

VECTORES

FÍSICA I - 510140

PROF. JOSÉ AGUIRRE GÓMEZ

DEPARTAMENTO DE FÍSICA
OFICINA 315

CONTENIDOS

- INTRODUCCIÓN
- SISTEMAS DE COORDENADAS
- CANTIDADES VECTORIALES Y ESCALARES
- ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS VECTORES
- COMPONENTES DE UN VECTOR Y VECTORES UNITARIOS
- EL PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES
- EL PRODUCTO VECTORIAL DE VECTORES
- EJERCICIOS

1. INTRODUCCIÓN

En el estudio de la física, generalmente se trabaja con cantidades físicas que tienen tanto propiedades numéricas como propiedades direccionales.

Cantidades con esas propiedades direccionales son llamadas **cantidades vectoriales**.

El presente capítulo está enfocado en el estudio del álgebra vectorial y de algunas propiedades generales de las cantidades vectoriales.

Discutiremos la adición y sustracción de cantidades vectoriales, tanto geométrica como analíticamente, con base en algunas aplicaciones comunes a situaciones físicas.

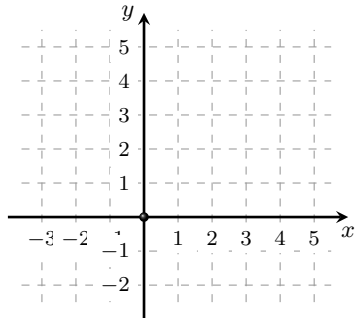
Extenderemos el análisis a la multiplicación de vectores: En particular al producto escalar entre vectores (un escalar más unidades) y al producto vectorial entre vectores (otro vector).

Las cantidades vectoriales son muy importantes en física y es imperativo que sepa operar con sus propiedades gráficas y algebraicas.

2. SISTEMAS DE COORDENADAS

Muchos aspectos de la física requieren la descripción de una ubicación en el espacio. Por ejemplo, la descripción matemática del movimiento de un objeto requiere un método para describir la posición del objeto en varios instantes de tiempo. Esto se logra con el uso de un **Sistema de Coordenadas**.

En un sistema de coordenadas Cartesianas, también llamado **sistema de coordenadas rectangulares**, en dos dimensiones, el eje vertical (eje- y) se interseca con el eje horizontal (eje- x) (ambos ortogonales- perpendiculares- entre sí) en un punto definido como el origen (O).



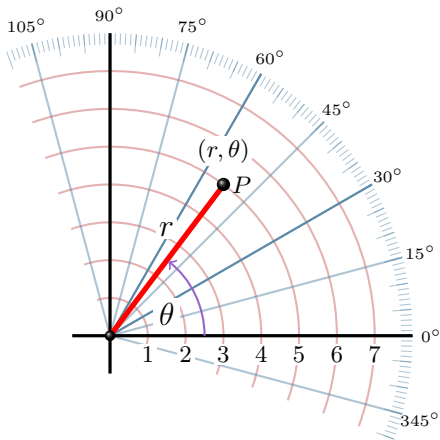
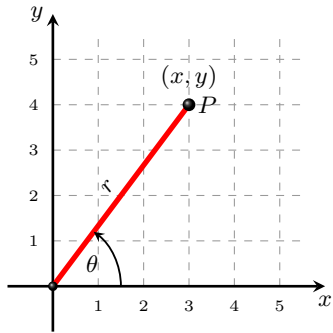
Además, de las definiciones de trigonometría se tiene:

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \quad \rightarrow \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \quad (2)$$

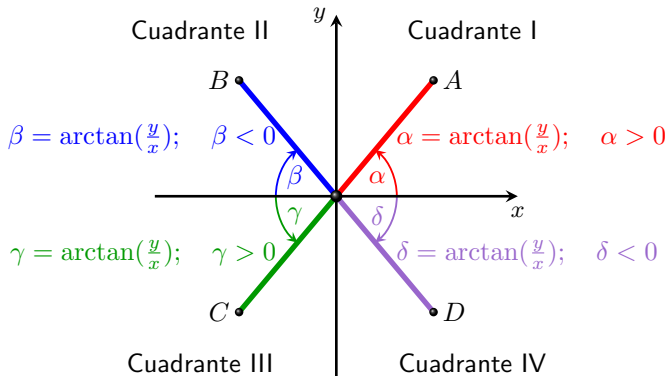
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (3)$$

La Ec.(3) es el familiar teorema de Pitágoras.

Las Ecs.(1) a (3), relacionando (r, θ) a (x, y) se aplican sólo cuando θ está definido como en la Fig.2, o sea, cuando θ positivo es un ángulo medido desde el eje- x positivo y en la dirección antihoraria.

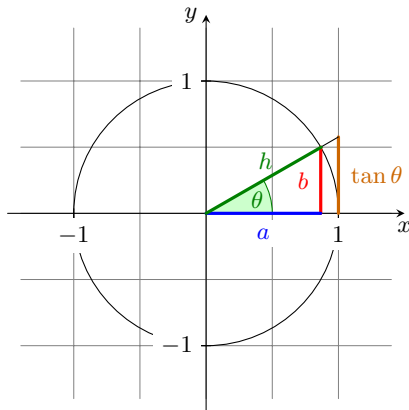


Las figuras muestran al punto P descrito en coordenadas cartesianas (x, y) [izquierda] y en coordenadas polares (r, θ) [derecha]. Cabe destacar que el punto es el mismo, la única diferencia es que se han empleado dos sistemas de coordenadas diferentes para describir su ubicación.



- **Cuadrante I:** El ángulo polar θ coincide con α .
- **Cuadrante II:** $y > 0$ y $x < 0$. El ángulo polar se define como $\theta = \beta + 180^\circ$.
- **Cuadrante III:** $y < 0$ y $x < 0$. El ángulo polar se define como $\theta = \gamma + 180^\circ$.
- **Cuadrante IV:** $y < 0$ y $x > 0$. El ángulo polar se define como $\theta = \delta + 360^\circ$.

Antes de proseguir con los contenidos, mostraremos propiedades básicas de las funciones trigonométricas.



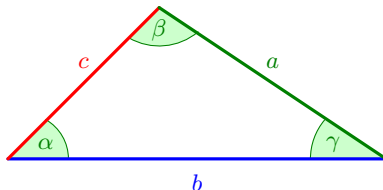
La figura adjunta muestra una circunferencia de radio $r = 1$, la cual tiene un triángulo rectángulo inscrito en ella.

