Conservación de la Energía

Física I - 510140

Prof. Ignacio Ormazábal Inostroza

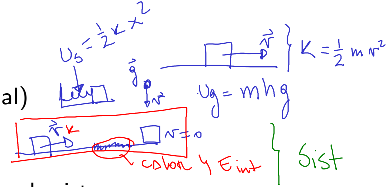
Departamento de Física
Universidad de Concepción

iormazabal@udec.cl

Contenidos

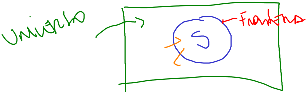
En el capítulo anterior hemos visto tres métodos para almacenar energía en un sistema:

- **Energía cinética** (movimiento)
- **Energía potencial** (elástica y gravitacional)
- **Energía interna** (calor) fricción



Es importante reconocer la existencia de 2 tipos de sistemas:

- **Sistemas no aislados**: La energía cruza las fronteras del sistema; cambio en la energía total del sistema: Principio de **conservación de la energía**.
- **Sistemas aislados**: La energía no cruza las fronteras del sistema; la energía total del sistema es constante.



$F_s \rightarrow U_s$

$F_g \rightarrow U_g$

$\boxed{E = K + U}$

También es importante reconocer la existencia de 2 tipos de fuerzas:

- Fuerzas conservativas: **Conservación de la energía mecánica del sistema**.
- Fuerzas no-conservativas: transformación de energía mecánica en energía interna (tratamiento especial). Investigaremos dos procedimientos para este tipo de problemas.

Fricción

Cuando la energía cruza las fronteras de un sistema, la rapidez de la transferencia de la energía se describe a través de una cantidad llamada **potencia**.

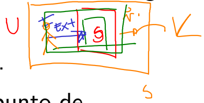
CE → SA → Fricción
No F

CE → SNA → F
NF

2 El sistema no aislado: Conservación de la energía

Sistema no aislado: Es un sistema en el que la energía cruza las fronteras del sistema en un tiempo Δt en su interacción con el medio. Un sistema compuesto por una partícula sometido a fuerza que le cambien su energía cinética es un ejemplo de un sistema no aislado.

El teorema trabajo-energía cinética es un ejemplo de una ecuación de energía adecuada para un sistema no aislado. $W = \Delta K$



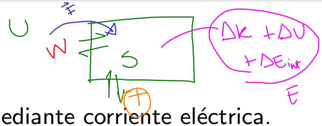
Mecanismos de transferencia de energía desde/hacia un sistema.

Trabajo. Fuerza externa produce un desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza.

Ondas mecánicas. Transfieren energía de un punto a otro permitiendo que una perturbación se propague a través de un cierto medio.

Calor. Evidenciada mediante una diferencia de temperatura entre dos regiones del espacio.

Transferencia de materia. Involucra situaciones en las cuales la materia cruza físicamente la frontera de un sistema, transportando la energía.



Transmisión eléctrica. Transferencia de energía mediante corriente eléctrica.

Radiación electromagnética. Ondas electromagnéticas, como la luz, microondas y ondas de radio.

Dicho popular: **la energía no se crea ni se destruye, sólo se transforma o la energía siempre se conserva**.

Si la cantidad total de energía en un sistema cambia, es sólo porque la energía cruzó las fronteras del sistema mediante un mecanismo de transferencia, como alguno de los mecanismos enunciados anteriormente.

Enunciado general del principio de **conservación de la energía**: Matemáticamente

$$\boxed{\Delta E_{\mathrm{sis}} = \sum T} \tag{1}$$

E_{sis}: Energía total del sistema (cinética más potencial más interna)
T (de *transferencia*): Energía transferida a través de la frontera del sistema.

Para el caso de trabajo $T_{\text{trabajo}} = W$ y para calor $T_{\text{calor}} = Q$.

Los otros mecanismos no tienen símbolos, serán denotados como:

- T_{OM} (ondas mecánicas);
- T_{TM} (transferencia de materia);
- T_{TE} (transferencia eléctrica) y,
- T_{RE} (radiación electromagnética).

CE

NA } $\Delta E_{sis} = W$

$\Delta E_{sis} = T$

A } $\Delta E_{sis} = 0$

Mec. Transferencia

En forma explícita, la Ec.(1) se reescribe como

$$\Delta K + \Delta U + \Delta E_{\text{int}} = W + Q + T_{\text{OM}} + T_{\text{TM}} + T_{\text{TE}} + T_{\text{RE}} \tag{2}$$

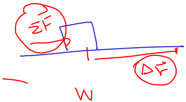
Expresión matemática básica de la versión energética del **modelo de sistema no aislado**.

Si, para un sistema conocido, todos los términos en el lado derecho de la Ec.(2) son cero ($\sum T = 0$): **Sistema aislado**.

$\Delta E_{sis} = \Delta K + \Delta U + \Delta E_{int} = 0$

$E_{sis} = T$ $E_{sis} = W$ $\boxed{\Delta K = W}$

$\boxed{\Delta K = W}$



$E_{sis} = W$

Suponga que se aplica una fuerza $\sum \vec{F}$ a un sistema no aislado y el punto de aplicación de la fuerza se mueve a través de un desplazamiento $\Delta\vec{r}$.

Suponga que el único efecto de $\sum \vec{F}$ es cambiar la rapidez del sistema

$$v_i \neq v_f, \quad K_i \neq K_f, \quad \therefore \quad \Delta K = K_f - K_i \neq 0$$

En ese caso, el único mecanismo de transferencia de energía es el trabajo (se eliminan todos los términos del lado derecho de la Ec.(2), excepto el término W).

Además, $\Delta E_{\text{sis}} = \Delta K$, luego la Ec.(2), se reduce a

$$\Delta K = W, \quad \Delta U = \Delta E_{\text{int}} = 0 \quad y \quad T_{\text{OM}} = T_{\text{TM}} = T_{\text{TE}} = T_{\text{RE}} = 0$$

correspondiente al **teorema trabajo-energía cinética**.

3 El sistema aislado

CE $\xrightarrow{SA}$ E $\rightarrow$ NF $\rightarrow$ MEC

$\Delta E_{sis} = T \Rightarrow \Delta E_{sis} = 0 \; \{ \; \Delta K + \Delta U + \Delta E_{int} = 0$ → Fricción

sin Fricción $\{ \; \underbrace{\Delta K + \Delta U}_{E\,mec} = 0$

Sistema aislado: La energía no cruza las fronteras del sistema.

Imagine un sistema esfera-Tierra. Al levantar la esfera se almacena energía potencial gravitacional en el sistema: $W_F = \Delta U_g$.

Concentre su atención en el trabajo realizado sólo por la fuerza gravitacional sobre la esfera a medida que ésta cae de regreso a su altura original: W_{F_g}.

Mientras la esfera cae desde la posición y_i a la posición y_f,

$$W_{F_g} = (m\vec{g}) \cdot \Delta\vec{r} = (-mg\hat{\jmath}) \cdot [(y_f - y_i)\hat{\jmath}) = mgy_i - mgy_f. \quad (3)$$

Del teorema trabajo-energía cinética se sabe que

$$W_{F_g} = \Delta K.$$

Igualando esas dos expresiones para el trabajo sobre la esfera se tiene

$$\Delta K = mgy_i - mgy_f \quad (4)$$

Dado que

$$mgy_i - mgy_f = -(mgy_f - mgy_i) = -(U_{gf} - U_{gi}) = -\Delta U_g$$

se llega a

$$\Delta K = -\Delta U_g \tag{5}$$

o, simplemente,

$$\Delta K + \Delta U_g = 0.$$

Aunque derivada para un sistema con energía potencial gravitacional, este resultado es general, o sea se aplica a sistemas con cualquier tipo de energía potencial:

$$\Delta K + \Delta U = 0 \tag{6}$$

La energía mecánica de un sistema se define como

$$\boxed{E_{\text{mec}} \equiv K + U} \tag{7}$$

U representa la suma de *todos* los tipos de energía potencial.

$\Delta K + \Delta U = 0$

$(K_f - K_i) + (U_f - U_i) = 0$

$K_f + U_f = K_i + U_i$

$U_f = U_i$

En el caso analisado, de Ecs.(6) y (7), la **energía mecánica** se conserva:

$$\Delta E_{\text{mec}} = \Delta K + \Delta U = 0. \tag{8}$$

Enunciado matemático de la **conservación de la energía mecánica** para un sistema aislado en ausencia de fuerzas no conservativas.

Si existen fuerzas no conservativas: La energía total del sistema se conserva:

$$\Delta E_{\text{sis}} = \Delta K + \Delta U + \Delta E_{\text{int}} = 0, \tag{9}$$

conservación de la energía del sistema: enunciado matemático más general del **modelo de sistema aislado**.

Explícitamente, la Ec.(6) tiene la forma

$$(K_f - K_i) + (U_f - U_i) = 0, \quad K_f + U_f = K_i + U_i \tag{10}$$

En el sistema esfera-Tierra, se tiene $E_{\text{mec}-\text{f}} = E_{\text{mec}-\text{i}}$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f = \frac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i.$$

$\boxed{\Delta E_{sis} = \Sigma T} \xrightarrow{SNA} \boxed{\Delta E_{sis} = W}$

$\xrightarrow{SA} \boxed{\Delta E_{sis} = 0}$

NF $\to \Delta K + \Delta U = 0 \} \ \Delta E_{mec} = 0 \to E_f - E_i = 0$

$E_f = E_i$

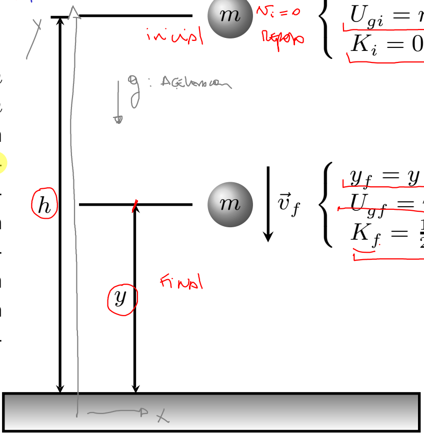
$\boxed{K_f + U_f = K_i + U_i}$

F $\to \Delta K + \Delta U + \Delta E_{int} = 0$

No hay F_{ext} } S. Aislado

No hay Fricción

Ejemplo: Una bola de masa m se deja caer desde una altura h sobre el suelo, como mostrado en la Fig.4.1. (a) Ignore la resistencia del aire y determine la rapidez de la bola cuando está a una altura y sobre el suelo. (b) Determine la rapidez de la bola en y si al momento de soltarla ya tenía una velocidad inicial v_i hacia arriba en la altura inicial h.



$$\begin{cases} y_i = h \\ U_{gi} = mgh \\ K_i = 0 \end{cases}$$

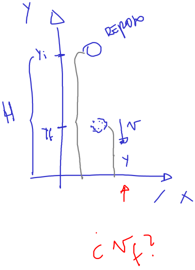
$$\begin{cases} y_f = y \\ U_{gf} = mgy \\ K_f = \frac{1}{2} m v_f^2 \end{cases}$$

Figura 4.1 Esquema ilustrativo del ejemplo.

a) $\to v_f$

b) $\to v_f$

1) S.A s/ Fricción } $\boxed{\Delta E_{mec} = 0}$



2) $\rightarrow E_{mec_i} = K_i + U_{g_i} = 0 + mgH$

$\rightarrow E_{mec_f} = K_f + U_{g_f} = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgy$

3) $\Rightarrow \boxed{E_f = E_i}$

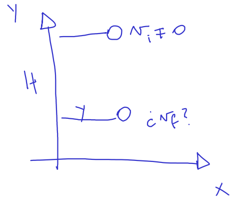
$$\rightarrow mgH = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgy$$

$$\Rightarrow v_f^2 = (mgH - mgy)\left(\frac{2}{m}\right)$$

4) $$\boxed{v_f = \sqrt{2g(H-y)}}$$

$\rightarrow$ Reemplazar números

(1)



$\Delta E_{mec} = 0$

$E_{mec_i} = E_{mec_f}$

(2) $\rightarrow E_i = \frac{1}{2} m v_i^2 + mgH$

$\rightarrow E_f = \frac{1}{2} m v_f^2 + mgy$

(3) $E_i = E_f$

$$\frac{1}{2} m v_i^2 + mgH = \frac{1}{2} m v_f^2 + mgy$$

$$\Rightarrow v_f^2 = \left[(mgH - mgy) + \frac{1}{2} m v_i^2 \right] \frac{2}{m}$$

$$\boxed{v_f = \sqrt{2g(H-y) + v_i^2}}$$

Solución:

(a) De la conservación de la energía mecánica del sistema bola-Tierra, se tiene, con $y_f = y$, $y_i = h$ y $v_i = 0$,

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{mec-f}} &= E_{\mathrm{mec-i}} \\ K_f + U_{gf} &= K_i + U_{gi} \\ \frac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f &= \cancelto{0}{\frac{1}{2}mv_i^2} + mgh, \quad \boxed{v_f = \sqrt{2g(h-y)}} \end{aligned}$$

(b) Si a la altura h la velocidad de la bola era $\vec{v}_i = v_i\hat{\jmath}$ (hacia arriba), la conservación de la energía mecánica, nuevamente, nos lleva a

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{mec-f}} &= E_{\mathrm{mec-i}} \\ K_f + U_{gf} &= K_i + U_{gi} \\ \frac{1}{2}mv_f^2 + mgy &= mgh + \frac{1}{2}mv_i^2, \quad \boxed{v_f = \sqrt{2g(h-y) + v_i^2}} \end{aligned}$$

Tarea. ¿Y si la velocidad inicial $\vec{v}_i$ de la bola en el ítem b) fuese hacia abajo, cómo afectaría esto a la rapidez de la bola en la posición y?

Ejemplo: El mecanismo de lanzamiento de un rifle de juguete consiste en un resorte de constante k desconocida. Cuando el resorte se comprime $0.120\,\mathrm{m}$, y se dispara el rifle, éste es capaz de lanzar verticalmente un proyectil de $35.0\,\mathrm{g}$ de masa a una altura máxima de $20.0\,\mathrm{m}$ arriba de la posición de equilibrio del resorte.

(a) Ignore todas las fuerzas resistivas y determine la constante del resorte.

(b) Encuentre la rapidez del proyectil en la posición de equilibrio del resorte, como ilustrado en la Fig.4.2.

$\underbrace{\Delta K} + \underbrace{\Delta U_g} + \underbrace{\Delta U_s}$

$U_s = \frac{1}{2} k x^2$

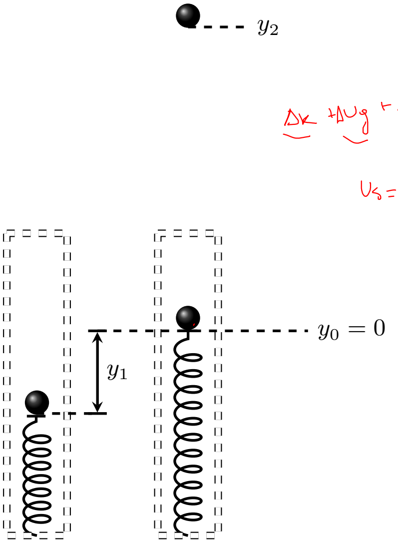
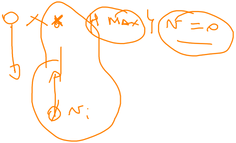


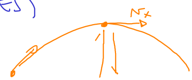
Figura 4.2 Esquema del rifle de juguete.

1) $\Delta E_{MEC} = 0 \; \{ \; E_i = E_f$

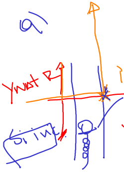
$$\rightarrow \tfrac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i + \tfrac{1}{2}ky_i^2 = \tfrac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f + \tfrac{1}{2}ky_f^2$$



2) Simplificamos (condiciones)



a)



Reposo $v_i = 0$

$y_i = -0.120\,m$

$$0 + mgy_i + \tfrac{1}{2}ky_i^2 = 0 + mgy_f + 0$$

$$\tfrac{1}{2}ky_i^2 = mgy_f - mgy_i$$

$$\Rightarrow k = \frac{2mg(y_f - y_i)}{y_i^2} = \frac{2(35.0g)(20.0-(-0.120))}{(0.120)^2}$$

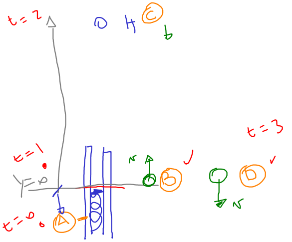
$$\approx 958\ N/m$$

S final $y_f - 0$ $\quad y_f = 20.0\,m$

$v_f = 0$

$y_s = 0$, U_s

→ Pos. Nat. Resorte



CASO I : B , CASO II : D

¿ v en pos. equilibrio del resorte?

