Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemática
Departamento de Matemática

Cálculo II

Ingeniería Civil

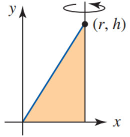
Prof. Víctor Aros Quinán

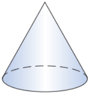
Segundo Semestre 2021

Clase N$^{\underline{o}}$17: Cálculo II
Volumen de Sólidos

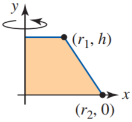
Volumen de Sólidos

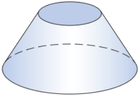
Como vimos la clase anterior podemos calcular el volumen de un sólido a través del método de seeciones transversales, pero esta no es la única forma de calcular el volumen. Ahora estudiaremos un caso especial de sólidos los cuales son llamados **sólidos de revolución**. Por ejemplo:



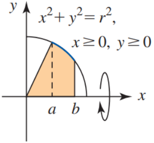


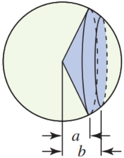
Cono



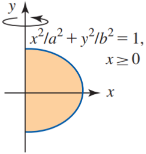


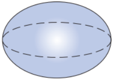
Tronco





Sector esférico





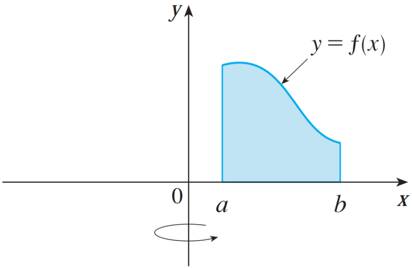
Esferoide achatado

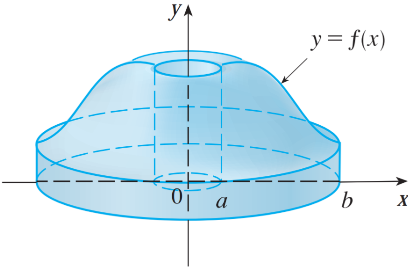
Sólidos de Revolución

Definición

Llamaremos sólidos de revolución al cuerpo obtenido al hacer girar o rotar una región plana alrededor de una recta fija del plano, que recibe el nombre de eje de revolución del sólido.

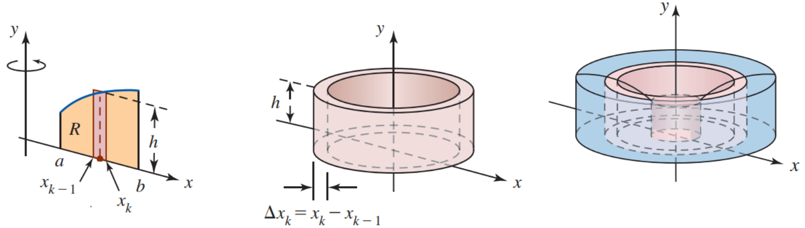
Notemos que el eje donde se hace rotar la región no puede intersectarla, pero si puede ser parte de su frontera.

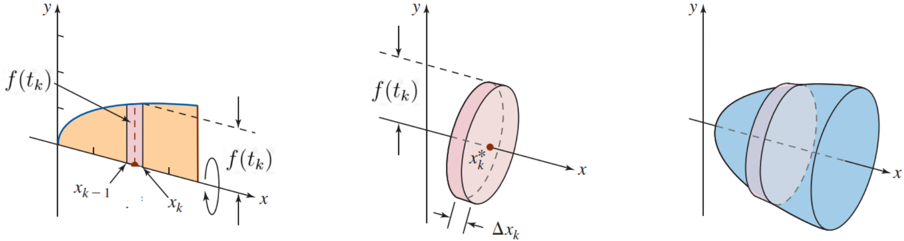




Volumen de Sólidos de Revolución

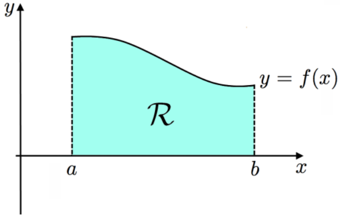
Ahora estudiaremos dos métodos que nos ayudarán a calcular el volumen de un sólido de revolución.

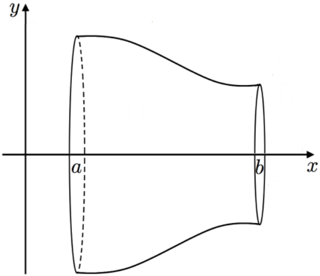




Método del Disco

Consideremos una función f continua y no negativa sobre el intervalo $[a, b]$ y el sólido generado al girar la región encerrada por la gráfica de f, el eje X y las rectas $x = a$ y $a = b$, alrededor del eje X. Como se muestra a continuación:

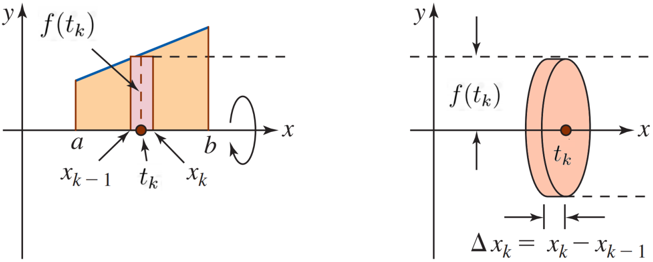




¿Cómo calcular el volumen del sólido S?

