Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

GAJ/EBC/CF/CMR/ARP

Cálculo III (521227)
Práctica 11

Teorema de Green.

1. Calcular las siguientes integrales de linea $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde la curva C esta orientada en sentido anti horario.
   (a) $\vec{F}(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$, y C la frontera del cuadrado $[0,1] \times [0,1]$.
   (b) $\vec{F}(x,y) = (-y^3, x^3)$, y C la frontera del cuadrado $[0,1] \times [0,1]$.
   (c) $\vec{F}(x,y) = (-x^2 y, xy^2)$, y C es el circulo $x^2 + y^2 = a^2$.
   (d) $\vec{F}(x,y) = (-y\sqrt{x^2+y^2}, x\sqrt{x^2+y^2})$, y C es el circulo $x^2 + y^2 = 2x$.
   (e) $\vec{F}(x,y) = (-y^2, x^2)$ y C es la frontera del sector circular $r \leq a, 0 \leq \theta \leq \pi/4$.

2. Utilizar el Teorema de Green para calcular el área de las siguientes regiones.
   (a) La elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$.
   (b) La región encerrada por el hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.
   (c) La región arriba del eje x y debajo de la curva
   $\vec{r}(t) = (at - b\sin t, a - b\cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$, donde $0 < b < a$ son constantes.

Integrales de Superficie sobre campos escalares.

3. Encontrar el área del pedazo de la superficie $z = xy$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

4. Encontrar el área del pedazo de la superficie $z = x^2 + y^2$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

5. Calcular $\iint_S (x^2 + y^2) dS$ donde S es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ con $z \geq 1$.

Integrales de Superficie sobre campos vectoriales.

6. Calcular $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\vec{S}$ para los siguientes $\vec{F}$ y S.
   (a) $\vec{F}(x,y,z) = (xz, 0, -xy)$, y S es la porción de la superficie $z = xy$ con $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$, orientada de tal forma que la normal apunta hacia arriba.
   (b) $\vec{F}(x,y,z) = (x^2, z, -y)$, y S es la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, orientada de tal forma que la normal apunta hacia afuera.
   (c) $\vec{F}(x,y,z) = (xy, z, 0)$, y S es el triángulo con vértices $(2,0,0), (0,2,0)$ y $(0,0,2)$, orientado de tal forma que la normal apunta hacia arriba.
   (d) $\vec{F}(x,y,z) = (0, 0, z^2)$, y S es el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con $a \leq z \leq b$, orientado de forma que la normal apunta hacia afuera.
   (e) $\vec{F}(x,y,z) = (x, y, z)$ y S es la frontera de la región $x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}$.