

समय : 3:00 घंटे

2018 (I)
गणित विज्ञान
प्रश्न पत्र

विषय कोड

पुस्तिका कोड

पूर्णांक : 200 अंक

अनुदेश

1. आपने हिन्दी को वास्तव मुझा है। इस परीक्षा पुस्तिका में एक सौ बोर्ड (20 भाग 'A' में, 40 भाग 'B', 60 भाग 'C' में) बहुल विकल्प प्रश्न (MCQ) दिए गए हैं। आपको भाग 'A' में से अधिकतम 15 और भाग 'B' में 25 प्रश्नों तथा भाग 'C' में से 20 प्रश्नों के उत्तर देने हैं। यदि निम्नांकित से अधिक प्रश्नों के उत्तर दिए गए तो कोरब फूले भाग 'A' से 15, भाग 'B' से 25 तथा भाग 'C' से 20 उत्तरों की जांच की जाएगी।
2. उत्तर पत्र गलवा से दिया यद्या है। अपना रोल नंबर और केन्द्र का नाम लिखने से पहले यह जांच लीजिए कि पुस्तिका में पृष्ठ पूरे और सही है तथा कहीं से कटे-कटे नहीं है। यदि ऐसा है तो आप इनिजीलेटर से उसी कोड की पुस्तिका बदलने का निवेदन कर सकते हैं। इसी तरह से उत्तर पत्र को भी जांच ले। इस पुस्तिका में एक काम करने के लिए अतिरिक्त पन्ने सलग्न हैं।
3. उत्तर पत्र के पृष्ठ 1 में दिए गए स्थान पर अपना रोल नंबर, नाम तथा इस परीक्षा पुस्तिका का क्रांतकारी लिखिए, साथ ही अपना हस्ताक्षर भी जबर्शी करें।
4. आप अपनी ओएग्जाम उत्तर पत्रक में रोल नंबर, विषय कोड, पुस्तिका कोड और केन्द्र कोड से संबंधित सभुचित दृश्यों को लाल चौड़ी धूप से बरबर कराएं। यह एक भाव परीक्षार्थी की जिम्मेदारी है कि वह उत्तर पुस्तिका में दिए गए निर्देशों का पूरी सावधानी से पालन करें, ऐसा न करने पर कम्प्यूटर विकरणों का सही वरीके से अकूटित नहीं कर पाएगा, जिससे अतः आपको हाजि, पिसते आपकी उत्तर पुस्तिका की अवधीकृति नहीं शामिल, हो सकती है।
5. भाग 'A' में प्रत्येक प्रश्न 2 अंक, भाग 'B' में प्रत्येक प्रश्न के 3 अंक तथा भाग 'C' में प्रत्येक प्रश्न 4.75 अंक का है। प्रत्येक गलवा उत्तर का क्रांतकारी गूल्यांकन भाग 'A' में @ 0.5 अंक तथा भाग 'B' में @ 0.75 अंक से किया जाएगा। भाग 'C' के उत्तरों के लिए क्रांतकारी गूल्यांकन नहीं है।
6. भाग 'A' तथा भाग 'B' के प्रत्येक प्रश्न के नीचे नाम विकल्प दिए गए हैं। इनमें से बोल एक विकल्प ही 'सही' अथवा 'सर्वोत्तम उत्तर' है। आपको प्रत्येक प्रश्न का सही अथवा सर्वोत्तम उत्तर दूढ़ना है। आगे 'C' में प्रत्येक प्रश्न का "एक" या एक से अधिक विकल्प सही हो सकते हैं। भाग 'C' में प्रत्येक प्रश्न के सभी विकल्पों का सही वर्णन पर ही क्रेडिट प्राप्त होगा।
7. बोल करते हुए या अनुचित तरीकों का प्रयोग करते हुए पाए जाने वाले अग्राहियों का इस और अन्य भावी परीक्षार्थी के लिए अयोग्य ठड़ाया जा सकता है।
8. अग्राही की उत्तर या एक पन्नों के अतिरिक्त कई और कुछ भी नहीं लिखना चाहिए।
9. फैलाउलेटर का उपयोग करने की अनुमति नहीं है।
10. परीक्षा समाप्ति पर लिए विन्दु पिन्चिल स्थान से OMR उत्तर पत्रक को विभाजित करें। इनिजीलेटर को यूल CMR उत्तर पत्रक सौंपने के पश्चात आप इसकी कॉर्बिनलेस प्रतिलिपि ले जा सकते हैं।
11. हिन्दी भाषान/संस्करण के प्रश्न में विसंगति होने/पाये जाने पर अंग्रेजी संस्करण प्रयोगित होगा।
12. बोल परीक्षा की पूरी अवधि तक बैठने वाले प्रत्याशी को ही परीक्षा पुस्तिका साथ ले जाने की अनुमति दी जाएगी।

रोल नंबर :
नाम :

अग्राही द्वारा भरी यई जानकारी को मैं सत्यापित करता हूँ।

इनिजीलेटर के हस्ताक्षर

FOR ROUGH WORK

4-A-H

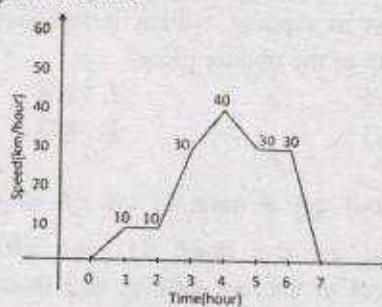
S/11 RISE/18—4AH—1B

भाग PART A

1. A और B एक साथ एक स्थान O से दक्षिणावर्त दिशा में चलना प्रारम्भ करते हैं। A को एक चक्कर लगाने में 9 मिनट लगते हैं और वह एक मिनट रुक कर दोबारा चलना प्रारम्भ करता है। B को एक चक्कर लगाने में 13 मिनट लगते हैं और वह 2 मिनट रुक कर दोबारा चलना प्रारम्भ करता है। चलना शुरू करने के कितने मिनट बाद वे दोनों पुनः O पर मिलेंगे?
1. 30 2. 29
3. 31 4. 28
1. A and B move clockwise around a circle, starting from a common point O. A takes 9 minutes to complete a round but re-starts after a delay of 1 minute. B takes 13 minutes to complete the round but restarts after a delay of 2 minutes. How many minutes after they began would they meet again at O?
1. 30 2. 29
3. 31 4. 28
2. किसी कक्षा में चौदह विद्यार्थी लड़कियाँ हैं। उस कक्षा में आठ विद्यार्थी नीला कमीज पहनते हैं। दो ऐसे हैं जो न तो लड़कियाँ हैं, न नीला कमीज पहनते हैं। नीला कमीज पहनने वाले विद्यार्थियों में पांच लड़कियाँ हैं। कक्षा में कुल कितने विद्यार्थी हैं?
1. 19 2. 29
3. 17 4. 24
2. Fourteen of the students in a class are girls. Eight students in the class wear blue shirts. Two are neither girls nor wear blue shirts. Five students who wear blue shirts are girls. How many students are there in the class?
1. 19 2. 29
3. 17 4. 24
3. L लम्बाई की एक छड़ी को यादृच्छिक रूप से दो भागों में तोड़ा गया है। छोटे टुकड़े की औसत लम्बाई क्या है?
1. L/6 2. L/4
3. L/3 4. L/2

3. A stick of length L is broken into two pieces at random. What is the average length of the smaller piece?
1. L/6 2. L/4
3. L/3 4. L/2
4. एक लम्बी-दूरी के धावक को पूर्ण दूरी के $\frac{1}{7}$ भाग के बाद जल-केन्द्र मिलता है। $\frac{1}{6}$ भाग दूरी और तय करने के बाद उसे चिकित्सा केन्द्र मिलता है। चिकित्सा केन्द्र के 4 कि.मी. के बाद उसे दूसरा धावक मिलता है। पूर्ण दूरी का आधा भाग तय करने के बाद दूसरा धावक, पहले धावक की दौड़ समाप्ति से 4 कि.मी. पहले रुक जाता है। कुल दूरी कितनी है?
1. 21 कि.मी. 2. 30 कि.मी.
3. 42 कि.मी. 4. 50 कि.मी.
4. A long-distance runner finds a water station after completing $\frac{1}{7}^{th}$ of the total distance. After covering another $\frac{1}{6}^{th}$ of the total distance he gets medical-aid. Another runner joins him 4 km after the medical-aid station. The second runner stops 4 km before the completion of run, covering $\frac{1}{2}$ of the total distance. What is the total distance?
1. 21 km 2. 30 km
3. 42 km 4. 50 km
5. एक कार की गति समय के साथ नीचे दर्शायी गयी है।
-
- कार की औसत चाल क्या है?
1. 30.42 2. 20.43
3. 10.43 4. 21.43

5. Movement of a car with respect to time is given below:



The average speed of the car is

1. 30.42 2. 20.43
3. 10.43 4. 21.43

6. एक ईघन केन्द्र एक दिन में 150 लोगों को ₹15000 का डीजल बेचता है। यदि प्रत्येक व्यक्ति को कम से कम ₹ 50 का डीजल खरीदना अनिवार्य है, तो किसी व्यक्ति ने अधितम उस दिन कितने रुपये का डीजल खरीदा?

1. 7450 2. 7500
3. 7550 4. 7600

6. A fuel station sold diesel costing ₹15000 to 150 persons on a day. If the lower limit of sale to a person is ₹ 50, what is the maximum amount in rupees for which one person could have purchased diesel on that day?

1. 7450 2. 7500
3. 7550 4. 7600

7. बिन्दुओं (2017, 2017), (2027, 2027) और (2037, 2017) से बने त्रिमुख का क्षेत्रफल है

1. 2017 2. 100
3. $100\sqrt{10}$ 4. $100\sqrt{20}$

7. The area of the triangle formed by joining the points (2017, 2017), (2027, 2027) and (2037, 2017) is

1. 2017 2. 100
3. $100\sqrt{10}$ 4. $100\sqrt{20}$

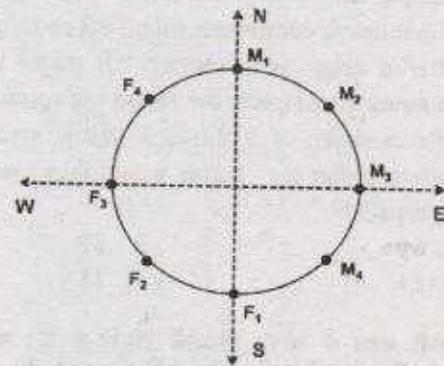
8. यदि संगीता की पुत्री मेरी पुत्री की भाँई है, तो मेरा संगीता से क्या रिश्ता है?

1. केवल पुत्र होना ही सम्भावना है।
2. केवल दामाद होना ही सम्भावना है।
3. केवल पुत्री होना ही सम्भावना है।
4. दामाद या पुत्री

8. If Sangeeta's daughter is my daughter's mother, then how am I related to Sangeeta?

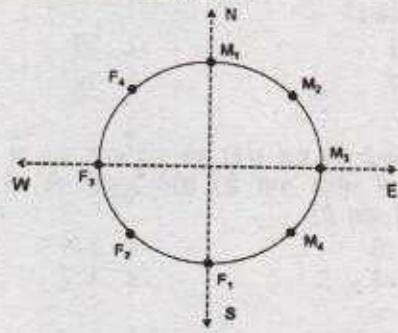
1. Son is the only possibility
2. Son-in-law is the only possibility
3. Daughter is the only possibility
4. Son-in-law or daughter

9. चार पुरुष M_1, M_2, M_3, M_4 और चार महिलाएँ F_1, F_2, F_3, F_4 एक गोलाकार मेज के किनारे एक-दूसरे से उल्टी तरफ बैठा किये हुए बैठे हैं। जैसे कि नीचे के चित्र में दर्शाया गया है। यदि प्रत्येक अपने से तीन कदम दक्षिण बलता है और फिर एक कदम बामावर्त बलता है, तब F_4 का बैठा किस दिशा में है?



1. पूर्व
2. उत्तर-पूर्व
3. उत्तर-पश्चिम
4. उत्तर

9. Four males M_1, M_2, M_3, M_4 and four females F_1, F_2, F_3 and F_4 are sitting around a round table facing away from the table as shown in the figure below. If each one moves three positions to his/her right and then one position to the left, then in which direction does F_4 face?



1. East 2. North-East
 3. North-West 4. North
10. प्रो. मूर्ति जपने विद्यार्थियों को अपना साथी मुाने की अनुमति देती है। लेकिन विद्यार्थियों का कोई भी जोड़ा एक साथ लगातार सात कक्षाओं से ज्यादा में काम नहीं कर सकता है। एलिस और बॉब ने सात कक्षाओं में एक साथ काम किया। कॅलिवन और डेनी ने तीन कक्षाओं में लगातार एक साथ काम किया। कॅलिवन, एलिस के साथ काम नहीं करना चाहता है। किसको बॉब के साथ काम करने के लिए नियुक्त करना चाहिए?
1. कॅलिवन 2. एलिस
 3. डेनी 4. कोई नहीं
10. Prof. Murthy likes to let her students choose who their partners will be; however, no pair of students may work together for more than seven class periods in a row. Alice and Bob have worked together for seven class periods in a row. Calvin and Denny have worked together for three class periods in a row. Calvin does not want to work with Alice. Who should be assigned to work with Bob?
1. Calvin 2. Alice
 3. Denny 4. None
11. 44 खिलाड़ियों के समूह में, 26 खिलाड़ी हॉकी, 24 खिलाड़ी फुटबॉल और 24 खिलाड़ी क्रिकेट खेलते हैं। उनमें से, 8 हॉकी और फुटबॉल दोनों, 12 फुटबॉल और क्रिकेट दोनों, और 5 तीनों खेल खेलते हैं। कितने खिलाड़ी हॉकी और क्रिकेट दोनों खेलते हैं?
1. 10 2. 15
 3. कोई नहीं 4. 7
11. In a group of 44 players, 26 play hockey, 24 play football and 24 play cricket. Eight of them play both hockey and football, 12 play both football and cricket, and 5 play all the three games. How many play both hockey and cricket?
1. 10 2. 15
 3. None 4. 7
12. दिया गया है,

$$(a)^* = \begin{cases} a & \text{if } a > 0 \\ 0 & \text{if } a \leq 0 \end{cases}$$

कोई वास्तविक अंक a के लिए

माने कि दो वास्तविक अंक x और y के लिए $(xy)^* = (x)^*(y)^*$, तब निम्न में कौन सा अनिवार्य रूप से सत्य है?

1. $x > 0$ और $y > 0$
 2. $\{x < 0 \text{ and } y < 0\} \text{ or } \{x > 0 \text{ and } y > 0\}$
 3. $\{x \leq 0 \text{ and } y \leq 0\} \text{ or } \{x \geq 0 \text{ and } y \geq 0\}$
 4. $\{x \geq 0\} \text{ or } \{y \geq 0\} \text{ or } \{x \geq 0 \text{ and } y \geq 0\}$

12. It is given that

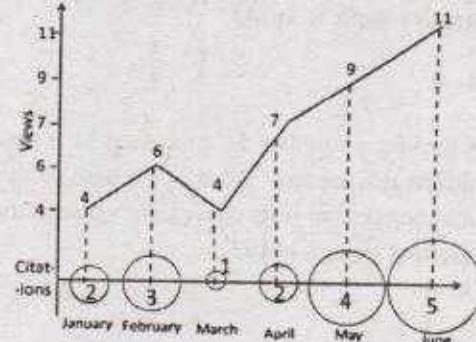
$$(a)^* = \begin{cases} a & \text{if } a > 0 \\ 0 & \text{if } a \leq 0 \end{cases}$$

for any real number a

Suppose for two real numbers x and y , $(xy)^* = (x)^*(y)^*$. Then which of the following is necessarily true?

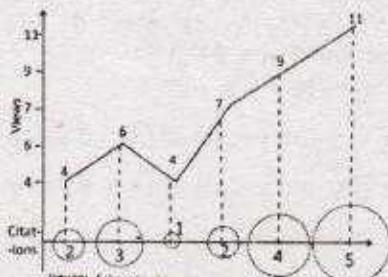
1. $x > 0$ and $y > 0$
 2. $\{x < 0 \text{ and } y < 0\} \text{ or } \{x > 0 \text{ and } y > 0\}$
 3. $\{x \leq 0 \text{ and } y \leq 0\} \text{ or } \{x \geq 0 \text{ and } y \geq 0\}$
 4. $\{x \geq 0\} \text{ or } \{y \geq 0\} \text{ or } \{x \geq 0 \text{ and } y \geq 0\}$

13. एक अनुसंधान पत्र का अवलोकन और उसके उद्धरण को मण्णा यित्र में दर्शाती गयी है। उद्दत प्रतिशत बढ़त किस मास में अवलोकन प्रतिशत बढ़त की दो गुनी ज्यादा है?



