

# Resolução Numérica de Equações Diferenciais

## Introdução

### Resolução Numérica de Equações Diferenciais

#### Introdução e Motivação Física

Equações diferenciais constituem a linguagem fundamental para a modelagem de sistemas dinâmicos em Física e Engenharia. Na engenharia aeronáutica, equações diferenciais surgem naturalmente na descrição da dinâmica de voo, na análise de estabilidade, em problemas de vibração estrutural, bem como na modelagem de escoamentos aerodinâmicos.

Embora muitas equações diferenciais possuam soluções analíticas em casos ideais, a grande maioria dos problemas de interesse prático envolve não-linearidades, geometrias complexas ou condições de contorno que inviabilizam uma solução fechada. Nessas situações, torna-se indispensável o uso de métodos numéricos para aproximar a solução do problema contínuo.

A resolução numérica de equações diferenciais baseia-se na discretização do domínio independente (tempo e/ou espaço), convertendo o problema contínuo em um conjunto finito de equações algébricas ou diferenciais aproximadas. O objetivo central desses métodos é obter soluções que sejam consistentes, estáveis e convergentes, garantindo a fidelidade física do modelo.

#### Classificação das Equações Diferenciais

As equações diferenciais podem ser classificadas de acordo com diferentes critérios, sendo os mais relevantes para a análise numérica apresentados a seguir.

#### Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs)

Uma equação diferencial ordinária envolve derivadas de uma ou mais funções dependentes em relação a uma única variável independente, usualmente o tempo. A forma geral de uma EDO de primeira ordem é

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y). \quad (1)$$

Equações de ordem superior podem sempre ser reescritas como sistemas de EDOs de primeira ordem, o que constitui a base para a maioria dos métodos numéricos.

#### Equações Diferenciais Parciais (EDPs)

Equações diferenciais parciais envolvem derivadas em relação a duas ou mais variáveis independentes. Um exemplo típico é a equação do calor,

$$\partial_t u = \alpha \nabla^2 u, \quad (2)$$

que aparece em problemas de difusão térmica e estrutural. A resolução numérica de EDPs geralmente envolve discretizações tanto no tempo quanto no espaço.

## Problemas de Valor Inicial

Em um problema de valor inicial (PVI), a solução é determinada a partir de uma condição inicial imposta em um ponto do domínio. Para uma EDO de primeira ordem,

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \quad (3)$$

A maioria dos métodos de integração temporal, como Euler e Runge–Kutta, é formulada inicialmente para esse tipo de problema.

## Problemas de Valor de Contorno

Nos problemas de valor de contorno (PVC), as condições são especificadas em diferentes pontos do domínio. Um exemplo típico é

$$d^2 \frac{y}{dx^2} = g(x), \quad (4)$$

com condições impostas em  $x = a$  e  $x = b$ . Esses problemas são particularmente relevantes em vibrações estruturais e mecânica dos sólidos.

## Sistemas Lineares e Não Lineares

Uma equação diferencial é dita linear quando pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + b(t), \quad (5)$$

onde  $A(t)$  e  $b(t)$  são funções conhecidas. Caso contrário, a equação é não linear. A não linearidade é uma das principais fontes de complexidade numérica e frequentemente exige métodos iterativos ou esquemas implícitos.

## Preparação para a Discretização Numérica

Independentemente da classe da equação diferencial, a resolução numérica exige a aproximação das derivadas por expressões algébricas. Esse processo introduz erros de truncamento, cuja análise será fundamental para avaliar a qualidade dos métodos numéricos apresentados nas seções seguintes.

Nos próximos tópicos, serão desenvolvidos os princípios fundamentais da discretização temporal, partindo da aproximação de derivadas por diferenças finitas. A partir dessas aproximações, serão deduzidos os principais métodos numéricos de integração, com ênfase em sua ordem de precisão, estabilidade e aplicabilidade em problemas físicos reais.

## Discretização Temporal: Ideia Geral

Considere uma função  $y(t)$  suficientemente regular, definida em um intervalo  $[t_0, t_f]$ . Introduzimos uma malha temporal uniforme

$$t_n = t_0 + nh, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (6)$$

onde  $h$  é o passo de integração temporal.

O problema contínuo consiste em determinar  $y(t)$  para todo  $t$  no intervalo. No contexto numérico, busca-se uma sequência de aproximações

$$y_n \approx y(t_n). \quad (7)$$

A base de todos os métodos de integração temporal reside na aproximação das derivadas por diferenças finitas obtidas a partir da expansão em série de Taylor.

