

Listado 4 - Cálculo II
(527150-S2)

1. Estudiar la convergencia de las siguientes integrales:

(a) $\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^2+x^4} dx.$	(e) $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x^2} dx.$	(i) $\int_0^\infty x^x dx.$
(b) $\int_0^\infty x^2 e^{-x} dx.$	(f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} dx.$	(j) $\int_0^\infty e^{-x} \ln(1+e^x) dx$
(c) $\int_0^\pi \frac{x}{\sin(x)} dx.$	(g) $\int_0^\infty \frac{x^5}{x^{12}+1} dx.$	(k) $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x^{3/2}} dx.$
(d) $\int_0^\infty \frac{1}{(x-1)^2} dx.$	(h) $\int_0^1 \sqrt{x} \csc(x) dx.$	(l) $\int_0^\infty \frac{1}{x \ln^p(x)} dx.$

2. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sinh(x)} \right)$ para $x \neq 0$ y $f(0) = k$.

(a) Encuentre el valor de k de modo que f sea continua en todo \mathbb{R} .

(b) Estudie la convergencia de las integrales $\int_0^1 f(x) dx$, $\int_1^\infty f(x) dx$, $\int_0^\infty f(x) dx$ y $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$.

3. Pruebe que las integrales divergen.

(a) $\int_1^2 \frac{dx}{x(\ln(x))^2}.$	(b) $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}.$
--	------------------------------------

4. Pruebe que $\int_1^\infty \left(\frac{1}{x(\ln x)^2} - \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx$ converge y encuentre su valor.

5. Mostrar que la integral $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)) dx$ verifica la relación:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x)) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2} \sin(2x)\right) dx.$$

Deducir el valor de I .

6. Usar la definición de la función Gamma con un cambio de variable apropiado para probar que:

(a) $\int_0^\infty e^{-ax} x^n = \frac{1}{a^{n+1}} \Gamma(n+1)$, con $n > -1$, $a > 0$.

(b) $\int_a^\infty e^{2ax-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{a^2}$.

7. Evaluar $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ y $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$.

Hint. Considere el valor de la integral gaussiana como conocido.

8. Determinar la transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\}$ de las siguientes funciones.

(a) $f(t) = te^4$

(d) $f(t) = e^t \cos(t)$

(g) $f(t) = (t+1)^3$

(b) $f(t) = t^2 e^{-2t}$

(e) $f(t) = 2t^4$

(h) $f(t) = 1 + e^{4t}$

(c) $f(t) = e^{-t} \sin(t)$

(f) $f(t) = t^2 + 6t - 3$

(i) $f(t) = (1 + e^{2t})^2$