Apuntes para Álgebra 2, S1-2022

A. González Agüero, F. Jara Zubieta, M. Selva Soto

26 de marzo de 2022

Índice general

Capítulo 1

Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Introducción

En el curso de Álgebra 1 estudiamos los números complejos y, para ello, los representamos gráficamente como puntos o vectores en el plano de Argand.

En Física 1 ya estudiaron el concepto de vector, definieron operaciones entre vectores y vieron además que cantidades como la fuerza o la velocidad pueden ser representadas mediante vectores.

En este curso comenzaremos trabajando con vectores de dos y tres componentes, los representaremos gráficamente, realizaremos operaciones aritméticas con ellos y los utilizaremos para definir rectas y planos, podremos calcular la magnitud o longitud de un vector y la distancia entre vectores.

Posteriormente, introduciremos el concepto de *espacio vectorial* y veremos que otros objetos matemáticos también pueden ser considerados como *vectores*, lo que nos permitirá, por ejemplo, calcular la distancia entre dos funciones o determinar un polinomio *cercano* a una cierta función. A partir de ese momento estaremos dedicándonos al estudio del *Álgebra Lineal*, que es una de las áreas de la matemática que más aplicación tiene en la solución de problemas de Ingeniería y que establece qué son los *vectores*, cómo operan entre sí y qué propiedades cumplen.

1.1. Definición y operaciones aritméticas entre vectores

En este capítulo definiremos qué es un vector de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, cómo calcular su longitud, operaciones aritméticas entre ellos y la distancia entre vectores.

Definición 1.1 (Vectores en $\mathbb{R}^n$)**.** *Sea $n \in \mathbb{N}$. Se define un vector $\vec{v}$ en $\mathbb{R}^n$ como la lista ordenada de n elementos de $\mathbb{R}$, los cuales se denotan mediante*

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \textit{o bien,} \quad \vec{v} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T.$$

Más precisamente,

$$\mathbb{R}^n = \Big\{ \vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \ \ \textit{tales que para cada } i \in \{1, 2, \ldots, n\} \textit{ se cumple que } x_i \in \mathbb{R} \Big\}.$$

En algunos textos se representan los vectores en $\mathbb{R}^n$ como $[x_1, x_2, \cdots, x_n]$, $[x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$, o incluso como $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$.

En lo que sigue usaremos la representación dada en la definición de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1.2. *Un vector de* $\mathbb{R}^2$ *(*$n = 2$*) es de la forma* $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ *con* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$*. Por ejemplo,* $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ *es un vector de* $\mathbb{R}^2$*, pero* $\begin{pmatrix} 2+i \\ -1 \end{pmatrix}$ *no lo es.*

Por su parte, un vector de $\mathbb{R}^3$ *(*$n = 3$*) es* $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ *con* $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$*, por ejemplo,* $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Definición 1.3 (Igualdad de vectores)**.** *En* $\mathbb{R}^n$ *los vectores* $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ *e* $\vec{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$ *son* iguales *si y solo si para cada* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *se cumple que* $x_i = y_i$.

Ejemplo 1.4. *Considere lo siguientes vectores de* $\mathbb{R}^3$*:* $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{z} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *y* $\vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Entonces, $\vec{x}$ *es igual a* $\vec{w}$ *(*$\vec{x} = \vec{w}$*) puesto que cada una de sus componentes son iguales entre sí, sin embargo, los otros vectores son distintos ya que difieren en al menos una componente.*

A continuación veremos dos operaciones básicas con vectores y sus propiedades. Comenzamos por definir qué se entiende por *suma de vectores* y *producto por escalar.*

Definición 1.5 (Suma de vectores y producto por escalar)**.** *Sean* $n \in \mathbb{N}$ *fijo. Se definen,*

- *la suma de vectores* $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$*, denotada* $\vec{x} + \vec{y}$*, como al nuevo vector de* $\mathbb{R}^n$ *cuyas componentes son,*

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

- *el producto de un vector* $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ *por un escalar* $\lambda \in \mathbb{R}$*, denotado* $\lambda\,\vec{x}$*, como al nuevo vector de* $\mathbb{R}^n$ *cuyas componentes son,*

$$\lambda\,\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\,x_1 \\ \lambda\,x_2 \\ \vdots \\ \lambda\,x_n \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 1.6. *Si* $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda = 2$*, entonces*

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \lambda\,\vec{x} = 2\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 1.7. *Si* $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda = 2$, *entonces*

$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda\,\vec{x} = 2\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Las operaciones suma entre vectores y producto de un vector por un escalar verifican las siguientes propiedades:

1. la suma es conmutativa y asociativa, es decir, para cualquier par de vectores $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ y para vectores cualesquiera $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$.
2. Existe el elemento neutro para la suma y es el vector con todas sus componentes iguales a cero, el cual es llamado *vector nulo* y lo representaremos por la letra θ, es decir, $\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ es tal que para cada $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que $\vec{x} + \theta = \vec{x}$.
3. Para cada $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, existe el inverso aditivo de $\vec{x}$ y es el vector $-\vec{x} = (-1)\,\vec{x}$.
   A partir de este momento llamaremos *diferencia entre vectores* y la denotaremos $\vec{x} - \vec{y}$, a la suma de $\vec{x}$ con el inverso aditivo de $\vec{y}$, es decir, a $\vec{x} + (-\vec{y})$.
4. Para cada $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que $1\,\vec{x} = \vec{x}$.
5. Para todo par de escalares $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $\lambda_1\,(\lambda_2\,\vec{x}) = (\lambda_1\,\lambda_2)\,\vec{x}$.
6. Para todo par de escalares $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y para todo $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que $(\lambda_1 + \lambda_2)\,\vec{x} = \lambda_1\,\vec{x} + \lambda_2\,\vec{x}$.
7. Para todo escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ y para todo par de vectores $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ se satisface $\lambda\,(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda\,\vec{x} + \lambda\,\vec{y}$.
8. Para todo escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ y para todo vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que $\lambda\,\vec{x} = \theta \Leftrightarrow \lambda = 0 \;\vee\; \vec{x} = \theta$.
   Esta propiedad nos dice que el producto de un vector por un escalar es el vector nulo si y solo si el escalar es cero o el vector es el nulo.

