Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Cálculo II

Listado 2

Semestre 2021-2

1. Aproximar el valor de la integral $\int_{-1}^{3} |x|\, dx$, calculando $\underline{S}(f, \mathcal{P})$ y $\overline{S}(f, \mathcal{P})$, utilizando la perticipación $\mathcal{P} = \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\right\}$.

2. En cada caso, evaluar la integral definida, considerando la partición indicada

   (a) $\int_0^b x^2 dx,\ \mathcal{P} = \left\{k\frac{b}{n} : k = 0, 1, \cdots, n\right\}$

   (b) $\int_{-1}^{4} f(x)\, dx,\ \mathcal{P} = \left\{-1 + k\frac{5}{n} : k = 0, 1, \cdots, n\right\}$, donde

   $$f(x) = \begin{cases} 2x & si \quad x < 0 \\ x^2 & si \quad 0 \leq x \leq 4 \end{cases}.$$

3. Utilizando la desigualdad

   $$0 \leq c < d \Rightarrow c^2 < \frac{1}{3}\left(c^2 + cd + d^2\right) < d^2$$

   para mostrar que, para $0 \leq a < b$,

   $$\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}\left(b^3 - a^3\right)$$

4. Calcular la suma izquierda, la suma derecha y la suma punto medio para las funciones y particiones siguientes:

   (a) $f(x) = 2x - 3;\ \mathcal{P} = \{-2, -1, 0, 1\}$

   (b) $f(x) = 2x^2 - 1;\ \mathcal{P} = \left\{-1, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$

   (c) $f(x) = \frac{1}{x^2};\ \mathcal{P} = \left\{1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3\right\}$

5. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ y suponga que $f(x) \leq g(x)$, $x \in [a, b]$. Haga ver que

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$$

Ind.:Utilice las sumas de Riemann y el teorema "Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces

$$\lim_{\|\mathcal{P}\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\, \Delta x_k = \int_a^b f(x)\, dx$$

cualquiera sea la elección de $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

6. Suponga que f es creciente y continua en $[a, b]$ y considere la partición $\mathcal{P} = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b\}$ tal que

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}$$

Haga ver que

$$\overline{S}(f, \mathcal{P}) - \underline{S}(f, P) = [f(b) - f(a)]\, \frac{b-a}{n}$$

7. Determine

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$$

para los siguientes pares de integrales:

(a) $\int_0^1 x^6 dx$; $\int_0^1 x dx$

(b) $\int_1^2 x^6 dx$; $\int_1^2 x dx$

(c) $\int_1^2 \frac{1}{x^6} dx$; $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$

(d) $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$; $\int_0^{\pi/2} x dx$

(e) $\int_0^{\pi/4} \sin x dx$; $\int_0^{\pi/4} \cos x dx$

8. Recuerde el Teorema de las cotas que controlan el error en la sumas de Riemann: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función derivable, con derivada continua en $[a, b]$. Si $K \in \mathbb{R}$ es tal que $|f'(x)| \leq K$, $\forall x \in [a, b]$, entonces

$$E_n^R = \left| \int_a^b f(x)\, dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \right| \leq \frac{K}{2n} (b-a)^2,$$

donde t_k es elegido como el extremo inferior o el extremo superior de $[x_{k-1}, x_k]$.
El número $\frac{K}{2n}(b-a)^2$ lo llamaremos cota del error de f.
Determine las cotas del error de

(a) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in [1, 2]$

(b) $f(x) = \sin x, \quad x \in [0, 3]$

(c) $f(x) = \tan x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

9. El ejercicio anterior nos permite calcular, de manera aproximada, $\int_a^b f(x)\,dx$ mediante la suma de Riemann $\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)$, con un error predeterminado. Determine el número $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)$ entregue un valor de $\int_a^b f(x)\,dx$ para las funciones dadas, con el margen de error $\epsilon > 0$ indicado.".

   (a) $\int_1^2 \frac{1}{x}dx; \quad \epsilon = 10^{-3}$

   (b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx; \quad \epsilon = 10^{-2}$

   (c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx; \quad \epsilon = 10^{-4}$