Prof.: L. Badilla, I. Donoso, A. Gajardo, J. Moya
A. Pérez, C. Rivas, M. Selva, F. Thiele, G. Torres

Funciones en el conjunto de los números reales

En este capítulo nos concentraremos en funciones cuyo conjunto de partida y llegada es un subconjunto de $\mathbb{R}$, y usaremos las propiedades de los números reales para estudiarlas y demostrar algunas de sus propiedades.

Estas funciones en general estarán definidas por una fórmula (o varias), por lo tanto deberemos verificar en cada caso si es que esta fórmula se puede o no aplicar a todos los elementos de su conjunto de partida. Recíprocamente, dada una fórmula, buscaremos el subconjunto de los reales más grande donde esta se pueda calcular, tal conjunto será el *dominio natural* de la fórmula.

Ejemplo 1. Dada la fórmula $\sqrt{x}$, sabemos que el subconjunto más grande donde es posible evaluarla es $[0, \infty[$, el dominio natural de $\sqrt{x}$ es $[0, \infty[$.

Por lo tanto, si la función $F : A \to \mathbb{R}$ está definida por $F(x) = \sqrt{x}$, entonces sabemos que $A \subseteq [0, \infty[$.

Hasta ahora hemos conocido las funciones más simples: rectas, parábolas, raíz cuadrada, módulo. Combinando estas funciones podemos formar otras más complejas. La clase pasada estudiamos la composición, hoy estudiaremos otras maneras ce combinar funciones.

Definición 2. Dadas las funciones $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tales que $A \cap B \neq \phi$ y un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, se definen: las siguientes *operaciones entre* f *y* g:

1. Ponderación: $\lambda f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ por $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$,
2. Suma: $f + g : A \cap B \longrightarrow \mathbb{R}$ por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$,
3. Multiplicación: $fg : A \cap B \longrightarrow \mathbb{R}$ por $(fg)(x) = f(x)g(x)$,
4. Cuociente: Si $(A \cap B) \setminus \{x \in B \ : \ g(x) = 0\} \neq \phi$, entonces definimos
$$\frac{f}{g} : (A \cap B) \setminus \{x \in B \ : \ g(x) = 0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ por}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 3. Sean[1] $f : [-8, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ y $g :]-\infty, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) = |x+8|, \qquad g(x) = \sqrt{1-x}.$$

Entonces,

1. $2f : [-8, \infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ con $(2f)(x) = 2f(x) = 2|x+8|$, la ponderación no cambia el conjunto de partida de la función que pondera.

Para calcular las otras 3 operaciones, debemos calcular la intersección de los conjuntos de partida de f y g: $[-8, \infty[\, \cap \,]-\infty, 1] = [-8, 1]$. Entonces,

2. $f+g : [-8,\ 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ con $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = |x+8| + \sqrt{1-x}$;
3. $fg : [-8,\ 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ con $(fg)(x) = f(x)g(x) = |x+8|\sqrt{1-x}$;

Finalmente, para calcular el cuociente debemos identificar los puntos donde se anula g:

$$\{x \in]-\infty, 1] \ : \ g(x) = 0\} = \{x \in]-\infty, 1] \ : \ \sqrt{1-x} = 0\} = \{x \in]-\infty, 1] \ : \ 1 - x = 0\} = \{1\},$$

a partir de esto, el conjunto de partida de la función $\frac{f}{g}$ será $[-8,\ 1] \setminus \{1\} = [-8,\ 1[$. Entonces,

4. $\frac{f}{g} : [-8,\ 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ con $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{|x+8|}{\sqrt{1-x}}$.

Una de las propiedades que se pueden estudiar de las funciones reales es la "paridad", la cual no tiene nada que ver con la paridad de los números enteros.

Definición 4. Dada una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ decimos que su conjunto es *simétrico* respecto a 0 si cumple que $\forall\, x \in A, \ -x \in A$.

Si f tiene un conjunto de partida simétrico respecto a 0, entonces decimos que f *es par* si y solo si

$$\forall\, x \in A \ : \ f(x) = f(-x),$$

y decimos que f *es impar* si y solo si

$$\forall\, x \in A \ : \ f(x) = -f(-x).$$

Ejemplo 5. Note que

1. $f(x) = x$ es impar pues
$$f(-x) = -x = -f(x).$$

[1]notar que estas funciones son composición, f, de una recta con el módulo, y, g, de una recta con la raíz cuadrada, cada una restringuda además a un conjunto de partida dado.

2. $f(x) = x^2$ es par, en efecto,

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

Note que una función f puede no ser ni par ni impar, por ejemplo, $f(x) = x^2 + 2x - 1$ no es ni par ni impar, veamos:

$$f(-x) = x^2 - 2x - 1 \neq f(x), \quad f(-x) = x^2 - 2x - 1 \neq -f(x).$$

Proposición 6. Se cumplen las siguientes propiedades.

1. Si $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es impar y $0 \in A$, entonces $f(0) = 0$
2. La única función que es par e impar al mismo tiempo es la función constante igual a 0.
3. Si f es par, entonces f no es inyectiva.
4. El gráfico de una función par es simétrico con respecto al eje Y.
5. La suma de funciones pares es par.
6. La suma de funciones impares es impar.
7. Todas las funciones reales sobre un conjunto de partida simétrico son suma de una función par más una impar.
8. La multiplicación de funciones pares es par.
9. La multiplicación de funciones impares es par.
10. La multiplicación de una función par con una impar es impar.
11. La composición de funciones pares es par.
12. La composición de funciones impares es impar.
13. La composición de una función par con una impar es par, independientemente del orden en que se realice la composición.
14. La función identidad es impar.
15. Las funciones constantes son pares.

Dejamos la demostración de la mayoría de estas propiedades como ejercicio.

Funciones potencia

Las funciones "potencia" son particularmente importantes en muchos modelos de ciencias naturales, además de ser una de las clases más sencillas de funciones. llamamos función "potencia" a las funciones $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definidas por $P(x)=x^n$, donde $n\in\mathbb{N}$ es un natural fijo. En esta clase están la función cuadrática, la cúbica y la función identidad: x^2, x^3 y x.

Notamos que si $n=0$, no podemos definirla (0^0 no está definido), además no es interesante pues lo natural sería considerarla simplemente como la función constante igual a 1, la cual no se considera una función potencia.

Proposición 7. Dado $n\in\mathbb{N}$ se tiene que la función $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definida por $P(x)=x^n$ tiene las siguientes propiedades.

- Si n es par:
  1. P es par;
  2. P no es ni inyectiva;
  3. P no es sobreyectiva y $Rec(P)=[0,\infty[$;
  4. $P|[0,\infty[: [0,\infty\to[0,\infty[$ es biyectiva y su inversa es $P^{-1}:[0,\infty\to[0,\infty[$ definida por

$$P^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}.$$

- Si n es impar:
  5. P es impar;
  6. P es biyectiva y su inversa es $P^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $P^{-1}(x)=\sqrt[n]{x}$.

La raíz n-ésima se escribe igualmente por $\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$, lo cual proviene del hecho que

$$(x^n)^{\frac{1}{n}}=x^{\frac{n}{n}}=x^1=x.$$

Esto abre la puerta para definir las potencias racionales, pero esto sólo podremos hacerlo como funciones de $[0,\infty$ en $[0,\infty[$: dado un racional positivo $r=\frac{m}{n}$, se define la función potencia de exponente r por $P(x)=x^{\frac{m}{n}}=(x^m)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x^n}$, la cual se interpreta como la composición de $\sqrt[n]{x}$ con x^m.

Proposición 8. Dado $r=\frac{m}{n}$, con $n,m\in\mathbb{N}$ se tiene que la función potencia racional $P:[0,\infty\to[0,\infty[$, definida por $P(x)=x^r$ tiene las siguientes propiedades.

1. P es biyectiva y su inversa es $P^{-1}:[0,\infty\to[0,\infty[$ definida por $P^{-1}(x)=x^{\frac{1}{r}}=x^{\frac{n}{m}}$;
2. $P(0)=0$; $P(1)=1$.

Podemos definir también potencias negativas, notando que $y^{-1} = \frac{1}{y}$, así, dado un racional positivo $r = \frac{m}{n}$ definimos $P(x) = x^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{x^{\frac{n}{m}}}$. Notamos que tal función no puede ser evaluada en $x = 0$, entonces su dominio y su recorrido es $]0, \infty[$.

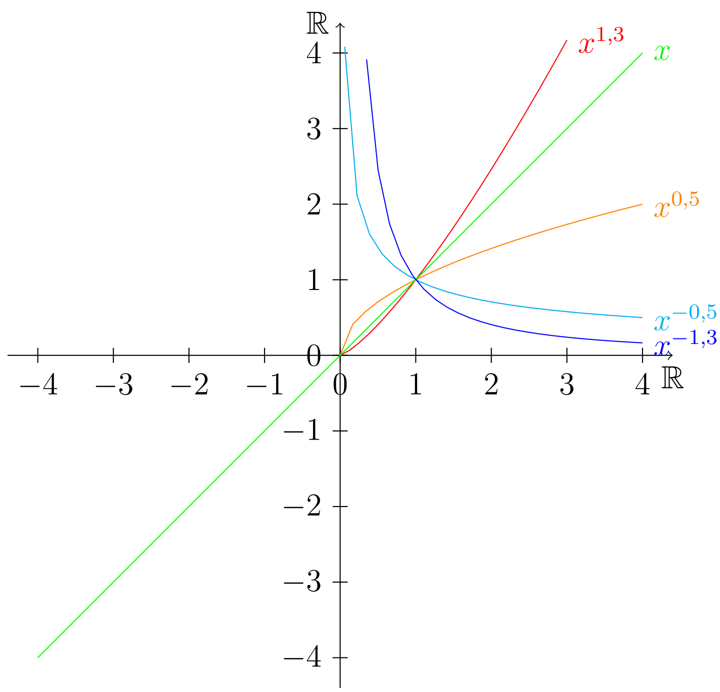
Proposición 9. Dado $r = \frac{m}{n}$, con $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene que la función potencia racional negativa $P :]0, \infty \to]0, \infty[$, definida por $P(x) = x^{-r}$ tiene las siguientes propiedades.

1. P es biyectiva y su inversa es $P^{-1} :]0, \infty \to]0, \infty[$ definida por $P^{-1}(x) = x^{-\frac{1}{r}} = \frac{1}{x^{\frac{n}{m}}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n}{m}}$;
2. $P(1) = 1$.

En cálculo verán que si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, de todas formas es posible definir la función $P(x) = x^{\alpha}$, en $]0, \infty[$ y tendrá propiedades similares.

Sin embargo cuando queramos definir una función potencia con conjunto de partida igual a $\mathbb{R}$, nos limitaremos solo a las potencias enteras.

Ejemplo 10. Más que un ejemplo, creo que es interesante ver un gráfico de esta familia de funciones. El Cálculo I verán otras fuertísimas propiedades de éstas funciones, su gráfico no engaña, son funciones muy regulares.