1. फरवरी 2. अप्रैल
 3. मई 4. जून

13. Number of times a research paper is viewed and cited is shown in the plot. In which month was the percentage increase in citation more than the double of the percentage increase in view?



1. February 2. April
3. May 4. June

14. रेक्ट स्थान में कौन सा विकल्प सबसे सटीक है?
0.1, 0.25, 0.3, 0.2, 0.5, 0.6, 0.3, __, 0.9,
0.4, 1.0, 1.2

1. 1.05 2. 0.85
3. 0.75 4. 0.65

14. Which of the following options is the best choice for the missing number?

0.1, 0.25, 0.3, 0.2, 0.5, 0.6, 0.3, __, 0.9,

0.4, 1.0, 1.2

1. 1.05 2. 0.85
3. 0.75 4. 0.65

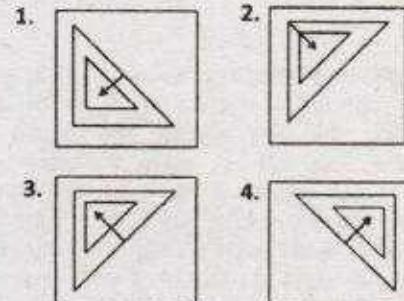
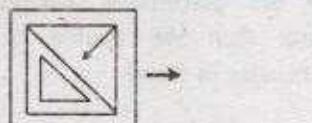
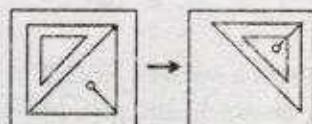
15. संख्या 54 को आधार-10 छोड़कर किसी और आधार से व्यक्त किया गया है। इस संख्या पद्धति का आधार क्या है, यदि इसका तुल्यात्मक मान दशमलव पद्धति में 49 है?

1. 1 2. 3
3. 6 4. 9

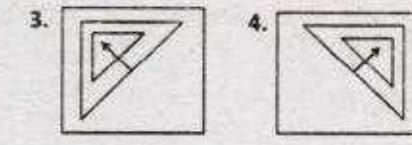
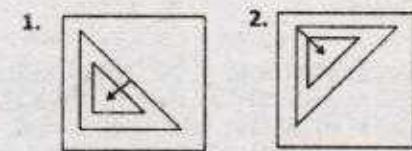
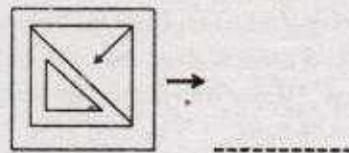
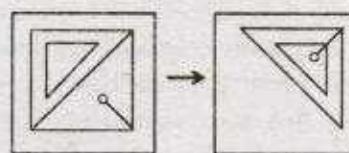
15. Consider a number 54 expressed in a base different from ten. What is the base of this number system if its equivalent value in the decimal system is 49?

1. 1 2. 3
3. 6 4. 9

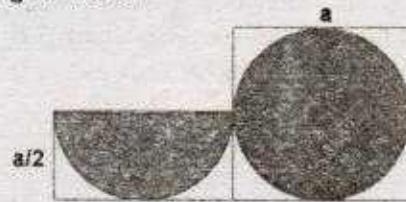
16. रेक्ट स्थान के लिये उपयुक्त विकल्प क्या है?



16. Which of the options is appropriate for the blank space?

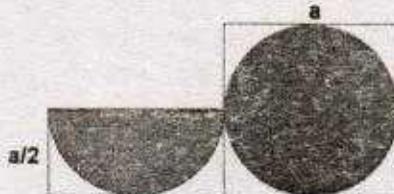


17. वित्र में, कुल छायांकित क्षेत्रफल (वर्तुल तथा अर्धवर्तुल) तथा कुल क्षेत्रफल (वर्ग एवं आयत) का अनुपात क्या है?



1. $\frac{5}{6}\pi$ 2. $\frac{6}{5}\pi$
3. $\frac{5}{12}\pi$ 4. $\frac{\pi}{4}$

17. In the diagram, what is the ratio of the total shaded area (of the circle and semi-circle) to the total area of the square and the rectangle?



1. $\frac{5}{6}\pi$
2. $\frac{6}{5}\pi$
3. $\frac{5}{12}\pi$
4. $\frac{\pi}{4}$

18. दो विद्यार्थी एक प्रश्न को स्वतंत्रतः हल कर रहे हैं। यदि पहले की प्रश्न हल करने की प्रायिकता $\frac{3}{5}$ है और दूसरे की $\frac{4}{5}$ है, तो कम से कम एक विद्यार्थी के प्रश्न हल करने की प्रायिकता क्या है?

1. $\frac{17}{25}$
2. $\frac{19}{25}$
3. $\frac{21}{25}$
4. $\frac{23}{25}$

18. Two students are solving the same problem independently. If the probability that the first one solves the problem is $\frac{3}{5}$ and the probability that the second solves the problem is $\frac{4}{5}$, what is the probability that at least one of them solves the problem?

1. $\frac{17}{25}$
2. $\frac{19}{25}$
3. $\frac{21}{25}$
4. $\frac{23}{25}$

19. एक गेंद को 100मी. से निराया जाता है। प्रत्येक उछाल के बाद गेंद अपनी पूर्ण उछाल की आधी ऊंचाई तक उछलती है (अर्थात् पहली उछाल के बाद गेंद 50मी. उछलती है, दूसरी उछाल के बाद 25मी. उछलती है, इत्यादि)। पहली और पाँचवीं उछाल के बीच में गेंद द्वारा तय की गयी अच्च दूरी क्या है?

1. $\frac{355}{2}$ मी.
2. $\frac{365}{2}$ मी.
3. $\frac{375}{2}$ मी.
4. $\frac{385}{2}$ मी.

19. A ball is dropped from a height of 100 m. The ball after each bounce rises vertically

by half its previous height (This means at the first bounce it rises by 50 m, by 25 m at the second bounce and so on). What is the vertical distance travelled by the ball between the first and the fifth bounces?

1. $\frac{355}{2}$ m
2. $\frac{365}{2}$ m
3. $\frac{375}{2}$ m
4. $\frac{385}{2}$ m

20. दीर्घवृत्त में तीन अर्धवृत्तों को दर्शाया गया है। यदि दो छोटे अर्धवृत्तों की क्षेत्रफल दीर्घवृत्त की क्षेत्रफल की एक-चौथाई है और बड़े अर्धवृत्त की क्षेत्रफल छोटे अर्धवृत्त की क्षेत्रफल की दो गुनी है तो दीर्घवृत्त का कितना अंश छायाकित है?



1. $\frac{11}{12}$
2. $\frac{12}{16}$
3. $\frac{13}{16}$
4. $\frac{13}{14}$

20. Three semi-circles are drawn inside a big circle as shown in the figure. If the radius of the two identical smaller semi-circles is $\frac{1}{4}$ th of that of the big circle and the radius of the bigger semi-circle is twice that of the small semi-circle, what proportion of the big circle's area is shaded?



1. $\frac{11}{12}$
2. $\frac{12}{16}$
3. $\frac{13}{16}$
4. $\frac{13}{14}$

भाग PART B

UNIT - I

21. यदि $\{a_n\} \times \{b_n\}$ वास्तविक संख्याओं (real numbers) के एक वर्धमान अनुक्रम (monotone sequence) हैं तो क्षेत्री $\sum a_n b_n$ अभिसारी (convergent) बन जाए तो निम्नलिखित में से कौन सा कथन सत्य है?

1. $\sum a_n$ व $\sum b_n$ दोनों अभिसारी हैं।
2. $\sum a_n$ व $\sum b_n$ में से कम से कम एक अभिसारी है।
3. $\{a_n\} \times \{b_n\}$ दोनों परिवद (bounded) हैं।
4. $\{a_n\} \times \{b_n\}$ में से कम से कम एक परिवद (bounded) है।

21. Given $\{a_n\}, \{b_n\}$ two monotone sequences of real numbers and that $\sum a_n b_n$ is convergent, which of the following is true?

1. $\sum a_n$ is convergent and $\sum b_n$ is convergent.
2. At least one of $\sum a_n, \sum b_n$ is convergent.
3. $\{a_n\}$ is bounded and $\{b_n\}$ is bounded.
4. At least one of $\{a_n\}, \{b_n\}$ is bounded.

22. परिवेश संख्याओं के समुच्चय को \mathbb{Q} व धनात्मक पूर्णांकों के समुच्चय को \mathbb{N} से विभाजित करिए। समुच्चय S निम्न प्रकार से परिभ्रष्ट है

$$S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}, \text{जबकि } n \in \mathbb{N} \\ \text{तथा } x \in \mathbb{Q} \text{ या } y \in \mathbb{Q}\}$$

1. S एक परिवेश वारिक (finite non-empty) अनुक्रम है।
2. S गणनीय (countable) है।
3. S अगणनीय (uncountable) है।
4. S अवैद (empty) है।

22. Let $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}, \text{ where } n \in \mathbb{N} \text{ and either } x \in \mathbb{Q} \text{ or } y \in \mathbb{Q}\}$.

Here \mathbb{Q} is the set of rational numbers and \mathbb{N} is the set of positive integers. Which of the following is true?

1. S is a finite non empty set
2. S is countable
3. S is uncountable
4. S is empty

23. अनुक्रम $\{a_n\}$ निम्न प्रकार से परिभ्रष्ट किया गया है $a_1 = 1,$

$$a_{n+1} = (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right) \left(|a_n| + \frac{2}{|a_n|}\right) \text{ जब } n \geq 1$$

निम्नलिखित में से कौन सा कथन सत्य है?

1. $\limsup a_n = \sqrt{2}$
2. $\liminf a_n = -\infty$
3. $\lim a_n = \sqrt{2}$
4. $\sup a_n = \sqrt{2}$

23. Define the sequence $\{a_n\}$ as follows:

$a_1 = 1$ and for

$$n \geq 1, a_{n+1} = (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right) \left(|a_n| + \frac{2}{|a_n|}\right).$$

Which of the following is true?

1. $\limsup a_n = \sqrt{2}$
2. $\liminf a_n = -\infty$
3. $\lim a_n = \sqrt{2}$
4. $\sup a_n = \sqrt{2}$

24. यदि $\{x_n\}$ वास्तविक संख्याओं (real numbers) का एक अभिसारी अनुक्रम (convergent sequence) व $\{y_n\}$ वास्तविक संख्याओं का एक परिवद अनुक्रम (bounded sequence) हो तो निम्नलिखित में से कौन सा नियम निकलता है?

1. $\{x_n + y_n\}$ अभिसारी है।
2. $\{x_n + y_n\}$ परिवद है।
3. $\{x_n + y_n\}$ का कोई भी अभिसारी उपअनुक्रम (convergent subsequence) नहीं है।
4. $\{x_n + y_n\}$ का कोई भी परिवद उपअनुक्रम (bounded subsequence) नहीं है।

24. if $\{x_n\}$ is a convergent sequence in \mathbb{R} and $\{y_n\}$ is a bounded sequence in \mathbb{R} , then we can conclude that

1. $\{x_n + y_n\}$ is convergent
2. $\{x_n + y_n\}$ is bounded
3. $\{x_n + y_n\}$ has no convergent subsequence
4. $\{x_n + y_n\}$ has no bounded subsequence

25. संख्या $\log(2) = \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{2^{n-1}}$ है।

1. शून्य से कम।
2. 1 से अधिक।
3. $\frac{1}{2^{100-101}}$ से कम।
4. $\frac{1}{2^{100-101}}$ से अधिक।

25. The difference

$$\log(2) - \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{2^n \cdot n}$$

1. less than 0
2. greater than 1
3. less than $\frac{1}{2^{100-101}}$
4. greater than $\frac{1}{2^{100-101}}$

26. यदि

$$f(x, y) = \log(\cos^2(e^{x^2})) + \sin(x + y) \text{ हो}$$

1. $\frac{\cos(e^{x^2})-1}{1+\sin^2(e^{x^2})} - \cos(x+y)$
2. 0
3. $-\sin(x+y)$
4. $\cos(x+y)$

26. Let $f(x, y) = \log(\cos^2(e^{x^2})) + \sin(x + y)$.

Then $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ is

1. $\frac{\cos(e^{x^2})-1}{1+\sin^2(e^{x^2})} - \cos(x+y)$
2. 0
3. $-\sin(x+y)$
4. $\cos(x+y)$

27. यदि A वास्तविक संख्याओं (real numbers) का $m \times n$ आवृह (matrix) हो तथा B वास्तविक संख्याओं का $(n \times m)$ आवृह हो; जबकि $m < n$ है, तो

1. AB सदैव व्युत्कमणीय (nonsingular) होगा।
2. AB सदैव अव्युत्कमणीय (singular) होगा।
3. BA सदैव व्युत्कमणीय होगा।
4. BA सदैव अव्युत्कमणीय होगा।

27. Let A be a $(m \times n)$ matrix and B be a $(n \times m)$ matrix over real numbers with $m < n$. Then

1. AB is always nonsingular
2. AB is always singular

3. BA is always nonsingular
4. BA is always singular

28. यदि A वास्तविक संख्याओं (real numbers) का ऐसा (2×2) आवृह हो जिसके लिए $\text{Det}(A + I) = 1 + \text{Det}(A)$ सत्य हो, तो निम्नलिखित में से क्या निष्कर्ष निकलता है?

1. $\text{Det}(A) = 0$
2. $A = 0$
3. $\text{Tr}(A) = 0$
4. A व्युत्कमणीय (nonsingular) है।

28. If A is a (2×2) matrix over \mathbb{R} with $\text{Det}(A + I) = 1 + \text{Det}(A)$, then we can conclude that

1. $\text{Det}(A) = 0$
2. $A = 0$
3. $\text{Tr}(A) = 0$
4. A is nonsingular

29. समीकरणों के निकाय

$$\begin{aligned} 1 \cdot x + 2 \cdot x^2 + 3 \cdot xy + 0 \cdot y &= 6 \\ 2 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 3 \cdot xy + 1 \cdot y &= 5 \\ 1 \cdot x - 1 \cdot x^2 + 0 \cdot xy + 1 \cdot y &= 7 \end{aligned}$$

के बारे में क्या सत्य है?

1. इसके हल परिमेय संख्याओं (rational numbers) में हैं।
2. इसके हल वास्तविक संख्याओं (real numbers) में हैं।
3. इसके हल सम्प्रभु संख्याओं (complex numbers) में हैं।
4. इसका कोई हल नहीं है।

29. The system of equations:

$$\begin{aligned} 1 \cdot x + 2 \cdot x^2 + 3 \cdot xy + 0 \cdot y &= 6 \\ 2 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 3 \cdot xy + 1 \cdot y &= 5 \\ 1 \cdot x - 1 \cdot x^2 + 0 \cdot xy + 1 \cdot y &= 7 \end{aligned}$$

1. has solutions in rational numbers
2. has solutions in real numbers
3. has solutions in complex numbers
4. has no solution

30. आवृह $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{20}$ की trace है

1. 7^{20}
2. $2^{20} + 3^{20}$
3. $2 \cdot 2^{20} + 3^{20}$
4. $2^{20} + 3^{20} + 1$

30. The trace of the matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{20}$$

is

1. 7^{20}
2. $2^{20} + 3^{20}$
3. $2 \cdot 2^{20} + 3^{20}$
4. $2^{20} + 3^{20} + 1$

31. यदि a, b, c, d ऐसी वास्तविक अचर राशियाँ (real constants) हैं कि प्रत्येक $x, y \in \mathbb{R}$ के लिए $\lambda x^2 + 2xy + y^2 = (ax + by)^2 + (cx + dy)^2$

सत्य हो, तो

1. $\lambda = -5$
2. $\lambda \geq 1$
3. $0 < \lambda < 1$
4. ऐसा कोई $\lambda \in \mathbb{R}$ संभव नहीं है।

31. Given that there are real constants a, b, c, d such that the identity

$$\lambda x^2 + 2xy + y^2 = (ax + by)^2 + (cx + dy)^2$$

holds for all $x, y \in \mathbb{R}$. This implies

1. $\lambda = -5$
2. $\lambda \geq 1$
3. $0 < \lambda < 1$
4. there is no such $\lambda \in \mathbb{R}$

32. स्तम्भ सदिशों का समुच्चय $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ सदिशों के अदिश गुणन के सापेक्ष \mathbb{R}^n ; $n \geq 2$ हेतु मात्रक सदिशों का पारस्परिक लंबवत आधार (orthonormal basis) है। यदि $A_{n \times n}$ आव्यूह हो जो स्तम्भ सदिश v_1, v_2, \dots, v_n से बना हो

1. $A = A^{-1}$
2. $A = A^T$
3. $A^{-1} = A^T$
4. $\text{Det}(A) = 1$

32. Let $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, be equipped with standard inner product. Let $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ be n column vectors forming an orthonormal basis of \mathbb{R}^n . Let A be the $n \times n$ matrix formed by the column vectors v_1, \dots, v_n . Then

1. $A = A^{-1}$
2. $A = A^T$
3. $A^{-1} = A^T$
4. $\text{Det}(A) = 1$

UNIT - 2

33. यदि \mathbb{C} पर परिमाणित एक वैश्लेषिक (analytic) फलन f अचर नहीं है तो निम्नलिखित में से कौन सा कथन असत्य है ?

