Listado de Ejercicios Resueltos 2 (527140)

Ejercicios resueltos del listado 2

1.b) Demuestre que: $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y : x^2 + y^2 > 2xy$

Demostración: Sabemos por axioma de orden que:

$$\forall a \in \mathbb{R} - \{0\} : a^2 > 0$$

Por ende, si consideramos dos números reales cualesquiera x e y, tales que $x \neq y$, se tiene:

$$(x-y)^{2} > 0 \Leftrightarrow (x-y)(x-y) > 0$$

$$\Leftrightarrow x^{2} - xy - yx + y^{2} > 0$$

$$\Leftrightarrow x^{2} - 2xy + y^{2} > 0$$

$$\Leftrightarrow x^{2} + y^{2} > 2xy$$

Con lo anterior, concluimos que:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y : x^2 + y^2 > 2xy$$

1.c) Demuestre que: $\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : a < b \Longrightarrow a^2 < b^2$

Demostración: Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$, tal que:

$$a < b \Leftrightarrow a \cdot a < b \cdot a$$

 $\Leftrightarrow a^2 < b \cdot a$... (1)

además:

$$a < b \Leftrightarrow a \cdot b < b \cdot b$$

 $\Leftrightarrow a \cdot b < b^2 \qquad \dots (2)$

De (1) y (2), y por transitividad de la desigualdad se tiene que:

$$a^2 < b \cdot a \land a \cdot b < b^2 \Longrightarrow a^2 < b^2$$

Con lo anterior, concluimos que:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : a < b \Longrightarrow a^2 < b^2$$

Ejercicos Resueltos Adicionales.

1. Demuestre las siguientes consecuencias de los axiomas de orden:

(a)
$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : a < b \iff b^{-1} < a^{-1}$$

Demostración: Sabemos por axioma de cuerpo que si $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces existen a^{-1} , $b^{-1} \in \mathbb{R} - \{0\}$, los inversos multiplicativos de a y b respectivamente, en particular se cumple si consideramos $a, b \in \mathbb{R}^+$, luego:

$$a < b \iff (a \cdot a^{-1}) < b \cdot a^{-1}$$

$$\iff 1 < b \cdot a^{-1}$$

$$\iff b^{-1} \cdot 1 < (b^{-1} \cdot b) \cdot a^{-1}$$

$$\iff b^{-1} < 1 \cdot a^{-1}$$

$$\iff b^{-1} < a^{-1}$$

Con lo anterior, concluimos que:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : a < b \iff b^{-1} < a^{-1}$$

(b)
$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a+b) \ge 4$$

Demostración: Sabemos por axioma de orden que:

$$\forall \ x \in \mathbb{R} : x^2 \ge 0$$

Por ende, si consideramos dos números reales a y b positivos, se tiene:

$$(a-b)^{2} \ge 0 \Longrightarrow (a-b)(a-b) \ge 0$$

$$\Longrightarrow a^{2} - 2ab + b^{2} \ge 0$$

$$\Longrightarrow a^{2} + 2ab - 4ab + b^{2} \ge 0$$

$$\Longrightarrow a^{2} + 2ab + b^{2} \ge 4ab$$

$$\Longrightarrow (a+b)^{2} \ge 4ab$$

$$\Longrightarrow \frac{(a+b)(a+b)}{ab} \ge 4$$

$$\Longrightarrow \frac{(b+a)}{ab}(a+b) \ge 4$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a+b) \ge 4$$

Con lo anterior, concluimos que:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a+b) \ge 4$$

2. Resuelva las siguientes inecuaciones y exprese su conjunto solución como intervalo:

(a)
$$2x + 5x + 6 < -9 + 3x - x$$

Solución: Para resolver esta inecuación solo debemos reducir los términos semejantes, como sigue:

$$2x + 5x + 6 < -9 + 3x - x \Longrightarrow 7x + 6 < 2x - 9$$

$$\Longrightarrow 9x < -15$$

$$\Longrightarrow x < -\frac{9}{15}$$

Finalmente, el conjunto solución de la inecuación esta dado por:

$$S = \left] -\infty, -\frac{9}{15} \right[$$

(b)
$$x(x-6) > 0$$

Solución: Sabemos por axioma de orden, que el producto de dos números reales sea positivo ambos números deben ser positivos o ambos negativos, por ende:

$$x(x-6) > 0 \iff (x > 0 \land x - 6 > 0) \lor (x < 0 \land x - 6 < 0)$$

$$\iff (x > 0 \land x > 6) \lor (x < 0 \land x < 6)$$

$$\iff x > 6 \lor x < 0$$

$$\iff x < 0 \lor x > 6$$

Finalmente, el conjunto solución de la inecuación esta por:

$$S =]-\infty, 0[\cup]6, +\infty[$$

(c)
$$2x^2 - 3x - 2 > 0$$

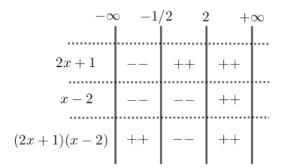
Solución: Para resolver la inecuación primero debemos factorizar la expresión cuadrática, como sigue:

$$2x^2 - 3x - 2 \ge 0 \iff (2x+1)(x-2) \ge 0$$

Esta inecuación la podemos resolver utilizando el mismo razonamiento que en la inecuación anterior, pero haremos uso de la tabla de signos, como sigue:

Con lo anterior, concluimos que el conjunto solución de la inecuación es:

$$S = \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right] \cup [2, +\infty[$$

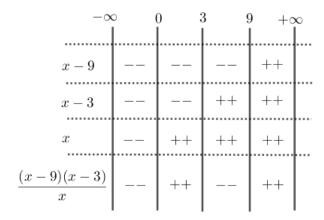


(d)
$$\frac{x^2 - 12x + 27}{x} \le 0$$

Solución: De manera análoga a la anterior, primero factorizaremos la expresión cuadrática, como sigue:

$$\frac{x^2 - 12x + 27}{x} \le 0 \iff \frac{(x - 9)(x - 3)}{x} \le 0$$

y para obtener el conjunto solución haremos uso de la tabla de signos:



Con lo anterior, concluimos que el conjunto solución de la inecuación es:

$$S =]-\infty, 0[\cup [3, 9]$$