Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

GAJ/EBC/CF/CMR/ARP

Evaluación 1
Cálculo III (521227)

Problema 1 (20 puntos)
Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^3y-3xy^3}{3x^2+7y^2}\cos(xy), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i. Demostrar que f es continua en $(0,0)$.

Solución 1: Necesitamos verificar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ para esto procedamos a acotar

$$\left|\frac{2x^3y-3xy^3}{3x^2+7y^2}\cos(xy)\right| \leq \left|\frac{2x^3y-3xy^3}{3x^2+7y^2}\right| \leq \frac{2}{3}|xy| + \frac{3}{7}|xy| = \frac{23}{21}|xy|$$

Como esta expresión tiende a 0, se sigue del Teorema del acotamiento que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

y por lo tanto, f es continua en el origen.

Solución 2: Si se resuelve primero el item iii., se puede concluir que f es continua ya que es diferenciable en $(0,0)$.

(8 puntos)

ii. Calcular las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Solución: Utilizando la definición tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{3h^3} = 0$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{7h^3} = 0$$

(4 puntos)

iii. Determinar si f es diferenciable en $(0,0)$.

Solución:

Recordemos que f es diferenciable en $(0,0)$ si y sólo si

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\|(h,k)\|} = 0$$

Simplificando tenemos que f es diferenciable si y sólo si

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{2h^3k - 3hk^3}{(3h^2+7k^2)\|(h,k)\|}\cos(hk) = 0$$

Utilizaremos el Teorema del acotamiento para probar que el límite es 0, para esto acotamos

$$\left|\frac{2h^3k - 3hk^3}{(3h^2+7k^2)\|(h,k)\|}\cos(hk)\right| \le \left|\frac{2h^3k - 3hk^3}{(3h^2+7k^2)\|(h,k)\|}\right| \le \frac{2|hk|}{3\|(h,k)\|} + \frac{3|hk|}{7\|(h,k)\|} \le \frac{23}{21}\|(h,k)\|$$

Como esta última expresión tiende a 0 se sigue del Teorema del acotamiento que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{2h^3k - 3hk^3}{(3h^2+7k^2)\|(h,k)\|}\cos(hk) = 0$$

y por lo tanto f es diferenciable en el origen.

(8 puntos)

Problema 2 **(20 puntos)**
Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} xz^3 + y^2 + az &= 1 \\ 2xy^3 + y^2z + ay &= a \end{aligned}$$

donde a es una constante real.

i. Determinar todos los valores de a para los cuales el sistema define una función g de clase C^1 tal que $g(z) = (x, y)$ en una vecindad de $(0, 1, 0)$.

Solución: Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la función definida mediante

$$F(x,y,z) = \left(xz^3 + y^2 + az - 1,\ 2xy^3 + y^2z + ay - a\right)$$

Se tiene que F es de clase C^∞ por ser polinomial y $F(0,1,0) = (0,0)$ para cualquier valor de a.

Ahora, como $Df(0,1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & a & a+1 \end{bmatrix}$ entonces

$$\frac{\partial F}{\partial(x,y)}(0,1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & a \end{bmatrix}$$

como $\det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & a \end{bmatrix} = -4 \neq 0$ **(6 puntos)**

Luego, por teorema de la función implícita, el sistema define implícitamente a las variables x e y como funciones de clase C^1 de la variable z en una vecindad del punto $(0,1,0)$ para cualquier valor de a.

(4 puntos)

ii. Usando $a = 1$, determinar una buena aproximación afin para g en una vecindad de $z = 0$.

Solución:

Como g es diferenciable en una vecindad de $x = 0$, entonces existe una vecindad U del punto $x = 0$ tal que la buena aproximación afín para g está dada por la aplicación $L(x) = g(0) + g'(0)x$. Es claro que $g(0) = (1, 0)$ y para $a = 1$ se tiene

$$Df(0,1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(4 puntos)

Luego, por el Teorema de la Función implícita

$$g'(x) = -\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = (-1, 0)$$

Luego la aproximación afín para g en una vecindad de $x = 0$ esta definida por

$$L(x) = (1, 0) + (-1, 0)x = (1 - x, 0).$$

(6 puntos)

Problema 3 (20 puntos)
Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$T(x, y, z) = 100 - xy - xz - yz.$$

i. Analizar la naturaleza de los puntos críticos de la función T.

Solución: Como T es diferenciable en $\mathbb{R}^3$, entonces los puntos críticos están dados por

$$\begin{aligned} f_x = -y - z &= 0 \\ f_y = -x - z &= 0 \\ f_z = -x - y &= 0 \end{aligned}$$

de donde se deduce que $(0, 0, 0)$ es el único punto crítico para T en $\mathbb{R}^3$.

(5 puntos)

Ahora, como la matriz Hessiana de T en $(0, 0, 0)$ es

$$H(T)(0,0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(5 puntos)

entonces sus correspondientes Hessianos son

$$\Delta_1 = 0, \Delta_2 = -1, \Delta_3 = -2$$

Puesto que $\Delta_3 \neq 0$ y $\Delta_1 = 0$ se sigue, del criterio de la segunda derivada. que el origen es un punto silla.

(5 puntos)

ii. Determinar si la función T tiene máximos y/o mínimos globales.

Solución: Notemos que

$$\lim_{x\to\infty} T(x,-1,0) = \infty \text{ y } \lim_{x\to\infty} T(x,1,0) = -\infty$$

entonces la función T no tiene ni máximos ni mínimos absolutos en $\mathbb{R}^3$.

(5 puntos)

No se permite utilizar celulares.
Duración del Certamen 100 minutos