UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Geometria Analítica
Prof. Jahina Fagundes de Assis Hattori
14/04/2025
Lista de Exercícios #2

Gabriel dos Santos Schmitz
(RA: 2487438)

Este documento foi criado usando LaTeX
https://github.com/gabrielzschmitz/uni/tree/main/ga/lista2.

1 Introdução

Irei neste documento debruçar-me-ei sobre a Geometria Analítica desde a noção intuitiva de tratamento geométrico até o produto misto entre vetores. Farei isto baseando-me nos livros *Vetores e Geometria Analítica* [1] e *Geometria Analítica* [2]. Conforme a bibliografia usada no curso Geometria Analítica na UTFPR de Toledo.

2 Tratamento Algébrico

2.1 Vetores no Plano

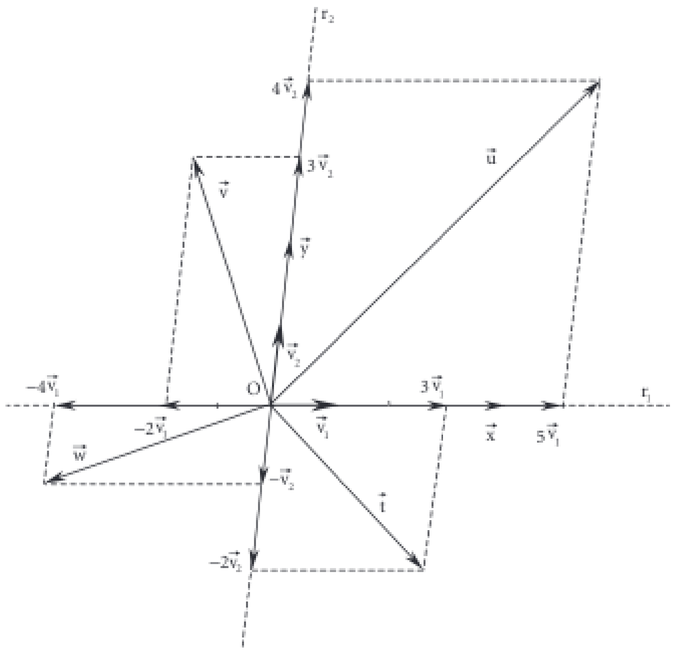


Fig. 1: Vetores expressos em $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$

Na Figura 1, os vetores são combinações lineares de $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$:

$$\begin{cases} \vec{u} = 5\vec{v_1} + 4\vec{v_2} \\ \vec{v} = 2\vec{v_1} - 3\vec{v_2} \\ \vec{w} = -4\vec{v_1} - 3\vec{v_2} \\ \vec{t} = \vec{v_1} + 2\vec{v_2} \\ \vec{x} = 3\vec{v_1} - 2\vec{v_2} \\ \vec{y} = 4\vec{v_2} \end{cases}$$

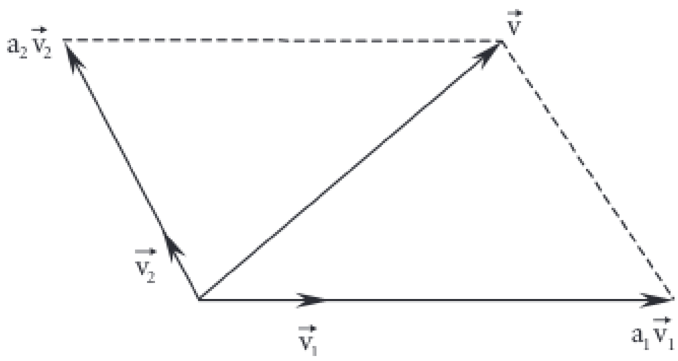


Fig. 2: Representação vetorial no plano

Para quaisquer $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não paralelos (Figura 2), todo vetor $\vec{v}$ do plano pode ser expresso como:

$$\vec{v} = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} \tag{1}$$

O conjunto $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ forma uma base, onde $(a_1, a_2)_{\mathcal{B}}$ são as coordenadas de $\vec{v}$. Bases ortonormais satisfazem $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ com $\|\vec{e}_i\| = 1$.

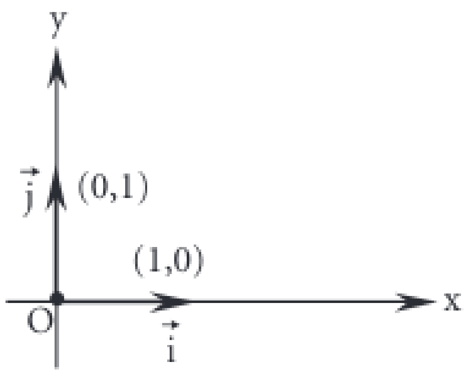


Fig. 3: Base canônica

A base canônica $\mathcal{C} = \{\vec{i} = (1,0), \vec{j} = (0,1)\}$ (Figura 3) permite expressar qualquer vetor como:

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} = (x, y) \tag{2}$$

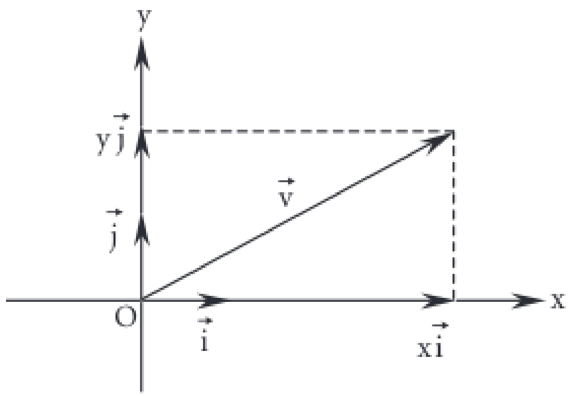


Fig. 4: Vetor no plano cartesiano

Na Figura 4, x é a abscissa e y a ordenada de $\vec{v}$. Exemplos notáveis:

$$\begin{aligned} 3\vec{i} - 5\vec{j} &= (3, -5) \\ 3\vec{j} &= (0, 3) \\ -4\vec{i} &= (-4, 0) \\ \vec{0} &= (0, 0) \end{aligned}$$

2.2 Igualdade de Vetores

Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$, escrevendo-se $\vec{u} = \vec{v}$.

Por exemplo: o vetor $\vec{u} = (x + 1, 4)$ é igual ao vetor $\vec{v} = (5, 2y - 6)$ se

$$x + 1 = 5 \quad \text{e} \quad 2y - 6 = 4$$

ou equivalentemente,

$$x = 4 \quad \text{e} \quad y = 5$$

Assim, se $\vec{u} = \vec{v}$, então $x = 4$, $y = 5$ e $\vec{u} = \vec{v} = (5, 4)$.

