Dinámica - Leyes de movimiento y sus aplicaciones

Física I - 510140

Prof. José Aguirre Gómez

Departamento de Física
Universidad de Concepción

Oficina 315 - Tercer Piso - FCFM

Contenidos

Resultados de Aprendizaje

- Comprender el concepto de fuerza.
- Identificar, entender y utilizar las tres leyes de Newton del movimiento.
- Diferenciar, de manera clara, los conceptos de: Masa, peso y fuerza gravitacional.
- Aplicar las leyes del movimiento de Newton para resolver problemas de dinámica sin fricción y con fricción.
- Identificar, en primera aproximación, los vectores involucrados en el movimiento circular uniforme.
- Aplicar las leyes del movimiento de Newton en el desarrollo de problemas de dinámica de partículas en movimiento circular uniforme.

1.1 Introducción

Anteriormente estudiamos el movimiento de un cuerpo, partícula u objeto en una y en dos dimensiones. Dicho estudio se hizo en términos de los vectores de posición $\vec{r}$, la velocidad $\vec{v}$ y la aceleración $\vec{a}$ de los objetos o partículas, sin hacer mención, a la causa que los originaba.

En el presente capítulo consideraremos dos factores escenciales relacionados entre sí a los diferentes tipos de movimientos: La **fuerza** y la **masa**. Este capítulo inicia el estudio de la parte de la mecánica clásica llamada **dinámica** e iniciaremos él con el estudio de las tres leyes básicas del movimiento, formuladas hace más de tres siglos por Isaac Newton.

1.2 Concepto de fuerza

La clasificación de fuerzas en fuerza de contacto o fuerza de campo es útil para la descripción y desarrollo de modelos macroscópicos.

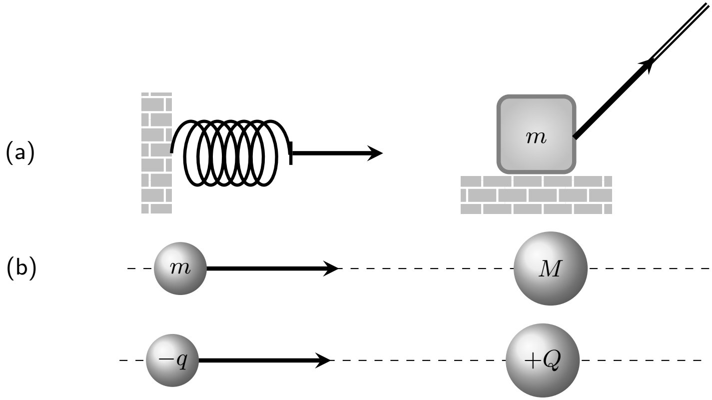


Figura 1. Diagrama de (a) algunas fuerzas de contacto y (b), de algunas fuerzas de campo. En cada caso, la flecha indica que algún agente externo está ejerciendo una fuerza sobre el objeto.

Sin embargo, las fuerzas *fundamentales* conocidas en la naturaleza son todas fuerzas de campo:

- *Fuerzas gravitacionales*, entre dos objetos masivos (con masas);
- *Fuerzas electromagnéticas*, entre cuerpos cargados eléctricamente;
- *Fuerzas débiles*, que surgen en ciertos procesos de decaimiento radiactivo, y
- *Fuerzas fuertes*, entre partículas subatómicas.

Está experimentalmente comprobado que las fuerzas se comportan como cantidades vectoriales: Tienen magnitud y dirección. Cuando varias fuerzas actúan simultáneamente y en el mismo punto sobre un cuerpo u objeto se deben aplicar las reglas del álgebra vectorial para obtener la fuerza neta o resultante sobre dicho cuerpo u objeto.

1.3 Primera ley de Newton y marcos inerciales

El movimiento de un objeto puede ser observado y estudiado desde diferentes marcos de referencia.

La **primera ley de Newton del movimiento**, también llamada *ley de la inercia*, define un conjunto particular de sistemas de referencia llamados *marcos de referencia inerciales*, y puede ser establecida como:

> **Primera Ley de Newton del movimiento**: Si un objeto no interactúa con otros objetos, es posible identificar un marco de referencia en el que el objeto tiene una aceleración cero.
>
> **Marco de referencia inercial**: Marco de referencia que se mueve con velocidad constante.

Cualquier marco de referencia que se mueve con velocidad constante con relación a un marco inercial, es en sí mismo, un marco inercial. Luego, la Tierra y todo marco unido a ella es considerada un marco inercial.

En el siglo XVI se cría que el estado natural de la materia era el estado de reposo.

Galileo: La naturaleza de un cuerpo puesto en movimiento no era la de detenerse después de iniciar su movimiento, sino que la de *resistirse a un cambio en su movimiento*.

> **Primera Ley de Newton del movimiento**: En ausencia de fuerzas externas y, cuando visto desde un marco de referencia inercial, un objeto en reposo se mantiene en reposo y un objeto en movimiento con velocidad constante continua en movimiento con velocidad constante (esto es con rapidez y dirección constantes en una línea recta).

Si ninguna fuerza actúa sobre un objeto, su aceleración es cero.

Un objeto aislado (no interactúa con su entorno) está en reposo o en movimiento con velocidad constante.

La resistencia de un objeto a cambiar su velocidad se llama **inercia**.

Todo objeto que acelera experimenta una fuerza: **Fuerza**; **aquello que causa un cambio en el estado de movimiento de un objeto**.

1.4 Masa

Masa de un cuerpo: Propiedad de un cuerpo que especifica cuánta resistencia muestra un objeto para cambiar su velocidad.

Cuantitativamente, suponga que una fuerza actúa sobre un cuerpo de masa m_1 y le produce una aceleración $\vec{a}_1$ y, la *misma fuerza*, aplicada sobre un cuerpo de masa m_2, le produce a éste una aceleración $\vec{a}_2$.

Se define la relación de las dos masas (m_1/m_2) como la relación *inversa* de las magnitudes de las respectivas aceleraciones producidas por la fuerza:

$$\frac{m_1}{m_2} \equiv \frac{|\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|} = \frac{a_2}{a_1}. \tag{1}$$

la magnitud de la aceleración de un objeto es inversamente proporcional a su masa cuando sobre el actúa una fuerza conocida.

La masa es una propiedad inherente de un objeto y es independiente de los alrededores del objeto y del método que se aplica para medirla. Además, es una **cantidad escalar**, obedeciendo las reglas de la aritmética ordinaria.

Masa y **peso** son dos cantidades diferentes. El peso de un objeto es la **magnitud de la fuerza gravitacional** ejercida sobre él y varía con la posición.

1.5 Segunda ley de Newton

La segunda ley de Newton responde a la pregunta: ¿Qué acontece a un objeto cuando sobre el actúa una o más fuerzas?

Si una fuerza horizontal $\vec{F}$ actúa sobre un bloque, éste adquiere cierta aceleración $\vec{a}$. Si se aplica el doble de la fuerza, la aceleración del bloque se duplica. Si la fuerza se triplica, la aceleración del bloque también se triplica, $3\vec{a}$.

