UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS 521218

Listado 2 (Problemas de Mezclas)

Problemas con solución

1. Consideramos el siguiente problema de mezcla en un tanque de 100 [l] de capacidad, que consta de dos fases. En un inicio entra al tanque a una velocidad de 4 [l/min] una solución salina (agua con sal), a una concentración de 0,1 [kg/l]. El tanque contiene inicialmente 20 [l] de la citada mezcla a una concentración de 0,8 [kg/l]. Desde el tanque fluyen al exterior 4 [l/min] de solución salina.

   Las condiciones de la primera parte del problema se mantienen hasta que la concentración salina al interior del tanque desciende a 0,4 [kg/l]. En ese instante, que denotamos por t_C, el flujo de entrada al tanque aumenta a 6 [l/min], manteniéndose el flujo de salida al exteior en 4 [l/min]. Asuma que la mezcla en el tanque se mantiene siempre uniformemente homogénea.

   Encuentre la concentración de sal en el tanque en todo momento.

   Nota: En la primera fase el volumen es constante (¡justifíquelo!). En la segunda, el volumen es variable.

Solución

Comenzamos definiendo las siguientes variables de trabajo:

$$
\begin{aligned}
t &: \text{ tiempo medido en minutos,} \\
x(t) &: \text{ cantidad de sal en kg en el instante } t, \text{presente en el tanque} \\
V(t) &: \text{ volumen de mezcla dentro del tanque, en litros, en el instante } t, \\
\rho(t) &: \text{ concentración de sal en la mezcla dentro del tanque medida en kg}/l \text{ en el instante } t.
\end{aligned}
$$

El problema consta de dos etapas (una entre $0 \leq t \leq t_C$ y otra cuando $t_C \leq t \leq t_d$, siendo t_d el tiempo de derrame) las cuales describimos a continuación.

Etapa 1: Como al principio el volumen dentro del tanque es de 20 litros y en esta etapa el volumen es constante (pues el flujo de entrada es igual al flujo de salida), entonces se deduce que

$$V(t) = 20, \qquad 0 \leq t \leq t_C,$$

siendo t_C el instante indicado en el enunciado. Por otro lado, usando los datos del enunciado, la cantidad de sal en la mezcla $x(t)$, está gobernada por el siguiente PVI:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) &=& (4)\,(0.1) - 4\,\dfrac{x(t)}{V(t)}, \quad 0 \leq t \leq t_C, \\ x(0) &=& V(0)\,\rho(0). \end{array}\right. \tag{1}$$

el cual, dado que al principio $\rho(0) = 0.8$ [kg/l], se reduce al siguiente PVI

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) + \dfrac{x(t)}{5} &=& 0.4, \qquad 0 \leq t \leq t_C, \\ x(0) &=& 16\,[\text{kg}]. \end{array}\right. \tag{2}$$

Aquí el factor de integración es $\mu(t) = \mathrm{e}^{t/5}$ (Deducirlo). Por tanto, luego de multiplicar la EDO en (2) por $\mu(t)$, resulta

$$\frac{d}{dt}\left[\mathrm{e}^{t/5}\,x(t)\right] = \mathrm{e}^{t/5}\,x'(t) + \frac{\mathrm{e}^{t/5}}{5}\,x(t) = \mathrm{e}^{t/5}\left(x'(t) + \frac{1}{5}x(t)\right) = 0.4\,\mathrm{e}^{t/5}.$$

Al integrar la última ecuación, obtenemos (la solución general de la EDO considerada)

$$\mathrm{e}^{t/5}\,x(t) = 2\,\mathrm{e}^{t/5} + C_0 \Longleftrightarrow \boxed{x(t) = 2 + C_0\,\mathrm{e}^{-t/5}, \quad 0 \leq t \leq t_C},$$

donde $C_0 \in \mathbb{R}$ constante arbitraria.

Usando la condición inicial $x(0) = 16$ [kg], se obtiene

$$x(0) = 2 + C_0 = 16 \Longrightarrow C_0 = 14\,[\text{kg}].$$

Por lo tanto,

$$x(t) = 2 + 14\,\mathrm{e}^{-t/5}, \qquad \text{para } 0 \leq t \leq t_C. \tag{3}$$

Para obtener t_C, se debe cumplir que (recuerde que $\rho(x) = x(t)/V(t)$)

$$\begin{aligned} \rho(t_C) = 0.4\,[\text{kg}/l] &\Longleftrightarrow \frac{x(t)}{V(t)} = 0.4 \\ &\Longleftrightarrow \frac{1}{10} + \frac{7}{10}e^{-t_C/5} = \frac{2}{5} \\ &\Longleftrightarrow \frac{7}{10}e^{-t_C/5} = \frac{3}{10} \\ &\Longleftrightarrow e^{-t_C/5} = \frac{3}{7} \\ &\Longleftrightarrow -\frac{t_C}{5} = \ln\left(\frac{3}{7}\right) \\ &\Longleftrightarrow \boxed{t_C = 5\,\ln\left(\frac{7}{3}\right)\ [\text{min}]} \end{aligned}$$

Por lo tanto, en esta primera etapa se tiene:

$$\begin{aligned}
x(t) &= 2 + 14\,\mathrm{e}^{-t/5} \quad &, \qquad 0 \le t \le 5\,\ln\left(\frac{7}{3}\right)\ \text{min} \\
V(t) &= 20 \quad &, \qquad 0 \le t \le 5\,\ln\left(\frac{7}{3}\right)\ \text{min} \\
\rho(t) &= \frac{1}{10} + \frac{7}{10}\,\mathrm{e}^{-t/5} \quad &, \qquad 0 \le t \le 5\,\ln\left(\frac{7}{3}\right)\ \text{min}
\end{aligned}$$

Etapa 2: Ahora, el flujo de entrada pasa a ser 6 $[l/\text{min}]$ en lugar de 4 $[l/\text{min}]$, con lo cual la diferencia entre las nuevas razones de entrada y salida está dada por $V'(t) = 6 - 4 = 2$ $[l/\text{min}]$. Por lo tanto, el volumen de la mezcla en el tanque para $t \ge t_d$ verifica el siguiente PVI,

$$\left\{\begin{aligned} V'(t) &= 2\ \ [l/\text{min}], & t_C \le t \le t_d, \\ V(t_C) &= V(t_C^-) = 20\ \ [\text{l}]. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

siendo $t_d > 0$ el tiempo de derrame. Observemos que la solución general de la EDO dada en (4) está dada por

$$V(t) = 2\,t + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}\,(\text{constate arbitraria})\,.$$

Como $V(t_C) = 20$ $[l]$, tenemos que

$$V(t_C) = 2\,t + C = 20 \Longrightarrow C = 20 - 2\,t_C = 20 - 10\,\ln\left(\frac{7}{3}\right)\ [l] \approx 11.53\,\text{litros}.$$

Por tanto,

$$V(t) = 2\,(t - t_C) + 20, \qquad t_C \le t \le t_d,$$

Por otro lado, el tiempo de derrame ocurre cuando la mezcla ocupa el tanque por completo, es decir

$$\begin{aligned} V(t_d) = 2\,(t_d - t_C) + 20 = 100\,[l] \quad &\Longrightarrow \quad \boxed{t_d = t_C + 40} \\ &\Longrightarrow \quad t_d = \left[5\,\ln\left(\frac{7}{3}\right) + 40\right]\ [\text{min}] \approx 44.24\,\text{min}. \end{aligned}$$

Usando nuevamente los datos del enunciado, el nuevo flujo de entrada y el hecho que la cantidad de sal debe ser una función continua, entonces, para $t_C \le t \le t_d$, el PVI que gobierna a $x(t)$ está dado por:

$$\begin{cases} x'(t) &= (6)\,(0.1) - 4\,\dfrac{x(t)}{V(t)}, \qquad t_C \leq t \leq t_d, \\ \\ x(t_C) &= x(t_C^-) \,=\, V(t_C^-)\,\rho(t_C^-). \end{cases}$$

el cual, dado que $\rho(t_C) = 0.4$ kg/l, se reduce al siguiente PVI

$$\begin{cases} x'(t) + \dfrac{2}{t - t_C + 20}\,x(t) &= 0.6, \qquad t_C \leq t \leq t_d, \\ \\ x(t_C) &= 8\,[\mathrm{kg}]. \end{cases} \tag{5}$$

Un factor integrante para la EDO del PVI (5) es

$$\mu_2(t) = \exp\left(\int \frac{2}{t - t_C + 10}\,dt\right) = (t - t_C + 10)^2, \qquad t_C \leq t \leq t_d\,.$$

Luego, multiplicando la EDO de (5) por $\mu_2(t)$, se obtiene

$$\frac{d}{dt}\Big[(t - t_C + 10)^2\,x(t)\Big] = 0.6\,(t - t_C + 10)^2.$$

Al integrar la última ecuación, obtenemos

$$(t - t_C + 10)^2\,x(t) = 0.2\,(t - t_C + 10)^3 + C_2, \quad t_C \leq t \leq t_d\,,$$

con $C_2 \in \mathbb{R}$ constante arbitraria. Esto permite deducir la solución general de la EDO

$$\boxed{x(t) = 0.2\,(t - t_C + 10) + \frac{C_2}{(t - t_C + 10)^2}, \quad t_C \leq t \leq t_d\,, \quad C_2 \in \mathbb{R}\,.}$$

Imponiendo la condición inicial $x(t_C) = 8$ [kg], se obtiene

$$x(t_C) = 2 + \frac{C}{100} = 8 \Longrightarrow C = 600 \ \ [l\,\mathrm{min}^2].$$

Por lo tanto, la solución del PVI (5) es

$$x(t) = 0.2\,(t - t_C + 10) + \frac{600}{(t - t_C + 10)^2}, \qquad \text{para } t_C \leq t \leq t_d. \tag{6}$$

En resumen,

$$x(t)=\begin{cases} 2+14\,\mathrm{e}^{-t/5} & ,0\le t<t_C \\ \\ \dfrac{1}{5}\,[t-t_C+10]+600\,[t-t_C+10]^{-2} & ,t_C\le t\le t_C+40 \end{cases}$$

$$V(t)=\begin{cases} 20 & ,0\le t<t_C \\ \\ 2\,[t-t_C+10] & ,t_C\le t\le t_C+40 \end{cases}$$

$$\rho(t)=\begin{cases} \dfrac{1}{10}+\dfrac{7}{10}\,\mathrm{e}^{-t/5} & ,0\le t<t_C \\ \\ \dfrac{1}{10}+300\,[t-t_C+10]^{-3} & ,t_C\le t\le t_C+40 \end{cases}$$

con $t_C = 5\,\ln\left(\dfrac{7}{3}\right)$ [min].

2. A un tanque de 600 [l] de capacidad, entran 6 [l/min] de una solución salina (agua y sal) a una concentración de 0.01 [kg/l]. Además, por una llave lateral desde el tanque se pierden al exterior 3 [l/min] de la solución salina. Suponiendo que la mezcla dentro del tanque es siempre homogénea, que las paredes del tanque son suficentemente regulares y que inicialmente dentro del tanque hay 60 [l] de agua, justificando sus respuestas, determine:

   (*i*) La cantidad de sal, en [kg], en el tanque hasta el instante del derrame.

   (*ii*) Si al momento del derrame se cierra el flujo de entrada, conservando el flujo de salida en 3 [l/min]. Determine la cantidad de sal dentro del tanque, hasta que éste queda vacío. ¿En qué momento se produce el vacío en el tanque?

