Departamento de Ingeniería Eléctrica
UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN

Electrostática

Repaso Certamen #1

Facultad de Ingeniería
Universidad de Concepción
El origen de grandes soluciones

Definición de carga eléctrica

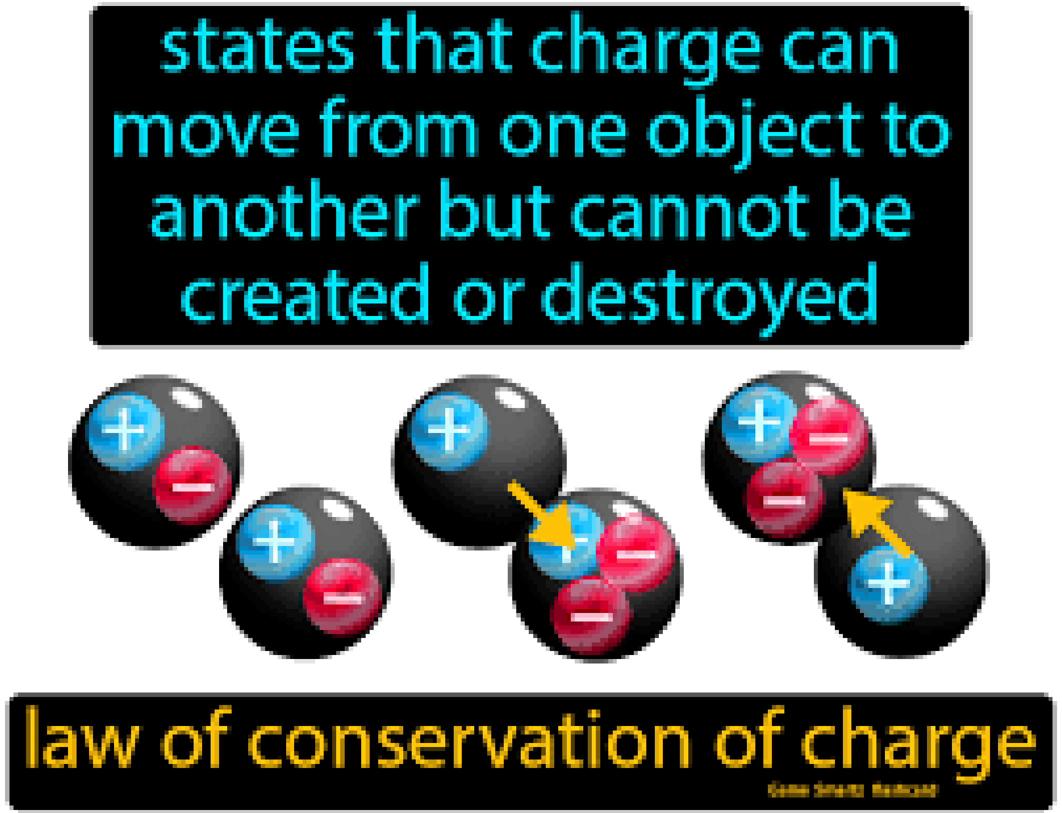
- La carga eléctrica de un electrón es de

$$e^{-} = -1{,}6x10^{-19}\ C$$

- La carga de un protón es de

$$p^{+} = 1{,}6x10^{-19}\ C$$

- Por otro lado, la **ley de Conservación de carga** define que la carga neta en el universo es constante.



Ley de Coulomb

- La **ley de Coulomb** describe cuantitativamente la fuerza que resulta de la interacción de dos cargas en el espacio.

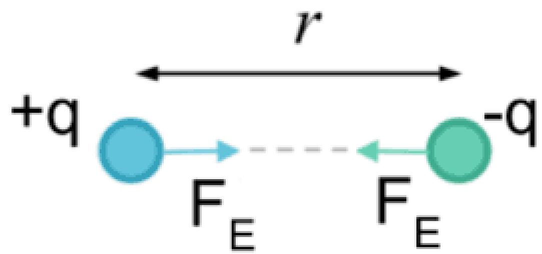
- Esta ley fue derivada a partir de experiencias experimentales realizadas por Charles Agustín de Coulomb y esta enunciada según sigue:

"La fuerza entre dos cargas puntuales Q_1 y Q_2 es proporcional al producto de las dos cargas, inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas, y direccionada a lo largo de la línea que las conecta."

Ley de Coulomb

- En términos matemáticos dicha ley es representada por la siguiente ecuación:

$$\vec{F} = k\,\frac{Q_1 Q_2}{|R|^2}\,\hat{r}\ [N]$$



- Donde **Q_1** y **Q_2** corresponden a las magnitudes de las cargas que estan interactuando, $|\boldsymbol{R}|$ a la distancia que las separa y $\hat{\boldsymbol{r}}$ a un vector unitario que apunta en la misma dirección que la línea que une las dos cargas.