### **Aproximação da Derivada por Série de Taylor**

Expandindo  $y(t)$  em torno de  $t_n$ , temos

$$y(t_n + h) = y(t_n) + h\dot{y}(t_n) + \frac{h^2}{2}\ddot{y}(t_n) + \frac{h^3}{6}y'''(t_n) + \dots \quad (8)$$

Reorganizando, obtemos uma aproximação para a derivada primeira:

$$\dot{y}(t_n) = \frac{y(t_n + h) - y(t_n)}{h} - \frac{h}{2}\ddot{y}(t_n) + O(h^2). \quad (9)$$

Desprezando os termos de ordem superior, resulta a aproximação de primeira ordem

$$\dot{y}(t_n) \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{h}. \quad (10)$$

Essa expressão constitui a diferença finita progressiva e será a base para a dedução do método de Euler explícito.

### **Erro de Truncamento Local e Global**

A substituição da derivada exata por uma aproximação algébrica introduz o erro de truncamento local, definido como o erro cometido em um único passo assumindo que o valor inicial é exato.

Para um método de ordem  $p$ , o erro de truncamento local é da ordem

$$O(h^{p+1}). \quad (11)$$

O erro global, por sua vez, resulta da acumulação dos erros locais ao longo do intervalo de integração e é tipicamente da ordem

$$O(h^p). \quad (12)$$

Essa distinção é essencial para a análise de convergência e será retomada na discussão dos métodos de Runge–Kutta e de passos múltiplos.

### **Consistência, Estabilidade e Convergência**

Um método numérico para equações diferenciais deve satisfazer três propriedades fundamentais:

- Consistência: a equação discreta deve tender à equação diferencial original quando  $h \rightarrow 0$ ;
- Estabilidade: erros introduzidos durante a integração não devem crescer de forma descontrolada;

- Convergência: a solução numérica deve convergir para a solução exata quando o passo de integração tende a zero.

O teorema fundamental de Lax estabelece que, para problemas lineares bem postos, consistência e estabilidade implicam convergência.

Esses conceitos constituem o arcabouço teórico necessário para a análise crítica dos métodos numéricos que serão apresentados a seguir.

### **Transição para os Métodos de Integração**

Com as ferramentas conceituais de discretização, análise de erro e estabilidade estabelecidas, passamos agora à dedução dos métodos clássicos de integração numérica para equações diferenciais ordinárias, iniciando pelo método de Euler e evoluindo para esquemas de maior ordem e melhor comportamento numérico.

#### **Método de Euler (Explícito)**

Considere o problema de valor inicial para uma equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \quad (13)$$

A ideia central do método de Euler explícito consiste em aproximar a derivada temporal por uma diferença finita progressiva, assumindo que a inclinação da solução permanece aproximadamente constante em um pequeno intervalo de tempo.

#### **Dedução do Método**

A partir da expansão em série de Taylor da solução em torno de  $t_n$ , temos

$$y(t_n + h) = y(t_n) + h\dot{y}(t_n) + O(h^2). \quad (14)$$

Substituindo a equação diferencial  $\dot{y} = f(t, y)$ , obtemos

$$y(t_n + h) = y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)) + O(h^2). \quad (15)$$

Desprezando os termos de ordem superior, resulta o esquema de integração

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n). \quad (16)$$

Essa expressão define o método de Euler explícito.

#### **Interpretação Geométrica**

Geometricamente, o método de Euler aproxima a solução exata por segmentos de reta, utilizando a inclinação da curva no ponto inicial de cada passo. Em cada intervalo, a solução é extrapolada linearmente a partir do valor conhecido  $y_n$ .

Essa interpretação evidencia o caráter local do método e explica suas limitações em problemas onde a solução varia rapidamente.

#### **Ordem de Precisão**

O erro de truncamento local do método de Euler explícito é da ordem

$$O(h^2), \quad (17)$$

enquanto o erro global acumulado ao longo do intervalo de integração é da ordem

$$O(h). \quad (18)$$

Portanto, o método de Euler é um método de primeira ordem.

### **Estabilidade do Método de Euler**

A análise de estabilidade é realizada considerando o problema teste linear

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y, \quad (19)$$

com  $\lambda$  constante.

Aplicando o método de Euler, obtemos

$$y_{n+1} = (1 + h\lambda)y_n. \quad (20)$$

A solução numérica permanecerá limitada se

$$|1 + h\lambda| \leq 1. \quad (21)$$

Essa condição define a região de estabilidade absoluta do método de Euler, mostrando que ele é condicionalmente estável e inadequado para problemas rígidos.

