Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemática
Departamento de Matemática

Cálculo II

Ingeniería Civil

Prof. Víctor Aros Quinán

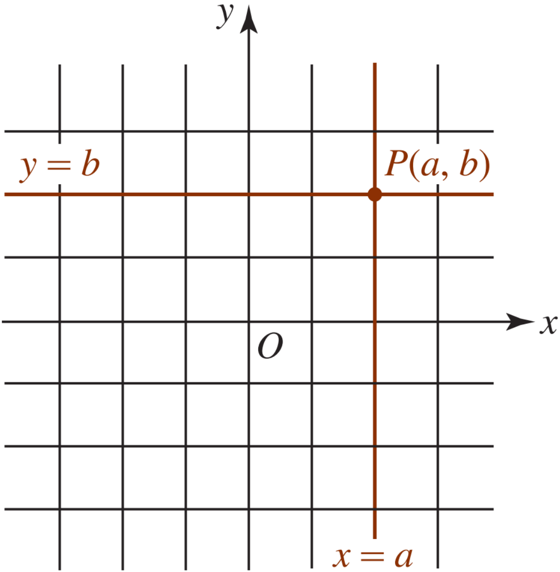
Segundo Semestre 2021

Clase N$^{\underline{o}}$20: Cálculo II
Coordenadas Polares

Coordenadas Rectangulares

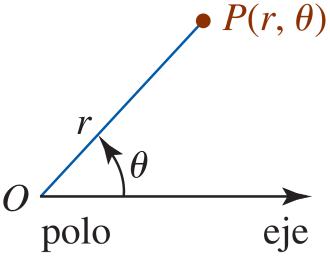
Hasta ahora hemos utilizado el sistema de coordenadas rectangulares o cartesiano para especificar un punto P o describir una curva C en el plano. Podemos considerar este sistema como una retícula de líneas horizontales y verticales. Las coordenadas (a, b) de un punto P están determinadas por la intersección de dos rectas: una recta $x = a$ perpendicular a la recta de referencia horizontal llamada eje X y la otra $y = b$ que es perpendicular a la recta vertical denominada eje Y.

Coordenadas Rectangulares

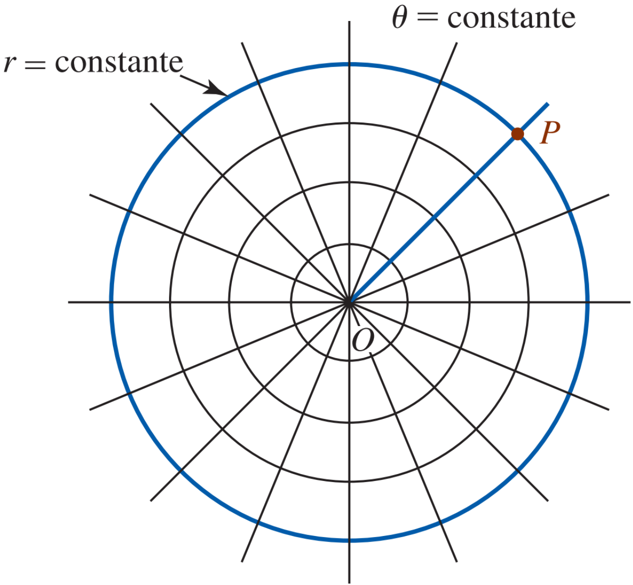


Coordenadas Polares

Para establecer un sistema de coordenadas polares empleamos un sistema de círculos centrados en un punto O, denominado **polo**, y líneas rectas o rayos que emanan de O. Tomamos como eje de referencia una media línea horizontal dirigida hacia la derecha del polo, a la cual se le denomina **eje polar**. Para especificar una distancia r dirigida (con signo) desde O y un ángulo θ cuyo lado inicial es el eje polar y cuyo lado final es el rayo OP, se identifica el punto P mediante (r, θ). Se dice que el par ordenado (r, θ) son las coordenadas polares de P.



