Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

GAJ/EBC/CF/CMR/ARP

Cálculo III (521227)
Práctica 12

Teorema de Gauss.

1. Utilizar el Teorema de la divergencia para calcular la integral de superficie $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\vec{S}$ para los siguientes $\vec{F}$ y S, donde S esta orientada de forma que la normal apunta hacia afuera.
   (a) $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, z, -y)$, y S es la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$,
   (b) $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ y S es la frontera de la región $x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}$.
   (c) $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$ y S es la frontera del cubo $0 \leq x, y, z \leq a$.
   (d) $\vec{F}(x, y, z) = (\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2})$ y S es la frontera del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$.
   (e) $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, -2xy, z^2)$ y $S = \{(x, y, z) \colon (x, y) \in W\}$, donde W es cualquier región en el plano con frontera de clase C^1.

Teorema de Stokes.

2. Sea $\vec{F}(x, y, z) = (x(x^2 + y^2 + z^2), y(x^2 + y^2 + z^2), z(x^2 + y^2 + z^2))$ y S la esfera de radio a con centro en el origen. Calcular $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\vec{S}$, directamente y utilizando el Teorema de la Divergencia.

3. Utilizar el Teorema de Stokes para calcular $\int_C (x - z)dx + (x + y)dy + (y + z)dz$ donde C es la curva dada por la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $z = y$, orientado en sentido anti horario visto desde arriba.

4. Utilizar el Teorema de Stokes para calcular $\int_C (y)dx + (y^2)dy + (x + 2z)dz$ donde C es la curva dada por la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el plano $z + y = a$, orientado en sentido anti horario visto desde arriba.

5. Calcular $\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} d\vec{S}$ donde $\vec{F}(x, y, z) = (y, x - 2x^3 z, xy^3)$ y S es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ arriba del plano x, y.

6. Calcular $\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} d\vec{S}$ donde $\vec{F}(x, y, z) = (2x, 2y, x^2 + y^2 + z^2)$ y S es la parte del elipsoide $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{27} = 1$ debajo del plano x, y.

7 Sea $\vec{F} = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0)$
   (a) Verificar que $\nabla \times \vec{F} = 0$.
   (b) Verificar, directamente de la definición, que $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi$, donde C es cualquier circulo horizontal con centro sobre el eje z.
   (c) ¿Por qué los incisos anteriores no contradicen el Teorema de Stokes?