Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

525150 – Álgebra 2 – Pauta de Evaluación 1 (22.4.2022)

Problema 1.

En $\mathbb{C}^2$ se definen la siguiente binaria operación interna (suma de vectores de $\mathbb{C}^2$)

$$\oplus : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \quad \text{tal que} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix}$$

y la siguiente operación binaria externa (producto de un escalar complejo por un vector de $\mathbb{C}^2$)

$$\odot : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \quad \text{tal que} \quad \alpha \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = |\alpha| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\alpha|\, x \\ |\alpha|\, y \end{pmatrix},$$

donde $|\alpha|$ es el módulo de $\alpha \in \mathbb{C}$. Decida si $\mathbb{C}^2$, con la suma y el producto definidos, es un espacio vectorial complejo. Justifique sus respuestas.

Solución:

El resultado de ambas operaciones es un vector de $\mathbb{C}^2$.

Según observación en certamen no es necesario comprobar que la suma es conmutativa, asociativa, tiene elemento neutro y que para cada elemento de $\mathbb{C}^2$ existe un inverso aditivo.

Comprobemos si las operaciones dadas cumplen las restantes propiedades de espacio vectorial.

1. Dado que $|1| = 1$ se cumple que

$$1 \odot (x,y)^{\mathrm{T}} = (1x, 1y)^{\mathrm{T}} = (x,y)^{\mathrm{T}}.$$

Es cierto que para todo $(x,y)^{\mathrm{T}}$ se cumple que $1 \odot (x,y)^{\mathrm{T}} = (x,y)^{\mathrm{T}}$.

2. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Entonces

$$(\alpha+\beta) \odot (x,y)^{\mathrm{T}} = (|\alpha+\beta|x, |\alpha+\beta|y)^{\mathrm{T}}$$

Por otro lado,

$$\alpha \odot (x,y)^{\mathrm{T}} \oplus \beta \odot (x,y)^{\mathrm{T}} = (|\alpha|x, |\alpha|y)^{\mathrm{T}} \oplus (|\beta|x, |\beta|y)^{\mathrm{T}} = ((|\alpha|+|\beta|)x, (|\alpha|+|\beta|)y)^{\mathrm{T}}$$

En general, no es cierto que $|\alpha+\beta| = |\alpha|+|\beta|$. Por ejemplo, si $\alpha = -1$ y $\beta = 1$, entonces

$$(\alpha+\beta) \odot (x,y)^{\mathrm{T}} = (0,0)^{\mathrm{T}},$$

pero

$$\alpha \odot (x,y)^{\mathrm{T}} \oplus \beta \odot (x,y)^{\mathrm{T}} = (2x, 2y)^{\mathrm{T}}.$$

Por tanto, no es cierto que para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y todo $(x,y)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^2$ se cumpla que

$$(\alpha+\beta) \odot (x,y)^{\mathrm{T}} = \alpha \odot (x,y)^{\mathrm{T}} + \beta \odot (x,y)^{\mathrm{T}}.$$

3. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\begin{aligned} \alpha \odot (\beta \odot (x,y)^{\mathrm{T}}) &= \alpha \odot (|\beta|x, |\beta|y)^{\mathrm{T}}, \\ &= (|\alpha||\beta|x, |\alpha||\beta|y) = (|\alpha\beta|x, |\alpha\beta|y)^{\mathrm{T}} && \text{porque el módulo de un producto es el producto de los módulos,} \\ &= \alpha\beta \odot (x,y)^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

Por tanto, el producto definido también cumple que para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y todo $(x,y)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^2$

$$\alpha \odot (\beta \odot (x,y)^{\mathrm{T}}) = \alpha\beta \odot (x,y)^{\mathrm{T}}.$$

4. Por último, sean $(x,y)^{\mathrm{T}}$, $(a,b)^{\mathrm{T}}$ elementos de $\mathbb{C}^2$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces

$$\begin{aligned}\alpha \odot ((x,y)^{\mathrm{T}} \oplus (a,b)^{\mathrm{T}}) &= \alpha \odot (x+a, y+b)^{\mathrm{T}} = (|\alpha|(x+a), |\alpha|(y+b))^{\mathrm{T}},\\ &= (|\alpha||x + |\alpha|a, |\alpha|y + |\alpha|b)^{\mathrm{T}},\\ &= (|\alpha|x, |\alpha|y)^{\mathrm{T}} \oplus (|\alpha|a, |\alpha|b)^{\mathrm{T}},\\ &= \alpha \odot (x,y)^{\mathrm{T}} \oplus \alpha \odot (a,b)^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

Es cierto entonces que para todo par de vectores $(x,y)^{\mathrm{T}}, (a,b)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^2$ y todo $\alpha \in \mathbb{C}$ se cumple que

$$\alpha \odot ((x,y)^{\mathrm{T}} \oplus (a,b)^{\mathrm{T}}) = \alpha \odot (x,y)^{\mathrm{T}} \oplus \alpha \odot (a,b)^{\mathrm{T}}.$$

$\mathbb{C}^2$, con la suma y el producto definidos, no es un espacio vectorial complejo.
Observación: Demostrar que la segunda de las propiedades anteriores no se cumple es suficiente para concluir que $\mathbb{C}^2$, con las dos operaciones definidas, no es e.v. complejo.
Puntaje:

- 3 puntos por cada propiedad bien demostrada 12 puntos en total.
- 3 puntos por concluir correcta y justificadamente.
- Si se concluye de forma correcta y justificadamente, se asignan 15 puntos, aunque no demuestre todas las propiedades.

Problemas similares en listados y tests: Problemas 1, 2, 3 y 4 de Espacios Vectoriales en Listado 2. Estos problemas se preguntaron en test 2 y fueron resueltos en pauta de test 2 publicada en Canvas.

Problema 2.

Decida si

$$W = \left\{ (x,y,z,t)^T \in \mathbb{R}^4 \ : \ x+z=0 \ \wedge \ \frac{2t+y}{2} = 0 \right\}$$

es subespacio vectorial del espacio vectorial real $\mathbb{R}^4$.
Solución:
Hay dos formas para decidir si W es s.e.v de $\mathbb{R}^4$.

Forma 1:
Se verificarán las hipótesis del lema 2.4 en los apuntes de la semana 3:

- El nulo de $\mathbb{R}^4$ está en W pues $(0,0,0,0)^T$ con $x=y=z=t=0$ satisface $x+z=0$ y $\dfrac{2t+y}{2}=0$. **3 puntos**
- Sean $u=(x,y,z,t)^T$ y $w=(a,b,c,d)^T$ que pertenecen a W:

  $$\begin{aligned} x+z=0 \ \wedge \ \frac{2t+y}{2} &= 0,\\ a+c=0 \ \wedge \ \frac{2d+b}{2} &= 0\end{aligned}$$

  Luego $u+w=(x+a, y+b, z+c, d+t)^T$, aquí $(x+a)+(z+c)=(x+z)+(a+c)$, pero $x+z=0$ y $a+c=0$, por tanto $(x+a)+(z+c)=0$.

Por otro lado, $\dfrac{2(d+t)+(y+b)}{2} = \dfrac{(2t+y)+(2d+b)}{2} = \dfrac{2t+y}{2} + \dfrac{2d+b}{2}$, pero $\dfrac{2t+y}{2} = 0$ y $\dfrac{2d+b}{2} = 0$, por tanto, $\dfrac{2(d+t)+(y+b)}{2} = 0$.

En consecuencia $u+w$ satisface $(x+a)+(z+c)=0$ y $\dfrac{2(d+t)+(y+b)}{2} = 0$, es decir, $u+w \in W$ y con esto se tiene que W es cerrado para la suma. **5 puntos**

- Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $u = (x,y,z,t)^T$ que pertenece a W:

$$x+z=0 \ \wedge \ \frac{2t+y}{2} = 0$$

Luego $\alpha u = (\alpha x, \alpha y, \alpha z, \alpha t)^T$, aquí $\alpha x + \alpha z = \alpha(x+z)$, pero $x+z=0$, en consecuencia, $\alpha x + \alpha z = 0$. Por otro lado, $\dfrac{2(\alpha t)+(\alpha y)}{2} = \dfrac{\alpha(2t+y)}{2} = \alpha\dfrac{2t+y}{2}$, pero $\dfrac{2t+y}{2} = 0$, por tanto $\dfrac{2(\alpha t)+(\alpha y)}{2} = 0$.

