Sistemas de Equações Lineares

Prof. Evanivaldo C. Silva Jr.

Seção 8

Sistemas de Equações Lineares

- MÉTODO DE RESOLUÇÃO POR ESCALONAMENTO GAUSSIANO
  - Sistema triangular inferior: são os sistemas cujos coeficientes abaixo da diagonal principal do sistema são nulos na forma de escada:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 10x_3 = 0 \\ \qquad\quad 5x_2 + x_3 = 12 \\ \qquad\qquad\quad 2x_3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 10x_3 = 0 \\ 0x_1 + 5x_2 + x_3 = 12 \\ 0x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

  - Resolver um sistema triangular é bastante simples isolando as variáveis das equações mais simples e substituindo os valores numéricos obtidos nas equações mais completas.
  - No sistema triangular inferior começamos da última equação (mais abaixo) para a primeira (acima)

Sistemas de Equações Lineares

- MÉTODO DE RESOLUÇÃO POR ESCALONAMENTO GAUSSIANO
  - No Sistema triangular inferior abaixo podemos proceder:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 10x_3 = 0 \\ \qquad 5x_2 + x_3 = 12 \\ \qquad\qquad 2x_3 = 4 \end{cases}$$

- Isolamos a variável x_3 da terceira equação

$$2x_3 = 4 \Leftrightarrow x_3 = \frac{4}{2} \Leftrightarrow x_3 = 2$$

- Substituímos o valor de x_3 na segunda equação:

$$5x_2 + 2 = 12 \Leftrightarrow 5x_2 = 12 - 2 \Leftrightarrow 5x_2 = 10 \Leftrightarrow x_2 = \frac{10}{5} \Leftrightarrow x_2 = 2$$

- Substituímos os valores de x_2 e x_3 na primeira equação:

$$2x_1 - 2 + 10 \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow 2x_1 - 2 + 20 = 0 \Leftrightarrow 2x_1 + 18 = 0 \Leftrightarrow 2x_1 = -18 \Leftrightarrow x_1 = \frac{-18}{2} \Leftrightarrow x_1 = -9$$

- Portanto a solução é: $x_1 = -9,\ x_2 = 2,\ x_3 = 2$

Sistemas de Equações Lineares

- MÉTODO DE RESOLUÇÃO POR ESCALONAMENTO GAUSSIANO
  - A questão é: E para os sistemas que não se encontram na forma triangularizada? É possível triangulariza-los?
  - Esse é o chamado método de escalonamento de Gauss, ou seja, é uma metodologia que procura através de operações chamadas de "operações elementares", tornar o sistema triangular.
  - As Operações Elementares com as equações de um sistema linear são:
    1. Permutar (trocar de posição) quaisquer duas equações do sistema;
    2. Multiplicar (ou dividir) uma equação qualquer do sistema por uma constante $a \neq 0$.
    3. Adicionar duas equações quaisquer do sistema efetuando a operação dois.

Sistemas de Equações Lineares

- MÉTODO DE RESOLUÇÃO POR ESCALONAMENTO GAUSSIANO
  - Aplicando um número finito dessas operações em um sistema linear é possível triangulariza-lo.
  - EXEMPLO: Seja o sistema: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ -x_1 + 8x_2 = 7 \end{cases}$, temos:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 & eq.1 \\ -x_1 + 8x_2 = 7 & eq.2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 & eq.1 = eq.1 \\ -2x_1 + 16x_2 = 14 & eq.2 = 2 \cdot eq.2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 & eq.1 = eq.1 \\ \quad 17x_2 = 17 & eq.2 = 2 \cdot eq.2 + eq.1 \end{cases}$$

$\Downarrow$

Sistema na forma triangular

Sistemas de Equações Lineares

- MÉTODO DE RESOLUÇÃO POR ESCALONAMENTO GAUSSIANO
  - Aplicando um número finito dessas operações em um sistema linear é possível triangulariza-lo.
  - EXEMPLO: Seja o sistema: $\begin{cases} -2x_1 + 8x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$, temos:

$$\begin{cases} -2x_1 + 8x_2 + x_3 = 7 & eq.1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 & eq.2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 3 & eq.3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 & eq.1 = eq.2 \\ -2x_1 + 8x_2 + x_3 = 7 & eq.2 = eq.1 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 3 & eq.3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 & eq.1 \\ 10x_2 + 7x_3 = 17 & eq.2 = 2 \cdot eq.1 + eq.2 \\ -2x_2 - 10x_3 = -12 & eq.3 = (-3) \cdot eq.1 + eq.3 \end{cases}$$

Sistemas de Equações Lineares

- MÉTODO DE RESOLUÇÃO POR ESCALONAMENTO GAUSSIANO
  - Continuando:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 & eq.1 \\ 10x_2 + 7x_3 = 17 & eq.2 = 2 \cdot eq.1 + eq.2 \\ -2x_2 - 10x_3 = -12 & eq.3 = (-3) \cdot eq.1 + eq.3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 & eq.1 \\ -2x_2 - 10x_3 = -12 & eq.2 = eq.3 \\ 10x_2 + 7x_3 = 17 & eq.3 = eq.2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 & eq.1 \\ -2x_2 - 10x_3 = -12 & eq.2 \\ -43x_3 = -43 & eq.3 = 5 \cdot eq.2 + eq.3 \end{cases}$$

Sistema na forma triangular

Sistemas de Equações Lineares

- MÉTODO DE RESOLUÇÃO POR ESCALONAMENTO GAUSSIANO
  - Continuando:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 & eq.1 \\ -2x_2 - 10x_3 = -12 & eq.2 \\ -43x_3 = -43 & eq.3 = 5 \cdot eq.2 + eq.3 \end{cases}$$

Sistema na forma triangular

Sistemas de Equações Lineares

- EXERCÍCIOS
  - Resolva os sistemas lineares abaixo

$$a)\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$$

$$b)\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 - x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 = 2 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = -4 \end{cases}$$

Referência Bibliográfica

[1] Gersting, J.L., Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação., ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1995.