Dos vectores especiales en $\mathbb{R}^2$ son los *vectores canónicos de* $\mathbb{R}^2$, definidos como,

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Note que cualquier vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ se puede representar como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}.$$

De este modo se dice que el vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ es una *combinación lineal* de los vectores canónicos de $\mathbb{R}^2$ con coeficientes x e y.

Para el caso de $\mathbb{R}^3$ los *vectores canónicos* son

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

y al igual que en el caso $n = 2$, observe que cualquier vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ se puede representar mediante

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k},$$

de donde se dice que el vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ es una *combinación lineal* de los vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$ con coeficientes x, y y z.

Ejemplo 1.8. *El vector* $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$ *es una combinación lineal de* $\vec{i}$ *y* $\vec{j}$*, en efecto:*

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3/2 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (3/2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En $\mathbb{R}^3$*, el vector* $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ *es una combinación lineal de los vectores* $\vec{i}$*,* $\vec{j}$ *y* $\vec{k}$*:*

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-\sqrt{3}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Definición 1.9 (Combinación lineal de un conjunto de vectores)**.** *Una suma de la forma*

$$\alpha_1 \vec{u_1} + \alpha_2 \vec{u_2} + \ldots + \alpha_m \vec{u_m}$$

con $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_m} \in \mathbb{R}^n$ *y* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ *es una* combinación lineal *de los vectores* $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_m}$ *con escalares* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$.

Un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ *es* combinación lineal *de vectores* $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_m} \in \mathbb{R}^n$ *dados si y solo si existen escalares* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ *de modo que*

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{u_1} + \alpha_2 \vec{u_2} + \ldots + \alpha_m \vec{u_m}.$$

Ejemplo 1.10. *El vector* $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ *es combinación lineal de los vectores* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ *si y solo si existen* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *de modo que*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta las definiciones de suma de vectores y producto vector por escalar , se obtiene

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b \\ b \\ a - 2b + 3c \end{pmatrix}.$$

Dado que dos vectores son iguales si y solo si sus componentes son iguales, el vector $\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$ *es combinación lineal de los vectores dados si y solo existen* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$\begin{aligned} a + 2b &= 1, \\ b &= 4, \\ a - 2b + 3c &= 2. \end{aligned}$$

Ahora, con la segunda ecuación tenemos un valor para b*. Si sustituimos* b *por* 4 *en la primera ecuación, obtenemos* $a = -7$ *y, por último, reemplazando* a *por* -7 *y* b *por* 4 *en la última ecuación se tiene que* $c = \frac{17}{3}$*. Por tanto, el vector* $\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$ *sí es combinación lineal de los vectores* $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$*. De hecho,*

$$\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix} = -7\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} + \frac{17}{3}\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.11. *El vector* $\vec{v} = \begin{pmatrix}-3\\10\\-2\end{pmatrix}$ *es combinación lineal de los vectores* $\vec{u_1} = \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}, \vec{u_2} = \begin{pmatrix}3\\-9\\6\end{pmatrix}$ *y* $\vec{u_3} = \begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}$ *si y solo si existen* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *de modo que*

$$\begin{pmatrix}-3\\10\\-2\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\-9\\6\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}.$$

Es decir, el vector $\begin{pmatrix}-3\\10\\-2\end{pmatrix}$ *es combinación lineal de los vectores dados si y solo existen* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$\begin{aligned} a + 3b - c &= -3, \\ -3a - 9b + 4c &= 10, \\ 2a + 6b + 2c &= -2. \end{aligned}$$

Resolviendo el conjunto de ecuaciones por el método de sustitución se obtiene:

$$\begin{aligned} &a = -2 - 3b, \\ &b \in \mathbb{R}, \\ &c = 1. \end{aligned}$$

Esto es, existen muchos valores de b *y* a *para los cuales el vector* $\vec{v}$ *es combinación lineal de* $\vec{u_1}$*,* $\vec{u_2}$ *y* $\vec{u_3}$*, por ejemplo:*

- *Si* $b = -2$ *entonces* $a = -2 - 3(-2) = 4$*, y se cumple:*

$$\begin{pmatrix}-3\\10\\-2\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}3\\-9\\6\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}.$$

- *Si* $b = 0$ *entonces* $a = -2 - 3(0) = -2$*, y se cumple:*

$$\begin{pmatrix}-3\\10\\-2\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}3\\-9\\6\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix},$$

y así sucesivamente.

Ejemplo 1.12. *El vector* $\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$ *es combinación lineal de los vectores* $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}$ *si y solo si existen* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *de modo que*

$$\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}.$$

El vector $\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$ *es combinación lineal de los vectores dados si y solo existen* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$\begin{aligned} a - 3c &= 1,\\ 2b + 3c &= 4,\\ -a - 2b &= 2. \end{aligned}$$

Si sumamos las dos primeras ecuaciones obtenemos que $a, b \in \mathbb{R}$ *deben ser tales que* $a + 2b = 5$, *sin embargo, multiplicando por -1 la última ecuación se tiene* $a + 2b = -2$. *Dado que no es posible que un mismo número real sea simultáneamente igual a* 5 *y a* -2, *entonces no existen valores para* a, b *y* c *que cumplan el conjunto de ecuaciones, y por tanto el vector* $\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$ *no es combinación lineal de los vectores* $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}$.