2.3 Operações com Vetores

Para vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, definem-se:

1. **Adição**: $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
2. **Multiplicação por escalar**: $\alpha\vec{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1)$

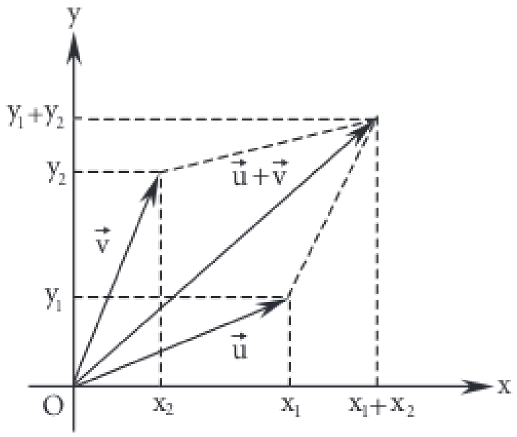


Fig. 5: Adição vetorial

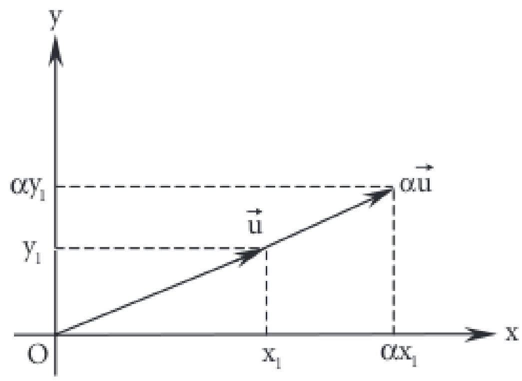


Fig. 6: Multiplicação por escalar

Operações derivadas:

$$-\vec{u} = (-x_1, -y_1)$$
$$\vec{u} - \vec{v} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

Propriedades:

a) Álgebra vetorial:

- Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- Elemento neutro: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
- Inverso aditivo: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

b) Propriedades mistas:

- $\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$
- $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$
- $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$
- Identidade: $1\vec{v} = \vec{v}$

Dedução:
Álgebra vetorial:

(a) Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

Resposta:
A adição de vetores é definida componente a componente. Como a adição de números reais é comutativa, temos:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n) = (v_1 + u_1, v_2 + u_2, \ldots, v_n + u_n) = \vec{v} + \vec{u}.$$

(b) Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

Resposta:
Pela associatividade da adição de números reais:

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n) + (w_1, \ldots, w_n) = (u_1 + v_1 + w_1, \ldots, u_n + v_n + w_n)$$
$$= (u_1 + (v_1 + w_1), \ldots, u_n + (v_n + w_n)) = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}).$$

(c) Elemento neutro: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

Resposta:
O vetor nulo $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ satisfaz:

$$\vec{u} + \vec{0} = (u_1 + 0, u_2 + 0, \ldots, u_n + 0) = (u_1, u_2, \ldots, u_n) = \vec{u}.$$

(d) Inverso aditivo: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

Resposta:
O inverso aditivo $-\vec{u} = (-u_1, -u_2, \ldots, -u_n)$ satisfaz:

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = (u_1 - u_1, u_2 - u_2, \ldots, u_n - u_n) = (0, 0, \ldots, 0) = \vec{0}.$$

Propriedades mistas:

(e) Associatividade escalar: $\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$

Resposta:
A multiplicação escalar é definida componente a componente:

$$\alpha(\beta\vec{v}) = \alpha(\beta v_1, \beta v_2, \ldots, \beta v_n) = (\alpha\beta v_1, \alpha\beta v_2, \ldots, \alpha\beta v_n) = (\alpha\beta)\vec{v}.$$

(f) Distributiva de escalares: $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$

Resposta:
Pela distributividade dos números reais:

$$(\alpha + \beta)\vec{u} = ((\alpha + \beta)u_1, \ldots, (\alpha + \beta)u_n) = (\alpha u_1 + \beta u_1, \ldots, \alpha u_n + \beta u_n) = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}.$$

(g) Distributiva de vetores: $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

Resposta:
Pela distributividade dos números reais:

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha(u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n) = (\alpha u_1 + \alpha v_1, \ldots, \alpha u_n + \alpha v_n) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}.$$

(h) Identidade escalar: $1\vec{v} = \vec{v}$

Resposta:
O número 1 é o elemento neutro da multiplicação:

$$1\vec{v} = (1 \cdot v_1, 1 \cdot v_2, \ldots, 1 \cdot v_n) = (v_1, v_2, \ldots, v_n) = \vec{v}.$$

2.4 Vetor Defnido por Dois Pontos

Dados os pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem expressão analítica:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

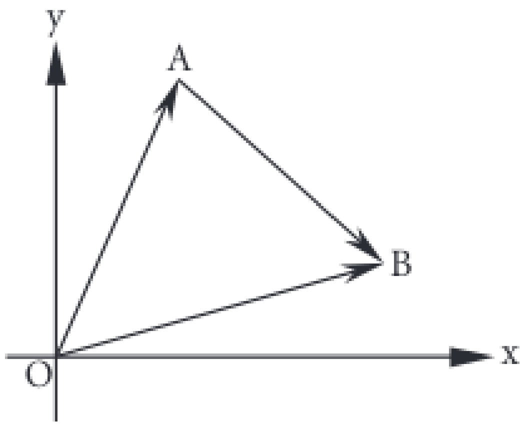


Fig. 7: Vetor $\overrightarrow{AB}$

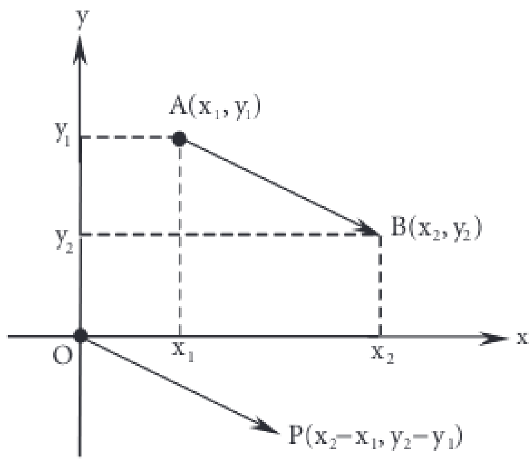


Fig. 8: Representante canônico

O representante canônico $\overrightarrow{OP}$ em $O(0, 0)$ é o vetor posição que melhor caracteriza $\overrightarrow{AB}$.

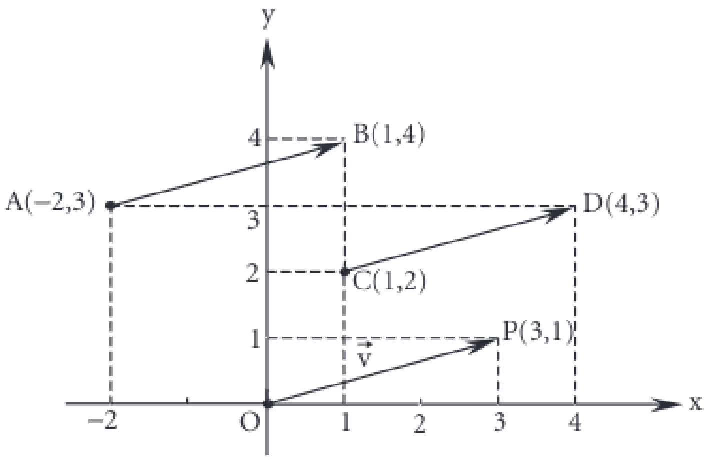


Fig. 9: Equivalência de vetores

Na Figura 9, $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ representam o mesmo vetor $\vec{v} = (3, 1)$, mostrando que a posição é irrelevante - importam apenas magnitude, direção e sentido.

Relações importantes:

- $B = A + \overrightarrow{AB}$

$$\begin{aligned} B &= (-2,3) + (3,1) = (1,4) \\ D &= (1,2) + (3,1) = (4,3) \\ P &= (0,0) + (3,1) = (3,1) \end{aligned}$$

- Para o triângulo na Figura 10:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \overrightarrow{AB} = (1,2) \\ \vec{v} &= \overrightarrow{BC} = (-2,2) \\ \vec{w} &= \overrightarrow{CA} = (1,-4) \\ \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} &= \vec{0} \end{aligned}$$

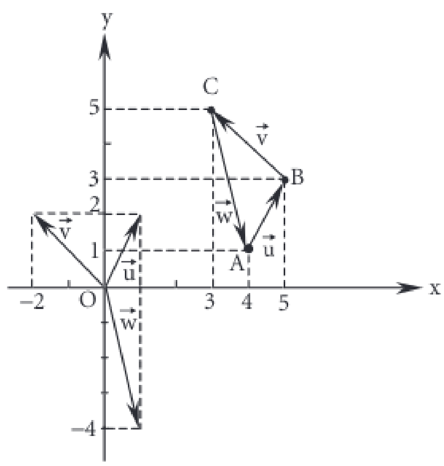


Fig. 10: Vetores em triângulo

2.5 Ponto Médio

Seja o segmento de extremos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ (Figura 11). Sendo $M(x, y)$ o ponto médio de AB, podemos expressar de forma vetorial como:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$$

ou

$$(x - x_1, y - y_1) = (x_2 - x, y_2 - y)$$

então

$$x - x_1 = x_2 - x \quad \text{e} \quad y - y_1 = y_2 - y$$

Resolvendo em relação a x e y, temos:

$$2x = x_1 + x_2 \quad \text{e} \quad 2y = y_1 + y_2$$

ou

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Portanto,

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

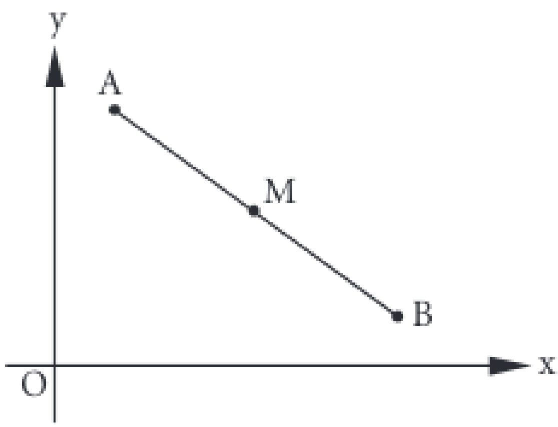


Fig. 11: Ponto médio de um segmento

2.6 Paralelismo de Dois Vetores

Vimos que, se dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ são paralelos, existe um número real α tal que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$, ou seja,

$$(x_1, y_1) = \alpha(x_2, y_2)$$

ou

$$(x_1, y_1) = (\alpha x_2, \alpha y_2)$$

que pela condição de igualdade resulta em

$$x_1 = \alpha x_2 \quad \text{e} \quad y_1 = \alpha y_2$$

donde

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \alpha$$

Essa é a condição de paralelismo de dois vetores, ou seja, dois vetores são paralelos quando suas componentes forem proporcionais.

2.7 Módulo de um Vetor

Seja o vetor $\vec{v} = (x, y)$ (Figura 12). Pelo teorema de Pitágoras, vem:

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

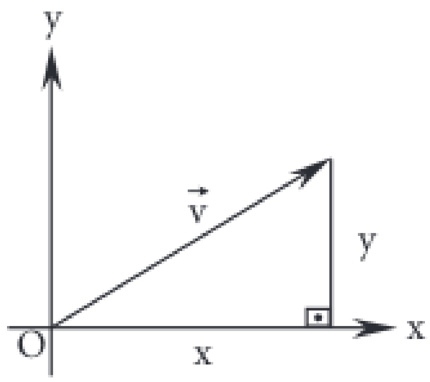


Fig. 12: Módulo de um vetor

Exemplo: Se $\vec{v} = (2, -3)$, então:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \text{ u.c. (unidades de comprimento)}$$

2.8 Distância entre dois pontos

A distância entre dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ (Figura 13) é o comprimento (módulo) do vetor $\overrightarrow{AB}$, isto é:

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}|$$

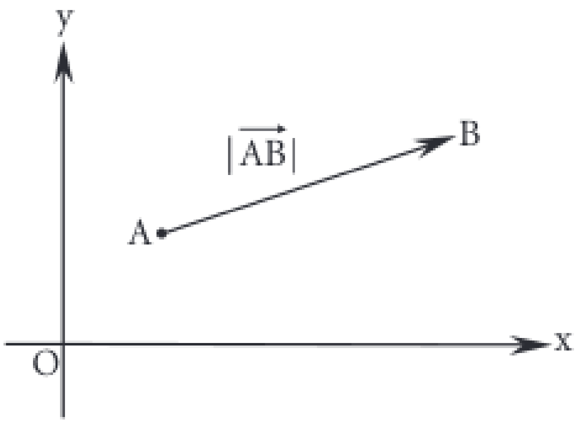


Fig. 13: Distância entre pontos

Como $\overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, temos:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Exemplo: Se $A(1, 2)$ e $B(4, 6)$, então:

$$d(A, B) = \sqrt{(4 - 1)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \text{ unidades}$$

3 Vetores no Espaço

3.1 Base Canônica e Sistema de Coordenadas

A base canônica $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ determina o sistema cartesiano ortogonal $Oxyz$ (Figura 14), onde:

- Eixo Ox (abscissas): vetor $\vec{i} = (1, 0, 0)$
- Eixo Oy (ordenadas): vetor $\vec{j} = (0, 1, 0)$
- Eixo Oz (cotas): vetor $\vec{k} = (0, 0, 1)$

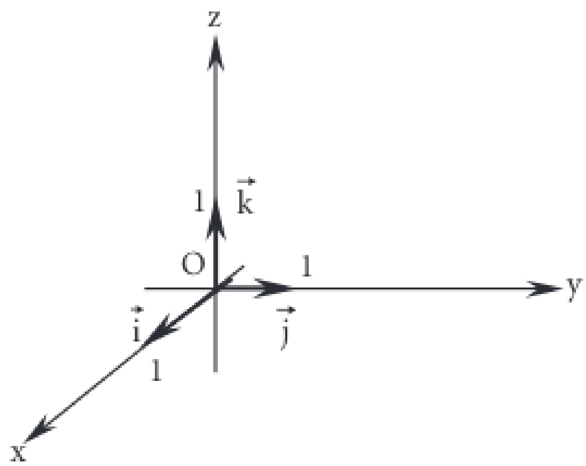


Fig. 14: Sistema de coordenadas no espaço

3.2 Planos Coordenados

Temos três planos coordenados (Figuras 15 e 16):

