Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemática
Departamento de Matemática

Cálculo II

Ingeniería Civil

Prof. Víctor Aros Quinán

Segundo Semestre 2021

Clase Nº16: Cálculo II
Área entre Curvas y Volumen de Sólidos

Área entre Curvas

Como vimos la clase pasada el área entre dos curvas puede ser calculada a través de la siguiente integral definida:

$$A(R) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx$$

Notemos que si $f(x) \geq g(x)$, para todo $x \in [a, b]$, se tiene:

$$A(R) = \int_a^b f(x) - g(x) \, dx$$

de manera análoga, si $g(x) \geq f(x)$, para todo $x \in [a, b]$ se tiene:

$$A(R) = \int_a^b g(x) - f(x) \, dx$$

Ejemplos:

1. Calcular el medida del área de la región comprendida entre el eje X y el gráfico de la función f definida por $f(x) = x^2 - 1$, entre $x = 1$ y $x = 3$.
2. Sea R la región del primer cuadrante limitada por la recta $x + y = 2$, el eje X e Y en el primer cuadrante. Calcular la medida del área con respecto a ambos ejes.
3. Calcular la medida del área de la región encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = 4 - x^2$

Ejemplos:

Solución 2):

Ejemplos:

Solución 3): Primero debemos determinar los puntos de intersección entre ambas curvas, como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow x^2 - 4 = 4 - x^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2 \end{aligned}$$

Además, $g(x) \geq f(x)$, para todo $x \in [a, b]$, por ende:

$$A(R) = \int_{-2}^{2} 4 - x^2 - (x^2 - 4)\, dx = \frac{64}{3}\, u^2$$

Pregunta: ¿Podremos expresar el $A(R)$ de otra forma?

Ejemplos:

Notemos que las funciones f y g también pueden ser escritas en función de la variable y, como sigue:

$$y = x^2 - 4 \Leftrightarrow \pm\sqrt{y+4} = x \quad \text{e} \quad y = 4 - x^2 \Leftrightarrow \pm\sqrt{4-y} = x$$

Además, los puntos de intersección con el entre estas funciones son $A(2,0)$, $B(-2,0)$, $C(0,4)$ y $D(0,-4)$. Luego, se tiene:

Área entre Curvas

Notar que en el caso de que una función tome valores tanto positivos como negativos en un cierto intervalo I, el cálculo del área bajo la curva se debe realizar por partes.

Por ejemplo, si queremos calcular el área de la región encerrada por el gráfico de la función $f(x) = x^2 - 2x$ el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 1$, se tiene:

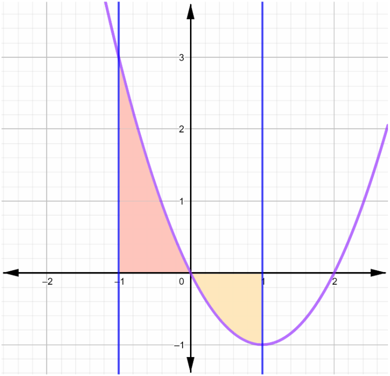
$$|f(x)| = |x^2 - 2x| = \begin{cases} x^2 - 2x & , -1 \leq x \leq 0 \\ 2x - x^2 & , \quad 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Por ende:

$$A(R) = \int_{-1}^{0} x^2 - 2x \, dx + \int_{0}^{1} 2x - x^2 \, dx = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$$

Área entre Curvas

Ahora bien, si se conoce el gráfico de la curva ya no es necesario hacer el análisis del valor absoluto de la función:



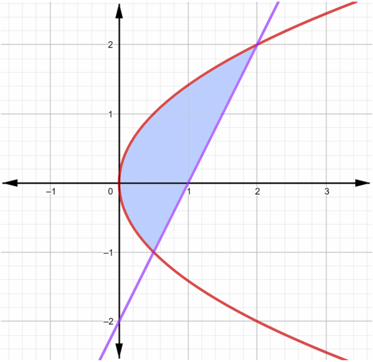
Así:

$$A(R) =$$

Área entre Curvas

También pueden haber casos donde calcular el área respecto a un eje es mucho mas simple que con respecto al otro.

Por ejemplo, si queremos calcular el área de la región encerrada por las gráficas de las curvas $2x - y = 2$ y $x - \frac{1}{2}y^2 = 0$, se tiene:



Área entre Curvas

Notemos que ambas curvas se intersectan en dos puntos $A\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ y $B(2,2)$. luego el área puede ser expresa de la siguiente forma:

$$A(R) = \int_{-1}^{2} \left[\frac{1}{2}(y+2) - \frac{y^2}{2} \right] \, dy = \frac{9}{4} \, u^2$$

Pero, ¿podremos expresarla de otra forma?

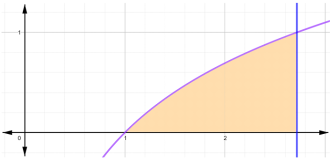
Ejercicios

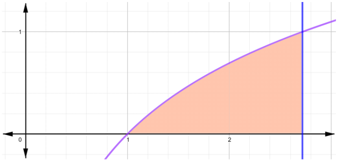
1. Calcular el área limitada por las graficas de las funciones $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = \cos(x)$, con $x \in [0, 2\pi]$.
2. Calcular el área de la región acotada por las curvas $y = x^3$, $y = x + 6$ e $y = -\frac{x}{2}$.
3. Calcular el área de la región encerrada por los gráficos de las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 2x^2$, con $x \in [0, 2]$.
4. Hallar el área de la región encerrada por la curvas $y = \ln(x)$, el eje X y la recta $x = e$.
5. Calcule el área de la región R limitada por las curvas $y = 6|x|$ e $y = x^3 - x + 6$.
6. Muestre que el área encerrada por una circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$, con $r > 0$ es πr^2.

Nota: cada vez que pueda trate de expresar el área con respecto al otro eje.

Ejercicios

Solución 4): el bosquejo de la situación, está dada por:

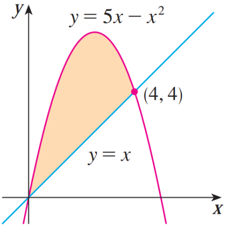




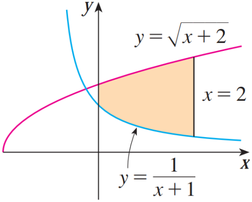
Ejercicios

Calcular el área de las siguientes regiones con respecto al eje que más les acomode:

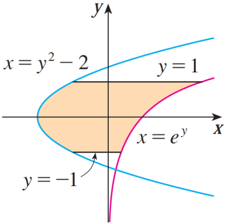
1.



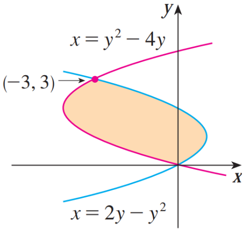
2.



3.



4.



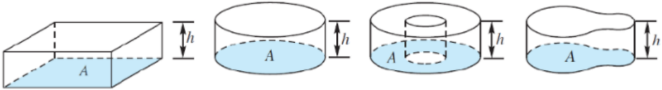
Volumen de Sólidos

Al igual que el área entre curvas el cálculo del volumen de un sólido es otra de las aplicaciones de la integral definida. Antes de comenzar a trabajar en esta aplicación debemos considerar la siguiente definición.

Definición

Llamamos cilindro recto a todo sólido acotado por dos regiones planas congruentes, en planos paralelos y una superficie lateral generada por un segmento de recta perpendicular a ambos planos y cuyos extremos contituyen los límites de las regiones planas.

Por ejemplo:



Volumen de Sólidos

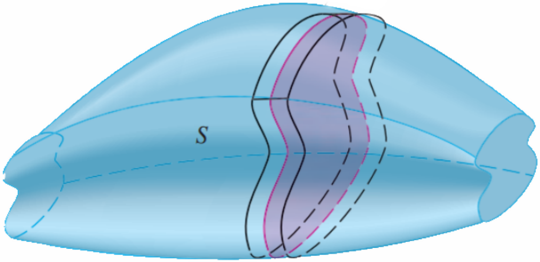
Notemos que cada cilindro recto tiene algo en común, si calculamos su volumen V este está dado por:

$$V(S) = A \cdot h$$

donde A denota el área de una base, es decir, el área de una de las regiones planas y h la altura del cilindro, o sea, la distancia perpendicular entre las regiones planas.

Volumen de Sólidos

Consideremos un sólido S como el siguiente:



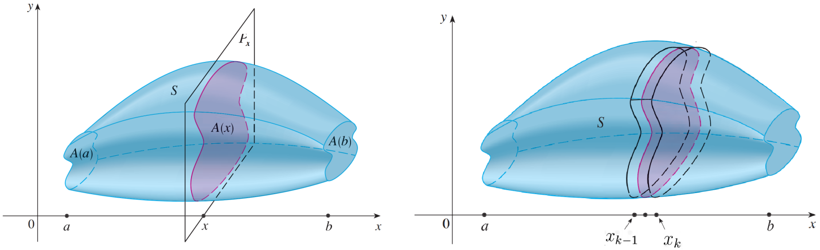
¿Cómo podemos calcular el volumen del sólido S?

