1 Límites de funciones

En este capítulo se definirá formalmente la noción de **límite** para una función de variable real y con valores en $\mathbb{R}$. O sea, una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$, donde I es un intervalo abierto de la recta real.

Se escoje un punto $a \in I$, donde incluso la f puede **no estar definida** y se analiza el comportamiento de las imágenes $f(x)$, para puntos x *próximos de* a, pero diferentes de a. Esto conducirá al concepto de "*límite de* $f(x)$ *cuando* x *tiende al punto* a".

En general, en la recta real $\mathbb{R}$ podemos considerar la noción de distancia entre dos puntos x y a dada por la fórmula

$$d(x, a) = |x - a|$$

Con respecto a ésta, los dos puntos estarán (o se considerarán) *próximos* cuando $d(x, a) = |x - a| < \delta$ donde $\delta > 0$ es un número *pequeño*.

Por ejemplo, la condición $0 < |x - a| < 10^{-5}$ significa que $x \neq a$ y la distancia entre ellos es menor que $0,00001$. O sea, son bastante parecidos o próximos (aunque distintos).

Considere ahora la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

en su dominio $\mathbb{R} - \{1\}$.

Aunque no es posible calcular $f(1)$, sí podemos evaluar f en puntos x tan cercanos de 1 como queramos. Piense por ejemplo en $f(0,9)$, $f(0,99)$ $f(0,999)$, ..., $f(0,9999999999)$.

¿Qué comportamiento podemos detectar en estos valores?

El siguiente cálculo muestra una tabla de valores para f evaluada en puntos próximos de 1.

$$\begin{bmatrix} .999\,980\,8 & 1.999\,980\,8 \\ .999\,981\,6 & 1.999\,981\,6 \\ .999\,982\,4 & 1.999\,982\,4 \\ .999\,983\,2 & 1.999\,983\,2 \\ .999\,984 & 1.999\,984 \\ .999\,984\,8 & 1.999\,984\,8 \\ .999\,985\,6 & 1.999\,985\,6 \\ .999\,986\,4 & 1.999\,986\,4 \\ .999\,987\,2 & 1.999\,987\,2 \\ .999\,988 & 1.999\,988 \\ .999\,988\,8 & 1.999\,988\,8 \\ .999\,989\,6 & 1.999\,989\,6 \\ .999\,990\,4 & 1.999\,990\,4 \\ .999\,991\,2 & 1.999\,991\,2 \\ .999\,992 & 1.999\,992 \\ .999\,992\,8 & 1.999\,992\,8 \\ .999\,993\,6 & 1.999\,993\,6 \\ .999\,994\,4 & 1.999\,994\,4 \\ .999\,995\,2 & 1.999\,995\,2 \\ .999\,996 & 1.999\,996 \\ .999\,996\,8 & 1.999\,996\,8 \\ .999\,997\,6 & 1.999\,997\,6 \\ .999\,998\,4 & 1.999\,998\,4 \\ .999\,999\,2 & 1.999\,999\,2 \end{bmatrix}$$

Se ve que:

"en la medida que x se aproxima a 1, su imagen $f(x)$ se acerca al valor $L = 2$".

Este característica de la f, cerca de 1, se formaliza en la siguiente definición.

1.1 Definición de límite

Definición 1 *Sea f definida en un intervalo abierto I, con la posible excepción del punto $a \in I$ y sea L un número real. Se dice que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ si y sólo si*

$$\begin{gathered} \textit{Dado } \varepsilon > 0, \textit{ existe un } \delta > 0 \textit{ tal que} \\ \forall x : 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - L| < \varepsilon \end{gathered}$$

Considerando que

$$\begin{gathered} 0 < |x - a| < \delta \ \Leftrightarrow \ x \in \left]a - \delta, a + \delta\right[\wedge x \neq a \\ |f(x) - L| < \varepsilon \ \Leftrightarrow \ f(x) \in \left]L - \varepsilon, L + \varepsilon\right[\end{gathered}$$

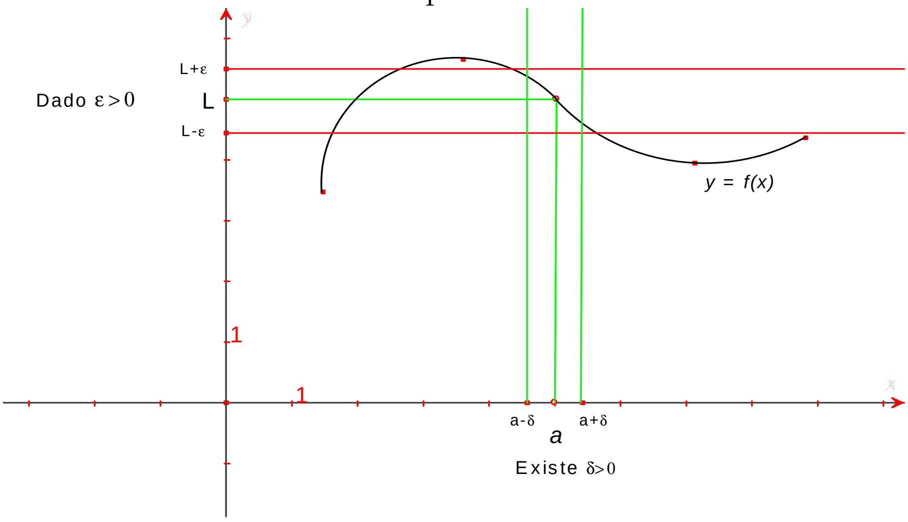
la definición puede reescribirse:

$$\begin{gathered}\text{Dado } \varepsilon > 0, \text{ existe un } \delta > 0 \text{ tal que} \\ \forall x : x \in \left]a - \delta, a + \delta\right[\wedge x \neq a \;\Rightarrow\; f(x) \in \left]L - \varepsilon, L + \varepsilon\right[\end{gathered}$$

lo que debe entenderse en el sentido que:

si x es próximo de a, entonces $f(x)$ es próximo de L.

