UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (521.218)
PRÁCTICA $N°3$ (EDO Lineal de Orden Superior, Parte I)

Problemas a resolver en práctica: Recuerde que si $y = y(x)$ entonces $Dy := \dfrac{dy}{dx}$.

Problema 1. Sea $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida para cada $x \in \mathbb{R}$ por $z(x) := \mathrm{e}^{3x}$, y considere el operador diferencial lineal de orden 3 (a coeficientes constantes) $L := D^3 - D^2 + D$.

(a) Determine, para cada $x \in \mathbb{R}$, $(Lz)(x)$.

(b) Determine si z es solución de la EDO lineal $Ly = 0$.

Desarrollo:

(a) Desarrollando, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
(Lz)(x) &= ((D^3 - D^2 + D)z)(x) = (z''' - z'' + z')(x) = z'''(x) - z''(x) + z'(x) \\
&= \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}(\mathrm{e}^{3x}) - \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(\mathrm{e}^{3x}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{3x}) = 27\mathrm{e}^{3x} - 9\mathrm{e}^{3x} + 3\mathrm{e}^{3x} = 21\mathrm{e}^{3x}.
\end{aligned}
$$

(b) De la parte (a) previa, se tiene que $Lz = f$, siendo $f = 21z$ (función no nula). En consecuencia, se infiere que esta función (z) **NO** es solución de la EDO lineal dada.

Problema 2. El objetivo de este ejercicio, es mostrar que el "producto de operadores diferenciales lineales a coeficientes variables" en general **NO** es conmutativo. Para esto, consideremos los operadores diferenciales $L_1 := (D+1)(xD-1)$ y $L_2 := (xD-1)(D+1)$, siendo $x \in \mathbb{R}^-$, y considere la función $v : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}$, tal que para cada $x \in \mathbb{R}^-$, $v(x) := \mathrm{e}^{-x}$.

(a) Muestre que L_1 y L_2 son operadores diferenciales lineales, efectuando la "multiplicación de operadores involucrados y simplificando a su mínima expresión". ¿Puede concluirse a partir de ello si L_1 y L_2 definen el mismo operador?

(b) Otra forma: Para la función $\mathbb{R} \ni x \mapsto u(x) := \mathrm{e}^{-x}$, determine si $L_1 u = L_2 u$. ¿Puede concluirse a partir de ello si L_1 y L_2 definen el mismo operador?

Desarrollo:
(a) Efectuando la "multiplicación de operadores involucrados", resulta

$$
\begin{aligned}
L_1 &= (D+1)(xD-1) = (D+I)(xD-I) = D(xD-I) + I\,(xD-I) \\
&= D(xD) - D + xD - I = (xD^2 + D) - D + xD - I = xD^2 + xD - I\,. \\
\Rightarrow L_1 &= xD^2 + xD - 1\,. \\
L_2 &= (xD-1)(D+1) = (xD-I)(D+I) = xD(D+I) - I\,(D+I) \\
&= xD^2 + xD - D - I = xD^2 + (x-1)D - I\,. \\
\Rightarrow L_2 &= xD^2 + (x-1)D - 1\,.
\end{aligned}
$$

En consecuencia, $L_1 \neq L_2$, y por tanto definen operadores diferentes.
(b) Efectuando, se obtiene, para $x \in \Omega := \mathbb{R}^-$.

$$\begin{aligned}
L_1 v &= (D+1)(xD-1)v = (D+1)(xv' - v) = D(xv' - v) + (xv' - v) \\
&= (xv'' + v' - v') + xv' - v = xv'' + xv' - v \\
\Rightarrow (L_1 v)(x) &= x\mathrm{e}^{-x} + x(-\mathrm{e}^{-x}) - \mathrm{e}^{-x} = -\mathrm{e}^{-x}\,.
\end{aligned}$$

(similarmente)

$$(L_2 v)(x) = 0\,.$$

De esta forma, se ha establecido la existencia de una función $v \in C^2(\Omega)$ tal que $L_1 v \neq L_2 v$. Por ende, se concluye $L_1 \neq L_2$.