1. f अपरिहद (unbounded) है।
2. f विवृत समुच्चयों (open sets) को विवृत समुच्चयों पर प्रतिविनियत (map) करता है।
3. एक विवृत सुबंधित प्रांत (open connected domain) U विद्यमान है जिस पर f सदैव अशूद्ध है तथा $|f|_U$ U के किसी बिन्दु पर अपना लघुत्तम मान अर्जित करता है।
4. \mathbb{C} में f का प्रतिविनियत संघरण (dense) है।

33. Suppose that f is a non-constant analytic function defined over \mathbb{C} . Then which one of the following is false?

1. f is unbounded
2. f sends open sets into open sets
3. There exists an open connected domain U on which f is never zero but $|f|_U$ attains its minimum at some point of U
4. The image of f is dense in \mathbb{C}

34. समाकल

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2 - 1} dz$$

का मान है

1. 0
2. $(\pi i)e$
3. $(\pi i)e - (\pi i)e^{-1}$
4. $(e + e^{-1})$

34. The value of the integral

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2 - 1} dz \text{ is}$$

1. 0
2. $(\pi i)e$
3. $(\pi i)e - (\pi i)e^{-1}$
4. $(e + e^{-1})$

35. यदि $f: \{z \mid |z| < 1\} \rightarrow \mathbb{C}$ एक वैश्लेषिक (analytic) फलन है जो कि अचर नहीं है तो निम्नलिखित में से संभावित रूप से कौन से प्रतिवेदन का f द्वारा पालन किया जा सकता है ?

1. $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{-1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \forall n \in \mathbb{N}$
2. $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{-1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1} \forall n \in \mathbb{N}$

3. $|f\left(\frac{1}{n}\right)| < 2^{-n} \forall n \in \mathbb{N}$

4. $\frac{1}{\sqrt{n}} < |f\left(\frac{1}{n}\right)| < \frac{2}{\sqrt{n}} \forall n \in \mathbb{N}$

35. Let $f: \{z \mid |z| < 1\} \rightarrow \mathbb{C}$ be a non-constant analytic function. Which of the following conditions can possibly be satisfied by f ?

1. $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{-1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \forall n \in \mathbb{N}$

2. $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{-1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1} \forall n \in \mathbb{N}$

3. $|f\left(\frac{1}{n}\right)| < 2^{-n} \forall n \in \mathbb{N}$

4. $\frac{1}{\sqrt{n}} < |f\left(\frac{1}{n}\right)| < \frac{2}{\sqrt{n}} \forall n \in \mathbb{N}$

36. एक फलन $\varphi: \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$ को $\varphi(z) = \frac{1+z}{1-z}$ द्वारा परिभासित किया जाता है। निम्नलिखित में से कौन सा कथन सत्य है।

1. $\varphi(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}) \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$

2. $\varphi(\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) < 0\}) \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) < 0\}$

3. φ आवगदक (onto) है।

4. $\varphi(\mathbb{C} \setminus \{1\}) = \mathbb{C} \setminus \{-1\}$

36. Consider the map $\varphi: \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$ given by

$$\varphi(z) = \frac{1+z}{1-z}.$$

Which of the following is true?

1. $\varphi(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}) \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$

2. $\varphi(\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) < 0\}) \subseteq \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) < 0\}$

3. φ is onto

4. $\varphi(\mathbb{C} \setminus \{1\}) = \mathbb{C} \setminus \{-1\}$

37. यदि S_7 समुच्चय $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ के क्रमचयों (permutations) के समूह (group) को निर्दिष्ट करता हो तो निम्नलिखित में से कौन सा कथन सत्य है?

1. S_7 में कोटि 6 (order 6) का कोई अवयव (element) नहीं है।

2. S_7 में कोटि 7 का कोई अवयव नहीं है।

3. S_7 में कोटि 8 का कोई अवयव नहीं है।

4. S_7 में कोटि 10 का कोई अवयव नहीं है।

37. Let S_7 denote the group of permutations of the set $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Which of the following is true?

1. There are no elements of order 6 in S_7

2. There are no elements of order 7 in S_7

3. There are no elements of order 8 in S_7

4. There are no elements of order 10 in S_7

38. समूह (group) \mathbb{Z}_{10} से \mathbb{Z}_{20} में कुल कितनी समसंपत्ताएँ (homomorphisms) हैं?

1. शून्य

2. एक

3. पांच

4. दस

38. The number of group homomorphisms from \mathbb{Z}_{10} to \mathbb{Z}_{20} is

1. zero

2. one

3. five

4. ten

39. यदि $f(x) = x^5 - 5x + 2$ हो तो

1. f का कोई भी वास्तविक मूल (real root) नहीं है।

2. f का केवल एक वास्तविक मूल है।

3. f के कुल तीन वास्तविक मूल हैं।

4. f के सभी मूल वास्तविक मूल हैं।

39. Let $f(x) = x^5 - 5x + 2$. Then

1. f has no real root

2. f has exactly one real root

3. f has exactly three real roots

4. all roots of f are real

40. यदि अपरिमेय संख्याओं के समुच्चय को \mathbb{Q} से निरूपित किया जाए व $S = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}^2$ हो तो

1. \mathbb{R}^2 में S सुबंधित (connected) है।

2. \mathbb{R}^2 में S^c सुबंधित है।

3. $\mathbb{R}^2 \setminus S$ संकृत (closed) है।

4. $\mathbb{R}^2 \setminus S^c$ संकृत (closed) है।

40. Consider the space

$S = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}^2$, where \mathbb{Q} is the set of rational numbers. Then

1. S is connected in \mathbb{R}^2

2. S^c is connected in \mathbb{R}^2

3. S is closed in \mathbb{R}^2

4. S^c is closed in \mathbb{R}^2

UNIT 3

41. अवकल समीकरण $y' = y(y-1)(y-2)$ के संबंध में कौन सा कथन सत्य है?

1. यदि $y(0) = 0.5$ हो तो y छासमान (decreasing) है।

2. यदि $y(0) = 1.2$ हो तो y बढ़िमान (increasing) है।

3. यदि $y(0) = 2.5$ हो तो y अपरिकद (unbounded) है।

4. यदि $y(0) < 0$ हो तो y निम्नबद्ध (bounded below) है।

41. Consider the ordinary differential equation

$$y' = y(y - 1)(y - 2).$$

Which of the following statements is true?

1. If $y(0) = 0.5$ then y is decreasing
2. If $y(0) = 1.2$ then y is increasing
3. If $y(0) = 2.5$ then y is unbounded
4. If $y(0) < 0$ then y is bounded below

42. अवकल समीकरण $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ की कल्पना कीजिए. जबकि P और Q सर्वथावकलनीय फलन (smooth functions) हैं। यदि y_1 व y_2 इस अवकल समीकरण के हल हों तथा $W(x)$ संबंधित लॉर्स्कियन (Wronskian) को निरूपित करता हो तो निम्नलिखित में से कौन सा कथन सत्य है ?
1. यदि y_1 व y_2 रेखीयीय अस्वतंत्र (linearly dependent) हों तो ऐसे x_1 व x_2 संभव हैं जिनके लिए $W(x_1) = 0$ तथा $W(x_2) \neq 0$ होता है।
 2. यदि y_1 व y_2 रेखीयीय स्वतंत्र (linearly independent) हों तो प्रत्येक x के लिए $W(x) = 0$ होगा।
 3. यदि y_1 व y_2 रेखीयीय अस्वतंत्र हों तो प्रत्येक x के लिए $W(x) \neq 0$ होगा।
 4. यदि y_1 व y_2 रेखीयीय स्वतंत्र हों तो प्रत्येक x के लिए $W(x) \neq 0$ होगा।

42. Consider the ordinary differential equation

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

where P and Q are smooth functions. Let y_1 and y_2 be any two solutions of the ODE. Let $W(x)$ be the corresponding Wronskian. Then which of the following is always true?

1. If y_1 and y_2 are linearly dependent then $\exists x_1, x_2$ such that $W(x_1) = 0$ and $W(x_2) \neq 0$
2. If y_1 and y_2 are linearly independent then $W(x) = 0 \forall x$
3. If y_1 and y_2 are linearly dependent then $W(x) \neq 0 \forall x$
4. If y_1 and y_2 are linearly independent then $W(x) \neq 0 \forall x$

43. कौशी प्रश्न (Cauchy problem)

$$2u_x + 3u_y = 5$$

$$\text{रेखा } 3x - 2y = 0 \text{ पर, } u = 1$$

के संबंध में कौन सा कथन सत्य है ?

1. इसका केवल एक हल है।
2. इसके दो हल हैं।
3. इसके अनन्त हल हैं।
4. इसका कोई हल नहीं है।

43. The Cauchy problem

$$2u_x + 3u_y = 5$$

$$u = 1 \text{ on the line } 3x - 2y = 0 \}$$

has

1. exactly one solution
2. exactly two solutions
3. infinitely many solutions
4. no solution

44. यदि $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0$;

$$u(x, 0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, x \in \mathbb{R}$$

एकमात्र हल u हो। जबकि $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ निम्नलिखित प्रतिवर्धी को संतुष्ट करता हो

$$f(x) = x(1 - x) \quad \forall x \in [0, 1] \text{ और}$$

$$f(x + 1) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

तो $u\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$ का मान है

- | | |
|-------------------|-------------------|
| 1. $\frac{1}{8}$ | 2. $\frac{1}{16}$ |
| 3. $\frac{3}{16}$ | 4. $\frac{5}{16}$ |

44. Let u be the unique solution of

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, x \in \mathbb{R}$$

where $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfies the relations
 $f(x) = x(1 - x) \quad \forall x \in [0, 1]$ and
 $f(x + 1) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Then $u\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$ is

- | | |
|-------------------|-------------------|
| 1. $\frac{1}{8}$ | 2. $\frac{1}{16}$ |
| 3. $\frac{3}{16}$ | 4. $\frac{5}{16}$ |

45. यदि

$$\int_0^h f(x)dx = h \left\{ af(0) + bf\left(\frac{h}{3}\right) + cf(h) \right\}$$

कोई भी संभव उच्च कोटि के बहुपदों f के लिए सटीक (exact) हो तो a, b, c का मान है ?

1. $a = 0, b = \frac{3}{4}, c = \frac{1}{4}$
2. $a = \frac{3}{4}, b = \frac{2}{4}, c = \frac{1}{4}$
3. $a = \frac{-2}{4}, b = \frac{3}{4}, c = \frac{1}{4}$
4. $a = 0, b = \frac{1}{4}, c = \frac{3}{4}$

45. The values of a, b, c such that

$$\int_0^h f(x)dx = h \left\{ af(0) + bf\left(\frac{h}{3}\right) + cf(h) \right\}$$

is exact for polynomials f of degree as high as possible are

1. $a = 0, b = \frac{3}{4}, c = \frac{1}{4}$
2. $a = \frac{3}{4}, b = \frac{2}{4}, c = \frac{1}{4}$
3. $a = \frac{-2}{4}, b = \frac{3}{4}, c = \frac{1}{4}$
4. $a = 0, b = \frac{1}{4}, c = \frac{3}{4}$

46. यदि $J[y] = \int_0^1 [(y')^2 + 2y] dx$ हो जबकि $y(0) = 0, y(1) = 1$, फलन y के प्रतिक्रिया हैं तो $\inf J[y]$ का मान

1. $\frac{23}{12}$ है
2. $\frac{21}{24}$ है
3. $\frac{18}{25}$ है
4. अस्तित्व नहीं है।

46. Consider $J[y] = \int_0^1 [(y')^2 + 2y] dx$
subject to $y(0) = 0, y(1) = 1$.

Then $\inf J[y]$

1. is $\frac{23}{12}$
2. is $\frac{21}{24}$
3. is $\frac{18}{25}$
4. does not exist

47. समाकल समीकरण

$\Phi(x) = x^2 + \int_0^x e^{t-x} \varphi(t)dt$ का रेजोल्वेन्ट कर्नल (resolvent kernel) है

1. e^{t-x}
2. 1
3. e^{x-t}
4. $x^2 + e^{x-t}$

47. The resolvent kernel for the integral equation

$$\Phi(x) = x^2 + \int_0^x e^{t-x} \varphi(t)dt \text{ is}$$

1. e^{t-x}
2. 1
3. e^{x-t}
4. $x^2 + e^{x-t}$

48. एक सरल लोलक (simple pendulum) की गति का लाग्याजियन (Lagrangian)

$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta$ दिया गया है, जबकि l लंबाई की ओर से लटके गोलक (bob) का द्रव्यमान m , गुरुत्वाकर्षण त्वरण g , व स्थिति से लोलक का

आगाम θ हो तब L से संबद्ध है मिल्टीजियन (Hamiltonian) होगा

1. $H(p, \theta) = \frac{p^2}{2ml^2} + mgl \cos \theta$
2. $H(p, \theta) = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl \cos \theta$
3. $H(p, \theta) = \frac{p^2}{ml^2} - mgl \cos \theta$
4. $H(p, \theta) = \frac{3p^2}{2ml^2} + mgl \cos \theta$

48. Given that the Lagrangian for the motion of a simple pendulum is

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta,$$

where m is the mass of the pendulum bob suspended by a string of length l , g is the acceleration due to gravity and θ is the amplitude of the pendulum from the mean position, then a Hamiltonian corresponding to L is

1. $H(p, \theta) = \frac{p^2}{2ml^2} + mgl \cos \theta$
2. $H(p, \theta) = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl \cos \theta$
3. $H(p, \theta) = \frac{p^2}{ml^2} - mgl \cos \theta$
4. $H(p, \theta) = \frac{3p^2}{2ml^2} + mgl \cos \theta$

UNIT -4

49. एक अनभिन्न पारो (standard fair die) को तब तक उछाला जाता है जब तक कि वह पासा 5 व 6 के अलावा कोई दूसरा अंक नहीं दर्शाता। यदि X पासे की अंतिम उछाल में आए अंक को निरूपित करे व घटनाएँ A व B निम्न प्रकार से परिभ्रषित हों।

$A = \{X \text{ एक सम संख्या है}\}$
 $B = \{X \text{ का } 2 \text{ मान या उससे कम है}\}$

1. $P(A \cap B) = 0$
2. $P(A \cap B) = 1/6$
3. $P(A \cap B) = 1/4$
4. $P(A \cap B) = 1/3$

49. A standard fair die is rolled until some face other than 5 or 6 turns up. Let X denote the face value of the last roll, and

$A = \{X \text{ is even}\}$ and $B = \{X \text{ is at most } 2\}$. Then,

1. $P(A \cap B) = 0$
2. $P(A \cap B) = 1/6$
3. $P(A \cap B) = 1/4$
4. $P(A \cap B) = 1/3$

50. यदि X व Y स्वरूपी स्वतंत्र बटन (i.i.d.), जो कि अन्तराल $(0, 1)$ पर समरूप (uniform on $(0, 1)$) है, हों तथा

$Z = \max(X, Y), W = \min(X, Y)$ हो तो

$P((Z - W) > 1/2)$ का मान होगा

1. $1/2$
2. $3/4$
3. $1/4$
4. $2/3$

50. Let X and Y be i.i.d. uniform $(0, 1)$ random variables. Let $Z = \max(X, Y)$ and $W = \min(X, Y)$.

Then $P((Z - W) > 1/2)$ is

1. $1/2$
2. $3/4$
3. $1/4$
4. $2/3$

51. एक मार्कोव श्रृंखला (Markov chain) की अवस्था समष्टि (state space) $S = \{1, 2, 3, 4\}$ व संक्रमण प्रायिकता आव्यूह (transition probability matrix) $P = (p_{i,j})$ निम्न प्रकार से परिणामित है

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & \left[\begin{matrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{matrix} \right] & \text{तो} \\ 2 & & & \end{matrix}$$

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{2,2}^{(n)} = 0, \sum_{n=0}^{\infty} p_{2,2}^{(n)} = \infty$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{2,2}^{(n)} = 0, \sum_{n=0}^{\infty} p_{2,2}^{(n)} < \infty$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{2,2}^{(n)} = 1, \sum_{n=0}^{\infty} p_{2,2}^{(n)} = \infty$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{2,2}^{(n)} = 1, \sum_{n=0}^{\infty} p_{2,2}^{(n)} < \infty$

51. Consider a Markov chain having state space $S = \{1, 2, 3, 4\}$ with transition probability matrix $P = (p_{i,j})$ given by

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & \left[\begin{matrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{matrix} \right] & \text{Then} \\ 2 & & \end{matrix}$$

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{2,2}^{(n)} = 0, \sum_{n=0}^{\infty} p_{2,2}^{(n)} = \infty$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{2,2}^{(n)} = 0, \sum_{n=0}^{\infty} p_{2,2}^{(n)} < \infty$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{2,2}^{(n)} = 1, \sum_{n=0}^{\infty} p_{2,2}^{(n)} = \infty$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{2,2}^{(n)} = 1, \sum_{n=0}^{\infty} p_{2,2}^{(n)} < \infty$

52. यदि X_1, X_2, X_3 स्वरूपी स्वतंत्र बटन (i.i.d.) मानक नॉर्मल यादृच्छिक चर (standard normal variables) हों तो निम्नलिखित में से क्या सत्य है ?

