Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemática
Departamento de Matemática

Cálculo II

Ingeniería Civil

Prof. Víctor Aros Quinán

Segundo Semestre 2021

Clase N$^{\underline{\text{o}}}$4: Cálculo II

Métodos de Integración e Integral Definida

Funciones Racionales

Definición

Dado un cuerpo de números $\mathbb{K}$ y $p, q \in \mathbb{K}[x]$, la función $h = p/q$ se denomina función racional, es decir, una función racional es la que resulta del cociente de dos polinomios y es tal que para cada $x \in \mathbb{K}$, se tiene que $q(x) \neq 0$, por ende:

$$h(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

en este caso, p y q se denominan **dividendo** y **divisor**, respectivamente.

Observaciones:

1. Si h es tal que $\mathrm{gr}(p) \geq \mathrm{gr}(q)$, entonces h es una función racional impropia.
2. Si h es tal que $\mathrm{gr}(p) < \mathrm{gr}(q)$, entonces h es una función racional propia.

Descomposición en Fracciones Parciales

Teorema: Dada una fracción propia $\dfrac{p(x)}{d(x)}$ con $p, d \in \mathbb{R}[x]$ puede descomponerse en suma de fraccciones parciales, como sigue:

1. Si $d(x)$ tiene factor lineal de la forma $ax + b$, no repetido, entonces la descomposición en fracciones parciales tiene un término de la forma $\dfrac{A}{ax+b}$, donde A es una constante real.
2. Si $d(x)$ tiene un factor lineal de la forma $ax+b$ repetido k veces, es decir, $(ax+b)^k$, entonces la descomposición en fracciones parciales contiene los términos

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + ... + \frac{A_k}{(ax+b)^k}$$

donde los A_i son constantes reales, donde $i = 1, 2, ..., k$.

Descomposición en Fracciones Parciales

3. Si $d(x)$ tiene un factor cuadrático irreducible en $\mathbb{R}[x]$ de la forma $ax^2 + bx + c$, no repetido, entonces la descomposición en fracciones parciales contiene en término de la forma $\dfrac{A_1x + A_2}{ax^2 + bx + c}$, donde A_1 y A_2 son constantes reales.

4. Si $d(x)$ tiene un factor cuadrático irreducible en $\mathbb{R}[x]$ de la forma $ax^2 + bx + c$ repetido k veces, es decir, $(ax^2 + bx + c)^k$, entonces la descomposición en fracciones parciales contiene los términos

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + ... + \frac{A_kx + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}$$

   donde los A_i y B_i son constantes reales, donde $i = 1, 2, ..., k$.

Ejemplos

Descomponer las siguientes funciones racionales en suma de fracciones parciales.

(a) $\dfrac{7x+6}{x^2+x-6} = \dfrac{4}{x-2} + \dfrac{3}{x+3}$

(b) $\dfrac{x^2}{x^4-1}$

(c) $\dfrac{x^4-3x^3-19x^2+4x+18}{x^2-3x-18}$

Ejemplos

Solución (b) Notemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{(x^2-1)(x^2+1)} &= \frac{x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}\\ &= \frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{A_3x+A_4}{x^2+1}\end{aligned}$$

Entonces,

$$x^2 = A_1(x+1)\left(x^2+1\right) + A_2(x-1)\left(x^2+1\right) + (A_3x+A_4)\left(x^2-1\right).$$

Ahora bien, reemplazando algunos valores de x, se tiene:

$$x=-1;\quad 1=-4A_2 \Rightarrow A_2 = -\frac{1}{4} \textbf{ y } x=1;\quad 1=4A_1 \Rightarrow A_1=\frac{1}{4}$$

$$x=0;\quad 0=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-A_4 \Rightarrow A_4=\frac{1}{2}$$

$$x=2;\quad 4=\frac{15}{4}+\left(2A_3+\frac{1}{2}\right)\cdot 3 \Rightarrow A_3=0$$

Por lo tanto, la descomposición en suma de fracciones parciales es la siguiente:

$$\frac{x^2}{x^4-1} = \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{2(x^2+1)}$$

Ejemplos

Solución (c)

La fracción racional no es fracción propia, no es aplicable el teorema, efectuemos primero la división:

$$\begin{array}{rrrrrcl}
(x^4 & -3x^3 & -19x^2 & +4x & +18) & : & (x^2-3x-18) = x^2-1 \\
x^4 & -3x^3 & -18x^2 & & & & \\
\hline\hline
 & & -x^2 & +4x & +18 & & \\
 & & -x^2 & +3x & +18 & & \\
\hline\hline
 & & & x & & &
\end{array}$$

Luego:

$$\frac{x^4-3x^3-19x^2+4x+18}{x^2-3x-18} = x^2-1+\frac{x}{x^2-3x-18}$$

Ejemplos

Descompondremos la fracción propia $\dfrac{x}{x^2-3x-18}$ *en fracciones parciales.*

$$\frac{x}{x^2-3x-18}=\frac{x}{(x-6)(x+3)}=\frac{A_1}{x-6}+\frac{A_2}{x+3}$$

Por lo tanto,

$$\frac{x^4-3x^3-19x^2+4x+18}{x^2-3x-18}=x^2-1+\frac{2}{3(x-6)}+\frac{1}{3(x+3)}.$$

