Física II

Seminario # 4: Dinámica Rotacional

1. Situaciones para análisis

Situación para análisis 1
Una esfera maciza rueda en rodamiento puro sobre un plano inclinado A, partiendo desde el reposo. Al mismo tiempo, una caja parte desde el reposo y se desliza sobre un plano inclinado B, idéntico al plano inclinado A, excepto que no tiene fricción. Ambos cuerpos son liberados desde la misma altura. ¿Cuál llega primero a la base del plano inclinado? (a) La esfera. (b) La caja. (c) Ambas llegan al mismo tiempo. (d) Imposible de determinar.

R: La caja.

Situación para análisis 2
La rueda trasera de una bicicleta de payaso tiene el doble del radio de la rueda delantera. (a) Cuando la bicicleta se está moviendo, ¿es la rapidez lineal en el punto más alto del borde de la rueda trasera mayor, menor o la misma que la rapidez lineal del punto más alto del borde de la rueda delantera? (b) es la rapidez angular de la rueda trasera mayor, menor o la misma que la rapidez angular de la rueda delantera?

R: (a) La misma; (b) mayor

Situación para análisis 3
Un cilindro sólido homogéneo rueda sin deslizamiento sobre una superficie horizontal. La energía cinética total es K. La energía cinética debida a la rotación alrededor de un eje que pasa por su centro de masa es (a) $\frac{1}{2}K$, (b) $\frac{1}{3}K$, (c) $\frac{4}{7}K$ o (d) Ninguna de las anteriores. **R:** (b) $K_R = K/3$.

Situación para análisis 4
Partiendo del reposo y al mismo tiempo, una moneda y un anillo ruedan por un plano inclinado sin deslizamiento. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta? (a) El anillo llega primero a la base del plano. (b) La moneda llega primero a la base del plano. (c) El anillo y la moneda llegan simultáneamente a la base del plano. (d) El resultado de la carrera depende de sus masas relativas. (e) El resultado de la carrera depende de sus diámetros relativos.

R: (b) La moneda llega primero a la base del plano.

Situación para análisis 5
Una anillo de masa M y radio R está en rodamiento puro. Cual de las siguientes afirmaciones es correcta para el movimiento del anillo: (a) La energía cinética de traslación del centro de masa es mayor que la energía cinética de rotación en torno a un eje que pasa por el centro de masa. (b) La energía cinética de traslación del centro de masa es menor que la energía cinética de rotación en torno a un eje que pasa por el centro de masa. (c) La energía cinética de traslación del centro de masa y la energía cinética de rotación en torno a un eje que pasa por el centro de masa son iguales. (d) La respuesta depende de la masa. (e) La respuesta depende del radio.

R: (c) La energía cinética de traslación del centro de masa y la energía cinética de rotación en torno a un eje que pasa por el centro de masa son iguales.

Situación para análisis 6

El vector posición $\vec{r}$ de una partícula apunta a lo largo de la dirección positiva del eje-z. Si el torque sobre la partícula es (a) cero, (b) en la dirección negativa del eje x y (c) en la dirección negativa del eje y. Para esos casos ¿en qué dirección está la fuerza que produce el torque?

R: (a): A lo largo del eje z. (b): En la dirección positiva del eje y. (c): En la dirección negativa del eje x.

Situación para análisis 7

En la parte izquierda de la Fig. 1, las partículas 1 y 2 se mueven en torno de un punto O en círculos de radio 4 m y 2 m, respectivamente. En la parte (b), las partículas 3 y 4 viajan a lo largo de una línea recta con distancias perpendiculares de 4 m y 2 m, respectivamente, del punto O. La partícula 5 se mueve alejándose directamente de O. Las cinco partículas tienen la misma masa y la misma rapidez constante. (a) Ordene de mayor a menor las magnitudes de los momentas angulares de las partículas en torno del punto O. (b) ¿Cuáles partículas tienen momentum angular negativo en torno del punto O? Para ambas figuras el plano del movimiento es el plano xy.

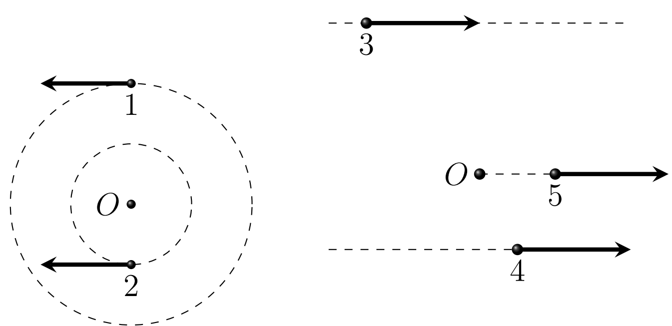


Figura 1: Esquema para la Situación 7

R: $|L_{1z}| = |L_{3z}| > |L_{2z}| = |L_{4z}| > |L_{5z}| = 0$

Situación para análisis 8

La Fig.2 muestra el vector posición $\vec{r}$ de una partícula en un cierto instante de tiempo, y cuatro alternativas para la dirección de una fuerza que actúa sobre ella. Las fuerzas tienen igual magnitud y todas ellas yacen en el plano xy; $\vec{F}_3 \perp \vec{r}$. (a) Ordene de mayor a menor la magnitud de la tasa de cambio $(d\vec{L}/dt)$ en torno del punto O. (b) ¿Cuál fuerza produce una tasa de cambio negativa del momentum angular en torno del punto O.

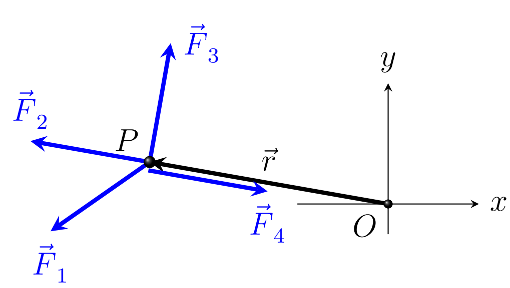


Figura 2: Esquema para la Situación 8. La fuerza $\vec{F}_3$ es perpendicular a $\vec{r}$ y la fuerza $\vec{F}_1$ forma un ángulo ϕ con $\vec{r}$.

R: (a) $|\tau_{3z}| > |\tau_{1z}| > |\tau_{2z}| = |\tau_{4z}| = 0$; (b) La fuerza $\vec{F}_3$.

Situación para análisis 9

En la Fig.3 un disco, un aro y una esfera sólida se hacen girar en torno de un eje central (como un trompo) por medio de una cuerda enrollada alrededor de ellos, con la cuerda produciendo la misma fuerza tangencial $\vec{T}$ para los tres objetos. Los tres objetos tienen la misma masa y el mismo

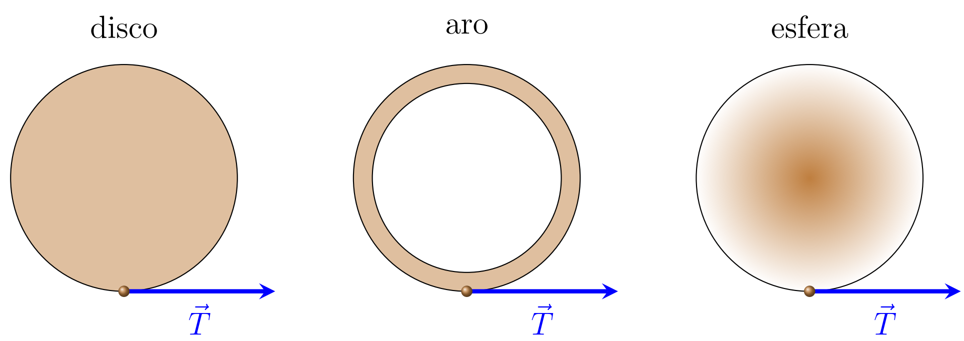


Figura 3: Mometum angular de tres cuerpos sólidos.

radio, y todos ellos están inicialmente en reposo. Ordene, de mayor a menor, los tres objetos de acuerdo a: (a) su momentum angular en torno del eje central y (b) su rapidez angular cuando la cuerda ha sido jalada por algún tiempo Δt.

R: (a) $I_a > I_d > I_e$, (b) $\Delta\omega_e > \Delta\omega_d > \Delta\omega_a$.

Situación para análisis 10
Un escarabajo está en el borde de un pequeño disco que rota como un carrusel con cierta rapidez angular ω_i en torno al eje que pasa por el centro del disco y es perpendicular al mismo. Si el escarabajo camina hacia el centro del disco, de las siguientes (cada una de ellas relativa al eje central) aumenta, dismimuye o permanece igual para el escarabajo: (a) el momento de inercia, (b) el momentum angular y (c) la rapidez angular.

