UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Listado de Ejericios Resueltos Geometría Analítica : Cálculo I (527140)

Ejercicios del listado 6

1.b- Escribir la definición ϵ, δ de los siguientes limites y demostrar cada uno.

$$\lim_{x\to 1} x^2 + 1 = 2$$

Solución:
De la definición del límite se tiene

$$\lim_{x\to 1} x^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow \left[\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0\ : |x-1| < \delta \Longrightarrow \left|(x^2+1) - 1\right| < \varepsilon\right]$$

<u>Para la demostración:</u> Dado $\varepsilon > 0$ fijo, debemos encontrar un $\delta > 0$ tal que $0 < |x-1| < \delta$, entonces:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \Longrightarrow |(x^2+1) - 2| < \varepsilon$$

Desarrollando lo de dentro de el valor absoluto se tiene:

$$|(x^2+1) - 2| = |x^2 - 1| = |x-1||x+1|$$

Notar que de la hipótesis se tiene $|x-1| < \delta$, falta encontar alguna cota de $|x+1|$, para ello, consideramos $\delta = 1/2$. En efecto

$$\begin{aligned} |x-1| < \frac{1}{2} &\Longrightarrow -\frac{1}{2} < x - 1 < \frac{1}{2} \\ &\Longrightarrow \quad \frac{1}{2} + 2 < x + 1 < \frac{1}{2} + 2 \\ &\Longrightarrow \quad \frac{3}{2} < x + 1 < \frac{5}{2} \end{aligned}$$

es decir, $5/2$ es la cota que se buscaba.De lo resuelto anteriormente, se tiene:

$$|f(x) - L| = |x-1|x+1| < \delta\frac{5}{2}$$

Es decir, basta $\varepsilon := \dfrac{5\delta}{2}$ para que se cumpla $|f(x) - l| < \varepsilon$. De donde se obtine, despejando $\delta = \dfrac{2\varepsilon}{5}$.
Recordar que al inicio, se tomó un *delta* arbitrario, por ende debemos escoger

$$\delta \leq \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{2\delta}{5}\right\}$$

para que se cumpla lo pedido.

3.- Calcular los siguientes límites

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+1}}{x}$
Solución: Notar que al evaluar $x = 0$ en el limite anterior, se tiene una *indeterminación* de la forma $(0/0)$, para ello trabajamos algebráicamente. Sea $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+1}}{x}$ y para $x \neq 0$ se tiene

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{x} = \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}} = \frac{(x^2+1)-(x+1)}{x(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1})}$$
$$\frac{(x(x-1)}{x(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1})} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}}$$

De este modo se tiene que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}} = -\frac{1}{2}$$

l) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

Solución: Notar que al reemplazar $x = 1$ en $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$ da una indeterminación de la forma $(0/0)$. Para trabajar en esto, realizamos una sustitución de la forma $z = \sqrt[4]{x}$, de este modo $\sqrt{x} = z^2$ y cuando $x \to 1$, se tiene $z \to 1$
de este modo, el límite anterior, en variable z :

$$\lim_{z\to 1} \frac{z^2-1}{z-1}$$

notar que la indeterminacion de $f(z) = \dfrac{z^2-1}{z-1}$ cuando $z = 1$ es de la forma $(0/0)$. La gran diferencia y el aporte fundamental de la sustitución hecha es que la expresión de $f(z)$ es más fácil de manipular algebráicamente que la de $f(x)$.

Para $z \neq 1$ se tiene

$$f(z) = \frac{z^2-1}{z-1} = \frac{(z-1)(z+1)}{z-1} = (z+1)$$

de este modo

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{z\to 1} f(z) = \lim_{z\to 1}(z+1) = 2$$

Ejercicios del listado 7

1.-d Utilizar el teorema del sandwich o acotamiento para mostrar que el limite de la siguiente función es igual a cero.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(3x^2+5/2)}{|x|}\left|\sin\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)\right|$$

Solución: Considereando a $f(x) = \dfrac{(3x^2+5/2)}{|x|}\left|\sin\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)\right|$ es fácil ver que las expresiones $\dfrac{(3x^2+5/2)}{|x|}$ y $\left|\sin\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)\right|$ son *no negativas* para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, luego se tiene que

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \ : f(x) \geq 0$$

por otro lado, se tiene que $|\sin(x)| < |x|$ para $x \neq 0$, de donde

$$f(x) = \frac{(3x^2+5/2)}{|x|}\left|\sin\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)\right| \leq \frac{(3x^2+5/2)}{|x|}\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{3x^2+5/2}{|x|}\frac{|x||x|}{x^2+1} = \frac{|x|(3x^2+5/2)}{x^2+1}$$

con lo anterior se puede concluir que

$$0 \leq f(x) \leq \frac{|x|(3x^2+5/2)}{x^2+1} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} 0 \leq \lim_{x\to 0} f(x) \leq \lim_{x\to 0} \frac{|x|(3x^2+5/2)}{x^2+1}$$

De este modo, como $\lim\limits_{x\to 0} 0 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|(3x^2+5/2)}{x^2+1} = 0$ entonces por el teorema del sandwich se concluye

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

Ejercicios del listado 8

2.- Sea $f:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x\cos\left(\dfrac{x\pi}{2}\right) & ,x<1 \\ \dfrac{x^4-16}{x-2} & ,x>2 \end{cases}$$

