Modélisation et Pricing de produits structurés

Avec applications en Python

LAURENT DAVOUST

2023-2024

PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Organisation et évaluation

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Objectifs

- **Notions financières**
  - Produits dérivés
  - Produits structurés
  - Pricing et modèles de valorisation

- **Manipulation de Python**
  - Mise en application avec des scripts (Pandas, Numpy, Scipy, matplotlib)

Evaluation

- **Projet en Python**
  - Code en Python
  - Analyse des résultats et synthèse

- **Sujets probables**
  - Elaboration d'un outil de pricing et d'attribution de performance

- **Travail en groupe**
  - Entre 3 et 4 étudiants

Séances

- **5 séances de cours, le jeudi de 13h45 à 17h00**

Date	Salle	Type
Jeudi 7 mars	Abis	Cours
Jeudi 14 mars	C	Cours
Jeudi 21 mars	C	Cours
Jeudi 28 mars	C	Cours
Jeudi 4 avril	C	Cours
Jeudi 18 avril		**Rendu des projets**

PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Quelques références

- **Produits dérivés**
  - **Options, futures et autres actifs dérivés 11e édition**, John HULL
  - **Exotic Options and Hybrids: A Guide to Structuring, Pricing and Trading**, Mohamed BOUZOUBAA
  - **Stochastic Volatility Modeling**, Lorenzo BERGOMI
  - **Finance de marché**, Roland PORTRAIT et Patrice PONCET

- **Mathématiques Financières**
  - **Interest Rate Models – Theory and Practice,** Damiamo BRIGO et Fabio MERCURIO

Quelques références (2)

- **Gestion d'actifs et gestion du risque de marché**
  - **Financial Risk Manager Handbook,** Philippe JORION
  - **Financial Risk Management,** GARP
  - **Portfolio Construction and Analytics,** Frank J. FABOZZI
  - **Practical Portfolio Performance Measurement,** Carl R. BACON
  - **Asset and Risk Management,** Louis ESCH, Robert KIEFFER and Thierry LOPEZ

- **Python et Finance**
  - **Python for Finance: Mastering Data-Driven Finance**, Yves HILPISCH

Votre intervenant

- **Laurent DAVOUST, FRM**
  - **Diplôme:**
    - GARP– Financial Risk Manager (FRM ®)– 2023
    - Master Université Paris Dauphine – Ingénierie Economique et Financière – 2015
  - **Expériences professionnelles:**
    - EDF – Risk Manager – 2014/2015
    - APTimum – Consultant Risque de Marché – 2015/2018
    - Société Générale – Ingénieur Modélisateur Marché & IT Data Manager – 2018/2023
    - Phit Formation – Fondateur – 2023/aujourd'hui
    - Université Paris-Dauphine – Intervenant – 2020/aujourd'hui
  - **Compétences clefs:**
    - Développement informatique: Python, C#, VBA, PHP, SQL
    - Connaissances financières: Gestion d'actifs, gestion des risques de marché, gestion patrimoniale, valorisations comptables et prudentielles (RP, PVA, IPV), et modèles de valorisation financiers

Votre intervenant

- **Laurent DAVOUST, FRM**

  - **Mail :** laurent.davoust@phit-formation.com
  - **LinkedIn** :
    - Personnel : https://www.linkedin.com/in/laurent-davoust-439149ab/
    - Entreprise : https://www.linkedin.com/company/98193948

PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Plan

1. Produits de taux
2. Options Vanilles
3. Volatilité Implicite
4. Produits à stratégies optionnelles
5. Options exotiques
6. Produits dérivés de taux
7. Produits Structurés
8. Attribution de performance

Produits de taux « vanille »

Quels sont les produits de taux que vous connaissez ?

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Principe d'actualisation

- **Compte bancaire et taux court terme**
  - Définition:

$B(t)$ la valeur du compte en date $t \geq 0$. On suppose qu'en $t = 0$, le compte vaut $B(0) = 1$. On a alors l'équation différentielle suivante:

$$dB(t) = r_t B(t)dt, \qquad B(0) = 1$$

où r_t est une fonction positive par rapport au temps, on dit que r_t est le taux instantané

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right)$$

PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Principe d’actualisation (2)

- **Compte bancaire et taux court terme**
  - Définition (suite):

Dans les faits, l’expansion de premier ordre sur Δt s’écrit

$$B(t+\Delta t) = B(t)(1 + r(t) \times \Delta t)$$

Ce qui nous donne

$$\frac{B(t+\Delta t) - B(t)}{B(t)} = r(t) \times \Delta \mathrm{t}$$

Principe d’actualisation (3)

- ***Discount Factor*** **– Facteur d’actualisation**
  - Définition:

    Le facteur d’actualisation (stochastique) $D(t,T)$ entre deux instants t et T est le montant au temps t qui est « équivalent » à un unité de monnaie payable au temps T, et est donné par l’équation suivante:

$$D(t,T) = \frac{B(t)}{B(T)} = \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right)$$

PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Obligation Zéro Coupon – ZC Bonds

- **Obligation ZC**
  - Définition:

    Une obligation à coupon zéro est une obligation pour laquelle son porteur ne se verra pas verser d'intérêts (coupons) durant toute la durée de vie de cette dernière. Les détenteurs sont rémunérés par la différence entre le prix d'émission de l'obligation et son prix de remboursement.

  - Exemple :

    Soit une obligation ZC de nominal 100 et de maturité 2 ans et un taux de rendement annuel actuariel de 4.5%. Quel est le prix actuel de cette obligation ?

$$B(t) = \frac{100}{(1 + 4.5\%)^2} = 91.57$$

Obligation Convention Jour – Day Count Convention

- ***Day count convention***
  - Actual / 365:
    Avec cette convention, une année dure 365 jours et la fraction d'année entre deux dates D_1 et D_2 correspond au nombre de jours entre ces deux dates.

  - Actual / 360:
    Avec cette convention, une année dure 360 jours et la fraction d'année entre deux dates D_1 et D_2 correspond au nombre de jours entre ces deux dates.

Taux composé et taux continu

- **Taux composé et taux continu**
  - Taux composés:
    La valeur actuelle d'un investissement de N qui gagne un taux annuel r_{comp}, composé m fois par an pendant T, a une valeur future de:
    $$V(T) = N \times \left(1 + \frac{r_{\text{comp}}}{m}\right)^{m \times T}$$
  - Taux continus:
    Cet investissement en taux continus r_{cont}, nous avons la valeur future suivante:
    $$V(T) = N \times \exp(r_{\text{cont}} \times T)$$

Taux composé et taux continu (2)

- **Taux composé et taux continu (2)**
  - <u>Equivalence entre les taux</u>:

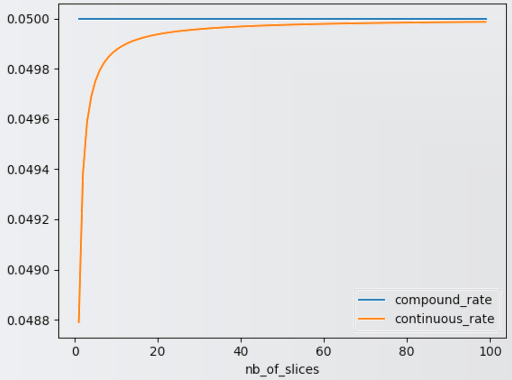
    On obtient donc la règle suivante pour passer d’un taux à l’autre:

$$r_{\text{cont}} = m \times \ln\left(1 + \frac{r_{\text{comp}}}{m}\right)$$

$$r_{\text{comp}} = m \times \left(\exp\left(\frac{r_{\text{cont}}}{m}\right) - 1\right)$$

  - <u>Convergence des taux composés vers les taux continus</u>:

$$\left(1 + \frac{r_{\text{comp}}}{m}\right)^m \rightarrow \exp(r_{\text{cont}}) \qquad \text{si } \; m \rightarrow \infty$$



PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Obligation avec coupons

- **Valorisation d'une obligation avec coupons**
  - Définition

    Une obligation à coupon génère une série de flux financiers. Chaque flux financier considéré isolément est équivalent à une obligation à coupon zéro. Selon cette interprétation, une obligation à coupon est une série d'obligations à coupon zéro :

$$B = \frac{c}{m} \sum_{t=1}^{N} \exp\left(-\frac{r_{cont}(t)}{m} \times t\right) + FV \times \exp\left(-\frac{r_{\text{cont}}(N)}{m} \times N\right)$$

    Où m est le nombre de coupon par année, c la valeur du coupon en annuel, $r_{cont}(t)$ est le taux spot continu en date t, N est le nombre de périodes, FV est la valeur faciale de l'obligation.

Yield to Maturity - YTM

- **Yield to Maturity - YTM**
  - <u>Définition</u>

    Le *Yield To Maturity (YTM),* ou rendement à l'échéance en français, d'une obligation est le taux de rendement annuel total que l'investisseur recevrait en conservant l'obligation jusqu'à son échéance, en tenant compte des paiements d'intérêts périodiques, des gains ou pertes en capital, et du prix d'achat ou de vente.
  - <u>Mathématiquement</u>

    On reprend la formule de valorisation d'une obligation à taux fixe :

$$B = \frac{c}{m}\sum_{t=1}^{N} \exp\left(-\frac{r_{YTM}}{m} \times t\right) + FV \times \exp\left(-\frac{r_{YTM}}{m} \times N\right)$$

Où r_{YTM} est le *Yield To Maturity*.

PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Yield to Maturity - YTM

- **Yield to Maturity - YTM**
  - Méthode par Dichotomie ou Bissection

    La méthode de bissection pour calculer le Yield To Maturity (YTM) consiste à itérer en réduisant progressivement l'intervalle de recherche du taux jusqu'à ce que la différence entre le prix actuel de l'obligation et la somme actualisée de ses flux de trésorerie converge vers zéro.

  - Méthode par optimisation

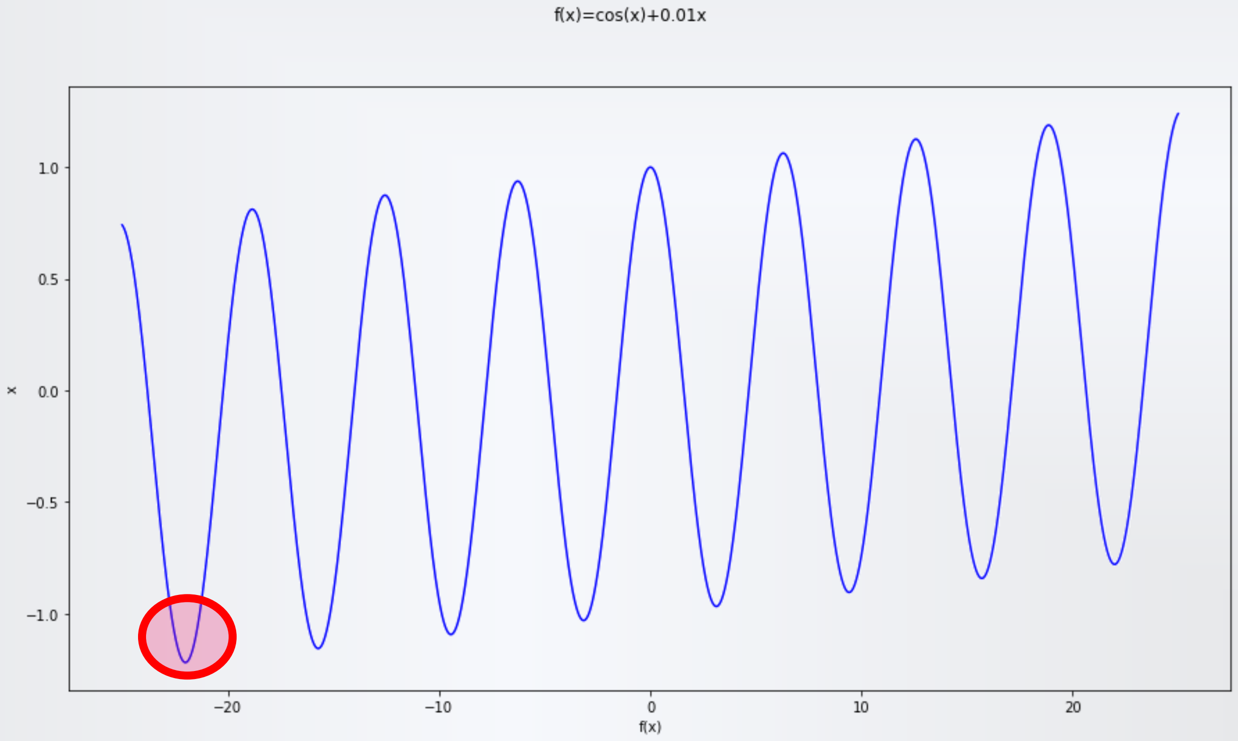
    On va appeler un solver pour impliciter notre taux YTM. Cela se fait régulièrement si la fonction de prix est continu et bijective.

Annexe : Solver - Optimiseur

- **Définition**
  - Un solveur est un programme qui permet de fournir un résultat à partir d'un problème mathématique interprétable par un ordinateur. Le terme solveur provient de l'anglais « to solve » qui signifie « résoudre ».
  - Concrètement un solveur permet de résoudre de manière optimale (ou non) des systèmes d'équations et d'inéquations qu'on lui soumet.
    - Une fonction objectif à maximiser ou à minimiser
    - Une ou des variables qui peuvent varier.
    - Des contraintes (équations ou inéquations) sur ces variables.
- **Limites**
  - Il y a une véritable course sur le marché des optimiseurs. Les versions gratuites reposent sur la méthode GRG (Generalized Reduced Gradient) qui consiste à partir d'un état initial des variables, à les faire bouger, vérifier que les contraintes sont respectées, et voir si il y a une augmentation ou une baisse du résultat de la fonction « objectif ».

Annexe : Solver - Optimiseur

- **Exemple**
  - $f(x) = \cos(x) + 0.01x, \text{ sc. } x \in [-25; 25]$



Annexe : Solver - Optimiseur

```python
import scipy.optimize as opt
import numpy as np

def fonction_objectif(x):
return np.cos(x)+0.01*x

csts=({'type' : 'ineq', 'fun':lambda x: 25.0-np.abs(x)}) #x>abs(25.0)

x0=(0.0)
opt_res=opt.minimize(fonction_objectif, x0, method="SLSQP", constraints=csts, tol=1e-10)
```

```
fun: -1.031465926952577
jac: array([0.])
message: 'Optimization terminated successfully.'
nfev: 20
nit: 6
njev: 6
status: 0
success: True
x: array([-3.15159283])
```

```
[0.] [0.] [1.49011612e-08] [-0.00999999]
[-0.00999999] [-0.00999998] [-0.10999908]
[-0.10999908] [-0.10999906] [-3.10443361]
[-3.10443361] [-3.1044336] [-5.04846654]
[-3.2988369] [-3.15165166] [-3.15165166]
[-3.15165164] [-3.15159283] [-3.15159283]
[-3.15159282]
```

PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Quels **outils** pour suivre son risque de taux ?

Duration et sensibilité aux taux

- **Duration**
  - Définition

    La duration d'une obligation est une mesure de la sensibilité du prix de l'obligation aux variations des taux d'intérêt. Elle représente la durée moyenne pondérée des flux de trésorerie de l'obligation, prenant en compte à la fois les paiements d'intérêts périodiques et le remboursement du principal à l'échéance.

  - Mathématiquement

$$D = \frac{\frac{C}{m}\sum_{t=1}^{N} \exp\left(-\frac{r_{YTM}}{m} \times t\right) \times \boldsymbol{t} + FV \times \exp\left(-\frac{r_{YTM}}{m} \times N\right) \times \boldsymbol{t}}{\boldsymbol{B}}$$

$$\Delta \mathrm{p} \approx -D\mathrm{B}\Delta \mathrm{r}$$

PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Convexité et sensibilité aux taux

- **Convexité**
  - Définition

    La convexité est une mesure de la courbure de la relation entre le prix d'une obligation et les taux d'intérêt. Elle offre des informations supplémentaires par rapport à la duration en quantifiant la manière dont la sensibilité du prix d'une obligation varie avec les changements de taux d'intérêt.

  - Mathématiquement

$$C = \frac{c}{m}\sum_{t=1}^{N} \exp\left(-\frac{r_{YTM}}{m} \times t\right) \times \boldsymbol{t^2} + FV \times \exp\left(-\frac{r_{YTM}}{m} \times N\right) \times \boldsymbol{t^2}$$

$$\Delta \mathrm{p} \approx -D\mathrm{B}\Delta \mathrm{r} + \frac{1}{2}\mathrm{C}(\Delta r)^2$$

Duration et sensibilité aux taux par pillier

- **Duration par pillier**

  En général, pour un calcul de sensibilité, on va regarder l'impact par pillier de maturité (en général en ligne avec les pilliers de la courbe de taux).
  Pour effectuer ce calcul, il faut décomposer (striper) l'obligation sur chaque flux et lui affecter une (ou plusieurs) maturité(s).

  Ainsi, il est possible d'effectuer des chocs uniquement sur certaines parties de la courbe de taux.

Bootstraping de la courbe de taux spot

- **Boostraping et construction de la courbe de taux**
  - Définition

    Le bootstrapping, en français méthode de proche en proche, est une méthode permettant de déduire des taux zéro coupon à partir de taux d'obligations couponnées connus. Elle est utilisée dans la construction d'une courbe de taux zéro coupon. On va déterminer le taux le plus court terme puis en déduire de proche en proche les maturités plus éloignées.

  - Composants de la courbe de taux

    Court terme (O/N →3M): utilisation des taux de référence (LIBOR, EURIBOR, €STR)

    Moyen terme ($6M \rightarrow 1Y$): utilisation des futures (ou FRA)

    Long terme ($2Y \rightarrow 50Y$): utilisation des swaps

PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Interpolation de la courbe de taux

- **Interpolation de la courbe de taux**
  - Définition

    L'interpolation est le processus qui permet d'estimer un point dans un univers mais qui n'est pas observable directement sur le marché. Par exemple, on peut avoir le taux 1Y et le taux 2Y, mais pour un calcul, on va avoir besoin du taux 18M.

Interpolation de la courbe de taux

- **Interpolation Linéaire**
  - Définition

    L'interpolation linéaire consiste à connecter chaque paire de points de données adjacents avec une ligne droite.

  - Mathématiquement

    La fonction linéaire interpolée $f(x)$ entre deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) est définie par la formule suivante :

$$f(x) = y_1 + (x - x_1) \times \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Interpolation de la courbe de taux

- **Interpolation Cubique**
  - Définition

    L'interpolation cubique utilise une spline cubique, qui est une fonction polynomiale de degré 3 définie par des segments entre les points de données adjacents. Chaque segment est déterminé de manière à assurer une continuité des dérivées premières et secondes entre les segments, créant ainsi une courbe lisse.
  - Mathématiquement

    La fonction cubique interpolée $f(x)$ entre deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) est définie par la formule suivante :

    $$f(x) = a_1(x - x_1)^3 + b_1(x - x_1)^2 + c_1(x - x_1) + d_1$$

    Où a_1, b_1, c_1, d_1 sont des coefficients déterminés en fonction des valeurs des points (x_1, y_1) et (x_2, y_2)

Interpolation de la courbe de taux

- **Interpolation Barycentric**
  - Définition

    La méthode de l'interpolation barycentrique repose sur la représentation de l'interpolant sous la forme d'un polynôme de Lagrange, mais exprimé dans une forme alternative qui facilite le calcul.
  - Mathématiquement

    Soit les points définis (x_i, y_i) pour $i = 1, \dots, n$ et que l'on veut interpoler sur x.

    La formule d'interpolation barycentrique est donnée par :

$$f(x) = \frac{\sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{x - x_i} \omega_i}{\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{x - x_i} \omega_i}$$

    Où ω_i sont les poids barycentriques.

PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Interpolation de la courbe de taux

- **Interpolation Krogh**
  - Définition

    La méthode de Krogh utilise des polynômes cubiques de Hermite pour interpoler les données. Les polynômes de Hermite sont des polynômes de degré 3 qui, en plus des valeurs de fonction, utilisent également les valeurs des dérivées de la fonction aux points d'interpolation.

Interpolation de la courbe de taux

- **Interpolation Krogh**
  - <u>Mathématiquement</u>

    Soit (x_i, y_i, m_i) les points d'interpolation avec m_i représentant la dérivée de y par rapport à x au point x_i.

    La formule mathématique de l'interpolation cubique Hermite avec la méthode de Krogh est donnée par :

    $f(x) = h_{00}(t)y_i + h_{10}(t)(x_{i+1} - x_i)m_i + h_{01}(t)y_{i+1} + h_{11}(t)(x_{i+1} - x_i)m_{i+1}$

    Où $t = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$ est la variable normalisée et les fonctions définies comme suit:

$$h_{00}(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$$
$$h_{10}(t) = t^3 - 2t^2 + t$$
$$h_{01}(t) = -2t^3 + 3t^2$$
$$h_{11}(t) = t^3 - t^2$$

PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Qu’est ce qu’un taux forward ?

Taux forward

- **Taux forward**

    - Définition

      Un taux forward est un taux portant sur une période future. Il se déduit à partir des taux de marché. Par exemple, le taux du 6 mois dans 3 mois, se déduit du taux 3 mois et du taux 9 mois.

$$r_{\text{forward}}(6M, 3M) = \frac{r_{9M} \times \frac{9}{12} - r_{3M} \times \frac{3}{12}}{\frac{9}{12} - \frac{3}{12}} = \frac{r_2 t_2 - r_1 t_1}{t_2 - t_1}$$

Forward Rate Agreements - FRA

- **Forward Rate Agreements - FRA**
  - Définition

    Un FRA (Forward Rate Agreement) est un contrat financier où deux parties conviennent d'un taux d'intérêt futur pour un montant déterminé à une date ultérieure afin de se prémunir contre les fluctuations des taux d'intérêt.
  - Flux financiers

    Soit un FRA dans lequel une institution financière X s'engage à prêter à Y à une date future T_1 jusqu'à une autre date T_2. Notons L le principal, r_K le taux convenu, r_F le taux forward LIBOR pour la période séparant T_1 et T_2, et r_M le taux LIBOR effectivement observé en T_1 pour horizon T_2

    Le flux pour X en T_2 est donc : $L(r_k - r_M)(T_2 - T_1)$

    L'échange de flux réalisé en T_1: $L(r_k - r_F)(T_2 - T_1)\exp(-r_M T_2)$

PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Interest Rate Swap – IRS – Swap de taux

- **Interest Rate Swap - IRS**
  - Définition

    Un swap est un accord entre deux parties pour échanger des flux financiers, tels que des taux d'intérêt ou des devises, pendant une période déterminée.

    Un swap IRS (Interest Rate Swap) est spécifiquement un type de swap financier où les parties échangent des flux de paiement liés aux taux d'intérêt, permettant souvent de convertir des taux à taux fixe en taux variable ou vice versa.

Interest Rate Swap – IRS – Swap de taux

- **Interest Rate Swap - IRS**
  - <u>Exemple</u>

    Considérons un swap à 3 ans entre Phit et Dauphine. L'entreprise Phit s'engage à payer un taux de 5% à Dauphine sur un principal de 100M. En retour, Dauphine s'engage à payer des intérêts au taux LIBOR 6M à Phit.

    Les flux seront échangés tous les 6 mois. Phit est le payeur du taux fixe et Dauphine le payeur du taux variable.

Interest Rate Swap – IRS – Swap de taux

- **Interest Rate Swap - IRS**
  - <u>Valorisation</u>

    On valorise un swap patte par patte.

    Au moment de l'initiation : $V_{\text{swap}}(0) = 0 \iff B_{\text{fix}}(0) = B_{\text{float}}(0)$

    En cours de contrat, on peut valoriser le prochain flux du swap comme étant la différence entre les deux pattes (obligation à taux fixe, obligation à taux variable).

    L'obligation à taux fixe est calculée comme vu précédemment.

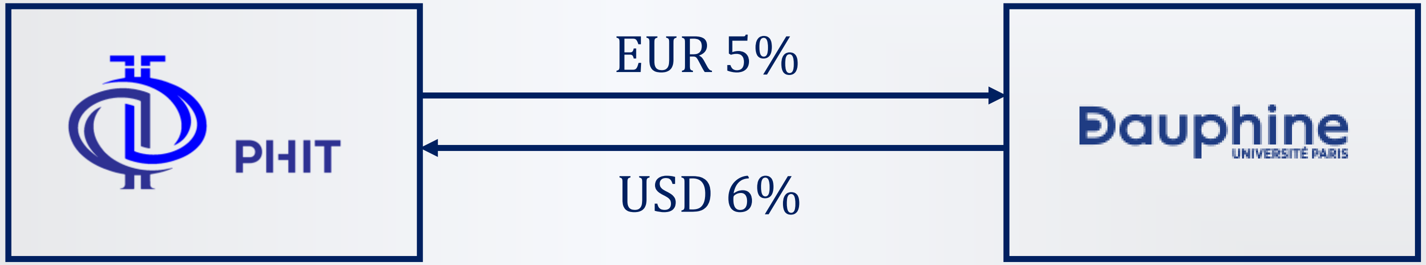
    L'obligation à taux variable est calculée comme suit:

$$B_{\text{float}} = \left(N + N \times \frac{r_{\text{LIBOR}}}{2}\right) \times \exp(-r(t) \times t)$$

Currency Swap – Swap de devises

- **Currency Swap**
  - <u>Définition</u>

    Un swap de devise implique l'échange d'un principal et d'intérêts dans une devise contre un principal et des intérêts dans une autre devise. Ces sommes sont échangées au début et à la fin de la durée de vie du contrat.



Currency Swap – Swap de devises

- **Currency Swap**
  - <u>Valorisation – Méthode portefeuille d'obligations</u>

    On peut valoriser un swap de devises comme un portefeuille d'obligations. Soit V_{swap} la valeur du swap en devise domestique si celle-ci est réçue et si la devise étrangère est payée:

$$V_{\mathrm{swap}} = B_{\mathrm{D}} - S_0 \times B_{\mathrm{F}}$$

Où B_{F} est la valeur, en devise étrangère, de l'obligation libellée en devise étrangère sous-jacente du swap, et B_{D} est la valeur en devise domestique de l'obligation domestique correspondante. S_0 est le taux de change spot (en nombre d'unités monétaires domestiques par unité monétaire étrangère DOM/FOR).

