Clase 16 (Mi 28/09/2022)

Observemos que la EDO lineal de primer orden $\boxed{y'(t) - (t-1)y(t) = e^{2t}}$ puede ser escrita como $y'(t) = (t-1)y(t) + e^{2t}$. Esto es,

$y'(t) = f(t, y(t))$ con $f(t,u) = (t-1)u + e^{2t}$.

Al revés, si $g(t,u) = [\operatorname{sen}^2(t)]u^4$, entonces

$y'(t) = g(t,y)$ produce la EDO

$$\ast \quad \boxed{y'(t) = [\operatorname{sen}^2(t)]\,(y(t))^4}$$ que es una EDO de primer orden, pero es no-lineal.

OBS (2). Además observe que toda función $f(t,u)$ produce dos funciones, a saber:

(i) $t \to h(t) = f(t, u_0)$ para $u_0 = \text{cte}$.

(ii) $u \to \alpha(u) = f(t_0, u)$ para $t_0 = \text{cte}$.

Ejemplo: Sea $f : [0,1] \times [2,5] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(t,y) \longmapsto f(t,y) = (t-1)^2 y^2.$$

Entonces,

(i) Para $t_0 \in [0,1]$ fijo, definamos

$$[2,5] \ni y \longmapsto \underline{\alpha(y)} = \underline{f(t_0, y)} = (t_0 - 1)^2 y^2$$

(Si $t_0 = 1/2$, entonces

$$f(1/2, y) = [(1/2) - 1]^2 y^2$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 y^2 = \tfrac{1}{4} y^2).$$

Note que la función $f(t_0, y)$ es función de la variable y.

(ii) Para y_0 fijo en $[2,5]$;

$$[0,1] \ni t \longrightarrow \beta(t) = f(t, y_0) = (t-1)^2 y_0^2$$

Note que $\underline{f(t, y_0) \text{ es función de la variable } t}$.

Ejemplo (Importante)

Para $\begin{cases} x \in]-1,2[\\ y \in]0,4[\end{cases}$, definamos $\boxed{f(x,y) = (x-1)y^2}$ $(*)$

Observe que $\boxed{\alpha(y) := f(x,y) = (x-1)y^2}$

(Aquí x es constante).

es una función de la variable y; por tanto

podemos pensar en $\frac{d}{dy}[\alpha(y)]$, esto es ;

$$\alpha'(y) = \frac{d}{dy}[f(x,y)] = \frac{d}{dy}[(x-1)y^2] = 2(x-1)y$$

Note que al definir $\alpha(y)$, x es constante; pero x es cualquiera en $]-1,2[$. Por tanto, al DERIVAR α (respecto de y), podemos derivar directamente en la función f teniendo presente que (si lo hago respecto de y) la variable x es constante. Esto es,

$$\frac{d}{dy}\left[f(x,y)\right] = \frac{d}{dy}\left[(x-1)y^2\right] = 2(x-1)y.$$

cuando hacemos lo anterior se dice que DERIVAMOS PARCIALMENTE respecto de y, esto se escribe:

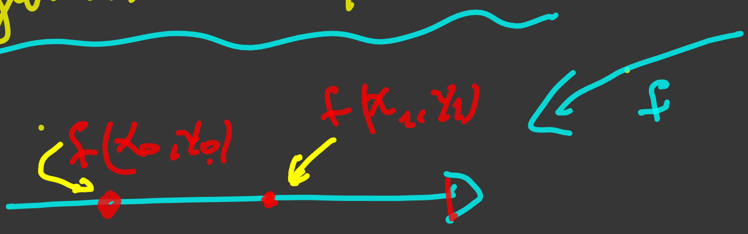
$$\frac{\partial}{\partial y}\left[f(x,y)\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[(x-1)y^2\right] = 2(x-1)y.$$

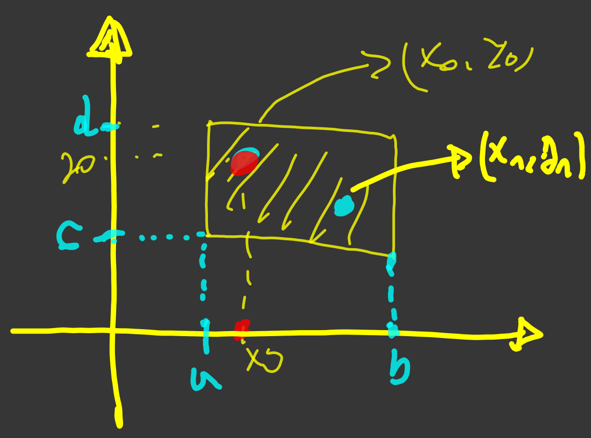
Ejemplo 2: Sea $\boxed{g(x,y) = e^{xy}}$, entonces la derivada parcial de g respecto de y, es

$$\frac{\partial}{\partial y} g(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{xy}\right) = e^{xy}\left[\frac{\partial}{\partial y}(xy)\right] = x e^{xy}$$

observe que la función $\frac{\partial}{\partial y}\left(g(x,y)\right) = xe^{xy}$ es continua relativo a las variables x e y.

