Princípio dos Trabalhos Virtuais e Formulação Lagrangeana

Introdução

O estudo da mecânica analítica representa um marco fundamental no desenvolvimento da física e da engenharia, oferecendo métodos poderosos e elegantes para descrever sistemas mecânicos complexos. Entre os pilares dessa formulação estão o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) e a Formulação Lagrangeana, que constituem a base conceitual e matemática para analisar o movimento de sistemas sob restrições, proporcionando um tratamento unificado e generalizado. Esses princípios permitem ultrapassar as limitações da mecânica newtoniana tradicional em situações onde forças de vínculo, sistemas com múltiplos graus de liberdade e coordenadas generalizadas tornam-se elementos indispensáveis.

O Princípio dos Trabalhos Virtuais, oriundo de formulações estáticas e posteriormente estendido para sistemas dinâmicos, estabelece que, para um sistema em equilíbrio ou em equilíbrio dinâmico virtual, o trabalho total das forças, durante deslocamentos compatíveis com as restrições, é nulo. A partir desse princípio e utilizando-se das noções de coordenadas generalizadas, chega-se de forma natural à formulação de Lagrange, que transforma o problema dinâmico em equações diferenciais obtidas a partir de uma função escalar: o lagrangiano.

Esta dissertação tem como objetivo apresentar, de forma clara e aprofundada, os fundamentos conceituais, matemáticos e físicos que sustentam o Princípio dos Trabalhos Virtuais e a Formulação Lagrangeana, discutindo também exemplos de aplicação e seu papel essencial na física moderna, engenharia mecânica, aeroespacial e em sistemas complexos em geral.

Desenvolvimento

O Princípio dos trabalhos Virtuais

O trabalho virtual é definido como o trabalho realizado por forças aplicadas em um sistema durante um deslocamento infinitesimal imaginário e compatível com as restrições importas. Esse deslocamento, chamado de deslocamento virtual, não corresponde necessariamente a um movimento real, mas a uma variação admissível que respeita as geometrias e vínculos do sistemas, que ocorre "congelando" o tempo ($dt = 0$).

Em termos matemáticos, para uma força $\vec{F}_i$ e um deslocamento virtual δr_i, o trabalho virtual é dado por,

$$\delta W = \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i. \tag{1}$$

A grande contribuição do conceito está na possibilidade de tratar sistemas com vínculos sem precisar calcular explicitamente as forças de reação dos vínculos.

Vínculos e coordenadas generalizadas

Sistemas mecânicos frequentemente apresentam vínculos geométricos ou cinemáticos que reduzem o número de graus de liberdade. Quando representados em coordenadas cartesianas, tais vínculos complicam a análise, pois introduzem forças de reação indesejadas.

Para contornar essa dificuldade, introduz-se o conceito de coordenadas generalizadas q_j, que descrevem o sistema de forma minimal, incorporando os vínculos diretamente na parametrização do movimento.

A posição de cada partícula é função dessas coordenadas e do tempo:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, ..., q_n, t) \tag{2}$$

Assim, o deslocamento virtual podem ser expresso como

$$\delta\vec{r}_\imath = \sum_j \frac{\partial\vec{r}_\imath}{\partial q_j}\delta q_j \tag{3}$$

Isso simplifica a expressão do trabalho virtual e prepara o caminho para os princípios variacionais da mecânica.

Princípio dos Trabalhos Virtuais para equilíbrio e o trabalho virtual das forças inerciais

Na formulação estática, estabelece-se que para um sistema em equilíbrio

$$\delta W = 0 \tag{4}$$

para qualquer deslocamento virtual permitido. Ou seja, o trabalho das forças aplicadas é nulo para todas as variações que satisfazem os vínculos. Esse princípio é usado extensivamente em estática estrutural, mecânica dos sólidos e análise de mecanismos.

D'Alembert reformulou o princípio tradicional ao introduzir o conceito de forças inerciais

$$\vec{F}_\imath^{(in)} = -m_i\ddot{\vec{r}}_\imath, \tag{5}$$

que podem ser tratadas como forças externas. Assim, para sistemas dinâmicos, o princípio dos trabalhos virtuais assume a forma

$$\delta W + \delta W_{in} \tag{6}$$

.

