Valeur absolue

Gabriel ROMON

Version du 16 juillet 2020 à 21 h 43

Définition

La valeur absolue est une **fonction** définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\text{abs} : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Au lieu d'écrire $\text{abs}(x)$, on écrit habituellement $|x|$.

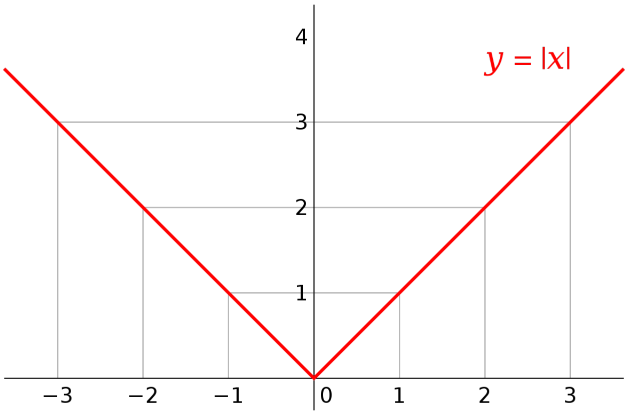

Figure 1 – Graphe de la fonction abs

Propriétés

Montrer les propriétés suivantes

1. La fonction abs est paire, i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|-x| = |x|$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $||x|| = |x|$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-|x| \leq x \leq |x|$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$.
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x|^2 = x^2$.
6. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| = |x| \cdot |y|$.
7. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, $|x| \leq a$ si et seulement si $-a \leq x \leq a$.
8. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x + y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire).
9. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $||x| - |y|| \leq |x - y|$ (inégalité triangulaire renversée).

Exercices

Exercice 1

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $|x| = x$
2. $|x-4| = 3/2$
3. $|x+5| = 3$
4. $|x-9| = 3-\pi$
5. $|2x+1| = 5$
6. $|3-x^2| = 0$
7. $|4-2x| = -8$
8. $|x^2-4| = 4-x^2$
9. $|2x+1| = |x-5|$
10. $|x^2+2| = |x^2+4x|$
11. $|2-3x^2+x| = |x^2-1|$

Exercice 2

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $|x+3| < 5$
2. $|10-2x| \geqslant 3$
3. $|3x-8| \geqslant 4$

Exercice 3

Résoudre l'inéquation $|x+2| < |x-4|$ sur $\mathbb{R}$ de deux manières :

1. en passant au carré (justifier pourquoi c'est licite)
2. en faisant une disjonction de cas

Exercice 4

Démontrer les assertions suivantes :

1. Pour tous réels a et b, on a : $\sqrt{a^2+b^2} \leqslant |a|+|b|$
2. Pour tout réel x, on a : $\sqrt{x^2+2x+1} + \sqrt{x^2-2x+1} \geq 2|x|$

Exercice 5

Tracer le graphe des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto |x-1|$
2. $x \mapsto |x-1| + |2x-5|$
3. $x \mapsto |x+4| + |3x-1| + |x-5|$
4. $x \mapsto |x^2 - x - 6|$

Exercice 6

Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$

Exercice 7

Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x| + |y| \leq |x+y| + |x-y|$

Exercice 8

Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\max(x, y) = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$ et $\min(x, y) = \dfrac{x+y-|x-y|}{2}$

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

1. Montrer que sur $[-3, 1]$, $|f(x)|$ admet un maximum que l'on déterminera
2. Résoudre sur $\mathbb{R}, |f(x)| > 3$

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \Big||2x^2 + x - 3| - (2x^2 + x + 1)\Big|$

1. Montrer que pour tout x, on a : $0 \leqslant f(x) \leqslant 4$
2. Déterminer l'ensemble des réels pour lesquels $f(x) = 4$
3. En déduire que f a un maximum que l'on précisera et indiquer l'ensemble des réels pour lesquels ce maximum est atteint.
4. Résoudre $f(x) = 0$

Exercice 11

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x+1| - |-x+2| + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$.
Discuter suivant les valeurs de m du nombre de solutions de l'équation de $f(x) = m$.

Exercice 12

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\frac{3}{x^2} - \frac{1}{|x|} - 2 = 0$
2. $\frac{3}{x^2} - \frac{1}{|x|} - 2 \leq 0$