Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemática
Departamento de Matemática

Cálculo II

Ingeniería Civil

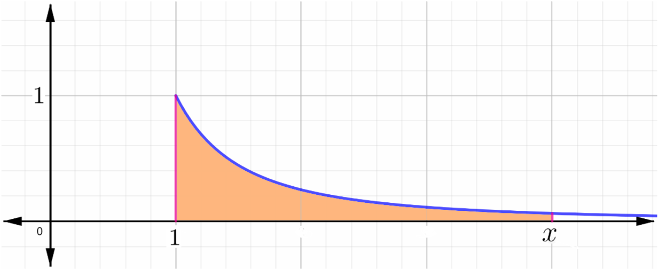
Prof. Víctor Aros Quinán

Segundo Semestre 2021

Clase Nº11: Cálculo II
Integrales Impropias

Introducción

Consideremos la siguiente función $f(t) = \frac{1}{t^2}$, para $t \in [1, +\infty[$, cuya gráfica está dada por:



Luego, si denotamos por:

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2}\, dt \Leftrightarrow F(x) =$$

Introducción

Ahora bien, que sucede si calculamos el límite de $F(x)$ cuando x tiende al infinito:

$$\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right) = 1$$

¿Qué sentido geométrico podríamos darle a este cálculo analítico?

Notar que bajo la gráfica de f y sobre el eje X se forma una región que está "encerrada sólo por tres lados", la recta $x = 1$, el eje X y la gráfica de f, es decir, estamos en presencia de región infinita. Dado lo anterior, podríamos decir que:

$$A(R) = \lim_{x\to+\infty} H(x) = \lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt$$

Integrales Impropias

Notemos que al trabajar con integrales definidas las funciones involucradas cumplen dos características:

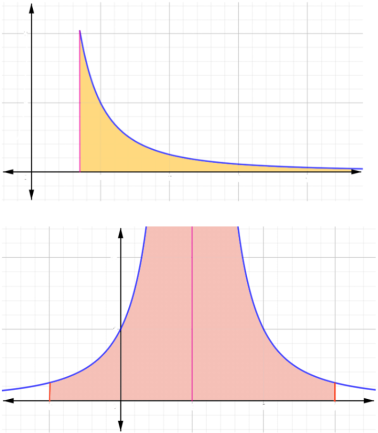
1. El dominio de f era un intervalo cerrado del tipo $[a, b]$.
2. La función f era acotada, es decir, $|f(x)| \leq M$, para todo $x \in [a, b]$.

Por lo tanto, podríamos preguntarnos si es posible debilitar la exigencia de alguna de las condiciones y todavía tener algún concepto de integral satisfactorio.

La respuesta en muchos casos es afirmativa, es decir, podemos definir un concepto de integral para funciones no acotadas en un intervalo del tipo $]a, b]$, $[a, b[$ o $]a, b[$ y un concepto de integral para funciones con dominio no acotado $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$ o $]-\infty, +\infty[$.

Integrales Impropias

Algunos de los casos anteriores se pueden observar, de manera particualar, en la siguiente imagen:



Integrales Impropias

Dado lo anterior, podemos definir dos tipos de integrales impropias:

Integrales Impropias de la Primera Especie

Si $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$, para todo $b > a$, entonces la integral impropia de f en $[a, +\infty[$ se define por:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx =$$

Similarmente, si $f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a, b]$, para todo $a < b$, entonces la integral impropia de f en $]-\infty, b]$ se define por:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx =$$

Integrales Impropias

Observación: Notar que si f es continua en todo $\mathbb{R}$, entonces para cualquier $c \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$$

si lo límites precedentes existen, se dice que la correspondiente integral impropia converge, en caso contrario, la integral impropia diverge.

Ejemplos:

Analizar la convergencia de las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{x}\, dx$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx$

Integrales Impropias

Dado el último ejemplo, podemos preguntarnos si podemos separar la integral en cualquier valor del dominio de la función. Para responder a la interrogante consideremos la siguiente proposición:

Proposición

Sean $c, d \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $\int_c^{+\infty} f(x)\ dx$, $\int_d^{+\infty} f(x)\ dx$, $\int_{-\infty}^{c} f(x)\ dx$ y $\int_{-\infty}^{d} f(x)\ dx$ convergen. Entonces:

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\ dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{d} f(x)\ dx + \int_{d}^{+\infty} f(x)\ dx$$

Integrales Impropias

Demostración:

Integrales Impropias

Ejemplo: Analizar la convergencia o divergencia de la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{a|x|}\, dx$$

Solución:

Integrales Impropias

Los resultados que veremos a continuación serán enunciados para integrales del tipo $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$, pero también serán válidos para integrales del tipo $\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx$ y $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$.

Álgebra de Integrales Impropias 1era Especie

Sean $\int_a^{+\infty} f(x) \quad dx$ y $\int_a^{+\infty} f(x) \quad dx$ dos integrales impropias convergentes y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces, las siguientes afirmaciones se cumplen:

1. La integral $\int_a^{+\infty} f(x) + g(x)\, dx$ converge y además:
$$\int_a^{+\infty} f(x) + g(x)\, dx = \int_a^{+\infty} f(x)\, dx + \int_a^{+\infty} g(x)\, dx$$
2. La integral $\int_a^{+\infty} \lambda f(x)\, dx$ converge y además:
$$\int_a^{+\infty} \lambda f(x)\, dx = \lambda \int_a^{+\infty} f(x)\, dx$$

Integrales Impropias

Observaciones:

1. Aplicando la proposición anterior, si $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge y $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge, entonces $\int_a^{+\infty} f(x)+g(x)\,dx$ diverge.

2. Si $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ y $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ divergen, no podemos afirmar nada de la convergencia o divergencia de la suma.

   Por ejemplo:

Integrales Impropias

Dentro del análisis de la convergencia de integrales impropias de primera especie, se encuentra un tipo de funciones importantes que denominaremos funciones p definidas por $f(x) = \frac{1}{x^p}$ con $x \geq 1$.

Dado esto, ahora determinaremos los valor de $p \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$$

sea convergente.

Integrales Impropias

El resultado anterior se puede extender y dado esto se enuncia el siguiente teorema.

Teorema

Sea $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ una función p dada por $f(x) = \frac{1}{x^p}$, con $a > 0$, entonces

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \begin{cases} \text{diverge} & , p \leq 1 \\ \dfrac{1}{(p-1)(a^{p-1})} & , p > 1 \end{cases}$$

Ejemplos:

1.
2.
3.