

रोल नं.  
Roll No. 

--	--	--	--	--	--	--

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें।

Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **11** हैं।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **29** प्रश्न हैं।
- कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें।
- इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है। प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जायेगा। 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे।
- Please check that this question paper contains **11** printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains **29** questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- 15 minutes time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

## गणित

## MATHEMATICS

निर्धारित समय : 3 घण्टे

अधिकतम अंक : 100

*Time allowed : 3 hours*

*Maximum Marks : 100*

## सामान्य निर्देश :

- (i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
- (ii) इस प्रश्न पत्र में **29** प्रश्न हैं जो तीन खण्डों में विभाजित हैं : अ, ब तथा स। खण्ड अ में **10** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक एक अंक का है। खण्ड ब में **12** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक चार अंक का है। खण्ड स में **7** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक छः अंक का है।
- (iii) खण्ड अ में सभी प्रश्नों के उत्तर एक शब्द, एक वाक्य अथवा प्रश्न की आवश्यकता अनुसार दिए जा सकते हैं।
- (iv) पूर्ण प्रश्न पत्र में विकल्प नहीं हैं। फिर भी चार अंकों वाले 4 प्रश्नों में तथा छः अंकों वाले 2 प्रश्नों में आन्तरिक विकल्प है। ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प हल करना है।
- (v) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति नहीं है।

## General Instructions :

- (i) All questions are compulsory.
- (ii) The question paper consists of **29** questions divided into three sections A, B and C. Section A comprises of **10** questions of **one mark** each, Section B comprises of **12** questions of **four marks** each and Section C comprises of **7** questions of **six marks** each.
- (iii) All questions in Section A are to be answered in one word, one sentence or as per the exact requirement of the question.
- (iv) There is no overall choice. However, internal choice has been provided in 4 questions of four marks each and 2 questions of six marks each. You have to attempt only one of the alternatives in all such questions.
- (v) Use of calculators is **not** permitted.

खण्ड अ  
SECTION A

प्रश्न संख्या 1 से 10 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

*Question numbers 1 to 10 carry 1 mark each.*

1. पूर्णांकों के समुच्चय  $Z$  पर यदि एक द्विआधारी संक्रिया  $*$ ,  $a * b = a + b - 5$  द्वारा परिभाषित है, तो संक्रिया  $*$  का  $Z$  में तत्समक अवयव लिखिए। 1

If the binary operation  $*$  on the set  $Z$  of integers is defined by  $a * b = a + b - 5$ , then write the identity element for the operation  $*$  in  $Z$ .

2.  $\cot(\tan^{-1} a + \cot^{-1} a)$  का मान लिखिए। 1

Write the value of  $\cot(\tan^{-1} a + \cot^{-1} a)$ .

3. यदि  $A$  एक ऐसा वर्ग आव्यूह है कि  $A^2 = A$  है, तो  $(I + A)^2 - 3A$  का मान लिखिए। 1

If  $A$  is a square matrix such that  $A^2 = A$ , then write the value of  $(I + A)^2 - 3A$ .

4. यदि  $x \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$  है, तो  $x$  का मान लिखिए। 1

If  $x \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$ , write the value of  $x$ .

5. निम्न सारणिक का मान लिखिए : 1

102	18	36
1	3	4
17	3	6

Write the value of the following determinant :

$$\begin{vmatrix} 102 & 18 & 36 \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

6. यदि  $\int \left( \frac{x-1}{x^2} \right) e^x dx = f(x) e^x + c$  है, तो  $f(x)$  का मान लिखिए। 1

If  $\int \left( \frac{x-1}{x^2} \right) e^x dx = f(x) e^x + c$ , then write the value of  $f(x)$ .

7. यदि  $\int_0^a 3x^2 dx = 8$  है, तो 'a' का मान लिखिए। 1

If  $\int_0^a 3x^2 dx = 8$ , write the value of 'a'.

8.  $(\hat{i} \times \hat{j}) \cdot \hat{k} + (\hat{j} \times \hat{k}) \cdot \hat{i}$  का मान लिखिए। 1

Write the value of  $(\hat{i} \times \hat{j}) \cdot \hat{k} + (\hat{j} \times \hat{k}) \cdot \hat{i}$ .

9. सदिशों  $2\hat{i}$  तथा  $3\hat{j}$  द्वारा निर्धारित समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का मान लिखिए। 1

Write the value of the area of the parallelogram determined by the vectors  $2\hat{i}$  and  $3\hat{j}$ .

10. z-अक्ष के समांतर एक रेखा के दिक्-कोज्या लिखिए। 1

Write the direction cosines of a line parallel to z-axis.

SECTION B

प्रश्न संख्या 11 से 22 तक प्रत्येक प्रश्न 4 अंक का है।

Question numbers 11 to 22 carry 4 marks each.

