Índice general

Capítulo 4

Sistemas de ecuaciones lineales

En esta sección estudiaremos una función, llamada *determinante*, y que se denota $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, tal que para cada matriz cuadrada A, $\det(A) \in \mathbb{R}$. Ésta es una función importante cuando trabajamos con matrices cuadradas, ella nos va a permitir, por ejemplo, averiguar si una matriz cuadrada es o no invertible. Si una matriz cuadrada A es invertible también podremos, con ayuda del determinante de A, resolver sistemas de la forma $Ax = b$. Por último, el determinante es clave para el penúltimo capítulo del curso, el de valores y vectores propios de matrices.

Si quieres y tienes tiempo para entender mejor el concepto de determinante, te invitamos a leer la siguiente sección. De lo contrario, puedes ir directamente a la sección 4.6.

4.5. Determinante de una matriz. Significado geométrico.

Como mencionamos antes, el determinante es un número asociado a matrices cuadradas.

En esta sección consideraremos a una matriz de tamaño $n \times n$ como una colección de vectores en $\mathbb{R}^n$. Veamos qué queremos decir con esto para los casos $n = 2$ y $n = 3$.

En los ejemplos a continuación veremos el significado geométrico del determinante de una matriz y, considerando este significado geométrico, veremos también qué propiedades debe tener el determinante. A partir de estas propiedades construiremos el valor que debe tener el determinante de una matriz de tamaños 2×2 y 3×3 y generalizaremos las fórmulas obtenidas a matrices de n filas y columnas.

Consideremos primero la matriz identidad de tamaño $2{\times}2$,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En la figura 4.1 se muestra el paralelogramo (cuadrado) cuyos lados son los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, que forman las columnas de I. Éste es un cuadrado cuya área es igual a 1 y *1 es también el determinante de I*, que denotaremos mediante $|I|$.

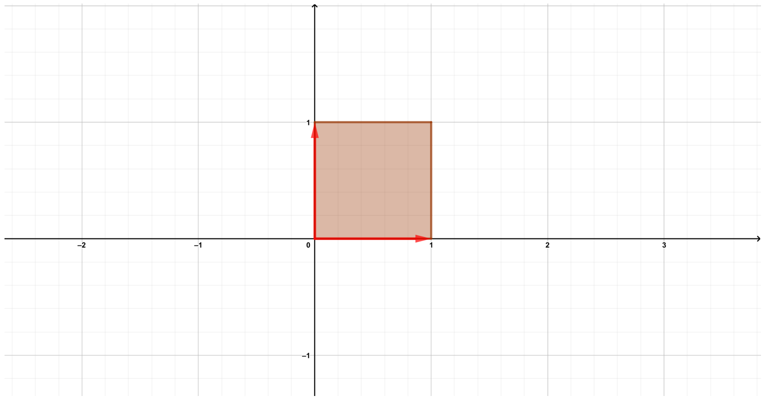

Figura 4.1: Cuadrado formado por $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

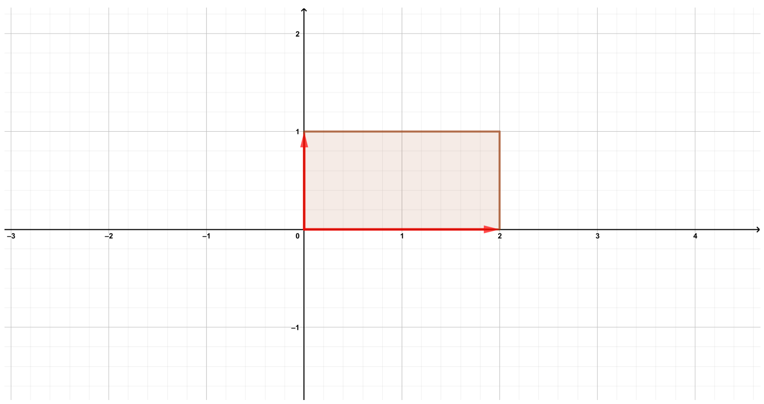

Figura 4.2: Rectángulo formado por $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

¿Qué ocurre si expandimos al doble uno de los vectores que forman las columnas de I? Es decir, ¿qué relación existe entre el área del cuadrado que se forma con las columnas de I y el rectángulo que se construye con los vectores en las columnas de

$$D = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}?$$

Observa la figura 4.2. El área del rectángulo es el doble del área anterior. El determinante de esta nueva matriz es el doble del determinante de I, es decir, $|D| = 2$. *El determinante de la matriz que se obtiene al multiplicar por dos una de las columnas de I es el doble del determinante de I.*

Si antes vimos cómo cambia el determinante de I al multiplicar una de sus columnas por dos, veamos ahora qué ocurre al cambiar una de sus columnas por la suma de ella con otra. ¿Cuál es la relación entre el área del cuadrado formado por los vectores en las columnas de I y el paralelogramo formado por los vectores en las columnas de esta nueva matriz

$$E = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}?$$

Nota que la primera columna de E es la suma de las dos columnas de I y la segunda columna de E es igual a la segunda columna de I.

