Clase 17

Cálculo 3

Carlos Martínez Ranero

Departamento de Matemática
Universidad de Concepción

Recordatorio de la clase anterior.

- Integrales sobre regiones generales.

Objetivos de la clase de hoy.

- Interpretación de integrales dobles.
- Integrales en coordenadas polares.

Integrales Dobles sobre Regiones Generales

Ejemplo 1

Calcular $\iint_D x dA$ donde D es la región acotada por la recta $x + y = 0$, $y = 0$, el circulo unitario y $x \geq 0$.

Integrales sobre regiones

Primera solución:

- Notemos que D no es una región de tipo I pero la podemos escribir como la unión de dos regiones de tipo I
- $D = D_1 \cup D_2$
- $D_1 = \left\{(x,y) : 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, -x \leq y \leq 0\right\}$
- $D_2 = \left\{(x,y) : \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq 0\right\}$
- $\iint_D x dA = \iint_{D_1 \cup D_2} x dA =$
- $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{-x}^{0} x dy dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} x dy dx$
- $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} xy\Big|_{-x}^{0} dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} xy\Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$

Segunda solución:

- Notemos que D es una región de tipo II
- $D = \left\{(x, y) : -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq y \leq 0, -y \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}\right\}$
- $\iint_D x dA =$
- $\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} \int_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} x dx dy =$
- $\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} \frac{1}{2}(1 - y^2 - y^2) dy =$
- $\frac{1}{2}(y - \frac{2y^3}{3})\Big|_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} = \frac{1}{3\sqrt{2}}$

Interpretación de integrales dobles.

La intepretación de la integral doble $\iint_D f(x,y)dA$ depende de lo que representa la función f.

- Si $f(x,y) = 1$ (función constante 1), entonces $\iint_D f(x,y)dA = Area(D)$
- Si $f \geq 0$, entonces $\iint_D f(x,y)dA$ representa el volumen de la región $\{(x,y,z) : (x,y) \in D \wedge 0 \leq z \leq f(x,y)\}$.
- Si $f \geq 0$ y f representa la densidad de la región D en cada punto, entonces $\iint_D f(x,y)dA$ representa la masa de la región D.
- $\frac{1}{Area(D)} \iint_D f(x,y)dA$ representa el promedio de f en D.

Coordenadas Polares

Recordemos que las coordenadas polares están dadas por

- $\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$
- $\Phi : \{(r.\theta) : r \geq 0, \theta \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^2$
- Φ es una función sobreyectiva pero no es inyectiva, ya que $\Phi(r, \theta) = \Phi(r, \theta + 2n\pi)$ para cualquier entero n.
- Si restringimos el dominio a una banda de longitud 2π $S = \{(r, \theta) : r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi]\}$ entonces Φ es inyectiva en su interior pero envía la recta $r = 0$ al origen.

Coordenadas Polares

Utilizando la transformación de coordenadas polares podemos convertir cualquier función $f(x, y)$ en una función $\hat{f}(r, \theta)$ y vice-versa.

Ejemplo 2

- Expresar las ecuaciones $x^2 + y^2 = a^2$ y $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ en coordenadas polares.
- Expresar la ecuación $r = 1 + \cos\theta$.

solución:

- La ecuación $x^2 + y^2 = a^2$ en coordenadas cartesianas es equivalente a $r = a$ en coordenadas polares.
- La ecuación $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ en coordenadas cartesianas es equivalente a $r = a\cos\theta$ en coordenadas polares.
- La ecuación $r = 1 + \cos\theta$ en coordenadas polares es equivalente a la ecuación $(x^2 + y^2 - x)^2 = x^2 + y^2$ en coordenadas cartesianas.

Coordenadas Polares

Observemos que Φ transforma el rectángulo $R = [r_1, r_2] \times [\theta_1, \theta_2]$, de área $(r_2 - r_1)(\theta_2 - \theta_1)$, en un trapecio circular S de área aproximadamente $(r_2 - r_1)(\theta_2 - \theta_1) r_1$.

Teorema (Cambio de Variable Coordenadas Polares)

$$\iint_R f(x,y)\,d(x,y) = \iint_S \hat{f}(r,\theta)\, r\, d(r,\theta).$$