Clase 8 Lu 29/08/22

Consideremos las siguientes EDO lineales:

(a) $\boxed{y''(x) + 2y'(x) - 8y(x) = 0}$

(b) $\boxed{x y''(x) - (1+x^2)y'(x) + 2x y(x) = 0}$

Observe que si $L = xD^2 - (1+x^2)D + 2xD^0$, entonces la EDO en (b) es:

$Ly = 0$. Además, observe que el operador

$L = L_1 \cdot L_2(y)$ donde

$$\begin{cases} L_1 = (D - x) \\ L_2 = (xD - 2) \end{cases}$$, esto es,

$$x y''(x) - (1+x^2)y'(x) + 2x y(x) = (D-x)(xD-2)y(x).$$

Por tanto, si $y \in \ker(xD-2)$, entonces

$$(D-x)[(xD-2)y] = [D-x]\,0 = 0$$

(Notar que $\ker(xD-2)$ tiene por base a $\boxed{y(x) = x^2}$. En efecto;

$$(xD-2)(x^2) = x\frac{d}{dx}(x^2) - 2x^2 = x(2x) - 2x^2 = 0 \Big)$$

Por tanto; $y(x) = x^2$, es solución de

$$xy''(x) - (1+x^2)y'(x) + 2xy(x) = 0.$$

Sin embargo, si invertimos los operadores L_1 y L_2, tenemos:

$$(L_2 \cdot L_1)y(x) = (xD-2)(D-x)y(x)$$

$$= xD(Dy(x) - xy(x)) - 2(Dy(x) - xy(x))$$

$$= x\frac{d}{dx}[y'(x) - xy(x)] - 2y'(x) + 2xy(x).$$

$$= x\left(y''(x) - \frac{d}{dx}[x\, y(x)] \right) - 2y'(x) + 2x\, y(x)$$

$$= x\, y''(x) - (2+x^2)\, y'(x) + x\, y(x)$$

y resulta que $\boxed{z(x) = x^2}$ no es solución

de: $x\, y''(x) - (2+x^2)\, y'(x) + x\, y(x) = 0$.

(En efecto: $x\, z''(x) - (2+x^2)\, z'(x) + x\, z(x) =$

$$= 2x - (2+x^2)\, 2x + x^3$$

$$= 2x - 4x - 2x^3 + x^3$$

$$= -2x - x^3 \neq 0$$)

Así, podemos concluir que los operadores diferenciales lineales con coeficientes variables, en general, ¡NO CONMUTAN!

¿Qué sucede si L es a coeficientes constantes?

Tomemos:

$$\boxed{y''(x) + 2y'(x) - 8y(x) = 0} \quad (*)$$

Note que $(*)$ es equivalente a $\boxed{Ly = 0}$

con $L = D^2 + 2D - 8$. Además.

$$L = (D+4)(D-2) = (D-2)(D+4) \text{ ¡Ejercicio!}$$

Por tanto, si $\hat{y} \in \ker(D+4)$ ($\Rightarrow (D+4)\hat{y} = 0$.)

entonces $L\hat{y} = (D-2)(D+4)\hat{y}$

$$= (D-2)(0) = 0$$

(Nota que $\ker(D+4) = \{ y : \left(\frac{d}{dx} + 4\right) y = 0 \}$

$\Longleftrightarrow \quad y'(x) + 4y(x) = 0$

$$\Longrightarrow\quad y(x) = e^{-4x} \quad \left((D+4)e^{-4x} = 0 \right)$$

$$\therefore\quad (D-2)(D+4)e^{-4x} = 0$$

Analogamente: $y \in \ker(D-2)$

$$\Longrightarrow\quad y \in \ker\left[(D+4)(D-2)\right]$$

Pero $y \in \ker(D-2) \Rightarrow y(x) = e^{2x}$

Así, la EDO:

$$(D-2)(D+4)y = \left[D^2 + 2D - 8\right]y$$

$$= y''(x) + 2y'(x) - 8y(x) = 0$$

tiene base de su kernel a

$$B = \{ e^{-4x}, e^{2x} \}$$

(Usando el Teorema de la dimensión y $W(e^{-4x}, e^{2x}; x) \neq 0$).

