

# अंकीय तर्क विधि

गाडेपल्लि वेंकट विश्वनाथ शर्मा \*

Contents	Expression	व्यंजक
नामकरण	Figure	आकृति
1 सप्तांश प्रदर्शी	1 Function	फलन
2 परवर्ती गूढवाचक	1 Implicant	विवक्षक
3 प्रदर्शी गूढवाचक	1 Incrementing	परवर्ती
4 कार्नो मानचित्र	1 Input	आगत
4.1 परवर्ती गूढवाचक . . . . .	1 Karnaugh Map	कार्नो मानचित्र
4.2 प्रदर्शी गूढवाचक . . . . .	3 LED	प्रकाश उत्सर्जक यंत्र
5 निर्गुण अवस्था	3 Minimize	कनिष्ठीकरण
5.1 परवर्ती गूढवाचक . . . . .	3 Output	निर्गत
5.2 प्रदर्शी गूढवाचक . . . . .	3 Reduced	समानयनिक
6 तर्क द्वार	4 Seven Segment Display	सप्तांश प्रदर्शी
7 योग-गुणन	4 Table	सारणी
	6 Truth Table	सत्य सारणी
	6 Variable	चर
	7 Verify	सत्यापित
	XOR	अर्ध योग
	9	
	10	

सार—यह लेख प्राथमिक विद्यालयों से लेकर विश्व विद्यालयों तक सभी छात्रों को एक सरल विधि से अंकीय तर्क से अवगत करने का प्रयास है।

नामकरण	अभिगृह
Axiom	द्विआधारी
Binary	बूलीय बीजगणित
Boolean Algebra	C क्रमादेश
C Program	गूढ
Code	संयोजक तर्क
Combinational Logic	पूरक
Complement	दशक गणित
Decade Counter	गूढवाचक
Decoder	व्युत्पन्न
Derive	अंकीय तर्क
Digital Logic	समीकरण
Equation	निष्पादित
Execute	

\*रचयिता भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान, हैदराबाद, 502204 के विद्युत अभियान्त्रिकी विभाग में कार्यरत हैं, ईमेल: gadepalli@ee.iith.ac.in। यह आलेख मुक्त स्रोत विचारधारा के अनुरूप है।

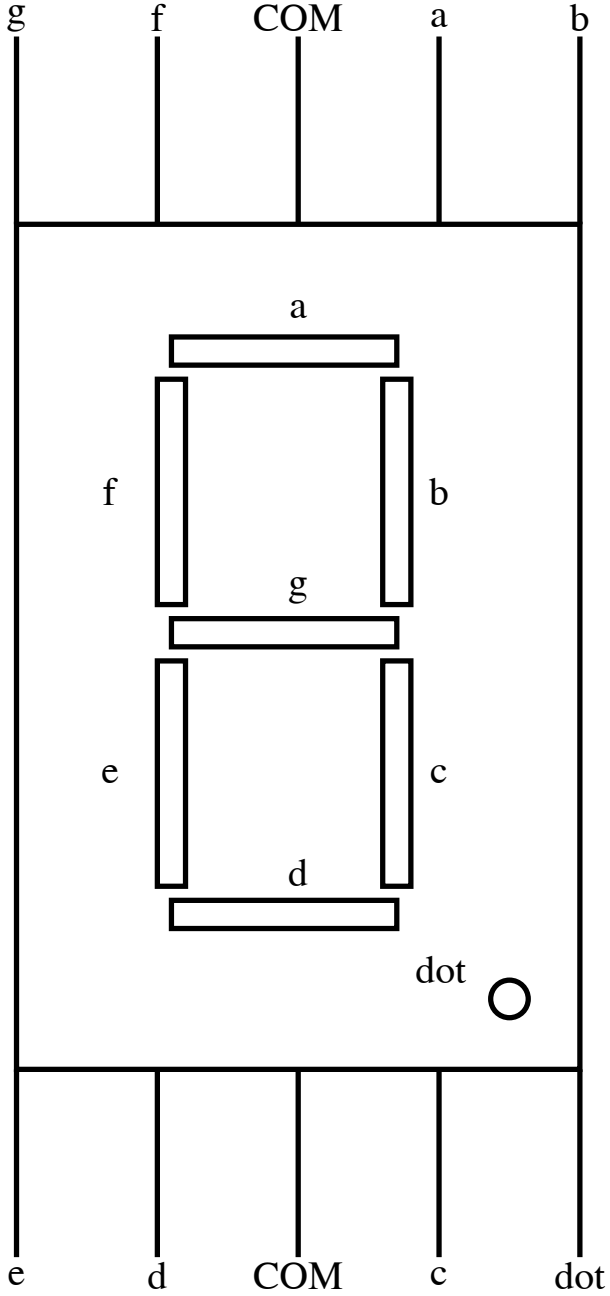
- 1 सप्तांश प्रदर्शी
- 1.1. आकृति 1.1.1 में एक सप्तांश प्रदर्शी प्रस्तुत है जिसमें कुश  $a, b, c, d, e, f, g$  हैं। प्रत्येक कुश का संपर्क एक प्रकाश उत्सर्जक यंत्र के साथ है।
- 1.2. आकृति 1.2.1 सारणी 1.2.1 के माध्यम से प्रदर्शी पर अंको को दर्शाता है। 0-9 तक सारे अंको को रेखांकित कर सारणी 1.2.1 को पूर्ण करें।

