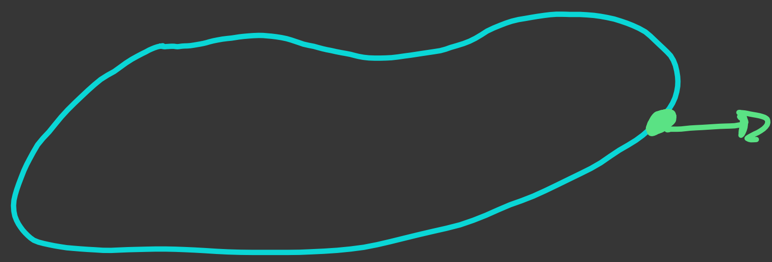
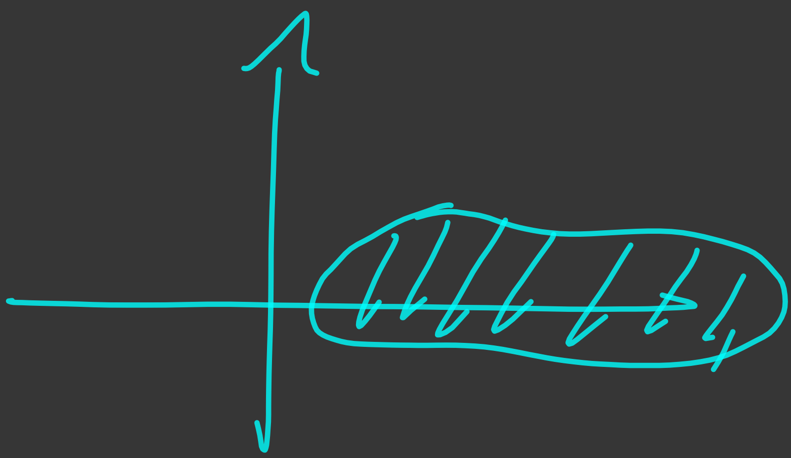
$\mathring{A}$ conexo

A



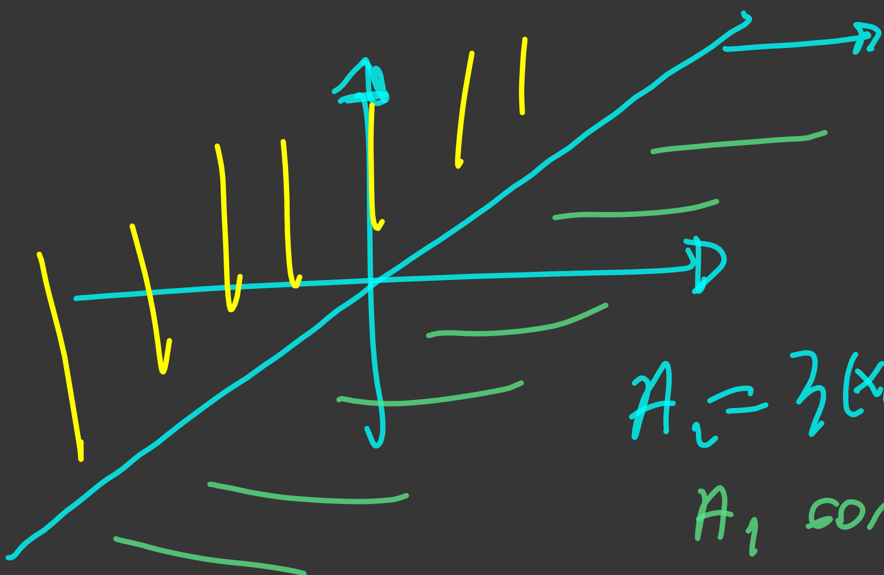
no interior a A

Plano:



