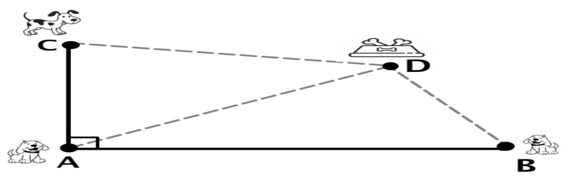
- **Pregunta 1**

1. Tres perros A, B y C están observando un plato de comida ubicado en un punto D. Los tres perros están ubicados de tal forma que en A se forma un ángulo recto como describe la figura. El perro A está a 3 metros del perro B y a 2 metros del perro C. El ángulo $\angle DBA = 75°$ y $\angle DAB = 40°$. Determine la distancia entre el perro C y el plato de comida D.



Indicación: en este problema puede usar la calculadora y aproxime sus resultados usando 2 decimales.

Primero determinamos la medida del ángulo $\angle ADB$:

$$\angle ADB = 180° - (40° + 75°) = 65°.$$

Ahora podemos calcular la distancia entre el perro A y el plato de comida D usando el teorema del seno:

$$\frac{\sin(65°)}{3} = \frac{\sin(75°)}{AD} \Longrightarrow AD = \frac{3\sin(75°)}{\sin(65°)} \approx 3{,}19.$$

Para calcular la distancia entre el perro C y el plato de comida D usaremos el teorema del coseno, primero calculamos la medida de $\angle CAD$

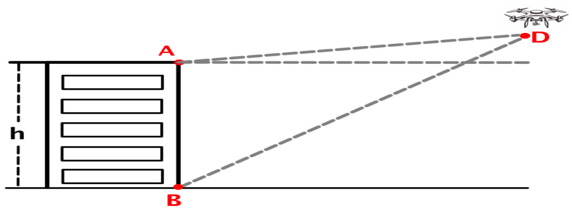
$$\angle CAD = 90° - 40° = 50°.$$

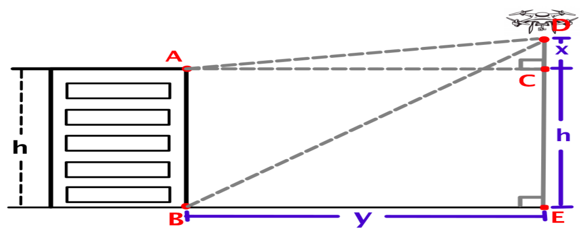
Luego

$$\begin{aligned} CD^2 &= 2^2 + AD^2 - 4AD\cos(50°) \approx 5{,}97 \\ CD &\approx 2{,}44 \end{aligned}$$

Entonces, la distancia entre el perro C y el plato de comida es aproximadamente 2.44 metros.

2. Un dron D se encuentra sobrevolando cerca de un edificio de altura $h = 20$ metros. El ángulo de elevación desde la azotea A del edificio al dron es de $15°$. Si desde la base B del edificio el ángulo de elevación al dron es $30°$, determine la altura a la cual se encuentra volando el dron.





Agregamos en el dibujo los puntos C y E de modo que se forman los triángulos rectángulos $\triangle ACD$ y $\triangle BED$. Si llamamos x a la distancia entre los puntos C y D, la altura a la que vuela el dron es $x + h$. Llamando y a la distancia ente los puntos B y E como $d(A, C) = d(B, E) = y$ tenemos:

$$\tan(15°) = \frac{x}{y} \Longrightarrow y = \frac{x}{\tan(15°)}$$

Ahora, considerando el triángulo $\triangle BED$,

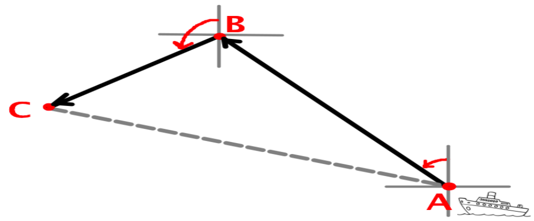
$$\tan(30°) = \frac{h + x}{y} \Longrightarrow y = \frac{h + x}{\tan(30°)}$$

Igualando ambas expresiones para y y como $h = 20$:

$$\begin{aligned} \frac{x}{\tan(15°)} &= \frac{x + 20}{\tan(30°)} \\ \tan(30°)x &= (x + 20)\tan(15°) \\ x &= \frac{20\tan(15°)}{\tan(30°) - \tan(15°)} \approx 17{,}32 \end{aligned}$$

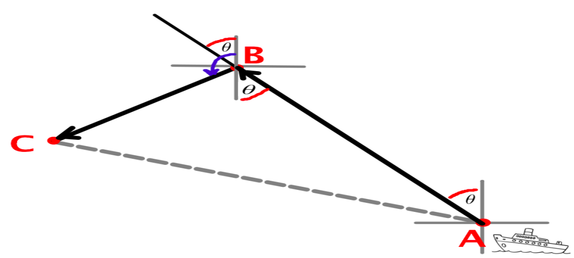
El dron se encuentra volando a 37.32 metros.

3. Un barco navega desde el muelle A en dirección $N40°0$ a una velocidad de 25 km/h durante 3 horas hasta llegar a un punto B, luego cambia el rumbo de navegación en dirección $N125°O$ y avanza velocidad de 20 km/h durante 2 horas hasta llegar al muelle C. Encuentre la distancia entre los muelles.



Formamos un triángulo con los puntos A, B y C. Como el barco viaja desde el punto A hasta el punto B a una velocidad de 25 km/h durante 3 horas, la medida del lado AB es 75, y como viaja desde el punto B hasta el punto C a una velocidad de 20 km/h durante 2 horas, $BC = 40$.

Determinamos la medida del ángulo $\angle ABC$, para ello en el dibujo podemos extender la recta que une los puntos A y B y si $\theta = 40°$, entonces



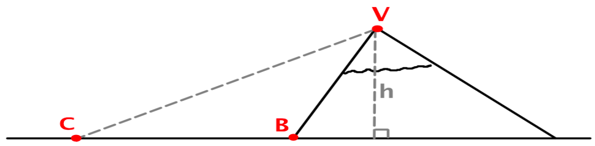
$$\angle ABC = 40° + (180° - 125°) = 95°.$$

La distancia entre los muelles corresponde a la medida del lado AC. Usando el teorema del coseno:

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos(95°) \\ &= 75^2 + 40^2 - 2 \cdot 75 \cdot 40 \cdot \cos(95°) \\ &\approx 7747{,}93 \\ AC &\approx 88{,}02 \text{ km} \end{aligned}$$

La distancia entre los muelles es de 87.82 km.

4. Dos montañistas quieren hacer cumbre en un volcán. Hacen un campamento base cerca del volcán. Desde el campamento C uno de los montañistas divisa la cumbre del volcán V con un ángulo de elevación de $33°$. Al otro día caminan 1300 metros hasta la base oeste B del volcán y divisan ahora la cumbre V con un ángulo de elevación de $48°$. Asumiendo que el volcán tiene una forma triangular, determine la distancia que deben recorrer los montañistas desde la base hasta la cumbre y determine la altura h del volcán.



Indicación: en este problema puede usar la calculadora y aproxime sus resultados usando 2 decimales.

Primero determinamos la medida del ángulo $\angle CBV$

$$\angle CBV = 180° - 48° = 132°,$$

y entonces la medida del ángulo $\angle CVB$ es

$$\angle CVB = 180° - (33° + 132°) = 15°.$$

Ahora podemos calcular la distancia entre la base del volcán B y la cima V usando el teorema del seno:

$$\frac{\sin(33°)}{BV} = \frac{\sin(15°)}{CB} = \frac{\sin(15°)}{1300} \Longrightarrow BV = \frac{1300\sin(33°)}{\sin(15°)} \approx 2735{,}62.$$

Así, los montañistas desde la base hasta la cumbre deben recorrer 2735.62 metros.

Para calcular la altura h del volcán usaremos la definición de seno en un triángulo rectángulo:

$$\sin(48°) = \frac{h}{BV} = \frac{h}{2735{,}62} \quad \Longrightarrow \quad h = 2735{,}62\sin(48°) = 2032{,}96.$$

La altura del volcán es 2032.96 metros.

- **Pregunta 2**

1. *a*) Indique qué signo tiene $\operatorname{sen}(\alpha)$ si $\cos(\alpha) < 0$ y $\tan(\alpha) < 0$. Justifique su respuesta.

   > Hay muchas maneras de responder esta pregunta, pero tal vez la más simple es recordar que $\tan(\alpha) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$, como en este caso es negativo, $\operatorname{sen}(\alpha)$ y $\cos(\alpha)$ han de tener signos diferentes, y dado que se nos dice que $\cos(\alpha) < 0$, concluimos que $\operatorname{sen}(\alpha) > 0$, es decir, tiene signo positivo.

   Para responder las siguientes preguntas puede usar la calculadora.

   b) Determine el valor de $\beta \in [0, 2\pi[$ tal que $\operatorname{sen}(\beta) = 0{,}32$ y $\cos(\beta) > 0$.

   > El hecho que $\cos(\beta) > 0$ nos dice que $P(\beta)$ está al lado derecho del eje Y en el plano cartesiano. Usaremos la calculadora para encontrar β pero tendremos que preocuparnos que el ángulo que nos dé cumpla esto, y si no es así, deberemos cambiarlo por otro con igual seno. La calculadora dice que $sen^{-1}(0{,}32) \sim 0,3257$rad. Al ser este una medida inferior a $\frac{\pi}{2} \sim 1,5708$rad pero mayor que 0, es claro que el punto $P(\beta)$ está a la derecha del eje Y, por lo tanto $\beta \sim 0,3257$rad es la medida que se pide.

   c) Determine la medida en radianes del ángulo que se forma en el origen, partiendo de la parte positiva del eje Y, y terminando en el segmento de recta que une al origen con el punto $(-2, -5)$.

   > Al igual que en la tarea, obtener la medida de un ángulo que está dentro de un triángulo rectángulo a partir de su tanjente es simple, ya que si conocemos los catetos del triángulo, es simple calcular su tangente. Llamemos γ al ángulo pedido, y tomemos el triángulo rectángulo que se forma entre el origen, el punto $(-2, -5)$ y su proyección sobre el eje X, por ejemplo. La tangente del ángulo x que se forma en el origen es $\frac{-2}{-5} = 2{,}5$.
   > Por otra parte, dada la posición de este triángulo, tenemos que $\gamma = \frac{\pi}{2} + x$, nos remitimos entonces a las propiedades vistas en clases para encontrar lo que buscamos:
   >
   > $$\begin{aligned} \tan(\gamma) &= \tan(\frac{\pi}{2} + x) = \frac{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + x)}{\cos(\frac{\pi}{2} + x)} = \frac{-\operatorname{sen}(-x - \frac{\pi}{2})}{\cos(-x - \frac{\pi}{2})} = -\frac{-\cos(-x)}{\operatorname{sen}(-x)} \\ &= \frac{\cos(x)}{-\operatorname{sen}(x)} = -\frac{1}{\tan(x)} = -0{,}4 \end{aligned}$$
   >
   > La calculadora nos dice que $y = \tan^{-1}(-0{,}4) \sim -0,3805$rad. Pero ese ángulo está entre 0 y $-\frac{\pi}{2}$, mientras que γ está entre $\frac{pi}{2}$ y π, por lo tanto, debemos transformarlo a otro que tenga la misma tangente. Si sumamos π a y obtenemos un ángulo de igual tangente y que está en el cuadrante que buscamos, en efecto:
   >
   > $$\tan(y + \pi) = \frac{\operatorname{sen}(y + \pi)}{\cos(y + \pi)} = \frac{\operatorname{sen}(-y)}{-\cos(-y)} = \frac{\operatorname{sen}(y)}{\cos(y)} = \tan(y)$$
   >
   > Concluimos que $\gamma = \pi + \tan^{-1}(-0{,}4) \sim 2,7611$rad.

2. *a*) Indique qué signo tiene $\tan(\alpha)$ si $\text{sen}(\alpha) < 0$ y $\cos(\alpha) > 0$. Justifique su respuesta.

Negativo

   Para responder las siguientes preguntas puede usar la calculadora.

   b) Determine el valor de $\beta \in [0, 2\pi[$ tal que $\text{sen}(\beta) = 0,2$ y $\tan(\beta) < 0$.

$\beta \sim 2{,}9402\text{rad}$

   c) Determine la medida en radianes del ángulo que se forma en el origen, partiendo de la parte positiva del eje X, y terminando en el segmento de recta que une al origen con el punto $(-2, -5)$.

$\sim 4,3319\text{rad}$

3. *a*) Indique qué signo tiene $\tan(\alpha)$ si $\text{sen}(\alpha) > 0$ y $\cos(\alpha) > 0$. Justifique su respuesta.

Positivo

   Para responder las siguientes preguntas puede usar la calculadora.

   b) Determine el valor de $\beta \in [0, 2\pi[$ tal que $\tan(\beta) = 10$ y $\text{sen}(\beta) < 0$.

$\beta \sim 4,6127\text{rad}$

   c) Determine la medida en radianes del ángulo que se forma en el origen, partiendo de la parte negativa del eje X, y terminando en el segmento de recta que une al origen con el punto $(-2, -5)$.

$\sim 1,1903\text{rad}$

4. *a*) Indique qué signo tiene $\cos(\alpha)$ si $\text{sen}(\alpha) < 0$ y $\tan(\alpha) < 0$. Justifique su respuesta.

Positivo.

   Para responder las siguientes preguntas puede usar la calculadora.

   b) Determine el valor de $\beta \in [0, 2\pi[$ tal que $\tan(\beta) = -0,5$ y $\cos(\beta) > 0$.

$\beta \sim 5,8195\text{rad}$

   c) Determine la medida en radianes del ángulo que se forma en el origen, partiendo de la parte negativa del eje Y, y terminando en el segmento de recta que une al origen con el punto $(-2, -5)$.

$\sim 5,9027\text{rad}$

5. *a*) Indique qué signo tiene $\text{sen}(\alpha)$ si $\tan(\alpha) < 0$ y $\text{sen}(\alpha) < 0$. Justifique su respuesta.

   Hay un error, calcular el signo de $\cos(\alpha)$ en vez del de su seno, este es Positivo. Si interpreta literalmente, la respuesta es que $\text{sen}(\alpha)$ es Negativo.

   Para responder las siguientes preguntas puede usar la calculadora.

   b) Determine el valor de $\beta \in [0, 2\pi[$ tal que $\cos(\beta) = -0,7$ y $\text{sen}(\beta) < 0$.

   $\beta \sim 3{,}937\text{rad}$

   c) Determine la medida en radianes del ángulo que se forma en el origen, partiendo de la parte positiva del eje X, y terminando en el segmento de recta que une al origen con el punto $(1, -5)$.

   $\sim 4,9098\text{rad}$

6. *a*) Indique qué signo tiene $\cos(\alpha)$ si $\text{sen}(\alpha) > 0$ y $\tan(\alpha) > 0$. Justifique su respuesta.

   Positivo

   Para responder las siguientes preguntas puede usar la calculadora.

   b) Determine el valor de $\beta \in [0, 2\pi[$ tal que $\text{sen}(\beta) = 0,75$ y $\cos(\beta) > 0$.

   $\beta \sim 0,848\text{rad}$

   c) Determine la medida en radianes del ángulo que se forma en el origen, partiendo de la parte positiva del eje Y, y terminando en el segmento de recta que une al origen con el punto $(1, -5)$.

   $\sim 3,339\text{rad}$

7. *a*) Indique qué signo tiene $\cos(\alpha)$ si $\text{sen}(\alpha) < 0$ y $\tan(\alpha) > 0$. Justifique su respuesta.

   Negativo

   Para responder las siguientes preguntas puede usar la calculadora.

   b) Determine el valor de $\beta \in [0, 2\pi[$ tal que $\text{sen}(\beta) = -1$ y $\tan(\beta) < 0$.

   No existe tal ángulo, ya que solo $\beta = \frac{3\pi}{2}$ tiene seno igual a -1, pero en ese ángulo la tangente no está definida.

   c) Determine la medida en radianes del ángulo que se forma en el origen, partiendo de la parte negativa del eje X, y terminando en el segmento de recta que une al origen con el punto $(1, -5)$.

   $\sim 1,7682\text{rad}$

8. *a*) Indique qué signo tiene $\tan(\alpha)$ si $\operatorname{sen}(\alpha) > 0$ y $\cos(\alpha) < 0$. Justifique su respuesta.

Negativo

   Para responder las siguientes preguntas puede usar la calculadora.

   b) Determine el valor de $\beta \in [0, 2\pi[$ tal que $\tan(\beta) = -5,5$ y $\cos(\beta) > 0$.

$\beta \sim 4,8922\text{rad}$

   c) Determine la medida en radianes del ángulo que se forma en el origen, partiendo de la parte negativa del eje Y, y terminando en el segmento de recta que une al origen con el punto $(1, -5)$.

$\sim 0,1974\text{rad}$

9. *a*) Indique qué signo tiene $\cos(\alpha)$ si $\operatorname{sen}(\alpha) < 0$ y $\tan(\alpha < 0$. Justifique su respuesta.

Positivo

   Para responder las siguientes preguntas puede usar la calculadora.

   b) Determine el valor de $\beta \in [0, 2\pi[$ tal que $\cos(\beta) = -0,4$ y $\operatorname{sen}(\beta) < 0$.

$\beta \sim 4,3009\text{rad}$

   c) Determine la medida en radianes del ángulo que se forma en el origen, partiendo de la parte positiva del eje Y, y terminando en el segmento de recta que une al origen con el punto $(-4, 3)$.

$\sim 0,9273\text{rad}$

10. *a*) Indique qué signo tiene $\operatorname{sen}(\alpha)$ si $\tan(\alpha) < 0$ y $\cos(\alpha) < 0$. Justifique su respuesta.

Positivo

    Para responder las siguientes preguntas puede usar la calculadora.

    b) Determine el valor de $\beta \in [0, 2\pi[$ tal que $\cos(\beta) = -0,313$ y $\operatorname{sen}(\beta) < 0$.

$\beta \sim 4,3940\text{rad}$

    c) Determine la medida en radianes del ángulo que se forma en el origen, partiendo de la parte negativa del eje X, y terminando en el segmento de recta que une al origen con el punto $(-4, 3)$.

$\sim 5,6397\text{rad}$

11. *a*) Indique qué signo tiene $\text{sen}(\alpha)$ si $\tan(\alpha) < 0$ y $\cos(\alpha) < 0$. Justifique su respuesta.

Positivo

Para responder las siguientes preguntas puede usar la calculadora.

b) Determine el valor de $\beta \in [0, 2\pi[$ tal que $\cos(\beta) = -0,9$ y $\text{sen}(\beta) < 0$.

$\beta \sim 3,5926\text{rad}$

c) Determine la medida en radianes del ángulo que se forma en el origen, partiendo de la parte negativa del eje Y, y terminando en el segmento de recta que une al origen con el punto $(-4, 3)$.

$\sim 4,0689\text{rad}$

- **Pregunta 3**

3. (a) Sea $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$. Determine un conjunto B de tres elementos que satisfaga la igualdad $A \cap B = B$.

> Tome $B = \{2, 5, 11\}$. Luego $A \cap B = \{2, 5, 11\}$ pues éstos son los elementos que están en ambos A y B. Por lo tanto se cumple la condición $A \cap B = B$.

(b) De los siguientes conjuntos, determine dos que sean iguales y demuestre la igualdad. Justifique por qué el conjunto restante no es igual a los otro dos.

$$C_1 = \{x \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x = -5k + 3\}$$
$$C_2 = \{x \in \mathbb{R} : x + 2 = 5k, \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}\}$$
$$C_3 = \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{Q} \text{ tal que } x = 5k + 3\}$$

Nota: Escribir los conjuntos de manera extensiva no es una demostración.

> Se tiene que $C_1 = C_2$, pues si tomamos un $x \in C_1$, entonces existe un entero k tal que $x = -5k + 3$. Esto es equivalente a tener que existe un entero m tal que $x = 5m - 2$, considerando $m = -k + 1$. Ahora, sumando 2 a ambos lados de la igualdad $x = 5m - 2$, obtenemos la igualdad equivalente $x + 2 = 5m$. Esto último es equivalente a afirmar que $x \in C_2$, por definición de C_2.
>
> Puesto que deducimos una cadena de afirmaciones equivalentes entre sí, podemos concluir que
> $$x \in C_1 \iff x \in C_2,$$
> que es justamente la definición de que C_1 y C_2 sean iguales.
>
> Para mostrar que C_3 es distinto a los otros dos, basta con mostrar que hay un elemento en C_3 que no está en C_1, o viceversa. En efecto, $\frac{11}{2}$ está en C_3 si consideramos $k = \frac{1}{2}$, pero $\frac{11}{2}$ no está en C_1 pues $C_1 \subset \mathbb{Z}$ y $\frac{11}{2}$ no es un número entero.

(c) Dado $A = \{5, 6, 7, 8\}$, determine una relación binaria interna en A de tres elementos que contenga a R y que sea antisimétrica y simétrica. Justifique.

$$R = \{(5, 5)\}$$

> Para que sea antisimétrica y simétrica a la vez, la relación no puede contener elementos del tipo (x, y) con $x \neq y$, pues si tuviese, por antisimetría, el par (y, x) no debiese estar en la relación, pero por simetría éste sí debiese estar. Luego consideramos solo pares del tipo (x, x) con $x \in A$. Así, la relación
> $$R' = \{(5, 5), (6, 6), (7, 7)\}$$
> es una relación de tres elementos que contiene a R y que es antisimétrica y simétrica.

