clase 14 (Mi 21/09/22)

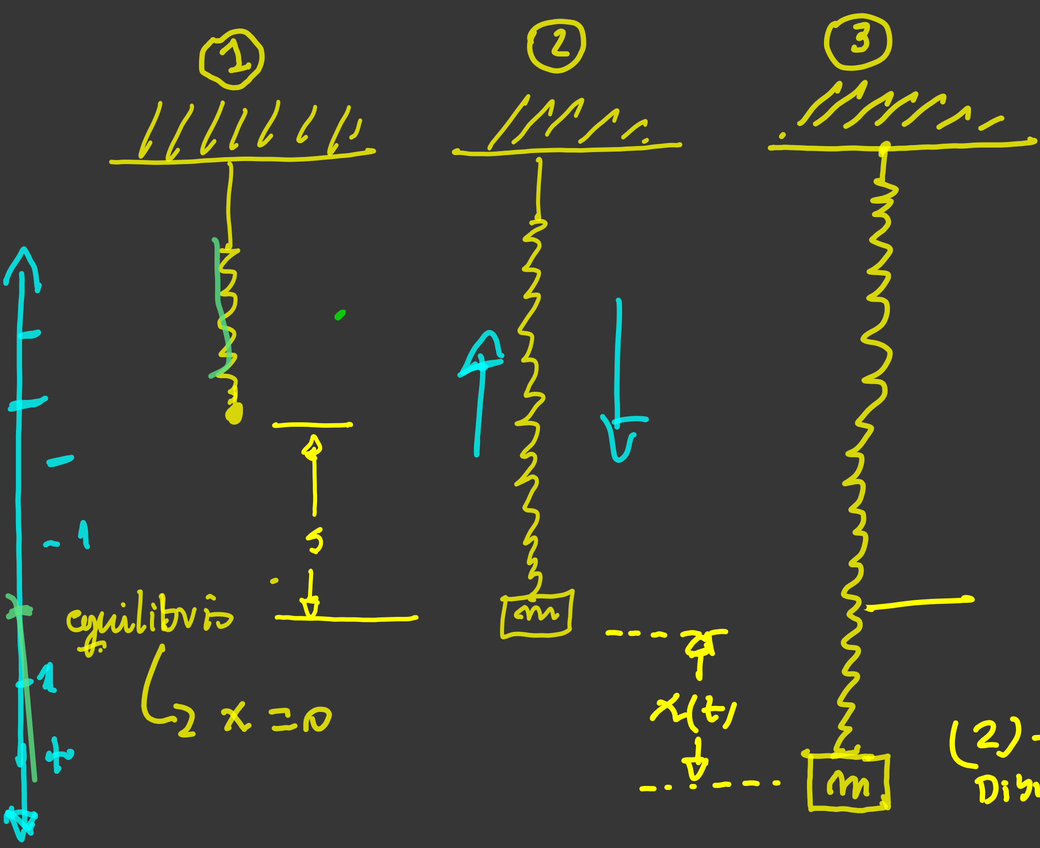
Estabamos viendo que el movimiento $x(t)$ realizado por un cuerpo de masa m que cuelga de un resorte, viene gobernado por la EDO

$$\boxed{m\,x''(t) + b\,x'(t) + k\,x(t) = f(t)}\,,$$ donde

b: es la constante (≥ 0) de roce del SMR.

k: es la constante del resorte (que viene dada por la ley de Hooke: $\boxed{F_k = -ks}$

$f(t)$: fuerzas externas.



De (1) a (2) recorre s [cm]

De (2) a (3) $\boxed{m}$ recorre $s + x(t)$ [cm].

(2)→(3) $F_k = -k(s + x(t))$

Dibujo la F_k ↑ ⇒ es −.

Nuestro objetivo es determinar $x(t)$, resolviendo la correspondiente EDO + C.I.