* CASO II → E_i : C , E_f : D

* CASO I (SERWAY) → E_i : A , E_f : B

Sistema Aislado : $\Delta E_{sis} = 0$

$$\underbrace{\Delta K + \Delta U}_{\Delta E_{mec} = 0} + \cancel{E_{int}}^{0} = 0$$

$E_f - E_i = 0$; $E_f = E_i$

(−0.120 m)

$$E_i = 0 + \frac{1}{2} k y_i^2 + m g y_i$$

$$E_f = \frac{1}{2} m v^2 + 0 + 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} k y_i^2 + m g y_i = \frac{1}{2} m v^2$$

$$v^2 = \frac{k y_i^2}{m} + 2 g y_i$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{k y_i^2}{m} + 2 g y_i} \; ; \; \boxed{v \approx 19.8 \, m/s}$$

Solución:

(a) Apliquemos la conservación de la energía mecánica al sistema bola-resorte-Tierra:

Resorte comprimido: $v_1 = 0$, $y_1 = y_{s1} = -0.120\,\mathrm{m}$:

$$K_1 = 0, \quad U_{g1} = mgy_1, \quad U_{s1} = \frac{1}{2}ky_{s1}^2.$$

Proyectil en su máxima altura: $v_2 = 0$, $y_{s2} = 0$ e $y_2 = h$:

$$K_2 = 0, \quad U_{g2} = mgh, \quad U_{s2} = 0$$

Luego, por conservación de la energía mecánica,

$$E_{\mathrm{mec}-1} = E_{\mathrm{mec}-2}$$
$$K_1 + U_{g1} + U_{s1} = K_2 + U_{g2} + U_{s2}$$
$$\cancelto{0}{\frac{1}{2}mv_1^2} + \frac{1}{2}ky_{s1}^2 + mgy_1 = \cancelto{0}{\frac{1}{2}mv_2^2} + \cancelto{0}{\frac{1}{2}ky_{s2}^2} + mgh$$
$$\frac{1}{2}ky_{s1}^2 = mg(h - y_1)$$

de la cual se obtiene

$$k = \frac{2mg(h-y_1)}{y_{s1}^2} = \frac{2(9.8\,m/s^2)(0.0350\,\mathrm{kg})\{[(20.0-(-0.120)]\,\mathrm{m}]\}}{(-0.120\,\mathrm{m})^2}$$

o sea, la constante del resorte es:

$$k = 958\,\mathrm{N/m}$$

(b) Cuando el resorte vuelve a su punto de equilibrio, $y_0 = y_{s0} = 0$ y $v_0 =?$:

$$K_0 =?, \quad U_{s0} = 0, \quad U_{g0} = 0$$

Aplicando la conservación de la energía mecánica a ese punto y el punto en el cual el proyectil alcanza su máxima altura se tiene:

$$\begin{aligned}
E_{\mathrm{mec}-0} &= E_{\mathrm{mec}-2} \\
K_0 + U_{g0} + U_{s0} &= K_2 + U_{g2} + U_{s2} \\
\frac{1}{2}mv_0^2 + \cancelto{0}{mgy_0} + \cancelto{0}{\frac{1}{2}ky_{s0}^2} &= \cancelto{0}{\frac{1}{2}mv_2^2} + mgh + \cancelto{0}{\frac{1}{2}ky_{s2}^2} \\
\frac{1}{2}mv_0^2 &= mgy_2,
\end{aligned}$$

Usando los valores numéricos

$$v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9.8\, m/s^2)(20.0\,\mathrm{m})}$$

de modo que la rapidez del proyectil cuando pasa por la posición de equilibrio del resortes es:

$$v_0 = 19.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

4 Situaciones que incluyen fricción cinética

Un objeto que se muve hacia la derecha sobre la superficie de una mesa rugosa: Su velocidad decrece debido a la fuerza de fricción.

Recuerde: **el trabajo incluye el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza**.

El teorema del trabajo-energía cinética se aplica a partículas o sistemas modelados como partículas. Cuando fuerzas de fricción actúan no es posible calcular el trabajo realizado por tales fuerzas.

La segunda ley del movimiento es válida, aún cuando el teorema trabajo-energía cinética no lo sea.

Reescribamos el trabajo para todas las fuerzas, excepto las de fricción

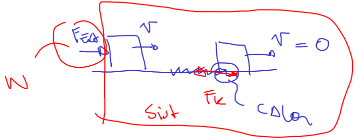
$\sum \vec{F}$

$$\sum W_{\text{otras}} = \int \sum \vec{F}_{\text{otras}} \cdot d\vec{r} : \qquad Fr + \sum F_{otras} \tag{11}$$

$d\vec{r}$ es el desplazamiento del objeto: Para fuerzas distintas a la de fricción (sin deformación del objeto), el desplazamiento es el mismo que el del punto de aplicación de las fuerzas.

$$\Delta E_{sis} = \sum T$$

$$\boxed{\Delta K + \Delta U + \Delta E_{int} = W} \rightarrow \text{Fricion} \rightarrow \text{calor} \left\{ E_{int} \right.$$



- $W \rightarrow$ fuerza $\cdot$ $\underbrace{\text{desplazamiento}}_{\text{punto}}$

- $F \sim W \sim E$

- cons. energia funciona { leyes mov. (newton)

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Adicionemos, a ambos lados de la igualdad anterior, el trabajo realizado por la fuerza de fricción cinética, esto es

$$\underbrace{\sum W_{\text{otras}} + \boxed{\int \vec{f}_k \cdot d\vec{r}}}_{\text{sist.}} = \int \sum \vec{F}_{\text{otras}} \cdot d\vec{r} + \boxed{\int \vec{f}_k \cdot d\vec{r}}$$
$$= \int \left(\sum \vec{F}_{\text{otras}} + \vec{f}_k \right) \cdot d\vec{r} \qquad (12)$$

La expresión entre paréntesis del lado derecho es la fuerza neta $\sum \vec{F}$, así

$$\sum W_{\text{otras}} + \int \vec{f}_k \cdot \vec{r} = \int \sum \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

De la segunda ley de Newton del movimiento sabemos que $\boxed{\sum \vec{F} = m\vec{a}}$,

$$\underbrace{\sum W_{\text{otras}} + \int \vec{f}_k \cdot d\vec{r}}_{W_{\text{sist}}} = \int m\vec{a} \cdot d\vec{r} = \underbrace{\int m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \int_{t_i}^{t_f} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}dt}_{a = \frac{dv}{dt} = \frac{dr}{dt^2}} \qquad (13)$$

$$= \int LW$$

En la expresión anterior escribimos $d\vec{r} = \vec{v}dt$. El producto escalar obedece la regla del producto para la derivación, o sea

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = 2\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v},$$

donde se usó la propiedad conmutativa del producto escalar. Así

$$\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dt}.$$

Sustituyendo ese resultado en la Ec.(13) se llega a

$W = \Delta K$

$$\sum W_{\rm otras} + \int \vec{f}_k\cdot d\vec{r} = \int_{t_i}^{t_f} m\left(\frac{1}{2}\frac{dv^2}{\cancel{dt}}\right)\cancel{dt}$$

$\underbrace{\int m\vec{a}\, d\vec{r}}$

$$= \frac{1}{2}m\int_{v_i}^{v_f} \underline{d(v^2)} = \underbrace{\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \Delta K}$$

$\Sigma W_{otras} + \int F_k \cdot d\vec{r} = \Delta K$

Observando el lado izquierdo de la expresión anterior, vea que, en el marco inercial de la superficie $\vec{f}_k$ y $d\vec{r}$ estarán en direcciones opuestas para cada incremento $d\vec{r}$ de la trayectoria seguida por el objeto. En consecuencia,

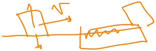
$$\vec{f}_k \cdot d\vec{r} = \underline{-f_k dr}$$

con lo cual la expresión anterior se convierte en

$$\int \vec{F}_k \cdot d\vec{r} = -F_k \underbrace{\int dr}_{\text{dist.}}$$

$$\sum W_{\text{otras}} - \int f_k dr = \Delta K$$

En el modelo para la fricción, la magnitud de la fuerza de fricción es constante, de modo que f_k se puede sacar de la integral. La integral $\int dr$ es simplemente la suma de incrementos de longitud a lo largo de la trayectoria, la cual corresponde a la trayectoria total Δr. Por lo tanto



$W = \Delta K$

$$\boxed{\Delta K = \sum W_{\text{otras}} - f_k \Delta r} \quad (14)$$

$W_o \underbrace{- F_k \Delta r} = \Delta K$

$\Delta K \to i \quad v$

o

$\to f \quad 0$

$$\boxed{K_f = K_i + \sum W_{\text{otras}} - f_k \Delta r.} \quad (15)$$

$\underbrace{\Delta U = 0}$

Simplificación

$\boxed{\Delta K = -f_k \cdot \Delta r}$

$W_o = \Delta K + \Delta E_{int}$

La Ec.(14) es una versión modificada del teorema trabajo-energía cinética aplicable cuando fuerzas de fricción actúan sobre el objeto.

