Electromagnetismo 543201 Guía de Problemas #6

Ley de Biot-Savart

1) En el modelo de 1913 del átomo de hidrógeno de Niels Bohr, un electrón rodea al protón a una distancia de **5,29 x 10^{11} [m]** con una velocidad de **2,19 x 10^{6} [m/s]**. Calcule la magnitud del campo magnético que produce este movimiento en la ubicación del protón.

La situación puede representarse mediante lo mostrado en la Figura A.

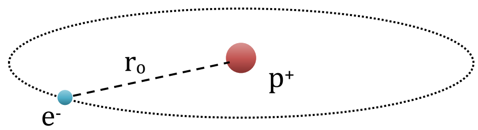


Figura A

Para ocupar la ley de Biot-Savart es necesario conocer el período de tiempo en el que el electrón da una vuelta completa, con lo que puede obtenerse una corriente equivalente al movimiento de dicho electrón.

Se conoce la rapidez del electrón y la distancia que necesita recorrer para dar una vuelta completa, por lo que:

$$d_{vuelta\ completa} = v \cdot T$$

$$2 \cdot \pi \cdot r_0 = v \cdot T$$

donde r_0 es el radio de la circunferencia, dado por la distancia entre el protón y el electrón.

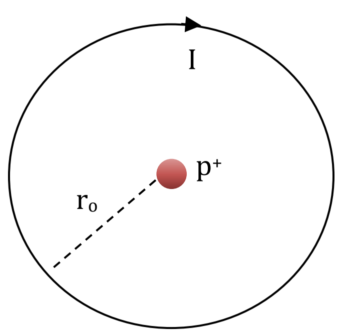
Despejando:

$$T \approx 1.5137 \cdot 10^{-16}\ [s]$$

Ello significa que a través de un punto cualquiera de la circunferencia pasarán $1.6 \cdot 10^{-19}$ [C] cada $1.5137 \cdot 10^{-16}$ [s]. Eso implica que, a través de esta circunferencia imaginaria, hay una corriente circulando que puede representarse mediante:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \approx \frac{1.6 \cdot 10^{-19}\ [C]}{1.5137 \cdot 10^{-16}\ [s]} \approx 1.057[\mathrm{mA}]$$

Por tanto, la situación puede representarse a través de lo mostrado en la siguiente figura.

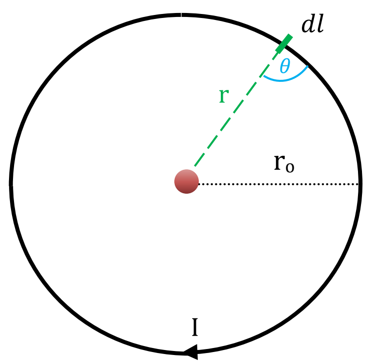


En definitiva, se debe calcular el campo magnético que genera una corriente I que circula en una trayectoria circunferencial de radio r_0. La magnitud de dicho campo puede determinarse a través de la ley de Biot-Savart:

$$|\vec{B}| = \int \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot dl$$

Hay que recordar que, por la ley de Biot Savart, el campo magnético se obtiene a partir de un producto cruz. De ahí viene que el módulo de un producto cruz corresponda al producto de las magnitudes por el seno del ángulo.

donde μ_0 corresponde a la permeabilidad magnética del vacío, dl es un elemento diferencial de longitud por el que circula la corriente, r es la distancia que separa el elemento diferencial dl del punto de análisis (punto en el que se desea calcular el campo magnético), I es la corriente circulando a través del elemento diferencial de longitud dl, y θ es el ángulo que hay entre el elemento dl y la línea que une el elemento dl con el punto de análisis. Para que lo anterior se entienda de mejor manera, la siguiente figura puede servir de guía gráfica.



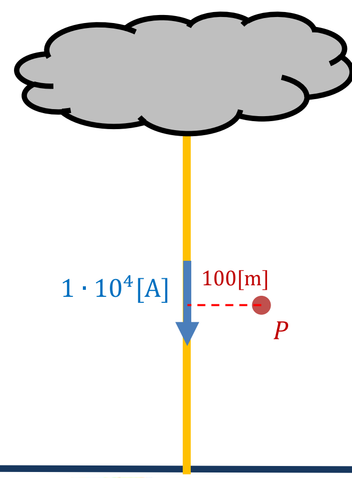
Como puede notarse, la distancia que separa cualquier elemento diferencial dl del protón es la misma, por lo que r es constante para todo dl. Asimismo, el ángulo θ para todo elemento diferencial dl es igual a 90º, por lo que sen $\theta = 1$ para todo dl. Luego:

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot {r_0}^2} \int dl$$

$\int dl$ es simplemente el largo total de la trayectoria circunferencial. Luego:

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi {r_0}^2} 2\pi r_0 = \frac{\mu_0 I}{2 r_0}$$

2) Un rayo puede producir una corriente de hasta **1 x 10^4 [A]** por un corto período de tiempo. ¿Cuál es el campo magnético resultante a **100 [m]** del rayo? Suponga que el rayo se extiende muy por encima y por debajo del punto de observación.



La situación puede representarse mediante lo mostrado en la figura anterior. Se pide determinar la magnitud del campo magnético en un punto P alejado 100[m] del rayo. Para ello, se puede hacer la simplificación mostrada en la Figura B:

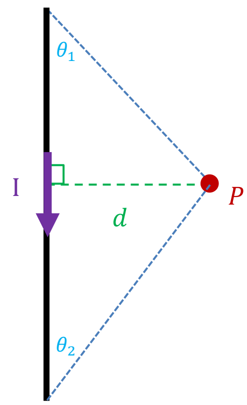


Figura B

El campo magnético generado por una línea con corriente sobre el punto P (aplicable a todas las líneas con corriente uniforme) corresponde a:

$$\left|\vec{B}_p\right| = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot d} \cdot (\cos\theta_1 + \cos\theta_2), \qquad (Ec. 1)$$

donde I es la corriente que circula a través de la línea con corriente, d es la distancia mínima entre el punto de análisis y la línea con corriente (distancia mínima perpendicular), y θ_1 y θ_2 son los ángulos que forman las proyecciones de los extremos sobre el punto P, tal como se mostró en la Figura B. (*La demostración de esta expresión se puede llevar a cabo teniendo en cuenta el planteamiento/metodología desarrollada en el ejercicio 1; de todas maneras, si les causa duda esta expresión, puedo adjuntarles la demostración*).

Luego, considerando el problema descrito en el enunciado, se tiene que el campo magnético a 100[m] del rayo corresponde a:

$$\left|\vec{B}_{100}\right| = \frac{\mu_0 \cdot 10^4[\mathrm{A}]}{4 \cdot \pi \cdot 100[\mathrm{m}]} \cdot (\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$$

Ahora bien, como se dice el rayo se extiende muy por encima y por debajo del punto de observación, ello significa que puede considerarse $\theta_1 = \theta_2 = 0°$. Luego:

$$\left|\vec{B}_{100}\right| = \frac{\mu_0 \cdot 10^4}{4 \cdot \pi \cdot 100} \cdot (\cos 0 + \cos 0) = \frac{\mu_0 \cdot 10^4}{4 \cdot \pi \cdot 100} \cdot 2$$

En definitiva:

$$\left|\vec{B}_{100}\right| \approx 2 \cdot 10^{-5}[\mathrm{T}]$$

3) Un conductor doblado formando una espira rectangular de lado l=**0.4 [m]** lleva una corriente **I=10 [A]** como se muestra en la Fig. 1. Calcule la magnitud y la dirección del campo magnético en el centro de la espira. (b) ¿Qué pasa si este conductor se transforma en una espira circular que lleva la misma corriente, ¿cuál es el valor del campo magnético en el centro?

