המרחב האוקלידי ה-n מימדי

<u>הגדרה</u>:

יהיו $\underline{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\\vdots\\a_n\end{pmatrix} \quad \underline{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\\vdots\\b_n\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

המכפלה הסקלרית שלהם מוגדרת ע"י : $\underline{a}\cdot\underline{b} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + \cdots\cdots + a_n\cdot b_n$

למשל : $(1,2,3)^t \cdot (3,4,7)^t = 1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 7 = 32$

<u>תכונות המכפלה הסקלרית</u>

א. סימטריות $\underline{a}^\circ\underline{b} = \underline{b}^\circ\underline{a}$

ב. ליניאריות $\underline{a}^\circ(\underline{b}+\underline{c}) = \underline{a}^\circ\underline{b} + \underline{a}^\circ\underline{c}$

ג. הומוגניות $(\lambda\underline{a})^\circ\underline{b} = \lambda(\underline{a}^\circ\underline{b}) \quad \lambda\in\mathbb{R}$

ד. חיוביות $\underline{a}^\circ\underline{a} \geq 0$ ובנוסף $\underline{a}^\circ\underline{a} = 0$ אמ"מ $\underline{a}=0$

- <u>הערה:</u>

אם $\underline{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\\vdots\\b_n\end{pmatrix} \quad \underline{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$ הם וקטורי עמודה ב- $\mathbb{R}^n$ אזי

$\underline{a}^\circ\underline{b} = \underline{a}^t_{1\times n}\cdot\underline{b}_{n\times 1} = a_1\cdot b_1 + \cdots\cdots + a_n\cdot b_n$ (כפל מטריצות)

<u>תרגיל</u>:

תהא $A\in M|^{\mathbb{R}}_{n\times m}$ ויהיו $\underline{X}\in\mathbb{R}^n$, $\underline{Y}\in\mathbb{R}^m$. הראו כי : $(A\underline{Y})\circ\underline{X} = (A^t\underline{X})\circ\underline{Y}$

$(A\underline{Y}) \in\mathbb{R}^n \quad \underline{X}\in\mathbb{R}^n = (A^t\underline{X})\in\mathbb{R}^m \quad \underline{Y}\in\mathbb{R}^m$

<u>פתרון</u>:

$$(A\underline{Y})\circ\underline{X} \underset{\text{ע"פ ההערה}}{=} (\underset{1Xn}{A\underline{Y}})^t\circ\underset{nX1}{\underline{X}} \underset{\text{משוחלפת}}{=} \underline{Y}^t\underline{A}^t\underline{X} \underset{\text{אסוציאטיביות}}{=} \underset{1Xm}{\underline{Y}^t}(\underset{mX1}{\underline{A}^t\underline{X}}) \underset{\text{ע"פ ההערה}}{=} \underline{Y}^\circ(A^t\underline{X}) \underset{\text{סימטריות}}{=} (A^t\underline{X})^\circ\underline{Y}$$

למשל:

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix},\quad \underline{X}=\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix},\quad \underline{Y}=\begin{pmatrix}10\\11\end{pmatrix}$$

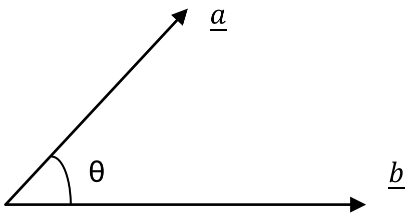
הנורמה (אורך הוקטור)

$$\| \underline{a} \| = \sqrt{\underline{a} \circ \underline{a}} \quad \sqrt{a_2^1 + a_2^2 + \cdots\cdots + a_n^2}$$

(*) $\| \underline{a} \| \geq 0$ ובנוסף $\| \underline{a} \| = 0$ אמ"מ $\underline{a} = 0$

פרוש גיאומטרי של מכפלה סקלרית ב- $\mathbb{R}^2$ או ב- $\mathbb{R}^3$:

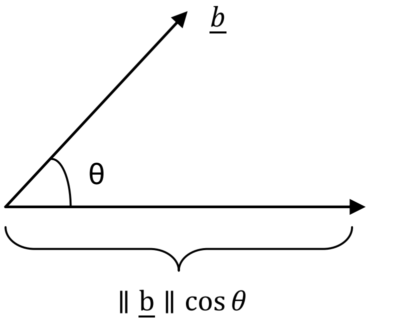
$$\hat{\underline{a}} \circ \underline{b} = \| \underline{a} \| \cdot \| \underline{b} \| \cos\theta$$



(*) אם $\hat{\underline{a}}$ וקטור היחידה ($\| \hat{\underline{a}} \| = 1$) אזי

$$\hat{\underline{a}} \circ \underline{\mathrm{b}} = \| \underline{\mathrm{b}} \| \cos\theta$$

הוא אורך ההיטל של $\underline{\mathrm{b}}$ על הישר העובר דרך $\hat{\underline{a}}$



<u>אי שוויון קושי שוורץ</u>

לכל $\underline{a}, \underline{\mathrm{b}} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ מתקיים $\left|\underline{a} \circ \underline{b}\right| \leq \| \underline{a} \| \circ \| \underline{b} \|$ $(*)$

<u>בנוסף</u> (שאלה 7 יחידה 12)

יש שוויון ב- $(*)$ אמ"מ $\underline{a}, \underline{\mathrm{b}}$ תלויים ליניארית .

<u>תרגיל:</u>

תהא $\mathrm{A} \in M|_{n\times n}^{\mathbb{R}}$ ויהא $0 \neq \underline{v} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$. הראו כי אם $\left|(A\underline{v}) \circ \underline{v}\right| = \| A\underline{v} \| \circ \| \underline{v} \|$ אזי $\underline{v}$ הוא ו"ע של A .

