Índice general

Capítulo 5

Valores y vectores propios de matrices reales

Para ilustrar la utilidad del cálculo de valores y vectores propios de matrices comenzaremos este capítulo con el siguiente ejemplo en el que, sabiendo la cantidad inicial de jóvenes y adultos de cierta especie y cómo esta cantidad varía de un año al siguiente, deseamos determinar la cantidad de jóvenes y adultos de la especie dos, tres, ..., diez años después del año inicial. Para ello llamemos j_n al número (en miles) de individuos jóvenes de la especie n años después del año inicial y llamemos a_n al número (en miles) de individuos adultos, también n años después del inicial.

Supongamos que en el año cero solo hay individuos jóvenes de la especie

$$j_0 = 36, \qquad a_0 = 0,$$

y que, para cada $n \in \{1, 2, \ldots, 10, 11, \ldots\}$, las cantidades de jóvenes y adultos varían según la relación

$$j_n = \frac{1}{3}a_{n-1}, \qquad a_n = \frac{1}{4}j_{n-1} + \frac{1}{3}a_{n-1},$$

es decir, la cantidad de jóvenes y adultos en el año n depende de la cantidad de jóvenes y adultos el año anterior. La segunda ecuación establece, por ejemplo, que solo $\frac{1}{4}$ de los jóvenes el año $n-1$ se convierte en adulto al año siguiente (los restantes mueren) y que $\frac{2}{3}$ de los adultos mueren cada año (solo $\frac{1}{3}$ de ellos siguen siendo adultos al año siguiente).

Según las relaciones anteriores tenemos que las cantidades (en miles) de jóvenes y adultos de la especie uno, dos y tres años después del inicial son las siguientes:

$$j_1 = \frac{1}{3}a_0 = 0, \qquad a_1 = \frac{1}{4}j_0 + \frac{1}{3}a_0 = 9,$$

$$j_2 = \frac{1}{3}a_1 = 3, \qquad a_2 = \frac{1}{4}j_1 + \frac{1}{3}a_1 = 3,$$

$$j_3 = \frac{1}{3}a_2 = 1, \qquad a_3 = \frac{1}{4}j_2 + \frac{1}{3}a_2 = \frac{5}{4}.$$

De los 36000 jóvenes que había inicialmente, un año después solo siguen vivos 9000 y se han convertido en adultos, de estos 9000 adultos solo quedan 3000 al siguiente año, pero, afortunadamente, también han nacido 3000 nuevos individuos.

Las relaciones anteriores podemos escribirlas en forma matricial

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} j_1 \\ a_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_0 \\ a_0 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} j_2 \\ a_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} j_0 \\ a_0 \end{pmatrix}, \\
&\vdots \\
\begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} j_0 \\ a_0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Esta última ecuación nos permite calcular la cantidad de individuos de la especie n años después del inicial, sin necesidad de calcular las cantidades de los años anteriores. Por ejemplo, la cantidad de jóvenes y adultos diez años después del inicial es

$$\begin{pmatrix} j_{10} \\ a_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^{10} \begin{pmatrix} 36 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y esto, a su vez, es igual a 36 veces la primera columna de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^{10}$. ¿Es esta primera columna sencilla de calcular? Calculemos algunas potencias de la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{12} & \frac{7}{36} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{36} & \frac{7}{108} \\ \frac{7}{144} & \frac{5}{54} \end{pmatrix}.$$

¿Adivinas cómo podría ser su potencia 10? Pero, bueno, no debe tomarnos mucho tiempo calcular la potencia diez de la matriz, cualquier software lo hace en pocos segundos. Eso es cierto, pero, ¿y si quisiéramos investigar el comportamiento asintótico de la cantidad de individuos de la especie? Es decir, si quisiéramos investigar cómo varían las cantidades de jóvenes y adultos de la especie a medida que n tiende a infinito, ¿cómo lo haríamos?

Afortunadamente, existe una teoría que nos ayuda a realizar esto y que además es útil de muchas otras formas (que verás en cursos posteriores a éste y en algunos ejemplos del listado) y es la teoría de valores y vectores propios de matrices. El objetivo de ésta es investigar si es posible *diagonalizar* una cierta matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. ¿En qué consiste diagonalizar una matriz? ¿De qué nos sirve diagonalizar una matriz?

Diagonalizar una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ consiste en determinar matrices P, invertible, y D, diagonal, de modo que $AP = PD$ y esto es posible si y solo si es posible encontrar una base de $\mathbb{R}^n$ a la que A transforme en vectores paralelos a sí mismos. Más adelante veremos cómo averiguar, para una matriz cuadrada cualquiera, si existe una base de $\mathbb{R}^n$ con esta propiedad, por el momento veamos que para la matriz de este ejemplo sí existe y veamos también cómo construir las matrices P y D.

La matriz de este ejemplo es diagonalizable. El conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base de $\mathbb{R}^2$ (te dejamos como tarea demostrar que es li) y la matriz $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ transforma a cada vector en ese conjunto en un vector paralelo a sí mismo,

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

¿De qué nos sirve saber que esta base existe? Saber esto tiene dos consecuencias importantes:

1. Como el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es li, la matriz

$$P = \begin{pmatrix} -2 & \frac{2}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   es invertible. Además, y esto es muy importante,
2. si denotamos $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ se cumple que

$$\begin{aligned} AP &= \left(\; A\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\; A\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \; \right) = \left(\; -\tfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\; \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \; \right), \\ &= \left(\; \begin{pmatrix} -2 & \frac{2}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ 0 \end{pmatrix} \;\; \begin{pmatrix} -2 & \frac{2}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \; \right), \\ &= P\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es decir, como existe una base de $\mathbb{R}^2$ a la que $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ transforma en vectores paralelos a sí mismos, hemos podido determinar una matriz invertible P y una matriz diagonal D,

$$P = \begin{pmatrix} -2 & \frac{2}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

que satisfacen

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & \frac{2}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{2}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & \frac{2}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & \frac{2}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{P^{-1}}.$$

Dado que existe una matriz invertible P de modo que

$$P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} P = D,$$

decimos que $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ es *semejante* a una matriz diagonal. Cuando una matriz cuadrada es semejante a una matriz diagonal es sencillo calcular sus potencias.

Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^3 = PD^2P^{-1}PDP^{-1} = PD^3P^{-1}$$

y, en general,

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^n = PD^nP^{-1}.$$

La potencia n-ésima de una matriz diagonal es muy sencilla de calcular. Si

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

entonces

$$D^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix}, \quad D^3 = \begin{pmatrix} \lambda_1^3 & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}.$$

De aquí podemos concluir que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 36 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{2}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{6}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 36 \\ 0 \end{pmatrix},$$

es decir,

$$j_n = 27\left(-\frac{1}{6}\right)^n - 9\left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad a_n = -\frac{27}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)^n + \frac{27}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Esto nos permite asegurar, por ejemplo, que a partir del año 1 el número de adultos de la especie es mayor o igual que el número de jóvenes y que ambas cantidades se acercan a cero a medida que n crece.

¿Es cualquier matriz cuadrada diagonalizable? Lamentablemente no. ¿Cuándo es una matriz cuadradada diagonalizable y cómo podemos determinar las matrices P y D?

Responder a estas preguntas es el objetivo de este capítulo.

Definición 5.1. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A es *diagonalizable* si y solo si A es semejante a una matriz diagonal, es decir, si y solo si existen matrices $P, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ con las propiedades:

1. P es invertible,
2. D es diagonal,
3. $AP = PD \Leftrightarrow P^{-1}AP = D \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$.

Esto, a su vez, ocurre si y solo si existe una base $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{K}^n$ que satisface que A transforma a cualquier vector de ella en un vector paralelo a sí mismo, es decir, A es *diagonalizable* si y solo si existen vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{K}^n$ y escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ de modo que

1. $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es li y
2. $Av_1 = \lambda_1 v_1,\ Av_2 = \lambda_2 v_2,\ \ldots,\ Av_n = \lambda_n v_n$.

Observación 5.2. *En las definiciones que siguen consideraremos matrices cuadradas con coeficientes en $\mathbb{R}$, pero todo lo que veremos en este capítulo es generalizable a matrices con coeficientes en $\mathbb{C}$.*

Encontremos un criterio que nos permita decidir si una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es diagonalizable, es decir, que nos permita decidir si existen vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ y escalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ de modo que

1. $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es li y
2. $Av_1 = \lambda_1 v_1,\ Av_2 = \lambda_2 v_2,\ \ldots,\ Av_n = \lambda_n v_n$.

Antes de hacerlo debemos escribir algunas definiciones.

Definición 5.3. Un vector $x \in \mathbb{R}^n$ es *vector propio* de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si y solo si $x \neq \theta$ y A transforma a x en un vector paralelo a x, es decir, x es vector propio de A si y solo si $x \neq \theta$ y existe $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que $Ax = \lambda x$. El escalar λ se denomina *valor propio de A* asociado al vector propio x.

De manera equivalente, si $x \neq \theta$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ son tales que $Ax = \lambda x$ se dice que x es vector propio de A asociado al valor propio λ.

Ejemplo 5.4. *El vector $(-2, 1)^T$ es vector propio de $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Esto es cierto pues*

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El escalar $-\frac{1}{6}$ es valor propio de $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ asociado al vector propio $(-2, 1)^T$.

Teorema 5.5. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ es valor propio de A si y solo si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\det(A - \lambda I) = 0$.

Demostración. Un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ es valor propio de A si y solo si

$$\begin{aligned} & \exists\, w \in \mathbb{R}^n, w \neq \theta \ \text{ tal que } Aw = \lambda\, w, \\ \Leftrightarrow \quad & \exists\, w \in \mathbb{R}^n, w \neq \theta \ \text{ tal que } Aw - \lambda w = \theta, \\ \Leftrightarrow \quad & \exists\, w \in \mathbb{R}^n, w \neq \theta \ \text{ tal que } (A - \lambda I)w = \theta, \\ \Leftrightarrow \quad & \exists\, w \in \mathbb{R}^n, w \neq \theta \ \text{ tal que } w \in \ker(A - \lambda I). \end{aligned}$$

Un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ es valor propio de A si y solo si el conjunto $\ker(A - \lambda I)$ contiene vectores distintos del vector nulo de $\mathbb{R}^n$ y esto se cumple si y solo si $\lambda \in \mathbb{R}$ es tal que la matriz $A - \lambda I$ no es invertible y esto,a su vez, solo ocurre si $\det(A - \lambda I) = 0$. □

Definición 5.6. Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La expresión $\det(A - \lambda I)$ es un polinomio de grado n con coeficientes en $\mathbb{R}$, se denomina *polinomio característico de* A y se denota $p_A(\lambda)$.

Las raíces **reales** de este polinomio, es decir, los $\lambda \in \mathbb{R}$ para los que se cumpla que $\det(A-\lambda I) = 0$ son los valores propios de A.

Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ (p_A puede tener raíces complejas) son las raíces distintas de p_A, entonces p_A se puede factorizar de la siguiente manera:

$$p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1}(\lambda_2 - \lambda)^{r_2} \cdots (\lambda_m - \lambda)^{r_m},$$

con $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n$. El número r_1 es la multiplicidad de λ_1 como raíz de p_A, r_2 es la multiplicidad de λ_2, ..., r_m es la multiplicidad de λ_m.

Por cada valor propio de A (raíz real de p_A) llamaremos *multiplicidad algebraica* del valor propio a su multiplicidad como raíz de p_A.

