Dinámica Rotacional

Física II - 510150

Prof. José G. Aguirre Gómez

Departamento de Física
Universidad de Concepción

jaguirre@udec.cl - Oficina: 315

Atención de Estudiantes:
Jueves de 10:00 a 12:00 hrs.

Resultados de Aprendizaje

- *Analizar el movimiento de un cuerpo que rota y se mueve como un todo en el espacio.*
- *Entender el significado de* **cantidad de movimiento angular** *o, simplemente,* **momentum angular** *de una partícula o de un cuerpo.*
- *Aprender de que manera el momentum angular de un cuerpo cambia con el tiempo.*

Un objeto rígido rueda en trayectoria recta sobre una superficie plana. El eje de rotación es siempre paralelo a su orientación inicial en el espacio [vea **Fig.1**].

Un punto sobre el borde del cilindro se mueve en una trayectoria compleja llamada *cicloide*.

El análisis se simplifica concentrándose en el centro de masa: Se mueve en línea recta.

Un cilindro que rueda sin deslizamiento sobre la superficie tiene un **movimiento de rodamiento puro**: Existe una correspondencia simple entre su movimiento rotacional y traslacional.

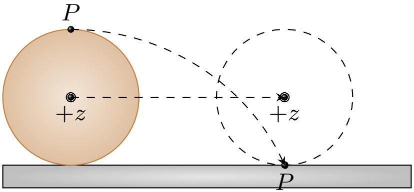


Figura 1: *Cilindro en rodamiento puro sobre una superficien horizontal. El centro se mueve en línea recta y un punto en el borde se mueve en una trayectoria cicloide.*

Considere un cilindro uniforme de radio R que rueda sin deslizarse sobre una superficie horizontal (ver **Fig.2**). A medida que el cilindro rueda a través de un ángulo θ, su centro de masa se mueve un distancia lineal $s = R\theta$.

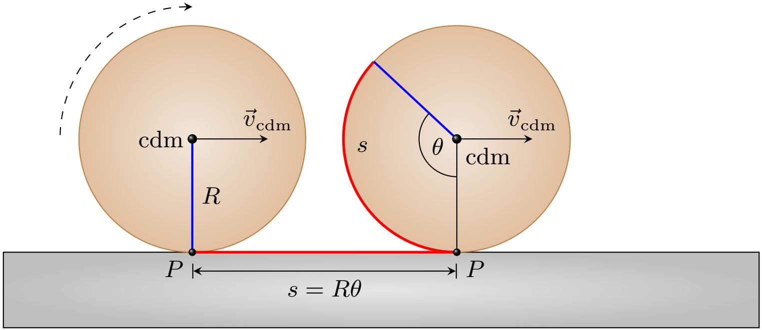


Figura 2: *En un movimiento de rodamiento puro, a medida que el cilindro rueda a través de un ángulo θ, su centro de masa se traslada una distancia lineal $s = R\theta$.*

Imagine que permanece en un marco de referencia en resposo respecto al centro de masa que se mueve con rapidez v_{cdm}: Observa al objeto y lo ve en rotación pura alrededor de su centro de masa.

La **Fig.3(a)** muestra las velocidades de los puntos en el tope, en el centro y en la parte baja del objeto según lo observa. Además de estas velocidades, cada punto sobre el objeto se mueve en la misma dirección y con rapidez v_{cdm} respecto a la superficie sobre la que rueda. La **Fig.3(b)** muestra estas velocidades para un objeto que no gira.

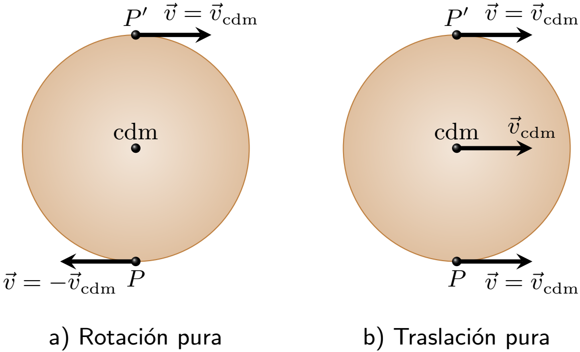
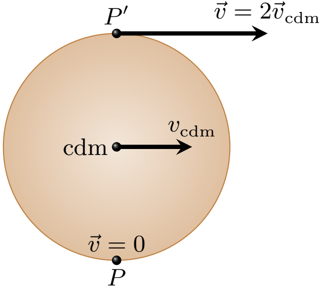


Figura 3: *Movimiento de un objeto que rueda: (a) Movimiento de rotación pura y (b) movimiento de traslación pura.*

En el marco de referencia en reposo respecto de la superficie, la velocidad de un punto determinado sobre el objeto es la suma de las velocidades que se muestran en las **Figs.3(a)** y **3(b)**. La **Fig.3(c)** muestra los resultados de la suma de esas velocidades.



c) Traslación + rotación

Figura 3: *(c) Movimiento de un objeto que rueda como la suma de un movimiento de traslación pura y uno de rotación pura.*

Observe que el punto de contacto entre la superficie y el cilindro en la **Fig.3(c)** tiene una rapidez translacional cero. En este instante, el objeto que rueda es móvil en exactamente la misma forma que si la superficie se retirara y el objeto fuera articulado en el punto P y girara en torno a un eje que pasa a través de P. La energía cinética total de este objeto que se piensa que está girando se expresa como

$$K = \frac{1}{2} I_P \omega^2, \tag{1}$$

Ya que el movimiento del objeto que se piensa que está girando es el mismo en este instante que el verdadero objeto en rodamiento, la Ec.(1) también da la energía cinética del objeto en rodamiento. Al aplicar el teorema de ejes paralelos, se puede sustituir $I_P = I_{\mathrm{cdm}} + MR^2$ en la Ec.(1) para obtener

$$K = \frac{1}{2} I_{\mathrm{cdm}} \omega^2 + \frac{1}{2} MR^2 \omega^2.$$

Al usar $v_{\mathrm{cdm}} = R\omega$, esta ecuación se puede expresar como

$$K = \frac{1}{2} I_{\mathrm{cdm}} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{\mathrm{cdm}}^2. \tag{2}$$

En la expresión anterior, Ec.2:

El término $\dfrac{1}{2}I_{\mathrm{cdm}}\omega^2$ representa la energía cinética rotacional del cilindro en torno a su centro de masa.

