UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Listado de Ejericios del listado 10 y adicionales : Cálculo I (527140)

Ejercicios del listado 10

1.- Determinar la derivada $\dfrac{dy}{dx}$ de la función implícita $y = f(x)$ en la ecuación dada:

(b) $\sin(y) + x\cos(y) = \dfrac{x}{y}$

Solución: Derivando implícitamente la ecuación dada y utilizando reglas de derivación y regla de la cadena

$$[\sin(y) + x\cos(y)]' = \left(\frac{x}{y}\right)' \Rightarrow \cos(y)y' + [\cos(y) - x\sin(y)y'] = \frac{y - xy'}{y^2}$$

Despejando y' de lo obtenido.

$$\begin{aligned}
\cos(y)y' + \cos(y) - xy'\sin(y) = \frac{y - xy'}{y^2} &\Rightarrow y^2(cos(y)y' + \cos(y) - xy'\sin(y)) = y - xy' \\
&\Rightarrow y^2\cos(y)y' + xy' - y^2xy'\sin(y) = y - y^2\cos(y) \\
&\Rightarrow y'\left(y^2\cos(y) + x - y^2x\sin(y)\right) = y - y^2\cos(y) \\
&\Rightarrow y' = \frac{y - y^2\cos(y)}{y^2\cos(y) - y^2x\sin(y) + x}
\end{aligned}$$

(d) $\cos(xy^2) + \tan(x + 2y) = 1 - \sqrt{xy}$

Solución: Derivando implícitamente la ecuación dada y utilizando reglas de derivación y regla de la cadena

$$\begin{aligned}
[\cos(xy^2) + \tan(x + 2y')] = [1 - \sqrt{xy}]' &\Rightarrow \sec^2(x + 2y)\,[x + 2y]' - \sin(xy^2)\,[xy^2]' = -\frac{1}{2\sqrt{xy}}\,[xy]' \\
&\Rightarrow \sec^2(x + 2y)(1 + 2y') - (2yy'x + y^2)\sin(xy^2) = -\frac{y' + y}{2\sqrt{xy}} \\
&\Rightarrow 2\sqrt{xy}\sec^2(x + 2y)(1 + 2y') - 2\sqrt{xy}(2yy'x + y^2)\sin(xy^2) = -xy' - y
\end{aligned}$$

Luego, agrupando para despejar el y' se tiene:

$$\begin{aligned}
&y'(4xy\sqrt{xy}\sin(xy^2) - 4\sqrt{xy}\sec^2(2y + x) - x) = 2y^2\sqrt{xy}\sin(xy^2 - 2\sqrt{xy}\sec^2(2y + x) - y \\
&\Rightarrow y' = \frac{2y^2\sqrt{xy}\sin(xy^2 - 2\sqrt{xy}\sec^2(2y + x) - y}{4xy\sqrt{xy}\sin(xy^2) - 4\sqrt{xy}\sec^2(2y + x) - x}
\end{aligned}$$

2.- Encuentre las recta tangentes a la circunferencia centradas en el origen de radio 2 y que sean perpendicular a la recta $y = 2x$.

Solución: Recordemos que una circunferencia centrada en el origen tiene por ecuación general $x^2+y^2 = r^2$, en este caso $r = 2$.

Buscando los puntos de intersección los puntos de intersección entre la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ y la recta $y = 2x$ como sigue:

$$\begin{aligned}
&x^2+y^2 = 4 \qquad \wedge \qquad y = 2x \\
&\Rightarrow x^2 + 4x^2 = 4 \\
&\Rightarrow x^2 = \frac{4}{5} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

Reemplazamos el valor de x en cualquier ecuación y se obtiene

$$y = \pm\frac{4}{\sqrt{5}}$$

Así, los puntos de intersección entre la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ y la recta $y = 2x$ son $P\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ y $Q\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{-4}{\sqrt{5}}\right)$ Consideremos $y = y(x)$, y derivamos implícitamente para obtener la ecuación de la circunferencia

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2)' = (4)' &\Rightarrow 2x + 2yy' = 0\\ &\Rightarrow y' = -\frac{x}{y}\end{aligned}$$

reemplazamos los puntos y obtenemos la pendiente de las rectas tangentes a $x^2 + y^2 = 4$

$$y'_P = -\frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{4}{\sqrt{5}}} = -\frac{1}{2} \text{ y } y'_Q\left(\frac{-4}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{-4}{\sqrt{5}}} = \frac{-1}{2}$$

Luego las ecuaciones de las rectas tangentes están dadas por:

$$\begin{aligned}y_P - \frac{4}{\sqrt{5}} &= \frac{-1}{2}\left(x - \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)\\ y_Q + \frac{4}{\sqrt{5}} &= \frac{-1}{2}\left(x + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\end{aligned}$$

5.a- Determinar mediante derivación implícita, la derivada de la siguiente función f

$$f(x) = \arctan(x^2 + x)$$

Solución:
Sea $y = f(x)$ de donde $y = f(x) = \arctan(x^2 + x)$ es decir se tiene la relación

$$\operatorname{tg}(y) = x^2 + x$$

Derivando implícitamente con respecto a x la ecuación anterior, se tiene

$$\sec^2(y)y' = 2x + 1 \Rightarrow y' = \frac{2x+1}{\sec^2(y)} = \frac{2x+1}{\operatorname{tg}^2(y)+1} = \frac{2x+1}{(x^2+x)^2+1}$$

De este modo se comcluye que

$$f'(x) = \frac{2x+1}{\operatorname{tg}^2(y)+1} = \frac{2x+1}{(x^2+x)^2+1}$$

6.- - Calcular las siguientes derivadas:

(b) $f(x) = 2^{\frac{-3x}{5}}$ *Solución:* Para resolver esta derivada debemos recordar la regla de la derivada de una exponencial

$$[a^{u(x)}]' = \ln(a)a^{u(x)}u'(x)$$

$$\begin{aligned}f(x) = 2^{\frac{-3x}{5}} &\Longrightarrow f'(x) = \left[2^{\frac{-3x}{5}}\right]'\\ &\Longrightarrow f'(x) = \ln(2)\, 2^{\frac{-3x}{5}} \frac{d}{dx}\left[\frac{-3x}{5}\right]\\ &\Longrightarrow f'(x) = \frac{\ln(2)\left(\frac{-3}{5}\right)}{2^{\frac{3x}{5}}}\\ &\Longrightarrow f'(x) = \frac{-3\ln(2)}{5\, 2^{\frac{3x}{5}}}\end{aligned}$$

(d) $f(x) = \log_3(2\cos^{\frac{3}{2}}(x))$ *Solución:*
Utilizando el cambio de base a logarítmo natural se tiene que

$$\log_3(2\cos^{\frac{3}{2}}(x)) = \frac{\ln(2\cos^{\frac{3}{2}}(x))}{\ln(3)}$$

$$\begin{aligned}
f(x) = \log_3(2\cos^{\frac{3}{2}}(x)) &\Longrightarrow f'(x) = \left[\log_3(\cos^{\frac{3}{2}}(x)\right]' \\
&\Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{\ln(3)}\frac{d}{dx}\left[\ln(2\cos^{\frac{3}{2}}(x))\right] \\
&\Longrightarrow f'(x) = \frac{\dfrac{1}{2\cos^{\frac{3}{2}}}\dfrac{d}{dx}\left[2\cos^{\frac{3}{2}}(x)\right]}{\ln(3)} \\
&\Longrightarrow f'(x) = \frac{\dfrac{3}{2}\cos^{\frac{3}{2}-1}(x)\dfrac{d}{dx}\left[\cos(x)\right]}{\ln(3)\cos^{\frac{3}{2}}(x)} \\
&\Longrightarrow f'(x) = \frac{3(-\sin(x))}{2\ln(3)\cos(x)} \\
&\Longrightarrow f'(x) = -\frac{3\sin(x)}{2\ln(3)\cos(x)}
\end{aligned}$$

