Pauta Evaluación 3

Pregunta 1. Progresiones.

I. Una persona ha ahorrado un total de \$200 y está considerando depositarlo en una cuenta de ahorro e inversión para generar ganancias. Considerando esto, dos bancos ofrecen distintas opciones, el banco A ofrece ganancias por \$3 mensuales mientras tenga su dinero en el banco, mientras que el banco B ofrece un interés trimestral del 5 %, lo que significa que cada tres meses se determina el 5 % de la cantidad ahorrada hasta ese momento y se suma esa cantidad al monto total.

a) **[5 puntos]**
Justifique en palabras y apoyado por ecuaciones, si así lo considera apropiado, por qué la relación entre el monto ahorrado en el banco A cuando han transcurrido t meses y cuando ha transcurrido un mes menos, $t-1$, es

$$A_t = A_{t-1} + 3,$$

mientras que la relación entre el monto ahorrado en el banco B cuando han transcurrido t trimestres y el monto cuando ha trancurrido un trimestre menos $(t-1)$ es

$$B_t = 1{,}05\, B_{t-1}.$$

b) **[5 puntos]**
Al pasar un año, ¿cuál de las dos opciones de ahorro es más conveniente?

c) **[10 puntos]**
Si se opta por invertir en la cuenta del banco B, determine al cabo de cuantos trimestres, el incremento en el ahorro de un solo trimestre es el 10 % de la cantidad invertida inicialmente.

Solución:

a) **[5 puntos]** En el banco A: teniendo el monto ahorrado hasta el mes $t-1$, A_{t-1}, el banco nos asegura que se tendrán ganancias por \$3 para el mes siguiente, es decir, el monto al mes $t-1+1=t$, será $A_{t-1}+3=A_t$.
En el banco B: teniendo el monto ahorrado hasta el trimestre $t-1$, B_{t-1}, el banco nos asegura que se tendrán ganancias por 5 % para el trimestre siguiente. Entonces, el monto al trimestre $t-1+1=t$, será la cantidad al mes anterior, B_{t-1}, más las ganancias, es decir $B_t = B_{t-1} + 0{,}05B_{t-1} = 1{,}05B_{t-1}$.

b) **[5 puntos]** El monto cuando ha transcurrido un año ahorrando en el banco A, será el monto a doce meses, es decir

$$A_{12} = A_{11} + 3 = A_{10} + 3 + 3 = \ldots = A_0 + 12 \cdot 3 = 200 + 36 = 236.$$

Mientras que en el banco B, como es trimestral y hay 4 trimestres en un año, se tendrá

$$B_4 = 1{,}05B_3 = \ldots = 1{,}05^4 \cdot 200 \approx 243{,}10.$$

Entonces es más conveniente ahorrar en el banco B si se ahorrara por un año.

c) **[10 puntos]** La cantidad invertida inicialmente es \$200, por lo que el 10 % será \$20. Entonces necesitamos encontrar t tal que $B_t - B_{t-1} > 20$, pues no necesariamente será una cantidad exacta de trimestres.

$$
\begin{aligned}
B_t - B_{t-1} &> 20\\
\iff 1{,}05^t \cdot 200 - 1{,}05^{t-1} \cdot 200 &> 20\\
\iff 1{,}05^{t-1} \cdot 1{,}05 \cdot 200 - 1{,}05^{t-1} \cdot 200 &> 20\\
\iff 1{,}05^{t-1}(210 - 200) &> 20\\
\iff 1{,}05^{t-1} &> 2\\
\iff \log_{1{,}05}(1{,}05^{t-1}) &> \log_{1{,}05}(2)\\
\iff t - 1 &> 14{,}2\\
\iff t &> 15{,}2.
\end{aligned}
$$

Entonces, para cualquier t mayor a 15.2 se cumplirá lo pedido, pero como el interés se calcula cada trimestre, entonces sabemos que el menor valor de t que nos sirve es $t = 16$. Con esto podemos concluir que al pasar del trimestre 15 al 16, el aumento en los ahorros será mayor al 10 % del monto invertido inicialmente.

II. Una persona ha ahorrado un total de \$200 y está considerando depositarlo en una cuenta de ahorro e inversión para generar ganancias. Considerando esto, dos bancos ofrecen distintas opciones de inversión, ambos bancos aseguran que generarán una rentabilidad del 3 % mensual, pero el banco A cobra una cuota fija por el manejo del dinero correspondiente a \$4 al mes, mientras que el banco B se quedará con el 20 % de **las ganancias** mensuales.

a) [**7 puntos**] Justifique en palabras y apoyado por ecuaciones, si así lo considera apropiado, por qué el monto ahorrado en el banco A cuando han transcurrido t meses es

$$A_t = 200(1{,}03)^t - 4\sum_{i=1}^{t}(1,03)^{i-1},$$

mientras que el monto ahorrado en el banco B cuando han trancurrido t meses es

$$B_t = (1{,}024)^t\, 200.$$

b) [**3 puntos**] Al pasar dos años, ¿cuál de las dos opciones de ahorro es más conveniente?

c) [**10 puntos**] Determine cuántos meses deben transcurrir para que se duplique la inversión inicial con cada cuenta.

Solución:

a) [**7 puntos**] En el banco A: el monto inicial primero aumenta un 3 %, con lo que al mes t tenemos la cantidad del mes anterior, $t-1$, más un 0,03 veces esa cantidad, es decir $A_{t-1} + 0{,}03A_{t-1} = 1{,}03A_{t-1}$, pero además hacemos el descuento de \$4, es decir $A_t = 1{,}03A_{t-1} - 4$. Ahora podemos aplicar repetidamente la relación entre el monto ahorrado a un mes respecto al monto del mes anterior repetidamente, y así obtenemos

$$
\begin{aligned}
A_t &= 1{,}03A_{t-1} - 4\\
&= 1{,}03\,(1{,}03A_{t-2} - 4) - 4\\
&= 1{,}03^2A_{t-2} - 4 - 1{,}03\cdot 4\\
&= 1{,}03^2\,(1{,}03A_{t-3} - 4) - 4 - 1{,}03\cdot 4\\
&= 1{,}03^3A_{t-3} - 4 - 1{,}03\cdot 4 - 1{,}03^2\cdot 4\\
&\vdots\\
&= 1{,}03^tA_0 - 4 - 1{,}03\cdot 4 - \ldots - 1{,}03^{t-1}4\\
&= 1{,}03^tA_0 - 4\sum_{i=1}^{t} 1{,}03^{t-1}
\end{aligned}
$$

con lo que se verifica la validez de la expresión, al recordar que el monto inicial A_0 corresponde a \$200. En el banco B: teniendo el monto ahorrado hasta el mes $t-1$, B_{t-1}, el banco nos asegura que se tendrán ganancias por %3 para el mes siguiente, es deicr, las ganancias serán $0{,}03B_{t-1}$, pero como el banco se queda con el 20 % de estas ganancias, el aumento en el ahorro será solo el 80 % de esto, es decir $0{,}8\cdot 0{,}03B_{t-1} = 0{,}024B_{t-1}$, entonces se tiene la relación $B_t = B_{t-1} + 0{,}024B_{t-1} = 1{,}024B_{t-1}$, luego podemos repetir esto para compara con cada mes anterior y se tiene

$$B_t = 1{,}024B_{t-1} = 1{,}024(1{,}024B_{t-2}) = \ldots = 1{,}024^tB_0,$$

En palabras: cada mes se multiplica por 1.024, o por cada mes se multiplica por 1.024, lo que corresponde a $1{,}024^tB_0$.

