UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

El caso Complejo:

Teorema
Suponga que el sistema

$$X'(t) = A\,X(t), \tag{1}$$

es tal que la matriz A tiene un valor propio complejo $\lambda = a + b\,i$, con vector propio asociado igual a u.
Entonces los vectores de componente real, X_1 y X_2, definidos por

$$X_1(t) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\lambda t}\,u), \;\text{ y }\; X_2(t) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\lambda t}\,u)$$

son soluciones l.i. para el sistema (1).

Ejemplo
Consideremos el sistema de EDO homogéneo:

$$\begin{cases} y'(t) = -z(t) \\ z'(t) = y(t) \end{cases}$$

Solución:
La matriz asociada al sistema, es $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
El cálculo $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$ proporciona los valores propios $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$.
Usamos el valor propio $\lambda_1 = i$.

El espacio propio correspondiente a $\lambda_1 = i$, es

$$S_{\lambda_1} = \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I) = \mathrm{Ker}(A - iI) =< \{(i, 1)\} > .$$

Aplicando el Teorema anterior, sigue que la parte real y la parte imaginaria del vector

$$\varphi_2(t) = \mathrm{e}^{it}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix},$$

proporcionan respectivamente dos soluciones l.i. al sistema dado. Esto es,

$$X_1(t) = \mathrm{Re}\Big[\mathrm{e}^{it}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\Big] = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

y

$$X_2(t) = \mathrm{Im}\Big[\mathrm{e}^{it}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\Big] = \begin{pmatrix} \cos(t)(t) \\ \operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}$$

Así, la solución general del sistema homogéneo dado, es

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}.$$

donde A y B son constantes reales arbitrarias.
Nota: Los detalles de este ejemplo fueron realizados en clases.

Ejemplo (en que la m.a es mayor a la m.g.)

Consideremos el siguiente SEDO

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) + z(t), & x(0) = -1; \\ y'(t) = 2\,x(t) + y(t) - z(t), & y(0) = 0; \\ z'(t) = -y(t) + z(t), & z(0) = 1. \end{cases}$$

SOLUCION

Solución: El sistema homogéneo dado puede ser escrito en la forma

$$X'(t) = A\,X(t)$$

donde

$$X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Los valores propios son las raíces de $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Haciendo el cálculo en este caso, sigue:

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 1) - 2((1-\lambda) + 1) \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) + 2(\lambda - 2) \\
&= \lambda(1-\lambda)(\lambda-2) + 2(\lambda-2) \\
&= (\lambda-2)\,(\lambda(1-\lambda) + 2) \\
&= -\left(\lambda^2 - \lambda - 2\right)(\lambda - 2) \\
&= -(\lambda+1)(\lambda-2)^2 = 0
\end{aligned}$$

Así, $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ son valores propios de la matriz A, siendo m.a.$(\lambda_1) = 1$ y m.a.$(\lambda_2) = 2$. De otra parte, se puede ver que

$$S_{\lambda_1} = \langle\{(-3, 4, 2)\}\rangle \;\; \text{y}$$
$$S_{\lambda_2} = \langle\{(0, -1, 1)\}\rangle$$

de donde la m.g.$(\lambda_1) =$ m.g.$(\lambda_2) = 1$

(Recordemos que la **multipilcidad geométrica. m.g.** es la dimensión del espacio propio correspondiente, esto es,

Definición:

La multiplicidad geométrica de un valor propio λ de la matriz A, es igual a $\dim(\text{Ker})(A - \lambda I))$.

En este caso, solamente podemos formar las soluciones

$$X_1(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad X_2(t) = e^{3t}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

por lo que nos encontramos frente a un problema con degeneramiento de orden 1.
Observación:
Este semestre 2022-2 no nos ocuparemos del caso en que la multiplicidad algebraíca de algún autovalor sea mayor de su multiplicidad geométrica, caso en que se debe determinar “la solución que falta” para completar un Sistema Fundamental.

JMS//jms
Noviembre de 2021.