Índice general

Capítulo 4

Sistemas de ecuaciones lineales

Sistemas de ecuaciones lineales son una parte importantísima de Álgebra Lineal que tiene además múltiples aplicaciones.

El resto del semestre lo dedicaremos al trabajo con sistemas de ecuaciones lineales. Veamos primero algunos ejemplos.

Ejemplo 4.1. *Supongamos que conocemos los siguientes datos sobre el número de habitantes en Concepción en los años 1970, 1982, 1992 y 2002.*

Año	*Miles de habitantes en Concepción*
$x_1 = 1970$	$h_1 = 161.006$
$x_2 = 1982$	$h_2 = 267.891$
$x_3 = 1992$	$h_3 = 326.784$
$x_4 = 2002$	$h_4 = 216.061$

Queremos estimar cuántos habitantes había en Concepción en el año 2000. Para responder a esta pregunta podríamos buscar una función $f : [1970, 2002] \to \mathbb{R}$*, fácil de evaluar, que satisfaga las siguientes ecuaciones*

$$f(x_1) = h_1, \tag{4.1a}$$
$$f(x_2) = h_2, \tag{4.1b}$$
$$f(x_3) = h_3, \tag{4.1c}$$
$$f(x_4) = h_4, \tag{4.1d}$$

y tomar $f(2000)$ *como una aproximación al número de habitantes en Concepción en el año 2000. Esta función* f *podría ser, por ejemplo, un polinomio.*

Como tenemos 4 valores en la tabla tomemos f *como un polinomio de grado menor o igual que 3, es decir, de la forma* $f(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3$*. Así, la cantidad de incógnitas a determinar (valores de* a_0, a_1, a_2 *y* a_3*) es igual a la cantidad de ecuaciones en* (4.9)*.*

Con $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ *las ecuaciones* (4.9) *son*

$$a_0 + 1970\, a_1 + (1970)^2\, a_2 + (1970)^3\, a_3 = 161.006, \tag{4.2a}$$
$$a_0 + 1982\, a_1 + (1982)^2\, a_2 + (1982)^3\, a_3 = 267.891, \tag{4.2b}$$
$$a_0 + 1992\, a_1 + (1992)^2\, a_2 + (1992)^3\, a_3 = 326.784, \tag{4.2c}$$
$$a_0 + 2002\, a_1 + (2002)^2\, a_2 + (2002)^3\, a_3 = 216.061. \tag{4.2d}$$

Este conjunto de ecuaciones recibe el nombre de ***sistema de ecuaciones lineales*** *y puede escribirse, de manera equivalente, como la igualdad entre los siguientes vectores*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1970 & 1970^2 & 1970^3 \\ 1 & 1982 & 1982^2 & 1982^3 \\ 1 & 1992 & 1992^2 & 1992^3 \\ 1 & 2002 & 2002^2 & 2002^3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 161.006 \\ 267.891 \\ 326.784 \\ 216.061 \end{pmatrix}}_{b}.$$

A esta forma de escribir el sistema (4.2) *se le llama forma matricial de* (4.2)*, la matriz* A *es la matriz del sistema de ecuaciones,* x *es el vector de incógnitas y* b *recibe el nombre de vector parte derecha o simplemente parte derecha del sistema de ecuaciones.*

Más adelante veremos cómo resolver sistemas de ecuaciones lineales. Por el momento solo queremos comentarte que este sistema tiene solución única, es decir, existen valores únicos para $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ *de modo que se cumplen las ecuaciones* (4.2)*. En la figura 4.1 se observan, en rojo, los pares ordenados* (x_1, h_1), (x_2, h_2), (x_3, h_3) *y* (x_4, h_4) *con* $x_1, x_2, x_3, x_4, h_1, h_2, h_3$ *y* h_4 *como en la tabla y en azul, el polinomio* f *de grado menor o igual que 3 cuyos coeficientes son solución de* (4.2)*. Evaluando este polinomio en 2000 obtenemos que, hace 12 años, Concepción tenía aproximadamente 258173 habitantes.*

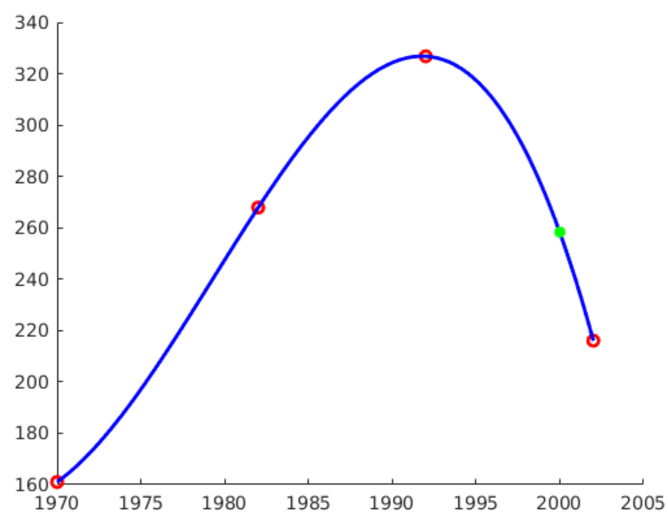

Figura 4.1: Polinomio para estimar número de habitantes en Concepción hace 10 años

Ejemplo 4.2. *Consideremos el circuito en la figura 4.2.*

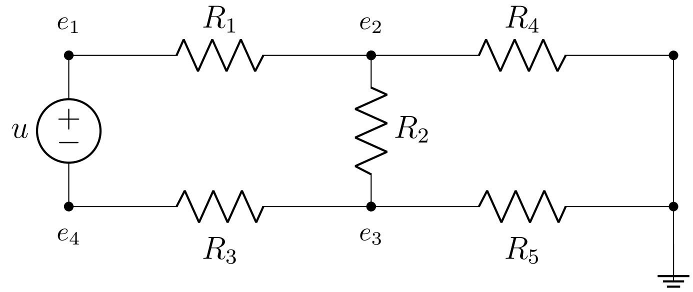

Figura 4.2: Circuito cuyo comportamiento se modela por sistema de ecuaciones lineales

Asociando a la corriente a través de cada elemento una dirección única y si denotamos por j_V *la corriente a través de la fuente de voltaje y por* $j_{R_1}, j_{R_2}, j_{R_3}$, j_{R_4} *y* j_{R_5} *a las corrientes a través de las resistencias, las siguientes ecuaciones constituyen la ley de Kirchhoff de las corrientes asociada a cada nodo del circuito (la ley de Kirchhoff establece que la suma de las corrientes que inciden en cada nodo es cero)*

$$\begin{aligned}
-j_V + j_{R_1} &= 0, && \textit{nodo marcado con } e_1\\
-j_{R_1} + j_{R_2} + j_{R_4} &= 0, && \textit{nodo marcado con } e_2\\
-j_{R_2} + j_{R_3} + j_{R_5} &= 0, && \textit{nodo marcado con } e_3\\
j_V - j_{R_3} &= 0. && \textit{nodo marcado con } e_4
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que para cada resistencia se cumple que $j_{R_i} = \frac{1}{R_i} u_{R_i}$ *y* u_{R_i} *es la diferencia entre los voltajes asociados a los nodos en los extremos de cada elemento, es decir,*

$$\begin{aligned}
j_{R_1} &= \frac{1}{R_1} u_{R_1}, && u_{R_1} = e_1 - e_2,\\
j_{R_2} &= \frac{1}{R_2} u_{R_2}, && u_{R_2} = e_2 - e_3,\\
j_{R_3} &= \frac{1}{R_3} u_{R_3}, && u_{R_3} = e_3 - e_4,\\
j_{R_4} &= \frac{1}{R_4} u_{R_4}, && u_{R_4} = e_2 - 0,\\
j_{R_5} &= \frac{1}{R_5} u_{R_5}, && u_{R_5} = e_3 - 0,
\end{aligned}$$

se tiene que el siguiente sistema de ecuaciones lineales describe el comportamiento del circuito dado

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R_1}\, e_1 - \frac{1}{R_1}\, e_2 - j_V &= 0,\\
-\frac{1}{R_1}\, e_1 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}\right) e_2 - \frac{1}{R_2}\, e_3 &= 0,\\
-\frac{1}{R_2}\, e_2 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}\right) e_3 - \frac{1}{R_3}\, e_4 &= 0,\\
-\frac{1}{R_3}\, e_3 + \frac{1}{R_3}\, e_4 + j_V &= 0,\\
-\, e_1 + e_4 &= u,
\end{aligned}$$

siendo u el voltaje de la fuente de voltaje (conocido). En forma matricial este sistema es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ j_V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4.3. *Un Departamento en la Universidad de Concepción desea comprar plumones desechables, plumones recargables y cartuchos para plumones recargables. Cada plumón desechable cuesta 2 USD, cada plumón recargable, 3 USD y 3 cartuchos cuestan 1 USD. El Departamento desea comprar al menos 1 unidad de cada producto, pero 100 unidades en total de los tres y gastar exactamente 100 USD. ¿Cuántas unidades de cada producto puede comprar?*
Observación: *Tenga en cuenta que el número de unidades a comprar de cada producto debe ser un número natural entre 1 y 100.*

Si llamamos x_r a la cantidad de plumones recargables, x_d, a la cantidad de plumones desechables y x_c, a la cantidad de cartuchos a comprar, entonces el precio total de los plumones recargables es $3x_r$, el de los desechables es $2x_d$ y el de los cartuchos es $\frac{1}{3}x_c$. Estas cantidades deben satisfacer

$$\begin{aligned} x_r + x_d + x_c &= 100, && \textit{se quieren comprar 100 unidades en total de los tres productos} \\ 3x_r + 2x_d + \frac{1}{3}x_c &= 100. && \textit{se quieren gastar 100 USD} \end{aligned}$$

A diferencia de los sistemas de ecuaciones en los dos ejemplos anteriores, éste es un sistema de ecuaciones lineales en el que el número de ecuaciones es distinto (inferior en este caso) del número de incógnitas. Este sistema también puede escribirse en forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_r \\ x_d \\ x_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Definamos formalmente qué es un sistema de ecuaciones lineales.

