UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS 521218
Listado 7 (Parte II)
Existencia y Unicidad de solución de EDOs de 1er Orden, EDOs de variables separables

Problemas a resolver en práctica

1. Las **ecuaciones de Bernoulli** son EDO **NO LINEALES** del tipo

$$y'(t) + p(t)y(t) = h(t)y^n(t)$$

con $n \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$. Para determinar las soluciones no triviales se utiliza el cambio de variable $v = y^{1-n}$. Resuelva:

a) $y'(x) + \frac{1}{x}\,y(x) = y(x)^4$, con $y(1) = 2$.
b) $y'(x) = y(x) + e^{2x}y(x)^3$.

Desarrollo:

a) Observe que la EDO dada tiene por solución a $y \equiv 0$, pero esta no satisface la coindición inicial $y(1) = 2$.
De otra parte, en este problema, tenemos

$$\begin{cases} f(x, y) = y^4 - (1/x)y \\ f_y(x, y) = 4y^3 - (1/x) \end{cases}$$

Entonces, teniendo presente el Teorema de Existencia y Unicidad de soluciones, el PVI dado tiene única solición que pasa por $(1, 2)$. Observamos que esta solución buscada no puede ser cero en ningún punto (en efecto, si la solución al PVI buscado cruza al eje de la variable independiente, esto es, la recta $y = 0$, digamos que cruza en el punto $(x_0, 0)$, entonces el PVI

$$\begin{cases} y'(x) = (y(x))^4 - (1/x)y(x) \\ y(x_0) = 0 \end{cases}$$

también tiene por solución a $y(x) \equiv 0$, esto contradice el Teorema de Existencia y Unicidad).
Para resolver el PVI dado, primero dividimos la EDO dada por $y^4(x)$, para obtener

$$y^{-4}(x)y'(x) + \frac{1}{x}\,y^{-3}(x) = 1.$$

Ahora hacemos **el cambio de variable** $v(x) = y^{-3}(x)$, (observe que

$$\frac{dv}{dx}(x) = -3\, y^{-4}(x)\, \frac{dy}{dx}(x)\,),$$

obteniendo la EDO lineal de primer orden con coeficientes variables

$$-(1/3)v'(x) + (1/x)v(x) = 1 \iff v'(x) - \frac{3}{x}v(x) = -3.$$

Mulplicando por el factor de integración $\mu(x) = x^{-3}$, sigue

$$x^{-3}\, v'(x) - \frac{3}{x}x^{-3}v(x) = -3x^{-3} \iff \frac{d}{dx}[x^{-3}v(x)] = -3x^{-3}.$$

Integrando se obtiene

$$x^{-3}v(x) = (-3)\int x^{-3}\, dx + C = (-3)(-1/2)x^{-2} + C$$

con C constante. Despejando, obtenemos

$$v(x) = \frac{3}{2}x + c\, x^3;$$

esto es,

$$y^{-3}(x) = \frac{3}{2}x + c\, x^3.$$

Puesto que $y(1) = 2$, sigue que

$$y^{-3}(1) = \frac{1}{8} = \frac{3}{2} + c,$$

de donde $c = -\frac{11}{8}$.
Así, la única solución al PVI dado, es:

$$y^{-3}(x) = \frac{3}{2}x - \frac{11}{8}x^3 \; = \; \frac{12x - 11x^3}{8}$$

Equivalentemente,

$$y^3(x) = \frac{8}{12x - 11x^3}.$$

b) Teniendo presente el análisis en el item anterior, para determinar soluciones no triviales, iniciamos dividiendo la EDO dada por y^3 (el estudiante debe hacer el análisis que permite dividir por y^3).

$$\frac{y'(x)}{y^3} - y^{-2}(x) = \mathrm{e}^{2x}$$

e introduciendo la función auxiliar $v(x) = y^{-2}(x)$, se obtiene

$$v'(x) + 2v(x) = -2\mathrm{e}^{2x},$$

la cual escribimos como:

$$\frac{d}{dx}[\mathrm{e}^{2x}v(x)] = -2\mathrm{e}^{4x}.$$

Integrando, obtenemos

$$v(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + c\mathrm{e}^{-2x}$$

de donde

$$y^2(x) = \frac{2\mathrm{e}^{2x}}{2c - \mathrm{e}^{4x}}$$

con c constante arbitraria.