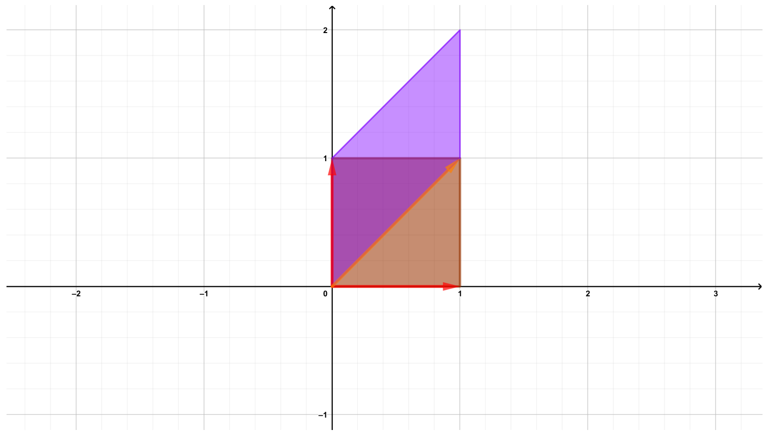

Figura 4.3: Paralelogramo formado por $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En la figura 4.3 se muestran ambas áreas. El área de color violeta es la del paralelogramo formado por los vectores en las columnas de E. Observa que este paralelogramo tiene altura y base iguales a los lados del cuadrado. Las áreas de las regiones sombreadas en la figura 4.3 son exactamente iguales, $|E| = |I|$: *el determinante de la matriz que se obtiene al sumar dos columnas de I, manteniendo las restantes iguales, es igual al determinante de I.*

¿Qué relación hay entre el área del cuadrado formado por los vectores en I y el área del paralelogramo formado por los vectores de S?

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La segunda columna es la misma en I, E y S. La primera columna de S es la suma de las primeras columnas de I y E.

Observa la figura 4.4. En ella hemos mostrado, además de los paralelogramos formados por las columnas de I y E, el formado por las columnas de S, en color azul, el área de este nuevo paralelogramo es la suma de las áreas del cuadrado asociado a I y el paralelogramo asociado a E: *el determinante de la matriz que se obtiene al sumar las columnas distintas en E e I, manteniendo iguales las columnas iguales en E e I es igual al determinante de E más el determinante de I.*

Estas propiedades que hemos podido comprobar en matrices de 2×2 con coeficientes reales, podemos generalizarlas a matrices de tamaño $n \times n$. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

La función $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ es tal que

P1 $\det(I) = 1$.

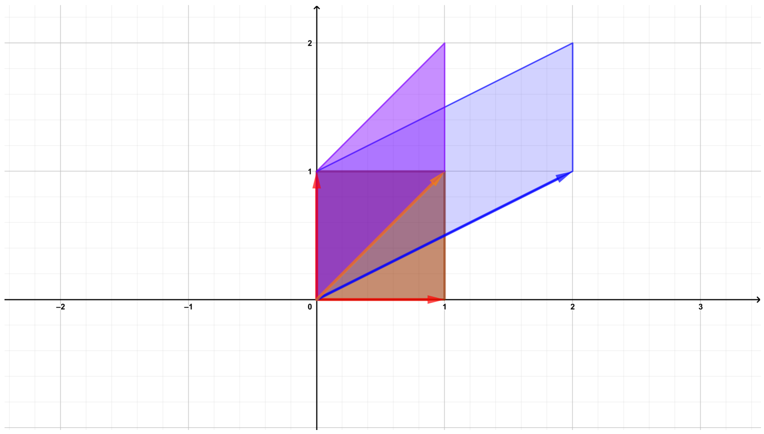

Figura 4.4: Paralelogramo formado por $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

P2 Sea $\lambda \in \mathbb{K}$. Si C es la matriz que se obtiene de multiplicar por λ una columna de A, manteniendo las restantes iguales, entonces $\det(C) = \lambda \det(A)$.

P3 Si D es la matriz que se obtiene de reemplazar una columna de A por la suma de ella con otra columna cualquiera de A, entonces $|D| = |A|$.