Las relaciones entre el **cateto adyacente** (a), el **cateto opuesto** (b) y la **hipotenusa** h son:

$$\cos \theta = \frac{a}{h}, \quad \sin \theta = \frac{b}{h}, \quad \tan \theta = \frac{b}{a}.$$

El Teorema de Pitágoras queda definido como:

$$h^2 = a^2 + b^2.$$



Teorema del Coseno

El Teorema del Coseno es una generalización del Teorema de Pitágoras para triángulos que no son rectángulos. Los catetos se relacionan de acuerdo a la siguiente ecuación

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Teorema del Seno

El Teorema del Seno relaciona los lados del triángulo con el seno de los ángulos opuestos a estos. Matemáticamente se enuncia como

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Funciones trigonométricas inversas

Sea f una función real y biyectiva cuyo dominio es el conjunto X y su codominio es el conjunto Y , la cual está definida como

$$\begin{aligned} f : x \in X &\rightarrow y \in Y, \\ f(x) &= y. \end{aligned}$$

Así, la función inversa f^{-1} está definida como,

$$\begin{aligned} f^{-1} : y \in Y &\rightarrow x \in X, \\ f^{-1}(y) &= x. \end{aligned}$$

Observación

Es importante destacar que:

$$f^{-1}(y) \neq \frac{1}{f(y)}$$

Las funciones trigonométricas también poseen inversa y éstas se etiquetan con el prefijo *arc*. Por ejemplo, dada la función coseno

$$\cos(\theta) = x.$$

Su inversa se obtiene aplicando a ambos lados de la igualdad \arccos ,

$$\arccos(\cos(\theta)) = \arccos(x), \quad \Rightarrow \quad \theta = \arccos(x).$$

A continuación se muestran las funciones trigonométricas y sus inversas más usadas en este curso

Función trigonométrica	Función trigonométrica inversa
$a = \cos(\alpha)$	$\alpha = \arccos(a)$
$b = \sin(\beta)$	$\beta = \arcsin(b)$
$c = \tan(\gamma)$	$\gamma = \arctan(c)$

Por ejemplo:

$$\cos(\alpha) = 0.50 \rightarrow \alpha = \arccos(0.50) = 60^\circ$$

$$\sin(\beta) = 0.50 \rightarrow \beta = \arcsin(0.50) = 30^\circ$$

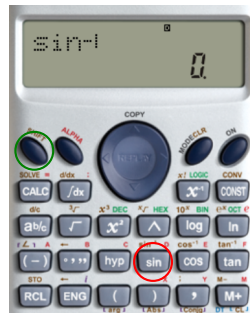
$$\tan(\gamma) = 0.500 \rightarrow \gamma = \arctan(0.500) = 26.6^\circ$$

Uso de la calculadora para las funciones trigonométricas

Para configurar una calculadora tradicional en **grados** (Deg) o **radianes** (Rad), se debe buscar el menú de ángulos presionando sucesivamente el botón MODE. Para establecer la calculadora en grados (Deg) debe seleccionar 1 o para establecer en radianes (Rad) debe pulsar 2.



Para calcular funciones trigonométricas inversas, debemos primero presionar el botón **SHIFT** y luego la función trigonométrica. En el ejemplo mostrado se calcula la función arcsin presionando primero **SHIFT** y luego la función sin. Es importante señalar que $\arcsin = \sin^{-1}$, es decir $\sin^{-1} \neq \frac{1}{\sin}$ y eso ocurre para todas las funciones trigonométricas.



Nota sobre ángulos y sus medidas

Como habrá notado en su calculadora al momento de configurarla para trabajar con ángulos, ésta le mostró tres opciones: Deg., Rad. y Gra.

Deg. Corresponde a grados **sexagesimales**. Un círculo es dividido en 360 partes iguales y a cada una de esas partes se llama un grado sexagesimal (1°). Cada grado se divide en 60 partes iguales y cada una de esas parte se denomina un minuto sexagesimal ($1'$). Cada minuto se divide en 60 partes iguales y a cada una de esa partes se llama segundo sexagesimal ($1''$).

Rad. Dada una circunferencia de centro O y radio r , se denomina radián (1 rad) al ángulo central cuyo arco coincide en longitud con el radio. Dado que la longitud de la circunferencia es $2\pi r$, entonces un ángulo completo equivale a $2\pi \text{ rad}$.

Gra. Corresponde a grados **centésimales**. Un círculo es dividido en 400 partes iguales y a cada parte se denomina un grado centesimal (1^g). Cada grado se divide en 100 partes iguales, dando origen al minuto centesimal (1^m). Cada minuto centesimal se divide en 100 partes iguales, dando origen a segundo centesimal (1^s). Estos grados son llamados **gradianes**.

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad} = 400^g$$

$$90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad} = 100^g$$

Ejemplo 1. Coordenadas polares

Las coordenadas cartesianas de un punto en el plano xy son $(x, y) = (-3.50, -2.50)$ m, como mostrado en la Fig.3. Encuentre las coordenadas polares de ese punto.

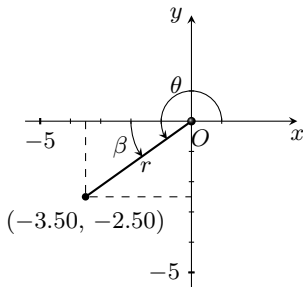


Figura 3. Encontrando las coordenadas polares cuando las coordenadas Cartesianas son dadas.

Solución.

Primero calculamos la coordenada polar r usando la Ec.(3), esto es:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3.50 \text{ m})^2 + (-2.50 \text{ m})^2} \\ &= \sqrt{12.2 \text{ m}^2 + 6.25 \text{ m}^2} = \sqrt{18.4 \text{ m}^2} = 4.29 \text{ m}. \end{aligned}$$

Ahora, calculamos $\tan \beta$ usando la Ec.(2), esto es:

$$\tan \beta = \frac{y}{x} = \frac{-2.50 \text{ m}}{-3.50 \text{ m}} = 0.714.$$

Del resultado anterior, obtenemos β

$$\beta = \arctan(0.714) = 35.5^\circ$$

Ahora, note que el punto está en el tercer cuadrante de modo que el ángulo polar θ se obtiene a partir de

$$\theta = 180^\circ + \beta = 180^\circ + 35.5^\circ = 215.5^\circ.$$

Con lo anterior, el punto de coordenadas Cartesianas $(x, y) = (-3.50, -2.50)$ m, en el plano xy , equivale al punto de coordenadas polares planas

$$(r, \theta) = (4.29 \text{ m}, 215.5^\circ).$$

3. CANTIDADES VECTORIALES Y ESCALARES

Las **cantidades escalares** son especificadas completamente por un único valor con una unidad apropiada. Por ejemplo, temperatura, volumen, masa, energía, potencia, rapidez, e intervalo de tiempo, etc.

Las **cantidades vectoriales** son especificadas completamente por un número y una unidad apropiada además de una dirección. Por ejemplo, el desplazamiento, la velocidad, aceleración, etc.

