Sistemas de Equações Lineares

Prof. Evanivaldo C. Silva Jr

Seção 8

Sistemas de Equações Lineares

- Uma equação é considerada linear quando todas as incógnitas da equação possuem grau 1 no seus respectivos expoentes:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

onde:

x_i = são as incógnitas da equação

b_i = é o termo constante

a_i = são os coeficientes ($a_{ij} \in R$)da equação.

- EXEMPLOS:

$$a)\ 4x_1 - x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 12$$

$$b)\ \frac{3}{4}x_1 - 3x_2 = 0$$

$$c)\ 2x_1 + 5x_2 - 0,5x_3 = -1$$

Sistemas de Equações Lineares

- Resolver uma equação linear significa determinar valores para as variáveis x de modo que a igualdade seja verdadeira.
- EXEMPLO:
  - Para a equação $4x_1 - x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 12$ vale a solução:

    $$x_1 = 3,\ x_2 = 0, x_3 = 0 \text{ e } x_4 = 0$$

  - Observemos que essa solução não é única pois, para:

    $$x_1 = 2,\ x_2 = 0, x_3 = 0 \text{ e } x_4 = 2$$

    $$x_1 = 0,\ x_2 = -12, x_3 = 0 \text{ e } x_4 = 0$$

    $$x_1 = 0,\ x_2 = 0, x_3 = 1 \text{ e } x_4 = 1$$

  - E muitas outras, na verdade essa equação admite infinitas soluções!

Sistemas de Equações Lineares

- Um sistema de equações lineares é um conjuntos de equações lineares definidas nas mesmas variáveis, isto é, todas as equações consideram as mesmas incógnitas como genericamente descrito abaixo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

onde:

x_i = são as incógnitas das equações

b_i = são os termos constantes (bi Î R)

a_{ij} = são os coeficientes (aij Î R) das equações.

Sistemas de Equações Lineares

- EXEMPLOS:

$$a)\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 10x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

$$b)\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + 8x_2 = -1 \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 + x_6 = 9 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 - 2x_5 + 10x_6 = -8 \end{cases}$$

Sistemas de Equações Lineares

- Resolver um sistema de equações lineares significa determinar valores para as variáveis x de modo que a igualdade seja verdadeira para todas as equações do sistema simultaneamente.

- EXEMPLO: Para o sistema $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ -x_1 + 8x_2 = 7 \end{cases}$ vale a solução:

$x_1 = 1$ e $x_2 = 1$

  - Observemos que nesse caso a solução é única.

Sistemas de Equações Lineares

- MÉTODOS DE RESOLUÇÃO

  - Existem na literatura vários métodos de resolução de sistemas de equações lineares sendo basicamente subdivididos em duas classes:
    - Métodos diretos: são os métodos que determinam uma solução exata (não aproximada) para o sistema
    - Métodos iterativos: são aqueles que buscam a resolução através de aproximações sucessivas com uma metodologia de retroalimentação do algoritmo

  - Quanto ao tipo de solução, os sistemas lineares podem ser classificados como:
    - Singulares: não admitem solução
    - Não singulares com:
      - ✓ Infinitas soluções
      - ✓ Solução única

Sistemas de Equações Lineares

- MÉTODOS DO ISOLAMENTO

  - Consiste em isolar uma variável (qualquer uma) de uma de suas equações (qualquer uma também) e substituí-la na outra, obtendo uma equação de 1º grau.
  - Resolvemos essa equação obtendo uma solução numérica.
  - Substituímos essa solução numérica em qualquer uma das equações obtendo o valor numérico da outra variável
  - É bastante simples porém funciona bem em sistemas com poucas variáveis (idealmente 2 x 2)
  - Aprender fazendo! Exemplo: Resolver o sistema linear:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ -x_1 + 8x_2 = 7 \end{cases}$$

Sistemas de Equações Lineares

- MÉTODOS DO ISOLAMENTO

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ -x_1 + 8x_2 = 7 \end{cases}$$

  - Isolemos a variável x1 da 2ª equação:

$$-x_1 + 8x_2 = 7$$
$$-x_1 = 7 - 8x_2 \cdot (-1)$$
$$x_1 = -7 + 8x_2$$

  - Substituímos $x_1 = -7 + 8x_2$ na 1ª equação:

$$2x_1 + x_2 = 3$$
$$2(-7 + 8x_2) + x_2 = 3$$
$$-14 + 16x_2 + x_2 = 3$$
$$17x_2 = 3 + 14$$
$$17x_2 = 17$$
$$x_2 = 1$$

  - Por fim, substituímos $x_2 = 1$ na 2ª equação, obtendo:

$$-x_1 + 8 \cdot 1 = 7$$
$$-x_1 + 8 = 7$$

$$-x_1 = 7 - 8$$
$$-x_1 = -1 \cdot (-1)$$
$$x_1 = 1$$

Solução: $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$

Sistemas de Equações Lineares

- EXERCÍCIOS
  - Resolva os sistemas lineares abaixo

$$a)\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 - x_2 = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

$$\text{b)}\begin{cases} x_1 - 5x_2 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 = 10 \end{cases}$$

Referência Bibliográfica

[1] Gersting, J.L., Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação., ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1995.