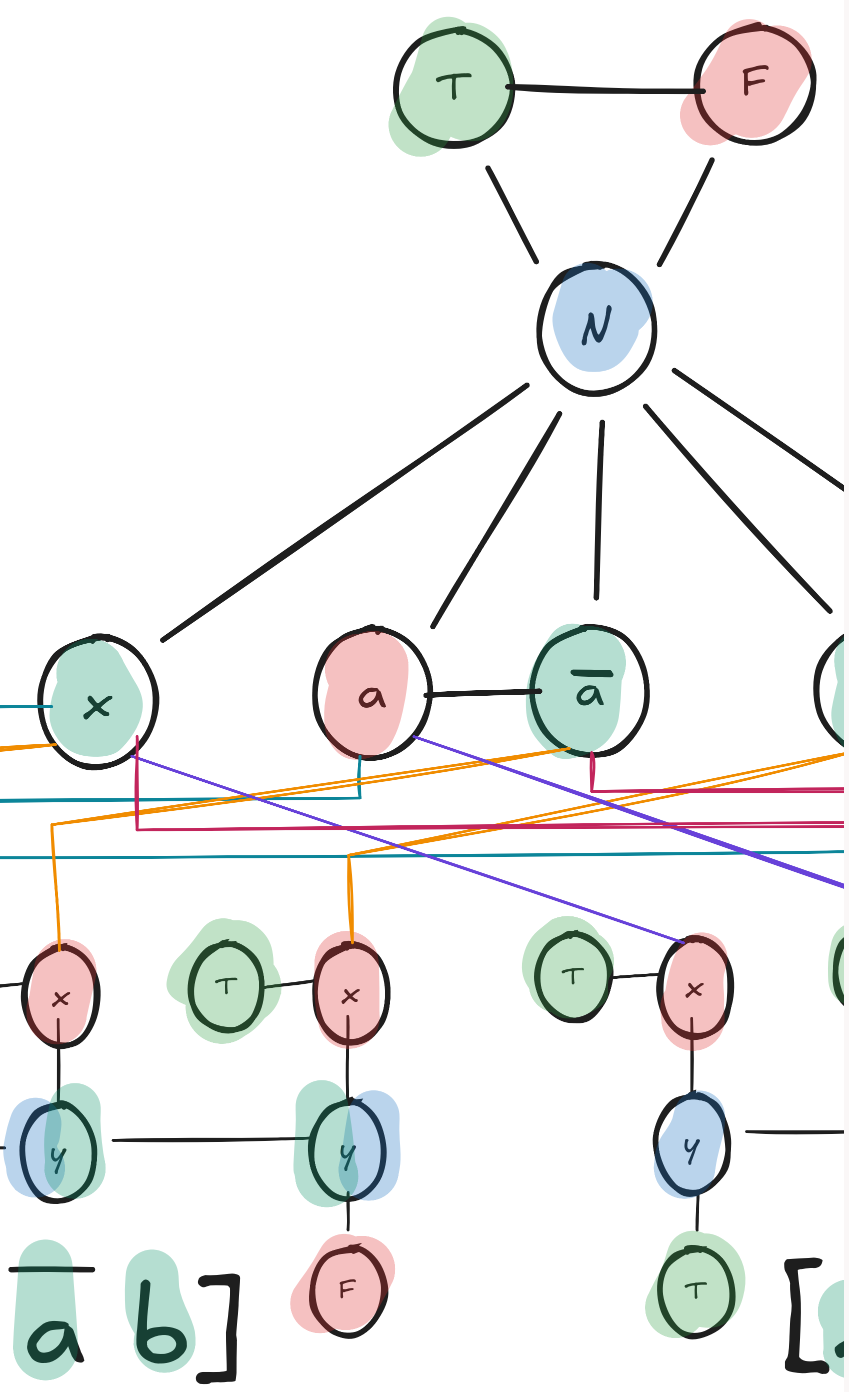


Riduzione $3CNF \leq_p 3COL$

Aspetti fondamentali relativi alla riduzione di 3CNF a 3COL

Gabriele Brizio

Domanda 2.4

Algoritmi e Complessità

Riduzione $3CNF \leq_p 3COL$

Obiettivo: trasformare una formula booleana in forma $3CNF$ in un grafo G tale che:

