Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

GAJ/EBC/CFS/CMR/ARP

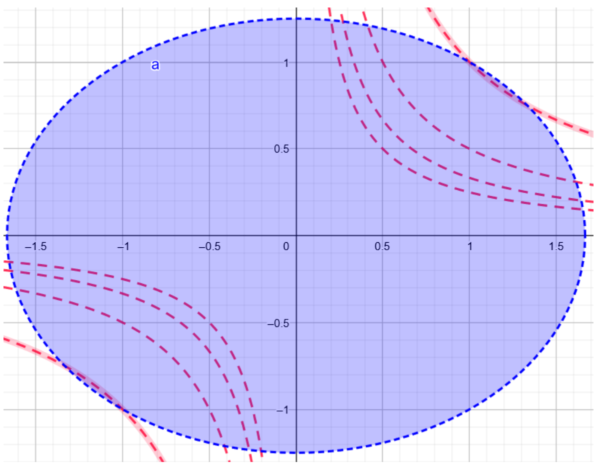
Cálculo 3 (521227)

Tarea 1

Problema 1 (20 puntos)

Sea $S = \{(x,y) : 9x^2 + 16y^2 < 25\} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(x,y) : xy = \frac{1}{n}\}$.

(a) Bosquejar el conjunto S. (**5 puntos**)



(b) Determinar el interior, y la frontera de S. (**9 puntos**)

$int(S) = S \setminus (\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\})$,

$\partial S = \{(x,y) : 9x^2 + 16y^2 = 25\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(x,y) : xy = \frac{1}{n} \ \wedge \ 9x^2 + 16y^2 \leq 25\} \cup (\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\})$

(c) Determinar si S es un conjunto abierto o cerrado. (**6 puntos**)

Como S es distinto de su interior no es abierto y como S no contiene a su frontera tampoco es cerrado.

Problema 2 (40 puntos)

(a) Determinar los puntos de continuidad de las función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-y+2)^2}{\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}} & \text{si } (x,y) \neq (-1,1) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Solución 1: Por álgebra de límites tenemos que $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$ para todos los puntos (x_0,y_0) distintos del $(-1,1)$, y por lo tanto f es continua en esos puntos.

(5 puntos)

Ahora analizaremos la continuidad en el punto $(-1,1)$. Siguiendo la indicación hacemos $x = h_1 - 1$ y $y = h_2 + 1$, y luego pasando a coordenadas polares $h_1 = r\cos\theta, h_2 = r\sin\theta$ obtenemos

$$\frac{(x-y+2)^2}{\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}} = \frac{(r\cos\theta - r\sin\theta)^2}{r}.$$

Por lo que

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{(x-y+2)^2}{\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\theta - r\sin\theta)^2}{r} = r\cos^2\theta - 2r\sin\theta\cos\theta + r\cos^2\theta.$$

(5 puntos)

Utilizando las desigualdades $|\cos\theta|, |\sin\theta| \leq 1$ se tiene que

$$|r\cos^2\theta - 2r\sin\theta\cos\theta + r\cos^2\theta| \leq 4r$$

como esta última expresión tiende a 0 se sigue, del Teorema del acotamiento, que $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{(x-y+2)^2}{\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}} = 0$ y por lo tanto f también es continua en $(-1,1)$.

(10 puntos)

Solución 2: Por álgebra de límites tenemos que $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$ para todos los puntos (x_0,y_0) distintos del $(-1,1)$, y por lo tanto f es continua en esos puntos.

(5 puntos)

Ahora analizaremos la continuidad en el punto $(-1,1)$. Siguiendo la indicación hacemos $x = h_1 - 1$ y $y = h_2 + 1$, y de esto obtenemos

$$\frac{(x-y+2)^2}{\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}} = \frac{(h_1-h_2)^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}.$$

Por lo que

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{(x-y+2)^2}{\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^2 - 2h_1h_2 + h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}.$$

(5 puntos)

Utilizando las desigualdades $|h_1|, |h_2| \leq \|(h_1, h_2)\|$, y la desigualdad triangular se tiene que

$$\left| \frac{h_1^2 - 2h_1h_2 + h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right| \leq \frac{h_1^2 + 2|h_1h_2| + h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \leq \frac{4\|(h_1, h_2)\|^2}{\|(h_1, h_2)\|} = 4\|(h_1, h_2)\|$$

como esta última expresión tiende a 0 se sigue, del Teorema del acotamiento, que $\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{(x-y+2)^2}{\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}} = 0$ y por lo tanto f también es continua en $(-1, 1)$.

(10 puntos)

(b) Determinar los puntos de continuidad de las función definida por

$$g(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x(y+1)^2(z-1)}{x^2+(y+1)^6+(z-1)^6} & \text{si } (x, y, z) \neq (0, -1, 1) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Indicación: Utilizar un cambio de coordenadas de la forma $x = h_1 + a, y = h_2 + b, z = h_3 + c$ para simplificar la expresión.

Por álgebra de límites tenemos que $\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} g(x, y, z) = g(x_0, y_0, z_0)$ para todos los puntos (x_0, y_0, z_0) distintos del $(0, -1, 1)$, y por lo tanto g es continua en esos puntos.

(5 puntos)

Ahora analizaremos la continuidad en el punto $(0, -1, 1)$. Siguiendo la indicación hacemos $x = h_1$ y $y = h_2 - 1$, $z = h_3 + 1$. Por lo tanto

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,-1,1)} \frac{x(y + 1)^2(z - 1)}{x^2 + (y + 1)^6 + (z - 1)^6} = \lim_{(h_1,h_2,h_3)\to(0,0,0)} \frac{h_1h_2^2h_3}{h_1^2 + h_2^6 + h_3^6}$$

(6 puntos)

Utilizamos la trayectoria $h_2 = h_3$ y $h_1 = h_2^3$ tenemos

$$\lim_{\substack{(h_1,h_2,h_3)\to(0,0,0) \\ h_2=h_3, h_1=h_2^3}} \frac{h_1h_2^2h_3}{h_1^2 + h_2^6 + h_3^6} = \lim_{h_2\to 0} \frac{h_2^6}{3h_2^6} = \frac{1}{3}$$

como el límite difiere de $g(0, -1, 1) = 0$ se sigue que g no es continua en el punto $(0, -1, 1)$.

(9 puntos)