

Algebra Booleana

Corrado Santoro

Dipartimento di Matematica e Informatica

santoro@dmi.unict.it



Corso di Architettura degli Elaboratori

Algebra Booleana

- E' un algebra inventata da George Boole nel 1847 con lo scopo di fornire un **sistema formale** per la *logica proposizionale*
- E' il fondamento sul quale operano tutti i circuiti di un calcolatore
- Definisce:
 - Un insieme di **simboli** $K = \{\text{falso}, \text{vero}\} \equiv \{0, 1\}$
 - Due **operazioni "binarie"** (con due operandi): **somma (logica)**, **prodotto (logico)**
 - Un'**operazione "unaria"** (con un operando): **negazione (logica)**
- Il comportamento delle operazioni viene definito da **tabelle di verità**

Somma Logica

$$x_1, x_2, y \in \{0, 1\}, y = x_1 + x_2$$

x_1	x_2	$y = x_1 + x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- La somma logica è anche chiamata **OR** (“oppure”) perchè il risultato è vero quanto è vero il primo OPPURE il secondo termine
- E' indicata con i simboli $+$, **OR**, \vee

Prodotto Logico

$$x_1, x_2, y \in \{0, 1\}, y = x_1 \cdot x_2$$

x_1	x_2	$y = x_1 \cdot x_2 = x_1 x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- Il prodotto logico è anche chiamato **AND** ("e") perchè **il risultato è vero** quanto il primo E il secondo termine sono veri
- E' indicato con i simboli \cdot , **AND**, \wedge (oppure nulla)

Negazione

$$x, y \in \{0, 1\}, y = \bar{x}$$

x	$y = \bar{x}$
0	1
1	0

- La negazione logica è anche chiamata **NOT**
- È indicato con i simboli \bar{x} , **NOT**, \neg

Somma Logica

Commutativa

$$x_1 + x_2 = x_2 + x_1$$

Associativa

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= (x_1 + x_2) + x_3 = \\&= x_1 + (x_2 + x_3)\end{aligned}$$

Idempotenza

$$x + x = x$$

Elemento neutro

$$x + 0 = x$$

Massimo

$$x + 1 = 1$$

Complemento

$$x + \bar{x} = 1$$

Prodotto Logico

Commutativa

$$x_1 x_2 = x_2 x_1$$

Associativa

$$x_1 x_2 x_3 = (x_1 x_2) x_3 = x_1 (x_2 x_3)$$

Idempotenza

$$x x = x$$

Elemento neutro

$$x 1 = x$$

Minimo

$$x 0 = 0$$

Complemento

$$x \bar{x} = 0$$

Negazione Logica

Doppia negazione | $\overline{\overline{x}} = x$

Somma e Prodotto

Distributiva | $x_1(x_2 + x_3) = x_1x_2 + x_1x_3$

Distributiva | $x_1 + (x_2x_3) = (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)$

Priorità del prodotto | $x_1 + x_2x_3 = x_1 + (x_2x_3)$

Assorbimento | $x_1(x_1 + x_2) = x_1$

Assorbimento | $x_1 + x_1x_2 = x_1$

Funzioni Logiche o Booleane

Funzioni Logiche o Booleane

- Una **funzione logica o booleana** $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è un'espressione più o meno complessa che utilizza gli operatori booleani sulle variabili x_1, x_2, \dots, x_n
- Il **comportamento** di una funzione logica viene definito attraverso la relativa tabella della verità che viene derivata applicando le operazioni dell'espressione a tutte le **possibili combinazioni di valori delle variabili**

Esempio

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \overline{x_2 x_3}$$

x_1	x_2	x_3	$x_2 x_3$	$\overline{x_2 x_3}$	x_1	$x_1 + \overline{x_2 x_3}$
0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1

Teoremi di De Morgan

Teoremi di De Morgan

$$\overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1} \ \overline{x_2}$$

$$\overline{x_1 x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2}$$

x_1	x_2	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	$\overline{x_1} \ \overline{x_2}$	$x_1 + x_2$	$\overline{x_1 + x_2}$
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0

Teoremi di De Morgan

$$\overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1} \ \overline{x_2}$$

$$\overline{x_1 x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2}$$

x_1	x_2	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	$\overline{x_1 + x_2}$	$x_1 x_2$	$\overline{x_1 x_2}$
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0