1. $\frac{\sqrt{2}|X_1|}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}} \sim t_2$

2. $\frac{X_1 - 2X_2 + X_3}{\sqrt{2|X_1 + X_2 + X_3|}} \sim t_1$

3. $\frac{(X_1 - X_2)^2}{(X_1 + X_2)^2} \sim F_{2,2}$

4. $\frac{3X_1^2}{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2} \sim F_{1,3}$

52. Let X_1, X_2, X_3 be i.i.d. standard normal variables. Which of the following is true?

1. $\frac{\sqrt{2}|X_1|}{\sqrt{X_2^2 + X_3^2}} \sim t_2$

2. $\frac{X_1 - 2X_2 + X_3}{\sqrt{2|X_1 + X_2 + X_3|}} \sim t_1$

3. $\frac{(X_1 - X_2)^2}{(X_1 + X_2)^2} \sim F_{2,2}$

4. $\frac{3X_1^2}{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2} \sim F_{1,3}$

53. मान लीजिए कि विजली के एक बल्ब का जीवन काल θ मात्र्य के घरधातांकी बटन (exponential distribution) वा पालन करता है। प्राचल θ के आकलन के लिए n बल्ब एक साथ चालू कर दिए जाते हैं। फिर t घण्टे बीतने पर देखा जाता है कि $n - m (> 0)$ बल्ब ही कार्य कर रहे हैं। यदि शेष $m (> 0)$ बल्बों का जीवनकाल x_1, x_2, \dots, x_m घण्टे हों तो θ का महत्तम संभाव्य आकलन (maximum likelihood estimate) होगा ?

1. $\hat{\theta} = \frac{t}{\log_{n-m}}$
2. $\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i}{m}$
3. $\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i + (n-m)t}{n}$
4. $\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i + (n-m)t}{m}$

53. Suppose that the lifetime of an electric bulb follows an exponential distribution with mean θ hours. In order to estimate θ , n bulbs are switched on at the same time. After t hours, $n - m (> 0)$ bulbs are found to be in functioning state. If the lifetimes of the other $m (> 0)$ bulbs are noted as x_1, x_2, \dots, x_m , respectively, then the maximum likelihood estimate of θ is given by

1. $\hat{\theta} = \frac{t}{\log_{n-m}}$
2. $\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i}{m}$
3. $\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i + (n-m)t}{n}$
4. $\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i + (n-m)t}{m}$

54. स्वरूपी स्वतंत्र यादृच्छिक चर (i.i.d. random variables) X_1, X_2, \dots, X_n समलूप (θ_1, θ_2) वितरण (uniform (θ_1, θ_2) distribution) जबकि $\theta_1 < \theta_2$ अज्ञात प्राचल हैं, का पालन करते हैं। निम्नलिखित में से क्या सहायक सारिधिकी (ancillary statistic) है?

1. किसी भी $k < n$ के लिए $\frac{X_{(k)}}{X_{(n)}}$
2. किसी भी $k < n$ के लिए $\frac{X_{(n)} - X_{(k)}}{X_{(n)}}$
3. किसी भी $k < n$ के लिए $\frac{X_{(k)}}{X_{(n)} - X_{(k)}}$
4. किसी भी $k; 1 < k < n$ के लिए $\frac{X_{(k)} - X_{(1)}}{X_{(n)} - X_{(k)}}$

54. Let X_1, X_2, \dots, X_n be i.i.d. uniform (θ_1, θ_2) variables, where $\theta_1 < \theta_2$ are unknown parameters. Which of the following is an ancillary statistic?

1. $\frac{X_{(k)}}{X_{(n)}}$ for any $k < n$
2. $\frac{X_{(n)} - X_{(k)}}{X_{(n)}}$ for any $k < n$
3. $\frac{X_{(k)}}{X_{(n)} - X_{(k)}}$ for any $k < n$
4. $\frac{X_{(k)} - X_{(1)}}{X_{(n)} - X_{(k)}}$ for any k where $1 < k < n$

55. एक यादृच्छिक चर

$X \sim N(\theta, 1); -\infty < \theta < \infty$, के आधार पर प्राचल θ के आकलन के प्रक्षण पर विचार कीजिए। वर्ग त्रुटि क्षय (squared error loss) के अन्तर्गत यदि X का जोखिम (risk) kX की अपेक्षा समान रूप से कम हो तो,

1. $k < 0$
2. $0 < k < 1$
3. $k > 1$
4. k का कोई ऐसा मान नहीं है।

55. Consider the problem of estimation of a parameter θ on the basis of X , where $X \sim N(\theta, 1)$ and $-\infty < \theta < \infty$. Under squared error loss, X has uniformly smaller risk than that of kX , for

1. $k < 0$
2. $0 < k < 1$
3. $k > 1$
4. no value of k

56. सभी विकल्पों के सम्बुद्ध (against all alternatives) दस विद्यालयों के प्रभाव की समानता (equality of effects) का परीक्षण करने के लिए प्रत्येक विद्यालय से पाँच विद्यार्थियों का यादृच्छिक प्रतिदर्श लिया गया है तथा एक संयुक्त परीक्षा में उनके अंकों की विवेचना की जाती है। इनके मध्य बर्ग योगफल (Between sum of squares) व कुल बर्ग योगफल (total sum of squares) क्रमशः 180 व 500 हैं। मानक F -परीक्षण का p -मान है?

1. $P[F_{4,45} \geq 1.5]$
2. $P[F_{9,40} \geq 1.6]$
3. $P[F_{4,45} \geq 3.6]$
4. $P[F_{9,40} \geq 2.5]$

56. To test the equality of effects of 10 schools against all alternatives, we take a random sample of 5 students from each school and note their marks in a common examination. "Between sum of squares" and "total sum

of squares" are found to be 180 and 500 respectively. What is the p -value for the standard F -test?

1. $P[F_{4,45} \geq 1.5]$
2. $P[F_{9,40} \geq 1.6]$
3. $P[F_{4,45} \geq 3.6]$
4. $P[F_{9,40} \geq 2.5]$

57. एक चार विमीय यादृच्छिक सदिश (random vector) X का सहप्रसरण आव्यूह (covariance matrix)

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho & \rho \\ \rho & 1 & \rho & \rho \\ \rho & \rho & 1 & \rho \\ \rho & \rho & \rho & 1 \end{bmatrix}; \rho < 0$$

है। यदि ν प्रथम मुख्य घटक (first principal component) के प्रसरण (variance) को निरूपित करता हो, तो

1. ν का मान $5/4$ से अधिक नहीं हो सकता
2. ν का मान $5/4$ से अधिक हो सकता है, परन्तु $4/3$ से अधिक नहीं
3. ν का मान $4/3$ से अधिक हो सकता है, परन्तु $3/2$ से अधिक नहीं
4. ν का मान $3/2$ से अधिक हो सकता है।

57. The covariance matrix of a four dimensional random vector X is of the form

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho & \rho \\ \rho & 1 & \rho & \rho \\ \rho & \rho & 1 & \rho \\ \rho & \rho & \rho & 1 \end{bmatrix}, \text{ where } \rho < 0.$$

If ν is the variance of the first principal component, then

1. ν cannot exceed $5/4$
2. ν can exceed $5/4$, but cannot exceed $4/3$
3. ν can exceed $4/3$, but cannot exceed $3/2$
4. ν can exceed $3/2$

58. कुल 125 विद्यार्थियों की एक कक्षा से n विद्यार्थियों का सारल यादृच्छिक प्रतिदर्श (simple random sample) लिया जाता है तथा प्रतिदर्श में उपरिख्यत विद्यार्थियों के गणित विषय के अंकों का माध्य लिया जाता है। यदि सप्रतिस्थापन प्रतिदर्श (with replacement sampling) के माध्य की मानक त्रुटि (standard error), अप्रतिस्थापन प्रतिदर्श (without replacement sampling) की मानक त्रुटि की दोगुनी हो तो n का मान है

- | | |
|-------|-------|
| 1. 32 | 2. 63 |
| 3. 79 | 4. 94 |

58. A simple random sample of size n will be drawn from a class of 125 students, and the mean mathematics score of the sample will be computed. If the standard error of the sample mean for "with replacement sampling" is twice as much as the standard error of the sample mean for "without replacement" sampling, the value of n is

- | | |
|-------|-------|
| 1. 32 | 2. 63 |
| 3. 79 | 4. 94 |

59. एक लैटिन वर्ग डिजाइन में त्रुटि स्थातन्त्र्य कोटि (error degrees of freedom) 30 है। तो किसी भी प्रशोधन (treatment) के लिए प्रशोधन स्थातन्त्र्य कोटि (treatment degrees of freedom) होगी ?

- | | |
|------|------|
| 1. 4 | 2. 5 |
| 3. 6 | 4. 7 |

59. In a Latin Square Design the "error degrees of freedom" is 30. The "treatment degrees of freedom" for any treatment is

- | | |
|------|------|
| 1. 4 | 2. 5 |
| 3. 6 | 4. 7 |

60. प्रतिवर्ध $|3x| + |2y| \leq 1$ के अन्तर्गत $9x + 4y$ का महसूस मान है

- | | |
|------|------|
| 1. 1 | 2. 2 |
| 3. 3 | 4. 4 |

60. Suppose that $|3x| + |2y| \leq 1$. Then the maximum value of $9x + 4y$ is

- | | |
|------|------|
| 1. 1 | 2. 2 |
| 3. 3 | 4. 4 |

भाग PART C

Unit - I

61. निम्नलिखित में से कौन से/सा समुच्चय अगणनीय (uncountable) है।

1. \mathbb{R} से $\{0, 1\}$ में परिभाषित सभी फलनों का समुच्चय
2. \mathbb{N} से $\{0, 1\}$ में परिभाषित सभी फलनों का समुच्चय
3. \mathbb{N} के सभी परिमित उपसमुच्चयों (finite subsets) का समुच्चय
4. \mathbb{N} के सभी उपसमुच्चयों का समुच्चय

61. Which of the following sets are uncountable?

1. The set of all functions from \mathbb{R} to $\{0, 1\}$
2. The set of all functions from \mathbb{N} to $\{0, 1\}$
3. The set of all finite subsets of \mathbb{N}
4. The set of all subsets of \mathbb{N}

62. यदि $A = \left\{ t \sin\left(\frac{1}{t}\right) \mid t \in \left(0, \frac{2}{\pi}\right) \right\}$ हो तो निम्नलिखित में से कौन से/सा कथन सत्य है।

1. सभी $n \geq 1$ के लिए $\sup(A) < \frac{2}{\pi} + \frac{1}{nn}$
2. सभी $n \geq 1$ के लिए $\inf(A) > \frac{-2}{3\pi} - \frac{1}{nn}$
3. $\sup(A) = 1$
4. $\inf(A) = -1$

62. Let $A = \left\{ t \sin\left(\frac{1}{t}\right) \mid t \in \left(0, \frac{2}{\pi}\right) \right\}$. Which of the following statements are true?

1. $\sup(A) < \frac{2}{\pi} + \frac{1}{nn}$ for all $n \geq 1$
2. $\inf(A) > \frac{-2}{3\pi} - \frac{1}{nn}$ for all $n \geq 1$
3. $\sup(A) = 1$
4. $\inf(A) = -1$

63. यदि $C_c(\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f$ एक सतत फलन है जिसके लिए एक सहत समुच्चय (compact set) K इस प्रकार विद्यमान है कि $f(x) = 0 \forall x \in K^c$.

यदि $g(x) = e^{-x^2} \forall x \in \mathbb{R}$ हो तो निम्नलिखित में से कौन से/सा कथन सत्य है?

1. $C_c(\mathbb{R})$ में $f_n \rightarrow g$ समरूपीय (uniformly) संतुष्ट करने वाला एक $\{f_n\}$ अनुक्रम उपस्थित है।
2. $C_c(\mathbb{R})$ में $f_n \rightarrow g$ बिन्दुवार (pointwise) संतुष्ट करने वाला एक $\{f_n\}$ अनुक्रम उपस्थित है।

3. यदि $C_c(\mathbb{R})$ में एक अनुक्रम g पर बिन्दुवार अभिसरित (pointwise convergent) है तो वह g पर समरूपीय अभिसरित (uniformly convergent) भी होगा।

4. $C_c(\mathbb{R})$ में कोई भी अनुक्रम ऐसा नहीं है जो g पर बिन्दुवार अभिसरित हो।

63. Let $C_c(\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f$ is continuous and there exists a compact set K such that $f(x) = 0$ for all $x \in K^c\}$. Let $g(x) = e^{-x^2}$ for all $x \in \mathbb{R}$. Which of the following statements are true?

1. There exists a sequence $\{f_n\}$ in $C_c(\mathbb{R})$ such that $f_n \rightarrow g$ uniformly
2. There exists a sequence $\{f_n\}$ in $C_c(\mathbb{R})$ such that $f_n \rightarrow g$ pointwise
3. If a sequence in $C_c(\mathbb{R})$ converges pointwise to g then it must converge uniformly to g
4. There does not exist any sequence in $C_c(\mathbb{R})$ converging pointwise to g

64. यदि $a(n) = \frac{1}{10^{100}} 2^n$

$$b(n) = 10^{100} \log(n)$$

$$c(n) = \frac{1}{10^{10}} n^2,$$

हो तो निम्नलिखित में से क्या सत्य है?

1. समुचित रूप से बड़े n के लिए $a(n) > c(n)$
2. समुचित रूप से बड़े n के लिए $b(n) > c(n)$
3. समुचित रूप से बड़े n के लिए $b(n) > n$
4. समुचित रूप से बड़े n के लिए $a(n) > b(n)$

64. Given that

$$a(n) = \frac{1}{10^{100}} 2^n$$

$$b(n) = 10^{100} \log(n)$$

$$c(n) = \frac{1}{10^{10}} n^2,$$

which of the following statements are true?

1. $a(n) > c(n)$ for all sufficiently large n
2. $b(n) > c(n)$ for all sufficiently large n
3. $b(n) > n$ for all sufficiently large n
4. $a(n) > b(n)$ for all sufficiently large n

65. एक फलन

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{a}{1+bx^2}, a, b \in \mathbb{R}, b \geq 0$$

द्वारा परिभाषित किया जाता है। निम्नलिखित में से कौन से/सा कथन सत्य है?

1. a व b के सभी मानों के लिए f \mathbb{R} के सभी सुसंबद्ध अंतरालों (compact interval) पर फलन f समरूपी सतत (uniformly continuous) है।
2. फलन f , पूरे \mathbb{R} पर समरूपी सतत (uniformly continuous) तथा a व b के सभी मानों के लिए परिबद्ध (bounded) है।
3. फलन f , केवल $b = 0$ के लिए पूरे \mathbb{R} पर समरूपी सतत (uniformly continuous) है।
4. फलन f , पूरे \mathbb{R} पर समरूपी सतत (uniformly continuous) है तथा $a \neq 0, b \neq 0$ होने पर अपरिबद्ध (unbounded) है।

65. Let $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be given by

$$f(x) = \frac{a}{1+bx^2}, a, b \in \mathbb{R}, b \geq 0.$$

Which of the following are true?