Definición 4.4. Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es un conjunto de m ecuaciones de la forma

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \tag{4.3a}$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \tag{4.3b}$$
$$\vdots \tag{4.3c}$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \tag{4.3d}$$

donde $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}$ y $b_1, b_2, \ldots, b_m$ son números, en general complejos, conocidos.

Nota que la parte izquierda de cada ecuación es una suma de términos de la forma ax_i donde a es una constante compleja y x_i es una de las incógnitas del sistema, mientras que la parte derecha de cada ecuación es una constante.

El sistema de ecuaciones lineales anterior puede escribirse en *forma matricial*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{b}.$$

A la matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ se le llama matriz asociada al sistema de ecuaciones, x es el vector de incógnitas y $b \in \mathbb{C}^m$ es la parte derecha del sistema.

Números complejos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ son solución de (4.3) si, al reemplazar x_1 por z_1, x_2 por z_2, ... y x_n por z_n en (4.3), las igualdades se cumplen o, de manera equivalente, el vector $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ es solución de (4.3) si $Az = b$, es decir, si la combinación lineal de las columnas de A con escalares $z_1, z_2, \ldots, z_n$ es igual a b.

Durante el resto del curso solo trabajaremos con sistemas de ecuaciones lineales con coeficientes reales.

Ejemplo 4.5. *Los sistemas de los dos primeros ejemplos de este capítulo son ejemplos de sistemas de ecuaciones lineales con 4 ecuaciones y 4 incógnitas (el primero de ellos) y con 5 ecuaciones y 5 incógnitas (el segundo), mientras que el último es un sistema en el que la cantidad de ecuaciones es inferior a la cantidad de incógnitas.*

El conjunto de ecuaciones con incógnitas $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} a + b + c &= 0, \\ a - bc &= 1, \\ b + c &= 2 \end{aligned}$$

no es un sistema de ecuaciones lineales. ¿Por qué? ¿Puedes escribir otros ejemplos de conjuntos de ecuaciones que no sean lineales?

Definición 4.6. Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^m$. En lo adelante denotaremos $\mathcal{S}(A, b)$ al conjunto solución del sistema $Ax = b$, es decir,

$$\mathcal{S}(A, b) = \{z \in \mathbb{R}^n \ : \ Az = b\}.$$

En el caso particular en que b sea el vector nulo de $\mathbb{R}^m$, $b = \theta$, el sistema de ecuaciones asociado, es decir, $Ax = \theta$ recibe el nombre de *sistema homogéneo* y su conjunto solución

$$\mathcal{S}(A, \theta) = \{z \in \mathbb{R}^n \ : \ Az = \theta\}$$

es el s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ al que anteriormente llamamos núcleo de A.

Un sistema de ecuaciones lineales puede ser interpretado de dos maneras distintas. Tomemos, por ejemplo, un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas,

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1, \\ 2y - z &= -1, \\ x + z &= 2. \end{aligned}$$

Cada ecuación del sistema anterior es un plano en $\mathbb{R}^3$. En la figura 4.3 se muestran estos planos, las rectas negras son los puntos de intersección de dos de ellos (primero y segundo y primero y tercero), el punto donde se intersectan estas rectas, señalado en rojo, es el punto de intersección de los tres planos y la única solución del sistema de ecuaciones anterior.

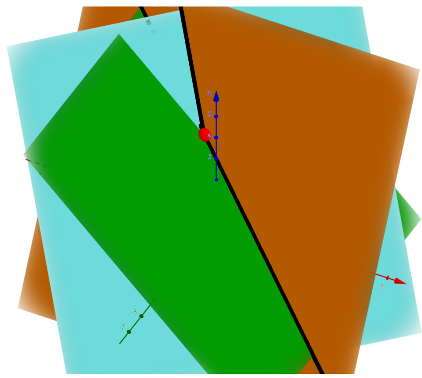

Figura 4.3: Punto rojo es el punto de intersección de los tres planos

Una segunda interpretación del sistema de ecuaciones anterior la obtenemos cuando lo escribimos en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Ahora podemos reconocer que nuestro objetivo es encontrar una combinación lineal de tres vectores de $\mathbb{R}^3$ que sea igual a otro vector de $\mathbb{R}^3$, es decir, deseamos averiguar si

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \tag{4.5}$$

y, en caso afirmativo, determinar cuáles son los escalares que nos permiten escribir a $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de los vectores en el conjunto anterior.

Si llamamos A y b a la matriz del sistema (4.4) y b a su parte derecha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

entonces,

$$\operatorname{im}(A) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

y lo que deseamos, al resolver el sistema de ecuaciones, es determinar si $b \in \operatorname{im}(A)$ y, en caso afirmativo, determinar los vectores $v \in \mathbb{R}^3$ a los que A convierte (a través de Av) en b o, de manera equivalente, deseamos determinar los vectores $v \in \mathbb{R}^3$ que satisfacen que la combinación lineal de las columnas de A con los escalares en v son iguales a b. Estos vectores son los que pertenecen a $\mathcal{S}(A, b)$.

Ésta es la manera en que interpretaremos sistemas de ecuaciones lineales en este curso: dados una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y un vector $b \in \mathbb{R}^m$, al resolver $Ax = b$ deseamos:

- determinar si $b \in \operatorname{im}(A)$ y
- en caso afirmativo, determinar los vectores $z \in \mathbb{R}^n$ a los que A convierte en b o, de manera equivalente, determinar los vectores $z \in \mathbb{R}^n$ que satisfacen que la combinación lineal de las columnas de A con los escalares en ellos es igual a b.

Si la respuesta a la primera pregunta es negativa, $\mathcal{S}(A, b) = \emptyset$. Si es afirmativa, $|\mathcal{S}(A, b)| > 0$.

Observa las figuras 4.4, 4.5 y 4.6 para una representación gráfica de cómo interpretar $Ax = b$.

Antes de ver cómo resolver sistemas de ecuaciones lineales en general, veamos otros ejemplos en los que seguiremos comparando estas dos interpretaciones y también observaremos que un sistema de ecuaciones lineales puede tener ninguna, una o infinitas soluciones.

Ejemplo 4.7. *Determinemos el conjunto solución de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:*

1.

$$\begin{aligned} x + y &= 1, \\ x + y &= 0. \end{aligned}$$

Es obvio que el conjunto solución de este sistema de ecuaciones es el conjunto vacío. Gráficamente tenemos dos formas de interpretarlo:

- *determinar punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que pertenezca tanto al gráfico de la recta $y = 1 - x$ como al de la recta $y = -x$. Estas rectas son paralelas y no tienen puntos en común (ver figura 4.7).*
- *si escribimos el sistema en forma matricial*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

nos damos cuenta de que pretendemos determinar $x, y \in \mathbb{R}$ de modo que la combinación lineal de las columnas de A con escalares x e y sea igual a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Esto es imposible pues

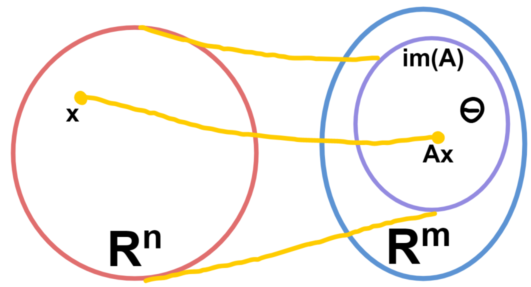

Figura 4.4: La imagen de una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ es un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$

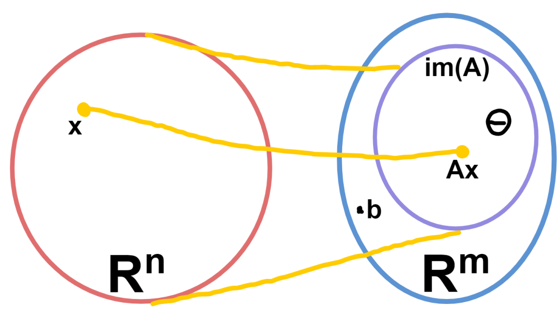

Figura 4.5: Si $b \notin \mathrm{im}(A)$, $\mathcal{S}(A, b) = \emptyset$

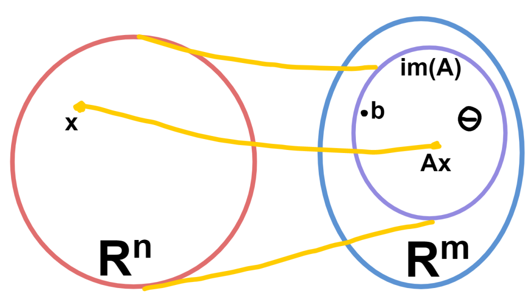

Figura 4.6: Si $b \in \mathrm{im}(A)$, $|\mathcal{S}(A, b)| > 0$

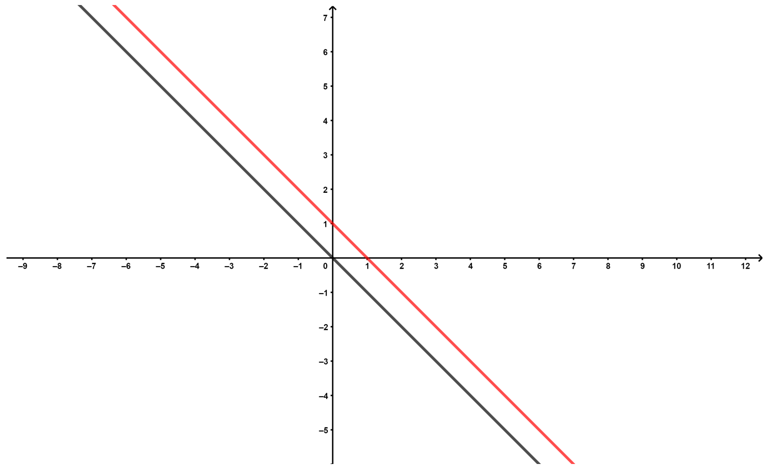

Figura 4.7: Rectas paralelas no se intersectan

el espacio generado por las columnas de A, al que hemos llamado imagen de A, es

$$\left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

y el vector parte derecha del sistema no pertenece a este espacio. En la figura 4.8 puedes ver, en negro, el subespacio de $\mathbb{R}^2$ *generado por las columnas de A, es decir,* $\mathrm{im}(A)$*, y, en rojo, al vector* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$*, que no pertenece a* $\mathrm{im}(A)$*.*

Como $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *no pertenece a la imagen de la matriz del sistema, las dimensiones de los espacios*

$$\left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle \qquad y \qquad \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

son distintas. El primero de ellos tiene dimensión 1 (es el rango de la matriz del sistema) y el segundo tiene dimensión 2.