La interpretación geométrica de este concepto aparece en el siguiente gráfico para la función f, cerca del punto a. La curva $y = f(x)$ se *acerca al punto* (a, L) ,tanto desde la derecha como de la izquierda.



Ejemplo 2 *Use la definición de límite para mostrar que:*

$$\begin{aligned} &a) \quad \lim_{x \to 1} [2x + 3] = 5 \\ &b) \quad \lim_{x \to 2} \left[x^2\right] = 4 \\ &c) \quad \lim_{x \to 9} \sqrt{x} = 3 \end{aligned}$$

a) Sea $\varepsilon > 0$. Se debe encontrar $\delta > 0$ tal que

$$\forall x : 0 < |x - 1| < \delta \;\Rightarrow\; |(2x + 3) - 5| < \varepsilon$$

¿Cómo se encuentra?

Basta considerar que $|(2x + 3) - 5| = |2x - 2| = 2|x - 1|$. Luego, si se elige $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ se tiene

$$\forall x : 0 < |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2} \;\Rightarrow\; |(2x + 3) - 5| = 2|x - 1| < \varepsilon$$

b) Sea $\varepsilon > 0$. Se debe encontrar $\delta > 0$ tal que

$$\forall x : 0 < |x-2| < \delta \ \Rightarrow \ \left|x^2-4\right| < \varepsilon$$

Ahora, como $|x^2-4| = |x+2|\,|x-2|$, podemos considerar inicialmente un $\delta = 1$ lo que permite los siguientes acotamientos

$$|x-2| < 1 \Rightarrow 1 < x < 3 \Rightarrow 3 < x+2 < 5$$

y luego

$$\left|x^2-4\right| = |x+2|\,|x-2| < 5\,|x-2|$$

(note que esto sólo es válido con $|x-2| < 1$). Finalmente, escogiendo $\delta = \min\{1, \varepsilon/5\}$ se tiene

$$\forall x : 0 < |x-2| < \delta \ \Rightarrow \ \left|x^2-4\right| < 5\,|x-2| < \varepsilon$$

(considerando que: $\delta \leq 1 \ \wedge \ \delta \leq \varepsilon/5$).

c) Sea $\varepsilon > 0$. Se debe encontrar $\delta > 0$ tal que

$$\forall x : 0 < |x-9| < \delta \ \Rightarrow \ \left|\sqrt{x}-3\right| < \varepsilon$$

En este caso tenemos las relaciones

$$\left|\sqrt{x}-3\right| = \left|\left(\sqrt{x}-3\right)\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}\right| = \frac{|x-9|}{\sqrt{x}+3}$$

donde además $\sqrt{x}+3 \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+3} \leq \frac{1}{3}$. Esto nos entrega el acotamiento

$$\left|\sqrt{x}-3\right| = \frac{|x-9|}{\sqrt{x}+3} \leq \frac{1}{3}\,|x-9|$$

que permite escoger $\delta = 3\varepsilon$ y se tienė

$$\forall x : 0 < |x-9| < 3\varepsilon \ \Rightarrow \ \left|\sqrt{x}-3\right| \leq \frac{1}{3}\,|x-9| < \varepsilon$$

como queríamos demostrar.

Ejercicio 1 *Use la definición de límite para mostrar que:*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}[c] &= c \\
\lim_{x\to a}[mx+b] &= ma+b \ , \ \textit{con } m,b \textit{ constantes} \\
\lim_{x\to a}\left[x^2\right] &= a^2 \\
\lim_{x\to a}\sqrt{x} &= \sqrt{a}, \ \textit{para } a>0
\end{aligned}$$

Observaciones.-

1.- En la demostración de $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, si primero probamos que, cerca del punto a

$$|f(x) - L| \leq M \ |x - a|$$

para alguna constante positiva M, entonces dado $\varepsilon > 0$ basta elegir $\delta = \varepsilon / M$ y se tiene

$$\forall x : 0 < |x - a| < \frac{\varepsilon}{M} \Rightarrow |f(x) - L| \leq M\,|x - a| < \varepsilon$$

2.- La fórmula para el cálculo del límite de la función $\sqrt{x}$ también se puede obtener para raíces de otros índices:

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

3.- Una observación importante con respecto a la definición de límite es:

- puede existir un número L que verifique la proposición de la definición 1 que define a $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, en cuyo caso se dice que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *existe.*
- o bien puede que no exista un número L con esas características, en cuyo caso se dice que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *no existe.*
- Ahora bien, en el primer caso el valor del *límite es único*, en el sentido que no pueden haber dos números L_1 y L_2 distintos que verifiquen la proposición de la definición 1.

TRABAJO PARA LA CASA.-

Para la función $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, definida para $x \neq 0$, investigue el límite $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. O sea, estudie

$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Para esto:

1. Usando una calculadora, construya una tabla de valores para f considerando al menos 50 valores para x, con $0 < x < 0.1$
2. Considere la sucesión $x_n = \dfrac{1}{n\pi}$. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$
3. Considere la sucesión $y_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$
4. ¿Es posible que $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = L$, para algún $L \in \mathbb{R}$?

