UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

JAG/VAQ/MPB/CMS/GAJ/FOC/PHL/SBB/HPV

Cálculo II (527150)
Evaluación 2

Problema 1 (15 puntos). Justificando sus respuestas, indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) (6 puntos) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y $c > 0$, entonces

$$\int_{ca}^{+\infty} f(t)dt = c\int_{a}^{+\infty} f(ct)\, dt$$

b) (9 puntos) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable, $f(1) = 0$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, entonces

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{f'(1+2x)}{1+[f(1+2x)]^2}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

Solución. a) Haciendo el cambio de variable $u = ct$ se tiene que $du = c\,dt$. Si $t = a$, entonces $u = ca$. Si $t = b$, entonces $u = cb$. Así,

$$\begin{aligned} c\int_{a}^{+\infty} f(ct)\, dt &= c \lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(ct)\, dt \\ &= c \lim_{b\to+\infty}\int_{ac}^{bc} f(u)\frac{1}{c}\, du \\ &= \int_{ca}^{+\infty} f(u)\, du \end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación es verdadera.

b) Haciendo el cambio de variable $f(1+2x) = u$ se tiene que $2f'(1+2x)\, dx = du$. Si $x = 0$, entonces $u = f(1) = 0$. Si $x = b$, entonces $u = f(1+2b)$. Luego,

$$\begin{aligned} \int_{0}^{+\infty} \frac{f'(1+2x)}{1+[f(1+2x)]^2}\, dx &= \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} \frac{f'(1+2x)}{1+[f(1+2x)]^2}\, dx \\ &= \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{f(1+2b)} \frac{1}{1+u^2}\frac{1}{2}\, du \\ &= \frac{1}{2}\left[\lim_{b\to+\infty} \arctan(f(1+2b)) - \arctan 0\right] \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la afirmación es falsa.

Problema 2 (15 puntos). Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua, positiva y tal que $xf(x) < 1$ para todo $x \geq 1$.

a) (6 puntos) Decida si

$$\int_{0}^{1} \frac{f(x)[1-\cos(x)]}{x}\, dx$$

es una integral impropia. Justifique.

b) (9 puntos) Analice la convergencia de

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(x)[1-\cos(x)]}{x}\, dx$$

argumentando adecuadamente.

Solución. a) Se analiza en $x = 0$. Debido que f es continua en $[0, \infty)$ tenemos

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)[1-\cos(x)]}{x} = f(0) \cdot 0 = 0 \in \mathbb{R}$$

En lo anterior se ocupa el límite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0,$$

que se puede evaluar usando la regla de L'Hôpital. Por lo tanto la integral $\int_0^1 \frac{f(x)[1-\cos(x)]}{x} dx$ no es impropia ($x = 0$ no es una asíntota vertical).

b) Multiplicando la expresión $xf(x) < 1$ por $\frac{1}{x^2}$ se tiene

$$0 < \frac{f(x)}{x} < \frac{1}{x^2} \quad \text{para} \quad x \in [1, \infty)$$

Usando la desigualdad anterior y $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ se tiene

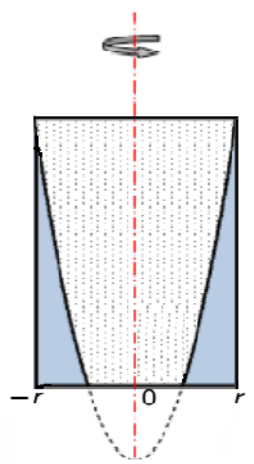
$$0 \leq \frac{f(x)[1-\cos(x)]}{x} < \frac{2}{x^2} \quad \text{para} \quad x \in [1, \infty).$$

Además, $\int_1^\infty \frac{2}{x^2}\, dx$ es convergente por criterio integral p con $p = 2 > 1$.
Así la integral $\int_1^\infty \frac{f(x)[1-\cos(x)]}{x} dx$, converge por criterio de comparación.
Finalmente,

$$\int_0^\infty \frac{f(x)[1-\cos(x)]}{x} dx = \int_0^1 \frac{f(x)[1-\cos(x)]}{x} dx + \int_1^\infty \frac{f(x)[1-\cos(x)]}{x} dx$$

converge.

Problema 3 (15 puntos). Un cilindro circular vertical de radio r, con agua, gira en torno a su eje como lo ilustra la figura, produciendo que la superficie del agua se eleve en las paredes y baje a medida que se acerca al centro. Al hacer un corte vertical, observamos que se puede ver una parte circular en la base del cilindro y que la superficie del agua se ajusta a $y = 2x^2 - 1$. Suponiendo que el volumen de agua es constante en todo momento ¿Cúal es la altura del agua (en función de r) cuando vuelve a su estado de reposo?



Solución. La raíz de $y = 2x^2 - 1$ en el primer cuadrante es $\sqrt{\frac{1}{2}}$.
El volumen del agua mientras gira el cilindro se puede calcular mediante el método del anillo,

$$\begin{aligned} V = \int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^{r} 2\pi x(2x^2 - 1)dx &= 2\pi \int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^{r} (2x^3 - x)dx \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{2}r^4 - \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{8} \right) \qquad \text{(10 puntos)} \end{aligned}$$

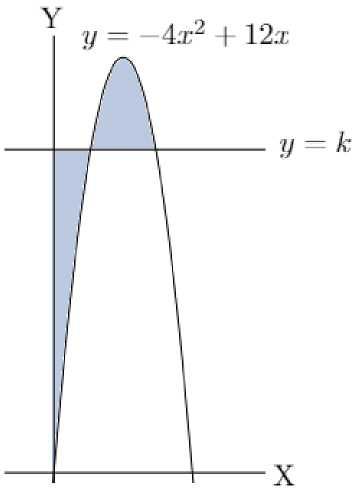
El volumen del agua en reposo es $\pi r^2 h$. Como el volumen de agua es constante en todo momento, se tiene

$$\pi r^2 h = 2\pi \left(\frac{1}{2}r^4 - \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{8} \right)$$

De la última ecuación se tiene que la altura del agua (en función de r) en reposo es

$$h = r^2 + \frac{1}{4}r^{-2} - 1 \qquad \text{(5 puntos)}$$

Problema 4 (15 puntos). La figura muestra una recta $y = k$ que intersecta a la curva $y = -4x^2 + 12x$ en dos puntos. Determine el valor de k para que las áreas sombreadas sean iguales.



Solución. Sean a y b las abscisas de los puntos de intersección. Igualando las áreas sombreadas se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^a k - (-4x^2 + 12x)\, dx &= \int_a^b -4x^2 + 12x - k\, dx \text{ (10 puntos)} \\ \frac{4a^3}{3} - 6a^2 + ka &= -\frac{4b^3}{3} + 6b^2 - kb + \frac{4a^3}{3} - 6a^2 + ka \\ 0 &= b\left(-\frac{4b^2}{3} + 6b - k \right) \\ k &= -\frac{4b^2}{3} + 6b \quad (b > 0) \end{aligned}$$

Dado que el punto (b, k) pertenece a la curva $y = -4x^2 + 12x$, se tiene que $k = -4b^2 + 12b$. Así,

$$\begin{aligned} -\frac{4b^2}{3} + 6b &= -4b^2 + 12b \\ b(8b - 18) &= 0 \\ b &= \frac{9}{4} \quad (b > 0) \end{aligned}$$

Reemplazando en una de las expresiones anteriores resulta $k = \dfrac{27}{4}$ (5 puntos).