$\left|\underline{a} \circ \underline{b}\right| = \| \underline{a} \| \circ \| \underline{b} \|$ אמ"מ $\underline{a}, \underline{\mathrm{b}}$ תלויים (זה אומר שהזוית ביניהם $\theta = 0$)

<u>פתרון</u>:

אם נסמן $\underline{\mathrm{w}} = A\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ אזי מתקיים $\left|\underline{w} \circ \underline{v}\right| = \| \underline{w} \| \circ \| \underline{v} \|$

לכן ע"פ שאלה 7 ביחידה 12 $\Leftarrow$ $\{\underline{v}, \underline{w} = A\underline{v}\}$ תלויה ליניארית $\Leftarrow$ קיימים $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ שלא שניהם אפס כך ש- $\alpha\underline{v} + \beta A\underline{v} = \underline{0}$ $(*)$

נשים לב כי בהכרח $\beta \neq 0$ כי אחרת נקבל מ- $(*)$ כי $\alpha \underline{v} = \underline{0}$ אבל מכיוון ש- $\underline{v} \neq \underline{0}$ אזי גם $\alpha = 0$ בסתירה לבחירת α, β .

מכאן כי : $A\underline{v} = -\frac{\alpha}{\beta}\underline{v}$

מכיוון ש- $\underline{v} \neq \underline{0}$ אזי $\underline{v}$ הוא ו"ע של A (השייך לע"ע $-\frac{\alpha}{\beta}$)

תרגיל:

א. תהא $A \in M|_{n\times k}^{\mathbb{R}}$. הראו כי עבור $\underline{x} \in \mathbb{R}^k$ מתקיים $A^tA\underline{x} = 0$ אמ"מ $A\underline{x} = 0$ והסיקו כי $\rho(A) = \rho(A^tA)$ ($\rho(A^tA) \leq \rho(A)$)

ב. תהא $\{\underline{u}_1, \cdots\cdots, \underline{u}_k\}$ קבוצה בת"ל ב- $\mathbb{R}^n$ ותהא

$$B = \begin{pmatrix} \underline{u}_1{}^\circ\underline{u}_1 & \underline{u}_1{}^\circ\underline{u}_2 & \cdots & \underline{u}_1{}^\circ\underline{u}_k \\ \underline{u}_2{}^\circ\underline{u}_1 & \underline{u}_2{}^\circ\underline{u}_2 & \cdots & \underline{u}_2{}^\circ\underline{u}_k \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ \underline{u}_k{}^\circ\underline{u}_1 & \underline{u}_k{}^\circ\underline{u}_2 & \cdots & \underline{u}_k{}^\circ\underline{u}_k \end{pmatrix}$$

הוכיחו כי B רגולרית ולכסינה (מעל $\mathbb{R}$) . רמז: הסתכל על המטריצה $A \in M|_{n\times k}^{\mathbb{R}}$ שעמודותיה הן $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots\dots, \underline{u}_k$.

פתרון:

א. כיוון ראשון : נתון $A\underline{x} = 0$ (1) צ.ל.: $A^tA\underline{x} = 0$ אבל זה ברור ע"י כפל של (1) ב- A^t משמאל.

ב. כיוון שני : נתון $A^tA\underline{x} = 0$ (2) צ.ל. כי $A\underline{x} = 0$. נכפול את (2) משמאל ב- x^t נקבל:

$$\underset{1Xk}{\underline{x}^t}\ \underset{kXn}{A^t}\ \underset{nXk}{A}\ \underset{kX1}{\underline{x}} = 0$$

$$(A\underline{x})^\circ(A\underline{x}) = 0 \Leftrightarrow (A\underline{x})^t\,{}^\circ(A\underline{x}) = 0$$

ע"פ הערה (*) $\Leftrightarrow$ "חיוביות"

$$A\underline{x} = \underline{0}$$

מסקנה:

$$\underline{P}_A : \{\underline{x} \in \mathbb{R}^k \,|A\underline{x} = \underline{0}\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^k | A^tA\underline{x} = \underline{0}\} = \underline{P}_{A^tA}$$

$A\underline{x} = 0$ מערכת של n משוואות ב- k נעלמים
ρ(A) – מספר נעלמים קשורים
k- ρ(A) – מספר נעלמים חופשיים

$$\Downarrow$$

$$\underset{k-\rho(A)}{\overset{||}{dim\underline{P}_A}} = \underset{k-\rho(A^tA)}{\overset{||}{\dim \underline{P}_{A^tA}}}$$

$\Leftarrow$ $\rho(A) = \rho(A^tA)$

ב. נתבונן במטריצה :

$$A=\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{u}_1 & \underline{u}_2 & \cdots\cdots\cdots & \underline{u}_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \in M^{\mathbb{R}}_{nXk}$$

כיוון ש- $\underline{u}_1, \underline{u}_2 \ldots\ldots, \underline{u}_k$ בת"ל אזי $\rho(A)=k$

ולכן לפי סעיף (א) $\rho(A^tA)=k$

$$\boxed{\begin{matrix}(A^tA)^{\,t}= A^t(A^t)^{\,t} \\ || \\ A^tA\end{matrix}}$$

אבל

$$A^tA=\begin{pmatrix} \cdots & \underline{u}_1^t & \cdots \\ \cdots & \underline{u}_2^t & \cdots \\ \cdots & \underline{u}_3^t & \cdots \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ \cdots & \underline{u}_k^t & \cdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{u}_1, & \underline{u}_2, & \ldots\ldots, & \underline{u}_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \underline{u}_1{}^\circ\underline{u}_1 & \underline{u}_1{}^\circ\underline{u}_2 & \cdots & \underline{u}_1{}^\circ\underline{u}_k \\ \underline{u}_2{}^\circ\underline{u}_1 & \underline{u}_2{}^\circ\underline{u}_2 & \cdots & \underline{u}_2{}^\circ\underline{u}_k \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ \underline{u}_k{}^\circ\underline{u}_1 & \underline{u}_k{}^\circ\underline{u}_2 & \cdots & \underline{u}_k{}^\circ\underline{u}_k \end{pmatrix}=B\in M|^{\mathbb{R}}_{k\times k}$$