Por razones de orden, primero suponemos que

$\underbrace{b=0}_{\hookrightarrow \text{ sin Amortig.}}$ y $\underbrace{f\equiv 0}_{\to \text{ mov. libre}}$ (mov. libre sin amortiguación)

$$(P)\ \boxed{\left.\begin{array}{l} x''(t) + w^2 x(t) = 0 \\ \text{C.I.} \begin{cases} x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases} \end{array}\right\}}$$

donde $\boxed{w^2 = \dfrac{K}{m}}$

$p(\alpha) = \alpha^2 + w^2$
$= \underline{(\alpha + iw)(\alpha - iw)}$

$\underline{x(t)} = x_h(t) = c_1 \cos(wt) + c_2 \operatorname{sen}(wt).$

$\Rightarrow \quad \underline{x'(t)} = w[-c_1 \operatorname{sen}(wt) + c_2 \cos(wt)]$

$w^2 = \dfrac{K}{m}$

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = c_1 = x_0 \\ x'(0) = c_2 w = v_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = x(0) = x_0 \\ c_2 = \dfrac{v_0}{w} = \sqrt{\dfrac{m}{K}}\, x'(0) \end{cases}$$

Por tanto,

$$\boxed{x(t) = x_0 \cos(wt) + \sqrt{\frac{m}{K}}\, x'(0) \operatorname{sen}(wt)}$$

respuesta libre sin amortiguamiento.

$= A\,\mathrm{sen}(\omega t)$ con desfase de $\frac{\varphi}{\omega}$

Notar que!

$0 \leq \omega t \leq 2\pi$

$0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega}$

$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$ (período)

De otra parte.

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

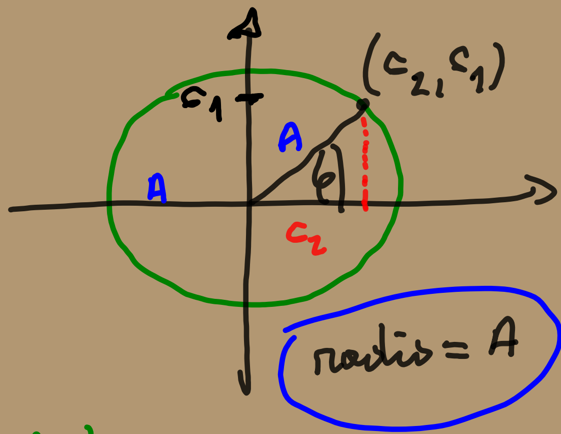
$$= A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$$

$$= A\left[\mathrm{sen}(\omega t)\cos(\varphi) + \mathrm{sen}(\varphi)\cos(\omega t)\right]$$

$$A\,\mathrm{sen}(\varphi) = c_1$$
$$A\cos(\varphi) = c_2$$

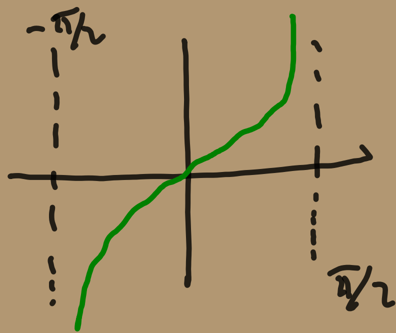
$$\Longrightarrow \begin{cases} A^2 = c_1^2 + c_2^2 = (x(0))^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 \\ \tan(\varphi) = \frac{c_1}{c_2} \quad \text{(con el signo correspondiente)} \end{cases}$$

Notar que : $\quad 0 \leq \omega t \leq 2\pi$



$T = \frac{2\pi}{\omega}$ Período

$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ frecuencia (oscilaciones por unidad de tiempo).



$$\begin{cases} A^2 = c_1^2 + c_2^2 = (x(0))^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 \\ \tan(\varphi) = \frac{c_1}{c_2} \end{cases}$$

$\to$ con el signo que corresponda.

