EDO 521218-2 (10/08/22).

Docente: Juan Molina.

Ayudante: Sr. Victor Cartes

clases: Teóricas: Lu: 1-2 A-416 // Mi A-212
Prácticas: Mi 10-11 A-212 // Vi 5 A-214

Evaluaciones: Indicadas en el syllabus del curso.

Ev 1 $\times 0{,}45$

Ev 2 $\times 0{,}55$

- Definiciones básicas.
- Ejemplos.

Tipos de Ecuaciones:

En $\mathbb{R}$: $\boxed{x^2+2=1}$

En $\mathbb{C}$: $\boxed{x^2+2=-1}$

Funciones: Si $y(t)$ representa una función $y: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$t \mapsto y(t)$

Se puede pensar en: (1) $\boxed{y'(t)=\cos(t)}$ $\Downarrow$ $y(t)=\operatorname{sen}(t)$

(2) $\boxed{y'(t)-y(t)=0}$

(3) $\boxed{y'(t)-k\big(y(t)\big)^2=t}$ (k es constante)

EDO

(4) $\boxed{y'(t)-\int_0^t y(s)\,ds=t^2}$

↳ ecuación integro-diferencial

DEF: Una ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA, EDO, es una ecuación en que la incógnita es una función que depende de una sola variable. En la ecuación debe aparecer al menos una derivada de la incógnita.

Ejemplos:

① $\boxed{t\,x(t) - x'(t) = t}$

t variable indep
$t \in I$
$I = ?$

$\Leftrightarrow \quad t\,x(t) - \frac{dx}{dt}(t) = t.$

② $x(t) - t\,x''(t) = \operatorname{sen}(t).$

$\Leftrightarrow \quad x(t) - t\,\frac{d^2x}{dt^2}(t) = \operatorname{sen}(t).$

OBSERVACIÓN:

$$t^2 x(t) + 2x(t) = 3$$

¡No es una EDO!

DEFINICIÓN (Orden de una EDO)

El ORDEN de una EDO es el mayor orden de derivación de la incógnita en la ecuación

Ejemplos:

① $(t^3-1)x''(t) - t x'(t) = x(t)$ (orden 2)

② $x'(t) - t(x'(t))^3 = t-1$ (orden 1)

Observación: (La escritura de una EDO)

Note que la EDO: $\boxed{x'(t) + x(t) = t}$

es equivalente a escribir:

$y'(t) + y(t) = t \iff$

$u'(t) + u(t) = t \iff y'(x) + y(x) = x$

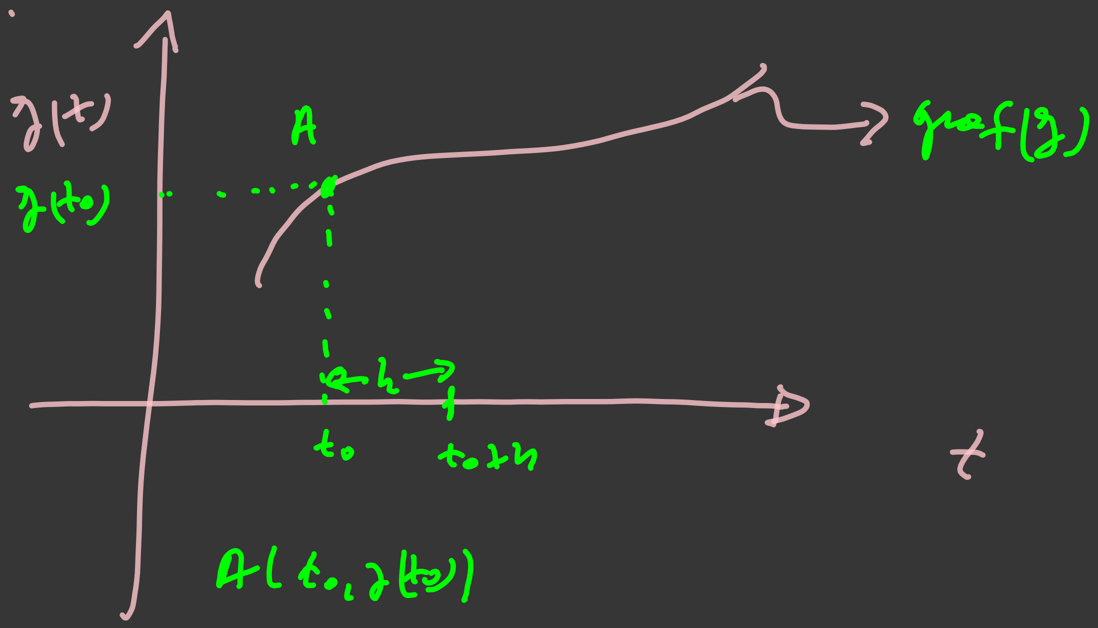
Las cuatro formas de escribir significan lo mismo: se busca una función $x = x(t)$ de modo que ella mas su derivada sea siempre igual a la variable independiente:

¿ Cuál es el sentido de una EDO ?

