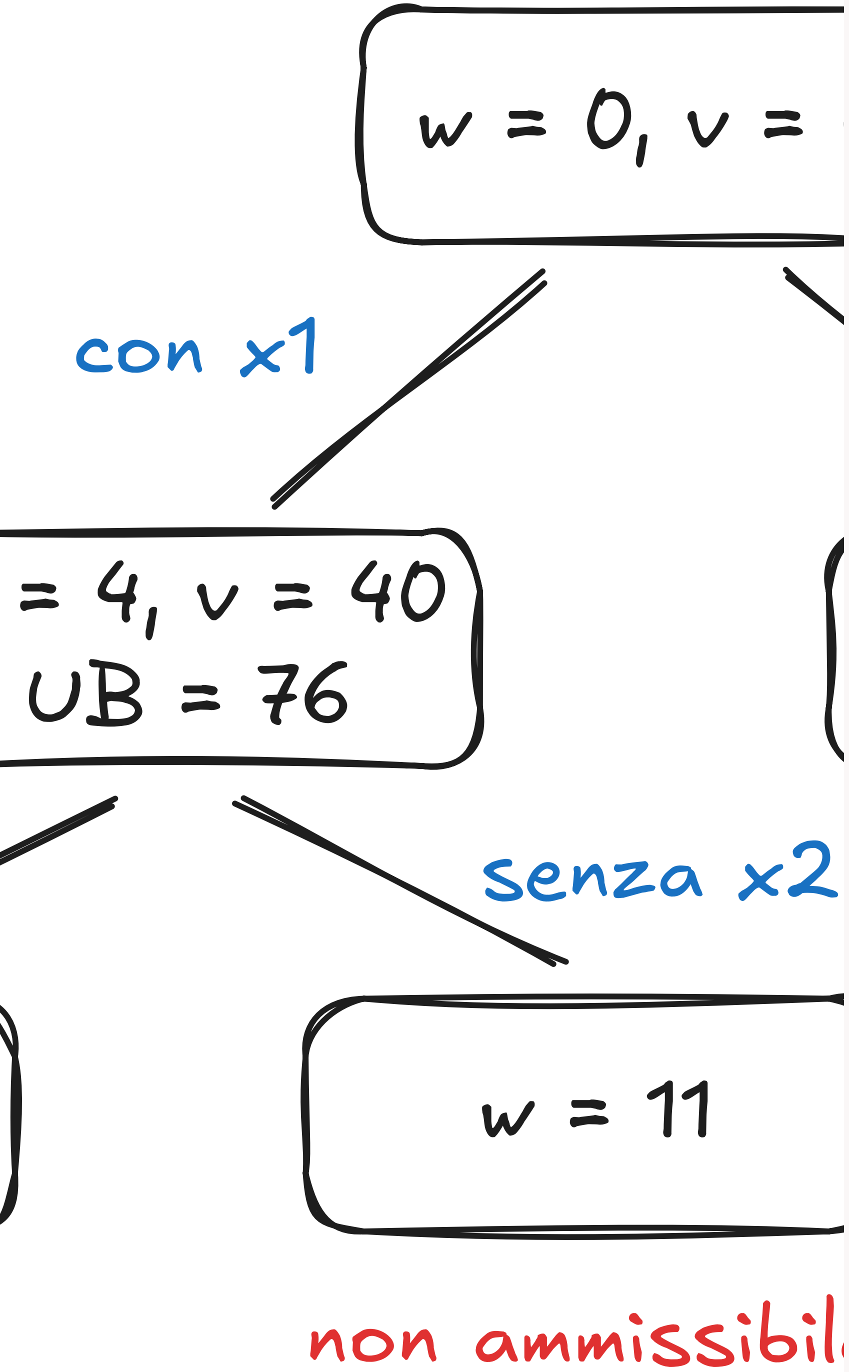


Branch & Bound

Origine e funzionamento della tecnica algoritmica Branch & Bound relativa al Problema dello Zaino

Gabriele Brizio

Domanda 1.7

Algoritmi e Complessità

Introduzione: Il contesto del problema

Fissata un'istanza $\langle (p_1, \ldots, p_n), (w_1, \ldots, w_n), C \rangle$ del problema dello zaino (KP), con profitti p_i, pesi w_i e capacità C.