Coordenadas Polares



Coordenadas Polares

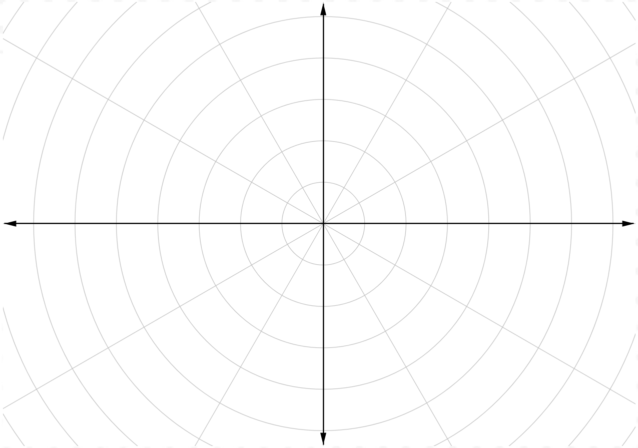
Convenciones

1. Los ángulos $\theta > 0$ se miden en el sentido contrario al de las manecillas del reloj a partir del eje polar, en tanto que los ángulos $\theta < 0$ se miden en el sentido de las menecillas del reloj.
2. Para graficar un punto $(-r, \theta)$, donde $-r < 0$, se mide $|r|$ unidades a lo largo del rayo $\theta + \pi$.
3. Las coordenadas del polo O son $(0, \theta)$, donde θ es cualquier ángulo.

Ejemplos:

Grafique los siguientes puntos en el sistema de coordenadas polares:

(a) $P_1\left(4, \dfrac{\pi}{6}\right)$ (b) $P_2\left(2, -\dfrac{\pi}{4}\right)$ (c) $P_3\left(-3, \dfrac{3\pi}{4}\right)$



Coordenadas Polares

Observación: Notemos que en sistema rectangular un punto posee solo una representación, pero en las coordenadas polares esta no es única. De hecho:

$$(r, \theta) \qquad \text{y} \qquad (r, \theta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

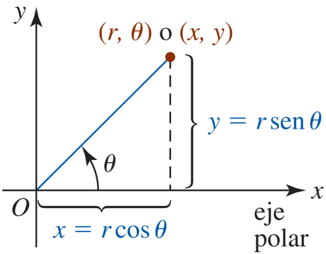
son equivalentes. Además, se pueden considerar valores negativos para r.

Por ejemplo, el punto $P\left(2, \dfrac{\pi}{6}\right)$ puede ser representado por:

Coordenadas Polares

Ahora veremos como podemos hacer una conversión entre los sistemas de coordenadas polares y rectangulares.

Consideremos la siguiente figura:



Al sobreponer un sistema de coordenadas rectangulares sobre un sistema de coordenadas polares, podemos convertir la descripción polar de un punto en coordenadas rectangulares utilizando:

$$x = r\cos(\theta), \qquad y = r\sin(\theta)$$

Coordenadas Polares

Por otro lado, se tiene:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

en este caso $r > 0$ y $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Ejemplos:

1. Convierta el punto $P_1\left(2, \dfrac{\pi}{6}\right)$ en coordenadas rectangulares.

2. Convierta el punto $P_2(-1, 1)$ en coordenadas polares.

Coordenadas Polares

Existen algunos casos donde una ecuación rectangular que define a una curva, se puede escribir en coordenadas polares, obteniéndose una curva representada en forma polar, las cuales están dadas por $r = f(\theta)$.

Ejemplos:

1. Determine la ecuación en coordenadas polares que tiene la misma gráfica que:

   (a) $x^2 + y^2 = 4x$ (b) $x^2 = 16 - 8y$

2. Determine una ecuación en coordenadas rectangulares que tenga la misma gráfica que la curva $r^2 = 9\cos(2\theta)$.

Ejercicios

1. Determine las coordenadas rectangulares que representan los siguientes puntos en coordenadas polares.

   (a) $P_1(-2,-2)$ (b) $P_2(7,0)$ (c) $P_3(1,-\sqrt{3})$

2. Determine las coordenadas polares que representan los siguientes puntos en coordenadas rectangulares.

   (a) $P_1(3,\pi)$ (b) $P_2(-1/2,\pi/2)$ (c) $P_3(3,7\pi/6)$

3. Determine la ecuación en coordenadas polares que tiene la misma gráfica que:
   (a) $x^2-y^2=1$
   (b) $3x+8y+6=0$
   (c) $x^2-12y-36=0$
   (d) $x^2+y^2+x=\sqrt{x^2+y^2}$

Gráficos en Coordenadas Polares

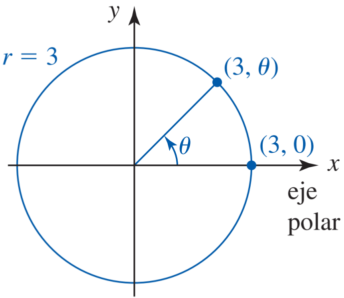
La gráfica de una relación polar $r = f(\theta)$ es el conjunto de puntos P con al menos un conjunto de coordenadas polares que la satisfacen. Para facilitar la construcción del gráfico pondrés ambos sistemas "uno sobre otro".

Comenzaremos con gráficas simples y luego iremos construyendo algunas relaciones mas complejas, cabe mencionar que no estudiaremos todas las curvas en coordenadas polares, solo las mas comunes.

Ejemplos

1. Grafique $r = 3$.

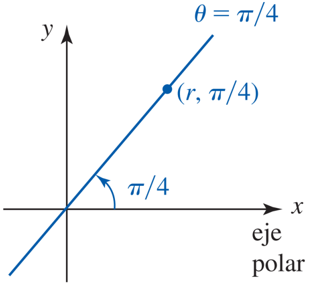
Solución: Notemos que no se especifica θ, por ende el punto $(3, \theta)$ esta sobre la grafica de $r = 3$ para todo valor de θ. Luego, concluimos que el punto $(3, \theta)$ se encuentra a 3 unidades del origen, por ende la gráfica estaría dada por:



Ejemplos

2. Grafique $\theta = \frac{\pi}{4}$.

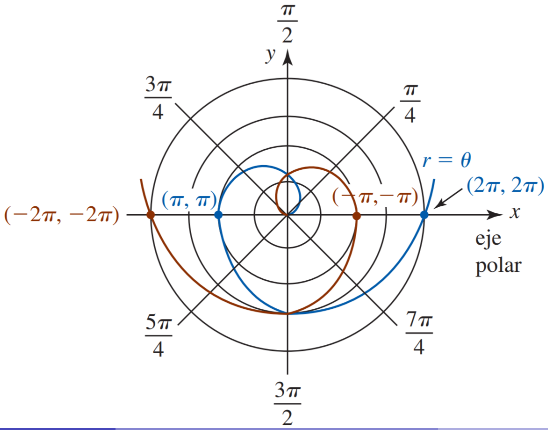
Solución: Puesto que r no se especifica, el punto $(r, \pi/4)$ está sobre el gráfico de la curva para cualquiera valor de r. Si $r > 0$, entonces este punto se encuentra sobre la media recta en el primer cuadrante. Por otro lado, si $r < 0$, entonces el punto está sobre la media recta en el tercer cuadrante y para $r = 0$, el punto esta sobre el polo. Por lo tanto, la gráfica polar de $\theta = \pi/4$ es la recta que pasa por el origen y que tiene un ángulo de inclinación de 45 grados.



Ejemplos

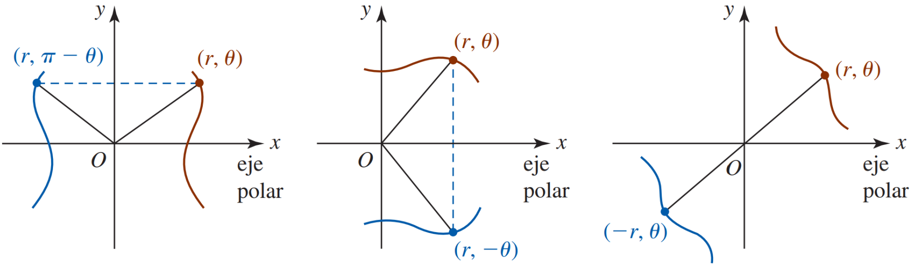
3. Grafique $r = \theta$.

