Problema 1

(i) (**[08 puntos]**) Determine explícitamente, en caso de existir, el valor de $\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t)$, donde

$$F(s) = \frac{s\,\mathrm{e}^{-3\mathrm{s}}}{(s-4)(s^2+1)}$$

(ii) (**[12 puntos]**) Determine la EDO lineal de primer orden y normalizada que verifica la función $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$, donde $y(t)$ es la solución del PVI a coeficientes variables

$$\begin{cases} ty''(t) - ty'(t) - 2y(t) = \delta(t-4), \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Desarrollo:

(i) Primero se observa que se puede determinar el valor de $\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t)$ puesto que

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0.$$

Aplicando transformada inversa de Laplace a la igualdad propuesta, sigue

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] \;=\; \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s\,\mathrm{e}^{-3\mathrm{s}}}{(s-4)(s^2+1)}\right](t) \;=\; H(t-3)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s-4)(s^2+1)}\right](t-3)$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s-4)(s^2+1)}\right](t) \;&=\; \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{[(s-2)^2-8](s^2+1)}\right](t) \\
&=\; \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(4/17)}{s-4}\right](t) \;-\; \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(4/17)s}{s^2+1}\right](t) \;+\; \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(1/17)}{s^2+1}\right](t) \\
&=\; \frac{4}{17}\left(\mathrm{e}^{4\mathrm{t}} - \cos(\mathrm{t}) + (1/4)\,\mathrm{sen}\,(\mathrm{t})\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] \;=\; \frac{4}{17}H(t-3)\left[\mathrm{e}^{4(\mathrm{t}-3)} - \cos(\mathrm{t}-3) + (1/4)\,\mathrm{sen}\,(\mathrm{t}-3)\right]$$

(ii) Aplicando T. de L. a la EDO dada, se obtiene

$$-\frac{d}{ds}\mathcal{L}[y''(t)](s) \;+\; \frac{d}{ds}\mathcal{L}[y'(t)](s) \;-\; 2\mathcal{L}[y(t)](s) \;=\; \mathrm{e}^{-3\mathrm{s}}.$$

Llamando $Y(s) := \mathcal{L}[y(t)](s)$, y teniendo presente las condiciones iniciales del PVI dado, la expresión anterior nos queda

$$-\frac{d}{ds}\left(s^2\,Y(s) \;-\; s\right) \;+\; \frac{d}{ds}\left(s\,Y(s) \;-\; 1\right) \;-\; 2Y(s) \;=\; \mathrm{e}^{-4\mathrm{s}}.$$

Derivando la expresión anterior, sigue

$$-\left(s^2Y'(s) + 2sY(s) - 1\right) + (s\,Y'(s) + Y(s)) - 2Y(s) = \mathrm{e}^{-4\mathrm{s}},$$

y reagrupando terminos

$$(s - s^2)Y'(s) - (2s+1)Y(s) = \mathrm{e}^{-4\mathrm{s}} - 1.$$

Finalmente, normalizando se obtiene

$$Y'(s) - \frac{(2s+1)}{s-s^2}Y(s) = \frac{\mathrm{e}^{-4\mathrm{s}} - 1}{s-s^2}.$$

Problema 2.
Considere las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

i) $y'(x) + 2x\,y(x) = 2x[y(x)]^{-\frac{5}{2}}$ *ii)* $z'(x) + 7x\,z(x) = 7x$

a) ([**08 puntos**]) Muestre que la EDO definida en (i) se transforma a la EDO definida en (ii) con el cambio de variables $z(x) = y(x)^{7/2}$.

b) ([**08 puntos**]) Encuentre la solución general de la EDO definida en (ii).

c) ([**04 puntos**]) Encuentre la solución general de la EDO definida en (i).

Desarrollo:

a) Tenemos que

$$z = y^{7/2} \Longrightarrow z' = \frac{7}{2}y^{5/2}y' \Longleftrightarrow \frac{2}{7}z' = y^{5/2}y'$$

Luego, multiplicando la EDO definida en (i) por $y^{5/2}$ se tiene

$$y^{5/2}y' + 2xy^{7/2} = 2x,$$

reemplazando la nueva variable

$$\frac{2}{7}z' + 2x\,z = 2x,$$

Finalmente, multiplicando esta última EDO por $\frac{7}{2}$ se llega a

$$z'(x) + 7x\,z(x) = 7x.$$

b) Observamos que la EDO definida en (ii) es lineal con $P(x) = 7x$.
Luego, su factor integrante es

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{\int 7x\,dx} = \mathrm{e}^{7x^2/2}.$$

Mutiplicando la EDO definida en (ii) por $\mu(x)$ se tiene

$$\mathrm{e}^{7x^2/2}z'(x) + 7x\mathrm{e}^{7x^2/2}\,z(x) = 7x\mathrm{e}^{7x^2/2} \Longleftrightarrow \frac{d}{dx}[\mathrm{e}^{7x^2/2}\,z(x)] = 7x\mathrm{e}^{7x^2/2}$$

Finalmente, integrando la última ecuación tenemos

$$\mathrm{e}^{7x^2/2}\,z(x) = \mathrm{e}^{7x^2/2} + C \Longleftrightarrow z(x) = 1 + C\mathrm{e}^{-7x^2/2},$$

con $C \in \mathbb{R}$ constante arbitraria.

c) Como en (a) se mostro que si $z(x) = [y(x)]^{7/2}$ entonces la EDO (i) se transforma en la EDO (ii) y $z(x) = 1 + C\mathrm{e}^{-7x^2/2}$ es la solución de la EDO (ii) podemos concluir que la solución general de la EDO (i) es

$$[y(x)]^{7/2} = 1 + C\mathrm{e}^{-7x^2/2},$$

con $C \in \mathbb{R}$ constante arbitraria.

Problema 3

(i) (**[12 puntos]**) Aplicando el Método de variación de parámetros determine una solución particular (lo más simplificado posible) del sistema de EDO no homogéneo

$$\boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t) + \begin{pmatrix} 30\,\mathrm{e}^{4\mathrm{t}} \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ donde } t \in \mathbb{R} \text{ y } \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \text{ es una matriz dada.}$$

Para lo anterior asuma que $\{\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2\}$ es un Sistema Fundamental de Soluciones para el sistema homogéneo

$$\boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t)\,,$$

con $\boldsymbol{X}_1(t) := \mathrm{e}^{7\mathrm{t}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, y $\boldsymbol{X}_2(t) := \mathrm{e}^{2\mathrm{t}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Se exige explicitar el sistema de ecuaciones lineales inducido por el Método de variación de parámetros.

(ii) (**[08 puntos]**) Considere dos tanques de forma cilíndrica, etiquetados por las letras A y B, los cuales contienen 400 litros y 500 litros de salmuera, respectivamente. Estos tanques están comunicados por un sistema de cañerías, de tal forma que del tanque A fluye salmuera al tanque B, a razón de 16 [litros/hora]. A su vez, del tanque B fluye salmuera al tanque A a razón de 12 [litros/hora]. Además, se sabe que del exterior ingresa agua pura al tanque A, a razón de 2 [litros/hora], mientras que del tanque B se pierde mezcla en un desagüe, a razón de 4 [litros/hora]. Inicialmente, hay 0.2 Kilos de sal en el tanque A y 0.3 Kilos de sal en el tanque B. Se asume que la mezcla en cada tanque se mantiene siempre uniformemente homogénea.
Deduzca el PVI (sistema EDO con condición inicial) que modela la cantidad de sal contenida en cada tanque, en todo instante de tiempo admisible. Determine explícitamente este tiempo admisible. **(NO SE PIDE RESOLVER EL SISTEMA)**.