F è soddisfacibile $\Leftrightarrow$ G è 3-colorabile

Il problema 3COL

Definizione

Dato un grafo $G = (V, E)$, esiste una funzione di colorazione

$$c : V \to \{1, 2, 3\}$$

tale che per ogni arco $(u, v) \in E$ vale:

$$c(u) \neq c(v)$$

Interpretazione

I 3 colori rappresentano tre stati distinti, li chiameremo:

- **T** = True
- **F** = False
- **N** = Neutro

L'idea generale della riduzione

Data una formula F in $3CNF$:

$$F = (l_{1,1} \vee l_{1,2} \vee l_{1,3}) \wedge (l_{2,1} \vee l_{2,2} \vee l_{2,3}) \wedge \ldots$$

Costruiamo un grafo G con tre tipi di gadget:

1. **Triangolo dei colori (T–F–N)**
2. **Gadget dei letterali**
3. **Gadget delle clausole**

In modo che:

- la colorazione dei letterali rappresenti una possibile assegnazione booleana,
- le clausole siano forzate ad avere almeno un letterale vero.

Il triangolo dei colori (gadget di base)

È un triangolo completo con tre nodi:

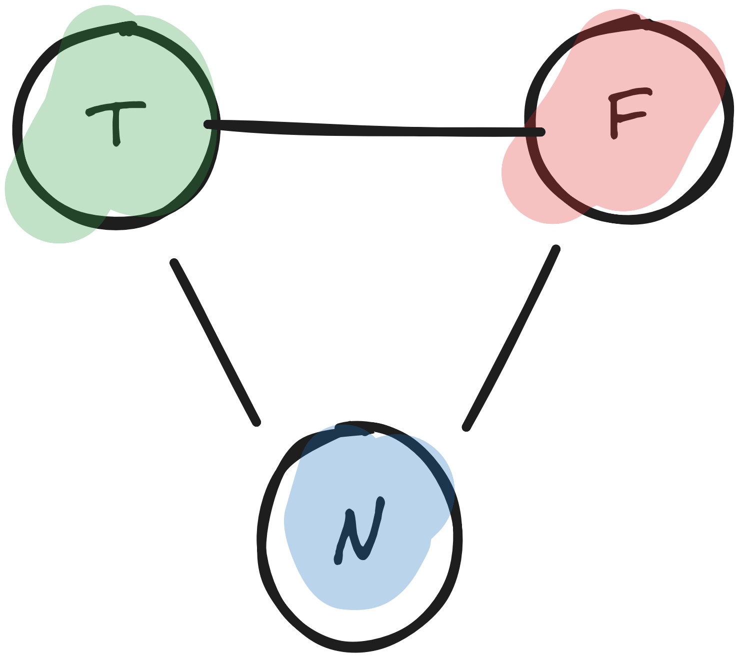
- **N** (Neutro)
- **T** (True)
- **F** (False)

collegati tutti tra loro.

Una 3-colorazione del triangolo impone automaticamente che:

- $c(N), c(T), c(F)$ siano tre colori distinti.
- Qualunque nodo collegato a N deve avere colore $\neq c(N)$.

Questo gadget stabilisce i tre "colori logici" globali.

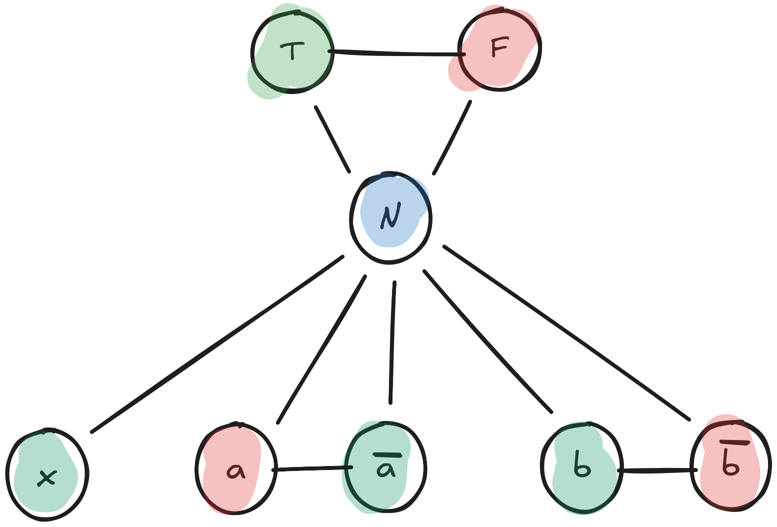


Gadget dei letterali

Per ogni variabile x nella formula, creiamo due nodi:

- un nodo per il letterale x
- un nodo per il letterale $\neg x$

Entrambi collegati al nodo **N** del triangolo dei colori.



Proprietà: Poiché sono collegati a **N**, possono usare solo colori {T,F}.

Non sufficiente -> si aggiunge un arco tra variabili complementari

Questa struttura impone **consistenza logica dei valori booleani**.

Perché non basta ancora?

Finora si è modellato:

- valori di verità coerenti per i letterali,
- assegnazione booleana globale.

Ma una formula $3CNF$ è soddisfatta solo se **ogni clausola ha almeno un letterale vero**.

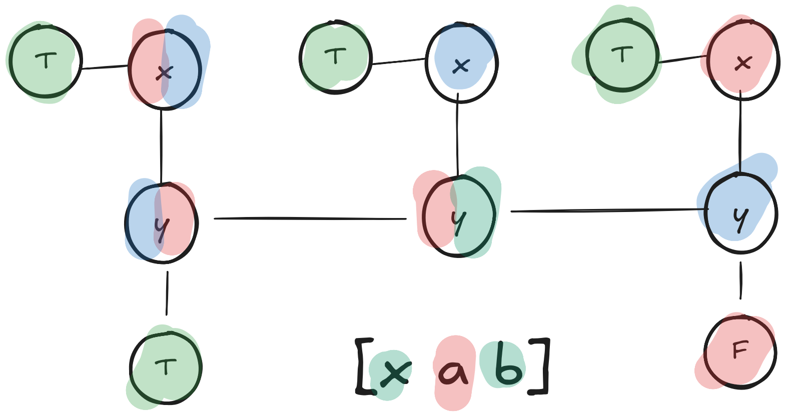
Serve quindi un gadget che "controlli" ogni clausola.

Gadget delle clausole

Per ogni clausola $(l_1 \vee l_2 \vee l_3)$ costruiamo un gadget che:

1. è collegato ai nodi letterali l_1, l_2, l_3,
2. può essere 3-colorato **solo se almeno uno dei tre letterali usa il colore T**.

Struttura



Il gadget è progettato per impedire che:

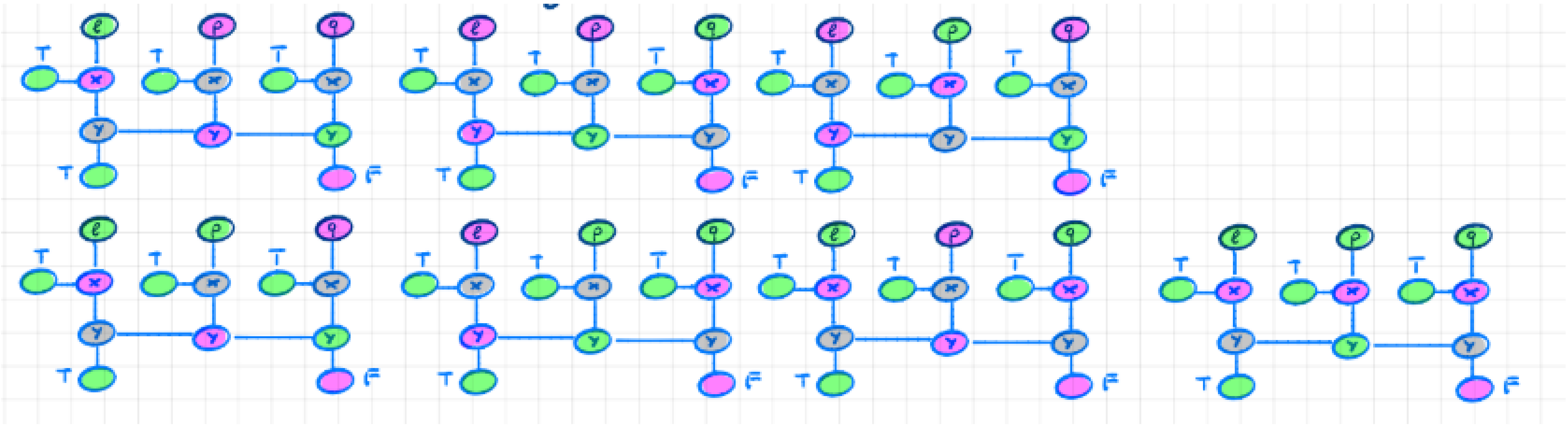
- **tutti e tre i letterali abbiano colore F**,
- cioè impedire che la clausola sia falsa.

Proprietà fondamentale

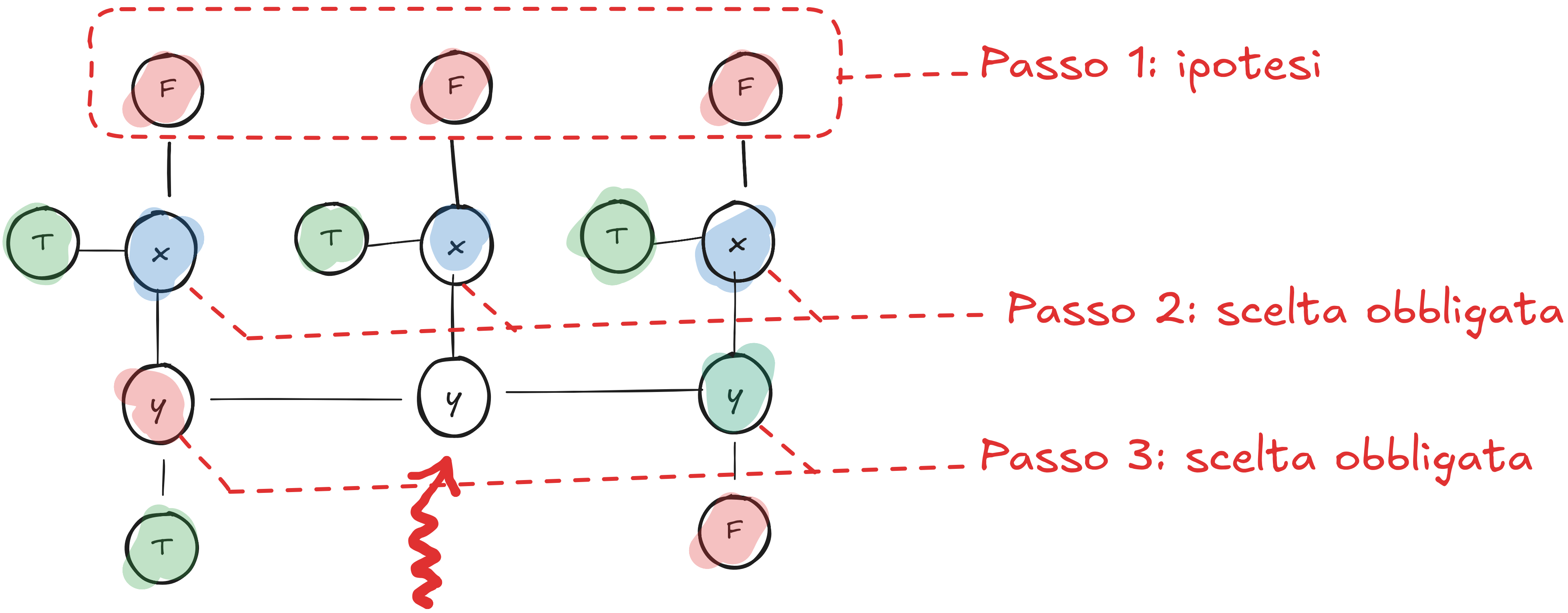
Il gadget della clausola è 3-colorabile **solo se almeno uno dei letterali è T**.