Definición 5.7. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. El *espectro de* A, que se denota por $\sigma(A)$, es el conjunto de los valores propios de A, es decir,

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} \ : \ \lambda \text{ es valor propio de } A\}.$$

La cardinalidad de este conjunto es menor o igual que n.

Ejemplo 5.8. *El polinomio característico de la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

es

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left(\frac{1}{3} - \lambda\right) - \frac{1}{12} = \lambda^2 - \frac{1}{3}\lambda - \frac{1}{12}.$$

Nota que el polinomio característico de A es un polinomio de grado 2.

Como $\lambda^2 - \frac{1}{3}\lambda - \frac{1}{12} = 0$ si y solo si $12\lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0$ y esto, a su vez, se cumple si y solo si $(6\lambda + 1)(2\lambda - 1) = 0$, las raíces del polinomio característico de A son $-\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{2}$. Estos números son los valores propios de A,

$$\sigma(A) = \left\{-\frac{1}{6}, \ \frac{1}{2}\right\}.$$

El polinomio característico de A se puede factorizar como

$$\lambda^2 - \frac{1}{3}\lambda - \frac{1}{12} = \left(-\frac{1}{6} - \lambda\right)\left(\frac{1}{2} - \lambda\right).$$

Dado que $-\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{2}$ son raíces simples del polinomio característico de A, sus multiplicidades algebraicas, como valores propios de A, son iguales a 1.

Consideremos ahora la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de B es el siguiente polinomio de grado 2,

$$p_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9.$$

Dado que $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = (3-\lambda)^2$, B tiene un único valor propio, 3, y su multiplicidad algebraica es 2,

$$\sigma(B) = \{3\}.$$

Por último, el polinomio característico de

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

también es un polinomio de grado 2,

$$p_C(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Dado $\lambda^2 + 1 = 0$ si y solo si $\lambda = i$ o $\lambda = -i$, si consideramos a C un elemento de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ decimos que i y $-i$ son valores propios de C, pero, si consideramos a C elemento de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, decimos que C no tiene valores propios, $\sigma(C) = \emptyset$.

Observación 5.9. *Como el determinante de matrices triangulares es el producto de los elementos en su diagonal principal, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una matriz triangular superior o triangular inferior, los valores propios de A son los números en la diagonal principal de A.*

Por ejemplo, los valores propios de

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

son los números reales 4 (de multiplicidad algerbaica 1), 0 (de multiplicidad algebraica 2) y 1 (de multiplicidad algebraica 1). El polinomio característico de D es

$$p_D(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -\lambda & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\lambda^2(1-\lambda)$$

y el espectro de D es el conjunto $\sigma(D) = \{0, 1, 4\}$.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es valor propio de A, el conjunto $\ker(A - \lambda\, I)$ (que es un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ si $\lambda \in \mathbb{R}$) contiene, necesariamente, vectores distintos de θ. Todos los vectores en $\ker(A - \lambda\, I)$ que sean distintos de θ son vectores propios de A asociados al valor propio λ.

Definición 5.10. Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, un valor propio de A. Al conjunto

$$\ker(A - \lambda I) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ (A - \lambda I)x = \theta\}\,,$$

que es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, se le da el nombre de *subespacio propio de A asociado al valor propio* λ y se denota por $S_\lambda(A)$. Los vectores en $S_\lambda(A) \setminus \{\theta\}$ son los vectores propios de A asociados al valor propio λ.

Por cada $\lambda \in \sigma(A)$, la *multiplicidad geométrica* de λ es la dimensión de $S_\lambda(A)$.

Ejemplo 5.11. *Determinemos los subespacios propios de las matrices A y B. Como C no tiene valores propios reales, no determinaremos los subespacios propios de C.*

$$S_{-\frac{1}{6}}(A) = \ker\left(A + \frac{1}{6}I\right) = \ker\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + 2y = 0\right\} = \left\langle\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right\rangle.$$

Como $\dim\left(S_{-\frac{1}{6}}(A)\right) = 1$, *la multiplicidad geométrica de $-\frac{1}{6}$ es 1 y es igual a su multiplicidad algebraica.*

El otro subespacio propio de A es el asociado a $\frac{1}{2}$,

$$S_{\frac{1}{2}}(A) = \ker\left(A - \frac{1}{2}I\right) = \ker\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ -3x + 2y = 0\right\} = \left\langle\left\{\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right\rangle.$$

Como $\dim\left(S_{\frac{1}{2}}(A)\right) = 1$, *la multiplicidad geométrica de $\frac{1}{2}$ es 1 y es igual a su multiplicidad algebraica.*

¿Cuáles son los vectores propios de A asociados al valor propio $-\frac{1}{6}$?

Todos los vectores de la forma $\alpha\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *con* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *son vectores propios de A asociados al valor propio $-\frac{1}{6}$. Por ejemplo,* $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ *es un vector propio de A asociado al valor propio $-\frac{1}{6}$, el vector* $\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ *es vector propio de A asociado al valor propio $-\frac{1}{6}$. El vector* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *no es vector propio de A asociado al valor propio $-\frac{1}{6}$, él no es elemento de $S_{-\frac{1}{6}}(A)$. El vector* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *no es vector propio de A asociado al valor propio $-\frac{1}{6}$, aunque sea elemento de $S_{-\frac{1}{6}}(A)$.*

¿Cuáles son los vectores propios de A asociados al valor propio $\frac{1}{2}$?

Todos los vectores de la forma $\alpha\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ *con* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *son vectores propios de A asociados al valor propio $\frac{1}{2}$. Por ejemplo,* $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *es un vector propio de A asociado al valor propio $\frac{1}{2}$, el vector*

$\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$ *es vector propio de* A *asociado al valor propio* $\frac{1}{2}$. *El vector* $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ *no es vector propio de* A *asociado al valor propio* $\frac{1}{2}$, *él no es elemento de* $S_{\frac{1}{2}}(A)$. *El vector* $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ *no es vector propio de* A *asociado al valor propio* $\frac{1}{2}$, *aunque sea elemento de* $S_{\frac{1}{2}}(A)$.