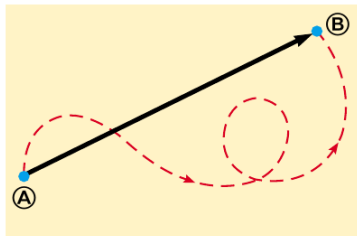


Figura 4. Movimiento de una partícula desde **A** a **B** a lo largo de un camino arbitrario representado por la línea segmentada.

En la Fig.4, el vector desplazamiento de la partícula desde **A** a **B** es representado por una flecha con el origen de la flecha en el punto **A** y la punta de la flecha en el punto **B**.

La dirección y punta de la flecha representan la dirección del desplazamiento y la longitud, su magnitud o módulo.

El desplazamiento depende sólo de las posiciones inicial y final: **El vector desplazamiento no depende del camino seguido entre esos dos puntos.**

Por ejemplo, si Ud. caminó 3.0 m hacia el este y luego 4.0 m hacia el norte, como mostrado en la Fig.7, encontrará que Ud. se encuentra a 5.0 m desde el punto que inició la caminata, en una dirección de 53° al norte del este. Su vector desplazamiento es el vector suma de los desplazamientos individuales.

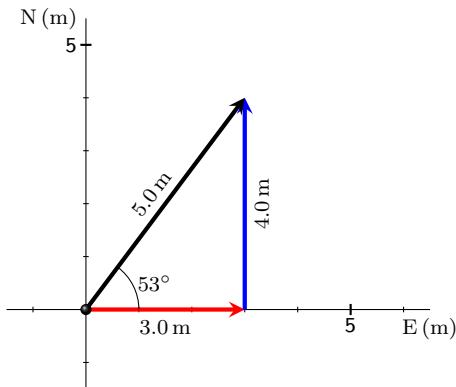


Figura 7. Adición vectorial. Caminar primero 3.0 m hacia el este y luego 4.0 m hacia el norte, lo deja a Ud. a 5.0 m del punto de partida.

Para adicionar más de dos vectores podemos valernos, por el momento, de una construcción geométrica. Ésta es mostrada en la Fig.8 para el caso de tres vectores.

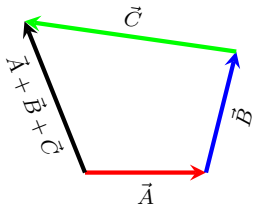


Figura 8. Construcción geométrica para la suma de vectores. Por definición el vector resultante \vec{R} es el que completa el polígono.

El vector resultante

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$

es el vector que completa el polígono.

En otras palabras, \vec{R} es el vector dibujado desde la cola del primer vector a la punta del último vector adicionado.

La adición de vectores es conmutativa

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}. \quad (4)$$

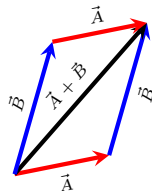


Figura 9. Construcción geométrica para $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$.

La **adición de vectores es asociativa**: La suma de dos o más vectores no depende de la manera en la cual los vectores han sido agrupados. Por ejemplo, para los tres vectores mostrados en la Fig.10:

$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = (\vec{A} + \vec{C}) + \vec{B} \quad (5)$$

La operación $\vec{A} - \vec{B}$ es equivalente a la suma del vector $-\vec{B}$ al vector \vec{A} [ver Fig.11(a)]:

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}). \quad (6)$$

Otra forma de ver la sustracción de vectores es notar que la diferencia $\vec{A} - \vec{B}$ entre los vectores \vec{A} y \vec{B} es lo que se debe adicionar al segundo vector para obtener el primero [ver Fig.11(b)].

Ejemplo 2. Un viaje de vacaciones

Viaja en un automóvil 20.0 km hacia el norte y luego 35.0 km en una dirección 60.0° al oeste del norte, como mostrado en la Fig.12(a). Encuentre la magnitud y la dirección de su desplazamiento.

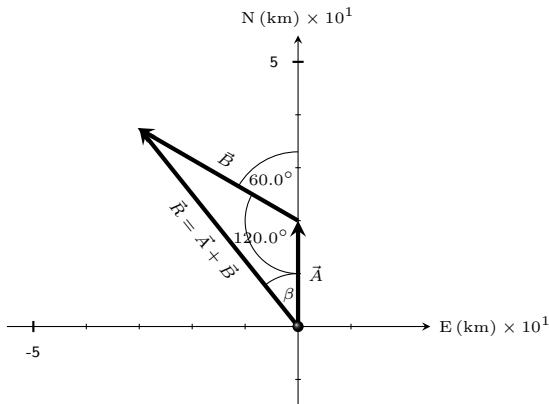


Figura 12. (a) Método gráfico para encontrar el desplazamiento resultante del automóvil.

Solución

Hagamos $\vec{A} = 20.0 \text{ km}$ hacia al norte y $\vec{B} = 35.0 \text{ km}$ a 60.0° al oeste del norte, los desplazamientos individuales del automóvil.

Deseamos encontrar el desplazamiento resultante $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ y su dirección.

Primero, la solución gráfica del problema se obtiene usando una regla graduada y un transportador.

Segundo, la solución analítica puede ser obtenida usando la ley de los cosenos y la ley de los senos:

La magnitud del desplazamiento resultante R se obtiene de la ley de los cosenos

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta} \\ &= \sqrt{(20.0 \text{ km})^2 + (35.0 \text{ km})^2 + 2(20.0 \text{ km})(35.0 \text{ km}) \cos(60.0^\circ)} \\ &= \sqrt{400 \text{ km}^2 + 1.22 \times 10^3 \text{ km}^2 + 700 \text{ km}^2} = \sqrt{2320 \text{ km}^2} = 48.17 \text{ km} \end{aligned}$$

La dirección (el ángulo β) se obtiene usando la ley de los senos:

$$\frac{\sin \beta}{B} = \frac{\sin 120.0^\circ}{R} \rightarrow \sin \beta = \left(\frac{\sin 120.0^\circ}{R} \right) B = \left(\frac{\sin 120.0^\circ}{48.17 \text{ km}} \right) (35.0 \text{ km}) = 0.629$$

Del resultado anterior se obtiene:

$$\beta = \arcsin(0.629) = \sin^{-1}(0.629) = 39.0^\circ.$$

El desplazamiento resultante del automóvil es 48.2 km en una dirección de 39.0° al oeste del norte.

Note que todos los ángulo son medidos con respecto al eje- y positivo.

Multiplicación de un vector por un escalar

Si un vector \vec{A} es multiplicado por un escalar positivo m , el producto $m\vec{A}$ es un vector que tiene la misma dirección de \vec{A} y una magnitud igual a mA .

Si el vector \vec{A} es multiplicado por una cantidad escalar negativa $-m$, el producto $-m\vec{A}$ tiene dirección opuesta a la de \vec{A} y su magnitud es mA .

Por jemplo, el vector $5\vec{A}$ es cinco veces más largo que \vec{A} y tiene la misma dirección \vec{A} . Por otro lado, el vector $-\frac{1}{5}\vec{A}$ tiene una longitud igual a un quinto de la longitud de \vec{A} , y la dirección opuesta a la de \vec{A} .

5. COMPONENTES DE UN VECTOR Y VECTORES UNITARIOS

Un método más preciso para sumar vectores hace uso de las proyecciones del vector a lo largo de los ejes coordenados.

Esas proyecciones son llamadas **vectores componentes** del vector. Cualquier vector puede ser descrito completamente por sus vectores componentes.

El vector \vec{A} en el plano xy forma un ángulo θ con el eje- x positivo [ver Fig. 13(a)]. Sus vectores componentes son \vec{A}_x (proyección sobre el eje- x) y \vec{A}_y (proyección sobre el eje- y). Luego

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y.$$

Con frecuencia nos referiremos a las “componentes de un vector \vec{A} ,” escritas como A_x y A_y (sin usar letra negrita).

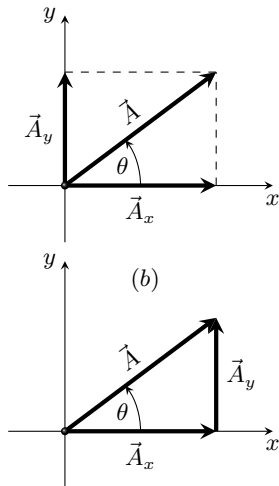


Figura 13. (a) Un vector en el plano xy representado por sus vectores componentes \vec{A}_x y \vec{A}_y . (b) La suma de los vectores componentes del vector.

Las componentes de un vector pueden ser positivas o negativas. La componente A_x es positiva si el vector componente \vec{A}_x apunta en la dirección positiva del eje- x ; la componente A_x es negativa, si el vector componente \vec{A}_x apunta en la dirección negativa del eje- x .

Un análisis similar se aplica a la componente A_y del vector.

De la Fig. 13 y las definiciones de seno y coseno, se derivan las siguientes relaciones:

$$A_x = A \cos \theta \quad (7)$$

$$A_y = A \sin \theta \quad (8)$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad (9)$$

$$\theta = \arctan \left(\frac{A_y}{A_x} \right). \quad (10)$$

Los signos de las componentes A_x y A_y dependen del ángulo θ . En el primer cuadrante $A_x > 0$ y $A_y > 0$; en el segundo cuadrante $A_x < 0$ y $A_y > 0$; en el tercer cuadrante $A_x < 0$ y $A_y < 0$; en el cuarto cuadrante $A_x > 0$ y $A_y < 0$.

Vectores Unitarios

Un vector unitario es un vector adimensional cuya magnitud es exactamente uno: Son usados para especificar una dada dirección y no tienen otro significado físico; convenientes para describir una dirección en el espacio.

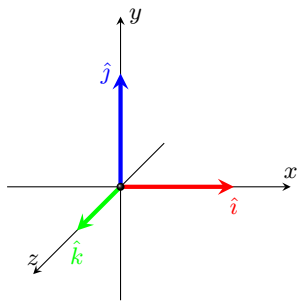


Figura 15. Los vectores unitarios \hat{i} , \hat{j} y \hat{k} están dirigidos a lo largo de los ejes x , y y z , respectivamente.

Usaremos los símbolos:

\hat{i} , vector unitario apuntando en la dirección positiva del eje- x

\hat{j} , vector unitario apuntando en la dirección positiva del eje- y

\hat{k} , vector unitario apuntando en la dirección positiva del eje- z

Para un sistema de coordenadas de mano derecha [ver Fig. 15]:

$$\hat{i} \perp \hat{j} \perp \hat{k}$$

y

$$|\hat{i}| = 1, \quad |\hat{j}| = 1 \quad \text{y} \quad |\hat{k}| = 1.$$

Suponga que deseamos sumar el vector \vec{B} al vector \vec{A} de la Ec.(11), donde el vector \vec{B} tiene componentes B_x y B_y : Adicione las componentes x e y separadamente:

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

$$\vec{R} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j}) + (B_x\hat{i} + B_y\hat{j})$$

$$\vec{R} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j}. \quad (13)$$

Dado que $\vec{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j}$, entonces

$$R_x = A_x + B_x; \quad R_y = A_y + B_y. \quad (14)$$

Además:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \\ &= \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\tan \theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{A_y + B_y}{A_x + B_x} \quad (16)$$

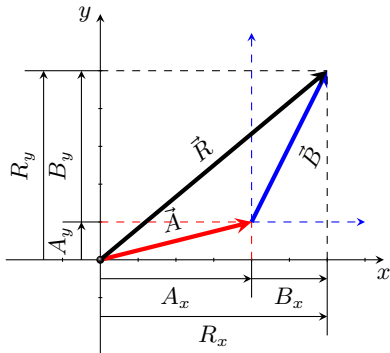


Figura 18. Construcción geométrica para la suma de dos vectores mostrando la relación entre las componentes del vector resultante \vec{R} y de los vectores individuales.

La extensión del método anterior a vectores en el espacio tridimensional es directa.
Sean:

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \quad (17)$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}. \quad (18)$$

Se tiene

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

$$R_x \hat{i} + R_y \hat{j} + R_z \hat{k} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) + (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k})$$

$$R_x \hat{i} + R_y \hat{j} + R_z \hat{k} = (A_x + B_x) \hat{i} + (A_y + B_y) \hat{j} + (A_z + B_z) \hat{k}. \quad (19)$$

La magnitud del vector resultante \vec{R} es dada por:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (A_y + B_y)^2 + (A_z + B_z)^2}$$

y el ángulo θ_x que el vector resultante forma con el eje- x es dado por:

$$\cos \theta_x = \frac{R_x}{R} = \frac{A_x + B_x}{R},$$

con expresiones similares para θ_y y θ_z .

Ejemplo 3. Suma de dos vectores

Encuentre la suma de los vectores \vec{A} y \vec{B} que yacen en el plano xy y son dados por:

$$\vec{A} = (2.0\hat{i} + 2.0\hat{j}) \text{ m}, \quad \vec{B} = (2.0\hat{i} - 4.0\hat{j}) \text{ m}.$$

Solución

En este caso se tiene: $A_x = 2.0 \text{ m}$, $A_y = 2.0 \text{ m}$, $B_x = 2.0 \text{ m}$ y $B_y = -4.0 \text{ m}$.

