TEORIA DE GRAFOS

PROF. EVANIVALDO C. SILVA JR.

Seção 6

Grafos

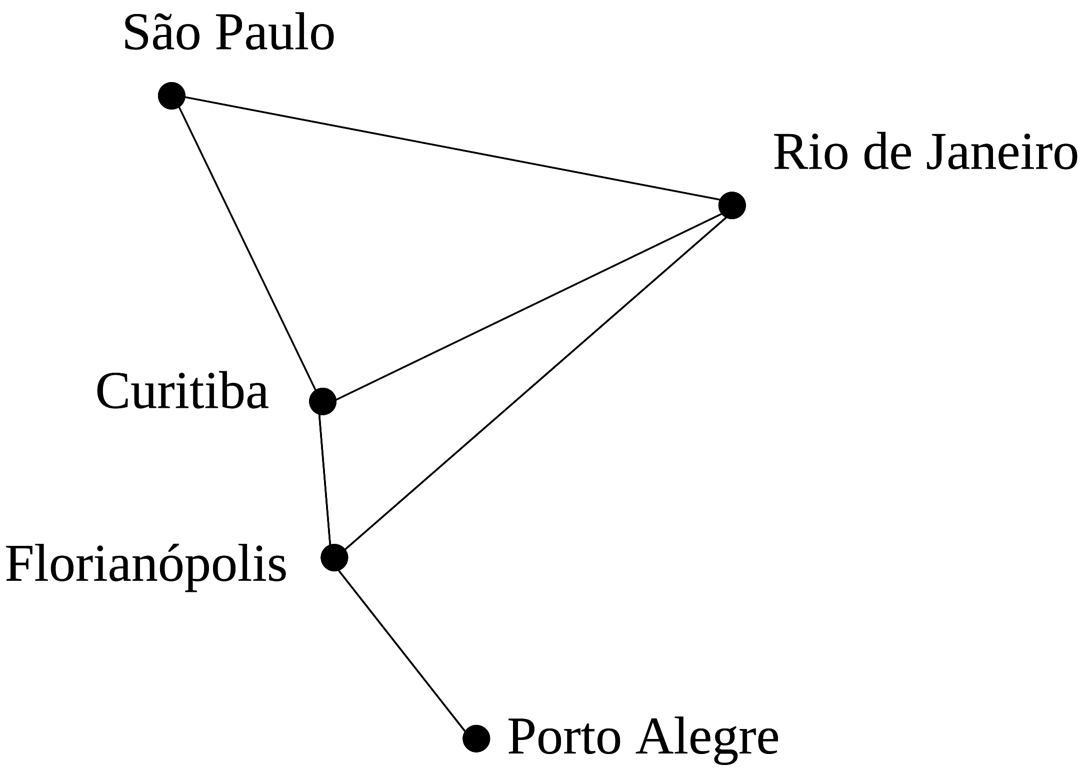
- Motivação: Problema das Sete pontes de Königsberg (Leonhard Euler)

Grafos

- EXEMPLO 1: Mapa do Metrô de SP

Grafos

- EXEMPLO 2: Grafo representando linhas aéreas entre algumas capitais



Grafos

- Grafos: Um grafo é uma tripla ordenada (N,A,g) onde:
- N = um conjunto não vazio de vértices (nós, “nodes” ou nodos)
- A = um conjunto de arestas (arcos ou “edge”);
- g = uma função que associa cada aresta ***a*** a um par não-ordenado x – y de vértices chamados de extremos de ***a***.

OBSERVAÇÃO: Os grafos, aqui considerados, terão sempre um número finito de vértices e de arestas.