1. f is uniformly continuous on compact intervals of \mathbb{R} for all values of a and b
2. f is uniformly continuous on \mathbb{R} and is bounded for all values of a and b
3. f is uniformly continuous on \mathbb{R} only if $b = 0$
4. f is uniformly continuous on \mathbb{R} and unbounded if $a \neq 0, b \neq 0$

66. यदि $\alpha = \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2} dt$ हो तो निम्नलिखित में से क्या सत्य है?

1. $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$
2. α एक परिमेय संख्या है
3. $\log(\alpha) = 1$
4. $\sin(\alpha) = 1$

66. Let

$$\alpha = \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Which of the following are true?

1. $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$
2. α is a rational number
3. $\log(\alpha) = 1$
4. $\sin(\alpha) = 1$

67. निम्नलिखित में से कौन से/सा फलन परिवर्तन (bounded variation) के फलन है?

1. $x \in (-1, 1)$ के लिए $x^2 + x + 1$
2. $x \in (-1, 1)$ के लिए $\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$
3. $x \in (-\pi, \pi)$ के लिए $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$
4. $x \in (-1, 1)$ के लिए $\sqrt{1-x^2}$

67. Which of the following functions are of bounded variation?

1. $x^2 + x + 1$ for $x \in (-1, 1)$
2. $\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ for $x \in (-1, 1)$
3. $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ for $x \in (-\pi, \pi)$
4. $\sqrt{1-x^2}$ for $x \in (-1, 1)$

68. हम वास्तविक संख्याओं (real numbers) पर $n \times n$ आव्यूहों (matrices) के समुच्चय को $M_n(\mathbb{R})$ से निरूपित करते हैं व उसे यूक्लिडीय समष्टि \mathbb{R}^{n^2} के रूप में कल्पित करते हैं। एक असून्य स्तम्भ सदिश $x \in \mathbb{R}^n$ के लिए

$f: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ को $f(A) = \langle A^2x, x \rangle$ द्वारा परिभाषित फलन के बारे में क्या सत्य है?

1. f ऐकिक (linear) है।
2. f अवकलनीय (differentiable) है।
3. f सतत है पर अवकलनीय नहीं।
4. f अपरिबद्ध (unbounded) है।

68. Let $M_n(\mathbb{R})$ denote the space of all $n \times n$ real matrices identified with the Euclidean space \mathbb{R}^{n^2} . Fix a column vector $x \neq 0$ in \mathbb{R}^n . Define $f: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ by $f(A) = \langle A^2x, x \rangle$. Then

1. f is linear
2. f is differentiable
3. f is continuous but not differentiable
4. f is unbounded

69. एक वास्तविक संख्या y के लिए $[y]$ उस महत्वपूर्ण को निरूपित करता है जो y से बड़ा न हो। यदि एक फलन $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^{[y]}$ द्वारा परिभाषित किया जाए तो,

1. f पूरे \mathbb{R}^2 पर सतत है।
2. प्रत्येक $y \in \mathbb{R}$ के लिए, $x \mapsto f(x, y)$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ पर सतत है।
3. प्रत्येक $y \in \mathbb{R}$ के लिए $y \mapsto f(x, y)$ पूरे \mathbb{R} पर सतत है।
4. \mathbb{R}^2 के किसी भी बिन्दु पर f सतत नहीं है।

- 69.** For any $y \in \mathbb{R}$, let $[y]$ denote the greatest integer less than or equal to y . Define $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ by $f(x, y) = x^{[y]}$. Then
1. f is continuous on \mathbb{R}^2
 2. for every $y \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, y)$ is continuous on $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
 3. for every $x \in \mathbb{R}$, $y \mapsto f(x, y)$ is continuous on \mathbb{R}
 4. f is continuous at no point of \mathbb{R}^2
- 70.** वास्तविक संख्याओं (real numbers) के उन अनुक्रमों $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots)$ जिनके लिए $\sum 2^n |a_n|$ अभिसरित (convergent) हो, की सदिश समिक्ष (vector space) को V से निरूपित कीजिए। अब $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$ को $\|\mathbf{a}\| = \sum 2^n |a_n|$ द्वारा परिभाषित कीजिए। निम्नलिखित में से क्या सत्य है?
1. V में केवल अनुक्रम $(0, 0, \dots)$ ही है।
 2. V परिमित विमीय (finite dimensional) है।
 3. V का एक गणनीय ऐकिक आधार (countable linear basis) है।
 4. V एक complete normed space है।
- 70.** Let V denote the vector space of all sequences $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots)$ of real numbers such that $\sum 2^n |a_n|$ converges. Define $\|\cdot\|: V \rightarrow \mathbb{R}$ by $\|\mathbf{a}\| = \sum 2^n |a_n|$. Which of the following are true?
1. V contains only the sequence $(0, 0, \dots)$
 2. V is finite dimensional
 3. V has a countable linear basis
 4. V is a complete normed space
- 71.** यदि V , समिक्ष अदिशों \mathbb{C} पर परिमित विमा (finite dimension) n की एक सदिश समिक्ष (vector space) हो व $T: V \rightarrow V$ एक ऐसा ऐकिक रूपान्तरण (linear transformation) हो जिसका एकमात्र अभिलक्षणिक मान (eigenvalue) 1 हो तो इनमें से कौन से निम्नित रूप से सही है?
1. $T - I = 0$
 2. $(T - I)^{n-1} = 0$
 3. $(T - I)^n = 0$
 4. $(T - I)^{2n} = 0$
- 71.** Let V be a vector space over \mathbb{C} with dimension n . Let $T: V \rightarrow V$ be a linear transformation with only 1 as eigenvalue. Then which of the following must be true?
1. $T - I = 0$
 2. $(T - I)^{n-1} = 0$
 3. $(T - I)^n = 0$
 4. $(T - I)^{2n} = 0$
- 72.** यदि A एक (5×5) आव्यूह हो जिसके लिए समीकरण निकाय $Ax = 0$ के हलों की समिक्ष (vector space) की विमा (dimension) कम से कम 3 हो तो
1. $\text{Rank}(A^2) \leq 3$
 2. $\text{Rank}(A^2) \geq 3$
 3. $\text{Rank}(A^2) = 3$
 4. $\text{Det}(A^2) = 0$
- 72.** If A is a (5×5) matrix and the dimension of the solution space of $Ax = 0$ is at least two, then
1. $\text{Rank}(A^2) \leq 3$
 2. $\text{Rank}(A^2) \geq 3$
 3. $\text{Rank}(A^2) = 3$
 4. $\text{Det}(A^2) = 0$
- 73.** यदि किसी $A \in M_3(\mathbb{R})$ के लिए $A^8 = I_{3 \times 3}$ हो तो
1. A के अल्पिष्ठ बहुपद (minimal polynomial) की अधिकतम घात (degree) केवल 2 हो सकती है।
 2. A के अल्पिष्ठ बहुपद की अधिकतम घात केवल 3 हो सकती है।
 3. या तो $A = I_{3 \times 3}$, अथवा $A = -I_{3 \times 3}$
 4. अगणनीय (uncountably many) आव्यूह (matrix) A उपर्युक्त प्रतिकथ को संतुष्ट करते हैं।
- 73.** Let $A \in M_3(\mathbb{R})$ be such that $A^8 = I_{3 \times 3}$. Then
1. minimal polynomial of A can only be of degree 2
 2. minimal polynomial of A can only be of degree 3
 3. either $A = I_{3 \times 3}$ or $A = -I_{3 \times 3}$
 4. there are uncountably many A satisfying the above
- 74.** यदि A एक $n \times n$ आव्यूह हो ($n > 1$), जिसके लिए $A^2 - 7A + 12I_{n \times n} = O_{n \times n}$, जबकि $I_{n \times n}$ कोटि n के तत्समक आव्यूह (identity matrix) व $O_{n \times n}$ कोटि n के शून्य आव्यूह (zero matrix) को निरूपित करता हो, तो निम्नलिखित में से क्या सत्य है?
1. A व्युत्क्रमणीय है।
 2. $t^2 - 7t + 12n = 0$, जबकि $t = \text{Tr}(A)$
 3. $d^2 - 7d + 12 = 0$, जबकि $d = \text{Det}(A)$
 4. $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$, जबकि λ आव्यूह A का एक अभिलक्षणिक मान (eigenvalue) है।

74. Let A be an $n \times n$ matrix (with $n > 1$) satisfying $A^2 - 7A + 12I_{n \times n} = O_{n \times n}$, where $I_{n \times n}$ and $O_{n \times n}$ denote the identity matrix and zero matrix of order n respectively. Then which of the following statements are true?

1. A is invertible
2. $t^2 - 7t + 12n = 0$ where $t = \text{Tr}(A)$
3. $d^2 - 7d + 12 = 0$ where $d = \text{Det}(A)$
4. $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$ where λ is an eigenvalue of A

75. वास्तविक संख्याओं (real numbers) के एक 6×6 आवृह A का अभिलक्षणिक बहुपद (characteristic polynomial) $(x - 3)^2(x - 2)^4$ व अधिकृष्ट बहुपद (minimal polynomial) $(x - 3)(x - 2)^2$ है। आवृह A का जॉर्डन विहित रूप (Jordan canonical form) क्या हो सकता है ?

$$\begin{array}{l} 1. \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ 2. \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ 3. \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ 4. \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

75. Let A be a (6×6) matrix over \mathbb{R} with characteristic polynomial $= (x - 3)^2(x - 2)^4$ and minimal polynomial $= (x - 3)(x - 2)^2$. Then Jordan canonical form of A can be

$$1. \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$4. \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

76. एक अदिश गृणन समष्टि (inner product space) V व उसका एक उपसमुच्चय S दिया गया है। यदि समष्टि V पर अदिश गुणन के दूरीक (metric) द्वारा परिभाषित सारिथतिक (topology) के सापेक्ष समुच्चय S के संचरण (closure) को \bar{S} से निरूपित किया जाए तो निम्नलिखित में से क्या सत्य है ?

1. $S = (S^\perp)^\perp$
2. $\bar{S} = (S^\perp)^\perp$
3. $\overline{\text{span}(S)} = (S^\perp)^\perp$
4. $S^\perp = ((S^\perp)^\perp)^\perp$

76. Let V be an inner product space and S be a subset of V . Let \bar{S} denote the closure of S in V with respect to the topology induced by the metric given by the inner product. Which of the following statements are true?

1. $S = (S^\perp)^\perp$
2. $\bar{S} = (S^\perp)^\perp$
3. $\overline{\text{span}(S)} = (S^\perp)^\perp$
4. $S^\perp = ((S^\perp)^\perp)^\perp$

77. यदि $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ हो

वर्ष $x, y, z \in \mathbb{R}$ के लिए

$$Q(x, y, z) = (x \ y \ z) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

से क्या सत्य है ?

1. द्विघातीय रूप (quadratic form) Q के द्विकोटीय आशिक अवकलजों (second order partial derivatives) से बना आव्यूह (matrix) $2A$ के बराबर है।
2. द्विघातीय रूप (quadratic form) Q की श्रेणी (rank) 2 है।
3. द्विघातीय रूप (quadratic form) Q का चिन्हक (signature) (+ + 0) है।
4. द्विघातीय रूप (quadratic form) Q का मान किसी अचून्य समिश्र (x, y, z) के लिए शून्य हो सकता है।

77. Let $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ and define for
 $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$Q(x, y, z) = (x \ y \ z) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Which of the following statements are true?

1. The matrix of second order partial derivatives of the quadratic form Q is $2A$.
2. The rank of the quadratic form Q is 2.
3. The signature of the quadratic form Q is (+ + 0).
4. The quadratic form Q takes the value 0 for some non-zero vector (x, y, z) .

78. प्रत्येक $\alpha \in \mathbb{R}$ के लिए S_α निम्न प्रकार से परिभाषित है

$$S_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2\}$$

यदि $E = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} S_\alpha$ हो तो निम्न में से क्या सत्य है ?

1. E का लबेग परिमाण (Lebesgue measure) अनन्त है।
2. E का एक रपसामुच्चय अरिका विवृत (non-empty open) है।
3. E पथ संयोजित (path connected) है।
4. E^c को समाविष्ट (contain) करने वाले प्रत्येक विवृत समुच्चय (open set) का लबेग परिमाण (Lebesgue measure) अनन्त है।

78. For each $\alpha \in \mathbb{R}$,
let $S_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2\}$.

Let $E = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} S_\alpha$. Which of the

following are true?

1. The Lebesgue measure of E is infinite
2. E contains a non-empty open set
3. E is path connected
4. Every open set containing E^c has infinite Lebesgue measure

Unit - 2

79. निम्नलिखित में से कौन से / सा कथन सत्य है ?

1. यदि $\{a_k\}$ परिबद्ध (bounded) है तो इकाई विवृत चक्रिका (open unit disk) पर $\sum_0^\infty a_k z^k$ एक वैश्लेषिक फलन को परिभाषित करती है।
2. यदि $\sum_0^\infty a_k z^k$ इकाई विवृत चक्रिका (open unit disk) पर एक वैश्लेषिक फलन को परिभाषित करे तो अनुक्रम $\{a_k\}$ शून्य पर अभिसरित होगा।
3. दो अनन्त श्रेणी फलन (power series functions) $f(z) = \sum_0^\infty a_k z^k$ व $g(z) = \sum_0^\infty b_k z^k$ जिनकी अभिसरण त्रिज्याएँ (radii of convergence) 1 हैं, का गुणनफल $f \cdot g$ इकाई विवृत चक्रिका (open unit disk) पर एक अनन्त श्रेणी (power series) $\sum_0^\infty c_k z^k$ द्वारा परिभाषित किया जाएगा।
4. यदि $f(z) = \sum_0^\infty a_k z^k$ की अभिसरण त्रिज्या (radius of convergence) 1 हो तो $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ पर f सतत होगा।

79. Which of the following statements are true?

1. If $\{a_k\}$ is bounded then $\sum_0^\infty a_k z^k$ defines an analytic function on the open unit disk
2. If $\sum_0^\infty a_k z^k$ defines an analytic function on the open unit disk then $\{a_k\}$ must converge to zero
3. If $f(z) = \sum_0^\infty a_k z^k$ and $g(z) = \sum_0^\infty b_k z^k$ are two power series functions whose radii of convergence are 1, then the product $f \cdot g$ has a power series representation of the form $\sum_0^\infty c_k z^k$ on the open unit disk
4. If $f(z) = \sum_0^\infty a_k z^k$ has a radius of convergence 1, then f is continuous on $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$

80. इकाई विशृंखला (open unit disk), जिसका केन्द्र $0 \in \mathbb{C}$ है, को \mathbb{D} से निरूपित कीजिए। एक वैश्लेषिक फलन $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ लीजिए। यदि $f = u + iv$, जबकि u व v फलन f के वास्तविक व काल्पनिक भागों को निरूपित करते हैं, व $f(z) = \sum a_n z^n$ फलन की अनन्त श्रेणी (power series) हो, तो f एक अचर फलन होगा यदि

1. f वैश्लेषिक है।
 2. $u(1/2) \geq u(z) \quad \forall z \in \mathbb{D}$
 3. समुच्चय $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n = 0\}$ अपरिमित है।
 4. \mathbb{D} के एक बंद परिपथ (closed loop) γ के लिए यदि $a \in \mathbb{D}, |a| \geq 1/2$ हो तो
- $$\int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z-a)^2} = 0 \text{ होगा।}$$

80. Let \mathbb{D} be the open unit disk centered at 0 in \mathbb{C} and $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ be an analytic function. Let $f = u + iv$, where u, v are the real and imaginary parts of f . If $f(z) = \sum a_n z^n$ is the power series of f , then f is constant if

1. f is analytic
 2. $u(1/2) \geq u(z) \quad \forall z \in \mathbb{D}$
 3. The set $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n = 0\}$ is infinite
 4. For any closed curve γ in \mathbb{D} ,
- $$\int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z-a)^2} = 0 \quad \forall a \in \mathbb{D} \text{ with } |a| \geq 1/2$$

81. एक वैश्लेषिक फलन $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ एक बहुपदीय फलन (polynomial function) होता है यदि

1. प्रत्येक विन्दु $a \in \mathbb{C}$ के लिए व a पर अनन्त श्रेणी प्रसारण (power series expansion)
- $$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n (z - a)^n$$
- में कम से कम एक n के लिए $a_n = 0$ हो।
2. $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$
 3. कुछ M के लिए $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = M$
 4. समुचित रूप से बड़े $|z|$ व कुछ n के लिए $|f(z)| \leq M|z|^n$ हो।

81. Suppose that $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ is an analytic function. Then f is a polynomial if

1. for any point $a \in \mathbb{C}$, if $f(z) = \sum_0^{\infty} a_n (z - a)^n$ is a power series expansion at a , then $a_n = 0$ for at least one n
2. $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$
3. $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = M$ for some M
4. $|f(z)| \leq M|z|^n$ for $|z|$ sufficiently large and for some n

82. एक विशृंखला सुबंधित उपसमुच्चय (open connected subset) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ तथा $E = \{z_1, z_2, \dots, z_r\} \subseteq \Omega$ लीजिए यदि $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ऐसा फलन हो जिसके लिए $f|_{(\Omega \setminus E)}$ वैश्लेषिक (analytic) हो तो f पूरे Ω पर वैश्लेषिक होगा यदि

1. Ω पर f सतत है।
 2. Ω पर f परिबद्ध (bounded) है।
 3. प्रत्येक j के लिए z_j पर f का लॉरेंट श्रेणी प्रसारण (Laurent series expansion)
- $$\sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m (z - z_j)^m$$
- होने पर $m = -1, -2, -3, \dots$ के लिए $a_m = 0$ हो।
4. प्रत्येक j के लिए z_j पर f का लॉरेंट श्रेणी प्रसारण (Laurent series expansion)
- $$\sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m (z - z_j)^m$$
- होने पर $a_{-1} = 0$ हो।

82. Let Ω be an open connected subset of \mathbb{C} . Let $E = \{z_1, z_2, \dots, z_r\} \subseteq \Omega$. Suppose that $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ is a function such that $f|_{(\Omega \setminus E)}$ is analytic. Then f is analytic on Ω if

1. f is continuous on Ω
2. f is bounded on Ω
3. for every j , if $\sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m (z - z_j)^m$ is Laurent series expansion of f at z_j , then $a_m = 0$ for $m = -1, -2, -3, \dots$
4. for every j , if $\sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m (z - z_j)^m$ is Laurent series expansion of f at z_j , then $a_{-1} = 0$

83. समिकाओं $f(x) \equiv 1 \pmod{x-1}$ व $f(x) \equiv 0 \pmod{x-3}$ को सतुष्ट करते हुए पूर्णांक गुणकों वाले बहुपदों $f(x)$ के समुच्चय को S से निरूपित कीजिए। निम्न में से क्या सत्य है?