Si, por el contrario, consideramos el sistema

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

el vector en la parte derecha de este sistema sí pertenece al espacio generado por las columnas de A (ver figura 4.9). Además, como las columnas de A son iguales, este vector puede escribirse de infinitas formas como combinación lineal de ellas,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = (2-\alpha) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Así,

$$\mathcal{S}\left(A, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \emptyset, \qquad \mathcal{S}\left(A, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} 2-\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \ : \ \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

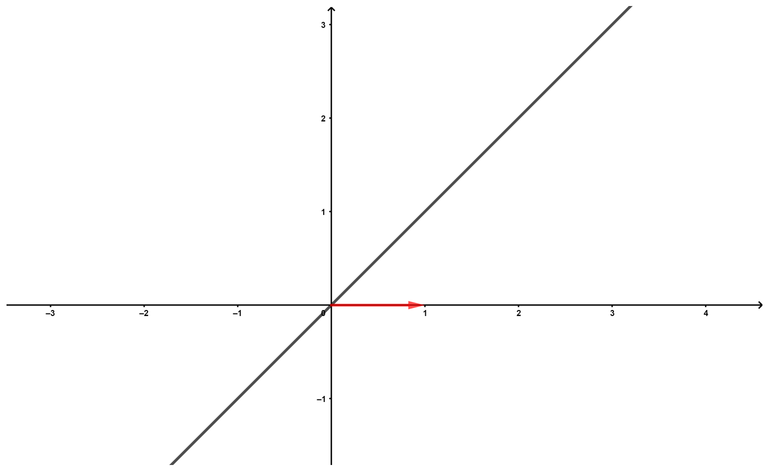

Figura 4.8: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (vector rojo) no pertenece a espacio generado por columnas de A (negro).

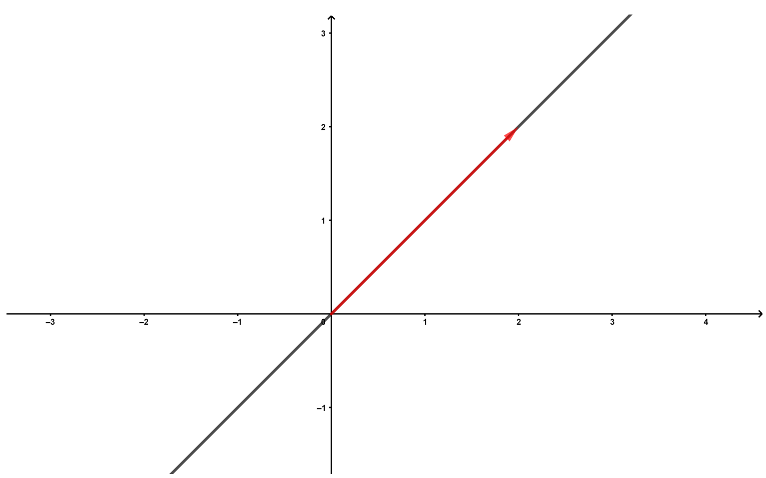

Figura 4.9: $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (vector rojo) pertenece a espacio generado por columnas de A (negro).

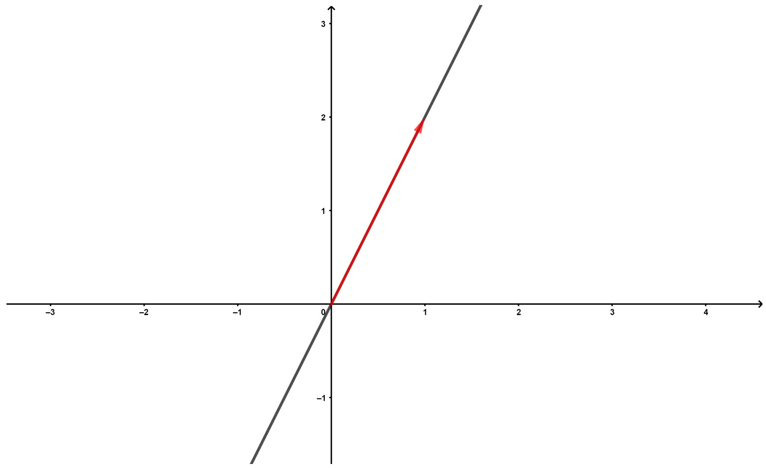

Figura 4.10: $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ (vector rojo) pertenece a espacio generado por columnas de B (negro).

2. *Consideremos el sistema de ecuaciones lineales*

$$\begin{aligned} x+2y&=1,\\ 2x+4y&=2. \end{aligned}$$

En este caso estaríamos buscando los puntos de intersección de dos rectas que son exactamente iguales, por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones y son los puntos en la recta $y=\frac{1}{2}(1-x)$.
Si escribimos el sistema en forma matricial

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}}_{B}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

lo que buscamos es escribir al vector $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ *como combinación lineal de las columnas de* B *(vea figura 4.10) y hay infinitas formas de lograrlo pues para todo* $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=(1-2\alpha)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\mathcal{S}\left(B,\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)=\left\{\begin{pmatrix}1-2\alpha\\\alpha\end{pmatrix}\ :\ \alpha\in\mathbb{R}\right\}.$$

3. *Por último, si intentamos buscar puntos de intersección de dos rectas que no sean paralelas (observa figura 4.11), por ejemplo, si buscamos puntos de intersección de las rectas*

$$\begin{aligned} x+y&=1,\\ 2x-y&=3, \end{aligned}$$

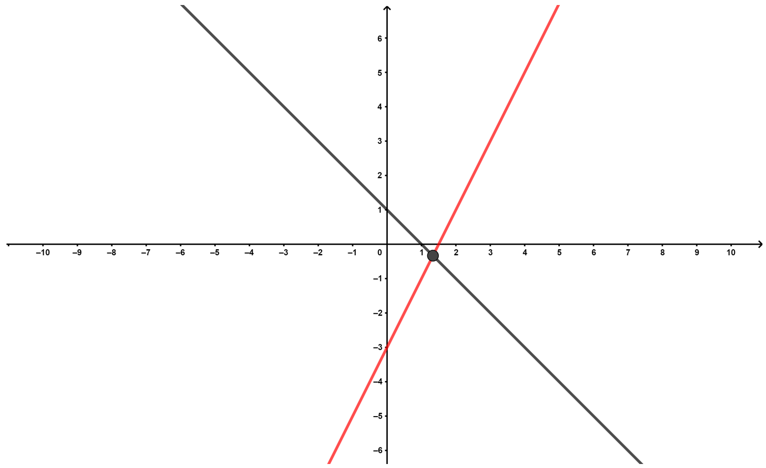

Figura 4.11: Rectas no paralelas se intersectan en un punto

ocurre que ellas se intersectan en un único punto, es decir, el sistema tiene solución única, observa nuevamente la figura 4.11.
Si escribimos el sistema en forma matricial,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

nuevamente podemos interpretarlo como determinar escalares $x, y \in \mathbb{R}$ de modo que el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sea combinación lineal de los vectores de $\mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ con esos escalares.
Dado que el conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

es li y de cardinalidad igual a la dimensión de $\mathbb{R}^2$, las columnas de C forman una base de $\mathbb{R}^2$. Por tanto, existen únicos escalares $x, y \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathcal{S}\left(C, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\}.$$

4. *Consideremos ahora el sistema de ecuaciones lineales*

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ x - y + 2z &= 3. \end{aligned}$$

Un punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ es solución del sistema anterior si y solo si él pertenece a la intersección de los planos $x + y + z = 1$ y $x - y + 2z = 3$. Observa en la figura 4.12 que esta intersección es una recta, es decir, existen infinitos puntos de $\mathbb{R}^3$ que son solución de este sistema.