El término $\dfrac{1}{2}Mv_{\mathrm{cdm}}^2$ representa la energía cinética que tendría el cilindro si sólo se trasladara a través del espacio sin rotar.

En consecuencia:

La energía cinética total de un objeto en rodamiento puro es la suma de la energía cinética rotacional en torno al centro de masa y la energía cinética traslacional del centro de masa.

Este enunciado es consistente con las situaciones ilustradas en las **Fig.3(a)**, **3(b)** y **3(c)**, las que muestran que la velocidad de un punto en el objeto es la suma de la velocidad del centro de masa y la velocidad tangencial en torno al centro de masa.

Si un disco rueda con rapidez constante, no tiene tendencia a resbalar en el punto de contacto P: No existe fuerza friccional actuando en ese punto.

Si una fuerza neta actúa sobre el disco que rueda para aumentar o dismimuir su rapidez, entonces esta fuerza causa una aceleración del centro de masa $\vec{a}_{\text{cdm}}$ a la lo largo de la dirección de rodamiento.

- Esa fuerza también hace que el disco ruede más rápido o más lento, causando una aceleración angular α. La aceleración tiende a hacer que el disco resbale en el punto P. Así, una fuerza friccional $\vec{f}$ debe actuar sobre el disco en el punto P de manera que se oponga a esa tendencia.
- Si el disco **no resbala**, la fuerza friccional es del tipo estática $\vec{f}_s$. Derivando la expresión $v_{\text{cdm}} = R\omega$ con relación al tiempo, (R constante), se tiene

$$\frac{dv_{\text{cdm}}}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} \quad \therefore \quad a_{\text{cdm}} = R\alpha, \quad \text{para rodamiento puro} \tag{3}$$

- Si el disco **resbala**, la fuerza friccional es del tipo cinética $\vec{f}_k$. El movimiento no es de rodamiento puro y la Ec.(3) no se aplica.

Sólo consideraremos el movimiento de rodamiento puro.

La **Fig.4** muestra una rueda de bicicleta rotando rápidamente mientras rueda hacia la derecha a lo largo de una superficie plana.

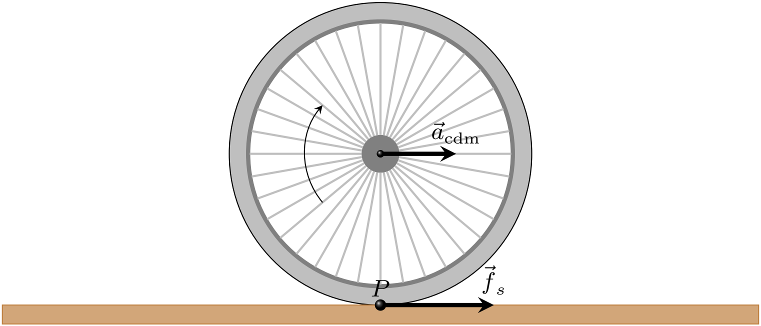


Figura 4: *Rueda de bicicleta rodando horizontalmente sin resbalar con aceleración lineal* $\vec{a}_{\mathrm{cdm}}$*. La fuerza friccional* $\vec{f}_s$ *en el punto* P*, se opone a la tendencia a resbalar.*

La rotación rápida tiende a hacer resbalar la rueda hacia la izquierda en el punto P.

Considere un cuerpo rígido redondo de masa M y radio R en movimiento de rodamiento puro bajando una rampa de longitud x que forma un ángulo θ con la horizontal. Deseamos encontrar a_{cdm}. Usaremos la segunda ley de Newton en sus dos versiones $\sum F = ma$ y $\sum \tau = I\alpha$.

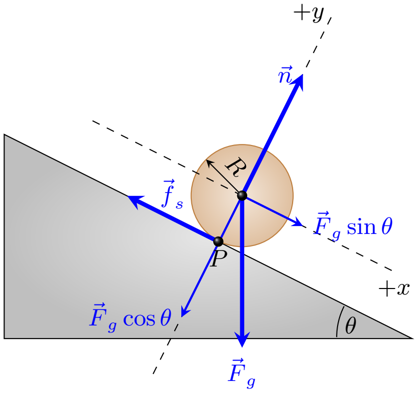


Figura 5: *Objeto uniforme redondo que rueda por un plano inclinado. La energía mecánica del sistema se conserva en el movimiento de rodamiento puro.*

Las fuerzas sobre el objeto son:

- La fuerza gravitacional $\vec{F}_g$ dirigida hacia abajo y aplicada en el centro de masa del objeto. La componente a lo largo de la rampa es $F_g \sin\theta$, igual a $Mg\sin\theta$.
- La fuerza normal $\vec{n}$ perpendicular a la rampa. Actúa en el punto P, pero se considera como si actuara en el centro de masa.
- La fuerza friccional $\vec{f}_s$ que actúa en el punto de contacto P dirigida hacia arriba de la rampa (¿Puede ver por qué?)

Apliquemos la segunda ley de Newton (forma lineal) a la componente x,

$$\sum F_x = ma_x, \quad Mg\sin\theta - f_s = Ma_{\text{cdm}} \quad \therefore \quad f_s = M(g\sin\theta - a_{\text{cdm}}) \tag{4}$$

Apliquemos la segunda ley de Newton (forma angular) al objeto en rotación en torno de su centro de masa.

El torque producido por la fuerza $\vec{f}_s$ tiene brazo de palanca R y es

$$\tau_{f_s} = -Rf_s$$

el signo negativo (-) es porque tiende a hacer girar al objeto en la dirección horaria.

Las fuerzsa $\vec{F}_g$ y $\vec{n}$ tienen brazos de palanca igual acero, de modo que no producen torque sobre el objeto. Así, la segunda ley de Newton en forma angular se escribe

$$\sum \tau = I_{\text{cdm}}\alpha \quad \therefore \quad -Rf_s = I_{\text{cdm}}\alpha \quad \therefore \quad f_s = -\left(\frac{I_{\text{cdm}}}{R}\right)\alpha \tag{5}$$

De la Ec.(3), se ve que $a_{\text{cdm}} \propto \alpha$ (Note que a_{cdm} es positiva y α es negativa). Así, $\alpha = -a_{\text{cdm}}/R$ y

$$f_s = I_{\text{cdm}}\frac{a_{\text{cdm}}}{R^2} \tag{6}$$

Igualando las expresiones de las Ecs.(6) y (4), encontramos

$$M(g\sin\theta - a_{\text{cdm}}) = I_{\text{cdm}}\frac{a_{\text{cdm}}}{R^2} \quad \rightarrow \quad a_{\text{cdm}}\left(\frac{I_{\text{cdm}}}{R^2} + M\right) = Mg\sin\theta$$

$$a_{\text{cdm}} = \frac{Mg\sin\theta}{\frac{I_{\text{cdm}}}{R^2} + M} \quad \therefore \quad \boxed{a_{\text{cdm}} = \frac{g\sin\theta}{1 + \frac{I_{\text{cdm}}}{MR^2}}} \tag{7}$$

Ejemplo

Una esfera uniforme, de masa $M = 6.00\,\mathrm{kg}$ y radio R, rueda con movimiento de rodamiento puro desde el reposo y hacia abajo una rampa inclinada un ángulo de 30.0° (vea la **Fig.5**). La esfera baja una distancia vertical $h = 1.20\,\mathrm{m}$ para llegar a la base de la rampa.

(a) Determine la rapidez de la esfera en la base de la rampa.

(b) Determine la magnitud y dirección de la fuerza friccional sobre la esfera a medida que baja la rampa.

Solución

(a) Usemos conservación de la energía mecánica del sistema esfera-Tierra. Al inicio del movimiento la energía del sistema esfera-Tierra es puramente gravitacional

$$U_i = Mgh$$

En la base de la rampa la energía mecánica es puramente cinética

$$E_f = \frac{1}{2}Mv_{\mathrm{cdm}}^2 + \frac{1}{2}I_{\mathrm{cdm}}\omega^2$$

Continuación

Conservación de la energía mecánica implica

$$E_i = E_f, \quad \frac{1}{2}Mv_{\mathrm{cdm}}^2 + \frac{1}{2}I_{\mathrm{cdm}}\omega^2 = Mgh$$

Dado que se tiene movimiento de rodamiento puro $v_{\mathrm{cdm}} = R\omega$, así

$$\frac{1}{2}Mv_{\mathrm{cdm}}^2 + \frac{1}{2}I_{\mathrm{cdm}}\left(\frac{v_{\mathrm{cdm}}^2}{R}\right) = Mgh$$

El momento de inercia para una esfera sólida en torno del centro de masa es $I_{\mathrm{cdm}} = \frac{2}{5}MR^2$, luego

$$\frac{1}{2}Mv_{\mathrm{cdm}}^2 + \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\cancel{2}}{5}MR^2\right)\left(\frac{v_{\mathrm{cdm}}^2}{R^2}\right) = Mgh \quad \rightarrow \quad \frac{7}{10}Mv_{\mathrm{cdm}}^2 = Mgh$$

o sea,

$$v_{\mathrm{cdm}} = \sqrt{\frac{10}{7}hg} = \sqrt{\frac{10}{7}(9.80\,\mathrm{m/s^2})(1.20\,\mathrm{m})} = 4.10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Continuación

Podemos usar la Ec.(6) para determinar f_s. Usemos la Ec.(7) para calcular a_{cdm}

$$a_{\mathrm{cdm}} = \frac{g\sin\theta}{1+\frac{I_{\mathrm{cdm}}}{MR^2}} = \frac{g\sin\theta}{1+\left(\frac{2}{5}\cancel{MR^2}\right)\left(\frac{1}{\cancel{MR^2}}\right)}$$

o sea

$$a_{\mathrm{cdm}} = \frac{g\sin\theta}{1+\frac{2}{5}} = \frac{5}{7}g\sin\theta = \frac{5}{7}(9.80\,\mathrm{m/s^2})\sin 30.0^\circ = 3.50\,\mathrm{m/s^2}$$

Luego

$$f_s = I_{\mathrm{cdm}}\frac{a_{\mathrm{cdm}}}{R^2} = \frac{2}{5}M\cancel{R^2}\left(\frac{a_{\mathrm{cdm}}}{\cancel{R^2}}\right) = \frac{2}{5}Ma_{\mathrm{cdm}},$$

o sea

$$f_s = \frac{2}{5}(6.00\,\mathrm{kg})(3.50\,\mathrm{m/s^2}) = 8.40\,\mathrm{N}$$

Cuando un yo-yo rueda hacia abajo su cuerda se desenrolla una distancia h. El yo-yo pierde energía potencial Mgh y gana energía cinética tanto traslacional $\frac{1}{2}Mv_{\mathrm{cdm}}^2$ y rotacional $\frac{1}{2}I_{\mathrm{cdm}}\omega^2$.

Cuando comienza a subir, pierde su energía cinética y recupera energía potencial.

En yo-yos modernos la cuerda no está atada al eje, sino que sólo enrollada alrededor de éste.

Al final de la cuerda, una fuerza hacia arriba detiene la caida del yo-yo. El yo-yo gira, sólo con energía cinética rotacional.

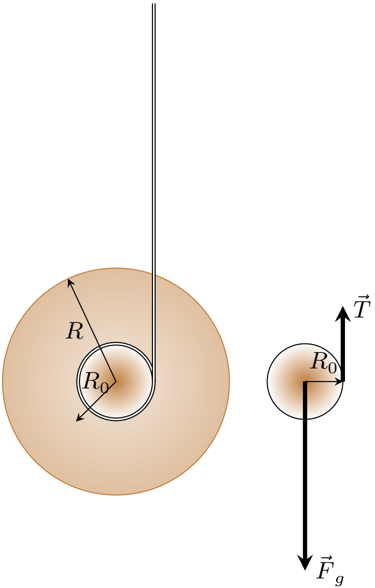


Figura 6: *Esquema de un yo-yo.*

Para encontrar la aceleración del centro de masa de un yo-yo, se sigue un procedimiento similar al enterior, excepto que en el presente caso:

- En vez de bajar una rampa, el yo-yo se desenrolla de una cuerda a un ángulo $\theta = 90^0$ con la horizontal.
- En vez de rodar en su superficie de radio externo R, rueda en torno de un eje de radio R_0.
- En vez de ser detenido por una fuerza friccional $\vec{f}_s$, el yo-yo es detenido por la fuerza $\vec{T}$ debido a la cuerda.

La expresión es

$$a_{\text{cdm}} = \frac{g}{1 + \frac{I_{\text{cdm}}}{MR_0^2}}, \quad (8)$$

donde I_{cdm} es la inercia rotacionala del yo-yo en torno de su centro de masa y M es su masa.

El estudio del **momentum angular** es de gran importancia en la dinámica rotacional.

Si sobre un sistema no actúan momentos de torsión externos **el momentum angular del sistema se conserva**, similar al caso del principio de conservación del momentum lineal en un sistema aislado.

La **ley de conservación del momentum angular** es una ley fundamental en física, que se cumple tanto en sistemas relativísticos como cuánticos.

La **Fig.7** muestra una partícula en el punto P en el plano xy. Una única fuerza $\vec{F}$ en ese plano actúa sobre la partícula. La posición de la partícula relativa al origen O es dada por el vector $\vec{r}$.

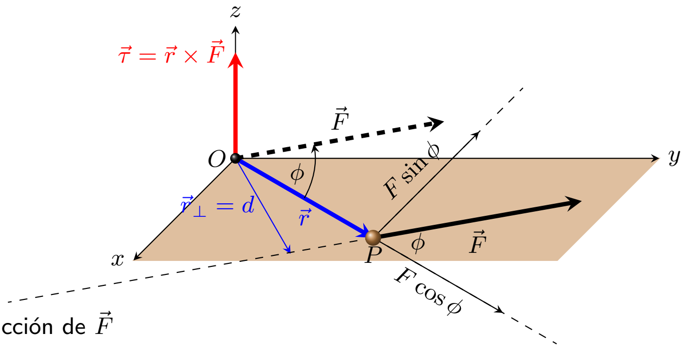


Figura 7: *Definición del vector torque* $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$.

La dirección del vector torque $\vec{\tau}$ se encuentra usando la regla de la mano derecha.

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad \text{y} \quad |\vec{\tau}| \equiv \tau = rF \sin\phi. \tag{9}$$

Ejemplo

Una fuerza en el plano xy, $\vec{F} = (2.00\,\hat{\imath} + 3.00\,\hat{\jmath})\,\mathrm{N}$, se aplica a un objeto que puede girar en torno a un eje fijo alineado a lo largo del eje z. La fuerza se aplica a un punto ubicado en $\vec{r} = (4.00\,\hat{\imath} + 5.00\,\hat{\jmath})\,\mathrm{m}$. Encuentre el vector momento de torsión $\vec{\tau}$.

Solución

Apliquemos la Ec.(9), con $\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = 0$,

$$\begin{aligned}
\vec{\tau} &= \vec{r} \times \vec{F} \\
&= [(4.00\,\hat{\imath} + 5.00\,\hat{\jmath})\,\mathrm{m}] \times [(2.00\,\hat{\imath} + 3.00\,\hat{\jmath})\,\mathrm{N}] \\
&= [12.0\,\cancel{(\hat{\imath} \times \hat{\jmath})}^{\hat{k}} + 10.0\,\cancel{(\hat{\jmath} \times \hat{\imath})}^{-\hat{k}}]\,\mathrm{N \cdot m} \\
&= [12.0\,\hat{k} + 10.0\,(-\hat{k})]\,\mathrm{N \cdot m} = (2.0\,\mathrm{N \cdot m})\hat{k}
\end{aligned}$$

Alternativamente, la magnitud del torque sobre una partícula debido a una fuerza puede ser escrita como

$$\tau = rF_{\perp} \quad \text{donde} \quad F_{\perp} = F\sin\phi \tag{10}$$

es la componente de la fuerza $\vec{F}$ perpendicular al vector posición $\vec{r}$, o como

$$\tau = r_{\perp}F = dF \quad \text{donde} \quad r_{\perp} = d = r\sin\phi \tag{11}$$

es el brazo de momento o brazo de palanca de $\vec{F}$ (distancia perpendicular entre O y la línea de acción de $\vec{F}$).

Tal como el momentum lineal ayuda a analizar el movimiento traslacional, el **momentum angular**, ayuda a analizar los objetos en movimiento rotacional.

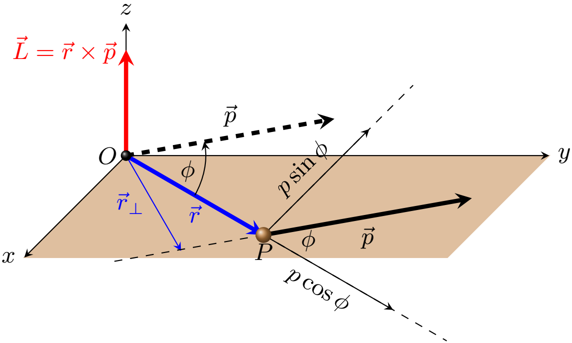


Figura 8: *Momentum angular $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ de una partícula. El valor de $\vec{L}$ depende del eje en torno al que se mide y es un vector perpendicular tanto a $\vec{r}$, como a $\vec{p}$.*

El **momentum angular** $\vec{L}$ de una partícula respecto del origen O es definido por

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v}) = m(\vec{r} \times \vec{v}) \tag{12}$$

Una partícula de masa m ubicada en $\vec{r}$ se mueve con momentum lineal $\vec{p}$ como mostrado en la **Fig.8**. De la definición de torque tenemos

$$\sum \vec{\tau} = \vec{r} \times \sum \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Agreguemos al lado derecho de la expresión anterior la cantidad $d\vec{r}/dt \times \vec{p}$, la cual es cero, porque $d\vec{r}/dt = \vec{v}$ y $\vec{v}$ y $\vec{p}$ son paralelos. Así

$$\sum \vec{\tau} = \vec{r} \times \sum \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}.$$

Del cálculo diferencial, se sabe que,

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p},$$

con lo cual se llega a

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}). \tag{13}$$

La combinación $\vec{r} \times \vec{p}$ se conoce como **momentum angular** de la partícula:

El momentum angular instantáneo $\vec{L}$ de una partícula en relación con un eje a través del origen O se define mediante el producto cruz (producto vectorial) del vector posición instantánea de la partícula $\vec{r}$ y su momentum lineal instantáneo $\vec{p}$:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}. \tag{14}$$

Luego, la Ec.(13) puede ser escrita como

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \tag{15}$$

el análogo rotacional de la segunda ley de Newton $\sum \vec{F} = d\vec{p}/dt$. El momento de torsión hace que el momentum angular cambie, de modo similar al cambio en el momentum lineal causado por una fuerza.

