UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Listado de Ejercicios Resueltos 2 (527140)

Ejercicios resueltos del listado 2

1.b) Demuestre que: $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y : x^2 + y^2 > 2xy$

Demostración: Sabemos por axioma de orden que:

$$\forall a \in \mathbb{R} - \{0\} : a^2 > 0$$

Por ende, si consideramos dos números reales cualesquiera x e y, tales que $x \neq y$, se tiene:

$$\begin{aligned} (x-y)^2 > 0 &\Leftrightarrow (x-y)(x-y) > 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - xy - yx + y^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 > 2xy \end{aligned}$$

Con lo anterior, concluimos que:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y : x^2 + y^2 > 2xy$$

1.c) Demuestre que: $\forall\ a, b \in \mathbb{R}^+ : a < b \Longrightarrow a^2 < b^2$

Demostración: Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$, tal que:

$$\begin{aligned} a < b &\Leftrightarrow a \cdot a < b \cdot a \\ &\Leftrightarrow a^2 < b \cdot a \qquad \text{... (1)} \end{aligned}$$

además:

$$\begin{aligned} a < b &\Leftrightarrow a \cdot b < b \cdot b \\ &\Leftrightarrow a \cdot b < b^2 \qquad \text{... (2)} \end{aligned}$$

De (1) y (2), y por transitividad de la desigualdad se tiene que:

$$a^2 < b \cdot a \wedge a \cdot b < b^2 \Longrightarrow a^2 < b^2$$

Con lo anterior, concluimos que:

$$\forall\ a, b \in \mathbb{R}^+ : a < b \Longrightarrow a^2 < b^2$$

Ejercicos Resueltos Adicionales.

1. Demuestre las siguientes consecuencias de los axiomas de orden:

   (a) $\forall\, a, b \in \mathbb{R}^+ : a < b \Longleftrightarrow b^{-1} < a^{-1}$

   Demostración: Sabemos por axioma de cuerpo que si $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces existen a^{-1}, $b^{-1} \in \mathbb{R} - \{0\}$, los inversos multiplicativos de a y b respectivamente, en particular se cumple si consideramos $a, b \in \mathbb{R}^+$, luego:

$$\begin{aligned} a < b &\Longleftrightarrow (a \cdot a^{-1}) < b \cdot a^{-1} \\ &\Longleftrightarrow 1 < b \cdot a^{-1} \\ &\Longleftrightarrow b^{-1} \cdot 1 < (b^{-1} \cdot b) \cdot a^{-1} \\ &\Longleftrightarrow b^{-1} < 1 \cdot a^{-1} \\ &\Longleftrightarrow b^{-1} < a^{-1} \end{aligned}$$

   Con lo anterior, concluimos que:

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}^+ : a < b \Longleftrightarrow b^{-1} < a^{-1}$$

   (b) $\forall\, a, b \in \mathbb{R}^+ : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a + b) \geq 4$

   Demostración: Sabemos por axioma de orden que:

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$$

   Por ende, si consideramos dos números reales a y b positivos, se tiene:

$$\begin{aligned} (a - b)^2 \geq 0 &\Longrightarrow (a - b)(a - b) \geq 0 \\ &\Longrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \\ &\Longrightarrow a^2 + 2ab - 4ab + b^2 \geq 0 \\ &\Longrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \\ &\Longrightarrow (a + b)^2 \geq 4ab \\ &\Longrightarrow \frac{(a + b)(a + b)}{ab} \geq 4 \\ &\Longrightarrow \frac{(b + a)}{ab}(a + b) \geq 4 \\ &\Longrightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a + b) \geq 4 \end{aligned}$$

   Con lo anterior, concluimos que:

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}^+ : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a + b) \geq 4$$

2. Resuelva las siguientes inecuaciones y exprese su conjunto solución como intervalo:

   (a) $2x + 5x + 6 < -9 + 3x - x$

   Solución: Para resolver esta inecuación solo debemos reducir los términos semejantes, como sigue:

$$\begin{aligned} 2x + 5x + 6 < -9 + 3x - x &\Longrightarrow 7x + 6 < 2x - 9 \\ &\Longrightarrow 9x < -15 \\ &\Longrightarrow x < -\frac{9}{15} \end{aligned}$$

   Finalmente, el conjunto solución de la inecuación esta dado por:

$$S = \left]-\infty, -\frac{9}{15}\right[$$

   (b) $x(x-6) > 0$

   Solución: Sabemos por axioma de orden, que el producto de dos números reales sea positivo ambos números deben ser positivos o ambos negativos, por ende:

$$\begin{aligned} x(x-6) > 0 &\Longleftrightarrow (x > 0 \wedge x - 6 > 0) \vee (x < 0 \wedge x - 6 < 0) \\ &\Longleftrightarrow (x > 0 \wedge x > 6) \vee (x < 0 \wedge x < 6) \\ &\Longleftrightarrow x > 6 \vee x < 0 \\ &\Longleftrightarrow x < 0 \vee x > 6 \end{aligned}$$

   Finalmente, el conjunto solución de la inecuación esta por:

$$S =]-\infty, 0[\cup]6, +\infty[$$

   (c) $2x^2 - 3x - 2 \geq 0$

   Solución: Para resolver la inecuación primero debemos factorizar la expresión cuadrática, como sigue:

$$2x^2 - 3x - 2 \geq 0 \Longleftrightarrow (2x+1)(x-2) \geq 0$$

   Esta inecuación la podemos resolver utilizando el mismo razonamiento que en la inecuación anterior, pero haremos uso de la tabla de signos, como sigue:
   Con lo anterior, concluimos que el conjunto solución de la inecuación es:

$$S = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [2, +\infty[$$

	$-\infty$		$-1/2$		2		$+\infty$
$2x+1$		$--$		$++$		$++$	
$x-2$		$--$		$--$		$++$	
$(2x+1)(x-2)$		$++$		$--$		$++$	

(d) $\dfrac{x^2-12x+27}{x} \leq 0$

Solución: De manera análoga a la anterior, primero factorizaremos la expresión cuadrática, como sigue:

$$\frac{x^2-12x+27}{x} \leq 0 \Longleftrightarrow \frac{(x-9)(x-3)}{x} \leq 0$$

y para obtener el conjunto solución haremos uso de la tabla de signos:

	$-\infty$		0		3		9		$+\infty$
$x-9$		$--$		$--$		$--$		$++$	
$x-3$		$--$		$--$		$++$		$++$	
x		$--$		$++$		$++$		$++$	
$\dfrac{(x-9)(x-3)}{x}$		$--$		$++$		$--$		$++$	

Con lo anterior, concluimos que el conjunto solución de la inecuación es:

$$S =]-\infty, 0[\cup [3, 9]$$