(a) Justificar por qué f es continua para $x>2$ y $x<1$

Solución: Notar que

$$f|_{]-\infty,1[}(x) = g(x)h(x)$$

donde $g(x)=x$ y $h(x)=\cos\left(\dfrac{x\pi}{2}\right)$, de donde ambas funciones son continuas en el intervalo $]-\infty,1[$, luego por composición de funciones continuas, f es continua en dicho intervalo.

por otro lado

$$f|_{]2,\infty[}(x) = \frac{l(x)}{m(x)}$$

donde $l(x)=x^4-16$ y $m(x)=x-2$ basta notar que l es continua en el intervalo indicado puesto que es una función polinomial al igual que m. Notar que

$$\forall x \in]2,\infty[: m(x) \neq 0$$

, luego por teorema de funciones continuas, se concluye que f lo es en $]2,\infty[$

(b) Determinar una función cuadrática mónica en $x\in[1,2]$ que haga a f continua en $\mathbb{R}$.

Solución: Notar que se pide encontrar una una 'parte' de la función f en el intervalo $[1,2]$ de manera que

$$f|_{[1,2]}(x) = x^2+ax+b$$

con $a,b\in\mathbb{R}$, variables a determinar para garantizar la continuidad.

Basta imponer la existencia del límite en $x=1$ y $x=2$ puesto que en $]1,2[$ la función es continua del hecho que es una función polinomial y las imágenes $f(1)$ $f(2)$ estarían definidas en la función cuadráticas (es decir, existirían si se determina a,b)

En efecto, para $x=1$ se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} x\cos\left(\frac{x\pi}{2}\right) = 0 \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} x^2+ax+b = 1+a+b \end{aligned}$$

De este modo se necesita imponer

$$1+a+b=0$$

para garantizar que el límite exista.

Para $x=2$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^4-16}{x-2} = \lim_{x\to^+} \frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} (x+2)(x^2+4) = 32$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2+ax+b = 4+2a+b$$

De este modo se necesita imponer

$$4+2a+b = 32 \Longrightarrow 2a+b = 28$$

para garantizar que el límite exista.
Notar que de las dos condiones anteriores, se tiene un sistema de ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} a+b &= -1 \qquad\qquad ....(1) \\ 2a+b &= 28 \qquad\qquad ....(2) \end{aligned}$$

Luego $(2)-(1)$ se tiene que $a=29$. Reemplando y despejando b en la ecuación (1) se tiene $b=-30$
De este modo,para que la función f sea continua en todo $\mathbb{R}$ se debe tener que

$$f|_{[1,2]}(x) = x^2+29x-30$$

3.- Calcular los siguientes límites

c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{3x^2+x}}$
Solución: Notar que al tender el límite al infinito la función

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{3x^2+x}}$$

se indertermina de la forma $\dfrac{\infty}{\infty-\infty}$ de es modo, manipulando la función,

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{3x^2+x}} = \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-\sqrt{x^2\left(3+\frac{1}{x}\right)}} = \frac{x}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{3+\frac{1}{x}}\right)}$$

Puesto que x tiende al infinito(positivo) $|x|=x$ de lo cual se tiene que

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{3x^2+x}} = \frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{3+\frac{1}{x}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{3+\frac{1}{x}}}$$

De este modo , ya que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} = 0$$

se tiene que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{3x^2+x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{3+\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1-\sqrt{3}}$$

d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+1}{(x^2+1)(\sqrt{x^2+2}+2x)}$
Notar que al tender el límite al menos infinito la función

$$\frac{x^3+1}{(x^2+1)(\sqrt{x^2+2}+2x)}$$

se indertermina de la forma $-\dfrac{\infty}{\infty}$ de es modo, manipulando la función,

$$f(x)=\frac{x^3+1}{(x^2+1)(\sqrt{x^2+2}+2x)}=\frac{x^3\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}+2x\right)}=\frac{x^3\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+2x\right)}$$

Puesto que x tiende al menos infinito (negativo) $|x|=x$ de lo cual se tiene que

$$f(x)=\frac{x^3+1}{(x^2+1)(\sqrt{x^2+2}+2x)}=\frac{x^3\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+2x\right)}=\frac{x^3\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+2\right)}$$

$$=\frac{1+\dfrac{1}{x^3}}{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+2\right)}$$

De este modo , ya que

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

se tiene que

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+1}{(x^2+1)(\sqrt{x^2+2}+2x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x^3}}{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+2\right)}=1$$

4.c- Calcular las asíntotas de la función

$$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}-1}$$

Solución: Calculando el dominio de la función dada, buscamos los $x\in\mathbb{R}$ talque

$$\sqrt{x^2+1}-1=0\Longrightarrow x^2-1=1\longrightarrow x=0$$

de este modo $Dom(f)=\mathbb{R}-\{0\}$. Luego se analiza si f posee

- *Asíntota vertical* :

  Analizando para $x=0$ se tiene:

  $$\lim_{x\to0^+}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}-1}=\frac{1}{0^+}=\infty$$

  Lo anterior basta para afirmar que $x=0$ es asíntota vertical.
  Nota si se calcula el otro lateral

  $$\lim_{x\to0^-}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}-1}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

  Concluyendo lo mismo.

