Álgebra I. 525140 - DIM - CFM
25 de mayo de 2021
Prof.: L. Badilla, I. Donoso, A. Gajardo, J. Moya
A. Pérez, C. Rivas, M. Selva, F. Thiele, G. Torres

Inducción

Si pones una hilera de dominós en forma vertical, lo suficientemente cerca los unos de los otros, la situación es inestable, si cae uno, todos los que siguen caerán, eso es claro ya que si uno cae, cae el que está al lado, pero entonces caerá el que está al lado de este, y así sucesivamente todos caerán. No necesitamos hacer el experimento, lo sabemos, una situación que se enfrenta a iguales condiciones tiene iguales resultados es el caso de los dominoes, sabemos lo que ocurrirá. Pero mientras estén todos verticales, esa situación no tiene por qué cambiar, y seguirá así siempre. Moraleja, para que caigan todos los dominoes, se necesita que todos esté suficiente mente cerca de sus vecinos en la hilera y que caiga uno de los dominos de los extremos.

Esta es la metáfora del *principio de inducción matemática*. Para poder introducir esta herramienta, primero tenemos que hacernos una idea de qué cosa es una "*función proposicional*". En el curso con frecuencia nos hemos hecho preguntas del tipo: ¿se cumple que $n^2 - 5n + 4 = 0$? ¿para qué valores de n existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = 3k$? Se trata de afirmaciones, que pueden ser verdaderas o falsas dependiendo del valor de n, por ejemplo si yo digo $3 = 5$ eso es una afirmación falsa, mientras que si digo $2 = 2$ es verdadera. Si denotamos "falso" por F, y "verdadero" por V, entonces podemos hacer la siguiente tabla para estudiar la ecuación $n = n^2$ en $\mathbb{N}$.

n	$n^2 - 5n + 4 = 0$
1	V
2	F
3	F
4	V
5	F
$\vdots$	$\vdots$

n	$\exists k \in \mathbb{N},\ 3k = n$
1	F
2	F
3	V
4	F
5	F
$\vdots$	$\vdots$

Podemos definir la función $p : \mathbb{N} \to \{V, F\}$ por $p(n) =$*valor de verdad de* $n^2 - 5n + 4 = 0$. Por el hecho de ser una función cuyo conjunto de llegada son valores de verdad, se trata de una *función proposicional*.

A veces nos encontramos con funciones proposicionales que siempre asignan un valor verdadero al argumento de entrada, estas corresponden a afirmaciones que son siempre ciertas, por ejemplo: $f : \mathbb{R} \to \{V, F\}$ definida por: $f(n) =$ *valor de verdad de la afirmación* $n+1 \in \mathbb{R}$, siempre se cumple, por lo tanto siempre toma el valor de verdad V. En este caso podemos afirmar que $\forall n \in \mathbb{R}, f(n) = V$. Este tipo de funciones proposicionales nos interesa pues describen las "*verdades*" de nuestro sistema.

Ejercicio 1. Determine cuales de las siguientes funciones proposicionales designan siempre valor de verdad V a su argumento.

- $p : \mathbb{R} \to \{V, F\}$, definida por $p(x) =$*valor de verdad de* $-(-n) = n$.
- $p : \mathbb{N} \to \{V, F\}$, definida por $p(x) =$*valor de verdad de* $[(2^n \geq n^2) \vee (n \leq 3)]$.
- $p : \mathbb{R} \to \{V, F\}$, definida por $p(x) =$*valor de verdad de* "$2^{2n} - 1$ *es múltiplo de 3*".

La primera la distinguimos pues es una de las propiedades del opuesto aditivo. Las funciones proposicionales que se cumplen siempre son *propiedades* del sistema.

La segunda de las propiedades del ejemplo pareciera ser verdad, pero ¿cómo demostrarla?

Cuando se trata de una propiedad definida en los naturales, hay una herramienta que suele facilitar muchísimo el trabajo: el *principio de inducción*. Este consiste en demostrar primero que si la propiedad es verdadera para uno de los números, entonces también es verdadera para el siguiente número (equivale a demostrar que los dominoes están cerca unos de otros), y luego demostrar que la propiedad se cumple para el primer número (equivale a tumbar el primer dominó). Con esto la implicancia demostrada se aplicará infinitas veces y habremos demostrado que la propiedad se cumple en todo $\mathbb{N}$.