Desarrollo:

(i) En vista que $\{\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2\}$ es una base del espacio solución del sistema EDO homogéneo asociado, buscaremos una Solución Particular de la forma

$$\boldsymbol{X}_P(t) = c_1(t)\boldsymbol{X}_1(t) + c_2(t)\boldsymbol{X}_2(t)\,, t \in \mathbb{R}\,, \tag{1}$$

donde c_1, c_2 son funciones derivables, tales que para $t \in \mathbb{R}$ (fijo pero arbitrario)

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_1(t) & \boldsymbol{X}_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30\,\mathrm{e}^{4\mathrm{t}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2\,\mathrm{e}^{7\mathrm{t}} & -\mathrm{e}^{2\mathrm{t}} \\ \mathrm{e}^{7\mathrm{t}} & 2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{t}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30\,\mathrm{e}^{4\mathrm{t}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicando la Regla de Cramer, tenemos

$$c_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 30\,\mathrm{e}^{4\mathrm{t}} & -\mathrm{e}^{2\mathrm{t}} \\ 0 & 2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{t}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2\,\mathrm{e}^{7\mathrm{t}} & -\mathrm{e}^{2\mathrm{t}} \\ \mathrm{e}^{7\mathrm{t}} & 2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{t}} \end{vmatrix}} = \ldots = 12\,\mathrm{e}^{-3\mathrm{t}} \quad \Rightarrow \quad c_1(t) = \int 12\,\mathrm{e}^{-3\mathrm{t}}\,\mathrm{dt} = -4\,\mathrm{e}^{-3\mathrm{t}}\,.$$

$$c_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 2\,\mathrm{e}^{7\mathrm{t}} & 30\,\mathrm{e}^{4\mathrm{t}} \\ \mathrm{e}^{7\mathrm{t}} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2\,\mathrm{e}^{7\mathrm{t}} & -\mathrm{e}^{2\mathrm{t}} \\ \mathrm{e}^{7\mathrm{t}} & 2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{t}} \end{vmatrix}} = \ldots = -6\,\mathrm{e}^{2\mathrm{t}} \quad \Rightarrow \quad c_2(t) = \int -6\,\mathrm{e}^{2\mathrm{t}}\,\mathrm{dt} = -3\,\mathrm{e}^{2\mathrm{t}}\,.$$

De esta manera, reemplazando en (1), nos queda

$$\boldsymbol{X}_P(t) = -4\,\mathrm{e}^{-3\mathrm{t}}\,\mathrm{e}^{7\mathrm{t}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 3\,\mathrm{e}^{2\mathrm{t}}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{t}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{4\mathrm{t}} \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \end{pmatrix}\,,\ \mathrm{t} \in \mathbb{R}\,.$$

(ii) Introducimos

- $x_1(t)$: cantidad [Kg] de sal en el tanque A, en el instante t [hora].
- $x_2(t)$: cantidad [Kg] de sal en el tanque B, en el instante t [hora].

Determinemos la variación del volumen en cada tanque, en el instante t.

- Para el tanque A. $\Delta V_{\mathtt{ol}}^{A} = 2 + 12 - 16 = -2$, de donde $V_{\mathtt{ol}}^{A}(t) = 400 - 2t$.
- Para el tanque B. $\Delta V_{\mathtt{ol}}^{B} = 16 - 4 - 12 = 0$, de donde $V_{\mathtt{ol}}^{B}(t) = 500$.

De lo anterior, se desprende que para que el modelo a deducir sea admisible, se debe tener que $V_{\mathtt{ol}}^{A}(t) > 0$, lo cual se garantiza si $0 \leq t < 200$ [horas].

Ahora, deducimos las razones de cambio de la cantidad de sal en cada tanque, en un instante $t \in J := [0, 200)$.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt}(t) &= (2)(0) + 12\left(\frac{x_2(t)}{500}\right) - 16\left(\frac{x_1(t)}{400-2t}\right) \\ \frac{dx_2}{dt}(t) &= 16\left(\frac{x_1(t)}{400-2t}\right) - 16\left(\frac{x_2(t)}{500}\right)\,. \end{aligned}$$

Finalmente, el PVI (sistema EDO), en forma matricial, se expresa como

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{200-t} & \frac{3}{125} \\ \frac{8}{200-t} & -\frac{4}{125} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}\,, \quad t \in J \\ \\ \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.3 \end{pmatrix}\,. \end{cases}$$