clase 2

TARDE $\boxed{10/08/22}$

Teorema (FUNDAMENTAL del CÁLCULO)

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua, entonces la función

$$\boxed{\varphi(t)=\int_a^t f(u)\,du}$$

es derivable.

Además:

$$\boxed{\varphi'(t)=f(t)}$$ para todo $t\in\,]a,b[$.

Aplicación:

Sea $\boxed{G(t)=\int_{t_0}^t \frac{d}{du}\left[e^{2u}x(u)\right]du}$ ($x=x(t)$ es una función que depende de t)

entonces $\boxed{G(t)=e^{2t}x(t)+K}$; K constante

Ponemos $\boxed{F(u):=\frac{d}{du}\left[e^{2u}x(u)\right]}$ entonces

$$G(t)=\int_{t_0}^t F(u)\,du \xRightarrow{T.F.C.} G'(t)=F(t).$$

Esto es: $\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\sigma(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{2t}x(t)\right)}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\sigma(t) - e^{2t}x(t)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \sigma(t) - e^{2t}x(t) = K, \quad K \text{ constante.}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma(t) = e^{2t}x(t) + K}$$

Pero $\sigma(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{d}{du}\left[e^{2u}x(u)\right] du$

Por tanto, $\int_{t_0}^{t} \frac{d}{du}\left[e^{2u}x(u)\right] du = e^{2t}x(t) + K.$

———— o ————

Queremos resolver de modo general la EDO lineal de orden 1.

$$\boxed{y'(t) + p(t)\,y(t) = h(t)}$$

RESOLVER:

$$(*) \quad \boxed{a(t)\,y'(t) + b(t)\,y(t) = f(t)}\,; \quad \left.\begin{array}{l}\text{EDO lineal}\\ 1^{er} \text{ orden.}\end{array}\right.$$

con $\left.\begin{array}{l} a(t) \\ b(t) \\ f(t) \end{array}\right\}$ funciones conocidas y continuas.

En general conviene NORMALIZAR la EDO $(*)$, esto es, el coeficiente que multiplica a la derivada de mayor orden, debe ser 1.

Así, en $(*)$ obtenemos:

$$y'(t) + \frac{b(t)}{a(t)}\,y(t) = \frac{f(t)}{a(t)}$$

sobre $\{t \in \mathbb{R} : a(t) > 0$ ó $a(t) < 0\}$,

Ahora se puede escribir:

$$\boxed{y'(t) + p(t)\,y(t) = h(t)}\,; \quad \text{con}$$

$$p(t) = \frac{b(t)}{a(t)} \; ; \; h(t) = \frac{f(t)}{a(t)}$$

Ejemplo:

Para $\boxed{a(t) = t-1}$; $\boxed{b(t) = e^t}$; $\boxed{f(t) = t^2+2}$,

tenemos:

$$(t-1)y'(t) + e^t y(t) = t^2+2, \text{ para } \begin{cases} t-1>0 \\ \text{ó} \\ t-1<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{y'(t) + \frac{e^t}{t-1} y(t) = \frac{t^2+2}{t-1}}$$

Para $t-1<0$ o bien $t-1>0$.

Así, en general resolvemos:

$$\boxed{y'(t) + p(t)y(t) = h(t)}, \text{ donde}$$

p y h son funciones conocidas y continuas.

El Método: Ejemplo: Queremos resolver la

$$\boxed{x'(t) + 2x(t) = t}$$

Multiplicando la EDO por $\underbrace{\mu(t)}_{\text{FACTOR de INTEGRACIÓN}} = e^{2t}$, se obtiene

$$(*) \quad \boxed{e^{2t}x'(t) + 2e^{2t}x(t) = te^{2t}}.$$

Ahora observe que:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{2t}x(t)\right] = e^{2t}x'(t) + 2e^{2t}x(t),$$

por tanto, en $(*)$ podemos escribir

$$\frac{d}{dt}\left[e^{2t}x(t)\right] = te^{2t}.$$

Ahora integrando en ambos lados, se obtiene:

$$\Rightarrow e^{2t}x(t) + C = \int_{t_0}^{t} \tau e^{2\tau}\,d\tau \qquad \left[e^{2t_0}x(t_0)\right]$$

$u = \tau$
$dv = e^{2\tau}d\tau.$
$\Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2\tau}$

$$\Rightarrow e^{2t}x(t) = \frac{1}{2}te^{2t} - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} e^{2\tau}\,d\tau + \underbrace{K(t_0) - C}_{C_1}$$

$$= \frac{1}{2}te^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t} + C_1, \quad C_1 \text{ constante}.$$

Finalmente:

$$e^{2t}x(t) = \frac{1}{2}e^{2t}\left(t - \frac{1}{2}\right) + c$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{x(t) = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\right) + c\,e^{-2t}} \quad (**)$$

donde c es constante arbitraria.

¿cómo se determina el valor de c?

Si el problema fuera:

$$(P)\begin{cases} x'(t) + 2x(t) = t \\ x(0) = 1 \end{cases}$$. Entonces en $(**)$

para $t=0$, resulta:

$$x(0) = \frac{1}{2}\left(0 - \frac{1}{2}\right) + c\,e^{0} = -\frac{1}{4} + c,$$

esto es,

$$1 = c - \frac{1}{4} \Longrightarrow c = \frac{5}{4}.$$

Tarea: ¡comprobar!

Finalmente,

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{4}e^{-2t}}$$

Si $t=0$
$x(0) = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} = 1$

¿Es la solución ÚNICA? ¿Existen otras soluciones?

CASO GENERAL:

Resolver: $\begin{cases} x'(t) + p(t)\,x(t) = h(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$; $x_0 \in \mathbb{R}$ conocido.

Ponemos $\boxed{\mu(t) = e^{A(t)}}$ donde $\boxed{A'(t) = p(t)}$

Multiplicamos la EDO por $\mu(t)$.

$$x'(t)\,e^{A(t)} + p(t)\,e^{A(t)}\,x(t) = e^{A(t)}\,h(t) \qquad (*)$$

Pero $p(t) = A'(t)$, sigue:

$$x'(t)\,e^{A(t)} + A'(t)\,e^{A(t)}\,x(t) = e^{A(t)}\,h(t)$$

Note que $\frac{d}{dt}\left[x(t)e^{A(t)}\right] = x'(t)e^{A(t)} + A'(t)e^{A(t)}x(t)$

$$\left(\frac{d}{dt}\left[e^{A(t)}\right] = e^{At}\frac{d}{dt}\left[A(t)\right] = e^{At}A'(t).\right)$$

Así, en $(*)$, tenemos:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left[x(t)e^{A(t)}\right] = e^{A(t)}h(t)}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\int_{t_0}^{t}\frac{d}{d\mu}\left[x(\mu)e^{A(\mu)}\right]d\mu}_{\parallel} = \int_{t_0}^{t} e^{A(\tau)}h(\tau)\,d\tau \quad (*)$$

T.F.C

$$\Longrightarrow x(t)e^{A(t)} = \int_{t_0}^{t} e^{A(\tau)}h(\tau)\,d\tau + \kappa \quad (**)$$

(κ es constante).

$$\Longrightarrow \boxed{x(t) = e^{-A(t)}\int_{t_0}^{t} e^{A(\tau)}h(\tau)\,d\tau + \kappa e^{-A(t)}}$$

o si prefiere:

$$\boxed{x(t) = e^{-A(t)}\int e^{A(t)}h(t)\,dt + \kappa e^{-A(t)}}$$

Observe que la expresión

$$\begin{cases} \underbrace{\int_{t_0}^{t} \frac{d}{du}\left[x(u)e^{A(u)}\right]du}_{\Downarrow} = \int_{t_0}^{t} e^{A(\tau)}h(\tau)\,d\tau \quad (*) \\ x(t)e^{A(t)} + K = \int_{t_0}^{t} e^{A(\tau)}h(\tau)\,d\tau \quad (**) \end{cases}$$

(K es constante).

Puede ser escrita como:

$$\int \frac{d}{dt}\left[x(t)e^{A(t)}\right]dt = \int e^{A(t)}h(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \quad x(t)\,e^{A(t)} = \int e^{A(t)}h(t)\,dt + K.$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x(t) = e^{-A(t)}\left\{\int e^{A(t)}h(t)\,dt + K\right\}}$$

OBS:

La integral $\int e^{A(t)} h(t)\, dt$ no siempre se puede determinar explícitamente.

Ejemplo: Si $h(t) = 1$ y $A(t) = t^2$

$$\int e^{A(t)} h(t)\, dt = \int e^{t^2} dt.$$

Ejemplo 2.

Determine la solución de

(quremos $\mu(t) = e^{A(t)}$ con $A'(t) = 2t$)

$$(*) \begin{cases} x'(t) + 2t\, x(t) = 1 \\ x(0) = 2 \end{cases}$$

Aquí, $\left.\begin{array}{l} p(t) = 2t \\ h(t) = 1 \end{array}\right\}$ $\Rightarrow A'(t) = p(t) = 2t$

$\Rightarrow A(t) = \int 2t\, dt = t^2$

$\Rightarrow \boxed{\mu(t) = e^{A(t)} = e^{t^2}} \to \}$ Factor de integración.

Ahora, en $(*)$.

$$e^{t^2} x'(t) + 2t e^{t^2} x(t) = e^{t^2},$$ lo que es

equivalente a: (Note que $\frac{d}{dt}\left(x(t) e^{t^2}\right) = x'(t) e^{t^2} + x(t) e^{t^2} 2t$)

$$\frac{d}{dt}\left[e^{t^2}x(t)\right] = e^{t^2} \quad / \int$$

$$\Rightarrow \quad e^{t^2}x(t) = \int e^{t^2}dt + c$$

$$x(t) = e^{-t^2}\left(\int e^{t^2}dt + c\right)$$

Para $t=0$, $\quad x(0) = \left(\int e^{t^2}dt\right)\Big|_{t=0} + c = 2$

$$\Rightarrow c = 2 - \left(\int e^{t^2}dt\right)\Big|_{t=0} = 2.$$

Por tanto:

$$\boxed{x(t) = e^{-t^2}\left(\int e^{t^2}dt + 2\right)}$$

o equivalente:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{t^2}x(t)\right] = e^{t^2} \quad \wedge \quad t_0 = 0$$

$$\int_0^t \frac{d}{du}\left[e^{u^2}x(u)\right]du = \int_0^t e^{u^2}du$$

$$\Rightarrow \quad e^{t^2}x(t) + K = \int_0^t e^{u^2}du \quad ; K \text{ constante}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x(t) = e^{-t^2}\left\{\int_0^t e^{u^2}du + c\right\}} \; ; \quad c = -K$$

si $x(0) = x_0$, entonces $x(0) = c = x_0$

Por tanto;

$x(t) = e^{-t^2}\left\{\int_0^t e^{u^2}du + x_0\right\}$. Si $x(0) = x_0 = 2$,

entonces. $x(t) = e^{-t^2}\left(\int_0^t e^{u^2}du + 2\right)$

Problema;

Dada una EDO con alguna condición inicial, C.I. ¿Se puede asegurar que la EDO tenga solución única?

Teorema (Existencia y unicidad, EDO lineales)

Sean $p = p(t)$, $h = h(t)$ dos funciones continuas definidas en $I \subseteq \mathbb{R}$, $t_0 \in I$. Entonces el PROBLEMA CON VALOR INICIAL, PVI,

$$(P) \begin{cases} x'(t) + p(t)\,x(t) = h(t) \\ x(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (y_0 \text{ valor dado en } \mathbb{R})$$

tiene ÚNICA solución:

PVI: EDO + CI

Ejemplo: consideremos el PVI.

$$(P) \begin{cases} x'(t) + e^{t^3}\,x(t) = \operatorname{sen}(t^2) \\ x(\pi/3) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p(t) = e^{t^3} \\ h(t) = \operatorname{sen}(t^2) \end{cases}$$

Entonces como e^{t^3} y $\operatorname{sen}(t^2)$ son continuas en todo $\mathbb{R}$, resulta que (P) tiene ÚNICA solución. (esto se sabe, independientemente de cómo es la solución)

Seguimos el método:

Ejemplo (2)

$$\boxed{x'(t) + 3t^2 x(t) = h(t)}$$

1º buscamos $\mu(t) = e^{A(t)}$; $A'(t) = 3t^2$

$(\Leftrightarrow \quad A(t) = t^3) \Rightarrow \mu(t) = e^{t^3}$

$$\underbrace{e^{t^3} x'(t) + 3t^2 e^{t^3}}\, x(t) = h(t)\, e^{t^3}$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left[x(t)\, e^{t^3}\right]} = h(t)\, e^{t^3} \quad (*)$$

$\hookrightarrow \quad x'(t)\, e^{t^3} + x(t)\, 3t^2\, e^{t^3}$

Integrando en $(*)$:

$$\Rightarrow \quad x(t)\, e^{t^3} = \int h(t)\, e^{t^3} + C$$

Tomamos $\boxed{h(t) = 3t^2}$

$$\left(x'(t) + 3t^2 x(t) = 3t^2 \right).$$

$u = t^3$
$du = 3t^2 dt$

$$x(t)\, e^{t^3} = \int e^{t^3}\, \underline{3t^2\, dt}$$

$$= e^{t^3} + c$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = e^{-t^3}\left\{ c + e^{t^3} \right\} = 1 + c\, e^{-t^3}$$

$x(t) = 1 + c\, e^{-t^3}$; donde c es una constante arbitraria..

Si el problema a resolver fuese

$$(P_1) \begin{cases} x'(t) + 3t^2 x(t) = 3t^2 \\ x(2) = -1 \end{cases}$$

Entonces tendriamos que la solución será

$x(t) = 1 + c\, e^{-t^3}$, donde para

$t=2$; $x(2) = 1 + c\, e^{-2^3} =$

$$= 1 + \frac{c}{e^8} = -1$$

$$\Rightarrow \quad c = -2e^8$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = 1 - 2e^{8} e^{-t^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = 1 - 2e^{-(t^3+8)}}$$

Esta es la única solución del PVI (P_1)

Note que aquí la EDO era;

$$x'(t) = 3t^2 - 3t^2 x(t) = 3t^2(1 - x(t))$$

y sin resolver vemos que para $t=2$,

$$x'(2) = (3)(4)(1 - x(2)) = 12(1-(-1)) = 24.$$

A priori (antes de resolver) se sabe que la solución buscada en el punto $(2, x(2))$ admite recta tangente con pendiente $m = x'(2) = 24$.