

Estruturas de Dados Topológicas

INF2604 – Geometria Computacional

Waldemar Celes

celes@inf.puc-rio.br

Departamento de Informática, PUC-Rio



Agenda

Estrutura topológica

Representação de malhas

Representação de manifold



Estrutura topológica



Estrutura de dados topológica

Exemplos de aplicações

- ▶ Modelagem geométrica
- ▶ Análises adaptativas
- ▶ Simplificação de malhas
- ▶ Suavização de malhas
- ▶ Extração da “casca” (*hull*)
- ▶ Detecção de silhueta



Quando uma estrutura é dita “topológica”?

Quando provê acesso a relações de adjacências entre as entidades topológicas definidas

- ▶ Quais faces usam este vértice?
- ▶ Quais arestas usam este vértice?
- ▶ Quais faces são adjacentes a esta face?
- ▶ Etc.



Quando uma estrutura é dita “topológica”?

Quando provê acesso a relações de adjacências entre as entidades topológicas definidas

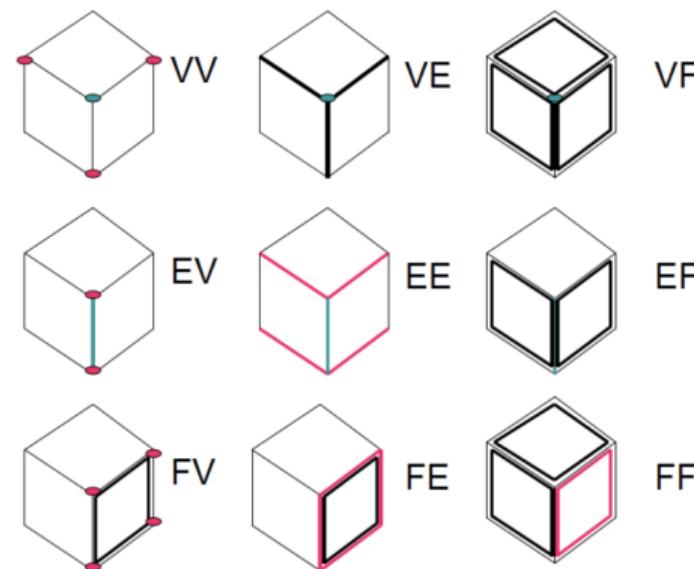
- ▶ Quais faces usam este vértice?
- ▶ Quais arestas usam este vértice?
- ▶ Quais faces são adjacentes a esta face?
- ▶ Etc.

*Uma estrutura de dados topológica é dita **completa** se ela é capaz de prover as relações de adjacências entre todas as entidades topológicas definidas em tempo ótimo, i.e., em tempo linearmente proporcional ao número de entidades retornadas.*

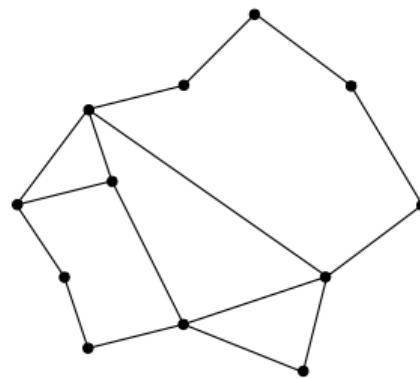


Estrutura topológica

Exemplos de consultas topológicas



Subdivisão planar simples

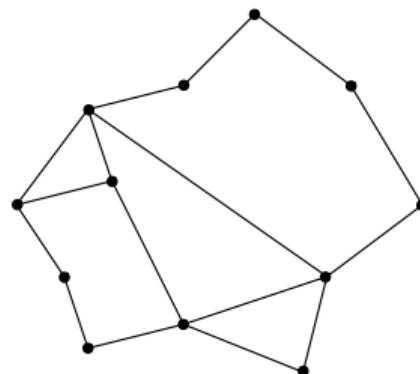


Define 3 entidades topológicas:

- ▶ **Vértice**: Dim 0
- ▶ **Aresta**: Dim 1
- ▶ **Face**: Dim 2



Subdivisão planar simples



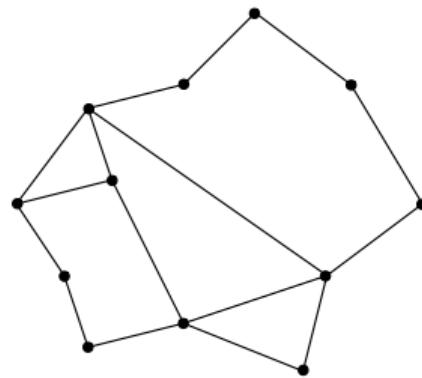
Define 3 entidades topológicas:

- ▶ **Vértice**: Dim 0
- ▶ **Aresta**: Dim 1
- ▶ **Face**: Dim 2

*A subdivisão cobre todo o plano;
existe a face externa, infinita.*



Subdivisão planar simples



Define 3 entidades topológicas:

- ▶ **Vértice**: Dim 0
- ▶ **Aresta**: Dim 1
- ▶ **Face**: Dim 2

*A subdivisão cobre todo o plano;
existe a face externa, infinita.*

Propriedades:

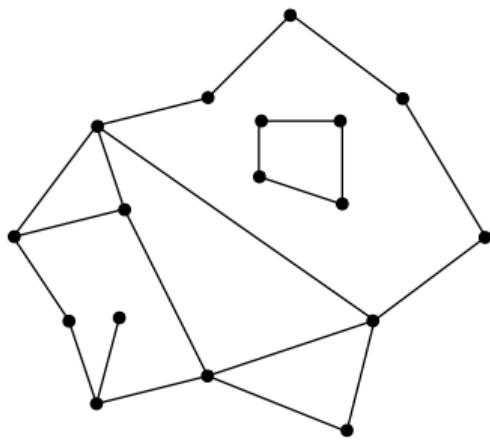
$$V_i \cap V_j = \emptyset$$

$$E_i \cap E_j = \emptyset \cup V_i$$

$$F_i \cap F_j = \emptyset \cup E_i \cup V_i$$



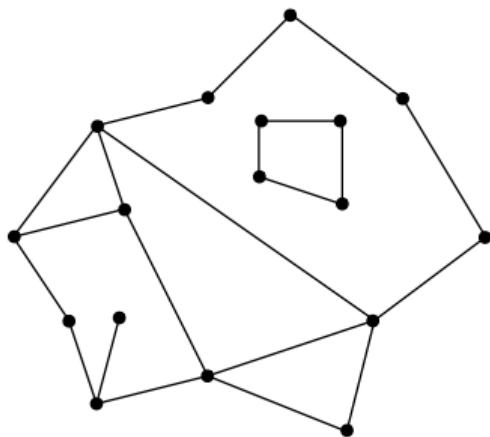
Subdivisão planar com laços



Define 4 entidades topológicas:

- ▶ **Vértices**
- ▶ **Aresta**
- ▶ **Laço**: formada por uma sequência de arestas
- ▶ **Face**: delimitada por um laço externo e zero ou mais laços internos.

Subdivisão planar com laços



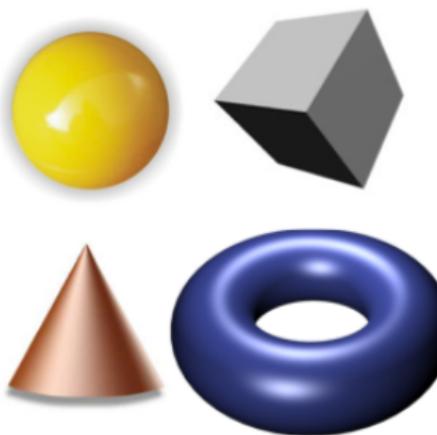
Define 4 entidades topológicas:

- ▶ **Vértices**
- ▶ **Aresta**
- ▶ **Laço**: formada por uma sequência de arestas
- ▶ **Face**: delimitada por um laço externo e zero ou mais laços internos.
 - ▶ Numa subdivisão planar, a face externa não tem laço externo, apenas internos

Sólidos *manifold*

2-manifold

Uma superfície é dita *2-manifold* se a vizinhança de qualquer ponto na superfície é homeomorfa a um disco 2D.



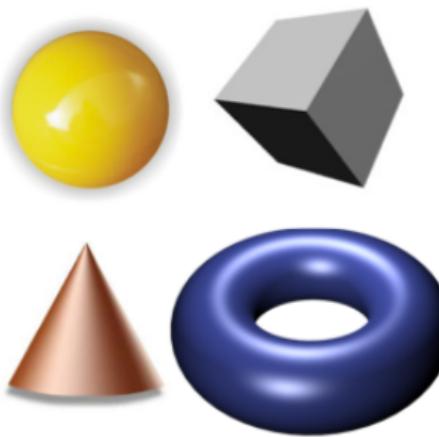
Sólidos *manifold*



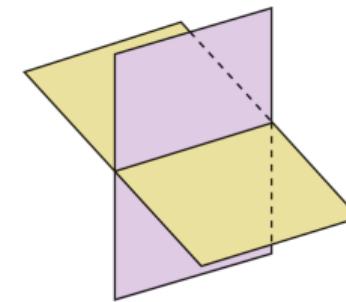
Sólidos *manifold*

2-manifold

Uma superfície é dita *2-manifold* se a vizinhança de qualquer ponto na superfície é homeomorfa a um disco 2D.



Sólidos *manifold*



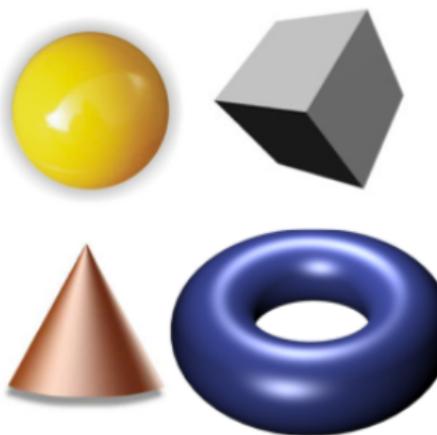
Superfície *non-manifold*



Sólidos *manifold*

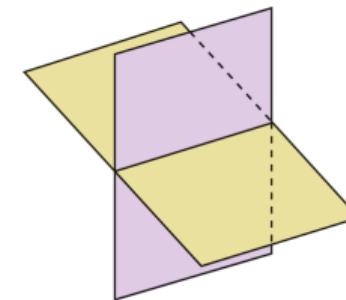
2-manifold

Uma superfície é dita *2-manifold* se a vizinhança de qualquer ponto na superfície é homeomorfa a um disco 2D.



Sólidos *manifold*

β -Rep: representação do contorno



Superfície *non-manifold*



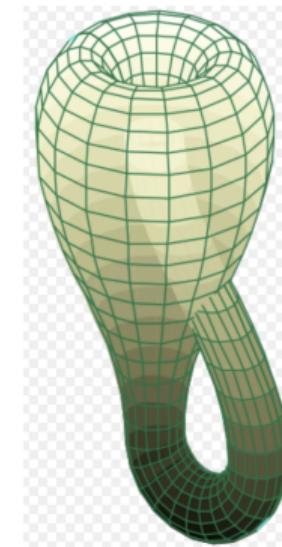
Sólidos manifold

Manifolds não orientados

Möbius strip



Klein bottle



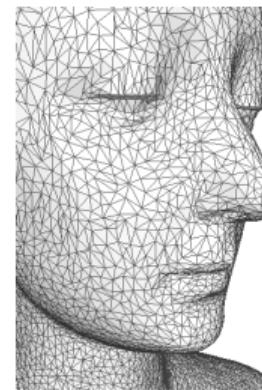
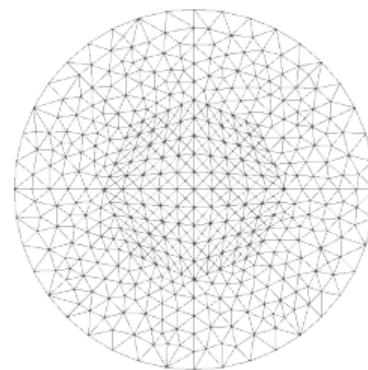
Representação de malhas



Representação de malhas

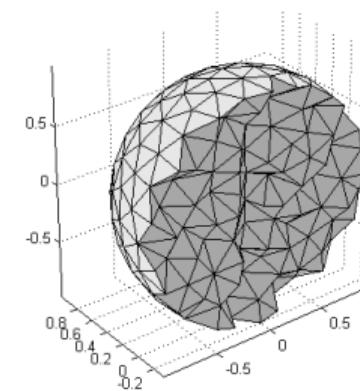
2D

- ▶ Triângulos,
quadriláteros,
polígonos



3D

- ▶ Tetraedros,
hexaedros,
poliedros



Malhas de triângulos

Representação por tabela de incidência

Tabela de vértices

v	x	y	z

Tabela de faces (triângulos)

t	v ₀	v ₁	v ₂



Malhas de triângulos

Representação por tabela de incidência

Tabela de vértices

v	x	y	z

Tabela de faces (triângulos)

t	v ₀	v ₁	v ₂

- ▶ Suficiente para análises numéricas convencionais
- ▶ Suficiente e adequada para renderização
 - ▶ Tabela de vértices acrescida com outras informações
 - ▶ Normais, coordenadas de textura, etc.



Malhas de tetraedros

Representação por tabela de incidência

Tabela de vértices

v	x	y	z

Tabela de elementos (tetraedros)

t	v ₀	v ₁	v ₂	v ₃



Malhas de tetraedros

Representação por tabela de incidência

Tabela de vértices

v	x	y	z

Tabela de elementos (tetraedros)

t	v ₀	v ₁	v ₂	v ₃

- ▶ Suficiente para análises numéricas convencionais



Tabela de incidência

Procedimentos topológicos

Malha de triângulos

- ▶ Determinação das normais médias associadas aos vértices



Tabela de incidência

Procedimentos topológicos

Malha de triângulos

- ▶ Determinação das normais médias associadas aos vértices

Malha de tetraedros

- ▶ Determinação das faces externas (*hull extraction*)
 - ▶ Determinação das normais médias associadas aos vértices das faces externas



