525150 – Álgebra 2 – Pauta Evaluación 3

Problema 1. (15 puntos)

Sean $a \in \mathbb{R}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & a+3 & 2 \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.1 Muestre que si $a = 1$, se cumple que $\mathrm{r}(A) = 1$ y determine el conjunto solución del sistema $Ax = b$ tomando $a = 1$.

1.2 Determine para qué valores de a es el sistema $Ax = b$ compatible determinado. Justifique su respuesta.

1.3 ¿Existen valores de a para los que el sistema $Ax = b$ es incompatible? Justifique su respuesta.

Solución:

1.1 Supongamos que $a = 1$, entonces

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Notemos que $\mathrm{im}(A) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$ porque los vectores primero y tercero son iguales y el segundo es 2 veces el primero. Podemos asegurar entonces que $\mathrm{r}(A) = 1$. **(2 puntos)**

Sea $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Observemos que

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = b \Leftrightarrow x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (x_1 + 2x_2 + x_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $S(A,b) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \ : \ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \right\}$. **(3 puntos)**

1.2 Es claro que el sistema no tiene solución única en el caso en que $a = 1$.

Alternativa 1: Trabajando con la matriz ampliada asociada al sistema

$$A \underset{f_2 \leftarrow f_2 - 2f_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 2-2a & 0 \\ a & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{f_3 \leftarrow f_3 - af_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 2-2a & 0 \\ 0 & 2-2a & 1-a^2 & 1-a \end{array}\right)$$

$$\underset{f_3 \leftarrow f_3 + 2f_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 2-2a & 0 \\ 0 & 0 & -a^2-4a+5 & 1-a \end{array}\right)$$

(1 punto)

Note que $-a^2 - 4a + 5 = -(a-1)(a+5) = 0$ si y sólo si $a = 1$ o $a = -5$.

Así, si $a \neq -5$ y $a \neq 1$, entonces $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A|b) = 3$ (ya que el número de filas no nulas en la matriz escalonada equivalente es 3), y esto quiere decir que el sistema tiene solución única.

Por lo tanto, los valores de a para los que el sistema es compatible determinado son todos los valores de $\mathbb{R} - \{1, -5\}$. **(4 puntos)**

Alternativa 2: Dado que A es una matriz cuadrada, el sistema $Ax = b$ es compatible determinado si y solo si el determinante de A es distinto de cero,

$$\det(A) = -a^3 - 3a^2 + 9a - 5.$$

Utilizando que si $a = 1$ el determinante de A es 0, es decir, utilizando que $a - 1$ divide a $-a^3 - 3a^2 + 9a - 5$ se llega a

$$\det(A) = (a-1)(-a^2 - 4a + 5) = -(a-1)(a^2 + 4a - 5) = -(a-1)^2(a+5).$$

(1 punto)

Se tiene entonces que $\det(A) \neq 0$ si y solo si $a \notin \{1, -5\}$. Si el determinante de A es distinto de cero, se cumple que el rango de A es 3 y para todo $b \in \mathbb{R}^3$ el sistema $Ax = b$ tiene solución única. Podemos concluir entonces que el sistema es compatible determinado si y solo si $a \neq 1$ y $a \neq -5$. **(4 puntos)**

1.3 Cuando $a = -5$, $\mathrm{r}(A) = 2$ y $\mathrm{r}(A|b) = 3$, por lo que en ese caso el sistema es incompatible.

Problema 2. (15 puntos)

Calcule el rango y una base para la imagen de la siguiente matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solución:
Alternativa 1:
Ya sabemos que la imagen de B es el espacio generado por sus columnas, entonces

$$\mathrm{im}(B) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

(3 puntos)

Este conjunto no es linealmente independiente, de hecho, se observa que el último vector en él, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, es combinación lineal, con escalares -1 y 1, de los vectores primero y segundo. Por tanto,

$$\mathrm{im}(B) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

(5 puntos)

Demostremos que este conjunto es li y es, por tanto, base de la imagen de B. La combinación lineal

$$\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

es igual al vector nulo de $\mathbb{R}^4$ si y solo si

$$\begin{aligned} \beta &= 0, \\ \alpha + 2\beta &= 0, \\ -\alpha &= 0, \\ 3\beta &= 0. \end{aligned}$$

es decir $\alpha = \beta = 0$. Con esto podemos asegurar que el conjunto anterior es li y el rango de B es 2.

