Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemática
Departamento de Matemática

# Cálculo II

## Ingeniería Civil

Prof. Víctor Aros Quinán

Segundo Semestre 2021

Clase Nº19: Cálculo II
Área de Superficie de Revolución y Curvas definidas de forma Paramétrica

# Ejercicios

1. Considere la catenaria definida por $y = 20\cosh\left(\frac{x}{20}\right)$ definida para $x \in [-20, 20]$. Determine la longitud de la curva en el intervalo dado.

2. Determine la longitud de la curva $C : y = \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{2x}$, definida en el intervalo $[1, 3]$.

3. Sea $f(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{8}x^2$, con $x \in [1, 2]$. Hallar su longitud.

4. Muestre que el perímetro de una circunferencia de radio $r > 0$ es $2\pi r$.

5. Determine la longitud del astroide de ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

# Ejercicios

**Solución 4):** Notemos que:

$$x^2 + y^2 = r^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}, \quad -r \leq x \leq r$$

Luego, si consideramos la función que define a la ecuación de la circunferencia en el primer cuadrante, el perímetro está dado por:

$$\begin{aligned} L(C) &= 4\int_0^r \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}(\sqrt{r^2 - x^2})\right)^2}\, dx \\ &= 4\int_0^r \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\, dx \\ &= 4\int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\, dx \end{aligned}$$

# Ejercicios

**Solución 5):** Notemos que:

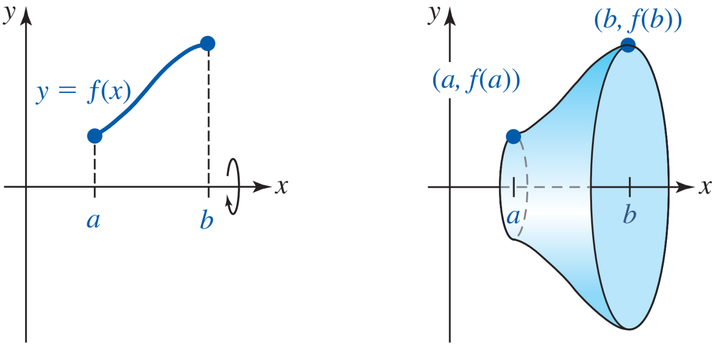
$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1 \Leftrightarrow y = \left(1 - x^{2/3}\right)^{3/2} \text{ e } y' = -\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\sqrt{1 - x^{2/3}}$$

Así, la longitud de arco está definido por:

$$\begin{aligned} L(C) &= 4\int_0^1 \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\sqrt{1 - x^{2/3}}\right)^2}\, dx \\ &= 4\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx \\ &= \lim_{b \to 0^+} 4\int_b^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx \\ &= 4 \end{aligned}$$

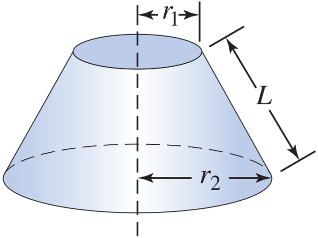
# Área de la Superficie de Revolución

Notemos que si consideramos la gráfica de una función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ que gira alrededor del eje $X$, genera un sólido de revolución y lo que nos interesa estudiar ahora se relaciona con determinar una expresión para calcular el área $S$ de la superficie, es decir, **el área de la superficie de revolución** sobre $[a, b]$. Como se muestra a continuación:



# Área de la Superficie de Revoluación

Para comenzar con la construcción de la expresión que nos permitirá calcular el área de una superficie de revolución debemos recordar la fórmula para el área lateral de un tronco de cono circular recto, la cual excluye la base inferior y superior.

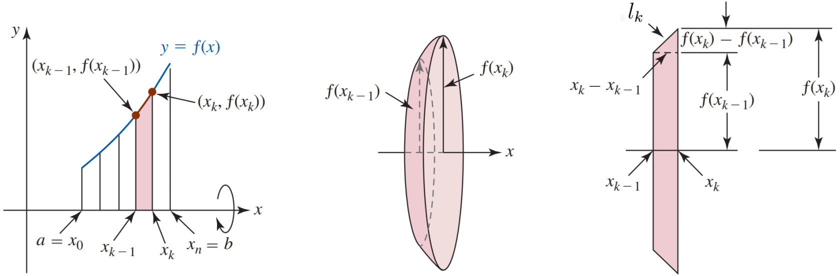



Si $r_1$ y $r_2$ son los radios de las partes superior e inferior y $L$ es la longitud de la generatriz, se tiene que:

$$A(S) = \pi(r_1 + r_2)L$$

# Área de la Superficie de Revolución

Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$, tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$ y $P$ una partición cualquiera del intervalo $[a, b]$. Podemos considerar un subintervalo de la forma $[x_{k-1}, x_k]$, luego si unimos con una cuerda los puntos $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ y $(x_k, f(x_k))$ formamos un trapecio y cuando giramos esta región en torno al eje $X$ se genera un tronco de cono circular recto con radios $f(x_{k-1})$ y $f(x_k)$, como se muestra a continuación:



# Área de la Superficie de Revolución

donde $l_k$ está dado por:

$$\begin{aligned} l_k &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} \\ &= \sqrt{1 + (f'(t_k))^2}(x_k - x_{k-1}) \end{aligned}$$

Así, tenemos que el área de la superficie de revolución de un trapecio está dada por:

$$S_k = \pi[f(x_k) + f(x_{k-1})]\sqrt{1 + (f'(t_k))^2}\Delta x_k$$

Luego, el área de la superficie de revolución, aproximadamente puede ser representada por:

$$A(S) \approx$$

# Área de la Superficie de Revolución

Podemos notar que la suma anterior corresponde a una suma de Riemann, es por esto que podemos afirmar que el área de la superficie de revolución está dada por:

$$A(S) =$$

# Ejemplos

1. Determine el área de la superficie $S$ que se forma al girar la gráfica de $y = \sqrt{x}$ sobre el intervalo $[1, 4]$ alrededor del eje $X$.

   **Solución:** Notemos que $y' = \frac{1}{2}x^{-1/2}$, luego:

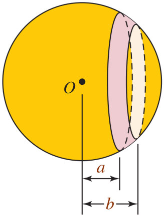
$$\begin{aligned}
A(S) &= 2\pi \int_1^4 \sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx \\
&= 2\pi \int_1^4 \sqrt{x}\sqrt{\frac{4x+1}{4x}}\, dx \\
&= 2\pi \int_1^4 \sqrt{x}\frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}\, dx \\
&= \pi \int_1^4 \sqrt{4x+1}\, dx \\
&\approx 30.85
\end{aligned}$$

# Ejemplos

2. Determine el área de la superficie $S$ que se forma al girar la gráfica de $y = \sqrt{x}$ sobre el intervalo $[1, 4]$ alrededor del eje $x = -3$.

# Ejercicios

1. Muestre que el área de la superficie de una esfera de radio $r > 0$ está dada por $4\pi r^2$.
2. Encuentre el área de la superficie de revolución al hacer girar en torno al eje $X$ la curva $y = \sin(x)$ con $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.
3. Hallar el área de la superficie de revolución obtenida al girar el gráfico de $f(x) = 2\sqrt{x}$ con $x \in [1, 4]$ en torno a:
   (a) $x = 0$ (b) $y = 0$ (c) $x = -2$ (d) $y = 4$
4. La superficie formada por dos planos paralelos que cortan una esfera de radio $r$ se denomina **zona esférica**. Determine el área de la superficie esférica que se muestra a continuación:



# Curvas definidas Paramétricamente

Una ecuación rectangular o cartesiana no es la única manera, y a menudo la más conveniente, de describir una curva en el plano de coordenadas. Hoy estudiaremos una manera diferente de representar una curva que es importante en muchas aplicaciones del cálculo.

## Definición

Sea $C$ un subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Diremos que $C$ es una curva definida paramétricamente si existe un par de funciones $f$ y $g$, tal que:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = f(t) \wedge y = g(t), t \in [a, b]\}$$

**Observaciones:**

1. A la variable $t$ se denomina parámetro.
2. Las ecuaciones $x = f(t)$ e $y = g(t)$ se denomina **ecuaciones paramétricas** de la curva $C$.

# Curvas definidas Paramétricamente

También podemos definir una curva $C$ de $\mathbb{R}^2$ de manera paramétrica de la siguiente forma:

## Definición

Sea $C : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in [a, b]$$

donde la función $\vec{r}$ es llamada parametrización de $C$.

**Observación:** Desde ahora haremos referencia a una curva plana $C$ como una curva paramétrica o como una curva parametrizada. La **gráfica** de una curva paramétrica $C$ es el conjunto de todos los puntos $(x, y)$ en el plano de coordenadas correspondientes al par ordenado $(x(t), y(t))$.

# Ejemplos:

Grafique la curva $C$ que tiene las ecuaciones paramétricas:

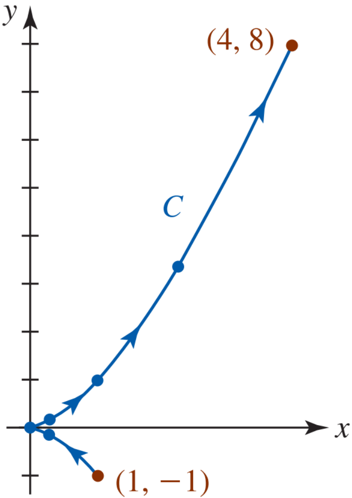
$$x(t) = t^2, \quad y(t) = t^3, \quad t \in [-1, 2]$$

**Solución:** Para graficar esta curva debemos asignar valores a $t$ en el intervalo $[-1, 2]$, para obtener un solo para ordenado $(x, y)$, como se muestra a continuación:

| $t$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $\frac{3}{2}$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $1$ | $\frac{1}{4}$ | $0$ | $\frac{1}{4}$ | $1$ | $\frac{9}{4}$ | $4$ |
| $y$ | $-1$ | $-\frac{1}{8}$ | $0$ | $\frac{1}{8}$ | $1$ | $\frac{27}{8}$ | $2$ |

# Ejemplos:

Luego, el gráfico queda definido por:



# Ejemplos:

Notemos que si se piensa en términos de movimiento y en $t$ como el tiempo, entonces cuando $t$ aumenta de $-1$ a $2$, un punto $P$ definido como $(t^2, t^3)$ empieza en $(1, -1)$, avanza hacia arriba en la rama inferior de la curva hacia el origen $(0, 0)$, pasa a la rama superior y finalmente se detiene en $(4, 8)$. En general, un parámetro $t$ no necesita tener relación con el tiempo.

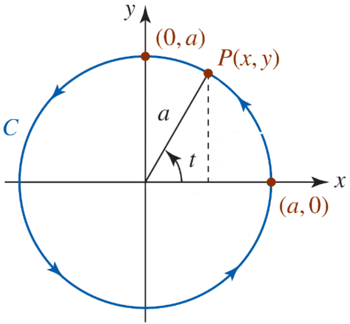
Cuando se grafican puntos correspondientes a valores crecientes del parámetro, se traza una curva $C$ mediante $(x(t), y(t))$ en una cierta **dirección** indicada por flechas sobre la curva. La dirección se denomina **orientación** de la curva $C$.

# Ejemplos:

Encuentre una parametrización de una circunferencia de ecuación:

$$x^2 + y^2 = a^2, \qquad a > 0$$

**Solución:** Notemos que la circunferencia está centrada en el origen. Luego, si $t$ representa al ángulo central, esto es, un ángulo con vértice en el origen y lado inicial que coincide con el eje $X$ positivo, como se muestra a continuación:



# Ejemplos:

Dado lo anterior, las ecuaciones paramétricas de la circunferencia están definidas por:

**Observaciones:** Notemos lo siguiente

1.
2.
3.

# Curvas definidas Paramétricamente

Cuando $x(t)$ e $y(t)$ están definidas en un intervalo $[a, b]$, se tiene que $(x(a), y(a))$ se denomina **punto inicial** de la curva $C$ y $(x(b), y(b))$ su **punto final**. Ahora bien, si

$$(x(a), y(a)) = (x(b), y(b))$$

entonces $C$ es una **curva cerrada**. Si $C$ es cerrada pero no se cruza a sí misma, entonces se denomina **curva cerrada simple**.

# Eliminación de Parámetro

En algunos casos, cuando tenemos las ecuaciones paramétricas podemos tratar de **eliminar o despejar el parámetro** para obtener una ecuación rectangular de la curva.

**Ejemplos:** Determine la ecuación rectangular de las siguientes ecuaciones paramétricas:

(a) $x(t) = a\cos(t) \quad \text{e} \quad y(t) = a\sin(t), \quad t \in [0, 2\pi]$

(b) $x(t) = t^2 \quad \text{e} \quad y(t) = t^3, \quad t \in [-1, 2]$

(c) $x(t) = \sin(t) \quad \text{e} \quad y(t) = \cos(2t), \quad t \in [0, \pi/2]$

# Ejemplos

**Solución c):** Notemos que $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$, por ende:

$$y = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 1 - 2\sin^2(t) = 1 - 2x^2$$

En este caso la curva descrita por las ecuaciones paramétricas no consiste en la parábola completa, esto es, $y = 1 - 2x^2$ con $x \in \mathbb{R}$. Luego, para $t \in [0, \pi/2]$ tenemos que:

$$0 \leq \sin(t) \leq 1 \quad \wedge \quad -1 \leq \cos(2t) \leq 1$$

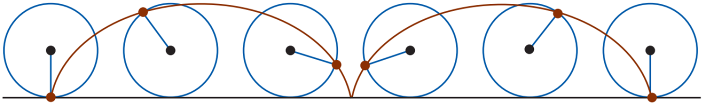
Esto significa que la curva es sólo aquella porción de la parábola para la cual las coordenadas de un punto $P(x, y)$ satisfacen

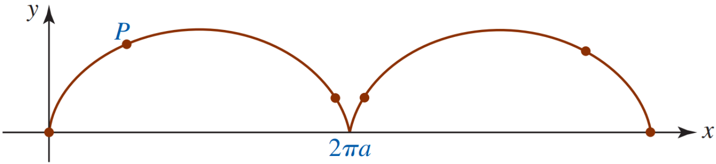
$$0 \leq x \leq 1 \ \wedge \ -1 \leq y \leq 1$$

Así, la curva en forma rectangular $y = 1 - 2x^2$ tiene como dominio a $x \in [0, 1]$.

# Aplicaciones

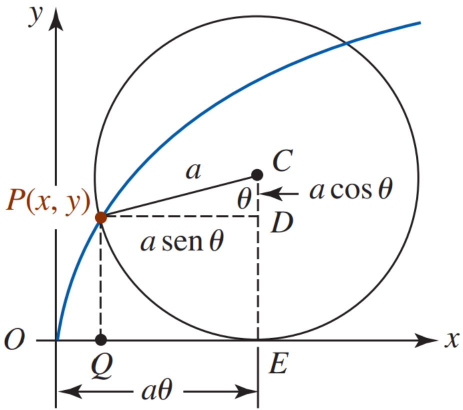
Las curvas cicloidales fueron un tema popular de estudio para los matemáticos en el siglo XVII. Suponga que un punto $P(x, y)$, marcado sobre una circunferencia de radio $a$, está en el origen cuando su diámetro yace a lo largo del eje $Y$. Conforme la circunferencia rueda a lo largo del eje $X$, el punto $P$ traza una curva $C$ que recibe el nombre de **cicloide**.





# Aplicaciones

Nuestro problema será determinar una parametrización de la cicloide, para esto consideremos la siguiente figura:



# Aplicaciones

Notemos que la circunferencia de radio $a$ cuyo diámetro inicialmente yace a lo largo del eje $Y$ y rueda a lo largo del eje $X$ sin deslizamiento. Tomamos como parámetro el ángulo $\theta$ medido en radianes, a través del cual ha rotado la circunferencia. El punto $P$ empieza en el origen, lo cual corresponde a $\theta = 0$. Conforme reuda la circunferencia a lo largo de un ángulo $\theta$, su distancia del origen es el arco $PE$, de hecho:

$$m(\overset{\frown}{\mathrm{PE}}) = m(\overline{OE}) = a\theta$$

Además, la coordenada $x$ de $P$ está dada por:

$$x = m(\overline{OE}) - m(\overline{QE}) = a\theta - a\sin(\theta)$$

Además, la coordenada $y$ es:

$$y = m(\overline{CE}) - m(\overline{CD}) = a - a\cos(\theta)$$

# Aplicaciones

Finalmente, las ecuaciones paramétricas para la cicloide están dadas por:

$$x(\theta) = a(\theta - \sin(\theta)) \text{ e } y(\theta) = a(1 - \cos(\theta))$$

luego, un arco de cicloide es generado por una rotación de la circunferencia y corresponde a un intervalo paramétrico $0 \leq \theta \leq 2\pi$

**Observación:** de acuerdo hasta lo que hemos trabajado hasta ahora, podemos hacer $t = \theta$, así las ecuaciones paramétricas de la cicloide pueden expresarse por:

$$x(t) = a(t - \sin(t)) \text{ e } y(t) = a(1 - \cos(t)), \quad t \in [0, 2\pi]$$

para generar una rotación de la circunferencia.

# Curvas definidas Paramétricamente

En el estudio de las ecuaciones paramétricas existen algunas ecuaciones ya definidas, por ejemplo:

1. Una curva $C$ descrita por una función continua $y = f(x)$, con $x \in [a, b]$, también se parametriza haciendo $x = t$. Así las ecuaciones paramétricas

$$x = t \ \text{ e } \ y = f(t), \quad t \in [a, b]$$

2. Un segmento de recta que une los puntos $x_0$ y $x_1$, se puede parametrizar de la siguiente forma:

$$\vec{r}(t) = x_0(1 - t) + x_1 t, \quad t \in [0, 1]$$

3. La curva $C : b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, puede ser parametrizada por:

$$\vec{r}(t) = (a\cos(t), b\sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi]$$

# Observaciones

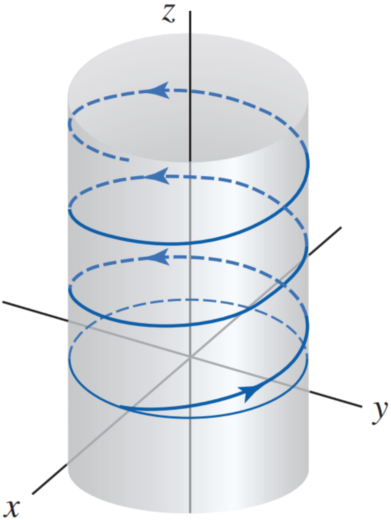
En el estudio del cálculo en varias variables verán curvas y superficies en tres dimensiones que se definen mediante ecuaciones paramétricas. Por ejemplo, una **curva espacial** $C$ consiste en un conjunto de 3 coordenadas $(f(t), g(t), h(t))$, donde $f$, $g$ y $h$ se definen sobre un intervalo común. Las ecuaciones paramétricas para $C$ son:

$$x = f(t), \;\; y = g(t), \;\; z = h(t)$$

Por ejemplo, la **hélice circular** es una curva espacial cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$x = a\cos(t), \;\; y = a\sin(t), \;\; z = bt, \quad t \geq 0$$