P4 Si E es la matriz que se obtiene de sumar reemplazar una columna de A por la suma de ella con otro vector cualquiera de $\mathbb{K}^n$, es decir,

$$E = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} + \alpha_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} + \alpha_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} + \alpha_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

entonces, $\det(E) = \det(A) + \det(B)$, siendo casi todas las columnas de B iguales a las de A, excepto la columna modificada en D, que es igual al vector añadido a ella,

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \alpha_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \alpha_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \alpha_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

De las propiedas anteriores podemos demostrar las siguientes propiedades del determinante de una matriz:

P5 Si B es la matriz que se obtiene de reemplazar una columna de A por la suma de ella con α veces otra columna de A, entonces $\det(B) = \det(A)$.
Llamemos $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ a las columnas de A, es decir,

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_k & \ldots & v_n \end{pmatrix}.$$

Entonces, para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & \alpha v_k & \ldots & v_n \end{vmatrix} = \alpha \det(A).$$

Si reemplazamos una columna cualquiera de la matriz $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & \alpha v_k & \dots & v_n \end{pmatrix}$ por la suma de ella con otra columna de la propia matriz, su determinante no cambia (ésta es la propiedad **P3**), entonces (sumando a la 2da columna la k-ésima)

$$\alpha \det(A) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 + \alpha v_k & \dots & \alpha v_k & \dots & v_n \end{vmatrix}.$$

Si ahora aplicamos nuevamente **P2**

$$\alpha \det(A) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 + \alpha v_k & \dots & \alpha v_k & \dots & v_n \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} v_1 & v_2 + \alpha v_k & \dots & v_k & \dots & v_n \end{vmatrix}$$

y con esto hemos llegado a la igualdad que queríamos demostrar

$$\det(A) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 + \alpha v_k & \dots & v_k & \dots & v_n \end{vmatrix}.$$

Es decir, el determinante de A y el de la matriz que se obtiene al sumarle a una columna cualquiera de A (no necesariamente la segunda) α veces otra columna son iguales. Esta propiedad es una generalización de la propiedad **P3**, a partir de ahora podemos considerar ésta en lugar de **P3**.

P6 Si B se obtiene de intercambiar dos columnas de A, entonces $\det(B) = -\det(A)$.
Demostremos esta propiedad usando las anteriores. Nuevamente llamemos $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ a las columnas de A, es decir,

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_i & \dots & v_k & \dots & v_n \end{pmatrix}.$$

Entonces, aplicando varias veces la propiedad anterior y solamente una vez (al final) la propiedad **P2**,

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} v_1 & \dots & v_i & \dots & v_k - v_i & \dots & v_n \end{vmatrix}, \text{ sumamos a } v_k \text{ la columna } v_i \text{ multiplicada por } -1 \\
&= \begin{vmatrix} v_1 & \dots & v_i + (v_k - v_i) & \dots & v_k - v_i & \dots & v_n \end{vmatrix}, \\
&= \begin{vmatrix} v_1 & \dots & v_k & \dots & v_k - v_i & \dots & v_n \end{vmatrix}, \\
&= \begin{vmatrix} v_1 & \dots & v_k & \dots & (v_k - v_i) - v_k & \dots & v_n \end{vmatrix}, \\
&= \begin{vmatrix} v_1 & \dots & v_k & \dots & -v_i & \dots & v_n \end{vmatrix}, \\
&= - \begin{vmatrix} v_1 & \dots & v_k & \dots & v_i & \dots & v_n \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Esta última matriz es la que resulta de intercambiar las columnas i y k de A y hemos demostrado que su determinante es igual a $-\det(A)$.

P7 Esta última propiedad es una generalización de **P4**: para cualquier par de escalares α, β y cualquier par de vectores $v, w \in \mathbb{R}^n$ se cumple que:

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} v_1 & \dots & v_{i-1} & \alpha v + \beta w & v_{i+1} & \dots & v_n \end{vmatrix} \\
&= \alpha \begin{vmatrix} v_1 & \dots & v_{i-1} & v & v_{i+1} & \dots & v_n \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} v_1 & \dots & v_{i-1} & w & v_{i+1} & \dots & v_n \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Las matrices anteriores solo se diferencian en la columna i-ésima. La columna i-ésima de la matriz de la izquierda es la combinación lineal $\alpha v + \beta w$, mientras que en las matrices de la derecha la columna i-ésima es v y w respectivamente.

De las propiedades **P1** a **P7** se concluye que el determinante de una matriz satisface además que:

1. Si todos los elementos en una columna de A son iguales a cero, $\det(A) = 0$. La columna de ceros se puede escribir como $\lambda = 0$ por otra columna cualquiera de A y, como consecuencia de la propiedad **P2** anterior, su determinante es cero.
2. Si dos columnas de A son iguales, $\det(A) = 0$. Observa que si dos columnas de A son iguales, la matriz que se obtiene al intercambiar esas dos columnas es igual a A, sin embargo su determinante es igual a $-\det(A)$.
3. Si una columna de A es igual a λ por otra columna de A, el determinante de A es cero. Esto es consecuencia de la propiedad **P2** anterior pues si, por ejemplo, la columna i-ésima de A es λ veces la columna j-ésima de A, es decir, si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & \lambda\, a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & \lambda\, a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & \lambda\, a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

entonces

$$\det(A) = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

y éste último determinante es cero pues la matriz tiene dos columnas iguales.
4. En general, y ésta es una de las mayores utilidades del determinante de una matriz: si las columnas de A son un conjunto ld, el determinante de A es cero.
Llamemos $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ a las columnas de A, es decir,

