Clase 11

Cálculo 3

Carlos Martínez Ranero

Departamento de Matemática
Universidad de Concepción

Recordatorio de la clase anterior.

- Teorema de la función implícita.

Objetivos de la clase de hoy.

- Teorema de la función inversa.
- Máximos y mínimos.

Ejemplo 1:

Considerar el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} xy^2 + xv - uvz = 1 \\ ux + yvz + uz = 3 \end{cases}$$

I. Mostrar que, para valores cercanos al punto $(1, 1, 1, 1, 1)$, las variables u, v se pueden escribir como función de las variables x, y, z, es decir, $(u, v) = g(x, y, z)$.
II. Determinar la matriz jacobiana de la función $g(x, y, z)$ del inciso anterior en el punto $(1, 1, 1)$.
III. Utilizar la buena aproximación afín de la función $g(x, y, z)$ del primer inciso para estimar los valores que tomarán u, v cuando $x = 0{,}99, y = 1{,}02, z = 0{,}97$.

Teorema de la Función Implícita.

Solución:

- Considerar la función $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y, z, u, v) = (xy^2 + xv - uvz, ux + yvz + uz)$$

- Esta función es polinomial, y por lo tanto es de clase C^1.
- Además se tiene

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(1,1,1,1,1) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(1,1,1,1,1) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(1,1,1,1,1) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(1,1,1,1,1) \end{bmatrix}$$

Teorema de la Función Implícita

- $= \begin{bmatrix} -vz & x-uz \\ x+z & yz \end{bmatrix}\Bigg|_{(x,y,z,t)=(1,1,1,1,1)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$
- y como esta matriz tiene determinante -1 es invertible.
- Por el teorema de la función implícita y obtenemos que existe una función $(u, v) = g(x, y, z)$
- $Dg(1, 1, 1) =$

$$-\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(1,1,1,1,1) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(1,1,1,1,1) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(1,1,1,1,1) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(1,1,1,1,1) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(1,1,1,1,1) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(1,1,1,1,1) \end{bmatrix}$$

Teorema de la Función Implícita

- $Dg(1,1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^2+v & 2xy & -uv \\ u & vz & yv+u \end{bmatrix} \Bigg|_{(x,y,z,u,v)=(1,1,1,1,1)}$
- $Dg(1,1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
- $Dg(1,1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{bmatrix}$
- La buena aproximación afín en $(x,y,z) = (0{,}99, 1{,}02, 0{,}97)$ es

Teorema de la Función Implícita

- $L(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{bmatrix}$
- $L(x,y,z) = (1 + 2(x-1) + 2(y-1) - (z-1), 1 - 5(x-1) - 5(y-1))$
- Se tienen las aproximaciones $u = 1{,}05$, $v = 0{,}95$

Teorema de la Función Inversa.

Teorema de la Función Inversa

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, y $f : U \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1. Si $Df(\vec{a})$ es invertible, entonces existen vecindades abiertas V de $\vec{a}$, y W de $\vec{b} = f(\vec{a})$ y una función $g : W \to V$ de clase C^1 tal que:

- $f(g(\vec{x})) = \vec{x}$ para $\vec{x} \in V$
- $g(f(\vec{y})) = \vec{y}$ para $\vec{y} \in W$
- $Dg(\vec{b}) = [Df(\vec{a})]^{-1}$

Ejemplo 2

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función dada por $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Determinar si f tiene una inversa global. Determinar si la función es invertible cerca del punto $(1, -1)$

Teorema de la Función Inversa.

Solución:

- Primero notemos que $f(x, y) = f(-x, -y)$, esto implica que f no es inyectiva y por lo tanto no tiene una inversa global.
- Para determinar si tiene una inversa local utilizaremos el Teorema de la función Inversa. Observemos que la función es de clase C^1 por ser polinomial.
- $Df = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}$

Teorema de la Función Inversa.

- $Df(1,-1) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$
- $\det(Df(1,-1)) = 8 \neq 0$. Por lo tanto $Df(1,-1)$ es invertible.
- Se sigue del Teorema de la Función Inversa que f es invertible cerca de $(1,-1)$.
- De hecho, podemos encontrar la inversa de manera explícita,
- $u = x^2 - y^2, v = 2xy$
- $y = \frac{v}{2x}$

Teorema de la Función Inversa.

- $u = x^2 - \left(\frac{v}{2x}\right)^2$
- $4x^4 - 4ux^2 - v^2 = 0$
- $u = \sqrt{\frac{u+\sqrt{u^2+v^2}}{2}}$
- $y = \frac{v}{\sqrt{2}\sqrt{u+\sqrt{u^2+v^2}}}$
- $g(u,v) = \left(\sqrt{\frac{u+\sqrt{u^2+v^2}}{2}}, \frac{v}{\sqrt{2}\sqrt{u+\sqrt{u^2+v^2}}}\right)$
- $Dg(0,-2) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}^{-1}.$

Máximos y Mínimos.

Definición

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in A$ y $f : A \to \mathbb{R}$

- f tiene máximo global en $\vec{a}$ si $f(\vec{x}) \leq f(\vec{a})$ para todo $\vec{x} \in A$.
- f tiene un máximo local en $\vec{a}$ si para algún $\delta > 0$ se tiene que $f(\vec{x}) \leq f(\vec{a})$ para todo $\vec{x} \in B_\delta(\vec{a}) \cap A$.
- Se tienen definiciones análogas para mínimo global y mínimo local.

Máximos y Mínimos.

Teorema de Valores Extremos

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado y acotado (compacto), y $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces f alcanza un máximo y un mínimo.

Definición

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in int(A)$ y $f : A \to \mathbb{R}$. Decimos que $\vec{a}$ es un punto crítico si

- $\nabla(f)(\vec{a})$ no existe (alguna de las parciales no existe.).
- $\nabla(f)(\vec{a}) = \vec{0}$ (todas las parciales se anulan).

Máximos y mínimos

Teorema (Criterio de la primera derivada)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\vec{a} \in int(A)$. Si f tiene un extremo local en $\vec{a}$, entonces $\vec{a}$ es un punto crítico.

Solución:

- Si $\nabla(f)(\vec{a})$ no existe, entonces $\vec{a}$ es un punto crítico.
- Si $\nabla(f)(\vec{a})$ existe, entonces todas las parciales existen.
- Consideremos la función $g_i(t) = f(\vec{a} + te_i)$ para $i = 1, \ldots, n$.
- Como $\vec{a}$ es un extremo local de f se sigue que 0 es un extremo local de g_i para $i = 1, \ldots, n$.
- Por lo tanto $g_i'(0) = 0$ pero $g_i'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})$.
- Por lo cual $\nabla(f)(\vec{a}) = \vec{0}$, es decir, $\vec{a}$ es un punto crítico.

Máximos y mínimos

Estrategia para encontrar puntos extremos.

Sea $f : A \to \mathbb{R}$

- Encontrar los puntos críticos en el interior de A.
- Estudiar la función f en la frontera, i.e., encontrar los valores extremos de f en ∂A.
- Comparar los valores extremos de f en $int(A)$ y en ∂A.
- Justificar la existencia de máximos o mínimos globales.