Se tiene

$$\vec{a} \propto \vec{F} \quad \text{y} \quad |\vec{a}| \propto \frac{1}{m}$$

En presencia de un marco de referencia innercial, la aceleración de un objeto es directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él e inversamente proporcional a su masa:

$$\vec{a} \propto \frac{1}{m} \sum \vec{F}$$

Escogiendo una constante de proporcionalidad igual a 1, el enunciado matemático de la segunda ley de Newton del movimiento es

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}, \tag{2}$$

donde $\sum \vec{F}$ es la **fuerza neta** : *fuerza total, fuerza resultante o fuerza desequilibrada* que actúa sobre el objeto, es decir, la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre el objeto.

En términos de las componentes escalarares, la Ec.(2) implica

$$\sum F_x = ma_x, \quad \sum F_y = ma_y \quad \text{y} \quad \sum F_z = ma_z \tag{3}$$

En el SI la unidad de fuerza es el **newton** (N). Una fuerza de $1\,\mathrm{N}$ es la fuerza que, cuando aplicada a un objeto de $1\,\mathrm{kg}$ de masa, le produce una aceleración de $1\,\mathrm{m/s^2}$, o el cambio en su velocidad en $1\,\mathrm{m/s}$ en cada segundo:

$$1\,\mathrm{N} \equiv 1\,\mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}. \tag{4}$$

Ejemplo: Un disco de hockey que tiene una masa de $0.30\,\mathrm{kg}$ se desliza sobre la superficie horizontal sin fricción de una pista de patinaje. Dos bastones de hockey golpean el disco simultáneamente, y ejercen las fuerza sobre el disco que se muestran en la Fig.2. La fuerza $\vec{F}_1$ tiene una magnitud de $5.0\,\mathrm{N}$ y la fuerza $\vec{F}_2$ tiene una magnitud de $8.0\,\mathrm{N}$. Determine tanto la magnitud cuanto la dirección de la aceleración del disco.

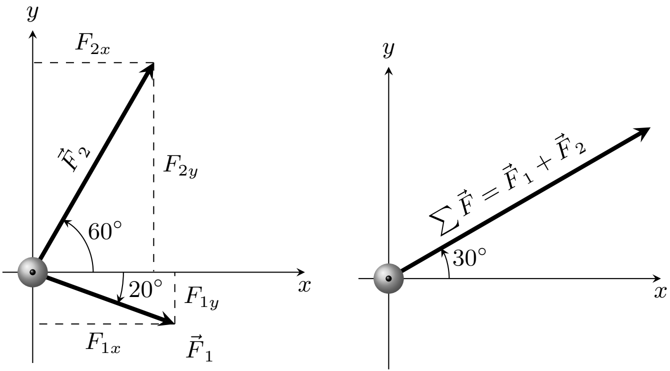


Figura 2. Disco de hockey en una superficie sin fricción sobre el cual actúan, simultáneamente, las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$.

Solución: Las coordenadas rectangulares escalares de las fuerzas que actúa sobre el disco son:

$$F_{1x} = F_1 \cos(-20^\circ) = (5.0\,\mathrm{N})(0.94) = 4.7\,\mathrm{N}$$
$$F_{1y} = F_1 \sin(-20^\circ) = -(5.0\,\mathrm{N})(0.34) = -1.7\,\mathrm{N}$$

para la fuerza $\vec{F}_1$ y

$$F_{2x} = F_2 \cos(60^\circ) = (8.0\,\mathrm{N})(0.50) = 4.0\,\mathrm{N}$$
$$F_{2y} = F_2 \sin(60^\circ) = (8.0\,\mathrm{N})(0.34) = 6.9\,\mathrm{N}$$

para la fuerza $\vec{F}_2$. Usando las Ecs.(3), las componentes rectangulares escalares de la aceleración del disco son

$$a_x = \frac{1}{m}\sum F_x = \frac{1}{0.30\,\mathrm{kg}}[(4.7 + 4.0)\,\mathrm{N}] = 29\,\mathrm{m/s^2}$$
$$a_y = \frac{1}{m}\sum F_y = \frac{1}{0.30\,\mathrm{kg}}[(-1.7 + 6.9)\,\mathrm{N}] = 17\,\mathrm{m/s^2}$$

La magnitud de la aceleración del discos es:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(29^2 + 17^2)\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^4}} = 34\,\mathrm{m/s^2}.$$

La dirección de la aceleración del disco es:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_y}{a_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{17}{29}\right) = 30^\circ.$$

1.6 Fuerza gravitacional y peso

La fuerza de atracción que la Tierra ejerce sobre un objeto se llama **fuerza gravitacional** $\vec{F}_g$, está dirigida hacia el centro de la Tierra y su magnitud se llama **peso** del objeto.

Objetos en caída libre experimentan una aceleración $\vec{g}$ hacia el centro de la Tierra.

$$\sum \vec{F} = \vec{F}_g, \quad \vec{a} = \vec{g}; \quad \rightarrow \quad \vec{F}_g = m\vec{g},$$

luego, el peso de un objeto es,

$$|\vec{F}_g| \equiv F_g = mg. \tag{5}$$

El peso de los objetos es menor a mayores altitudes que al nivel de mar.

En la Ec.(5) la masa m cuantifica la intensidad de la atracción gravitacional entre el objeto y la Tierra y recibe el nombre de **masa gravitacional**.

Aún cuando esa cantidad sea diferente en comportamiento de la masa inercial, una de las conclusiones experimentales de la dinámica Newtoniana es que la masa gravitacional y la masa inercial tienen el mismo valor.

1.7 Tercera ley de Newton del movimiento

Las fuerzas son *interacciones* entre dos objetos: Este principio se conoce como la tercera ley de Newton del movimiento:

Tercera ley de Newton del movimiento. Si dos objetos interactúan entre sí, la fuerza $\vec{F}_{12}$ que el objeto 2 ejerce sobre el objeto 1 es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza $\vec{F}_{21}$ que el objeto 1 ejerce sobre el objeto 2:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \tag{6}$$

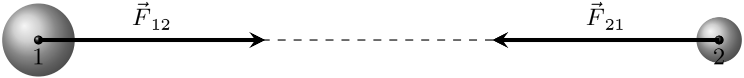


Figura 3. Tercera ley de Newton. La fuerza $\vec{F}_{12}$ que el objeto 2 ejerce sobre el objeto 1 es igual en magnitud y contraria en dirección a la fuerza $\vec{F}_{21}$ que el objeto 1 ejerce sobre el objeto 2.

La fuerza que el primer objeto ejerce sobre el segundo es llamada, popularmente, *fuerza de acción* y la fuerza que el segundo objeto ejerce sobre el primero, *fuerza de reacción*: Son términos usados por conveniencia.

En todos los casos, las fuerzas de acción y reacción actúan sobre objetos <u>diferentes</u> y deben ser del mismo tipo (gravitacional, eléctrica, magnética, etc.).

Por ejemplo, la fuerza que actúa sobre un proyectil en caida libre es la fuerza gravitacional que la Tierra ejerce sobre el proyectil $\vec{F}_{\mathrm{pT}}$ (T = Tierra, p = proyectil) y la magnitud de esa fuerza es mg.