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_k & \ldots & v_n \end{pmatrix}.$$

Si las columnas de A son un conjunto ld de vectores de $\mathbb{R}^n$, una de las columnas (supongamos v_1) es combinación lineal de las restantes. Si $v_1 = \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$, entonces

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n & v_2 & v_3 & \ldots & v_n \end{vmatrix}, \\ &= \alpha_2 \begin{vmatrix} v_2 & v_2 & \ldots & v_n \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} v_3 & v_2 & v_3 & \ldots & v_n \end{vmatrix} + \ldots + \alpha_n \begin{vmatrix} v_n & v_2 & v_3 & \ldots & v_n \end{vmatrix} \end{aligned}$$

y, como todas las matrices anteriores tienen dos columnas iguales, sus determinantes son iguales a cero.
5. Si D es una matriz diagonal,

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix},$$

entonces

$$|D| = a_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix},$$

$$= \cdots = a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n.$$

4.5.1. Fórmula del determinante para matrices de tamaño 2 y 3

Utilicemos las propiedades **P1** a **P7** para escribir una fórmula general para el determinante de matrices de tamaño 2 y 3 que nos permita entender la fórmula que escribiremos en la sección siguiente para el determinante de matrices de tamaño n.

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Entonces, utilizaremos las propiedades del determinante para descomponer el determinante de A en determinantes de matrices más sencillas hasta que lleguemos a una cuyo determinante sepamos calcular (una matriz diagonal, por ejemplo),

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Los determinantes primero y último anteriores son cero pues la segunda columna de la matriz es $\lambda = \frac{b}{a}$ y $\lambda = \frac{d}{c}$ veces la primera. Por tanto,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0 + ad - \begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix} + 0 = ab - bc.$$

Nota que

$$\det(A^{\mathrm{T}}) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - cb = \det(A).$$

Supongamos ahora que

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Entonces, si procedemos del mismo modo que con la matriz de tamaño 2×2 y descomponenmos el determinante de A en suma de determinantes más sencillos de calcular

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ d & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 0 & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}.$$

Tomemos solo el primero de los determinantes anteriores, para los restantes dos se procede de manera similar. Del mismo que antes descompongamos el determinante de la matriz en suma de determinantes de matrices más sencillas

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & c \\ 0 & 0 & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix}, \\ &= \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{=0} + \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{=0} + \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix}}_{=0} + \begin{vmatrix} a & 0 & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & c \\ 0 & 0 & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Repitiendo este proceso obtenemos

$$\begin{vmatrix} a & 0 & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} = aei$$

y

$$\begin{vmatrix} a & 0 & c \\ 0 & 0 & f \\ 0 & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f \\ 0 & h & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & i \end{vmatrix} = -ahf.$$

Trabajando del mismo modo obtenemos

$$\det(A) = aei + dhc + gbf - gec - dbi - ahf.$$

El determinante de A también puede escribirse como

$$\det(A) = a(ei - hf) - d(bi - hc) + g(bf - ec) = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

Nota que hemos escrito el determinante de la matriz de tamaño 3×3 en términos de determinantes de matrices de tamaño 2×2.

Además el determinante de A también puede escribirse como

$$\det(A) = a(ei - hf) - b(di - gf) + c(dh - ge) = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$$

Estas últimas fórmulas son las que en la próxima sección se generalizarán a matrices de tamaño n. Antes de escribir la fórmula general del determinante para matrices de tamaño n, veamos un último ejemplo relacionado con el determinante de matrices de tamaño 3×3.

Ejemplo 4.1. *Supongamos que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Antes vimos que si $\mathrm{r}(A) < n$ (las columnas de A son un conjunto ld de vectores de $\mathbb{R}^n$), el determinante de A es cero. Más adelante veremos que si $\mathrm{r}(A) = n$, el determinante de A es distinto de cero, es decir, y ésta es la mayor utilidad del determinante de una matriz:*

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \mathrm{r}(A) = n.$$

Podemos tener una idea intuitiva de esta propiedad considerando $n = 3$: si el determinante de la matriz es, en el caso de matrices de tamaño 3×3, el volumen del paralelepípedo que se puede construir con las columnas de A, solo si estas columnas son un conjunto li ocurrirá que este volumnen es distinto de cero, es decir, solo si el rango de la matriz es 3, ocurrirá que ellas forman realmente un paralelepípedo. Si las columnas de la matriz son un conjunto ld (el rango de la matriz es menor que 3), ellas formarán un paralelogramo o un segmento o un punto, pero no un paralelepípedo.

Ilustremos este comentario con un par de ejemplos.

Tomemos, por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ésta es una matriz invertible, observa que sus columnas forman un paralelepípedo en $\mathbb{R}^3$ (ver figura 4.5), el volumen de éste es el valor absoluto del determinante de A.

