Índice general

Capítulo 2

Espacios Vectoriales

En el capítulo anterior trabajamos con vectores de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, definimos dos operaciones con ellos, la suma de vectores y el producto de un vector por un escalar real, y mencionamos qué propiedades ellas cumplen.

En este capítulo y el siguiente generalizaremos el concepto de *vector* de modo que otros objetos matemáticos también puedan ser considerados vectores[1], definiremos la suma de vectores y el producto de un vector por un escalar, este escalar ya no tendrá que ser, como en el capítulo anterior, un número real, sino un elemento de un conjunto especial, que llamamos *cuerpo*. Antes de comenzar a trabajar con *vectores* definiremos entonces cuándo un conjunto de elementos puede ser llamado *cuerpo* y veremos ejemplos de conjuntos que son cuerpos, así como ejemplos de conjuntos que no son cuerpos.

2.1. Definición de cuerpo

Definición 2.1 (Cuerpo)**.** Sea $\mathbb{K}$ un conjunto dotado de, al menos, dos elementos $(0, 1 \in \mathbb{K})$. Entre los elementos de $\mathbb{K}$ se definen dos operaciones binarias internas: adición$(+)$ y multiplicación$(\cdot)$,

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \qquad \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}.$$

Si $x, y \in \mathbb{K}$ denotaremos $\cdot(x, y)$ mediante $x \cdot y$ y $+(x, y)$, por $x + y$.

Se dice que $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es un ***cuerpo*** si

1. $\forall\, x, y \in \mathbb{K} \ : \ x + y = y + x,$ $\qquad$ ($+$ es conmutativa)

[1] La abstracción y la generalización están estrechamente ligadas en matemáticas, un concepto se generaliza para poder abstraernos de objetos particulares que tengan ciertas propiedades en común y poder estudiarlos en general. Abstracción y generalización no es algo que se hace por primera vez en Álgebra 2. El concepto de número nos permite abstraernos de conjuntos particulares con cierta cantidad de elementos, desde pequeños aprendemos, por ejemplo, que $2 + 3 = 5$ y esto significa que si tenemos dos manzanas y alguien nos regala tres, tendremos cinco, pero lo mismo ocurre si tenemos dos lápices y alguien nos regala tres más, o, como se menciona en este capítulo de *Calle Sésamo*, *contando (abstrayéndonos) se ahorra uno un montón de trabajo*. De manera similar, al introducir los conceptos de cuerpo y espacio vectorial nos ahorraremos un montón de trabajo.

2. $\forall\, x, y, z \in \mathbb{K} \,:\, x + (y + z) = (x + y) + z,$ (+ es asociativa)
3. $\forall\, x \in \mathbb{K} \,:\, x + 0 = x,$ (0 es neutro para +)
4. $\forall\, x \in \mathbb{K} \,:\, \exists - x \in \mathbb{K} \,:\, x + (-x) = 0,$ ($-x$ es inverso aditivo de x)
5. $\forall\, x, y \in \mathbb{K} \,:\, x \cdot y = y \cdot x,$ ($\cdot$ es conmutativa)
6. $\forall\, x, y, z \in \mathbb{K} \,:\, x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,$ ($\cdot$ es asociativa)
7. $\forall\, x \in \mathbb{K} \,:\, x \cdot 1 = x,$ (1 neutro para $\cdot$)
8. $\forall\, x \in \mathbb{K} - \{0\} \,:\, \exists\, x^{-1} \in \mathbb{K} \,:\, x \cdot x^{-1} = 1,$ (x^{-1} es inverso multiplicativo de x)
9. $\forall\, x, y, z \in \mathbb{K} \,:\, x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z,$ ($\cdot$ es distributiva con respecto a +)

En resumen, un cuerpo es un conjunto que cumple:

1. sus elementos pueden sumarse y multiplicarse y el resultado es elemento del mismo conjunto,
2. ambas operaciones tienen las mismas propiedades que la suma y el producto entre números reales.

Ya sabemos que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un cuerpo, pero, ¿hay otros conjuntos que también lo sean?

Ejemplo 2.2.

1. *El conjunto de los números naturales, con la suma y el producto usuales, no es un cuerpo, ¿por qué?,*
2. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *tampoco es un cuerpo, si* $+$ *y* $\cdot$ *denotan la suma y el producto usuales de números enteros, ¿cuáles de las propiedades anteriores no se satisfacen?*
3. *¿Es* $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ *un cuerpo, si* $+$ *y* $\cdot$ *denotan la suma y el producto usuales de números racionales?*
4. *¿Es* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *un cuerpo?*
5. *Consideremos ahora el conjunto* $\{0, 1\}$ *y definamos la suma y el producto de elementos de ese conjunto de la siguiente forma*

+	0	1
0	0	1
1	1	?

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Analice cuáles de las propiedades de cuerpo satisface $(\{0, 1\}, +, \cdot)$ *¿Es el conjunto* $\{0, 1\}$ *con las operaciones anteriores un cuerpo si definimos* $1 + 1 = 0$*? ¿Lo es también si definimos* $1 + 1 = 1$*?*

¿Cuál es la razón para crear el concepto de cuerpo? La razón es la misma por la que se crearon los números. Agrupando dentro del concepto de *cuerpo* a conjuntos cuyos elementos puedan sumarse y multiplicarse, cumpliendo las propiedades adicionales que mencionamos antes, nos permitirá, a partir de ahora, trabajar con ellos de manera abstracta, podremos utilizar las propiedades de un cuerpo sin preocuparnos de cuáles son sus elementos particulares.

Ejemplo 2.3. *Analicemos si* $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), +, \cdot)$*, el conjunto de polinomios con coeficientes reales con las operaciones de suma y producto usuales de polinomios, es un cuerpo.*

Notemos primero que ambas operaciones están bien definidas pues el resultado de sumar dos elementos de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ *es un elemento de* $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ *y lo mismo ocurre con el producto.*

Veamos si las operaciones cumplen las propiedades escritas antes.

Comencemos con la suma, en lo que sigue p, q y r denotan polinomios cualesquiera con coeficientes reales:

- *es conmutativa ($p + q = q + p$).*
  En efecto, para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple $(p + q)(x) = p(x) + q(x)$, $p(x)$ y $q(x)$ son números reales, como la suma de números reales es conmutativa se tiene que $p(x)+q(x) = q(x)+p(x)$ que, a su vez, por definición de suma de funciones es igual a $(q + p)(x)$.
  Con esto hemos probado que $\forall x \in \mathbb{R},\ (p + q)(x) = (q + p)(x)$, es decir, $p + q = q + p$.
- *Es asociativa ($(p + q) + r = p + (q + r)$). Se demuestra de manera similar.*
- *Existe el elemento neutro. En efecto, el polinomio nulo, constante igual a 0, es neutro para la suma.*
- *Para cada elemento de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ existe un inverso aditivo.*
  Esto es cierto pues, dado p cualquiera, el polinomio $-p$, definido por $\forall x \in \mathbb{R},\ (-p)(x) = -p(x)$ cumple $\forall x \in \mathbb{R},\ (p+(-p))(x) = p(x)+(-p)(x) = p(x)-p(x) = 0$, es decir, $p+(-p)$ es el polinomio nulo.

Por otro lado, el producto $\cdot$ es:

- *asociativo ($(p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r)$). En efecto, dado $x \in \mathbb{R}$ cualesquiera se cumple*

  $$((p \cdot q) \cdot r)(x) = (p \cdot q)(x) \cdot r(x) = (p(x) \cdot q(x)) \cdot r(x).$$

  Si ahora usamos la asociatividad de $\cdot$ en $\mathbb{R}$, $(p(x) \cdot q(x)) \cdot r(x)$ es igual a $p(x) \cdot (q(x) \cdot r(x)) = p(x) \cdot (q \cdot r)(x) = (p \cdot (q \cdot r))(x)$. Hemos probado que $(p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r)$.
- *Conmutativo ($p \cdot q = q \cdot p$). La misma idea anterior.*
- *Existe elemento neutro. El polinomio constante igual a 1 es neutro para la multiplicación de polinomios.*
- *No es cierto que todo polinomio distinto del nulo (neutro para la suma) tenga inverso multiplicativo. Solo los polinomios constantes no nulos tienen inverso multiplicativo: si p no es constante, no es posible determinar un polinomio q de modo que $pq = 1$.*
  La demostración de esta propiedad ya la vimos en Álgebra 1, recordémosla: sea p un polinomio cualquiera y supongamos que q es un polinomio para el que se cumple $pq = 1$.
  Entonces $gr(pq) = gr(p) + gr(q) = gr(1) = 0$, es decir $gr(q) = -gr(p)$. Si $gr(p) > 0$, el grado de q tendría que ser un número negativo y esto no es posible, el grado de cualquier polinomio, excepto el nulo, es un número natural o cero.

Por lo tanto, el conjunto de los polinomios, con las operaciones usuales, NO es cuerpo.

Lema 2.4. Si $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es un cuerpo, entonces

1. $\mathbb{K} \neq \emptyset$.
2. Los elementos neutros para cada operación son únicos.

3. $\forall x \in \mathbb{K}$ se cumple que $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$.
4. Para cada $x \in \mathbb{K}$ su inverso aditivo, que hemos denotado por $-x$, es único y para cada $x \in \mathbb{K} - \{0\}$, su inverso multiplicativo, denotado por x^{-1}, es único.
5. Para cada $x \in \mathbb{K}$ se cumple que $-x = (-1) \cdot x$, es decir, para cada $x \in \mathbb{K}$ el inverso aditivo de x es el resultado del producto entre x y el inverso aditivo del elemento neutro para el producto.
6. Para cada $x \in \mathbb{K}$ el inverso aditivo del inverso aditivo de x es el propio x, es decir,
$$\forall x \in \mathbb{K} \ : \ -(-x) = x.$$
7. Para cada $x \in \mathbb{K} - \{0\}$, el inverso multiplicativo del inverso multiplicativo de x es igual a x, es decir,
$$\forall x \in \mathbb{K} \ : \ \left(x^{-1}\right)^{-1} = x.$$
8. Para todo $x, y \in \mathbb{K}$, $x \cdot y = 0$ si y sólo si $x = 0 \vee y = 0$.
9. Para todo $x, y \in \mathbb{K}$ se cumple $x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$ y $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.
10. Para todo $x, y, z \in \mathbb{K}$ se cumple que si $x + y = x + z$, entonces $y = z$.
11. Para todo $x, y, z \in \mathbb{K}$ se cumple que si $x \neq 0$ y $x \cdot y = x \cdot z$, entonces $y = z$.

