Compte rendu simulation aleatoire

GADIAGA
Serigne
Dame
MAM3

L'aiguille de Buffon

Questions

- D suit la loi de Bernoulli
- L'observation des realisations de D nous permettra de determiner les parametres de la loi de Bernouille qui dependra de π. Et donc nous permettra d'estimer π.

Exo 1

1) $P(D=1) = \frac{2a}{\pi L}$?

On a $X \sim \mathcal{U}([0,L])$ et

$\theta \sim ([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ X et θ indépendants

$$P(D=1) = P(X \leq \frac{a}{2}\cos\theta) + P(X > L - \frac{a}{2}\cos\theta)$$

$$= 1 + P(X \leq \frac{a}{2}\cos\theta) - P(X \leq L - \frac{a}{2}\cos\theta)$$

$$= 1 + \int_{\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{\frac{a}{2}\cos\theta} \frac{1}{L\pi} \mathbb{1}_{[0,L]} \times \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \, dx\, d\theta - \int_{\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{L-\frac{a}{2}\cos\theta} \frac{1}{L\pi} \mathbb{1}_{[0,L]} \times \mathbb{1}_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \, dx\, d\theta$$

$$= 1 + \frac{1}{L\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2}\int_0^{\frac{a}{2}\cos\theta} dx\, d\theta - \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{L-\frac{a}{2}\cos\theta} dx\, d\theta\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{L\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{a}{2}\cos\theta\, d\theta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} L - \frac{a}{2}\cos\theta\, d\theta\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{L\pi}\left(\left[\frac{a}{2}\sin\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \left[\theta L - \frac{a}{2}\sin\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$P(D=1) = 1 + \frac{a}{L\pi} - \frac{L\pi}{L\pi} + \frac{a}{L\pi} = \frac{2a}{L\pi}$$

D'où $\boxed{P(D=1) = \frac{2a}{L\pi}}$

2) Programme en R.

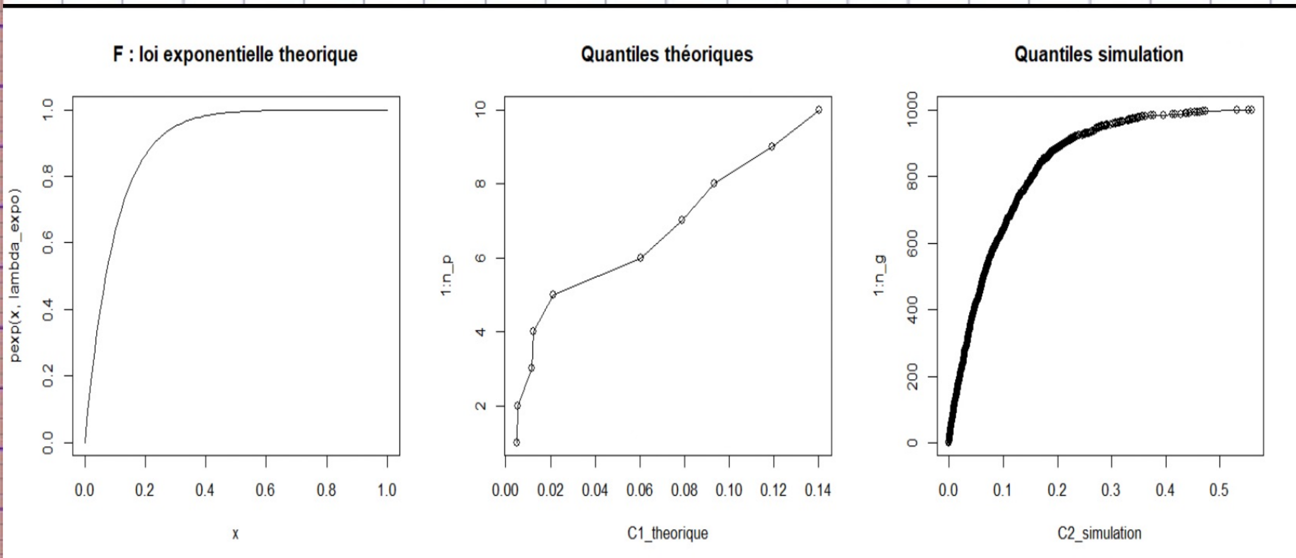
```r
L = 6
a = 2
p = (2*a)/(pi*L)
n = 100000
nb1 = 0
teta1 = runif(n)*pi-(pi/2)
Xs = runif(n) * L
for (i in 1:n) {
  teta = teta1[i]
  X = Xs[i]
  V_1 = (a/2)*cos(teta)
  V_2 = L - (a/2)*cos(teta)
  if (!(X > V_1 && X < V_2)) {
    nb1 = nb1 + 1
  }
}
p1 = nb1/n
pi1 = (2*a)/(p1*L)
print("p theorique :")
print(p)
print("p approche :")
print(p1)
print("pi theorique :")
print(pi)
print("pi approche :")
print(pi1)
```

