UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS 521218
Listado 9
Sistemas Lineales de EDO: Segunda Parte

Recordamos la PROPIEDAD: Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz cuadrada constante. $(\lambda, \boldsymbol{u})$ es un autopar de $\boldsymbol{A}$ si y sólo si la función vectorial $\mathbb{R} \ni t \mapsto \boldsymbol{Z}(t) := \mathrm{e}^{\lambda t}\boldsymbol{u}$ es una solución del sistema EDO lineal de primer orden homogéneo $\boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X}(t)$, $t \in \mathbb{R}$.
COMENTARIO: En el desarrollo de la presente asignatura, la matriz constante $\boldsymbol{A}$ será a coeficientes reales. A su vez, nos interesa obtener soluciones vectoriales (por columnas), cuyas componentes son funciones de valores reales. Es así que cuando el valor propio λ sea un número real, la PROPIEDAD proporcionará una solución admisible. En cambio, cuando el valor propio λ sea un número complejo, la PROPIEDAD inducirá una solución no admisible (pues sus componentes pueden tomar valores complejos). Como en el caso escalar, habrá que efectuar un POST PROCESO cuando esto suceda (véase desarrollo Ejercicio 2-(i)).
Problemas a resolver en práctica

1. Resuelva $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t), & x(0) = 2, \\ y'(t) = 3x(t) + 4y(t), & y(0) = 1, \end{cases}$

Desarrollo:

En este caso la matriz de los coeficientes $\boldsymbol{A}$ es dada por $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

El polinomio característico es $p(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = (2-\lambda)(4-\lambda) - 3$. Así, los valores propios de $\boldsymbol{A}$ son:

$$\lambda_1 = 5 \ \text{ y } \ \lambda_2 = 1 \quad \text{(ambos simples)}.$$

Para los vectores propios determinamos los espacios propios

$$S_{\lambda_1} = \mathrm{Ker}(\boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{I}) \text{ y } S_{\lambda_2} = \mathrm{Ker}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}).$$

Realizando los cálculos correspondientes (DEJADOS DE EJERCICIO AL LECTOR), resulta:

$$S_{\lambda_1} = \mathrm{Ker}(\boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{I}) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle,$$

$$S_{\lambda_2} = \mathrm{Ker}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

De lo anterior, se desprende que $\boldsymbol{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{v}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ son vectores propios de $\boldsymbol{A}$.

Invocando la PROPIEDAD enunciada al principio, las funciones vectoriales (por columnas):

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \boldsymbol{X}_1(t) := \mathrm{e}^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbb{R} \ni t \mapsto \boldsymbol{X}_2(t) := \mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

son soluciones del sistema dado. Además, en vista que el Wronskiano de $\boldsymbol{X}_1$ y $\boldsymbol{X}_2$, evaluado en $t=0$, es $W[\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2](0)=-4\neq 0$, se infiere que el conjunto de funciones vectoriales $\{\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2\}$ es linealmente independiente. Así, la Solución General, del sistema dado, se expresa como:

$$\boldsymbol{X}(t)=c_1\,\boldsymbol{X}_1(t)\,+\,c_2\,\boldsymbol{X}_2(t)\;=\;c_1\mathrm{e}^{5t}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+c_2\mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\,,\quad \forall\, t\in\mathbb{R}\,,$$

donde c_1 y c_2 son constantes reales arbitrarias.

Ahora usamos las condiciones iniciales para determinar c_1 y c_2. Tomando $t=0$ en la solución general, e igualando con el vector inicial del PVI, obtenemos

$$\boldsymbol{X}(0)=c_1\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1+c_2\\3c_1-c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\,.$$

Este sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas $c_1,c_2\in\mathbb{R}$, se resuelve sin mayores dificultades. Al adicionar las dos filas obtenemos $4c_1=3$, esto es, $c_1=3/4$, y luego substituyendo en la primera ecuación, obtenemos $c_2=2-c_1=5/4$. Así, la única solución del PVI dado es

$$\boldsymbol{X}(t)=\frac{3}{4}\mathrm{e}^{5t}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+\frac{5}{4}\mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\,,\quad t\in\mathbb{R}\,.$$

