Álgebra I. 525140 - DIM - CFM
11 de septiembre de 2021
Prof.: S. Caro, F. Thiele, F. Jara.

Listado 2
Conjuntos

1. Considere como universo el conjunto de los números reales. Además, consideramos

$$\begin{aligned} A &= \{y \in \mathbb{Z} : \ y = x + 3 \wedge \ -5 \leq x < 5\}, \\ B &= \{x \in \mathbb{R} : \ (x+3)(x-2) = 0\}, \\ C &= \{q \in \mathbb{Z} : \ q = 2k+1, \ k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

   Determine $A \cap B$, $B \cap C^c$, $A - C$ y $C - B$.

2. **(P)** Si el universo es el conjunto de los números reales y se definen los conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{R} : \ (x-1)(x+1) = 0\}, \\ B &= \{x \in \mathbb{Z} : \ -4 < x < 4\}, \\ C &= \{x \in \mathbb{N} : \ x < 6\}. \end{aligned}$$

   Determine: $B \cup C$ y $A^c \cap C$.

3. Sea

$$A =]-\infty, -3], B =]-7, 7[, C = [0, 5], D =]7, +\infty[\text{ y } E = [1, 10[.$$

   Calcule:

   a) $A \cap D$
   b) $A \cap B$
   c) $E \cup C$
   d) $E \cap C$
   e) $B \cup D$
   f) $B \cap D$
   g) $E - D$ **(P)**
   h) $D - E$
   i) C^c **(P)**
   j) $A^c \cap E$
   k) $A^c \cap D^c$
   l) $A \cup D \cup E$

4. Suponga que

$$\begin{aligned} A &= \{2, 4, 6, 8\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \\ C &= \{x : x \text{ es un número entero positivo par menor que } 10\}, \\ D &= \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 10\}. \end{aligned}$$

   Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justifique:

   a) $A \subset B$ **(P)**
   b) $B \subset A$
   c) $C \subset A$
   d) $A = B$ **(P)**
   e) $A \subset C$
   f) $B \subset C$
   g) $C \subset B$
   h) $A = C$

5. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su afirmación:

   a) $5 = \{5\}$
   b) $3 \in \{3\}$
   c) $6 \in \{\{6\}, 6, 4\}$ **(P)**
   d) $\{6\} \in \{\{6\}, 6, 5\}$ **(P)**
   e) $\{2, 3\} = \{3, 2\}$
   f) $\emptyset \subseteq \{1, 2\}$ **(P)**
   g) $\{a, b\} \subseteq \{a, \{a, b\}, b\}$
   h) $\{a\} \subseteq \{\emptyset, \{a\}\}$
   i) $\emptyset \in \{a\}$
   j) $a \in \{\emptyset, \{a\}\}$
   k) $\{a, b\} = \{a, b, \emptyset\}$
   l) $\{a\} \in \{\emptyset, \{a\}\}$
   m) $\{a, b\} = \{b, a\}$

   <u>*Recuerde*</u>: $\emptyset$ es el conjunto vacío. Si A es cualquier conjunto, entonces se cumple :

   - $\emptyset \subseteq A$
   - $\emptyset \cup A = A$
   - $\emptyset \cap A = \emptyset$

6. Para A y B conjuntos. Muestre que:

   a) $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$ **(P)**
   b) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
   c) $(A \cap B) = B \Rightarrow B \subseteq A$
   d) Si $A \subseteq C$ y $B \subseteq C$ entonces $A \cup B \subseteq C$
   e) Si $C \subseteq A$ y $C \subseteq B$ entonces $C \subseteq A \cap B$ **(P)**

7. Sea el conjunto $A = \{3, 4, 5, 6\}$. Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas (justifique):

   a) $\{3, 4\} \subseteq \mathcal{P}(A)$
   b) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$
   c) $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(A)$ **(P)**
   d) $\{5, 6\} \in \mathcal{P}(A)$
   e) $\{5\} \in \mathcal{P}(A)$ **(P)**
   f) $3 \in \mathcal{P}(A)$
   g) $A \in \mathcal{P}(A)$
   h) $\mathcal{P}(A) \cap \{3, 4\} = \{3, 4\}$ **(P)**
   i) $\mathcal{P}(A) \cap \{\{4, 6\}\} = \{\{4, 6\}\}$
   j) $\mathcal{P}(A) \cup A = \mathcal{P}(A)$

8. Considere los conjuntos

$$
\begin{aligned}
A &= \{n \in \mathbb{N} : \ n \leq 100\}, \\
B &= \{z \in \mathbb{Z} : \ -10 \leq z \leq 10\}, \\
C &= \{2, 4, 6, 8\}.
\end{aligned}
$$

   Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones (justifique) y escriba su negación.

   a) $(\forall\, n \in A)\ n^2 \leq 100$ **(P)**
   b) $(\exists\, n \in A)\ n^2 = 50$
   c) $(\exists!\, n \in A)\ 2^n = n^2$
   d) $(\forall\, z \in B)\ z + 9 = 8$
   e) $(\forall\, p \in C)(\exists\, z \in B)\ p + z = 0$ **(P)**
   f) $(\exists!\, n \in A)(\forall\, z \in B)\ n + z > 0$

9. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones (justifique):

   a) $(\ \forall\, m \in \mathbb{N}\ )(\ \exists\, n \in \mathbb{N}\ )\ m = 2n$
   b) $(\ \forall\, x \in \mathbb{R}\ )(\ \exists\, y \in \mathbb{R}\ )\ xy = 1$
   c) $(\ \exists\, x \in \mathbb{R}\ )(\ \exists\, y \in \mathbb{R}\ )\ xy = 1$
   d) $(\ \exists\, x \in \mathbb{R}\ )(\ \forall\, y \in \mathbb{R}\ )\ (x+y)^2 = x^2 + y^2$ **(P)**
   e) $(\ \exists!\, x \in \mathbb{R}\ )(\ \forall\, y \in \mathbb{R}\ )\ x + y = y$

10. De un contraejemplo para establecer la falsedad de las proposiciones que siguen. Considere $x, y \in \mathbb{R}$:

    a) $(\ \forall\, x \in \mathbb{R}\ )(\ \exists\, p \in \mathbb{N})\ p < x$
    b) $(\ x^2 = y^2\ )\ \rightarrow\ (\ x = y\ )$ **(P)**
    c) $(\ \forall\, z \in \mathbb{R}\ )(\ \exists\, n \in \mathbb{N})\ z + n = 0$
    d) $(\ \forall\, z \in \mathbb{N}\ )(\ \forall\, n \in \mathbb{N})\ z - n = 0$

11. Niegue las siguientes proposiciones:

    a) $(\exists\, x > 0)(\forall\, y \in \mathbb{R})\ x^2 + x < y$
    b) $(\forall\, x \in \mathbb{R})(\forall\, y > 0)\ xy = 1$
    c) $(\forall\, x < 0)(\exists\, y > 0)\ x + 2y \leq 4$ **(P)**
    d) $(\exists!\, x < 0)\ x^2 - 1 > 0$