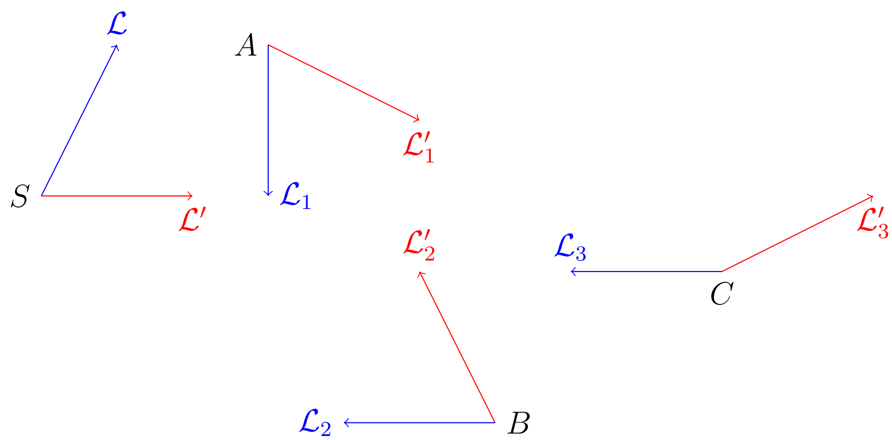
Álgebra I. 525140 - DIM - CFM
2 de abril de 2021
Prof.: Isabel Donoso, Anahí Gajardo, Jorge Moya, Alejandra Pérez
Cinthya Rivas, Mónica Selva, Filip Thiele, Gladis Torres

Ángulos

Un ángulo es un concepto abstracto que podemos llevar a la realidad para así describirla mejor.

Un ángulo se define sobre una superficie plana y consiste en dos *semirectas*, $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}'$ que nacen de un punto común S, y lo denotamos por $\angle(\mathcal{L}S\mathcal{L}')$.



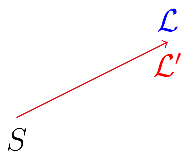
Sin embargo rotaciones y traslaciones de un ángulo dado se considerarán *equivalentes*.

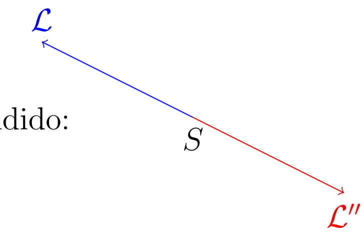
Así, los ángulos $\angle(\mathcal{L}S\mathcal{L}')$ y $\angle(\mathcal{L}_2B\mathcal{L}_2')$ son equivalentes, pues rotando $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ hacia la derecha y trasladando ambas del punto S al punto B coinciden con $\mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_2'$ respectivamente. Mientras que el ángulo $\angle(\mathcal{L}_3C\mathcal{L}_3')$ no es equivalente a ninguno de la figura.

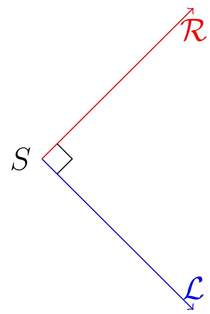
De igual manera, el ángulo $\angle(\mathcal{L}_1A\mathcal{L}_1')$ se considera no equivalente, ya que para hacerlo coincidir con alguno de los otros, sería necesario aplicarle una reflexión, lo cual implica "dar vuelta" la figura pasando por fuera del plano, y eso no se considera permitido en el presente contexto.

Esto nos dice que en la definición de un ángulo, el orden en el que se especifican las semirectas es muy importante y si uno lo cambia, los ángulos dejan de ser equivalentes.

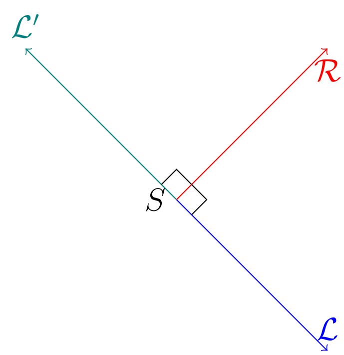
Distinguimos 3 ángulos particulares.

