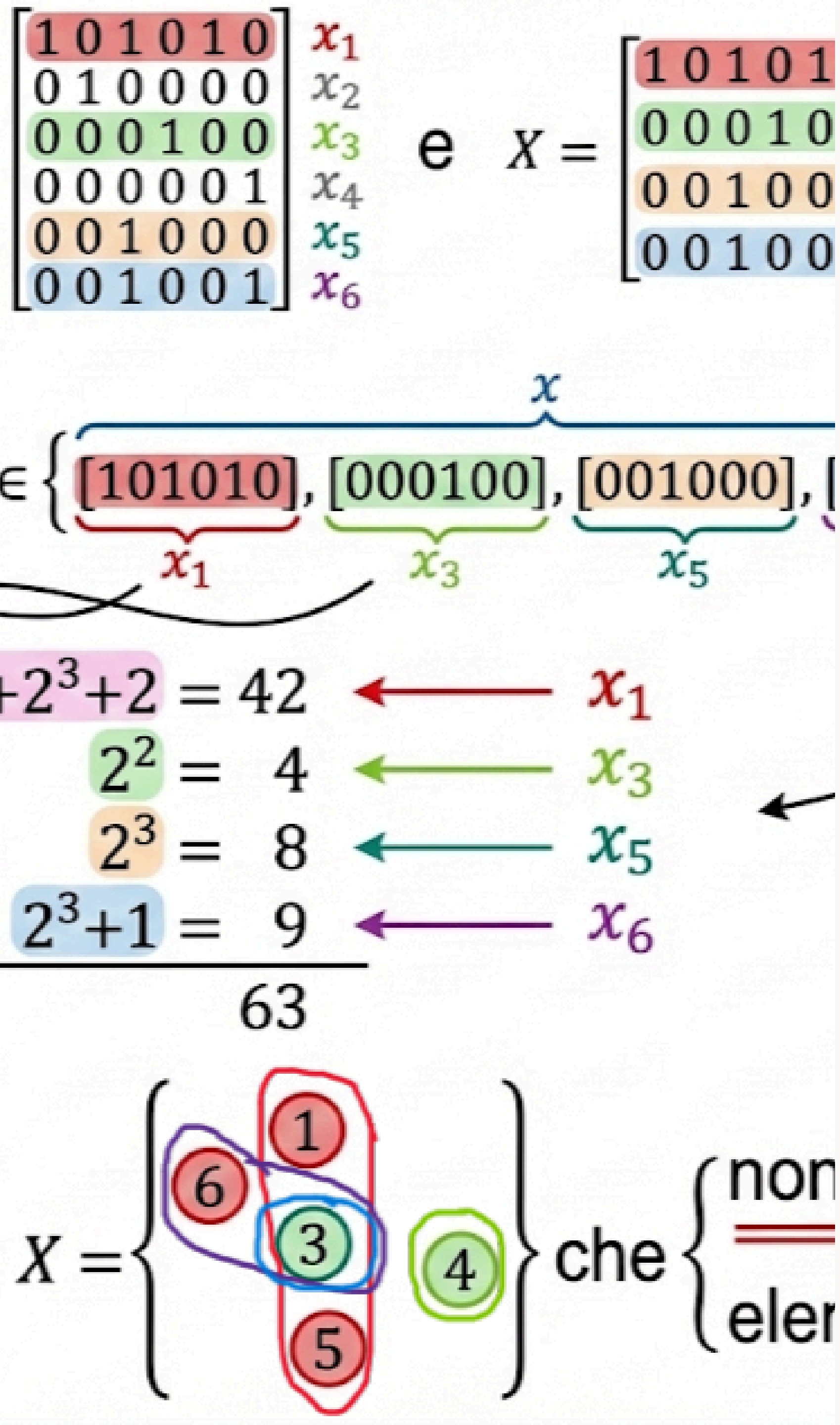


Riduzione $EXCO \leq_p Subsetsum$

Aspetti fondamentali relativi alla riduzione di EXCO a Subsetsum

Gabriele Brizio

Domanda 2.6

Algoritmi e Complessità

Riduzione $EXCO \leq_p SUBSETSUM$

Obiettivo: trasformare un'istanza $E = (U, S)$ di **EXact COver** in un'istanza (W, C) di **SUBSETSUM** tale che:

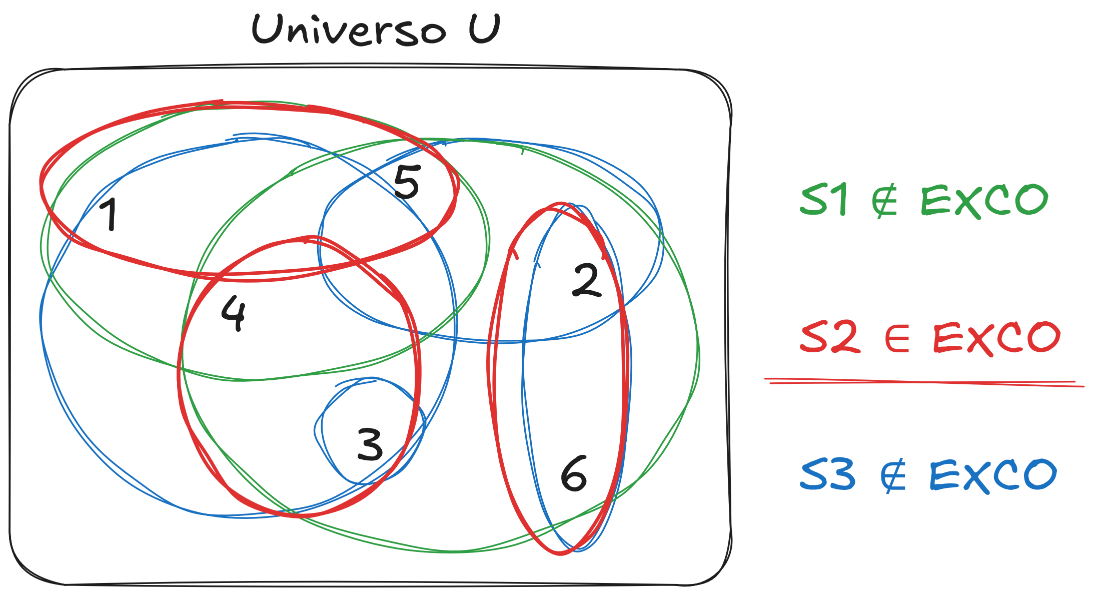
$E \in EXCO \Leftrightarrow W$ **contiene un sottoinsieme che somma a** C

Struttura del problema EXCO

- $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$
- $S = \{S_1, \ldots, S_k\}$ con $S_i \subseteq U$

Vogliamo un sottoinsieme $S' \subseteq S$ tale che:

1. gli insiemi in S' sono **disgiunti**,
2. la loro unione è **esattamente** U.



Intuizione: codifica binaria

Rappresentiamo ogni insieme S_i come una stringa binaria:

$$
\begin{array}{ll}
U = \{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\} & \qquad U = \{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\} \\
 & \\
S = \{\{1\ 2\ 5\} & \qquad S = \{\{1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\} \\
\phantom{S = \{}\{2\ 5\} & \qquad \phantom{S = \{}\{0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\} \\
\phantom{S = \{}\{1\ 3\ 6\} & \Longrightarrow \qquad \phantom{S = \{}\{1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\} \\
\phantom{S = \{}\{2\ 3\ 4\} & \qquad \phantom{S = \{}\{0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\} \\
\phantom{S = \{}\{4\} & \qquad \phantom{S = \{}\{0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\} \\
\phantom{S = \{}\{1\ 5\ 6\}\} & \qquad \phantom{S = \{}\{1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\}\}
\end{array}
$$

$$E_S((U,S),S') = \left(\left\{ \sum_{i=0}^{m-1} 2^i\, x[i] \;\middle|\; x \in S' \right\},\ 2^m - 1 \right) \qquad \text{con } |U| = m.$$