Simulation par la méthode d'inversion

• Simulation d'une loi exponentielle -

```r
#La loi exponentielle
n_p = 10
n_g = 1000
lambda_expo = 10
F_inv_expo <- function(u, lambda_expo) {
  return(-(1/lambda_expo) * log(1-u))
}
C1_theorique = sort(F_inv_expo(runif(n_p, 0, 1), lambda_expo))
C2_simulation = sort(F_inv_expo(runif(n_g, 0, 1), lambda_expo))
par(mfrow=c(1,3))
curve(pexp(x, lambda_expo), 0, 1, main='F : loi exponentielle theorique')
plot(x = C1_theorique, y = 1:n_p, type = "o", main='Quantiles théoriques')
plot(x = C2_simulation, y = 1:n_g, type = "o", main='Quantiles simulation')
```

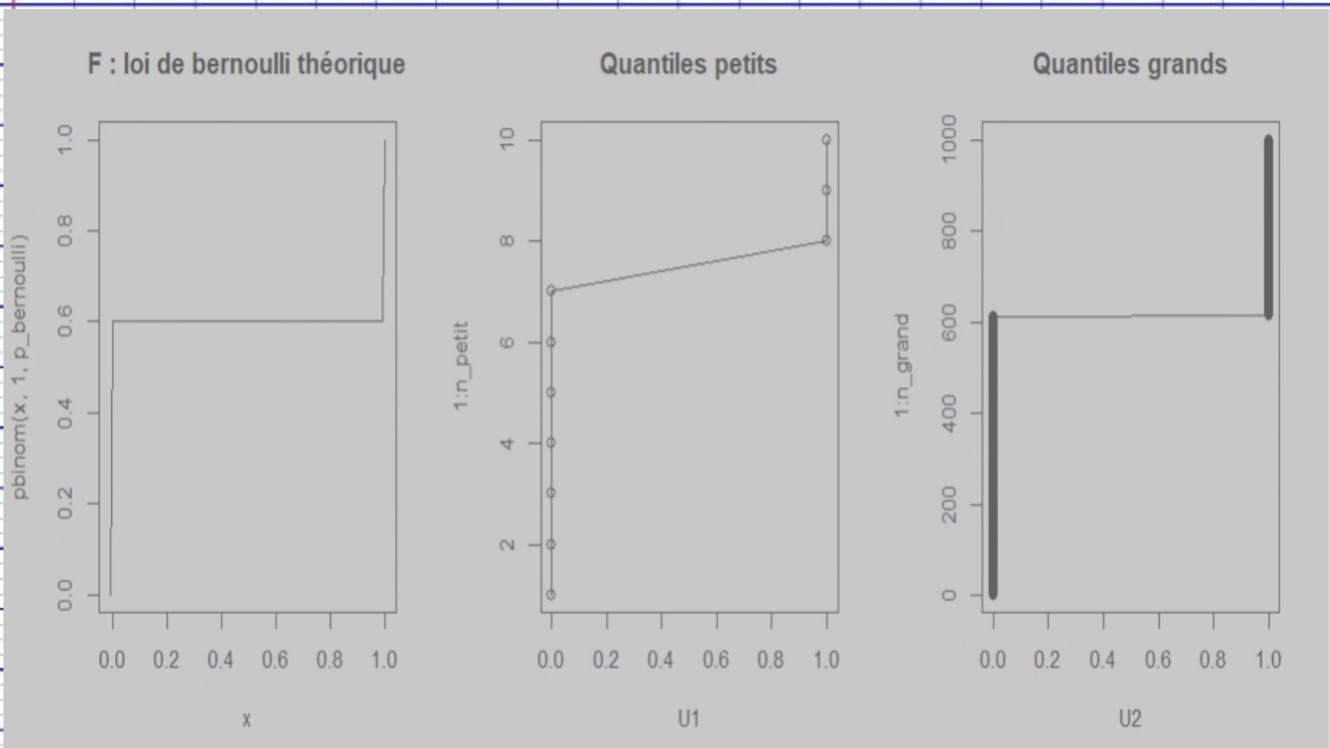
Résultats



• Simulation par la loi de Bernoulli.

```r
# La loi de bernoulli
n_petit = 10
n_grand = 1000
p_bernoulli = 0.4

F_inv_bernoulli <- function(u, p_bernoulli) {
  x = rep(0, length(u))
  for (i in 1:length(u)) {
    if (u[i] < 1 - p_bernoulli) {
      x[i] = 0
    } else {
      x[i] = 1
    }
  }
  return(x)
}

U1 = c(F_inv_bernoulli(runif(n_petit, 0, 1), p_bernoulli))
U1 = sort(U1)
U2 = c(F_inv_bernoulli(runif(n_grand, 0, 1), p_bernoulli))
U2 = sort(U2)

par(mfrow = c(1, 3))

curve(pbinom(x, 1, p_bernoulli), -0.01, 1, main='F : loi de bernoulli théorique')

plot(x = U1, y = 1:n_petit, type = "o", main='Quantiles petits')

plot(x = U2, y = 1:n_grand, type = "o", main='Quantiles grands')

