1. Números Reales

El nivel elemental de este curso no considera una construcción formal de los conjuntos numéricos básicos y sus operaciones, sino más bien una **clasificación** de ellos a través de sus **características y propiedades**. Me refiero a los conjuntos numéricos que se conocieron y trabajaron en el curso de matemática a lo largo de la enseñanza escolar (básica y media).

Los primeros números que conocimos son los denominados *naturales*: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$, números que utilizamos para **contar** objetos.

Sobre este conjunto tenemos dos operaciones: *suma* $(+)$ y *multiplicación* $(\cdot)$, entendiendo que al sumar dos números naturales se obtiene como resultado un número natural y lo mismo vale para la multiplicación.

¿Es posible considerar sobre $\mathbb{N}$ las conocidas operaciones de resta o sustracción y de división?

La propiedad más importante que tienen estas operaciones es la **asociatividad**, lo que significa que, para la suma

$$\forall n, m, h \in \mathbb{N} : (n + m) + h = n + (m + h)$$

y permite escribir $n+m+h$ sin necesidad de usar paréntesis que indiquen cuáles números se suman primero ($n + m$ o bien $m + h$).

Escriba la propiedad asociativa para la multiplicación.

Si a este conjunto agregamos el número 0 (cero) y los inversos aditivos $-1, -2, -3$, etc., obtenemos el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z} = \{0,\ 1, -1,\ 2, -2,\ 3, -3, ...\}$, conjunto sobre el cual se extienden las operaciones suma y multiplicación y donde el número cero tiene la característica que

$$\forall n \in \mathbb{Z} : n + 0 = 0 + n = n \ ,$$

por lo que se denomina **elemento neutro** de la suma.

Observe que para cada $n \in \mathbb{Z}$, el llamado **inverso aditivo** $-n$ verifica

$$n + (-n) = (-n) + n = 0.$$

También podemos mencionar que estas operaciones verifican la llamada propiedad **conmutativa**

$$\forall n, m \in \mathbb{Z} : n + m = m + n \quad \wedge \quad n \cdot m = m \cdot n$$

Un hecho importante es que en $(\mathbb{Z}, +)$, podemos definir la operación *resta* o *sustracción* $(-)$ por

$$n - m := n + (-m)$$

Con estas operaciones sobre $\mathbb{Z}$ podemos modelar problemas simples como el siguiente:

Si dispongo de \$10,000.- para comprar dos entradas al cine, de un valor de \$3,000 cada una, ¿cuánto dinero me quedará?

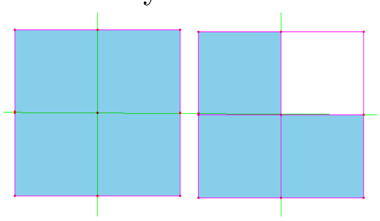
La cantidad de dinero sobrante se expresa en la forma $10000 - (3000 + 3000)$. O sea, me sobrarán \$4000.
Obs.- En la operatoria anterior ¿se puede prescindir de los paréntesis?

Sin embargo, si quiero *repartir en forma equitativa* los \$10.000 entre 3 personas (sin que sobre dinero), el modelo requiere de números que no están en el conjunto de los enteros.
Efectivamente, le corresponde \$3.333 pesos a cada una y el peso sobrante (la unidad) debe dividirse en tres partes iguales (al menos en forma nominal).

Aparecen de este modo números que representan *fracciones* (o partes) de la unidad, a saber,
$\frac{1}{2}$: la mitad, $\frac{1}{3}$: la tercera parte, $\frac{1}{4}$: la cuarta parte, en general para $n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n}$ la n-ésima parte de la unidad. Esto significa dividir la unidad en n partes iguales.

Ahora si necesitamos considerar varias de estas n partes, por ejemplo 3 de las cuartas partes de la unidad, vamos a encontrar números de la forma (3 veces $\frac{1}{4}$) $3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. En el caso de tomar 7 de las cuartas partes de la unidad encontramos $7 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$ que corresponde a 1 entero y $\frac{3}{4}$. Se escribe $1\frac{3}{4}$ (un entero y tres cuartos).

En la figura siguiente se tiene, al lado izquierdo, un cuadrado de lado 1 (unidad de longitud) dividido en cuatro cuadrados iguales. Cada uno de ellos corresponde a la cuarta parte de la unidad (fracción $\frac{1}{4}$). Compare el área del cuadrado grande con el área de los cuadrados pequeños.
Al lado derecho se representan 3 de las cuartas partes de la unidad; o sea, el número $\frac{3}{4}$. Si se juntan (suman) el cuadrado izquierdo con la parte que representa a $\frac{3}{4}$ se obtiene un entero y tres cuartos. Esto es, el número $\frac{7}{4}$.



De este modo llegamos al conjunto de los números racionales

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \ , \ q \neq 0 \right\}$$

Observe que todo número entero es racional, porque todo $p \in \mathbb{Z}$ se escribe en la forma $\frac{p}{1}$.

Por último, la necesidad de considerar un conjunto numérico más amplio aparece cuando nos encontramos con la sencilla ecuación $x^2 = 2$. Se puede probar que ningún número racional satisface esta ecuación.

En consecuencia, **asumimos** la existencia de un conjunto numérico, llamado *conjunto de los números reales* y denotado $\mathbb{R}$, que incluye al conjunto de los racionales, pero que también contiene números que no pueden ser expresados como una fracción de números enteros, los cuales se denominan *números irracionales*. Un ejemplo de un número irracional es el número real x que verifica $x^2 = 2$ y que se denomina "raíz cuadrada" de 2 (notación $\sqrt{2}$). Más adelante se discutirá sobre él.

En definitiva, tenemos el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, donde

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

y sobre el cual están definidas dos operaciones (binarias internas) llamadas *suma* $(+)$ y *multiplicación* $(\cdot)$ que verifican las siguientes propiedades:

Asociatividad.-

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y) + z = x + (y + z) \\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \end{aligned}$$

Conmutatividad.-

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x \\ x \cdot y = y \cdot x \end{aligned}$$

Existencia de elementos neutro para + y para $\cdot$.-

$$\begin{aligned} \exists 0 &\in \mathbb{R} \text{ tal que,} \forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = x \\ \exists 1 &\in \mathbb{R}, \ 1 \neq 0, \ \text{tal que,} \forall x \in \mathbb{R} : x \cdot 1 = x \end{aligned}$$

Existencia de inverso aditivo y recíproco.-

$$\begin{aligned} \text{dado } x &\in \mathbb{R}, \text{ existe } y \in \mathbb{R} \text{ tal que } x + y = 0 \\ \text{dado } x &\in \mathbb{R} \ , \ x \neq 0, \text{ existe } y \in \mathbb{R} \text{ tal que } x \cdot y = 1 \end{aligned}$$

La primera propiedad establece que todo número real x posee un inverso aditivo, el cual se denotará $-x$ (en lugar de y). Así por ejemplo, el inverso del número entero $x = -5$ es $-x = 5$, lo que significa que $-(-5) = 5$.

La segunda propiedad indica que todo número real x *no nulo* posee un inverso multiplicativo (también llamado recíproco), el cual se denotará x^{-1} (en lugar de y). Así por ejemplo, el inverso de 2 lo representamos por 2^{-1}.

Distributividad de $\cdot$ con respecto a $+$.-

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

La propiedad así escrita se denomina distributividad a izquierda, pero en vista que las operaciones son conmutativas también se tiene una distributividad a derecha.

Observe que muchas veces ha ocupado esta propiedad cuando "saca factor común" en la igualdad

$$x \cdot y + x \cdot z = x \cdot (y + z)$$

Esta lista de propiedades se resumen diciendo que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un **cuerpo**.

En el colegio siempre escuchamos hablar de las cuatro operaciones: suma, resta, multiplicación y división. La suma y multiplicación las mencionamos recién. Las otras dos se definen a partir de éstas como

$$\begin{aligned} \forall x, y &\in \mathbb{R} : x - y = x + (-y) \\ \forall x, y &\in \mathbb{R},\ y \neq 0 : x \div y = x \cdot \left(y^{-1}\right) \end{aligned}$$

O sea, la resta (sustracción) de x e y es la suma de x y el inverso aditivo de y, y la división de x por y es el producto de x y el recíproco de y. Por esto que la división por 0 no está definida, ya que el 0 no tiene recíproco.

La notación de la división también es $\frac{x}{y}$. Así, $\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$ (con $y \neq 0$), con lo que obtenemos $\frac{1}{y} = 1 \cdot y^{-1} = y^{-1}$ (uno dividido por y es el recíproco de y).

Uno de los elementos importantes de los números reales lo constituye la representación de cada uno de ellos en *forma decimal*, en la cual distinguimos su *parte entera* y su *parte decimal*. Por ejemplo, la fracción $\frac{3}{2}$ (número racional) tiene parte entera 1 y parte decimal $0,5$; esto es corresponde al número $1,5$ (a veces la coma se reemplaza por un punto y se escribe 1,5).

