Álgebra I. 525140 - DIM - CFM
22 de noviembre de 2021
Prof.: S. Caro, F. Thiele, F. Jara.

# Listado 10
*Números Complejos*

1. Lleve a forma binomial $(a + bi)$ los siguientes números complejos y ubíquelos en el plano de Argand. Determine además parte real, parte imaginaria, inverso aditivo, inverso multiplicativo (si existe), conjugado y módulo de cada uno de ellos.

   *a)* $\dfrac{1+i}{i^3}$

   *b)* $\dfrac{5}{i} + \dfrac{2}{i^3} - \dfrac{20}{i^{18}}$

   *c)* $i + \dfrac{1}{i^{24}}$

   *d)* $i + \dfrac{1}{i^{12}}$ **(P)**

   *e)* $\dfrac{1-i^{17}}{1+i^{17}}$

   *f)* $i + \dfrac{1}{i^{11}}$

   *g)* $\dfrac{(3-5i)(3+5i)}{2-i}$

   *h)* $\left(\dfrac{-1+2i}{1+3i}\right)^2$

   *i)* $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$

   *j)* $\dfrac{1}{2+3i}$

   *k)* $\dfrac{1+2i}{(1-2i)(-1-i)}$ **(P)**

   *l)* $\overline{\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)$

2. Si $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, escriba los siguientes números en términos de $x$ e $y$.

   *a)* $\mathrm{Re}(iz)$

   *b)* $\mathrm{Im}((1+i)z)$ **(P)**

   *c)* $\mathrm{Im}(\overline{z}z)$

   *d)* $\mathrm{Re}(z^2)$

   *e)* $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z\bar{z}}{1+3i}\right)$

   *f)* $\mathrm{Re}(2z + 4|z| - 3\overline{z} + 2i)$

3. Resuelva las siguientes ecuaciones, considerando $x$ e $y$ en $\mathbb{R}$ como las incógnitas.

   *a)* $(x+3i)(3-i) = 9 + yi$

   *b)* $(5-4i)(3i+y) = 32 + xi$ **(P)**

   *c)* $\dfrac{y+11i}{x+3i} = \dfrac{1-4i}{y-3i}$

4. Encuentre el valor de la constante $a$ tal que el número complejo

$$z = \frac{2+i}{a+i}$$

cumpla que $\text{Re}(z) = \text{Im}(z)$. Analice la situación en cada uno de los dos casos siguientes.

   *a*) $a \in \mathbb{R}$

   *b*) $a \in \mathbb{C}$ **(P)**

5. Determine el conjunto de los números $z \in \mathbb{C}$ que verifican las siguientes proposiciones. Represente gráficamente cada conjunto en el plano de Argand.

   *a*) $|z - 2i| = 1$

   *b*) $\text{Im}\,(z - 3 + i) \leq 5$

   *c*) $\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \leq \frac{1}{3}$ **(P)**

   *d*) $\text{Re}\,(z + iz) > 0$

   *e*) $|z - 1| + |z + 3| = 10$

   *f*) $|z - 2| > |z - 3|$

   *g*) $|z - 4| = z$

   *h*) $|z| = 1 - 2\text{Re}\,(z) + i\text{Im}\,(z)$

   *i*) $\left|\frac{z - 12}{z - 8i}\right| = 1$ **(P)**

   *j*) $z = \text{Re}\,(z) - i\text{Im}\,(iz)$

   *k*) $|z|^2 + \text{Re}\,(z^2 + 2iz) = 0$

   *l*) $z^2 + \overline{z}^2 = 1$

6. Primero escriba $z_1$ y $z_2$ en forma polar, luego obtenga $z_1 \cdot z_2$ y $\frac{z_1}{z_2}$:

   *a*) $z_1 = (-2 + 2i)^3$ y $z_2 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$.

   *b*) $z_1 = 3i$ y $z_2 = 6 + 6i$.

   *c*) $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = -1 + i$.

   *d*) $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ y $z_2 = 2\sqrt{3} + 2i$. **(P)**

   *e*) $z_1 = \sqrt{3} + i$ y $z_2 = 5 + 5i$.

   Además encuentre la forma polar de los números complejos obtenidos en el item 1).

7. Pruebe que dado $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ cualquiera, se cumple que

$$\overline{\left(z + \frac{1}{z}\right)} - \overline{\left(\frac{1+z}{z}\right)} = \overline{z} - 1.$$

---

Noviembre 2021.