1. S खाली है।
2. S एकल है।
3. S परिमित अरिक्त समुच्चय है।
4. S अपरिमित परन्तु गणीय है।

83. Let S be the set of polynomials $f(x)$ with integer coefficients satisfying

$$f(x) \equiv 1 \pmod{x-1}$$

$$f(x) \equiv 0 \pmod{x-3}.$$

Which of the following statements are true?

1. S is empty
2. S is a singleton
3. S is a finite non-empty set
4. S is countably infinite

84. यदि $G = S_3$ तीन वस्तुओं के क्रमवयों के समूह को निरूपित करता हो तो
1. G एक चक्रिक समूह (cyclic group) के एक उपसमूह के स्वरूपित (isomorphic) है।
 2. एक ऐसा चक्रिक समूह H विद्यमान है जिसके लिए G से H पर एक आचारादक समरूपिता (onto homomorphism) परिभाषित की जा सकती है।
 3. G चक्रिक समूहों का गुणन है।
 4. G से लेकर परिमयों के योगात्मक समूह $(\mathbb{Q}, +)$ पर एक अतुच्छ समरूपिता (nontrivial homomorphism) परिभाषित की जा सकती है।
84. Let $G = S_3$ be the permutation group of 3 symbols. Then
1. G is isomorphic to a subgroup of a cyclic group
 2. there exists a cyclic group H such that G maps homomorphically onto H
 3. G is a product of cyclic groups
 4. there exists a nontrivial group homomorphism from G to the additive group $(\mathbb{Q}, +)$ of rational numbers
85. एक समूह G के लिए $|G| = 96$ है। यदि H तथा K , समूह G के उपसमूह हों जिनके लिए $|H| = 12$ व $|K| = 16$ हो तो
1. $H \cap K = \{e\}$
 2. $H \cap K \neq \{e\}$
 3. $H \cap K$ आबेली (Abelian) है।
 4. $H \cap K$ आबेली (Abelian) नहीं है।
85. Let G be a group with $|G| = 96$. Suppose H and K are subgroups of G with $|H| = 12$ and $|K| = 16$. Then
1. $H \cap K = \{e\}$
 2. $H \cap K \neq \{e\}$
 3. $H \cap K$ is Abelian
 4. $H \cap K$ is not Abelian
86. निम्नलिखित में से क्या सत्य है ?
1. एक पूर्णांकीय प्रान्त (integral domain) का उपवलय (subring) भी एक पूर्णांकीय प्रान्त होता है।
 2. एक अद्वितीय गुणनखंडीय प्रान्त (unique factorization domain) का उपवलय भी एक अद्वितीय गुणनखंडीय प्रान्त होता है।
 3. एक मुख्य गुणजावली प्रान्त (principal ideal domain) का उपवलय भी एक मुख्य गुणजावली प्रान्त होता है।
84. एक यूक्लिडीय प्रान्त (Euclidean domain) का उपवलय भी एक यूक्लिडीय प्रान्त होता है।
86. Which of the following statements are true?
1. A subring of an integral domain is an integral domain
 2. A subring of a unique factorization domain (UFD) is a UFD
 3. A subring of a principal ideal domain (PID) is a PID
 4. A subring of an Euclidean domain is an Euclidean domain
87. यदि $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ एक एकगुणांकीय बहुपद (monic polynomial) हो तो f के मूलों के सम्बन्ध में क्या सत्य है ?
1. वे \mathbb{Z} में उपस्थित हो सकते हैं।
 2. वे सदैव $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Z}$ में ही उपस्थित होते हैं।
 3. वे सदैव $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Z}$ में ही उपस्थित होते हैं।
 4. वे $(\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$ में उपस्थित हो सकते हैं।
87. Let $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ be a monic polynomial. Then the roots of f
1. can belong to \mathbb{Z}
 2. always belong to $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Z}$
 3. always belong to $(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Z}$
 4. can belong to $(\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z})$
88. निम्नलिखित में से कौन से / सा कथन सत्य है ?
1. एक परिमित क्षेत्र (finite field) का गुणात्मक समूह (multiplicative group) सदैव चक्रिक (cyclic) होता है।
 2. एक परिमित क्षेत्र (finite field) का योगात्मक समूह (additive group) सदैव चक्रिक होता है।
 3. दी गई प्रत्येक कोटि का परिमित क्षेत्र सदैव परिभाषित होता है।
 4. दी गई प्रत्येक कोटि का अधिक से अधिक एक परिमित क्षेत्र (स्वरूपित क्षेत्रों / isomorphic fields को समान मानकर) ही परिभाषित होता है।
88. Which of the following statements are true?
1. The multiplicative group of a finite field is always cyclic
 2. The additive group of a finite field is always cyclic
 3. There exists a finite field of any given order
 4. There exists at most one finite field (upto isomorphism) of any given order

- 89.** एक सारिथ्मिक समष्टि (topological space) X के एक अरिका समुच्चय A के संबंध में क्या सत्य है ?
1. यदि $X \setminus A$ कहीं भी सघन नहीं (nowhere dense) है तो X में A सघन (dense) होगा।
 2. यदि X में A सघन है तो $X \setminus A$ कहीं भी सघन नहीं होगा।
 3. यदि $X \setminus A$ का अंतर (interior) रिक्त हो तो X में A सघन होगा।
 4. यदि X में A सघन हो तो $X \setminus A$ का अंतर (interior) रिक्त होगा।
- 89.** Let X be a topological space and A be a non-empty subset of X . Then one can conclude that
1. A is dense in X , if $(X \setminus A)$ is nowhere dense in X
 2. $(X \setminus A)$ is nowhere dense in X , if A is dense in X
 3. A is dense in X , if the interior of $(X \setminus A)$ is empty
 4. the interior of $(X \setminus A)$ is empty, if A is dense in X
- 90.** निम्नलिखित में से क्या सत्य है ?
1. प्रत्येक संकृत दूरीक समष्टि (compact metric space) पृथक्करणीय (separable) होती है।
 2. यदि एक दूरीक समष्टि (X, d) पृथक्करणीय हो तो दूरीक d विविक्त (discrete) नहीं हो सकता।
 3. प्रत्येक पृथक्करणीय दूरीक समष्टि द्वितीय गणनीय (second countable) होती है।
 4. प्रत्येक प्रथम गणनीय सारिथ्मिक समष्टि (first countable topological space) पृथक्करणीय होती है।
- 90.** Which of the following statements are true?
1. Every compact metric space is separable
 2. If a metric space (X, d) is separable, then the metric d is not the discrete metric
 3. Every separable metric space is second countable
 4. Every first countable topological space is separable

UNIT -3

- 91.** स्टर्म-ल्यूवील समस्या
- $y'' + \lambda y = 0, y(0) = 0$ व $y(\pi) = 0$ पर विचार कीजिए और बताइये कि निम्नलिखित में से क्या सत्य है ?
1. इसके गणनीय (countably many) अभिलक्षणिक मान (characteristic values) हैं।
 2. इसके अगणनीय (uncountably many) अभिलक्षणिक मान हैं।
 3. अभिलक्षणिक मान λ से संबद्ध प्रत्येक अभिलक्षणिक फलन के अन्तराल $(0, \pi)$ में कुल $\lfloor \sqrt{\lambda} \rfloor - 1$ शून्यक है।
 4. अभिलक्षणिक मान λ से संबद्ध प्रत्येक अभिलक्षणिक फलन के अन्तराल $(0, \pi)$ में कुल $\lfloor \sqrt{\lambda} \rfloor$ शून्यक है।
- 91.** Consider the Sturm-Liouville problem
 $y'' + \lambda y = 0, y(0) = 0$ and $y(\pi) = 0$.
Which of the following statements are true?
1. There exist only countably many characteristic values
 2. There exist uncountably many characteristic values
 3. Each characteristic function corresponding to the characteristic value λ has exactly $\lfloor \sqrt{\lambda} \rfloor - 1$ zeros in $(0, \pi)$
 4. Each characteristic function corresponding to the characteristic value λ has exactly $\lfloor \sqrt{\lambda} \rfloor$ zeros in $(0, \pi)$
- 92.** अवकल समीकरणों के निकाय
- $$\frac{dx}{dt} = 2x - 7y$$
- $$\frac{dy}{dt} = 3x - 8y$$
- के क्रौतिक बिन्दु $(0, 0)$ के सम्बन्ध में क्या सत्य है ?
1. यह अतीतोगत्वा स्थिर बिन्दु (asymptotically stable node) है।
 2. यह अस्थिर बिन्दु (unstable node) है।
 3. यह अतीतोगत्वा स्थिर कुड़ली (asymptotically stable spiral) है।
 4. यह अस्थिर कुड़ली (unstable spiral) है।
- 92.** Consider the system of differential equations
- $$\frac{dx}{dt} = 2x - 7y$$
- $$\frac{dy}{dt} = 3x - 8y$$
- Then the critical point $(0, 0)$ of the system is an
1. asymptotically stable node
 2. unstable node
 3. asymptotically stable spiral
 4. unstable spiral

93. एक सतत फलन $a: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ लीजिए व अवकल समीकरण

$y'(x) = a(x)y(x), x > 0, y(0) = y_0 \neq 0$
पर विचार कीजिए। निम्नलिखित में से क्या सत्य है?

1. यदि $\int_0^\infty |a(x)|dx < \infty$, हो तो y परिवद्ध (bounded) है।
2. यदि $\int_0^\infty |a(x)|dx < \infty$, हो तो सीमा $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ अस्तित्व में है।
3. यदि $\lim_{x \rightarrow \infty} a(x) = 1$, हो तो $\lim_{x \rightarrow \infty} |y(x)| = \infty$ होगा।
4. यदि $\lim_{x \rightarrow \infty} a(x) = 1$, हो तो y एकदिष्ट (monotone) होगा।

93. Assume that $a: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ is a continuous function. Consider the ordinary differential equation

$$y'(x) = a(x)y(x), x > 0, y(0) = y_0 \neq 0.$$

Which of the following statements are true?

1. If $\int_0^\infty |a(x)|dx < \infty$, then y is bounded
2. If $\int_0^\infty |a(x)|dx < \infty$, then $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ exists
3. If $\lim_{x \rightarrow \infty} a(x) = 1$, then $\lim_{x \rightarrow \infty} |y(x)| = \infty$
4. If $\lim_{x \rightarrow \infty} a(x) = 1$, then y is monotone

94. यदि $u(x, t)$ समीकरण

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < 1, t > 0$$

$$u(x, 0) = 1 + x + \sin(\pi x) \cos(\pi x)$$

$$u(0, t) = 1, u(1, t) = 2$$

का हल हो तो

1. $u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2}$
2. $u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$
3. $u\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4} + \frac{1}{2}e^{-3\pi^2}$
4. $u\left(\frac{1}{4}, 1\right) = \frac{5}{4} + \frac{1}{2}e^{-4\pi^2}$

94. If $u(x, t)$ is the solution of

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < 1, t > 0$$

$$u(x, 0) = 1 + x + \sin(\pi x) \cos(\pi x)$$

$$u(0, t) = 1, u(1, t) = 2$$

then

1. $u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2}$
2. $u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$

$$3. u\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4} + \frac{1}{2}e^{-3\pi^2}$$

$$4. u\left(\frac{1}{4}, 1\right) = \frac{5}{4} + \frac{1}{2}e^{-4\pi^2}$$

95. एक नियत अवर $a \in \mathbb{R}$ लीजिए। प्रथम कोटि के आरंभिक अवकल समीकरण

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0$$

जिसके आरंभिक मान $u(x, 0) = u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$ है और जहाँ u_0 एक सतततः अवकलनीय फलन है, के सम्बन्ध में निम्नलिखित कथनों पर विचार कीजिए

S_1 : एसा परिवद्ध फलन (bounded function) संभव है जिसके लिए उपर्युक्त समीकरण का हल u अपरिवद्ध (unbounded) हो।

S_2 : यदि u_0 एक संहत समुच्चय (compact set) के बाहर शून्य हो तो प्रत्येक नियत $T > 0$ के लिए ऐसा संहत समुच्चय (compact set) $K_T \subset \mathbb{R}$ विद्यमान होता है कि $x \notin K_T$ के लिए $u(x, T)$ शून्य हो।

वित्ताइये कि सिन्न में क्या सत्य है?

1. S_1 सत्य है और S_2 असत्य है।
2. S_1 और S_2 दोनों सत्य हैं।
3. S_1 असत्य है और S_2 सत्य है।
4. S_1 और S_2 दोनों असत्य हैं।

95. Let a be a fixed real constant. Consider the first order partial differential equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0$$

with the initial data $u(x, 0) = u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$ where u_0 is a continuously differentiable function. Consider the following two statements.

S_1 : There exists a bounded function u_0 for which the solution u is unbounded.

S_2 : If u_0 vanishes outside a compact set then for each fixed $T > 0$ there exists a compact set $K_T \subset \mathbb{R}$ such that $u(x, T)$ vanishes for $x \notin K_T$.

Which of the following are true?

1. S_1 is true and S_2 is false
2. S_1 is true and S_2 is also true
3. S_1 is false and S_2 is true
4. S_1 is false and S_2 is also false

96. एक व्युक्तमणीय आव्यूह (non-singular matrix)

$$A = L + D + U, \text{ जबकि } L \text{ व } U \text{ क्रमशः ऊर्ध्व त्रिमुख आव्यूह (upper triangular matrix) व अधो त्रिमुख आव्यूह (lower triangular matrix) जिनके विकर्ण की सभी प्रविणियाँ शून्य हैं, तथा } D \text{ एक विकर्ण आव्यूह (diagonal matrix) है, दिया गया है। यदि }$$

$Ax = b$ के हल को x^* द्वारा निरूपित किया जाए, तो

$\|H\| < 1$ के साथ गाउस-सीजेल पुनरावृत्ति युक्ति (Gauss-Seidel iteration method)

$x^{(k+1)} = Hx^{(k)} + c, k = 0, 1, 2, \dots$ से x^* पर अभिसरित (converge) हुआ जा सकता है यदि H का मान है

1. $-D^{-1}(L + U)$
2. $-(D + L)^{-1}U$
3. $-D(L + U)^{-1}$
4. $-(L - D)^{-1}U$

96. Assume that a non-singular matrix $A = L + D + U$ where L and U are lower and upper triangular matrices respectively with all diagonal entries are zero, and D is a diagonal matrix. Let x^* be the solution of $Ax = b$. Then the Gauss-Seidel iteration method $x^{(k+1)} = Hx^{(k)} + c, k = 0, 1, 2, \dots$ with $\|H\| < 1$ converges to x^* provided H is equal to

1. $-D^{-1}(L + U)$
2. $-(D + L)^{-1}U$
3. $-D(L + U)^{-1}$
4. $-(L - D)^{-1}U$

97. अग्र अंतर संकारक (forward difference operator) इस प्रकार परिभित है: $\Delta U_n = U_{n+1} - U_n$. निम्नलिखित में से किस अंतर समीकरण (difference equation) का एक व्यापक हल अपरिकद्ध (unbounded) है?

1. $\Delta^2 U_n - 3\Delta U_n + 2U_n = 0$
2. $\Delta^2 U_n + \Delta U_n + \frac{1}{4}U_n = 0$
3. $\Delta^2 U_n - 2\Delta U_n + 2U_n = 0$
4. $\Delta^2 U_{n+1} - \frac{1}{3}\Delta^2 U_n = 0$

97. The forward difference operator is defined as $\Delta U_n = U_{n+1} - U_n$. Then which of the following difference equations has an unbounded general solution?

1. $\Delta^2 U_n - 3\Delta U_n + 2U_n = 0$
2. $\Delta^2 U_n + \Delta U_n + \frac{1}{4}U_n = 0$
3. $\Delta^2 U_n - 2\Delta U_n + 2U_n = 0$
4. $\Delta^2 U_{n+1} - \frac{1}{3}\Delta^2 U_n = 0$

98. $J[y] = \int_0^{\log 3} [e^{-x}y'^2 + 2e^x(y' + y)]dx$
जबकि $y(\log 3) = 1$ और $y(0)$ अन्तिक्षित है, कौन

1. $4 - e^x$
2. $10 - e^{2x}$
3. $e^x - 2$
4. $e^{2x} - 8$

98. The admissible extremal for

$$J[y] = \int_0^{\log 3} [e^{-x}y'^2 + 2e^x(y' + y)]dx$$

where $y(\log 3) = 1$ and $y(0)$ is free is

1. $4 - e^x$
2. $10 - e^{2x}$
3. $e^x - 2$
4. $e^{2x} - 8$

99. $J[y] = \int_0^1 y'^2(x)dx$, जबकि

$y(0) = 0, y(1) = 1$ और $\int_0^1 y(x)dx = 0$ हो, की पराकोटि (extremal) है

1. $3x^2 - 2x$
2. $8x^3 - 9x^2 + 2x$
3. $\frac{5}{3}x^4 - \frac{2}{3}x$
4. $\frac{-21}{2}x^5 + 10x^4 + 4x^3 - \frac{5}{2}x$

99. The extremal of the functional

$$J[y] = \int_0^1 y'^2(x)dx$$

subject to $y(0) = 0, y(1) = 1$ and $\int_0^1 y(x)dx = 0$ is

1. $3x^2 - 2x$
2. $8x^3 - 9x^2 + 2x$
3. $\frac{5}{3}x^4 - \frac{2}{3}x$
4. $\frac{-21}{2}x^5 + 10x^4 + 4x^3 - \frac{5}{2}x$

100. समाकल समीकरण

$$\phi(x) = \lambda \int_0^\pi [\cos x \cos t - 2 \sin x \sin t] \phi(t) dt + \cos 7x, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

के संबंध में निम्न में से क्या सत्य है?

1. प्रत्येक $\lambda \in \mathbb{R}$ के लिए उपर्युक्त समीकरण का हल सभव है।
2. $\lambda \in \mathbb{R}$ के कुछ मानों के लिए उपर्युक्त समीकरण का हल सभव नहीं है।
3. $\lambda \in \mathbb{R}$ के कुछ मानों के लिए उपर्युक्त समीकरण के हलों की संख्या एक से अधिक, परन्तु परिमित है।
4. $\lambda \in \mathbb{R}$ के कुछ मानों के लिए उपर्युक्त समीकरण के अपरिमित हल हैं।

100. Consider the integral equation

$$\phi(x) = \lambda \int_0^{\pi} [\cos x \cos t - 2 \sin x \sin t] \phi(t) dt + \cos 7x, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

Which of the following statements are true?

1. For every $\lambda \in \mathbb{R}$, a solution exists
2. There exists $\lambda \in \mathbb{R}$ such that solution does not exist
3. There exists $\lambda \in \mathbb{R}$ such that there are more than one but finitely many solutions
4. There exists $\lambda \in \mathbb{R}$ such that there are infinitely many solutions

101. λ के किस मान के लिए समीकरण

$$\phi(x) = \lambda \int_0^{\pi} K(x, t) \phi(t) dt,$$

$$0 \leq x \leq \pi$$

जबकि $K(x, t) = \begin{cases} \sin x \cos t, & 0 \leq x \leq t \\ \cos x \sin t, & t \leq x \leq \pi \end{cases}$ है के अतुच्छ (non-trivial) हल हैं?

1. $(n + \frac{1}{2})^2 - 1, n \in \mathbb{N}$
2. $n^2 - 1, n \in \mathbb{N}$
3. $\frac{1}{2}(n + 1)^2 - 1, n \in \mathbb{N}$
4. $\frac{1}{2}(2n + 1)^2 - 1, n \in \mathbb{N}$

101. The values of λ for which the following equation has a non-trivial solution

$$\phi(x) = \lambda \int_0^{\pi} K(x, t) \phi(t) dt,$$

$$0 \leq x \leq \pi$$

where $K(x, t) = \begin{cases} \sin x \cos t, & 0 \leq x \leq t \\ \cos x \sin t, & t \leq x \leq \pi \end{cases}$ are

1. $(n + \frac{1}{2})^2 - 1, n \in \mathbb{N}$
2. $n^2 - 1, n \in \mathbb{N}$
3. $\frac{1}{2}(n + 1)^2 - 1, n \in \mathbb{N}$
4. $\frac{1}{2}(2n + 1)^2 - 1, n \in \mathbb{N}$

102. यदि एक सरल आवर्ती दोलक (simple harmonic oscillator) का हैमिल्टोनियन (Hamiltonian)

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2 \text{ है, तो } H \text{ से संबद्ध लाग्रांजियन (Lagrangian) की संभावना है}$$

1. $L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{k}{2}q^2$
2. $L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{k}{2}(q^2 + 3q^2\dot{q})$
3. $L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{k}{2}q^2$
4. $L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{k}{2}(q^2 + 3q^2\dot{q})$

102. The Hamiltonian for a simple harmonic oscillator is $H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2$. Then a possible Lagrangian corresponding to H can be

1. $L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{k}{2}q^2$
2. $L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{k}{2}(q^2 + 3q^2\dot{q})$
3. $L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{k}{2}q^2$
4. $L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{k}{2}(q^2 + 3q^2\dot{q})$

Unit – 4

103. दो यादृच्छिक चरों X व Y का संयुक्त प्रायिकता घनत्व फलन निम्न रूप से परिभाषित है

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{if } 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

निम्नलिखित में से क्या सत्य है?

1. X व Y स्वतंत्र हैं।
2. $P(X > 0) = 1/2$
3. $E(Y) = 0$
4. $Cov(X, Y) = 0$

103. Let X and Y be two random variables with joint probability density function

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{if } 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Which of the following statements are correct?

1. X and Y are independent
2. $P(X > 0) = 1/2$
3. $E(Y) = 0$
4. $Cov(X, Y) = 0$

104. दो यादृच्छिक चरों X व Y के लिए

- $X \geq 0, Y \geq 0, E(X) = 3, V(X) = 9,$
 $E(Y) = 2$ व $V(Y) = 4$
दिया गया है। निम्नलिखित में से क्या सत्य है ?
1. $0 \leq Cov(X, Y) \leq 4$
 2. $E(XY) \leq 6$
 3. $V(X + Y) \leq 25$
 4. $E(X + Y)^2 \geq 25$

104. Let X and Y be two random variables satisfying

- $X \geq 0, Y \geq 0, E(X) = 3, V(X) = 9,$
 $E(Y) = 2$ and $V(Y) = 4.$
Which of the following statements are correct?

1. $0 \leq Cov(X, Y) \leq 4$
2. $E(XY) \leq 6$
3. $V(X + Y) \leq 25$
4. $E(X + Y)^2 \geq 25$

105. अवस्था समग्रि (state space) $S = \{1, 2, 3\}$ पर एक मार्कोव श्रृंखला का राशनण अव्यूह (transition matrix)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

है। यदि उस मार्कोव श्रृंखला का स्थिर बंटन (stationary distribution) $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ हो व $d(1)$ अवस्था 1 के आवर्त को निरूपित करता हो तो निम्न में से क्या सत्य है ?

1. $d(1) = 1$
2. $d(1) = 2$
3. $\pi_1 = 1/2$
4. $\pi_1 = 1/3$

105. Consider a Markov chain on state space $S = \{1, 2, 3\}$ with transition probability matrix P given by

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Let $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ be a stationary distribution of the Markov chain and $d(1)$ denote the period of state 1. Which of the following statements are correct?

1. $d(1) = 1$
2. $d(1) = 2$
3. $\pi_1 = 1/2$
4. $\pi_1 = 1/3$

106. यदि $\{X_i\}_{i \geq 1}$ स्वरूपी स्वतंत्र बिट्टित (identical independently distributed) यादृच्छिक चरों का अनुक्रम हो जिसके लिए $E(X_i) = 0$ व $V(X_i) = 1$ हो तो निम्न में से क्या सत्य है ?

1. $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \rightarrow 0$ (प्राप्तिकर्ता में)

2. $\frac{1}{n^{3/4}} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow 0$ (प्राप्तिकर्ता में)

3. $\frac{1}{n^{1/2}} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow 0$ (प्राप्तिकर्ता में)

4. $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \rightarrow 1$ (प्राप्तिकर्ता में)

106. Let $\{X_i\}_{i \geq 1}$ be a sequence of i.i.d. random variables with $E(X_i) = 0$ and $V(X_i) = 1$. Which of the following are true?

1. $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \rightarrow 0$ in probability

2. $\frac{1}{n^{3/4}} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow 0$ in probability

3. $\frac{1}{n^{1/2}} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow 0$ in probability

4. $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \rightarrow 1$ in probability

107. दो स्वरूपी स्वतंत्र बिट्टित (i.i.d.) यादृच्छिक चर X व Y प्राचल 1 के घरधातांकी बंटन (exponential distribution) का पालन करते हैं। यदि $W = X + Y$ व $U = X/(X + Y)$ हो तो निम्न में से क्या सत्य है ?

1. $E(U) = 1/2$
2. अन्तराल $(0, 1)$ में U समरूपी (uniform) है।
3. W, U स्वतंत्र हैं।
4. W, U असहसंबंधित (uncorrelated) हैं।

107. Let X and Y be i.i.d. exponential random variables with parameter 1. Define, $W = X + Y$ and $U = X/(X + Y)$. Which of the following are true?

1. $E(U) = 1/2$
2. U is uniform on $(0, 1)$

3. W, U are independent
 4. W, U are uncorrelated, but dependent
- 108.** दो यादृच्छिक चर X_1 व X_2 स्वरूपी स्वतंत्र बिटि (i.i.d.) हैं व उनका प्रायिकता बटन फलन (probability mass function)
 $f_\theta(x) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}$; $x = 0, 1$, जबकि $\theta \in (0, 1)$ है। निम्न में से क्या सत्य है?
 1. $X_1 + 2X_2$ एक पर्याप्त सारिधकी (sufficient statistic) है।
 2. $X_1 - X_2$ एक पर्याप्त सारिधकी है।
 3. $X_1^2 + X_2^2$ एक पर्याप्त सारिधकी है।
 4. $X_1^2 + X_2$ एक पर्याप्त सारिधकी है।
- 108.** Let X_1 and X_2 be i.i.d. with probability mass function
 $f_\theta(x) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}$; $x = 0, 1$, where $\theta \in (0, 1)$. Which of the following statements are true?
 1. $X_1 + 2X_2$ is a sufficient statistic
 2. $X_1 - X_2$ is a sufficient statistic
 3. $X_1^2 + X_2^2$ is a sufficient statistic
 4. $X_1^2 + X_2$ is a sufficient statistic
- 109.** स्वरूपी स्वतंत्र बिटि (i.i.d.) यादृच्छिक चर X_1, X_2, \dots, X_n , $n \geq 3$ प्रायिकता बटन $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ का पालन करते हैं। इसी प्रकार स्वरूपी स्वतंत्र बिटि (i.i.d.) यादृच्छिक चर Y_1, Y_2, \dots, Y_n प्रायिकता बटन $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ का पालन करते हैं। यह भी गान लीजिए कि सभी X_i व Y_j सभी स्वतंत्र हैं। यदि द्विवरीय डाटा $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ का राहसाणीय गुणांक (correlation coefficient) r हो तो
 1. सभी $n \geq 3$ के लिए $\frac{r^2(n-2)}{1-r^2}$ का बटन $F_{1,n-2}$ है। ($n-2$ स्वतंत्र कोटि (d.f.) का F-बटन)
 2. सभी $n \geq 3$ के लिए $\frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$ का बटन t_{n-2} है। ($n-2$ स्वतंत्र कोटि (d.f.) का t-बटन)
 3. $n = 3$ के लिए $\frac{r^2}{1-r^2}$ उसी बटन का पालन करता है जिसका की कोई यादृच्छिक चर (Cauchy variable) का बर्थ।
 4. सभी $n \geq 3$ के लिए r^2 वीटा बटन का पालन करता है।
- 109.** Suppose that for $n \geq 3$, X_1, X_2, \dots, X_n are i.i.d. $\sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ and Y_1, Y_2, \dots, Y_n are i.i.d. $\sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Assume further that the X_i 's and the Y_j 's are independent. Let r be the correlation coefficient computed from the bivariate data $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$. Then
1. $\frac{r^2(n-2)}{1-r^2}$ has $F_{1,n-2}$ distribution (F-distribution with 1 and $n-2$ d.f.) for all $n \geq 3$
 2. $\frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$ has t_{n-2} distribution (t-distribution with $n-2$ d.f.) for all $n \geq 3$
 3. $\frac{r^2}{1-r^2}$ has the distribution of the square of a Cauchy variable for $n = 3$
 4. r^2 has a beta distribution for all $n \geq 3$
- 110.** दो स्वतंत्र घरधातांकी यादृच्छिक चरों X व Y का मात्र्य क्रमशः θ व 2θ है, जबकि θ अज्ञात है। निम्न में से क्या सत्य है?
 1. θ के लिए $X + 2Y$ पर्याप्त है।
 2. $H_0: \theta = 1$ का $H_1: \theta < 1$ के सापेक्ष परीक्षण करने के लिए $X + 2Y$ पर आधारित दाहिना-पुँछ परीक्षण (Right-tailed test) सार्वत्रिक सर्व प्रभावी (UMP) है।
 3. $H_0: \theta = 1$ का $H_1: \theta < 1$ के सापेक्ष परीक्षण करने के लिए $2X + Y$ पर आधारित बौद्धा-पुँछ परीक्षण (Left-tailed test) सार्वत्रिक सर्व प्रभावी (UMP) है।
 4. $H_0: \theta = 1$ का $H_2: \theta \neq 1$ के सापेक्ष परीक्षण हेतु कोई भी परीक्षण सार्वत्रिक सर्व प्रभावी (UMP) परीक्षण नहीं हो सकता।
- 110.** Suppose X and Y are two independent exponential random variables with means θ and 2θ respectively, where θ is unknown. Which of the following statements are true?
 1. $X + 2Y$ is sufficient for θ
 2. Right-tailed test based on $X + 2Y$ is UMP for testing $H_0: \theta = 1$ against $H_1: \theta < 1$
 3. Left-tailed test based on $2X + Y$ is UMP for testing $H_0: \theta = 1$ against $H_1: \theta < 1$
 4. UMP test does not exist for testing $H_0: \theta = 1$ against $H_2: \theta \neq 1$
- 111.** एक द्विप्रतिदर्शी अवरिथिति प्रश्न (two-sample location problem) पर विचार कीजिए जिसमें प्रथम व द्वितीय समष्टि (population) से क्रमशः 6 व 8 प्रेषण किए जाने हैं।
 i -वें समष्टि का बटन $F(x; \theta_i) = F(x - \theta_i)$; $i = 1, 2$ है, जबकि F प्रायिका 0 का एक सातत बटन फलन है। संयुक्त

प्रतिदर्श में द्वितीय प्रतिदर्श के क्रमों (ranks) का योगफल T से निरूपित किया जाता है। यदि सभी परीक्षण स्वतंत्र हों तो

$H_0: \theta_1 = \theta_2$ का $H_1: \theta_1 > \theta_2$ के सापेक्ष परीक्षण करने के संबंध में कथा सत्य है।

1. H_1 के अन्तर्गत T पर बंटन का कोई प्रभाव नहीं है।
2. यदि T छोटा हो तो H_0 को अस्वीकार करना उचित है।
3. T का प्रेक्षित मान 85 नहीं हो सकता।
4. H_0 के अन्तर्गत $E(T) = 60$ होगा।

111. Consider a two-sample location problem with 6 and 8 observations from the first and second populations, respectively. Suppose that the distribution of the i^{th} population is $F(x; \theta_i) = F(x - \theta_i)$; $i = 1, 2$, where F is a continuous distribution function with the median at 0. Define T as the sum of the ranks of the second sample in the combined sample. For the problem of testing $H_0: \theta_1 = \theta_2$ against $H_1: \theta_1 > \theta_2$, which of the following statements are true when all observations are independent?