Usando la Ec.(13) se encuentra:

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

$$\vec{R} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j}$$

$$\vec{R} = [(2.0 + 2.0)\hat{i} + (2.0 + (-4.0))\hat{j}] \text{ m} = (4.0\hat{i} - 2.0\hat{j}) \text{ m}.$$

o

$$R_x = 4.0 \text{ m} \quad \text{y} \quad R_y = -2.0 \text{ m}.$$

La magnitud de \vec{R} se encuentra usando la Ec.(15):

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(4.0 \text{ m})^2 + (-2.0 \text{ m})^2} = \sqrt{20 \text{ m}^2} = 2\sqrt{5} \text{ m} = 4.5 \text{ m}.$$

La dirección de \vec{R} se calcula usando la Ec.(16):

$$\theta_R = \arctan\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = \arctan\left(\frac{-2.0}{4.0}\right) = \arctan(-0.50)$$

Usando la calculadora obtenemos:

$$\theta_R = -27^\circ$$

Este resultado es correcto si se interpreta como un ángulo de 27° medido desde el eje x positivo y en la dirección horaria.

De acuerdo a la convención estándar el ángulo debe ser medido desde el eje- x positivo y en la dirección anti-horaria, de modo tal que:

$$\theta_R = 360^\circ - 27^\circ = 333^\circ.$$

lo cual concuerda con la posición de \vec{R} en el cuarto cuadrante.

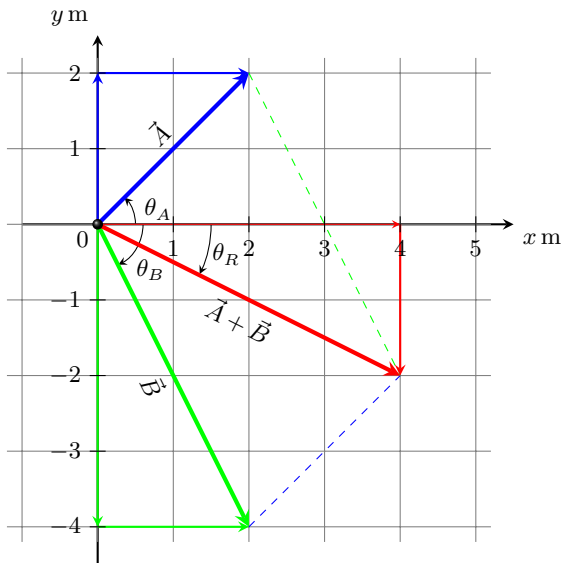


Ilustración gráfica del Ejemplo 3.

Ejemplo 4. El desplazamiento resultante

Una partícula sufre tres desplazamientos consecutivos: $\vec{d}_1 = (15\hat{i} + 30\hat{j} + 12\hat{k})$ cm, $\vec{d}_2 = (23\hat{i} - 14\hat{j} - 5.0\hat{k})$ cm y $\vec{d}_3 = (-13\hat{i} + 15\hat{j})$ cm. Encuentre las componentes del desplazamiento resultante, expréselo en términos de los vectores unitarios y determine la magnitud del mismo.

Solución

En este caso se tiene: $d_{1x} = 15$ cm, $d_{1y} = 30$ cm, $d_{1z} = 12$ cm, $d_{2x} = 23$ cm, $d_{2y} = -14$ cm, $d_{2z} = -5.0$ cm, $d_{3x} = -13$ cm, $d_{3y} = 15$ cm y $d_{3z} = 0.0$ cm.

El desplazamiento total \vec{d} , es

$$\vec{d} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2 + \vec{d}_3,$$

con

$$d_x = d_{1x} + d_{2x} + d_{3x} = (15 + 23 - 13) \text{ cm} = 25 \text{ cm}$$

$$d_y = d_{1y} + d_{2y} + d_{3y} = (30 - 14 + 15) \text{ cm} = 31 \text{ cm}$$

$$d_z = d_{1z} + d_{2z} + d_{3z} = (12 - 5.0 + 0.0) \text{ cm} = 7 \text{ cm}.$$

Así

$$\vec{d} = (25\hat{i} + 31\hat{j} + 7\hat{k}) \text{ cm}.$$

La magnitud del desplazamiento total puede ser calculada con la Ec.(19):

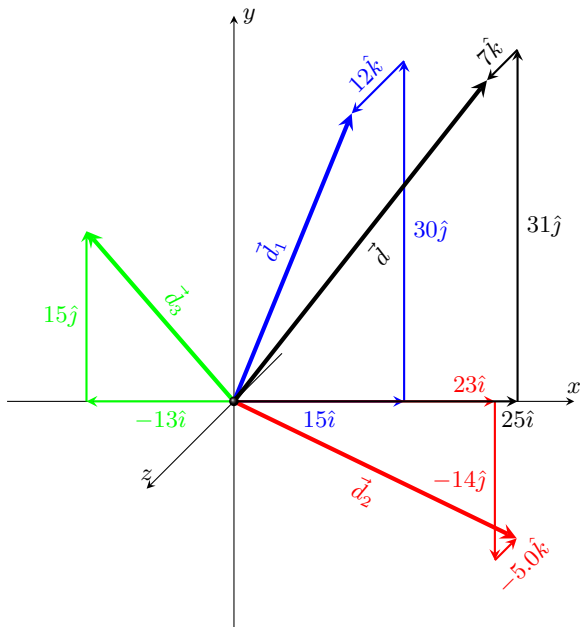
$$\begin{aligned} |\vec{d}| &= \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2} \\ &= \sqrt{(25 \text{ cm})^2 + (31 \text{ cm})^2 + (7 \text{ cm})^2} \\ &= \sqrt{(6.2 \times 10^2 \text{ cm}^2) + (9.6 \times 10^2 \text{ cm}^2) + (5 \times 10^1 \text{ cm}^2)} \\ &= \sqrt{1630 \text{ cm}^2} \\ &= 40.37 \text{ cm} \end{aligned}$$

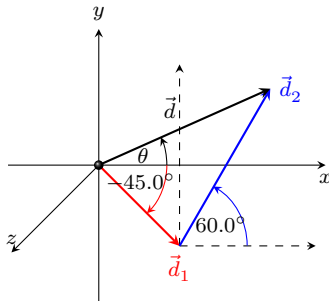
El ángulo director θ_x es:

$$\cos \theta_x = \frac{d_x}{d} = \frac{25 \text{ cm}}{40.37 \text{ cm}} = 0.62$$

o sea

$$\theta_x = \arccos(0.62) = 52^\circ$$





Solución

En la Fig.19 se muestra un esquema del problema.