a	b	c	d	e	f	g	decimal
1	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	0	2

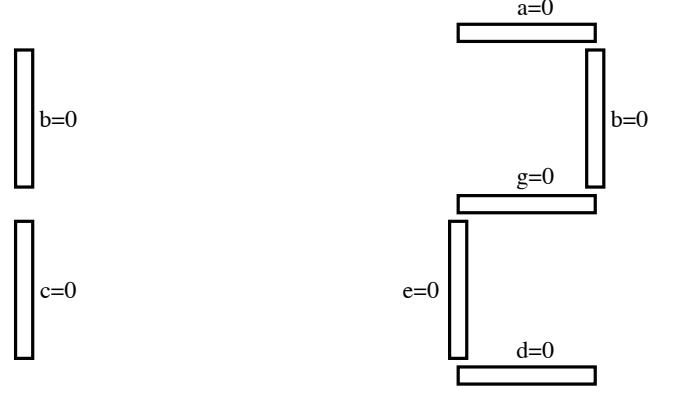
सारणी. 1.2.1

## 2 परवर्ती गूढवाचक

- 2.1. परवर्ती गूढवाचक में आगत दशमलव अंक 0, 1, ..., 9 द्वयाधारी संख्या रूप में हैं एवं परवर्ती संख्या निर्गत है। सारणी 2.1.1 में अनुरूप सत्य सारणी उपलब्ध है।
- 2.2. सारणी 2.1.1 में निर्गत चर A, आगत शब्द ZYXW = 0000, 0010, 0100, 0110, 1000 के लिए सत्य हैं।



आकृति. 1.1.1



आकृति. 1.2.1

Z	Y	X	W	D	C	B	A
0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0	0

सारणी. 2.1.1: परवर्ती गूढवाचक की सत्य सारणी ।

व्यक्त किया जा सकता है

$$A = W'X'Y'Z' + W'XY'Z' + W'X'YZ' + W'XYZ' + W'X'Y'Z \quad (2.3.1)$$

$$B = WX'Y'Z' + W'XY'Z' + WX'YZ' + W'XYZ' \quad (2.3.2)$$

$$C = WXY'Z' + W'X'YZ' + WX'YZ' + W'XYZ' \quad (2.3.3)$$

$$D = WXYZ' + W'X'Y'Z \quad (2.3.4)$$

2.4. पूरक चर की परिभाषा सारणी 2.4.1 में उपलब्ध है ।  
W का पूरक W' है ।

W	W'
0	1
1	0

सारणी. 2.4.1: पूरक चर ।

2.3. बूलीय तर्कानुसार सारणी 2.1.1 में निर्गत चर A, B, C एवं D को आगत चर W, X, Y, Z के द्वारा निम्न रूप से

D	C	B	A	a	b	c	d	e	f	g	Decimal
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	2
0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	3
0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	4
0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	5
0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	6
0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	7
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8
1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	9

सारणी. 3.1.1: प्रदर्शी गूढ़वाचक की सत्य सारिणी ।

2.5. निम्न समीकरण बूलीय बीजगणित का मूल अभिगृह है।

$$\begin{aligned} X + X' &= 1 \\ XX' &= 0, \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

