Álgebra II. 525150
Listado para clase práctica 10: 18 de junio
Prof.: A. González, F. Jara, M. Selva.

Listado 10: Sistemas de ecuaciones lineales. Clasificación. Matrices en forma escalonada. Eliminación gaussiana.

Los problemas marcados con **(P)** serán resueltos en práctica.

1. Problemas de listado 10

1. Escriba los siguientes sistemas de ecuaciones lineales en forma matricial.

(a) $\begin{cases} 3x_3 = -6 \\ 5x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 13 \end{cases}$

(b) **(P)** $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -8 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2 = 0 \\ x_1 + x_2 - 7 = 0 \\ -x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 - x_2 = -1 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 6x_1 + 7x_2 + 1 = 0 \\ -9x_1 + 7x_3 = 12 \\ 3x_2 + 2x_3 + 1 = 0 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$

Decida, **sin transformarlos a sistemas en forma escalonada**, si ellos son compatibles determinados, indeterminados o incompatibles.

2. Cada una de estas matrices está en forma escalonada por filas.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De ellas identifique rango, imagen y cuáles columnas forman una base de la imagen.

3. Decida si los sistemas que siguen son incompatibles o compatibles. En el último caso, decida si son determinados o indeterminados y encuentre el conjunto solución.

(a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 8 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + 3y = 8 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$

(c) **(P)** $\begin{cases} x - 2y - z = 2 \\ x - 2y + 2z = 1 \\ 2x - 3y + z = 2 \end{cases}$

4. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

(a) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es triangular superior y los elementos en su diagonal principal son distintos de cero, entonces $\mathrm{r}(A) = n$.

(b) **(P)** Un sistema de ecuaciones lineales subdeterminado (con menos ecuaciones que incógnitas) siempre tiene infinitas soluciones.

(c) Un sistema de ecuaciones lineales sobredeterminado (con más ecuaciones que incógnitas) siempre es incompatible.

(d) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es invertible, entonces para cualquier $b \in \mathbb{R}^n$ el sistema $Ax = b$ es compatible determinado.

(e) Sean $n \in \mathbb{N}$ y $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A es tal que

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \theta_{\mathbb{R}^n},$$

entonces $0 \leq \mathrm{r}(A) < n$.

(f) Sean $n \in \mathbb{N}$ y $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $b \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ es tal que el sistema de ecuaciones $Ax = b$ es incompatible, entonces $b \neq \Theta$ y $\mathrm{r}(A) < n$.

5. Determine una base de la imagen de las siguientes matrices. Escoja, para cada una de ellas y si es posible, vectores b de modo que el sistema de ecuaciones lineales con cada una de estas matrices y parte derecha b sea compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible. Cuando no sea posible encontrar b, justifique por qué.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Determine, si existen, valores de $k \in \mathbb{R}$ de modo que las matrices siguientes tengan rango 0, 1, 2 y 3.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 0 & k & 4-k \\ 0 & k & -k \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -k \\ 2 & 6 & -2k \\ 1 & 3 & 1+k \end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -k \\ 2 & k & -2k \\ 1 & 3 & k-1 \end{pmatrix}$,

(d) **(P)** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ k & 1 & 2-k \\ k & 0 & -k \end{pmatrix}$,

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2k & 2-k \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(f) $\begin{pmatrix} k & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \\ 7 & 8 & 9k \end{pmatrix}$.

7. Determine las condiciones que $a, b, c \in \mathbb{R}$ deben satisfacer para que el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + 2y - z + t &= a, \\ 2x + 5y + 2z + t &= b, \\ 4x + 11y + 8z + t &= c, \\ x + 4y + 7z - t &= a, \end{aligned}$$

sea

(a) compatible,

(b) compatible determinado.

Justifique sus respuestas. Determine el conjunto solución del sistema de ecuaciones que se obtiene tomando $a = 1, b = 2, c = 4$.

8. Considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x + y + \alpha z &= 0, \\ x + y + \beta z &= 0, \\ \alpha x + \beta y + z &= 0, \end{aligned}$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) Determine α, β de forma que el sistema de ecuaciones dado tenga solución única, ¿cuál es dicha solución?

(b) Encuentre α, β para que el sistema tenga solución no trivial. Determine el conjunto solución.

9. **(P)** Considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1, \\ 2x + 3y + kz &= 3, \\ x + ky + 3z &= 2, \end{aligned}$$

con $k \in \mathbb{R}$.

(a) Determine para qué valores de k el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible.

(b) Encuentre el conjunto solución al sistema con $k = 0$.

(c) Encuentre el conjunto solución al sistema cuando éste sea compatible indeterminado.

2. Aplicaciones

El objetivo de esta sección es que leas algunas aplicaciones del Álgebra Lineal a la solución de problemas reales. Sin embargo, en el certamen **no** habrá preguntas de este tipo.