b) **[3 puntos]** Simplemente evaluacmos cada expresión en 24 meses (2 años):

$$A_{24} = 1{,}03^{24}200 - 4\sum_{i=1}^{24} 1{,}03^{t-1} = 1{,}03^{24}200 - 4\frac{1-1{,}03^{24}}{1-1{,}03} \approx 268{,}85.$$

$$B_{24} = 200\cdot 1{,}024^{24} \approx 353{,}37.$$

Con esto se concluye que los ahorros serán mayores en el banco B al cabo de dos años.

c) **[10 puntos]**

La cantidad invertida inicialmente es \$200, entonces trabajamos cada ecuación para encontrar el mes t tal que $A_t = 400$ y para B, el mes t tal que $B_t = 400$. Para el banco A se tiene

$$
\begin{aligned}
A_t &= 400\\
\iff 200(1{,}03)^t - 4\sum_{i=1}^{t}(1,03)^{i-1} &= 400\\
\iff 200(1{,}03)^t - 4\frac{1-1{,}03^t}{1-1{,}03} &= 400\\
\iff 200(1{,}03)^t + \frac{4}{0{,}03} - 4\frac{1{,}03^t}{0{,}03} &= 400\\
\iff 200(1{,}03)^t + \frac{400}{3} - 400\frac{1{,}03^t}{3} &= 400\\
\iff \frac{200}{3}1{,}03^t &= \frac{800}{3}\\
\iff 1{,}03^t &= 4
\end{aligned}
$$

Esta ecuación se puede resolver aplicando logaritmo en base 1.03, pero el resultado será $t = \log_{1,03}(4) \approx 46,9$, lo cual no tiene sentido, pues t es una cantidad entera de meses. Con esto podemos concluir que al mes 16 se tendrá más del doble de la cantidad inicial, y al mes 15 menos.

Para el banco B se tiene

$$\begin{aligned} B_t &= 400 \\ \iff 200 \cdot 1{,}024^t &= 400 \\ \iff 1{,}024^t &= 2 \\ \iff t &= \log_{1,024}(2), \end{aligned}$$

entonces t es aproximadamente 29.22, con lo que al mes 30 se tendrá más del doble de la cantidad inicial, y al mes 29 menos.

Así concluimos que la cantidad inicial se duplicará primero ahorrando en el banco A.

III. Una persona ha ahorrado un total de \$200 y está considerando depositarlo en una cuenta de ahorro e inversión para generar ganancias. Considerando esto, dos bancos ofrecen distintas opciones de inversión, ambos bancos aseguran que generarán una rentabilidad del 3 % mensual, pero el banco A cobra una cuota fija por el manejo del dinero correspondiente a \$4 al mes, mientras que el banco B se quedará con el 20 % de **las ganancias** mensuales.

a) **[5 puntos]**
Justifique en palabras y apoyado por ecuaciones, si así lo considera apropiado, por qué el monto recaudado por el banco B el mes t es

$$B_t = 0{,}006 \cdot 200 \cdot (1,024)^{t-1}.$$

b) **[5 puntos]**
Durante el segundo año, ¿cuál de los dos bancos ganaría más dinero?

c) **[10 puntos]**
Determine cuantos meses demoraría cada banco para recaudar una cantidad igual al ahorro inicial invertido por la persona.

Solución:

a) **[5 puntos]** El banco B genera una rentabilidad del 3 % sobre la cantidad ahorrada y se queda con un 20 % de esto, lo que corresponde a un 0,6 % de la cantidad que se tenía ahorrada hasta el mes anterior. Entonces necesitamos conocer la expresión que nos indica la cantidad en la cuenta de ahorro en un mes $t-1$. Esto se obtiene notando que cada mes el aumento neto será el 80 % (100 % − 20 %) del 3 % de la rentabilidad, es decir el ahorro crece 1.024 veces la cantidad anterior. Denotando por C_t la cantidad en la cuenta de ahorro al mes t, lo que tenemos es el resultado de multiplicar la cantidad inicial (\$200) por 1.024, t veces: $B_t = 200 \cdot 1{,}024^t$. Finalmente podemos concluir que lo que gana el banco será el 6 % de C_{t-1} que corresponde a la expresión dada.

b) **[5 puntos]** Para el banco A: como solo cobra una cuota fija, el monto recaudado será simplemente el resultado de cobrar la misma cantidad por 12 meses, es decir $12 \cdot 4 = 48$.

Para obtener el monto ganado por el banco B durante el segundo año, necesitamos sumar las cantidades ganadas desde el mes 13 al mes 24 (incluyéndolos), lo que se puede obtener como lo obtenido hasta el mes 24, menos lo obtenido hasta el mes 12.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{24} B_i - \sum_{i=1}^{12} B_i &= \sum_{i=1}^{24} 0{,}006 \cdot 200 \cdot (1,024)^{i-1} - \sum_{i=1}^{12} 0{,}006 \cdot 200 \cdot (1,024)^{i-1}\\ &= 1{,}2\frac{1-1{,}024^{24}}{1-1{,}024} - 1{,}2\frac{1-1{,}024^{12}}{1-1{,}024}\\ &\approx 21{,}88.\end{aligned}$$

Entonces el banco A ganaría más durante el segundo año.

c) **[10 puntos]** La cantidad invertida inicialmente es \$200, entonces trabajamos cada ecuación para encontrar el mes t tal que $A_t = 200$ y el mes t tal que $B_t = 200$. Para el banco A se tiene

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{t} A_i = 200\\ \iff &\sum_{i=1}^{t} 4 = 200\\ \iff &\ 4t = 200\\ \iff &\ t = 50,\end{aligned}$$

entonces, el banco A tardará 50 meses en recaudar los \$200.

Para el banco B

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{t} B_i = 200\\ \iff &\sum_{i=1}^{t} 0{,}006 \cdot 200 \cdot 1{,}024^{t-1} = 200\\ \iff &\ 1{,}2\sum_{i=1}^{t} \cdot 1{,}024^{i-1} = 200\\ \iff &\ 1{,}2\frac{1-1{,}024^{t}}{1-1{,}024} = 200\\ \iff &\ 1 - 1{,}024^{t} = 200 \cdot (-0{,}02)\\ \iff &\ 1{,}024^{t} = 1 + 4 = 5.\end{aligned}$$

Con esto podemos obtener t aplicando logaritmo en base 1.024, $t = -\log_{1{,}024}(5)$ que es aproximadamente 67,86, lo cual no es una cantidad entera, por lo que no es un mes. Con esto sabemos que al mes 67, el banco habrá ganado menos de \$200 y al mes 68 habrá ganado más de \$200.