כלומר $\rho(B)=k$ $\Leftarrow$ $B\in M^{\mathbb{R}}_{kXk}$ היא מטריצה רגולרית.

$$\begin{matrix} B \\ || \\ A^tA \end{matrix}$$

בנוסף B מטריצה ממשית סימטרית $\Leftarrow$ B לכסינה (מעל $\mathbb{R}$) (משפט $\overline{VII}.28$ כל מטריצה ממשית וסימטרית לכסינה מעל $\mathbb{R}$)

וקטורים אורתוגונאליים.

<u>הגדרה</u> : שני וקטורים $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$ נקראים אורתוגונאליים אם $\underline{a}\cdot\underline{b}=0$.

במקרה זה מסמנים $\underline{a}\perp\underline{b}$

המשלים האורתוגונאלי.

תהא $S\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה לא ריקה

המשלים האורתוגונאלי של S הוא :

$$S^\perp=\{\underline{x}\in\mathbb{R}^n \mid \underline{s}\in S \text{ וקטור לכל ניצב } \underline{x}\}$$

(*) $S^\perp$ הוא תת-מרחב של $\mathbb{R}^n$ (לא ריק , סגור לחיבור וקטורים ולכפל סקלר)

(*) $S^\perp=(SPS)^\perp$ (הכלה בשני הכיוונים)

(*) $\{\underline{0}\}^\perp=\mathbb{R}^n$ $(\mathbb{R}^n)^\perp=\{\underline{0}\}$

<u>**הערה:**</u>

בד"כ מסכימים שהקבוצה הריקה היא הבסיס של תת-המרחב $\{\underline{0}\}$

לכן אם $S\neq 0$ אזי

$$S^\perp=(SPS)^\perp=\{\underline{0}\}^\perp=\mathbb{R}^n$$

<u>מציאת בסיס למשלים האורתוגונאלי</u>

יהי $u = sp\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots\ldots, \underline{u}_k\}$ תת מרחב ב- $\mathbb{R}^n$. רוצים למצוא $u^\perp$.
נשים לב כי $\underline{x} \in u^\perp$ אמ"מ

$$\begin{gathered}\underline{u}_1 \circ \underline{x} = 0 \\ \underline{u}_2 \circ \underline{x} = 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{u}_k \circ \underline{x} = 0 \\ \Longleftrightarrow \end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\underline{u}_1^t \circ \underline{x} = 0 \\ \underline{u}_2^t \circ \underline{x} = 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{u}_k^t \circ \underline{x} = 0 \\ \Longleftrightarrow \end{gathered}$$

$$\begin{pmatrix} \cdots & \underline{u}_1^t & \cdots \\ \cdots & \underline{u}_2^t & \cdots \\ \cdots & \underline{u}_3^t & \cdots \\ & \vdots & \\ & \vdots & \\ \cdots & \underline{u}_k^t & \cdots \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{0}$$

כלומר, כדי למצוא את $u^\perp$ צריך לדרג את המטריצה A ששורותיה הן הוקטורים $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots\ldots, \underline{u}_k$. מרחב הפתרונות של $A\underline{x} = \underline{0}$ הוא $u^\perp$.

<u>טענה</u> 9.$\overline{VII}$: $u^\perp = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n | A\underline{x} = \underline{0}\}$

הערה: אם $S=\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots\ldots, \underline{u}_k\} \in \mathbb{R}^n$ היא <u>תת-קבוצה</u> של $\mathbb{R}^n$ אזי ראינו כי

$$S^\perp = (SPS)^\perp$$

כלומר, אפשר לסמן u=SPS ולמצוא את $u^\perp$ כמו קודם.

<u>משפט</u> 10.$\overline{VII}$: יאה $\underline{u} \subseteq \mathbb{R}^n$ תת-מרחב אזי

א. $\mathbb{R}^n = u \oplus u^\perp$

ב. $(u^\perp)^\perp = u$

תרגיל:

תהא $\underline{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ תת-קבוצה . למה שווה $(S^{\perp})^{\perp}$?

פתרון:

$$(S^{\perp})^{\perp} = [(SPS)^{\perp}]^{\perp} = SPS$$

לפי משפט $\underline{\overline{VII}}$.10 ב'

תרגיל:

יהיו U,W תתי-מרחב ב- $\mathbb{R}^n$. הוכיחו כי

$$(*)(U+W)^{\perp} = (U \cup W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$$

פתרון:

נוכיח את שלושת ההכלות הבאות:

$$(U+W)^{\perp} \subseteq (U \cup W)^{\perp} \subseteq U^{\perp} \cap W^{\perp} \subseteq (U+W)^{\perp}$$

א. $(U+W)^{\perp} \subseteq (U \cup W)^{\perp}$

הוכחה: יהי $\underline{v} \in (U+W)^{\perp}$ אזי $v \circ (\underline{u}+\underline{w}) = 0$ לכל $\underline{u} \in U, \underline{w} \in W$

בפרט עבור $\underline{u} = 0$ נקבל כי $\underline{v} \circ \underline{w} = 0$ לכל $\underline{w} \in W$

ועבור $\underline{w} = 0$ נקבל כי $\underline{v} \circ \underline{u} = 0$ לכל $\underline{u} \in U$