- k es una constante de proporcionalidad que depende del medio donde se produzca la interacción entre las cargas y esta dada por $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}$

Ley de Coulomb

- ε corresponde a la constante dieléctrica o permitividad y es una característica del medio. En particular para el espacio libre la permitividad tiene un valor de:

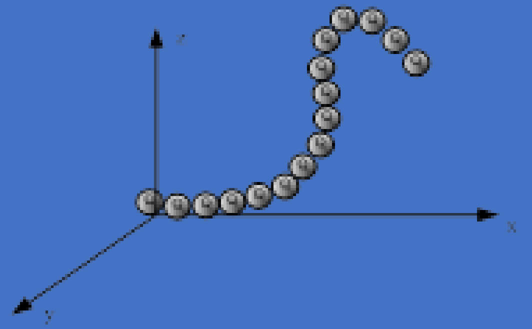
$$\boldsymbol{\varepsilon_o = 8.854x10^{-12}}\ [\boldsymbol{\frac{F}{m}}].$$

- Luego la ley de Coulomb queda expresada como:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q_1 Q_2}{|R|^2}\,\hat{r}\ [N]$$

Distribuciones de carga eléctrica en el espacio

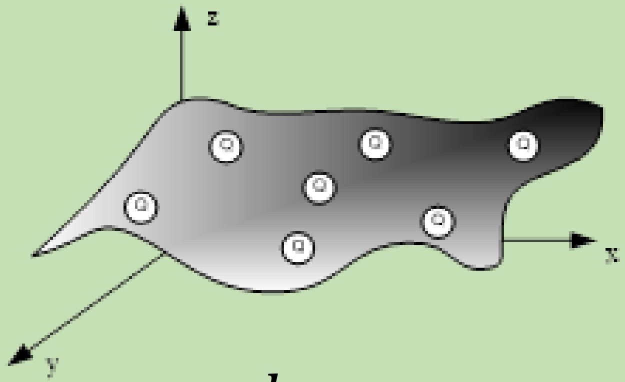
Distribución de carga lineal



$$\rho_l = \frac{dq}{d\mathrm{l}}\,[\frac{c}{m}]$$

$$Q = \int_l \rho_l \cdot dl\ [C]$$

