Electromagnetismo 543201
Guía de Problemas #7
Ley de Ampere y Flujo Magnético

1) En la figura 1, la corriente que circula en el alambre largo y recto es igual a $\boldsymbol{I_1 = 5.00}$ $[\mathbf{A}]$. Si el alambre yace en el plano de una espira rectangular, la cual lleva una corriente $\boldsymbol{I_2 = 10.0}$ $[\mathbf{A}]$, y las dimensiones de la espira son $\boldsymbol{c = 0.100}$ $[\mathbf{m}]$, $\boldsymbol{a = 0.150}$ $[\mathbf{m}]$ y $\boldsymbol{l = 0.450}$ $[\mathbf{m}]$; determinar la magnitud y la dirección de la fuerza neta ejercida sobre la espira por acción el campo magnético producido por el alambre.

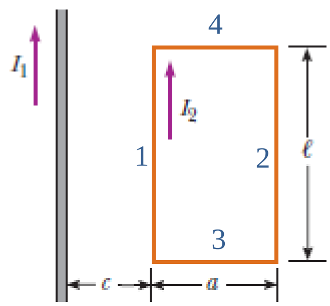


Figura 1

Para determinar la fuerza neta ejercida sobre la espira, puede ocuparse el principio de superposición: la fuerza neta corresponde a la suma de las fuerzas aplicadas sobre cada lado de la espira, enumerados del 1 al 4.

Ahora bien, la expresión de la fuerza magnética para cada lado depende de la densidad de flujo magnético presente en cada uno de esos lados. A través de la aplicación de la ley de Ampere (revisar ejercicio 14 de guía Nº6), la magnitud de la densidad de flujo magnético provocada por un alambre con corriente sobre un punto a una distancia radial r corresponde a:

$$\left|\vec{B}_{\text{alambre}}(r)\right| = \frac{\mu_o I}{2\pi r}$$

Con ello como base, el lado 1 de la espira (lado izquierdo): si se fijan, todo punto del lado 1 se encuentra a la misma distancia respecto del alambre con corriente. Luego, la densidad de flujo para todo punto de este lado es igual, y está dada por la siguiente expresión:

$$\left|\vec{B}_1\right| = \frac{\mu_o I_1}{2\pi c}$$

Así, la magnitud de la fuerza magnética sobre el lado 1 puede calcularse a través de:

$$\left|\vec{F}_1\right| = I_2 \cdot l \cdot \left|\vec{B}_1\right| = I_2 \cdot l \cdot \frac{\mu_o I_1}{2\pi c} \approx 4.5 \cdot 10^{-5}\ [\text{N}]$$

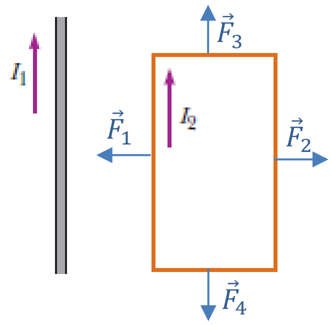
Siguiendo la misma lógica, la magnitud de la fuerza magnética sobre el lado 2 corresponde a:

$$\left|\vec{F}_2\right| = I_2 \cdot l \cdot \left|\vec{B}_2\right| = I_2 \cdot l \cdot \frac{\mu_o I_1}{2\pi(c+a)} \approx 1.8 \cdot 10^{-6}\ [\text{N}]$$

A partir de una inspección sencilla, puede verse que $\left|\vec{F}_2\right| < \left|\vec{F}_1\right|$, dado que el lado 2 se encuentra más lejos de la espira que el lado 1.

Para los lados 3 y 4 el análisis es levemente distinto, ya que el valor de densidad de flujo para estos lados no es constante. Para aquellos puntos que están más cerca de la espira, la densidad de campo magnético es mayor, mientras que para puntos más lejanos de la espira la densidad es menor. Ello implica que debe expresarse una integral para poder calcular la fuerza sobre estos lados.

Sin embargo, el valor de la fuerza para el lado 3 y el lado 4 debe ser igual, ya que se encuentran a la misma distancia del alambre recto con corriente. A partir del análisis de direcciones, se tiene lo mostrado en la siguiente figura.



Como $\vec{F}_3$ y $\vec{F}_4$ tienen la misma magnitud y apuntan en sentidos contrarios, entonces se anula (lo que nos salva de tener que resolver la integral de fuerza para estos lados).

En definitiva, la fuerza neta sobre la espira cuadrada corresponde a:

$$\vec{F}_{\mathrm{N}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$

Como $\vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 0$, entonces:

$$\vec{F}_{\mathrm{N}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Evaluando y simplificando:

$$\vec{F}_{\mathrm{N}} \approx -4.5 \cdot 10^{-5}[\mathrm{N}] \cdot \hat{\imath} + 1.8 \cdot 10^{-6}[\mathrm{N}] \cdot \hat{\imath}$$

$$\vec{F}_{\mathrm{N}} \approx -2.7 \cdot 10^{-5}[\mathrm{N}] \cdot \hat{\imath}$$

2) Cuatro conductores largos y paralelos transportan corrientes iguales **de** $\boldsymbol{I = 5.00}$ $[\mathbf{A}]$ como se muestra en la figura 2. Si la dirección de la corriente es hacia adentro de la página en los puntos $\boldsymbol{A}$ y **B** (indicado por las cruces) y hacia afuera de la página en $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{D}$ (indicado por los puntos). Calcular la magnitud y dirección del campo magnético en el punto $\boldsymbol{P}$, localizado en el centro del cuadrado considerando que este tiene
$\mathbf{0.200}$ $[\mathbf{m}]$ de lado.

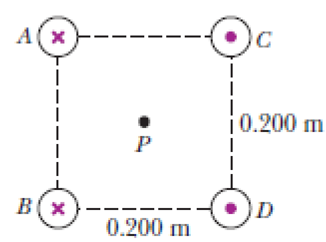


Figura 2

Como se trata de conductores largos, podemos asumir que son lo suficientemente largos como para considerarlos infinitos, lo cual simplifica el cálculo. Ahora bien, cada uno de estos cables se encuentra a la misma distancia del punto P, la cual corresponde a $0.100\sqrt{2}[\mathrm{m}] \approx 0.141[\mathrm{m}]$. Por otra parte, a partir de la ley de Ampere, el campo eléctrico que genera un cable infinito alrededor suyo es:

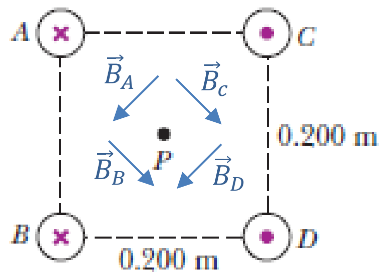
$$\left|\vec{B}_{\mathrm{cable}}(r)\right| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

donde r es la distancia que separa el punto que se quiere analizar del cable con corriente. Para determinar el campo magnético en el punto P, es necesario aplicar el principio de superposición.

En este ejercicio, y dada la simetría del problema, se tiene que el campo provocado por cada uno de los cables sobre el punto P corresponde a:

$$\left|\vec{B}_{\text{cable/P}}\right| = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \approx \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5}{2\pi \cdot 0.141}[\text{T}] \approx 7.07 \cdot 10^{-6}[\text{T}]$$

Ahora bien, la dirección del campo magnético provocado por cada cable se puede determinar a través de la mano derecha. Ello se muestra de manera esquemática en la siguiente figura.



Luego, la densidad resultante en este caso corresponde a:

$$\vec{B}_{\text{P}} = \vec{B}_A + \vec{B}_B + \vec{B}_C + \vec{B}_D$$

Usando la geometría del problema y lo determinado a través de la regla de la mano derecha, se tendría que:

$$\vec{B}_{\text{P}} = -4\left|\vec{B}_{\text{cable/P}}\right| \cdot \sin 45° \cdot \hat{\jmath}$$

$$\vec{B}_{\text{P}} \approx -20[\mu\text{T}] \cdot \hat{\jmath}$$

3) Considere un arreglo coaxial con un alambre de radio $\boldsymbol{a}$ a lo largo del eje de un cascarón cilíndrico de radio $\boldsymbol{b}$, como se muestra en la figura 3. Si la corriente está dirigida hacia adentro de la página a lo largo del centro del alambre y regresa hacia afuera de la página a lo largo del cascaron cilíndrico, y considerando que $\boldsymbol{I = 5.00}$ $[\mathbf{A}]$, $\boldsymbol{a = 0.600}$ $[\mathbf{cm}]$ y $\boldsymbol{b = 1.20}$ $[\mathbf{cm}]$, calcule el campo magnético:

   a. En el punto $\boldsymbol{P_1}$ a una distancia $\boldsymbol{r_1 = 1.00}$ $[\mathbf{cm}]$ del centro del alambre.
   b. En el punto $\boldsymbol{P_2}$ a una distancia $\boldsymbol{r_2 = 2.40}$ $[\mathbf{cm}]$ del centro del alambre.