Representação de grafos duais

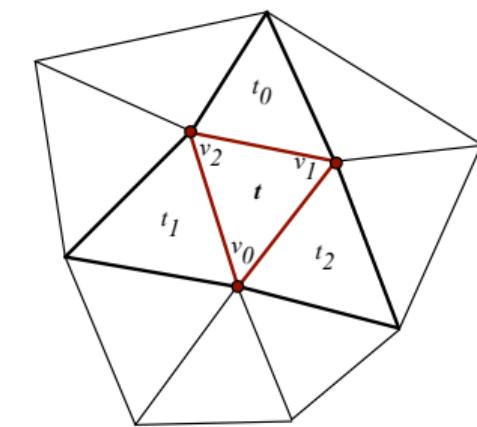
Malhas de triângulos com adjacências

Tabela de vértices

v	x	y	z	t

Tabela de triângulos

t	v_0	v_1	v_2	t_0	t_1	t_2



Representação de grafos duais

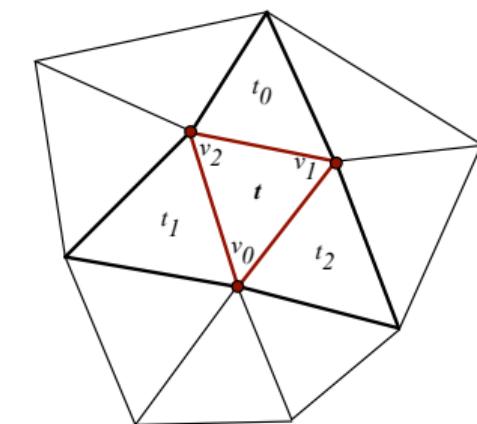
Malhas de triângulos com adjacências

Tabela de vértices

v	x	y	z	t

Tabela de triângulos

t	v_0	v_1	v_2	t_0	t_1	t_2



- ▶ Pode-se usar vértice oposto, em vez de triângulo adjacente
- ▶ Estrutura similar para malhas de tetraedros



Representação por grafos duais

Exemplo de acesso às relações de adjacências

- ▶ VT : triângulos adjacentes a um dado vértice



Representação por grafos duais

Exemplo de acesso às relações de adjacências

- ▶ VT : triângulos adjacentes a um dado vértice
 - ▶ Dada v_i , acessa t
 - ▶ Para cada triângulo (até que se alcance novamente t):
 - ▶ Reporta t
 - ▶ Busca local de v_i em t : acessa índice do próximo vértice
 - ▶ Acessa triângulo oposto correspondente ao índice: t



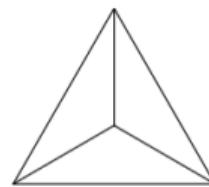
Representação de manifold



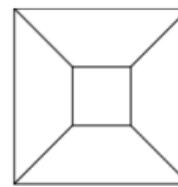
Subdivisão planar

Subdivisão planar

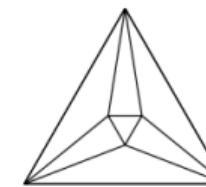
- Manifold homeomorfo a esferas



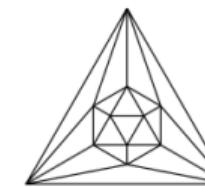
Tetrahedron



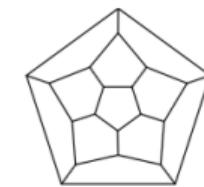
Cube



Octahedron



Icosahedron



Dodecahedron

- A face “externa” representa uma das faces do sólido

Subdivisão planar

- ▶ Fórmula de Euler
 - ▶ Relação linear entre número de vértices, arestas e faces

$$V - E + F = 2$$



V	0	1	2	3	3
E	0	0	1	2	3
F	0	1	1	1	2



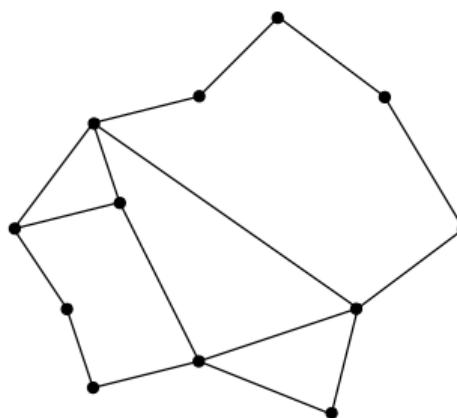
Subdivisão planar

- ▶ Fórmula de Euler
- ▶ Relação linear entre número de vértices, arestas e faces

