1. Préliminaires

2. Familles d'ensembles

Exercice 2.1

Trouver un exemple d'ensemble X et de classe monotone $\mathcal{M}$ sur X tels que $\emptyset \in \mathcal{M}$, $X \in \mathcal{M}$ mais $\mathcal{M}$ n'est pas une tribu.

Solution : $X = \{0, 1\}$, $\mathcal{M} = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$

Exercice 2.2

Trouver un exemple d'ensemble X et deux tribus $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ sur X tels que $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ n'est pas une tribu.

Solution : $X = \{0, 1, 2\}$, $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \{0\}, \{1, 2\}, X\}$, $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{0, 2\}, X\}$

Exercice 2.3

Soit $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \ldots$ des tribus sur X. $\cup_i A_i$ est-elle une tribu ?

Solution : Non. $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_n = \sigma(\{\{0\}, \ldots, \{n\}\})$. Par l'absurde, comme $\forall n, \{2n\} \in \cup_i \mathcal{A}_i$, on a $2\mathbb{N} \in \cup_i \mathcal{A}_i$, donc $2\mathbb{N} \in \mathcal{A}_k$ pour un certain k. En considérant $\mathcal{B}_k$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ de la forme B ou $B \cup \{k+1, k+2, \ldots\}$ avec $B \subset \{0, \ldots k\}$, on construit une tribu qui contient $\{\{0\}, \ldots, \{k\}\}$, donc $\mathcal{A}_k \subset \mathcal{B}_k$. Contradiction avec $2\mathbb{N} \in \mathcal{A}_k$.

Exercice 2.4

Soit $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \subset \ldots$ des classes monotones sur X et $\mathcal{M} = \cup_n \mathcal{M}_n$. Soit $(A_i)_i$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{M}$. A-t-on $\cup_n A_n \in \mathcal{M}$?

Solution : Non. $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{M}_i = \{\{1\}, \{1, 2\}, \ldots, \{1, 2, \ldots, i\}\}$ et $A_i = \{1, 2, \ldots, i\}$

Exercice 2.5

Image réciproque d'une tribu est une tribu.

Exercice 2.6

Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur X telle que si $A \in \mathcal{A} \setminus \{\emptyset\}$, il existe $B, C \in \mathcal{A}$ non vides avec $B \cap C = \emptyset$ et $B \cup C = A$. Montrer que $\mathcal{A}$ n'est pas dénombrable.

Solution : On construit une suite (C_n) d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints : par hypothèse, $X = B_1 \cup C_1$, $B_1 = B_2 \cup C_2$, $B_2 = B_3 \cup C_3$, ... On considère ensuite l'application $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{A}$, $J \mapsto \bigcup_{j \in J} C_j$. Elle est injective et $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$, donc $\mathcal{A}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 2.7

Anecdotique.

Exercice 2.8

(★) Montrer qu'une tribu $\mathcal{A}$ sur X est soit finie, soit non-dénombrable.

Solution : Sur X on introduit la relation d'équivalence R définie par

$$xRy \iff (\forall A \in \mathcal{A}, x \in A \iff y \in A)$$

Soit $x \in X$, on note $\dot{x}$ la classe d'équivalence de x. Montrons que $\dot{x} = \bigcap\limits_{A \in \mathcal{A}, x \in A} A$.
$\boxed{\subset}$ Soit $y \in \dot{x}$. Soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $x \in A$. Comme xRy, $y \in A$, et ok.
$\boxed{\supset}$ Soit $y \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}, x \in A} A$. Soit $A \in \mathcal{A}$. Si $x \in A$, comme $\bigcap_{A \in \mathcal{A}, x \in A} A \subset A$, on a $y \in A$. Si $y \in A$, en supposant par l'absurde que $x \notin A$, on a $x \in A^c$, $A^c \in \mathcal{A}$ et $y \notin A^c$, ce qui est absurde. Donc $x \in A$. Conclusion : $x \in A \iff y \in A$, ie xRy, d'où $y \in \dot{x}$.

Supposons $\mathcal{A}$ dénombrable.
Notons Γ l'ensemble des classes d'équivalence. Chaque $\gamma \in \Gamma$ est dans $\mathcal{A}$. En effet, avec $x \in \gamma$, on a $\gamma = \bigcap_{A \in \mathcal{A}, x \in A} A$ qui est une intersection dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$.
On définit

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{P}(\Gamma) & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ & \mathcal{C} & \longmapsto & \bigcup_{\gamma \in \mathcal{C}} \gamma \end{array}$$

$\mathcal{A}$ étant dénombrable, $\Gamma \subset \mathcal{A}$ l'est aussi, et l'union précédente est dénombrable.
Montrons que φ est bijective :
- <u>inj</u> : Soient $\mathcal{C} \neq \mathcal{C}'$ des éléments de $\mathcal{P}(\Gamma)$. Sans perte de généralité on dispose de $\gamma \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}'$. Considérons $x \in \gamma$. Alors $x \in \varphi(\mathcal{C})$. Comme les classes sont disjointes, $\forall \gamma' \in \mathcal{C}', x \notin \gamma'$ donc $x \notin \varphi(\mathcal{C}')$. Donc $\varphi(\mathcal{C}) \neq \varphi(\mathcal{C}')$
- <u>surj</u> : On démontre sans mal que, pour $A \in \mathcal{A}$, $A = \bigcup\limits_{x \in A} \dot{x}$

On distingue deux cas :
- Γ est fini. Alors $\mathcal{A} \sim \mathcal{P}(\Gamma)$ est fini.
- Γ est au moins infini dénombrable. $\mathcal{A}$ a au moins le cardinal de $\mathbb{R}$ donc non dénombrable.

<u>Note</u> : comme dans l'exercice 2.6 on fabrique une famille infinie d'éléments disjoints de la tribu et on fait exploser la tribu avec les unions de ces éléments.

Exercice 2.9

Indicatrices de $\liminf$ et $\limsup$.

