Solución Parcial

Listado 11: SEL y determinante de matrices.

4. Sean $x \in \mathbb{R}$ y

$$a = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix}.$$

Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

- $a = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix}.$
- Si $x = 0$ o $x = 1$, entonces $a = 0$.
- $a = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 1\}$.
- Si $x = 3$, entonces $a = 0$.

i) Verdadera

$$a = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix}$$

Si a la 2da, 3era y 4ta columna le restamos la 1era columna, la matriz que resulta tiene igual determinante que la matriz original.

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix}$$

Si la 2da columna se multiplica por -1, entonces el determinante la nueva matriz es igual al de la anterior multiplicada por -1.

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix}$$

4. Sean $x \in \mathbb{R}$ y

$$a = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix}.$$

Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

- $a = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix}.$
- Si $x = 0$ o $x = 1$, entonces $a = 0$.
- $a = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 1\}$.
- Si $x = 3$, entonces $a = 0$.

ii) Verdadera

Si suponemos que $x=0$ entonces son iguales la 1era y 2da columna de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{pmatrix}$$

por lo que su determinante es 0, es decir, $a=0$.

En caso de que $x=1$, entonces son iguales 1era y 3era columna, de lo que se concluye igualmente que $a=0$.

iii) Falsa Basta ver que si $x=2$, la cuarta y 1era columna son iguales, por lo que en ese caso $a=0$.

4. Sean $x \in \mathbb{R}$ y

$$a = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix}.$$

Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

- $a = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix}.$
- Si $x = 0$ o $x = 1$, entonces $a = 0$.
- $a = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 1\}$.
- iv) Si $x = 3$, entonces $a = 0$.

iv) Falsa, De i) vimos que

$$a = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix}$$

y si suponemos que $x = 3$

$$a = -\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}_{\text{Observe que esta matriz es triangular inferior}} = -\underbrace{(1 \cdot 3 \cdot -2 \cdot -1)}_{\text{multiplicación de elementos de la diagonal ya que la matriz es triangular inferior}} = -6 \neq 0.$$

6. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

(a) Encuentre los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema es compatible determinado.

(b) Si a es tal que el sistema es compatible determinado, encuentre los valores de $x, y, z \in \mathbb{R}$ que satisfacen las ecuaciones anteriores mediante el método de Cramer.

Consideremos $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9a \end{pmatrix}$

El sistema es compatible determinado ssi $\det(A) \neq 0$.

Obtengamos $\det(A)$

$$\begin{matrix} a & 2 & 3 & a & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9a & 7 & 8 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}
\det(A) &= (a \cdot 5 \cdot 9a + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8) - (3 \cdot 5 \cdot 7 + a \cdot 6 \cdot 8 + 2 \cdot 4 \cdot 9a) \\
&= (45a^2 + 84 + 96) - (105 + 48a + 72a) \\
&= (45a^2 + 180) - (105 + 120a) \\
&= 45a^2 - 120a + 75 \\
&= 5(9a^2 - 24a + 15) \\
&= 5((3a)^2 - 8(3a) + 15) \\
&= 5(3a - 5)(3a - 3) \\
&= 15(3a - 5)(a - 1)
\end{aligned}$$

$\det(A) = 0 \Leftrightarrow a = 5/3 \vee a = 1.$

El sistema es compatible determinado ssi $a \in \mathbb{R} - \{1, 5/3\}$.

6. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

(a) Encuentre los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema es compatible determinado.

(b) Si a es tal que el sistema es compatible determinado, encuentre los valores de $x, y, z \in \mathbb{R}$ que satisfacen las ecuaciones anteriores mediante el método de Cramer.

Consideremos $a \in \mathbb{R} - \{1, 5/3\}$. Entonces $\det(A) \neq 0$.

i) Sea $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 6 \\ 8 & 8 & 9a \end{pmatrix}$ donde la 1era columna de A se reemplazó por el vector de la parte derecha del sistema.

Claramente $|A_1| = 0$ pues su 1era y 2da columna son iguales.

Luego, $x = \dfrac{|A_1|}{|A|} = \dfrac{0}{|A|} = 0$ //

ii) Sea $A_2 = \begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9a \end{pmatrix}$ donde la 2da columna de A se reemplazó por el vector de la parte derecha del sistema.

Notemos que $|A_2| = |A|$ pues $A_2 = A$.

Luego, $y = \dfrac{|A_2|}{|A|} = \dfrac{|A|}{|A|} = 1$ //

iii) Sea $A_3 = \begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 5 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix}$ donde la 3era columna de A se reemplazó por el vector de la parte derecha del sistema.

Claramente $|A_3| = 0$ pues su 3era y 2da columna son iguales.

Luego, $z = \dfrac{|A_3|}{|A|} = \dfrac{0}{|A|} = 0$ //

11. Determine los valores que debe tomar el parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ para que el sistema siguiente sea compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} (1-\lambda)x & + & y & + & z & = & a \\ x & + & (1-\lambda)y & + & z & = & b \\ x & + & y & + & (1-\lambda)z & = & c \end{array}\right\}$$

En el caso en que el sistema no sea compatible determinado, determine las condiciones que deben satisfacer $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que el sistema sea compatible indeterminado.