- *Asíntota Horizontal* :
  notar que la función f para un $x\neq0$ se tiene

$$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}-1}=\frac{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}-1}=\frac{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{|x|\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)-1}=\frac{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{|x|\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{|x|}\right)}$$

cuando x tiende al infinito, se tiene $|x| = x$, es decir

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}-1} = \frac{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{x}\right)} = \frac{1+\dfrac{1}{x}}{\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{x}\right)}$$

Luego

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\dfrac{1}{x}}{\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{x}\right)} = 1$$

Luego $y = 1$ es asíntota horizontal de f
Cuando x tiende al menos infinito, se tiene $|x| = -x$, es decir

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}-1} = \frac{x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{1}{x}\right)} \frac{1+\dfrac{1}{x}}{\left(-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{1}{x}\right)}$$

Luego

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\dfrac{1}{x}}{\left(-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{1}{x}\right)} = -1$$

Luego $y = -1$ tambien es asíntota horizontal de f

- *Asíntota Oblicua* :

  Puesto que f es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ por teorema de álgebra de funciones continuas, y como posee asíntota horizontal, **no** posee asíntota oblicua.

Ejercicios del listado 9

1.- Determinar si f es derivable en x_0, de ser así, calcule $f'(x_0)$

(b) $f(x) = \sin(x+1)\ \ , x_0 = 0$

Solución: Una función $f(x)$ es derivable en un punto x_0, si existe:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x_0} = L \qquad , L \in \mathbb{R}$$

Entonces utilizamos la definición de derivada en la función dada:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x+1)-\sin(1)}{x}$$

Aplicando la identidad trigonométrica del seno de la suma $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \sin(\beta)\cos(\alpha)$

$$\lim_{x\to o} \frac{\sin(x)\cos(1)+\sin(1)\cos(x)-\sin(1)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)\cos(1)+\sin(1)(\cos(x)-1)}{x}$$

Recordar límites conocidos, $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \dfrac{\sin(\mathbf{x})}{\mathbf{x}} = \mathbf{1}$ y $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \dfrac{\mathbf{1}-\cos(\mathbf{x})}{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, Luego, por álgebra de límites:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)\cos(1)}{x} + \lim_{x\to 0} \frac{\sin(1)(\cos(x)-1))}{x}$$

entonces:

$$\cos(1) \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} - \sin(1) \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = \cos(1) - \sin(1)\, 0 = \cos(1)$$

Entonces

$$f'(0) = \cos(1)$$

(c) $f(x) = x|x-1|$, $x_0 = 1$
Solución: Utilizando la definición de valor absoluto, se tiene que:

$$f(x) = \begin{cases} x(x-1) & , x > 1 \\ 0 & , x = 1 \\ x(1-x) & , x < 1 \end{cases}$$

Estudiando la derivada por definición, se necesita que los límites laterales tienen que ser iguales para garantizar la existencia de la derivada en dicho punto.Calculamos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} \frac{x(1-x)}{x-1} &= \lim_{x \to 1^-} \frac{-x(x-1)}{(x-1)} \\ &= \lim_{x \to 1^-} -x = -1 \end{aligned}$$

Y por otro lado:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x(x-1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} x = 1$$

Luego, como los límites laterales son distintos, no existe la derivada en $x_0 = 1$,luego f no es diferenciable en $x_0 = 1$.

2.- Calcular la recta tangente y la normal de las siguientes funciones en x_0

(c) $f(x) = \cos(x) - \dfrac{1}{x^2}$ en $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$

Solución: Recordemos que la ecuación de la recta tangente y de la normal están dadas de las siguientes formas, respectivamente:

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

$$y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x-a)$$

Calculamos:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi^2}$$

luego calculamos la derivada de la función evaluada en $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$

$$f'(x) = -\sin(x) + \frac{2}{x^3}$$

Luego evaluamos en la derivada el punto ya mencionado:

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3} = -1 + \frac{16}{\pi^3}$$

Finalmente, calculamos cual es la recta tangente:

$$\begin{aligned} y - \frac{4}{\pi^2} &= \left(\frac{16}{\pi^3} - 1\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ \to y &= \left(\frac{16-\pi^3}{\pi^3}\right)x - \left(\frac{16-\pi^3}{2\pi^2}\right) + \frac{4}{\pi^2} \\ \to y &= \left(\frac{16-\pi^3}{\pi^3}\right)x + \left(\frac{\pi^3-8}{2\pi^2}\right) \end{aligned}$$

Ahora calculamos la recta normal:

$$y - \left(\frac{4}{\pi^2}\right) = \left(\frac{-1}{-1 + \frac{16}{\pi^3}}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow y = \left(\frac{-1}{-1 + \frac{16}{\pi^3}}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{4}{\pi^2}\right)$$

3.- Calcular la derivada de las siguientes funciones.