Exercice 2.10

(Kortchemski) Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable, $\mathcal{C}$ une famille de parties de E et $B \in \sigma(\mathcal{C})$. Montrer qu'il existe une famille dénombrable $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ telle que $B \in \sigma(\mathcal{D})$

Solution : Posons $\mathcal{A} = \{B \in \mathcal{P}(E) | \exists \mathcal{D} \subset \mathcal{C}, D \text{ dénombrable et } B \in \sigma(\mathcal{D})\}$
Il suffit de prouver que $\mathcal{A}$ est une tribu sur E contenant $\mathcal{C}$. On a alors $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$ et OK.
• $E \in \mathcal{A}$: il suffit de poser $\mathcal{D} = \{B\} \subset \mathcal{C}$ où B est un élément de $\mathcal{C}$. On a bien $\mathcal{D}$ dénombrable et $E \in \sigma(\mathcal{D})$.
• $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$: trivial.
• Soit $(A_i) \in (\mathcal{A})^{\mathbb{N}}$. Pour chaque i on dispose de $\mathcal{D}_i \subset \mathcal{C}$ dénombrable tel que $A_i \in \mathcal{D}_i$. Comme $\forall i, A_i \in \bigcup\limits_n \mathcal{D}_n \subset \sigma(\bigcup\limits_n \mathcal{D}_n)$, la stabilité par unions des tribus donne $\bigcup\limits_n A_n \in \sigma(\bigcup\limits_n \mathcal{D}_n)$. On a bien $\bigcup_n \mathcal{D}_n \subset \mathcal{C}$ et $\bigcup_n \mathcal{D}_n$ dénombrable. Donc $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$.
• $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$: pour $B \in \mathcal{C}$, il suffit de poser $\mathcal{D} = \{B\}$.

Exercice 2.11

Théorème $\pi - \lambda$
Soit X un ensemble.
$\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ est appelé <u>π-système</u> si $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie.
$\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ est appelé <u>λ-système</u> si

- $X \in \mathcal{M}$
- $\mathcal{M}$ stable par différence : pour $A, B \in \mathcal{M}$, $A \subset B \implies B \setminus A \in \mathcal{M}$
- $\mathcal{M}$ est stable par réunion croissante.

Montrer que si $\mathcal{C}$ est un π-système, $\sigma(\mathcal{C}) = \lambda(\mathcal{C})$ où $\lambda(\mathcal{C})$ est le λ-système minimal contenant $\mathcal{C}$.

Solution : On note $\mathcal{D} = \bigcap\limits_{\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X), \mathcal{M} \text{ λ-système contenant } \mathcal{C}} \mathcal{M}$.
Une intersection quelconque de λ-systèmes étant un λ-système, $\mathcal{D}$ est un λ-système.
Montrons $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$.
$\boxed{\subset}$ Il suffit de prouver que $\mathcal{D}$ est une tribu qui contient $\mathcal{C}$.
• $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ OK.
• $X \in \mathcal{D}$ car $\mathcal{D}$ λ-système.
• Soit $A \in \mathcal{D}$. Montrons que $A^c \in \mathcal{D}$.
Soit $\mathcal{A}$ un λ-système contenant $\mathcal{C}$. Comme $A \in \mathcal{A}$ et $X \in \mathcal{A}$, $X \setminus A = A^c \in \mathcal{A}$. D'où $A^c \in \mathcal{D}$.
• Soit (A_i) une suite d'éléments de $\mathcal{D}$. Montrons que $\cup_i A_i \in \mathcal{D}$. Comme $\mathcal{D}$ est stable par union croissante et passage au complémentaire, il suffit de prouver

que $\mathcal{D}$ est stable par intersection finie.

Pour $A \in \mathcal{D}$ on définit $\mathcal{E}_A = \{B \in \mathcal{D} | A \cap B \in \mathcal{D}\}$.
Soit $A \in \mathcal{C}$.
♡ Comme $\mathcal{C}$ est un π-système et $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$, on a $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}_A$.
♡ On a $X \in \mathcal{D}$ et $X \cap A = A \in \mathcal{D}$ donc $X \in \mathcal{E}_A$.
♡ Pour $B \subset C$ éléments de $\mathcal{E}_A$, $A \cap (C \setminus B) = (A \cap C) \setminus (A \cap B) \in \mathcal{D}$.
♡ Pour B_i une suite croissante d'éléments de $\mathcal{E}_A$, on a $A \cap (\cup_i B_i) = \cup_i (A \cap B_i)$.
Or $\forall i, A \cap B_i \in \mathcal{D}$ et les $A \cap B_i$ sont croissants, donc $A \cap (\cup_i B_i) \in \mathcal{D}$.
<u>Conclusion</u> : Si $A \in \mathcal{C}$, $\mathcal{E}_A$ est un λ-système contenant $\mathcal{C}$, donc $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}_A$

Soit $A \in \mathcal{D}$. Pour $C \in \mathcal{C}$, comme $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}_C$, on a $A \in \mathcal{E}_C$, donc $C \in \mathcal{E}_A$. D'où $\mathcal{C} \subset \mathcal{E}_A$. Comme précédemment, on montre que $\mathcal{E}_A$ est un λ-système. Par minimalité de $\mathcal{D}$, on a $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}_A$.
Ceci étant vrai pour tout $A \in \mathcal{D}$, on en déduit que $\mathcal{D}$ est stable par intersection finie.
Finalement, $\mathcal{D}$ est une tribu contenant $\mathcal{C}$, donc $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}$.

$\boxed{\supset}$ Une tribu étant un λ-système, on a $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}$.

3. Mesures

Exercice 3.1

Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ finiment additive, telle que $\mu(\emptyset) = 0$ et $\mu(B) < \infty$ pour un $B \neq \emptyset$. On suppose que pour toute suite croissante $(A_i) \in \mathcal{A}$, $\mu(\cup_i A_i) = \lim_i \mu(A_i)$. Montrer que μ est une mesure.

Solution : Soit $(A_i) \in \mathcal{A}$ disjoints. La suite $B_n := \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)_n$ est croissante et

$$\mu(\cup_n A_n) = \mu(\cup_n B_n) = \lim_n \mu(B_n) = \lim_n \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Exercice 3.2

Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ finiment additive, telle que $\mu(\emptyset) = 0$ et $\mu(X) < \infty$. On suppose que pour toute suite $(A_n) \in \mathcal{A}$ qui décroît vers $\emptyset$ on a $\lim_i \mu(A_i) = 0$. Montrer que μ est une mesure.

Solution : Soit (A_i) une suite d'éléments disjoints de $\mathcal{A}$. Par additivité finie on a $\mu(\cup_i A_i) = \mu(\cup_{i=1}^{n} A_i) + \mu(\cup_{i=n+1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) + \mu(\cup_{i=n+1}^{\infty} A_i)$. Or la suite des $\left(\cup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right)$ tend en décroissant vers $\emptyset$. Donc $\lim_n \mu(\cup_{i=n+1}^{\infty} A_i) = 0$. Donc $\mu(\cup_i A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

Exercice 3.3

Soit X un ensemble non-dénombrable et $\mathcal{A}$ la tribu des ensembles $A \in \mathcal{P}(X)$ tels que A ou A^c est dénombrable. On définit $\mu(A) = 0$ si A dénombrable et $\mu(A) = 1$ sinon. Montrer que μ est une mesure.

