Clase 4

Cálculo 3

Carlos Martínez Ranero

Departamento de Matemática
Universidad de Concepción

Recordatorio de la clase anterior.

- Límites por trayectorias.
- Algebra de Límites.
- Teorema del acotamiento.

Objetivos de la clase de hoy.

- Funciones continuas.
- Derivadas parciales.

Limites.

Teorema

Sean $A \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in A'$ y $f : A \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$ y $\vec{L} = (\ell_1, \dots, \ell_m)$ entonces $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{L}$ si y sólo si $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{a}} f_i(\vec{x}) = \ell_i$.

En particular, es suficiente estudiar el caso $f : A \to \mathbb{R}$.

Ejemplo

Si $\vec{f}(x, y) = (x + y, x^2 + y^2)$ entonces

$$\lim_{(x,y) \to (1,2)} \vec{f}(x, y) = \left(\lim_{(x,y) \to (1,2)} x + y, \lim_{(x,y) \to (1,2)} x^2 + y^2 \right) = (3, 5).$$

Continuidad.

Definición

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n, \vec{a} \in A$ y $f : A \to \mathbb{R}^m$. Decimos que f es continua en $\vec{a}$ si

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a}).$$

Si f es continua en todos los puntos de su dominio, entonces decimos que f es continua.

Notemos que la definición requiere que:

- La función f este definida en $\vec{a}$;
- Que el limite $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{a})$ exista;
- El limite tiene que coincidir con el valor de la función en $\vec{a}$.

Propiedades Básicas.

Teorema

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : A \to \mathbb{R}^m$.

1. Si $f : A \to \mathbb{R}^m$ esta dada por $f = (f_1, \dots, f_m)$, entonces f es continua si y sólo si cada f_i es continua.
2. Si $f, g : A \to \mathbb{R}^m$ son continuas en $\vec{a}$, entonces $f + g$ es continua en $\vec{a}$.
3. Si $f, g : A \to \mathbb{R}$ son continuas en $\vec{a}$, entonces fg es continua en $\vec{a}$, y si $g(\vec{a}) \neq 0$, entonces $\frac{f}{g}$ es continua en $\vec{a}$.
4. Sean $f : A \to \mathbb{R}^m$ y $g : T \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ funciones tales que la composición $g \circ f$ está definida. Si f es continua en $\vec{a}$ y g es continua en $f(\vec{a})$, entonces $g \circ f$ es continua en $\vec{a}$.

Funciones Continuas.

El teorema anterior nos permite ver que una gran variedad de funciones de varias variables son continuas, siempre que:

- Esten construidas por medio de funciones elementales (polinomios, funciones trigonométricas, trigonométricas inversas, exponeciales y logaritmos, etc) aplicando las operaciones de suma, producto, división y composición.
- Restringiendo los dominios para no dividir por 0, y para que las composiciones esten definidas.

Ejemplos.

Ejemplo 2

1. ¿ Donde es la función $f(x, y) = \ln(x - 3y + 3)$ continua?
2. ¿ Donde es la función $f(x, y, z) = \arctan(z^3 e^{y^3 \sin x})$ continua ?
3. ¿ Donde es la función $f(x, y, z) = \sqrt{\arcsin(xyz)}$ continua?

Ejemplos.

Solución:

- En $\{(x, y) : x - 3y + 3 > 0\}$.
- En $\mathbb{R}^3$.
- En $\{(x, y, z) : -1 \leq xyz \leq 1 \wedge \arcsin(xyz) \geq 0\}$

Ejemplos.

Ejemplo 3

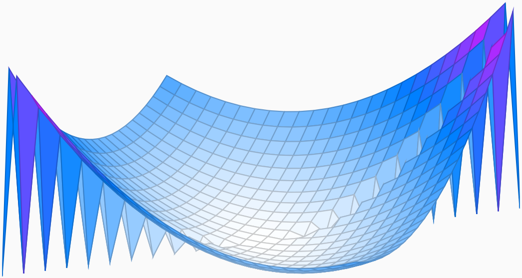
Estudiar la continuidad de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x-y} & si\ x \neq y \\ 0 & si\ x = y \end{cases}$

Ejemplos.

Solución:

- Continua en $\{(x, y) : x \neq y\} \cup \{(0, 0)\}$.
- Discontinua en $\{(x, y) : x = y \wedge x \neq 0\}$.

Ejemplos.



Definición

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, y $f : A \to \mathbb{R}$. Definimos

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h}.$$

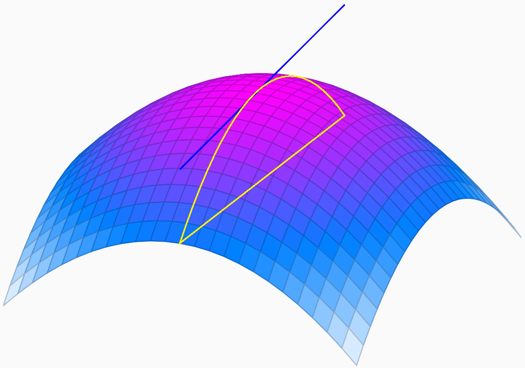
Se llama la derivada parcial de f con respecto a x_i, y representa la razón de cambio de f con respecto a la variable x_i.

En el caso de $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, lo denotaremos como $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$.
En el caso de dos variables tenemos:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$

En otras palabras, la derivada parcial con respecto a x corresponde a derivar f con respecto a x considerando a la variable y como constante.

Derivadas Parciales.



Ejemplo 4

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^3y^2 + 5x^2 + y^3$. Calcular ambas derivadas parciales.

Solución:

- $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 + 10x.$
- $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y + 3y^2.$

Ejemplo 5

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^5 z^3 + e^{xy} \sin(2x + 3y)$.
Calcular todas sus derivadas parciales.

Solución:

- $\frac{\partial f}{\partial x} = 5x^4z^3 + ye^{xy}\sin(2x+3y) + 2e^{xy}\cos(2x+3y).$
- $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}\sin(2x+3y) + 3e^{xy}\cos(2x+3y).$
- $\frac{\partial f}{\partial z} = 3x^5z^2.$

Ejemplo 6

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3 - x^8 y}{x^6 + y^2} & \textit{para } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Derivadas Parciales.

Solución:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^3}{h^3} = 1$