La reacción a esa fuerza es la fuerza que el proyectil ejerce sobre la Tierra $\vec{F}_{\mathrm{Tp}}$. Sin embargo, debido a la enorme diferencia entre las masas de los objetos, la aceleración de la Tierra debida a la fuerza de atracción del proyectil es prácticamente nula.

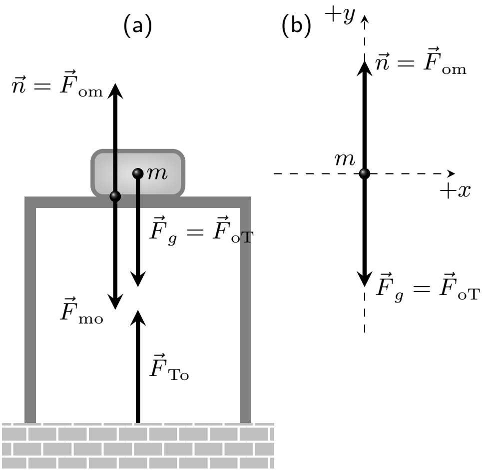


Figura 4. (a) Objeto en reposo sobre una mesa. Las fuerzas que actúan sobre él son: La fuerza normal $\vec{n}$ y la fuerza gravitacional $\vec{F}_g$. La reacción a $\vec{n}$ es $\vec{F}_{\text{mo}}$ que ejerce el objeto sobre la mesa. La reacción a $\vec{F}_g$ es $\vec{F}_{\text{To}}$ que el objeto ejerce sobre la Tierra. b) Diagrama de cuerpo libre para el objeto.

Suponga que un objeto se encuentra en reposo sobre una mesa, como mostrado en la Fig.4(a). La fuerza de acción de la Tierra sobre el objeto es $\vec{F}_{\rm oT}$ (T $=$ Tierra; o $=$ objeto).

La fuerza de reacción del objeto sobre la Tierra es $\vec{F}_{\rm To}$.

La mesa ejerce una fuerza hacia arriba $\vec{n} = \vec{F}_{\rm om}$ sobre el objeto llamada **fuerza normal** (perpendicular a la superficie de contacto entre los dos objetos). Esta fuerza puede tener cualquier valor necesario, hasta el punto de romper la mesa. Como la aceleración del objeto es cero, de la segunda ley de Newton se tiene

$$\sum \vec{F} = \vec{n} + \vec{F}_g = \vec{n} + m\vec{g} = 0, \quad n\hat{\jmath} - mg\hat{\jmath} = 0, \quad n = mg.$$

La fuerza normal equilibra a la fuerza gravitacional sobre el objeto, con el resultado de que la fuerza neta sobre el objeto es cero.

La fuerza de reacción a $\vec{n}$ es la fuerza que el objeto ejerce hacia abajo sobre la mesa, $\vec{F}_{\rm mo} = -\vec{F}_{\rm om} = -\vec{n}$. Note que las fuerzas que actúan sobre el objeto son $\vec{F}_g$ y $\vec{n}$ [ver Fig.4(b)].

1.8 Algunas aplicaciones de las leyes de Newton

Aplicaremos las leyes de Newton para resolver problemas con objetos en equilibrio ($\vec{a} = \vec{0}$) o con aceleración ($\vec{a} \neq \vec{0}$) a lo largo de una línea recta bajo la acción de fuerzas externas constantes. No consideraremos el movimiento rotacional ni la fricción de las superficies.

Ignoraremos la masa de cualquier cuerda, soga o cable involucrado.

La magnitud de la fuerza que ejerce cualquier elemento de una cuerda sobre el elemento adyacente es la misma para todos los elementos a lo largo de la cuerda.

Se usarán los términos sinónimos *ligero* o de *masa despreciable* para indicar que una masa se ignora cuando trabaje los problemas.

Cuando una cuerda unida a un objeto jála de él, la cuerda ejerce una fuerza $\vec{T}$ sobre el objeto en una dirección que se aleja del objeto, y paralela a la cuerda.

La magnitud $|\vec{T}| \equiv T$ de dicha fuerza se llama **tensión** en la cuerda. La tensión, como magnitud de una cantidad vectorial es una cantidad escalar.

A. Partículas en equilibrio

Consideraremos el modelo de **partícula en equilibrio**:

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \therefore \quad \vec{a} = \vec{0}. \tag{7}$$

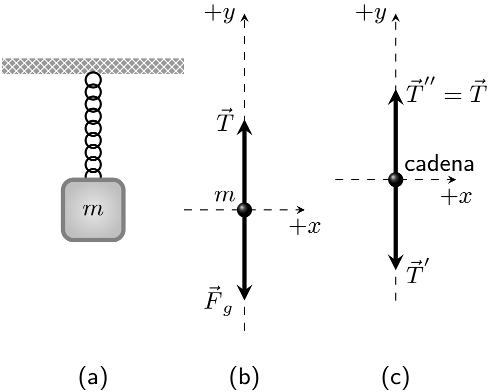


Figura 5. (a) Un objeto colgado del techo mediante una cadena ligera. (b) Diagrama de cuerpo libre del objeto. (c) Diagrama de cuerpo libre de la cadena.

El diagrama de cuerpo libre [ver Fig.5(b)] muestra que las fuerzas que actúan sobre el objeto son la fuerza gravitacional hacia abajo $\vec{F}_g$ y la fuerza hacia arriba $\vec{T}$ que ejerce la cadena.

Dado que la fuerza en la dirección x no existe, $\sum F_x = 0$ no nos entrega información útil. Así tenemos:

$$\begin{aligned} &\sum F_x = 0 \\ &\sum F_y = T - F_g = 0 \quad \text{o} \quad \boxed{T = F_g} \end{aligned} \tag{8}$$

Note que $\vec{F}_g$ y $\vec{T}$ no son un par acción-reacción, debido a que actúan sobre el mismo objeto. La fuerza de reacción a $\vec{T}$ es $\vec{T}'$, la fuerza hacia abajo que ejerce la lámpara sobre la cadena [ver Fig.5(c)].

Dado que la cadena es una partícula en equilibrio, el techo debe ejercer sobre la cadena una fuerza $\vec{T}''$ que es igual en magnitud a la magnitud de $\vec{T}'$ y apunta en la dirección opuesta.

B. Partículas bajo una fuerza neta

Cuando un objeto experimenta una aceleración, su movimiento puede ser analizado con el modelo de **partícula bajo una fuerza neta**, através de la Ec.(2).

Considere, como ejemplo, una caja que se jala hacia la derecha sobre una superficie sin fricción [ver Fig.6(a)]. Suponga que quiere encontrar la aceleración del objeto y la fuerza que el suelo ejerce sobre él.

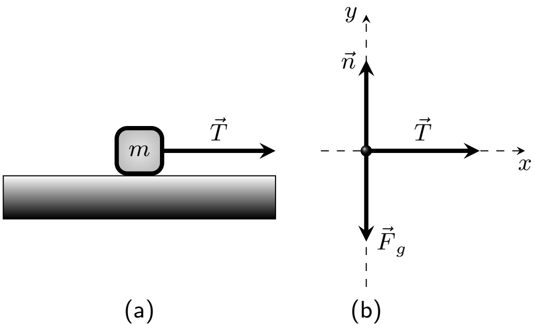


Figura 6. (a) Un objeto jalado sobre una superfice sin fricción. (b) Diagrama de cuerpo libre del objeto.

