Clase 7

Cálculo 3

Carlos Martínez Ranero

Departamento de Matemática
Universidad de Concepción

Recordatorio de la clase anterior.

- Funciones de clase C^k.
- Funciones diferenciables.

Objetivos de la clase de hoy.

- Matriz Jacobiana.
- Propiedades de las funciones diferenciables.
- Vector gradiente y derivadas direccionales.

Definición

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\vec{a} \in A$ y $f : A \to \mathbb{R}^m$ decimos que $f = (f_1, \dots, f_m)$ es diferenciable en $\vec{a}$ si:

- Todas las derivadas parciales $\frac{\partial f_j}{\partial x_1}(\vec{a}), \dots, \frac{\partial f_j}{\partial x_n}(\vec{a}), j = 1, \dots, m$ existen.
- La aproximación

$$f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - a_1 \\ \dots \\ x_n - a_n \end{bmatrix} + \epsilon(\vec{x})$$

Definición

- satisface que

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \frac{\epsilon(\vec{x})}{\|\vec{x}-\vec{a}\|} = \vec{0}.$$

- La función $L(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - a_1 \\ \dots \\ x_n - a_n \end{bmatrix}$ se llama la buena aproximación afín.
- La matriz $Df = [\frac{\partial f_j}{\partial x_i}]$ se llama matriz Jacobiana.

Ejemplo 1

Sea $f(x, y, z) = (x^2, xz + y)$

- Verificar que f es diferenciable en el punto $(-1, 1, 0)$.
- Aproximar $f(-1{,}1, 0{,}9, 0{,}1)$ utilizando la buena aproximación afín.

Matriz Jacobiana.

Solución:

- Primero notemos que las funciones $f_1 = x^2$, $f_2 = xz + y$.
- Calculando las parciales tenemos $\frac{\partial f_1}{\partial x}(-1,1,0) = -2$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}(-1,1,0) = 0$ y $\frac{\partial f_1}{\partial z}(-1,1,0) = 0$.
- $\frac{\partial f_2}{\partial x}(-1,1,0) = 0$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}(-1,1,0) = 1$ y $\frac{\partial f_1}{\partial z}(-1,1,0) = -1$.
- $Df(-1,1,0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$
- $L(x,y,z) = f(-1,1,0) + Df(-1,1,0)\begin{bmatrix} x+1 \\ y-1 \\ z \end{bmatrix} =$

$$(1,1) + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x+1 \\ y-1 \\ z \end{bmatrix} = (-2x-1, y-z)$$

Matriz Jacobiana.

Solución:

- $L(x, y, z) = (-2x - 1, y - z)$
- $\epsilon(x, y, z) = (x^2, xz + y) - (-2x - 1, y - z)$
- f es diferenciable en $(-1, 1, 0)$ si y sólo si
- $\lim\limits_{(x,y,z)\to(-1,1,0)} \frac{\|\epsilon(x,y,z)\|}{\|(x,y,z)-(-1,1,0)\|} = 0$
- $\lim\limits_{(x,y,z)\to(-1,1,0)} \frac{\|\epsilon(x,y,z)\|}{\|(x,y,z)-(-1,1,0)\|} = \lim\limits_{(x,y,z)\to(-1,1,0)} \frac{\sqrt{(x+1)^4+(x+1)^2 z^2}}{\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2+z^2}}$
- Hacemos el cambio $x + 1 = h_1, y - 1 = h_2, z = h_3$
- $\lim\limits_{(x,y,z)\to(-1,1,0)} \frac{\sqrt{(x+1)^4+(x+1)^2 z^2}}{\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2+z^2}} = \lim\limits_{(h_1,h_2,h_3)\to(0,0,0)} \frac{\sqrt{h_1^4+h_1^2 h_3^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}}$

Matriz Jacobiana.

Solución:

- Acotando tenemos
- $\left|\dfrac{\sqrt{h_1^4+h_1^2h_3^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}}\right| = |h_1|\dfrac{\sqrt{h_1^2+h_3^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}} \leq |h_1|\dfrac{\sqrt{h_1^2+h_3^2}}{\sqrt{h_1^2+h_3^2}} \leq |h_1|$
- como esta uĺtima expresión tiende a cero, se sigue que la función es diferenciable.
- Finalmente observemos que
- $f(-1{,}1, 0{,}9, 0, 1) = ((-1{,}1)^2, (-1{,}1 \cdot 0{,}1) + 0{,}9) = (1{,}21, 0{,}79)$
- $L(-1{,}1, 0{,}9, 0{,}1) = (-2(-1, 1) - 1, 0{,}9 - 0{,}1) = (1{,}2, 0{,}8)$

Funciones Diferenciables.

Teorema

Sea A un conjunto abierto y $f : A \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $\vec{a}$, entonces f es continua en $\vec{a}$.

Solución:

- Consideremos, para simplificar la notación, el caso $A \subset \mathbb{R}^2$.
- $f(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + \epsilon(x, y)$.
- $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$.
- Por lo tanto, f es continua en (a, b).

Propiedades Básicas.

Teorema

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto

1. Si $f, g : A \to \mathbb{R}$ son diferenciables, entonces $f + g$ y cf son diferenciables.
2. Si $f, g : A \to \mathbb{R}$ son diferenciables, entonces fg es diferenciable, y si $g \neq 0$, entonces $\frac{f}{g}$ es diferenciable.

Teorema

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto

Sea $f : A \to \mathbb{R}^m, f = (f_1, \dots, f_m)$. Se tiene que f es diferenciable si y sólo si cada f_i es diferenciable.

Funciones Diferenciables.

Teorema

Sea A un conjunto abierto y f una función de clase C^1 en todo A, entonces es diferenciable en A.

El Teorema es super útil, si podemos verificar la continuidad de las derivadas parciales rapidamente

Ejemplo 2

Demostrar que la función $f(x, y, z) = xe^{x+y} - \ln(x + z)$ es diferenciable.

Solución:

- Observemos que $dom(f) = \{(x, y, z) : x + z > 0\}$
- $f_x = e^{x+y} + xe^{x+y} - \frac{1}{x+z}$
- $f_y = xe^{x+y}$
- $f_z = -\frac{1}{x+z}$
- Como las funciones son continuas en el dominio de f, tenemos que f es de clase C^1 y por lo tanto es diferenciable.

Ejemplo 3

Demostrar que la función $f(x, y, z) = (x^2, xz + y)$ es diferenciable.

Solución:

- Observemos que $dom(f_1) = \mathbb{R}^3$
- $\partial_x f_1 = 2x, \partial_y f_1 = 0, \partial_z f_1 = 0$
- Como todas las parciales son continuas f_1 es de clase C^1
- $dom(f_2) = \mathbb{R}^3$
- $\partial_x f_2 = z, \partial_y f_2 = 1, \partial_z f_2 = x$
- Como las funciones son continuas en el dominio de f_2, es de clase C^1.
- Como f_1 y f_2 son de clase C^1 se tiene que f es diferenciable.