Interseção entre Segmentos e entre Caixas Alinhadas

INF2604 – Geometria Computacional

Waldemar Celes
celes@inf.puc-rio.br

Departamento de Informática, PUC-Rio

Interseção entre Segmentos

Interseção de segmentos

Problema

- Dado um conjunto de segmentos de reta $S = \{s_1, ..., s_n\}$:
  - **Detecção**: determinar se há cruzamentos
  - **Identificação**: determinar quais são os cruzamentos

Interseção de segmentos: **Caso base**

Interseção entre 2 segmentos: **ab** e **cd**

- Algoritmo de detecção e identificação
  - Determinar o ponto de cruzamento das retas definidas pelos segmentos
  - Verificar se o ponto está dentro de ambos os segmentos

Interseção de segmentos: **Caso base**

Interseção entre 2 segmentos: **ab** e **cd**

- Algoritmo de detecção e identificação
  - Determinar o ponto de cruzamento das retas definidas pelos segmentos
  - Verificar se o ponto está dentro de ambos os segmentos

$$r_1 = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$
$$r_2 = \mathbf{c} + s(\mathbf{d} - \mathbf{c})$$

Interseção de segmentos: **Caso base**

Interseção entre 2 segmentos: **ab** e **cd**

- Algoritmo de detecção e identificação
  - Determinar o ponto de cruzamento das retas definidas pelos segmentos
  - Verificar se o ponto está dentro de ambos os segmentos

$$r_1 = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$
$$r_2 = \mathbf{c} + s(\mathbf{d} - \mathbf{c})$$

Recai num sistema linear 2×2:

$$x_\mathbf{a} + t(x_\mathbf{b} - x_\mathbf{a}) = x_\mathbf{c} + s(x_\mathbf{d} - x_\mathbf{c})$$
$$y_\mathbf{a} + t(y_\mathbf{b} - y_\mathbf{a}) = y_\mathbf{c} + s(y_\mathbf{d} - y_\mathbf{c})$$

Interseção de segmentos: **Caso base**

Interseção entre 2 segmentos: **ab** e **cd**

- Em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_{\mathbf{b}} - x_{\mathbf{a}} & x_{\mathbf{c}} - x_{\mathbf{d}} \\ y_{\mathbf{b}} - y_{\mathbf{a}} & y_{\mathbf{c}} - y_{\mathbf{d}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{\mathbf{c}} - x_{\mathbf{a}} \\ y_{\mathbf{c}} - y_{\mathbf{a}} \end{bmatrix}$$

L.H. de Figueiredo, P.C.P. Carvalho, "Notas de Geometria Computacional", IMPA

Interseção de segmentos: **Caso base**

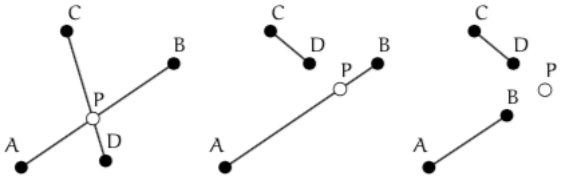
Interseção entre 2 segmentos: **ab** e **cd**

- Em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_{\mathbf{b}} - x_{\mathbf{a}} & x_{\mathbf{c}} - x_{\mathbf{d}} \\ y_{\mathbf{b}} - y_{\mathbf{a}} & y_{\mathbf{c}} - y_{\mathbf{d}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{\mathbf{c}} - x_{\mathbf{a}} \\ y_{\mathbf{c}} - y_{\mathbf{a}} \end{bmatrix}$$

- Verificação

$$t \in [0, 1]$$
$$s \in [0, 1]$$



L.H. de Figueiredo, P.C.P. Carvalho, "Notas de Geometria Computacional", IMPA

Interseção entre 2 de segmentos

Se for só **detecção**, pode ser mais eficiente?

Interseção entre 2 de segmentos

Se for só **detecção**, pode ser mais eficiente?

- Os dois segmentos se cruzam se:
  - **c** e **d** estão em lados opostos de **ab**, e
  - **a** e **b** estão em lados opostos de **cd**
    - Lembrando:

$$orient < \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} >= \begin{vmatrix} 1 & x_{\mathbf{p}} & y_{\mathbf{p}} \\ 1 & x_{\mathbf{q}} & y_{\mathbf{q}} \\ 1 & x_{\mathbf{r}} & y_{\mathbf{r}} \end{vmatrix} \begin{cases} > 0 & \text{se à esquerda} \\ < 0 & \text{se à direita} \end{cases}$$

Interseção entre 2 de segmentos

Se for só **detecção**, pode ser mais eficiente?

- Os dois segmentos se cruzam se:
  - **c** e **d** estão em lados opostos de **ab**, e
  - **a** e **b** estão em lados opostos de **cd**
    - Lembrando:

$$orient < \mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r} >= \begin{vmatrix} 1 & x_{\mathbf{p}} & y_{\mathbf{p}} \\ 1 & x_{\mathbf{q}} & y_{\mathbf{q}} \\ 1 & x_{\mathbf{r}} & y_{\mathbf{r}} \end{vmatrix} \begin{cases} > 0 & \text{se à esquerda} \\ < 0 & \text{se à direita} \end{cases}$$

Logo:

$$orient < \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c} > orient < \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d} > \; < \; 0 \quad \text{and}$$
$$orient < \mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{a} > orient < \mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{b} > \; < \; 0$$

Interseção de segmentos

Caso geral: n segmentos

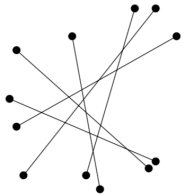
- Algoritmo força bruta: $\binom{n}{2} = O(n^2)$

M. de Berg et al., "Computational Geometry", 2nd edition, Springer, 2000

Interseção de segmentos

Caso geral: n segmentos

- Algoritmo força bruta: $\binom{n}{2} = O(n^2)$
- Temos como melhorar o limite inferior do tempo estimado?

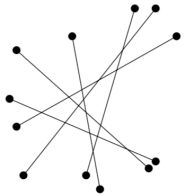


M. de Berg et al., "Computational Geometry", 2nd edition, Springer, 2000

Interseção de segmentos

Caso geral: n segmentos

- Algoritmo força bruta: $\binom{n}{2} = O(n^2)$
- Temos como melhorar o limite inferior do tempo estimado?
  - Não, pois podem existir n^2 interseções

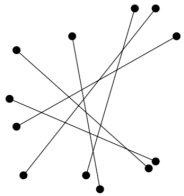


M. de Berg et al., "Computational Geometry", 2nd edition, Springer, 2000

Interseção de segmentos

Caso geral: n segmentos

- Algoritmo força bruta: $\binom{n}{2} = O(n^2)$
- Temos como melhorar o limite inferior do tempo estimado?
  - Não, pois podem existir n^2 interseções
- Por que buscar métodos melhores?
  - Podemos melhorar detecção
  - Na prática, podemos melhorar identificação

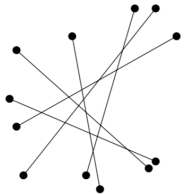


M. de Berg et al., "Computational Geometry", 2nd edition, Springer, 2000

Interseção de segmentos

Caso geral: n segmentos

- Algoritmo força bruta: $\binom{n}{2} = O(n^2)$
- Temos como melhorar o limite inferior do tempo estimado?
  - Não, pois podem existir n^2 interseções
- Por que buscar métodos melhores?
  - Podemos melhorar detecção
  - Na prática, podemos melhorar identificação



Tempos esperados ótimos:

- Detecção: $O(n \log n)$
- Identificação: $O(n \log n + \nu)$
  - Onde ν representa o número de interseções existentes

M. de Berg et al., "Computational Geometry", 2nd edition, Springer, 2000

Interseção de n segmentos

Solução: explorar geometria dos segmentos

- Testar apenas segmentos próximos

M. de Berg et al., "Computational Geometry", 2nd edition, Springer, 2000

Interseção de n segmentos

Solução: explorar geometria dos segmentos

- Testar apenas segmentos próximos

Algoritmo de varredura

- Segmentos sem sobreposição na projeção em y, não se interceptam

M. de Berg et al., "Computational Geometry", 2nd edition, Springer, 2000

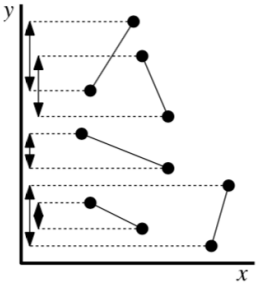
Interseção de n segmentos

Solução: explorar geometria dos segmentos

- Testar apenas segmentos próximos

Algoritmo de varredura

- Segmentos sem sobreposição na projeção em y, não se interceptam
- Simplificação (a princípio):
  - Não existem segmentos horizontais
  - Segmentos só se interceptam em um ponto
  - Não há interseção de 3 ou mais segmentos

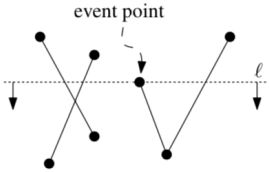


M. de Berg et al., "Computational Geometry", 2nd edition, Springer, 2000

Interseção de n segmentos

Algoritmo de varredura

- Ordena segmentos em y
  - Ordena pontos de início e fim de cada segmento
- Passa linha horizontal de varredura l
- Mantém conjunto de segmentos ativos A
  - Pontos dos segmentos são *eventos*
    - Ponto de início: segmento é inserido em A
    - Ponto de fim: segmento é removido de A
- Só precisa testar segmentos ativos
  - Mas ainda pode ser $O(n^2)$

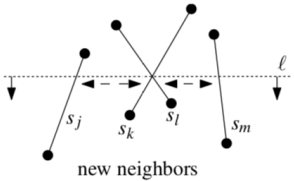


M. de Berg et al., "Computational Geometry", 2nd edition, Springer, 2000

Interseção de n segmentos

Algoritmo de varredura

- Matém segmentos ordenados em A
  - Ordenação por x, interseção do segmento com l
  - Ponto de interseção passa a ser *evento*

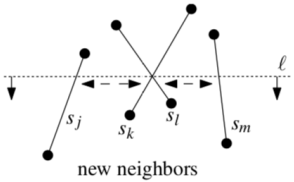


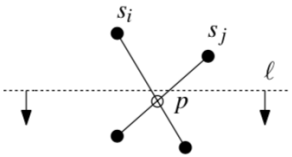
M. de Berg et al., "Computational Geometry", 2nd edition, Springer, 2000

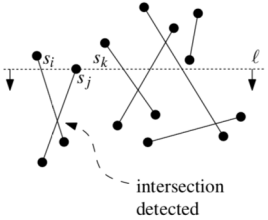
Interseção de *n* segmentos

Algoritmo de varredura

- Matém segmentos ordenados em A
  - Ordenação por x, interseção do segmento com l
  - Ponto de interseção passa a ser *evento*
  - Só precisa testar segmentos vizinhos imediatos
  - Só considera interseções abaixo de l







M. de Berg et al., "Computational Geometry", 2nd edition, Springer, 2000

Interseção de n segmentos

Algoritmo de varredura: **Inicialização**

- Estrutura para armazenar pontos ordenados em y: *Fila de Eventos E*
  - Inserção de pontos iniciais e finais de segmentos
  - Inserção dinâmica de pontos de interseção
- Estrutura para armazenar segmentos ativos: *Conjunto de Ativos A*
  - Inserção/remoção ordenada
  - Acesso a vizinhos imediatos
  - Troca de ordem

Interseção de n segmentos

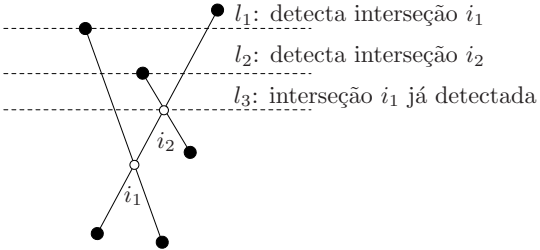
Algoritmo de varredura: **Tratamento de eventos**

1. Ponto de início de segmento
   - Insere segmento em A, em ordem
   - Verifica interseção com segmentos vizinhos
     - Reporta interseção, se for o caso
     - Insere interseção na fila de eventos, se for o caso

Interseção de n segmentos

Algoritmo de varredura: **Tratamento de eventos**

2. Ponto de interseção
   - Troca ordem dos segmentos em A
   - Verifica interseção com segmentos vizinhos
     - Reporta interseção, se for o caso
     - Insere interseção na fila de eventos, se for o caso
     - Evitar re-inserção de evento já detectado



Interseção de n segmentos

Algoritmo de varredura: **Tratamento de eventos**

3. Ponto de fim de segmento
   - Remove segmento em A, em ordem
   - Verifica interseção entre vizinhos
     - Reporta interseção, se for o caso
     - Insere interseção na fila de eventos, se for o caso

Interseção de n segmentos

Algoritmo de varredura: **Tratamento de eventos**

3. Ponto de fim de segmento
   - Remove segmento em A, em ordem
   - Verifica interseção entre vizinhos
     - Reporta interseção, se for o caso
     - Insere interseção na fila de eventos, se for o caso

