Conceitos Básicos

INF2604 – Geometria Computacional

Waldemar Celes
celes@inf.puc-rio.br

Departamento de Informática, PUC-Rio

Agenda

Apresentação da disciplina

Geometria Afim

Geometria Euclidiana

Topologia

Apresentação da disciplina

INF2604 – Geometria Computacional

Programa

INF2604 - Geometria Computacional		
Período: **2024.2**		
Programa (sujeito a alterações)		
Ago	15	Conceitos básicos
	22	Localização de pontos
	29	Interseção de segmentos
Set	5	Polígonos
	12	Fecho convexo
	19	Estruturas topológicas
	26	Triangulação e Delaunay
Out	3	Diagrama de Voronoi
	10	Curvas & Poliedros
	17	Malha de quadriláteros
	24	Estruturas hierárquicas
	31	Processamento de malhas
Nov	7	Processamento de malhas
	14	Malha implícita
	21	
	28	
Dez	5	**Apresentação de trabalhos finais**

INF2604 – Geometria Computacional

Critério de avaliação

- **Avaliações conceituais: 20%**
  - Lista de Exercício
    - Envio de resolução em formato pdf
- **Avaliações práticas: 40%**
  - Exercícios práticos: 30%
    - Aluno envia 2,0 pontos de exercícios, conforme sua escolha
    - Envio de código fonte e breve relatório
  - Trabalhos pontuais: 70%
    - Envio de código fonte e relatório
    - Breve demonstração do código em funcionamento
- **Trabalho final: 40%**
  - Envio de mini-monografia (conceitos e resultados)
  - Apresentação do trabalho (conceitos e resultados)

INF2604 – Geometria Computacional

Bibliografia

- Discrete and Computational Geometry;
  S. L. Devadoss, J. O'Rourke, 2011
- Computational Geometry, 3rd edition;
  M. de Berg, O. Cheong, M. Kreveld, M. Overmars, 2008
- Computational Geometry in C, 2nd edition;
  J. O'Rourke, 1998
- Delaunay Mesh Generation;
  S Cheng, T. K. Dey, J. R. Shewchuk, 2013
- Polygon Mesh Processing;
  M. Botsch, L. Kobbelt, M. Pauly, P. Alliez, B. Lévy, 2010
- Isosurfaces – Geometry, Topology & Algorithms;
  R. Wenger, 2013

Geometria Afim

Grandezas

- Escalares (α), pontos ($\mathbf{p}$) e vetores ($\vec{\mathbf{v}}$)
  - Vetores com direção e magnitude

Operações válidas

$$
\begin{aligned}
\alpha\,\vec{\mathbf{v}} &\longrightarrow \vec{\mathbf{w}} \\
\vec{\mathbf{v}}\,\vec{\mathbf{w}} &\longrightarrow \alpha \\
\mathbf{p}-\mathbf{q} &\longrightarrow \vec{\mathbf{v}} \\
\mathbf{p}+\vec{\mathbf{v}} &\longrightarrow \mathbf{q}
\end{aligned}
$$

Grandezas

- Escalares (α), pontos ($\mathbf{p}$) e vetores ($\vec{\mathbf{v}}$)
  - Vetores com direção e magnitude

Operações válidas

$$\begin{aligned} \alpha\,\vec{\mathbf{v}} &\longrightarrow \vec{\mathbf{w}} \\ \vec{\mathbf{v}}\,\vec{\mathbf{w}} &\longrightarrow \alpha \\ \mathbf{p}-\mathbf{q} &\longrightarrow \vec{\mathbf{v}} \\ \mathbf{p}+\vec{\mathbf{v}} &\longrightarrow \mathbf{q} \end{aligned}$$

- Note que não são válidas:

$$\alpha\,\mathbf{p}$$
$$\mathbf{p}+\mathbf{q}$$

Combinação

- Combinação afim
  - Aparentemente ilegal:

$$\mathbf{p} = \alpha_0 \mathbf{p}_0 + \alpha_1 \mathbf{p}_1, \quad \alpha_0 + \alpha_1 = 1$$