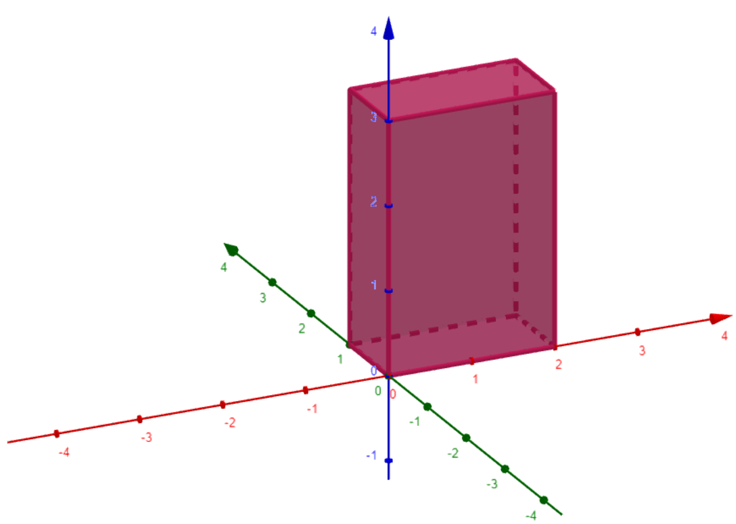

Figura 4.5: Volumen formado por columnas de matriz de orden 3 cuyo rango es 3, el valor absoluto del determinante de la matriz es el volumen de este paralelepípedo

El determinante de matrices cuyas columnas no sean un conjunto li de vectores de $\mathbb{R}^3$ cero. To-

memos, por ejemplo,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La tercera columna es combinación lineal de las dos primeras. Si calculamos su determinante, aplicando la propiedad P4, obtenemos que

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2\cdot 1+1 \\ 1 & -1 & 2\cdot 1-1 \\ 0 & 1 & 2\cdot 0+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2\cdot 1 \\ 1 & -1 & 2\cdot 1 \\ 0 & 1 & 2\cdot 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ahora aplicamos la propiedad P3 y resulta que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2\cdot 1+1 \\ 1 & -1 & 2\cdot 1-1 \\ 0 & 1 & 2\cdot 0+1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ambos son determinantes de matrices que tienen dos columnas iguales, por tanto, ambos son cero, así $\det(B) = 0$.

En la figura 4.6 mostramos el "paralelepípedo" que forman las columnas de B, como ellas no son un conjunto li, la figura formada es en realidad un paralelogramo, su volumen es 0.

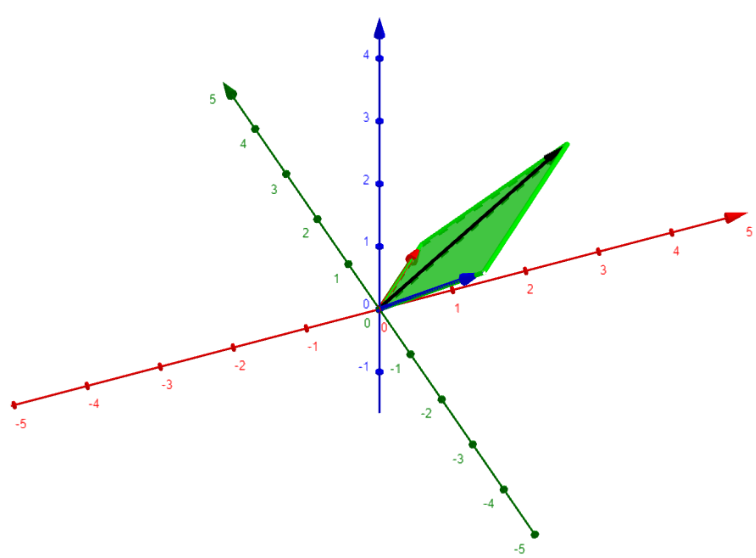

Figura 4.6: "Volumen" formado por columnas de matriz de orden 3 cuyo rango es 2 (las columnas de la matriz son los vectores negro, azul y rojo). La figura resultante es una cuya área es distinta de cero, pero cuyo volumen es cero

Tomemos ahora

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ésta es naturalmente una matriz cuyo rango es 1. Si calculamos su determinante, aplicando la propiedad P3, obtenemos que

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 \\ 1 & -1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 \\ 0 & -1 \cdot 0 & 2 \cdot 0 \end{vmatrix} = 2 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 \cdot 1 & 1 \\ 1 & -1 \cdot 1 & 1 \\ 0 & -1 \cdot 0 & 0 \end{vmatrix}}_{=0} = 0,$$

porque esta última matriz tiene dos columnas iguales, así $\det(C) = 0$.