2.6. निम्न गूढ़ को भिन्न भिन्न आगत मूल्यों के लिये निष्पादित कर (2.3.1)-(2.3.4) को सत्यापित करें ।

codes/inc\_decode.c

### 3 प्रदर्शी गूढ़वाचक

3.1. निम्न समीकरण में सारणी 3.1.1 के निर्गत चर  $a, b, c, d, e, f, g$  की अभिव्यक्ति आगत चर  $A, B, C, D$  के द्वारा की गयी है

$$a = AB'C'D' + A'B'CD' \quad (3.1.1)$$

$$b = AB'CD' + A'BCD' \quad (3.1.2)$$

$$c = D'C'BA' \quad (3.1.3)$$

$$d = AB'C'D' + A'B'CD' + ABCD' + AB'C'D \quad (3.1.4)$$

$$e = AB'C'D' + ABC'D' + A'B'CD' + AB'CD' + ABCD' + AB'C'D \quad (3.1.5)$$

$$f = AB'C'D' + A'BC'D' + ABC'D' + ABCD' \quad (3.1.6)$$

$$g = A'B'C'D' + AB'C'D' + ABCD' \quad (3.1.7)$$

3.2. निम्न गूढ़ को भिन्न भिन्न आगत मूल्यों के लिये निष्पादित कर (3.1.1)-(3.1.7) को सत्यापित करें ।

codes/disp\_decode.c

### 4 कार्नो मानचित्र

#### 4.1 परवर्ती गूढ़वाचक

4.1.1.  $A$  का क-मानचित्र: (2.3.1) में प्रदत्त व्यंजक के कनिष्ठ मान की गणना आकृति 4.1.2.1 में उपलब्ध क-मानचित्र से संभव है । आकृति 4.1.2.1 में कोष्ठ 0,2,4,6 के विवक्ष से व्यंजक  $W'Z'$  प्राप्त होता है एवं कोष्ठ 0,8 के विवक्ष से  $W'X'Y'$ . अतः, आकृति. 4.1.1.1, (2.3.1) की सहायता से कनिष्ठीकरण के पश्चात निम्न समीकरण प्राप्त होता है

$$A = W'Z' + W'X'Y' \quad (4.1.1.1)$$

4.1.2. 2.5.1 एवं (2.3.1) के द्वारा (4.1.1.1) को बूलीय बीजगणित से प्राप्त करें ।

		$XW$			
		00	01	11	10
$ZY$	00	1	0	0	1
	01	1	0	0	1
	11				
	10	1	0		

आकृति. 4.1.2.1:  $A$  का क-मानचित्र ।

4.1.3. आकृति 4.1.3.1 के द्वारा  $A$  के विवक्षकों की क-मानचित्र में स्थितिबद्धता का अनुमान लगाया जा सकता है ।

4.1.4.  $B$  का क-मानचित्र : सारणी 2.1.1 एवं बूलीय तर्क से, आकृति 4.1.4.1 के द्वारा दर्शाये कि (2.3.2) का समानायनिक रूप

$$B = WX'Z' + W'XZ' \quad (4.1.4.1)$$

है ।

4.1.5. बूलीय बीजगणित विधि एवं (2.5.1) के द्वारा (2.3.2) से (4.1.4.1) को प्राप्त करें ।

4.1.6.  $C$  का क-मानचित्र : बूलीय तर्क, आकृति 4.1.6.1 एवं सारणी 2.1.1 के द्वारा दर्शाये कि (2.3.3) का समानायनिक रूप

$$C = WXY'Z' + X'YZ' + W'YZ' \quad (4.1.6.1)$$

ZY \ XW				
	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

आकृति. 4.1.3.1: क-मानचित्र का विश्लेषण ।

ZY \ XW				
	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	1	1	0	1
11				
10	0	0		

आकृति. 4.1.6.1: C का क-मानचित्र ।

ZY \ XW				
	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	0	1	0	1
11				
10	0	0		

आकृति. 4.1.4.1: B का क-मानचित्र ।

ZY \ XW				
	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	0
11				
10	1	0		

आकृति. 4.1.8.1: D का क-मानचित्र

है ।

4.1.7. बूलीय बीजगणित विधि एवं (2.5.1) के द्वारा (4.1.6.1) से (2.3.3) प्राप्त करें ।

4.1.8. D का क-मानचित्र । बूलीय तर्क एवं सारणी 2.1.1, से निम्न समीकरण प्राप्त होता है

$$D = WXYZ' + W'X'Y'Z \quad (4.1.8.1)$$

4.1.9. आकृति 4.1.8.1 से (4.1.8.1) को प्राप्त करें।

4.1.10. 2.6 में उल्लेख C क्रमादेश को संशोधित कर क-मानचित्र द्वारा उपलब्ध A,B,C एवं D के समीकरण

(4.1.1.1), (4.1.4.1), (4.1.6.1) एवं (4.1.8.1) को सत्यापित करें ।

4.2 प्रदर्शी गूढवाचक

निम्न चरणों में सारणी 3.1.1 एवं के-मानचित्र के द्वारा  $a, b, c, d, e, f, g$  के न्यूनतम व्यंजक को व्युत्पन्न किया जाएगा.

