Fecho Convexo

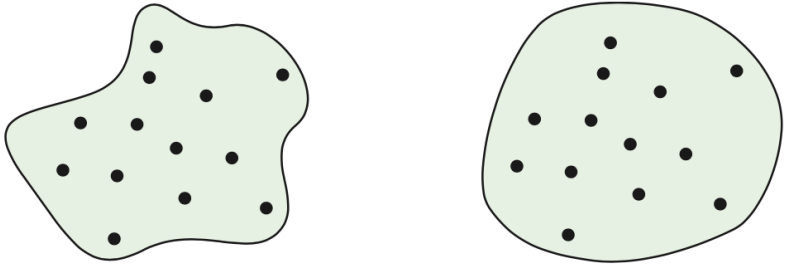
INF2604 – Geometria Computacional

Waldemar Celes
celes@inf.puc-rio.br

Departamento de Informática, PUC-Rio

Região convexa

Uma região é dita convexa se todos os pares de pontos da região são visíveis entre si.



- Dada uma região convexa R, qualquer linha $\overline{\mathbf{pq}}$ entre dois pontos de R está contida na região: $\overline{\mathbf{pq}} \subset R$.

$$\alpha\mathbf{p} + \beta\mathbf{q} \in R, \quad \alpha, \beta >= 0, \quad \alpha + \beta = 1$$

Figura extraída de Discrete and Computational Geometry, Devadoss and Rourke, 2011

Fecho convexo

Visão intuitiva

- Considere um conjunto de pregos numa superfície plana; o fecho convexo 2D é definido por um elástico que envolve o conjunto de pregos (pontos).

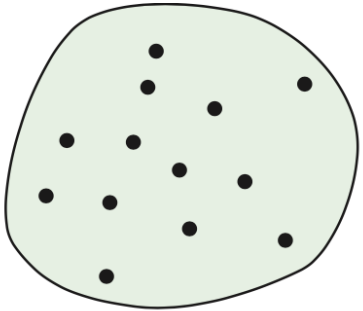
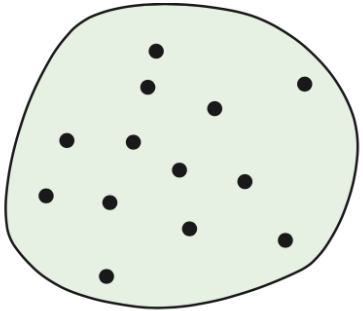


Figura extraída de Discrete and Computational Geometry, Devadoss and Rourke, 2011

Fecho convexo

Visão intuitiva

- Considere um conjunto de pregos numa superfície plana; o fecho convexo 2D é definido por um elástico que envolve o conjunto de pregos (pontos).



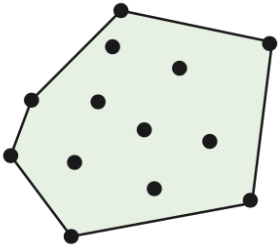


Figura extraída de Discrete and Computational Geometry, Devadoss and Rourke, 2011

Fecho convexo

Dado um conjunto de pontos $S = \{\mathbf{p}_1, ...\mathbf{p}_n\}$, o fecho convexo de S é o conjunto de todas as combinações convexas de S:

- Uma combinação convexa de S é expressa por:

$$\lambda_1\mathbf{p}_1 + \cdots + \lambda_n\mathbf{p}_n$$

- Fecho convexo:

$$conv(S) = \left\{\lambda_1\mathbf{p}_1 + \cdots + \lambda_n\mathbf{p}_n | \lambda_i \geq 0, \quad \sum \lambda_i = 1\right\}$$

Fecho convexo

Determinação do fecho convexo de um conjunto de pontos

- Identificação dos vértices pertencenes ao fecho

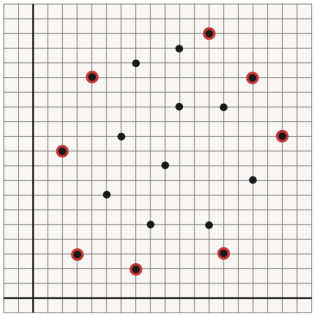


Figura extraída de Discrete and Computational Geometry, Devadoss and Rourke, 2011

