Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

525150 – Álgebra 2 – Pauta Evaluación 2

Problema 1. (15 puntos)

En el espacio vectorial real $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, considere el subespacio

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a+b+2c & a+c \\ b+c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Determine una base y dimensión de S.

Solución:

$$\begin{aligned} S &= \left\{ \begin{pmatrix} a+b+2c & a+c \\ b+c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}, \\ &= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}, \\ &= \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle. \end{aligned}$$

(5 puntos)

Observamos que uno de los vectores del conjunto generador de S es combinación lineal de los otros dos vectores:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$S = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

Determinamos si este nuevo conjunto generador de S es l.i.

$$\begin{aligned} \alpha\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow \alpha+\beta = 0,\ \alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = 0, \\ &\Leftrightarrow\ \alpha = 0 \wedge \beta = 0 \wedge \gamma = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto sí es linealmente independiente. **(5 puntos)**

Finalmente, como el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ genera a S y es linealmente independiente, entonces es base de S. Como tiene tres elementos, la dimensión de S es 3. **(5 puntos)**

Problema 2. (17 puntos)

Sea V un e.v. sobre un cuerpo $\mathbb{K}$.

2.1 **(5 puntos)** Demuestre que para toda transformación lineal $T : V \to V$ se cumple que $\ker(T) \subseteq \ker(T \circ T)$.

2.2 Suponga que $\dim(V) = 4$ y que $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es una base de V. Sea $L : V \to V$ la transformación lineal que satisface

$$[L]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- **(8 puntos)** Demuestre que $\eta(L) = 1$.
- **(4 puntos)** Determine $[L \circ L]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$.

Solución:

2.1 Debemos demostrar que si $u \in \ker(L)$, entonces $u \in \ker(L \circ L)$.

Supongamos $u \in V$ es un elemento de $\ker(L)$, entonces $L(u) = \theta_V$. **(1 punto)**

Por tanto, $(L \circ L)(u) = L(L(u)) = L(\theta_V)$. **(1 punto)**

Como L es lineal, $L(\theta_V) = \theta_V$, por lo que, $(L \circ L)(u) = L(\theta_V) = \theta_V$ y se cumple que $u \in \ker(L \circ L)$. **(2 puntos)**

Como hemos demostrado que cada $u \in \ker(L)$ también pertenece a $\ker(L \circ L)$, se cumple que $\ker(L) \subseteq \ker(L \circ L)$. **(1 punto)**

2.2

- Veremos cuatro alternativas para responder esta pregunta. En la primera encontraremos una base para $\ker(L)$ y veremos que este espacio tiene dimensión 1. En la segunda calcularemos una base para $\text{im}(L)$. En la tercera calcularemos $\ker([L]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}})$ pues este espacio tiene la misma dimensión que $\ker(L)$. En la cuarta calcularemos el rango de $[L]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ pues éste y el rango de L son iguales.

  Alternativa 1, calcular $\ker(L)$: Según la matriz dada L es tal que

$$\begin{aligned} L(v_1) &= v_1 - v_2, \\ L(v_2) &= -v_1 + v_2, \\ L(v_3) &= v_3, \\ L(v_4) &= v_2. \end{aligned}$$

  (2 puntos)

  Sea $u \in V$, entonces existen escalares $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ de modo que $u = av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4$. Por tanto,

$$\begin{aligned} L(u) &= aL(v_1) + bL(v_2) + cL(v_3) + dL(v_4), \\ &= a(v_1 - v_2) + b(-v_1 + v_2) + cv_3 + dv_2, \\ &= (a - b)v_1 + (-a + b + d)v_2 + cv_3. \end{aligned}$$

  (2 puntos)

  Ésta es una combinación lineal de vectores que forman un conjunto li (si $\mathcal{A}$ es base de V, $\mathcal{A}$ es li y cualquier subconjunto de $\mathcal{A}$, en particular $\{v_1, v_2, v_3\}$, es li). Esta combinación lineal es igual a θ_V si y solo si

$$a - b = 0, \ -a + b + d = 0, \ c = 0.$$

  (2 puntos)