Combinação

- Combinação afim
  - Aparentemente ilegal:

$$\mathbf{p} = \alpha_0 \mathbf{p}_0 + \alpha_1 \mathbf{p}_1, \quad \alpha_0 + \alpha_1 = 1$$

    - Mas é interpolação
  - Legal:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \alpha_1 (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)$$

Combinação

- Combinação afim
  - Aparentemente ilegal:

$$\mathbf{p} = \alpha_0 \mathbf{p}_0 + \alpha_1 \mathbf{p}_1, \quad \alpha_0 + \alpha_1 = 1$$

    - Mas é interpolação
  - Legal:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \alpha_1 (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)$$

  - Estendendo para 3 pontos:

$$\mathbf{p} = \alpha_0 \mathbf{p}_0 + \alpha_1 \mathbf{p}_1 + \alpha_2 \mathbf{p}_2, \quad \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$
$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \alpha_1 (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) + \alpha_2 (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0)$$

Coordenadas homogêneas

- Ponto/Vetor na dimensão d é representado por uma $(d+1)$-tupla

$$\begin{array}{llcrcl} d=1: & x & \longrightarrow & (x,w) & \text{ou} & (w,x) \\ d=2: & (x,y) & \longrightarrow & (x,y,w) & \text{ou} & (w,x,y) \\ d=3: & (x,y,z) & \longrightarrow & (x,y,z,w) & \text{ou} & (w,x,y,z) \end{array}$$

Coordenadas homogêneas

- Ponto/Vetor na dimensão d é representado por uma $(d+1)$-tupla

$$\begin{array}{lllcrcl} d=1: & x & \longrightarrow & (x,w) & \text{ou} & (w,x) \\ d=2: & (x,y) & \longrightarrow & (x,y,w) & \text{ou} & (w,x,y) \\ d=3: & (x,y,z) & \longrightarrow & (x,y,z,w) & \text{ou} & (w,x,y,z) \end{array}$$

  - Para pontos: $w=1$
  - Para vetores: $w=0$

Coordenadas homogêneas

- Ponto/Vetor na dimensão d é representado por uma $(d+1)$-tupla

$$
\begin{array}{llcrcl}
d=1: & x & \longrightarrow & (x,w) & \text{ou} & (w,x) \\
d=2: & (x,y) & \longrightarrow & (x,y,w) & \text{ou} & (w,x,y) \\
d=3: & (x,y,z) & \longrightarrow & (x,y,z,w) & \text{ou} & (w,x,y,z)
\end{array}
$$

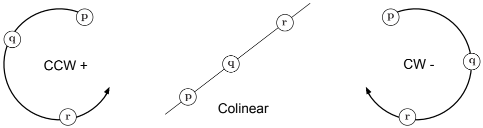
- Para pontos: $w=1$
- Para vetores: $w=0$
  - Logo: $\mathbf{p}-\mathbf{q}$ naturalmente resulta em um vetor

Orientação

- Operadores relacionais para pontos $(<, =, >)$
  - Orientação de $(d+1)$ pontos na dimensão d
    - Positiva
    - Zero
    - Negativa

Orientação

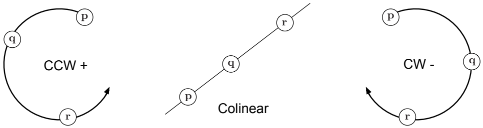
- Operadores relacionais para pontos $(<, =, >)$
  - Orientação de $(d+1)$ pontos na dimensão d
    - Positiva
    - Zero
    - Negativa
- Espaço bidimensional $(d = 2)$
  - Positiva: anti-horária
  - Zero: colineares
  - Negativa: horária



Orientação

- Operadores relacionais para pontos $(<, =, >)$
  - Orientação de $(d+1)$ pontos na dimensão d
    - Positiva
    - Zero
    - Negativa