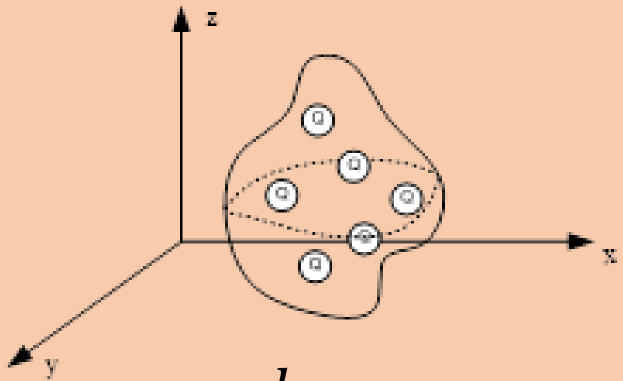
Distribución superficial de carga



$$\rho_S = \frac{dq}{dS}\,[\frac{c}{m^2}]$$

$$Q = \int_S \rho_S \cdot dS\ [C]$$

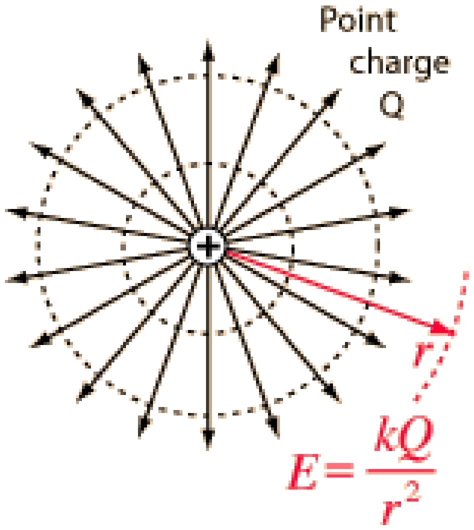
Distribución volumétrica de carga

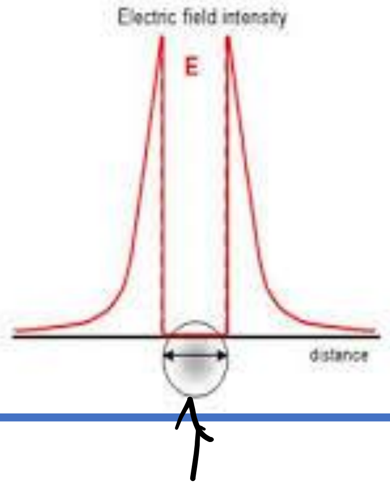


$$\rho_v = \frac{dq}{d\mathrm{v}}\,[\frac{c}{m^3}]$$

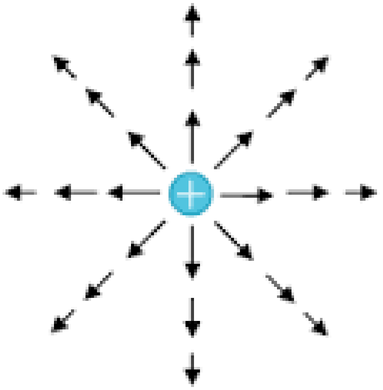
$$Q = \int_v \rho_v \cdot dv\ [C]$$

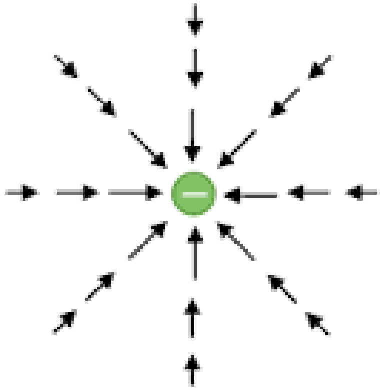
Intensidad de Campo Eléctrico





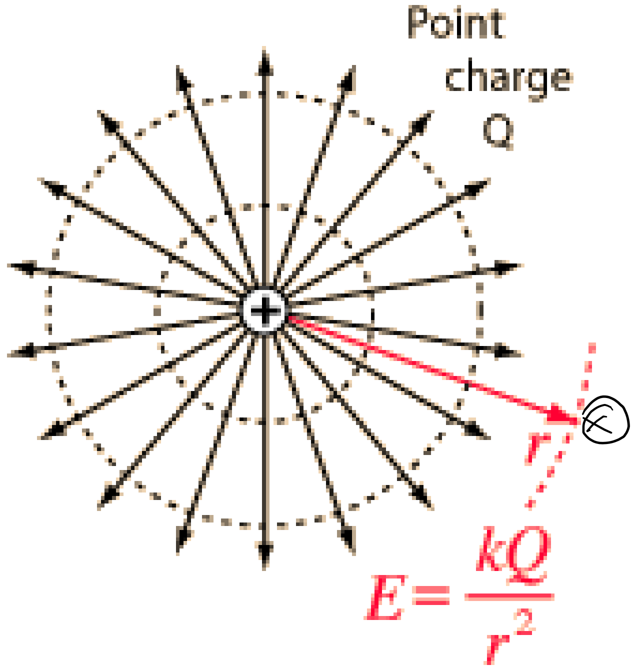
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q_1}{|R|^2}\,\hat{r}\ [\mathrm{N/C}]$$

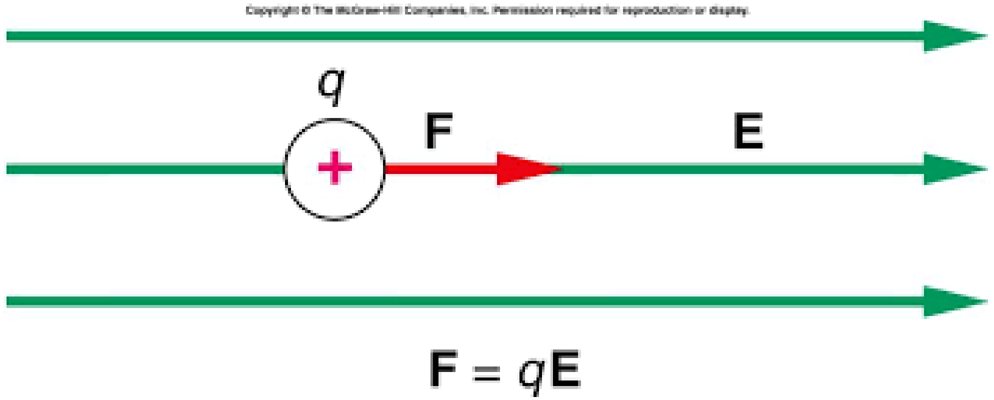




Intensidad de Campo Eléctrico

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{Q_1}{|R|^2}\,\hat{r}\ [\mathrm{N/C}] \quad \longrightarrow \quad \vec{F} = q\vec{E}\ [N]$$

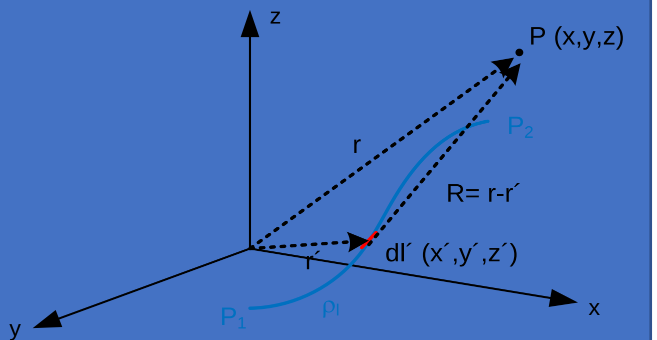




Departamento de Ingeniería Eléctrica
UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN

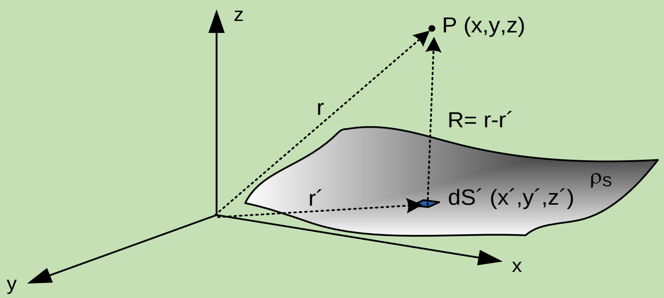
Campo Eléctrico de distribuciones de carga

Distribución lineal de carga



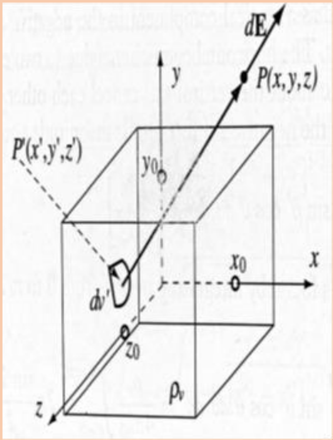
$$E = \int_{P_1}^{P_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\rho_l dl'}{(|R|)^2}\hat{r}$$

Distribución superficial de carga



$$E = \int_{S'} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\rho_S dS'}{(|R|)^2}\hat{r}[\mathrm{N/C}]$$

Distribución volumétrica de carga

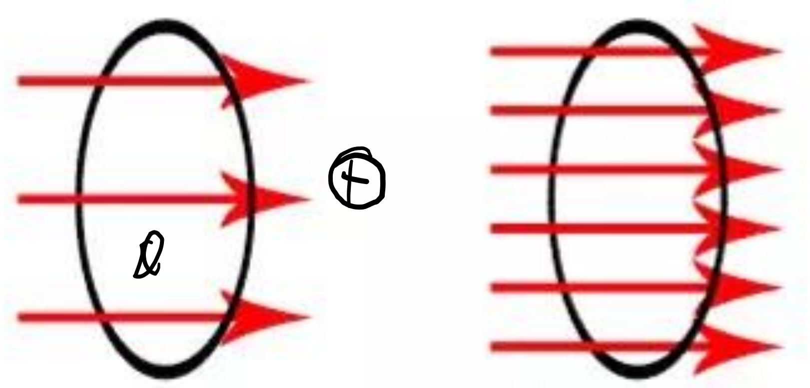


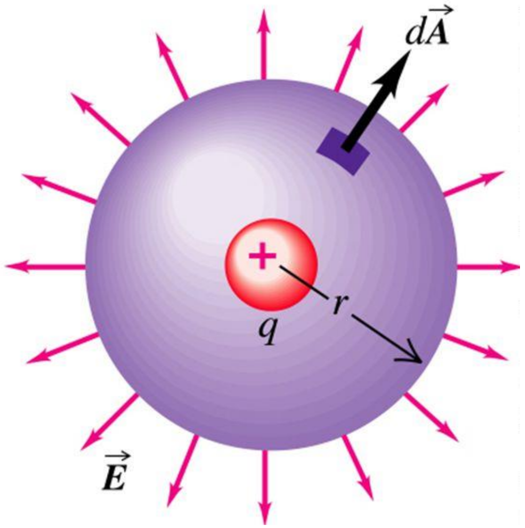
$$E = \int_{V} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\rho_V dV}{|R^2|}\hat{r}[\mathrm{N/C}]$$

Densidad de flujo eléctrico y flujo eléctrico

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E} = \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{|\vec{R}|^2}\hat{r}[\frac{C}{m^2}]$$

$$\Psi = \int_A D \cdot dA \;\; [C]$$





Ley de Gauss

Divergencia

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_V}{\varepsilon}$$

$$\oint \vec{E} \cdot ds = \frac{Q}{\varepsilon}$$

Rotacional

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\oint_c \vec{E} \cdot dl = 0$$

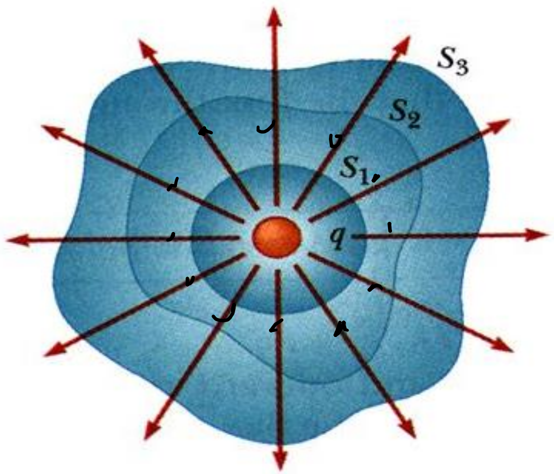
- En este set de ecuaciones la divergencia corresponde al flujo total que cruza la superficie cerrada **S**, y por lo tanto, es posible ver que dicho flujo es igual a la carga encerrada por la superficie.

- Esta característica es conocida como **ley de Gauss** y es útil para el cálculo del campo eléctrico.

Ley de Gauss

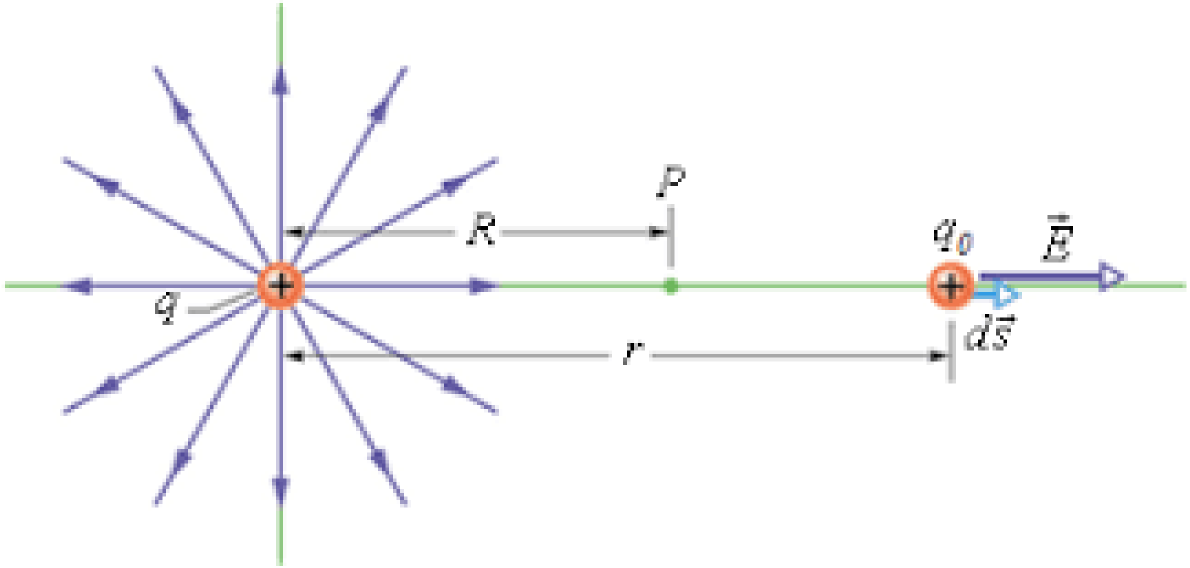
- Algunos puntos que se pueden destacar a partir de la formulación de la ley de Gauss son los siguientes:

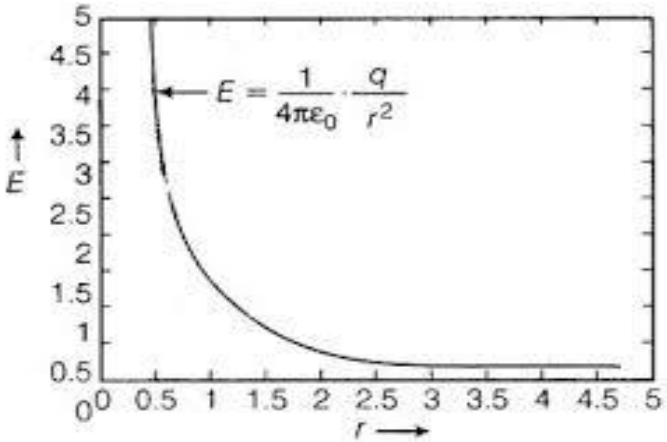
$$\oint_S D \cdot dS = Q$$



- La carga **Q** corresponde a la carga total encerrada por la superficie **S**, pudiendo esta ser puntual, distribuida o ambas.
- El lado derecho de la ecuación corresponde al flujo total que cruza la superficie **S**.
- La **ley de Gauss** enuncia que el flujo total que sale de la superficie es igual a la carga en su interior. Por lo tanto, se tiene que la carga es lo que da origen al flujo y por lo tanto al campo eléctrica.
- La **ley de Gauss** corresponde a una formulación alternativa de la **ley de Coulomb**.
- Esta ley puede ser usada tanto para calcular la carga total encerrada en un volumen como para calcular el campo eléctrico generado por esta.