Ángulo nulo: 

Ángulo pleno o extendido: 

Ángulo recto: 

- El *ángulo nulo* $\angle(\mathcal{L}S\mathcal{L}')$ es aquel en que las dos semirectas son iguales: $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$.
- El *ángulo pleno* $\angle(\mathcal{L}S\mathcal{L}')$ es aquel en que una semirecta es la opuesta de la otra: $\mathcal{L}$ y$\mathcal{L}'$ son las dos mitades de una misma recta.
- Un *ángulo recto* es un ángulo que divide al ángulo pleno en dos ángulos equivalentes, es decir, es un ángulo $\angle(\mathcal{L}S\mathcal{R})$ tal que si $\mathcal{L}'$ es la opuesta de $\mathcal{L}$, entonces los ángulos $\angle(\mathcal{L}S\mathcal{R})$ y $\angle(\mathcal{R}S\mathcal{L}')$ son equivalentes. El ángulo recto siempre se identificará con un cuadradito.



Medida de un ángulo

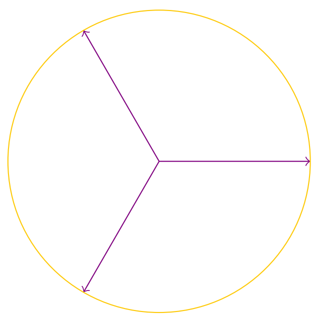
Para medir ángulos necesitamos algún *estándar*, lo más natural es considerar una medida que sea proporcional al sector que el ángulo ocupa dentro de una circunferencia de centro S.

Así, si asignamos una medida de 180° al ángulo pleno, el ángulo recto debe medir 90° ya que divide a la circunferencia en 4 partes iguales y el ángulo nulo debe medir 0°, pero también podríamos decir que el ángulo nulo mide 360°, con lo cual concluimos que un ángulo de 360° es equivalente a un ángulo de 0°.

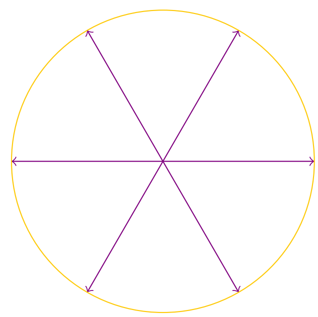
Los demás ángulos tendrán medidas proporcionales al sector que ocupan. Así, el ángulo de 60° es el ángulo que divide a la circunferencia en 6 partes iguales; el ángulo de 120° es el ángulo que la divide en 2 partes iguales, etc. Esta unidad de medida se llama *grado sexagesimal*, y se denota agregando un ” circulitoçomo super índice, tal como hemos hecho aquí.

En las figuras siguientes se cubre la circunferencia con ángulos de igual medida.

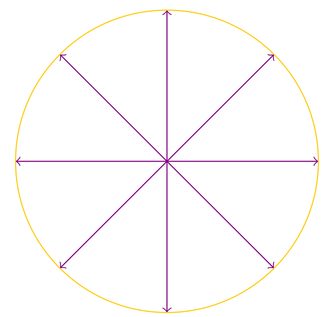
3 ángulos de 120°



6 ángulos de 60°



8 ángulos de 45°



¿Por qué 360 y no otro número? esta pregunta no tiene respuesta, en realidad 360 es un poco arbitrario, su origen es más bien histórico y se sospecha que se debe a un asunto más bien práctico ya que 360 es un número entero que tiene muchos divisores exactos, lo cual hace más probable que los ángulos que usamos resulten tener una medida en el conjunto de los números enteros, pero no hay razones más fuertes, distintas culturas han definido distintas medidas para la circunferencia.

Sin embargo, hay una medida que sí es universal y tiene razones matemáticas profundas que la justifican y por ello ha sido adoptada por la ciencia internacional como medida oficial para los ángulos: **los radianes**.