### **Limitações e Aplicações**

Apesar de sua simplicidade, o método de Euler explícito apresenta sérias limitações:

- Baixa ordem de precisão;
- Região de estabilidade restrita;
- Sensibilidade a passos de integração grandes.

No entanto, o método é útil para fins didáticos, prototipagem rápida e como base conceitual para métodos de maior ordem.

Em aplicações de engenharia aeronáutica, o método de Euler pode ser utilizado para análises preliminares ou para validação conceitual de algoritmos mais sofisticados.

### **Observação sobre Sistemas de Equações**

O método de Euler estende-se naturalmente a sistemas de equações diferenciais da forma

$$\dot{y} = f(t, y), \quad (22)$$

onde  $y$  é um vetor de estado. A fórmula de atualização mantém a mesma estrutura,

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \quad (23)$$

sendo aplicada componente a componente.

## Método de Euler Implícito

O método de Euler implícito surge como uma modificação natural do método de Euler explícito, com o objetivo de melhorar as propriedades de estabilidade, especialmente em problemas rígidos.

Considere novamente o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \quad (24)$$

### Dedução do Método

Partimos da expansão em série de Taylor em torno de  $t_{n+1}$ ,

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + h\dot{y}(t_{n+1}) + O(h^2). \quad (25)$$

Substituindo  $\dot{y} = f(t, y)$ , obtemos

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf(t_{n+1}, y(t_{n+1})) + O(h^2). \quad (26)$$

Desprezando os termos de ordem superior, resulta o esquema implícito

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}). \quad (27)$$

Diferentemente do método explícito, a incógnita  $y_{n+1}$  aparece em ambos os lados da equação, o que exige a resolução de uma equação algébrica a cada passo de integração.

### Interpretação Física e Numérica

No método implícito, a inclinação utilizada para atualizar a solução é avaliada no ponto final do passo, o que confere ao método um caráter mais estável. Esse comportamento pode ser interpretado como uma média implícita do campo vetorial ao longo do intervalo de integração.

### Ordem de Precisão

Assim como o método de Euler explícito, o método de Euler implícito possui erro de truncamento local da ordem

$$O(h^2), \quad (28)$$

e erro global da ordem

$$O(h). \quad (29)$$

Portanto, trata-se também de um método de primeira ordem.

### Estabilidade do Método de Euler Implícito

Aplicando o método de Euler implícito ao problema teste

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y, \quad (30)$$

obtemos

$$y_{n+1} = y_n + h\lambda y_{n+1}. \quad (31)$$

Reorganizando,

$$y_{n+1} = \frac{1}{1 - h\lambda} y_n. \quad (32)$$

A condição de estabilidade exige

$$\left| \frac{1}{1 - h\lambda} \right| \leq 1. \quad (33)$$

Para  $\Re(\lambda) < 0$ , essa condição é satisfeita para qualquer valor de  $h$ , mostrando que o método de Euler implícito é incondicionalmente estável (A-estável).

### Problemas Rígidos

Problemas rígidos caracterizam-se pela presença de escalas de tempo muito distintas, o que impõe restrições severas ao passo de integração em métodos explícitos.

Em tais situações, métodos implícitos permitem o uso de passos de integração maiores sem comprometer a estabilidade, sendo amplamente utilizados em dinâmica estrutural, sistemas de controle e simulações aeroespaciais.

### Extensão para Sistemas Não Lineares

Para funções não lineares  $f(t, y)$ , a equação implícita

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_{n+1}, y_{n+1}) \quad (34)$$

deve ser resolvida iterativamente, usualmente por métodos como Newton–Raphson ou iterações de ponto fixo.

Essa exigência aumenta o custo computacional do método, mas é compensada pela robustez numérica obtida.

### Métodos de Runge–Kutta

Os métodos de Runge–Kutta constituem uma família de métodos de passo único que buscam aumentar a ordem de precisão sem recorrer ao cálculo explícito de derivadas de ordem superior. A ideia central consiste em combinar avaliações do campo vetorial  $f(t, y)$  em diferentes pontos dentro do intervalo de integração.

Considere novamente o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \quad (35)$$

### Runge–Kutta de Segunda Ordem

Uma das formas mais simples de Runge–Kutta de segunda ordem pode ser obtida a partir de uma média entre a inclinação no início do intervalo e a inclinação em um ponto intermediário.

Definimos

$$k_1 = f(t_n, y_n), \quad (36)$$

$$k_2 = f(t_n + h, y_n + hk_1). \quad (37)$$

A atualização da solução é dada por

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2). \quad (38)$$

Esse método é frequentemente denominado método de Euler aperfeiçoado ou método de Heun.