Options « vanilles »

Payoff des options « vanilles »

- **Options « Vanilles »**
  - Définition

    Une option d'achat *call* donne à son détenteur le droit d'acheter une certaine quantité d'un actif sous-jacent à une date future donnée et à un prix convenu. Le *put* est une option de vente selon la même logique. Le prix spécifié en avance est le prix d'exercice (*strike price*).

  - Payoff

$$\text{payoff(call)} = \max(S_t - K, 0)$$

$$\text{payoff(put)} = \max(K - S_t, 0)$$

Quels sont les différents processus stochastiques répandus ?

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Quelques rappels de calcul stochastique

- **Processus de Wiener (ou *Brownian Motion*)**
  - Définition

    Mathématiquement un process de Wiener $W(t)$ est caractérisé par les propriétés suivantes:

    1. $W(t_0) = 0$

    2. $W(t)$ est continu

    3. $W(t)$ est indépendant de $W(s), \forall t \neq s$
  - Propriétés
  - La variation Δz durant un court intervalle de temps de longueur Δt s'écrit: $\Delta z = \epsilon\sqrt{\Delta t}$ où ϵ suit une loi normale $\phi(0,1)$
  - Les valeurs de Δz pour deux courts intervalles de longueur Δt, ne se chevauchent pas, sont indépendantes.

Quelques rappels de calcul stochastique

- **Processus de Wiener général**
  - Définition

Le processus de Wiener décrit précédemment n'a pas de tendance centrale (*drift*). Un drift nul signifie que l'espérance de la valeur de z à une date future quelconque est égale à sa valeur actuelle. Le processus général va intégrer un *drift* de coefficient a ($x = x_0 + a \times t$). Le processus s'écrit donc

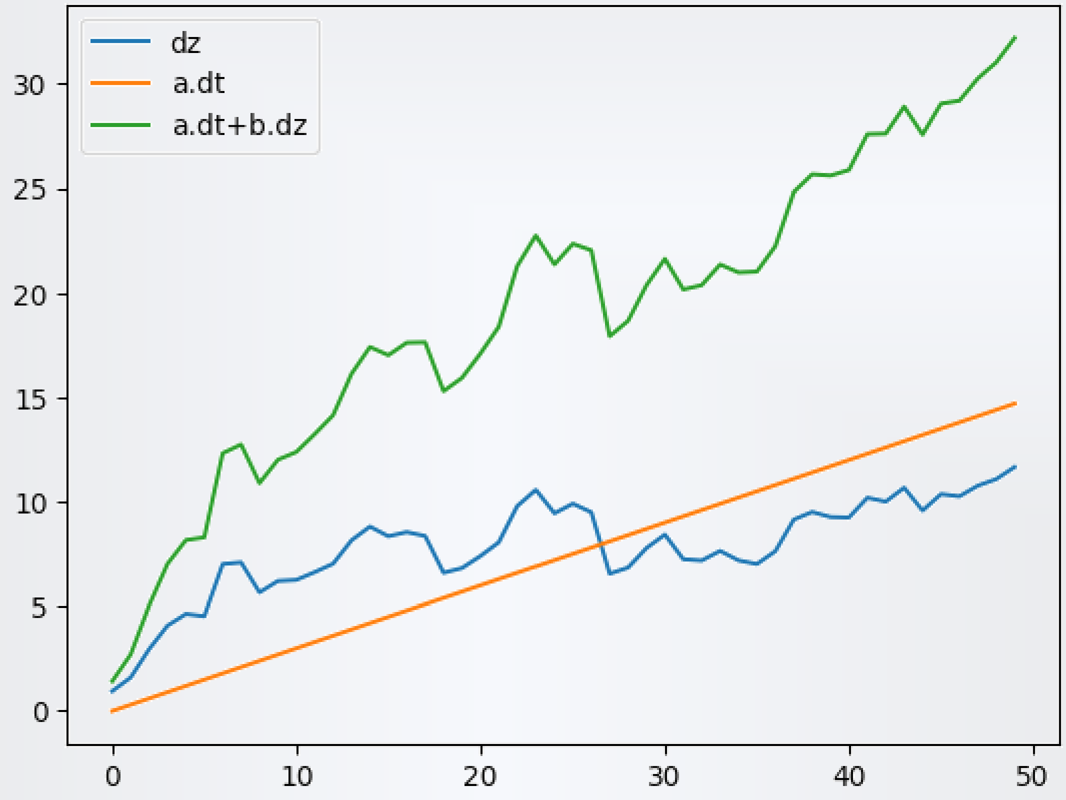
$$\Delta x = a\Delta t + b\epsilon\sqrt{\Delta t}$$

Le coefficient b correspond à la quantité de bruit égale à b fois celle apportée par un processus de Wiener.

La distribution de Δx suit une loi normale d'espérance $a\Delta t$ et d'écart type $b\sqrt{\Delta t}$.

Quelques rappels de calcul stochastique

- **Processus de Wiener général**



Quelques rappels de calcul stochastique

- **Processus d'Itô**
  - Définition

  Le processus d'Itô est un processus encore plus général qui peut être défini si l'on autorise les paramètres a et b à être des donctions de la variable x et du temps t. Ce processus s'écrit alors :

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$$

  Ou en temps discret :

$$\Delta x = a(x,t)\Delta \mathrm{t} + \mathrm{b}(\mathrm{x},\mathrm{t})\epsilon\sqrt{\Delta t}$$

Quelques rappels de calcul stochastique

- **Processus du cours d'une action – Geometric Brownian Motion**
  - Définition

On suppose que l'action ne verse pas de dividendes. Ici, le drift constant ne doit pas concerné le cours de l'action mais le processus de rentabilité. Soit S la valeur de l'action, le drift de S sera supposé égal à μS. Le processus du cours d'une action est donc:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \Leftrightarrow \frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz$$

Où σ représente la volatilité de l'action, μ est son espérance de rentabilité. Dans un univers risque-neutre, μ est remplacé par le taux sans risque r.

En temps discret, nous avons

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \epsilon \sqrt{\Delta t} \Leftrightarrow \frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t} \rightarrow \Phi\left(\mu \Delta t, \sigma \sqrt{\Delta t}\right)$$

PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Quelques rappels de calcul stochastique

- **Processus corrélés**
  - <u>Définition</u>

On suppose plusieurs sources de risques corrélés (deux processus x_1 et x_2):

$$dx_1 = a_1 dt + b_1 dz_1 \text{ et } dx_2 = a_2 dt + b_2 dz_2$$

où z_1 et z_2 sont des processus de Wiener. En temps discret, on écrit :

$$\Delta x_1 = a_1 \Delta t + b_1 \epsilon_1 \sqrt{\Delta t}, \qquad \Delta x_2 = a_2 \Delta t + b_2 \epsilon_2 \sqrt{\Delta t}$$

Pour simuler ces processus corrélés (ρ), on simule deux variables normales indépendantes (u et v), puis on applique la transformation suivante:

$$\epsilon_1 = u \quad \text{et} \quad \epsilon_2 = \rho u + v\sqrt{1 - \rho^2}$$

PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Quelques rappels de calcul stochastique

- **Synthèse des processus**

Nom du processus	Mathématiquement	Temps discret	Paramètres
Wiener / Brownian motion	dz	$\Delta z = \epsilon\sqrt{\Delta t}$	$\epsilon \rightarrow \Phi(0,1)$
Wiener général	$dx = adt + bdz$	$\Delta \mathrm{x} = \mathrm{a}\Delta t + b\epsilon\sqrt{\Delta t}$	$\epsilon \rightarrow \Phi(0,1)$ a et b sont des coefficients
Itô	$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$	$\Delta x = a(x,t)\Delta \mathrm{t} + \mathrm{b}(\mathrm{x},\mathrm{t})\epsilon\sqrt{\Delta t}$	$\epsilon \rightarrow \Phi(0,1)$ a et b sont des fonctions de x et du temps t
Cours d'une action - GBM	$dS = \mu Sdt + \sigma Sdz$	$\Delta S = \mu S\Delta t + \sigma S\epsilon\sqrt{\Delta t} \Leftrightarrow$	$\epsilon \rightarrow \Phi(0,1)$ μ et σ sont des coefficients

PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Modèle de Black Scholes Merton

- **Diffusion pour le cours des actions**
  - Diffusion

Le modèle utilise une diffusion de type GBM.

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \quad \Longrightarrow \frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t} \rightarrow \Phi\left(\mu \Delta t, \sigma \sqrt{\Delta t}\right)$$

Cela implique (Lemme d'Itô):

$$\ln(S_T) - \ln(S_0) = \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) \rightarrow \Phi\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma\sqrt{\mathrm{T}}\right)$$

$$\ln(S_T) \rightarrow \Phi\left(\ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma\sqrt{\mathrm{T}}\right)$$

On dit que S_T suit une distribution log-normale.

Modèle de Black Scholes Merton

- **Application : Intervalle de confiance**
  - Diffusion

$$\ln(S_T) \rightarrow \Phi\left(\ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma\sqrt{\mathrm{T}}\right)$$

  - Intervalle de confiance

    On a donc au niveau de confiance α

$$S_T \in \left[\exp\left(\ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T \pm z_\alpha \sigma\sqrt{T}\right)\right]$$

PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Modèle de Black Scholes Merton

- **Hypothèses**

  Le cours de l'action suit le processus présenté juste avant
  Il n'y a pas de restriction sur les ventes à découvert
  Il n'y a pas de frais de transactions ou d'impôts, tous les actifs financiers sont parfaitement divisibles.
  Il n'y a pas de dividende sur le sous-jacent pendant la durée de vie de l'actif dérivé.
  Il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage
  Le marché fonctionne en continu
  Le taux sans risque, r, est constant et fixe quelle que soit la maturité du produit dérivé.

Modèle de Black Scholes Merton

- **Formules d'évaluation**

  Les formules de BSM permettent de calculer, à la date zéro, la valeur d'un call ou d'un put européen sur une action qui ne verse pas de dividendes:

$$c = S_0.\mathcal{N}(d_1) - K.\exp(-rT).\mathcal{N}(d_2)$$
$$p = K.\exp(-rT).\mathcal{N}(-d_2) - S_0.\mathcal{N}(-d_1)$$

  Avec

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

  et la fonction $\mathcal{N}(x)$ désigne la fonction de répartition d'une loi normale centrée-réduite.

Modèle de Black Scholes Merton

- **Parité Call-Put**
  - Payoff à échéance

Portefeuille	Instrument	$S_T > K$	$S_T < K$
Portefeuille 1	Call européen de strike K	$S_T - K$	0
	Obligation ZC de nominal $K.\exp(-rT)$	K	K
	Total	$\boldsymbol{S_T}$	$\boldsymbol{K}$
Portefeuille 2	Put européen de strike K	0	$K - S_T$
	Action	S_T	S_T
	Total	$\boldsymbol{S_T}$	$\boldsymbol{K}$

$$c + K \times \exp(-rT) = p + S_0$$

Quelles **extensions** au modèle de Black Scholes?

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Modèle de Black Scholes Merton - Extension

- **Modèle à dividende continu**

  Un détachement de dividende implique une baisse instantanée de la valeur de l'action sous-jacente au moment du détachement du dividende. Taux de dividende en continu : c

Impact sur r	$\mathrm{r} \to r - c$
Impact sur S_0	$S_0 \to S_0.\exp(-cT)$
Dynamique (probabilité risque-neutre Q)	$\frac{dS}{S} = (r-c)dt + \sigma dz$
Parité Call-Put	$c + K \times \exp(-rT) = p + S_0.\exp(-cT)$
Valorisation call / put	$c = S_0.\exp(-cT).\mathcal{N}(d_1) - K.\exp(-rT).\mathcal{N}(d_2)$ $p = K.\exp(-rT).\mathcal{N}(-d_2) - S_0.\exp(-cT).\mathcal{N}(-d_1)$ $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - c + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$ $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$

PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Modèle de Black Scholes Merton - Extension

- **Modèle à dividende discret**

  Ici, le dividende D va être détaché en date t_D.

  La valeur actualisée de ce dividende est $D^* = D.\exp(-r.t_D)$

Impact sur S_0	$S_0 \rightarrow (S_0 - D^*)$
Parité Call-Put	$c + K \times \exp(-rT) = p + S_0 - D^*$
Valorisation call / put	$c = (S_0 - D^*).\mathcal{N}(d_1) - K.\exp(-rT).\mathcal{N}(d_2)$ $p = K.\exp(-rT).\mathcal{N}(-d_2) - (S_0 - D^*).\mathcal{N}(-d_1)$ $d_1 = \dfrac{\ln\left(\dfrac{S_0 - D^*}{K}\right) + \left(r + \dfrac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$ $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$

PHIT

MASTER 272 INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Modèle de Black Scholes Merton - Extension

- **Modèle Garman-Kohlhagen sur option à taux de change**

  S est le taux de change de la valeur d'une unité de monnaie étrangère, exprimée en monnaie domestique. Chaque marché est dotée d'un marché de prêt-emprunt : r_f pour l'économie étrangère et r_d pour l'économie domestique.

Impact sur S_0	$S_0 \to S_0.\exp(-r_f T)$
Impact sur K	$K \to K.\exp(-r_d T)$
Dynamique (probabilité risque-neutre Q)	$\frac{dS}{S} = (r_d - r_f)dt + \sigma dz$
Parité Call-Put	$c + K \times \exp(-r_d T) = p + S_0.\exp(-r_f T)$
Valorisation call / put	$c = S_0.\exp(-r_f T).\mathcal{N}(d_1) - K.\exp(-r_d T).\mathcal{N}(d_2)$ $p = K.\exp(-r_d T).\mathcal{N}(-d_2) - S_0.\exp(-r_f T).\mathcal{N}(-d_1)$ $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r_d - r_f + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$ $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$

Modèle de Black Scholes Merton - Extension

- **Modèle de Black – Option sur contrats à terme**

  Soit F le prix de cotation d'un contrat futures.

Dynamique (probabilité risque-neutre Q)	$\frac{dF}{F} = \sigma dz$
Parité Call-Put	$c + K \times \exp(-rT) = p + F(t).\exp(-rT)$
Valorisation call / put	$c = \exp(-rT) \times \left(F(t).\mathcal{N}(d_1) - K.\mathcal{N}(d_2)\right)$ $p = \exp(-rT) \times \left(K.\mathcal{N}(-d_2) - F(t).\mathcal{N}(-d_1)\right)$ $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F(t)}{K}\right) + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$ $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$

PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Qu'est ce que le **REPO** ?

Modèle de Black Scholes Merton

- **BSM en pratique – le taux sans risque *r***
  - Coût de financement

  Le taux sans risque peut être représenté par le taux de financement, c'est-à-dire le coût que le financement de l'effet de levier représente.

  $$\text{Financing cost} = \text{interest rate} - \text{repo rate}$$

  - REPO = Repurchase Agreement

  Il n'est pas possible de vendre un actif que l'on n'a pas, il est alors obligatoire de le « louer » si on veut le vendre. Le repo est ce « loyer » que l'on doit payer pour posséder le stock.

Modèle de Black Scholes Merton

- **BSM en pratique – Repo - Flux**

A l'initiation T=0 :

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\text{Emprunteur qui veut vendre l'actif}} & \overset{100}{\underset{\text{Actif}}{\begin{array}{c}\longrightarrow\\ \longleftarrow\end{array}}} & \boxed{\text{Contrepartie qui prête l'actif}} \end{array}$$

A maturité:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\text{Emprunteur qui veut vendre l'actif}} & \overset{100 \times (1 + r - \text{repo})}{\underset{\text{Actif}}{\begin{array}{c}\longleftarrow\\ \longrightarrow\end{array}}} & \boxed{\text{Contrepartie qui prête l'actif}} \end{array}$$

Modèle de Black Scholes Merton

- **BSM en pratique – Repo - Impact**
  - Intérêts

  Pour celui qui prête l'actif : il s'agit d'une activité de financement
  Pour celui qui emprunte l'actif : il peut vendre sans être à découvert et le contrat de repo ne l'expose pas à la variation du niveau de l'actif.

  - Valorisation d'un forward

  La diffusion devient donc : $\frac{dS}{S} = (r - c - \text{repo})dt + \sigma dz$ et le forward se valorise comme suit : $F(t) = S_0 \times \exp(-(r - c - \text{repo}) \times t)$

PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Sensibilités aux paramètres - *Greeks*

Paramètre	Lettre		Call	Put
Spot	$\Delta = \frac{\delta V}{\delta S}$	Delta	$\Delta = \mathcal{N}(d_1) \times \exp(-cT)$	$\Delta = (\mathcal{N}(d_1) - 1)\exp(-cT)$
Durée de vie	$\Theta = -\frac{\delta V}{\delta T}$	Theta	$\Theta = -\frac{S_0 \exp(-cT)\, \mathcal{N}'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}}$ $+qS_0\mathcal{N}(d_1)\exp(-cT) - rK.\exp(-rT)\, \mathcal{N}(d_2)$	$\Theta = -\frac{S_0 \exp(-cT)\, \mathcal{N}'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}}$ $-qS_0\mathcal{N}(d_1)\exp(-cT + rK.\exp(-rT)\, \mathcal{N}(-d_2)$
Convexité Spot	$\Gamma = \frac{\delta^2 V}{\delta S^2}$	Gamma	$\Gamma = \frac{\mathcal{N}'(d_1)\exp(-cT)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}$	
Volatilité	$\upsilon = \frac{\delta V}{\delta \sigma}$	Vega	$\upsilon = S_0\sqrt{T}\mathcal{N}'(d_1)\exp(-cT)$	
Taux sans risque	$\rho = \frac{\delta V}{\delta r}$	Rho	$\rho = KT.\exp(-rT)\, \mathcal{N}(d_2)$	$\rho = -KT.\exp(-rT)\, \mathcal{N}(-d_2)$

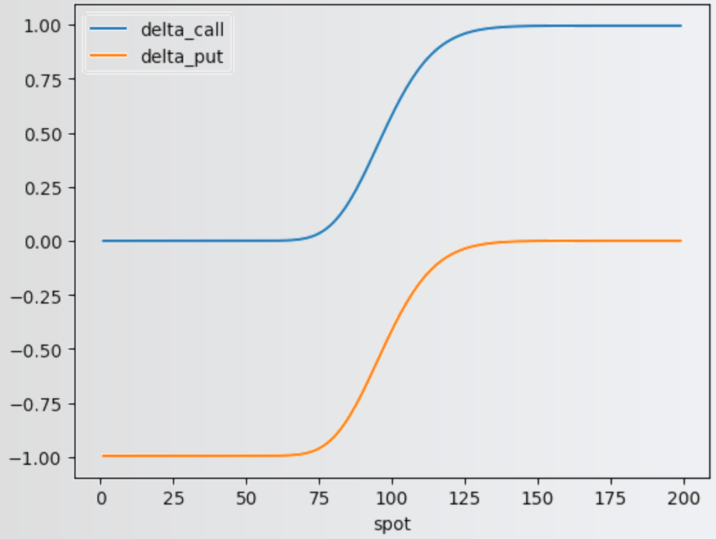
<u>Hypothèses</u> : On part sur un actif qui verse un dividende au taux c, sur le modèle BSM de base. Avec $\mathcal{N}'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$

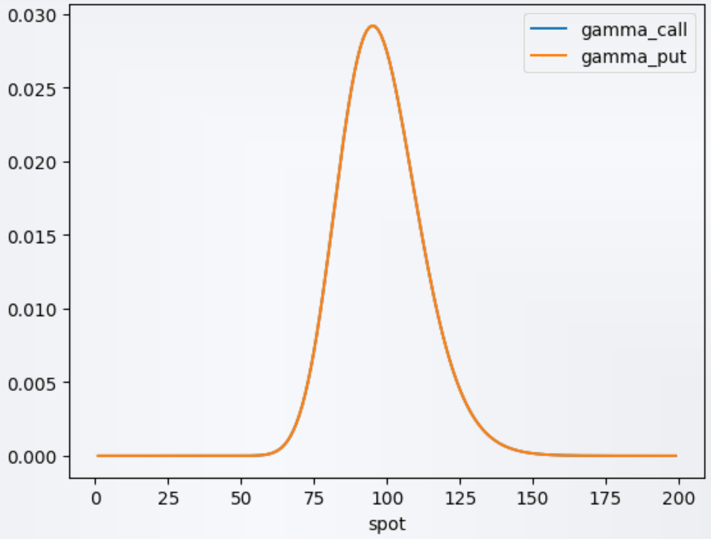
PHIT

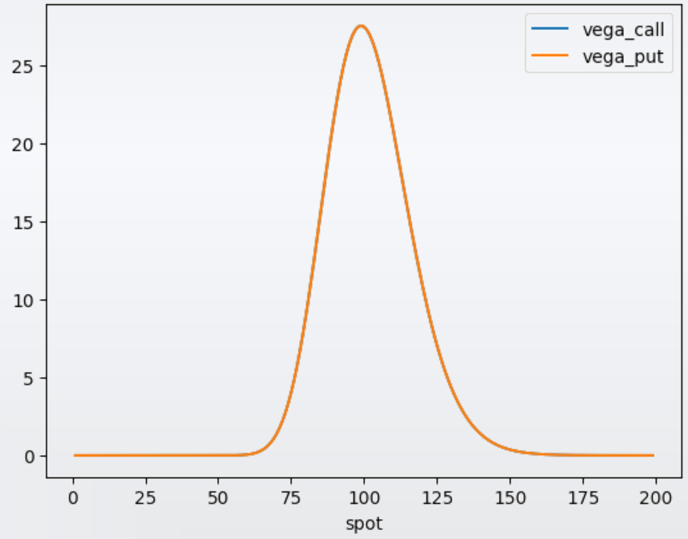
MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Sensibilités aux paramètres - *Greeks*

- **Evolution par rapport au spot (strike=100)**







PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Sensibilités aux paramètres - *Greeks*

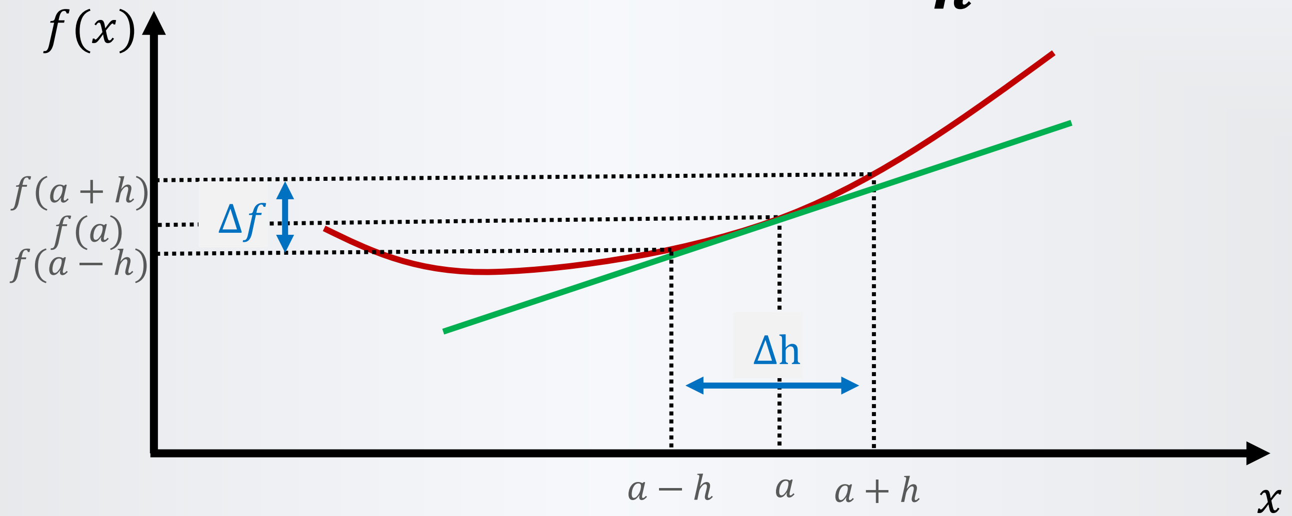
- **Approche par différence finie**
  - <u>Formule de Taylor</u>

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \times h + \frac{f''(a)}{2} \times h^2 + R_n(h)$$

$R_n(h)$ est le reste négligeable au voisinage de a

  - <u>Approximation d'ordre 1</u>

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a) \times h \;\Leftrightarrow \boldsymbol{f'(a)} \approx \frac{\boldsymbol{f(a+h) - f(a)}}{\boldsymbol{h}} \approx \frac{\boldsymbol{f(a+\epsilon) - f(a-\epsilon)}}{\boldsymbol{2\epsilon}}$$



PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

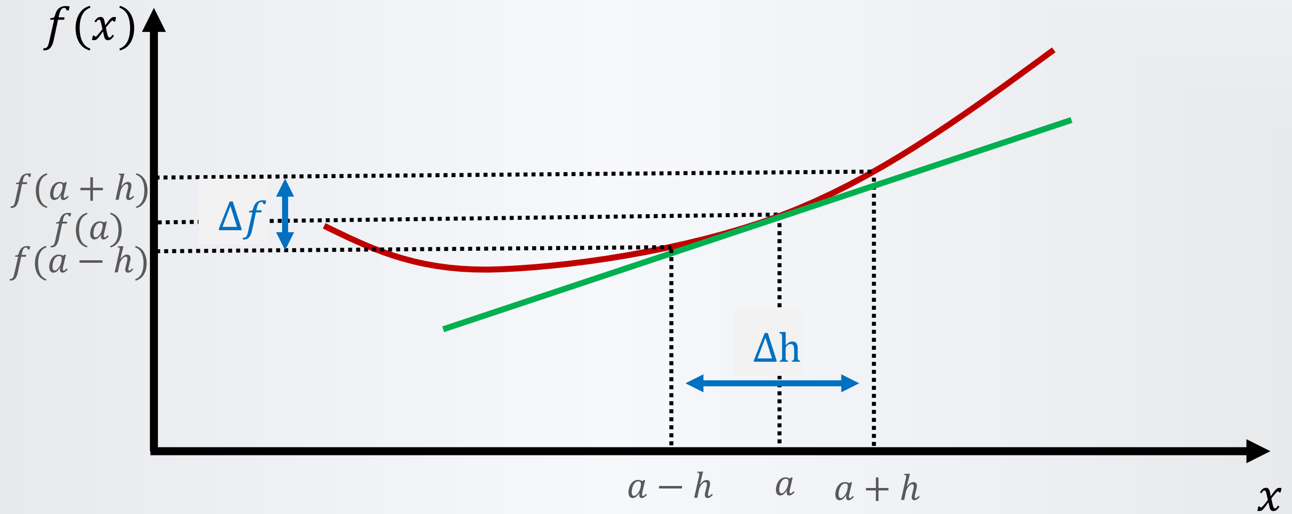
Sensibilités aux paramètres - *Greeks*

- **Approche par différence finie**
  - <u>Approximation d'ordre 2</u>

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a) \times h + \frac{f''(a)}{2} \times h^2$$

$$f(a-h) \approx f(a) - f'(a) \times h + \frac{f''(a)}{2} \times h^2$$

Par addition, $\boldsymbol{f''(a) \approx \frac{f(a+h)+f(a-h)-2\times f(a)}{h^2}}$



Méthodes de couverture

- **Méthodes de couverture**
  - Couverture en Delta

  Si on vend N call de delta δ à un client, alors le portefeuille équivalent est $\delta \times N$ actions à acheter. La valeur du portefeuille est donc de

$$\underbrace{\delta \times N \times S}_{\text{Underlying}} - \underbrace{N \times V_{\text{option}}}_{\text{Option}}$$

  Si il y a une forte variation, le δ sera plus le même qu'en date initiale, ce que cette couverture ne prend pas en compte.