Solución: Cuando $\theta \geq 0$ aumenta y los puntos (r, θ) se enrollan alrededor del polo de una manera opuesta al giro de las manecillas del reloj. Si $\theta < 0$ se genera lo contrario.



Gráficos en Coordenadas Polares

Cuando tenemos algunas gráficas mas complejas haremos uso de las simetrías, las cuales se ilustran en la siguiente imagen:



como se observa en la figura, una gráfica puede tener tres tipos de simetrías.

Ejemplos

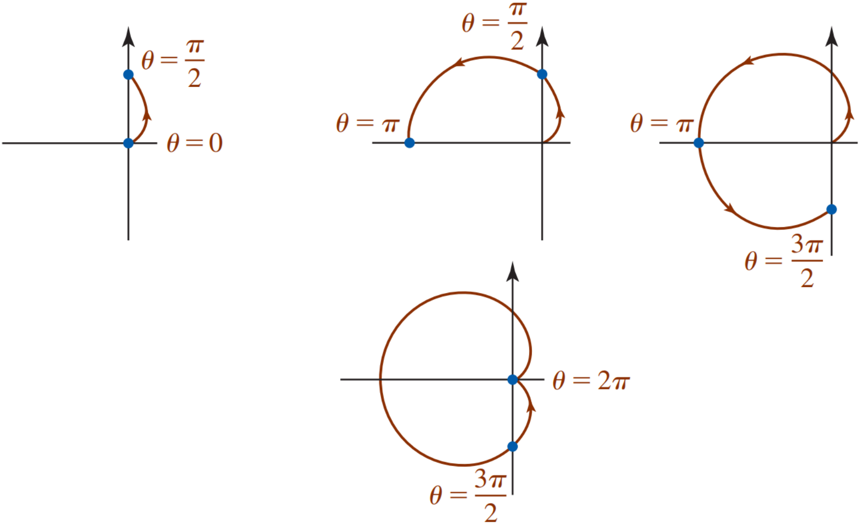
4. Grafique $r = 1 - \cos(\theta)$.

Solución: Una manera de graficar esta ecuación es incorporar unos cuantos puntos bien escogidos tal que $\theta \in [0, 2\pi]$, como se indica en la siguiente tabla:

θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
r									

Ejemplos

Dado lo anterior, podemos concluir que el gráfico de la curva está dado por:



Cardioides

La ecuación polar del ejemplo anterior es una curva que tienen "forma de corazón" que pasan por el origen. Las gráficas que tengan este tipo de ecuación polar:

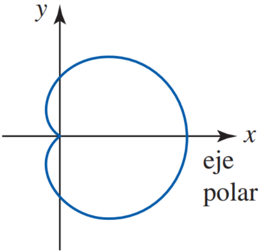
$$r = a \pm a\sin(\theta) \quad \text{o} \quad r = a \pm a\cos(\theta)$$

recibe el nombre de **cardioide**.

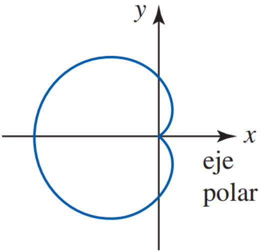
Observación: La diferencia entre ambas gráficas es la simetría que con respecto a los ejes, ya que una es simétrica con respecto al eje polar y la otra con respecto a la recta $\theta = \pi/2$.

