

VALEUR ABSOLUE

Gabriel ROMON

Version du 2020-07-11 à 14:10:04

Définition

La valeur absolue est une **fonction** définie sur \mathbb{R} par

$$\text{abs} : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Au lieu d'écrire $\text{abs}(x)$, on écrit habituellement $|x|$.

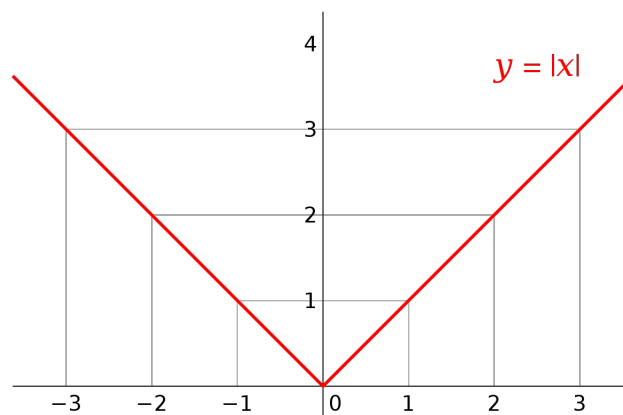


Figure 1: Graphe de la fonction abs

Propriétés

Montrer les propriétés suivantes

1. La fonction abs est paire, i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|-x| = |x|$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $||x|| = |x|$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-|x| \leq x \leq |x|$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$.
5. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| = |x| \cdot |y|$.
6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, $|x| \leq a$ si et seulement si $-a \leq x \leq a$.
7. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x + y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire).
8. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $||x| - |y|| \leq |x - y|$ (inégalité triangulaire renversée).

Exercices

Exercice 1

Tracer le graphe des fonctions suivantes

1. $x \mapsto |x - 1|$
2. $x \mapsto |x - 1| + |2x - 5|$
3. $x \mapsto |x + 4| + |3x - 1| + |x - 5|$
4. $x \mapsto |x^2 - x - 6|$

Exercice 2

Résoudre l'inéquation $|x + 2| < |x - 4|$ sur \mathbb{R} de deux manières:

1. en passant au carré (justifier pourquoi c'est licite)
2. en faisant une disjonction de cas

Exercice 3

Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$

Exercice 4

Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$

Exercice 5

Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$ et $\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}$