Grafos

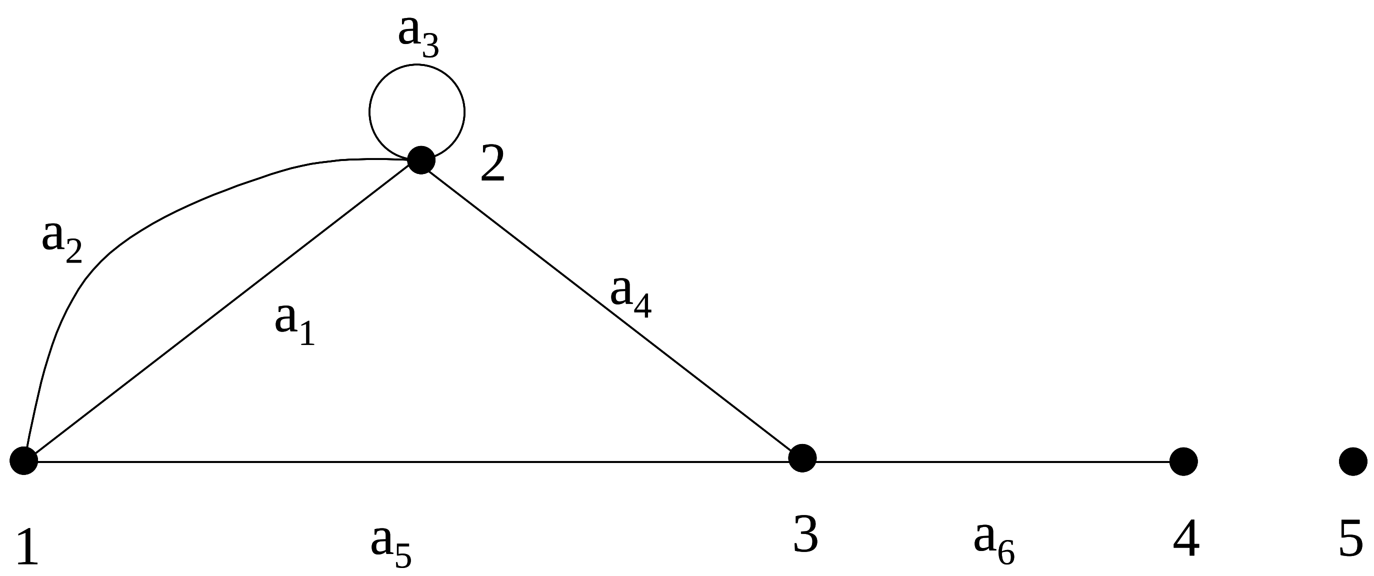
- No exemplo 1 temos:

- Conjunto de vértices: V = {São Paulo, Rio de Janeiro, Curitiba, Florianópolis, Porto Alegre};

- Conjunto de arestas: A = { São Paulo – Rio de Janeiro, São Paulo – Curitiba, Rio de Janeiro – Curitiba, Curitiba – Florianópolis, Florianópolis – Porto Alegre, Rio de Janeiro – Florianópolis}

Grafos

- EXEMPLO 2: Grafo numérico



Grafos

- No exemplo 2 temos:

- Conjunto de vértices: $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
- Conjunto de arestas: $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$
- Função de associação: $g(a_1)=1 – 2$, $g(a_2)=1 – 2$, $g(a_3)=2 – 2$, $g(a_4)=2 – 3$, $g(a_5)=1 – 3$, $g(a_6)=3 – 4$.

Grafos

- Definições Básicas
- Vértices Adjacentes: dois vértices em um grafo são adjacentes se forem extremo de uma mesma aresta

(No exemplo 2, os vértices 1 e 2, 2 e 3, 1 e 3, 3 e 4)

- Laços: é uma aresta de extremo n – n.

(No exemplo 2, a aresta a_3)

- Arestas paralelas: são arestas que possuem os mesmos extremos.
- (No exemplo 2, as arestas a_1 e a_2)

Grafos

- Definições Básicas
- Grafos Simples: É um grafo que não tem arestas paralelas nem laços.

