

Electromagnetismo 543251

Certamen #2

02-07-2021

- Un condensador es construido a partir de dos placas cuadradas de lado ℓ separadas por una distancia d . Suponiendo que cargas $+Q$ y $-Q$ son depositadas sobre la placa superior e inferior respectivamente, y considerando que un material dieléctrico de permitividad k es insertado desde el costado izquierdo una distancia x en el espacio entre ambas placas:

- Encontrar la capacidad equivalente del sistema
- Calcular la energía almacenada en el condensador.

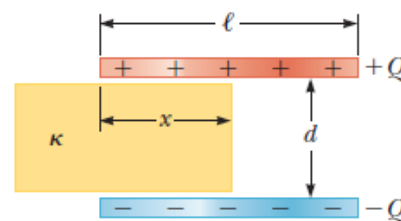


Figura 1

- Si la tensión medida entre los terminales de un condensador de placas paralelas es de **85 [V]** cuando se tiene solamente aire entre sus placas, y cuando se inserta un material dieléctrico se observa que la diferencia de potencial cae a **25 [V]**. ¿Qué valor tendrá la constante dieléctrica del material agregado?

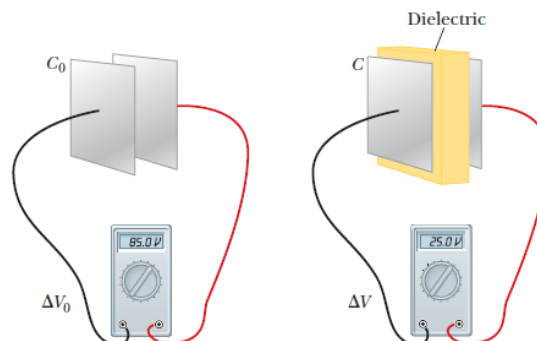


Figura 2

- Un dispositivo electrónico está fabricado en base a silicio. Si este lleva una corriente de **100 [A]** y tiene dimensiones de **10 [mm] x 10 [mm] x 1 [mm]** de espesor, ver Figura 3, y dado que la caída de potencial entre sus extremos A y B es de **0.6 [V]**:

- ¿Cuál es la conductividad del silicio utilizado?
- Si la velocidad de las cargas en el material es de **2000 [m/s]**; ¿Cuántas cargas libres deben estar presentes en el material en todo momento?

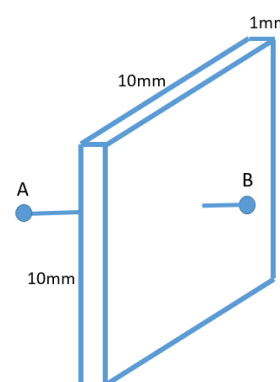


Figura 3

- Una estructura de resistividad ρ se moldea con dos conos truncados de altura h y radios r_1 y r_2 , según muestra la figura 4. La corriente se distribuye uniformemente en cualquier sección transversal circular del material, de forma que la densidad de la corriente no dependerá de la posición radial. (La densidad de corriente variará dependiendo de su posición a lo largo del eje de los conos.) Determine la resistencia de toda la estructura.

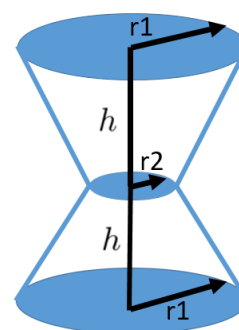


Figura 4

- Un conductor de las dimensiones dadas está fabricado en base a dos laminas metálicas como se ve en la figura 5. Si este es conectado a una fuente con diferencia de potencial V :

- Calcular la densidad de corriente en cada material
- Calcular la potencia disipada en cada material

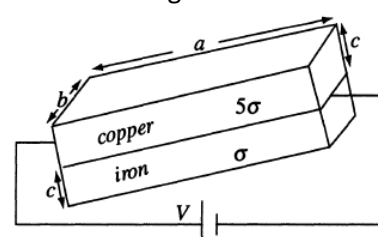
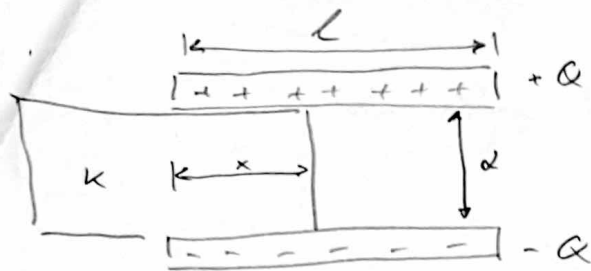


Figura 5

- La resistencia de una estufa eléctrica de **500 [W]** está diseñada para operar desde una fuente de **110 [V]**. Suponiendo que para su fabricación se usa alambre de Nicromo de **0.5 [mm]** de diametro, y suponiendo que la resistividad del material permanece constante a su valor de **20°C (100 x 10⁻⁸ Ohm/m)**. Calcule el largo del alambre usado para contruuir la resistencia.



a) Como se trata de un condensador de placas paralelas

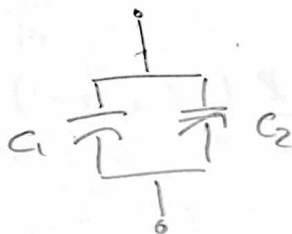
$$C = \frac{\epsilon A}{d} \quad [F]$$

donde en el caso de la figura el area puede dividirse en dos

$$A_1 = (L-x)l \quad [m^2]$$

$$A_2 = x \times l \quad [m^2]$$

Con esto se obtiene \Rightarrow



donde C_1 corresponde al condensador de placas con area A_1 y C_2 al de placas con area A_2

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 (L-x)l}{d} \quad [F] \quad C_2 = \frac{k\epsilon_0 (x)l}{d} \quad [F]$$

Como se trata de dos condensadores en paralelo la capacitancia equivalente es

$$\begin{aligned} C_{eq} &= C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 (L-x)l}{d} + \frac{k\epsilon_0 x l}{d} = \frac{1}{d} (\epsilon_0 (L-x)l + k\epsilon_0 x l) \\ &= \frac{l}{d} (\epsilon_0 (L-x) + k\epsilon_0 x) = \frac{\epsilon_0 l}{d} (L-x + kx) \\ &= \frac{\epsilon_0 l}{d} (L + (k-1)x) \quad [F] \end{aligned}$$

b) La energía almacenada en el condensador es

$$W_c = \frac{1}{2} C V^2$$

Sapuyendo que $l \gg d$ la ley de Gauss tenemos

$$|\vec{E}| = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} = \frac{Q}{2\epsilon_0 A} = \frac{Q}{2\epsilon_0 l^2}$$

7 el potencial es $V = \int E \cdot dl = \frac{Q}{2\epsilon_0 l^2}$

luego reemplazando se obtiene

$$W_c = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 l}{d} \left(l + (k-1)x \right) \left(\frac{Q}{2\epsilon_0 l^2} \right)^2$$

$$= \frac{\epsilon_0 l}{2d} \left(l + (k-1)x \right) \frac{Q^2 l^2}{4\epsilon_0^2 l^4}$$

$$= \frac{(l + (k-1)x) Q^2 l}{8\epsilon_0 d l^3} \quad [J]$$

2)

$$V_1 = 85 \text{ [V]}$$

$$V_2 = 25 \text{ [V]}$$

$$\frac{1}{\epsilon_0} \uparrow V_1 \quad \frac{1}{\epsilon_r \epsilon_0} \uparrow V_2$$

donc

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 A}{d} \text{ [F]} \quad C_2 = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{d} \text{ [F]}$$

Comme la charge - permance constante entre les plaques

$$C_1 = \frac{Q}{V_1}$$

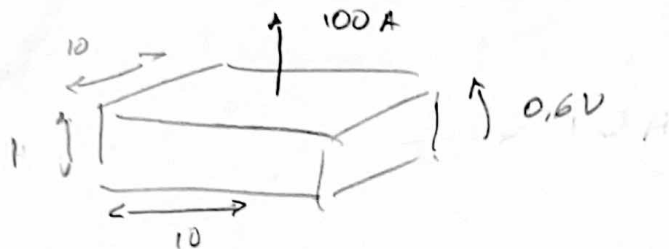
$$C_2 = \frac{Q}{V_2}$$

$$\Rightarrow Q = C_1 V_1 = C_2 V_2$$

$$\frac{\epsilon_0 A}{d} V_1 = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{d} V_2$$

$$\epsilon_r = \frac{V_1}{V_2} = \frac{85}{25} = \underline{3.4}$$

3)



a) De la ley de Ohm

$$\vec{J} = \frac{\vec{I}}{S} = \frac{100}{(10 \times 10^{-3})(10 \times 10^{-3})} = 1 \times 10^6 \text{ [A/m}^2\text{]}$$

Por otro lado $V = |\vec{E}| \cdot d \Rightarrow |\vec{E}| = \frac{V}{d} = \frac{0.6}{1 \times 10^{-3}} = 600 \text{ [V/m]}$

entonces como

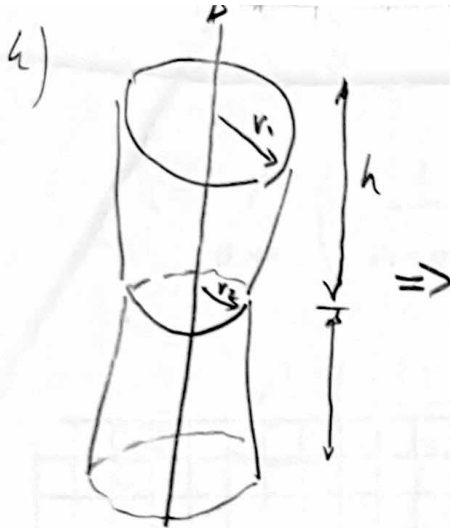
$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \Rightarrow \sigma = \frac{|\vec{J}|}{|\vec{E}|} = \frac{1 \times 10^6}{600} = 1.66 \times 10^3 \text{ } \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$$

b) Como $\vec{J} = nq\vec{v}$

$$\Rightarrow n = \frac{\vec{J}}{q\vec{v}} = \frac{1 \times 10^6}{1.6 \times 10^{-19} \times 2000} = 3.125 \times 10^{21}$$

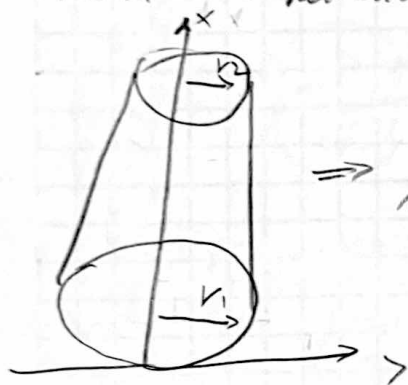
y como el volumen total es $Vol = 10 \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-3} \times 1 \times 10^{-3}$
 $= 100 \times 10^{-9} \text{ m}^3$

$$Q_T = n \times Vol = 3.125 \times 10^{12} \text{ Carga.}$$



De la figura se observa que los dos conos truncados corresponden a una resistencia. La resistencia del conjunto es entonces la combinación en serie de ambas es $2R$

Ahora le vamos a dar cada cono R es



\Rightarrow Dividido en elementos delgada tales que la resistencia de cada elemento es

$$dR = \frac{\rho dx}{S(x)}$$

Donde $S(x) = \pi \gamma(x)^2$, con $\gamma(x) = r_1 + mx$

$$\Rightarrow m = \frac{r_1 - r_2}{h}$$

así

$$dR(x) = \frac{\rho dx}{\pi (r_1 - mx)^2}$$

ahora integramos a lo largo del cono se tiene

$$R = \int_0^h dR(x) = \int_0^h \frac{\rho dx}{\pi (r_1 - mx)^2} = \frac{\rho}{\pi} \int_0^h \frac{dx}{(r_1 - mx)^2}$$

$$= \frac{\rho}{\pi} \left(\frac{1}{m(r_1 - mx)} \Big|_0^h \right) = \frac{\rho}{\pi} \left(\frac{1}{r_1 - mx} \Big|_0^h \right)$$

$$R = \frac{\rho}{\pi m} \left(\frac{1}{v_1 - mh} - \frac{1}{v_1} \right) = \frac{\rho}{\pi m} \left(\frac{1}{v_1 - \frac{(v_1 - v_2)h}{h}} - \frac{1}{v_1} \right)$$

$$= \frac{\rho}{\pi m} \left(\frac{1}{v_1 - v_1 + v_2} - \frac{1}{v_1} \right) = \frac{\rho}{\pi m} \left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} \right) = \frac{\rho}{\pi m} \left(\frac{v_1 - v_2}{v_1 v_2} \right)$$

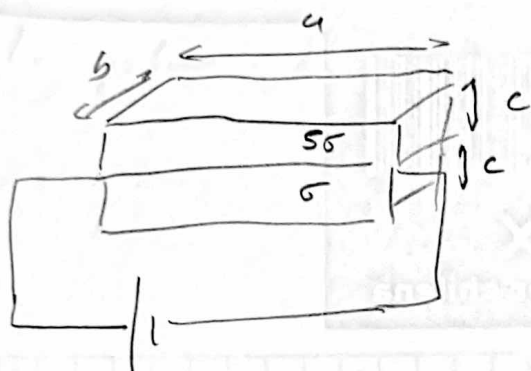
razón multiplicado por m

$$R = \frac{\rho}{\pi \frac{(v_1 - v_2)}{h}} \left(\frac{v_1 - v_2}{v_1 v_2} \right) = \frac{\rho h}{\pi v_1 v_2} \quad [\Omega]$$

luego la resistencia del conjunto es

$$R_T = 2R = \frac{2\rho h}{\pi v_1 v_2} \quad [\Omega]$$

5)



a) Esto corresponde a dos resistencias en paralelo, donde el voltaje de cada resistencia es

$$R_s = \frac{l}{\sigma s} = \frac{a}{\sigma b c} \quad [\Omega]$$

$$R_{ss} = \frac{l}{\sigma s s} = \frac{a}{\sigma b c} \quad [\Omega]$$

luego la corriente en cada material es

$$I_s = \frac{V}{R_s} = \frac{V \sigma b c}{a} \quad [A]$$

$$I_{ss} = \frac{V}{R_{ss}} = \frac{V \sigma s b c}{a} \quad [A]$$

7) la densidad de corriente en cada caso es

$$J_s = \frac{I_s}{s} = \frac{V \sigma b c}{a} \cdot \frac{1}{b c} = \frac{V \sigma}{a}$$

$$J_{ss} = \frac{I_{ss}}{s} = \frac{V \sigma s b c}{a} \cdot \frac{1}{b c} = \frac{V \sigma}{a}$$

b)

La potencia disipada en este resistor es

$$P_{\sigma} = V I_{\sigma} = V \times \frac{V_{\sigma bc}}{a} = \frac{V^2 \sigma bc}{a} \text{ [w]}$$

$$P_{ss} = V I_{ss} = V \times \frac{V_{ss bc}}{a} = \frac{V^2 \sigma bc}{a} \text{ [w]}$$

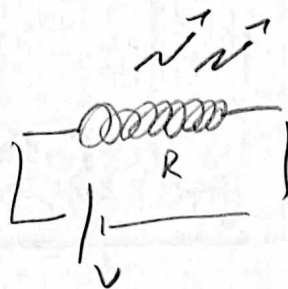
6)

$$P_0 = 500 \text{ W}$$

$$V = 110 \text{ V}$$

$$\phi = 0,5 \text{ mm}$$

$$R_n = 100 \times 10^{-8} \Omega \text{ [}\Omega/\text{m}\text{]}$$



De la potencia disipada tenemos que

$$P = V \times I \rightarrow I = \frac{P}{V} = \frac{500}{110} = 4,5 \text{ A}$$

Así la resistencia de la estufa es

$$R = \frac{V}{I} = \frac{110}{4,5} = 24,2 \Omega$$

7 como la resistencia la vamos a calcular la necesitamos saber

$$\begin{aligned} R &= \frac{\rho l}{S} \rightarrow l = \frac{RS}{\rho} = \frac{R \pi (\phi/2)^2}{\rho} \\ &= \frac{24,2 \times \pi \times (0,25 \times 10^{-3})^2}{100 \times 10^{-8}} \\ &= \underline{\underline{4,75 \text{ m}}} \end{aligned}$$