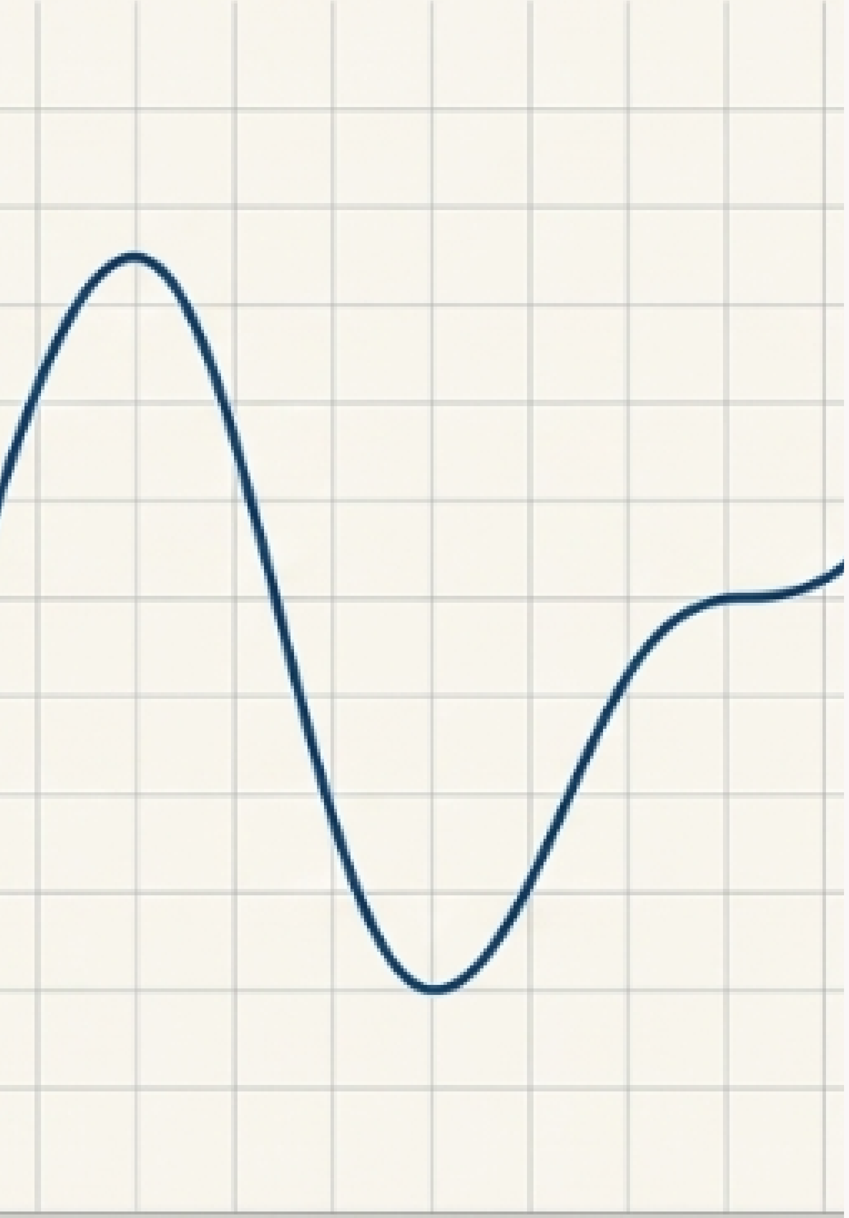


Generazione di spazi di ricerca

Analisi tecnica della generazione di spazi di stati di dimensione intrattabile

Gabriele Brizio

Domanda 1.1

Algoritmi e Complessità

Il problema motivazionale: "Valutazioni"

Per capire perché dobbiamo generare uno spazio di ricerca, partiamo dal problema **Valutazioni**.

- Obiettivo: Massimizzare il voto totale entro un limite (es. 100 punti).
- Natura del problema: Dobbiamo scegliere un sottoinsieme di risposte.
- Variabili: $x_i \in \{0, 1\}$ (Includo la risposta o no?).

