Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemática
Departamento de Matemática

Cálculo II

Ingeniería Civil

Prof. Víctor Aros Quinán

Segundo Semestre 2021

Clase N$^{\text{o}}$23: Cálculo II
Sucesiones de Números Reales

Sucesiones de Números Reales

Definición

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Llamamos **subsucesión** de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a cualquier otra sucesión de la forma $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ donde $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números naturales estrictamente creciente.

Ejemplos:

1. Determine una subsucesión de $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

2. Determine dos subsucesiones de $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$.

Sucesiones de Números Reales

Teorema

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces toda subsucesión de ella es también convergente y converge al mismo valor.

Ejemplo: Consideremos la sucesión $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 3}$ y determine dos subsucesiones y verifique el teorema precedente.

Sucesiones de Números Reales

Corolario

Sean $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ y $(x_{n_s})_{s\in\mathbb{N}}$ dos subsucesiones de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Si una subsucesión diverge, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
2. Si $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ y $(x_{n_s})_{s\in\mathbb{N}}$ convergen tal que
$$\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} \neq \lim_{s\to+\infty} x_{n_s}$$
entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Ejemplo:

Sucesiones de Números Reales

A continuación, presentaremos las propiedades de sucesiones convergentes.

Teorema

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones convergentes, entonces también lo son $(x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(kx_n)_{n\in\mathbb{N}}$, siendo $k\in\mathbb{R}$, $(x_n\cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
Además,

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n+\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(kx_n)=k\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$.
4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)=\dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to+\infty}y_n}$, siempre que $y_n\neq 0$.

Ejercicios

Determine el valor de los siguientes límites de sucesiones:

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+5n-1}{n^2+9}$

2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{8n^3+1}{n^5+4n^4-n}$

3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n}{3n-1}}$

4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$

Ejercicios

Solución 1): Notemos lo siguiente:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+5n-1}{n^2+9} \overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(1+\dfrac{5}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\dfrac{9}{n^2}\right)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\dfrac{5}{n}-\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{9}{n^2}}$$

$$= 1$$

Ejercicios

Solución 3): Notemos lo siguiente:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n}{3n-1}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \sqrt{\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{3n-1}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Solución 4): Observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right) &\overset{(\infty-\infty)}{=} \lim_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+n}-n\cdot\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+n}+n} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} \\
&\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)+1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Teorema

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = L$, con $L \in \mathbb{R}^+$, entonces $\left(\sqrt{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{L}$.

Idea de Demostración: Para $\varepsilon > 0$ dado, debemos encontrar un $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow \left|\sqrt{x_n} - \sqrt{L}\right| < \varepsilon$$

Considerando lo anterior, podemos notar que:

$$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{L}\right| = \left|\sqrt{x_n} - \sqrt{L}\right| \left|\frac{\sqrt{x_n} + \sqrt{L}}{\sqrt{x_n} + \sqrt{L}}\right| = \frac{|x_n - L|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{L}} \leq \frac{|x_n - L|}{\sqrt{L}}$$

Sucesiones de Números Reales

Teorema del Acotamiento

Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones tales que:

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq y_n \leq z_n$$

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n = L$, entonces $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L.

Ejemplos: Determinar el valor del límite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ usando el teorema precedente.

Sucesiones de Números Reales

En el estudio de las sucesiones de números reales existen algunas que se denominan sucesiones notables. A continuación, presentaremos algunas de ellas:

1. Si $0 < a < 1$, entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} na^n = 0$.

2. Si $a > 0$, entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

Sucesiones de Números Reales

Demostración 3): Consideremos lo siguiente:

$$\forall x > 0 : \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$$

Sea $t \in \left[1, 1 + \frac{1}{n}\right]$ con $n \in \mathbb{N}$, luego:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \leq \frac{1}{t} \leq 1$$

podemos aplicar la propiedad de comparación y obtenemos:

$$\int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}\, dt \leq \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{t}\, dt \leq \int_1^{1+\frac{1}{n}} 1\, dt$$

Resolviendo las integrales, se tiene lo siguiente:

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

Sucesiones de Números Reales

Luego, considerando que la función exponencial es una función estrictamente creciente en todo $\mathbb{R}$, tenemos que;

$$e^{\frac{1}{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n} \leq e^{\frac{1}{n}}$$

Ahora bien, podemos considerar ambos extremos de la desigualdad y obtener cotas para e, como sigue:

$$e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \wedge \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \leq e$$

En consecuencia , se obtiene:

$$\frac{e}{1 + \frac{1}{n}} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \leq e$$

Finalmente, podemos notar que:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e}{1+\frac{1}{n}} = e = \lim_{n\to+\infty} e$$

luego, por el Teorema del Acotamiento podemos concluir que:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Observación:

Sucesión de Números Reales

Definición

Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se dice acotada si existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que:

$$\forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq M$$

Ejemplos:

1. La sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada pues $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < \frac{1}{n} \leq 1$.
2. La sucesión $(3n-1)_{n\in\mathbb{N}}$ no es acotada pues, para todo $M \geq 1$, se tiene:

$$x_{[M]} = 3[M] - 1 \geq M$$

notar que $[M]$ hace referencia a la oarte entera de $[M]$.

Sucesiones de Números Reales

Teorema

Toda sucesión convergente es acotada.