3. (a) Sea $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$. Determine un conjunto B de tres elementos que satisfaga la igualdad $A \cup B = A$.

$B = \{2, 3, 7\}$.

(b) De los siguientes conjuntos, determine dos que sean iguales y demuestre la igualdad. Justifique por qué el conjunto restante no es igual a los otro dos.

$$C_1 = \{x \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x = 14k + 1\}$$
$$C_2 = \{x \in \mathbb{R} : x = 1 - 7k, \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}\}$$
$$C_3 = \{x \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x = 7k + 1\}$$

Nota: Escribir los conjuntos de manera extensiva no es una demostración.

$C_2 = C_3$.

(c) Dado $A = \{5, 6, 7, 8\}$, determine cuál(es) de las siguientes relaciones binarias internas en A son antisimétricas y cuál(es) no lo son. Justifique cada caso.

$$R_4 = \{(5, 5), (6, 6), (5, 6), (6, 5)\}$$
$$R_5 = \{(5, 5), (8, 5), (8, 6), (8, 7)\}$$
$$R_6 = \{(5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8)\}$$

R_4 no es antisimétrica, R_5 sí es antisimétrica y R_6 también lo es.

3. (a) Sea $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$. Determine un conjunto B de tres elementos que satisfaga la igualdad $B \setminus A = B$.

$B = \{4, 6, 8\}$.

(b) De los siguientes conjuntos, determine dos que sean iguales y demuestre la igualdad. Justifique por qué el conjunto restante no es igual a los otro dos.

$$C_1 = \{x \in \mathbb{Q} : \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x = 7k\}$$
$$C_2 = \{x \in \mathbb{Z} : x = 7k, \text{ para algún } k \in \mathbb{N}\}$$
$$C_3 = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ es múltiplo de } 7\}$$

Nota: Escribir los conjuntos de manera extensiva no es una demostración.

$C_1 = C_3$.

(c) Dado $A = \{5, 6, 7, 8\}$, determine una relación binaria interna en A de cinco elementos que contenga a R y que sea transitiva. Justifique.

$$R = \{(5, 5), (6, 6), (5, 6), (6, 5)\}$$

$R' = R \cup \{(7, 7)\}$.

3. (a) Sea $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$. Determine un conjunto B de tres elementos que satisfaga la igualdad $A \cap B = \emptyset$.

$\boxed{B = \{4, 6, 8\}.}$

(b) De los siguientes conjuntos, determine dos que sean iguales y demuestre la igualdad. Justifique por qué el conjunto restante no es igual a los otro dos.

$$C_1 = \{x \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x = 3k - 2\}$$
$$C_2 = \{x \in \mathbb{R} : x + 2 = 3k, \text{ para algún } k \in \mathbb{N}\}$$
$$C_3 = \{x \in \mathbb{R} : -x = 2 - 3k, \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}\}$$

Nota: Escribir los conjuntos de manera extensiva no es una demostración.

$\boxed{C_1 = C_3.}$

(c) Dado $A = \{5, 6, 7, 8\}$, determine una relación binaria interna en A de seis elementos que contenga a R y que sea refleja y simétrica. Justifique.

$$R = \{(5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 7)\}$$

$\boxed{R' = R \cup \{(8, 8), (7, 8)\}.}$

3. (a) Sea $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$. Determine un conjunto B de tres elementos que satisfaga la igualdad $(A \cup B) = \{2, 3, 5, 7, 9, 11\}$.

$\boxed{B = \{2, 3, 9\}.}$

(b) De los siguientes conjuntos, determine dos que sean iguales y demuestre la igualdad. Justifique por qué el conjunto restante no es igual a los otro dos.

$$C_1 = \{x \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x = 2k - 1\}$$
$$C_2 = \{x \in \mathbb{R} : x = 3 - 6k, \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}\}$$
$$C_3 = \{x \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x = 6k - 3\}$$

Nota: Escribir los conjuntos de manera extensiva no es una demostración.

$\boxed{C_2 = C_3.}$

(c) Dado $A = \{5, 6, 7, 8\}$, determine una relación binaria interna en A de cuatro elementos que esté contenida en R y que sea simétrica pero no refleja. Justifique.

$$R = \{(5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8), (5, 6), (5, 7), (6, 5)\}$$

$\boxed{R' = \{(7, 7), (8, 8), (5, 6), (6, 5)\}.}$