11. यदि सभी  $x \neq \frac{2}{3}$  के लिए  $f(x) = \frac{4x+3}{6x-4}$  है, तो दर्शाइए कि सभी  $x \neq \frac{2}{3}$  के लिए  $f(f(x)) = x$  है।  $f$  का प्रतिलोम क्या है? 4

If  $f(x) = \frac{4x+3}{6x-4}$ ,  $x \neq \frac{2}{3}$ , show that  $f(f(x)) = x$  for all  $x \neq \frac{2}{3}$ . What is the inverse of  $f$ ?

12. सिद्ध कीजिए कि

$$\sin^{-1}\left(\frac{63}{65}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$$

अथवा

$x$  के लिए हल कीजिए :

$$2 \tan^{-1}(\sin x) = \tan^{-1}(2 \sec x), \quad x \neq \frac{\pi}{2}$$

Prove that

$$\sin^{-1}\left(\frac{63}{65}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$$

OR

Solve for  $x$  :

$$2 \tan^{-1}(\sin x) = \tan^{-1}(2 \sec x), \quad x \neq \frac{\pi}{2}$$

13. सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि 4

$$\begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix} = a^3$$

Using properties of determinants, prove that

$$\begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix} = a^3$$

14. यदि  $x^m y^n = (x + y)^{m+n}$  है, तो सिद्ध कीजिए कि  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ .

4

If  $x^m y^n = (x + y)^{m+n}$ , prove that  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ .

15. यदि  $y = e^{a \cos^{-1} x}$ ,  $-1 \leq x \leq 1$  है, तो दर्शाइए कि

$$(1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - a^2 y = 0.$$

### अथवा

यदि  $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ ,  $-1 < x < 1$ ,  $x \neq y$ , तो सिद्ध कीजिए कि

4

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}.$$

If  $y = e^{a \cos^{-1} x}$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ , show that

$$(1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - a^2 y = 0.$$

### OR

If  $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ ,  $-1 < x < 1$ ,  $x \neq y$ , then prove that

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}.$$

16. दर्शाइए कि  $y = \log(1+x) - \frac{2x}{2+x}$ ,  $x > -1$ , अपने सम्पूर्ण प्रांत में  $x$  का एक वर्धमान फलन है।

अथवा

वक्र  $ay^2 = x^3$  के बिन्दु  $(am^2, am^3)$  पर अभिलंब का समीकरण ज्ञात कीजिए।

4

Show that  $y = \log(1+x) - \frac{2x}{2+x}$ ,  $x > -1$ , is an increasing function of  $x$  throughout its domain.

**OR**

Find the equation of the normal at the point  $(am^2, am^3)$  for the curve  $ay^2 = x^3$ .

17. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int x^2 \tan^{-1} x \, dx$$

अथवा

मान ज्ञात कीजिए :

4

$$\int \frac{3x-1}{(x+2)^2} \, dx$$

Evaluate :

$$\int x^2 \tan^{-1} x \, dx$$

**OR**

Evaluate :

$$\int \frac{3x-1}{(x+2)^2} \, dx$$

18. निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए :

4

$$\left[ \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \frac{y}{\sqrt{x}} \right] \frac{dx}{dy} = 1, \quad x \neq 0$$

Solve the following differential equation :

$$\left[ \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \frac{y}{\sqrt{x}} \right] \frac{dx}{dy} = 1, \quad x \neq 0$$

19. निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए :

4

$$3 e^x \tan y \, dx + (2 - e^x) \sec^2 y \, dy = 0, \text{ दिया है कि जब } x = 0 \text{ है, तो}$$

$$y = \frac{\pi}{4} \text{ है।}$$

Solve the following differential equation :

$$3 e^x \tan y \, dx + (2 - e^x) \sec^2 y \, dy = 0, \text{ given that when } x = 0,$$

$$y = \frac{\pi}{4}.$$

20. यदि  $\vec{\alpha} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$  और  $\vec{\beta} = 2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$  है, तो  $\vec{\beta}$  को

4

$\vec{\beta} = \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2$  के रूप में व्यक्त कीजिए, जहाँ  $\vec{\beta}_1$ ,  $\vec{\alpha}$  के समांतर है तथा  $\vec{\beta}_2$ ,  $\vec{\alpha}$  के लंबवत् है।

If  $\vec{\alpha} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$  and  $\vec{\beta} = 2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ , then express  $\vec{\beta}$  in the form  $\vec{\beta} = \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2$ , where  $\vec{\beta}_1$  is parallel to  $\vec{\alpha}$  and  $\vec{\beta}_2$  is perpendicular to  $\vec{\alpha}$ .

21. बिन्दु P(1, 2, 3) से हो कर जाने वाली उस रेखा का सदिश तथा कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए, जो समतलों  $\vec{r} \cdot (\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) = 5$  तथा  $\vec{r} \cdot (3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 6$  के समांतर है।

4

Find the vector and cartesian equations of the line passing through the point P(1, 2, 3) and parallel to the planes  $\vec{r} \cdot (\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) = 5$  and  $\vec{r} \cdot (3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 6$ .