  Reemplazando $a = b$ en la segunda ecuación obtenemos

$$-b + b + d = 0 \ \Rightarrow \ d = 0.$$

  Por tanto, $u \in \ker(L)$ si y solo si $u = av_1 + av_2 + 0v_3 + 0v_4 = a(v_1 + v_2)$. Así,

$$\ker(L) = \langle \{v_1 + v_2\} \rangle .$$

  El conjunto $\{v_1 + v_2\}$, al tener cardinalidad 1, es li y, por tanto, $\eta(L) = 1$. **(2 puntos)**

  Alternativa 2, calcular $\text{im}(L)$: Según la matriz dada L es tal que

$$\begin{aligned} L(v_1) &= v_1 - v_2, \\ L(v_2) &= -v_1 + v_2, \\ L(v_3) &= v_3, \\ L(v_4) &= v_2. \end{aligned}$$

  (2 puntos)

  Esto significa que

$$\text{im}(L) = \langle \{v_1 - v_2, -v_1 + v_2, v_3, v_2\} \rangle .$$

  El conjunto $\{v_1 - v_2, -v_1 + v_2, v_3, v_2\}$ es generador de $\text{im}(L)$, pero no es base de $\text{im}(L)$ pues no es li, por ejemplo, $-v_1 + v_2 = -(v_1 - v_2)$, el conjunto

$$\{v_1 - v_2, v_3, v_2\}$$

también es generador de $\mathrm{im}(L)$. **(2 puntos)**

Veamos si éste es li. Sean $a, b, c \in \mathbb{K}$, entonces

$$a(v_1 - v_2) + bv_3 + cv_2 = \theta_V \;\Leftrightarrow\; av_1 + (c-a)v_2 + bv_3 = \theta_V.$$

Ésta es una combinación lineal de vectores que forman un conjunto li (si $\mathcal{A}$ es base de V, $\mathcal{A}$ es li y cualquier subconjunto de $\mathcal{A}$, en particular $\{v_1, v_2, v_3\}$, es li). Esta combinación lineal es igual a θ_V si y solo si

$$a = 0,\; c - a = 0,\; b = 0 \;\Leftrightarrow\; a = b = c = 0.$$

Hemos demostrado entonces que $\{v_1 - v_2, v_3, v_2\}$ es base de $\mathrm{im}(L)$ y, por tanto, $\mathrm{r}(L) = 3$. **(2 puntos)**

Como $\dim(V) = 4$ se cumple que $\eta(L) + \mathrm{r}(L) = 4$ y, entonces, $\eta(L) = 1$. **(2 puntos)**

Alternativa 3, calcular $\ker([L]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}})$**:** Como $\ker([L]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}})$ son las coordenadas con respecto a $\mathcal{A}$ de los vectores en $\ker(L)$, se cumple que $\eta([L]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}) = \eta(L)$. **(2 puntos)**

$$\begin{aligned}
\ker([L]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^4 \;:\; [L]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \theta_{\mathbb{K}^4} \right\}, \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^4 \;:\; x_1 - x_2 = 0, -x_1 + x_2 + x_4 = 0, x_3 = 0 \right\}, \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^4 \;:\; x_1 = x_2 \right\}, \\
&= \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.
\end{aligned}$$

(3 puntos)

El conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, al estar formado por un solo vector distinto de $\theta_{\mathbb{K}^4}$, es li, por tanto, $\eta([L]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}) = 1$. **(3 puntos)**

Alternativa 4, calcular $\mathrm{r}([L]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$**:)** Como la imagen de L está formada por los vectores cuyas coordenadas pertenecen a $\mathrm{im}([L]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}})$, ambos espacios tienen la misma dimensión. **(2 puntos)**

$$\mathrm{im}([L]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

Dado que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, el conjunto anterior es ld y

$$\mathrm{im}([L]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

El conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es li pues

$$a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \theta_{\mathbb{K}^4} \Leftrightarrow -a = 0, a + c = 0, b = 0, \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$

Este conjunto es entonces una base de $\mathrm{im}([L]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}})$ y, por tanto, $\mathrm{r}([L]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}) = \mathrm{r}(L) = 3$. **(3 puntos)**

Dado que $\eta(L) + \mathrm{r}(L) = 4$, se tiene que $\eta(L) = 1$. **(3 puntos)**

- La matriz asociada a $L \circ L$ con respecto a la base $\mathcal{A}$ de V es el producto de $[L]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ consigo misma pues la matriz asociada a una compuesta de transformaciones lineales es el producto de las matrices asociadas a cada transformación. **(2 puntos)**

  Entonces

$$[L \circ L]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2 puntos)

Problema 3. (18 puntos)

Sea $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz asociada con respecto a las bases

$$\mathcal{A} = \left\{1, 2 + x, x^2, x + x^3\right\} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{B} = \left\{(1, 0, 1)^{\mathrm{T}}, (0, 1, 0)^{\mathrm{T}}, (0, 0, 1)^{\mathrm{T}}\right\}$$

es:

$$[T]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

3.1 **(13 puntos)** Sean a, b, c, d números reales cualesquiera. Determine $T(ax^3 + bx^2 + cx + d)$.

3.2 **(5 puntos)** Decida si

$$\frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + 2x + 2 \in \ker(T).$$

Justifique su respuesta.

Solución:

1. Se sabe que $[T(p)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}[p]_{\mathcal{A}}$. Se calculará $[p]_{\mathcal{A}}$.

   Sea $p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ tal que $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, entonces existen α_1, α_2, α_3 y $\alpha_4 \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d &= \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot (2 + x) + \alpha_3 \cdot (x^2) + \alpha_4 \cdot (x + x^3) \\ &= (\alpha_1 + 2\alpha_2) + (\alpha_2 + \alpha_4)x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \end{aligned}$$

(3 puntos)

   Es decir,

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= a, \\ \alpha_3 &= b, \\ \alpha_2 + \alpha_4 &= c, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 &= d, \end{aligned}$$

por tanto: $\alpha_1 = d - 2c + 2a$, $\alpha_2 = c - a$, $\alpha_3 = b$ y $\alpha_4 = a$, así:

$$[p]_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} d - 2c + 2a \\ c - a \\ b \\ a \end{pmatrix}$$

(4 puntos)

Luego:

$$[T(p)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d - 2c + 2a \\ c - a \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b + 3a \\ 2c + b \\ -d + c - 3a - b \end{pmatrix}$$

(3 puntos)

y por consiguiente:

$$\begin{aligned} T(ax^3 + bx^2 + cx + d) &= (b + 3a)(1, 0, 1)^{\mathrm{T}} + (2c + b)(0, 1, 0)^{\mathrm{T}} + (-d + c - 3a - b)(0, 0, 1)^{\mathrm{T}} \\ &= (b + 3a, 2c + b, b + 3a - d + c - 3a - b)^{\mathrm{T}} \\ &= (b + 3a, 2c + b, c - d)^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

(3 puntos)

2. Por último, $T(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (b + 3a, 2c + b, -d + c)^{\mathrm{T}}$ implica que

$$T(4/3x^3 - 4x^2 + 2x + 2) = (-4 + 3(4/3), 2(2) - 4, -2 + 2)^{\mathrm{T}} = (0, 0, 0)^{\mathrm{T}}.$$

(3 puntos)

Como $T(4/3x^3 - 4x^2 + 2x + 2)$ es igual al vector nulo de $\mathbb{R}^3$, se cumple que el polinomio $4/3x^3 - 4x^2 + 2x + 2$ pertenece a $\ker(T)$. **(2 puntos)**

Problema 4. (10 puntos)

Sea

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verifique que $N + I$ es invertible y que $(N + I)^{-1} = I - N + N^2 - N^3$.

Recomendación: Podría utilizar que $N^4 = \Theta$.

Solución:
Verifiquemos que $(N + I)(I - N + N^2 - N^3) = (I - N + N^2 - N^3)(N + I) = I$.
Utilizando que $N^4 = \Theta$ se tiene que

$$(N + I)(I - N + N^2 - N^3) = N - N^2 + N^3 - N^4 + I - N + N^2 - N^3 = -N^4 + I = I$$

y

$$(I - N + N^2 - N^3)(N + I) = N + I - N^2 + N + N^3 + N^2 - N^4 - N^3 = I - N^4 = I.$$

(5 puntos)

Como existe matriz cuyo producto por $N + I$, tanto a la izquierda como a la derecha de $N + I$, es igual a la identidad, se cumple que $N + I$ es invertible. Esta matriz es $I - N + N^2 - N^3$ y ella es, por tanto, la inversa de $N + I$. **(5 puntos)**