Álgebra I. 525140 - DIM - CFM
22 de julio de 2021
Prof.: L. Badilla, I. Donoso, A. Gajardo, J. Moya
A. Pérez, C. Rivas, M. Selva, F. Thiele, G. Torres

Funciones

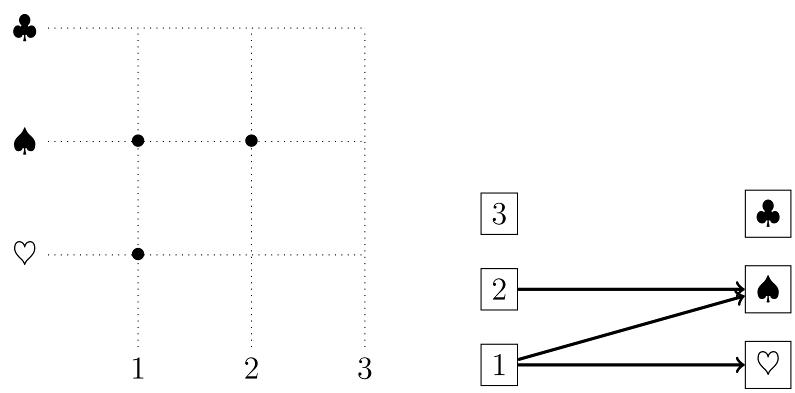
En el capítulo pasado definimos las relaciones binarias y algunas de sus propiedades. Hoy veremos nuevas propiedades de las relaciones binarias que hacen que las llamemos "*funciones*". Las funciones son las "máquinas" más importantes de las que dispone la ingeniería para modelar y trabajar con el mundo. Las estudiaremos lentamente a través de todo el primer año de la carrera.

Definición 1. Dados dos conjuntos A y B, y una relación $R \subseteq A \times B$ se define la *imagen* y la *pre-imagen* de un elemento como sigue.

$$\text{Para } a \in A, R(a) = \{y \in B \ : \ a \ R \ y\}$$
$$\text{Para } b \in B, R^{-1}(b) = \{x \in A \ : \ x \ R \ b\}$$

Ejemplo 2. Considerando $A = \{1, 2, 3\}$, y $B = \{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$ y la relación

$$G = \{(1, \spadesuit), (1, \heartsuit), (2, \spadesuit)\}$$



En este caso vemos que $G(1) = \{\heartsuit, \spadesuit\}$, $G(2) = \{\spadesuit\}$, $G(3) = \phi$.

También vemos que $G^{-1}(\heartsuit) = \{1\}$, $G^{-1}(\spadesuit) = \{1, 2\}$, $G^{-1}(\clubsuit) = \phi$.

Dependiendo de la relación, algunos elementos tendrán 0, 1, 2 o más elementos en su imagen. De igual manera, el número de pre-imágenes de un elemento, puede variar.

Nos van a interesar aquellas relaciones en que **todos** los elementos tienen una **única imagen**, tales relaciones se llamarán "relaciones funcionales".

Definición 3. Dados dos conjuntos A y B, y una relación $R \subseteq A \times B$ se dice que R es *funcional* si para todo $a \in A$ se cumple que $R(a)$ tiene exactamente un elemento: $|R(a)| = 1$. En este caso preferiremos denotar la relación su forma de función, como:

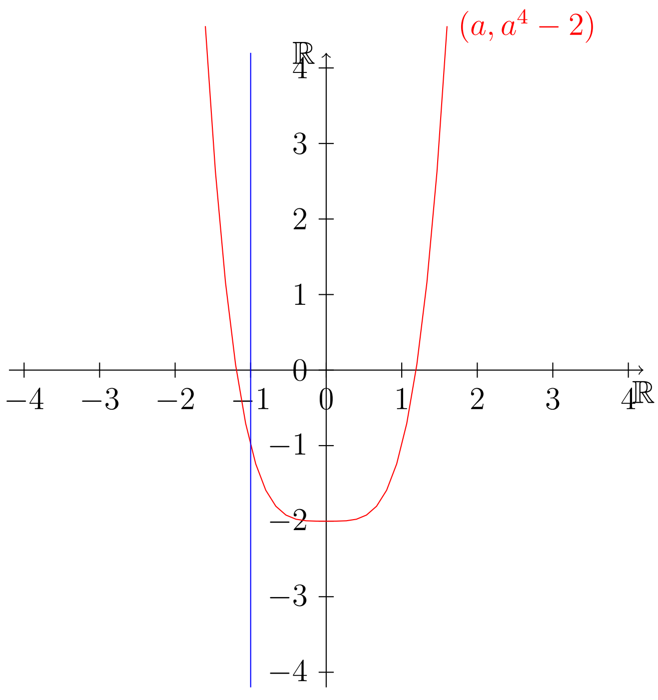
$$R : A \to B$$

$$a \to R(a)$$

y en ese caso $R(a)$ se concebirá ya no como un conjunto, sino como un elemento, es decir, Si R es funcional y $R(a) = \{y\}$, entonces preferiremos escribir$R(a) = y$. Asimismo, R se llamará también función.

Vemos que el número de imágenes de un elemento a es el número de flechas que sale de este en su grafo, igualmente es el número de puntos de la relación que caen sobre la recta vertical que parte de a. Una manera de verificar si una relación es funcional es mirar en cada recta vertical de su gráfico que parte en un punto de A, si es que esta intersecta exactamente 1 punto de la relación o no; o si es que en el gráfico vemos exactamente una flecha salir de cada nodo $a \in A$.

Ejemplo 4. Consideremos la relación $C \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definida por $C = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ : \ a^4 - b = 2\}$. Su gráfico será el siguiente.



Vemos que si trazamos una recta vertical, pasando por cualquier punto del eje H, siempre intersecta el gráfico de C. Lo cual matemática mente se ve en que $C(a) = \{a^4 - 2\}$, por lo tanto C es una función y escribimos más bien $C(a) = a^4 - 2$.