Solution : $\emptyset \subset \mathbb{N}$ donc dénombrable, et $\mu(\emptyset) = 0$.
Soit (A_i) une suite d'éléments disjoints de $\mathcal{A}$. Si tous les A_i sont dénombrables, il en est de même de $\cup_i A_i$ et $\mu(\cup_i A_i) = 0 = \sum_i \mu(A_i)$.
Sinon, il existe exactement un A_i qui n'est pas dénombrable : si A et B disjoints sont non-dénombrables, $A \subset B^c$ donc A dénombrable, ce qui est absurde. Donc $\mu(\cup_i A_i) = 1 = \sum_i \mu(A_i)$.

Exercice 3.4

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $A, B \in \mathcal{A}$.
Montrer que $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cup B)$.

Solution : On a par additivité $\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus A \cap B) + \mu(B)$ et en ajoutant $\mu(A \cap B)$ des deux côtés on obtient $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Exercice 3.5

Combinaison linéaire positive de mesures est une mesure

Exercice 3.6

Mesure trace

Exercice 3.7

(★) **Une variante du théorème de Vitali–Hahn–Saks**
Soit $\mu_1, \mu_2, \ldots,$ une suite de mesures sur $(X, \mathcal{A})$ telles que $\forall A \in \mathcal{A}, \mu_n(A)$ converge en croissant vers une valeur qu'on note $\mu(A)$. μ est-elle une mesure ? Qu'en est-il si $\forall A \in \mathcal{A}, \mu_n(A)$ converge en décroissant avec $\mu_1(X) < \infty$?

Solution : Oui dans les deux cas. Dans les deux cas,
• μ est finiment additive : si A et B éléments disjoints de $\mathcal{A}$, $\mu(A \cup B) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A \cup B) = \lim_{n\to\infty}(\mu_n(A) + \mu_n(B)) = \mu(A) + \mu(B)$
• μ est croissante : si $A \subset B$ sont des éléments de $\mathcal{A}$, comme $B = A \sqcup B \setminus A$, $\mu(B) = \lim_n \mu_n(B) = \lim_n \mu_n(A \sqcup B \setminus A) = \lim_n(\mu_n(A) + \mu_n(B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$.

Soit (A_i) une suite d'éléments disjoints de $\mathcal{A}$.
Dans le cas croissant, on a pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \mu(\cup_{i=1}^{n} A_i) \leq \mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i)$.
Donc $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \leq \mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i)$.
Dans l'autre direction, pour tout $\epsilon > 0$, on dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \implies \mu_n(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \geq \mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) - \epsilon \implies \sum_{i=1}^{\infty} \mu_n(A_i) \geq \mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) - \epsilon$$

Par croissance des μ_i on a $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_n(A_i) \geq \mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) - \epsilon$.
Donc pour tout $\epsilon > 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \geq \mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) - \epsilon$, d'où l'inégalité voulue.

Dans le cas décroissant, on a encore $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \leq \mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i)$.
Pour $n, N \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \mu_n(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_n(A_i) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \mu_n(A_i) + \sum_{i=N+1}^{\infty} \mu_n(A_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \mu_n(A_i) + \sum_{i=N+1}^{\infty} \mu_1(A_i)
\end{aligned}$$

En passant à la limite sur n dans l'inégalité on obtient

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{N} \mu(A_i) + \sum_{i=N+1}^{\infty} \mu_1(A_i)$$

Comme $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_1(A_i) = \mu_1(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) < \infty$, $\lim_{N\to\infty} \sum_{i=N+1}^{\infty} \mu_1(A_i) = 0$
En passant à la limite sur N, on obtient

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Exercice 3.8

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $\mathcal{N}$ l'ensemble des négligeables pour μ et $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N})$. Montrer que $\mathcal{B} = \{A \cup N | A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}\}$.
Pour $B = A \cup N$, on définit $\overline{\mu}(B) = \mu(A)$. Montrer que $\overline{\mu}$ est bien définie, que c'est une mesure sur $\mathcal{B}$, que $(X, \mathcal{B}, \overline{\mu})$ est complet, que c'est la complétion minimale de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et que $\overline{\mu}$ est l'unique prolongement de μ à $\mathcal{B}$.

Solution : Posons $\mathcal{C} = \{A \cup N | A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}\}$. Montrons $\mathcal{B} = \mathcal{C}$.
$\boxed{\subset}$ Il suffit de prouver que $\mathcal{C}$ est une tribu contenant $\mathcal{A} \cup \mathcal{N}$.
• $\mathcal{A} \cup \mathcal{N} \subset C$ OK.
• $X = X \cup \emptyset \in C$.
• Soit $B \in \mathcal{C}$, $B = A \cup N$ avec $N \subset C$ où $A, C \in \mathcal{A}$, $N \in \mathcal{N}$ et $\mu(C) = 0$.
On a $B^c = A^c \cap N^c = A^c \cap ((C \setminus N) \cup C^c) = \underbrace{(A^c \cap C^c)}_{\in \mathcal{A}} \cup \underbrace{(A^c \cap (C \setminus N))}_{\subset C}$

• Pour $B_i \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$, $B_i = A_i \cup N_i$ avec $N_i \subset C_i$ et $\mu(C_i) = 0$,
$\cup_i B_i = (\cup_i A_i) \cup (\cup_i N_i)$ avec $\cup_i N_i \subset \cup_i C_i$ et $\mu(\cup_i C_i) \leq \sum_i \mu(C_i) = 0$.
$\boxed{\supset}$ $\mathcal{C}$ contient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{N}$ donc $\forall A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}, A \cup N \in \mathcal{C}$.

Soit $B \in \mathcal{B}$, $B = A \cup N = A' \cup N'$ où $A, A' \in \mathcal{A}$, $N, N' \in \mathcal{N}$. Montrons que $\mu(A) = \mu(A')$.
On dispose de $C, C' \in \mathcal{A}$ de mesure nulle avec $N \subset C$ et $N' \subset C'$. Comme $A \subset A \cup N = A' \cup N' \subset A' \cup C'$ et $\mu(A' \cup C') \leq \mu(A') + \mu(C') = \mu(A')$, on a $\mu(A) \leq \mu(A')$. Par symétrie, $\mu(A') \leq \mu(A)$. Donc $\overline{\mu}$ est bien définie.

