

अंकीय तर्क विधि

गाडेपल्लि वेंकट विश्वनाथ शर्मा *

Contents

नामकरण

1	सप्तांश प्रदर्शी
2	परवर्ती गूढवाचक
3	प्रदर्शी गूढवाचक
4	कार्नों मानचित्र
4.1	परवर्ती गूढवाचक
4.2	प्रदर्शी गूढवाचक
5	निर्गुण अवस्था
5.1	परवर्ती गूढवाचक
5.2	प्रदर्शी गूढवाचक
6	तर्क द्वार
7	योग-गुणन
8	दशक गणित्र
8.1	प्रस्तावना
8.2	परिमित अवस्था यंत्र
8.3	परिमित अवस्था यंत्र के द्वारा दशक गणित्र का अभिकल्प . . .

सार—यह लेख प्राथमिक विद्यालयों से लेकर विश्व विद्यालयों तक सभी छात्रों को एक सरल विधि से अंकीय तर्क से अवगत करने का प्रयास है।

नामकरण

Axiom	अभिगृह
Binary	द्विआधारी
Block Diagram	खण्डारेख
Boolean Algebra	बूलीय बीजगणित
C Program	C क्रमादेश
Circuit	परिपथ
Code	गूढ

Combinational Logic

1	Decade Counter
1	Decoder
1	Decrementing
2	Delay
2	Derive
3	Design
3	Digital Logic
3	Equation
3	Execute
5	Expression
7	Figure
7	Finite State Machine
7	Flip flop
7	Function
7	Hardware
9	Implementation
10	Implicant
10	Incrementing
10	Input
10	Karnaugh Map
10	LED
10	Minimize
11	Output
11	Period
11	Reduced
11	Seven Segment Display
11	Simplified Expression
11	State Transition Table
11	Synchronous
11	Table
11	Truth Table
11	Variable
11	Verify
11	XOR