Parte 1):

Sea \vec{d}_1 el vector desplazamiento del primer día de la senderista. En este caso $d_1 = 25.0 \text{ km}$ y $\theta_1 = -45.0^\circ$. Así

$$d_{1x} = d_1 \cos \theta_1 = (25.0 \text{ km}) \cos(-45.0^\circ) = (25.0 \text{ km}) \cos(45.0^\circ) = 17.7 \text{ km}$$

$$d_{1y} = d_1 \sin \theta_1 = (25.0 \text{ km}) \sin(-45.0^\circ) = -(25.0 \text{ km}) \sin(45.0^\circ) = -17.7 \text{ km}$$

$$\vec{d}_1 = (17.7\hat{i} - 17.7\hat{j}) \text{ km}$$

Sea \vec{d}_2 el vector desplazamiento del segundo día de la senderista. En este caso $d_2 = 40.0 \text{ km}$ y $\theta_2 = 60^\circ$. Así

$$d_{2x} = d_2 \cos \theta_2 = (40.0 \text{ km}) \cos(60.0^\circ) = 20.0 \text{ km}$$

$$d_{2y} = d_2 \sin \theta_2 = (40.0 \text{ km}) \sin(60.0^\circ) = 34.6 \text{ km}$$

$$\vec{d}_2 = (20.0\hat{i} + 34.6\hat{j}) \text{ km}$$

Parte 2):

El desplazamiento resultante de la senderista es $\vec{d} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2$. Las componentes de \vec{d} son:

$$d_x = d_{1x} + d_{2x} = (17.7 + 20.0) \text{ km} = 37.7 \text{ km}$$

$$d_y = d_{1y} + d_{2y} = (-17.7 + 34.6) \text{ km} = 16.9 \text{ km}.$$

Usando vectores unitarios, el desplazamiento resultante de la senderista \vec{d} , se escribe

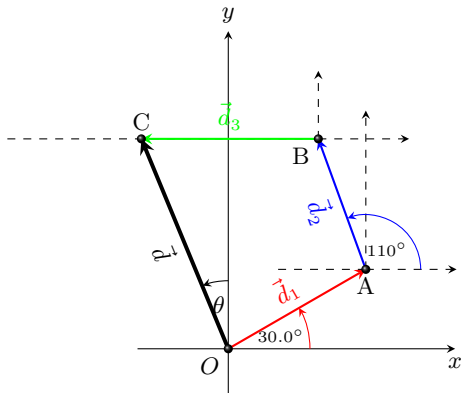
$$\vec{d} = (37.7\hat{i} + 16.9\hat{j}) \text{ Km}$$

Calculemos θ :

$$\tan \theta = \frac{d_y}{d_x} = \frac{16.9 \text{ km}}{37.7 \text{ km}} = 0.448 \quad \rightarrow \quad \theta = \arctan(0.448) = 24.1^\circ$$

La magnitud del desplazamiento es

$$\begin{aligned} |\vec{d}| &= \sqrt{d_x^2 + d_y^2} = \sqrt{(37.7 \text{ km})^2 + (16.9 \text{ km})^2} = \sqrt{1.42 \times 10^3 + 286} \text{ km} \\ &= \sqrt{1706} \text{ km} = 41.30 \text{ km} \end{aligned}$$



Solución

Con base en la Fig.20, las componentes de los vectores \vec{d}_1 , \vec{d}_2 y \vec{d}_3 son: Con $d_1 = 175 \text{ km}$ y $\theta_1 = 30.0^\circ$:

$$d_{1x} = d_1 \cos \theta_1 = (175 \text{ km}) \cos(30.0^\circ) = 152 \text{ km}$$

$$d_{1y} = d_1 \sin \theta_1 = (175 \text{ km}) \sin(30.0^\circ) = 87.5 \text{ km}$$

Con $d_2 = 153 \text{ km}$ y $\theta_2 = 110^\circ$:

$$d_{2x} = d_2 \cos \theta_2 = (153 \text{ km}) \cos(110^\circ) = -52.3 \text{ km}$$

$$d_{2y} = d_2 \sin \theta_2 = (153 \text{ km}) \sin(110^\circ) = 144 \text{ km},$$

y, con $d_3 = 195 \text{ km}$ y $\theta_3 = 180^\circ$:

$$d_{3x} = d_3 \cos \theta_3 = (195 \text{ km}) \cos(180^\circ) = -195 \text{ km}$$

$$d_{3y} = d_3 \sin \theta_3 = (195 \text{ km}) \sin(180^\circ) = 0.$$

Las componentes del vector resultante \vec{d} del vuelo completo son:

$$d_x = d_{1x} + d_{2x} + d_{3x} = (152 - 52.3 - 195) \text{ km} = -95 \text{ km}$$

$$d_y = d_{1y} + d_{2y} + d_{3y} = (87.5 + 144 + 0) \text{ km} = 232 \text{ km}$$

Usando vectores unitarios \vec{d} se escribe como

$$\vec{d} = (-95\hat{i} + 232\hat{j}) \text{ km.}$$

La magnitud de \vec{d} es, usando la Ec.(15):

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{d_x^2 + d_y^2} = \sqrt{(-95 \text{ km})^2 + (232 \text{ km})^2} = \sqrt{(9.0 \times 10^3) + (5.38 \times 10^4)} \text{ km} \\ &= \sqrt{62800} \text{ km} = 2.5060 \times 10^2 \text{ km.} \end{aligned}$$

Usando la Ec.(16) se encuentra que la dirección de \vec{d} es:

$$\theta = \arctan\left(\frac{d_y}{d_x}\right) = \arctan\left(\frac{232 \text{ km}}{-95 \text{ km}}\right) = \arctan(-2.4).$$

Usando la calculadora se obtiene $\theta = -67^\circ$. Note que la coordenada x de la posición de la ciudad C es negativa, de modo que esa ciudad está en el segundo cuadrante. Así, siguiendo la convención para ángulo medidos en el sentido antihorario desde el eje- x positivo, la dirección es $\theta = 180^\circ + (-67^\circ) = 113^\circ$.

Luego, la ciudad C está a $2.5060 \times 10^2 \text{ km}$ a 23° al oeste del norte del origen o, a $2.5060 \times 10^2 \text{ km}$ a 112° al oeste del este del origen.

6. EL PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES

Vimos que un vector puede ser multiplicado por un escalar. Ahora veremos como se pueden multiplicar dos vectores.

En primer lugar consideraremos el **producto escalar**:

El resultado de la multiplicación de los dos vectores es un escalar; un número y una unidad correspondiente.

El producto escalar entre dos vectores \vec{A} y \vec{B} se escribirá $\vec{A} \cdot \vec{B}$.

En general, el producto escalar entre dos vectores \vec{A} y \vec{B} es una cantidad escalar igual al producto de las magnitudes de los dos vectores y al coseno del ángulo θ entre ellos:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \equiv |\vec{A}||\vec{B}| \cos \theta = AB \cos \theta. \quad (20)$$

En este caso, las unidades de los vectores \vec{A} y \vec{B} no necesariamente deben ser las mismas.

