UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Geometria Analítica
Prof. Jahina Fagundes de Assis Hattori
31/03/2025
Lista de Exercícios #1

Gabriel dos Santos Schmitz
(RA: 2487438)

Este documento foi criado usando LaTeX
https://github.com/gabrielzschmitz/uni/tree/main/ga/lista1.

1 Introdução

Irei neste documento debruçar-me-ei sobre a Geometria Analítica desde a noção intuitiva de tratamento geométrico até o produto misto entre vetores. Farei isto baseando-me nos livros *Vetores e Geometria Analítica* [1] e *Geometria Analítica* [2]. Conforme a bibliografia usada no curso Geometria Analítica na UTFPR de Toledo.

2 Vetores

Existem dois tipos de grandezas: **escalares** e **vetoriais**.

As grandezas **escalares** são completamente definidas por um número real acompanhado de uma unidade adequada, como comprimento, volume e temperatura.

Já as grandezas **vetoriais** necessitam de três elementos para sua completa definição:

- **Módulo**: intensidade do vetor;
- **Direção**: determinada por uma reta e todas as suas paralelas (Figura 1);
- **Sentido**: indica para onde o vetor aponta em sua direção (Figura 2).

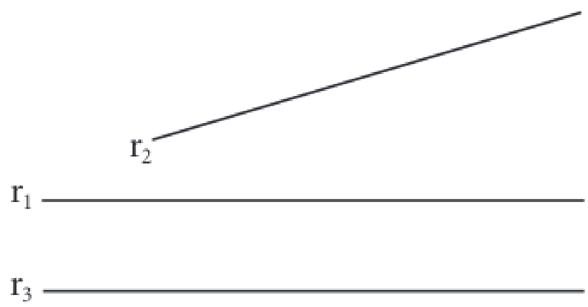


Fig. 1: Direção de um vetor

Fig. 2: Sentido de um vetor

2.1 Representação de Vetores

Um vetor pode ser representado por um **segmento orientado**, onde:

- O **módulo** é o comprimento do segmento;
- A **direção** é definida pelo ângulo do vetor;
- O **sentido** é indicado pela extremidade do segmento (Figura 3).

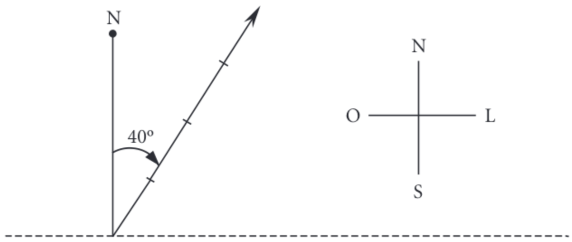


Fig. 3: Representação de um vetor

Dois vetores com mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido são equivalentes (Figura 4). Isso significa que um vetor pode ser **transladado** para qualquer ponto do espaço sem alterar suas propriedades, sendo chamado de **vetor livre** (Figura 5).

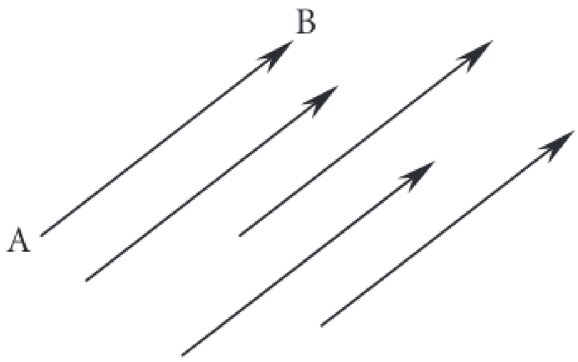


Fig. 4: Vetores equivalentes

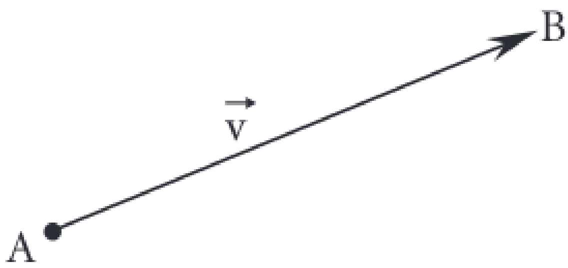


Fig. 5: Vetor livre

2.2 Casos Particulares de Vetores

- **Vetores paralelos** ($\mathbf{u}//\mathbf{v}$): possuem a mesma direção (Figura 6).

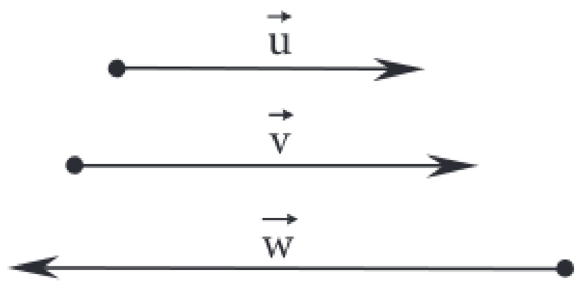


Fig. 6: Vetores paralelos

- **Vetores iguais** ($\mathbf{u} = \mathbf{v}$): possuem mesmo módulo, direção e sentido.
- **Vetor nulo** ($\mathbf{0}$): não possui direção nem sentido definidos e é paralelo a qualquer vetor.
- **Vetores opostos** ($-\mathbf{v}$): mesma direção e módulo, mas sentidos contrários (Figura 7).

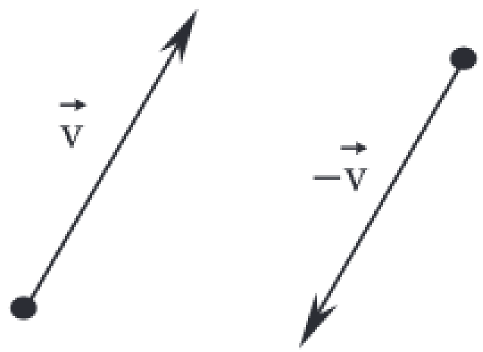


Fig. 7: Vetores opostos

- **Vetor unitário (versor)**: possui módulo igual a 1 (Figura 8).

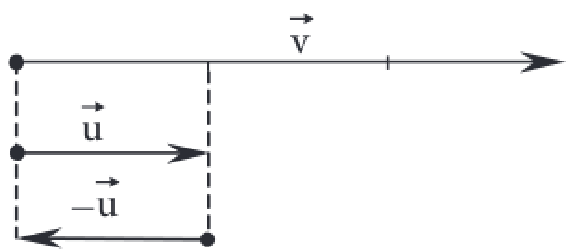


Fig. 8: Versor de um vetor

- **Vetores ortogonais** ($\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$): formam um ângulo reto entre si (Figura 9).

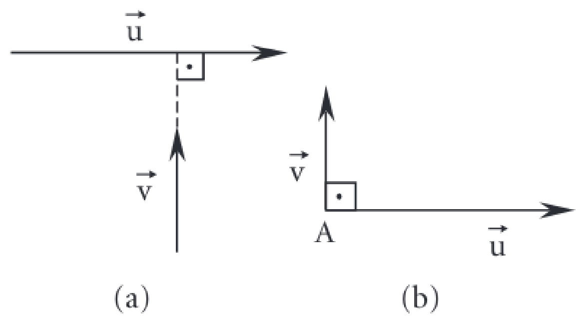


Fig. 9: Vetores ortogonais

- **Vetores coplanares**: pertencem ao mesmo plano (Figuras 10 e 11).

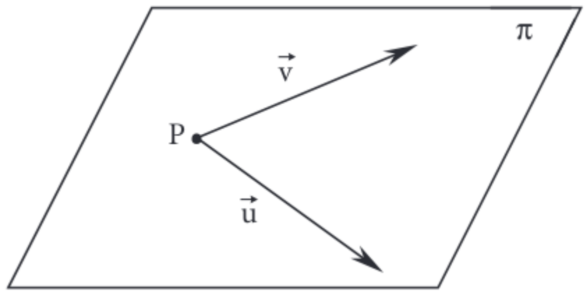


Fig. 10: Vetores coplanares (caso 1)

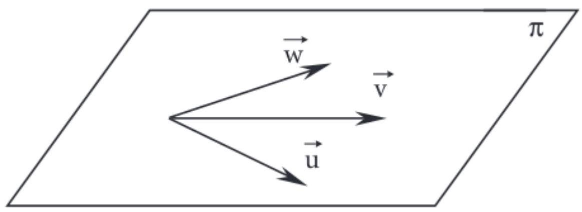


Fig. 11: Vetores coplanares (caso 2)

2.3 Exemplos

1. A Figura 12 é constituída de nove quadrados congruentes (de mesmo tamanho). Decidir se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações:

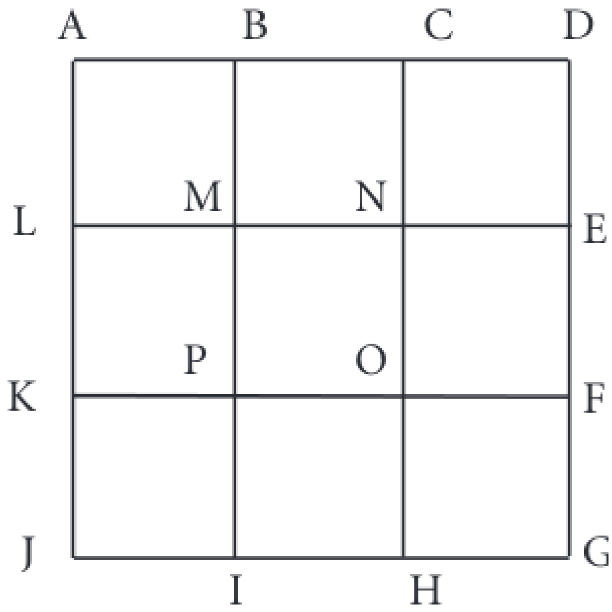


Fig. 12:

- **(a)** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OF}$
  Resposta:
  V
- **(b)** $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PH}$
  Resposta:
  V
- **(c)** $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OP}$
  Resposta:
  F
- **(d)** $\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{MC}$
  Resposta:
  F
- **(e)** $\overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{ED}$
  Resposta:
  V
- **(f)** $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{MG}$
  Resposta:
  V
- **(g)** $\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{FI}$
  Resposta:
  V
- **(h)** $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{HI}$
  Resposta:
  V
- **(i)** $\overrightarrow{JO} \parallel \overrightarrow{LD}$
  Resposta:
  F
- **(j)** $\overrightarrow{AJ} \parallel \overrightarrow{FG}$
  Resposta:
  V
- **(k)** $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{EG}$
  Resposta:
  V
- **(l)** $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BL}$
  Resposta:
  V
- **(m)** $\overrightarrow{PE} \perp \overrightarrow{EC}$
  Resposta:
  F
- **(n)** $\overrightarrow{PN} \perp \overrightarrow{NB}$
  Resposta:
  V
- **(o)** $\overrightarrow{PN} \perp \overrightarrow{AM}$
  Resposta:
  V
- **(p)** $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{FP}|$
  Resposta:
  V
- **(q)** $|\overrightarrow{IF}| = |\overrightarrow{MF}|$
  Resposta:
  V
- **(r)** $|\overrightarrow{AJ}| = |\overrightarrow{AC}|$
  Resposta:
  F
- **(s)** $|\overrightarrow{AO}| = 2|\overrightarrow{NP}|$
  Resposta:
  V
- **(t)** $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{BL}|$
  Resposta:
  V

2. A Figura 13 representa um paralelepípedo retângulo. Decidir se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações:

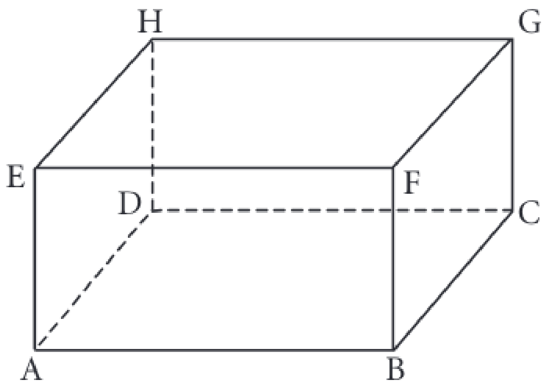


Fig. 13:

- **(a)** $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BF}$
  Resposta:
  V
- **(b)** $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{HG}$
  Resposta:
  F
- **(c)** $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CG}$
  Resposta:
  V
- **(d)** $\overrightarrow{AF} \perp \overrightarrow{BC}$
  Resposta:
  V
- **(e)** $—\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{HF}|$
  Resposta:
  V
- **(f)** $—\overrightarrow{AG}| = |\overrightarrow{DF}|$
  Resposta:
  V
- **(g)** $\overrightarrow{BG} \parallel \overrightarrow{ED}$
  Resposta:
  F
- **(h)** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{CG}$ são coplanares
  Resposta:
  F
- **(i)** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{FG}$ e $\overrightarrow{EG}$ são coplanares
  Resposta:
  V
- **(j)** $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{CB}$ e $\overrightarrow{HF}$ são coplanares
  Resposta:
  V
- **(k)** $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$ e $\overrightarrow{FG}$ são coplanares
  Resposta:
  V
- **(l)** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BG}$ e $\overrightarrow{CF}$ são coplanares
  Resposta:
  F
- **(m)** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{CF}$ são coplanares
  Resposta:
  V
- **(n)**
  $\overrightarrow{AE}$ é ortogonal ao plano ABC
  Resposta:
  V
- **(o)**
  $\overrightarrow{AV}$ é ortogonal ao plano BCG
  Resposta:
  V
- **(p)**
  $\overrightarrow{DC}$ é paralelo ao plano HEF
  Resposta:
  V

3 Adição de Vetores

Consideremos os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, cuja soma $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ queremos encontrar. Escolhemos um ponto A e, com origem nele, traçamos um segmento orientado AB representando $\overrightarrow{u}$. A partir da extremidade B, traçamos o segmento orientado BC representando $\mathbf{v}$. O vetor soma $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ é então representado pelo segmento orientado de origem A e extremidade C na Figura 14.

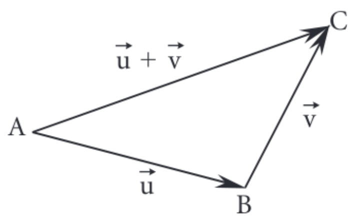


Fig. 14:

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} \text{ ou } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Se $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$, a obtenção da soma segue o mesmo princípio, ilustrado quando os vetores têm o mesmo sentido ou sentidos opostos como mostrado na Figura 15.

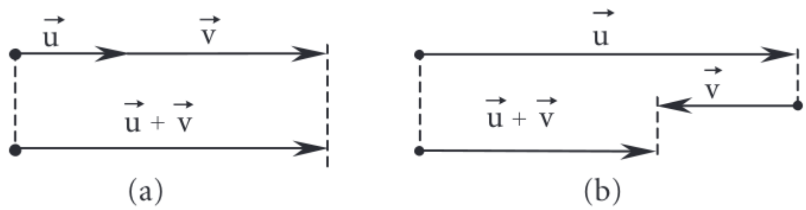


Fig. 15:

Caso $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não sejam paralelos, podemos utilizar o método do paralelogramo. Representamos $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AD}$ a partir da mesma origem A. Construímos o paralelogramo $ABCD$, e o vetor soma $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ é a diagonal de origem A como vemos na Figura 16.

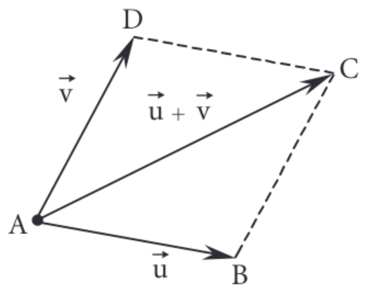


Fig. 16:

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} \text{ ou } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

Para a soma de três ou mais vetores, o procedimento é análogo. Se a extremidade do último vetor coincidir com a origem do primeiro, a soma resulta no vetor nulo (Figura 17):

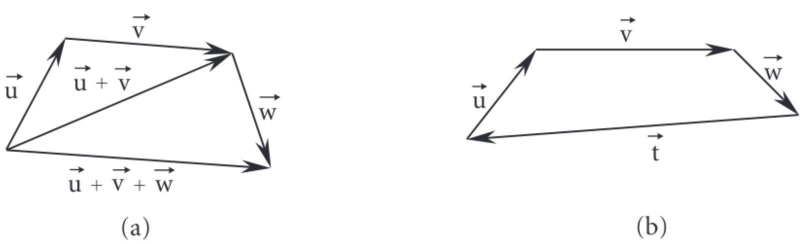


Fig. 17:

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \vec{t} = \vec{0}.$$

A adição vetorial possui as seguintes propriedades:

- **Comutativa**: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
- **Associativa**: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.
- **Elemento neutro**: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$.
- **Elemento oposto**: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

A diferença entre vetores é definida como:

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}).$$

No paralelogramo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$, a soma $\vec{u} + \vec{v}$ corresponde a uma das diagonais, enquanto a diferença $\vec{u} - \vec{v}$ é representada pela outra diagonal (Figura 18).

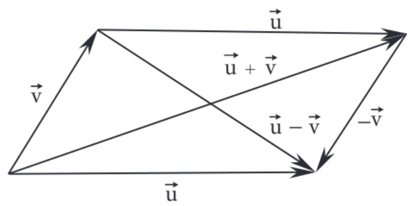
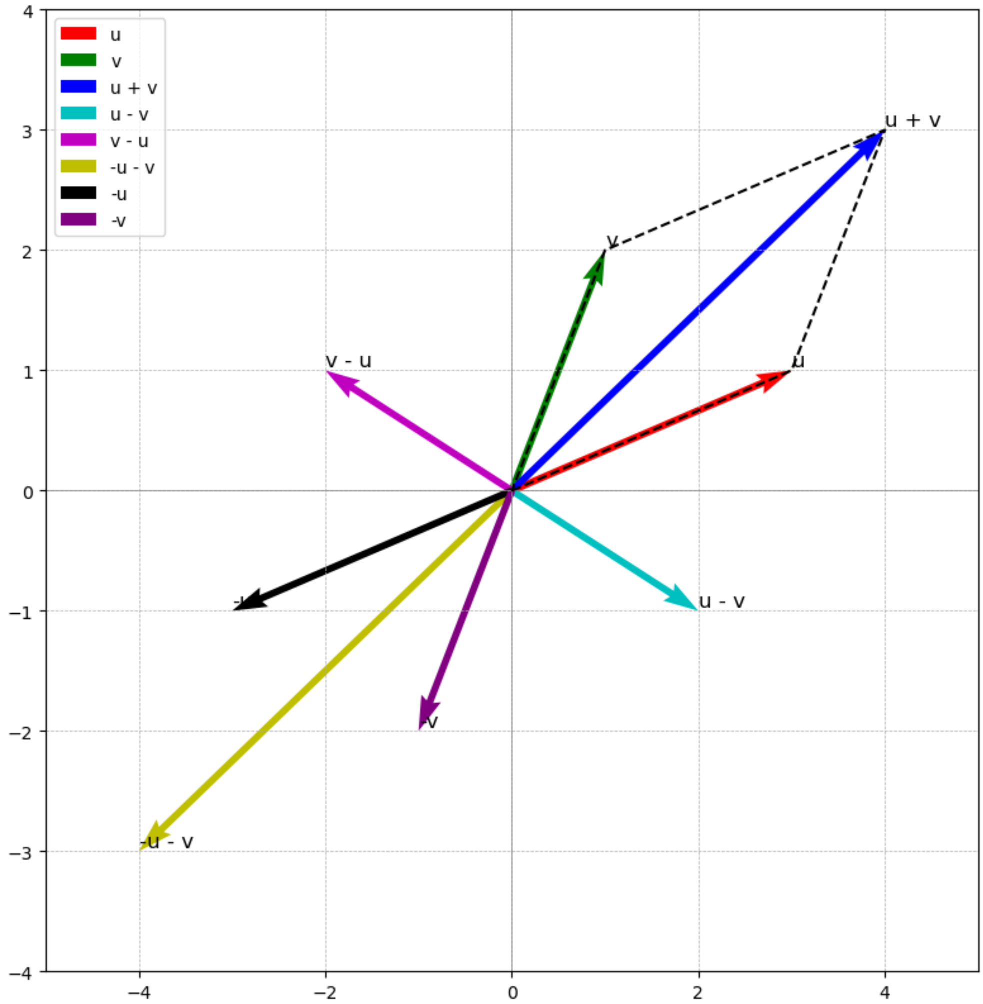


Fig. 18:

3.1 Exemplos

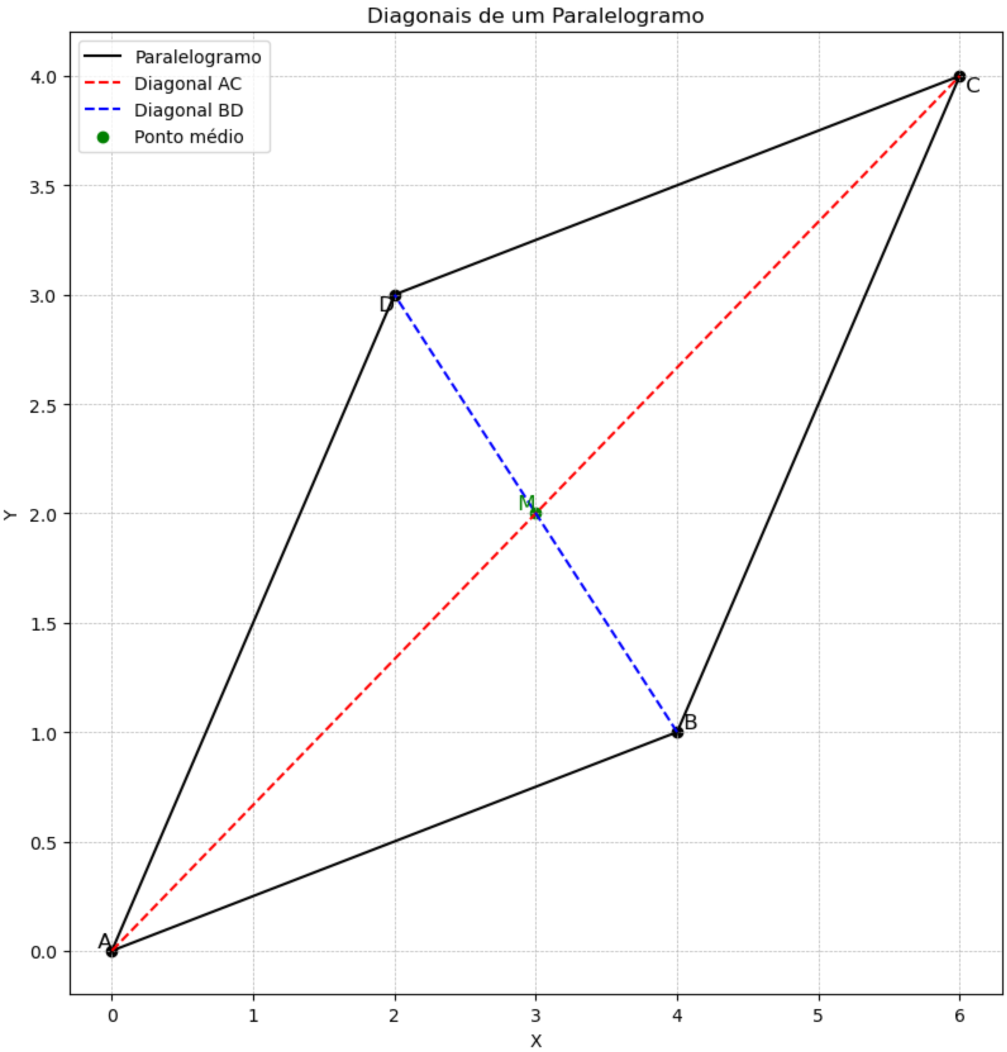
3. Dados dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ não paralelos, construir no mesmo gráfico os vetores $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u}$ e $-\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$, todos com origem em um mesmo ponto.

Resposta:



4. Provar que as diagonais de um paralelogramo têm o mesmo ponto médio.

Resposta:



Consideremos o paralelogramo $ABCD$ de diagonais AC e BD e seja M o ponto médio de AC, o que equivale a dizer que

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}.$$

Provemos que M é também ponto médio de BD:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BM} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} && \text{(definição de soma)}\\
&= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MA} && \text{(igualdade de vetores)}\\
&= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} && \text{(propriedade comutativa)}\\
&= \overrightarrow{MD} && \text{(definição de soma)}
\end{aligned}$$

Como $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}$, conclui-se que M é ponto médio de BD.

4 Multiplicação por Escalar

Dado um vetor $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ e um número real $\alpha \neq 0$, define-se o produto $\alpha\overrightarrow{v}$ como o vetor que satisfaz (Figura 19):

- **Módulo:** $|\alpha\overrightarrow{v}| = |\alpha||\overrightarrow{v}|$;
- **Direção:** $\alpha\overrightarrow{v} \parallel \overrightarrow{v}$;
- **Sentido:** $\alpha\overrightarrow{v}$ tem o mesmo sentido de $\overrightarrow{v}$ se $\alpha > 0$, e sentido contrário se $\alpha < 0$.

Se $\alpha = 0$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, então $\alpha\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

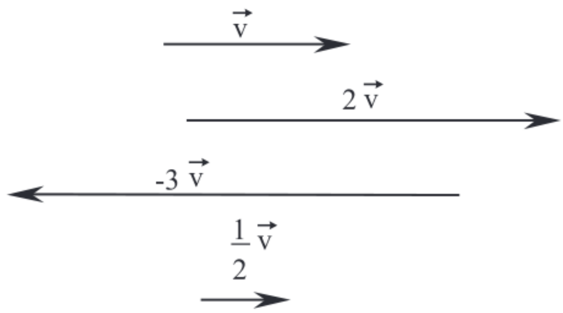


Fig. 19: Multiplicação por escalar

Além disso:

- Todos os vetores $\alpha\overrightarrow{v}$, para $\alpha \in \mathbb{R}$, pertencem a uma mesma reta paralela a $\overrightarrow{v}$.
- Se $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, então existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{v}$.
- A cada vetor $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, associamos dois vetores unitários paralelos a $\overrightarrow{v}$. O versor de $\overrightarrow{v}$ é dado por:

$$\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|}$$

$$\text{Exemplo: } |\overrightarrow{v}| = 5, \text{ o versor de } \overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|}$$

4.1 Exemplos

5. Representados os vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ como na Figura 20, obter graficamente o vetor $\overrightarrow{w}$ tal que $\overrightarrow{x} = 2\overrightarrow{u}3\overrightarrow{v} + \frac{1}{2}\overrightarrow{w}$

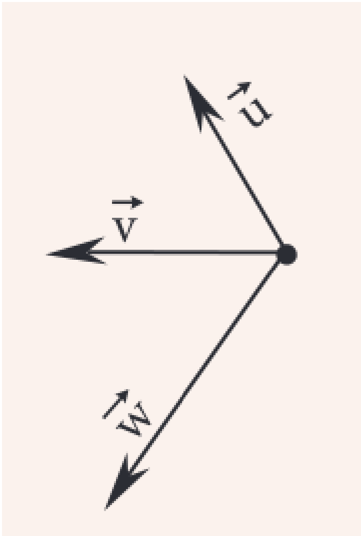
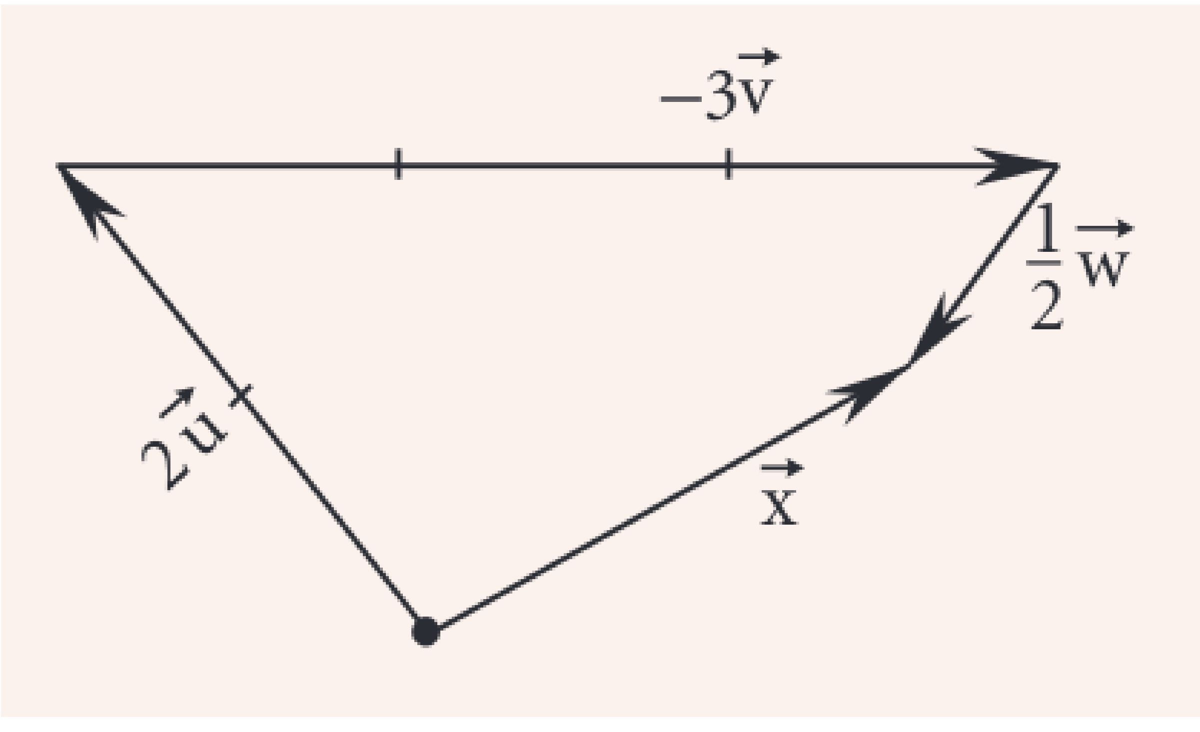


Fig. 20:

Resposta:



6. Demonstrar que o segmento cujos extremos são os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e igual à sua metade.

Resposta:

Seja o triângulo ABC e M e N os pontos médios dos lados CA e CB, respectivamente (Figura 21). Pela figura, tem-se

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

Logo, conclui-se que $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{AB}$ e $|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$.

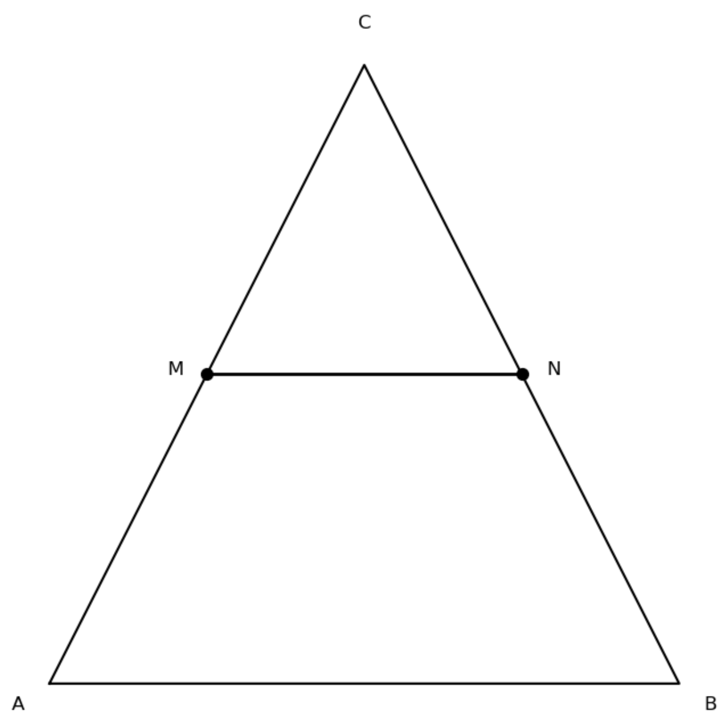


Fig. 21:

5 Ângulo de Dois Vetores

O ângulo entre dois vetores não nulos $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é o ângulo θ formado pelas semirretas OA e OB com a mesma origem O (Figura 22), onde $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$ e $0 \leq \theta \leq \pi$ (em radianos) ou $0° \leq \theta \leq 180°$.

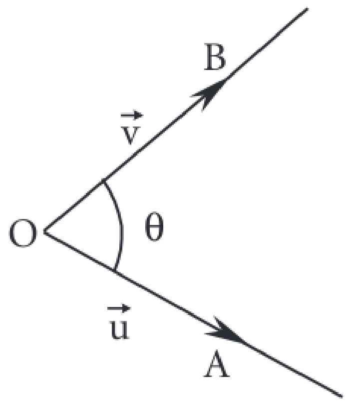


Fig. 22:

Se $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$ e possuem o mesmo sentido, então $\theta = 0$, como ocorre com $\overrightarrow{u}$ e $2\overrightarrow{u}$ (Figura 23).

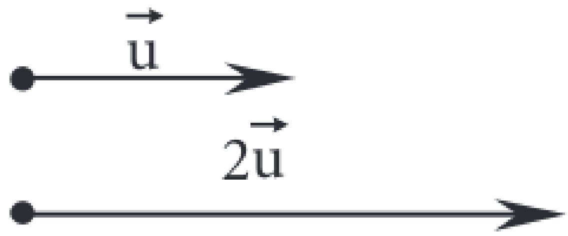


Fig. 23:

Se $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v}$ mas possuem sentidos contrários, então $\theta = \pi$, como no caso de $\overrightarrow{u}$ e $-3\overrightarrow{u}$ (Figura 24).

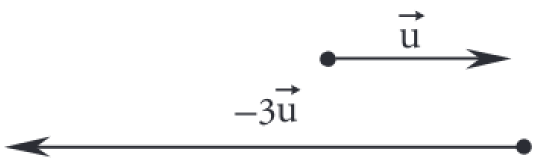


Fig. 24:

6 Problemas

7. A Figura 25 apresenta o losango EFGH inscrito no retângulo ABCD, sendo O o ponto de interseção das diagonais desse losango. Decidir se é verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações:

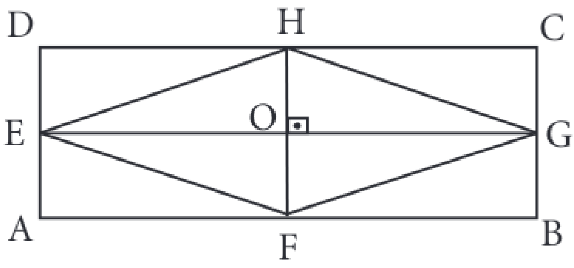


Fig. 25:

- **(a)** $\overrightarrow{EO} = \overrightarrow{OG}$

  Resposta:

  V

- **(b)** $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CH}$

  Resposta:

  F

- **(c)** $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{HG}$

  Resposta:

  V

- **(d)**

  $|C - O| = |O - B|$

  Resposta:

  V

- **(e)**

  $|H - O| = |H - D|$

  Resposta:

  F

- **(f)**

  $H - E = O - C$

  Resposta:

  F

- **(g)** $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$

  Resposta:

  V

- **(h)** $|\overrightarrow{OA}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{DB}|$

  Resposta:

  V

- **(i)** $\overrightarrow{AF} \parallel \overrightarrow{CD}$

  Resposta:

  V

- **(j)** $\overrightarrow{GF} \parallel \overrightarrow{HG}$

  Resposta:

  F

- **(k)** $\overrightarrow{AO} \parallel \overrightarrow{OC}$

  Resposta:

  V

- **(l)** $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{OH}$

  Resposta:

  V

- **(m)** $\overrightarrow{EO} \perp \overrightarrow{CB}$

  Resposta:

  V

- **(n)** $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{HF}$

  Resposta:

  F

- **(o)** $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{FE}$

  Resposta:

  V

8. Decidir se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações:

- **(a)** Se $\vec{u} = \vec{v}$, então $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.

  Resposta:

  V

- **(b)** Se $|\vec{u}| = |\vec{v}|$, então $\vec{u} = \vec{v}$.

  Resposta:

  F

- **(c)** Se $\vec{u} \parallel \vec{v}$, então $\vec{u} = \vec{v}$.

  Resposta:

  F

- **(d)** Se $\vec{u} = \vec{v}$, então $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

  Resposta:

  V

- **(e)** Se $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, então $|\vec{w}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$.

  Resposta:

  F

- **(f)** $|\vec{w}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$, então $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são paralelos.

  Resposta:

  V

- **(g)** Se $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$, então ABCD (nessa ordem) é paralelogramo.

  Resposta:

  V

- **(h)** $|5\vec{v}| = |-5\vec{v}| = 5|\vec{v}|$.

  Resposta:

  V

- **(i)** Os vetores $3\vec{v}$ e $-4\vec{v}$ são paralelos e de mesmo sentido.

  Resposta:

  F

- **(j)** Se $\vec{u} \parallel \vec{v}$, $|\vec{u}| = 2$ e $|\vec{v}| = 4$, então $\vec{v} = 2\vec{u}$ ou $\vec{v} = -2\vec{u}$.

  Resposta:

  V

- **(k)** Se $|\vec{v}| = 3$, o versor de $-10\vec{v}$ é $-\frac{\vec{v}}{3}$.

  Resposta:

  V

9. Com base na Figura 25, determinar os vetores a seguir, expressando-os com origem no ponto A:

- **(a)** $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CH}$

  Resposta:

  $\overrightarrow{AE}$

- **(b)** $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{FG}$

  Resposta:

  $\overrightarrow{AC}$

- **(c)** $2\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{AF}$

  Resposta:

  $2\overrightarrow{AO}$

- **(d)** $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EF}$

  Resposta:

  $\overrightarrow{AB}$

- **(e)** $\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{BG}$

  Resposta:

  $\overrightarrow{AO}$

- **(f)** $2\overrightarrow{OE} + 2\overrightarrow{OC}$

  Resposta:

  $2\overrightarrow{AE}$

- **(g)** $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}$

  Resposta:

  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

- **(h)** $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FG}$

  Resposta:

  $\overrightarrow{AD}$

- **(i)** $\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{HO}$

  Resposta:

  $\overrightarrow{AO}$

- **(j)** $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{AO}$

  Resposta:

  $\overrightarrow{AC}$

10. O paralelogramo $ABCD$ (Figura 26) é determinado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$, sendo M e N os pontos médios dos lados $\overline{DC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente. Determinar:

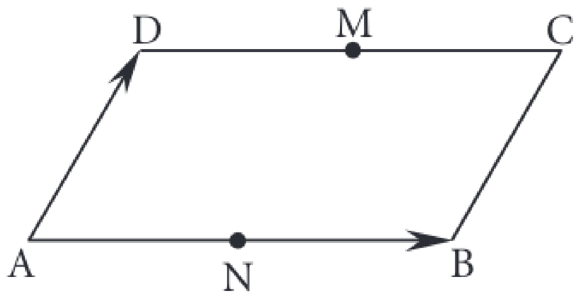


Fig. 26:

- **(a)** $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$

  Resposta:

  $\overrightarrow{AC}$

- **(b)** $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}$

  Resposta:

  $\overrightarrow{CA}$

- **(c)** $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$

  Resposta:

  $\overrightarrow{AB}$

- **(d)** $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BC}$

  Resposta:

  $\overrightarrow{AM}$

- **(e)** $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB}$

  Resposta:

  $\overrightarrow{DN}$

- **(f)** $\overrightarrow{BM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

  Resposta:

  $\overrightarrow{DB}$

11. Apresentar, graficamente, um representante do vetor $\vec{u} - \vec{v}$ nos casos:

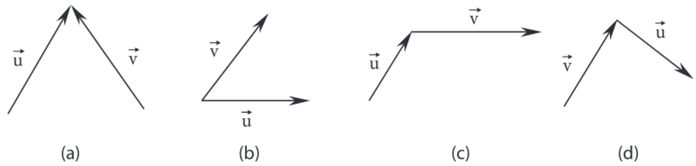


Fig. 27:

Resposta:

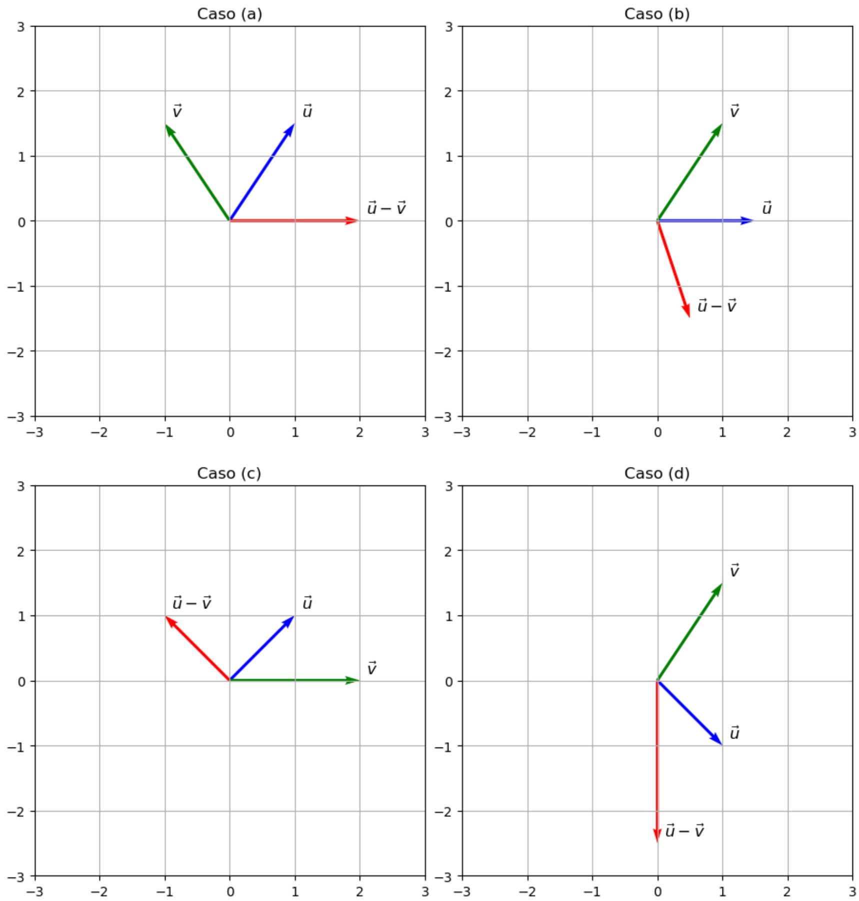


Fig. 28:

12. Determinar o vetor $\vec{x}$ nas figuras:

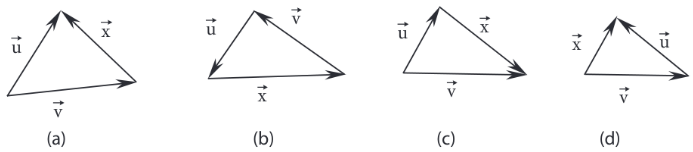


Fig. 29:

(a) Resposta:

$\vec{u} - \vec{v}$

(b) Resposta:

$-(\vec{u} + \vec{v})$

(c) Resposta:

$\vec{v} - \vec{u}$

(d) Resposta:

$\vec{u} + \vec{v}$

References

[1] Paulo Winterle. *Vetores e Geometria Analítica*. 2nd ed. São Paulo: Makron, 2014. ISBN: 9788543002392. URL: `https://books.google.com.br/books?id=UPIyHQAACAAJ`.

[2] Alfredo Steimbruch and Paulo Winterle. *Geometria Analítica*. 2nd ed. São Paulo: Pearson Universidades, 1987. ISBN: 9780074504093. URL: `https://books.google.com.br/books?id=tOLfGwAACAAJ`.