(7 puntos)

Alternativa 2:
Por otro lado, también podemos determinar una base para la imagen de B y su rango escalonando a B:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 \leftarrow f_1 + f_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_4 \leftarrow f_4 - 3f_2]{f_3 \leftarrow f_3 - 2f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(7 puntos)

De esta matriz en forma escalonada sabemos que su rango es 2 (pues tiene 2 filas distintas de la nula), las columnas 1 y 2 tienen pivote, esto significa que las columnas 1 y 2 de la matriz B son una base de la imagen de B.

(8 puntos)

Problema 3. (15 puntos)

Sean $a \in \mathbb{R}$ y

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

3.1 Si $a = 1$, entonces se cumple que $\mathrm{r}(A) = 2$ y para todo $b \in \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$ el sistema $Ax = b$ tiene infinitas soluciones.

3.2 Si $a \neq 1$, entonces se cumple que $\mathrm{r}(A) = 3$ y para todo $b \in \mathbb{R}^3$ el sistema $Ax = b$ tiene solución única.

Solución:

3.1 Esta afirmación es verdadera. Si $a = 1$, entonces

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y no es difícil reconocer que sus columnas son un conjunto ld de vectores de $\mathbb{R}^3$,

$$\mathrm{im}(A) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

y, como el conjunto anterior es li, $\mathrm{r}(A) = 2$. **(4 puntos)**

Además, como

$$\left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \subseteq \mathrm{im}(A),$$

es cierto que para cualquier $b \in \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$, el sistema $Ax = b$ tiene infinitas soluciones.

(4 puntos)

3.2 El rango de A es 3 si y solo si A es invertible y esto, a su vez, se cumple si y solo si $\det(A) \neq 0$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 2 \\ 0 & 2 & 1+a \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1+a \\ 0 & a+1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1+a \\ 0 & 0 & \frac{4-(a+1)^2}{2} \end{vmatrix}.$$

Como esta última matriz es triangular superior, se cumple que

$$\det(A) = -(-1)2\frac{4-(a+1)^2}{2} = 4-(a^2+2a+1) = -a^2-2a+3 = -(a^2+2a-3) = -(a+3)(a-1).$$

Si $a=-3$, el determinante de A es cero y el rango de A es, cuando $a=-3$, menor que 3.

(4 puntos)

No es cierto que si $a \neq 1$, el rango de A es 3. La afirmación es falsa. **(3 puntos)**

Problema 4. (15 puntos)

Determine si la siguiente matriz es diagonalizable y determine si es invertible. Justifique sus respuestas.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Observación: Para determinar los valores propios de C podría serle útil saber que 2 es raíz de su polinomio característico.

Solución:

El polinomio característico de C es:

$$\begin{aligned}
p_C(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -\lambda(2-\lambda)(3-\lambda) + 2(2-\lambda), \\
&= (2-\lambda)\left(-\lambda(3-\lambda)+2\right), \\
&= (2-\lambda)(-3\lambda+\lambda^2+2), \\
&= (2-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2), \\
&= (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2), \\
&= -(2-\lambda)^2(\lambda-1).
\end{aligned}$$

(2 puntos)

Por tanto los valores propios de C son son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$ con multiplicidades algebraicas $r_1 = 1$ y $r_2 = 2$, respectivamente.

(4 puntos)

La suma de las multiplicidades algebraicas de λ_1 y λ_2 es 3. La matriz C podría ser diagonalizable. Dado que la multiplicidad algebraica de λ_1 es 1, también es 1 su multiplicidad geométrica.

(2 puntos)

Para determinar si C es diagonalizable solo debe ocurrir que la multiplicidad geométrica de λ_2 sea 2.

El subespacio propio de C asociado a 2 es:

$$\begin{aligned}
S_2(C) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;:\; \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;:\; x+z=0 \right\}, \\
&= \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.
\end{aligned}$$

El conjunto generador de $S_2(C)$ es un conjunto li, por tanto, la dimensión de $S_2(C)$ es 2.

(3 puntos)

Como la dimensión de este subespacio es 2, que es igual a la multiplicidad algebraica de 2, y el otro valor propio de C tiene multiplicidades algebraica y geométrica iguales a 1, podemos concluir que la matriz C es diagonalizable.

(2 puntos)

Dado que $0 \notin \sigma(C) = \{1, 2\}$, C es invertible.

(2 puntos)