Álgebra II. 525150
Listado para clase práctica 2: 2 de abril
Prof.: A. González, F. Jara, M. Selva.

Listado 2: Cuerpo, espacio vectorial, subespacio vectorial.

Los problemas marcados con **(P)** serán resueltos en práctica.

Cuerpos

1. **(P)** Analice si $\mathbb{R}$ con las operaciones suma (Δ) y producto ($*$) siguientes

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \ : \ x \,\Delta\, y = x + y - 1 \quad \wedge \quad x * y = x + y - xy,$$

   es un cuerpo.

2. Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo, diremos que un subconjunto $\mathbb{F}$ de $\mathbb{K}$ es un *subcuerpo* de $\mathbb{K}$ si:
   - 0 y 1 (neutros para la suma y el producto en $\mathbb{K}$) están en $\mathbb{F}$ y
   - dados x e y, dos elementos de $\mathbb{F}$, entonces $x + y, -x, xy$ y x^{-1} (si $x \neq 0$) también están en $\mathbb{F}$.

   Demuestre que si $\mathbb{F}$ es un subcuerpo, entonces es un cuerpo.

3. Sea $\mathbb{F}$ un subcuerpo cualesquiera de $\mathbb{C}$.
   (a) Justifique por qué $2 \in \mathbb{F}$.
   (b) Demuestre que $\mathbb{F}$ contiene a todos los números enteros.
   (c) Demuestre que para cualquier número racional $\frac{m}{n}$ se cumple que $\frac{m}{n}$ es elemento de $\mathbb{F}$.

Espacios vectoriales

1. Analice si $\mathbb{R}^2$ con la suma usual entre elementos de $\mathbb{R}^2$ y el siguiente producto por un escalar real

$$\alpha \odot (a,\, b)^{\mathrm{T}} = \left(\alpha^2\, a,\, \alpha^2\, b\right)^{\mathrm{T}}$$

   es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

2. **(P)** Decida si $\mathbb{R}^+$, con las operaciones de suma $\oplus$ y producto $\odot$ por escalar (real) siguientes

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \ : \ x \oplus y = x \cdot y, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+, \forall \alpha \in \mathbb{R} \ : \ \alpha \odot x = x^{\alpha}.$$

   es un espacio vectorial real.

   Si lo es, compruebe que

$$\forall\, u \in \mathbb{R}^+ \ : \ 0 \odot u = \theta \qquad \text{y} \qquad (-u) = (-1) \odot u,$$

   si θ denota al vector nulo de $(\mathbb{R}^+, \oplus, \odot)$ y $-u$ es el inverso aditivo de un vector $u \in \mathbb{R}^+$.

3. Para cada par de vectores $(a,b)^{\mathrm{T}}, (x,y)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$ y cada $\alpha \in \mathbb{R}$ se definen las operaciones

$$\begin{aligned} (x,y)^{\mathrm{T}} \oplus (a,b)^{\mathrm{T}} &= (x+a, y+b)^{\mathrm{T}} \\ \alpha \odot (x,y)^{\mathrm{T}} &= (\alpha x, y)^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

   Analice si $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

4. Para cada par de vectores $(a,b)^{\mathrm{T}}, (x,y)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^2$ y cada $\alpha \in \mathbb{C}$ se definen las operaciones

$$\begin{aligned} (x,y)^{\mathrm{T}} \oplus (a,b)^{\mathrm{T}} &= (x+a, y+b)^{\mathrm{T}} \\ \alpha \odot (x,y)^{\mathrm{T}} &= (\alpha x, 0)^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

   Analice si $(\mathbb{C}^2, \oplus, \odot)$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

Subespacios vectoriales

1. En cada uno de los casos siguientes el conjunto V es un e.v. sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, con las operaciones usuales de suma de elementos de V y producto de un elemento de V por un escalar en $\mathbb{K}$.

   Por cada conjunto V se han definido uno o dos subconjuntos de V.

   Encuentre en cada caso tres elementos de V que pertenezcan a los subconjuntos dados. Determine cuáles de esos subconjuntos son espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ especificado, con las mismas operaciones de suma y producto por escalar definidas en V.