- Complessità: Il problema è intrattabile (NP-hard).
- Algoritmi Greedy: Forniscono risposte a basso costo computazionale, ma non garantiscono l'ottimo globale.
- **Branch & Bound (BB):** È la soluzione completa. Sebbene KP sia intrattabile, BB è considerato "ottimale" dagli esperti perché "raramente" impiega tempi inaccettabili per trovare una risposta certificata.

Obiettivo

Esplorare lo spazio degli stati in modo intelligente, utilizzando stime per potare i rami improduttivi.

Branch & Bound

Il Branch & Bound (B&B) è una tecnica generale per la risoluzione esatta di problemi di ottimizzazione combinatoria intrattabili, come il **0–1 Knapsack Problem**.

Definizione:

Il Branch & Bound combina generazione sistematica (branching) e limitazione analitica (bounding) per ridurre lo spazio di ricerca mantenendo la garanzia di ottimalità.

Il principio fondamentale è quello di **esplorare selettivamente** lo spazio degli stati, evitando le regioni che non possono contenere la soluzione ottima.

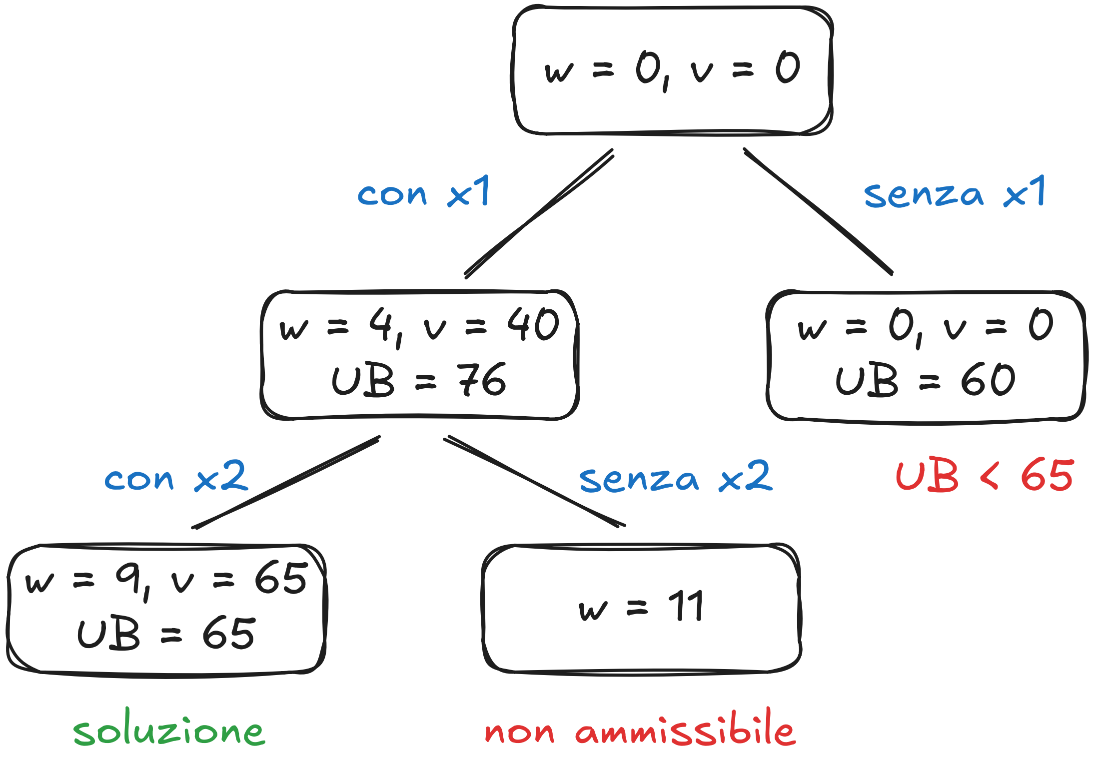
Struttura concettuale

L'algoritmo esplora un **albero di ricerca** in cui ogni nodo rappresenta una configurazione parziale.