¿Hay vectores de $\mathbb{R}^2$ *que no sean vectores propios de* A*? Sí, por ejemplo, el vector* $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ *no es vector propio de* A, *él no pertenece a ninguno de los dos subespacios propios de* A. *Pero, ¿ocurre que cualquier vector de* $\mathbb{R}^2$ *puede escribirse como combinación lineal de vectores propios de* A*? Sí, y es por esto que* A *es diagonalizable.*

Por ejemplo, $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ *puede escribirse (y de manera única) como combinación lineal de vectores propios de* A. *Si, por ejemplo, escogemos los vectores propios* $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\1\end{pmatrix}$, *ocurre que*

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} + \frac{9}{8}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\1\end{pmatrix}.$$

Cualquier vector $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *puede escribirse como combinación lineal de vectores propios de* A, *escogiendo los mismos vectores propios anteriores se tiene que*

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{8}(2y-3x)\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} + \frac{3}{8}(x+2y)\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\1\end{pmatrix}.$$

El único subespacio propio de B *es*

$$S_3(B) = \ker(B-3I) = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ \begin{pmatrix}-1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\} = \left\langle\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}\right\rangle.$$

Como $\dim(S_3(B)) = 1$, *la multiplicidad geométrica de* 3 *es 1 y es distinta a su multiplicidad algebraica.*

¿Puedes dar ejemplos de vectores de $\mathbb{R}^2$ *que sean vectores propios de* B *y de vectores de* $\mathbb{R}^2$, *distintos de* θ, *que no sean vectores propios de* B*?*

Nota, que a diferencia de A, *no ocurre que cualquier vector de* $\mathbb{R}^2$ *pueda escribirse como combinación lineal de vectores propios de* B, *por ejemplo, el vector* $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ *no puede escribirse como combinación lineal de vectores propios de* B. *La matriz* B *no es diagonalizable.*

A diferencia de las matrices anteriores, los valores propios de C *no son números reales. La matriz* C *tampoco es diagonalizable.*

Ejemplo 5.12. *Volvamos a la matriz* A, *la única diagonalizable del ejemplo anterior, y veamos qué consecuencias tiene que ella sea diagonalizable, es decir, veamos qué consecuencias tiene que cada vector de* $\mathbb{R}^2$ *pueda escribirse como combinación lineal de vectores propios de* A.

Recordemos que

$$S_{-\frac{1}{6}}(A) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle, \qquad S_{\frac{1}{2}}(A) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

Cada vector de $\mathbb{R}^2$ puede escribirse como combinación lineal de vectores propios de A, porque la unión de una base cualquiera de $S_{-\frac{1}{6}}(A)$ con una base de $S_{\frac{1}{2}}(A)$ es una base de $\mathbb{R}^2$. Si unimos una base $S_{-\frac{1}{6}}(A)$ con una de $S_{\frac{1}{2}}(A)$ y formamos la matriz cuyas columnas sean estos vectores, ésta es una matriz que tiene tantas filas[1] *y tantas columnas*[2] *como A, cuyos coeficientes son números reales y que es además invertible. Llamemos P a esta matriz*

$$P = \begin{pmatrix} -2 & \frac{2}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como A transforma a la primera columna de P en $-\frac{1}{6}$ por ella misma y la primera columna de AP es el producto de A por la primera columna de P, entonces no necesitas realizar el producto AP para saber que la primera columna de AP es la combinación lineal, con escalares $-\frac{1}{6}$ y 0, de las columnas de P,

$$A\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ 0 \end{pmatrix}$$

mientras que la segunda columna de AP es la combinación lineal, con escalares 0 y $\frac{1}{2}$ de las columnas de P,

$$A\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

es decir,

$$AP = \left(A\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \left(P\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ 0 \end{pmatrix} \quad P\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right) = P\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Gracias a la existencia de esta matriz invertible P (ella existe porque A es diagonalizable) y si llamamos D a la matriz diagonal $\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, podemos escribir

$$AP = PD \ \Leftrightarrow \ A = PDP^{-1}.$$

Los siguientes teoremas nos van a permitir concluir el resultado más importante de este capítulo: nos van a decir qué propiedades deben cumplir los valores y vectores propios de una matriz cuadrada A para que ella sea diagonalizable, es decir, para que cada vector de $\mathbb{R}^n$ pueda escribirse como combinación lineal de vectores propios de A y podamos determinar matrices P, invertible, y D, diagonal, tales que $AP = PD$.

Teorema 5.13. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$ ($\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ son valores propios de A distintos entre sí). Supongamos además que $v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ son vectores propios de A tales que

$$v_1 \in S_{\lambda_1}(A),\ v_2 \in S_{\lambda_2}(A), \ldots, v_m \in S_{\lambda_m}(A).$$

[1]Esto es natural pues los vectores en las bases de $S_{-\frac{1}{6}}(A)$ y $S_{\frac{1}{2}}(A)$ son vectores de $\mathbb{R}^2$.

[2]Esto es algo que no siempre ocurre y ocurre en este caso porque $\dim(S_{-\frac{1}{6}}(A)) + \dim(S_{\frac{1}{2}}(A)) = 2$.

Entonces $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ es li.

Demostración. Esta demostración la haremos usando el principio de inducción matemática.

Demostremos primero que si $m = 2$, entonces $\{v_1, v_2\}$ es li.