En esta representación podemos ver que todo número real que tiene una cantidad finita de cifras decimales es un racional. Por ejemplo,

$$23,456 = \frac{23456}{1000}$$

También podemos ver que hay números racionales que en forma decimal poseen una cantidad infinita de cifras decimales, como por ejemplo $\frac{1}{3} = 0,33... = 0,\bar{3}$. Note que la cifra 3 se repite infinitas veces. Esta característica se conoce como **periodicidad** de su parte decimal.

¿Será cierto que todo número real con infinitas cifras decimales y con alguna cadena que se repite en forma periódica es racional?. La respuesta es afirmativa y lo ilustramos a través de un ejemplo:

Para $x = 2,34565656... = 2,34\overline{56}$ se tiene

$$\begin{aligned} 100x &= 234,56565656... \\ 10000x &= 23456,56565656.... \end{aligned}$$

y como ambos números tienen la misma parte decimal, su diferencia resulta un entero. Esto es,

$$\begin{aligned} 10000x - 100x &= 23456 - 234 \\ 9900x &= 23222 \\ x &= \frac{23222}{9900} \end{aligned}$$

lo que muestra que el número es racional.

Finalmente, sólo dejaremos establecido que un número irracional se caracteriza por tener una cantidad infinita de cifras decimales sin que en ellas alguna cadena se repita en forma periódica. Considere el caso del número real π que en forma decimal es

$$\pi = 3.\,141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\,383\,28...$$

donde por supuesto sólo puede aparecer un número finito de cifras decimales.

Un detalle interesante aparece cuando uno decide cortar (truncar) la parte decimal a una cantidad finita de cifras. Se obtiene un número racional que es una aproximación del irracional correspondiente. De este modo, todo número irracional puede ser aproximado tanto como queramos por números racionales.

Recuerde que muchas veces ha usado (en sus cálculos de geometría) el número racional $3,14$ como una aproximación del número π.

1.1. Propiedades de las operaciones

A partir de los axiomas de cuerpo se obtienen las propiedades más básicas que se verifican en el conjunto de los números reales:

Si un número real a tiene la propiedad que $a + a = a$ ¿qué se puede afirmar sobre él? Bueno, basta sumar a ambos lados el inverso aditivo $-a$ de a para obtener

$$\begin{aligned} [a + a] + (-a) &= a + (-a) \\ a + [a + (-a)] &= 0 \\ a + 0 &= 0 \\ a &= 0 \end{aligned}$$

A partir de aquí $x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$ (usando la distributividad) y luego

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \cdot 0 = 0$$

Ley de cancelación.-
para la suma
$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x + z = y + z \Rightarrow x = y$

además como la otra implicación es claramente válida, se puede escribir la equivalencia
$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x + z = y + z \Leftrightarrow x = y$

lo que significa que en una relación de igualdad se puede sumar (o restar) un mismo número en ambos lados y la igualdad se mantiene. Esta propiedad será crucial al momento de resolver ecuaciones.

para la multiplicación
$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ z \neq 0 : x \cdot z = y \cdot z \Rightarrow x = y$

al igual que en el caso anterior también vale la equivalencia

$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ z \neq 0 : x \cdot z = y \cdot z \Leftrightarrow x = y$

Observe que la propiedad anterior no se aplica para $z = 0$,porque $2 \cdot 0 = 3 \cdot 0$ pero sin embargo $2 \neq 3$. (o sea, no se puede cancelar el cero).

Otras propiedades son:

$(-1) \cdot a = -a$, o sea el producto del número -1 por a es el inverso aditivo de a.

$-(-a) = a$, el inverso del inverso de a es el propio a.

$(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$,

$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

$-(a + b) = (-a) + (-b)$

Si $a \neq 0$, entonces $(a^{-1})^{-1} = a$, esto es, el recíproco del recíproco de a es a.

Si $a \neq 0$, la ecuación $ax + b = c$, tiene solución única en $\mathbb{R}$.

De hecho podemos resolver la ecuación $ax + b = c$,primero sumando el inverso de b a ambos lados

$$\begin{aligned} [ax+b] + (-b) &= c + (-b) \\ ax + [b + (-b)] &= c - b \\ ax &= c - b \end{aligned}$$

y finalmente, multiplico ambos lados de la ecuación por el recíproco de a $(a \neq 0)$

$$\begin{aligned} a^{-1}(ax) &= a^{-1}(c-b) \\ \left(aa^{-1}\right)x &= \frac{c-b}{a} \\ x &= \frac{c-b}{a} \end{aligned}$$

que es la solución de nuestra ecuación.

Resuelva la ecuación $-4x + 6 = 26$

$$\begin{aligned} -4x + 6 &= 26 \Leftrightarrow -4x = 20 \\ &\Leftrightarrow \ x = \frac{20}{-4} = -5 \end{aligned}$$

Una compañía telefónica ofrece un plan mensual que consiste en un cargo fijo de \$11500 y \$80 por cada minuto que se habla. ¿Cuántos minutos debe hablar Daniela para que el valor del mes sea \$16220?

En general el tema de la resolución de ecuaciones se abordará en un módulo posterior.

Si $a, b \neq 0$, entonces $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

$ab = 0 \Longleftrightarrow a = 0$ o $b = 0$

La implicación de derecha a izquierda ya fue establecida.

Al revés (de izquierda a derecha), si se tiene que $ab = 0$ y $a \neq 0$, entonces a tiene reciproco a^{-1} y luego

$$\begin{aligned} a^{-1}(ab) &= a^{-1}0 = 0 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

Como ejercicios de razonamiento discutiremos propiedades concernientes con la **operatoria de fracciones**. Aunque los ejemplos que se discuten corresponden a números racionales (cuocientes de enteros), las propiedades son válidas para cuocientes entre números reales.

Considere que:

- para un número racional $\frac{a}{b}$ (a, b enteros, $b > 0$), $\frac{a}{b}$ representa a veces la fracción $\frac{1}{b}$, o sea $\dfrac{a}{b} = a \cdot \dfrac{1}{b}$
- y en sentido más general, para dos números reales a y b, con $b \neq 0$, $\dfrac{a}{b}$ representa al producto de a por el recíproco de b, o sea $\dfrac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$

1. ¿Cómo se suman dos fracciones de igual denominador? Por ejemplo, $\frac{3}{4} + \frac{7}{4}$
   Basta considerar que: $\frac{3}{4} = 3 \cdot \frac{1}{4}$ (3 veces $\frac{1}{4}$) y $\frac{7}{4} = 7 \cdot \frac{1}{4}$ (7 veces $\frac{1}{4}$). Luego, $\frac{3}{4} + \frac{7}{4} = 3 \cdot \frac{1}{4} + 7 \cdot \frac{1}{4} = (3+7) \cdot \frac{1}{4}$ (ley distributiva) y así
   $$\frac{3}{4} + \frac{7}{4} = \frac{3+7}{4} = \frac{10}{4}$$
   En general, $\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ c \neq 0$:
   $$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

2. Si la unidad (un entero) la divido en 5 partes iguales, cada una de estas partes corresponde a $\frac{1}{5}$. Ahora, cada uno de estos quintos se divide en dos partes iguales para obtener $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)$ (la mitad de un quinto), lo que corresponde a $\frac{1}{10}$ (la décima parte de la unidad)
   Simbólicamente, esto se representa por
   $$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{2 \cdot 5} = \frac{1}{10}$$
   Evidentemente al tomar 2 de estos décimos se obtiene
   $$\frac{2}{10} = \frac{2}{2 \cdot 5} = \frac{1}{5} \text{ ,se cancela (simplifica) el factor 2}$$
   En general, la propiedad es, $\forall a, b \in \mathbb{R}$:
   $$\begin{aligned} \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} &= \frac{1}{ab} \\ \frac{a}{ab} &= \frac{1}{b} \end{aligned}$$
   Observe en la última igualdad la cancelación (o simplificación) del factor a.