Cardiodies

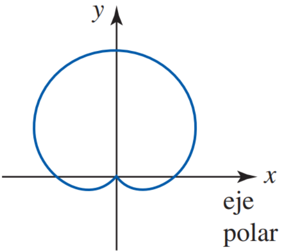
$r = a(1 + \cos\theta)$



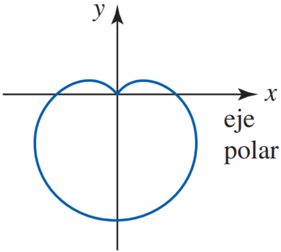
$r = a(1 - \cos\theta)$



$r = a(1 + \operatorname{sen}\theta)$



$r = a(1 - \operatorname{sen}\theta)$



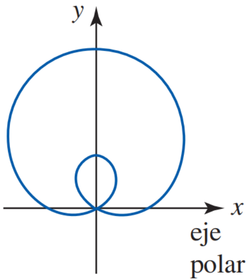
Caracoles o Limacones

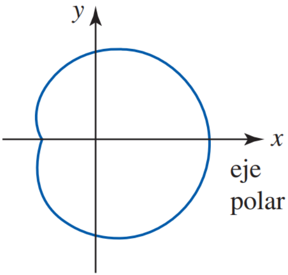
Los cardioides son casos especiales de curvas polares conocidas como caracoles, los cuales tienen las siguientes ecuaciones:

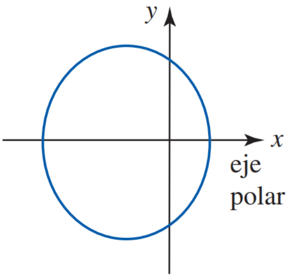
$$r = a \pm b\sin(\theta) \quad \text{o} \quad r = a \pm b\cos(\theta)$$

La forma de un caracol depende de las magnitudes de a y b. Supongamos que $a, b > 0$, luego para $0 < a/b < 1$ obtenemos un caracol con un lazo interior, cuando $1 < a/b < 2$ encontramos un caracol con un orificio y para $a/b > 2$ se llama caracol convexa.

Caracol o Limacones







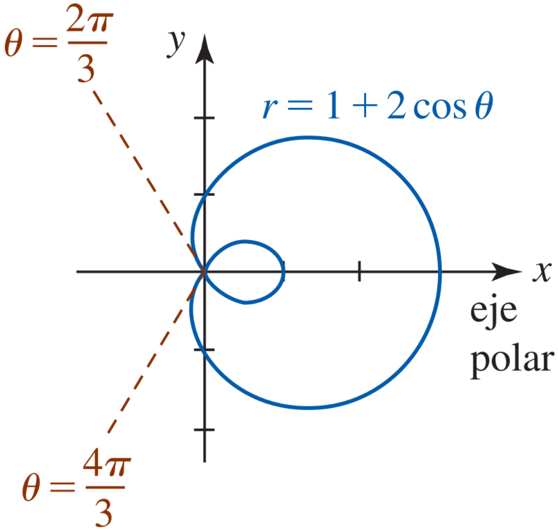
Ejemplos

5. Grafique $r = 1 + 2\cos(\theta)$.

Solución: Notemos que podemos analizar las simetrías de la curva, como sigue:

Ejemplos

Dado lo anteior, podemos concluir que el gráfico de la curva es:

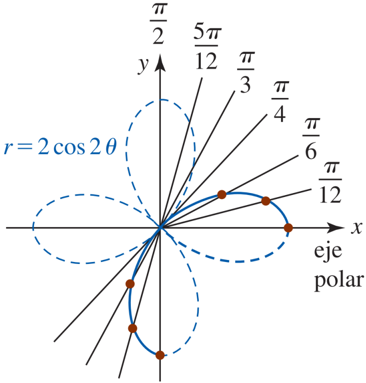


Rosas

En general, si n es un entero positivo, entonces las gráficas de:

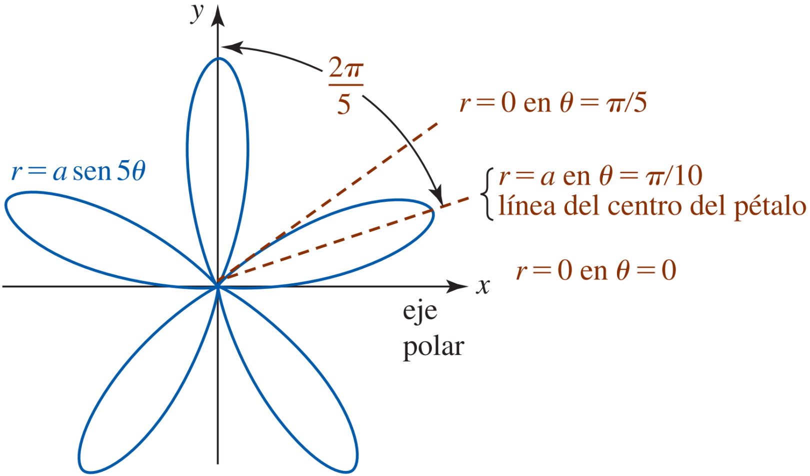
$$r = a\sin(n\theta) \quad \text{o} \quad r = a\cos(n\theta), \quad n \geq 2$$

se denominan curvas de las rosas, las cuales tendrán tantos pétalos tal que, n cuando n es impar y $2n$ cuando n es par. Por ejemplo:



Rosas

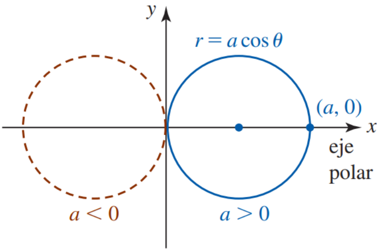
También podemos considerar el siguiente ejemplo:

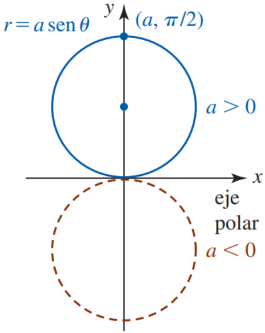


Circunferencias con centro distinto al origen

Si en la fórmula de la rosas reemplazamos $n = 1$, obtenemos dos ecuaciones de circunferencias que no están centradas en el origen:

$$r = a\sin(\theta) \quad \text{o} \quad r = a\cos(\theta)$$



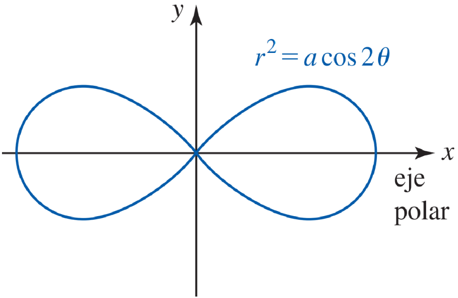


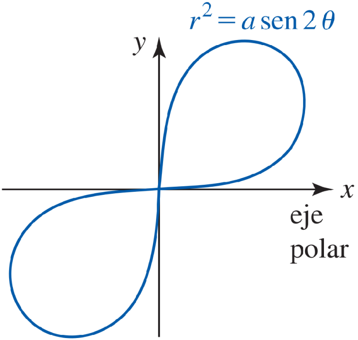
Lemniscatas

Si n es un entero positivo, las gráficas de

$$r^2 = a\cos(2\theta) \quad \text{o} \quad r^2 = a\sin(2\theta)$$

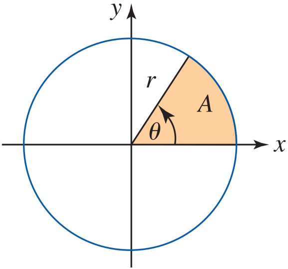
donde $a > 0$, se llaman lemniscatas.





Área de Curvas Polares

Para determinar el área de una región acotada por gráficas de curvas polares usaremos un recurso al igual como lo hicimos anteriormente, en este caso seran sectores circulares.