5. Use una graficadora para obtener la gráfica de f, para $\frac{-1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

En lo que sigue estudiaremos las propiedades asociadas al concepto de límites que nos permitirán evaluar (calcular) límites de forma más directa, sin tener que recurrir a la definición (ε _ δ).

1.2 Teoremas sobre límites

Teorema 3 *(Algebra de límites).- Sean f y g funciones tales que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$. Se tiene entonces:*

1. $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = L + M.$
2. $\lim_{x\to a} [c \cdot f(x)] = c \cdot L.$
3. $\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$
4. $\lim_{x\to a} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{L}{M}$, *siempre que* $M \neq 0$

Dem. *De (1).- Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis existen:*

$\delta_1 > 0$ *tal que* $\forall x : 0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon/2$
$\delta_2 > 0$ *tal que* $\forall x : 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \varepsilon/2$

Luego, se elige $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ y se tiene

$$\begin{aligned} 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) + g(x) - L - M| &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

lo que muestra la fórmula 1. ■

1.2.1 Aplicaciones del teorema

Ejemplo 4 *Cálculo de $\lim_{x\to a} [x^2]$.-*

Usando la propiedad número 3:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} \left[x^2\right] &= \lim_{x\to a} [x \cdot x] = \lim_{x\to a} [x] \cdot \lim_{x\to a} [x] \\ &= a \cdot a = a^2 \end{aligned}$$

Por inducción se generaliza a, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x\to a} [x^n] = a^n$$

y usando la propiedad número 2, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x\to a} [c \cdot x^n] = c \cdot a^n, \text{ cualquiera sea la constante real } c$$

Ejemplo 5 *Cálculo de* $\lim\limits_{x\to 2}[4x^5+2x^2]$.-

Usando la propiedad número 1 y el ejemplo anterior:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\left[4x^5+2x^2\right] &= \lim_{x\to 2}\left[4x^5\right]+\lim_{x\to 2}\left[2x^2\right]\\ &= 4\left(2\right)^5+2\left(2\right)^2\\ &= 136\end{aligned}$$

Ejemplo 6 *Cálculo de* $\lim\limits_{x\to 2}[4x^5+2x^2-7x]$.-

Usando la propiedad número 1 y el ejemplo anterior:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\left[4x^5+2x^2-7x\right] &= \lim_{x\to 2}\left[4x^5+2x^2\right]+\lim_{x\to 2}\left[-7x\right]\\ &= 136-14=122\end{aligned}$$

El desarrollo en el ejemplo anterior se generaliza para el cálculo del límite de una función polinomial:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to a}\left[a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_2x^2+a_1x+a_0\right]\\ =\ &\lim_{x\to a}a_nx^n+\lim_{x\to a}a_{n-1}x^{n-1}+...+\lim_{x\to a}a_2x^2+\lim_{x\to a}a_1x+\lim_{x\to a}a_0\\ =\ &a_n\left(a\right)^n+a_{n-1}\left(a\right)^{n-1}+...+a_2\left(a\right)^2+a_1\left(a\right)+a_0\end{aligned}$$

O sea el límite se obtiene reemplazando la variable x por el punto a. Por ejemplo,

$$\lim_{x\to -1}\left(5x^4-2x^3+6x^2+\pi x-5\right)=8-\pi$$

Las propiedades 1 y 2 del teorema se generalizan a

$$\lim_{x\to a}\left[c_1f_1\left(x\right)+c_2f_2\left(x\right)+...+c_nf_n\left(x\right)\right]=c_1\lim_{x\to a}f_1\left(x\right)+c_2\lim_{x\to a}f_2\left(x\right)+...+c_n\lim_{x\to a}f_n\left(x\right)$$

siempre que todos los límites del lado derecho existan.

Ejemplo 7 *Cálculo de* $\lim\limits_{x\to -2}\left[\frac{3x^2-5x+1}{x^3-2x-2}\right]$

Ejemplo 8 *Cálculo de* $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{x^2-1}{x-1}\right]$

Ejemplo 9 *Cálculo de* $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{x^3-1}{x^2-1}\right]$

Ejemplo 10 *Cálculo de* $\lim\limits_{x\to 4}\left[\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\right]$

Teorema 11 *(de sustitución para límites).- Sean f y g funciones tales que:* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$, $\lim\limits_{y\to c} g(y) = L$, $g \circ f$ *está definida en una vecindad* $]a-r, a+r[$ *del punto a y $f(x) \neq c$ para todo x en esta vecindad. Entonces se tiene que*

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = L$$

Este resultado puede escribirse como

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = \lim_{y\to c} g(y)$$

fórmula que se obtiene al sustituir $f(x)$ (la variable x) por la nueva variable y (o sea $y = f(x)$).

1.2.2 Aplicaciones del teorema

Ejemplo 12 *Cálculo de* $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{2x+1}$.-

Con $y = f(x) = 2x+1$ *se tiene* $\lim\limits_{x\to 4}(2x+1) = 9 = c$ *y*

$$\lim_{x\to 4} \sqrt{2x+1} = \lim_{y\to 9} \sqrt{y} = 3$$

Ejemplo 13 *Cálculo de* $\lim\limits_{x\to 64} \left[\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}\right]$.-

Con $y = \sqrt[6]{x}$ *se tiene* $\lim\limits_{x\to 64} \sqrt[6]{x} = 2 = c$ *y* $\sqrt{x} = y^3$, $\sqrt[3]{x} = y^2$. *Luego*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 64} \left[\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}\right] &= \lim_{y\to 2} \left[\frac{y^3-8}{y^2-4}\right] \\
&= \lim_{y\to 2} \left[\frac{(y-2)(y^2+2y+4)}{(y-2)(y+2)}\right] \\
&= \lim_{y\to 2} \left[\frac{(y^2+2y+4)}{(y+2)}\right] \\
&= 3
\end{aligned}$$

Ejemplo 14 *Cálculo de* $\lim\limits_{x\to a} x^r$, *con r número racional.*

$r = \frac{p}{q}$ *con p, q enteros y $q > 0$. Luego,*

$$x^r = x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$$

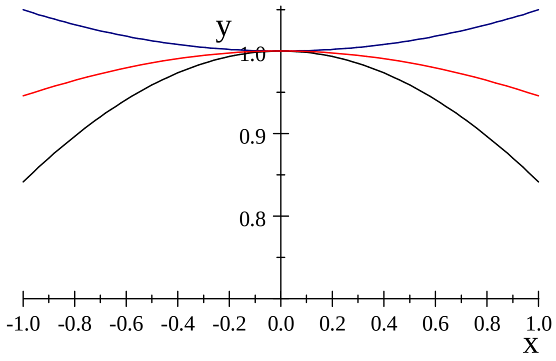
Mediante la sustitución $y = x^p$, tenemos $c = \lim\limits_{x\to a} x^p = a^p$ *y por tanto*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} x^r &= \lim_{x\to a} \sqrt[q]{x^p} = \lim_{y\to a^p} \sqrt[q]{y} \\
&= \sqrt[q]{a^p} = a^{p/q} \\
&= a^r
\end{aligned}$$

con las consideraciones para a según el índice q sea par o impar.

Teorema 15 *(del acotamiento) Sean f, g y h funciones definidas en un intervalo de la forma $]a-r, a+r[$ con $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ en dicho intervalo. Si $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$, entonces $\lim_{x \to a} g(x) = L$*

Idea gráfica.- Gráficos de f, g y h de colores negro, rojo y azúl respectivamente.



1.2.3 Aplicaciones del teorema

Ejemplo 16 *Cálculo de $\lim_{x \to 0} \left[x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]$*

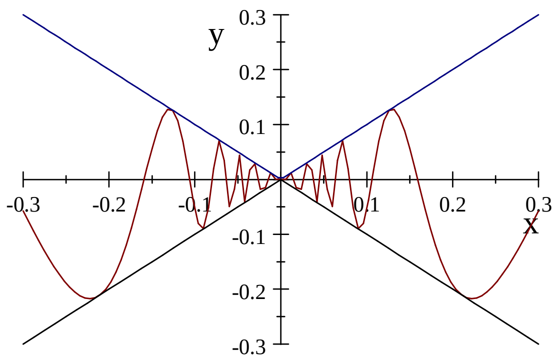
Podemos considerar los acotamientos evidentes:

$$0 \leq \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|$$

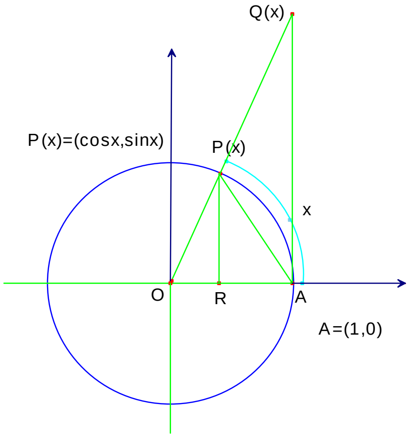
con $\lim_{x \to 0} [0] = 0 = \lim_{x \to 0} |x|$ .El teorema garantiza que

$$\lim_{x \to 0} \left[x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0$$

Gráficamente, $-|x| \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x|$:



Ejemplo 17 *Cálculo de límites trigonométricos.-*
En la figura siguiente, para $0 < x < \pi/2$ *::*



$\left|\overline{OR}\right| = \cos x$, $\left|\overline{RP}\right| = \sin x$, $\left|\widehat{AP}\right| = x$. *De aquí se sigue:*

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sin x \leq \left|\overline{AP}\right| \leq \left|\widehat{AP}\right| = x \\ 0 &\leq 1 - \cos x = \left|\overline{RA}\right| \leq \left|\overline{AP}\right| \leq \left|\widehat{AP}\right| = x \end{aligned}$$

Estas desigualdades se pueden extender a $-\pi/2 < x < \pi/2$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\sin x| \leq |x| \\ 0 &\leq |1 - \cos x| \leq |x| \end{aligned}$$

Ahora, aplicando el teorema del acotamiento:
$\lim\limits_{x\to 0} |\sin x| = 0$ *y* $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$
$\lim\limits_{x\to 0} |1 - \cos x| = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} (1 - \cos x) = 0$ *y* $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$
Nuevamente analizamos la figura:
Area $\Delta OAP = \dfrac{\sin x}{2}$, *Area sector* $OAP = \dfrac{x}{2}$ *y Area* $\Delta OAQ = \dfrac{\left|\overline{AQ}\right|}{\left|\overline{OA}\right|} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin x}{\cos x}$. *De donde se sigue que*

$$\frac{\sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}$$

y luego

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

Estas desigualdades se extienden a $-\pi/2 < x < \pi/2$, $x \neq 0$. *Por teorema del acotamiento*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Ejemplo 18 *Otros límites trigonométricos.-*
$\lim_{x\to 0} \left[\frac{1-\cos x}{x}\right]$, $\lim_{x\to 0} \left[\frac{1-\cos x}{x^2}\right]$

