Introdução à Análise Combinatória

Prof. Evanivaldo C. Silva Jr.

Aula 5

Análise Combinatória

- Permutações
- Consideremos o conjunto $A=\{a_1, a_2, a_3,\dots, a_m\}$. Chamamos de permutação dos ***m*** elementos a todo arranjo em que ***r = m***.
- Podemos calcular o número de elementos de uma permutação por:

$$P_m = m!$$

Análise Combinatória

- Permutações

- Exemplo 1: De quantas formas podem 5 pessoas ficar em fila indiana?

- Cada forma da fila representa uma permutação das 5 pessoas, ou seja: $P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Análise Combinatória

- Permutações

- Exemplo 2: De quantas formas 20 pessoas podem se dispor em uma sala de aula a qual é configurada em 4 filas de 5 pessoas cada?

Análise Combinatória

- Permutações

- Exemplo 3: De quantas formas podemos empilhar 7 caixas de cerveja, de diferentes marcas?

Análise Combinatória

- Permutações com elementos repetidos
- Consideremos a palavra ANA e identifiquemos quantos anagramas podem ser formados com essas letras. Temos:

(1) ANA
(2) AA*N
(3) NAA*
(4) NA*A
(5) A*NA
(6) A*AN

- Devemos observar que as permutações (1)=(5), (2)=(6) e (3)=(4) representam (sem o asterisco) a mesma “palavra”

Análise Combinatória

- Permutações com elementos repetidos
- Dessa forma não temos 3!=6 permutações distintas, mas apenas as seguintes três:

(1) ANA

(2) AAN

(3) NAA

- Isso foi consequência do fato de na palavra ANA as letras A se repetirem

Análise Combinatória

- Permutações com elementos repetidos
- A expressão que contempla essa característica de permutação com repetição é dada por:

$$P_m^{n_1 n_2 n_3} = \frac{m!}{n_1!, n_2!, n_3!, \ldots}$$

- onde
- n_1=número de vezes que se repete o elemento 1;
- n_2=número de vezes que se repete o elemento 2;
- n_3=número de vezes que se repete o elemento 3;
- E assim, sucessivamente

Análise Combinatória

- Exemplo 4: (Hazzan, S., 2005): Quantos anagramas podemos formar com a palavra ANALÍTICA?

$$P_9^{3,2} = \frac{9!}{3!\cdot 2!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}\cdot 2!} = 30240$$

- OBS: 3 refere-se a quantidade de repetições da letra A e 2 da letra I.

Análise Combinatória

- Exemplo 5: Você anotou um número de celular lembrando-se somente dos 4 primeiros dígitos, 9972, mas esquecendo-se da ordem dos outros quatro. Supondo que você desconfie que são 2, 3, 3 e 8, quantos números poderiam ser “chutados”?

- OBS: 3 refere-se a quantidade de repetições da letra A e 2 da letra I.

Análise Combinatória

- Combinações
- Consideremos o conjunto A={a_1, a_2, a_3,..., a_m}. Chamamos de combinações dos ***m*** elementos, tomados ***r*** a ***r*** (1 ≤ r ≤ m), aos subconjuntos de ***A*** constituídos de ***r*** elementos
- Podemos calcular o número de elementos de uma combinação por:

$$C_{m,r} = \begin{pmatrix} m \\ r \end{pmatrix} = \frac{m!}{r!(m-r)!} \text{"}\ m,r \in \mathbb{N}^*, r < m.$$

- OBS: Nesse caso a ordem dos elementos é irrelevante.

Análise Combinatória

- Combinações
- Exemplo 6 (Hazzan, S., 2005): Seja M={a, b, c, d}. Quantas combinações dos 4 elementos, tomados 2 a 2 podemos formar?
- {a,b}, {b,c}, {c,d}
- {a,c}, {b,d}
- {a,d}

$$C_{4,2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$$

OBS: {a,b}={b,a}, conforme definido na teoria de conjuntos. Como as combinações são conjuntos a ordem não é relevante e portanto não consideramos as repetições.

Análise Combinatória

- Combinações
- Exemplo 7 (Hazzan, S., 2005): Deseja-se formar uma comissão de três membros e dispõe-se de 10 funcionários. Quantas comissões podem ser formadas?

$$C_{10,3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{3! \cdot \cancel{7!}} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$$

OBS: Notemos que em uma comissão, sem cargos específicos, a ordem dos membros não é relevante na sua formação

Análise Combinatória

- Combinações
- Exemplo 8: A mega-sena é um jogo de loteria na qual a aposta mais simples consiste em marcar 6 números em uma cartela com 60 números. Ganha o prêmio máximo quem acertar os 6 números. Quantos combinações são possíveis de serem realizadas nessas condições?

Análise Combinatória

RESUMÃO

1 - Arranjos Simples: $A_{m,r} = \dfrac{m!}{(m-r)!}$

2 - Arranjo c/ repetição: $(AR)_{m,r} = m^r$

$\Big\}\ r < m$

3 - Permutação simples: $P_m = m!$

4 - Permutação c/ repetição: $P_m^{n,p,q} = \dfrac{m!}{n! \cdot p! \cdot q!}$
(Anagramas)

$\Big\}\ r = m$

ordem é considerada

5 - Combinação: $C_{m,r} = \dfrac{m!}{r! \cdot (m-r)!}$ $\Big\}\ r < m$ $\rightsquigarrow$ ordem NÃO é considerada

Obs: As cinco fórmulas acima tratam de combinações em um único conjunto. Para mais de um conjunto utilizamos também o 1º Princípio Fundam. de Contagem.

Referência Bibliográfica

[1] Hazzan, S., C., **Fundamentos de matemática Elementar**, vol. 5, ed. Atual, 2005.