Supongamos que $\{v_1, v_2\}$ no es li, entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que $v_2 = \alpha v_1$ y, por tanto,

$$Av_2 = \alpha A v_1 \;\Rightarrow\; Av_2 = \alpha\lambda_1 v_1 = \lambda_1(\alpha v_1) = \lambda_1 v_2 \;\Rightarrow\; v_2 \in S_{\lambda_1}(A)$$

Si $v_2 \in S_{\lambda_1}(A)$ y $v_2 \in S_{\lambda_2}(A)$, entonces

$$Av_2 = \lambda_1 v_2 \;\wedge\; Av_2 = \lambda_2 v_2 \;\Rightarrow\; (\lambda_1 - \lambda_2)v_2 = \theta.$$

Como λ_1 y λ_2 son distintos entre sí, $(\lambda_1 - \lambda_2)v_2 = \theta \;\Leftrightarrow\; v_2 = \theta$, pero v_2, al ser vector propio de A, no es igual a θ. El conjunto $\{v_1, v_2\}$ no puede ser ld.

Supongamos ahora que $\{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\}$ es li y demostremos que $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ también lo es. Supongamos que $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ no es li. Como $\{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\}$ lo es, tiene que ocurrir entonces que v_k es combinación lineal de $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$, es decir, tienen que existir escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{R}$ de modo que

$$v_k = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_{k-1} v_{k-1}.$$

Entonces,

$$Av_k = \alpha_1(Av_1) + \alpha_2(Av_2) + \ldots + \alpha_{k-1}(Av_{k-1}) = \alpha_1(\lambda_1 v_1) + \alpha_2(\lambda_2 v_2) + \ldots \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} v_{k-1}).$$

Como $Av_k = \lambda_k v_k$, entonces la igualdad anterior puede escribirse como

$$\lambda_k(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{k-1} v_{k-1}) = \alpha_1\lambda_1 v_1 + \alpha_2\lambda_2 v_2 + \ldots + \alpha_{k-1}\lambda_{k-1} v_{k-1}$$

y, por tanto,

$$\alpha_1(\lambda_k - \lambda_1)v_1 + \alpha_2(\lambda_k - \lambda_2)v_2 + \ldots + \alpha_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1})v_{k-1} = \theta.$$

Dado que el conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\}$ es li, la igualdad anterior se cumple si y solo si

$$\alpha_1(\lambda_k - \lambda_1) = 0,\; \alpha_2(\lambda_k - \lambda_2) = 0,\; \ldots,\; \alpha_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1}) = 0.$$

Dado que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ son distintos entre sí, las igualdades anteriores se cumplen si y solo si $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{k-1} = 0$, lo que implica que $v_k = \theta$ y esto no puede ocurrir pues v_k es vector propio de A. Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\}$ es li, el conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ también es li. $\square$

Una consecuencia de este teorema es que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es tal que $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$ y los conjuntos $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, $\ldots$, $\mathcal{B}_m$ son tales que $\mathcal{B}_1$ es base de $S_{\lambda_1}(A)$, $\mathcal{B}_2$ es base de $S_{\lambda_2}(A)$, $\ldots$, $\mathcal{B}_m$ es base de $S_{\lambda_m}(A)$, entonces $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_m$ es un conjunto li de vectores de $\mathbb{R}^n$, es decir, $|\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_m| = |\mathcal{B}_1| + |\mathcal{B}_2| + \ldots + |\mathcal{B}_m| \leq n$.

Ya antes mencionamos que A es diagonalizable si y solo si cualquier vector de $\mathbb{R}^n$ se puede escribir como combinación lineal de vectores propios de A, es decir, si y solo si podemos construir una base de $\mathbb{R}^n$ formada solo por vectores propios de A. Dado que $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_m$ es li, para que este conjunto sea base de $\mathbb{R}^n$, necesitamos que tenga cardinalidad n, es decir, necesitamos que $|\mathcal{B}_1| + |\mathcal{B}_2| + \ldots + |\mathcal{B}_m| = n$.

Con el siguiente teorema ya vamos a poder concluir cuando $|\mathcal{B}_1| + |\mathcal{B}_2| + \ldots + |\mathcal{B}_m| = n$.

Teorema 5.14. Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ un valor propio de A. Entonces la multiplicidad geométrica de α es menor o igual que su multiplicidad algebraica.

Demostración. Supongamos que $\alpha \in \mathbb{R}$ es valor propio de A y su multiplicidad algebraica es r.

Supongamos que $\dim(S_\alpha(A)) = s$. Queremos demostrar que $s \leq r$.

Si $\dim(S_\alpha(A)) = s$, cualquier base de $S_\alpha(A)$ tiene s vectores de $\mathbb{R}^n$. Supongamos que $\{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ es una base de $S_\alpha(A)$. Entonces $Av_1 = \alpha v_1$, $Av_2 = \alpha v_2$, $\ldots$, $Av_s = \alpha v_s$ y además el conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ es li.

Este conjunto podemos completarlo a una base de $\mathbb{R}^n$. Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_s, w_1, w_2, \ldots, w_{n-s}\}$ esa base de $\mathbb{R}^n$. La matriz cuyas columnas son los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_s, w_1, w_2, \ldots, w_{n-s}$ es invertible y además, si la llamamos R, se cumple que

$$AR = R\begin{pmatrix} D & B \\ \Theta & C \end{pmatrix}$$

siendo D la matriz escalar de tamaño $s \times s$ de la forma

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

y Θ la matriz nula de tamaño $(n-s) \times s$.

Llamemos H a la matriz $\begin{pmatrix} D & B \\ \Theta & C \end{pmatrix}$. Como $A = RHR^{-1}$, se cumple que

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det(RHR^{-1} - \lambda RR^{-1}) = \det(R(H - \lambda I)R^{-1}) = \det(H - \lambda I).$$

Dado que

$$H - \lambda I = \begin{pmatrix} D - \lambda I & B \\ \Theta & C - \lambda I \end{pmatrix},$$

el polinomio característico de A es

$$\det(A - \lambda I) = \det(H - \lambda I) = \det(D - \lambda I)\det(C - \lambda I) = (\alpha - \lambda)^s \det(C - \lambda I).$$

Si α es valor propio de A con multiplicidad algebraica r, no puede haber una factorización del polinomio característico de A en la que el exponente del término $\alpha - \lambda$ tenga exponente superior a r. Esto significa que $s \leq r$. $\square$

Ahora sí podemos escribir cuándo una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es diagonalizable. Supongamos que $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$ y que $S_{\lambda_1}(A), S_{\lambda_2}(A), \ldots, S_{\lambda_m}(A)$ son los subespacios propios de A.

Dado que para cada $1 \leq i \leq m$ se cumple que $\dim(S_{\lambda_i}(A))$ es menor o igual que la multiplicidad algebraica de λ_i, si la suma de las multiplicidades algebraicas de los valores propios de A no es n, A no es diagonalizable. Además, si la suma de las multiplicidades algebraicas de los valores propios de A es n, pero para algún valor propio de A ocurre que su multiplicidad geométrica es menor que su multiplicidad algebraica, A tampoco es diagonalizable. Es decir,

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es diagonalizable si y solo si la suma de las multiplicidades algebraicas de sus valores propios es n y la multiplicidad geométrica de cada valor propio es igual a su multiplicidad algebraica.

Ejemplo 5.15. *Determinemos si la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable.

Como

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda^2 \end{vmatrix},$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda^2 \end{vmatrix} = (1-\lambda^2)^2 = (1-\lambda)^2(1+\lambda)^2,$$

se cumple que el polinomio característico de A es $p_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(1+\lambda)^2$, de donde podemos identificar que

$$\sigma(A) = \{1, -1\}$$

y que ambos valores propios de A tienen multiplicidad algebraica igual a 2. La suma de las multiplicidades algebraicas de los valores propios de A es 4. A puede ser diagonalizable. Determinemos los subespacios propios asociados a cada valor propio, ya sabemos que

$$1 \leq \dim(S_1(A)) \leq 2, \quad 1 \leq \dim(S_{-1}(A)) \leq 2.$$

Si alguno de ellos no tuviera dimensión 2, A no sería diagonalizable.

Pero,

$$S_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ x = t \ \wedge \ y = z \right\} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \ \Rightarrow \ \dim(S_1(A)) = 2,$$

$$S_{-1}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ x = -t \ \wedge \ y = -z \right\} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \Rightarrow \dim(S_{-1}(A)) = 2.$$

La multiplicidad geométrica de ambos valores propios es 2.

La suma de las multiplicidades algebraicas de los valores propios de A es 2 y la multiplicidad geométrica de cada valor propio es igual a su multiplicidad algebraica, la matriz A es diagonalizable.

¿Cuáles son las matrices P, invertible, y D, diagonal, tales que $AP = PD$?

Uniendo una base de $S_1(A)$ con una base de $S_{-1}(A)$ tendremos una base de $\mathbb{R}^4$ formada por vectores propios de A. Los vectores en esta base de $\mathbb{R}^4$ son las columnas de P, por ejemplo, podemos tomar

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como

$$\begin{aligned} AP &= \left(\begin{array}{cccc} A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} & A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array} \right), \\ &= \left(\begin{array}{cccc} P\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & P\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & P\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} & P\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array} \right) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

entonces

$$A \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{D},$$

es decir,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Nota que también pudimos tomar, por ejemplo,

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

pues

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \right\}$$

también es una base de $\mathbb{R}^4$ formada por vectores propios de A, los dos primeros son una base de $S_1(A)$ y los dos últimos, una base de $S_{-1}(A)$. En este caso,

$$A \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Observación 5.16. *En general, si A es diagonalizable y P es la matriz cuyas columnas son los vectores propios de A que escogimos para formar una base de $\mathbb{R}^n$ (recuerda que uniendo las bases de los subespacios propios de A obtenemos una base de $\mathbb{R}^n$), entonces P es invertible y $AP = PD$, si D es la matriz diagonal cuya diagonal principal contiene a los valores propios de A, pero debemos tener cuidado al construir P y D: para que la igualdad $AP = PD$ se cumpla, es importante que el orden en que escribamos los valores propios de A en D coincida con la forma en que organizamos las bases de los subespacios propios de A para formar P. Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es la base de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios de A y mantenemos este orden para formar P, entonces el producto de A por la i-ésima columna de P es $Av_i = \lambda v_i$ si v_i es vector propio de A asociado al valor propio λ. Como*

$$\lambda v_i = 0v_1 + 0v_2 + \ldots + 0v_{i-1} + \lambda v_i + 0v_{i+1} + \ldots + 0v_n = P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \textit{posición } i$$

el elemento en la posición (i,i) de D debe ser λ, es decir, para cada $1 \leq i \leq n$, debe cumplirse que el elemento en la posición (i,i) de D es el valor propio asociado al vector propio en la i-ésima columna de P.

Ejemplo 5.17. *Consideremos*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$. *Como* A *es triangular inferior, los valores propios de* A *son* 1 *y* c.

Si $c = 1$, *1 es valor propio de* A *de multiplicidad algebraica igual a 3.*

Si $c \neq 1$, *1 es valor propio de* A *de multiplicidad algebraica 2 y* c *es valor propio de* A *de multiplicidad algebraica 1.*

Nota que si $c = 1$, A *no es diagonalizable. Para que* A *lo fuera necesitaríamos que* $S_1(A)$ *(único subespacio propio de* A*) tuviera dimensión 3, es decir, que* $S_1(A) = \mathbb{R}^3$. *Pero* $S_1(A) = \ker(A - I)$ *es igual a* $\mathbb{R}^3$ *si y solo si* $\eta(A - I) = 3$, *es decir, si y solo si* $\mathrm{r}(A - I) = 0$. *La única matriz de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *cuyo rango es cero es la matriz nula y como*

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

para cualquier par de valores $a, b \in \mathbb{R}$ *se cumple que* $A - I \neq \Theta$, *podemos asegurar que si* $c = 1$, $\mathrm{r}(A - I) > 0$ *y, por tanto,* $\eta(A - I) < 3$ *y* A *no es diagonalizable.*

Supongamos que $c \neq 1$. *Ya sabemos, aunque no lo determinemos, que* $S_c(A)$ *tiene dimensión 1, pues su dimensión satisface*

$$1 \leq \dim(S_c(A)) \leq \underbrace{\textit{multiplicidad algebraica de } c}_{=1}.$$

Entonces, para decidir si A *es diagonalizable solo debemos determinar la dimensión de* $S_1(A)$,

$$S_1(A) = \ker(A - I) = \ker\left(\begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c-1 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 0, ay = 0 \right\}.$$

Si $a \neq 0$, $ay = 0 \ \Leftrightarrow \ y = 0$ *y*

$$S_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 0, y = 0 \right\} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \Rightarrow \dim(S_1(A)) = 1.$$

Si $c \neq 1$ *y* $a \neq 0$, A *tampoco es diagonalizable pues la multiplicidad geométrica de* 1 *es 1 y su multiplicidad algebraica es 2. Nota que en este caso, al unir una base de* $S_c(A)$ *con una base de* $S_1(A)$ *tendríamos un conjunto li de vectores de* $\mathbb{R}^3$, *pero este conjunto, al tener cardinalidad 2, no sería una base de* $\mathbb{R}^3$ *y es por ello que* A *no es diagonalizable.*

Si $c \neq 1$ *y* $a = 0$,

$$S_1(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 0 \right\} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \Rightarrow \dim(S_1(A)) = 2.$$

En este caso A es diagonalizable, las multiplicidades algebraicas de sus valores propios son iguales a sus multiplicidades geométricas.

Además, si $c \neq 1$ y $a = 0$

$$S_c(A) = \ker\left(\begin{pmatrix} 1-c & 0 & 1 \\ 0 & 1-c & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ (1-c)y + bz = 0, (1-c)x + z = 0\right\},$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ y = \frac{b}{c-1}z, x = \frac{1}{c-1}z\right\},$$

$$= \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{c-1} \\ \frac{b}{c-1} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

Uniendo una base de $S_1(A)$ con una de $S_c(A)$ obtenemos una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A, por ejemplo, el conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{c-1} \\ \frac{b}{c-1} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A.

Teniendo el cuidado antes mencionado en la observación 5.16, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

es tal que

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{c-1} \\ 0 & 1 & \frac{b}{c-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{c-1} \\ 0 & 1 & \frac{b}{c-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

y también es tal que

$$A \begin{pmatrix} \frac{1}{c-1} & 1 & 0 \\ \frac{b}{c-1} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c-1} & 1 & 0 \\ \frac{b}{c-1} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si A es diagonalizable, no existen una única matriz invertible P y una única matriz diagonal D tales $AP = PD$, pero, P y D deben escogerse correctamente, el orden en que escribamos las columnas de una determina el orden en que deben escribirse las columnas de la otra.

Ejemplo 5.18. *Encontremos una matriz $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ que satisfaga*

1. $p_A(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 3)$,

2. Los vectores $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ *son vectores propios de* A *asociados a un mismo valor propio.*

3. $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ *es vector propio de* A*.*

De la información que nos han dado podemos concluir que -1 *y* 3 *son los valores propios de* A*.*

-1 *es un valor propio de* A *con multiplicidad algebraica 2,* 3 *es valor propio de* A *con multiplicidad algebraica 1.*

Como 3 *es valor propio de multiplicidad algebraica 1,* $S_3(A)$ *tiene dimensión 1. Dado que*

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

es li, ellos no pueden ser vectores propios asociados al valor propio 3*. Tiene que ocurrir entonces que*

$$S_3(A) = \left\langle\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\right\rangle \qquad \Rightarrow \qquad A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}.$$

Además,

$$S_{-1}(A) = \left\langle\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\right\rangle,$$

es decir,

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Podemos asegurar que A *es diagonalizable (sus valores propios son -1 y 3 y las multiplicidades geométrica y algebraica de cada uno de ellos coinciden y suman 3).*

Ya podemos determinar A*: como* $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ *es la primera columna de* A*, ésta es* $\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$*.*

Dado que $A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ *es la suma de las columnas 1 y 2 de* A*, si llamamos* v *a la segunda columna de* A *ocurre que*

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} + v = \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow v = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

Por último, como $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ *es la suma de las tres columnas de* A*, si llamamos* u *a la tercera columna de* A*, ocurre que*

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}+u=\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} \Rightarrow u=\begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix}.$$

La matriz A *es igual a*

$$\begin{pmatrix}-1&0&4\\0&-1&4\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

También pudimos para determinar A *construyendo matrices* P*, invertible, y* D*, diagonal tales que* $AP = PD$*: si llamamos* P *a una matriz cuyas columnas sean una base de* $\mathbb{R}^3$ *formada por vectores propios de* A*, por ejemplo, si tomamos*

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

entonces A *tiene que ser tal que* $AP = PD$ *con*

$$D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

y, por tanto,

$$AP=PD \Leftrightarrow A=PDP^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&4\\0&-1&4\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

Por último, una observación importante sobre matrices matrices invertibles y sus valores y vectores propios.