2. Resuelva usando el método de valores/vectores propios:

$$(i)\ \begin{cases} x'(t)=3x(t)-y(t), & x(0)=0,\\ y'(t)=5x(t)-y(t), & y(0)=1,\end{cases}\qquad (ii)\ \begin{cases} x'(t)=-2x(t)-y(t)+z(t),\\ y'(t)=-x(t)-2y(t)-z(t),\\ z'(t)=x(t)-y(t)-2z(t),\end{cases}$$

DESARROLLO

(i) El sistema se puede expresar matricialmente como

$$\boldsymbol{X}'(t)=\underbrace{\begin{pmatrix}3&-1\\5&-1\end{pmatrix}}_{=:\,\boldsymbol{A}}\boldsymbol{X}(t)\,,\quad \boldsymbol{X}(0)\;=\;\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\,,\qquad \boldsymbol{X}(t):=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}\,.$$

Las raíces del polinomio característico
$p(\lambda):=\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=(3-\lambda)(-1-\lambda)+5=\lambda^2-2\,\lambda+2=(\lambda-1)^2+1$, son

$$\lambda_1=1+i,\qquad \lambda_2=1-i,$$

las cuales son **complejas conjugadas simples**, y por tanto, basta obtener un sólo espacio propio.

El espacio propio correspondiente a λ_1 es

$$S_{\lambda_1}=\mathrm{Ker}(\boldsymbol{A}-\lambda_1\,\boldsymbol{I})=\left\langle\left\{\begin{pmatrix}1\\2-i\end{pmatrix}\right\}\right\rangle,\,.$$

De esta manera, $\boldsymbol{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}$ es un vector propio de $\boldsymbol{A}$, asociado al valor propio $\lambda_1 \in \mathbb{C}$. En vista que $\boldsymbol{A}$ tiene componentes reales, se infiere que $\overline{\boldsymbol{v}_1}$ será un vector propio de $\boldsymbol{A}$, asociado al valor propio $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$.
En consecuencia, el espacio propio asociado a $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ es

$$S_{\lambda_2} = \operatorname{Ker}(\boldsymbol{A} - \lambda_2\, \boldsymbol{I}) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix} \right\} \right\rangle .$$

Considerando la función vectorial compleja (por columnas) $\mathbb{R} \ni t \mapsto \boldsymbol{Z}(t) := \mathrm{e}^{(1+i)\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}$, se inducen las siguientes soluciones del sistema EDO dado, linealmente independientes:

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \boldsymbol{X}_1(t) := \operatorname{Re}(\boldsymbol{Z}(t)) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 2\cos(t) + \operatorname{sen}(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \boldsymbol{X}_2(t) := \operatorname{Im}(\boldsymbol{Z}(t)) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(t) \\ 2\operatorname{sen}(t) - \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Así, la solución general del sistema EDO lineal de primer orden homogéneo es

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}(t) &= c_1\, \boldsymbol{X}_1(t) + c_2\, \boldsymbol{X}_2(t) \\ &= c_1\, \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 2\cos(t) + \operatorname{sen}(t) \end{pmatrix} + c_2\, \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(t) \\ 2\operatorname{sen}(t) - \cos(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.
Imponiendo la condición inicial, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{X}(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 2\,c_1 - c_2 \end{pmatrix},$$

cuya única solución es $c_1 = 0$ y $c_2 = -1$.
Por lo tanto, la única solución del PVI planteado viene dada por

$$\boldsymbol{X}(t) = -\boldsymbol{X}_2(t) = -\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(t) \\ 2\operatorname{sen}(t) - \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Alternativa: Se sabe que $\boldsymbol{X}_2$ es solución de sistema, y además, $\boldsymbol{X}_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, con lo cual $-\boldsymbol{X}_2$ es una solución del PVI planteado, y gracias al **Teorema de Existencia y Unicidad**, es su única solución.

(*ii*) El sistema se puede expresar matricialmente como

$$\boldsymbol{X}'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}}_{=:\boldsymbol{A}} \boldsymbol{X}(t), \qquad \boldsymbol{X}(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico es $p(\lambda) := \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})$. Calculando el determinante, obtenemos $p(\lambda) = -\lambda\,(3+\lambda)^2$. Luego las raíces de p son

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -3 \text{ (valor propio doble) }, \qquad \lambda_3 = 0 \text{ (valor propio simple).}$$

El espacio propio correspondiente al valor propio doble λ_1 (DEJADO AL LECTOR DE EJERCICIO) es

$$S_{\lambda_1} = \mathrm{Ker}(\boldsymbol{A} - \lambda_1\,\boldsymbol{I}) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\} \right\rangle .$$

Identificando, tenemos que $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$, donde $\boldsymbol{v}_1 := \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{v}_2 := \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, es una base de S_{λ_1}, conformada por vectores propios de $\boldsymbol{A}$ asociados al valor propio (de multiplicidad 2) $\lambda_1 = -3$. Invocando la PROPIEDAD recordada al comienzo de este apunte, se inducen las siguientes soluciones del sistema EDO dado:

$$\mathbb{R} \ni t \;\mapsto\; \boldsymbol{X}_1(t) := \mathrm{e}^{-3\,t}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad \mathbb{R} \ni t \;\mapsto\; \boldsymbol{X}_2(t) := \mathrm{e}^{-3\,t}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

Nótese que puesto que $\dim(S_{\lambda_1}) = 2$ es igual a la multiplicidad algebraica del valor propio λ_1, puede asegurarse que la matriz $\boldsymbol{A}$ es diagonalizable (¿POR QUÉ?).

Para la solución faltante, procedemos a caracterizar el espacio propio asociado a $\lambda_3 = 0$. Como resultado (EJERCICIO), se obtiene

$$S_{\lambda_3} = \mathrm{Ker}(\boldsymbol{A} - \lambda_3\,\boldsymbol{I}) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} \right\} \right\rangle,$$

de donde se infiere que $\boldsymbol{v}_3 := \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ es un vector propio de $\boldsymbol{A}$, asociado al valor propio λ_3. Nuevamente, aplicando la PROPIEDAD, la tercera solución del sistema EDO dado, linealmente independiente con las ya obtenidas, viene dada por

$$\mathbb{R} \ni t \;\mapsto\; \boldsymbol{X}_3(t) := \mathrm{e}^{0t}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Así, la solución general del sistema homogéneo es

$$\boldsymbol{X}(t) = c_1\,\boldsymbol{X}_1(t) + c_2\,\boldsymbol{X}_2(t) + c_3\,\boldsymbol{X}_3(t) = c_1\,\mathrm{e}^{-3\,t}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^{-3\,t}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

donde c_1, c_2 y c_3 son constantes arbitrarias.

3. Resolver usando el método de valores y vectores propios y la variación de parámetros (según corresponda): $\begin{cases} x'(t) = 3x(t) - y(t) - z(t), \\ y'(t) = x(t) + y(t) - z(t) + t \\ z'(t) = x(t) - y(t) + z(t) + 2\,\mathrm{e}^t \end{cases}$

DESARROLLO

Se observa que el sistema se puede expresar matricialmente como

$$\boldsymbol{X}'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{=:\,\boldsymbol{A}} \boldsymbol{X}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 2\,\mathrm{e}^t \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{X}(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Gracias al Principio de Superposición, la solución general del problema está dada por

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}_h(t) + \boldsymbol{X}_p(t),$$

siendo $\boldsymbol{X}_h$ la solución general del problema homogéneo asociado y $\boldsymbol{X}_p$ una solución particular del problema planteado.

