Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemática
Departamento de Matemática

Cálculo II

Ingeniería Civil

Prof. Víctor Aros Quinán

Segundo Semestre 2021

Clase N$^{\underline{o}}$7: Cálculo II

Integral Definida

Integral Definida

Como ya hemos visto la Integral de Riemann está dada por:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k$$

donde f es una función definida en el intervalo $[a,b]$ y P una partición del mismo. Además, sabemos que $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ y este puede ser elegido de las siguientes formas:

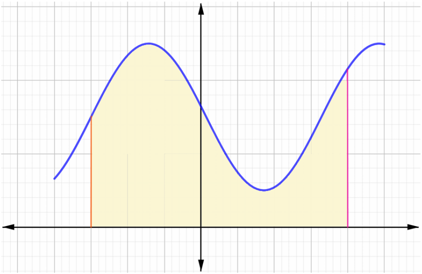
$$t_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n} \qquad \text{Extremo Superior}$$

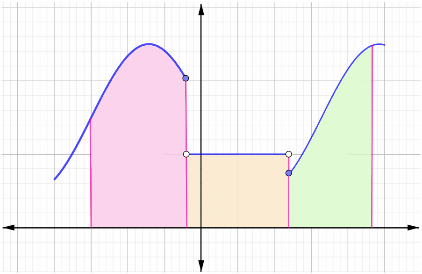
$$t_k = a + \left(k - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{b-a}{n} \qquad \text{Punto Medio}$$

$$t_k = a + (k-1) \cdot \frac{b-a}{n} \qquad \text{Extremo Inferior}$$

Integral Definida

También mencionamos que cualquier función continua definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ es Riemann - Integrable y esta condición la podemos extender para funciones que son discontinuas en un número finito de puntos dentro del intervalo, siempre y cuando los límites laterales hacia esos puntos existan. La situación anterior se puede apreciar en la siguiente imagen:

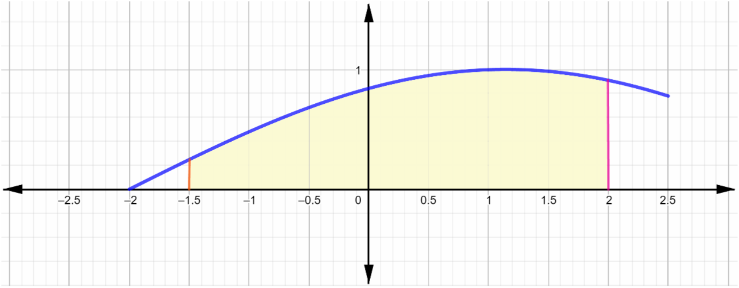




Integral Definida

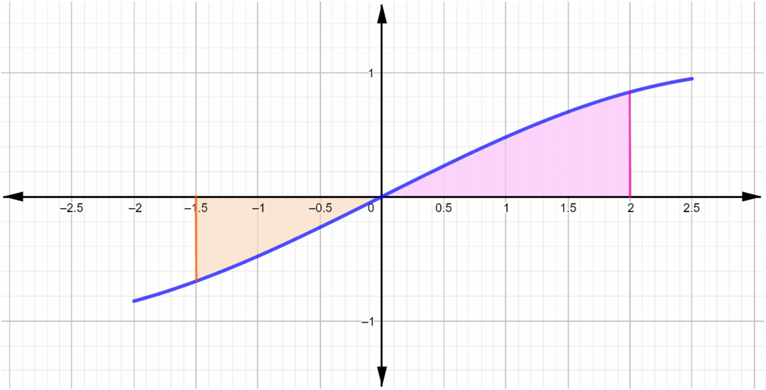
Ahora bien, la definición de Integral de Riemann permite calcular cualquier integral definida. Dentro de lo anterior podemos definir los algunos casos particulares:

- **Caso 1:** La integral definida de una función continua no negativa.



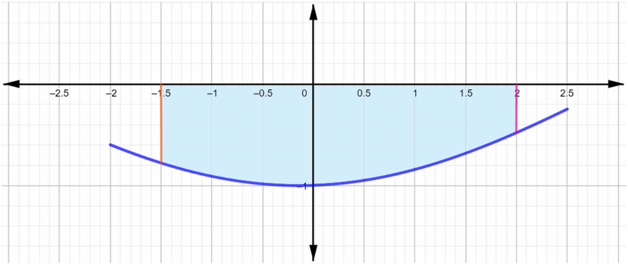
Integral Definida

- **Caso 2:** La integral definida de una función continua negativa y positiva.



Integral Definida

- **Caso 3:** La integral definida de un función continua negativa.



Observación: Los casos anteriores nos dan a entender que la integral definida de una función integrable no negativa calzará con la medida del área bajo su gráfico en un intervalo dado.

Integral Definida

Regla de Barrow

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable sobre $[a, b]$. Si f admite una primitiva $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Demostración:

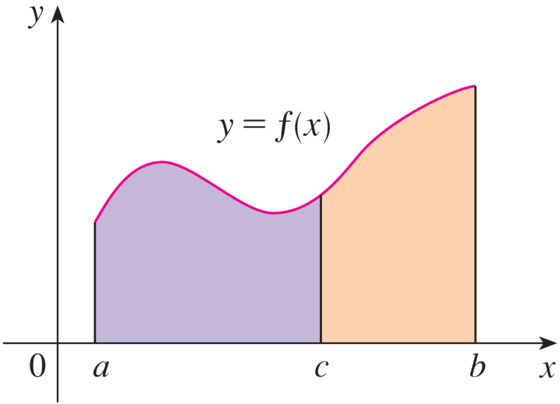
Propiedades de la Integral Definida

Proposición: Sean f, g funciones integrables en $[a, b]$ y $c \in \mathbb{R}$, luego las siguientes proposiciones son ciertas:

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$
2. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
3. $\displaystyle\int_a^b f(x) \pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$
4. $\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$
5. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, con $c \in (a, b)$.

Propiedades de la Integral Definida

La propiedad anterior se puede visualizar de una forma particular en la siguiente imagen:



Ejercicios

Calcule las siguientes integrales definidas:

(a) $\displaystyle\int_{1}^{7} (3x^2 - x + 1)\, dx$

(b) $\displaystyle\int_{-2}^{7} f(x)\, dx$, siendo f la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x - 4 & , -2 \leq x \leq 2 \\ 4x & , \quad 2 < x < 7 \end{cases}$$

(c) $\displaystyle\int_{-7}^{5} |x + 2| + |x|\, dx$

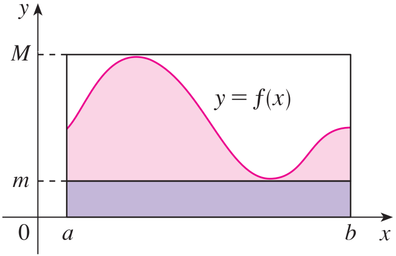
Integral Definida

Propiedades de Comparación de Integrales

1. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada que es Riemann Integrable en $[a,b]$, con $f(x) \geq 0$ en $[a,b]$, entonces:
$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$
2. Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones acotadas que son Riemann Integrables en $[a,b]$. Si $f(x) \geq g(x)$, entonces:
$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$
3. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada que es Riemann Integrable en $[a,b]$. Si $m \leq f(x) \leq M$, entonces:
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Integral Definida

La última propiedad se puede visualizar de manera particular en la siguiente imagen:



Ejemplos: Muestre que se cumplen las siguientes desigualdades:

(a) $0 \leq \displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(x)\, dx \leq \pi.$

(b) $\sqrt{2} \leq \displaystyle\int_{1}^{2} \sqrt{1+x^4}\, dx \leq \sqrt{17}.$

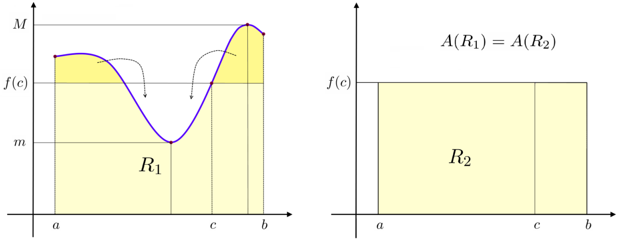
Teorema del Valor Medio para Integrales

Teorema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c)(b - a)$$

El teorema anterior se puede visualizar de manera particular en la siguiente imagen:



Teorema del Valor Medio para Integrales

Observación: al valor $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ se denomina valor promedio de f sobre $[a, b]$.

Ejemplos:

1. Sea $f(x) = x^2$ y sea R la región acotada por el gráfico de f, el eje X y las rectas $x = 1$ y $x = 3$. Encontrar $c \in [1, 3]$ tal que $A(R)$ sea igual al área de un rectángulo de base la longitud del intervalo $[1, 3]$ y altura $f(c)$.

2. Considere la función $h(x) = \sqrt{x}$ con $x \in [1, 4]$ y calcule el valor promedio de h sobre el intervalo $[1, 4]$.

Ejercicios

1. Calcular las siguientes integrales definidas:
$$(a) \quad \int_{-a}^{a} \cos(x)\, dx \qquad (b) \quad \int_{-1}^{4} |x+2| - 2\, dx$$

2. Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ una función definida por:
$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1] \\ -1 & , x \notin \mathbb{Q} \cap [-1, 1] \end{cases}$$
Muestre que $|f|$ es Riemann Integrable. ¿Es f una función Riemann Integrable?

3. La función de temperatura T de un día de invierno en Concepción, está dada por:
$$T(t) = \begin{cases} t & , 0 \leq t \leq 12 \\ 24 - t & , 12 < t \leq 24 \end{cases}$$
donde t se mide en horas y T en grados Celsius. Determine la temperatura promedio alcanzada en ese día de invierno.