Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemática
Departamento de Matemática

Cálculo II

Ingeniería Civil

Prof. Víctor Aros Quinán

Segundo Semestre 2021

Clase Nº14: Cálculo II
Función Gamma y Área entre Curvas

Función Gamma

La función gamma estudiada por varios matemáticos es una aplicación que permite extender el concepto de factorial a los números reales y complejos (una de sus aplicaciones más importantes)

Definición

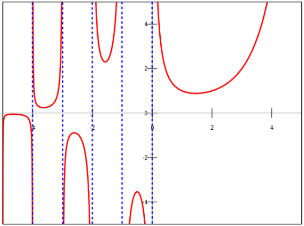
Sea $\Gamma :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la función definida por:

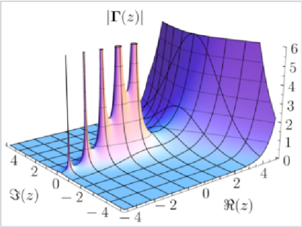
$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} \, dx$$

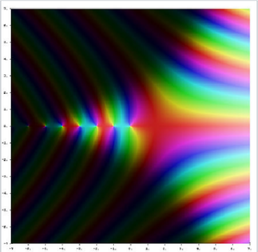
siendo esta convergente para todo $t > 0$.

Función Gamma

Además, esta función puede ser gráficada en el plano real y complejo, dependiendo del valor de t y el resultado de la integral impropia:







Función Gamma

Algunas de las propiedades que cumple la función Gamma son:

1. Γ es convergente para todo $t > 0$ y divergente para $t \geq 0$.
2. $\Gamma(1) = 1$
3. $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$, para todo $t > 0$
4. Si $t \in \mathbb{N}$, $\Gamma(t) = (t-1)!$
5. $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Ejemplos:

1. Determine el valor de $\Gamma(3)$, $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$ y $\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)$.
2. Calcule las siguientes integrales impropias:

   (a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^4\,dx$

   (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-3x}x^5\,dx$

   (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} 5^{-4x^2}\,dx$

Ejemplos:

Solución 1): Notemos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{11}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{9}{2}+1\right) = \frac{9}{2}\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{9}{2}\Gamma\left(\frac{7}{2}+1\right) \\
&= \frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right) = \frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \\
&= \frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi} \\
&= \frac{945\sqrt{\pi}}{32}
\end{aligned}
$$

Ejemplos:

Solución 2c): Notemos lo siguiente:

$$\int_0^{+\infty} 5^{-4x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{\ln(5^{-4x^2})}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-4x^2\ln(5)}\,dx$$

haciendo:

$$u = 4x^2\ln(5) \Rightarrow du = 8\ln(5)xdx \Rightarrow \frac{1}{8\ln(5)\cdot\frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{\ln(5)}}}du = dx$$

Dado lo anterior, se tiene:

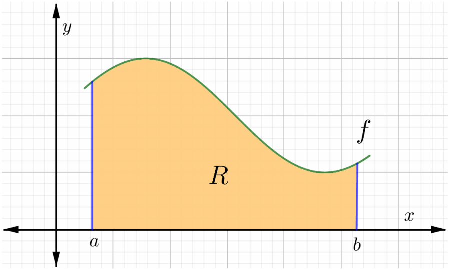
$$\int_0^{+\infty} e^{-4x^2\ln(5)}\,dx = \frac{1}{4\sqrt{\ln(5)}}\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{-1/2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\ln(5)}}$$

Área bajo una curva

Recordemos que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua y no negativa sobre $[a, b]$, la integral definida f en el intervalo $[a, b]$ representa el área de la región R encerrada por la gráfica de f, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$, es decir:

$$A(R) = \int_a^b f(x)\, dx$$

de manera geométrica es:



Área entre Curvas

Sea R la región del plano dada por:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

donde f y g son funciones continuas en $[a, b]$. La región anterior se puede visualizar en la siguiente imagen de manera particular:

Área entre Curvas

El problema que debemos resolver está relacionado con determinar la medida del área de la región R y para resolverlo consideremos una partición $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ de $[a, b]$ y elegimos $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Sobre cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ podemos tomar el rectángulo de área $|f(x) - g(x)|\Delta x_k$. Luego, la suma

$$\sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - g(t_k)|\Delta x_k$$

es una suma de Riemann de la función $|f - g|$. Por ende:

Área entre Curvas

Observación: Notemos de manera particular, si $g(x) = 0$ para $x \in [a, b]$, graficamente un segmento del eje X, entonces el área de la región R comprendida entre el gráfico de f, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$, está dada por:

$$A(R) = \int_a^b |f(x)| \, dx$$

Ahora bien, al tener un valor absoluto podemos tratar de interpretar que significaría extraer el signo, es decir:

$$A(R) = \int_a^b f(x) \, dx \qquad \text{y} \qquad A(R) = \int_a^b -f(x) \, dx$$

Área entre Curvas

Observación: Siguiendo la idea anterior, podríamos analizar el signo del valor absoluto de la integral:

$$A(R) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

Notemos que si $f(x) \geq g(x)$, para todo $x \in [a, b]$, se tiene:

$$A(R) = \int_a^b f(x) - g(x)\, dx$$

de manera análoga, si $g(x) \geq f(x)$, para todo $x \in [a, b]$ se tiene:

$$A(R) = \int_a^b g(x) - f(x)\, dx$$

Ejemplos:

1. Calcular el medida del área de la región comprendida entre el eje X y el gráfico de la función f definida por $f(x) = x^2 - 1$, entre $x = 1$ y $x = 3$.
2. Sea R la región del primer cuadrante limitada por la recta $x + y = 2$, el eje X e Y en el primer cuadrante. Calcular la medida del área con respecto a ambos ejes.
3. Calcular la medida del área de la región encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = 4 - x^2$

Ejemplos:

Solución 1):

Ejemplos:

Notemos que la región también puede ser considerada como aquella comprendida entre la recta $x = 3$ y el gráfico de la función g definida por $g(y) = \sqrt{y+1}$, entre las rectas $y = 0$ e $y = 8$. Así:

$$A(R) = \int_0^8 \left(3 - \sqrt{y+1}\right)\, dy = \frac{20}{3}\, u^2$$

Ejemplos:

Solución 2):

Ejemplos:

Solución 3): Primero debemos determinar los puntos de intersección entre ambas curvas, como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow x^2 - 4 = 4 - x^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2 \end{aligned}$$

Además, $g(x) \geq f(x)$, para todo $x \in [a, b]$, por ende:

$$A(R) = \int_{-2}^{2} 4 - x^2 - (x^2 - 4)\, dx = \frac{64}{3}\, u^2$$

Pregunta: ¿Podremos expresar el $A(R)$ de otra forma?

Área entre Curvas

Notar que en el caso de que una función tome valores tanto positivos como negativos en un cierto intervalo I, el cálculo del área bajo la curva se debe realizar por partes.

Por ejemplo, si queremos calcular el área de la región encerrada por el gráfico de la función $f(x) = x^2 - 2x$ el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 1$, se tiene:

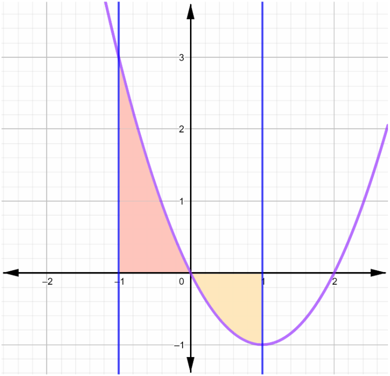
$$|f(x)| = |x^2 - 2x| = \begin{cases} x^2 - 2x & , -1 \leq x \leq 0 \\ 2x - x^2 & , \quad 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Por ende:

$$A(R) = \int_{-1}^{0} x^2 - 2x \, dx + \int_{0}^{1} 2x - x^2 \, dx = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$$

Área entre Curvas

Ahora bien, si se conoce el gráfico de la curva ya no es necesario hacer el análisis del valor absoluto de la función:



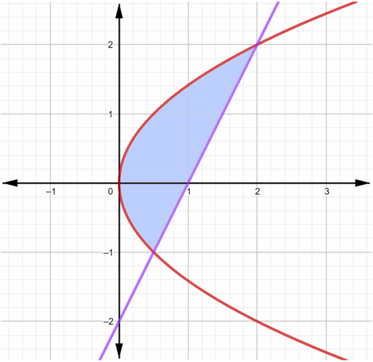
Así:

$$A(R) =$$

Área entre Curvas

También pueden haber casos donde calcular el área respecto a un eje es mucho mas simple que con respecto al otro.

Por ejemplo, si queremos calcular el área de la región encerrada por las gráficas de las curvas $2x - y = 2$ y $x - \frac{1}{2}y^2 = 0$, se tiene:



Área entre Curvas

Notemos que ambas curvas se intersectan en dos puntos $A\left(\frac{1}{2},-1\right)$ y $B(2,2)$. luego el área puede ser expresa de la siguiente forma:

$$A(R)=\int_{-1}^{2}\left[\frac{1}{2}(y+2)-\frac{y^2}{2}\right]\,dy=\frac{9}{4}\,u^2$$

Pero, ¿podremos expresarla de otra forma?

$$A(R)=$$

Ejercicios

1. Calcular el área limitada por las graficas de las funciones $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = \cos(x)$, con $x \in [0, 2\pi]$.
2. Calcular el área de la región acotada por las curvas $y = x^3$, $y = x + 6$ e $y = -\frac{x}{2}$.
3. Calcular el área de la región encerrada por los gráficos de las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 2x^2$, con $x \in [0, 2]$.
4. Hallar el área de la región encerrada por la curvas $y = \ln(x)$, el eje X y la recta $x = e$.
5. Calcule el área de la región R limitada por las curvas $y = 6|x|$ e $y = x^3 - x + 6$.
6. Muestre que el área encerrada por una circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$, con $r > 0$ es πr^2.

Nota: cada vez que pueda trate de expresar el área con respecto al otro eje.