Principio de Inducción. Dada una función proposicional $P : \mathbb{N} \to \{V, F\}$, si esta cumple que:

- $P(1)$ es verdadera, y
- para cada $k \in \mathbb{N}$, si $P(k)$ es verdadera, entonces $P(k+1)$ también es verdadera,

entonces se tiene que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$ es verdadera.

En cierto modo, lo que hace el principio de inducción es cambiar la propiedad que queremos demostrar por otra que puede ser más simple. En el ejemplo anterior, la última propiedad es:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2^{2n} - 1 \text{ es múltiplo de } 3,$$

si usamos el principio de inducción lo que tenemos que demostrar es lo siguiente:

$$2^2 - 1 \text{ es múltiplo de } 3 \quad \wedge \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \left[2^{2n} - 1 \text{ es múltiplo de } 3 \Rightarrow 2^{2(n+1)} - 1 \text{ es múltiplo de } 3\right]$$

Esta nueva propiedad consiste en demostrar una implicancia, lo cual suele ser más fácil pues nos aporta una *hipótesis*, que podemos usar.

Veámoslo en este mismo ejemplo. Si intentamos demostrar directamente la propiedad, $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^{2n} - 1$ es múltiplo de 3, nos vemos sin ideas: para por ejemplo $2^{2\cdot 2} - 1 = 16 - 1 = 15$, se cumple para n=2; $2^{2\cdot 4} - 1 = 2^8 - 1 = 256 - 1 = 255 = 3 \cdot 85$, se cumple para $n = 4$, pero ¿por qué? ¿qué pasa para $2^{40} - 1$?

Pero si trabajamos la propiedad que nos da el principio de inducción tenemos que la primera parte es directa, ya que $2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$ es múltiplo de 3. Intentemos ahora demostrar la segunda parte: $\forall n \in \mathbb{N},\ \left[2^{2n} - 1 \text{ es múltiplo de } 3 \Rightarrow 2^{2(n+1)} - 1 \text{ es múltiplo de } 3\right]$.

Tomamos $n \in \mathbb{N}$ cualquiera, debemos demostrar la implicancia

$$2^{2n} - 1 \text{ es múltiplo de } 3 \Rightarrow 2^{2(n+1)} - 1 \text{ es múltiplo de } 3,$$

para lo cual asumimos la hipótesis:

$$n \text{ es tal que cumple } 2^{2n} - 1 \text{ es múltiplo de } 3,$$

esto nos da algo de qué agarrarnos, nos dice que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $2^{2n} - 1 = 3k$. Ahora debemos demostrar la tesis:

$$\text{debemos demostrar que } 2^{2(n+1)} - 1 \text{ es múltiplo de } 3.$$

Pero para hacernos de ella contamos con la hipótesis, no estamos partiendo de nada. Analizamos:

$$\begin{aligned}
2^{2(n+1)} - 1 &= 2^{2n+2} - 1 \\
&= 2^2 2^{2n} - 1 \\
&= 4 \cdot 2^{2n} - 1 \\
&= 3 \cdot 2^{2n} + 2^{2n} - 1 \\
&= 3 \cdot 2^{2n} + 3k \\
&= 3(2^{2n} + k)
\end{aligned}$$

el cual es un múltiplo de 3, con lo cual hemos demostrado la tesis, por lo tanto hemos demostrado la implicancia, y gracias al principio de inducción, hemos demostrado la propiedad:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2^{2n} - 1 \text{ es múltiplo de } 3.$$

Intente demostrar la segunda propiedad del ejercicio 1 usando el principio de inducción.

No siempre el principio de inducción es necesario, no siempre ayuda, pero hay una clase de problemas para los cuales no hay otra opción: propiedades basadas en *recurrencias*.

Definición 2. Una secuencia está definida por *recurrencia* si el n-ésimo término se define mediante una fórmula que involucra a n y el o los valores de los términos precedentes.

De esta manera, cada término se puede obtener a partir de los primeros aplicando la fórmula paulatinamente una y otra vez.

Ejemplo 3.

- Definimos la secuencia $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ como sigue:

$$\begin{aligned}
s_1 &= 1, \\
s_n &= s_{n-1} + n, \text{ para } n \geq 2.
\end{aligned}$$

  Aplicando la fórmula a $n = 2$ obtenemos $a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3$.

Luego podemos aplicar la fórmula a $n = 3$: $s_3 = s_2 + 3 = 3 + 3 = 6$.

Si queremos calcular a_5 la fórmula no nos sirve si no hemos calculado previamente a_4: $a_5 = a_4 + 5 = ?$.

La única manera de calcular un término es calcular todos los términos anteriores

- **Factorial**. dado un número $n \in \mathbb{N}$, se define el "*factorial*" de n, denotado pot $n!$, como sigue:

$$\begin{aligned} 1! &= 1, \\ n! &= n \cdot (n-1)!, \text{ para } n \geq 2. \end{aligned}$$

- **Secuencia de Fibonacci**. Una secuencia muy famosa pues posee propiedades extraordinarias y además sirvió para introducir los números indoarábigos en Europa por ahí por el año 1200, se define como sigue:

$$\begin{aligned} f_1 &= 1, \\ f_2 &= 1, \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2}, \text{ para } n \geq 3. \end{aligned}$$

Nos finamos que la fórmula involucra dos de los términos anteriores, y por eso mismo es que para definirla se necesita conocer inicialmente sus 2 primeros términos. Aplicando la fórmula obtenemos:

$$\begin{aligned} f_3 &= f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2, \\ f_4 &= f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3, \\ f_5 &= f_4 + f_3 = 3 + 2 = 5. \end{aligned}$$

Es una interesante herramienta para enseñar a sumar a las hermanas pequeñas ;)

Como los términos de una recurrencia no están dados por una fórmula cerrada, si no que están en función de los términos anteriores, no es posible demostrar nada de manera directa respecto a estas. Pero el principio de inducción se adapta de maravilla para trabajar con estas secuencias.

Ejemplo 4. Demostrar que si $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la secuencia definida en el ejemplo anterior, entonces se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$ que:

$$P(n) = \text{ es verdad que } s_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Verificamos que para los primeros términos es verdad.

$$\begin{aligned} \frac{1 \cdot 2}{2} &= \frac{2}{2} = 1 = s_1, \\ \frac{2 \cdot 3}{2} &= \frac{6}{2} = 3 = s_2 \end{aligned}$$

Demostremos ahora el *paso de inducción*: tomamos un $n \geq 3$ cualquiera y asumimos que se cumple $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$ (P(n)). Entonces trabajamos $P(n+1) : s_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= s_n + n + 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= \frac{n(n+1) + 2n + 2}{2} \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, por el principio de inducción hemos demostrado que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) = \text{ es verdad que } s_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

El principio de inducción supone una aplicación del paso de inducción tantas veces como sea necesario hasta llegar al término n-ésimo, esa aplicación no la hace quien usa el principio de inducción, si no que se asume hecho ya que al demostrar el paso de inducción se ha demostrado que se puede hacer, y con eso basta. Es decir, sabemos que la propiedad es verdadera para $n = 10$ por ejemplo ya que sabemos que es cierta para el primer término y que luego podemos aplicar el paso de inducción para $n = 2$, demostrando con eso que es cierta para el segundo término, entonces podemos aplicar el paso de inducción para $n = 3$ lo cual nos dice que es cierta para el tercer término, etc.. No necesitamos hacer todos esos pasos pues ya entendimos la técnica, sabemos que se pueden hacer y eso nos asegura pa propiedad para $n = 10$ y para cualquier número.

Ahora bien, cuando hipotéticamente hemos aplicado el paso de inducción n veces, ya hemos demostrado la propiedad para todos los términos anteriores a n. Esto nos da otra forma del principio de inducción que es más poderosa.

Principio de Inducción (fuerte). Dada una función proposicional $P : \mathbb{N} \to \{V, F\}$, si esta cumple que:

- $P(1)$ es verdadera, y
- para cada $k \in \mathbb{N}$, si $P(j)$ es verdadera para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$, entonces $P(k+1)$ también es verdadera,

entonces se tiene que $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$ es verdadera.

En esta versión el paso de inducción tiene una hipótesis más fuerte, podemos usar la propiedad para todos los valores anteriores al que estamos estudiando. Ilustremos esto con la serie de Fibonacci.

Ejemplo 5. Considerando la serie de Fibonacci antes definida, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se cumple lo siguiente para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n \text{ es par si y solo si } n \text{ es múltiplo de } 3$$

Miremos primero un poco la serie de Fibonacci para hacernos de la idea detrás de la demostración que vamos a hacer.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
f_n	1	1	2	3	5	8	13	21

Vemos que la propiedad se cumple par los primeros 8 términos, y podemos enarbolar una razón: cuando los dos términos consecutivos son impares, el término que viene debe ser par; por su parte, el término subsiguiente será suma de un par más un impar, por lo tanto será impar; y lo mismo pasará con el que sigue, etc.. Estamos listas para la demostración, tenemos la idea.

Tomemos $n \geq 3$ arbitrario, y supongamos ahora que se cumple que f_j es par si y solo si j es múltiplo de 3 para todo $j \leq n$, y estudiemos la paridad de f_{n+1} (hipótesis).

Observamos que respecto a la divisibilidad por 3, existen solo 3 tipos de números: los múltiplos de 3, los que son múltiplo de 3 más 1 y los que son múltiplo de 3 más 2. Por lo tanto tres casos aparecen:

- $n+1$ es múltiplo de 3: en este caso es claro que ni n ni $n-1$ son múltiplos de 3, por lo tanto, la hipótesis nos dice que f_n y f_{n-1} son impares, por lo tanto $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ es par.
- $n+1$ no es múltiplo de 3, pero n sí lo es: en este caso es claro que $n-1$ no es múltiplo de 3, por lo tanto, la hipótesis nos dice que f_n es par pero f_{n-1} es impar, por lo tanto $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ es impar.
- $n+1$ no es múltiplo de 3, pero $n-1$ sí lo es: en este caso es claro que n no es múltiplo de 3, por lo tanto, la hipótesis nos dice que f_n es impar y f_{n-1} es par, por lo tanto $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ es impar.

Hemos demostrado que f_{n+1}es par si y solo si $n+1$ es múltiplo de 3 a partir de suponer que f_j es par si y solo si j es múltiplo de 3, para todo $j \leq n$.

Por el principio de inducción fuerte hemos demostrado que para todo $n \in \mathbb{N}$, f_n es par si y solo si n es múltiplo de 3.

Vamos a terminar la clase de hoy introduciendo una notación tremendamente útil. Partiremos con un ejemplo.

Ejemplo 6. Consideremos nuevamente la secuencia que estudiamos primero.

$$\begin{aligned} s_1 &= 1, \\ s_n &= s_{n-1} + n, \text{ para } n \geq 2. \end{aligned}$$

Si aplicamos la fórmula, pero dejamos expresada la suma sin calcularla.

$$\begin{aligned} s_1 &= 1, \\ s_2 &= s_1 + 2 = 1 + 2 \\ s_3 &= s_2 + 3 = 1 + 2 + 3 \\ s_4 &= s_3 + 4 = 1 + 2 + 3 + 4 \\ s_5 &= s_4 + 5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Podemos concluir que:

$$s_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

Esta notación con los puntos suspensivos es un poco aparatosa, usaremos un nuevo símbolo:

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} j$$

Con este símbolo queremos expresar la suma de arriba, se lee cambiando la expresión al interior: j por el valor que corresponde cuando uno reemplaza j por 1, 2, 3, etc, hasta n, por ello es que el símbolo indica "$j = 1$" abajo, y "n" arriba, para indicar el valor inicial y el final se la secuencia de j's que se deben considerar.

Definición 7. Dada una secuencia de números indexados: $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$, definimos la *sumatoria de $j = m$ hasta $j = n \geq m$ de los valores de a_j*, como sigue:

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

Equivalentemente, definimos por recurrencia:

$$\begin{aligned} \sum_{j=m}^{m} a_j &= a_m, \\ \sum_{j=m}^{n} a_j &= \left(\sum_{j=m}^{n-1} a_j\right) + a_n, \text{ para } n \geq m. \end{aligned}$$

En el ejemplo anterior la secuencia que sumamos era simplemente $b_j = j$:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{j=1}^{n} j = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 1 + 2 + \cdots + n.$$

Calcular sumatorias se vuelve uno de los ejercicios primordiales de las y los estudiantes de ingeniería. Las demostración de las siguientes propiedades se deja de ejercicio, naturalmente le será de utilidad el principio de inducción.

Proposición 8. Dadas dos secuencias $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ y $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$, dado $\lambda \in \mathbb{R}$ y dados $1 \leq l \leq m \leq n$, se cumplen las siguientes propiedades.

1. $\displaystyle\sum_{j=m}^{n} 0 = 0$

2. $\displaystyle\sum_{j=m}^{n} 1 = n - m + 1$

3. $\displaystyle\sum_{j=m}^{n} \lambda a_j = \lambda \left(\sum_{j=m}^{n} a_j\right)$

4. $\displaystyle\sum_{j=m}^{n} (a_j + b_j) = \left(\sum_{j=m}^{n} a_j\right) + \left(\sum_{j=m}^{n} b_j\right)$

5. $\displaystyle\sum_{j=l}^{n} a_j = \left(\sum_{j=l}^{m} a_j\right) + \left(\sum_{j=m+1}^{n} a_j\right)$

6. Para cualquier $i \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{j=m-i}^{n-i} a_{j+i}$

7. $\displaystyle\sum_{j=m}^{n} (a_{j+1} - a_j) = a_{n+1} - a_m$

Demostración. Demostremos la propiedad 7 como ejemplo. Lo haremos por inducción.
(Base de inducción) $n = m$: $\sum_{j=m}^{m} a_{j+1} - a_j = a_{n+1} - a_m$, lo cual es verdad directamente de hecho que $n = m$.
(Paso de inducción) Si $\sum_{j=m}^{n} a_{j+1} - a_j = a_{n+1} - a_m$, entonces $\sum_{j=m}^{n+1} a_{j+1} - a_j = a_{n+2} - a_m$.
Asumimos la hipótesis: $\sum_{j=m}^{n} a_{j+1} - a_j = a_{n+1} - a_m$
Buscamos demostrar la tesis: $\sum_{j=m}^{n+1} a_{j+1} - a_j = a_{n+2} - a_m$.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=m}^{n+1} a_{j+1} - a_j &= \left(\sum_{j=m}^{n} a_{j+1} - a_j\right) + a_{n+2} - a_{n+1} && \text{de la definición de sumatoria} \\
&= (a_{n+1} - a_m) + a_{n+2} - a_{n+1} && \text{de la hipótesis} \\
&= -a_m + a_{n+2}
\end{aligned}$$

Que era lo que queríamos demostrar. $\square$

Teorema del binomio y coeficientes combinatoriales

Supongamos que se tiene el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Se quiere contar cuántos subconjuntos de cardinalidad 2 tiene A. Para ello puede tenerse en cuenta que existen 5 formas distintas de escoger el primer elemento de un posible subconjunto y, una vez escogido él, sólo existen 4 formas distintas de escoger el segundo. Pero además debemos considerar que los conjuntos $\{1, 2\}$ y $\{2, 1\}$ son iguales. Por tanto, existen $\frac{5 \cdot 4}{2}$ subconjuntos de A de cardinalidad 2. Ellos son

$$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}.$$

El mismo razonamiento puede aplicarse a subconjuntos de tamaño k dentro de un conjunto de tamaño n: el primer elemento puede elegirse de n formas distintas, el segundo de $n-1$ maneras distintas, el tercero de $n-2$, etc.. hasta $n-k+$ el último de los k elementos que se agregue al conjunto, total:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)$$

Igual que en el caso de 2 elementos, acá estamos repitiendo conjuntos que son iguales solo que sus elementos fueron escogidos en otro orden. Por esta razón, debemos dividir por el número de ordenamientos distintos que hay de k elementos. El cual ya sabemos que es $k!$, así el número total de conjuntos de k elementos en un conjunto de n elementos es:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Este número recibe el nombre de *coeficiente binomial*.

Proposición 9.

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
2. $\binom{n}{1} = n$
3. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
4. $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

Demostración.

1. $\binom{n}{0} = \frac{n!}{n!0!} = 1$ y $\binom{n}{n} = \frac{n!}{0!n!} = 1$
2. $\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = n$
3. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k}$

4.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!}, \\
&= \frac{n!(k+1) + n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!}, \\
&= \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!}, \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}, \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!}, \\
&= \binom{n+1}{k+1}.
\end{aligned}$$

□

Podemos interpretar cada una de estas propiedades en términos de lo que representan como sigue.

1. Esta propieadad nos dice que el único subconjunto de un conjunto A de cardinalidad n que tiene cardinalidad 0 es el conjunto vacío y el único que tiene cardinalidad n es el propio A.
2. La segunda propiedad se entiende ya que hay n subconjuntos de cardinalidad 1.
3. Esta propiedad se explica ya que cuando se escogen k elementos de un conjunto, los que quedan sin escoger conforman otro conjunto $n-k$ elementos, por lo tanto se contabilizan la misma manera.
4. La última propiedad es la más complicada de interpretar, pero intentémoslo. Lo primero es tomar un conjunto A con $n+1$ elementos, queremos contar cuántos subconjuntos hay de $k+1$ elementos dentre de este conjunto. Pero deseamos hacerlo basándonos en los coeficientes combinatoriales que tenemos para conjuntos de n elementos. Entonces escogemos un elementos cualquiera de A y lo sacamos. Con los elementos restantes puedo hacer un conjunto de $k+1$ elementos que es lo que queremos contabilizar, esto nos da $\binom{n}{k+1}$ conjuntos diferentes. Pero también podríamos escoger un conjunto con solo k elementos y a este agregarle el elemento de A que habíamos apartado, así obtendremos conjuntos con $k+1$ elementos que serán distintos de los que escogimos antes, en total, habrán $\binom{n}{k}$ de estos conjuntos. No hay más posibilidades, así que el número total de conjuntos de $k+1$ elementos de A: $\binom{n+1}{k+1}$ es la suma de estos dos números: $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$.

El ítem 4 nos da una forma recursiva de calcular $\binom{n}{k}$ para cualquier par de $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, n \geq k$. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
\binom{5}{3} &= \binom{4}{3} + \binom{4}{2}, \\
&= 4 + \binom{3}{2} + \binom{3}{1}, \\
&= 4 + 3 + 3, \\
&= 10
\end{aligned}$$

En esto se basa el triángulo de Pascal,

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}$$

lo cual se convierte en

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Los coeficientes binomiales son útiles al calcular un binomio elevado a una potencia natural.

Para verlo más claro, vamos a redefinir la potencia de un número por recurrencia, esto reafirmará la noción que ya conocemos y nos permitirá trabajar con ella a trevés del principio de inducción.

$$\begin{aligned}
x^0 &= 1, \\
x^n &= x^{n-1}x, \text{ si } n \geq 1
\end{aligned}$$

Si queremos calcular la potencia de un "binomio" se complican las cosas, pues la combinatoria "explota", veamos.

$$
\begin{aligned}
(x+y)^0 &= 1\\
(x+y)^1 &= x+y\\
(x+y)^2 &= (x+y)(x+y)\\
&= xx+xy+yx+yy\\
&= x^2+2xy+y^2\\
(x+y)^3 &= (x+y)(x+y)(x+y)\\
&= xxx+xxy+xyx+xyy+yxx+yxy+yyx+yyy\\
&= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3
\end{aligned}
$$

Observe que al multiplicar los binomios el resultado es la suma de todos los productos posibles. Por ejempolo el producto entre tres binomios el resultado es la suma de todos los productos posibles de tres números con el primero en el primer binomio, el segundo en el segundo binomio y el tercero, en el tercer binomio.

Observamos que en todos los términos la suma de las potenciass de x y de y es la misma: 3 en el caso del cubo, 2 en el caso del cuadrado. Esto es lógico ya que siempre estaremos multiplicando 3 cosas en el caso del cubo, pues de todas formas es el producto de 3 binomios.

Una vez que desplegamos todas las combinaciones posibles, nos damos cuenta que algunos términos son semejantes, gracias a la conmutatividad del producto en los reales, y por lo tanto los podemos sumar, y allí a prece un número que los pondera, y que caracteriza al producto notable en cuestión. ¿Pero cómo calcular ese número?

Esta pregunta nos lleva de regreso al coeficiente combinatorial, ya que si nos preguntamos cuántas combinaciones darán lugar a productos semejantes, por ejemplo, cuántas veces aprecerá el término x^2y en el cubo del binomio, la pregunta se traduce en decidir de cuántas maneras puedo escoger 2 veces la variable x dentro de los 3 binomios que estamos multiplicando, por ejemplo puedo escogerla una vez del primer binomio y una vez del segunda, obtengo el término xxy, pero también puedo escogerla una vez del primero y otra del tercero, obtengo el producto xyx, etc..

Entonces la pregunta de cuántas veces aparecerá un término semejante a x^y en el cubo del binomio $(x+y)^3$ equivale a la pregunta de cuántos subconjuntos de tamaño 2 hay en un conjunto de 3 elementos, la respuesta es $\binom{3}{2}=3$.