1.3 Límites laterales

Cuando una función f está definida en un intervalo de la forma $]a,b[$ o $]a,+\infty[$ no es posible estudiar el concepto $\lim_{x\to a} f(x)$, donde se requiere que f esté definida en un intervalo de la forma $]a-r,a+r[$. Si queremos estudiar el comportamiento de f (de sus imágenes) cerca del punto a, sólo podemos considerar x próximos de a y a la derecha de este punto. Esto da origen al concepto de *límite lateral por la derecha:*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a^+} f(x) &= L \Leftrightarrow \\ \text{dado } \varepsilon &> 0, \exists\delta > 0 \text{ tal que } \forall x : a < x < a+\delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \end{aligned}$$

La condición anterior (segunda línea) es la de la definición de límite **restringida** a puntos que estén a la derecha de a.

Por esto es **evidente** la implicación

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \;\Rightarrow\; \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Ejemplo 19 *Para la función* $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, *sólo es posible considerar en* $a = 0$ *el límite lateral por la derecha. Mostremos que* $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

Dem. *Sea* $\varepsilon > 0$.
Se debe encontrar un $\delta > 0$ *tal que* $\forall x : 0 < x < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$
Basta elegir $\delta = \varepsilon^2$ *y se tiene*
$\forall x : 0 < x < \varepsilon^2 \Rightarrow |\sqrt{x} - 0| = \sqrt{x} < \varepsilon$ ■

Queda de ejercicio definir el concepto de límite lateral por la izquierda: $\lim_{x\to a^-} f(x)$.

La relación entre los conceptos de límite y límites laterales está dado a continuación:

Teorema 20 *Sea* f *definida en un intervalo de la forma* $]a-r,a+r[$. *Se tiene entonces:*

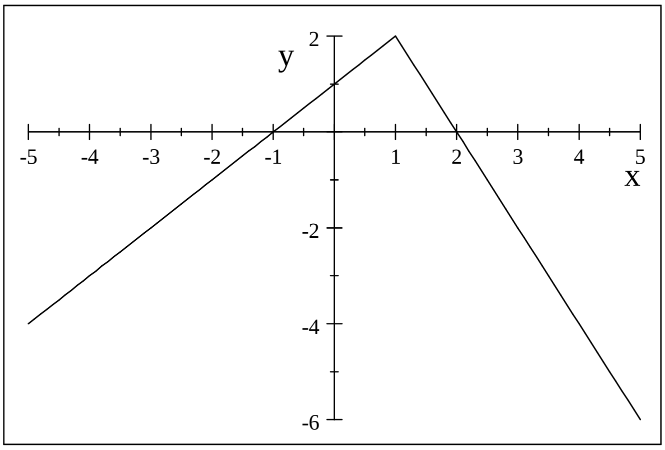
$$\lim_{x\to a} f(x) = L \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

Según el teorema, en el caso que los límites laterales sean diferentes o alguno de ellos no exista, el límite $\lim_{x\to a} f(x)$ **no existe**.

1.3.1 Aplicaciones del teorema

Ejemplo 21 *Estudio del límite* $\lim_{x\to 0}\left[\frac{|x|}{x}\right]$.

Ejemplo 22 *Sea* $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1} & si \quad x<1\\ -2x+4 & si \quad x\geq 1\end{cases}$.



Calcule $\lim_{x\to 1} f(x)$

2 Continuidad

Se nos pide calcular el área de una región circular. Para ello medimos, con una huincha, su diámetro y a partir de esto obtenemos su radio. La huincha indica que su radio es $r=30$ cm. Con este resultado calculamos el área de la región obteniendo $A=\pi(30)^2=2827.43\ \mathrm{cm}^2$.

¿Es este resultado correcto? Mejor dicho, ¿es este resultado exacto?

La huincha, como cualquier instrumento de medida, no es exacta. Quizás el valor exacto del radio sea $29,985$ cm. y por lo tanto el valor exacto del área es $A=\pi(29.985)^2$. Sin embargo nos damos por satisfechos con el resultado inicial, porque su valor es *aproximado* al valor exacto.

Esta idea está formalizada en la siguiente definición.

Definición 23 *Sea* $f:I\to\mathbb{R}$ *y* $a\in I$. *Se dice que* f *es continua en* a *si y sólo si*

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

Las condiciones de la definición se pueden detallar en:

- f está definida en a.

- $\lim_{x \to a} f(x) = L$ existe
- $L = f(a)$

Ejemplo 24 *Según vimos anteriormente, para una función polinomial* $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ *se tiene*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} \left[a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \right] \\ &= a_n (a)^n + ... + a_2 (a)^2 + a_1 a + a_0 \\ &= f(a) \end{aligned}$$

Esto muestra que f *es continua en todo punto* $a \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 25 *Lo mismo resulta para la función* $f(x) = x^r$, *con* r *exponente racional. Ya que vimos que*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x^r = a^r = f(a)$$

Definición 26 *Se dice que* $f : I \to \mathbb{R}$ *es una función continua, en el intervalo abierto* I, *cuando* f *es continua en todo punto* a *de dicho intervalo.*

Ejemplo 27 $f(x) = \sin x \ , \ x \in \mathbb{R}$.

Ya vimos que $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \sin x = 0 = \sin 0 = f(0)$. *Luego,* f *es continua en* $a = 0$.

En $a \neq 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} \sin x \\ &= \lim_{h \to 0} \sin(a + h) \\ &= \lim_{h \to 0} [\sin a \cosh + \cos a \sinh] \\ &= \sin a = f(a) \end{aligned}$$

Luego, f *es continua en* a.

Así, $f(x) = \sin x$ *es una función continua.*

Observe que en el ejemplo anterior se usa el hecho que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} f(a + h) = L$$

Queda de ejercicio mostrar que $f(x) = \cos x$ es una función continua.

Los teoremas sobre límites permiten probar las siguientes afirmaciones:

- Si f y g son funciones continuas en el punto a, entonces $(f+g)\,,\ (c\cdot f)\,,\ (f\cdot g)$ son funciones continuas en el punto a. También en el caso que $g(a)\neq 0$, la función $\left(\frac{f}{g}\right)$ es continua en el punto a.

  Debe entenderse que f y g están definidas en una vecindad de $]a-r,a+r[$ de a.

  Este resultado puede enunciarse de forma global para dos funciones $f,g:I\rightarrow\mathbb{R}$ continuas, indicando que las funciones $f+g$, cf y $f\cdot g$ son continuas. Además, $\frac{f}{g}$ es continua en su dominio: $\{x\in I:g(x)\neq 0\}$.

  Por ejemplo, la función $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ es continua en todo punto de su dominio.

  Lo mismo es válido para las restantes funciones trigonométricas.

  En general, cualquier combinación de funciones continuas resulta una función continua: por ejemplo:

$$f(x)=2\sin x\cos x+\frac{5x+1}{x^2+4}$$

  es continua en todo punto $x\in\mathbb{R}$.

- Si f es continua en el punto a y g es continua en el punto $f(a)$, entonces la compuesta $g\circ f$ es continua en a. En efecto:

$$\lim_{x\to a}g(f(x))=\lim_{y\to f(a)}g(y)=g(f(a))$$

  Debe entenderse que la compuesta está definida en una vecindad de a.

  En forma más general, la compuesta de dos funciones continuas es una función continua. Por ejemplo, las funciones

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^4+2\sqrt{x}}\ ,\ x>0 \\ g(x) &= \sin(2x+5)\ ,\ x\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

  son continuas.

Los siguientes ejemplos discuten casos de discontinuidad de una función.

Ejemplo 28 *Se define la función f*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & si\ \ x\neq 0\\ 1/2 & si\ \ x=0\end{cases}$$

¿Es f continua en $a = 0$?

Como $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq f(0)$ *, la función f no es continua en $a = 0$.*

Sin embargo, dado que $\lim_{x\to 0} f(x)$ *existe se puede* ***redefinir*** *f en 0 poniendo $f(0) = 1$ y la función resultará continua en $a = 0$. Por esto se dice que $a = 0$ es una* discontinuidad evitable *de f.*

Por otra parte, note que la función f es continua en todo punto $a \neq 0$.

Ejemplo 29 *Se define la función f*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & si \quad x < 1 \\ -2x + 5 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

¿Es f continua en $a = 1$?

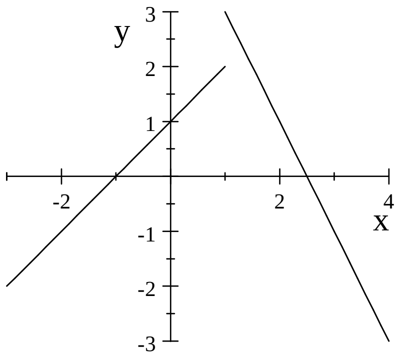
Se calculan los límites laterales

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} (-2x + 5) = 3 \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} \right) = 2 \end{aligned}$$

y se concluye que $\lim_{x\to 1} f(x)$ ***no existe****. Luego, la función no es continua en $a = 1$. En este caso la discontinuidad no es evitable. Como los límites laterales existen (son distintos) se dice que $a = 1$ es una* discontinuidad de salto.

¿Es f continua en un punto $a \neq 1$?

Gráfica de f.-



3 Límites infinitos

Sea $f(x) = \dfrac{1}{x}$ definida para $x \neq 0$. Estudie $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$.

Como para $x > 0$ se tiene:

$$x < \delta \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{\delta}$$

Dado cualquier número real $M > 0$ (tan grande como quiera) puedo elegir un número $\delta < \frac{1}{M}$ positivo tal que

$$\forall x : 0 < x < \delta \ \Rightarrow \ f(x) = \frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} > M$$

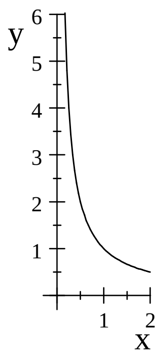
Esto muestra que las imágenes de $f(x) = \frac{1}{x}$ pueden ser tan grande como uno quiera, a condición de elegir $x > 0$ suficientemente próximo de 0. Por esto se escribe

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Debe entenderse que el límite de arriba *diverge a* $+\infty$.

Esto se produce porque en la fracción el denominador se hace cero, por valores positivos, mientras el numerador se mantiene constante.

Geométricamente, la recta $x = 0$ (eje y) es una asíntota vertical del gráfico de $y = \frac{1}{x}$



En general, se tienen las definiciones:

1. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty \ \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} \text{Dado } M &> 0, \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que} \\ \forall x &: a < x < a + \delta \Rightarrow f(x) > M \end{aligned}$$

2. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$

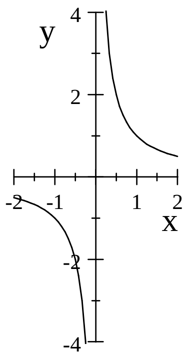
$$\begin{aligned} \text{Dado } M &< 0, \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que} \\ \forall x &: a < x < a+\delta \Rightarrow f(x) < M \end{aligned}$$

y las análogas para límite lateral por la izquierda (queda de tarea escribir cada una de ellas).