וביחד $\underline{v} \circ \underline{x} = 0$ לכל $\underline{x} \in U \cup W$

כלומר $\underline{v} \in (U \cup W)^{\perp}$

ב. צ.ל. כי

$$(U \cup W)^{\perp} \subseteq U^{\perp} \cap W^{\perp}$$

הוכחה:

יהי $\underline{v} \in (U \cup W)^{\perp}$

אזי $\underline{v} \circ \underline{x} = 0$ לכל $\underline{x} \in U \cap W$

ז.א. $\underline{v} \circ \underline{u} = 0$ לכל $\underline{u} \in U$ וגם $\underline{v} \circ w = 0$ לכל $w \in W$

$\Leftarrow$ $v \in U^{\perp}$ וגם $w \in W^{\perp}$

ז.א. $\underline{v} \subseteq U^{\perp} \cap W^{\perp}$

ג. צ.ל. כי $U^{\perp} \cap W^{\perp} \subseteq (U+W)^{\perp}$

הוכחה:

יהי $\underline{v} \subseteq U^{\perp} \cap W^{\perp}$

אזי $\underline{v} \in W^{\perp}$ וגם $\underline{v} \in U^{\perp}$

$\Leftarrow$ $\underline{v} \circ \underline{u} = 0$ לכל $\underline{u} \in U$

$\underline{v} \circ \underline{w} = 0$ לכל $\underline{w} \in W$

$\Leftarrow$ $\underline{v} \circ (\underline{u} + \underline{w}) = 0$ לכל $\underline{u} \in U$, $\underline{v} \in V$

ז.א. $\underline{v} \in (U + W)^{\perp}$

<u>הערה</u>: את השוויון $(U \cup W)^{\perp} = (U + W)^{\perp}$ ניתן להוכיח גם באופן הבא:

מתקיים : $SP(U \cup W) = SPU + SPW = U + W$

ולכן :

$$(U \cup W)^{\perp} \underset{S^{\perp} = (SPS)^{\perp}}{=} \left(SP(U \cup W)\right)^{\perp} = (U + W)^{\perp}$$

<u>תרגיל:</u>

יהיו U,W שני תתי-מרחבים של $\mathbb{R}^n$

הוכיחו / הפריכו:

א. אם $U \cap W = \{\underline{0}\}$ אזי $U^{\perp} \cap W^{\perp} = \{\underline{0}\}$

ב. אם $U + W = \mathbb{R}^n$ אזי $U^{\perp} \cap W^{\perp} = \{\underline{0}\}$

ג. אם $U \cap W = \{\underline{0}\}$ אזי $W^{\perp} + U^{\perp} = \mathbb{R}^n$ $\quad \boxed{(W^{\perp} + U^{\perp})^{\perp} = (W^{\perp})^{\perp} \cap (U^{\perp})^{\perp} = W \cap U = \{0\}}$

ד. אם $U + W = \mathbb{R}^n$ אזי $U^{\perp} + W^{\perp} = \mathbb{R}^n$

<u>פתרון:</u>

א. לא נכון . דוגמא נגדית $U = W = \{0\}$ $\Leftarrow$ $U^{\perp} = W^{\perp} = \mathbb{R}^n$

ולכן $U^{\perp} \cap W^{\perp} = \mathbb{R}^n$ בעוד ש- $U \cap W = \{0\}$

ב. נכון

$$U^{\perp} \cap W^{\perp} \underset{\text{ע"פ תרגיל קודם } (U+W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}}{=} (U + W)^{\perp} \underset{U + W = \mathbb{R}^n}{=} (\mathbb{R}^n)^{\perp} = \{\underline{0}\}$$

שוויון קודם,
בתרגיל הקודם

ג. נכון

$$(U^{\perp} + W^{\perp})^{\perp} \underset{\text{ע"פ } (*)}{=} (U^{\perp})^{\perp} \cap (W^{\perp})^{\perp} = U \cap W = \{\underline{0}\}$$

לכן $U^{\perp} + W^{\perp} \underset{\text{ע"פ } \overline{VIII.10}\text{ב'}}{=} \left((U^{\perp} + W^{\perp})^{\perp}\right)^{\perp} = \{\underline{0}\}^{\perp} = \mathbb{R}^n$

שוויון קודם,
בתרגיל הקודם

ד. לא נכון. דוגמא נגדית : $U = W = \mathbb{R}^n$

$\Leftarrow$ $U^{\perp} = W^{\perp} = \{\underline{0}\}$

כלומר $U + W = \mathbb{R}^n$ אבל $U^{\perp} + W^{\perp} = \{\underline{0}\}$

תרגיל:

תהא $A\in M^{\mathbb{R}}_{nXn}$ מטריצה סימטרית ונגדיר ט"ל $T_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ ע"י $T_A(\underline{V})=A\underline{V}$

הוכיחו כי $KERT_A=(IMT_A)^{\perp}$

פתרון:

ע"פ למה $\overline{VI}.10$ $\quad KERT_A=$ מרחב הפתרונות של $A\underline{X}=\underline{0}$

$MT_A=$ מרחב העמודות של A

צריך לקחת $A=A^t$ תהי נתונה מערכת משוואות ליניארית הומוגנית $A\underline{x}=\underline{0}$ כאשר $A\in M^{\mathbb{R}}_{mXn}$ אזי מרחב הפתרונות של המערכת מתלכד עם המשלים האורתוגונאלי של מרחב השורות של המטריצה A

⇐ בעזרת טענה $\overline{VIII}.9$ נקבל כי

$$(IMT_A)^{\perp}=\{\underline{X}\in\mathbb{R}^n\,|\,A^t\underline{X}=\underline{0}\}=\{\underline{X}\in\mathbb{R}^n\,|\,A\underline{X}=\underline{0}\}=KERT_A$$

A סימטרית

SP(מרחב העמודות של A)

אורתוגנלי לשורות

$IMT_A=SP\{T_A(e_1),T_A(e_2),\ldots\ldots,T_A(e_n),\}=sp\{Ae_1,Ae_2,\ldots\ldots,Ae_n\}$

בסיסים אותונורמליים

תהא $K=\{\underline{u}_1,\underline{u}_2,\ldots\ldots,\underline{u}_k\}\in\mathbb{R}^n$ תת-קבוצה לא ריקה

כיוון ש- $S^{\perp}=(SPS)^{\perp}$

(*) K היא קבוצה אורתוגונאלית אם $\underline{0}\notin K$ וכל שני וקטורים ב-K אורתוגונאליים.