- Espaço bidimensional $(d = 2)$
  - Positiva: anti-horária
  - Zero: colineares
  - Negativa: horária



$$orient < \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} >= \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y \\ 1 & q_x & q_y \\ 1 & r_x & r_y \end{vmatrix}$$

Orientação

- Espaço tridimensional $(d = 3)$
  - Positiva: parafuso com regra da mão direita
  - Zero: coplanares
  - Negativa: parafuso com regra da mão esquerda

$$orient < \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s} >= \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_z \\ 1 & q_x & q_y & q_z \\ 1 & r_x & r_y & r_z \\ 1 & s_x & s_y & s_z \end{vmatrix}$$

Orientação

- Espaço tridimensional $(d = 3)$
  - Positiva: parafuso com regra da mão direita
  - Zero: coplanares
  - Negativa: parafuso com regra da mão esquerda

$$orient < \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s} >= \begin{vmatrix} 1 & p_x & p_y & p_z \\ 1 & q_x & q_y & q_z \\ 1 & r_x & r_y & r_z \\ 1 & s_x & s_y & s_z \end{vmatrix}$$

- Espaço unidimensional $(d = 1)$
  - Positiva: $\mathbf{p}$ precede $\mathbf{q}$
  - Zero: $\mathbf{p}$ coincide com $\mathbf{q}$
  - Negativa: $\mathbf{q}$ precede $\mathbf{p}$

$$orient < \mathbf{p}, \mathbf{q} >= \begin{vmatrix} 1 & p_x \\ 1 & q_x \end{vmatrix} = q_x - p_x$$

Geometria Euclidiana

Ângulos, áreas e distâncias

- Produto interno

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \sum_{i}^{d} u_i v_i$$

- Magnitude de vetor

$$\|\vec{\mathbf{v}}\| = \sqrt{\vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}}}$$

- Normalização

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\vec{\mathbf{v}}}{\|\vec{\mathbf{v}}\|}$$

- Distância entre dois pontos

$$\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|$$

Ortogonalidade

- Vetores ortogonais (perpendiculares)

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = 0$$

- Projeção ortogonal
  - Dados $\vec{\mathbf{u}}$ e $\hat{\mathbf{v}}$, tem-se:

$$\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{u}}_1 + \vec{\mathbf{u}}_2$$

$$\text{onde: } \vec{\mathbf{u}}_1 \parallel \hat{\mathbf{v}} \text{ e } \vec{\mathbf{u}}_2 \perp \hat{\mathbf{v}}$$

Ortogonalidade

- Vetores ortogonais (perpendiculares)

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = 0$$

- Projeção ortogonal
  - Dados $\vec{\mathbf{u}}$ e $\hat{\mathbf{v}}$, tem-se:

$$\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{u}}_1 + \vec{\mathbf{u}}_2$$

$$\text{onde: } \vec{\mathbf{u}}_1 \parallel \hat{\mathbf{v}} \text{ e } \vec{\mathbf{u}}_2 \perp \hat{\mathbf{v}}$$

  - Cálculo das componentes:

$$\vec{\mathbf{u}}_1 = \vec{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}}$$
$$\vec{\mathbf{u}}_2 = \vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{u}}_1$$

Ângulo entre vetores

- Ângulo real

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}}{\|\vec{\mathbf{u}}\| \|\vec{\mathbf{v}}\|} = \cos^{-1}(\hat{\mathbf{u}}.\hat{\mathbf{v}}), \quad \theta \in [0, \pi]$$

Ângulo entre vetores

- Ângulo real

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}}{\|\vec{\mathbf{u}}\| \|\vec{\mathbf{v}}\|} = \cos^{-1}(\hat{\mathbf{u}}.\hat{\mathbf{v}}), \quad \theta \in [0, \pi]$$

