Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemática
Departamento de Matemática

Cálculo II

Ingeniería Civil

Prof. Víctor Aros Quinán

Segundo Semestre 2021

Clase N$^{\underline{o}}$10: Cálculo II
Funciones Logaritmo, Exponencial e Hiperbólicas

Función Logaritmo Natural

Consideremos la siguiente función definida a través de una integral:

$$F(x) := \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \,, \text{ para } x > 0$$

notar que F es derivable y además

$$F'(x) = \qquad \text{y} \quad F''(x) =$$

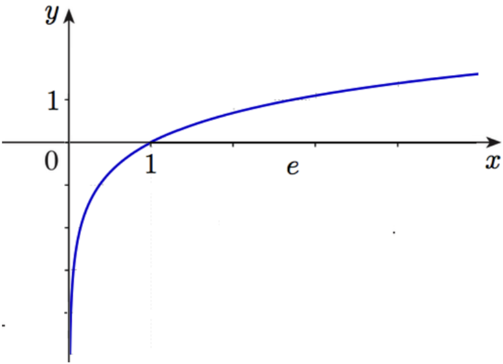
Luego, F es estrictamente creciente (e inyectiva) y su gráfica es cóncava hacia abajo.

Función Logaritmo natural

Además, $F(1) = 0$ y se puede probar que:

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0} F(x) = -\infty$$

Lo cual nos dice que el recorrido de F es todo $\mathbb{R}$, o sea, F es sobreyectiva.



Función Logaritmo natural

Definición

La función $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$, con $x > 0$ recibe el nombre **logaritmo natural** y se denota por $\ln(x)$ y está definida por:

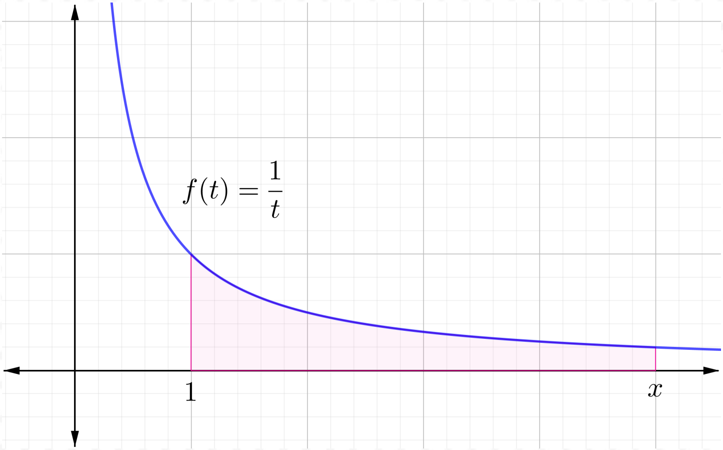
$$\begin{aligned} \ln : (0, +\infty) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \end{aligned}$$

Observación: De lo anterior sigue que

$$\frac{d}{dx}[\ln(x)] = \frac{1}{x}$$

Función Logaritmo natural

De la definición anterior tenemos que si $x > 1$, geométricamente la función logaritmo natural puede verse como el área bajo la hipérbola $f(t) = \dfrac{1}{t}$, que va desde $t = 1$ hasta $t = x$, esto es:



Propiedades logaritmo natural

De la definición anterior, se pueden desprender las siguientes propiedades del logaritmo natural.

Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$ y $r \in \mathbb{R}$, entonces:

1. $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
2. $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln(b)$
3. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
4. $\ln(a^r) = r\ln(a)$

Observación: Para la función $\ln(x)$ es de suma importancia la preimágen del 1, ya que es el único numero real x tal que $\ln(x) = 1$. Dicho número se denota por e y se puede probar que es un número irracional ($e \approx 2,7183..$)

Función Exponencial Natural

La función

$$\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

es biyectiva, luego posee una función inversa, que corresponde a la denominada **función exponencial natural** y se denota por $\exp(x)$. Así,

$$\exp(x) = y \Leftrightarrow \ln(y) = x$$

que además cumple:

$$\exp(\ln(x)) = x \;\text{ y }\; \ln(\exp(x)) = x$$

Función Exponencial Natural

Observación: Si $r \in \mathbb{R}$, por Teorema 4.3 tenemos que:

$$\ln(e^r) = r\ln(e) = r$$

y por tanto, $\exp(r) = e^r$, $\forall r \in \mathbb{R}$.