- Plano xy: $z = 0$
- Plano xz: $y = 0$
- Plano yz: $x = 0$

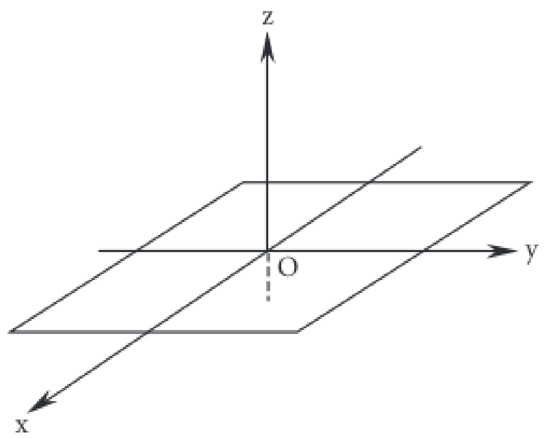


Fig. 15: Plano xy

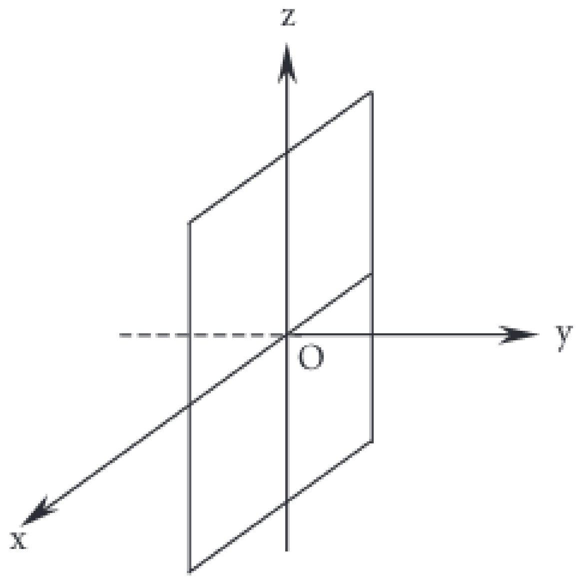


Fig. 16: Plano xz

3.3 Representação de Vetores

Para qualquer ponto $P(x, y, z)$, o vetor posição é:

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z)$$

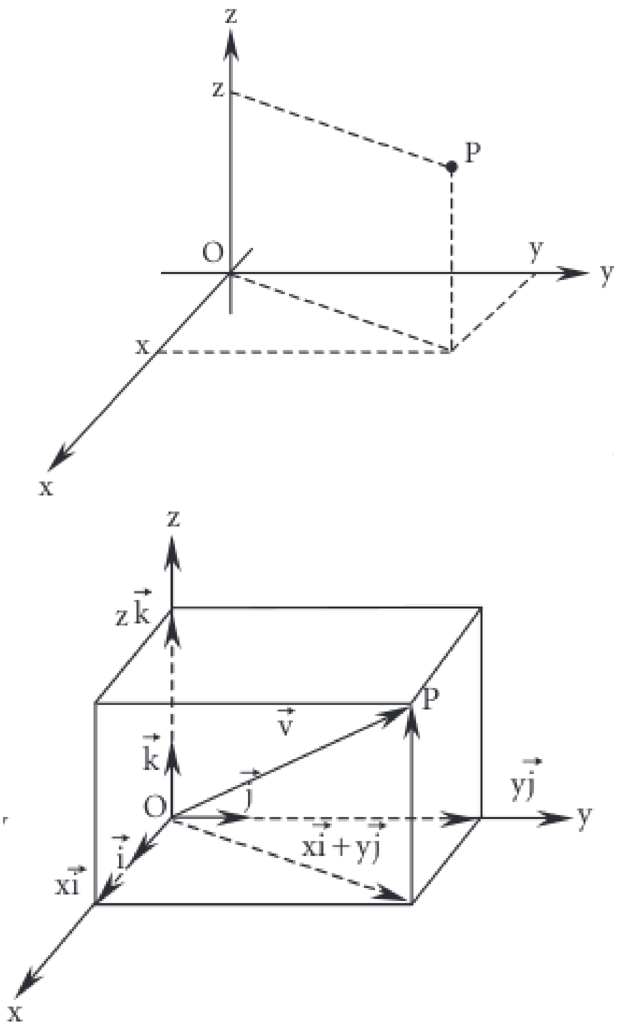


Fig. 17: Paralelepípedo e projeções

3.4 Exemplos e Casos Especiais

- $2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} = (2, -3, 1)$
- $-\vec{j} + 4\vec{k} = (0, -1, 4)$
- Vetores canônicos: $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$

3.5 Localização de Pontos

Para o paralelepípedo com $P(2, 4, 3)$ (Figura 18):

- Eixo x: $A(2, 0, 0)$
- Eixo y: $C(0, 4, 0)$
- Eixo z: $E(0, 0, 3)$
- Plano xy: $B(2, 4, 0)$
- Plano xz: $F(2, 0, 3)$
- Plano yz: $D(0, 4, 3)$

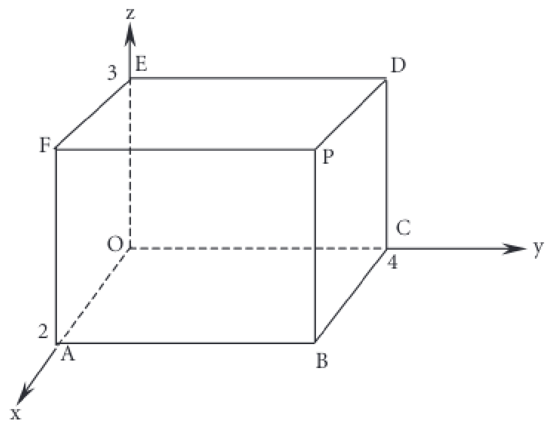


Fig. 18: Paralelepípedo e projeções

3.6 Octantes

O espaço é dividido em 8 octantes (Figura 19):

- 1º octante: $(+, +, +)$
- 2º octante: $(-, +, +)$
- 3º octante: $(-, -, +)$
- 4º octante: $(+, -, +)$
- 5º octante: $(+, +, -)$
- 6º octante: $(-, +, -)$
- 7º octante: $(-, -, -)$
- 8º octante: $(+, -, -)$

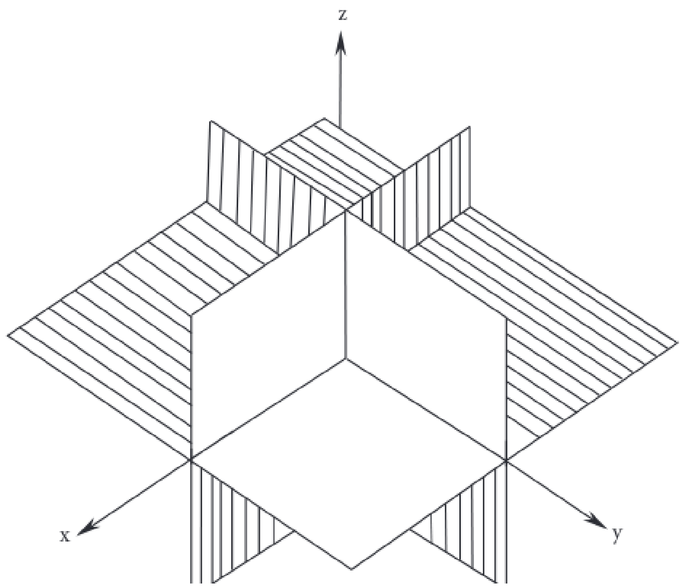


Fig. 19: Octantes do espaço

3.7 Exemplos de Pontos

- Acima do plano xy (cota $+2$):
  - $A(6, 4, 2)$ - 1º octante
  - $B(-5, 3, 2)$ - 2º octante
  - $C(-6, -5, 2)$ - 3º octante
  - $D(5, -3, 2)$ - 4º octante
- Abaixo do plano xy (cota -2):
  - $A'(6, 4, -2)$ - 5º octante
  - $B'(-5, 3, -2)$ - 6º octante
  - $C'(-6, -5, -2)$ - 7º octante
  - $D'(5, -3, -2)$ - 8º octante