```

Resultats.



Method de Box Muller pour la simulation de variables gaussiennes.

Exo 2

1) Montrons que $(X_1, X_2) \sim \mathcal{N}(0, I_2)$

Soit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \varphi(U,V)$

$= \left(\sqrt{2V}\cos(2\pi U), \sqrt{2V}\sin(2\pi U)\right)$

En faisant la Jacobienne de φ on a

$$\begin{pmatrix} -2\pi\sqrt{2V}\sin(2\pi U) & \frac{\sqrt{2}\cos(2\pi U)}{2\sqrt{V}} \\ 2\pi\sqrt{2V}\cos(2\pi U) & \frac{\sqrt{2}\sin(2\pi U)}{2\sqrt{V}} \end{pmatrix}$$

Calculons pen determinant :

$$\det(J\varphi(U,V)) = -\frac{2\pi\sqrt{2}\sqrt{V}\times\sqrt{2}}{2\sqrt{V}}\left(\sin^2(2\pi U) + \cos^2(2\pi U)\right)$$

$$\det(J\varphi(U,V)) = -2\pi$$

$$\Rightarrow \det(J\varphi(\varphi^{-1}(x_1, x_2))) = -2\pi$$

La loi expo a pour densité $f(v) = e^{-v}$ $v>0$ et que U et V étant indépendantes.

(2), $D = \{(u,v) : 0<u<1, 0<v<\infty\}$ et

$$\varphi^{-1}(u,v) = \left(\frac{1}{2\pi}\arccos\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right), \frac{x_1^2+x_2^2}{2}\right)$$

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{f_{U,V}\,\varphi^{-1}(x_1,x_2)}{|\det[J_{\varphi^{-1}}(x_1,x_2)]|}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \times f_{U,V} \times \left(\frac{1}{2\pi}\arccos\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right), \frac{x_1^2+x_2^2}{2}\right)$$

