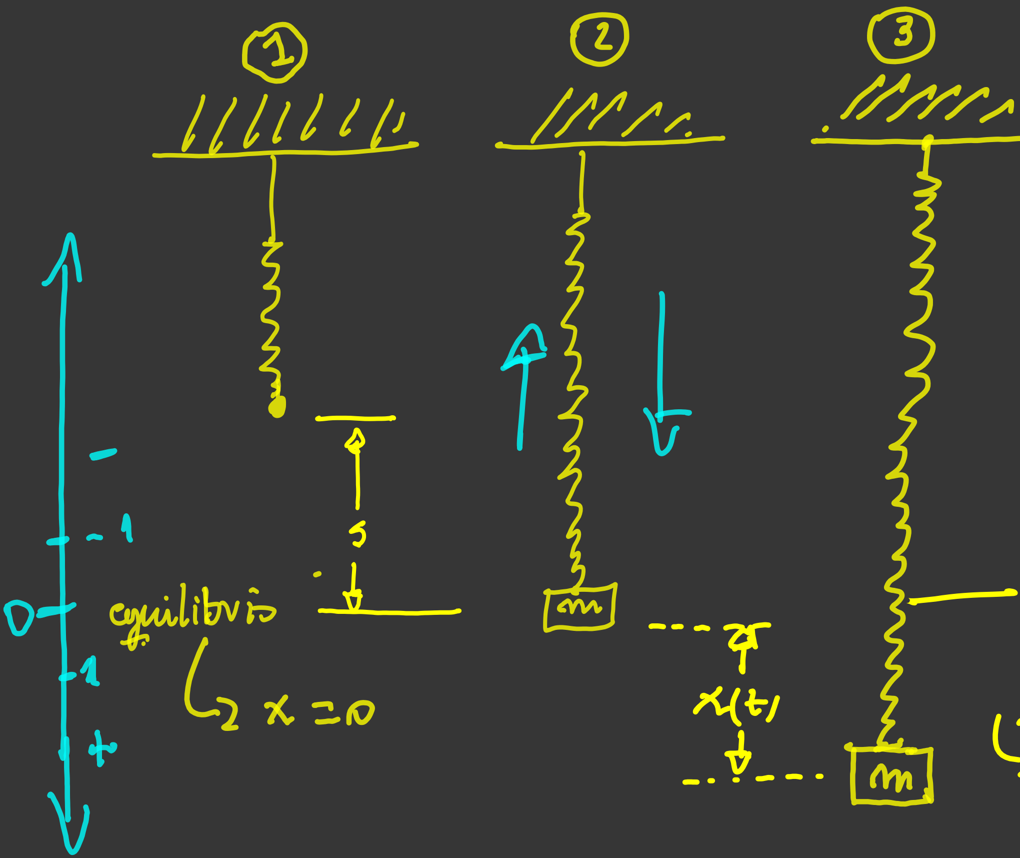
clase N° 13
(14/09/22)

Aplicaciones mecánica

supongamos un cuerpo de masa m cuelga de un resorte.



De (1) a (2) recorre s[cm]

De (2) a (3) $\boxed{m}$ recorre $s + x(t)$ [cm].

$(2) \Rightarrow (3)$ $F_x = -k(s + x(t))$
Dibujo la F_x $\uparrow$ $\Rightarrow$ es $-$.

De ① a ② se supone que el centro de masa del cuerpo m, al recorrer s unidades de longitud (por ejemplo cm) llega al equilibrio y se detiene. En el proceso anterior se supone que las fuerzas que actuan son la gravedad

$$\downarrow \vec{g} = 9,8 \left[\frac{mt}{seg^2}\right]$$

y la fuerza $\vec{F}_K$ que ejerce el resorte sobre el cuerpo de masa m (Por ahora suponemos que NO HAY ROCE)

Esta fuerza F_K se conoce como <u>Ley de Hooke</u>

$K > 0$

y dice que: $\boxed{F_K = -Ks}$ donde K es una constante de proporcionalidad positiva que depende de la naturaleza del resorte.

$+$

En $\boxed{F_K = -Ks}$ el signo menos es porque la fuerza actua en sentido contrario al movimiento del resorte. Además, hacemos el convenio que movimiento hacia abajo, en el sentido gravitatorio es positivo.

Así, de 1 a 2: suponemos que cuando el movimiento se detiene, tenemos:

$$\boxed{\vec{F}_{total} = \vec{F}_g + \vec{F}_K = 0}$$

; esto es, el sistema está en equilibrio

$\boxed{\text{SMR: sistema Masa-Resorte}}$

$\vec{F}_g = -\vec{F}_K \Leftrightarrow mg = Ks$ donde $F_K = -Ks$

$\left(\Rightarrow K = \frac{mg}{s} \; [N/mt] \right)$

Luego del equilibrio $x = 0$, se supone que el sistema masa-resorte es tomado por una fuerza que lo lleva $x(t)$ unidades por arriba (o por abajo) del equilibrio. Siempre supondremos que el movimiento $x(t)$, realizado por el centro de masa del cuerpo m, es unidimensional (y es positivo hacia abajo $\downarrow$):

$x(t)$: indica la posición del centro de masa del cuerpo de masa m.

