Clase 16

Cálculo 3

Carlos Martínez Ranero

Departamento de Matemática
Universidad de Concepción

Recordatorio de la clase anterior.

- Integrales Multiples.
- Teorema de Fubini.

Objetivos de la clase de hoy.

- Integrales sobre regiones generales.

Integrales Dobles

Teorema

Si $f : R \to \mathbb{R}$ es continua, entonces f es Riemann integrable.

Teorema (Fubini)

Sea $R = [a, b] \times [c, d]$ un rectángulo y $f \colon R \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces $\iint\limits_R f(x, y)dA$ es igual a

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy$$

Teorema de Fubini

Ejemplo 1

Calcular el volumen de la función $f(x,y) = xy^2$ sobre el rectángulo $R = [0,2] \times [0,1]$.

Solución:

- El volumen esta dado por $\iint\limits_R f(x,y)dA$.
- Utilizando el Teorema de Fubini se tiene
- (tenemos dos opciones al usar Fubini)
- $\iint\limits_R f(x,y)dA = \int_0^2 \left(\int_0^1 xy^2 dy \right) dx$
- $\int_0^2 \frac{xy^3}{3}\Big|_0^1 dx$

Teorema de Fubini

- $\int_0^2 \frac{xy^3}{3}\Big|_0^1 dx$
- $\int_0^4 \frac{x}{3} dx$
- $\frac{x^2}{6}\Big|_0^2 = \frac{2}{3}$
- Utilizando la segunda opción forma del Teorema de Fubini tenemos
- $\iint\limits_R f(x,y)dA = \int_0^1 \left(\int_0^2 xy^2 dy\right) dx$
- $\int_0^1 \frac{x^2y^2}{2}\Big|_0^2 dx$

Teorema de Fubini

- $\int_0^1 \frac{x^2y^2}{2}\Big|_0^2 dx$
- $\int_0^1 2y^2 dy$
- $\frac{2y^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

Ejemplo 2

Calcular $\iint\limits_R x\sin(xy)dA$ donde $R = [0,1] \times [0,\pi]$.

Solución:

- Utilizando Fubini se tiene
- $\iint\limits_R x\sin(xy)dA = \int_0^\pi \left(\int_0^1 x\sin(xy)dx\right)dy$
- Usando integración por partes
- $\int x\sin(xy)dx = \frac{-x\cos(xy)}{y} - \int \frac{-\cos(xy)}{y}$
- $\int_0^\pi \left(\int_0^1 x\sin(xy)dx\right)dy = \int_0^\pi \left(\frac{-x\cos(xy)}{y} + \frac{\sin(xy)}{y^2}\right)\Big|_0^1 =$

Solución:

- $\int_0^\pi \frac{-\cos(y)}{y} + \frac{\sin(y)}{y^2} dy = ???$ es muy dificil seguir.
- Utilizaremos la otra forma de Fubini se tiene
- $\iint\limits_R x\sin(xy)dA = \int_0^1 \left(\int_0^\pi x\sin(xy)dy\right) dx$
- $\int_0^1 \left(\int_0^\pi -\cos(xy)|_0^\pi dy\right) dx$
- $\int_0^1 -\cos(\pi x) + 1 =$
- $\left(\frac{-\sin(\pi x)}{\pi} + x\right)\Big|_0^1 = 1$

Definición

- Decimos que un conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ es una región de clase C^1 por tramos si D es acotado y su frontera consiste de una unión finita de curvas de clase C^1.
- Sea D una región de clase C^1 por tramos y $f : D \to \mathbb{R}$ una función acotada y $D \subset R$ un rectángulo. Definimos la extensión de f a R por $\tilde{f} : R \to \mathbb{R}$
$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & si\ (x,y) \in D \\ 0 & si\ (x,y) \in R \backslash D \end{cases}$$
- Decimos que f es integrable si y sólo si $\tilde{f}$ lo es
- y en este caso $\iint\limits_S f(x,y)dA = \iint\limits_R \tilde{f}(x,y)dA.$

Integrales sobre regiones

Teorema

Sea D una región C^1 por tramos y $f : D \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces f es Riemann integrable en D.

Teorema

Propiedades de la Integral.

- $\iint_D f(x,y) + g(x,y)dA = \iint_D f(x,y)dA + \iint_D g(x,y)dA$;
- $\iint_D cf(x,y)dA = c \iint_D f(x,y)dA$
- $\iint_D f(x,y)dA \leq \iint_D g(x,y)dA$, si $f(x,y) \leq g(x,y)$.
- si $int(D_1) \cap int(D_2) = \varnothing$ entonces,
  $$\iint\limits_{D_1 \cup D_2} f(x,y)dA = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dA + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dA$$

Regiones de Tipo I y II

Definición

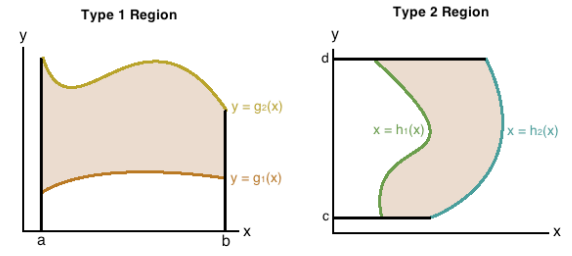
Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ decimos que D es una región de tipo I si

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

y se dice D de tipo II si

$$D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

Integrales sobre regiones



Integrales sobre regiones

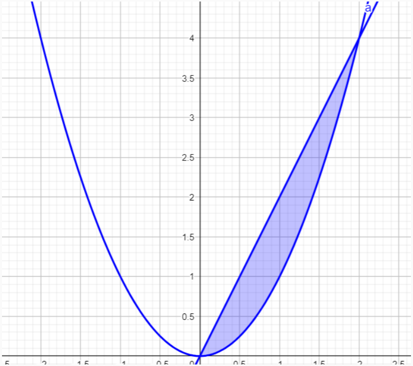
Las integrales para regiones de tipo I y II están dadas por

Teorema

$$\iint_D f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx$$
$$\iint_D f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy$$

Ejemplo 3

Calcular $\iint_D 1 + 2y dA$ donde D es la región acotada por las curvas $y = x^2$ y $y = 2x$.



Solución:

- Primero encontramos los puntos de intersección, usando $x^2 = 2x$ se tien $x = 0$ y $x = 2$.
- Observemos que $D = \{(x, y) : 0 \le x \le 2,\ x^2 \le y \le 2x\}$
- $\iint\limits_D = \int_0^2 \int_{2x}^{x^2} 1 + 2y dy dx =$
- $\int_0^2 (y + y^2)\Big|_{x^2}^{2x} dy =$
- $\int_0^2 2x + 4x^2 - x^2 - x^4 dx = \frac{28}{5}.$

Ejemplo 3

Encontrar $\int_0^1 \int_y^1 \frac{\sin x}{x} dx dy$

Solución:

- Notemos que la integral $\int \frac{\sin x}{x} dx$ es imposible de resolver. Por lo que nos gustaría cambiar el orden de integración.
- Para esto vemos que $\int_0^1 \int_y^1 \frac{\sin x}{x} dx dy = \iint_D \frac{\sin x}{x} dA$ donde D es el triángulo con vertices $(0,0), (1,0), (1,1)$.
- $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$
- $\iint_D \frac{\sin x}{x} dA = \int_0^1 \int_0^x \frac{\sin x}{x} dy dx =$
- $\int_0^1 \frac{y \sin x}{x} \Big|_0^x dx = \int_0^1 \sin x dx = 1 - \cos(1).$