Ejemplo 5. Consideremos A como el conjunto de los chilenos, y $B = \mathbb{N}$, definimos la relación $R = \{(a, b) \in A \times B \ : \ \text{el R. U. T. de } a \text{ es } b\}$. ¿Es una relación funcional? ?¿Hay personas que tengan dos R. U. T.? ¿Hay personas que no tengan R. U. T.?

Definición 6. Una relación funcional o función $R : A \to B$ se dice *inyectiva* si

$$\text{para todo } b \in B \text{ se cumple que } |R^{-1}(b)| \leq 1.$$

La función C del ejemplo anterior no es inyectiva, mientras que la relación del ejemplo del R. U. T. sí es inyectiva.

Definición 7. Una relación funcional o función $R : A \to B$ se dice *sobreyectiva* si

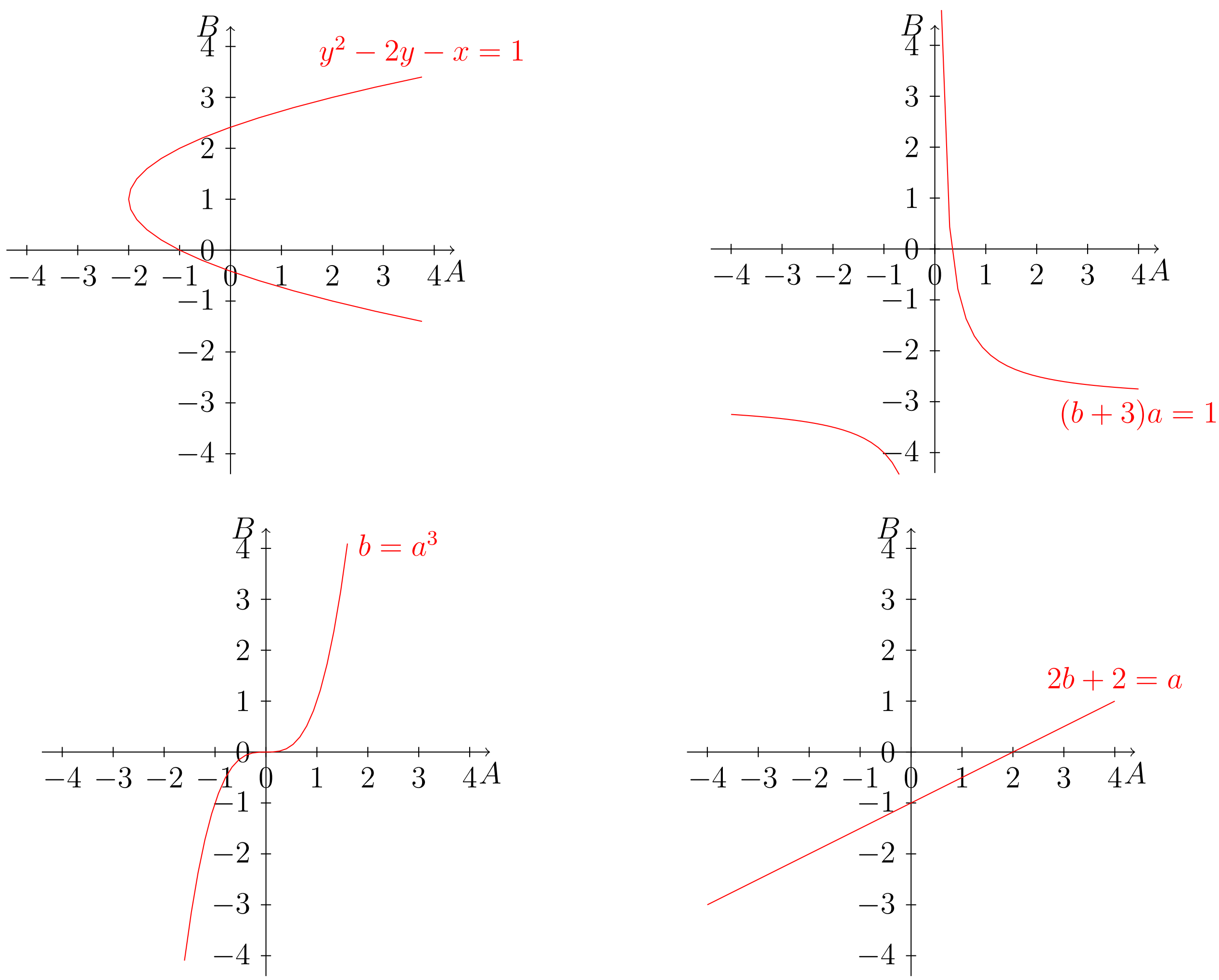
$$\text{para todo } b \in B \text{ se cumple que } |R^{-1}(b)| \geq 1.$$

La función C del ejemplo anterior no es sobreyectiva, y la relación del ejemplo del R. U. T. tampoco. ¿Qué funciones sobreyectivas conoces?

Definición 8. Una relación funcional o función $R : A \to B$ se dice *biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo, es decir si

$$\text{para todo } b \in B \text{ se cumple que } |R^{-1}(b)| = 1.$$

Ejercicio 9. ¿Cuáles de las siguiente son funciones, cuáles son inyectivas, cuáles biyectivas? ¿Qué pasa si en vez de tomar $A = \mathbb{R}$ y $B = \mathbb{R}$ toma otros conjuntos de partida y de llegada pero conserva la ecuación?.



Definición 10. Dada una relación funcional o función $R : A \to B$ se define el *recorrido* de R como el conjunto de puntos en B que tienen al menos una pre-imagen:

$$Rec(R) = \{b \in B \ : \ |R^{-1}(b)| \geq 1\}.$$

Según la definición anterior podemos caracterizar la sobreyectividad de una función como la propiedad de tener recorrido igual a su conjunto de llegada B.