(Exemplo 1)

- Vértice isolado: É um vértice que não é adjacente a qualquer outro

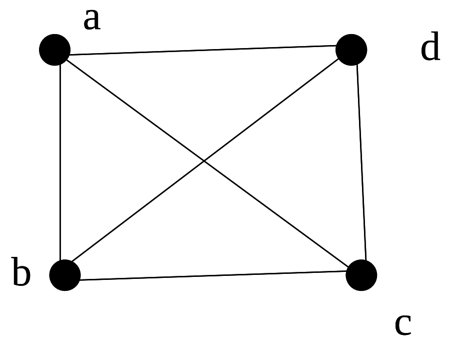
(No exemplo 2, o vértice 5)

- Grau do vértice: É o número de arestas que o tem como extremo ou incidentes no mesmo.
- (No exemplo 2, os vértices 1 e 3 tem grau 3, o vértice 2 tem grau 5, o vértice 4 tem grau 1 e o vértice 5 tem grau 0)

Grafos

- Definições Básicas
- Grafo Completo: É o grafo no qual todos os vértices distintos são adjacentes.

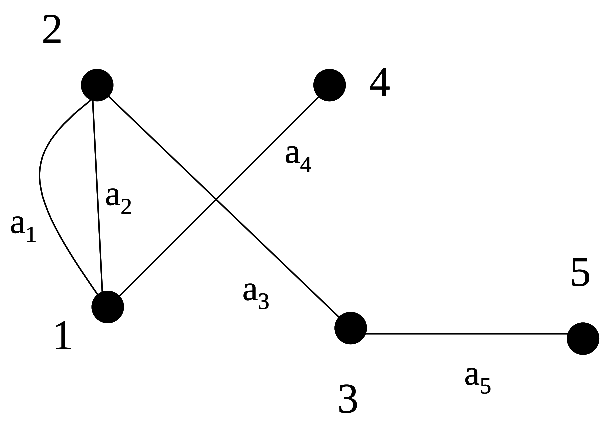
Exemplos:



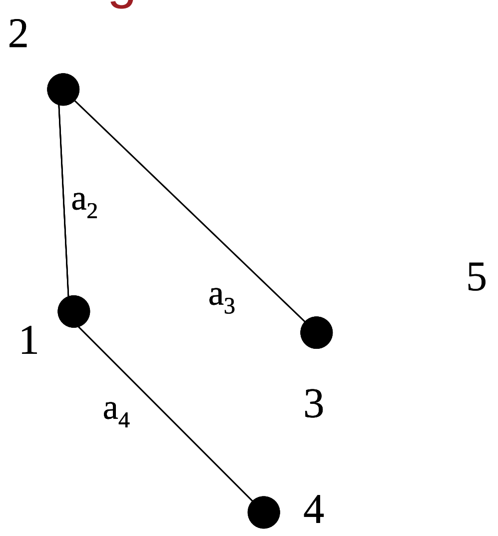
Os exemplos 1 e 2 não são completos.

Grafos

- ## Definições Básicas
- Subgrafo: Um subgrafo de um determinado grafo, consiste em um conjunto de vértices e um conjunto de arestas que são subconjuntos de vértices e arestas do grafo original, respectivamente, nos quais os extremos de qualquer aresta precisam ser os mesmo que no grafo original.
- O grafo (b) é um subgrafo do grafo (a) nos grafos abaixo:



(a)

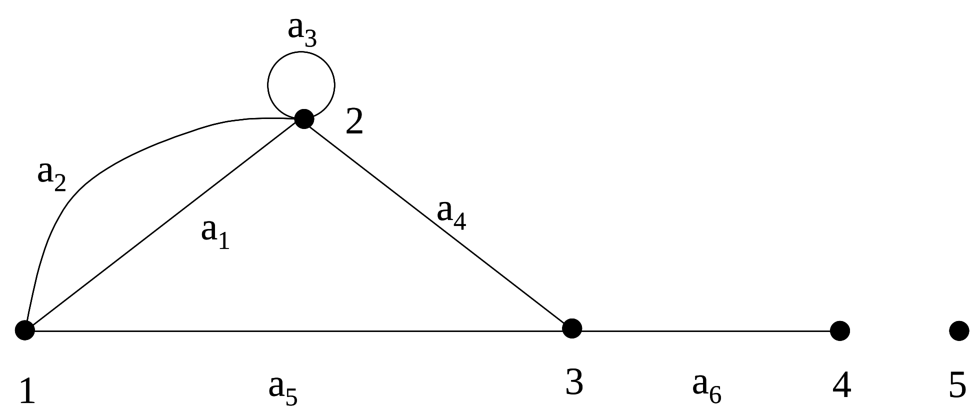


(b)

Grafos

- Definições Básicas
- Caminho: Um caminho de um vértice a_i a um vértice a_j é uma sequência n_0, a_0, n_1, a_1, ..., n_{k-1}, a_{k-1}, n_k, de vértices e arestas onde, para cada i, os extremos da aresta a_i, são n_i-n_{i+1}.