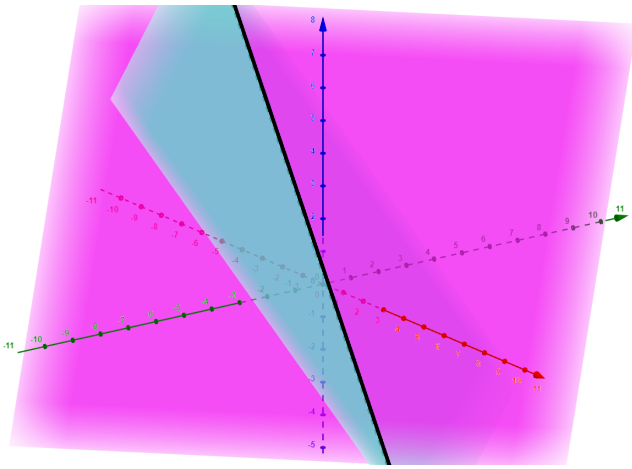

Figura 4.12: Intersección de dos planos no paralelos es una recta

Pero, en lugar de buscar su solución (más adelante veremos algoritmos para ello) escribamos al sistema en forma matricial

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{D} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Lo que buscamos es entonces escalares $x, y, z \in \mathbb{R}$ *de modo que el vector* $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *pueda escribirse como combinación lineal, con esos escalares, de los vectores de* $\mathbb{R}^2$ *que forman las columnas de* D*, es decir, de los vectores en el conjunto*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Si $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *pertenece al espacio generado por el conjunto anterior, el sistema tiene solución. Si* $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *no pertenece al espacio generado por el conjunto anterior, no tiene solución. Como* $\mathbb{R}^2$ *es un e.v. de dimensión 2, el conjunto anterior es ld y, por tanto, si el sistema tiene solución, éste tiene infinitas soluciones, es decir, si* $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *puede escribirse como combinación lineal de las columnas de* D*, entonces puede escribirse de infinitas formas como combinación lineal de las columnas de* D*.*
Analicemos entonces si $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *pertenece o no al espacio generado por las columnas de* C*. Dado que*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

el espacio generado por los vectores que forman las columnas de D *es igual al espacio gene-*

rado por

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Éste es un conjunto li, por tanto, es base de $\mathbb{R}^2$ y

$$\left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle = \mathbb{R}^2 \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

Podemos concluir, aunque no calculemos el conjunto solución del sistema, que éste tiene infinitas soluciones.

En resumen, hemos visto lo siguiente: dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y un vector $b \in \mathbb{R}^m$, el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ tiene solución si y solo si b pertenece al espacio generado por las columnas de A. Si el sistema tiene solución, éste puede tener una o infinitas soluciones, ello depende de si el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^m$ formado por las columnas de A es un conjunto li o un conjunto ld.

Definición 4.8. Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^m$.

El sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ es *compatible* si y solo si $\mathcal{S}(A, b) \neq \emptyset$.

El sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ es *incompatible* si y solo si $\mathcal{S}(A, b) = \emptyset$.

4.1. Sistemas homogéneos y no homogéneos

Definición 4.9. Un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ con $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^m$ es *homogéneo* si y solo si b es igual al vector nulo de $\mathbb{R}^m$.

El conjunto solución de un sistema homogéneo, $\mathcal{S}(A, \theta_{\mathbb{R}^m})$, es el núcleo de A y, como ya sabemos, es un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$, es decir, él contiene un solo elemento (el vector nulo de $\mathbb{R}^n$) o infinitos elementos. Un sistema homogéneo es siempre compatible.

Dado que $\eta(A) + \mathrm{r}(A) = n$ (recuerda que A permite definir la transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que $T(x) = Ax$) y $0 \leq \mathrm{r}(A) \leq m$, se tiene que

- si las n columnas de A forman un conjunto li de vectores de $\mathbb{R}^m$ (nota que esto es imposible si $n > m$), entonces $\mathrm{r}(A) = n$ con lo que $\eta(A) = 0$ y $\mathcal{S}(A, \theta_{\mathbb{R}^m}) = \{\theta_{\mathbb{R}^n}\}$. En este caso se dice que el sistema homogéneo es *compatible determinado*.
- si las n columnas de A forman un conjunto ld de vectores de $\mathbb{R}^m$ (éste siempre será el caso si $n > m$), entonces $\mathrm{r}(A) < n$ con lo que $\eta(A) > 0$ y $\mathcal{S}(A, \theta_{\mathbb{R}^m}) \neq \{\theta_{\mathbb{R}^n}\}$. En este caso se dice que el sistema homogéneo es *compatible indeterminado*.

Si, por el contrario, el sistema de ecuaciones $Ax = b$ con $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^m$ es tal que $b \neq \theta_{\mathbb{R}^m}$, el sistema es *no homogéneo*. El sistema $Ax = \theta_{\mathbb{R}^m}$ se llama *sistema homogéneo asociado* a $Ax = b$.

Sistemas no homogéneos pueden ser incompatibles. Éste es el caso si el vector b no pertenece al espacio generado por las columnas de A.

Si, por el contrario, b pertenece al espacio generado por las columnas de A, es decir, si b es elemento de la imagen de A, el sistema es compatible (tiene solución) y puede, al igual que un sistema homogéneo, tener una o infinitas soluciones. Esto ocurre porque, como plantea el siguiente lema, si el sistema $Ax = b$ tiene solución, éste tiene tantas soluciones como el sistema homogéneo asociado.

Lema 4.10. Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^m$ tales que $b \neq \theta_{\mathbb{R}^m}$ y pertenece al espacio generado por las columnas de A.

El sistema $Ax = b$ tiene solución única si y solo si el sistema homogéneo asociado tiene solución única.

Demostración. Si b pertenece al espacio generado por las columnas de A, existe $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $A\hat{x} = b$.

Si x_o es una solución del sistema homogéneo, entonces $x_o + \hat{x}$ es solución de $Ax = b$ pues

$$A(x_o + \hat{x}) = Ax_o + A\hat{x} = \theta_{\mathbb{R}^m} + b = b.$$

Si el sistema homogéneo tiene infinitas soluciones, el no homogéneo también las tiene.

Por otro lado, si $Ax = b$ tiene infinitas soluciones, la diferencia entre cualquier par de ellas es solución del sistema homogéneo asociado. Por tanto, si $Ax = b$ tiene infinitas soluciones, el homogéneo asociado también. □

Podemos concluir entonces que:

- si b no pertenece al espacio generado por las columnas de A, entonces $|\mathcal{S}(A, b)| = 0$ y el sistema es incompatible,
- si b pertenece al espacio generado por las columnas de A y si las n columnas de A forman un conjunto li de vectores de $\mathbb{R}^m$, entonces $|\mathcal{S}(A, b)| = 1$. En este caso se dice que el sistema es *compatible determinado.*
- Si, por el contrario, b pertenece al espacio generado por las columnas de A, pero éstas n columnas de A forman un conjunto ld de vectores de $\mathbb{R}^m$, entonces $|\mathcal{S}(A, b)| = \infty$ y se dice que el sistema es *compatible indeterminado.*

Averiguar, entonces, si un sistema de ecuaciones lineales es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible se reduce a

1 averiguar si el vector parte derecha es o no elemento del espacio generado por las columnas de A. Si $b \notin \mathrm{im}(A)$, el sistema es incompatible. Si $b \in \mathrm{im}(A)$, entonces

2.1 si $\mathrm{r}(A) = n$ (esto indica que las columnas de A forman un conjunto li), el sistema es compatible determinado,

2.2 si $\mathrm{r}(A) < n$ (esto indica que las columnas de A forman un conjunto ld), el sistema es compatible indeterminado.

La primera de las preguntas anteriores también puede responderse a través de las dimensiones de ciertos s.e.v. de $\mathbb{R}^m$. Denotemos por $A_1, A_2, \ldots, A_n$ a las n columnas de A. El vector b pertenece al espacio generado por las columnas de A, es decir, el vector b es combinación lineal de las columnas de A si y solo si

$$\langle\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}\rangle = \langle\{A_1, A_2, \ldots, A_m, b\}\rangle$$

y esto ocurre si y solo si la dimensión del primero de los espacios anteriores es igual a la dimensión del segundo.

Definición 4.11. Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^m$. La matriz $\hat{A} \in \mathcal{M}_{m\times(n+1)}(\mathbb{K})$ cuyas primeras n columnas son iguales a las columnas de A y cuya última columna es b se denomina *matriz ampliada asociada al sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$*. La matriz ampliada del sistema $Ax = b$ la escribiremos en la forma $(A|b)$.

Ejemplo 4.12. *La matriz ampliada del sistema de ecuaciones lineales*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{b}.$$

es

$$(C|b) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 2 & | & 3 \end{pmatrix}.$$

¿Qué debemos hacer entonces para averiguar cuántas soluciones tiene el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$? Solo debemos determinar $\mathrm{r}(A)$ y $\mathrm{r}((A|b))$:

1 si $\mathrm{r}(A) \neq \mathrm{r}((A|b))$, el vector b no pertenece al espacio columna de A y el sistema es incompatible. Si $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}((A|b))$ y

2.1 $\mathrm{r}(A) = n$, el sistema es compatible determinado,

2.2 $\mathrm{r}(A) < n$, el sistema es compatible indeterminado.

Sería ideal tener un algoritmo que, a la vez que nos permita determinar si un sistema es o no compatible, también nos facilite encontrar su conjunto solución. Este algoritmo existe y es la *eliminación gaussiana.*

Pero, antes de entender cómo es el método de eliminación gaussiana, veamos que para ciertos sistemas de ecuaciones lineales es muy sencillo determinar si ellos tienen o no solución, cuántas soluciones tienen y cuál es su conjunto solución. Estos sistemas son los sistemas en los que la matriz tiene forma escalonada.

4.2. Matrices en forma escalonada por filas

Definición 4.13. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

La matriz A está en forma *escalonada por filas* si el primer elemento distinto de cero en cada fila está a la derecha del primer elemento distinto de cero en la fila anterior.

Ejemplo 4.14. *La matriz nula es una matriz en forma escalonada por filas.*

La siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

está en forma escalonada por filas: el primer elemento distinto de cero en la fila 1 está en la columna 1, el primer elemento distinto de cero en la fila 2 está en la columna 2, que está a la derecha de la columna 1. El primer elemento distinto de cero en la fila 3 está en la columna 3, que está a la derecha de la columna 2.

La matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

no está en forma escalonada por filas pues el primer elemento distinto de cero en la fila 3 está justo debajo, y no a la derecha, del primer elemento distinto de cero en la fila 2.

La matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tampoco está en forma escalonada por filas. ¿Puedes decir por qué?

Volvamos a la matriz que está en forma escalonada por filas,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

No es difícil reconocer cuáles columnas no pueden escribirse como combinación lineal de las restantes.