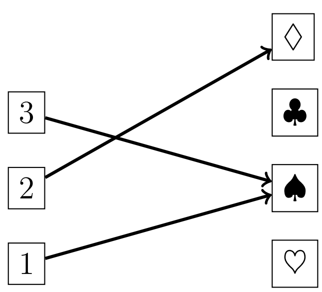
Teorema 11. Dada una relación funcional o función $R : A \to B$, se cumple que

$$R \text{ es sobreyectiva } \Leftrightarrow Rec(R) = B.$$

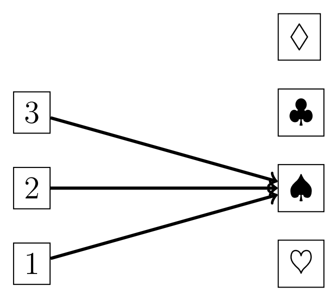
En un diagrama de flechas es simple verificar funcionalidad, inyectividad, sobreyectividad y recorrido.

Ejemplo 12. Considerando $A = \{1, 2, 3\}$, y $B = \{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit\}$ y las relaciones siguientes. ¿Cuáles de las siguiente son funciones, cuáles son inyectivas, cuáles biyectivas? ¿Qué pasa si modificamos A y B manteniendo los pares ordenados que están en cada relación?

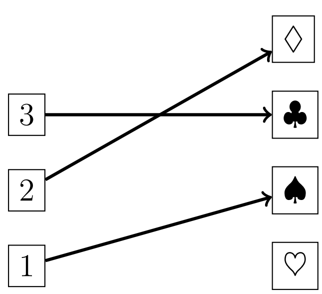
$M = \{(1, \spadesuit), (2, \diamondsuit), (3, \spadesuit)\}$



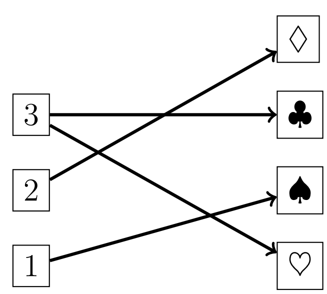
$R = \{(1, \spadesuit), (2, \spadesuit), (3, \spadesuit)\}$

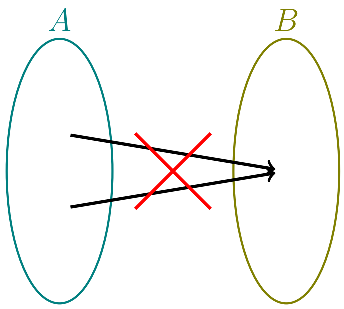


$H = \{(1, \spadesuit), (2, \diamondsuit), (3, \clubsuit)\}$

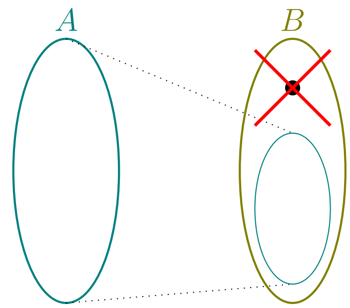


$M = \{(1, \spadesuit), (2, \diamondsuit), (3, \clubsuit), (3, \heartsuit)\}$





NO inyectiva



NO sobreyectiva

Esta reflexión nos ayuda a entender conceptualmente los conceptos de inyectividad y sobreyectividad, sin emabergo a la hora de analizar una función concreta, en general no podemos hacer diagramas de flechas. El único caso en el que el uso de los diagramas de flechas podría tener untilidad práctica es el caso en que tanto el conjunto de llegada como el de partida son conjuntos finitos. En ese caso, contamos con una herramienta adicional, muy interesante a la hora de analizar problemas combinatorios complicados.

Consideren las relaciones del Ejercicio 9, su conjunto de partida son los reales, que tienen infinitos elementos, no es posible colocar todos los números reales como puntos separados dentro de un diagrama; en ese caso, es el gráfico la herramienta apropiada para visualizar la inyectividad y la sobreyectividad. Aún así, no siempre es fácil graficar, como verán en Cálculo I, hay funciones muy difíciles de graficar, incluso por medio de un computador, ya que estos cometen errores de aproximación, que a veces ocultan comportamientos relevantes. Por lo tanto, la herramienta que usaremos para estudiar funciones serán las *ecuaciones*.

Ejemplo 13. Analicemos las relaciones del Ejercicio 9.

- $R = \{(x, y) \ : \ y^2 - 2y - x = 0\}$

  Bueno, esta no es una función, pues hay elementos del conjunto de partida A que están relacionados con dos elementos del conjunto de llegada B, por ejemplo, $x = -1 \in A$ está relacionado tanto con $y = 0$ como con $y = 2$, en efecto:

  $$0^2 - 2 \cdot 0 - (-1) = 1 \qquad \text{y} \qquad 2^2 - 2 \cdot 2 - (-1) = 1$$

  Con más generalidad, si calculamos la imágen de un elemento arbitrario $a \in A$ obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
R(a) &= \{b \in B \ : \ b^2 - 2b - a = 1\} \\
&= \{b \in B \ : \ b^2 - 2b - a - 1 = 0\} \\
&= \left\{ b \in B \ : \ b = \frac{2 + \sqrt{4 - 4(-a-1)}}{2} \vee b = \frac{2 - \sqrt{4 - 4(-a-1)}}{2} \right\} \\
&= \left\{ b \in B \ : \ b = 1 + \sqrt{1 - 1(-a-1)} \vee b = 1 - \sqrt{1 - 1(-a-1)} \right\} \\
&= \left\{ b \in B \ : \ b = 1 + \sqrt{a+2)} \vee b = 1 - \sqrt{a+2} \right\} \\
&= \begin{cases} \left\{ 1 + \sqrt{a+2)}, 1 - \sqrt{a+2} \right\} & \text{si } a > -2 \\ \{1\} & \text{si } a = -2 \\ \phi & \text{si } a < -2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Con lo cual vemos que además de haber elementos con más de una imagen, hay elementos sin nunguna imagen, cosa que también es un problema a la hora de ser una función.