Así concluimos que el banco A ganaría los \$200 más rápido.

IV. Se tiene cierta mezcla de celulosa con agua en un proporción de 2 litros de celulosa por cada 3 litros de agua, es decir, por cada 5 litros de solución, 3 son de agua y 2, de celulosa. Para aislar el almidón se depositan 100 litros de solución en un contenedor con una capacidad de 100 litros y luego se espera a que se evapore el agua. Se estima que cada día se evaporan 10 litros de agua y se agregan 10 litros de la solución original, de modo que cada día el estanque vuelve a estar lleno.

a) **[5 puntos]**
Justifique en palabras y apoyado por ecuaciones, si así lo considera apropiado, por qué la proporción celulosa/agua cuando han transcurrido t días después de llenar el contenedor por primera vez y justo **después** de rellenar el estanque es $\dfrac{40+4t}{60-4t}$.

b) **[5 puntos]**
¿Cuánta celulosa se depositó en el tanque entre el día 5 y el 10? (sin incluir la cantidad depositada al comienzo del día 5, pero incluyendo la del día 10).

c) **[10 puntos]**
Se sabe que si en algún momento más del 80 % de la cantidad total de solución en el contenedor es celulosa, ésta decantará en un bloque sólido, con el agua encima. Determine al cabo de cuantos días ocurrirá esto. El día que se encuentra el decantado de celulosa, **antes** de agregar los 10 litros de mezcla, ¿es el volumen de este bloque de celulosa mayor que 79 litros?

__**Solución:**__

a) **[5 puntos]** Al comienzo del proceso, cuando recién se llena el estanque, se llena de 100 litros de mezcla, dada la proporción original (2/3), tendremos 40 litros de celulosa y 60 litros de agua al día cero. Luego, cada día se pierden 10 litros de agua, y se agregan 10 litros de la mezcla, lo que corresponde a agregar 4 litros de celulosa y 6 litros de agua, que al considerar los 10 litros perdidos, significa que cada día se pierden 4 litros de agua. Entonces la cantidad de celulosa aumenta 4 litros por día, partiendo de 40, mientras que la cantidad de agua comienza como 60 litros y disminuye 4 litros por día, lo que corresponde a la expresión dada.

b) **[5 puntos]** La cantidad de celulosa al día t es $C_t = 40 + 4t$ como se explicó en la parte A. Al día 10 tenemos $C_{10} = 40 + 4 \cdot 10 = 80$, mientras que la cantidad al día 5 es $C_5 = 40 + 4 \cdot 5 = 60$, la cantidad al día 5 es la cantidad justo después de agregar la celulosa, por lo que incluye lo agregado al día 5, pero no al día 6, luego la cantidad agregada será 80 litros -60 litros=20 litros.

c) **[10 puntos]** Primero, notamos que la mayor concentración se encuentra al comienzo del día, antes de agregar los 10 litros de mezcla, pues hay menos agua. Entonces buscamos el momento en que la cantidad de celulosa sea el 80 % de 90 litros. De la pregunta a) tenemos que $C_t = 40 + 4t$, entonces trabajamos la ecuación

$$\begin{aligned} 40 + 4t &= 0{,}8 \cdot 90 \\ 4t &= 72 - 40 \\ t &= 8. \end{aligned}$$

Con esto sabemos que al día 8 tenemos suficiente celulosa y al día 9, cuando se ha evaporado el agua (antes de agregar más mezcla), se tendrá el decantado.
Por lo demás, la cantidad de celulosa que hay en el tanque el día 9 antes de agregar los 10 litros de solución es igual a $0{,}8 \cdot 90 = 72$ litros, lo cual es menor que 79 litros.

V. En un laboratorio se está estudiando la mortalidad de una proteína que destruye a una bacteria. Originalmente se tiene un cultivo de 20000 bacterias. Cada día las bacterias son expuestas a la proteína y el 60 % de ellas muere. Sin embargo, cada día las bacterias se reproducen, con lo que la población (luego de ser afectada por la proteína) se duplica.

a) **[5 puntos]**
Justifique en palabras y apoyado por ecuaciones, si así lo considera apropiado, por qué la cantidad de bacterias que mueren el día t es $B_t = 0{,}6 \cdot (0{,}8)^{t-1} \cdot 20000$.

b) **[5 puntos]**
¿Cuántas bacterias mueren entre el día 10 y el día 15?

c) **[10 puntos]**
El laboratorio tiene capacidad para almacenar 30000 bacterias muertas. Determine la cantidad de días tras los cuales el laboratorio debe deshacerse de las bacterias muertas por primera vez y por segunda vez.

Solución:

a) **[5 puntos]** Sabemos que cada día muere el 60 % de las bacterias, por lo que necesitamos conocer la cantidad de bacterias que hay el día t antes de aplicar la proteína. La cantidad de bacterias el día t será el resultado de matar el 60 % de las bacterias que habían el día anterior, es decir, la cantidad de bacterias vivas el día t será $V_t = 0{,}4 \cdot 2 \cdot V_{t-1} = 0{,}8 V_{t-1}$, donde V_{t-1} es la cantidad de bacterias vivas el día anterior. Entonces, cada día se multiplica la cantidad de bacterias por 0.8, con lo que la cantidad al día $t-1$ será $V_{t-1} = 0{,}8^{t-1} V_0 = 0{,}8^{t-1} 20000$. Luego, sabemos que el 60 % de estás morirá el día t, es decir $B_t = 0{,}6 \cdot 0{,}8^t \cdot 20000$.

b) **[5 puntos]** Las bacterias mueren durante el día, por lo que incluimos el día 10, pero no el 15. Lo que necesitamos es la suma $\sum_{i=10}^{14} B_i$, esto se puede obtener a través de

$$\begin{aligned}
\sum_{i=10}^{14} B_i = \sum_{i=1}^{14} B_i - \sum_{i=1}^{9} B_i& \\
&= 0{,}6 \cdot 20000 \sum_{i=1}^{14} 0{,}8^{i-1} - 0{,}6 \cdot 20000 \sum_{i=1}^{9} 0{,}8^{i-1} \\
&= 12000 \frac{1 - 0{,}8^{14}}{1 - 0.} - 12000 \frac{1 - 0{,}8^{9}}{1 - 0{,}8} \\
&= 5414{,}23.
\end{aligned}$$

Entonces mueren aproximadamente 5414 bacterias.

c) **[10 puntos]** Buscamos la cantidad de bacterias muertas al día t y lo igualamos a la cantidad que se busca.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{t} B_i &= 30000 \\
\iff 0{,}6 \cdot 20000 \sum_{i=1}^{t} 0{,}8^{i-1} &= 30000 \\
\iff 12000 \frac{1 - 0{,}8^t}{1 - 0{,}8} &= 30000 \\
\iff 1 - 0{,}8^t &= 0{,}5 \\
\iff 0{,}8^t &= 0{,}5.
\end{aligned}$$

Al aplicar logaritmo en base 0.8, obtenemos que t es aproximadamente 3.1, lo que significa que entre el día 3 y el día 4 se superará la capacidad de almacenamiento, entonces deben deshacerse de las bacterias el día 3. Ahora buscamos cuantas bacterias mueren desde el día 3 hasta el día t que será cuando debamos eliminar las bacterias muertas por segunda vez.

