Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Pauta de Examen de Recuperación

Cálculo II - 527150

1. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

(a) **(6 puntos)** Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que f'' es continua sobre el intervalo $[0, e]$, entonces

$$\int_0^1 e^{x^2}(2x^2+1)f''(xe^{x^2})\, dx = f'(e) - f'(0).$$

Solución: Para resolver la integral podemos hacer el siguiente cambio de variables:

$$u = xe^{x^2} \Rightarrow du = e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}dx$$

luego si $x = 0$, entonces $u = 0$ y si $x = 1$, entonces $u = e$, por ende:

$$\int_0^1 e^{x^2}(2x^2+1)f''(xe^{x^2})\, dx = \int_0^e f''(u)\, du = f'(e) - f'(0).$$

Dado lo anterior podemos concluir que la afirmación es **verdadera**.

(b) **(8 puntos)** Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua, no nula y par, tal que:

$$[f(x)]^2 = \int_0^{-x} \frac{f(t)\sin(t)}{2+\cos(t)}\, dt,$$

entonces f está definida por $f(x) = -\frac{1}{2}\ln|4+2\cos(x)| + \frac{1}{2}\ln(6)$ considerando que $(0, 0)$ es un punto de su gráfico.

Solución: Para poder determinar la función f, primero derivamos a ambos lado de la igualdad, como sigue:

$$\begin{aligned} 2f(x)f'(x) = -\frac{f(-x)\sin(-x)}{2+\cos(-x)} &\Leftrightarrow 2f(x)f'(x) = \frac{f(x)\sin(x)}{2+\cos(x)} \\ &\Leftrightarrow f'(x) = \frac{\sin(x)}{4+2\cos(x)} \end{aligned}$$

lo anterior se debe a que f es una función no nula y par. Luego, integramos a ambos lado de la igualdad, como sigue:

$$f(x) = \int \frac{\sin(x)}{4+2\cos(x)}\, dx = -\frac{1}{2}\ln|4+2\cos(x)| + C$$

Ahora bien, como $(0, 0)$ es un punto de su gráfico podemos determinar la constante C, haciendo:

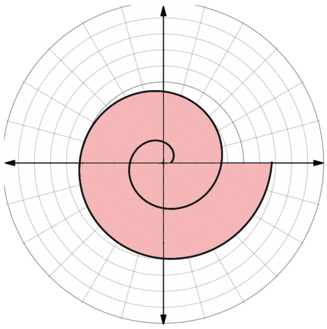
$$\begin{aligned} [f(0)]^2 = \int_0^0 \frac{f(t)\sin(t)}{2+\cos(t)}\, dt &\Rightarrow f(0) = 0 \\ &\Rightarrow -\frac{1}{2}\ln|4+2\cos(0)| + C = 0 \\ &\Rightarrow C = \frac{1}{2}\ln(6) \end{aligned}$$

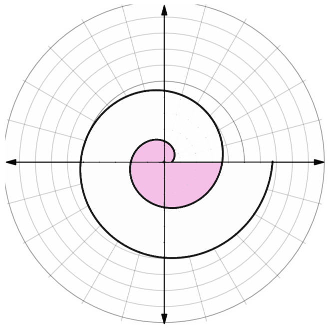
Finalmente concluimos que $f(x) = -\frac{1}{2}\ln|4+2\cos(x)| + \frac{1}{2}\ln(6)$ y por ende la afirmación es **verdadera**.

(c) **(6 puntos)** El área de la región $R = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta \leq 4\pi \ \wedge \ 0 \leq r \leq 1 + \theta\}$ puede ser calculada a través de la siguiente integral

$$A(R) = \frac{1}{2}\int_0^{4\pi} (1+\theta)^2 \ d\theta$$

Solución: Notemos que para determinar el área del espiral $r = 1 + \theta$ con $\theta \in [0, 4\pi]$, se debe considerar que cada vez que da una vuelta completa (entre 0 y 2π la primera y entre 2π y 4π la segunda) el área de la vuelta anterior se vuelve a sumar, dado esto consideremos la siguiente imagen que muestra las vueltas que da la espiral:





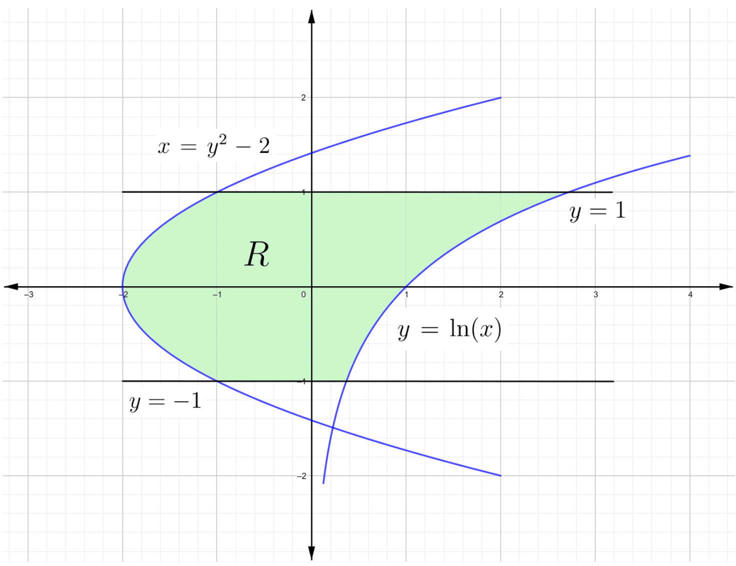
podemos observar que la espiral cuando $\theta \in [0, 4\pi]$ da dos vueltas completas, por ende el área de la región R se puede calcular a través de la siguiente integral:

$$A(R) = \frac{1}{2}\int_0^{4\pi} (1+\theta)^2 \ d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\theta)^2 \ d\theta$$

Por lo tanto podemos concluir que la afirmación es **falsa**.

2. Sea R la región acotada por las gráficas de las curvas $x = y^2 - 2$ e $y = \ln(x)$ entre las rectas $y = -1$ e $y = 1$.

Primero realizamos un bosquejo de la región:



(a) **(5 puntos)** Calcular el valor del área de la región R.

Solución: Notemos que el área de la región puede ser calculada a través de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} A(R) = \int_{-1}^{1} \left(e^y - (y^2 - 2)\right)\, dy &= e^y - \frac{1}{3}y^3 + 2y \Big|_{-1}^{1} \\ &= e - \frac{1}{3} + 2 - \left(\frac{1}{e} + \frac{1}{3} - 2\right) \\ &= \frac{10}{3} - \frac{1}{e} + e \end{aligned}$$

(b) **(5 puntos)** Escriba la o las integrales que permiten calcular el volumen del sólido que se general al hacer rotar R en torno a los ejes $x = 4$.

Solución: De acuerdo a como está determinada la región, podemos aplicar el método del disco para expresar el volumen, como sigue:

$$V(S) = \pi \int_{-1}^{1} (4 - (y^2 - 2))^2 - (4 - e^y)^2\, dy$$

(c) **(5 puntos)** Escriba la o las integrales que permiten calcular el volumen del sólido tal que su base es R y cuyas secciones transversales perpendiculares al eje Y son rectángulos para los cuales la altura es 3 veces la base.

Solución: Notemos que el área de un rectángulo está dado por $A_{\text{rec}} = b \cdot h$ donde b es la base y h la altura. Ahora bien, dada la información del problema sabemos que la altura es 3 veces la base, por ende el área de la sección transversal está dada por:

$$A_{\text{rec}} = b \cdot h = b \cdot 3b = 3b^2$$

luego, como la base es R, se tiene que $b(y) = e^y - y^2 + 2$ y por ende el área de la sección transversal estaría dada por $A(y) = 3(e^y - y^2 + 2)$. Finalmente, el volumen del sólido se puede calcular usando el método de las secciones transversales a través de la siguiente expresión :

$$V(S) = \int_{-1}^{1} A(y)\, dy = 3 \int_{-1}^{1} (e^y - y^2 + 2)^2\, dy$$

3. **(10 puntos)** Determine el o los valores de $k \in \mathbb{R}$ de modo que la integral impropia

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}\left[\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right]^k}\, dx$$

sea convergente.

