Listado 9: Repaso del contenido a evaluar en certamen 2.

Los problemas marcados con **(P)** serán resueltos en práctica.

1. **(P)** Sea U el siguiente conjunto de vectores del espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{C}$,

$$U = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \ : \ AX = XA\} \text{ con } X = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

   (a) Muestre que U es s.e.v. de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

   (b) Determine la dimensión de U. ¿Es $U = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$? Si su respuesta es negativa, encuentre una matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ que no pertenezca a U, es decir, encuentre una matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ cuyo producto por X no sea conmutativo.

2. **(P)** Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se define la *traza de A*, denotada por $\operatorname{tr}(A)$, como la suma de los elementos en la diagonal principal de A, es decir,

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A(i,i).$$

   Por ejemplo, la traza de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ es $A(1,1) + A(2,2) = 1 + 4 = 5$.

   Sea $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la función que a cada $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ le asigna $f(A) = \operatorname{tr}(A)$.

   (a) Demuestre que f es lineal.

   (b) Determine núcleo, nulidad, imagen y rango de f.

   (c) ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva?

3. **(P)** Sea V un e.v. sobre $\mathbb{K}$ cuya dimensión es 3. El conjunto $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de V.

   (a) Demuestre que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2 - v_1, v_3 - v_2\}$ también es base de V.

   (b) Sea $T : V \to V$ una transformación lineal cuya matriz asociada con respecto a las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ de V es la siguiente:

$$[T]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Determine $[T]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$.

(c) Demuestre que T es invertible y que $L : V \to V$ tal que

$$[L]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

es la inversa de T.

4. **(P)** Sea $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $P^2 = P$.

(a) Demuestre que $(I - P)^2 = I - P$.

(b) Demuestre que para toda matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se cumple que $I + PA(I - P)$ es invertible y su inversa es la matriz $I - PA(I - P)$.

(c) Demuestre que si P es además una matriz simétrica, entonces para todo par de matrices columna $x, y \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ se cumple que $(Px)^{\mathrm{T}}(I - P)y = 0$.