UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
**FACULTAD DE CIENCIAS**
**FISICAS Y MATEMATICAS**
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

---

**ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS 521218**
Listado 7 (Parte I)
Existencia y Unicidad de solución de EDOs de 1er Orden, EDOs de variables separables

## Problemas a resolver en práctica

1. Analice la existencia y unicidad de los siguientes problemas de valores iniciales (PVIs):

   (a) $y'(x) = \sqrt{x - y(x)}$ con $y(1) = 1$.

   (b) $y'(x) = 4x - \sqrt[4]{y(x) - 1}, \quad y(x_0) = y_0$. ¿Qué condiciones deben cumplir $x_0$, $y_0$ para que el PVI tenga una única solución?

**Desarrollo:**

(a) Aquí la EDO es $y'(x) = f(x, y(x))$ con $f(x, y) = \sqrt{x - y}$, la cual es continua en $\{(x, y) : x \geq y\}$. Además, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (-1/2)(x - y)^{-(1/2)}$ la cual es continua en $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$. Como $(1, 1) \notin \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$ no podemos garantizar la existencia de una única solución para el PVI bajo estudio.

(b) Aquí la EDO es $y'(x) = f(x, y(x))$ con $f(x, y) = 4x - (y - 1)^{(1/4)}$, la cual es continua en $\mathbb{R}^2 - A$, donde $A = \{(x, y) : y < 1\}$. Además, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (-1/4)(y - 1)^{-(3/4)}$ la cual es continua en $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1\}$. Aplicando el teorema de existencia y unicidad, el PVI $y'(x) = 4x - \sqrt[4]{y(x) - 1}, \quad y(x_0) = y_0$ posee una única solución, definida alrededor de $x_0$, cuando $y_0 > 1$.

2. Determine la solución de

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y(x)^2 - 1}{(x - 1)^2} \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

**Desarrollo:**

**Alternativa 1:** Notamos que $y(x) = 1$ es una solución de

$$y'(x) = \frac{y(x)^2 - 1}{(x - 1)^2} \tag{1}$$

que satisface la condición inicial $y(2) = 1$. Luego, el teorema de existencia y unicidad nos asegura que la solución del problema de valores iniciales (PVI) bajo consideración es $y(x) = 1$ para todo $x > 1$.

**Alternativa 2:** Primero, encontraremos las soluciones constantes de

$$y'(x) = \frac{y(x)^2 - 1}{(x-1)^2}. \tag{2}$$

Poniendo $y(x) = y$ en

$$y'(x) = \frac{y(x)^2 - 1}{(x-1)^2}$$

obtenemos que

$$y^2 - 1 = 0,$$

luego $y = \pm 1$, o sea $y(x) = 1$ e $y(x) = -1$ satisfacen (2). Ya que $y(2) = 1$, el teorema de existencia y unicidad nos asegura que la solución del problema de valores iniciales (PVI) bajo consideración es $y(x) = 1$ para todo $x > 1$.

3. Resuelva $y'(x) = \dfrac{y(x)^2 - 1}{(x-1)^2}$ con $y(-1) = 0$.

**Desarrollo:**

Observamos que la funciones $f(x,y) = \dfrac{y^2-1}{(x-1)^2}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2y}{(x-1)^2}$ son continuas en todo punto $(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$ con la condición que $x \neq 1$. Por lo tanto, el problema de valores iniciales

$$y'(x) = \frac{y(x)^2 - 1}{(x-1)^2}, \qquad y(x_0) = y_0$$

tiene una única solución, definida alrededor de $x_0$ cuando $x_0 \neq 1$.

Soluciones estacionarias (o constantes): $z(x) = \pm 1$

Separando variables e integrando se obtiene la igualdad

$$\int \frac{dy}{y^2 - 1} = \int \frac{dx}{(x-1)^2}.$$

Calculando las integrales se llega a

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \frac{1}{1-x} + c, \text{ o equivalentemente, } \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = \frac{2}{1-x} + 2c,$$

donde $c$ es una constante. Luego

$$\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = e^{2c}\mathrm{e}^{\frac{2}{1-x}}.$$

Como las soluciones no estacionarias no pueden cortar la soluciones $z(x) = \pm 1$ e $y(-1) = 0 \in ]-1, 1]$, $\dfrac{y(x)-1}{y(x)+1}$ es negativo en una vecindad de $x = -1$. Por lo tanto,

$$e^{2c} e^{\frac{2}{1-x}} = \frac{1-y}{y+1}.$$

Poniendo $K = e^{2c}$ produce $1 - y = (y+1) K e^{\frac{2}{1-x}}$, de donde

$$y(x) = \frac{1 - K e^{\alpha(x)}}{1 + K e^{\alpha(x)}} \text{ para } \alpha(x) = \frac{2}{1-x}.$$

Como $y(-1) = 0$, evaluando obtenemos $K = e^{-1}$. Así que

$$y(x) = \frac{1 - e^{\beta(x)}}{1 + e^{\beta(x)}}$$

con $\beta(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$. Note que para $x = -1$ , se obtiene $y(-1) = 0$.