(e) $f(x) = \dfrac{(x^2 + x^3)(1 + \cos(x))}{\sin(x)}$

Solución: Aplicando la derivada de un cociente

$$\begin{aligned} f'(x) =& \frac{\frac{d}{dx}\left[(x^2 + x^3)(1 + \cos(x))\right]\sin(x) - (x^2 + x^3)(1 + \cos(x))\frac{d}{dx}[\sin(x)]}{\sin^2(x)} \\ =& \frac{[(2x + 3x^2)(\cos(x) + 1) - (x^3 + x^2)\sin(x)]\sin(x) - (x^3 + x^2)(\cos(x) + 1)\cos(x)}{\sin^2(x)} \\ =& \frac{\sin(x)(3x^2 + 2x)(\cos(x) + 1) - (x^3 + x^2)\sin^2(x)) - (x^3 + x^2)\cos(x)(\cos(x) + 1)}{\sin^2(x)} \\ =& \frac{\sin(x)(3x^2 + 2x)(\cos(x) + 1) - (x^3 + x^2)(1 - \cos^2(x)) - (x^3 + x^2)\cos(x)(\cos(x) + 1)}{\sin^2(x)} \\ =& \frac{\sin(x)(3x^2 + 2x)(\cos(x) + 1) - (x^3 + x^2)(1 - \cos(x))(1 + \cos(x)) - (x^3 + x^2)\cos(x)(\cos(x) + 1)}{\sin^2(x)} \\ =& \frac{x(\cos(x) + 1)[(3x + 2)\sin(x) - x^2 - x]}{\sin^2(x)} \end{aligned}$$

(f) $f(x) = \dfrac{4x - 3x^{\frac{-7}{8}}}{\tan(x) - \sin(x)}$

Solución: Aplicamos la derivada de un cociente.

$$f'(x) = \frac{\frac{d}{dx}\left[4x - \frac{3}{x^{\frac{7}{8}}}\right](\tan(x) - \sin(x)) - (4x - \frac{3}{x^{\frac{7}{8}}})\frac{d}{dx}[\tan(x) - \sin(x)]}{(\tan(x) - \sin(x))^2}$$

$$= \frac{\left(4 - 3\left(\frac{-7}{8}x^{\frac{-15}{8}}\right)\right)(\tan(x) - \sin(x)) - \left(4x - \frac{3}{x^{\frac{7}{8}}}\right)(\sec^2(x) - \cos(x))}{(\tan(x) - \sin(x))^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{21}{8x^{\frac{15}{8}}} + 4\right)(\tan(x) - \sin(x) - \left(4x - \frac{3}{x^{\frac{7}{8}}}\right)(\sec^2(x) -}{(\tan(x) - \sin(x))^2}$$

$$= \frac{\frac{21}{8x^{\frac{15}{8}}} + 4}{\tan(x) - \sin(x)} - \frac{\left(4x - \frac{3}{x^{\frac{7}{8}}}\right)(\sec^2(x) - \cos(x))}{(\tan(x) - \sin(x))^2}$$

4.- Utilizando la regla de la cadena, obtenga la derivada de las siguientes funciones.

(b) $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x - 1}\right)$

Solución:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos\left(\frac{1}{x-1}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x-1}\right) \\ &= \cos\left(\frac{1}{x-1}\right)\left(\frac{-1}{(x-1)^2}\right) \\ &= \frac{-\cos\left(\dfrac{1}{x-1}\right)}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

(e) $f(x) = \sin^3\left(\dfrac{3x}{x^2+1}\right)$

Solución: Aplicamos la regla de la cadena

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\sin^2\left(\frac{3x}{x^2+1}\right)\frac{d}{dx}\left[\sin\left(\frac{3x}{x^2+1}\right)\right] \\ &= 3\sin^2\left(\frac{3x}{x^2+1}\right)\cos\left(\frac{3x}{x^2+1}\right)\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{3x}{x^2+1}\right)\right] \\ &= 3\sin^2\left(\frac{3x}{x^2+1}\right)\cos\left(\frac{3x}{x^2+1}\right)\left(\frac{3(x^2+1)-3x(2x)}{(x^2+1)^2}\right) \\ &= 9\sin^2\left(\frac{3x}{x^2+1}\right)\cos\left(\frac{3x}{x^2+1}\right)\left(\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}\right) \\ &= \frac{9(1-x^2)\cos\left(\dfrac{3x}{x^2+1}\right)\sin^2\left(\dfrac{3x}{x^2+1}\right)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

5.- Sea $f(x) = \sqrt{5-(x-3)^2}$ y $g(x) = \sqrt{10-(x+4)^2}$ donde L_1 es la recta tangente a $f(x)$ en $x = 4$ y L_2 la recta tangente a $g(x)$ en $x = -5$. Calcule el punto de intersección entre L_1 y L_2.

Solución: Calculamos la ecuación de la recta tangente de cada función respectivamente, para f se tiene:

$$y - f(4) = f'(4)(x-4)$$

Calculando

$$f(4) = \sqrt{5-(4-3)^2} = \sqrt{5-1} = 2$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\left(5-(x-3)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}[5-(x-3)^2] \\ &= -\frac{x-3}{\sqrt{5-(x-3)^2}} \end{aligned}$$

Evaluando en $x = 4$

$$f'(4) = -\frac{4-3}{\sqrt{5-(4-3)^2}} = -\frac{1}{2}$$

Análogamente, con $g(x)$ cen $x = -5$

$$g(-5) = \sqrt{10-(-5+4)^2} = 3$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2}(10-(x+4)^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}[10-(x+4)^2] \\ &= -\frac{x+4}{\sqrt{10-(x+4)^2}} \end{aligned}$$

evaluando en $x = -5$

$$g'(-5) = -\frac{-5+4}{\sqrt{10-(-5+4)^2}} = \frac{1}{3}$$

De este modo, gracias a lo calculado, se tiene para cada función que su recta tangente esta dada por

$$\text{Para } f : y - 2 = \left(\frac{-1}{2}\right)(x-4) \Longrightarrow y = \frac{-x}{2} + 4$$
$$\text{Para } g : y - 3 = \frac{1}{3}(x+5) \Longrightarrow y = \frac{x+14}{3}$$