- $R = \{(a, b) \ : \ (b+3)a = 1\}$

  Como antes, estudiemos el conjunto imagen de un elemento arbitrario a.

$$\begin{aligned}
R(a) &= \{b \in B \ : \ (b+3)a = 1\} \\
&= \{b \in B \ : \ ba = 1 - 3a\} \\
&= \begin{cases} \left\{ \frac{1-3a}{a} \right\} & \text{si } a \neq 0 \\ \phi & \text{si } a = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

  De aquí vemos que esta tampoco es función, ya que hay un elemento de A: $a = 0$ que no tiene ninguna imagen.

- $R = \{(a, b) \ : \ b = a^3\}$

  Repetimos el procedimiento de los ejemplos anteriores.

$$\begin{aligned}
R(a) &= \{b \in B \ : \ b = a^3\} \\
&= \{a^3\}
\end{aligned}$$

  Vemos que todo elemento de A tiene una única imagen en B, por lo tanto ¡esta sí es una función!

  Analicemos ahora su inyectividad y sobreyectividad. Para ello debemos calcular el conjunto de pre-imagenes de un elemento $b \in B$ arbitrario.

$$\begin{aligned}
R^{-1}(b) &= \{a \in A \ : \ b = a^3\} \\
&= \{\sqrt[3]{b}\}
\end{aligned}$$

  Vemos que este conjunto siempre tiene un único elemento: $|R^{-1}(b)| = |\{\sqrt[3]{a}\}| = 1$. Lo cual nos dice que esta función es tanto inyectiva como sobreyectiva. Esto gracias a que la raíz cúbica está siempre definida en los reales, y es la única solución de la ecuación $b = x^3$.

  Dejamos como ejercicio la cuarta relación.

Cuando los conjuntos A y B son **finitos**, hay restricciones combinatoriales, y una teoria interesante nos da fuertes restricciones para encontrar funciones inyectivas o sobreyectivas entre los conjuntos. Veamos.

Principio del Palomar

El Principio del Palomar se aplica **únicamente a funciones entre conjuntos finitos**, a continuación explicamos de qué se trata.

Ejemplo 14. Considerando $A = \{1, 2, 3\}$, y $B = \{\clubsuit, \diamondsuit\}$, defina una función: a) inyectiva, b) sobreyectiva. ¿Es posible?

Ahora, si consideramos los conjuntos A y B como en el ejemplo 12 ¿puede definir una función sobreyectiva de A en B?.

Cuando A y B son finitos, la cantidad de elementos que tienen hace imposible ciertas cosas, concretamente podríamos observar lo siguiente.

Observación 15.
- Si $|A| < |B|$ no es posible definir una función sobreyectiva de A a B.
- Si $|A| > |B|$ no es posible definir una función inyectiva de A a B.

La observación anterior se conoce como el **Principio del Palomar**, que dice que si tenemos n casas para palomas y tenemos $m > n$ palomas, entonces necesariamente una de las casas deberá contener más de una paloma. Recíprocamente, si hay $m < n$ palomas, entonces necesariamente una de las cajas quedará vacía.

Este principio tiene múltiples aplicaciones que son muy de sentido común.

Por ejemplo es posible demostrar que en el mundo hay dos personas que en este momento tienen la misma cantidad de cabello.... en efecto, el número de pelos que un ser humano puede tener en la cabeza no es superior 1000 pelos por centímetro cuadrado, y si asimilamos la cabeza de una persona a un balón de futbol (siendo generosos) el cual tiene menos de 13cm de radio, por lo tanto su superficie es menor que 2.124 centímetros cuadrados, con lo cual la cantidad máxima de cabellos posibles para un ser humano es de 2.124.000. Sin embargo en el mundo es de más de 7.000.000.000 de personas.

Podemos afirmar sin temor que no solo hay dos personas con exactamente la misma cantidad de cabellos, sino que, en este mismo instante, hay al menos 3 mil personas con la misma cantidad de cabellos.

Pero hay otras aplicaciones más importantes. Por ejemplo, dado que todos los archivos del computador se codifican internamente usando solo 0s y 1s, entonces el principio del palomar nos dice que por muy bueno que sea un programa compresor de archivos, siempre habrá al menos un archivo que crecerá de tamaño al aplicarle el compresor: no existe el compresor perfecto.

Teorema 16. Si A y B son conjuntos finitos, entonces se cumplen las tres siguientes implicancias:

1. Si $F : A \to B$ es biyectiva, entonces $|A| = |B|$.
2. Si $F : A \to B$ no es sobreyectiva y $|A| = |B|$, entonces F tampoco es inyectiva.
3. Si $F : A \to B$ no es inyectiva y $|A| = |B|$, entonces F tampoco es sobreyectiva.

Demostración.

1. *Razonemos por contradicción, si $|A| \neq |B|$ el principio del palomar me dice que o bien no podrá ser sobreyectiva o bien no podrá ser inyectiva, dependiendo de si $|A| < |B|$ o $|A| > |B|$, en cualquier caso no será biyectiva.*
2. *Si $F : A \to B$ no es sobreyectiva, hay elementos de B que no reciben flechas, pero como $|A| = |B|$, y de cada elmento de A sale exactamente una flecha, entonces han de haber flechas que llegan al mismo punto, por lo tanto F no puede ser inyectiva en este caso.*
3. *Si $F : A \to B$ no es inyectiva, algún elemento de B recibiría al menos dos flechas, pero como de cada elemento de A sala una y solo una flecha, y $|A| = |B|$ esto dignifica que hay elementos de B que quedan sin recibir flechas.*

□

Los conjuntos finitos los encontramos cuando hablamos de conjuntos de personas, o de muestras de laboratorio, o de códigos representados en un computador, no es necesario argumentar la importancia de entender las funciones entre este tipo de conjuntos. Sin embargo, la mayoría de los modelos que vienen de la física o la biología, usan funciones cuyo conjunto de partida o de llegada es el conjunto de los números reales, o un intervalo de este. Allí, el principio del palomar pierde toda validez.