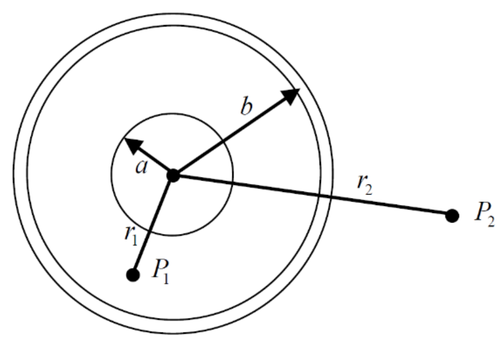
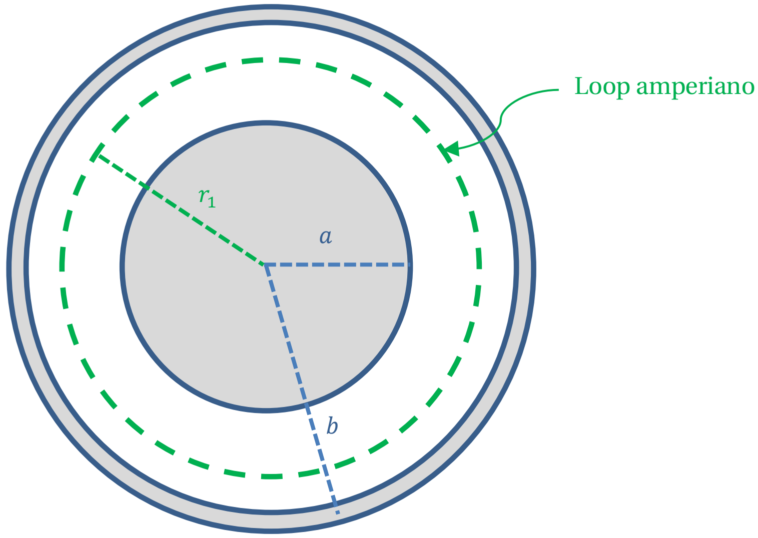


Figura 3

Para resolver este ejercicio, debe aplicarse la ley de Ampere, de la misma manera en que se resolvieron algunos de los últimos ejercicios de la Guía Nº6. Partamos por el campo magnético en el punto P_1, tal como se muestra en la siguiente figura:



Siguiendo la metodología de determinación de campo magnético en situaciones de alta simetría a partir de la ley de Ampere, se tiene que:

$$|\vec{B}| \cdot l_{\text{amp}} = \mu_0 I_{\text{enc}}$$

donde l_{amp} es la longitud del loop amperiano, que en este caso corresponde a $2\pi r_1$, y I_{enc} corresponde a la corriente que atraviesa el área al interior del loop amperiano. En este caso, nuestro loop amperiano en verde solo encierra la corriente circulando por el alambre.

Por tanto:

$$|\vec{B}_{r_1}| = \frac{\mu_0 I_{\text{alambre}}}{2\pi r_1} \approx 1 \cdot 10^{-4}[\text{T}]$$

Por la regla de la mano derecha, el campo magnético circula alrededor del alambre en el sentido de las manecillas del reloj.

Por otra parte, si se repite el procedimiento para el caso del punto r_2, puede concluirse que el campo magnético en dicho punto es nulo, ya que cualquier loop amperiano que se dibuje fuera del cascarón esférico va a encerrar tanto la corriente del alambre como del cascarón. Luego, para r_2, la corriente $I_{\text{enc}} = 5[\text{A}] - 5[\text{A}] = 0$.

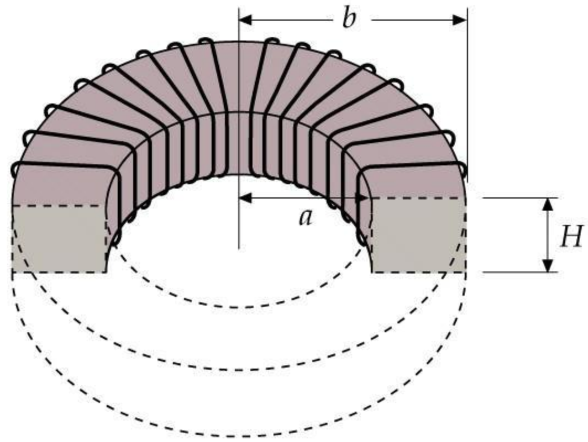
$$|\vec{B}_{r_2}| = 0[\text{T}]$$

4) Un toroide está construido de $\boldsymbol{N}$ vueltas rectangulares de alambre, de tal forma que cada vuelta tiene una altura **h**. Si el toroide tiene un radio interno **a** y un radio externo **b**:

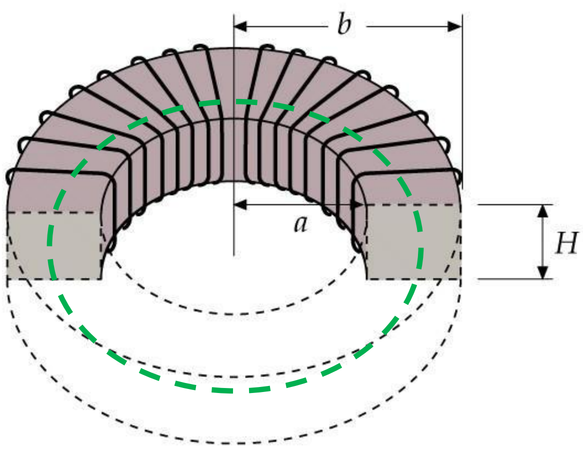
   a. Considerando que el toroide lleva una corriente **I**, demuestre que el flujo magnético a través de las vueltas del toroide es proporcional a $\mathbf{ln}(\boldsymbol{b}/\boldsymbol{a})$.

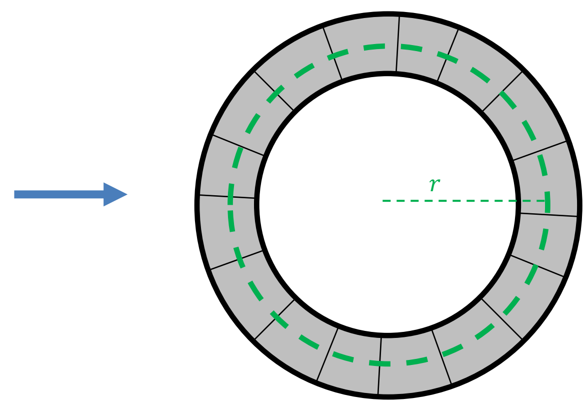
   b. Evalúe este flujo si $\boldsymbol{N} = \mathbf{200}\ \boldsymbol{vueltas}$, $\boldsymbol{h} = \mathbf{1.50}\ [\mathbf{cm}]$, $\boldsymbol{a} = \mathbf{2.00}\ [\mathbf{cm}]$, $\boldsymbol{b} = \mathbf{5.00}\ [\mathbf{cm}]$ e $\boldsymbol{I} = \mathbf{2.00}\ [\mathbf{A}]$.

a. Dibujemos, en primera instancia, el toroide, tal como se muestra en la siguiente figura:



Acá es un poco más difícil de ver cómo aplicar la ley de Ampere, pero es sólo un asunto de saber ubicar pertinentemente el loop amperiano, tal como se muestra a continuación:





En esta situación, la ley de Ampere se puede expresar como:

$$\left|\vec{B}(r)\right| \cdot 2\pi r = \mu_0 N I$$

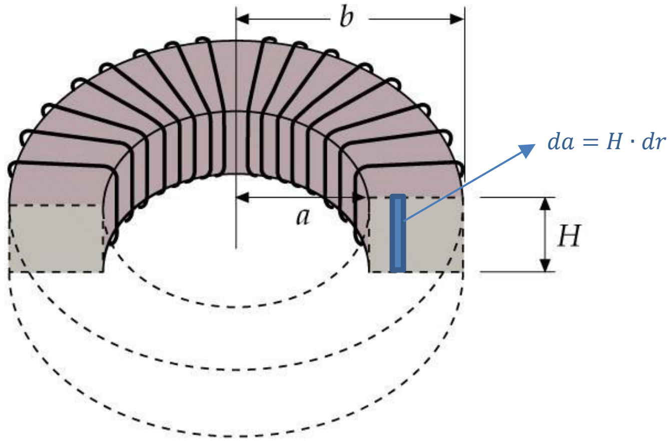
Luego:

$$\left|\vec{B}(r)\right| = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

Ahora bien, el flujo magnético al interior del toroide está dado por la siguiente integral:

$$\Phi_\mathrm{m} = \int \vec{B} \bullet d\vec{s} = \int \vec{B} \bullet \hat{n}\, da$$

Lo cual implica que tenemos que definir correctamente nuestro elemento diferencial de área. Ello puede hacerse observando la siguiente figura:



Luego, el flujo magnético está dado por:

$$\Phi_{\mathrm{m}} = \int \left|\vec{B}(r)\right| da = \int_{r=a}^{r=b} \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} H \cdot dr$$

Resolviendo la integral:

$$\Phi_{\mathrm{m}} = \frac{\mu_0 N I H}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

b. Evaluando los datos dados en el enunciado en la expresión encontrada:

$$\Phi_{\mathrm{m}} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 200 \cdot 5 \cdot 1.5 \cdot 10^{-2}}{2\pi} \ln\left(\frac{5}{2}\right) [\mathrm{Wb}]$$

$$\Phi_{\mathrm{m}} \approx 1.1[\mu\mathrm{Wb}]$$

5) Un solenoide de $\mathbf{2.50}$ $[\mathbf{cm}]$ de diámetro y $\mathbf{30.0}$ $[\mathbf{cm}]$ de largo tiene $\mathbf{300}$ $\boldsymbol{vueltas}$ y lleva una corriente de $\mathbf{12.0}$ $[\mathbf{A}]$. Calcule el flujo a través de la superficie de un disco de radio de $\mathbf{5.00}$ $[\mathbf{cm}]$ colocado perpendicularmente a, y centrado en el eje del solenoide, como se muestra en la figura 4.

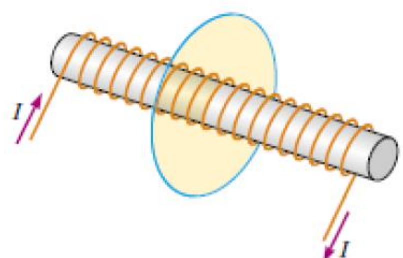


Figura 4

Aplicando la ley de Ampere sobre el solenoide (ubicando un rectángulo que abarque el largo del solenoide, con un lado al interior del solenoide y los otros tres lados al exterior, se tiene que:

$$\left|\vec{B}_{\text{solenoide}}\right| = \frac{\mu_0 N I}{l}$$

Luego, el flujo magnético a través del disco mostrado en la figura 4 es el mismo flujo que hay en la sección transversal del solenoide. Ello implica que:

$$\Phi_{\mathrm{m}} = \int \vec{B} \bullet \hat{n}\, da$$

Como la densidad de flujo magnética es igual para todo punto al interior del solenoide, entonces:

$$\Phi_{\mathrm{m}} = \left|\vec{B}_{\mathrm{solenoide}}\right| \cdot A$$

Reemplazando y evaluando:

$$\Phi_{\mathrm{m}} = \frac{\mu_0 N I}{l} \cdot \pi R^2 \approx \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 300 \cdot 12}{0.3} \pi \left(\frac{2.5 \cdot 10^{-2}}{2}\right)^2 [\mathrm{Wb}]$$

Simplificando:

$$\Phi_{\mathrm{m}} \approx 7.4[\mu\mathrm{Wb}]$$

6) El núcleo de hierro de un toroide está devanado con $\boldsymbol{250\ vueltas}$ de alambre por metro de longitud. La corriente en el devanado es de **8.00** [**A**]. Tomando la permeabilidad magnética del hierro como $\boldsymbol{k_m = 5000\mu_0}$, calcular:
   a. La intensidad del campo magnético, $\vec{\boldsymbol{H}}$
   b. La densidad de flujo magnético, $\vec{\mathbf{B}}$.

A partir del ejercicio 4, se sabe que el campo magnético al interior de un toroide, considerando que está relleno de aire/vació, corresponde a:

$$\left|\vec{B}_{\mathrm{toroide/vació}}\right| = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

Ahora bien, cuando el campo se establece al interior de un material ferromagnético, la densidad de flujo magnético se potencia, lo cual está dado por:

$$\left|\vec{B}_{\mathrm{toroide/ferr}}\right| = \frac{\mu_r \mu_0 N I}{2\pi r}$$

$\frac{N}{2\pi r}$ es la cantidad de vueltas por metro que tiene el toroide y μ_r es la permeabilidad magnética relativa del material ferromagnético. Luego, evaluando según los datos en el enunciado, se tiene que la densidad de flujo magnético al interior del toroide de este ejercicio es:

$$\left|\vec{B}\right| = 5000\mu_0 \cdot 250 \cdot 8 \approx 12.6[\mathrm{T}]$$

Lo cual no es realista para un material ferromagnético común (que suelen llegar, a lo más, a los 2[T]).
Por otra parte, la intensidad de campo magnético al interior del toroide está dada por:

$$\left|\vec{H}\right| = \frac{\left|\vec{B}\right|}{\mu_r \mu_0}$$

Por último, evaluando los datos conocidos:

$$\left|\vec{H}\right| = 2000 \left[\frac{\mathrm{A}}{m}\right]$$

7) Se requiere tener un campo magnético de densidad de flujo $\mathbf{1.30}$ $[\mathbf{T}]$ en el interior del núcleo de hierro de un toroide. Si el toroide tiene un radio promedio de $\mathbf{10.0}$ $[\mathbf{cm}]$ y una permeabilidad magnética de $\mathbf{5000}\boldsymbol{\mu_0}$. ¿Qué corriente se deberá hacerse circular si sobre el toroide se enrolla un devanado de $\mathbf{470}$ $\boldsymbol{vueltas}$ de alambre?

Como se vio en el ejercicio anterior, la densidad de flujo magnético al interior de un toroide con núcleo de hierro está dada por:

$$\left|\vec{B}_{\text{toroide/ferr}}\right| = \frac{\mu_r \mu_0 N I}{2\pi r}$$

Luego, evaluando los datos conocidos:

$$1.3 = \frac{5000\mu_0 \cdot 470 I}{2\pi(10 \cdot 10^{-2})}$$

Despejando:

$$I \approx 0.28[\mathrm{A}]$$

8) Un cilindro de hierro magnetizado tiene una densidad de campo magnético $\boldsymbol{B} = \mathbf{0.04}$ $[\mathbf{T}]$ en su interior. El magneto tiene $\mathbf{3.00}$ $[\mathbf{cm}]$ de diámetro y $\mathbf{20.0}$ $[\mathbf{cm}]$ de longitud. Si el mismo campo magnético debe ser producido por un solenoide equivalente con núcleo de aire que tiene las mismas dimensiones que el magneto cilíndrico y por cuya bobina circula una corriente de **5 [A]**, ¿Cuántas vueltas de alambre debe tener el solenoide?

Como se vio en el ejercicio 5, la densidad de flujo magnético al interior de un solenoide con núcleo de aire está dada por:

$$\left|\vec{B}_{\text{solenoide}}\right| = \frac{\mu_0 N I}{l}$$

Luego, como se desea una densidad de $0.04[\mathrm{T}]$, entonces debe cumplirse que:

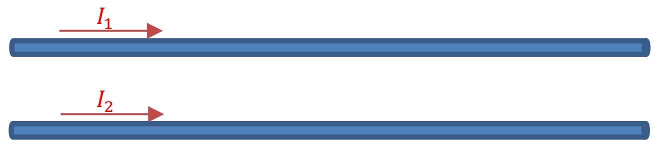
$$0.04 = \frac{\mu_0 N \cdot 5}{0.2}$$

Despejando el número de vueltas N:

$$N \approx 127[\text{vueltas}]$$

9) Dos alambres largos y paralelos se atraen entre sí con una fuerza por unidad de longitud igual a $\mathbf{320}$ $[\mu\mathrm{N/m}]$ cuando están separados una distancia vertical de $\mathbf{0.500}$ $[\mathbf{m}]$. Si la corriente en el alambre superior es de $\mathbf{20.0}$ $[\mathbf{A}]$ hacia la derecha. Determine la ubicación de la línea en el plano de los dos alambres a lo largo de la cual el campo magnético total es igual a cero.

En primera instancia, para que los dos cables se atraigan, la corriente que circula por ambos alambres debe tener la misma dirección, tal como se muestra en la siguiente figura:



Ahora bien, la magnitud de la fuerza de atracción entre dos cables paralelos con corriente está dada por la siguiente expresión (vista sobre el cable inferior):

$$\left|\vec{F}_{\text{atracción}}\right| = I_2 l B$$

Y, a su vez, el campo presente en el cable inferior corresponde a:

$$\left|\vec{B}_{1/2}\right| = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

Luego, la fuerza sobre el cable inferior (cable 2), es:

$$\left|\vec{F}_{1/2}\right| = I_2 l \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

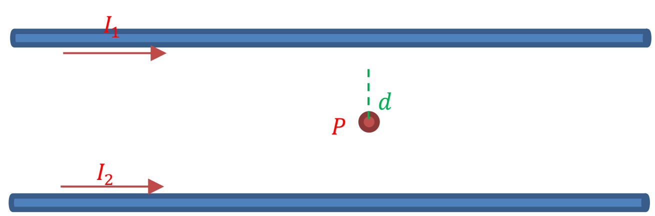
Despejando I_2:

$$I_2 = \frac{\left|\vec{F}_{1/2}\right| \cdot 2\pi r}{\mu_0 I_1 l}$$

Evaluando y simplificando:

$$I_2 \approx 40[\mathrm{A}]$$

Con ello en mente, debemos encontrar un punto en el que la suma de los campos magnéticos generados por ambos cables sea nula. Para ello, consideraremos un punto arbitrario P, debajo del cable superior, tal como se muestra en la siguiente figura.



Analizando la situación a través de la regla de la mano derecha, es posible concluir que entre ambos cables el campo magnético de un cable tiene la dirección contraria al generado por el otro cable.

Luego, el campo resultante en el punto P está dado, a través del principio de superposición, por:

$$\left|\vec{B}_p\right| = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} - \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(0.5 - d)}$$

Como se espera que el campo sea nulo en el punto P, entonces:

$$\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} - \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(0.5 - d)} = 0$$

Despejando y resolviendo la ecuación asociada, se llega a que:

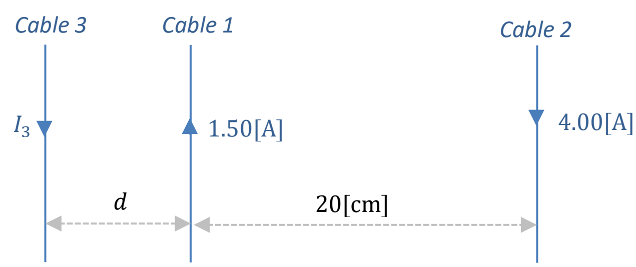
$$d \approx 0.167[\mathrm{m}]$$

Lo cual implica que el campo magnético es nulo 0.167[m] debajo del cable superior.

10) Tres alambres largos (alambre 1, alambre 2 y alambre 3) cuelgan en forma vertical. La distancia entre el alambre 1 y el 2 es de $\mathbf{20.0}$ $[\mathbf{cm}]$. A la izquierda, el alambre 1 lleva una corriente hacia arriba de $\mathbf{1.50}$ $[\mathbf{A}]$. A la derecha, el alambre 2 lleva una corriente hacia abajo de $\mathbf{4.00}$ $[\mathbf{A}]$. Si el alambre 3 está localizado de forma que cuando lleva cierta corriente, ninguno de los alambres experimenta una fuerza neta.
   a. ¿Son posibles otras maneras?
   b. Describa la posición del alambre 3
   c. Describa la magnitud y dirección de la corriente en el alambre 3.

Hagamos un esquema de la posición de los cables, tal como se muestra en la siguiente figura.
Para resolver este ejercicio, es necesario partir con un análisis cualitativo. Partamos de la base de que, debido a que los cables 1 y 2 llevan corrientes en sentidos opuestos, entonces deben repelerse. Entonces:

- Si el cable 3 estuviera entre el cable 1 y el cable 2, sería imposible que el cable 2 o el cable 1 quedara en reposo, ya que tanto sobre uno de los cables habría dos fuerzas de repulsión o dos fuerzas de atracción (dibujen las situaciones para que se den cuenta de esto).
- Si el cable 3 estuviera a la derecha de los otros dos cables, la fuerza total actuando sobre el cable 3 nunca podría ser cero, ya que, a pesar de que sufre una fuerza de atracción y otra de repulsión, queda más cerca del cable con mayor corriente.
- Si el cable 3 estuviera a la izquierda de los otros dos cables, podría llegar a configurarse la situación de equilibrio, tal como se muestra en la siguiente figura. Para lograr la condición de equilibrio, la corriente del cable 3 debe apuntar hacia abajo, dado que el cable 1 debe sufrir fuerzas de atracción tanto por la izquierda como por la derecha.



Con ello como base, resolveremos primeramente el ítem (b) de este problema.
Para que el cable 3 esté en reposo, debe ocurrir que:

$$\vec{F}_{1/3} + \vec{F}_{2/3} = 0$$

Considerando que la magnitud de la fuerza magnética entre cables infinitos paralelos con corriente responde a ilB, entonces debe cumplirse que:

$$I_3 \cdot l \cdot \frac{\mu_0 \cdot 1.5[\mathrm{A}]}{2\pi d} = I_3 \cdot l \cdot \frac{\mu_0 \cdot 4[\mathrm{A}]}{2\pi(20[\mathrm{cm}] + d)}$$

Asumiendo que todos los cables tienen el mismo largo (tendiendo a infinito), entonces:

$$\frac{1.5}{2\pi d} = \frac{4}{2\pi(20[\text{cm}] + d)}$$

Al despejar, $d = 12[\text{cm}]$, con lo que el cable 3 debe encontrarse 12[cm] a la izquierda del cable 1, mientras que el cable 1 se debe encontrar a 20[cm] del cable 2 para que se tenga la situación de equilibrio.

Una vez hecho este análisis, salta a la vista que no hay otra posible ubicación de los cables que permita la condición de equilibrio, por lo que la respuesta al ítem (a) es que no hay otras maneras para que se dé la condición solicitada.

Por último, para determinar el valor de la corriente que circula sobre el cable 3, podemos aplicar la condición de equilibro estático para alguno de los otros cables. En este caso, si se toma el cable 1, se tiene que:

$$\vec{F}_{3/1} + \vec{F}_{2/1} = 0$$

Con lo cual:

$$I_1 \cdot l \cdot \frac{\mu_0 \cdot I_3}{2\pi(12[\text{cm}])} = I_1 \cdot l \cdot \frac{\mu_0 \cdot I_2}{2\pi(20[\text{cm}])}$$

Despejando y evaluando los datos conocidos:

$$\frac{I_3}{(12[\text{cm}])} = \frac{4[\text{A}]}{(20[\text{cm}])}$$

Luego,

$$I_3 = 2.4[\text{A}]$$

Del análisis previo, habíamos llegado a la conclusión de que la dirección de la corriente circulando por el cable 3 debía apuntar hacia abajo.

11) Dos alambres rectilíneos, paralelos, de cobre, muy largos, de radio **R [m]**, están en contacto en todo su largo (ver figura 5). Cada uno de los alambres llevan una corriente **I [A]**, en el mimo sentido. Las corrientes están distribuidas uniformemente en la sección transversal de cada alambre. Encuéntrese la inducción magnética en el plano medio (plano z-x) de los alambres, en función de la distancia **z** medida desde la línea de contacto. ¿Dónde ocurre la máxima inducción magnética y cuánto vale el módulo de la inducción magnética máxima?

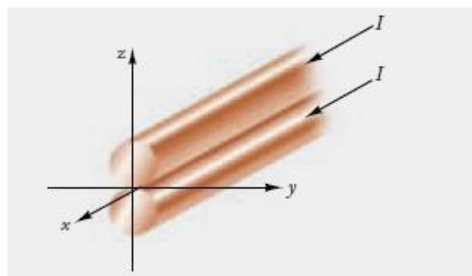


Figura 5

Para resolver este ejercicio, es necesario aplicar el principio de superposición. Hay que recalcar que se pide determinar la inducción magnética máxima en el plano (z-x), lo cual puede simplificarse en simplemente considerar el eje z, ya que los cables son infinitamente largos.

Consideremos que el campo magnético provocado por el cable superior es $\vec{B}_{sup}$, y el provocado por el cable inferior es $\vec{B}_{inf}$. Entonces:

Zona 1: $z < -2R$.

Por ley de Ampere (revisar ejercicios anteriores y/o de la última parte de la guía anterior), se tiene que:

$$\left|\vec{B}_{sup/1}\right| = \frac{\mu_0 I}{2\pi(R - z)}$$

$$\left|\vec{B}_{inf/1}\right| = \frac{\mu_0 I}{2\pi(R + z)}$$

Luego:

$$\left|\vec{B}_1\right| = \frac{\mu_0 I}{2\pi(R-z)} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(R+z)}$$

Zona 2: $-2R < z < -R$.

Por ley de Ampere, se tiene que:

$$\left|\vec{B}_{sup/2}\right| = \frac{\mu_0 I}{2\pi(R-z)}$$

$$\left|\vec{B}_{inf/2}\right| = \frac{\mu_0 I(z+R)}{2\pi R^2}$$

Luego:

$$\left|\vec{B}_2\right| = \frac{\mu_0 I}{2\pi(R-z)} + \frac{\mu_0 I(z+R)}{2\pi R^2}$$

Zona 3: $-R < z < 0$.

Por ley de Ampere, se tiene que:

$$\left|\vec{B}_{sup/3}\right| = \frac{\mu_0 I}{2\pi(R-z)}$$

$$\left|\vec{B}_{inf/3}\right| = -\frac{\mu_0 I(R+z)}{2\pi R^2}$$

Luego:

$$\left|\vec{B}_3\right| = \frac{\mu_0 I}{2\pi(R-z)} - \frac{\mu_0 I(R+z)}{2\pi R^2} = \frac{\mu_0 I z^2}{2\pi R^2(R-z)}$$

Zona 4: $0 < z < R$.

Por ley de Ampere, se tiene que:

$$\left|\vec{B}_{sup/4}\right| = \frac{\mu_0 I(R-z)}{2\pi R^2}$$

$$\left|\vec{B}_{inf/4}\right| = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(z+R)}$$

Luego:

$$\left|\vec{B}_4\right| = \frac{\mu_0 I(R-z)}{2\pi R^2} - \frac{\mu_0 I}{2\pi(z+R)} = -\frac{\mu_0 I z^2}{2\pi R^2(z+R)}$$

Zona 5: $R < z < 2R$.

Por ley de Ampere, se tiene que:

$$\left|\vec{B}_{sup/5}\right| = \frac{\mu_0 I(R-z)}{2\pi R^2}$$

$$\left|\vec{B}_{inf/5}\right| = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(z+R)}$$

Luego:

$$\left|\vec{B}_5\right| = \frac{\mu_0 I(R-z)}{2\pi R^2} - \frac{\mu_0 I}{2\pi(z+R)}$$

Zona 6: $z > 2R$.

Por ley de Ampere, se tiene que:

$$\left|\vec{B}_{sup/6}\right| = \frac{\mu_0 I}{2\pi(z-R)}$$

$$\left|\vec{B}_{inf/6}\right| = -\frac{\mu_0 I}{2\pi(z+R)}$$

Luego:

$$\left|\vec{B}_6\right| = \frac{\mu_0 I}{2\pi(z-R)} - \frac{\mu_0 I}{2\pi(z+R)} = -\frac{\mu_0 I z}{\pi(z^2-R^2)}$$

Al analizar las 6 expresiones con detenimiento ($\left|\vec{B}_1\right|$ a $\left|\vec{B}_6\right|$), es posible rescatar que la densidad de flujo máxima se da cuando $z = 2R$ y cuando $z = -2R$. Luego, evaluando en $\left|\vec{B}_1\right|$ o $\left|\vec{B}_6\right|$:

$$\left|\vec{B}_{\max}\right| = \frac{2\mu_0 I}{3\pi R}$$

12) Una lámina conductora plana, muy extensa, coincide con el plano x-y. Otra lámina conductora plana muy extensa coincide con el plano x-z. Si cada una de estas dos láminas es recorrida por una corriente **I [A]** la que esta uniformemente distribuida, de forma que **σ [A]** fluyen a través de cada trozo de largo **1 [m]** perpendicular a la corriente (ver figura 6). Encuéntrese la inducción magnética en cada uno de los cuatro cuadrantes del espacio.

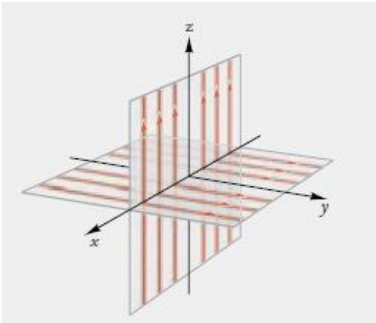
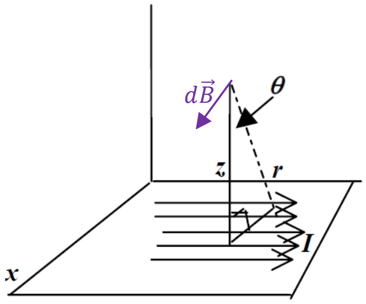


Figura 6

Para resolver este ejercicio, es necesario aplicar el principio de superposición. Adicionalmente, es necesario determinar primeramente la densidad de flujo magnético que provoca un plano infinito con corriente sobre un punto en su vecindad. Podemos tomar en cuenta que el plano de corriente está formado por infinitos cables con corriente infinitesimal, tal como se muestra en la siguiente figura:



En esta condición, la contribución de campo magnético de cada uno de estos cables, en magnitud, está dada por:

$$\left|d\vec{B}\right| = \frac{\mu_0 dI}{2\pi r} = \frac{\mu_0 \sigma dx}{2\pi\sqrt{z^2+x^2}}$$

donde z es la distancia desde el plano hasta un punto P.

Luego, la densidad de flujo magnético total sobre el punto P está dado por:

$$\left|\vec{B}_P\right| = \int dB = \frac{\mu_0 \sigma dx}{2\pi} \int \frac{dx}{\sqrt{z^2 + x^2}} \cos\theta$$

donde $\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{z^2+x^2}}$.

Por lo tanto:

$$\left|\vec{B}_P\right| = \frac{\mu_0 \sigma z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{z^2 + x^2}$$

Resolviendo la integral:

$$\left|\vec{B}_P\right| = \frac{\mu_0 \sigma z}{2\pi} \cdot \frac{1}{z} \cdot \left[\tan^{-1}\frac{x}{z}\right]_{x=-\infty}^{x=\infty}$$

Simplificando:

$$\left|\vec{B}_P\right| = \frac{\mu_0 \sigma}{2}$$

A partir de la regla de la mano derecha y análisis de superposición, la dirección del campo magnético en cualquier punto P apunta en la dirección $\hat{x}$.

Ahora que sabemos cómo es la densidad de campo magnético que provoca un plano con corriente sobre sus vecindades, podemos resolver este problema.

- En el cuadrante 1, para el que $y > 0$ y $z > 0$, se tiene que la densidad de campo provocado por el plano con corriente del plano x-y es:

  $$\vec{B}_{xy} = \frac{\mu_0 \sigma}{2}\hat{x}$$

  Asimismo, el campo provocado por el plano con corriente apoyado en el plano x-z es:

  $$\vec{B}_{xz} = -\frac{\mu_0 \sigma}{2}\hat{x}$$

  Luego, por superposición:

  $$\vec{B}_1 = 0$$

- En el cuadrante 2, para el que $y < 0$ y $z > 0$, se tiene que la densidad de campo provocado por el plano con corriente del plano x-y es:

  $$\vec{B}_{xy} = \frac{\mu_0 \sigma}{2}\hat{x}$$

  Asimismo, el campo provocado por el plano con corriente apoyado en el plano x-z es:

  $$\vec{B}_{xz} = \frac{\mu_0 \sigma}{2}\hat{x}$$

  Luego, por superposición:

  $$\vec{B}_2 = \mu_0 \sigma \hat{x}$$

- En el cuadrante 3, para el que $y < 0$ y $z < 0$, se tiene que la densidad de campo provocado por el plano con corriente del plano x-y es:

$$\vec{B}_{xy} = -\frac{\mu_0 \sigma}{2}\hat{x}$$

Asimismo, el campo provocado por el plano con corriente apoyado en el plano x-z es:

$$\vec{B}_{xz} = \frac{\mu_0 \sigma}{2}\hat{x}$$

Luego, por superposición:

$$\vec{B}_3 = 0$$

- Por último, en el cuadrante 4, para el que $y > 0$ y $z < 0$, se tiene que la densidad de campo provocado por el plano con corriente del plano x-y es:

$$\vec{B}_{xy} = -\frac{\mu_0 \sigma}{2}\hat{x}$$

Asimismo, el campo provocado por el plano con corriente apoyado en el plano x-z es:

$$\vec{B}_{xz} = -\frac{\mu_0 \sigma}{2}\hat{x}$$

Luego, por superposición:

$$\vec{B}_4 = -\mu_0 \sigma \hat{x}$$

13) Un solenoide rectilíneo muy largo tiene **15** espiras por centímetro de longitud. ¿Cuál debe ser el valor de la intensidad de corriente circulando por las espiras si es que se requiere que la inducción magnética en el interior del solenoide sea de **5 10^{-2} [T]**?

Como se vio en el ejercicio 5, la densidad de flujo magnético al interior de un solenoide con núcleo de aire está dada por:

$$\left|\vec{B}_{\text{solenoide}}\right| = \frac{\mu_0 N I}{l}$$

En este caso, *N/l* es 1500, ya que 15 espiras por centímetro de longitud equivalen a 1500 espiras por metro.
Luego, como se desea una densidad de 0.05[T], entonces debe cumplirse que:

$$0.05 = 1500\mu_0 \cdot I$$

Despejando la corriente *I*:

$$I \approx 26.5[\text{A}]$$

14) El electro-imán de un timbre eléctrico tiene **260** espiras en un largo de **2 [cm]**. ¿Qué inducción magnética produce este solenoide si la corriente que lo recorre tiene una intensidad de **8 [A]**?

Como se vio en el ejercicio anterior, la densidad de flujo magnético al interior de un solenoide con núcleo de aire está dada por:

$$\left|\vec{B}_{\text{solenoide}}\right| = \frac{\mu_0 N I}{l}$$

En este caso, se tiene que:

$$\left|\vec{B}_{\text{solenoide}}\right| = \frac{\mu_0 \cdot 260 \cdot 8[\text{A}]}{2 \cdot 10^{-2}[\text{m}]}$$

Simplificando:

$$\left|\vec{B}_{\text{solenoide}}\right| \approx 0.13[\text{T}]$$

15) Un solenoide toroidal (con forma de rosquilla) usado en investigaciones del plasma, tiene **240** espiras de alambre conductor y por ellas circula una corriente de **7.2 10^4 [A]**. El radio interno del solenoide es de **0.5 [m]** y su radio externo de **1.5 [m]**. ¿Cuánto vale el módulo de la inducción magnética a una distancia del centro igual al radio interno? ¿Igual al radio externo?

Como se vio en el ejercicio 4, la densidad de flujo magnético al interior de un toroide con núcleo de aire está dada por:

$$\left|\vec{B}_{\text{toroide}}(r)\right| = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

donde r es la distancia entre el centro de origen del toroide y un punto al interior del toroide. Luego, para el radio interno se tiene que:

$$\left|\vec{B}_{\text{toroide}}(r = 0.5[\text{m}])\right| = \frac{\mu_0 \cdot 240 \cdot 7.2 \cdot 10^4[\text{A}]}{2\pi \cdot 0.5[\text{m}]}$$

$$\left|\vec{B}_{\text{toroide}}(r = 0.5[\text{m}])\right| \approx 6.91[\text{T}]$$

Por otro lado, en el radio externo:

$$\left|\vec{B}_{\text{toroide}}(r = 1.5[\text{m}])\right| = \frac{\mu_0 \cdot 240 \cdot 7.2 \cdot 10^4[\text{A}]}{2\pi \cdot 1.5[\text{m}]}$$

$$\left|\vec{B}_{\text{toroide}}(r = 1.5[\text{m}])\right| \approx 2.3[\text{T}]$$

16) Un solenoide de **n** espiras por unidad de largo, lleva una corriente de **I [A]** y un alambre conductor rectilíneo, muy largo, yace a lo largo del eje del solenoide, y transporta una corriente de intensidad **I [A]**. Encuéntrese la inducción magnética resultante en el interior del solenoide a una distancia **r [m]** de su eje.

Como se vio en el ejercicio 5, la densidad de flujo magnético al interior de un solenoide con núcleo de aire está dada por:

$$\left|\vec{B}_{\text{solenoide}}\right| = \frac{\mu_0 N I}{l}$$

En este caso, se especifica que el solenoide tiene n espiras por unidad de largo, lo cual implica que $n = N/l$, y:

$$\left|\vec{B}_{\text{solenoide}}\right| = \mu_0 n I$$

Por otro lado, la densidad de flujo magnético provocado por una línea con corriente, suponiendo que es muy larga y delgada, es:

$$\left|\vec{B}_{\text{línea}}\right| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Luego, por superposición, la densidad de campo magnético al interior del solenoide responde a la contribución tanto del solenoide como de la línea con corriente:

$$\left|\vec{B}_{\text{total}}\right| = \mu_0 nI + \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \mu_0 I\left(n + \frac{1}{2\pi r}\right)$$

17) La figura 7 representa un solenoide formado por una sola espira de cobre. El solenoide tiene un largo de **20 [cm]** y la corriente que lo recorre tiene una intensidad de **2·10³ [A]**. Determínese la inducción magnética en este solenoide. Supóngase que la corriente está distribuida uniformemente sobre la lámina y que el solenoide es muy largo.

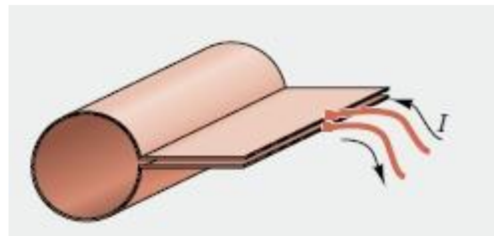


Figura 7

Este ejercicio resulta bastante sencillo cuando se visualiza la espira de cobre como infinitos cables con corriente. A pesar de que se trata de una sola pieza sólida, se sabe que la corriente circulante es $\cdot\, 2 \cdot 10^3\,[\text{A}]$. Luego, tenemos un solenoide que tiene una sola vuelta cuya corriente es de $2 \cdot 10^3\,[\text{A}]$.

Ahora bien, la densidad de flujo magnético de un solenoide con núcleo de aire está dada por:

$$\left|\vec{B}_{\text{solenoide}}\right| = \frac{\mu_0 NI}{l}$$

En este caso:

$$\left|\vec{B}_{\text{solenoide}}\right| = \frac{\mu_0 \cdot 1[\text{vuelta}] \cdot 2 \cdot 10^3[A]}{20 \cdot 10^{-2}[\text{m}]}$$

Simplificando:

$$\left|\vec{B}_{\text{solenoide}}\right| \approx 1.26 \cdot 10^{-2}[\text{T}]$$

18) Un tubo de cobre muy largo, con paredes gruesas, tiene un radio interno **R [m]** y un radio externo **2R [m]** (ver figura 8). Su pared es recorrida por una corriente de intensidad **I [A]**, distribuida uniformemente en el volumen de cobre. Encuéntrese la inducción magnética a la distancia radial de **(3/2)R [m]** del eje del tubo. A la distancia radial **3R [m]**.

