Clase 20

Cálculo 3

Carlos Martínez Ranero

Departamento de Matemática
Universidad de Concepción

Recordatorio de la clase anterior.

- Teorema de cambio de variable.
- Coordenadas cilíndricas.
- Coordenadas esféricas.

Objetivos de la clase de hoy.

- Coordenadas esféricas.
- Cambios de variables generales.

Las coordenadas esféricas están dadas por la transformación

$$G\colon [0,\infty[\times[0,2\pi[\times[0,\pi[\to \mathbb{R}^3,$$

$$G(\rho,\theta,\varphi) = (\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)$$

Teorema Cambio de Variable Coordenadas Esféricas

$$\iiint\limits_{G^{-1}(E)} f(x,y,z)dV =$$
$$\iiint\limits_{E} f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi d\rho d\theta d\varphi$$

Momento de Inercia.

Ejemplo 1:

Calcular el momento de inercia de una bola B de radio a con densidad constante alrededor de un eje que pasa por su centro.

Momento de Inercia.

Solución:

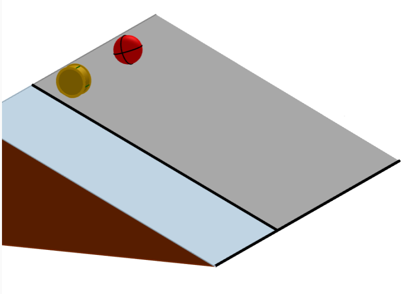
- Utilizando coordenadas esféricas se tiene que
- $B = \{(\rho, \theta, \varphi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \rho \leq a\}$
- $I = \iiint\limits_B (x^2 + y^2)\delta dV$ donde δ representa la densidad.
- Utilizando cambio de variables a coordenadas esféricas tenemos
- $I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{a} (\rho^2 \sin^2 \varphi)\delta(\rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta)$
- $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{a^5 \delta \sin^3 \varphi}{5} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{a^5 \delta (1 - \cos^2 \varphi) \sin \varphi}{5}$
- $\frac{2\pi a^5 \delta}{5}(-\cos\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3})\Big|_0^{\pi}$

Momento de Inercia.

Solución:

- $\frac{2\pi a^5\delta}{5}\left(-\cos\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{8\pi a^5\delta}{15}$
- $I = \left(\frac{4\pi a^3\delta}{3}\right)\left(\frac{2a^2}{5}\right) = \frac{2ma^2}{5}$

Si hacemos rodar una bola y un cilindro en un plano inclinado, ¿Qué objeto llega primero?



Momento de Inercia

Notemos que el objeto tiene energía potencial $E_p = mgh$ la cual se transforma en energía cinética $\frac{1}{2}(mv^2 + I\omega^2)$. Utilizando la ley de conservación de la energía se tiene

$$mgh = \frac{1}{2}(mv^2 + I\omega^2)$$

La velocidad del cilindro es

$$mgh = \frac{1}{2}(mv^2 + I\omega^2) = \frac{1}{2}(mv^2 + \frac{1}{2}ma^2(\frac{v^2}{a^2}))$$

$$v = \sqrt{\frac{4gh}{3}}$$

Momento de Inercia

La velocidad de la esfera es

$$mgh = \frac{1}{2}(mv^2 + I\omega^2) = \frac{1}{2}(mv^2 + \frac{2}{5}ma^2(\frac{v^2}{a^2}))$$

$$v = \sqrt{\frac{10gh}{7}}$$

Ejemplo 2

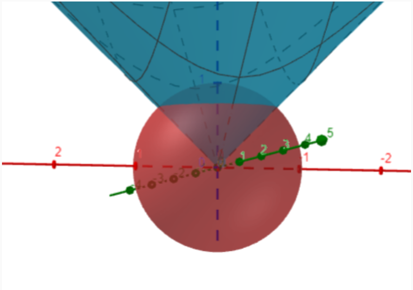
Calcular $\iiint\limits_E z\,dV$ donde E es la región en acotada abajo por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Coordenadas Esféricas.

Solución:

- Vamos a expresar la región en coordenadas esféricas
- Primero notemos que la esfera tiene ecuación $\rho = 1$ y el cono tiene ecuación $\rho \cos\varphi = \rho \sin\varphi \implies \cos\varphi = \sin\varphi$
- $G^{-1}(E) = \{(\rho, \theta, \varphi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq 1\}$
- Utilizando l Teorema de cambio de variables a esféricas se tiene
- $\iiint\limits_E z dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^1 (\rho \cos\varphi)\rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta$
- $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \frac{\cos\varphi \sin\varphi}{4} d\varphi d\theta = \frac{\pi}{8}$

Coordenadas Esféricas.



Ejemplo 3

Sea D el paralelogramo con vértices $(0,0),(3,1),(4,3),(1,2)$. Calcular $\iint_D x dA$.

Solución:

- Consideremos la transformación lineal T tal que $T(1,0) = (3,1)$ y $T = (0,1) = (1,2)$
- Esta corresponde a la matriz $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, es decir, $T(u,v) = (3u + v, u + 2v)$.
- T transforma el cuadrado $E = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1\}$ en el paralelogramo D.
- $DT = T$ por ser lineal y $JT = 5$.
- Como el Jacobiano nunca se anula (la función es invertible por ser lineal), podemos utilizar el Teorema de cambio de variable
- $\iint_D x dA = \int_0^1 \int_0^1 (3u + v) 5 du dv = 10$

Ejemplo 4

Sea D la región acotada por las curvas $y = x, y = 3, xy = 1$ y $xy = 3$. Calcular $\iint_D y dA$.

Solución:

- Consideremos la transformación $u = xy, v = y$, equivalentemente $G(u, v) = (\frac{u}{v}, v)$
- Notemos que G es biyectiva en el primer cuadrante y $JG = \left|\det \begin{bmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = \frac{1}{v} > 0$. Por lo tanto, G satisface las hipótesis del Teorema de cambio de variable.
- G transforma la región $E = \{(u, v) : 1 \leq u \leq 3, \wedge \sqrt{u} \leq v \leq 3\}$ en D.
- Por el Teorema de cambio de variable
- $\iint_D y dA = \int_1^3 \int_{\sqrt{u}}^3 v(\frac{1}{v} dudv) = \frac{20}{3} - 2\sqrt{3}$.