Observación 5.19. *Una matriz* $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *es invertible si y solo* $\eta(A)=0$*, es decir, si y solo si,* $\eta(A-0I)=0$ *lo que es equivalente a que el número 0 no es valor propio de* A*.*

Nota además que si A *es invertible y* $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *es valor propio de* A*, entonces existe* $x\in\mathbb{R}^n$*,* $x\neq\theta$ *tal que*

$$Ax=\lambda x \Leftrightarrow A^{-1}Ax=\lambda(A^{-1}x) \Leftrightarrow x=\lambda(A^{-1}x) \Leftrightarrow A^{-1}x=\frac{1}{\lambda}x,$$

es decir, si A *es invertible y* λ *es valor propio de* A*, tiene que ocurrir* $\lambda\neq 0$ *y* $\frac{1}{\lambda}$ *es valor propio de* A^{-1}*. Además, si* x *es vector propio de* A *asociado al valor propio* λ*,* x *es vector propio de* A^{-1} *asociado al valor propio* $\frac{1}{\lambda}$*. Podemos entonces asegurar que*

$$S_\lambda(A)=S_{\frac{1}{\lambda}}(A^{-1})$$

y, por tanto, si una matriz A es diagonalizable, su inversa también lo es. Nota que si A es diagonalizable, existen P, invertible, y D, diagonal, de modo que $AP = PD$, se cumple que

$$P = A^{-1}PD \Leftrightarrow PD^{-1} = A^{-1}P.$$

Es decir, si A es diagonalizable e invertible y $AP = PD$, entonces A^{-1} es diagonalizable y $A^{-1}P = PD^{-1}$.

Ejemplo 5.20. *Los valores propios de la matriz A del ejemplo 5.17 son 1 y c. Ella es invertible si y solo si $c \neq 0$. Podemos comprobar esto calculando su determinante*

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = c.$$

Si $c \neq 0$, A es invertible y los valores propios de A^{-1} son 1 y $\dfrac{1}{c}$.

Además,

$$S_1(A^{-1}) = S_1(A), \qquad S_{\frac{1}{c}}(A^{-1}) = S_c(A).$$

Por tanto, la base de $\mathbb{R}^3$ que construimos en el ejemplo 5.17 es una base de $\mathbb{R}^3$ con vectores propios de A^{-1} y podemos concluir que

$$A^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{c-1} & 1 & 0 \\ \frac{b}{c-1} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c-1} & 1 & 0 \\ \frac{b}{c-1} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 5.21. *La matriz del ejemplo 5.18, al ser todos sus valores propios distintos de cero, es invertible. Además, como los valores propios de A son 1 y -1, éstos mismos son los valores propios de A^{-1} y, dado que $D = D^{-1}$ y, por tanto,*

$$AP = PD \wedge A^{-1}P = PD \Rightarrow A = A^{-1}.$$

Ejemplo 5.22. *Determinamos si las siguientes matrices son diagonalizables y si son invertibles (si calculamos los valores propios de las matrices para analizar si son diagonalizables, podemos fácilmente decidir si son invertibles).*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Comencemos determinando sus polinomios característicos.

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(6-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 7\lambda = \lambda(\lambda - 7),$$

$$p_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}.$$

Este último determinante lo podemos desarrollar por la 2da columna:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left((3-\lambda)(2-\lambda)-2\right).$$

Entonces,

$$p_B(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+4) = (2-\lambda)(\lambda-4)(\lambda-1).$$

Por último,

$$p_C(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)(\lambda-1)^2,$$

$$p_D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -3-\lambda \end{vmatrix}.$$

Desarrollando este último determinante por la primera fila se tiene que

$$p_D(\lambda) = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & -4 & -3-\lambda \end{vmatrix},$$

$$= (1-\lambda)^2(-1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)^2(1+\lambda)(\lambda^2-1) = (1-\lambda)^3(\lambda+1)^2.$$

Se tiene que

$$\sigma(A) = \{0,7\},\ \sigma(B) = \{1,2,4\},\ \sigma(C) = \{-1,1\},\ \sigma(D) = \{1,-1\}.$$

Ya podemos decidir qué matrices son invertibles. La única que no lo es es A pues es la única de la que 0 es valor propio. Las restantes son invertibles.

Como los valores propios de A tienen multiplicidad algebraica 1, sus multiplicidades geométricas también son iguales a 1 y, dado que la suma de las multiplicidades algebraicas de los valores propios de A es 2, se cumple que A es diagonalizable. ¿Puedes encontrar matrices P, invertible, y D, diagonal, de modo que $A = PDP^{-1}$?

Por razones similar ocurre que B es diagonalizable. ¿Puedes escribir la justificación para B? ¿Puedes encontrar matrices P, invertible, y D, diagonal, de modo que $B = PDP^{-1}$?

La suma de las multiplicidades algebraicas de los valores propios de C es 3, C es diagonalizable si y solo si $\dim(S_1(C)) = 2$ pues, como la multiplicidad algebraica de -1 es 1, sabemos que su multiplicidad geométrica también es 1.

Por último, como la suma de las multiplicidades algebraicas de los valores propios de D es 5, D es diagonalizable si y solo la multiplicidad geométrica de 1 es 3 y la de -1 es 2.

Nota que si para alguna de las matrices hubiera ocurrido que su polinomio característico tiene una raíz compleja (no real), su conjugado también hubiera sido raíz del polinomio característico de la matriz, pero ninguna de esas raíces sería valor propio de la matriz. En este caso, la suma de las multiplicidades algebraicas de los valores propios de la matriz no sería igual al grado de su polinomio característico y la matriz no sería diagonalizable.

Decidamos ahora si C es diagonalizable.

$$S_1(C) = \ker(C - I) = \ker\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{pmatrix} \ : \ z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Como la dimensión de $S_1(C)$ es menor que 2, C no es diagonalizable.

Como

$$\begin{aligned} S_1(D) &= \ker\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}\right), \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \ : \ x = 0, y = z, t = -w \right\}, \\ &= \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle, \end{aligned}$$

se tiene que la multiplicidad geométrica de 1 es estrictamente menor que su multiplicidad algebraica y la matriz D tampoco es diagonalizable.