$D : C^1(I,\mathbb{R}) \to C^0(I,\mathbb{R})$

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Consideremos

$\boxed{L = L_1 \cdot L_2}$ donde $\begin{cases} L_1 = D - a \\ L_2 = D - b \end{cases}$ $\left(D = \dfrac{d}{dx} \right)$

Entonses $L_1 y = 0 \iff (D-a)y = 0 \iff y'(x) - a\,y(x) = 0$

$\iff y' - a y = 0$

Además.

$z \in \ker(L_1) \iff z$ solución de $\boxed{y'(x) - a\,y(x) = 0,\ \forall x}$.

$x \in ?$

Note que $\boxed{y(x) = e^{ax}}$ es tal que $y \in \ker(L_1)$

De otra parte: $L y = L_1 \cdot L_2 (y) = 0$

$\iff (D-a)(D-b)\,y = 0$ (a, b ctes)

$\iff (D^2 - (a+b)D + ab)\,y = 0$

$\iff y''(x) - (a+b)\,y'(x) + ab\,y(x) = 0$.

Tomemos $a = 3$ y $b = 2$, entonces

$L y = L_1 \cdot L_2 (y) = (D-3)(D-2)\,y = 0$

$\iff \boxed{y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 0}$

En general:

$D : C^1(I,\mathbb{R}) \to C^0(I,\mathbb{R})$

Para $a, b \in \mathbb{R}$, consideremos

$\boxed{L = L_1 \cdot L_2}$ donde $\begin{cases} L_1 = D - a \\ L_2 = D - b \end{cases}$ $\left(D = \dfrac{d}{dx} \right)$

Es fácil ver que:

$$L_1 \cdot L_2(y(x)) = L_2 \cdot L_1(y(x)),$$

$$\boxed{(D-a)(D-b) = (D-b)(D-a)}$$

En efecto: $\left(D = \dfrac{d}{dx} \right)$

$$\begin{aligned}
(D-a)(D-b)\,y &= (D-a)(y' - by) \\
&= D(y' - by) - a(y' - by) \\
&= y'' - b\,y' - ay' + aby \\
&= y'' - ay' - by' + aby \\
&= D(y' - ay) - b(D-a)y \\
&= (D-b)(D-a)y.
\end{aligned}$$

y como $\begin{cases} (D-b)\,e^{bx} = 0 \\ (D-a)\,e^{ax} = 0 \end{cases}$

sigue que:

Así, $(D-a)(D-b)(e^{ax}) = (D-b)\underbrace{(D-a)(e^{ax})}$
$= (D-b)\,0$
$= 0$

De modo similar:

$(D-b)(D-a)(e^{bx}) = (D-a)\underbrace{(D-b)e^{bx}}$
$= (D-a)\,0$
$= 0$

Tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} y_1(x) = e^{ax} \\ y_2(x) = e^{bx} \end{array}\right\}$$ son soluciones de $\boxed{Ly=0}$ o $\iff$ $\boxed{y'' - (a+b)y' + ab\,y = 0}$

$$\left(\begin{array}{l} y''(x) - (a+b)y'(x) + ab\,y(x) = 0 \\ y''(t) - (a+b)y'(t) + ab\,y(t) = 0 \end{array}\right).$$

Del Teorema de la dim(Ker L), sigue que el espacio de las soluciones de

$$y''(x) - (a+b)y'(x) + ab\,y(x) = 0, \quad a, b \text{ ctes en } \mathbb{R}$$

tiene base $B = \{e^{ax}, e^{bx}\}$

Ejemplo: Relativo a la EDO

$$\boxed{y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 0} \quad (*)$$

Tenemos $(*) \Leftrightarrow Ly = 0$;

donde $L = (D^2 - 5D + 6) = (D-3)(D-2)$

Note que: $L(e^{2x}) = (D-3)(D-2)e^{2x} = 0$

Pues $(D-2)(e^{2x}) = 0$. Además,

$$L(e^{3x}) = (D-2)(D-3)e^{3x} = 0$$

Entonces $\{e^{2x}, e^{3x}\} \subseteq \ker[(D-2)(D-3)]$

$\Longrightarrow$ $\{e^{2x}, e^{3x}\}$ es base para el espacio solución de $\boxed{(D-2)(D-3)y = 0}$.

