Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemática
Departamento de Matemática

Cálculo II

Ingeniería Civil

Prof. Víctor Aros Quinán

Segundo Semestre 2021

Clase Nº25: Cálculo II

Criterios de Convergencia para Series Numéricas

Introducción

En la mayoría de los casos no es posible estudiar la convergencia de series sólo considerando las sumas parciales de estas. Por ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2)}{n^5 + n^4 + n^3 + 1} \quad \text{o} \quad \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{100}(n)}$$

Sin embargo, se pueden deducir ciertos criterios que permiten decidir la convergencia de una serie sin determinar el valor al que converge. El no determinar de manera exacta la suma de una serie no es un problema pues siempre es posible obtener una aproximación mediante una suma parcial con un número suficiente de términos.

Criterios de Convergencia

Comenzaremos considerando series de términos no negativos, es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \text{ con } a_n \geq 0$$

en este caso, la sucesión de sumas parciales $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona creciente y por teorema de sucesiones, podemos concluir un primer criterio.

Proposición

La serie numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si, y sólo si, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.

Criterios de Convergencia

Ejemplos: Estudiar la convergencia de las siguientes series:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

Solución: Notemos lo siguiente:

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

Luego, construimos la sucesión de sumas parciales:

$$s_1 = a_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$
$$s_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$
$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n =$$

Criterios de Convergencia

Dado lo anterior, podemos concluir:

$$s_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Así, como la sucesión de sumas parciales $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, se concluye que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

es convergente.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, esta serie es denominada **serie armónica** y se puede probar que ella es divergente.

https://youtu.be/dwb1V2MjMu4

Criterios de Convergencia

Usando la proposición anterior podemos deducir el siguiente teorema.

Criterio de Comparación Directa

Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones tales que $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces:

1. Si la serie numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
2. Si la serie numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

Demostración: consideremos las siguientes sucesiones de sumas parciales:

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \quad \text{y} \quad t_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

Criterios de Convergencia

como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente entonces la sucesión $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y luego acotada. Ahora bien, como $s_n \leq t_n$ y $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, entonces $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y al ser monótona creciente, podemos concluir que (s_n) es convergente y en consecuencia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

Por otro lado, podemos notar que la segunda parte del criterio es solo el contrarrecíproco de la primera.

Criterios de Convergencia

Criterio de Comparación en el Límite

Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de números positivos tales que $\lim_{n\to+\infty} a_n/b_n = L > 0$, entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ es convergente } \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ es convergente}$$

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$ dado, tal que $L - \varepsilon > 0$. Por hipótesis existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall n \geq N : L - \varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq L + \varepsilon$$

multiplicando por b_n, obtenemos:

$$(L-\varepsilon)b_n \leq a_n \leq (L+\varepsilon)b_n$$

Luego, concluimos aplicando a esto último el criterio de comparación directa.

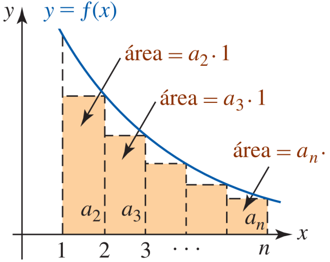
Criterios de Convergencia

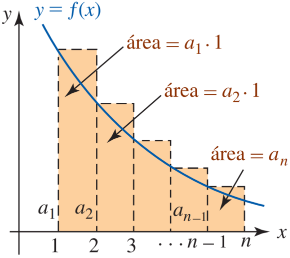
Criterio de la Integral

Sea $f : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, no negativa y decreciente, y sea $f(n) = a_n$ para todo $n \geq 1$. Entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ es convergente } \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\, dx \text{ es convergente}$$

Demostración: consideremos lo siguiente:





Criterios de Convergencia

dado lo anterior, tenemos lo siguiente:

$$a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n \leq \int_1^n f(x)\, dx \leq a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

luego, si $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ converge, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ converge y como consecuencia se tiene que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge. Además, si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces la integral impropia $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ converge.