1.2. Representación gráfica de vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

En $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$ los vectores se representan gráficamente en un sistema de coordenadas cartesianas como segmentos de recta orientados (flechas) desde un punto a otro en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. A los vectores que comienzan en el origen de coordenadas les llamamos *vectores en el origen*. A los que comienzan en un punto distinto del origen de coordenadas les llamamos *vectores libres*. El punto donde comienza el segmento de recta se denomina *punto inicial* del vector y el punto donde termina, *punto final*.

El vector en el origen $\vec{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ se representa gráficamente en el plano cartesiano como el segmento dirigido desde el origen de coordenadas al punto (x_1, x_2). El vector en el origen $\vec{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ se representa gráficamente en el plano cartesiano como el segmento dirigido desde el origen de coordenadas al punto (x_1, x_2, x_3).

Un vector en el origen $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ puede ser trasladado a un punto $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ (A distinto del origen de coordenadas) y representado como un vector libre. El vector resultante es equivalente al vector original (sus componentes son iguales), pero se representa gráficamente como la flecha desde A al punto $B = (a_1 + x_1, a_2 + x_2, \ldots, a_n + x_n)$.

De manera similar, si A y B son los siguientes puntos $A = (a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$ y $B = (b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n)$, el vector de A a B, que se escribe como $\vec{AB}$, puede trasladarse al origen de coordenadas y representarse como el vector en el origen

$$\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \\ \vdots \\ b_n - a_n \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo, el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$ se puede representar como un segmento de recta dirigido (flecha) desde el origen de coordenadas al punto $(1,2)$ (en rojo en la figura 1.1). Este vector puede trasladarse al punto $(3,2)$ y representarse como el vector libre desde $(3,2)$ al punto $(4,4)$ (vector azul en 1.1). Algebraicamente ambos vectores (rojo y azul en 1.1) son iguales, aunque se representen gráficamente en posiciones distintas del plano cartesiano. Ellos son representaciones distintas del mismo vector.

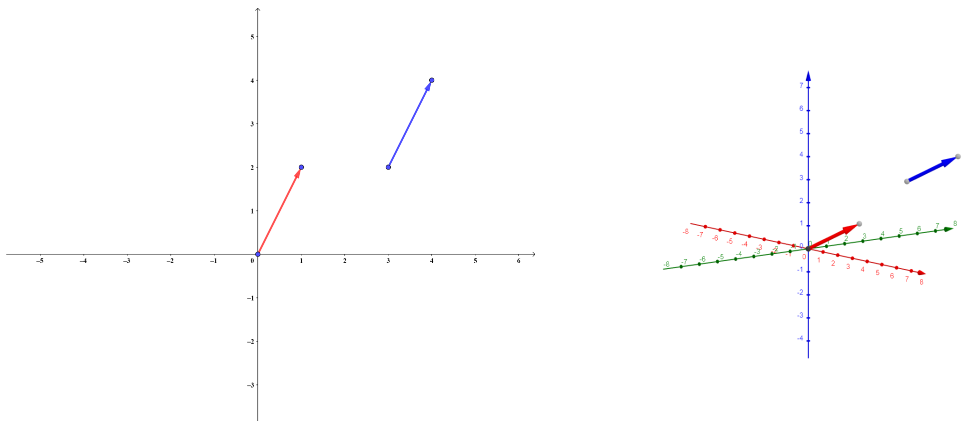

Figura 1.1: Representación geométrica de vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, libres (azules) y en el origen (rojos).

Observación 1.13. *Cabe destacar que a veces, debido a la gran similitud algebraica entre puntos y vectores en $\mathbb{R}^n$, no se hace distinción entre ellos. Note que al punto $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ puede asociarse el vector $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y viceversa.*

Dependiendo del contexto puede considerarse a $\mathbb{R}^n$ como el conjunto de puntos de la forma $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

En este curso consideraremos que $\mathbb{R}^n$ es, como se definió antes, un conjunto de vectores y cuando escribamos $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ o $x \in \mathbb{R}^n$ debemos asumir, si no se especifica que x es un punto, que $\vec{x}$, o x, es un vector.

También podemos valernos de la representación gráfica para calcular la suma de vectores en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$ o el producto por un escalar entero.

Si queremos, por ejemplo, sumar los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ podemos trasladarlos a un origen común para, posteriormente, trasladar al vector $\vec{y}$ al punto final del vector $\vec{x}$ (o trasladar al vector $\vec{x}$ al punto final del vector $\vec{y}$), el vector desde el punto inicial de $\vec{x}$ al punto final de $\vec{y}$ es $\vec{x} + \vec{y}$. En la figura 1.2 se ha representado gráficamente la suma de los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

En $\mathbb{R}^3$ se procede de manera similar. Observe la figura 1.3.

Antes mencionamos que para cada $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, existe su inverso aditivo, que representamos por $-\vec{x}$, gráficamente este vector se obtiene rotando a $\vec{x}$ 180 grados con respecto a su origen. Los vectores $\vec{x}$ y $-\vec{x}$ tienen la misma dirección y longitud (esta semana veremos la definición formal de longitud de un vector, un poco más adelante en el curso hablaremos de su dirección u orientación), pero sentidos contrarios.