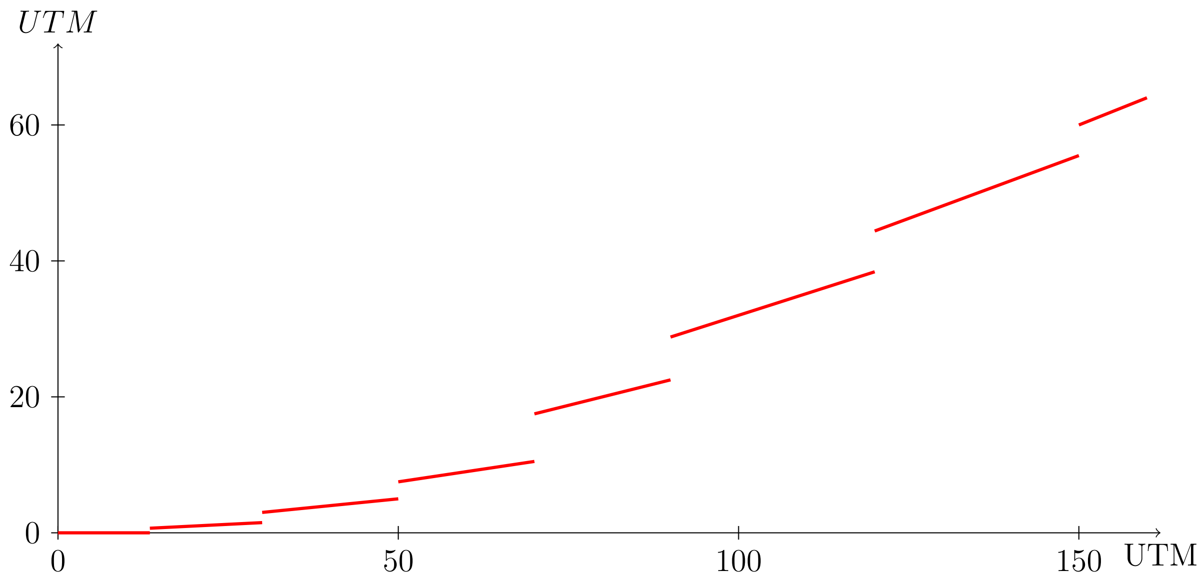
Cuando el exponente es 1, la función se dice *lineal*, las funciones lineales son muy importantes. Son las únicas que se pueden calcular usando proporciones (regla de tres).

Finalmente, ya lo hemos hecho antes, pero no está de más recordarlo, podemos combinar funciones definiendo que dominen en tramos disjuntos: tendremos entonces las funciones definidas por tramos, en que hay una fórmula diferente que vale en cada tramo.

Ejemplo 11. A veces es necesario definir una función por tramos. Consideremos, por ejemplo, la función que describe el pago de impuestos en Chile. Ella debe ser tal que: si x es la renta imponible mensual de una persona, entonces la cantidad $s(x)$ a pagar por impuesto único de segunda categoría es:

$$s(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 13{,}5\text{UTM}, \\ 0{,}05x & 13{,}5\text{UTM} \leq x < 30\text{UTM}, \\ 0{,}10x & 30\text{UTM} \leq x < 50\text{UTM}, \\ 0{,}15x & 50\text{UTM} \leq x < 70\text{UTM}, \\ 0{,}25x & 70\text{UTM} \leq x < 90\text{UTM}, \\ 0{,}32x & 90\text{UTM} \leq x < 120\text{UTM}, \\ 0{,}37x & 120\text{UTM} \leq x < 150\text{UTM}, \\ 0{,}4x & x \geq 150\text{UTM}. \end{cases}$$

donde $UTM = \$51.798$. El gráfico de esta función es como se muestra en la figura siguiente.



Función exponencial y logaritmo

En la sección anterior el exponente estaba fijo y la variable era la base de la potencia, ¿qué pasa si lo hacemos al revés? es decir, si la variable es el exponente y dejamos la base fija. Como vimos antes, si queremos elevar a un exponente cualquiera, más vale que la base sea positiva, definiremos entonces la familia de las funciones *exponenciales* como sigue.

Definición 12. Dado $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, definimos la *función exponencial con base b* como

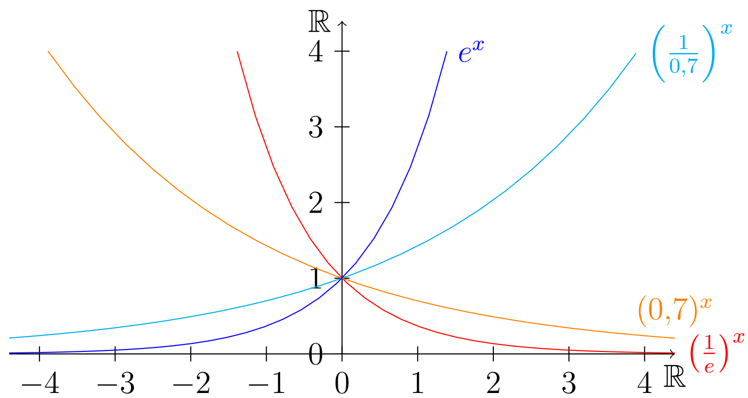
$$\exp_b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+,$$
$$\exp_b(x) = b^x.$$

Si bien no hay problema en definir la función $\exp_1(x) = 1^x = 1$, no lo hacemos, pues esa función en más simple concebirla como la función constante igual a 1, tendrá un comportamiento radicalmente distinto al de las funciones exponenciales, por lo tanto es más sano quitarla de la familia.

Proposición 13. Dado $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, la función $\exp_b$ es biyectiva, y además cumple:

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp_{1/b}(x) = \exp_b(-x)$,
- $\exp_b(0) = 1$, y
- $exp_b(1) = b$.

Son funciones muy regulares, que aparecen en muchos modelos, y en Cálculo I verán algunas de sus propiedades más importantes, como es la "monotonía" y su rápido crecimiento o decrecimiento, sin embargo dejaremos esos contenidos a esa otra asignatura pues requieren de herramientas que no competen a nuestro ramo. Veamos de todas formas algunos gráficos de funciones de la familia exponencial.