conexo

Ej 3



$y = x$

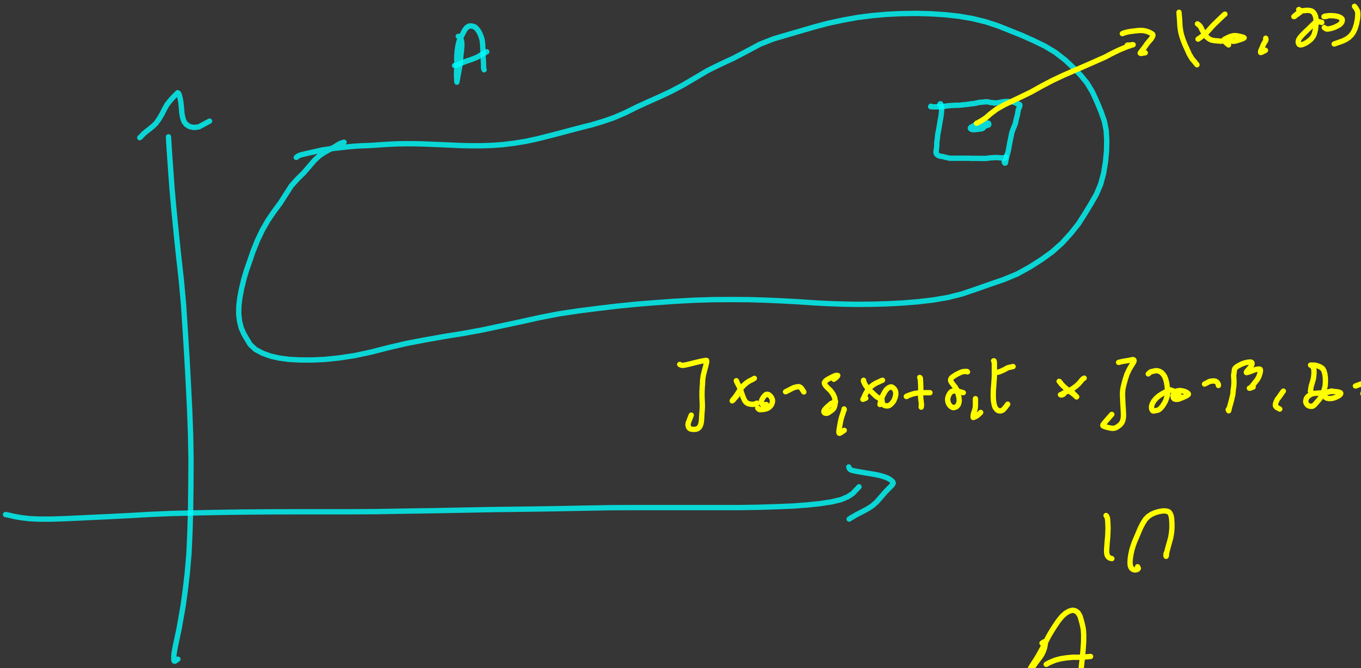
$A_1 = \{(x,y) : x > y\}$

A_1 conexo

Pero $A_2 = \{(x,y) : x < y\}$

A_2 tb. es conexo

Pero $A_1 \cup A_2$ No es conexo



$$]x_0-\delta, x_0+\delta[\times]y_0-\beta, y_0+\beta[\subseteq A$$

(x_0, y_0) pto. INTERNO a A

Lu 03/10/22

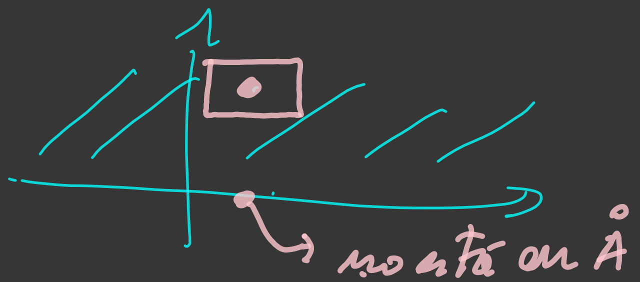
DEF. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Diremos que (x_0, y_0) es un **PUNTO INTERNO** de A, o que (x_0, y_0) es **INTERIOR** al conjunto A, si existe $\delta > 0$ tal que el rectángulo $R(x_0, y_0) =]x_0-\delta, x_0+\delta[\times]y_0-\delta, y_0+\delta[$ está completamente contenido en A. En tal caso escribiremos $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$ ($\mathring{A}$ indica el conjunto de todos los puntos interiores de A).

