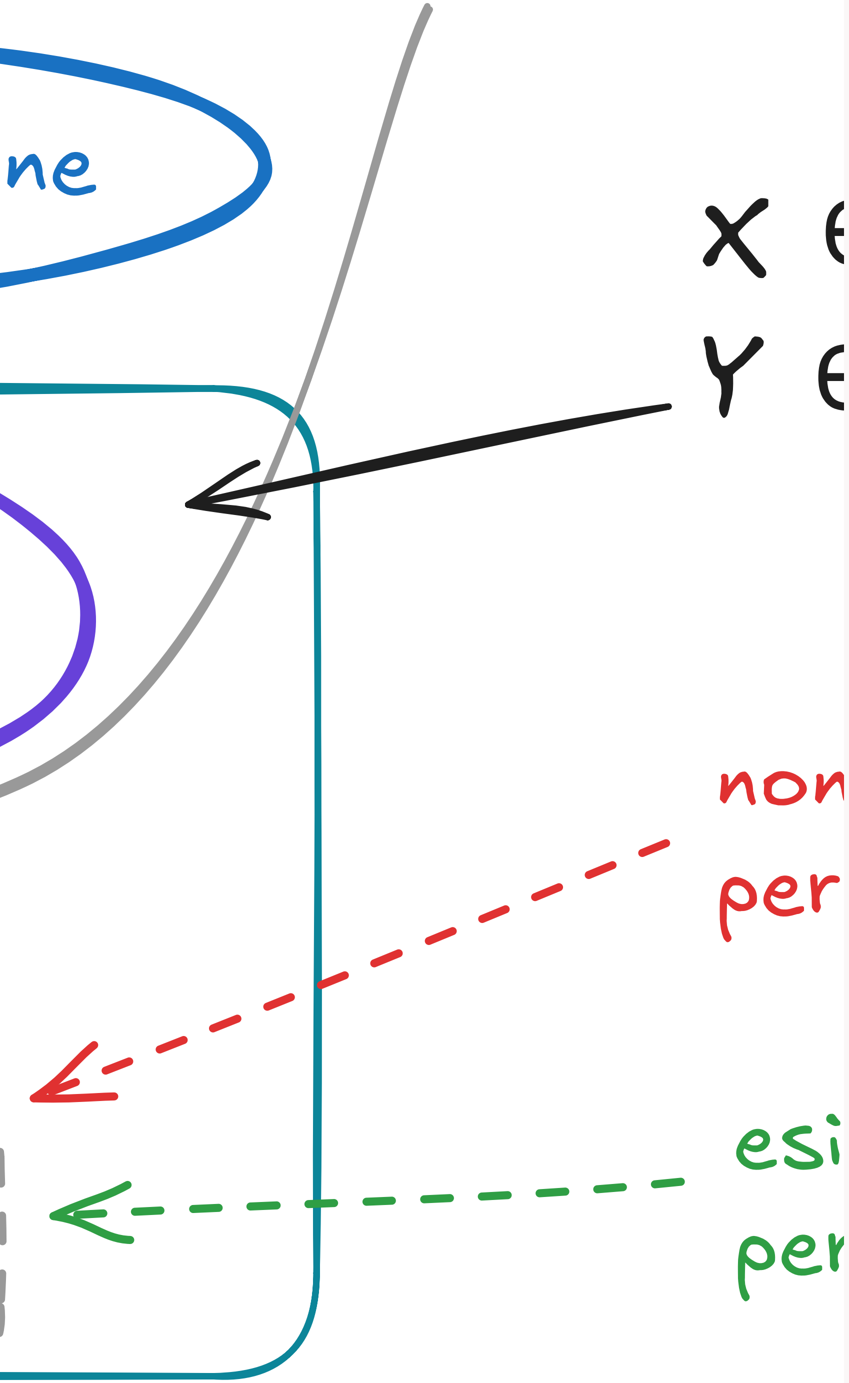


Riduzioni polinomiali

Motivazioni, principali proprietà e implicazioni delle riduzioni tra problemi computazionali.

