UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS 521218

Listado 1 (EDOs lineales escalares de orden 1)

Problemas con solución

1. Indique si las EDO que siguen son lineales o no lineales. Además, señale el orden de la EDO:

   (a) $x(y'(x))^2 - \mathrm{e}^x(y(x))^4 - x^3 = 0$,
   (b) $t\,x'(t) - \mathrm{e}^t x(t) - t^5 = 0$,
   (c) $x(y'(x))^2 + x^2\mathrm{e}^x\,(y(x))^4 = \mathrm{e}^x[y(x)]^{1/2}$.

   Respuestas

   (a) Debido a los términos $(y'(x))^2$ y $(y(x))^4$ la EDO no es lineal. Es de orden 1.
   (b) Es lineal y de orden 1.
   (c) Debido a los términos $(y'(x))^2$, $(y(x))^4$ y $[y(x)]^{1/2}$ la EDO es no lineal y de orden 1.

2. Verifique que la función propuesta en cada caso, es una solución de la EDO dada.
   (a) $v(t) = t\,\mathrm{e}^{-t}$; $y(t)\,y'(t) \;=\; t(1-t)\,\mathrm{e}^{-2t}$.
   (b) $y(x) = \mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}dt$; $y' - 2xy = 1$.
   (c) $z(x) = x\,\mathrm{e}^x$; $y''(x) - x\,y'(x) + x\,y(x) \;= 2\,\mathrm{e}^x$.

   Respuestas

   (a) Tenemos $v(t) = t\mathrm{e}^{-t}$, luego de esto $v'(t) = (1-t)\mathrm{e}^{-t}$. Así
   $$v(t)v'(t) = t(1-t)\mathrm{e}^{-2t}$$
   Lo cual no muestra que se cumple la igualdad, es decir, v es solución de la EDO.

   (b) Tenemos $y(x) = \mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}dt$, de esto sacamos $y'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}dt + 1$. Ahora
   $$y' - 2xy = 2x\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}dt + 1 - 2x(\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}dt) = 1$$
   Así y es solución de la EDO.

   (c) Tenemos $z(x) = x\mathrm{e}^x$, de esto obtenemos $z'(x) = (1+x)\mathrm{e}^x$ y $z''(x) = (2+x)\mathrm{e}^x$. Ahora
   $$z''(x) - x\,z'(x) + x\,z(x) = (2+x)\mathrm{e}^x - x(1+x)\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^x$$

Y vemos que es solución de la EDO.

3. Resolver:

   (a) $(x^2+1)y'(x) \;=\; x\,y(x)\,.$
   (b) $y'(x) \;+\; y(x) \;=\; \mathrm{e}^{-x}$ con $y(1)=2.$
   (c) $(x^2+1)y'(x) \;+\; xy(x) = \frac{x}{x^2+1}$ con $y(0)=0$

   Respuesta

   (a) Normalizando la EDO se obtiene

$$y'(x) = \frac{x}{x^2+1}y(x) \quad \Leftrightarrow \quad y'(x) - \frac{x}{x^2+1}y(x) = 0\,. \tag{1}$$

Como $x^2+1 \geq 1$, la función $x \mapsto -\dfrac{x}{x^2+1}$ es continua en todo $\mathbb{R}$.
Primer paso: Calcular la integral $A(x) = \int -\frac{x}{x^2+1}dx$. Haciendo el cambio de variable $u = x^2+1$, formalmente tenemos que $du = 2x\,dx$, así que

$$A(x) = \int -\frac{x}{x^2+1}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = -\frac{1}{2}\ln(|u|) = -\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) = -\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right).$$

De esta manera, el Factor integrante asociado es

$$\mu(x) = \exp\left(A(x)\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,.$$

Segundo paso: Multiplicando (1) por $\mu(x)$, se obtiene

$$\frac{d}{dx}\left(\mu(x)\,y(x)\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(x^2+1)^{1/2}}y(x)\right) = 0\,.$$

Tercer paso: Integrando con respecto de x, llegamos a

$$\frac{1}{(x^2+1)^{1/2}}y(x) = K,$$

con $K \in \mathbb{R}$ (constante de integración). Despejando $y(x)$ obtenemos

$$y(x) = K\sqrt{x^2+1},$$

donde K es un número real arbitrario.