En cualquiera de los 4 casos, la recta $x = a$ es una asíntota vertical del gráfico de $y = f(x)$.

Ejemplo 30 *La función* $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$, *verifica*

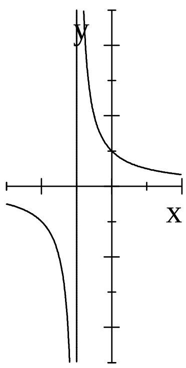
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$



El eje y *es asíntota vertical.*

Ejemplo 31 *Para* $a \in \mathbb{R}$ *fijo, se define* $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$, $x \neq a$, *y se tiene*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{1}{x-a} = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to a^-} \frac{1}{x-a} = -\infty$$



Con respecto a límites infinitos se tienen las propiedades siguientes:

Teorema 32 *a)* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = +\infty \Rightarrow \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a^+} [f(x) + g(x)] = +\infty \\ \lim\limits_{x\to a^+} [f(x)\, g(x)] = +\infty \end{array}$

b) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L \wedge \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = +\infty \Rightarrow \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a^+} [f(x) + g(x)] = +\infty \\ \lim\limits_{x\to a^+} [f(x)\, g(x)] = +\infty \text{ , cuando } L > 0 \\ \lim\limits_{x\to a^+} [f(x)\, g(x)] = -\infty \text{ , cuando } L < 0 \end{array}$

Ejercicio 2 *Determine las asíntotas verticales de* $f(x) = \dfrac{x^2+4x}{x^3+x^2-2x}$*, donde el dominio es* $D = \{x \in \mathbb{R} : x^3 + x^2 - 2x \neq 0\}$.

Como f es el cuociente de dos polinomios, ella es continua en todo punto de su dominio. Esto es, para cada $a \in D : \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ *y luego $x = a$ no es asíntota vertical.*

Sólo pueden ser asíntotas rectas determinadas por puntos que anulan el denominador.

Considerando que

$$f(x) = \frac{x^2+4x}{x^3+x^2-2x} = \frac{x(x+4)}{x(x+2)(x-1)}$$

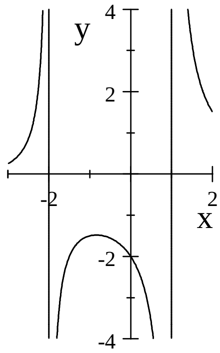
resulta:

- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+4}{(x+2)(x-1)} = -2$, *implica que $x = 0$ no es asíntota vertical.*

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left[\dfrac{x+4}{x+2}\dfrac{1}{x-1}\right] = +\infty$
  y $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \left[\dfrac{x+4}{x+2}\dfrac{1}{x-1}\right] = -\infty$. *Luego, $x = 1$ es asíntota vertical.*

- $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} \left[\dfrac{x+4}{x-1}\dfrac{1}{x+2}\right] = -\infty$
  $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} \left[\dfrac{x+4}{x-1}\dfrac{1}{x+2}\right] = +\infty$. *Luego, $x = -2$ es asíntota vertical.*

A partir de aquí se puede describir geométricamente el comportamiento asintótico del gráfico de f.



4 Límites al infinito

Ahora estudiaremos el comportamiento de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en el infinito. Esto es, cómo son las imágenes $f(x)$ para x "muy grande", o bien para x grande en valor absoluto pero negativo. Esta característica de la función se representa por $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y por $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Más formalmente, se tiene:

Definición 33 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L,\ L \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ *Dado* $\varepsilon > 0$, $\exists M > 0$ *tal que* $\forall x : x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L,\ L \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ *Dado* $\varepsilon > 0$, $\exists M < 0$ *tal que* $\forall x : x < M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

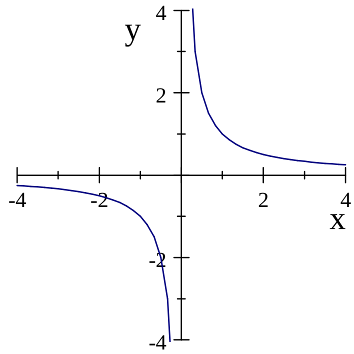
En cualquiera de los casos anteriores se dice que $y = L$ es asíntota horizontal del gráfico de f.

Ejemplo 34 *Queda de ejercicio demostrar que con la función $f(x) = \frac{1}{x}$ se tiene*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ y } \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

lo que muestra que la recta $y = 0$ (eje x) es asíntota horizontal del gráfico de f.

La gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$ es:



Observación.- Se puede probar que los teoremas sobre límites vistos anteriormente también son válidos para límites al infinito. Como aplicación de éstos se tiene:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x^2}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\right]\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\right] = 0$
  y por inducción, $\forall n\in\mathbb{N}: \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x^n}\right] = 0.$

- Ahora, para c constante, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{c}{x^n}\right] = 0,\ \forall n\in\mathbb{N}$

- Con el mismo razonamiento se obtiene también $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{c}{x^n}\right] = 0,\ \forall n\in\mathbb{N}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2x^3+5x^2-4}{-6x^3+7}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2+\frac{5}{x}-\frac{4}{x^3}}{-6+\frac{7}{x^3}}\right] = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$
  La misma idea se aplica para el cuociente de dos polinomios del mismo grado.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2x^3+5x^2-4}{-6x^4+7}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{4}{x^4}}{-6+\frac{7}{x^4}}\right] = \frac{0}{-6} = 0$
  El mismo resultado se obtiene en cualquier cuociente de polinomios donde el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+x}-x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\dfrac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x}\right]$
  $= \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}\right] = \dfrac{1}{2}$

Utilizando los límites al infinito se define el concepto de asíntota oblicua para el gráfico de una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Definición 35 *La recta $L : y = mx + b$ es asíntota oblicua de la gráfica de $y = f(x)$ cuando*

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - mx - b] = 0 \quad o\ bien \quad \lim_{x\to-\infty} [f(x) - mx - b] = 0$$

Un ejemplo importante son las asíntotas oblicuas $y = \pm\frac{b}{a}x$ de la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Como

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} [f(x) - mx - b] &= 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = b \\
&\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m\right] = 0 \\
&\Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x}\right] = m
\end{aligned}$$

se concluye que la gráfica de $y = f(x)$ tiene asíntota oblicua $y = mx + b$ ssi existen los límites:

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x}\right] = m \quad \wedge \quad \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = b$$

Ejemplo 36 *Determine las asíntotas oblicuas de $f(x) = \dfrac{2x^2 + x + 1}{x - 3}$, $x \neq 3$*

Como

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x}\right] &= \lim_{x\to\infty} \left[\frac{2x^2 + x + 1}{x^2 - 3x}\right] \\
&= \lim_{x\to\infty} \left[\frac{2x^2 + x + 1}{x^2 - 3x}\right] \\
&= \lim_{x\to\infty} \left[\frac{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{3}{x}}\right] \\
&= 2
\end{aligned}$$

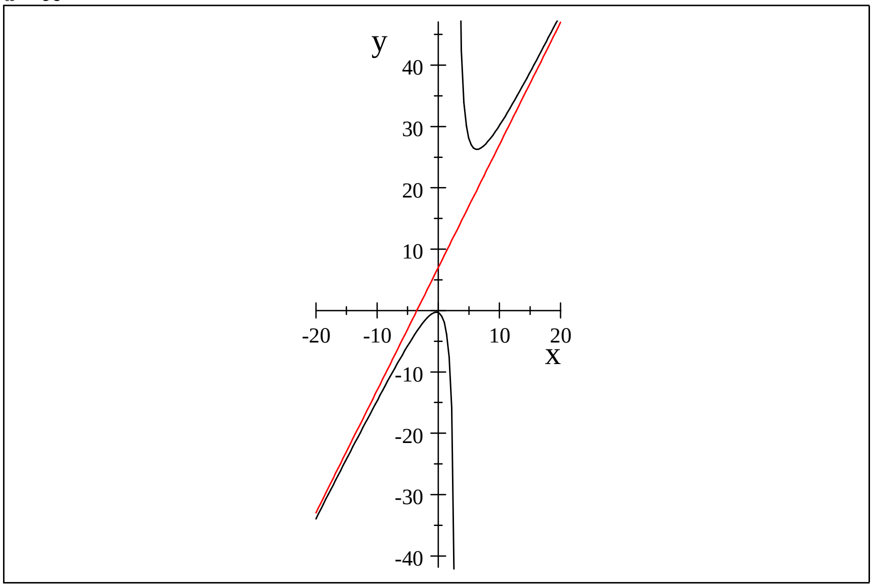
y

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] &= \lim_{x\to\infty} \left[\frac{2x^2 + x + 1}{x - 3} - 2x\right] \\
&= \lim_{x\to\infty} \left[\frac{7x + 1}{x - 3}\right] = 7
\end{aligned}$$

se obtiene la asíntota $L_1 : y = 2x + 7$.

Observe que lo mismo vale para $\lim\limits_{x\to-\infty}$

También se obtiene al realizar la división $\dfrac{2x^2+x+1}{x-3} = (2x+7) + \frac{22}{x-3}$ *con* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{22}{x-3} = 0$



5 Límites infinitos en el infinito

La última situación a considerar está precisada en la siguiente definición.

Definición 37 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} \textit{Dado } N &> 0, \textit{ existe } M > 0 \textit{ tal que} \\ \forall x &: x > M \Rightarrow f(x) > N \end{aligned}$$

Queda de ejercicio escribir las definiciones análogas para

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \ , \ \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \ \text{ y } \ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

En este contexto se puede mostrar que:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} [x] = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} [x^2] = +\infty$ y en general $\lim\limits_{x\to+\infty} [x^n] = +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- También, $\lim\limits_{x\to+\infty} [c \cdot x^n] = +\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$, donde $c > 0$ es una constante.
- Cuando $c < 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} [c \cdot x^n] = -\infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

- Para un polinomio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, con $a_n \neq 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \left[x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) \right] \\ &= \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a_n > 0 \\ -\infty & \text{si} \quad a_n < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- El caso de una función racional donde el grado del numerador es mayor que el grado del denominador se trata en un ejemplo particular

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{4x^3 - 5x^2 + 2x - 7}{-3x^2 + 5x + 3} \right] &= \lim_{x\to+\infty} \left[x \cdot \frac{4x^2 - 5x + 2 - \frac{7}{x}}{-3x^2 + 5x + 3} \right] \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left[x \cdot \frac{4 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{7}{x^3}}{-3 + \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}} \right] \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Queda de ejercicio rehacer todos los items anteriores para $\lim\limits_{x\to-\infty}$.