



Geometria Analítica
Prof. Jahina Fagundes de Assis Hattori
31/03/2025
Lista de Exercícios #1

Gabriel dos Santos Schmitz
(RA: 2487438)

Este documento foi criado usando L^AT_EX
<https://github.com/gabrielzschmitz/uni/tree/main/ga/lista1>.

1 Introdução

Irei neste documento debruçar-me-ei sobre a Geometria Analítica desde a noção intuitiva de tratamento geométrico até o produto misto entre vetores. Farei isto baseando-me nos livros *Vetores e Geometria Analítica* [1] e *Geometria Analítica* [2]. Conforme a bibliografia usada no curso Geometria Analítica na UTFPR de Toledo.

2 Vetores

Existem dois tipos de grandezas: **escalares** e **vetoriais**.

As grandezas **escalares** são completamente definidas por um número real acompanhado de uma unidade adequada, como comprimento, volume e temperatura.

Já as grandezas **vetoriais** necessitam de três elementos para sua completa definição:

- **Módulo:** intensidade do vetor;
- **Direção:** determinada por uma reta e todas as suas paralelas (Figura 1);
- **Sentido:** indica para onde o vetor aponta em sua direção (Figura 2).

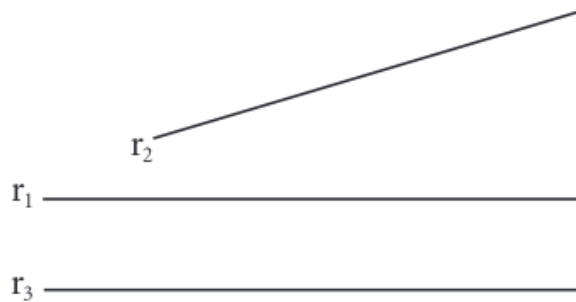


Fig. 1: Direção de um vetor



Fig. 2: Sentido de um vetor

2.1 Representação de Vetores

Um vetor pode ser representado por um **segmento orientado**, onde:

- O **módulo** é o comprimento do segmento;
- A **direção** é definida pelo ângulo do vetor;
- O **sentido** é indicado pela extremidade do segmento (Figura 3).

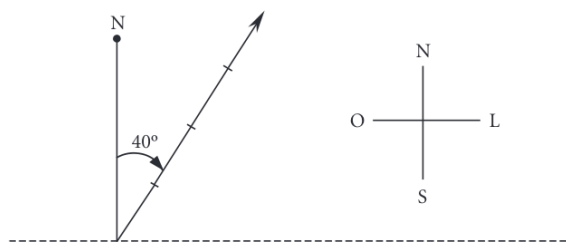


Fig. 3: Representação de um vetor

Dois vetores com mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido são equivalentes (Figura 4). Isso significa que um vetor pode ser **transladado** para qualquer ponto do espaço sem alterar suas propriedades, sendo chamado de **vetor livre** (Figura 5).

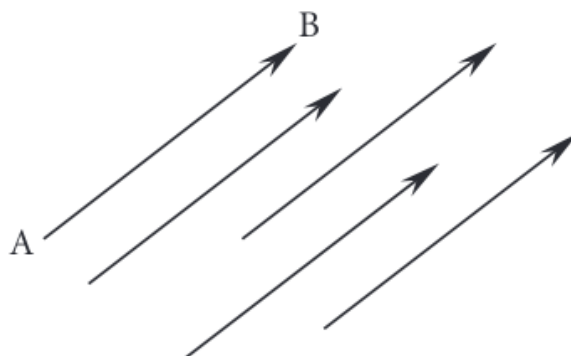


Fig. 4: Vetores equivalentes

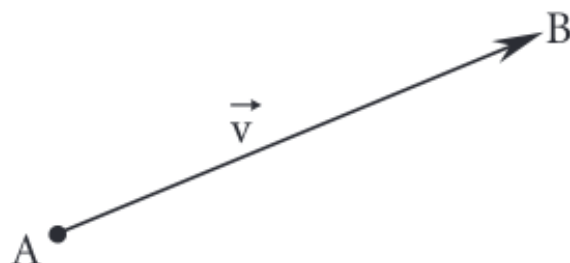


Fig. 5: Vetor livre

2.2 Casos Particulares de Vetores

- Vetores paralelos (\mathbf{u}/\mathbf{v}): possuem a mesma direção (Figura 6).

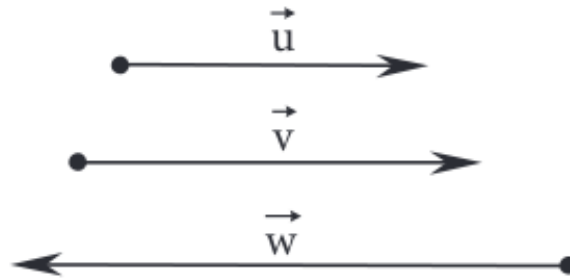


Fig. 6: Vetores paralelos

- **Vetores iguais** ($\mathbf{u} = \mathbf{v}$): possuem mesmo módulo, direção e sentido.
- **Vetor nulo** ($\mathbf{0}$): não possui direção nem sentido definidos e é paralelo a qualquer vetor.
- **Vetores opostos** ($-\mathbf{v}$): mesma direção e módulo, mas sentidos contrários (Figura 7).

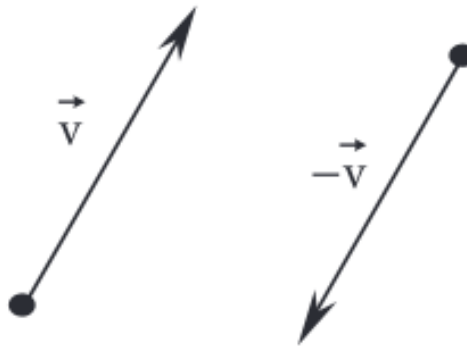


Fig. 7: Vetores opostos

- **Vetor unitário (versor)**: possui módulo igual a 1 (Figura 8).