Fecho convexo

Determinação do fecho convexo de um conjunto de pontos

- Identificação dos vértices pertencenes ao fecho

Algoritmos para construção de fecho convexo

- Incremental
- *Gift wrapping*
- Varredura de Graham
- Dividir e conquistar

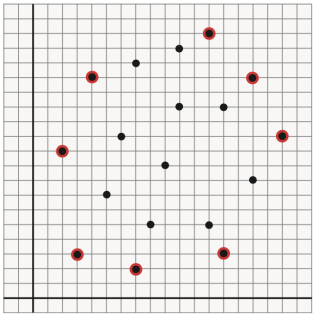


Figura extraída de Discrete and Computational Geometry, Devadoss and Rourke, 2011

Algoritmo incremental

Ideia: assume que temos o fecho de k pontos

- Incrementalmente, calculamos o fecho de $k + 1$ pontos

Algoritmo incremental

Ideia: assume que temos o fecho de k pontos

- Incrementalmente, calculamos o fecho de $k + 1$ pontos

Suposições:

- Não existem pontos com coordenadas x coincidentes
- Não existem pontos colineares

Algoritmo incremental

Ideia: assume que temos o fecho de k pontos

- Incrementalmente, calculamos o fecho de $k + 1$ pontos

Suposições:

- Não existem pontos com coordenadas x coincidentes
- Não existem pontos colineares

Algoritmo

- Ordena pontos em ordem crescente de coordenada x
- Forma $conv(H_3)$ com os três primeiros pontos
  - Orientação antihorária
- Adiciona ponto $\mathbf{p}_{k+1}$
  - Como $\mathbf{p}_{k+1}$ é o ponto mais à direita do conjunto corrente, ele pertence a $conv(H_{k+1})$
  - Acrescenta $\mathbf{p}_{k+1}$ no fecho na ordem correta
  - Elimina pontos que não mais pertencem ao fecho

Linha de Suporte

Definição

- Seja P um polígono convexo e **x** um ponto em ∂P
  - Uma linha L contento **x** *suporta* P em **x** se P está todo em um dos lados de L
  - L é dita *tangente* de P em **x**

Algoritmo incremental

Determinação dos pontos eliminados do fecho devido a $\mathbf{p}_{k+1}$

- Determinar as duas tangentes a P que passa por $\mathbf{p}_{k+1}$

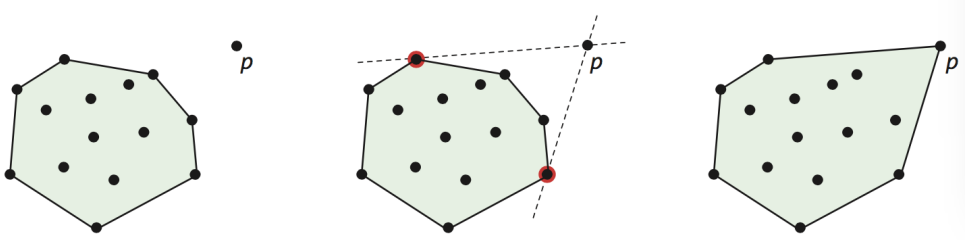


Figura extraída de Discrete and Computational Geometry, Devadoss and Rourke, 2011

Algoritmo incremental

Determinação dos pontos eliminados do fecho devido a $\mathbf{p}_{k+1}$

- Determinar as duas tangentes a P que passa por $\mathbf{p}_{k+1}$
- Computar a visibilidade das arestas de P em relação a $\mathbf{p}_{k+1}$
  - Vértices de silhueta pertencem às tangentes
  - Vértices "visíveis" são retirados do fecho

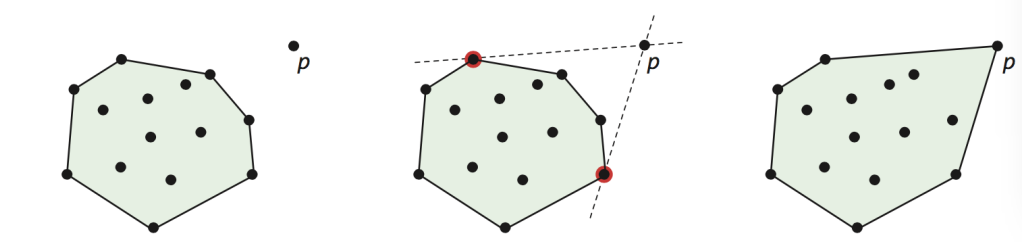


Figura extraída de Discrete and Computational Geometry, Devadoss and Rourke, 2011

Algoritmo incremental

Algoritmo em funcionamento

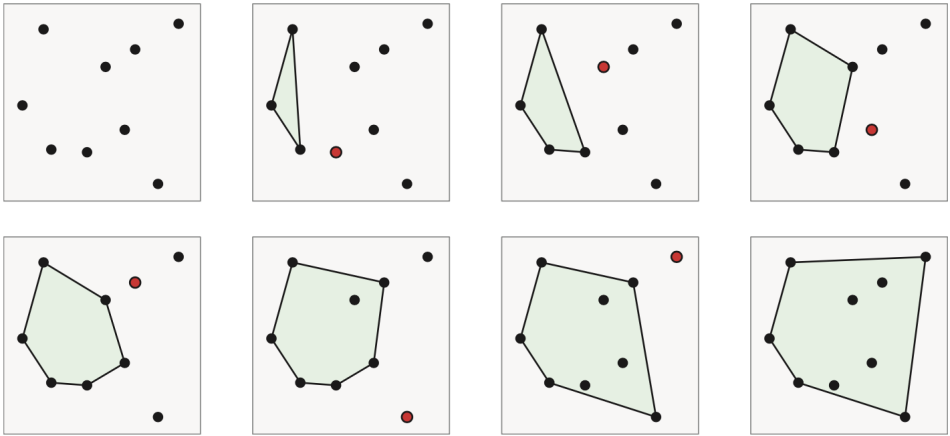


Figura extraída de Discrete and Computational Geometry, Devadoss and Rourke, 2011

Algoritmo incremental

Análise de complexidade

- Ordenação dos pontos:
- Teste de visibilidade:

Algoritmo incremental

Análise de complexidade

- Ordenação dos pontos:
  - $O(n \quad \log n)$
- Teste de visibilidade:

Algoritmo incremental

Análise de complexidade

- Ordenação dos pontos:
  - $O(n \quad \log n)$
- Teste de visibilidade:
  - $O(n^2)$
    - $O(k)$ para cada inserção $\mathbf{p}_{k+1}$

Algoritmo incremental

Análise de complexidade

- Ordenação dos pontos:
  - $O(n \quad \log n)$
- Teste de visibilidade:
  - $O(n^2)$
    - $O(k)$ para cada inserção $\mathbf{p}_{k+1}$

- **Complexidade do algoritmo:** $O(n^2)$

Algoritmo incremental

Análise de complexidade

- Ordenação dos pontos:
  - $O(n \quad \log n)$
- Teste de visibilidade:
  - $O(n^2)$
    - $O(k)$ para cada inserção $\mathbf{p}_{k+1}$

- **Complexidade do algoritmo:** $O(n^2)$

- É possível diminuir a complexidade desse algortimo?

Algoritmo incremental

Análise de complexidade

- Ordenação dos pontos:
  - $O(n \quad \log n)$
- Teste de visibilidade:
  - $O(n^2)$
    - $O(k)$ para cada inserção $\mathbf{p}_{k+1}$
- **Complexidade do algoritmo:** $O(n^2)$
- É possível diminuir a complexidade desse algortimo?
  - **Sim**, determinação das tangentes pode ser $O(n)$ amortizada

Algoritmo incremental

Casos degenerados

- Pontos com mesma coordenada x
  - Podemos aplicar uma rotação arbitrária

Figura extraída de Discrete and Computational Geometry, Devadoss and Rourke, 2011

Algoritmo incremental

Casos degenerados

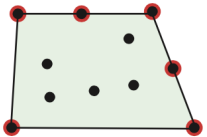
- Pontos com mesma coordenada x
  - Podemos aplicar uma rotação arbitrária
- Pontos colineares
  - Ambiguidade de que pontos pertencem ao fecho

Figura extraída de Discrete and Computational Geometry, Devadoss and Rourke, 2011

Algoritmo incremental

Casos degenerados

- Pontos com mesma coordenada x
  - Podemos aplicar uma rotação arbitrária
- Pontos colineares
  - Ambiguidade de que pontos pertencem ao fecho



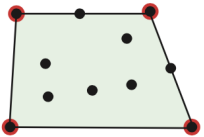


Figura extraída de Discrete and Computational Geometry, Devadoss and Rourke, 2011

Algoritmo *gift wrapping*

- Parte de um ponto garantidamente no fecho

Figura extraída de Discrete and Computational Geometry, Devadoss and Rourke, 2011

