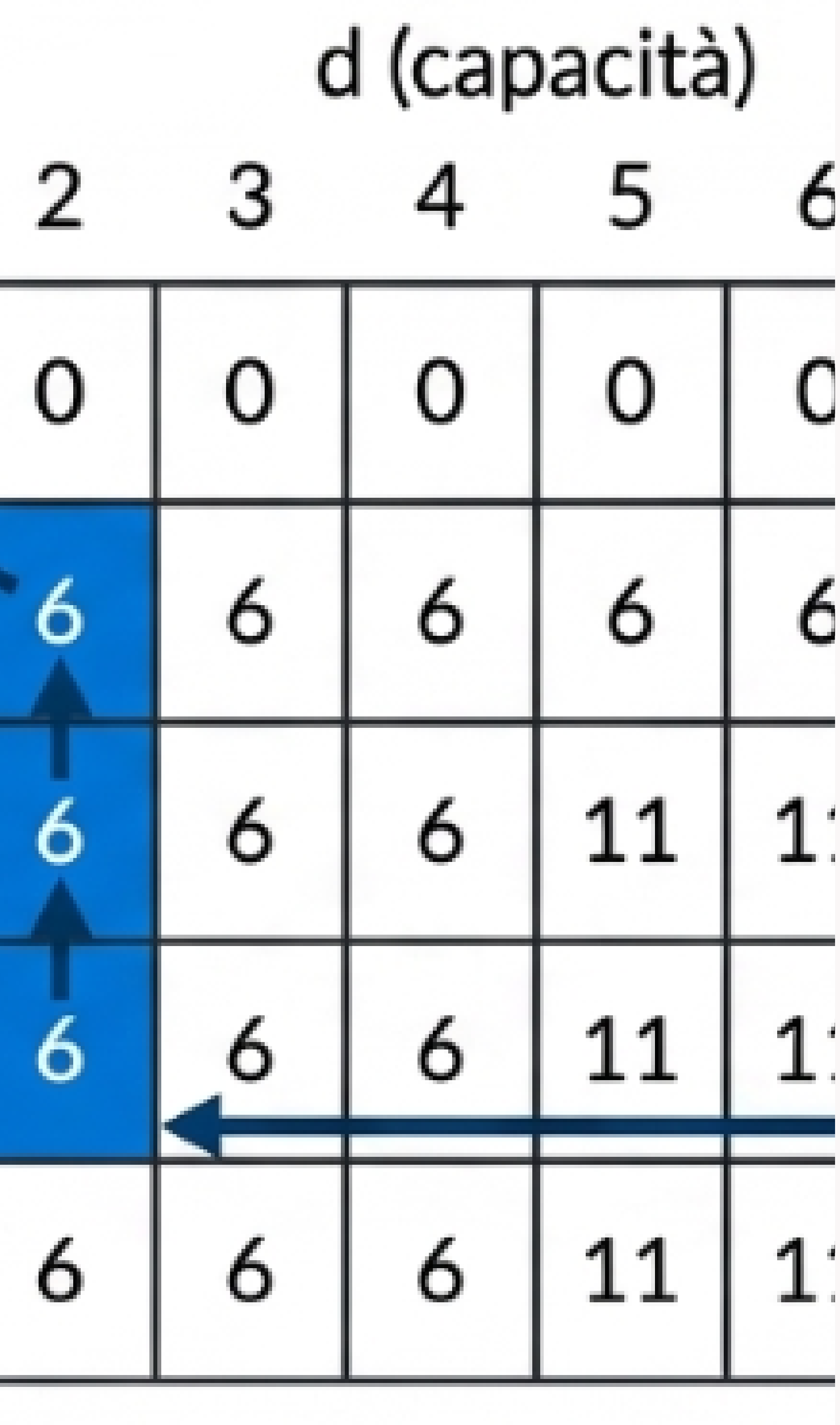


Programmazione Dinamica

Origine, principi, intuizioni, funzionamento della "Programmazione Dinamica"

Gabriele Brizio

Domanda 1.8

Algoritmi e Complessità

Programmazione Dinamica

La Programmazione Dinamica è una tecnica generale introdotta da Richard Bellman negli anni ’50 per risolvere problemi di ottimizzazione caratterizzati da struttura ricorsiva e sottoproblemi sovrapposti.

La difficoltà dei problemi complessi può essere ridotta dividendoli in sottoproblemi più piccoli, risolti una sola volta e i cui risultati vengono riutilizzati.

Principio di ottimalità

Il cuore della DP è il principio di ottimalità:

"Una soluzione ottima di un problema decisionale è composta da soluzioni ottime dei suoi sottoproblemi."

Formalmente, se un problema P può essere decomposto in sottoproblemi $P_1, P_2, \ldots, P_k$, allora:

$$OPT(P) = f(OPT(P_1), OPT(P_2), \ldots, OPT(P_k))$$

dove f rappresenta la regola di composizione ottimale.

Applicazione a KP

Nel Problema dello Zaino (0/1 KP), il processo decisionale per l'i-esimo oggetto è binario: prenderlo ($x_i = 1$) o lasciarlo ($x_i = 0$).

