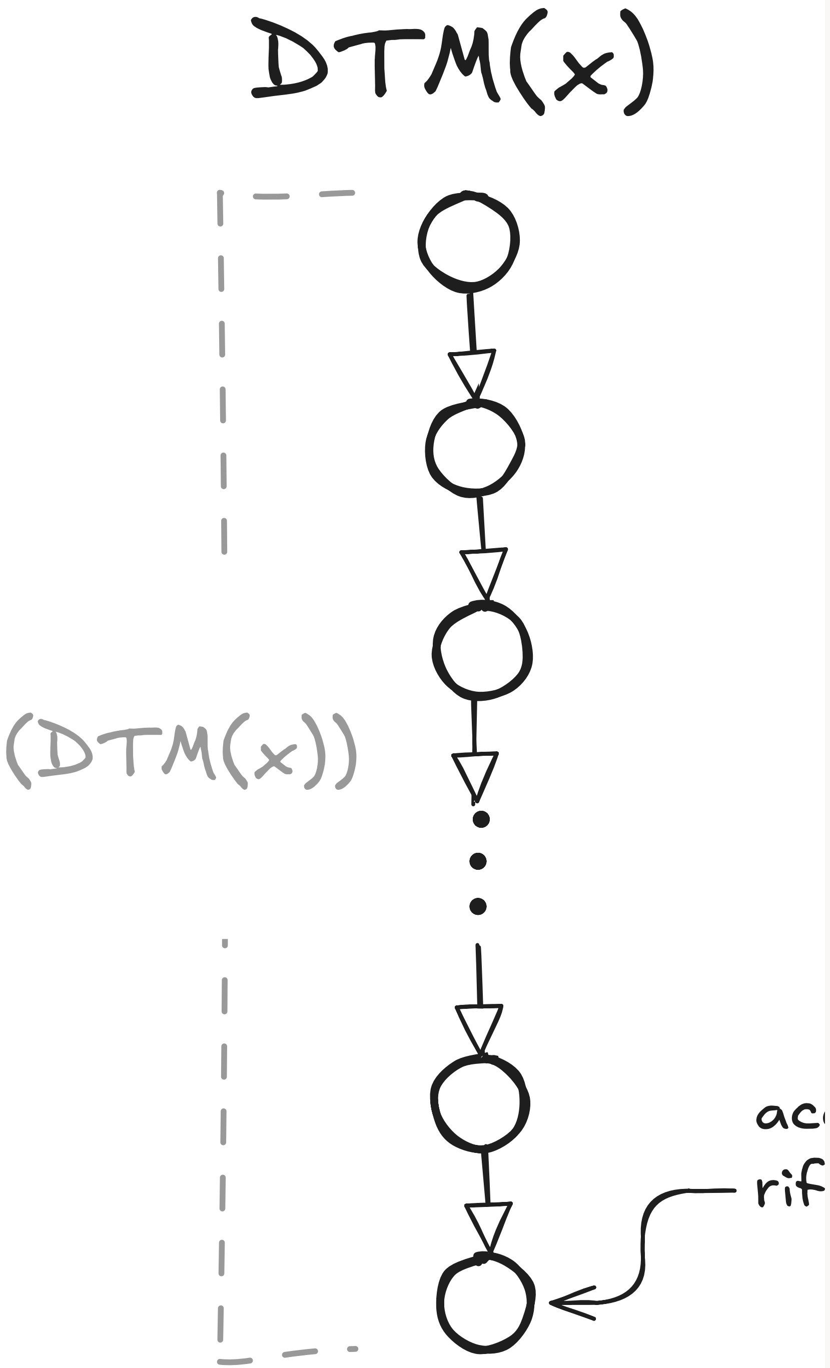


Modelli computazionali e complessità computazionale

Strumenti formali e riflessioni che giustificano la possibilità di usare modelli computazionali arbitrari, ma ragionevoli, per descrivere la complessità computazionale di algoritmi.

Gabriele Brizio
Domanda 2.1
Algoritmi e Complessità

Motivazioni

Perché servono modelli di calcolo?

Nel progettare algoritmi ci si imbatte in problemi per i quali non è noto un algoritmo efficiente, o in istanze che richiedono tempi di esecuzione proibitivi.

Obiettivo: **classificare i problemi per difficoltà computazionale**.

Risulta necessario un quadro teorico che permetta di:

- confrontare problemi diversi,
- identificare problemi intrattabili,
- mantenere robustezza rispetto alla scelta del modello.