¿ Qué significa resolver la EDO ?

<u>DEF</u>: Una solución de una EDO es una función (con su dominio, recorrido y valor punto a punto) que satisface la EDO dada.

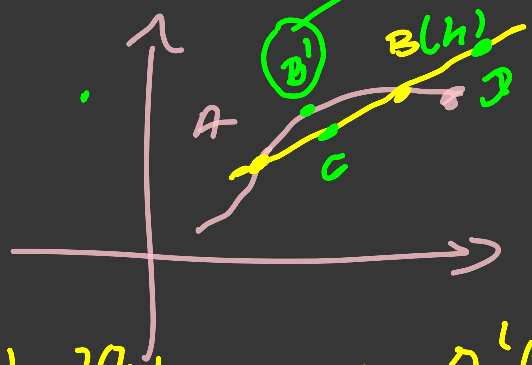
($y = y(t)$.



$t_0 \to t_0+h$ $\qquad$ $A\,(t_0, y(t_0))$ M

$y(t_0) \to y(t_0+h)$ $\qquad$ $B\,(t_0+h, \underbrace{y(t_0+h)}))$ MM $\quad B'(h/2)$

$A \rightsquigarrow B$



$$\frac{\underbrace{y(t_0+h) - y(t_0)}}{(t_0+h) - t_0} = \frac{y(t_0+h) - y(t_0)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} y'(t_0)$$

$$\parallel\quad \frac{\Delta(y)}{\Delta t} = \frac{y(t_0+h) - y(t_0)}{(t_0+h) - t_0} = m \left(\begin{array}{l} \text{pendiente} \\ \text{de la recta} \\ AB \end{array} \right)$$

$\downarrow$

¡ Invariante !

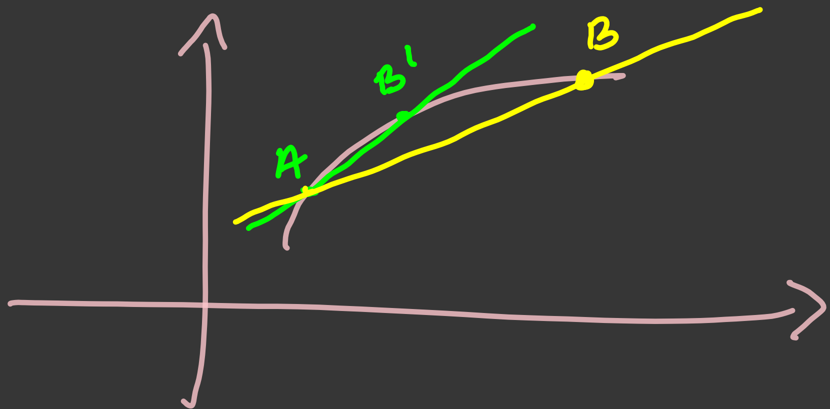
(cálculo AB o en CD es el mismo)

De forma análoga :

__AB':__

$$\frac{g(t_0+h/2)-g(t_0)}{(t_0+h/2)-t_0} = \frac{g(t_0+h/2)-g(t_0)}{h/2} = m$$

$m \neq m'$



m' = pendenza di retta AB'

m = pendenza di retta AB.

Supongamos que $x = x(t)$ (x es función de la variable independiente t) y que indica la población de una especie dada en el tiempo t medido en unidades de tiempo:

Modelo: La tasa de cambio de la pobl. La población $x = x(t)$ en el tiempo t es proporcional a la población.

cte. de proporcionalidad

$$(2) \qquad \boxed{x'(t) = K\, x(t)}$$

(La tasa de cambio de la función buscada es proporcional a la función misma.

• Si $u(t) = c e^{Kt}$, entonces

• $u'(t) = cK e^{Kt}$

Por tanto: $u'(t) - K u(t) = cK e^{Kt} - Kc\, e^{Kt} = 0$

Así, $\boxed{u(t) = c\, e^{Kt}}$ con c constante arbitraria.

es solución de la EDO dada.

(si $z(t) = t^2 \Rightarrow z'(t) = 2t \wedge z'(t) - K z(t) \neq 0$)

$\Rightarrow$ No es solución de $u'(t) = K u(t)$)

Note que la solución trivial

$\boxed{u \equiv 0} \Longleftrightarrow [\forall t, \ u(t) := 0]$

es solución de $\boxed{u'(t) = K u(t)}$.

Pero si buscamos solución de

$$\begin{cases} u'(t) = K u(t) \\ u(0) = 2 \end{cases}$$

entonces la solución trivial $u \equiv 0$

No satisface nuestro problema.

En el caso $u(0) = 2$, tenemos que

$\boxed{u(t) = c e^{Kt}}$ con $u(0) = 2$

$(t=0)$ $\quad u(0) = c e^{0} = c \Rightarrow c = 2$

Por tanto, $c = 2$, y la solución será

$$\boxed{u(t) = 2e^{Kt}}$$

Observe: $u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$t \mapsto u(t) = 2e^{Kt}$

No tiene restricciones : (¡No siempre es Así!)