> **Nota:** Non è un problema di calcolo su numeri reali, ma di scelta combinatoria.

Parte	Punteggio totale disponibile	N° domande	Punteggio singola domande
I	45	15	3
II	15	5	3
III	10	5	2
IV	10	5	2
V	10	5	2
VI	10	5	2
VII	10	5	2
VIII	15	5	3
	totale di 125 punti disponibili	totale di 50 domande	

i	voto max	frazione	i	voto max	frazione
1	3	1.5	26	2	2
2	3	3	27	2	0
3	3	0	28	2	0
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
15	3	1.5	40	6	2
15	3	3	46	2	4
20	3	0	47	6	5
...	...	...	...	...	...
24	2	2	49	8	6
25	2	2	50	10	8

Disponibile: 125

Assegnato: 95.5

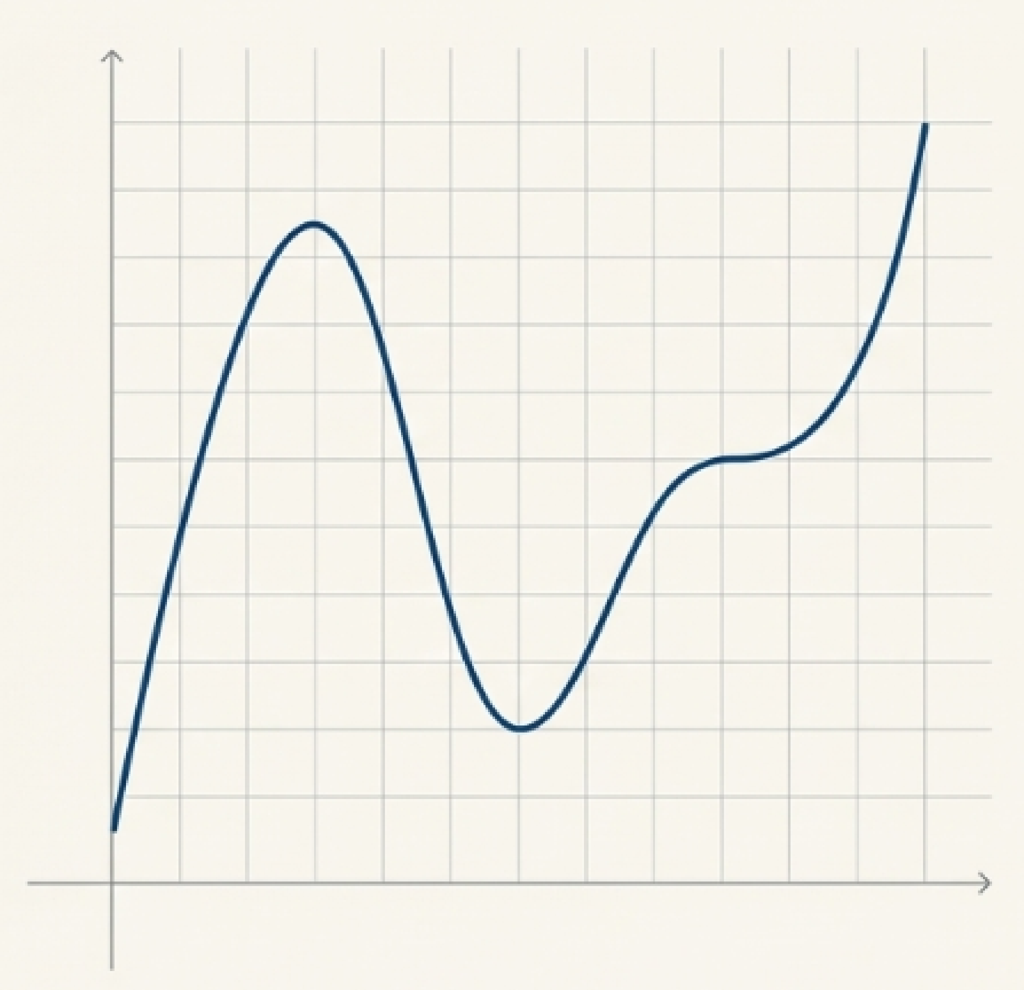
L'Illusione del Calcolo Classico

L'istinto matematico suggerirebbe di usare il **Calcolo Classico**.
Se potessimo esprimere il ricavo come una funzione continua $g(x)$, cercheremmo i punti di massimo azzerando la derivata prima:

$$g'(x) = 0$$

Le radici della derivata individuano punti stazionari (massimi/minimi relativi o flessi).

