UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

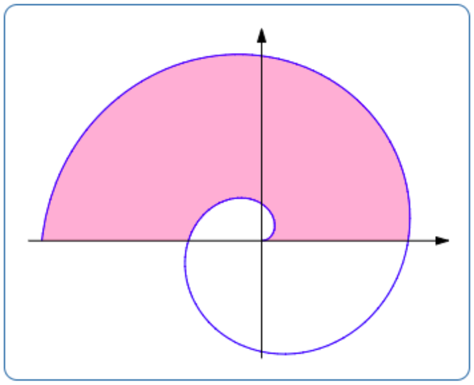
PHL

LISTADO No 6

Cálculo II (527150)

1. Cálculo de áreas de regiones encerrada por gráficas de funciones definidas en coordenadas polares

1. Encontrar el área sombreada



descrita por la espiral $r = \theta$, para $0 \leq \theta \leq 3\pi$.

2. Determinar el área que está dentro de la curva $r = 5\cos\theta$, y fuera de curva de ecuación $r = 2 + \cos\theta$.

3. Hallar el área encerrada por la curva $r = 1 + cos(2\theta)$ y la cardioide de ecuación $r = 1 + \cos\theta$.

4. ¿Cuál es el área dentro del lazo mayor de la curva $r = 1 - 2\sin\theta$ que es exterior al lazo menor de dicha curva?.

5. Determinar el área encerrada por el ciclo de limaçon de ecuación $r = 1 + 2\cos\theta$

2. Sucesiones numéricas. Conceptos de convergencia y de límite. Series numéricas y convergencia

1. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsa justificando adecuadamente:

   (a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

   (b) Si $a_n = \dfrac{3n^{\alpha}}{n^4+1}$, entonces $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (c) La sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $a = 1$ y $a_{n+1} = a_n + 1/n$ es monótona creciente.

2. Evaluar los siguientes límites:

   (i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{18n}(\sqrt{2n+4} - \sqrt{2n})$.

   (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} n(n - \sqrt{n^2-9})$.

   (iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 3^n n + 2 + 3^n}{5n^2 - 3n + 1}$.

   (iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^3+2n^2} - \sqrt[3]{n^3-n}$.

   (v) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n-2)(n+3)(2n-5)^2}{n^2(2n+6)(3n-5)}$.

   (vi) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+3n-2}{n^2+n}\right)^{\frac{n^3+2}{2n^2+1}}$.

3. Sean $a_n = \dfrac{1}{n}$, $b_n = (-1)^n \dfrac{1}{2^{2n}}$, $c_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+3}$. Determine:

   (i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

   (ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

   (iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$.

   (iv) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$.

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(b_n + c_n)$.

4. Determine cuáles de las siguientes series convergen o divergen:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}-\frac{2}{3}}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+8}$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2+3n-4}{n^4+n^3+3n^2+1}$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n}{\sqrt{2n^4+1}}$.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{5n^2-2}$.

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

(g) $\displaystyle\sum_{n-1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$.

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{5n+1}$.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n}$.

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{2n+1}$.

5. Determinar el radio de convergencia y el intervalo de convergencia.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+1)^n}{5^n n!}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n!(x-7)^n$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\frac{(x+1)^n}{2n-1}$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln n}{n}(x-1)^n$.

6. Determinar el intervalo de convergencia y la suma de las series:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-3)^n}{5^n}$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

   (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}ne^{nx}$.

7. A partir del siguiente resultado para la siguiente serie aritmético-geométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a+nb)r^n=\frac{a(1-r)+br}{(1-r)^2},\quad \text{donde } |r|<1.$$

   Halla el valor de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

8. Hallar la suma de las siguientes series:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right]$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left[\frac{(n+1)(n-1)}{n!}\right]$.

9. Determine los valores de x para los cuales la siguiente serie converge:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2-n+3}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^n.$$

3. Aproximación polinomial: polinomios de Taylor.

1. Sea $f(x)=\dfrac{5x-7}{x^2-3x+2}$ encontrar su seri de Taylor en torno a $x=0$, indicando su radio e intervalo de convergencia. **Hint:** Expresar $f(x)$ como suma de fracciones parciales.

2. Encontrar la serie de Taylor de $f(x)=\ln x$, en torno a $x=4$ y determinar su radio e intervalo de convergencia.

3. Encontrar la serie de Taylor de $f(x)=\sinh x$, en torno a $x=0$ y determinar su radio e intervalo de convergencia.

4. Expresar $f(x) = x^2 e^x$ como una serie y probar que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+3)n!} = \frac{5}{e} - 2$.

5. Expresar $f(x) = \dfrac{x}{1 + x - 2x^2}$ como una serie e indicar el intervalo de convergencia.