Esse resultado, conhecido como princípio de D'Alembert, é ponto de partida para derivar as equações de Lagrange.

Um ponto fundamental consiste em decompor a força total em cada partícula como

$$\vec{F}_\imath = \vec{F}_\imath^{(ap)} + \vec{f}_\imath, \tag{7}$$

onde $\vec{F}_\imath^{(ap)}$ são forças aplicadas (externas e internas efetivas) e f_i são forças de vínculo. Em sistemas com vínculos ideais (sem atrito, conexões rígidas), as forças de vínculo são perpendiculares ao deslocamento permitido. Portanto, o trabalho virtual das forças de vínculo é nulo

$$\sum_i \vec{f}_\imath \cdot \delta\vec{r}_\imath = 0, \tag{8}$$

ou seja, as forças de vínculo não realizam trabalho virtual.

Isso reduz o PTV à sua forma clássica: O trabalho virtual das forças aplicadas é zero no equilíbrio.

Para movermos da estática para a dinâmica, usamos o Princípio de d'Alembert. Tratamos a inércia como uma força. Pela 2ª Lei de Newton $\vec{F}_\imath = \dot{\vec{p}}_\imath = 0$, podemos reescrever:

$$\vec{F}_\imath - \dot{\vec{p}}_\imath = 0 \tag{9}$$

Aplicando o ceonceito de trabalho virtual a essa "força efetiva":

$$\sum_i \left(\vec{F}_i^{(ap)} - \dot{\vec{p}}_i\right) \cdot \delta r_i = 0 \tag{10}$$

Onde $\dot{\vec{p}}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i$.

Chegando em Lagrange

Vamos substituir $\delta\vec{r}_i$ na equação de d'Alembert e analisar termo a termo.

$$\sum_i \left(F_i^{(ap)} \cdot \sum_j \frac{\partial \vec{r}_\imath}{\partial q_j}\delta q_j\right) - \sum_i \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \sum_j \frac{\partial \vec{r}_\imath}{\partial q_j}\delta q_j\right) = 0 \tag{11}$$

Isolando δq_j e invertendo a ordem dos somatórios

$$\sum_j \left[\sum_i F_i^{(ap)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\imath}{\partial q_j} - \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_\imath}{\partial q_j}\right] \delta q_j = 0 \tag{12}$$

Iremos tratar cada um dos termos dentro do colchetes de forma separada.

O primeiro termo é definido como uma força generalizada (Q_j):

$$Q_j = \sum_i F_i^{(ap)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\imath}{\partial q_j} \tag{13}$$

O segundo termo, é o termo relacionado com a energia cinética, referido como termo da inércia. Parar trabalhar melhor com ele e chegar finalmente na Lagrangeana é necessário transformar este termo em algo relacionado a energia cinética que iremos chamar de T.

Queremos que o termo alvo (Y) seja dado por,

$$Y = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_\imath}{\partial q_j} \tag{14}$$

Ao utilizarmos a regra do produto, sabemos que $\frac{d}{dt}(A \cdot B) = \dot{A} \cdot B + A \cdot \dot{B}$. Vamos aplicar isso para $A = m_i \dot{\vec{r}}_i$ e $B = \frac{\partial \vec{r}_\imath}{\partial q_j}$.

No caso, deixando as somatórias de lado,

$$\frac{d}{dt}\left(m_i\dot{\vec{r}_i}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = m_i\ddot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} + m_i\dot{\vec{r}_i}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right) \tag{15}$$

Rearranjando os termos e devolvendo as somatórias, temos que,

$$\sum_i m_i\ddot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i\left[\frac{d}{dt}\left(m_i\dot{\vec{r}_i}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right) - m_i\dot{\vec{r}_i}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\right] \tag{16}$$

Ainda neste momento iremos utilizar de duas identidades para transformar em energia cinética.