Sia $z(i, d)$ il profitto massimo considerando i primi i oggetti e una capacità d. La formula ricorsiva diventa [7]:

$$z(i,d) = \begin{cases} z(i-1,d) & \text{se } w_i > d \\ \max\{\underbrace{z(i-1,d)}_{\text{non preso}}, \underbrace{p_i + z(i-1,d-w_i)}_{\text{preso}}\} & \text{se } w_i \leq d \end{cases}$$

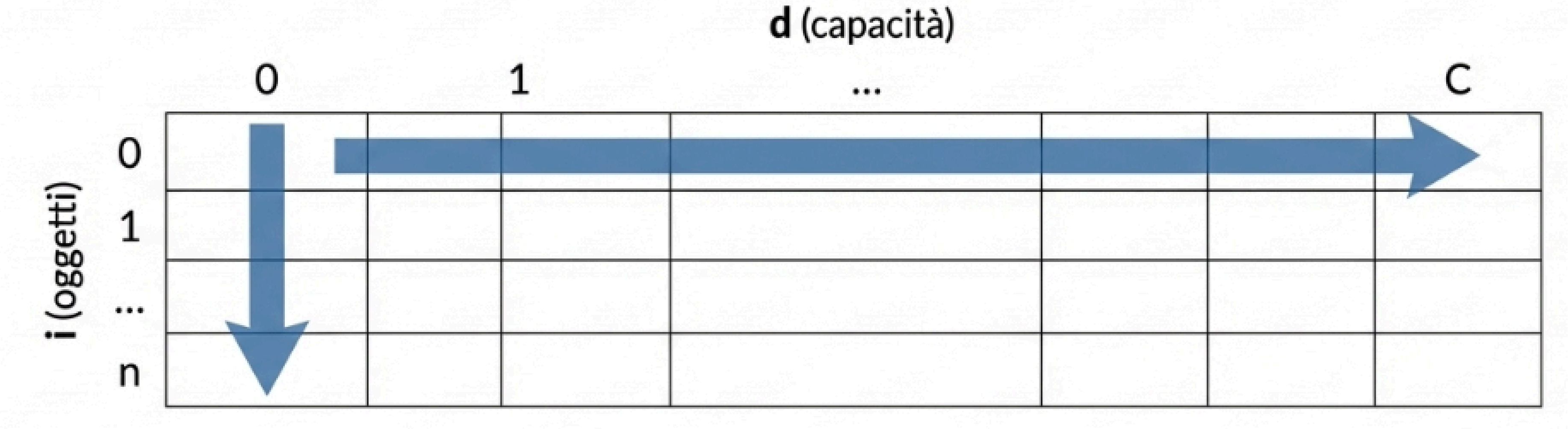
Questo implica che per risolvere l'istanza (n, C), dobbiamo aver risolto le sottostrutture ottime per $i - 1$ oggetti con capacità ridotte.

Da ricorsione a iterazione (Bottom-Up)

L'approccio ricorsivo diretto ricalcolerebbe gli stessi valori molte volte. La DP risolve questo problema costruendo una tabella **iterativa**.

Invece di calcolare solo $z(n, C)$, risolviamo il problema per **ogni capacità** d da 0 a C e per **ogni sottoinsieme** di oggetti da 1 a n.

Costruiamo una matrice Z di dimensione $(n+1) \times (C+1)$.



L'Algoritmo Iterativo

d (capacità)

i (oggetti)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	6	6	6	6	6	6	6	6
2	0	0	6	6	6	11	11	11	11	11
3	0	0	6	6	6	11	11	11	14	$\boxed{14}$
4										

Per ogni oggetto i da 1 a n:
Per ogni capacità d da 0 a C:

1. Se l'oggetto non entra ($w_i > d$): copiamo il valore della riga precedente: $Z[i][d] = Z[i-1][d]$.
2. Se l'oggetto entra ($w_i \leq d$): prendiamo il massimo tra non prenderlo ($Z[i-1][d]$) e prenderlo ($p_i + Z[i-1][d-w_i]

Ricostruzione della Risposta

La tabella ci fornisce il valore del profitto massimo $z^* = Z[n][C]$. Ma quali oggetti abbiamo scelto?

d (capacità)

i (oggetti)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	6	6	6	6	6	6	6	6
2	0	0	6	6	6	11	11	11	11	11
3	0	0	6	6	6	11	11	11	14	14
4	0	0	6	6	6	11	11	11	14	15

Non serve memorizzare liste separate. Possiamo ricostruire la soluzione percorrendo la tabella a ritroso (**Backtracking**):

- Partiamo da (n, C).
- Se $Z[i][d] == Z[i-1][d]$, l'oggetto i non è stato preso. Ci spostiamo a $(i-1, d)$.
- Se $Z[i][d] \neq Z[i-1][d]$, l'oggetto i è stato preso. Ci spostiamo a $(i-1, d-w_i)$.

Analisi della Complessità

Perché KP rimane NP-Hard?

Il riempimento della matrice Z richiede un tempo e uno spazio proporzionali alla dimensione della matrice stessa.

$$S(n, C) \approx O(n \cdot C)$$
$$T(n, C) \approx O(n \cdot C)$$

Apparentemente, questo sembra un polinomio ($n \times C$). Tuttavia, dobbiamo considerare la dimensione dell'input in termini di bit.

La Pseudo-polinomialità

La complessità $O(n \cdot C)$ è **pseudo-polinomiale**.

- La dimensione dell'input include il numero di oggetti n e il numero di bit necessari a rappresentare C (cioè $\log_2 C$).
- Il valore C cresce esponenzialmente rispetto al numero di bit usati per scriverlo ($C = 2^{\log_2 C}$).
- Quindi, rispetto alla lunghezza della codifica dell'input, la complessità è esponenziale:

$$O(n \cdot 2^{\text{bits di } C})$$

Se C è molto grande (es. 2^{100}), la tabella diventa intrattabile.

Conclusioni sulla DP per KP

Garanzia di Ottimo: A differenza delle euristiche Greedy, la DP garantisce sempre la soluzione esatta z^* grazie al Principio di Ottimalità.

Approccio All-capacities: Risolve implicitamente il problema per tutte le capacità intermedie fino a C.

Limiti: L'efficienza dipende dal valore numerico di C. È ideale per istanze con capacità contenuta, ma impraticabile per valori di C arbitrariamente grandi (confermando la natura NP-Hard del problema).