En esta figura usamos un número particular, denotado por e, conocido como la *constante de Euler*, el cual es un irracional, aproximado a $e \sim 2,718$, que tiene una importancia enorme en el cálculo gracias a sus sorprendentes propiedades. La constante de Euler es una de las bases más usadas en los modelos exponenciales, junto con la base 10 y la base 2.

Recordamos aquí algunas de las propiedades de la exponenciación pues nos serán muy útiles.

1. $\forall b \in \mathbb{R}^+,\ b^1 = b \wedge b^0 = 1$
2. $\forall b \in \mathbb{R}^+,\ \forall u, v \in \mathbb{R},\ b^{u+v} = b^u b^v$
3. $\forall b \in \mathbb{R}^+,\ \forall u, v \in \mathbb{R},\ (b^u)^v = b^{vu}$
4. $\forall b \in \mathbb{R}^+,\ \forall u \in \mathbb{R},\ b^{-u} = \left(\frac{1}{b}\right)^u$

Dado que las funciones exponenciales son invertibles, existe su inversa, la cual es llamada *función logaritmo*.

Definición 14. Dado $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, se define la función *logaritmo en base* b por $\log_b := \exp_b^{-1}$, es decir,

$$\log_b : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R},$$

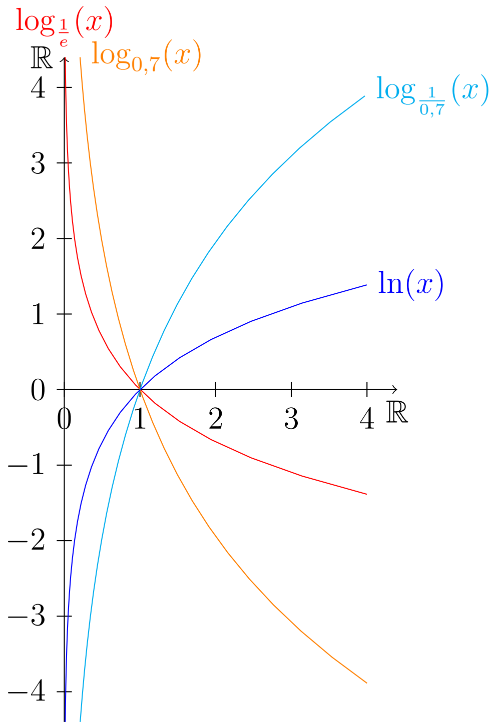
$$\log_b(x) = y \Leftrightarrow b^y = x$$

El caso $b = 10$ es tan común que suele omitirse la base al referirse a este: $\log = \log_{10}$.
Otro caso destacado es el caso $b = e$, en ese caso se usa otra notación: $\ln = \log_e$ y se llama *logaritmo natural*.

Dado que el logaritmo es la inversa de la exponencial se tienen las siguientes ecuaciones, en las cuales es necesario poner atención a que se correspondan las bases y que la variable esté en le dominio de la primera función que se evalua.

1. $\forall b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \log_b(\exp_b(x)) = \log_b(b^x) = x$
2. $\forall b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\},\ \forall y \in \mathbb{R}_+,\ \exp_b(\log_b(y)) = b^{\log_b(y)} = y$

Invertir una función es tan solo un cambio de "mirada", por ello, el gráfico de la inversa de una función se obtiene simplemente haciendo una reflexion en torno a la recta diagonal "identidad", la recta $\{t(1,1)\ :\ t \in \mathbb{R}\}$.



Cada una de las propiedades de la exponencial se traducen en propiedades del logaritmo, solo necesitamos excluir el caso $b = 1$ pues en ese caso la exponencial no es invertible y por lo tanto el logaritmo no existe.

Proposición 15. Dado $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, se cumplen las siguientes propiedades.

1. $\log_b(b) = 1 \wedge \log_b(1) = 0$

2. $\forall r, s \in \mathbb{R}_+,\ \log_b(rs) = \log_b(r) + \log_b(s)$

3.1 $\forall r \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \log_b(r^x) = x \log_b(r)$

3.2 $\forall r \in \mathbb{R}_+,\ \log_b(r) = \frac{\log_a(r)}{\log_a(b)}$

4.1 $\forall r \in \mathbb{R}_+,\ \log_b\left(\frac{1}{r}\right) = -\log_b(r)$

4.2 $\forall r \in \mathbb{R}_+,\ \log_{\frac{1}{b}}(r) = -\log_b(r)$

5. $\forall r, s \in \mathbb{R}_+,\ \log_b\left(\frac{r}{s}\right) = \log_b(r) - \log_b(s)$

Demostración. Sea $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ cualquiera.

1. $\log_b(b) = 1 \Leftrightarrow b = \exp_b(1) \Leftrightarrow b = b^1 \Leftrightarrow b = b$.

2. Sean $r, s \in \mathbb{R}_+$, y sean $u = \log_b(r)$ y $v = \log_b(s) \in \mathbb{R}$. Esto equivale a decir que $b^u = r$ y $b^v = s$. Usamos la propiedad 2 de la exponencial y obtenemos que

$$\begin{aligned} b^{u+v} = b^u b^v &\Leftrightarrow b^{u+v} = rs \\ &\Leftrightarrow \log_b(rs) = u + v \\ &\Leftrightarrow \log_b(rs) = \log_b(r) + \log_b(s) \end{aligned}$$

3.1 Sea $x \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}_+$, y sea $u = \log_b(r) \in \mathbb{R}$. Esto equivale a decir que $b^u = r$. Usamos la propiedad 3 de la exponencial y obtenemos que

$$\begin{aligned} (b^u)^x = b^{xu} &\Leftrightarrow b^{xu} = r^x \\ &\Leftrightarrow \log_b(r^x) = xu \\ &\Leftrightarrow \log_b(r^x) = x \log_b(r) \end{aligned}$$