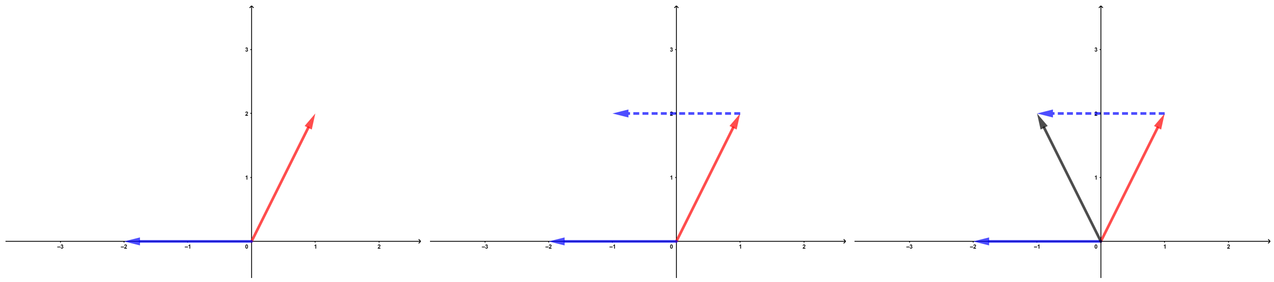

Figura 1.2: Representación gráfica de la suma de vectores en $\mathbb{R}^2$. El vector dibujado en negro es el que resulta de sumar los vectores $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (rojo) e $\vec{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (azul). El vector representado con una línea discontinua azul es $\vec{y}$ trasladado al extremo final de $\vec{x}$.

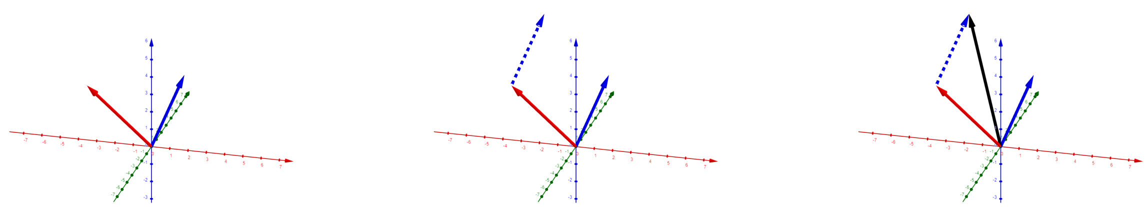

Figura 1.3: Representación gráfica de la suma de vectores en $\mathbb{R}^3$. El vector dibujado en negro es el que resulta de sumar los vectores $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ (rojo) e $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ (azul). El vector representado con una línea discontinua azul es $\vec{y}$ trasladado al extremo final de $\vec{x}$.

Sabiendo cómo representar gráficamente la suma de vectores también podemos representar gráficamente el producto de un vector $\vec{x}$ por un escalar entero λ:

- Si $\lambda = 0$, el resultado es el vector nulo,
- si $\lambda > 0$, solo debemos sumar a $\vec{x}$ consigo mismo λ veces,
- mientras que si $\lambda < 0$, sumamos a $\vec{x}$ consigo mismo $|\lambda|$ veces y rotamos al vector resultante 180 grados alrededor de su origen.

Cantidades importantes asociadas a un vector son su longitud, o magnitud, su orientación o dirección y su sentido. Si, por ejemplo, un vector representa la velocidad de un cuerpo, su magnitud es la rapidez con la que el cuerpo se mueve.

En este curso también trabajaremos con magnitudes o longitudes de vectores, pero les llamaremos *norma*.

1.3. Norma de vectores

Con ayuda del teorema de Pitágoras podemos determinar la longitud de vectores de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. Observa la figura 1.4. La longitud, magnitud, o norma del vector $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, que denotamos por $\|\vec{x}\|$, es tal que

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|^2 = x_1^2 + x_2^2$$

y, dado que $\|\vec{x}\|$ representa una longitud, tomaremos

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

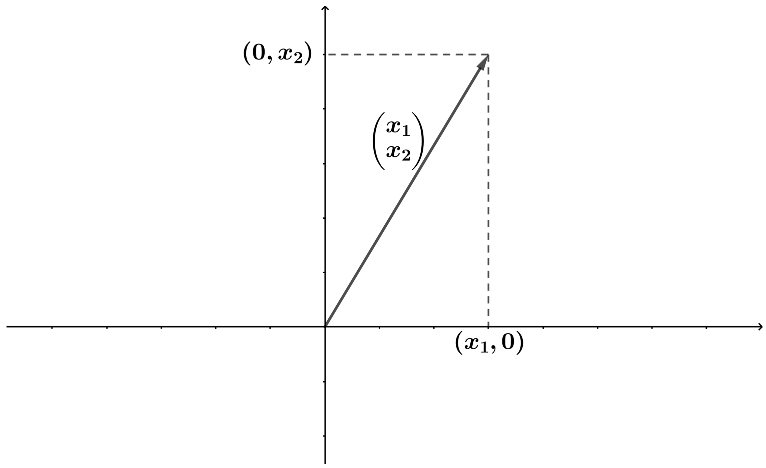

Figura 1.4: Norma de vectores de $\mathbb{R}^2$.

En $\mathbb{R}^3$ también podemos utilizar el teorema de Pitágoras para calcular la longitud del vector. Observen, por ejemplo, la figura 1.5.

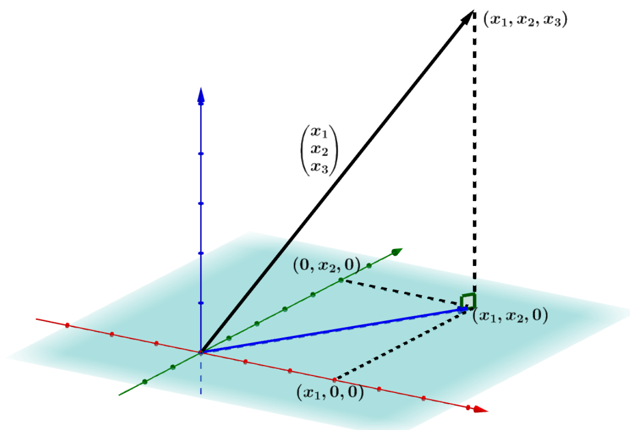

Figura 1.5: Norma de vectores de $\mathbb{R}^3$.

Para calcular la norma del vector $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ podemos comenzar calculando la longitud de su proyección sobre el plano XY, es decir, del vector $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Esto podemos hacerlo con el teorema de Pitágoras, la longitud l de este vector es tal que

$$l^2 = x_1^2 + x_2^2.$$

Aplicando Pitágoras nuevamente, pero ahora en el triángulo rectángulo cuya hipotenusa es $\vec{x}$ obtenemos que

$$\|\vec{x}\|^2 = l^2 + x_3^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Dado que $\|\vec{x}\|$ representa una longitud, tomaremos

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Ejemplo 1.14. *La norma del vector* $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *es* $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$.

Definición 1.15. *Sea $n \in \{2,3\}$. La* norma euclidiana *de $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ es la función que, a cada vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, hace corresponder el número real*

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

y a cada $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, el número

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Esta función tiene las siguientes propiedades:

1. $\forall\, \vec{u} \in \mathbb{R}^n \ : \ \|\vec{u}\| \geq 0 \quad y \quad \|\vec{u}\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} = \theta$ [1],
2. $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}\ ,\ \forall\, \vec{u} \in \mathbb{R}^n \ : \ \|\lambda\, \vec{u}\| = |\lambda|\, \|\vec{u}\|$,
3. $\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n \ : \ \|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$, *la cual es conocida como desigualdad triangular. Si observa los triángulos en las últimas imágenes de las figuras 1.2 y 1.3, cuyos lados tienen longitudes $\|\vec{x}\|, \|\vec{y}\|$ y $\|\vec{x} + \vec{y}\|$ notará por qué esta desigualdad recibe el nombre de desigualdad triangular.*

Observación 1.16. *Es relativamente sencillo demostrar que las normas euclidianas para $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ satisfacen las propiedades anteriores. Puede intentarlo como ejercicio.*

Al tener una norma en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ podremos calcular la distancia entre vectores de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

1.4. Distancia entre vectores

Cuando pensamos en las propiedades que debe cumplir una distancia es natural pedir las que se enuncian en la siguiente definición.

Definición 1.17. *Una* distancia *en $\mathbb{R}^n$ es una función que a un par de vectores de $\mathbb{R}^n$ hace corresponder un número real mayor o igual que cero, usualmente denotada como $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, que cumple las siguientes propiedades:*

1. $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \ : \ d(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0$,
2. $d(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = \vec{y}$,
3. $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \ : \ d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x})$,
4. $\forall\, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n \ : \ d(\vec{x}, \vec{y}) \leq d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{z}, \vec{y})$.

Ahora podemos utilizar la norma euclidiana (en verdad cualquier norma, pero hasta el momento solo conocemos la euclidiana) para calcular una distancia entre dos vectores $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $n \in \{2,3\}$ pues la función que a cada par de vectores $\vec{x}, \vec{y}$ le hace corresponder la norma de la diferencia entre ellos cumple con todas las propiedades mencionadas anteriormente. Veámoslo.

1. $\mathrm{d}(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| \geq 0$,
2. $\mathrm{d}(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|\vec{x} - \vec{y}\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} - \vec{y} = \theta \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = \vec{y}$,
3. $\mathrm{d}(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \|-(\vec{y} - \vec{x})\| = |-1|\, \|\vec{y} - \vec{x}\| = \mathrm{d}(\vec{y}, \vec{x})$,
4. $\mathrm{d}(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \|\vec{x} - \vec{z} + \vec{z} - \vec{y}\| \leq \|\vec{x} - \vec{z}\| + \|\vec{z} - \vec{y}\| = \mathrm{d}(\vec{x}, \vec{z}) + \mathrm{d}(\vec{z}, \vec{y})$.

[1] Recuerde que θ denota al vector nulo de $\mathbb{R}^n$.

Con la norma euclidiana definida antes tendríamos que si $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ e $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}}$, entonces

$$\mathrm{d}(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Esta distancia se denomina *distancia euclidiana.*

Ejemplo 1.18. *La distancia entre los vectores* $\vec{x} = (1, 2, 1)^T$ *y* $\vec{y} = (-1, 2, 2)^T$ *está dada por,*

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(2)^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}.$$

Más adelante volveremos a utilizar la norma de vectores y la distancia entre ellos, pero, antes de continuar, recordemos las ecuaciones de rectas y planos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

1.5. Rectas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Considere los puntos $A, B \in \mathbb{R}^2$. Ya sabemos escribir (de un curso previo) la ecuación de la recta que pasa por esos puntos.

Si $A = (x_a, y_a)$, $B = (x_b, y_b)$ y $x_a \neq x_b$, recordemos que lo más usado en este caso para escribir la ecuación de la recta que pasa por A y B es calcular su pendiente, definida como

$$m = \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a},$$

para luego escribir que los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que pertenecen a la recta que pasa por A y B son los que satisfacen la ecuación

$$y - y_a = m\,(x - x_a). \tag{1.1}$$

Ejemplo 1.19. *La ecuación de la recta que pasa por los puntos* $(1, 2)$ *y* $(3, 1)$ *de* $\mathbb{R}^2$ *es*

$$y - 2 = \frac{1-2}{3-1}\,(x - 1) = -\frac{1}{2}\,(x - 1).$$

Su gráfico es el que se muestra en la figura 1.6.

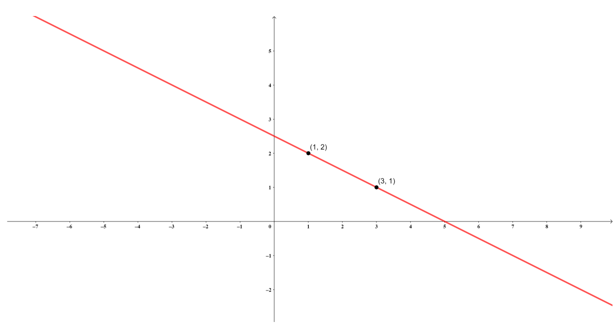

Figura 1.6: Recta que pasa por $(1, 2)$ y $(3, 1)$

Si $\Delta_y \neq 0$ y $\Delta_x \neq 0$, la ecuación (1.1) también puede escribirse como

$$y - y_a = \frac{\Delta_y}{\Delta_x}(x - x_a) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y - y_a}{\Delta_y} = \frac{x - x_a}{\Delta_x}$$

Si llamamos λ a cada uno de los cocientes anteriores, los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que pertenecen a la recta que pasa por A y B son los que satisfacen

$$\frac{y - y_a}{\Delta_y} = \lambda = \frac{x - x_a}{\Delta_x} \qquad \Leftrightarrow \qquad x - x_a = \lambda\,\Delta_x, \quad y - y_a = \lambda\,\Delta_y, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

que puede escribirse como

$$x = x_a + \lambda\,\Delta_x, \quad y = y_a + \lambda\,\Delta_y$$

que, a su vez, teniendo en cuenta que dos puntos en $\mathbb{R}^2$ son iguales si y solo si sus componentes son iguales, puede escribirse como

$$(x, y) = (x_a, y_a) + \lambda\,(\Delta_x, \Delta_y), \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Esta última ecuación se denomina *ecuación paramétrica de la recta* y también es válida si $\Delta_x = 0$ o $\Delta_y = 0$. Si $\Delta_x = 0$, la ecuación se reduce a $x = x_a, y \in \mathbb{R}$ y si $\Delta_y = 0$, entonces los puntos (x, y) en la recta son los que satisfacen $x \in \mathbb{R}, y = y_a$. Dando valores al parámetro λ en (1.2) generamos puntos en la recta, por ejemplo, si $\lambda = 0$ obtenemos $(x, y) = (x_a, y_a)$, si $\lambda = 1$, entonces $(x, y) = (x_b, y_b)$.

Dados dos puntos C y D cualesquiera en la recta anterior,

$$C = (x_a, y_a) + \lambda_1\,(\Delta_x, \Delta_y), \qquad D = (x_a, y_a) + \lambda_2\,(\Delta_x, \Delta_y),$$

el vector que va de C a D tiene componentes

$$(x_a + \lambda_2\,\Delta_x - x_a - \lambda_1\,\Delta_x, y_a + \lambda_2\,\Delta_y - y_a - \lambda_1\,\Delta_y)^{\mathrm{T}} = (\lambda_2 - \lambda_1)\,(\Delta_x, \Delta_y)^{\mathrm{T}},$$

es decir, si llamamos $\vec{r}$ al vector con componentes $(\Delta_x, \Delta_y)^{\mathrm{T}}$, se cumple que el vector entre cualquier par de puntos de la recta es paralelo a $\vec{r}$ [2]. El vector $\vec{r}$ se denomina, por tanto, *vector director de la recta*. Los puntos $P \in \mathbb{R}^2$ que pertenecen a la recta que contiene a A y B son los que satisfacen que el vector desde P hasta A (o desde P hasta B o desde P a cualquier punto conocido en la recta) es paralelo al vector de A a B o es el vector nulo, es decir, P pertenece a la recta que pasa por A y B si y solo si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\,\overrightarrow{AB}.$$

Esta ecuación se denomina *ecuación vectorial de la recta*.

Observación 1.20. *Un vector es director $\vec{v}$ de una recta si el vector entre dos puntos cualesquiera C y D, distintos, y en la recta, es paralelo a él. Por tanto, si A y B son puntos conocidos en una recta, no solo $\vec{AB}$ es un vector director de la recta que los contiene, sino que cualquier vector paralelo a $\vec{AB}$ también es director de esta recta.*

Ejemplo 1.21. *Las ecuaciones paramétrica y vectorial de la recta en el ejemplo 1.19 son*

- *Paramétrica:* $(x, y) = (1, 2) + t\,(-2, 1), \quad t \in \mathbb{R},$
- *Vectorial:* $\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$

El vector $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *es un vector director de la recta. Cualquier vector de la forma*

$$\lambda\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \textit{con } \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

también es vector director de la recta, en particular lo es $(-1/2)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *y, por ejemplo,*

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

es una ecuación vectorial de la misma recta.

En la figura 1.7 se observan la recta y un vector director de ella, el vector $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$*. Note que, si tomamos dos puntos cualesquiera en la recta, el vector de uno a otro es paralelo a* $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$*.*

Dando valores a t en las ecuaciones anteriores podemos generar puntos en la recta, con $t = 0$ obtenemos $(1, 2)$, si $t = -1$, se tiene el punto $(3, 1)$.

[2] Dos vectores $\vec{x}, \vec{y}$ son paralelos si y solo si existe $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ de modo que $\vec{x} = \lambda\vec{y}$.

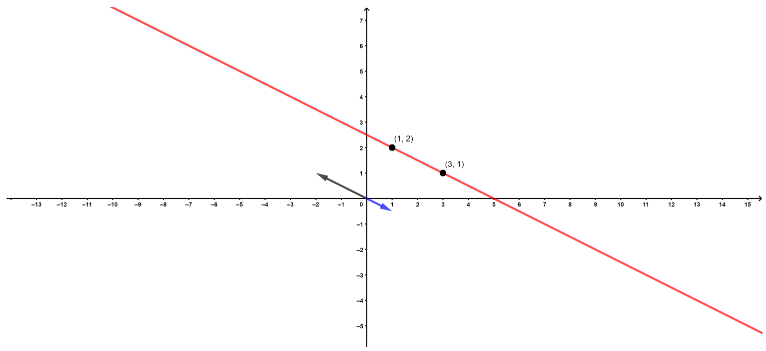

Figura 1.7: Recta que pasa por $(1, 2)$ y $(3, 1)$ y dos vectores directores, en negro el vector $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y en azul, el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$.