1. El *Modelo Leontief* es un modelo de economía propuesto por W. Leontief en 1949. Este modelo supone que la economía de un país se divide en sectores productivos (que producen bienes y servicios) y sectores no productivos (como educación, gobierno). La **demanda total** d de bienes y servicios es igual a $d_{np} + d_p$ donde d_{np} es la demanda de bienes y servicios desde el sector no productivo y d_p es la demanda de bienes y servicios desde el sector productivo.

   Supongamos, por ejemplo, que en un país hay 3 sectores productivos, S_1, S_2 y S_3, que producen los bienes y servicios. Entonces $d_{np}, d_p \in \mathbb{R}^3$ son tales que $d_{np}(1)$ es la demanda de unidades del bien o servicio producido por S_1 desde el sector no productivo y $d_p(1)$ es la demanda de bienes de S_1 desde el sector productivo. Lo mismo ocurre con $d_{np}(2), d_p(2)$, $d_{np}(3)$ y $d_p(3)$.

Supongamos que la siguiente tabla muestra la demanda de cada uno de bienes y servicios desde los sectores S_1, S_2 y S_3. La primera columna corresponde a la demanda de los bienes que necesita S_1 para producir 1 unidad de su bien o servicio. Esto indica que para producir 100 unidades de su bien o servicio S_1 necesita

$$100 \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$$

50 unidades desde el propio S_1, 20 desde S_2 y 10 desde S_3.

	S_1	S_2	S_3
S_1	0,5	0,4	0,2
S_2	0,2	0,3	0,1
S_3	0,1	0,1	0,3

Cuadro 1: Demanda de bienes y servicios por unidad de producción desde S_1, S_2 y S_3

Si $x \in \mathbb{R}^3$ es tal que $x(1)$ es la cantidad de unidades a producir por S_1, $x(2)$, la cantidad de unidades a producir por S_2 y $x(3)$, la cantidad de unidades a producir por S_3, se desea que $x = d_{np} + d_p$, es decir, se desea que

$$x = \underbrace{x(1) \underbrace{\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}}_{\text{primera columna de tabla}}}_{\text{demanda para producir } x(1) \text{ unidades desde } S_1} + x(2) \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}3 \\ 0{,}1 \end{pmatrix} + x(3) \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}1 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} + d.$$

Suponga que desde el sector no productivo se necesitan 50 unidades del bien producido por S_1, 30, del producido por S_2 y 50 del producido por S_3, es decir, $d = \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \\ 50 \end{pmatrix}$. Determine cuántas unidades de bienes y servicios deben producirse desde S_1, S_2 y S_3 para satisfacer esta demanda.

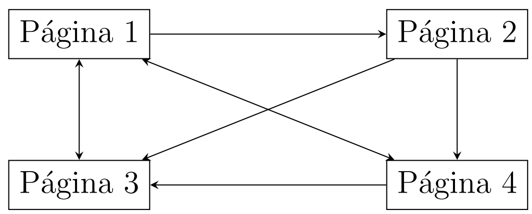
2. Hoy en día Google es el buscador web que utiliza la mayoría de las personas en el mundo. Cuando Google comenzó, a finales de la década de los 90, parecía mostrar, a diferencia de otros buscadores, de entre todas las páginas que contenían cierta frase, las *más relevantes* primero. El algoritmo **pagerank**, desarrollado por los creadores de Google, era el que permitía decidir el orden en que debían ser mostradas las páginas que cumplían con el criterio de búsqueda del usuario. Este algoritmo se basaba en asociar un peso a cada página que dependiera de la cantidad de enlaces hacia ella, aunque no solamente de eso. En este problema vamos a trabajar con **pagerank**.

Suponga que $G \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una matriz tal que

$$G(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i \neq j \text{ y hay un enlace a la página } i \text{ desde la página j,} \\ 0, & \text{si } i \neq j \text{ y no hay enlace a la página } i \text{ desde la página j,} \\ 0, & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Esta matriz se denomina *matriz de conectividad* de la red y debería tener tantas filas y columnas como páginas web de acceso público hay.

Considere una red formada por 4 páginas web, donde los enlaces entre las páginas se describen en el siguiente mapa:



(a) Construya la matriz de conectividad asociada a la red del ejemplo.

(b) El **pagerank** de cada una de las páginas en la red es, según el algoritmo definido por Google, una solución del sistema de ecuaciones lineales

$$(I - pGD)x = e,$$

donde G es la matriz definida antes, $p \in \mathbb{R}$, I es la matriz identidad, D es la matriz diagonal que satisface

$$\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, 4\} \ : \ D(i,i) = \begin{cases} 1/c_i, & \text{si } c_i \neq 0, \\ 0, & \text{si } c_i = 0, \end{cases}$$

siendo c_i el número de enlaces **en** la página i y $e \in \mathcal{M}_{4\times 1}$ es tal que todas sus componentes son iguales a 1.

Escriba este sistema para nuestro ejemplo con cuatro páginas web. Compruebe que si $p = 1$ el sistema no es compatible determinado, es decir, el valor de p debería ser distinto de uno, de modo que resolviendo el sistema pueda asignarse un único peso a cada página web.