3.2 Sea $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $r \in \mathbb{R}_+$, y sean $u = \log_a(b)$, $v = \log_b(r) \in \mathbb{R}$. Esto equivale a decir que $a^u = b$ y $b^v = r$. Usamos la propiedad 3 de la exponencial y obtenemos que

$$\begin{aligned} (a^u)^v = a^{vu} &\Leftrightarrow a^{vu} = b^v = r \\ &\Leftrightarrow \log_a(r) = vu \\ &\Leftrightarrow \log_a(r) = \log_b(r) \log_a(b) \\ &\Leftrightarrow \log_b(r) = \frac{\log_a(r)}{\log_a(b)} \end{aligned}$$

4.1 Sea $r \in \mathbb{R}_+$ de las propiedades anteriores, se cumple:

$$\begin{aligned} \log_b \left(\frac{1}{r} \right) &= \log_b(r^{-1}) \\ &= -\log_b(r) \end{aligned}$$

4.2 Sea $r \in \mathbb{R}_+$ y sea $u = \log_b(r) \in \mathbb{R}$, de las propiedades anteriores, se cumple:

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{b}}(r) = u &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{b} \right)^u = r \\ &\Leftrightarrow r^{-1} = b^u \\ &\Leftrightarrow u = \log_b(r^{-1}) \\ &\Leftrightarrow u = -\log_b(r) \\ &\log_{\frac{1}{b}}(r) = -\log_b(r) \end{aligned}$$

5. Sean $r, s \in \mathbb{R}_+$ de las propiedades anteriores, se cumple:

$$\begin{aligned} \log_b \left(\frac{r}{s} \right) &= \log_b(rs^{-1}) \\ &= \log_b(r) + \log_b(s^{-1}) \\ &= \log_b(r) - \log_b(s) \end{aligned}$$

$\square$

Especialmente útil es la llamada fórmula del cambio de base (ítem 3.2):

$$\log_b(r) = \frac{\log_a(r)}{\log_a(b)}$$

Nos permite calcular un logaritmo en una base usando sus valores en otra base, por ejemplo:

$$\log_5(8) = \frac{\ln(8)}{\ln(5)} \sim 1,292.$$

Pero también nos permite expresar una exponencial en una base en términos de otra base, simplemente agragando una constante multiplicativa al exponente:

$$a^x = (e^{\ln(a)})^x = e^{\ln(a)x}.$$

Dado que $\ln(a)$ es constante, no varía con x, la función $e^{\ln(a)x}$ es la composición de una exponencial con una recta, la exponencial e^x con la recta $\ln(a)x$. Esto demuestra que toda exponencial es la composición de una exponencial en la base que más me guste con una recta.

Veamos ahora algunas importantes aplicaciones de la exponencial y el logaritmo.

1. Suponga que un Banco me ofrece hacer un depósito plazo fijo de K_0 pesos por 2 años con una tasa de interés del 11,4 porciento ($q = 0{,}114$) . Después de 2 años tendré entonces $K(1) = K_0(1+q)$. Si decido dejar mi dinero en el depósito a plazo por 2 años más, tendré luego de esos 2 años $K(2) = K(1)(1+q) = K_0(1+q)^2$. Si esto se repite m veces, después de $2m$ años, mi capital será de $K(m) = K_0(1+q)^m$. Ahora quiero calcular cuántas veces debo renovar mi depósito a plazo si quiero esperar hasta que mi capital inicial de K_0 pesos se haya duplicado. Quiero entonces encontrar m_0 (debo renovar mi depósito a plazo $m_0 - 1$ veces) de modo que $K(m_0) = K_0(1+q)^{m_0} = 2K_0$.

   $$K_0(1+q)^{m_0} = 2K_0 \Leftrightarrow (1+q)^{m_0} = 2 \Leftrightarrow \log_{1+q}(2) = m_0 \Leftrightarrow m_0 = \frac{\log(2)}{\log(1+q)}.$$

   Ahora bien, con esta ecuación probablemente obtendré $m \notin \mathbb{N}$, pero entonces tomo el entero más pequeño que sea mayor al número obtenido, esto me asegurará al menos doblar mi capital:

   $$m_0 = \left\lceil \frac{\log(2)}{\log(1{,}114)} \right\rceil = \lceil 6{,}42 \rceil = 7$$

   Debo renovar el depósito 6 veces, es decir, invertir por 14 años seguidos.

2. El *tiempo medio de vida* de una sustancia radioactiva es igual a C, esto significa que, si M_0 es la cantidad inicial de la sustancia, después de C unidades de tiempo, quedarán $\frac{M_0}{2}$ unidades de ella. Así, después de nC unidades de tiempo, la cantidad que queda de la sustancia será

$M(n) = M_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Quiero calcular después de cuántas unidades de tiempo la cantidad que quede de la sustancia que considero es un décimo de la cantidad original, es decir, quiero encontrar n_0 de modo que

$$\frac{M_0}{10} = M_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{n_0} \Leftrightarrow \frac{1}{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n_0} \Leftrightarrow n_0 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{10}.$$

Es decir, $n_0 = \log_{\frac{1}{2}} 10^{-1} = -\log_{\frac{1}{2}}(10) = \log_2(10)$.

3. El nivel de ruido d de un sonido se calcula en *decibeles* y depende de la potencia W del sonido según la fórmula
$$d(W) = 10 \log_{10} \frac{W}{W_0},$$
en la que W_0 es un valor de referencia. Un sonido con potencia igual a W_0 se denomina sonido umbral.

   a) ¿Cuál es el nivel de ruido de un sonido cuya potencia es 10 veces la potencia de del sonido umbral?

   b) Determine la potencia de un sonido con nivel de ruido igual a 20 decibeles.

   c) ¿Para qué valores de W se tiene que $d(W)$ es mayor o igual que -30 y menor o igual que 30? Para responder esta pregunta haga un gráfico y considere que la función es biyectiva.

4. El sismólogo F. Richter (1900-1985) ideó en 1935 la *escala de Richter* que compara la fuerza de los terremotos. Según esta escala la magnitud R de un terremoto se define como
$$R = \log\left(\frac{A}{A_0}\right),$$
donde A es la amplitud de la onda sísmica mayor, y A_0 es una amplitud de referencia. La magnitud del terremoto de Concepción del 27 de febrero de 2010 fue de 8,8 en la escala de Richter, mientras que el terremoto de Iquique del 1 de abril de 2014 fue de magnitud 8,2. Determine cuántas veces mayor fue la amplitud de la onda sísmica del terremoto de 2010 respecto al de 2014[2].

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por
$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

   a) Determine el recorrido de f.

   b) Analice la paridad de f.

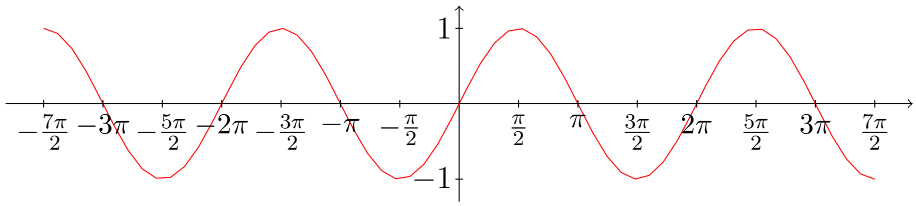
   c) Analice si f es biyectiva y, de no serlo, realice restricciones a f para poder definir la inversa de la función resultante.

[2]La escala de Richter ya no se usa, así que los valores dados no son exactos, por otra parte la fórmula que aquí se presenta es solo una simplificación de la verdadera fórmula de la magnitud de Richer, la cual contempla otros factores, tales como la duración del sismo, sin embargo el ejercicio sirve como una primera aproximación apara sopesar qué significan los grados de la escala de Richter y otras escalas sísmicas.

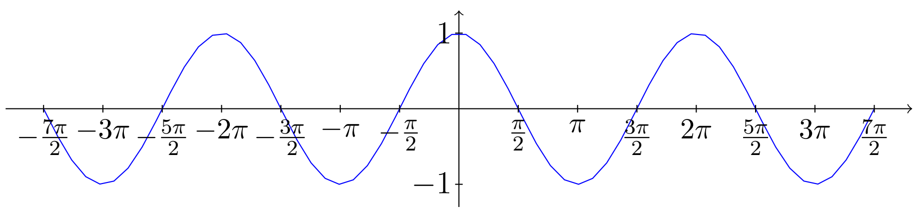
Funciones Trigonométricas (nuevas propiedades)

Recordemos las funciones trigonométricas, habíamos visto que sus gráficos son los siguientes.

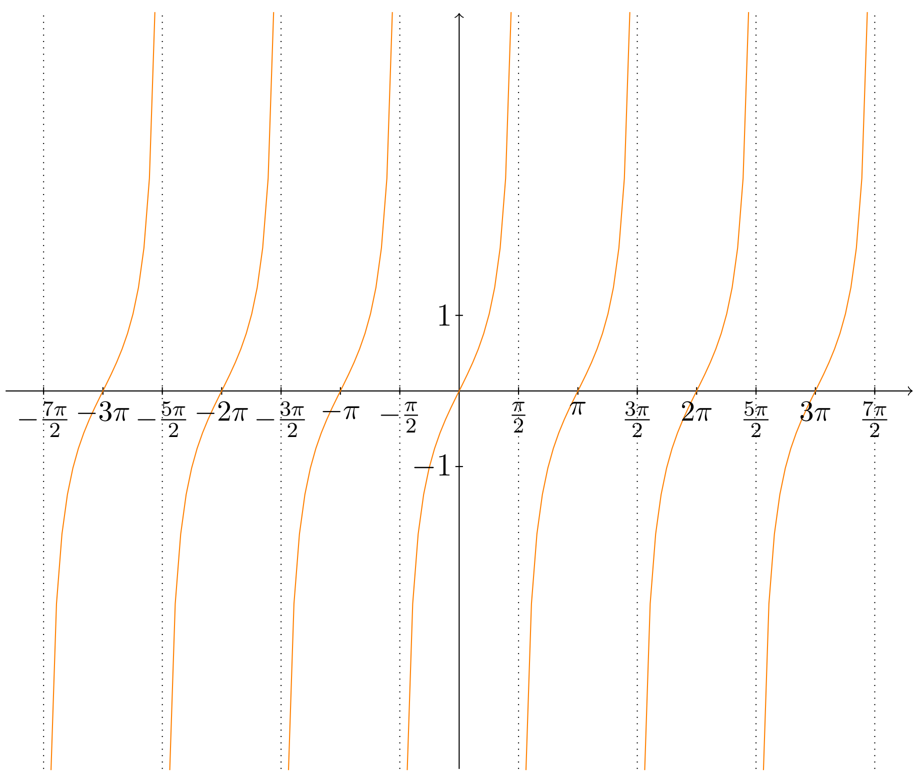
sen(x)



cos(x)



tan(x)



Notar que $\tan(\alpha)$ está definida solo si $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, pues son los puntos donde cos vale 0.

Podemos entonces definir los conjuntos de partida y llegada de las funciones trigonométricas como sigue:

$$\text{sen} : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,\, 1], \quad \cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,\, 1], \quad \tan : \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

De los gráficos es fácil observar las siguientes propiedades, varias de las cuales ya habían sido demostradas en el capítulo de Trigonometría (apunte TeoremasFunciones.pdf).