$$V - E + F = 2$$



V	0	1	2	3	3
E	0	0	1	2	3
F	0	1	1	1	2



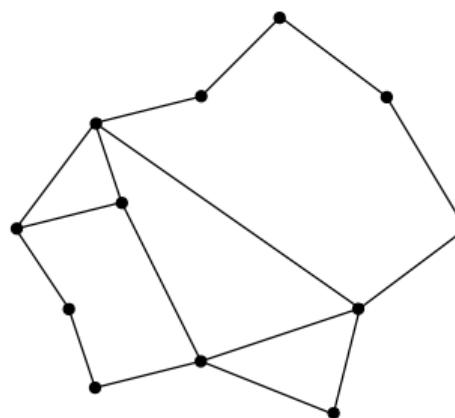
Subdivisão planar

- ▶ Fórmula de Euler
- ▶ Relação linear entre número de vértices, arestas e faces

$$V - E + F = 2$$



	V	E	F	
	0	1	2	3
	0	0	1	2
	0	1	1	3



$$V = 12$$

$$E = 16$$

$$F = 6$$



Winged-Edge¹

Estrutura de dados para representação de superfícies *manifold*
(e subdivisões planares)

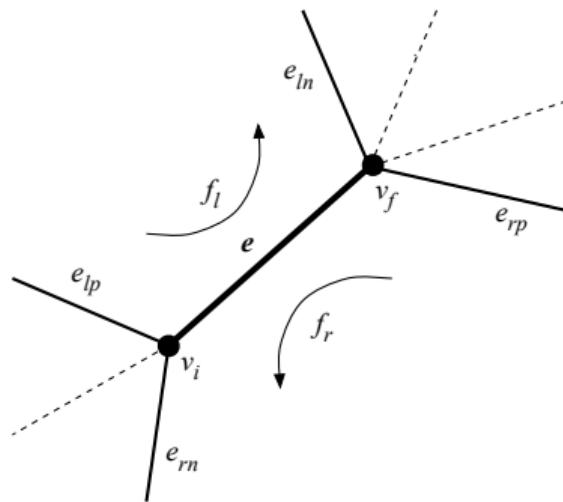


Tabela de vértices

v	x	y	z	e _i

Tabela de faces

f	e _i

Tabela de arestas

e	v _i	v _f	f _l	f _r	e _{lp}	e _{ln}	e _{rp}	e _{rn}



Winged-Edge¹

Estrutura de dados para representação de superfícies *manifold*
(e subdivisões planares)

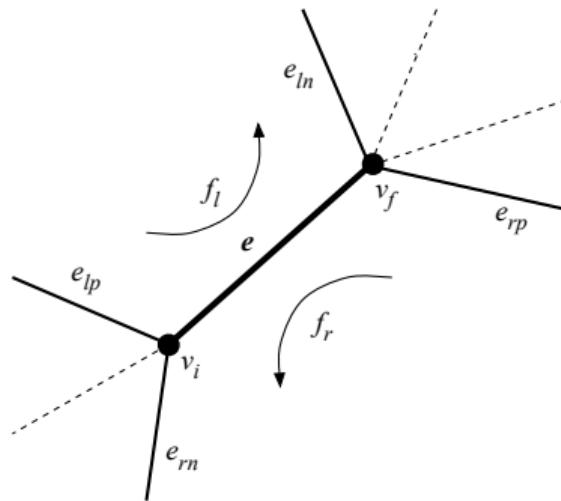


Tabela de vértices

v	x	y	z	e _i

Tabela de faces

f	e _i

Tabela de arestas

e	v _i	v _f	f _l	f _r	e _{lp}	e _{ln}	e _{rp}	e _{rn}

- ▶ Vetores de tamanhos fixos
- ▶ Estrutura completa
- ▶ Não representa laços

¹ Baumgart 1972.



Winged-Edge

Exemplo de acesso às relações de adjacências

- ▶ FF : faces adjacentes a uma dada face
- ▶ VE : arestas adjacentes a um dado vértice



Winged-Edge

Exemplo de acesso às relações de adjacências

- ▶ *FF*: faces adjacentes a uma dada face
 - ▶ Dada f_i , acessa e
 - ▶ Para a aresta corrente (até que se alcance novamente e):
 - ▶ Acessa f_l e f_r , reportando a face diferente de f_i
 - ▶ Acessa e_{lp} ou e_{rp} , conforme face reportada
- ▶ *VE*: arestas adjacentes a um dado vértice
 - ▶ Dado v_i , acessa e
 - ▶ Para a aresta corrente (até que se alcance novamente e):
 - ▶ Reporta e
 - ▶ Acessa e_{lp} ou e_{rp} , conforme vértice inicial ou final



Half-edge²

Com suporte a representação de laços

- Semi-aresta corresponde ao “uso” da aresta por uma face.

