Álgebra II. 525150
Listado para clase práctica 8: 4 de junio
Prof.: A. González, F. Jara, M. Selva.

Listado 8: Matriz asociada a compuesta de transformaciones lineales. Producto de matrices y sus propiedades. Ecuaciones matriciales.
Los problemas marcados con **(P)** serán resueltos en práctica.

1. Transformaciones lineales

En los problemas de esta sección te pedimos definir algunas transformaciones lineales. Recuerda que para definir una transformación lineal debes señalar: espacio de partida, espacio de llegada y

- vector en el espacio de llegada que resulta de evaluar la transformación en un vector cualquiera del espacio de partida **o**
- vectores en el espacio de llegada que resultan de evaluar la transformación en una base del espacio de partida **o**
- matriz asociada a la transformación con respecto a bases de los espacios de partida y llegada.

Con la información en cualquiera de los tres puntos anteriores es posible evaluar la transformación en cualquier vector del espacio de partida y también es posible estudiar sus propiedades.

1. Dados los siguientes pares de transformaciones lineales T y L, determine, si es posible, $T \circ L$ y $L \circ T$, $(T \circ L)(u)$, $(L \circ T)(v)$

   (a) $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$, $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tales que

$$[T]_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad [L]_C^D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   con

$$B = \{1, x, x^2\}, \qquad C = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \qquad D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

   Además,

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad [v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   (b) **(P)** $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$, $L : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tales que

$$[T]_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad [L]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

con

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \qquad C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Además,

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Matrices

Recuerda que una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es invertible si y solo si

- existe B tal que $AB = BA = I$,
- el núcleo de A solo contiene al vector nulo de $\mathbb{R}^n$ (que es equivalente a que la aplicación $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida mediante $T(x) = Ax$ es inyectiva y, por tanto, biyectiva),
- el espacio generado por las columnas de A, es decir, la imagen de A, tiene dimensión n (que es equivalente a que la aplicación $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida mediante $T(x) = Ax$ es sobreyectiva y, por tanto, biyectiva).

En los problemas propuestos puedes utilizar cualquiera de las tres opciones anteriores para analizar si una matriz es invertible.

1. Sean A, B, C, D, E y F las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Calcule, si es posible, AB, BA, $CC = C^2$, CD, DF, CE, EC.

   (b) ¿Qué otros productos son posibles?

2. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcule

1) $2(AB-BA)^{\mathrm{T}}$,
2) AB^2,
3) AC^2-I,
4) $(A+C)(A-C)$,
5) A^2-C^2. ¿Es igual a $(A+C)(A-C)$?

(b) Encuentre una matriz $X \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que

1) $2X+3B=5C$,
2) $\left(A-\frac{3}{4}X\right)^{\mathrm{T}}=C$.

3. Sean $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $x \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ tales que para cada par de valores $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$ se cumple que

$$A(i,j)=\begin{cases} 1, & \text{si } i=j, \\ -1, & \text{si } 1\leq i\leq n-1 \text{ y } j=i+1, \\ -1, & \text{si } i=1 \text{ y } j=n, \\ -1, & \text{si } i=n \text{ y } j=1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}, \qquad x(i,1)=i.$$

(a) Escriba A y x cuando $n=2$ y $n=3$.
(b) Calcule Ax y $x^{\mathrm{T}}A$ en los dos casos anteriores.
(c) Calcule Ax y $x^{\mathrm{T}}A$ considerando que n es un número natural cualquiera.

4. **(P)** Sean A y B las siguientes matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Demuestre que A no es invertible, pero B sí lo es.
(b) Encuentre, si es posible, matrices $C,D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, distintas entre sí, de modo que $AC=AD$.
(c) Encuentre, si es posible, matrices $C,D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, distintas entre sí, de modo que $BC=BD$.
(d) Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En general, no es cierto que si C y D son tales que $AC=AD$, entonces $C=D$. Sin embargo, si A es invertible, entonces $AC=AD$ sí implica que $C=D$. Demuéstrelo.

5. **(P)** Sea

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Demuestre que A es invertible.
(b) Encuentre números reales a y b tales que $A^2+aA+bI=\Theta$.
(c) Usando la relación demostrada en $5b$, encuentre una expresión para la inversa de A y calcúlela.
(d) Compruebe el resultado obtenido en $5c$.

6. Sea $C \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ la matriz triangular superior que satisface que para cada par de valores $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$C(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{si } 1 \leq i \leq 4 \text{ y } j = i, \\ 1, & \text{si } 1 \leq i \leq 3 \text{ y } j = i+1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

   (a) Determine $N = C - I$ (I es la matriz identidad de orden 4).

   (b) Determine $N^i, \ i = 0, 1, 2, 3, 4$.

   (c) Muestre que $C = N + I$ es invertible y

$$C^{-1} = I - N + N^2 - N^3.$$

7. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se dice que A es *idempotente* si y solo si $A^2 = A$ y que A es *involutiva* si y solo si $A^2 = I$.

   Demuestre que si A es involutiva, entonces las matrices P y Q definidas por

$$P = \frac{1}{2}(I + A) \quad \text{y} \quad Q = \frac{1}{2}(I - A)$$

   son idempotentes y $PQ = \Theta$.

8. **(P)** Sea $M \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ tal que $M^{\mathrm{T}} M$ es invertible.

   (a) Muestre que $M^{\mathrm{T}} M$ es simétrica.

   (b) Demuestre que la matriz

$$P = I - M(M^{\mathrm{T}} M)^{-1} M^{\mathrm{T}}$$

   es simétrica, idempotente y satisface $PM = \Theta$.

9. **(P)** Sean $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $e \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \qquad e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Demuestre que $Je = ne$ y $J^2 = nJ$.

   (b) Muestre que $e \in \ker(I - \frac{1}{n}J)$. Note que esto significa que $I - \frac{1}{n}J$ no es invertible.

   (c) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \frac{1}{n}$. Determine $\beta \in \mathbb{R}$ de modo que $(I - \alpha J)^{-1} = I + \beta J$.

   (d) ¿Qué valores tienen nulidad y rango de $I - \alpha J$ cuando $\alpha \neq \frac{1}{n}$?