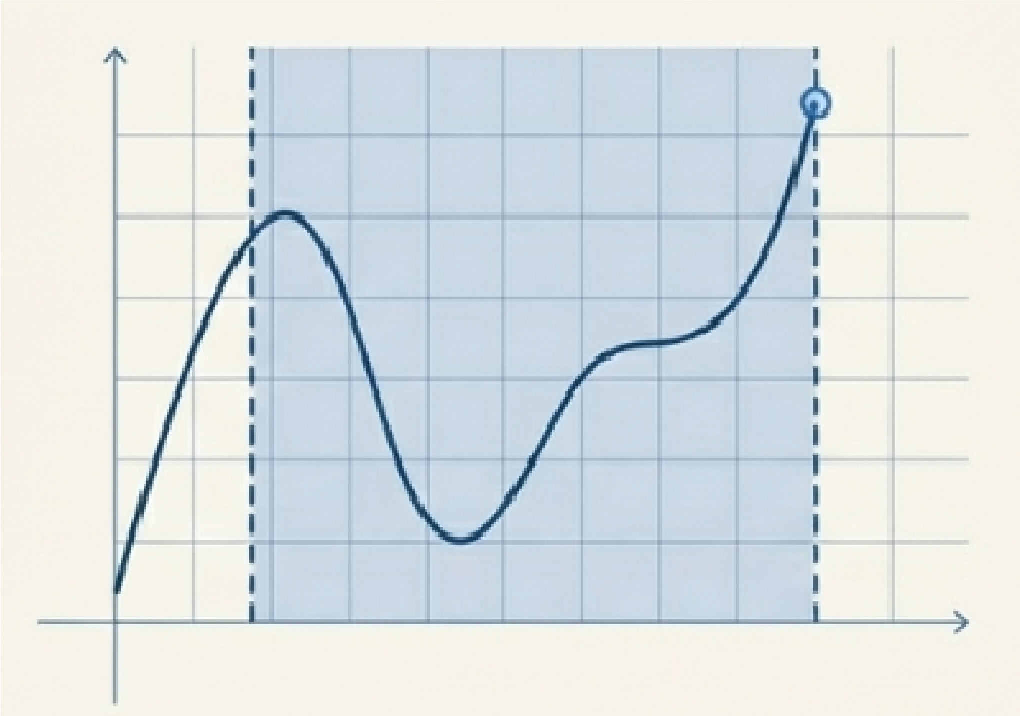
> Sembra promettente, ma è applicabile ai nostri problemi?



Fallimento: i vincoli e gli estremi

Nei problemi reali (allocazione risorse), la funzione è definita su **intervalli limitati** (vincoli).

- Il massimo assoluto spesso non è dove la derivata è zero, ma sugli **estremi dell'intervallo**.
- Il calcolo classico trova solo i punti stazionari interni.



Conseguenza: Per trovare l'ottimo, dovremmo testare tutte le combinazioni di:

1. Radici delle derivate.
2. Estremi imposti dai vincoli.

L'esplosione combinatoria (Intrattabilità)

Se provassimo ad applicare il metodo analitico "bruto" sui vincoli:

Immaginiamo di avere N variabili (attività).
Se ogni variabile ha anche solo un intervallo (2 estremi) e la funzione ha qualche punto stazionario (es. 3), il numero di punti da verificare esplode secondo la formula:

$$\text{Tentativi} \approx (3 + 2V)^N$$

- V: numero vincoli.
- N: numero variabili.