נובע כי $(IMT_A)^{\perp}=(\{Ae_1,Ae_2,\ldots\ldots,Ae_n\})^{\perp}$

עמודות של A

(*) K היא קבוצה אותונורמלית אם K אורתוגונאלית ובנוסף $\|\underline{u}_i\|=1$ עבור $i=1,\ldots,k$

כלומר אמ"מ $\underline{u}_i\circ\underline{u}_j=\delta_{ij}$ לכל $i,j=1,2,\ldots,k$

משפט $\overline{VIII}.12$ קבוצה אורתוגונאלית היא בת"ל

משפט $\overline{VIII}.14$ אם $B=(\underline{u}_1,\underline{u}_2,\ldots,\underline{u}_n)$ היא בסיס אותונורמלית של $\mathbb{R}^n$ אזי

$(a_1u_1+a_2u_2)(u_1,u_2)+(a_1v_1+a_2v_2)(\underline{v}_1,\underline{v}_2)$

1 0 $\qquad$ 0 1

$\underline{a}=(\underline{a}\circ\underline{u})\underline{u}+(\underline{a}\circ\underline{v})\underline{v}$

$(\underline{a}_1\underline{u}_1+\underline{a}_2\underline{u}_2)(\underline{u}_1,\underline{u}_2)=(\underline{a}_1u_1^2,\underline{a}_2u_2^2)=(\underline{a}_1,\underline{a}_2)$

א. לכל $\underline{a}\in\mathbb{R}^n$ מתקיים $\underline{a}=\sum_{i=1}^{n}(\underline{a}\circ\underline{u}_i)\underline{u}_i$

ב. לכל $\underline{a},\underline{b}\in\mathbb{R}^n$ מתקיים $\underline{a}\circ\underline{b}=\sum_{i=1}^{n}(\underline{a}\circ\underline{u}_i)(\underline{b}\circ\underline{u}_i)$

ג.   לכל $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $\| a \|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\underline{a} \circ \underline{u}_i)^2$

שימו לב כי מ- א' ⇐ אם B בסיס אורתונורמלי אזי קל לחשב קואורדינטות של וקטור $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ ביחס לבסיס B.

היטל אורתוגונאלי על תת- מרחב

יהא U תת-מרחב של $\mathbb{R}^n$ אזי ע"פ משפט $\overline{VIII}.10$

$$\mathrm{U} \oplus U^{\perp} = \mathbb{R}^n$$

לכן כל וקטור $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ ניתן להציג באופן יחיד בצורה $\underline{\mathrm{v}} = \underline{\mathrm{u}} + \underline{u}'$ כאשר $\underline{\mathrm{u}} \in \mathrm{U}\,,\ \underline{u}' \in U^{\perp}$

ההתאמה $\mathrm{P}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ המוגדרת ע"י $\mathrm{P}(\underline{v}) = \underline{\mathrm{u}}$ היא ט"ל שנקראת ההיטל האורתוגונאלי של $\underline{v}$ על תת המרחב של U (במקביל ל- $U^{\perp}$)

כאשר $U' = 0$

שימו לב כי לכל $\underline{u} \in \mathrm{U}$ מתקיים $\mathrm{P}(\underline{u}) = \underline{\mathrm{u}}$

$U' = 0$

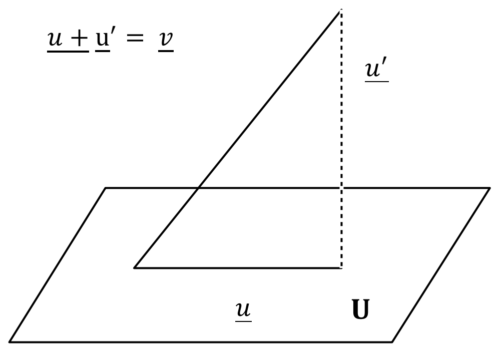
בנוסף $\mathrm{IMP} = \mathrm{U}$ $\underline{\mathrm{u}} + 0 \to \underline{\mathrm{u}}$

$\mathrm{KERP} = U^{\perp}$ כאשר $u = 0$

$P^2 = \mathrm{P}$ $\mathrm{P}(\underline{v}) = \underline{\mathrm{u}}$

$P\left(P(\underline{v})\right) = p(\underline{u}) = \underline{u}$

איך למצוא את ההיטל האורתוגונאלי של $\underline{v}$ על תת מרחב U



$$< \underline{u}_{\mathrm{i}}, \underline{\mathrm{u}} > + < \underline{u}', \underline{u}_i > = < \underline{u}, \underline{u}_i >$$

אם $\mathrm{B} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \ldots\ldots, \hat{u}_k)$ הוא בסיס אורתונורמלי של U אזי:

$$\mathrm{P}(\underline{\mathrm{v}}) = \underline{\mathrm{u}} = (\hat{u}_1 \circ \underline{v})\hat{u}_1 + (\hat{u}_2 \circ \underline{v})\hat{u}_2 + \ldots\ldots + (\hat{u}_k \circ \underline{v})\hat{u}_k$$

איברי
הבסיס

ובנוסף $\underline{u}' = \underline{v} - \underline{u}$

תהליך גרם-שמידט למציאת בסיס אורתונורמלי

יהי $\mathbb{R}^n \supseteq V$ תת- מרחב עם בסיס $\left(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots\ldots, \underline{v}_k\right)$

תהליך גרם שמידט הוא תהליך בן k שלבים כאשר בשלב ה- j-י בונים בסיס אורתונורמלי.