El cambio en la energía cinética del objeto (ΔK) es igual al trabajo realizado por todas las fuerzas distintas de la fricción ($\sum W_{\text{otras}}$) menos un término $f_k \Delta r$ asociado con la fuerza de fricción.

Consideremos el sistema objeto-superficie de la mesa bajo la acción sólo de una fuerza de fricción: A medida que el objeto avanza se frena

- No se realiza trabajo a través de la frontera del sistema: El sistema no interactúa con el medio ambiente.
- No hay otros tipos de transferencia de energía a través de la frontera del sistema (no consiederar el molesto sonido del objeto deslizándose).

En ese caso el lado izquierdo de la Ec.(2) se convierte en

$$\Delta E_{\text{sis}} = \Delta K + \Delta E_{\text{int}} = 0.$$

El cambio en la energía cinética del sistema objeto-superficie es igual al cambio en la energía cinética del objeto: Es la única parte del sistema que se mueve.

Luego, al incorporar la Ec.(14) se obtiene

$$\Delta K = \cancelto{0}{\sum W_{\text{otras}}} - f_k \Delta r \quad \rightarrow \quad -f_k \Delta r + \Delta E_{\text{int}} = 0$$

o sea

$$\boxed{\Delta E_{\text{int}} = f_k \Delta r} \tag{16}$$

Por lo tanto, el aumento de energía interna del sistema es igual al producto de la magnitud de la fuerza de fricción y la longitud de la trayectoria que se mueve el objeto. En resumen:

> **Una fuerza de fricción transforma la energía cinética de un sistema en energía interna y el aumento de su energía interna es igual a la disminución de su energía cinética.**

Sist. Aislados

$$\Delta E_{sis} = \sum T \quad \Big\} \quad \Delta E_{sis} = 0$$

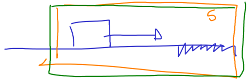
$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\Delta K + \Delta U + \Delta E_{int} = 0}$$

$g, E \rightarrow \frac{1}{2} k x^2$

mgy

1) masa sobre una sup. $(\Delta U = 0)$



2) S.A $\Rightarrow$ $W = 0$

$$\rightarrow \Delta K = \sum \cancel{W_{DF}}^{\,0} - f_k d$$

$$\Delta K = - f_k d$$

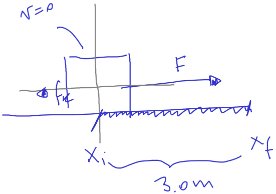
$$\Rightarrow \underbrace{\Delta K + f_k d}_{} = 0 \Rightarrow \Delta E_{int} = f_k d$$

$$\Delta E_{sis} = 0 \Big\}$$ CONSERVACION ENERGIA

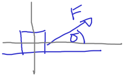
Ejemplo: Un bloque de $6.0\,\mathrm{kg}$, inicialmente en reposo, se tira hacia la derecha a lo largo de una superficie horizontal mediante una fuerza constante de $12\,\mathrm{N}$.

(a) Encuentre la rapidez del bloque después de que se mueve $3.0\,\mathrm{m}$ en la dirección de la fuerza aplicada si la superficie de contacto tiene un coeficiente de fricción cinética de 0.15.

(b) Suponga que la fuerza $\vec{F}$ se aplica a un ángulo θ, como mostrado en la Fig.4.3(b). ¿En qué ángulo se debe aplicar la fuerza para lograr la mayor rapidez posible después de que el bloque se mueve $3.0\,\mathrm{m}$ hacia la derecha?



a) ¿v?



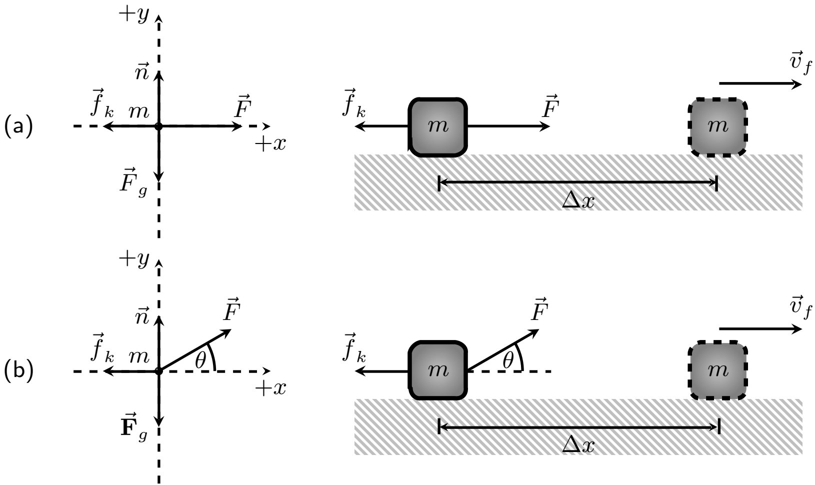
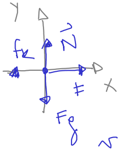


Figura 4.3 Bloque en movimiento sobre una superficie rugosa cuando una fuerza $\vec{F}$ actúa sobre él: (a) en la dirección del movimiento y (b) formando un ángulo θ con la dirección del movimiento.

a) (1) Sis. No Aislado, con Fricción, $\Delta U = 0$ $\left\{ \boxed{\Delta K = W_{oF} - f_k d} \right.$

$v_0 = 0$ $\quad$ v ? $\quad$ F

(2)



a) $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$\rightarrow \sum F_x = -f_k + F = m a_x$

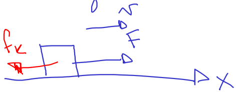
$\rightarrow \sum F_y = N - F_g = 0$

$$\boxed{N = mg}$$

$\Delta E_{sis} = \sum T$

$\Delta K + \cancel{\Delta U} + \Delta E_{int} = W$

$\Delta K + f_k d = W_F$



* $f_k = \mu_k N = \mu_k m g = (0.15)(6.0\,kg)(9.8\,m/s^2) \approx 8.8\,N$

b)

* $W_F = F\hat{i} \cdot \Delta x \hat{i} = F \overbrace{\Delta x}^{x_f - x_i} = (12N)(3.0\,m) = 36\,J$

(3) $\rightarrow$ $\boxed{\Delta K = W_{oF} - f_k d}$

$\frac{1}{2} m v_f^2 - \cancel{\frac{1}{2} m v_i^2}^{0} = W_F - f_k d$ $\Big\}$ $v_f = \sqrt{\frac{2}{m}(W_F - F_k d)}$

(4)

$$\boxed{\approx 1.8\,m/s}$$

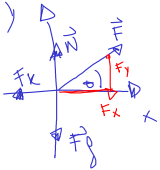
5) 

$\Delta K = W_F - F_k d$, $d = 3.0\,m$

$W_F = \vec{F} \cdot \Delta\vec{x}$

$= (F_x \hat{i} + F_y \hat{j}) \cdot (\Delta x \hat{i})$

$= F_x \Delta x = F\cos\theta \cdot d$



$\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$\to \sum F_x = -f_k + F\cos\theta = ma$

$\to \sum F_y = N + F\sin\theta - mg = 0 \} \; N = mg - F\sin\theta$

$F_k = N \mu_k$

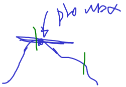
$\cos\theta = \frac{F_x}{F}$

$\boxed{F_x = F\cos\theta}$

$(\cos\theta)' = -\sin\theta$

$\Delta K = W_F - F_k d$

$\underbrace{\frac{1}{2} m v_f^2} = F\cos\theta\, d - (mg - F\sin\theta)\mu_k d$



$K(\theta) \to$ MAX valor $\} \; \frac{dK\theta}{d\theta} = 0$

$\frac{dK(\theta)}{d\theta} = -F\sin\theta\, d + \mu_k F\cos\theta\, d = 0 \} \; \mu_k = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$ $\tan^{-1}$

$\mu_k \cancel{F}\cos\theta \cancel{d} = \cancel{F}\sin\theta \cancel{d}$

$\mu_k \cos\theta = \sin\theta$

$\Rightarrow \theta = \arctan(\mu_k) \approx 8.5^\circ \Rightarrow v_{MAX}(\theta = 8.5^\circ)$

Solución:

(a) El trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ sobre el bloque es

$$\sum W_{\text{otras}} = W_F = F\Delta x = (12\,\text{N})(3.0\,\text{m}) \quad \therefore \quad W_{\text{otras}} = 36\,\text{J}$$

La fuerza normal y la fuerza gravitacional no realizan trabajo sobre el objeto.

