UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Geometria Analítica
Prof. Jahina Fagundes de Assis Hattori
22/04/2025
Lista de Exercícios #5

Gabriel dos Santos Schmitz
(RA: 2487438)

Este documento foi criado usando LaTeX
https://github.com/gabrielzschmitz/uni/tree/main/ga/lista5.

1 Introdução

Irei neste documento debruçar-me-ei sobre a Geometria Analítica desde a noção intuitiva de tratamento geométrico até o produto misto entre vetores. Farei isto baseando-me nos livros *Vetores e Geometria Analítica* [1] e *Geometria Analítica* [2]. Conforme a bibliografia usada no curso Geometria Analítica na UTFPR de Toledo.

2 Produto Misto

2.1 Definição

Chama-se *produto misto* dos vetores

$$\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, \quad \vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}, \quad \vec{w} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$$

(tomados nesta ordem) ao número real $(\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}))$.

O produto misto de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ também é indicado por:

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Tendo em vista que:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = (y_2z_3 - y_3z_2)\vec{i} - (x_2z_3 - x_3z_2)\vec{j} + (x_2y_3 - x_3y_2)\vec{k}$$

temos:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = x_1(y_2z_3 - y_3z_2) - y_1(x_2z_3 - x_3z_2) + z_1(x_2y_3 - x_3y_2)$$

e, portanto:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \tag{1}$$

2.2 Propriedades do Produto Misto

As propriedades do produto misto decorrem, em sua maioria, das propriedades dos determinantes.

I. Troca de Sinal

O produto misto $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ muda de sinal ao trocarmos a posição de dois vetores.

Em relação ao exemplo anterior, em que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 27$, teríamos:

$$(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = -27 \quad (\text{permuta de } \vec{u} \text{ e } \vec{v})$$

$$(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}) = -27 \quad (\text{permuta de } \vec{u} \text{ e } \vec{w})$$

$$(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}) = -27 \quad (\text{permuta de } \vec{v} \text{ e } \vec{w})$$

Se em qualquer um desses três últimos produtos efetuarmos nova permutação de dois vetores, o produto misto resultante volta a ser 27.

Portanto, se em relação ao produto misto $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ ocorrer:

- uma permutação – haverá troca de sinal;
- duas permutações – não altera o valor.

Resulta dessa propriedade que os sinais $\cdot$ e $\times$ podem ser permutados, ou seja:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \cdot (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u}(\vec{v}, \vec{w})$$

II. Propriedade de Linearidade

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{x}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{x}, \vec{v}, \vec{w})$$
$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

III. Produto Misto e Escalares

$$\alpha(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\alpha\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \alpha\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \alpha\vec{w})$$

IV. Produto Misto e Vetores Coplanares

O produto misto $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ se, e somente se, os três vetores forem coplanares.

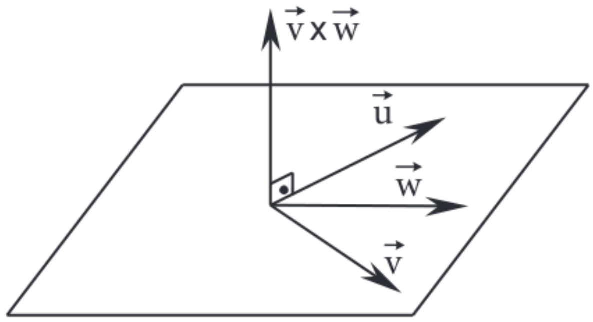
Admitindo-se que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$, ou seja,

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0,$$

conclui-se que:

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \perp \vec{u}.$$

Por outro lado, no estudo do produto vetorial vimos que o vetor $\vec{v} \times \vec{w}$ é também ortogonal a $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Assim, como $\vec{v} \times \vec{w}$ é ortogonal aos três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, estes são coplanares (Figura 2.2).



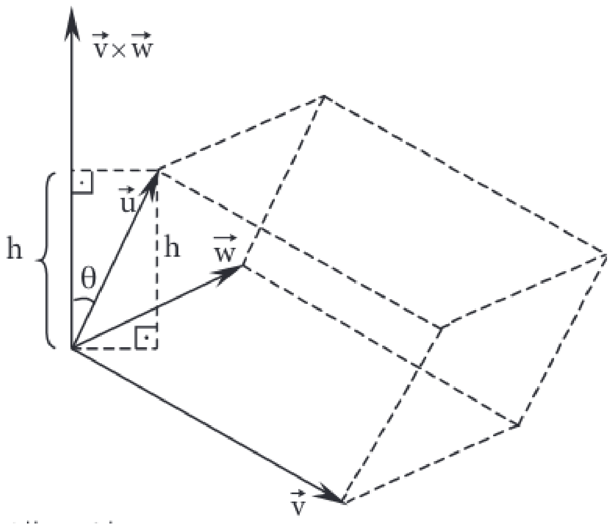
Reciprocamente, admitindo-se que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sejam coplanares, o vetor $\vec{v} \times \vec{w}$, por ser ortogonal a $\vec{v}$ e $\vec{w}$, é também ortogonal a $\vec{u}$.

Ora, se $\vec{u}$ e $\vec{v} \times \vec{w}$ são ortogonais, o produto escalar deles é igual a zero, ou seja:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0.$$

2.3 Interpretação Geométrica do Cálculo do Produto Misto

Geometricamente, o produto misto $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ é igual, em módulo, ao volume do paralelepípedo de arestas determinadas pelos vetores não coplanares $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ (Figura 2.3).



A área da base do paralelepípedo é dada por $|\vec{v} \times \vec{w}|$.

Seja θ o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v} \times \vec{w}$. Sendo $\vec{v} \times \vec{w}$ um vetor ortogonal à base, a altura será paralela a ele, e, portanto, a altura h_u será dada por:

$$h_u = |\vec{v} \times \vec{w}| \cos\theta$$

(É necessário considerar o valor absoluto $|\cos\theta|$, pois θ pode ser um ângulo obtuso.)

Então, o volume V do paralelepípedo é:

$$V = (\text{área da base})(\text{altura}) = |\vec{v} \times \vec{w}| \cdot |\cos\theta|$$

Finalmente, o volume V do paralelepípedo pode ser expresso como:

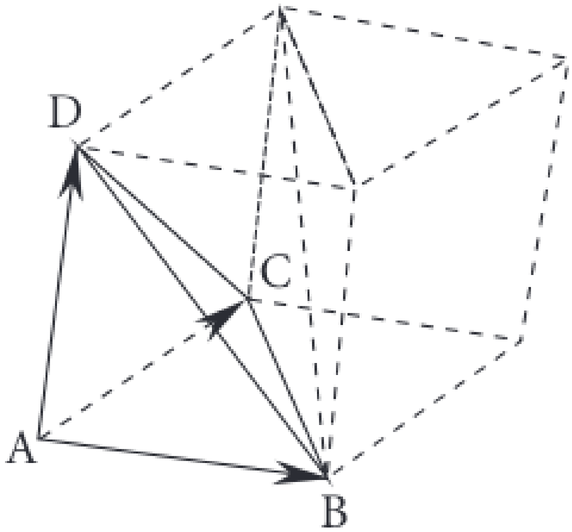
$$V = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$$

no qual a última igualdade decorre da relação (2) do Produto Escalar.

2.4 Volume do Tetraedro

Sejam A, B, C e D pontos não coplanares. Portanto, os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ também são não coplanares. Em consequência, esses vetores determinam um paralelepípedo (Figura 2.4) cujo volume é dado por:

$$V_{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}} = |(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})|$$



O paralelepípedo, por sua vez, pode ser repartido em dois prismas triangulares de mesmo tamanho (conforme 2.4), e, portanto, o volume V_p de cada prisma é a metade do volume V do paralelepípedo:

$$V_p = \frac{1}{2}V$$

Por outro lado, da Geometria Espacial sabemos que o prisma pode ser repartido em três pirâmides de mesmo volume, sendo uma delas o tetraedro $ABCD$. Assim, o volume V_t do tetraedro é um terço do volume do prisma, ou seja,

$$V_t = \frac{1}{3}V_p = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}V = \frac{1}{6}V$$

Logo, o volume V_t do tetraedro é dado por:

$$V_{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}} = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})|$$

3 Problemas

1. Dados os vetores $\vec{u} = (3, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, 2, 2)$ e $\vec{w} = (2, 0, -3)$, calcular:

- **(a)** $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

  Resposta:

  O produto misto pode ser calculado como o determinante da matriz formada pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$:

  $$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

  Calculando o determinante:

  $$= 3 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

  $$= 3\,(2(-3) - 2(0)) + 1\,(1(-3) - 2(2)) + 1\,(1(0) - 2(2))$$
  $$= 3\,(-6) + 1\,(-3 - 4) + 1\,(0 - 4)$$
  $$= -18 + (-7) + (-4) = -29$$

  Portanto:

  $$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -29$$

- **(b)** $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$

  Resposta:

  O produto misto $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$ é dado por:

  $$(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

  Calculando o determinante:

  $$= 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

  $$= 2\,((-1)(2) - (1)(2)) + (-3)\,((3)(2) - (-1)(1))$$
  $$= 2\,(-2 - 2) + (-3)\,(6 + 1)$$
  $$= 2\,(-4) + (-3)\,(7)$$
  $$= -8 - 21 = -29$$

  Portanto:

  $$(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = -29$$

2. Sabendo que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -5$, calcular:

- **(a)** $(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$

  Resposta:

  O produto misto $(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$ é igual ao produto misto $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ com os vetores permutados. Como a permutação dos vetores inverte o sinal do produto misto, temos:

  $$(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(-5) = 5$$

- **(b)** $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$

  Resposta:

  Da mesma forma, a permutação dos vetores $(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$ é a mesma que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ trocando a posição de dois vetores, o que também resulta na inversão do sinal. Portanto:

  $$(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = -(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 5$$