Algoritmo *gift wrapping*

- Parte de um ponto garantidamente no fecho
  - Selecione o ponto mais abaixo (e mais à direita)

Figura extraída de Discrete and Computational Geometry, Devadoss and Rourke, 2011

Algoritmo *gift wrapping*

- Parte de um ponto garantidamente no fecho
  - Selecione o ponto mais abaixo (e mais à direita)
- Trace segmentos de reta aos demais pontos
  - Escolha o ponto com menor ângulo (antihorário) com eixo x
  - Tem-se a primeira aresta do fecho

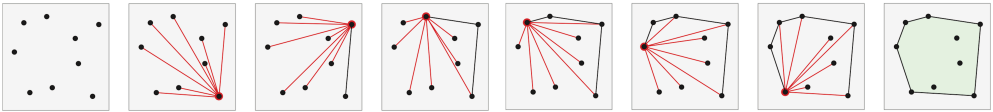


Figura extraída de Discrete and Computational Geometry, Devadoss and Rourke, 2011

Algoritmo *gift wrapping*

- Parte de um ponto garantidamente no fecho
  - Selecione o ponto mais abaixo (e mais à direita)
- Trace segmentos de reta aos demais pontos
  - Escolha o ponto com menor ângulo (antihorário) com eixo x
  - Tem-se a primeira aresta do fecho
- Para cada novo ponto adicionado no fecho
  - Trace segmentos para demais pontos
  - Escolha o ponto com menor ângulo em relação à última aresta do fecho

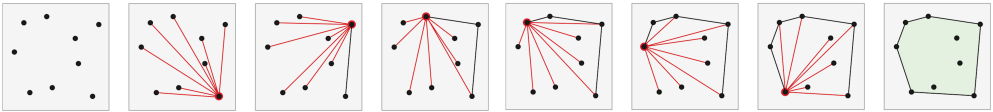


Figura extraída de Discrete and Computational Geometry, Devadoss and Rourke, 2011

Algoritmo *gift wrapping*

Análise de complexidade

- Escolha do ponto inicial

Algoritmo *gift wrapping*

Análise de complexidade

- Escolha do ponto inicial
  - $O(n)$

Algoritmo *gift wrapping*

Análise de complexidade

- Escolha do ponto inicial
  - $O(n)$
- Escolha dos demais
  - Verificação dos segmentos para escolha do próximo ponto:

Algoritmo *gift wrapping*

Análise de complexidade

- Escolha do ponto inicial
  - $O(n)$
- Escolha dos demais
  - Verificação dos segmentos para escolha do próximo ponto: $O(n)$

Algoritmo *gift wrapping*

Análise de complexidade

- Escolha do ponto inicial
  - $O(n)$
- Escolha dos demais
  - Verificação dos segmentos para escolha do próximo ponto: $O(n)$
  - Número de vezes que a verificação é feita

Algoritmo *gift wrapping*

Análise de complexidade

- Escolha do ponto inicial
  - $O(n)$
- Escolha dos demais
  - Verificação dos segmentos para escolha do próximo ponto: $O(n)$
  - Número de vezes que a verificação é feita
    - Número de pontos no fecho: h

Algoritmo *gift wrapping*

Análise de complexidade

- Escolha do ponto inicial
  - $O(n)$
- Escolha dos demais
  - Verificação dos segmentos para escolha do próximo ponto: $O(n)$
  - Número de vezes que a verificação é feita
    - Número de pontos no fecho: h
- **Complexidade do algoritmo:** $O(nh)$

Algoritmo por varredura de Graham

Ron Graham, Bell Laboratories

- Necessidade de achar fecho de 10 000 pontos
- Publicação em artigo de 1972
  - Provavelmente, primeiro artigo em Geometria Computacional

Algoritmo por varredura de Graham

- Selecione o ponto mais abaixo (e mais à direita)
- Trace segmentos de reta aos demais pontos
  - Ordene pontos em ordem crescente de ângulo com x
- Processa cada ponto c em ordem
  - Em relação à última aresta $\overline{ab}$
    - Se dobra à esquerda: acrescenta no fecho
    - Se dobra à direita: b deve ser descartado do fecho
    - Retrocede até achar uma dobra à esquerda