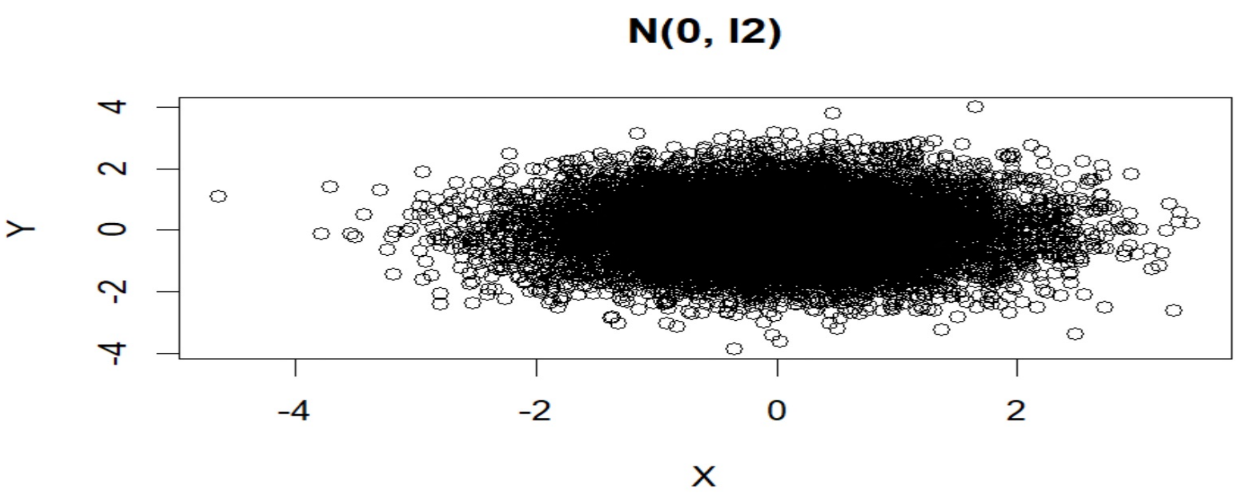
$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}\right)$$

D'où $(X_1,X_2) \sim \mathcal{N}(0, I_2)$

2) Illustration en R

```r
n <- 10000
U <- runif(n)
V <- rexp(n, rate = 1)
X1 <- sqrt(2 * V) * cos(2 * pi * U)
X2 <- sqrt(2 * V) * sin(2 * pi * U)
plot(X1, X2, xlab = "X1", ylab = "X2")

X <- rnorm(n)
Y <- rnorm(n)
plot(X, Y, xlab = "X", ylab = "Y", main = "N(0, I2)")

```

Resultat :



Exo 3

$X = (U, V)$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$
avec $U \sim \Gamma(\alpha, \theta)$ et $V \sim \Gamma(\beta, \theta)$
on pose $Y = \frac{U}{U+V}$ et $Z = U + V$.

1) Mque $\forall y \in \mathbb{R}$ on a

$$f_Y(y) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha) \times \Gamma(\beta)} y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1} \mathbb{1}_{]0,1[}(y).$$

$U = YZ$ et $V = Z(1-Y)$

$$f_{U,V}(u,v) = f_U(u) \times f_V(v)$$

$$= \frac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} u^{\alpha-1} e^{-\theta u} \cdot \frac{\theta^\beta}{\Gamma(\beta)} v^{\beta-1} e^{-\theta v}$$

$$= \frac{\theta^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} u^{\alpha-1} v^{\beta-1} e^{-\theta(u+v)}$$

$f_{Y,Z}(y,z) = f_{U,V}\big(u(y,z), v(y,z)\big) |J|$ avec

$$(u,v) = \big(yz, z(1-y)\big)$$

$$|J| = \begin{vmatrix} z & y \\ -z & 1-y \end{vmatrix} = z - zy + zy = z$$

Donc

$$f_{Y,Z} = \frac{\theta^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} z^{\alpha-1} y^{\alpha-1} z^{\beta-1} (1-y)^{\beta-1} e^{-\theta z} z$$

$$= \frac{\theta^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y^{\alpha-1} z^{\alpha+\beta-1} (1-y)^{\beta-1} e^{-\theta z}$$

$$f_Y(y) = \int_0^{+\infty} f_{Y,Z}(y,z)\, dz$$

$$f_Y(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\theta^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1} z^{\alpha+\beta-1} e^{-\theta z} dz$$

$$= \frac{y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha) \times \Gamma(\beta)} \cdot \Gamma(\alpha+\beta) \int_0^{+\infty} \frac{\theta^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)} z^{\alpha+\beta-1} e^{-\theta z} dz$$

or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\theta^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)} z^{\alpha+\beta-1} e^{-z\theta} dz = 1$