Método del Disco

Sea P una partición del intervalo $[a, b]$ y sea $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$. A medida que el rectángulo que se forma en el subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ de ancho Δ_k y altura $f(t_k)$ gira alrededor del eje X, genera un disco sólido, como se muestra a continuación:



Luego, la sección transversal del sólido determinada por un plano que corta la superficie en t_k es un círculo de radio $r = f(t_k)$ y así el área de la sección transversal está dada por $A(t_k) = \pi f^2(t_k)$.

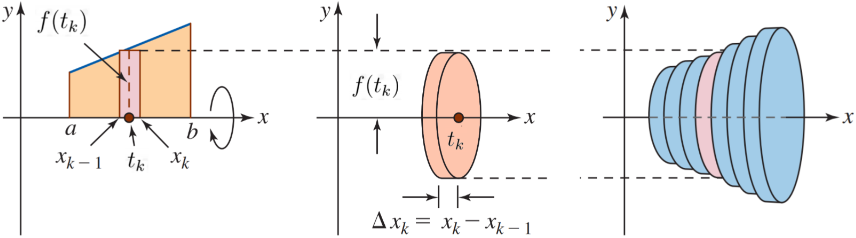
Método del Disco

Así, el volumen del cilindro circular recto, o disco sólido, de radio $r = f(t_k)$ y altura $h = \Delta_k$, está dado por:

$$V_k = A(t_k)\Delta_k = \pi f^2(t_k)\Delta_k$$

Luego, el volumen del sólido S aproximadamente, es:

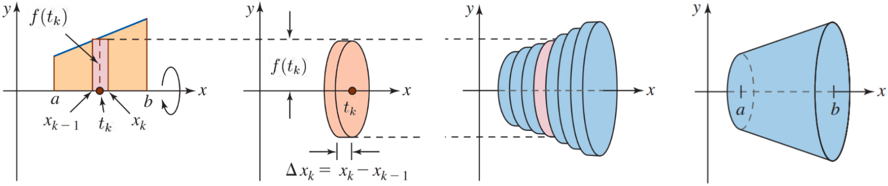
$$V(S) \approx$$



Método del Disco

Notemos que la suma anterior corresponde a una suma de Riemann, es por esto que podemos afirmar que el volumen del sólido puede ser representado por:

$$V(S) =$$

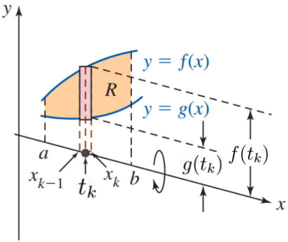


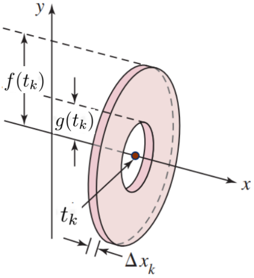
Método del Disco

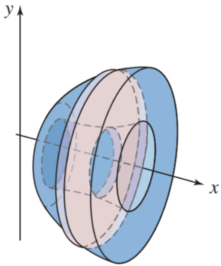
El caso anterior lo podemos generalizar y considerar uan región acotada por dos curvas, como se enuncia a continuación.

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $0 \leq g(x) \leq f(x)$, para todo $x \in [a, b]$, el volumen del sólido generado al hacer girar la región R acotada entre f y g con $x \in [a, b]$ en torno al eje X es:

$$V(S) = \pi \int_a^b (f(x))^2 - (g(x))^2 \, dx$$

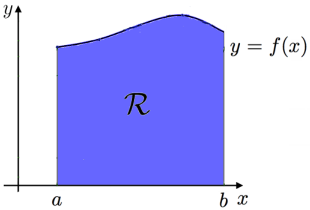


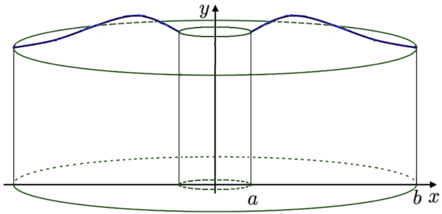




Método del Anillo

Consideremos una función f continua sobre $[a, b]$ y el sólido generado al girar la región encerrada por la gráfica de f, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$, alrededor del eje Y. Como se muestra a continuación:





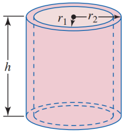
¿Cómo calcular el volumen del sólido S?