Proprietà del gadget della clausola

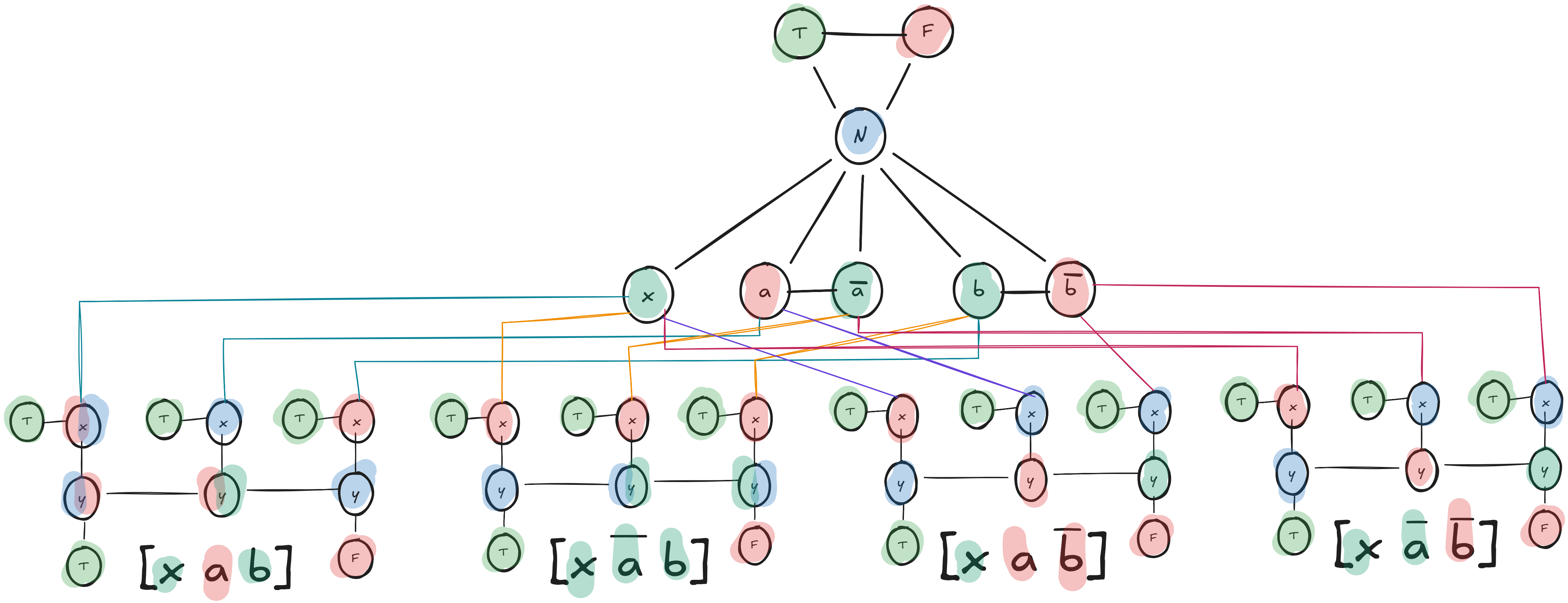
(1) Il sottografo x, y_1, y_2, y_3 è colorabile solo se $x = y_1$ o $x = y_3$ o $y_1 = y_3$



(2) Se i letterali sono tutti falsi allora il grafo $\notin 3COL$



Esempio



Dimostrazione

(1) Se $f \in 3CNF$ allora $L(f) \in 3COL$

Per ciascuna possibilità la **proprietà 1** assicura la colorabilità del sottografo

(2) Se $f \notin 3CNF$ allora $L(f) \notin 3COL$

Se tutti i letterali sono falsi allora dalla **proprietà 2** sappiamo che il sottografo non è colorabile, quindi l'intero grafo non lo è.

Complessità e conclusione

La trasformazione:

- usa un numero di gadget lineare nel numero di variabili e clausole,
- introduce solo un numero costante di nodi per variabile e per clausola,
- si costruisce in tempo $O(|f|)$.

Conclusione

$$f \in 3CNF\text{-SAT} \iff L(f) \in 3COL$$

La riduzione è corretta e polinomiale.