D'où le resultat :

$$f_Y(y) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha) \times \Gamma(\beta)} y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1}$$

2) La loi de Z

Par la transformée de Laplace on a

$\varphi_{U+V}(t) = \mathbb{E}\left(e^{-t(U+V)}\right) = \mathbb{E}\left(e^{-tU}\right)\mathbb{E}\left(e^{-tV}\right)$

car U et V sont independantes

On a $\mathbb{E}\left(e^{-t(U)}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tu} \frac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} u^{\alpha-1} e^{-\theta u} du$

$$= \frac{\theta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1} e^{-u(t+\theta)} du$$

En faisant un changement de variable $x = (t+\theta)u$

$\Rightarrow \mathbb{E}\left(e^{-tU}\right) = \left(\dfrac{\theta}{t+\theta}\right)^\alpha$

et $\mathbb{E}\left(e^{-tV}\right) = \left(\dfrac{\theta}{\theta+t}\right)^\beta$

$\varphi_Z(t) = \left(\dfrac{\theta}{\theta+t}\right)^{\beta+\alpha}$ Elle suit la loi Gamma de paramètre $\beta+\alpha$ et θ. $(\Gamma(\alpha+\beta, \theta))$

3) U et V indépendantes ?

On a la densité de la couple (U,V) donné par

$$f_{(U,V)}(x,y) = \frac{\theta^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} y^{\beta-1} e^{-\theta(x+y)} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*}(x,y)$$

En suivant le meme changement de variable en 1) $\Rightarrow$

$$\mathbb{E}(g(U,V)) = \int_0^1 \int_0^{+\infty} \frac{\theta^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)} u^{\alpha+\beta-1} e^{-\theta u} \frac{1}{B(\alpha,\beta)} v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1} du\, dv$$

On observe que la densité de (U,V) est à variable separées! $\Rightarrow$ U et V sont independants

4) Méthode de Monté-Carlo

Exo 4

```r
set.seed(42)
n <- 100000
x <- runif(n)
y <- runif(n)
points_dans_quart_de_disque <- sum(x^2 + y^2 <= 1)
probabilite <- points_dans_quart_de_disque / n
pi_estime <- 4 * probabilite
cat("Estimation de pi par la méthode de Monte-Carlo:", pi_estime, "\n")
```

le resultat

R 4.3.1 · C:/Users/dell/Downloads/simulation aleatoire/

```
> set.seed(42)
> n <- 100000
> x <- runif(n)
> y <- runif(n)
> points_dans_quart_de_disque <- sum(x^2 + y^2 <= 1)
> probabilite <- points_dans_quart_de_disque / n
> pi_estime <- 4 * probabilite
> cat("Estimation de pi par la méthode de Monte-Carlo:", pi_estime, "\n")
Estimation de pi par la méthode de Monte-Carlo: 3.14132
>
```

Simulation par la methode du rejet

Exo 5

1) Mq que $\mathbb{P}\left(U < \frac{1}{T}\right) = \frac{1}{c}$

On a $\mathbb{P}\left(U \leq \frac{1}{T}\right) = \mathbb{P}\left(U \leq \frac{f(x)}{c \times g(x)}\right)$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{c \times g(x)} \, dx$$

$$= \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}} f(x) \, dx = \frac{1}{c}$$

D'où $\mathbb{P}\left(U \leq \frac{1}{T}\right) = \frac{1}{c}$

2) Mq que, pour $B \subset \mathbb{R}^d$, on a

$$\mathbb{P}\left(X \in B \mid U < \frac{1}{T}\right) = \int_B f(x) \, dx,$$

On a $\mathbb{P}\left(X \in B \mid U \leq \frac{1}{T}\right) = \frac{\mathbb{P}(U \leq 1/T \cap X \in B)}{\mathbb{P}(U \leq \frac{1}{T})}$