Operaciones entre funciones

Hay algunas funciones destacadas que se pueden definir siempre.

Función identidad. Dado un conjunto A, la función identidad de A se denota por id_A y se define como $id_A : A \to A$, donde para todo $a \in A, id_A(a) = a$, es decir, es una función que no modifica al objeto, coincide con la relación de identidad, la cual es claramente funcional. En este caso $Rec(id_A) = A$, e id_A es biyectiva.

Función constante. Se dice que una función $f : A \to B$ es constante si se cumple que para todo $x, y \in A, f(x) = f(y)$; es decir, f lleva a todos los elementos de A a un solo elemento de B fijo. En este caso $|Rec(f)| = 1$, la función no será ni inyectiva ni sobreyectiva, salvo en los casos triviales en que A o B tengan un solo elemento, respectivamente.

Estas funciones se encontrarán muy rara vez en las aplicaciones, sin embargo serán útiles en asuntos teóricos y para describir ciertos fenómenos. Pero definamos ahora la operación más importante que se puede definir entre funciones abstractas.

Muchas veces necesitamos aplicar una transformación a un objeto y luego aplicar otra, esto se conceptualiza con la siguiente definición.

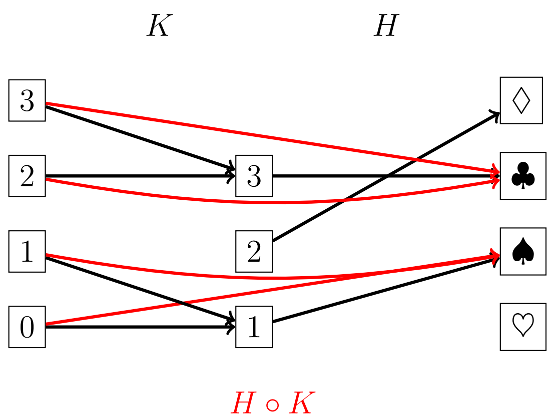
Definición 17. Dadas dos funciones $F : A \to B$ y $G : C \to D$, decimos que G se pude componer con F si y solo si $B = C$, en tal caso la función compuesta $G \circ F$ va de A en D y queda definida como sigue.

$$G \circ F : A \to D$$

$$x \in A \to G \circ F(x) = G(F(x))$$

Hacemos notar que para poder componer una función con otra es necesario que la primera tenga conjunto de llegada igual al conjunto de partida de la segunda, si no es así, no se puede definir la composición.

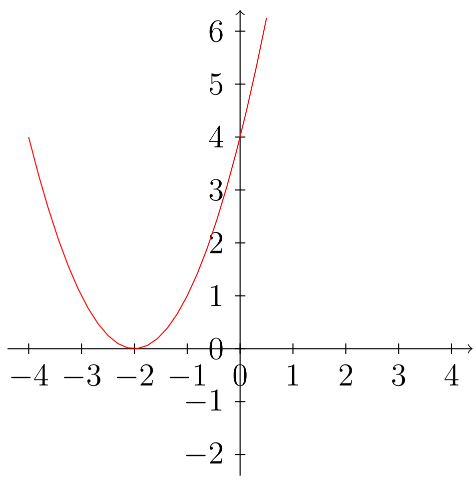
Ejemplo 18. Veamos un ejemplo simple primero, consideremos la función H del ejemplo 12, y la función $K : \{0, 1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ definida por $K(0) = 1$, $K(1) = 1$, $K(2) = 3$, $K(3) = 3$. Como el conjunto de llegada de K coincide con el conjunto de partida de H podemos componer y obtener $H \circ K$. El el grafo se ve más claro. Con flechas negras representamos la función K y la función H, mientras que con flechas rojas representamos la función $H \circ K$.



Ejemplo 19. Veamos otro ejemplo simple, pero entre funciones numéricas. Consideremos $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $c(x) = x^2$, y $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $a(x) = x + 2$. Podemos definir tanto $c \circ a$ como $a \circ c$ pues los conjuntos de partida y llegada de las dos funciones son todos iguales.

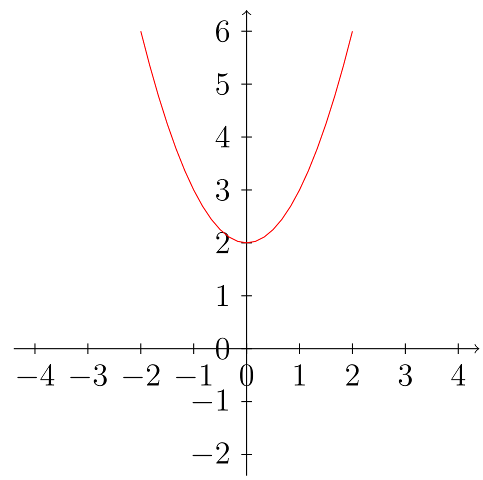
$c \circ a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(c \circ a)(x) = (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$



$a \circ c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(a \circ c)(x) = x^2 + 2$



Proposición 20. La operación de composición de funciones es asociativa pero no conmutativa.

Demostración. De los dos ejemplos anteriores se evidencia que la composición **no es conmutativa**, en el primer ejemplo la composición $K \circ H$ ni siquiera tiene sentido. En el segundo ejemplo tanto $a \circ c$ como $c \circ a$ tienen sentido, pero $a \circ c \neq c \circ a$.

Veamos ahora que la asociatividad sí se cumple. Para ello supongamos que tenemos tres funciones $R : A \to B$, $S : B \to C$, $T : C \to D$, de manera tal que es posible definir

- $S \circ R : A \to C$ y $T \circ (S \circ R) : A \to D$, y también
- $T \circ S : B \to D$ y $(T \circ S) \circ R) : A \to D$.

Queremos demostrar que $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$. De momento tenemos al menos que sus conjuntos de partida y llegada coinciden. Ahora debemos demostrar que toman los mismos valores, es decir, debemos demostrar que:

$$\forall x \in A,\ (T \circ (S \circ R))(x) = ((T \circ S) \circ R)(x).$$

Para demostrar esto, aplicamos la definición de composición cuidadosamente. Tomemos antes que nada un x cualquiera en A, así lo que demostremos será válido en todo x.

$$\begin{aligned} (T \circ (S \circ R))(x) &= T((S \circ R)(x)); && \text{por definición de } T \circ (S \circ R) \\ &= T(S(R(x))) && \text{por definición de } S \circ R, \end{aligned}$$

por otra parte,

$$\begin{aligned} ((T \circ S) \circ R)(x) &= (T \circ S)(R(x)); && \text{por definición de } (T \circ S) \circ R \\ &= T(S(R(x))) && \text{por definición de } T \circ S. \end{aligned}$$

Como en ambos desarrollos se llega a lo mismo, queda claro que $(T \circ (S \circ R))(x) = ((T \circ S) \circ R)(x)$.
$\square$

Observamos que la función id_A e id_B actúan como neutro respecto a la composición, es decir: $id_B \circ F = F$ y $F \circ id_A = F$. En efecto $(id_B \circ F)(x) = id_B(F(x)) = F(x)$, ya que id_B no modifica el valor $F(x)$. Análogamente $(F \circ id_A)(x) = F(id_A(x)) = F(x)$, ya que id_B no modifica el valor x.

Definición 21. Una función $F : A \to B$ se dice *invertible* si existe $H : B \to A$ tal que $F \circ H = id_B$ y $H \circ F = id_A$.
En tal caso decimos que H es la inversa de F y la denotamos por F^{-1}.

Ejemplo 22. La función a del ejemplo 19 es invertible pues si tomamos $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $b(x) = x - 2$, se cumple que

- $a \circ b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se puede definir y $(a \circ b)(x) = a(b(x)) = a(x-2) = x - 2 + 2 = x = id_{\mathbb{R}}(x)$, por su parte
- $b \circ a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se puede definir y $(b \circ a)(x) = b(a(x)) = b(x+2) = x + 2 - 2 = x = id_{\mathbb{R}}(x)$.

Teorema 23. $F : A \to B$ es invertible si y solo si F es biyectiva.

Demostración.

- **(Si $F : A \to B$ es invertible, entonces F es biyectiva).** En este caso asumimos que existe $H : B \to A$ tal que $F \circ H = id_B$ y $H \circ F = id_A$, debemos demostrar que entonces F es biyectiva.
    - F **es sobreyectiva.** Debemos demostrar que $|F^{-1}(y)| \geq 1$ para todo $y \in B$. De $F \circ H = id_B$ sospechamos que una pre-imagen de y debe ser $H(y)$, en efecto $F(H(y)) = (F \circ H)(y) = id_B(y) = y$, así $F^{-1}(y) \supseteq \{H(y)\}$.

- F **es inyectiva.** Debemos demostrar que $|F^{-1}(y)| \leq 1$ para todo $y \in B$, es decir que $H(y)$ es la única pre-imagen de y. Razonemos por contradicción, supongamos que hay otra, es decir que existe $z \in A$ tal que $z \neq H(y)$ y $F(z) = y$.

  De $H \circ F = id_A$ tenemos que $(H \circ F)(z) = H(F(z)) = id_A(z) = z$, sin embargo de nuestro supuesto tenemos que $H(F(z)) = H(y) \neq z$, hemos llegado a una contradicción, por lo tanto y tiene una única pre-imagen y entonces F es inyectiva.

- **(Si F es biyectiva, entonces $F : A \to B$ es invertible).** Cuando F es biyectiva tenemos que para todo $y \in B$ existe un único elemento en $F^{-1}(y)$, definimos H de esa manera, definimos la función $H : B \to A$ por

$$H(y) = \text{ el único elemento de } A \text{ que cumple } \{H(y)\} = F^{-1}(y).$$

  Tal H está bien definido y es una función, cumple todo lo deseado ya que si $y = F(x)$, entonces $x = H(y)$, así:

  - $H(F(x)) = H(y) = x = id_A(x)$ y por su parte
  - $F(H(y)) = F(x) = y = id_B(y)$.

$\square$

Teorema 24. Si $F : A \to B$ y $G : B \to C$ son invertibles, entonces $G \circ F$ es también invertible y $(G \circ F)^{-1} = F^{-1} \circ G^{-1}$.

Demostración. Si $F : A \to B$ y $G : B \to C$ son invertibles, entonces existen sus inversas $F^{-1} : B \to A$ y $G^{-1} : C \to B$, para demostrar lo que se pide basta verificar que la función $F^{-1} \circ G^{-1}$ está definida de C en A y cumple la definición de inversa, es decir que al componerla con $G \circ F$ por un lado y otro, resultan las correspondientes funciones identidad.

Primero vemos que $F^{-1} \circ G^{-1}$ está definida pues en efecto el conjunto de llegada de G^{-1} es B y el conjunto de partida de F^{-1} es también B. Así $F^{-1} \circ G^{-1} : C \to A$ está definida.

Veamos ahora la composición de esta con $G \circ F$. Como hipótesis tenemos que $G \circ G^{-1} = id_C$, $G^{-1} \circ G = id_B$, $F \circ F^{-1} = id_B$, $F^{-1} \circ F = id_A$. Usaremos también la asociatividad de la composición antes demostrada.