La Ec.(15) establece que el momento de torsión sobre una partícula es igual a la relación de cambio en el tiempo del momentum angular de la partícula.

Note que la Ec.(15) es válida sólo si $\sum \vec{\tau}$ y $\vec{L}$ se miden en torno al mismo eje y se cumple **para cualquier eje fijo en un marco inercial**.

En el SI la unidad del momentum angular es el $\mathrm{kg\,m^2/s}$. Note, además, que tanto la magnitud, como la dirección del vector $\vec{L}$ dependen de la elección del eje.

Siguiendo la regla de la mano derecha, se puede ver que la dirección del vector $\vec{L}$ es perpendicular al plano que forman los vectores $\vec{r}$ y $\vec{F}$.

En la **Fig.8**, los vectores $\vec{r}$ y $\vec{p}$ están en el plano xy, de modo que el vector $\vec{L}$ apunta en la dirección del eje z. Dado que $\vec{p} = m\vec{v}$, la magnitud del vector $\vec{L}$ es

$$|\vec{L}| = L = mvr\sin\phi, \tag{16}$$

donde ϕ es el ángulo entre los vectores $\vec{r}$ y $\vec{p}$.

Si $\phi = 0^\circ$ o $\phi = 180^\circ$ $(\vec{r} \parallel \vec{p})$, $L = 0$: La velocidad traslacional de la partícula es al lo largo de una línea que pasa a través de eje de rotación, la partícula tiene momentum angular nulo respecto de ese eje.

Si $\vec{r} \perp \vec{p}$ $(\phi = 90^\circ)$, $L = mvr$: La partícula se mueve como si estuviera en el borde de una rueda giratoria en torno al eje en un plano definido por los vectores $\vec{r}$ y $\vec{p}$.

Ejemplo

Una partícula se mueve en el plano xy en una trayectoria circular de radio r, como mostrado en la **Fig.9**. Encuentre la magnitud y dirección del momentum angular de la partícula en torno a un eje que pasa a través de O, cuando su velocidad es $\vec{v}$.

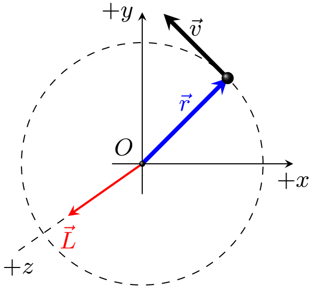


Figura 9: *Una partícula moviéndose en una trayectoria circular de radio $\vec{r}$ con velocidad $\vec{v}$.*

Solución

Para una partícula que se mueve en una trayectoria circular de radio r con velocidad $\vec{v}$ se tiene que $\vec{r} \perp \vec{v}$ en todo instante, de modo que, la magnitud de la cantidad de movimiento angular de la partícula es

$$L = rp\sin\phi = mrv\sin 90^\circ = mrv$$

y su dirección es perpendicular al plano xy y hacia afuera de la página. Así,

$$\vec{L} = mrv\hat{k}$$

Una partícula en movimiento circular uniforme en el plano xy tiene un momentum angular constante en torno a un eje de rotación (eje-z) que pasa a través del centro de su trayectoria.

Para un sistema de partículas, la segunda ley de Newton se escribe como,

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}_{\text{tot}}}{dt},$$

o sea, la fuerza externa neta que actúa sobre un sistema de partículas es igual a la rapidez de cambio temporal del momentum lineal total del sistema.

El mementum angular total de un sistema de partículas en torno a un eje se define como la suma vectorial de los momentas angulares de las partículas individuales

$$\vec{L}_{\text{tot}} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \cdots + \vec{L}_n = \sum_i \vec{L}_i,$$

donde la suma vectorial es sobre las n partículas del sistema. Derivando esa ecuación respecto del tiempo nos lleva a

$$\frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_i \vec{\tau}_i,$$

donde se usó la Ec.(15), para una partícula.

Los momentos de torsión que actúan sobre las partículas son debido tanto a fuerza internas entre las partículas, como a las fuerzas externas.

$$\frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt} = \sum_i \left(\vec{\tau}_{i,\text{int}} + \vec{\tau}_{i,\text{ext}}\right)$$

El momento de torsión $\sum_i \vec{\tau}_{i,\text{int}} = 0$ (recuerde la tercera ley de Newton): Fuerzas entre partículas actúan a lo largo de la línea de separación entre ellas, el brazo de momento d, desde O hasta la líea de acción de las fuerzas, es igual para ambas partículas y las fuerzas están en direcciones opuestas.

En consecuencia el momentum angular total de un sistema varía con el tiempo sólo si un momento de torsión externo neto actúa sobre el sistema

$$\frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt} = \sum \vec{\tau}_{\text{ext}}, \tag{17}$$

la cual es el análogo rotacional de $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = d\vec{p}_{\text{tot}}/dt$ para un sistema de partículas.

La Ec.(17) es la expresión matemática de la versión para el momentum angular del modelo de sistema no aislado.

Si un sistema no es aislado, en el sentido que existe un momento de torsión neto sobre él

$$\sum \vec{\tau}_{\text{ext}} \neq 0$$

el momento de torsión neto es igual a la rapidez de cambio temporal del momentum angular total del sistema $d\vec{L}_{\text{tot}}/dt$.

Aunque no se comprueba en este caso, este enunciado es verdadero sin importar el movimiento del centro de masa.

Incluso se aplica si el centro de masa acelera, siempre que el momento de torsión y el momentum angular se evalúen en relación a un eje a través del centro de masa.

Ejemplo

Una esfera de masa m_1 y un bloque de masa m_2 están conectados mediante una cuerda ligera que pasa sobre una polea, como mostrado en la **Fig.10**. El radio de la polea es R, y la masa del borde delgado es M. Los rayos de la polea tienen masa despreciable. El bloque se desliza sobre una superficie horizontal sin fricción. Encuentre una expresión para la aceleración lineal de los objetos, con los conceptos de momentum angular y momento de torsión.

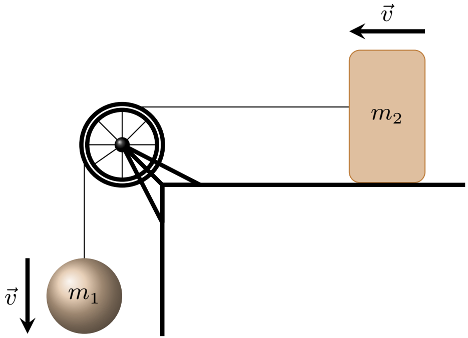


Figura 10: *Esquema para el Ejemplo 4.*

Solución

Identifique el sistema esfera-polea-bloque. Este sistema es no aislado porque sobre la esfera (una parte del sistema) actúa la fuerza externa, la gravitacional.

Considere el eje de rotación de la polea como el eje de rotación del sistema.

El momentum angular del sistema L_{s} es igual a la suma de los momentas angulares de la esfera L_{e}, el bloque L_{b} (ambos con movimiento traslacional) y el de la polea L_{p} (de rotación pura).

La esfera y el bloque tienen la misma rapidez v y cada punto sobre la polea se mueve, también, con esa rapidez. Así,

$$L_{\mathrm{e}} = Rm_1 v, \quad L_{\mathrm{b}} = Rm_2 v \quad \mathrm{y} \quad L_{\mathrm{p}} = RMv.$$

Luego, el momentum angular total del sistema es

$$L_{\mathrm{s}} = Rm_1 v + Rm_2 v + RMv = Rv(m_1 + m_2 + M)$$

Continuación

La fuerza gravitacional sobre la esfera de masa m_1 es la única que ejerce un momento de torsión sobre el sistema, de magnitud

$$\sum \tau_{\text{ext}} = m_1 g R$$

De la Ec.(17), se tiene

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \frac{dL_{\text{tot}}}{dt} \quad \therefore \quad \sum \tau_{\text{ext}} = \frac{d}{dt}(Rv(m_1 + m_2 + M))$$

Igualando ambas expresiones para $\sum \tau_{\text{ext}}$, se obtiene

$$m_1 g R = R(m_1 + m_2 + M)\left(\frac{dv}{dt}\right), \quad \therefore \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{m_1 g}{(m_1 + m_2 + M)}$$

Considere un objeto rígido giratorio en torno a un eje fijo que coincide con el eje z de un sistema de coordenadas rectangulares, como se esquematiza en la **Fig.11**.

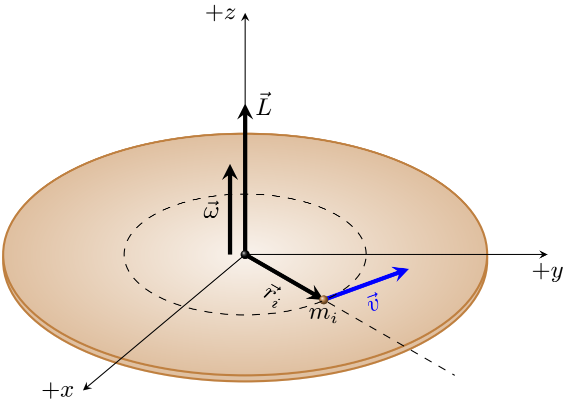


Figura 11: *Objeto rígido girando en torno a un eje. El vector momentum angular* $\vec{L}$ *apunta en la misma dirección que el vector velocidad angular* $\vec{\omega}$.

Cada **partícula** del objeto gira en el plano xy con la misma rapidez angular ω.

La magnitud del momentum angular de una partícula de masa m_i en torno al eje z es $L_{iz} = m_i r_i v_i$.

Dado que $v_i = r_i\omega$, la magnitud del momentum angular de esa partícula es

$$L_{iz} = m_i r_i^2 \omega.$$

Así como el vector $\vec{\omega}$, el vector $\vec{L}_i$ también está dirigido a lo largo del eje z.

Consideremos la suma de los L_{iz}, todos ellos apuntando a lo largo del eje z, debido a todas las partículas

$$\begin{aligned} L_z &= \sum_i L_{iz} = \sum_i m_i r_i^2 \omega = \left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega \\ L_z &= I_z \omega, \end{aligned} \tag{18}$$

donde $\sum_i m_i r_i^2 = I_z$ es el momento de inercia del objeto en torno del eje-z.

Haciendo dL_z/dt, con $I_z = \text{cte.}$, para un objeto rígido, se tiene

$$\frac{dL_z}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \alpha, \tag{19}$$

donde α es la aceleración angular relativa al eje de rotación.

Dado que $dL_z/dt = \sum \tau_{\text{ext}}$, con $\sum \tau_{\text{ext}}$ el momento de torsión externo neto, la ecuación aterior se reescribe como

$$\sum \tau_{\text{ext}} = I_z \alpha. \tag{20}$$

Entonces:

El momento de torsión externo neto que actúa sobre un objeto rígido giratorio en torno a un eje fijo es igual al momento de incercia (I) del objeto en torno del eje de rotación multiplicado por la aceleración angular del objeto en relación a dicho eje de rotación. Esta ecuación es también válida par un objeto rígido giratorio en torno a un eje móvil siempre que el eje en movimiento (1) pase a través del centro de masa y (2) sea un eje de simetría.