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{t} B_i - \sum_{i=1}^{3} B_i &= 30000 \\
\iff 12000\frac{1-0{,}8^t}{1-0{,}8} - 12000\frac{1-0{,}8^3}{1-0{,}8} &= 30000 \\
\iff 12000\frac{1-0{,}8^t}{0{,}2} - 29280 &= 30000 \\
\iff 60000(1-0{,}8^t) &= 59280 \\
\iff 0{,}8^t &= 1 - \frac{59280}{60000}.
\end{aligned}
$$

Al aplicar logaritmo en base 0.8, obtenemos que t es aproximadamente 19.8, lo que significa que entre el día 19 y el día 20 se superará la capacidad de almacenamiento, entonces deben deshacerse de las bacterias el día 19.

Pregunta 2. Números Complejos.

I. **a)** [7 puntos]

Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Escriba al número complejo $\omega = \dfrac{1+\alpha\, i}{1-\alpha\, i}$ en forma polar (con argumento principal).

b) [6 puntos]

Represente el siguiente conjunto en el plano de Argand

$$\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Re}(z) \geq 2\}\,.$$

¿Para qué valores de α se cumple que el número complejo ω del ítem anterior pertenece a $\mathcal{A}$? Justifique su respuesta.

c) [7 puntos]

Suponga que $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es un complejo real menor que cero. Demuestre que si w es raíz cuarta de z, entonces $\mathrm{Re}(w) = \mathrm{Im}(w)$ o $\mathrm{Re}(w) = -\mathrm{Im}(w)$.

Solución:

a) El número que hay que llevar a forma polar es de la forma

$$\omega = \frac{z}{\overline{z}} = z\,(\overline{z})^{-1} = z\frac{1}{|z|^2}z = \frac{z^2}{|z|^2} \qquad \Rightarrow \qquad |\omega| = 1.$$

Por tanto, la forma polar de ω (con argumento principal) es $\mathrm{cis}(\mathrm{Arg}(\omega))$.

Calculando Arg(ω) utilizando forma binomial:

Dado que

$$\omega = \frac{(1+\alpha\, i)^2}{1+\alpha^2} = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} + \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\, i,$$

se cumple que $\mathrm{Im}(\omega) > 0$ ($\mathrm{Arg}(\omega) \in]0,\pi[$) y, por tanto,

$$\mathrm{Arg}(\omega) = \begin{cases} \mathrm{Arctan}\left(\frac{2\alpha}{1-\alpha^2}\right), & \text{si } 0 < \alpha < 1, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } \alpha = 1, \\ \pi + \mathrm{Arctan}\left(\frac{2\alpha}{1-\alpha^2}\right), & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

Calculando Arg(ω) utilizando forma polar: Si $|z|\mathrm{cis}(\theta)$ es la forma polar de z, entonces

$$\frac{z^2}{|z|^2} = \frac{|z|^2\mathrm{cis}(2\theta)}{|z|^2} = \mathrm{cis}(2\theta).$$

Si $z = 1 + \alpha\, i$ con $\alpha > 0$, entonces

$$\theta = \mathrm{Arctan}(\alpha) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\ \Rightarrow \ 2\theta \in \left]0, \pi\right[\ \Rightarrow \ \mathrm{Arg}(\omega) = 2\mathrm{Arctan}(\alpha).$$

b) [6 puntos] En la figura 1 se muestra la región $\mathcal{A}$ del plano de Argand.

Dado que

$$\mathrm{Re}(\omega) = \cos\left(\mathrm{Arg}(\omega)\right) \ \Rightarrow \ -1 \leq \mathrm{Re}(\omega) \leq 1,$$

para ningún $\alpha \in \mathbb{R}^+$ se cumple que $\omega \in \mathcal{A}$.

c) [7 puntos] Si z es un complejo real con parte real menor que cero, entonces $z = |z|\mathrm{cis}(\pi)$. Las raíces cuartas de z son

$$\left\{|z|^{\frac{1}{4}}\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k\right) \ : \ k \in \mathbb{Z}\right\},$$

es decir, los argumentos principales de las raíces cuartas de z son $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}$.

Si w es una de las raíces cuartas de z y el argumento principal de w es igual a $\frac{\pi}{4}$ o $-\frac{3\pi}{4}$ se cumple que $\mathrm{Re}(w) = \mathrm{Im}(w)$, mientras que si el argumento principal de w es $\frac{3\pi}{4}$ o $-\frac{\pi}{4}$ las partes real e imaginaria de w son tales que $\mathrm{Re}(w) = -\mathrm{Im}(w)$.

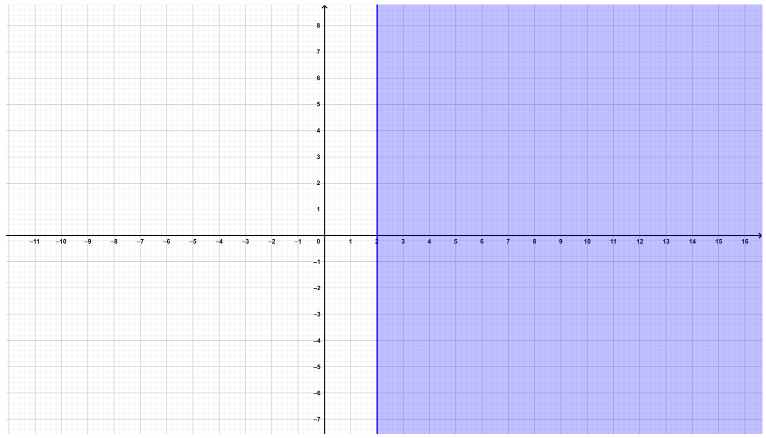

Figura 1: Región $\mathcal{A}$ en alternativa 1, pregunta 2

II. **a)** **[7 puntos]**

Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Escriba al número complejo $\omega = \dfrac{\alpha + i}{\alpha - i}$ en forma polar (con argumento principal).

b) **[6 puntos]**

Represente el siguiente conjunto en el plano de Argand

$$\mathcal{A} = \left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ -\frac{3\pi}{4} \leq \mathrm{Arg}(z) \leq -\frac{\pi}{4} \right\}.$$

¿Para qué valores de α se cumple que el número complejo ω del ítem anterior pertenece a $\mathcal{A}$? Justifique su respuesta.

c) **[7 puntos]**

Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ imaginario puro. Demuestre que una de las raíces cúbicas de z también es un complejo imaginario puro. Si $|z| = r$ y w es la raíz cúbica de z que es imaginario puro, escriba a w en forma binomial.