Sintesi di Funzioni Logiche

Sintesi di Funzioni Logiche

- Data una tabella della verità che rappresenta una certa funzione logica,
come possiamo derivare la funzione analitica equivalente?

x_1	x_2	$y = f(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

$$f(x_1, x_2) = ??$$

Sintesi di Funzioni Logiche—Somme di prodotti

- Data una tabella della verità, si individuano tutti i casi in cui il risultato è pari a **1**
- Per ogni caso, si costruisce un **prodotto** delle n variabili (denominato **mintermine**), ogni variabile è presa **così com'è se vale 1, negata se essa vale 0**
- Si **sommano** tra loro i prodotti ottenuti

x_1	x_2	$y = f(x_1, x_2)$	Prodotto
0	0	1	$\overline{x_1} \overline{x_2}$
0	1	0	
1	0	0	
1	1	1	$x_1 x_2$

$$f(x_1, x_2) = \overline{x_1} \overline{x_2} + x_1 x_2$$

Sintesi di Funzioni Logiche—Prodotti di somme

- Data una tabella della verità, si individuano tutti i casi in cui il risultato è pari a **0**
- Per ogni caso, si costruisce una **somma** delle n variabili (denominata **maxtermine**), ogni variabile è presa **così com'è se vale 0, negata se essa vale 1**
- Si **moltiplicano** tra loro le somme ottenute

x_1	x_2	$y = f(x_1, x_2)$	Somme
0	0	1	
0	1	0	$x_1 + \overline{x_2}$
1	0	0	$\overline{x_1} + x_2$
1	1	1	

$$f(x_1, x_2) = (\overline{x_1} + x_2)(x_1 + \overline{x_2})$$

Sintesi di Funzioni Logiche—Minimizzazione

- Le regole indicate precedentemente assicurano la derivazione di una funzione che si comporta come desiderato
- Tuttavia non assicura che la funzione derivata contenga il **numero minimo di operazioni**
- La **minimizzazione** si rende necessaria per la realizzazione circuitale della funzione stessa: **meno termini \Rightarrow meno circuiti**

Esempio di Minimizzazione

x_1	x_2	x_3	$y = f(x_1, x_2, x_3)$	Prodotti
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	$\overline{x_1} x_2 x_3$
1	0	0	0	
1	0	1	0	
1	1	0	1	$x_1 x_2 \overline{x_3}$
1	1	1	1	$x_1 x_2 x_3$

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, x_3) &= \overline{x_1} x_2 x_3 + x_1 x_2 \overline{x_3} + x_1 x_2 x_3 = \\&= \overline{x_1} x_2 x_3 + x_1 x_2 (\overline{x_3} + x_3) = \\&= \overline{x_1} x_2 x_3 + x_1 x_2 1 = \\&= \overline{x_1} x_2 x_3 + x_1 x_2\end{aligned}$$



Mappe di Karnaugh

Sintesi di Funzioni Logiche—Mappe di Karnaugh

- Le **Mappe di Karnaugh** sono uno strumento grafico che permette la sintesi di una funzione logica in **forma minima**
- Sono formate da un reticolo in cui:
 - le righe e le colonne rappresentano i valori delle variabili di ingresso
 - La sequenza delle variabili deve essere tale che due righe (colonne) differiscono nel valore di una sola variabile
 - Il contenuto dei quadrati rappresenta il valore dell'uscita
- Il principio delle mappe di Karnaugh è che **due quadrati adiacenti differiscono nel valore di una sola variabile**
- Raggruppando quadrati che rappresentano la stessa uscita, è possibile identificare **quali variabili non contribuiscono** e pertanto *eliminarle* nella forma analitica

Esempio di Mappe di Karnaugh

x_1	x_2	x_3	$y = f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$x_1 x_2$

00 01 11 10

x_3	0	0	0	1	0
	1	0	1	1	0



Esempio di Mappe di Karnaugh

		$x_1 x_2$				
		00	01	11	10	
x_3		0	0	0	1	0
		1	0	1	1	0

Esempio di Mappe di Karnaugh

		$x_1 x_2$				
		00	01	11	10	
		0	0	0	1	0
x_3		1	0	1	1	0

- Box **rosso**: x_1 varia, quindi **non contribuisce**, $x_2 = 1, x_3 = 1 \Rightarrow x_2 x_3$
- Box **verde**: x_3 varia, quindi **non contribuisce**, $x_1 = 1, x_2 = 1 \Rightarrow x_1 x_2$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_2 x_3$$