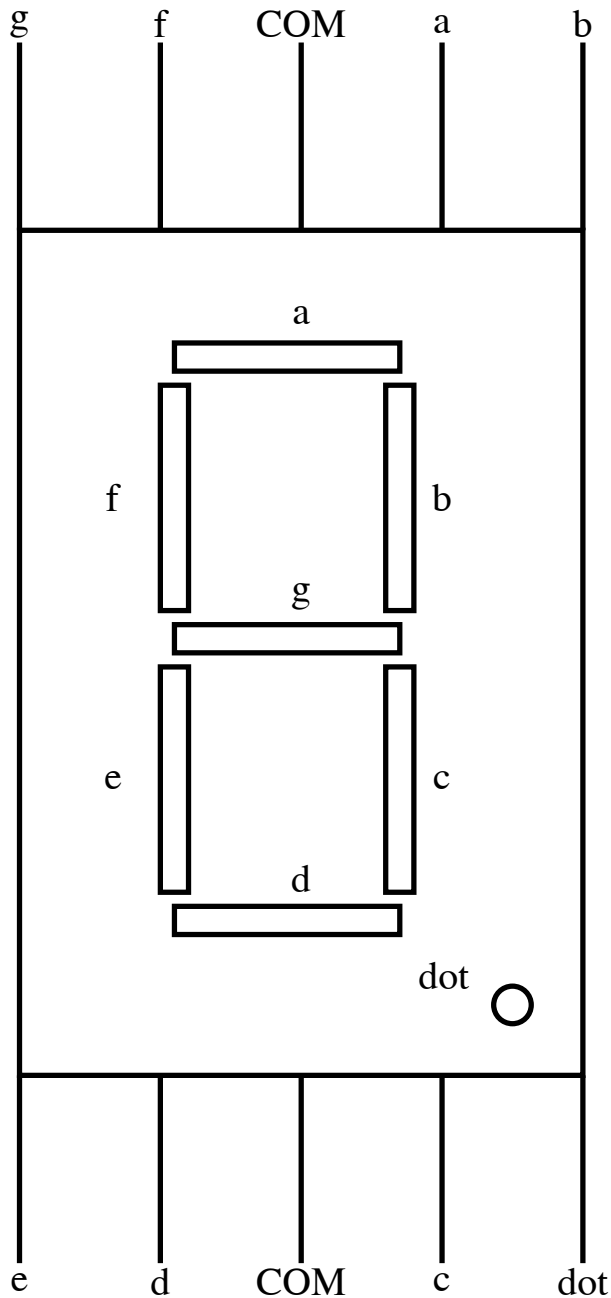
संयोजक तर्क

पूरक
दशक गणित्र
गूढवाचक
पूर्ववर्ती
अतिकाल
व्युत्पन्न
अभिकल्प
अंकीय तर्क
समीकरण
निष्पादित
व्यंजक
आकृति
परिमित अवस्था यंत्र
द्विविध
फलन
यंत्रोपवस्तु
कार्यान्वयन
विवक्षक
परवर्ती
आगत
कार्नों मानचित्र
प्रकाश उत्सर्जक यंत्र
कनिष्ठीकरण
निर्गत
आवर्त
समानयनिक
सप्तांश प्रदर्शी
सरलीकृत व्यंजक
अवस्थान्तरण सारणी
तुल्यकालिक
सारणी
सत्य सारणी
चर
सत्यापित
अर्ध योग

1 सप्तांश प्रदर्शी

1.1. आकृति 1.1.1 में एक सप्तांश प्रदर्शी प्रस्तुत है जिसमें कुश a, b, c, d, e, f, g हैं। प्रत्येक कुश का संपर्क एक प्रकाश उत्सर्जक यंत्र के साथ है।

*रचयिता भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान, हैदराबाद, 502204 के विद्युत अभियान्तिकी विभाग में कार्यरत हैं, ईमेल: gadepalli@ee.iith.ac.in। यह आलेख मुक्त स्रोत विचारधारा के अनुरूप है।

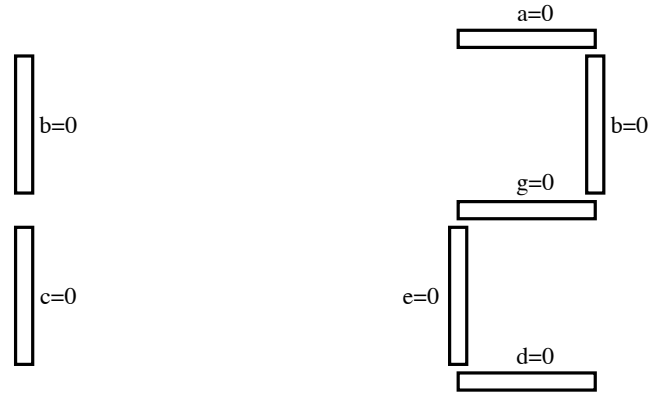


आकृति. 1.1.1

- 1.2. आकृति 1.2.1 सारणी 1.2.1 के माध्यम से प्रदर्शी पर अंको को दर्शाता है। 0-9 तक सारे अंको को रेखांकित कर सारणी 1.2.1 को पूर्ण करें।

a	b	c	d	e	f	g	decimal
1	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	0	2

सारणी. 1.2.1



आकृति. 1.2.1

2 परवर्ती गूढवाचक

- 2.1. परवर्ती गूढवाचक में आगत दशमलव अंक 0, 1, ..., 9 द्वायाधारी संख्या रूप में हैं एवं परवर्ती संख्या निर्गत है। सारणी 2.1.1 में अनुरूप सत्य सारणी उपलब्ध है।

Z	Y	X	W	D	C	B	A
0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0	0

सारणी. 2.1.1: परवर्ती गूढवाचक की सत्य सारणी।

- 2.2. सारणी 2.1.1 में निर्गत चर A, आगत शब्द ZYXW = 0000, 0010, 0100, 0110, 1000 के लिए सत्य हैं।
 2.3. बूलीय तर्कानुसार सारणी 2.1.1 में निर्गत चर A, B, C एवं D को आगत चर W, X, Y, Z के द्वारा निम्न रूप से व्यक्त किया जा सकता है

$$A = W'X'Y'Z' + W'XY'Z' + W'X'YZ' + W'XYZ' + W'X'Y'Z \quad (2.3.1)$$

$$B = WX'Y'Z' + W'XY'Z' + WX'YZ' + W'XYZ' \quad (2.3.2)$$

$$C = WXY'Z' + W'X'YZ' + WX'YZ' + W'XYZ' \quad (2.3.3)$$

$$D = WXYZ' + W'X'Y'Z \quad (2.3.4)$$

- 2.4. पूरक चर की परिभाषा सारणी 2.4.1 में उपलब्ध है।
 W का पूरक W' है।

W	W'
0	1
1	0

सारणी. 2.4.1: पूरक चर।

- 2.5. निम्न समीकरण बूलीय बीजगणित का मूल अभिगृह है।

$$\begin{aligned} X + X' &= 1 \\ XX' &= 0, \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

- 2.6. निम्न गूढ़ को भिन्न भिन्न आगत मूल्यों के लिये निष्पादित कर (2.3.1)-(2.3.4) को सत्यापित करें।

codes/inc_decode.c

3 प्रदर्शी गूढ़वाचक

- 3.1. निम्न समीकरण में सारणी 3.1.1 के निर्गत चर a, b, c, d, e, f, g की अभिव्यक्ति आगत चर A, B, C, D के द्वारा की गयी है

$$a = AB'C'D' + A'B'CD' \quad (3.1.1)$$

$$b = AB'CD' + A'BCD' \quad (3.1.2)$$

$$c = D'C'BA' \quad (3.1.3)$$

$$d = AB'C'D' + A'B'CD' + ABCD' + AB'C'D \quad (3.1.4)$$

$$e = AB'C'D' + ABC'D' + A'B'CD' + AB'CD' + ABCD' + AB'C'D \quad (3.1.5)$$

$$f = AB'C'D' + A'BC'D' + ABC'D' + ABCD' \quad (3.1.6)$$

$$g = A'B'C'D' + AB'C'D' + ABCD' \quad (3.1.7)$$

- 3.2. निम्न गूढ़ को भिन्न भिन्न आगत मूल्यों के लिये निष्पादित कर (3.1.1)-(3.1.7) को सत्यापित करें।

codes/disp_decode.c

4 कार्नो मानचित्र

4.1 परवर्ती गूढ़वाचक

- 4.1.1. A का क-मानचित्र: (2.3.1) में प्रदत्त व्यंजक के कनिष्ठ मान की गणना आकृति 4.1.2.1 में उपलब्ध क-मानचित्र से संभव है। आकृति 4.1.2.1 में कोष्ठ 0,2,4,6 के विवक्ष से व्यंजक $W'Z'$ प्राप्त होता है एवं कोष्ठ 0,8 के विवक्ष से $W'X'Y'$ अतः, आकृति.

D	C	B	A	a	b	c	d	e	f	g	Decimal
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	2
0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	3
0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	4
0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	5
0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	6
0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	7
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8
1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	9

सारणी. 3.1.1: प्रदर्शी गूढ़वाचक की सत्य सारिणी।

4.1.1.1, (2.3.1) की सहायता से कनिष्ठीकरण के पश्चात निम्न समीकरण प्राप्त होता है

$$A = W'Z' + W'X'Y' \quad (4.1.1.1)$$

- 4.1.2. 2.5.1 एवं (2.3.1) के द्वारा (4.1.1.1) को बूलीय बीजगणित से प्राप्त करें।

ZY	XW			
	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11				
10	1	0		

आकृति. 4.1.2.1: A का क-मानचित्र।

- 4.1.3. आकृति 4.1.3.1 के द्वारा A के विवक्षकों की क-मानचित्र में स्थितिबद्धता का अनुमान लगाया जा सकता है।

- 4.1.4. B का क-मानचित्र : सारणी 2.1.1 एवं बूलीय तर्क से, आकृति 4.1.4.1 के द्वारा दर्शाये कि (2.3.2) का समानायनिक रूप

$$B = WX'Z' + W'XZ' \quad (4.1.4.1)$$

ZY \ XW	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

आकृति. 4.1.3.1: क-मानचित्र का विश्लेषण ।

ZY \ XW	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	1	1	0	1
11				
10	0	0		