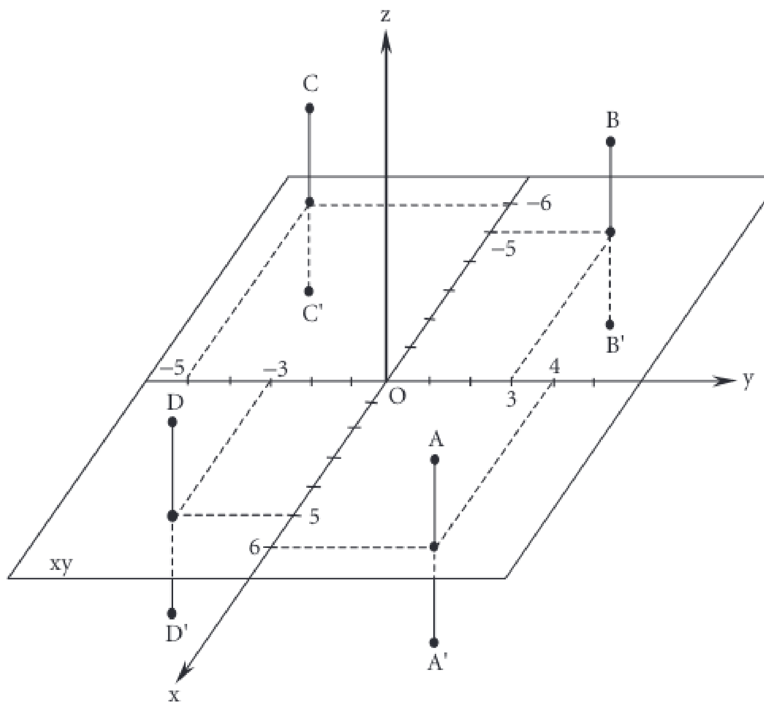


Fig. 20: Pontos em diferentes octantes

3.8 Propriedades dos Vetores no Espaço

As definições e conclusões no espaço são análogas às do plano:

1. **Igualdade de vetores**: Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ são iguais se, e somente se:

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2 \quad \text{e} \quad z_1 = z_2$$

2. **Operações básicas**: Para $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

$$\alpha\vec{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$$

3. **Vetor definido por dois pontos**: Para $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Se $\vec{v} = B - A$, então $B = A + \vec{v}$ (Figura 21).

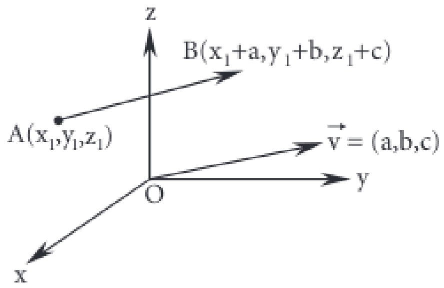


Fig. 21: Soma de ponto com vetor

4. **Ponto médio**: O ponto médio M de AB é:

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

5. **Vetores paralelos**: Se $\vec{u} \parallel \vec{v}$, então:

$$\vec{u} = \alpha\vec{v} \quad \text{ou} \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

6. **Módulo de um vetor**: Para $\vec{v} = (x, y, z)$:

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Dedução: O vetor $\vec{v} = (x, y, z)$ pode ser interpretado como um ponto no espaço tridimensional com coordenadas (x, y, z), partindo da origem $(0, 0, 0)$. O módulo de $\vec{v}$ é a distância da origem até esse ponto.

Utilizando a fórmula da distância euclidiana no $\mathbb{R}^3$, temos:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Portanto, o módulo de $\vec{v}$ é dado por:

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

4 Problemas

1. Dados os vetores $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$ e $\vec{w} = -2\vec{i} + \vec{j}$, determinar:

- **(a)** $2\vec{u} - \vec{v}$

  Resposta:

$$\begin{aligned}
2\vec{u} &= 2(2\vec{i} - 3\vec{j}) = 4\vec{i} - 6\vec{j} \\
2\vec{u} - \vec{v} &= (4\vec{i} - 6\vec{j}) - (\vec{i} - \vec{j}) \\
&= 4\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{i} + \vec{j} \\
&= (4-1)\vec{i} + (-6+1)\vec{j} \\
&= 3\vec{i} - 5\vec{j}
\end{aligned}$$

- **(b)** $\vec{v} - \vec{u} + 2\vec{w}$

  Resposta:

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \vec{i} - \vec{j} \\
-\vec{u} &= -(2\vec{i} - 3\vec{j}) = -2\vec{i} + 3\vec{j} \\
2\vec{w} &= 2(-2\vec{i} + \vec{j}) = -4\vec{i} + 2\vec{j} \\
\vec{v} - \vec{u} + 2\vec{w} &= (\vec{i} - \vec{j}) + (-2\vec{i} + 3\vec{j}) + (-4\vec{i} + 2\vec{j}) \\
&= (\vec{i} - 2\vec{i} - 4\vec{i}) + (-\vec{j} + 3\vec{j} + 2\vec{j}) \\
&= -5\vec{i} + 4\vec{j}
\end{aligned}$$

- **(c)** $\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v} - \vec{w}$

  Resposta:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\vec{u} &= \frac{1}{2}(2\vec{i} - 3\vec{j}) = \vec{i} - \frac{3}{2}\vec{j} \\
-2\vec{v} &= -2(\vec{i} - \vec{j}) = -2\vec{i} + 2\vec{j} \\
-\vec{w} &= -(-2\vec{i} + \vec{j}) = 2\vec{i} - \vec{j} \\
\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v} - \vec{w} &= (\vec{i} - \frac{3}{2}\vec{j}) + (-2\vec{i} + 2\vec{j}) + (2\vec{i} - \vec{j}) \\
&= (\vec{i} - 2\vec{i} + 2\vec{i}) + \left(-\frac{3}{2}\vec{j} + 2\vec{j} - \vec{j}\right) \\
&= \vec{i} + \left(-\frac{3}{2} + 2 - 1\right)\vec{j} \\
&= \vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}
\end{aligned}$$

- **(d)** $3\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w}$

  Resposta:

$$\begin{aligned}
3\vec{u} &= 3(2\vec{i} - 3\vec{j}) = 6\vec{i} - 9\vec{j} \\
\frac{1}{2}\vec{v} &= \frac{1}{2}(\vec{i} - \vec{j}) = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} \\
\frac{1}{2}\vec{w} &= \frac{1}{2}(-2\vec{i} + \vec{j}) = -\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} \\
3\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{w} &= (6\vec{i} - 9\vec{j}) - \left(\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j}\right) - \left(-\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right) \\
&= \left(6 - \frac{1}{2} + 1\right)\vec{i} + \left(-9 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\vec{j} \\
&= \frac{13}{2}\vec{i} - 9\vec{j}
\end{aligned}$$