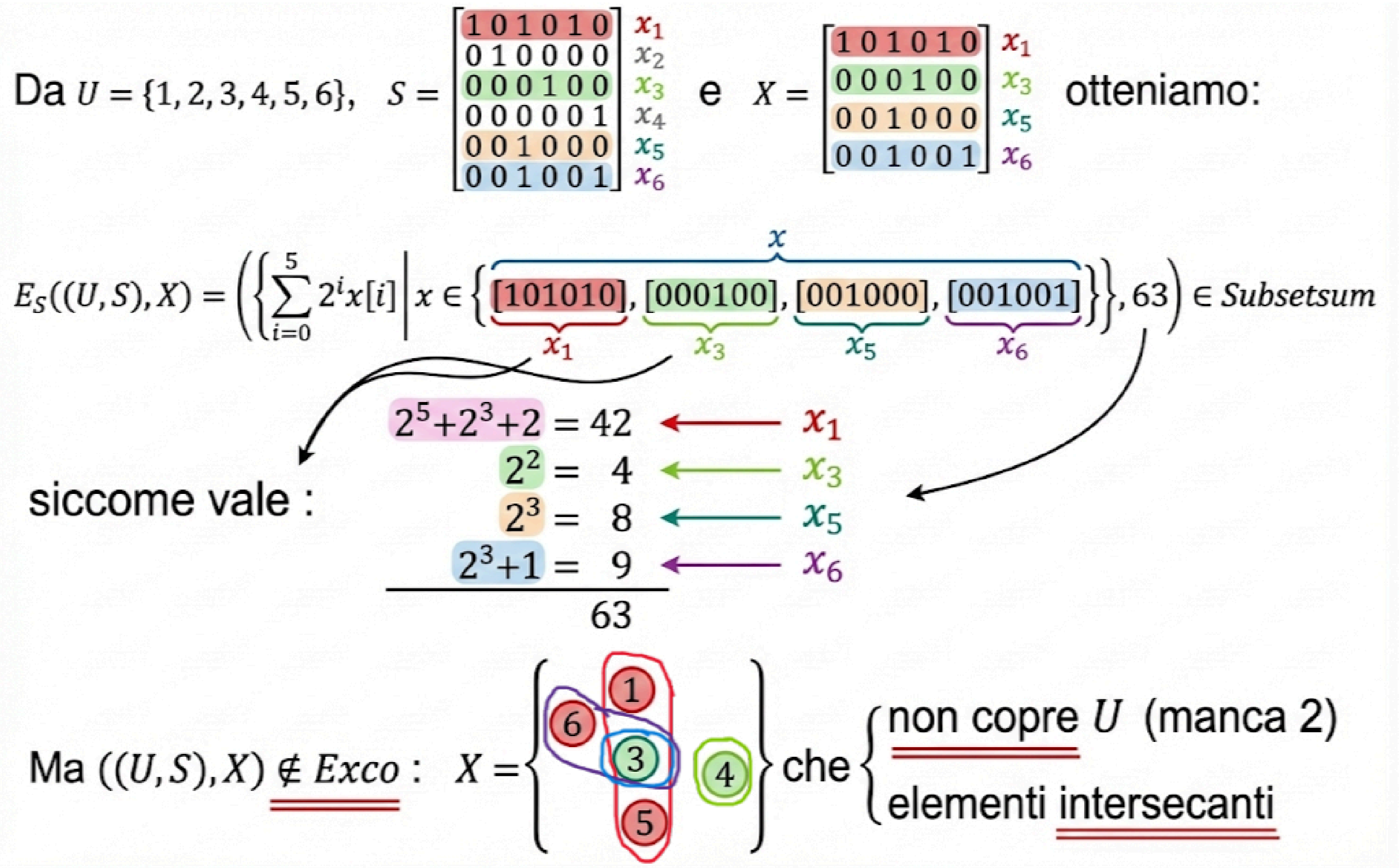
E l’obiettivo è sommare i w_i per ottenere:

$$C = 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{m-1}$$

che rappresenta “tutti gli elementi di U presi una volta”.