Ejemplo: Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$

Entonces el punto $(1, 2) \in \mathring{A}$

$\boxed{\text{Note que } \forall x \in \mathbb{R},\ (x, 2) \in \mathring{A}}$

$\boxed{\text{sin embargo } (1, 0) \notin \mathring{A}.}$

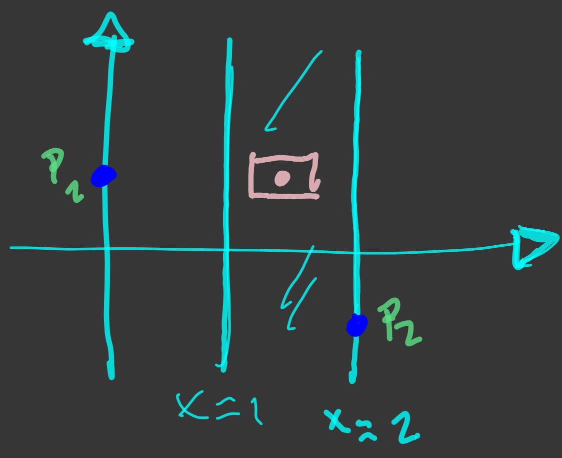


Ejemplo 2: Sea $A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 2\}$

Entonces $\forall y \in \mathbb{R}$, el punto $(3/2, y) \in \mathring{A}_4$

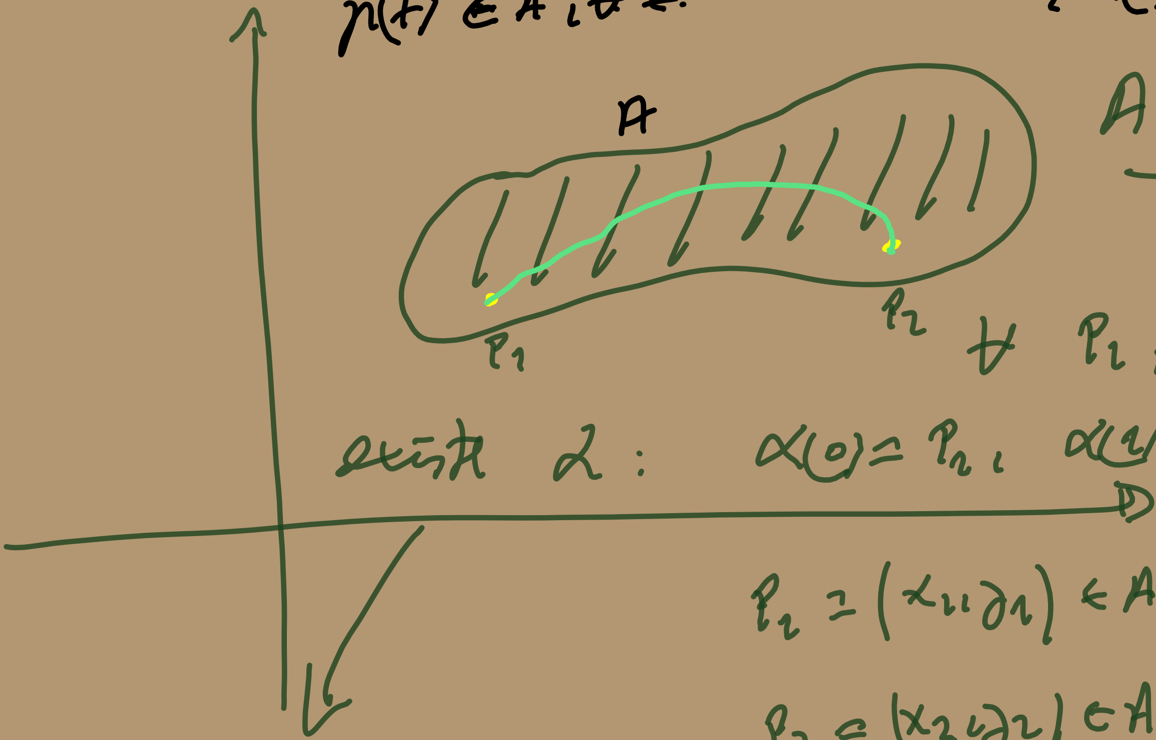
observe que $P_1(0, 1) \notin \mathring{A}$

$P_2(2, -1) \notin \mathring{A}$.



A conexo si, $\forall\, P_1, P_2 \in A$, existe curva continua α tal que $\begin{cases} \alpha(0) = P_1 \\ \alpha(1) = P_2 \end{cases}$

$\gamma(t) \in A, \forall t$.



A conexo $\Longrightarrow$

$\forall\, P_1, P_2 \in A$

existe α: $\alpha(0) = P_1$, $\alpha(1) = P_2$

$P_1 = (x_1, y_1) \in A$

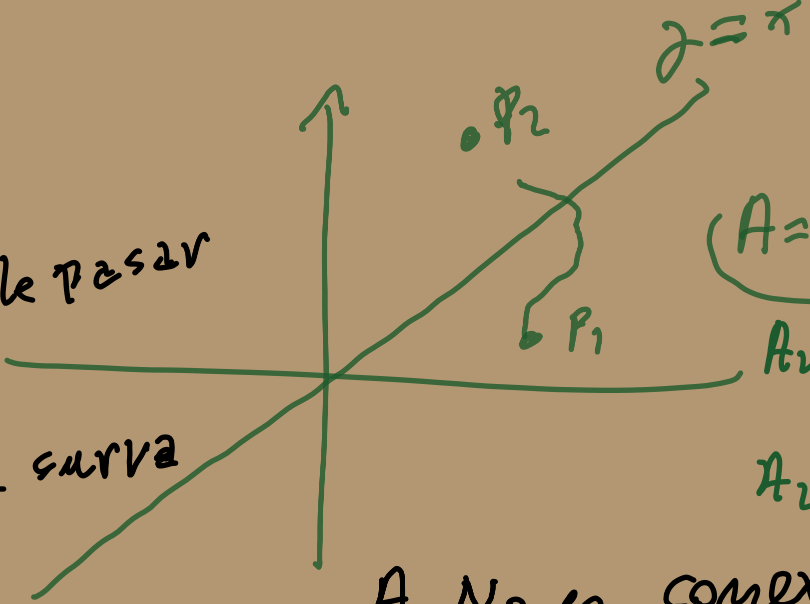
$P_2 = (x_2, y_2) \in A$

α curva continua.

conexo

Ej 3.