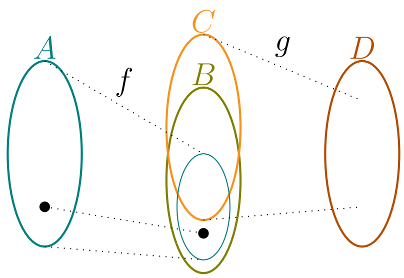
- $(G \circ F) \circ (F^{-1} \circ G^{-1}) = id_C$ En efecto,

$$\begin{aligned}
(G \circ F) \circ (F^{-1} \circ G^{-1}) &= ((G \circ F) \circ F^{-1}) \circ G^{-1}, && \text{por asociatividad aplicada a } G^{-1}\\
&= (G \circ (F \circ F^{-1})) \circ G^{-1}, && \text{por asociatividad aplicada a } G\\
&= (G \circ id_B) \circ G^{-1}, && \text{por hipótesis}\\
&= G \circ G^{-1}, && \text{por neutralidad de } id_B\\
&= id_C, && \text{por hipótesis.}
\end{aligned}$$

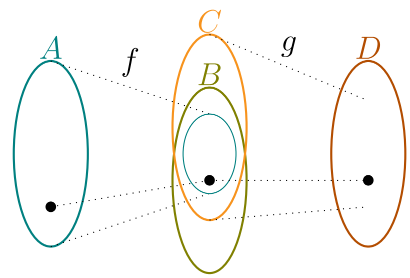
- $(F^{-1} \circ G^{-1}) \circ (G \circ F) = id_A$ *Es análogo al ítem anterior, sin embargo es un buen ejercicio y se recomienda hacerlo paso a paso.*

$\square$

Pero en algunas aplicaciones puede interesarnos componer funciones cuyo conjuntos de llegada y partida no calzan, veamos cuál es el problema en este caso. Supongamos que tenemos $f : A \to B$ y $g : C \to D$. Dos casos aparecen.



Hay elementos que no tienen imagen



Todos los elementos tienen imagen

El caso de la derecha no parece muy grave, la fución compuesta se puede calcular, solo sería necesario redefinir el conjunto de llegada de f y el conjunto de partida de g de manera que fueran iguales, para lo cual lo más sencillo probablemente es tomar ambos como $B \cap C$. Esto funciona ya que $Rec(f) \subseteq B \cap C$.

Por ejemplo, para formalizar esta idea, podemos definir las funciones $\tilde{f} : A \to B \cap C$, como $\tilde{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in A$, y $\tilde{g} : B \cap C \to D$ como $\tilde{g}(x) = g(x)$ para todo $x \in B \cap C$. Con esto la función $\tilde{g} \circ \tilde{f} : A \to D$ se puede definir y resulta como es de esperarse: $(\tilde{g} \circ \tilde{f}(x)) = g(f(x))$, para todo $x \in A$.

El caso de la izquierda, sin embargo, es más complicado pues si restringiéramos el conjunto de llegada de f, quedarían elementos sin imagen, y f dejaría de ser una función. En este caso será necesario achicar también el conjunto A, eliminando todos esos elementos que quedan sin imagen; pero introduzcamos primero estos conceptos de "achicar" o "restringir" más formalmente antes de seguiir.

Definición 25. Dadas dos funciones $F : A \to B$ y $H : P \to Q$, decimos que:

- H es una restricción de F si $P \subseteq A$, $B = Q$ y para todo $a \in P$ se cumple $H(a) = F(a)$, en este caso escribimos $H = F|_P$.
- H es una co-restricción de F si $P = A$, $Rec(F) \subseteq Q \subseteq B$ y para todo $a \in P$ se cumple $H(a) = F(a)$.

Estas operaciones son prácticas pues en algunas ocasiones no deseamos estudiar la función en todo su conjunto de definición sino que queremos enfocarnos solo en una parte de éste. Por ejemplo si tenemos la función que a cada chileno le asocia su número de R. U. T., podemos restringirla mirando sólo los chilenos que viven en Concepción, tal sería una *restricción*.

Otras veces deseamos restringir el conjunto de llegada, en el ejemplo anterior, podríamos tomar como conjunto de llegada sólo a los números naturales entre 0 y 100 millones, ya que sabemos que no existen aun números de rut fuera de este intervalo. Sin embargo esta operación requiere cuidados: el conjunto Q al cual se restringe, debe contener al recorrido de la función, de otra forma, el elemento $H(a) = F(a)$ podría caer fuera de Q para algún elemento $a \in A$ (si alguien tuviera un rut mayor a 100 millones, la restricción propuesta haría "caer al sistema").

Ejemplo 26. Consideremos $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, como vimos es una función, pues para cada medida α en radianes, corresponde un único valor de coseno, dado por la primera coordenada del punto $P(\alpha)$, tal como vimos en el capítulo de trigonometría.

Puede interesarnos restringir la función cos al intervalo $[0, 2\pi[$, pues sabemos que lo que ocurre en otros puntos es solo una repetición de lo que ocurre en este intervalo, tendremos entonces la restricción de coseno $\cos|_{[0,2\pi[} : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}$.

También podría interesarnos co-restringir el conjunto de llegada al intervalo $[-1, 1]$ pues sabemos que cos nunca toma valores fuera de este intervalo. Entonces la función $F : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, definida por $F(x) = \cos(x)$, es una co-restricción de cos.

Si queremos restringir y co-restringir una función, aplicaremos una operación y luego la otra. Por ejemplo, $G : [0, 2\pi[\to [-1, 1]$ es la co-restricción al intervalo $[-1, 1]$ de la restricción $\cos|_{[0,2\pi[}$ de cos.

Ahora bien, si alguien quisiera co-restringir cos a $\mathbb{R}_+$, no podría, pues $Rec(\cos) \not\subseteq \mathbb{R}_+$. Para lograr esto, deberá primero restringir cos a un conjunto de ángulos cuyo coseno caiga dentro de $\mathbb{R}_+$, por ejemplo podríamos considerar $\cos|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, esta función cumple que $Rec(\cos|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}) =]0, 1]$, por lo tanto su co-restricción a $\mathbb{R}_+$ tiene validez, tendríamos que $G : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}_+$ es la co-restricción de una restricción de cos.