EXEMPLO:



No grafo acima a sequência 1, a_1, 2, a_4, 3, a_6, 4 é um caminho do vértice 1 ao vértice 4.

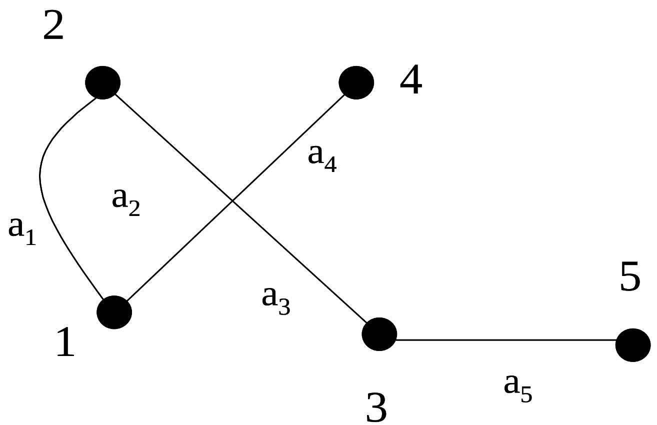
OBS: (1) O comprimento de um caminho é o número de arestas que ele contém. No exemplo anterior o comprimento do caminho é 3.

(2) Se uma aresta for usada mais de uma vez então ela deve ser contada a quantidade de vezes que for usada no caminho.

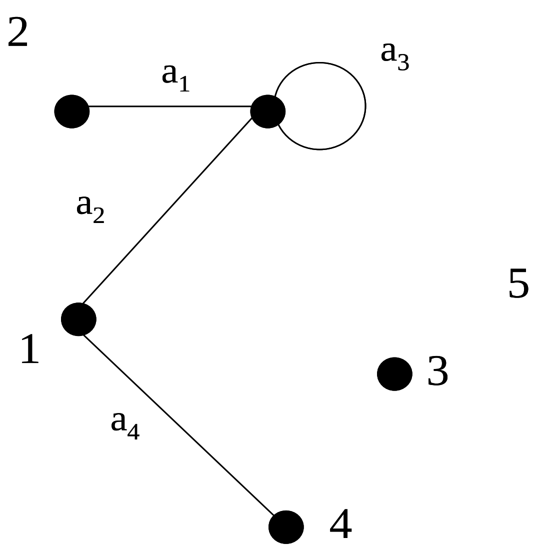
Grafos

- Definições Básicas
- Grafo conexo: Um grafo é conexo quando existe um caminho entre quaisquer dois vértices desse grafo.

EXEMPLO: O grafo (a) é conexo e o (b) não:



(a)