Solución:

a) El número que hay que llevar a forma polar es de la forma

$$\omega \frac{z}{\overline{z}} = z\,(\overline{z})^{-1} = z\frac{1}{|z|^2}z = \frac{z^2}{|z|^2} \qquad \Rightarrow \qquad |\omega| = 1.$$

Por tanto, la forma polar de ω (con argumento principal) es $\mathrm{cis}(\mathrm{Arg}(\omega))$.

Calculando $\mathrm{Arg}(\omega)$ utilizando forma binomial: Dado que

$$\omega = \frac{(\alpha\ + i)^2}{1+\alpha^2} = \frac{\alpha^2 - 1}{1+\alpha^2} + \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\, i.$$

se cumple que $\mathrm{Im}(\omega) > 0$ ($\mathrm{Arg}(\omega) \in]0, \pi[$) y, por tanto,

$$\mathrm{Arg}(\omega) = \begin{cases} \mathrm{Arctan}\left(\frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1}\right), & \text{si } \alpha > 1, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } \alpha = 1, \\ \pi + \mathrm{Arctan}\left(\frac{2\alpha}{\alpha^2-1}\right), & \text{si } \alpha < 1. \end{cases}$$

Calculando Arg(ω) utilizando forma polar: Si $z = \alpha + i$ con $\alpha \in \mathbb{R}^+$, entonces

$$\theta = \text{Arctan}(1/\alpha) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\ \Rightarrow\ 2\theta \in]0, \pi[\ \Rightarrow\ \text{Arg}(\omega) = 2\text{Arctan}(1/\alpha).$$

b) En la figura 2 se muestra la región $\mathcal{A}$ del plano de Argand.

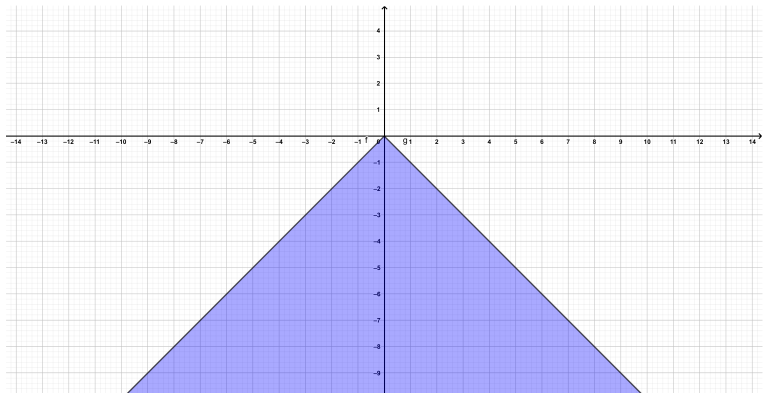

Figura 2: Región $\mathcal{A}$ en alternativa 2, pregunta 2

Dado que $\text{Arg}(\omega) \in]0, \pi[$, no existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ de modo que $\omega \in \mathcal{A}$.

c) Si z es imaginario puro distinto de cero, entonces $z = ai = a\text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ $(a > 0)$ o $z = ai = |a|\text{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ $(a < 0)$.

Las raíces cúbicas de z son de la forma

$$\left\{|a|^{\frac{1}{3}}\text{cis}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi k\right)\ :\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

o de la forma

$$\left\{|a|^{\frac{1}{3}}\text{cis}\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi k\right)\ :\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Los argumentos principales de las raíces cúbicas de z son, en el primer caso, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ y $-\frac{\pi}{2}$ y, en el segundo caso, $-\frac{\pi}{6}$, $-\frac{5\pi}{6}$ y $\frac{\pi}{2}$. En ambos casos una de las raíces cúbicas también es un número imaginario puro (con argumento principal $\frac{\pi}{2}$ o $-\frac{\pi}{2}$).

Si $|z| = r$, entonces la raíz cúbica de z que es un número imaginario puro es $\sqrt[3]{r}\,i$ si el argumento principal de z es $-\frac{\pi}{2}$ y $-\sqrt[3]{r}\,i$ si el argumento principal de z es $\frac{\pi}{2}$.

III. **a)** **[7 puntos]**

Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Escriba al número complejo $\omega = \dfrac{-1 + \alpha\, i}{-1 - \alpha\, i}$ en forma polar (con argumento principal).

b) **[6 puntos]**

Represente el siguiente conjunto en el plano de Argand

$$\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C}\ :\ |z| \leq 1\}$$

¿Para qué valores de α se cumple que el número complejo ω del ítem anterior pertenece a $\mathcal{A}$? Justifique su respuesta.

c) [**7 puntos**]
Determine para qué valores de $z \in \mathbb{C}$ se cumple que

$$z^4 = (1+i)^6.$$

Solución:

a) El número que hay que llevar a forma polar es de la forma

$$\omega = \frac{z}{\overline{z}} = z\,(\overline{z})^{-1} = z\frac{1}{|z|^2}z = \frac{z^2}{|z|^2} \qquad \Rightarrow \qquad |\omega| = 1.$$

Por tanto, la forma polar de ω (con argumento principal) es $\mathrm{cis}(\mathrm{Arg}(\omega))$.
Calculando Arg(ω) utilizando forma binomial: El número ω en forma polar se escribe como $\mathrm{cis}(\mathrm{Arg}(\omega))$. Dado que

$$\omega = \frac{(-1+\alpha\, i)^2}{1+\alpha^2} = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} - \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\,i.$$

se cumple que $\mathrm{Im}(\omega) < 0$ ($\mathrm{Arg}(\omega) \in]-\pi, 0[$) y, por tanto,

$$\mathrm{Arg}(\omega) = \begin{cases} \mathrm{Arctan}\left(\frac{-2\alpha}{1-\alpha^2}\right), & \text{si } \alpha < 1, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{si } \alpha = 1, \\ -\pi + \mathrm{Arctan}\left(\frac{-2\alpha}{1-\alpha^2}\right), & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

Calculando Arg(ω) utilizando forma polar: Si $z = -1 + \alpha\, i$ con $\alpha > 0$, entonces

$$\theta = \pi + \mathrm{Arctan}(-\alpha) \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\;\Rightarrow\; 2\theta \in]\pi, 2\pi[\;\Rightarrow\; \mathrm{Arg}(\omega) = 2\theta - 2\pi = 2\mathrm{Arctan}(-\alpha)$$

b) En la figura 3 se muestra la región $\mathcal{A}$ del plano de Argand.

