Álgebra I. 525140 - DIM - CFM
13 de abril de 2021
Prof.: L. Badilla, I. Donoso, A. Gajardo, J. Moya
A. Pérez, C. Rivas, M. Selva, F. Thiele, G. Torres

Producto Cartesiano

Un conjunto es solo eso, una colección de objetos, pero no tiene ninguna estructura interna, ni siquiera un orden. Necesitamos definir objetos más elaborados y ese es el objetivo de este capítulo.

Definición 1. Dados dos objetos x y y, se define un *par ordenado*, a través de la notación (x, y).

En éste se distingue la *primera componente*: x, y la *segunda componente*: y.

Dos pares ordenados (a, b) y (x, y) se dicen iguales si y solo si $a = x$ y $b = y$.

De la definición de par ordenado de deduce que el orden en que aparecen es importante, no es lo mismo $(1, 2)$ que $(2, 1)$; por la misma razón, un par ordenado admite repeticiones, por ejemplo $(1, 1)$ es un par ordenado legítimo.

El la notación de par ordenado es fundamental el uso de paréntesis redondos“(” y “)”, en lugar de llaves “{” y “}”, este solo detalle los diferencia de un conjunto, indicando que en este caso se trata de un objeto donde el orden en que aparecen los elementos sí es relevante.

A partir de esta noción, definimos una nueva operación entre conjuntos: el producto cartesiano, que consiste en todos los pares ordenados posibles de formar de un conjunto a otro.

Definición 2. Dados dos conjuntos A y B, se define un conjunto, llamado *producto cartesiano de A con B*: $A \times B$, como sigue.

$$A \times B = \{(a, b) \ : \ a \in A \text{ y } b \in B\}$$

Ejemplo 3. El plano cartesiano se puede ver como el producto cartesiano de $\mathbb{R}$ consigo mismo: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ya que sus elementos, los puntos, están dados por sus dos coordenadas (x, y).

Probablemente la mejor manera de visualizar el producto cartesiano entre dos conjuntos es justamente colocando uno de los conjuntos de manera horizontal y el otro de manera vertical y trazar líneas verticales y horizontales partiendo de ellos. Los puntos de intersección de las rectas conforman el producto cartesianos de los dos conjuntos.

Ejemplo 4. Considerando $A = \{\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit\}$, $B = \{\heartsuit, \clubsuit\}$, resulta:

$$A \times B = \{(\heartsuit, \heartsuit), (\heartsuit, \clubsuit), (\diamondsuit, \heartsuit), (\diamondsuit, \clubsuit), (\spadesuit, \heartsuit), (\spadesuit, \clubsuit)\}.$$

Podemos visualizarlo con la siguiente figura.

$$
\begin{array}{cccc}
\clubsuit & (\heartsuit,\clubsuit) & (\diamondsuit,\clubsuit) & (\spadesuit,\clubsuit) \\
\heartsuit & (\heartsuit,\heartsuit) & (\diamondsuit,\heartsuit) & (\spadesuit,\heartsuit) \\
 & \heartsuit & \diamondsuit & \spadesuit
\end{array}
$$

Relaciones binarias

No siempre nos interesamos por el conjunto de todos los pares ordenados posibles entre dos conjuntos, a veces escoger solo algunos de ellos puede ser significativo para representar que justo esos pares responden a una correspondencia dada, o resaltan una determinada característica de los elementos que los componen.

Definición 5. Dados dos conjuntos A y B, decimos que R es una relación binaria de A en B si $R \subseteq A \times B$. Cuando $(a, b) \in R$ decimos que:

$$\text{“}a \textit{ está relacionado por } R \textit{ con } b\text{”}$$

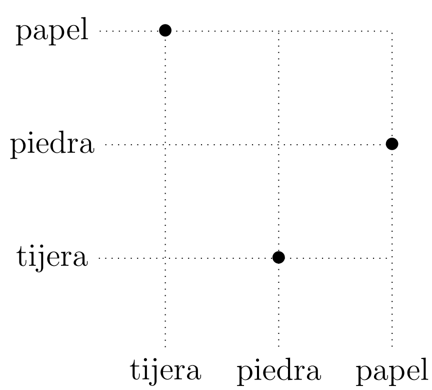
o simplemente

$$\text{“}a\ R\ b\text{”}$$

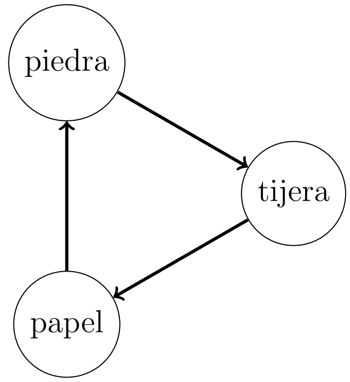
Ejemplo 6. Considerando $A = \{\text{tijera}, \text{piedra}, \text{papel}\}$, la siguiente es una relación de A en A que representa la regla de funcionamiento de un juego.

$$G = \{(\text{tijera}, \text{papel}), (\text{papel}, \text{piedra}), (\text{piedra}, \text{tijera})\} = \{(x, y) \in A \times A \ : \ x \text{ gana a } y\}$$

Leemos por ejemplo: tijera G papel. Como G es un subconjunto del producto cartesiano podemos representarla encerrando los pares ordenados de $A \times A$ en la representación cartesiana de $A \times A$.

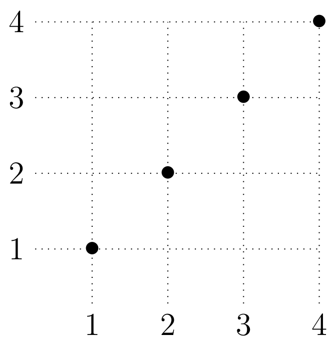


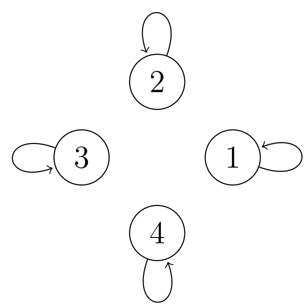
También la representación como “grafo” puede ser útil.



Ejemplo 7. Relación de igualdad: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, rescata todos los pares ordenados en que la primera componente es igual a la segunda, la definiremos como:

$$\mathcal{I} = \{(x, y) \in A \times A \ : \ x = y\}$$

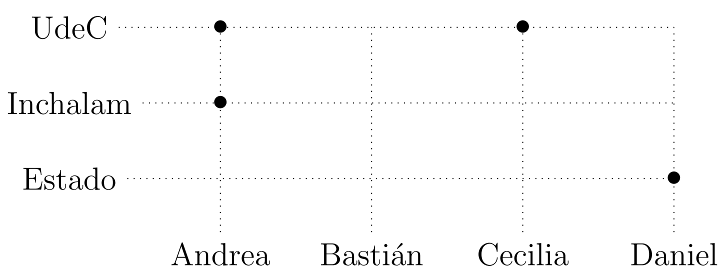


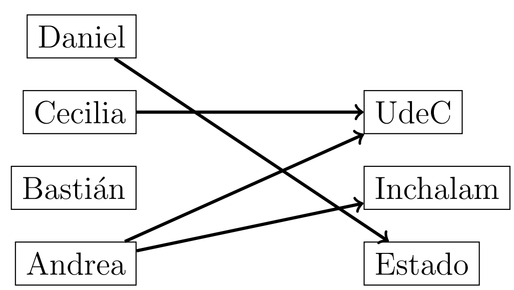


Ejemplo 8. Relación laboral: $A = \{\text{Andrea}, \text{Bastián}, \text{Cecilia}, \text{Daniel}\}$; $B = \{\text{Estado}, \text{Inchalam}, \text{UdeC}\}$.

$$\begin{aligned} E &= \{(x, y) \in A \times B \ : \ x \text{ trabaja en } y\} \\ &= \{(Cecilia, UdeC), (Andrea, Inchalam), (Andrea, UdeC), (Daniel, Estado)\} \end{aligned}$$

Podríamos decir por ejemplo: "*Cecilia E UdeC*".





En general las relaciones binarias sirven para representar relaciones que podemos encontrar tanto en la realidad como en la matemática, visualizarlas, consultarlas o estudiar sus propiedades puede servir para comprender mejor lo que representan u obtener información.

En el ejemplo de la relación laboral, el conjunto R no será el mismo si B incluyera a todas las personas del mundo o si incluyera a las de toda la región. Como en el caso de los conjuntos, es importante definir la noción de igualdad de relaciones.