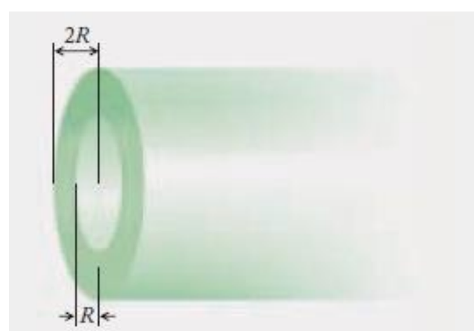
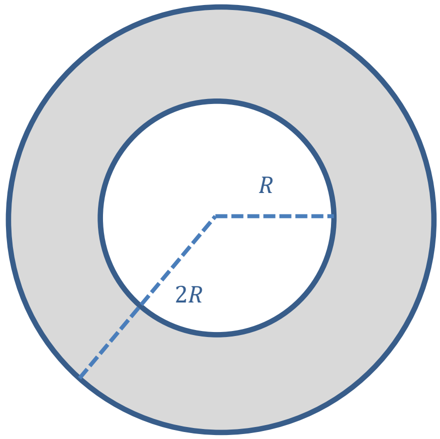
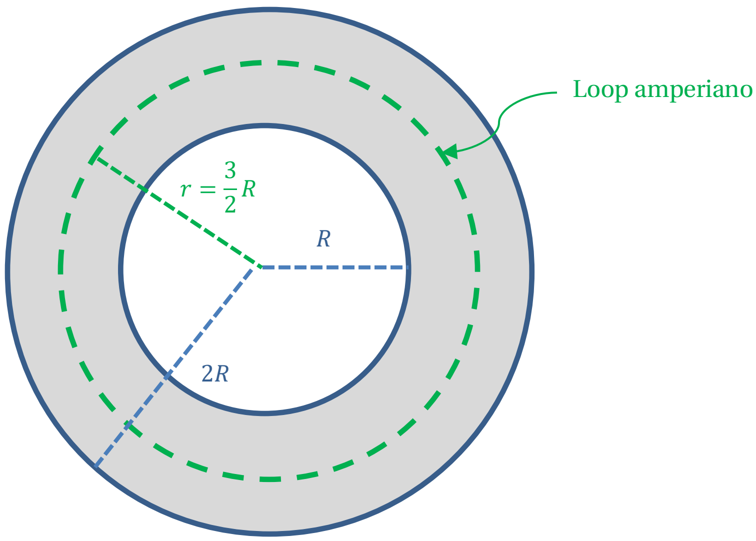


Figura 8

Dibujemos, primeramente, la sección transversal de este tubo de cobre, tal como se muestra en la siguiente figura.



Para la evaluación de la densidad de flujo magnético en distintos puntos, es necesario aplicar la ley de Ampere. Para cuando $r = \frac{3}{2}R$, se tiene lo siguiente:



Planteando la ley de Ampere para geometrías simétricas:

$$\left|\vec{B}\right| \cdot l_{\text{amp}} = \mu_0 I_{\text{enc}}$$

En este caso, l_{amp}, que es la longitud del loop amperiano, corresponde a $2\pi r = 3\pi R$. Asimismo, la corriente que atraviesa el área circunscrita por el loop amperiano se puede obtener por proporcionalidad:

A un área dada por $\pi(2R)^2 - \pi R^2$, le corresponde la totalidad de la corriente, vale decir, I.
A un área dada por $\pi\left(\frac{3}{2}R\right)^2 - \pi R^2$, le corresponde una parte de la corriente total, dada por I_1

$$I_1 = \frac{\pi\left(\frac{3}{2}R\right)^2 - \pi R^2}{\pi(2R)^2 - \pi R^2} I$$

Simplificando:

$$I_1 = \frac{5}{12} I$$

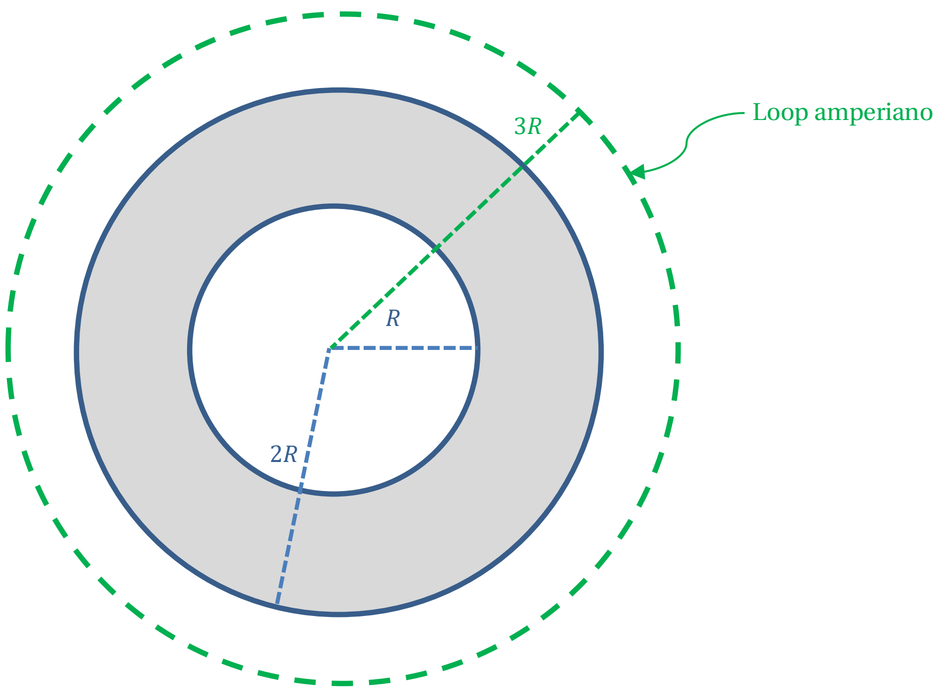
Luego, volviendo a la ley de Ampere:

$$\left|\vec{B}_{r=1.5R}\right| \cdot 3\pi R = \mu_0 \frac{5}{12} I$$

Simplificando

$$\left|\vec{B}_{r=1.5R}\right| \cdot = \frac{5\mu_0 I}{36\pi R}$$

Ahora bien, para el caso en el que $r = 3R$, se tiene la siguiente aplicación de la ley de Ampere:



Luego:

$$\left|\vec{B}\right| \cdot l_{\text{amp}} = \mu_0 I_{\text{enc}}$$

En este caso, l_{amp} es $2\pi r = 6\pi R$. Adicionalmente, la corriente que atraviesa el área circunscrita por este loop amperiano es la corriente total I, con lo que:

$$\left|\vec{B}_{r=3R}\right| \cdot 6\pi R = \mu_0 I$$

Despejando:

$$\left|\vec{B}_{r=3R}\right| = \frac{\mu_0 I}{6\pi R}$$

19) Un cable coaxial está formado por un alambre cilíndrico de cobre, muy largo, de radio **r₁[m]**, circundado por un tubo de cobre de radio interno **r₂ [m]** y radio externo **r₃ [m]** (ver figura 9). Ambos llevan corrientes iguales y de sentido contrario **I [A]**. Encontrar la inducción magnética en todo el espacio.

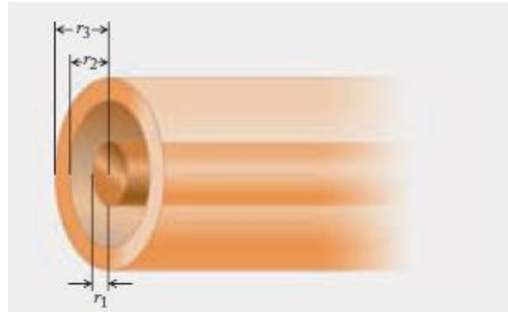
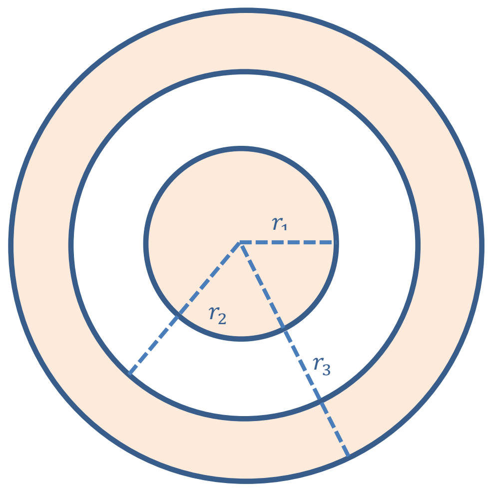
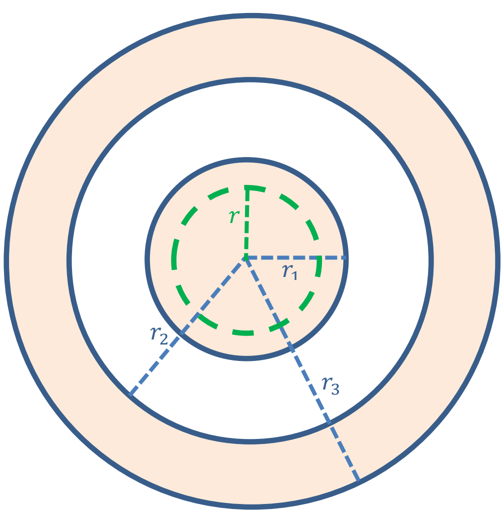


Figura 9

Dibujemos, primeramente, la sección transversal de este cable coaxial, tal como se muestra en la siguiente figura.