En (4.6) *hemos encerrado en círculos al primer elemento distinto de cero en cada fila que no es nula. El conjunto formado por las columnas en las que están estos elementos es un conjunto li y, no solo ocurre que la cuarta columna es combinación lineal de las anteriores, sino que esta combinación lineal es única:*

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a-c \\ b \\ 3c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow c = -\frac{2}{3}, b = 1, a = \frac{4}{3}.$$

Se cumple que el espacio generado por las columnas de A es igual al espacio generado por sus tres primeras columnas, es decir,

$$\left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

y este último conjunto es li. La matriz tiene entonces rango 3, es decir, el espacio generado por las columnas de la matriz tiene dimensión 3. No es casualidad que este número sea igual a la cantidad de filas distintas de la fila nula (fila con todos sus elementos iguales a cero) pues para escoger una base para la imagen de A escogimos una columna por cada fila de A distinta de la fila nula.

En la matriz en forma escalonada del ejemplo anterior ocurrió que su rango es igual a la cantidad de filas distintas de la fila nula, es decir, a la cantidad de filas que tienen al menos un elemento distinto de cero. Esto es lo que ocurre con cualquier matriz en forma escalonada por filas, como dice el siguiente lema.

Lema 4.15. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ una matriz en forma escalonada por filas. Entonces el rango de A, es decir, la dimensión del espacio generado por sus columnas es igual a la cantidad de filas en A que tengan al menos un elemento distinto de cero.

Además si A tiene k filas distintas de la nula, es decir, si en las filas $k+1$ a m de A ningún elemento es distinto de cero, entonces

$$\operatorname{im}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \\ y_{k+1} \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \ : \ y_{k+1} = y_{k+2} = \cdots = y_m = 0 \right\}.$$

Aunque parece un poco extraño que la dimensión del espacio generado por las columnas de una matriz tenga relación con sus filas, ésta es una propiedad importante de las matrices en forma escalonada por filas y es la razón por la que esta estructura es importante al momento de resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Antes de ver la demostración de este lema, veamos otros ejemplos de matrices en forma escalonada por filas y reconozcamos por qué su rango es la cantidad de filas que tengan al menos un elemento distinto de cero.

Ejemplo 4.16. *Consideremos*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

Las columnas de A son un conjunto generador de $\mathrm{im}(A)$. Nota además que en esta matriz las columnas 2 y 4 (columnas con primer elemento distinto de cero en filas 1 y 2) forman un conjunto li. El conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base de $\mathrm{im}(A)$. Las restantes columnas de A son combinación lineal de ellas pues: la primera columna es la combinación lineal con escalares iguales a cero de las columnas 2 y 4

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La columna 3 (ubicada entre 2 y 4) es la combinación lineal con escalares -1 y 0 de las columnas 2 y 4

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por último,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se cumple entonces que $\mathrm{r}(A) = 2$ y este número es la cantidad de filas en A con al menos un elemento distinto de cero.

Además solamente vectores de la forma $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ pueden escribirse como combinación lineal de las columnas de A. Por ejemplo, el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ pertenece a la imagen de A,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

pero un vector cuya tercera componente sea distinta de cero no puede escribirse como combinación lineal de las columnas de A.

Tomemos ahora

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

Nuevamente sus columnas forman un conjunto generador de $\operatorname{im}(B)$*. Pero, como* B *está en forma escalonada, es sencillo identificar una base para* $\operatorname{im}(B)$*. Éstas son las columnas 1, 3 y 4 (columnas donde se encuentra el primer elemento distinto de cero en las filas de* B *que son nulas). Las restantes columnas de* B *son combinación lineal de ellas tres. El rango de* B *es, por tanto, 3 que es la cantidad de filas de* B *que tienen al menos un elemento distinto de cero.*

Además solamente vectores de la forma $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$ *pueden escribirse como combinación lineal de las columnas de* B*.*

Demostración intuitiva de lema 4.15. Supón que $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ está en forma escalonada por filas. El primer elemento distinto de cero en cada fila está a la derecha del primer elemento distinto de cero en la fila anterior.

En la siguiente matriz hemos marcado con $\bullet$ al primer elemento distinto de cero en cada fila, hemos escrito ceros donde debe haber ceros para que la matriz esté en forma escalonada por filas y hemos escrito $*$ en los lugares de la matriz donde no es importante si el valor es cero o distinto de cero,

$$A = \begin{pmatrix}
\to & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & \cdots & * & \cdots & * & * \\
\to & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \bullet & * & \cdots & * & \cdots & * & * \\
\to & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \bullet & \cdots & * & * \\
 & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
\to & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \bullet & * \\
 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 & & & & \uparrow & & & \uparrow & & & \uparrow & & \uparrow &
\end{pmatrix}.$$

Si por cada fila que tiene al menos un elemento distinto de cero (marcadas con flechas horizontales) escogemos la columna a la que pertenece el primer elemento distinto de cero en la fila (marcadas con flechas verticales), el conjunto resultante de columnas de A (vectores de $\mathbb{R}^m$) es un conjunto li. Las restantes columnas son combinación lineal de las ya seleccionadas. Para convencerte de esto observa bien la estructura de la matriz anterior: las columnas azules son naturalmente combinación lineal de las restantes, las rojas son combinación lineal de la columna negra anterior a ellos, las verdes son combinación lineal de las dos columnas negras anteriores a ellas y así sucesivamente, las columnas marcadas de un color distinto al negro son combinación lineal de las columnas negras anteriores a ellas y solo las columnas negras forman un conjunto li de vectores.

Se cumple entonces que el conjunto formado por las columnas marcadas con flechas verticales es base de la imagen de A. Como la cardinalidad de este conjunto es igual a la cantidad de filas en A que tienen al menos un elemento distinto de cero (por cada fila con al menos un elemento distinto de cero hemos escogido una columna para formar la base de la imagen de A), el rango de A es igual a la cantidad de filas que tienen al menos un elemento distinto de cero.

Además si en A las últimas $m-k$ filas son nulas se tiene que todos los vectores que se escriben como combinación lineal de las columnas de A pertenecen al conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \right\}.$$

Como este conjunto es un s.e.v. de $\mathbb{R}^m$ con dimensión k y $\mathrm{im}(A)$ es un s.e.v. de él con la misma dimensión, se cumple que $\mathrm{im}(A)$ es igual al conjunto anterior. $\square$

Y si ya sabemos reconocer cuál es el rango de una matriz en forma escalonada por filas, ¿cómo decidir entonces si un sistema de ecuaciones lineales, cuya matriz esté en forma escalonada por filas, es compatible o no y cómo calcular su solución?

Supongamos que la matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ está en forma escalonada por filas. Supongamos que el rango de A es $k \leq n$, es decir, en A hay k filas distintas de la fila nula y las $m-k$ filas nulas de A son las últimas. Si los elementos en las posiciones $k+1$ hasta m de b son todos iguales a cero, entonces el rango de A es igual al rango de $(A|b)$ (pues b pertenece a la imagen de A) y el sistema es compatible. Por otro lado, si alguno de los elementos en las posiciones $k+1$ hasta m de b es distinto de cero, el rango de $(A|b)$ es igual a $\mathrm{r}(A)+1$ (pues cualquier combinación lineal de las columnas de A tiene las últimas $m-k$ componentes iguales a cero y b no cumple esta propiedad) y el sistema es incompatible. Si el sistema es compatible y $k=n$, las n columnas de A forman un conjunto li, ellas son, por tanto, una base de su imagen y el sistema $Ax=b$ es compatible determinado. Si $k<n$, las columnas de A forman un conjunto ld y el sistema es compatible indeterminado.

Ejemplo 4.17. *Consideremos el sistema de ecuaciones lineales*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b} \Rightarrow (A|b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Como el último elemento de b es cero, se cumple que $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}((A|b)) = 2$, es decir, b pertenece a la imagen de A. Como $\mathrm{r}(A) < 5$, las columnas de A no son una base de $\mathrm{im}(A)$. El sistema es compatible indeterminado. No olvides que en sistemas como éste, donde el número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas, es imposible que las columnas de A (que son vectores de

$\mathbb{R}^3$) formen un conjunto li. No es difícil encontrar el conjunto solución de sistemas cuya matriz esté en forma escalonada por filas. Podemos resolverlo desde la última ecuación diferente de $0=0$ *hasta la primera*

$$\begin{aligned} x_4 - x_5 &= 2, && \textit{ecuación 2 del sistema} \\ x_2 - x_3 + 2x_4 &= 1 && \textit{ecuación 1 del sistema.} \end{aligned}$$

Despejando x_4 de la primera de las ecuaciones anteriores obtenemos $x_4 = 2 + x_5$ y, reemplazando este valor en la segunda ecuación, se tiene que

$$x_2 = 1 + x_3 - 2(2 + x_5) = -3 + x_3 - 2x_5.$$

Podemos concluir que

$$\mathcal{S}(A,b) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ -3 + x_3 - 2x_5 \\ x_3 \\ 2 + x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \ : \ x_1, x_3, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

Nota que las columnas que forman un conjunto li son las columnas 2 y 4 y son precisamente las variables x_2 y x_4 las que hemos escrito en términos de las restantes.

Por otro lado, el sistema de ecuaciones lineales

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{c} \Rightarrow (B|c) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

no tiene solución pues, al ser $\mathrm{r}(B) = 2 < 3 = \mathrm{r}((B|c))$, podemos concluir que $c \notin \mathrm{im}(B)$. El sistema es incompatible y $\mathcal{S}(B,c) = \emptyset$.

Resolvamos ahora los sistemas

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{d} \Rightarrow ((C|d)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{e} \Rightarrow ((C|)e) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -1 \end{pmatrix}$$

El primer sistema es compatible indeterminado pues $\mathrm{r}(C) = 3 = \mathrm{r}((C|d))$ *y* $\mathrm{r}(C) < 4$ *(las columnas de* C *forman un conjunto ld). El segundo sistema es incompatible pues* $\mathrm{r}(C) = 3$ *y* $\mathrm{r}((C|e)) = 4$.