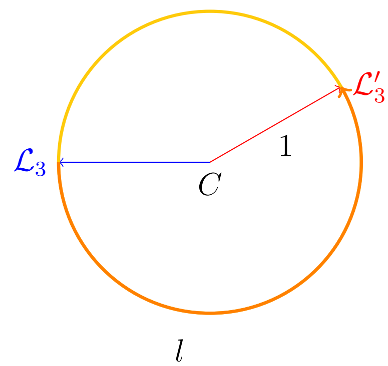
Se basa en tomar como medida de la circunferencia a su perímetro... ¿pero de cual circunferencia pues el perímetro depende del radio de ésta? para resolver ese dilema, se usa la circunferencia de radio 1, así la circunferencia completa tiene medida 2π.[1].

Como la medida de la circunferencia completa corresponde a su perímetro, **la medida de cada ángulo corresponderá a la longitud del arco que éste delimita dentro de la circunferencia de radio 1**.

Entonces, para medir un ángulo solo debemos colocar su vértice en el centro de una circunferencia de radio 1, y medir el arco que va de una semi recta a la otra... pero has dos caminos para ir de una recta a la otra, uno largo y uno corto, uno que va girando a favor de los punteros del reloj y otra que va girando en contra, claramente NO tienen la misma longitud ¿Cuál de los dos arcos consideramos para medir?

[1] Este domingo 14 de marzo se celebró el día de π, ya que los primeros 3 dígitos de π son 3,14... bromas internacionales de matemáticos, pero que funcionan para recordar este importante número irracional.

Hay que decidirse por uno y ser coherente con ello, y la comunidad internacional ha optado por el camino que va contra los punteros del reloj.

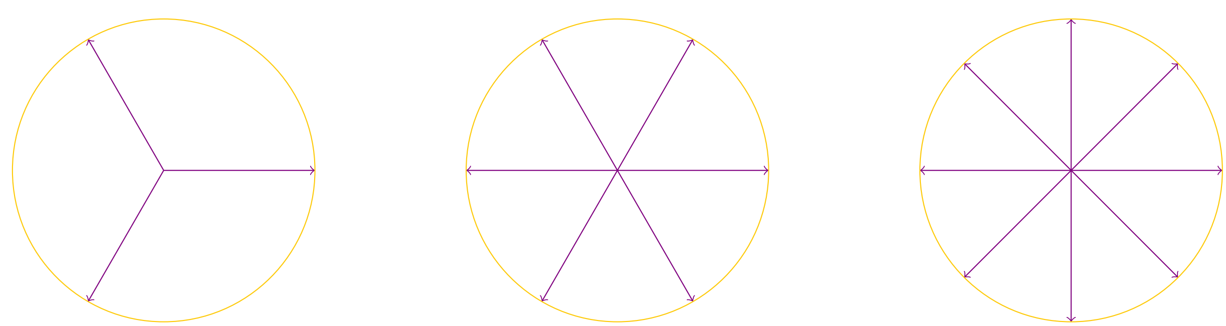


La medida del ángulo $\angle(\mathcal{L}_3 C \mathcal{L}_3')$ es la longitud l del arco color naranja en la figura.

Acá el orden toma relevancia, el ángulo $\angle(\mathcal{L}_3 C \mathcal{L}_3')$ se mide yendo de $\mathcal{L}_3$ a $\mathcal{L}_3'$, por el arco coloreado en naranja. Por su parte el ángulo $\angle(\mathcal{L}_3' C \mathcal{L}_3)$ se mide por el camino amarillo, pues para ir de $\mathcal{L}_3'$ a $\mathcal{L}_3$ contra los punteros del reloj, debemos ir por este arco, o equivalentemente su medida se puede tomar como el opuesto aditivo de la medida del ángulo $\angle(\mathcal{L}_3 C \mathcal{L}_3')$, ambas medidas difieren exactamente en 2π, y se consideran medidas equivalentes.