Si volvemos al ejemplo de la composición, la función $\tilde{f}$ que definimos es una co-restricción de f, ya que solo su conjunto de llegada se achica. Por su parte, la función $\tilde{g}$ es una restricción de g, pues solo su conjunto de partida se achica.

El caso complicado ocurre cuando $Rec(f) \not\subseteq B \cap C$, pues en ese caso NO podemos co-restringir f a $B \cap C$. En ese caso lo más natural es primero restringir f al conjunto de puntos cuya imagen queda dentro de $B \cap C$:

$$\tilde{A} = \{a \in A \ : \ f(a) \in B \cap C\}$$

Definido de esta forma se cumple que $\overline{f} : \tilde{A} \to B \cap C$ es una función, ya que, gracias a la manera como definimos $\tilde{A}$, se cumple que $Rec(\overline{f}) \subseteq B \cap C$, por lo tanto $\overline{f}$ es una co-restricción válida de $f_{\tilde{A}}$, que se puede componer legítimamente con $\tilde{g}$.

Esta metodología funciona en cualquier caso, así en general olvidaremos las "tildes", y cada vez que tengamos dos funciones cualesquiera, $f : A \to B$ y $g : C \to D$, definiendo

$$Dom(g \circ f) = \{a \in A \ : \ f(a) \subseteq B \cap C\}$$

Consideraremos la función compuesta como $g \circ f : Dom(g \circ f) \to D$ definida por $(g \circ f)(a) = g(f(a))$, para todo $a \in Dom(g \circ f)$.

Ejemplo 27. Consideremos las funciones: $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $l(x) = 3x+1$; y $r : [0, \infty[\to [0, \infty[$ definida por $r(x) = \sqrt{x}$. No podemos definir $r \circ l$ pues el conjunto de llegada de l no coincide con el conjunto de partida de r. Peor aún $Rec(l) = \mathbb{R} \not\subseteq [0, \infty[$. Entonces calculamos:

$$\begin{aligned} Dom(r \circ l) &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ l(x) \in [0, \infty[\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ 3x + 1 \in [0, \infty[\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ 3x + 1 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ 3x \geq -1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq -\frac{1}{3}\} \\ &= \left[-\frac{1}{3}, \infty\right[\end{aligned}$$

Así, la composición $r \circ l : \left[-\frac{1}{3}, \infty\right[\to [0, \infty[$ queda bien definida como $(r \circ l)(x) = \sqrt{3x+1}$.

Notamos que el conjunto de partida que debe tener $r \circ l$ resulta predecible también al observar que la expresión que está dentro de la raíz cuadrada *debe* ser no negativa.

Otra operación interesante es la *extensión*.

Definición 28. Dadas dos funciones $F : A \to B$ y $G : C \to D$, decimos que:

- F es una extensión de G si $C \subseteq A$, $D \subseteq B$ y para todo $a \in C$ se cumple $G(a) = F(a)$.

Vemos que la extensión es la operación contraria a la restricción y la co-restricción juntas, en otras palabras se tiene:

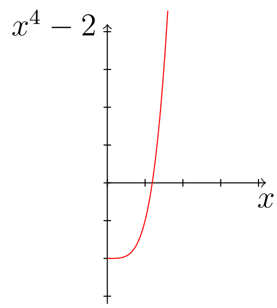
> F es una extensión de G si y solo si G es el resultado de una restricción de F a $C \subseteq A$ seguida de una co-restricción de $F|_C$ a $Rec(F|_C) \subseteq D \subseteq B$.

Es interesante extender una función cuando, por ejemplo, la función representa un fenómeno observado, y nuevos datos adquiridos permiten conocer la función en elementos donde antes no se conocían, por ejemplo si se tiene la estatura de la población de Concepción, y más tarde se consiguen los datos de la estatura de todos los chilenos, entonces se puede definir una *extensión* de la función estatura.

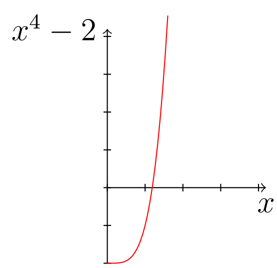
También son útiles estas operaciónes cuando necesitamos transformar la función para que sea inyectiva y/o sobreyectiva, y también cuando necesitamos restringir una relación para que sea funcional, eliminando los elementos del conjunto de partida que no tienen imágen.

Ejemplo 29.

- Consideremos la función $C(x) = x^4 - 2$ vista al comienzo del presente capítulo. Esta función no es inyectiva ya que tanto x como $-x$ tienen la misma imagen. Una manera simple de restringir C para transformarla en una función inyectiva es restringirla al intervalo $[0, \infty[$. La función $C|_{[0,\infty[}$ sí es inyectiva, ya que para cada $y \in Rec(C|_{[0,\infty[}) = [-2, \infty[$ encontramos una sola pre-imagen: $x = \sqrt{\sqrt{y+2}}$.



- Si ahora consideramos la restricción de C que acabamos de definir: $C|_{[0,\infty[} : [0, \infty[\to \mathbb{R}$, resulta que no es sobreyectiva, pues $Rec(C|_{[0,\infty[}) = [-2, \infty[$, podemos entonces co-restringirla para así obtener una función biyectiva. La función, digamos $D : [0, \infty[\to [-2, \infty[$ por $D(x) = x^4 - 2$ es una co-restricción de $C|_{[0,\infty[}$ a $[-2, \infty[$.



Consideremos la función $F : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \frac{x+2}{x-2}$, es en efecto una función, ya que si $x \neq 2$ el denominador es no nulo, y por lo tanto el cuociente está definido. Podemos desear extender F a $\mathbb{R}$. Si F no está asociada a un fenómeno físico o social que tenga interpretación, dará lo mismo cómo al extendamos, podemos asingar el valor que queramos al punto que se agrega: $x = 2$, por ejemplo podemos definir $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ -5 & \text{si } x = 2 \end{cases}, \text{ para cada } x \in \mathbb{R}.$$

G es una extensión de F a $\mathbb{R}$.