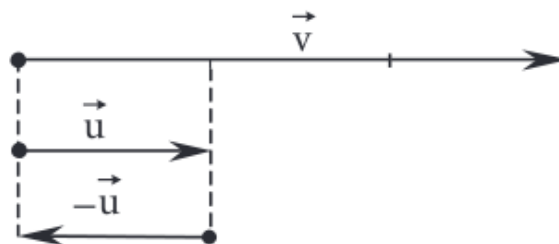


Fig. 8: Versor de um vetor

- **Vetores ortogonais** ($\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$): formam um ângulo reto entre si (Figura 9).

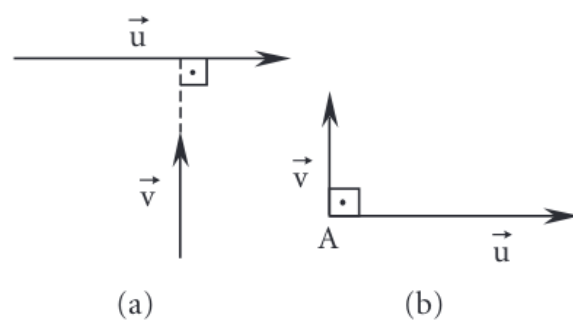


Fig. 9: Vetores ortogonais

- **Vetores coplanares:** pertencem ao mesmo plano (Figuras 10 e 11).

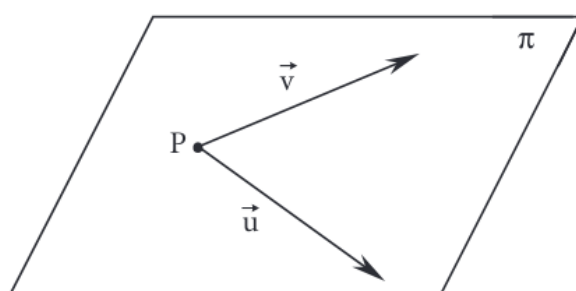


Fig. 10: Vetores coplanares (caso 1)

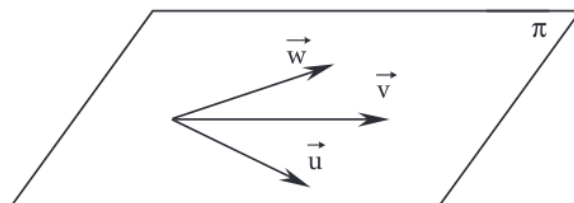


Fig. 11: Vetores coplanares (caso 2)

2.3 Exemplos

1. A Figura 12 é constituída de nove quadrados congruentes (de mesmo tamanho). Decidir se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações:

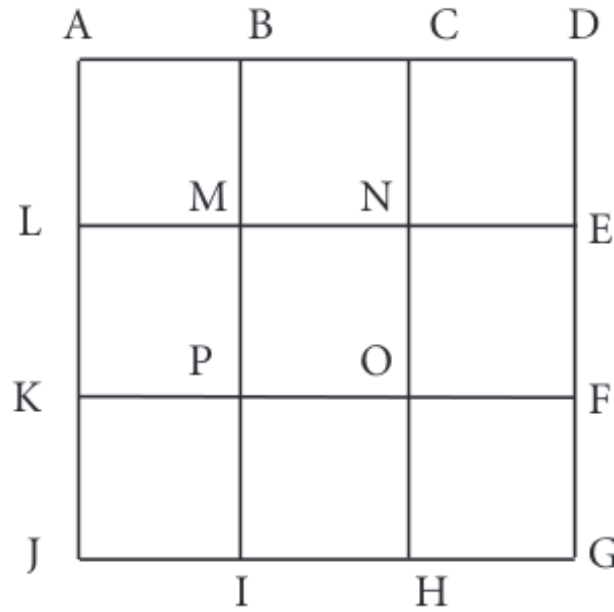


Fig. 12:

- | | | | |
|--|---|---|--|
| • (a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OF}$
Resposta:
V | • (f) $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{MG}$
Resposta:
V | • (k) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{EG}$
Resposta:
V | • (p) $ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FP} $
Resposta:
V |
| • (b) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PH}$
Resposta:
V | • (g) $\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{FI}$
Resposta:
V | • (l) $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BL}$
Resposta:
V | • (q) $ \overrightarrow{IF} = \overrightarrow{MF} $
Resposta:
V |
| • (c) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OP}$
Resposta:
F | • (h) $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{HI}$
Resposta:
V | • (m) $\overrightarrow{PE} \perp \overrightarrow{EC}$
Resposta:
F | • (r) $ \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AC} $
Resposta:
F |
| • (d) $\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{MC}$
Resposta:
F | • (i) $\overrightarrow{JO} \parallel \overrightarrow{LD}$
Resposta:
F | • (n) $\overrightarrow{PN} \perp \overrightarrow{NB}$
Resposta:
V | • (s) $ \overrightarrow{AO} = 2 \overrightarrow{NP} $
Resposta:
V |
| • (e) $\overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{ED}$
Resposta:
V | • (j) $\overrightarrow{AJ} \parallel \overrightarrow{FG}$
Resposta:
V | • (o) $\overrightarrow{PN} \perp \overrightarrow{AM}$
Resposta:
V | • (t) $ \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BL} $
Resposta:
V |

2. A Figura 13 representa um paralelepípedo retângulo. Decidir se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações:

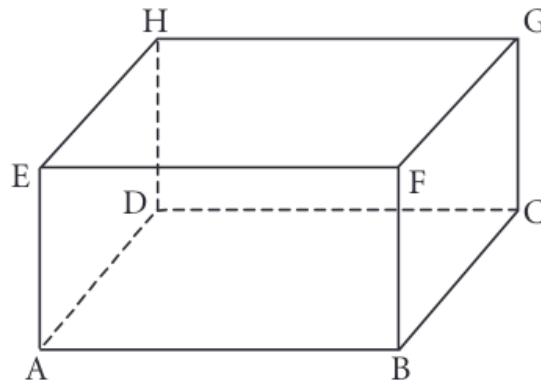


Fig. 13:

• (a) $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BF}$

Resposta:

V

• (b) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{HG}$

Resposta:

F

• (c) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CG}$

Resposta:

V

• (d) $\overrightarrow{AF} \perp \overrightarrow{BC}$

Resposta:

V

• (e) $-\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{HF}|$

Resposta:

V

• (f) $-\overrightarrow{AG} = |\overrightarrow{DF}|$

Resposta:

V

• (g) $\overrightarrow{BG} \parallel \overrightarrow{ED}$

Resposta:

F

• (h) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ e \overrightarrow{CG} são coplanares

Resposta:

F

• (i) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{FG}$ e \overrightarrow{EG} são coplanares

Resposta:

V

• (j) $\overrightarrow{EG}, \overrightarrow{CB}$ e \overrightarrow{HF} são coplanares

Resposta:

V

• (k) $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DB}$ e \overrightarrow{FG} são coplanares

Resposta:

V

• (l) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BG}$ e \overrightarrow{CF} são coplanares

Resposta:

F

• (m) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ e \overrightarrow{CF} são coplanares

Resposta:

V

• (n) \overrightarrow{AE} é ortogonal ao plano ABC

Resposta:

V

• (o) \overrightarrow{AV} é ortogonal ao plano BCG

Resposta:

V

• (p) \overrightarrow{DC} é paralelo ao plano HEF

Resposta:

V

3 Adição de Vetores

Consideremos os vetores \vec{u} e \vec{v} , cuja soma $\vec{u} + \vec{v}$ queremos encontrar. Escolhemos um ponto A e, com origem nele, traçamos um segmento orientado AB representando \vec{u} . A partir da extremidade B , traçamos o segmento orientado BC representando \vec{v} . O vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$ é então representado pelo segmento orientado de origem A e extremidade C na Figura 14.

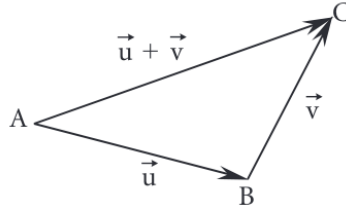


Fig. 14:

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} \text{ ou } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Se $\vec{u} \parallel \vec{v}$, a obtenção da soma segue o mesmo princípio, ilustrado quando os vetores têm o mesmo sentido ou sentidos opostos como mostrado na Figura 15.

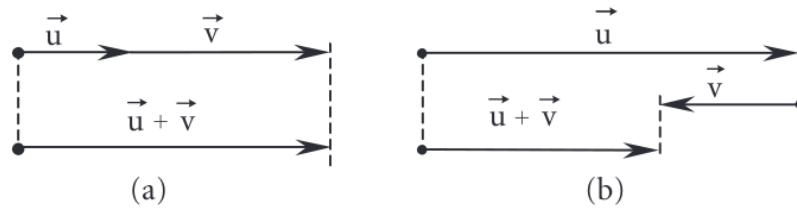


Fig. 15:

Caso \vec{u} e \vec{v} não sejam paralelos, podemos utilizar o método do paralelogramo. Representamos $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ a partir da mesma origem A. Construímos o paralelogramo ABCD, e o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$ é a diagonal de origem A como vemos na Figura 16.

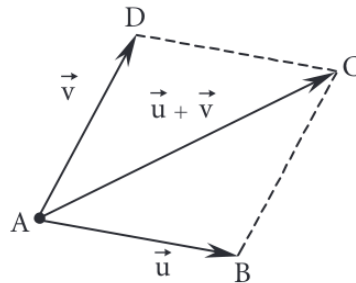


Fig. 16:

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC} \text{ ou } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

Para a soma de três ou mais vetores, o procedimento é análogo. Se a extremidade do último vetor coincidir com a origem do primeiro, a soma resulta no vetor nulo (Figura 17):

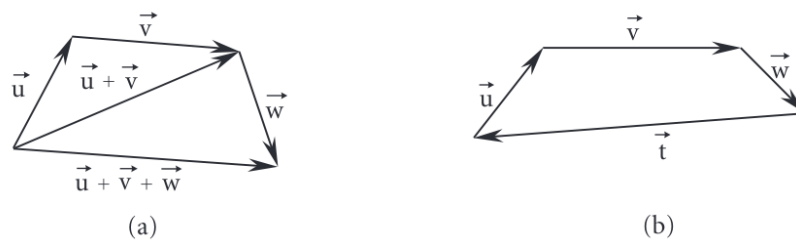


Fig. 17:

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \vec{t} = \vec{0}.$$

A adição vetorial possui as seguintes propriedades:

- **Comutativa:** $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
- **Associativa:** $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.
- **Elemento neutro:** $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$.
- **Elemento oposto:** $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

A diferença entre vetores é definida como:

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}).$$

No paralelogramo formado por \vec{u} e \vec{v} , a soma $\vec{u} + \vec{v}$ corresponde a uma das diagonais, enquanto a diferença $\vec{u} - \vec{v}$ é representada pela outra diagonal (Figura 18).

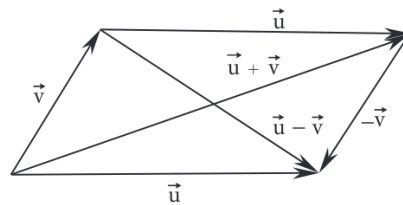
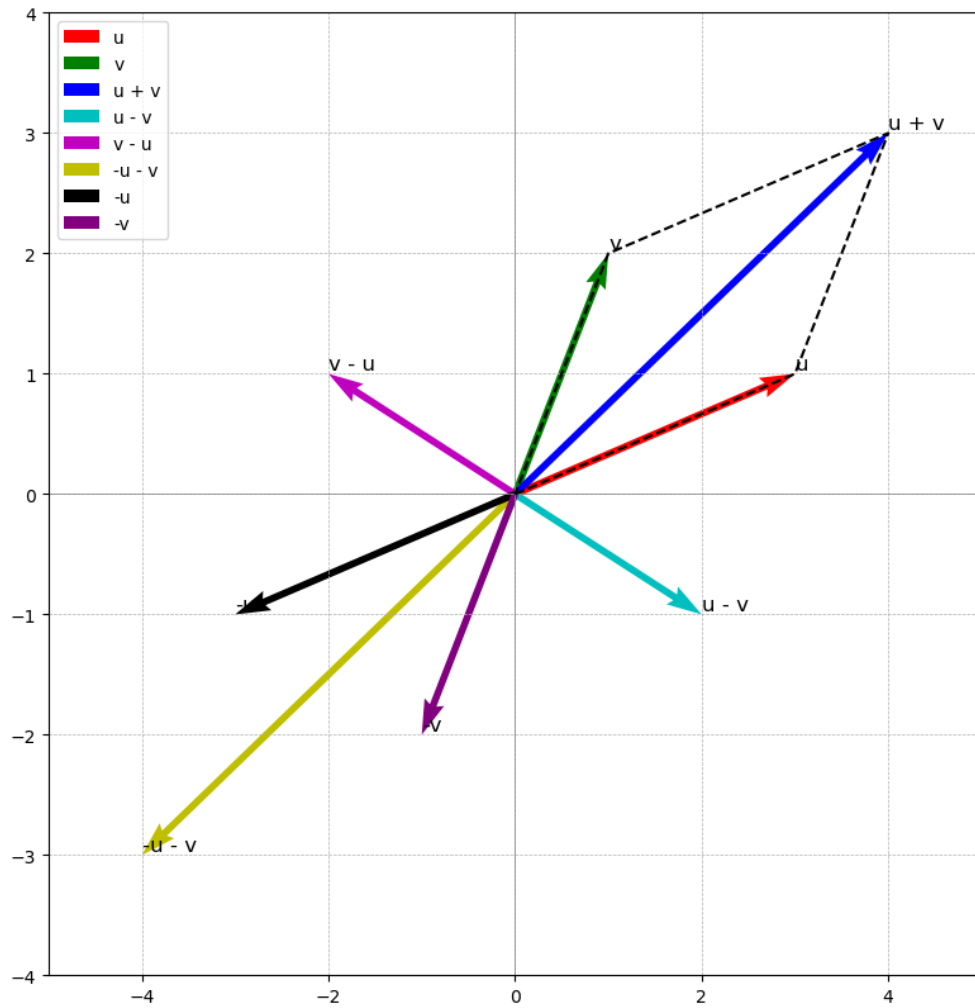


Fig. 18:

3.1 Exemplos

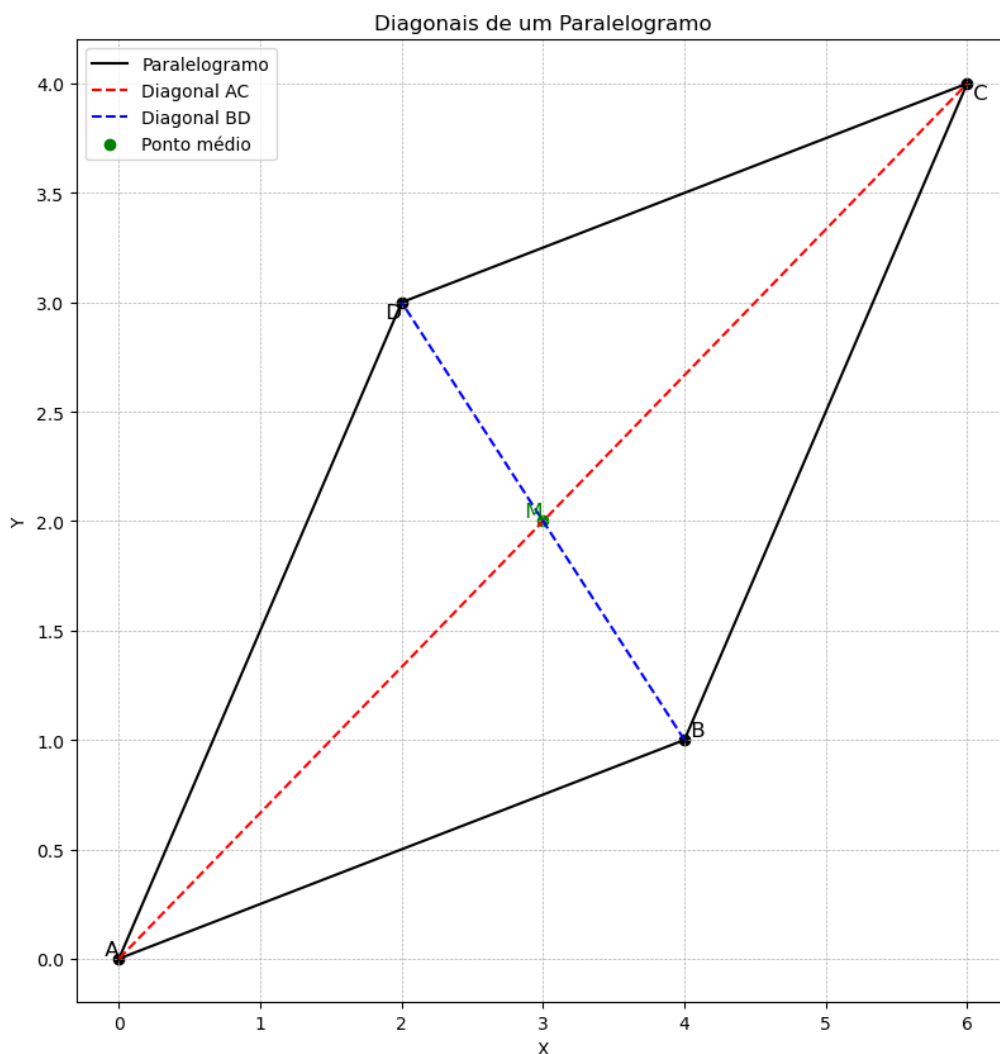
3. Dados dois vetores \vec{u} e \vec{v} não paralelos, construir no mesmo gráfico os vetores $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{v} - \vec{u}$ e $-\vec{u} - \vec{v}$, todos com origem em um mesmo ponto.

Resposta:



4. Provar que as diagonais de um paralelogramo têm o mesmo ponto médio.

Resposta:



Consideremos o paralelogramo $ABCD$ de diagonais AC e BD e seja M o ponto médio de AC , o que equivale a dizer que

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}.$$

Provemos que M é também ponto médio de BD :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BM} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} && \text{(definição de soma)} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MA} && \text{(igualdade de vetores)} \\ &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} && \text{(propriedade comutativa)} \\ &= \overrightarrow{MD} && \text{(definição de soma)} \end{aligned}$$

Como $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}$, conclui-se que M é ponto médio de BD .

4 Multiplicação por Escalar

Dado um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$ e um número real $\alpha \neq 0$, define-se o produto $\alpha \vec{v}$ como o vetor que satisfaz (Figura 19):

- **Módulo:** $|\alpha \vec{v}| = |\alpha| |\vec{v}|$;
- **Direção:** $\alpha \vec{v} \parallel \vec{v}$;
- **Sentido:** $\alpha \vec{v}$ tem o mesmo sentido de \vec{v} se $\alpha > 0$, e sentido contrário se $\alpha < 0$.

Se $\alpha = 0$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, então $\alpha \vec{v} = \vec{0}$.

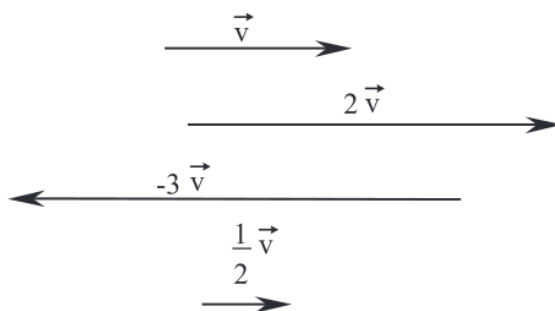


Fig. 19: Multiplicação por escalar

Além disso:

- Todos os vetores $\alpha \vec{v}$, para $\alpha \in \mathbb{R}$, pertencem a uma mesma reta paralela a \vec{v} .
- Se $\vec{u} \parallel \vec{v}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$, então existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \alpha \vec{v}$.
- A cada vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$, associamos dois vetores unitários paralelos a \vec{v} . O versor de \vec{v} é dado por:

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Exemplo: $|\vec{v}| = 5$, o versor de $\vec{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

4.1 Exemplos

5. Representados os vetores \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} como na Figura 20, obter graficamente o vetor \vec{x} tal que $\vec{x} = 2\vec{u} + 3\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$

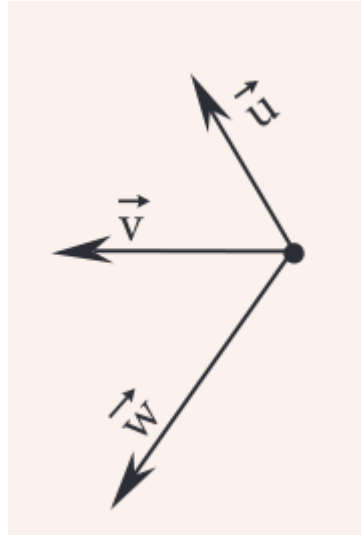
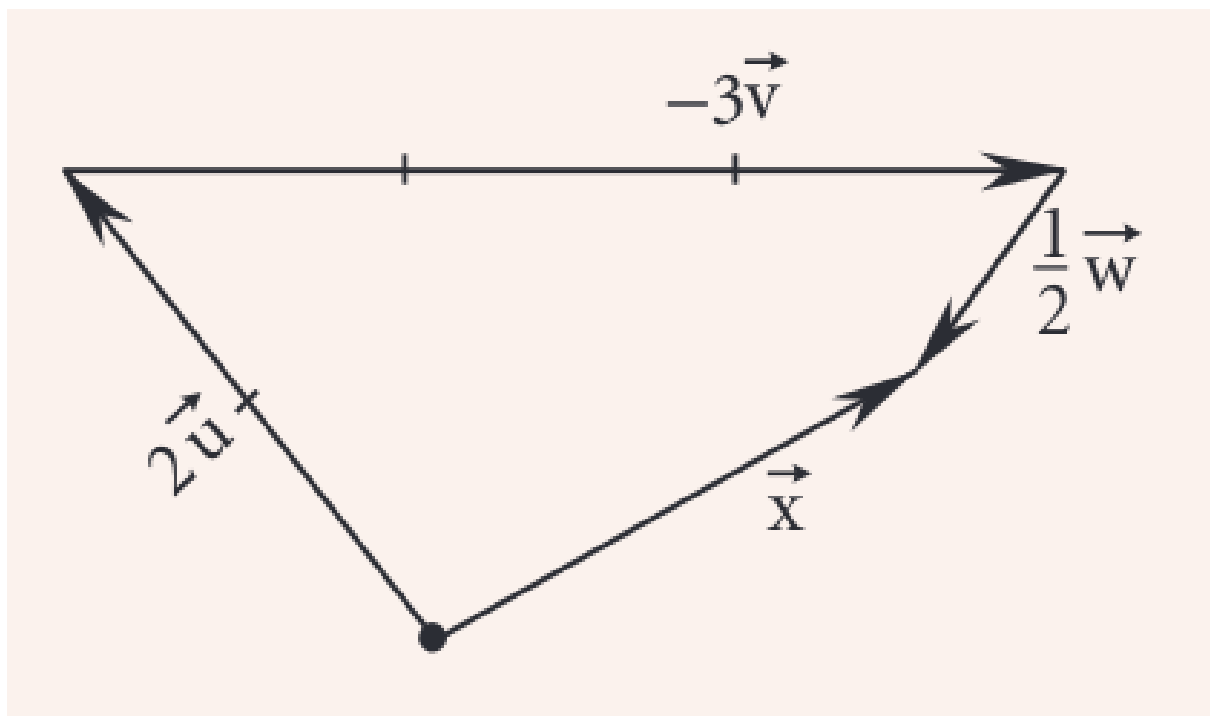


Fig. 20:

Resposta:



6. Demonstrar que o segmento cujos extremos são os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e igual à sua metade.