El sistema en forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} (1-\lambda) & 1 & 1 \\ 1 & (1-\lambda) & 1 \\ 1 & 1 & (1-\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Llamemos A a la matriz del sistema.

El sistema es compatible determinado ssi $\det(A) \neq 0$.

Obtengamos $\det(A)$

$$\begin{array}{ccccc} 1-\lambda & 1 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1 & 1-\lambda \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= (1-\lambda)^3 + 1 + 1 - [(1-\lambda) + (1-\lambda) + (1-\lambda)] \\ &= (1-\lambda)^3 + 2 - [3(1-\lambda)] \\ &= 1 - 3\lambda + 3\lambda^2 - \lambda^3 + 2 - 3 + 3\lambda \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 \\ &= \lambda^2(3-\lambda) \end{aligned}$$

Él sistema es compatible determinado ssi $\lambda \in \mathbb{R} - \{3, 0\}$

11. Determine los valores que debe tomar el parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ para que el sistema siguiente sea compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{rcccccl} (1-\lambda)x &+& y &+& z &=& a \\ x &+& (1-\lambda)y &+& z &=& b \\ x &+& y &+& (1-\lambda)z &=& c \end{array}\right\}$$

En el caso en que el sistema no sea compatible determinado, determine las condiciones que deben satisfacer $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que el sistema sea compatible indeterminado.

i) El sistema en forma matricial es, en caso de que $\lambda=0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Trabajando con la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \end{array}\right) \underset{f_3 \leftarrow f_3 - f_1}{\overset{f_2 \leftarrow f_2 - f_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & c-a \end{array}\right)$$

El sistema es compatible indeterminado ssi $a=b=c$.

ii) El sistema en caso de que $\lambda=3$ es

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Trabajando con la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc:c} -2 & 1 & 1 & a \\ 1 & -2 & 1 & b \\ 1 & 1 & -2 & c \end{array}\right) \overset{f_3 \leftrightarrow f_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & c \\ 1 & -2 & 1 & b \\ -2 & 1 & 1 & a \end{array}\right) \underset{f_3 \leftarrow f_3 + 2f_1}{\overset{f_2 \leftarrow f_2 - f_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & c \\ 0 & -3 & 3 & b-c \\ 0 & 3 & -3 & a+2c \end{array}\right)$$

$$\overset{f_3 \leftarrow f_3 + f_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & c \\ 0 & -3 & 3 & b-c \\ 0 & 0 & 0 & a+b+c \end{array}\right)$$

El sistema es compatible indeterminado ssi $a+b+c=0$

16. Considere el sistema de ecuaciones $Ax = b$ con

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Después de realizar las siguientes operaciones elementales a A

$$f_2 \leftarrow f_2 - 2f_1, \quad f_3 \leftarrow f_3 - f_1$$

se obtiene la matriz

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) ¿Cuál es el rango de A? Justifique su respuesta.

(b) ¿Para qué valores de α el sistema $Ax = b$ es incompatible? Justifique su respuesta.

(c) Sea α tal que el sistema $Ax = B$ es compatible, encuentre su conjunto solución.

El rango de A es el mismo rango de $\tilde{A}$.
El rango de $\tilde{A}$ es 2, pues

(a) $\operatorname{Im}(\tilde{A}) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

$= \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$ ya que $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$ pues $\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

y como $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es li, $r(\tilde{A}) = 2$.

16. Considere el sistema de ecuaciones $Ax = b$ con

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Después de realizar las siguientes operaciones elementales a A

$$f_2 \leftarrow f_2 - 2f_1, \quad f_3 \leftarrow f_3 - f_1$$

se obtiene la matriz

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) ¿Cuál es el rango de A? Justifique su respuesta.

(b) ¿Para qué valores de α el sistema $Ax = b$ es incompatible? Justifique su respuesta.

(c) Sea α tal que el sistema $Ax = B$ es compatible, encuentre su conjunto solución.

(b) $\left(A \,\middle|\, \begin{matrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{matrix}\right) \underset{f_3 \leftarrow f_3 - f_1}{\overset{f_2 \leftarrow f_2 - 2f_1}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 6 & \alpha - 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \overset{f_3 \leftarrow f_3 + \frac{1}{3} f_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 6 & \alpha-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha-2}{3} \end{array}\right)$

El sistema es incompatible ssi $r(A) \neq r(A|b)$, es decir el sistema es incompatible ssi $\alpha \neq 2$

(c) El sistema es compatible ssi $r(A) = r(A|b)$, es decir si $\alpha = 2$.

Considerando $\alpha = 2$, $(A|b) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

entonces $-3x_2 + 6x_4 = 0$, lo que implica que $x_2 = 2x_4$

y $x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 1$, y ya que $x_2 = 2x_4$, se tiene que $x_1 = 1 + 3x_3 - 2x_4$.

Así, el conjunto solución es: $S(A,b) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 + 3x_3 - 2x_4 \\ 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$