La fuerza horizontal $\vec{T}$ sobre el objeto actúa a través del cable. La magnitud de $\vec{T}$ es igual a la tensión de la cuerda.

El diagrama de cuerpo libre para este objeto se ilustra en la Fig.6(b). Las fuerzas que actúan sobre la caja son la fuerza gravitacional $\vec{F}_g$, la fuerza normal ejercida por el piso $\vec{n}$ y la fuerza $\vec{T}$ ejercida a través de la cuerda.

Podemos aplicar, ahora, la segunda ecuación en términos de las componentes escalares ortogonales. Se tiene, en el eje-x

$$\sum F_x = T = ma_x \quad \therefore \quad a_x = \frac{T}{m}$$

En el eje y no hay aceleración, así

$$\sum F_y = n + (-F_g) = 0 \quad \therefore \quad n = F_g$$

O sea, la fuerza normal tiene la misma magnitud que la fuerza gravitacional pero actúa en dirección opuesta.

Si $\vec{T}$ es una fuerza constante, entonces $a_x = T/m$ también lo es.

En el caso anterior la magnitud de la fuerza normal $\vec{n}$ es igual a la magnitud de $\vec{F}_g$, pero esto no es siempre el caso.

Suponga que un objeto está sobre una mesa y Ud. empuja el objeto hacia abajo con una fuerza $\vec{F}$.

Como el objeto está en reposo,

$$\sum F_y = 0 \quad \therefore \quad n - F_g - F = 0 \quad \rightarrow \quad n = F_g + F,$$

en cuyo caso la magnitud de la fuerza normal es mayor que el peso del objeto ($n \neq F_g$).

Ejemplo: Un semáforo que pesa 122 N cuelga de un cable unido a otros dos cables sostenidos a un soporte como en la Fig.7. Esos cables superiores no son tan fuertes como el vertical y se romperán si la tensión en ellos supera los 100 N. ¿Permanecerá el semáforo colgado en esta situación?

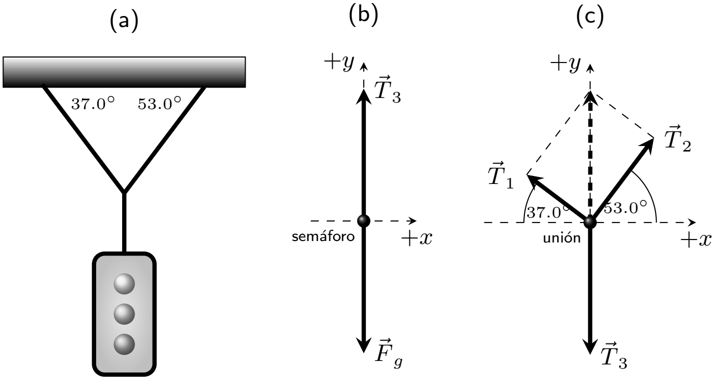


Figura 7. (a) Un semáforo suspendido por cables. (b) Diagrama de cuerpo libre del semáforo. (c) Diagrama de cuerpo libre del punto de unión de los cables.

Solución:

El semáforo. Dado que el semáforo está en equilibrio, se tiene

$$\sum F_x = 0$$
$$\sum F_y = T_3 - F_g = 0, \quad \therefore \quad T_3 = F_g = 122\,\mathrm{N}$$

o sea, la tensión en la cuerda 3 es igual al peso del semáforo.

Punto de unión de los cables. También en equilibrio, se tiene

$$\sum F_x = -T_1 \cos(37.0^\circ) + T_2 \cos(53.0^\circ) = 0 \quad \therefore \quad T_2 = T_1 \left(\frac{\cos(37.0^\circ)}{\cos(53.0^\circ)}\right)$$
$$\sum F_y = T_1 \sin(37.0^\circ) + T_2 \sin(53.0^\circ) - T_3 = 0$$
$$\therefore \quad T_3 = T_1 \sin(37.0^\circ) + T_2 \sin(53.0^\circ)$$

Sustituyendo la expresión para T_3 (primera ecuación) en la segunda expresión, se llega

$$122\,\mathrm{N} = T_1 \left[\sin(37.0^\circ) + \sin(53.0^\circ)\left(\frac{\cos(37.0^\circ)}{\cos(53.0^\circ)}\right)\right] \quad \therefore \quad T_1 = 73.4\,\mathrm{N}$$

Reemplazando en la expresión para T_2, se tiene

$$T_2 = \left(\frac{\cos(37.0^\circ)}{\cos(53.0^\circ)}\right) T_1 = 1.33(73.4\,\mathrm{N}) = 97.6\,\mathrm{N}$$

Dado que las tensiones T_1 y T_2 son menores que $100\,\mathrm{N}$, ninguna de ellas se romperá y el semáforo permanecera colgado.

¿Que pasaría si los ángulos de la Fig.7(a) fueran iguales? ¿Cuál sería la correspondencia entre T_1 y T_2?

Ejemplo: Un objeto de masa m está sobre un plano- inclinado un ángulo θ con relación a la horizontal- como mostrado en el esquema de la Fig.8:

A) Encuentre la aceleración del objeto (suponga que no hay fricción).

B) Si el objeto se libera desde el reposo en lo alto del plano y la distancia desde el centro del objeto en la parte superior del plano hasta el centro del mismo en la parte inferior del plano es d. ¿Cuánto tarda el objeto en llegar a la base del plano? y ¿cuál es su rapidez cuando llega a la base?

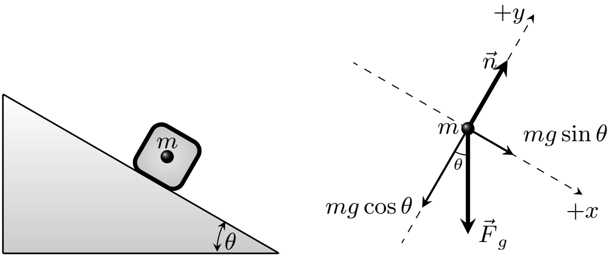


Figura 8. (Izquierda) Objeto en un plano inclinado. (Derecha) Diagrama de cuerpo libre para el objeto.

Solución:

A) De acuerdo con el diagrama de cuerpo libre se tiene lo siguiente:

$$\sum F_y = n - mg\cos\theta = 0, \quad \therefore \quad n = mg\cos\theta$$
$$\sum F_x = mg\sin\theta = ma_x, \quad \therefore \quad a_x = g\sin\theta$$

O sea, el objeto se desliza sobre el plano inclinado con una aceleración que no depende de la masa del mismo.

B) Note que el cuerpo se mueve en línea recta hacia abajo del plano y con aceleración constante $a_x = g\sin\theta$ y su rapidez inicial es cero, $v_{x0} = 0$. Usando la ecuación

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad \text{con} \quad \Delta x = x(t) - x_0 = d, \quad v_{x0} = 0$$

$$t = \sqrt{\frac{2d}{g\sin\theta}}$$

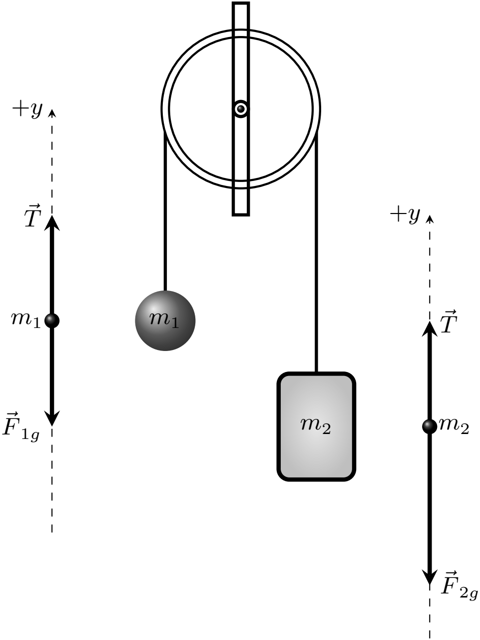
Por otro lado, usando la relación

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$$

se tiene, con $x - x_0 = d$, que la rapidez del objeto en el fondo del plano inclinado es

$$v_x = \sqrt{2dg \sin\theta}$$

¿En que problema se convertiría esta situación si el ángulo $\theta = 90°$?



Ejemplo: Cuando dos objetos de masas distintas cuelgan verticalmente en lados opuestos de una polea sin fricción de masa despreciable, como mostrado en la Fig.12, el dispositivo se llama ***máquina de Atwood***. Se usa a veces en el laboratorio para calcular el valor de g. Determine la aceleración de los objetos y la tensión en la cuerda ligera.

Figura 12. Máquina de Atwood y diagramas de cuerpo libre para los cuerpos de masa m_1 y m_2.

Solución: Como la cuerda es ligera (masa y peso despreciables) la tensión en cada punto de la cuerda es la misma, luego la magnitud de la aceleración del cuerpo de masa m_1 es igual a la magnitud de la aceleración del cuerpo de masa m_2.

Aplicando la segunda ley de Newton al cuerpo de masa m_1, tenemos

$$\sum F_y = T - F_{1g} = m_1 a_y = m_1(+a), \quad T = m_1 g + m_1 a = m_1(g + a)$$

Aplicando la segunda ley de Newton al cuerpo de masa m_2, se tiene

$$\sum F_y = T - F_{2g} = m_2 a_y = m(-a), \quad T = m_2 g - m_2 a = m_2(g - a)$$

Como la tensión de la cuerda es la misma en todas partes, se llega a

$$m_1(g + a) = m_2(g - a) \quad \therefore \quad a = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) g.$$

Sustituyendo la expresión para a en cualquiera de las expresiones para T, se obtiene

$$T = m_1 \left[1 + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) \right] g \quad \therefore \quad T = \left(\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) g.$$

Describa el movimiento del sistema si:

A) Los objetos tienen masas iguales, es decir, $m_1 = m_2$;

B) Si una de las masas es mucho mayor que la otra: $m_1 \gg m_2$.

Ejemplo: Una esfera de masa m_1 y un cuerpo de masa m_2 se unen mediante una cuerda ligera que rodea una polea sin fricción y de masa despreciable, como mostrado en la Fig.13. El cuerpo de masa m_2 se encuentra sobre un plano inclinado un ángulo θ con la horizontal y sin fricción. Encuentre la magnitud de la aceleración de los objetos y la tensión en la cuerda.

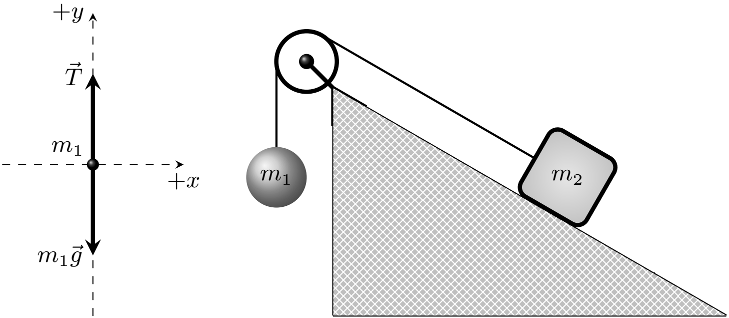


Figura 13a. Objetos unidos por una cuerda ligera y diagramas de cuerpo libre para el cuerpo de masa m_1.

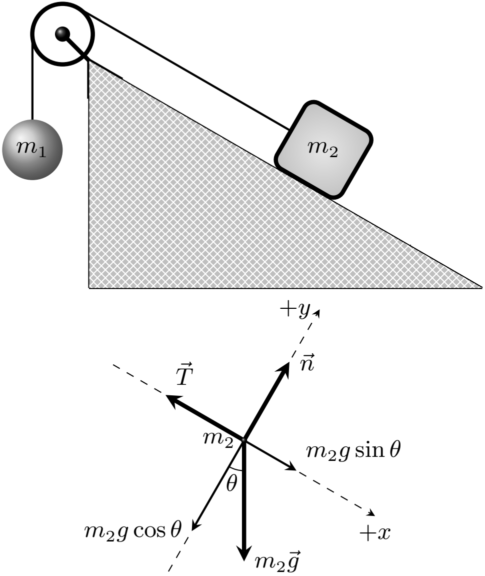


Figura 13b. Objetos unidos por una cuerda ligera y diagramas de cuerpo libre para el cuerpo de masa m_2.

Solución: La tensión en la cuerda se transmite con la misma magnitud en toda su extensión.

La aceleración del objeto de masa m_1 es igual, en magnitud, a la magnitud de la aceleración del cuerpo de masa m_2.

Aplicando la segunda ley de Newton al objeto de masa m_1 se tiene

$$\sum F_y = T - m_1 g = m_1 a_y = m_1 a, \quad T = m_1(g + a)$$

Aplicando la segunda ley de Newton al cuerpo de masa m_2, se obtienen las siguientes relaciones,

$$\sum F_y = n - m_2 g \cos\theta = 0, \quad n = m_2 g \cos\theta$$
$$\sum F_x = -T + m_2 g \sin\theta = m_2 a_x = ma, \quad T = m_2(g \sin\theta - a_x)$$

Recordando que la tensión es la misma, se obtiene

$$m_1(g+a) = m_2(g\sin\theta - a) \quad \therefore \quad a = \left(\frac{m_2\sin\theta - m_1}{m_1+m_2}\right)g.$$

Sustituyendo la expresión anterior para a en cualquiera de las expresiones para T se llega a

$$T = m_1(g+a) = m_1\left[g + \left(\frac{m_2\sin\theta - m_1}{m_1+m_2}\right)g\right]$$
$$\therefore \quad T = \left(\frac{m_1 m_2(\sin\theta+1)}{m_1+m_2}\right)g.$$

¿Qué ocurriría si $\theta = 90^\circ$?