R: (a) Disminuye; (b) Disminuye; (c) Aumenta.

---

2. Ejercicios

Ejercicio 1
Un yo-yo artesanal puede ser fabricado enrollando un cordel ligero de masa despreciable varias veces alrededor de un cilindro sólido de masa M y radio R. Se sostiene fijo el extremo libre del cordel y se suelta el cilindro desde el reposo. El cordel se desenrolla sin resbalar ni estirarse conforme el cilindro cae y rueda. Use consideraciones energéticas para calcular la rapidez del centro de masa v_{cdm} de un yo-yo artesanal después de caer una altura h.

R: $v_{\text{cdm}} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$.

Ejercicio 2
Considere nuevamente el yo-yo artesanal del Ejercicio 1. Calcule la magnitud de la aceleración del cilindro, hacia abajo, y la magnitud de la tensión en el cordel.

R: $a = \frac{2}{3}g$; $T = \frac{1}{3}Mg$.

Ejercicio 3
En una demostración en una conferencia de física, un profesor “pone a competir” una esfera sólida (es), un aro circular (ac), un cilindro hueco (ch), una esfera hueca de pared delgada (eh) y un cilindro macizo (cm), soltándolos desde el reposo en lo alto de un plano inclinado. ¿Cuál será el orden de llegada de los objetos rígidos a la base? Todos los objetos tienen la misma masa y el mismo radio.

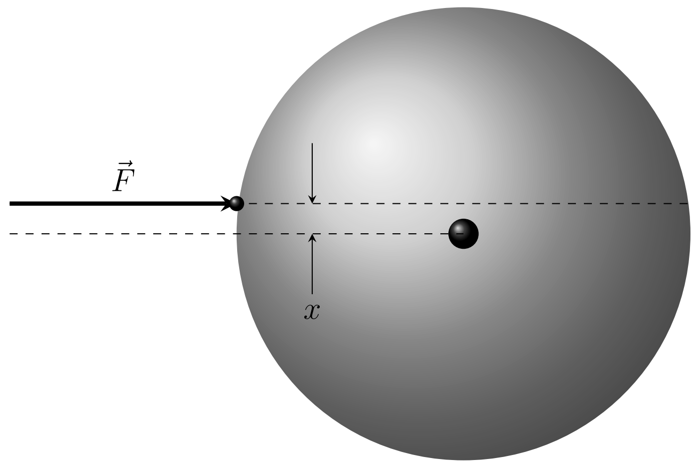
R: El orden de llegada a la base del plano es: esfera sólida; cilindro macizo; esfera hueca; aro y cilindro hueco (ambos al mismo tiempo).

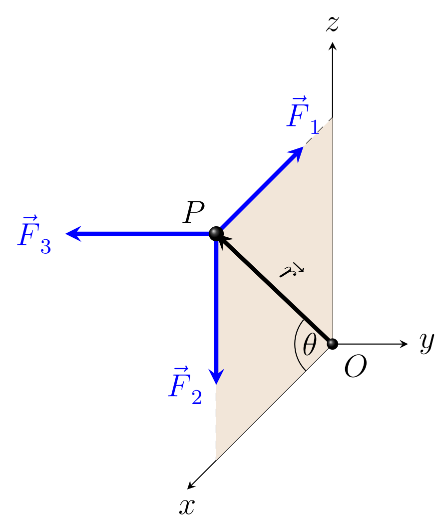
Ejercicio 4
Una esfera de 11.0 cm de radio y 7.20 kg de masa rueda sin deslizamiento sobre una superficie horizontal a 2.00 m/s. Después sube por una pendiente sin deslizamiento hasta una altura h antes de alcanzar momentáneamente el reposo y volver rodando hacia atrás. Determinar la altura h. Determinar la energía cinética inicial de la esfera.

R: $h = 0.286\,\text{m}$; $K_i = 20.2\,\text{J}$.

Ejercicio 5
Un billarista golpea con su taco de billar horizontalemente a una bola de masa M. La magnitud de la fuerza ejercida por el taco es F. El punto de contacto entre el taco y la bola está a una distancia x sobre el centro de masa de la bola. Determinar el valor de x para el cual la bola de billar rodará sin deslizamiento desde el comienzo. Expresar la respuesta en función del radio R de la bola.

R: $x = \left(\frac{2}{5}\right) R$.