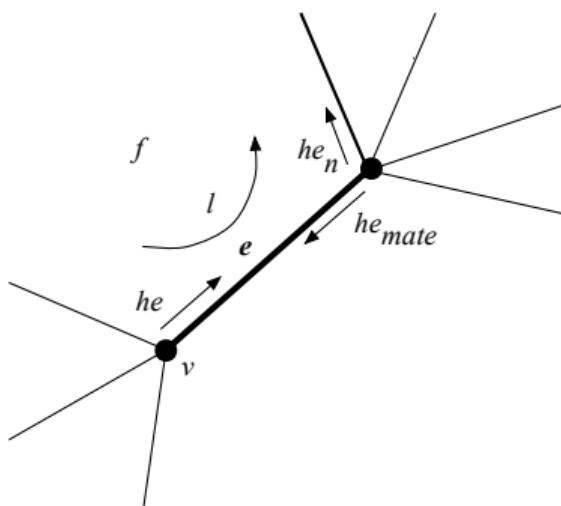


Tabela de vértices

v	x	y	z	he

Tabela de semi-arestas

he	e	v	l	he _n

Tabela de arestas

e	he ₁	he ₂

Tabela de laços

l	he	f	l _{next}

Tabela de faces

f	l _{out}	l _{infirst}



Half-edge

Exemplo de acesso às relações de adjacências

- ▶ FF : faces adjacentes (externas) a uma dada face

- ▶ VE : arestas adjacentes a um dado vértice



Half-edge

Exemplo de acesso às relações de adjacências

- ▶ FF : faces adjacentes (externas) a uma dada face
 - ▶ Dada f_i , acessa l_{out}
 - ▶ Dado l_{out} , acessa he
 - ▶ Para cada semi-aresta do laço (até alcançar novamente he):
 - ▶ Acessa e e então acessa a aresta conjugada (he_1 ou he_2)
 - ▶ Acessa f associada à semi-aresta conjugada
 - ▶ Reporta f
 - ▶ Acessa próxima semi-aresta he_n
- ▶ VE : arestas adjacentes a um dado vértice
 - ▶ Dado v_i , acessa he
 - ▶ Para cada semi-aresta do laço (até alcançar novamente he):
 - ▶ Acessa e e então acessa a aresta conjugada (he_1 ou he_2)
 - ▶ Acessa v associada à semi-aresta conjugada
 - ▶ Reporta v
 - ▶ Acessa próxima semi-aresta de semi-aresta conjugada he_n



Half-edge

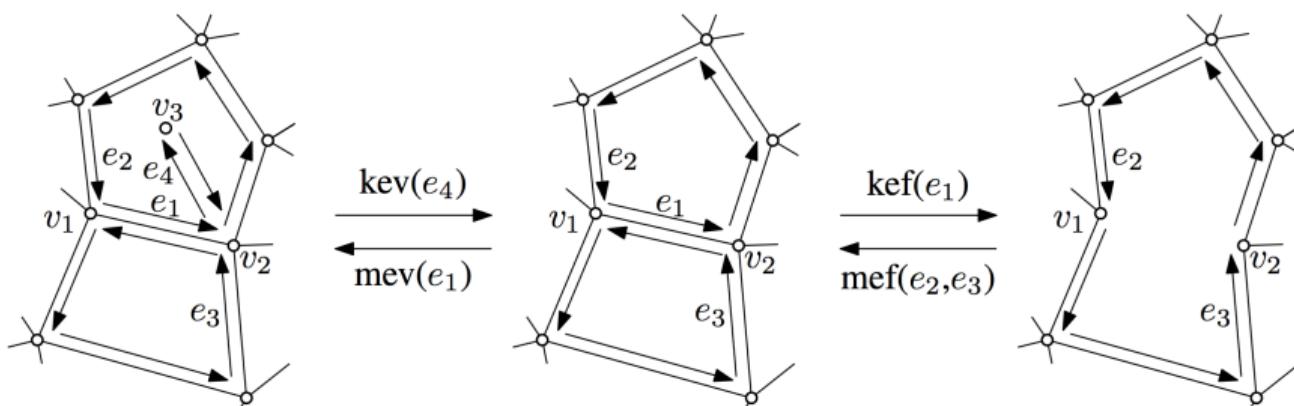
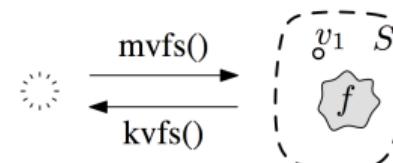
Operadores de Euler

- ▶ **mvfs, kvfs**: *make/kill vertex, face, and solid*
- ▶ **mev, kev**: *make/kell edge and vertex*
- ▶ **semv, jekv**: *split/join edge, make/kill vertex*
- ▶ **mef, kef**: *make/kill edge and face*
- ▶ **kemr, mekr**: *kill/make edge, make/kill ring*
- ▶ **kfmrh, mfkrh**: *kill/make face, make/kill ring and hole*
- ▶ **mvr, kvr**: *make/kill vertex and ring*