### Dedução via Série de Taylor

Expandindo a solução exata em série de Taylor,

$$y(t_n + h) = y(t_n) + h\dot{y}(t_n) + \frac{h^2}{2}\ddot{y}(t_n) + O(h^3). \quad (39)$$

O método de Runge–Kutta de segunda ordem reproduz corretamente os termos até ordem  $h^2$ , resultando em erro de truncamento local da ordem

$$O(h^3), \quad (40)$$

e erro global da ordem

$$O(h^2). \quad (41)$$

### Runge–Kutta de Quarta Ordem (RK4)

O método de Runge–Kutta de quarta ordem é amplamente utilizado em aplicações de engenharia devido ao seu excelente compromisso entre precisão e custo computacional.

O esquema RK4 é definido por

$$k_1 = f(t_n, y_n), \quad (42)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right), \quad (43)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), \quad (44)$$

$$k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3). \quad (45)$$

A atualização da solução é dada por

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \quad (46)$$

### Ordem de Precisão do RK4

O método RK4 possui erro de truncamento local da ordem

$$O(h^5), \quad (47)$$

e erro global da ordem

$$O(h^4). \quad (48)$$

Essa alta ordem de precisão explica seu amplo uso em simulações de dinâmica de voo, integração de equações de atitude e análise de trajetórias.

### Interpretação Física

O método RK4 pode ser interpretado como uma média ponderada das inclinações do campo vetorial ao longo do intervalo de integração, capturando de forma mais fiel a curvatura da solução do que métodos de menor ordem.

### Estabilidade dos Métodos de Runge–Kutta

Embora métodos de Runge–Kutta apresentem maior precisão, sua estabilidade ainda é condicional. Para problemas rígidos, métodos explícitos de Runge–Kutta podem exigir passos de integração extremamente pequenos para manter a estabilidade.

Nesses casos, métodos implícitos ou semi-implícitos tornam-se mais adequados.

### Aplicações em Engenharia Aeronáutica

Métodos de Runge–Kutta são amplamente empregados em:

- Integração das equações de movimento de aeronaves;
- Simulação de trajetórias e manobras;
- Análise de estabilidade dinâmica;
- Integração de sistemas acoplados de equações diferenciais.

Sua simplicidade de implementação e boa precisão fazem desses métodos uma ferramenta padrão em simulações preliminares e estudos de desempenho.

### Estabilidade Numérica

A estabilidade numérica descreve o comportamento dos erros introduzidos durante o processo de integração. Um método estável é aquele para o qual pequenos erros, sejam provenientes da discretização ou de perturbações numéricas, não crescem de forma descontrolada ao longo da integração.

A análise de estabilidade é particularmente importante em problemas dinâmicos, onde soluções fisicamente limitadas podem ser destruídas por instabilidades puramente numéricas.

### Problema Teste Linear

A análise clássica de estabilidade é realizada a partir do problema teste

$$\frac{dy}{dt} = \lambda y, \quad (49)$$

onde  $\lambda$  é um número complexo com parte real negativa, representando sistemas fisicamente dissipativos.

A solução exata é

$$y(t) = y_0 e^{\lambda t}, \quad (50)$$

que decai no tempo quando  $\Re(\lambda) < 0$ .

### Fator de Amplificação Numérico

Aplicando um método numérico genérico, a solução discreta pode ser escrita na forma

$$y_{n+1} = R(h\lambda)y_n, \quad (51)$$

onde  $R(z)$  é o fator de amplificação do método.

A condição de estabilidade absoluta é

$$|R(h\lambda)| \leq 1. \quad (52)$$

O conjunto dos valores de  $z = h\lambda$  que satisfaz essa condição define a região de estabilidade do método.

### Regiões de Estabilidade

Para o método de Euler explícito,

$$R(z) = 1 + z, \quad (53)$$

resultando em uma região de estabilidade limitada ao disco

$$|1 + z| \leq 1. \quad (54)$$

Isso explica a severa restrição sobre o passo de integração em problemas rígidos.

Para o método de Euler implícito,

$$R(z) = \frac{1}{1 - z}, \quad (55)$$

cuja região de estabilidade contém todo o semiplano

$$\Re(z) < 0, \quad (56)$$

caracterizando um método A-estável.

Métodos explícitos de Runge–Kutta apresentam regiões de estabilidade maiores que as do Euler explícito, mas ainda limitadas, o que restringe sua aplicação em problemas fortemente dissipativos.