Método del Anillo

Antes de comenzar con la explicación del método, debemos recordar que el volumen de un cilindro circular recto está dado por:

$$V = \pi r^2 h$$

donde r es el radio de la base circular y h la altura del cilindro. Además, si consideramos un cascaron cilíndrico circular recto, como el que se muestra a continuación:

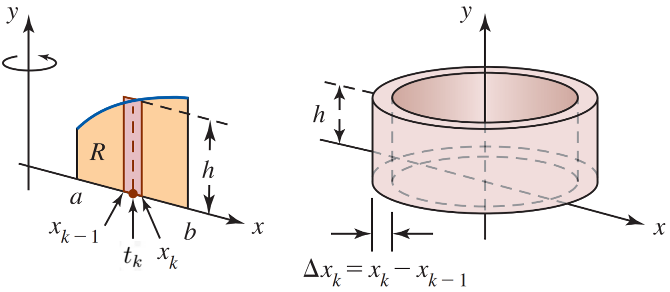


el cual se puede interpretar como un cilindro dentro de otro, también le podemos calcular su volumen y este está dado por:

$$V = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h =$$

Método del Anillo

Sea P una partición del intervalo $[a, b]$ y un subintervalo de la forma $[x_{k-1}, x_k]$, el cual tiene un ancho $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$. Si hacemos girar este rectangulo alrededor del eje Y, se forma un cascaron cilíndrico, como se observa a continuación:



Podemos notar que el radio exterior es x_k y el radio interior x_{k-1}, luego podemos considerar $t_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}$ el punto medio del intervalo $[x_{k-1}, x_k]$.

Método del Anillo

De acuerdo con lo anterior, podemos expresar el volumen del cascaron cilíndrico de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
V_k &= \pi(x_k + x_{k-1})(x_k - x_{k-1})h \\
&= 2\pi \frac{x_k + x_{k-1}}{2} h(x_k - x_{k-1}) \\
&= 2\pi t_k f(t_k)\Delta_k
\end{aligned}
$$

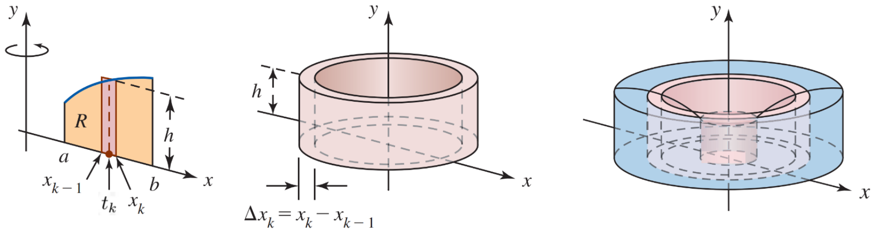
Luego, el volumen del sólido S aproximadamente, es:

$$V(S) \approx$$

Método del Disco

Notemos que la suma anterior corresponde a una suma de Riemann, es por esto que podemos afirmar que el volumen del sólido puede ser representado por:

$$V(S) =$$

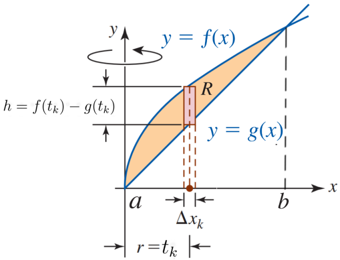


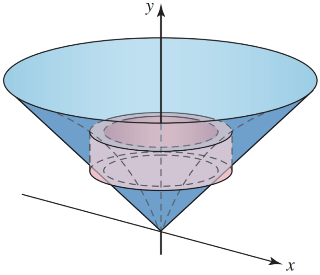
Método del Anillo

El caso anterior lo podemos generalizar y considerar una región acotada por dos curvas, como se enuncia a continuación.

Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) \leq f(x)$, para todo $x \in [a,b]$, el volumen del sólido al hacer girar la región R acotada por f y g con $x \in [a,b]$ en torno al eje Y es:

$$V(S) = 2\pi \int_a^b x\left(f(x) - g(x)\right)\, dx$$





Volumen de Sólidos de Revolución

Observación: Análogamente al cálculo del área sabemos que con respecto a alguno de los ejes, determinar el valor de la integral definida es más simple que en el otro. Analicemos que sucede con el volumen:

1. La fórmula del cálculo de volumen de un sólido de revolución a través del método del disco se hizo rotando la región en torno al eje X.
2. La fórmula del cálculo de volumen de un sólido de revolución a través del método del anillo se hizo rotando la región en torno al eje Y.

lo anterior no quita que podamos usar los métodos en cualquier eje de la forma $x = a$ e $y = b$, siendo a, b dos números reales cualesquiera. La única condición para estos ejes de rotación es que no intersecten a la región.

Ejemplos

1. Determinar el volumen del sólido de revolución que se genera al hacer rotar una región R limitada por las graficas de la curva $y = x^2$, el eje X y la recta $x = 2$, en torno al eje X.

2. Muestre que el volumen de una esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$.

3. Calcular el volumen del sólido generado al rotar la región encerrada por $y = x^3$, $y = 8$ y $x = 0$, en torno al eje Y.

4. Calcular el volumen del sólido obtenido al girar la región entre $y = x$ e $y = x^2$ alrededor del eje Y.

5. Sea R la región limitada por las curvas de ecuación $y = x^2$ e $y = x + 2$. Determinar el volumen del sólido que se generara al rotar R en torno a los ejes:

   (a) $x = 0$ (b) $y = 0$ (c) $x = 3$

   (d) $x = -1$ (e) $y = 5$ (f) $y = -2$