Operadores de Euler

Exemplo de alguns operadores em ação



Operadores de Euler

Construindo um cubo

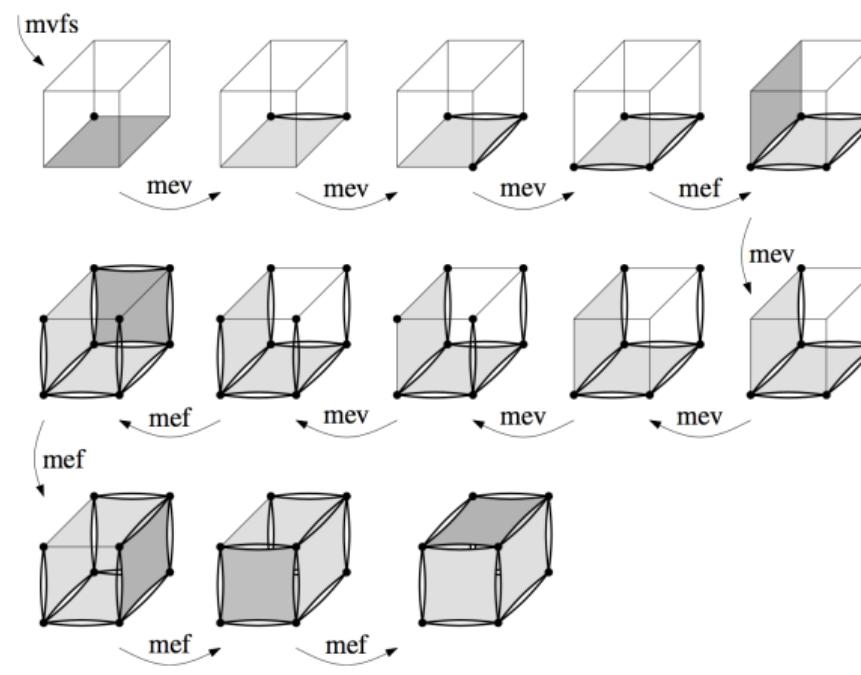


Imagen retirada de "Introduction to Geometric Computing", S. Ghali, 2008



Sólidos com número de gêneros arbitrário

E subdivisões planares com laços



genus 0



genus 1



genus 2

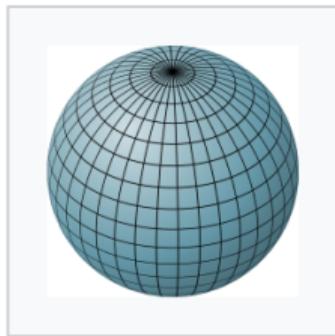


genus 3



Sólidos com número de gêneros arbitrário

E subdivisões planares com laços



genus 0



genus 1



genus 2



genus 3

Fórmula de Euler

► onde:

$$V - E + F = 2(S - H) + L$$

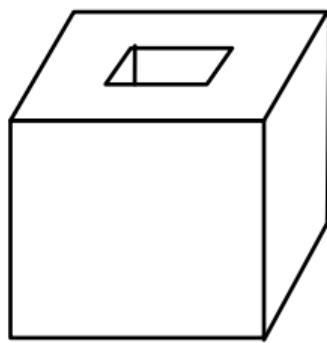
► S = sólidos; H = buracos (gênero); L = ciclos