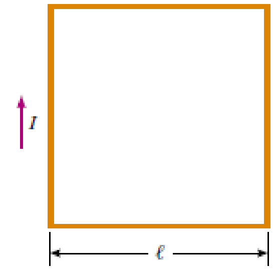
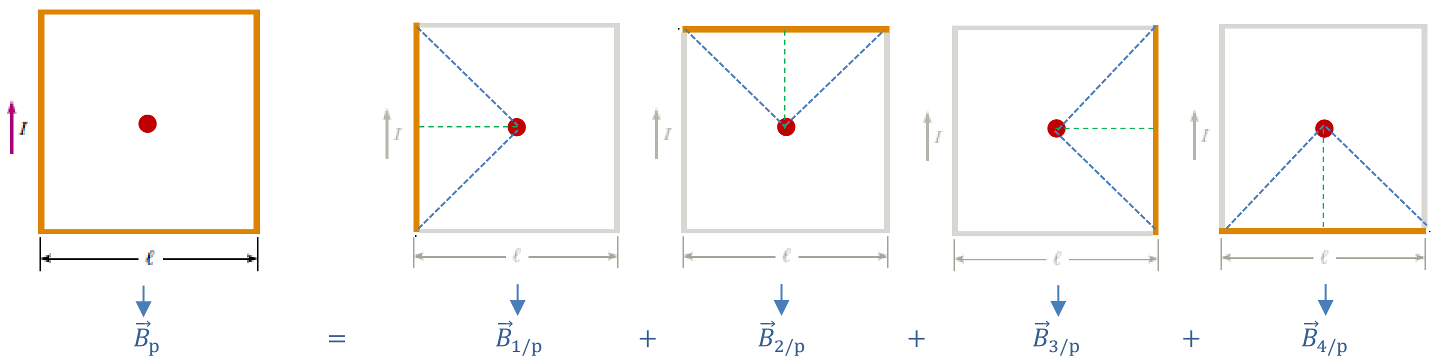


Figura 1

La magnitud del campo magnético en el centro de la espira se puede determinar aplicando el principio de superposición: cada lado de la espira cuadrada contribuye con campo magnético al centro de la espira, tal como se esquematiza en la siguiente figura:



Ahora bien, dada la simetría de la situación, basta con calcular la contribución de campo magnético de uno de los cuatro lados para obtener el campo magnético total en el centro de la espira. A través de lo desarrollado en el ejercicio 2, puede aplicarse la ecuación (1) para determinar el campo magnético provocado por uno de los segmentos sobre el centro de le espira:

$$\left|\vec{B}_{1/\mathrm{p}}\right| = \left|\vec{B}_{2/\mathrm{p}}\right| = \left|\vec{B}_{3/\mathrm{p}}\right| = \left|\vec{B}_{4/\mathrm{p}}\right| = \frac{\mu_0 \cdot 10}{4 \cdot \pi \cdot 0.2} \cdot (\cos 45° + \cos 45°)$$

Luego:

$$\left|\vec{B}_{\mathrm{p}}\right| = 4 \cdot \frac{\mu_0 \cdot 10}{4 \cdot \pi \cdot 0.2} \cdot (\cos 45° + \cos 45°)$$

Simplificando y calculando:

$$\left|\vec{B}_{\mathrm{p}}\right| \approx 2.8 \cdot 10^{-5} [\mathrm{T}]$$

4) Calcule la magnitud del campo magnético en un punto ubicado a **100 [cm]** de un conductor largo y delgado que transporta una corriente de **1 [A]**.

Dado que se menciona que el conductor es largo y delgado, puede asumirse que su comportamiento es similar al de un cable infinitamente largo por el que circula una cierta corriente. A partir de lo desarrollado en el ejercicio 2), la magnitud del campo magnético provocado por una línea de corriente infinita sobre un punto ubicado a una distancia perpendicular d de ella corresponde a:

$$\left|\vec{B}_{\text{línea infinita}}\right| = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot d}$$

donde I es la corriente circulando por el cable infinito. Luego, en este caso:

$$\left|\vec{B}\right| = \frac{\mu_0 \cdot 1}{2 \cdot \pi \cdot 1} \approx 2 \cdot 10^{-7}[\mathrm{T}]$$

5) Determine el campo magnético en un punto **P** ubicado a una distancia **x** de la esquina de un cable infinitamente largo doblado en ángulo recto y que lleva una corriente I, como se muestra en la figura 2.

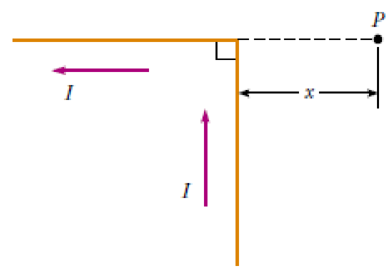
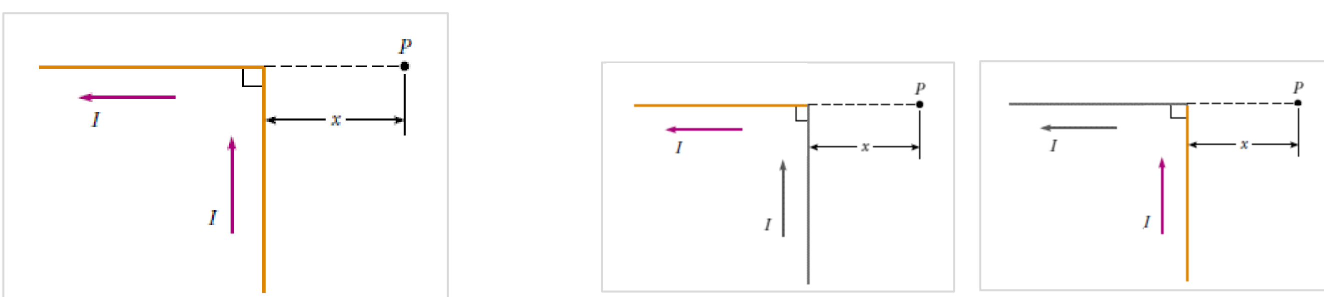


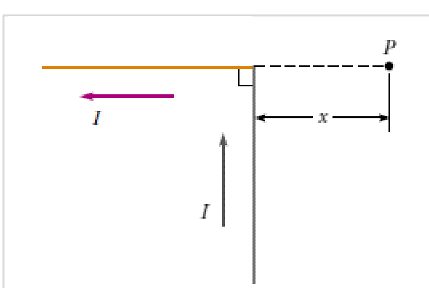
Figura 2

Para desarrollar este ejercicio es necesario aplicar el principio de superposición. El campo magnético en el punto P puede determinarse como la suma de contribuciones de los dos segmentos rectilíneos: el vertical y el horizontal, tal como se muestra a continuación de manera esquemática:



$$\vec{B}_{\mathrm{p}} = \vec{B}_{\mathrm{hor/p}} + \vec{B}_{\mathrm{ver/p}}$$

Vayamos por parte: La contribución del segmento horizontal sobre el punto P.



Consideremos la metodología que hemos usado hasta ahora, planteando la integral que permite obtener el campo magnético provocado por una distribución continua de corriente:

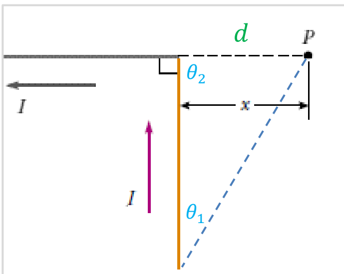
$$\left|\vec{B}\right| = \int \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot dl$$

Ahora bien, debe notarse que la corriente en este segmento es colineal con el punto P, lo cual hace que $\operatorname{sen}\theta = 0$ para cualquier elemento diferencial del segmento rectilíneo.

Luego, este segmento con corriente no contribuye con campo magnético al punto P. Esto es generalizable a todo segmento rectilíneo con corriente que sea colineal con respecto al punto en el que se quiere determinar el campo magnético.

$$\vec{B}_{\text{hor/p}} = 0$$

Vamos ahora con la contribución del segmento vertical sobre el punto P.



Acá se puede aplicar la ecuación (1) que usamos en el ejercicio 2, que dice relación con el campo magnético generado por un segmento rectilíneo sobre un punto P que se encuentra a una distancia perpendicular d del segmento:

$$\left|\vec{B}_p\right| = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot d} \cdot (\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$$

En este caso, se tiene que $\theta_1 \rightarrow 0$ dado que el segmento rectilíneo se proyecta infinitamente en la dirección -$\hat{y}$. Por otro lado, $\theta_2 = 90°$. Luego:

$$\left|\vec{B}_{\text{ver/p}}\right| = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot x} \cdot (\cos 0° + \cos 90°)$$

Simplificando:

$$\left|\vec{B}_{\text{ver/p}}\right| = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot x}$$

En definitiva, el campo magnético total sobre el punto P corresponde solamente a la contribución realizada por el segmento horizontal, y:

$$\left|\vec{B}_{\text{p}}\right| = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot x}$$

Para determinar la dirección del campo magnético en el punto P, podemos recurrir a la regla de la mano derecha simplificada para cables con corriente, tal como se muestra a continuación:

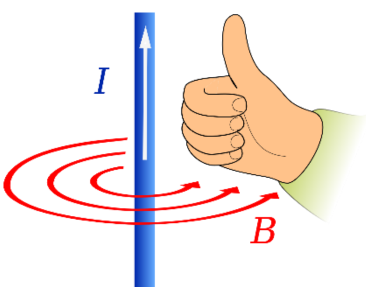


Figura C

Con la mano derecha y la mano abierta, deben orientar el pulgar en la dirección en la que apunta la circulación de corriente del cable que estén analizando (que esté contribuyendo con campo magnético). Luego, la dirección en la que ustedes cierran la mano, tal como se ve en la figura, es la dirección en la que el campo circula alrededor del cable. El campo magnético es circulante alrededor de los cables con corriente, y el sentido de giro (a favor de las manecillas o en contra de las manecillas) está dado por esta famosa regla (que a su vez se desprende del producto cruz de la ley de Biot Savart).

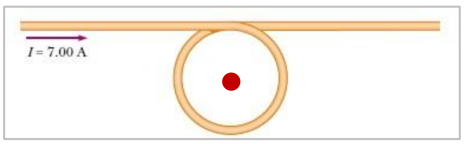
Por lo tanto, en este ejercicio, tenemos que el campo magnético en el punto P debiera tener como dirección -$\hat{z}$ (entrando a la hoja de manera perpendicular a ella). Luego:

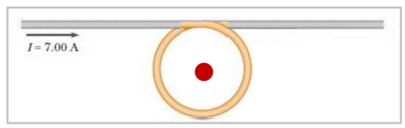
$$\vec{B}_{\text{p}} = -\frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot x} \cdot \hat{z}$$

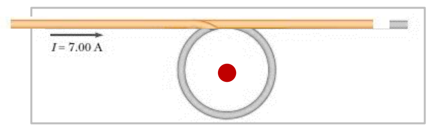
6) Se tiene un conductor doblado formando una espira circular de radio **R** y dos secciones rectas y largas, como se muestra en la figura 3. Si el conductor se encuentra en el plano de la hoja y lleva una corriente I, encuentre una expresión para el campo magnético vectorial en el centro del bucle.

Figura 3

La resolución de este ejercicio es similar a la del anterior, dado que se debe acudir al principio de superposición para su resolución: el campo magnético total sobre el punto central P puede determinarse como la suma de las contribuciones de campo magnético de un segmento rectilíneo "infinito" (como se dice que las secciones rectas son muy largas puede asumirse, para efectos de simplificación del cálculo, que ambos son infinitos). Así, el esquema de superposición queda como se muestra a continuación:







$$\vec{B}_{\mathrm{p}} = \vec{B}_{\mathrm{circular/p}} + \vec{B}_{\mathrm{lineal/p}}$$

A partir de lo desarrollado en el ejercicio 1, se tiene que el campo magnético provocado por una porción circunferencial cerrada con corriente circulante I en su centro de curvatura está dado por:

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2r_0},$$

donde r_0 es el radio de la circunferencia con corriente. Luego, en este ejercicio se tiene que:

$$|\vec{B}_{\mathrm{circular/p}}| = \frac{\mu_0 \cdot 7}{2R}$$

A partir de la regla de la mano derecha, se tiene que la dirección del campo magnético provocado por la espira circular sobre el punto P debe apuntar hacia el interior de la hoja ($-\hat{z}$). Luego:

$$\vec{B}_{\mathrm{circular/p}} = -\frac{\mu_0 \cdot 7}{2R} \cdot \hat{z}$$

Por otro lado, a partir de lo desarrollado en el ejercicio 4) (y el ejercicio 2), se tiene que el campo magnético provocado por una línea infinita de corriente sobre un punto P que se encuentra a una distancia d perpendicular a la línea está dado por:

$$|\vec{B}_{\text{línea infinita}}| = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot d}$$

Luego, evaluando los datos de este problema particular, se tiene que:

$$\left|\vec{B}_{\text{lineal/p}}\right| = \frac{\mu_0 \cdot 7}{2 \cdot \pi \cdot R}$$

A partir de la regla de la mano derecha, se tiene que la dirección del campo magnético provocado por esta línea infinita de corriente sobre el punto P también debe apuntar hacia el interior de la hoja ($-\hat{z}$). Luego:

$$\vec{B}_{\text{lineal/p}} = -\frac{\mu_0 \cdot 7}{2 \cdot \pi \cdot R} \cdot \hat{z}$$

En definitiva, por superposición:

$$\vec{B}_{\text{p}} = -\frac{\mu_0 \cdot 7}{2R} \cdot \hat{z} - \frac{\mu_0 \cdot 7}{2 \cdot \pi \cdot R} \cdot \hat{z}$$

$$\vec{B}_{\text{p}} = -\frac{\mu_0 \cdot 7(\pi + 1)}{2 \cdot \pi \cdot R} \cdot \hat{z}$$

7) Dos cables paralelos, muy largos y rectos, transportan corrientes que entran y salen perpendicularmente de la página, como en la Figura 4. Si el cable 1 lleva una corriente $\mathbf{I_1}$ entrando a la página (en la dirección $-\hat{z}$) y pasa a través del eje x en **x = a.** Por otro lado, el cable 2 pasa a través del eje x en **x = 2a** y lleva una corriente desconocida $\mathbf{I_2}$. El campo magnético total en el origen debido a los cables que transportan corriente tiene la magnitud $\frac{2\mu_0 I_1}{2\pi a}$. $\mathbf{I_2}$ puede tener dos posibles valores. (a) Encuentre el valor más pequeño de $\mathbf{I_2}$, expresándolo en términos de $\mathbf{I_1}$, y dando su dirección. (b) Encuentre el otro valor posible de $\mathbf{I_2}$.