Recuerda que las columnas 1, 3 y 4 de C *son las que escogimos como base del espacio columna de* C*. Son las variables* y_1, y_3 *e* y_4 *las que escribiremos en términos de las restantes.*

Comencemos escribiendo desde la última ecuación diferente de $0 = 0$ *hasta la primera*

$$\begin{aligned} -2y_4 &= 0, \\ 2y_3 + y_4 &= 1, \\ y_1 + y_2 - y_3 + 2y_4 &= 0. \end{aligned}$$

La primera de las ecuaciones anteriores es equivalente a $y_4 = 0$*, insertando este valor en la segunda ecuación anterior se tiene que* $y_3 = \frac{1}{2}$*. Por último, insertanto ambos valores en la última ecuación obtenemos que* $y_1 = -y_2 + \frac{1}{2}$*. Con esto se tiene que*

$$\mathcal{S}(C,d) = \left\{ \begin{pmatrix} -y_2 + \frac{1}{2} \\ y_2 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ y_2 \in \mathbb{R} \right\}, \qquad \mathcal{S}(C,e) = \emptyset.$$

4.3. Operaciones elementales a las filas de una matriz. Método de eliminación gaussiana

Si la matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ está en forma escalonada por filas, entonces es fácil reconocer si un sistema de la forma $Ax = b$ es compatible o no y también es sencillo determinar $\mathcal{S}(A, b)$.

¿Qué podemos hacer si A no está en forma escalonada? Afortunadamente toda matriz puede transformarse en una matriz en forma escalonada por filas.

Con el siguiente ejemplo vas a entender esta afirmación.

Ejemplo 4.18. *Consideremos el sistema de ecuaciones lineales*

$$x + 2y - z = 1, \tag{4.9a}$$
$$2x + y - 3z = 2, \tag{4.9b}$$
$$x - y + \frac{1}{2}z = 0. \tag{4.9c}$$

Si, por ejemplo, despejamos x *de la primera ecuación y lo reemplazamos en las ecuaciones 2 y 3, obtenemos*

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 1, \\ -3y - z &= 0, \\ -3y + \frac{3}{2}z &= -1. \end{aligned}$$

Nota que la estructura de este último sistema de ecuaciones es más sencilla que la del primero, en las ecuaciones 2 y 3 de este nuevo sistema ya no aparece la variable x. Además ***despejar** x **de la primera ecuación y reemplazar la expresión correspondiente en la segunda es equivalente a reemplazar la segunda ecuación del sistema por la resulta de sumarla a ella con -2 veces la primera ecuación, despejar** x **de la primera ecuación y reemplazar su expresión en la tercera es lo mismo que reemplazar la tercera ecuación por la que resulta de sumarla a ella con - 1 vez la primera ecuación**.*

Si escribimos las matrices ampliadas asociadas a ambos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 2 & 1 & -3 & | & 2 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} & | & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -3 & -1 & | & 0 \\ 0 & -3 & \frac{3}{2} & | & -1 \end{pmatrix},$$

notarás que la segunda está más cerca de tener una forma escalonada por filas que la primera.

Ya que despejar y de las ecuaciones 2 o 3 del sistema anterior es más cómodo si y está multiplicado por uno, ***dividamos por 3 las ecuaciones 2 y 3 del sistema de ecuaciones**. El sistema resultante es*

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 1, \\ -y - \frac{1}{3}z &= 0, \\ -y + \frac{1}{2}z &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ahora ***reemplacemos la tercera ecuación por la diferencia entre ella y la segunda**:*

$$x + 2y - z = 1, \tag{4.10a}$$

$$-y - \frac{1}{3}z = 0, \tag{4.10b}$$

$$\frac{5}{6}z = -\frac{1}{3}. \tag{4.10c}$$

Si escribimos la matriz ampliada de este sistema notarás que las operaciones que hemos hecho y que hemos marcado en negritas en los párrafos anteriores nos han permitido llevar el sistema a forma escalonada por filas

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{3} & | & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} & | & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Ahora podemos encontrar el conjunto solución de (4.10), que es igual al conjunto solución de (4.9): de la última ecuación obtenemos $z = -\frac{2}{5}$, de la segunda y después de reemplazar z por $-\frac{2}{5}$, se tiene que $y = \frac{2}{15}$ y, por último, de la primera ecuación obtenemos $x = \frac{1}{3}$.

Lo que hemos hecho es aplicar el método de eliminación de Gauss a la solución de (4.9): fuimos eliminando sucesivamente variables de las ecuaciones del sistema hasta transformarlo en uno que podemos resolver fácilmente. Las dos operaciones que nos permitieron transformar el sistema fueron:

1. *reemplazar una ecuación por la que resulta de sumarla a ella por k veces otra ecuación (este k fue -2, -1 y -1 en este ejemplo),*
2. *multiplicar una ecuación por un número real distinto de cero, en este ejemplo fue $\frac{1}{3}$.*

*Ambas son **operaciones elementales por filas**. Repitamos el proceso anterior, pero ahora, para simplificar nuestro trabajo con el sistema de ecuaciones, en lugar de escribir todas las ecuaciones del sistema, solo escribiremos la matriz ampliada del mismo que, en este ejemplo es la siguiente*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 2 & 1 & -3 & | & 2 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Esto podemos hacerlo porque no nos interesan los nombres de las variables, las propiedades del sistema no dependen de ellos, sino de los coeficientes que acompañan a cada variable en las ecuaciones del sistema.

Lo primero que hicimos para resolver el sistema fue reemplazar las ecuaciones 2 y 3 por la suma de ellas con -2 veces la ecuación 1 y -1 vez la ecuación 1, respectivamente, esto es equivalente a

1. *a la fila 2 le asignaremos el resultado de sumar la fila 2 con -2 veces la fila 1, operación que denotaremos por $f_2 \leftarrow f_2 - 2f_1$,*
2. *a la fila 3 le asignaremos el resultado de sumar la fila 3 con -1 vez la fila 1, operación que denotaremos por $f_3 \leftarrow f_3 - f_1$.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 2 & 1 & -3 & | & 2 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} & | & 0 \end{pmatrix} \sim_{f_2 \leftarrow f_2 - 2f_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -3 & -1 & | & 0 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} & | & 0 \end{pmatrix} \sim_{f_3 \leftarrow f_3 - f_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -3 & -1 & | & 0 \\ 0 & -3 & \frac{3}{2} & | & -1 \end{pmatrix}.$$

Nuestro siguiente paso al resolver el sistema fue dividir por 3 las ecuaciones 2 y 3. Apliquemos estas operaciones a la matriz ampliada:

1. *a la fila 2 le asignaremos el resultado de multiplicar la fila 2 por $\frac{1}{3}$, operación que denotaremos por $f_2 \leftarrow \frac{1}{3}f_2$,*
2. *a la fila 3 le asignaremos el resultado de multiplicar la fila 3 por $\frac{1}{3}$, operación que denotaremos por $f_3 \leftarrow \frac{1}{3}f_3$.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -3 & -1 & | & 0 \\ 0 & -3 & \frac{3}{2} & | & -1 \end{pmatrix} \sim_{f_2 \leftarrow \frac{1}{3}f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{3} & | & 0 \\ 0 & -3 & \frac{3}{2} & | & -1 \end{pmatrix} \sim_{f_3 \leftarrow \frac{1}{3}f_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{3} & | & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & | & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Si en la posición $(3,2)$ de la matriz anterior hubiera un cero, el sistema estaría en forma escalonada por filas, que haya un cero en la posición $(3,2)$ de la matriz es equivalente a que y desaparezca de la tercera ecuación. ¿Cómo hacemos que desaparezca la segunda variable de la tercera ecuación? Despejando esta variable de la segunda ecuación y reemplazando la expresión resultante en la tercera, nota que no tiene sentido despejar la segunda variable de la primera ecuación y reemplazar la expresión resultante en la tercera pues entonces aparecería la primera variable en la tercera ecuación.

Despejar y de la segunda ecuación y reemplazar la expresión resultante en la tercera es equivalente a reemplazar la tercera ecuación por la diferencia entre ella y la segunda, es decir, a realizar la operación elemental: a la fila 3 le asignamos el resultado de sumar la fila 3 con -1 vez la fila 2, operación que denotamos por $f_3 \leftarrow f_3 - f_2$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{3} & | & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & | & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \sim_{f_3 \leftarrow f_3 - f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{3} & | & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} & | & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

La matriz y la matriz ampliada del sistema original y esta última matriz y matriz ampliada tienen el mismo rango pues llegamos de unas a otras aplicando solamente operaciones elementales (más adelante demostraremos formalmente esta afirmación). Por esta misma razón el conjunto solución del sistema de ecuaciones original es igual al conjunto solución de este último sistema, es decir, si llamamos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

entonces $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(\tilde{A})$, $\mathrm{r}((A|b)) = \mathrm{r}((\tilde{A}|\tilde{b}))$ *y* $\mathcal{S}(A,b) = \mathcal{S}(\tilde{A},\tilde{b})$. *Como* $\tilde{A}$, $(\tilde{A}|\tilde{b})$ *están en forma escalonada, podemos concluir que* $\mathrm{r}(\tilde{A}) = 3$, $\mathrm{r}((\tilde{A}|\tilde{b})) = 3$, *es decir, el sistema de ecuaciones original es compatible determinado. Además,*

$$\mathcal{S}(A,b) = \mathcal{S}(\tilde{A},\tilde{b}) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{15} \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \right\}.$$

¿En qué consiste entonces el método de eliminación de Gauss? En despejar la primera variable del sistema de la primera ecuación del mismo (si la primera variable no aparece en la primera ecuación, podemos intercambiar ésta por otra en la que sí aparezca la primera variable) y reemplazar la expresión resultante en las restantes ecuaciones, modificándolas todas. Posteriormente despejamos la segunda variable del sistema de la segunda ecuación (si la segunda variable no aparece en la segunda ecuación, podemos intercambiar ésta por otra en la que sí aparezca la segunda variable) y reemplazamos la expresión resultante en las siguientes ecuaciones del sistema (ecuaciones tres a última), modificando estas ecuaciones. Este proceso se repite hasta que ya no tengamos variables por despejar. Este proceso es equivalente a realizar operaciones elementales por filas (vea definición que sigue) a la matriz ampliada del sistema de ecuaciones hasta convertirla en una matriz en forma escalonada por filas y determinar el conjunto solución del sistema resultante.