En la figura 4.7 mostramos el "paralelepípedo" que forman las columnas de C*, como ellas no son un conjunto li, la figura formada es en realidad un segmento, tanto su área como su volumen son iguales a 0.*

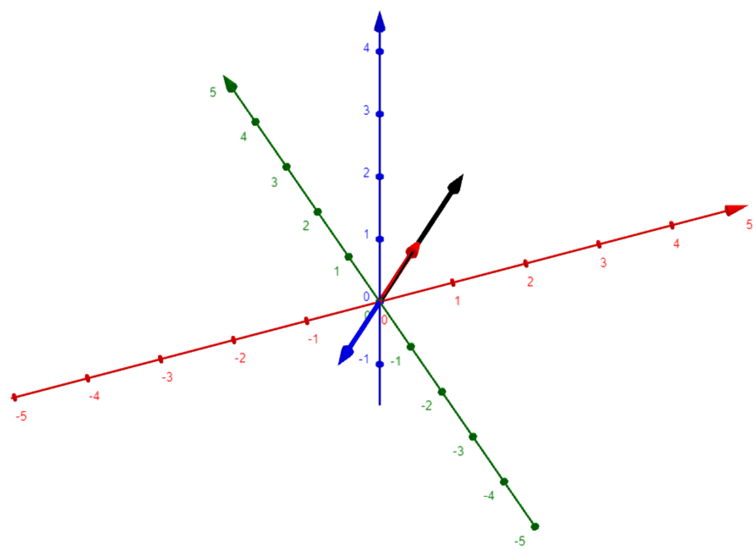

Figura 4.7: "Volumen" formado por columnas de matriz de orden 3 cuyo rango es 1 (las columnas de la matriz son los vectores negro, azul y rojo). La figura resultante es una cuya longitud es distinta de cero, pero cuyos área y volumen son iguales a cero

Por último, si intentamos construir el paralelepípedo que forman las columnas de Θ*, éste es solo un punto, su volumen, su área y su longitud son iguales a cero.*

¿Notas que el determinante solo nos indica que el paralelepípedo formado por las columnas de una matriz no es en verdad un paralelepípedo, pero no nos dice si las columnas forman un paralelogramo, un segmento o un punto? Esta información adicional la obtenemos del rango de la matriz.

4.6. Determinante de una matriz

Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Una *submatriz de A* es una matriz que se obtiene de eliminar filas y/o columnas de A. La *submatriz (i,j) de A* (se representa por A_{ij} es la matriz de $n-1$ filas y $n-1$ columnas que se obtiene al eliminar de A la fila i y la columna j, por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

entonces A_{12} es la matriz que se obtiene de eliminar la fila 1 y la columna 2 de A, mientras que B_{22} es la matriz que se obtiene de eliminar la fila 2 y la columna 2 de B, así

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}, \quad B_{22} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Definición 4.2. Consideremos $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$, el *determinante de A*,

$$\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K},$$

es tal que

$$\det(A) = \begin{cases} a_{11}, & n = 1, \\ \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}), & n > 1, \end{cases},$$

donde A_{ij} representa la submatriz (i,j) de A, es decir, representa a la matriz de $n-1$ y $n-1$ columnas que se forma al eliminar de A la fila i y la columna j, i es un valor cualquiera entre 1 y n. No importa cuál sea la fila i de A que escojamos para calcular su determinante, obtendremos siempre el mismo valor.

El determinante de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ también se escribe mediante $|A|$.

Entendamos mejor la definición del determinante de una matriz.

Ejemplo 4.3. *Calculemos el determinante de*

1. $A = (2)$, *ésta es una matriz de 1 fila y 1 columna, por tanto,* $\det(A) = 2$.
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

   Si escogemos la primera fila para desarrollarlo, se tiene

   $$\det(A) = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det((3)) + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \det((0)) = 3.$$

   Nota que el determinante de una matriz de tamaño 2×2 es la suma de determinantes de matrices de tamaño 1×1.
3. *En la sección anterior derivamos una fórmula general para el determinante de matrices de tamaño 2×2, si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, entonces* $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

4. *En la sección anterior también derivamos una fórmula general para el determinante de matrices de orden 3, que, aunque no lo hayas notado, es la misma que escribimos en la definición anterior. Calculemos, por ejemplo,* $\det(A)$ *si*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lo ideal es escoger una fila de A *que tenga muchos ceros. Escojamos la fila 2. Entonces,*

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{2+1} \cdot A(2,1) \cdot \det(A_{21}) + (-1)^{2+2} \cdot A(2,2) \cdot \det(A_{22}) + (-1)^{2+3} \cdot A(2,3) \cdot \det(A_{23}), \\ &= -2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-2) + 0 = 4. \end{aligned}$$