A primeira identidade é dada por,

1. Troca de derivada :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} \tag{17}$$

2. Cancelamento das derivadas :

$$\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial\dot{q}_j} \tag{18}$$

- Prova das identidades

Vamos começar pela identidade 2., como $\vec{r}_i(q_1,...,q_n,t)$, pela regra da cadeia, o equivalente a derivada em relação ao tempo seria

$$\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i = \sum_j\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}. \tag{19}$$

Ao derivarmos em relação a $\dot{q}_j$ o único termo que sobrevive é aquele onde prova a identidade pois q e t não dependem explicitamente de $\dot{q}$.

Provando que,

$$\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial\dot{q}_j}. \tag{20}$$

Já a primeira identidade é provada de uma forma similar,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right) = \frac{\partial\dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j}. \tag{21}$$

Voltando a expressão principal,

$$\sum_j\left[Q_j - \sum_i m_i\ddot{\vec{r}}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right]\delta q_j = 0. \tag{22}$$

Vimos que,

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left[\frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \right]. \tag{23}$$

Então,

$$\sum_j \left[Q_j - \left(\sum_i \frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \right) \right] \delta q_j = 0. \tag{24}$$

Vamos aplicar ambas identidades para substituir as duas expressões que se assemelham,

$$\sum_j \left[Q_j - \left(\sum_i \frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j} \right) \right] \delta q_j = 0. \tag{25}$$

Se a energia cinética $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \right)$, ou simplesmente, $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2$. Temos então que

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i \frac{1}{2} m_i 2 \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}, \tag{26}$$

que é exatamente o que temos dentro da do colchetes.

Então,

$$\sum_j \left[Q_j - \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \right] \delta q_j = 0. \tag{27}$$

Como os deslocamentos virtuais δq_j são independentes (pelo fato de serem coordenadas generalizadas), o termo dentro do colchete deve ser nulo para cada j:

$$Q_j - \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) = 0, \tag{28}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j. \tag{29}$$

- Sistemas Conservativos

Se as forças forem conservativas, elas derivam de um potencial escalar do tipo $V(q_1, ..., q_n)$, tal que $\vec{F} = -\nabla V$. A força será,

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}. \tag{30}$$

Como o potencial V geralmente não depende das velocidades ($\dot{q}$), temos que $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$.

Podemos definir a Lagrangiana (L), como:

$$L = T - V, \tag{31}$$

Substituindo Q_j e introduzindo L:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T-V)}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial(T-V)}{\partial q_j}=0. \tag{32}$$

Resultando na famosa Equação de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0. \tag{33}$$

- Resumo dos pontos importantes:

1. Eliminação de Vínculos: O PTV permite ignorar forças de restrição (normais, tensões em hastes rígidas) porque elas não realizam trabalho virtual.
2. Independência de Coordenadas: A Lagrangiana funciona com qualquer sistema de coordenadas (r,θ, x,y, etc.), desde que descrevam o sistema univocamente.
3. Escalar vs. Vetorial: Saímos da álgebra vetorial de forças para a álgebra escalar de energias (T e V), o que reduz drasticamente a chance de erros geométricos.

Cálculo Variacional

Enquanto a Lagrangiana pode ser derivada a partir do Princípio dos Trabalhos Virtuais (via Princípio de d'Alembert), sua fundação conceitual mais profunda repousa sobre o Cálculo Variacional.

Dado o Princípio de Hamilton (ou Princípio da Ação Estacionária), que é a lei fundamental da qual a Lagrangiana emerge naturalmente.

O Cálculo Variacional lida com a minimização de funcionais (funções de funções), em vez de funções simples. Na mecânica, este funcional é a Ação (S).

O Princípio de Hamilton afirma que o caminho real percorrido por um sistema entre dois pontos no tempo (t_1 e t_2) é aquele que torna a Ação Estacionária (ou seja, minimiza a integral):

$$S=\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t). \tag{34}$$

Conceito Central

O Cálculo Variacional lida com a busca por funções que extremizam (minimizam ou maximizam) uma quantidade chamada Funcional.

Função Simples (f): Recebe um número e retorna um número. Ex: $f(x)=x^2$. O extremo é encontrado quando $\frac{df}{dx}=0$.

Funcional (I): Recebe uma função e retorna um número. Ex: $I[y(x)]$. O extremo é encontrado quando a variação do funcional é zero ($\delta I=0$).