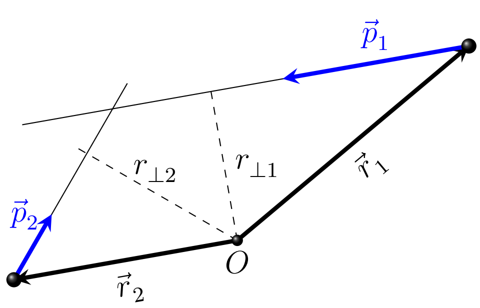


Tres fuerzas actuando sobre una partícula.

Ejercicio 6

En la figura a la derecha tres fuerzas, cada una de ellas de magnitud 2.0 N, actúan sobre una partícula. La partícula está en el plano-xz en el punto P dado por el vector posición $\vec{r}$, donde $r = 3.0\,\mathrm{m}$ y $\theta = 30^0$ con el eje x. La fuerza $\vec{F}_1$ es paralela al eje-x, la fuerza $\vec{F}_2$ es paralela al ej-z y la fuerza $\vec{F}_3$ es paralela al eje-y. ¿Cuál es el torque, en torno del origen O, debido a cada fuerza?

R: $\vec{\tau}_1 = (-3.0\hat{\jmath})\,\mathrm{N\,m}$, $\vec{\tau}_2 = (5.2\hat{\jmath})\,\mathrm{N\,m}$ y $\vec{\tau}_3 = (-5.2\hat{k} + 3.0\hat{\imath})\,\mathrm{N\,m}$.



Sistema de dos partículas.

Ejercicio 7

La figura de la izquierda es una vista superior de dos partículas moviéndose con momentas lineales constantes a lo largo de caminos horizontales en un plano xy. La partícula 1, con momentum lineal de magnitud $p_1 = 5.0\,\mathrm{kg\,m/s}$, tiene vector de posición $\vec{r}_1$ y pasará a 2.0 m del punto O. La partícula 2, con magnitud de momentum lineal $p_2 = 2.0\,\mathrm{kg\,m/s}$, tiene vector de posición $\vec{r}_2$ y pasará a 4.0 m del punto O. ¿Cuál es la magnitud y dirección del momentum angular neto $\vec{L}_{\mathrm{net}}$ en torno del punto O para este sistema de dos partículas?

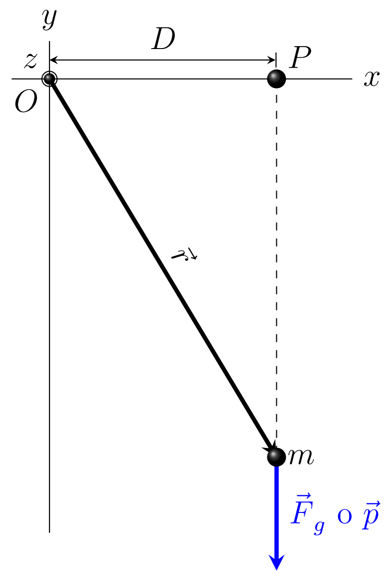
R: $\vec{L}_{\mathrm{net}} = (2.0\hat{k})\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$.

Ejercicio 8
En la figura de la derecha un objeto de masa m cae libremente- desde el reposo- y desde el punto P, ubicado a una dsitancia horizontal D del origen de un sistema de coordenadas xyz. (La dirección positiva del eje-z está dirigida hacia afuerza del plano de la figura). En torno de un eje que pasa por el origen O

(a) ¿cuál es el momentum angular $\vec{L}$ del objeto en cadida libre?

(b) ¿cuál es el torque $\vec{\tau}$ sobre el objeto debido a la fuerza de gravedad $\vec{F}_g$?

R: (a) $\vec{L} = -Dmgt\hat{k}$; (b) $\vec{\tau} = -Dmg\hat{k}$.



Momentum angular de un objeto que cae libremente desde el reposo.

Ejercicio 9
Una cucaracha de masa m cabalga sobre un disco de masa $M = 6.00\,\text{m}$ y radio R. El disco gira como un carrusel en torno de su eje central con una rapidez angular $\omega_i = 1.50\,\text{rad/s}$. La cucaracha está inicialmente a una distancia radial $r_i = 0.800R$ y comienza a caminar radialmente hacia el borde del disco. Trate a la cucaracha como partícula. ¿Cuál es la rapidez angular del disco cuando la cucaracha llega al borde del disco?

R: $\omega_f = 1.37\,\text{rad/s}$.