1.9 Fuerzas de fricción

Las **fuerzas de fricción** son comunes y muy importantes en nuestro día a día: Nos permiten caminar, escribir sobre un papel, borrar un documento, frenar vehículos, etc.

Desea mover un objeto de masa m sobre una superficie. Aplica una fuerza horizontal $\vec{F}$. Si la fuerza aplicada es pequeña el objeto permanece en reposo.

La fuerza que se opone a $\vec{F}$, evitando que el objeto se mueva, se llama **fuerza de fricción estática** $\vec{f}_s$.

Mientras el objeto no se mueva $f_s = F$; si aumenta $\vec{F}$, también aumenta $\vec{f}_s$.

Experimentalmente, la fuerza de fricción depende de la naturaleza de las superficies.

Si aumenta $|\vec{F}|$, el cuerpo en algún valor de F se desliza. Inmediatamente antes de deslizarse, la fuerza de fricción tiene su máxima magnitud $f_{s,\,\text{máx}}$. Cuando F supera a $f_{s,\,\text{máx}}$ el objeto se mueve y acelera en la dirección de la fuerza $\vec{F}$ aplicada.

La fuerza de fricción para un objeto en movimiento se llama **fuerza de fricción cinética** $\vec{f}_k$.

Cuando el objeto está en movimiento, la fuerza de fricción cinética es menor que $f_{s,\,\text{máx}}$.

En ese caso, para un movimiento sobre el eje x, por ejemplo:

$$\sum F_x = F - f_k \propto a_x$$

Si $F = f_k$, entonces $a_x = 0$.

Si se elimina la fuerza $\vec{F}$ cuando el objeto está en movimiento,

$$\sum F_x = -f_k \propto a_x$$

Experimentalmente, y en buena aproximación,

$$f_{s,\,\text{máx}} \propto n, \quad f_k \propto n$$

con n la magnitud de la fuerza normal ejercida por la superficie sobre el objeto.

Importante en la solución de problemas con fuerza de fricción es:

- La $|\vec{f}_s|$ entre dos superficies en contacto tiene los valores

$$|\vec{f}_s| = f_s \leq \mu_s n, \quad \mu_s = cte. : \text{ coeficiente de fricción estático.} \tag{9}$$

  y n es la magnitud de la fuerza normal ejercida por una superficie sobre la otra. Justo antes de deslizarse, se cumple

$$f_s = f_{s,\,\text{máx}} = \mu_s n$$

  situación llamada *movimiento inminente*.

- La $|\vec{f}_k|$ entre dos superficies en contacto es dada por

$$f_k = \mu_k n \quad \mu_k = cte. : \text{ coeficiente de fricción cinético.} \tag{10}$$

- Valores típicos de μ_s y μ_k fluctúan en el intervalo $[0.03,\, 1.0]$.
- La dirección de la fuerza de fricción es paralela a la superficie de contacto entre los objetos y opuesta a la dirección del movimiento real (fricción cinética) o al movimiento inminente (fricción estática).
- Por lo general, los coeficientes de fricción no dependen del área de contacto entre las superficies de los objetos

Ejemplo: El siguiente es un método simple para medir coeficientes de fricción. Suponga que se coloca un bloque sobre una superficie rugosa inclinada en relación con la horizontal, como mostrado en la Fig.14. El ángulo de inclinación aumenta hasta que el bloque comienza a moverse. Demuestre que puede obtener μ_s al medir el ángulo θ_c para el cual el movimiento comienza.

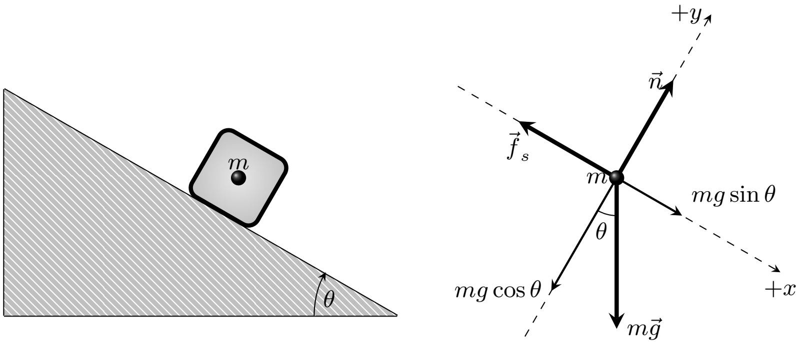


Figura 1.14 [Izquierda] Diagrama esquemático de un método para determinar el coeficiente de fricción entre dos superficies. [Derecha] Diagrama de cuerpo libre del objeto sobre el plano inclinado rugoso.

Solución: Antes de que el bloque comience a deslizarse, la aplicación de la segunda ley de Newton al bloque da:

$$\sum F_y = n - mg\cos\theta = 0 \quad \rightarrow \quad n = mg\cos\theta$$
$$\sum F_x = mg\sin\theta - f_s = 0 \quad \rightarrow \quad f_s = mg\sin\theta$$

Cuando el bloque está a punto de deslizarse (movimiento inminente), $\theta = \theta_c$ y $f_{s,\,\text{máx}} \equiv \mu_s n$.

Sustituyendo esas expresiones en la segunda ecuación de Newton nos permite encontrar

$$f_{s,\text{máx}} = \mu_s n = \mu_s mg\cos\theta_c = mg\sin\theta_c$$
$$\mu_s = \tan\theta_c \quad \therefore \quad \theta_c = \tan^{-1}(\mu_s).$$

Ejemplo: Un bloque de masa m_1 sobre una superficie horizontal rugosa se conecta a una esfera de masa m_2 mediante una cuerda ligera sobre una polea, también ligera, y sin fricción, como mostrado en la Fig.1.14. Al bloque se le aplica una fuerza de magnitud F en un ángulo θ con relación a la horizontal, y el bloque se desliza hacia la derecha. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie es μ_k. Determine la magnitud de la aceleración de los dos objetos.

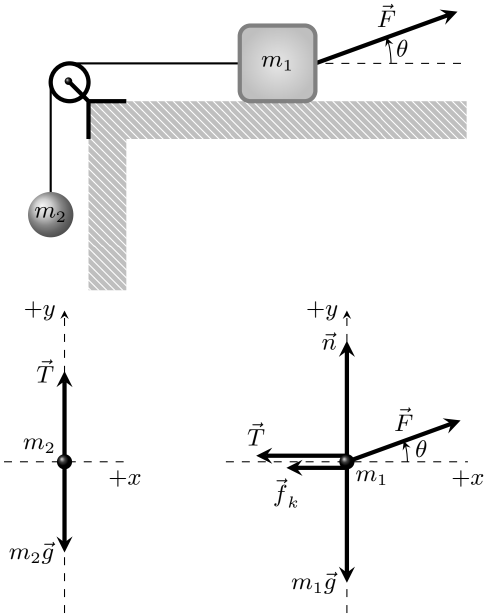


Figura 1.16 Esquema para el ejemplo anterior y diagramas de cuerpo libre de los respectivos cuerpos.