Na Mecânica Analítica, o funcional que queremos extremizar é a Ação (S), e as funções que minimizamos são os possíveis caminhos que um sistema pode seguir.

O Funcional Geral e a Condição de Estacionaridade

Um funcional típico que encontramos na física e na matemática é a integral de uma função f, que depende de uma função $y(x)$, sua derivada $y'(x) = \frac{dx}{dy}$ e da variável independente x.

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x)dx \tag{35}$$

O objetivo do Cálculo Variacional é encontrar a função $y(x)$ (o "caminho") que torna o valor de I estacionário (um mínimo, máximo ou ponto de sela).

A condição matemática para que a variação (δI) seja zero leva diretamente à Equação de Euler-Lagrange (na sua forma matemática):

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0. \tag{36}$$

O princípio de Hamilton

O Princípio de Hamilton (ou Princípio da Ação Estacionária) é o postulado fundamental da Mecânica Analítica e a ponte entre o Cálculo Variacional e a Lagrangiana.

Ele afirma que o movimento real de um sistema físico entre dois instantes de tempo (t_1 e t_2) é o caminho $q(t)$ que torna a Ação (S) estacionária. Ao substituir esses termos na Equação de Euler-Lagrange matemática, obtemos a Equação de Lagrange que já havíamos derivado pelo Princípio de d'Alembert. Vamos mostrar isso abaixo,

Considere o funcional genérico $I[y(x)]$ que queremos extremizar:

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x)dx \tag{37}$$

Seja $y_0(x)$ o caminho real que torna I estacionário (o caminho físico). Qualquer caminho vizinho, $y(x)$, pode ser escrito como:

$$y(x) = y_0(x) + \alpha\eta(x). \tag{38}$$

Onde:

$\eta(x)$ é uma função arbitrária, mas que deve ser nula nos limites (x_1 e x_2), pois o caminho começa e termina no mesmo lugar ($\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$).

α é um parâmetro infinitesimal que mede o "afastamento" do caminho real $y_0(x)$.

A condição de estacionaridade é que a derivada do funcional I em relação ao parâmetro de afastamento α, calculada em $\alpha = 0$, deve ser zero:

$$\frac{dI}{d\alpha}\;|_{\alpha=0} = 0. \tag{39}$$

Primeiro aplicados a regra da cadeira à derivada $\frac{dI}{d\alpha}$

$$\frac{dI}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x)dx, \tag{40}$$

como os limites de integração (x_1 e x_2) são constantes, podemos mover a derivada para dentro da integral, então,

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{dy'}{d\alpha}\right]dx. \tag{41}$$

Agora calculamos as derivadas

$$y = y_0 + \alpha\eta \rightarrow \frac{dy}{d\alpha} = \eta(x) \tag{42}$$

$$y' = y_0' + \alpha\eta' \rightarrow \frac{dy'}{d\alpha} = \eta'(x) \tag{43}$$

Substituindo de volta na integral, temos que

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\eta + \frac{\partial f}{\partial y'}\eta'\right]dx. \tag{44}$$

Neste ponto, o termo que contêm η' não nos serve. Precisamos que ambos termos dependam apenas de η, para que possamos isolá-lo. Para isso vamos utilizar a integração por partes no segundo termo, que contêm η', para obtermos ambos termos e isolarmos.

Lembrando que $\int udv = uv - \int vdu$.

- $u = \frac{\partial f}{\partial y'} \rightarrow du = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx$,
- $dv = \eta' dx \rightarrow v = \eta$,

Aplicando na integração por partes, temos que,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'}\eta' dx = \left[\eta\frac{\partial f}{\partial y'}\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}dx. \tag{45}$$

Lembrando que restringimos inicialmente $\eta(x)$, sendo zero nos pontos (x_1, x_2), logo

$$\left[\eta\frac{\partial f}{\partial y'}\right]_{x_1}^{x_2} = \eta(x_2)\frac{\partial f}{\partial y'}(x_2) - \eta(x_1)\frac{\partial f}{\partial y'}(x_1) = 0 - 0 = 0, \tag{46}$$

Então o termo de contorno desaparece.

