - 4\vec{u})$

  Resposta:

$$\begin{aligned}
(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} - 4\vec{u}) &= \vec{u} \cdot \vec{v} - 4\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} - 4\vec{v} \cdot \vec{u}\\
&= (\vec{u} \cdot \vec{v}) - 4|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 4(\vec{u} \cdot \vec{v})\\
&= -1 - 16 + 9 + 4\\
&= -4
\end{aligned}$$

- **(d)** $(3\vec{u}+4\vec{v})\cdot(-2\vec{u}-5\vec{v})$

  Resposta:

$$\begin{aligned}(3\vec{u}+4\vec{v})\cdot(-2\vec{u}-5\vec{v}) &= 3\vec{u}\cdot(-2\vec{u})+3\vec{u}\cdot(-5\vec{v})+4\vec{v}\cdot(-2\vec{u})+4\vec{v}\cdot(-5\vec{v})\\ &= -6|\vec{u}|^2-15(\vec{u}\cdot\vec{v})-8(\vec{v}\cdot\vec{u})-20|\vec{v}|^2\\ &= -6(4)-15(-1)-8(-1)-20(9)\\ &= -24+15+8-180\\ &= -181\end{aligned}$$

9. Calcular $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$, sabendo que $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$, $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=3$ e $|\vec{w}|=5$.

Resposta:

Dado que $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$, elevando ao quadrado ambos os lados:

$|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}|^2=0$

$|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2+|\vec{w}|^2+2(\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w})=0$

$2^2+3^2+5^2+2S=0 \quad (\text{onde } S=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w})$

$4+9+25+2S=0$

$38+2S=0$

$2S=-38$

$S=-19$

$\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}=-19$

10. Os pontos A, B e C são vértices de um triângulo equilátero cujo lado mede 20 cm. Calcular $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$.

Resposta:

- **(a)** Cálculo de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = 20\,\text{cm}$

  Ângulo entre $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC} = 60°$

  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos(60°)$

  $= 20 \times 20 \times 0.5 = \boxed{200\,\text{cm}^2}$

- **(b)** Cálculo de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA}$

  $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$

  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} \cdot (-\overrightarrow{AC})$

  $= -(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})$

  $= -200\,\text{cm}^2 = \boxed{-200\,\text{cm}^2}$

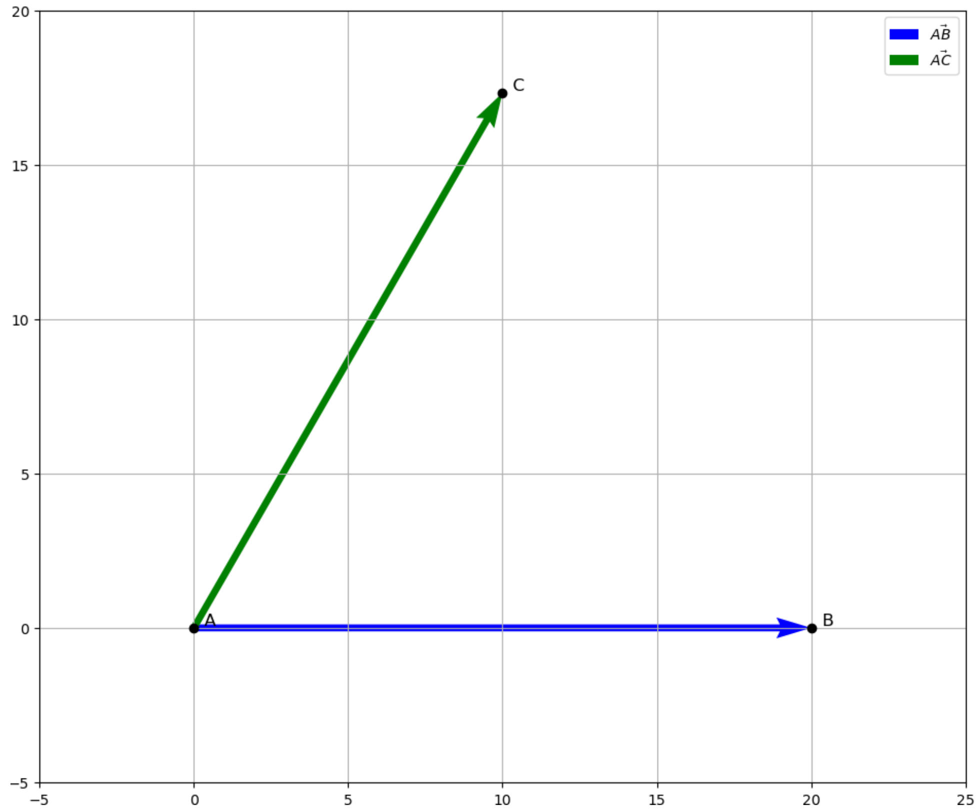


Fig. 6: Triângulo equilátero ABC com lados de 20 cm, mostrando os vetores AB e AC com ângulo de 60° entre eles

References

[1] Paulo Winterle. *Vetores e Geometria Analítica*. 2nd ed. São Paulo: Makron, 2014. ISBN: 9788543002392. URL: https://books.google.com.br/books?id=UPIyHQAACAAJ.

[2] Alfredo Steimbruch and Paulo Winterle. *Geometria Analítica*. 2nd ed. São Paulo: Pearson Universidades, 1987. ISBN: 9780074504093. URL: https://books.google.com.br/books?id=tOLfGwAACAAJ.