PHIT

MASTER 272 INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Méthodes de couverture

- **Méthodes de couverture**
  - Couverture en Gamma - Vega

  Si on vend N call de delta δ à un client, alors on va créer un portefeuille équivalent composé d'option afin d'annuler le Gamma et le Vega, ensuite on couvrira le delta avec le sous-jacent.

Call Low Exercise Price Option - LEPO

- **Call LEPO**
  - Définition

  C'est un call européen avec un prix d'exercice de 0.01.
  Ce call permet d'éviter les taxes associées au trading d'action.
  Ce sont des calls dit Deep ITM, cela signifie que la valeur temps est quasi nulle (ils sont similaires au sous-jacent).
  Ces produits sont payés avec une marge, donc l'acheteur ne va pas payé l'ensemble de la prime de l'option.
  In fine, les calls LEPO ressemblent à des contrats forward.

Méthode de valorisation – Monte Carlo

- **Monte Carlo**
  - Définition

C'est un moyen de résoudre des problèmes probabilistes en simulant numériquement de nombreux scénarios possibles afin de pouvoir calculer les résultats d'une moyenne, variance, etc.

Avec cette méthode, on va générer un échantillon de variables aléatoires iid $X_1, \ldots, X_n$ suivant la même loi que X, puis on peut estimer l'espérance $\mathbb{E}[X]$ avec l'estimateur : $\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. L'erreur de l'estimateur de Monte-Carlo est de l'ordre de $1/\sqrt{n}$.

La problématique des simulations réside dans l'utilisation des ressources informatiques (couteux en CPU/GPU).

Comment simuler PI à l’aide de la méthode de Monte Carlo?

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Méthode de valorisation – Monte Carlo

- **Monte Carlo**
  - Exemple : le nombre π (question en entretien)

Comment simuler π par les méthodes de Monte-Carlo ?

Méthode de valorisation – Monte Carlo

- **Monte Carlo**
  - Exemple : le nombre π (question en entretien)

  L'aire d'un cercle est défini par la formule : $\mathcal{A} = \text{rayon}^2 \times \pi$.

  La formule d'un cercle dans un plan est $x^2 + y^2 = \text{rayon}$

Méthode de valorisation – Monte Carlo

- **Monte Carlo**
  - Exemple : le nombre π (question en entretien)

  L'aire d'un cercle est défini par la formule : $\mathcal{A} = \text{rayon}^2 \times \pi$.
  La formule d'un cercle dans un plan est $x^2 + y^2 = \text{rayon}$

  Solution:
  On prend un cercle de rayon = 1. Donc on est à l'intérieur du cercle si $x^2 + y^2 \leq 1$.
  On peut alors simuler deux variables indépendantes x et y, telles que $x, y \in [0; 1]$ et vérifier l'équation ci-dessus.
  Alors on compte le nombre de points qui sont dans le cercle / le nombre de points total (ratio η). Etant donné que l'on est dans un quart de cercle :

$$4 \times \eta \rightarrow \pi, n \rightarrow \infty$$

PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Méthode de valorisation – Monte Carlo

- **Monte Carlo**
  - <u>Calcul d'un call européen</u>

  Le prix d'une action suit un processus GBM:

  $$dS = rSdt + \sigma S dz$$

  En particulier, $\ln(S_T) \rightarrow \Phi\left(\ln(S_0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma\sqrt{\mathrm{T}}\right)$

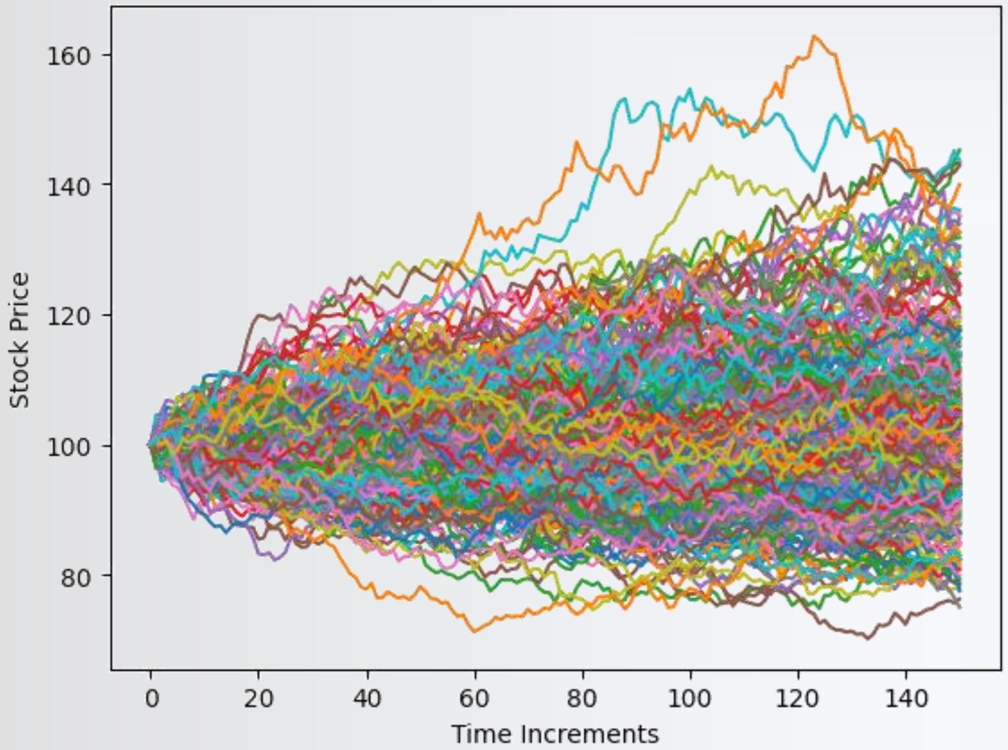
  On va simuler alors le nouveau prix de l'action tel que:

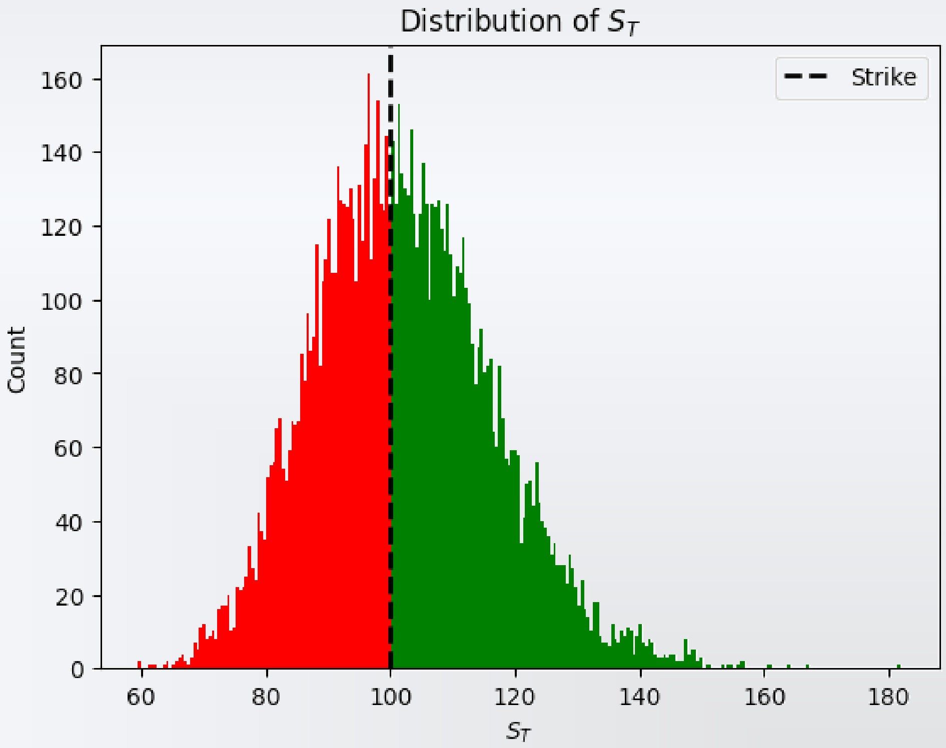
  $$S_{t+\Delta t} = \exp\left(\ln(S_t) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{T} \times z_t\right)$$

  On applique ensuite le payoff du call $(S_{t+\Delta t} - K)^+$, puis on actualise la moyenne des simulations pour nous donner les prix de l'option.

Méthode de valorisation – Monte Carlo

- **Exemple de simulation de prix S_T**





Volatilité implicite

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Qu’est ce que le **smile** de **volatilité** ?

Processus d'Implicitation

Implicitation du taux d'intérêt r

Parité Call-Put : $c + K \times \exp(-rT) = p + S_0.\exp(-cT)$

$$\Rightarrow r = -\ln\left(\frac{p - c + S_0.\exp(-cT)}{K}\right)\Big/T$$

Processus d'implicitation

Volatilité implicite

- **Implicitation de la Volatilité**
  - Observation

La volatilité implicite n'est pas constante par maturité (*term structure* de volatilité) et par strike (*smile* de volatilité).

  - Méthode de Newton Raphson

On cherche la valeur de σ_{imp} telle que $\mathrm{g}(\sigma) = BS\left(S_0, K, T, \sigma_{\text{imp}}, r\right) - V_{\text{mkt}} \to 0$.

Méthode itérative de k essai : $\sigma_{\text{imp}}^{k+1} = \sigma_{\text{imp}}^{k} - \dfrac{g\left(\sigma_{\text{imp}}^{k}\right)}{g'\left(\sigma_{\text{imp}}^{k}\right)}, \quad \text{for } k \geq 0$

On s'arrête dès lors que la différence entre la valeur de marché et la valeur théorique est petite en absolue.

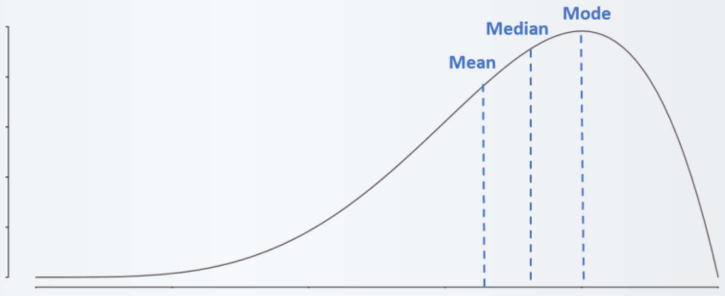
Volatilité implicite

- **Smirk de volatilité**

  On l'observe essentiellement pour les options sur actions qui se traduit par une distribution left-skewed (moyenne < mediane) : la probabilité d'une forte baisse est plus forte que celle des fortes hausses.

  Explication par l'effet de levier: valeur action ↘ → effet de levier ↗ → volatilité ↗

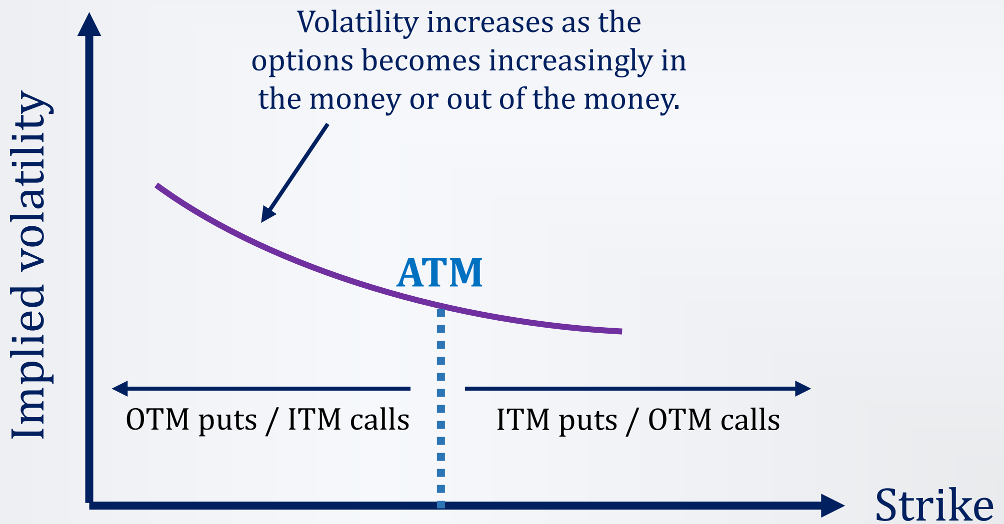
  Explication « Crashophobia »: Les participants de marché sont effrayés d'un crash de marché, donc ils sont prêts à payer de grandes primes d'option pour deep-OTM put pour se protéger d'une forte baisse du sous-jacent.



Left Skewed Distribution

Volatilité implicite

- **Smirk de volatilité**



PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Volatilité locale – Modèle LV - Dupire

- **Volatilité locale**
  - Histoire

  Durant le crash de 1987, on remarque que le modèle BS utilise une volatilité constante et ne capture pas l'effet « Skew ».
  L'effet Skew indique que les mouvements extrêmes arrivent plus souvent qu'ils ne sont prévus par la loi normale.

  - Volatilité locale

  La volatilité locale est une fonction déterministe du prix du sous-jacent S_t et du temps t. La diffusion du prix devient donc :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma(S_t, t)dz$$

  Si $\sigma(S_t, t) = \sigma S_t$, on retombe sur le modèle de Black Scholes avec une volatilité constante σ.

Volatilité locale – Modèle LV - Dupire

- **Volatilité locale**
  - Modèle de Dupire

  Au départ, on connait le prix d'option (et donc de la volatilité implicite) pour un certain nombre de piliers de strike et de maturité. Le modèle à volatilité locale permet de calculer la volatilité pour des options qui ne seraient pas dans une combinaison de strike et de maturité connus.

  - Calibration

  1. Calcul des volatilités implicites à partir des prix de marché.
  2. Utiliser une méthode d'interpolation pour produire une surface de volatilité lissée
  3. Calcul de la volatilité locale en utilisant la formule de Dupire.

Volatilité locale – Modèle LV - Dupire

- **Volatilité locale**
  - Formule de Dupire

  Au départ, on connait le prix d'option (et donc de la volatilité implicite) pour un certain nombre de piliers de strike et de maturité. Le modèle à volatilité locale permet de calculer la volatilité pour des options qui ne seraient pas dans une combinaison de strike et de maturité connus.

$$\sigma_{\text{loc}}^2(K,T) = \frac{\sigma^2 + 2\sigma T \times \left(\frac{\delta\sigma}{\delta T} + (r-c)K \times \frac{\delta\sigma}{\delta K}\right)}{\left(1 + K d_1 \times \frac{\delta\sigma}{\delta K}\sqrt{T}\right)^2 + \sigma K^2 T \times \left(\frac{\delta^2\sigma}{\delta K^2} - d_1 \times \left(\frac{\delta\sigma}{\delta K}\right)^2 \sqrt{T}\right)}$$

Avec $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{k}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \frac{\Delta\sigma}{\Delta T}(K) = \frac{\sigma(K,T_2) - \sigma(K,T_1)}{T_2 - T_1}, \frac{\Delta^2\sigma}{\Delta K^2} = \frac{\sigma(K,T_3) + \sigma(K,T_1) - 2\sigma(K,T_2)}{(T_3 - T_1)^2}$

Volatilité locale – Modèle LV - Dupire

- **Volatilité locale**
  - Limites

  Par construction, cohérent avec les prix observés des calls européens à une date donnée → permet donc d'évaluer des options plus complexes dont les payoffs sont susceptibles de faire intervenir plusieurs « niveaux de strikes » et de maturités.

  Pas de dynamique sur le skew/smile → pas d'évolution de la pente et de la convexité de la nappe lorsque le cours du sous-jacent bouge → mauvais priing pour les options barrières ou les options à cliquet (constituées de plusieurs options démarrant à des dates ultérieures et pour des périodes déterminées, avec des strikes égaux aux cours à ces dates).

Volatilité Stochastique – Heston

- **Volatilité Stochastique**
  - <u>Volatilité Stochastique</u>

  Le prix de l'actif et la volatilité vont tous les deux être des processus aléatoires qui peuvent évoluer avec le temps t. Il y a plusieurs modèles célèbres.

  - <u>Modèle de Heston</u>

  Comme dans le modèle BS, le prix de l'action va suivre une loi log-normale.
  La volatilité va être représentée par un fonction positive et croissante avec un processus de retour à la moyenne (*mean reversion*).

Volatilité Stochastique – Heston

- **Volatilité Stochastique**
  - Modèle de Heston - Formules

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dz_1$$
$$dv_t = -\lambda(v_t - \bar{v})dt + \eta\sqrt{v_t} dz_2$$
$$< dz_1, dz_2 > = \rho dt$$

Où v_t est la variance instantanée du prix de l'action (qui est lui-même un processus stochastique), λ est la vitesse de retour à la moyenne de v_t à sa moyenne de long terme $\boldsymbol{\bar{v}}$, η est la volatilité du processus de la variance v_t (dit aussi volatility of volatility), et dz_1, dz_2 sont deux processus de Wiener dépendant avec un coefficient de corrélation ρ.

PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Volatilité Stochastique – Heston

- **Volatilité Stochastique**
  - Modèle de Heston - Calibration

  La calibration des paramètres de ce modèle n'est pas évident car cela suppose la résolution d'un problème d'optimisation non-linéaire sous contrainte : minimiser l'erreur entre les cours des options qui cotent sur le marché et le prix des options estimé par le modèle d'Heston.

  Pour plus de détail: *Heston's Stochastic Volatility Model Implementation, Calibration and Some Extensions*

  Les 5 paramètres à calibrer:

  v_t : la valeur initiale de la variance (entre 0 et 1)

  $\bar{v}$: la variance moyenne de long terme (entre 0 et 1)

  λ: la vitesse de retour à la moyenne (non-négatif)

  η: la volatilité de la volatilité (non-négatif)

  ρ: le coefficient de corrélation entre les deux processus de Wiener

Volatilité Stochastique – Heston

- **Volatilité Stochastique**
  - Modèle de Heston – Simulation Monte Carlo

  A partir des paramètres du modèle, on commence par générer deux variables aléatoires corrélées.

  On calcule l'impact sur la variance:

$$v_{t+\Delta t} = \left(\sqrt{v_t} + 0.5 \times \eta\sqrt{\Delta t} z_1\right)^2 - \lambda(v_t - \bar{v})\Delta\mathrm{t} - \frac{\eta^2}{4}\Delta t$$

  On calcule le nouveau prix de l'action

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp\left(\left(r - \frac{v_t}{2}\right)\Delta\mathrm{t} + \sqrt{(v_t \times \Delta t\,)} z_2\right)$$

Volatilité Stochastique – SABR

- **Volatilité Stochastique**
  - Modèle SABR – Stochastique Alpha Beta Rho

  Ce modèle est essentiellement utilisé pour la modélisation des produits dérivés de taux, mais on peut le retrouver sur d'autres classes d'actifs.

  Le modèle SABR décrit la diffusion d'un forward de taux ou d'un prix forward d'action où le forward et la volatilité sont corrélés:

$$dF = \alpha F^{\beta} dz_1$$

$$d\alpha = \nu \alpha dz_2$$

$$< dz_1, dz_2 > = \rho dt$$

  Où ν désigne la vol of vol (convexité du smile de volatilité), β le choix de la distribution du rendement du sous-jacent (0 pour normal et 1 pour log normal), ρ la corrélation entre la volatilité et le forward, α est la volatilité ATM forward.

Volatilité Stochastique – SABR

- **Volatilité Stochastique**
  - <u>Modèle SABR – Stochastique Alpha Beta Rho</u>

  Ensuite, on peut calculer la volatilité sur un point de la surface de volatilité:

$$\sigma_B(K,f) = \frac{\alpha}{(f\beta)^{\frac{(1-\beta)}{2}}\left\{1+\frac{(1-\beta)^2}{24}log^2\frac{f}{K}+\frac{(1-\beta)^4}{1920}log^4\frac{f}{K}+\cdots\right\}}\cdot\left(\frac{z}{\chi(z)}\right)$$
$$\cdot\left\{1+\left[\frac{(1-\beta)^2}{24}\frac{\alpha^2}{(fK)^{1-\beta}}+\frac{1}{4}\frac{\beta\rho\alpha\nu}{(fK)^{\frac{(1-\beta)}{2}}}+\frac{2-3\varrho^2}{24}\nu^2\right]\right\}\cdot T+\cdots$$

where z and $\chi(z)$ are abbreviations of

$$z = \frac{\nu}{\alpha}(fK)^{\frac{(1-\beta)}{2}}log\frac{f}{K}$$

$$\chi(z) = log\left(\frac{\sqrt{1-2\rho z+z^2}+z-\varrho}{1-\varrho}\right)$$

Volatilité Stochastique – SABR

- **Volatilité Stochastique**
  - <u>Modèle SABR – Stochastique Alpha Beta Rho – Calibration</u>

  Pour la calibration, le package pysabr contient les formules SABR implémentée:

  1. On choisit $\beta \in [0,1]$, en général $\beta = 0.5$
  2. Minimize $\sum_i (\sigma_i^{Mkt} - \sigma_i^{\text{model}}(F, K_i, \alpha, \rho, \sigma_0)$ pour obtenir $\hat{\alpha}, \hat{\rho}, \hat{\nu}$

PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Volatilité Stochastique – SABR

- **Volatilité Stochastique**
  - Modèle SABR – Stochastique Alpha Beta Rho – Simulation MC

  Une fois que l'on a déterminé les paramètres du modèle, nous pouvons effectuer des simulations de Monte Carlo pour effectuer des pricings:

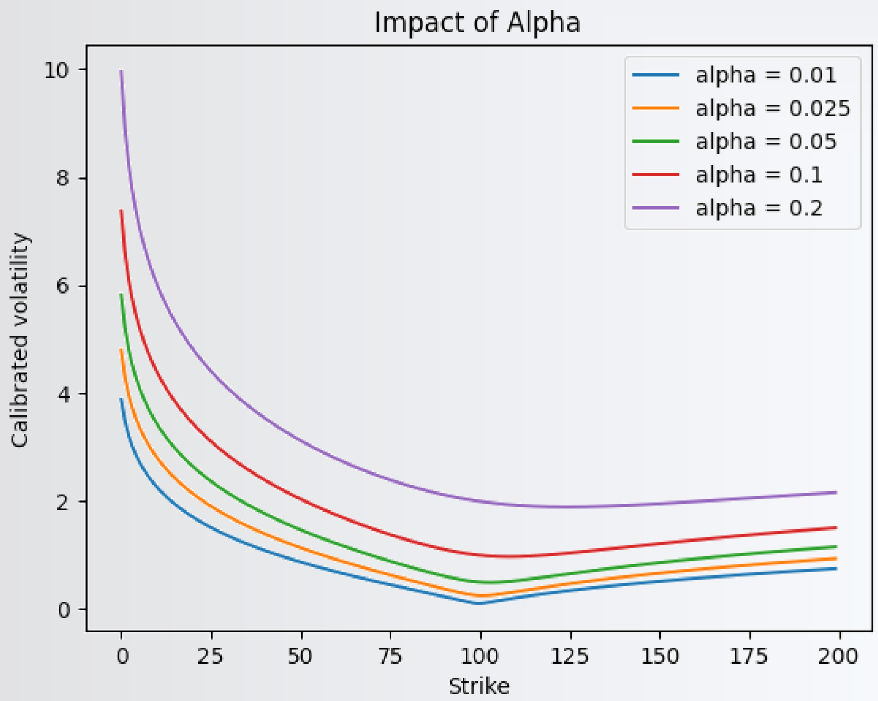
  1. On simule deux nombres aléatoires u_1 et u_2 de loi normale centrée réduite.
  2. On rend ces deux variables dépendantes: $z_1 = u_1, \quad z_2 = \rho u_1 + u_2\sqrt{1-\rho^2}$
  3. On calcule le nouveau prix: $F_{t+\Delta t} = F_t + \sigma_t F_t^{\beta} z_1 \sqrt{\Delta t}$
  4. On calcule la nouvelle « volatilité » : $\sigma_{t+\Delta t} = \sigma_t \times \exp(-\frac{1}{2}\nu^2 \Delta t + \nu z_2 \sqrt{\Delta t})$
  5. A partir de moment, on effectue les mêmes étapes de fin pour le pricing d'un produit dérivé