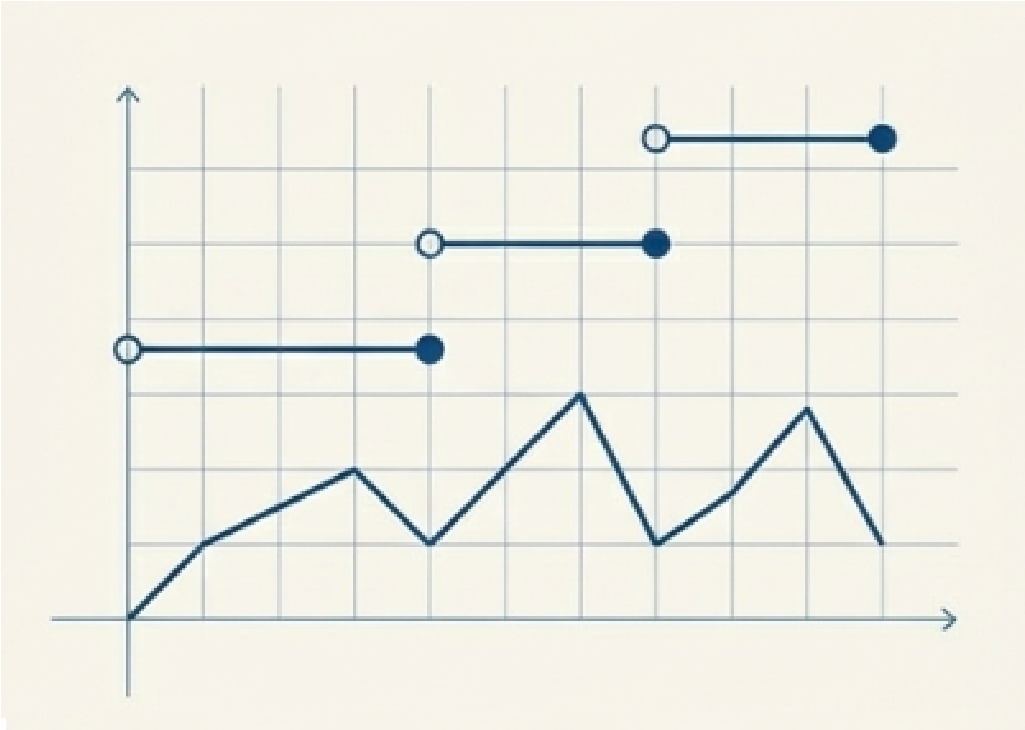
> Con $N = 20$, i tentativi superano i **3 miliardi**. Il metodo analitico diventa intrattabile quanto una ricerca esaustiva.

Discontinuità e variabili discrete

Il problema fondamentale è la natura delle variabili:

- In **Valutazioni** o **Bando**, x_i è **discreto** $(0 \text{ o } 1)$.
- Le funzioni risultanti sono "a scalino" o poligonali.
- **Non sono derivabili** in molti punti.

Inoltre, se la funzione di ricavo è **Lineare** ($g(x) = ax$), la derivata è costante (a). Non esiste un "picco" da trovare con la derivata nulla: il massimo è sempre a un estremo.



Perché non usare la Programmazione Lineare (PL)?

Potremmo pensare di usare la **PL** o la **PLI** (Intera).

1. **PL (Programmazione Lineare):** Assume variabili reali $x_i \in \mathbb{R}$. Non garantisce soluzioni binarie $\{0, 1\}$ necessarie per scegliere i progetti o le risposte.
2. **PLI (Programmazione Lineare Intera):** Impone variabili intere, ma ricade nella stessa complessità computazionale: non potendo usare gradienti su spazi discreti, deve procedere per tentativi combinatori.

La necessità dello spazio di ricerca

Poiché non esiste una "formula chiusa" (closed-form) per calcolare direttamente la soluzione ottima:

1. Dobbiamo accettare di procedere per **tentativi**.
2. L'insieme di tutti i possibili tentativi (tuple delle scelte $x_1, \ldots, x_N$) costituisce lo **Spazio di Ricerca** (o Spazio degli Stati).