Resposta:

Seja o triângulo ABC e M e N os pontos médios dos lados CA e CB , respectivamente (Figura 21). Pela figura, tem-se

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

Logo, conclui-se que $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{AB}$ e $|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$.

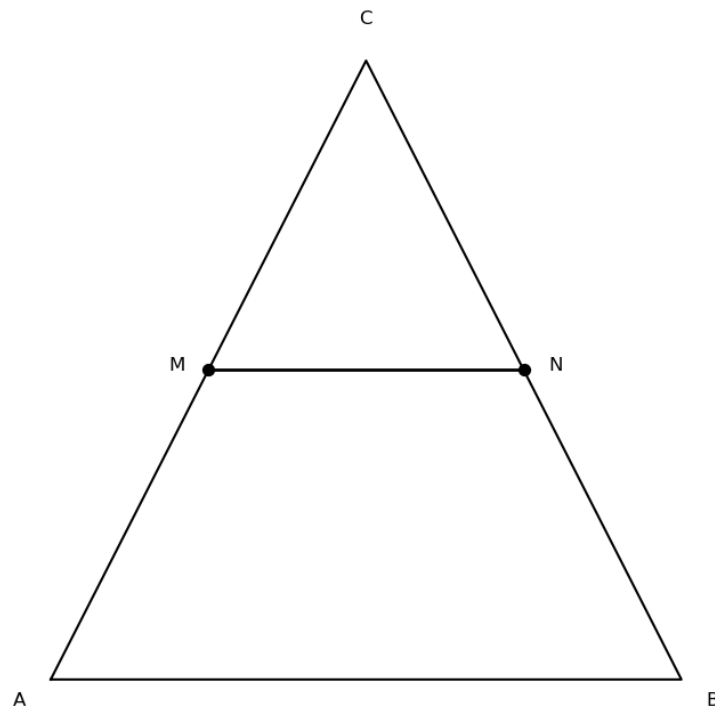


Fig. 21:

5 Ângulo de Dois Vetores

O ângulo entre dois vetores não nulos \vec{u} e \vec{v} é o ângulo θ formado pelas semirretas OA e OB com a mesma origem O (Figura 22), onde $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ e $0 \leq \theta \leq \pi$ (em radianos) ou $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$.

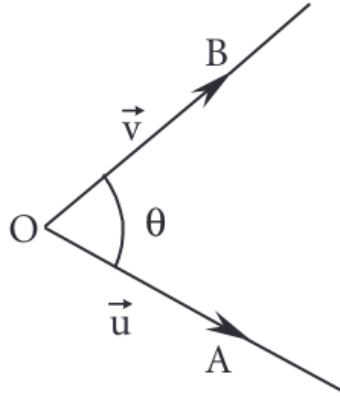


Fig. 22:

Se $\vec{u} \parallel \vec{v}$ e possuem o mesmo sentido, então $\theta = 0$, como ocorre com \vec{u} e $2\vec{u}$ (Figura 23).

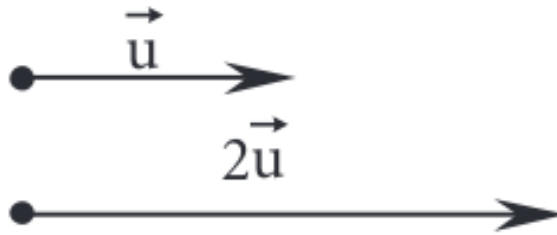


Fig. 23:

Se $\vec{u} \parallel \vec{v}$ mas possuem sentidos contrários, então $\theta = \pi$, como no caso de \vec{u} e $-3\vec{u}$ (Figura 24).

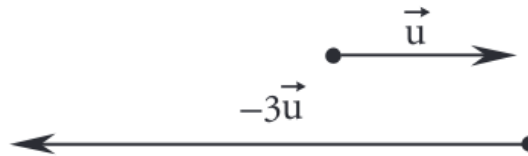


Fig. 24:

6 Problemas

7. A Figura 25 apresenta o losango EFGH inscrito no retângulo ABCD, sendo O o ponto de interseção das diagonais desse losango. Decidir se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações:

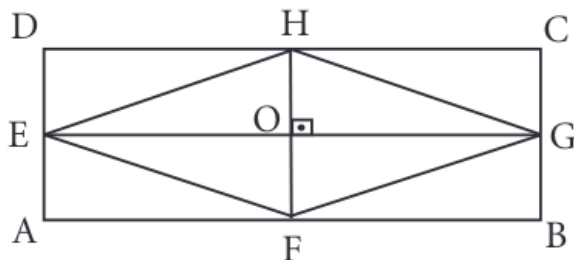


Fig. 25:

- (a) $\overrightarrow{EO} = \overrightarrow{OG}$

Resposta:

V

- (b) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CH}$

Resposta:

F

- (c) $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{HG}$

Resposta:

V

- (d)

$$|C - O| = |O - B|$$

Resposta:

V

- (e)

$$|H - O| = |H - D|$$

Resposta:

F

- (f)

$$H - E = O - C$$

Resposta:

F

- (g) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$

Resposta:

V

- (h) $|\overrightarrow{OA}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{DB}|$

Resposta:

V

- (i) $\overrightarrow{AF} \parallel \overrightarrow{CD}$

Resposta:

V

- (j) $\overrightarrow{GF} \parallel \overrightarrow{HG}$

Resposta:

F

- (k) $\overrightarrow{AO} \parallel \overrightarrow{OC}$

Resposta:

V

- (l) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OH}$

Resposta:

V

- (m) $\overrightarrow{EO} \perp \overrightarrow{CB}$

Resposta:

V

- (n) $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{HF}$

Resposta:

F

- (o) $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{FE}$

Resposta:

V

8. Decidir se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações:

- (a) Se $\vec{u} = \vec{v}$, então $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

Resposta:

V

- (b) Se $|\vec{u}| = |\vec{v}|$, então $\vec{u} = \vec{v}$.