Igual que antes, la medida del ángulo corresponde a la porción que representa de la circunferencia completa, solo que en el sistema de radianes esta mide 2π.

3 ángulos de $\frac{2}{3}\pi$ | 6 ángulos de $\frac{\pi}{3}$ | 8 ángulos de $\frac{\pi}{4}$



En la actualidad tanto el sistema de grados sexagesimales como el sistema de radianes son muy usados, en particular las coordenadas geográficas de *longitud* y *latitud* de la tierra se miden en grados, pero la ciencia se desarrolla en radianes.

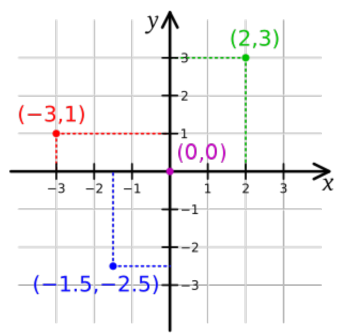
Como en todo sistema de medidas, para pasar de una unidad a otra basta aplicar proporcionalidad, si g es la medida de un ángulo en grados y r su medida en radianes, entonces se cumplirá que x es a 360 como r es a 2π, lo cual nos provee la siguiente ecuación, que nos servirá en todo momento.

$$\frac{g}{360} = \frac{r}{2\pi}$$

¿Cómo uso ahora la medida de un ángulo para calcular distancias, alturas, areas, etc...? eso lo veremos en la siguiente sección.

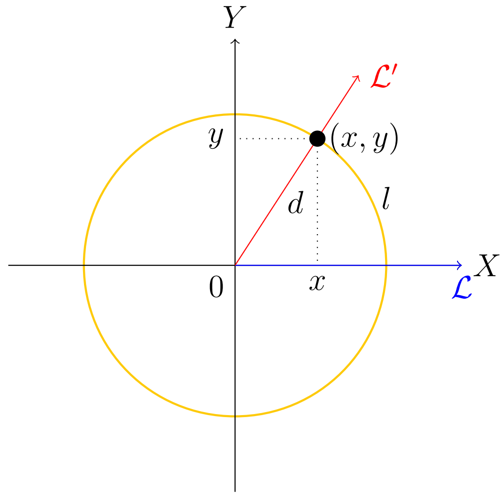
Funciones trigonométricas

¿Para qué nos sirve medir los ángulos? sirve para clasificarlos, para compararlos, para sumarlos... pero ¿para qué más? De alguna manera un ángulo describe una localización, aproximada solamente pues solo nos habla de la dirección (de un objeto por ejemplo), pero si además conocemos la distancia, ya podemos localizar completamente el objeto.



El sistema que más se usa para describir la posición de los objetos es el sistema cartesiano, introducido en el siglo XVII, consiste en definir ejes coordenados perpendiculares (el eje X y el eje Y), y describir una posición como un par ordenado (x, y) que indica que para llegar al punto es necesario desplazarse x unidades en dirección del eje X e y unidades en dirección del eje Y, partiendo desde el punto de intersección de los ejes, llamado *origen* (O).

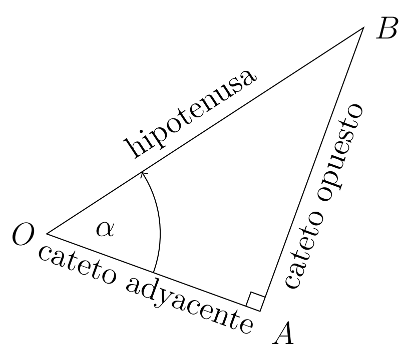
Se manera análoga, un ángulo $\angle(\mathcal{L}O\mathcal{L}')$ y una distancia d permiten describir un punto indicando que para llegar a él basta desplazarse d unidades en la dirección de $\mathcal{L}'$. ¿Cómo relacionamos ambos sistemas de localización?



La medida del ángulo $\angle(\mathcal{L}O\mathcal{L}')$ es l/d, y es muy diferente a la coordenada y del punto, no parecen medidas relacionadas de manera simple, pero parece urgente conocer su relación pues se muestra muy útil.

Por otra parte vemos que en la figura aparece un triángulo rectángulo cuyos lados miden justamente x e y y su hipotenusa mide d: el triángulo $O(x, 0)(x, y)$. La geometría del triángulo ha sido largamente estudiante y remitirnos a esta podría ayudarnos.

La geometría del triángulo rectángulo



Un *triángulo* es un polígono de 3 lados. Tiene 3 vértices y 3 ángulos (de ahí su nombre).

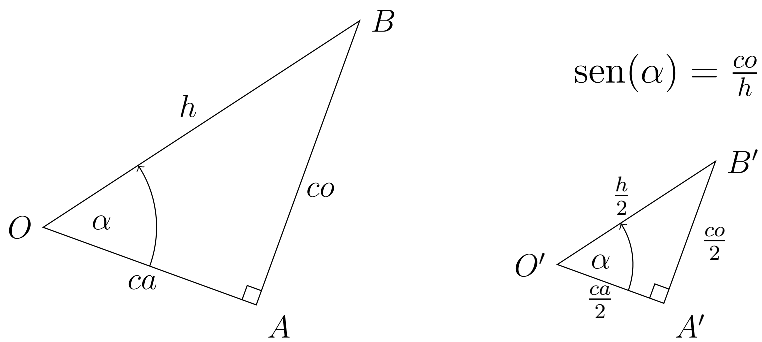
Un *triángulo rectángulo* es un triángulo en que uno de sus ángulos es recto. Los lados que definen el ángulo recto se llaman *catetos*, mientras que el lado restante se llama *hipotenusa*.

Si tomamos uno de sus ángulos que no son rectos ($\angle(AOB)$ en la figura), llamaremos *cateto adyacente* al cateto AO que participa en la definición de $\angle(AOB)$, mientras que el otro cateto se llamará *cateto opuesto*.

Si cambiamos el tamaño de un triángulo sin cambiar sus proporciones obtenemos un triángulo *semejante*. Los lados de tal triángulo han cambiado, pero no sus relaciones: los cuocientes entre los lados de un triángulo no cambian si escalo el triángulo, tampoco cambian los ángulos. Por lo tanto, los cuocientes de las longitudes de sus lados son un invariante bajo escalamiento y nos interesan; no es difícil ver que estas proporciones solo dependen de la medida del ángulo, no de su posición ni orientación, se definen entonces:

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos(\alpha) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad \tan(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

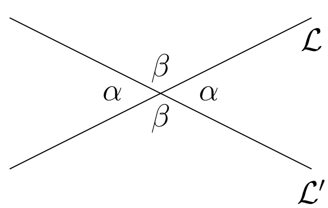
$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{co}{h} = \frac{\frac{co}{2}}{\frac{h}{2}}$$



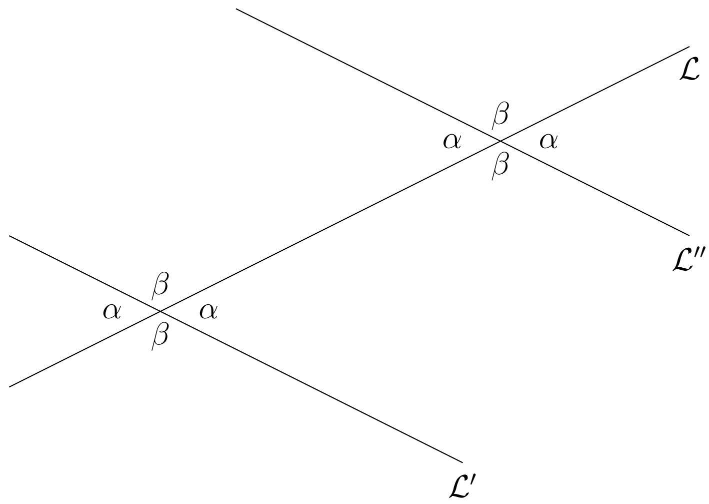
Estas son las llamadas *funciones trigonométricas* son estudiadas desde la época de los griegos y resultan tener una relevancia enorme en toda la matemática, tal como verán en Cálculo II y en el resto de su carrera, poseen bellísimas propiedades y se encuentran presentes hasta en los temas más sorprendentes. No es fácil calcularlas, no tienen una fórmula algebraica, las calculadoras las aproximan usando métodos muy avanzados que ha tomado a la humanidad miles de años descubrirlos.

¿Qué pasa con el otro ángulo del triángulo rectángulo? Hagamos un poco de teoría para establecer algunas verdades que nos serán útiles.

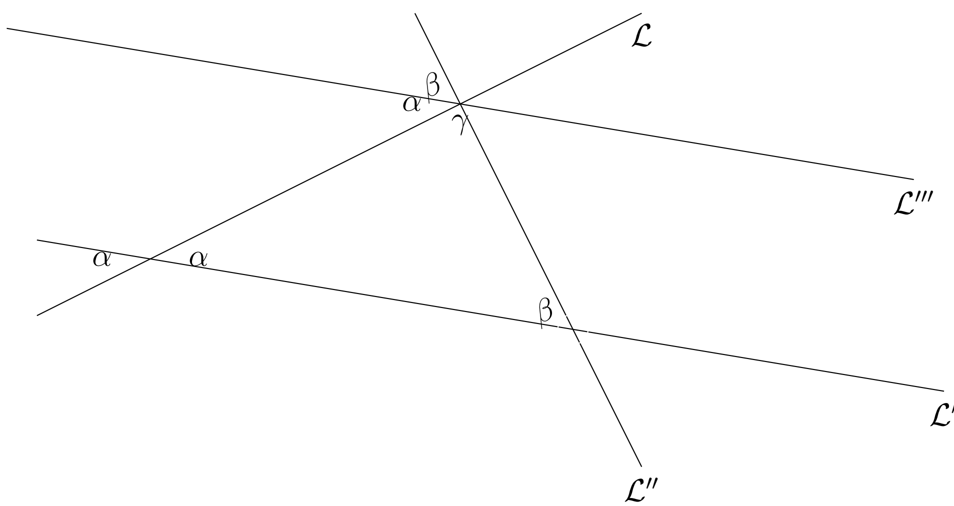
Lo primero es observar que cuando intersectamos dos rectas cualesquiera se forman 4 ángulos, pero los ángulos que quedan opuestos por un vértice tienen igual medida.



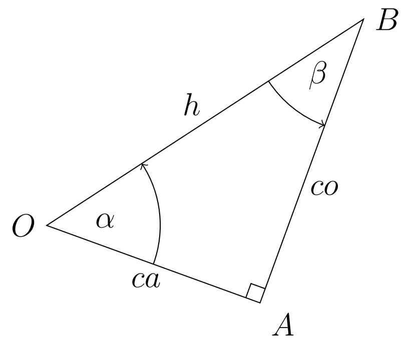
Si ahora agregamos una recta paralela a una de las dos primeras, los ángulos que se forman son los mismos. Observamos también los cuatro ángulos suman 2π y que $\alpha + \beta = \pi$.



Tomemos ahora tres rectas no paralelas cualesquiera y observemos qué se forma un triángulo. Para aplicar las observaciones anteriores desplazamos una de las rectas paralelamente hasta el otro vértice. Observamos que $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Este dibujo se puede repetir para cualquier triángulo, por lo tanto la igualdad que hemos demostrado es verdadera en cualquier triángulo: **la suma de los ángulos interiores de un triángulo es siempre** π **(**$180°$**)**.



¿Cómo se aplica esto a nuestro triángulo rectángulo?



Los tres ángulos del triángulo de la figura miden: α, β y $\frac{\pi}{2}$, por lo tanto concluimos que $\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}=\pi$, de donde se obtiene que:

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2} \qquad y \qquad \beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$$

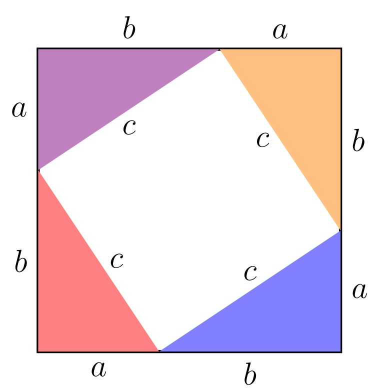
De aquí obtenemos las primeras identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos(\alpha) \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{sen}(\alpha) \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{\tan(\alpha)}$$

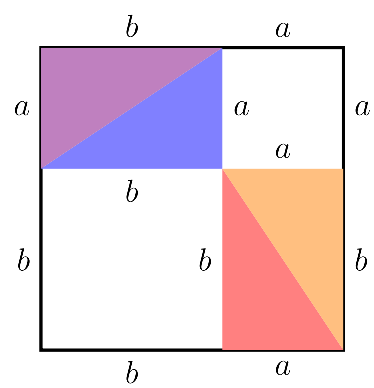
Otra importante identidad se obtiene del **Teorema de Pitágoras**, que afirma que en un triángulo rectángulo se cumple:

$$ca^2+co^2=h^2$$

No es difícil demostrar este teorema[2], de manera que no eludiremos ese placer aquí.



El área blanca mide c^2.



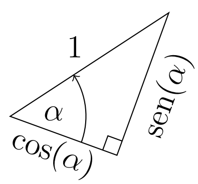
El área blanca mide b^2+a^2.

[2]De hecho es el teorema matemático con más demostraciones distintas encontradas.

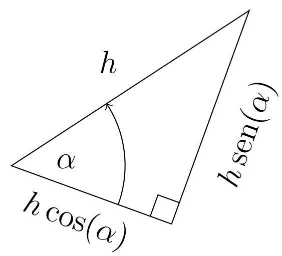
Si dividimos el teorema de Pitágoras por la hipotenusa al cuadrado, obtenemos una indentidad muy interesante.

$$\frac{ca^2 + co^2}{h^2} = \frac{h^2}{h^2} \qquad \longrightarrow (\operatorname{sen}(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1$$

Las funciones trigonométricas son tremendamente útiles para calcular las dimensiones de un triángulo rectángulo si es que conoces uno de sus ángulos y uno de sus lados, por ejemplo si conoces la hipotenusa, los lados quedan expresados como sigue, pero el ejercicio se puede repetir con los demás lados.

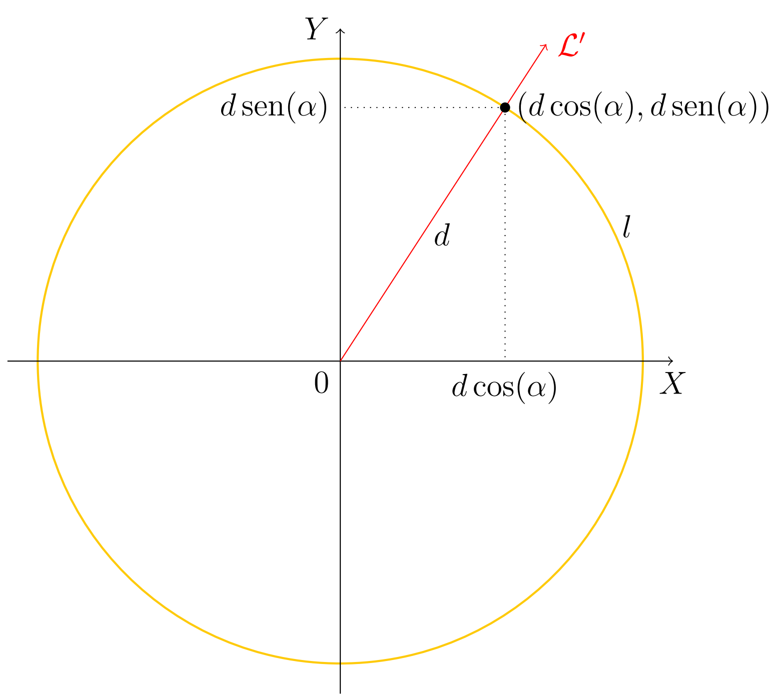


Si $h = 1$.



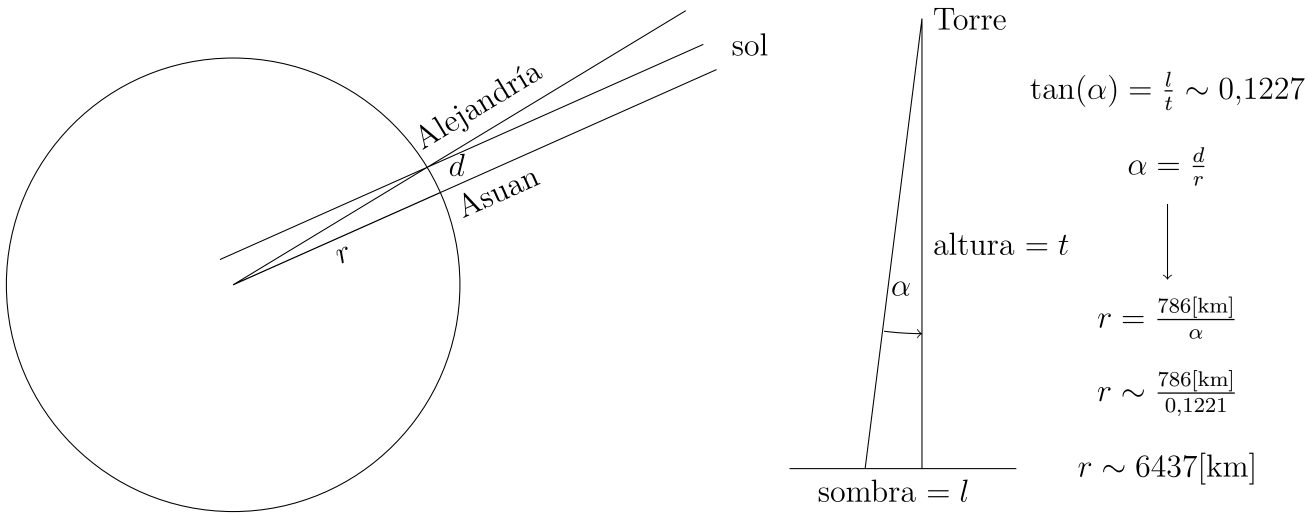
Si h es arbitrario.

Volviendo al problema de la relación entre las coordenadas de un punto especificado por un ángulo, podemos ver que las funciones trigonométricas lo resuelven.



También sirven para calcular un montón de cosas útiles, tales como la altura de un árbol, o el radio de la tierra...

En efecto, en el siglo II antes de Cristo un matemático griego elucubró una técnica para medir el radio de la tierra[3]. Para hacerlo se valió de una ciudad (Asuán) en la que cierto día del año, a cierta hora caía el sol de manera perpendicular a la tierra, y se reflejaba en el fondo de un pozo. Sabiendo esto, midió, ese mismo día del año, a esa misma hora, la sombra que producía una torre en otra ciudad lo bastante lejana (Alejandría). Asumiendo que los rayos del sol llegan con la misma dirección (son paralelos) a las dos ciudades logró calcular una aproximación bastante buena del radio de la tierra.



[3] En esos años ya se habían dado cuenta que era redonda.