On vérifie sans peine que $\overline{\mu}$ est une mesure sur $\mathcal{B}$.
Montrons que $(X, \mathcal{B}, \overline{\mu})$ est complet. Soit D un négligeable de $(X, \mathcal{B}, \overline{\mu})$. On dispose de $A, C \in \mathcal{A}$ et $N \in \mathcal{N}$ tel que $D \subset A \cup N$, $N \subset C$ et $\mu(A) = \mu(C) = 0$. Alors $D \subset A \cup C$ qui est dans $\mathcal{A}$ et de mesure nulle. Donc $D \in \mathcal{N}$. D'où $D \in \mathcal{B}$.

Montrons que $(X, \mathcal{B}, \overline{\mu})$ est la complétion minimale de $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Clairement

$\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ et $\overline{\mu}$ prolonge μ. Si $(X, \mathcal{B}', \overline{\mu}')$ est une complétion de $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\mathcal{B}'$ est une tribu qui contient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{N}$, donc $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N}) \subset \mathcal{B}'$.

Montrons que $\overline{\mu}$ est l'unique prolongement de μ à $\mathcal{B}$. Soit ν une mesure sur $(X, \mathcal{B})$ qui coincide avec μ sur $\mathcal{A}$. Soit $B \in \mathcal{B}$, $B = A \cup N$ avec $N \subset C$. On a $\nu(A \cup N) = \nu(A) + \nu(N \setminus A)$ et $\nu(N \setminus A) \leq \nu(C) = 0$, donc

$$\nu(B) = \nu(A) = \mu(A) = \overline{\mu}(A) = \overline{\mu}(B)$$

Exercice 3.9

Sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ on considère deux mesures m et n telles que $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b \implies m((a, b)) = n((a, b))$. Montrer que $m = n$.

Solution : C'est une conséquence immédiate du lemme d'égalité des mesures démontré dans l'exercice 3.11.

Exercice 3.10

Soit $(X, \mathcal{A})$ mesurable et $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$. Soient m et n deux mesures σ-finies sur $(X, \mathcal{A})$ qui coincident sur $\mathcal{C}$. Les mesures coincident-elles sur $\sigma(\mathcal{C})$? Qu'en est-il si m et n sont finies ?

Solution : Non dans les deux cas. $X = \{1, 2\}$, $\mathcal{C} = \{\{1\}\}$ et m, n définies sur $\sigma(\mathcal{C})$ par $m(\{1\}) = m(\{2\}) = n(\{1\}) = 1$ and $n(\{2\}) = 2$

Exercice 3.11

Lemme d'égalité des mesures Soit $(X, \mathcal{A})$ espace mesurable, $\mathcal{C}$ un π-système, μ et ν deux mesures qui coincident sur $\mathcal{C}$ et telles que $\mu(X) = \nu(X)$. On suppose qu'il existe $(E_i) \in \mathcal{C}$ tel que $X = \cup_i E_i$ et $\forall i, \mu(E_i) < \infty$. Montrer que $\mu = \nu$ sur $\sigma(C)$.

Solution : On suppose dans un premier temps que μ est finie.
Soit $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{A} | \mu(A) = \nu(A)\}$. Il s'agit de montrer que $\mathcal{B}$ est un λ-système. On aura alors $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}$ d'après le théorème π-λ.
• $X \in \mathcal{B}$ par hypothèse.
• Soit $A, B \in \mathcal{B}$ avec $A \subset B$. Comme μ est finie, on peut écrire $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B) = \nu(A) - \nu(B) = \nu(A \setminus B)$.
• Soit $(A_i) \in \mathcal{B}$ une suite croissante. On a $\mu(\cup_i A_i) = \lim_i \mu(A_i) = \lim_i \nu(A_i) = \nu(\cup_i A_i)$.

Dans le cas général, on peut supposer sans perte de généralité que les E_i sont croissants.
On a pour $A \in \sigma(\mathcal{C})$, $\mu(A) = \mu(\cup_i (A \cap E_i)) = \lim_i \mu(A \cap E_i)$.
Par ailleurs, pour $i \in \mathbb{N}$, $\mu_i : A \mapsto \mu(A \cap E_i)$ est une mesure finie qui coincide avec $\nu_i : A \mapsto \nu(A \cap E_i)$ sur $\mathcal{C}$ (car $E_i \in \mathcal{C}$). D'après le point précédent, μ_i et ν_i coincident sur $\sigma(\mathcal{C})$.
Donc $\mu(A) = \lim_i \mu(A \cap E_i) = \lim_i \mu_i(A) = \lim_i \nu_i(A) = \nu(A)$.

4. Construction de mesures

Exercice 4.1

Soit μ une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ finie sur tout compact de $\mathbb{R}$. On définit $\alpha(x) = \mu((0,x])$ si $x \geq 0$ et $\alpha(x) = -\mu((x,0])$ si $x < 0$. Montrer que μ est la mesure de Lebesgue-Stieltjes correspondant à α.

Solution : Soit ν la mesure de L-S associée à α.
• Par disjonction de cas et en utilisant le fait qu'une mesure extérieure μ^* coincide avec l sur $\mathcal{C}$, on montre que μ et ν coincident sur les $(a,b]$ (qui forment un π-système).
• De plus, comme $\mathbb{R} = \cup_n(-n,n]$, on a $\nu(\mathbb{R}) \leq \sum_i(\alpha(i)-\alpha(-i)) = \sum_i \mu((-i,i]) \leq \mu(\mathbb{R})$.
• Soit $A_i = (a_i, b_i]$ tel que $\cup_i A_i = \mathbb{R}$. On montre par disjonction de cas que $\alpha(b_i) - \alpha(a_i) = \mu((a_i,b_i])$. D'où $\sum_i(\alpha(b_i) - \alpha(a_i)) = \sum_i \mu((a_i,b_i]) \geq \mu(\cup_i(a_i,b_i]) = \mu(\mathbb{R})$. En passant à l'inf, on a $\nu(\mathbb{R}) \geq \mu(\mathbb{R})$.
Donc $\nu(\mathbb{R}) = \mu(\mathbb{R})$
• D'autre part, $\mathbb{R} = \cup_n(-n,n]$ avec $\mu((-n,n]) < \infty$.

Toutes les conditions sont réunies pour utiliser le lemme d'égalité des mesures : on a $\mu = \nu$ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exercice 4.2

Soit m la mesure de Lebesgue et A un Lebesgue mesurable tel que $m(A) < \infty$. Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe F fermé et G ouvert tels que $F \subset A \subset G$ et $m(G \setminus F) < \epsilon$.