आकृति. 4.1.6.1: C का क-मानचित्र ।

ZY \ XW	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	0	1	0	1
11				
10	0	0		

आकृति. 4.1.4.1: B का क-मानचित्र ।

4.1.8. D का क-मानचित्र । बूलीय तर्क एवं सारणी 2.1.1, से निम्न समीकरण प्राप्त होता है

$$D = WXYZ' + W'X'Y'Z \quad (4.1.8.1)$$

ZY \ XW	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	0
11				
10	1	0		

आकृति. 4.1.8.1: D का क-मानचित्र

है ।

4.1.5. बूलीय बीजगणित विधि एवं (2.5.1) के द्वारा (2.3.2) से (4.1.4.1) को प्राप्त करें ।

4.1.6. C का क-मानचित्र : बूलीय तर्क, आकृति 4.1.6.1 एवं सारणी 2.1.1 के द्वारा दर्शाये कि (2.3.3) का समानायनिक रूप

$$C = WXY'Z' + X'YZ' + W'YZ' \quad (4.1.6.1)$$

है ।

4.1.7. बूलीय बीजगणित विधि एवं (2.5.1) के द्वारा (4.1.6.1) से (2.3.3) प्राप्त करें ।

4.1.9. आकृति 4.1.8.1 से (4.1.8.1) को प्राप्त करें।

4.1.10. 2.6 में उल्लेख C क्रमादेश को संशोधित कर क-मानचित्र द्वारा उपलब्ध A,B,C एवं D के समीकरण (4.1.1.1), (4.1.4.1), (4.1.6.1) एवं (4.1.8.1) को सत्यापित करें ।

4.2 प्रदर्शी गूढवाचक

निम्न चरणों में सारणी 3.1.1 एवं के-मानचित्र के द्वारा a, b, c, d, e, f, g के न्यूनतम व्यंजक को व्युत्पन्न किया जाएगा.

4.2.1. आकृति 4.2.1.1 के द्वारा a के व्यंजक को व्युत्पन्न करें.

हल:

$$a = AB'C'D' + A'B'CD' \quad (4.2.1.1)$$

$$= B'D'(AC' + A'C) \quad (4.2.1.2)$$

$$= B'D'(A \oplus C) \quad (4.2.1.3)$$

\oplus संक्रिया की परिभाषा सारणी 4.2.1.1 में उपलब्ध

DC \ BA	BA			
	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	1	0	0	0
11				
10	0	0		

आकृति. 4.2.1.1: a का क-मानचित्र.

है.

A	C	$A \oplus C$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

सारणी. 4.2.1.1: \oplus की परिभाषा.

4.2.2. आकृति 4.2.2.1 के द्वारा b के व्यंजक को व्युत्पन्न करें.

हल:

$$b = AB'CD' + A'BCD' \quad (4.2.2.1)$$

$$= CD'(A \oplus B) \quad (4.2.2.2)$$

DC \ BA	BA			
	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	0	1
11				
10	0	0		

आकृति. 4.2.2.1: b का क-मानचित्र।

4.2.3. आकृति 4.2.3.1 के द्वारा c के व्यंजक को व्युत्पन्न करें।

हल:

$$c = A'BC'D' \quad (4.2.3.1)$$

DC \ BA	BA			
	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	0	0	0	0
11				
10	0	0		

आकृति. 4.2.3.1: c का क-मानचित्र।

4.2.4. आकृति 4.2.4.1 के द्वारा d के व्यंजक को व्युत्पन्न करें।

हल:

4.2.6. आकृति 4.2.6.1 के द्वारा f के व्यंजक को व्युत्पन्न करें।

$$d = AB'C' + A'B'CD' + ABCD' \quad (4.2.4.1)$$

$$f = BC'D' + AB'C'D' + AB'CD \quad (4.2.6.1)$$

DC \ BA	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	1	0	1	0
11				
10	0	1		

आकृति. 4.2.4.1: d का क-मानचित्र।

DC \ BA	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	0	0	1	0
11				
10	0	0		

आकृति. 4.2.6.1: f का क-मानचित्र।

4.2.5. आकृति 4.2.5.1 के द्वारा e के व्यंजक को व्युत्पन्न करें।

$$e = AD' + B'CD' + AB'C' \quad (4.2.5.1)$$

4.2.7. आकृति 4.2.7.1 के द्वारा g के व्यंजक को व्युत्पन्न करें।

$$g = B'C'D' + ABCD' \quad (4.2.7.1)$$

DC \ BA	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	1	1	0
11				
10	0	1		

आकृति. 4.2.5.1: e का क-मानचित्र।

DC \ BA	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	0	1	0
11				
10	0	0		

आकृति. 4.2.7.1: g का क-मानचित्र।

5 निर्गुण अवस्था

5.1 परवर्ती गूढवाचक

5.1.1. आकृति 5.1.1.1 के द्वारा A के व्यंजक को व्युत्पन्न करें।

हल:

$$A = W' \quad (5.1.1.1)$$

ZY \ XW	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	X	X	X	X
10	1	0	X	X

आकृति. 5.1.1.1: A का निर्गुण विवक्षक कृत क-मानचित्र।

5.1.2. आकृति 5.1.2.1 के द्वारा B के व्यंजक को व्युत्पन्न करें।

हल:

$$B = WX'Z' + W'X \quad (5.1.2.1)$$

5.1.3. आकृति 5.1.3.1 के द्वारा C के व्यंजक को व्युत्पन्न करें।

हल:

$$C = X'Y + W'Y + WXY' \quad (5.1.3.1)$$

5.1.4. आकृति 5.1.4.1 के द्वारा D के व्यंजक को व्युत्पन्न करें।

हल:

$$D = WXY + W'Z \quad (5.1.4.1)$$

ZY \ XW	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	0	1	0	1
11	X	X	X	X
10	0	0	X	X

आकृति. 5.1.2.1: B का निर्गुण विवक्षक कृत क-मानचित्र।

ZY \ XW	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	1	1	0	1
11	X	X	X	X
10	0	0	X	X

आकृति. 5.1.3.1: C का निर्गुण विवक्षक कृत क-मानचित्र।

5.2 प्रदर्शी गूढवाचक

निम्न चरणों में सारणी 3.1.1 एवं निर्गुण विवक्षकृत क-मानचित्र के द्वारा a, b, c, d, e, f, g के न्यूनतम व्यंजक को व्युत्पन्न किया जाएगा.

5.2.1. आकृति 5.2.1.1 के द्वारा a के व्यंजक को व्युत्पन्न करें.

हल:

$$a = AB'C'D' + A'B'C \quad (5.2.1.1)$$

ZY \ XW				
	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	0
11	X	X	X	X
10	1	0	X	X

DC \ BA				
	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	0	1
11	X	X	X	X
10	0	0	X	X

आकृति. 5.1.4.1: D का निर्गुण विवक्षक कृत क-मानचित्र।

आकृति. 5.2.2.1: b का निर्गुण विवक्षकृत क-मानचित्र।

DC \ BA				
	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	1	0	0	0
11	X	X	X	X
10	0	0	X	X

$$c = A'BC' \quad (5.2.3.1)$$

DC \ BA				
	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	0	0	0	0
11	X	X	X	X
10	0	0	X	X

आकृति. 5.2.1.1: a का निर्गुण विवक्षकृत क-मानचित्र.

5.2.2. आकृति 5.2.2.1 के द्वारा b के व्यंजक को व्युत्पन्न करें.
हल:

$$b = AB'C + A'BC \quad (5.2.2.1)$$

$$= C(A \oplus B) \quad (5.2.2.2)$$

5.2.3. आकृति 5.2.3.1 के द्वारा c के व्यंजक को व्युत्पन्न करें।
हल:

आकृति. 5.2.3.1: c का निर्गुण विवक्षकृत क-मानचित्र।

5.2.4. आकृति 5.2.4.1 के द्वारा d के व्यंजक को व्युत्पन्न करें।
हल:

$$d = AB'C' + A'B'C + ABC \quad (5.2.4.1)$$

DC \ BA	BA			
	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	1	0	1	0
11	X	X	X	X
10	0	1	X	X

