UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

JAG/VAQ/MPB/CMS/GAJ/FOC/PHL/SBB/HPV

LISTADO N$^{\underline{o}}$3

CÁLCULO II - 527150

1. (A) Sea $f : [0,7] \to \mathbb{R}$ una función continua sobre $[0,7]$ tal que:
$$\int_0^5 f(x)\,dx = 4; \quad \int_3^7 f(x)\,dx = -1 \;\text{ y }\; \int_0^7 f(x)\,dx = 2$$
Determine el valor de $\displaystyle\int_3^5 f(x)\,dx$.

2. Usar la propiedad de comparación para mostrar:
$$\text{(a) (A) } 2 \leq \int_0^2 e^{x^2/4}\,dx \leq 2e \qquad \text{(b) } 0 \leq \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2(x)\,dx \leq \frac{\pi}{4}$$

3. Usando el Teorema del Valor Medio para Integrales, calcule $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} g(t)$.
$$\text{(a) } g(t) = \int_{1/t}^{2/t} (1-\cos(x^3))\,dx \qquad \text{(b) (A) } g(t) = \int_t^{2t} \frac{1}{2x}\cdot\frac{\sin(x)}{x+1}\,dx$$

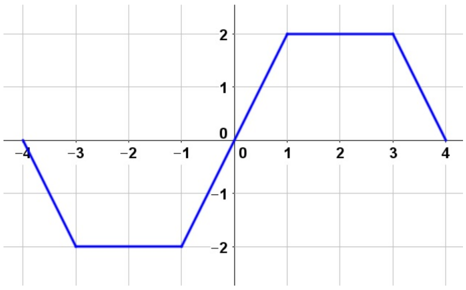
4. La población P medida en millones de personas de una cierta comunidad t años después del 2010 viene dada por
$$P(t) = \frac{e^{0.2t}}{4+e^{0.2t}}$$
¿Cuál es la población promedio de esta comunidad durante la decada del $2010-2020$?

5. Calcular la derivada de las siguientes funciones:
$$\text{(a) } F(x) = \int_3^x (t^2+2)^5\,dt \quad \text{(b) (A) } G(x) = \int_{\sqrt{x}}^0 \sqrt{1+t^2}\,dt \quad \text{(c) (A) } L(x) = \int_{x^2}^{\cos^2(x)} \frac{\sin(2t)}{t^2+1}\,dt$$

6. Sea $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, la función definida por:
$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^{x^2} (\sin(t)-t)\,dt & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$
   (a) Mostrar que F es continua en todo $\mathbb{R}$.
   (b) Calcular la derivada de F en cada punto donde exista.

7. (A) Dada la función $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,dt$
   (a) Use la propiedad de comparación y demuestre que $\dfrac{x^2-x}{\ln(x^2)} \leq F(x)$ para todo $x > 1$.
   (b) Use la desigualdad para calcular $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x^2}$.

8. Sea $f : [-4, 4] \to \mathbb{R}$ la función cuyo gráfico está dado por



y sea $F(x) = \displaystyle\int_{-x^2}^{x+2} f(t)\, dt$. Determine la ecuación de la recta tangente a F en $x_0 = 1$.

9. Calcular las siguientes integrales definidas:

(a) (A) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{t^2}{\sqrt{t+2}}\, dt$ (b) (A) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \sin^2(u)\, du$ (c) $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

(d) $\displaystyle\int_{0}^{\ln(2)} e^{x+e^x}\, dx$ (e) (A) $\displaystyle\int_{-1}^{0} z^2\sqrt{3z^3+4}\, dz$ (f) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/3} \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)}\, dx$

(g) (A) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \cos^6(x)\tan(x)\, dx$ (h) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} e^{3x}\cos(2x)\, dx$ (i) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 e^x\, dx$

10. Sea f una función continua en el intervalo $[-a, a]$, demostrar que:

- (A) Si f es una función impar, entonces $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$.
- Si f es una función par, entonces $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\, dx$.

Usando el resultado anterior determinar el valor de las siguientes integrales definidas:

(a) (A) $\displaystyle\int_{-2}^{2} 3x - x^3\, dx$ (b) $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \frac{x}{1-x^2}\, dx$ (c) (A) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin(x)\tan(x)\, dx$

11. Determinar los valores reales de a, b, c y d de modo que la función definida por

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

tenga un punto crítico en $x = 1$, un punto de inflexión en $(0, 0)$ y tal que la $\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{5}{4}$.

12. (A) Una función es tal que $f'(x) = \dfrac{\cos(x)}{x}$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ y $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1$. Utilice un método de integración apropiado para calcular

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} f(x)\, dx$$

13. Indique si las siguientes aseveraciones son verdaderas o falsas. Justificar su respuesta.

(a) (A) La función $f(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x^2} e^{-t^2}\, dt$ es estrictamente creciente para todo $x \in \left]0, +\infty\right[$.

(b) (A) Si $\displaystyle\int_{1}^{2} f(u)\, du = 10$, entonces $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{2}} x f(x^2)\, dx = 5$.

(c) La integral definida $\displaystyle\int_{0}^{4} \left|\frac{x-2}{x+5}\right| dx = 14\ln(7) - 14\ln(3) - 7\ln(4)$.