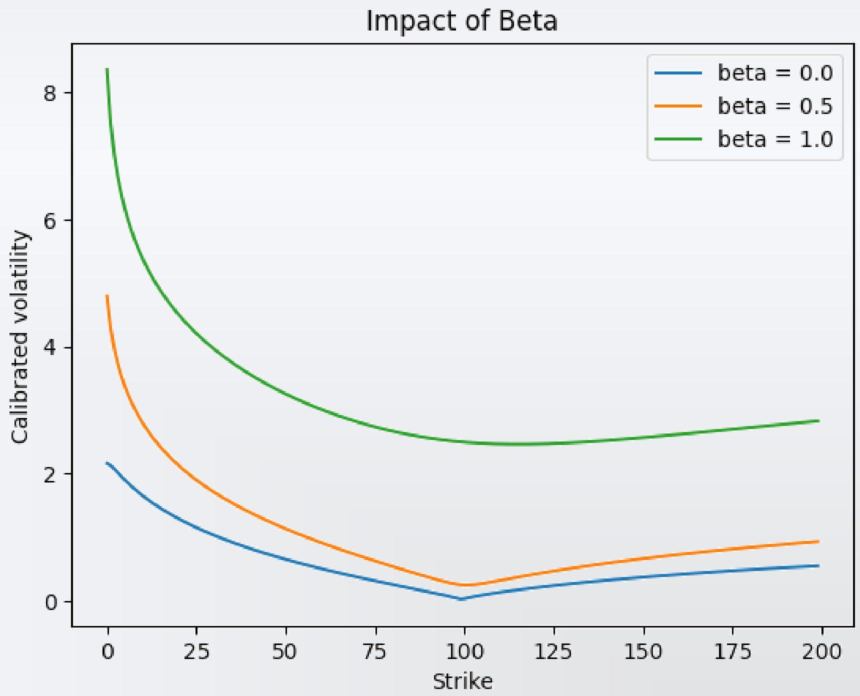
PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Volatilité Stochastique – SABR

- **Volatilité Stochastique**
  - <u>Modèle SABR – Stochastique Alpha Beta Rho – Impact des paramètres</u>





PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Volatilité Stochastique – SABR

- **Volatilité Stochastique**
  - Modèle SABR – Stochastique Alpha Beta Rho – Impact sur les Greeks

Le delta doit être ajusté pour prendre en compte le smile de volatilité:

$$\Delta = \frac{\delta c}{\delta S} = \Delta_{BS} + \underbrace{\nu_{BS}}_{\text{vega}} \times \frac{\delta \sigma_{BS}(S, K, r, \alpha, \beta, \rho)}{\delta S}$$

Le vega est aussi impacté:

$$\nu = \frac{\delta c}{\delta \alpha} \approx \underbrace{\nu_{BS}}_{\text{vega}} \times \left(\frac{\sigma_{BS}(F, K)}{\sigma_{BS}(F, F)}\right)$$

Volatilité Stochastique – SABR

- **Volatilité Stochastique**
  - Modèle SABR – Stochastique Alpha Beta Rho – Impact sur les Greeks

Deux nouveaux greeks font leur apparition:

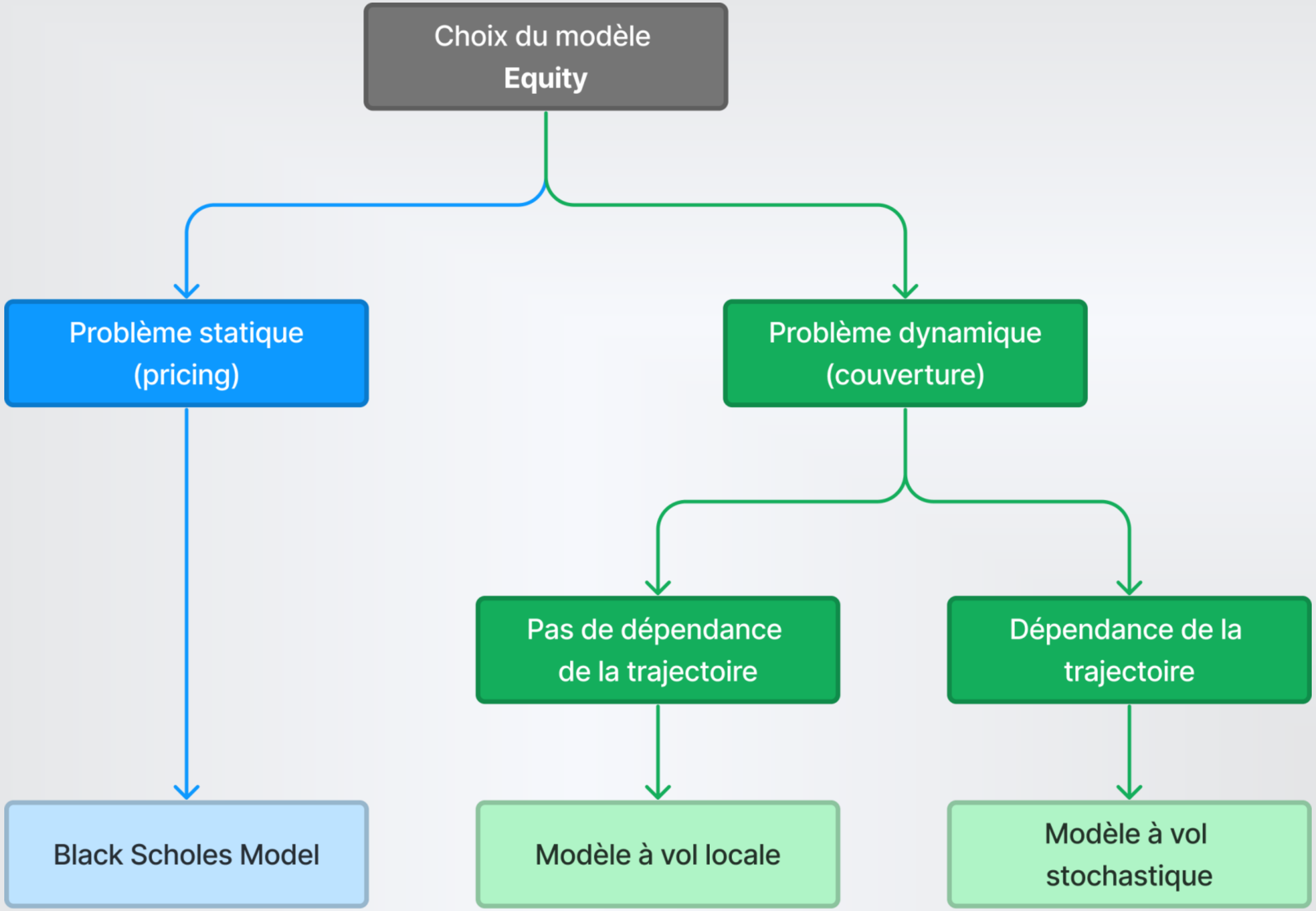
Le vanna porte sur un changement de la corrélation:

$$\text{Vanna} = \frac{\delta c}{\delta \rho} = \underbrace{\nu_{BS}}_{\text{vega}} \times \frac{\delta \sigma_{BS}(S, K, r, \alpha, \beta, \rho)}{\delta \rho}$$

Le volga porte sur un changement de la vol of vol

$$\text{Volga} = \frac{\delta c}{\delta \nu} = \underbrace{\nu_{BS}}_{\text{vega}} \times \frac{\delta \sigma_{BS}(S, K, r, \alpha, \beta, \rho)}{\delta \nu}$$

Quel modèle choisir ?



PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Extension – Modèle à Volatilité Locale Stochastique

- **Modèle LSV**
  - <u>Définition</u>

  Le modèle est défini comme suit:

$$\begin{cases} dS_t = S_t A(t, S_t) f(V_t) dz_1 \\ dV_t = a(t, V_t)dt + \gamma(t, V_t)dz_2 \\ < dz_1, dz_2 > = \rho dt \end{cases}$$

  Avec $S_t$le processus de prix du sous-jacent, $A(t, S_t)$ est une fonction de t et de S_t qui permet d'incorporer dans la volatilité du modèle une composante liée à la volatilité locale, V_t est le terme dont est issue la composante stochastique de la variance, $f(.)$ est la fonction qui fait le lien entre le terme de variance et la paryie stochastique de la volatilité

Extension – Modèle à Volatilité Locale Stochastique

- **Modèle LSV**
  - Définition

  Note, dans le cas d'un modèle d'Heston : $f(x) = \sqrt{x}$ et V_t serait un processus CIR : $a(t,x) = \kappa(\theta - x)$ et $\gamma(t,x) = \zeta\sqrt{x}$.

  Ce modèle est une amélioration des modèles stochastiques, car la fonction $A(t, S_t)$ permet de corriger le gap entre le smile de volatilité implicite engendré par le modèle à volatilité stochastique et les volatilités implicites du marché.

  Plus d'information: **Stochastic Volatility Modeling**, Lorenzo BERGOMI

PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Produits à stratégies optionnelles

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

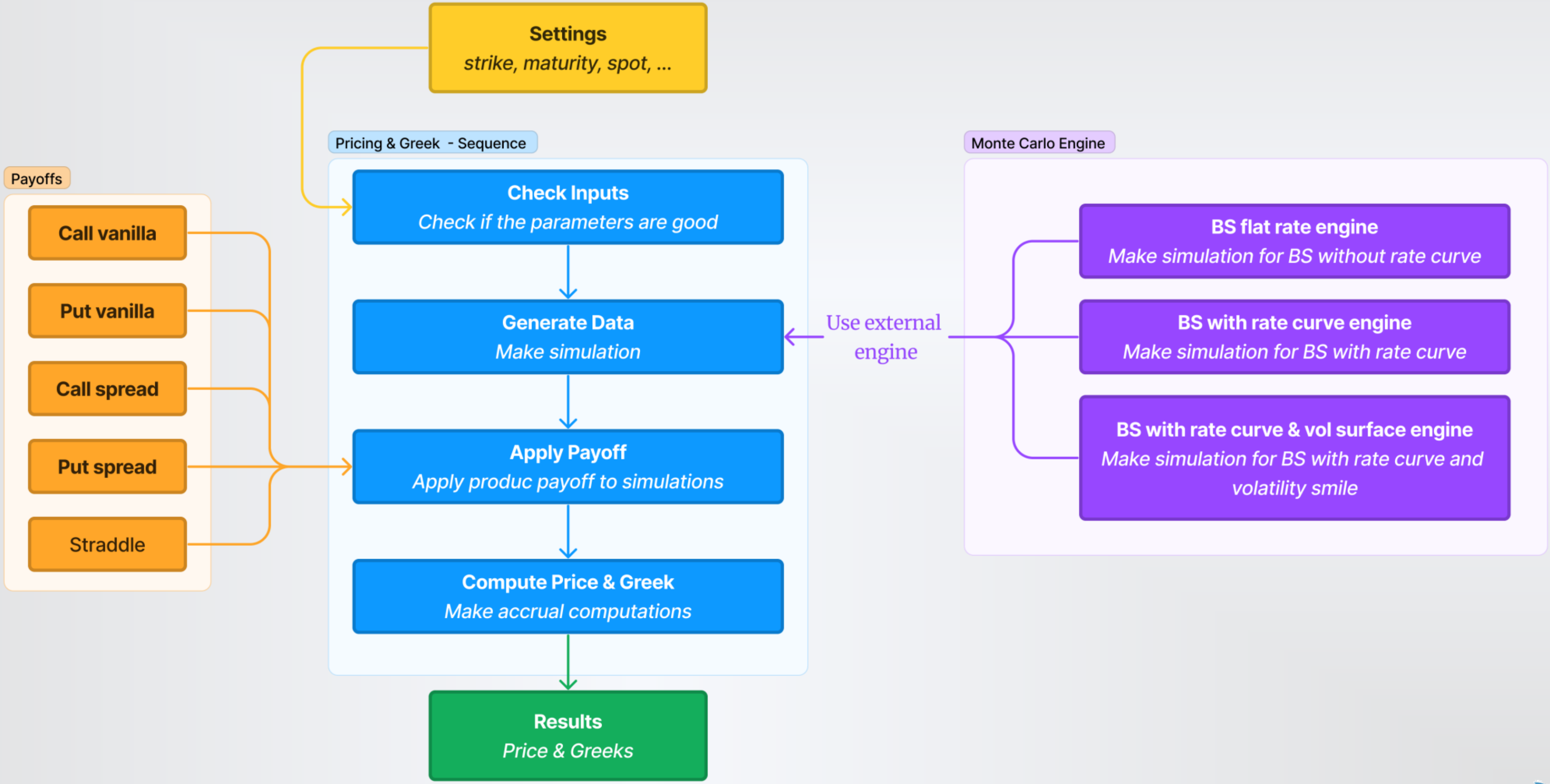
Quels sont les différentes

« **stratégies optionnelles** »?

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Comment mettre en place une architecture IT de pricing?

Moteur de calcul



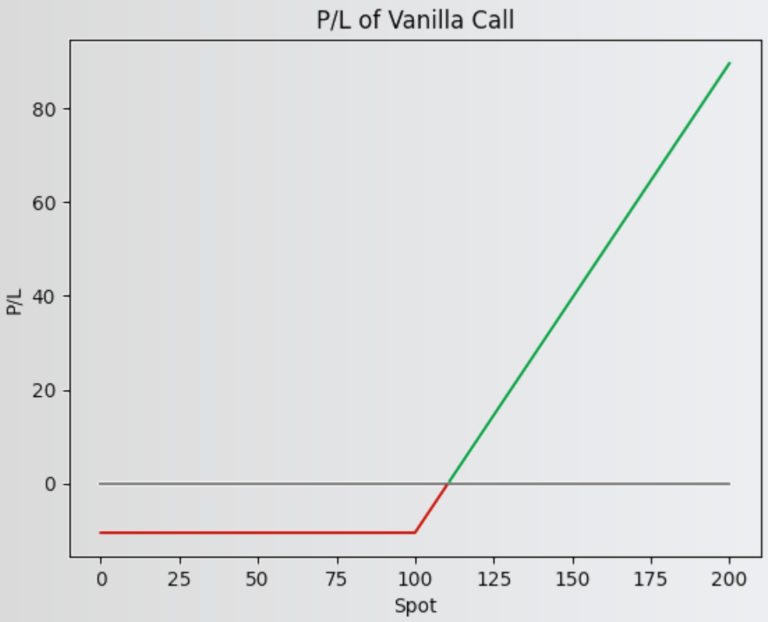
PHIT

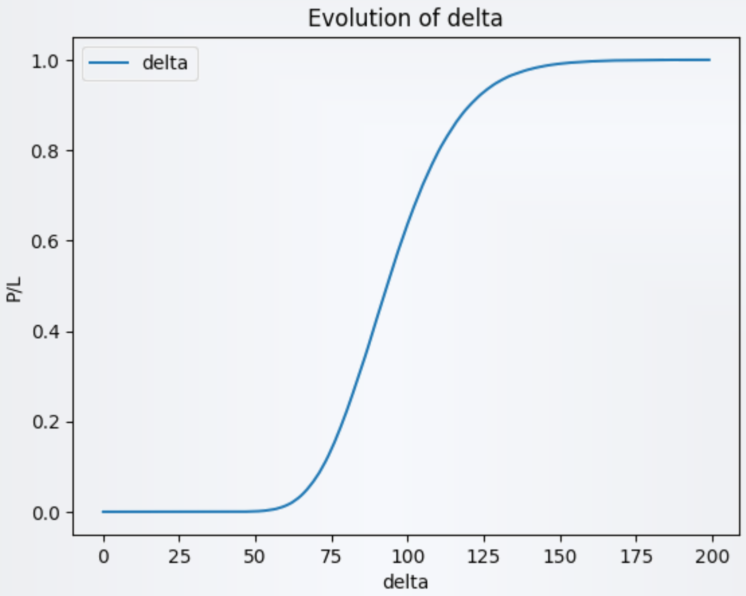
MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

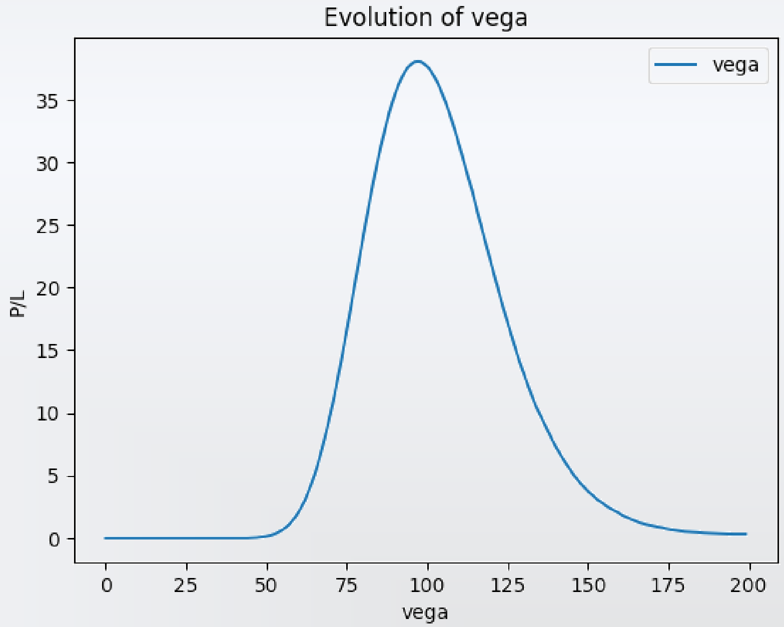
Call vanille

- <u>Définition</u>

$$\max(\text{spot} - \text{strike}, 0)$$



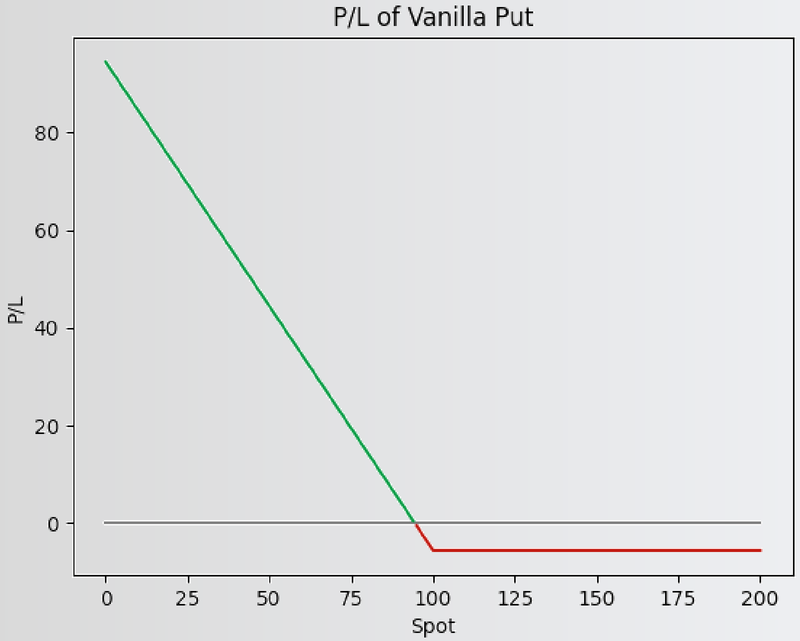


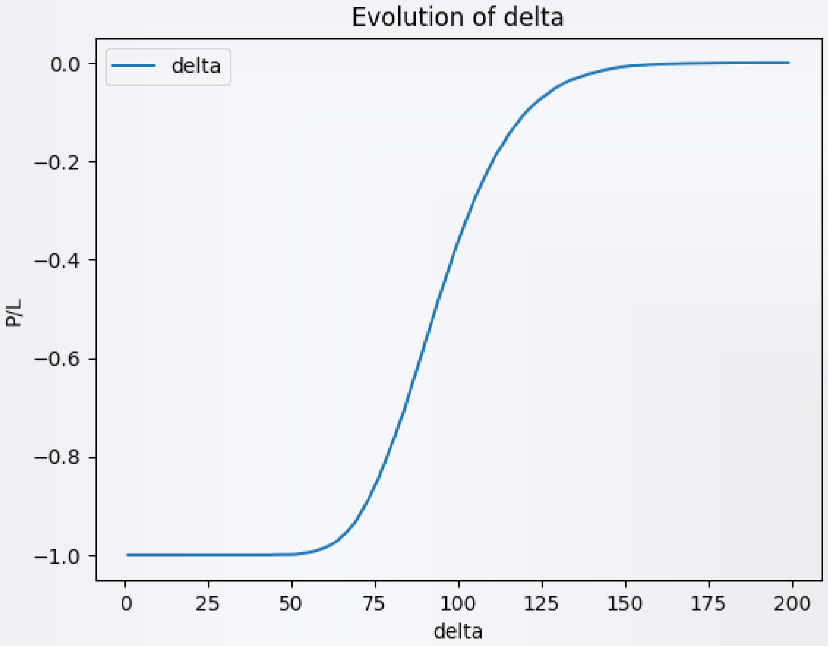


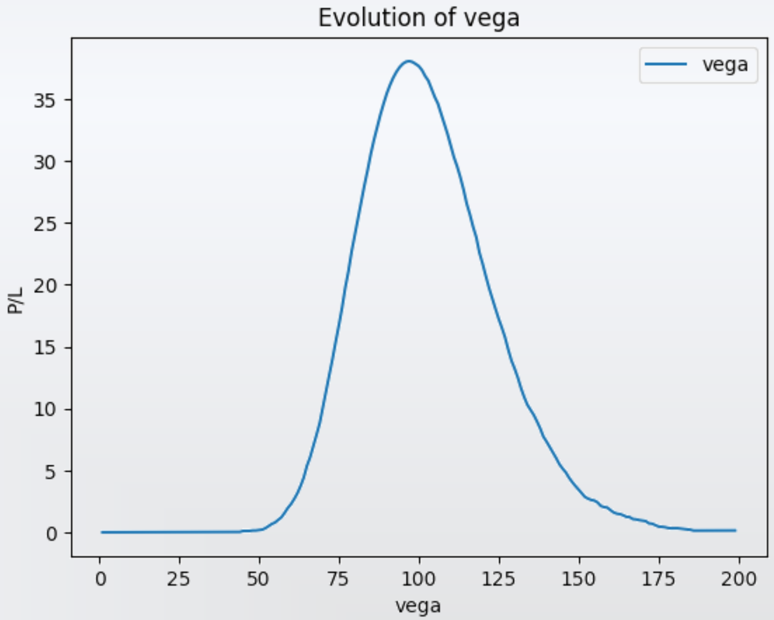
Put vanille

- <u>Définition</u>

$$\max(\text{strike} - \text{spot}, 0)$$







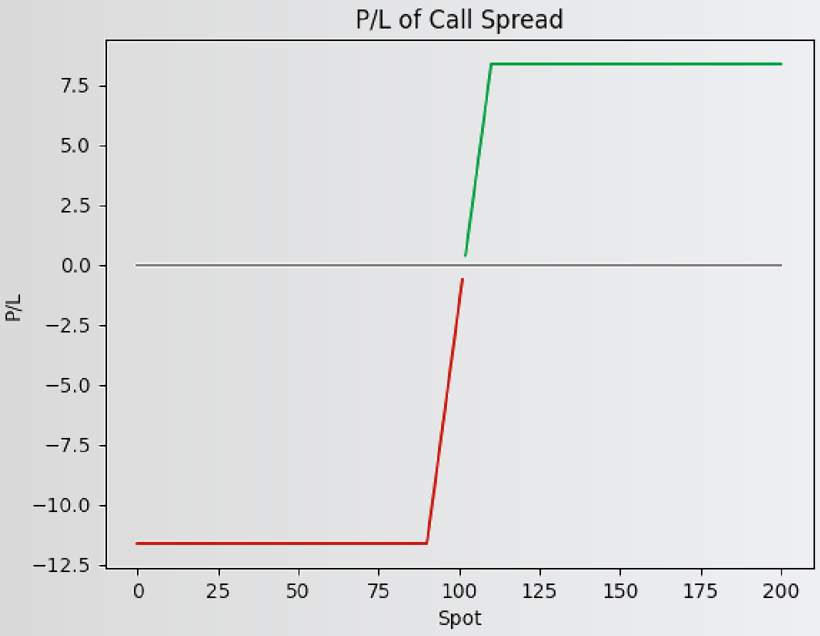
PHIT

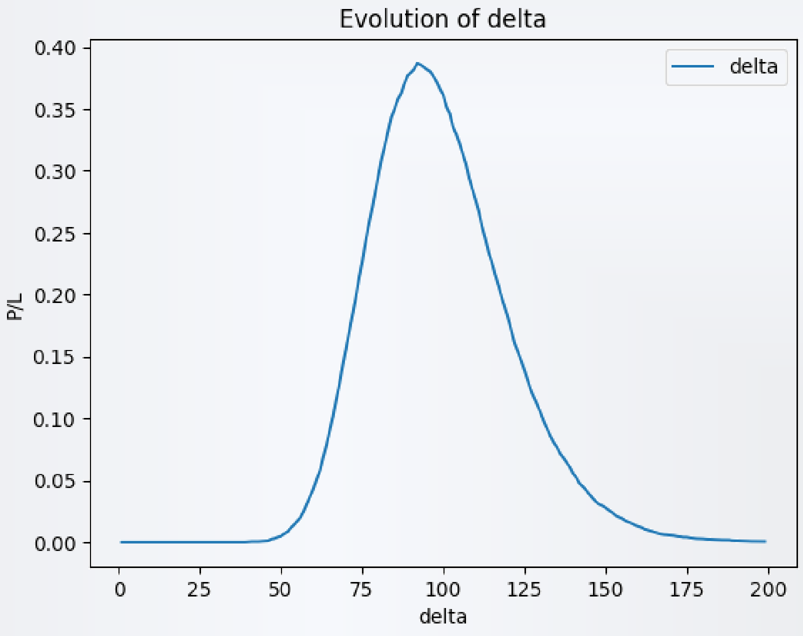
MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