Sólidos com número de gêneros arbitrário

E subdivisões planares com laços

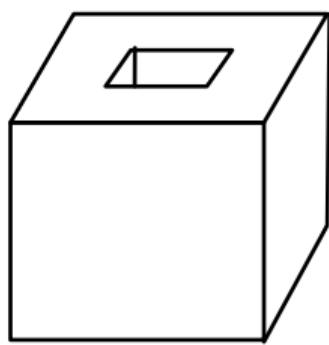
$$V - E + F = 2(S - H) + L$$



Sólidos com número de gêneros arbitrário

E subdivisões planares com laços

$$V - E + F = 2(S - H) + L$$



$$V = 8 + 8 = 16$$

$$E = 8 + 8 + 4 + 4 = 24$$

$$F = 1 + 1 + 4 + 4 = 10$$

$$L = 1 + 1 = 2$$

$$H = 1$$

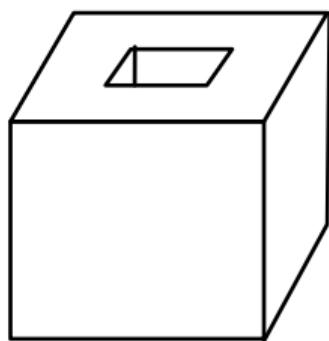
$$S = 1$$



Sólidos com número de gêneros arbitrário

E subdivisões planares com laços

$$V - E + F = 2(S - H) + L$$



$$V = 8 + 8 = 16$$

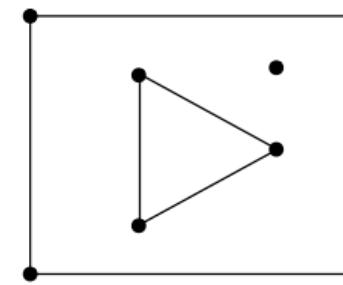
$$E = 8 + 8 + 4 + 4 = 24$$

$$F = 1 + 1 + 4 + 4 = 10$$

$$L = 1 + 1 = 2$$

$$H = 1$$

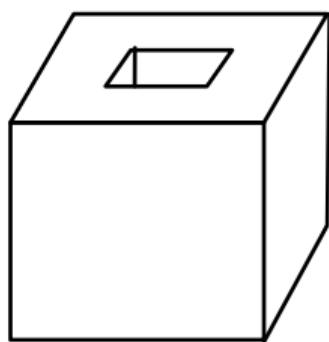
$$S = 1$$



Sólidos com número de gêneros arbitrário

E subdivisões planares com laços

$$V - E + F = 2(S - H) + L$$



$$V = 8 + 8 = 16$$

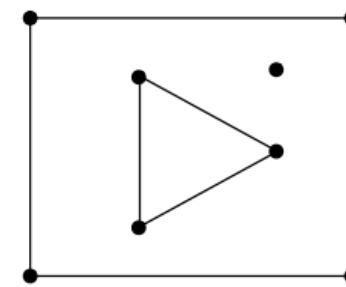
$$E = 8 + 8 + 4 + 4 = 24$$

$$F = 1 + 1 + 4 + 4 = 10$$

$$L = 1 + 1 = 2$$

$$H = 1$$

$$S = 1$$



$$V = 4 + 3 + 1 = 8$$

$$E = 4 + 3 = 7$$

$$F = 3$$

$$L = 2$$

$$H = 0$$

$$S = 1$$

Operadores de Euler

Construindo um cubo com buraco (gênero 1)

- ▶ Dado um cubo já formado

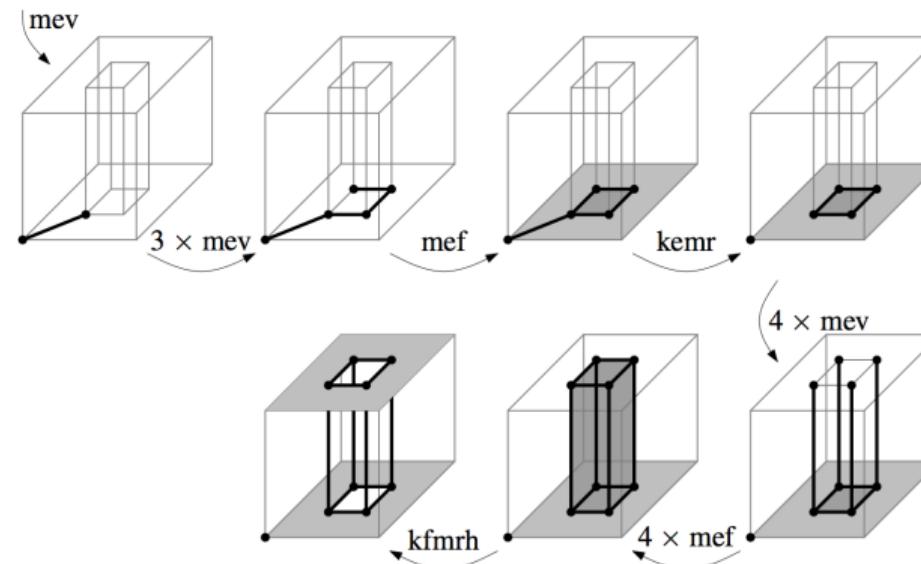


Imagen retirada de "Introduction to Geometric Computing", S. Ghali, 2008

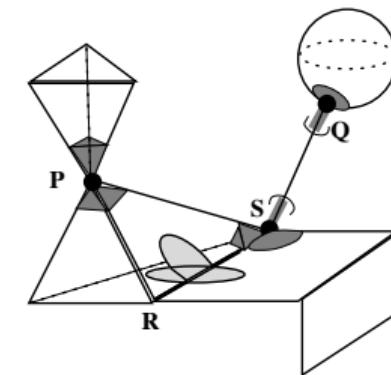


Radial-edge³

Representação de superfícies *non-manifold*

Entidades topológicas

- ▶ Solid, Region, Shell, Face, Loop, Edge, Vertex



Radial-edge³

Representação de superfícies *non-manifold*

Entidades topológicas

- ▶ Solid, Region, Shell, Face, Loop, Edge, Vertex

Entidades topológicas orientadas

- ▶ Face-use, Edge-use, Vertex-use
 - ▶ Cada face tem dois usos associados
 - ▶ Cada aresta tem um conjunto cíclico de usos associados (um uso por laço)
 - ▶ Cada vértices tem um conjunto não ordenado de usos