Or X et U indépendants

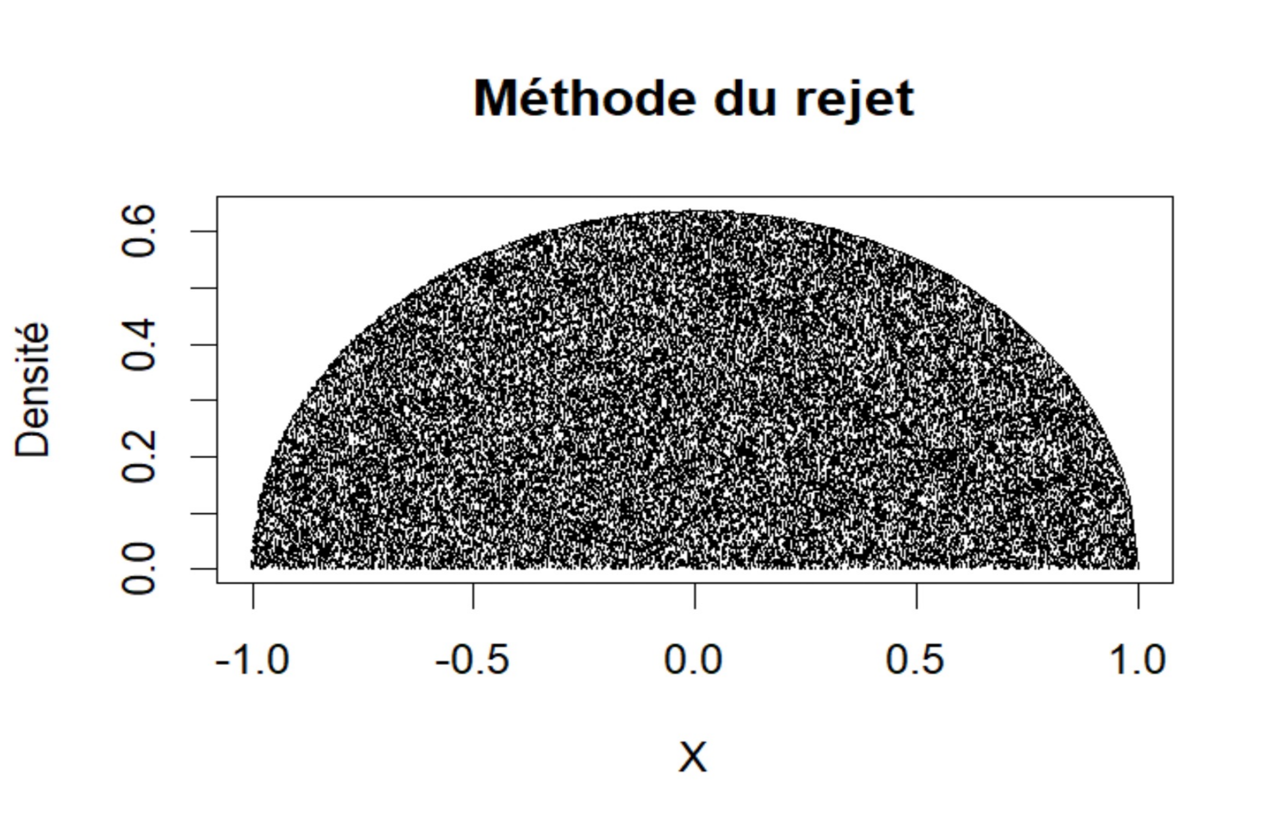
$$\frac{\mathbb{P}(U \leq 1/T \cap X \in B)}{\mathbb{P}(U \leq \frac{1}{T})} \overset{!}{=} \frac{\cancel{\mathbb{P}(U \leq 1/T)}\, \mathbb{P}(X \in B)}{\cancel{\mathbb{P}(U \leq \frac{1}{T})}}$$

$$= \mathbb{P}(X \in B)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x) \, dx$$

```r
N <- 100000
abs <- rep(0, N)
ord <- rep(0, N)
U <- runif(N, -1, 1)
V <- runif(N, 0, 1)
y <- (2/pi) * sqrt(1-U^2)

for (i in 1:N) {
  if (V[i] < y[i]) {
    abs[i] <- U[i]
    ord[i] <- V[i]
  }
}

plot(abs, ord, cex = 0.2, main = "Méthode du rejet", xlab = "X", ylab = "Densité")
curve((2/pi) * sqrt(1 - x^2), from = -1, to = 1, add = TRUE)


```

Voici le resultat



Enfin