Solución Parcial

Listado 2 : Espacios vectoriales

2. Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo, diremos que un subconjunto $\mathbb{F}$ de $\mathbb{K}$ es un *subcuerpo* de $\mathbb{K}$ si:

- 0 y 1 (neutros para la suma y el producto en $\mathbb{K}$) están en $\mathbb{F}$ y
- dados x e y, dos elementos de $\mathbb{F}$, entonces $x+y, -x, xy$ y x^{-1} (si $x \neq 0$) también están en $\mathbb{F}$.

Demuestre que si $\mathbb{F}$ es un subcuerpo, entonces es un cuerpo.

Solución: Sea $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ un subcuerpo de $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ cuerpo.
Probemos que $(\mathbb{F}, + \cdot)$ satisface las condiciones para ser cuerpo.

- Como $\mathbb{F}$ subcuerpo, satisface que:
  $(\forall x, y \in \mathbb{F})(x+y \in \mathbb{F})$, es decir $\mathbb{F}$ es cerrado para la suma $+$
  $(\forall x, y \in \mathbb{F})(x \cdot y \in \mathbb{F})$, es decir $\mathbb{F}$ es cerrado para el producto.

- Por otro lado, las condiciones de conmutatividad y asociatividad de suma y producto, y la distributividad de $\cdot$ respecto de $+$, al satisfacerse en $\mathbb{K}$ también se satisfacen en $\mathbb{F}$ (pues $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$).

- Como $\mathbb{F}$ subcuerpo de $\mathbb{K}$, los elementos neutros 0 y 1 están en $\mathbb{F}$, los que son neutros de $\mathbb{F}$.
  Además satisface que el opuesto y recípro de c/ elemento de $\mathbb{F}$ también está en $\mathbb{F}$. Esto es
  $(\forall x \in \mathbb{F}): -x \in \mathbb{F}$
  $(\forall x \in \mathbb{F} \setminus \{0\}): x^{-1} \in \mathbb{F}$

De los puntos anteriores se prueba que $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ es también cuerpo.

3. Sea $\mathbb{F}$ un subcuerpo cualesquiera de $\mathbb{C}$.

(a) Justifique por qué $2 \in \mathbb{F}$.

(b) Demuestre que $\mathbb{F}$ contiene a todos los números enteros.

(c) Demuestre que para cualquier número racional $\frac{m}{n}$ se cumple que $\frac{m}{n}$ es elemento de $\mathbb{F}$.

Solución:

(a) Como $\mathbb{F}$ subcuerpo de $\mathbb{C}$, los neutros (de $+$ y $\cdot$) de $\mathbb{C}$ también están en $\mathbb{F}$, es decir $\{0,1\} \subseteq \mathbb{F}$.
Además, $\mathbb{F}$ es cerrado para la suma, y por lo tanto $1+1 \in \mathbb{F}$, es decir $2 \in \mathbb{F}$.

(b) • Por inducción se puede probar que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{F}$. Sabemos que $1 \in \mathbb{F}$.
Suponemos que $n \in \mathbb{N}$ es tal que $n \in \mathbb{F}$. Como $\mathbb{F}$ cerrado para la suma $n+1 \in \mathbb{F}$. De este modo se tiene que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{F}$.
• $0 \in \mathbb{F}$.
• Por último, como $(\forall x \in \mathbb{F}): -x \in \mathbb{F}$, entonces $\mathbb{Z}^- \subseteq \mathbb{F}$.

De los 3 puntos anteriores probamos que $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{F}$.

(c) Sea $q \in \mathbb{Q}$, entonces $q = \frac{m}{n} = m \cdot n^{-1}$, para algún $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.

Como $m, n \in \mathbb{Z}$ entonces $m, n \in \mathbb{F}$. Como $n \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ entonces $n^{-1} \in \mathbb{F}$.
Y como $\mathbb{F}$ cerrado para el producto $m \cdot n^{-1} \in \mathbb{F}$.

3. Para cada par de vectores $(a,b)^{\mathrm{T}}, (x,y)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$ y cada $\alpha \in \mathbb{R}$ se definen las operaciones

$$(x,y)^{\mathrm{T}} \oplus (a,b)^{\mathrm{T}} = (x+a, y+b)^{\mathrm{T}}$$
$$\alpha \odot (x,y)^{\mathrm{T}} = (\alpha x, y)^{\mathrm{T}}$$

Analice si $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Solución :

Es claro que si $(a,b)^T$ y $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $x+a \in \mathbb{R}$, $y+b \in \mathbb{R}$, $\alpha x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, entonces

$$\oplus : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{y} \quad \odot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

Podemos observar que la suma $\oplus$ es la usual de $\mathbb{R}^2$, por lo que las primeras cuatro condiciones para que $(\mathbb{R}^2, \oplus, \cdot)$ sea espacio vectorial se van a satisfacer.

De las siguientes, veamos la 7. Sea $(x,y)^T \in \mathbb{R}$ y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Por un lado, $(\alpha+\beta) \odot (x,y)^T = ((\alpha+\beta)x, y)^T$
$$= (\alpha x + \beta x, y)^T$$

Por otro lado, $[\alpha \odot (x,y)^T] \oplus [\beta \odot (x,y)^T]$
$$= (\alpha x, y)^T \oplus (\beta x, y)^T$$
$$= (\alpha x + \beta x, 2y)^T$$

Observamos que si $y \neq 0$ no se cumple la 7ma condición de e.v

$\therefore (\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ no es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.