Así, tenemos que: (P) $\begin{cases} x''(t) + w^2 x(t) = 0 \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases}$

tiene por solución:

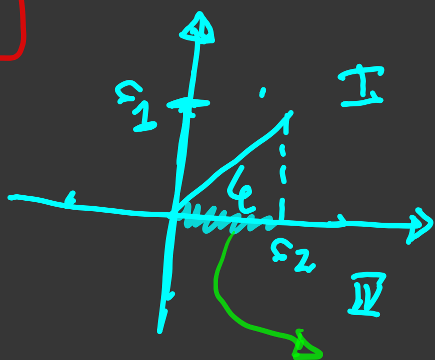
$$\begin{cases} c_2 = \dfrac{x'(0)}{w} = \dfrac{v_0}{w} \\ c_1 = x(0) \end{cases}$$

$$\boxed{x_h(t) = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{w}\right)^2}\ \operatorname{sen}(wt + \varphi)} \longrightarrow \text{resp. libre del sistema}$$

donde

$\begin{cases} v_0 = x'(0) \\ w = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}$, y φ es tal que:

$$\boxed{\tan(\varphi) = \frac{c_1}{c_2} = \left(\frac{x(0)}{x'(0)}\right) w = \frac{x_0}{v_0} w}$$; esto es,

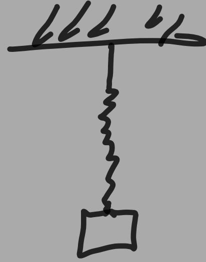


$$\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(x(0)) & \text{si } x'(0) = 0 \\ \arctan\left(\frac{x(0)}{x'(0)} w\right) & \text{si } x'(0) > 0 \\ & (\text{I o IV cuad}) \\ \arctan\left(\frac{x(0)}{x'(0)} w\right) + \pi & \text{si } x'(0) < 0 \\ & (\text{II o III cuad}). \end{cases}$$

$x'(0) \longleftrightarrow \cos(\varphi)$

OBS: Por ejemplo, si el SMR parte desde el reposo, $x'(0) = 0$, desde abajo del equilibrio ($x_0 > 0$) entonces $\varphi = \frac{\pi}{2}$. !!!

(B) Movimiento Forzado sin Amortiguamiento.



Suponemos $b=0$; $f(t) = G_0 \cos(w_0 t)$.

↳ G_0 es una constante.

Esto es:

Un cuerpo de masa m (en kg) se sujeta a un resorte suspendido desde el techo. En la posición de equilibrio ($\ell = s[mt]$) el cuerpo es desplazado en el sentido de la gravedad a $x(0)$, desde ahí se suelta imprimiéndole cierta velocidad $v(0)$. Determine el movimiento del cuerpo si sobre él actúa una fuerza externa (en el sentido de la gravedad) $f(t) = G_0 \cos(w_0 t)$ (>0) en donde $G_0, w_0 \in \mathbb{R}$ y el tiempo es dado en segundos.

Desarrollo:

De acuerdo a lo visto anteriormente, en este caso el PVI, es:

$$(P_f)\ \begin{cases} m x''(t) + k x(t) = G_0 \cos(w_0 t) \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases} \quad ; \quad (G_0, w_0 \text{ son ctes reales})$$

$$\left(w^2 = \frac{k}{m} \right)$$

Sabemos que toda solución $y(t)$ de (P_f),

es del tipo:

respuesta forzada del SMR

$$\boxed{y(t) = y_h(t) + y_p(t)}$$

donde $y_h(t)$ es la solución del problema homogéneo asociado y que resolvimos en el desarrollo anterior, esto es:

respuesta libre del sistema,

$$\boxed{x_h(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega t)}\ ,$$

c_1, c_2 constantes, por ahora, arbitrarias

Falta determinar una solución particular, y_p, para el problema; esta solución particular, $y_p(t)$, se denomina:

"La respuesta Forzada, $y_p(t)$, del SMR".

Note que el PVI del problema, es:

$$\begin{cases} m x''(t) + k\, x(t) = F_0 \cos(\omega_0 t) \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases}$$

, es

, o de modo equivalente