Definamos primero cuáles son las operaciones elementales por filas y, posteriormente, demostremos que éstas no modifican el rango de la matriz a la que se apliquen ni tampoco el conjunto solución de un sistema $Ax = b$ si se aplican simultáneamente a A y b.

Definición 4.19 (operaciones elementales por filas)**.** Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Podemos aplicar *tres operaciones elementales por filas* a A:

1. intercambiar dos filas de A: el intercambio de las filas i y j de A lo denotaremos por $f_i \leftrightarrow f_j$.

2. Multiplicar una fila de A por un número real distinto de cero: el producto de la fila i de A por un número real $\lambda \neq 0$ lo denotaremos por $f_i \leftarrow \lambda f_i$.
3. Reemplazar una fila de A por la que resulta de sumarle a esta fila otra multiplicada por un número real. Esta operación la denotaremos mediante $f_i \leftarrow f_i + \lambda f_j$.

Ejemplo 4.20. *Consideremos*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

La aplicación de la operación elemental intercambiar las filas 1 y 3 de A *la representamos mediante*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim_{f_1 \leftrightarrow f_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Realicemos ahora la operación elemental $f_3 \leftarrow f_3 - 2f_1$ a esta última matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim_{f_3 \leftarrow f_3 - 2f_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

Multipliquemos la segunda fila por $\frac{1}{3}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \sim_{f_2 \leftarrow \frac{1}{3} f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

El símbolo $\sim$ que utilizamos para separar una matriz de la que resulta de aplicarle a ella alguna operación elemental por filas nos indica que ambas matrices tienen el mismo rango y que podemos ir de la segunda a la primera "deshaciendo" *la operación elemental que aplicamos. Por ejemplo, podemos ir de*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \qquad a \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

aplicando la operación elemental $f_2 \leftarrow 3f_2$ a la primera matriz. ¿Con qué operación elemental podemos deshacer $f_3 \leftarrow f_3 - 2f_1$? ¿Y $f_1 \leftrightarrow f_3$?

Lema 4.21. Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$. Si $\tilde{A}$ y $\tilde{b}$ denotan la matriz y vector b que obtenemos las mismas operaciones elementales por filas a A y b, entonces se cumple que $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(\tilde{A})$ y $\mathcal{S}(A, b) = \mathcal{S}(\tilde{A}, \tilde{b})$.

Demostración. Sea D una matriz cualquiera (D puede ser A o b o $(A|b)$).

Consideremos las transformaciones lineales $\mathcal{E}_{i,j} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\mathcal{M}_{i,\lambda} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ y $\mathcal{T}_{i,j,\lambda} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$.

La primera de ellas intercambia las posiciones i y j de un vector de $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, si $n = 3$, $i = 1$ y $j = 3$, entonces

$$\mathcal{E}_{1,3}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Esta transformación es invertible, su inversa es ella misma.

La segunda transformación multiplica por λ a la componente i-ésima de un vector $x \in \mathbb{R}^m$, es decir,

$$\mathcal{M}_{i,\lambda}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_i \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Si $\lambda \neq 0$, ella es invertible. Su inversa es $\mathcal{M}_{i,1/\lambda}$.

La última transformación es la siguiente

$$\mathcal{T}_{i,j,\lambda}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i - \lambda x_j \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

Esta transformación también es invertible. Su inversa es $\mathcal{T}_{i,j,-\lambda}$.

Realizar la operación elemental por filas $f_i \leftrightarrow f_j$ a D es lo mismo que aplicar $\mathcal{E}_{i,j}$ a cada columna de D. Realizar la operación elemental $f_i \leftarrow \lambda f_i$ a D es lo mismo que aplicar $\mathcal{M}_{i,\lambda}$ a cada columna de D y, por último, aplicar la operación elemental $f_i \leftarrow f_i - \lambda f_j$ es equivalente a aplicar $\mathcal{T}_{i,j,\lambda}$ a cada columna de D.

Supongamos que $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es un conjunto de n vectores de $\mathbb{R}^m$. Sea $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal biyectiva (como las anteriores).

Llamemos $\mathcal{B}$ al conjunto $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_k)\}$.

Si alguno de los vectores en $\mathcal{A}$, por ejemplo, v_k, es combinación lineal de los restantes, entonces $T(v_k)$ es combinación lineal, con los mismos escalares, de los restantes vectores en $\mathcal{B}$.

Por otro lado, si $T(v_k)$ es combinación lineal de los restantes vectores en $\mathcal{B}$, entonces, como T es inyectiva, v_k es combinación lineal, con los mismos escalares, de los restantes vectores en $\mathcal{A}$.

Si un subconjunto de $\mathcal{A}$ es li, entonces, como T es biyectiva, el resultado de aplicar T a esos vectores, también es li. Si un subconjunto de $\mathcal{B}$ es li, como T es lineal, el subconjunto correspondiente de $\mathcal{A}$ también es li.

Como las transformaciones $\mathcal{E}_{i,j} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\mathcal{M}_{i,\lambda} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ y $\mathcal{T}_{i,j,\lambda} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ satisfacen las propiedades anteriores, podemos asegurar que

- $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(\tilde{A})$,
- las columnas correspondientes en A de las forman una base de la imagen de $\tilde{A}$, conforman una base de $\mathrm{im}(A)$,
- si alguna columna de $\tilde{A}$ es combinación lineal, con ciertos escalares, de las restantes, la columna correspondiente en A es combinación lineal, con los mismos escalares, de las restantes columnas de A,
- el conjunto solución de $\tilde{A}x = \tilde{b}$ es el mismo que el de $Ax = b$.

□

Apliquemos el método de eliminación de Gauss a la solución de algunos sistemas de ecuaciones lineales.

Ejemplo 4.22. *Resolvamos el sistema*

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 4, \\ -x - 3y &= 1, \\ 4x + y &= 29, \\ 5y &= -15, \end{aligned}$$

con el método de eliminación de Gauss.

En el primer paso del método queremos eliminar la variable x de las ecuaciones 2 y 3 del sistema. Hemos encerrado en un círculo negro el coeficiente de x en la primera ecuación y en círculos azules sus coeficientes en las ecuaciones 2 y 3. Cuando estos coeficientes sean cero habremos eliminado a x de estas ecuaciones. En el segundo paso queremos eliminar a y de las ecuaciones 3 y 4.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & | & 4 \\ -1 & -3 & | & 1 \\ 4 & 1 & | & 29 \\ 0 & 5 & -15 & \end{pmatrix} \begin{array}{c} f_2 \leftarrow f_2 + \frac{1}{2} f_1 \\ f_3 \leftarrow f_3 - 2 f_1 \\ \sim \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 4 & | & 4 \\ 0 & -1 & | & 3 \\ 0 & -7 & | & 21 \\ 0 & 5 & | & -15 \end{pmatrix} \begin{array}{c} f_3 \leftarrow f_3 - 7 f_2 \\ f_4 \leftarrow f_4 + 5 f_2 \\ \sim \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 4 & | & 4 \\ 0 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora podemos reconocer que el sistema es compatible determinado y su conjunto solución es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ejemplo 4.23. *Resolvamos el sistema*

$$\begin{aligned} -x + z &= 0, \\ 2x + y - z &= 0, \\ y + z &= 0, \end{aligned}$$

con el método de eliminación de Gauss.

Para ello aplicamos operaciones elementales de manera adecuada a las filas de la matriz ampliada del sistema de ecuaciones. Como el sistema es homogéneo, no necesitamos escribir su parte derecha. Cualquier operación elemental transforma $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ *en él mismo.*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{f_2 \leftarrow f_2 + 2f_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{f_3 \leftarrow f_3 - f_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Este sistema está en forma escalonada por filas.

Observa que las columnas li de la última matriz son las asociadas a x (primera columna) e y (segunda columna), éstas son las variables que despejaremos escribiremos en términos de las restantes. El sistema de ecuaciones asociado a esta última matriz es

$$\begin{aligned} -x + z &= 0, \\ y + z &= 0, \\ 0 &= 0, \end{aligned}$$

y su conjunto solución, que es igual al conjunto solución del sistema original, es

$$\left\{ \begin{pmatrix} z \\ -z \\ z \end{pmatrix} \;:\; z \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

Ejemplo 4.24. *Del siguiente sistema de ecuaciones, encontremos los valores de los parámetroa $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible. En los casos en que el sistema sea compatible, encontremos el conjunto solución.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad a, b, \alpha \in \mathbb{R}$$

Éste es un sistema con más ecuaciones que incógnitas.

