Introdução à Análise Combinatória

Prof. Evanivaldo C. Silva Jr.

Seção 5

Análise Combinatória

- A análise combinatória é a área da matemática que direciona-se ao processo de contagem de elementos em determinados conjuntos.

EXEMPLO: Quantos elementos de dois algarismos distintos podemos formar com os números 1, 2 e 3?

A={12, 13, 21, 23, 31, 32}, ou seja, #A=6

Análise Combinatória

- No exemplo anterior temos um conjunto pequeno com a formação, a partir de seus elementos, de duplas de algarismos
- Entretanto, poderíamos ter situações um pouco mais complexas

EXEMPLO: Quantos elementos de três algarismos distintos podemos formar com os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8?

Análise Combinatória

- Princípio Fundamental da Contagem:
- *Premissas*

1. Sejam os conjuntos $A=\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m\}$ e $B=\{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n\}$. O número de pares ordenados (a_i, b_j) que podem ser formados com $a_i \in A$ e $b_j \in B$ é $m \bullet n$
2. Seja o conjunto $A=\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m\}$. O número de pares ordenados (a_i, a_j), $a_i \neq a_j$, que podem ser formados com $a_i \in A$ e $a_j \in A$ é $m \bullet (m-1)$

Análise Combinatória

- Princípio Fundamental da Contagem (Parte 1)

1. Da observação 1 anterior podemos generalizar o processo de contagem para *r* conjuntos, ou seja, para

$A=\{a_1, a_2, a_3,\ldots, a_{m_1}\}$, $B=\{b_1, b_2, b_3 ,\ldots, b_{m_2}\}$, …, $Z=\{z_1, z_2, z_3, z_{m_r}\}$

o número de r-uplas ordenadas do tipo $(a_i, b_j,\ldots, z_r)$ em que $a_i \in A$, $b_i \in B$, $z_i \in Z$ é $m_1 \bullet m_2, \ldots, \bullet m_r$

Análise Combinatória

- Princípio Fundamental da Contagem

Exemplo: Uma moeda é lançada 3 vezes. Qual o número de sequências possíveis de cara e coroa?

Pelo primeiro princípio de contagem temos 2 • 2 • 2 =8. Se considerarmos K=cara e C=coroa temos:

(K,K,K), (K,K,C), (K,C,K), (K,C,C), (C,K,K), (C,K,C), (C,C,K), (C,C,C)

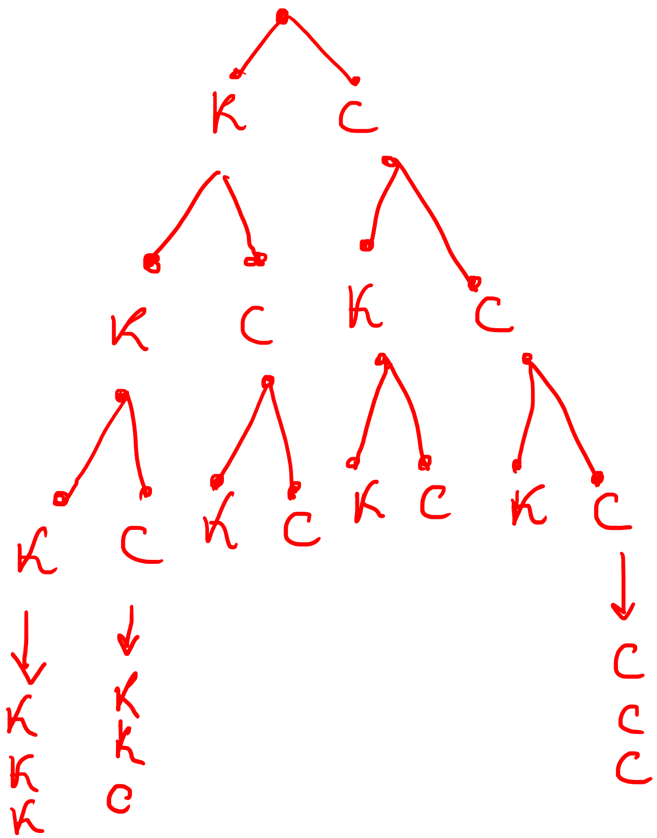
Análise Combinatória

Para K=cara e C=coroa temos

1ª. Jogada

2ª. Jogada

3ª. Jogada



Obs: Essa estrutura é chamada de grafo.

