Solución Parcial

Listado 4 : Espacios vectoriales

3. Considere los siguientes espacios vectoriales V sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ indicado. Determine una base para cada uno de los siguientes subespacios vectoriales U de V.

(b) $V = \mathbb{C}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $U = \{(x, y)^T \in V \ : \ x + \overline{y} = 0\}$,

Determine las coordenadas de los siguientes vectores de cada s.e.v. U con respecto a la base encontrada

(b) $u = \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}$,

Solución:

$$\begin{aligned} U &= \{(x,y)^T \in \mathbb{C}^2 : x+\overline{y}=0\} \\ &= \{(x,y)^T \in \mathbb{C}^2 : x = -\overline{y}\} \\ &= \{(-\overline{y}, y)^T \in \mathbb{C}^2 : y \in \mathbb{C}\} \\ &= \{(-(a-bi), a+bi)^T \in \mathbb{C}^2 : a,b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(-a+bi, a+bi)^T \in \mathbb{C}^2 : a,b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a(-1,1)^T + b(i,i)^T \in \mathbb{C}^2 : a,b \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle \{(-1,1)^T, (i,i)^T\} \rangle \end{aligned}$$

El conjunto $\{(-1,1)^T, (i,i)^T\}$ genera a U.
Veamos si es l.i. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha(-1,1)^T + \beta(i,i)^T = (0,0)^T$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + \beta i = 0 \\ \alpha + \beta i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$$

Por lo tanto $\{(-1,1)^T, (i,i)^T\}$ es l.i

Como $\{(-1,1)^T, (i,i)^T\}$ es generador de U y es l.i, entonces es base de U.

Las coordenadas de u respecto de la base encontrada, son los escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}$$

Claramente, estas coordenadas son $\alpha = 0$ y $\beta = 1$.

9. Considere el espacio vectorial real $\mathbb{C}^2$. Sean

$$\mathcal{B}_U = \{(-i, 2+2i)^{\mathrm{T}}, (-2+i, 0)^{\mathrm{T}}\} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{B}_W = \{(-1, 1+i)^{\mathrm{T}}, (i, -i)^{\mathrm{T}}\},$$

bases de los subespacios vectoriales de $\mathbb{C}^2$, U y W, respectivamente.

(a) Encuentre una base para $U + W$.

(b) ¿Es $U + W = \mathbb{C}^2$? Justifique su respuesta.

(c) ¿Es $U + W$ una suma directa? Justifique su respuesta.

Solución: Sabemos que B_U es conjunto generador de U, y que B_W es conjunto generador de W. Luego $B_U \cup B_W$ es conjunto generador de $U+W$.

$$U+W = \langle \{(-i, 2+2i)^T, (-2+i, 0)^T, (-1, 1+i)^T, (i, -i)^T\} \rangle$$

Determinamos si el conjunto generador obtenido de $U+W$, es o no l.i

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$:

$$\alpha_1 (i, 2+2i)^T + \alpha_2 (-2+i, 0)^T + \alpha_3 (-1, 1+i)^T + \alpha_4 (i, -i)^T = (0,0)^T$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 i - 2\alpha_2 + \alpha_2 i - \alpha_3 + \alpha_4 i = 0 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_1 i + \alpha_3 + \alpha_3 i - \alpha_4 i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-2\alpha_2 - \alpha_3) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4) i = 0 \\ (2\alpha_1 + \alpha_3) + (2\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_4) i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_3 = -2\alpha_2 \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_3 = -2\alpha_2 \\ \alpha_1 = \alpha_2 \\ \alpha_4 = -2\alpha_2 \\ \alpha_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

Por lo tanto, el conjunto $\{(-i, 2+2i)^T, (-2+i, 0)^T; (-1, 1+i)^T, (i\ -i)^T\}$ es l.i y es base de $U+W$.

9. Considere el espacio vectorial real $\mathbb{C}^2$. Sean

$$\mathcal{B}_U = \{(-i, 2+2i)^{\mathrm{T}}, (-2+i, 0)^{\mathrm{T}}\} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{B}_W = \{(-1, 1+i)^{\mathrm{T}}, (i, -i)^{\mathrm{T}}\},$$

bases de los subespacios vectoriales de $\mathbb{C}^2$, U y W, respectivamente.

(a) Encuentre una base para $U + W$.

(b) ¿Es $U + W = \mathbb{C}^2$? Justifique su respuesta.

(c) ¿Es $U + W$ una suma directa? Justifique su respuesta.

b) Considerando que $U+W$ es subespacio de $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$, y ya que ambos tienen misma dimensión, es decir

$$\dim(U+W) = \dim(\mathbb{C}^2) = 4$$

entonces $U+W = \mathbb{C}^2$

c) Como B_U es base de U entonces $\dim(U) = 2$, y como B_W es base de W entonces $\dim(W) = 2$.

Luego de Teorema de Grassman se tiene que $\dim(U \cap W) = 2+2-4 = 0$ por lo que $U \cap W = \{0\}$.

De lo anterior, $U+W$ es suma directa.

13. Sean V un $\mathbb{K}$-e.v. y $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, un conjunto li de vectores de V. ¿Para qué valores de $\alpha \in \mathbb{K}$ se cumple que el conjunto $\{v_2 - v_1, \alpha v_3 - v_2, v_1 - v_3\}$ es li? Justifique su respuesta.

Solución: Sean $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{K}$. Suponemos que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es l.i.

$$\beta_1(v_2 - v_1) + \beta_2(\alpha v_3 - v_2) + \beta_3(v_1 - v_3) = \theta \Leftrightarrow (-\beta_1 + \beta_3)v_1 + (\beta_1 - \beta_2)v_2 + (\alpha\beta_2 - \beta_3)v_3 = \theta$$

$\Leftrightarrow -\beta_1 + \beta_3 = \beta_1 - \beta_2 = \alpha\beta_2 - \beta_3 = 0$ (pues $\{v_1, v_2, v_3\}$ es l.i)

$\Leftrightarrow \beta_1 = \beta_3 \wedge \beta_1 = \beta_2 \wedge \beta_3 = \alpha\beta_2$

$\Leftrightarrow \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 \wedge \beta_3 = \alpha\beta_2$

$\Leftrightarrow \beta_1 = \beta_3 = \beta_2 = \alpha\beta_2$

Si $\alpha = 1$, el conjunto $\{v_2 - v_1, \alpha v_3 - v_2, v_1 - v_3\}$ es l.d, pues los escalares $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ no necesariamente son todos ceros para que la combinación lineal sea el vector nulo.
Por ejemplo, bastaría que $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 2$. y se cumpliría que $2(v_2 - v_1) + 2(v_3 - v_2) + 2(v_1 - v_3) = \theta$

Si $\alpha \neq 1$, entonces el conjunto es l.i, pues si $\beta_2 = \alpha\beta_2$ entonces $\beta_2(1-\alpha) = 0$ y por tanto $\beta_2 = 0$, y como $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$, entonces $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$.

El conjunto $\{v_2 - v_1, \alpha v_3 - v_2, v_1 - v_3\}$ es l.i para todo $\alpha \in \mathbb{R} - \{1\}$.