- **(c)** $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$

  Resposta:

  A permutação dos vetores no produto misto $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$ inverte o sinal do produto misto original $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Logo:

  $$(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(-5) = -5$$

- **(d)** $\vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u})$

  Resposta:

  O produto escalar $\vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u})$ é equivalente ao produto misto $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$. Logo, temos:

  $$\vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = -5$$

3. Sabendo que $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 2$, calcular:

- **(a)** $\vec{u} \cdot (\vec{w} \times \vec{v})$

  Resposta:

  $$\vec{u} \cdot (\vec{w} \times \vec{v}) = -\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = -2$$

- **(b)** $\vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u})$

  Resposta:

  $$\vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) = \vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) = 2$$

- **(c)** $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot (\vec{u})$

  Resposta:

  $$(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot (\vec{u}) = 2$$

- **(d)** $(\vec{u} \times \vec{w}) \cdot (3\vec{v})$

  Resposta:

  $$(\vec{u} \times \vec{w}) \cdot (3\vec{v}) = 3 \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) \cdot \vec{v} = 3 \cdot (-2) = -6$$

- **(e)** $\vec{u} \cdot (2\vec{w} \times \vec{v})$

  Resposta:

  $$\vec{u} \cdot (2\vec{w} \times \vec{v}) = 2 \cdot \vec{u} \cdot (\vec{w} \times \vec{v}) = 2 \cdot (-2) = -4$$

- **(f)** $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}\times\vec{w})$

  Resposta:

$$
\begin{aligned}
(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}\times\vec{w}) &= \vec{u}\cdot(\vec{u}\times\vec{w})+\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{w})\\
\vec{u}\cdot(\vec{u}\times\vec{w}) &= 0\\
(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}\times\vec{w}) &= \vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{w}) = -2
\end{aligned}
$$

4. Sabendo que $(\vec{u},\vec{w},\vec{x})=2$ e $(\vec{v},\vec{w},\vec{x})=5$, calcular:

- **(a)** $(\vec{u},\vec{x},-\vec{w})$

  Resposta:

$$(\vec{u},\vec{x},-\vec{w}) = -(\vec{u},\vec{w},\vec{x}) = -2$$

- **(b)** $(3\vec{u},3\vec{w},-2\vec{x})$

  Resposta:

$$(3\vec{u},3\vec{w},-2\vec{x}) = 3\cdot(\vec{u},\vec{w},\vec{x}) - 2\cdot(\vec{v},\vec{w},\vec{x}) = 3\cdot 2 - 2\cdot 5 = 6-10 = -36$$

- **(c)** $(2\vec{u}+4\vec{v},\vec{w},\vec{x})$

  Resposta:

$$(2\vec{u}+4\vec{v},\vec{w},\vec{x}) = 2\cdot(\vec{u},\vec{w},\vec{x}) + 4\cdot(\vec{v},\vec{w},\vec{x}) = 2\cdot 2 + 4\cdot 5 = 4+20 = 24$$

- **(d)** $(5\vec{u}-3\vec{v},2\vec{w},\vec{x})$

  Resposta:

$$(5\vec{u}-3\vec{v},2\vec{w},\vec{x}) = 5\cdot(\vec{u},\vec{w},\vec{x}) - 3\cdot(\vec{v},\vec{w},\vec{x}) = 5\cdot 2 - 3\cdot 5 = 10-15 = -10$$

5. Verificar se são coplanares os vetores:

- **(a)** $\vec{u} = (1, -1, 2)$, $\vec{v} = (2, 2, 1)$ e $\vec{w} = (-2, 0, -4)$
  Resposta:

  O produto vetorial entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -8\hat{i} + 6\hat{j} + 4\hat{k}$$

  O produto escalar de $\vec{u}$ com $\vec{v} \times \vec{w}$ é:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (1, -1, 2) \cdot (-8, 6, 4) = -8 - 6 + 8 = -6$$

  Como o produto misto não é zero, os vetores **não são coplanares**.

- **(b)** $\vec{u} = (2, -1, 3)$, $\vec{v} = (3, 1, -2)$ e $\vec{w} = (7, -1, 4)$
  Resposta:

  O produto vetorial entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 7 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 2\hat{i} - 26\hat{j} - 10\hat{k}$$

  O produto escalar de $\vec{u}$ com $\vec{v} \times \vec{w}$ é:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (2, -1, 3) \cdot (2, -26, -10) = 4 + 26 - 30 = 0$$

  Como o produto misto é zero, os vetores **são coplanares**.

References

[1] Paulo Winterle. *Vetores e Geometria Analítica*. 2nd ed. São Paulo: Makron, 2014. ISBN: 9788543002392. URL: https://books.google.com.br/books?id=UPIyHQAACAAJ.

[2] Alfredo Steimbruch and Paulo Winterle. *Geometria Analítica*. 2nd ed. São Paulo: Pearson Universidades, 1987. ISBN: 9780074504093. URL: https://books.google.com.br/books?id=tOLfGwAACAAJ.