4.2.1. आकृति 4.2.1.1 के द्वारा  $a$  के व्यंजक को व्युत्पन्न करें.

हल:

$$a = AB'C'D' + A'B'CD' \quad (4.2.1.1)$$

$$= B'D'(AC' + A'C) \quad (4.2.1.2)$$

$$= B'D'(A \oplus C) \quad (4.2.1.3)$$

$\oplus$  संक्रिया की परिभाषा सारणी 4.2.1.1 में उपलब्ध

DC \ BA	BA			
	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	1	0	0	0
11				
10	0	0		

आकृति. 4.2.1.1:  $a$  का क-मानचित्र.

है.

A	C	$A \oplus C$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

सारणी. 4.2.1.1:  $\oplus$  की परिभाषा.

DC \ BA	BA			
	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	0	1
11				
10	0	0		

आकृति. 4.2.2.1:  $b$  का क-मानचित्र।

DC \ BA	BA			
	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	0	0	0	0
11				
10	0	0		

आकृति. 4.2.3.1:  $c$  का क-मानचित्र।

4.2.2. आकृति 4.2.2.1 के द्वारा  $b$  के व्यंजक को व्युत्पन्न करें।  
हल:

$$b = AB'CD' + A'BCD' \quad (4.2.2.1)$$

$$= CD'(A \oplus B) \quad (4.2.2.2)$$

4.2.3. आकृति 4.2.3.1 के द्वारा  $c$  के व्यंजक को व्युत्पन्न करें।  
हल:

$$c = A'BC'D' \quad (4.2.3.1)$$

4.2.4. आकृति 4.2.4.1 के द्वारा  $d$  के व्यंजक को व्युत्पन्न करें।  
हल:

$$d = AB'C' + A'B'CD' + ABCD' \quad (4.2.4.1)$$

4.2.5. आकृति 4.2.5.1 के द्वारा  $e$  के व्यंजक को व्युत्पन्न करें।

$$e = AD' + B'CD' + AB'C' \quad (4.2.5.1)$$

DC \ BA	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	1	0	1	0
11				
10	0	1		

आकृति. 4.2.4.1:  $d$  का क-मानचित्र।

DC \ BA	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	0	0	1	0
11				
10	0	0		

आकृति. 4.2.6.1:  $f$  का क-मानचित्र।

DC \ BA	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	1	1	0
11				
10	0	1		

आकृति. 4.2.5.1:  $e$  का क-मानचित्र।

DC \ BA	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	0	1	0
11				
10	0	0		

आकृति. 4.2.7.1:  $g$  का क-मानचित्र।

## 5 निर्गुण अवस्था

4.2.6. आकृति 4.2.6.1 के द्वारा  $f$  के व्यंजक को व्युत्पन्न करें।

$$f = BC'D' + AB'C'D' + AB'CD \quad (4.2.6.1)$$

4.2.7. आकृति 4.2.7.1 के द्वारा  $g$  के व्यंजक को व्युत्पन्न करें।

$$g = B'C'D' + ABCD' \quad (4.2.7.1)$$

5.1 परवर्ती गूढ़वाचक

5.1.1. आकृति 5.1.1.1 के द्वारा  $A$  के व्यंजक को व्युत्पन्न करें।

हल:

$$A = W' \quad (5.1.1.1)$$

5.1.2. आकृति 5.1.2.1 के द्वारा  $B$  के व्यंजक को व्युत्पन्न करें।

हल:

ZY \ XW	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	X	X	X	X
10	1	0	X	X

ZY \ XW	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	1	1	0	1
11	X	X	X	X
10	0	0	X	X

आकृति. 5.1.1.1: A का निर्गुण विवक्षक कृत क-मानचित्र।

आकृति. 5.1.3.1: C का निर्गुण विवक्षक कृत क-मानचित्र।

$$B = WX'Z' + W'X \quad (5.1.2.1)$$

करें।  
हल:

$$D = WXY + W'Z \quad (5.1.4.1)$$

ZY \ XW	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	0	1	0	1
11	X	X	X	X
10	0	0	X	X

ZY \ XW	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	0
11	X	X	X	X
10	1	0	X	X

आकृति. 5.1.2.1: B का निर्गुण विवक्षक कृत क-मानचित्र।

5.1.3. आकृति 5.1.3.1 के द्वारा C के व्यंजक को व्युत्पन्न करें।

हल:

$$C = X'Y + W'Y + WXY' \quad (5.1.3.1)$$

5.1.4. आकृति 5.1.4.1 के द्वारा D के व्यंजक को व्युत्पन्न करें।

आकृति. 5.1.4.1: D का निर्गुण विवक्षक कृत क-मानचित्र।

5.2 प्रदर्शी गूढ़वाचक

निम्न चरणों में सारणी 3.1.1 एवं निर्गुण विवक्षक कृत क-मानचित्र के द्वारा  $a, b, c, d, e, f, g$  के न्यूनतम व्यंजक को व्युत्पन्न किया जाएगा।

5.2.1. आकृति 5.2.1.1 के द्वारा  $a$  के व्यंजक को व्युत्पन्न करें।  
हल:

$$a = AB'C'D' + A'B'C \quad (5.2.1.1)$$

DC \ BA	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	1	0	0	0
11	X	X	X	X
10	0	0	X	X

आकृति. 5.2.1.1:  $a$  का निर्गुण विवक्षकृत क-मानचित्र।

5.2.2. आकृति 5.2.2.1 के द्वारा  $b$  के व्यंजक को व्युत्पन्न करें।  
हल:

$$b = AB'C + A'BC \quad (5.2.2.1)$$

$$= C(A \oplus B) \quad (5.2.2.2)$$

5.2.3. आकृति 5.2.3.1 के द्वारा  $c$  के व्यंजक को व्युत्पन्न करें।  
हल:

$$c = A'BC' \quad (5.2.3.1)$$

5.2.4. आकृति 5.2.4.1 के द्वारा  $d$  के व्यंजक को व्युत्पन्न करें।  
हल:

$$d = AB'C' + A'B'C + ABC \quad (5.2.4.1)$$

5.2.5. आकृति 5.2.5.1 के द्वारा  $e$  के व्यंजक को व्युत्पन्न करें।

DC \ BA	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	0	1
11	X	X	X	X
10	0	0	X	X

आकृति. 5.2.2.1:  $b$  का निर्गुण विवक्षकृत क-मानचित्र।

DC \ BA	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	0	0	0	0
11	X	X	X	X
10	0	0	X	X

आकृति. 5.2.3.1:  $c$  का निर्गुण विवक्षकृत क-मानचित्र।

$$e = A + B'C \quad (5.2.5.1)$$

5.2.6. आकृति 5.2.6.1 के द्वारा  $f$  के व्यंजक को व्युत्पन्न करें।

$$f = AB + AC'D' + BC' \quad (5.2.6.1)$$

5.2.7. आकृति 5.2.7.1 के द्वारा  $g$  के व्यंजक को व्युत्पन्न करें।



DC \ BA	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	1	0	1	0
11	X	X	X	X
10	0	1	X	X

DC \ BA	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	0	0	1	0
11	X	X	X	X
10	0	0	X	X

आकृति. 5.2.4.1:  $d$  का निर्गुण विवक्षकृत क-मानचित्र।आकृति. 5.2.6.1:  $f$  का निर्गुण विवक्षकृत क-मानचित्र।

DC \ BA	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	1	1	0
11	X	X	X	X
10	0	1	X	X

DC \ BA	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	0	1	0
11	X	X	X	X
10	0	0	X	X

आकृति. 5.2.5.1:  $e$  का निर्गुण विवक्षकृत क-मानचित्र।आकृति. 5.2.7.1:  $g$  का निर्गुण विवक्षकृत क-मानचित्र।

करें।

$$g = B'C'D' + ABC \quad (5.2.7.1)$$

6.2. आकृति 6.2.1

$$b = B' + CD + C'D' \quad (6.2.1)$$

6 तर्क द्वार

6.3. आकृति 6.3.1

निम्न समीकरणों को तर्क द्वार के द्वारा आकृति 6.1.1-6.3.1 में कार्यान्वित किया गया है।

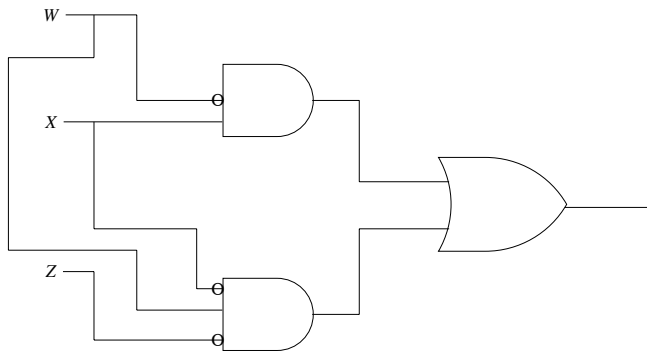
$$d = AB'C' + A'B'CD' + ABCD' \quad (6.3.1)$$

6.1. आकृति 6.1.1

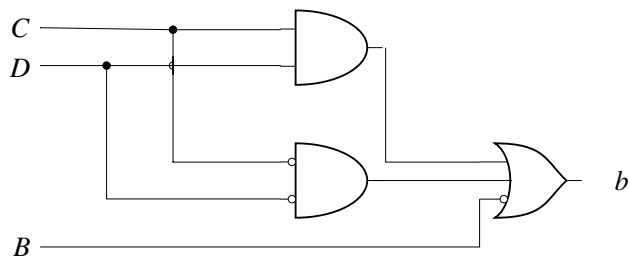
6.4. आकृति 6.4.1

$$B = W'X + WX'Z' \quad (6.1.1)$$

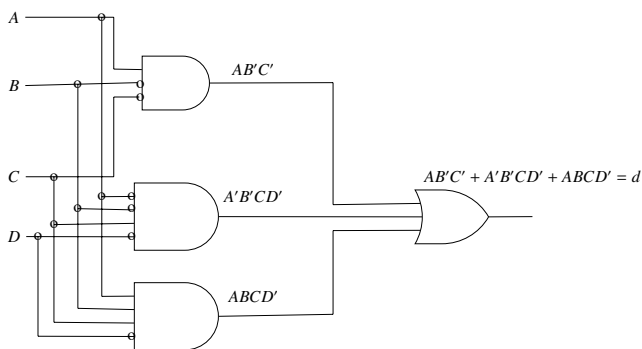
$$g = D'(B'C' + ABC) \quad (6.4.1)$$



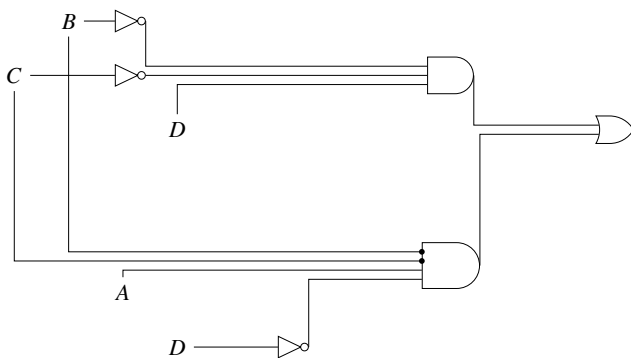
आकृति. 6.1.1



आकृति. 6.2.1



आकृति. 6.3.1



आकृति. 6.4.1

## 7 योग-गुणन

7.1. सारणी 2.1.1 में 0 संख्याओं की क-मानचित्र. 7.1-7.4 में संयुक्ति से निम्न योग-गुणन व्यंजक उपलब्ध होते हैं। पूर्व खंडों में समस्त बूलीय फलन के-मानचित्र में 1 अंकों के संयोग से फलन गुणन-योग रूप में प्राप्त हुए थे.

$$A = (Z' + Y')W'(Z' + X') \quad (7.1.1)$$

$$B = (X' + W')Z'(X + W) \quad (7.1.2)$$

$$C = (Z + Y + X)(Y' + X' + W')(X' + Y + W)Z' \quad (7.1.3)$$

$$D = (Z + Y)(Y' + X)(X + W')(X' + W)(Z' + X') \quad (7.1.4)$$

ZY \ XW				
	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	
11	0	0	0	0
10	1	0	0	0

आकृति. 7.1: A का योग-गुणन

7.2. सारणी 3.1.1 में 0 संख्याओं की क-मानचित्र में संयुक्ति से योग-गुणन व्यंजक उपलब्ध करें।

$ZY \backslash XW$	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	0	1	0	1
11	0	0	0	0
10	0	0	0	0

आकृति. 7.2:  $B$  का योग-गुणन

$ZY \backslash XW$	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	1	1	0	1
11	0	0	0	0
10	0	0	0	0

आकृति. 7.3:  $C$  का योग-गुणन

$ZY \backslash XW$	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	0

आकृति. 7.4:  $D$  का योग-गुणन