Ahora para encontrar la intersección entre L_1 y L_2, tenemos que igualar las rectas tangentes de $f(x)$ y de $g(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{-x}{2} + 4 = \frac{x+14}{3} &\Rightarrow \frac{8-x}{2} = \frac{x+14}{3} \\ &\Rightarrow 3(8-x) = 2(x+14) \\ &\Rightarrow x = -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

Sustituimos $x = -\frac{4}{5}$ en alguna recta

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{5}\right) + 4 = \frac{22}{5}$$

Luego L_1 y L_2 se intersectan en el punto $\left(-\frac{4}{5}, \frac{22}{5}\right)$

6.- Calcule la derivada de orden 2,es decir, $f''(x)$ de las siguientes funciones.

(b) $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x^3-1}\right)$

Solución:

Para la primera derivada, se tiene:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin\left(\frac{1}{x^3-1}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3-1}\right) \\ &= -\sin\left(\frac{1}{x^3-1}\right)\frac{1}{(x^3-1)^2}\frac{d}{dx}(x^3-1) \\ &= -\frac{3x^2\sin\left(\frac{1}{x^3-1}\right)}{(x^3-1)^2} \end{aligned}$$

Para la segunda, se tiene:

$$\begin{aligned} f''(x) = (f'(x))' &= -\frac{\frac{d}{dx}\left(3x^2\sin\left(\frac{1}{x^3-1}\right)\right)(x^3-1)^2 - 3x^2\sin\left(\frac{1}{x^3-1}\right)\frac{d}{dx}((x^3-1)^2)}{(x^3-1)^2)^2} \\ &= -\frac{\left[6x\sin\left(\frac{1}{x^3-1}\right) - \frac{9x^4}{(x^3-1)^2}\cos\left(\frac{1}{x^3-1}\right)\right](x^3-1)^2 - 18x^4\sin\left(\frac{1}{x^3-1}\right)}{(x^3-1)^4} \end{aligned}$$

Ejercicios extras

1.- Usar la definición de límite para mostrar que:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1+3x}{x+1}=2$$

Solución:

Dado $\varepsilon>0$ fijo, debemos encontrar un $\delta>0$ tal que $0<|x-1|<\delta$, entonces:

$$|f(x)-L|<\varepsilon \Longrightarrow \left|\frac{1+3x}{x+1}-2\right|<\varepsilon$$

Ahora bien:

$$\left|\frac{1+3x}{x+1}-2\right|=\left|\frac{1+3x-2x-2}{x+1}\right|=\frac{|x-1|}{|x+1|}=|x-1|\cdot\frac{1}{|x+1|}$$

Se debe buscar una cota para $\dfrac{1}{|x+1|}$, considerando $\delta=\dfrac{1}{2}$, se tiene:

$$\begin{aligned}
|x-1|<\frac{1}{2} &\Longrightarrow -\frac{1}{2}<x-1<\frac{1}{2}\\
&\Longrightarrow \frac{1}{2}+2<x+1<\frac{1}{2}+5\\
&\Longrightarrow \frac{3}{2}<x+1<\frac{5}{2}\\
&\Longrightarrow \frac{2}{5}<\frac{1}{x+1}<\frac{2}{3}\\
&\Longrightarrow \frac{1}{|x+1|}<\frac{2}{3}=\text{máx}\left\{\frac{2}{3},\frac{2}{5}\right\}
\end{aligned}$$

Considerando lo anterior y que $|x-1|<\delta$

$$|f(x)-L|=\frac{|x-1|}{|x+1|}<\frac{2\delta}{3}$$

Para que $|f(x)-L|<\varepsilon$, basta tomar $\dfrac{2\delta}{3}=\varepsilon$, es decir $\delta=\dfrac{3\varepsilon}{2}$. Finalmente, tomando

$$\delta\leq \text{mín}\left\{\frac{1}{2},\frac{3\varepsilon}{2}\right\}$$

se cumple lo pedido.

2.- Se dice que $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es acotada si existe $M > 0$ tal que $|g(x)| \leq M$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostrar que $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} (g \cdot f)(x) = 0$$

Solución Puesto que $|g(x)| \leq M$ se tiene

$$\begin{aligned} -M \leq g(x) \leq M &\Longrightarrow -Mf(x) \leq g(x)f(x) \leq Mf(x) \\ &\Longrightarrow -Mf(x) \leq g(x)f(x) \leq Mf(x) \\ &\Longrightarrow -M \lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} (g \cdot f)(x) \leq M \lim_{x \to x_0} f(x) \end{aligned}$$

Luego por hipótesis $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ se tiene $-M \lim_{x \to x_0} f(x) = M \lim_{x \to x_0} f(x) = 0$. Por teorema del sandwichse concluye

$$\lim_{x \to x_0} (gf)(x) = 0$$

3.- Calcular los siguientes limites :

