clase 10 (Lu 05/09/22)

Ya tenemos claro que toda EDO $\boxed{Ly=0}$ con L op. dif. lineal a coef. constantes está relacionada con las raíces del polinomio p asociado al operador L.

1	4	6	4	$\alpha+2$
	-2	-4	-4	-2
1	2	2	0	

Ejemplo:

Resolver $Ly=0$ con $L = D^3+4D^2+6D+4$.

$$\Longleftrightarrow \boxed{y'''(x)+4y''(x)+6y'(x)+4y(x)=0}$$

Aquí $p(\alpha) = \alpha^3+4\alpha^2+6\alpha+4$.
$= (\alpha+2)(\alpha^2+2\alpha+2)$

Las raíces de p resultan ser: $\left\{\begin{array}{l}\alpha_1 = -2\\ \alpha_2 = -1+i\\ \alpha_3 = \underline{-1}-i\end{array}\right.$

Por tanto las soluciones de $Ly=0$ son $\boxed{y_1(x)=e^{-2x}}$

$$(\alpha^2+2\alpha+2=0)$$

$$y_2(x) = e^{-x}\,\mathrm{Re}(e^{ix}) = \underline{e^{-x}\cos(x)}$$

$$y_3(x) = e^{-x}\,\mathrm{Im}(e^{ix}) = \underline{e^{-x}\operatorname{sen}(x)}$$

Además, $W(y_1, y_2, y_3; 0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$,

Así,

$$B = \{ y_1(x) = e^{-x};\ y_2(x) = e^{-x}\cos(x);\ y_3(x) = e^{-x}\operatorname{sen}(x) \}$$

es un conjunto fundamental para

$$\boxed{y'''(x) + 4y''(x) + 6y'(x) + 4y(x) = 0}$$

$$L(u(x)) = 0 \Rightarrow L^2(x\,u(x)) = 0.$$

OBS: Además, si L es a coeficientes constantes, y si $u = u(x) \in Ker(L)$, entonces:

$$z(x) = x\,u(x) \in Ker(L \cdot L) = Ker(L^2)$$

$$(\Rightarrow x\,z(x) \in Ker(L\,L^2) = Ker(L^3), \text{ etc}).$$

Ejemplo: si $L = D$, entonces $Ly = 0$ $\left(D = \frac{d}{dx}\right)$

$$\Leftrightarrow y'(x) = 0$$

$$\Rightarrow y(x) = cte \Leftrightarrow y = c \cdot 1.$$

Por tanto, la EDO: $\boxed{D^3 y = 0 \Leftrightarrow y'''(x) = 0}$

tiene como sistema fundamental a

$B = \{1, x, x^2\}$. Esto es, toda solución de $y'''(x) = 0$, es del tipo $\boxed{z(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2,}$

con c_1, c_2, c_3 constantes.

Recuerde que c_1, c_2, c_3 se determinan de modo único si sabemos

$$(P) \quad y'''(x) = 0 \;+\; \text{C. I.} \quad \begin{cases} y(x_0) = 1. \\ y'(x_0) = -1 \\ y''(x_0) = 1. \end{cases}$$

$x_0 = 1$

como es la única solución de (P)

$$z(x) = c_1 \cdot 1 + c_2 x + c_3 x^2 \Rightarrow \;=$$

$$\Rightarrow \boxed{z(1) = c_1 + c_2 + c_3 = 1}$$

$$\Rightarrow z'(x) = c_2 + 2c_3 x \Rightarrow$$

$$z'(1) = \boxed{2c_3 + c_2 = -1}$$

$$z''(x) = 2c_3 \Rightarrow \quad z''(1) = \boxed{2c_3 = 1}$$

$$\Rightarrow c_3 = 1/2$$

$$\Rightarrow c_2 = -1 - 1 = -2$$

$$c_1 = 1 - (c_3 + c_2)$$

$$= 1 - (1/2 + -2) = 1 - (-3/4)$$

$$c_1 = 7/4$$

La única solución de (P)

$$\Rightarrow z(x) = (7/4) - 2x + 1/2 x^2$$

Ejemplo 2. Resolver

$$\boxed{y^{(7)}(x) - 2y^{(5)} + y^{(3)} = 0}$$

$$\iff (D^7 - 2D^5 + D^3)\,y = 0$$

Aquí:

$$P(\alpha) = \alpha^7 - 2\alpha^5 + \alpha^3 = \alpha^3(\alpha^4 - 2\alpha^2 + 1)$$
$$= \alpha^3(\alpha^2 - 1)^2$$
$$= \alpha^3[(\alpha - 1)(\alpha + 1)]^2$$

$$P(\alpha) = 0 \iff \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = \alpha_5 = 1 \\ \alpha_6 = \alpha_7 = -1 \end{cases}$$

Por tanto las soluciones son:

$y_1(x) = 1$; $y_2(x) = x \cdot 1$; $y_3(x) = x^2\ 1$

$y_4(x) = e^x$; $y_5(x) = x e^x$

$y_6(x) = e^{-x}$; $y_7(x) = x e^{-x}$.

Además, es fácil ver que:

¡Tarea!

$W(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7; x=0) = \cdots \neq 0.$

Por tanto;

$B = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7\}$ forma un sistema fundamental para.

$$\boxed{y^{(7)}(x) - 2y^{(5)} + y^{(3)} = 0 \quad (*)}$$

Ahora nos dedicaremos a resolver el problema $\boxed{Ly = f}$.

Primero veamos la forma de las soluciones.

TEOREMA:

Consideremos la EDO $\boxed{Ly = f}$

donde $\boxed{L = D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x).}$

aquí $f, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son funciones continuas definidas en $I =]a,b[$.

$\left(f = f(x),\ \forall j \in \{0, \ldots, n-1\},\ a_j = a_j(x) \right).$

Entonces si y es solución de $\boxed{Ly = f}$,

(Note que L tiene coeficientes, $a_j(x)$, variables).

resulta que $\boxed{y = y_h + y_p}$, donde

$\begin{cases} y_h \in \ker(L) \\ y_p \text{ es tal que } Ly_p = f \end{cases}$

(y_h es la solución de la EDO homogénea asociada, esto es, $Ly_h = 0$)

y_p es una solución particular de $Ly = f$, esto es, $Ly_p = f$

Dem:

Del Teorema de Ex. y unicidad se puede deducir que si las funciones coeficientes $a_j = a_j(x)$ y $f = f(x)$ son continuas, entonces

$$\boxed{Ly = f}$$ admite solución.

Así, sean y_1 e y_2 dos soluciones de

$$\boxed{Ly = f.}$$ Entonces $Ly_1 = f$, $Ly_2 = f$

$\Longrightarrow L(y_1 - y_2) = f - f = 0.$

$\Longrightarrow y_1 - y_2 \in Ker(L).$

Ponemos $y_h = y_1 - y_2$, i.e. $y_h \in Ker(L)$

sigue que: $$\boxed{y_1 = y_h + y_2}.$$

Ejemplo:

consideremos $\boxed{y''(x) + y(x) = x}$

o equivalentemente $Ly = x$

$$\boxed{L = D^2 + D^0 = D^2 + 1}$$

El teorema dice que toda solución $z = z(x)$ de $\boxed{y''(x) + y(x) = x}$, es de la forma

$z = y_h + y_p$ donde $\begin{cases} y_p''(x) + y_p(x) = x \\ y_h''(x) + y_h(x) = 0 \end{cases}$

(Note que $\{\cos(x), \operatorname{sen}(x)\} \subseteq \operatorname{Ker}(L)$; → ¡Tarea!

Además $y_p(x) = x$, es la solución particular para la EDO. $y'' + y = x$.

En este caso $\text{orden}(L) = 2 \implies \dim[\ker[L]] = 2$

y se puede ver que $B = \{\cos(x), \text{sen}(x)\}$

es un sistema fundamental para $\xrightarrow{} W(\cos(x), \text{sen}(x); 0) \neq 0$

$$\boxed{y''(x) + y(x) = x.} \quad (*)$$

Por tanto, todo $y_h \in \ker(L)$ tiene la forma

$$\boxed{y_h = c_1 \cos(x) + c_2 \,\text{sen}(x)}$$

con c_1, c_2 constantes arbitrarias.

Además, se verá que $y_p(x) = x$ es una solución particular para $(*)$. Por tanto, en este caso, toda solución y de $(*)$, es del tipo:

$$\boxed{y(x) = (c_1 \cos(x) + c_2 \,\text{sen}(x)) + x}$$

¿Cómo determinar las soluciones particulares de $\boxed{Ly = f}$?

Dos casos $\begin{cases} \text{(i) } L \text{ a coeficientes constantes} \\ \text{(ii) } L \text{ a coeficientes variables.} \end{cases}$

Caso i) con L a coeficientes constantes.

DEFINICIÓN:

Decimos que el operador diferencial lineal a coeficientes constantes L ANIQUILA a la función $g(t)$, si $L(g(t)) = 0$.

Ejemplos:

(i) $L = (D-5)$ aniquila a $g(t) = e^{5t}$ $\quad \to (D-5)(e^{5t}) = 0$

(ii) $L = (D+5)$ aniquila a $g(t) = e^{-5t}$

(iii) $L = (D-5)^2$ aniquila a e^{5t} y te^{5t}.

$\hookrightarrow (D-5)^3$ aniquila $z(t) = t^2 e^{5t}$

$Ly = 0$

$[D^2 - 10D + 25] = 0$

$\hookrightarrow y''(x) - 10y'(x) + 25y(x) = 0$

$$\left(\begin{array}{l} (D-5)^2(e^{5t}) = 0 \\ (D-5)^2(te^{5t}) = 0 \end{array} \right)$$

(iv) $L = \left[(D-3)(D+2)\right]^2$ aniquila a $y(t)$ donde

$y(t) \in \{ e^{3t}, te^{3t}, e^{-2t}, te^{-2t} \}$ (Note que $W(y_1, y_2, y_3, y_4; t=0) \neq 0$)

(v) $P(\alpha) = [\alpha - (a+bi)][\alpha - (a-bi)] = 0$

$= [(\alpha - a) - bi][(\alpha - a) + bi]$

$= (\alpha - a)^2 + b^2 \quad (= \alpha^2 - 2a\alpha + (a^2 + b^2))$

$\boxed{L = D^2 - 2aD + a^2 + b^2}$. Entonces

$L y = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = e^{at}\cos(bt) \\ y_2(t) = e^{at}\operatorname{sen}(bt) \end{cases}$

Por tanto,

$(D^2 - 2aD + a^2 + b^2)$ aniquila a $\begin{cases} e^{at}\cos(bt) \\ e^{at}\operatorname{sen}(bt) \end{cases}$

Ejemplo: $\boxed{a = 2, b = 3}$

$\boxed{L = D^2 - 4D + 13}$ aniquila a $\begin{cases} e^{2t}\cos(3t) \\ e^{2t}\operatorname{sen}(3t) \end{cases}$

$\hookrightarrow P(\alpha) = (\alpha^2 - 4\alpha) + 13 = (\alpha - 2)^2 - 4 + 13$

$= (\alpha - 2)^2 + 9 = [(\alpha - 2) + 3i][(\alpha - 2) - 3i]$

$= [\alpha - (2 - 3i)][\alpha - (2 + 3i)]$

OBS: Existen muchas funciones que no son aniquilables (por ningún op. dif. lineal a coef. ctes)

Ejemplo:

- $g(t) = \frac{1}{t}$ no es aniquilable

- $g(t) = \operatorname{sen}(t)$
- $g(t) = \ln|t|$

$\Big\}$ No aniquilables

OBS:

(1) Si L aniquila a g_1 e g_2, entonces L aniquila a $(g_1 + g_2)$

$$+\left(\begin{array}{l} L g_1 = 0 \\ L g_2 = 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow L(g_1+g_2) = 0 \Big)$$

$$0 = L g_1 + L g_2 = L(g_1+g_2)$$

$$L[\lambda g_1] = 0, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo:

Sea $L = (D-4)^3$. Entonces L aniquila a cada una de las funciones de $B = \{ e^{4t}, t e^{4t}, t^2 e^{4t} \}$

(Note que B es un S.F. para $Lg = 0$)

Además L aniquila a toda combinación lineal de funciones de B.

$$\left(L(c_1 e^{4t} + c_2 t e^{4t} + c_3 t^2 e^{4t}) = 0 \right.$$

$$\Leftrightarrow L\left[(c_1 + c_2 t + c_3 t^2) e^{4t}\right] = 0$$

c_1, c_2, c_3 reales arbitrarios.)

ANIQUILADORES.

Es un método para determinar soluciones particulares, y_p, de $\boxed{Ly = f}$.

Sólo en el caso que L sea a coeficientes constantes, ¡y que f sea aniquilable!

Ejemplo:

$f(t) = e^{2t}$

aniquilable

Resolver. $\boxed{y''(t) - y'(t) - 12\, y(t) = e^{2t}}$

¡termino forzante!

Sabemos que $\{e^{4t}, e^{-3t}\}$ forman

$$\left(L = D^2 - D - 12 = (D-4)(D+3) \right)$$

sistema fundamental para $\boxed{Ly=0}$

Busquemos una solución particular, z_p,

esto es, z_p es tal que $\boxed{L(z_p) = e^{2t}}$

EL Método:

(1) Aniquilar el dato $f(t) = e^{2t}$. Con un operador a coef. constantes de menor orden posible.

Un aniquilador es $\hat{L} = (D-2)$ pues

$(D-2)(e^{2t}) = 0$ (note que $(D-2)^2$ también aniquila a e^{2t})

(2°) Reemplazar:

$$0 = (D-2)(e^{2t}) = (D-2)(D^2 - D - 12)y = 0$$

$$\Longleftrightarrow (D-2)(D-4)(D+3)y = 0 \quad (\text{¡EDO lineal de orden } 3!)$$

Resulta una EDO homogénea

cuya solución general, es.

$$\boxed{u(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t} + c_3 e^{-3t}} \quad ,$$ c_1, c_2, c_3 ctes. arbitrarios

(recuerde que buscamos z_p solución particular de $Ly = e^{2t}$)

(3°) El método consiste en buscar una z_p que aparece al aplicar $u(t)$ a L, esto es,

$$\boxed{L(u(t)) = e^{2t}} \iff (D-4)(D+3)(u(t)) = e^{2t}$$

$$\Rightarrow (D-4)(D+3)(c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t} + c_3 e^{-3t}) = e^{2t}$$

$$\Rightarrow (D-4)(D+3)(c_1 e^{2t}) + \cancel{(D-4)(D+3)(c_2 e^{4t})}^{\,0} + \cancel{(D-4)(D+3)(c_3 e^{-3t})}^{\,0} = e^{2t}$$

Pero $L = (D-4)(D+3)$ aniquila a e^{4t} y a e^{-3t}.

Por tanto $u(x)$ se reduce a $\boxed{u(t) = c\, e^{2t}}$.

$$\boxed{L(ce^{2t}) = e^{2t}}$$. Así, se obtiene:

$$\iff \boxed{(D-4)(D+3)(ce^{2t}) = e^{2t}} \rightarrow$$ De esto se debe obtener el valor de c.

↳ ¡c es una incógnita!

$$\Rightarrow \quad (D^2 - D - 12)(c e^{2t}) = e^{2t}$$

$$\Rightarrow \quad D^2(c e^{2t}) - D(c e^{2t}) - 12(c e^{2t}) = e^{2t}$$

donde $\begin{cases} D(c e^{2t}) = 2c e^{2t} \\ D^2(c e^{2t}) = D(2c e^{2t}) = 4c e^{2t} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad 4c e^{2t} - 2c e^{2t} - 12 c e^{2t} = e^{2t}$$

$$\Rightarrow \quad e^{2t}(4c - 2c - 12c) = e^{2t}$$

$$\Rightarrow \quad -10c = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = -\frac{1}{10}}$$

Así, encontramos:

$$\boxed{z_p(t) = \frac{-1}{10} e^{-2t}}$$

Tarea.

¡comprobar!

Finalmente, la solución general de

$$\boxed{y''(t) - y'(t) - 12 y(t) = e^{2t}}, \text{ es.}$$

$$\boxed{y(t) = z_h(t) + z_p(t)}$$, esto es,

$$\boxed{y(t) = \left(c_1 e^{4t} + c_2 e^{-3t}\right) - \frac{1}{10} e^{2t}}$$

c_1, c_2 arbitrarios en $\mathbb{R}$. (Recuerde que c_1, c_2 se determinan de modo único en un PVI)

Resumen: Para determinar una solución particular z_p de $Ly = f$:

(1°) Primero aniquilar la f

(2°) Segundo determinar una propuesta de solución particular: $u = u(t)$.

(si f no es aniquilable, el Método NO Funciona!)

(3°) llevar esta propuesta $u(t)$ a la EDO

$$\boxed{L[u(t)] = f(t)}$$

FIN

TAREA: Resolver:

$y''(t) - y'(t) - 12y(t) = f(t)$; con

(a) $f(t) = t\, e^{2t}$

(b) $f(t) = e^{-3t}$

(c) $f(t) = t e^{-3t}$

(d) $f(t) = e^{-3t} + e^{4t}$