Hagamos un paréntesis:





DEFINICIÓN:

Sean $f : \overbrace{]a,b[\times]c,d[}^{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función que a $(x,y) \longmapsto f(x,y)$, $\left(\begin{array}{c} a<x<b \\ c<y<d \end{array}\right)$

(x_0, y_0) un punto tal que $x_0 \in]a,b[$, $y_0 \in]c,d[$.

Diremos que f es CONTINUA en (x_0,y_0), si, y sólo si:

$\forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \forall \{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \\ \lim\limits_{k\to\infty} y_k = y_0, \end{cases}$

resulta que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = f(x_0,y_0)$

ejemplo:

Sea $\boxed{f(x,y) = \dfrac{(1-x)}{y-2}}$. Entonces f

es continua en todo punto $\underline{(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2}$

con la condición que $y_0 \neq 2$.

Efectivamente, si $x_n \to x_0$ e $y_n \to y_0$ (cuando $\underline{n\to\infty}$)

con $y_0 \neq 2$, entonces $(y_n - 2) \xrightarrow[n\to\infty]{} y_0 - 2$

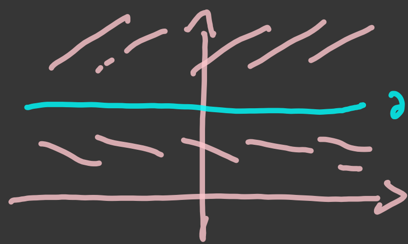
donde $y_0 - 2 \neq 0$ (cuando $n \to \infty$).

Así, $f(x_n, y_n) = \dfrac{1-x_n}{y_n-2} \xrightarrow[(n \to \infty)]{} \dfrac{1-x_0}{y_0-2} = f(x_0, y_0)$.

Es decir, f es continua (x_0, y_0), $y_0 \neq 2$.

Aquí, la f deja de ser continua en el punto $(x, 2)$ donde $x \in \mathbb{R}$ es arbitrario. Puesto que si $\begin{cases} x_n \to x_0 \\ y_n \to 2 \end{cases}$, entonces

$$f(x_n, y_n) = \frac{1-x_n}{y_n-2}$$



$y=2$

El problema aparece sólo en el denominador pues

como $y_n \to 2$, se obtiene $(y_n - 2) \to 0$.

Por tanto $f(x_n, y_n) = \dfrac{1-x_n}{y_n-2}$ en el límite se hace indefinido y no se tiene continuidad en el punto $(x_0, 2)$.

Ejemplo 3:

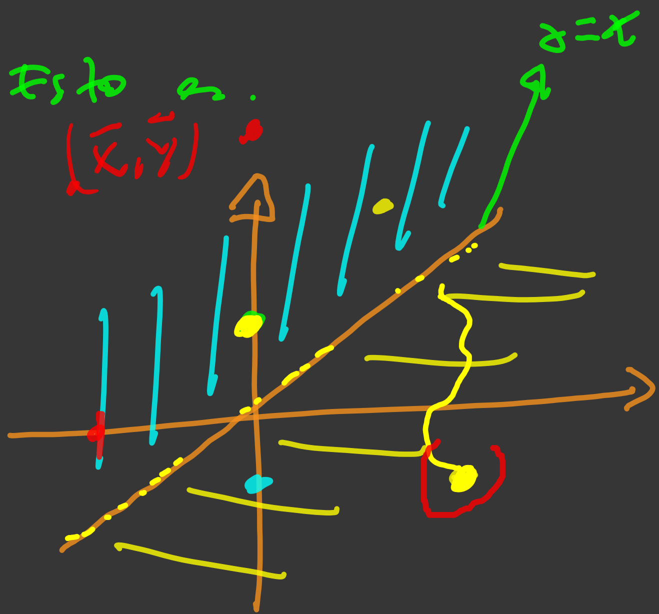
Consideremos $\boxed{g(x,y) = \dfrac{1}{x-y}}$, $x \neq y$

Entonces la derivada parcial de g respecto de y, es:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(g(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x-y}\right) = \frac{(-1)}{(x-y)^2}\,\frac{\partial}{\partial y}(x-y) = \frac{1}{(x-y)^2}.$$

Podemos ver que la función $\frac{\partial}{\partial y}(g(x,y))$ es continua si $x \neq y$. Esto es.

La función $\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{x-y}\right]$ es continua en A_1 y A_2



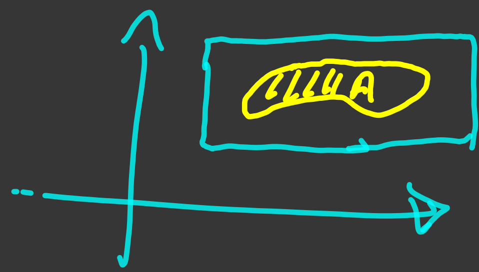
donde $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x\}$

$A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < x\}$

Observe que para $g(x,y) = \frac{1}{x-y}$, también resulta que g es continua en A_1 y A_2.

Más precisamente:

DEF: Sean $f :]a,b[\times]c,d[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función; $R =]a,b[\times]c,d[$.
Decimos que f es continua en el conjunto A, $A \subseteq R$, si f es continua en (x_0, y_0) para todo $(x_0, y_0) \in A$.



Ejemplo: sea $g(x,y) = \frac{1}{x-y}$.

De acuerdo al ejemplo precedente, g es continua en

$$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x\}$$ y en

$$A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < x\}.$$

OBS: Note que de un punto (x_1, y_1) de A_1 no se puede pasar a la región A_2 a través de una curva continua definida sobre el dominio de la función g

DEF: Sea $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Diremos que (x_0, y_0) es un **PUNTO INTERNO** de A, o que (x_0, y_0) es **INTERIOR** al conjunto A, si existe $\delta > 0$ tal que el rectángulo $R(x_0, y_0) =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\times]y_0 - \delta, y_0 + \delta[$ está completamente contenido en A. En tal caso escribiremos $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$

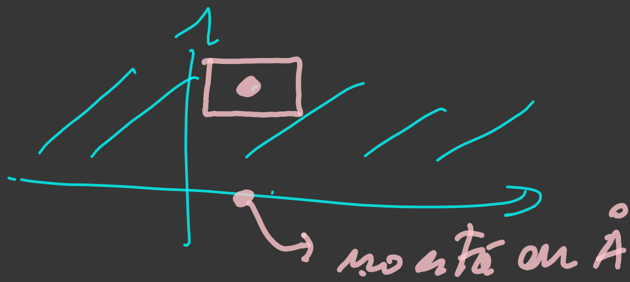
($\mathring{A}$ indica el conjunto de todos los puntos interiores de A).

Ejemplo: Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$

Entonces el punto $(1, 2) \in \mathring{A}$

Note que $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x, 2) \in \mathring{A}$

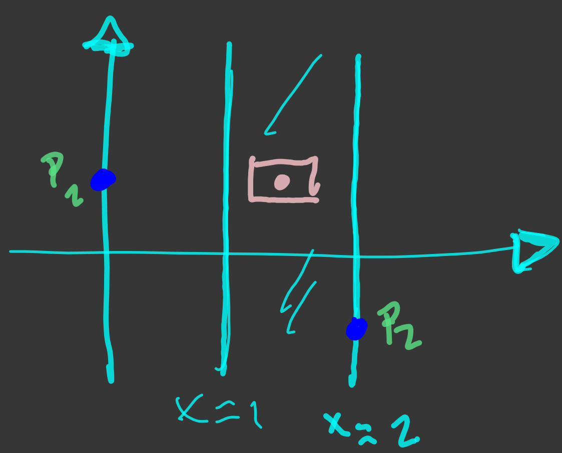
Sin embargo $(1, 0) \notin \mathring{A}$.



Ejemplo 2: Sea $A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 2\}$

Entonces $\forall y \in \mathbb{R}$, el punto $(3/2, y) \in \mathring{A}_4$

observe que $P_1(0, 1) \notin \mathring{A}$
$P_2(2, -1) \notin \mathring{A}$.



DEFINICIÓN: (CONEXIÓN)

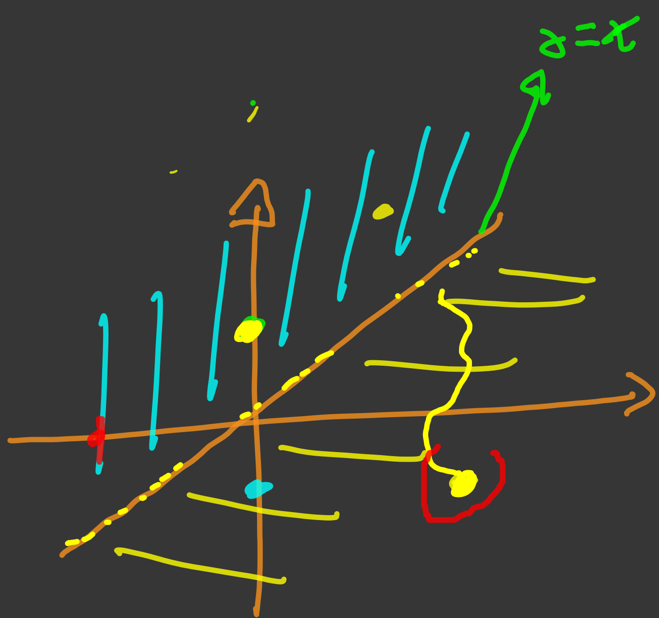
Decimos que $A \subseteq \mathbb{R}^2$ es conexo, si $\forall\ P_1, P_2 \in A$, existe curva continua que une P_1 y P_2 y que está contenida en A.

Ej:

$A \subseteq \mathbb{R}^2$

A es conexo

Ejemplo 2



$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x\}$ es conexo.

$A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < x\}$ es conexo.

$A_1 \cup A_2$ No es conexo.