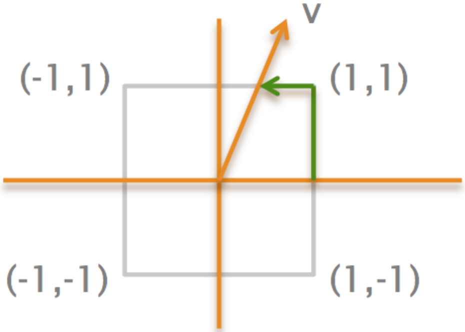
- Pseudo ângulo

$$f(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}) = 1 - \cos\theta = 1 - \hat{\mathbf{u}}.\hat{\mathbf{v}}, \quad f(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}) \in [0, 2]$$

Ângulo entre vetores

Pseudo ângulo como perímetro de quadrado

- Imagem no intervalo $[0, 8)$
- Em especial, para ordenação polar
- Baixo custo computacional



Exercício

- Escreva um código de uma função para calcular o pseudo-ângulo de um vetor usando apenas 3 comparações, 1 soma e 1 divisão.

Áreas e ângulos

- Área de um triângulo $(\mathbf{pqr})$

$$A_{\mathbf{pqr}} = \frac{orient < \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} >}{2}$$

  - Em d-dimensão:

$$A = \frac{orient < ... >}{d!}$$

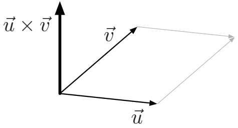
- Ângulo $\angle_{\mathbf{pqr}}$

$$\sin\theta = \frac{orient < \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} >}{\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\| \, \|\mathbf{r} - \mathbf{q}\|}$$

Áreas e ângulos

Produto vetorial

$$\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = \|\vec{\mathbf{u}}\| \, \|\vec{\mathbf{v}}\| \sin\theta \; \hat{\mathbf{n}}$$



- Cálculo via determinante

$$\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & i \\ u_2 & v_2 & j \\ u_3 & v_3 & k \end{vmatrix}$$

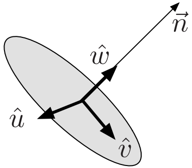
$$= (u_2 v_3 - u_3 v_2)\, i + (u_3 v_1 - u_1 v_2)\, j + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\, k$$

- Ângulo entre vetores

$$\theta = \sin^{-1} \|\hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{v}}\|$$

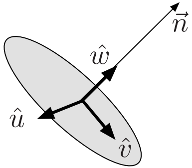
Base ortonormal

- Dado vetor $\vec{\mathbf{n}}$, achar base ortonormal $\hat{\mathbf{u}}\,\hat{\mathbf{v}}\,\hat{\mathbf{w}}$, com $\vec{\mathbf{n}} \parallel \hat{\mathbf{w}}$



Base ortonormal

- Dado vetor $\vec{\mathbf{n}}$, achar base ortonormal $\hat{\mathbf{u}}\,\hat{\mathbf{v}}\,\hat{\mathbf{w}}$, com $\vec{\mathbf{n}} \parallel \hat{\mathbf{w}}$



$\hat{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{n}}$

$\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{w}} \times \hat{\mathbf{i}}$, onde $\hat{\mathbf{i}} = [1 \quad 0 \quad 0]^T$

se: $\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{u}} < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{i}} \parallel \hat{\mathbf{w}}$

então: $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{w}} \times j$

$\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{w}} \times \hat{\mathbf{u}}$

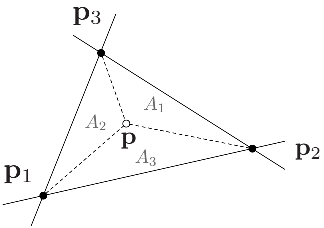
Coordenadas baricêntricas

- Sendo $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ e $\mathbf{p}_3$ pontos não colineares, um ponto $\mathbf{p}$ pode ser expresso na forma:

$$\mathbf{p} = \lambda_1 \mathbf{p}_1 + \lambda_2 \mathbf{p}_2 + \lambda_3 \mathbf{p}_3$$