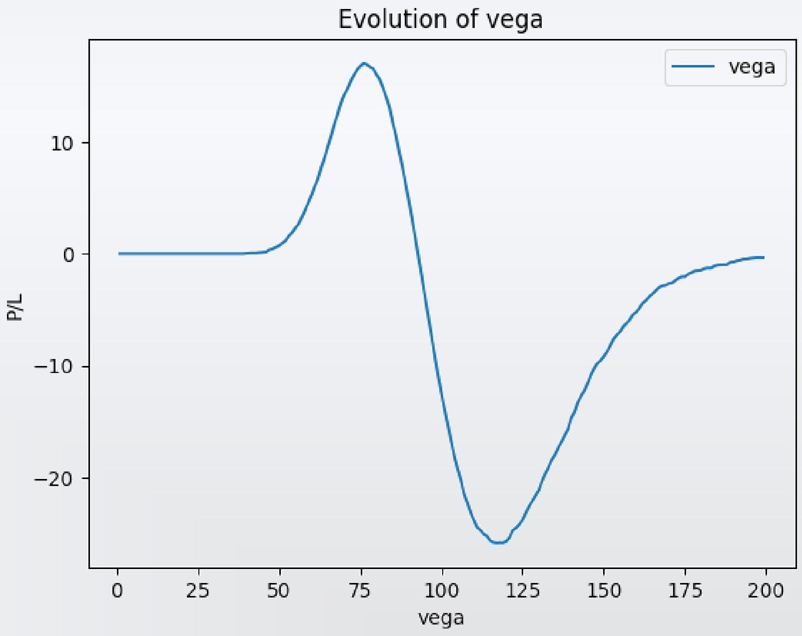
Bull spread (ou call spread)

- <u>Définition</u>

Achat d’un call de strike K1 + Vente d’un call de strike K2 (K1<K2)



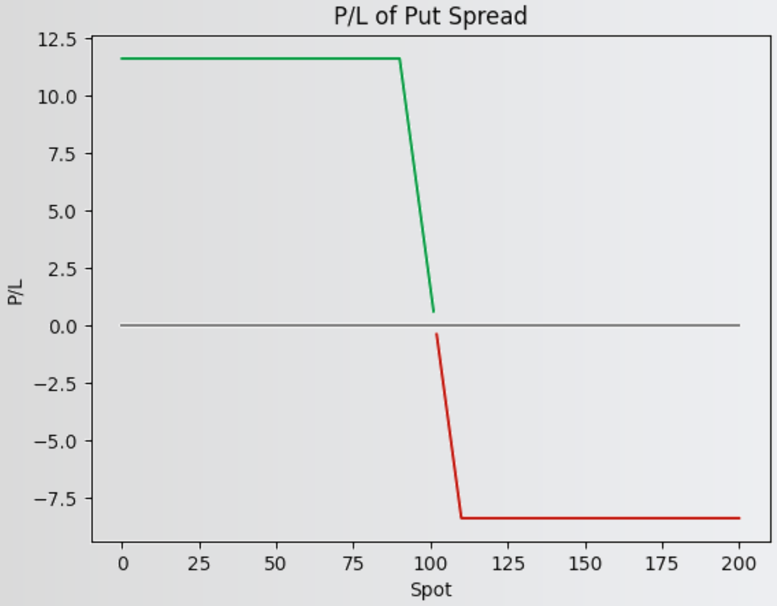


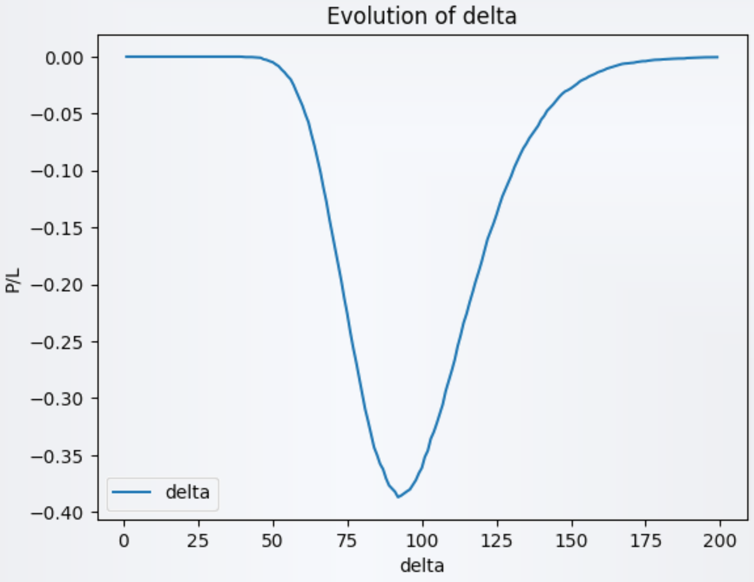


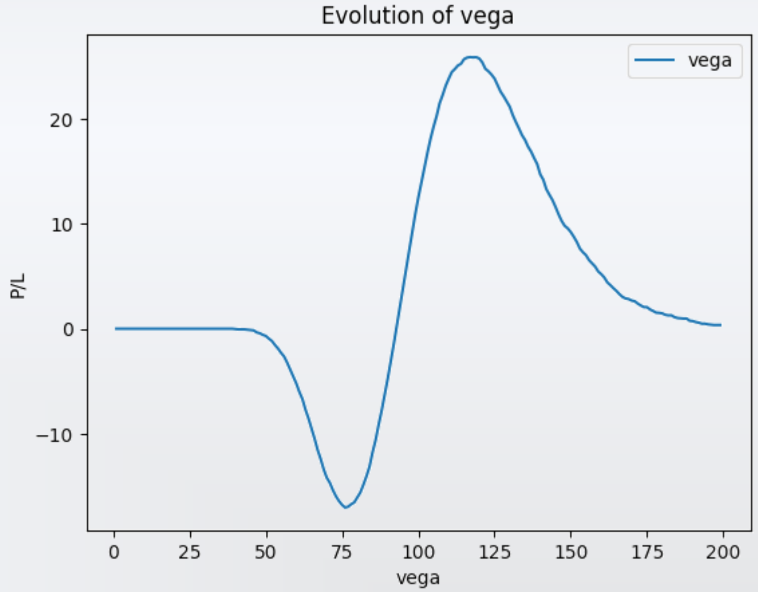
Bear spread (ou put spread)

- <u>Définition</u>

Achat d’un put de strike K2 + Vente d’un put de strike K1 (K1<K2)







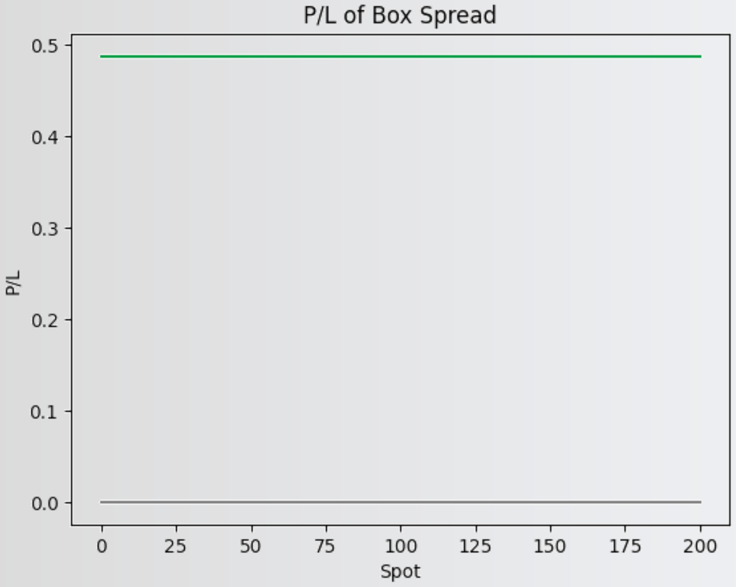
PHIT

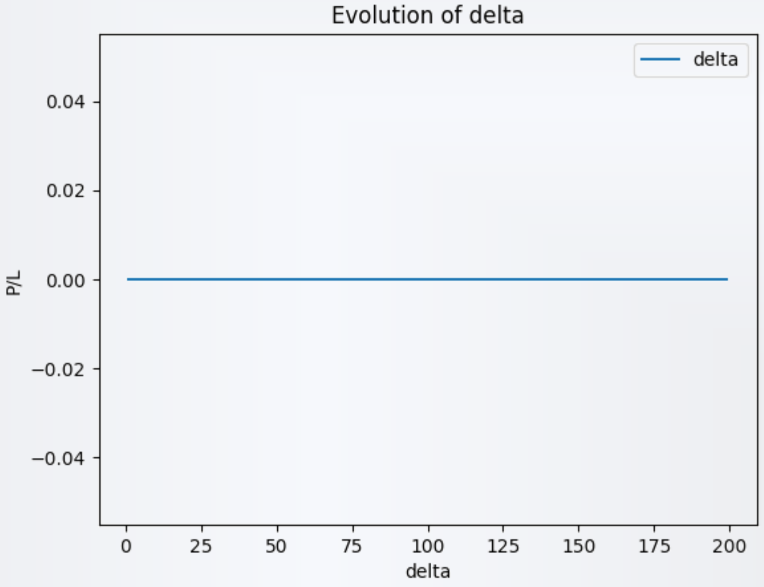
MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

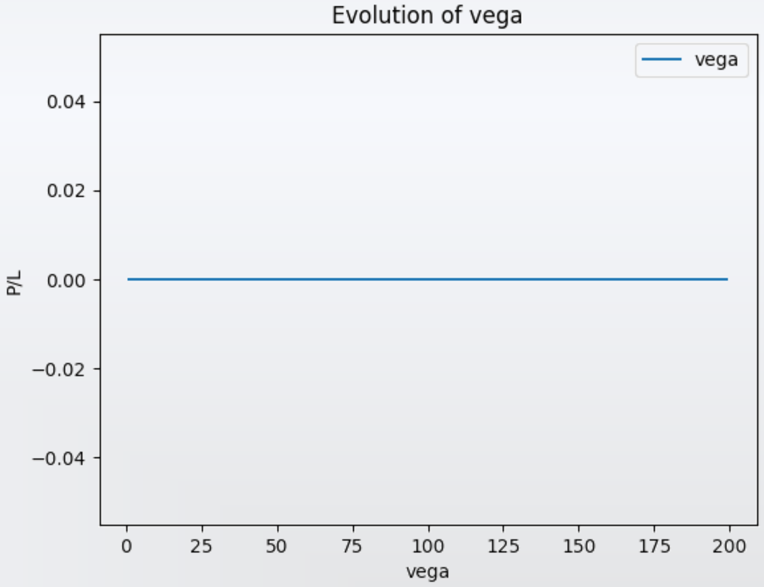
Box spread

- <u>Définition</u>

Achat d'un bull spread (K1, K2) + Achat d'un bear spread (K1, K2)



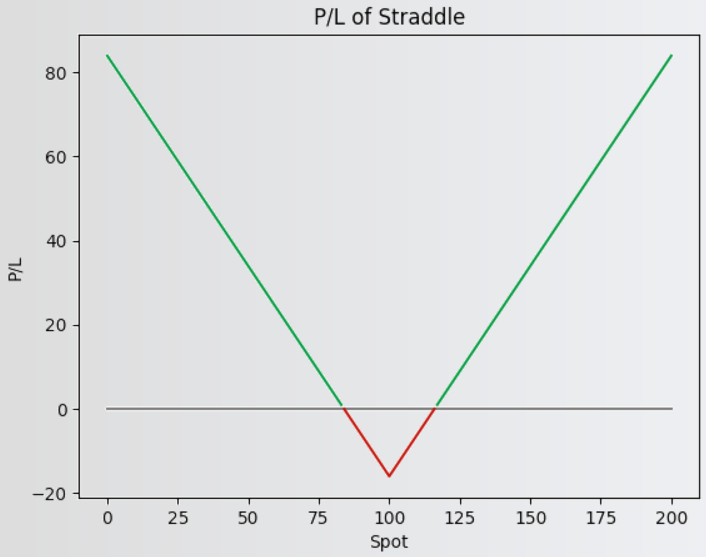


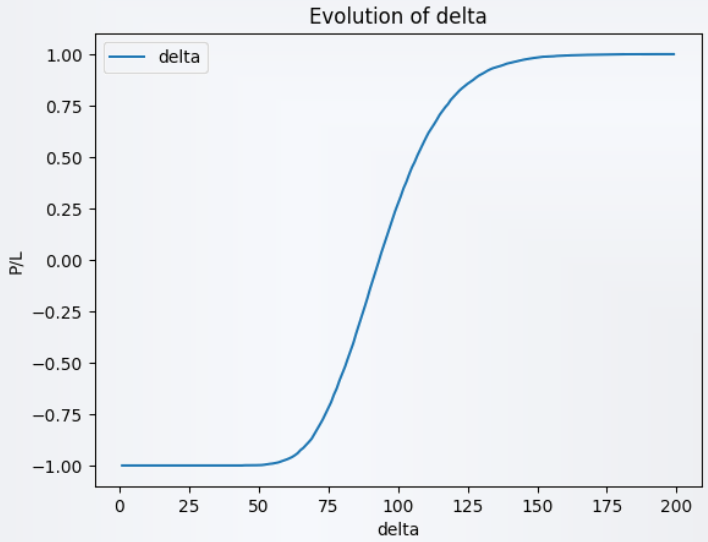


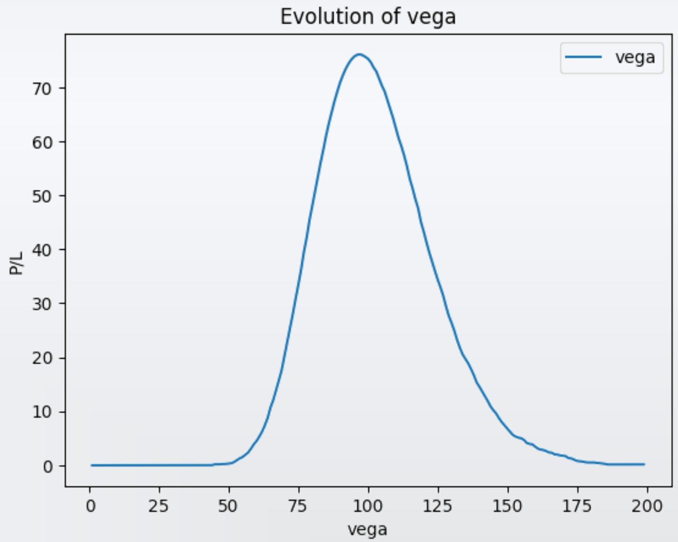
Straddle

- <u>Définition</u>

Achat d’un call de strike K + Achat d’un put de strike K



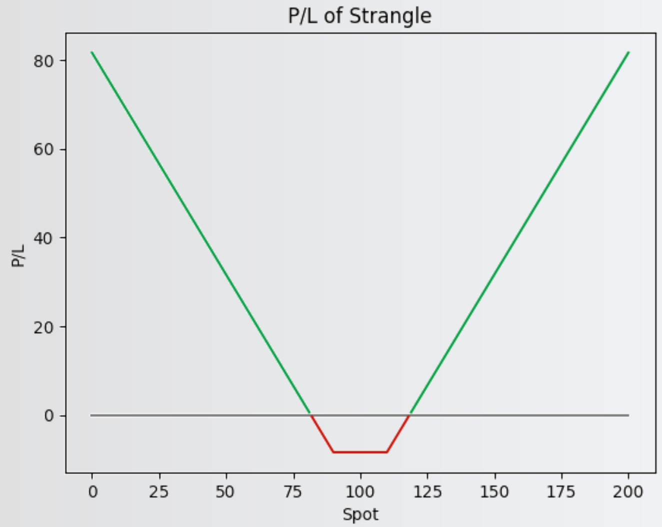


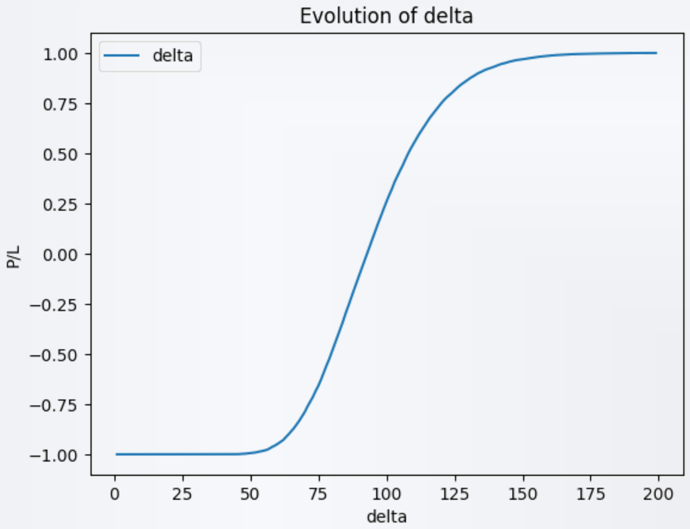


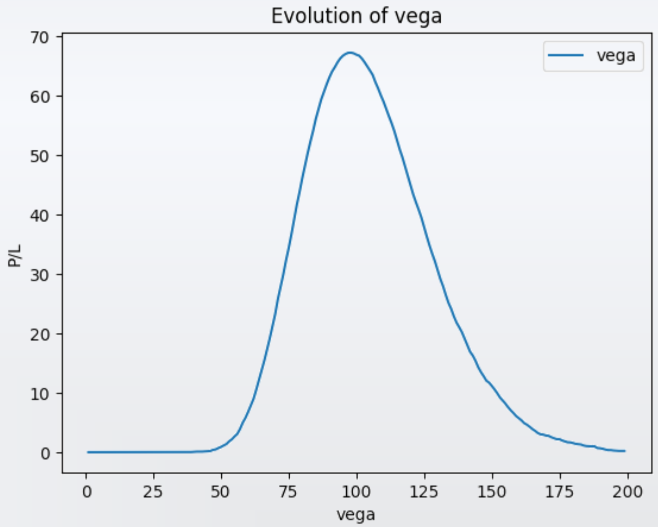
Strangle

- <u>Définition</u>

Achat d’un call de strike K2 + Achat d’un put de strike K1 (K1<K2)



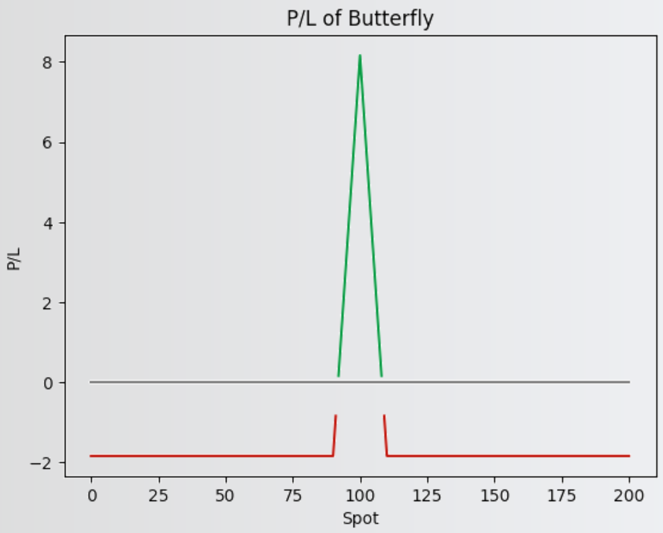


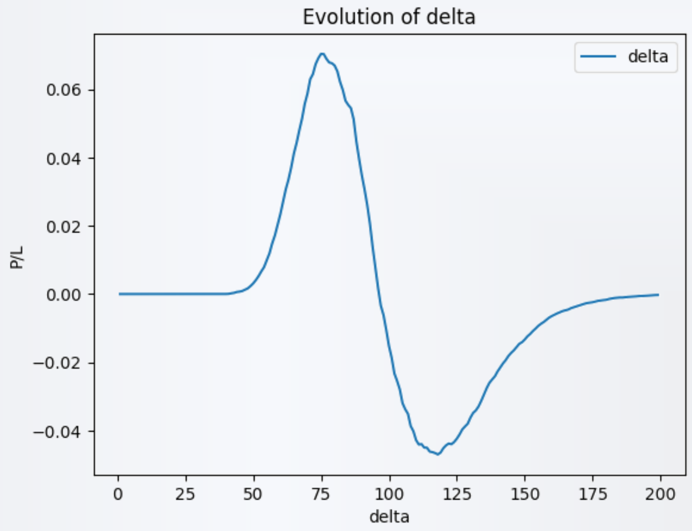


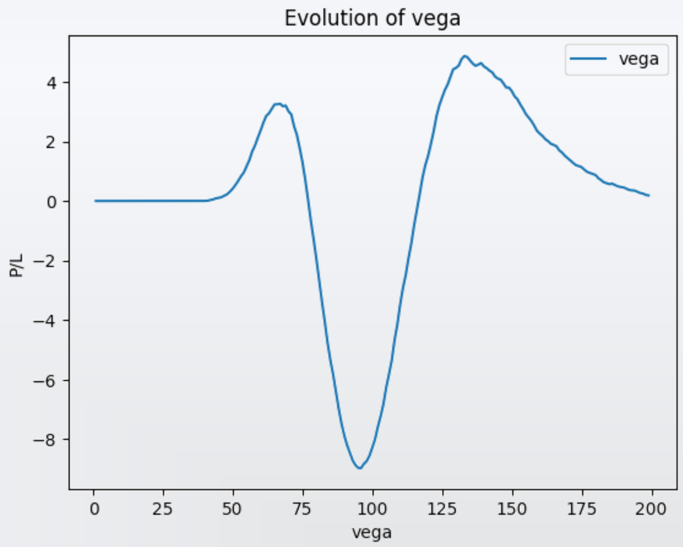
Butterfly spread

- <u>Définition</u>

Achat d'un call de strike K1 + Achat d'un call de strike K3 + Vente 2 call de strike K2 (K1<K2<K3)
= Vente Put Spread (K1, K2) + Vente Call Spread (K2, K3)







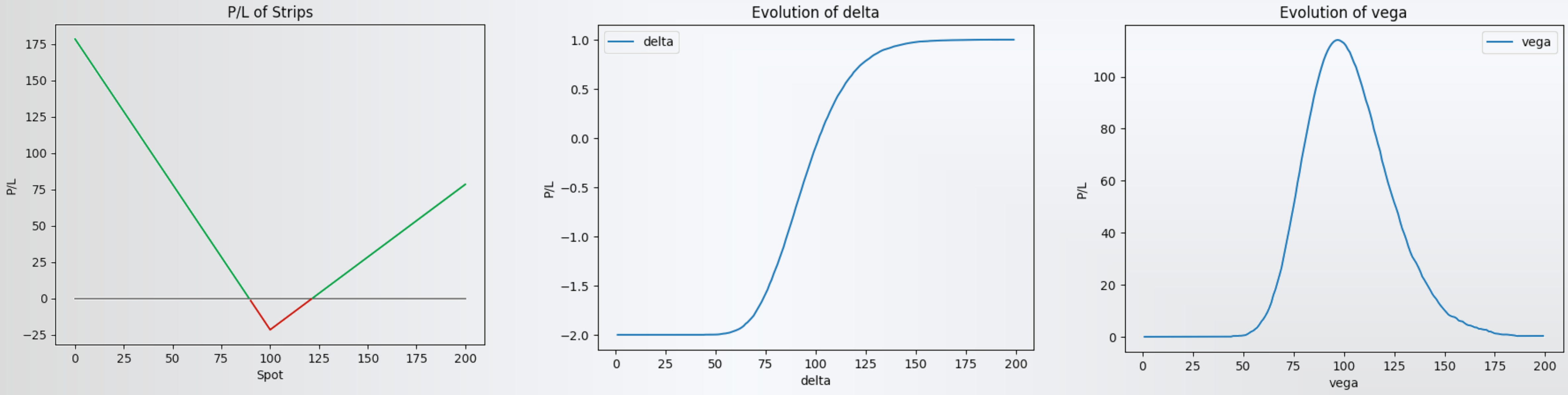
PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Strips

- <u>Définition</u>

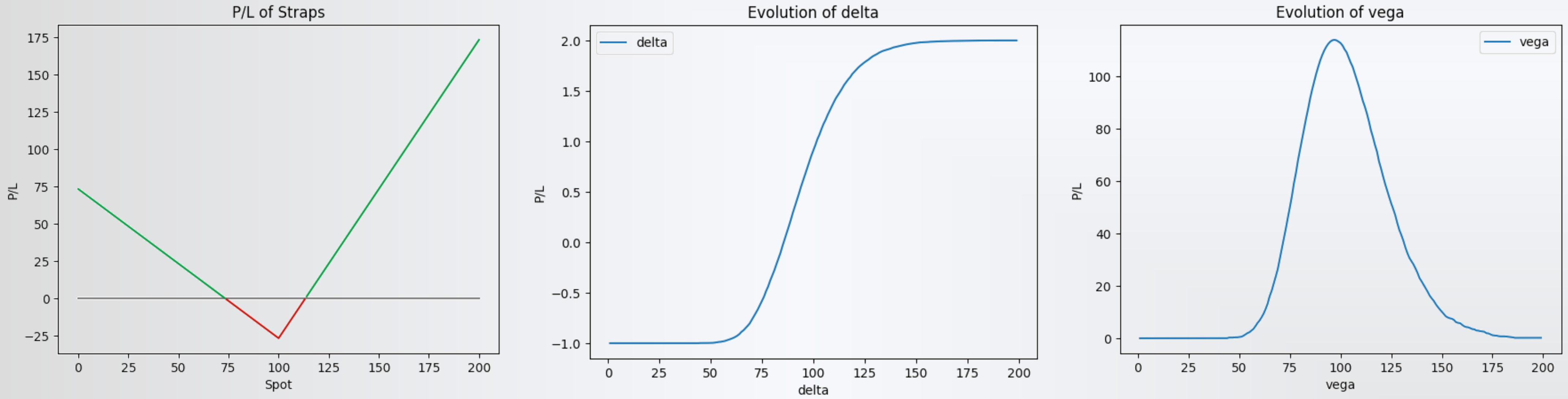
Achat d'un call de strike K + Achat de 2 puts de strike K



Straps

- <u>Définition</u>

Achat de 2 calls de strike K + Achat d’un put de strike K



PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Options Exotiques

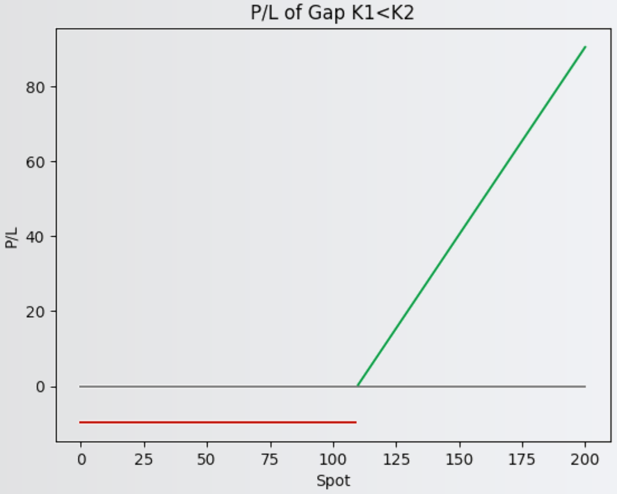
MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

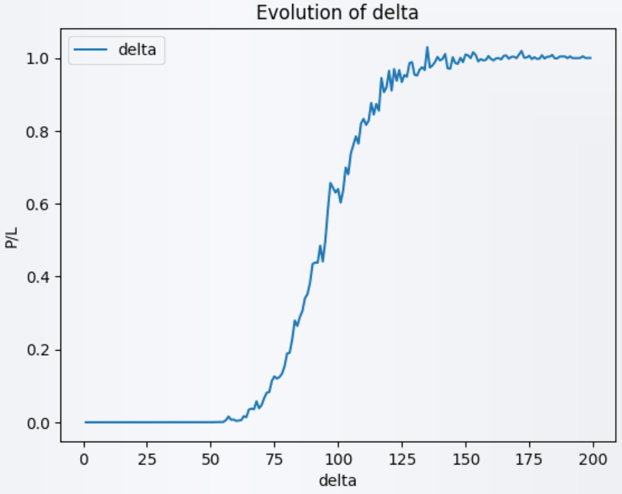
Options Gap

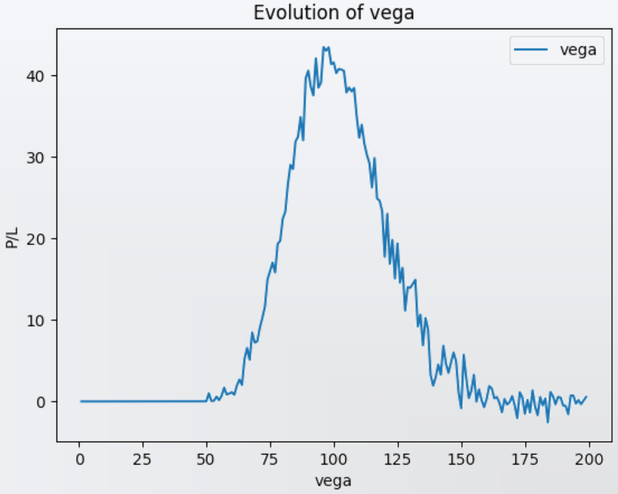
- <u>Définition</u>

Un call Gap est un call européen qui délivre un payoff égal à $S_T - K_1$ quand $S_T > K_2$. K_1 peut être supérieur ou inférieur à K_2. On peut modifier la formule de BS pour caller sur ce payoff.