A ciascun nodo sono associati:

- un **valore parziale** $v(s)$;
- un **peso cumulativo** $w(s)$;
- un **bound superiore** $UB(s)$: stima del miglior valore ottenibile da quella configurazione.

Se $UB(s) \leq \text{best\_solution}$, il ramo viene potato.



3.1 La funzione costo $\hat{c}(\cdot)$

Per guidare l'esplorazione, si definisce una funzione costo per ogni nodo dell'albero di ricerca (E-node).

$$\hat{c}(x[0..j)) = f(h(x[0..j))) + \hat{g}(x[0..j))$$

Dove $x[0..j)$ rappresenta l'E-node corrente (assegnamento parziale ai primi j elementi).

Le due componenti:

1. **$f(h(x[0..j)))$:** Il valore di profitto già accumulato. È la somma dei profitti degli elementi effettivamente inseriti nello zaino fino a quel punto.
2. **$\hat{g}(x[0..j))$:** La stima ottimistica (Upper Bound) del profitto che il sotto-albero $T[0..j)$ può ancora offrire.

Stima del profitto futuro: Greedy-LKP

Il termine $\hat{g}(x[0..j))$ fornisce il profitto assicurato dall'algoritmo **Greedy-LKP** (Linear Knapsack Problem) applicato al sotto-albero rimanente.

Il calcolo si compone di due parti:

1. La somma dei profitti degli elementi interi inseribili nell'intervallo $[j \ldots \text{split})$.
2. La porzione frazionaria dell'elemento in posizione `split` ($x[\text{split}]$). Questa porzione è calcolata come:
    - Rapporto tra lo spazio residuo (C meno spazio occupato) e il volume w_{split} dell'elemento di split.

Questa stima è un **Upper Bound** (limite superiore) al profitto reale ottenibile dal nodo corrente.

L'Invariante del Branch & Bound

L'invariante garantisce la correttezza e la completezza dell'algoritmo.
Esso mantiene la migliore soluzione corrente $z^*(x[0..r))$ e decide il destino del nodo corrente $x[0..j)$.

L'algoritmo opera in tre modalità rispetto all'E-node corrente:

1. Rifiutare (Pruning)

Il sotto-albero $T[0..j)$ viene potato (dichiarato "completo") se:

- **Violazione Capacità:** $f(h(x[0..j))) > C$.
- **Bound Inutile:** Pur rispettando la capacità ($f \leq C$), la stima massima ottenibile non supera la soluzione migliore già nota:

$$f(h(x[0..j))) + zLP(x[0..j)) \leq z^*(x[0..r))$$

In questo caso, il ramo non può contenere una soluzione migliore di quella che già possediamo.

2. Aggiornare

Se il nodo corrente è valido ($f \leq C$) e il suo profitto attuale supera il migliore noto:

$$f(h(x[0..j])) > z^*(x[0..r])$$

Allora aggiorniamo la migliore soluzione globale (z^*) con il valore del nodo corrente.

3. Espandere

Se il nodo è valido ($f \leq C$) e la promessa del sotto-albero (profitto attuale + stima futura) è superiore alla migliore soluzione nota:

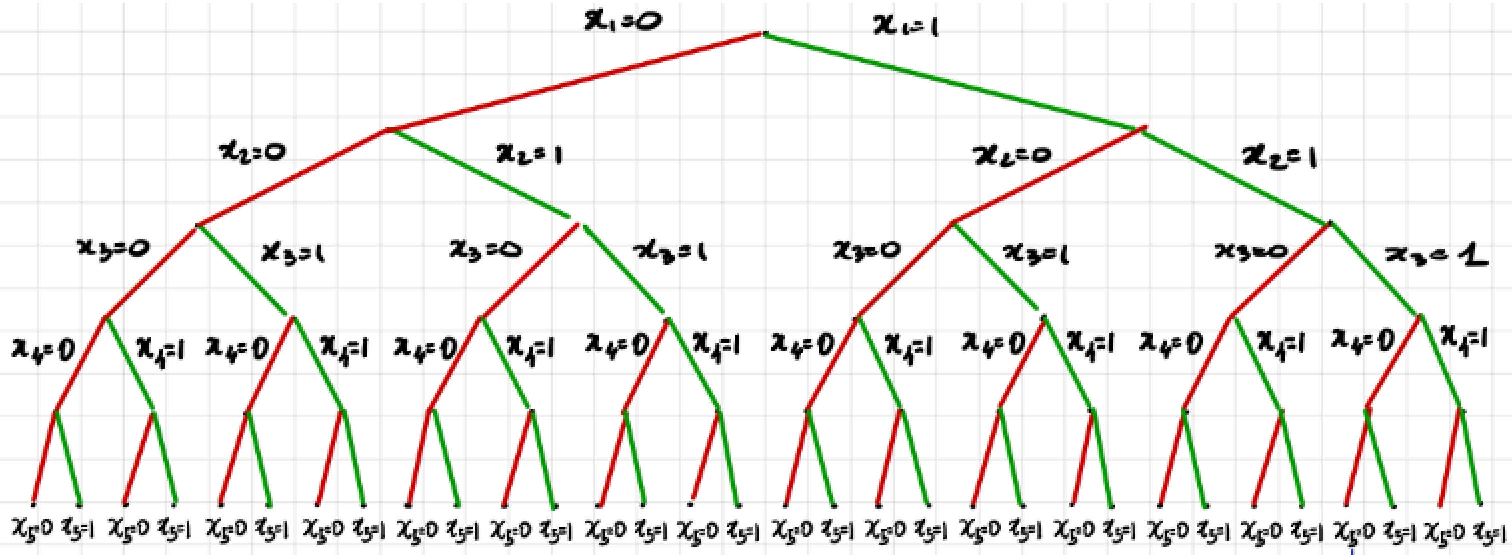
$$f(h(x[0..j])) + zLP(x[0..j]) > z^*(x[0..r])$$

Allora è necessario **continuare l'esplorazione** generando i figli dell'E-node.

Questo meccanismo assicura che nessuna potenziale soluzione ottima venga esclusa.

Esempio strutturale dello spazio

x	p	w
1	4	12
2	2	1
3	2	2
4	1	1
5	10	4



- Ogni nodo ha un **valore parziale** e un **bound superiore**.
- Il bound è ottenuto considerando la **versione frazionaria** del KP come stima massima possibile.

Esempio di funzionamento

Passaggi principali:

1. Ordinamento degli oggetti per valore/peso decrescente.
2. Generazione iniziale: nodo radice con bound calcolato.
3. Espansione del nodo con bound più promettente.
4. Aggiornamento della migliore soluzione trovata.
5. Potatura dei nodi con $UB \leq \text{best\_value}$.

Risultato:

- Esplorazione parziale dello spazio.
- Ottimo garantito al termine dell'esecuzione.

Strategie di ordinamento della frontiera

- **Best-First Search (BFS):** esplora il nodo con bound massimo.
- **Depth-First Search (DFS):** esplora in profondità mantenendo il miglior valore globale.
- **Hybrid:** combinazione dei due criteri per bilanciare memoria e rapidità.

L'adozione della strategia influenza la complessità pratica, non la correttezza.

Complessità computazionale

- **Caso peggiore:** esplorazione completa $O(2^n)$.
- **Caso medio:** fortemente ridotta grazie alla potatura.
- **Costo del bounding:** $O(n)$ per calcolare il bound tramite KP frazionario.

L'efficienza dipende dalla forza del bound: quanto strettamente approssima l'ottimo reale.

Conclusione

Il Branch & Bound è:

1. **Efficace:** Su istanze complesse l'algoritmo è molto efficace, potando quasi l'intero spazio degli stati se la visita greedy iniziale fornisce già una buona stima.
2. **Valido:** L'unico modo per validare la correttezza dell'implementazione è confrontare la forma dell'albero di visita. Tuttavia, dettagli implementativi (come l'accodamento FIFO/LIFO a parità di stima) possono generare alberi leggermente diversi ma corretti.