Aplicando la segunda ley de Newton al bloque, se tiene:

$$\sum F_y = n - F_g = 0, \quad \therefore \; n = mg$$

La magnitud de la fuerza de fricción cinética sobre el bloque debido a la superficie rugosa es:

$$f_k = \mu_k n = \mu_k mg = (0.15)(6.0\,\text{kg})(9.8\,\text{m/s}^2) = 8.8\,\text{N}.$$

El término $-f_k\Delta x$ es

$$-f_k\Delta x = -(8.8\,\text{N})(3.0\,\text{m}) = -26\,\text{J}$$

Usando la Ec.(15), la rapidez del bloque luego del desplazamiento es

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = \cancelto{0}{\frac{1}{2}mv_i^2} + \sum W_{\text{otras}} - f_k\Delta x$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2(\sum W_{\text{otras}} - f_k\Delta x)}{m}}$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2(36-26)\,\text{J}}{6.0\,\text{kg}}} \quad \therefore \quad \boxed{v_f = 1.8\,\text{m/s}}$$

(b) El trabajo realizado por la componente F_x de la fuerza, en este caso, es

$$\sum W_{\text{otras}} = W_F = F\Delta x\cos\theta$$

Aplicando la segunda ley de Newton al bloque, se tiene

$$\sum F_y = n + F\sin\theta - mg = 0 \quad \therefore \quad n = mg - F\sin\theta.$$

La magnitud de la fuerza de fricción en este caso es

$$f_k = \mu n = \mu_k(mg - F\sin\theta)$$

y el término $-f_k\Delta x$ es:

$$-f_k\Delta x = -\mu_k mg\Delta x + \mu_k F\sin\theta\Delta x.$$

Utilizando, nuevamente la Ec.(15) para obtener la rapidez final, con $K_i = 0$, se tiene

$$K_f = \sum W_{\text{otras}} - f_k\Delta x = F\Delta x\cos\theta - \mu_k mg\Delta x + \mu_k F\sin\theta\Delta x$$

Note que $K_f \equiv K_f(\theta)$. Obtener la máxima rapidez es equivalente a obtener la máxima energía cinética.

Minimizando la variación de la energía cinética final, esto es, haciendo la derivada de K_f con relación a θ igual a cero, $dK_f(\theta)/d\theta = 0$, se tiene

$$\frac{dK_f(\theta)}{d\theta} = -F\Delta x \sin\theta + \mu_k F\Delta x \cos\theta = 0$$

de la cual se obtiene

$$F\Delta x \sin\theta = \mu_k F\Delta x \cos\theta$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta = \mu_k \frac{\cancel{F\Delta x}}{\cancel{F\Delta x}} = \mu_k \quad \therefore \quad \theta = \tan^{-1}(\mu_k) = \tan^{-1}(0.15) = 8.5^\circ$$

Ejemplo: Un bloque de $1.6\,\mathrm{kg}$ de masa se une a un resorte horizontal que tiene una constante de fuerza de $1.0\times10^3\,\mathrm{N/m}$, como mostrado en la Fig.4.4. El resorte se comprime $2.0\,\mathrm{cm}$ y después se libera desde el reposo.

(a) Calcule la rapidez del bloque mientras pasa a través de la posición de equilibrio $x=0$ si la superficie no tiene fricción.

(b) Calcule la rapidez del bloque mientras pasa por la posición de equilibrio si una fuerza de fricción constante de $4.0\,\mathrm{N}$ retarda su movimiento desde el momento en que se libera.

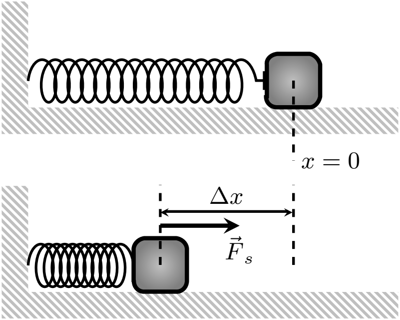


Figura 4.4 Sistema objeto-resorte.

Sit a) 1 $\Delta E_{sis} = \Sigma T \{ \Delta K + \Delta U_s + \cancel{\Delta E_{int}}^{0} = 0 \Rightarrow \Delta E_{mec} = 0$

$\underbrace{E_{mec\,i} = E_{mec\,f}}$

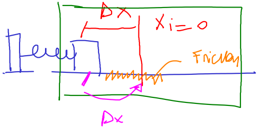
2

$\rightarrow K_i + U_{si} = K_f + U_{sf}$ $\Big\}$ E_i : MASA REPOSO , RESORTE COMPRIMIDO
E_f : MASA ($v \neq 0$) , RESORTE NO ESTA COMPRIMIDO

3 $\rightarrow 0 + \frac{1}{2} K x_i^2 = \frac{1}{2} m v_f^2 + 0$

$\underbrace{v_f = \sqrt{\frac{K x_i^2}{m}}} \approx 5.0 \times 10^{-1}\ m/s$

4



Sit. b) $\Delta K = W_s - f_k d$

$\rightarrow \frac{1}{2} m v_f^2 - \cancel{\frac{1}{2} m v_i^2}^{0} = W_s - f_k d$

$W_s = -\Delta U_s$
$= -(U_{sf} - U_{si})$

$W_s = -\Delta U_s = \frac{1}{2} K x_i^2$ $\}$ + MAS TRABAJO Y CONSERVADO EN. POT.

$\Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2}{m}(W_s - f_k d)} \approx 0.39\ m/s$

Solución

(a) Apliquemos la ley de conservación de la energía mecánica al sistema bloque-resorte en $x_{s0} = 0$ (resorte en equilibrio) y $x_{s1} = -2.0\,\mathrm{cm}$ (resorte comprimido), con $v_1 = 0$ ($K_1 = 0$) y v_0 (rapidez del bloque en $x_{s0} = 0$):

$$K_1 + U_{s1} = K_0 + U_{s0}$$

$$\cancelto{0}{\frac{1}{2}mv_1^2} + \frac{1}{2}kx_{s1}^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \cancelto{0}{\frac{1}{2}kx_{s0}^2}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{kx_{s1}^2}{m}} = \sqrt{\frac{1.0 \times 10^3\,\mathrm{N\,m^{-1}}(-2.0 \times 10^{-2}\,\mathrm{m})^2}{1.6\,\mathrm{Kg}}}$$

de la cual se obtiene la velocidad del bloque cuando pasa por el punto de equilibrio del resorte

$$\boxed{v_0 = 5.0 \times 10^{-1}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

(b) El trabajo realizado por el resorte sobre el bloque es

$$\sum W_{\text{otras}} = W_s = \frac{1}{2}kx_{s1}^2 = \frac{1}{2}(1 \times 10^3\,\text{N/m})(-2.0 \times 10^{-2}\,\text{m})^2 = 2.0 \times 10^{-1}\,\text{J}$$

La fuerza normal y la fuerza gravitacional no realizan trabajo sobre el objeto.

