Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemática
Departamento de Matemática

Cálculo II

Ingeniería Civil

Prof. Víctor Aros Quinán

Segundo Semestre 2021

Clase N$^{\underline{o}}$12: Cálculo II
Integrales Impropias

Integrales Impropias

Observación: Notar que si f es continua en todo $\mathbb{R}$, entonces para cualquier $c \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$$

Ahora bien, si los límites:

$$\lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{c} f(x)\,dx \qquad \text{y} \qquad \lim_{b \to +\infty} \int_{c}^{b} f(x)\,dx$$

existen se conlcuye que cada integral impropia converge, en caso contrario la integral impropia diverge. Además, basta que una sola integral diverja para que la integral impropia inicial sea divergente.

Integrales Impropias

Notemos que si la siguiente integral converge:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$$

podriamos preguntarnos si la elección de número real, con el cual separaremos la integral, es arbitraria. Para responder a esta interrogante enunciamos la siguiente proposición:

Proposición

Sean $c, d \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $\int_c^{+\infty} f(x)\ dx$, $\int_d^{+\infty} f(x)\ dx$, $\int_{-\infty}^{c} f(x)\ dx$ y $\int_{-\infty}^{d} f(x)\ dx$ convergen. Entonces:

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\ dx + \int_c^{+\infty} f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{d} f(x)\ dx + \int_d^{+\infty} f(x)\ dx$$

Integrales Impropias

Demostración:

Integrales Impropias

Ejemplo: Analizar la convergencia o divergencia de la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{a|x|}\, dx$$

Solución:

Integrales Impropias

Los resultados que veremos a continuación serán enunciados para integrales del tipo $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, pero también serán válidos para integrales del tipo $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ y $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Álgebra de Integrales Impropias 1era Especie

Sean $\int_a^{+\infty} f(x) \quad dx$ y $\int_a^{+\infty} f(x) \quad dx$ dos integrales impropias convergentes y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces, las siguientes afirmaciones se cumplen:

1. La integral $\int_a^{+\infty} f(x) + g(x)\,dx$ converge y además:
$$\int_a^{+\infty} f(x) + g(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$
2. La integral $\int_a^{+\infty} \lambda f(x)\,dx$ converge y además:
$$\int_a^{+\infty} \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

Integrales Impropias

Observaciones:

1. Aplicando la proposición anterior, si $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge y $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge, entonces $\int_a^{+\infty} f(x)+g(x)\,dx$ diverge.

2. Si $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ y $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ divergen, no podemos afirmar nada de la convergencia o divergencia de la suma.

   Por ejemplo:

Integrales Impropias

Dentro del análisis de la convergencia de integrales impropias de primera especie, se encuentra un tipo de funciones importantes que denominaremos funciones p definidas por $f(x) = \frac{1}{x^p}$ con $x \geq 1$.

Dado esto, ahora determinaremos los valor de $p \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$$

sea convergente.

Integrales Impropias

El resultado anterior se puede extender y dado esto se enuncia el siguiente teorema.

Teorema

Sea $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ una función p dada por $f(x) = \frac{1}{x^p}$, con $a > 0$, entonces

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \begin{cases} \text{diverge} & , p \leq 1 \\ \dfrac{1}{(p-1)(a^{p-1})} & , p > 1 \end{cases}$$

Ejemplos:

1.
2.
3.

Criterios de Convergencia

Existen algunas integrales impropias que no podemos determinar si poseen o no un valor exacto, por ejemplo:

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \qquad \text{o} \qquad \int_{-\infty}^{2} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx$$

es por esto que estudiaremos algunos criterios de comvergencia que no permitirán concluir si las integrales impropias convergen o divergen.

Criterios de Convergencia

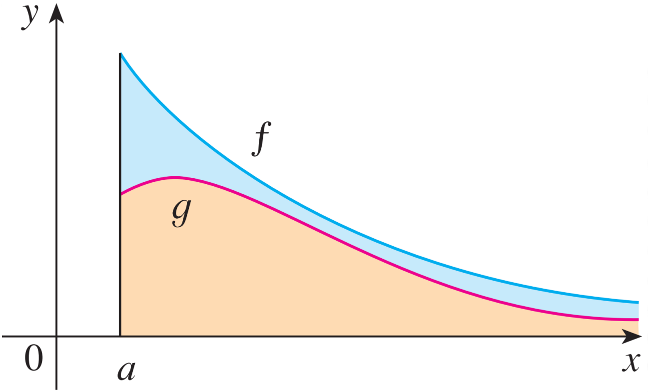
Criterio de Comparación

Sean f, g funciones continuas en $[a, +\infty[$ tales que $0 \leq g(x) \leq f(x)$, para todo $x \in [a, +\infty[$, entonces:

1. Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge, entonces $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ converge
2. Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ diverge, entonces $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ diverge

Criterio de Comparación

De manera particular el criterio se puede visualizar en la siguiente figura:



Ejemplos:

Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

(a) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^8}\, dx$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$

(c) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{x|\cos(x)|}{x^5+6}\, dx$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{1+x^2+x^4}\, dx$