$\left(\underline{\hat{u}}_1, \underline{\hat{u}}_2, , \ldots., \underline{\hat{u}}_j\right)$

לתת מרחב

$sp(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots\ldots, \underline{v}_j)$

שלב 1:

נסמן $\underline{\hat{u}}_1 = \frac{\underline{v}_1}{\|\underline{v}_1\|}$ אזי $\left\{\underline{\hat{u}}_1\right\}$ הוא בסיס אורתונורמלי עבור $sp\ \{\underline{v}_1\}$

שלב כללי :

נניח כי מצאנו בסיס אורתונורמלי $\left(\underline{\hat{u}}_1, \underline{\hat{u}}_2, , \ldots., \underline{\hat{u}}_j\right)$ עבור $U_{\mathrm{j}} = sp\{\ \underline{v}_1, \ldots\ldots, \underline{v}_j\ \}$

ההיטל האורתוגונאלי של $\underline{v}_{\mathrm{i+j}}$ על U_{j} הוא :

$$\underline{\mathrm{u}}_{\mathrm{j}+1} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{j}} (\underline{\hat{u}}_i\ \circ\ \underline{v}_{j+1})\underline{\hat{u}}_i \qquad \left(\sum_{i=1}^{j} (\underline{\hat{u}}_i\ \circ\ \underline{u}_{j+1})\underline{\hat{u}}_i =\right)$$

$\Leftarrow\ \underline{u}'_{\mathrm{j}+1} = \underline{\mathrm{v}}_{\mathrm{j}+1} - \underline{\mathrm{u}}_{\mathrm{j}+1}$

ניצב לתת-מרחב U_{j} . ננרמל אותו :

$$\underline{\hat{u}}_{\mathrm{j}+1} = \underline{u}'_{j+1}\ /\ \|\ \underline{\hat{u}}_{\mathrm{j}+1}\ \|$$

תרגיל:

א. מצאו בסיס אורתונורמלי לתת-מרחב

$$\mathrm{U} = sp\{\ \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}\}$$

ב. מצאו את ההיטל האורתוגונאלי של $\underline{e}_1$ על U.

ג. מצאו בסיס אורתונורמלי ל- $U^{\perp}$

פתרון:

א. נבצע גרם-שמידט על $\left(\underline{\mathrm{v}}_1, \underline{\mathrm{v}}_2, \underline{\mathrm{v}}_3\right)$

שלב 1:

$$\underline{\hat{u}}_1 = \frac{\underline{\mathrm{v}}_1}{\|\ \underline{\mathrm{v}}_1\ \|} = \frac{\underline{v}_1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

שלב 2:

$$\underline{u}_2' = \underline{\mathrm{v}}_2 - \left(\underline{\hat{u}}_1 \circ \underline{v}_2\right)\underline{\hat{u}}_1 =$$

$$\begin{pmatrix}3\\3\\-1\\-1\end{pmatrix} - \left[\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3\\3\\-1\\-1\end{pmatrix}\right]\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\-1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ נרמול

$$\underline{\hat{u}}_2 = \frac{\underline{\mathrm{u}}_2'}{\|\ \underline{\mathrm{u}}_2'\ \|} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

<u>שלב 3:</u>

$$\underline{u}_3' = \underline{\mathrm{v}}_3 - \left(\underline{\mathrm{v}}_3 \circ \underline{\hat{u}}_1\right)\underline{\hat{u}}_1 - = \underline{\mathrm{v}}_3 - \left(\underline{\mathrm{v}}_3 \circ \underline{\hat{u}}_2\right)\underline{\hat{u}}_2$$

$$\begin{pmatrix}-2\\0\\6\\8\end{pmatrix} — 2068 \circ \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} — 2068 \circ \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-2\\0\\6\\8\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Leftarrow \underline{\hat{u}}_3 = \frac{\underline{u'}_3}{\|\underline{u}'_3\|} = \frac{\underline{u'}_3}{\sqrt{4}} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

ולכן הבסיס האורתונורמלי המבוקש הוא:

$$\mathrm{B} = \left(\underline{\hat{u}}_1, \underline{\hat{u}}_2, \underline{\hat{u}}_3\right)$$

ב. ההיטל האורתוגונאלי של $\underline{e}_1$ על U הוא

$$\underline{P}\left(\underline{e}_1\right) = \left(\underline{e}_1 \circ \underline{\hat{u}}_1\right)\underline{\hat{u}}_1 + \left(\underline{e}_1 \circ \underline{\hat{u}}_2\right)\underline{\hat{u}}_2 + \left(\underline{e}_1 \circ \underline{\hat{u}}_3\right)\underline{\hat{u}}_3$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

ג. הוקטור $\underline{w} = \underline{e}_1 - \mathrm{P}\left(\underline{e}_1\right) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix}3\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

ניצב ל-U כלומר $\underline{w} \in \mathrm{U}^{\perp}$

מצד שני $\mathrm{U}^{\perp} \oplus \mathrm{U} = \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ ו- $dimU = 3 \Leftarrow dimU^{\perp} = 1$

