Théorème de convergence dominée :

Soient $f_n : (X, \mathcal{A}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une suite de fonctions intégrables,
$f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$une fonction mesurable,
$g : (X, \mathcal{A}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$une fonction intégrable positive
telles que :

– $f_n \to f$ presque partout,
– $\forall n \geq 1, |f_n| \leq g$

Alors :

– f est intégrable
– $\displaystyle\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu$

Preuve : Soit $E = \{x \in X, f_n(x) \to f(x)\}$, de sorte que $\mu(E^c) = 0$.
On définit

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $a \in \mathbb{R}$, si $a \geq 0$,

$$\{\widetilde{f} > a\} = \{f > a\} \in \mathcal{A}$$

Si $a < 0$,

$$\begin{aligned} \{\widetilde{f} > a\} &= \{x \in E, \widetilde{f}(x) > a\} \cup \{x \in E^c, \widetilde{f}(x) > a\} \\ &= \{x \in E, f(x) > a\} \cup \{x \in E^c, 0 > a\} \\ &= \{f > a\} \cup E^c \end{aligned}$$

On sait (cf exos) que $E \in \mathcal{A}$, donc $E^c \in \mathcal{A}$. Donc $\{\widetilde{f}(x) > a\} \in \mathcal{A}$.

On définit également

$$\widetilde{f_n}(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\widetilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

De même $\widetilde{g}$ et les $\widetilde{f_n}$ sont mesurables, avec
• $\int |\widetilde{g}| d\mu = \int_E |\widetilde{g}| d\mu + \int_{E^c} |\widetilde{g}| d\mu = \int_E |\widetilde{g}| d\mu = \int_E |g| d\mu < \infty$ donc $\widetilde{g}$ intégrable.
• $\forall n \geq 1, |\widetilde{f_n}| \leq \widetilde{g}$ donc les $\widetilde{f_n}$ intégrables.
De $|\widetilde{f_n}| \leq \widetilde{g}$ on tire $|\widetilde{f}| \leq |\widetilde{g}|$ et $\widetilde{f}$ intégrable, ainsi que $g + \widetilde{f_n} \geq |\widetilde{f_n}| + \widetilde{f_n} \geq 0$.

Le lemme de Fatou donne alors

$$\begin{aligned}
\int |\widetilde{f}| d\mu + \int |\widetilde{g}| d\mu &= \int |\widetilde{f}| + |\widetilde{g}| d\mu \\
&= \int \liminf \left(|\widetilde{f_n}| \right) + \liminf |\widetilde{g}| d\mu \\
&\leq \int \liminf \left(|\widetilde{f_n}| + |\widetilde{g}| \right) d\mu \quad \text{intégration d'une inégalité entre fonctions positives} \\
&\leq \liminf \left(\int |\widetilde{f_n}| + |\widetilde{g}| d\mu \right) \quad \text{Fatou} \\
&= \liminf \left(\int |\widetilde{f_n}| d\mu + \int |\widetilde{g}| d\mu \right) \\
&\leq \int |\widetilde{g}| d\mu + \liminf \left(\int |\widetilde{f_n}| d\mu \right)
\end{aligned}$$

Donc

$$\int |\widetilde{f}| d\mu \leq \liminf \left(\int |\widetilde{f_n}| d\mu \right)$$

On a de même $g - \widetilde{f_n} \geq |\widetilde{f_n}| - \widetilde{f_n} \geq 0$, donc

$$\begin{aligned}
0 \leq \int |\widetilde{g}| d\mu - \int |\widetilde{f}| d\mu &= \int |\widetilde{g}| - |\widetilde{f}| d\mu \\
&= \int \liminf |\widetilde{g}| + \liminf \left(-|\widetilde{f_n}| \right) d\mu \\
&\leq \int \liminf \left(|\widetilde{g}| - |\widetilde{f_n}| \right) d\mu \quad \text{intégration d'une inégalité entre fonctions positives} \\
&\leq \liminf \left(\int |\widetilde{g}| - |\widetilde{f_n}| d\mu \right) \\
&= \liminf \left(\int |\widetilde{g}| d\mu - \int |\widetilde{f_n}| d\mu \right) \\
&\leq \int |\widetilde{g}| d\mu + \liminf \left(\int |\widetilde{f_n}| d\mu \right)
\end{aligned}$$