Clase 5

Cálculo 3

Carlos Martínez Ranero

Departamento de Matemática
Universidad de Concepción

Recordatorio de la clase anterior.

- Funciones continuas.
- Derivadas parciales.

Objetivos de la clase de hoy.

- Derivadas direccionales.
- Derivadas parciales de orden superior.

Derivadas direccionales.

Definición

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\vec{a} \in A$, $\vec{v}$ un vector unitario y $f : A \to \mathbb{R}$. Definimos

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{v}) - f(\vec{a})}{h}.$$

Se llama la derivada direccional de f en la dirección de $\vec{v}$. Notemos que las parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$, corresponden a las derivadas direccionales con respecto a los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$.

Proposición

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\vec{a} \in A$, $\vec{v}$ un vector unitario y $f : A \to \mathbb{R}$. Si $f(\vec{a} + h\vec{v})$ es una función diferenciable, en la variable h, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{a}) = \left.\frac{d}{dh}\right|_{h=0} f(\vec{a} + h\vec{v}).$$

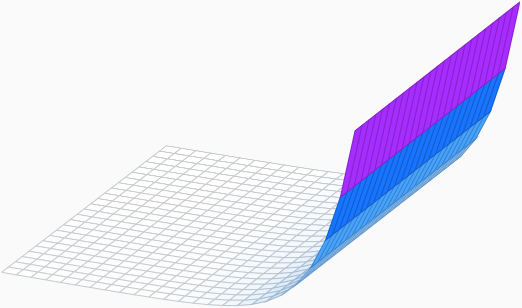
Ejemplo 1

Calcular la derivada direccional de la función $f(x,y) = \sin(xy) + e^x$ en la dirección del vector $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$ en el punto $\vec{a} = (0,0)$.

Derivadas Parciales.

Solución:

- $f((0,0)+\frac{h}{\sqrt{5}}(1,2)) = f(\frac{h}{\sqrt{5}}, \frac{2h}{\sqrt{5}}) = \sin(\frac{2h^2}{5}) + e^{\frac{t}{\sqrt{5}}}$.
- Como $f(\vec{a}+h\vec{v})$ es diferenciable, podemos utilizar la proposición anterior.
- $\frac{d}{dh}\Big|_{h=0}\left(\sin(\frac{2h^2}{5}) + e^{\frac{t}{\sqrt{5}}}\right) = \left(\frac{4h}{5}\cos(\frac{2h^2}{5}) + \frac{1}{\sqrt{5}}e^{\frac{t}{\sqrt{5}}}\right)\Big|_{t=0}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \frac{1}{\sqrt{5}}$.



Ejemplo 2

Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \textit{para } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Calcular para cada vector unitario $\vec{u} = (a,b)$, la derivada direccional $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)$.

Solución:

- Utilizando la definición se tiene
- $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h^3a^2b}{h(h^2a^2+h^2b^2)} = a^2b.$

Derivadas Parciales de Orden Superior.

Sea $f(x,y)$ una función de dos variables.

- Derivadas de primer orden:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x, \frac{\partial f}{\partial y} = f_y,$$

- Derivadas de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = (f_x)_x = f_{xx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = (f_x)_y = f_{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = (f_y)_x = f_{yx}$$

Derivadas Parciales de Orden Superior.

- Derivadas de tercer orden:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right) = ((f_y)_y)_x = f_{yyx}$$

Ejemplo 3

Calcular las derivadas de primer y segundo orden de la función $f(x, y) = x\sin(y) + y^2 e^{2x}$.

Derivadas Parciales de Orden Superior.

Solución:

- $\frac{\partial f}{\partial x} = \sin(y) + 2y^2 e^{2x}$
- $\frac{\partial f}{\partial y} = x \cos y + 2ye^{2x}$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \cos y + 4ye^{2x}$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \cos y + 4ye^{2x}$

Derivadas Parciales de Orden Superior.

Ejemplo 4

Calcular las derivadas de primer y segundo orden de la función $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Calcular $f_{xy}(0,0)$ y $f_{yx}(0,0)$,

Derivadas Parciales de Orden Superior.

Solución:

- $\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \frac{-y^5+4x^2y^3+x^4y}{(x^2+y^2)^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$
- $\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} \frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{-h^5}{h(h^4)} = -1$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{h^5}{h(h^4)} = 1$