Definición

La función **exponencial natural** está definida por:

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\to (0, +\infty) \\ x &\mapsto \exp(x) = e^x \end{aligned}$$

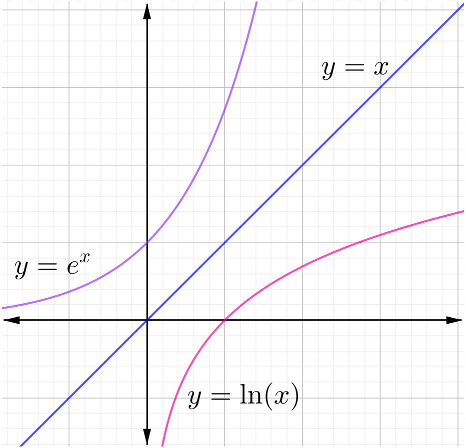
Función Exponencial Natural

Dada la definición anterior de la función exponencial natural, podemos deducir las siguientes propiedades las cuales se cumplen para todo $b, c \in \mathbb{R}$:

1. $e^{b+c} = e^b e^c$
2. $\left(e^b\right)^c = e^{bc}$
3. $e^0 = 1$
4. $e^{-b} = \dfrac{1}{e^b}$
5. $e^{b-c} = \dfrac{e^b}{e^c}$

Función Exponencial Natural

Conocida la gráfica de $\ln(x)$ se puede obtener la gráfica de la función $\exp(x)$, por simetría con respecto a la recta $y = x$, esto es:



Función Exponencial

Sabemos que para $a > 0$

$$a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x\ln(a)}$$

Luego, como $e^{x\ln(a)}$ está bien definida cualquiera sea $x \in \mathbb{R}$, podemos definir la **función exponencial de base** a por

$$a^x := e^{x\ln(a)} \ , \forall x \in \mathbb{R}$$

Notar que $a^0 = 1$ y $a^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Teorema

Sean $a > 0$ y $b, c \in \mathbb{R}$. Dado esto se pueden definir las leyes de los exponentes:

1. $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$
2. $a^{-b} = \dfrac{1}{a^b}$
3. $(a^b)^c = a^{bc}$

Función Exponencial

Notar que:

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2}{dx^2}(a^x) =$$

De lo anterior sigue que:

1. Si $0 < a < 1$, entonces:

$$\ln(a) < 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}(a^x) < 0$$

   Luego, $f(x) = a^x$ con $0 < a < 1$ es estrictamente

2. Si $a > 1$, entonces:

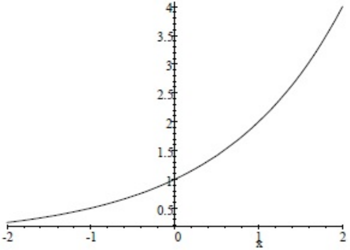
$$\ln(a) > 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}(a^x) > 0$$

   Luego, $f(x) = a^x$ con $a > 1$ es estrictamente

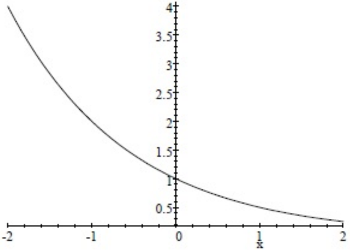
3. Claramente si $a = 1$ la función es

Función Exponencial

Ahora bien, como $\frac{d^2}{dx^2}(a^x) = (\ln(a))^2 a^x > 0$ se deduce que la gráfica de la función a^x con $a > 0$ es cóncava hacia arriba sobre todo $\mathbb{R}$.



$y = a^x$, con $a > 1$



$y = a^x$, con $0 < a < 1$

Función Exponencial

Como en este curso nos interesan las integrales, recordemos que como

$$\frac{d}{dx}a^x = \ln(a)\, a^x$$

Luego,

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$$

Ejemplos: Calcule las siguientes integrales.

(a) $\displaystyle\int_1^{\pi} 2^x \, dx$

(b) $\displaystyle\int 5^{4-x} \, dx$

Función Logaritmo en Base $a > 0$

Se puede mostrar que la **función exponencial en base** a

$$\mathbb{R} \to]0, +\infty[\ ,\ x \mapsto a^x$$

es biyectiva. Luego, su inversa es la función **logaritmo en base** a dada por:

$$\log_a :]0, +\infty[\to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto \log_a x$$

Observación: ¿Cómo derivar e integrar la expresión $\log_a(x)$?

Por la propiedad del cambio de base, se tiene:

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Por tanto,

$$\frac{d}{dx}\log_a(x) =$$

Función Logaritmo en Base $a > 0$

Ahora bien, en el caso de la integral se deduce que

$$\int \log_a(x)\,dx = \int \frac{\ln(x)}{\ln(a)}\,dx =$$

Ejemplos: Calcule las siguientes integrales.

(a) $\displaystyle\int_1^3 \log_5(x)\,dx$

(b) $\displaystyle\int x\ \log_3(x)\,dx$

Propiedades de $\log_a b$

De la definición anterior, se pueden desprender las siguientes propiedades del logaritmo.

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ y $r \in \mathbb{R}$. Las siguientes con ciertas:

1. $\log_a(bc) = \log_a(b) + \log_a(c)$
2. $\log_a\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\log_a(b)$
3. $\log_a\left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$
4. $\log_a(b^r) = r\log_a(b)$

Funciones Hiperbólicas

A continuación, analizaremos una clase especial de funciones exponenciales llamadas **funciones hiperbólicas**.

Consideremos las siguientes funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dadas por:

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Notemos que:

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = 1$$

es decir, las funciones anteriores satisfacen la ecuación de la hipérbola

$$x^2 - y^2 = 1$$

Funciones Hiperbólicas

Por tal razón las funciones definidas recientemente reciben el nombre de funciones hiperbólicas y las denotaremos como sigue:

$$\begin{aligned} \cosh : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \sinh : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

Observación: Las expresiones $\sinh(x)$, $\cosh(x)$ reciben el nombre de **seno hiperbólico** y **coseno hiperbólico**, respectivamente.

Funciones Hiperbólicas

Notar que las funciones definidas recientemente satisfacen propiedades muy similares a las funciones trigonometricas $\sin(x)$ y $\cos(x)$, de ahí el nombre.

Propiedades

1. **Identidad Fundamental:** $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$
2. $\sinh(0) = 0$ y $\cosh(0) = 1$
3. $\frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x)$ y $\frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
4. La función cosh es *par*, es decir, $\cosh(-x) = \cosh(x)$, mientras que sinh es *impar*, osea, $\sinh(-x) = -\sinh(x)$.

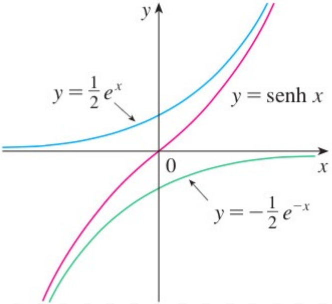
Seno hiperbólico

Como $\frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x) > 0 \Rightarrow \sinh(x)$ es estrictamente creciente. Además, notamos que:

$$x < 0 \Rightarrow \sinh(x) < 0$$

$$x > 0 \Rightarrow \sinh(x) > 0$$

Así, como $\frac{d^2}{dx^2}\sinh(x) = \sinh(x)$, luego su gráfica es cóncava hacia abajo para $x < 0$ y cóncava hacia arriba cuando $x > 0$.



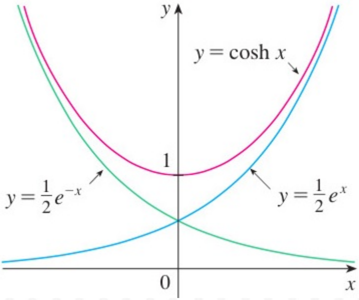
Coseno Hiperbólico

Similarmente, para $\cosh(x)$ se tiene

$$\frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x)$$

Y así su gráfica es decreciente para $x < 0$ y creciente para $x > 0$.

Luego, como $\frac{d^2}{dx^2}\cosh(x) = \cosh(x) > 0 \Rightarrow$ gráfica es cóncava hacia arriba.

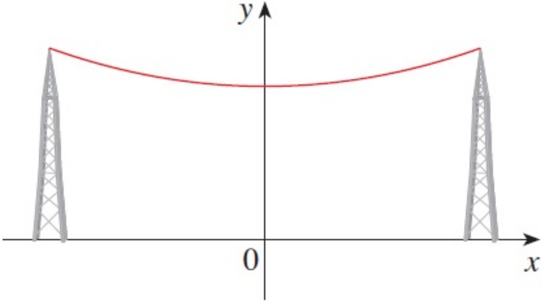


Aplicación de Funciones Hiperbólicas

La aplicación mas famosa es el uso del *coseno hiperbólico* para describir la forma de un cable colgante. Se puede demostrar que si un cable *pesado y flexible* (como los que se usan para las líneas telefónica o eléctricas) se tiende entre dos puntos a la misma altura, entonces el cable toma la forma de una curva con ecuación

$$y = c + a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

que se denomina **catenaria**.



Aplicación de Funciones Hiperbólicas

Inspirados en la *catenaria* (en particular en una catenaria invertida), en 1947 el arquitecto estadounidense de Eero Saarinen y el ingeniero alemán Hannskarl Bandel diseñaron el denominado *Arco Gateway, o la Puerta hacia el Oeste* (San Luis - EE.UU).

Funciones Hiperbólicas

Al igual que en el caso de las funciones trigonométricas, definimos otras 4 funciones hiperbólicas en términos de $\sinh(x)$ y $\cosh(x)$:

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \qquad \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} \qquad \operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)}$$

Identidades Hiperbólicas

Algunas identidades hiperbólicas importantes son las siguientes:

1. $\tanh^2(x) + \operatorname{sech}^2(x) = 1$
2. $\coth^2(x) - \operatorname{csch}^2(x) = 1$
3. $\sinh(x \pm y) = \sinh(x)\cosh(y) \pm \cosh(x)\sinh(y)$
4. $\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y)$
5. $\tanh(x \pm y) = \dfrac{\tanh(x) \pm \tanh(y)}{1 \pm \tanh(x)\tanh(y)}$

Ejercicio: Demostrar dichas propiedades.

Funciones Hiperbólicas

Se pueden definir **hiperbólicas inversas**, como sigue:

$$\operatorname{arcsenh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \ , \ x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \ , \ x \geq 1$$

$$\operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \ , \ -1 < x < 1$$

Dado lo anterior, podemos calcular sus derivadas las cuales están dadas por:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsenh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcosh}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

Funciones Hiperbólicas

Luego, podemos definir las siguientes integrales indefinidas:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \text{arcsenh}(x) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \text{arcosh}(x) + C$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \text{arctanh}(x) + C$$