Por tanto, si $z = z(x)$ es solución de $y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 0$, entonces existen constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ de modo que:

$$\boxed{z(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}}$$

Ahora veremos que en general, si L_1, L_2 son operadores lineales a coeficientes constantes, entonces vale lo anterior, esto es:

$$(Ly = 0 \text{ con } L = L_1 \cdot L_2)$$

TEOREMA:

Sean L_1, L_2 operadores diferenciales lineales a coeficientes constantes, entonces

$$\boxed{L_1 \cdot L_2 = L_2 \cdot L_1}$$

Por lo tanto: $\boxed{\operatorname{Ker}(L_1 \cdot L_2) = \operatorname{Ker}(L_2 \cdot L_1)}$

Hacemos un paréntesis para resolver

$$\boxed{Ly=0} \qquad L = D^n + \sum_{j=0}^{n} c_{n-j} D^{n-j}$$

cuando $\boxed{L = D^n + c_{n-1} D^{n-1} + \dots + c_1 D + c_0 D}$

con $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ constantes reales.

(L a coefic. constantes)

Recordemos que el Espacio vectorial solución de

$Ly=0$ corresponde a $Ker(L)$

Para determinar soluciones de $\boxed{Ly=0}$

buscamos soluciones del tipo

a descubrir

$$\boxed{y = e^{\alpha x}}$$ con α constante en $\mathbb{C}$.

Note $\forall j \in \mathbb{N}$; $\boxed{D^j(e^{\alpha x}) = \alpha^j e^{\alpha x}}$. Así:

$$L(e^{\alpha x}) = \left[D^n + \sum_{j=1}^{n} c_{n-j} D^{n-j}\right](e^{\alpha x}).$$

(($D(e^{\alpha x}) = \alpha e^{\alpha x}$

$D^2(e^{\alpha x}) = D(D(e^{\alpha x})) = D(\alpha e^{\alpha x})$

$= \alpha^2 e^{\alpha x} \ldots$

$y'' - y' - 6y = 0$;

$y = e^{\alpha x}$ $\Rightarrow$ $(\alpha^2 - \alpha - 6) e^{\alpha x} = 0$

$\Rightarrow (\alpha^2 - \alpha - 6) = (\alpha - 3)(\alpha + 2) = 0$

$\{e^{3x}, e^{-2x}\} \subseteq \ker(L)$.

$\boxed{y(x) = e^{ax}}$; $(D^2 + c_1 D + c_2 D^0)\underline{e^{ax}} \overset{?}{=} 0$

$a^2 e^{ax} + a c_1 e^{ax} + c_2 e^{ax} =$

$(a^2 + a c_1 + c_2) e^{ax} = 0$

$P(a) = a^2 + a c_1 + c_2 = 0$

Esto es;

$$L(e^{\alpha x}) = D^{n}(e^{\alpha x}) + \sum_{j=0}^{n} c_{n-j}\, D^{n-j}(e^{\alpha x})$$

α ???

$$= \underbrace{\left(\alpha^{n} + \sum c_{n-j}\,\alpha^{n-j}\right)}\, e^{\alpha x}$$

$$\overset{?}{=} 0$$

(estamos buscando α tq: $L(e^{\alpha x}) = 0$)

$$\Longleftrightarrow \boxed{\alpha^{n} + c_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + c_1\alpha + c_0 = 0}$$

Entonces; $\boxed{y(x) = e^{\alpha x}}$, α constante en $\mathbb{F}$

es solución de $\boxed{Ly = 0}$

ssi $\begin{cases} \alpha \text{ es raíz de } p(\alpha) \text{ cuando} \\ p(\alpha) = \alpha^{n} + c_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + c_1\alpha + c_0 \end{cases}$

OBS. Puesto que si p es polinomio de grado n, $n \geq 2$, entonces.

$$\boxed{p(\alpha) = q(\alpha)\, r(\alpha)} = r(\alpha)\, q(\alpha)$$

con $q = \alpha^2 + b\alpha + c \longrightarrow \boxed{L_q(y) = D^2 + bD + c}$

donde $\boxed{\text{grado}(q) = 2.}$

Note que $\underbrace{p(\alpha) = 0}$ $\Longleftrightarrow$ $q(\alpha)\, r(\alpha) = 0$

(T.F.A
Todo polinomio de grado n con coeficientes reales admite n raíces en $\mathbb{C}$)

$q(\alpha)$
$\Uparrow$

Por tanto, podemos suponer que $\boxed{\text{grado}(P) = 2}$

Así, pensemos en $Ly = 0$ con

$$L = D^2 + bD + c.$$

$$\Rightarrow \quad L(e^{\alpha x}) = \underbrace{(\alpha^2 + b\alpha + c)e^{\alpha x} = 0}$$

basta buscar las raíces de

$$\boxed{p(\alpha) = \alpha^2 + b\alpha + c}$$

$\to Ly = 0$
con $L = D^2 + bD + c.$

Esto es, buscar $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que

$$\boxed{\alpha^2 + b\alpha + c = 0}$$

Polinomio p es de grado 2, a saber,

$$\boxed{p(\alpha) = \alpha^2 + b\alpha + c} \Longrightarrow \boxed{L = D^2 + bD + c}$$

Las raíces de p se dividen en tres casos dependiendo del valor: $\boxed{\Delta = b^2 - 4c}$

$$\begin{cases} (b^2 - 4c) > 0 \\ (b^2 - 4c) = 0 \\ (b^2 - 4c) < 0 \end{cases}$$

Caso 1: $\boxed{b^2 - 4c > 0} \Longrightarrow$ $p(\alpha)$ tiene raíces α_1, α_2 en $\mathbb{R}$, con $\alpha_1 \neq \alpha_2$

Caso 2: $\boxed{b^2 - 4c = 0} \Longrightarrow$ $p(\alpha)$ = tiene raíces repetidos $\alpha_1 = \alpha_2$.

Caso 3: $\boxed{b^2 - 4c < 0} \Longrightarrow$ $p(\alpha)$ tiene raíces complejas conjugadas.

Caso 1: Ejemplo. $y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0 \quad (*)$

Buscamos $y(x) = e^{\alpha x}$ solución

Entonces $(*) \iff e^{\alpha x}(\alpha^2 - \alpha - 6) = 0$

$\iff \alpha^2 - \alpha - 6 = (\alpha - 3)(\alpha + 2) = 0$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = -2\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y_1(x) = e^{3x} \\ y_2(x) = e^{-2x}\end{array}\right\}$$

$$W(y_1, y_2; x) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-2x} \\ 3e^{3x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -5e^{x} \neq 0$$

$\Rightarrow \{e^{3x}, e^{-2x}\}$ base del $\ker(D^2 - D - 6)$

o $\iff$ base del conjunto solución

de $\boxed{y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0} \quad (*)$

Por tanto, si $u = u(x)$ es solución de $(*)$, entonces existen constantes $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ tal que: $\boxed{u(x) = d_1 e^{3x} + d_2 e^{-2x}}$

Caso (2): $\boxed{b^2 - 4c = 0}$

Ejemplo: $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 0$

Aquí, soluciones del tipo $y(x) = e^{\alpha x}$

llevan a $e^{\alpha x}(\alpha^2 - 4\alpha + 4) = 0$

$$\Longrightarrow (\alpha^2 - 4\alpha + 4) = (\alpha - 2)^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{\alpha_1 = \alpha_2 = 2}$$

solamente tenemos una solución,

$\boxed{y(x) = e^{2x}}$. Para determinar otra

solución, usamos el

Teorema:

Sea L un operador diferencial lineal a coeficientes constantes

si $y = y(x)$ es solución de $Ly = 0$

entonces $u(x) = x\,y(x)$ es solución de $L^2 y = 0$.

Ejemplo! - si $L = (D-2)$, entonces

$Ly=0$ tiene solución $y(x)=e^{2x}$.

Por el Teorema

$$L^2y=0 \iff (D-2)^2y=0$$

$$\iff y''(x)-4y'(x)+4y(x)=0$$

tiene como solución a

$z(x)=xe^{2x}$.

Por tanto; $y''(x)-4y'(x)+4y(x)=0 \quad (*)$

tiene como conjunto FUNDAMENTAL

a $B=\{e^{2x}, xe^{2x}\}$.

Así, si $z(x)$ es solución de $(*)$, entonces

$$\boxed{z(x) = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}}$$; c_1, c_2 ctes