Ejercicio 10
Un estudiante está sentado en una silla que puede girar en torno de un eje vertical. El estudiante, inicialmente en reposo, está sosteniendo una rueda de bicicleta frente a él [vea Fig.4].

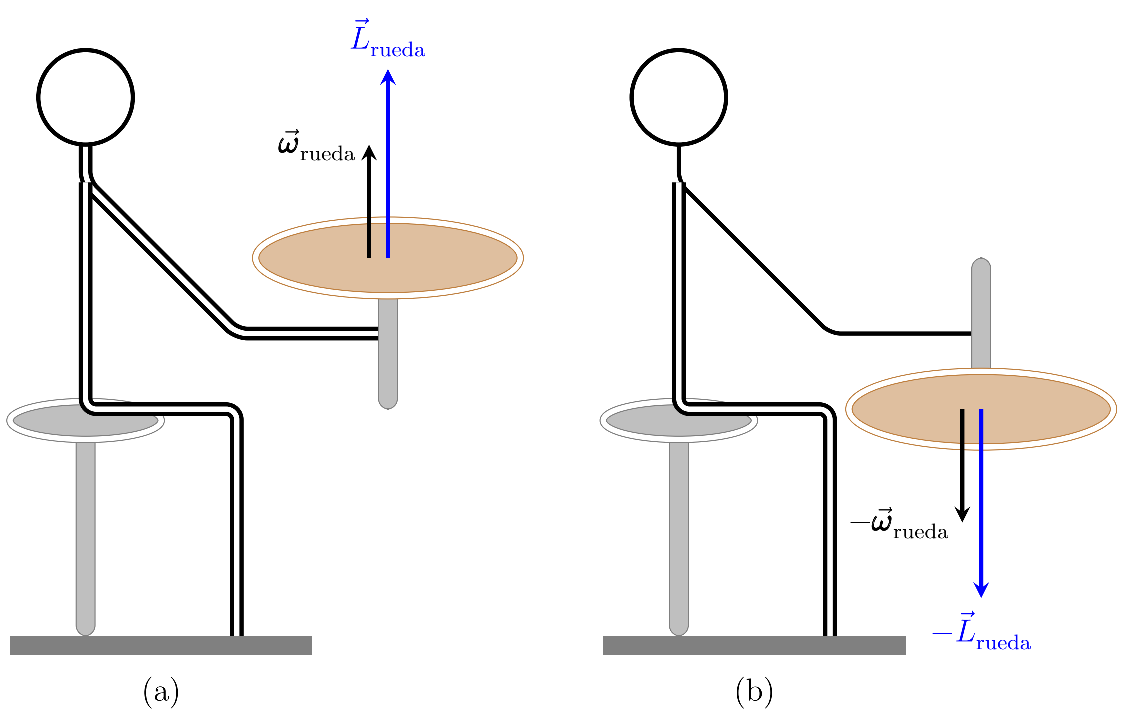


Figura 4: Esquema de un estudiante sentado en una silla giratoria que sostiene una rueda de bicicleta rotando. (a) La rueda gira en dirección anti-horaria vista desde arriba. (b) La rueda gira en dirección horaria vista desde arriba.

El borde de la rueda está cargado con plomo y su inercia rotacional I_{rueda} en torno de su eje central es $1.20\,\text{kg}\,\text{m}^2$ (El borde de la rueda contiene plomo suficiente para darle un momento inercial I_{rueda} considerable). La rueda está rotando a una rapidez angular $\omega_{\text{rueda}} = 3.90\,\text{rev/s}$; como vista desde arriba, la rotación es en la dirección anti-horaria. El eje de la rueda es vertical, y el momentum angular $\vec{L}_{\text{rueda}}$ apunta verticalmente hacia arriba [vea Fig.4(a)]. El estudiante, ahora, invierte la rueda, de modo tal que, vista desde arriba, ésta está rotando en la dirección horaria. Su momentum angular, ahora, es $-\vec{L}_{\text{rueda}}$ [vea Fig.4(b)]. La inversión tiene efecto en el estudiante, la silla y el centro de la rueda rotando juntos como un cuerpo rígido compuesto en torno del eje de rotación de la silla, con inercia rotacional $I_{\text{cuerpo}} = 6.80\,\text{kg}\cdot\text{m}^2$ (El hecho de que la rueda aún está rotando en torno de su centro no afecta la distribución de masa de este cuerpo rígido compuesto.) Después de la inversión de la rueda, ¿con qué rapidez angular ω_{cuerpo} y en qué dirección rota el cuerpo rígido compuesto?