Demostración: Notemos que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to+\infty} x_n = L$. Luego, para $\varepsilon > 0$ dado, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon$$

de aquí, se tiene:

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |x_n| < \varepsilon + |L|$$

esto es, el conjunto $\{x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, ...\}$ es acotado por el número real $\varepsilon + |L|$. Además, el conjunto $x_1, x_2, ..., x_{N-1}$ es finito y por consiguiente acotado por $M = \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_{N-1}|\}$. En consecuencia, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $|x_n| \leq \max\{M, \varepsilon + |L|\}$, es decir, $(x_{n\in\mathbb{N}})_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.

Sucesiones de Números Reales

Observación: El recíproco del teorema anterior no es cierto. De hecho, $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, pero no convergente. Pero el contrarrecíproco si se cumple, es decir, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es acotada, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es divergente.

Definición

Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales, se dice:

1. **creciente** si para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $x_n \leq x_{n+1}$.
2. **decreciente** si para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que $x_n \geq x_{n+1}$.

Ejemplos:

1. La sucesión $(n+1)_{n\in\mathbb{N}}$ es ....
2. La sucesión $\left(\dfrac{1}{n+5}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es ....
3. La sucesión $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ es ....

Sucesiones de Números Reales

Observación: Una sucesión que es creciente o decreciente es llamada también **sucesión monótona**.

Teorema

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona creciente y acotada superiormente, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente.

Demostración: Puesto que el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es no vacío y acotado superiormente, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que:

$$L = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Sea ahora $\varepsilon > 0$ dado. Como $L - \varepsilon$ no es cota superior del conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$L - \varepsilon < x_n \leq L$$

Sucesiones de Números Reales

Luego, se tiene:

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow L - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq L < L + \varepsilon$$

dado lo anterior, podemos deducir que:

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon$$

y de aquí se puede concluir que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = L$, por ende $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Corolario

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona decreciente y acotada inferiormente, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente.

Ejemplos:

1. La sucesión $\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente y acotada superiormente por 3, luego es convergente y como se mostró en un ejemplo anterior, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$
2. La sucesión $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona decreciente y acotada inferiormente por 0, luego ella es convergente y $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n} = 0.$

Ejercicio

Considere la siguiente sucesión

$$a_1 = 0, \;\; a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}, \;\; n \geq 1$$

(a) Determine los 5 primeros términos de la sucesión.

(b) Mostrar que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de términos no negativos.

(c) Mostrar que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente.

(d) Mostrar que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada superiormente por 3.

(e) ¿Es $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente?

(f) Si la respuesta anterior es afirmativa, determine el valor del límite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ejercicio

Solución:

Sucesiones de Números Reales

Como ya hemos sabemos, si una sucesión de números reales $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es acotada, entonces ella es divergente. A continuación, desarrollaremos un poco mas este hecho.

Definición

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Diremos que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $+\infty$ si

$$\forall M > 0, \exists N_M \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_M \Rightarrow x_n > M$$

En este caso escribimos que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

Sucesiones de Números Reales

Definición

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Diremos que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $-\infty$ si

$$\forall M < 0, \exists N_M \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_M \Rightarrow x_n < M$$

En este caso escribimos que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$.

Ejemplos:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} n =$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{n^3+n} =$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 =$

Sucesiones de Números Reales

Observaciones:

1. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $+\infty$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada, entonces
$$(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$$
diverge a $+\infty$.
2. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $+\infty$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converga a L, con $L \in \mathbb{R}$, entonces $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $+\infty$ cuando $L > 0$ y a $-\infty$ cuando $L < 0$.
3. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente y no acotada superiormente, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $+\infty$.
4. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente y no acotada inferiormente, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $-\infty$.
5. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergen a $+\infty$, entonces $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergen a $-\infty$.

Sucesiones de Números Reales

6. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergen a $+\infty$ y $-\infty$ respectivamente, entonces **no podemos** concluir **nada** con respecto a la convergencia o divergencia de la sucesión $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Ejemplos:

   (a) Si consideramos las sucesiones $(3n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(-2n)_{n\in\mathbb{N}}$, entonces tenemos que $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} -2n = -\infty$ y

   $$\lim_{n\to+\infty} 3n - 2n = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

   (b) Si consideramos las sucesiones $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(1-n)_{n\in\mathbb{N}}$, entonces tenemos que $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - n = -\infty$ y

   $$\lim_{n\to+\infty} n + 1 - n = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$$

7. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge a $+\infty$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0, entonces **no podemos** concluir **nada** con respecto a la convergencia o divergencia de la sucesión $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ejemplos:

(a) Si consideramos las sucesiones $(n^3)_{n\in\mathbb{N}}$ y $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, entonces tenemos que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ y

$$\lim_{n\to+\infty} n^3 \cdot \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

(b) Si consideramos las sucesiones $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, entonces tenemos que $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ y

$$\lim_{n\to+\infty} n \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$$

Límite de Funciones Reales

Definición

Sea $I \in \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $x_0 \in I$. Consideremos a f una función definida en I, excepto posiblemente en x_0. Un número real L se dice límite de f cuando x tiende a x_0, si se verifica que:

"cualquiera sea la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de $I - \{x_0\}$ que converge a x_0, se tiene que la sucesión de imagenes $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L."

Límite de Funciones Reales

Ejemplos: Mostrar que $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ no existe.

Solución: Notar que $x_0 = 0$ y $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, luego podemos consideremos dos sucesiones:

$$x_n = \frac{1}{2n\pi} \qquad \text{e} \qquad y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$$

notemos además, que $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ y $\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$. Ahora bien:

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \sin(2n\pi) = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = \lim_{n\to+\infty} \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Dado lo anterior, podemos concluir que el límote solicitado no existe.