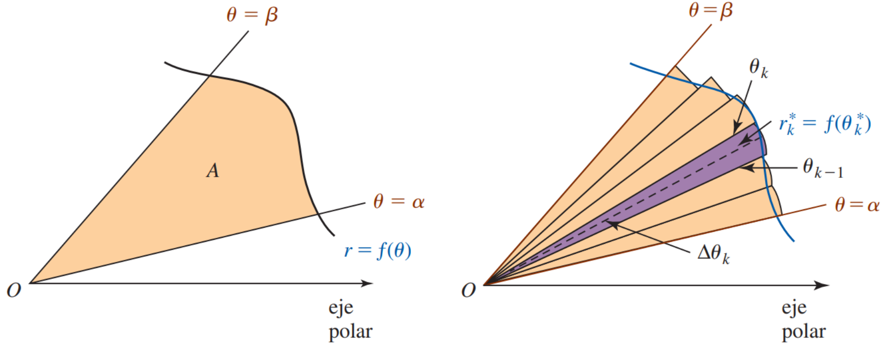


Recordemos que el área de un sector circular es proporcional al ángulo central θ, medido en radianes, de hecho:

$$\frac{A}{\pi r^2} = \frac{\theta}{2\pi} \Leftrightarrow A = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

Área de Curvas Polares

Consideremos una curva polar $r = f(\theta)$ es una función continua no negativa sobre el intervalo $[\alpha, \beta]$, donde $0 \leq \alpha \leq \beta < 2\pi$. Para determinar el área de la región que se muestra a continuación:



que está acotada por la gráfica de f y los rayos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$, debemos considerar una partición P del intervalo $[\alpha, \beta]$.

Área de Curvas Polares

Si θ_k^* denota un punto en el subintervalo $[\theta_{k-1}, \theta_k]$, entonces por el área del sector circular de radio $r_k^* = f(\theta_k^*)$, se tiene:

$$A_k = \frac{1}{2}\left[f(\theta_k^*)\right]^2 \Delta\theta_k$$

donde $\Delta\theta_k = \theta_k - \theta_{k-1}$ es su ángulo central. Luego, el área de la región de manera aproximada, está dada por:

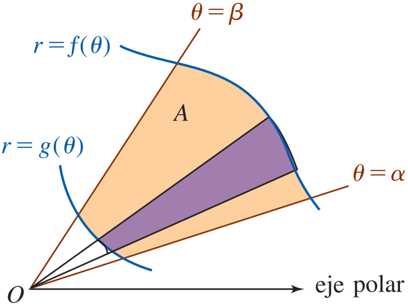
$$A(R) \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left[f(\theta_k^*)\right]^2 \Delta\theta_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[f(\theta_k^*)\right]^2 \Delta\theta_k$$

Notemos el que la suma anterior corresponde a una suma de Riemann, por ende el área de la región queda representada por:

$$A(R) = \lim_{\|P\|\to 0} \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[f(\theta_k^*)\right]^2 \Delta\theta_k = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta)\, d\theta$$

Área entre dos Curvas Polares

El área $A(R)$ de la región que se muestra en la figura se puede determinar sustrayendo áreas.



Si f y g son continuas sobre $[\alpha, \beta]$ y $f(\theta) \geq g(\theta)$ sobre el intervalo, entonces el área acotada por las gráficas de $r_1 = f(\theta)$, $r_2 = g(\theta)$, $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$, está dada por:

$$A(R) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta)\, d\theta - \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} g^2(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) - g^2(\theta)\, d\theta$$

Ejercicios

1. Determine el área de la región que está acotada por el espiral $r = \theta$, con $\theta \geq 0$, entre los rayos $\theta = 0$ y $\theta = \frac{7\pi}{4}$.
2. Calcular el área de un pétalo de la curva $r = 2\cos(5\theta)$.
3. Determine el área de la región que es común a los interiores del cardioide $r = 2 - 2\cos(\theta)$ y el caracol $r = 2 + \cos(\theta)$.
4. Encuentre el área de la región en el primer cuadrante que está fuera de la circunferencia $r = 1$ y dentro de la rosa $r = 2\sin(2\theta)$.
5. Determine el área que se encuentra entre el lazo interior y exterior del caracol $r = 1 + 2\cos(\theta)$.
6. Determine el área de la región interior a la circunferencia $r = 2$ y exterior a la rosa de tres pétalos $r = 2\sin(3\theta)$.