Proposición 16. Las funciones trigonométricas tienen las siguientes propiedades como funciones reales.

1. No son inyectivas.
2. Las funciones seno y coseno tienen periodo 2π.
3. La función tangente tiene periodo π.
4. Tal como se han definido aquí, son sobreyecivas.
5. Las funciones seno y tangente son impares.
6. La función coseno es par.

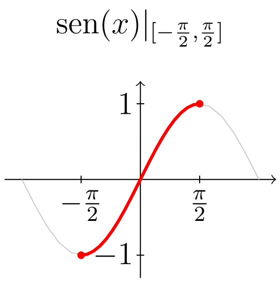
Como vemos, no son biyectivas, pero podemos restringir su conjunto de partida para hacer que lo sean. Existe una restricción estandarizada, que es la que toman en cuenta la mayor parte de las calculadoras para definir las funciones trigonométricas inversas o "Arcofunciones".

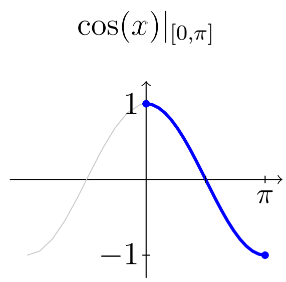
Inversas de las funciones trigonométricas

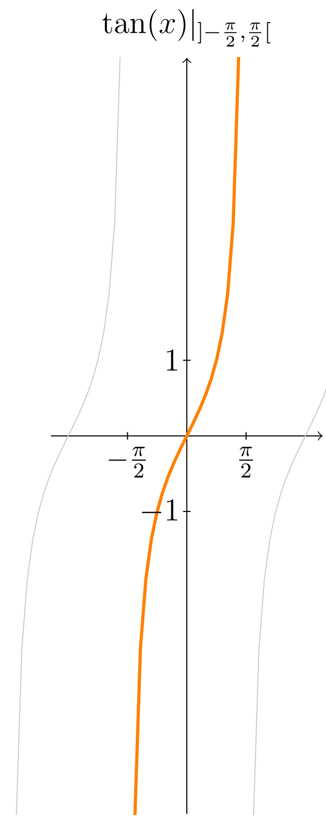
Las restricciones estandarizadas de las funciones trigonométricas son las siguientes.

- $\text{sen}\,|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,\, 1]$
- $\cos|_{[0,\pi]} : [0, \pi] \longrightarrow [-1,\, 1]$
- $\tan|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$

En las siguientes figuras se muestran, en color fuerte, los grafos correspondientes a estas restricciones, encima de los gráficos de las funciones sin restricción en gris.







Con estas restricciones definimos las funciones inversas de la siguiente manera.

Definición 17. La inversa de la función $\operatorname{sen}_{|\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$ es la función siguiente

$$\begin{aligned} \operatorname{Arcsen} : [-1,\,1] \quad &\longrightarrow \quad \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], \\ \operatorname{Arcsen}(y) = x \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{sen}(x) = y \wedge x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

A la inversa de la función $\cos_{|[0,\pi]}$ la denotaremos mediante

$$\begin{aligned} \operatorname{Arccos} : [-1,\,1] \quad &\longrightarrow \quad [0,\pi]\,, \\ \operatorname{Arccos}(y) = x \quad &\Leftrightarrow \quad \cos(x) = y \wedge x \in [0,\pi] \end{aligned}$$

A la inversa de la función $\tan_{|\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$ la denotaremos mediante

$$\begin{aligned} \operatorname{Arctan} : \mathbb{R} \quad &\longrightarrow \quad \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[, \\ \operatorname{Arctan}(y) = x \quad &\Leftrightarrow \quad \tan(x) = y \wedge x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\end{aligned}$$

Por ejemplo, $\operatorname{Arcsen}(0)$ es el único elemento en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ cuyo seno vale 0, por tanto, $\operatorname{Arcsen}(0) = 0$.

$\operatorname{Arccos}(1)$ es el único elemento en el intervalo $[0,\pi]$ cuyo coseno vale 1, por tanto, $\operatorname{Arccos}(1) = 0$.

$\operatorname{Arctan}(1)$ es el único número en $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ cuya tangente es 1, por tanto, $\operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$.

Ejemplo 18. Podemos usar las funciones trigonométricas inversas para resolver ecuaciones que involucren a las funciones trigonométricas o para encontrar ángulos.

1. $\operatorname{sen}(x) = a$, con $a \in \mathbb{R}$.

   Si $a \notin [-1, 1]$ la ecuación no tiene solución.

   Si $a \in [-1,\ 1]$, podemos escribir su conjunto solución con ayuda de la función Arcsen. El número $\operatorname{Arcsen}(a)$ es el ángulo en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ cuyo seno es igual a a. Por tanto,

   $$S_1 = \{\operatorname{Arcsen}(a) + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$$

   está contenido en el conjunto solución S de la ecuación dada. El ángulo $\pi - \operatorname{Arcsen}(a)$ también satisface que su seno es igual a a. Por tanto,

   $$S = \{\operatorname{Arcsen}(a) + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \operatorname{Arcsen}(a) + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

2. $\cos(x) = b$, con $b \in \mathbb{R}$.

   Si $b \notin [-1, 1]$ la ecuación no tiene solución.

   Si $b \in [-1,\ 1]$, podemos escribir su conjunto solución con ayuda de la función Arccos. El número $\operatorname{Arccos}(b)$ es el ángulo en $[0, \pi]$ cuyo coseno es igual a b. Por tanto,

   $$S_1 = \{\operatorname{Arccos}(b) + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$$

   está contenido en el conjunto solución S de la ecuación dada. El ángulo $-\operatorname{Arccos}(b)$ también satisface que su coseno es igual a b. Por tanto,

   $$S = \{\operatorname{Arccos}(b) + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\operatorname{Arccos}(b) + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

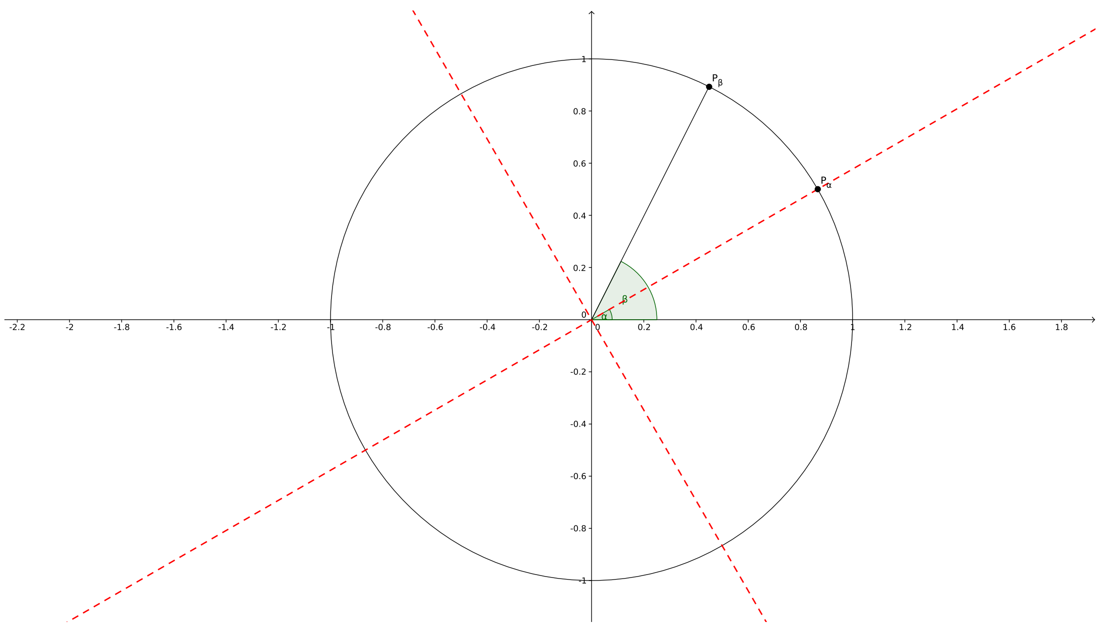
3. $\tan(x) = c$, con $c \in \mathbb{R}$.

   Esta ecuación tiene solución, independientemente del valor de c.

   $$S = \{\operatorname{Arctan}(c) + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Identidades trigonométricas

Vamos a probar 4 identidades trigonométricas importantes que nos faltó establecer al comienzo del curso, para ello volvemos a mirar la circunferencia unitaria.



Consideremos $\mathbb{R}^2$ con los ejes cartesianos, pero agreguemos otro par de ejes (en rojo) que corresponden a una rotación de los primeros en un ángulo α. Las coordenadas del punto P_α con respecto a los ejes cartesianos son $(\cos(\alpha), \operatorname{sen}(\alpha))$, mientras que sus coordenadas con respecto a los ejes rotados son $(1, 0)$.

Consideremos ahora un ángulo β (en verde), las coordenadas de P_β con respecto a los ejes cartesianos son $(\cos(\beta), \operatorname{sen}(\beta))$ mientras que si se describen con respecto a los ejes rotados son $(\cos(\beta - \alpha), \operatorname{sen}(\beta - \alpha))$.

En general, si tomamos dos puntos: (x_1, y_1) y (x_2, y_2), la distancia que los separa se puede obtener por la fórmula:

$$dist((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Dado que la distancia entre dos puntos de un plano no depende de las posiciones de los ejes respecto a los cuales se describen sus coordenadas, tenemos la siguiente igualdad.

$$\begin{aligned}
\text{medida según los ejes rotados} &= \text{medida según los ejes cartesianos} \\
(1 - \cos(\beta - \alpha))^2 + (0 - \operatorname{sen}(\beta - \alpha))^2 &= (\cos(\alpha) - \cos(\beta))^2 + (\operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}(\beta))^2
\end{aligned}$$

Si trabajamos esta igualdad, obtenemos lo siguiente.

$$\begin{aligned}
1-2\cos(\beta-\alpha)+(\cos(\beta-\alpha))^2+(\operatorname{sen}(\beta-\alpha))^2 &= (\cos(\alpha))^2-2\cos(\alpha)\cos(\beta)+(\cos(\beta))^2+ \\
&\quad (\operatorname{sen}(\alpha))^2-2\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)+(\operatorname{sen}(\beta))^2 \\
2-2\cos(\beta-\alpha)-2\cos(\alpha)\cos(\beta) &= 2-2\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) \\
\cos(\beta-\alpha) &= \cos(\alpha)\cos(\beta)+\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)
\end{aligned}$$

Ésta es una identidad trigonométrica importante, nos da el valor del coseno de la resta de dos ángulos α y β en términos de los senos y cosenos de α y β.

Podemos establecerla como una propiedad, junto con otras más que se desprenden de ella.

Proposición 19. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se cumplen las siguientes propiedades.

1. $\cos(\beta+\alpha)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$
2. $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$
3. $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$
4. $\cos(2\alpha)=\cos(\alpha+\alpha)=(\cos(\alpha))^2-(\operatorname{sen}(\alpha)^2)$
5. $\operatorname{sen}(2\alpha)=2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$
6. $\tan(2\alpha)=\frac{2\tan(\alpha)}{1-(\tan(\alpha))^2}$

Las demostraciones se dejan de ejercicio, pero se basan en las identidades trigonométricas que vimos en el primer capítulo del curso.