Resposta:

F

- (c) Se $\vec{u} \parallel \vec{v}$, então $\vec{u} = \vec{v}$.

Resposta:

F

- (d) Se $\vec{u} = \vec{v}$, então $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

Resposta:

V

- (e) Se $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, então $|\vec{w}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$.

Resposta:

F

- (f) $|\vec{w}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$, então \vec{u} , \vec{v} e \vec{w} são paralelos.

Resposta:

V

- (g) Se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, então ABCD (nessa ordem) é paralelogramo.

Resposta:

V

- (h) $|5\vec{v}| = |-5\vec{v}| = 5|\vec{v}|$.

Resposta:

V

- (i) Os vetores $3\vec{v}$ e $-4\vec{v}$ são paralelos e de mesmo sentido.

Resposta:

F

- (j) Se $\vec{u} \parallel \vec{v}$, $|\vec{u}| = 2$ e $|\vec{v}| = 4$, então $\vec{v} = 2\vec{u}$ ou $\vec{v} = -2\vec{u}$.

Resposta:

V

- (k) Se $|\vec{v}| = 3$, o versor de $-10\vec{v}$ é $-\frac{\vec{v}}{3}$.

Resposta:

V

9. Com base na Figura 25, determinar os vetores a seguir, expressando-os com origem no ponto A:

• (a) $\vec{OC} + \vec{CH}$

Resposta:

\vec{AE}

• (b) $\vec{EH} + \vec{FG}$

Resposta:

\vec{AC}

• (c) $2\vec{AE} + 2\vec{AF}$

Resposta:

$2\vec{AO}$

• (d) $\vec{EH} + \vec{EF}$

Resposta:

\vec{AB}

• (e) $\vec{EO} + \vec{BG}$

Resposta:

\vec{AO}

• (f) $2\vec{OE} + 2\vec{OC}$

Resposta:

$2\vec{AE}$

• (g) $\frac{1}{2}\vec{BC} + \vec{BC}$

Resposta:

$\vec{AD} + \vec{AE}$

• (h) $\vec{FE} + \vec{FG}$

Resposta:

\vec{AD}

• (i) $\vec{OG} - \vec{HO}$

Resposta:

\vec{AO}

• (j) $\vec{AF} + \vec{FO} + \vec{AO}$

Resposta:

\vec{AC}

10. O paralelogramo $ABCD$ (Figura 26) é determinado pelos vetores \vec{AB} e \vec{AD} , sendo M e N os pontos médios dos lados \overline{DC} e \overline{AB} , respectivamente. Determinar:

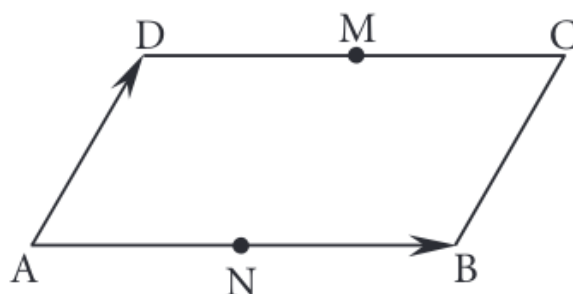


Fig. 26:

• (a) $\vec{AD} + \vec{AB}$

Resposta:

\vec{AC}

• (b) $\vec{BA} + \vec{DA}$

Resposta:

\vec{CA}

• (c) $\vec{AC} - \vec{BC}$

Resposta:

\vec{AB}

• (d) $\vec{AN} + \vec{BC}$

Resposta:

\vec{AM}

• (e) $\vec{MD} + \vec{MB}$

Resposta:

\vec{DN}

• (f) $\vec{BM} - \frac{1}{2}\vec{DC}$

Resposta:

\vec{DB}

11. Apresentar, graficamente, um representante do vetor $\vec{u} - \vec{v}$ nos casos:

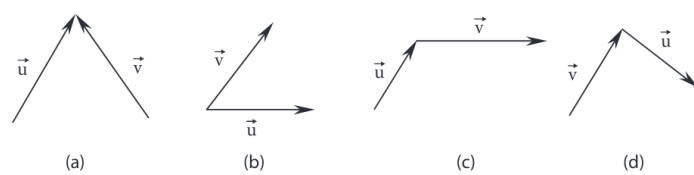


Fig. 27:

Resposta:

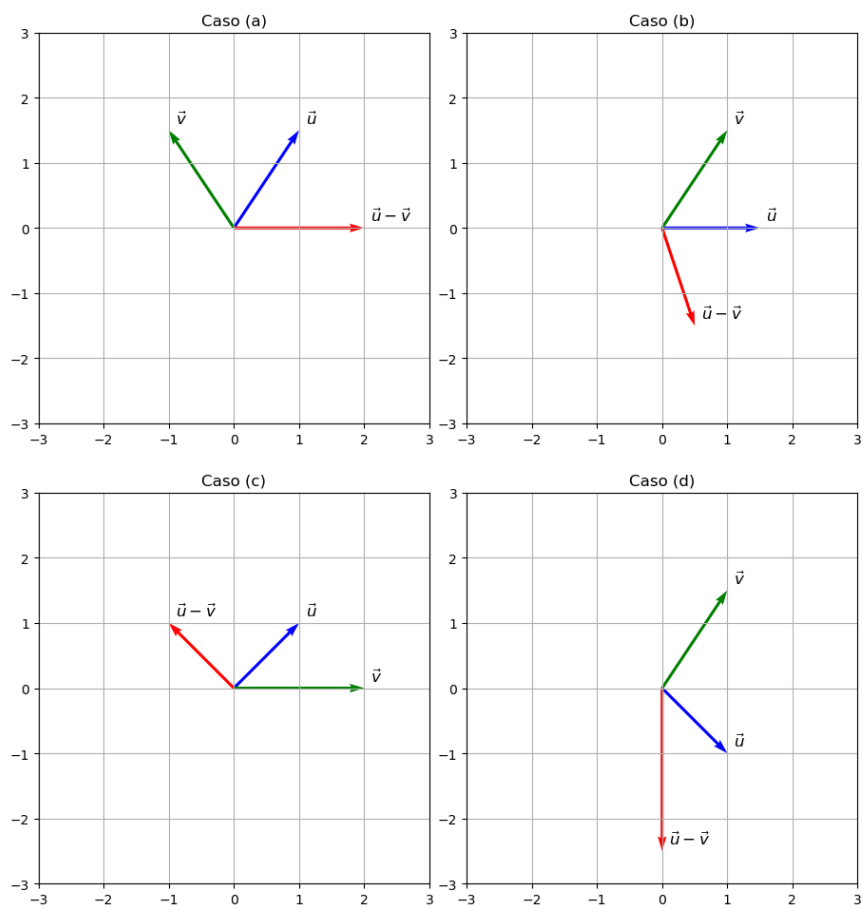


Fig. 28:

12. Determinar o vetor \vec{x} nas figuras:

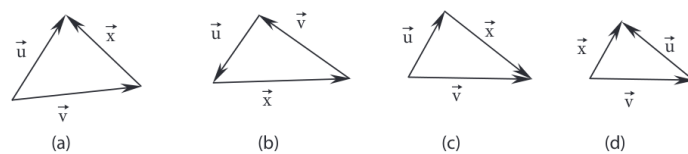


Fig. 29:

(a) **Resposta:**

$$\vec{u} - \vec{v}$$

(b) **Resposta:**

$$-(\vec{u} + \vec{v})$$

(c) **Resposta:**

$$\vec{v} - \vec{u}$$

(d) **Resposta:**

$$\vec{u} + \vec{v}$$

13. Dados três pontos A, B e C não colineares, como na Figura 30, representar o vetor \vec{x} nos casos:

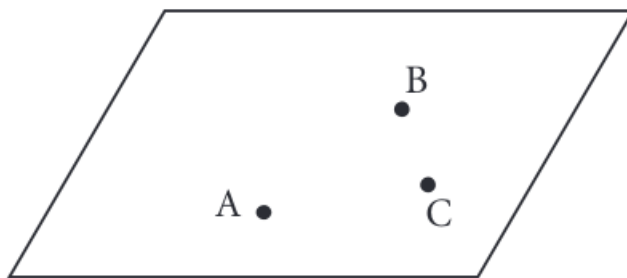


Fig. 30:

- (a) $\vec{x} = \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}$
- (b) $\vec{x} = 2\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{BA}$
- (c) $\vec{x} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}$
- (d) $\vec{x} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CB}$

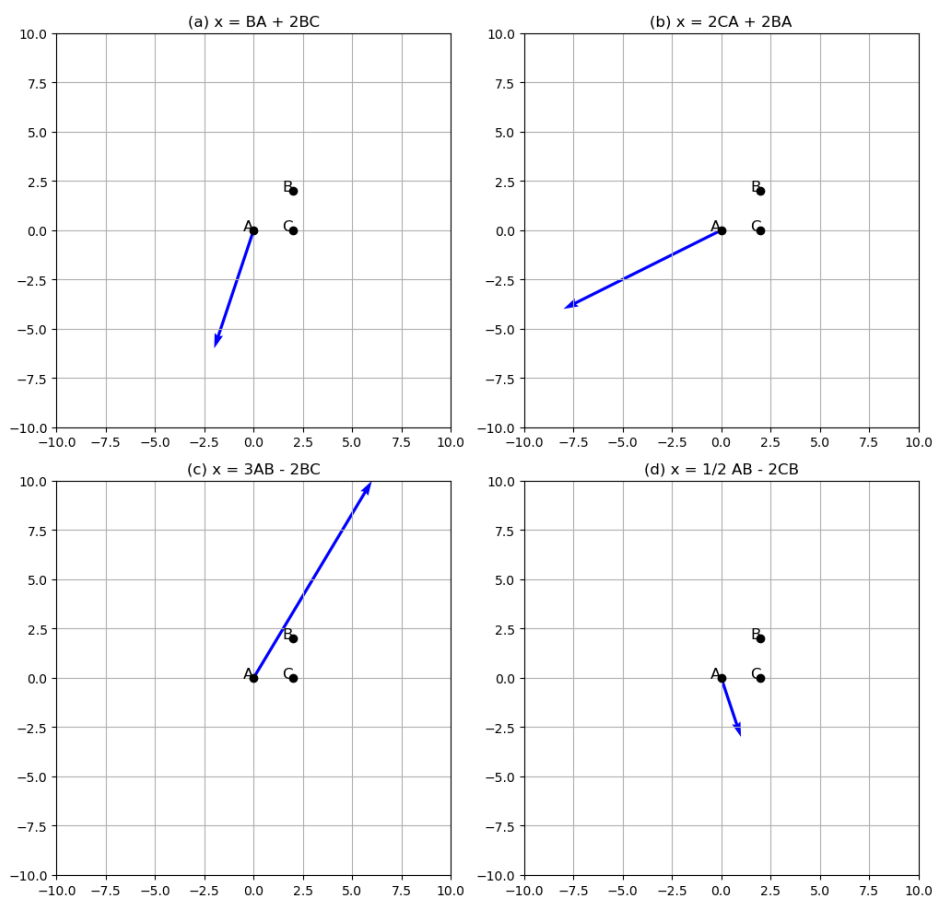


Fig. 31:

References

- [1] Paulo Winterle. *Vetores e Geometria Analítica*. 2nd ed. São Paulo: Makron, 2014. ISBN: 9788543002392. URL: <https://books.google.com.br/books?id=UPIyHQAACAAJ>.
- [2] Alfredo Steimbruch and Paulo Winterle. *Geometria Analítica*. 2nd ed. São Paulo: Pearson Universidades, 1987. ISBN: 9780074504093. URL: <https://books.google.com.br/books?id=tOLfGwAACAAJ>.