Clase 22

Cálculo 3

Carlos Martínez Ranero

Departamento de Matemática
Universidad de Concepción

Recordatorio de la clase anterior.

- Curvas parametrizadas.
- Campos vectoriales.
- Integrales de linea sobre campos escalares.
- Integrales de linea sobre campos escalares.

Objetivos de la clase de hoy.

- Integrales de linea sobre campos escalares.
- Teorema Fundamental de Integrales de Linea.

Ejemplo 1

Sea C la curva consistente del segmento de $(0,0)$ a $(1,0)$, seguido del sector de circunferencia de $(1,0)$ a $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, seguido del segmento de recta de $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ al origen.
Calcular $\int_C y dx + x dy$.

Solución:

- La curva C es suave por tramos. Por lo que la vamos a escribir como la unión de 3 curvas $C = C_1 + C_2 + C_3$
- $C_1 : \vec{r}_1(t) = (t, 0), 0 \leq t \leq 1$
- $x = t,\ dx = dt,\ y = 0,\ dy = 0$
- $C_2 : \vec{r}_2(t) = (\cos t, \sin t), 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$
- $x = \cos t,\ dx = -\sin t dt,\ y = \sin t,\ dy = \cos t dt$
- $C_3 : \vec{r}_3(t) = (\frac{1-t}{\sqrt{2}}, \frac{1-t}{\sqrt{2}}), 0 \leq t \leq 1$
- $x = \frac{1-t}{\sqrt{2}},\ dx = -\frac{1}{\sqrt{2}}dt,\ y = \frac{1-t}{\sqrt{2}},\ dy = -\frac{1}{\sqrt{2}}dt$

Integrales de Linea de Campos Vectoriales.

- $\int\limits_C ydx + xdy = \int\limits_{C_1} ydx + xdy + \int\limits_{C_2} ydx + xdy + \int\limits_{C_3} ydx + xdy$
- $\int_0^1 0dt + \int_0^{\pi/4} -\sin^2 t + \cos^2 tdt + \int_0^1 -1 + tdt = 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

Teorema Fundamental de Integrales de Linea.

Definición

Un campo $\vec{F}$ se llama campo gradiente o conservativo si existe $f : U \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla(f) = \vec{F}$.

Teorema (Fundamental de Integrales de Linea)

Si $\vec{F} = \nabla(f)$, entonces $\int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a))$.

Demostración:

- $\int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)dt$
- $= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\vec{r}(t))dt = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a))$.

Teorema Fundamental de Integrales de Linea.

Consecuencias del Teorema fundamental de las integrales de linea:

Proposición

Sea $\vec{F} = \nabla(f)$ un campo conservativo y C_1, C_2 dos curvas con punto inicial A y punto final B, entonces $\int\limits_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\limits_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, es decir, la integral de linea es independientes de la trayectoria.

Demostración:

- $\int\limits_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(B) - F(A) = \int\limits_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Teorema Fundamental de Integrales de Linea.

Definición

Una curva parametrizada $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ se llama cerrada si $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.

Teorema

Si $\vec{F}$ es un campo conservativo y C es una curva cerrada, entonces $\oint\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

Integrales de Linea de campos gradientes.

Ejemplo 2

Sea $\vec{F}(x,y) = \langle e^{x+y}, e^{x+y} \rangle$ un campo vectorial. Calcular $\int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ donde C es la curva parametrizada por $\vec{r}(t) = (\cos(3t), \sin(5t)), 0 \leq t \leq \pi$.

Integrales de Linea de campos gradientes.

Solución:

- Observemos que el campo vectorial $\vec{F} = \langle e^{x+y}, e^{x+y} \rangle$ es el gradiente de la función $f(x,y) = e^{x+y}$.
- Calculando los extremos inicial y final de la curva se tiene $A = \vec{r}(0) = (1,0)$ y $B = \vec{r}(\pi) = (-1,0)$
- Utilizando el Teorema Fundamental de Integrales de Linea se tiene
- $\int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(B) - f(A) = e^{-1} - e^{1}$

Definición:

Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ decimos que es conexo por trayectorias si para cualesquiera dos puntos $A, B \in U$ existe una curva $\vec{r} : [a, b] \to U$ tal que $\vec{r}(a) = A$ y $\vec{r}(b) = B$.

Ejemplos

- $A = \mathbb{R}^2$ es conexo por trayectorias.
- $B = \{(x, y) : xy = 1\}$ no es conexo por trayectorias.

Integrales de Linea de campos gradientes.

Teorema

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y conexo por trayectorias y $\vec{F} : U \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo.Si $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ no depende de la trayectoria, entonces $\vec{F}$ es un campo conservativo, es decir, existe $f : U \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla(f) = \vec{F}$.

Demostración:

- Fijemos un punto $(a, b) \in U$.
- Definimos la función de potencial $f(x, y) = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde C es una curva que va de (a, b) a (x, y). La función esta bien definida ya que no depende de la trayectoria.

Integrales de Linea de campos gradientes.

- Sea $\vec{F} = \langle P, Q\rangle$. Necesitamos verificar que $\frac{\partial f}{\partial x} = P$ y que $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$.
- $\frac{\partial f}{\partial x} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_0^1 P(tx,y)dt\right) = P(x,y)$
- De manera analoga, obtenemos que $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$.

Integrales de Linea de campos gradientes.

Ejemplo 3

Sea $\vec{F}(x,y,z) = \langle x+y, x+z, y+z\rangle$ un campo vectorial. Calcular $\int_C \vec{F}d\vec{r}$ donde C es la curva parametrizada por $\vec{r}(t) = (\cos(20t)\sin(t), \sin(20t)\sin(t), \cos(t)), 0 \leq t \leq \pi$.

Integrales de Linea de campos gradientes.

Solución 1:

- Debemos encontrar la función de potencial.
- Estamos buscando f tal que
  $f_x = x + y \implies f = \frac{x^2}{2} + xy + g(y, z)$.
- $f_y = x + z$ y $f_y = x + g_y \implies g_y = z \implies g = yz + h(z)$
- $f = \frac{x^2}{2} + xy + yz + h(z)$
- $f_z = y + z$, $f_z = y + h'(z) \implies h'(z) = z \implies h(z) = \frac{z^2}{2}$
- Por lo tanto, $f = \frac{x^2}{2} + xy + yz + \frac{z^2}{2}$
- $\int_C \vec{F} d\vec{r} = f(0, 0, -1) - f(0, 0, 1) = 0$

Integrales de Linea de campos gradientes.

Solución 2:

- Debemos encontrar la función de potencial.
- $f(x,y,z) = \int\limits_C \vec{F} \cdot \vec{r} =$
- $C : \vec{r}(t) = (tx, ty, tz), 0 \leq t \leq 1$
- $\int\limits_C \vec{F} \cdot \vec{r} = \int_0^1 \langle tx + ty, xt + zt, yt + zt \rangle \cdot \langle x, y, z \rangle dt$
- $\int\limits_C \vec{F} \cdot \vec{r} = \int_0^1 tx^2 + 2txy + 2tyz + tz^2 = \frac{x^2}{2} + xy + yz + \frac{z^2}{2}$

Integrales de Linea de campos gradientes.

Teorema

Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y $\vec{F} : U \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial de clase C^1.Si $\vec{F} = \langle P, Q \rangle$ es un campo gradiente, entonces $rot(\vec{F}) = \partial_x Q - \partial_y P = 0$

Demostración:

- Si $\vec{F} = \nabla(f)$, entonces $f_x = P$ y $Q = f_y \implies rot(\vec{F}) = f_{xy} - f_{yx} = 0$, ya que f es de clase C^2.

Integrales de Linea de campos gradientes.

Ejemplo 4

Sea $\vec{F}(x,y) = \langle \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \rangle$ un campo vectorial. Calcular $rot(\vec{F})$ y $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ donde C es la curva parametrizada por $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t)), 0 \leq t \leq 2\pi$.

Solución:

- $rot(\vec{F}) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$
- $x = \cos t, dx = -\sin t dt, y = \sin t, dy = \cos t dt$
- $\int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_0^1 \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = \int_0^1 dt = 2\pi$
- De esto se sigue que $\vec{F}$ no es un campo conservativo.