No es posible pasar de P_1 a P_2 a través de curva continua



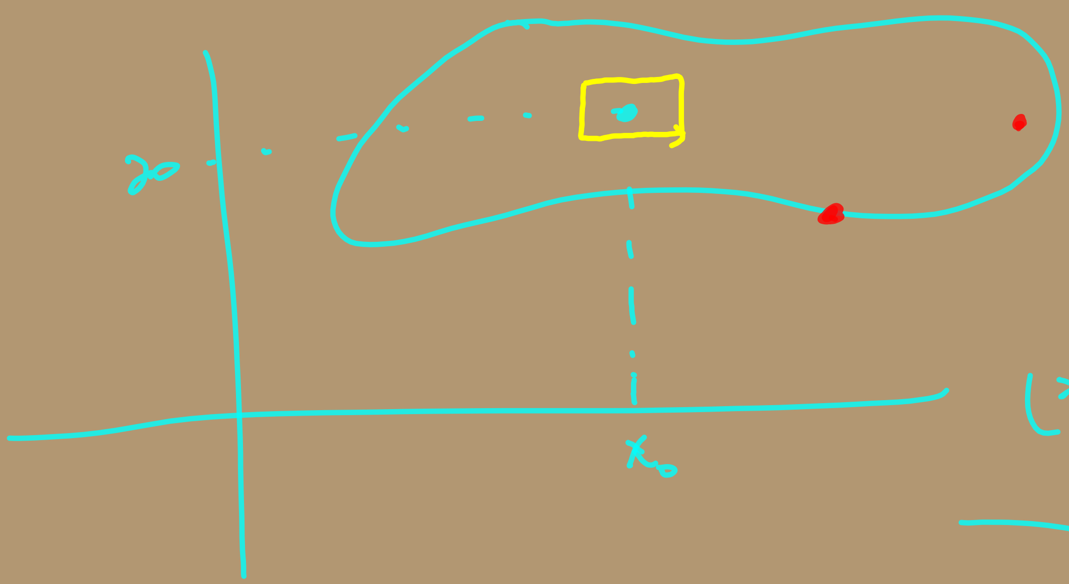
$A = A_1 \cup A_2$

$A_1 = \{ x < y \}$

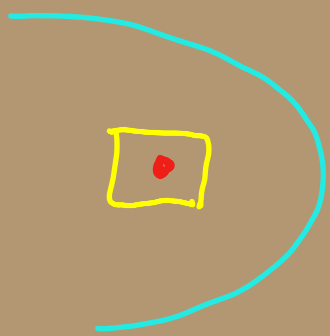
$A_2 = \{ x > y \}$

A No es conexo.

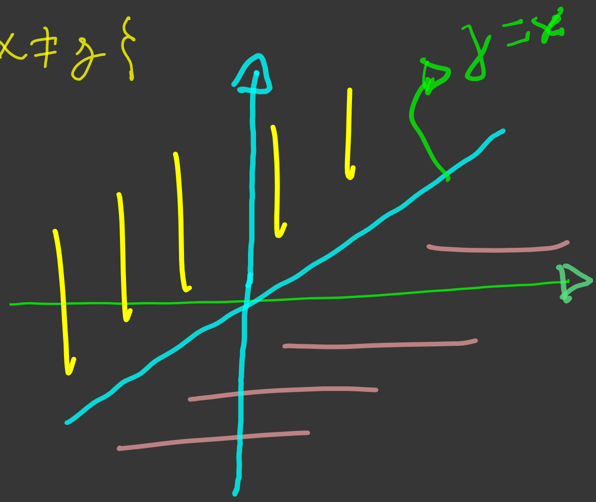
A aperto



$(x_0, y_0) \in \mathring{A}$



Ejemplo 3: Sea $A_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x \neq y\}$



$A_3^- = \{(x,y) \in A_3 : x < y\}$

$A_3^+ = \{(x,y) \in A_3 : x > y\}$

Entonces $(1,0) \in \overset{o}{A}{}_3^+$, $(0,2) \in \overset{o}{A}{}_3^-$

DEFINICIÓN: Decimos que $A \subseteq \mathbb{R}^2$ es CONEXO, si $\forall$ $P_1, P_2 \in A$, existe curva continua que une P_1 y P_2 y que está contenida en A.

Regresemos a las EDO: Sea $A \subseteq \mathbb{R}^2$, A conexo.

—— FIN —— clase 17.

OBS: Para $(x_0, y_0) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : \overset{o}{A} \to \mathbb{R}$ continua,

consideremos el PVI
$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \cdots (1)$$

Integrando en (1)
$$\boxed{\int_{x_0}^{x} y'(s)\,ds = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,ds \quad \cdots (2)} \quad \left(\begin{array}{l}\text{Note que} \\ y(x_0) = y_0\end{array}\right)$$

OBS: si f es continua, entonces $(1) \Longleftrightarrow (2)$.

DEF: Consideramos el PVI

$$(P)\begin{cases} y'(x) = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Diremos que la curva derivable α

$\alpha :]x_0-\delta, x_0+\delta[\longrightarrow \mathbb{R}$ es solución para el PVI (P), si:

(i) Existe $\delta > 0$ tal que, $\forall x \in J =]x_0-\delta, x_0+\delta[$

$(x,\alpha(x)) \in \mathrm{Dom}(f)$, $(\Rightarrow \forall x \in I;\ f(x,\alpha(x)) \in \mathbb{R})$

(ii) $\begin{cases} \alpha'(x) = f(x,\alpha(x)) \\ \alpha(x_0) = y_0 \end{cases}$

Ejemplo: consideremos $(P)\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y^2 \\ y(1) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Entonces se puede ver que:

$\boxed{\alpha(x) = \dfrac{-1}{x+1}}$ es una solución para (P).

En efecto. Primero notemos que

si $x = 1$, entonces $\alpha(1) = \dfrac{-1}{1+1} = -\dfrac{1}{2}$

Por tanto, α verifica la condición inicial, C.I., $\alpha(1) = -\frac{1}{2}$.

Veamos si α satisface la EDO.

Como $\alpha(x) = \dfrac{-1}{x+1}$; sigue que

$$\alpha'(x) = (-1)(-1)(x+1)^{-2} \frac{d}{dx}(x+1)$$

$$\Rightarrow \alpha'(x) = \left(\frac{1}{x+1}\right)^2 \cdot 1$$

$$\Leftrightarrow \alpha'(x) = (\alpha(x))^2$$

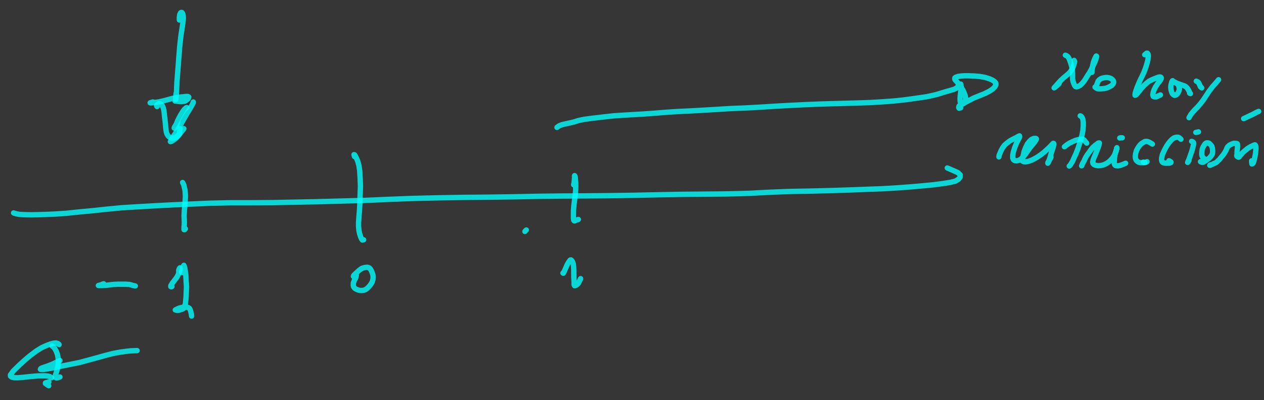
Así, α también verifica la EDO. Por tanto α es solución para el PVI (P). ¿Cuál es el Dom(α)?

Note que $\boxed{x = -1}$ NO puede pertenecer a Dom(α).

Puesto que la C.I. es $\alpha(1)$, entonces Dom(α) es del tipo $\underbrace{]1-r, 1+r[}$ con $0 < r < 2$

(Se podría pensar que $Dom(\alpha) = \underline{]1-r, 1+r[} \cup]a, b[$

$0 < r < 2$



$Dom(\alpha) =]-1, t[\quad , \quad t \geq 0$

eventualmente $t \longrightarrow +\infty$

(siempre se debe "ver" si eso es posible)

Por ejemplo, $\mathrm{Dom}(\alpha) =]1-\frac{1}{4}, 1+\frac{1}{4}[$

El $\mathrm{Dom}(\alpha)$ No puede incluir a $x = -1$.

TEOREMA (Existencia de soluciones para EDO ...)

supongamos que la función $f = f(x,y)$

sea continua sobre $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$.

Entonces el PVI (P) $\begin{cases} y'(x) = f(x, \cancel{y(x)}) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

$f(x,y)$

tiene solución.

EDO de primer orden, No lineal

Ejemplo:

consideremos la EDO: $\boxed{y'(x) = 3y^{2/3}}$.

Notemos que si $\alpha(x) := \left[\frac{1}{3}(x+c)\right]^3$ donde c

es una constante arbitraria, entonces

$$\boxed{\alpha'(x) = 3\left(\frac{x+c}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}(x+c)^2}$$

$$\text{y} \quad [\alpha(x)]^{2/3} = \left[\left(\frac{x+c}{3}\right)^3\right]^{2/3} = \left(\frac{x+c}{3}\right)^2 = \underline{\underline{\left(\frac{1}{3}\right)\alpha'(x)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha'(x) = 3(\alpha(x))^{2/3}}$$

Consideremos el PVI:

$$(P_1) \begin{cases} y'(x) = 3y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(observe que $y \equiv 0$ ($\forall x$, $y(x) = 0$), satisface la EDO $y'(x) = 3y^{2/3}$)

Como sabemos que $\alpha(x) = \left(\frac{x+c}{3}\right)^3$, c cte.

es solución de $y'(x) = 3y^{2/3}$. Debe ser

$$\alpha(0) = \left(\frac{c}{3}\right)^3 = 0 \Rightarrow \boxed{c = 0}$$

Por tanto, $\mu(x) = \left(\frac{x}{3}\right)^3$ es solución el PVI (P_1)

De otra parte, si definimos $\beta(x) \equiv 0$

entonces β también es solución de (P_1)

(¡obvio!).

Así, se obtienen dos soluciones para el PVI

$$(P_1) \begin{cases} y'(x) = 3y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases},$$

a saber:

$$\boxed{\beta_1(x) \equiv 0} \quad y \quad \boxed{\beta_2(x) = \left(\frac{x}{3}\right)^3.}$$

¿Existirá algún modo de asegurar la existencia

de una única curva solución para el

PVI (P)?

TEOREMA. (Existencia y unicidad de solución)

Sean $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$ una función de modo que:

(H) $\begin{cases} f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \end{cases}$

sean ambas continuas.

Entonces para $(x_0, y_0) \in \mathring{A}$ resulta que el PVI

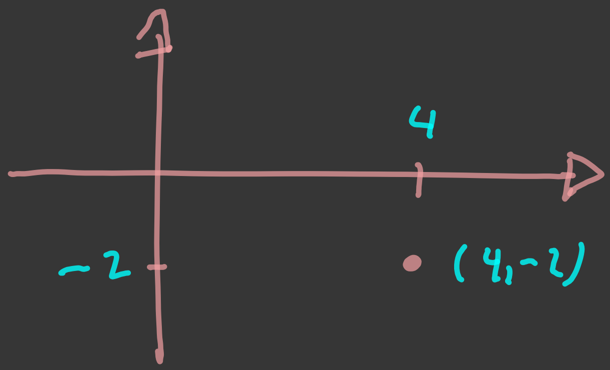
$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tiene única solución α definida en un intervalo alrededor de x_0. Esto es, existen $\delta > 0$ y única curva $\alpha :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\to \mathbb{R}$

tal que $\begin{cases} \alpha'(x) = f(x, \alpha(x)) \\ \alpha(x_0) = y_0. \end{cases}$

Ejemplo: → EDO No lineal (Tarea)

$$(P)\begin{cases} y'(x) = \dfrac{x}{y} \\ y(4) = -2 \end{cases}$$



Aquí $\boxed{f(x,y) = \frac{x}{y}}$; está def $\forall x \in \mathbb{R}$.

el punto $(x,0) \notin Dom(f)$.