Gabriele Brizio

Domanda 2.2

Algoritmi e Complessità

Motivazioni

Per classificare la difficoltà dei problemi computazionali è necessario uno strumento che permetta di **confrontare** due problemi in modo astratto, indipendentemente:

- dalla notazione con cui rappresentiamo le istanze;
- dal modello di calcolo utilizzato;
- dall'algoritmo scelto.

Le riduzioni polinomiali nascono come risposta alla domanda fondamentale:

"Dato un problema intrattabile, possiamo trasferire questa difficoltà a un altro problema?"

Sono alla base dell'intera teoria della **NP-completezza**, che lavora su problemi decisionali ed è progettata per identificare famiglie di problemi "equidifficili".

Problemi decisionali e complessità

La teoria considera una versione decisionale dei problemi: un linguaggio L di istanze per cui la risposta è **sì** oppure **no**.

Esempi:

- **KP decisionale** → "esiste una selezione con peso $\leq W$ e profitto $\geq l$?"
- **TSP decisionale** → "esiste un ciclo di costo $\leq K$?"

Le versioni decisionali permettono una formulazione uniforme e consentono di applicare le riduzioni.

Molti problemi funzionali e ottimizzativi possono essere portati alla forma decisionale e viceversa attraverso trasformazioni polinomiali.

Riduzione polinomiale: idea intuitiva

Dato un problema A e un problema B, diciamo che **A si riduce a B** ($A \leq_p B$) se esiste una trasformazione efficiente che riscrive ogni istanza di A in un'istanza di B, conservando la risposta **sì/no**.

L'idea centrale è:
se **A è difficile**, e **A si riduce a B**, allora anche **B deve essere almeno difficile quanto A**.

È una forma di "compilazione": traduciamo istanze di un problema nel dominio dell'altro mantenendo coerenza semantica.

Definizione formale di riduzione polinomiale

Siano P_1 e P_2 due problemi decisionali, con i rispettivi linguaggi L_{P_1}, L_{P_2} riconosciuti dalle macchine di turing che decidono i problemi P_1 e P_2.

Diciamo che **P_1 si riduce polinomialmente a P_2** \$e scriviamo $P_1 \leq_p P_2$ se:

$$P_1 \leq_p P_2 \quad \text{sse} \quad \exists F : \mathrm{Dom}(P_1) \to \mathrm{Dom}(P_2)$$

tale che:

- $x \in L_{P_1} \Rightarrow F(x) \in L_{P_2}$
- $x \notin L_{P_1} \Rightarrow F(x) \notin L_{P_2}$
- F è calcolabile in tempo $p(|x|)$ per un qualche polinomio p

e in tal caso:

- se $P_2 \in Ptime \Rightarrow P_1 \in Ptime$
- P_1 intrattabile $\Rightarrow$ P_2 intrattabile

Significato della relazione $A \leq_p B$

Questa relazione permette di confrontare la difficoltà di problemi diversi:

- se $A \leq_p B$, allora **B è almeno difficile quanto A**;
- simmetricamente, **A è difficile al più quanto B**.

La riduzione è una relazione fra **problemi decisionali**, e consente di costruire “catene” o “alberi della difficoltà”.

Proprietà fondamentali della riduzione

Transitività

Se $A \leq\leq_p B$ e $B \leq_p C$, allora $A \leq_p C$.
Questa proprietà è il motore principale delle dimostrazioni di NP-completezza.

Preservazione della trattabilità

Se $A \leq_p B$ e $B \in PTime$, allora $A \in PTime$.
Una soluzione efficiente per B permette di risolvere anche A.

Trasferimento dell'intrattabilità

Se A è intrattabile (cioè non noto alcun algoritmo polinomiale)
e $A \leq_p B$,
allora anche B deve essere intrattabile.

Implicazioni concettuali

Le riduzioni polinomiali permettono di:

- strutturare la classe NP in famiglie di problemi equivalenti per difficoltà;
- identificare quali problemi sono "più difficili" di altri;
- capire in quali condizioni PTime potrebbe coincidere con NPTime;
- classificare problemi secondo il loro grado di intrattabilità.

In altre parole, forniscono una metrica di confronto tra problemi in termini di complessità.

NP-completezza

Un problema C è **NP-completo** se:

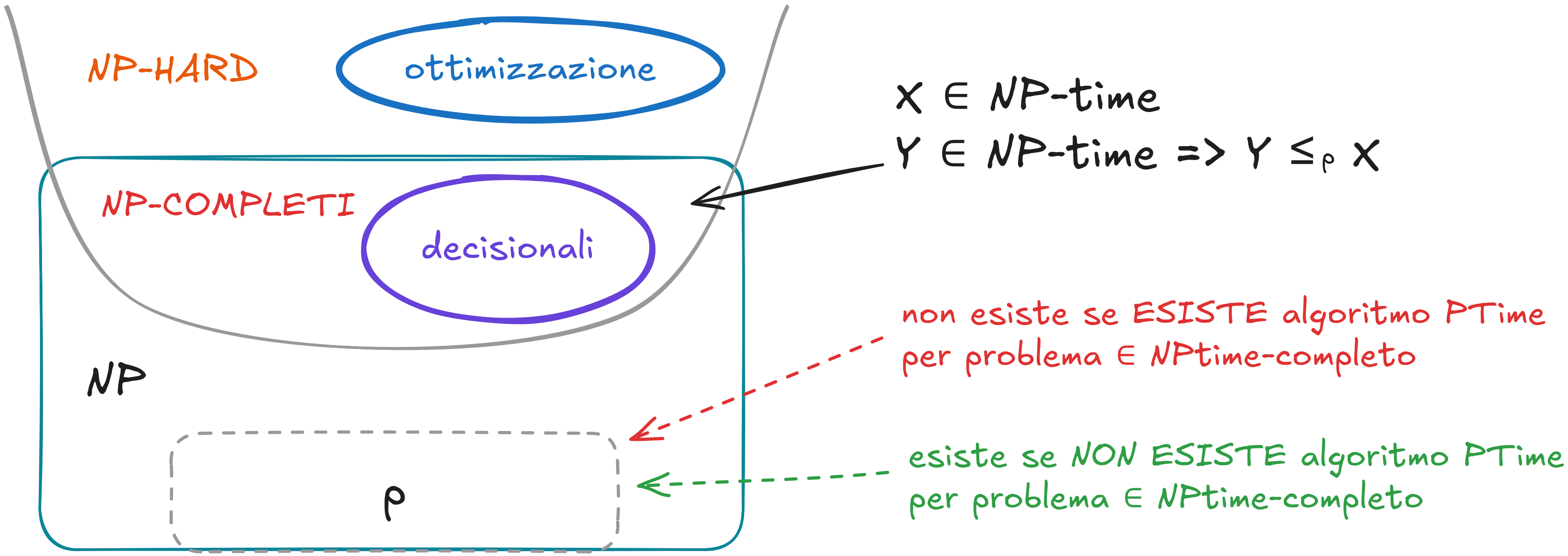
1. $C \in NP$
2. ogni $A \in NP$ si riduce a $C (A \leq_p C)$.

Questo fa di C uno dei problemi "più difficili" della classe NP: se trovassimo un algoritmo polinomiale per C, lo avremmo automaticamente per **tutti** i problemi in NP.

Conseguenza centrale

Se un solo problema NP-completo venisse risolto in tempo polinomiale, allora:

- tutte le riduzioni rimarrebbero valide,
- ogni problema in NP verrebbe risolto in tempo polinomiale,
- si avrebbe **PTime = NPTime**.



Perché le riduzioni sono indispensabili

Le riduzioni:

- forniscono un modo oggettivo per confrontare complessità diverse;
- permettono di spostare la difficoltà da un problema noto a uno nuovo;
- rendono possibile riconoscere problemi “equidifficili”;
- sono lo strumento teorico che fonda l’intera teoria dell’intrattabilità.

Senza riduzioni, non avremmo alcun metodo per certificare la difficoltà dei problemi se non l’assenza di algoritmi noti.

Sintesi finale

La riduzione polinomiale è il fondamento formale che ci permette di parlare di “difficoltà computazionale”.

Le sue proprietà garantiscono confronti affidabili tra problemi.

Grazie a questo concetto, la teoria della complessità definisce:

- PTime e NPTime come classi robuste;
- la nozione di NP-completezza;
- la struttura interna della classe NP;
- il significato della domanda P vs NP.