5. *En general, podemos calcular el determinante de matrices* 3×3*, sin necesidad de memorizar su fórmula, de la siguiente forma: si*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

primero debemos escribir, al lado de A*, las dos primeras columnas de* A *con lo que resulta*

$$\begin{array}{ccccc} \color{blue}{a_{11}} & \color{red}{a_{12}} & \color{green}{a_{13}} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \color{blue}{a_{22}} & \color{red}{a_{23}} & \color{green}{a_{21}} & a_{22}, \\ a_{31} & a_{32} & \color{blue}{a_{33}} & \color{red}{a_{31}} & \color{green}{a_{32}} \end{array}$$

ahora multiplicamos los números del mismo color (en diagonales de izquierda a derecha de tamaño 3) y sumamos esos productos $S_1 = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{23}a_{32}$.
Posteriormente multiplicamos los números que en la siguiente matriz tienen el mismo color (diagonales de derecha a izquierda de tamaño 3) y sumamos los resultados: $S_2 = a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31}$

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \color{green}{a_{13}} & \color{red}{a_{11}} & \color{blue}{a_{12}} \\ a_{21} & \color{green}{a_{22}} & \color{red}{a_{23}} & \color{blue}{a_{21}} & a_{22}, \\ \color{green}{a_{31}} & \color{red}{a_{32}} & \color{blue}{a_{33}} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

el determinante de A *es* $S_1 - S_2$.

Observación 4.4.

1. *El valor del determinante de* A *no depende de la fila que se escoja para desarrollarlo.*
2. *El valor del determinante de* A *también es el mismo si se desarrolla por columnas, es decir, si se escoje una columna de* A*, la columna* k *por ejemplo, y se hace*

$$\det(A) = \begin{cases} a_{11}, & n = 1, \\ \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} \det(A_{jk}), & n > 1, \end{cases},$$

3. *Una consecuencia de la propiedad anterior es que* $\det(A) = \det(A^T)$.

4. *Si todos los elementos en una fila (o columna) de A son ceros, entonces* $\det(A) = 0$.
5. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. *Una consecuencia de esta propiedad es que si A es invertible, entonces existe A^{-1} tal que $AA^{-1} = I$ y, por tanto,*

$$\det(I) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}).$$

Como $\det(I) = 1$, *si A es invertible, se cumple que* $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$. *Podemos concluir que si A es invertible, su determinante es distinto de cero y* $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.
6. *si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces* $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Ejemplo 4.5. *Calculemos el determinante de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Si escogemos la segunda columna para calcular el determinante de A, obtenemos*

$$\det(A) = (-1)^{1+2}1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 10.$$

Observación 4.6. *Antes mencionamos que si una matriz es invertible, entonces su determinante es distinto de cero. Pero también es cierta la afirmación contraria, si el determinante de una matriz es distinto de cero, entonces la matriz es invertible.*

Supongamos por el momento que $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ son tales que $AB = I$. Como $\det(A)\det(B) = 1$ *se cumple que el determinante de ambas es distinto de cero, es decir, ambas son invertibles, además*

$$AB = I \;\Leftrightarrow A^{-1}AB = A^{-1} \;\Leftrightarrow B = A^{-1}.$$

Es decir, si A es tal que $AB = I$, no es necesario comprobar $BA = I$ para concluir que A es invertible y $A^{-1} = B$.

Te dejamos este ejercicio para que recuerdes las propiedades del determinante. Es más sencillo de lo que parece.

Ejemplo 4.7. *Demuestre que para todo número natural n,*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \cdots & 2(n-1) & 2n \end{vmatrix} = 0.$$

4.6.1. Método de Cramer

Otra forma de resolver un sistema de ecuaciones con matriz cuadrada e invertible es el *método de Cramer*.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es invertible, su determinante es distinto de cero y para todo $b \in \mathbb{R}^n$, el sistema $Ax = b$ tiene solución única. El método de Cramer es una fórmula para cada una de las componentes $x_i,\ i = 1, 2, \dots, n$ del vector x

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)},$$

donde A_i representa a la matriz que se obtiene al intercambiar la columna i de A por el vector b.

Esto se cumple pues si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una matriz invertible, $b, x \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ y x es tal que $Ax = b$, entonces si $I_{i,x}$ es la matriz que se obtiene de reemplazar la columna i-ésima de la matriz identidad de orden n por la matriz columna $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, se cumple que

$$\det(AI_{i,x}) = \det(A)\det(I_{i,x}) = \det(A)x_i \quad \Rightarrow \quad x_i = \frac{\det(AI_{i,x})}{\det(A)}$$

y la matriz $AI_{i,x}$ es tal que

$$AI_{i,x} = \begin{pmatrix} Ae_1 & Ae_2 & \cdots & Ae_{i-1} & Ax & Ae_{i+1} & \cdots & Ae_n \end{pmatrix},$$

donde $e_j, j \in \{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$ es la columna j-ésima de I. Como x es tal que $Ax = b$, entonces la matriz $AI_{i,x}$ es igual a la matriz que se obtiene de reemplazar la columna i-ésima de A por b,

$$AI_{i,x} = \begin{pmatrix} \underbrace{Ae_1}_{\text{columna 1 de } A} & \underbrace{Ae_2}_{\text{columna 2 de } A} & \cdots & Ae_{i-1} & \underbrace{Ax}_{b} & Ae_{i+1} & \cdots & \underbrace{Ae_n}_{\text{columna } n \text{ de } A} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.8. *Del siguiente sistema de ecuaciones, encontremos los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para el cual el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible. En los casos en que el sistema sea compatible, encontremos el conjunto solución.*

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & a \\ 2 & a & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

Este sistema es también cuadrado, es decir, tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, calcular el determinante de la matriz del sistema nos permitirá saber para qué valores de a el sistema es compatible determinado (si el determinante es distinto de cero) y para qué valores es incompatible o compatible indeterminado (determinante es cero).

El determinante de la matriz asociada al sistema es $-(a^2 + 5a + 6)$ y él es distinto de cero si y solo si $a \neq -2$ y $a \neq -3$. Por tanto, para todo $a \in \mathbb{R}$ distinto de estos dos valores el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única, ésta es $x = A^{-1}b$ y podemos hallarla por el *método de eliminación de Gauss o por el método de Cramer. Para averiguar cómo es el sistema de ecuaciones si $a = -2$ o $a = -3$ tenemos entonces que averiguar el rango de $(A|b)$ en estos dos casos.*

La solución exacta del sistema en los casos en que $a \neq -2$ y $a \neq -3$, calculada por el método de Cramer, es

$$x_3 = \frac{a-2}{a^2+5a+6}, \quad x_2 = \frac{(a+1)(a-2)}{a^2+5a+6} - 1, \quad x_1 = 3 - \frac{(a+1)(a-2)}{a^2+5a+6} + 2\frac{a-2}{a^2+5a+6}.$$

Si $a = -2$ o $a = -3$, el rango de A es 2, mientras que el de la matriz ampliada es 3, por lo que el sistema es, en ambos casos, incompatible. Te dejamos como tarea comprobar que esto es cierto.

Ejemplo 4.9. *¿Para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ el rango de*

$$B = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

es 0, 1, 2, 3?

Como B es cuadrada, podemos utilizar su determinante para determinar los valores de k para los que el rango de B es 3. El determinante de B es $k^3-3k+2 = (k-1)^2(k+2) \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 1 \wedge k \neq -2$. Por tanto, si $k \neq 1$ y $k \neq -2$ el rango de B es 3.

Sólo nos resta averiguar qué ocurre si $k = 1$ o $k = -2$. Esto puede hacerse analizando cada una de las matrices que se obtienen al sustituir k por 1 o -2 en B y te lo dejamos propuesto.

Por último, ten en cuenta que también podemos utilizar el método de Cramer para calcular la inversa de una matriz. Recuerda que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una matriz invertible, su determinante es distinto de cero y la columna i-ésima de A^{-1} es la solución de $Ax = e_i$, siendo e_i el i-ésimo vector canónico. Si llamamos y a la columna i-ésima de A^{-1}, entonces para cada j entre 1 y n se tiene que la componente j-ésima de y es

$$y_j = \frac{\begin{vmatrix} Ae_1 & Ae_2 & \cdots & Ae_{j-1} & e_i & Ae_{j+1} & \cdots & Ae_n \end{vmatrix}}{\det(A)},$$

donde Ae_1 es la primera columna de A, Ae_2, la segunda y así sucesivamente. Enseguida utilizaremos el método de Cramer para calcular la inversa de una matriz.

Ejemplo 4.10. *Determinemos las inversas, si existen, de las siguientes matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Las matrices A y B son tales que

$$\det(A) = -1+0+0-(1+0+0) = -2, \quad \det(B) = -1+1+0-(-1+0+1) = 0.$$

Por tanto, A es invertible y B no lo es.

Utilicemos el método de Cramer para determinar A^{-1}. La primera columna de A^{-1} es la solución del sistema de ecuaciones $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Por tanto, si llamamos x a la primera columna de A^{-1} se cumple que

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-2}, \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-2}.$$

Observa que, para determinar cada componente de x hemos reemplazado la columna correspondiente de A por el primer vector canónico de $\mathbb{R}^3$. Con esto tenemos que

$$x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

La segunda columna de A^{-1} es la solución del sistema de ecuaciones $Ay = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Por tanto, si llamamos y a la segunda columna de A^{-1} se cumple que

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2}, \qquad y_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-2}, \qquad y_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-2}.$$

Observa que, para determinar cada componente de y hemos reemplazado la columna correspondiente de A por el segundo vector canónico de $\mathbb{R}^3$. Con esto tenemos que

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La última columna de A^{-1} es la solución del sistema de ecuaciones $Az = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Por tanto, si llamamos z a la tercera columna de A^{-1} se cumple que

$$z_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2}, \qquad z_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2}, \qquad z_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2}.$$

Observa que, para determinar cada componente de z hemos reemplazado la columna correspondiente de A por el tercer vector canónico de $\mathbb{R}^3$. Con esto tenemos que

$$z = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Con esto tenemos que

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$