El producto escalar es comúnmente llamado **producto punto**.

Algunas propiedades del producto escalar

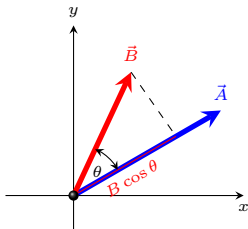


Figura 21. El producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ es igual a la magnitud del vector \vec{A} multiplicada por $B \cos \theta$, la cual es la proyección del vector \vec{B} sobre el vector \vec{A} .

En la Fig.21 se muestran dos vectores \vec{A} y \vec{B} y el ángulo entre ellos usado para la definición del producto escalar.

En esa figura $B \cos \theta$ es la proyección del vector \vec{B} sobre el vector \vec{A} .

La Ec.(20) significa que el producto $\vec{A} \cdot \vec{B}$ es el producto de la magnitud de \vec{A} y la proyección de \vec{B} sobre \vec{A} .

Del lado derecho de la Ec.(20) se ve que el producto escalar es **conmutativo**:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}.$$

El producto escalar obedece la ley de **distributividad de la multiplicación**:

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}.$$

Si \vec{A} y \vec{B} tienen la misma dirección (paralelos) ($\theta = 0^\circ$): $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB$.

Si \vec{A} y \vec{B} tienen direcciones opuestas (anti-paralelos) ($\theta = 180^\circ$): $\vec{A} \cdot \vec{B} = -AB$.

En el caso especial, cuando $\vec{A} = \vec{B}$,

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \rightarrow \boxed{A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}.$$

Ejemplo 7. Un producto escalar

Los vectores \vec{A} y \vec{B} son dados por $\vec{A} = 2.0\hat{i} + 3.0\hat{j}$ y $\vec{B} = -1.0\hat{i} + 2.0\hat{j}$:

- 1) Determine el producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$.
- 2) Encuentre el ángulo θ entre \vec{A} y \vec{B} .

Solución

Parte 1). Se tiene: $A_x = 2.0$, $A_y = 3.0$, $B_x = -1.0$ y $B_y = 2.0$. Usando la Ec.(23), se encuentra

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y = (2.0)(-1.0) + (3.0)(2.0) = 4.0$$

Parte 2). Las magnitudes de \vec{A} y \vec{B} son:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(2.0)^2 + (3.0)^2} = \sqrt{4.0 + 9.0} = \sqrt{13.0} = 3.60$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(-1.0)^2 + (2.0)^2} = \sqrt{1.0 + 4.0} = \sqrt{5.0} = 2.2$$

Usando la definición de producto escalar, Ec.(20), tenemos: $\vec{A} \cdot \vec{B} = 4.0$, $A = 3.60$ y $B = 2.2$. Despejando $\cos \theta$ de la Ec.(20), se tiene:

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} = \frac{4.0}{(3.60)(2.2)} = \frac{4.0}{7.9} = 0.51$$

de modo tal que θ es dado por:

$$\theta = \arccos(0.51) = 59^\circ.$$

Ejemplo 8. Trabajo hecho por una fuerza constante

Una partícula que se mueve en el plano xy sufre un desplazamiento $\Delta\vec{r} = (2.0\hat{i} + 3.0\hat{j})$ m a medida que una fuerza constante $\vec{F} = (5.0\hat{i} + 2.0\hat{j})$ N es aplicada sobre ella.

- 1) Calcule la magnitud del desplazamiento y de la fuerza constante.
- 2) Calcule el trabajo $W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$ realizado por la fuerza \vec{F} sobre la partícula.

Solución

Parte 1). La magnitud del desplazamiento (Δr) es:

$$\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(2.0\text{ m})^2 + (3.0\text{ m})^2} = \sqrt{13.0\text{ m}^2} = 3.60\text{ m}$$

y la magnitud de la fuerza (F) es:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(5.0 \text{ N})^2 + (2.0 \text{ N})^2} = \sqrt{29 \text{ N}^2} = 5.4 \text{ N}.$$

Parte 2). Usando la definición de trabajo dada $W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$, se encuentra:

$$\begin{aligned} W &= \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} \\ &= F_x \Delta x + F_y \Delta y \\ &= (5.0 \text{ N})(2.0 \text{ m}) + (2.0 \text{ N})(3.0 \text{ m}) = 16 \text{ Nm}. \end{aligned}$$

Usando la Ec.(20) encontramos $\cos \theta$, esto es:

$$\cos \theta = \frac{W}{(\Delta r)F} = \frac{16 \text{ Nm}}{(3.60 \text{ m})(5.4 \text{ N})} = \frac{16}{19} = 0.84$$

por lo tanto,

$$\theta = \arccos(0.84) = 33^\circ$$

7. EL PRODUCTO VECTORIAL DE VECTORES

Consideraremos, ahora, el **producto vectorial** entre dos vectores

Dados dos vectores \vec{A} y \vec{B} , el **producto vectorial** $\vec{A} \times \vec{B}$ es definido como un tercer vector \vec{C} , cuya magnitud es dada por el producto de las magnitudes de los vectores \vec{A} y \vec{B} y el seno del ángulo formado entre ellos. Matemáticamente, se tiene

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \quad \text{con} \quad |\vec{C}| = |\vec{A} \times \vec{B}| \equiv AB \sin \theta. \quad (24)$$

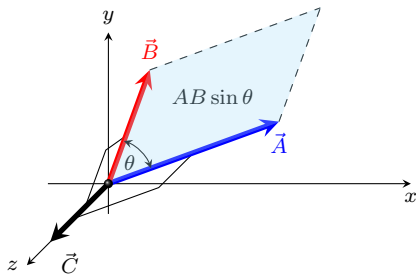


Figura 22. El producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ es un tercer vector \vec{C} de magnitud $AB \sin \theta$ igual al área del paralelogramo formado por \vec{A} y \vec{B} .

Como mostrado en la Fig. 22, $AB \sin \theta$ es igual al área del paralelogramo formado por \vec{A} y \vec{B} .

La **dirección** de \vec{C} es perpendicular al plano formado por \vec{A} y \vec{B} , esto es, el vector \vec{C} es perpendicular a ambos vectores \vec{A} y \vec{B} .

La **dirección** de \vec{C} se determina usando la regla de la mano derecha como mostrado en la Fig. 22.

Regla de la mano derecha. *Los cuatro dedos de la mano derecha son alineados a lo largo del vector \vec{A} (el primer vector del producto) y se giran hacia el vector \vec{B} (el segundo vector del producto) a través del ángulo θ . La dirección en la que apunta el dedo "pulgar" es la dirección del vector $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$.*

Debido a la notación $\vec{A} \times \vec{B}$, se lee " \vec{A} cruz \vec{B} ", de la cual se deriva el término *producto cruz*.