Ejemplos

Calcule las siguientes integrales con el método de fracciones parciales:

(a) $$\int \frac{7x+6}{x^2+x-6}\,dx$$

(b) $$\int \frac{x^2}{x^4-1}\,dx$$

(c) $$\int \frac{x^4-3x^3-19x^2+4x+18}{x^2-3x-18}\,dx$$

Ejercicios

Calcule las siguientes integrales con el método de fracciones parciales:

(a) $\displaystyle\int \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{6x^2-2x-1}{4x^3-x}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+2}{x^2-1}\,dx$

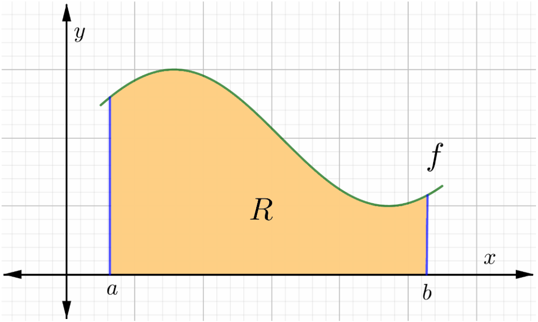
(d) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^4+2x^2+1}\,dx$

Problema del Cálculo Integral

En el cálculo integral existe un problema fundamental que está relacionado con determinar la medida del área bajo una curva, es decir, dada una función $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, podemos definir una región de la siguiente forma:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$$

la cual se representa de manera gráfica, como sigue:

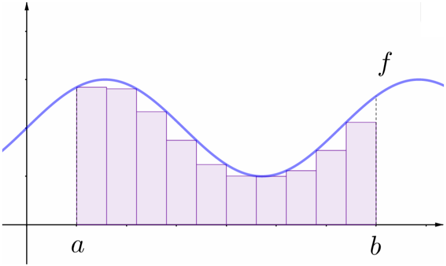


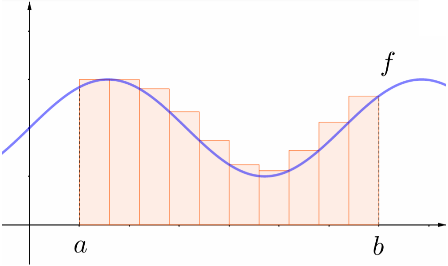
Integral Definida

Dado lo anterior, podemos plantear la siguiente pregunta

¿Cómo calcular el área de la región R?

Para responder esta pregunta podemos realizar una construcción de rectángulo inscritos y circunscritos en el gráfico de la función para poder aproximar el valor del área.





Integral Definida

La construcción que se dará a continuación, considera una función continua sobre un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, sin que sea necesariamente no negativa (esta condición es utilizada para interpretar el concepto de integral definida como área de una región del plano).

Para poder introducir y resolver este problema de manera formal, debemos definir algunos conceptos importantes:

Definición

Una partición del intervalo $[a, b]$ es un conjunto

$$P = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n\}$$

de $n + 1$ puntos tales que $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$.

Integral Definida

Ejemplos: Dado el intervalo $[0,1]$, podemos definir muchas particiones,

(a) $P_1 = \{0, 1\}$

(b) $P_2 = \left\{0, \dfrac{1}{2}, 1\right\}$

(c)

(d)

Integral Definida

Notemos además, que si consideramos una partición cualquiera, esta divide al intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de la forma $[x_{k-1}, x_k]$, donde cada uno de ellos tiene longitud:

$$\Delta_k = x_k - x_{k-1}$$

y son tales que:

$$\bigcup_{i=1}^{n} [x_{k-1}, x_k] = [a, b]$$

Observación: en el caso en que la longitud de cada intervalo sea igual estaremos en presencia de una partición regular.

Integral Definida

Si seguimos con nuestra construcción, como f es continua en $[a,b]$, se concluye por el Teorema de los Valores Extremos que f alcanza un valor máximo y mínimo en cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$, es decir:

$$m_k = \min\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$
$$M_k = \max\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

Dado esto podemos definir la suma inferior y suma superior, de la siguiente manera:

Definición

La suma inferior de f asociada a la partición P es definida por:

$$\underline{S}(f,P) = s(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta_k$$

Integral Definida

Definición

La suma superior de f asociada a la partición P es definida por:

$$\overline{S}(f,P) = S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta_k$$

Ejemplos: Sean $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, la función definida por $f(x) = x^2$ y P la siguiente partición del intervalo $[0,1]$:

$$P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$$

Determinar la suma superior e inferior de f asociada a P.

Integral Definida

Lo anterior se puede visualizar de manera gráfica en la siguiente figura: