Movimiento en una Dimensión

Física I - 510140

Prof. José Aguirre Gómez

Departamento de Física
Oficina 315
e-mail:jaguirre@udec.cl

Contenidos

1. Introducción

Describiremos el movimiento de un objeto en términos del espacio y el tiempo, ignorando los *agentes* que lo causaron: **Cinemática**.

En este capítulo consideraremos sólo el movimiento en una dimensión: Movimiento a lo largo de una línea recta, o movimiento-1D.

Comenzaremos definiendo la posición, la velocidad y la aceleración: Esos conceptos serán aplicados en el estudio de objetos que se mueven en una dimensión con aceleración constante.

En física el movimiento puede ser de tres tipos:

- Traslacional: Un automóvil moviéndose en una carretera.
- Rotacional: La rotación de la tierra en torno de su eje.
- Vibracional: El movimiento de un péndulo.

Este y el próximo capítulo serán dedicados al movimiento traslacional.

Usaremos el **modelo particular**- el objeto en movimiento es descrito como una *partícula* independiente de su masa.

En general, **una partícula es un objeto puntual- esto es, un objeto de masa y tamaño infinitesimalmente pequeño**.

2. Posición, velocidad y rapidez

El movimiento de una partícula se conoce completamente si su posición en el espacio es conocida en todos los tiempos.

La **posición** de una partícula es la ubicación de la partícula con respecto a un punto de referencia que consideraremos el origen del sistema de coordenadas.

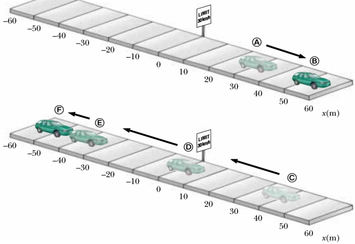


Figura 1(a). Un auto moviéndose hacia adelante y hacia atrás a lo largo de una línea recta tomada como el eje x.

En la Fig.1(a) la dirección de movimiento del auto es el eje x.

Al iniciar la toma de datos el auto se encuentra en la posición Ⓐ a $30\,\mathrm{m}$ a la derecha del letrero (origen de la coordenada x) en la carretera.

El letrero en la carretera indica el punto de referencia $x = 0$. Usaremos el modelo particular identificando algún punto sobre el automóvil (digamos la puerta delantera).

Comenzamos a cronometrar y cada 10 segundos anotamos la posición del auto relativa al letrero en $x = 0$.

Cuadro 1. Posición del auto en función del tiempo.

Posición	$t\,(\mathrm{s})$	$x\,(\mathrm{m})$
A	0	30
B	10	52
C	20	38
D	30	0
E	40	-37
F	50	-53

Como mostrado en la tabla de valores, el auto se mueve hacia adelante (definida como la dirección positiva) durante los 10 primeros segundos, desde la posición A a la posición B.

Después de la posición B, los valores de la posición disminuyen, sugiriendo que el auto se mueve hacia atrás, desde la posición B a la posición F.

Una representación gráfica de los datos informados en el Cuadro 1 es presentada en la Fig. 1(b). **Gráfico posición-tiempo, o gráfico x vs t, o gráfico $x(t)$.**

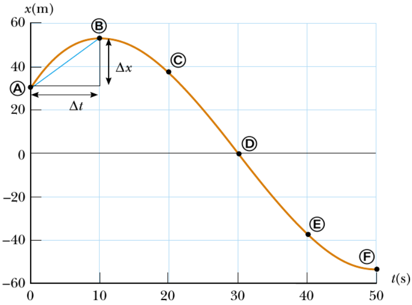


Figura 1(b). Gráfico $x(t)$ para el movimiento de la "partícula" de la Fig.(1a).

El **desplazamiento** (Δx) de una partícula se define como su cambio de posición en un dado intervalo de tiempo (Δt).

Para un movimiento desde la posición inicial x_i hasta la posición final x_f, el desplazamiento de la partícula es

$$\Delta x \equiv x_f - x_i, \quad \Delta\text{- letra griega "Delta" denota } \textit{cambio}. \tag{1}$$

De la Ec.(1) se puede ver que: $\Delta x > 0$ (positivo), si $x_f > x_i$ y $\Delta x < 0$ (negativo), si $x_f < x_i$.

La **distancia** es la longitud de un camino seguido por la partícula (es representada siempre con un número positivo).

El **desplazamiento** es una cantidad vectorial [**tiene magnitud y dirección**, y en una dimensión puede ser positiva o negativa].

En este capítulo usaremos los signos positivo $(+)$ y negativo $(-)$ para indicar la dirección de los vectores (sólo debido a que el movimiento es en una dimensión, es decir, a lo largo de una línea recta).

Por ejemplo, para movimiento horizontal el sentido positivo es hacia la derecha (arbitrariamente).

- Cualquier objeto moviéndose siempre hacia la derecha sufre un desplazamiento positivo; $\Delta x > 0$, $x_f > x_i$.
- Cualquier objeto moviéndose siempre hacia la izquierda sufre un desplazamiento negativo; $\Delta x < 0$, $x_f < x_i$.

En la gráfica de la Fig.1(b), los datos mostrados corresponden sólo a los seis punto del Cuadro 1: La curva suave es sólo una **posibilidad** del movimiento real del automóvil; una **suposición** acerca del movimiento del automóvil. Mantenga eso en mente!

Si la curva suave representa el movimiento real del automóvil, la gráfica contiene información acerca del intervalo total de 50 segundo del movimiento.

Un gráfico dice más que mil palabras! Por ejemplo:

- El auto cubrió una mayor distancia en la mitad del íntervalo de 50 segundos que al final del éste: Entre (C) y (D), el auto viajó casi 40 m en 10 s, mientras que entre (E) y (F), solo viajó menos de la mitad del tramo entre (C) y (D).

La velocidad media $\overline{v}_x$ de una partícula se define como el desplazamiento de la partícula Δx dividido por el intervalo de tiempo Δt durante el cual ocurre dicho:

$$\boxed{\overline{v}_x \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}}, \tag{2}$$

donde el subíndice x indica movimiento a lo largo del eje x. Las dimensiones de la velocidad media son longitud dividido por tiempo $\mathrm{L}^1\mathrm{M}^0\mathrm{T}^{-1}$ y las unidades en el sistema SI son metros por segundo $(\mathrm{m/s})$.

En un movimiento en una dimensión $\overline{v}_x$ puede ser positivo o negativo, dependiendo del signo del desplazamiento. (El intervalo de tiempo Δt es siempre positivo.)

- Si la coordenda de la partícula aumenta (esto es, $x_f > x_i$), entonces $\Delta x > 0$ y $\overline{v}_x > 0$ (movimiento hacia la derecha: a mayores valores de x).

- Si la coordenda de la partícula disminuye (esto es, $x_f < x_i$), entonces $\Delta x < 0$ y $\overline{v}_x < 0$ (movimiento hacia la izquierda, hacia menores valores de x).

Geométricamente, la velocidad media se interpreta dibujando una línea recta entre dos puntos cualquieras del gráfico posición-tiempo [ver Fig.1(b)]. La línea recta forma la hipotenusa de un triángulo rectángulo de altura Δx y base Δt.

La pendiente de esa línea es la razón $\Delta x/\Delta t$ [definición de velocidad media, Ec.(2)].

Por ejemplo, entre A y B, Fig.2(b), se tiene:

$$\overline{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{52\,\mathrm{m} - 30\,\mathrm{m}}{10\,\mathrm{s} - 0\,\mathrm{s}} = 2.2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Comúnmente, los términos **rapidez** y **velocidad** son intercambiables: En física, existe una clara distinción entre ellos.

Por ejemplo, en un viaje de ida y vuelta de $40\,\mathrm{m}$, punto de partida igual al punto de llegada, el desplazamiento total es cero, así la velocidad media es cero! Sin embargo, la distancia total recorrida es $40\,\mathrm{m}$. ¿Cuán rápido se realizó el viaje?

La **rapidez media** de una partícula, una cantidad escalar, se define como **la distancia total recorrida dividida por el intervalo total de tiempo requerido para recorrerla:**

$$\boxed{\text{rapidez media} = \frac{\text{distancia total recorrida}}{\text{tiempo empleado en recorrerla}}}. \qquad (3)$$

Al igual que la velocidad, las unidades en el sistema SI de la rapidez media son metro por segundo $(\mathrm{m/s})$: Como no tiene dirección no posee signo algebraico.

El conocimiento de la velocidad media o de la rapidez media de la partícula no entrega información acerca de los detalles del movimiento.

Por ejemplo, suponga que le lleva $45\,\mathrm{s}$ viajar $100\,\mathrm{m}$ en línea recta hacia el portón de embarque en un aeropuerto. En la marca de los $100\,\mathrm{m}$, tiene ganas de ir al baño, y retrocede $25\,\mathrm{m}$ a lo largo de la misma línea recta, haciendo ese recorrido en $10\,\mathrm{s}$. La magnitud de la *velocidad media* para ese viaje es:

$$\overline{v} = \frac{100\,\mathrm{m} - 25\mathrm{m}}{45\,\mathrm{s} + 10\,\mathrm{s}} = \frac{75\,\mathrm{m}}{55\,\mathrm{s}} = 1.4\,\mathrm{m/s}.$$

La *rapidez media* para ese viajes es

$$\text{rapidez media} = \frac{100\,\mathrm{m} + 25\mathrm{m}}{45\,\mathrm{s} + 10\,\mathrm{s}} = \frac{125\,\mathrm{m}}{55\,\mathrm{s}} = 2.3\,\mathrm{m/s}.$$

Ejemplo 1. Cálculo de la velocidad y la rapidez media

Encuentre el desplazamiento, la velocidad media y la rapidez media del auto de la Fig.1(b) entre las posiciones Ⓐ y Ⓕ.

Solución. Del gráfico de la Fig.1(b) y del Cuadro 1 se tiene que $x_{\mathsf{A}} = 30\,\mathrm{m}$ y $t_{\mathsf{A}} = 0\,\mathrm{s}$; $x_{\mathsf{F}} = -53\,\mathrm{m}$ y $t_{\mathsf{F}} = 50\,\mathrm{s}$. Usando la Ec.(1), encontramos:

$$\Delta x_{\mathsf{AF}} = x_{\mathsf{F}} - x_{\mathsf{A}} = -53\,\mathrm{m} - 30\,\mathrm{m} = -83\,\mathrm{m},$$

o sea, el auto se ancuentra a $83\,\mathrm{m}$ a la izquierda de la posición x_{A}.

Usando la Ec.(2), se encuentra, con $\Delta t_{\mathsf{AF}} = t_{\mathsf{F}} - t_{\mathsf{A}} = 50\,\mathrm{s}$:

$$\overline{v}_{x,\mathsf{AF}} = \frac{\Delta x_{\mathsf{AF}}}{\Delta t_{\mathsf{AF}}} = \frac{-83\,\mathrm{m}}{50\,\mathrm{s}} = -1.7\,\mathrm{m/s}.$$

Asumiendo que los detalles de la posición del automóvil están descritos por la curva de la Fig.1(b), encontramos que la distancia total recorrida por el automóvil es: la distancias desde la posición Ⓐ a Ⓑ más la distancia Ⓑ a Ⓕ.

La distancia total recorrida es realizada en el tiempo total: El tiempo para ir desde (A) a (B) más el tiempo para ir desde (B) a (F).

De lo anterior, usando la Ec.(3), encontramos:

$$\begin{aligned}\text{rapidez media} &= \frac{\text{distancia total}}{\text{tiempo total}} = \frac{22\,\mathrm{m} + 105\,\mathrm{m}}{50\,\mathrm{s}} \\ &= \frac{127\,\mathrm{m}}{50\,\mathrm{s}} = 2.5\,\mathrm{m/s}.\end{aligned}$$

3. Velocidad instantánea y rapidez

¿Qué significa o se quiere decir cuando se habla de cuan rápido algo se está moviendo si "congelamos el tiempo" y hablamos acerca de un instante individual?

Esta es una cuestión que sólo se aclaró a finales de 1600. En esa época, científicos ayudados con la invención del cálculo infinitesimal comenzaron a entender un objeto en movimiento en cualquier instante de tiempo.

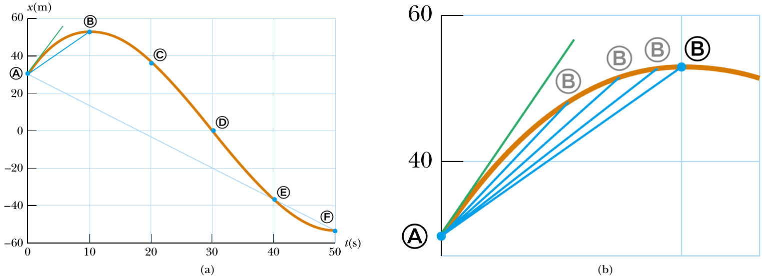


Figura 2. (a) Gráfico $x(t)$ para el movimiento de la "partícula" de la Fig.1(b). (b) Aumento del lado izquierdo superior mostrando como las líneas azules entre A y B se aproximan de la línea tangente verde amedida que la posición B se aproxima a A.

A medida que la posición (B) se mueve hacia la posición (A), las líneas azules se aproximan a la tangente de color verde.

La pendiente de la línea de color verde en la posición (A) representa la velocidad del auto en ese punto.

La velocidad instantánea v_x es igual al valor límite de la razón $\Delta x/\Delta t$ a medida que Δt se aproxima a cero:

$$\boxed{v_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}}. \tag{4}$$

En la notación del cálculo, este límite es llamado la *derivada* de x con respecto a t, escrita como dx/dt;

$$\boxed{v_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}}. \tag{5}$$

La velocidad instantánea puede ser positiva o negativa o cero.

- Cuando la pendiente del gráfico $x(t)$ es positiva (cualquier instante dentro de los primeros 10 s de la Fig. 2.2), $v_x > 0$: El automóvil se mueve hacia valores de x mayores.
- Cuando la pendiente es negativa (después de la posición (B)), el automóvil se mueve hacia valores menores de x, $v_x < 0$.

- En la posición (B) la pendiente de la curva y la velocidad instantánea del auto son cero- el auto está en reposo momentáneo.

Desde ahora en adelante usaremos la palabra **velocidad** para referirnos a la *velocidad instantánea*.

La **rapidez instantánea** de una partícula de define como la **magnitud** de su velocidad instantánea.

Por ejemplo, si una partícula tiene una velocidad instantánea de $+25\,\mathrm{m/s}$ a lo largo de una dada línea y otra partícula tiene una velocidad instantánea de $-25\,\mathrm{m/s}$ a lo largo de la misma línea, ambas partículas tienen una rapidez de $25\,\mathrm{m/s}$.

Así como para el caso de la velocidad, referiremos simplemente **rapidez** de una partícula a la *rapidez instantánea*.

Ejemplo 2. La velocidad de diferentes objetos

Considere los siguientes movimientos en una dimensión:

(A) Una bola lanzada directamente hacia arriba alcanza su máxima posición y cae hasta llegar a su mano.

(B) Un auto de carrera parte desde el reposo y aumenta su rapidez hasta $100\,\mathrm{m/s}$.

(C) Una nave espacial se mueve en el espacio con velocidad constante.

¿Existe(n) cualquier punto(s) en el movimiento de esos objetos en la cual la velocidad instantánea tenga el mismo valor que la velocidad media a lo largo de todo el movimiento? Si la respuesta es sí, identifique el (los) punto (puntos)

Solución. Para responder esas preguntas recuerde que la velocidad media de una partícula en un movimiento unidimensional se define como Δx (desplazamiento) dividido por el intervalo de tiempo (Δt) en el que ocurre ese desplazamiento. Y velocidad instantánea es el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo se hace infinitesimalmente pequeño $\Delta t \to 0$.

(A) Identifiquemos el movimiento hacia arriba con el eje y positivo y, hacia abajo, con el eje y negativo. En este caso $\Delta y = 0$ (el desplazamiento es cero; la bola sale de la mano y llega a la mano) de modo que $\overline{v}_y = 0$. En el punto más alto del movimiento de la bola la velocidad instantáne $v_y = 0$ (la bola está momentáneamente en reposo y comienza a caer).

(B) La velocidad media del auto no puede ser determinada con precisión desde la información dada, pero puede estar entre 0 y $100\,\mathrm{m/s}$. Dado que el auto puede tener cualquier velocidad entre 0 y $100\,\mathrm{m/s}$ en algún instante durante el intervalo, debe haber algún instante en el cual la velocidad instantánea sea igual a la velocidad media del automóvil.

(C) Dado que la velocidad instantánea de la nave espacial es constante, su velocidad instantánea en cualquier instante y su velocidad media sobre cualquier intervalo de tiempo son la misma.

Ejemplo 3. Velocidad instantánea y velocidad media

Una partícula se mueve a lo largo del eje x. Su posición varía con el tiempo de acuerdo a la expresión

$$x(t) = -\left(4.0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)t + \left(2.0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)t^2,$$

donde x es medido en metros y t, en segundos. El gráfico $x(t)$ para ese movimiento es mostrado en la Fig. 3 (página siguiente).

Note que la partícula se mueve en la dirección negativa del eje x para el primer segundo del movimiento, está momentáneamente en reposo en el instante $t = 1.0\,\mathrm{s}$ y se mueve en la dirección positiva del eje x para tiempos mayores $t > 1.0\,\mathrm{s}$.

(a) Determine el desplazamiento de la partícula en los intervalos de tiempo $t = 0.0$ a $t = 1.0\,\mathrm{s}$ y $t = 1.0\,\mathrm{s}$ a $t = 3.0\,\mathrm{s}$.

(b) Calcule la velocidad media durante esos dos intervalos de tiempo.

(c) Encuentre la velocidad instantánea de la partícula en $t = 2.5\,\mathrm{s}$.

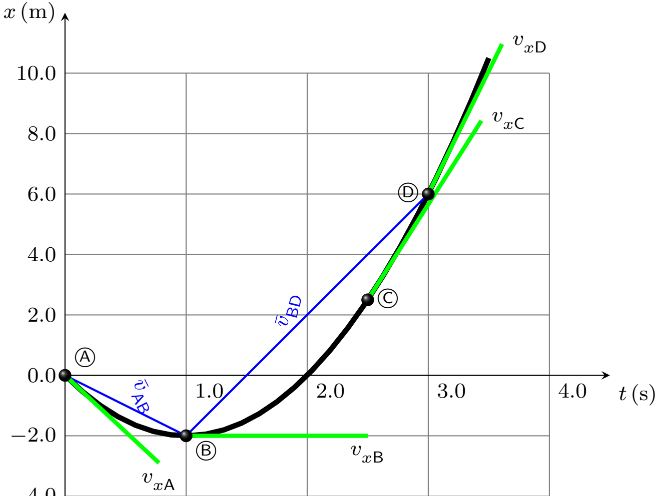


Figura 3. Gráfico $x(t)$ para el movimiento de la partícula del Ejemplo 3.

Solución

(a) En el punto de partida Ⓐ: $t_{\mathsf{A}} = 0\,\mathrm{s}$ y

$$x_{\mathsf{A}} = -\left(4.0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)(0.0\,\mathrm{s}) + \left(2.0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(0.0\,\mathrm{s})^2 = 0.0\,\mathrm{m}.$$

En el punto Ⓑ: $t_{\mathsf{B}} = 1.0\,\mathrm{s}$ y

$$x_{\mathsf{B}} = -\left(4.0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)(1.0\,\mathrm{s}) + \left(2.0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(1.0\,\mathrm{s})^2 = (-4.0 + 2.0)\,\mathrm{m} = -2.0\,\mathrm{m}.$$

En ese intervalo el desplazamiento de la partícula Δx_{AB} es:

$$\Delta x_{\mathsf{AB}} = x_{\mathsf{B}} - x_{\mathsf{A}} = -2.0\,\mathrm{m} - 0.0\,\mathrm{m} = -2.0\,\mathrm{m}.$$

En el punto (D), $t_\mathsf{D} = 3.0\,\mathrm{s}$ y

$$x_\mathsf{D} = -\left(4.0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)(3.0\,\mathrm{s}) + \left(2.0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(3.0\,\mathrm{s})^2 = (-12 + 18)\,\mathrm{m} = 6\,\mathrm{m}.$$

En ese intervalo el desplazamiento de la partícula Δx_BD es:

$$\Delta x_\mathsf{BD} = x_\mathsf{D} - x_\mathsf{B} = 6\,\mathrm{m} - (-2.0\,\mathrm{m}) = 8\,\mathrm{m}.$$

(b) La velocidad media para el intervalo (A) a (B), con $\Delta t_\mathsf{AB} = 1.0\,\mathrm{s}$ es:

$$\overline{v}_\mathsf{AB} = \frac{\Delta x_\mathsf{AB}}{\Delta t_\mathsf{AB}} = \frac{-2.0\,\mathrm{m}}{1.0\,\mathrm{s}} = -2.0\,\mathrm{m/s}.$$

La velocidad media para el intervalo (B) a (D) es, con $\Delta t_\mathsf{BD} = 2.0\,\mathrm{s}$:

$$\overline{v}_\mathsf{BD} = \frac{\Delta x_\mathsf{BD}}{\Delta t_\mathsf{BD}} = \frac{8\,\mathrm{m}}{2.0\,\mathrm{s}} = 4\,\mathrm{m/s}.$$

(c) Dado que las constante de la expresión para $x(t)$ son las apropiadas, mantendremos sólo los valores numéricos de ellas en el análisis que se sigue. En cualquier instante de tiempo t la posición de la partícula es dada por:

$$x(t) = -4.0t + 2.0t^2,$$

Un instante de tiempo posterior $t + \Delta t$, la posición de la partícula es dada por:

$$\begin{aligned} x(t+\Delta t) &= -4.0(t+\Delta t) + 2.0(t+\Delta t)^2 \\ &= -4.0t - 4.0\Delta t + 2.0t^2 + 4.0t\Delta t + 2.0(\Delta t)^2 \end{aligned}$$

El desplazamiento entre esos dos puntos es

$$\begin{aligned} \Delta x = x(t+\Delta t) - x(t) &= -4.0t - 4.0\Delta t + 2.0t^2 + 4.0t\Delta t + 2.0(\Delta t)^2 \\ &- [-4.0t + 2.0t^2] = (-4.0 + 4.0t)\Delta t + 2.0(\Delta t)^2 \end{aligned}$$

La velocidad media para ese intervalo es, con $\Delta t = (t + \Delta t) - t$:

$$\overline{v}_x = \frac{(-4.0 + 4.0t)\Delta t + 2.0(\Delta t)^2}{\Delta t} = (-4.0 + 4.0t) + 2.0\Delta t.$$

Usando la definición de velocidad instantánea, es decir, haciendo $\Delta t \to 0$, encontramos la siguiente expresión para la velocidad de la partícula en cualquier instante de tiempo t:

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \overline{v}_x = -4.0 + 4.0t.$$

En particular, en $t = 2.5\,\mathrm{s}$, la velocidad instantánea es

$$v_x(2.5\,\mathrm{s}) = -4.0 + 4.0(2.5\,\mathrm{s}) = 6\,\mathrm{m/s}.$$

4. Aceleración

En nuestro día a día lidiamos con movimientos en los cuales la velocidad de una partícula cambia a medida que se mueve.

Cuando la velocidad de una partícula cambia con el tiempo, se dice que la partícula está **acelerando**. Por ejemplo, la velocidad de un auto aumenta cuando parte y diminuye cuando se aplican los frenos.

Suponga que una partícula se mueve a lo largo de una línea recta (digamos el eje x) y tiene una velocidad inicial v_{xi} en el instante t_i en la posición Ⓐ y una velocidad final v_{xf} en el instante t_f en la posición Ⓑ [ver Fig. 4]

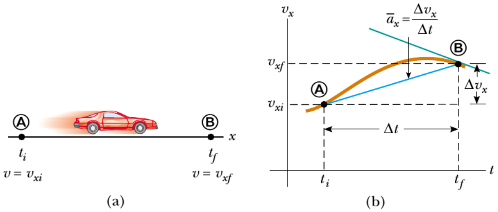


Figura 4. (a) Movimiento de un auto con velocidad cambiante y gráfico $v(t)$ para el movimiento del auto.

La aceleración media $\overline{a}_x$ de la partícula se define como el *cambio* de la velocidad Δv_x dividida por el intervalo de tiempo Δt durante el cual ocurre ese cambio:

$$\boxed{\overline{a}_x \equiv \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i}}. \tag{6}$$

En un movimiento unidimensional, signos positivos y negativos indican la dirección de la aceleración.

Las dimensiones de la aceleración son $[a] = \mathrm{L}^1\mathrm{M}^0\mathrm{T}^{-2}$.

Las unidades en el sistema SI de la aceleración son metros por segundo cuadrado $(\mathrm{m/s^2})$.

Un carro que se mueve con una aceleración de $+2\,\mathrm{m/s^2}$ significa que muda su velocidad en $2\,\mathrm{m/s}$ en cada segundo.

Al igual que el desplazamiento y la velocidad, la aceleración es una cantidad **vectorial**: Tiene magnitud y dirección.

Con base en la Fig. 4(a). Suponga que la posición de la partícula Ⓑ se aproxima más y más a la posición Ⓐ, esto es, el intervalo de tiempo se hace cada vez más pequeño; $\Delta t \to 0$.

Se define la aceleración instantánea a_x como el límite de la razón $\Delta v_x/\Delta t$ cuando $\Delta t \to 0$:

$$\boxed{a_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt}}. \tag{7}$$

La aceleración instantánea es igual a la derivada de la velocidad con respecto al tiempo la cual, por definición, es la pendiente del gráfico $v_x(t)$.

La pendiente de la línea verde en la Fig. 4 es igual a la aceleración instantánea en el punto Ⓑ.

Así como la velocidad de una partícula en movimiento en un dado punto es la pendiente de la curva en ese punto en el gráfico $x(t)$, la aceleración de la partícula en un dado punto es igual a la pendiente del gráfico $v_x(t)$ en ese punto.

Si $a_x > 0$, la aceleración es en la dirección positiva del eje x; si $a_x < 0$, la aceleración es en la dirección negativa del eje x.

En un movimiento unidimensional:

Si la velocidad y la aceleración de un objeto están en la misma dirección, el objeto está acelerando. Por otro lado, si la dirección de la velocidad y de la aceleración son opuestas, el objeto está desacelerando.

Desde ahora en adelante usaremos simplemente **aceleración** para *aceleración instantánea*.

Dado que $v_x = dx/dt$, la aceleración puede ser escrita como:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} : \tag{8}$$

En un movimiento unidimensional, la aceleración es igual a la *segunda derivada* de x con respecto al tiempo.

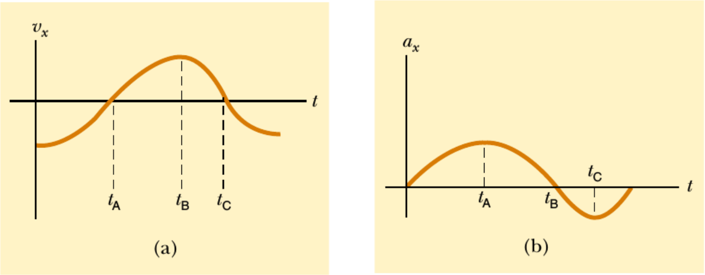


Figura 5. (a) Gráfico $v_x(t)$. (b) Gráfico $a(t)$.

Conforme la Fig. 5:

- En cualquier instante la aceleración es la pendiente del gráfico $v_x(t)$ en ese instante.
- Valores positivos de aceleración $(a_x > 0)$ corresponden a esos puntos de la Fig. 5(a) donde la velocidad está aumentando en la dirección positiva de x.
- La aceleración alcanza su máximo valor en el instante t_A, donde la pendiente del gráfico $v(t)$ es máxima.

- La aceleración tiene un valor cero $(a_x = 0)$ en t_B, donde la velocidad es máximas, esto es, cuando la pendiente del gráfico $x(t)$ es cero.
- La aceleración es negativa $(a_x < 0)$ cuando la velocidad está disminuyendo en la dirección positiva del eje x, y alcanza su valor más negativo en el instante t_C.

Ejemplo 4. Relación gráfica entre x, v_x y a_x

La posición de un objeto que se mueve a lo largo del eje x varía con el tiempo según la Fig. 6(a). Interprete los gráficos $v_x(t)$ (b) y $a_x(t)$ (c).

Entre t_O y t_{A}, la pendiente de $x(t)$ aumenta uniformemente: La velocidad aumenta linealmente.

Entre t_{A} y t_{B} la pendiente de $x(t)$ es constante: La velocidad permanece constante.

En t_{D} la pendiente de $x(t)$ es cero: La velocidad es cero en ese instante.

Entre t_{D} y t_{E} la pendiente de $x(t)$ es negativa: La velocidad es negativa y disminuye uniformemente en ese intervalo.

Entre t_{E} y t_{F} sigue siendo negativa y en t_{F} es cero. Finalmente, después de t_F la pendiente de $x(t)$ es cero: El cuerpo queda en reposo.

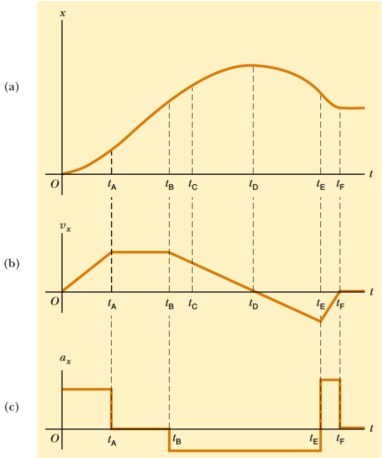


Figura 6. Gráficos (a) $x(t)$, (b) $v_x(t)$ y (c) $a_x(t)$.

Entre t_O y t_A la pendiente de $v_x(t)$ es positiva y constante: La aceleración es positiva y constante en ese intervalo.

Entre t_A y t_B la pendiente de $v_x(t)$ es cero: La acelaración es cero.

Entre t_B y t_E la pendiente de $v_x(t)$ es negativa y constante: La aceleración es negativa y constante en ese intervalo.

Entre t_E y t_F la pendiente de $v_x(t)$ es positiva y constante: La aceleración es positiva y constante en ese intervalo.

Depués de t_F la pendiente de $v_x(t)$ es cero: La aceleración es cero.

Note los quiebres abruptos de las curvas en los gráficos $v_x(t)$ y $a_x(t)$: Esos quiebres no son reales. Esos cambios instantáneos no ocurren en la realidad.

Ejemplo 5. Aceleración media e instantánea

La velocidad de una partícula que se mueve a lo largo de la dirección x varía en el tiempo de acuerdo a la expresión

$$v_x(t) = 40\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - \left(5.0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\right)t^2,$$

donde t es medido en segundos.

(a) Encuentre la aceleración media en el intervalo de tiempo $t = 0.0$ a $t = 2.0\,\mathrm{s}$.

(b) Determine la aceleración en $t = 2.0\,\mathrm{s}$.

Solución

(a) Hagamos:

$$t_{\mathsf{A}} = 0.0; \quad v_{x,\mathsf{A}} = 40\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - \left(5.0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\right)(0.0)^2 = 40\,\mathrm{m/s}$$
$$t_{\mathsf{B}} = 2.0\,\mathrm{s}; \quad v_{x,\mathsf{B}} = 40\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - \left(5.0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\right)(2.0\,\mathrm{s})^2 = 20\,\mathrm{m/s}.$$

De las cuales se obtiene

$$\Delta t_{\mathsf{AB}} = 2.0\,\mathrm{s}, \quad \Delta v_{x,\mathsf{AB}} = v_{x,\mathsf{B}} - v_{x,\mathsf{A}} = (20 - 40)\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = -20\,\mathrm{m/s}.$$

La aceleración media en ese intervalo es:

$$\overline{a}_{x,\mathsf{AB}} = \frac{\Delta v_{x,\mathsf{AB}}}{\Delta t_{\mathsf{AB}}} = \frac{-20\,\mathrm{m/s}}{2.0\,\mathrm{s}} = -10\,\mathrm{m/s}^2.$$

(b) La velocidad en cualquier instante de tiempo t es:

$$v_x(t) = 40\,\mathrm{m/s} - \left(5.0\,\mathrm{m/s}^3\right) t^2$$

La velocidad en cualquier instante de tiempo posterior $t + \Delta t$ es:

$$\begin{aligned} v_x(t+\Delta t) &= 40\,\mathrm{m/s} - \left(5.0\,\mathrm{m/s}^3\right)(t+\Delta t)^2 \\ &= 40\,\mathrm{m/s} - \left(5.0\,\mathrm{m/s}^3\right) t^2 - \left(10\,\mathrm{m/s}^3\right) t\,\Delta t - \left(5.0\,\mathrm{m/s}^3\right)(\Delta t)^2 \end{aligned}$$

De modo tal que:

$$\Delta v_x = v_x(t+\Delta t) - v_x(t) = -\left(10\,\mathrm{m/s}^3\right) t\,\Delta t - \left(5.0\,\mathrm{m/s}^3\right)(\Delta t)^2$$

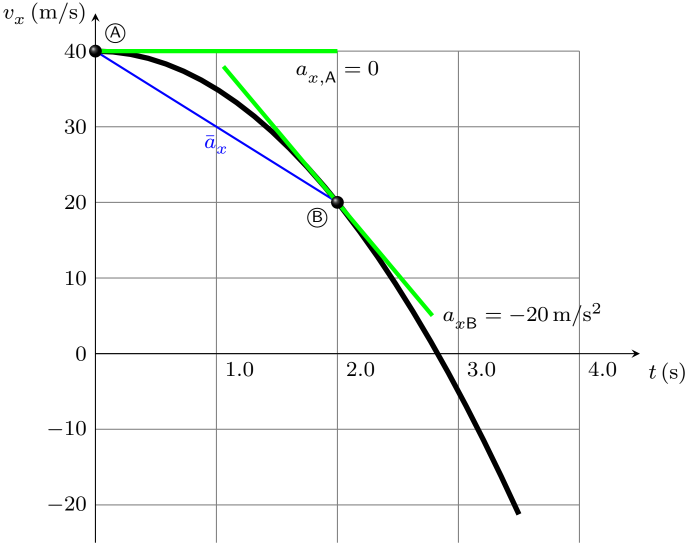


Figura 7. Gráfico $v_x(t)$ para el movimiento de la partícula del Ejemplo 5.

Dividiendo por Δt la última expresión y haciendo $\Delta t \to 0$ se obtiene una expresión para la aceleración en *cualquier* instante, esto es:

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = -\left(10\,\mathrm{m/s^3}\right) t$$

En el caso particular en $t = 2.0\,\mathrm{s}$, punto B,

$$a_{x,\mathsf{B}} = -\left(10\,\mathrm{m/s^3}\right)(2.0\,\mathrm{s}) = -20\,\mathrm{m/s^2}.$$

Como en $t = 2.0\,\mathrm{s}$, $v_x > 0$ y $a_x < 0$, la partícula está desacelerando.

Note que la aceleración media es la pendiente de la línea azul que conecta los puntos A y B.

La aceleración instantánea es la pendiente de la línea verde tangente a la curva $v_x(t)$ en el punto B.

La aceleración **no es constante** en este ejemplo.

5. Diagramas de movimientos

Los conceptos de velocidad y aceleración son comúnmente confundidos.

A modo de instrucción se usan diagramas de movimiento para describir la velocidad y la aceleración de un objeto en movimiento.

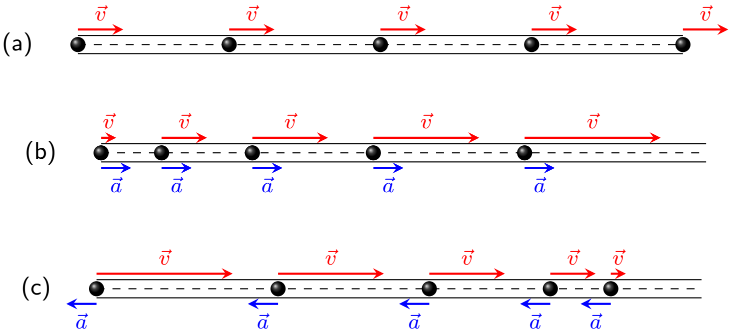


Figura 8. Diagrama de movimiento para una partícula (por ejemplo, un auto) moviéndose con: (a) velocidad constante (aceleración cero); (b) aceleración constante en la dirección de su velocidad, (c) con aceleración constante en la dirección *opuesta* a la de su velocidad.

La Fig.8 muestra fotografías *estroboscópicas* de una partícula en movimiento (la luz del estroboscopio emite flashes a una tasa constante). La partícula se mueve en línea recta de izquierda a derecha. El vector rojo describe la velocidad y el vector azul, la aceleración.

Figura 8(a): Imágenes igualmente espaciadas: Desplazamientos iguales para intervalos de tiempo iguales. Partícula moviéndose a **velocidad constante y positiva** y **aceleración cero**.

Figura 8(b): A medida que el tiempo avanza las imágenes se separan cada vez más. Los **vectores velocidad** aumentan debido a que los desplazamientos del auto aumentan entre puntos adyacentes a medida que el tiempo avanza. La partícula se mueve con **velocidad positiva** y **aceleración positiva**. La **velocidad** y la **aceleración** están en la misma dirección.

Figura 8(c): A medida que el tiempo avanza las imágenes se acercan más y más. Los **vectores velocidad** disminuyen debido a que los desplazamientos de la partícula disminuyen entre puntos adyacentes a medida que el tiempo avanza, pudiendo hacerse cero. La partícula se mueve hacia la derecha con una **aceleración constante negativa**. La **velocidad** y la **aceleración** están en direcciones opuestas.

6. Movimiento unidimensional con aceleración constante

Movimientos con aceleración variable, pueden ser complejos y difíciles de analizar.

Un tipo de movimiento común y simple en una dimensión es aquel en el cual la aceleración es constante. En ese caso $\overline{a}_x$ es numéricamente igual a a_x en cualquier instante del intervalo de tiempo: La velocidad muda a la misma tasa durante el movimiento.

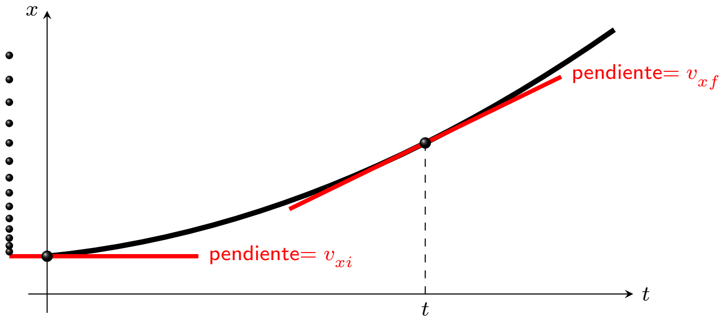


Figura 9(a). Partícula moviéndose a lo largo del eje x con aceleración constante.

Reemplacemos $\overline{a}_x$ por a_x en la Ec.(6) y tomemos $t_i = 0$ y $t_f = t$, siendo cualquier tiempo t posterior, se encuentra que

$$a_x = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t - 0}; \quad \rightarrow \quad \boxed{v_{xf} = v_{xi} + a_x t,} \quad \text{(para } a_x \text{ constante)}: \tag{9}$$

Si se conoce la velocidad inicial v_{xi} y la aceleración constante a_x, entonces, se puede determinar la velocidad v_{xf} en cualquier instante de tiempo posterior t.

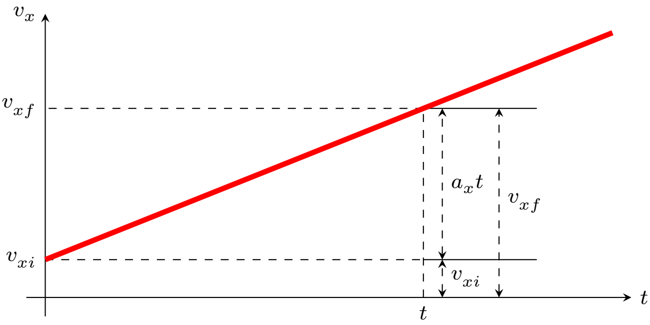


Figura 9(b). Gráfico $v_x(t)$ para la partícula moviéndose a lo largo del eje x de la Fig.9(a).

El gráfico $v_x(t)$ para este movimiento es una línea recta [ver Fig.9(b)], cuya pendiente (constante) es la aceleración. La pendiente positiva indica que la aceleración es positiva.

Una pendiente negativa indicaría que la aceleración es negativa.

El gráfico $a_x(t)$ para este movimiento es una línea recta de pendiente cero [ver Fig.9(c)].

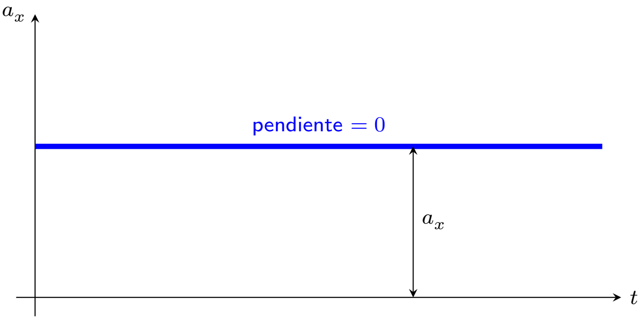


Figura 9(c). Gráfico $a_x(t)$ para la partícula moviéndose a lo largo del eje x de la Fig.9(a).

Para movimiento con aceleración constante, la velocidad varía linealmente con el tiempo según la Ec.(9): En cualquier intervalo de tiempo la velocidad media puede ser expresada como el promedio aritmético entre v_{xi} y v_{xf}:

$$\boxed{\overline{v}_x = \frac{v_{xi} + v_{xf}}{2}}, \quad \text{(solo cuando } a_x \text{ constante)} \tag{10}$$

Recordando la Ec.(2): $\overline{v}_x = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$ y, usando la Ec.(10), se tiene

$$\frac{v_{xi} + v_{xf}}{2} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$$

Notando que $t_f = t$ y $t_i = 0$, entonces, $t_f - t_i = t$, de modo tal que

$$\frac{v_{xi} + v_{xf}}{2} = \frac{x_f - x_i}{t}$$

permite determinar la posición de la partícula en cualquier instante de tiempo t

$$\boxed{x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(v_{xi} + v_{xf}\right) t,} \quad \text{(para } a_x \text{ constante)} \tag{11}$$

Substituyendo la Ec.(9) en la Ec.(11), encontramos:

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}\left[v_{xi} + (v_{xi} + a_x t)\right] t = x_i + \frac{1}{2}\left(2v_{xi}t + a_x t^2\right)$$

la cual, después de cierta álgebra, nos permite escribir

$$\boxed{x_f = x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2,} \quad \text{(para } a_x \text{ constante)} \tag{12}$$

El gráfico posición-tiempo para movimiento con aceleración constante (positiva) mostrado en la Fig.9(a) se obtiene con la Ec.(12): **Note que es una parábola!**

La pendiente de la línea tangente a esa curva en $t = 0$ es igual a la velocidad inincial v_{xi} y, la pendiente de la línea tangente a esa curva en cualquier instante de tiempo t, es igual a la velocidad v_{xf} en ese instante.

Finalmente, de la Ec.(9) podemos obtener el tiempo t

$$t = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{a_x}$$

Usando la expresión anterior para t en la Ec.(11), se encuentra

$$\begin{aligned} x_f &= x_i + \frac{1}{2}\left(v_{xi} + v_{xf}\right)\left(\frac{v_{xf} - v_{xi}}{a_x}\right) \\ &= x_i + \frac{1}{2}\left(\frac{v_{xi}v_{xf} - v_{xi}^2 + v_{xf}^2 - v_{xi}v_{xf}}{a_x}\right) = x_i + \frac{v_{xf}^2 - v_{xi}^2}{2a_x} \end{aligned}$$

la cual reordenada, nos lleva a:

$$\boxed{v_{xf}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x\left(x_f - x_i\right),} \quad \text{(para } a_x \text{ constante)} \tag{13}$$

Para un movimiento con **aceleración cero**, las Ecs.(9) a (11) se tornan:

$$\left.\begin{aligned} v_{xf} &= v_{xi} = v_x \\ x_f &= x_i + v_x t \end{aligned}\right\}, \quad \text{cuando } a_x = 0.$$

Es decir, cuando la aceleración de una partícula es cero (constante), su velocidad es constante y su posición cambia linealmente con el tiempo.

Ecuaciones cinemáticas para el movimiento en una dimensión de una partícula bajo aceleración constante

Ecuación	Información dada por la ecuación
$v_{xf} = v_{xi} + a_x t$	Velocidad en función del tiempo
$x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(v_{xi} + v_{xf}\right) t$	Posición en función de la velocidad y el tiempo
$x_f = x_i + v_{xi} t + \frac{1}{2} a_x t^2$	Posición en función del tiempo
$x_f = x_i + v_{xf} t - \frac{1}{2} a_x t^2$	Posición en función del tiempo
$v_{xf}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x\left(x_f - x_i\right)$	Velocidad en función de la posición

Nota: Se ha escogido el movimiento a lo largo del eje x. Para movimiento en y o z sólo cambie la etiqueta x por la etiqueta del eje correspondiente.

Ejemplo 6. Un aterrizaje

Un jet aterriza sobre una pista de un portaviones a $64\,\mathrm{m/s}$.

(a) ¿Cuál es la aceleración (asumida constante) si el avión se detiene en $2.0\,\mathrm{s}$ debido a la acción de un cable que frena al jet y lo hace detenerse?

(b) Si el jet toca el piso en la posición $x_i = 0$, ¿cuál es la posición final del jet?

(c) Si la pista tiene una longitud de $75\,\mathrm{m}$, ¿Cuál es la máxima velocidad inicial con la que debe llegar el jet sobre la pista para que se detenga sobre ella con la aceleración del ítem (a)?

Solución.

(a) Asumamos el movimiento a lo largo del eje x. Se tiene $v_{xi} = 64\,\mathrm{m/s}$, $v_{xf} = 0$ y $t = 2.0\,\mathrm{s}$. Se nos pide calcular a_x. Usando la Ec.(9), se tiene

$$a_x = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t} = \frac{0 - 64\,\mathrm{m/s}}{2.0\,\mathrm{s}} = -32\,\mathrm{m/s}^2.$$

(b) Nos piden x_f. Usando la Ec.(11) se encuentra

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}\left(v_{xi} + v_{xf}\right)t = 0 + \frac{1}{2}\left(64\,\mathrm{m/s} + 0\right)\left(2.0\,\mathrm{s}\right) = 64\,\mathrm{m}$$

(c) En este caso se tiene: $x_i = 0$, $x_f = 75\,\mathrm{m}$, $v_{xf} = 0$ y $a_x = -32\,\mathrm{m/s^2}$. Se nos pide calcular v_{xi}. La expresión que relaciona esas cantidades es la Ec.(13), la que podemos resolver para v_{xi}:

$$
\begin{aligned}
v_{xi} &= \sqrt{v_{xf}^2 - 2a_x(x_f - x_i)} \\
&= \sqrt{0 - 2\,(-32\,\mathrm{m/s^2})\,(75\,\mathrm{m} - 0)} = \sqrt{2(32\,\mathrm{m/s^2})(75\,\mathrm{m})} \\
v_{xi} &= \sqrt{4.8 \times 10^3}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2 = 69\,\mathrm{m/s}.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 7. Excediendo el límite de velocidad

Un automóvil viajando a una velocidad constante de $45\,\mathrm{m/s}$ pasa frente a una patrulla de carabineros escondida detrás de un anuncio publicitario. Un segundo, $1.0\,\mathrm{s}$, después de que el automóvil pasa el anuncio publicitario, la patrulla inicia su persecusión, acelerando a una tasa de $3\,\mathrm{m/s^2}$. ¿Cuánto tiempo le toma a la patrulla alcanzar al automóvil?

Solución

Note que se tienen dos tipos de movimiento con aceleración constante: Uno con velocidad constante (aceleración constante cero) y otro con aceleración constante de $3\,\mathrm{m/s^2}$.

Consideremos los movimientos a lo largo del eje x y en la dirección positiva, con la posición de la patrulla el origen del eje coordenado, $x_0 = 0$.

Consideremos el instante en el que la patrulla inicia la persecusión como el origen del tiempo.

Existen tres posiciones claves en el problema. 0; x_0 cuando el automóvil pasa por el anuncio. 1; x_1 cuando la patrulla inicia la persecusión. 2; x_2 (lo que se quiere determinar) cuando la patrulla alcanza al automóvil.

En el instante en el que la patrulla inicia la persecusión, la posición del automóvil es, con $x_{0\mathrm{a}} = 0$ y $v_{x\mathrm{a}} = 45.0\,\mathrm{m/s}$:

$$x_{1\mathrm{a}} = x_{0\mathrm{a}} + v_{x\mathrm{a}}(1.00\,\mathrm{s}) = 0 + (45\,\mathrm{m/s})\,(1.0\,\mathrm{s}) = 45\,\mathrm{m}.$$

En el instante en que la patrulla alcanza al automóvil, t_2, la posición de éste es:

$$x_{2\mathrm{a}} = x_{1\mathrm{a}} + v_{x\mathrm{a}} t_2 = 45\,\mathrm{m} + (45\,\mathrm{m/s})\,t_2.$$

En ese mismo instante, la patrulla alcanzó al automóvil y su posición es

$$\begin{aligned} x_{2\mathrm{p}} &= x_{1\mathrm{p}} + v_{x1\mathrm{p}} t_2 + \frac{1}{2} a_{x\mathrm{p}} t_2^2 \\ &= 0 + 0 + \frac{1}{2}\left(3\,\mathrm{m/s^2}\right) t_2^2 \end{aligned}$$

Dado que en t_2 se tiene $x_{2\mathrm{p}} = x_{2\mathrm{a}}$, se obtiene la siguiente ecuación cuadrática en t_2:

$$\frac{1}{2}\left(3\,\mathrm{m/s^2}\right) t_2^2 = 45\,\mathrm{m} + (45\,\mathrm{m/s})\,t_2 \Big/ * \frac{2\,\mathrm{s}^2}{3\,\mathrm{m}}$$

$$t_2^2 - (30\,\mathrm{s})\,t_2 - 30\,\mathrm{s}^2 = 0$$

Dado que las unidades son consistentes, vamos a resolver la ecuación cuadrática $t_2^2 - 30t_2 - 30 = 0$, esto es:

$$t_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}; \quad a = 1, \quad b = -30; \quad c = -30$$

$$t_2 = \frac{30 \pm \sqrt{(9.0 \times 10^2) + (1.2 \times 10^2)}}{2} = \frac{30 \pm 32}{2}$$

de la cual se obtienen las siguientes soluciones

$$t_2 = \frac{30 + 32}{2} = 31\,\mathrm{s} \quad \mathrm{y} \quad t_2 = \frac{30 - 32}{2} = -1.0\,\mathrm{s}$$

Dado que el tiempo es siempre positivo, se concluye que el tiempo que demora la patrulla en alcanzar al automóvil es $t_{\mathsf{C}} = 31\,\mathrm{s}$.

La solución gráfica para el Ejemplo 7 se muestra en el siguiente gráfico.

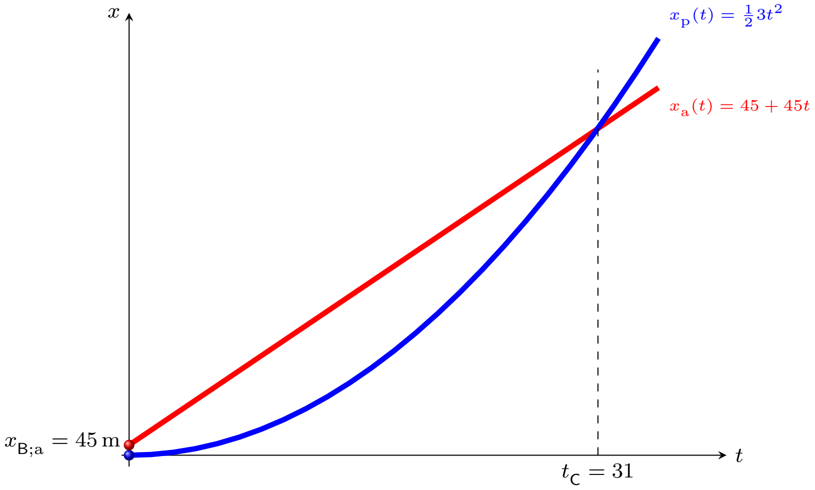


Gráfico $x(t)$ para los dos movimientos del Ejemplo 7.

7. Objetos cayendo libremente

Ejemplo más conocido de movimiento rectilíneo con aceleración (casi) constante.

Si se omiten los efectos del aire, todos los cuerpos- independiente de su masa y tamaño- caen con la misma aceleración.

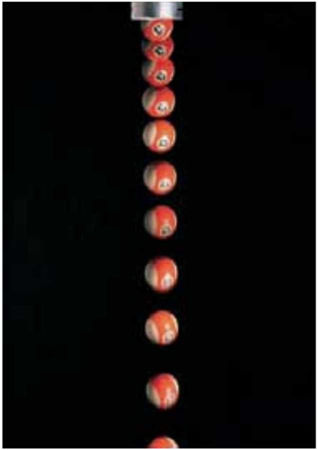
Para distancias de caida pequeñas ($\ll$ radio de la Tierra) y sin considerar efectos de la rotación de la Tierra: la aceleración es constante.

Con tales supuestos se usa un modelo idealizado denominado **caida libre** (incluye el lanzamiento vertical y el de proyectiles).

La aceleración constante es llamada **aceleración debida a la gravedad**, su magnitud es denotada g. Cerca de la superficie de la Tierra

$$\boxed{g = 9.80\,\mathrm{m/s^2} = 980\,\mathrm{cm/s^2} = 32.0\,\mathrm{ft/s^2}}.$$

Luna: $g_L = 1.60\,\mathrm{m/s^2}$; Sol: $g_S = 270\,\mathrm{m/s^2}$



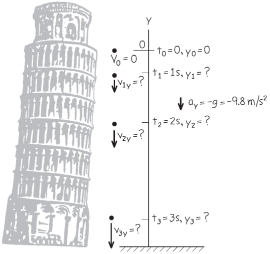
Fotografía de múltiples destellos de la caida de una bola de billar.

Ecuaciones cinemáticas para el movimiento de caida libre o lanzamiento vertical hacia arriba

Ecuación	Información dada por la ecuación
$v_{yf} = v_{yi} - gt$	Velocidad en función del tiempo
$y_f = y_i + \frac{1}{2}\left(v_{yi} + v_{yf}\right)t$	Posición en función de la velocidad y el tiempo
$y_f = y_i + v_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2$	Posición en función del tiempo
$y_f = y_i + v_{yf}t + \frac{1}{2}gt^2$	Posición en función del tiempo
$v_{yf}^2 = v_{yi}^2 - 2g\left(y_f - y_i\right)$	Velocidad en función de la posición

Ejemplo 8. Moneda en caida libre

Se deja caer una moneda de $\$100$ desde la parte superior de la Torre de Pisa; la moneda parte del reposo y cae libremente. Calcule la posición y la velocidad de la momenda después de 1.0, 2.0 y $3.0\,\mathrm{s}$ de soltarla. Use $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$



Moneda en caida libre.

Solución

Consideremos el eje y como el eje del movimiento y el punto desde donde se suelta la moneda como el origen de coordenadas. La posición de la moneda para un instante t cualquiera, usando $v_{yi} = 0$, es dada por

$$y_f = \cancelto{0}{y_i} + \cancelto{0}{v_{yi}}\, t - \frac{1}{2} g t^2 = -\frac{1}{2}\left(9.8\,\mathrm{m/s^2}\right) t^2 = -\left(4.9\,\mathrm{m/s^2}\right) t^2.$$

y su velocidad en esa posición es dada por

$$v_{yf} = \cancelto{0}{v_{yi}} - g t = -\left(9.8\,\mathrm{m/s^2}\right) t.$$

Para $t = 1.0\,\mathrm{s}$

$$y_{f1} = -\left(4.9\,\mathrm{m/s^2}\right)(1.0\,\mathrm{s})^2 = -4.9\,\mathrm{m}$$
$$v_{yf1} = -\left(9.8\,\mathrm{m/s^2}\right)(1.0\,\mathrm{s}) = -9.8\,\mathrm{m/s}.$$

Para $t = 2.0\,\mathrm{s}$

$$y_{f2} = -\left(4.9\,\mathrm{m/s^2}\right)(2.0\,\mathrm{s})^2 = -20\,\mathrm{m}$$
$$v_{yf2} = -\left(9.8\,\mathrm{m/s^2}\right)(2.0\,\mathrm{s}) = -20\,\mathrm{m/s}.$$

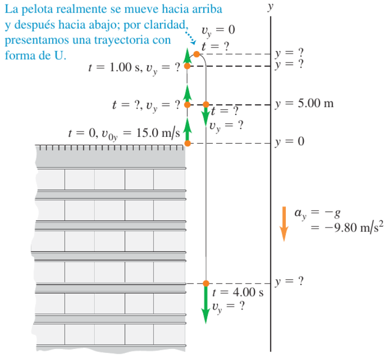
Para $t = 3.0\,\mathrm{s}$

$$y_{f3} = -\left(4.9\,\mathrm{m/s^2}\right)(3.0\,\mathrm{s})^2 = -44\,\mathrm{m}$$
$$v_{yf3} = -\left(9.8\,\mathrm{m/s^2}\right)(3.0\,\mathrm{s}) = -29\,\mathrm{m/s}.$$

Ejemplo 9. Movimiento ascendentes y descendente en caida libre

Lanza una pelota verticalmente hacia arriba desde la azotea de un edificio. La pelota sale de la mano, en un punto a la altura de la baranda de la azotea, con rapidez ascendente de $15.0\,\mathrm{m/s}$, quedando luego en caida libre. Al bajar, la pelota libra apenas el barandal. Usando $g = 9.80\,\mathrm{m/s^2}$, obtenga:

1. La posición y velocidad de la pelota en $t = 1.00\,\mathrm{s}$ y $t = 4.00\,\mathrm{s}$ después de lanzarla;
2. La velocidad de la pelota cuando está a $5.00\,\mathrm{m}$ sobre el barandal;
3. La altura máxima alcanzada por la pelota y el tiempo en que la alcanza;
4. La aceleración de la pelota en su altura máxima.



Posición y velocidad de una pelota lanzada verticalmente hacia arriba.

Solución

Tome el eje y como eje del movimiento, con el cero en la azotea del edificio. En este caso $y_i = 0$, $v_{yi} = 15.0\,\mathrm{m/s}$ y $g = 9.80\,\mathrm{m/s^2}$. Dada la consistencia de las unidades, colocaremos éstas sólo al final de los cálculos.

(1) En cualquier instante después de lanzada, la posición y_f y la velocidad v_{yf} de la pelota son dadas por

$$y_f = y_i + v_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2 = [(15.0)t - (4.90)t^2]\,\mathrm{m}$$
$$v_{fy} = v_{yi} - gt = [15.0 - (9.80)t]\,\mathrm{m/s}.$$

Para $t = 1.00\,\mathrm{s}$ esas expresiones dan

$$y_{f1} = 10.1\,\mathrm{m}, \quad v_{yf1}(t) = +5.2\,\mathrm{m/s}.$$

Para $t = 4.00\,\mathrm{s}$ esas expresiones dan

$$y_4(t) = -18.4\,\mathrm{m}, \quad v_{yf4}(t) = -24.2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

② En este caso se tiene $y_f = 5.00\,\mathrm{m}$, y_i, v_{yi} y g y se pide v_{yf}. Del cuadro de ecuaciones para caida libre usamos la última ecuación

$$v_{yf}^2 = v_{yi}^2 - 2g(y_f - y_i) = [(15.0)^2 - 2(9.80)(5.00)]\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$$
$$v_{yf}^2 = 127\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2 \quad \rightarrow \quad v_{yf} = \sqrt{127\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2} = \pm 11.3\,\mathrm{m/s}$$

La velocidad $v_{yf} = +11.3\,\mathrm{m/s}$ es la que lleva la pelota cuando pasa por esa posición en su viaje de subida y, $v_{yf} = -11.3\,\mathrm{m/s}$, cuando pasa por la misma posición en su viaje de caida.

③ Cuando la pelota alcanza la máxima altura, $y_{\text{máx}}$, su velocidad es $v_{yf} = 0$. Podemos usar la misma expresión usada en el ítem anterior, con $v_{yf} = 0$, de la cual se obtiene

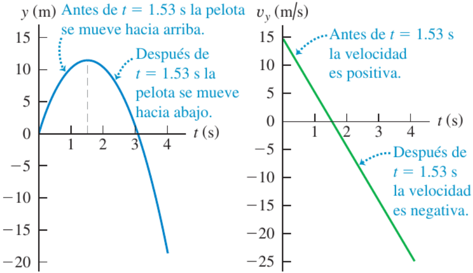
$$0 = v_{yi}^2 - 2gy_{\text{máx}} \quad \rightarrow \quad y_{\text{máx}} = \frac{v_{yi}^2}{2g} = \frac{(15.0)^2}{2(9.80)} = +11.5\,\mathrm{m}$$

Otra, es usar la primera ecuación para determinar el instante t en el cual $v_{yf} = 0$ y luego sustituir ese valor en la tercera ecuación para determinar $y_{\text{máx}}$. Esto es,

$$0 = v_{yi} - gt \quad \rightarrow \quad t = \frac{v_{yi}}{g} = \left[\frac{15.0}{9.80}\right] \text{s} = 1.53\,\text{s}$$

$$y_{\text{máx}} = v_{yi}t - \frac{1}{2}gt^2 = \left[(15.0)(1.53) - \frac{1}{2}(9.80)(1.53)^2\right] \text{m} = +11.6\,\text{m}.$$

4 En el punto más alto, así como en cualquier otro punto, la aceleración sigue siendo $-g = -9.80\,\text{m/s}^2$.



Gráficos $y(t)$ (izquierda) y $v_y(t)$ (derecha) de la pelota en función del tiempo.

Ejemplo 10. Anexo del Ejemplo 9

Determine el tiempo t para el cual la pelota del Ejemplo 9 está $5.00\,\mathrm{m}$ por debajo del barandal. Existen varias alternativas para determinar ese tiempo!

Solución

(1) Podemos usar la tercera ecuación y resolver la ecuación cuadrática para t. Como las unidades son las correctas sólo resolveremos esa ecuación numéricamente:

$$-5.00 = 15.0t - 4.90t^2 \quad \rightarrow \quad -1.02 = 3.06t - t^2$$

$$t = \frac{3.06 \pm \sqrt{(3.06)^2 - 4(-1.02)}}{2} = \frac{3.06 \pm \sqrt{13.4}}{2} = \frac{3.06 \pm 3.66}{2}$$

$$t_1 = \frac{3.06 + 3.66}{2} = 3.36\,\mathrm{s} \;\; ; \;\; t_2 = \frac{3.06 - 3.66}{2} = -0.30\,\mathrm{s}$$

(2) Resuelva la última ecuación para v_{yf}. Use ese valor en la primera ecuación y resuelva para t. *Nota:* En este caso la velocidad es negativa, la pelota está bajando!