Clase 14

Cálculo 3

Carlos Martínez Ranero

Departamento de Matemática
Universidad de Concepción

Recordatorio de la clase anterior.

- Criterio de la segunda derivada.

Objetivos de la clase de hoy.

- Multiplicadores de Lagrange.

Criterio de la Segunda Derivada.

Criterio de la segunda derivada

Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto, $f : A \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 y $(a, b) \in A$ un punto crítico. Entonces

- Si $f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b) > 0$, $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces (a, b) es un mínimo local.
- Si $f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b) > 0$, $f_{xx}(a, b) < 0$, entonces (a, b) es un máximo local.
- Si $f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b) < 0$, entonces (a, b) es un punto silla.
- Si $f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - f_{xy}^2(a, b) = 0$, entonces el criterio no da información.

Criterio de la Segunda Derivada.

Ejemplo 1

Determinar la naturaleza de los puntos críticos de la función $f(x, y) = 4xy - x^3y - xy^3$.

Criterio de la Segunda Derivada.

Solución:

- $\nabla(f)(x, y) = (4y - 3x^2y - y^3, 4x - x^3 - 3xy^2)$
- $4y - 3x^2y - y^3 = 0, 4x - x^3 - 3xy^2 = 0$
- $y(4 - 3x^2 - y^2) = 0, x(4 - x^2 - 3y^2) = 0$
- $y = 0, x = 0 \wedge y = 0, x = \pm 2$
- $x = 0, y = \pm 2$
- $4 - x^2 - 3y^2 = 4 - 3x^2 - y^2$
- $x^2 = y^2$ y $4 - 4x^2 = 0$
- Los puntos críticos son $(0, 0)$, $(\pm 2, 0)$, $(0, \pm 2)$ y $(\pm 1, \pm 1)$.

Criterio de la Segunda Derivada.

- $Hf(x,y) = \begin{bmatrix} -6xy & 4-3x^2-3y^2 \\ 4-3x^2-3y^2 & -6xy \end{bmatrix}$
- Para $(0,0), (\pm 2, 0)$ y $(0, \pm 2)$ tenemos que $\Delta_2 \neq 0$ y $\Delta_1 = 0$ y por lo tanto son puntos silla.
- $H(1,1) = Hf(-1,-1) = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$
- $\Delta_1 = -6 < 0, \Delta_2 = 32 > 0$
- Por lo tanto, $(1,1)$ y $(-1,-1)$ son máximos locales.
- $H(1,-1) = Hf(-1,1) = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$
- $\Delta_1 = 6 > 0, \Delta_2 = 32 > 0$
- Por lo tanto, $(1,-1)$ y $(-1,1)$ son mínimos locales.

Criterio de la Segunda Derivada.

- Cerca de $(1,1)$ tenemos que

  $$f(x,y) \simeq f(1,1) + \begin{bmatrix} x-1 & y-1 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-1 & y-1 \end{bmatrix}$$

- $f(x,y) \simeq -5 + 12(x-1)^2 + 6(y-1)^2$
- Cerca de $(1,-1)$ tenemos que

  $$f(x,y) \simeq f(1,-1) + \begin{bmatrix} x-1 & y+1 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-1 & y+1 \end{bmatrix}$$

- $f(x,y) \simeq -1 + 12(x-1)^2 - 6(y+1)^2$

Criterio de la Segunda Derivada.

Ejemplo 2

Determinar la naturaleza de los puntos críticos de la función $f(x,y,z) = -x^2 - y^3 + xy - z^2 + 2z$.

Solución:

- $f_x = -2x + y = 0$
- $f_y = -3y^2 + x = 0$
- $f_z = -2z + 2 = 0$
- $-12x^2 + x = 0 \implies x = \frac{1}{12}, y = \frac{1}{6}$ o $x = 0, y = 0$
- $z = 1$
- Los puntos críticos son $(0, 0, 1)$ y $(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, 1)$.
- $Hf = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -6y & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Criterio de la Segunda Derivada.

Solución:

- $Hf(0,0,1) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$
- $\Delta_1(0,0,1) = -2 < 0, \Delta_2(0,0,1) = -1 < 0, \Delta_3(0,0,1) = 2 > 0.$
- El punto $(0,0,1)$ es un punto silla.
- $Hf(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, 1) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & - & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$
- $\Delta_1(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, 1) = -2 < 0, \Delta_2(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, 1) = 1 > 0, \Delta_3(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, 1) = -2 < 0.$
- El punto $(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, 1)$ es un máximo local.

Encontrar extremos sujetos a restricciones.

Ejemplo 3:

Encontrar el punto sobre la parábola $4y = x^2$ más cercano al punto $(1, 2)$.

Solución:

- Necesitamos mínimizar la función $f(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2$
- sujeto a la restricción $g(x,y) = x^2 - 4y = 0$
- Geométricamente vemos que esto sucede cuando el circulo $(x-1)^2 + (y-2)^2 = r^2$ es tangente a la parábola.
- Es decir necesitamos encontrar un punto (a,b) tal que $\nabla(f)(a,b)$ es paralelo a $\nabla(g)(a,b)$.
- $\nabla(f) = (2x-2, 2y-4), \nabla(g) = (2x, -4)$
- De esto tenemos un sistema de ecuaciones:

$$\nabla(f) = \lambda\nabla(g)$$

$$g(x,y) = 0$$

Multiplicadores de Lagrange

- Equivalentemente

$$2x - 2 = 2\lambda x,$$
$$2y - 4 = -4\lambda$$
$$x^2 - 4y = 0$$

- $x = 1 + \lambda x, \implies x(1-\lambda) = 1$
- $y = 2(1-\lambda) \implies y = \frac{2}{x}$
- $x^2 - \frac{8}{x} = 0 \implies x^3 = 8$
- El mínimo se alcanza en $(2, 1)$.