Si un objeto simétrico gira en torno a un eje fijo que pasa a través de su centro de masa, la Ec.(18) puede ser escrita en forma vectorial como

$$\vec{L} = (I_{\mathrm{cdm}})\,\vec{\omega},$$

donde el vector $\vec{L}$ es el momentum angular total del objeto medida respecto del eje de rotación.

Además, la expresión es válida para cualquier objeto, sin importar su simetría, si el vector $\vec{L}$ representa la componente del momentum angular a lo largo del eje de rotación.

Ejemplo

Calcule la magnitud del momentum angular de una bola de boliche que gira a $10\,\text{rev/s}$, como esquematizado en la **Fig.12**. La masa de una bola de boliche es de unos $7.0\,\text{kg}$ y tiene un radio de unos $12\,\text{cm}$.

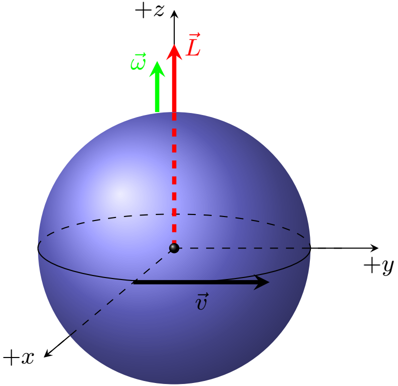


Figura 12: *Una bola de boliche girando en torno al eje z.*

Solución

Se tiene una efera rígida de masa M y radio de curvatura R y el eje de rotación pasa por el centro de masa el que coincide con el centro de simetría del objeto. La rapidez angular de la esfera es

$$\omega_z = 10\,\frac{\mathrm{rev}}{\mathrm{s}} \times \frac{2\pi\,\mathrm{rad}}{1\,\mathrm{rev}} = 20\pi\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

El momento de inercia de la bola de boliche en torno de un eje que pasa por su centro de masa (eje z en el ejemplo) y considerándola una esfera, es

$$I_z = \frac{2}{5}MR^2$$

El momentum angular de la bola de boliche está dirigido a lo largo del eje z y es

$$L_z = I_z\omega_z = \frac{2}{5}MR^2\left(20\pi\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right) = 8\pi(7.00\,\mathrm{kg})(0.12\,\mathrm{m})^2\left(\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right) = 2.5\,\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s}}$$

Ejemplo

Un padre (masa m_f) y su hija (masa m_d) se sientan en extremos opuestos de un sube y baja a iguales distancia desde el eje en el centro (ver **Fig.13**). El sube y baja se modela como una barra rígida de masa M y longitud ℓ y se articula sin fricción. La combinación da vueltas en un plano vertical con rapidez angular ω. (a) Encuentre una expresión para el momentum angular del sistema. (b) Encuentre una expresión para la aceleración angular del sistema cuando el sube y baja forma un ángulo θ con la horizontal.

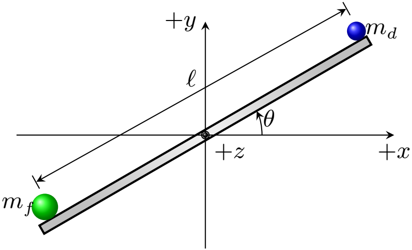


Figura 13: *Un juego de sube y baja.*

Solución

(a) Considere un eje de rotación que pasa por el centro del sube y baja, equidistante de los dos cuerpos, y que es perpendicular al plano de la página. El momentum angular del sistema está sobre ese eje de rotación, el que de acuerdo con la **Fig.13** corresponde al eje z.

Considerando los objetos en los extremos del sube y baja como partículas el sistema puede ser modelado como un sistema rígido.

El momento de inercia del sistema es la suma de los momentos de inercia de las tres componentes: El sube y baja de masa M, $I_{\text{sb}} = \frac{1}{12}M\ell^2$, el momento de inercia debido al padre, $I_f = m_f(\ell/2)^2$, y el momento de inercia de la hija, $I_d = m_d(\ell/2)^2$.

El momento de inercia total del sistema es

$$
\begin{aligned}
I_z = I_{sb} + I_f + I_d &= \frac{1}{12}M\ell^2 + m_f\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m_d\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \\
&= \frac{\ell^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_f + m_d\right)
\end{aligned}
$$

Continuación

Luego, la magnitud del momentum angular del sistema es

$$L_z = \frac{\ell^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_f + m_d\right)\omega_z$$

(b) Para encontrar la aceleración angular del sistema debemos determinar el momento de torsión neto sobre él. Las fuerzas responsables por el momento de torsión neto son la fuerza gravitacional sobre el padre y sobre la hija. El momento de torsión debido al padre es

$$\tau_f = +\left(\frac{\ell}{2}\right) m_f g \cos\theta$$

(el signo positivo indica que está dirigida hacia afuera de la página). El momento de torsión debido a la hija es

$$\tau_d = -\left(\frac{\ell}{2}\right) m_d g \cos\theta$$

(el signo negativo significa que está dirigida hacia el interior de la página).

Continuación

El momento de torsión neto sobre el sistema es

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \tau_f + \tau_d = \frac{1}{2}\left(m_f - m_d\right) g\ell \cos\theta$$

Dado que $dL/dt = \sum \tau_{\text{ext}}$, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(m_f - m_d\right) g\ell \cos\theta &= \frac{d}{dt}\left[\frac{\ell^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_f + m_d\right)\omega\right] \\ &= \frac{\ell^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_f + m_d\right)\frac{d\omega}{dt} = \frac{\ell^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_f + m_d\right)\alpha\end{aligned}$$

de la cual se obtine la expresión para la aceleración angular del sistema

$$\alpha = \frac{\frac{1}{2}\left(m_f - m_d\right) g\ell\cos\theta}{\frac{\ell^2}{4}\left(\frac{M}{3} + m_f + m_d\right)} = \frac{2\left(m_f - m_d\right) g\ell\cos\theta}{\ell^2\left(\frac{M}{3} + m_f + m_d\right)}$$

Dado que en general $m_f > m_d$ la aceleración agular es positiva.

Continuación

Tarea. Imagine que el padre se mueve hacia adentro del brazo del sube y baja a una distancia d desde el eje para intentar equilibrar los dos brazos. ¿Cuál es la expresión para la aceleración agular del sistema en ese caso, cuando se libera desde un ángulo arbitrario θ?