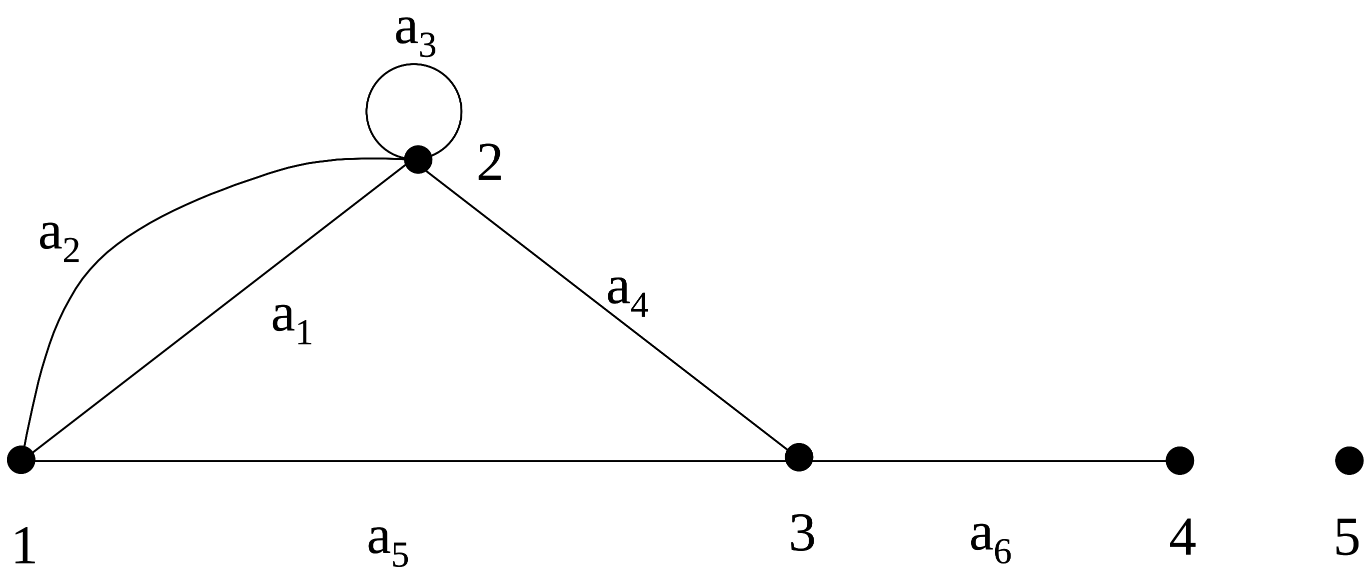


(b)

Grafos

- Definições Básicas
- Ciclo: Um ciclo em um grafo é um caminho de algum vértice n_0 de forma que nenhum vértice ocorra mais de uma vez no caminho exceto o próprio n_0.

EXEMPLO: No grafo abaixo o caminho 1, a_1, 2, a_4, 3, a_5, 1 é um ciclo.

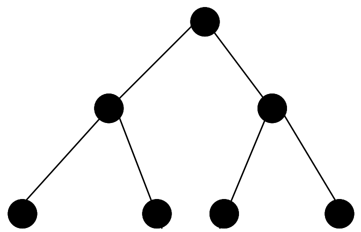


Prof. Evanivaldo C. Silva Jr.

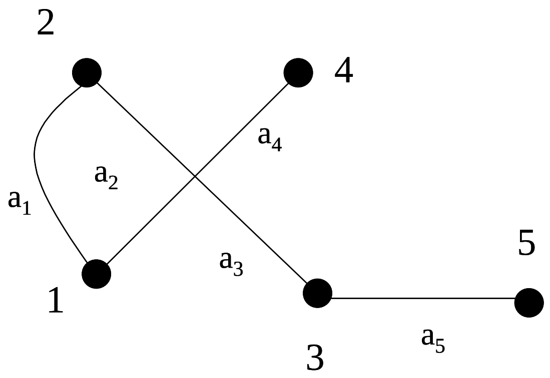
Grafos

- ## Definições Básicas
- Um grafo que não possui ciclos é dito acíclico.

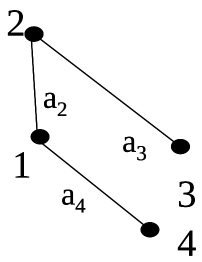
EXEMPLO: Os grafos abaixo são acíclicos.



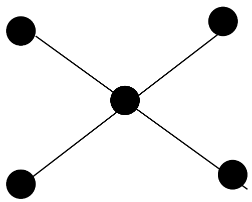
(a)



(b)



(c)