Solution : On dispose de $A_i = (a_i, b_i]$ tels que $A \subset \cup_i A_i$ et $\sum_i(b_i - a_i) \leq m(A) + \epsilon/2$. Posons $b'_i = b_i + \epsilon 2^{-i-1}$. $G := \cup_i(a_i, b'_i)$ est un ouvert qui contient A et $m(G) \leq \sum_i(b'_i - a_i) = \epsilon/2 + \sum_i(b_i - a_i) \leq m(A) + \epsilon$.
Comme $m(A) < \infty$, $m(G \setminus A) = m(G) - m(A) \leq \epsilon$.

Comme $m(A) < \infty$, à défaut d'être borné, A est approchable à ϵ près par un borné. En effet, $m(A) = m(\cup_n(A \cap [-n,n])) = \lim_n m(A \cap [-n,n])$. On dispose donc de N tel que $m(A \cap [-N,N]) \geq m(A) - \epsilon/2 \quad (\star)$
Posons $A' = A \cap [-N,N]$. Comme $[-N,N] \setminus A'$ est de mesure finie, d'après le point précédent, il existe G' ouvert tel que $[-N,N] \setminus A' \subset G'$ et $m(G' \setminus ([-N,N] \setminus A')) \leq \epsilon/2$.
Montrons que le fermé $[-N,N] \setminus G'$ convient.
On vérifie sans peine $[-N,N] \setminus G' \subset A'$. D'autre part,

$$\begin{aligned} m(A' \setminus ([-N,N] \setminus G')) &= m(A' \cap ([-N,N]^c \cup G')) \\ &= m(A' \cap G') \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\epsilon/2 \geq m(G' \setminus ([-N,N] \setminus A')) &= m((G' \cap [-N,N]^c) \cup (G' \cap A')) \\ &\geq m(G' \cap A')\end{aligned}$$

Donc $m(A' \setminus ([-N,N] \setminus G')) \leq \epsilon/2$. En posant $F = [-N,N] \setminus G'$ on a donc $m(A') - m(F) \leq \epsilon/2 \quad (\star\star)$

En combinant $(\star)$ et $(\star\star)$, on a

$$m(A \setminus F) = m(A) - m(F) \leq (m(A') - m(F)) + \epsilon/2 \leq \epsilon$$

Finalement, on a $F \subset A \subset G$ et $m(G \setminus F) = m(G \setminus A) + m(A \setminus F) \leq 2\epsilon$

> **Extension du résultat précédent** **sans l'hypothèse $\mathbf{m(A)} < \infty$**
> Soit m la mesure de Lebesgue et A un Lebesgue mesurable.
> Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe F fermé et G ouvert tels que $F \subset A \subset G$ et $m(G \setminus F) < \epsilon$.

Solution : Posons $A_n = E \cap [-n,n]$. Chaque A_n étant de mesure finie, on dispose, d'après ce qui précède de G_n ouvert tel que $A_n \subset G_n$ et $m(G_n \setminus A_n) \leq \epsilon/2^n$. Posons $G = \cup_n G_n$. Comme $E = \cup_n A_n$,

$$\begin{aligned} m(G \setminus E) &= m(\cup_n G_n \setminus (\cup_k A_k)) \\ &= m(\cup_n (G_n \cap \cap_k A_k^c)) \\ &\leq m(\cup_n (G_n \cap A_n^c)) \\ &\leq \sum_n m(G_n \setminus A_n) \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

G est donc un ouvert qui convient.

Comme A^c est Lebesgue-mesurable, il existe d'après ce qui précède un ouvert O tel que $A^c \subset O$ et $m(O \setminus A^c) \leq \epsilon$. Alors $O^c \subset A$ et $m(A \setminus O^c) = m(A \cap O) = m(O \setminus A^c) \leq \epsilon$.
En posant $F = O^c$, on a $F \subset A \subset G$ et $m(G \setminus F) \leq 2\epsilon$

Note : Dans le cas où $m(A) < \infty$, la preuve précédente montre qu'on peut choisir F fermé et borné, donc compact.

Exercice 4.3

Soit (X, A, μ) un espace mesuré. On définit, pour $A \subset X$,

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(B) | A \subset B, B \in \mathcal{A}\}$$

Montrer que μ^* est une mesure extérieure. Montrer que $\mathcal{A}$ est inclus dans les μ^*-mesurables et que μ^* coincide avec μ sur $\mathcal{A}$.

Solution : • $\emptyset \subset \emptyset \in \mathcal{A}$ donc $\mu^*(\emptyset) \leq \mu(\emptyset) = 0$

• Soit A, B avec $A \subset B$. Considérons $C \in \mathcal{A}$ tel que $B \subset C$. Alors $A \subset C$, donc $\mu^*(A) \leq \mu(C)$. En passant à l'inf on obtient $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

• Soit $\epsilon > 0$ et $(A_i) \subset X$. Pour chaque i, on dispose de $B_i \in \mathcal{A}$ tel que $A_i \subset B_i$ et $\mu(B_i) \leq \mu^*(A_i) + \epsilon/2^i$. Alors $\cup_i A_i \subset \cup_i B_i \in \mathcal{A}$, donc

$$\mu^*(\cup_i A_i) \leq \mu(\cup_i B_i) \leq \sum_i \mu(B_i) \leq \sum_i \mu^*(A_i) + \epsilon$$

Ceci étant vrai pour tout ϵ, on a le résultat.

Soit $A \in \mathcal{A}$. Montrons que A est μ^*-mesurable. Soit $E \subset X$. Il suffit de montrer $\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) \leq \mu^*(E)$.

Pour $\epsilon > 0$, on dispose de $B \in \mathcal{A}$ tel que $E \subset B$ et

$$\begin{aligned} \mu^*(E) + \epsilon &\geq \mu(B) \\ &= \mu(\underbrace{B \cap A}_{\supset E \cap A}) + \mu(\underbrace{B \cap A^c}_{\supset E \cap A^c}) \\ &\geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout ϵ, on a l'inégalité recherchée.

Soit $A \in \mathcal{A}$. Montrons $\mu^*(A) = \mu(A)$. Comme $A \subset A \in \mathcal{A}$, on a $\mu^*(A) \leq \mu(A)$. Par croissance de la mesure μ et passage à l'inf, on a l'inégalité inverse.

Exercice 4.4

Soit m la mesure de L-S associée à la fonction croissante continue à droite α. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m(\{x\}) = \alpha(x) - \alpha(x-)$.