Trattabilità vs Intrattabilità

Due macro-classi fondamentali

PTime (P)	NPTime (NP)
Problemi risolvibili con algoritmo deterministico polinomiale.	Problemi verificabili in tempo polinomiale tramite certificato, oppure risolvibili tramite modello non deterministico polinomiale.

Questa distinzione è basata su un criterio asintotico: non interessa la velocità assoluta, ma come il tempo cresce rispetto alla dimensione dell'input.

Si vuole formalizzare cosa rende un problema **trattabile** o **intrattabile** e garantire che la classificazione non dipenda dal modello scelto.

Ruolo della rappresentazione

Per definire complessità servono:

- **un linguaggio domain-specific** per rappresentare le istanze;
- **una funzione di misura** della dimensione dell'input;
- una rappresentazione che non alteri artificialmente la complessità.

Perché è importante?

Dato che la complessità dipende **dalla lunghezza dell'input**, l'obiettivo è evitare codifiche che gonfino artificialmente la lunghezza dell'input: una cattiva rappresentazione porterebbe a valutazioni fuorvianti dei tempi di esecuzione.

Notazioni ragionevoli

Cosa significa “rappresentazione ragionevole”?

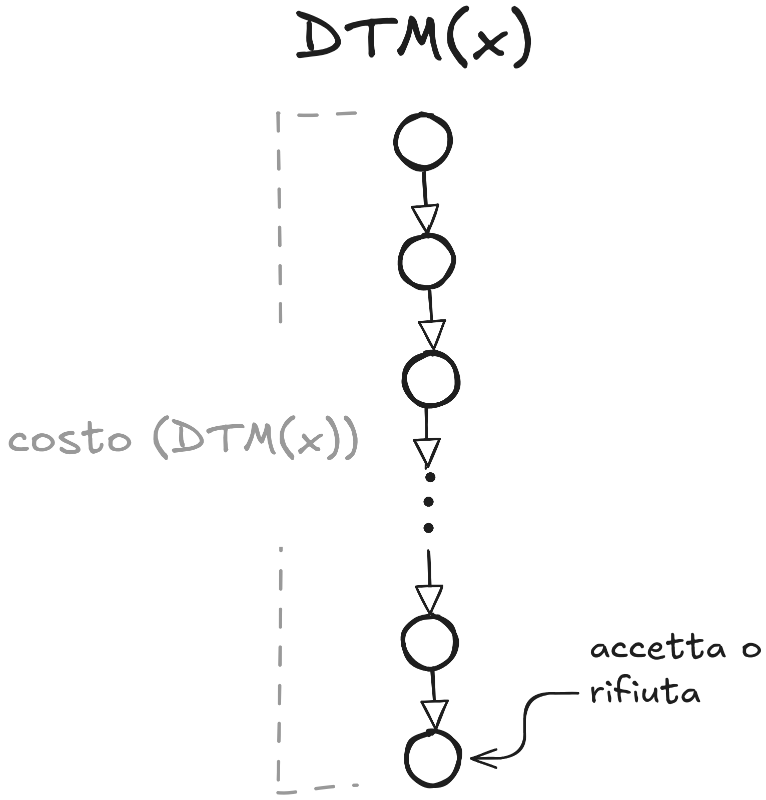
Una notazione è ragionevole se:

- utilizza una **codifica concisa**, senza simboli superflui;
- usa notazione **posizionale** per i valori numerici (binaria, non unaria);
- qualunque altra notazione ragionevole può essere convertita con una funzione **polinomiale**.

Conseguenza fondamentale:

Se un problema è intrattabile con una notazione ragionevole, lo è con tutte.

Modelli computazionali classici



Modello canonico: Macchina di Turing deterministica (DTM)

- Formalismo minimale e preciso.
- Definizione di algoritmo universalmente accettata.
- Base per le classi di complessità PTime, NPTime.

Macchina di turing deterministica (DTM)

Il fondamento formale del calcolo

La DTM è il modello astratto standard per definire il concetto di **algoritmo** e la base della teoria della complessità. È universalmente accettata (grazie alla Tesi di Church-Turing) come il modello capace di eseguire qualsiasi calcolo.

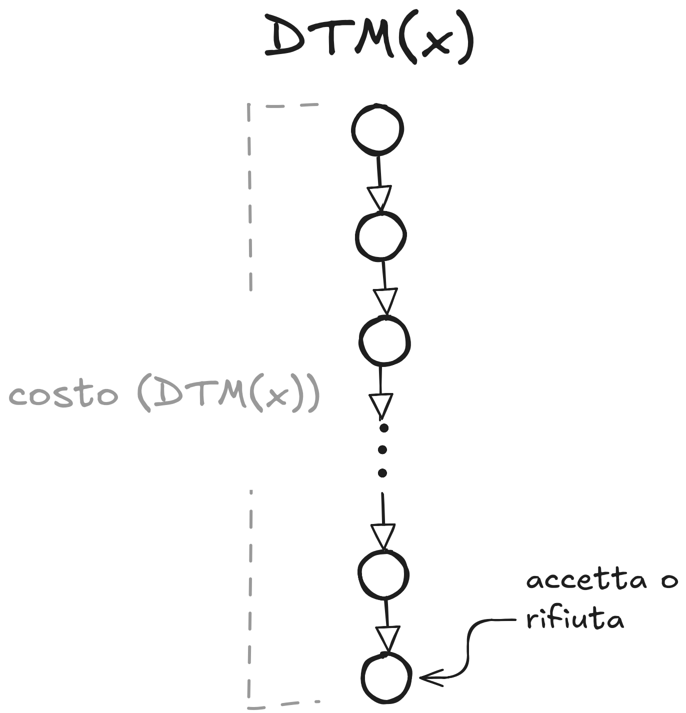
Caratteristica chiave:

Il funzionamento della DTM è **deterministico**: in ogni istante, la configurazione corrente ammette **una sola mossa possibile** successiva. Questo la rende la base per la classe di complessità **P (PTime)**.

Componenti principali:

- **Nastro (Tape):** Memoria potenzialmente **infinita** di celle, contenente input e calcoli (simboli da un alfabeto finito).
- **Testina (Head):** Legge, scrive e si sposta di una cella alla volta (Sinistra o Destra).
- **Stati e Regole:** Un **insieme finito di stati** rappresenta lo stato interno. Le **regole di transizione** specificano:

Stato attuale + Simbolo letto $\longrightarrow$ Nuovo stato + Simbolo da scrivere + spostamento

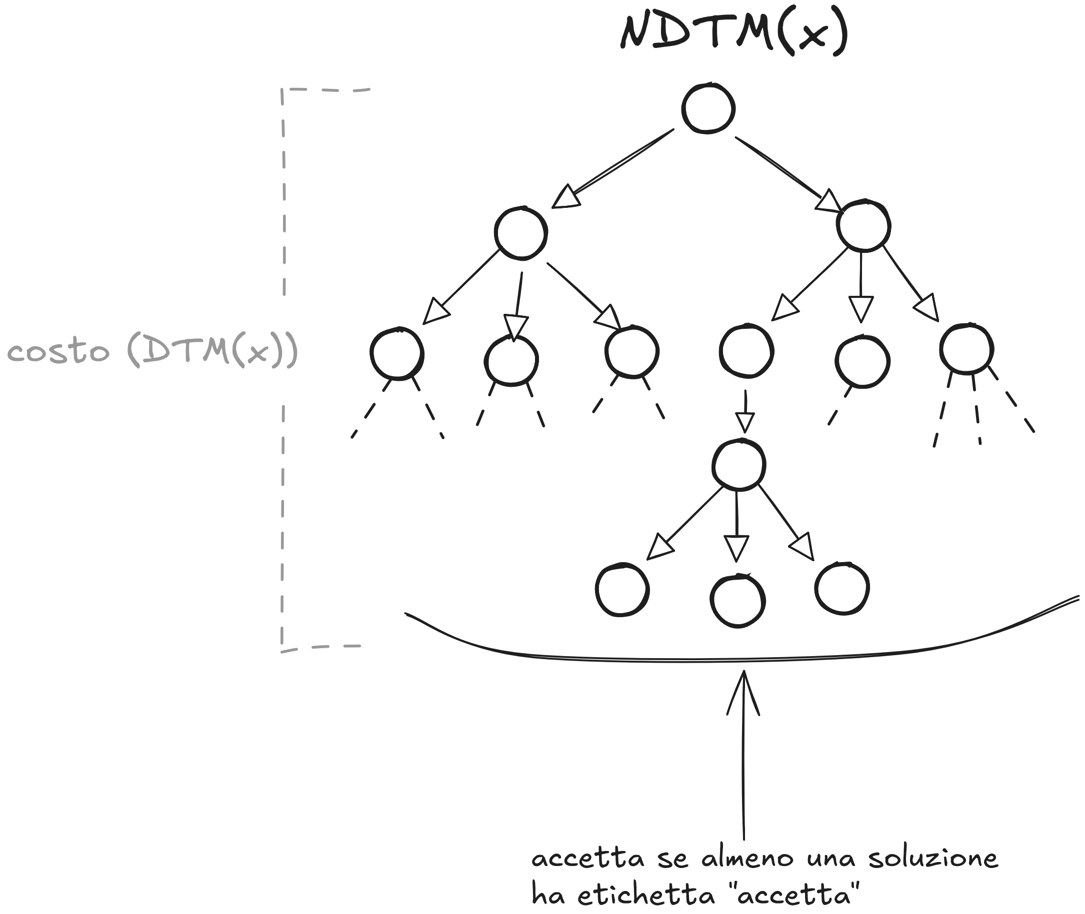


Ma...

- poco espressiva e innaturale rispetto agli algoritmi reali;
- manipola stringhe binarie, non strutture di alto livello.

Macchina di Turing non deterministica (NDTM)

- Scelte multiple: La funzione di transizione permette alla macchina di avere più mosse possibili per ogni singola configurazione.
- Computazione ad albero: Il processo di calcolo non è lineare ma si ramifica creando un albero di configurazioni che vengono esplorate in parallelo.
- Accettazione per esistenza: La macchina accetta l'input se esiste almeno un cammino nell'albero della computazione che conduce a uno stato di accettazione.



Perché non solo Macchine di Turing?

Problemi del modello:

- astrazione troppo “bassa”;
- difficile esprimere strutture dati o algoritmi complessi;
- non rispecchia i modelli di programmazione reali.

Di conseguenza, ci si orienta verso modelli alternativi che permettono una descrizione naturale degli algoritmi, a patto che rimangano **equivalenti** a una macchina di Turing entro fattori polinomiali.

Questa condizione evita che il modello scelto alteri la classificazione dei problemi.

Linguaggi Imperativi Deterministici e Non Deterministici

I modelli **LID** (deterministico) e **LIND** (non deterministico) rappresentano linguaggi imperativi astratti con operazioni di uso comune: variabili, strutture dati, cicli e condizioni.

Caratteristiche:

- simili al tradizionale pseudocodice;
- esprimono strutture dati complesse;
- supportano controlli di flusso standard;
- LIND include meccanismi di scelta non deterministica.

LID e LIND sono molto più vicini al modo in cui si progettano algoritmi nella pratica, ma sono comunque definiti in maniera rigorosa e controllabile dal punto di vista teorico.

Equivalenza tra modelli

Il risultato chiave è che LID, LIND e macchine di Turing sono **equivalenti fino a un overhead polinomiale**.
Ogni algoritmo espresso in LID o LIND può essere tradotto in una DTM o NDTM con un aumento polinomiale del tempo.

Questo si basa su due osservazioni:

- qualsiasi struttura dati può essere codificata in binario con una crescita polinomiale della dimensione;
- ogni istruzione imperativa può essere simulata da una macchina di Turing con complessità anch'essa polinomiale.

Perché l’equivalenza polinomiale è sufficiente

La teoria della complessità ragiona **a meno di polinomi**:

- differenze polinomiali non cambiano l’appartenenza a P o NP;
- non alterano la trattabilità;
- non influenzano le riduzioni polinomiali.

Quindi:

Se due modelli differiscono solo per un overhead polinomiale, le classi di complessità ottenute sono **identiche**.

Robustezza delle classi di complessità

Grazie a rappresentazioni ragionevoli e modelli equivalenti, la complessità computazionale diventa una proprietà **robusta** del problema, indipendente dal linguaggio o dal modello adottato.

Le classi P e NP rimangono invariate e il concetto di intrattabilità assume un significato univoco, non legato alle scelte implementative.

Questo consente di analizzare la difficoltà dei problemi concentrandosi sulla loro natura, non sul formalismo utilizzato.

Sintesi finale

Possiamo usare modelli computazionali arbitrari ma ragionevoli perché:

- le **notazioni ragionevoli** garantiscono codifiche concise e confrontabili;
- i **modelli imperativi** sono naturali e più espressivi delle DTM;
- l'**overhead polinomiale** assicura equivalenza delle classi P e NP;
- la **robustezza** della teoria consente di parlare di trattabilità senza dipendere dal modello.

Conclusione:

La complessità computazionale non dipende dal linguaggio né dal modello, ma solo dalla difficoltà intrinseca del problema.