A expressão final fica

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\eta\right]dx + \int_{x_1}^{x_2}\left[\eta\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]dx. \tag{47}$$

Combinando ambas integrais e colocando $\eta(x)$ em evidência, além de impor a condição de estacionaridade $\frac{dI}{d\alpha}\mid_{\alpha=0} = 0$.

$$0 = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \eta(x) dx \tag{48}$$

Para que esta integral seja zero para qualquer função arbitrária $\eta(x)$ (o Princípio Fundamental do Cálculo das Variações), o termo entre colchetes deve ser identicamente zero em todo o domínio.

Isso nos leva à Equação de Euler-Lagrange (Forma Matemática):

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right). \tag{49}$$

Ao aplicar esta equação ao funcional da Ação, onde $f \to L$, $y \to q$, e $x \to t$, obtemos a equação da dinâmica:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0. \tag{50}$$

Em seguida, apresentamos a solução para o Pêndulo Simples e a Máquina de Atwood usando a formulação Lagrangiana.

1. O Pêndulo Simples

O sistema é definido pela coordenada generalizada $q = \theta$.

1.1 Energias

- **Energia Cinética** (T):

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \tag{51}$$

- **Energia Potencial** (V, com $V = 0$ no pivô):

$$V = -mgl\cos(\theta) \tag{52}$$

- **Lagrangiana** ($L = T - V$):

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl\cos(\theta) \tag{53}$$

1.2 Aplicação da Equação de Euler-Lagrange

A equação fundamental para θ é:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \tag{54}$$

- **Derivada em relação a $\dot{\theta}$**:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \dot{\theta} \tag{55}$$

- **Derivada temporal**:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta} \quad (56)$$

- **Derivada em relação a $\boldsymbol{\theta}$**:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\sin(\theta) \quad (57)$$

1.3 Equação de Movimento

Substituindo na equação de Euler-Lagrange:

$$ml^2\ddot{\theta} - (-mgl\sin(\theta)) = 0 \quad (58)$$

Simplificando, obtemos:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0 \quad (59)$$

2. A Máquina de Atwood

O sistema é definido pela coordenada generalizada $q = x$ (posição de m_1 abaixo da polia).

2.1 Energias

- **Energia Cinética** (T):

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 \quad (60)$$

- **Energia Potencial** (V, com $V = 0$ na polia):

$$V = -m_1 gx - m_2 g(l - x) \quad (61)$$

- **Lagrangiana** ($L = T - V$):

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + (m_1 - m_2)gx + m_2 gl \quad (62)$$

2.2 Aplicação da Equação de Euler-Lagrange

A equação fundamental para x é:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (63)$$

- **Derivada em relação a $\dot{\boldsymbol{x}}$**:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2)\dot{x} \quad (64)$$

- **Derivada temporal**:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (m_1 + m_2)\ddot{x} \quad (65)$$

- **Derivada em relação a $\boldsymbol{x}$**:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = (m_1 - m_2)g \tag{66}$$

2.3 Equação de Movimento

Substituindo na equação de Euler-Lagrange:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} - (m_1 - m_2)g = 0 \tag{67}$$

Simplificando, obtemos a aceleração:

$$\ddot{x} = g\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) \tag{68}$$

Conclusão

O Princípio dos Trabalhos Virtuais e a Formulação Lagrangeana representam dois dos pilares centrais da mecânica analítica. O primeiro fornece uma descrição eficiente dos efeitos das forças aplicadas em sistemas submetidos a vínculos, enquanto o segundo generaliza o tratamento dinâmico por meio de uma abordagem variacional elegante e poderosa. A utilização de coordenadas generalizadas, o caráter unificador das equações de Lagrange e sua aplicabilidade a uma vasta gama de sistemas tornam essa formulação indispensável para engenheiros, físicos e pesquisadores.

Compreender esses princípios não é apenas dominar uma técnica matemática sofisticada, mas reconhecer uma das linguagens fundamentais da natureza. A profundidade e universalidade desses conceitos continuam a influenciar fortemente o desenvolvimento científico e tecnológico, desde mecanismos clássicos até modelos avançados em teoria de campos e sistemas complexos.