Índice general

Capítulo 3

Transformaciones lineales

3.5. Matrices

Comencemos eligiendo un cuerpo $\mathbb{K}$ y coeficientes en ese cuerpo. Más precisamente, mn $(m, n \in \mathbb{N})$ coeficientes.

Definición 3.1 (Definición intuitiva de matriz)**.** Una matriz es un arreglo rectangular de coeficientes (escalares, números) en un cierto cuerpo $\mathbb{K}$. La cantidad de coeficientes de una matriz depende de su número de filas y columnas, una matriz de m filas y n columnas, con $m, n \in \mathbb{N}$, tiene mn coeficientes, que denotamos mediante a_{11}, a_{12}, $\cdots$, a_{1n},a_{21}, $\cdots$, a_{2n}, $\cdots$, a_{m1}, $\cdots$, a_{mn}.

Estos coeficientes tienen dos subíndices, el primero denota la fila de la matriz en la que ubicaremos al coeficiente y el segundo, la columna.

Así, la matriz A con m filas y n columnas y coeficientes a_{11}, a_{12}, $\cdots$, a_{1n}, a_{21}, $\cdots$, a_{2n}, $\cdots$, a_{m1}, $\cdots$, a_{mn} dados, se escribe como el siguiente arreglo de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Nota que ella tiene m filas y n columnas, el coeficiente a_{11} fue colocado en el lugar de la matriz donde se cruzan la fila 1 y la columna 1, es decir, en la posición $(1, 1)$ de A. El coeficiente a_{m1} se encuentra en la posición $(m, 1)$ de A, donde se cruzan la fila m y la columna 1.

De esta matriz A se dice que es una matriz de *orden* $m \times n$ o de *tamaño* $m \times n$, porque tiene m filas y n columnas.

Al conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ se le representa mediante $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, y en el caso que el número de filas y columnas sea igual a $n \in \mathbb{N}$, se usa la notación $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Ejemplo 3.2.

1. *Si escogemos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, número de filas igual a 1, número de columnas igual a 2 y los coeficientes* 1 *(en fila 1, columna 1) y* 0 *(en fila 1, columna 2), obtenemos la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Se observa que $A \in \mathcal{M}_{1\times 2}(\mathbb{R})$, sus coeficientes son $a_{11} = 1$ y $a_{12} = 0$.

2. *Con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, número de filas $m = 3$, número de columnas $n = 2$ y coeficientes $b_{11} = 1$, $b_{12} = 5$, $b_{21} = \sqrt{2}$, $b_{22} = -i$, $b_{31} = 0$, $b_{32} = 2 + i$, obtenemos la matriz*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ \sqrt{2} & -i \\ 0 & 2+i \end{pmatrix}.$$

   Se observa que $B \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{C})$.

3. *La siguiente matriz*

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 10 & 100 & 0 \end{pmatrix}$$

   es una matriz de 3 filas y 3 columnas, cuyos coeficientes pertenecen al conjunto de los números reales (por ejemplo), es decir, $C \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ (o bien, $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, pues aquí $m = n = 3$).

Una matriz con m filas, $m \in \mathbb{N}$, y 1 columna, se dice que es una *matriz columna*, mientras que una matriz con 1 fila y n columnas, $n \in \mathbb{N}$, se denomina *matriz fila.* A una matriz columna, de m filas, también se la considera un vector de $\mathbb{K}^m$.

La *matriz nula* en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ es aquella matriz de m filas y n columnas cuyas entradas son todas iguales a cero. Esta matriz se representa por Θ. La matriz nula en $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ es

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

mientras que

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es la matriz nula en $\mathcal{M}_{4\times 2}(\mathbb{K})$.

A partir de este momento la notación $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),\ A = (a_{ij})_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$ significa que A es una matriz con m filas, n columnas, cuyos coeficientes pertenecen al cuerpo $\mathbb{K}$ y se les ha nombrado $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n},\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n},\ \ldots, a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}$. Además utilizaremos la notación $A(i,j)$ para referirnos al elemento en la fila i, columna j de A. Escribir $A = (a_{ij})_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$ indica que el elemento en la posición (i,j) de A es a_{ij}, es decir $A(i,j) = a_{ij}$.

Ejemplo 3.3. *En la matriz B en el ejemplo anterior se tiene que, por ejemplo,* $B(1,2) = 5$, $B(2,2) = -i$ *y* $B(3,1) = 0$.

Ahora, veamos cómo reconocer si dos matrices son o no *iguales*.