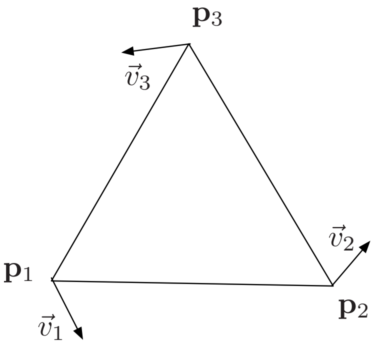
  - λ_1, λ_2 e λ_3 são as **coordenadas baricêntricas** do ponto $\mathbf{p}$ em relação a $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ e $\mathbf{p}_3$.

$$\lambda_i = \frac{A_i}{A_T}$$



Exercício

- Considere a interpolação linear de um campo vetorial $2D$ representado de forma discreta nos vértices de triângulos.



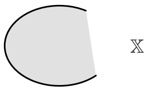
- Determine o ponto de singularidade, isto é, o ponto onde $\vec{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$

Topologia

Interior e Fronteira

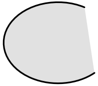
Considere um conjunto de pontos $\mathbb{X}$

$$\mathbb{X} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d\}$$



Interior e Fronteira

Considere um conjunto de pontos $\mathbb{X}$



$\mathbb{X}$

$$\mathbb{X} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d\}$$

$int(\mathbb{X})$

- Interior de $\mathbb{X}$: $int(\mathbb{X})$

$$int(\mathbb{X}) = \{\mathbf{p} \in \mathbb{X} : \mathbb{N}_\mathbf{p} \subseteq \mathbb{X}\}$$

onde $\mathbb{N}_\mathbf{p}$ é uma vizinhança local de $\mathbf{p}$

Interior e Fronteira

Considere um conjunto de pontos $\mathbb{X}$

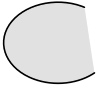
$$\mathbb{X} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d\}$$

- Interior de $\mathbb{X}$: $int(\mathbb{X})$

$$int(\mathbb{X}) = \{\mathbf{p} \in \mathbb{X} : \mathbb{N}_\mathbf{p} \subseteq \mathbb{X}\}$$

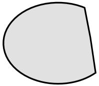
onde $\mathbb{N}_\mathbf{p}$ é uma vizinhança local de $\mathbf{p}$

- Fecho de $\mathbb{X}$: $cl(\mathbb{X})$



$\mathbb{X}$

$int(\mathbb{X})$



$cl(\mathbb{X})$

Interior e Fronteira

Considere um conjunto de pontos $\mathbb{X}$

$$\mathbb{X} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d\}$$

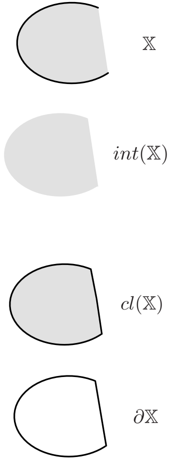
- Interior de $\mathbb{X}$: $int(\mathbb{X})$

$$int(\mathbb{X}) = \{\mathbf{p} \in \mathbb{X} : \mathbb{N}_{\mathbf{p}} \subseteq \mathbb{X}\}$$

onde $\mathbb{N}_{\mathbf{p}}$ é uma vizinhança local de $\mathbf{p}$

- Fecho de $\mathbb{X}$: $cl(\mathbb{X})$
- Fronteira de $\mathbb{X}$: $\partial\mathbb{X}$

$$\begin{aligned} \partial\mathbb{X} &= cl(\mathbb{X}) - int(\mathbb{X}) \\ &= \{\mathbf{p} \in cl(\mathbb{X}) : \mathbb{N}_{\mathbf{p}} \nsubseteq \mathbb{X}\} \end{aligned}$$