De manera similar a como hemos trabajado en $\mathbb{R}^2$, si $A, B \in \mathbb{R}^3$, $A = (x_a, y_a, z_a)$, $B = (x_b, y_b, z_b)$, entonces los puntos $P = (x, y, z)$ que pertenecen a la recta que pasa por A y B son los que satisfacen

$$(x,\, y,\, z) = \underbrace{(x_b, y_b, z_b)}_{\text{punto en la recta}} + \lambda\,(x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

siendo ésta la ecuación paramétrica de dicha recta. El vector desde A hasta B es *un vector director de la recta*, y así, la *ecuación vectorial* de la recta es

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\, \underbrace{(x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a)^{\mathrm{T}}}_{\text{vector director}}$$

que indica que los puntos $P \in \mathbb{R}^3$ en la recta son los que satisfacen que el vector desde A hasta P es paralelo al vector de A a B.

Ejemplo 1.22. *Un vector director de la recta que pasa por los puntos* $(1, 2, 1)$, $(-1, 2, 3)$ *es*

$$\vec{r} = (-2, 0, 2)^T.$$

La ecuación paramétrica de la recta es

$$(x, y, z) = (-1, 2, 3) + \lambda\,(-2, 0, 2), \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

mientras que su ecuación vectorial es

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{r}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

si $A = (-1, 2, 3)$, *o bien* $A = (1, 2, 1)$, *y* P *es un punto cualesquiera en* $\mathbb{R}^3$.

En la figura 1.8 se observan esta recta y el vector $\vec{r}$. Cualquier vector de un punto a otro en la recta es paralelo a $\vec{r}$.

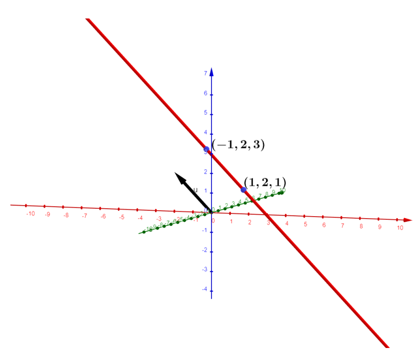

Figura 1.8: Recta que pasa por $(1, 2, 1)$ y $(-1, 2, 3)$ y un vector director

Para determinar una recta en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ podemos tener: 2 puntos sobre la recta o un punto sobre la recta y un vector director de la recta.

Ejemplo 1.23.

1. *Determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos* $(1, 1)$ *y* $(-1, 5)$.

   Solución: *Un vector director de la recta es* $(2, -4)^T$ *y la ecuación paramétrica de la recta es*

   $$(x, y) = (1, 1) + \lambda\,(2, -4), \qquad \textit{o bien,} \qquad (x, y) = (-1, 5) + \lambda\,(2, -4), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

2. *Determine la ecuación de la recta que contiene a los puntos* $P_1 = (4, -6, 5)$ *y* $P_2 = (2, -3, 0)$.

   Solución: *Un vector director de esta recta es*

   $$\vec{r} = \overrightarrow{P_1\,P_2} = (-2, 3, -5)^T$$

   y su ecuación vectorial es

   $$\overrightarrow{P_1\,P} = \lambda\,\vec{r}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

3. *Determine la ecuación de la recta que contiene a* $P = (2, -9, -5)$ *y es paralela al vector* $(0, 2, 3)^T$.

   Solución: *Un vector director de la recta es cualquier vector paralelo a* $(0, 2, 3)^T$*, podemos tomar este mismo vector como vector director. La ecuación paramétrica de la recta es*

   $$(x, y, z) = (2, -9, -5) + t\,(0, 2, 3), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Definición 1.24. *Dadas dos rectas*

$$\mathcal{L}_1 : \quad \overrightarrow{AP} = t\,\vec{r}, \qquad \mathcal{L}_2 : \quad \overrightarrow{BP} = t\,\vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}$$

siendo A, $B \in \mathbb{R}^n$ *dos puntos fijos y* $\vec{u}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ *vectores, decimos que*

- *son* iguales *si y solo si contienen exactamente los mismos puntos y éste es el caso si* $A \in \mathcal{L}_2$ *o* $B \in \mathcal{L}_1$ *y los vectores directores son paralelos.*
- *son* paralelas *si sus vectores directores son paralelos.*
- *se* intersectan *si y solo si existe* $Q \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $\vec{AQ} = t_1\vec{r}$ *y* $\vec{BQ} = t_2\vec{u}$.

Cabe destacar que en $\mathbb{R}^2$, cuando dos rectas no son paralelas, ellas se intersectan en un punto. Éste no es el caso en $\mathbb{R}^3$.

En la figura 1.9 se muestran rectas que no son paralelas. Las de la izquierda se intersectan en un punto, las de la derecha no. Los vectores directores se han dibujado en ambos casos como vectores en el origen.