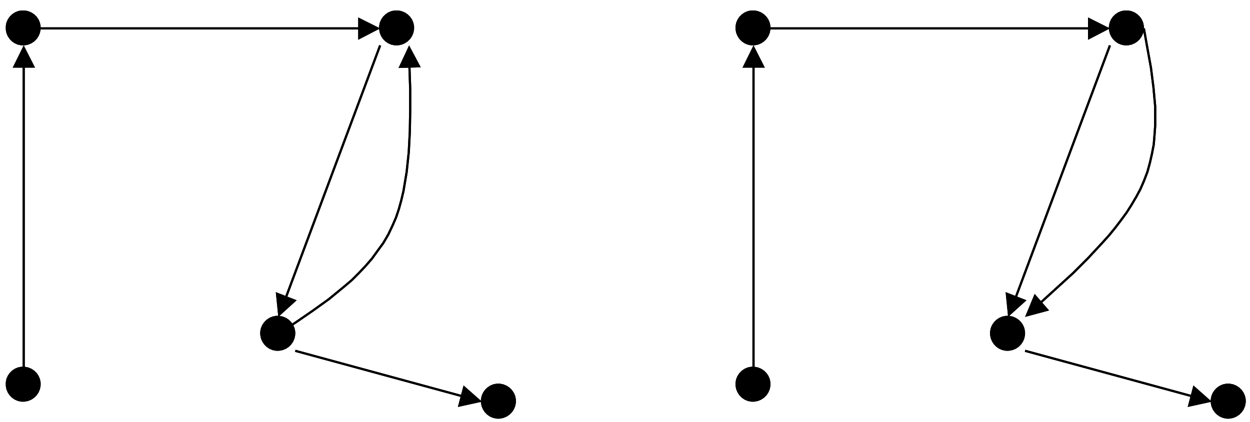


(d)

Grafos

- Grafos direcionados: Um grafo é direcionado quando a ordem da conexão é pré-determinada.

Exemplo:

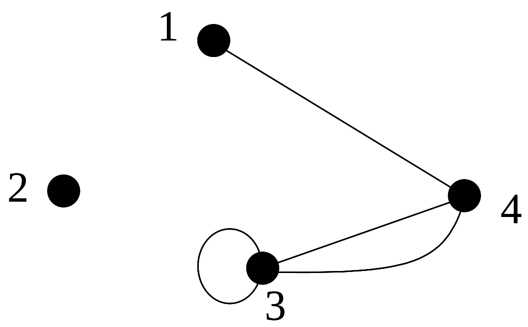


(a) (b)

Grafos

- Representação Computacional dos Grafos
- Matriz de Adjacências: É a representação do grafo onde os vértices ocupam a posição das linhas/colunas e o número de arestas que conectam cada vértice ocupam os coeficientes das matrizes.

Exemplo:



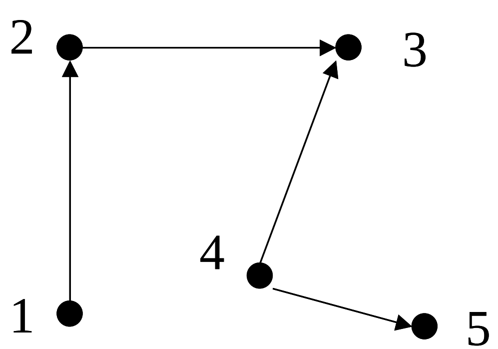
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

OBS: Vértices isolados representam linhas/colunas nulas.

Grafos

- Representação Computacional dos Grafos
- Matriz de Adjacências: Em um grafo direcionado as “saídas” de uma aresta é colocada nas linhas enquanto que as “entradas” nas colunas.

Exemplo:



$$\begin{array}{cc} & \text{Entradas} \\ \text{Saídas} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(1) Em um grafo direcionado, não ponderado e sem arestas paralelas temos:

- A matriz de adjacências que o representa é uma matriz booleana, isto é, seus coeficientes são somente 0 ou 1;
- A diagonal principal da matriz de adjacências desse grafo é nula.

(2) Em um grafo não direcionado, a matriz de adjacências é simétrica.

Grafos

- Representação Computacional dos Grafos
- Relação de Adjacências: É uma representação por pares ordenados (ou não, para grafos não direcionados), onde:

$$\left(n_i, n_j\right) \Leftrightarrow \exists \text{ um aresta de } n_i \text{ para } n_j$$

Nos exemplos anteriores temos:

1) $\left\{(1,4),(3,4),(3,4),(3,3)\right\}$

2) $\left\{(1,2),(2,3),(4,3),(4,5)\right\}$

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

[1] Gersting, J.L., Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação., ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1995.