Solution : On a

$$\begin{aligned} m(\{x\}) &= m(\cap_n (x - \frac{1}{n}, x]) \\ &= \lim_n m((x - \frac{1}{n}, x]) \quad \text{car } m((x-1, x])) = \alpha(x) - \alpha(x-1) < \infty \\ &= \lim_n \left(\alpha(x) - \alpha(x - \frac{1}{n}) \right) \quad \text{car } m \text{ coincide avec } l \text{ sur les (a,b]} \\ &= \alpha(x) - \alpha(x-) \end{aligned}$$

Exercice 4.5

> Soit m la mesure de Lebesgue, $c \in \mathbb{R}$ et A un Lebesgue-mesurable. Montrer que $m(A+c) = m(A)$ et $m(cA) = |c|m(A)$.

Solution : La démonstration ne pose pas de problème. Penser à étudier l'effet de $x \mapsto \frac{x}{c}$ sur $(a_i, b_i]$ selon le signe de c.

Exercice 4.6

> **Premier lemme de Borel-Cantelli**
> Soit m la mesure de Lebesgue. Soit A_n des Lebesgue-mesurables inclus dans $[0,1]$ et $B = \limsup A_n = \cap_n \cup_{k \geq n} A_k$.
> (1) Montrer que B est Lebesgue-mesurable.
> (2) Si $m(A_n) > \delta > 0$ pour tout n, montrer que $m(B) \geq \delta$.
> (3) Si $\sum_n m(A_n) < \infty$, montrer que $m(B) = 0$.
> (4) (Réciproque) Donner un exemple de A_n tels que $m(B) = 0$ mais $\sum_n m(A_n) = \infty$.

Solution : (1) B est intersection dénombrable de Lebesgue-mesurables.
(2) On note que $(\cup_{k\geq n} A_k)_n$ décroit et $\cup_{k\geq 1} A_k \subset [0,1]$ donc de mesure finie.
Donc $m(B) = m(\cap_n(\cup_{k\geq n} A_k)) = \lim_n m(\cup_{k\geq n} A_k) \geq \delta$.
(3) $m(B) = m(\cap_n(\cup_{k\geq n} A_k)) = \lim_n m(\cup_{k\geq n} A_k) \leq \lim_n \sum_{k\geq n} m(A_k) = 0$.
(4) $A_n = [0, \frac{1}{n}]$

Exercice 4.7

> Soit $0 < \epsilon < 1$ et m la mesure de Lebesgue. Exhiber un mesurable $E \subset [0,1]$ dont l'adhérence est $[0,1]$ et de mesure ϵ.

Solution : Montrons que $E = ([0,\epsilon] \cap \mathbb{Q}^c) \cup ([0,1] \cap \mathbb{Q})$ convient.

$$\begin{aligned} \text{On a } m(E) &= m([0,\epsilon] \cap \mathbb{Q}^c) + m([0,1] \cap \mathbb{Q}) \\ &= m([0,\epsilon]) - m([0,\epsilon] \cap \mathbb{Q}) + \underbrace{0}_{\text{car } [0,1] \cap \mathbb{Q} \text{ dénombrable}} \\ &= \epsilon - 0 \quad \text{pour la même raison} \end{aligned}$$

<u>Note</u> : On prend un intervalle de longueur ϵ et on ajoute des poussières denses de mesure nulle.

Exercice 4.8

> Si X est un métrique, $\mathcal{B}$ la tribu des boréliens et μ une mesure sur $(X, \mathcal{B})$, on définit le support de μ comme étant le plus petit fermé F tel que $\mu(F^c) = 0$. Montrer que si F est un fermé de $[0,1]$, il existe une mesure finie sur $[0,1]$ dont le support est F.

Solution : On distingue deux cas :
• F est fini, $F = \{a_1, \ldots, a_n\}$. On définit $\mu = \sum_{i=1}^n \delta_{a_i}$. On a bien $\mu(F^c) = 0$, et si $\mu(G^c) = 0$, alors pour tout i, $\delta_{a_i}(G^c) = 0$, donc $a_i \in G$ pour tout i et $F \subset G$.
• F est infini. F étant séparable, on dispose de $(a_i) \in F^{\mathbb{N}}$ une suite dense dans F. On définit

$$\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta_{a_i}}{2^i}$$

μ est finie, $\mu(F^c) = 0$ et si G est un fermé tel que $\mu(G^c) = 0$, alors $\{a_i | i \geq 1\} \subset G$ et en passant à l'adhérence on a $F \subset G$.

Exercice 4.9

$\square$

Exercice 4.10

> Soit $0 < \epsilon < 1$, m le mesure de Lebesgue et A un Lebesgue-mesurable. On suppose que pour tout intervalle I, on a $m(A \cap I) \leq (1-\epsilon)m(I)$. Montrer que $m(A) = 0$.

Solution : On suppose dans un premier temps $\underline{m(A) < \infty}$.
Soit $\epsilon' > 0$. D'après 4.2, on dispose d'un ouvert G tel que $A \subset G$ et $m(G \backslash A) \leq \epsilon'$.
On écrit $G = \cup_i (a_i, b_i)$. Alors

$$\begin{aligned} m(A) &= m(\cup_i (A \cap (a_i, b_i)) \\ &\leq \sum_i m(A \cap (a_i, b_i)) \\ &\leq (1-\epsilon) m(G) \\ &\leq (1-\epsilon)(m(A) + \epsilon') \end{aligned}$$

En faisant $\epsilon' \to 0$, on a $m(A) \leq (1-\epsilon)m(A)$, donc $m(A) = 0$.

Dans le cas général, on note que pour J un intervalle borné et I un intervalle quelconque, $m(A \cap J \cap I) \leq (1-\epsilon)m(J \cap I) \leq (1-\epsilon)m(I)$.
Le mesurable $A \cap J$ vérifie donc les conditions précédentes, d'où $m(A \cap J) = 0$.
Finalement, $m(A) = m(\cup_n (A \cap (-n, n)) \leq \sum_n m(A \cap (-n, n)) = \sum_n 0 = 0$

Note : • La contraposée est intéressante : si A est un Lebesgue-mesurable tel que $m(A) > 0$, alors pour tout $0 < \delta < 1$, il existe un intervalle I "de haute

densité dans A", au sens où $\delta < \frac{m(A\cap I)}{m(I)} \leq 1$.
• La preuve précédente montre qu'on peut en plus supposer I ouvert des deux côtés.

Exercice 4.11

> **Théorème de Steinhaus**
> Soit m la mesure de Lebesgue et A un Lebesgue-mesurable tel que $m(A) > 0$. On note $A - A = \{a - b, (a, b) \in A^2\}$.
> Alors 0 appartient à l'intérieur de $A - A$.