El término $-f_k\Delta x$ debido a la fricción cinética es

$$-f_k\Delta x = -(4.0\,\text{N})(2.0 \times 10^{-2}\,\text{m}) = -8.0 \times 10^{-2}\,\text{J}$$

Aplicando la Ec.(15), se tiene

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \cancelto{0}{K_1} + \sum W_{\text{otras}} - f_k\Delta x$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2(\sum W_{\text{otras}} - f_k\Delta x)}{m}} = \sqrt{\frac{2[2.0 \times 10^{-1} - 8.0 \times 10^{-2})]\,\text{J}}{1.6\,\text{kg}}} = 0.39\,\text{m/s}$$

5 $\Delta E_{mec} \neq 0$ para fuerzas no-conservativas

Si la única fuerza actuando sobre un cuerpo deslizándose sobre una superficie es la fuerza de fricción $\vec{f}_k$, la Ec.(14) da

$$\Delta K = \cancelto{0}{\sum W_{\text{otras}}} - f_k \Delta r \quad \therefore \quad \Delta K = -f_k \Delta r.$$

Si, además, en el sistema $\Delta U \neq 0$: el término $-f_k \Delta r$ representa el cambio en la **energía mecánica** del sistema. Por ejemplo, objeto moviéndose sobre un plano inclinado con fricción, o sea

$$\Delta E_{\text{mec}} = \Delta K + \Delta U_g = -f_k \Delta r$$

En general: (1) Fuerza de fricción actuando dentro de un sistema aislado

$$\boxed{\Delta E_{\text{mec}} = \Delta K + \Delta U = -f_k \Delta r,} \tag{17}$$

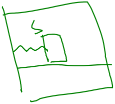
donde ΔU es el cambio en **todas** las formas de energía potencial. Note que la Ec.(17) se reduce a la Ec.(10) en ausencia de fuerza de fricción.

(2) Fuerza de fricción actuando dentro de un sistema no-aislado

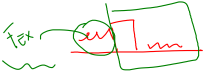
$$\boxed{\Delta E_{\text{mec}} = \sum W_{\text{otras}} - f_k \Delta r.} \tag{18}$$

Ppio de conservación energía

- Sistema no aislado } $\Delta E_{sis} = \Sigma T$
  - $\Sigma T = W + Q + T_{om} + T_E + T_R + T_m$
  - Mec. transferencia de energía.
  - Fricción → $\boxed{\Delta E_{mec} = W_{oF} - F_k d}$
    - $\Delta K + \Delta U$
    - $E_{int} = F_k d$
- Sistema aislado } $\Delta E_{sis} = 0$
  - sin fricción } $\boxed{\Delta E_{mec} = 0}$
    - $\Delta K + \Delta U = 0$
    - $\boxed{E_i = E_f}$
  - Fricción } $\boxed{\Delta E_{mec} = 0 - F_s d}$
    - $\Delta K = -F_k d$



Sist. aislado

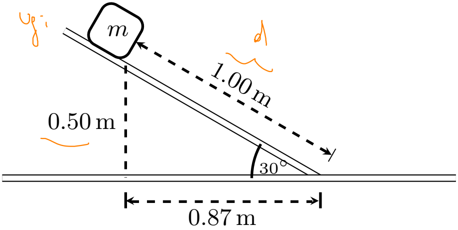


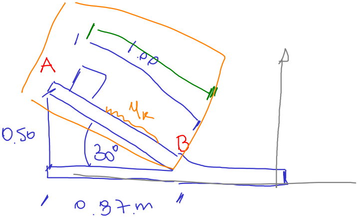
Sist. no aislado

Ejemplo: Una caja de $3.00\,\mathrm{kg}$ se desliza hacia abajo por un plano inclinado. El plano inclinado mide $1.00\,\mathrm{m}$ de largo y está inclinado en un ángulo de 30.0°, con relación a la horizontal, como mostrado en la figura. La caja parte del reposo en lo alto del plano inclinado, experimenta una fuerza de fricción constante de $5.00\,\mathrm{N}$ de magnitud y continúa su movimiento una corta distancia sobre el piso horizontal, después de dejar la rampa.

(a) Proceda con el planteamiento de energía para determinar la rapidez de la caja en el fondo del plano inclinado.

(b) ¿A qué distancia se desliza la caja sobre la horizontal si continúa experimentado una fuerza de fricción de $5.00\,\mathrm{N}$ de magnitud?





¿v_B?

$E_i \to A$

$E_f \to B$

$\Delta E_{mec} = -fd$

$$E_i = K_i + U_{gi} = 0 + mgy_i$$

$$E_f = K_f + U_{gf} = \frac{1}{2} m v_f^2 + 0$$

$$\to \Delta E_{mec} = -fd$$

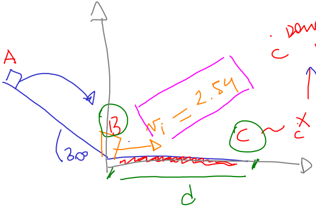
$$E_f - E_i = -f_k d$$

$$\frac{1}{2} m v_f^2 - mgy_i = -f_k d$$

$$\to v_f^2 = \frac{2}{m}\left(mgy_i - f_k d\right)$$

$$\Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2}{m}\left(mgy_i - f_k d\right)} \approx 2.54\ m/s$$

distancia en el plano



¿C donde la rebota?

$\longrightarrow v_f = 0$

$$\Delta E_{mec} = -f_k d \quad \} \; B-C$$

$$\underbrace{E_f - E_i}_{} = -f_k d$$

$$\cancel{K_f} - K_i = -f_k d$$

$$\frac{1}{2} m v_i^2 = f_k d$$

$$\rightarrow d = \frac{m v_i^2}{2 f_k} \approx 1{,}94\ m$$

E. potencial

$U_g \rightarrow$ grav.

$U_s \rightarrow$ resorte

K

resorte $\rightarrow F_{ext}$ } $W_s = -\Delta U_s$

Solución:

(a) En el punto de partida: $v_i = 0$ ($K_i = 0$) y $U_{gi} = mgy_i$. En el punto de llegada en el fondo del plano inclinado $U_{gf} = 0$ y $v_f = ?$ ($K_f = ?$). El trabajo realizado por la fricción sobre la caja es, con $\Delta r = 1.00\,\mathrm{m}$,

$$-f_k \Delta r = -(5.00\,\mathrm{N})(1.00\,\mathrm{m}) = -5.00\,\mathrm{J}$$

Aplicando la Ec.(17) encontramos:

$$\Delta E_{\mathrm{mec}} = \Delta K + \Delta U_g = (K_f - K_i) + (U_{gf} - U_{gi}) = -f_k \Delta r$$

$$\left(\frac{1}{2} m v_f^2 - \cancelto{0}{\frac{1}{2} m v_i^2}\right) + (\cancelto{0}{mgy_f} - mgy_i) = -f_k \Delta r$$

Resolviendo para v_f se tiene

$$v_f = \sqrt{\frac{2(-f_k \Delta r + mgy_i)}{m}} = \sqrt{\frac{2[-5.00\,\mathrm{J} + (3.00\,\mathrm{kg})(9.8\,\mathrm{m/s^2})(0.50\,\mathrm{m})]}{3.00\,\mathrm{kg}}}$$

$$= \boxed{2.54\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

(b) En este caso la única fuerza que existe sobre la caja es la fricción, la cual realiza un trabajo que muda la energía cinética de la misma. Luego, con $v'_f = 0$ y $v'_i = v_f$ (la del ítem anterior), se tiene

$$-f_k \Delta r = (K_f - K_i)$$

$$-f_k \Delta r = \left(\frac{1}{2} \cancelto{0}{m v_f'^2} - \frac{1}{2} m v_i'^2 \right)$$

$$\Delta r = \frac{m v_f^2}{2 f_k} = \frac{(3.00\,\mathrm{kg})(6.47\,\mathrm{m^2/s^2})}{2(5.00\,\mathrm{N})} = \boxed{1.94\,\mathrm{m}}$$

Ejemplo: Un bloque, $m = 0.80\,\mathrm{kg}$, con rapidez incicial $v_0 = 1.2\,\mathrm{m/s}$ hacia la derecha choca con un resorte de masa despreciable y constante de elasticidad $k = 50\,\mathrm{N/m}$ (vea la Fig.4.6.)

(a) Sin fricción entre el bloque y la superficie calcule la máxima compresión del resorte después del choque.

(b) Con fricción cinética constante entre el bloque y la superficie ($\mu_k = 0.50$) y rapidez del bloque al momento de chocar con el resorte $v_2 = 1.2\,\mathrm{m/s}$, ¿cuál es la máxima compresión $x_{\text{máx}}$ en el resorte?