(e) $f(x) = \arctan(x\ln(x^3))$
Solución: Utilizando regla de la cadena se tiene

$$\begin{aligned}
f(x) = \arctan(x\ln(x^3)) &\Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{(3x\ln(x))^2+1}\frac{d}{dx}\left[3x\ln(x)\right] \\
&\Longrightarrow f'(x) = \frac{3\dfrac{d}{dx}\left[x\ln(x)\right]}{9x^2\ln^2(x)+1} \\
&\Longrightarrow f'(x) = \frac{3\left(\dfrac{d}{dx}[x]\ln(x) + x\dfrac{d}{dx}[\ln(x)]\right)}{9x^2\ln^2(x)+1} \\
&\Longrightarrow f'(x) = \frac{3\left(\ln(x) + x\dfrac{1}{x}\right)}{9x^2+\ln^2(x)+1} \\
&\Longrightarrow f'(x) = \frac{3(\ln(x)+1)}{9x^2\ln^2(x)+1} \\
&\Longrightarrow f'(x) = \frac{3\ln(x)+3}{9x^2\ln^2(x)+1}
\end{aligned}$$

Ejercicios extras

1.- Considerar a $y = y(x)$ implícitamente. Determinar,si existe, $k \in \mathbb{R}$ tal que la recta tangente a la curva

$$x^2 + x^3y^2 = 1 + \sin(kxy)$$

cuando $y = 0$ es perpendicular a $y = 3x + 2$

Solución:

Notar que cuando $y = 0$ se tiene en la ecuación

$$x^2 = 1 \Longrightarrow |x| = \pm 1$$

Luego, derivando implicitamente con respecto a x la ecuación de la curva, se tiene

$$[x^2 + x^3y^2]' = [1 + \sin(kxy)]' \Longleftrightarrow 2x + 3x^2y^2 + 2x^3yy' = k\ \cos(kxy)[y + xy']$$

Reemplazando en $y = 0$ en lo anterior, se tiene

$$2x = kxy'$$

Como en los puntos, $x = \pm 1$ distinto de cero, se tiene que

$$y' = \frac{2}{k}$$

Luego, para que las rectas sean perpendiculares, debe cumplir que el producto de sus pendientes es menos uno. en efecto

$$3\frac{2}{k} = -1 \Longrightarrow k = -6$$

De este modo, con $k = -6$, la recta tangente a la curva dada en los puntos $(\pm 1, 0)$ es perpendicular a $y = 3x + 2$

2.- Calcular La derivada de $f(x) = [1 + \sin^2(x)]^{x^3 + \operatorname{tg}(x)}$
Solución: Sea $h(x) = 1 + \sin^2(x)$ y $g(x) = x^3 + \operatorname{tg}(x)$, Notar que para todo

$$x \in \mathbb{R} : h(x) > 0 \Longrightarrow x \in \mathbb{R} : f(x) > 0$$

Luego, si se considera $y = f(x)$ se tiene

$$\begin{aligned} y = f(x) \Longrightarrow \ln(y) &= \ln(f(x)) = \ln([1 + \sin^2(x)]^{x^3 + \operatorname{tg}(x)}) \\ \ln(y) &= (x^3 + \operatorname{tg}(x)) \ln(1 + \sin^2(x)) \end{aligned}$$

De este modo, derivando implícitamente con respecto a x ultima ecuación obtenida, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= (3x^2 + \sec^2(x)) \ln(1 + \sin^2(x)) + \frac{2(x^3 + \operatorname{tg}(x)) \sin(x) \cos(x)}{1 + \sin^2(x)} \\ \Longleftrightarrow y' &= y \left((3x^2 + \sec^2(x)) \ln(1 + \sin^2(x)) + \frac{(x^3 + \operatorname{tg}(x)) \sin(2x)}{1 + \sin^2(x)} \right) \end{aligned}$$

Como $y = f(x) = [1 + \sin^2(x)]^{x^3 + \operatorname{tg}(x)}$ se tiene que la derivada pedida es

$$f'(x) = [1 + \sin^2(x)]^{x^3 + \operatorname{tg}(x)} \left((3x^2 + \sec^2(x)) \ln(1 + \sin^2(x)) + \frac{(x^3 + \operatorname{tg}(x)) \sin(2x)}{1 + \sin^2(x)} \right)$$