Listado 8
Inducción

1. Demuestre utilizando el principio de inducción matemática para todo $n \in \mathbb{N}$

   a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ **(P)**

   b) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2 - 1)$

   c) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$

   d) $2\cdot 4 + 4\cdot 6 + \ldots + 2n\cdot(2n+2) = \frac{4n(n+1)(n+2)}{3}$ **(P)**

2. Considere la sucesión de Fibonacci dada por

$$u_1 = 1, u_2 = 1$$
$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \text{ cuando } n \geq 3$$

   Demuestre por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$

   a) $\sum_{i=1}^{n} u_i = u_{n+2} - 1.$

   b) $\sum_{i=1}^{n} u_{2i} = u_{2n+1} - 1.$**(P)**

   c) $\sum_{i=1}^{n} u_{2i-1} = u_{2n}.$

   d) $\sum_{i=1}^{n} u_i^2 = u_n \cdot u_{n+1}.$**(P)**

3. Demuestre por inducción que

   a) $\forall n \in \mathbb{N}:\ 7^2 n + 1$ es divisible por 8. **(P)**

   b) $\forall n \in \mathbb{N}:\ n^5 - n$ es divisible por 5.

   c) $\forall n \in \mathbb{N}:\ 25^n + 5$ es divisible por 6.

   d) $\forall n \in \mathbb{N}:\ 2^{2n-1} + 3^{2n-1}$ es divisible por 5. **(P)**

   e) $\forall n \in \mathbb{N}:\ \forall x \geq -1, (1+x)^n \geq 1 + nx$ **(P)**

4. Determine usando inducción fuerte que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 12$ se puede expresar n como suma de un múltiplo de 4 más un múltiplo de 5. **Sugerencia:** Primero pruebe de forma directa que esto se cumple para 12, 13, 14 y 15. **(P)**

Octubre 2021.