Po consiguiente αu satisface $\alpha x + \alpha z = 0$ y $\dfrac{2(\alpha t)+(\alpha y)}{2} = 0$, es decir, $\alpha u \in W$ y con esto se tiene que W es cerrado para el producto. **5 puntos**

así por lema, W es s.e.v de $\mathbb{R}^4$. **2 puntos**

Forma 2:
Se obtendrá un conjunto generador:

$$\begin{aligned} W &= \left\{ (x,y,z,t)^T \in \mathbb{R}^4 \ : \ x+z=0 \ \wedge \ \frac{2t+y}{2} = 0 \right\} \\ &= \left\{ (x,y,z,t)^T \in \mathbb{R}^4 \ : \ x=-z \ \wedge \ y=-2t \right\} \\ &= \left\{ (-z,-2t,z,t)^T \in \mathbb{R}^4 \ : \ z,t \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

así, si $u \in W$ entonces $u = (-z,-2t,z,t)^T$ con $z,t \in \mathbb{R}$. **7 puntos**
Luego:

$$u = (-z,-2t,z,t)^T = z(-1,0,1,0)^T + y(0,-2,0,1)^T \text{ , con } z,t \in \mathbb{R},$$

es decir, todo elemento de W es combinación lineal de $(-1,0,1,0)^T$ y $(0,-2,0,1)^T$, por tanto el conjunto $\left\{(-1,0,1,0)^T, (0,-2,0,1)^T\right\}$ es generador de W, esto es:
$W = \left\langle \left\{(-1,0,1,0)^T, (0,-2,0,1)^T\right\} \right\rangle$. **6 puntos**
y por lema 2.14 en apuntes de semana 4 se cumple que W es s.e.v de $\mathbb{R}^4$. **2 puntos**

Problemas similares en listados y tests: Problemas sobre subespacios vectoriales en listado 2, problemas 1 y 7 en listado 3.

Problema 3.

En el espacio vectorial real $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ considere el subespacio

$$S = \left\{ p \in V : p(0) = p''(0) \ \wedge \ p'(1) = p''(1) \right\}.$$

1. Determine un conjunto $\mathcal{B}$, generador de S.
2. Exprese, si es posible, el vector $2x^3 + 2x^2 + 6x + 4$ como combinación lineal de los vectores en $\mathcal{B}$.

Solución:

1. Sean $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Supongamos que $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, entonces $p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$ y $p''(x) = 2a_2 + 6a_3x$.

   Además $p(0) = a_0,\ \ p''(0) = 2a_2,\ \ p'(1) = a_1 + 2a_2 + 3a_3$ y $p''(1) = 2a_2 + 6a_3$.

   El polinomio satisface $p(0) = p''(0)$ si y solo si $a_0 = 2a_2$. Él satisface $p'(1) = p''(1)$ si y solo si $a_1 = 3a_3$.

   Luego $p \in S$ si y solo si $p(x)$ es tal que $p(x) = 2a_2 + 3a_3x + a_2x^2 + a_3x^3 = a_2(2 + x^2) + a_3(3x + x^3)$.

   El conjunto $\mathcal{B} = \left\{2 + x^2, 3x + x^3\right\}$ es entonces un generador para S. **10 puntos**

2. Sí es posible. El polinomio $2x^3 + 2x^2 + 6x + 4 = \alpha(2 + x^2) + \beta(3x + x^3) = \beta x^3 + \alpha x^2 + 3\beta x + 2\alpha$ si y solo si $\beta = 2$ y $\alpha = 2$.

   Por lo tanto, $2x^3 + 2x^2 + 6x + 4 = 2(2 + x^2) + 2(3x + x^3)$. **5 puntos**

Problemas similares en listados y tests: Problemas 2, 3, 4, 5e, 7e y 7f en listado 3.

Problema 4.