<u>Cas $K_1 < K_2$:</u>







PHIT

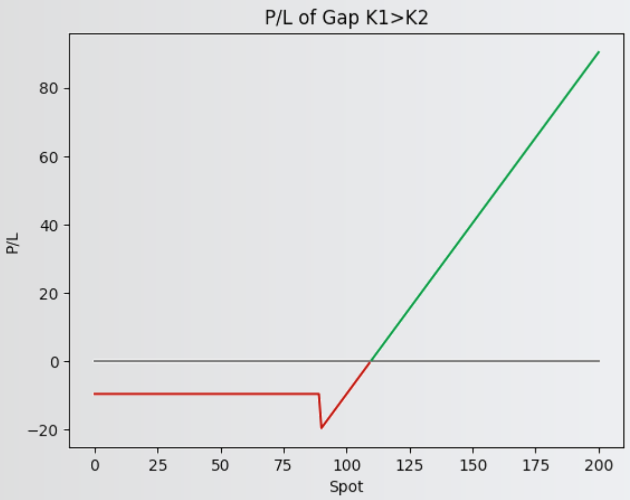
MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

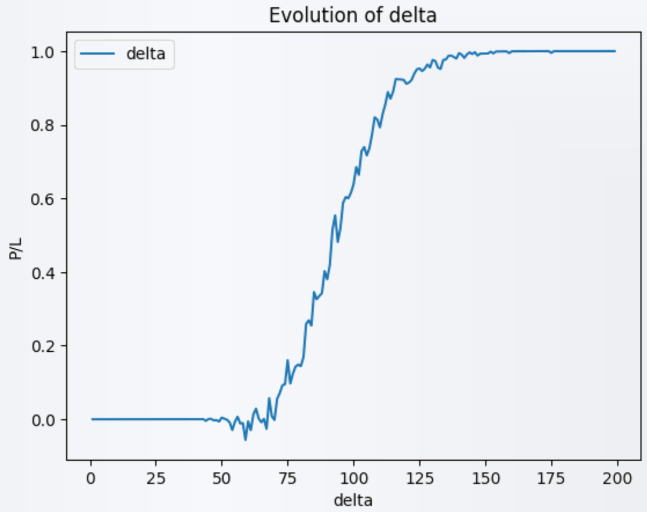
Options Gap

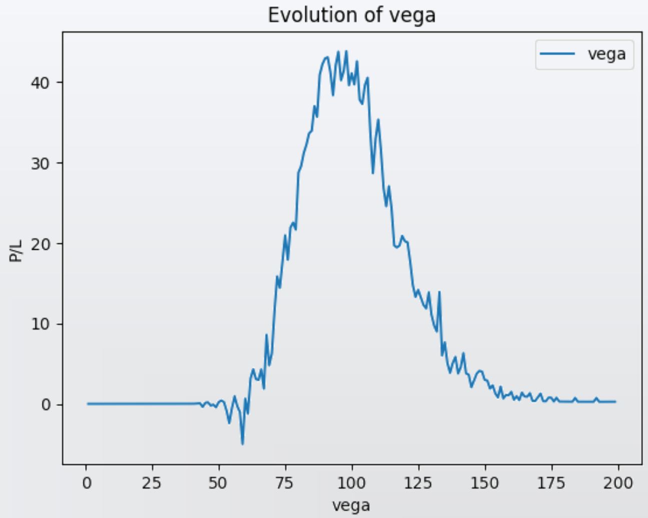
- <u>Définition</u>

Un call Gap est un call européen qui délivre un payoff égal à $S_T - K_1$ quand $S_T > K_2$. K_1 peut être supérieur ou inférieur à K_2. On peut modifier la formule de BS pour caller sur ce payoff.

<u>Cas $K_2 < K_1$:</u>







PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Options à déclenchement différé – *Forward Start Options*

- <u>Définition</u>

Ce sont des options qui n'entrent en activité qu'à une date ultérieure T_1 et qui aura pour échéance $T_2 > T_1$. Le strike n'est pas défini en date initiale et est défini en T_1 selon une règle bien précise (à l'ATM, à 5% ITM, etc.).

Options cliquet

- Définition

C’est une série de calls ou de puts dont les prix d’exercice sont fixés selon des règles déterminées en date initiale (dates de maturité différentes, strikes différents, etc.).

On peut l’analyser comme un portefeuille d’options.

Options composées – *compound options*

- Définition

Ce sont des options sur options (call sur call, call sur put, put sur call, put sur put). Elles ont donc deux strikes et deux maturités différentes. Une formule analytique existe pour ces options.

Options au choix – *chooser options*

- Définition

Ce sont des options où à la date T_1, la valeur de cette option sera $\max(c, p)$ avec c la valeur du call du sous-jacent et p celle du put. Le call et le put auront les mêmes paramètres (strike, maturité, sous-jacent).

Options barrières

- Définition

Les options barrières sont des options dont le payoff dépend du passage éventuel d'un seuil (déterminé initialement) par le prix de l'actif sous-jacent pendant une certaine période.

Différents types existent:

- *Knock-Out* : qui cesse d'exister une fois le prix de l'actif sous-jacent atteint un certain seuil
- *Knock-In* : qui ne commence à exister qu'une fois la barrière atteinte par le prix du sous-jacent

Options barrières

- Définition

Typologie:

- *Down-and-out* : qui cesse d'exister une fois le prix de l'actif sous-jacent atteint un certain seuil (en dessous du prix initial du sous-jacent)
- *Up-and-out* : qui cesse d'exister une fois le prix de l'actif sous-jacent atteint un certain seuil (au dessus du prix initial du sous-jacent)
- *Down-and-in* : qui ne commence à exister qu'une fois la barrière atteinte par le prix du sous-jacent (en dessous du prix initial du sous-jacent)
- *Up-and-in* : qui ne commence à exister qu'une fois la barrière atteinte par le prix du sous-jacent (au dessus du prix initial du sous-jacent)

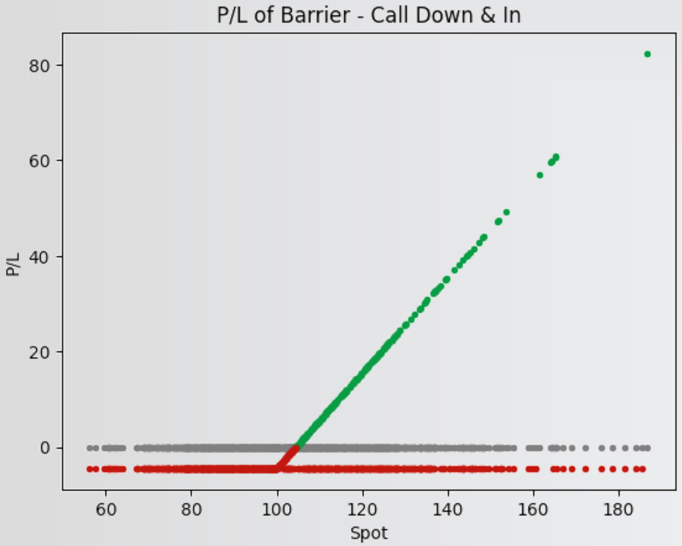
Options barrières

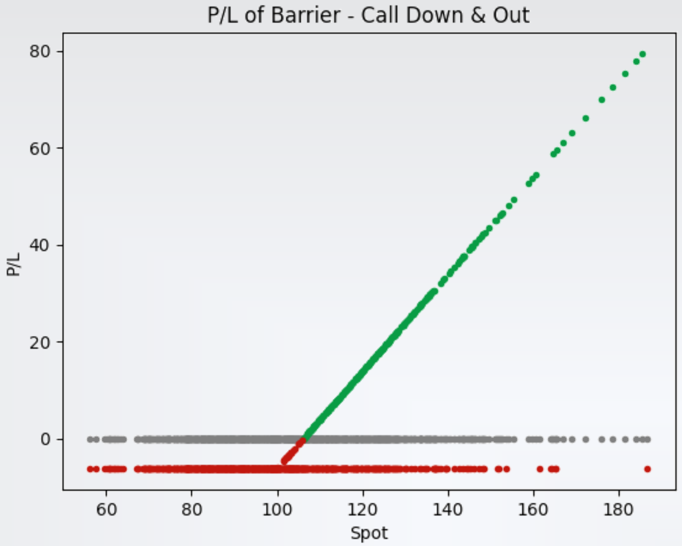
- Remarques

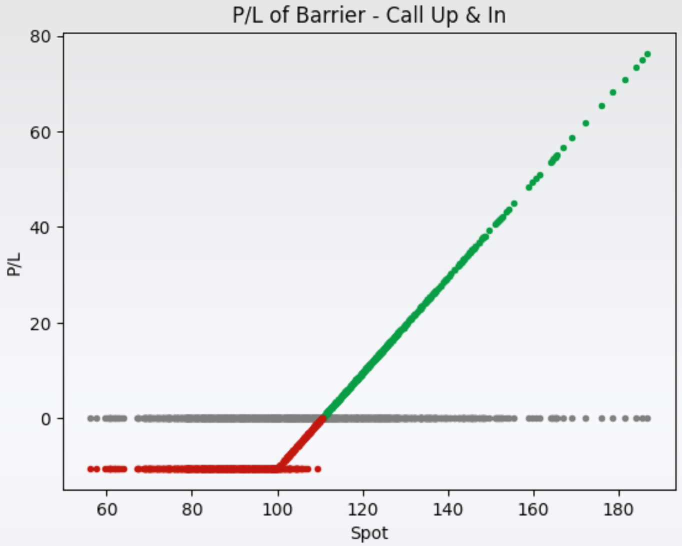
Il existe une formule analytique de valorisation de ces options.

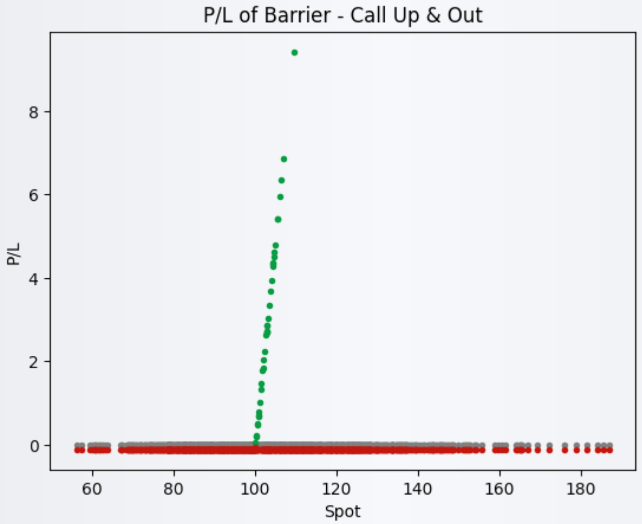
A noter, dans un modèle BS :
Call = Call Down and In + Call Down and out
Call = Call Up and In + Call Up and out
Put = Put Up and In + Put Up and out
Put = Put Down and In + Put Down and out

Options barrières









Options digitales

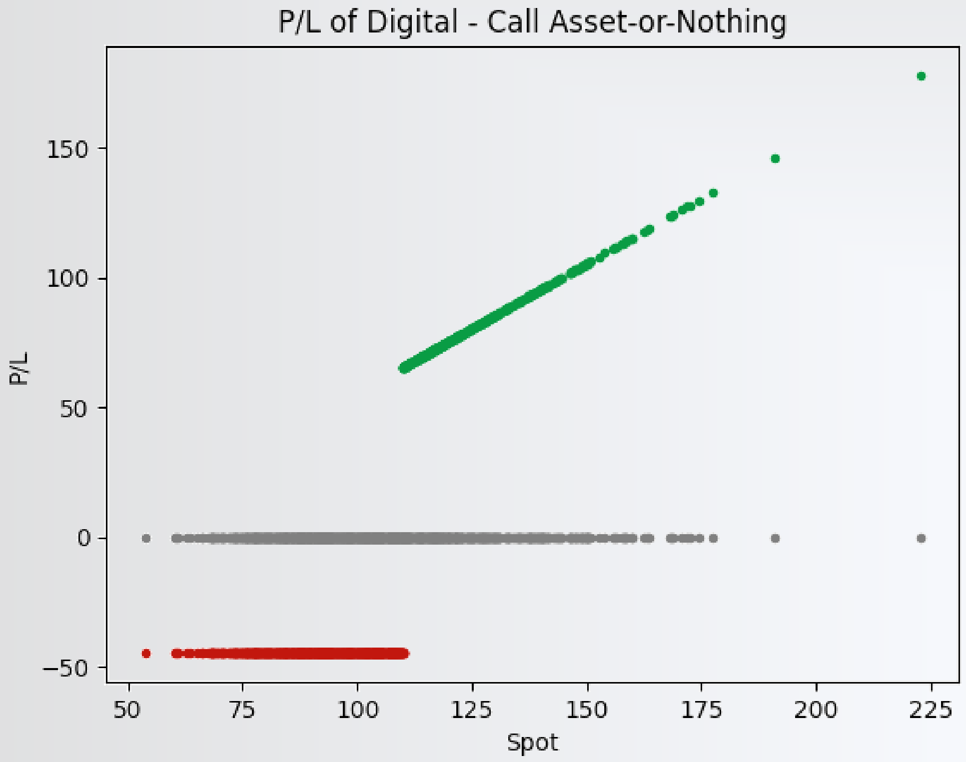
- Définition

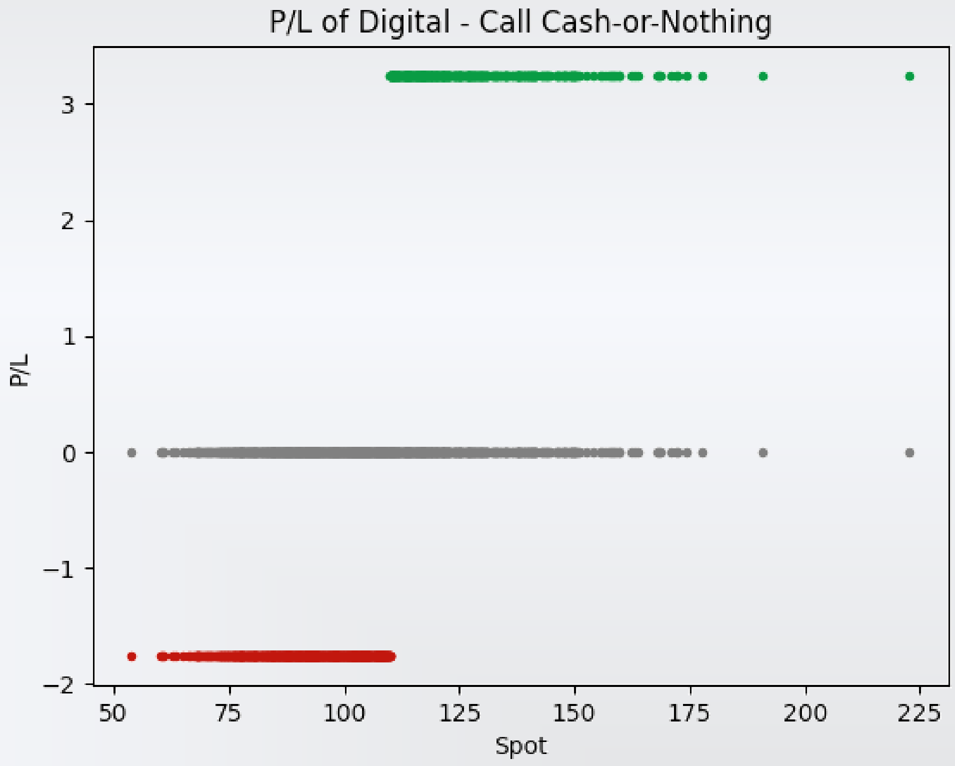
Les options digitales (ou binaires) ont des payoffs discontinus quand le prix du sous-jacent est supérieur (call) ou inférieur (put) à un strike.

Différents types existent:

- *Cash-or-Nothing* : quand l'option est ITM, l'option paie un flux fixe Q, sinon elle paie 0.
- *Asset-or-Nothing*: quand l'option est ITM, l'option paie le sous-jacent S_T, sinon elle paie 0.

Options digitales





Options lookback

- <u>Définition</u>

Les payoffs délivrés par les options lookback dépendent du niveau maximal ou minimal atteint par le prix du sous-jacent pendant la durée de vie de l'option.

Typologie :

- *Strike Flottant* :
    - Pour le call, on achète au prix minimum observé pendant la durée de vie de l'option
    - Pour le put, on vend au prix maximal observé
- *Strike Fixe*:
    - Le strike est fixe, on prend comme prix de référence au final, le maximum (pour un call) ou le minimum (pour un put) des prix observés pendant la durée de vie de l'option.

Options asiatiques

- <u>Définition</u>

Le payoff de l'option dépend duprix moyen de l'actif sous-jacent, calculée pendant la durée de vie de l'option.

$$\text{payoff}_{\text{call}} = \max(0, S_{\text{mean}} - K)$$

$$\text{payoff}_{\text{put}} = \max(0, K - S_{\text{mean}})$$

Moins couteuse que les options européennes classiques ?!

Options sur paniers – *Basket Options*

- Définition

Ces options vont porter sur deux actifs ou plus.

On intègre alors un nouveau paramètre dans le calcul : la corrélation entre ces actifs. Des formules analytiques peuvent exister.

Le payoff peut dépendre du portefeuille de ces actifs (compositions d'actif), ou de la performance d'un actif relativement aux autres:

- Worst-Of Call : $\max\left(0, \min\left(S_1(T), S_2(T), \dots, S_n(T)\right) - K\right)$
- Worst-Of Put : $\max\left(0, K - \min\left(S_1(T), S_2(T), \dots, S_n(T)\right)\right)$
- Best-Of Call : $\max\left(0, \max\left(S_1(T), S_2(T), \dots, S_n(T)\right) - K\right)$
- Best-Of Put : $\max\left(0, K - \max\left(S_1(T), S_2(T), \dots, S_n(T)\right)\right)$

Produits de taux

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Obligations à clauses optionnelles

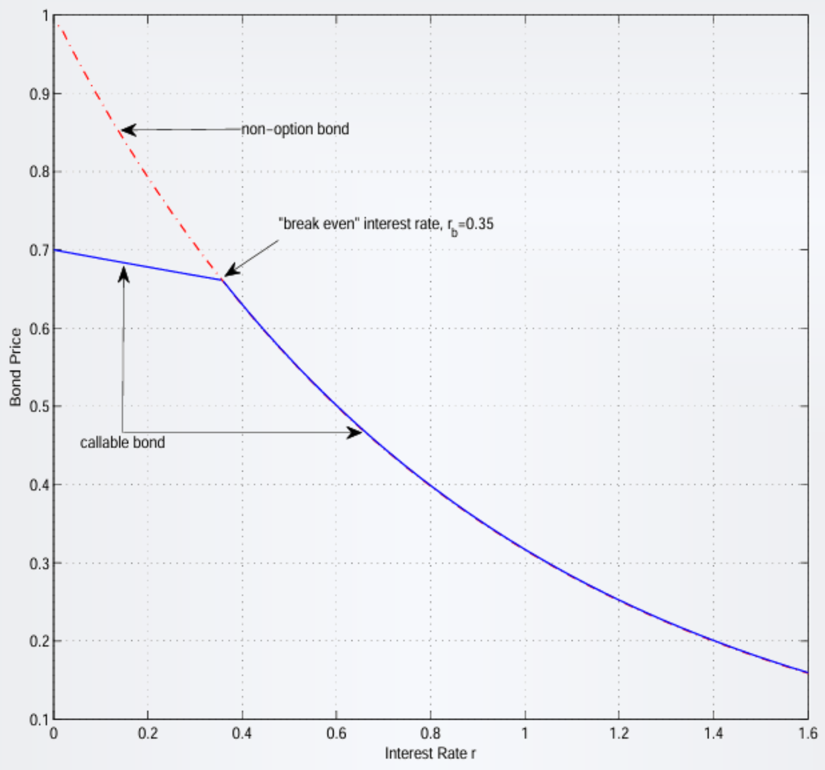
- Définition – Callable Bonds

Certaines obligations donnent la possibilité à l'émetteur de rembourser par anticipation à un prix fixé à certaines dates futures.
Le prix d'exercice est le prix auquel l'émetteur convient de rembourser l'obligation.
L'existence de cette option de remboursement anticipé est reflétée dans le taux actuariel de ce type d'obligation (> à celui des obligation classique).

Prix callable bond = bond classique équivalent – prix d'une option d'achat
Payoff au moment quand le bond est callable = $\min(Bond\ Price(t), call(t))$
L'émetteur va exécuter son option si la valeur du call est plus petit que la valeur du prix de l'obligation

Obligations à clauses optionnelles

- <u>Définition – Callable Bonds</u>



Obligations à clauses optionnelles

- <u>Définition – Callable Bonds</u>

En utilisant le modèle de Black pour l'option:

$$c = P(0,T)\big(F_B\mathcal{N}(d_1) - K\mathcal{N}(d_2)\big)$$
$$p = P(0,T)\big(K\mathcal{N}(-d_2) - F_B\mathcal{N}(-d_1)\big)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F_B}{K}\right) + \sigma_B^2 \times \frac{T}{2}}{\sigma_B\sqrt{T}}, d_2 = d_1 - \sigma_B\sqrt{T}$$

Où $F_B = \frac{B_0 - I}{P(0,T)}$ avec B_0 le prix de l'obligation en date 0, I la valeur actuelle des coupons payables pendant la durée de vie de l'option, $\sigma_B = D \times F_0 \times \underbrace{\sigma_r}_{\text{vol taux actuariel}}$ volatilité du forward de taux.

Obligations à clauses optionnelles

- Définition – Putable Bonds

Une obligation putable est un type d'obligation qui confère à son détenteur (investisseur) le droit, mais non l'obligation, de forcer l'émetteur à rembourser l'obligation avant sa date d'échéance. En d'autres termes, il s'agit d'une obligation avec une option de vente intégrée.

Étant donné que la valeur des obligations diminue lorsque les taux d'intérêt augmentent, elles offrent aux investisseurs une protection contre les hausses potentielles des taux d'intérêt.Dans le même temps, les émetteurs d'obligations réduisent le coût de leur dette en offrant des rendements plus faibles sur les obligations. Les investisseurs acceptent des rendements plus faibles en échange de la possibilité de sortir des investissements en cas de conditions de marché défavorables.

