Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemática
Departamento de Matemática

Cálculo II

Ingeniería Civil

Prof. Víctor Aros Quinán

Segundo Semestre 2021

Clase Nº8: Cálculo II
Teorema Fundamental del Cálculo

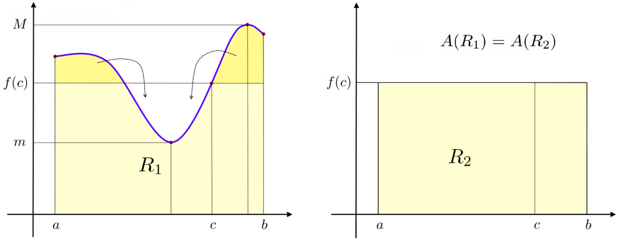
Teorema del Valor Medio para Integrales

Teorema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

El teorema anterior se puede visualizar de manera particular en la siguiente imagen:



Teorema del Valor Medio para Integrales

Demostración: Como f es continua en $[a, b]$, por el Teorema de los Valores Extremos f alcanza un máximo y mínimo en $[a, b]$, lo cual se puede expresar de la siguiente forma:

$$m \leq f(x) \leq M, \quad \forall x \in [a, b]$$

Luego, por la propiedad de comparación se tiene:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

Luego, por el TVI se puede afirmar que existe $c \in [a, b]$, tal que:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

lo cual cumple lo pedido.

Teorema del Valor Medio para Integrales

Observación: al valor $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ se denomina valor promedio de f sobre $[a, b]$.

Ejemplos:

1. Sea $f(x) = x^2$ y sea R la región acotada por el gráfico de f, el eje X y las rectas $x = 1$ y $x = 3$. Encontrar $c \in [1, 3]$ tal que $A(R)$ sea igual al área de un rectángulo de base la longitud del intervalo $[1, 3]$ y altura $f(c)$.

2. Considere la función $h(x) = \sqrt{x}$ con $x \in [1, 4]$ y calcule el valor promedio de h sobre el intervalo $[1, 4]$.

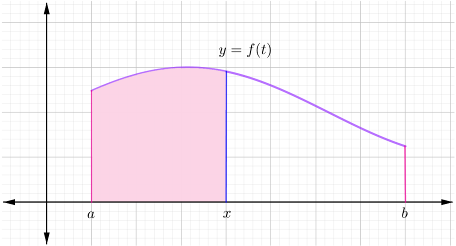
Integral Definida

Definición:

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y sea $x \in [a,b]$. Llamamos función integral de f en $[a,b]$ a la función $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por:

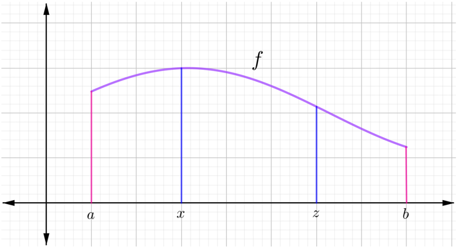
$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

La definición anterior se puede visualizar de manera particular en la siguiente imagen:



Integral Definida

Consideremos la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y además $x, z \in \,]a, b[$, lo cual se visualiza en la siguiente imagen:



Además, notemos que:

$$G(z) = \int_a^z f(t)\, dx = \text{Área encerrada por } G_f \text{ y el eje } X \text{ entre } [a, z]$$

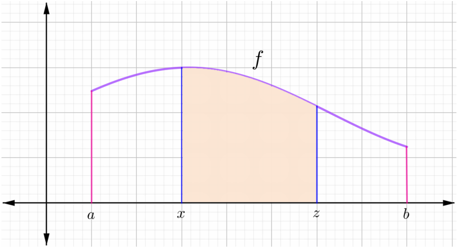
$$G(x) = \int_a^x f(t)\, dx = \text{Área encerrada por } G_f \text{ y el eje } X \text{ entre } [a, x]$$

Integral Definida

Por lo tanto, $G(z) - G(x)$ es el área encerrada por G_f, entre x y z y si z está suficientemente cerca de x, entonces esta área es aproximadamente $f(x)(z-x)$. Luego:

$$G(z) - G(x) \approx f(x)(z-x) \Leftrightarrow f(x) \approx \frac{G(z) - G(x)}{z - x}$$

lo anterior sucede para un $z \approx x$.



Teorema Fundamental del Cálculo

El siguiente teorema, que llamaremos

“Primer Teorema Fundamental del Cálculo”

muestra que toda función continua admite una función que, al derivarla nos entrega la original.

Teorema

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en I y sea $c \in I$. Entonces, la función G definida por:

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \;\; x \in I$$

es derivable sobre I y $G'(x) = f(x)$ en el interior de I.

Teorema Fundamental del Cálculo

Demostración:

Ejemplos

1. Determine la derivada con respecto a x de las siguientes funciones:

   (a) $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\, dt$ (b) $H(x) = \displaystyle\int_x^2 3t^2\, dt$

   (c) $G(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \cos(t^3)\, dt$ (d) $K(x) = \displaystyle\int_{\sin(x)}^1 \frac{1}{\sqrt{t}+t}\, dt$

2. Considere la función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} \displaystyle\int_0^{x-1} \sin(s^2)\, ds & , x \neq 1 \\ 0 & , x = 1 \end{cases}$$

   (a) Determine, por definición, si F es continua en $x_0 = 1$.
   (b) Demuestre que F es derivable en $x_0 = 1$.
   (c) Calcule la derivada de F para todo $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

Teorema Fundamental del Cálculo

El siguiente teorema que llamaremos

"Segundo Teorema Fundamental del Cálculo"

nos ayudará a calcular el valor de una integral definida.

Teorema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y sea F una primitiva de f, entonces:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Teorema Fundamental del Cálculo

Demostración: Sea G la función definida por $G(x) = \int_a^x f(x)\,dx$, para ella se cumple:

$$G(a) = 0 \text{ y } G(b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

luego, considerando ambas condiciones, se tiene:

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

Ahora bien, podemos notar que F y G son primitivas de f, por ende $G(x) = F(x) + C$, siendo C una constante real. Por lo tanto:

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a)$$

Teorema Fundamental del Cálculo

Observación:

1. Para efectos prácticos, adoptaremos la siguiente notación:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

2. Puesto que $G'(x) = f(x)$, lo que realmente tenemos es lo siguiente:

$$\frac{d}{dx}\int_c^x f(t)\,dt = f(x)$$

Ahora bien, por el TFC, también tenemos:

$$\int_a^x \frac{d}{dt}F(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

Ejemplos

1. Calcule las siguientes integrales definidas:

(a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x)\, dx$ (b) $\displaystyle\int_1^{2} 3x^2\, dx$ (c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{e^x+x}\, dx$

(d) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\, dx$ (e) $\displaystyle\int_1^{e} \frac{1}{x+1}\, dx$ (f) $\displaystyle\int_0^{3} 4x\sqrt{6-2x}\, dx$

2. Sabiendo que $\displaystyle\int_1^{2} xf(x)\, du = 8$ determine el valor de:

$$\int_1^4 f\left(\sqrt{x}\right)\, dx$$

Ejercicios

1. Sea $F : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$F(x) = \int_{x}^{x^2} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\, dt$$

   Calcule $F'(x)$ y determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

2. Usando la sustitución $x = 2t^4$, calcule la siguiente integral

$$\int_{0}^{2} \frac{\sqrt[4]{2x}}{\sqrt{2} + \sqrt{x}}\, dx$$

3. Determine el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} \int_{x}^{2} \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{t}\right)\, dt$$