Demostración. Demostremos algunas de las propiedades anteriores.

1. Es cierto pues al menos los elementos neutros para $+$ y $\cdot$ pertenecen a $\mathbb{K}$.
2. Demostremos que el neutro para la suma en un cuerpo es único. Utilizaremos *reducción al absurdo*: supondremos que lo que debemos demostrar es falso y llegaremos a una contradicción.
Supongamos 0 y $\tilde{0}$ son ambos elementos neutros para la suma, distintos entre sí, entonces,
$$\forall x \in \mathbb{K}, \ 0 + x = x.$$
En particular, si $x = \tilde{0}$, $0 + \tilde{0} = \tilde{0}$.
Por otro lado, como $\tilde{0}$ también es neutro para la suma se cumple que
$$\forall x \in \mathbb{K}, \ \tilde{0} + x = x.$$
En particular, si $x = 0$ se tiene que $\tilde{0} + 0 = 0$.
Podemos concluir entonces que, si 0 y $\tilde{0}$ son neutros para la suma,
$$0 + \tilde{0} = \tilde{0}, \qquad \text{y} \qquad \tilde{0} + 0 = 0.$$
Como $0 + \tilde{0} = \tilde{0} + 0$, las dos igualdades anteriores implican que $0 = \tilde{0}$ y esto contradice nuestra suposición de que 0 y $\tilde{0}$ son distintos entre sí.
La unicidad del neutro para el producto se demuestra de modo similar.
3. Sea x un elemento cualquiera de $\mathbb{K}$, entonces
$$x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0. \tag{2.1}$$

Si llamamos $x \cdot 0 = y$, las igualdades anteriores se escriben como $y = y + y$, y es un elemento de $\mathbb{K}$ que, al sumarlo consigo mismo no cambia, y tiene que ser, por tanto, el neutro para la suma. Es decir, $y = x \cdot 0 = 0$.
Una consecuencia de esta propiedad es que no puede existir $x \in \mathbb{K}$ tal que $x \cdot 0 = 1$, lo que explica la condición $x \neq 0$ en la propiedad 8 en la definición 2.1.

4. Demostremos solamente que cada $x \in \mathbb{K}$ tiene un único inverso aditivo. Procederemos de manera similar a como hicimos para demostrar la unicidad del neutro para la suma, supondremos que existe $x \in \mathbb{K}$ que tiene dos inversos aditivos, distintos entre sí, llamemos $-x$ e y a los inversos aditivos de x. Entonces,

$$y = y + 0 = y + (x + (-x)) = (y + x) + (-x) = 0 + (-x) = -x.$$

¿Puedes escribir por qué se cumple cada una de las igualdades anteriores? Nota que hemos obtenido $y = -x$, lo que contradice nuestra suposición de que y y $-x$ son dos inversos aditivos de x. Con esto podemos asegurar que no existe $x \in \mathbb{K}$ para el que existan dos inversos aditivos distintos.
La unicidad del inverso multiplicativo se demuestra de forma similar. Te invitamos a intentarla.

5. Debemos demostrar que la suma de $(-1) \cdot x$ con x es 0. Esto es cierto pues

$$(-1) \cdot x + x = (-1) \cdot x + 1 \cdot x = (-1 + 1) \cdot x = 0 \cdot x = 0.$$

6. La igualdad $x + (-x) = 0$ indica que $-x$ es inverso aditivo de x y también que x es inverso aditivo de $-x$.

7. Se justifica de modo similar a como se hizo en la propiedad anterior.

8. Debemos demostrar que si $x = 0$ o $y = 0$, entonces $x \cdot y = 0$ y, por otro lado, que si $x \cdot y = 0$, entonces necesariamente $x = 0$ o $y = 0$.
   i. Demostremos que si $x = 0$ o $y = 0$, entonces $x \cdot y = 0$. Si $x = 0 \vee y = 0$, la propiedad 3 implica que $x \cdot y = 0$.
   ii. Demostremos la segunda implicación. Supongamos que el producto es cero, que uno de los dos, por ejemplo x, es distinto de cero y probemos que entonces y tiene que ser cero,

$$\begin{aligned} x \cdot y = 0 &\Rightarrow x^{-1} \cdot (x \cdot y) = x^{-1} \cdot 0, && x \neq 0 \Rightarrow \text{ existe } x^{-1}, \\ &\Leftrightarrow (x^{-1} \cdot x) \cdot y = 0, && \text{asociatividad del producto y propiedad 3,} \\ &\Leftrightarrow 1 \cdot y = 0, && x^{-1}x = 1, \\ &\Leftrightarrow y = 0 && \text{1 es neutro para producto.} \end{aligned}$$

9. Debemos utilizar las propiedades de las operaciones en $\mathbb{K}$ para demostrar que $x \cdot (-y)$ es el inverso aditivo de $x \cdot y$, es decir, debemos probar que $(x \cdot (-y)) + (x \cdot y) = 0$.
Además, dado que para todo elemento de $\mathbb{K}$ el inverso aditivo es único y $x \cdot y$ es el inverso aditivo de $-(x \cdot y) = x \cdot (-y)$, podemos demostrar que $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$ demostrando que $(-x) \cdot (-y) + x \cdot (-y) = 0$.

10.

$$\begin{aligned} x+y=x+z &\Rightarrow (-x)+(x+y)=(-x)+(x+z), \\ &\Leftrightarrow ((-x)+x)+y=((-x)+x)+z, \\ &\Leftrightarrow 0+y=0+z, \\ &\Leftrightarrow y=z. \end{aligned}$$

¿Puedes justificar cada uno de los pasos anteriores?

11. Esta demostración es muy similar a la anterior. Te invitamos a intentarla.

□

Observación 2.5. *A partir de ahora, en lugar de escribir* $(\mathbb{R},+,\cdot)$ *para referirnos al cuerpo de los números reales, simplemente escribiremos* $\mathbb{R}$ *y lo mismo haremos con* $\mathbb{C}$.

Además, en lugar de escribir $x\cdot y$ *para referirnos al producto de los elementos* x *e* y *de un cierto cuerpo* $\mathbb{K}$, *utilizaremos la notación* xy.

En el próximo capítulo introduciremos el concepto de espacio vectorial y todo el semestre lo dedicaremos al estudio de espacios vectoriales. Enseguida notarás por qué tuvimos que detenernos antes en el concepto de cuerpo.

A partir de ahora utilizaremos casi siempre letras griegas $(\alpha,\beta,\ldots)$ *para denotar a elementos de un cuerpo y letras minúsculas de nuestro alfabeto para denotar a elementos de un espacio vectorial.*

2.2. Definición de espacio vectorial

Al trabajar con $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ definimos dos operaciones: la suma de vectores y el producto de un vector por un escalar, y mencionamos sus propiedades.

En este capítulo nos guiaremos por esas propiedades para generalizar el concepto de *vector* de modo que otros objetos matemáticos también puedan ser considerados vectores. Introduciremos el concepto de espacio vectorial, con propiedades similares a las de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, y llamaremos vectores a los elementos de un espacio vectorial. Dedicaremos algunas semanas a entender bien los espacios vectoriales para, posteriormente, a partir del momento en que comencemos a trabajar con transformaciones lineales, ver algunas aplicaciones de ellos a la solución de problemas de Ingeniería.

Definición 2.6 (Espacio Vectorial)**.** Sean $(\mathbb{K},+,\cdot)$ un cuerpo y V un conjunto sobre el cual están definidas las operaciones: adición (binaria interna)

$$\oplus : V\times V\to V, \qquad \oplus(x,y)\to x\oplus y,$$

y multiplicación por un escalar (binaria externa)

$$\odot : \mathbb{K}\times V\to V, \qquad \odot(\alpha,x)\to \alpha\odot x.$$

La estructura $(V,\oplus,\odot)$ es un ***espacio vectorial sobre*** $\mathbb{K}$, o un $\mathbb{K}$-***espacio vectorial***, si

1. $\forall\, x, y \in V \,:\, x \oplus y = y \oplus x,$ ($\oplus$ es conmutativa)
2. $\forall\, x, y, z \in V \,:\, x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z,$ ($\oplus$ es asociativa)
3. $\exists\, \theta \in V \,:\, \forall\, x \in V \,:\, x \oplus \theta = x,$ (θ es el neutro para $\oplus$)
4. $\forall\, x \in V \,:\, \exists\, -x \in V \,:\, x \oplus (-x) = \theta,$ ($-x$ es inverso aditivo de x)
5. $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K} \,:\, \forall\, x \in V \,:\, \alpha \odot (\beta \odot x) = (\alpha \cdot \beta) \odot x,$ ($\odot$ y $\cdot$ son asociativas)
6. $\forall\, \alpha \in \mathbb{K} \,:\, \forall\, x, y \in V \,:\, \alpha \odot (x \oplus y) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y),$ ($\odot$ es lineal)
7. $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K} \,:\, \forall\, x \in V \,:\, (\alpha + \beta) \odot x = (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x),$ ($\odot$ es distributiva)
8. $\forall\, x \in V \,:\, 1 \odot x = x$, donde 1 denota al neutro para el producto en $\mathbb{K}$.

Si $(V, \oplus, \odot)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, entonces:

1. los elementos de V se llaman ***vectores*** y los de $\mathbb{K}$, ***escalares***,
2. el elemento neutro para $\oplus$, que se ha denotado θ, se denomina ***vector nulo de*** V,
3. V es no vacío pues $\theta \in V$.
4. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $(V, \oplus, \odot)$ se denomina ***espacio vectorial real***.
5. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $(V, \oplus, \odot)$ se denomina ***espacio vectorial complejo***.

Nota que, al igual que al trabajar con $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, las operaciones en V son una suma de elementos de V (operación interna) y un producto, no de elementos de V, sino de un elemento de V por un elemento de un cuerpo, por un escalar (operación externa). El resultado de ambas operaciones es un elemento de V.

En la definición anterior nota además que $\alpha \cdot \beta$ es el producto entre escalares, cuyo resultado es un escalar, mientras que $\alpha \odot x$ denota el producto de un escalar α por un vector x, y que resulta en un vector. Además $\alpha + \beta$ es la suma de los escalares α y β, cuyo el resultado es también un escalar, mientras que $x \oplus y$ denota la suma entre los vectores x e y y el resultado es un vector.

Para diferenciar al neutro para la suma en V del neutro para la suma en $\mathbb{K}$, hemos escogido la letra θ para el neutro en V, mientras que 0 representa el neutro para la suma en $\mathbb{K}$.

Definición 2.7. Sea $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

Para cada par de elementos x, $y \in V$ se define la ***diferencia entre* x *e* y** mediante

$$x \ominus y := x + (-y).$$

Dos elementos $x, y \in V$ son ***iguales*** si y sólo si $x \ominus y = \theta$.

Nota que si $x, y, z \in V$ son tales que $x \oplus y = x \oplus z$, entonces $y = z$ pues

$$\begin{aligned}
x \oplus y = x \oplus z &\Rightarrow (-x) \oplus (x \oplus y) = (-x) \oplus (x \oplus z), \\
&\Leftrightarrow ((-x) \oplus x) \oplus y = ((-x) \oplus x) \oplus z, && \text{asociatividad de la suma,} \\
&\Leftrightarrow \theta \oplus y = \theta \oplus z, \\
&\Leftrightarrow y = z.
\end{aligned}$$

Esta propiedad se denomina ***ley de cancelación***.

Ejemplo 2.8. *Sea* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *un cuerpo y* 0*, su elemento neutro para la suma. Demostremos que el conjunto* $V = \{0\}$ *con las operaciones*

$$0 \oplus 0 = 0, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{K} \,:\, \alpha \odot 0 = 0$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$*. Veamos que* $(V, \oplus, \odot)$ *satisface cada una de las propiedades necesarias para ser un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$*,*

1. *ambas operaciones están bien definidas porque el resultado de ambas es un elemento de* V*,*
2. *dado que* 0 *es el único elemento en* V *y* $0 \oplus 0 = 0$ *se cumple que:* $\oplus$ *es conmutativa, asociativa, existe un elemento neutro para ella y* $-0 = 0$*.*
3. *Sean* α *y* β *elementos de* $\mathbb{K}$*, entonces*

$$\begin{aligned} \alpha \odot (\beta \odot 0) = \alpha \odot 0 = 0 &= (\alpha \cdot \beta) \odot 0, \\ \alpha \odot (0 \oplus 0) = \alpha \odot 0 = 0 &= (\alpha \odot 0) \oplus (\beta \odot 0), \\ (\alpha + \beta) \odot 0 = 0 &= (\alpha \odot 0) \oplus (\beta \odot 0). \end{aligned}$$

Además, si 1 *es el elemento neutro para el producto en* $\mathbb{K}$*, es cierto que*

$$1 \odot 0 = 0.$$

Ejemplo 2.9. *Demostremos que si* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *es un cuerpo, entonces* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *es también un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial.*

Nota que si $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *es un cuerpo, la suma de elementos de* $\mathbb{K}$ *da como resultado a un elemento de* $\mathbb{K}$*, la suma es conmutativa, asociativa, tiene un neutro y cada elemento de* $\mathbb{K}$ *tiene inverso aditivo, es decir,* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *satisface las propiedades 1 a 4.*

Como $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *es un cuerpo, también se cumple que el producto de elementos de* $\mathbb{K}$ *es un elemento de* $\mathbb{K}$*. Además el producto es asociativo, es decir,*

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K} \,:\, \forall\, x \in \mathbb{K} \,:\, \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x,$$

que es la propiedad 5 en 2.6 si $V = \mathbb{K}$*.*

El producto de elementos de $\mathbb{K}$ *también distribuye con respecto a la suma, con lo que se cumple que*

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{K} \,:\, \forall\, x, y \in \mathbb{K} \,:\, \alpha \cdot (x + y) = (\alpha \cdot x) + (\alpha \cdot y)$$

que es la propiedad 6 en 2.6 si $V = \mathbb{K}$*. La distributividad del producto con respecto a la suma en* $\mathbb{K}$ *también puede escribirse como*

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K} \,:\, \forall\, x \in \mathbb{K} \,:\, (\alpha + \beta) \cdot x = (\alpha \cdot x) + (\beta \cdot x),$$

que es la propiedad 7 en 2.6. Por último, si 1 es el neutro para el producto en $\mathbb{K}$*,*

$$\forall\, x \in \mathbb{K} \,:\, 1 \cdot x = x$$

y ésta es la propiedad 8 cuando $V = \mathbb{K}$*.*

Como consecuencia del ejemplo anterior se tiene que $(\mathbb{R}, +, \boldsymbol{\cdot})$, con la suma y producto usuales en el conjunto, es un espacio vectorial real; $(\mathbb{C}, +, \boldsymbol{\cdot})$ es un espacio vectorial complejo y $(\mathbb{Q}, +, \boldsymbol{\cdot})$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números racionales.

Ejemplo 2.10. *Analicemos si* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *es espacio vectorial complejo.*

La operación $+$ *es la operación binaria interna, representa la suma de números reales y* $\cdot$*, que es la operación binaria externa, es el producto de un número complejo (escalar) por un número real (vector).*

Nota que $\cdot$ *no está bien definida pues no ocurre que para cualquier escalar* $\alpha \in \mathbb{C}$ *y cualquier vector* $x \in \mathbb{R}$ *el producto* $\alpha \cdot x$ *es un número real. Por ejemplo,* $i \cdot 2 \notin \mathbb{R}$*. Es decir,* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *no es un espacio vectorial complejo.*

Analicemos si $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *es un espacio vectorial real, donde* $+$ *es la suma de números complejos y* $\cdot$ *es el producto de un número real (escalar) por un número complejo (vector):*

1. *La suma de números complejos es un número complejo, es decir, la operación binaria interna está bien definida.*
2. *Como* $\mathbb{C}$*, con la suma y producto usuales de complejos, es un cuerpo, la suma de números complejos satisface las propiedades 1 a 4 en la definición 2.6.*
3. *El producto de un número real por un número complejo es un número complejo, por tanto, la operación binaria externa está bien definida.*
4. *Como el producto de números complejos es asociativo, distribuye con respecto a la suma y* 1 *es su elemento neutro y porque cualquier número real es un elemento de* $\mathbb{C}$ *(con parte imaginaria igual a 0), se cumplen las propiedades 5 a 8 de la definición 2.6.*

En resumen, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *es un espacio vectorial real.*

Lema 2.11. Si $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es un cuerpo, entonces

$$\mathbb{K}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;:\; x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{K} \right\}$$

con las operaciones suma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

y producto por un escalar en $\mathbb{K}$

$$\alpha \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Demostración. Se verá en clases. □

Observación 2.12. *Esto significa que $\mathbb{R}^n$, con las operaciones usuales de suma entre vectores y producto de un vector por un escalar real, es un espacio vectorial real y $\mathbb{C}^n$, con las operaciones usuales de suma de vectores y producto de vectores por un escalar complejo, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$.*

¿Es $\mathbb{R}^n$, con la suma usual entre vectores de $\mathbb{R}^n$ y el siguiente producto entre un escalar complejo y un vector de $\mathbb{R}^n$:

$$\text{Para cada } \alpha \in \mathbb{C} \text{ y para cada } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \qquad \text{definimos} \qquad \alpha \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot x_1 \\ \alpha \cdot x_2 \\ \vdots \\ \alpha \cdot x_n \end{pmatrix},$$

un espacio vectorial complejo? En la definición anterior $\cdot$ representa el producto usual entre un número complejo y un número real.

¿Es $\mathbb{C}^n$, con la suma usual entre vectores de $\mathbb{C}^n$ y el producto usual entre un número real y un vector de $\mathbb{C}^n$, un espacio vectorial real?

Estas dos preguntas puedes analizarlas de modo similar a como lo hicimos en el ejemplo 2.10.

Más adelante veremos otros ejemplos de espacios vectoriales. Demostremos primero propiedades importantes que comparten todos los espacios vectoriales.

Lema 2.13. En todo espacio vectorial $(V, \oplus, \odot)$ sobre un cuerpo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ se verifican las siguientes propiedades:

1. el vector nulo θ es único,
2. para cada $x \in V$, el inverso aditivo de x es único,
3. $\forall\, x \in V \ : \ 0 \odot x = \theta$,
4. $\forall\, \alpha \in \mathbb{K} \ : \ \alpha \odot \theta = \theta$,
5. para cada $x \in V$ su inverso aditivo es igual a $(-1) \odot x$,
6. para cada $x \in V$ se tiene que $-(-x) = x$,
7. $\forall\, \alpha \in \mathbb{K} \ : \ \forall\, x \in V \ : \ (-\alpha) \odot x = -(\alpha \odot x) = \alpha \odot (-x)$,
8. $\forall\, \alpha \in \mathbb{K} \ : \ \forall\, x \in V \ : \ \alpha \odot x = \theta \Leftrightarrow \alpha = 0 \ \vee \ x = \theta$.
9. Si $\alpha \in \mathbb{K}$ es distinto de 0 y $x, y \in V$ son tales que $\alpha \odot x = \alpha \odot y$, entonces $x = y$,
10. Si $x \in V$ es distinto de θ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ son tales que $\alpha \odot x = \beta \odot x$, entonces $\alpha = \beta$,

Demostración. Mostremos la validez de algunas de las afirmaciones anteriores.

1. Esta propiedad se demuestra de modo muy similar a como demostramos que en un cuerpo $\mathbb{K}$ existe un único neutro para la suma.
2. También se demuestra de modo similar a como demostramos la unicidad del inverso aditivo en un cuerpo.

3. Sea x un elemento cualesquiera en V. Entonces,

$$\begin{aligned} 0 \odot x &= (0+0) \odot x && \text{porque } 0+0=0, \\ &= (0 \odot x) \oplus (0 \odot x) && \text{por propiedad 7.} \end{aligned}$$

   Dado que el vector nulo en V es único

$$0 \odot x = (0 \odot x) \oplus (0 \odot x) \quad \Rightarrow \quad 0 \odot x = \theta.$$

4. Procederemos de manera similar al ítem anterior.

$$\begin{aligned} \alpha \odot \theta &= \alpha \odot (\theta \oplus \theta), && \text{porque } \theta+\theta=\theta, \\ &= (\alpha \odot \theta) \oplus (\alpha \odot \theta), && \text{por propiedad 6.} \end{aligned}$$

   Nuevamente por unicidad del vector nulo en V, se tiene que $\alpha \odot \theta = \theta$.
5. Dado $x \in V$, $(-1) \odot x$ es el inverso aditivo de x si y sólo si $((-1) \odot x) \oplus x = \theta$. Comprobemos que esta igualdad es cierta

$$((-1) \odot x) \oplus x = ((-1) \odot x) \oplus (1 \odot x) = ((-1) + (1)) \odot x = 0 \odot x = \theta.$$

   Intenta justificar cada una de las igualdades anteriores.
6. Esta propiedad establece que el inverso aditivo del inverso aditivo de $x \in V$ es x, lo cual es una consecuencia de la igualdad $x \oplus (-x) = \theta$.
7. Dados $\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in V$, debemos demostrar que $(-\alpha) \odot x$ y $\alpha \odot (-x)$ son iguales al inverso aditivo de $\alpha \odot x$.
   $(-\alpha) \odot x$ es inverso aditivo de $\alpha \odot x$ si y sólo si $((-\alpha) \odot x) \oplus (\alpha \odot x) = \theta$. Esta igualdad es cierta pues

$$((-\alpha) \odot x) \oplus (\alpha \odot x) = (-\alpha + \alpha) \odot x = 0 \odot x = \theta.$$

   Por otro lado, $\alpha \odot (-x)$ es inverso aditivo de $\alpha \odot x$ si y sólo si $(\alpha \odot (-x)) \oplus (\alpha \odot x) = \theta$. Esta igualdad es cierta pues

$$(\alpha \odot (-x)) \oplus (\alpha \odot x) = \alpha \odot ((-x) \oplus x) = \alpha \odot \theta = \theta.$$

8. Ya antes mostramos que si $\alpha = 0$ o $x = \theta$, $\alpha \odot x = \theta$. Sólo resta mostrar que si $\alpha \odot x = \theta$, entonces $\alpha = 0$ o $x = \theta$.
   Supongamos $\alpha \in \mathbb{K}$ y $x \in V$ son tales que $\alpha \odot x = \theta$ y $\alpha \neq 0$ y mostremos que entonces $x = \theta$,

$$\theta = \alpha \odot x \Rightarrow \alpha^{-1} \odot \theta = \alpha^{-1} \odot (\alpha \odot x), \tag{2.2a}$$
$$\Rightarrow \theta = (\alpha^{-1} \cdot \alpha) \odot x = 1 \odot x = x. \tag{2.2b}$$

   Supongamos ahora que $\alpha \in \mathbb{K}$ y $x \in V$ son tales que $\alpha \odot x = \theta$, pero $x \neq \theta$. Mostremos que entonces $\alpha = 0$. Si suponemos que $\alpha \neq 0$, obtenemos, siguiendo (2.2), que $x = \theta$, lo cual es una contradicción con nuestra suposición original, por tanto, $\alpha = 0$.
9. Esta demostración es similar a la de las propiedades 10 y 11 en el lema 2.4.

10. Supongamos que $x \in V$ es tal que $x \neq \theta$ y $\alpha \odot x = \beta \odot x$, siendo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Nota que no podemos multiplicar la igualdad anterior por el "inverso multiplicativo" de x puesto que no hemos definido producto entre elementos de V (y mucho menos inversos multiplicativos para los elementos de V), lo que sí podemos hacer es sumar el inverso aditivo de $\beta \odot x$ en ambos lados de la igualdad.
    Antes demostramos que $(-\beta) \odot x$ es igual al inverso aditivo de $\beta \odot x$, entonces

$$\begin{aligned}
\alpha \odot x = \beta \odot x &\Leftrightarrow (\alpha \odot x) + ((-\beta) \odot x) = \theta, & \\
&\Leftrightarrow (\alpha + (-\beta)) \odot x = \theta, & \text{por propiedad 7 en definición 2.6,} \\
&\Leftrightarrow \alpha + (-\beta) = 0, & \text{porque } x \neq \theta \text{ y propiedad 8 en este lema} \\
&\Leftrightarrow \alpha = \beta. &
\end{aligned}$$

□

Observación 2.14. *A partir de ahora, en lugar de escribir $(V, \oplus, \odot)$ para referirnos a un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y en los casos en que sea claro cuáles son las operaciones $\oplus$ y $\odot$, solo escribiremos que V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ o un $\mathbb{K}$-espacio vectorial o un e.v. sobre $\mathbb{K}$ o un $\mathbb{K}$-e.v..*

Además, en lugar de escribir $x \oplus y$ para referirnos a la suma entre elementos de un $\mathbb{K}$-e.v. V, escribiremos $x + y$ y, en lugar de escribir $\alpha \odot x$ para referirnos al producto de un escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ por un vector $x \in V$, escribiremos αx.

Lema 2.15. El conjunto de las funciones desde un conjunto $X \subseteq \mathbb{K}$ hacia $\mathbb{K}$, denotado por

$$\mathcal{F}(X, \mathbb{K}) = \{f : X \to \mathbb{K} \ : \ f \text{ es función}\},$$

es, con las operaciones usuales de suma de funciones y multiplicación por escalar, espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$

El conjunto

$$\mathcal{P}(\mathbb{K}) = \{p : \mathbb{K} \to \mathbb{K} \text{ tales que } p \text{ es polinomio con coeficientes en } \mathbb{K}\}$$

es, con las operaciones usuales de suma de funciones y multiplicación por escalar, espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Demostración. Se verá en clases. □

2.3. Subespacios Vectoriales

Hasta el momento, para verificar si un conjunto V con dos operaciones, una interna entre elementos de V y una externa entre un elemento de un cuerpo $\mathbb{K}$ y uno de V, es espacio vectorial, debemos comprobar que las operaciones están bien definidas y satisfacen ocho propiedades, las ocho que mencionamos en la definición de espacio vectorial.

Afortunadamente, sabiendo que V (con dos operaciones) es un espacio vectorial sobre cierto cuerpo $\mathbb{K}$, podremos comprobar de forma relativamente sencilla si un subconjunto de V (con las mismas dos operaciones) es también un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. ¿Por qué? A responder esta pregunta dedicamos esta sección.

Definición 2.16 (Subespacio Vectorial)**.** Dado un espacio vectorial $(V, \oplus, \odot)$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Se dice que S es un *subespacio vectorial (s.e.v) de* V si S es subconjunto de V y, con las mismas operaciones binarias definidas en V, es también un espacio vectorial.

En otras palabras, $(S, \oplus, \odot)$ satisface:

$$\oplus : S \times S \to S, \qquad\qquad \odot : \mathbb{K} \times S \to S$$

y además

1. $\forall\, x, y \in S \;:\; x \oplus y = y \oplus x,$ ($\oplus$ es conmutativa)
2. $\forall\, x, y, z \in S \;:\; x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z,$ ($\oplus$ es asociativa)
3. $\exists\, \theta \in S \;:\; \forall\, x \in S \;:\; x \oplus \theta = x,$ (θ es el neutro para $\oplus$)
4. $\forall\, x \in S \;:\; \exists\, -x \in S \;:\; x \oplus (-x) = \theta,$ ($-x$ es inverso aditivo de x)
5. $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K} \;:\; \forall\, x \in S \;:\; \alpha \odot (\beta \odot x) = (\alpha \cdot \beta) \odot x,$ ($\odot$ y $\cdot$ son asociativas)
6. $\forall\, \alpha \in \mathbb{K} \;:\; \forall\, x, y \in S \;:\; \alpha \odot (x \oplus y) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y),$ ($\odot$ es lineal)
7. $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K} \;:\; \forall\, x \in S \;:\; (\alpha + \beta) \odot x = (\alpha \odot x) \oplus (\beta \odot x),$ ($\odot$ es distributiva)
8. $\forall\, x \in S \;:\; 1 \odot x = x$, donde 1 denota al neutro para el producto en $\mathbb{K}$.

Ejemplo 2.17. *Determine si el siguiente subconjunto de* $\mathbb{R}^3$ *(e.v. real),*

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : xy = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3,$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$*.*

Para resolver este problema se debe verificar que las operaciones satisfacen: $\oplus : S \times S \to S$, $\odot : \mathbb{R} \times S \to S$ *y las 8 propiedades ya expuestas.*

Veamos cuál es el resultado de sumar dos elementos de S*. Supongamos que* $(a_1, b_1, c_1)^T$ *satisface que* $a_1 b_1 = 0$ *y* $(a_2, b_2, c_2)^T$ *es tal que* $a_2 b_2 = 0$*. Entonces*

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix}.$$

Este vector es un elemento de S *si y solo si* $(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) = 0$*. Pero* $(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2$*. Como* $a_1 b_1 = 0$ *y* $a_2 b_2 = 0$*,* $(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = a_1 b_2 + a_2 b_1$ *que no es necesariamente cero. Por ejemplo:*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in S \qquad y \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in S,$$

pero su suma es $\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$, *que no es elemento de* S.

En este caso, S *no es subespacio vectorial pues el resultado de la suma* $\oplus$ *de dos elementos de* S *no está en* S *(no se cumple:* $\oplus : S \times S \to S$*).*

Ejemplo 2.18. *Sea* $S = \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$. *Demostremos que* S *es un subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^2$ *(e.v. sobre* $\mathbb{R}$*).*

Las operaciones de suma y ponderación donde participan los vectores de S *arrojan resultados que también están en* S, *en efecto:*

Sean $(x, y)^T, (a, b)^T \in S$, *esto significa que* $x + y = 0$ *y* $a + b = 0$.

La suma de ellos $(x + a, y + b)^T$ *cumple* $(x + a) + (y + b) = (x + y) + (a + b) = 0 + 0 = 0$, *por lo tanto* $(x, y)^T \oplus (a, b)^T \in S$.

Asimismo, si $\alpha \in \mathbb{R}$ *y* $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in S$, *entonces* $\alpha \odot \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha x\\\alpha y\end{pmatrix}$ *que verifica* $\alpha x + \alpha y = \alpha(x + y) = \alpha 0 = 0$, *por tanto* $\alpha \odot \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in S$.

Por otra parte, las propiedades 1,2,5,6,7 y 8 de espacio vectorial se cumplen para todos los elementos de $\mathbb{R}^2$, *en particular para los elementos de* S *también se cumplen, no se necesita verificarlas nuevamente. Solo falta verificar las propiedades 3 y 4.*

La propiedad 3 se verifica puesto que el neutro de $\mathbb{R}^2$ *es* $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ *y está en* S *ya que* $0+0 = 0$ *(*$\theta \in S$*).*

Por último, nota que una de las propiedades que demostramos de un e.v. (lema 2.13) establece que si x *es elemento de un e.v.* V *sobre un cuerpo* $\mathbb{K}$, *entonces el inverso aditivo de* x *es* $(-1) \odot x$. *En este ejemplo, ya mostramos que para cualquier* $\alpha \in \mathbb{R}$ *se cumple que* $\alpha \odot \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in S$, *por tanto,* $(-1) \odot \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, *que es el inverso aditivo de* $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, *pertenece a* S.

Nota que en el ejemplo anterior solo necesitamos verificar que la suma de dos elementos de S también está en S, que el producto de un elemento de S por un número real pertenece a S y que el elemento neutro para la suma de $\mathbb{R}^2$ es elemento de S. Las restantes propiedades de espacio vectorial (las propiedades 1,2,5,6,7,8 en la definición) se cumplen solo por ser S subconjunto de $\mathbb{R}^2$, mientras que la propiedad 4 es consecuencia de una de las propiedades de todo e.v., demostradas en lema 2.13 de los apuntes de la semana 2.

En general, una forma más fácil de comprobar si un conjunto es un subespacio vectorial es aplicando el siguiente lema.

Lema 2.19. Dados V, un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, y $S \subseteq V$, se cumple que: S es un s.e.v. de V sobre $\mathbb{K}$ si y sólo si se cumplen:

1. $\theta \in S$ (el vector nulo de V está en S).
2. $\forall\, v, u \in S$, $u + v \in S$ (S es cerrado para la suma).
3. $\forall\, \alpha \in \mathbb{K}, \forall\, u \in S$, $\alpha u \in S$ (S es cerrado para el producto).

Demostración. Esta demostración se verá en clases.

($\Rightarrow$) Demostremos que si S es un s.e.v., entonces satisface las tres propiedades anteriores.
Si S es un subespacio vectorial de V, S es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial: las operaciones suma y producto por escalar están bien definidas en S, lo que implica que S cumple las propiedades 2 y 3 anteriores. Además, por propiedad 3 en la definición de espacio vectorial, S tiene un elemento neutro para la suma. Dado que este elemento es único y $S \subseteq V$, el neutro para la suma en S es el mismo neutro para la suma en V, de este modo S también satisface la propiedad 1 en este lema.

($\Leftarrow$) Si S cumple las 3 propiedades anteriores, entonces ya se sabe que la suma y la ponderación están bien definidas: el resultado de la suma de dos elementos de S es un elemento de S y el resultado de la ponderación de un elemento de S con un escalar en $\mathbb{K}$ también es elemento de S. Solo queda por demostrar que ellas cumplen las 8 propiedades en la definición de espacio vectorial: como $S \subseteq V$ y V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, entonces se cumplen las propiedades 1,2,5,6 y 7 de espacio vectorial.
La hipótesis de este lema incluye a la propiedad 3 de espacio vectorial.
Solo falta verificar la propiedad 4: la existencia del inverso aditivo dentro de S. Ésta se deduce de lo siguiente: ya sabemos que -1, el inverso aditivo de $1 \in \mathbb{K}$, es un elemento de $\mathbb{K}$. Una de las propiedades del lema 2.13 establece que para todo $u \in V$, su inverso aditivo es igual a $(-1)u$, es decir, el inverso aditivo de un vector en un $\mathbb{K}$-e.v. se obtiene ponderando al vector por -1. Como la hipótesis nos dice que S es cerrado para la ponderación por cualquier escalar, entonces si $u \in S$, se tiene $-u \in S$.

$\square$

Observación 2.20. *Una consecuencia de este lema es que si un subconjunto S de un cierto $\mathbb{K}$-espacio vectorial V no contiene al elemento neutro para la suma de V, entonces S no es un subespacio vectorial de V.*

Ejemplo 2.21. *El conjunto* $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y = 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ *no es s.e.v de $\mathbb{R}^3$ porque el nulo de $\mathbb{R}^3$ no está en S.*

Ejemplo 2.22. *El conjunto* $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ *es s.e.v puesto que satisface las propiedades del lema. Veámoslo.*

1. *El vector nulo* $(0,0,0)^T$ *de* $\mathbb{R}^3$ *está en* S*, ya que en este caso* $x = 0$*,* $y = 0$ *y* $z = 0$*, y se cumple* $2x - y + z = 0$.
2. *Sean dos vectores arbitrarios de* S*, por ejemplo:* $v = (a,b,c)^T$ *y* $u = (x,y,z)^T$*. Se debe probar que la suma* $v + u \in S$*, esto es, se debe verificar que* $v + u = (a + x, b + y, c + z)^T$ *cumple con:* $2(a + x) - (b + y) + (c + z) = 0$.
   Como v, u *están en* S *entonces se cumple:*
   $$2a - b + c = 0 \;\; \wedge \;\; 2x - y + z = 0$$
   Al sumar ambas ecuaciones entre sí se obtiene:
   $$(2a - b + c) + (2x - y + z) = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; 2(a + x) - (b + y) + (c + z) = 0,$$
   por tanto, la suma $v + u = (a + x, b + y, c + z)^T$ *está en* S.
3. *Sea un vector arbitrario de* S*,* $v = (a,b,c)^T$ *y un escalar cualquiera* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Se debe probar que* $\alpha v \in S$*, es decir, se debe verificar que* $\alpha v = (\alpha a, \alpha b, \alpha c)^T$ *cumple con:* $2(\alpha a) - (\alpha b) + (\alpha c) = 0$.
   Como $v \in S$ *entonces* $2x - y + z = 0$ *y multiplicando esa igualdad por* α *se obtiene:*
   $$\alpha(2a - b + c) = \alpha 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; 2(\alpha a) - (\alpha b) + (\alpha c) = 0$$
   es decir $\alpha v \in S$.

Por consiguiente, por lema 2.19, se concluye que S *es s.e.v de* $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 2.23. *El conjunto de las funciones de* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$ *que toman solo valores mayores o iguales a 0 no es un s.e.v del conjunto de todas las funciones, pues si bien contiene a la función nula y es cerrado para la suma de funciones, NO es cerrado para la ponderación de funciones, ya que si se pondera una función positiva por* -1*, se obtiene una función que toma valores negativos.*

Ejemplo 2.24. $\mathcal{P}_5(\mathbb{R})$ *es s.e.v de* $\mathcal{P}(\mathbb{R})$*. En efecto:*

1. *El polinomio nulo es elemento de* $\mathcal{P}_5(\mathbb{R})$*,*
2. *la suma de polinomios de grado menor o igual que 5 con coeficientes reales es un polinomio de grado menor o igual que 5 con coeficientes reales. De Álgebra 1 sabemos que si* p *y* q *son polinomios,*
   $$gr(p + q) \leq \max\{gr(p), gr(q)\}.$$
   Si $gr(p) \leq 5$ *y* $gr(q) \leq 5$*, entonces* $\max\{gr(p), gr(q)\} \leq 5$ *y se tiene entonces que* $gr(p+q) \leq 5$*. Además, los coeficientes de* $p + q$ *es la suma de los coeficientes de* p *y* q *y son, por tanto, números reales. Así se tiene que* $p + q \in \mathcal{P}_5(\mathbb{R})$.
3. *el producto de un polinomio de grado menor o igual que 5 con coeficientes reales por un* $\alpha \in \mathbb{R}$ *es un polinomio de grado menor o igual que 5 con coeficientes reales pues de Álgebra 1 sabemos que si* p *es un polinomio,*
   $$gr(\alpha p) = \begin{cases} gr(p), & si\ \alpha \neq 0, \\ -\infty, & si\ \alpha = 0. \end{cases}$$

Por tanto, $gr(\alpha p) \leq gr(p) \leq 5$. Como además los coeficientes de $\alpha\, p$ son el resultado de multiplicar por α a los coeficientes de p, éstos son números reales y $\alpha\, p \in \mathcal{P}_5(\mathbb{R})$.

De manera similar se puede demostrar que para todo número $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, el conjunto $\mathcal{P}_n(\mathbb{K})$ de los polinomios $p : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ con coeficientes en $\mathbb{K}$ y de grado menor o igual que n (note que el polinomio nulo, cuyo grado es $-\infty$ pertenece a estos conjuntos) es un s.e.v. del $\mathbb{K}$-e.v. $\mathcal{P}(\mathbb{K})$.

Ejemplo 2.25. *El conjunto de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es s.e.v. del conjunto de las funciones cualesquiera de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. En efecto: la suma de funciones continuas es continua; la ponderación por escalar de una función continua es continua; además, la función constante igual a 0 (que es el elemento neutro para la suma usual de funciones) es una función continua.*

Ejemplo 2.26. *Muestre que:*

$$U = \{(x, x, 0, y)^T \in \mathbb{C}^4 \ : \ x, y \in \mathbb{C}\}$$

es s.e.v del espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^4$.

Se hará uso del lema 2.19, para ello se verificarán las propiedades:

1. *$(0,0,0,0)^T \in U$, considere $x = y = 0 \in \mathbb{C}$ y así $(x, x, 0, y)^T = (0,0,0,0)^T$.*
2. *Si se tienen dos vectores arbitrarios de U, a saber $(x, x, 0, y)^T$ y $(a, a, 0, b)^T$ con $x, y, a, b, \in \mathbb{C}$, la suma de ellos es el vector $(x+a, x+a, 0, y+b)^T$, el cual también es un vector de U ya que sus componentes son números complejos y además las de las posiciones 1 y 2 son iguales y la de la tercera posición es cero.*
3. *Si se pondera un elemento $(x, x, 0, y)^T$ de U, donde $x, y \in \mathbb{C}$ cualesquiera, por un escalar cualquiera α en $\mathbb{C}$, se obtiene $(\alpha x, \alpha x, 0, \alpha y)$ el cual está en U en vista de la forma del vector resultante y de que $\alpha x \in \mathbb{C}$ y $\alpha y \in \mathbb{C}$.*

Luego se cumplen las 3 propiedades y por tanto se concluye que U es s.e.v de $\mathbb{C}^4$ (e.v. sobre $\mathbb{C}$).

Ejemplo 2.27. *Verifique si:*

$$W = \{(x, \overline{x})^T \in \mathbb{C}^2 \ : \ x \in \mathbb{C}\}$$

es s.e.v del e.v. complejo $\mathbb{C}^2$.

Se verificarán las hipótesis del lema 2.19:

1. *$(0,0)^T \in W$, pues si $x = 0 \in \mathbb{C}$, se obtiene $(x, \overline{x}) = (0, \overline{0})^T = (0,0)^T$.*
2. *Si se tienen dos vectores cualesquiera de W, a saber $(x, \overline{x})^T$ y $(y, \overline{y})^T$ con $x, y \in \mathbb{C}$, entonces su suma es igual a $(x+y, \overline{x}+\overline{y})^T$ que, dado que la suma de los conjugados de dos números complejos es el conjugado de la suma, es igual a $(x+y, \overline{x+y})^T$, el cual también es un vector de W ya que tiene la forma de los elementos de W, la segunda componente del vector es igual al conjugado de la primera componente.*
3. *Si se pondera un elemento $(x, \overline{x})^T$ de W ($x \in \mathbb{C}$ cualquiera) por un escalar cualquiera α en $\mathbb{C}$, el resultado es $(\alpha x, \alpha\overline{x})^T$. Note que si α es un complejo real, $\alpha\overline{x} = \overline{\alpha\, x}$ y $\alpha(x, \overline{x})^T$ es elemento de W, pero si $Im(\alpha) \neq 0$, entonces $\alpha\overline{x} \neq \overline{\alpha\, x}$ y el vector $(\alpha x, \alpha\overline{x})^T$ no satisface que su segunda componente es el conjugado de la primera, es decir, no es elemento de W.*

Esto nos dice cómo construir un contra-ejemplo para la propiedad 3 (un ejemplo que muestre que ella no se cumple): Sea $(1+i, 1-i)^T \in W$ *y* $\alpha = i$ *entonces*

$$\begin{aligned}\alpha(1+i, 1-i) &= i(1+i, 1-i)\\ &= (i(1+i), i(1-i))\\ &= (i-1, i+1) \notin W,\end{aligned}$$

Por tanto, la ponderación por escalar no es cerrada (o W *no es cerrado para la ponderación por escalar) y, por consiguiente, el conjunto* W *no es s.e.v de* $\mathbb{C}^2$ *(e.v. complejo).*

Note que $\mathbb{C}^2$ *también es e.v. real y, si lo consideramos como un e.v. sobre* $\mathbb{R}$*, entonces* W *sí es s.e.v. de* $\mathbb{C}^2$*. En este caso el escalar* α *en la comprobación de la propiedad 3 es un número real y el vector* $(\alpha x, \alpha\overline{x})^T$ *satisface que su segunda componente es el conjugado de la primera.*

Ejemplo 2.28. *En* $\mathbb{R}^2$ *y* $\mathbb{R}^3$*, los únicos subespacios vectoriales que se encuentran son:*

- *El espacio que solo contiene al nulo* $\{\theta\}$ *(espacio trivial).*
- *Las rectas que pasan por el origen.*
- *Los planos que pasan por el origen.*
- $\mathbb{R}^2$ *es s.e.v. de sí mismo.*
- $\mathbb{R}^3$ *es subespacio vectorial de sí mismo.*
- *En general, todo e.v.* V *es s.e.v. de sí mismo.*
- $\mathbb{R}^2$ *NO es subespacio de* $\mathbb{R}^3$ *pues NO está contenido en éste.*

Ejemplo 2.29. $W = \{ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : a + b - c = 0\} \subseteq \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *es s.e.v de* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *(e.v. real).*

1. *El vector nulo de* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *está en* W*, el vector nulo es* $p(x) = 0\cdot x^2 + 0\cdot x + 0$*, aquí* $a = b = c = 0$ *y por tanto se cumple* $a + b - c = 0$.
2. *Sean* p *y* q *dos vectores arbitrarios de* W*, por ejemplo, sean* p *y* q *tales que* $p(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$*,* $q(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$ *con* $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$ *y tales que* $a_1 + b_1 - c_1 = 0$ *y* $a_2 + b_2 - c_2 = 0$.
   Se debe probar que la suma $p + q \in W$*, esto es, se debe verificar que los coeficientes de* $p + q$ *satisfacen la igualdad en la definición de* W*. Dado que* $(p+q)(x) = (a_1+a_2)x^2 + (b_1+b_2)x + (c_1+c_2)$ *se tiene que* $(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) - (c_1 + c_2) = (a_1 + b_1 - c_1) + (a_2 + b_2 - c_2) = 0$ *y, por tanto,* $p + q \in W$.
3. *Sea* p *un vector arbitrario de* W*,* $p(x) = ax^2 + bx + c$ *con* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *tales que* $a + b - c = 0$*. Consideremos además que* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Se debe probar que* $\alpha p \in W$*, es decir, se debe verificar que* $\alpha p = \alpha a x^2 + \alpha b x + \alpha c$ *cumple con:* $(\alpha a) + (\alpha b) - (\alpha c) = 0$.
   Multiplicando la igualdad $a - b + c = 0$ *por* α *se obtiene:*

   $$\alpha(a - b + c) = \alpha 0 \quad\Leftrightarrow\quad (\alpha a) + (\alpha b) - (\alpha c) = 0,$$

   es decir $\alpha p \in W$.

Por lema se concluye que W *es s.e.v de* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

2.4. Unión e intersección de subespacios vectoriales

Recordemos que, dados dos subconjuntos W, U de V, la *intersección* de U y W es el conjunto formado por los elementos de V que pertenecen tanto a U como a W, es decir,

$$W \cap U = \{s \in V \text{ tales que } \; s \in W \; \text{ y } \; s \in U\}.$$

Por otro lado, la *unión* de U y W es el conjunto formado por los elementos de V que pertenecen a U o pertenecen a W,

$$W \cup U = \{s \in V \text{ tales que } s \in U \text{ o } s \in W\}.$$

Lema 2.30. Si V es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y U y W son subespacios vectoriales de V, entonces los conjuntos

1. $U \cap W := \{v \in V \; : \; v \in U \, \wedge \, v \in W\}$,
2. $U \cup W := \{v \in V \; : \; v \in U \, \vee \, v \in W\}$

son tales que $U \cap W$ es también subespacio vectorial de V, mientras que $W \cup U$ lo es si y sólo si $U \subseteq W$ o $W \subseteq U$.

La prueba de este teorema la veremos más adelante, veamos antes algunos ejemplos de cómo calcular uniones e intersecciones de subespacios vectoriales.

Ejemplo 2.31.

1. *Consideremos*

$$\mathcal{L}_1 = \left\{(2t,\, 3t,\, 4t) \in \mathbb{R}^3 \; : \; t \in \mathbb{R}\right\}, \qquad \mathcal{L}_2 = \left\{(t, 3t, 0) \in \mathbb{R}^3 \; : \; t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Ambos conjuntos son rectas en $\mathbb{R}^3$ que pasan por el origen y son, por tanto, subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$. Note que $\mathcal{L}_1$ está formada por los puntos (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tales que el vector desde el origen de coordenadas al punto es paralelo a $(2, 3, 4)^T$, mientras que $\mathcal{L}_2$ es el conjunto de puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfacen que el vector desde el origen al punto es paralelo a $(1, 3, 0)^T$.
Demostremos que solo el origen de coordenadas pertenece a $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$.

$$\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; (x,\, y,\, z) \in \mathcal{L}_1 \wedge (x,\, y,\, z) \in \mathcal{L}_2\right\}$$

Dado que $(x, y, z) \in \mathcal{L}_1$ si y solo si existe $t_1 \in \mathbb{R}$ de modo que $x = 2t_1, y = 3t_1$ y $z = 4t_1$ y $(x, y, z) \in \mathcal{L}_2$ si y solo si existe $t_2 \in \mathbb{R}$ tal que $x = t_2, y = 3t_2$ y $z = 0$, las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ se intersectan si y solo si existen $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\begin{aligned} 2t_1 &= t_2, \\ 3t_1 &= 3t_2, \\ 4t_1 &= 0. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones se satisfacen si y solo si $t_1 = t_2 = 0$ y, con ello, $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{(0, 0, 0)\}$ que es, efectivamente, un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

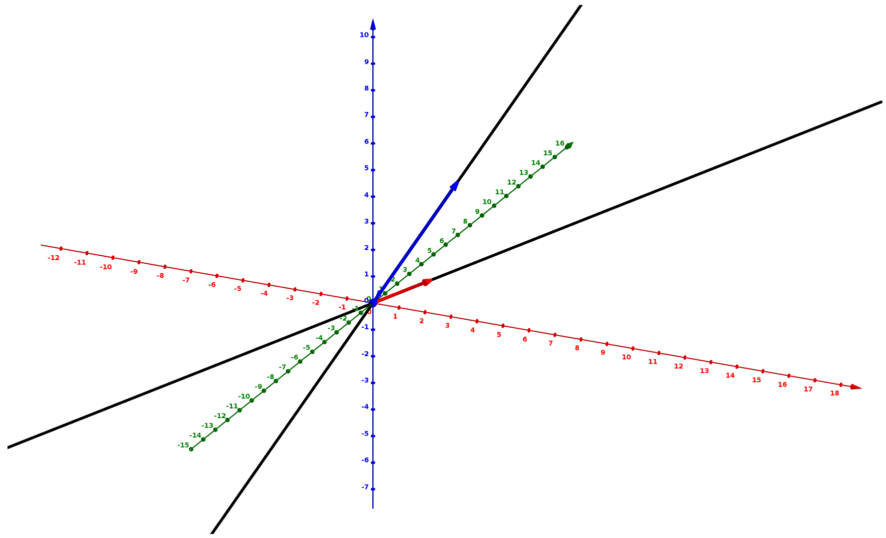

Figura 2.1: Rectas $\mathcal{L}_1$ (con vector director azul) y $\mathcal{L}_2$ (con vector director rojo)

El conjunto $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ está formado por los puntos de $\mathbb{R}^3$ que pertenecen a una recta o a la otra.
Dado que $\mathcal{L}_1 \not\subseteq \mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_2 \not\subseteq \mathcal{L}_1$, el conjunto $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$, según lema 2.30, no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 = \big\{&(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \\ &\exists\, t_1 \in \mathbb{R} \ : \ (x, y, z) = (2t_1,\, 3t_1,\, 4t_1) \vee \exists\, t_2 \in \mathbb{R} \ : \ (x, y, z) = (t_2, 3t_2, 0)\big\}.\end{aligned}$$

El punto $(0, 0, 0)$ de $\mathbb{R}^3$ pertenece tanto a $\mathcal{L}_1$ como a $\mathcal{L}_2$, por tanto, pertenece a la unión de ellas dos.
Además si $(x,\, y,\, z) \in \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, el punto $\lambda(x,\, y,\, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ también pertenece a $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$.
Sin embargo, no es cierto que para cualquier par de puntos $P_1 = (x,\, y,\, z), P_2 = (a,\, b,\, c) \in \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ se cumpla que $P_1 + P_2 \in \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$. Si $P_1, P_2 \in \mathcal{L}_1$, entonces $P_1 + P_2 \in \mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$. Algo similar ocurre si $P_1, P_2 \in \mathcal{L}_2$. Sin embargo, si tomamos $P_1 = (2t_1, 3t_1, 4t_1) \in \mathcal{L}_1$, $P_2 = (t_2, 3t_2, 0) \in \mathcal{L}_2$, entonces

$$\begin{aligned}P_1 + P_2 &= (2t_1, 3t_1, 4t_1) + (t_2, 3t_2, 0),\\ &= (2t_1 + t_2, 3(t_1 + t_2), 4t_1)\end{aligned}$$

no pertenece a $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$. Note que la tercera coordenada de $P_1 + P_2$ será, en general, distinta de cero, es decir, $P_1 + P_2$ debería estar en $\mathcal{L}_1$ para que esté en la unión. Pero la primera coordenada de $P_1 + P_2$ no tiene que ser siempre par con lo que $P_1 + P_2$ no pertenecería a $\mathcal{L}_1$ y, por tanto, tampoco a $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$.
En la figura 2.1 se muestran los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$.

2. *Sea $V = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Considere*

$$\begin{aligned}U &= \{(x, y, z) \in V \ : \ x + y + z = 0\},\\ W &= \{(x, y, z) \in V \ : \ x - 2y + z = 0\}\end{aligned}$$

subespacios de $\mathbb{R}^3$.

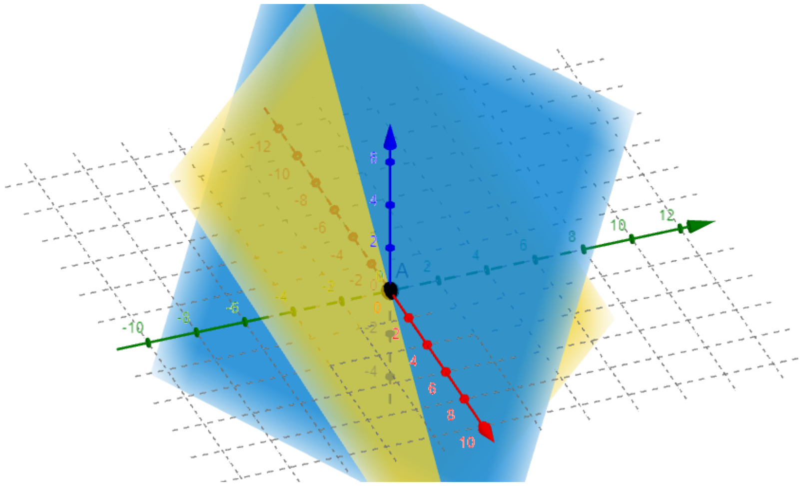

Figura 2.2: Subespacios U (azul) y W (amarillo)

Observe que U *y* W *son planos que pasan por el origen y su intersección será una recta que pasa por el origen, en efecto:*

$$\begin{aligned} U \cap W &= \{(x,y,z) \in V \ : \ (x,y,z) \in U \ \wedge \ (x,y,z) \in W\} \\ &= \{(x,y,z) \in V \ : \ x+y+z=0 \ \wedge \ x-2y+z=0\} \end{aligned}$$

es decir, cualquier vector $(x,y,z) \in U \cap W$ *cumple el siguiente conjunto de ecuaciones:*

$$\begin{aligned} x+y+z&=0 \\ x-2y+z&=0 \end{aligned}$$

de la primera ecuación se obtiene: $x=-y-z$ *y reemplazando en la segunda se tiene:* $-y-z-2y+z=0$, *luego* $-3y=0$ *es decir,* $y=0$, *y sustituyendo este valor en la primera ecuación se obtiene:* $x+z=0$, *esto es:* $x=-z$, *por tanto:*

$$\begin{aligned} U \cap W &= \{(x,y,z) \in V \ : \ y=0 \ \wedge \ x=-z\} \\ &= \{(-z,0,z) \in V \ : \ z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

recta cuya forma paramétrica es: $(x,y,z)=\lambda(-1,0,1)$ *con* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Se vió que una recta que pasa por el origen es un s.e.v de* $\mathbb{R}^3$ *y por lo tanto* $U \cap W$ *es s.e.v de* $\mathbb{R}^3$ *tal como lo dice el teorema (que la intersección de subespacios vectoriales es un subespacio vectorial). Si aún no se convence, entonces verifique que* $U \cap W = \{(-z,0,z) \in V \ : \ z \in \mathbb{R}\}$ *es s.e.v aplicando el lema sobre subespacios vectoriales.*
Por otro lado, la unión de U *y* W *es:*

$$\begin{aligned} U \cup W &= \{(x,y,z) \in V \ : \ (x,y,z) \in U \ \vee \ (x,y,z) \in W\} \\ &= \{(x,y,z) \in V \ : \ x+y+z=0 \ \vee \ x-2y+z=0\} \end{aligned}$$

conjunto que no es subespacio vectorial, puesto que si se consideran dos elementos de $U \cup W$, *por ejemplo:* $u=(1,-1,0)$ *(cumple con* $x+y+z=0$*) y* $w=(1,1,1)$ *(cumple con* $x-2y+z=0$*), su suma* $u+w=(2,0,1) \notin U \cup W$. *Note que:* $U \not\subseteq W$ *y* $W \not\subseteq U$.

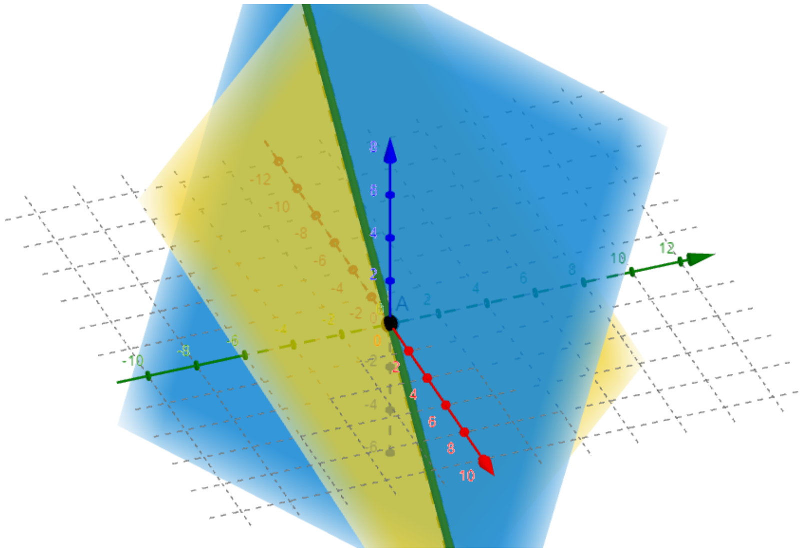

Figura 2.3: Subespacios U (azul) y W (amarillo) e interesección $U \cap W$ (verde)

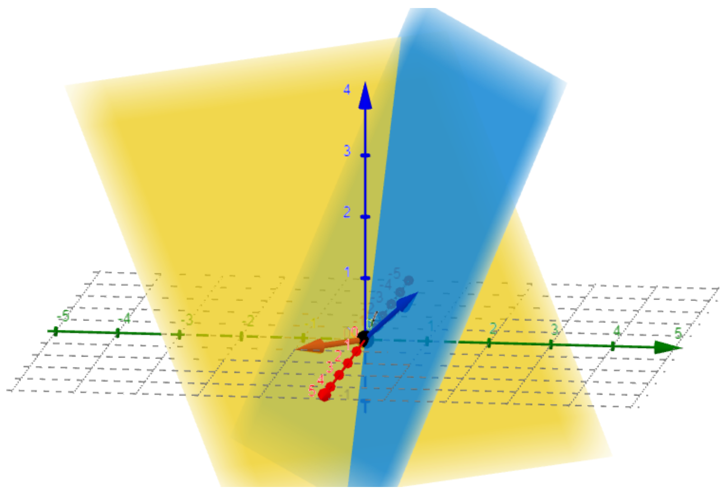

Figura 2.4: vector $u \in U \cup W$ (naranjo) y vector $w \in U \cup W$ (azul)

3. *Sea* $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. *Consideremos*

$$U = \{p \in V \ : \ p(0) = 0 \ \wedge \ p'(0) = 0\} ,$$
$$W = \{p \in V \ : \ \forall x \in \mathbb{R} \ : \ p(-x) = p(x)\} .$$

Encontremos $U \cap W$ *y* $U \cup W$. *Notemos que*

$$U = \left\{p \in V \ : \ \exists\, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \ : \ p(x) = a_2x^2 + a_3x^3\right\} ,$$
$$W = \left\{p \in V \ : \ \exists\, b_0, b_2 \in \mathbb{R} \ : \ p(x) = b_0 + b_2x^2\right\} .$$

El conjunto U *está formado por los polinomios* $p \in V$ *tales que* $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ *con* $a_0 = a_1 = 0$, *mientras que* W *está formado por los polinomios* $p \in V$ *tales que* $p(x) =$

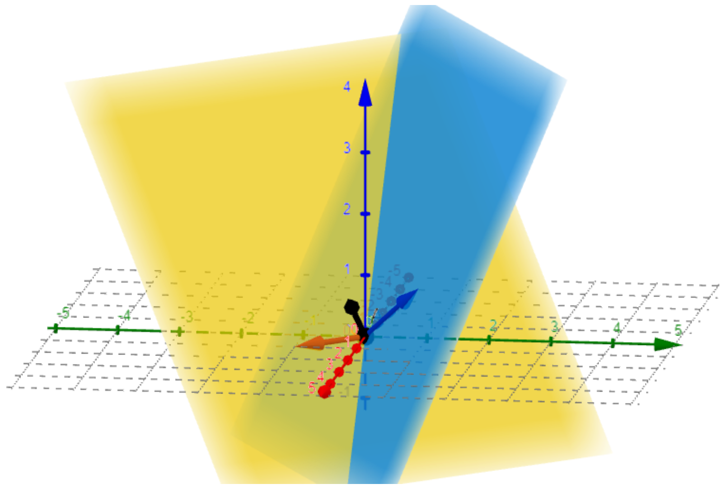

Figura 2.5: $u \in U \cup W$ (naranjo), $w \in U \cup W$ (azul) y $u + w \notin U \cup W$ (negro)

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ con $a_1 = a_3 = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} U \cap W &= \{p \in V \ : \ p(0) = 0 \wedge p'(0) = 0 \wedge [\forall x \in \mathbb{R} \ : \ p(-x) = p(x)]\}, \\ &= \left\{p \in V \ : \ \exists\, a_2 \in \mathbb{R} \ : \ p(x) = a_2 x^2\right\}, \\ U \cup W &= \{p \in V \ : \ (p(0) = 0 \wedge p'(0) = 0) \vee (\forall x \in \mathbb{R} \ : \ p(-x) = p(x))\}. \end{aligned}$$

En este ejemplo $U \nsubseteq W$ y $W \nsubseteq U$, por tanto $U \cup W$, según lema 2.30, no es un subespacio vectorial de V. Por ejemplo, los polinomios $p_1 \in U$ y $p_2 \in W$ que satisfacen

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \ : \ p_1(x) = x^3 \ \wedge \ p_2(x) = x^2 + 1$$

son tales que $p_1, p_2 \in U \cup W$, pero $p_1 + p_2 \notin U$ y $p_1 + p_2 \notin W$ y, por tanto, $p_1 + p_2 \notin U \cup W$.

4. *Sea $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Consideremos*

$$\begin{aligned} U &= \left\{p \in V \ : \ p(0) = 0\right\} = \left\{p \in V \ : \ \exists\, a, b \in \mathbb{R} \ : \ p(x) = ax + bx^2\right\}, \\ W &= \{p \in V \ : \ p(0) = 0 \wedge p'(0) = 0\} = \left\{p \in V \ : \ \exists\, a \in \mathbb{R} \ : \ p(x) = ax^2\right\}. \end{aligned}$$

Note que $W \subseteq U$. En este caso la unión de los dos conjuntos es igual a U, que es subespacio vectorial de V. Además

$$U \cap W = \{p \in V \ : \ p(0) = 0 \wedge p'(0) = 0\} = W.$$

Demostremos ahora el lema 2.30.

Demostración. La primera parte de esta demostración, la relativa a la intersección de subespacios vectoriales, se hará en clases.

Mostremos primero que $U \cap W$ es también un subespacio vectorial de V. Como U es s.e.v. de V, U satisface

1. $\theta \in U$,

2. U es cerrado para la suma,
3. U es cerrado para la ponderación por un escalar en $\mathbb{K}$.

De igual modo, como W es s.e.v. de V, W satisface

1. $\theta \in W$,
2. W es cerrado para la suma,
3. W es cerrado para la ponderación por un escalar en $\mathbb{K}$.

Demostremos que $U \cap W$ cumple las tres propiedades en lema 2.19.

1. Dado que U y W son subespacios vectoriales de V, se cumple que $\theta \in U$ y $\theta \in W$, por tanto, $\theta \in U \cap W$.
2. Sean ahora u, w elementos de $U \cap W$.
$$\begin{aligned} u \in U \cap W \quad &\Rightarrow \quad u \in U \quad \wedge \quad u \in W, \\ w \in U \cap W \quad &\Rightarrow \quad w \in U \quad \wedge \quad w \in W, \end{aligned}$$
por tanto, como U es s.e.v. de V, $u + w \in U$ y como W es s.e.v. de V, $u + w \in W$, de este modo,
$$u + w \in U \quad \wedge \quad u + w \in W \qquad \Rightarrow u + w \in U \cap W,$$
es decir, $U \cap W$ es cerrado para la suma.
3. Sean $\alpha \in \mathbb{K}$ y $u \in U \cap W$, entonces
$$u \in U \cap W \qquad \Rightarrow \qquad u \in U \text{ y } u \in W,$$
por tanto, y como U es cerrado para la ponderación por escalar, $\alpha u \in U$. Dado que también W es cerrado para la ponderación por escalar, $\alpha u \in W$. Si $\alpha u \in U$ y $\alpha u \in W$, se cumple que $\alpha u \in U \cap W$, con lo que podemos asegurar que $U \cap W$ es cerrado para la ponderación por escalar.

Podemos concluir entonces que $U \cap W$ es subespacio vectorial de V.

La segunda parte de este lema establece que $U \cup W$ es s.e.v. de V si y solo si $U \subseteq W$ o $W \subseteq U$.

Debemos demostrar entonces que

1. si $U \subseteq W$, entonces $U \cup W$ es s.e.v. de V,
2. si $W \subseteq U$, entonces $U \cup W$ es s.e.v. de V,
3. si $U \cup W$ es s.e.v. de V, entonces tiene que ocurrir que $U \subseteq W$ o que $W \subseteq U$.

Las dos primeras afirmaciones son sencillas de demostrar. Si $U \subseteq W$, entonces $U \cup W = W$ que ya sabemos que es subespacio vectorial de V. Si $W \subseteq U$, entonces $U \cup W = U$ que también es subespacio vectorial de V.

Para demostrar la tercera supondremos que $U \cup W$ es subespacio vectorial de V y U no es subconjunto de W y demostraremos que entonces W tiene que ser subconjunto de U. Si $U \nsubseteq W$, existe $u \in U$ tal que $u \notin W$. Sea además $w \in W$, mostremos que $w \in U$.
$$u \in U \Rightarrow u \in U \cup W, \qquad w \in W \Rightarrow w \in U \cup W.$$

Como $u \in U \cup W$ y $w \in U \cup W$ y $U \cup W$ es s.e.v. de V se cumple que $u + w \in U \cup W$, es decir $u + w \in U$ o $u + w \in W$.

Supongamos que $u + w \in W$. Entonces $u = (u + w) + (-w) \in W$, lo cual es una contradicción con nuestra suposición de que $u \notin W$. Por tanto, $u + w \in U \cup W \Rightarrow u + w \in U$. Además,

$$u + w \in U \qquad \Rightarrow \qquad w = (u + w) + (-u) \in U \qquad \Rightarrow \qquad W \subseteq U.$$

$\square$