2. Dados os vetores $\vec{u} = (3, -1)$ e $\vec{v} = (-1, 2)$, determinar o vetor $\vec{x}$ tal que:

- **(a)** $4(\vec{u} - \vec{v}) + \frac{1}{3}\vec{x} = 2\vec{u} - \vec{x}$

  Resposta:

$$
\begin{aligned}
4(\vec{u} - \vec{v}) - 2\vec{u} &= -\vec{x} - \frac{1}{3}\vec{x} \\
2\vec{u} - 4\vec{v} &= -\frac{4}{3}\vec{x} \\
2(3, -1) - 4(-1, 2) &= -\frac{4}{3}\vec{x} \\
(6, -2) - (-4, 8) &= -\frac{4}{3}\vec{x} \\
(10, -10) &= -\frac{4}{3}\vec{x} \\
(10, -10) &= (-\frac{4}{3}x_1, -\frac{4}{3}y_1) \\
\vec{x} &= (-\frac{15}{2}, \frac{15}{2})
\end{aligned}
$$

- **(b)** $3\vec{x} - (2\vec{v} - \vec{u}) = 2(4\vec{x} - 3\vec{u})$

  Resposta:

$$
\begin{aligned}
3\vec{x} + (-2\vec{v} + \vec{u}) &= 8\vec{x} - 6\vec{u} \\
3\vec{x} - 8\vec{x} &= -6\vec{u} + (2\vec{v} - \vec{u}) \\
-5\vec{x} &= -6(3, -1) + (2(-1, 2) - (3, -1)) \\
-5\vec{x} &= (-18, 6) + ((-2, 4) - (3, -1)) \\
-5\vec{x} &= (-18, 6) + (-5, 5) \\
-5\vec{x} &= (-23, 11) \\
\vec{x} &= (\frac{23}{5}, -\frac{11}{5})
\end{aligned}
$$

3. Dados os pontos $A(-1, 3)$, $B(2, 5)$, $C(3, -1)$ e $O(0, 0)$, calcular:

- **(a)** $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB}$

  Resposta:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OA} &= (-1 - 0, 3 - 0) \\
\overrightarrow{OA} &= (-1, 3) \\
\overrightarrow{AB} &= (2 + 1, 5 - 3) \\
\overrightarrow{AB} &= (3, 2) \\
\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB} &= (-1, 3) - (3, 2) \\
\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB} &= (-4, 1)
\end{aligned}
$$

- **(b)** $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{BC}$

  Resposta:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OC} &= (3,-1)\\
\overrightarrow{BC} &= (3-2,-1-5)\\
\overrightarrow{BC} &= (1,-6)\\
\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{BC} &= (3,-1)-(1,-6)\\
\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{BC} &= (2,5)
\end{aligned}$$

- **(c)** $\frac{3}{4}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CB}$

  Resposta:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{4}\overrightarrow{BA} &= (\frac{3}{4}(-1-2),\frac{3}{4}(3-5))\\
\frac{3}{4}\overrightarrow{BA} &= (\frac{3}{4}(-3),\frac{3}{4}(-2))\\
\frac{3}{4}\overrightarrow{BA} &= (-\frac{9}{4},-\frac{6}{4})\\
\overrightarrow{CB} &= (2-3,5+1)\\
\overrightarrow{CB} &= (-1,6)\\
\frac{3}{4}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CB} &= (-\frac{9}{4},-\frac{6}{4})-(-1,6)\\
\frac{3}{4}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CB} &= (-\frac{5}{4},-\frac{15}{2})
\end{aligned}$$

4. Dados os vetores $\vec{u} = (2,-4)$, $\vec{v} = (-5,1)$ e $\vec{w} = (-12,6)$, determinar a_1 e a_2 tais que $\vec{w} = a_1\vec{u} + a_2\vec{v}$.

Resposta:

(-12, 6) $=$ a$_1$$(2,-4) + a_2(-5,1)$
$= (2a_1,-4a_1) + (-5a_2,a_2)$
$= (2a_1-5a_2,-4a_1+a_2)$

$$\begin{cases} 2a_1 - 5a_2 = -12 \\ -4a_1 + a_2 = 6 \end{cases}$$

Solution: $a_1 = -1$ e $a_2 = 2$

5. Dados os pontos $A(3, -4)$ e $B(-1, 1)$ e o vetor $\vec{v} = (-2, 3)$, calcular:

- **(a)** $(B - A) + 2\vec{v}$

  Resposta:

  ((-1, 1) - (3, -4)) + 2(-2, 3)
  (-4, 5) + (-4, 6)
  (-8, 11)

- **(b)** $(A - B) - \vec{v}$

  Resposta:

  ((3, -4) - (-1, 1)) - (-2, 3)
  (4, -5) - (-2, 3)
  (6, -8)

- **(c)** $B + 2(B - A)$

  Resposta:

  (-1, 1) + 2((-1, 1) - (3, -4))
  (-1, 1) + 2(-4, 5)
  (-1, 1) + (-8, 10)
  (-9, 11)

- **(d)** $3\vec{v} - 2(A - B)$

  Resposta:

  3(-2, 3) - 2((3, -4) - (-1, 1))
  (-6, 9) - 2(4, -5)
  (-6, 9) - (8, -10)
  (-14, 19)

6. Sejam os pontos $A(-5, 1)$ e $B(1, 3)$. Determinar o vetor $\vec{v}$ tal que:

- **(a)** $B = A + 2\vec{v}$

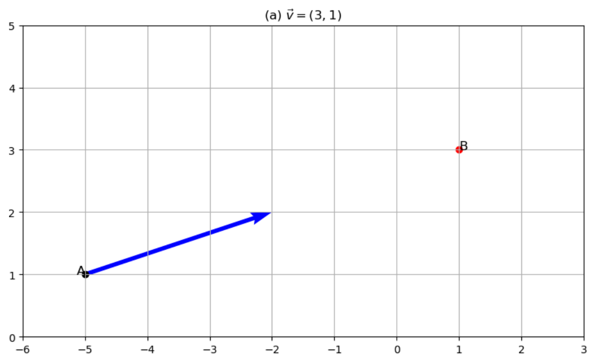
  Resposta:

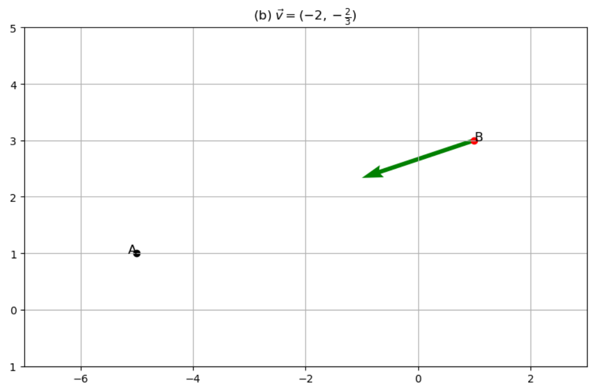
  $$2\overrightarrow{v} = B - A$$
  $$2\overrightarrow{v} = (1 + 5, 3 - 1)$$
  $$2\overrightarrow{v} = (6, 2)$$
  $$\overrightarrow{v} = (3, 1)$$

- **(b)** $A = B + 3\vec{v}$

  Resposta:

  $$3\overrightarrow{v} = A - B$$
  $$3\overrightarrow{v} = (-5 - 1, 1 - 3)$$
  $$3\overrightarrow{v} = (-6, -2)$$
  $$\overrightarrow{v} = \left(-2, -\frac{2}{3}\right)$$

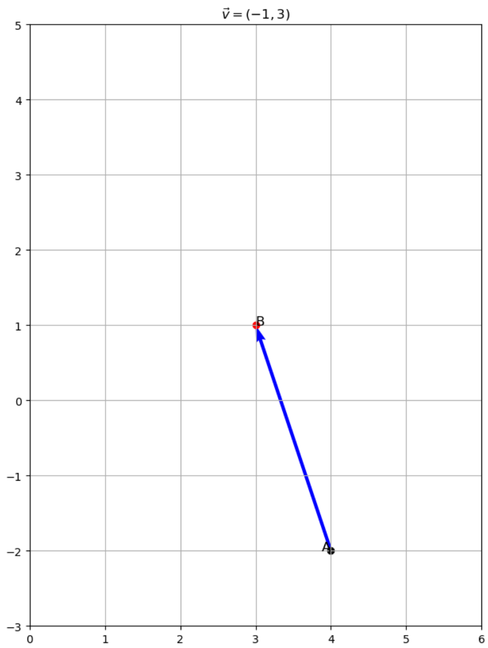




7. Qual ponto inicial do segmento orientado que representa o vetor $\vec{v} = (-1, 3)$, sabendo que sua extremidade está em $(3, 1)$? Representar graficamente esse segmento.

