Serigne Dame
NDIAGA MHB

TP2 de MMI.

a)

Supposons $u(x) = 0 \quad p.p\, x \in U$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(U)$

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_U u(x)\varphi(x)\,dx$$

Or $u(x) = 0 \quad p.p.x \in U \Rightarrow u(x)\varphi(x) = 0 \quad p.p.x \in U \quad (*)$

Or on a vu que si $f : A \to \mathbb{R}$ est telle que $f(y) = 0 \quad p.p.\, y \in A \Rightarrow f$ est intégrable sur A et on a

$$\int_A f\,dy = 0$$

Ainsi $(*) \Rightarrow \displaystyle\int_U u(x)\varphi(x)\,dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(U)$

$\Rightarrow T_u = 0$ sur U.

Supposons que $T_u = 0$ sur U
Alors d'après un résultat du cours on a : $u(x) = 0$ $p.p\, x \in U$.

b)

Supposons u est à support compact.
Alors $\exists\, K \subset \mathbb{R}^n$ avec K compact $\mid u(x) = 0$. $p.p.x \in \mathbb{R}^n \setminus K$
de a) $\Rightarrow$ pour $U = \mathbb{R}^n \setminus K \subset \mathbb{R}^n$, on a :
$u(x) = 0 \quad p.p.x \in \mathbb{R}^n \setminus K \iff T_u = 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus K$

c)

Supposons que $x \neq a$
Puisque δ_a est nulle en dehors du point $\{a\}$ alors

la distribution de Dirac évalue toute fonction test à zero, en dehors de $\{a\}$.
Ainsi en prenant $K = \{a\} \subset \mathbb{R}^n$ qui est

$$\delta_a = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^n \setminus K.$$

$\Rightarrow$ δ_a est à support compact.

d)

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle T * \delta, \varphi \rangle = \langle T_x, \langle \delta_{y=0}, \varphi(x+y) \rangle\rangle$$
$$= \langle T_x, \varphi(x+0) \rangle$$
$$= \langle T_x, \varphi(x) \rangle = T$$

d'autre part

$$\langle \delta * T, \varphi \rangle = \langle \delta_{x=0}, \langle T_y, \varphi(x+y) \rangle\rangle$$
$$= \langle T_y, \varphi(x+y) \rangle \text{ en } x$$
$$= \langle T_y, \varphi(y) \rangle = T$$

D'où $T * \delta = \delta * T = T$

e)

Comme u ou v est à support compact, alors d'après b)
T_u ~~et~~ T_v est aussi à support compact.
$\Rightarrow$ $T_u * T_v$ existe.
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$$\langle T_u * T_v, \varphi \rangle = \langle T_{u_x}, \langle T_{v_y}, \varphi(x+y) \rangle\rangle$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} v(y) \varphi(x+y)\, dy \right) dx$$
$$= \iint_{\mathbb{R}^n} u(x) v(y) \varphi(x+y)\, dy\, dx \quad ①$$

D'autre part, on a

$$\langle T_{u*v}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (u*v)(x) \varphi(x)\, dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} u(x-t) v(t)\, dt \right) \varphi(x)\, dx$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^n} u(x-t)\, v(t)\, \varphi(x)\, dx\, dt$$

pour $x - t = y$ et $x = y + t \Rightarrow dx = dy$

$$\langle T_{u*v}, \varphi \rangle = \iint_{\mathbb{R}^n} u(y)\, v(t)\, \varphi(y+t)\, dy\, dt \quad ②$$

$② = ① \Rightarrow T_u * T_v = T_{u*v}$

f) Application

$R * S$ existe car v est à support compact, donc T_v est aussi à support compact.

De plus δ est à support compact. Et comme $0 \in [0,1)$ alors $T_v - 2\delta$ est à support compact, il suffit de prendre $K = [0,1) = [0,1) \cup \{0\}$

Ainsi S étant à support compact, $R * S$ $\exists$ comme élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

D'après la proposition donnée au début, on a :

$R * S = R * (T_v - 2\delta)$, comme $T_v, \delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \Rightarrow R * S &= R * T_v - 2 R * \delta \\ &= T_u * T_v - 2 T_u * \delta \\ &= T_{u*v} - 2 T_u \end{aligned}$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} u * v(x) &= \int_{\mathbb{R}} (x-t)^2\, \mathbb{1}_{[0,1]}(t)\, dt \\ &= \int_0^1 (x-t)^2\, dt = \int_0^1 (x^2 + t^2 - 2xt)\, dt \\ &= x^2 - x + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle R * S, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \left(x^2 - x + \frac{1}{3}\right) \varphi(x)\, dx - \int_{\mathbb{R}} u(x)\, \varphi(x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(x^2 - x + \frac{1}{3}\right) \varphi(x)\, dx - \int_{\mathbb{R}} 2x^2\, \varphi(x)\, dx \end{aligned}$$

$= \int_{\mathbb{R}} \left(x^2 - x + \frac{1}{3} - 2x^2\right) \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \left(-x^2 - x + \frac{1}{3}\right) \varphi(x)\, dx$

$= T_{\omega}$ telle que $\omega(x) = -x^2 - x + \frac{1}{3} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.