Considere los siguientes subespacios del espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^3$

$$U = \left\{(a,b,c)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^3 : ai - 2b = 0\right\} = \left\langle \left\{ \left(i, -\frac{1}{2}, 0\right)^{\mathrm{T}}, (0,0,1)^{\mathrm{T}} \right\} \right\rangle,$$

$$T = \left\{(a,b,c)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^3 : c = 2a \wedge c + 4ib = 0\right\}.$$

1. Determine $U \cap T$ y justifique si U y T están en suma directa.

2. Analice si los siguientes vectores

   $$(-2+i, -i, 3i)^{\mathrm{T}}, \qquad \left(1, \frac{i}{2}, 3\right)^{\mathrm{T}}$$

   pertenecen a $U + T$. Justifique sus respuestas.

Solución:

1.

$$\begin{aligned} U \cap T &= \left\{(a,b,c)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^3 : ai - 2b = 0 \wedge c = 2a \wedge c + 4ib = 0\right\}, \\ &= \left\{(a,b,c)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^3 : b = \frac{ai}{2} \wedge c = 2a\right\}, \\ &= \left\{\left(a, \frac{ai}{2}, 2a\right)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^3 : a \in \mathbb{C}\right\}. \qquad \textbf{5 puntos} \end{aligned}$$

   Si le asignamos a a el valor 2 notamos que $(2, i, 4) \in U \cap T$, por lo que $U \cap T \neq \{\theta\}$ y U y T no están en suma directa. **2 puntos**

   También podía notarse que, dado que los vectores en T satisfacen

   $$c = 2a \wedge c = -4ib \Leftrightarrow c = 2a \wedge 2a = -4ib \Leftrightarrow c = 2a \wedge ai = 2b,$$

   el conjunto T es subconjunto de U y, por tanto, $U \cap T = T$, lo que también nos permite concluir que la suma $U + T$ no es directa.

2. Busquemos un conjunto generador de T.

$$\begin{aligned} T &= \left\{(a,b,c)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^3 : c = 2a \wedge c + 4ib = 0\right\}, \\ &= \left\{(a,b,2a)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^3 : 2a + 4ib = 0\right\}, \\ &= \left\{(a,b,2a)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^3 : a = -2ib\right\}, \\ &= \left\{(-2bi,b,-4bi)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^3 :\ b \in \mathbb{C}\right\}, \\ &= \left\{b\,(-2i,1,-4i)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^3 :\ b \in \mathbb{C}\right\}, \\ &= \left\langle \left\{(-2i,1,-4i)^{\mathrm{T}}\right\} \right\rangle. \end{aligned}$$

Dado que el conjunto

$$\left\{\left(i,-\frac{1}{2},0\right)^{\mathrm{T}}, (0,0,1)^{\mathrm{T}}, (-2i,1,-4i)^{\mathrm{T}}\right\}$$

es un generador para $U+T$, los vectores dados pertenecen a $U+T$ si y solo si pueden escribirse como combinación lineal de los vectores en conjunto anterior.

Luego, determinemos si existen $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{C}$ tales que

$$(-2+i,-i,3i)^{\mathrm{T}} = \alpha(i,-1/2,0)^{\mathrm{T}} + \beta(0,0,1)^{\mathrm{T}} + \gamma(-2i,1,-4i)^{\mathrm{T}}. \tag{1}$$

La igualdad anterior se satisface si y solo si $\alpha = 2\gamma + 2i - 1$ y además $\gamma = -i + \alpha/2$. Reemplazando γ en primera ecuación se tiene que $\alpha = 2(-i+\alpha/2)+2i-1$, obteniendo $0=-1$, de lo que podemos concluir que no existen $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{C}$ de modo que (1) se cumpla, por tanto, $(-2+i,-i,3i)^{\mathrm{T}} \notin U+T$. **4 puntos**

Una segunda alternativa para responder esta pregunta es utilizar que, como notamos antes, $T \subseteq U$ y, por tanto, $U+T=U$. Dado que el vector $(-2+i,-i,3i)^{\mathrm{T}}$ no pertenece a U (porque su segunda componente no es $i/2$ veces la primera), no es posible escribir a $(-2+i,-i,3i)^{\mathrm{T}}$ como suma de un vector en U y uno en T.

El vector $\left(1,\frac{i}{2},3\right)^{\mathrm{T}}$ sí pertenece a U y, por tanto, pertenece a $U+T$. **4 puntos**

Problemas similares en listados y tests: Problemas 1, 5c, 6b, 6d, 7a, 7h en listado 3.