Resolução de Sistemas de Equações Lineares pelo Método Iterativo de Jacobi

Prof. Evanivaldo C. Silva Jr.

Seção 8

Resolução de SEL pelo Método de Jacobi

- MÉTODOS DE RESOLUÇÃO

  - Existem na literatura vários métodos de resolução de sistemas de equações lineares sendo basicamente subdivididos em duas classes:
    - Métodos diretos: são os métodos que determinam uma solução exata (não aproximada) para o sistema
    - Métodos iterativos: são aqueles que buscam a resolução através de aproximações sucessivas com uma metodologia de retroalimentação do algoritmo

  - Quanto ao tipo de solução, os sistemas lineares podem ser classificados como:
    - Singulares: não admitem solução
    - Não singulares com:
      - ✓ Infinitas soluções
      - ✓ Solução única

Método de Jacobi

- MÉTODO DE RESOLUÇÃO PELO MÉTODO ITERATIVO DE JABOBI
  - Consideremos os sistema linear:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

onde:

x_i = são as incógnitas das equações

b_i = são os termos constantes ($b_i \in R$)

a_{ij} = são os coeficientes ($a_{ij} \in R$) das equações.

Método de Jacobi

- MÉTODO DE RESOLUÇÃO PELO MÉTODO ITERATIVO DE JABOBI
  - O método iterativo de Jacobi consistem em:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}[b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - a_{14}x_4 - \cdots - a_{1n}x_n] \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}[b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - a_{24}x_4 - \cdots - a_{2n}x_n] \\ x_3 = \dfrac{1}{a_{33}}[b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{34}x_4 - \cdots - a_{3n}x_n] \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}[b_n - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3 - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}] \end{cases}$$

Método de Jacobi

- MÉTODO DE RESOLUÇÃO PELO MÉTODO ITERATIVO DE JABOBI
  - No método, "chutamos" valores iniciais para
  - $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}$ obtendo-se:

$$
\begin{cases}
x_1^{(1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)} - a_{14}x_4^{(0)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(0)}\right] \\
x_2^{(1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^{(0)} - a_{23}x_3^{(0)} - a_{24}x_4^{(0)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(0)}\right] \\
x_3^{(1)} = \dfrac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}x_1^{(0)} - a_{32}x_2^{(0)} - a_{34}x_4^{(0)} - \cdots - a_{3n}x_n^{(0)}\right] \\
\qquad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\
x_n^{(1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}\left[b_n - a_{31}x_1^{(0)} - a_{32}x_2^{(0)} - a_{33}x_3^{(0)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(0)}\right]
\end{cases}
$$

Método de Jacobi

- MÉTODO DE RESOLUÇÃO PELO MÉTODO ITERATIVO DE JABOBI
  - A próxima solução será obtida fazendo-se:

$$
\begin{cases}
x_1^{(2)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2^{(1)} - a_{13}x_3^{(1)} - a_{14}x_4^{(1)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(1)}\right] \\
x_2^{(2)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(1)} - a_{24}x_4^{(1)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(1)}\right] \\
x_3^{(2)} = \dfrac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}x_1^{(1)} - a_{32}x_2^{(1)} - a_{34}x_4^{(1)} - \cdots - a_{3n}x_n^{(1)}\right] \\
\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
x_n^{(2)} = \dfrac{1}{a_{nn}}\left[b_n - a_{31}x_1^{(1)} - a_{32}x_2^{(1)} - a_{33}x_3^{(1)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(1)}\right]
\end{cases}
$$

Método de Jacobi

- MÉTODO DE RESOLUÇÃO PELO MÉTODO ITERATIVO DE JABOBI
  - E assim sucessivamente, procedemos:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - a_{14}x_4^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)}\right] \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - a_{24}x_4^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)}\right] \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{33}}\left[b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)} - a_{34}x_4^{(k)} - \cdots - a_{3n}x_n^{(k)}\right] \\ \qquad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}\left[b_n - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)} - a_{33}x_3^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}\right] \end{cases}$$

  - Onde k representa a iteração anterior a k+1

Método de Jacobi

- MÉTODO DE RESOLUÇÃO PELO MÉTODO ITERATIVO DE JABOBI
  - EXEMPLO 1: Resolver o sistema linear abaixo utilizando o Método Iterativo de Jacobi:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 8 \end{cases}$$

Método de Jacobi

- MÉTODO DE RESOLUÇÃO PELO MÉTODO ITERATIVO DE JABOBI
  - Critério de convergência
    - O método de Jacobi é convergente, ou seja, produz uma sequência de aproximações que tendem a solução do Sistema Linear quando o valor absoluto dos termos das diagonais são maiores do que a soma dos valores absolutos de todos os outros termos na mesma linha, isto é:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left|a_{ij}\right| < \left|a_{ii}\right|, \forall\, i = 1, 2, 3, \cdots, n.$$

Método de Jacobi

- MÉTODO DE RESOLUÇÃO PELO MÉTODO ITERATIVO DE JABOBI
  - OBSERVAÇÕES:
    - O Método de Jacobi pode ser convergente mesmo não satisfazendo o Critério das Linhas
    - O Critério das Linhas pode ser analisado também por colunas
    - O Método de Jacobi é de baixa complexidade algorítmica
    - Como critério de parada, ou seja, de precisão da solução, podemos utilizar:

$$\frac{\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right|}{x_i^{(k)}} \leq \varepsilon, \forall\, i = 1, 2, 3, \cdots, n$$

onde ε é o erro estimulado.

Método de Jacobi

- EXERCÍCIOS
  - Resolva os sistemas lineares abaixo

$$a)\begin{cases} -2x_1 + 8x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

$$b)\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$$

Referência Bibliográfica

[1] Gersting, J.L., Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação., ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1995.