   (a) $V = \mathcal{F}((0,1), \mathbb{R})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,

$$\mathcal{A} = \left\{ f \in \mathcal{F}((0,1), \mathbb{R}) : \int_0^1 f(x)dx = 0 \right\}.$$

   (b) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,

   - $\mathcal{B} = \left\{ (x,y,z)^{\mathrm{T}} \in V \ : \ xyz \geq 0 \right\},$
   - $\mathcal{C} = \left\{ (x,y,z)^{\mathrm{T}} \in V \ : \ x - yz = 0 \right\}.$

   (c) $V = \mathbb{C}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,

   - **(P)** $\mathcal{D}_1 = \left\{ (x,y)^{\mathrm{T}} \in V \ : \ \overline{y} = i \operatorname{Im}(x) \right\},$
   - $\mathcal{E}_1 = \left\{ (x,y)^{\mathrm{T}} \in V \ : \ x + iy = 0 \right\}.$

   (d) $V = \mathbb{C}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,

   - $\mathcal{D}_2 = \left\{ (x,y)^{\mathrm{T}} \in V \ : \ \overline{y} = i \operatorname{Im}(x) \right\},$
   - $\mathcal{E}_2 = \left\{ (x,y)^{\mathrm{T}} \in V \ : \ x + y \in \mathbb{R} \right\}.$

   (e) $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,

   - $\mathcal{F} = \{ p \in V \ : \ p(1) + p(-1) = 0 \},$
   - **(P)** $\mathcal{G} = \{ (a+1)x^2 + b(x+1) \in V \ : \ a, b \in \mathbb{R} \}.$

(f) $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,

- $\mathcal{H} = \{f \in V \ : \ f \text{ es sobreyectiva}\}$,
- $\mathcal{I} = \{f \in V \ : \ f \text{ es par}\}$.

(g) $V = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

- $\mathcal{J} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in V \ : \ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0 \right\}$,
- **(P)** $\mathcal{K} = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in V \ : \ z_1 = z_n \right\}$.

Observación:
$\mathcal{F}((0,1), \mathbb{R}) = \{f : (0,1) \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ es función}\}$, $\quad \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ es función}\}$.

2. Dé un ejemplo de un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que sea cerrado para la suma, pero que no sea cerrado para la ponderación por números reales.

3. Dé un ejemplo de un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que sea cerrado para la ponderación por números reales, pero que no sea cerrado para la suma.

4. Justifique por qué, si bien el conjunto vacío $\emptyset$ es subconjunto de V, no puede ser subespacio de V.

5. Sean V un $\mathbb{K}$-e.v y U, un s.e.v. de V. Muestre que para todo escalar $\alpha \neq 0$, el conjunto

$$\alpha U := \{\alpha \cdot u : \ u \in U\}$$

es igual a U.

Observación: Veamos algunos casos particulares de la demostración anterior (que debemos hacer para un $\mathbb{K}$-e.v. V cualquiera y un s.e.v. cualquiera de V):

- Tomemos $V = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y

$$U = \left\{ P \in \mathbb{R}^2 \ : \ \vec{OP} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

U está formado por los pares ordenados (puntos) de $\mathbb{R}^2$ que están en la recta con centro en el origen y vector director $\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Veamos por qué $2U = \{2P \ : \ P \in U\}$ es igual a U. Primero imagínalo gráficamente. Dibuja el conjunto U.

Denotemos por O al origen de coordenadas. Toma un punto cualquiera $P = (x, y)$ en U. Nota que P está en U si y solo si $\vec{OP}$ es paralelo a $\vec{r}$ o $\vec{OP}$ es el vector nulo. Esto ocurre si y solo si el vector desde el origen a $2P = (2x, 2y)$ es paralelo a $\vec{r}$ o es el vector nulo. Es decir, P está en U si y solo si $2P$ está en U, lo que demuestra que $U = 2U$.

Veamos ahora un ejemplo que no podemos graficar.

- $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,

  $$U = \left\{ ax^2 \ : \ a \in \mathbb{R} \right\}.$$

  Entonces

  $$2U = \{2p \ : \ p \in U\}.$$

  Demostremos la igualdad entre estos conjuntos.

  $U \subseteq 2U$ porque si $p \in U$, entonces $p(x) = ax^2$ y $a \in \mathbb{R}$, pero $p(x) = ax^2 = 2\left(\frac{a}{2}x^2\right)$. El polinomio q tal que $q(x) = \frac{a}{2}x^2$ es elemento de U, por tanto, $p = 2q$ es elemento de $2U$.

  $2U \subseteq U$ porque si $q \in 2U$, entonces $q = 2p$ con $p \in U$, es decir, $q(x) = 2p(x)$. Como $p \in U$, $p(x) = ax^2$ y $a \in \mathbb{R}$. Es decir, $q(x) = 2(ax^2) = (2a)x^2$ y esta igualdad indica que $q \in U$.

- ¿Para qué seguir trabajando con espacios, subespacios particulares y $\alpha = 2$? ¡Hagamos la demostración del problema!