Resposta:

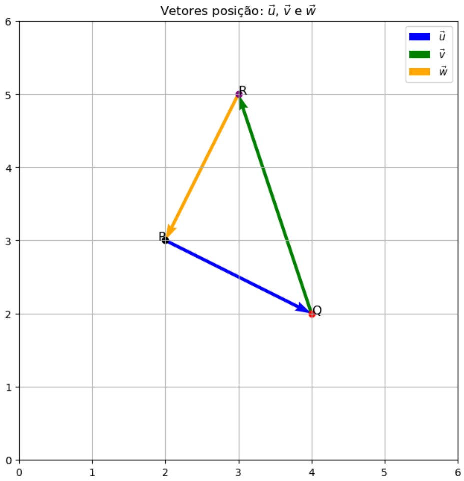
$\overrightarrow{v} = B - A$
$(v_x, v_y) = (3 - A_x, 1 - A_y)$
$v_x = 3 - A_x$
$v_x - 3 = -A_x$
$3 + 1 = A_x$
$4 = A_x$
$v_y = 1 - A_y$
$v_y - 1 = -A_y$
$1 - 3 = A_y$
$-2 = A_y$
$A = (4, -2)$



8. Sejam os pontos $P(2,3)$, $Q(4,2)$ e $R(3,5)$.

- **(a)** Representar em um mesmo gráfico os vetores posição de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ de modo que $Q = P + \vec{u}$, $R = Q + \vec{v}$ e $P = R + \vec{w}$

  Resposta:



- **(b)** Determinar $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

  Resposta:

  $\overrightarrow{u} = Q - P = (4-2, 2-3) = (2, -1)$
  $\overrightarrow{v} = R - Q = (3-4, 5-2) = (-1, 3)$
  $\overrightarrow{w} = P - R = (2-3, 3-5) = (-1, -2)$
  $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = (2-1-1, -1+3-2)$
  $= (0, 0)$

9. Encontrar o vértice oposto a B, no paralelogramo $ABCD$, para:

- **(a)** $A(3,1)$, $B(4,2)$ e $C(5,5)$

  Resposta:

  $\overrightarrow{BA} = A - B = (-3-4,\ -1-2)$
  $= (-7,\ -3)$
  $D = C + \overrightarrow{BA}$
  $= (5,\ 5) + (-7,\ -3)$
  $= (-2,\ 2)$

- **(b)** $A(5,1)$, $B(7,3)$ e $C(3,4)$

  Resposta:

  $\overrightarrow{BA} = A - B = (5-7,\ 1-3)$
  $= (-2,\ -2)$
  $D = C + \overrightarrow{BA}$
  $= (3,\ 4) + (-2,\ -2)$
  $= (1,\ 2)$

10. Sabendo que $A(1,-1)$, $B(5,1)$ e $C(6,4)$ são vértices de um paralelogramo, determinar o quarto vértice de cada um dos três paralelogramos possíveis de serem formados.

- **(a)** $1^{\underline{o}}$ Caso: AB e AC como lados consecutivos

  Resposta:

  Seja $D_1(x,y)$
  $$\begin{aligned}\vec{AB} &= (5-1, 1-(-1)) = (4,2)\\ \vec{AC} &= (6-1, 4-(-1)) = (5,5)\\ \vec{AD_1} &= \vec{AB} + \vec{AC} = (9,7)\\ D_1 &= A + \vec{AD_1} = (1,-1) + (9,7) = (10,6)\end{aligned}$$

- **(b)** $2^{\underline{o}}$ Caso: BA e BC como lados consecutivos

  Resposta:

  $$\begin{aligned}\vec{BA} &= (1-5, -1-1) = (-4,-2)\\ \vec{BC} &= (6-5, 4-1) = (1,3)\\ \vec{BD_2} &= \vec{BA} + \vec{BC} = (-3,1)\\ D_2 &= B + \vec{BD_2} = (5,1) + (-3,1) = (2,2)\end{aligned}$$

- **(c)** $3^{\underline{o}}$ Caso: AB e BC como lados consecutivos

  Resposta:

  $$\vec{AB} = (4,2), \quad \vec{BC} = (1,3)$$
  Queremos $\vec{D_3A} = \vec{BC}$
  $$D_3 = A - \vec{BC} = (1,-1) - (1,3) = (0,-4)$$

11. Dados os pontos $A(-3,2)$ e $B(5,-2)$, determinar os pontos M e N pertencentes ao segmento AB tais que $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$ e $\frac{AN}{AB} = \frac{2}{3}$. Construir o gráfico, marcando os pontos A, B, M, N e P, em que P seja tal que $\frac{AP}{AB} = \frac{3}{2}$.

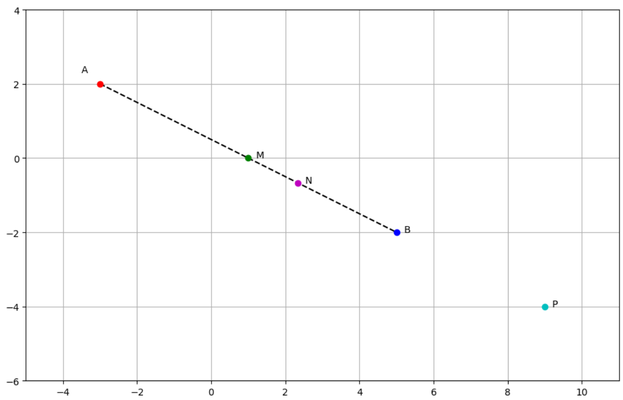
- **(a)** Cálculo do vetor $\overrightarrow{AB}$ e pontos M, N, P

  Resposta:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= B - A = (8,-4)\\
\overrightarrow{AM} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \left(\frac{8}{2}, \frac{-4}{2}\right) = (4,-2)\\
M &= A + \overrightarrow{AM} = (1,0)\\
\overrightarrow{AN} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \left(\frac{16}{3}, \frac{-8}{3}\right)\\
N &= A + \overrightarrow{AN} = \left(\frac{7}{3}, -\frac{2}{3}\right)\\
\overrightarrow{AP} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = (12,-6)\\
P &= A + \overrightarrow{AP} = (9,-4)
\end{aligned}
$$

- **(b)** Representação gráfica

  Resposta:



12. Sendo $A(-2,3)$ e $B(6,-3)$ extremidades de um segmento, determinar:

- **(a)** Pontos C, D e E que dividem o segmento AB em quatro partes de mesmo comprimento

  Resposta:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= B - A = (8,-6)\\
\overrightarrow{AC} &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = (2,-1.5)\\
C &= A + \overrightarrow{AC} = (0, \frac{3}{2})\\
\overrightarrow{AD} &= \frac{2}{4}\overrightarrow{AB} = (4,-3)\\
D &= A + \overrightarrow{AD} = (2,0)\\
\overrightarrow{AE} &= \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = (6,-4.5)\\
E &= A + \overrightarrow{AE} = (4, -\frac{3}{2})
\end{aligned}
$$

- **(b)** Pontos F e G que dividem o segmento AB em três partes de mesmo comprimento

  Resposta:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AF} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \left(\frac{8}{3}, -2\right)\\
F &= A + \overrightarrow{AF} = \left(\frac{2}{3}, 1\right)\\
\overrightarrow{AG} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \left(\frac{16}{3}, -4\right)\\
G &= A + \overrightarrow{AG} = \left(\frac{10}{3}, -1\right)
\end{aligned}
$$

13. O ponto P pertence ao segmento de extremos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, e a sua distância ao ponto A é a terça parte da sua distância ao ponto B. Expressar as coordenadas de P em função das coordenadas de A e B.

Resposta:

$$AP = \frac{1}{3}PB \Rightarrow PB = 3AP$$
$$\frac{AP}{PB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{1}{4}$$
$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$$
$$P = A + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$$
$$P_x = x_1 + \frac{1}{4}(x_2 - x_1) = \frac{3x_1 + x_2}{4}$$
$$P_y = y_1 + \frac{1}{4}(y_2 - y_1) = \frac{3y_1 + y_2}{4}$$
$$P\left(\frac{3x_1 + x_2}{4}, \frac{3y_1 + y_2}{4}\right)$$

14. Dados os vetores $\vec{u} = (1, -1)$, $\vec{v} = (-3, 4)$ e $\vec{w} = (8, -6)$, calcular:

- **(a)** $|\vec{u}|$

  Resposta:

  $$\sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

- **(b)** $|\vec{w}|$

  Resposta:

  $$\sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{64 + 36} = 10$$

- **(c)** $|2\vec{u} - \vec{w}|$

  Resposta:

  $$2\vec{u} - \vec{w} = (2, -2) - (8, -6) = (-6, 4)$$
  $$|2\vec{u} - \vec{w}| = \sqrt{(-6)^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

- **(d)** $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

  Resposta:

  $$|\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$$
  $$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

- **(e)** $|\vec{v}|$

  Resposta:

  $$\sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

- **(f)** $|\vec{u} + \vec{v}|$

  Resposta:

  $$\vec{u} + \vec{v} = (1, -1) + (-3, 4) = (-2, 3)$$
  $$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

- **(g)** $|\vec{w} - 3\vec{u}|$

  Resposta:

  $$\vec{w} - 3\vec{u} = (8, -6) - (3, -3) = (5, -3)$$
  $$|\vec{w} - 3\vec{u}| = \sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}$$

- **(h)** $\left|\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right|$

  Resposta:

  $$|\vec{u}| = \sqrt{2}$$
  $$\left|\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right| = \left|\frac{\vec{u}}{\sqrt{2}}\right| = \frac{|\vec{u}|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

15. Calcular os valores de a para que o vetor $\vec{u} = (a, -2)$ tenha módulo 4.

Resposta:

$$\begin{aligned}
|\vec{u}| &= 4 \\
\sqrt{a^2 + (-2)^2} &= 4 \\
\sqrt{a^2 + 4} &= 4 \\
a^2 + 4 &= 16 \\
a^2 &= 12 \\
a &= \pm\sqrt{12} \\
a &= \pm 2\sqrt{3}
\end{aligned}$$

16. Calcular os valores de a para que o vetor $\vec{u} = \left(a, \frac{1}{2}\right)$ seja unitário.

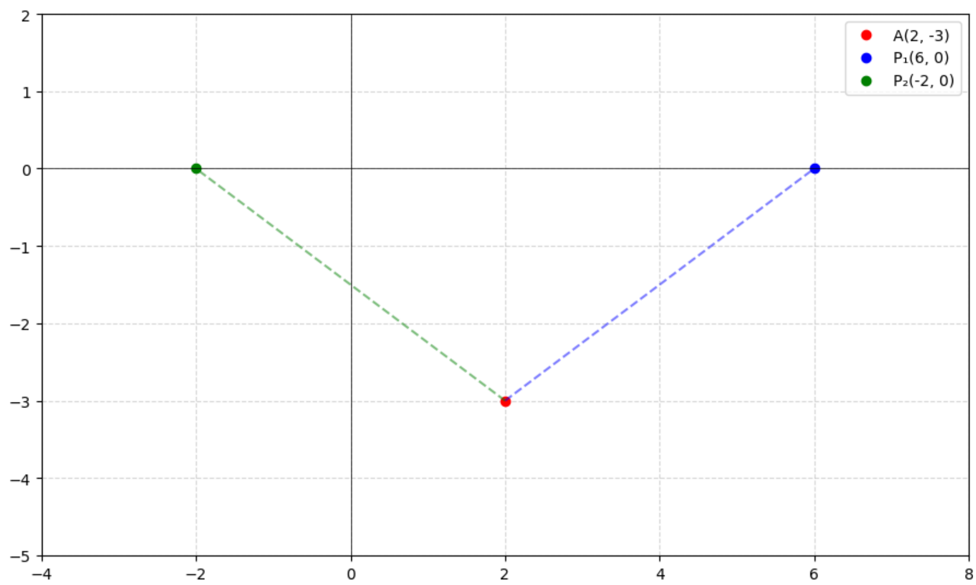
Resposta:

$$\begin{aligned}
|\vec{u}| &= 1 \\
\sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} &= 1 \\
\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}} &= 1 \\
a^2 + \frac{1}{4} &= 1 \\
a^2 &= \frac{3}{4} \\
a &= \pm\sqrt{\frac{3}{4}} \\
a &= \pm\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

17. Encontrar um ponto P do eixo Ox de modo que sua distância ao ponto $A(2, -3)$ seja igual a 5.
Resposta:

$$\begin{aligned}
\text{Como } P \text{ pertence ao eixo } Ox&,\\
P &= (x, 0)\\
d(P, A) &= 5\\
\sqrt{(x-2)^2 + (0-(-3))^2} &= 5\\
\sqrt{(x-2)^2 + 9} &= 5\\
(x-2)^2 + 9 &= 25\\
(x-2)^2 &= 16\\
x - 2 &= \pm 4\\
x &= 2 \pm 4\\
\Rightarrow x &= 6 \quad \text{ou} \quad x = -2
\end{aligned}$$

P(6, 0) e P(-2, 0)



References

[1] Paulo Winterle. *Vetores e Geometria Analítica*. 2nd ed. São Paulo: Makron, 2014. ISBN: 9788543002392. URL: https://books.google.com.br/books?id=UPIyHQAACAAJ.

[2] Alfredo Steimbruch and Paulo Winterle. *Geometria Analítica*. 2nd ed. São Paulo: Pearson Universidades, 1987. ISBN: 9780074504093. URL: https://books.google.com.br/books?id=tOLfGwAACAAJ.