Solución Parcial

Listado 7 : Transformaciones lineales

3. Encuentre una base para cada uno de los siguientes espacios vectoriales

(b) $T = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) : \ a_{11} + a_{22} = 0 \wedge a_{23} = a_{13} \right\}$,

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) : \ a_{11} = -a_{22} \ \wedge \ a_{23} = a_{13} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -a_{22} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{13} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) : a_{22}, a_{12}, a_{13}, a_{21} \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ a_{22}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{13}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) : a_{22}, a_{12}, a_{21}, a_{13} \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

Probemos que el conjunto generador $B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es l.i
Sean $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ tales que:

$$\alpha\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \varepsilon\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces $-\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\varepsilon = 0$, $\alpha = 0$ y $\gamma = 0$, por lo que es claro que B es l.i y por lo tanto

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ es base de } T.$$

1. Determine las matrices asociadas a las siguientes transformaciones lineales con respecto a las bases canónicas de los espacios de partida y llegada

(b) $T_2 : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$, $T_2((x,y)^{\mathrm{T}}) = (x+y,\, 0)^{\mathrm{T}}$, considerando a $\mathbb{C}^2$ e.v. complejo,

(c) $T_2 : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$, $T_2((x,y)^{\mathrm{T}}) = (x+y,\, 0)^{\mathrm{T}}$, considerando a $\mathbb{C}^2$ e.v. real,

(b) La base canónica de $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$ es $B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\}$.

Obtenemos $T_2\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1+0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ y $T_2\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0+1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Además $\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]_B = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ por lo que

$$[T_2]_B^B = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

(c) La base canónica de $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$ es $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix} \right\}$

Obtenemos $T_2\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $T_2\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $T_3\left(\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix}$, y $T_4\left(\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix}$

Además, $\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]_{B_2} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ y $\left[\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix}\right]_{B_2} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$

Luego

$$[T_2]_{B_2}^{B_2} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

2. Sea $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ la aplicación lineal definida por

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = 2a_2x + a_1.$$

Calcule la matriz asociada a esta aplicación con respecto a las siguientes bases B_1 de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y B_2 de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$.

(b) $B_1 = \{1 - x,\ 1 + x,\ 1 + x + x^2\}$, $B_2 = \{1 + x,\ 1 - x\}$.

Primero obtenemos $T(1-x) = 2\cdot 0\cdot x + -1 = -1$, $T(1+x) = 2\cdot 0\cdot x + 1 = 1$ y $T(1+x+x^2) = 2\cdot 1\cdot x + 1 = 2x+1$.
Necesitamos $[T(1-x)]_{B_2}$, $[T(1+x)]_{B_2}$ y $[T(1+x+x^2)]_{B_2}$, es decir, necesitamos

$$[-1]_{B_2},\ [1]_{B_2} \text{ y } [2x+1]_{B_2}.$$

$$\forall x: -1 = \alpha(1+x) + \beta(1-x) \Rightarrow -1 = \alpha + \beta \wedge 0 = \alpha - \beta \Rightarrow 2\alpha = -1 \wedge \alpha = \beta \Rightarrow \alpha = \beta = -1/2 \Rightarrow [-1]_{B_2} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\forall x: 1 = \alpha(1+x) + \beta(1-x) \Rightarrow 1 = \alpha + \beta \wedge 0 = \alpha - \beta \Rightarrow 2\alpha = 1 \wedge \alpha = \beta \Rightarrow \alpha = \beta = 1/2 \Rightarrow [1]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\forall x: 2x+1 = \alpha(1+x) + \beta(1-x) \Rightarrow 1 = \alpha + \beta \wedge 2 = \alpha - \beta \Rightarrow 2\alpha = 3 \wedge \beta = \alpha - 2 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2} \wedge \beta = -\frac{1}{2} \Rightarrow [2x+1]_{B_2} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, $$[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 3/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$