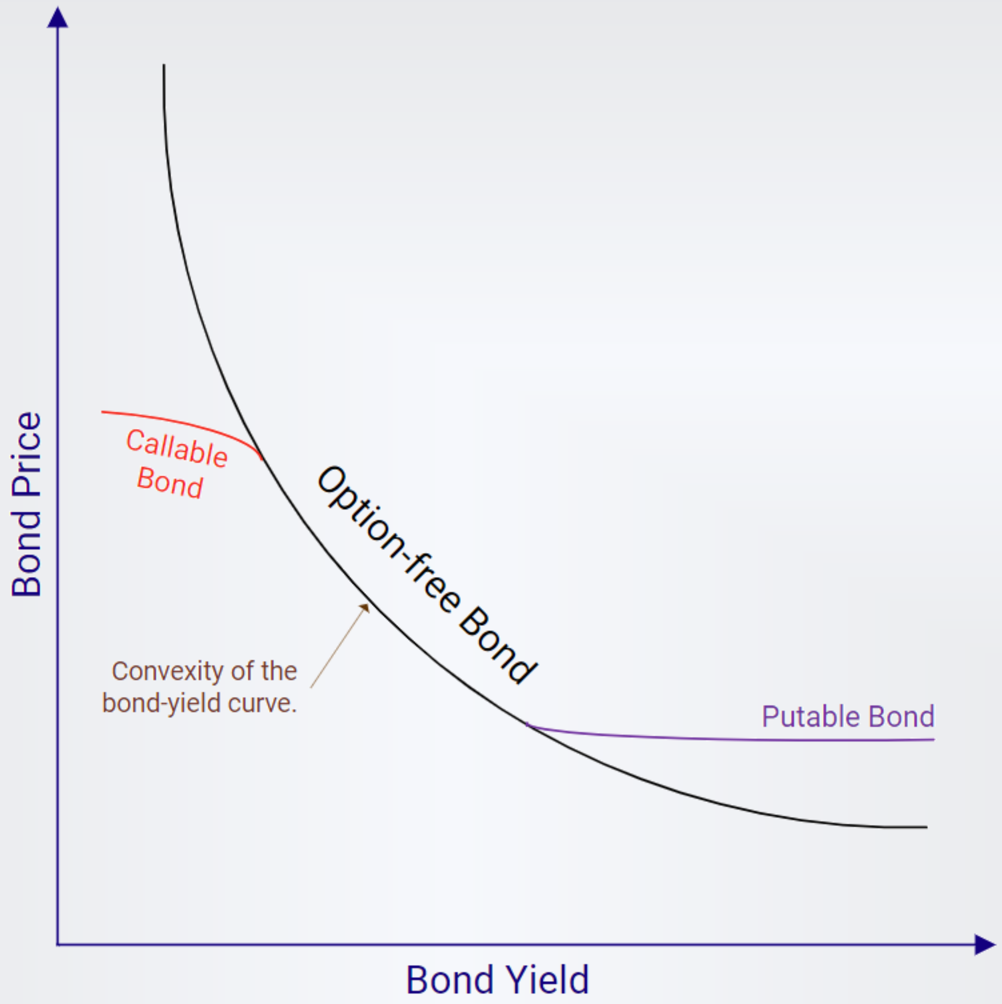
Prix putable bond = bond classique équivalent + prix d’une option de vente

Payoff au moment quand le bond est putable = $max(Bond\ Price(t), put(t))$

PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Obligations à clauses optionnelles



Modèle de taux courts

- Modèle de Rendleman et Bartter

$$dr = \mu r dt + \sigma r dz$$

μ et σ constants. Pas de retour à la moyenne qui est quelque chose que l'on remarque sur les taux.

- Modèle de Vasicek

$$dr = a(b - r)dt + \sigma dz$$

a et b sont des constantes. Il y a un processus de retour à la moyenne ! Le terme stochastique σdz implique des variations de taux gaussiennes. Le taux court r peut devenir négatif car l'écart type instantané ne dépend pas du niveau atteint par r.

Modèle de taux courts

- Modèle de Cox-Ingersoll-Ross

$$dr = a(b - r)dt + \sigma\sqrt{r}dz$$

a et b sont des constantes. Il y a un processus de retour à la moyenne ! L'écart type est proportionnel à $\sqrt{r}$. Si les taux diminue, alors l'écart type fait de même.

➢ Limites de ces modèles : pas de description de l'évolution des taux au cours du temps. En d'autres termes, ces modèles ne s'austent pas automatiquement à la structure par termes observée sur le marché aujourd'hui.

Modèle de taux courts

- Modèle de Ho et Lee

$$dr = \Theta(t)dt + \sigma dz$$

σ est une constante et $\Theta(t)$ est une fonction du temps, calibrée pour que le modèle s'ajuste parfaitement à la courbe ZC initiale. $\Theta(t)$ définit donc la variation moyenne du taux court à la date t et ne dépend pas du niveau atteint par r à cette date.

$$\Theta(t) = F_t(0,t) + \sigma^2 t$$

Où $F(0,t)$ est le taux forward instantané pour l'horizon t, vu à la date 0, $F_t(0,t)$ désigne la dérivée partielle de F par rapport à t.

PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Modèle de taux courts

- <u>Modèle de Black et White à 1 facteur</u>

$$dr = [\Theta(t) - ar]dt + \sigma dz = a\left[\frac{\Theta(t)}{a} - r\right]dt + \sigma dz$$

a et σ sont des constantes. C'est une extension du modèle Ho et Lee en intégrant un retour à la moyenne au rythme a. Lorsque a=0, on retrouve le modèle de Ho & Lee.

$$\Theta(t) = F_t(0,t) + aF(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})$$

Page 783 – Modèle HJM & Libor

Modèle de taux courts

- <u>Modèle de Black, Derman et Toy</u>

$$d\ln r = [\Theta(t) - a(t)\ln(r)]dt + \sigma(t)dz, \qquad a(t) = -\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}$$

Modèle binomial pour un processus de taux court log-normal. $\sigma'(t)$ ets la dérivée partielle de σ par rapport à t.
Ici, on ne peut pas avoir de taux négatif contrairement aux modèles de HL et HW.
En général, on aura a=0 et σ constant (version log normale de HL)

$$d\ln r = \Theta(t)dt + \sigma dz$$

Modèle de taux courts

- Modèle de Black et Karasinky

Extension du modèle BDT où le taux de retour à la moyenne et la volatilité sont déterminés indépendamment. En pratique a et σ sont supposé constants.

$$d\ln r = [\Theta(t) - a\ln(r)]dt + \sigma dz$$

Comme dans les autres modèles, la fonction $\Theta(t)$ est déterminée de façon à parfaitement ajuster la structure par termes des taux initiale.

Modèle de taux courts « avancés »

- Limites des modèles de taux ci-dessus

1. La plupart n'intègre qu'un seul facteur
2. Ils ne laissent qu'une marge de manœuvre limitée concernant la structure de volatilité.

En rendant dépendants du temps les paramètres a et σ, un analyste peut calibrer les modèles de sorte qu'ils s'ajustent aux volatilités observées sur les marchés, mais, dans ce cas la structure par terme des volatilités n'est plus stationnaire. La structure future peut alors être très différente de celle observée aujourd'hui.

Modèle de taux courts « avancés »

- Modèle de Hearth, Jarrow et Morton

Le processus de prix d'un ZC s'écrit:

$$dP(t,T) = r(t)P(t,T)dt + v(t,T,\Omega_t)P(t,T)dz(t)$$

Où

- $P(t,T)$ est le prix de date t d'un ZC payant 1 en date T,
- Ω_t est le vecteur des valeurs passées et présentes (en date t) des prix d'obligations et des taux d'intérêt pertinents pour déterminer les volatilités des prix en date t,
- $v(t,T,\Omega_t)$ est la volatilité de $P(t,T)$,
- $F(t,T)$ est le taux forward instantané, vu de la date t, d'un contrat de maturité T
- $r(t)$ est le taux court instantané en date t,
- $f(t,T_1,T_2)$ est le taux forward pour la période allant de T1 à T2, vu de la date t

Modèle de taux courts « avancés »

- Modèle de Hearth, Jarrow et Morton

On peut aussi écrire le processus de taux forward

$$df(t, T_1, T_2) = \left(\frac{\nu(t, T_2, \Omega_t)^2 - \nu(t, T_1, \Omega_t)^2}{2(T_2 - T_1)}\right) dt + \frac{\nu(t, T_1, \Omega_t) - \nu(t, T_2, \Omega_t)}{(T_2 - T_1) dz(t)}$$

Limites du modèle:

- Il est fondé sur les taux forwards instantanés qui ne sont pas observables directement
- Son calibrage est délicat (simulation MC)

Modèle de taux courts « avancés »

- Modèle de marché LIBOR (dit BGM pour Brace, Gatarek et Musiela)

Le modèle se base sur des caps négociés sur le marché aujourd'hui :

$$dF_k(t) = \zeta_k(t)F_k(t)dz \quad \text{ou} \quad \frac{dP(t,t_k)}{P(t,t_k)} = \text{drift} + \nu_k(t)dz$$

Où

- $F_k(t)$ est le taux forward entre les dates t_k et t_{k+1} vu de la date t, avec une composition des intérêts déterminée par $\delta_k = t_{k+1} - t_k$ (trimestriel en pratique) sur une base Exact/Exact
- $\zeta_k(t)$ est la volatilité de $F_k(t)$ à la date t
- $\nu_k(t)$ est la volatilité à la date t du prix ZC d'échéance t_k noté $P(t,t_k)$

PHIT

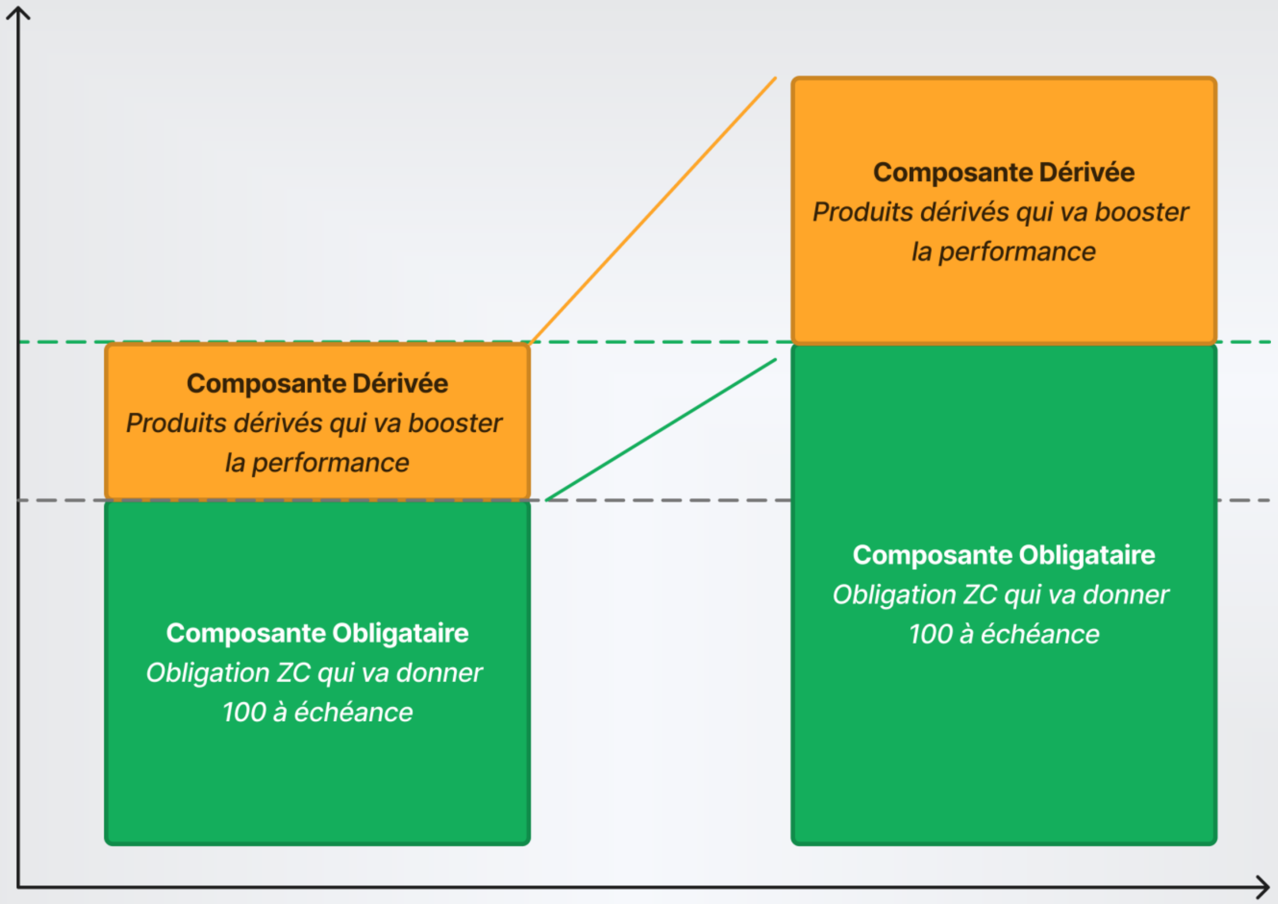
MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Produits Structurés

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Qu’est qu’un produit structurés?
Des exemples ?

Produits Structurés



Lancement du produit
Investissement=100

A maturité
Investissement=100 + perf du dérivé

PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Obligations convertibles

- Définition

Produits dit « hybride » car il combine à la fois une composante « Taux » et une composante « Equity »

Hull (2000) définit l'obligation convertible comme une obligation d'entreprise qui peut être convertie en un montant prédéterminé de la part de l'entreprise à certains moments de sa vie.

- Décomposition

1. Point de vue d'un produit de taux : une obligation classique + une option d'achat qui permet à l'investisseur de transformer l'obligation en action
2. Point de vue d'un produit equity:
   1. Une obligation classique + une option de vente d'échanger l'action contre l'obligation
   2. Un swap à maturité qui donne à l'investisseur à maturité les coupons de l'obligation en échange des dividendes des actions

Obligations convertibles

- Paramètres
  - La date de maturité T
  - La *face value* N : le notionnel
  - La *redemption value* R: la valeur qui sera payée à l'investisseur à la maturité si l'obligation n'a pas été converti avant
  - Le coupon c, sa fréquence étant f_c
  - Le *conversion ratio* C: c'est le nombre d'actions que l'investisseur va avoir si l'obligation est convertie
  - Le *Bond floor* B: c'est la valeur actualisée des CF associées à l'obligation (si il n'y a pas de conversion)
- PayOff

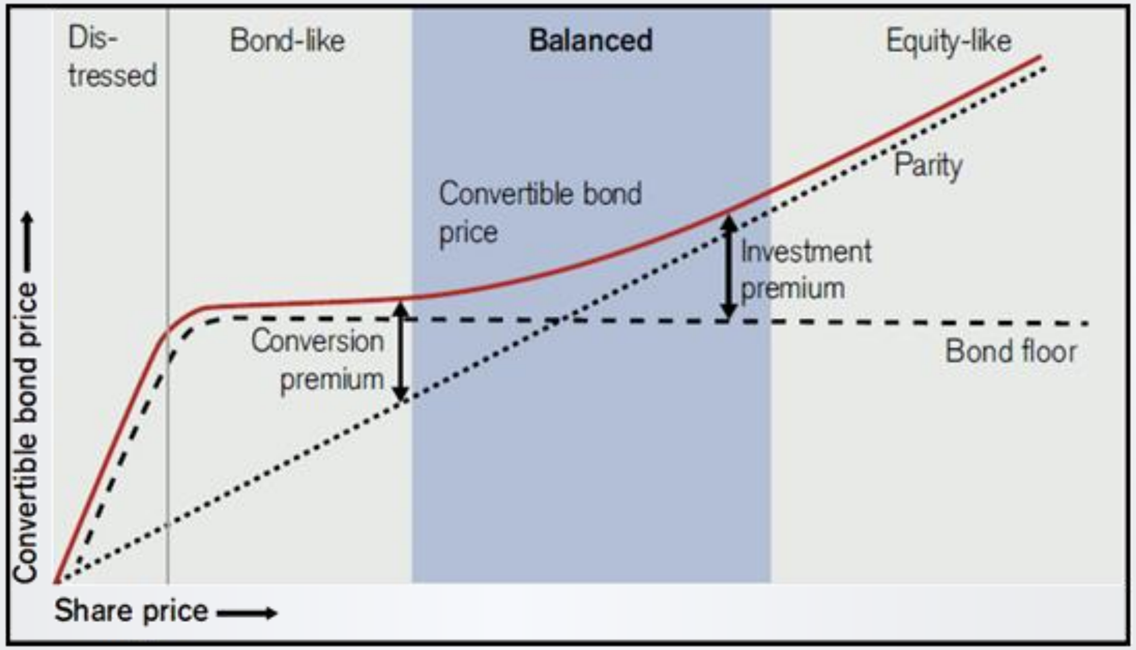
$$\max\left(N \times R + N \times \frac{c}{f_c}, S \times C\right)$$

PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Obligations convertibles

- <u>Comportement de l'OC</u>



Source Credit Suisse (2014)

Produits Structurés

- <u>Point d'attention</u>

Les produits à capital garanti = remboursement minimal de 100 quoiqu'il arrive
Les produits à capital protégé = garantie de capital jusqu'à un certain cours du sous-jacent

Il faut aussi regarder quand le capital est garanti (pas toujours sur toute la durée de vie du produit)

Produits Structurés

- Cartographie des produits structurés

La SSPA propose une cartographie des types de produits structurés.

Liens : https://sspa.ch/wp-content/uploads/2021/01/sspamap2021_fr_web.pdf

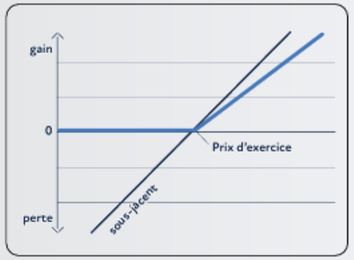
Produits Structurés – Protection du capital

11 Protection du capital

Note à capital protégé avec participation (1100)

Anticipations

- Hausse du sous-jacent
- Hausse de la volatilité
- Fortes baisses du cours des sous-jacents possibles



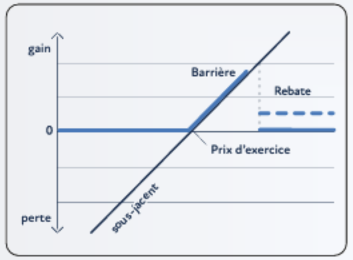
Caractéristiques

- Le remboursement minimal à l'échéance correspond à la protection du capital
- Protection du capital exprimée en pourcentage de la valeur nominale (p. ex. 100%)
- La protection du capital se rapporte uniquement à la valeur nominale et non au prix d'achat
- Pendant la durée de vie, la valeur du produit peut être inférieure à la protection du capital
- Participation à la croissance du cours du sous-jacent à partir du prix d'exercice
- Versement d'un coupon possible

Note à capital protégé avec barrière (1130)

Anticipations

- Hausse du sous-jacent
- Fortes baisses du cours des sous-jacents possibles
- Le sous-jacent n'atteindra pas, ni ne dépassera la barrière pendant la durée de vie du produit



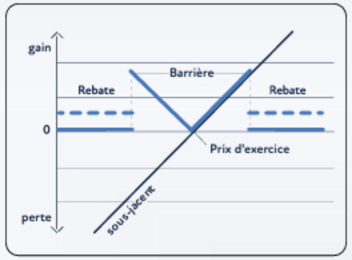
Caractéristiques

- Le remboursement minimal à l'échéance correspond à la protection du capital
- Protection du capital exprimée en pourcentage de la valeur nominale (p. ex. 100%)
- La protection du capital se rapporte uniquement à la valeur nominale et non au prix d'achat
- Pendant la durée de vie, la valeur du produit peut être inférieure à la protection du capital
- Participation à la hausse du prix sous-jacents au-delà du prix d'exercice
- Remboursement à l'échéance d'un montant équivalent à la protection du capital si la barrière supérieure est atteinte
- Possibilité de versement d'une remise en cas de franchissement de la barrière
- Possibilité de gain limitée

Note à capital protégé avec Twin Win (1135)

Anticipations

- Légère hausse ou légère baisse du sous-jacent
- De fortes variations des cours du sous-jacent sont possibles
- Le sous-jacent n'atteindra pas, ni ne dépassera la barrière inférieure ou supér ieure pendant la durée de vie du produit



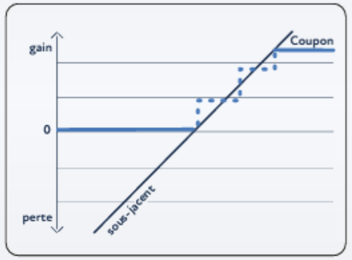
Caractéristiques

- Le remboursement minimal à l'échéance correspond à la protection du capital
- Protection du capital exprimée en pourcentage de la valeur nominale (p. ex. 100%)
- La protection du capital se rapporte uniquement à la valeur nominale et non au prix d'achat
- Pendant la durée de vie, la valeur du produit peut être inférieure à la protection du capital
- Participation à la hausse des prix sous-jacents au-dessus du prix d'exercice
- Lorsque la barrière supérieure ou inférieure est atteinte, cela entraîne le remboursement à l'échéance d'un montant équivalent à la protection du capital
- Possibilité de versement d'une remise au cas où que la barrière inférieure ou supérieure a été atteinte
- Possibilité de gain limitée

Note à capital protégé avec coupon (1140)

Anticipations

- Hausse du sous-jacent
- Fortes baisses du cours des sous-jacents possibles



Caractéristiques

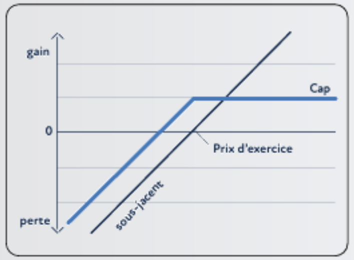
- Le remboursement minimal à l'échéance correspond à la protection du capital
- Protection du capital exprimée en pourcentage de la valeur nominale (p. ex. 100%)
- La protection du capital se rapporte uniquement à la valeur nominale et non au prix d'achat
- Pendant la durée de vie, la valeur du produit peut être inférieure à la protection du capital
- Le montant du coupon dépend de l'évolution du sous-jacent
- Le versement d'un coupon périodique est prévu
- Possibilité de gain limitée

Produits Structurés – Optimisation du rendement

Reverse Convertible (1220)

Anticipations

- Stagnation ou légère hausse du sous-jacent
- Baisse de la volatilité



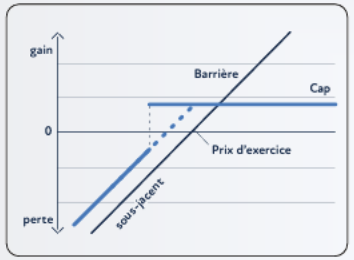
Caractéristiques

- Le coupon est payé indépendamment de la performance du sous-jacent
- Possibilité de profit limitée (Cap)
- Si le sous-jacent est supérieur au prix d'exercice à l'échéance, le coupon est remboursé avec la valeur nominale
- Si le sous-jacent est inférieur au prix d'exercice à l'échéance: livraison du sous-jacent et/ou règlement en espèces plus le coupon
- Plusieurs sous-jacents (Worst-of) permettent des conditions de produit plus attractives, mais avec un risque plus élevé

Barrier Reverse Convertible (1230)

Anticipations

- Stagnation ou légère hausse du sous-jacent
- Baisse de la volatilité
- Le sous-jacent n'atteindra pas la barrière pendant la durée de vie du produit



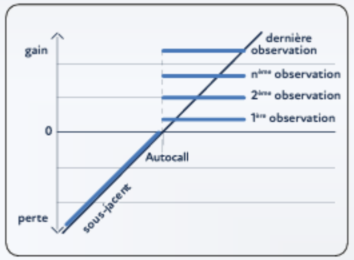
Caractéristiques

- Le coupon est payé indépendamment de la performance du sous-jacent
- Possibilité de profit limitée (Cap)
- Si le sous-jacent est au-dessus du prix d'exercice à l'échéance ou si la barrière n'a pas été atteinte, l'investisseur reçoit le montant maximum de remboursement (Cap)
- En touchant la barrière, le produit devient un Reverse Convertible (1220)
- En raison de la barrière, la probabilité d'un remboursement maximum est plus élevée, mais le coupon est plus petit que pour un reverse convertible (1220) avec les autres conditions de produit identiques
- Plusieurs sous-jacents (Worst-of) permettent des conditions de produit plus attractives, mais avec un risque plus élevé

Reverse Convertible avec coupon conditionnel (1255)

Anticipations

- Hausse ou légère hausse du sous-jacent
- Baisse de la volatilité



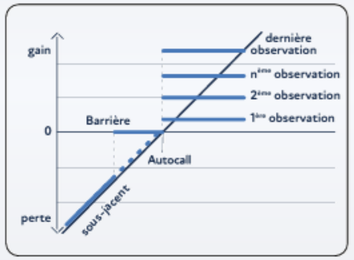
Caractéristiques

- Le paiement des coupons dépend des conditions
- Possibilité de profit limitée (Cap)
- Habituellement avec un rappel automatique: si le sous-jacent est coté au-dessus du seuil de déclenchement de l'autocall à la date d'observation, le montant nominal est remboursé par anticipation plus le coupon correspondant
- Plusieurs sous-jacents (Worst-of) permettent des conditions de produit plus attractives, mais avec un risque plus élevé

Barrier Reverse Convertible avec coupon conditionnel (1260)

Anticipations

- Hausse ou légère hausse du sous-jacent
- Baisse de la volatilité
- Le sous-jacent n'atteindra pas la barrière pendant la durée de vie du produit



Caractéristiques

- Le paiement des coupons dépend des conditions
- Possibilité de profit limitée (Cap)
- Habituellement avec un rappel automatique: si le sous-jacent est coté au-dessus du seuil de déclenchement de l'autocall à la date d'observation, le montant nominal est remboursé par anticipation plus le coupon correspondant
- Toucher la barrière entraîne une livraison du sous-jacent et/ou un règlement en espèces
- En raison de la barrière, la probabilité d'un remboursement maximum est plus élevée, mais le coupon conditionnel est inférieur à celui d'un Reverse Convertible avec Coupon Conditionnel sans barrière (1255) avec les autres conditions de produit identiques
- Plusieurs sous-jacents (Worst-of) permettent des conditions de produit plus attractives, mais avec un risque plus élevé

PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

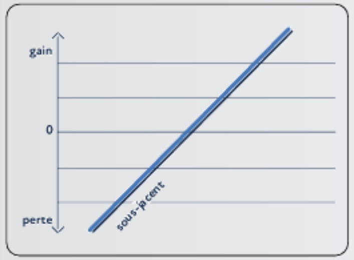
Produits Structurés – Produit de participation

13 Participation

Certificat Tracker (1300)

Anticipations

- Hausse du sous-jacent



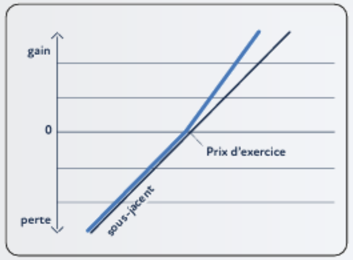
Caractéristiques

- Participation à l'évolution du cours du sous-jacent
- Reflète fidèlement l'évolution du sous-jacent (ajusté de la parité de conversion et des éventuelles commissions)
- Le sous-jacent peut être géré de manière dynamique

Certificat Outperformance (1310)

Anticipations

- Hausse du sous-jacent
- Hausse de la volatilité



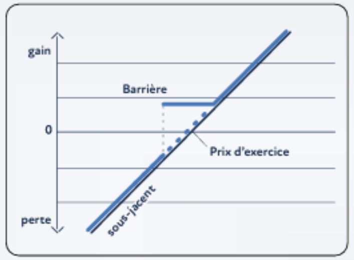
Caractéristiques

- Participation à l'évolution du cours du sous-jacent
- Participation non proportionnelle (surperformance) à l'évolution positive du cours au-dessus du prix d'exercice
- Reflète fidèlement l'évolution du sous-jacent en-dessous du prix d'exercice

Certificat Bonus (1320)

Anticipations

- Stagnation ou hausse du sous-jacent
- Le sous-jacent n'atteindra pas la barrière pendant la durée de vie du produit



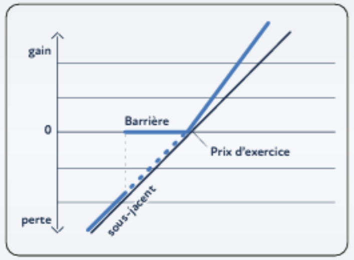
Caractéristiques

- Participation à l'évolution du cours du sous-jacent
- Le remboursement minimal correspond au prix d'exercice (niveau du bonus) tant que la barrière n'est pas atteinte
- En cas de franchissement de la barrière, le produit devient un Certificat Tracker
- S'il y a plusieurs sous-jacents (Worst-of), il est possible d'obtenir un bonus supérieur ou une barrière inférieure, moyennant un risque plus élevé

Certificat Outperformance Bonus (1330)

Anticipations

- Stagnation ou hausse du sous-jacent
- Le sous-jacent n'atteindra pas la barrière pendant la durée de vie du produit



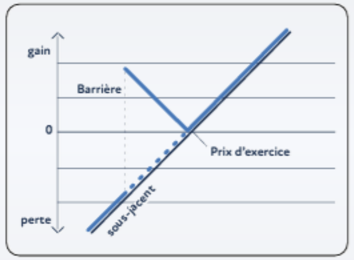
Caractéristiques

- Participation à l'évolution du cours du sous-jacent
- Participation non surproportionnelle (surperformance) à l'évolution positive du cours au-dessus du prix d'exercice
- Le remboursement minimum est identique à la valeur nominale tant que la barrière n'est pas franchie
- En cas de franchissement de la barrière, le produit devient un Certificat Outperformance
- S'il y a plusieurs sous-jacents (Worst-of), il est possible d'obtenir un bonus supérieur ou une barrière inférieure ou une participation au sous-jacent plus importante, moyennant un risque plus élevé

Certificat Twin Win (1340)

Anticipations

- Hausse ou légère baisse du sous-jacent
- Le sous-jacent n'atteindra pas la barrière pendant la durée de vie du produit



Caractéristiques

- Participation à l'évolution du cours du sous-jacent
- Possibilité de gains à la hausse comme à la baisse du sous-jacent
- Une baisses du cours du sous-jacent est convertie en gains jusqu'au niveau de la barrière
- Le remboursement minimum est identique à la valeur nominale tant que la barrière n'est pas franchie
- En cas de franchissement de la barrière, le produit devient un Certificat Tracker
- S'il y a plusieurs sous-jacents (Worst-of), il est possible d'obtenir une barrière inférieure, moyennant un risque plus élevé

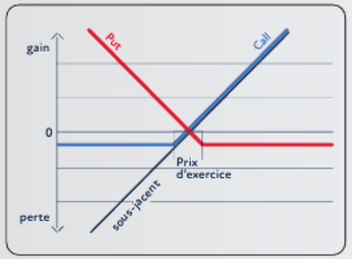
Produits Structurés – Produit à effet de levier

20 Levier

Warrant (2100)

Anticipations

- Warrant (Call) : hausse du sous-jacent, volatilité en hausse
- Warrant (Put) : baisse du sous-jacent, volatilité en hausse



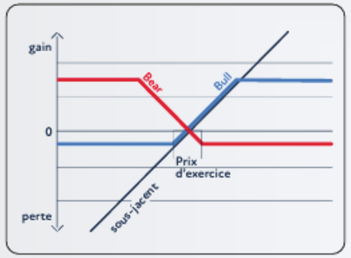
Caractéristiques

- Un faible investissement initial crée un effet de levier sur la performance du sous-jacent
- Risque accru de perte totale (limitée à l'investissement initial)
- Adapté tant à la spéculation qu'à la couverture des risques
- Erosion journalière de la valeur temps (plus importante à l'approche de la date d'échéance)
- Suivi régulier nécessaire

Spread Warrant (2110)

Anticipations

- Spread Warrant (Bull) : hausse du sous-jacent
- Spread Warrant (Bear) : baisse du sous-jacent



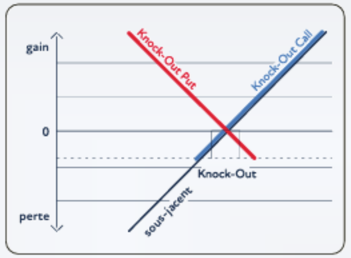
Caractéristiques

- Un faible investissement initial crée un effet de levier sur la performance du sous-jacent
- Risque accru de perte totale (limitée à l'investissement initial)
- Erosion journalière de la valeur actuelle (plus importante à l'approche de la date d'échéance)
- Suivi régulier nécessaire
- Possibilité de gain limitée (Cap)

Warrant avec Knock-Out (2200)

Anticipations

- Knock-Out (Call) : hausse du sous-jacent
- Knock-Out (Put) : baisse du sous-jacent



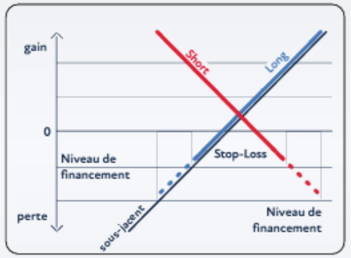
Caractéristiques

- Un faible investissement initial crée un effet de levier sur la performance du sous-jacent
- Risque accru de perte totale (limitée à l'investissement initial)
- Adapté tant à la spéculation qu'à la couverture des risques
- Expirent sans valeur dès que la barrière est atteinte pendant la durée de vie du produit
- Faible influence de la volatilité et faible perte de la valeur actuelle
- Suivi régulier nécessaire

Mini-Future (2210)

Anticipations

- Mini-Future (Long) : hausse du sous-jacent
- Mini-Future (Short) : baisse du sous-jacent



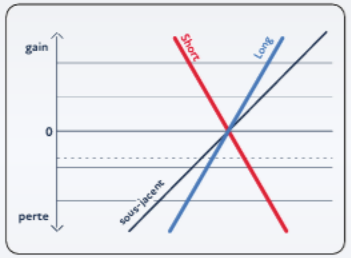
Caractéristiques

- Un faible investissement initial crée un effet de levier sur la performance du sous-jacent
- Risque accru de perte totale (limitée à l'investissement initial)
- Adapté tant à la spéculation qu'à la couverture des risques
- Lorsque le niveau Stop-Loss est atteint, l'éventuelle valeur résiduelle est remboursée
- Aucune incidence de la volatilité
- Suivi régulier nécessaire

Certificat à Levier Constant (2300)

Anticipations

- Long : Hausse du sous-jacent
- Short : Baisse du sous-jacent



Caractéristiques

- Un faible investissement initial crée un effet de levier sur la performance du sous-jacent
- Risque accru de perte totale (limitée à l'investissement initial)
- Un éventuel mécanisme de Stop-Loss et/ou d'ajustement évite que la valeur du produit ne devienne négative
- Les renversements fréquents de tendance du cours du sous-jacent ont un effet négatif sur la performance du produit
- Un effet de levier permanent est garanti par un recadrage régulier
- Suivi régulier nécessaire

PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Autocall - Exemple

Le titre de créance est émis par Natixis Structured Issuance SA (l'« Émetteur »), véhicule d'émission au Luxembourg offrant une garantie de formule donnée par Natixis (le « Garant » ; Standard & Poor's : A / Moody's : A1 / Fitch : A+[1]). L'investisseur supporte les risques de défaut, d'ouverture d'une procédure de résolution et de faillite de l'Émetteur et du Garant.

M Rendement 11 est un titre de créance risqué alternatif à un investissement dynamique de type actions.

- **Durée d'investissement conseillée : 10 ans en l'absence de remboursement automatique anticipé.** L'investisseur prend un risque de perte en capital non mesurable si le titre de créance est revendu avant la Date d'Échéance[2].
- **Période de commercialisation :** du **27 novembre 2023 au 24 janvier 2024**. La période de commercialisation peut être close à tout moment.
- **Éligibilité : Comptes-titres, contrats d'assurance-vie ou de capitalisation**. La présente brochure décrit les caractéristiques de M Rendement 11 et ne prend pas en compte les spécificités des contrats d'assurance-vie ou de capitalisation dans le cadre desquels ce titre de créance est proposé. **L'assureur s'engage exclusivement sur le nombre d'unités de compte mais non sur leur valeur, qu'il ne garantit pas. Il est précisé que l'assureur d'une part, l'Émetteur et le Garant d'autre part, sont des entités juridiques distinctes.**
- **Code ISIN :** FR001400LWU8

COMMUNICATION À CARACTÈRE PROMOTIONNEL | Ce document n'a pas été rédigé par l'assureur.
VOUS ÊTES SUR LE POINT D'ACHETER UN PRODUIT QUI N'EST PAS SIMPLE ET QUI PEUT ÊTRE DIFFICILE À COMPRENDRE.

Autocall - Exemple

En quelques mots

M Rendement 11 est un titre de créance qui présente un risque de perte en capital partielle ou totale en cours de vie et à l'échéance, et dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Une exposition à la performance de l'Indice IEdge ESG Transatlantic SDG 50 EW Decrement 50 Points GTR Series 2® (nommé ci-après « l'Indice ») calculé dividendes bruts réinvestis et diminiué d'un montant fixe de 50 points par an (prélevé sur une base quotidinne).
- À partir de la fin du 4e trimestre, un remboursement automatique anticipé du Capital Initial majoré d'un gain de 1,875 %[1] par trimestre écoulé, soit 7,50 % par année écoulée, si à une Date d'Observation Trimestrielle[2], le niveau de l'Indice est supérieur ou égal à 90,00 % de son Niveau Initial.
- À l'échéance des 10 ans, en l'absence de remboursement automatique anticipé :
  - Un remboursement du Capital Initial majoré d'un gain final de 75,00 %[1], soit 7,50 % par année écoulée, si le niveau de l'Indice est supérieur ou égal à 90,00 % de son Niveau Initial à la Date d'Observation Finale[2].
  - Un remboursement du Capital Initial[1], si le niveau de l'Indice est strictement inférieur à 90,00 % de son Niveau Initial mais supérieur ou égal à 50,00 % de son Niveau Initial à la Date d'Observation Finale[2].
  - Une perte en capital partielle ou totale, si le niveau de l'Indice est strictement inférieur à 50,00 % de son Niveau Initial à la Date d'Observation Finale[2].
- M Rendement 11 est un titre de créance dont les fonds levés dans le cadre de l'émission ne seront pas spécifiquement alloués au financement de projets répondant à des thématiques ESG (Environnement, Social, Gouvernance). Il est important de noter que seul l'indice est construit de façon à sélectionner les actions des entreprises les plus engagées dans leur approche ESG. L'exposition de l'investisseur à la performance d'un indice ne signifie pas qu'il finance les actions le composant. M Rendement 11 ne constitue pas un titre de créance vert.

Autocall - Exemple

Avantages

- De la fin du 4e trimestre à la fin du 39e trimestre, si à une Date d'Observation Trimestrielle(1), le niveau de l'Indice est supérieur ou égal à 90,00 % de son Niveau Initial, l'investisseur bénéficie d'un **mécanisme de remboursement automatique anticipé**, et récupère son Capital Initial majoré d'un **gain de 1,875 %(2) par trimestre écoulé, soit 7,50 % par année écoulée.**
- À l'échéance des 10 ans (40 trimestres), si M Rendement 11 n'a pas été rappelé par anticipation, et si le niveau de l'Indice est supérieur ou égal à 90,00 % de son Niveau Initial à la Date d'Observation Finale(1), l'investisseur récupère **l'intégralité de son Capital Initial augmenté d'un gain final de 75,00 %(2), soit 7,50 % par année écoulée.**
- À l'échéance des 10 ans (40 trimestres), si M Rendement 11 n'a pas été rappelé par anticipation, l'investisseur bénéficie d'un **remboursement de l'intégralité de son Capital Initial(2)**, si le niveau de l'Indice est strictement inférieur à 90,00 % de son Niveau Initial mais supérieur ou égal à 50,00 % de son Niveau Initial à la Date d'Observation Finale(1).

Inconvénients

- **M Rendement 11 présente un risque de perte partielle ou totale du capital en cours de vie** (en cas de revente du titre de créance à l'initiative de l'investisseur alors que les conditions de remboursement automatique ne sont pas remplies, le prix dépendant alors des paramètres de marché le jour de la revente) **et à l'échéance** (si, à la Date d'Observation Finale(1), le niveau de l'Indice est strictement inférieur à 50,00 % de son Niveau Initial). La valorisation de M Rendement 11 à l'échéance est très sensible à une faible variation du niveau de l'Indice autour des seuils de 50,00 % et de 90,00 % de son Niveau Initial.
- **L'investisseur ne connaît pas à l'avance la durée exacte de son investissement** qui peut durer de 4 à 40 trimestres, soit de 1 an à 10 ans.
- **Le gain maximum de l'investisseur est limité à 1,875 %(2) par trimestre écoulé, soit 7,50 % par année écoulée.** L'investisseur ne profite pas pleinement de la hausse du niveau de l'Indice (Effet de Plafonnement du Gain).
- **L'investisseur est exposé à un éventuel défaut** (qui induit un risque de non remboursement) ou à **une dégradation de la qualité de crédit** (qui induit un risque sur la valeur de marché du titre de créance) de l'Émetteur et à un risque de défaut, d'ouverture d'une procédure de résolution et de faillite du Garant.
- **L'Indice est un indice avec décrément et ne présente pas le rendement total des actifs dans lesquels il est investi.** Il est calculé dividendes bruts réinvestis, diminué d'un montant forfaitaire de 50 points d'indice par an. Le montant des dividendes réinvestis peut être inférieur ou supérieur à ce montant forfaitaire. Si les dividendes distribués sont inférieurs (respectivement supérieurs) au prélèvement forfaitaire, la performance de l'indice en sera pénalisée (respectivement améliorée) par rapport à un indice dividendes non réinvestis classique.

Autocall - Exemple

Mécanisme de remboursement

Le Niveau Initial est déterminé par le niveau de clôture de l'Indice observé à la Date d'Observation Initiale, soit le 24 janvier 2024.

Un remboursement automatique anticipé possible dès la fin du 4e trimestre

De la fin du 4e trimestre à la fin du 39e trimestre, si à une Date d'Observation Trimestrielle(1), le niveau de l'Indice est supérieur ou égal à 90,00 % de son Niveau Initial, un mécanisme de remboursement automatique anticipé est activé, et l'investisseur reçoit(2) à la Date de Remboursement Automatique Anticipé correspondante(1) :

Le Capital Initial

+

Un gain de 1,875 % par trimestre écoulé, soit 7,50 % par année écoulée

(soit un TRA brut(3) maximum de 6,61 %(5))

(soit un TRA net(4) maximum de 5,97 %(5))

Dès qu'un remboursement automatique anticipé est activé M Rendement 11 s'arrête ; sinon le titre de créance continue.

PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Autocall - Exemple

Remboursement à l'échéance des 10 ans

À la Date d'Observation Finale, le 24 janvier 2034, si le mécanisme de remboursement automatique anticipé n'a pas été précédemment activé, on observe le niveau de clôture de l'Indice par rapport à son Niveau Initial.

Cas favorable

Si le niveau de clôture de l'Indice est supérieur ou égal à 90,00 % de son Niveau Initial, l'investisseur reçoit[2] le 31 janvier 2034 :

> Le Capital Initial
> +
> Un gain final de 75,00 %, soit 7,50 % par année écoulée
> (soit un TRA brut[3] de 5,64 %)
> (soit un TRA net[4] de 5,01 %)

Cas médian

Si le niveau de clôture de l'Indice est supérieur ou égal à 50,00 % de son Niveau Initial mais strictement inférieur à 90,00 % de son Niveau Initial, l'investisseur reçoit[2] le 31 janvier 2034 :

> Le Capital Initial
> (soit un TRA brut[3] de 0,00 %)
> (soit un TRA net[4] de -0,60 %)

Cas défavorable

Si le niveau de clôture de l'Indice est strictement inférieur à 50,00 % de son Niveau Initial, l'investisseur subit une perte en capital et reçoit[2] le 31 janvier 2034 :

> Le Capital Initial diminué de la performance négative de l'Indice
> Dans ce scénario, l'investisseur subit une perte en capital à hauteur de l'intégralité de la baisse du niveau de l'Indice.
> Cette perte en capital peut être partielle ou totale.

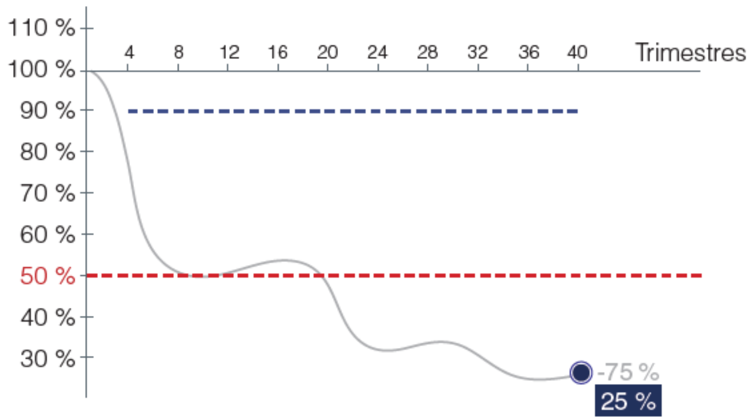
Autocall - Exemple

Scénarios de marché

Les données chiffrées utilisées dans ces exemples n'ont qu'une valeur indicative et informative, l'objectif étant de décrire le mécanisme du titre de créance. Elles ne préjugent en rien de résultats futurs. L'ensemble des données est présenté hors fiscalité et/ou frais liés au cadre d'investissement.

- Performance de l'Indice
- Performance finale de l'Indice
- Niveau de remboursement du titre de créance
- Seuils d'activation du mécanisme de remboursement automatique anticipé et de gain à l'échéance (90,00 %)
- Seuil de perte en capital à l'échéance (50,00 %)
- Plafonnement du gain
- Gain

Scénario défavorable : Forte baisse de l'Indice à l'échéance (supérieure à 50,00 %)

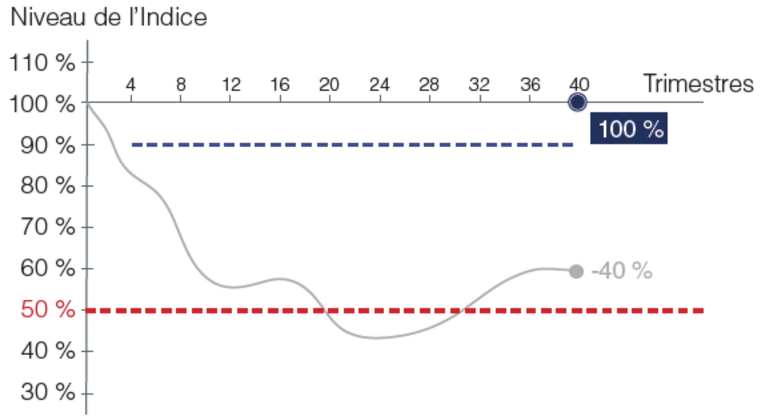


- À chaque Date d'Observation Trimestrielle[1], le niveau de l'Indice est strictement inférieur à 90,00 % de son Niveau Initial. Le mécanisme de remboursement automatique anticipé n'est pas activé.
- À la Date d'Observation Finale[1], le niveau de l'Indice est égal à 25,00 % de son Niveau Initial (soit une baisse de 75,00 %) : l'investisseur reçoit 25,00 % de son Capital Initial et subit dans ce scénario une perte en capital équivalente à celle du niveau de l'Indice, soit une perte de 75,00 %.

Remboursement final : 25,00 % du Capital Initial
TRA brut[2] : -12,71 % (identique à celui de l'Indice)
TRA net[3] : -13,24 %

Autocall - Exemple

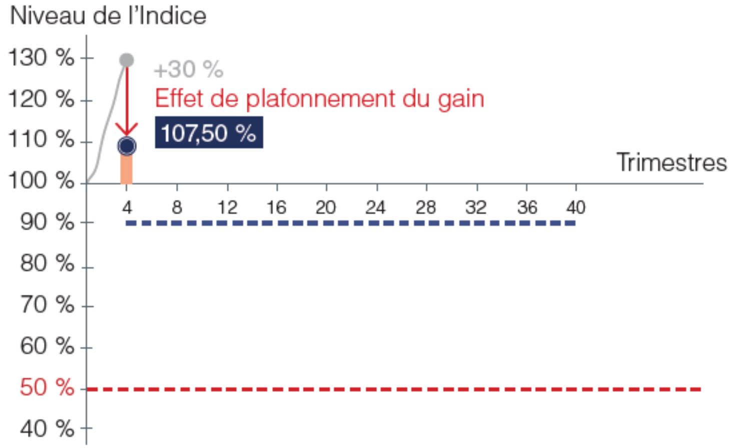
Scénario médian : Baisse modérée de l'Indice à l'échéance (inférieure à 50,00 %)



- À chaque Date d'Observation Trimestrielle(1), le niveau de l'Indice est strictement inférieur à 90,00 % de son Niveau Initial. Le mécanisme de remboursement automatique anticipé n'est pas activé.
- À la Date d'Observation Finale(1), le niveau de l'Indice est égal à 60,00 % de son Niveau Initial (soit une baisse de 40,00 %) : l'investisseur récupère l'intégralité de son Capital Initial. Dans ce scénario, l'investisseur n'est pas impacté par la baisse du niveau de l'Indice à l'échéance.

Remboursement final : 100,00 % du Capital Initial
TRA brut(2) : 0,00 % (contre -4,89 % pour l'Indice)
TRA net(3) : -0,60 %

Scénario favorable : Forte hausse de l'Indice dès la fin du 4e trimestre (Plafonnement du gain)



- À la 1re Date d'Observation Trimestrielle(1), le niveau de l'Indice est égal à 130,00 % de son Niveau Initial, le mécanisme de remboursement automatique anticipé est activé et l'investisseur reçoit son Capital Initial augmenté d'un gain de 7,50 %, soit 1,875 % par trimestre écoulé. Dans ce scénario, l'investisseur ne bénéficie que partiellement de la hausse du niveau de l'Indice (Effet de Plafonnement du Gain).

Remboursement final : 107,50 % du Capital Initial
TRA brut(2) : 6,27 % (contre 24,69 % pour l'Indice)
TRA net(3) : 5,63 %

PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Attribution de performance

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Comment évaluer la performance d’un book de trading ?

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Attribution de performance

- <u>Objectif</u>

L'objectif de l'attribution de performance est d'expliquer le P&L d'un jour à l'autre:

$$\text{P\&L}(t-1 \rightarrow t) = \text{Valo}(t) - \text{Valo}(t-1)$$

- <u>Explication par les greeks</u>

Rappel: On peut expliquer la variation du prix d'une option où d'un produit dérivé par rapport à l'ensemble des dérivées associées aux facteurs de risque (ordre 1 et 2)

$$\Delta V = \underbrace{\frac{\delta V}{\delta T}}_{\theta}\Delta \mathrm{T} + \underbrace{\frac{\delta V}{\delta S}}_{\Delta}\Delta S + \underbrace{\frac{\delta V}{\delta \sigma}}_{\nu}\Delta\sigma + \underbrace{\frac{\delta V}{\delta r}}_{\rho}\Delta \mathrm{r} + \frac{1}{2}\times\underbrace{\frac{\delta^2 V}{\delta S^2}}_{\Gamma} + \cdots + \text{residual}$$

Dans ce cas, on regardera le Theta P&L, puis le Gamma P&L, puis le Delta P&L, etc.

PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE

Attribution de performance

- <u>Décomposition du P&L</u>

1. On commence par le carry (effet Delta, Gamma et Theta)

$$\text{P\&L Carry} = \Theta_{\text{P\&L}} + \Delta_{\text{P\&L}} + \Gamma_{\text{P\&L}}$$

2. On regarde l'effet de la volatilité avec le Vega. Sur cet effet, on peut distinguer plusieurs facteurs comme les mouvements parallèles de toutes la surface de vol, la pentification ou la convexité.
3. On regarde ce qui vient des taux d'intérêt, du repo et du dividende.

Attention: ici on parle de cas où il n'y a pas de mouvements dans le portefeuille, mais en cas e mouvement, il faut prendre aussi en compte les I/O (entrées – sorties) du portefeuille.

Attribution de performance

- <u>Approche par revalorisation totale (full revalorisation)</u>

En général pour l'explication du P&L, on va utiliser une approche par sensibilité via les greeks car la donnée est calculée par les équipes de Risques pour différents processus (validation du P&L, limites, calcul et backtest de la VaR, etc.).

Il existe une autre approche qui consiste à revaloriser tous les actifs d'un portefeuille en choquant un à un les paramètres de calcul en partant de l'état en t vers l'état en $t+1$.
Cette approche est plus précise mais elle consomme énormément de données et de ressources de calcul.

Merci pour votre attention

PHIT

MASTER 272
INGÉNIERIE ÉCONOMIQUE ET FINANCIÈRE
UNIVERSITÉ PARIS DAUPHINE