- $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 6 + 5}{x^2 + 2x - 3}$

  Solución: Notar que al reemplazar $x = -1$ en $f(x) = \dfrac{x^2 - 6 + 5}{x^2 + 2x - 3}$ se obtiene una indeterminación de la forma (0/0).Luego, para $x \neq -1$ se tiene

  $$f(x) = \frac{x^2 - 6 + 5}{x^2 + 2x - 3} = \frac{(x-1)(x-5)}{(x-1)(x+3)} = \frac{(x-5)}{x+3}$$

  Luego

  $$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{(x-5)}{x+3} = -3$$

- $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 + x}{2} \sin\left(\dfrac{x^2 + 1}{x}\right)$

  Solución: Utilizando lo desarrollado en el ejercicio 5.- , si se define

  $$f(x) = \frac{x^2 + x}{2} \qquad \text{y } g(x) = \sin\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)$$

  Se cumple que $|g(x)| \leq 1$ y $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. Por lo demostrado anteriormente

  $$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x}{2} \sin\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right) = \lim_{x \to 0} (g \cdot f)(x) = 0$$

- $\lim_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x-1} - 2}{x - 5}$

  Solución: Notar que al reemplazar $x = 5$ en $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1} - 2}{x - 5}$ se obtiene una indeterminación de la forma (0/0).Luego, para $x \neq 5$ se tiene

  $$f(x) = \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x - 5} = \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x - 5} \frac{\sqrt{x-1} + 2}{\sqrt{x-1} + 2} = \frac{(x-1) - 4}{(x-5)(\sqrt{x-1} + 2)} = \frac{1}{(\sqrt{x-1} + 2)}$$

  De este modo

  $$\lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5} \frac{1}{(\sqrt{x-1} + 2)} = \frac{1}{4}$$

4.- Dada la función $g\ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \frac{2|x| + x\sqrt{x^2+1}}{x}$$

Analizar, si existe, $\lim_{x\to 0} g(x)$

Solución: Para analizar la existencia de los límites anteriores, analizaremos por laterales.De la definición de valor absoluto, se tiene

$$|x| = \begin{cases} x & ,x>0 \\ 0 & ,x=0 \\ -x & ,x<0 \end{cases}$$

Se tiene que para $x \neq 0$ la función g estaría dada por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{2x + x\sqrt{x^2+1}}{x} & ,x>0 \\ \dfrac{-2x + x\sqrt{x^2+1}}{x} & ,x<0 \end{cases} = \begin{cases} 2 + \sqrt{x^2+1} & ,x>0 \\ -2 + \sqrt{x^2+1} & ,x<0 \end{cases}$$

De este modo se tiene que

$$\lim_{x\to 0^+} 2 + \sqrt{x^2+1} = 3 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^-} -2 + \sqrt{x^2+1} = -1$$

puesto que

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) \neq \lim_{x\to 0^+} g(x)$$

se concluye que

$$\lim_{x\to 0} g(x) \text{ no existe}$$

5.- Calcular los siguientes límites

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x) - \sin(3x)}{x}$

Solución: Notemos que el límite posee una indeterminación del tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$, para resolverlo haremos uso del álgebra de límites y de límites trigonometricos conocidos, como sigue:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x) - \sin(3x)}{x} = \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{x} \cdot \frac{5}{5}}_{(*)} - \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} \cdot \frac{3}{3}}_{(**)}$$

Para $(*)$ y $(**)$ utilizaremos los siguientes cambios de variables respectivamente:

$$u = 5x, x \to 0 \Rightarrow u \to 0 \quad \text{y} \quad w = 3x, x \to 0 \Rightarrow w \to 0$$

Así:

$$\lim_{x\to 0} \frac{5\sin(5x)}{5x} - \lim_{x\to 0} \frac{3\sin(3x)}{3x} = 5 \lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)}{u} - 3 \lim_{w\to 0} \frac{\sin(w)}{w}$$

de donde, por propiedad se tiene que

$$\lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)}{u} = \lim_{w\to 0} \frac{\sin(w)}{w} = 1$$

por ende el límite pedido es

$$\lim_{x\to 0} \frac{5\sin(5x)}{5x} - \lim_{x\to 0} \frac{3\sin(3x)}{3x} = 5 \lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)}{u} - 3 \lim_{w\to 0} \frac{\sin(w)}{w} = 5 - 3 = 2$$

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\tan(\pi x)}{x-1}$

Solución: Notemos que el límite posee una indeterminación del tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$, para resolverlo utilizaremos un cambio de variable, como sigue:

$$u = x-1, x \to 1 \Rightarrow u \to 0$$

Así:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\tan(\pi x)}{x-1} = \lim_{u\to 0} \frac{\tan(\pi u+\pi)}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{u} \cdot \frac{\sin(\pi u+\pi)}{\cos(\pi u+\pi)} = \underbrace{\lim_{u\to 0} \frac{\sin(\pi u)}{\pi u}}_{(*)} \cdot \lim_{u\to 0} \frac{-\pi}{\cos(\pi u+\pi)}$$

Para $(*)$ consideramos el siguiente cambio de variable:

$$w = \pi u, u \to 0 \Rightarrow w \to 0$$

Ahora bien:

$$\lim_{u\to 0} \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} \cdot \lim_{u\to 0} \frac{-\pi}{\cos(\pi u+\pi)} = \lim_{w\to 0} \frac{\sin(w)}{w} \cdot \lim_{u\to 0} \frac{-\pi}{\cos(\pi u+\pi)} = -\pi$$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\cos(x)}-\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos(x)}}$

Solución: Notemos que el límite posee una indeterminación del tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$, para resolverlo mutiplicaremos por un üno conveniente", como sigue:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\cos(x)}-\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos(x)}} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\cos(x)}-\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos(x)}} \cdot \frac{\sqrt{1+\cos(x)}+\sqrt{2}}{\sqrt{1+\cos(x)}+\sqrt{2}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1+\cos(x)-2}{\sqrt{1-\cos(x)}(\sqrt{1+\cos(x)}+\sqrt{2})} \\
&= \lim_{x\to 0} -\frac{\sqrt{1-\cos(x)}\sqrt{1-\cos(x)}}{\sqrt{1-\cos(x)}(\sqrt{1+\cos(x)}+\sqrt{2})} \\
&= \lim_{x\to 0} -\frac{1-\cos(x)}{\sqrt{1-\cos(x)}(\sqrt{1+\cos(x)}+\sqrt{2})} \\
&= \lim_{x\to 0} -\frac{\sqrt{1-\cos(x)}}{(\sqrt{1+\cos(x)}+\sqrt{2})} \\
&= 0
\end{aligned}$$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin(x)}-\sqrt{1-\operatorname{tg}(x)}}{sen(2x)}$

Solución: Notar que al reemplazar en $x=0$ posee una indeterminación de la forma (0/0). Multiplicando por un üno conveniente"se tiene

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin(x)}-\sqrt{\operatorname{tg}(x)}}{sen(2x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin(x)}-\sqrt{1-\operatorname{tg}(x)}}{sen(2x)}\,\frac{\sqrt{1+\sin(x)}+\sqrt{1-\operatorname{tg}(x)}}{\sqrt{1+\sin(x)}+\sqrt{1-\operatorname{tg}(x)}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(1+\sin(x))-(1-\operatorname{tg}(x))}{sen(2x)(\sqrt{1+\sin(x)}+\sqrt{1-\operatorname{tg}(x)})}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)+\operatorname{tg}(x)}{sen(2x)(\sqrt{1+\sin(x)}+\sqrt{1-\operatorname{tg}(x)})}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)+\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}}{sen(2x)(\sqrt{1+\sin(x)}+\sqrt{1-\operatorname{tg}(x)})}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin(x)\cos(x)+\sin(x)}{\cos(x)}}{2\sin(x)\cos(x)(\sqrt{1+\sin(x)}+\sqrt{1-\operatorname{tg}(x)})}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)+1}{2\cos^2(x)(\sqrt{1+\sin(x)}+\sqrt{1-\operatorname{tg}(x)})}\\
&=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

6.- Una función f está definida por:

$$
f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|+2} & ,x<0\\ ax+b & ,0\le x<2\\ \dfrac{3x^2+3}{x+1} & ,x\ge 2\end{cases}
$$

Calcular, si es posible, los valores de $a,b\in\mathbb{R}$ para que la f sea continua en $x=0$ y $x=2$ a la vez.

Solución: Una de las condiciones de continuidad es la existencia del límite en el punto, es decir $\lim_{x\to 0} f(x)$ y $\lim_{x\to 2} f(x)$ deben existir, para esto, calculamos los límites laterales en cada punto mencionado.
Para $x=0$ se tiene

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-}\sqrt{|x|+2}=\sqrt{2}.\\
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} ax+b=b.
\end{aligned}
$$

De donde, el límite en $x=0$ existe si y solo si

$$b=\sqrt{2}$$

vale notar que

$$f(0)=\sqrt{2}=\lim_{x\to 0} f(x)$$

concluyendo la continuidad de f en ese punto .

Por otro lado, se tiene en $x=2$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+}\frac{3x^2+3}{x+1}=5\\
\lim_{x\to 2^-} f(x) &= ax+b=2a+b
\end{aligned}
$$

De donde, el límite en $x=2$ existe si y solo si

$$2a+b=5$$

Reemplazando en $b=\sqrt{2}$ en lo anterior se concluye que

$$a=\frac{5-\sqrt{2}}{2}$$

vale notar que

$$f(2) = 5 = \lim_{x\to 2} f(x)$$

Concluyendo que f es continua en $x = 5$

De este modo se tiene que

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|+2} & , x < 0 \\ \left(\dfrac{5-\sqrt{2}}{2}\right)x + \sqrt{2} & , 0 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{3x^2+3}{x+1} & , x > 2 \end{cases}$$

es continua en $x = 0$ y $x = 2$

7. Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\tan(\pi x)}{x-1}$

Solución: Notemos que el límite posee una indeterminación del tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$, para resolverlo utilizaremos un cambio de variable, como sigue:

$$u = x - 1, x \to 1 \Rightarrow u \to 0$$

Así:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\tan(\pi x)}{x-1} = \lim_{u\to 0} \frac{\tan(\pi u + \pi)}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{u} \cdot \frac{\sin(\pi u + \pi)}{\cos(\pi u + \pi)} = \underbrace{\lim_{u\to 0} \frac{\sin(\pi u)}{\pi u}}_{(*)} \cdot \lim_{u\to 0} \frac{-\pi}{\cos(\pi u + \pi)}$$

