Solución Parcial

Listado 5 : Transformaciones lineales

1. Decida cuáles de las siguientes funciones son lineales y cuáles no. Considere a $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^2$ y $\mathbb{C}^3$ e.v. complejos y a los restantes, como e.v. reales.

(k) $T_6 : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$,

$$T_6(p) = (p'(0), p'(1), p(0), p(1))^{\mathrm{T}}.$$

Solución:

Sean $u, v \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$

(i)
$$\begin{aligned}
T_6(u+v) &= ((u+v)'(0), (u+v)'(1), (u+v)(0), (u+v)(1)) \\
&= ((u'+v')(0), (u'+v')(1), (u+v)(0), (u+v)(1)) \\
&= (u'(0)+v'(0), u'(1)+v'(1), u(0)+v(0), u(1)+v(1)) \\
&= (u'(0), u'(1), u(0), u(1)) + (v'(0), v'(1), v(0), v(1)) \\
&= T_6(u) + T_6(v)
\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}
T_6(\alpha u) &= ((\alpha u)'(0), (\alpha u)'(1), (\alpha u)(0), (\alpha u)(1)) \\
&= ((\alpha u')(0), (\alpha u')(1), (\alpha u)(0), (\alpha u)(1)) \\
&= (\alpha u'(0), \alpha u'(1), \alpha u(0), \alpha u(1)) \\
&= \alpha(u'(0), u'(1), u(0), u(1)) \\
&= \alpha T_6(u)
\end{aligned}$$

De (i) y (ii) se tiene que T_6 es una transformación lineal.

6. Construya, si es posible, una aplicación lineal T entre los e.v. indicados que cumpla las condiciones dadas. Si no es posible, justifique por qué.

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$\ker(T) = \langle \{(1,\,0,\,0)^{\mathrm{T}}, (1,\,1,\,0)^{\mathrm{T}}\} \rangle, \quad T((1,1,1)^{\mathrm{T}}) = (1,-1)^{\mathrm{T}},$$

Solución:

Se puede probar que $\{(1,0,0)^T, (1,1,0)^T, (1,1,1)^T\}$ es base de $\mathbb{R}^3$, entonces todo vector de $\mathbb{R}^3$ se puede expresar como c.l de vectores de este conjunto

$$(x,y,z)^T = \alpha(1,0,0)^T + \beta(1,1,0)^T + \gamma(1,1,1)^T \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha+\beta+\gamma \\ y = \beta+\gamma \\ z = \gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = z \\ \beta = y-z \\ \alpha = x-y \end{cases}$$

Luego, $(x,y,z)^T = (x-y)(1,0,0)^T + (y-z)(1,1,0)^T + z(1,1,1)^T$

Por otro lado, $T((1,0,0)^T) = (0,0)^T$ y $T((1,1,0)^T) = (0,0)^T$ pues $(1,0,0)^T, (1,1,0)^T \in \ker(T)$

Finalmente $T((x,y,z)^T) = T\left((x-y)(1,0,0)^T + (y-z)(1,1,0)^T + z(1,1,1)^T\right)$

$$= (x-y)\,T((1,0,0)^T) + (y-z)\,T((1,1,0)^T) + z \cdot T((1,1,1)^T)$$
$$= (x-y)\,(0,0)^T + (y-z)\,(0,0)^T + z\,(1,-1)^T$$
$$= (0,0)^T + (0,0)^T + (z,-z)^T$$
$$= (z,-z)^T$$

La transformación lineal sería $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$(x,y,z)^T \longrightarrow T((x,y,z)^T) = (z,-z)^T.$$

2. Calcule núcleo, imagen, rango y nulidad de las siguientes aplicaciones lineales entre los espacios vectoriales indicados.

(e) $T_5 : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $T_5(p) = \int_0^1 xp(x)\,\mathrm{d}\,x$.

Solución: Consideremos $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

$$T_5(p) = \int_0^1 x\,(ax^2+bx+c)\,dx = \int_0^1 (ax^3 + bx^2 + cx)\,dx$$

$$= \frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} = \frac{3a+4b+6c}{12}$$

$\mathrm{Ker}(T_5) = \{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : T_5(p) = 0\} = \{ax^2+bx+c \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : \frac{3a+4b+6c}{12} = 0\}$

$= \{ax^2+bx+c \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : a = \frac{-4b-6c}{3}\} = \{\left(\frac{-4b-6c}{3}\right)x^2 + bx + c : b, c \in \mathbb{R}\}$

$= \{b\left(-\frac{4}{3}x^2 + x\right) + c\left(-2x^2+1\right) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : b, c \in \mathbb{R}\}$

$= \left\langle \left\{ -\frac{4}{3}x^2 + x \,,\, -2x^2+1 \right\} \right\rangle$

Además el conjunto $\{-\frac{4}{3}x^2 + x, -2x^2+1\}$ es l.i, pues

$\alpha\left(-\frac{4}{3}x^2+x\right) + \beta\left(-2x^2+1\right) = \theta(x) \Rightarrow -\frac{4}{3}\alpha - 2\beta = 0 \wedge \alpha = 0 \wedge \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$.

Como es l.i y generador de $\mathrm{Ker}(T_5)$, es base de este, y por tanto $\eta(T_5) = 2$

Por teorema, se cumple que

$$\eta(T_5) + r(T_5) = \dim(P_2(\mathbb{R}))$$

$$2 + r(T_5) = 3$$

Por lo tanto, $r(T_5) = 1$, es decir $\dim(Im(T_5)) = 1$

Como $Im(T_5)$ es subespacio de $\mathbb{R}$, que también es de dimensión 1, entonces $Im(T_5) = \mathbb{R}$.