Solución Parcial

Listado 10 : Sistemas de ecuaciones lineales

1. Escriba los siguientes sistemas de ecuaciones lineales en forma matricial.

(f) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \qquad = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - \ x_2 \qquad = 0 \end{cases}$

Decida, **sin transformarlos a sistemas en forma escalonada**, si ellos son compatibles determinados, indeterminados o incompatibles.

Solución:

La forma matricial del sistema es: $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Claramente existen escalares $x, y, z \in \mathbb{R}$ tales que

(1) $x \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, pues basta que $x = y = z = 0$.

Por lo tanto el sistema es compatible.

Por otro lado $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es un conjunto l.i, en efecto,

$$\alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -\alpha + 2\beta = 0 \wedge 3\alpha - 3\beta + \gamma = 0 \wedge \alpha - \beta = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta \wedge -\alpha + 2\beta = 0 \wedge 3\alpha - 3\beta + \gamma = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta \wedge -\beta + 2\beta = 0 \wedge 3\beta - 3\beta + \gamma = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta \wedge \beta = 0 \wedge \gamma = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Como el conjunto es l.i, entonces la c.l en (1) es única y el sistema es compatible determinado.

2. Cada una de estas matrices está en forma escalonada por filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De ellas identifique rango, imagen y cuáles columnas forman una base de la imagen.

Solución :

Consideremos $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$Im(A) = Im\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = Im\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

donde $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es l.i, ya que se obtuvieron de columnas con pivote de la matriz escalonada. Luego $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es base de $Im(A)$.

De lo anterior se tiene que $r(A) = 2$, aunque ya se podía apreciar pues corresponde al número de filas no nulas en una matriz en forma escalonada

Finalmente, como $Im(A)$ es subespacio de $\mathbb{R}^2$ con igual dimensión que $\mathbb{R}^2$, entonces $Im(A) = \mathbb{R}^2$.

5. Determine una base de la imagen de las siguientes matrices. Escoja, para cada una de ellas y si es posible, vectores b de modo que el sistema de ecuaciones lineales con cada una de estas matrices y parte derecha b sea compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible. Cuando no sea posible encontrar b, justifique por qué.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

Solución:

Consideremos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad Im(A) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

donde $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es l.i y por lo tanto base de $Im(A)$.

i) Para que $Ax=b$ sea compatible: $b \in Im(A)$. No podrá ser compatible determinado pues las columnas de A no forman un conjunto l.i.

Así escogiendo $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ el sistema $Ax=b$ es compatible indeterminado.

ii) Para que $Ax=b$ sea incompatible: $b \notin Im(A)$.

Así escogiendo

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ el sistema $Ax=b$ es incompatible.