3. ¿Cómo se suman dos fracciones de distintos denominadores? Por ejemplo, $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$
   Basta considerar $\frac{1}{3}=\frac{5}{5\cdot 3}=\frac{5}{15}$ y $\frac{1}{5}=\frac{3}{3\cdot 5}=\frac{3}{15}$ para obtener
   $$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{5}{15}+\frac{3}{15}=\frac{8}{15}$$
   En general, para $a,b,c,d\in\mathbb{R}$:
   $$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$$
4. $\dfrac{-a}{b}=\dfrac{a}{-b}=-\dfrac{a}{b};\ \dfrac{-a}{-b}=\dfrac{a}{b}$
   ¿Qué significa la igualdad $\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$?
   Respuesta: $\frac{-a}{b}$ es el inverso aditivo de $\frac{a}{b}$
   Esto queda claro al calcular $\frac{-a}{b}+\frac{a}{b}=\frac{-a+a}{b}=\frac{0}{b}=0\cdot b^{-1}=0$
5. Multiplicación de fracciones.- $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{ac}{bd}$
   $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=a\cdot\frac{1}{b}\cdot c\cdot\frac{1}{d}=(a\cdot c)\left(\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{d}\right)=(a\cdot c)\left(\frac{1}{b\cdot d}\right)=\dfrac{a\cdot c}{b\cdot d}$
   De aquí se sigue fácilmente que $(\dfrac{a}{b})^{-1}=\dfrac{b}{a}$, porque $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{a\cdot b}{b\cdot a}=1$
6. División de fracciones.- $\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{c}=\dfrac{a\cdot d}{b\cdot c}$
   $\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\cdot\left(\dfrac{c}{d}\right)^{-1}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{c}=\dfrac{a\cdot d}{b\cdot c}$
7. $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\iff a\cdot d=b\cdot c$
   Para la implicación de izquierda a derecha basta multiplicar la igualdad por b y por d y para la otra implicación se multiplica por sus recíprocos.
8. $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\iff\dfrac{b}{a}=\dfrac{d}{c}\iff\dfrac{c}{a}=\dfrac{d}{b}\iff\dfrac{b}{d}=\dfrac{a}{c}$
   Esta es una consecuencia directa de la propiedad anterior: Cualquiera de las igualdades entre fracciones equivale a $a\cdot d=b\cdot c$

Los siguientes cálculos muestran el uso de las propiedades anteriores:

- $\dfrac{6}{7}+\dfrac{3}{5}=\frac{51}{35}$

- $\dfrac{6}{7} - \dfrac{3}{5}$
- $\left(\dfrac{6}{7} + \dfrac{3}{5}\right) \cdot \dfrac{7}{2}$
  (se simplifica por 7 en numerador y denominador)
- $\left(\dfrac{6}{7} - \dfrac{3}{5}\right) \div \dfrac{2}{3}$
- $4 - \frac{2}{7}$
- $\frac{3}{8} + 2$
- $\frac{4-\frac{2}{7}}{\frac{3}{8}+2}$
- $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$ porque $4 \cdot 15 = 5 \cdot 12 = 60$
- $\frac{5}{9} \neq \frac{14}{27}$ porque $5 \cdot 27 \neq 9 \cdot 14$

1.2. Porcentajes

Según la Web de Conaf : Las plantaciones forestales corresponden a aquellos bosques que se han originado a través de la plantación de árboles de una misma especie o combinaciones con otras, efectuadas por el ser humano.

Algunos años atrás las plantaciones forestales cubrian una superficie aproximada de 2,87 millones de hectáreas, equivalentes al **17,2 %** del total de bosques de Chile, según la actualización del Catastro de los Recursos Vegetacionales Nativos de Chile, período 1997-2011 (CONAF, Julio 2011).

Aproximadamente el **68 %** de esta superficie corresponde a pino radiata, el **23 %** a especies del género eucalipto y el resto a otras especies, tales como, átriplex, tamarugo y pino oregón. Las plantaciones se encuentran localizadas principalmente entre las regiones de O'Higgins y Los Lagos.

¿Cómo se interpreta o entiende esta información?

El **porcentaje** (o tanto por ciento), denotado %, es un concepto matemático que permite expresar qué cantidad de elementos de un conjunto tienen alguna característica especial, mirando esa cantidad como una proporción del total. Por ejemplo:
25 % es $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$, es la cuarta parte del total.
50 % es $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$, es la mitad del total.
75 % es $\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$, es la tres cuartas partes del total.

$100\,\%$ es $\frac{100}{100} = 1$, es el total.

En general, si se quiere determinar el $a\,\%$ de una cantidad C, se divide la cantidad C en 100 partes iguales y se toman a de estas partes. O sea, siendo x el $a\,\%$ de C :

$$x = \frac{C}{100} \cdot a$$

lo que también puede presentarse como

$$x = \frac{a}{100} \cdot C$$

Este cálculo proviene de la proporción

$$\frac{C}{100} = \frac{x}{a}$$

Para el problema planteado al comienzo, si C es la superficie del total de bosques en Chile, entonces

$$2870000 = \frac{17{,}2}{100} C$$

y luego

$$\begin{aligned} C &= 2870000 \frac{100}{17{,}2} \\ &= 16686046.\,5\ ha \end{aligned}$$

¿Cuántas hectáreas de pino y cuántas de eucalipto hay plantadas?, ¿y de otras especies?

Ejercicio 1 *El Fondo E de una AFP tuvo la siguiente variación en dos meses del año pasado, dadas por su valor cuota:*

$$\begin{array}{lcl} 31/07 & \rightarrow & \$49345,15 \\ 31/08 & \rightarrow & \$50516,28 \\ 30/09 & \rightarrow & \$49933,34 \end{array}$$

Determine las variaciones en el mes de septiembre y en el mes de agosto

En el mes de septiembre perdió $50516{,}28 - 49345{,}15 = \$1171.\,13$

¿Qué porcentaje es $1171{,}13$ *de* $50516{,}28$*?*

De la proporción

$$\frac{100}{50516{,}28} = \frac{x}{1171{,}13}$$

resulta $x = \frac{1171{,}13}{50516{,}28}(100) = 2.\,32\,\%$

Durante septiembre el fondo perdió el $2{,}32\,\%$

Determine la variaciones del mes de agosto y de los dos meses considerados.

1.3. Potencias con exponentes enteros

Problema.- Considerando que todos tenemos un padre y una madre (biológicos). ¿Cuántos abuelos y bisabuelos tenemos?

Los abuelos corresponden a dos generaciones anteriores a la nuestra y los bisabuelos a tres generaciones anteriores. Por simplicidad toda generación anterior a los abuelos se indican como tatara-abuelos.

Determine cuántos tatara-abuelos de décima generación anterior a la nuestra tenemos.

Definición 2 *Sea $a \neq 0$. Se definen:*

$a^0 = 1$, $a^1 = a$, $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a^2 \cdot a = a \cdot a \cdot a$ *y en general, supuesto ya definido* a^n*, para* $n \in \mathbb{N}$ *, se define* $a^{n+1} = a^n \cdot a$

Observe que la definición anterior determina

$$a^n = a \cdot a \cdot ... \cdot a \quad \text{(n veces)}$$

De este modo tenemos definidas todas las potencias con exponentes naturales o cero. Por ejemplo, $2^{10} = 2 \cdot 2 \cdot ..,2$ (10 veces), o sea $2^{10} = 1024$

Obs.- En la potencia a^n , a se llama *base* y n es el *exponente*.
Las propiedades básicas que podemos conjeturar para estas potencias son:
Para $a \neq 0$, $b \neq 0$; $n, m \in \mathbb{N}$:

$$a^n \cdot a^m = ... \quad , \; a^n \cdot b^n = ... \; , \; (a^n)^m = ...$$

Ejemplos.-

1. Simplifique la expresión $a^3 \cdot (a^5)^2$.

   Tenemos
   $$\left(a^5\right)^2 = a^{10}$$
   luego
   $$a^3 \cdot \left(a^5\right)^2 = a^3 \cdot a^{10} = a^{3+10} = a^{13}$$

2. Un heladero proyecta vender cada día el doble de helados que vendió el día anterior. Si comienza vendiendo cuatro helados. en qué día venderá 4096 helados?.

   Desarrollo.- El primer día vende $4 = 2^2$ helados, el segundo vende $2 \times 4 = 2^3 = 8$, el tercer día vende $2 \times 8 = 2^4$ helados.

   Así el día n (n-ésimo día) vende 2^{n+1} helados.

   ¿Cuánto debe valer n para que $2^{n+1} = 4096$?

3. Simplifique la expresión $5^{55}+5^{55}+5^{55}+5^{55}+5^{55}$.

   Desarrollo.- En general, $a+a+a+a+a=5\cdot a$. Luego,

$$5^{55}+5^{55}+5^{55}+5^{55}+5^{55}=5\cdot 5^{55}=5^{56}$$

Ahora extendemos la definición de potencias a exponentes enteros (negativos).

Definición 3 *Sea $a\neq 0$. Se define, para $n\in\mathbb{N}$:*

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$

Por ejemplo, $2^{-4}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$

Luego, según la definición anterior $a^{-1}=\frac{1}{a}$ es el *recíproco* de a y

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}=\frac{1}{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}=\left(\frac{1}{a}\right)^n=\left(a^{-1}\right)^n$$

De esta manera queda definida, para todo $a\neq 0: a^n$, cualquiera sea $n\in\mathbb{Z}$.