ומכאן $\mathrm{U}^{\perp} = sp(\underline{w})$ ואם ננרמל את $\underline{w}$ נקבל

$$\underline{\hat{w}} = \frac{\underline{w}}{\| \underline{w} \|} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן $(\underline{w})$ הוא בסיס אורתונורמלי עבור $U^{\perp}$

$$\underline{P}(\underline{e_2}) = (\underline{e_2} \circ \underline{\hat{u}_1})\underline{\hat{u}_1} + (\underline{e_2} \circ \underline{\hat{u}_2})\underline{\hat{u}_2} + (\underline{e_2} \circ \underline{\hat{u}_3})\underline{\hat{u}_3}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+1-1 \\ 1+1+1 \\ 1-1-1 \\ 1-1+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ (כפולה של $\underline{u_3}$)

<u>דרך אחרת:</u>

$$\mathrm{U} = sp\{\underline{\hat{u}_1}, \underline{\hat{u}_2}, \underline{\hat{u}_3}\}$$

$$\mathrm{u}^{\perp} = \{\underline{X} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} | \mathrm{A}\underline{\mathrm{X}} = \underline{0}\}$$

כאשר

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \dots & \underline{\hat{u}_1} & \dots \\ \dots & \underline{\hat{u}_2} & \dots \\ \dots & \underline{\hat{u}_3} & \dots \end{pmatrix}$$

פותרים את המערכת $\mathrm{A}\underline{\mathrm{X}} = \underline{0}$ ומוצאים בסיס ל- $u^{\perp}$. מפעילים עליו תהליך גרם-שמידט ומקבלים בסיס אורתונורמלי.

מטריצה אורתוגונאלית וטרנספורמציה אורתוגונאלית

מטריצה ריבועית $A \in M_{nXn}^{\mathbb{R}}$ נקראת אורתוגונאלית אם עמודותיה מהוות בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^n$

(*) אם $A = \begin{pmatrix} \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ \underline{u}_1 & \cdots\cdots & \underline{u}_n \\ \vdots & \cdots\cdots & \vdots \end{pmatrix}$ אזי $A^t A = \begin{pmatrix} \underline{u}_1 \circ \underline{u}_1 & \cdots\cdots & \underline{u}_1 \circ \underline{u}_n \\ \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ \underline{u}_n \circ \underline{u}_1 & \cdots\cdots & \underline{u}_n \circ \underline{u}_n \end{pmatrix}$

ומכאן A אורתוגונאלית אמ"מ $A^t A = I$

או באופן שקול אמ"מ $A^t = A^{-1}$

<u>תרגיל</u>: (הוכיחו או הפריכו)

א. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ היא מטריצה אורתוגונאלית

ב. כל מטריצה אורתובלית היא מהצורה הנ"ל.

<u>פתרון:</u>

א. נכון. עמודותיה של A הן בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^n$

$$\left\| \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \right\| = 1$$

ומתקיים

$$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} = -\sin\theta\cos\theta + \sin\theta\cos\theta = 0$$

ב. לא נכון. למשל $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ אורתוגונלית אבל לא מהצורה הנ"ל

טרנספורמציה אורתוגונאלית

ט"ל $\mathrm{T}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ נקראת טרנספורמציה אורתוגונאלית אם היא שומרת על מכפלה סקלרית לכל $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$

(*) משפט $\overline{VIII}.22$ ט"ל $\mathrm{T}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ היא טרנספורמציה אורתוגונאלית אמ"מ $\| \mathrm{T}(\underline{u}) \| = \| \underline{u} \|$ לכל $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$

(*) משפט $\overline{VIII}.24$

א. אם $\mathrm{T}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ היא טרנספורמציה אורתוגונאלית ו- $(\underline{\hat{u}}_1, \underline{\hat{u}}_2, \ldots\ldots, \underline{\hat{u}}_n)$ היא בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^n$ אזי גם $\left(T(\underline{\hat{u}}_1), T(\underline{\hat{u}}_2), \ldots\ldots, \mathrm{T}(\underline{\hat{u}}_n)\right)$ היא בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^n$

ב. אם $\mathrm{T}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ היא ט"ל וקיים בסיס אורתונורמלי $(\underline{\hat{u}}_1, \underline{\hat{u}}_2, \ldots\ldots, \underline{\hat{u}}_n)$ של $\mathbb{R}^n$ כך שגם $\left(T(\underline{\hat{u}}_1), T(\underline{\hat{u}}_2), \ldots\ldots, \mathrm{T}(\underline{\hat{u}}_n)\right)$ הוא בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^n$ אזי T היא טרנספורמציה אורתוגונאלית.

שאלה 48 יחידה 12.

א. אם $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ טרנספורמציה אורתוגונאלית ו- B בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^n$ אזי $[T]_B$ מטריצה אורתוגונאלית.

ב. אם $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ ט"ל וקיים בסיס אורתונורמלי B כך ש- $[T]_B$ מטריצה אורתוגונאלית אזי T היא טרנספורמציה אורתוגונאלית.

תרגיל:

יהי $U\in\mathbb{R}^n$ תת-מרחב עבורו $dimU=n$. הוכיחו כי קיימת טרנספורמציה אורתוגונאלית $T:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^{2n}$ כך ש- $T(U)=U^{\perp}$

פתרון:

$U\oplus U^{\perp}=\mathbb{R}^{2n}$ לכן $dim(U^{\perp})=2n-dimU=n$

יהי $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots\dots,\underline{v}_n\}$ בסיס של U ונשלים אותו לבסיס של $\mathbb{R}^n$ ע"י $\underline{v}_{n+1},\underline{v}_{n+2},\dots\dots,\underline{v}_{2n}$

נפעיל תהליך גרם-שמידט על $\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots\dots,\underline{v}_n,\underline{v}_{n+1},\underline{v}_{n+2},\dots\dots,\underline{v}_{2n}\}$ ונקבל בסיס אורתונורמלי

$$\{\underline{\hat{u}}_1,\underline{\hat{u}}_2,\dots\dots,\underline{\hat{u}}_n,\underline{\hat{u}}_{n+1},\dots\dots,\underline{\hat{u}}_{2n}\}$$

ע"פ תכונות תהליך גרם-שמידט $\{\underline{\hat{u}}_1,\underline{\hat{u}}_2,\dots\dots,\underline{\hat{u}}_n\}$ בסיס אורתונורמלי של U

$\Leftarrow$ הקבוצה $\{\underline{\hat{u}}_{n+1},\dots\dots,\underline{\hat{u}}_{2n}\}$ היא קבוצה אורתונורמלית (בת"ל) ומתקיים $\{\underline{\hat{u}}_{n+1},\dots\dots,\underline{\hat{u}}_{2n}\}\le U^{\perp}$

לכן משיקולי מימד $(\underline{\hat{u}}_{n+1},\dots\dots,\underline{\hat{u}}_{2n})$ בסיס אורתונורמלי של $U^{\perp}$

נגדיר כעת ט"ל $T:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^{2n}$ באופן הבא:

$$\begin{array}{ll} T(\underline{\hat{u}}_{n+1})=\underline{\hat{u}}_1 & T(\underline{\hat{u}}_1)=\underline{\hat{u}}_{n+1} \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ T(\underline{\hat{u}}_{2n})=\underline{\hat{u}}_n & T(\underline{\hat{u}}_n)=\underline{\hat{u}}_{2n} \end{array}$$

מתקיים $T(U)=U^{\perp}$ ובנוסף T מעבירה בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^{2n}$ לבסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^{2n}$ ולכן T אורתוגונאלית.

<u>דמיון אורתוגונאלי</u>

שתי מטריצות $A,B \in M^{\mathbb{R}}_{nXn}$ דומות אורתוגונאלית אם קיימת מטריצה <u>אורתוגונאלית</u> $P \in M^{\mathbb{R}}_{nXn}$ $(P^{-1} = P^{t})$ כך ש- :

$$B = P^{t}AP$$

(*) <u>הערה</u>: מטריצות דומות אינן בהכרח דומות אורתוגונאליות

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ (שאלות 55,56 ביח' 12)

<u>שאלה 57</u>

מטריצה ממשית סימטרית <u>דומה אורתוגונאלית</u> למטריצה אלכסונית (זה מוכיח את משפט $\overline{VII}.28$)

<u>תרגיל:</u>

תהא $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (ממשית וסימטרית)

מצאו מטריצה אלכסונית D ומטריצה אורתוגונאלית P כך ש- $D = P^{t}AP$

$\overline{VII}.26$ וקטורים עצמיים השייכים לע"ע שונים של מטריצה סימטרית ממשית הם אורתוגונאליים זה לזה

<u>פתרון:</u>

מחפשים כרגיל ע"ע ובסיסים למרחבים העצמיים.
לכל מרחב עצמי v_λ מפעילים תהליך גרם-שמידט על הבסיס שלו ומקבלים <u>בסיס אורתונורמלי</u> ל- v_λ.
המטריצה <u>P</u> היא מטריצה שעמודותיה הן הוקטורים של הבסיסים האורתונורמליים שמצאנו .

<u>**שלב 1.**</u> – חישוב ע"ע:

$$P(t) = |tI - A| = \begin{vmatrix} t & -1 & -1 \\ -1 & t & -1 \\ -1 & -1 & t \end{vmatrix} = R_1 \leftarrow R_1 + R_2 + R_3 \begin{vmatrix} t-2 & t-2 & t-2 \\ -1 & t & -1 \\ -1 & -1 & t \end{vmatrix}$$

$$= (t-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & t & -1 \\ -1 & -1 & t \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{פתיחה של הדטרמיננט}]{} (t-2)(t+1)^2$$

$\Leftarrow$ שני ע"ע $\lambda_1 = -1$ ר"א 2 . $\lambda_2 = 2$ ר"א 1.

מציאת ו"ע :

$\lambda_1 = -1$ נפתור $(\lambda_1 I - A)\underline{X} = \underline{0}$ נדרג:

$$(\lambda_1 I - A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -y - z$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_{\lambda_1} = sp\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$\lambda_2 = 2$. צריך לפתור $(\lambda_2 \mathrm{I} - \mathrm{A})\underline{\mathrm{X}} = \underline{0}$

$$(\lambda_2 \mathrm{I} - \mathrm{A}) = \begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\-1 & 2 & -1\\-1 & -1 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{נדרג}]{} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{x} = \mathrm{z} \quad , y = z$$

פתרון כללי:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}z\\z\\z\end{pmatrix} = z\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Leftarrow \mathrm{v}_{\lambda_2} = \mathrm{sp}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

<u>שלב 2:</u> הפעלת תהליך גרם-שמידט על הבסיס של המרחבים העצמיים.

הבסיס של v_{λ_1} הוא $\left\{v_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \mathrm{v}_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

$$\underline{\hat{u}}_1 = \frac{v_1}{\| v_1 \|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$u'_2 = \underline{\mathrm{v}}_2 - (\underline{\mathrm{v}}_2 \circ \underline{\hat{u}}_1)\underline{\hat{u}}_1 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} - \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \| \mathrm{u}'_2 \| = \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

$$\underline{\hat{\mathrm{u}}}_2 = \frac{\mathrm{u}'_2}{\| \mathrm{u}'_2 \|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

ולכן

$$\left\{\underline{\hat{\mathrm{u}}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \underline{\hat{\mathrm{u}}}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

בסיס אורתונורמלי של v_{λ_1}

הבסיס של v_{λ_2} הוא $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\Leftarrow \left\{\underline{\hat{u}}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס אורתונורמלי של V_{λ_2}

ובסה"כ נקבל :

$$\mathrm{D} = diag(-1,-1,2)$$

$$D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$