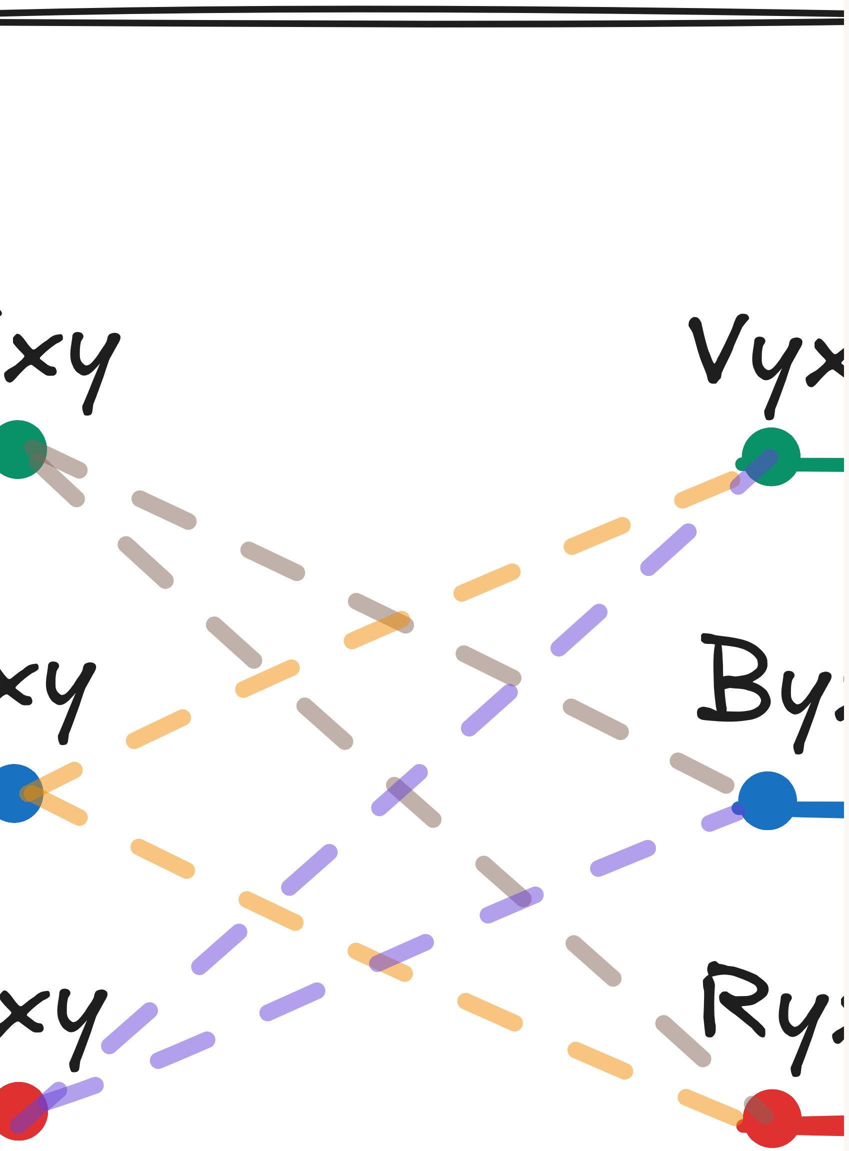


Riduzione $3COL \leq_p EXCO$

Aspetti fondamentali relativi alla riduzione di 3COL a EXCO

Gabriele Brizio

Domanda 2.5

Algoritmi e Complessità

Riduzione $3COL \leq_p EXCO$

Obiettivo: trasformare un grafo G in un'istanza del problema **Exact Cover (EXCO)** tale che:

G è 3-colorabile $\Leftrightarrow E(G)$ ha una copertura esatta

Il problema EXCO

Universo

Un insieme finito U.