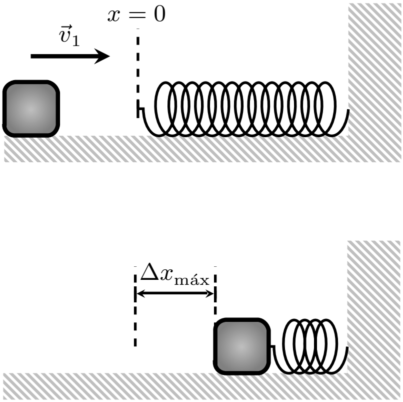
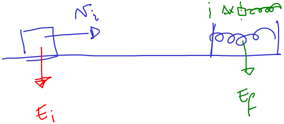


Figura 4.6 Sistema objeto-resorte.

a)



1

$$\Delta E_{mec} = 0$$

$$\Delta K + \Delta U_s = 0$$

$$K_f - K_i + U_{sf} - U_{si} = 0$$

$$K_i + U_{si} = K_f + U_{sf}$$

2

$$\frac{1}{2} m v_i^2 + \frac{1}{2} k x_i^2 = \frac{1}{2} m v_f^2 + \frac{1}{2} k x_f^2$$

$$\frac{1}{2} m v_i^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2} k x_f^2$$

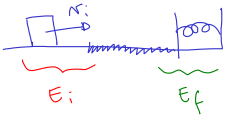
3

$$x_f = \sqrt{\frac{m}{k} v_i^2}$$

4

$$\boxed{x \approx 0.15 m}$$

b)



$$\Delta E_{mec} = -f_k d$$

$$\Delta K + \Delta U_s = -f_k d$$

$$K_f - K_i + U_{sf} - U_{si} = -f_k d$$

$$0 - \frac{1}{2} m v_i^2 + \frac{1}{2} k x_f^2 - 0 = -f_k x_f$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} k x_f^2 + f_k x_f - \frac{1}{2} m v_i^2 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_f^2 + \frac{2 f_k x_f}{k} - \frac{m v_i^2}{k} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{x_{f_1} = 0.083\ \text{m}}$$

$$\rightarrow x_{f_2} = -0.25\ \text{m}$$

Solución

(a) Se tiene: $v_0 = 1.2\,\mathrm{m/s}$ y $x_{s0} = 0$; $v_{\text{máx}} = 0$ y $x_{s2} = x_{s\text{máx}}$.

Aplicando la ley de conservación de la energía mecánica al sistema bloque-resorte, se tiene

$$K_0 + U_{s0} = K_{\text{máx}} + U_{s\text{máx}}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \cancelto{0}{\frac{1}{2}kx_{s0}^2} = \cancelto{0}{\frac{1}{2}mv_{\text{máx}}^2} + \frac{1}{2}kx_{s\text{máx}}^2$$

Resolviendo para $x_{\text{máx}}$, se llega a

$$x_{s\text{máx}} = v_0\sqrt{\frac{m}{k}} = (1.2\,\mathrm{m/s})\sqrt{\frac{0.80\,\mathrm{kg}}{50\,\mathrm{N}}} = 0.15\,\mathrm{m}$$

(b) El término debido a la fuerza de fricción sobre el bloque es

$$-f_k x_{s\text{máx}} = -\mu_k m g x_{s\text{máx}}.$$

La variación en la energía mecánica del sistema bloque-resorte es igual al trabajo realizado por la fuerza de fricción, o sea,

$$\Delta K + \Delta U_s = -f_k x_{s\text{máx}}$$

$$\left(\cancelto{0}{\frac{1}{2} m v_{\text{máx}}^2} - \frac{1}{2} m v_0^2\right) + \left(\frac{1}{2} k x_{s\text{máx}}^2 - \cancelto{0}{\frac{1}{2} k x_0^2}\right) = -\mu_k m g x_{s\text{máx}}$$

Resolviendo para $x_{\text{máx}}$ se llega a

$$x_{s\text{máx}}^2 + \frac{2\mu_k m g}{k} x_{s\text{máx}} - \frac{m v_0^2}{k} = 0$$

Usando los datos numéricos, tenemos:

$$x_{s\text{máx}}^2 + \frac{2(0.50)(0.80)(9.8)}{50} x_{s\text{máx}} - \frac{(0.80)(1.2)^2}{50} = 0$$
$$x_{s\text{máx}}^2 + 0.16 x_{s\text{máx}} - 0.023 = 0$$

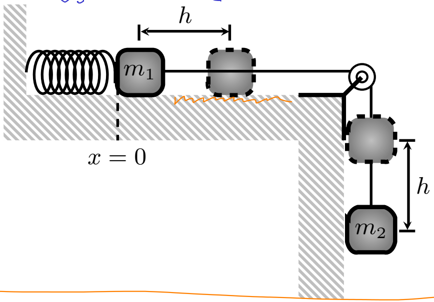
Resolviendo la ecuación cuadrática anterior, se obtiene:

$$x_{s\text{máx}} = 0.093\,\text{m} \quad \text{y} \quad x_{s\text{máx}} = -0.25\,\text{m}$$

de las cuales $\boxed{x_{s\text{máx}} = 0.093\,\text{m}}$ es la que tiene significado físico.

Ejemplo: Dos bloques conectados con una cuerda ligera que pasa sobre una polea sin fricción (vea Fig.4.7). El bloque de masa m_1 está sobre una superficie horizontal y conectado a un resorte de constante de fuerza k. El sistema se libera desde el reposo cuando el resorte no está estirado. Si el bloque de masa m_2 cae una distancia h antes de detenerse, calcule μ_k entre el bloque de masa m_1 y la suerficie.

U_s k



U_g

Sist. c/ 2 masas

$\underbrace{\Delta E_{sis}}_{} = \Sigma T$

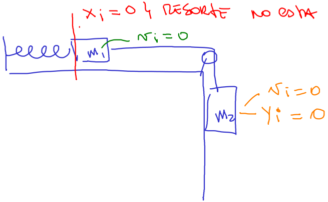
ΔK

m_1 m_2

m_{1f} m_{1i} m_{2f} m_i

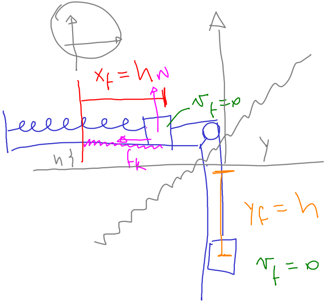
Figura 4.7 Sistema objeto-resorte con fricción y bloque que cuelga.

E_i



$$E_i = \cancel{K_{i_1}} + \cancel{U_{s_{i_1}}} + \cancel{U_{g_{i_1}}} + \cancel{K_{i_2}} + \cancel{U_{s_{i_2}}} + \cancel{U_{g_{i_2}}} = 0$$

E_f



$$E_f = \frac{1}{2} k x_f^2 + m g y_f$$

$$f_K = \mu_K m_1 g$$

$$\Rightarrow \Delta E_{MEC} = - f_K d$$

$$\frac{1}{2} k x_f^2 + m_2 g y_f = - \mu_K m_1 g h$$

$$\boxed{\frac{1}{2} k (h)^2 - m_2 g h = - \mu_K m_1 g h}$$

Solución: Sistema inicial en equilibrio:

$$v_{i1} = 0 \to K_{i1} = 0, \quad x_{si1} = 0 \to U_{si1} = 0, \quad y_{i2} = 0 \to U_{gi2} = 0.$$

Sistema final en equilibrio:

$$v_{f1} = 0 \to K_{f1} = 0, \quad x_{sf1} = h \to U_{sf1} = \frac{1}{2}kh^2, \quad y_{f2} = -h \to U_{gf2} = -m_2gh$$

Luego, la variación de la energía mecánica del sistema es:

$$\begin{aligned}
\Delta E_{\mathrm{mec}} &= \Delta K_1 + \Delta U_s + \Delta U_{g2} \\
&= (\cancelto{0}{K_{f1}} - \cancelto{0}{K_{i1}}) + (U_{sf1} - \cancelto{0}{U_{si1}}) + (U_{fg2} - U_{gi2}) \\
\Delta E_{\mathrm{mec}} &= \frac{1}{2}kh^2 - m_2gh
\end{aligned}$$

Aplicando la Ec.(17) se tiene

$$\Delta E_{\mathrm{mec}} = -f_kh$$

$$\frac{1}{2}kh^2 - m_2gh = -f_kh$$

El trabajo realizado por la fricción sobre el bloque de masa m_1 es dado por

$$-f_k h = -\mu_k m_1 g h$$

De las expresiones anteriores se llega a

$$\frac{1}{2}kh^2 - m_2 g h = -\mu_k m_1 g h$$

$$\frac{2m_2 g - kh}{2} = \mu_k m_1 g \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{2m_2 g - kh}{2m_1 g} = \mu_k}$$

Esta configuración, resorte-masa-polea-masa, es un método que puede ser empleado para determinar el coeficiente de fricción cinética entre un objeto y cierta superficie.

6 Potencia

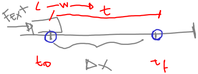
La relación entre la energía transferida y el tiempo en el que se realiza se llama **potencia instantánea** $\mathscr{P}$

$$\mathscr{P} \equiv \frac{dW}{dt} \tag{19}$$

trabajo
tiempo

La noción de potencia es válida para **cualquier** medio de transferencia de energía discutido anteriormente.

Si una fuerza externa se aplica sobre un objeto (representado como partícula) y si el trabajo realizado por dicha fuerza sobre el objeto en el intervalo de tiempo Δt es W, la **potencia promedio** durante ese intervalo de tiempo es



$$\mathscr{P}_{\text{promedio}} = \frac{W}{\Delta t}.$$

$\Delta t_f - t_0$

Al igual que las definiciones de velocidad y aceleración, la potencia instantánea es el valor límite de la potencia promedio a medida que Δt tiende a cero:

$$\mathscr{P} = \lim_{\Delta t \to 0} \mathscr{P}_{\text{promedio}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt},$$

donde dW representa el trabajo infinitesimal.

$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$

$E_i = K_i$

$E_f = K_f$

Dado que $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$, la potencia instantánea se escribe como

$$\mathscr{P} = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}, \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{20}$$

En el sistema internacional SI la unidad de potencia es el joule por segundo $(\mathrm{J/s})$, también llamado **watt** (W), en honor a James Watt:

$$1\,\mathrm{W} = 1\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = 1\,\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^3}$$

$P_{prom} = \frac{W}{\Delta t}$

$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

En el sistema estadounidense, una unidad de potencia acostumbrada es el **caballo de fuerza** hp:

$$1\,\mathrm{hp} = 746\,\mathrm{W}$$

De la definición de potencia es posible definir la unidad de energía (o trabajo) **kilowatt hora** (kWh) como la energía transferida en una hora a una tasa constante de $1\,\mathrm{kW} = 1000\,\mathrm{W} = 1000\,\mathrm{J/s}$. La cantidad de energía representada por $1\,\mathrm{kWh}$ es

$$1\,\mathrm{kWh} = (1.0 \times 10^3\,\mathrm{W})(3.6 \times 10^3\,\mathrm{s}) = (1.0 \times 10^3\,\mathrm{J/s})(3.6 \times 10^3\,\mathrm{s}) = 3.6 \times 10^6\,\mathrm{J}.$$

Debe quedar claro que $1\,\mathrm{kWh}$ es una **unidad de energía**, no de potencia.

Al pagar el recibo de la cuenta de electricidad está pagando energía, la cual es expresada en kilowatt hora en el recibo.

Su recibo indica que Ud. usó $200\,\mathrm{kWh}$ de energía durante un mes y el precio del kilowatt hora es de $\$\,112$. Por lo tanto, Ud. debe pagar

$$200\,\cancel{\mathrm{kWh}} \times \frac{\$\,112}{1\,\cancel{\mathrm{kWh}}} = \$\,22400$$

por esa cantidad de energía.

Suponga que una ampolleta se especifica en $100\,\mathrm{W}$. En 1.00 hora de operación, la línea de transmisión eléctrica debe transferir a la lámpara la energía de

$$(0.100\,\mathrm{kW})(1.00\,\mathrm{h}) = 0.100\,\mathrm{kWh} = (0.100)(3.60 \times 10^{6}\,\mathrm{J}) = 3.60 \times 10^{5}\,\mathrm{J}$$

lo que le significa un costo de

$$0.100\,\cancel{\mathrm{kWh}} \times \frac{\$112}{1\,\cancel{\mathrm{kWh}}} = 11.2\,\mathrm{peso}$$

Ejemplo: Un ascensor (ver diagrama en la Fig.4.8) tiene una masa de $1600\,\mathrm{kg}$ y transporta pasajeros con una masa combinada de $200\,\mathrm{kg}$. Una fuerza de fricción constante de $4000\,\mathrm{N}$ retarda el movimiento del ascensor:

(a) ¿Cuánta potencia debe proporcionar un motor para levantar el ascensor y sus pasajeros con una rapidez constante de $3.0\,\mathrm{m/s}$?

$P = \vec{F}_M \cdot \vec{v}$

(b) ¿Qué potencia debe entregar el motor en el instante en que la rapidez del elevador es v si el motor está diseñado para proporcionar al ascensor una aceleración hacia arriba de $1.00\,\mathrm{m/s^2}$?

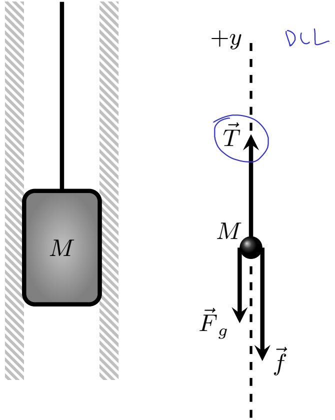


Figura 4.8 Un ascensor elevado por un motor a través de un cable y diagrama de cuerpo libre.

① F } W

② $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$

$\rightarrow \Sigma F_x = 0$

$\rightarrow \Sigma F_y = 0$ } Reposo

Solución:

(a) Aplicando la segunda ley de Newton se tiene

$$\sum F_y = T - Mg - f = 0,$$

de la cual se llega a

$$T = Mg + f = [\overbrace{(1600 + 200)}^{M_A + M_p}\,\text{kg}] \overbrace{\left(9.80\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)}^{g} + \overbrace{4000\,\text{N}}^{f_k}$$

$$T = 2.16 \times 10^4\,\text{N}$$

La potencia realizada por el motor es

$T\hat{j} \cdot v\hat{j}$

$(T v)(\hat{j} \cdot \hat{j})$

$$\mathscr{P} = \vec{T} \cdot \vec{v} = (2.16 \times 10^4\,\text{N}) \left(3.00\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \underbrace{[\hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath}]}_{} = 1$$

$$\mathscr{P} = 6.48 \times 10^4\,\text{W}$$ } magnitud

$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

(b) Aplicando la segunda ley de Newton se tiene

$$\sum F_y = T - Mg - f = Ma_y,$$

de la cual se llega a

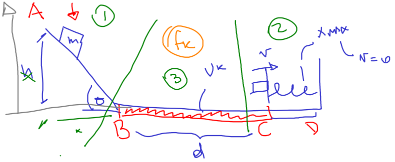
$$T = M(a_y + g) + f = [(1600 + 200)\,\mathrm{kg}]\left(1.00 + 9.80)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) + 4000\,\mathrm{N}$$

$$T = 2.34 \times 10^4\,\mathrm{N}$$

y la potencia entregada por el motor es

$$\mathscr{P} = \vec{T} \cdot \vec{v} = [(2.34 \times 10^4\,\mathrm{N})v][\hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath}]$$

$$\mathscr{P} = (2.34 \times 10^4\,\mathrm{N})v$$



1) tramo A-B → Sist. aislado s/ fricción | $\Delta E_{mec}=0$

2) tramo B-C → Sist. aislado c/ fricción | $\Delta E_m = -f_k d$

3) tramo C-D → Sist. aislado s/ fricción

1) $E_i = E_f \Rightarrow K_i + U_{gi} = K_f + U_{gf}$, (A): reposo: $v_i = 0$

$$0 + mgh = \frac{1}{2} m v_f^2 + 0 \Rightarrow \boxed{v_f = \sqrt{2gh}}$$

$\boxed{A-C}$

2) $v_i = \sqrt{2gh} \Rightarrow \Delta E_{mec} = -f_k d$

$$\Delta K + \cancel{\Delta U_g}^{0} = -f_k d \Rightarrow \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i'^2 = -f_k d$$

$$\Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{1}{2} m (\sqrt{2gh})^2 - f_k d\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{m}\left(mgh - f_k d\right)}$$

$\boxed{A-D}$

3) $\Delta E_{mec} = 0$

$$K_i + U_{si} = K_f + U_{sf}$$

$$\frac{1}{2} m v_i^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2} k (x_{max})^2$$

$$x_{max} = \sqrt{\frac{m}{k}\left(\frac{2}{m}(mgh - f_k d)\right)}$$