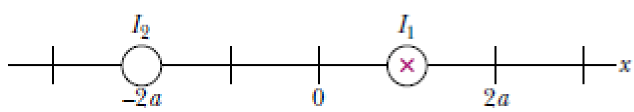
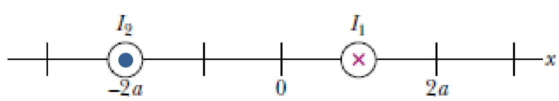
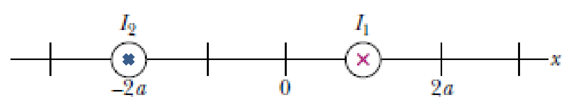


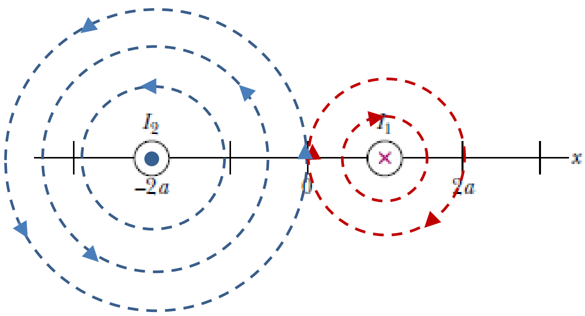
Figura 4

Para resolver este ejercicio, es necesario aplicar el principio de superposición. Como puede verse a partir de la Figura 4, lo que no se conoce es la dirección en la que circula la corriente a través del cable 2, lo cual configura los dos posibles valores de I_2. A continuación, se muestran las dos posibles situaciones:

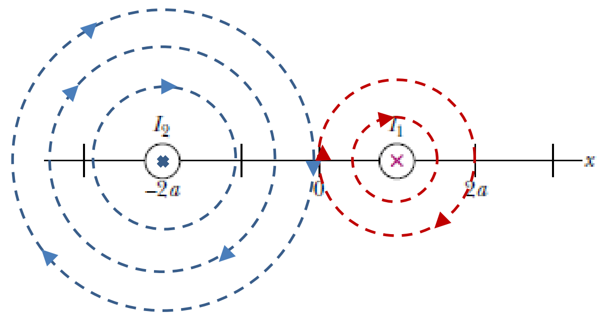




El campo magnético en el origen se debe a la contribución de ambos cables. Ahora bien, a partir de la regla de la mano derecha, puede concluirse que, en la primera situación (corriente en el cable 2 sale perpendicularmente de la hoja), los campos magnéticos provocados por ambos cables apuntan en el mismo sentido, mientras que, en la segunda situación, los campos magnéticos de ambos cables apuntan en sentidos contrarios, tal como se muestra en la siguiente figura.



Situación 1



Situación 2

Por otro lado, a partir de lo desarrollado en el ejercicio 4) (y el ejercicio 2), se tiene que el campo magnético provocado por una línea infinita de corriente sobre un punto P que se encuentra a una distancia d perpendicular a la línea está dado por:

$$\left|\vec{B}_{\text{línea infinita}}\right| = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot d}$$

Luego, en la situación 1, el campo magnético total en el punto O está dado por la aplicación del principio de superposición:

$$\vec{B}_{\text{sit.1}} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi \cdot 2a}\hat{\jmath} + \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \cdot a}\hat{\jmath} = \frac{\mu_0 (I_2 + 2I_1)}{4\pi a}\hat{\jmath}$$

Ahora bien, en el enunciado se sostiene que el campo magnético en el origen es $\frac{2\mu_0 I_1}{2\pi a}$. Luego:

$$\frac{2\mu_0 I_1}{2\pi a} = \frac{\mu_0 (I_2 + 2I_1)}{4\pi a}$$

Despejando:

$$4I_1 = I_2 + 2I_1$$

$$I_2 = 2I_1$$

En este caso, la dirección de la corriente I_2 está dada por la figura de la situación 1, vale decir, saliendo de la hoja perpendicularmente.

Por otro lado, en la situación 2, el campo magnético total en el punto O corresponde a:

$$\vec{B}_{\text{sit.2}} = -\frac{\mu_0 I_2'}{2\pi \cdot 2a}\hat{\jmath} + \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \cdot a}\hat{\jmath} = \frac{\mu_0 (2I_1 - I_2')}{4\pi a}\hat{\jmath}$$

Suponiendo que $I_2' > 2I_1$, entonces:

$$\left|\vec{B}_{\text{sit.2}}\right| = \frac{\mu_0(I_2' - 2I_1)}{4\pi a}\hat{\jmath}$$

Ahora bien, en el enunciado se sostiene que el campo magnético en el origen es $\frac{2\mu_0 I_1}{2\pi a}$. Luego:

$$\frac{2\mu_0 I_1}{2\pi a} = \frac{\mu_0(I_2' - 2I_1)}{4\pi a}$$

Despejando:

$$4I_1 = I_2' - 2I_1$$

$$I_2' = 6I_1.$$

En este caso, la dirección de la corriente $I_2{}'$ está dada por la figura de la situación 2, vale decir, entrando a la hoja perpendicularmente.

8) Una corriente fluye en un conductor con forma de triángulo equilátero de lado **a[m],** tal como se muestra en la figura 5. Calcular la densidad de campo magnético en el centro de gravedad del triángulo.

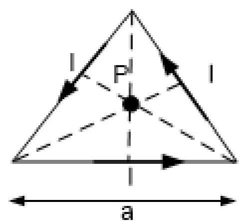
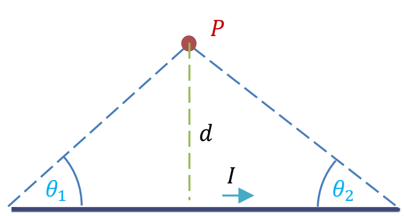


Figura 5

Para resolver este ejercicio, hay que aplicar el principio de superposición y las expresiones que ya hemos trabajado para la densidad de campo magnético provocada por cables finitos con corriente (véase ecuación 1, propuesta en el ejercicio 2).

Por inspección de la geometría del conductor, se puede deducir que la contribución de campo magnético de cada lado del triángulo es igual, tanto en magnitud como en dirección, por lo que basta con analizar un solo lado, lo cual se muestra en la siguiente figura.



A partir de la ley de Biot-Savart se obtiene que la magnitud del campo magnético provocado por este segmento sobre el punto de análisis es:

$$\left|\vec{B}_{segmento}\right| = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot d} \cdot [\cos\theta_1 + \cos\theta_2]$$

En este caso, a partir de la geometría, se puede deducir que $\theta_1 = \theta_2 = 30°$ y $d = \frac{a}{2} \cdot \tan 30°$

$$\left|\vec{B}_{segmento}\right| = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot \frac{a}{2} \cdot \tan 30°} \cdot 2\cos 30°$$

$$\left|\vec{B}_{segmento}\right| = \frac{3\mu_0 I}{2\pi a}$$

Luego, por superposición, la densidad de campo magnético total sobre el punto P corresponde a:

$$\left|\vec{B}_{\mathrm{p}}\right| = 3\left|\vec{B}_{segmento}\right| = \frac{9\mu_0 I}{2\pi a}$$

Por regla de la mano derecha, el campo total sobre el centro del triángulo debe apuntar hacia afuera de la hoja, por lo que:

$$\vec{B}_{\mathrm{p}} \approx \frac{9\mu_0 I}{2\pi a}\hat{z}$$

9) Un conductor de largo **2L [m]** lleva una corriente de **I[A]**. Dicho conductor está doblado de la forma indicada en la figura 6. Calcular la densidad de flujo magnético en el punto P

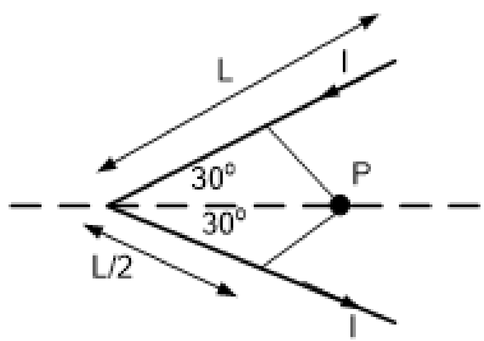
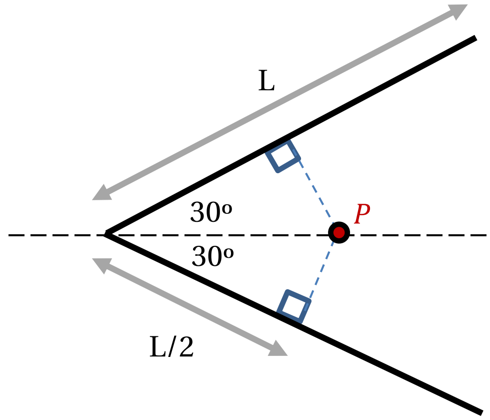


Figura 6

Para resolver este ejercicio, hay que aplicar el principio de superposición y las expresiones que ya hemos trabajado para la densidad de campo magnético provocada por cables finitos con corriente (véase ecuación 1, propuesta en el ejercicio 2).