Solution : Comme $0 < m(A) = \lim_n m(A \cap (-n, n))$, on dispose de N tel que $m(A \cap (-N, N)) > 0$. Posons $B = A \cap (-N, N)$. Si on prouve que 0 est intérieur à $B - B$, l'inclusion $B - B \subset A - A$ permet de conclure que 0 est intérieur à A. Dans la suite, on pourra donc supposer sans perte de généralité que $m(A) < \infty$.

Supposons par l'absurde que 0 n'est pas dans l'intérieur de $A - A$. Alors on dispose de $(x_n) \in (A - A)^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to 0$.
Comme $m(A) > 0$, d'après 4.10, on dispose, pour $0 < \epsilon < 1$, d'un intervalle ouvert I tel que $m(I \cap A) > (1 - \epsilon)m(I)$, ce qui implique $m(I) < \infty$.
On note également que $A + x_n \subset A^c$ et

$$\begin{aligned} m(I \cap (A + x_n)) &= m((I - x_n) \cap A) \quad \text{invariance par translation} \\ &\geq m(I \cap (I - x_n) \cap A) \\ &= m(I \cap A) - m((I \setminus (I - x_n)) \cap A) \\ &\geq m(I \cap A) - m(I \setminus (I - x_n)) \\ &\geq (1 - \epsilon)m(I) - m(I \setminus (I - x_n)) \end{aligned}$$

Pour n suffisamment grand, $m(I \setminus (I - x_n)) = |x_n|$. Soit N tel que $|x_N| \leq m(I)\epsilon$. Comme A et $A + x_N$ sont disjoints, on obtient en sommant $m(I) > (2 - 3\epsilon)m(I)$. Ceci est absurde dès que $\epsilon < \frac{1}{3}$.

Exercice 4.12

Soit m la mesure de Lebesgue. Construire une borélien A tel que $0 < m(A \cap I) < m(I)$ pour tout intervalle ouvert I non réduit à un point.

Solution : Démontrons d'abord le lemme suivant :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Alors pour tout $0 < \delta < m(I)$, I contient un fermé d'intérieur vide de mesure δ.

On s'inspire de la construction de l'ensemble de Cantor.
Etant donné un segment J et $0 < \alpha < 1$, on dit qu'on enlève le α-milieu de J lorsqu'on considère $J \setminus (m - \frac{\alpha \ell(J)}{2}, m + \frac{\alpha \ell(J)}{2})$ où m dénote le milieu de J.
Soit $0 < \delta < m(I)$.
Soit $0 < \epsilon < \frac{m(I)}{\delta} - 1$, de sorte que $\delta(1+\epsilon) < m(I)$. En partant d'un segment $K_0 \subset I$ de mesure $\delta(1+\epsilon)$, et d'une suite $(\alpha_i)_{i \geq 1}$ de réels de $(0,1)$, on obtient un compact K_1 en enlevant le α_1-milieu de K_0, puis K_2 en enlevant les α_2-milieux des deux segments composant K_1 et ainsi de suite. Soit $K = \cap_n K_n$. On remarque que $m(K_n) = (1-\alpha_n) m(K_{n-1})$, donc $m(K_n) = m(K_0) \prod_{k=1}^{n} (1-\alpha_k)$.
(K_n) étant décroissante,

$$m(K) = \lim_n \left(m(K_0) \prod_{k=1}^{n} (1-\alpha_k)\right) = \delta(1+\epsilon) \lim_n \left(\prod_{k=1}^{n} (1-\alpha_k)\right)$$

Considérons une suite $(a_n)_{n \geq 1}$ de réels > 0 telle que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\ln\left(\frac{1}{1+\epsilon}\right)$. Posons $\alpha_n = 1 - \exp(-a_n)$. Alors $\sum_{n \geq 1} \ln(1-\alpha_n)$ converge vers $\frac{1}{1+\epsilon}$. Avec cette suite (α_n),

$$m(K) = \delta(1+\epsilon) \cdot \frac{1}{1+\epsilon} = \delta$$

K est clairement fermé borné. On montre facilement par récurrence que K_n est union disjointe de 2^n segments de même longueur. La longueur de chaque segment de K_n est donc majorée par $\frac{m(K_0)}{2^n}$. Ceci prouve en particulier que K est d'intérieur vide.

Soit $(I_i)_{i \geq 1}$ une énumération des intervalles ouverts à extrémités rationnelles. Le lemme précédent permet de construire $M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots$ des fermés, d'intérieur vide, de mesure > 0 et deux à deux disjoints tels que $M_k, N_k \subset I_k$.
Montrons que $M := \cup_k M_k$ est un borélien qui convient.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. On dispose de k tel que $I_k \subset I$.

$$\begin{aligned}0 < m(M_k) = m(M_k \cap I_k) &\leq m(M \cap I_k) \\ &\leq m(M \cap I) \\ &< m(M \cap I) + M(N_k) \\ &= m((M \cap I) \cup N_k) \quad \text{car disjoints} \\ &\leq m(I) \quad \text{car inclus dans I}\end{aligned}$$

Conclusion : $0 < m(M \cap I) < m(I)$.

Exercice 4.13

Soit N l'ensemble non-mesurable de Vitali. Montrer que si $A \subset N$ est un Lebesgue-mesurable, alors $m(A) = 0$

Solution : Rappelons que N contient pour chaque classe d'équivalence un unique représentant. Les éléments de A sont donc les représentants de classes d'équivalence disjointes. Par conséquent, les $A + q$ sont disjoints lorsque $q \in \mathbb{Q}$. D'autre part, on a encore $\cup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]}(A+q) \subset [-1, 2]$. Les $A+q$ étant disjoints et mesurables (non-trivial) et l'invariance par translation de la mesure extérieure (vraie sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$) impliquent $3 \geq \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} m(A + q) = \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} m(A)$, donc $m(A) = 0$.

Exercice 4.14

Soit m la mesure de Lebesgue. Montrer que si A est un Lebesgue-mesurable de mesure > 0, il existe une partie de A qui n'est pas mesurable.