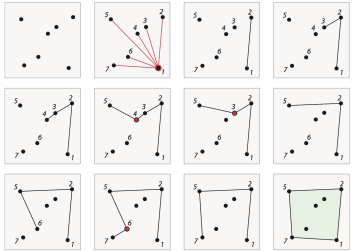


Figura extraída de Discrete and Computational Geometry, Devadoss and Rourke, 2011

Algoritmo por varredura de Graham

Análise de complexidade

Algoritmo por varredura de Graham

Análise de complexidade

- Ordenação dos pontos: $O(n \quad \log n)$

Algoritmo por varredura de Graham

Análise de complexidade

- Ordenação dos pontos: $O(n \quad \log n)$
- Processamento de cada ponto:

Algoritmo por varredura de Graham

Análise de complexidade

- Ordenação dos pontos: $O(n \quad \log n)$
- Processamento de cada ponto: $O(n)$
  - Cada ponto é processado no máximo 2 vezes
    - Adição ao fecho
    - Remoção do fecho

Algoritmo por varredura de Graham

Análise de complexidade

- Ordenação dos pontos: $O(n \quad \log n)$
- Processamento de cada ponto: $O(n)$
  - Cada ponto é processado no máximo 2 vezes
    - Adição ao fecho
    - Remoção do fecho

- **Complexidade do algoritmo:** $O(n \ \log n)$

Algoritmo por varredura de Graham

É possível melhorar a complexidade do algoritmo?

Figura extraída de Discrete and Computational Geometry, Devadoss and Rourke, 2011

Algoritmo por varredura de Graham

É possível melhorar a complexidade do algoritmo?

- Determinação de fecho engloba ordenação
- $O(n \log n)$ é limite inferior

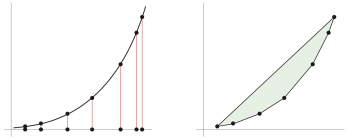
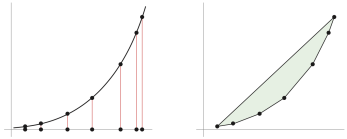


Figura extraída de Discrete and Computational Geometry, Devadoss and Rourke, 2011

Algoritmo por varredura de Graham

É possível melhorar a complexidade do algoritmo?

- Determinação de fecho engloba ordenação
- $O(n \log n)$ é limite inferior



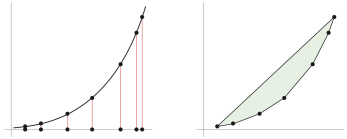
Algoritmo pode ser estendido para 3D?

Figura extraída de Discrete and Computational Geometry, Devadoss and Rourke, 2011

Algoritmo por varredura de Graham

É possível melhorar a complexidade do algoritmo?

- Determinação de fecho engloba ordenação
- $O(n \log n)$ é limite inferior



Algoritmo pode ser estendido para 3D?

- Como ordenar os pontos?

Figura extraída de Discrete and Computational Geometry, Devadoss and Rourke, 2011

Algoritmo dividir e conquistar

- Ordena os pontos segundo coordenada x
- Recursivamente
  - Divide em dois conjuntos A e B
    - $dim[A] = \lceil n/2 \rceil$
    - $dim[B] = \lfloor n/2 \rfloor$
  - Constroi fechos de A e B
  - Combina $conv(A)$ e $conv(B)$

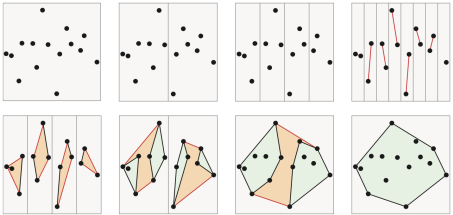


Figura extraída de Discrete and Computational Geometry, Devadoss and Rourke, 2011

Algoritmo dividir e conquistar

Subdivisão até $dim[S] \leq 3$

- $conv(S)$ trivial

Desafio reside na combinação

- Achar duas tangentes entre os polígonos $conv(A)$ e $conv(B)$
  - Suportam os fechos por cima e por baixo

Algoritmo dividir e conquistar

Subdivisão até $dim[S] \leq 3$

- $conv(S)$ trivial

Desafio reside na combinação

- Achar duas tangentes entre os polígonos $conv(A)$ e $conv(B)$
  - Suportam os fechos por cima e por baixo