2. Resuelva el PVI

$$(P)\left\{\begin{array}{rcl} y'(x) & = & (x+y)^2 \\ y(0) & = & 1 \end{array}\right. .$$

Nota: Para resolver ecuaciones del tipo $y'(x) = f(ax+by(x)+c)$, primero haga el cambio de variables $z = ax + by + c$ para luego usar el método de separación de variables.

Solución:

Aquí $f(x,y) = (x+y)^2$, en consecuencia $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(x+y)$. Del Teorema de Existencia y Unicidad el PVI dado tiene solución única. Para resolver la EDO hacemos el cambio de variable $z(x) = x + y$; entonces: De $z'(x) = 1 + y'(x)$, sigue que $z'(x) = (z(x))^2 + 1$. Por tanto,

$$\frac{dz}{z^2+1} = dx$$

Integrando obtenemos $\arctan(z) = x+c$, es decir, $\arctan(x+y) = x+c$. De la condición inicial $y(0) = 1$ sigue $\arctan(1) = c = \frac{\pi}{4}$. Por tanto $\arctan(x+y) = x + \frac{\pi}{4}$. Esto es, $y(x) = \tan(x + \frac{\pi}{4}) - x$.

3. Considere la EDO de primer orden no lineal $y'(x) = \dfrac{1}{x-y}$.

   a) Determine las regiones donde se puede asegurar existencia y unicidad para los correspondientes PVI.

   b) Sin resolver la EDO, determine como la monotonía de la única solución del PVI

   $$y'(x) = \frac{1}{x-y},\ y(2) = -1.$$

   c) Haciendo el cambio de variable $z(x) = y(x) - x$, resuelva explícitamente el PVI del item anterior.

Problemas para el estudiante

1. Usando el cambio de variable $v = y^{1-n}$ resuelva:

   a) $y'(x) = y(x) + e^{2x} y(x)^3$

   b) $y'(x) + \frac{1}{x}\, y(x) = y(x)^4$

2. Para resolver ecuaciones del tipo $y'(x) = f(a\,x + b\,y(x) + c)$, primero haga el cambio de variables $z = ax + by + c$ para luego usar el método de separación de variables. Resuelva:

   a) $y'(x) = (x + y(x))^2$

   b) $y'(x) = (4x + y(x) + 1)^2$

3. Para resolver ecuaciones del tipo $y'(x) = f(y(x)/x)$, primero haga el cambio de variables $z = y/x$ para luego usar el método de separación de variables. Resuelva:

   a) $y'(x) = \frac{y(x)}{x} + \frac{x}{y(x)}$

   b) $x\,y'(x) = y(x)\,ln\left(\dfrac{y(x)}{x}\right)$ con $y(1) = 1$.

4. Analice la existencia y unicidad del PVI

$$y'(x) = \frac{1}{y^2 + 2y - 15}, \qquad y(x_0) = y_0$$

   ¿Qué condiciones debe haber sobre (x_0, y_0) para tener existencia y unicidad?

5. Determinar la solución del siguiente PVI e indique explícitamente el intervalo de definición de la solución

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{2x+1}{2y} \\ y(-2) = -1 \end{cases}$$

6. (a) Construir la solución general de la siguiente EDO. Indique el intervalo de definición de la solución:

$$\frac{dy}{dx} = (1+y)^{3/2} x^3 \sqrt{x^4 - 1}$$

   (b) Resolver el PVI

$$\frac{dy}{dx} = (1+y)^{3/2} x^3 \sqrt{x^4 - 1}\ ,\ y(2^{\frac{1}{4}}) = 0$$

14/10/22
RBP/JMS/FST//jms