Análise Combinatória

- Princípio Fundamental da Contagem (Parte 2)

2. Seja A um conjunto com $m \geq 2$ elementos. O número de r-uplas ordenadas (sequências com *r* elementos) formadas com elementos distintos *r* a *r* de A é:

$$m \bullet (m-1) \bullet (m-2), \ldots, \bullet [m-(r-1)]$$

Análise Combinatória

- Princípio Fundamental da Contagem

Exemplo: Quatro atletas participam de uma corrida. Quantos resultados existem para o 1º, 2º e 3º lugares?

Os resultados formam uma tripla, isto é, (a,b,c) onde ***a*** corresponde ao primeiro, ***b*** ao segundo e ***c*** ao terceiro lugares respectivamente ($a \neq b$, $a \neq c$ e $b \neq c$).

Assim, o número de resultados possíveis é $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

Análise Combinatória

- Arranjos simples (sem repetição)
- Consideremos o conjunto A={a_1, a_2, a_3,..., a_m}. Chamamos de arranjo ***m*** elementos, tomados ***r*** a ***r*** ($1 \leq r \leq m$), qualquer r-upla formada com elementos de A todos distintos.
- Podemos calcular o número de elementos de uma arranjo por:

$$A_{m,r} = m \cdot (m-1) \cdots [m-(r-1)]$$

ou ainda

$$A_{m,r} = \frac{m!}{(m-r)!}$$

Análise Combinatória

- Revisão: Número fatorial
- Seja $m \in \mathbb{N}$. Definimos o fatorial do número m, denotado por $m!$ a expressão:$m! = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots 1$
- Exemplo: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
- Propriedade dos fatoriais: $m! = m \cdot (m-1)!$
- Essa propriedade é especialmente útil quando tivermos divisões entre dois números fatoriais muito grandes:
- Exemplo: $\frac{200!}{198!}$
- Podemos fazer: $\frac{200!}{198!} = \frac{200 \cdot 199 \cdot \cancel{198!}}{\cancel{198!}} = 200 \cdot 199 = 39.800$

Análise Combinatória

- Arranjo simples (sem repetição)
- Exemplo 1: De um baralho de 52 cartas, 3 cartas são retiradas sucessivamente e sem reposição. Quantas sequências de cartas são possíveis obter?

$$A_{52,3} = 52 \cdot 51 \cdot 50 = 132600$$

ou

$$A_{52,3} = \frac{52!}{(52-3)!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49!}{49!} = 52 \cdot 51 \cdot 50 = 132600$$

Análise Combinatória

- Arranjo simples (sem repetição)
- Exemplo 2: Em uma sala de aula com 40 alunos, deseja-se formar uma comissão para a organização da formatura, composta por três alunos sendo presidente, vice-presidente e tesoureiro. Quantas comissões são possíveis formar?

Análise Combinatória

- Arranjo simples (sem repetição)
- Exemplo 3: Os veículos no Brasil, até 2017, utilizavam como numeração em suas placas uma sequência ordenada composta por 3 letras e 4 números. Considerando que o alfabeto latino possui 26 letras e o sistema de numeração arábico possui 10 símbolos numéricos, determine o número total de placas de trânsito que podem ser formadas sem que aja a repetição de símbolos.

Análise Combinatória

- Arranjos com repetição
- Consideremos o conjunto A={a_1, a_2, a_3,..., a_m}. Chamamos de arranjo com repetição dos ***m*** elementos, tomados ***r*** a ***r***, toda r-upla ordenada formada com elementos de A não necessariamente distintos.
- Podemos calcular o número de elementos de um arranjo com repetição por:

$$(AR)_{m,r} = m^r$$

Análise Combinatória

- Arranjos com repetição
- Exemplo 4:Uma urna contém uma bola vermelha, uma bola branca e uma bola azul. Uma bola é extraída, observada sua cor e reposta na urna. Em seguida outra bola é extraída e observada. Quantas são as possibilidades de sequências observadas:

$$\left(AR\right)_{3,2} = 3^2 = 9$$

Análise Combinatória

- Arranjo com repetição
- Exemplo 4: Os veículos no Brasil, até 2017, utilizavam como numeração em suas placas uma sequência ordenada composta por 3 letras e 4 números. Considerando que o alfabeto latino possui 26 letras e o sistema de numeração arábico possui 10 símbolos numéricos, determine o número total de placas de trânsito que podem ser formadas?

Referência Bibliográfica

[1] Hazzan, S., C., **Fundamentos de matemática Elementar**, vol. 5, ed. Atual, 2005.