22. पासों के एक जोड़े को चार बार उछाला गया। यदि द्विक आना एक सफलता माना जाए, तो सफलताओं की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए। अतः इस बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए।

4

A pair of dice is thrown 4 times. If getting a doublet is considered a success, find the probability distribution of the number of successes and hence find its mean.

### खण्ड स SECTION C

प्रश्न संख्या 23 से 29 तक प्रत्येक प्रश्न 6 अंक का है।

*Question numbers 23 to 29 carry 6 marks each.*

23. आव्यूहों के प्रयोग से निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$x - y + z = 4; \quad 2x + y - 3z = 0; \quad x + y + z = 2$$

**अथवा**

यदि  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$  तथा  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$  है, तो  $(AB)^{-1}$  ज्ञात कीजिए।

6

Using matrices, solve the following system of equations :

$$x - y + z = 4; \quad 2x + y - 3z = 0; \quad x + y + z = 2$$

**OR**

If  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$  and  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ , find  $(AB)^{-1}$ .

24. दर्शाइए कि एक R क्रिया वाले गोले के अंतर्गत अधिकतम आयतन के लंबवृत्तीय शंकु की ऊँचाई  $\frac{4R}{3}$  है।

6

Show that the altitude of the right circular cone of maximum volume that can be inscribed in a sphere of radius R is  $\frac{4R}{3}$ .

25. प्रथम चतुर्थांश में वृत्त  $x^2 + y^2 = 4$ , रेखा  $x = \sqrt{3}y$  तथा x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

6

Find the area of the region in the first quadrant enclosed by x-axis, the line  $x = \sqrt{3}y$  and the circle  $x^2 + y^2 = 4$ .

26.  $\int_1^3 (x^2 + x) dx$  का मान योगों की सीमा के रूप में ज्ञात कीजिए।

अथवा

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + 4 \sin^2 x} dx$$

Evaluate  $\int_1^3 (x^2 + x) dx$  as a limit of a sum.

OR

Evaluate :

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x + 4 \sin^2 x} dx$$

27. बिन्दुओं  $(2, 1, -1)$  तथा  $(-1, 3, 4)$  से होकर जाने वाले उस समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो समतल  $x - 2y + 4z = 10$  के लंबवत् है। यह भी दर्शाइए कि इस प्रकार प्राप्त समतल रेखा  $\vec{r} = \hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k} + \lambda(3\hat{i} - 2\hat{j} - 5\hat{k})$  को अंतर्विष्ट करता है।

6

Find the vector equation of the plane passing through the points  $(2, 1, -1)$  and  $(-1, 3, 4)$  and perpendicular to the plane  $x - 2y + 4z = 10$ . Also show that the plane thus obtained contains the line  $\vec{r} = \hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k} + \lambda(3\hat{i} - 2\hat{j} - 5\hat{k})$ .

28. एक कम्पनी शीतल पेय बनाती है, जिसकी प्रत्येक बोतल में कम-से-कम 80 इकाई रसायन A तथा 60 इकाई रसायन B भरने का अनुबंध है। यह रसायन दो विक्रेताओं द्वारा बने हुए मिश्रणों के पैकेटों में उपलब्ध हैं। विक्रेता S द्वारा दिए गए मिश्रण के एक पैकेट में 4 इकाई रसायन A तथा 2 इकाई रसायन B है, जिसका मूल्य ₹ 10 है। विक्रेता T द्वारा दिए गए मिश्रण के एक पैकेट में 1 इकाई रसायन A तथा 1 इकाई रसायन B है, जिसका मूल्य ₹ 4 है। विक्रेताओं S तथा T के कितने-कितने पैकेट लिए जाएँ ताकि अनुबंध पूर्ण हो सके तथा लागत न्यूनतम हो ? उपरोक्त को एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या बना कर ग्राफ़ द्वारा हल कीजिए।

6

A company produces soft drinks that has a contract which requires that a minimum of 80 units of the chemical A and 60 units of the chemical B go into each bottle of the drink. The chemicals are available in prepared mix packets from two different suppliers. Supplier S had a packet of mix of 4 units of A and 2 units of B that costs ₹ 10. The supplier T has a packet of mix of 1 unit of A and 1 unit of B that costs ₹ 4. How many packets of mixes from S and T should the company purchase to honour the contract requirement and yet minimize cost ? Make a LPP and solve graphically.

29. एक कॉलेज के 60% विद्यार्थी लड़कियाँ हैं। इस कॉलेज के 4% लड़के तथा 1% लड़कियों की ऊँचाई 1.75 मी. से अधिक है। कॉलेज से एक विद्यार्थी यादृच्छया चुना गया तथा उसकी ऊँचाई 1.75 मी. से अधिक पाई गई। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि चुना गया विद्यार्थी एक लड़की है।

6

In a certain college, 4% of boys and 1% of girls are taller than 1.75 metres. Furthermore, 60% of the students in the college are girls. A student is selected at random from the college and is found to be taller than 1.75 metres. Find the probability that the selected student is a girl.