Problema

La somma in base 2 genera "riporti": si potrebbero sommare insiemi che **non** sono disgiunti ed ottenere comunque C.



L'idea chiave: evitare riporti

Per evitare che la somma generi riporti: **sostituiamo la base 2 con una base p sufficientemente grande.**

Se la base è maggiore della **massima sovrapposizione possibile** tra insiemi di S, allora:

- sommare insiemi non disgiunti produrrebbe una cifra ≥ p,
- il che impedirebbe di ottenere esattamente il target.

Come scegliere la base p

Per ogni elemento $u_j \in U$, contiamo in quanti insiemi compare:

$$occ(u_j) = |\{ S_i : u_j \in S_i \}|$$

Sia:

$$p = 1 + \max_j occ(u_j)$$

Così garantiamo che **anche scegliendo tutti gli insiemi**, la somma di tutte le occorrenze per una singola colonna non supera $p - 1$.

Quindi **nessun riporto può mai verificarsi**.

Definizione finale di E_s

$$E_s : \mathbf{Set} \times \mathbf{Set} \times \mathbf{Set} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathbb{N}$$

$$(U, S, X) \longmapsto \left(\left\{ \sum_{i=0}^{|u|-1} p^{\,i}\, x[i] \;\middle|\; x \in X \right\}, \frac{p^{\,|u|} - 1}{p - 1} \right)$$

e la somma C è:

$$C = \sum_{j=0}^{m-1} p^j = \frac{p^m - 1}{p - 1}$$

che rappresenta l'elemento "tutti gli x_j presi esattamente una volta".

Perché la somma C è equivalente a $\frac{p^m - 1}{p - 1}$?

È la somma:

$$p^{m-1} + p^{m-2} + \cdots + p^1 + p^0$$

cioè **una cifra 1 in ogni colonna** della rappresentazione in base p.

Questo rappresenta esattamente la condizione:

- ogni elemento di U è coperto una sola volta.

E non ci sono "riporti" → la forma è unica.

Dimostrazione

Pensiamo a S come a una matrice $m \times k$, con:

- righe = elementi di U
- colonne = insiemi S_i

E consideriamo la sua **trasposta** S^T.

Sommandone le colonne in base p otteniamo un vettore:

$$v = S^T \cdot \begin{bmatrix} p^0 \\ p^1 \\ \vdots \\ p^{m-1} \end{bmatrix}$$

Il vettore v descrive esattamente:

- quali insiemi sono stati scelti,
- come contribuiscono alla copertura degli elementi.

$(U, S) \in EXCO \Leftrightarrow E_s((U, S), S') \in Subsetsum$ (con S' copertura esatta di U)

Il valore $\sum_{j=0}^{m-1} p^j$ si ricava sommando gli m elementi del vettore ottenuto dal prodotto:

$$[p^{m-1} \dots p^0] \times S^T$$

se e solo se:

1) $\forall 1 \leq i \leq m \quad (\exists 0 \leq j \leq m-1 : d_{ji} = 1) \Rightarrow \forall 1 \leq k \leq n \quad d_{jk} = 0$

2) $\forall 0 \leq j \leq m-1 \quad \exists 1 \leq i \leq n \quad d'_{ji} = 1$

Ossia…

La somma in base p è **esatta** (nessun riporto) se e solo se:

1. **Disgiunzione**
   nessun elemento u_j compare in due insiemi scelti →
   nessuna colonna contiene due “1”.

2. **Copertura**
   ogni u_j è coperto almeno una volta →
   nessuna colonna dell’assegnazione è tutta zero.

Queste sono esattamente le condizioni di EXCO.

Conclusione

Costruire la base p e i numeri w_i richiede tempo polinomiale.

Conclusione

$$EXCO \leq_p SUBSETSUM$$

La riduzione è corretta e polinomiale.