¿Cómo "nace" la EDO?

Suponga que $x = x(t)$ es una función que indica el número de individuos de una población determinada

Suponga que $x(n)$ es el nº de individuos de la población al día n. Así, el incremento de la población $x(t)$ del día n al día $(n+1)$, es:

cte de proporc.

$$\boxed{\Delta x(n) = \frac{x(n+1) - x(n)}{(n+1) - n} = K\, x(n)}$$

El incremento de la población es proporcional a la población misma. (Aquí K es cte).

$k = b - d$; donde $\begin{cases} b & \text{es índice de natalidad} \\ d & \text{" de decesos.} \end{cases}$

Por tanto, el incremento de la población del tiempo t a $(t+h)$, es:

$$\Delta x(h) = \frac{x(t+h) - x(t)}{(t+h) - t} = \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

Así, la variación (o tasa) instantánea en el tiempo t_0, es:

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h} = x'(t_0)}$$

Así:

$$\boxed{x'(t) = k\, x(t)}$$

la tasa de cambio de la población es proporcional a la población misma.

Así, si el tiempo $t=0$, $x(0)=x_0$

entonces el problema a resolver, es:

$$(P)\ \begin{cases} x'(t) = k\,x(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Problema con VALOR INICIAL, PVI

Ya sabemos que la solución, es:

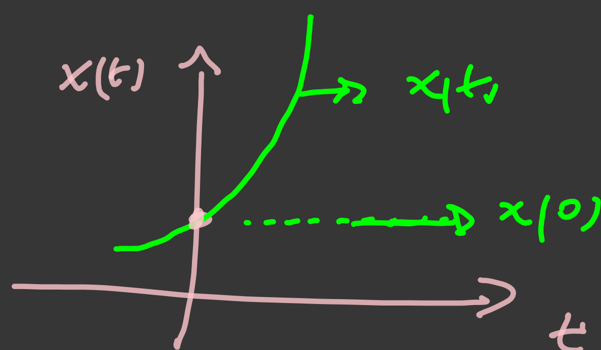
(veremos que los PVI "bien puestos" tienen solución única)

$$\boxed{x(t) = x_0\, e^{kt}}$$

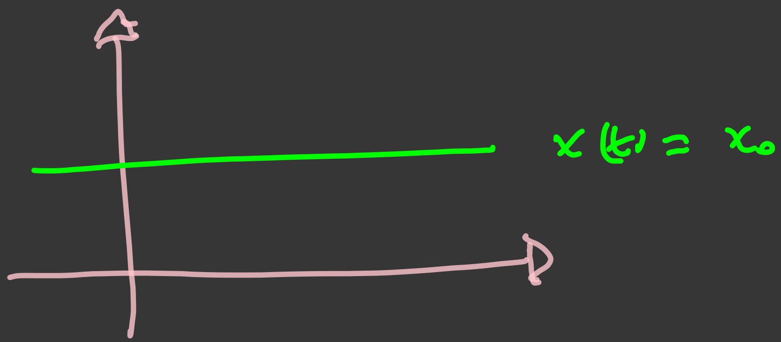
Además, k puede ser $\begin{cases} >0 \\ =0 \\ <0 \end{cases}$

$$\left(\text{note que } \lim_{t\to\infty} e^{kt} = \begin{cases} +\infty & \text{si } k>0 \\ 1 & k=0 \\ 0 & \text{si } k<0 \end{cases}\right)$$

caso (1) ($k>0$).

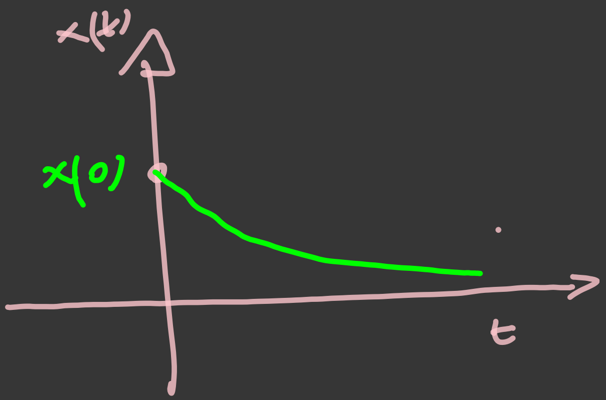


caso 1: $(k = 0)$



caso (2): $k < 0$;

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} x_0 e^{kt} = 0}$$



Muy BUENO, si $x(t)$ es un virus maligno.

Muy MALO, si $x(t)$ es la "producción" de algún beneficio!

Posteriormente, a este modelo básico (MALTHUS 1820, aprox.); aparece el modelo logístico:

$$\boxed{x'(t) = k\,x(t) - k_2\, f(x(t))}$$

donde f es una función que depende de $x(t)$

Referencia:

Nagle – Saff – Snider

"Ecuaciones Diferenciales y Problemas con valor en la Frontera.