Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática
Cálculo III

Tarea 1
Entrega: 2/11/2022, 23:59 hrs.

1. Encuentre los puntos de la curva $C \subset \mathbb{R}^3$ definida como la intersección de las superficies dadas por las ecuaciones

$$x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 = 1$$

que están a distancia máxima y mínima del origen.

Solución. Como la distancia de cualquier punto al origen es siempre no-negativa, podemos de manera equivalente considerar su cuadrado, es decir, considerar la función objetivo

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

junto con las restricciones

$$g(x, y, z) = x^2 - xy + y^2 - z^2 - 1,$$
$$h(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1.$$

Observamos que $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) = (0, 0, 0) \iff (x, y, z) = (0, 0, 0)$, y el punto $(0, 0, 0)$ no satisface las restricciones dadas por g y h. Calculamos también

$$\nabla g(x, y, z) = (2x - y, 2y - x, 2z)$$
$$\nabla h(x, y, z) = (2x, 2y, 0)$$

por lo tanto, por el método de multiplicadores de Lagrange, existen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z),$$

lo cual, junto con las restricciones, se traduce al sistema

$$2x = \lambda(2x - y) + \mu 2x \tag{1}$$
$$2y = \lambda(2y - x) + \mu 2y \tag{2}$$
$$2z = \lambda 2z \tag{3}$$
$$x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1 \tag{4}$$
$$x^2 + y^2 - 1 \qquad \textbf{(6 ptos.)} \tag{5}$$

Multiplicando la ecuación (1) por y, y (2) por x, luego tomando la diferencia, obtenemos que $\lambda\left(x^2 - y^2\right) = \lambda\,(x - y)\,(x + y) = 0$. Las posibilidades son entonces $\lambda = 0, x = y$ o bien $x = -y$.

- Si $\lambda = 0$, entonces $z = 0$ y sustituyendo en (4), $x^2 - xy + y^2 = 1$. De esta última ecuación y de $x^2 + y^2 - 1 = 0$, obtenemos que $x = 0$ o bien $y = 0$.
  - Si $x = 0$, entonces $y = \pm 1$, de (5); y análogamente, si $y = 0$, entonces $x = \pm 1$.

  Resumiendo, obtenemos los siguientes puntos críticos:

  $(1, 0, 0), (-1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, -1, 0)$ **(6 ptos.)**

- Si $x = y$, entonces de (5) se deduce que $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$. Para calcular el valor de z, sustituimos en (4), de donde $z^2 = -x^2 = -\frac{1}{2}$, una contradicción.
- En el caso que $x = -y$, (5) implica que $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, y de (4), deducimos que $z^2 = x^2$, es decir $z = \pm x$. Así, obtenemos los punto críticos

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$
$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2},\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right). \qquad \textbf{(6 ptos.)}$$

Para justificar ahora que el máximo y el mínimo de la distancia se encuentran entre estos puntos: observamos que la curva C es cerrada ya que es la intersección de dos superficies cerradas; además, la restricción (5) implica que los valores de x e y son acotados, mientras que sustituyendo (5) en (4), obtenemos que $z^2 = -xy$, y por lo tanto el valor de z está acotado. Por lo tanto, C es un conjunto compacto, y f alcanza su mínimo y su máximo ahí. **(6 ptos.)**

Evaluando entonces entre los puntos críticos encontrados, obtenemos

$$f(1, 0, 0) = f(-1, 0, 0) = f(0, 1, 0) = f(0, -1, 0) = 1.$$

Por otro lado,

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{2} > 1.$$

Entonces, los primeros cuatro puntos corresponden a mínimos de la distancia al origen de la curva mientras los últimos cuatro son máximos. **(6 ptos.)**

2. *a)* Identifique la región $D \subset \mathbb{R}^2$ correspondiente a la siguiente suma de integrales, y exprese la integral sobre dicha región cambiando el orden de integración

$$\int_{-2}^{0} \int_{0}^{(x+2)^2} f(x, y)\, dydx + \int_{0}^{2} \int_{0}^{(x-2)^2} f(x, y)\, dydx.$$

   b) Calcule la integral sobre la región D cuando $f(x, y) = 1 + xe^{-y^2}$.

Solución.

a) De los límites de las integrales se deduce que $D = D_1 \cup D_2$, donde

$$D_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 0, \quad 0 \leq y \leq (x+2)^2\right\},$$
$$D_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq (x-2)^2\right\}.$$

(3 ptos.)

Para D_1 tenemos,

$$y \leqslant (x+2)^2 \Leftrightarrow \sqrt{y} \leq |x+2|,$$
$$-2 \leq x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x+2 \Rightarrow |x+2| = x+2.$$

Por lo tanto, $x \geqslant \sqrt{y} - 2$. Además $-2 \leq x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq y \leq 4$, entonces $D_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant 4, \sqrt{y} - 2 \leq x \leq 0\right\}$. **(5 ptos.)**

Para D_2 tenemos,

$$y \leqslant (x-2)^2 \Leftrightarrow \sqrt{y} \leq |x-2|,$$
$$0 \leq x \leq 2 \Rightarrow 0 \geq x+2 \Rightarrow |x+2| = -x-2.$$

Por lo tanto, $x \leqslant 2 - \sqrt{y}$. Ahora, $0 \leq x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq y \leq 4$, entonces $D_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant 4, 0 \leq x \leq 2 - \sqrt{y}\right\}$. **(5 ptos.)**

Concluimos que

$$D = D_1 \cup D_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant 4, \quad \sqrt{y} - 2 \leq x \leq 2 - \sqrt{y}\right\}$$

(2 ptos.)

b) Calculamos usando la segunda parametrización de la región D,

$$\iint_D f(x, y) d(x, y) = \int_0^4 \int_{\sqrt{y}-2}^{2-\sqrt{y}} 1 + xe^{-y^2} dx dy \quad \textbf{(5 ptos.)}$$
$$= \int_0^4 x + \frac{x^2}{2} e^{-y^2} \Big|_{x=\sqrt{y}-2}^{x=2-\sqrt{y}} dy$$
$$= \int_0^4 2 - \sqrt{y} - (\sqrt{y} - 2) dy + \int_0^4 \frac{1}{2}\left[\cancel{(2-\sqrt{y})^2 - (\sqrt{y}-2)^2}\right] e^{-y^2} dy$$
$$= \int_0^4 4 - 2\sqrt{y}\, dy = 4y - \frac{4}{3} y^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{32}{3} \quad \textbf{(10 ptos.)}$$