DC \ BA	BA			
	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	0	0	1	0
11	X	X	X	X
10	0	0	X	X

आकृति. 5.2.4.1: d का निर्गुण विवक्षकृत क-मानचित्र।

आकृति. 5.2.6.1: f का निर्गुण विवक्षकृत क-मानचित्र।

5.2.5. आकृति 5.2.5.1 के द्वारा e के व्यंजक को व्युत्पन्न करें। 5.2.7. आकृति 5.2.7.1 के द्वारा g के व्यंजक को व्युत्पन्न करें।

$$e = A + B'C \quad (5.2.5.1)$$

$$g = B'C'D' + ABC \quad (5.2.7.1)$$

DC \ BA	BA			
	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	1	1	1	0
11	X	X	X	X
10	0	1	X	X

DC \ BA	BA			
	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	0	0	1	0
11	X	X	X	X
10	0	0	X	X

आकृति. 5.2.5.1: e का निर्गुण विवक्षकृत क-मानचित्र।

आकृति. 5.2.7.1: g का निर्गुण विवक्षकृत क-मानचित्र।

5.2.6. आकृति 5.2.6.1 के द्वारा f के व्यंजक को व्युत्पन्न करें।

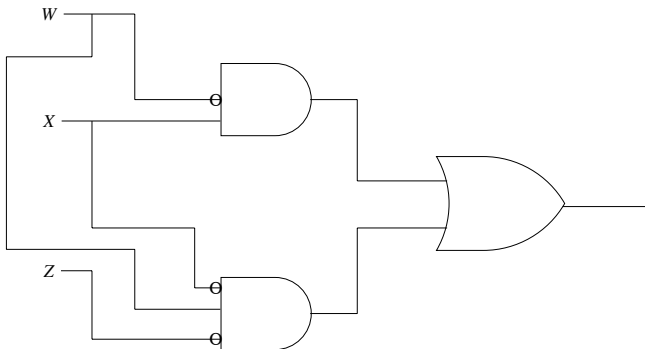
$$f = AB + AC'D' + BC' \quad (5.2.6.1)$$

6 तर्क द्वार

निम्न समीकरणों को तर्क द्वार के द्वारा आकृति 6.1.1-6.3.1 में कार्यान्वित किया गया है।

