UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

EDO (521.218-525.221)
PRACTICA 10
Transformada de Laplace (Primera parte)

Problemas a resolver en práctica

Problema 1

Usando la definición muestre que para $s > 1$: $\mathcal{L}[t\,e^t](s) = \dfrac{1}{(s-1)^2}$.

Desarrollo: Sea $s \in \mathbb{R}$. De la definición sigue:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[te^t](s) &= \int_0^\infty e^{-st}\, te^t\, dt \;=\; \lim_{b\to\infty} \int_0^b t\, e^{t(1-s)} dt \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{(1-s)} \left(\frac{t}{e^{t(s-1)}} \right)\Big|_0^b - \frac{1}{(1-s)} \int_0^b e^{(1-s)t} dt \right] \quad (\text{restricción: } s \neq 1) \\
&= \frac{1}{(1-s)} \lim_{b\to\infty} \left[\left(\frac{b}{e^{b(s-1)}} - 0 \right) - \int_0^b e^{(1-s)t} dt \right] \\
&= \frac{1}{(1-s)} \lim_{b\to\infty} \left[\frac{b}{e^{b(s-1)}} - \frac{1}{(1-s)} e^{(1-s)t} \Big|_0^b \right] \\
&= \frac{1}{(1-s)} \lim_{b\to\infty} \left[\frac{b}{e^{b(s-1)}} - \frac{1}{(1-s)} \left(e^{(1-s)b} - 1 \right) \right] \\
&= \frac{1}{(1-s)^2} + \frac{1}{(1-s)} \lim_{b\to\infty} \left[\frac{b}{e^{b(s-1)}} - \frac{1}{(1-s)} e^{(1-s)b} \right]
\end{aligned}
$$

Resta por analizar para qué valores del parámetro s, el límite existe. Examinando el minuendo y sustraendo en dicha expresión, resulta

$$
\lim_{b\to\infty} e^{(1-s)b} = \begin{cases} 0 & s > 1 \\ \infty & s < 1 \end{cases}, \qquad \lim_{b\to\infty} \frac{b}{e^{b(s-1)}} = \begin{cases} 0 & s > 1 \quad (\text{luego de aplicar L'Hôpital}) \\ \lim\limits_{b\to\infty} b\, e^{b(1-s)} = \infty & s < 1\,. \end{cases}
$$

En vista que ambos límites existen cuando $s > 1$, se deduce, luego de aplicar el Álgebra de los límites

$$
\mathcal{L}[te^t](s) = \frac{1}{(s-1)^2} \quad \forall\, s > 1\,.
$$

Observación: veamos qué sucede cuando $s = 1$.

$$
\mathcal{L}[te^t](1) = \int_0^\infty t\, dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b t\, dt = \lim_{b\to\infty} \frac{t^2}{2}\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty} \frac{b^2}{2} = \infty\,,
$$

lo cual nos dice que $\mathcal{L}[te^t](s)$ no está definida para $s = 1$.

Problema 2
Sabiendo que para $s > 0$, $\mathcal{L}[1](s) = \dfrac{1}{s}$ y usando la propiedad de la derivada, esto es:

$$\mathcal{L}[f'(t)](s) = s\,\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0^+), \quad \text{muestre que}$$

(i) $\mathcal{L}[t](s) = \dfrac{1}{s^2}$,

(ii) $\mathcal{L}[t^2](s) = \dfrac{2}{s^3}$

Desarrollo:

(i) Aplicamos la propiedad de la derivada a la función $f(t) = t$, $t > 0$. Entonces, puesto que $f'(t) = 1$ y $f'(0^+) = 0$, sigue para $s > 0$,

$$\mathcal{L}[1](s) + 0 = s\mathcal{L}[t](s) \text{ de donde}$$

$$\mathcal{L}[t](s) = \frac{1}{s}\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}.$$

(ii) Aplicamos la propiedad de la derivada a la función $f(t) = t^2$.

$$\mathcal{L}[2t](s) + 0 = s\mathcal{L}[t^2](s) \text{ de donde}$$

$$\mathcal{L}[t^2](s) = \frac{2}{s}\frac{1}{s^2} = \frac{2}{s^3}.$$

Problema 3
Use la linealidad de la Transformada de Laplace, para determinar $\mathcal{L}[f(t)](s)$, cuando

(i) $f(t) = t^2 + \operatorname{sen}(3t)$

(ii) $f(t) = 2e^{2t} - e^{-3t}$

¿Para qué valores de s está definida la transformada de Laplace en (i) y (ii)?

Desarrollo:

(ii) Recordemos que $\mathcal{L}[e^{at}](s) = \dfrac{1}{s-a}$ para $s > a$. Por la linealidad del operador $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}[2e^{2t} - e^{-3t}](s) = 2\mathcal{L}[e^{2t}](s) - \mathcal{L}[e^{-3t}](s) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+3}$$

para $s > \max\{2, -3\}$, es decir para $s > 2$.

Problema 4
Determine $\mathcal{L}[f(t)]$, cuando

(i) $f(t) = (1 + e^{2t})^2$.

(ii) $f(t) = (t + 2)^2$,

(iii) $f(t) = e^{2t}\operatorname{senh}(3t)$,

(iv) $f(t) = t\operatorname{sen}(t)$,

Desarrollo:

$(i)-(ii)$ Desarrollar el binomio y aplicar linealidad de la Transformada de Laplace.

(iii) Sabemos que $\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s)=\mathcal{L}[f(t)](s-a)$. Por tanto $\mathcal{L}[e^{2t}\operatorname{senh}(3t)](s)=F(s-2)$ donde $F(s)=\mathcal{L}[\operatorname{senh}(3t)](s)=\dfrac{3}{s^2-9}$, $s>3$. De este modo,

$$\mathcal{L}[e^{2t}\operatorname{senh}(3t)](s)=\frac{3}{(s-2)^2-9}=\frac{3}{s^2-4s-5},\ (s-2)>3.$$

(iv) Sabemos que $\mathcal{L}[t\,f(t)]=(-1)\dfrac{d}{ds}[F(s)]$, donde $F(s)=\mathcal{L}[f(t)](s)$.
Por tanto, $\mathcal{L}[t\operatorname{sen}(t)](s)=(-1)\dfrac{d}{ds}[\mathcal{L}[\operatorname{sen}(t)](s)]=\dfrac{2s}{(s^2+1)^2}$.

Observación: Note que del ejercicio sigue que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right]=t\operatorname{sen}(t),\ t>0.$$

Problema 5

Decida justificadamente si existe $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ (función continua por tramos y de orden exponencial en $[0,\infty)$) cuando

(i) $F(s)=\dfrac{e^s}{s^2}$, (ii) $F(s)=\dfrac{3s-5}{s^2+9}$, (iii) $F(s)=\dfrac{s^2}{s+1}$.

Desarrollo: Sabemos que si $\lim_{s\to\infty}F(s)\neq 0$ entonces no existe la Transformada Inversa de la función F (función continua por tramos y de orden exponencial en $[0,\infty)$).

(i) En este caso

$$\lim_{s\to\infty}\frac{e^s}{s^2}=\lim_{s\to\infty}\frac{e^s}{2}\neq 0,$$

por tanto no existe la transformada inversa de $\dfrac{e^s}{s^2}$.

(ii) Aquí $\lim_{s\to\infty}\dfrac{2s+3}{s^2+4^2}=0$. En consecuencia, F puede admitir transformada inversa de Laplace. Por cálculo directo, se tiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s-5}{s^2+9}\right](t) &= 3\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+3^2}\right](t)-\frac{5}{3}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s^2+3^2}\right](t)\\ &= 3\cos(3t)-\frac{5}{3}\operatorname{sen}(3t),\ t>0.\end{aligned}$$

(iii) Como en (i), F no admite transformada inversa de Laplace (en el espacio de funciones de trabajo).

Problema 6
Usando las propiedades vistas en clase, calcule $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$, para :

(i) $F(s) = \dfrac{17-3s}{s^2+2s+26}$,

(ii) $F(s) = \dfrac{s-5}{(s-5)^2+9}$,

(iii) $F(s) = \dfrac{s+5}{(s+3)(s^2+2s+26)}$,

(iv) $F(s) = \dfrac{s-25}{(s-5)(s+5)}$,

Desarrollo:

(i) Aquí el $\lim_{s\to\infty} \dfrac{17-3s}{s^2+2s+26} = 0$. Por cálculo directo, sigue:

$$\begin{aligned} \frac{17-3s}{s^2+2s+26} &= \frac{-3(s+1)+20}{(s+1)^2+25} \\ \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{17-3s}{s^2+2s+26}\right](t) &= -3\mathrm{e}^{-t}\cos(5t) + \frac{20}{5}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{sen}(5t)\,, \quad t \geq 0\,. \end{aligned}$$

(ii) Aquí nuevamente tenemos $\lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{s-5}{(s-5)^2+9} = 0$. Haciendo el cálculo, sigue

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-5}{(s-5)^2+9}\right](t) = \mathrm{e}^{5t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+9}\right](t) = \mathrm{e}^{5t}\cos(3t).$$

Problemas propuestos para el estudiante

1. Calcule la Transformada de Laplace de la función $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ que se indica:

   (i) $f(t) = 3\mathrm{e}^{4t} + 2\mathrm{sen}(7t)$.

   (ii) $f(t) = (\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-t})^2$.

   (iii) $f(t) = t\cos(5t)$.

   (iv) $f(t) = t^3\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{\sqrt{5}\,t}\mathrm{sen}(t)$.

   (v) $f(t) = \mathrm{e}^{3t}t\,\mathrm{sen}(2t)$.

   (v) $f(t) = \cos^2(t)$.

2. Usando la definición, calcule $\mathcal{L}[f(t)](s)$ si $f(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 3-t & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{si } t > 2. \end{cases}$

3. Calcule $\mathcal{L}\left[f(t)\right](s)$ cuando $f(t) = t\,\mathrm{sen}(t)$, $t \geq 0$ y $f(t) = \mathrm{e}^{-5t}(t^6 + 6t^2 - 3)$, $t \geq 0$.

4. Usando las propiedades vistas en clase, calcule $\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t)$, para :

   (a) $F(s) = \dfrac{3}{s-3} + \dfrac{4}{s+3}$

   (b) $F(s) = \dfrac{7s+1}{s^2+4}$

   (c) $F(s) = \dfrac{5s}{(s^2+9)^2}$,

   (d) $F(s) = \dfrac{3s-5}{(s^2+4)^2}$

5. Resuelva los siguientes PVI usando la Transformada de Laplace,

(i) $\begin{cases} y''(t) + 4y(t) = 9t\,, & t > 0\,, \\ y(0) = 0\,, y'(0) = 7 \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} y''(t) + 16y(t) = \mathrm{sen}(4t)\,, & t > 0\,, \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} y'(t) + 3y(t) + 2\displaystyle\int_0^t y(u)\,du = \mathrm{e}^{-t}\,, & t > 0\,, \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$

(iv) $\begin{cases} y''(t) - y(t) = -t\,, & t > 0\,, \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$

16/11/22
RBP/JMS/FST//jms/rbp