UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
JAG/VAQ/MBM/CMS/GAJ/FOC/PHL/SBB/HPV

Cálculo II (527150-S2)
Evaluación 3

1. (5 puntos c/u) Justificando sus respuestas, indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

   (a) Si $1 \leq a < b$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es la función

   $$f(x) = \int_a^{\ln x} \sqrt{\cos^2(2t)}\,dt,$$

   entonces la longitud de gráfica de esta función está dada por

   $$l_f = \int_a^b \frac{1}{x}\sqrt{x^2 + \cos^2(\ln x)}\,dx.$$

   Solution 1 *Falso. Encontramos la derivada de f utilizando TFC:*

   $$f'(x) = \sqrt{\cos^2(2\ln(x))} \cdot \frac{1}{x}.$$

   Lo que reemplazando en la fórmula de longitud de arco, nos queda:

   $$l_f = \int_a^b \sqrt{1 + \frac{\cos^2(2\ln x)}{x^2}}\,dx = \int_a^b \frac{1}{x}\sqrt{x^2 + \cos^2(2\ln x)}\,dx.$$

   (b) Se afirma que la serie

   $$\sum_{n=5}^{\infty} (-1)^n\, 2^{2-n}$$

   es

   1. convergente
   2. su suma es $\frac{1}{12}$.

   Solution 2 *La primera parte es verdadera y la segunda es falsa. La serie en efecto es convergente, pero su suma no es $\frac{1}{12}$. Reescribiendo la serie para identificar mejor los términos de la serie geométrica tenemos:*

   $$\sum_{n=5}^{\infty} (-1)^n 2^{2-n} = \sum_{n=5}^{\infty} 4\left(\frac{-1}{2}\right)^n$$

Lo cual, como la razón es $-\frac{1}{2}$, nos dice que converge. Para calcular la suma notemos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{4}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{8}{3}.$$

Así, la suma de la serie será:

$$\begin{aligned}\sum_{n=5}^{\infty} 4\left(\frac{-1}{2}\right)^n &= \frac{8}{3} - \sum_{n=0}^{4} 4\left(\frac{-1}{2}\right)^n \\ &= \frac{8}{3} - \frac{11}{4} \\ &= -\frac{1}{12.}\end{aligned}$$

(c) Sea $k \in \mathbb{R}$, se afirma que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(k^2-3k+2)n^3+n+3}{n^3+2n}.$$

converge **solo** para $k = 1, 2$.

Solution 3 *Verdadero. Sea $a_n = \frac{(k^2-3k+2)n^3+n+3}{n^3+2n}$. Notemos que:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(k^2-3k+2)n^3+n+3}{n^3+2n} = k^2-3k+2.$$

luego, por contrarecíproco del teorema del límite del término central, tenemos que si $k^2-3k+2 = (k-2)(k-1) \neq 0$, la serie no converge, esto asegura que la serie no converge entonces para $k \neq 1, 2$.
Si $k = 1, 2$, tenemos que $k^2 - 3k + 2 = 0$ y luego la serie queda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(k^2-3k+2)n^3+n+3}{n^3+2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^3+2n}$$

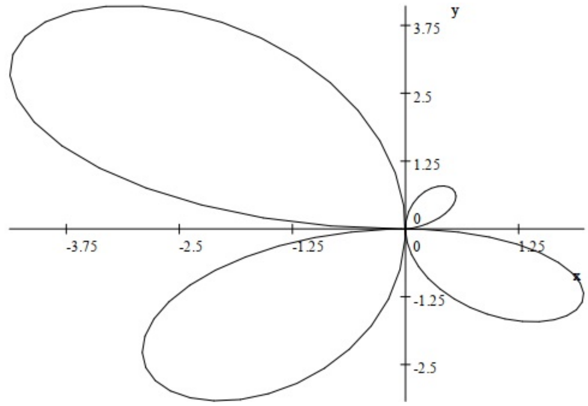
La cual, comparándola en el límite con la serie p convergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ nos da que es convergente.

2. (15 puntos)Considere la gráfica de la función en coordenadas polares

$$r = \theta \sin 2\theta;\ 0 \le \theta \le 2\pi.$$

(a) (5 puntos) Encontrar para qué valores de $\theta \in [0, 2\pi]$ la curva pasa por el polo.

(b) (10 puntos) Determine la fórmula integral que permite calcular el área encerrada por el pétalo menor y el pétalo mayor indicada en la figura.



Solution 4 *Notar que la función para por el origen en* $\theta = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{27}{18}\pi,\ 2\pi.$ *El área del pétalo menor viene dado por*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \left(\theta \sin(2\theta)\right)^2 d\theta$$

y el área del pétalo mayor viene dado por

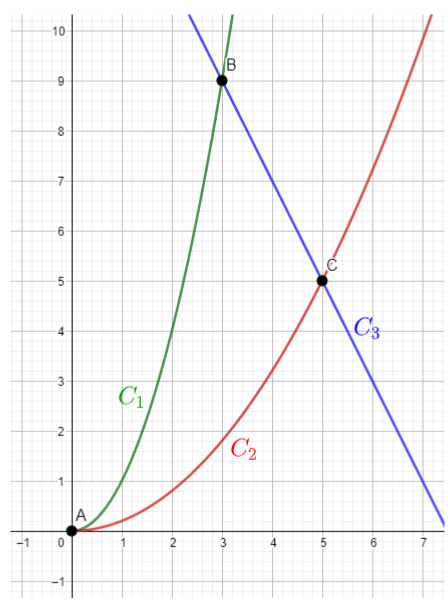
$$\int_{\frac{27}{18}\pi}^{2\pi} \frac{1}{2} \left(\theta \sin(2\theta)\right)^2 d\theta$$

El área de la superficie solicitada viene dado por

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \left(\theta \sin(2\theta)\right)^2 d\theta + \int_{\frac{27}{18}\pi}^{2\pi} \frac{1}{2} \left(\theta \sin(2\theta)\right)^2 d\theta$$

3. (15 puntos) Sea R la región en el primer cuadrante encerrada por las gráficas $y = x^2$; $y = \frac{1}{5}x^2$; y la recta $2x + y - 15 = 0$. Encontrar la fórmula integral que permite calcular el perimetro de la región.

Solution 5 *Sea* $C_1 : y = x^2$, $C_2 : y = \frac{1}{5}x^2$ *y* $C_3 : y = -2x + 15$. *Tenemos que:*



Graficando las distintas curvas, se ve que las intersecciones necesarias para el cálculo son $C_1 \cap C_3$, $C_2 \cap C_1$ y $C_2 \cap C_3$. Para $C_1 \cap C_3$ tenemos:

$$x^2 = -2x + 15 \Longrightarrow x = -5 \vee x = 3.$$

Para $C_2 \cap C_3$:

$$\frac{1}{5}x^2 = -2x + 15 \Longrightarrow x = -15 \vee x = 5.$$

Para $C_1 \cap C_2$ tenemos:

$$x^2 = \frac{1}{5}x^2 \Longrightarrow x = 0.$$

Así, obtenemos que $A = (0,0)$, $B = (3,4)$ y $C = (5,5)$. Derivando las expresiones para C_1, C_2 y C_3, obtenemos $2x$, $\frac{2}{5}x$ y -2 respectivamente, y reemplazando en la fórmula de lóngitud de arco, tenemos que el perimetro estará dado por:

$$L = \int_0^3 \sqrt{1+4x^2} + \int_0^5 \sqrt{1+\frac{4}{25}x^2} + \sqrt{20}.$$

4. Sabiendo que $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$:

   (a) (5 puntos) Encontrar la serie de potencias asociada a $f(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$.

   Solution 6 *Como $e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$, $u \in \mathbb{R}$, haciendo $u = \frac{-x^2}{2}$, tenemos:*

$$f(x) = e^{\frac{-x^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!}, x \in \mathbb{R}.$$

   (b) (10 puntos) Determinar la serie de potencias asociada a la función de distribución normal $F(x) = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$, indicando el intervalo de convergencia.

   Solution 7 *Por a) sabemos que:*

$$F(x) = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^n n!} dt$$

   Aplicando teorema de integración de series de potencias tenemos que el radio de *convergencia se mantiene, es decir,* $R = \infty$ *y:*

$$\begin{aligned}\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^n n!} dt &= \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^n n!} dt \Bigg|_{t=0}^{t=x} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^n n!} dt \Bigg|_{t=0}^{t=x} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n! 2^n (2n+1)} - 0 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n! 2^n (2n+1)}.\end{aligned}$$

Así, tenemos que:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n! 2^n (2n+1)}, x \in \mathbb{R}.$$

Opción 2: En caso de que se ocupe el criterio de la razón para encontrar el radio de convergencia, se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| x^2 \frac{(2n+1)}{2(n+1)(2n+3)} \right| = 0.$$