Solución: Por definición de integral impropia, se tiene:

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}\left[\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right]^k}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}\left[\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right]^k}\, dx$$

luego, para resolver la integral definida podemos hacer el siguiente cambio de variables:

$$u = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

además, si $x=1$, entonces $u=\ln(1+\sqrt{2})$ y si $x=b$, entonces $u=\ln(b+\sqrt{b^2+1})$. Así, se tiene:

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]^k}\,dx &= \lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]^k}\,dx\\ &= \lim_{b\to+\infty}\int_{\ln(1+\sqrt{2})}^{\ln(b+\sqrt{b^2+1})}\frac{1}{u^k}\,du\end{aligned}$$

Ahora bien, como $\lim\limits_{b\to+\infty}\ln(b+\sqrt{b^2+1})=+\infty$, podemos notar que:

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{\ln(1+\sqrt{2})}^{\ln(b+\sqrt{b^2+1})}\frac{1}{u^k}\,du=\int_{\ln(1+\sqrt{2})}^{+\infty}\frac{1}{u^k}\,du$$

Finalmente, podemos observar que la última integral corresponde a una integral impropia de una función k, por ende podemos concluir que la integral inicial converge para todo $k>1$ y diverge para todo $k\leq 1$.

4. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\sinh(x)$

   (a) **(8 puntos)** Determinar la serie de Taylor de f alrededor de $x=0$ e indique su intervalo de convergencia.

   Solución: Notemos lo siguiente:

$$\begin{array}{l||l} f(x)=\sinh(x)\Rightarrow f(0)=0 & f^{(3)}(x)=\cosh(x)\Rightarrow f^{(3)}(0)=1\\ f'(x)=\cosh(x)\Rightarrow f'(0)=1 & f^{(4)}(x)=\sinh(x)\Rightarrow f^{(4)}(0)=0\\ f''(x)=\sinh(x)\Rightarrow f'(0)=0 & f^{(5)}(x)=\cosh(x)\Rightarrow f^{(5)}(0)=1\end{array}$$

   Luego, por definición de serie de Taylor, se obtiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=0+\frac{1}{1!}x+0+\frac{1}{3!}x^3+0+\frac{1}{5!}x^5+....+\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+...$$

   dado esto podemos concluir que:

$$\sinh(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

   Ahora debemos determinar el intervalo de convergencia, para esto utilizamos el criterio del cociente, como sigue:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{2(n+1)+1}}{(2(n+1)+1)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{x^{2n+1}}\right| &= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{2n}\cdot x^3}{(2n+3)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{x^{2n}\cdot x}\right|\\ &= x^2\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(2n+3)(2n+2)}\\ &= 0\end{aligned}$$

   Con lo anterior podemos concluir que el radio de convergencia es $R=\infty$, lo cual implica que el intervalo de convergencia es $I=\mathbb{R}$.

(b) **(7 puntos)** Utilice los primeros 4 términos de la serie para aproximar el valor de la integral definida

$$\int_0^1 \sinh(x^2)\, dx$$

Solución: Notemos lo siguiente:

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \Rightarrow \sinh(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2(2n+1)}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

luego, consideremos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sinh(x^2)\, dx &\approx \int_0^1 \left(\frac{x^2}{1!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + \frac{x^{14}}{7!} \right) dx \\
&\approx \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} + \frac{x^{15}}{15 \cdot 7!} \Bigg|_0^1 \\
&\approx \frac{1}{3} + \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{11 \cdot 5!} + \frac{1}{15 \cdot 7!}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_0^1 \sinh(x^2)\, dx \approx 0.357$$