Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

GAJ/EBC/CFS/CMR/ARP

Cálculo III (521227). Semestre II 2022. Certamen 2

Problema 1. Sea D el paralelogramo limitado por las rectas $x+y=\frac{\pi}{4}$, $x+y=\frac{\pi}{2}$, $x-y=0$, $x-y=\frac{\pi}{3}$. Calcular

$$I=\iint_D \sin(x-y)\cos(x+y)\ \mathrm{d(x,y)}.$$

Solución: Calculamos la integral mediante el cambio de variables

$$\begin{aligned} u &= x+y \\ v &= x-y. \end{aligned}$$

Despejando x e y de estas expresiones obtenemos la transformación

$$(x,y)=T(u,v)=\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right),$$

de la cual se obtiene el nuevo dominio de integración

$$D'=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{\pi}{4}\le u\le\frac{\pi}{2}, 0\le v\le\frac{\pi}{3}\right\}$$

y

$$|\det JT(u,v)|=\left|\begin{array}{cc} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right|=\frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, por el teorema de cambio de variables

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \sin(x-y)\cos(x+y)\,d(x,y) \\ &= \iint_{D'} \sin(v)\cos(u)|\det JT(u,v)|\,d(u,v) \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(v)\cos u\frac{1}{2}\,dvdu \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

Problema 2. Sea K el sólido limitado por el cilindro $x^2+y^2=4$ y los planos $z=4$, $z=-4$. Determine el valor de $a\in\mathbb{R}$ tal que el paraboloide $z=x^2+y^2+a$ divide a K en dos sólidos de igual volumen.

Solución: Sean K_1 y K_2 las partes del sólido K que quedan por arriba y por debajo del paraboloide dado por $g(x,y)$, respectivamente, y sean V_1 y V_2 sus respectivos volúmenes.

Observamos que para $(x,y,z)\in K_1$, tenemos $x^2+y^2\le 4$ y $g(x,y)\le z\le 4$. Usando coordenadas cilíndricas, i.e.,

$$(x,y,z)=T(r,\theta,z)=(r\cos\theta,r\sin\theta,z),\quad r\ge 0,\theta\in[0,2\pi],z\in\mathbb{R},$$

tenemos

$$z=g(x,y)=x^2+y^2+a=r^2+a,$$

por lo tanto $K_1 = \{(r,\theta,z)\,|\, r^2+a \le z \le 4, 0 \le r \le 2, \theta \in [0,2\pi]\}$, y el volumen de V_1 está dado por

$$\begin{aligned} V_1 &= \iiint_{K_1} 1\, d(x,y,z) = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r^2+a}^4 r\, dzdrd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 rz|_{r^2+a}^4\, drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (4-a)r - r^3\, drd\theta \\ &= 2\pi(4-2a). \end{aligned}$$

Análogamente, $K_2 = \{(r,\theta,z)\,|\, -4 \le z \le r^2+a, 0 \le r \le 2, \theta \in [0,2\pi]\}$, y

$$\begin{aligned} V_2 &= \iiint_{K_2} 1\, d(x,y,z) = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{-4}^{r^2+a} r\, dzdrd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 rz|_{-4}^{r^2+a}\, drd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^3 + (a+4)r\, drd\theta \\ &= 2\pi(2a+12). \end{aligned}$$

Entonces

$$V_1 = V_2 \iff 2\pi(4-2a) = 2\pi(2a+12) \iff a = -2.$$

Problema 3. Sea C la curva de intersección entre el cilindro elíptico $x^2+4z^2=1$ y el plano $x+3y+2z=12$, recorrida en sentido antihorario en torno al eje y. Aplicando el teorema de Stokes, calcule

$$J = \int_C x \text{ dx} + (x+y+z) \text{ dy} + x \text{ dz}.$$

Solución: Se cumplen las hipótesis del Teorema de Stokes, así que

$$J = \int_C x \text{ dx} + (x+y+z) \text{ dy} + x \text{ dz} = \iint_S (\nabla \times F)\cdot n \text{ dS}$$

donde $F(x,y,z) = (x,(x+y+z),x)$ y S es el disco elíptico limitado por la curva C, dentro del plano $x+3y+2z=12$.

El rotor del campo involucrado es

$$\nabla \times (x, x+y+z, x) = (1,-1,1)$$

y el vector normal al plano es

$$n = (1,3,2).$$

Por lo anterior, se tiene que

$$(\nabla \times F)\cdot n = 0,$$

y, en consecuencia,

$$J = \iint_S (\nabla \times F)\cdot n \text{ dS} = 0.$$

Problema 4. Sea $S = S_1 \cup S_2$ la superficie cerrada igual a la unión de la semiesfera superior $S_1 : x^2+y^2+z^2=4,\ z \ge 0$ y el disco $S_2 : x^2+y^2 \le 4,\ z=0$. Indique una orientación para S y calcule

$$L = \iint_S F\cdot n \text{ dS},$$

donde $F(x,y,z) = \big(xy^2\,,\, yz^2\,,\, zx^2\big)$.

Solución: Se cumplen las hipótesis del teorema de la divergencia, así que si W es la región encerrada por S (que se orienta con vector normal exterior), entonces

$$L = \iiint_W (\nabla \cdot F)\ \mathrm{d}(\mathrm{x,y,z})$$

Pero

$$\nabla \cdot F = x^2 + y^2 + z^2,$$

así que, usando coordenadas esféricas,

$$L = \iiint_W (x^2 + y^2 + z^2)\ \mathrm{d}(\mathrm{x,y,z}) = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\pi/2} \rho^4 \sin\phi\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\theta$$

Por lo tanto,

$$L = 2\pi \frac{2^5}{5} = \frac{64}{5}\pi.$$

Tiempo máximo: 90 minutos