Aplicando las siguientes operaciones elementales sobre filas $f_2 \leftarrow f_2 - af_1$, $f_3 \leftarrow f_3 - f_1$ obtenemos que la matriz ampliada de este sistema de ecuaciones es equivalente a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & \alpha \\ 0 & 1-a & | & (1-a)\alpha \\ 0 & b-1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos entonces los siguientes casos

$$\begin{cases} b = 1 \;\; y & \begin{cases} a = 1 & \textit{compatible indeterminado} \\ a \neq 1 & \textit{compatible determinado} \end{cases} \\ b \neq 1 \;\; y & \begin{cases} a = 1 & \textit{compatible determinado} \\ a \neq 1 & \textit{depende de } \alpha \end{cases} \end{cases}$$

En el primer caso ($b = 1, a = 1$) el conjunto solución es

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{21}(\mathbb{R}) \ : \ x_1 = \alpha - x_2 \right\}.$$

En el segundo caso el conjunto solución solo contiene un vector $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \right\}$. *Esto también ocurre en el tercer caso, el conjunto solución es* $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. *En el cuarto caso, haciendo la operación elemental* $f_3 \leftarrow f_3 + \frac{1-b}{1-a} f_2$ *obtenemos la matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & \alpha \\ 0 & 1-a & | & (1-a)\alpha \\ 0 & 0 & | & (1-b)\alpha \end{pmatrix}$$

con lo que si $\alpha = 0$, *el sistema es compatible determinado y su conjunto solución es* $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, *mientras que si* $\alpha \neq 0$ *el sistema es incompatible.*

Del mismo modo que hemos utilizado el método de eliminación de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales, también podemos utilizarlo para determinar el rango de una matriz, en definitiva, lo que hacemos al aplicar el método de Gauss a la solución de $Ax = b$ es convertir la matriz $(A|b)$ a una en forma escalonada por filas, cuyo rango puede determinarse de manera sencilla.

Ejemplo 4.25. *¿Para qué valores de* $k \in \mathbb{R}$ *el rango de*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & k-1 & 1 \end{pmatrix},$$

es 0, 1, 2, 3? Dado que para todo $k \in \mathbb{R}$, *se cumple que* $A \neq \Theta$, *no existe* k *tal que* $r(A) = 0$.

Para averiguar cuando el rango es 1, 2 o 3, llevemos A, *mediante operaciones elementales sobre filas* ($f_2 \leftarrow f_2 - f_1, f_3 \leftarrow f_3 - f_1$) *a forma escalonada*

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 & k-1 \\ 0 & 0 & k-2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $k = 2$, $r(A) = 2$. *Si* $k = 1$, *luego de intercambiar las filas 2 y 3* A *está en forma escalonada y su rango es 2. Si* $k \neq 1$ *y* $k \neq 2$, *entonces* A *está en forma escalonada y su rango es 3. El rango de* A *nunca es 1.*

4.3.1. Método de Gauss-Jordan. Inversa de una matriz.

El método de Gauss-Jordan consiste en, una vez llevado el sistema a forma escalonada por filas con el método de Gauss, realizar más operaciones elementales por filas con el objetivo de simplificar aún más el sistema de ecuaciones.

Si las operaciones elementales que realizamos al aplicar el método de Gauss son equivalentes a despejar una variable de una ecuación y reemplazar la expresión resultante en las siguientes, el de Gauss Jordan es equivalente a ir resolviendo el sistema en forma escalonada, desde la última ecuación hasta la primera.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 4.26. *Al aplicar el método de Gauss al sistema en el ejemplo 4.18 obtuvimos*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 2 & 1 & -3 & | & 2 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{3} & | & 0 \\ 0 & 0 & 5/6 & | & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Ahora dividamos cada fila no nula por el valor del primer elemento distinto de cero en ella.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{3} & | & 0 \\ 0 & 0 & 5/6 & | & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{matrix} f_2 \leftarrow -f_2 \\ f_3 \leftarrow \frac{6}{5} f_3 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Aplicar las operaciones elementales $f_2 \leftarrow f_2 - \frac{1}{3} f_3$ y $f_1 \leftarrow f_1 + f_3$, que nos permiten hacer ceros los elementos en las posiciones $(2,3)$ y $(1,3)$ de la matriz, son equivalentes a despejar z de la tercera ecuación y reemplazar el valor resultante en las ecuaciones 1 y 2,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{matrix} f_2 \leftarrow f_2 - \frac{1}{3} f_3 \\ f_1 \leftarrow f_1 + f_3 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{2}{15} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Por último, si realizamos $f_1 \leftarrow f_1 - 2f_2$ obtenemos

$$\begin{matrix} f_1 \leftarrow f_1 - 2f_2 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{2}{15} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

De aquí podemos leer que el conjunto solución del sistema es $\left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{15}, -\frac{2}{5} \right)^T \right\}$.

Ejemplo 4.27. *Consideremos el ejemplo 4.22.*

Aplicando el método de eliminación de Gauss obtuvimos

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & | & 4 \\ -1 & -3 & | & 1 \\ 4 & 1 & | & 29 \\ 0 & 5 & | & -15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & | & 4 \\ 0 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora dividamos cada fila no nula por el valor del primer elemento distinto de cero en ella.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} f_2 \leftarrow -f_2 \\ f_1 \leftarrow \frac{1}{2} f_1 \\ \sim \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ahora podemos despejar y de la segunda ecuación y reemplazar el valor resultante en la primera. Esto es equivalente a realizar la operación elemental $f_1 \leftarrow f_1 - 2f_2$, con la que hacemos cero el elemento correspondiente a la variable y en la primera fila de la matriz

$$\overset{f_1 \leftarrow f_1 - 2f_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Lo que hemos logrado es resolver el sistema, si escribimos el sistema asociado a esta última matriz ampliada, obtenemos

$$\begin{aligned} x &= 8, \\ y &= -3, \\ 0 &= 0, \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Las variables ya están despejadas y se obtiene de forma directa que el conjunto solución es $\{(8, -3)^T\}$.

Veamos un último ejemplo que resolveremos con el método de Gauss-Jordan.

Ejemplo 4.28. *Consideremos el sistema:*

$$\begin{aligned} x + y + z - t &= 2, \\ y - 5z + t &= 1, \\ x - 8t &= 1, \end{aligned}$$

que, en forma matricial es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Apliquemos método de Gauss-Jordan a su solución.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -8 & 1 \end{array}\right) \overset{f_3 \leftarrow f_3 - f_1}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -7 & -1 \end{array}\right)$$

$$\overset{f_3 \leftarrow f_3 + f_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & 0 \end{array}\right).$$

Este sistema ya está en forma escalonada. Encerremos en un círculo al primer elemento distinto de cero en cada fila y comencemos a aplicar las operaciones elementales que diferencian al método de Gauss-Jordan del método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & 0 \end{array}\right) \overset{f_3 \leftarrow -\frac{1}{6} f_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} f_2 \leftarrow f_2 + 5f_3 \\ f_1 \leftarrow f_1 - f_3 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} f_1 \leftarrow f_1 - f_2 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Ahora podemos resolver el sistema de ecuaciones. Las variables asociadas a las columnas que forman una base de la imagen de la matriz del sistema son x, y y z. Escribiremos a éstas en términos de t. El sistema lineal asociado a la matriz ampliada escalonada es

$$\begin{aligned} x - 8t &= 1, \quad \to x = 1 + 8t, \\ y + 6t &= 1, \quad \to y = 1 - 6t, \\ z + t &= 0, \quad \to z = -t, \end{aligned}$$

y el conjunto solución del sistema es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 + 8t \\ 1 - 6t \\ -t \\ t \end{pmatrix} \; : \; t \in \mathbb{R} \right\},$$

el sistema es compatible indeterminado.

Consideremos por un momento el sistema $Ax = b$ con $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matriz A es invertible si y solo si su nulidad es cero, que es equivalente a que su rango de A es igual a n y a que sus columnas son una base de $\mathbb{R}^n$. Si A es invertible ocurre, por tanto, que cualquier vector de $\mathbb{R}^n$ puede escribirse, de manera única, como combinación lineal de las columnas de A. El sistema $Ax = b$ es, entonces, para cualquier $b \in \mathbb{R}^n$, un sistema compatible determinado. Además, como

$$Ax = b \;\Leftrightarrow\; A^{-1}Ax = A^{-1}b \;\Leftrightarrow\; x = A^{-1}b,$$

se cumple que el vector $A^{-1}b$ es la solución única del sistema $Ax = b$.

¿Cómo podemos determinar A^{-1}?

La inversa de A es aquella matriz que satisface $AA^{-1} = I$ y $A^{-1}A = I$.

Dado que la columna i de AA^{-1} es igual al producto de A por la columna i de A^{-1} y ésta debe ser igual a la columna i de I, la columna i de A^{-1} es la solución del sistema de ecuaciones lineales $Ax = e_i$, siendo e_i el i-ésimo vector en la base canónica de $\mathbb{R}^n$, es decir,

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{posición } i.$$

¿Cómo vamos a determinar entonces A^{-1}? Utilizaremos el método de Gauss-Jordan para resolver los sistemas de ecuaciones $Ax = e_1$, $Ax = e_2$, $\ldots$, $Ax = e_n$, siendo la solución del primero de ellos la primera columna de A^{-1}, la del segundo, la segunda columna de A^{-1} y así sucesivamente.

Ejemplo 4.29. *Determinemos las inversas, si existen, de las siguientes matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Observa que la última columna de B es igual a 2 veces la primera más la segunda, B no es invertible, pero intentaremos calcular su inversa con el método de Gauss-Jordan para darnos cuenta de que no es posible.

Comencemos con A. Resolveremos simultáneamente los sistemas de ecuaciones

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.11}$$

Por ello escribimos la matriz ampliada asociada a los tres en una sola matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Después de aplicar la operación elemental $f_3 \leftarrow f_3 + f_1$ obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Ahora continuamos con las operaciones elementales que incorpora Gauss-Jordan. Primero dividamos la tercera fila por -2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Ahora aplicamos las operaciones elementales $f_1 \leftarrow f_1 + f_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

y $f_1 \leftarrow f_1 + f_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Con esto hemos resuelto completamente los tres sistemas de ecuaciones lineales en (4.11). *La solución del primero, el vector,* $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ *es la primera columna de* A^{-1}. *La solución del segundo, el vector,* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *es la segunda columna de* A^{-1}. *La solución del tercero, el vector,* $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ *es la tercera columna de* A^{-1}, *es decir,*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Intentemos ahora determinar la inversa de B.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Apliquemos $f_3 \leftarrow f_3 + f_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora notamos que el rango de B *es 2 y* B *no es, por tanto, una matriz invertible.*