   (b) Reorganizando la EDO llegamos a

$$y'(x) = -y(x) + \mathrm{e}^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad y'(x) + y(x) = \mathrm{e}^{-x}\,. \tag{2}$$

Al determinar el Factor Integrante, se obtiene (se deja al lector deducirlo) que éste viene dado por $\mu(x) = \mathrm{e}^x$. Por lo tanto, luego de multiplicar (2) por $\mu(x)$, resulta

$$\frac{d}{dx}\left(\mathrm{e}^x y(x)\right) = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{-x} = 1.$$

Integrando con respecto de x, se obtiene que

$$\mathrm{e}^x y(x) = x + C,$$

donde C es un número real arbitrario (constante de integración). Despejando $y(x)$, se tiene

$$y(x) = x\,\mathrm{e}^{-x} + C\,\mathrm{e}^{-x},$$

siendo $C \in \mathbb{R}$ constante arbitraria.
Ahora, en vista que $y(1) = 2$, se encuentra

$$2 = \mathrm{e}^{-1} + C\,\mathrm{e}^{-1},$$

de donde $C = 2\,\mathrm{e} - 1$. Por lo tanto, la solución del PVI dado es

$$y(x) = \mathrm{e}^{-x}\,(2\,\mathrm{e} - 1) + x\,\mathrm{e}^{-x} = 2\mathrm{e}^{-(x-1)} - \mathrm{e}^{-x} + x\,\mathrm{e}^{-x}.$$

(c) Resolver:

$$(x^2+1)y'(x) + xy(x) = \frac{x}{x^2+1}, \quad \text{con } y(0) = 0. \tag{3}$$

Normalizando la EDO (note que $x^2 + 1 > 0$), obtenemos

$$y'(x) + \frac{x}{x^2+1}y(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}.$$

Primero se determina el Factor de Integración $\mu(x) = \exp[A(x)]$ donde en este caso $A'(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. Luego de considerar el cambio de variable $u(x) = x^2 + 1$, e integrando, sigue que $A(x) = \ln\left((x^2+1)^{1/2}\right)$. Por tanto $\mu(x) = \exp\{\ln(x^2+1)^{1/2}\} = (x^2+1)^{1/2}$.

Ahora multiplicando la EDO (3) por el Factor Integrante $\mu(x) = (x^2+1)^{1/2}$, sigue

$$\frac{d}{dx}\left((x^2+1)^{1/2}y(x)\right) = \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}. \tag{4}$$

Para lo que sigue, se pueden considerar dos alternativas (ambas válidas).
(a) Integrando en (4) de modo indefinido, sigue:

$$\begin{aligned}(x^2+1)^{1/2}y(x) &= \int \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}dx + C \quad (5)\\ &= C + 1 - (x^2+1)^{-1/2}. \quad (6)\end{aligned}$$

Como $y(0) = 0$ sigue que $C = 0$; por tanto, se obtiene que

$$y(x) = \frac{1}{(x^2+1)^{1/2}} - \frac{1}{(x^2+1)}. \tag{7}$$

(b) Si en (4) decidimos integrar en $[0, x]$, sigue

$$\int_0^x \frac{d}{dt}\big((t^2+1)^{1/2}y(t)dt\big) = \int_0^x \frac{t}{(t^2+1)^{3/2}}dt. \tag{8}$$

Esto es,

$$(x^2+1)^{1/2}y(x) + C_1 = \int \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}dx + C_2 \tag{9}$$

que es la misma expresión en (5) (la justificación del lado izquierdo de (8) la puede encontrar en la Clase 3). Luego de integrar en (9) se debe evaluar $y(x)$ nuevamente en $x = 0$, para obtener (7), esto es:

$$y(x) = \frac{1}{(x^2+1)^{1/2}} - \frac{1}{(x^2+1)}.$$

Problemas propuestos para el estudiante

1. Verifique que la función propuesta en cada caso, es una solución de la EDO dada.
   (a) $y(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, $y'(x) = -2x\,y(x)$,
   (b) $y(x) = \mathrm{e}^{-5x}$, $y''(x) + 10y'(x) + 25y(x) = 0$,
   (c) $y(x) = \ln(x)$, $y'(x) = \mathrm{e}^{-y(x)}$.
   (d) $u(t) = \cos(t)$; $z'''(t) + z'(t) + z(t) = \cos(t)$.
2. Verifique que la función $y = y(x)$ es una solución de la ecuación diferencial dada.

$$(a)\ \begin{cases} y(t) := \frac{-1}{(t+c)}, & c \in \mathbb{R} \text{ constante} \\ y'(t) = y^2(t) \end{cases} \qquad (b)\ \begin{cases} y(x) := x\,\mathrm{e}^{-x} \\ x\,y''(x) - 2y'(x) - xy(x) = -2\,\mathrm{e}^{-x}. \end{cases}$$

3. Resolver el PVI: $t(t^2+1)y'(t) - (t^2+1)y(t) = t$, $y(1) = 0$.
4. Resolver: $(t + |t|)\,y'(t) - t\,y(t) = t + t^2$.
5. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:
   (a) $t\,y'(t) - y(t) = t^2\,\mathrm{e}^{-3t}, t > 0$,
   (b) $\cos(x)\,y'(x) + \mathrm{sen}(x)\,y(x) = 1, |x| < \pi/2$.
   (c) $xy'(x) + 4y(x) = x^3 - x$, $x > 0$.

---

10 Agosto de 2022.
RBP/JMS//jms/rbp