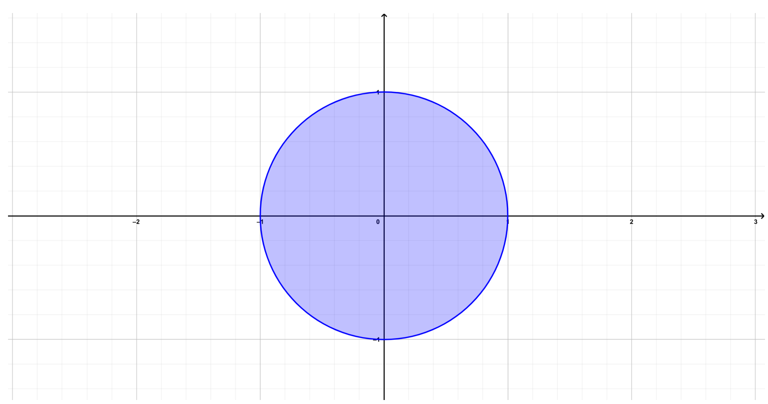

Figura 3: Región $\mathcal{A}$ en alternativa 3, pregunta 2

Dado que $|\omega| = 1$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}^+$ se cumple que $\omega \in \mathcal{A}$.

c) El número $1 + i = \sqrt{2}\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Por tanto,

$$(1+i)^6 = 2^3\mathrm{cis}\left(\frac{6\pi}{4}\right) = 8\mathrm{cis}\left(3\frac{\pi}{2}\right) = 8\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

El número z satisface $z^4 = (1+i)^6$ si y solo si z es una de las raíces cuartas de $8\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, es decir,

$$z \in \left\{\sqrt[4]{8}\left(-\frac{\pi}{8}\right), \sqrt[4]{8}\left(-\frac{5\pi}{8}\right), \sqrt[4]{8}\left(\frac{3\pi}{8}\right), \sqrt[4]{8}\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right\}.$$

IV. **a)** **[7 puntos]**

Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Escriba al número complejo $\omega = \overline{\left(\dfrac{-1+\alpha\, i}{-1-\alpha\, i}\right)}$ en forma polar (con argumento principal).

b) **[6 puntos]**

Represente el siguiente conjunto en el plano de Argand

$$\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Im}(z) \geq -1\}$$

¿Para qué valores de α se cumple que el número complejo ω del ítem anterior pertenece a $\mathcal{A}$? Justifique su respuesta.

c) **[7 puntos]**

Sean $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y w, una raíz n-ésima de z, $n \in \mathbb{N}$. ¿Para qué valores de $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $-w$ es raíz n-ésima de $-z$? Justifique su respuesta.

Solución:

a) El número que hay que llevar a forma polar es de la forma

$$\omega = \frac{z}{\overline{z}} = z\,(\overline{z})^{-1} = z\frac{1}{|z|^2}z = \frac{z^2}{|z|^2} \qquad \Rightarrow \qquad |\omega| = 1.$$

Por tanto, la forma polar de ω (con argumento principal) es $\mathrm{cis}(\mathrm{Arg}(\omega))$.

Calculando Arg(ω) utilizando forma binomial: El número ω en forma polar se escribe como $\mathrm{cis}(\mathrm{Arg}(\omega))$. Dado que

$$\omega = \frac{(-1-\alpha\, i)^2}{1+\alpha^2} = \frac{(1+\alpha\, i)^2}{1+\alpha^2} = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} + \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\, i.$$

se cumple que $\mathrm{Im}(\omega) > 0$ ($\mathrm{Arg}(\omega) \in]0, \pi[$) y, por tanto,

$$\mathrm{Arg}(\omega) = \begin{cases} \mathrm{Arctan}\left(\frac{2\alpha}{1-\alpha^2}\right), & \text{si } \alpha < 1, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } \alpha = 1, \\ \pi + \mathrm{Arctan}\left(\frac{2\alpha}{1-\alpha^2}\right), & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

Calculando Arg(ω) utilizando forma polar: Si $z = -1 - \alpha\, i$ con $\alpha > 0$, entonces

$$\theta = -\pi + \mathrm{Arctan}(\alpha) \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\ \Rightarrow \ 2\theta \in]-2\pi, -\pi[\ \Rightarrow \ \mathrm{Arg}(\omega) = 2\theta + 2\pi = 2\mathrm{Arctan}(\alpha).$$

b) En la figura 4 se muestra la región $\mathcal{A}$ del plano de Argand.

Como $\mathrm{Im}(\omega) = \sin(2\mathrm{Arctan}(\alpha))$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}^+$ se cumple que $\mathrm{Im}(\omega) \geq -1$.

c) Si w es raíz n-ésima de z, entonces $w^n = z$.

Además, $(-w)^n = (-1)^n w^n = (-1)^n z$ y $(-w)^n = -z$ ($-w$ es raíz n-ésima de $-z$) si y solo si n es un número impar.

V. **a)** **[7 puntos]**

Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Escriba al número complejo $\omega = \overline{\left(\dfrac{\alpha+i}{\alpha-i}\right)}$ en forma polar (con argumento principal).

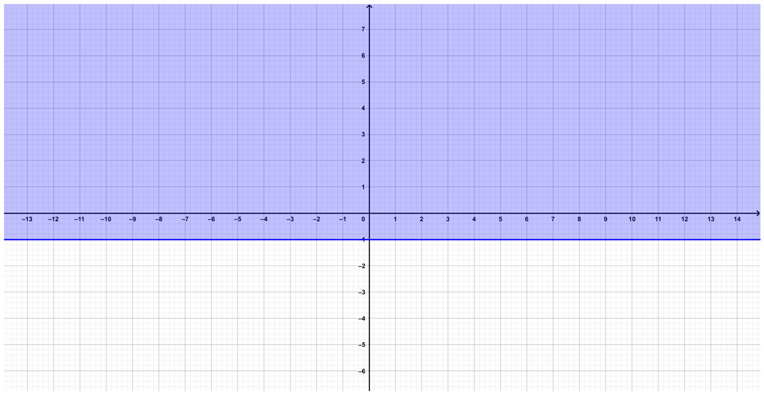

Figura 4: Región $\mathcal{A}$ en alternativa 4, pregunta 2

b) **[6 puntos]**
Represente el siguiente conjunto en el plano de Argand

$$\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} \;:\; |z| \geq 1\}$$

¿Para qué valores de α se cumple que el número complejo ω del ítem anterior pertenece a $\mathcal{A}$? Justifique su respuesta.

c) **[7 puntos]**
Sean $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y w, una raíz n-ésima de z, $n \in \mathbb{N}$. Decida, justificadamente, si $\overline{w}$ es raíz n-ésima de $\overline{z}$.