Hay que separar el análisis en cuatro zonas, delimitadas por los cambios de material del cable coaxial.
Zona 1, para cuando $r < r_1$



En este caso, se tiene que:

$$\left|\vec{B}\right| \cdot l_{\text{amp}} = \mu_0 I_{\text{enc}}$$

donde l_{amp}, que es la longitud del loop amperiano, corresponde a $2\pi r$. Por otro lado, la corriente que atraviesa el área circunscrita por el loop amperiano se puede determinar a través de proporcionalidad:

- A un área dada por $\pi {r_1}^2$, le corresponde la totalidad de la corriente del alambre interior, vale decir, I.
- A un área dada por πr^2, le corresponde una parte de la corriente total, dada por I_1

$$I_1 = \frac{\pi r^2}{\pi {r_1}^2} I = \frac{r^2}{{r_1}^2} I$$

Luego:

$$\left|\vec{B}_1\right| \cdot 2\pi r = \mu_0 \frac{r^2}{{r_1}^2} I$$

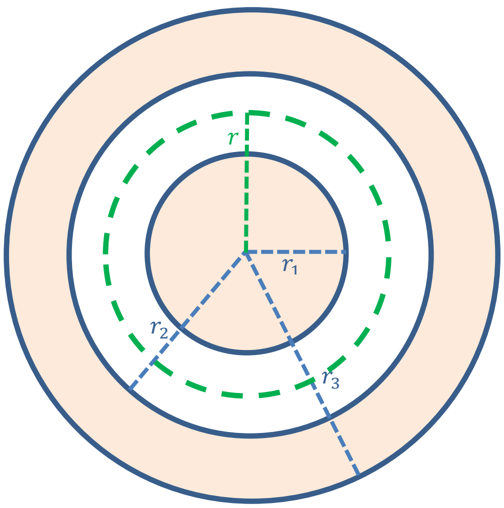
Despejando:

$$\left|\vec{B}_1\right| = \frac{\mu_0 I r^2}{{r_1}^2 2\pi r}$$

Simplificando:

$$\left|\vec{B}_1\right| = \frac{\mu_0 I r}{2\pi {r_1}^2}$$

Zona 2, para cuando $r_1 < r < r_2$



En este caso, se tiene que:

$$\left|\vec{B}\right| \cdot l_{\text{amp}} = \mu_0 I_{\text{enc}}$$

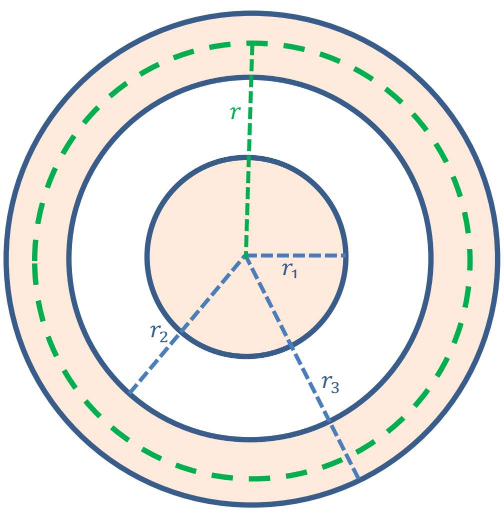
l_{amp} en esta situación sigue siendo $2\pi r$. La corriente que atraviesa el área circunscrita por el loop amperiano en este caso es simplemente la totalidad de la corriente circulando por el alambre cilíndrico central. Luego:

$$\left|\vec{B}_2\right| \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

Despejando:

$$\left|\vec{B}_2\right| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Zona 3, para cuando $r_2 < r < r_3$



En este caso, se tiene que:

$$\left|\vec{B}\right| \cdot l_{\text{amp}} = \mu_0 I_{\text{enc}}$$

l_{amp} en esta situación sigue siendo $2\pi r$. La corriente que atraviesa el área circunscrita por el loop amperiano en este caso corresponde a la suma de la corriente total circulando por el alambre cilíndrico central y a una parte de la corriente circulando por el tubo de cobre externo.

$$I_{\text{enc}} = I - I_3$$

donde I_3 es la parte de la corriente que circula por el tubo que es encerrada por el loop amperiano. Ello se puede calcular por proporción:

- A un área dada por $\pi {r_3}^2 - \pi {r_2}^3$, le corresponde la totalidad de la corriente del tubo de cobre, vale decir, I.
- A un área dada por $\pi r^2 - \pi {r_2}^3$, le corresponde una parte de la corriente total del tubo de cobre, dada por I_3.

$$I_3 = \frac{\pi r^2 - \pi {r_2}^3}{\pi {r_3}^2 - \pi {r_2}^3} I$$

Factorizando y simplificando:

$$I_3 = \frac{(r^2 - {r_2}^3)}{({r_3}^2 - {r_2}^3)} I$$

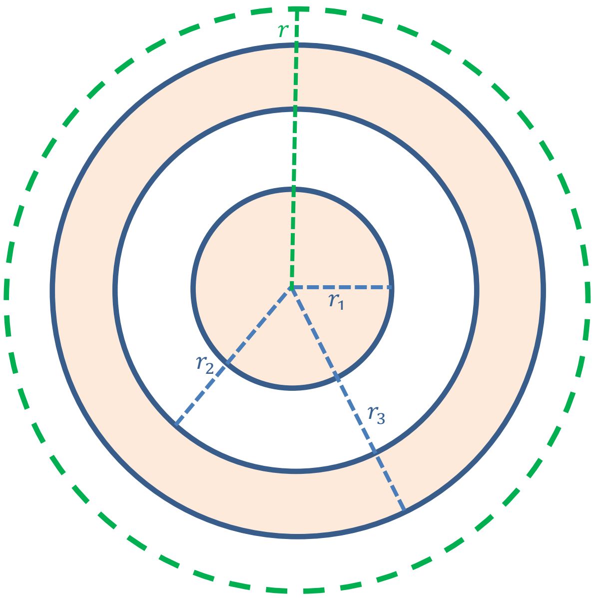
Luego, reemplazando en la ley de Ampere:

$$\left|\vec{B}_3\right| \cdot 2\pi r = \mu_0 \left(I - \frac{(r^2 - {r_2}^3)}{({r_3}^2 - {r_2}^3)} I \right)$$

Despejando:

$$\left|\vec{B}_3\right| \cdot= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(1 - \frac{(r^2 - {r_2}^3)}{({r_3}^2 - {r_2}^3)} \right)$$

Zona 4, para cuando $r > r_3$



En este caso, se tiene que:

$$\left|\vec{B}\right| \cdot l_{\text{amp}} = \mu_0 I_{\text{enc}}$$

l_{amp} en esta situación sigue siendo $2\pi r$. La corriente que atraviesa el área circunscrita por el loop amperiano en este caso corresponde a la suma de la corriente total circulando por el alambre cilíndrico central y la totalidad de la corriente circulando por el tubo de cobre externo. Como ambas corrientes son iguales, pero circulan en direcciones contrarias:

$$I_{\text{enc}} = I - I = 0$$

Y, entonces:

$$\left|\vec{B}_4\right| \cdot 2\pi r = 0$$

$$\left|\vec{B}_4\right| = 0$$

Con ello se tiene definida la densidad de flujo magnético para todo $r > 0$.