R: $\omega_{\text{cuerpo}} = 1.40\,\text{rev/s}$. Visto desde arriba el estudiante gira en la dirección anti-horaria.

Ejercicio 11
Un estudiante se sienta sobre un banco rotatorio sosteniendo dos mancuernas, cada una de masa $m = 3.00\,\text{kg}$.

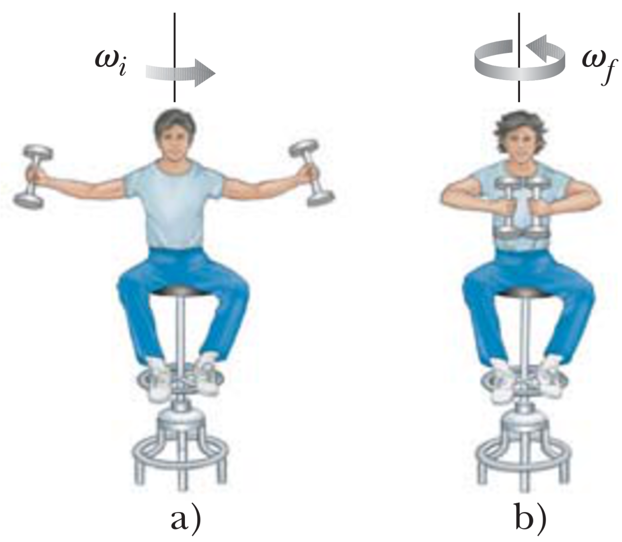


Figura 5: Figura ejercicio 10.

Cuando el estudiante extiende horizontalmente sus brazos, cada mancuerna se encuentra a $1.00\,\text{m}$ del eje de rotación y el estudiante da vueltas con rapidez angular de $0.750\,\text{rad/s}$. El momento de inercia del estudiante más el banco es de $3.00\,\text{kg}\,\text{m}^2$, el cual es constante. Posteriormente, el estudiante cierra sus brazos, ubicando las mancuernas a una distancia de $0.300\,\text{m}$ del eje de rotación, cada una.

(a) Calcule el momento de inercia del estudiante cuando tiene sus brazos extendidos y cerrados.

(b) Encuentre la rapidez angular del estudiante cuando tiene sus brazos cerrados.

(c) Encuentre la energía cinética rotacional del sistema antes y después de colocar las mancuernas en su posición final.

R: (a): $I_i = 9.00\,\text{kg}\,\text{m}^2$ e $I_f = 3.54\,\text{kg}\,\text{m}^2$, (b): $\omega_f = 1.91\,\text{rad/s}$. (c): $K_{R,i} = 2.53\,\text{J}$ y $K_{R,f} = 6.44\,\text{J}$.

Ejercicio 12

Un disco de momento de inercia I_1 da vueltas en torno a un eje vertical sin fricción con rapidez angular ω_i. Un segundo disco, con momento de inercia I_2 y, que inicialmente no gira, cae sobre el primer disco. Debido a la fricción entre la superficie de los discos, con el tiempo los dos llegan a la misma rapidez angular ω_f. La relación entre los momentos de inercia es $I_1 = 2I_2$.

(a) Calcule la rapidez angular final ω_f.

(b) Obtenga la energía cinética rotacional inicial y final del sistema.

(c) Encuentre la relación entre la energía cinética rotacional inicial y la energía cinética rotacional final del sistema.

R: (a) $\omega_f = \frac{2}{3}\omega_i$, b) $K_{R,f} = \frac{1}{3}I_1\omega_i^2$,
c) $\frac{K_{\mathrm{R},f}}{K_{\mathrm{R},i}} = \frac{2}{3}$.

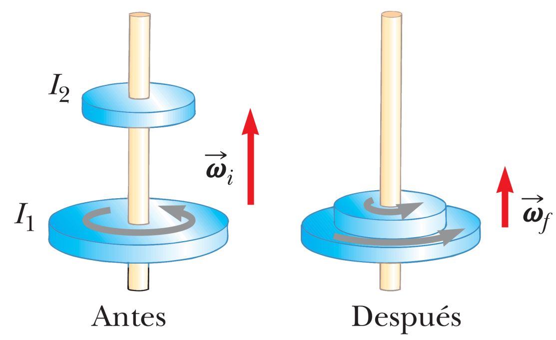


Figura 6: Figura ejercicio 11.