Solución:

a) El número que hay que llevar a forma polar es de la forma

$$\omega = \frac{z}{\overline{z}} = z\,(\overline{z})^{-1} = z\frac{1}{|z|^2}z = \frac{z^2}{|z|^2} \qquad \Rightarrow \qquad |\omega| = 1.$$

Por tanto, la forma polar de ω (con argumento principal) es $\mathrm{cis}(\mathrm{Arg}(\omega))$.
Calculando $\mathrm{Arg}(\omega)$ utilizando forma binomial: El número ω en forma polar se escribe como $\mathrm{cis}(\mathrm{Arg}(\omega))$. Dado que

$$\omega = \frac{(\alpha - i)^2}{1+\alpha^2} = \frac{\alpha^2 - 1}{1+\alpha^2} - \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\,i.$$

se cumple que $\mathrm{Im}(\omega) < 0$ ($\mathrm{Arg}(\omega) \in]-\pi, 0[$) y, por tanto,

$$\mathrm{Arg}(\omega) = \begin{cases} \mathrm{Arctan}\left(\frac{-2\alpha}{\alpha^2-1}\right), & \text{si } \alpha > 1, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{si } \alpha = 1, \\ -\pi + \mathrm{Arctan}\left(\frac{-2\alpha}{\alpha^2-1}\right), & \text{si } \alpha < 1. \end{cases}$$

Calculando $\mathrm{Arg}(\omega)$ utilizando forma polar:
Si $z = \alpha - i$ con $\alpha > 0$, entonces

$$\theta = \mathrm{Arctan}(-1/\alpha) \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\;\Rightarrow\; 2\theta \in \left]-\pi, 0\right[\;\Rightarrow\; \mathrm{Arg}(\omega) = 2\theta = 2\mathrm{Arctan}(-1/\alpha).$$

b) En la figura 5 se muestra la región $\mathcal{A}$ del plano de Argand.
Dado que $|\omega| = 1$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}^+$ se cumple que $\omega \in \mathcal{A}$.

c) Si w es raíz n-ésima de z, entonces $w^n = z$.
$(\overline{w})^n = \overline{w^n} = \overline{z}$ y, por tanto, es cierto que $\overline{w}$ es raíz n-ésima de $\overline{z}$.

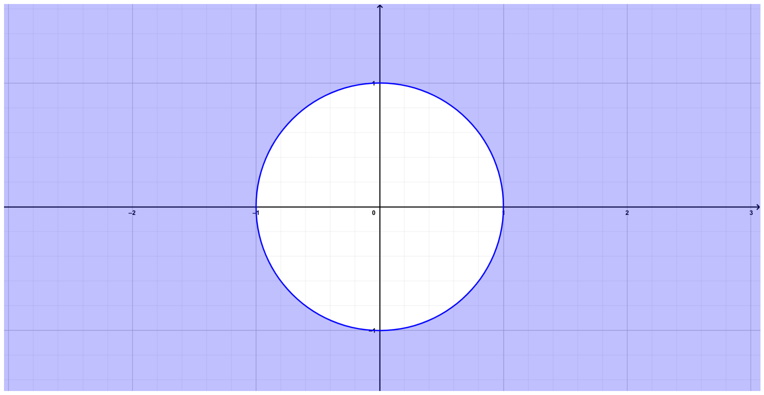

Figura 5: Región $\mathcal{A}$ en alternativa 5, pregunta 2

VI. **a)** **[7 puntos]**

Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Escriba al número complejo $\omega = \overline{\left(\dfrac{-1+\alpha\, i}{-1-\alpha\, i}\right)}$ en forma polar (con argumento principal).

b) **[6 puntos]**

Represente el siguiente conjunto en el plano de Argand

$$\mathcal{A} = \{z \in \mathbb{C} \;:\; \mathrm{Re}(\overline{z}) \geq -1\}$$

¿Para qué valores de α se cumple que el número complejo ω del ítem anterior pertenece a $\mathcal{A}$? Justifique su respuesta.

c) **[7 puntos]**

Suponga que $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es un complejo real mayor que cero. Demuestre que las raíces cuartas de z son complejos reales o imaginarios puros.

<u>Solución:</u>

a) El número que hay que llevar a forma polar es de la forma

$$\frac{z}{\overline{z}} = z\,(\overline{z})^{-1} = z\frac{1}{|z|^2}z = \frac{z^2}{|z|^2}.$$

Por tanto, la forma polar de ω (con argumento principal) es $\mathrm{cis}(\mathrm{Arg}(\omega))$.

Calculando Arg(ω) utilizando forma binomial: El número ω en forma polar se escribe como $\mathrm{cis}(\mathrm{Arg}(\omega))$. Dado que

$$\omega = \frac{(-1-\alpha\, i)^2}{1+\alpha^2} = \frac{(1+\alpha\, i)^2}{1+\alpha^2} = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} + \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\, i.$$

se cumple que $\mathrm{Im}(\omega) > 0$ ($\mathrm{Arg}(\omega) \in]0,\pi[$) y, por tanto,

$$\mathrm{Arg}(\omega) = \begin{cases} \mathrm{Arctan}\left(\frac{2\alpha}{1-\alpha^2}\right), & \text{si } \alpha < 1, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } \alpha = 1, \\ \pi + \mathrm{Arctan}\left(\frac{2\alpha}{1-\alpha^2}\right), & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

Calculando Arg(ω) utilizando forma polar: Si $z = -1 - \alpha\, i$ con $\alpha > 0$, entonces

$$\theta = -\pi + \mathrm{Arctan}(\alpha) \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\;\Rightarrow\; 2\theta \in \left]-2\pi, -\pi\right[\;\Rightarrow\; \mathrm{Arg}(\omega) = 2\theta + 2\pi = 2\mathrm{Arctan}(\alpha).$$

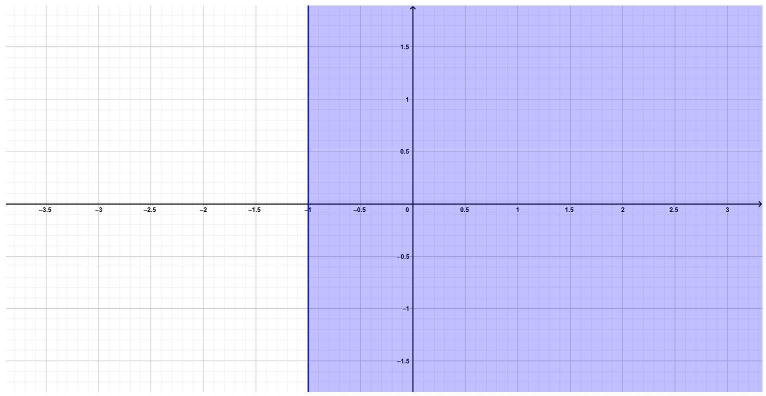

Figura 6: Región $\mathcal{A}$ en alternativa 6, pregunta 2

b) Dado que para todo número complejo z se cumple que $\mathrm{Re}(\overline{z}) = \mathrm{Re}(z)$, la región es la de los números complejos con parte real mayor o igual que -1, que se muestra en la figura 6.
Dado que $\mathrm{Re}(\overline{\omega}) = \mathrm{Re}(\omega) = \cos(2\mathrm{Arctan}(\alpha))$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}^+$ se cumple que $\omega \in \mathcal{A}$.

c) Si $z = |z|\mathrm{cis}(0)$, sus raíces cuartas son la forma

$$\left\{|z|^{\frac{1}{4}}\mathrm{cis}\left(\frac{2\pi k}{4}\right) \ : \ k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{|z|^{\frac{1}{4}}\mathrm{cis}\left(0\right), |z|^{\frac{1}{4}}\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right), |z|^{\frac{1}{4}}\mathrm{cis}\left(\pi\right), |z|^{\frac{1}{4}}\mathrm{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}.$$

Las raíces con argumentos principales iguales a 0 y π son complejos reales, las otras dos son imaginarios puros.

