CalculoIV - Equação do Calor

Gabryel Camillo Leite, Murilo Aldigueri Marino

Universidade Estadual de Londrina

1 Exemplo

Considere o problema de condução de calor

$$\begin{cases} u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < 30, \quad t > 0. & (6) \\ u(0,t) = 20, \quad \forall t > 0. & (7) \\ u(30,t) = 50, \quad \forall t > 0. & (8) \\ u(x,0) = 60 - 2x, \quad 0 \leq x \leq 30. & (9) \end{cases}$$

Encontre a temperatura $u(x,t)$ em qualquer instante.

1.1 Resolução

Como $u(0,t) \neq u(30,t) \neq 0$, percebemos que o **Exemplo** trata-se de condições de contorno não-homogêneas. Desta forma, passaremos brevemente pela teoria para resolver o exercício.

2 Teoria

2.1 Condições para contorno não-homogêneas

Denotando $u(x,t)$ a temperatura da barra em um ponto $0 \leq x \leq L$ no instante $t \geq 0$. A variação de temperatura da barra é descrita pela equação do calor:

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,$$

em que α é a difusividade térmica, e depende do material do qual a barra é feita.

Admitindo que conhecemos a temperatura inicial da barra, ou seja, temos a condição inicial

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L.$$

E as condições de contorno para as extremidades da barra:

$$u(0,t) = T_1 \quad \text{e} \quad u(L,t) = T_2, \quad \forall t > 0.$$

Portando, para encontrar $u(x,t)$ que satisfaz a equação do calor e essas condições iniciais e de contorno, devemos resolver

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} = u_t \quad 0 < x < L, \quad t > 0. & (1) \\ u(0,t) = T_1, \quad \forall t > 0. & (2) \\ u(L,t) = T_2, \quad \forall t > 0. & (3) \\ u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L. & (4) \end{cases}$$

2.2 Fórmulas para contorno não-homogêneo

Considerando $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$. Dessa forma, após aplicar o método de separação de variáveis, obtemos:

$$u(x,t) = (T_2 - T_1)\frac{x}{L} + T_1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2\alpha^2 t}{L^2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (5)$$

e os coeficientes c_n são dados por:

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L \left[f(x) - (T_2 - T_1)\frac{x}{L} - T_1\right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

2.3 Resolução

Podemos notar que este problema é da forma (1)-(4).
Analisando o **Exemplo** e as **Condições de contorno não-homogêneas**, notamos que $L = 30$, $\alpha^2 = 1$, $T_1 = 20$, $T_2 = 50$ e a condição inicial modificada $f(x) = 40 - 3x$ para $t > 0$.

Desta forma, podemos apenas substituir os valores na **Solução para contorno não-homogênio** para encontrar $u(x,t)$.

Para c_n temos:

$$c_n = \frac{2}{30}\int_0^{30} [(40 - 3x) - (50 - 20)\frac{x}{30} - 20] \sin\left(\frac{n\pi x}{30}\right) dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$c_n = \frac{1}{15}\int_0^{30} (20 - 4x) \sin\left(\frac{n\pi x}{30}\right) dx, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Após calcular a intengral, temos no intervalo [0,30]:

$$c_n = \frac{1}{15}[\frac{-600}{\pi n} cos(\frac{n\pi x}{30}) + \frac{120}{\pi n} x cos(\frac{n\pi x}{30}) - 4(\frac{30}{n\pi})^2 \sin\left(\frac{n\pi x}{30}\right)],$$

$$c_n = \frac{1}{15}[600(\frac{-(-1)^n + 1 + 6(-1)^n}{\pi n})],$$

$$c_n = \frac{40(5(-1)^n + 1)}{\pi n},$$

Assim, para $u(x,t)$ temos:

$$u(x,t) = (50 - 20)\frac{x}{30} + 20 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{30^2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{30}\right),$$

$$u(x,t) = x + 20 + \sum_{n=1}^{\infty}[\frac{40(5(-1)^n + 1)}{\pi n}]e^{-\frac{n^2\pi^2 t}{30^2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{30}\right),$$

3 Algoritmo:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy import integrate

def cn(f, L, n):
    def funcao(x):
        return f(x) * np.sin((n * np.pi * x) / L)
    return (2 / L) * integrate.quad(funcao, 0, L)[0]

def u(f, x, n_max, L):
    alpha = 1; T1 = 20; T2 = 50
    if t == 0:
        return 60 - 2 * x
    else:
        somatorio = 0
        for n in range(1, n_max + 1):
            somatorio += (
                cn(f, L, n)
                * np.exp((-(n**2) * np.pi**2 * alpha**2 * t) / (L**2))
                * np.sin(n * np.pi * x / L)
            )
        return somatorio + (T2 - T1) * x / L + T1

def f(x):
    return 40 - 3 * x

L = 30
x_intervalo = np.linspace(0, 30, 2500, endpoint=False)
testes_fourier = [0, 6, 10, 30, 100]
fig, axes = plt.subplots(1, 2, figsize=(16, 6))

# Plot 3D
X, T = np.meshgrid(x_intervalo, testes_fourier)
U = []
for t in testes_fourier:
    U.append(u(f, x_intervalo, t, L))
U = np.array(U)
ax_3d = fig.add_subplot(122, projection="3d")
ax_3d.plot_surface(X, T, U, cmap="viridis")
ax_3d.set_xlabel("x")
ax_3d.set_ylabel("t")
ax_3d.set_zlabel("u(x, t)")
ax_3d.set_title("3D")

# Plot 2D
for t in testes_fourier:
    y_fourier = u(f, x_intervalo, t, L)
    axes[0].plot(x_intervalo, y_fourier, label=f"t = {t}")
axes[0].set_xlabel("x")
axes[0].set_ylabel("u(x, t)")
```

```
axes[0].set_title("2D")
axes[0].legend()
axes[0].grid(True)
plt.tight_layout()
plt.show()
```

Os gráficos obtidos foram:

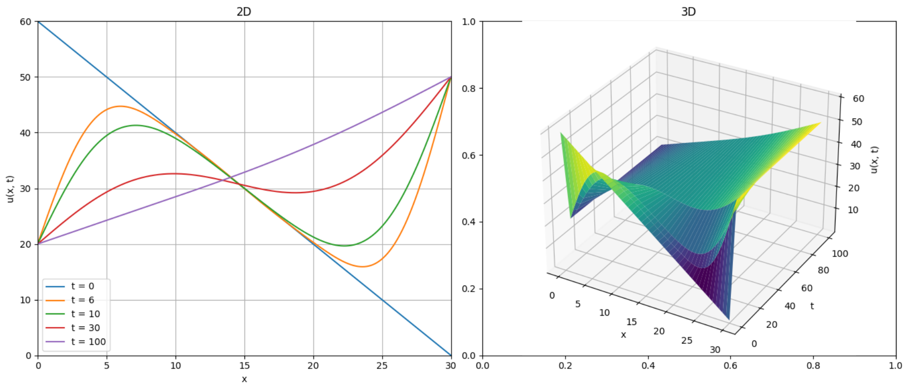

Figura 1: Gráficos do Exemplo.