Método de las Secciones Transversales

Sea P una partición del intervalo $[a, b]$ dada por:

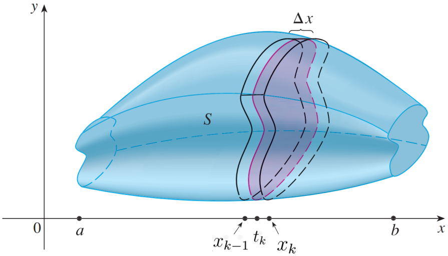
$$P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$$

y consideremos $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Cortemos el sólido S por medio de secciones transversales (intersección de un plano con S) en los extremos de los intervalos $[x_{k-1}, x_k]$, las cuales son perpendiculares al eje X y que luego resultan ser secciones transversales paralelas entre sí. Como se muestra a continuación:



Método de las Secciones Transversales

Notemos que si hacemos un corte paralelo al eje Y, que pase por el punto $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, esta determina una región cuya área $A(t_k)$ depende del punto t_k donde se hace el corte. Como en la siguiente imagen:



Ahora bien, si aumentamos el número de cortes se generan cilindros rectos de volumen:

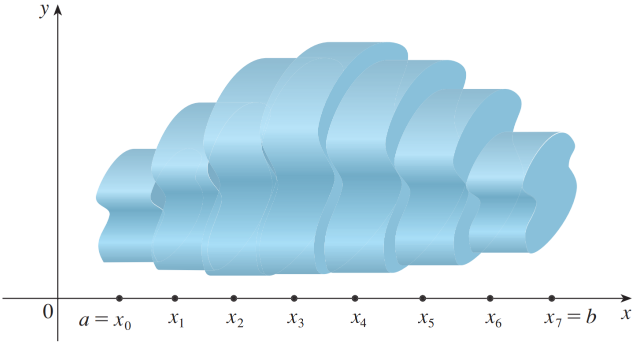
$$V_k = A(t_k)\Delta x_k$$

Método de las Secciones Transversales

Luego, el volumen del sólido S aproximadamente, está dado por:

$$V(S) \approx$$

el cual podemos observarlo a continuación:



Método de las Secciones Transversales

Podemos notar que la definición anterior corresponde a una Suma de Riemann de la función área, dada por:

$$A : [a, b] \to \mathbb{R}^+$$

la cual corresponde al área de una sección transversal que pasa por el punto $x \in [a, b]$. Finalmente, si suponemos que A es una función continua sobre $[a, b]$, podemos construir una integral definida que nos ayude a determinar el volumen de un sólido a través de una sección transversal, la cual está dada por:

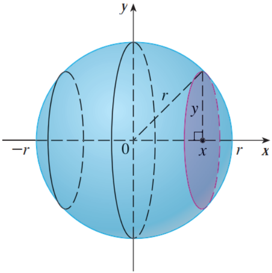
$$V(S) =$$

Ejemplos

1. Muestre que el volumen de una esfera de radio $r > 0$ está dado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
2. Una cuña se corta de un sólido en forma de cilindro circular recto con un radio de 4, por un plano que pasa a través de un diamétro de la base y forma un ángulo de 30^o con el plano de la base. Determinar el volumen de la cuña.
3. Sea S el sólido que se genera al rotar la región encerrada por las graficas de las curvas $y = x$ e $y = x^2$. Determinar el volumen del sólido S.
4. Determinar el volumen del sólido que tiene como basé un círculo de radio 2 y cuyas secciones transversales a un diámetro fijo de la base son cuadradas.

Ejemplos

Solución 1): Consideremos el bosquejo de la situación:

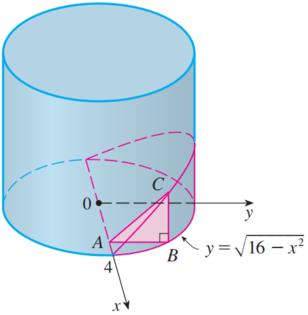


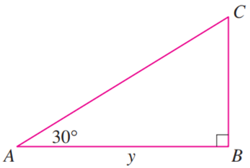
Ejemplos

Solución 2): Notemos que el borde del círculo de las bases está dado por la ecuación de una circunferencia de radio 4, es decir:

$$x^2 + y^2 = 16 \Leftrightarrow |y| = \sqrt{16 - x^2}, \quad -4 \le x \le 4$$

lo anterior se puede visualizar en el bosquejo de la situación:





Ejemplos

luego, el área de la sección transversal es:

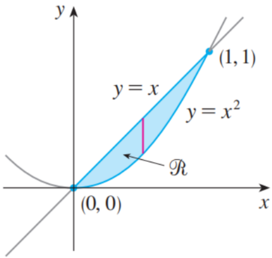
$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{2} AB \cdot BC \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{16 - x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{16 - x^2} \\ &= \frac{16 - x^2}{2\sqrt{3}}, \qquad x \in [-4, 4] \end{aligned}$$

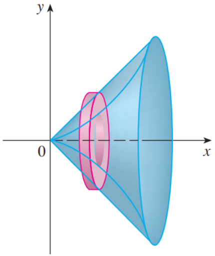
Finalmente, el volumen de la cuña es:

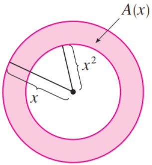
$$V(S) = \int_{-4}^{4} A(x)\, dx = \int_{-4}^{4} \frac{16 - x^2}{2\sqrt{3}}\, dx = \frac{128}{3\sqrt{3}}\, u^3.$$

Ejemplos

Solución 3): Consideremos el bosquejo de la situación:







Ejemplos

Solución 4): consideremos el un bosquejo de la situación: