Álgebra II. 525150
Prof.: A. González, F. Jara, M. Selva.

Listado 13: Espacios vectoriales con producto interior.

1. Demuestre que la función $\|\cdot\|_1$ que a cada vector de $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, le asigna el número real
$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$$
cumple las condiciones para ser una norma.

2. Demuestre que la función $\|\cdot\|_\infty$ que a cada vector de $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, le asigna el número real
$$\|x\|_\infty = \text{máx}\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|\}$$
cumple las condiciones para ser una norma.

3. Sean V un e.v. sobre $\mathbb{R}$ y $\bullet$ un producto interior en V. Demuestre que si $\|\cdot\|$ es la norma inducida por $\bullet$, entonces para cualquier par de vectores $x, y \in V$ se cumple que
$$\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = x \bullet y.$$

4. Encuentre una base para los siguientes s.e.v. de $\mathbb{R}^4$

   (a) $\left\{ x \in \mathbb{R}^4 \;:\; x \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,

   (b) $\left\{ x \in \mathbb{R}^4 \;:\; x \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,

   (c) $\left\{ x \in \mathbb{R}^4 \;:\; x \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge x \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

5. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones lineales sobredeterminados en el sentido de los mínimos cuadrados

   (a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$