El cálculo del determinante (DEJADO AL LECTOR) nos conduce al polinomio característico $p(\lambda) := \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = (1-\lambda)\,(2-\lambda)^2$. Sus raíces son

$$\lambda_1 = 1 \text{ (valor propio simple)}, \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = 2 \text{ (valor propio doble)}.$$

El espacio propio correspondiente a λ_1 es

$$S_{\lambda_1} = \mathrm{Ker}(\boldsymbol{A} - \lambda_1\,\boldsymbol{I}) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle,$$

el cual da lugar a la primera solución,

$$\mathbb{R} \ni t \;\mapsto\; \boldsymbol{X}_1(t) := \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El espacio propio asociado al valor propio doble λ_2 está dado por

$$S_{\lambda_2} = \mathrm{Ker}(\boldsymbol{A} - \lambda_2 \boldsymbol{I}) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

de donde obtenemos las soluciones faltantes, linealmente independientes

$$\mathbb{R} \ni t \;\mapsto\; \boldsymbol{X}_2(t) := \mathrm{e}^{2\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{R} \ni t \;\mapsto\; \boldsymbol{X}_3(t) := \mathrm{e}^{2\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nótese que puesto que $\dim(S_{\lambda_2}) = 2$ es igual a la multiplicidad algebraica de λ_2, la matriz $\boldsymbol{A}$ es diagonalizable.

Así, la solución general del sistema homogéneo, $\boldsymbol{X}_h$, es

$$\boldsymbol{X}_h(t) = c_1\, \boldsymbol{X}_1(t) + c_2\, \boldsymbol{X}_2(t) + c_3\, \boldsymbol{X}_3(t) = c_1\, \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\, \mathrm{e}^{2\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\, \mathrm{e}^{2\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

donde c_1, c_2 y c_3 son constantes arbitrarias.

Para la Búsqueda de una solución particular: $\boldsymbol{X}_p$.
Aplicando la variación de paramétros, buscamos una solución del tipo

$$\boldsymbol{X}_p(t) = d_1(t)\, \boldsymbol{X}_1(t) + d_2(t)\, \boldsymbol{X}_2(t) + d_3(t)\, \boldsymbol{X}_3(t),$$

donde las funciones (derivables) $d_1(t)$, $d_2(t)$ y $d_3(t)$ deben verificar el sistema

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{2\,t} & \mathrm{e}^{2\,t} \\ \mathrm{e}^t & \mathrm{e}^{2\,t} & 0 \\ \mathrm{e}^t & 0 & \mathrm{e}^{2\,t} \end{pmatrix}}_{\text{matriz fundamental de soluciones}} \begin{pmatrix} d_1'(t) \\ d_2'(t) \\ d_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 2\,\mathrm{e}^t \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema anterior, resulta

$$\begin{cases} d_1'(t) & = 2 + t\,\mathrm{e}^{-t} \\ d_2'(t) & = -2\,\mathrm{e}^{-t} \\ d_3'(t) & = -t\,\mathrm{e}^{-2\,t}. \end{cases}$$

Calculando primitivas de cada una de estas derivadas, resulta

$$\begin{cases} d_1(t) & = -\,(1+t)\,\mathrm{e}^{-t} + 2\,t \\ d_2(t) & = 2\,\mathrm{e}^{-t} \\ d_3(t) & = \frac{1}{4}\,(1+2\,t)\,\mathrm{e}^{-2\,t}\,. \end{cases}$$

Así, se obtiene la solución particular

$$\boldsymbol{X}_p(t) = (2\,t\,\mathrm{e}^t - 1 - t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\,\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\,(1+2\,t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}\,,\,.$$

Finalmente, la solución general del sistema es:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}(t) = & c_1\, \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\, \mathrm{e}^{2\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\, \mathrm{e}^{2\,t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & + (2\,t\,\mathrm{e}^t - 1 - t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\,\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\,(1+2\,t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}\,, \end{aligned}$$

donde c_1, c_2 y c_3 son constantes arbitrarias.

4. Considere el sistema lineal de EDO no homogéneo

$$\left\{\begin{array}{rll} x'(t) = & -2x(t) + y(t) + z(t) & \\ y'(t) = & -x(t) - 2y(t) - z(t) & + \mathrm{e}^{-t} \\ z'(t) = & x(t) - y(t) - 2z(t) & -(\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-3t}) \end{array}\right.$$

(i) Si la función vectorial $\mathbb{R} \ni t \mapsto \boldsymbol{X}_1(t) := \mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ es una solución del sistema de EDO lineal homogéneo asociado al sistema dado, escriba la solución general del **sistema lineal homogéneo** correspondiente.

(ii) Determine una solución particular para el sistema dado.

(iii) Determine la solución general del sistema dado.

DESARROLLO

El sistema EDO dado puede expresarse en forma matricial, como $\boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{B}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, donde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{B}(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{-t} \\ -(\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-3t}) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(i) La solución general del problema es $\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}_h(t) + \boldsymbol{X}_p(t)$, donde $\boldsymbol{X}_h(t)$ es la solución general del problema homogéneo asociado y $\boldsymbol{X}_p(t)$ es una solución particular del problema.

El polinomio característico $p(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) = 0$ proporciona los valores propios

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -3, \quad \lambda_3 = -1 \quad \text{(valores propios simples)}$$

Puesto que $\boldsymbol{A}$ tiene valores propios simples, sigue que $\boldsymbol{A}$ es diagonalizable.

Como nos dan la solución asociada a $\lambda_1 = -2$, buscamos los espacios propios S_{λ_2} y S_{λ_3} asociados respectivamente a $\lambda_2 = -3$ y $\lambda_3 = -1$.

El espacio propio correspondiente a λ_2, S_{λ_2}, resulta ser (Dejado de ejercicio al lector)

$$S_{\lambda_2} = \operatorname{Ker}(\boldsymbol{A} - \lambda_2\boldsymbol{I}) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle,$$

el cual da origen a la segunda solución (¿Por qué?), $\boldsymbol{X}_2(t)$,

$$\boldsymbol{X}_2(t) = \mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Para el espacio propio correspondiente a λ_3, obtenemos (Dejado de ejercicio al lector)

$$S_{\lambda_3} = \operatorname{Ker}(\boldsymbol{A} - \lambda_3\boldsymbol{I}) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

de donde obtenemos la tercera solución $\boldsymbol{X}_3(t)$,

$$\boldsymbol{X}_3(t) = \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces la solución general del sistema EDO lineal homogéneo de primer orden dado, $\boldsymbol{X}_h(t)$, es

$$\boldsymbol{X}_h(t) = c_1\,\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3\,\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donde c_1, c_2 y c_3 son constantes reales arbitrarias. Comentario: como nos dicen que $\boldsymbol{X}_1$ es una solución de la EDO homogénea asociada, invocando la Propiedad, se tiene que $\lambda_1 = -2$ es un valor propio de $\boldsymbol{A}$ (es decir, una raíz de p). Además, $S_{\lambda_1} = \langle\{\boldsymbol{v}_1\}\rangle$, con $\boldsymbol{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(*ii*) Para la solución particular, $\boldsymbol{X}_p$, por variación de paramétros buscamos una solución del tipo

$$\boldsymbol{X}_p(t) = d_1(t)\boldsymbol{X}_1(t) + d_2(t)\boldsymbol{X}_2(t) + d_3(t)\boldsymbol{X}_3(t),$$

donde las derivadas de las incógnitas $d_1(t)$, $d_2(t)$ y $d_3(t)$ deben verificar el sistema

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-3t} & 0 \\ \mathrm{e}^{-2t} & 0 & \mathrm{e}^{-t} \\ -\mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-3t} & -\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1'(t) \\ d_2'(t) \\ d_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{-t} \\ -\left(\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-3t}\right) \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema anterior, resulta

$$\begin{cases} d_1'(t) &= -\,\mathrm{e}^{-t} \\ d_2'(t) &= 1 \\ d_3'(t) &= 1 + \mathrm{e}^{-2\,t}. \end{cases}$$

Integrando, obtenemos (eligiendo constantes de integración nulas),

$$\begin{cases} d_1(t) &= \mathrm{e}^{-t} \\ d_2(t) &= t \\ d_3(t) &= t\,-\,\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2t}. \end{cases}$$

Así, se obtiene la solución particular

$$\boldsymbol{X}_p(t) = \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left(t - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right)\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

esto es,

$$\boldsymbol{X}_p(t) = \mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\,\mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \left(t\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

(iii) Finalmente, la solución general del sistema es:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}(t) =& c_1\,\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + c_3\,\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\\ &+ \mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + t\,\mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \left(t\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t}\right)\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

donde c_1, c_2 y c_3 son constantes arbitrarias.

5. Resolver el sistema EDO lineal no homogéneo de primer orden

$$\boldsymbol{X}'(t) = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{X}(t) + \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{3t}+\mathrm{e}^{t}\\ \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{2t}\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

sabiendo que una MATRIZ FUNDAMENTAL para el sistema EDO homogéneo asociado viene dada por $\boldsymbol{M}(t) = \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{-t}\\ \mathrm{e}^{t} & -\mathrm{e}^{-t}\end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. Además, el sistema EDO no homogéneo

$$\boldsymbol{X}'(t) = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{X}(t) + \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{t}\\ \mathrm{e}^{-t}\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

tiene por solución particular a $\boldsymbol{X}_p(t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}(2t+1)(\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{-t})\\ (2t-1)(\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{-t})\end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

DESARROLLO

Del enunciado se desprende que las funciones vectoriales (por columnas) $\mathbb{R} \ni t \mapsto \boldsymbol{X}_1(t) := \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{t}\\ \mathrm{e}^{t}\end{pmatrix}$ y $\mathbb{R} \ni t \mapsto \boldsymbol{X}_2(t) = \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-t}\\ -\mathrm{e}^{-t}\end{pmatrix}$ son soluciones l.i del sistema EDO homogéneo asociado. Luego, la solución general de dicho sistema EDO homogéneo es

$$\boldsymbol{X}_H(t) = c_1\,\boldsymbol{X}_1(t) + c_2\,\boldsymbol{X}_2(t) = c_1\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{t}\\ \mathrm{e}^{t}\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-t}\\ -\mathrm{e}^{-t}\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

siendo c_1 y c_2 constantes reales arbitrarias.

Gracias al Principio de Superposición, se construye una solución particular de la forma $\boldsymbol{X}_p = \boldsymbol{X}_{p1} + \boldsymbol{X}_{p2}$, siendo $\boldsymbol{X}_{p1}$ una solución particular del sistema

$$\boldsymbol{X}'(t) = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{X}(t) + \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{t}\\ \mathrm{e}^{-t}\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

y $\boldsymbol{X}_{p2}$ solución particular del sistema

$$\boldsymbol{X}'(t) = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\boldsymbol{X}(t) + \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{3\,t}\\ -\mathrm{e}^{2\,t}\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

Del enunciado sabemos que

$$\boldsymbol{X}_{p1}(t) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (2t+1)(\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-t}) \\ (2t-1)(\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t}) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para construir $\boldsymbol{X}_{p2}$ aplicaremos variación de parámetros. Esta técnica propone que

$$\boldsymbol{X}_{p2}(t) \;=\; d_1(t)\,\boldsymbol{X}_1(t) \;+\; d_2(t)\,\boldsymbol{X}_2(t)\,,$$

de modo que las funciones derivables d_1 y d_2, satisfacen el sistema

$$\Big(\boldsymbol{X}_1(t)\,|\,\boldsymbol{X}_2(t)\Big)\begin{pmatrix} d_1'(t) \\ d_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{t} & -\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1'(t) \\ d_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} \\ -\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema, se tiene

$$d_1'(t) \;=\; \frac{\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{t}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad d_1(t) \;=\; \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{2t} \;-\; \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{t}$$

y

$$d_2'(t) \;=\; \frac{\mathrm{e}^{3t} + \mathrm{e}^{4t}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad d_2(t) \;=\; \frac{1}{6}\,\mathrm{e}^{3t} \;+\; \frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{4t}.$$

De esta forma,

$$\boldsymbol{X}_{p2}(t) \;=\; \left(\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{2t} \;-\; \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{t}\right)\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} \\ \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{6}\,\mathrm{e}^{3t} \;+\; \frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{4t}\right)\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} \\ -\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 9\,\mathrm{e}^{3t} - 8\,\mathrm{e}^{2t} \\ 3\,\mathrm{e}^{3t} - 16\,\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, la solución general del sistema EDO no homogéneo dado es

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}(t) \;&=\; \boldsymbol{X}_H(t) \;+\; \boldsymbol{X}_{p1}(t) \;+\; \boldsymbol{X}_{p2}(t) \\ &=\; c_1\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} \\ \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix} \;+\; c_2\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} \\ -\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \;+\; \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (2t+1)(\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-t}) \\ (2t-1)(\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t}) \end{pmatrix} \;+\; \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 9\,\mathrm{e}^{3t} - 8\,\mathrm{e}^{2t} \\ 3\,\mathrm{e}^{3t} - 16\,\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

con c_1 y c_2 constantes reales arbitrarias.

Problemas propuestos para el estudiante.

1. Resuelva los siguientes PVI usando el método de valores/vectores propios (multiplicidad igual a 1).

$$(i)\;\begin{cases} x'(t) = x(t) - 2y(t), & x(0) = 4, \\ y'(t) = -2x(t) + 4y(t), & y(0) = 5, \end{cases} \quad (ii)\;\begin{cases} x'(t) = -3x(t) + 3y(t), & x(0) = 1, \\ y'(t) = 3x(t) + 5y(t), & y(0) = 3, \end{cases},$$

2. Usando el método de valores/vectores propios, resuelva:

$$(i)\;\begin{cases} x'(t) = -2x(t) - y(t) + z(t), & x(0) = 4, \\ y'(t) = -x(t) - 2y(t) - z(t), & y(0) = 0, \\ z'(t) = x(t) - y(t) - 2z(t), & z(0) = 1, \end{cases}$$

3. Resuelva los siguientes PVI usando el método de valores/vectores propios (valores propios complejos).

$$(i) \left\{ \begin{array}{ll} x'(t) = -x(t) + y(t), & x(0) = 4, \\ y'(t) = -x(t) - y(t), & y(0) = 1, \end{array} \right. \qquad (ii) \left\{ \begin{array}{ll} x'(t) = x(t) - y(t), & x(0) = 4, \\ y'(t) = 5x(t) - y(t), & y(0) = 0, \end{array} \right.$$

4. Resolver usando variación de parámetros:

   a) $\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = x(t) + y(t) + \mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-2t}, \\ y'(t) = x(t) + y(t) - \mathrm{e}^{-t} - 2\mathrm{e}^{3t}, \end{array} \right.$

   b) $\left\{ \begin{array}{ll} x'(t) = y(t) + \mathrm{e}^{t}, & x(0) = 4, \\ y'(t) = -x(t), & y(0) = 0, \end{array} \right.$

5. En dos tanques A y B de 800 litros de capacidad, se tienen respectivamente 400 [lts] de agua pura y 200 [lts] de agua con sal a una concentración de 0,1 [kg/lt]. Desde el externo ingresan al tanque A 8 [lt/min] de agua con sal a una concentración de 0,1 [kg/lt]. Simultáneamente desde el tanque B ingresan al tanque A 2 [lt/min] de agua y sal, y desde el tanque A ingresan al tanque B 6 [lt/min] de mezcla.
   Si del tanque B se pierden al externo 4 [lt/min], y suponiendo que en todo instante la mezcla de ambos tanques son homogéneas, escriba el sistema de EDO que rige el proceso anterior, hasta el momento del rebalse.

6. Resuelva $\left\{ \begin{array}{ll} x'(t) = 3x(t) + 2y(t), & x(0) = -2, \\ y'(t) = 3x(t) + 2y(t), & y(0) = 3, \end{array} \right.$

7. Determine la solución general de

   a)
   $$\begin{cases} x'(t) = 2\,x(t) + 2\,y(t) \\ y'(t) = x(t) + 3\,y(t) \end{cases}$$

   b)
   $$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 2\,y(t) \\ y'(t) = 4\,x(t) + 3\,y(t) \end{cases}$$

   c)
   $$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) - z(t) \\ y'(t) = 2\,y(t) \\ z'(t) = y(t) - z(t) \end{cases}$$

   d)
   $$\begin{cases} x'(t) = 2\,x(t) - 7\,y(t) \\ y'(t) = 5\,x(t) + 10\,y(t) + 4\,z(t) \\ z'(t) = 5\,y(t) + 2\,z(t) \end{cases}$$

RBP/JMS/FST//rbp
26 de Octubre de 2022.