4. Considere el PVI

$$\begin{cases} y'(x) = & \dfrac{1}{y} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Identifique las distintas componentes conexas en que se pueda asegurar existencia y unicidad de solución para el respectivo PVI (dependiendo de la región a la que pertenece el punto $(x_0, y_0)$. ¿Cómo es la monotonía de la solución en la región conexa correspondiente?

**Desarrollo:**

Del Teorema de Existencia y Unicidad sigue que el PVI en cuestión admite dos componentes conexas, $A_1$ y $A_2$, donde podemos segurar existencia y unicidad de soluciones, donde

$$\begin{cases} A_1 = & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \text{ y} \\ A_2 = & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}. \end{cases}$$

Si $(x_0, y_0) \in A_1$ entonces la correspondiente solución es creciente. Por el contrario, si $(x_0, y_0) \in A_2$ entonces la correspondiente solución es decreciente.

5. Considere el PVI

$$y'(x) = \frac{1}{y(x)^2 - 2y(x) - 8}, \; y(x_0) = y_0$$

Determine la monotonía de $y(x)$ en las distintas componentes conexas en que se puede asegurar existencia y unicidad cuando $(x_0, y_0)$ y resuelva la EDO dada.

**Desarrollo:**

Si escribimos $f(x, y) = \dfrac{1}{y^2 - 2y - 8}$ entonces

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2 - 2y}{y^2 - 2y - 8}.$$

Ambas funciones resultan continuas para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de modo que

$$y \in ] - \infty, -2[ \cup ] - 2, 4[ \cup ]4, +\infty[.$$

Si agregamos la condición inicial $y(x_0) = y_0$ la EDO dada tiene única solución cada vez que $y_0$ esté en alguno de los tres intervalos señalados anteriormente.

Además, observe que sin determinar la solución de la EDO misma, podemos afirmar analizando el signo de la expresión $g(y) = y^2 - 2y - 8$, que la derivada de la solución de la EDO dada, es:

- positiva si $y \in ] - \infty, -2[$,
- negativa si $y \in ] - 2, 4[$,
- positiva si $y \in ]4, +\infty[$.

De lo anterior, relativo a los PVI que siguen, podemos decir lo siguiente:

(a) El PVI

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{1}{(y+2)(y-4)}, \\ y(-3) = -4. \end{cases}$$

es tal que su única solución es una curva creciente.

(b) El PVI

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{1}{(y+2)(y-4)}, \\ y(-3) = 1. \end{cases}$$

es tal que su única solución es una curva decreciente.

(c) El PVI

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{1}{(y+2)(y-4)}, \\ y(-3) = 6. \end{cases}$$

es tal que su única solución es una curva creciente.

Para determinar la solución, usamos separación de variables para obtener:

$$(y(x)^2 - 2y(x) - 8)y'(x) = 1.$$

Integrando se obtienen las soluciones implícitas

$$y(x)^3 - 3y(x)^2 - 24y(x) = 3x + c.$$

con $c$ constante arbitraria, determinada univocamente en presencia de una condición inicial $y(x_0) = y_0$ (con $y_0$ en uno de los tres intervalos definidos anteriormente).

**Problemas para el Estudiante**

1. Encuentre la solución general de:

   (a) $y'(x) = \dfrac{x}{y(x)}$.

   (b) $y'(x) = (y(x) - 1)(x + 1)$.

   (c) $y'(x) = \dfrac{y(x) - x}{x}$.

   (d) $y'(x) = \dfrac{x}{y(x) - 1}$.

   (e) $y'(x) = \dfrac{y(x)^2 - 1}{x^2 - 1}$

2. Analice la existencia y unicidad de los siguientes PVIs:

   (a) $y'(x) = \dfrac{1}{2x - y(x)^2}$, $y(x_0) = y_0$ .

   (b) $y'(t) = \dfrac{2}{y(t)^2 + 2y(t) - 15}$, $y(t_0) = z_0$ . (**Obs:** la EDO es autónoma)

3. Considere la EDO $y'(x) = 2x^2\sqrt{y(x)}$,
   a) Muestre que $y(x) \equiv 0$ e $y(x) = \frac{1}{9}x^6$ son soluciones de la EDO dada.

   b) Considere los PVI $(P_1)$ y $(P_2)$ respectivamente definidos por

   $$\begin{cases} y'(x) = 2x^2\sqrt{y(x)} \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} y'(x) = 2x^2\sqrt{y(x)} \\ y(1) = 5 \end{cases}$$

   Verifique que el PVI $(P_1)$ tiene al menos dos soluciones y que $(P_2)$ tiene solución única ¿Cómo puede explicar esta situación?

4. Considere los PVI, definidos por

   $$(P_1)\begin{cases} y'(x) &= \dfrac{1}{x - y} \\ y(-3) &= 2\,. \end{cases} \qquad \text{y} \qquad (P_2)\begin{cases} y'(x) = \dfrac{1}{x - y} \\ y(4) = -1 \end{cases}$$

   (a) Deduzca, que los PVI $(P_1)$ y $(P_2)$ admiten única solución.

   (b) Sin resolver las EDO correspondiente, deduzca como son las curvas solución de $(P_1)$ y $(P_2)$.

---

17/10/2022
RBP/JMS/FST//jms