Tempo esperado do algoritmo

Interseção de n segmentos

Algoritmo de varredura: **Tratamento de eventos**

3. Ponto de fim de segmento
   - Remove segmento em A, em ordem
   - Verifica interseção entre vizinhos
     - Reporta interseção, se for o caso
     - Insere interseção na fila de eventos, se for o caso

Tempo esperado do algoritmo

$$O(n \log n + \nu \log n) = O((n + \nu) \log n)$$

Interseção entre Caixas Alinhadas

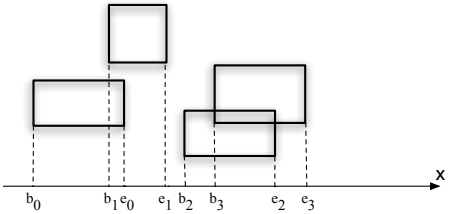
Interseção entre Caixas Alinhadas

Ordenação e varredura

Caso 1D

Ordenação:

Ordena pontos extremos (b & e)



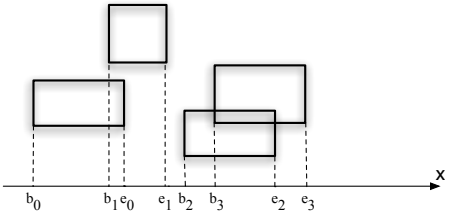
Interseção entre Caixas Alinhadas

Ordenação e varredura

Caso 1D

Ordenação:

Ordena pontos extremos (b & e)



Varredura:

Conjunto de objetos ativos: $S = \emptyset$

- Se achar b_i:
  - Reporta pares $[o_i, s_j]$, $\forall\, s_j \in S$
  - $S = S \bigcup \{o_i\}$
- Se achar e_i:
  - $S = S - \{o_i\}$

Ordenação e varredura

Extensão para 2D e 3D

- Ordena um vetor para cada dimensão
- Teste para reportar caixas colisão
  - Número de sobreposições tem que ser igual à dimensão

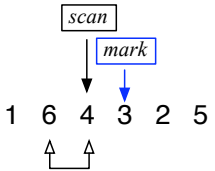
Implementação:

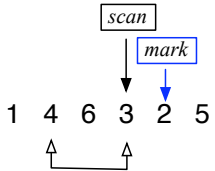
- Usa-se tabela para contar sobreposições entre objetos
- Ao encontrar sobreposição, acrescenta-se contador
- Se contador chegar a 3 (caso 3D), reporta-se par

Ordenação e varredura em cenas dinâmicas

Ordenação

- Complexidade convencional: $O(n \log n)$
- Se conjunto estiver quase ordenado, usando *insert-sort*: $O(n)$

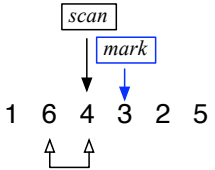




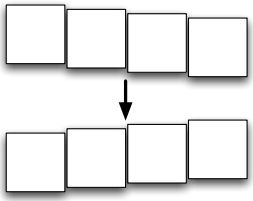
Ordenação e varredura em cenas dinâmicas

Ordenação

- Complexidade convencional: $O(n \log n)$
- Se conjunto estiver quase ordenado, usando *insert-sort*: $O(n)$



Contra-exemplo de coerência ($O(n^2)$):



Ordenação e varredura em cenas dinâmicas

Manutenção de lista R de pares em colisão

- Atualizar R no *insert-sort*
  - Se antes $e_j < b_i$ e agora $e_j > b_i$
    - Incrementa contador, se chegar a 3, insere par em R
  - Se antes $e_j > b_i$ e agora $e_j < b_i$
    - Decrementa contador, se era 3, retira par de R
  - Troca entre b_i e b_j ou entre e_i e e_j
    - Nada a fazer

Pseudo-código: Ordenação e varredura

```
update (L)
   scan = head(L)
   while L unsorted do
      mark = right(scan)
      left = left(scan)
      while scan < left do
         if scan = bi and left = ej then
            incr. counter (i,j)
            if counter(i,j) = 3 then
               report overlap (i,j)
            end if
         else if scan = ej and left = bi then
            decr. counter (i,j)
            if counter(i,j) = 2 then
               remove overlap (i,j)
            end if
         endif
         scan = left
         left = left(scan)
      end while
      scan = mark
   end while
```