Solución:

Sean:

t : tiempo medido en minutos,

$V(t)$: volumen de la mezcla dentro del tanque en litros en el instante t,

$x(t)$: cantidad de sal presente en la mezcla en kg en el instante t,

(i) Notemos que la diferencia entre la razón de entrada y salida de sal es $V'(t) = 6 - 3 = 3$ [l/min]. Por lo tanto, el volumen de la mezcla en el tanque en instante t verifica el siguiente PVI,

$$\begin{cases} V'(t) &= 3, \quad 0 \leq t \leq t_d, \\ V(0) &= 60, \end{cases} \tag{7}$$

siendo $t_d > 0$ el tiempo de derrame.
Observemos que la solución general de la EDO para V está dada por

$$V(t) = 3t + C, \qquad C \in \mathbb{R},$$

y como $V(0) = 60$ litros, tenemos que $C = 60$ litros. Por tanto,

$$V(t) = 3\,t + 60, \qquad 0 \leq t \leq t_d,$$

Por otro lado, el tiempo de derrame ocurre cuando la mezcla ocupa el tanque por completo, es decir

$$V(t_d) = 3\,t_d + 60 = 600 \Longrightarrow t_d = \frac{540}{3}\,[\text{min}] = 180\,[\text{min}].$$

Así,

$$V(t) = 3\,t + 60, \qquad 0 \leq t \leq 180 \ [\text{min}].$$

Ahora, utilizando el modelo visto en clases, la cantidad de sal $x(t)$, verifica el siguiente PVI:

$$\begin{cases} x'(t) &= (6)\,(0.01) - 3\,\dfrac{x(t)}{V(t)}, \quad 0 \leq t \leq 180, \\ x(0) &= 0\,. \end{cases} \tag{8}$$

pues al principio la mezcla no posee sal ($x(0) = 0$ kg). De (8) se obtiene

$$\begin{cases} x'(t) + \dfrac{x(t)}{t+20} &= 0.06, \quad 0 \leq t \leq 180, \\ x(0) &= 0\,. \end{cases}$$

Para resolver la EDO planteada, observemos que un factor integrante es

$$\exp\left(\int \frac{dt}{t+20}\right) = \mathrm{e}^{\ln|t+20|} = |t+20| = t+20, \qquad \text{para } 0 \leq t \leq 180 \ \ [\text{min}].$$

Entonces

$$\frac{d}{dt}\Big[(t+20)\,x(t)\Big] = (t+20)\,x'(t) + x(t) = 0.06\,(t+20)$$

Al integrar la última ecuación, obtenemos

$$(t+20)\,x(t) = \frac{0.06}{2}\,(t+20)^2 + C$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{x(t) = 0.03\,(t+20) + \frac{C}{t+20}, \quad 0 \leq t \leq 180 \ [\ \text{min}].}$$

Usando la condición inicial $x(0) = 0$ kg, se obtiene

$$x(0) = 0.6 + \frac{C}{20} = 0 \Longrightarrow C = -12.$$

Por lo tanto,

$$x(t) = 0.03\,(t+20) - \frac{12}{t+20}, \qquad \text{para } 0 \leq t \leq 180 \;\; [\text{min}]. \tag{9}$$

Por ende, se concluye que la cantidad de sal en el instante del derrame es

$$x(180) = 0.03\,(180+20) - \frac{12}{180+20} = 5.94 \;[\text{l}]. \tag{10}$$

(ii) Si en los 180 minutos se cierra el flujo de entrada manteniéndose el flujo de salida en 3 litros por minuto, entonces

$$V' = 0 - 3 = -\,3 \;\; [\text{l/min}] \qquad ,$$

y como a los 180 minutos el tanque está lleno, se deduce que para $t \geq 180$ minutos, V verifica el siguiente PVI

$$\begin{cases} V'(t) &= \;\; -3, \qquad\qquad\qquad\qquad 180 \leq t \leq t_\emptyset, \\ \\ V(180^+) &= \;\; V(180^-) = 600\,\text{litros}. \end{cases}$$

cuya única solución está dada por (compruebe esto)

$$V(t) = -3\,(t-180) + 600 = -3\,t + 1140, \qquad 180 \leq t \leq t_\emptyset,$$

siendo $t_\emptyset$ el tiempo cuando el tanque se vacíe, lo cual ocurre cuando el volumen sea nulo, es decir,

$$V(t_\emptyset) = 1140 - 3\,t_\emptyset = 0 \Longrightarrow t_\emptyset = 380 \;[\text{min}].$$