Potencial Eléctrico





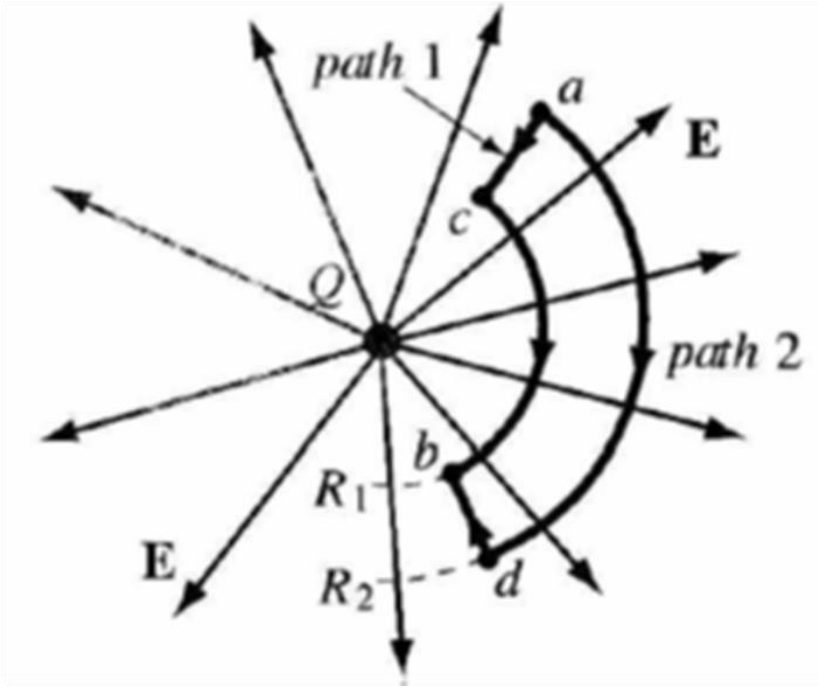
- El potencial eléctrico es una medida de la capacidad del campo para realizar un trabajo.

- Por convención tomaremos el trabajo realizado por el campo positivo y aquel que se realiza contra el campo como negativo.

- En general trabajaremos con diferencias de potencial eléctrico, la que corresponde a la diferencia en la energía potencial por unidad de carga entre dos puntos distintos del espacio.

$$V_{ab} = \frac{W}{q} = -\int_a^b \vec{E} \cdot dl = \frac{W_a - W_b}{q} = V_b - V_a \text{ [V]}$$

Potencial Eléctrico de cargas puntuales



$$V_b = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o|R_b - R|}\ [\mathrm{V}]$$

$$V_a = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o|R_a - R|}\ [\mathrm{V}]$$

$$V_b - V_a = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o|R_b - R|} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o|R_a - R|} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{|R_b - R|} - \frac{1}{|R_a - R|}\right)\ [\mathrm{V}]$$

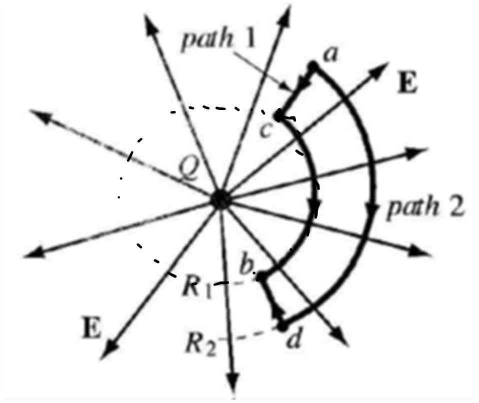
Potencial Eléctrico de cargas puntuales

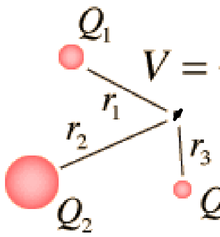
a) La diferencia de potencial es independiente del camino que se utilice para ir de un punto al otro.

b) Solo depende de la distancia relativa con respecto al campo eléctrico.

c) El potencial eléctrico en cualquier superficie esférica encerrando una carga puntual es constante.

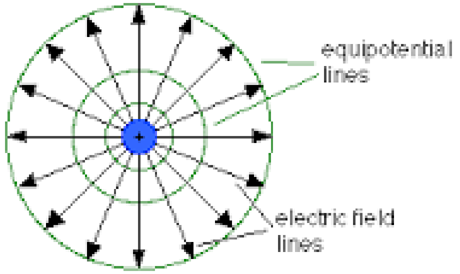
d) El potencial eléctrico en un punto P es la suma de los potenciales correspondientes a todas las cargas que puedan existir en el espacio





$$V = \frac{kQ_1}{r_1} + \frac{kQ_2}{r_2} + \frac{kQ_3}{r_3}$$

$$V(P) = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_o |R - R_i|} \ [\mathbf{V}]$$



Field and equipotential lines for a positive point charge

Potencial Eléctrico de distribuciones de carga

- Entonces reemplazando la carga total correspondiente en la definición de diferencia de potencial se obtiene:

$$V(R)_{linea} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int_l \frac{\rho_l \cdot dl}{|R - R'|} \; [V]$$

$$V(R)_{superficie} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int_s \frac{\rho_s \cdot dS}{|R - R'|} \; [V]$$

$$V(R)_{volumen} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \int_v \frac{\rho_v \cdot dv}{|R - R'|} \; [V]$$

Cálculo del campo eléctrico a partir del potencial

- Se tiene de los postulados del campo eléctrico, en particular de su rotacional que:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \rightarrow \vec{E} = -\nabla V$$

- O bien en coordenadas cartesianas

$$E = -\nabla V = -\hat{x}\ \frac{dV}{dx} - \hat{y}\frac{dV}{dy} - \hat{z}\frac{dV}{dz}\ [\frac{V}{m}]$$

Materiales Conductores

- Las propiedades de los materiales conductores son:

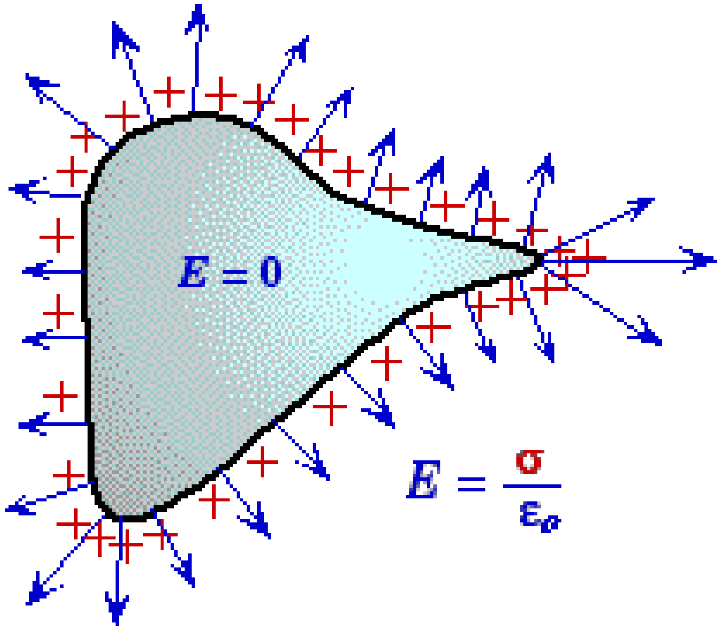
1)La carga introducida en un material conductor se mueve hacia la superficie de este. Es decir, no habrá carga en su interior.

2) Las cargas se distribuyen sobre la superficie a fin de producir un campo eléctrico nulo en su interior.

3) Una carga puntual puede existir en cualquier punto del conductor. Esto porque no hay fuerzas de atracción o repulsión actuando sobre ella.

4) La densidad de carga volumétrica dentro del conductor es cero.

5) El campo eléctrico en la superficie del conductor es siempre perpendicular a esta. Por ello se tiene que el potencial en la superficie de un conductor es constante.

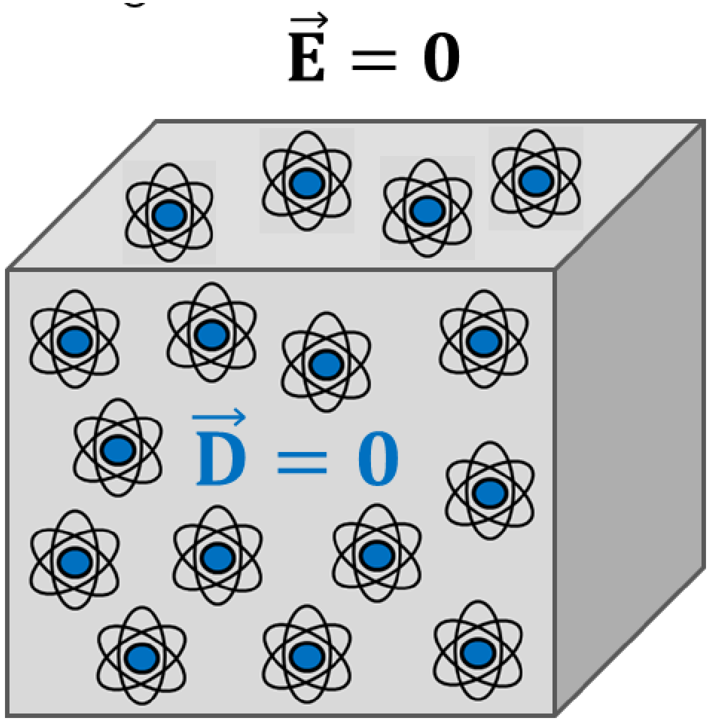


Materiales Dieléctricos

- Un material dieléctrico se caracteriza por **no contar con cargas libres que puedan moverse** ante la acción de un campo eléctrico puesto que los electrones están fuertemente ligados a sus átomos.

- Sin embargo, cabe preguntarse

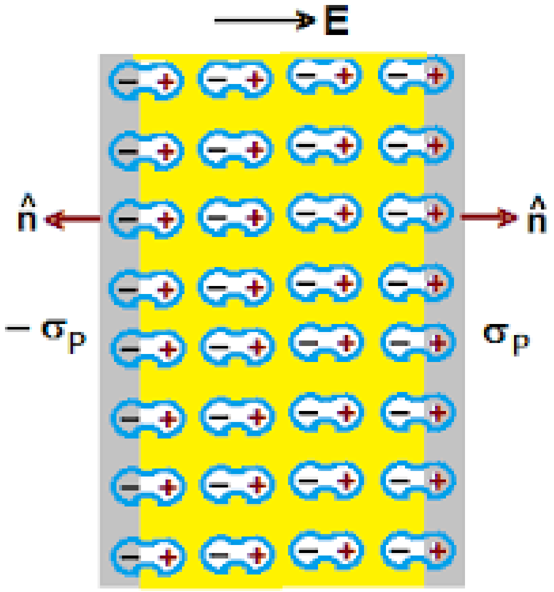
  ¿qué ocurrirá entonces al someter un material dieléctrico a las fuerzas de atracción y repulsión resultantes de la acción del campo?



Materiales Dieléctricos

- Las densidades de carga de polarización para la superficie del material y para su interior

$$\rho_{ps} = \vec{P} \cdot \hat{n} \qquad \mathbf{y} \qquad \rho_{pv} = -\nabla \cdot \vec{P}$$



Materiales Dieléctricos

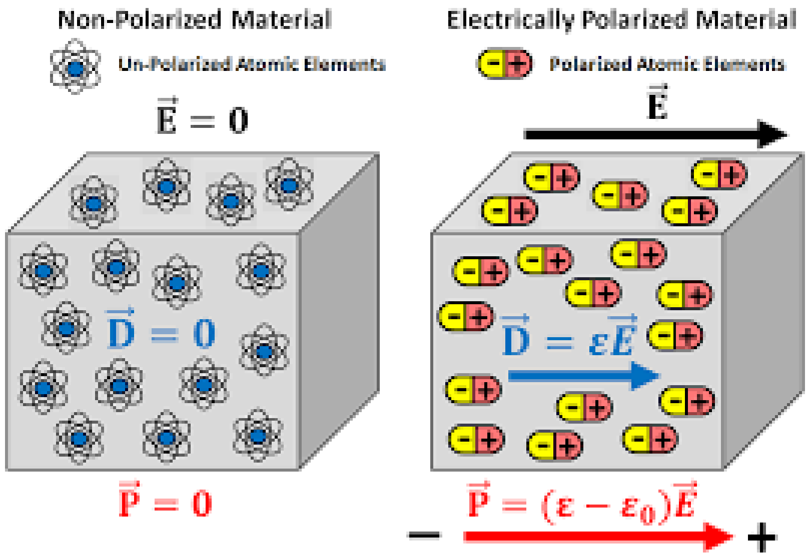
$$\vec{D} = \varepsilon_o\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_o\vec{E} + \varepsilon_o\chi_e\vec{E} = (\varepsilon_o + \varepsilon_o\chi_e)\vec{E} = \varepsilon_o(1+\chi_e)\vec{E}$$

- Definiendo $\varepsilon = \varepsilon_o(1+\chi_e)$ como la permitividad del medio donde el segundo termino se conoce como la permitividad relativa del medio, tal que

$$\varepsilon_r = (1+\chi_e)$$

- Luego, utilizando el concepto de permitividad del medio y permitividad relativa se puede reescribir la ecuación que relaciona la densidad de flujo eléctrico con el campo eléctrico

$$\vec{D} = \varepsilon_o\varepsilon_r\vec{E} = \varepsilon\vec{E}$$



Repaso Certamen #1