1. T is distribution free under H_1
2. It is appropriate to reject H_0 when T is small
3. Observed value of T cannot be 85
4. $E(T) = 60$ under H_0

112. हम प्रेक्षित करते हैं कि $X \sim \text{Binomial}(n, p)$, जबकि $0 < p < 1$ ज्ञात है, व $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ अज्ञात प्राचल है। ध्यान दीजिए कि $n = 0$ होने पर X शून्य पर उपकृष्ट (degenerate) है। यदि n का पूर्व बंटन (prior distribution) ज्ञात मात्रा का $\lambda > 0$ प्यासों (Poisson) बंटन है तो निम्नलिखित में से कथा सत्य है?

1. n का पश्च बंटन (posterior distribution) भी प्यासों है, परन्तु उसका मात्रा λ नहीं है।
2. $X = 0$ होने पर n का पश्च बंटन $\lambda(1-p)$ मात्रा का प्यासों बंटन है।
3. $p = 1/2$ होने पर n के बेस आंकलन (Bayes estimate) का पूर्वाग्रह (bias) $(\lambda - n)/2$ है।
4. n के बेस आंकलन का प्रसरण (variance) अपूर्णाग्रहित (unbiased) आंकलन X/p के प्रसरण से अधिक है।

112. We observe $X \sim \text{Binomial}(n, p)$, where $0 < p < 1$ is known but $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ is an unknown parameter. Note that when $n = 0$, X is degenerate

at 0. Suppose that n has a prior distribution which is Poisson with a known mean $\lambda > 0$. Which of the following statements are correct?

1. The posterior distribution of n is also Poisson but with a mean different from λ
2. If $X = 0$, the posterior distribution of n is Poisson with mean $\lambda(1-p)$
3. The Bayes estimate of n has bias $(\lambda - n)/2$ when $p = 1/2$
4. The Bayes estimate of n has larger variance than the variance of the unbiased estimate X/p

113. रेखिक निर्दर्श

$$\begin{aligned} Y_1 &= \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{12} + \beta_3 x_{13} + \varepsilon_1 \\ Y_2 &= \beta_1 x_{21} + \beta_2 x_{22} + \beta_3 x_{23} + \varepsilon_2 \\ Y_3 &= \beta_1 x_{31} + \beta_2 x_{32} + \beta_3 x_{33} + \varepsilon_3, \end{aligned}$$

में $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \sim N(0, \sigma^2)$ का पालन करने वाले स्वरूपी स्वतंत्र बंटन (i.i.d.) हैं तथा

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \neq 0 \text{ है। मान लीजिए कि}$$

$(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ का लघुतम वर्ग आंकलन (least squares estimate) $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$ है और $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \in \mathbb{R}$ दिये गए हैं।

1. $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$ अद्वितीय (unique) है।
2. $\sum_{i=1}^3 \ell_i \beta_i$ का शेषतम रेखिक अपूर्णाग्रहित आंकलन (BLUE) $\sum_{i=1}^3 \ell_i \hat{\beta}_i$ है।
3. $\sum_{i=1}^3 \ell_i \beta_i$ का समरूपीय लघुतम प्रसरण अपूर्णाग्रहित आंकलन (UMVUE) $\sum_{i=1}^3 \ell_i \hat{\beta}_i$ है।
4. $\sum_{i=1}^3 \ell_i \beta_i$ का $\sum_{i=1}^3 \ell_i \hat{\beta}_i$ शेषतम रेखिक अपूर्णाग्रहित आंकलन BLUE है पर समरूपी लघुतम प्रसरण अपूर्णाग्रहित आंकलन (UMVUE) नहीं है।

113. In the linear model:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{12} + \beta_3 x_{13} + \varepsilon_1 \\ Y_2 &= \beta_1 x_{21} + \beta_2 x_{22} + \beta_3 x_{23} + \varepsilon_2 \\ Y_3 &= \beta_1 x_{31} + \beta_2 x_{32} + \beta_3 x_{33} + \varepsilon_3, \end{aligned}$$

where $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ and ε_3 are i.i.d. $N(0, \sigma^2)$ and

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \neq 0.$$

Let $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$ be the least squares estimate of $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. Let $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \in \mathbb{R}$.

1. $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$ is unique
2. $\sum_{i=1}^3 \ell_i \hat{\beta}_i$ is the best linear unbiased estimate (BLUE) of $\sum_{i=1}^3 \ell_i \beta_i$
3. $\sum_{i=1}^3 \ell_i \hat{\beta}_i$ is the uniformly minimum variance unbiased estimate (UMVUE) of $\sum_{i=1}^3 \ell_i \beta_i$
4. $\sum_{i=1}^3 \ell_i \hat{\beta}_i$ is BLUE but not UMVUE of $\sum_{i=1}^3 \ell_i \beta_i$

114. बंटन $N(\mu, \sigma^2)$ का पालन करने वाले स्वतंत्र वर्टेट यादृच्छिक चर X_1, X_2, \dots, X_n दिए गए हैं। जबकि μ व σ^2 दोनों अज्ञात प्राथम हैं। σ^2 का विश्वास्यता अन्तराल

$$I_{a,b} = \left[\frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{b}, \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{a} \right], \text{ जबकि } b > a > 0, \text{ दिया गया है। यदि } G_n \text{ स्वारंभक फलन (cumulative distribution function) को निरूपित करता हो, तो निम्नलिखित में से क्या सत्य है?}$$

1. $I_{a,b}$, जबकि $ab = 1$ हो, प्रकार का 95% विश्वास्यता अन्तराल संभव है।
2. माने की $G_{n-1}(a) = 1 - G_{n-1}(b) = 0.025$ हो तो यह सबसे छोटा 95% विश्वास्यता अन्तराल है।
3. यदि यह सबसे छोटा 95% विश्वास्यता अन्तराल हो तो a व b प्रतिवेद $b - a = (n - 3) \log \frac{b}{a}$ को संतुष्ट करेंगे।
4. यदि $G_{n-1}(b) - G_{n-1}(a) = 0.95$ हो तो $I_{a,b}$ प्रकार के 95% विश्वास्यता अन्तराल की प्रत्याशित लंबाई $(n - 1) \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \sigma^2$ होगी।

114. Let X_1, X_2, \dots, X_n be i.i.d. $N(\mu, \sigma^2)$ variables, where μ and σ^2 both are unknown parameters. Consider a confidence interval for σ^2 , which is of the form

$$I_{a,b} = \left[\frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{b}, \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{a} \right], \text{ where } b > a > 0.$$

Let G_n be the cumulative distribution function of a chi-square random variable with n degrees of freedom. Which of the following statements are true?

1. It is possible to find a 95% confidence interval of the form $I_{a,b}$, where $ab = 1$.
2. If $G_{n-1}(a) = 1 - G_{n-1}(b) = 0.025$, then it is the shortest 95% confidence interval.

3. If it is the shortest 95% confidence interval, then a and b must satisfy the condition $b - a = (n - 3) \log \frac{b}{a}$
4. If $G_{n-1}(b) - G_{n-1}(a) = 0.95$, then the expected length of a 95% confidence interval of the form $I_{a,b}$ is $(n - 1) \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \sigma^2$

115. द्विवर्ग वर्गीकरण प्रश्न (two-class classification problem) पर विधार कीजिए। जबकि दो प्रतिस्पर्धी वर्गों के घनत्व निम्न प्रकार से परिभाषित हैं

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 2x & \text{if } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

इन वर्गों की पूर्व प्रायिकताओं को क्रमशः π_1 व π_2 से निरूपित कीजिए। एक वर्गीकर्ता (classifier) δ , जो एक प्रेक्षण x को प्रथम वर्ग में वर्गीकृत करता है यदि $x < 1/2$ हो, व द्वितीय वर्ग में वर्गीकृत करता है यदि $x \geq 1/2$ हो, के संबंध में क्या सत्य है ?

1. यदि $\pi_1 = \pi_2$ हो तो δ एक बेस वर्गीकर्ता (Bayes classifier) है।
2. यदि $\pi_1 > \pi_2$ हो तो δ एक बेस वर्गीकर्ता है।
3. यदि $\pi_1 < \pi_2$ हो तो δ एक बेस वर्गीकर्ता है।
4. यदि $\pi_1 = \pi_2$ हो तो δ द्वारा गलत वर्गीकरण की औसत प्रायिकता $\frac{3}{8}$ है।

115. Consider a two-class classification problem, where the densities of the two competing classes are given by

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 2x & \text{if } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Let π_1 and π_2 be the prior probabilities of these two classes. Now consider a classifier δ , which classifies an observation x to class 1 if $x < 1/2$ and to class 2 if $x \geq 1/2$.

1. If $\pi_1 = \pi_2$, then δ is the Bayes classifier
2. If $\pi_1 > \pi_2$, then δ is the Bayes classifier
3. If $\pi_1 < \pi_2$, then δ is the Bayes classifier
4. If $\pi_1 = \pi_2$, then the average probability of misclassification for δ is $3/8$.

116. एक सांख्यिकीविद ने अलग-अलग ऊँचाई वाले 4 लड़कों में से संप्रतिस्थापन (with replacement) 2 लड़कों का सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श (simple random sample) लिया। इस प्रतिदर्श की औसत

जीवाई को \bar{x}_1 से निरूपित किया गया। अब दूसरे साधिकीविद ने इन्ही 4 लड़कों में से 2 लड़कों का अप्रतिश्वापन से सरल यादृच्छक प्रतिदर्श लिया और इस प्रतिदर्श की ओसत जीवाई को \bar{x}_2 से निरूपित किया। निम्न में से क्या सत्य है ?

1. $(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)/2$ का प्रसरण (variance) $(2\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2)/5$ के प्रसरण से अधिक है।
2. $(\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2)/3$ का प्रसरण $(2\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2)/5$ के प्रसरण से अधिक है।
3. $(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)/2$ का प्रसरण $(2\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2)/5$ के प्रसरण से कम है।
4. $(\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2)/3$ का प्रसरण $(2\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2)/5$ के प्रसरण से कम है।

116. A statistician has drawn a simple random sample of size 2 with replacement from 4 boys with distinct heights. Let \bar{x}_1 be the sample mean of their heights. Then, another statistician has drawn a simple random sample of size 2 without replacement from those 4 boys. Let \bar{x}_2 be the sample mean of their heights. Which of the following statements are correct?

1. $(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)/2$ has larger variance than that of $(2\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2)/5$
2. $(\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2)/3$ has larger variance than that of $(2\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2)/5$
3. $(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)/2$ has smaller variance than that of $(2\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2)/5$
4. $(\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2)/3$ has smaller variance than that of $(2\bar{x}_1 + 3\bar{x}_2)/5$

117. यदि आंकड़ों के एक समुच्चय का माध्य 2.5 व मानक विचलन 0.5 है तो

1. माधिका 2.5 से बड़ी होनी चाहिए।
2. माधिका 2.5 से छोटी होनी चाहिए।
3. माधिका 3 से कम होनी चाहिए।
4. माधिका 2 से बड़ी होनी चाहिए।

117. In a data set with mean 2.5 and standard deviation 0.5,

1. the median must be bigger than 2.5
2. the median must be smaller than 2.5
3. the median must be smaller than 3
4. the median must be bigger than 2

118. हम F , h व m से क्रमशः $[0, \infty)$ में परिभाषित जीवनकाल बटन फलन (lifetime distribution function), क्षय फलन (hazard function) व औसत शेष जीवनकाल फलन (mean residual lifetime function) को निरूपित करते हैं। यदि F

सर्वथा सतत (absolutely continuous) हो तो निम्न में से क्या सत्य है ?

1. $\int_0^\infty h(t)dt = 1$
2. $m(t) = \frac{\int_t^\infty (1-F(u))du}{1-F(t)}$, for $t > 0$
3. यदि जीवनकाल बटन फलन माध्य $\lambda > 0$ वाला चरघातांकी फलन हो तो t के साथ $m(t)$ का मान हमेशा बढ़ेगा।
4. यदि जीवनकाल बटन फलन माध्य $\lambda > 0$ वाला चरघातांकी फलन हो तो सभी $t > 0$ के लिए $h(t)m(t) = 1$ होगा।

118. Let F , h and m be the lifetime distribution function, the hazard function and the mean residual lifetime function respectively, defined on $[0, \infty)$. Assume that F is absolutely continuous. Which of the following statements are true?

1. $\int_0^\infty h(t)dt = 1$
2. $m(t) = \frac{\int_t^\infty (1-F(u))du}{1-F(t)}$, for $t > 0$
3. $m(t)$ is strictly increasing in t if the lifetime distribution is exponential with mean $\lambda > 0$
4. $h(t)m(t) = 1$ for all $t > 0$ if the lifetime distribution is exponential with mean $\lambda > 0$

119. एकल रेखा कतार $M/M/1$ जिसकी आगमन दर λ व सेवा दर μ है, यदि $\lambda < \mu$ है पर विचार कीजिए। निम्नलिखित में से क्या सत्य है ?

1. अनंत अवसरों पर प्रायिकता 1 के साथ कतार की लंबाई शून्य होती है।
2. अधिक से अधिक परिमित अवसरों पर प्रायिकता 1 के साथ कतार की लंबाई शून्य होती है।
3. कतार की स्थिर अवस्था संभव है।
4. यदि t समय पर निकाय में ग्राहकों की संख्या को L_t से निरूपित किया जाए तो $\lim_{t \rightarrow \infty} P(L_t > 0) = \frac{\lambda}{\mu}$ होगा।

119. Consider a single server $M/M/1$ queue with arrival rate λ and service rate μ . Further assume that $\lambda < \mu$. Then, which of the following statements are true?

1. Queue length becomes 0 in infinitely many time intervals with probability 1
2. Queue length becomes 0 in at most finitely many time intervals with probability 1

3. Steady state exists for the queue
4. $\lim_{t \rightarrow \infty} P(L_t > 0) = \frac{\lambda}{\mu}$, where L_t is the number of customers in the system at time t
120. अन्तराल $[0, 1]$ में 20 प्रेक्षणों को x_1, x_2, \dots, x_{20} से निरूपित किया जाता है। यदि \bar{x} व \tilde{x} क्रमशः इन प्रेक्षणों का माध्य व मधियका हों, तथा $s^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2$ हो तो
1. यदि 15 प्रेक्षण 0.3 से छोटे हों तो \bar{x} अधिक से अधिक 0.5 हो सकता है।
 2. 10 प्रेक्षण 1 व शेष प्रेक्षण 0 होने पर s^2 महसूम होगा।
 3. यदि एक को छोड़कर अन्य सभी प्रेक्षण 0.5 से छोटे हों तो \bar{x} का मान \tilde{x} से कम नहीं हो सकता।
 4. $s^2 \leq \bar{x}(1 - \bar{x})$
120. Let x_1, x_2, \dots, x_{20} be 20 observations in the interval $[0, 1]$. Let \bar{x} and \tilde{x} be the mean and the median of these observations, and let $s^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2$.
1. If 15 observations are smaller than 0.3, then \bar{x} cannot exceed 0.5
 2. s^2 will be maximum if 10 of these observations are 1 and the rest are 0
 3. If all observations except one are smaller than 0.5, then \bar{x} cannot be smaller than \tilde{x}
 4. $s^2 \leq \bar{x}(1 - \bar{x})$

FOR ROUGH WORK

FOR ROUGH WORK

FOR ROUGH WORK

FOR ROUGH WORK