Bajo estas condiciones, para $t \geq 180$ [min], la cantidad de sal $x(t)$ verifica el siguiente PVI

$$\begin{cases} x'(t) &= \;\; 0 - 3\,\dfrac{x(t)}{1140 - 3\,t}, \quad 180 \leq t < 380, \\ \\ x(180) &= \;\; x(180^-). \end{cases} \tag{11}$$

De (10) y (11) se obtiene el siguiente PVI simplificado

$$\begin{cases} x'(t) &= \;\; -\dfrac{1}{380-t}\,x(t), \quad 180 \leq t < 380 \;[\text{min}], \\ \\ x(180) &= \;\; 5.94 \;\; [\text{kg}]. \end{cases} \tag{12}$$

Dividiendo ambos lados de la EDO por $x(t)$, notando que $x'(t)/x(t) = (\ln|x(t)|)'$ y integrando, sigue

$$\ln|x(t)| = -\int \frac{dt}{380 - t} = \ln|380 - t| + c \tag{13}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = |x(t)| = e^c \mathrm{e}^{\ln|380-t|} = C\,(380 - t)\,, \qquad 180 \leq t < 380 \text{ [min]}, \tag{14}$$

donde C es una constante. Usando la condición inicial $x(180) = 5.94$ [kg], se obtiene que

$$x(180) = 200\,C = 5.94 \Longrightarrow C = 0.0297 \text{ [l]}.$$

Por lo tanto,

$$\boxed{x(t) = 0.0297\,(380 - t), \qquad \text{para } 180 \leq t \leq 380 \text{ [min]}.} \tag{15}$$

Problemas propuestos para el estudiante

1. Un tanque de 1000 litros está inicialmente lleno hasta la mitad con agua que contiene 10 [kg] de yodo disuelto. Agua pura entra al tanque a una tasa de 6 [l/min]. Una válvula abierta permite que el agua salga a una tasa de 1 [l/min] . Cuando el tanque está lleno el agua se derrama.

   (i) Determine la cantidad y la concentración de yodo en el tanque durante los primeros 100 minutos.

   (ii) Determine la cantidad y la concentración de yodo durante los siguientes 100 minutos.

   (iii) Esboce una gráfica, tanto para la concentración como para la cantidad de yodo.

2. En un tanque de 700 litros de capacidad, hay 100 litros de salmuera (agua con sal) a una concentración de 0,2 [g/l]. Hacia el interior del tanque, se bombea agua con 0,1 [g/l] de sal a una tasa de 5 [l/min]; por una válvula de escape, fluyen al exterior 2 [l/min]. Suponiendo que la mezcla de agua y sal es homogénea en todo instante, y que en el proceso se está evaporando agua pura a una tasa de 1 [l/min], determine la cantidad y concentración de sal en todo instante antes del derrame.

3. Un recipiente contiene 10 [l] de agua pura. Salmuera (agua con sal) que contiene 10 [g] de sal por litro entra a una tasa de 2 [l/min]. El agua bien mezclada se saca a una tasa de 1 [l/min], y adicionalmente se evapora 1 [l/min] (vapor de agua sin sal). Determine la cantidad de sal en el recipiente en función del tiempo.

   Repita todo el problema suponiendo que no hay evaporación y sabiendo que el recipiente se llena a las 10 minutos (encuentre la cantidad de sal para antes y después de los 10 primeros minutos).

17/08/22.
RBP/JMS//jms/rbp