6.1. आकृति 6.1.1

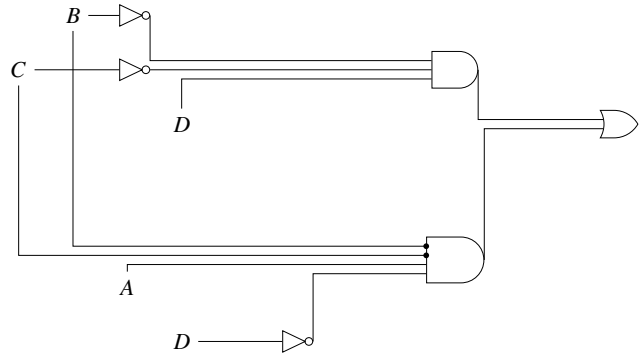
$$B = W'X + WX'Z' \quad (6.1.1)$$



आकृति. 6.1.1

6.4. आकृति 6.4.1

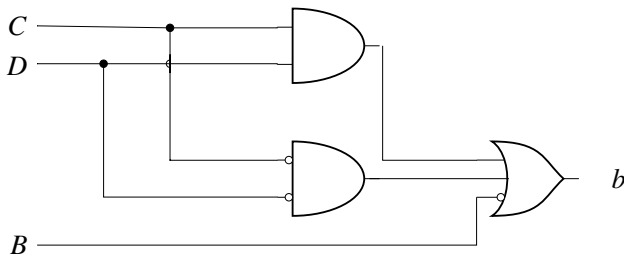
$$g = D'(B'C' + ABC) \quad (6.4.1)$$



आकृति. 6.4.1

6.2. आकृति 6.2.1

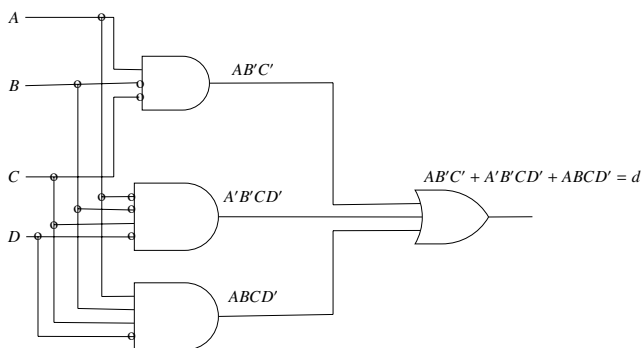
$$b = B' + CD + C'D' \quad (6.2.1)$$



आकृति. 6.2.1

6.3. आकृति 6.3.1

$$d = AB'C' + A'B'CD' + ABCD' \quad (6.3.1)$$



आकृति. 6.3.1

7 योग-गुणन

7.1. सारणी 2.1.1 में 0 संख्याओं की क-मानचित्र. 7.1-7.4 में संयुक्ति से निम्न योग-गुणन व्यंजक उपलब्ध होते हैं। पूर्व खंडों में समस्त बूलीय फलन के-मानचित्र में 1 अंकों के संयोग से फलन गुणन-योग रूप में प्राप्त हुए थे।

$$A = (Z' + Y')W'(Z' + X') \quad (7.1.1)$$

$$B = (X' + W')Z'(X + W) \quad (7.1.2)$$

$$C = (Z + Y + X)(Y' + X' + W')(X' + Y + W)Z' \quad (7.1.3)$$

$$D = (Z + Y)(Y' + X)(X + W')(X' + W)(Z' + X') \quad (7.1.4)$$

7.2. सारणी 3.1.1 में 0 संख्याओं की क-मानचित्र में संयुक्ति से योग-गुणन व्यंजक उपलब्ध करें।

8 दशक गणित्र

8.1 प्रस्तावना

दशक गणित्र एक तुलयात्मक परिपथ है जो अनुक्रम 0-9 की समान अतिकाल से निरन्तर गणना करता है। इसका खंड आरेख आकृति. 8.1 में उपलब्ध है।

8.2 परिमित अवस्था यंत्र

8.1 का परिमित अवस्था यंत्र आरेख आकृति. 8.2 में उपलब्ध है। s_0 वह अवस्था है जहां परवर्ती गूढ़वाचक का आगत मूल्य 0 है। दशक गणित्र की अवस्थान्तरण सारणी 2.1.1 में प्रस्तुत हैं। इसमें वर्तमान अवस्था चर का प्रबोधन W, X, Y, Z से है एवं आगामी अवस्था चर A, B, C, D द्वारा प्रबोधित है।

ZY \ XW				
	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	
11	0	0	0	0
10	1	0	0	0

आकृति. 7.1: A का योग-गुणन

ZY \ XW				
	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	1	1	0	1
11	0	0	0	0
10	0	0	0	0

आकृति. 7.3: C का योग-गुणन

ZY \ XW				
	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	0	1	0	1
11	0	0	0	0
10	0	0	0	0

आकृति. 7.2: B का योग-गुणन

ZY \ XW				
	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	0

आकृति. 7.4: D का योग-गुणन

8.3 परिमित अवस्था यंत्र के द्वारा दशक गणित्र का अभिकल्प

आकृति. 8.3 में D-द्विविधि के व्यूह से दशक गणित्र का अभिकल्प उपलब्ध है। यहाँ D-द्विविधि आकृति 8.1 में अतिकाल खंड को आकृति 8.3 के परिपथ में कार्यान्वित करता है। D-द्विविधि आगत मूल्य को घड़ी के आवर्त समय के पश्चात निर्गमन करता है। आकृति 8.3 में यंत्रोपवस्तु मूल्य सारणी 2.1 में प्रदत्त है।

उपरोक्त विधान से पूर्ववर्ती गूढ़वाचक का अभिकल्प करें।

वस्त	मूल्य
अवस्था (N)	10
द्विविधि	$\lceil \log_2 N \rceil = 4$

सारणी. 2.1: यंत्रोपवस्तु मूल्य।