### Consequências Práticas

A análise de estabilidade mostra que:

- Métodos explícitos são adequados para problemas não rígidos e suaves;
- Métodos implícitos são preferíveis em sistemas rígidos;
- A escolha do passo de integração é tão importante quanto a escolha do método.

Em engenharia aeronáutica, essas considerações são fundamentais em simulações de dinâmica de voo, vibrações estruturais e sistemas de controle.

## **Considerações Finais sobre Métodos Numéricos**

A resolução numérica de equações diferenciais constitui uma ferramenta essencial para a modelagem de sistemas físicos complexos. A escolha apropriada do método numérico deve levar em conta não apenas a precisão desejada, mas também a estabilidade, a rigidez do problema e o custo computacional.

Métodos simples, como o Euler explícito, desempenham papel conceitual importante, enquanto métodos de maior ordem e melhor estabilidade, como Runge–Kutta e métodos implícitos, são indispensáveis em aplicações reais de engenharia.

O domínio desses métodos permite ao engenheiro interpretar corretamente os resultados numéricos e garantir que as soluções obtidas representem fielmente o comportamento físico do sistema modelado.

## **Equações Diferenciais Parciais: Visão Geral e Métodos Numéricos**

Equações diferenciais parciais (EDPs) surgem naturalmente na modelagem de fenômenos onde a variável dependente depende simultaneamente do tempo e do espaço. Em engenharia aeronáutica, exemplos centrais incluem a equação do calor em estruturas, equações de elasticidade, equações de onda e as equações de Euler e Navier–Stokes para escoamentos aerodinâmicos.

De forma geral, uma EDP pode ser escrita como

$$F(u, \partial u, \partial^2 u, \dots) = 0, \quad (57)$$

onde  $u = u(x, t)$  representa o campo de interesse.

## **Classificação das EDPs**

As EDPs lineares de segunda ordem podem ser classificadas, de acordo com sua estrutura matemática, em:

- Elípticas (ex.: equação de Laplace);
- Parabólicas (ex.: equação do calor);
- Hiperbólicas (ex.: equação de onda).

Essa classificação influencia diretamente a escolha do método numérico e o tratamento das condições de contorno e iniciais.

## **Discretização Espacial**

A resolução numérica de EDPs exige a discretização do domínio espacial, em conjunto com a discretização temporal quando aplicável. Entre as técnicas mais utilizadas destacam-se:

- Diferenças finitas, baseadas na aproximação local das derivadas espaciais;
- Elementos finitos, baseados em formulações variacionais;
- Volumes finitos, baseados em leis de conservação integrais.

Cada abordagem apresenta vantagens específicas em termos de geometria, precisão e conservação física.

## **Separação de Variáveis e Métodos Semi-Discretos**

Em problemas lineares com geometria simples, a técnica de separação de variáveis permite reduzir uma EDP a um conjunto de EDOs ou problemas de autovalor.

Alternativamente, métodos semi-discretos consistem em discretizar o espaço, mantendo o tempo contínuo, o que resulta em sistemas de EDOs que podem ser integrados por métodos como Euler ou Runge–Kutta.

## **Estabilidade e Condições Numéricas**

Assim como no caso das EDOs, a estabilidade numérica desempenha papel central na resolução de EDPs. Em particular, métodos explícitos frequentemente impõem restrições severas sobre o passo de tempo, expressas por condições do tipo CFL (Courant–Friedrichs–Lewy).

Métodos implícitos permitem passos de tempo maiores, ao custo da resolução de sistemas algébricos mais complexos.

## **Aplicações em Engenharia Aeronáutica**

A resolução numérica de EDPs é fundamental em:

- Análise térmica de estruturas aeronáuticas;
- Vibrações e elasticidade estrutural;
- Simulação de escoamentos compressíveis e incompressíveis;
- Modelagem de camadas limite e fenômenos de separação.

Ferramentas modernas de simulação computacional baseiam-se nesses métodos para prever o comportamento de sistemas complexos com elevado grau de fidelidade.

## **Considerações Finais do Tema**

A resolução numérica de equações diferenciais, tanto ordinárias quanto parciais, constitui um dos pilares da engenharia moderna. O entendimento dos princípios de discretização, estabilidade e convergência é essencial para o uso consciente de ferramentas computacionais.

Mais do que produzir números, métodos numéricos permitem interpretar fenômenos físicos, validar modelos teóricos e orientar decisões de projeto em sistemas complexos, especialmente no contexto da engenharia aeronáutica.