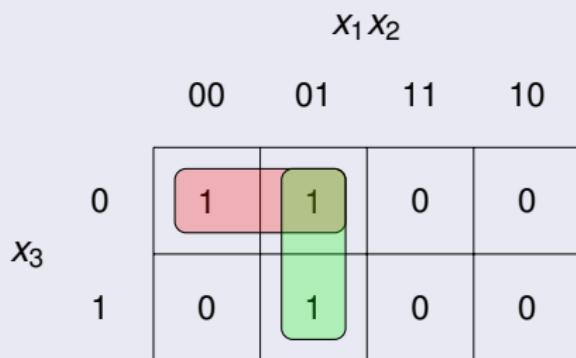
Verifica

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3$$

x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_2x_3	$x_1x_2 + x_2x_3$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Esempio di Mappe di Karnaugh

x_1	x_2	x_3	$y = f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0



Esempio di Mappe di Karnaugh

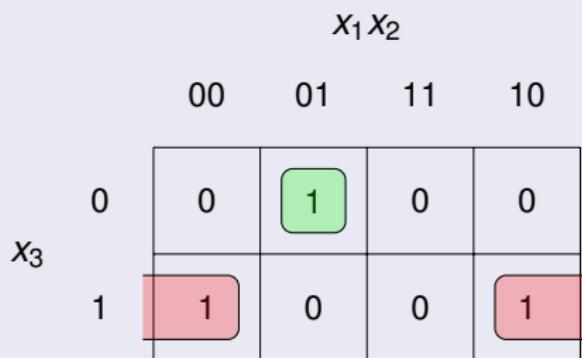
		$x_1 x_2$				
		00		01	11	10
		0	1	1	0	0
x_3		1	0	1	0	0

- Box **rosso**: x_2 varia, quindi **non contribuisce**, $x_1 = 0, x_3 = 0 \Rightarrow \overline{x_2} \overline{x_3}$
- Box **verde**: x_3 varia, quindi **non contribuisce**, $x_1 = 0, x_2 = 1 \Rightarrow \overline{x_1} x_2$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} x_2 + \overline{x_2} \overline{x_3}$$

Esempio di Mappe di Karnaugh

x_1	x_2	x_3	$y = f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0



Esempio di Mappe di Karnaugh

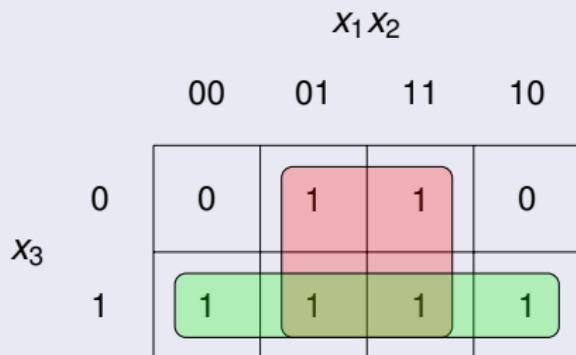
		$x_1 x_2$				
		00	01	11	10	
		0	0	1	0	0
x_3		1	1	0	0	1

- Box **rosso**: x_1 varia, quindi **non contribuisce**, $x_2 = 0, x_3 = 1 \Rightarrow \overline{x_2} x_3$
- Box **verde**: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0 \Rightarrow \overline{x_1} x_2 \overline{x_3}$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_2} x_3 + \overline{x_1} x_2 \overline{x_3}$$

Esempio di Mappe di Karnaugh

x_1	x_2	x_3	$y = f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



Esempio di Mappe di Karnaugh

		$x_1 x_2$				
		00	01	11	10	
		0	0	1	1	0
x_3		1	1	1	1	1

- Box **rosso**: x_1 e x_3 variano, $x_2 = 1 \Rightarrow x_2$
- Box **verde**: x_1 e x_2 variano, $x_3 = 1 \Rightarrow x_3$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_3$$

Algebra Booleana

Corrado Santoro

Dipartimento di Matematica e Informatica

santoro@dmi.unict.it



Corso di Architettura degli Elaboratori