Complexidade do algoritmo: $O(n \log n)$

- Desde que a combinação seja em tempo $O(n)$

Algoritmo dividir e conquistar

Determinação das tangentes em ordem linear

- A representa o fecho à esquerda e B à direita
  - **a** e **b** são pontos mais à direita e à esquerda de A e B
- A partir de **a**, ache a tangente que suporta B
  - A partir de **b**, percorre no sentido antihorário, atualizando **b**
- A partir de **b**, ache a tangente que suporta A
  - A partir de **a**, percorre no sentido horário, atualizando **a**
- Repita até que a tangente dos dois fechos seja encontrada
- Execute procedimento similar para achar tangente superior

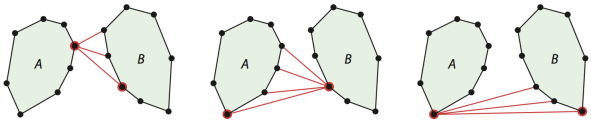


Figura extraída de Discrete and Computational Geometry, Devadoss and Rourke, 2011

Fecho convexo em 3D

Algorithm	*2D Complexity*	*3D Complexity*
Incremental	$O(n^2)$	$O(n^2)$
Gift wrapping	$O(nh)$	$O(nf)$
Divide-and-conquer	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$
Graham scan	$O(n \log n)$	?

Tabela extraída de Discrete and Computational Geometry, Devadoss and Rourke, 2011

Fecho convexo em 3D

Algoritmo incremental

- Dado um fecho Q, determinar o fecho de $Q \cup \mathbf{p}$
  - Determinar os planos tangentes
  - Arestas de silhueta suportam esses planos
  - Faces visíveis são removidas
  - Faces formadas pelas arestas e o ponto **p** são adicionadas

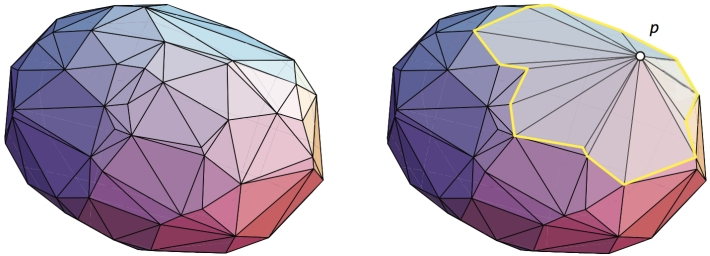


Figura extraída de Discrete and Computational Geometry, Devadoss and Rourke, 2011

Fecho convexo em 3D

Algoritmo dividir e conquistar

- Desafio: dados dois fechos A e B, determinar $conv(A \cup B)$
  - Determinar o plano π que suporta A e B por baixo
    - Considerar que este plano toca A e B nos pontos **a** e **b**
  - Rotacionar o semi-plano ao redor de $\overline{\mathbf{ab}}$ até tocar **r**
    - **r** é vizinho de **a** ou de **b**, o que torna a busca local
  - Repetir a rotação até fechar o cilindro de faces a incluir
  - Descartar as faces dentro desse cilindro de A e B

Figura extraída de Discrete and Computational Geometry, Devadoss and Rourke, 2011

Aplicação: visibilidade de pontos

Problema:

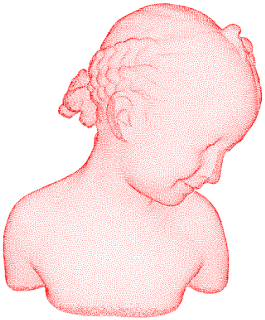
- Dada um nuvem densa de pontos P, determinar o conjunto de pontos visíveis V do ponto de vista do ponto $\mathbf{c}$

Ref: "Direct Visibility of Point Sets", S. Katz, A. Tal, R. Basri, 2007

Aplicação: visibilidade de pontos

Problema:

- Dada um nuvem densa de pontos P, determinar o conjunto de pontos visíveis V do ponto de vista do ponto $\mathbf{c}$



Ref: "Direct Visibility of Point Sets", S. Katz, A. Tal, R. Basri, 2007

Aplicação: visibilidade de pontos

Solução:

- Inversão dos pontos: espelhamento esférico

$$\mathbf{p}'_i = f(\mathbf{p}_i) = \mathbf{p}_i + 2(r - \|\mathbf{p}_i\|)\frac{\mathbf{p}_i}{\|\mathbf{p}_i\|}$$

- Constrói o fecho convexo $conv(\{\mathbf{p}'_i\}, \mathbf{c})$
  - Pontos do fecho são os pontos visíveis