Definición 3.4 (Igualdad de matrices)**.** Dos matrices A, B son *iguales* si y solo si ellas tienen el mismo número de filas y columnas y sus coeficientes son iguales entre sí, es decir,

$$A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), \quad A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m,\, 1\leq j\leq n} \quad \text{y} \quad B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), \quad B = (b_{ij})_{1\leq i\leq m,\, 1\leq j\leq n}$$

son iguales si y solo si para todo par de valores $i, j,\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$ se cumple que $a_{ij} = b_{ij}$.

3.5.1. Suma de matrices y producto de matriz por escalar

Definición 3.5 (Producto de una matriz por una constante o escalar)**.** Sean $\lambda \in \mathbb{K}$ y $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m,\, 1\leq j\leq n}$. La matriz $\lambda\, A$ es la matriz de m filas y n columnas que resulta de multiplicar a cada elemento de A por λ, es decir,

$$(\lambda\, A) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \quad \text{es tal que} \quad (\lambda\, A)(i,j) = \lambda\, a_{ij}.$$

Ejemplo 3.6. *Si* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, *entonces*

$$(-1)\, A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3}\, A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad 0\, A = \Theta.$$

Observa que (puedes demostrarlo)

1. para toda matriz A se tiene que $1\, A = A$ y $0\, A = \Theta$,
2. para cualquier par de escalares $\alpha, \lambda \in \mathbb{K}$ y cualquier matriz A se cumple que $\alpha\,(\lambda\, A) = (\alpha\, \lambda) A$.

Definición 3.7 (Suma de matrices con mismo número de filas y columnas)**.** Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ (notar que A y B tienen el mismo número de filas y el mismo número de columnas) con

$$A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m,\, 1\leq j\leq n}, \qquad B = (b_{ij})_{1\leq i\leq m,\, 1\leq j\leq n}.$$

Entonces, la matriz suma, denotada $A + B$, tiene el mismo número de filas y columnas que A y B, es decir, $A + B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y es tal que

$$\forall\, i \in \{1, 2, \cdots, m\}, \quad \forall\, j \in \{1, 2, \cdots, n\} \quad : \quad (A + B)(i,j) = a_{ij} + b_{ij},$$

o sea, el elemento en la posición (i,j) de $A + B$ es la suma de los elementos en la posición (i,j) de A y B.

Ejemplo 3.8. *Sean* $A, B \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ *tales que*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 5 \\ -2 & 1 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dado que tienen el mismo número de filas y el mismo número de columnas ellas pueden sumarse, $A + B \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{K})$ *y*

$$A + B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 5 \\ -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

Observa que

1. si Θ es la matriz nula en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, entonces para toda matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ se cumple que $A + \Theta = A$, es decir, Θ es un elemento neutro para la suma en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.
2. Para toda matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ se cumple que $A + (-1)\,A = \Theta$, es decir, para todo $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, puede encontrarse su inverso aditivo y es la matriz que se obtiene al multiplicar todos los elementos de A por -1. Esta matriz se representa por $-A$.
3. En $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ el elemento neutro para la suma es único y para cada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ su inverso aditivo es único.
4. La suma de matrices es conmutativa (pues la suma en $\mathbb{K}$ lo es), es decir, para todo par de matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, se cumple que $A + B = B + A$.
5. L-a suma de matrices es asociativa (pues la suma en $\mathbb{K}$ lo es), es decir, para todo trío de matrices $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, se cumple que $A + (B + C) = (A + B) + C$.
6. $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall\, A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) : \quad \lambda\,(A + B) = \lambda\, A + \lambda\, B.$
7. si $\lambda, \gamma \in \mathbb{K}$, entonces $(\lambda + \gamma)\, A = \lambda\, A + \gamma\, A$,

Observación 3.9. *El conjunto* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *es, con la suma y el producto por escalar recién definidos, un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$.

El espacio vectorial real $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *y el espacio vectorial complejo* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ *tienen dimensión* mn. *El espacio vectorial real* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ *tiene dimensión* $2mn$.

Si, por ejemplo, $m = 2, n = 3$, *el conjunto*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base del espacio vectorial real $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ *y del espacio vectorial complejo* $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{C})$. *¿Puedes construir una base para el espacio vectorial real* $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{C})$*?*

3.5.2. Producto matriz-vector

Volviendo a nuestro ejemplo con la transformación lineal $R_{\pi/2}$, queremos simplificar su notación utilizando la matriz de 2 filas y 2 columnas

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Para ello definamos primero la operación *producto matriz - vector*.

Recuerda que $R_{\pi/2}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ es la combinación lineal, con escalares $x, y \in \mathbb{R}$ de las columnas de la matriz de 2 filas y 2 columnas

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definamos entonces el producto matriz vector como la combinación lineal de las columnas de la matriz con escalares iguales a las componentes del vector.

Definición 3.10. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $x \in \mathbb{K}^n$,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Se define Ax como la combinación lineal, con escalares $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de las n columnas de A, es decir, si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

y $x \in \mathbb{K}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$, entonces

$$Ax = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

que es igual a

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 3.11. *Si*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R}),$$

el producto de A por un vector de $\mathbb{R}^3$ es la combinación lineal, con escalares iguales a las componentes del vector, de las columnas de A. De este modo,

$$A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-2\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\3\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\12\\8\\6\end{pmatrix}.$$

Si definimos de esta forma el producto matriz-vector (nota que no es el producto vector-matriz), entonces podemos representar a $R_{\pi/2}\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)$ como el producto de la matriz en (3.1) por el vector $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$,

$$R_{\pi/2}\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

Observación 3.12. *Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, la transformación $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ que a cada $x \in \mathbb{K}^n$ le hace corresponder el vector $Ax \in \mathbb{K}^m$ es una transformación lineal.*

Esto se cumple porque si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ es una matriz cualquiera de m y n columnas y coeficientes en un cuerpo $\mathbb{K}$ y $x, y \in \mathbb{K}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$. El producto matriz-vector que hemos definido es tal que $A(x + y) = Ax + Ay$ y si $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces $A(\alpha x) = \alpha(Ax)$.

Ejemplo 3.13. *Por ejemplo, con la matriz $A \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$ del ejemplo anterior podemos definir la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ que a cada vector $x \in \mathbb{R}^3$ le hace corresponder el vector de $\mathbb{R}^4$, Ax.*

Esta transformación convierte al vector $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ en el vector $\begin{pmatrix}4\\12\\8\\6\end{pmatrix}$ y, teniendo en cuenta las dimensiones de sus espacios de partida y llegada, sabemos que no es una transformación sobreyectiva, es decir, existen vectores $y \in \mathbb{R}^4$ que no son imagen por T de ningún vector en $\mathbb{R}^3$.

Pero no solo podemos, dada una matriz de m filas y n columnas con coeficientes en $\mathbb{K}$ definir una transformación lineal de $\mathbb{K}^n$ en $\mathbb{K}^m$, sino que para cualquier transformación lineal entre $\mathbb{K}$-espacios vectoriales U (de dimensión n) y V (de dimensión m) podemos encontrar una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ que la representa.

A medida que vayamos utilizando matrices para representar transformaciones lineales te darás cuenta de lo conveniente que es esta representación.

3.6. Matriz asociada a una transformación lineal

Supongamos que U y V son espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, que U es un espacio de dimensión n y que la dimensión de V es m. Sean además $B_U = \{u_1, \ldots, u_n\}$, una base de U, y

$B_V = \{v_1, \ldots, v_m\}$, una base de V.

Construyamos una matriz de m filas y n columnas cuya columna i-ésima sean las coordenadas respecto a B_V de $T(u_i)$ y llamémosle $[T]_{B_U}^{B_V}$, es decir, si

$$[T]_{B_U}^{B_V} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

es porque

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = [T(u_1)]_{B_V}, \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} = [T(u_2)]_{B_V}, \quad \ldots, \quad \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = [T(u_n)]_{B_V}.$$

Entonces, como para todo $u \in U$, u puede escribirse como combinación lineal de los vectores en B_U se cumple que, si $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n$,

$$T(u) = T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(u_i)$$

y las coordenadas de $T(u)$ con respecto a la base de V satisfacen

$$[T(u)]_{B_V} = \alpha_1 [T(u_1)]_{B_V} + \alpha_2 [T(u_2)]_{B_V} + \cdots + \alpha_n [T(u_n)]_{B_V},$$

que es la combinación lineal, con escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de las columnas de $[T]_{B_U}^{B_V}$, por tanto, son iguales al producto de la matriz $[T]_{B_U}^{B_V}$ por el vector que contiene las coordenadas de u con respecto a la base de U,

$$[T(u)]_{B_V} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} [u]_{B_U} = [T]_{B_U}^{B_V} [u]_{B_U}.$$

La matriz $[T]_{B_U}^{B_V}$ se denomina *matriz asociada a T con respecto a las bases B_U de U y B_V de V.*

Ejemplo 3.14.

1. *La matriz asociada a $R_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que*

$$R_\alpha\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$, $B = \left\{(1,0)^T, (0,1)^T\right\}$ es

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

y es así porque

$$T((1,0)^T) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}, \quad T((0,1)^T) = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

y las coordenadas de estos vectores con respecto a B (que es la base canónica de $\mathbb{R}^2$) son los mismos vectores anteriores.

2. *Consideremos $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T\left((x,y)^T\right) = (2x+3y, 3y, 4x-2y)^T$ y las bases canónicas en los espacios de partida y llegada*

$$B_{\mathbb{R}^2} = \left\{(1,0)^T, (0,1)^T\right\}, \quad B_{\mathbb{R}^3} = \left\{(1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T\right\}.$$

La matriz asociada a la transformación lineal es tal que para cada $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$ se cumple

$$\left[T((x,y)^T)\right]_{B_{\mathbb{R}^3}} = [T]_{B_{\mathbb{R}^2}}^{B_{\mathbb{R}^3}} [(x,y)^T]_{B_{\mathbb{R}^2}} = [T]_{B_{\mathbb{R}^2}}^{B_{\mathbb{R}^3}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Entonces, y como estamos trabajando con las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente,

$$\begin{pmatrix} 2x+3y \\ 3y \\ 4x-2y \end{pmatrix} = [T]_{B_{\mathbb{R}^2}}^{B_{\mathbb{R}^3}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$[T]_{B_{\mathbb{R}^2}}^{B_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Observa que la primera columna de $[T]_{B_{\mathbb{R}^2}}^{B_{\mathbb{R}^3}}$ son las coordenadas en $B_{\mathbb{R}^3}$ de $T((1,0)^T)$ y la segunda columna de $[T]_{B_{\mathbb{R}^2}}^{B_{\mathbb{R}^3}}$ son las coordenadas en $B_{\mathbb{R}^3}$ de $T((0,1)^T)$.

3. *Determinemos la matriz asociada a la misma transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T\left((x,y)^T\right) = (2x+3y, 3y, 4x-2y)^T$, pero con respecto a nuevas bases de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$*

$$B_{\mathbb{R}^2} = \left\{(1,1)^T, (1,0)^T\right\}, \quad B_{\mathbb{R}^3} = \left\{(1,0,1)^T, (0,1,0)^T, (0,1,1)^T\right\}.$$

Aunque T sea la misma transformación lineal que en el ejemplo anterior, al escoger nuevas bases en los espacios de partida y llegada, cambia la matriz asociada a T. Como los espacios de partida y llegada son e.v. reales que tienen dimensión 2 y 3 respectivamente $[T]_{B_{\mathbb{R}^2}}^{B_{\mathbb{R}^3}} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$. La primera columna de $[T]_{B_{\mathbb{R}^2}}^{B_{\mathbb{R}^3}}$ son las coordenadas con respecto a $B_{\mathbb{R}^3}$ de $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ y la segunda columna de $[T]_{B_{\mathbb{R}^2}}^{B_{\mathbb{R}^3}}$ son las coordenadas con respecto a $B_{\mathbb{R}^3}$ de $T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$,

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

mientras que

$$T\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+(-2)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$

por tanto,

$$[T]_{B_{\mathbb{R}^2}}^{B_{\mathbb{R}^3}}=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 6 & -2\\ -3 & 2\end{pmatrix}.$$

4. *Consideremos la transformación* id_U *tal que* $\mathrm{id}_U : U \longrightarrow U$ *satisface* $\forall\, u \in U \,:\, \mathrm{id}_U(u) = u$. *Construyamos su matriz con respecto a la base* $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ *de* U.
Como $\mathrm{id}_U(u_1) = u_1, \mathrm{id}_U(u_2) = u_2, \ldots, \mathrm{id}_U(u_n) = u_n$, *es decir,*

$$\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\} \,:\, [T(u_i)]_B = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},$$

la matriz asociada a la transformación con respecto a la base B *es*

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

5. *La matriz asociada a la transformación*

$$P : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$$

tal que

$$P(p) = (p(0), p'(0)p''(0))^T$$

con respecto a las bases

$$B_1 = \left\{x^2, x+1, x-1\right\}$$

de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *y*

$$B_2 = \left\{(1,0,1)^T, (0,1,0)^T, (0,1,1)^T\right\}$$

se construye en los siguientes pasos:

a) *evaluamos P en los vectores de B_1,*

$$P(x^2) = (0,0,2)^T, \qquad P(x+1) = (1,1,0)^T, \qquad P(x-1) = (-1,1,0)^T.$$

b) *determinamos las coordenadas con respecto a B_2 de los resultados de las evaluaciones anteriores,*

$$[(0,0,2)^T]_{B_2} = (0,-2,2)^T, \quad [(1,1,0)^T]_{B_2} = (1,2,-1)^T, \quad [(-1,1,0)^T]_{B_2} = (-1,0,1)^T.$$

c) *escribimos las coordenadas resultantes una al lado de la otra para formar una matriz,*

$$[P]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. *Para determinar la matriz asociada a la transformación $T_2 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que*

$$T_2(a + i\,b) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -b \\ a \end{pmatrix}$$

con respecto a las bases canónicas

$$B_1 = \{1, i\}$$

de $\mathbb{C}$ (como e.v. real) y

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \right\}$$

de $\mathbb{R}^4$ debemos determinar las coordenadas con respecto a B_2 de

$$T_2(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y \quad T_2(i) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$[T_2]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conociendo la matriz asociada a una transformación lineal con respecto a bases de los espacios de partida y llegada podemos: evaluar la transformación en cualquier vector del espacio de partida, determinar núcleo e imagen de la transformación, calcular la inversa de la transformación, si fuera invertible, componer y sumar transformaciones lineales y multiplicar transformaciones lineales por escalares. La ventaja de trabajar con las matrices asociadas a las transformaciones es que podremos proceder del mismo modo, sin importarnos quiénes son los elementos en los espacios de partida y llegada de las transformaciones.

Veamos en el siguiente ejemplo cómo evaluar una transformación lineal de la que conozcamos la matriz asociada a ella con respecto a bases de los espacios de partida y llegada.

Ejemplo 3.15. *En el ejemplo anterior determinamos la matriz asociada a distintas transformaciones lineales con respecto a bases de sus espacios de partida y llegada.*

Tomemos ahora las matrices y determinemos las transformaciones lineales.

1. *Determinemos cuál es la transformación $T : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^4$ que satisface que la matriz asociada a ella con respecto a las bases*
$$B_1 = \{1, i\}$$
de $\mathbb{C}^2$ y
$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \right\}$$
de $\mathbb{R}^4$ es
$$[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
La primera columna de la matriz son las coordenadas, respecto a B_2, de $T(1)$, entonces
$$T(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
La primera columna de la matriz son las coordenadas, respecto a B_2, de $T(1)$, entonces
$$T(i) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Calculemos $T(2+i) = T(2)+T(i) = 2T(1)+T(i)$. Las coordenadas respecto a B_2 de $T(2+i)$ son tales que
$$[T(2+i)]_{B_2} = [T(2)]_{B_2} + [T(i)]_{B_2} = 2[T(1)]_{B_2} + [T(i)]_{B_2} = [T]_{B_1}^{B_2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Como B_2 es la base canónica de $\mathbb{R}^4$ se tiene que

$$T(2+i) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

¿A qué es igual $T(a+ib)$, con $a, b \in \mathbb{R}$? Dado que

$$[T(a+ib)]_{B_2} = [T]_{B_1}^{B_2}[a+ib]_{B_1} = [T]_{B_1}^{B_2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ a \\ -b \\ -a+b \end{pmatrix},$$

se tiene que

$$T(a+ib) = \begin{pmatrix} a-b \\ a \\ -b \\ -a+b \end{pmatrix}.$$

2. *Determinemos cuál es la transformación $T : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ cuya matriz con respecto a las bases*

$$B_1 = \{x+1, x-1\}$$

de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ y

$$B_2 = \{1, x, x^2, x^3\}$$

de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ es

$$[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La primera columna de la matriz anterior son las coordenadas respecto a B_2 de $T(x+1)$, es decir,

$$T(x+1) = 1 + x - x^3,$$

mientras que

$$T(x-1) = -1 - x^2 + x^3.$$

¿Cómo podemos determinar $T(ax+b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$? Primero debemos determinar las coordenadas de $ax+b$ con respecto a B_1,

$$ax+b = \alpha(x+1) + \beta(x-1) \;\Leftrightarrow\; ax+b = (\alpha+\beta)x + (\alpha-\beta) \;\Leftrightarrow\; a = \alpha+\beta \wedge b = \alpha-\beta.$$

Sumando las dos últimas ecuaciones que obtuvimos tenemos que $a+b = 2\alpha$, es decir, $\alpha = \frac{a+b}{2}$ e insertando este valor en cualquiera de las dos ecuaciones anteriores se tiene que $\beta = \frac{a-b}{2}$. Hemos llegado a que

$$[ax+b]_{B_1} = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} \\ \frac{a-b}{2} \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$[T(ax+b)]_{B_2} = [T]_{B_1}^{B_2} \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} \\ \frac{a-b}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ \frac{a+b}{2} \\ -\frac{a-b}{2} \\ -b \end{pmatrix},$$

con lo que podemos finalmente concluir que

$$T(ax+b) = b + \frac{a+b}{2}x + \frac{b-a}{2}x^2 - bx^3.$$