Para $(*)$ consideramos el siguiente cambio de variable:

$$w = \pi u, u \to 0 \Rightarrow w \to 0$$

Ahora bien:

$$\lim_{u\to 0} \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} \cdot \lim_{u\to 0} \frac{-\pi}{\cos(\pi u + \pi)} = \lim_{w\to 0} \frac{\sin(w)}{w} \cdot \lim_{u\to 0} \frac{-\pi}{\cos(\pi u + \pi)} = -\pi$$

8. Sean $f(x) = 1 - \sqrt{4x^2 - 7}$ y g la función definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(2)}{x-2} & , x \neq 2 \\ -\dfrac{8}{3} & , x = 2 \end{cases}$$

Determine si g es continua en $x_0 = 2$.

Solución: Para analizar la continuidad de g en $x_0 = 2$, por definición se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} &= \lim \lim_{x\to 2} \frac{1 - \sqrt{4x^2-7} + 8/3}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{3 - \sqrt{4x^2-7}}{x-2} \cdot \frac{3 + \sqrt{4x^2-7}}{3 + \sqrt{4x^2-7}} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{9 - (4x^2-7)}{(x-2)(3+\sqrt{4x^2-7})} = \lim_{x\to 2} \frac{16 - 4x^2}{(x-2)(3+\sqrt{4x^2-7})} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{4(2-x)(2+x)}{(x-2)(3+\sqrt{4x^2-7})} = \lim_{x\to 2} \frac{-4(2+x)}{(3+\sqrt{4x^2-7}} \\ &= -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

Podemos notar que $\displaystyle\lim_{x\to 2} g(x) = g(2) = -\frac{8}{3}$, por ende se concluye que g es continua en $x_0 = 2$.

9. Calcular las asíntotas de la función $f(x) = \sqrt{x^2-1} + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

Solución: Antes de analizar la existencia de asíntotas, notemos lo siguiente:

$$f(x) = \sqrt{x^2-1} + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x^2+x-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Además, para el dominio de la función se tiene que $x^2-1 \geq 0$,así $\mathrm{Dom}(f) =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ de donde:

$\circ$ Asíntotas Verticales: Para analizar su existencia, calculamos los límites

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+x-1}{\sqrt{x^2-1}} = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+x-1}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$$

Con lo anterior se concluye que el gráfico de f posee a $x=-1$ y $x=1$ como asíntotas verticales.

$\circ$ Asíntotas Oblicuas: Para analizar su existencia, calcularemos la pendiente y coeficiente de posición de la recta $y = mx+n$ cuando x tiende al infinito, como sigue:

$$\begin{aligned} m_1 &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-1}{x\sqrt{x^2-1}} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}} = 1 \end{aligned}$$

Por otra parte, al menos infinito

$$\begin{aligned} m_2 &= \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x-1}{x\sqrt{x^2-1}} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2\left(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{-\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}} = -1 \end{aligned}$$

Con lo anterior notamos que el gráfico de f posee dos asíntotas oblicuas, calculamos en coeficiente de posición:

$$n_1 = \lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1} + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - x$$

Notar que

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1} - x = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2-1}-x)\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1+x^2}{\sqrt{x^2-1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}} = 1$$

De este modo por álgebra de límites, se tiene que $n_1 = 1$

De forma análoga a lo resuelto anterior se tiene que

$$n_1 = \lim_{x\to-\infty} f(x) - x = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-1} + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - x = -1$$

Finalmente, f posee a $L_1 : y = x+1$ y $L_2 : y = -x-1$ como asíntotas oblicuas. Además esta información la podemos corroborar con el gráfico que se presenta a continuación.

Asíntotas Horizontales:Puesto que la función f es continua en su dominio y posee asíntotas oblicuas, no posee asíntotas horizontales.

10. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & ,x \leq 0 \\ ax^2+bx+c & ,0 < x < 1 \\ \tan(\pi x) & ,x \geq 1 \end{cases}$$

Determine los valores reales de a, b y c de modo que f se continua en todo $\mathbb{R}$ y además derivable en $x_0 = 1$.

Solución:

• Para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$.

Notemos que en los siguientes intervalos $]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$ f es continua independiente de los valores reales de a, b y c ya que es composición de funciones continuas.

Ahora analizamos la continuidad de f en $x = 0$ y $x = 1$. Para que f sea continua en $x = 0$, se debe cumplir:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) \Longrightarrow c = 1$$

Por otro lado, para que f sea continua en $x = 1$, se debe cumplir que la derivada en ese punto exista, es decir:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) \Longrightarrow a+b+c = 0 \ \ (\text{ó} \ \ a+b = -1)$$

• Para que f sea derivable en $x = 1$, se debe cumplir:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \Longrightarrow 2a+b = \pi$$

.

Finalmente, para que se cumplan las condiciones solicitadas, se tiene que:

$$a = 1+\pi, b = -2-\pi \text{ y } c = 1.$$

de este modo

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & ,x \leq 0 \\ (1+\pi)x^2-2x+1 & ,0 < x < 1 \\ \tan(\pi x) & ,x \geq 1 \end{cases}$$

es una función continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $x = 1$