Solution : Comme $m(A) = \lim_n m(A \cap [-n, n])$, on dispose de N tel que $m(A \cap [-N, N]) > 0$. Soit $A' = A \cap [-N, N]$. Sur A' on considère la relation d'équivalence $xRy \iff x - y \in \mathbb{Q}$. Soit B un ensemble qui contient, pour chaque classe γ un unique élément de γ. Supposons B mesurable. On remarque que $A' \subset \cup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-2N,2N]}(B + q)$. Les $B + q$ étant mesurables et disjoints, on obtient $0 < m(A') \leq \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[-2N,2N]} m(B + q) = \sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[-2N,2N]} m(B)$, donc $m(B) > 0$.
D'autre part, $\cup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-2N,2N]}(B+q) \subset [-3N, 3N]$, donc $\sum_{q\in\mathbb{Q}\cap[-2N,2N]} m(B) \leq 6N$, d'où $m(B) = 0$.
Absurde.

Exercice 4.15

Soit X un ensemble, $\mathcal{A}$ une algèbre sur X et ℓ une prémesure telle que $\ell(X) < \infty$. soit μ^* la mesure extérieure associée à $(\mathcal{A}, \ell)$. Montrer qu'une partie A est mesurable si et seulement si $\mu^*(A) + \mu^*(A^c) = \ell(X)$

Solution :

$\boxed{\Rightarrow}$ Définition de μ^*-mesurable et concordance de μ^* avec ℓ (propriété spécifique aux algèbres).

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit A tel que $\mu^*(A) + \mu^*(A^c) = \ell(X)$.

Soit $E \subset X$. On suppose dans un premier temps E μ^*-mesurable. Il suffit de montrer que $\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) \leq \mu^*(E)$.

Comme E est mesurable,
$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$
$$\mu^*(A^c) = \mu^*(A^c \cap E) + \mu^*(A^c \cap E^c)$$

et en sommant
$$\begin{aligned}\ell(X) = \mu^*(A) + \mu^*(A^c) &= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) + \mu^*(A^c \cap E^c)\\ &\geq \mu^*(E) + \mu^*(E^c) \quad \sigma\text{-sous-additivité de } \mu^*\\ &\geq \mu^*(X) \quad \sigma\text{-sous-additivité de } \mu^*\\ &= \ell(X) \quad \mu^* \text{ et } \ell \text{ coincident sur } \mathcal{A}\end{aligned}$$

Les inégalités sont donc des égalités, donc $\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) = \mu^*(E)$.

Revenons au cas général : soit $E \subset X$. Soit $\epsilon > 0$. On dispose de (B_i) une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $E \subset \cup_i B_i$ et $\sum_i \ell(B_i) \leq \mu^*(E) + \epsilon$.

Les B_i étant dans $\mathcal{A}$, ils sont μ^*-mesurables (résultat prouvé dans le cours et spécifique aux algèbres), donc $\cup_i B_i$ est μ^*-mesurable, avec
$$\mu^*(\cup_i B_i) \leq \sum_i \mu^*(B_i) = \sum_i \ell(B_i) \leq \mu^*(E) + \epsilon$$

On a

$$\begin{aligned}\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) &\leq \mu^*(A \cap (\cup_i B_i)) + \mu^*(A^c \cap (\cup_i B_i))\\ &= \mu^*(\cup_i B_i) \quad \text{car } \cup_i B_i \text{ mesurable}\\ &\leq \mu^*(E) + \epsilon\end{aligned}$$

Ceci est vrai pour tout ϵ et on a l'inégalité recherchée.

Exercice 4.16

(1) Donner un exemple de mesure extérieure finie sur X qui n'est pas continue par union croissante et intersection décroissante.
(2) Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec μ finie. Soit μ^* la mesure extérieure définie en 4.3. Montrer que μ^* est continue par union croissante.

Solution : (1) Sur $X = \mathbb{R}$, on définit $\mu^*(A) = 0$ si A est dénombrable, $\mu^*(A) = 1$ si A et A^c ne sont pas dénombrables et $\mu^*(A) = 2$ si A n'est pas dénombrable et A^c est dénombrable.
On considère la suite croissante $A_n = [-n, n]$ et la suite décroissante $B_n = (n, \infty)$.
(2) Soit A_n une suite croissante. Montrons que $\mu^*(\cup_k A_k) = \lim_n \mu^*(A_n)$.
$\boxed{\geq}$ Pour tout n, $A_n \subset \cup_k A_k$, donc $\mu^*(A_n) \leq \mu^*(\cup_k A_k)$ et $\lim_n \mu^*(A_n) \leq \mu^*(\cup_k A_k)$.
$\boxed{\leq}$ Pour tout n, on dispose de $B_n \in \mathcal{A}$ tel que $A_n \subset B_n$ et $\mu^*(A_n) + \epsilon/2^n \geq \mu(B_n)$. Considérons $C_n = \cap_{i=n}^{\infty} B_i$. La croissance des A_i et la définition de B_i impliquent $A_n \subset C_n \subset B_n$, avec d'autre part (C_n) croissante et dans $\mathcal{A}$.
L'exercice 4.3 montre que μ^* et μ coincident sur $\mathcal{A}$. D'où

$$\mu^*(A_n) \leq \mu^*(C_n) = \mu(C_n) \leq \mu(B_n) \leq \mu^*(A_n) + \epsilon/2^n$$

Donc $(\mu(C_n))$ converge vers la même limite que $\mu^*(A_n)$.
D'autre part $\cup_n A_n \subset \cup_n C_n$ et la continuité croissante de μ donne

$$\mu^*(\cup_n A_n) \leq \mu^*(\cup_n C_n) = \mu(\cup_n C_n) = \lim_n \mu(C_n) = \lim_n \mu^*(A_n)$$

Exercice 4.17

Soit A un Lebesgue-mesurable et $B = \cup_{x \in A}[x-1, x+1]$.
Montrer que B est un Lebesgue-mesurable.

Solution : Il suffit de remarquer

$$\begin{aligned} B &= (\cup_{x \in A}(x-1, x+1)) \cup (\cup_{x \in A}\{x-1\}) \cup (\cup_{x \in A}\{x+1\}) \\ &= \underbrace{(\cup_{x \in A}(x-1, x+1))}_{\text{ouvert de } \mathbb{R}} \cup \quad A-1 \quad \cup \quad A+1 \end{aligned}$$

B est l'union de trois Lebesgue-mesurables, donc Lebesgue-mesurable.

Exercice 4.18

Soit m la mesure de Lebesgue et A un Lebesgue-mesurable de mesure nulle. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $A \cap (c + \mathbb{Q}) = \emptyset$.

Solution : On a $m(A - \mathbb{Q}) = 0$. En effet,

$$m(A - \mathbb{Q}) = m(\cup_{q \in \mathbb{Q}}(A - q)) \leq \sum_{q \in \mathbb{Q}} m(A - q) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} m(A) = 0$$

Alors n'importe quel $c \notin A - \mathbb{Q}$ convient.