Interior e Fronteira

Exemplos de $\mathbb{X}$, $int(\mathbb{X})$ e $\partial\mathbb{X}$

Interior e Fronteira

Exemplos de $\mathbb{X}$, $int(\mathbb{X})$ e $\partial\mathbb{X}$

- Disco em 2D

Interior e Fronteira

Exemplos de $\mathbb{X}$, $int(\mathbb{X})$ e $\partial\mathbb{X}$

- Disco em 2D
  - $int(\mathbb{X})$ é o disco aberto
  - $\partial\mathbb{X}$ é a circunferência

Interior e Fronteira

Exemplos de $\mathbb{X}$, $int(\mathbb{X})$ e $\partial\mathbb{X}$

- Disco em 2D
  - $int(\mathbb{X})$ é o disco aberto
  - $\partial\mathbb{X}$ é a circunferência
- Disco em 3D

Interior e Fronteira

Exemplos de $\mathbb{X}$, $int(\mathbb{X})$ e $\partial\mathbb{X}$

- Disco em 2D
  - $int(\mathbb{X})$ é o disco aberto
  - $\partial\mathbb{X}$ é a circunferência
- Disco em 3D
  - $int(\mathbb{X}) = \emptyset$
  - $\partial\mathbb{X} = \mathbb{X}$

Homeomorfismo

- Correspondência um a um contínua nos dois sentidos entre dois espaços topológicos ou entre duas figuras geométricas
  - Sejam $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ subconjuntos de $\mathbb{R}^d$,
    existe a função $\mu : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ homeomorfa, um a um contínua,
    e existe μ^{-1}, também um a um contínua

Homeomorfismo

- Uma curva simples é *homeomorfa* ao intervalo unitário $[0, 1]$

Homeomorfismo

- Uma curva simples é *homeomorfa* ao intervalo unitário $[0, 1]$

- Uma curva simples fechada é *homeomorfa* a um disco unitário: $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$

Homeomorfismo

- Uma curva simples é *homeomorfa* ao intervalo unitário $[0, 1]$

- Uma curva simples fechada é *homeomorfa* a um disco unitário: $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$

- Um cubo é *homeomorfo* a uma esfera

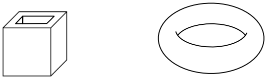
Homeomorfismo

- Uma curva simples é *homeomorfa* ao intervalo unitário $[0, 1]$

- Uma curva simples fechada é *homeomorfa* a um disco unitário: $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$

- Um cubo é *homeomorfo* a uma esfera

- Um cubo vazado é *homeomorfo* a um toro



Manifold

- Manifold de dimensão k (*k-manifold*) é um conjunto de pontos cuja **topologia local** é a mesma que $\mathbb{R}^k$
  - Exemplos:
    - Uma curva simples fechada é *1-manifold*
    - A superfície de uma esfera é *2-manifold*

Manifold

- Manifold de dimensão k (*k-manifold*) é um conjunto de pontos cuja **topologia local** é a mesma que $\mathbb{R}^k$
  - Exemplos:
    - Uma curva simples fechada é *1-manifold*
    - A superfície de uma esfera é *2-manifold*

- Manifold de dimensão k com fronteira é um conjunto de pontos cuja **topologica local** é a mesma que $\mathbb{R}^k$ ou que um semi-espaço de $\mathbb{R}^k$.
  - Exemplos
    - Uma superfície 3D limitada é um *2-manifold* com fronteira
    - Uma esfera é um *3-manifold* com fronteira

Exercício

- Classifique o manifold dos conjuntos abaixo, indicando dimensão e se tem ou não fronteira:
  - $\mathbb{X}$, sendo $\mathbb{X}$ um círculo em $\mathbb{R}^2$
  - $\partial\mathbb{X}$, sendo $\mathbb{X}$ um círculo em $\mathbb{R}^2$
  - $\mathbb{X}$, sendo $\mathbb{X}$ uma esfera em $\mathbb{R}^3$
  - $\partial\mathbb{X}$, sendo $\mathbb{X}$ uma esfera em $\mathbb{R}^3$