Algunas propiedades del producto vectorial

①. A diferencia del producto escalar, el producto vectorial **no es conmutativo**. El orden en el que se multiplican los vectores es importante:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A}). \quad (25)$$

②. Si \vec{A} es paralelo a \vec{B} ($\theta = 0^\circ$) o, \vec{A} es antiparalelo a \vec{B} ($\theta = 180^\circ$), entonces $\vec{A} \times \vec{B} = 0$. Se sigue que $\vec{A} \times \vec{A} = \vec{B} \times \vec{B} = 0$.

③. Si \vec{A} es perpendicular a \vec{B} , entonces, $|\vec{A} \times \vec{B}| = AB$.

④. El producto vectorial obedece la **ley de distributividad de la multiplicación**:

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}. \quad (26)$$

De las Ec.(24) y (25) y de las definiciones de los vectores unitarios, se tiene:

$$|\hat{i} \times \hat{i}| = (1)(1)\overset{0}{\sin \theta} = 0 \quad \rightarrow \quad |\hat{j} \times \hat{j}| = |\hat{k} \times \hat{k}| = 0.$$

de la cual se sigue que

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0 \quad (27a)$$

y

$$\hat{i} \times \hat{j} = -(\hat{j} \times \hat{i}) = \hat{k}, \quad |\hat{i} \times \hat{j}| = |\hat{j} \times \hat{i}| = (1)(1) \sin 90^\circ = 1 \quad (27b)$$

$$\hat{j} \times \hat{k} = -(\hat{k} \times \hat{j}) = \hat{i}, \quad |\hat{j} \times \hat{k}| = |\hat{k} \times \hat{j}| = (1)(1) \sin 90^\circ = 1 \quad (27c)$$

$$\hat{k} \times \hat{i} = -(\hat{i} \times \hat{k}) = \hat{j}, \quad |\hat{k} \times \hat{i}| = |\hat{i} \times \hat{k}| = (1)(1) \sin 90^\circ = 1. \quad (27d)$$

Los signos son intercambiables en los productos vectoriales. Por ejemplo:

$$\vec{A} \times (-\vec{B}) = (-\vec{A}) \times \vec{B} \text{ e } \hat{i} \times (-\hat{j}) = (-\hat{i}) \times \hat{j} = -\hat{k}.$$

El producto vectorial entre $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ y $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ puede ser expresado en la siguiente forma de un determinante:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \hat{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \boxed{(A_y B_z - A_z B_y)\hat{i} - (A_x B_z - A_z B_x)\hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{k}}. \quad (28)$$

Equivalentemente:

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= A_x B_x (\hat{i} \times \hat{i}) + A_x B_y (\hat{i} \times \hat{j}) + A_x B_z (\hat{i} \times \hat{k}) \\ &\quad + A_y B_x (\hat{j} \times \hat{i}) + A_y B_y (\hat{j} \times \hat{j}) + A_y B_z (\hat{j} \times \hat{k}) \\ &\quad + A_z B_x (\hat{k} \times \hat{i}) + A_z B_y (\hat{k} \times \hat{j}) + A_z B_z (\hat{k} \times \hat{k}) \\ &= \boxed{(A_y B_z - A_z B_y)\hat{i} - (A_x B_z - A_z B_x)\hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{k}}. \end{aligned}$$

Ejemplo 9. Un producto vectorial

Los vectores \vec{A} y \vec{B} son dados por $\vec{A} = 2.0\hat{i} + 3.0\hat{j}$ y $\vec{B} = -1.0\hat{i} + 2.0\hat{j}$:

1) Determine el producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$.

2) Verifique que $\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A})$.

Solución

Parte 1). En este caso tenemos: $A_x = 2.0$, $A_y = 3.0$, $B_x = -1.0$, $B_y = 2.0$ y $A_z = B_z = 0$.

Usando la Ec.(28), encontramos:

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= (A_y B_z - A_z B_y)\hat{i} - (A_x B_z - A_z B_x)\hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{k} \\ &= [(3.0)(0) - (0)(2.0)]\hat{i} - [(2.0)(0) - (0)(-1.0)]\hat{j} \\ &\quad + [(2.0)(2.0) - (3.0)(-1.0)]\hat{k} \\ &= 7.0\hat{k}.\end{aligned}$$

Como era de esperar, dado que los vectores \vec{A} y \vec{B} yacen en el plano xy , el vector resultante de $\vec{A} \times \vec{B}$ es un vector que apunta en la dirección perpendicular a ese plano, es decir en la dirección del eje- z .

Sabemos que

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A} \quad \therefore \quad \vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B} = -(7.0\hat{k}) = -7.0\hat{k}.$$

La comprobación de eso es como sigue:

$$\begin{aligned}\vec{B} \times \vec{A} &= (B_y A_z - B_z A_y)\hat{i} - (B_x A_z - B_z A_x)\hat{j} + (B_x A_y - B_y A_x)\hat{k} \\ &= [(2.0)(0) - (0)(3.0)]\hat{i} - [(-1.0)(0) - (0)(2.0)]\hat{j} \\ &\quad + [(-1.0)(3.0) - (2.0)(2.0)]\hat{k} \\ &= -7.0\hat{k}.\end{aligned}$$

Ejemplo 10. El vector torque

Una fuerza $\vec{F} = (2.00\hat{i} + 3.00\hat{j})$ N es aplicada a un objeto que puede girar en torno de un punto fijo a lo largo del eje- z . Si la fuerza es aplicada en un punto colocado en $\vec{r} = (4.00\hat{i} + 5.00\hat{j})$ m, encuentre el vector torque, definido como, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$.

Solución

Vemos que el torque es definido como un producto vectorial. En este caso:

$x = 4.00$ m, $y = 5.00$ m, $F_x = 2.00$ N, $F_y = 3.00$ N y $z = F_z = 0$.

Aplicando la Ec.(28), se encuentra que

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \vec{r} \times \vec{F} \\ &= (yF_z - zF_y)\hat{i} - (xF_z - zF_x)\hat{j} + (xF_y - yF_x)\hat{k} \\ &= [(5.00 \text{ m})(0) - (0)(3.00 \text{ N})]\hat{i} - [(4.00 \text{ m})(0) - (0)(2.00 \text{ N})]\hat{j} \\ &\quad + [(4.00 \text{ m})(3.00 \text{ N}) - (5.00 \text{ m})(2.00 \text{ N})]\hat{k} = [(12.0 - 10.0)\hat{k}] \text{ mN} \\ &= 2.0\hat{k} \text{ mN}.\end{aligned}$$

El torque apunta en la dirección positiva del eje z , perpendicular al plano xy .