Clase 12 (Mi 29/09/2021)

Resumen: Para determinar una solución particular y_p de $Ly = f$:

(1°) Primero aniquilar la f (si f no es aniquilable, el Método NO Funciona).

(2°) Segundo determinar una Propuesta de solución particular: $u = u(t)$.

(3°) Llevar esta propuesta $u(t)$ a la EDO

$$\boxed{L(u(t)) = f(t)}$$

Ejemplo. Determine la solución general de

$$\boxed{y''(t) - y'(t) - 12\,y(t) = e^{4t}} \quad (*)$$

Desarrollo: Aquí $Ly = e^{4t}$, con

$$L = D^2 - D - 12 = (D-4)(D+3).$$

Por tanto, la solución general es $y = y_h + y_p$, donde la parte homogénea es $y_h = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-3t}$

Busquemos una solución particular $y = y_p$.

(1°) Aniquilando $f(t) = e^{4t}$

Aniquilador $\hat{L} = (D-4)$.

(2°) remplazar en $Ly = e^{4t}$ $\left(\Rightarrow (D-4)e^{4t} = 0\right)$

$$0 = (D-4)e^{4t} = (D-4)\underline{L(y)}$$

$$\Rightarrow (D-4)(D-4)(D+3)y = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} u(t) = ae^{4t} + bte^{4t} + ce^{-3t} \\ a,b,c \in \mathbb{R}. \end{array}} \qquad (P)$$

esta es nuestra propuesta de solución particular.

Por tanto, debemos determinar los valores de $a,b,c \in \mathbb{R}$, de modo que $u(t)$ sea solución particular de $(*)$. Para ello, debe tenerse que:

$$\boxed{L(u(t)) = e^{4t}}$$

, esto es..

$$(D-4)(D+3)(u(t)) = e^{4t}$$

$$\underbrace{[D^2 - D(t) - 12]}\, u(t) = e^{4t}$$

$$\Longleftrightarrow \quad (D-4)(D+3)(ae^{4t} + bte^{4t} + ce^{-3t}) = e^{4t}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{(D-4)(D+3)(bte^{4t}) = e^{4t}} \qquad \begin{pmatrix} u(t) \text{ se} \\ \text{reduce a} \\ u(t) = bte^{4t} \end{pmatrix}$$

¡ usando la igualdad anterior, debemos determinar el valor de la constante b !

Tenemos $\quad (D^2 - D - 12)(bte^{4t}) = e^{4t}$

$$\Longleftrightarrow \quad D^2(bte^{4t}) - D(bte^{4t}) - 12bte^{4t} = e^{4t}$$

$$D(bte^{4t}) = \frac{d}{dt}(bte^{4t}) = be^{4t}(1 + 4t)$$

$$\Longrightarrow \quad D^2 bte^{4t} = \frac{d}{dt}\left[be^{4t}(1+4t)\right]$$

$$= be^{4t}\left[4(1+4t) + 4\right]$$

$$= 4be^{4t}(2 + 4t)$$

Ahora reemplazamos en la EDO que queremos resolver:

$$Ly = e^{4t} \iff (D^2 - D - 12)u(t) = e^{4t}$$

$$be^{4t}\left[4(2+4t) - (1+4t) - 12t\right] = e^{4t}$$

$$\Longrightarrow \quad b(7 + 16t - 16t) = 1$$

$$\Longrightarrow \quad b = \frac{1}{7}$$

Así, $\boxed{u(t) = z_p(t) = \frac{1}{7}te^{4t}}$.

finalmente, la solución general de

$$\boxed{y''(t) - y'(t) - 12y(t) = e^{4t}}$$, es.

$$y(t) = \left(c_1e^{4t} + c_2e^{-3t}\right) + \frac{1}{7}te^{4t}$$

$$y(t) = \left(c_1 + \frac{1}{7}t\right)e^{4t} + c_2e^{-3t} \qquad c_1, c_2 \text{ en } \mathbb{R}.$$

TAREA: Determine la única solución de

$$(P)\quad \begin{cases} y''(t) - y'(t) - 12y(t) = e^{4t} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

(La solución es única por el Teorema de E. y Unicidad.)

Desarrollo. Acabamos de ver la solución general de $y''(t) - y'(t) - 12y(t) = e^{4t}$, es

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{+4t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{7} t e^{4t}}.$$

$$\Rightarrow y'(t) = 4c_1 e^{4t} - 3c_2 e^{-3t} + \frac{1}{7} e^{4t}(1 + 4t).$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 + 0 = 1 \\ y'(0) = 4c_1 - 3c_2 + \frac{1}{7} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3c_1 + 3c_2 = 3 \\ 4c_1 - 3c_2 = -\frac{8}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{13}{49} \\ c_2 = \frac{36}{49} \end{cases}$$

$$\left(AX = B \quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \right)$$

Así, la única solución al PVI (P), es:

$$y(t) = \frac{13}{49} e^{4t} + \frac{36}{49} e^{-3t} + \frac{1}{7} t e^{4t}$$

Principio de superposición de soluciones.

Sea L un operador diferencial lineal (Aquí L puede ser a coeficientes variables).

suponga que: $\begin{cases} y_1 \text{ es solución de } Ly = f_1 \\ y_2 \text{ es solución de } Ly = f_2. \end{cases}$

Entonces:

$(y_1 + y_2)$ es solución de $\boxed{Ly = f_1 + f_2}$

Ejemplo: Resolver:

$$y''(t) - y'(t) - 12\, y(t) = e^{2t} + e^{4t} \quad (*)$$

Sea $L = D^2 - D - 12$. Entonces $(*)$ es

$$L[y(t)] = f_1(t) + f_2(t) \quad \text{con} \quad \begin{cases} f_1(t) = e^{2t} \\ f_2(t) = e^{4t} \end{cases}$$

tenemos que $\boxed{z(t) = y_1(t) + y_2(t) \text{ es}}$ solución de $(*)$ donde

Para resolver (*) se resuelven por separado

$$\begin{cases} L y_1(t) = e^{2t} \\ L y_2(t) = e^{4t} \end{cases}$$

Es fácil ver que:

$$y_1(t) = -\frac{1}{10} e^{2t}$$

$$y_2(t) = \frac{1}{7} t e^{4t}$$, son respectivamente

soluciones de $L y_1 = e^{2t}$, $L y_2(t) = e^{4t}$.

Por el principio de superposición, sigue que la solución general de

$$y''(t) - y'(t) - 12 y(t) = e^{2t} + e^{4t},$$ es

$$z(t) = \underbrace{\left(c_1 e^{4t} + c_2 e^{-3t}\right)}_{\text{solución general de } Ly = 0.} + \frac{t}{7} e^{4t} - \frac{1}{10} e^{2t}$$

(c_1, c_2 constantes arbitrarias).