Así, $v(t) = \frac{dx}{dt}(t)$: indica la velocidad del cuerpo de masa m, en tiempo t.

$a(t) = \frac{dv}{dt}(t)$: indica la aceleración de dicho cuerpo en tiempo t

Así, en tiempo t posterior al equilibrio y en ausencia de otras fuerzas, tenemos:

F_T : Fuerza total sobre el sistema, es:

$$\boxed{F_T = ma = m\,x''(t)}$$

y el sistema viene descrito por la igualdad:

$F_K = -K(s+x(t))$

$$\boxed{\vec{F}_T = \vec{F}_g + \vec{F}_K = mg - K(s+x(t))},$$

esto es:

$$m x''(t) = mg - Ks - Kx(t)$$

Pero de (1) a (2): $\boxed{mg = Ks}$. Por tanto,

$$\boxed{m x''(t) = -K x(t).}$$

, es decir.

$$\boxed{m x''(t) + K x(t) = 0}$$

Esta EDO se dice LIBRE y SIN AMORTIGUAMIENTO

(libre, pues no hay fuerzas externas;

sin amortiguamiento, pues suponemos que no hay roce).

OBS:

Note que el PVI es:

$$\begin{cases} m x''(t) + k\, x(t) = 0 \\ x(0) = x_0 \quad (\text{posición inicial}) \\ x'(0) = v_0 \quad (\text{velocidad inicial}) \end{cases}$$

con (i) $x_0 > 0$ si $\left\{ x(0) \text{ está por abajo del equilibrio} \right.$ (Fase (1) a (2))

(ii) $v_0 > 0$ si $\left\{ \text{la velocidad inicial es hacia abajo} \right.$

La EDO (normalizada) es

$$x''(t) + \frac{k}{m} x(t) = 0$$

(La constante k, es única para cada resorte)

$$\iff \boxed{x''(t) + w^2 x(t) = 0}$$

donde $\boxed{w^2 = \frac{k}{m}}$

En la realidad el movimiento del SMR posee una fuerza intrínseca debido al roce del sistema.

Esta fuerza de roce, F_r, suponemos que es proporcional a la velocidad del SMR, esto es,

$$\boxed{F_r = -b\,v(t)}$$ (b constante positiva)

donde b es cte. de proporcionalidad y el signo menos es porque la fuerza actúa en sentido contrario al movimiento $x(t)$.

Además, puede haber otras fuerzas externas $F(t) = f(t)$ actuando sobre el sistema masa-resorte. Esto es:

$$\bar{F}_T = \bar{F}_g + \bar{F}_k + \bar{F}_r + \bar{F}(t)$$, es decir

$$m\,x''(t) = \underline{mg} - k(s + x(t)) - b\,x'(t) + f(t)$$

$$= -k\,x(t) - b\,x'(t) + f(t).$$

Es decir:

$$\boxed{m x''(t) + b x'(t) + k x(t) = f(t)} \qquad (*\!*\!*)$$

m : masa del sistema masa resorte, SMR.

b : coeficiente de roce del SMR, $b>0$

k : constante de elasticidad del resorte: $k>0$

$f(t)$: Fuerza externa el sistema. Se dice que es el Termino Forzante del SMR.

La EDO $(*\!*\!*)$ es la ecuación que gobierna el movimiento del SMR. Nuestro objetivo es determinar $x(t)$.

I: Primero suponemos que el movimiento es libre, $f \equiv 0$, y sin amortiguamiento, $b=0$.

$$\boxed{m x''(t) + k x(t) = 0}$$

(Mov. libre y sin amortiguamiento)

$$\Rightarrow \boxed{x''(t) + \frac{k}{m} x(t) = 0}$$

Ponemos $\boxed{w^2 = \frac{k}{m}}$.

$$\boxed{x''(t) + w^2 x(t) = 0}$$

$$p(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + w^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = iw \\ \alpha_2 = -iw \end{cases}$$

Así, la respuesta libre y sin amortiguamiento del sistema, en este caso, es:

$$\boxed{x_h(t) = c_1 \cos(wt) + c_2 \operatorname{sen}(wt).}$$

Consideramos:

$$\begin{cases} x''(t) + w^2 x(t) = 0 \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases} \quad ; \text{ donde } \boxed{w^2 = \frac{k}{m}}$$

Entonces

$$\begin{cases} x(t) = c_1 \cos(wt) + c_2 \operatorname{sen}(wt) \\ x'(t) = w\left(c_2 \cos(wt) - c_1 \operatorname{sen}(wt)\right). \end{cases}$$

$$w^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \frac{1}{w} = \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = c_1 = x_0 \\ x'(0) = c_2 w = v_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 = x(0) = x_0 \\ c_2 = \dfrac{v_0}{w} = \sqrt{\dfrac{m}{k}}\, x'(0). \end{array}\right.$$

Por tanto, $x(t) = x(0)\cos(wt) + \dfrac{x'(0)}{w}\,\mathrm{sen}(wt)$

respuesta libre

$$\boxed{x(t) = x_0 \cos(wt) + \sqrt{\frac{m}{k}}\, x'(0)\,\mathrm{sen}(wt)}$$

y sin amortig. del SMR.