La sfida:

Lo spazio ha dimensione 2^N (esponenziale).
Generarlo tutto è computazionalmente costoso (Intrattabile).

La generazione dello spazio degli stati

Se non possiamo calcolare la soluzione con una formula (derivate), dobbiamo **generare** e valutare le possibili configurazioni.

Si può vedere la soluzione ai problemi motivazionali (Valutazioni, Bando) come una **tupla** di decisioni.

- Siano $x_1, \ldots, x_N$ le variabili decisionali (attività).
- Ogni variabile è discreta: $x_i \in \{0, 1\}$ (Scelta/Non scelta).

Definizione:

Lo **spazio di ricerca** è l'insieme di tutte le possibili tuple $(x_1, \ldots, x_N)$ che rappresentano un tentativo di allocazione delle risorse.

> "Le soluzioni assumono la forma di tuple $x_1^*, \ldots, x_N^*$, in cui ogni $x_i^* \in \{0, 1\}$." [1]

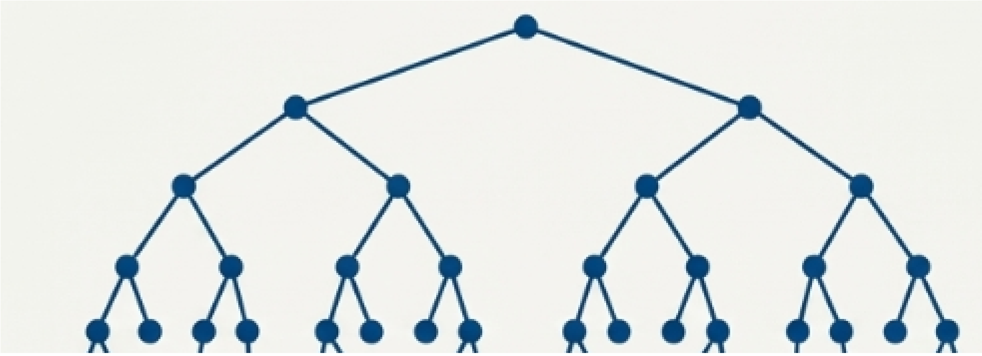
Come si "genera" lo spazio?

Generare lo spazio significa enumerare le combinazioni. Poiché non abbiamo una funzione continua, procediamo per **tentativi discreti**.

Ogni tentativo è una combinazione di stati delle variabili:

1. Fisso x_1 (0 o 1)
2. Fisso x_2 (0 o 1)
3. ...
4. Fisso x_N (0 o 1)

Questo processo sequenziale definisce la **struttura dello spazio degli stati**.



Dimensione intrattabile

Un problema è **intrattabile** se il tempo necessario per esplorare lo spazio delle configurazioni cresce più rapidamente di qualunque funzione polinomiale del numero di variabili.

Esempi tipici:

- 2^n: spazio dei sottoinsiemi
- $n!$: spazio delle permutazioni
- n^k: spazio delle disposizioni

L'intrattabilità non è un difetto implementativo, ma una **caratteristica strutturale del problema**.

Generazione e visita

Per operare su problemi intrattabili spesso conviene dividere le fasi di generazione e visita dello spazio di ricerca.

Dobbiamo usare tecniche algoritmiche per:

1. **Generare** lo spazio (un ramo alla volta).
2. **Visitare** lo spazio.

Le tecniche per gestire questa generazione sono:

- **Brute-Force:** Le genero tutte (impossibile per N grandi).
- **Backtracking:** Genero un ramo, se non va bene torno indietro.
- **Branch & Bound:** Taglio intere parti dello spazio prima di generarle.

Conclusione

In sintesi:

1. Poiché le variabili sono discrete $(0/1)$ e i vincoli complessi, il Calcolo Classico fallisce.
2. Siamo costretti a definire uno spazio di ricerca composto da **tuple discrete**.
3. La generazione di questo spazio avviene combinando i valori possibili delle variabili.
4. Essendo la dimensione intrattabile, la generazione deve essere gestita da algoritmi intelligenti (Backtracking/B&B) che evitano l'enumerazione completa.