Aplicación

Una importante aplicación del criterio de la integral es el de las series denominadas *series p*, series de la forma:

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p \in \mathbb{R} \text{ fijo}$$

lo ideal es usar el criterio precedente para determinar cuando la serie p converge.

Solución: Por criterio de la integral sabemos que:

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge } \Leftrightarrow \int_N^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx \text{ converge}$$

Ahora bien, por teorema visto en el capítulo de integrales impropias, se tiene:

$$\int_N^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & , p \leq 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & , p > 1 \end{cases}$$

Aplicación

De lo último, se tiene que:

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge } \Leftrightarrow p > 1$$

Observaciones:

1. Con este criterio podemos afirmar que la serie armónica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.
2. La serie y la integral no necesariamente convergen al mismo valor.
3. La serie puede comenzar en cualquier número natural.

Ejercicios

1. Analice la convergencia de las siguientes series:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^2(n)}{n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+\sqrt{n}+1}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\sqrt{n}-\frac{1}{2}}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln(n)}}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{n^3+3n^2+1}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{\sqrt{2n^4+1}}$ (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

2. Determinar para que valores de $p \in \mathbb{R}$ la serie converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)[\ln(\ln(n))]^p}$$

Series Alternadas

Definición

Diremos que una **serie es alternada** cuando ella pueda ser representada por

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \text{ ó por } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$$

donde todos los a_n son positivos, esto significa que los términos de la serie se alternan de signo.

Observación: es importante aclarar que los criterios que vimos no son aplicables a este tipo de series.

Criterios de Convergencia

Criterio de Leibniz

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de términos positivos tales que:

- $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Entonces, las series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ son convergentes.

Demostración: Sea $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$. A continuación mostraremos que la sucesión de sumas parciales $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la serie alternada converge. Notemos lo siguiente:

$$s_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

Luego, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, puede para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $a_n - a_{n+1} \geq 0$.

Criterios de Convergencia

Además:

$$s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) \leq a_1$$

lo que muestra que $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada superiormente. En consecuencia, $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y acotada superiormente, lo que implica que $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, es decir, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} s_{2n} = L$.

Por otra parte, como $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ y $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ es subsucesión de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tenemos que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n} = 0$. Además, como $s_{2n} = s_{2n-1} - a_{2n}$ tenemos que:

$$\lim_{n\to+\infty} s_{2n-1} = \lim_{n\to+\infty} s_{2n} + a_{2n} = L + 0 = L$$

Por lo tanto, la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y por ende, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ es convergente.

Ejercicios

Estudiar la convergencia de las siguientes series

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{n+2}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{n^2}{n^2+1}$

Ejercicios

Solución a): Puesto que la sucesión $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es .... y el $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=$, se concluye que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

es ....

Ejercicios

Solución b): Sea $f:[3,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+2}$$

luego, para analizar la monotonía de la función calculamos su derivada de primer orden, la cual está dada por:

$$f'(x)=$$

Además, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+2}=$. Así, por el criterio de Leibniz, la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{n+2}$$

es ....

Ejercicios

Solución c): Sea $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

luego, para analizar la monotonía de la función calculamos su derivada de primer orden, la cual está dada por:

$$f'(x) =$$

Criterios de Convergencia

Existen series cuyos términos son positivos y negativos sin ser ellos alternados. Cuando estamos en presencia de este tipo de series no es posible aplicar ninguno de los criterios vistos anteriormente. Sin embargo, podemos establecer el siguiente resultado.

Teorema

Si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Ejemplos:

Criterios de Convergencia

Demostración: Puesto que $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente, se concluye que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$ es también convergente.

Ahora bien, como $(a_n + |a_n|) - |a_n| = a_n$ tenemos que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

Observación: Notemos que el recíproco del teorema no es válido. Por ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{ converge y } \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| \text{ diverge}$$

Series Numéricas

Definición

Diremos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **absolutamente convergente** si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente. Además, si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es divergente, entonces diremos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **condicionalmente convergente**.