Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemática
Departamento de Matemática

Cálculo II

Ingeniería Civil

Prof. Víctor Aros Quinán

Segundo Semestre 2021

Clase Nº13: Cálculo II
Integrales Impropias

Criterios de Convergencia

Existen algunas integrales impropias que no podemos determinar si poseen o no un valor exacto, por ejemplo:

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \qquad \text{o} \qquad \int_{-\infty}^{2} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\,dx$$

es por esto que estudiaremos algunos criterios de comvergencia que no permitirán concluir si las integrales impropias convergen o divergen.

Criterios de Convergencia

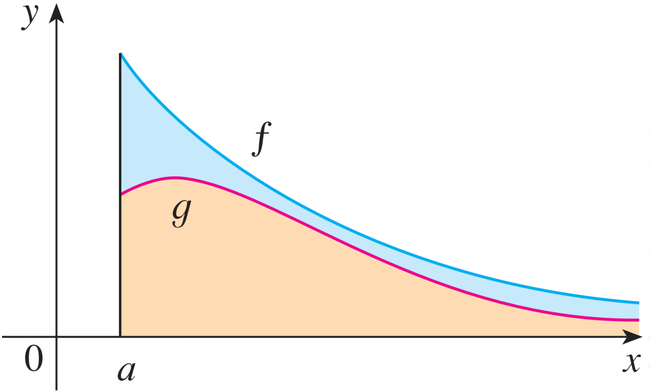
Criterio de Comparación

Sean f, g funciones continuas en $[a, +\infty[$ tales que $0 \leq g(x) \leq f(x)$, para todo $x \in [a, +\infty[$, entonces:

1. Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ converge, entonces $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ converge
2. Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ diverge, entonces $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ diverge

Criterios de Comparación

De manera particular el criterio se puede visualizar en la siguiente figura:



Ejemplos:

Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

(a) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^8}\, dx$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$

(c) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{x|\cos(x)|}{x^5+6}\, dx$

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{1+x^2+x^4}\, dx$

Criterios de Convergencia

Existen algunos casos donde no podemos aplicar el criterio de comparación para analizar la convergencia de algunas integrales impropias de la primera especie. Por ejemplo:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2+3x+1}{x^4+x^3+\sqrt{x}}\,dx \qquad \text{o} \qquad \int_2^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$$

es por esto que ahora estudiaremos un segundo criterio de convergencia que nos ayudará a decidir la convegencia o divegencia de estas.

Criterios de Convergencia

Criterio de Convergencia en el Límite

Sean f, g funciones continuas y no negativas en $[a, +\infty[$, tal que:
entonces:

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)} \right] = L > 0$, entonces

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx \ \text{ converge} \Leftrightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\, dx \ \text{ converge}$$

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)} \right] = 0$, entonces

$$\int_a^{+\infty} g(x)\, dx \ \text{ converge} \Leftrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\, dx \ \text{ converge}$$

Ejemplos:

Estudiar la convergencia de las siguientes impropias:

(a) $$\int_{1}^{+\infty} \frac{x^2+3x+1}{x^4+x^3+\sqrt{x}}\,dx$$

(b) $$\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}}\,dx$$

(c) $$\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$$

(d) $$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2e^x}\,dx$$

Integrales Impropias

Ya hemos estudiado las integrales impropias de la primera especie y ahora nos centraremos en las integrales impropias donde la función es no acotada en el intervalo de integración:

Integrales Impropias de la Segunda Especie

Si f es una función continua en el intervalo $(a, b]$ pero no es acotada cerca de a, es decir, $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx =$$

Similarmente, si f es una función continua en el intervalo $[a, b)$ pero no es acotada cerca de b, es decir, $\lim_{x \to b^-} f(x) = \infty$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\, dx =$$

Integrales Impropias

Observación: Notemos que si una función f no es acotada cerca de c, donde $a < c < b$ y además $\int_a^c f(x)\,dx$ y $\int_c^b f(x)\,dx$ convergen, entonces se cumple que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Ahora bien, si una de las integrales $\int_a^c f(x)\,dx$ ó $\int_c^b f(x)\,dx$ diverge, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge.

Ejemplos:

Analizar la convergencia de las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\, dx$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-x^2}\, dx$

(c) $\displaystyle\int_{-3}^2 \frac{1}{(x-1)^{5/3}}\, dx$

Integrales Impropias

Los resultados que veremos a continuación serán enunciados para integrales del tipo $\int_a^b f(x)\ dx$ donde la función no es acotada en b, pero también serán válidos para los demás casos, como los del ejemplos anteriores.

Álgebra de Integrales Impropias 2da Especie

Sean $\int_a^b f(x)\ dx$ y $\int_a^b f(x)$ dos integrales impropias convergentes, donde f es no acotada en b y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces, las siguientes afirmaciones se cumplen:

1. La integral $\int_a^b f(x) + g(x)\ dx$ converge y además:
$$\int_a^b f(x) + g(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx$$
2. La integral $\int_a^b \lambda f(x)\ dx$ converge y además:
$$\int_a^b \lambda f(x)\ dx = \lambda \int_a^b f(x)\ dx$$