Las propiedades anteriores continúan valiendo y además se puede escribir

$$\text{para } a\neq 0,\ n,m\in\mathbb{Z}: \frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$$

Un caso particular importante son las potencias de 10:

$$10^n, \text{con } n\in\mathbb{Z}$$

...	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3	...
	0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000	

Esto permite representar cualquier número dado en forma decimal y que tenga una cantidad finita de cifras decimales, como una *combinación* de potencias de 10. Considere los siguientes ejemplos:

- $0{,}4736=0{,}4+0{,}07+0{,}003+0{,}0006=4\times 10^{-1}+7\times 10^{-2}+3\times 10^{-3}+6\times 10^{-4}$
  como también $0{,}4736=\frac{4}{10^1}+\frac{7}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\frac{6}{10^4}$
- $52{,}4736=50+2+0{,}4+0{,}07+0{,}003+0{,}0006$
  $=5\times 10^1+2\times 10^0+4\times 10^{-1}+7\times 10^{-2}+3\times 10^{-3}+6\times 10^{-4}$

Otra utilidad de las potencias de 10 es que permiten introducir la llamada *notación científica*. Esta consiste en representar cualquier número en la forma $a \times 10^n$, donde $1 \leq a < 10$ y n es un entero.

La notación científica es útil para representar y hacer cálculos con números muy grandes o muy pequeños.

Por ejemplo, el diámetro de un átomo de helio es 0,000000022 cms., lo que se escribe $2{,}2 \times 10^{-8}$.

La velocidad de la luz en el vacío es de 3×10^8 mts/seg.

Ejemplos.-

1. Si $a = \frac{1}{4}$, obtenga el valor de $\frac{a^{-1}}{2} - \frac{a^{-2}}{4}$.

   Desarrollo.- $a^{-1} = 4$ es el recíproco de a y $a^{-2} = \left(a^{-1}\right)^2 = 4^2 = 16$. Luego, $\frac{a^{-1}}{2} - \frac{a^{-2}}{4} = \frac{4}{2} - \frac{16}{4} = 2 - 4 = -2$.

2. Simplifique la expresión $\dfrac{27^{3a-2} \cdot 9^{-a}}{3^{3+a}}$.

   Desarrollo.- Como $3^2 = 9$ y $3^3 = 27$ tenemos, $27^{3a-2} = \left(3^3\right)^{3a-2} = 3^{3(3a-2)} = 3^{9a-6}$, $9^{-a} = \left(3^2\right)^{-a} = 3^{-2a}$ y

$$\begin{aligned} \frac{27^{3a-2} \cdot 9^{-a}}{3^{3+a}} &= \frac{3^{9a-6} \cdot 3^{-2a}}{3^{3+a}} \\ &= \frac{3^{7a-6}}{3^{3+a}} \\ &= 3^{6a-9} \end{aligned}$$

3. Para multiplicar y dividir en notación científica primero se hace uso de las propiedades asociativas y conmutativas y después se simplifican las potencias de 10 con las propiedades de los exponentes. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \left(3{,}1 \times 10^6\right) \cdot \left(4{,}5 \times 10^{-4}\right) &= (3{,}1 \cdot 4{,}5) \times (10^6 \cdot 10^{-4}) \\ &= 13{,}95 \times 10^2 \\ &= 1{,}395 \times 10^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{7{,}2 \times 10^{-7}}{8 \times 10^6} &= \frac{7{,}2}{8} \times \frac{10^{-7}}{10^6} \\ &= 0{,}9 \times 10^{-13} \\ &= 9 \times 10^{-14} \end{aligned}$$

1.4. Raíces

Al considerar un cuadrado de lado 1 y una de sus diagonales se obtiene un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden una unidad. El Teorema de Pitágoras establece que para la hipotenusa d debe tenerse

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

Así la longitud de la diagonal es un número real x cuyo cuadrado es 2. Se puede probar (no lo haremos) que este número no es racional (o sea es irracional). Él define la llamada *raíz cuadrada de dos* que se denota $\sqrt{2}$

Se tiene entonces, para x **positivo**

$$x = \sqrt{2} \iff x^2 = 2$$

Numéricamente, $\sqrt{2} = 1.\,414\,213\,562\,373\,095\,048\,8$ (aproximadamente).

Más generalmente, dado un número real $a > 0$, existe único **número real positivo** x tal que $x^2 = a$. Este número se denomina *raíz cuadrada de* a y se escribe $\sqrt{a}$. Así,

$$x = \sqrt{a} \iff x^2 = a$$

Note que también se puede definir $\sqrt{0} = 0$.

Por ejemplo, $\sqrt{9} = 3$ porque $3^2 = 9$. Observe también que es un **error** escribir $\sqrt{9} = \pm 3$.

A partir de la noción de raíz cuadrada se define la potencia con exponente $\frac{1}{2}$, para $a \geq 0$:

$$a^{1/2} := \sqrt{a}$$

Las raíces de índice $3, 4, 5, ...$ se definen de manera similar teniendo en cuenta que para índice par están definidas sólo para $a \geq 0$ y para índice impar quedan definidas para todo $a \in \mathbb{R}$.

De hecho, para cada $a \in \mathbb{R}$, existe único $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^3 = a$. Este número se llama la raíz cúbica de a y se denota $\sqrt[3]{a}$. Así

$$x = \sqrt[3]{a} \iff x^3 = a$$

Por ejemplo, $\sqrt[3]{27} = 3$ porque $3^3 = 27$. También $\sqrt[3]{-64} = -4$ porque $(-4)^3 = -64$.

$\sqrt[3]{15} = 2.\,466\,212\,074\,330\,470\,101\,5$

Considere además la definición

$$a^{1/3} := \sqrt[3]{a}$$

Por último, en general para $n \in \mathbb{N}$:

$$x = \sqrt[n]{a} \iff x^n = a$$

define la denominada *raíz n-ésima* de a y que también permite definir

$$a^{1/n} := \sqrt[n]{a}$$

Al considerar raíces n-ésimas de a siempre distinga el caso n par del caso n impar.

1.5. Potencias con exponentes racionales

Se define para $r = \frac{p}{q}$ racional, con $q \in \mathbb{N}$

$$a^r = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$$

Luego se tiene

$$x = a^{p/q} \iff x^q = a^p$$

No olvide que las raíces de índice par (raíces cuadradas, cuartas, etc.) sólo están definidas para números positivos.

Por ejemplo, dado que $2^6 = 64 = 8^2$ se sigue que $2 = 8^{2/6} = \sqrt[6]{8^2}$
Se verifican las siguientes leyes:

1. $a^r a^s = a^{r+s}$ (producto de potencias de igual base)
2. $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ (cuociente de potencias de igual base)
3. $(a^r)^s = a^{rs}$ (potencia de una potencia)
4. $(ab)^r = a^r b^r$ (potencia de un producto)
5. $\frac{a^r}{b^r} = (\frac{a}{b})^r$ (potencia de un cuociente)

Más que deducciones formales de estas reglas, a este nivel interesa conocer y entender cómo se utilizan

- $\sqrt[2]{a}\sqrt[3]{a} = a^{1/2}a^{1/3} = a^{5/6} = \sqrt[6]{a^5}$, porque $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. Así $\sqrt[2]{a}\sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^5}$
- $\dfrac{\sqrt[3]{a^7}}{\sqrt[4]{a^3}} = \frac{a^{7/3}}{a^{3/4}} = a^{19/12} = \sqrt[12]{a^{19}}$, porque $\frac{7}{3} - \frac{3}{4} = \frac{19}{12}$. Así $\frac{\sqrt[3]{a^7}}{\sqrt[4]{a^3}} = \sqrt[12]{a^{19}}$
- Con $n, m \in \mathbb{N}$, $k, r \in \mathbb{Z}$: $\dfrac{\sqrt[n]{a^k}}{\sqrt[m]{a^r}} = \sqrt[n\cdot m]{a^{km-nr}}$

- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left(a^{1/n}\right)^{1/m} = a^{1/(n\cdot m)} = \sqrt[n\cdot m]{a}$. Así, $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$
- $(a^r)^s = (a^s)^r = a^{rs}$

También de 3 se deduce $(a^n)^{1/n} = a^1 = a$, aunque esto es una simple consecuencia de la definición de raíz n-ésima de un número real. Sin embargo hay que tener cuidado de utilizarlo equivocadamente. Por ejemplo,

$$\left((-2)^2\right)^{1/2} = \sqrt[2]{4} = 2 \text{ , no } -2$$

O sea, en general la regla no vale con una base a negativa.