Veámoslo más generalmente. El producto

$$(x+y)^n=(x+y)(x+y)\cdots(x+y)$$

es la suma de todos los productos entre n números, con el primero en el primer binomio, el segundo en el segundo binomio, el tercero, en el tercer binomio y así sucesivamente. Acá los binomios son iguales, por tanto, $(x+y)^n$ es la suma de todos los productos de la forma

$$x^k y^{n-k}, \quad k\in\{0,1,\ldots,n\}$$

donde x es escogida de algunos binomios e y de los restantes. Hay $\binom{n}{0}$ formas de escoger solo a x en todos los binomios, por tanto, hay $\binom{n}{0}$ productos de la forma $x^n y^0$. Hay $\binom{n}{1}$ formas de escoger a y de solo uno de los n binomios, por tanto, hay $\binom{n}{1}$ productos de la forma $X^{n-1}y^1$. En general, hay $\binom{n}{k}$ formas de escoger x exactamente k veces en el conjunto de los n binomios, por lo tanto, hay $\binom{n}{k}$ productos de la forma $x^k y^{n-k}$. Sumando todos ellos se obtiene la fórmula de un binomio elevado a $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 10. Dados dos número reales cualesquiera x, $y \in \mathbb{R}$ y un natural n, se cumple lo siguiente.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Demostración. Lo demostraremos usando el principio de inducción.

- (Base de inducción) $n = 1$:

$$(x+y)^1 = x + y = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^{1-k} y^k = \underbrace{\binom{1}{0} x^1 y^0}_{k=0} + \underbrace{\binom{1}{1} x^0 y^1}_{k=1} = 1x + 1y = x + y$$

- (Paso de inducción) Suponemos que se cumple para un n dado (hipótesis) y lo demostramos para $n+1$[1].

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)^n (x+y) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \right) (x+y) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k (x+y) \right) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k \right) + \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \right) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k \right) + \left(\sum_{k'=1}^{n+1} \binom{n}{k'-1} x^{n-(k'-1)} y^{k'} \right) \\
&= \binom{n}{0} x^{n+1} y^0 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^{n-(k-1)} y^k \right) + \binom{n}{n} x^{n-n} y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] x^{n-(k-1)} y^k \right) + y^{n+1}
\end{aligned}$$

[1]Esta demostración usa varios trucos y aplica casi todas las propiedades de las sumatorias, leerla con atención es una buena práctica para aprender a manejar sumatorias.

$$= x^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k \right) + y^{n+1}$$
$$= \left(\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{k-i+1} + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^{i+1} y^{k-i}, \\
&= y^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} x^i y^{k-i+1} + \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} x^{i+1} y^{k-i} + x^{k+1}, \\
&= y^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} x^i y^{k-i+1} + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i-1} x^i y^{k-i+1} + x^{k+1}, \\
&= y^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \left(\binom{k}{i} + \binom{k}{i-1} \right) x^i y^{k-i+1} + x^{k+1}, \\
&= \binom{k+1}{0} y^{k+1} + \sum_{i=1}^{k} \binom{k+1}{i} x^i y^{k-i+1} + \binom{k+1}{k+1} x^{k+1}, \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} x^i y^{k+1-i}
\end{aligned}$$

Que era justo lo que queríamos demostrar. □

Ejemplo 11. Por ejemplo,

$$(x+y)^5 = \binom{5}{0} x^5 + \binom{5}{1} x^4 y + \binom{5}{2} x^3 y^2 + \binom{5}{3} x^2 y^3 + \binom{5}{4} x y^4 + \binom{5}{5} y^5$$

que, con ayuda del triángulo de Pascal, obtenemos

$$x^5 + 5x^4 y + 10x^3 y^2 + 10x^2 y^3 + 5xy^4 + y^5.$$

Ejemplo 12.

$$\begin{aligned}
(x+7)^4 &= \binom{4}{0} x^4 + \binom{4}{1} x^3 7^1 + \binom{4}{2} x^2 7^2 + \binom{4}{1} x^1 7^3 + \binom{4}{0} 7^4 \\
&= x^4 + 4x^3 7 + 6x^2 7^2 + 4x 7^3 + 7^4 \\
&= x^4 + 28x^3 + 294x^2 + 1372x + 2401
\end{aligned}$$