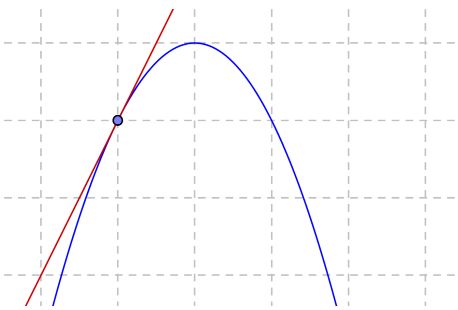
1. Introducción



El concepto fundamental del Cálculo Diferencial en una variable real es el de **derivada**. Éste fue construido en el siglo XVII, en forma independiente, por Isaac Newton y Gottfried Leibniz y proporciona la herramienta que permite resolver el problema de la determinación de una *recta tangente* a una curva dada (ver figura al lado), como también darle sentido al concepto de velocidad instantánea para el movimiento de un cuerpo sobre una línea recta.

El concepto de derivada se define a partir de la noción de **límite** estudiada en el curso anterior. Ilustramos esta idea con la siguente discusión que conduce al concepto físico de velocidad instantánea:

Vamos a estudiar el movimiento de un *móvil* sobre una línea recta L (movimiento rectilíneo), entendiendo que cada punto sobre L está representado por un número real. De este modo, en cada instante t, la posición del móvil sobre L está determinada por un número real $x(t)$. Esto corresponde a describir el movimiento mediante una función

$$x : [a,b] \to \mathbb{R} \ , \ t \mapsto x(t)$$

llamada *función posición*.

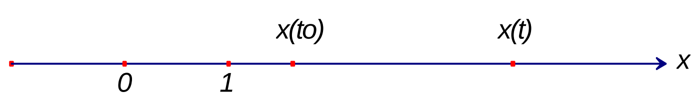
Para que la siguiente discusión sea más simple de entender, supondremos que el móvil se desplaza de izquierda a derecha sobre L.

En el intervalo de tiempo $[t_0, t]$ se define la velocidad media por

$$v_M = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

lo que puede representarse también por

$$\begin{aligned} v_M &= \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad , \quad \text{donde} \\ \Delta x &= x(t) - x(t_0) \ \ , \ \ \Delta t = t - t_0 \end{aligned}$$



Este concepto corresponde sólo a una velocidad promedio en un intervalo de tiempo.

Por ejemplo, si el móvil recorre 1000 metros en 50 segundos, su velocidad media fue de $20\frac{mts}{seg}$ o $72\frac{Km}{h}$. Si se tratara de un automovil sabemos que la medición de su velocímetro podría haber cambiado durante esos 50 segundos (por ejemplo, parte del reposo y alcanza rápidamente una velocidad de $100\frac{Km}{h}$). ¿De qué manera queda entonces definida la "velocidad instantánea" que marca el velocímetro en cada instante?

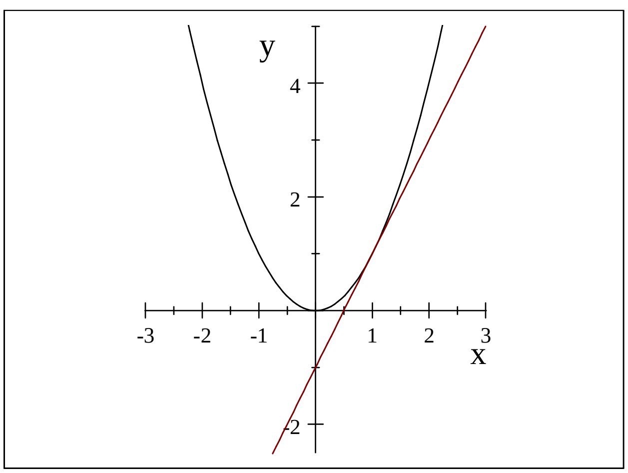
La idea básica es que, considerando el instante t_0 fijo, para un tiempo posterior t muy poco mayor que t_0, el intervalo $[t_0, t]$ es muy pequeño y por tanto su velocidad casi no cambia, lo que permite considerar la velocidad instantánea en t_0 practicamente igual a la velocidad media en el intervalo $[t_0, t]$. Esto hace razonable definir la velocidad instantánea en t_0 por

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

que es simplemente la derivada de la función posición en el instante t_0 (en el entendido que este límite existe).

2. La derivada

La idea geométrica para introducir el concepto de *derivada* de una función f, en un punto a de su dominio, es la de recta tangente a la curva $y = f(x)$ (gráfico de f) en el punto $(a, f(a))$.



Como caso concreto consideremos la parábola $y = x^2$. Esto significa que la función f está definida por $f(x) = x^2$. ¿Cómo definir la recta tangente a esta curva en el punto $(1, 1)$?

De manera informal podemos pensar en "dibujar" una recta que toque a la curva exclusivamente en este punto, tal como se aprecia en la figura.

Para llegar a esta recta se considera, para cada $x \neq 1$, la recta que pasa por $(1, 1)$ y por $(x, f(x))$, cuya *pendiente* está dada por

$$m_x = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

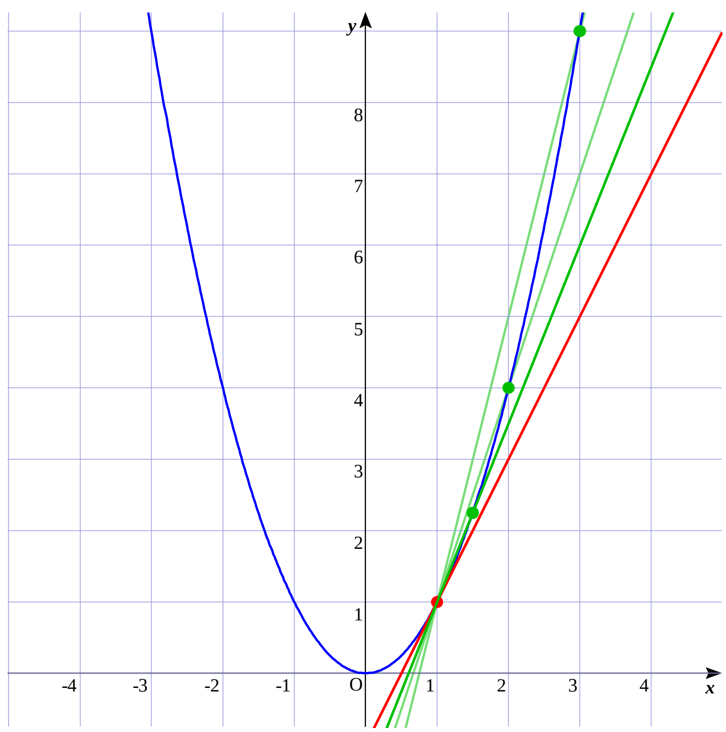
Para un x muy próximo de 1, esta recta "secante" (de color verde) se aproxima a la recta de color rojo, como se muestra en la figura de la página siguiente.

Por esto es razonable pensar que la pendiente de la recta roja esté dada por

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ &= 2 \end{aligned}$$

y así la ecuación de la recta tangente es

$$\begin{aligned} y - 1 &= 2(x - 1) \\ y &= 2x - 1 \end{aligned}$$



En general, se da la definición de derivada para una función $f : I \to \mathbb{R}$, definida en un intervalo abierto I, en un punto $a \in I$, como sigue.

Definición 1 *La derivada de f en el punto a es el valor del límite*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

cuando él existe (como número real). Se denota por $f'(a)$.

En caso que el límite no exista se dice que la función no tiene derivada en el punto a, o bien que f no es derivable en a.