Si un sistema está aislado, es decir, si el momento de torsión externo neto que actúa sobre el sistema es cero, **el momentum angular total del sistema es constante en magnitud y dirección.**

Este enunciado es el principio de **conservación del momentum angular** y es la base de la **versión del momentum angular del modelo de sistema aislado**. Este principio se sigue directamente de la expresión

$$\sum \vec{\tau}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}_{\text{tot}}}{dt} = \vec{0} \tag{21}$$

por lo tanto

$$\vec{L}_{\text{tot}} = \text{constante} \quad \text{o} \quad \vec{L}_i = \vec{L}_f \tag{22}$$

En el caso de un sistema aislado que consiste de n partículas, esta ley de conservación se escribe como $\vec{L}_{\text{tot}} = \sum \vec{L}_n$. En un sistema giratorio deformable (con redistribución de masa), el momento de inercia del sistema cambia.

Dado que $|\vec{L}| = L = I\omega$, la conservación del momentum angular del sistema requiere que $I\omega = \text{cte.}$.

En este caso la ley de conservación del momentum angular se escribe como

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f = \text{constante} \tag{23}$$

Ahora, es posible afirmar que para un sistema aislado, la energía, el momentum lineal y el momentum angular se conservan

$$\text{Sistemas aislados} = \begin{cases} E_i = E_f; & \text{(no hay transferencia de energía)} \\ \\ \vec{p}_i = \vec{p}_f; & \text{si } \sum \vec{F}_{\text{ext}} = 0 \\ \\ \vec{L}_i = \vec{L}_f; & \text{si } \sum \vec{\tau} = 0 \end{cases} \tag{24}$$

Ejemplo

Una estrella da vueltas con un periodo de 30 días en torno a un eje a través de su centro. Después de que la estrella experimenta una explosión supernova, el núcleo estelar, que tiene un radio de 1.0×10^4 km, colapsa en una estrella de neutrones de 3.0 km de radio. Determine el periodo de rotación de la estrella de neutrones.

Solución

La estrella inicial es un sistema aislado.

Sabemos que $L_i = L_f$, o sea $I_i\omega_i = I_f\omega_f$.

Considerando a las estrellas como esferas los momentas de inercia de las estrellas inicial y de neutrones son, respectivamente,

$$I_i = \frac{2}{5}M_iR_i^2 \quad \text{y} \quad I_f = \frac{2}{5}M_fR_f^2$$

Continuación

Además, las rapideces angulares de las estrellas se relacionan a los periodos a través

$$\omega_i = \frac{2\pi}{T_i} \quad \text{y} \quad \omega_f = \frac{2\pi}{T_f}$$

De lo anterior se tiene

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

$$\left(\frac{2}{5}M_iR_i^2\right)\left(\frac{2\pi}{T_i}\right) = \left(\frac{2}{5}M_fR_f^2\right)\left(\frac{2\pi}{T_f}\right)$$

$$\frac{M_iR_i^2}{T_i} = \frac{M_fR_f^2}{T_f}$$

Dado que en el colapso no hay pérdida de masa, el periodo de rotación de la estrella de neutrones es

$$T_f = \left(\frac{R_f^2}{R_i^2}\right)T_i = \left(\frac{3.0\,\text{km}}{1.0\times10^4\,\text{km}}\right)^2(30\,\text{días}) = 2.7\times10^{-6}\,\text{días} = 0.23\,\text{s}.$$

Ejemplo

Un carrusel gira libremente en un plano horizontal en torno a un eje vertical sin fricción (ver **Fig.14**). La masa del carrusel es $M = 1.0 \times 10^2$ kg y su radio $R = 2.0$ m. Un estudiante de masa $m = 60$ kg camina lentamente desde el borde del disco hacia su centro. Si la rapidez angular del carrusel es 2.0 rad/s cuando el estudiante está en el borde, ¿cuál es la rapidez angular cuando alcanza un punto $r = 0.50$ m desde el centro?

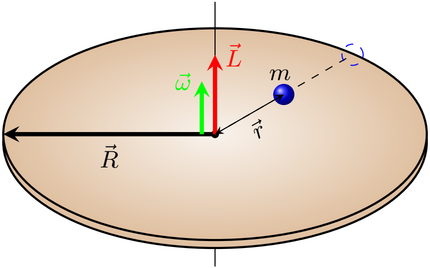


Figura 14: *Un carrusel con un objeto que se desplaza a lo largo de su radio.*

Solución

Se sabe que $I_i\omega_i = I_f\omega_f$.

Los momentas de inercia inicial del disco y del objeto (considerado como partícula) girando en torno del eje de rotación son, respectivamente,

$$I_{id} = \frac{1}{2}MR^2 \quad \text{y} \quad I_{ie} = mR^2$$

Luego, el momento de inercial total inicial del sistema es

$$I_i = I_{id} + I_{ie} = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2 = \left(\frac{1}{2}M + m\right)R^2$$

Ahora, $I_{fe} = mr^2$, luego el momento de inercia final del sistema es

$$I_f = I_{id} + I_{fe} = \frac{1}{2}MR^2 + mr^2$$

De la condición $L_i = L_f$ o $I_i\omega_i = I_f\omega_f$, se tiene

$$\left(\frac{1}{2}M + m\right)R^2\omega_i = \left(\frac{1}{2}MR^2 + mr^2\right)\omega_f$$

Continuación

Resolviendo para ω_f en la expresión anterior, se llega a

$$\omega_f = \frac{\left(\frac{1}{2}M + m\right)R^2}{\left(\frac{1}{2}MR^2 + mr^2\right)}\omega_i = \left(\frac{(M+2m)R^2}{MR^2 + 2mr^2}\right)\omega_i$$

$$\omega_f = \left(\frac{[100\,\mathrm{kg} + 2(60\,\mathrm{kg})](2.0\,\mathrm{m})^2}{4.0\times 10^2\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2 + 30\,\mathrm{kg\,m}^2}\right)\left(2.0\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right) = 4.1\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

Tarea. ¿Y si se mide la energía cinética del sistema antes y después de que el estudiante camine hacia el centro, la energía cinética inicial y final son iguales?