Solucion: En este caso la tensión en la cuerda se transmite y la magnitud de la aceleración es la misma para ambos objetos. Para la esfera de masa m_2, la aplicación de la segunda ley de Newton da

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = T - m_2 g = m_2 a_y \quad \therefore \quad T = m_2(a_y + g)$$

Para el bloque de masa m_1, la aplicación de la misma ley da

$$\sum F_y = n + F\sin\theta - m_1 g = 0$$

$$n = m_1 g - F\sin\theta$$

$$\sum F_x = -T + F\cos\theta - f_k = m_1 a_x$$

$$T = F\cos\theta - f_k - m_1 a_x.$$

Igualando las expresiones para las tensiones y, escribiendo $a_x = a_y = a$, se llega a

$$m_2(a+g) = F\cos\theta - f_k - m_1 a \quad \rightarrow \quad a = \frac{F\cos\theta - f_k - m_2 g}{m_1 + m_2}$$

Recordando que $f_k = \mu_k n$, se tiene

$$f_k = \mu_k(m_1 g - F\sin\theta) \quad \rightarrow \quad a = \frac{F\cos\theta - \mu_k(m_1 g - F\sin\theta) - m_2 g}{m_1 + m_2}$$

la cual reordenada nos lleva a

$$a = \frac{F(\cos\theta + \mu_k \sin\theta) - (m_2 + m_1\mu_k)g}{m_1 + m_2}$$

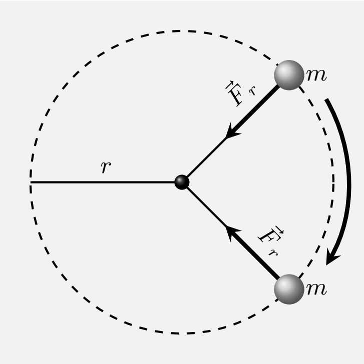
1.10 Partícula en movimiento circular uniforme

Ahora aplicaremos, con base en ejemplos, las leyes de Newton del movimiento a objetos que se mueven en trayectorias circulares.

Anteriormente vimos que cuando una partícula se mueve con rapidez constante v sobre una trayectoria circular de radio r ésta, la partícula, experimenta una aceleración de magnitud

$$a_c = \frac{v^2}{r}.$$

Esta aceleración $\vec{a}_c$ es llamada **aceleración centrípeta** porque se dirige hacia el centro del círculo y es siempre perpendicular a la velocidad de la partícula $\vec{v}$.



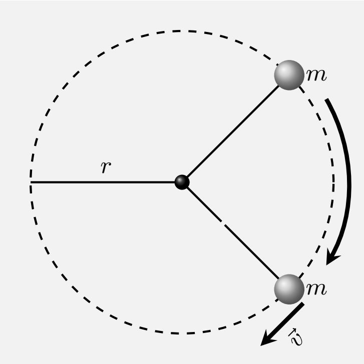


Figura 2.1 [Izquierda] Vista superior de una esfera unida a una cuerda y en movimiento circular uniforme sobre una superficie horizontal sin fricción. [Derecha] Cuando la cuerda se rompe, la esfera sigue una trayectoria tangente al círculo.

Considere una esfera de masa m atada a una cuerda de longitud r que se hace girar con rapidez constante sobre una trayectoria circular horizontal, como mostrado en la Fig.2.1[Izquierda].

Desprecie la fricción entre la bola y la superficie horizontal. La cuerda ejerce una fuerza radial sobre la esfera $\vec{F}_r$, la cual hace que la esfera siga la trayectoria circular. Esta fuerza está dirigida a lo largo de la cuerda y hacia el interior del círculo.

La aplicación de la segunda ley de Newton a lo largo de la dirección radial permite escribir la siguiente relación entre fuerza neta y la aceleración centrípeta

$$\sum F = ma_c = m\frac{v^2}{r}. \tag{11}$$

Una fuerza que causa una aceleración centrípeta actúa hacia el centro de la trayectoria circular y genera un cambio en la dirección del vector velocidad de la partícula.

La ausencia de dicha fuerza implica que el objeto no se movería más en esa trayectoria circular, sino a lo largo de una línea recta tangente al círculo, como ilustrado en la Fig.2.1[Derecha].

Ejemplo: Una esfera de 0.500 kg de masa se une al extremo de una cuerda de 1.50 m de largo. La esfera da vueltas sobre un círculo horizontal similar al mostrado en la Fig.2.1. Si la cuerda resiste una tensión máxima de 50.0 N, ¿cuál es la máxima rapidez a la que puede girar la esfera antes de que la cuerda se corte? Suponga que la cuerda permanece horizontalmente durante el movimiento.

Solución: La tensión en la cuerda mantiene a la esfera girando. Luego, de la Ec.(11) se tiene que

$$\sum F = T = m\frac{v^2}{r} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{rT}{m}} = \sqrt{\frac{(1.50\,\mathrm{m})(50.0\,\mathrm{N})}{0.500\,\mathrm{kg}}} = \sqrt{150\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2}$$

$$\therefore \quad v = 12.2\,\mathrm{m/s}.$$

Situación: Suponga que la esfera gira con la misma rapidez v en un círculo de mayor radio. ¿Es más o menos probable que la cuerda se corte?

Ejemplo: Una pequeña esfera de masa m se suspende de una cuerda de longitud L. La esfera da vueltas con rapidez constante v en un círculo horizontal de radio r, como mostrado en la Fig.2.2. (Puesto que la cuerda hace un recorrido de la superficie en forma de cono, el sistema se conoce como ***péndulo cónico***). Encuentre una expresión para v.

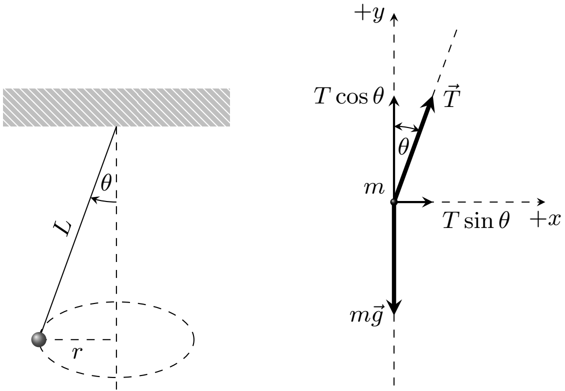


Figura 2.2 Esquema de un péndulo cónico y diagrama de cuerpo libre para la esfera.

Solución: Aplicando la segunda ley de Newton a la esfera, se tiene

$$\sum F_y = T\cos\theta - mg = 0 \quad \rightarrow \quad T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

$$\sum F_x = T\sin\theta = ma_c = m\frac{v^2}{r} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{rT\sin\theta}{m}}$$

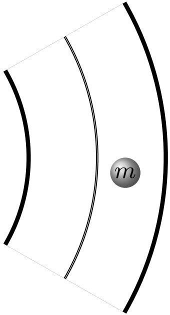
Sustituyendo la expresión para T encontrada en la primera ecuación se llega a

$$v = \sqrt{rg\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \sqrt{rg\tan\theta}$$

Pero $r = L\sin\theta$, de modo que la rapidez de la esfera en el péndulo cónico es

$$v = \sqrt{Lg\sin\theta\tan\theta}.$$

Ejemplo: Un automóvil de 1500 kg se traslada sobre una curva plana y horizontal como esquematizado en la Fig.2.3. Si el radio de la curva es de 35.0 m y el coeficiente de fricción estática entre las llantas y el pavimento seco es 0.523 encuentre la rapidez máxima que puede alcanzar el automóvil y aún así hacer la curva exitosamente.



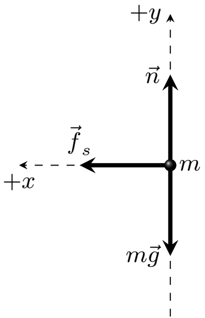


Figura 2.3 Esquema de un automóvil dando vuelta una curva (vista superior) y diagrama de cuerpo libre para el automóvil visto horizontalmente.

Solución: En el esquema, tanto la dirección de la fuerza de fricción estática cuanto la aceleración centrípeta son consideradas positiva hacia la izquierda. Aplicando la segunda ley de Newton al automóvil, se tiene

$$\sum F_y = n - mg = 0 \quad \rightarrow \quad n = mg$$

$$\sum F_x = f_s = m\frac{v^2}{r} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{rf_s}{m}}$$

recordando que $f_{s\,\text{máx}} = \mu_s n = \mu_s mg$ se tiene, para v,

$$v_{\text{máx}} = \sqrt{r\mu_s g} = \sqrt{(35.0\,\mathrm{m})(0.523)(9.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2})} = 13.4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Situación: Suponga que en un día húmedo el automóvil comienza a derrapar en la curva cuando $v = 8.00\,\mathrm{m/s}$. ¿Qué se puede decir acerca del coeficiente de fricción estática en este caso?

Ejemplo: Un ingeniero civil quiere diseñar la curva de la autopista del Ejemplo 2.3 de tal forma que un automóvil no tenga que depender de la fricción para circular la curva sin derrapar. En otras palabras, un automóvil que se traslade a la rapidez diseñada puede superar la curva, incluso cuando el camino esté cubierto con hielo.

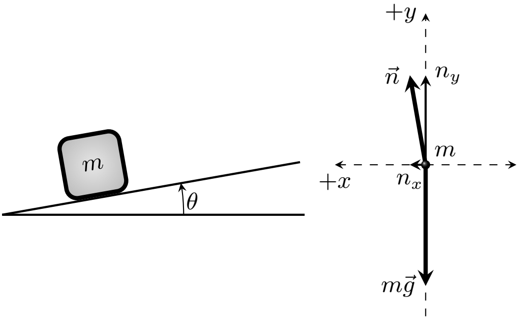


Figura 2.4 Esquema de un automóvil en una curva peraltada y diagrama de cuerpo libre del automóvil.

Dicha rampa será *peraltada*, lo que significa que la carretera está inclinada hacia adentro de la curva. Suponga que la rapidez diseñada para la rampa es 13.4 m/s y el radio de la curva es de 35.0 m. ¿Cuál es el ángulo de peralte?

Solución: La aceleración centrípeta se debe a n_x. Aplicando la segunda ley de Newton, se tiene

$$\sum F_y = n_y - mg = 0 \quad \rightarrow \quad n\cos\theta = mg \quad \rightarrow \quad n = \frac{mg}{\cos\theta}$$

$$\sum F_x = n_x = m\frac{v^2}{r} \quad \rightarrow \quad n\sin\theta = m\frac{v^2}{r}$$

Sustituyendo la expresión para n en la segunda ecuación nos lleva a

$$\left(\frac{mg}{\cos\theta}\right)\sin\theta = m\frac{v^2}{r} \quad \rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{rg}\right)$$

Usando los valores numéricos, se llega a

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{(13.4\,\mathrm{m/s})^2}{(35.0\,\mathrm{m})(9.80\,\mathrm{m/s^2})}\right) = 27.6^\circ.$$

Situación: Imagine que en el futuro esta misma carretera se construye en Marte para conectar diferentes centros coloniales. ¿Es posible recorrerla con la misma rapidez?

Ejemplo: Un piloto- de masa m- en un avión jet ejecuta un giro (loop), como mostrado en la Fig.2.5. En esta maniobra, el avión se mueve en un círculo vertical de 2.70 km de radio con una rapidez constante de 225 m/s.

A) Determine la fuerza que ejerce el asiento sobre el piloto en la parte inferior del loop. Exprese su respuesta en términos del peso del piloto mg.

B) Resolver para la fuerza que ejerce el asiento sobre el piloto en la parte superior del loop.

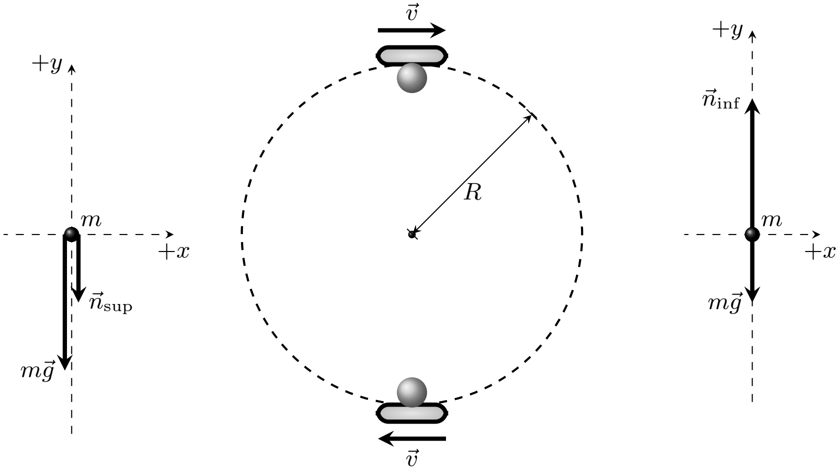


Figura 2.5 Esquema de un piloto de avión haciendo un giro (centro) y diagramas de cuerpo libre del piloto en la parte superior (izquierda) e inferior (derecha) del giro.

Solución: A) Aplicando la segunda ley de Newton al piloto en la parte superior del loop, se tiene

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = -n_{\text{sup}} - mg = -m\frac{v^2}{R}$$

$$\therefore n_{\text{sup}} = m\frac{v^2}{R} - mg = mg\left(\frac{v^2}{gR} - 1\right)$$

Introduciendo los datos entregados, se tiene

$$n_{\text{sup}} = mg\left(\frac{(225\,\text{m/s})^2}{(9.80\,\text{m/s}^2)(2.70\times10^3\,\text{m})} - 1\right) = 0.913\,mg.$$

B) Aplicando la segunda ley de Newton al piloto en la parte inferior del loop, se tiene

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = n_{\text{inf}} - mg = m\frac{v^2}{R}$$

$$\therefore n_{\text{inf}} = m\frac{v^2}{R} + mg = mg\left(\frac{v^2}{gR} + 1\right)$$

Introduciendo los datos entregados, se tiene

$$n_{\text{inf}} = mg\left(\frac{(225\,\mathrm{m/s})^2}{(9.80\,\mathrm{m/s^2})(2.70\times 10^3\,\mathrm{m})} + 1\right) = 2.91\,mg.$$