Pregunta 3. Polinomios.

I. Considere los siguientes conjuntos:

$$A = \left\{p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \ p(x) = ax^3 + x^2 - x - 2 \text{ y } i \text{ es raíz de } p\right\},$$

$$B = \left\{p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \ p(x) \text{ es divisible por } x-1 \text{ y el resto de } \frac{p(x)}{x-2} \text{ es } 3\right\},$$

$$C = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \ \mathrm{gr}(p) = 5 \text{ y } 1 \text{ es la única raíz real de } p \text{ y es de multiplicidad } 2\}.$$

Encuentre, si es posible, un polinomio en cada uno de los conjuntos anteriores. Justifique sus respuestas.

Solución:

- Para A, como i es raíz, $-ai - 1 - i - 2 = 0$, de donde $a = -1 + 3i$ y, por ende, $A = \emptyset$. **[6 puntos]**
- Para B, sea $p \in B$. Como el resto de dividir $p(x)$ por $(x-2)$ es 3, se tiene que $p(x) = q(x)(x-2) + 3$. Además, como $p(x)$ debe ser divisible por $(x-1)$, se tiene que $p(x) = (x-1)(x-2) + 3(x-1) = x^2 - 1$ es un polinomio en B. **[7 puntos]**

  Cualquier polinomio de la forma $q(x)(x-1)$, siendo q un polinomio tal que $q(2) = 3$ es un elemento de B.
- Se tiene que C es vacío, pues si $p \in C$, p sólo tiene una raíz real de multiplicidad 2 y sabemos que si z es raíz de p, $\overline{z}$ también es raíz de p, lo cual contradice que p debe tener 5 raíces, por $\mathrm{gr}(p) = 5$. **[7 puntos]**

II. Considere los siguientes conjuntos:

$$A = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \ p(x) = ax^4 - x^3 + x + 2 \text{ y } i \text{ es raíz de } p\},$$

$$B = \left\{p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \ p(x) \text{ es divisible por } x+1 \text{ y el resto de } \frac{p(x)}{x+2} \text{ es } -3\right\},$$

$$C = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \ \mathrm{gr}(p) = 7 \text{ y las únicas raíces reales de } p \text{ son } 1 \text{ y } -1, \text{ ambas con multiplicidad } 2\}.$$

Encuentre, si es posible, un polinomio en cada uno de los conjuntos anteriores. Justifique sus respuestas.

Solución:

- $A = \emptyset$. **[6 puntos]**
- $p(x) = (x+1)(x+2) - 3(x+1) = x^2 - 1$ es un polinomio en B. **[7 puntos]**

  Cualquier polinomio de la forma $q(x)(x+1)$, siendo q un polinomio tal que $q(-2) = -3$ es un elemento de B.
- $C = \emptyset$. **[7 puntos]**

III. Considere los siguientes conjuntos:

$$A = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \ p(x) = x^3 + ax^2 + x - 2 \text{ y } (-i) \text{ es raíz de } p\},$$

$$B = \left\{p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \ p(x) \text{ es divisible por } x - 2 \text{ y el resto de } \frac{p(x)}{x+1} \text{ es } 4\right\},$$

$$C = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \ \mathrm{gr}(p) = 5 \text{ y las únicas raíces reales de } p \text{ son } 1 \text{ y } -1, \text{ ambas con multiplicidad } 2\}.$$

Encuentre, si es posible, un polinomio en cada uno de los conjuntos anteriores. Justifique sus respuestas.

Solución:

- $p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$ es un polinomio en A. **[6 puntos]**
- $p(x) = (x-2)(x+1) + 4(x-2) = x^2 + 3x - 10$ es un polinomio en B. **[7 puntos]**
  Cualquier polinomio de la forma $q(x)(x-2)$, siendo q un polinomio tal que $q(-1) = 4$ es un elemento de B.
- $C = \emptyset$. **[7 puntos]**

IV. Considere los siguientes conjuntos:

$$A = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \ p(x) = x^4 + ax^3 - x - 2 \text{ y } (-i) \text{ es raíz de } p\},$$

$$B = \left\{p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \ p(x) \text{ es divisible por } x + 2 \text{ y el resto de } \frac{p(x)}{x-1} \text{ es } -4\right\},$$

$$C = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \ \mathrm{gr}(p) = 7 \text{ y } 1 \text{ es la única raíz real de } p \text{ y es de multiplicidad } 2\}.$$

Encuentre, si es posible, un polinomio en cada uno de los conjuntos anteriores. Justifique sus respuestas.

Solución:

- $A = \emptyset$. **[6 puntos]**
- $p(x) = (x+2)(x-1) - 4(x+2) = x^2 - 3x - 10$ es un polinomio en B. **[7 puntos]**
  Cualquier polinomio de la forma $q(x)(x+2)$, siendo q un polinomio tal que $q(1) = -4$ es un elemento de B.
- $C = \emptyset$. **[7 puntos]**

V. Considere los siguientes conjuntos:

$$A = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \ p(x) = ax^5 - x^3 + x + 2 \text{ y } i \text{ es raíz de } p\},$$

$$B = \left\{p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \ p(x) \text{ es divisible por } x+3 \text{ y el resto de } \frac{p(x)}{x-3} \text{ es } 5\right\},$$

$$C = \{p \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \ \mathrm{gr}(p) = 9 \text{ y las únicas raíces reales de } p \text{ son } 1 \text{ y } -1, \text{ ambas con multiplicidad } 2\}.$$

Encuentre, si es posible, un polinomio en cada uno de los conjuntos anteriores. Justifique sus respuestas.

<u>Solución:</u>

- $A = \emptyset$. **[6 puntos]**
- $p(x) = (x+3)(x-3) + 5(x+3) = x^2 + 5x + 6$ es un polinomio en B. **[7 puntos]**
  Cualquier polinomio de la forma $q(x)(x+3)$, siendo q un polinomio tal que $q(3) = 5$ es un elemento de B.
- $C = \emptyset$. **[7 puntos]**