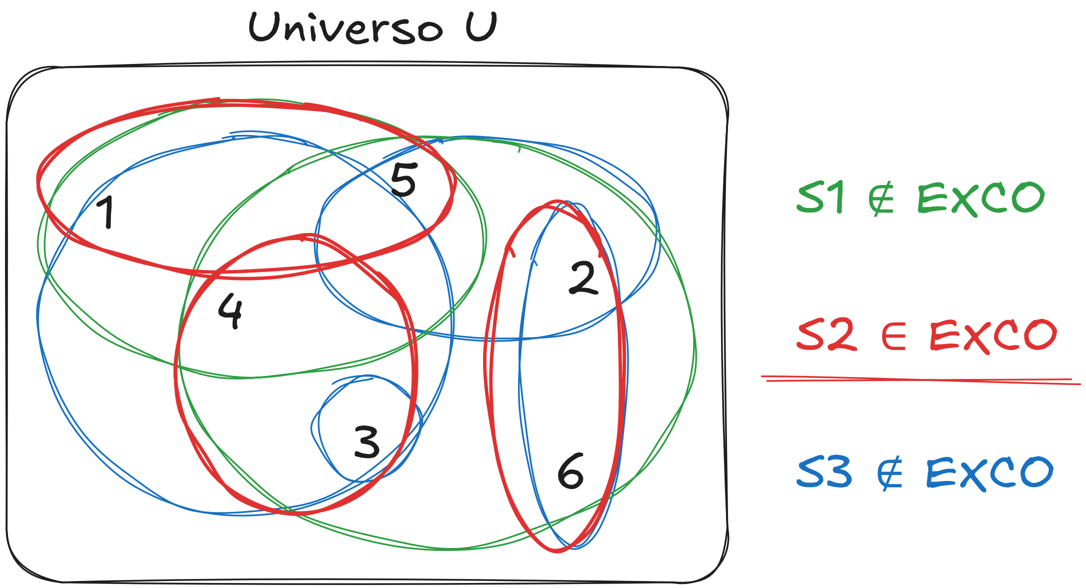
Raccolta di sottoinsiemi

$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(U)$.

Domanda

Esiste un sottoinsieme $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ tale che:

- gli insiemi in $\mathcal{S}'$ sono **a due a due disgiunti**,
- la loro unione è **esattamente U**?



In altre parole ogni elemento di U deve essere coperto **una e una sola volta**.

Intuizione della riduzione 3COL → EXCO

Vogliamo codificare la 3-colorazione come una scelta di sottoinsiemi.

Idea

Per ogni **possibile colorazione di un nodo**, costruiamo sottoinsiemi che:

- includono l'elemento del nodo,
- includono elementi che rappresentano come il colore si "propaga" verso i suoi vicini,
- sono costruiti in modo che **solo una colorazione valida** produce una copertura esatta.

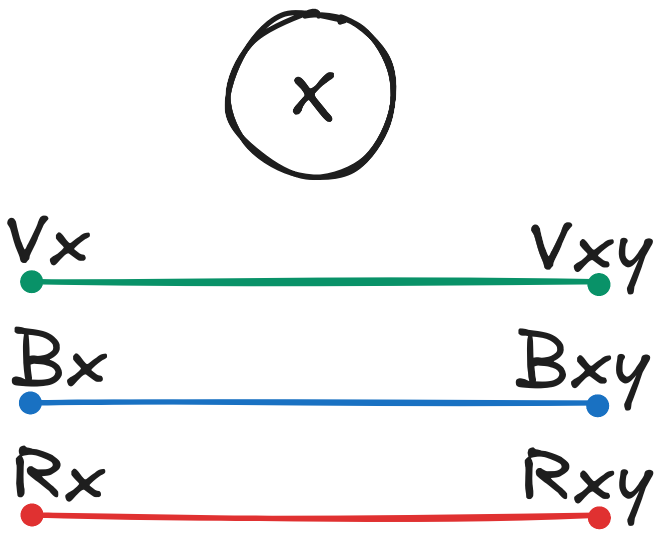
Il punto cruciale: EXCO seleziona esattamente un sottoinsieme per nodo → esattamente un colore per nodo.

Costruzione intuitiva dei "colori" come sottoinsiemi

Per ogni nodo x e colore $c \in \{v, b, r\}$ costruiamo un sottoinsieme:

$$\{x, c_x\}$$

che rappresenta "x è colorato con c".



Esempio: un nodo x collegato ai tre possibili insiemi $\{x, v_x\}$, $\{x, b_x\}$, $\{x, r_x\}$.

Per ottenere coperture esatte solo uno dei tre insiemi potrà venire scelto, perché ogni insieme contiene **l'elemento x**, che deve essere coperto **una sola volta**.

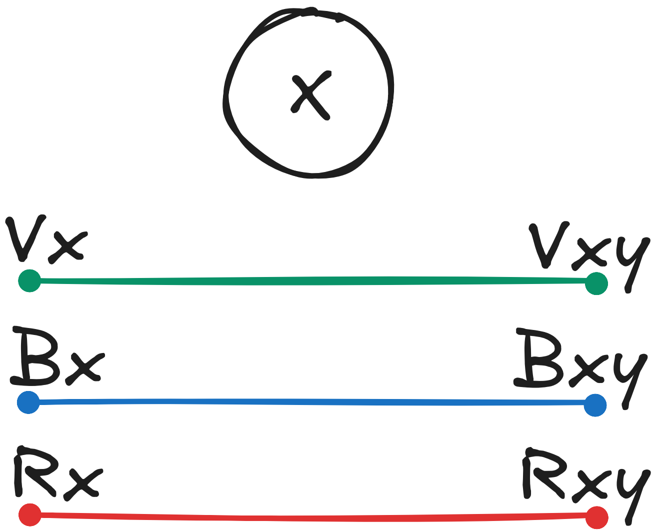
Propagazione della colorazione attraverso gli archi

Se x e y sono adiacenti, non possono avere lo stesso colore.

Nel modello EXCO questo viene imposto creando “elementi di propagazione”, ad esempio:

c_{xy} = propagazione del colore c da x verso y

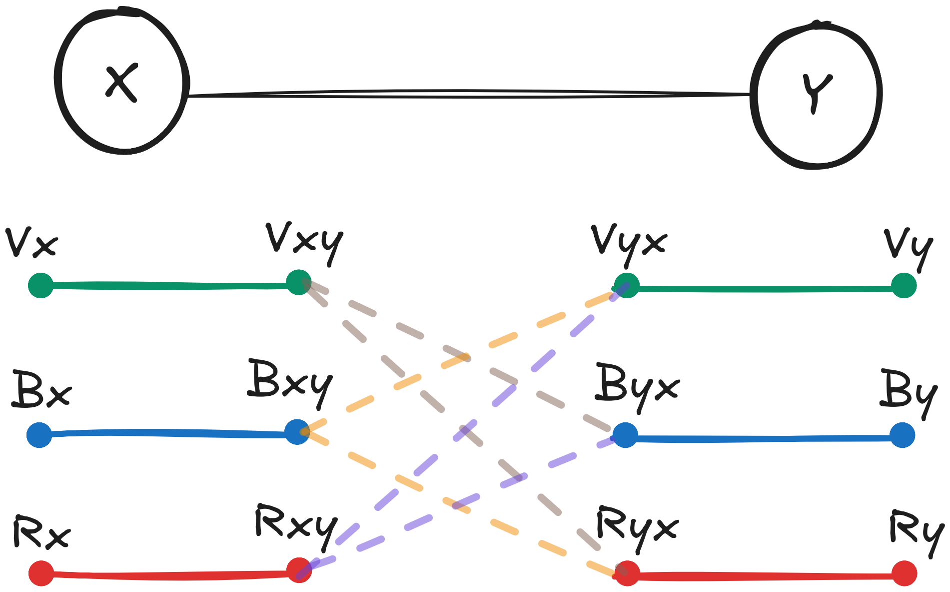
c_{yx} = propagazione del colore c da y verso x



Ogni scelta $\{x, c_x\}$ include anche elementi come:

- c_{xy} (propagazione verso ogni vicino)

che devono essere coperti da altri insiemi coerenti con il colore scelto.



Esempio: arco x–y con elementi etichettati $v_{xy}, v_{yx}, b_{xy}, b_{yx}, r_{xy}, r_{yx}$.

Perché servono elementi intermedi?

Se usassimo solo gli insiemi $\{x, cx\}$, molte coperture esatte sarebbero possibili ma corrisponderebbero a colorazioni **non valide**.

Esempio problematico:

- potrei scegliere $\{x, v_x\}$ e $\{y, v_y\}$ anche se x e y sono adiacenti.

La soluzione

Aggiungere **elementi di propagazione c_{xy}** che forzano scelte coerenti.

Esempio: se scelgo $\{x, v_x\}$, allora v_{xy} deve essere coperto, e potrà esserlo solo da un insieme che rappresenta y colorato con un colore **≠ v**.

Trasformazione $E_x(G)$

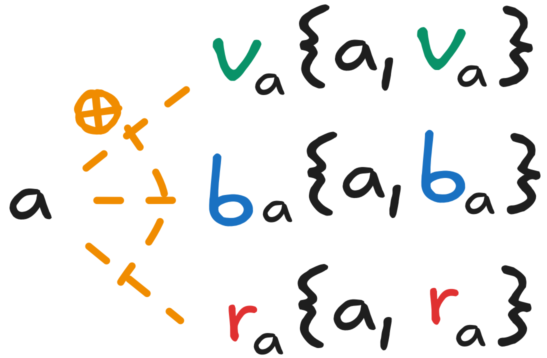
Sia $G = (V, E)$ un grafo.
Definiamo l'istanza $E_X(G) = (U, S)$ di **EXCO** come segue:

1. Costruzione degli insiemi di S

Per ogni vertice $a \in V$ con vicini $N(a) = \{b_1, \ldots, b_n\}$,
inseriamo in S i seguenti insiemi:

(a) Scelta del colore di a (tre alternative)

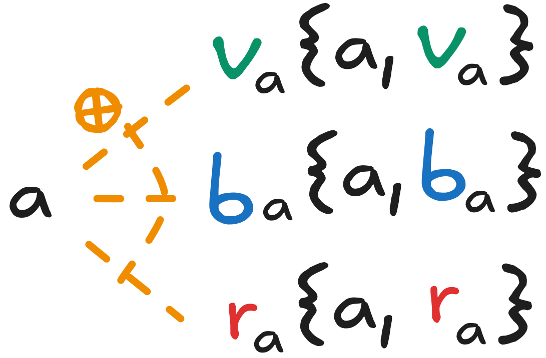
- $\{a,\ v_a\}$
- $\{a,\ b_a\}$
- $\{a,\ r_a\}$



(b) Propagazione del colore verso ciascun vicino

Per ogni vicino $b_i \in N(a)$:

- $\{v_{ab_i},\ v_{b_ia}\}$
- $\{b_{ab_i},\ b_{b_ia}\}$
- $\{r_{ab_i},\ r_{b_ia}\}$



(c) Vincoli di incompatibilità

Per ogni colore $c \neq X(a)$ (cioè colore non assegnato ad a):

$$\{c_{ab_i},\ -c_{ab_n}\} \qquad \text{per tutti i } b_i, b_n \in N(a)$$

2. Costruzione dell'universo U

U è esteso con tre nuovi elementi x, y e z, uno per ogni vertice di V

$$U^* = \{x, y, z\} \cup U$$

$$S^* = \{\{x, v_x\}, \{x, b_x\}, \{x, r_x\}, \{y, v_y\}, \{y, b_y\}, \{y, r_y\}, \{z, v_z\}, \{z, b_z\}, \{z, r_z\}\} \cup \left(S / \begin{Bmatrix} \{v_x\}, \{b_x\}, \{r_x\} \\ \{v_y\}, \{b_y\}, \{r_y\} \\ \{v_z\}, \{b_z\}, \{r_z\} \end{Bmatrix} \right)$$

U contiene:

- gli elementi dei nodi: $x_1, x_2, \ldots, x_n$
- tutti gli elementi corrispondenti: $v_{x_1}, b_{x_1}, r_{x_1}$, $v_{x_1 x_2}, b_{x_1 x_2}, r_{x_1 x_2}$, $v_{x_2 x_1}, b_{x_2 x_1}, r_{x_2 x_1}$
- e **tutti** gli elementi comparsi negli insiemi di S.

Dimostrazione

$G \in 3COL \Rightarrow E_x(G) \in EXCO$

Sia X una 3-colorazione valida di G.

Costruiamo $\mathcal{S}'$ così:

$$S' = \left(\bigcup_{x \in V} \{ x,\ x(x) \} \right) \cup \left(\bigcup_{x \in V} \bigcup_{y \in N(x)} \{ x(x)_{xy},\ x(y)_{yx} \} \right) \cup \left(\bigcup_{x \in V} \bigcup_{c \neq x(x)} \bigcup_{\{y_1, \dots, y_n\} = N(x)} \{ c_{x\ xy_1},\ -c_{x\ xy_n} \} \right)$$

Copertura:

- l'elemento x è coperto esattamente una volta (da $S_{x,X(x)}$)
- gli elementi c_{xy} sono coperti una volta, grazie alla scelta coerente dei colori
- nessun elemento compare in due insiemi scelti

$\Rightarrow \mathcal{S}'$ è una copertura esatta.

Dimostrazione — parte 2

$$G \in 3COL \Leftarrow E_x(G) \in EXCO$$

Da una copertura esatta $\mathcal{S}'$:

- per ogni nodo x, esattamente un insieme del tipo $S_{x,c}$ appartiene a $\mathcal{S}'$ (perché tutti contengono l'elemento x)

Quindi definiamo $X(x) = c \quad \text{se } S_{x,c} \in \mathcal{S}'.$

Per ogni arco (x, y):

- se entrambi fossero colorati con lo stesso colore c,
- allora nel loro sottogadget comparirebbe un elemento c_{xy} che non potrebbe essere coperto esattamente una volta.

Contraddizione → i colori devono essere diversi.
Quindi X è una **3-colorazione valida** del grafo.

Complessità e conclusione

- Per ogni nodo creiamo un numero costante di insiemi e elementi.
- Per ogni arco aggiungiamo un numero costante di elementi e insiemi.
- L'universo U e $\mathcal{S}$ hanno dimensione polinomiale rispetto a $|G|$.

Conclusione

$$G \in 3COL \iff E(G) \in EXCO$$

La riduzione è corretta e polinomiale.