- $\sqrt[n]{ab} = (ab)^{1/n} = a^{1/n}b^{1/n} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$. Así $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{1/n}}{b^{1/n}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/n} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$. Así $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

Las siguientes simplificaciones (cálculos) hacen uso de las propiedades mencionadas anteriormente

- $\sqrt{243} = 9\sqrt{3}$

  $243 = 3^5$
- $\sqrt{98} = \sqrt{2 \times 7^2} = 7\sqrt{2}$, $\sqrt{75} = \sqrt{3 \times 5^2} = 5\sqrt{3}$, $\sqrt{12} = \sqrt{3 \times 2^2} = 2\sqrt{3}$
- $\sqrt{\frac{75}{12}} = \sqrt{\frac{3\times5^2}{3\times2^2}} = \frac{5}{2}$
- $4\sqrt{3} - 5\sqrt{12} + 2\sqrt{75} = 4\sqrt{3} - 5\left(2\sqrt{3}\right) + 2\left(5\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3}$
- $2\sqrt{3} + \sqrt{27} + \sqrt{243} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 14\sqrt{3}$
- $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} = 6\sqrt[3]{2}$
- $\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \frac{1-2}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
- $\sqrt{3}\sqrt{11} = \sqrt{33}$
- $\sqrt{14}\sqrt{21} = \sqrt{(2\cdot7)\cdot(3\cdot7)} = \sqrt{7^2\cdot6} = 7\sqrt{6}$
- $\sqrt{2}\left(\sqrt{6} + \sqrt{14}\right) = \sqrt{2}\left(\sqrt{2}\sqrt{3} + \sqrt{2}\sqrt{7}\right) = 2\left(\sqrt{3} + \sqrt{7}\right)$
- $\frac{4\sqrt{28}}{3\sqrt{7}} = \frac{4\cdot2\sqrt{7}}{3\sqrt{7}} = \frac{8}{3}$

Propiedades

$a^{1/n}a^{1/m} = a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} = a^{\frac{m+n}{nm}}$ porque si $x = a^{1/n}$, $y = a^{1/m}$ entonces

$$x^n = a \ , \ y^m = a$$

$$\begin{aligned}\left(a^{1/n}a^{1/m}\right)^{m\cdot n} &= \left(a^{1/n}\right)^{mn}\left(a^{1/m}\right)^{mn} \\ &= \left[\left(a^{1/n}\right)^{n}\right]^{m}\left[\left(a^{1/m}\right)^{m}\right]^{n} \\ &= a^m a^n = a^{m+n}\end{aligned}$$

1.6. Racionalización

El término racionalización se refiere, en general, a eliminar raíces en una expresión.

Más precisamente, cuando un número real se obtiene de un cuociente (razón) de otros dos, donde en el numerador o en el denominador aparecen raíces cuadradas, a veces interesa representarlo mediante otro cuociente de forma tal que el numerador o el denominador estén "libres"de raíces. Ese proceso se denomina racionalización (del numerador o denominador según corresponda)

Al racionalizar una expresión se aplican propiedades de las raíces, tal como se muestra en los siguientes ejemplos.

- $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{15}}{4\cdot 5} = \frac{\sqrt{15}}{10}$
- $\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{3-5} = \frac{2\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{-2} = -\sqrt{3}-\sqrt{5}$

1.7. Productos notables. Factorización.Simplificación. Racionalización

En matemáticas es habitual encontrarse con expresiones que están formadas (construidas) por números, letras $(a, b, c, ..., x, y, z)$, las operaciones elementales $(+, -, \ \cdot \ , \div)$ y las operaciones de potenciación y extracción de raíces. Las letras $a, b, c, ...$ representan *valores constantes*, mientras que $x, y, z, ...$ son *variables* en el sentido que pueden asumir cualquier valor real.

A modo de ejemplo considere las expresiones

$$ax^2 + bx + c + \frac{1}{x^2+4} - \pi y$$

$$\sqrt{3x^2+7y} + \frac{4x^3 - 2xyz}{\sqrt[3]{y^4+5}}$$

En general, a una expresión de este tipo la llamamos *expresión algebraica.*

En el caso que sólo se contemplen sumas, restas y multiplicaciones la expresión algebraica obtenida se denomina polinomio. Por ejemplo, $4x^2y^3 - 5yz + \sqrt{2}yz^4$ (polinomio en tres variables: x, y, z)

Las expresiones algebraicas permiten traducir a lenguaje matemático expresiones del lenguaje habitual.

Por ejemplo, un terreno tiene forma rectangular de x metros de largo e y metros de ancho, ¿cómo se expresa su perímetro y su área?:
$P = 2x + 2y$ representa el perímetro y
$A = x \cdot y$ representa su área.
Las expresiones $2x + 2y$ y xy son expresiones algebraicas.

Como las letras, en definitiva, representan números reales, la expresión algebraica corresponde a una cadena de operaciones entre números y por tanto ella está regida por todas las propiedades que satisfacen estas operaciones.

Es importante conseguir una adecuada manipulación de estas expresiones en el sentido de poder lograr representaciones de ellas que sean **equivalentes** como también **simplificaciones** de ellas.

Con este propósito es que mencionamos las siguientes propiedades conocidas como productos notables:

Primero damos la lista y posteriormente comentamos su deducción

1. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
2. $(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$
3. $(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$
4. $(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$

Todas estas igualdades se generan a partir de la ley distributiva

$$c(a + b) = ca + cb$$

la cual, vista en la forma $ca + cb = c(a + b)$ indica la posibilidad de factorizar por el número c, que aparece como factor común en ambos sumandos (del lado izquierdo).

Lo mismo vale para la lista de productos notables, la igualdad vista de derecha a izquierda es una regla de factorización.

Discutamos su deducción: En el caso del producto de dos binomios con un término común, la regla se deduce como sigue

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b) &= (x+a)x+(x+a)b \\ &= xx+ax+xb+ab \\ &= x^2+(a+b)x+ab\end{aligned}$$

(usando también la conmutatividad). Ahora la fórmula para el cuadrado del binomio resulta de esta misma con $a=b$ y la fórmula para desarrollar el producto de una suma por su diferencia resulta haciendo $b=-a$

También es fácil ver que $(x-a)^2 = x^2-2ax+a^2$.

La fórmula número 3 anterior provee una factorización para la diferencia de dos cuadrados

$$x^2-a^2=(x+a)(x-a)$$

También existen factorizaciones para las diferencias de cubos, potencias cuartas, etc. A saber

- $x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$
- $x^4-a^4=(x-a)(x+a)(x^2+a^2)$
- $x^5-a^5=(x-a)(x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4)$

En general estos productos notables nos entregan herramientas para factorizar ciertas expresiones algebraicas, tal como se ve en el siguiente problema.

Para el trinomio x^2+bx+c donde b,c son enteros, ¿será posible factorizarlo como $x^2+bx+c=(x+q)(x+s)$? con q,s también enteros. La respuesta está en la igualdad $(x+q)(x+s)=x^2+(q+s)x+qs$. Luego, se requiere

$$x^2+bx+c=x^2+(q+s)x+qs$$

lo que indica

$$\begin{aligned}qs &= c \\ q+s &= b\end{aligned}$$

Si es posible determinar dos enteros q,s con esas características, el problema se resuelve afirmativamente, si no existen los enteros significa que el polinomio no se puede descomponer en factores con coeficientes enteros.

Un análisis más general se hará más adelante cuando se estudie la ecuación de segundo grado.

Ejemplo.-
Descomponer en factores $x^2 + 5x + 6$
Aquí se requiere que

$$\begin{aligned} qs &= 6 \\ q + s &= 5 \end{aligned}$$

Si q, s son enteros entonces las posibilidades son $(q,s) = (1,6)$, $(-1,-6)$, $(2,3)$, $(-2,-3)$. De estos, la suma es 5 sólo para $(2,3)$. Luego la factorización es

$$x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$$

Una situación distinta se da con el trinomio x^2+3x+4 , el cual no se puede descomponer de la manera anterior. Esto porque no existen dos números enteros cuyo producto sea 4 y su suma sea igual a 3

Queda de ejercicio encontrar una factorización para $3x^2 + x - 2$ a partir de la igualdad

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= (px+q)(rx+s) \\ &= (pr)\,x^2 + (ps+qr)\,x + qs \end{aligned}$$

asumiendo que existen p, q, r, s enteros.

Es frecuente encontrarnos con expresiones algebraicas que son el cuociente (fracción) de dos expresiones algebraicas y en muchos casos necesitaremos simplificarlas (todo lo que se pueda). Ejemplo de tales expresiones son

$$\frac{x^2+3x-10}{x-2} \quad , \quad \frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+3} \quad , \quad \frac{3x^2+x-2}{x^2-1} \times \frac{x^2-x}{6x-4}$$

Ellas pueden ser simplificadas como sigue (teniendo en cuenta lo anterior)

$$\frac{x^2+3x-10}{x-2} = \frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)} = x+5$$

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+3} = \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-1)} = \frac{x-2}{x-1}$$

$$\frac{3x^2+x-2}{x^2-1} \times \frac{x^2-x}{6x-4} = \frac{(x+1)(3x-2)}{(x-1)(x+1)} \times \frac{x(x-1)}{2(3x-2)} = \frac{1}{2}x$$

En otras situaciones aparecen raíces cuadradas en el denominador, las que permiten representaciones equivalentes (y alternativas) que se obtienen mediante racionalización. Por ejemplo, para el caso de números

$$\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{3-5} = \frac{2\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{-2} = -\sqrt{3}-\sqrt{5}$$

y para el caso de expresiones algebraicas

$$\frac{x+5}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}}\ ,\ \frac{x}{1+\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt{x+1}}$$

las que se racionalizan (en el denominador) como se indica

$$\begin{aligned}
\frac{x+5}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}} &= \frac{x+5}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-3}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-3}}\\
&= \frac{(x+5)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-3}\right)}{(x+1)-(2x-3)}\\
&= \frac{(x+5)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-3}\right)}{4-x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{x}{1+\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt{x+1}} &= \frac{x}{1+\sqrt{x}}\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}+\frac{2\sqrt{x+1}}{x+1}\\
&= \frac{x\left(1-\sqrt{x}\right)}{1-x}+\frac{2\sqrt{x+1}}{x+1}\\
&= \frac{\left(x-x\sqrt{x}\right)(x+1)+2\,(1-x)\sqrt{x+1}}{1-x^2}
\end{aligned}$$

2. Ecuaciones

En general una **ecuación algebraica** es una *relación de igualdad* entre dos **expresiones algebraicas**, denominadas miembros, en las que aparecen valores conocidos o datos, y desconocidos o **incógnitas**, relacionados mediante operaciones matemáticas.