Para ello, vamos a considerar que las líneas que unen la mitad de cada segmento recto con el punto de análisis son perpendiculares a los segmentos, tal como se muestra a continuación:



Por inspección de la geometría del conductor, se puede ver que estos dos segmentos rectos corresponden a dos lados de un triángulo equilátero, tal como se tenía en el ejercicio anterior. Luego, la densidad de flujo magnético en el punto P corresponde a:

$$\left|\vec{B}_{\mathrm{p}}\right| = 2\left|\vec{B}_{segmento}\right| = \frac{6\mu_0 I}{2\pi L} = \frac{3\mu_0 I}{\pi L}$$

La densidad de flujo provocada por cada segmento $\left(\frac{3\mu_0 I}{2\pi L}\right)$ fue calculada en el ejercicio anterior. Considerando el sentido de circulación de la corriente, y por la regla de la mano derecha, la dirección del campo magnético debería ser saliente de la hoja, de forma perpendicular. Luego:

$$\vec{B}_{\mathrm{p}} = \frac{3\mu_0 I}{\pi L}\hat{z}$$

10) Un disco delgado hecho de material dieléctrico de radio exterior **b[m]** tiene una densidad de carga uniforme ρ_s **[C/m²] distribuida entre r =a** y **r = b**. Las cargas están fijas sobre la superficie del disco y no pueden moverse. Si el disco rota a velocidad angular ω **[rad/seg]**, calcular la intensidad de campo magnético en el centro del disco.

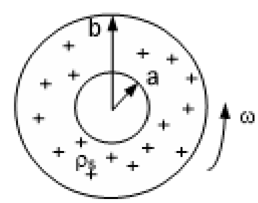
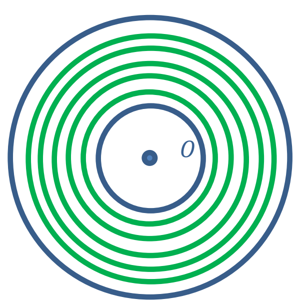


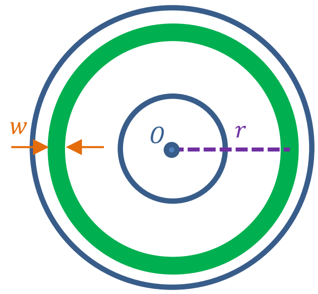
Figura 7

Para resolver este ejercicio es necesario, nuevamente, aplicar el principio de superposición, y analizar cuidadosamente la geometría de la distribución de corriente. Nótese que el disco puede considerarse como una suma de muchos anillos concéntricos (algo así como una cebolla plana), tal como se muestra a continuación:



Deben imaginarse que el disco está formado por infinitos anillos verdes concéntricos.

Ahora bien, cada uno de estos anillos tiene un área pequeñísima. Observen con cuidado la siguiente figura en la que se resalta uno de los anillos:



El área de este anillo puede representarse como:

$$A_{\text{anillo}} = 2\pi r w$$

donde r es la distancia a la que se encuentra el centro del anillo respecto del centro del disco, y w es el grosor del anillo. Si se considera que el grosor del anillo es infinitesimal, entonces el área de cada anillo también es infinitesimal y $w = dr$, con lo cual:

$$dA_{\text{anillo}} = 2\pi r dr$$

Ahora, ¿para qué todo este enredo geométrico? Esto tiene una razón bastante simple: nosotros ya sabemos determinar la densidad de campo magnético de una distribución lineal circunferencial, tal como se muestra en los ejercicios 1 y 6. Luego, podemos pensar este ejercicio como infinitos anillos que contribuyen con campo magnético sobre el centro del disco, a través de la siguiente integral:

$$\vec{B}_o = \int_{r=a}^{r=b} d\vec{B}_{\text{anillo}}$$

Esto dice que la densidad de campo magnético en el centro del disco puede calcularse como la suma de las contribuciones de densidad de flujo magnético de infinitos anillos concéntricos dibujados desde un radio a hasta un radio b.

A partir de lo visto en el ejercicio 1, la densidad de campo magnético provocada por un anillo con corriente corresponde a:

$$\left|\vec{B}_{\text{anillo}}\right| = \frac{\mu_0 I}{2r}$$

Acá enfrentamos el primer desafío: en el ejercicio no se explicita la corriente, sino que la densidad de carga y la velocidad de rotación del disco. Sin embargo, como las cargas giran de manera circunferencial, es posible determinar una corriente a partir de los datos dados. La corriente en función de la carga corresponde, en su manera más simplificada, a:

$$I = \frac{Q}{t}$$

Cada anillo tiene una carga dada por:

$$dQ_{\text{anillo}} = \rho_s \cdot 2\pi r dr$$

Si se toma en cuenta la misma interpretación que para el ejercicio 1, esta carga del anillo da una vuelta completa en un determinado tiempo (período T), con lo que puede determinarse una corriente equivalente de cada anillo:

$$dI_{\text{anillo}} = \frac{dQ_{\text{anillo}}}{T} = \frac{\rho_s \cdot 2\pi r dr}{\frac{2\pi}{\omega}} = \rho_s \omega r dr$$

Luego, la densidad de campo magnético generado por cada uno de los anillos infinitesimales corresponde a:

$$\left|d\vec{B}_{\text{anillo}}\right| = \frac{\mu_0 dI_{\text{anillo}}}{2r} = \frac{\mu_0 \rho_s \omega r dr}{2r}$$

$$\left|d\vec{B}_{\text{anillo}}\right| = \frac{\mu_0 \rho_s \omega dr}{2}$$

Y la densidad de campo total en el punto central del disco es:

$$\left|\vec{B}_o\right| = \int_{r=a}^{r=b} \frac{\mu_0 \rho_s \omega dr}{2} = \frac{\mu_0 \rho_s \omega}{2}(b-a)$$

Por regla de la mano derecha, y considerando que la corriente en el disco gira en contra de las manecillas del reloj, entonces la dirección de la densidad de campo magnético debiera ser saliente de la hoja de manera perpendicular. Considerando un sistema de referencia convencional (en el que el eje x positivo se proyecta hacia la derecha, el eje y positivo se proyecta hacia arriba y el eje z positivo se proyecta hacia afuera de la hoja perpendicularmente), entonces:

$$\vec{B}_o = \frac{\mu_0 \rho_s \omega}{2}(b-a) \cdot \hat{z} \qquad \text{(saliente)}$$

11) Un alambre infinitamente largo lleva una corriente **I [A]** y es doblado de la forma indicada en la figura 8. Encontrar la densidad de campo magnético en los puntos **P₁** y **P₂**.

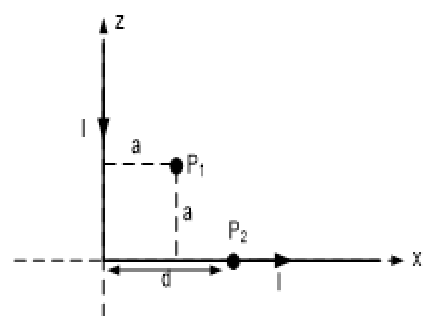


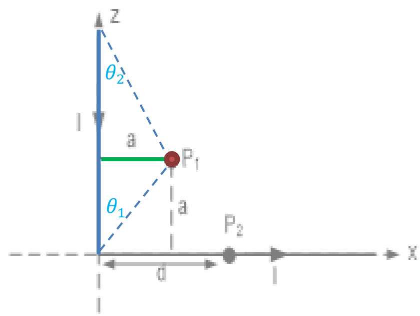
Figura 8

Para resolver este ejercicio es necesario aplicar el principio de superposición, considerando la contribución de densidad de campo magnético del segmento semi-infinito vertical y el segmento semi-infinito horizontal.

En el caso del punto P_1, se tiene que:

$$\vec{B}_{P_1} = \vec{B}_{\text{ver}/P_1} + \vec{B}_{\text{hor}/P_1}$$

Partamos con $\vec{B}_{\text{ver}/P_1}$. En la siguiente figura se muestran los detalles geométricos del segmento en análisis (línea semi-infinita vertical con corriente).



La densidad de campo generado por una línea con corriente corresponde a lo expresado en la Ec. 1 (véase ejercicio 2):

$$\left|\vec{B}_{\mathbf{P}}\right| = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot d} \cdot (\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$$

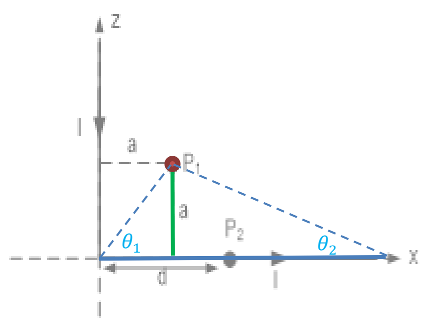
En este caso, $d = a$, $\theta_1 = 45°$ y $\theta_2 = 0°$, con lo cual:

$$\left|\vec{B}_{\text{ver}/P_1}\right| = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot a} \cdot (\cos 45° + \cos 0°) = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot a} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)$$

Luego, por la regla de la mano derecha:

$$\vec{B}_{\text{ver}/P_1} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) \cdot \hat{z} \qquad \text{(saliente)}$$

Por otro lado, para el segmento horizontal se tiene la siguiente situación:



Siguiendo la misma metodología que para el segmento vertical, se tiene que:

$$\vec{B}_{\text{hor}/P_1} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) \cdot \hat{z} \qquad \text{(saliente)}$$

Ahora bien, sobre el punto P_2 hay una condición especial: P_2 está justamente sobre el segmento horizontal. Observemos la ecuación general para líneas rectas con corriente:

$$\left|\vec{B}_{\mathrm{P}}\right| = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot d} \cdot (\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$$

Si se evalúa la contribución de campo magnético del segmento semi-infinito horizontal sobre P_2 a través de esta ecuación, puede verse que $d = 0$, razón por la cual la densidad de flujo magnético sobre P_2 se indetermina.

En definitiva, la densidad de flujo magnético sobre el punto P_2 es indeterminado, y debe entregarse más información con respecto a la geometría de la línea con corriente para poder especificar un resultado finito.

12) Una espira cuadrada lleva una corriente **I [A]**. Calcular la densidad de campo magnético (magnitud y dirección) en un punto a **h** metros sobre el centro de la espira.

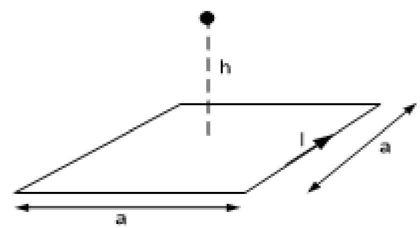
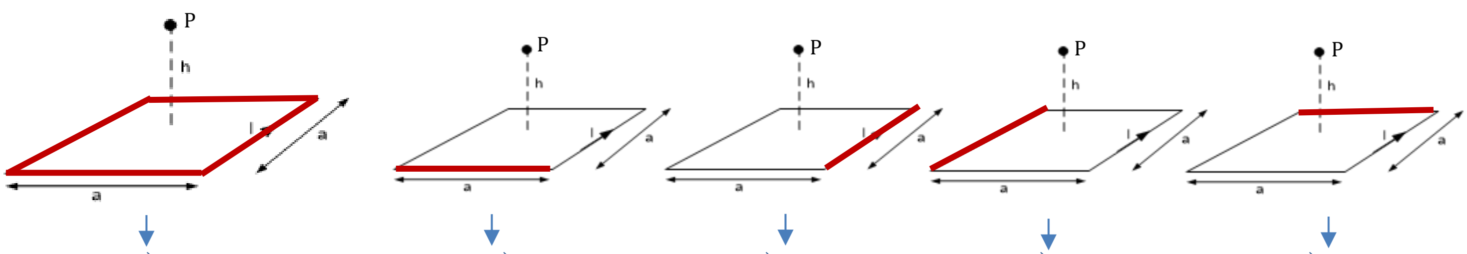


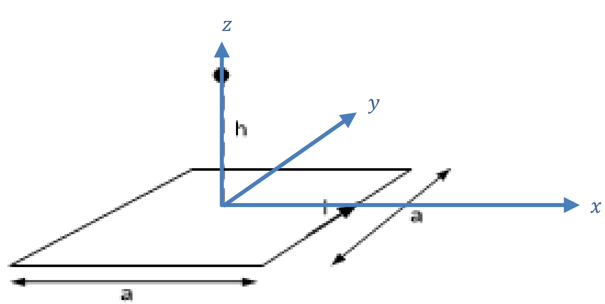
Figura 9

Para resolver este ejercicio, es necesario ocupar la expresión de densidad de campo magnético provocado por una línea recta con corriente, la regla de la mano derecha y el principio de superposición. Cada lado de esta espira cuadrada contribuye con densidad de campo sobre el punto de análisis, lo cual queda representado mediante el siguiente esquema:



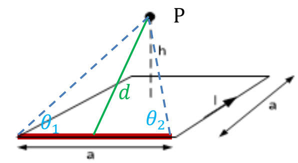
$$\vec{B}_{\mathrm{p}} = \vec{B}_{1/\mathrm{p}} + \vec{B}_{2/\mathrm{p}} + \vec{B}_{3/\mathrm{p}} + \vec{B}_{4/\mathrm{p}}$$

Adicionalmente, consideraremos un sistema de referencia rectangular, tal como se muestra a continuación:



Con ello como base, debemos determinar cada contribución por separado para después sumarlas.

Partamos con $\vec{B}_{1/\mathrm{p}}$. A través de la Ec. 1 (véase ejercicio 2), se tiene que:



$$\left|\vec{B}\right| = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot d} \cdot (\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$$

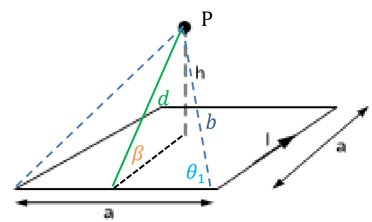
En este caso, $\theta_1 = \theta_2$, por lo que:

$$\left|\vec{B}_{1/\mathrm{P}}\right| = \frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot d} \cdot 2\cos\theta_1$$

Tanto d como θ_1 se deben calcular a partir de los parámetros geométricos de la espira, lo cual se hará más adelante en el desarrollo de este ejercicio.

A partir de una inspección de la espira y el punto de análisis, puede llegarse a la conclusión de que la magnitud de la contribución de cada lado es la misma, ya que cada lado de esta espira cuadrada se encuentra a la misma distancia del punto de análisis, y los ángulos θ_1 y θ_2 son los mismos para los cuatro lados. Más aún, por la regla de la mano derecha, puede verse que la densidad de campo magnético total sobre el punto P debe apuntar en dirección $\hat{z}$.

Luego:



$$\left|\vec{B}_{\mathrm{P}}\right| = 4\left(\frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot d} \cdot 2\cos\theta_1\right) \cdot \cos\beta$$

A partir de identidades geométricas y trigonométricas, se tiene que:

$$d = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2}$$

$$b = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + d^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{2\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2}$$

$$\cos\theta_1 = \frac{a}{2b} = \frac{a}{2\sqrt{2\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{a}{2d} = \frac{a}{2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2}}$$

En caso de que no te convenza de que tiene que ser $\cos\beta$ en vez de $\sin\beta$, revisa el segundo dibujo del siguiente ejercicio.

Reemplazando en la expresión de la densidad de campo magnético en el punto P se tiene que:

$$\left|\vec{B}_{\mathrm{P}}\right| = 4\left(\frac{\mu_0 \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot d} \cdot 2\frac{a}{2b}\right) \cdot \frac{a}{2d}$$

Simplificando:

$$|\vec{B}_{\mathrm{P}}| = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot a^2}{2\pi \cdot d^2 \cdot b}$$

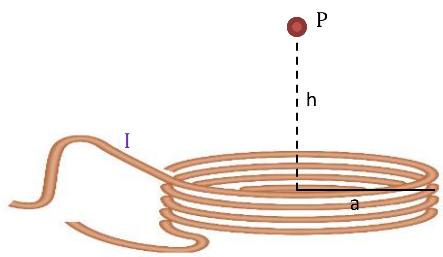
$$|\vec{B}_{\mathrm{P}}| = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot a^2}{2\pi \cdot \left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2\right] \cdot \sqrt{2\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2}}$$

Considerando el análisis de la dirección resultante realizado a través de la regla de la mano derecha, entonces:

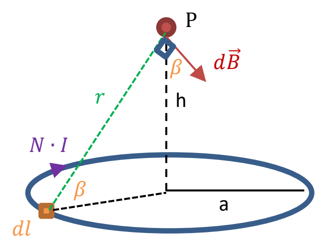
$$\vec{B}_{\mathrm{P}} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot a^2}{2\pi \cdot \left[\frac{a^2}{4} + h^2\right] \cdot \sqrt{\frac{a^2}{2} + h^2}}\hat{z}$$

13) Un alambre es doblado para formar una bobina plana, la que lleva una corriente **I [A]**. Calcular la densidad de flujo magnético en un punto a **h** metros sobre el centro de la bobina. El radio de la bobina es **a[m]** y está formada por N vueltas distribuidas en forma uniforme.

En primera instancia, grafiquemos la situación magnética para poder plantear un desarrollo conveniente.



Por el principio de superposición, el campo magnético sobre el punto P puede determinarse como la contribución de cada vuelta de la espira sobre el punto P. Ahora bien, como en el enunciado se menciona que la bobina es plana, entonces puede suponerse que, de manera ideal, todas las vueltas de la bobina se encuentran en el mismo lugar, por lo cual, la situación gráfica queda de la siguiente manera:



Vale decir, debemos determinar la densidad de campo que genera una espira circular con corriente $N \cdot I$[A] sobre un punto que se encuentra a h[m] de su centro.

Tal como vimos en el ejercicio anterior, la densidad de campo sobre el punto P apuntará en dirección $\hat{z}$ o $-\hat{z}$ dependiendo del sentido de circulación de la corriente. Luego, considerando que cada elemento diferencial de largo de esta espira contribuye con una densidad de flujo dB sobre el punto P, entonces la densidad total sobre dicho punto P corresponde a:

$$\left|\vec{B}_{\mathrm{P}}\right| = \int |dB| \cdot \cos\beta$$

Si ocupamos la ley de Biot-Savart (véase ejercicio 1, página 2), se tiene que:

$$\left|\vec{B}_{\mathrm{P}}\right| = \int \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot dl \cdot \cos\beta$$

Notar que r^2 y $\sin\beta$ son iguales para todo dl, vale decir, que para cualquier elemento diferencial de la espira (cualquier punto de la espira), la distancia que los separa del punto P es la misma y el ángulo β es el mismo para todo dl. Luego, las constantes pueden salir de la integral, con lo que:

$$\left|\vec{B}_{\mathrm{P}}\right| = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot \cos\beta \int dl$$

Notar que $\int dl$ es la longitud de la espira, que en este corresponde a $2\pi a$, por lo cual:

$$\left|\vec{B}_{\mathrm{P}}\right| = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot \cos\beta \cdot 2\pi a$$

A través de un análisis geométrico de las figuras anteriores, se puede determinar que:

$$r^2 = a^2 + h^2$$

Y que

$$\cos\beta = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}}$$

Luego:

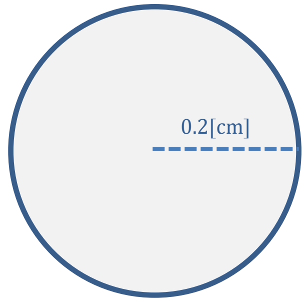
$$\left|\vec{B}_{\mathrm{P}}\right| = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot (a^2 + h^2)} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}} \cdot 2\pi a$$

Simplificando:

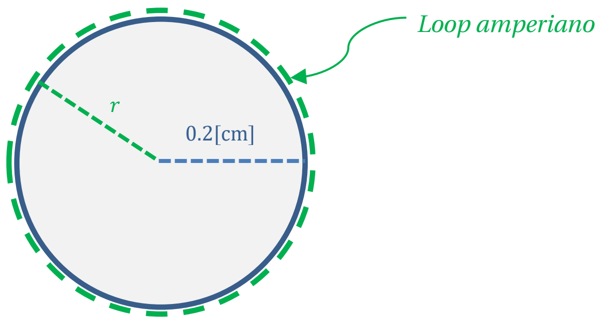
$$\left|\vec{B}_{\mathrm{P}}\right| = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I \cdot a^2}{2 \cdot (a^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

14) Un alambre de niobio superconductor, de **0.2 [cm]** de diámetro, es capaz de llevar una corriente de hasta **1900 [A]**. ¿Cuánto vale el módulo de la inducción magnética inmediatamente al exterior del alambre, cuando este es recorrido por una corriente de esa intensidad?

Para resolver este ejercicio es necesario emplear la ley de Ampere. Grafiquemos la sección transversal de este alambre de niobio superconductor:



Suponiendo que la corriente viaja de manera perpendicular a la sección transversal de este alambre (vale decir, que la corriente sale o entra perpendicularmente a la hoja), y que dicha corriente se distribuye de manera uniforme a través de la sección transversal del cable, entonces puede dibujarse un loop amperiano circular justo a lo largo del borde de la sección transversal, tal como se muestra a continuación:



La ley de Ampere, con esta geometría simplificada y geométrica, puede expresarse como:

$$\left|\vec{B}\right| \cdot l_{\text{amperiano}} = \mu_0 \cdot I_{\text{inc}}$$

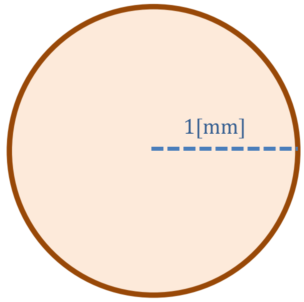
Donde $l_{\text{amperiano}}$ es la longitud del loop amperiano, que en este caso corresponde a $2\pi \cdot 0.2[\text{cm}]$, y I_{inc}es la corriente que incide en el área circunscrita por el loop amperiano, lo cual equivale a la corriente que atraviesa la sección transversal encerrada por el loop amperiano. En este caso, $I_{\text{inc}} = 1900[\text{A}]$, ya que el loop amperiano fue dibujado por fuera del cable. *En caso de querer determinar la densidad de campo magnético al interior del cable, el loop amperiano tendría que haber sido dibujado con un radio* $r < 0.2[cm]$, *lo cual hace que la corriente incidente, en dicho caso, sea inferior a 1900[A].*

Volviendo al caso del ejercicio, tenemos que:

$$\left|\vec{B}(r = 0.2[\text{cm}])\right| = \frac{\mu_0 \cdot 1900}{2\pi \cdot 0.2 \cdot 10^{-2}} \approx 0.19[\text{T}]$$

15) Un alambre rectilíneo de cobre muy largo, de radio **1 [mm]**, lleva una corriente de **20 [A]**. ¿Cuánto valen la fuerza magnética instantánea y la correspondiente aceleración que se ejercen sobre uno de los electrones de conducción en movimiento a **10^6 [m/s]** a lo largo de la superficie del alambre, en sentido opuesto a aquel de la corriente?

Para resolver este ejercicio, al igual que para el ejercicio anterior, es necesario emplear la ley de Ampere. Grafiquemos la sección transversal de este alambre de cobre:



Aplicando la misma metodología que para el caso anterior, vale decir, al dibujar un loop amperiano justo en el borde de la sección transversal, se puede aplicar la ley de Ampere de la siguiente manera:

$$|\vec{B}| \cdot l_{\text{amperiano}} = \mu_0 \cdot I_{\text{inc}}$$

$$|\vec{B}(r = 1[\text{mm}])| = \frac{\mu_0 \cdot 20[\text{A}]}{2 \cdot \pi \cdot 1[\text{mm}]} \approx 4[\text{mT}]$$

Luego, como el campo magnético es circulante alrededor del cable (dirección $\hat{\theta}$ o $-\hat{\theta}$ en coordenadas cilíndricas), y los electrones de conducción se mueven en dirección $\hat{z}$ o $-\hat{z}$ en coordenadas cilíndricas, entonces la magnitud de la fuerza magnética aplicada sobre un electrón de conducción responde a:

$$|\vec{F}| = q \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{B}|$$

Reemplazando los valores encontrados y dados:

$$|\vec{F}_e| \approx 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{6} \cdot 4 \cdot 10^{-3}[\text{N}] \approx 6.4 \cdot 10^{-16}[\text{N}]$$

Luego, a través de la segunda ley de Newton, la aceleración desarrollada por el electrón de conducción ($|\vec{a}_e|$) es:

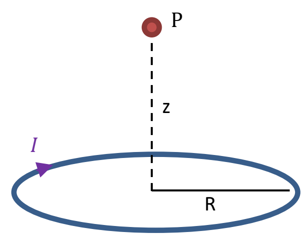
$$|\vec{a}_e| = \frac{|\vec{F}_e|}{m_e}$$

Donde m_e es la masa del electrón de conducción, con lo cual:

$$|\vec{a}_e| \approx \frac{6.4 \cdot 10^{-16}}{9.1 \cdot 10^{-31}} \approx 7 \cdot 10^{-14} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$$

16) Una corriente de intensidad **I [A]** recorre un delgado alambre conductor, plegado en forma de circunferencia de radio **R [m]**. Si el eje de la circunferencia coincide con el eje z; ¿Cuál es el valor de la integral $\int \vec{B} \cdot dl$ a lo largo del eje "z" desde $z \to -\infty$ a $z \to \infty$?

En primera instancia, grafiquemos la situación magnética para poder plantear un desarrollo conveniente.



En primera instancia, debemos determinar el campo magnético para todo punto en el eje z. La expresión para el campo magnético en el punto P ya fue desarrollada en el ejercicio 13, y corresponde, para este caso en particular, a:

$$\left|\vec{B}(z)\right| = \frac{\mu_0 \cdot I}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Luego, la integral a lo largo del eje z desde $z = -\infty$ hasta $z = \infty$ es:

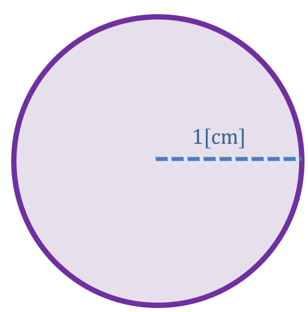
$$\int_{z=-\infty}^{z=\infty} \left|\vec{B}(z)\right| \cdot dz = \int_{z=-\infty}^{z=\infty} \frac{\mu_0 \cdot I}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot dz$$

Resolviendo esta integral (se recomienda hacer sustitución trigonométrica), se tiene que:

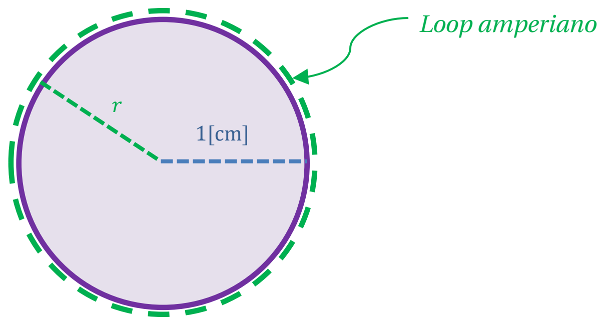
$$\int_{z=-\infty}^{z=\infty} \left|\vec{B}(z)\right| \cdot dz = \frac{\mu_0 \cdot I}{R}$$

17) En un acelerador de partículas, un haz de protones tiene una velocidad de **3 10^8 [m/s]** y constituye una corriente de **2 10^{-3} [A]**. Supóngase que el haz tenga una sección transversal circular de **1 [cm]** de radio y que la corriente este uniformemente distribuida. Determínese la inducción magnética que este haz produce en su borde. Determínese la fuerza magnética que se ejerce sobre un protón al borde del haz.

Para resolver este ejercicio, al igual que para los ejercicios 14 y 15, es necesario emplear la ley de Ampere. Grafiquemos la sección transversal de este haz de protones, como si se tratara de un alambre recto con corriente.



Considerando que la corriente (haz de protones) viaja de manera perpendicular a la sección transversal del haz (vale decir, que la corriente sale o entra perpendicularmente a la hoja), y que la corriente se distribuye de manera uniforme a través de la sección transversal del cable (dado en el enunciado), entonces puede dibujarse un loop amperiano circular justo a lo largo del borde de la sección transversal, tal como se muestra a continuación:



Luego, se puede aplicar la ley de Ampere de la siguiente manera:

$$\left|\vec{B}\right| \cdot l_{\text{amperiano}} = \mu_0 \cdot I_{\text{inc}}$$

$$\left|\vec{B}(r = 1[\text{cm}])\right| = \frac{\mu_0 \cdot 2 \cdot 10^{-3}[\text{A}]}{2 \cdot \pi \cdot 1[\text{cm}]} \approx 4 \cdot 10^{-8}[\text{T}]$$

Ahora bien, como el campo magnético es circulante alrededor del cable (dirección $\hat{\theta}$ o $-\hat{\theta}$ en coordenadas cilíndricas), y los electrones de conducción se mueven en dirección $\hat{z}$ o $-\hat{z}$ en coordenadas cilíndricas, entonces la magnitud de la fuerza magnética aplicada sobre un protón en el borde del haz es:

$$\left|\vec{F}\right| = q \cdot |\vec{v}| \cdot \left|\vec{B}(r = 1[\text{cm}])\right|$$

Luego, reemplazando los valores encontrados y dados:

$$\left|\vec{F_e}\right| \approx 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^{8} \cdot 4 \cdot 10^{-8}[\text{N}] \approx 1.92 \cdot 10^{-18}[\text{N}]$$

Off-the-record, aun cuando esta fuerza se traduzca en una aceleración (por la segunda ley de Newton), los protones no podrían aumentar más su velocidad, ya que se encuentran viajando a la velocidad de la luz.

Cualquier consulta o corrección la pueden hacer llegar a carlosmadariaga@udec.cl. Responderé en la medida de lo posible.