Definición 9. Dadas dos relaciones binarias $R \subseteq A \times B$ y $G \subseteq C \times D$, decimos que son iguales si y solo si:

$$A = C \text{ y } B = D \text{ y } R = G.$$

Por ejemplo, la relación de igualdad en $\mathbb{N}$ no será la misma que la relación de igualdad que acabamos de definir en $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

Definición 10. Si $R \subseteq A \times A$, entonces se dice que R es una *relación binaria interna.*

Entre los ejemplos vistos arriba, solo G e $\mathcal{I}$ son relaciones binarias internas.

Definición 11. Dada una relación binaria interna $R \subseteq A \times A$, decimos que:

- R es refleja si para todo $x \in A$ se tiene $(x, x) \in R$.
- R es simétrica si para todo $(x, y) \in R$ se tiene $(y, x) \in R$.
- R es transitiva si cada vez que se tiene $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$, entonces se tiene $(x, z) \in R$.
- R es antisimétrica si cada vez que se tiene $(x, y) \in R$ y $x \neq y$, entonces se tiene $(y, x) \notin R$.

Para las relaciones G e $\mathcal{I}$, ¿cuáles de estas propiedades se cumplen?

- G solo cumple la antisimetría.
- $\mathcal{I}$ cumple la reflexividad, simetría, antisimetría y transitividad.

¿Qué otras relaciones binarias se te ocurre definir?

Relaciones de equivalencia

Ya habíamos dicho que relación de igualdad es una relación importante en matemática, pues sirve para destacar lo que realmente nos interesa de un objeto. Las 3 propiedades que cumple: reflexividad, simetría y transitividad son propiedades importantes, que cuando se cumplen simultáneamente es por que la relación es muy particular.

Definición 12. Una relación $R \subseteq A \times A$ es una *relación de equivalencia en A* si R es **refleja**, **simétrica** y **transitiva**.

Ejemplo 13.

- La relación de igualdad en cualquier conjunto, ya lo vimos.
- La relación de paralelismo en el conjunto de todas las rectas, en efecto:
  - Toda recta es paralela a sí misma.
  - Si una recta L_1 es paralela a otra recta L_2, entonces L_2 también es paralela a L_1.
  - Si una L_1 es paralela a L_2 y L_2 es paralela a L_3, entonces L_1 también es paralela a L_3.
- La relación hermandad por parte de ambos padres en el conjunto de las personas, en efecto:
  - Toda persona tiene los mismos padres que sí misma
  - La relación de hermandad es recíproca.
  - Si una persona a tiene los mismos padres que b y b tiene los mismos padres que c entonces estos padres son los padres de a, b y c, por lo tanto a es hermana de c.

Cuando R es una relación de equivalencia resulta que A queda particionado en subconjuntos, que llamaremos clases.

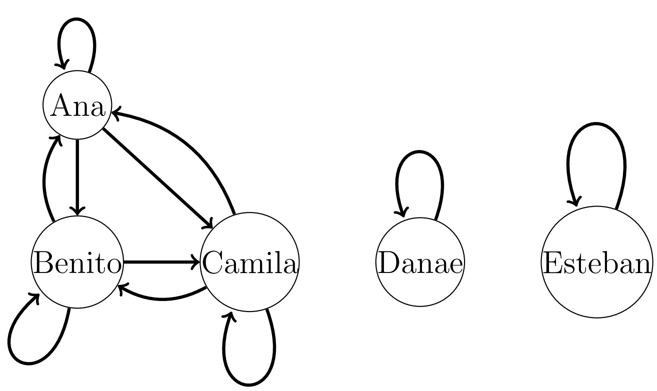
Definición 14. Si $R \subseteq A \times A$ es una relación de equivalencia, para cada elemento $a \in A$ se define su *clase de equivalencia respecto a R* como sigue.

$$[a]_R = \{x \in A \ : \ a \ R \ x\}$$

Ejemplo 15.

- Relación de igualdad: solo los conjuntos que tienen un solo elemento son clases de equivalencia: $[1]_{\mathcal{I}} = \{1\}$.
- Relación de paralelismo P: cada clase de equivalencia se puede asociar con una dirección: Si L es una recta, $[L]_P =$ conjunto de todas las rectas paralelas a L.
- Relación hermandad H: cada clase de equivalencia se puede asociar a una pareja que haya tenido hijos alguna vez: La clase de equivalencia de una persona a es el conjunto de sus hermanos por parte de ambos padres. Suponiendo por ejemplo que $A = \{\text{Ana}, \text{Benito}, \text{Camila}, \text{Danae}, \text{Esteban}\}$, y que Ana, Benito y Camila, que Danae es hija única, mientras que Esteban solo comparte el padre con Ana, Benito y Camila:

$$\begin{aligned} H \ = \ & \{(\text{Ana}, \text{Ana}), (\text{Ana}, \text{Benito}), (\text{Benito}, \text{Ana}), (\text{Benito}, \text{Benito}), (\text{Camila}, \text{Camila}), \\ & (\text{Camila}, \text{Camila}), (\text{Ana}, \text{Camila}), (\text{Camila}, \text{Camila}), (\text{Ana}, \text{Camila}), (\text{Benito}, \text{Camila}), \\ & (\text{Camila}, \text{Benito}), (\text{Danae}, \text{Danae}), (\text{Esteban}, \text{Esteban})\} \end{aligned}$$



$$[\text{Ana}]_H = \{\text{Ana}, \text{Benito}, \text{Camila}\} = [\text{Benito}]_H = [\text{Camila}]_H;$$
$$[\text{Danae}]_H = \{\text{Danae}\}; \quad [\text{Esteban}]_H = \{\text{Esteban}\}$$

Proposición 16. Si $R \subseteq A \times A$ es una relación de equivalencia, entonces se cumple:

1. $a \in [a]_R$.
2. Si $a\ R\ b$, entonces $[a]_R = [b]_R$.
3. Si $c \in [a]_R$ y $c \in [b]_R$, entonces $a\ R\ b$.
4. Si $[a]_R \cap [b]_R \neq \phi$, entonces $[a]_R = [b]_R$.

Demostración.

1. $a \in [a]_R$: en efecto, dado que R es refleja, se tiene que $a\ R\ a$, por lo tanto $a \in [a]_R$.
2. Si $a\ R\ b$, entonces $[a]_R = [b]_R$:
   - ($[a]_R \subseteq [b]_R$): sea $c \in [a]_R$, queremos demostrar que $c \in [b]_R$. Por definición de clase de equivalencia tenemos que $a\ R\ c$. Por hipótesis tenemos que $a\ R\ b$, y como R es simétrica, también tenemos que $b\ R\ a$. Dado R transitiva, podemos entonces afirmar que $b\ R\ c$, de donde $c \in [b]_R$.
   - ($[a]_R \supseteq [b]_R$): basta aplicar la demostración anterior intercambiando a con b, y se concluye lo deseado.
3. Si $c \in [a]_R$ y $c \in [b]_R$, entonces $a\ R\ b$: la hipótesis nos dice que $a\ R\ c$ y $b\mathbb{R}c$, usamos la simetría de R para obtener que $c\ R\ b$, y luego usamos la transitividad de R para concluir que $a\ R\ b$.
4. Si $[a]_R \cap [b]_R \neq \phi$, entonces $[a]_R = [b]_R$: De la hipótesis sabemos que hay algún elemento en $[a]_R \cap [b]_R$, llamamos c a este elemento. De la definición de intersección sabemos que $c \in [a]_R$ y $c \in [b]_R$. Usamos el ítem anterior para concluir que $[a]_R = [b]_R$.

$\square$

Las propiedades anteriores justifican lo antes dicho respecto a que clases diferentes no tendrían puntos de intersección, que ninguna es vacía y que todo elemento pertenece a su clase.

Normalmente buscamos identificar cada clase con la propiedad que tienen en común sus elementos: la dirección en el caso de la relación de paralelismo entre rectas, los padres en el caso de la relación de hermandad.

Relaciones de orden

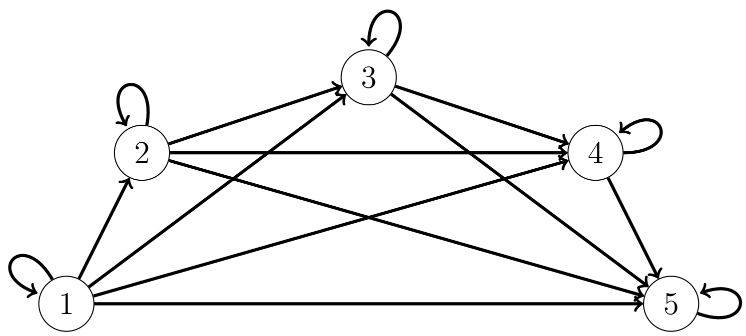
La relación de *menor o igual* establece una jerarquía entre los números, nos interesa este tipo de relaciones, y las generalizamos mediante la siguiente definición.

Definición 17. Diremos que $R \subseteq A \times A$, es una *relación de orden* si R es **refleja**, **antisimétrica** y **transitiva**.

Ejemplo 18.

- La relación de menor o igual en cualquier conjunto, por ejemplo $A = \{1, 2, 3, 4\}$, con la relación

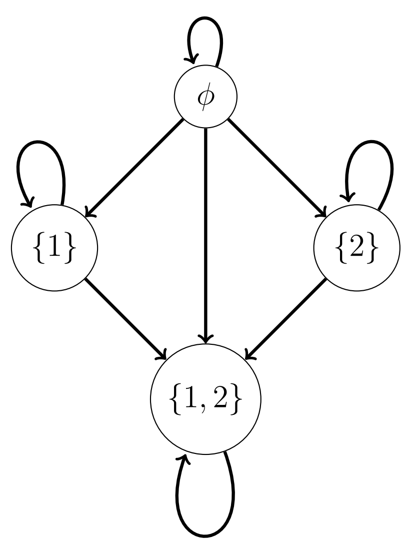
  $$L = \{(x, y) \in A \times A \;:\; x \leq y\} = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$$

  - Es refleja ya que todo número es menor o igual a sí mismo.
  - Es antisimétrica, ya que si un número es más grande que otro, entonces no es mas pequeño que este.
  - Es transitiva: este es una de las propiedades de menor o igual en los reales, y por lo tanto en cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ se cumplirá.

- La relación de subconjunto en el conjunto de las partes de $\{1, 2\}$:

  $$S = \{(A, B) \in \mathcal{P}(\{1, 2\}) \times \mathcal{P}(\{1, 2\}) \;:\; A \subseteq B\}$$

- Es refleja ya que todo conjunto está contenido en sí mismo.
- Es antisimétrica, ya que si un conjunto está contenido en otro y el otro está contenido en el primero, entonces son iguales, por lo tanto el conjunto no era *otro*.
- Es transitiva: Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, se tiene que $A \subseteq C$, en efecto, si tengo x cualquiera y $x \in A$, entonces por la inclusión de A en B se tendrá que $x \in B$, pero aplicando ahora la inclusión de B en C se concluye que $x \in C$.

- La relación de divisibilidad en $\mathbb{N}$:

$$D = \{(n, m) \ : \ \frac{m}{n} \in \mathbb{N}\}$$

  - Es refleja ya que $\frac{n}{n} = 1 \in \mathbb{N}$.
  - Es antisimétrica, en efecto, supongamos que $n \ D \ m$, es decir, $\frac{m}{n} \in \mathbb{N}$ y $n \neq m$. Entonces $\frac{m}{n} \geq 2$, por lo tanto $\frac{n}{m} \leq \frac{1}{2}$. Por lo tanto no puede ser natural, y entonces m no divide a n.
  - Es transitiva, en efecto, supongamos que $n \ D \ m$ y $m \ D \ l$, esto significa que $\frac{m}{n} \in \mathbb{N}$ y $\frac{l}{m} \in \mathbb{N}$. Si multiplicamos estos dos números naturales, obtendremos un número natural: $n \ni \frac{m}{n}\frac{l}{m} = \frac{l}{n}$, de donde $n \ D \ l$.

Este tipo de relaciones se usan para representar *jerarquías*, por ejemplo en las relaciones laborales, o respecto a la relación de "ser descendiente sanguíneo de" en el conjunto de las personas, o en los juegos de naipes cuando una carta "le gana a otra".

¿Era la relación del juego *piedra-tijera-papel* una relación de orden?

¿Qué juego conoces que se base en una relación de orden entre cartas?