En este capítulo nos interesará estudiar ecuaciones algebraicas en **una incognita** denominada x, la cual corresponde a un número real. En forma general puede representarse por

$$R\,(x)=0$$

Resolver una ecuación significa encontrar todos los números reales x para los cuales se verifica la igualdad dada. Este conjunto de números se denomina la solución de la ecuación.

El ejemplo más simple corresponde a la llamada *ecuación lineal* o *de primer grado*, en x, de la forma

$$ax+b=c$$

donde a,b y c son constantes reales conocidas, se llaman también **parámetros** de la ecuación

Vimos anteriormente que para el caso $a \neq 0$, ella tiene **única solución**
$ax + b = c \Longleftrightarrow ax = c - b \Longleftrightarrow x = \frac{c-b}{a}$

$$x = \frac{c - b}{a}$$

Por ejemplo, la ecuación $4x - 3 = 17$ tiene única solución

$$x = \frac{17 + 3}{4} = 5$$

Más generalmente, una ecuación de primer grado es una ecuación en la cual, después de realizar las operaciones y reducir los términos semejantes, el máximo exponente de la incógnita es 1. Por ejemplo, también corresponden a ecuaciones de primer grado:

1. $\dfrac{3x + 2}{x - 4} = -2$

   Debe reconocer en este caso que $x \neq 4$. Para $x \neq 4$:

$$\begin{aligned} \frac{3x + 2}{x - 4} &= -2 \Longleftrightarrow 3x + 2 = -2\,(x - 4) \\ &\Longleftrightarrow 3x + 2 = -2x + 8 \\ &\Longleftrightarrow 3x + 2x = 8 - 2 \\ &\Longleftrightarrow 5x = 6 \\ &\Longleftrightarrow x = \frac{6}{5} = 1,2 \end{aligned}$$

2. Para una constante real y : $\dfrac{3x + 2}{x - 4} = y$.

   Para $x \neq 4$:

$$\begin{aligned} \frac{3x + 2}{x - 4} &= y \Longleftrightarrow 3x + 2 = y\,(x - 4) \\ &\Longleftrightarrow 3x + 2 = yx - 4y \\ &\Longleftrightarrow 3x - yx = -4y - 2 \\ &\Longleftrightarrow (3 - y)\,x = -4y - 2 \\ &\Longleftrightarrow x = \frac{-4y - 2}{3 - y} \end{aligned}$$

   Encontramos que, para $y \neq 3$: la solución única es $x = \dfrac{-4y - 2}{3 - y}$ $\left(= -\frac{4y+2}{3-y} = \frac{4y+2}{y-3} \right)$

   Por ejemplo, la ecuación $\dfrac{3x + 2}{x - 4} = 5$ tiene solución única $x = \frac{22}{2} = 11$

3. $\dfrac{3x+2}{x-4} = 3$

$$\begin{aligned} \frac{3x+2}{x-4} = 3 &\Longleftrightarrow 3x+2 = 3\,(x-4) \qquad (1)\\ &\Longleftrightarrow 3x+2 = 3x-12 \\ &\text{Esta ecuación claramente no tiene solución} \\ &\text{o bien, el conjunto solución es } S = \phi \qquad (2) \end{aligned}$$

Problema 4 *En una peña folclórica realizada en un liceo, se recaudaron* \$320000*, el cual fue repartido entre Centro de Padres, Centro de Alumnos y el Liceo. Si el liceo recibió el triple de lo que recibió el centro de alumnos, y el centro de padres* \$100000 *menos de lo que recibió el liceo. ¿Cuánto recibió cada uno?*

CP : cantidad recibida por el Centro de padres.
CA : cantidad recibida por el Centro de alumnos.
L :cantidad recibida por el Liceo.
Se sabe que $L = 3 \cdot CA$ o bien $CA = \frac{1}{3}L$, y $CP = L - 100000$
Como además, $CP + CA + L = 320000$ se obtiene

$$\begin{aligned} (L-100000) + \frac{1}{3}L + L &= 320000 \\ \frac{7}{3}L &= 420000 \\ L &= \left(\frac{3}{7}\right) \cdot 420000 \\ L &= 180000 \end{aligned}$$

Ahora $L = \$180000$, $CA = \$60000$, $CP = \$80000$

2.1. Sistemas de dos ecuaciones lineales y dos incognitas

Una ecuación en las dos incognitas x e y se dice *lineal* cuando es de la forma

$$ax + by = c$$

(Por ejemplo $2x+3y=8$) donde a, b, c son números reales fijos (constantes). Una *solución* de la ecuación es un par de valores $x = x_0$, $y = y_0$ que verifican la relación de igualdad.

Ahora, dos de estas ecuaciones definen lo que se denomina un *sistema lineal* de dos ecuaciones en las dos incognitas x e y :

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

Una *solución* del sistema es un par de valores $x = x_0$, $y = y_0$ que verifican ambas ecuaciones.

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 1 \\ x + 5y &= 0 \end{aligned}$$

De la segunda, $x = -5y$ y reemplazando en la primera

$$\begin{aligned} 2(-5y) - 3y &= 1 \\ -10y - 3y &= 1 \\ -13y &= 1 \\ y &= -\frac{1}{13} \end{aligned}$$

Ahora $x = -5\left(-\frac{1}{13}\right) = \frac{5}{13}$.

Por lo tanto, la solución del problema es

$$x = \frac{5}{13} \quad , \quad y = -\frac{1}{13}$$

Exemplo 5 *Susana se va a comprar un pantalón y una polera. Al observar los precios en la tienda, se da cuenta que entre ambas prendas debe pagar un total de* \$48000*. Sin embargo, al llegar a la caja, le cuentan que por comprar ambos artículos, el pantalón tiene un* 20 % *de descuento, por lo que tiene en pagar en total sólo* \$42000 *¿Cuál es el precio original de cada artículo?*

Sean

x : precio del pantalón.

y : precio de la polera.

Se tiene, considerando que el precio a pagar por el pantalón es sólo $x - \frac{20}{100}x = x - \frac{1}{5}x = \frac{4}{5}x$,

$$\begin{aligned} x + y &= 48000 \\ \frac{4}{5}x + y &= 42000 \end{aligned}$$

De la primera ecuación $y = 48000 - x$ y reemplazando en la segunda

$$\begin{aligned} \frac{4}{5}x + 48000 - x &= 42000 \\ -\frac{1}{5}x &= -6000 \\ x &= 30000 \end{aligned}$$

De aquí, $y = 18000$

Por lo tanto,

el pantalón cuesta \$30000

la polera cuesta \$18000

2.2. Ecuación de segundo grado.

Es de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b, c son constantes conocidas, $a \neq 0$.

En el caso simple $b = 0$, ésta es $ax^2 = -c$ y si $\frac{c}{a} < 0$ se resuelve por

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

En el caso general, la resolución de esta ecuación pasa por la factorización

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right)$$

Luego la ecuación se resuelve:

$ax^2 + bx + c = 0 \Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned}
a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)\right) &= 0 \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \\
x + \frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

Para $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene **dos soluciones** reales (distintas)

- Para $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene **única solución** real $x = -\frac{b}{2a}$
- Para $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, la ecuación **no tiene** soluciones reales.

Por ejemplo,

1. $2x^2 - 5x - 3 = 0 \quad , \quad a = 2, \; b = -5, \quad c = -3$

   La solución está dada por: $x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4}$

   O sea, las soluciones son $x_1 = 3$ y $x_2 = -\frac{1}{2}$

   Obs.- Note que $2x^2 - 5x - 3 = 2\left(x - 3\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

2. $12x^2 + x - 1 = 0.$
   Aquí $\Delta = 1^2 - 4\,(12)\,(-1) = 49$, luego las soluciones son
   $$x = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2\,(12)} = \frac{-1 \pm 7}{24}$$
   Es decir, $x_1 = \frac{1}{4}$ y $x_2 = -\frac{1}{3}$. O bien, el conjunto solución es $S = \left\{\frac{1}{4}.-\frac{1}{3}\right\}$.
   Obs.- La factorización de la expresión cuadrática es
   $$\begin{aligned} 12x^2 + x - 1 &= 12\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) \\ &= (4x - 1)\,(3x + 1) \end{aligned}$$

3. $\dfrac{1}{8-x} - \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{1}{4} \Longleftrightarrow \dfrac{(x-2)-(8-x)}{(8-x)\,(x-2)} = \dfrac{1}{4}$
   $$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \frac{2x - 10}{(8-x)\,(x-2)} = \frac{1}{4} \\ &\Longleftrightarrow (8-x)\,(x-2) = 4\,(2x - 10) \\ &\Longleftrightarrow 8x - 16 - x^2 + 2x = 8x - 40 \\ &\Longleftrightarrow -x^2 + 2x + 24 = 0 \end{aligned}$$
   Las soluciones son: $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\,(-1)\,(24)}}{-2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{100}}{-2} = \dfrac{-2 \pm 10}{-2}$
   O sea, $x_1 = -4$, $x_2 = 6$.

4. $x^2 + 5x - 1 = 0$

5. $4x^2 + 4x + 1 = 0$

6. $\sqrt{x} = 2 - x$

7. $\frac{x}{2} + \frac{1}{2x} + 1 = 0$

Problema 6 *Se dispone de 40 metros (lineales) de cerca para cercar un terreno de forma rectangular. Si se requiere que el terreno tenga un área de 30 m^2, ¿qué dimensiones debe tener el terreno?*

3. Orden en los números reales

3.1. Axiomas de Orden

Con el fin de disponer de un criterio que nos permita " comparar " números reales, se define en $\mathbb{R}$, una relación de orden compatible con las operaciones de adición y multiplicación (con la estructura de cuerpo). Esto nos permite hablar de $\mathbb{R}$ como un cuerpo ordenado.

O. El subconjunto $\mathbb{R}^+$ llamado conjunto de los reales positivos verifica:

O1. $a, b \in \mathbb{R}^+ \Longrightarrow a + b \in \mathbb{R}^+$

O2. $a, b \in \mathbb{R}^+ \Longrightarrow a \cdot b \in \mathbb{R}^+$

O3. Dado $a \in \mathbb{R}$, una y sólo una de las siguientes condiciones se verifica:

$$a \in \mathbb{R}^+, \quad a = 0, \quad -a \in \mathbb{R}^+$$

Sean a y b números reales, diremos que a es menor que b, lo que escribimos $a < b$, si $b - a \in \mathbb{R}^+$. Diremos que a es menor o igual que b, los que escribimos $a \leq b$, si $a < b$ o $a = b$.

También podemos considerar las relaciones $>$ y $\geq$ definidas por:

$$\begin{aligned} a &> b \Longleftrightarrow b < a \\ a &\geq b \Longleftrightarrow b \leq a \end{aligned}$$

Observe que por definición:

$$a > 0 \Longleftrightarrow 0 < a \Longleftrightarrow a - 0 = a \in \mathbb{R}^+$$

O sea, *los números positivos son los mayores a cero.*

Consecuencias de los Axiomas de Orden

1. Ley de Tricotomía: Si a y b son dos números reales , una y sólo una de las siguientes condiciones se verifica: $a < b$, $a = b$, $b < a$.
2. $\forall a \in \mathbb{R} : a^2 \geq 0$. En particular $1 \in \mathbb{R}^+$
3. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a < b \wedge\ b < c \Longrightarrow a < c$ (transitividad)
4. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a < b \Longrightarrow a + c < b + c$
5. $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} :$
   $a < b \wedge\ c < d \Longrightarrow a + c < b + d$

6. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a < b \wedge\ c > 0 \Longrightarrow ac < bc$

7. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a < b \wedge\ c < 0 \Longrightarrow ac > bc$

8. $a > 0 \Longleftrightarrow a^{-1} > 0 \qquad ; \qquad a < 0 \Longleftrightarrow a^{-1} < 0$

9. $ab > 0 \Longleftrightarrow (a > 0 \text{ y } b > 0) \text{ o } (a < 0 \text{ y } b < 0)$

10. $ab < 0 \Longleftrightarrow (a > 0 \text{ y } b < 0) \text{ o } (a < 0 \text{ y } b > 0)$

11. $a < b \Longrightarrow a < \frac{a+b}{2} < b$
    Obs.- Cuando se escribe $a < c < b$ se quiere decir que $a < c \wedge c < b$

Demostración:(de alguna de las proposiciones)

2. Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, entonces hay dos casos posibles: $a \in \mathbb{R}^+$ o bien $-a \in \mathbb{R}^+$. Si $a \in \mathbb{R}^+$, entonces por O2, $a \cdot a = a^2 \in \mathbb{R}^+$. Por otro lado, si $-a \in \mathbb{R}^+$, también por O2, $(-a) \cdot (-a) \in \mathbb{R}^+$, pero $(-a) \cdot (-a) = a \cdot a = a^2$.

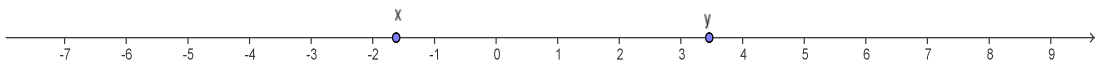
3. $a < b$, $b < c \Longrightarrow b - a \in \mathbb{R}^+$, $c - b \in \mathbb{R}^+$, luego por O1,
$c - a = (b - a) + (c - b) \in \mathbb{R}^+$.

8. Si $a > 0$, a^{-1} existe pues $a \neq 0$. Si suponemos que $a^{-1} < 0$, tendríamos que $1 = a \cdot a^{-1} < 0$, lo que es una condradicción, por lo tanto $a^{-1} > 0$.

11.- Dado que $1 > 0, 1+1 = 2 > 0$, luego $\frac{1}{2} > 0$. Entonces, como por hipótesis $b-a > 0$, luego $\frac{b+a}{2} - a = \frac{1}{2}(b - a) > 0$, con lo cual $a < \frac{a+b}{2}$. Por otro lado $b - \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}(b - a) > 0$, con lo cual $\frac{a+b}{2} < b$.

3.2. Representación geométrica de los números reales

Es posible obtener una representación geométrica del con junto de los números reales mediante los puntos de una línea recta. Es mejor considerar una recta L horizontal en el plano y entonces dos puntos sobre la recta, uno para representar al número 0 y el otro para representar al número 1, con la consideración que el cero quede a la izquierda del uno. De esta manera se obtiene la representación



donde la relación $x < y$ queda determinada por el hecho que el punto x esté a la izquierda del punto y.

La propiedad 11 nos asegura que no existe un número real positivo que sea menor o igual que cualquier otro número real positivo.

Sean a y b números reales, $a \leq b$. Los siguientes conjuntos reciben el nombre de **intervalos**

Intervalos acotados: Considerando que $a < x < b \Longleftrightarrow x > a \wedge x < b$

$$\begin{array}{ll}
(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} & \text{, intervalo abierto} \\
[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} & \text{, cerrado} \\
(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} & \text{, semiabierto o semicerrado} \\
[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} & \text{, semiabierto o semicerrado}
\end{array}$$

Intervalos no acotados:

$$\begin{array}{ll}
(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\} & [a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \\
(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\} & (-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} \\
(-\infty,+\infty) = \mathbb{R} &
\end{array}$$

4. Inecuaciones

En general, una inecuación corresponde a una relación de desigualdad entre expresiones algebraicas la cual puede presentarse en la forma

$$R(x) < 0$$

o con cualquiera de las desigualdades $\leq$, $>$ o $\geq$.

Resolver la inecuación, en la incognita $x : R(x) < 0$ significa determinar el conjunto de números reales que verifican la relación dada.

Por ejemplo,

1. $2x - 1 < 5$
2. $1 - 2x < 7$
3. $(x+3)(x-1) > 0$
4. $\dfrac{x}{x-2} < 3$
5. $x^2 + 4x + 9 > 0$
6. $8x > \dfrac{1}{x^2}$

5. Valor absoluto

Definición.- Si a es un número real, se define el **valor absoluto** de a mediante:

$$|a| = \begin{cases} a & si\ a \geq 0 \\ -a & si\ a < 0 \end{cases}$$

Propiedades del valor absoluto:

1. Sea $a \in \mathbb{R}$, entonces: $|a| \geq 0$; $|a| = 0 \Longleftrightarrow a = 0$; $-|a| \leq a \leq a$
2. Sea $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Entonces para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |x| &= c \Longleftrightarrow x = c \text{ o } x = -c \\ |x| &< c \Longleftrightarrow -c < x < c \\ |x| &> c \Longleftrightarrow x > c \text{ o } x < -c \end{aligned}$$

3. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, entonces:

$$\begin{aligned} |ab| &= |a|\,|b| \\ |a+b| &\leq |a| + |b| \end{aligned}$$

4. $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2} = |x|$.

Considerando la recta real y las propiedades del valor absoluto , el valor absoluto permite definir la distancia entre dos puntos mediante:

$$d(a,b) = |b-a|$$

5.1. Inecuaciones con valor absoluto

Considerando la recta real y las propiedades del valor absoluto, el valor absoluto permite definir la distancia entre dos puntos mediante:

$$d(a,b) = |b-a| = \begin{cases} b-a & \text{si} \quad a \leq b \\ a-b & \text{si} \quad a > b \end{cases}$$

Note que: $d(a,b) = 0 \Longleftrightarrow a = b$; y para $a \neq b : d(a,b) > 0$.

Ejercicio 7 *a) Determine los números reales cuya distancia al* 5 *es igual a* 3 *unidades.*
b) Determine los números reales cuya distancia al 5 *es menor o igual a* 3 *unidades.*

En general para el número real a el conjunto de todos los números reales x cuya distancia al número a es menor o igual a 3 está determinado por la desigualdad

$$|x-a| \leq 3$$

Inecuación que se resuelve aplicando las propiedades del valor absoluto, de manera que

$$|x-a| \leq 3 \Longleftrightarrow -3 \leq x-a \leq 3 \Longleftrightarrow a-3 \leq x \leq a+3$$

Así el conjunto solución es

$$S =]a-3, a+3[$$

Problema 8 *Dado un número real a y $r > 0$, determinar el conjunto de todos los números reales x cuya distancia al punto a es menor que r.*

Haciendo uso de las propiedades vistas anteriormente:

- Sea $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Entonces para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |x| &< c \Longleftrightarrow -c < x < c \\ |x| &> c \Longleftrightarrow x > c \quad \vee \quad x < -c \end{aligned}$$

  resuelva las siguientes inecuaciones

1. $|x+2| < 4$
2. $|x+2| > 4$
3. $|5x+7| < -1$
4. $|5x+7| > -3$
5. $|2x+3| < |x-1|$
6. $|2x+3| + 1 < |x-1|$
7. $\frac{1}{|x-3|} < 1$
8. $|x^2 - 5x + 6| \leq 2$

Ejercicio 9 *Establecer las propiedades:*
$\forall a, b \in \mathbb{R} : 0 < a < b \Longrightarrow a^2 < b^2$
$\forall a, b \in \mathbb{R} : 0 < a < b \Longrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$
Por tanto, $\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : a < b \Longleftrightarrow a^2 < b^2$

6. Axioma de Arquímedes

Básicamente este axioma establece que el conjunto de los números naturales tiene elementos tan grandes como se requiera. Concretamente:

Dados un número real y cualquiera y un número $x > 0$, existe un natural n tal que

$$nx > y$$

En particular, para $x = 1$: dado un número real y, existe un número natural n tal queε

$$n > y$$

Esta propiedad determina que dado cualquier $\varepsilon > 0$ (por muy pequeño que sea), existe un natural n tal que $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ y luego

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

Así entonces, los términos de la sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$ se aproximan cada vez más al valor 0, en el sentido que:

No importa lo pequeño que sea $\varepsilon > 0$, existe un natural N tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$ y por tanto

$$\forall n : n \geq N \Longrightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

O sea, casi todos los términos de la sucesión pertenecen al intervalo abierto $]-\varepsilon.\varepsilon[$ (centrado en 0).

7. Axioma del supremo.

Una importante propiedad de los números reales establece que: .$^{\text{en}}$tre dos números reales existe un número racionalτ .$^{\text{en}}$tre dos numeros reales existe un número irracional". Esta propiedad determina que entre dos números reales existen infinitos números racionales e infinitos números irracionales.

Por esto se dice que el conjunto de los racionales es **denso** dentro de la recta real $\mathbb{R}$ (los racionales están en todas partes). Lo mismo ocurre con los irracionales.

Esta característica de los reales se complementa con la propiedad que establece que los números reales es un continuo de puntos sobre la recta real, o sea sobre le recta real no encontramos agujeros, no hay puntos de la recta que no correspondan a un número real. Esto queda determinado por el llamado Axioma del Supremo que formulamos a continuación:

Definición 10 *Dado un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$, se dice que el número real a es una cota superior de S si se verifica*

$$\forall x \in S : x \leq a$$

Respecto a esta definición es claro que:

- No todo subconjunto S de los reales posee cota superior. Por ejemplo, el conjunto de los naturales no posee cota supérior, ya que de acuerdo al Axioma de Arquímedes, dado cualquier real x, hay un natural N mayor que él ($N > x$).
- Si a es cota superior de S, entonces todo número $b > a$ también es cota superior de S.
- No confundir este concepto con el de "mayor elemento de un conjunto"

  a es mayor elemento de $S \Longleftrightarrow$

  $$a \in S \wedge (\forall x \in S : x \leq a)$$

  Por ejemplo, en intervalo abierto $S =]0, 1[$ tiene como cota superior el número 1, pero no tiene mayor elemento.

Definición 11 *El conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ es acotado superiormente cuando él posee una cota superior.*

Definición 12 *El número real s es el supremo del conjunto S si y solo si*
a) s es cota superior de S y
b) ningún número menor que s es cota superior de S
Se escribe $s = \sup S$

En resumen, el supremo de un conjunto es la menor de todas sus cotas superiores.
El axioma del supremo establece que:

Todo subconjunto S de $\mathbb{R}$ que sea no vacío y acotado superiormente posee supremo

---

Exemplo 13 *El intervalo abierto $I =]0, 1[$ es no vacío y acotado superiormente. El supremo de I es el número* 1.

Exemplo 14 *El conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$ es no vacío y acotado superiormente. El supremo de S (que existe) define al número real $\sqrt{2}$.*

La construcción anterior (definiciones de cota superior hasta axioma del supremo) tiene un análogo en el concepto de cota inferior de un conjunto e ínfimo del conjunto. (Intente formalizar estas definiciones y la conclusión respecto al ínfimo de un subconjunto de $\mathbb{R}$)

8. Procesos infinitos

1. Usted dispone de una cuerda de longitud dada (por ejemplo 8 cm.) y de una tijera.

   Paso 1: Corta la cuerda por la mitad y elije una de las dos partes.

   Paso 2: Vuelve a cortar por la mitad el trozo elegido y elije una de las dos partes resultantes.

   Paso n : Repite el paso anterior todas las veces que sea posible.

   Respecto a este proceso discuta:

   - ¿cuál es la longitud de la cuerda elejida en el paso 3?
   - ¿cuál es la longitud de la cuerda elejida en el paso 15?
   - ¿cuál es la longitud de la cuerda elejida en el paso n?
   - ¿cuántas veces puede realizar el proceso?

2. Considere un cuadrado de lado 1

   Paso 1: Divida el cuadrado en dos partes iguales y sombree una de ellas.

   Paso 2: La parte sin sombrear divídala nuevamente en dos partes iguales y sombree una de ellas.

   Paso n : Repite el paso anterior todas las veces que sea posible.

   Respecto a éste:

   - ¿el proceso puede terminar?
   - ¿qué ocurre con la región sombreada?
   - al término del paso n ¿cuál es el área de la región sin sombrear?

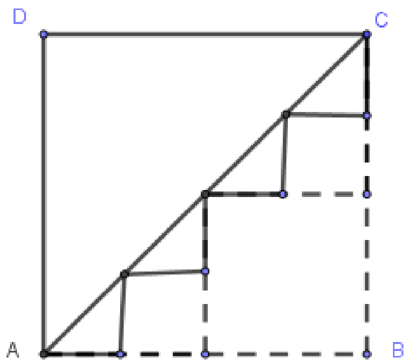
3. Considere el cuadrado de lado 1, de vértices $ABCD$ y diagonal $\overline{AC}$.

   Paso 1: Divida la diagonal en dos partes iguales y sobre cada parte construya un triángulo rectangulo de catetos horizontal y vertical, bajo diagonal.

   Considere la poligonal formada por los catetos de los triángulos construidos y que va del punto A hasta el punto C.

   Paso 2: Repita el proceso del paso 1 en cada triángulo rectángulo construido en el paso anterior.

   Considere la poligonal formada por los catetos de los triángulos construidos en este paso. (Ver figura abajo)



Paso n : Repita el paso anterior para construir una nueva poligonal.

Respecto de este proceso:

- Imagine la poligonal en el paso $n = 100$.
- ¿Le parece que en cada paso la poligonal se aproxima más a la diagonal?
- Mida la longitud de cada poligonal construida.
- ¿Es cierto que las longitudes de las poligonales se están acercando a la longitud de la diagonal $\overline{AC}$?