Así tenemos que

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Geométricamente, la derivada de f en el punto a determina la pendiente de la recta tangente a $y = f(x)$, en el punto $(a, f(a))$. La ecuación de esta recta es

$$\begin{aligned} y - f(a) &= f'(a)(x - a) \\ y &= f(a) + f'(a)(x - a) \end{aligned}$$

Ejemplo 2 *En el caso de $f(x) = x^2$, calculamos*

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Más generalmente, en un punto (a, a^2) :

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} (x + a) = 2a \end{aligned}$$

lo que nos entrega la derivada $f'(a) = 2a$, para cualquier punto $a \in \mathbb{R}$.

*Así podemos considerar la **función derivada** de $f(x) = x^2$, definida por*

$$f'(x) = 2x$$

lo que también se escribe

$$\frac{d}{dx}\left[x^2\right] = 2x \ , \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Observación 3 *Cuando una función se representa mediante la fórmula*

$$y = f(x)$$

podemos considerar que ésta establece una relación entre la variable independiente *x y la* variable dependiente *y. Su función derivada se denota*

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

para indicar que la variable y se deriva con respecto a la variable x.

Ejemplo 4 *Calcular la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, en cada punto donde exista.*

Según su definición, debemos analizar puntos a mayores a cero

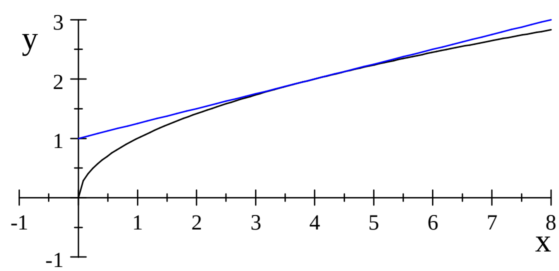
$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x\to a}\left[\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\right] \\ &= \lim_{x\to a}\left[\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right] \\ &= \lim_{x\to a}\left[\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right] = \frac{1}{2\sqrt{a}} \end{aligned}$$

Así, la función derivada es $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$. *También se escribe* $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Con esto podemos encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \sqrt{x}$, *en el punto* $(4, 2)$: *Su pendiente es* $m = f'(4) = \frac{1}{4}$ *y la ecuación*

$$\begin{aligned} y &= 2 + \frac{1}{4}(x-4) \\ y &= \frac{1}{4}x + 1 \end{aligned}$$

La curva y su recta tangente se muestran en el siguiente gráfico:



Ejemplo 5 *Queda de ejercicio calcular la derivada de la función* $f(x) = mx + b$, *donde* m *y* b *son constantes, en cada punto de su dominio.*

Se debe obtener la fórmula

$$\frac{d}{dx}[mx+b] = m$$

En particular, $\frac{d}{dx}[b] = 0$ *(la derivada de una función constante es nula) y* $\frac{d}{dx}[x] = 1$ *(la derivada de la función identidad vale* 1 *en cada punto).*

Ejemplo 6 *Calcule la derivada de la función* $f(x) = \sin x$.

En el punto $a = 0$:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \end{aligned}$$

En un punto $a \neq 0$:

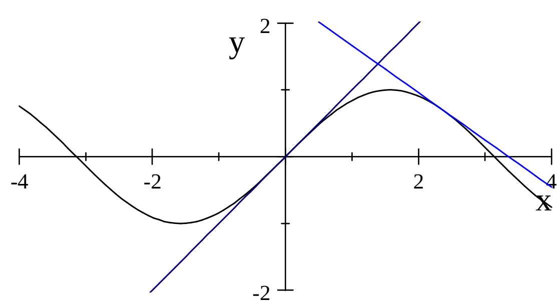
$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} \qquad \text{(con } h = x - a\text{)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin a \cosh + \cos a \sinh - \sin a}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\cos a \cdot \frac{\sinh}{h} + \sin a \cdot \frac{\cosh - 1}{h}\right] \\ &= \cos a \end{aligned}$$

Luego, $f'(a) = \cos a$.

De lo anterior

$$\frac{d}{dx}[\sin x] = \cos x$$

Queda de ejercicio encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \sin x$ *en los puntos* $(0,0)$ *y* $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. *La gráfica de la curva y estas rectas tangentes se muestrar a continuación:*



También queda de ejercicio obtener la fórmula

$$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\sin x$$

Observación 7 *En el cálculo de la derivada de la función seno, en un punto $a \neq 0$, se usó la sustitución $h = x - a$ para obtener*

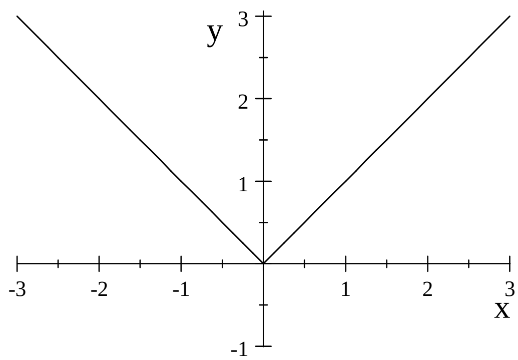
$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \end{aligned}$$

Los dos límites anteriores se pueden usar en la definición de la derivada de f en el punto a.

Ejemplo 8 *Para la función $f(x) = |x|$, se tiene*

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} \text{ , no existe}$$

La gráfica de $y = |x|$ no tiene recta tangente en $(0,0)$, como "se ve" en la figura:



¿Cuánto vale $f'(2)$?

Ejemplo 9 *Calcule la derivada de $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$.*
En $a \neq 0$:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{x^{1/3} - a^{1/3}}{x - a} \\ &= \lim_{u \to a^{1/3}} \frac{u - a^{1/3}}{u^3 - a} \\ &= \lim_{u \to a^{1/3}} \frac{u - a^{1/3}}{\left(u - a^{1/3}\right)\left(u^2 + a^{1/3}u + a^{2/3}\right)} \\ &= \frac{1}{3a^{2/3}} \end{aligned}$$

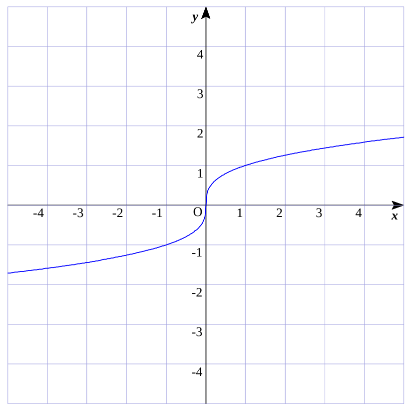
En $a = 0$:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^{1/3}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{2/3}} = +\infty \text{ , no existe}$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dx}\left[x^{1/3}\right] = \frac{1}{3x^{2/3}} \text{ , para } x \neq 0$$

La gráfica muestra que en este caso la recta tangente en $(0,0)$ *es vertical*



El siguiente importante teorema establece la relación entre los conceptos de continuidad y derivabilidad.

Teorema 10 *Sea* $f : I \to \mathbb{R}$. *Se tiene:*
f *derivable en* $a \Rightarrow f$ *continua en* a.
Dem. *Suponiendo que* $f'(a)$ *existe, se sigue*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a}\left[f(x) - f(a)\right] &= \lim_{x \to a}\left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)\right] \\ &= f'(a) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

lo que muestra que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. *O sea,* f *es continua en* a. ■

Observación 11 *Es claro que el recíproco del teorema no es válido. Basta considerar como contraejemplo a la función* $f(x) = |x|$, *que es continua en* 0, *pero no es derivable en* 0.

También puede ser útil considerar el contrarecíproco (válido)

$$f \text{ no continua en } a. \Rightarrow f \text{ no derivable en } a.$$

Una vez calculadas las derivadas de las funciones más elementales, mediante la definición, veremos algunas reglas de derivación que nos permitirán calcular derivadas de otras funciones.

2.1. Reglas de derivación

2.1.1. Algebra de derivadas

El primer teorema indica cómo calcular la derivada de una suma, un producto por escalar, una multiplicación y un cuociente de dos funciones derivables, por esto lo llamamos "álgebra de derivadas".

Teorema 12 *Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ dos funciones definidas en un intervalo abierto I, que tienen derivadas en un punto $a \in I$. Se tiene entonces que: $f+g,\ cf,\ f \cdot g$ y $\frac{f}{g}$ tienen derivada en a con*

1.- $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

2.- $(cf)'(a) = cf'(a)$.

3.- $(f \cdot g)'(a) = f(a)\, g'(a) + f'(a)\, g(a)$.

4.- $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)\, g(a) - f(a)\, g'(a)}{g(a)^2}$, siempre que $g(a) \neq 0$.

Dem. *Para 1.-*

$$\begin{aligned}
(f+g)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \frac{g(x) - g(a)}{x-a}\right] \\
&= \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x-a}\right] + \lim_{x \to a} \left[\frac{g(x) - g(a)}{x-a}\right] \\
&= f'(a) + g'(a)
\end{aligned}$$

Para 3.-

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f(x)\, g(x) - f(a)\, g(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f(x)\, g(x) - f(x)\, g(a) + f(x)\, g(a) - f(a)\, g(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x \to a} f(x) \frac{g(x) - g(a)}{x-a} + \lim_{x \to a} g(a) \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \\
&= f(a)\, g'(a) + g(a)\, f'(a)
\end{aligned}$$

Note que para la última igualdad se usa el hecho que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ (o sea la continuidad de f en a).

El 2 y el 4 quedan de ejercicio (el 4 sólo para los mejores). ■

Aplicaciones del teorema

Ejemplo 13 *Ya vimos anteriormente que* $\frac{d}{dx}[x] = 1$ *y* $\frac{d}{dx}[x^2] = 2x$*. Podemos aplicar la propiedad 3 para deducir*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[x^3\right] &= \frac{d}{dx}\left[x^2 x\right] = \frac{d}{dx}\left[x^2\right]\cdot x + x^2 \cdot \frac{d}{dx}[x] \\ &= (2x)\cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2 \end{aligned}$$

Aplicando inducción matemática y la propiedad 3 se muestra que, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$$

y por la propiedad 2

$$\frac{d}{dx}[c \cdot x^n] = ncx^{n-1}$$

Por ejemplo, $\frac{d}{dx}[5x^4] = 20x^3$.

Ejemplo 14 *Ahora podemos usar la propiedad 1 para calcular*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[2x^7 + 3x^4\right] &= \frac{d}{dx}\left[2x^7\right] + \frac{d}{dx}\left[3x^4\right] \\ &= 14x^6 + 12x^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[2x^7 + 3x^4 - 5x^2\right] &= \frac{d}{dx}\left[2x^7 + 3x^4\right] + \frac{d}{dx}\left[-5x^2\right] \\ &= 14x^6 + 12x^3 - 10x \end{aligned}$$

El cálculo en el ejemplo anterior muestra la posibilidad de generalizar (por inducción) las propiedades 1 y 2 del teorema, para encontrar la derivada de una *combinación lineal* de funciones derivables. Esto es, si $f_1, f_2, ..., f_n$ son funciones derivables en el punto a y $c_1, c_2, ..., c_n$ son constantes, entonces la combinación $c_1 f_1 + c_2 f_2 + ... + c_n f_n$ es una función derivable en a con

$$\frac{d}{dx}[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + ... + c_n f_n(x)] = c_1 \frac{d}{dx}[f_1(x)] + c_2 \frac{d}{dx}[f_2(x)] + ... + c_n \frac{d}{dx}[f_n(x)]$$

En particular para un polinomio

$$\frac{d}{dx}\left[a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0\right] = n a_n x^{n-1} + ... + 2a_2 x + a_1$$

Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}\left[-2x^5 + 7x^4 + \pi x^3 - x^2 + 10\right] = -10x^4 + 28x^3 + 3\pi x^2 - 2x$$

Ejemplo 15 *Conociendo las derivadas de las funciones seno y coseno, podemos obtener la derivadas de las 4 restantes funciones trigonométricas: Usando la regla del cuociente*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[\tan x] &= \frac{d}{dx}\left[\frac{\sin x}{\cos x}\right] \\
&= \frac{\frac{d}{dx}[\sin x]\cos x - \sin x \frac{d}{dx}[\cos x]}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \\
&= \sec^2 x
\end{aligned}$$

en el dominio de la función tangente, esto es $\left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ \text{donde } n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Queda de ejercicio obtener las derivadas

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[\sec x] &= \sec x \tan x \\
\frac{d}{dx}[\cot x] &= -\csc^2 x \\
\frac{d}{dx}[\csc x] &= -\csc x \cot x
\end{aligned}$$

Ejemplo 16 *Usando la regla del cuociente calcularemos la derivada de funciones de la forma* $f(x) = x^{-n}$, *con* $n \in \mathbb{N}$, *definida para* $x \neq 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^n}\right] &= \frac{\frac{d}{dx}[1]\cdot x^n - 1\frac{d}{dx}[x^n]}{x^{2n}} \\
&= \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}
\end{aligned}$$

Note que esta fórmula corresponde a

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-n}\right] = -nx^{-n-1}$$

que es la misma regla para calcular la derivada de una potencia con exponente natural. Por lo tanto, podemos escribir

$$\forall n \in \mathbb{Z} : \frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$$

Como ejemplos tenemos: $\frac{d}{dx}\left[x^{-5}\right] = -5x^{-6}$, $\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^9}\right] = -\frac{9}{x^{10}}$

Una observación interesante es notar que la regla de derivación anterior también rige para las funciones raíz cuadrada y raíz cúbica, como se dedujo anteriormente

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\right] &= \frac{d}{dx}\left[x^{1/2}\right]=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-1/2}\\ \frac{d}{dx}\left[\sqrt[3]{x}\right] &= \frac{d}{dx}\left[x^{1/3}\right]=\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}=\frac{1}{3}x^{-2/3}\end{aligned}$$

Se puede probar (no lo haremos) que esta regla también vale para raíces de cualquier índice. Esto es, $\forall n\in\mathbb{N}$:

$$\frac{d}{dx}\left[\sqrt[n]{x}\right]=\frac{d}{dx}\left[x^{1/n}\right]=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

para índice par, la fórmula vale para $x>0$ y para índice impar, vale para $x\neq 0$.

2.1.2. Regla de la cadena

Problema.- ¿Es posible, con las reglas del teorema anterior, obtener la derivada de la función $h(x)=(x^4+1)^{666}$?

Con mucha paciencia, podemos recurrir al teorema del binomio, para expandir esta fórmula a un polinomio de grado $4\times 666=2664$, el cual tiene 667 sumandos, y derivar término a término. ¡Es demasiado largo!

La alternativa es considerar que la función h se puede obtener como la compuesta de dos funciones más elementales. En efecto, con $f(x)=x^4+1$ y $\psi(x)=x^{666}$ se tiene

$$(\psi\circ f)(x)=\psi(f(x))=\psi\left(x^4+1\right)=\left(x^4+1\right)^{666}$$

O sea, $h=\psi\circ f$,donde sabemos derivar f y ψ.

El teorema siguiente, llamado *regla de la cadena* indica cómo calcular la derivada de una compuesta de dos funciones derivables.

Teorema 17 *Sean $f:I\to\mathbb{R}$ y $g:J\to\mathbb{R}$ dos funciones derivables, con $f(I)\subset J$. Entonces la función compuesta $g\circ f$ es derivable con*

$$\frac{d}{dx}\left[g(f(x))\right]=g'(f(x))\cdot f'(x)$$

Obs.- La demostración se hará sólo en el caso particular que: $f(x)\neq f(a)$ para todo x próximo de a, $x\neq a$. Queda bastante más simple de argumentar.