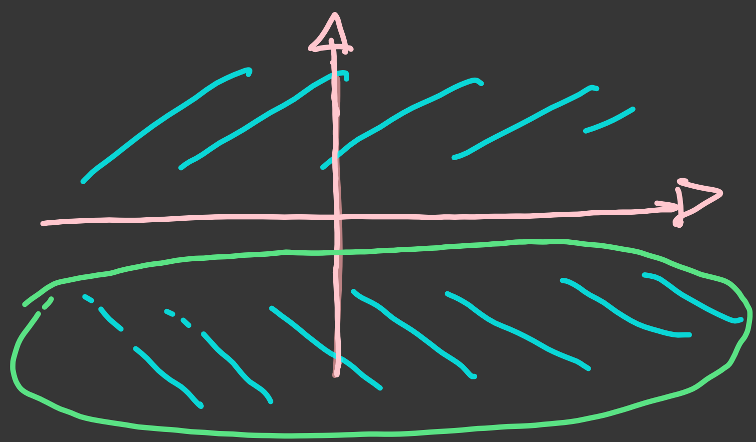
Además, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{x}{y^2}$

Observamos que f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas para todo (x,y) tal que $y>0$ o $y<0$.

Además, $(4,-2) \in \mathring{A}$

$A = \{(x,y) : y < 0\}$

(III y IV cuadrante)



Existe única solución del PVI dado

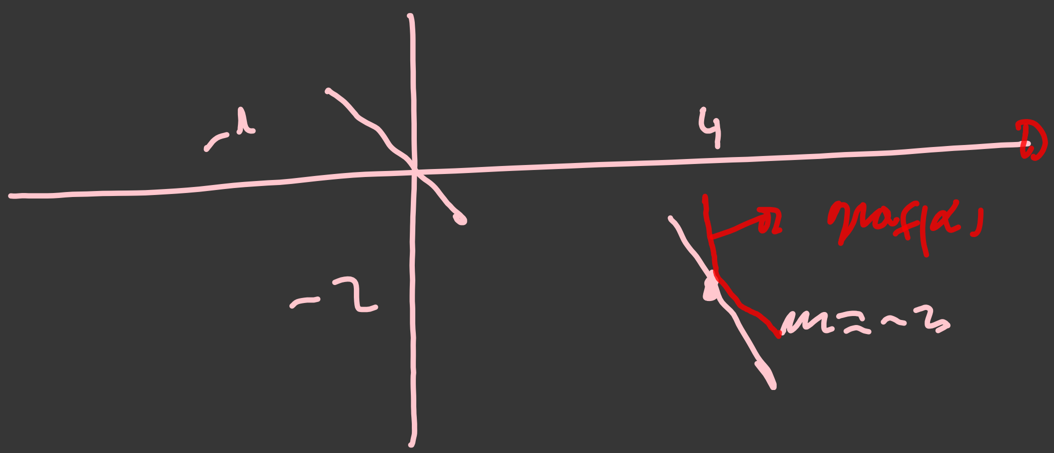
$\alpha :]4-\delta, 4+\delta[\to \mathbb{R}$ $(\delta > 0)$

$$\begin{cases} \alpha'(x) = \dfrac{x}{\alpha(x)} \end{cases}$$

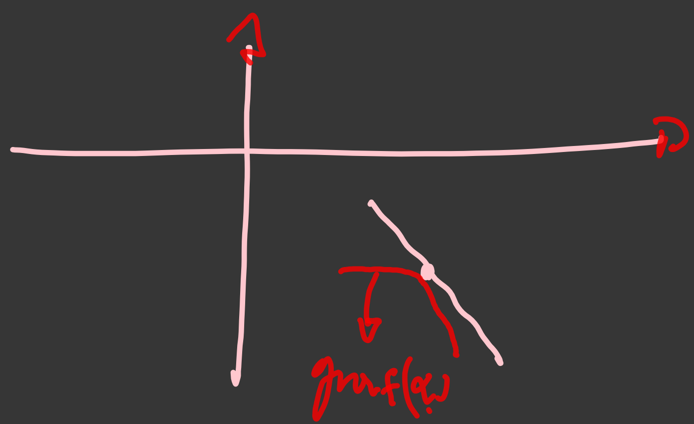
Note que $\alpha(4) = -2$; además

$$\alpha'(4) = \frac{4}{-2} = -2 < 0$$

Por tanto, la curva solución es decreciente alrededor de $x_0 = 4$



o bien

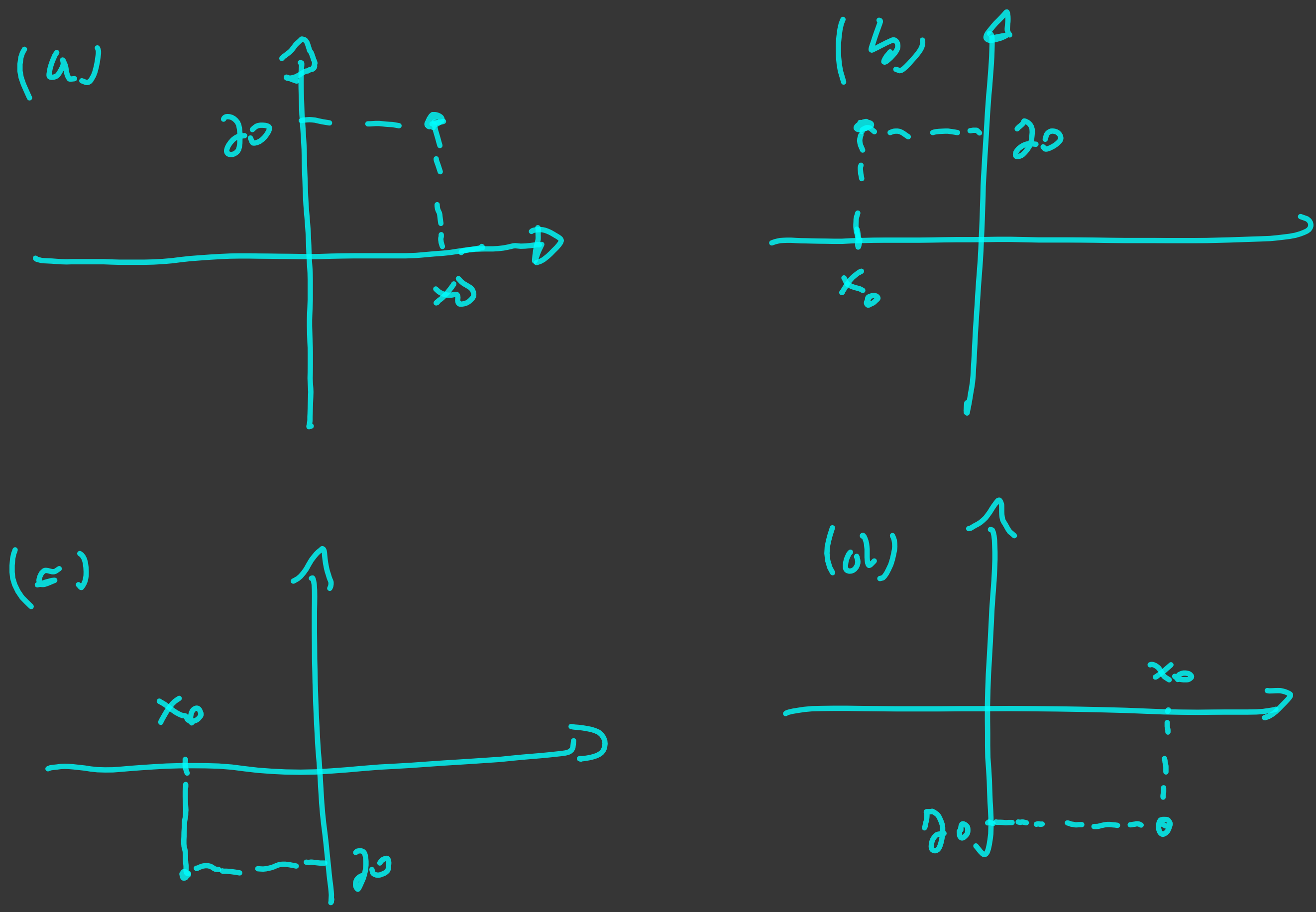


curva solución decreciente porque $\alpha'(4) < 0$

$$\alpha'(4) = \frac{4}{-2} = -2 < 0$$

OBS: Note que en general tenemos el

PVI $\begin{cases} y'(x) = \dfrac{x}{y} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$



En el caso (a): $\dfrac{x_0}{y_0} > 0 \Rightarrow$ $\begin{cases} \text{curva solución} \\ \text{es creciente} \end{cases}$

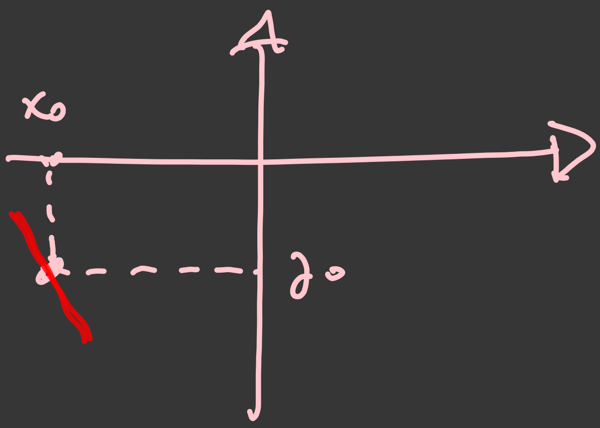
$$\left(\Rightarrow y'(x_0) = \frac{x_0}{y_0} > 0 \right)$$

caso (c): $y'(x_0) = \dfrac{x_0}{y_0} < 0 \Rightarrow$ $\begin{cases} \text{curva solución es} \\ \text{decreciente.} \end{cases}$

Etc, etc

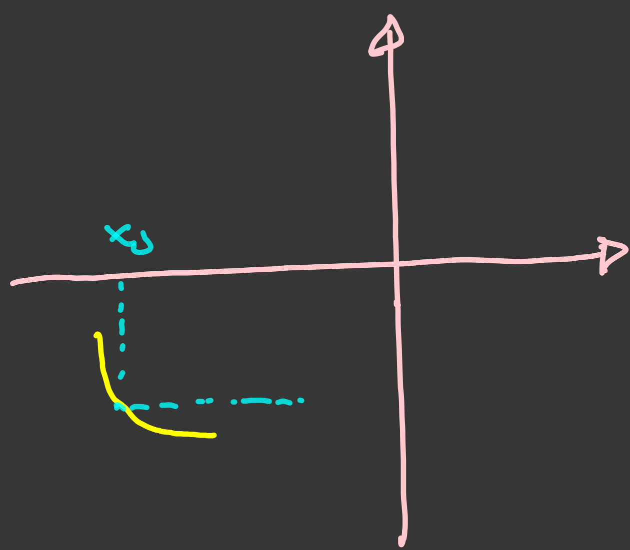
Note que en el caso (a): $y'(x_0) = \frac{x_0}{y_0} < 0$.

