Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemática
Departamento de Matemática

Cálculo II

Ingeniería Civil

Prof. Víctor Aros Quinán

Segundo Semestre 2021

Clase N$^{\underline{o}}$18: Cálculo II
Volumen de Sólidos, Longitud de Curva y Área de Superficie de Revolución

Volumen de Sólidos

Recordemos que la clase pasada estuvimos trabajando con dos métodos para calcular el volumen de sólidos de revolución, los cuales se podian expresar a través de una integral definida, dadas por:

$$V(S) = \pi \int_a^b r_2^2 - r_1^2 \, d\boxed{}$$

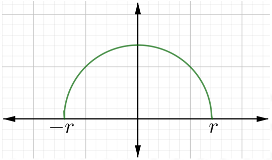
$$V(S) = 2\pi \int_c^d \boxed{}(h_2 - h_1) \, d\boxed{}$$

Recuerden que las funciones involucradas deben cumplir las hipótesis de cada método.

Ejemplos

2. Muestre que el volumen de una esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Solución: Notemos lo siguiente:

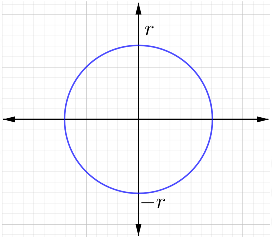


Luego, el volumen de la esfera se representar por:

$$\begin{aligned} V(S) &= \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 - 0^2 \, dx \\ &= 2\pi \int_{0}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 - 0^2 \, dx \\ &= \frac{4}{3}\pi r^3. \end{aligned}$$

Ejemplos

Notemos que:



Además, el volumen también se puede expresar por:

$$\begin{aligned} V(S) &= 2\pi \int_{-r}^{r} x\left(\sqrt{r^2-x^2} - \left(-\sqrt{r^2-x^2}\right)\right)\, dx \\ &= 2\cdot 2\pi \int_{0}^{r} x\left(\sqrt{r^2-x^2} - 0\right) \\ &= \frac{4}{3}\pi r^3. \end{aligned}$$

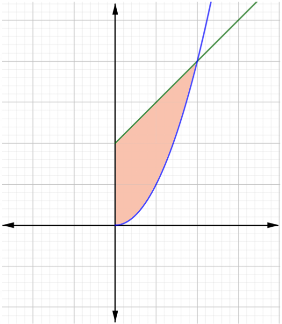
Ejemplos

5. Sea R la región limitada por las curvas de ecuación $y = x^2$ e $y = x+2$, en el primer cuadrante. Determinar el volumen del sólido que se generara al rotar R en torno a los ejes:

(a) $x = 0$ (b) $y = 0$ (c) $x = 3$

(d) $x = -1$ (e) $y = 5$ (f) $y = -2$

Solución: Notemos que la región está dada por:



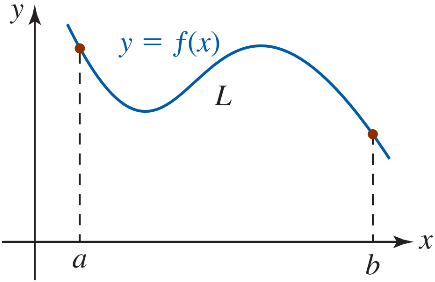
Ejemplos

Luego, los volumenes se pueden expresar de la siguiente forma:

Ejemplos

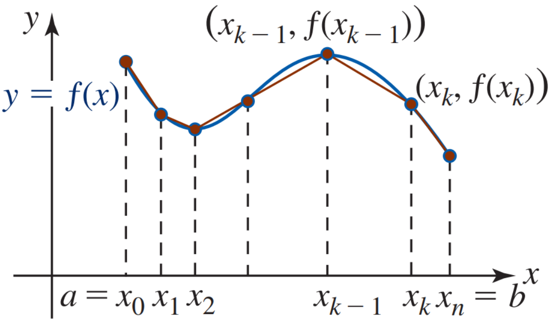
Longitud de Arco

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 y sea C la curva de ecuación $y = f(x)$. Notemos que el grafico de la curva es suave, esto quiere decir que no posee "puntas". Como por ejemplo:



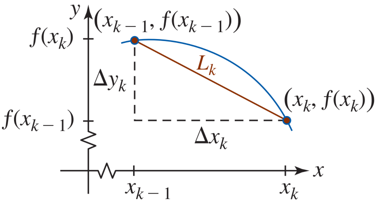
Longitud de Arco

Sea f una función con gráfica suave y P una partición cualquiera del intervalo $[a, b]$. Como se muestra a continuación, es posible aproximar la longitud de la gráfica sobre cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ al calcular la longitud L_k de la cuerda entre los puntos $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ y $(x_k, f(x_k))$ para $k = 1, 2, ..., n$.



Longitud de Arco

Ahora bien,



podemos notar que:

$$L_k = \sqrt{(\Delta y_k)^2 + (\Delta x_k)^2} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$$

luego, por el T.V.M. sabemos que en cada subintervalo abierto existe $t_k \in (x_{k-1}, x_k)$, tal que:

$$f'(t_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \Leftrightarrow f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

Longitud de Arco

Dada la relación anterior, podemos expresar la longitud L_k de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} L_k &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} \\ &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + [f'(t_k)]^2(x_k - x_{k-1})} \\ &= \sqrt{1 + [f'(t_k)]^2}(x_k - x_{k-1}) \end{aligned}$$

Ahora bien, la longitud de la curva ,aproximadamente está dada por:

$$L(C) \approx$$

Podemos notar que la suma anterior es una suma de Riemann, por ende la longitud de arco puede ser expresada por:

$$L(C) =$$

Ejemplos

1. Calcular la longitud de arco del gráfico de la curva $y = 4x^{3/2}$ desde el origen $(0,0)$ al punto $(1,4)$.

   Solución: Notemos que:

$$y = 4x^{3/2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 6x^{1/2}$$

   la cual es continua en el intervalo $[0,1]$. Así, se tiene:

$$L(C) = \int_0^1 \sqrt{1 + [6x^{1/2}]^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 36x}\, dx \approx 4.14$$

Ejemplos

2. Determinar la longitud de arco de la curva

$$y = x^{2/3}, \quad x \in [1, 2]$$

Solución: Notemos que:

$$y = x^{2/3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

la cual es continua en el intervalo $[1, 2]$. Así, se tiene:

$$L(C) = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{4}{9x^{2/3}}}\, dx \approx 1.16$$

Ejemplos

Por otro lado, si despejamos x de la expresión, se tiene:

$$x = y^{3/2} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{3}{2}\sqrt{y}$$

la cual es continua en el intervalo $[1, 2^{2/3}]$. Así:

$$L(C) = \int_{1}^{2^{2/3}} \sqrt{1 + \frac{9}{4}y}\, dy \approx 1.16$$

Ejercicios

1. Considere la catenaria definida por $y = 20\cosh\left(\frac{x}{20}\right)$ definida para $x \in [-20, 20]$. Determine la longitud de la curva en el intervalo dado.

2. Determine la longitud de la curva $C : y = \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{2x}$, definida en el intervalo $[1, 3]$.

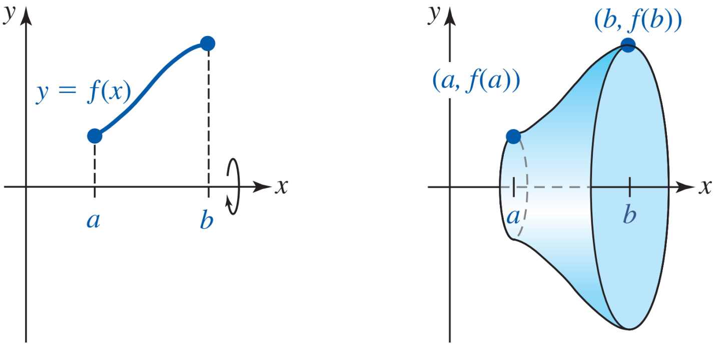
3. Sea $f(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{8}x^2$, con $x \in [1, 2]$. Hallar su longitud.

4. Muestre que el perímetro de una circunferencia de radio $r > 0$ es $2\pi r$.

5. Determine la longitud del astroide de ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

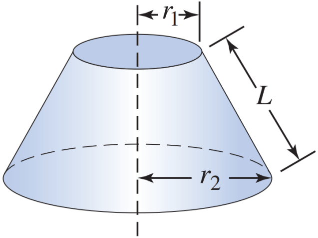
Área de la Superficie de Revolución

Notemos que si consideramos la gráfica de una función continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que gira alrededor del eje X, genera un sólido de revolución y lo que nos interesa estudar ahora se relaciona con determinar una expresión para calcular el área S de la superficie, es decir, **el área de la superficie de revolución** sobre $[a,b]$. Como se muestra a continuación:



Área de la Superficie de Revoluación

Para comenzar con la construcción de la expresión que nos permitirá calcular el área de una superficie de revolución debemos recordar la fórmula para el área lateral de un tronco de cono circular recto, la cual excluye la base inferior y superior.

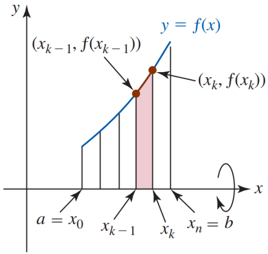


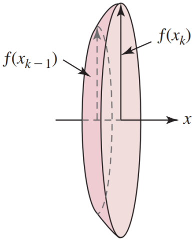
Si r_1 y r_2 son los radios de las partes superior e inferior y L es la longitud de la generatriz, se tiene que:

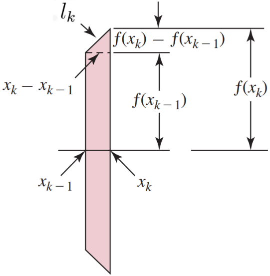
$$A(S) = \pi(r_1 + r_2)L$$

Área de la Superficie de Revolución

Sean $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$ y P una partición cualquiera del intervalo $[a,b]$. Podemos considerar un subintervalo de la forma $[x_{k-1}, x_k]$, luego si unimos con una cuerda los puntos $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ y $(x_k, f(x_k))$ formamos un trapecio y cuando giramos esta región en torno al eje X se genera un tronco de cono circular recto con radios $f(x_{k-1})$ y $f(x_k)$, como se muestra a continuación:







Área de la Superficie de Revolución

donde l_k está dado por:

$$\begin{aligned} l_k &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} \\ &= \sqrt{1 + (f'(t_k))^2}(x_k - x_{k-1}) \end{aligned}$$

Así, tenemos que el área de la superficie de revolución de un trapecio está dada por:

$$S_k = \pi[f(x_k) + f(x_{k-1})]\sqrt{1 + (f'(t_k))^2}\Delta x_k$$

Luego, el área de la superficie de revolución, aproximadamente puede ser representada por:

$$A(S) \approx$$

Área de la Superficie de Revolución

Podemos notar que la suma anterior corresponde a una suma de Riemann, es por esto que podemos afirmar que el área de la superficie de revolución está dada por:

$$A(S) =$$

Ejemplos

1. Determine el área de la superficie S que se forma al girar la gráfica de $y = \sqrt{x}$ sobre el intervalo $[1, 4]$ alrededor del eje X.

   Solución: Notemos que $y' = \frac{1}{2}x^{-1/2}$, luego:

$$\begin{aligned} A(S) &= 2\pi \int_1^4 \sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx \\ &= 2\pi \int_1^4 \sqrt{x}\sqrt{\frac{4x+1}{4x}}\, dx \\ &= 2\pi \int_1^4 \sqrt{x}\frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}\, dx \\ &= \pi \int_1^4 \sqrt{4x+1}\, dx \\ &\approx 30.85 \end{aligned}$$

Ejemplos

2. Determine el área de la superficie S que se forma al girar la gráfica de $y = \sqrt{x}$ sobre el intervalo $[1, 4]$ alrededor del eje $x = -3$.

Ejercicios

1. Muestre que el área de la superficie de una esfera de radio $r > 0$ está dada por $4\pi r^2$.
2. Encuentre el área de la superficie de revolución al hacer girar en torno al eje X la curva $y = \sin(x)$ con $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.
3. Hallar el área de la superficie de revolución obtenida al girar el gráfico de $f(x) = 2\sqrt{x}$ con $x \in [1, 4]$ en torno a:

   (a) $x = 0$ (b) $y = 0$ (c) $x = -2$ (d) $y = 4$
4. La superficie formada por dos planos paralelos que cortan una esfera de radio r se denomina **zona esférica**. Determine el área de la superficie esférica que se muestra a continuación: