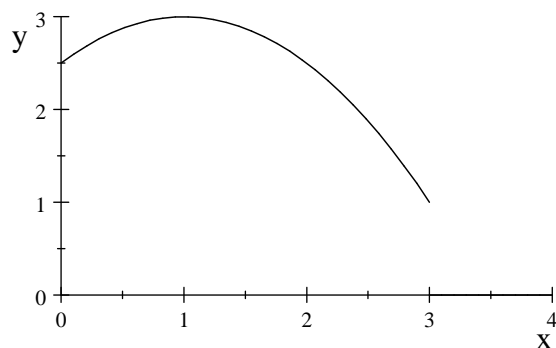


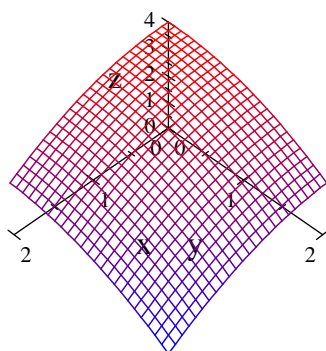
1 Integrales múltiples.

1.1 Integrales dobles.

Para el caso de una variable, con una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y no negativa, la integral $\int_a^b f(x)dx$ permite calcular el área de la región del plano xy bajo la curva $y = f(x)$. Por ejemplo, para $f(x) = 3 - \frac{1}{2}(x - 1)^2$, con $0 \leq x \leq 3$, el área de la región mostrada está dada por la integral $\int_0^3 (3 - \frac{1}{2}(x - 1)^2)dx = \frac{15}{2}$



En el caso de una función de dos variables, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, continua y no negativa sobre el conjunto $R = [a, b] \times [c, d]$ (rectángulo del plano), la integral doble $\int \int_R f(x, y)d(x, y)$ nos permitirá calcular el volumen de la región del espacio xyz bajo la gráfica de f .



Así como $m(I) = b - a$ mide la longitud del intervalo $I = [a, b]$, el producto $m(R) = (b - a)(d - c)$ mide el área del rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$. En ambos casos hablaremos de la **medida** del conjunto.

Dadas una partición $P_x = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$ y una partición $P_y = \{y_0, y_1, \dots, y_m\}$ de $[c, d]$:

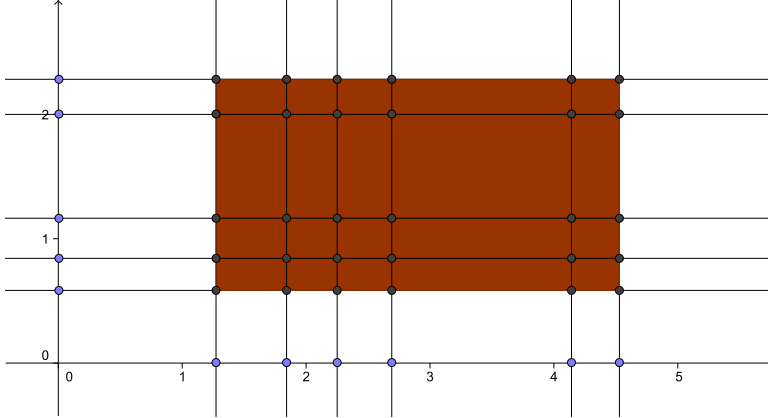
$$\begin{aligned} a &= x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \\ c &= y_0 < y_1 < \dots < y_m = d \end{aligned}$$

el conjunto $P = P_x \times P_y = \{(x_0, y_0), \dots, (x_0, y_m), (x_1, y_0), \dots, (x_n, y_m)\}$ se denomina partición de R .

P_x divide $[a, b]$ en n subintervalos: $[x_{i-1}, x_i]$, con $i = 1, \dots, n$, cada uno de longitud $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$.

P_y divide $[c, d]$ en m subintervalos: $[y_{j-1}, y_j]$, con $j = 1, \dots, m$, cada uno de longitud $\Delta_j = y_j - y_{j-1}$.

P divide $R = [a, b] \times [c, d]$ en $r = nm$ subrectángulos: $R_k = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, con $k = 1, \dots, r$, cada uno de área (medida) $\Delta(R_k) = \Delta_i \cdot \Delta_j$.



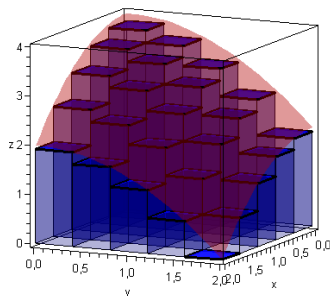
Como la f es continua sobre cada R_k , existen:

$$m_k = \min \{f(x, y) : (x, y) \in R_k\} : \text{valor mínimo de } f \text{ en } R_k$$

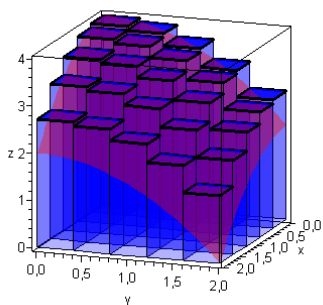
$$M_k = \max \{f(x, y) : (x, y) \in R_k\} : \text{valor máximo de } f \text{ en } R_k$$

Los productos $m_k \cdot \Delta(R_k)$ y $M_k \cdot \Delta(R_k)$ representan, respectivamente, los volúmenes de paralelepípedos de base R_k y altura m_k y M_k . Estos permiten definir:

la suma inferior de f asociada a $P : s(f, P) = \sum_{k=1}^r m_k \cdot \Delta(R_k)$



la suma superior de f asociada a $P : S(f, P) = \sum_{k=1}^r M_k \cdot \Delta(R_k)$.



Desde un punto de vista geométrico, el volumen V de la región bajo la gráfica de f debe verificar

$$s(f, P) \leq V \leq S(f, P)$$

y esto, cualquiera sea la partición P del rectángulo R .

La idea básica consiste en que mientras más *pequeños* sean **todos** los subrectángulos determinados por la partición, las sumas inferior y superior deben *aproximar* mejor el volumen de la región

Sean P y Q dos particiones de R . Se dice que Q **refina** a P cuando $P \subset Q$. Esto significa que cada subrectángulo determinado por P se *divide* en varios subrectángulos según la partición Q .

Se puede probar que, en este caso,

$$s(f, P) \leq s(f, Q) \leq V \leq S(f, Q) \leq S(f, P)$$

O sea, al refinar la partición, la suma inferior crece y la superior decrece.

Otro elemento importante acá es el concepto de norma de una partición P , definido como: $\|P\|$ igual a la mayor área de todos los subrectángulos determinados por la partición. Así, la partición P tiene norma $\|P\|$ *pequeña* cuando todos los subrectángulos tienen área pequeña.

Finalmente, **se prueba** que existe un número real **I** (único) que verifica:

dato $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que :

$$\|P\| < \delta \Rightarrow |S(f, P) - I| < \varepsilon \quad \wedge \quad |s(f, P) - I| < \varepsilon$$

Este número I puede ser aproximado tanto como se quiera por una suma inferior y una suma superior, a condición que la partición escogida tenga norma suficientemente pequeña.

Además este número satisface: $s(f, P) \leq I \leq S(f, P)$, para todas las particiones. Luego él permite definir el volumen de la región bajo la gráfica de f y, más importante aún, define la integral doble de f sobre el rectángulo R :

Para una función $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, la integral doble de f es:

$$\iint_R f(x, y) d(x, y) = I = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} s(f, P) = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} S(f, P)$$

Observación.- Si la f no es continua pero es acotada sobre el rectángulo R , se puede repetir la construcción anterior cambiando *mínimo* y *máximo* por *ínfimo* y *supremo* en la definición de los m_k y M_k . En este caso no está garantizada la existencia del número I que se aproxime simultáneamente por sumas inferiores y sumas superiores. Por esto aparece el concepto de función integrable cuando existe I como antes y función no integrable cuando no existe tal número. En todo caso tenemos claro que las funciones continuas son integrables.

Hemos dado una idea de la definición (teórica) del concepto de integral, pero lo más importante para nosotros será determinar cómo se calcula una integral doble. Antes de dar el teorema que permite evaluar, de manera práctica, una integral, mencionaremos algunas propiedades importantes de ella:

1. Si $f, g : R \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones integrables sobre el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$, entonces las funciones $f + g$ y cf , donde c es una constante, son integrables y

$$\begin{aligned} \iint_R [f(x, y) + g(x, y)] d(x, y) &= \iint_R f(x, y) d(x, y) + \iint_R g(x, y) d(x, y) \\ \iint_R cf(x, y) d(x, y) &= c \iint_R f(x, y) d(x, y) \end{aligned}$$

2. Si $f, g : R \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones integrables sobre el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$, entonces

$$\begin{aligned} f(x, y) \leq g(x, y), \forall (x, y) \in R &\Rightarrow \iint_R f(x, y) d(x, y) \leq \iint_R g(x, y) d(x, y) \\ \left| \iint_R f(x, y) d(x, y) \right| &\leq \iint_R |f(x, y)| d(x, y) \end{aligned}$$

3. Si el rectángulo R se particiona en n subrectángulo R_1, \dots, R_n y f es integrable sobre R , entonces

$$\iint_R f(x, y) d(x, y) = \iint_{R_1} f(x, y) d(x, y) + \dots + \iint_{R_n} f(x, y) d(x, y)$$

1.2 Integrales iteradas.

El siguiente teorema permite el cálculo de una integral doble mediante la evaluación de dos integrales iteradas simples (integrales de funciones de una variable real).

Sea $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua sobre el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$

Para cada $x \in [a, b]$, la función $f_x : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_x(y) = f(x, y)$ es continua (e integrable) y podemos evaluar $F_x(x) = \int_c^d f_x(y) dy = \int_c^d f(x, y) dy$. Análogamente, para cada $y \in [c, d]$, podemos definir $F_y(y) = \int_a^b f_y(x) dx = \int_a^b f(x, y) dx$.

Teorema 1 (de Fubini). Con las notaciones anteriores, la función F_x es integrable sobre $[a, b]$, la función F_y es integrable sobre $[c, d]$ y

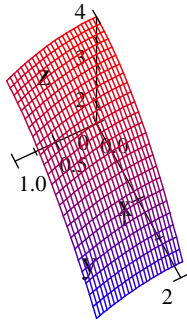
$$\iint_R f(x, y) d(x, y) = \int_a^b F_x(x) dx = \int_c^d F_y(y) dy$$

La fórmula anterior se escribe

$$\iint_R f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

Las dos integrales a la derecha se llaman integrales iteradas. Note que el proceso de integración se puede efectuar en cualquiera de los dos órdenes posibles, $dydx$: primero con respecto a y y después con respecto a x , o al revés $dx dy$.

Ejemplo 2 Calcule el volumen de la región bajo el paraboloide $z = \frac{1}{2}(8 - x^2 - y^2)$ sobre el rectángulo $R = [0, 1] \times [0, 2]$.



$$\begin{aligned} V &= \iint_R \frac{1}{2}(8 - x^2 - y^2) d(x, y) = \int_0^1 \int_0^2 \frac{1}{2}(8 - x^2 - y^2) dy dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{20}{3} - x^2 \right) dx = \frac{19}{3} \end{aligned}$$

Ejercicio 3 Evalúe la integral $\iint_R x^2 \sin(xy) d(x, y)$, donde $R = [0, \pi] \times [0, 1]$

1.3 Integrales triples y múltiples.

La misma construcción anterior puede hacerse con una función de n variables:

Un rectángulo en \mathbb{R}^n es un conjunto de la forma $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$ y su **medida** es el producto de las longitudes de los intervalos que lo definen. Podemos también considerar particiones para el rectángulo y con ellas definir sumas inferior y superior para una función $f : R \rightarrow \mathbb{R}$, de n variables x_1, x_2, \dots, x_n que sea acotada sobre el rectángulo.

Se define así la integral de f sobre el rectángulo R

$$\int \cdots \int_R f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n)$$

El Teorema de Fubini continúa válido permitiendo calcular la integral anterior mediante n integrales iteradas:

$$\int \cdots \int_R f(x_1, \dots, x_n) d(x_1, \dots, x_n) = \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

Esta posibilidad incluye los $n!$ órdenes de integración posibles.

Ejemplo 4 Calcular la integral triple $\iiint_R (x^2yz + 3y^2) d(x, y, z)$ sobre el rectángulo $R = [0, 2] \times [1, 2] \times [0, 3]$.

Hasta aquí sabemos que todas las funciones continuas sobre un rectángulo son integrables. Pero nos podemos preguntar ¿hay otras funciones que no sean continuas en todos los puntos del rectángulo y sin embargo sean integrables? ¿Cómo reconocerlas?

Definición 5 Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ tiene contenido nulo cuando: dado $\varepsilon > 0$ existen rectángulos R_1, R_2, \dots, R_p tales que

$$C \subset R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_p \text{ y } m(R_1) + m(R_2) + \dots + m(R_p) < \varepsilon$$

Algunas propiedades directas de la definición son:

1. Todo conjunto formado por un punto tiene contenido nulo.
2. La unión finita de conjuntos de contenido nulo tiene contenido nulo.
3. Todo conjunto finito tiene contenido nulo.

4. Un subconjunto de un conjunto de contenido nulo tiene contenido nulo.
5. Un rectángulo R para el cual uno de los intervalos que lo definen se reduzca a un punto ($[a_k, a_k] = \{a_k\}$) tiene contenido nulo.
6. Las funciones de clase \mathcal{C}^1 preservan el contenido nulo. Esto es, si $\varphi : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase \mathcal{C}^1 en el abierto A y C es un conjunto de contenido nulo en \mathbb{R}^n con $\bar{C} \subset A$, entonces $\varphi(C)$ es de contenido nulo en \mathbb{R}^n .
7. De la propiedad anterior se sigue que:
 - a) una curva acotada $C : y = f(x)$, donde f es de clase \mathcal{C}^1 es de contenido nulo en \mathbb{R}^2
 - b) una superficie acotada $S : z = f(x, y)$, donde f es de clase \mathcal{C}^1 es de contenido nulo en \mathbb{R}^3 .

Teorema 6 Sea $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función **acotada** en un rectángulo $R \subset \mathbb{R}^n$. Si f es continua en todos los puntos de $R - C$, donde $C \subset R$ es un conjunto de contenido nulo, entonces f es integrable en R .

Debe tenerse presente que aunque la clase de funciones determinada en el teorema anterior es bastante amplia, no incluye a todas las funciones integrables. Para caracterizar a todas las funciones integrables sobre un rectángulo R se necesita el concepto de **medida nula**.

Definición 7 Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ tiene medida nula cuando: dado $\varepsilon > 0$ existe una sucesión de rectángulos $R_1, R_2, \dots, R_k, \dots$ tales que

$$C \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k \quad y \quad \sum_{k=1}^{\infty} m(R_k) < \varepsilon$$

Propiedades que se deducen rápidamente de la definición son:

1. Todo conjunto formado por un punto tiene medida nula.
2. La unión numerable de conjuntos de medida nula tiene medida nula.
3. Todo conjunto numerable tiene medida nula.
4. Un subconjunto de un conjunto de medida nula tiene medida nula.

5. Todo conjunto de contenido nulo tiene medida nula. (el recíproco no vale)
6. Todo conjunto de medida nula y compacto tiene contenido nulo.

Teorema 8 (de Lebesgue).- Sea $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada en el rectángulo R . La función f es integrable en R si y sólo si, los puntos donde f es discontinua forman un conjunto de medida nula.

1.4 Conjuntos medibles.

Por ahora hemos trabajado el concepto de integral sobre rectángulos del espacio \mathbb{R}^n . Para definir integral sobre conjuntos acotados más generales se requiere que éstos cumplan cierta condición.

Para un conjunto $B \subset \mathbb{R}^n$ se define la función característica de B , $\chi_B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\chi_B(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } X \in B \\ 0 & \text{si } X \notin B \end{cases}$$

Note que los puntos de discontinuidad de χ_B son los puntos de la frontera de B . Además, cuando B es acotado él está incluido en algún rectángulo R ($B \subset R$). Según el teorema de Lebesgue, χ_B es integrable sobre R si, y sólo si, $Fr(B)$ tiene medida nula (o contenido nulo, por ser compacto).

Definición 9 Un conjunto B es medible (según Jordan) si es acotado y $Fr(B)$ tiene medida nula. Se define la medida de B por

$$m(B) = \int_R \chi_B(X) dX \quad \text{donde } R \text{ es un rectángulo que contiene a } B$$

Sea ahora $f : B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada sobre un conjunto medible B . Elejimos un rectángulo R tal que $B \subset R$ y se define una extensión de f

$$f_B(X) = \begin{cases} f(X) & \text{si } X \in B \\ 0 & \text{si } X \notin B \end{cases}$$

Definición 10 f es integrable sobre B cuando f_B es integrable sobre R y se define

$$\int \cdots \int_B f(X) dX = \int \cdots \int_R f_B(X) dX$$

Del criterio de Lebesgue, f es integrable sobre el conjunto medible B si, y sólo si, el conjunto de puntos de discontinuidad de f tiene medida nula.

1.5 Cálculo de integrales sobre conjuntos medibles.

Integrales dobles.

Caso 1.- Para integrales dobles sobre el conjunto

$B = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$, el cual se abrevia

$$B : \begin{cases} a \leq x \leq b \\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \end{cases}$$

Se puede probar que si φ y ψ son integrables en $[a, b]$ (por ejemplo, cuando son continuas), entonces B es medible. Si f es integrable en B , entonces

$$\iint_B f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy dx$$

Caso 2.- Para integrales dobles sobre el conjunto

$B = \{(x, y) : c \leq y \leq d, u(y) \leq x \leq v(y)\}$, el cual se abrevia

$$B : \begin{cases} c \leq y \leq d \\ u(y) \leq x \leq v(y) \end{cases}$$

Se puede probar que si u y v son integrables en $[c, d]$ (por ejemplo, cuando son continuas), entonces B es medible. Si f es integrable en B , entonces

$$\iint_B f(x, y) d(x, y) = \int_c^d \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx dy$$

Note que en las dos fórmulas anteriores, la representación del conjunto B , según se trate del caso 1 o 2, determina el orden de integración en las integrales iteradas. Hay casos en que el conjunto medible B permite las dos representaciones (caso 1 y caso 2) y por lo tanto se puede escoger entre los dos posibles órdenes de integración. Muchas veces uno de los posibles órdenes es más conveniente que el otro.

Ejemplo 11 Sea T el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$ y $(1, 1)$. Calcule la integral doble

$$\iint_T xy d(x, y)$$

usando los dos posibles órdenes de integración.

Ejemplo 12 Sea D la región del primer octante del espacio 3-d acotada por el cilindro parabólico $z = 1 - y^2$ y el plano $x + y = 2$. Mediante una integral doble calcule el volumen de D .

$$\int_0^1 \int_0^{2-y} (1 - y^2) dx dy$$

Integrales triples.

Caso 1.- Sobre un conjunto B de la forma

$$B : \begin{cases} a \leq x \leq b \\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \\ u(x, y) \leq z \leq v(x, y) \end{cases}$$

donde las funciones φ, ψ son continuas en $[a, b]$ y u, v también son continuas. Si f es integrable en B , entonces

$$\iiint_B f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \int_{u(x, y)}^{v(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

Observe que la proyección del conjunto B sobre el plano xy es el conjunto $a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$, el cual está representado según el caso 1 de las integrales dobles.

Esta descripción del conjunto B determina el orden $dz dy dx$ en las integrales iteradas. Existen otros 5 posibles órdenes de integración que pueden usarse según el conjunto B admita una representación que los permita. Sólo mencionaremos uno más.

Caso 2.- Sobre un conjunto B de la forma

$$B : \begin{cases} c \leq y \leq d \\ \varphi(y) \leq z \leq \psi(y) \\ u(y, z) \leq x \leq v(y, z) \end{cases}$$

con las funciones como antes, se tiene

$$\iiint_B f(x, y, z) d(x, y, z) = \int_c^d \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \int_{u(y, z)}^{v(y, z)} f(x, y, z) dx dz dy$$

Ejemplo 13 Calcule la integral $\iiint_T z d(x, y, z)$ donde T es tetraedro de vértices $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$ y $(0, 0, 4)$, utilizando dos posibles órdenes de integración.

Primero deducir que la ecuación del plano que pasa por los 3 puntos distintos del origen es

$$6x + 4y + 3z = 12$$

Ejemplo 14 *Escriba las integrales iteradas para calcular la integral triple*

$$\int \int \int_D \sqrt{x^2 + z^2} dV$$

donde D es la región encerrada por el paraboloides $y = x^2 + z^2$ y el plano $y = 4$, usando los órdenes: $dzdydx$ y $dydzdx$.

1.6 Cambio de variables.

Para integración en una variable es fácil obtener la fórmula

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(g(t)) g'(t) dt$$

donde $a = g(c)$ y $b = g(d)$. En efecto: si F es una antiderivada de f entonces

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= F(b) - F(a) \\ \int_c^d f(g(t)) g'(t) dt &= F(g(d)) - F(g(c)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos la fórmula del cambio de variables

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x) dx = \int_c^d f(g(t)) g'(t) dt$$

Para integrales dobles también se tiene una fórmula de cambio de variables, para evaluar una integral de la forma

$$\int \int_B f(x, y) d(x, y)$$

con B un subconjunto medible del plano xy y f una función integrable, como una nueva integral sobre un plano uv .

Más precisamente, considere una transformación $T : A \rightarrow B$, $(u, v) \mapsto T(u, v) = (x, y)$, la que puede representarse por

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \end{aligned}$$

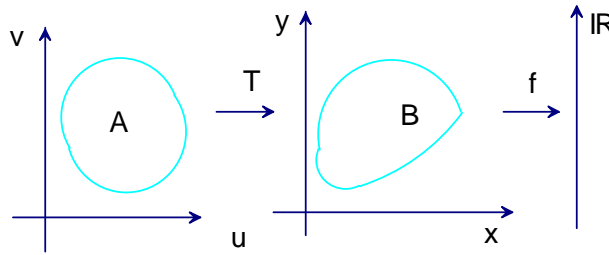
que sea de clase C^1 , inyectiva de A **sobre** el conjunto B y tal que el Jacobiano de T no se anule, esto es:

$$JT(u, v) \equiv \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

para todo $(u, v) \in A$. En estas condiciones se puede probar que

$$\int \int_B f(x, y) \, d(x, y) = \int \int_A f(x(u, v), y(u, v)) \, |JT(u, v)| \, d(u, v)$$

El teorema aún es válido si falla la inyectividad o la no anulación del jacobiano en un subconjunto de A de medida nula.



Obs.- La transformación T anterior queda definida por

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \end{aligned}$$

Un caso particular destacable corresponde al cambio de coordenadas cartesianas x y a polares r θ según se describe a continuación

1.6.1 Coordenadas polares.

La transformación es $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ es de clase C^1 con jacobiano

$$JT(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

luego puede aplicarse el teorema en cualquier subconjunto medible A del plano r, θ , incluido en el semiplano $r \geq 0$, donde T sea inyectiva (salvo quizás en un conjunto de medida cero). Así, con $B = T(A)$ se tiene

$$\int \int_B f(x, y) d(x, y) = \int \int_A f(r \cos \theta, r \sin \theta) r d(r, \theta)$$

Ejemplo 15 Calcular $I = \int \int_B (4 - x^2 - y^2) d(x, y)$, donde $B : x^2 + y^2 \leq 4$.

En coordenadas polares $I = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r dr d\theta = 8\pi$

Ejemplo 16 Calcular el volumen del sólido sobre el plano xy , en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ y bajo el paraboloides $z = 4 - x^2 - y^2$.

Otro caso importante lo constituyen las transformaciones lineales biyectivas (isomorfismos lineales).

1.6.2 Cambio de variables de tipo lineal.

Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ está definida por: $(x, y) = T(u, v) = (au + bv, cu + dv)$, con a, b, c, d constantes. El jacobiano de T es el determinante de la matriz que representa a la transformación lineal:

$$JT(u, v) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

y él será no nulo cuando la transformación sea inyectiva. Luego, para cualquier A medible en el plano uv , con $B = T(A)$ medible en el plano xy se tiene

$$\int \int_B f(x, y) d(x, y) = \int \int_A f(au + bv, cu + dv) |JT(u, v)| d(u, v)$$

Note que en el caso que $f(x, y) = 1$, la fórmula queda

$$m(B) = |JT(u, v)| m(A)$$

siendo la medida del conjunto su área.

Ejemplo 17 Sea B el triángulo determinado en el primer cuadrante por los ejes coordenados y la recta $x + y = 2$. Calcule la integral

$$\int \int_B e^{\left(\frac{y-x}{y+x}\right)} d(x, y)$$

Para integrales triples la fórmula del cambio de variables, para la transformación T

$$\begin{aligned}x &= x(u, v, w) \\y &= y(u, v, w) \\z &= z(u, v, w)\end{aligned}$$

con las mismas propiedades anteriores, queda

$$\begin{aligned}& \int \int \int_B f(x, y, z) d(x, y, z) \\&= \int \int \int_A f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |JT(u, v, w)| d(u, v, w)\end{aligned}$$

Ejemplos importantes son el uso de las coordenadas cilíndricas y esféricas que se describen a continuación:

1.7 Coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\y &= r \sin \theta \\z &= z\end{aligned}$$

$$J(r, \theta, z) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

Para $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ integrable en $B \subset \mathbb{R}^3$, conjunto medible

$$\int \int \int_B f(x, y, z) d(x, y, z) = \int \int \int_A f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r d(r, \theta, z)$$

donde A es la descripción de B en coordenadas cilíndricas.

Ejemplo 18 Calcule el volumen del sólido B en el primer octante limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 2y$, el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano xy

	<i>cartesianas</i>	<i>cilíndricas</i>
<i>cilindro</i>	$x^2 + y^2 = 2y$	$r = 2 \sin \theta$
<i>cono</i>	$z = \sqrt{x^2 + y^2}$	$z = r$
<i>plano</i>	$z = 0$	$z = 0$

La región B se describe en coordenadas cilíndricas por A :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 &\leq r \leq 2 \sin \theta \\ 0 &\leq z \leq r \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} Vol(B) &= \int \int \int_B d(x, y, z) \\ &= \int \int \int_A r d(r, \theta, z) \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \sin \theta} \int_0^r r dz dr d\theta \\ &= \frac{16}{9} \end{aligned}$$

1.8 Coordenadas esféricas.-

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \phi \cos \theta \\ y &= \rho \sin \phi \sin \theta \\ z &= \rho \cos \phi \end{aligned}$$

$$J(\rho, \theta, \phi) = \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & -\rho \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \sin \theta \\ \cos \phi & 0 & -\rho \sin \phi \end{vmatrix} = -\rho^2 \sin \phi$$

Para $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ integrable en $B \subset \mathbb{R}^3$, conjunto medible

$$\int \int \int_B f(x, y, z) d(x, y, z) = \int \int \int_A f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d(\rho, \theta, \phi)$$

donde A es la descripción de B en coordenadas esféricas.

Ejemplo 19 Calcule el volumen del sólido B limitado por la esfera $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$, y sobre el cono $\sqrt{3}z = \sqrt{x^2 + y^2}$

	<i>cartesianas</i>	<i>esféricas</i>
esfera	$x^2 + y^2 + z^2 = 2z$	$\rho = 2 \cos \phi$
cono	$\sqrt{3}z = \sqrt{x^2 + y^2}$	$\phi = \pi/3$

La región B se describe en coordenadas esféricas por A :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \phi \leq \pi/3 \\ 0 &\leq \theta \leq 2\pi \\ 0 &\leq \rho \leq 2 \cos \phi \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} Vol(B) &= \int \int \int_B d(x, y, z) \\ &= \int \int \int_A \rho^2 \sin \phi d(\rho, \theta, \phi) \\ &= \int_0^{\pi/3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2 \cos \phi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi \\ &= \frac{5}{4}\pi \end{aligned}$$

Finalmente comentaremos algunos aspectos de las integrales múltiples impropias, en el caso de dos variables, mediante unos ejemplos:

Cálculo de $\int \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} d(x, y)$.

La idea principal es *cubrir* el plano \mathbb{R}^2 mediante una sucesión creciente de conjunto medibles:

$$D_n : x^2 + y^2 \leq n^2, \forall n \in \mathbb{N}$$

Calcular la integral sobre cada D_n , usando coordenadas polares

$$\begin{aligned} \int \int_{D_n} e^{-x^2-y^2} d(x, y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^n e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= \pi - \pi e^{-n^2} \end{aligned}$$

y tomar límite

$$\begin{aligned} \int \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} d(x, y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \int_{D_n} e^{-x^2-y^2} d(x, y) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\pi - \pi e^{-n^2}) \\ &= \pi \end{aligned}$$

Un aspecto importante de esta teoría es mostrar que el resultado obtenido no depende de la sucesión de conjuntos elegida. Esto ocurre al menos para las funciones no negativas tales como $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$.

Así, al tomar la sucesión de cuadrados $T_n : [-n, n] \times [-n, n]$ también se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \int_{T_n} e^{-x^2-y^2} d(x, y) = \pi$$

Ahora si consideramos que

$$\begin{aligned} \int \int_{T_n} e^{-x^2-y^2} d(x, y) &= \int_{-n}^n \int_{-n}^n e^{-x^2} e^{-y^2} dy dx \\ &= \int_{-n}^n e^{-x^2} dx \int_{-n}^n e^{-y^2} dy \\ &= \left(\int_{-n}^n e^{-x^2} dx \right)^2 \end{aligned}$$

se concluye que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

También, dado que $g(x) = e^{-x^2}$ es positiva y par

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Ejemplo 20 Sea $D : x^2 + y^2 \leq 1$. Calcule $\int \int_D \frac{1}{\sqrt{1+x}} d(x, y)$.