Entonces:



en rojo recta tangente a la grafica de la solución α.

Posibles curvas α

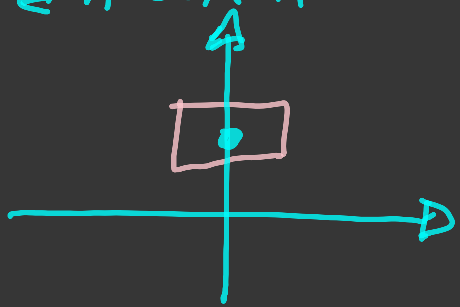


Ejemplo: Consideremos el PVI

$$(P_*)\begin{cases} y'(x) = y^2(x-1) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Aquí $\begin{cases} f(x,y) = \underline{(x-1)}y^2 & \text{y entonces} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \underline{2(x-1)}y. \end{cases}$

ambas funciones (la f y la $\frac{\partial f}{\partial y}$) son continuas en todo $\mathbb{R}^2$. Además, el punto $(0,1) \in \mathring{A}$ con $A = \mathbb{R}^2$.



Entonces, el Teorema anterior nos asegura que (P_*) tiene única solución

Esto es, existe $\delta > 0$ y única curva derivable α

$\alpha :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}$ tal que:

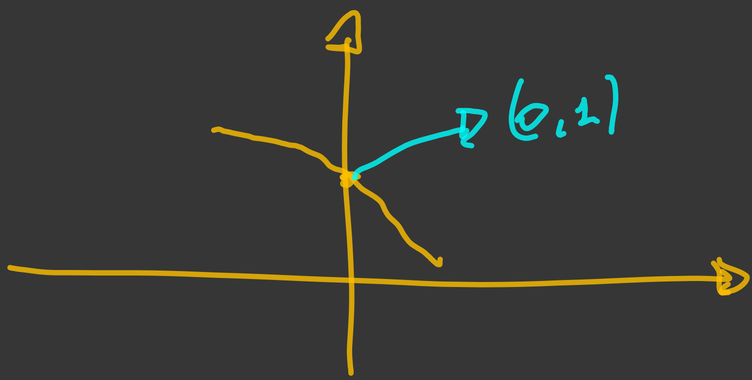
$$\begin{cases} \alpha'(x) = (x-1)(\alpha(x))^2 \\ \alpha(0) = 1 \end{cases}$$

Para $x_0 = 0$: $\alpha'(0) = (-1)(\alpha(0))^2 = -1$

$\alpha'(0) < 0$.

$\Rightarrow$ ¡Ya en el punto $(0,1)$ es una curva que esté decreciendo!

Por tanto, la curva debe ser como:



Recordemos que la EDO:

$$\begin{cases} y'(x) = (x-1)\left(y(x)\right)^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$ tiene solución única

Pero en lugar de $(0,1)$, no hay restricciones para poner $\alpha(x_0) = y_0$, es decir,

$$\begin{cases} y'(x) = (x-1)\, y^2 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

también tiene solución ÚNICA.

Ejemplo: Consideremos el PVI

$$(P_1) \begin{cases} y'(x) = \sqrt{y} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Entonces la curva $\alpha(x)$ tal que:

$$(*) \quad \sqrt{\alpha(x)} = \frac{1}{2}x + c$$ es solución de

$$\boxed{y'(x) = \sqrt{y}}$$

En efecto, en $(*)$ derivando implícitamente tenemos:

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\alpha(x)}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x + c\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{\alpha(x)}}\alpha'(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha'(x) = \sqrt{\alpha(x)}}$$

Pero $y(1) = 1 \Rightarrow \alpha(1) = \frac{1}{2} + c = 1$

$$\Rightarrow c = 1/2$$

Así, $\alpha(x)$ es tal que: $\sqrt{\alpha(x)} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} |\alpha(x)| = \left[\frac{1}{2}(x+1)\right]^2 \\ \alpha(x) = \frac{1}{4}(x+1)^2 \end{cases}$$

Así, α resuelve el PVI (P_1).

¿Existe otra solución?

Veamos las hipótesis del Teorema.

Aquí, $f(x, y(x)) = \sqrt{y} = y^{1/2}$

. Resulta que f es continua alrededor del punto $(1,1)$

<u>Además</u>: $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

que también es continua alrededor de $(1,1)$

Por tanto, la solución $\alpha(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2$ es única para (P_1)

Sin embargo, veamos que sucede con el PVI.

$$(P_2)\begin{cases} y'(x) = \sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Aquí para todo (x,y) tal que $y \neq 0$, $f(x,y) = \sqrt{y}$ es una función continua. Sin embargo, como $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}}$ no es continua en $(x,0)$, para todo $x \in \mathbb{R}$; solamente podemos afirmar que el PVI

$$(P_2)\begin{cases} y'(x) = \sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

solamente admite solución.