Problema 3.
Sea L el operador diferencial lineal definido por $L := (D - x)(xD - 2)$, con $x > 0$.
Muestre que la EDO dada por $(Ly)(x) = \ln(x^2+1)$, $x > 0$, corresponde a la EDO lineal de segundo orden y de coeficientes variables: $x\,y''(x) - (1+x^2)y'(x) + 2x\,y(x) = \ln(x^2+1)\,, \quad x > 0$.

Desarrollo: Efectuando la “multiplicación de operadores” que definen L, tenemos para $x \in \mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned}
L &= (D-x)(xD-2) = (D - xI)(xD - 2I) = D(xD - 2I) - xI\,(xD - 2I) \\
&= (xD^2 + D) - 2D - x^2 D + 2x\,I = xD^2 - (1+x^2)D + 2xI\,. \\
\Rightarrow L &= xD^2 - (1+x^2)D + 2x\,.
\end{aligned}$$

De esta manera

$$(Ly)(x) = ((xD^2 - (1+x^2)D + 2x)y)(x) = xy''(x) - (1+x^2)y'(x) + 2xy(x)\,.$$

Por lo tanto, la EDO dada por $(Ly)(x) = \ln(x^2+1)$ equivale a la EDO

$$xy''(x) - (1+x^2)y'(x) + 2xy(x) = \ln(x^2+1)\,, \quad x > 0\,.$$

Problema 4.
Sea $\Omega := (0,2)$. Estudie la independencia lineal del conjunto $S := \{y_1, y_2\}$ en $C(\Omega)$, siendo $y_1, y_2 : \Omega \to \mathbb{R}$, funciones definidas, para cada $x \in \Omega$, por $y_1(x) := \ln(x)$ e $y_2(x) := x\ln(x)$, respectivamente.

Desarrollo: Por definición, S será linealmente independiente si

$$\forall\,\{\alpha_1, \alpha_2\} \subseteq \mathbb{R} : \Big(\alpha_1 y_1 + \alpha_2\, y_2 = \theta \text{ en } \Omega \quad\Rightarrow\quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0\Big)\,.$$

Recordamos que θ denota la Función Nula. En vista que en este caso se puede verificar (Hacerlo) que $S \subseteq C^1(\Omega)$, se tiene también que

$$\alpha_1 y_1' + \alpha_2\, y_2' = \theta \text{ en } \Omega\,.$$

Es decir, $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ satisfacen el sistema:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1 + \alpha_2\, y_2 = \theta \text{ en } \Omega \\ \alpha_1 y_1' + \alpha_2\, y_2' = \theta \text{ en } \Omega \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ \theta \end{pmatrix} \text{ en } \Omega$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall\, x \in \Omega : \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

El sistema homogéneo último, donde las incógnitas son $\{\alpha_1, \alpha_2\}$, resulta ser lineal y cuadrado, para cada $x \in \Omega$. Para inferir la TESIS ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$), requerimos que dicho sistema tenga solamente la SOLUCIÓN TRIVIAL. Ello estará garantizado SI el DETERMINANTE DE LA MATRIZ DEL SISTEMA resulta ser distinto de cero en al menos un punto de Ω. Esto es lo que induce de manera natural la definición de WRONSKIANO (de un conjunto de funciones). De esta manera, considerando $x \in \Omega$, tenemos

$$W[y_1, y_2](x) := W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ln(x) & x\ln(x) \\ 1/x & \ln(x)+1 \end{vmatrix}$$

$$= \ln^2(x) + \ln(x) - \ln(x) = \ln^2(x) \begin{cases} = 0 & \text{si } x = 1\,, \\ \neq 0 & \text{si } x \in \Omega\backslash\{1\}\,. \end{cases}$$

De esta manera, en vista que $W[y_1, y_2](1/2) \neq 0$, se infiere que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Finalmente, se concluye que el conjunto de funciones S es linealmente independiente en $C(\Omega)$.

Problema 5.

Sean y_1 la solución sobre $\Omega := (0, \infty)$ de $x^2y''(x) + y'(x) + xy(x) = 0,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 2$, e y_2 la solución sobre $\Omega = (0, \infty)$ de $x^2y''(x) + y'(x) + xy(x) = 0, \quad y(1) = 3, \quad y'(1) = -1$,

a) Verifique que $\{y_1, y_2\}$ es conjunto/sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial homogénea $x^2y''(x) + y'(x) + xy(x) = 0$, $x > 0$.

b) Considere el PVI:

$$\begin{cases} x^2y'' + y' + xy = 0\,, \quad x > 0 \\ y(1) = 0, \quad y'(1) = 7\,. \end{cases}$$

¿Cómo puede asegurarse que este PVI admite una única solución? Sea y_3 dicha solución. Determine las constantes reales c_1 y c_2 de modo que $y_3 = c_1y_1 + c_2y_2$.

Desarrollo a): Por definición, el conjunto $\{y_1, y_2\}$ satisface la EDO $x^2y'' + y' + xy = 0$. El Wronskiano viene dado por

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)\, y_2'(x) - y_1'(x)\, y_2(x)\,.$$

Evaluando en $x = 1$, se obtiene $W[y_1, y_2](1) = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 = -7$, es decir, el Wronskiano de y_1, y_2 es distinto de cero en un punto del intervalo Ω. Por un resultado visto en clases, se concluye que las funciones y_1, y_2 son linealmente independientes en Ω. Esto nos permite aseverar que $\{y_1, y_2\}$ es un conjunto/sistema fundamental de soluciones de la EDO indicada.

Desarrollo b): Gracias a que la EDO es lineal, no es difícil verificar que la función $y_3 = c_1y_1 + c_2y_2$ es también solución de la EDO. Para satisfacer las condiciones iniciales, se requiere que $y_3(1) = 0$ y $y_3'(1) = 7$, es decir

$$\begin{cases} c_1y_1(1) + c_2y_2(1) = 2 \\ c_1y_1'(1) + c_2y_2'(1) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_1 + 3c_2 = 0 \\ 2c_1 - c_2 = 7 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad c_1 = 3\,,\, c_2 = -1\,.$$

En consecuencia, la solución del PVI planteado, es $y_3 = 3y_1 - y_2$.

Problema 6.

Sea $L = (D - a)$ donde a es una constante real. Muestre que la función y_1, definida por $\mathbb{R} \ni x \mapsto y_1(x) := \mathrm{e}^{ax}$, es un elemento de $\mathrm{Ker}(L)$. Introducimos ahora la función y_2, definida por $\mathbb{R} \ni x \mapsto y_2(x) := x\mathrm{e}^{ax}$ Muestre que el conjunto de funciones $S := \{y_1, y_2\}$ forma una base de $\mathrm{Ker}(L^2)$.

En general, se puede demostrar que $\forall\, m \in \mathbb{Z}^+ : \forall\, \ell \in \{0, ..., m-1\} : x^\ell \mathrm{e}^{ax} \in \mathrm{Ker}(L^m)$.

Observación: Lo anterior no es válido si L tiene coeficientes variables.

Desarrollo: En primer lugar, notamos que $S \subseteq C^{\infty}(\mathbb{R})$.
Aplicando el operador L a la función y_1, en un punto $x \in \mathbb{R}$ fijo pero arbitrario:

$$(Ly_1)(x) \,=\, y_1'(x) - ay_1(x) \,=\, a\mathrm{e}^{ax} - a\mathrm{e}^{ax} \,=\, 0\,,$$

lo que permite asegurar que $y \in \mathrm{Ker}(L)$. Veamos ahora que el conjunto $S \subseteq \mathrm{Ker}(L^2) = \mathrm{Ker}((D-a)^2)$.

Teniendo en cuenta que $y_1 \in \mathrm{Ker}(L)$, resulta

$$L^2 y_1 = L\Big(Ly_1\Big) = L(0) = 0, \quad (\text{pues } L \text{ es lineal})\,.$$

Veamos ahora que $y_2 \in \mathrm{Ker}(L^2)$.
Primera forma: Efectuando la multiplicación que define L^2, nos queda

$$L^2 \,=\, (D - aI)(D - aI) \,=\, D(D - aI) \,-\, aI\,(D - aI) \,=\, D^2 - a\,D \,-\, a\,I \,+\, a^2\,I \,=\, D^2 \,-\, 2a\,D \,+\, a^2\,.$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} L^2 y_2 \,&=\, (D^2 \,-\, 2a\,D \,+\, a^2)y_2 \,=\, y_2'' - 2ay_2' + a^2 y_2 \\ \Rightarrow \forall\, x \in \mathbb{R} \,:\, (L^2 y_2)(x) \,&=\, y_2''(x) - 2ay_2'(x) + a^2 y_2(x) \,=\, \cdots \,=\, 0\,, \end{aligned}$$

de donde se infiere que $y_2 \in \mathrm{Ker}(L^2)$. □
Otra forma: notamos que $y_2 = x\,y_1$, y tenemos presente que $y_1 \in \mathrm{Ker}(L)$. Con ello

$$(D-a)y_2 \,=\, (D - a\,I)(xy_1) \,=\, D(xy_1) \,-\, a\,x\,y_1 \,=\, y_1 \,+\, xDy_1 \,-\, a\,x\,y_1 \,=\, y_1 \,+\, x\,\underbrace{(D-a)y_1}_{=0} \,=\, y_1$$

$$\Rightarrow\; L^2 y_2 \,=\, L\Big((D-a)y_2\Big) \,=\, Ly_1 \,=\, 0\,,$$

y se establece así que $y_2 \in \mathrm{Ker}(L^2)$. □

Ahora, para mostrar que este conjunto forma una base de $\mathrm{Ker}(L^2)$, calculamos el Wronskiano de y_1, y_2

$$W[y_1,y_2](x) \,=\, \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \,=\, \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{ax} & x\mathrm{e}^{ax} \\ a\mathrm{e}^{ax} & (1+ax)\mathrm{e}^{ax} \end{vmatrix} \,=\, (1+ax)\mathrm{e}^{2ax} - ax\mathrm{e}^{2ax} \,=\, \mathrm{e}^{2ax}\,,$$

el cual es estrictamente positivo para todo $x \in \mathbb{R}$, luego el conjunto S dado, es efectivamente una base para $\mathrm{Ker}(L^2)$.

Problema 7.
Resolver los PVI:

a) $y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

b) $y'''(t) + 3y''(t) - y'(t) - 3y(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 5$.

Desarrollo a): Usando el operador diferencial $D := \dfrac{d}{dx}$, reescribimos la EDO como

$$\Big((D^2 + 5D + 6)y\Big)(x) \,=\, 0\,, \quad x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 + 5D + 6)y \,=\, 0\,.$$

La ecuación característica asociada a la EDO homogénea lineal a coeficientes constantes, es

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda + 3)(\lambda + 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = -2.$$

Por lo discutido en clases, a $\lambda_1 = -3$ se le asocia la función $\mathbb{R} \ni x \mapsto y_1(x) := \mathrm{e}^{-3x}$, mientras que $\lambda_2 = -2$ tiene asociada la función $\mathbb{R} \ni x \mapsto y_2(x) := \mathrm{e}^{-2x}$.

En consecuencia, la solución general de la EDO homogénea propuesta, viene dada por

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto y(x) = c_1\,\mathrm{e}^{-3x} + c_2\,\mathrm{e}^{-2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (\text{constantes arbitrarias})\,.$$

La derivada de la función y en $x \in \mathbb{R}$, es

$$y'(x) = -3c_1\,\mathrm{e}^{-3x} - 2c_2\,\mathrm{e}^{-2x}\,.$$

Evaluando en las condiciones iniciales, se obtiene el sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1, \\ -3c_1 - 2c_2 = 2, \end{cases}$$

cuya solución es $c_1 = -4$ y $c_2 = 5$. Finalmente, la solución del PVI propuesto es

$$y(x) = -4\mathrm{e}^{-3x} + 5\mathrm{e}^{-2x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Desarrollo b): Usando el operador diferencial $D := \dfrac{d}{dt}$, reescribimos la EDO como

$$\Big((D^3 + 3D^2 - D - 3)y\Big)(t) \;=\; 0\,, \quad t \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad (D^3 + 3D^2 - D - 3)y \;=\; 0\,.$$

El polinomio característico asociado a la EDO dada es: $\lambda \in \mathbb{C} \mapsto p(\lambda) := \lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda - 3$. Luego, la ecuación característica asociada es

$$p(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda - 3 = 0\,.$$

Recordando lo discutido sobre polinomios y sus ceros en alguna asignatura previa, las posibles raíces de esta ecuación, son: $\{\pm 1, \pm 3\}$. Aplicando la Factorización de Ruffini, se determinan las raíces:

	1	3	-1	-3	
1	1	4	3	0	$(\lambda - 1)$ factor de p
	1	4	3		
-1	1	3	0		$(\lambda + 1)$ factor de p
	1	3			
-3	1	0			$(\lambda + 3)$ factor de p

De esta manera, la ecuación característica se puede expresar como

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda + 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = -3.$$

Cada una de estas raíces simples, dan lugar a las funciones $\mathbb{R} \ni t \mapsto y_1(t) := \mathrm{e}^{\lambda_1 t} = \mathrm{e}^{t}$, $\mathbb{R} \ni t \mapsto y_2(t) := \mathrm{e}^{\lambda_2 t} = \mathrm{e}^{-t}$, $\mathbb{R} \ni t \mapsto y_3(t) := \mathrm{e}^{\lambda_3 t} = \mathrm{e}^{-3t}$, respectivamente. Luego, la solución general de la EDO homogénea planteada, viene dada por

$$\mathbb{R} \ni t \;\mapsto\; y(t) = c_1\,\mathrm{e}^{t} + c_2\,\mathrm{e}^{-t} + c_3\,\mathrm{e}^{-3t}, \qquad t \in \mathbb{R}\,, \quad c_1,\, c_2,\, c_3 \in \mathbb{R} \quad (\text{constantes arbitrarias})\,.$$

Pasamos ahora a determinar la solución del PVI planteado. Para esto, necesitamos de la primera y segunda derivada de la solución general de la EDO dada. Haciendo los cálculos correspondientes, resulta

$$\begin{aligned} y'(t) &= c_1\,\mathrm{e}^{t} - c_2\,\mathrm{e}^{-t} - 3c_3\,\mathrm{e}^{-3t}, \\ y''(t) &= c_1\,\mathrm{e}^{t} + c_2\,\mathrm{e}^{-t} + 9c_3\,\mathrm{e}^{-3t}. \end{aligned}$$

Imponiendo las condiciones iniciales dadas, se obtiene el sistema lineal

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 1, \\ c_1 - c_2 - 3c_3 = 2, \\ c_1 + c_2 + 9c_3 = 5\,. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}}_{=:\boldsymbol{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}}_{=:\boldsymbol{c}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}}_{=:\boldsymbol{b}}\,.$$

Escalonando la Matriz aumentada del sistema, nos queda

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 9 & 5 \end{pmatrix} \overset{\substack{f_3 - f_1 \\ f_2 - f_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} \;=\; (\tilde{\boldsymbol{A}}|\tilde{\boldsymbol{b}})\,.$$

Resolviendo el sistema equivalente (triangular superior)

$$\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{c} \;=\; \tilde{\boldsymbol{b}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 1, \\ -2c_2 - 4c_3 = 1, \\ 8c_3 = 4\,. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_3 = 1/2 \\ c_2 = -3/2 \\ c_1 = 2\,. \end{cases}$$

Finalmente, la solución del PVI dado viene a ser

$$y(t) \;=\; 2\,\mathrm{e}^t \;-\; \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-t} \;+\; \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Problemas propuestos para el estudiante

1. Efectuar $(D^2 - D)(\mathrm{e}^{3x} + 3x^3)$.

2. (a) Muestre que $y_1(x) = ax^2$ con a constante real, es solución de $(x\,D - 2)y = 0$, pero no lo es de $(xD - 2)(D - x)y = 0$.
   (b) Muestre que $y_2(x) = b\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$ con b constante real, es solución de $(D - x)y = 0$, pero no lo es de $(D - x)(xD - 2)y = 0$.
   (c) Muestre que $(D - x)(xD - 2)y_1 = 0$.
   (d) De todo lo anterior, ¿puede afirmarse que $(D - x)(xD - 2) = (xD - 2)(D - x)$? Justificar su respuesta apropiadamente.
   (e) Desarrollar $L_1 := (D - x)(xD - 2)$ y $L_2 := (xD - 2)(D - x)$, con $x < 0$.

3. Determine la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias escritas usando el operador diferencial.

   (a) $(D - 1)(D + 1)y = 0$.
   (b) $(D - 1)^2(D + 1)y = 0$.
   (c) $(D - 1)^2(D + 1)^2(D + 2)^2y = 0$.
   (d) $(D^4 - 2\,D^3 - 5\,D^2 + 6\,D)\,y = 0$.

4. Resuelva la EDO lineal homogénea $Ly = 0$, cuando:

   (*i*) $L = (D + 6)(D - 2)(D + 3)(D - 2)$.
   (*ii*) $L = D^3 - 3D^2 + 4$, sabiendo que la función y_1 dada por $\mathbb{R} \ni x \mapsto y_1(x) := \mathrm{e}^{-x}$, pertenece al Kernel de L.

(*iii*) $L = (D+2)(D^2 - 6D + 10)^2(D^2 - 25)^3$.

5. Considere el operador diferencial lineal L definido por $L = (D-1)^2(D+1)^2$. Sabiendo que la función z definida por $\mathbb{R} \ni x \mapsto z(x) := 2x^3 - 14x$, es una solución particular de $(Ly)(x) = 2x^3 - 26x$, $x \in \mathbb{R}$, determine la solución general de la EDO lineal no homogénea $y^{(iv)}(x) - 2y''(x) + y(x) = 2x^3 - 26x$, $x \in \mathbb{R}$.

6. Determine una EDO lineal a coeficientes constantes reales:

   a) que tenga a $y_1(x) = \mathrm{e}^{-3x}$ entre sus soluciones ¿Cuál es el mínimo orden de la EDO que cumple este requisito?

   b) de orden 4 que tenga entre sus soluciones a $y_1(x) := \mathrm{e}^{-3x}$ e $y_2(x) := x^2\,\mathrm{e}^{5x}$,

   c) de menor orden posible, tal que las funciones $y_1(x) = x^4\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{sen}(3x)$, $y_2(x) = x^2\,\mathrm{e}^{4x}$ pertenezcan al Kernel del operador diferencial L inducido por la EDO.

7. Buscando soluciones del tipo $y(x) = \mathrm{e}^{r\,x}$, r escalar, determine la solución general de $L(y) = 0$, cuando: (a) $L = (D^3 - 4D^2 + D - 2)$, (b) $L = (D^3 - 4D^2 + D - 2)(D-3)$.

8. Considere el operador diferencial lineal L definido por $L = D^4 + 2\,D^3 - 3\,D^2 - 4\,D + 4$. Resuelva la EDO lineal $Ly = 0$, sabiendo que $(D+2)$ y $(D-1)$ son factores de L.

24/08/2022 RBP/JMS/FST//jms/rbp