# Observaciones



# Observaciones

Las superficies de tres dimensiones se representan mediante un conjunto de ecuaciones paramétricas que involucran a dos parámetros

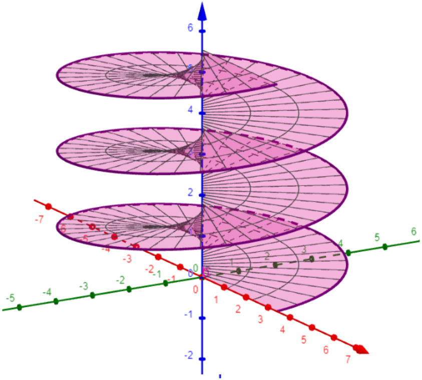
$$x = f(u, v), \;\; y = g(u, v), \;\; z = h(u, v)$$

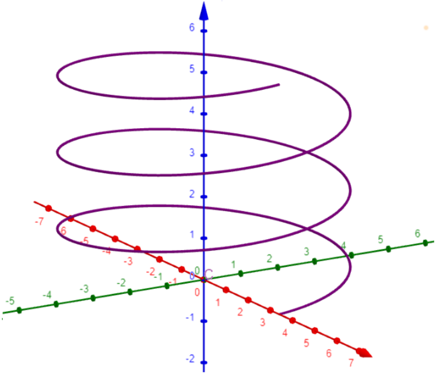
Por ejemplo, el **helicoide circular** surge del estudio de superficies mínimas y está definido por el conjunto de ecuaciones paramétricas:

$$x = u\cos(v), \quad y = u\sin(v), \quad z = bv, \quad b \in \mathbb{R}$$

El helicoide circular tiene una hélice circular como frontera. Ustedes podrán notar que el helicoide es un modelo para el álabe curvado rotatorio en maquinarias tales como excavadoras para hoyos de postes, taladros de hielo y máquinas quitanieve.

# Observaciones



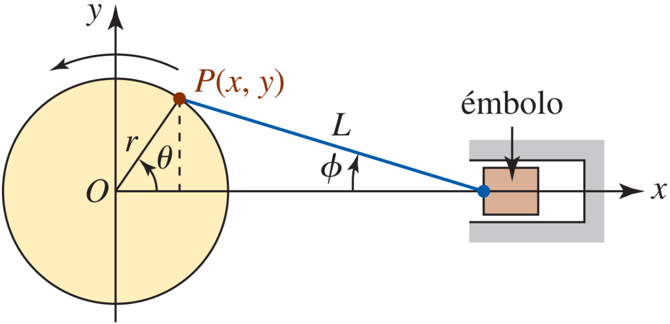



# Ejercicios

1. Realice un bosquejo de las siguientes curvas definidas de manera paramétrica:
   (a) $x(t) = \sqrt{t}, \quad y(t) = 5 - t$, con $t \in [0, +\infty[$
   (b) $x(t) = 3 + 2\sin(t), \quad y(t) = 4 + \sin(t)$, con $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
   (c) $x(t) = 3t, \quad y(t) = t^2 - 1$, con $t \in [-2, 3]$
   (d) $x(t) = e^t, \quad y(t) = e^{3t}$, con $t \geq 0$
2. Utilice la técnica de eliminación de parametétro y obtenga la ecuación rectangular de la curva.
   (a) $x(t) = e^t, \quad y(t) = \ln(t), \qquad t > 0$
   (b) $x(t) = -\cos(2t), \quad y(t) = \sin(t), \qquad t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$
   (c) $x(t) = t^2, \quad y(t) = t^4 + 3t^2 - 1$

# Ejercicios

3. Como se muestra en la figura, un émbolo está unido por medio de una varilla de longitud $L$ a un mecanismo de manivela circular de radio $r$. Parametrice las coordenadas del punto $P$ en términoos del ángulo $\phi$.




**R:** $x(t) = \pm\sqrt{r^2 - L^2 \sin^2(\phi)}$ e $y(t) = L\sin(\phi)$.