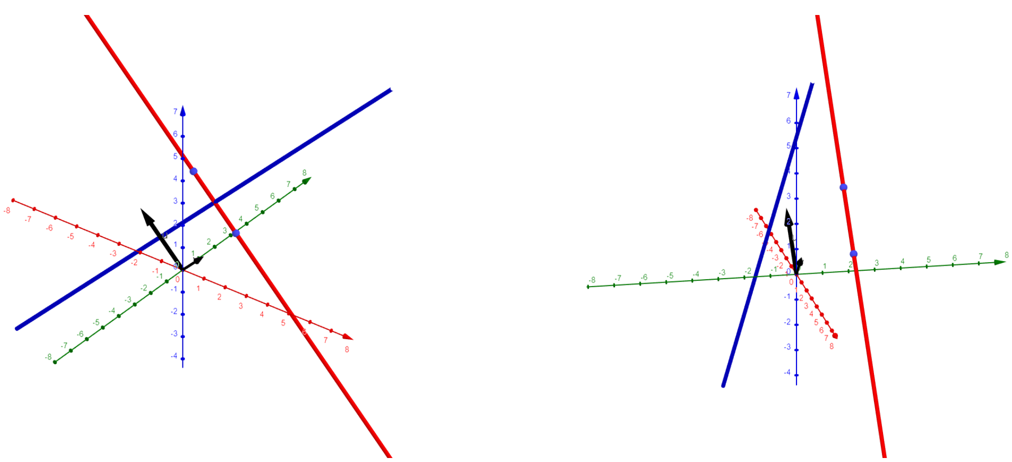

Figura 1.9: En $\mathbb{R}^3$ puede ocurrir que rectas que no son paralelas no se intersecten

Ejemplo 1.25. 1. *Considere las rectas*

$$\mathcal{L}_1: \quad (x, y, z) = (2, 0, -1) + t\,(-3, 1, 1), \quad t \in \mathbb{R}, \qquad \mathcal{L}_2: \quad \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{2} = z + 1.$$

a) *Determine 2 puntos sobre $\mathcal{L}_1$.*

b) *Determine, si existen, los puntos de intersección de estas dos rectas.*

Solución: *Para determinar dos puntos sobre $\mathcal{L}_1$ solo debemos dar valores al parámetro t en la ecuación de $\mathcal{L}_1$. Si, por ejemplo, tomamos $t = 0$, se tiene que $(2, 0, -1)$ es un punto en $\mathcal{L}_1$. Tomando $t = 1$ obtenemos un segundo punto en $\mathcal{L}_1$, el punto $(-1, 1, 0)$.*

La ecuación paramétrica de $\mathcal{L}_2$ se obtiene igualando cada uno de los términos al mismo parámetro. Si le llamamos t al parámetro obtenemos

$$\begin{aligned} x &= -1 + 3\,t, \\ y &= 2 + 2\,t, \\ z &= -1 + t, \end{aligned}$$

es decir,

$$(x, y, z) = (-1, 2, -1) + t\,(3, 2, 1), \qquad t \in \mathbb{R}$$

es la ecuación paramétrica de $\mathcal{L}_2$.
Las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ se intersectan si y solo si existen $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\underbrace{(2, 0, -1) + t_0(-3, 1, 1)}_{\text{punto en } \mathcal{L}_1} = \underbrace{(-1, 2, -1) + t_1(3, 2, 1)}_{\text{punto en } \mathcal{L}_2}$$

que es equivalente al sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2 - 3\,t_0 &= -1 + 3\,t_1, \\ t_0 &= 2 + 2\,t_1, \\ -1 + t_0 &= -1 + t_1. \end{aligned}$$

La última ecuación implica que $t_1 = t_0$. Sustituyendo esta relación en la segunda ecuación se tiene que $t_0 = -2$, con lo que $t_1 = -2$, pero, reemplazando estos valores en la primera ecuación, ésta no se satisface. Con esto podemos concluir que no existen $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ de modo que las ecuaciones se cumplan y, por tanto, las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ no se intersectan.

Note que, a pesar de que $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ no son paralelas, ellas no se intersectan. Ésta es, como mencionamos antes, una diferencia importante entre rectas en $\mathbb{R}^2$ y rectas en $\mathbb{R}^3$. En $\mathbb{R}^2$ si dos rectas no son paralelas, ellas se intersectan en un punto. En $\mathbb{R}^3$ hay rectas que no son paralelas y tampoco se intersectan.

2. *Determine la ecuación de la recta que pasa por $(1, -1, 5)$ y es paralela a la recta*

$$\mathcal{L}: \quad \frac{-x+2}{2} = 2\,y + 3 = \frac{3-z}{4}.$$

Solución: *la ecuación paramétrica de $\mathcal{L}$ se obtiene igualando cada término a un mismo parámetro t*

$$\begin{aligned} x &= 2 - 2\,t, \\ y &= -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\,t, \\ z &= 3 - 4\,t, \end{aligned}$$

es decir,

$$(x, y, z) = (2, -3/2, 3) + t\,(-2, 1/2, -4), \qquad t \in \mathbb{R}$$

es la ecuación paramétrica de $\mathcal{L}$, de donde se reconoce que uno de sus vectores directores es el dado por $\vec{r} = (-2, 1/2, -4)^T$.
De esta manera, como la recta buscada, llamémosle $\mathcal{L}_1$, debe ser paralela a $\mathcal{L}$ y pasar por el punto $(1, -1, 5)$, entonces su ecuación paramétrica está dada por

$$\mathcal{L}_1 : \quad (x, y, z) = (1, -1, 5) + t\,(-2, 1/2, -4), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 1.26. *Escriba la ecuación de la recta que pasa por $Q = (-1, 6, 3)$ y es paralela a $(3, 1, 2)^T$. Determine si $P = (1, 2, -1)$ pertenece a la recta encontrada.*

***Solución**: Un vector director de la recta es $(3, 1, 2)^T$ o un vector paralelo a él. Como $(-1, 6, 3)$ pertenece a la recta buscada, su ecuación paramétrica es*

$$\mathcal{L} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x, y, z) = (-1, 6, 3) + t\,(3, 1, 2), \text{ con } t \in \mathbb{R}\right\}.$$

El punto dado pertenece a $\mathcal{L}$ si y solo si existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$(1, 2, -1) = (-1, 6, 3) + t\,(3, 1, 2).$$

Dado que $1 = -1 + 3\,t \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$, pero $2 = 6 + t \Leftrightarrow t = -4$, podemos concluir que $P \notin \mathcal{L}$.