Listado 11: Gauss-Jordan. Determinante. Cramer.

Los problemas marcados con **(P)** serán resueltos en práctica.

1. Calcule, si existe, la inversa de las siguientes matrices, donde $a \in \mathbb{R}$.

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

   (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

   (c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

   (d) **(P)** $D = \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (e) $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

   (f) $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

2. Para los siguientes pares de matrices A y B, justifique, sin calcular los valores de los determinantes, por qué $\det(A) = \det(B)$.

   (a) **(P)** $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -a & -g & -d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{pmatrix}$,

   (b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 20 \\ 1 & 1 & 8 \\ 4 & 3 & 17 \end{pmatrix}$,

   (c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_2 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$,

   (d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}$.

3. Sea $x \in \mathbb{R}$. Justifique cada una de las siguientes igualdades.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1-x^2 & x & 1 \\ 1-x & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-x^2 & x & 1-x \\ 1-x & 1 & x-1 \end{vmatrix}, \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1-x^2 & 1-x \\ 1 & 1-x & x-1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \\ 1 & 2-x-x^2 & x-1 \end{vmatrix}, \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1-x & 0 \\ 1 & x-1 & (x-1)(x+2) \end{vmatrix} = (x-1)^2(x+2).
\end{aligned}$$

4. Sean $x \in \mathbb{R}$ y

$$a = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix}.$$

Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

- $a = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix}.$
- Si $x = 0$ o $x = 1$, entonces $a = 0$.
- $a = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, 1\}$.
- Si $x = 3$, entonces $a = 0$.

5. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $\det(A) = 2$. Calcule:

(a) $\det(A^5)$, (b) $\det(-A)$, (c) $\det(2A^{-1})$, (d) $\det\left(AA^T\right)$.

6. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

(a) Encuentre los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema es compatible determinado.

(b) Si a es tal que el sistema es compatible determinado, encuentre los valores de $x, y, z \in \mathbb{R}$ que satisfacen las ecuaciones anteriores mediante el método de Cramer.

7. En cada caso calcule $\det(A)$ y decida si A es invertible. En caso que lo sea, determine A^{-1} y $\det(A^{-1})$.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, (b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Determine para qué valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ se cumple que $\det(A - \lambda I) = 0$, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Determine para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ se cumple que cada una de las siguientes matrices tiene inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-\sqrt{2} & 3 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -k \\ 2 & 6 & -2k \\ 1 & 3 & 1+k \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}.$$

10. Determine para qué valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ se cumple que las siguientes matrices son invertibles.

(a) **(P)** $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$.

11. Determine los valores que debe tomar el parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ para que el sistema siguiente sea compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{rcccccl} (1-\lambda)x & + & y & + & z & = & a \\ x & + & (1-\lambda)y & + & z & = & b \\ x & + & y & + & (1-\lambda)z & = & c \end{array}\right\}$$

En el caso en que el sistema no sea compatible determinado, determine las condiciones que deben satisfacer $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que el sistema sea compatible indeterminado.

12. Muestre que si A es una matriz triangular superior (o triangular inferior), su determinante es igual al producto de los elementos en la diagonal principal de A.

13. Muestre que si A es invertible, entonces $\det(A) \neq 0$ y $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

14. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz ortogonal (A es ortogonal si y solo si $A^{\mathrm{T}} = A^{-1}$).

    (a) Demuestre que $|A| = \pm 1$.

    (b) Demuestre que si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ también es ortogonal, entonces AB es ortogonal.

    (c) Demuestre que si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es simétrica, entonces $A^{-1}BA$ es una matriz simétrica.

15. Sean A, B matrices de orden n. Demuestre que:

    (a) **(P)** Si $A \neq \Theta$, $B \neq \Theta$ son tales que $AB = \Theta$, entonces $|A| = |B| = 0$.

    (b) Si $A^m = \Theta$ para algún entero positivo m, entonces $I - A$ es invertible.

    (c) **(P)** Si $A^m = \Theta$ para algún entero positivo m, entonces A no es invertible.

    (d) Para todo $c \in \mathbb{R}$ se cumple que $|cA| = c^n|A|$.

    (e) **(P)** Si A es antisimétrica y n es impar, entonces $|A| = 0$.

16. Considere el sistema de ecuaciones $Ax = b$ con

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Después de realizar las siguientes operaciones elementales a A

$$f_2 \leftarrow f_2 - 2f_1, \quad f_3 \leftarrow f_3 - f_1$$

se obtiene la matriz

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) ¿Cuál es el rango de A? Justifique su respuesta.

(b) ¿Para qué valores de α el sistema $Ax = b$ es incompatible? Justifique su respuesta.

(c) Sea α tal que el sistema $Ax = B$ es compatible, encuentre su conjunto solución.