Dem. *Para* $a \in I$:

$$\begin{aligned}
(g \circ f)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\
&= \lim_{y \to f(a)} \frac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)} \cdot \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\
& \quad g'(f(a)) \cdot f'(a)
\end{aligned}$$

■

Una importante interpretación de la regla de la cadena se tiene al considerar las funciones f y g como relaciones entre una variable independiente y una variable dependiente como se indica:

$$z = g(y) \quad , \quad y = f(x)$$

Al componer $g \circ f$ se obtiene una relación entre x y z del tipo

$$z = g(f(x))$$

Las derivadas $\frac{dz}{dy} = g'(y)$, $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ y $\frac{dz}{dx} = (g \circ f)'(x)$ verifican

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

Aplicaciones del teorema

Ejemplo 18 *Retomando el problema planteado al comienzo, calculamos la derivada de* $h(x) = (x^4 + 1)^{666}$.

Con $f(x) = x^4 + 1$ *y* $g(x) = x^{666}$ *tenemos:* $h = g \circ f$, $f'(x) = 4x^3$ *y* $g'(x) = 666x^{665}$. *Luego aplicando la regla de la cadena*

$$\begin{aligned}
h'(x) &\equiv \frac{d}{dx}[g(f(x))] = g'(f(x)) \cdot f'(x) \\
&= 666\left(x^4 + 1\right)^{665} \cdot 4x^3 \\
&= 2664x^3\left(x^4 + 1\right)^{665}
\end{aligned}$$

Ejemplo 19 *Calcular* $\frac{d}{dx}\left[\sqrt{3x^6+5}\right]$

$\frac{d}{dx}\left[\left(3x^6+5\right)^{1/2}\right] = \frac{1}{2}\left(3x^6+5\right)^{-1/2}\left(18x^5\right) = \dfrac{9x^5}{\sqrt{3x^6+5}}$

Ejemplo 20 *Calcular* $\frac{d}{dx}\left[\sin\left(x^3\right)\right]$, $\frac{d}{dx}\left[\sin^3 x\right]$

$\frac{d}{dx}\left[\sin\left(x^3\right)\right] = \cos\left(x^3\right)\left[3x^2\right]$

$\frac{d}{dx}\left[\sin^3 x\right] = 3\sin^2 x\cos x$

Ejemplo 21 *Calcular* $\frac{d}{dx}\left[\cos^3\left(3x^4+2\right)\right]$

En este caso se tiene la compuesta de tres funciones $k\circ g\circ f$ *y la regla de la cadena queda*

$$\frac{d}{dx}\left[k\left(g\left(f\left(x\right)\right)\right)\right] = k'\left(g\left(f\left(x\right)\right)\right)\cdot g'\left(f\left(x\right)\right)\cdot f\,'\left(x\right)$$

Por lo tanto, $\frac{d}{dx}\left[\cos^3\left(3x^4+2\right)\right] = 3\cos^2\left(3x^4+2\right)\cdot\left[-\sin\left(3x^4+2\right)\right]\cdot\left[12x^3\right]$

Ejemplo 22 *Calcular* $\frac{d}{dx}\left[x^r\right]$*, donde* r *es un número racional.*

Podemos escribir $r=\frac{p}{q}$ *con* p,q *enteros y* $q>0$*. Se tiene entonces la compuesta* $\left(x^p\right)^{1/q}$ *y por regla de la cadena*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[x^{p/q}\right] &= \frac{1}{q}\left(x^p\right)^{\frac{1}{q}-1}\left[px^{p-1}\right]\\ &= \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}\end{aligned}$$

Luego, cuando r *es racional*

$$\frac{d}{dx}\left[x^r\right] = rx^{r-1}$$

Por ejemplo, $\frac{d}{dx}\left[x^{4/5}\right] = \frac{4}{5}x^{-1/5}$*, válida para* $x\neq 0$*.*

2.2. Derivadas de orden superior

Si tomamos la función polinomial $f\left(x\right) = 5x^4-2x^3+\frac{1}{2}x^2+7x-16$ sabemos que su derivada está dada por

$$g\left(x\right) = f\,'\left(x\right) = 20x^3-6x^2+x+7$$

y la función g también tiene derivada dada por

$$g'\left(x\right) = 60x^2-12x+1$$

A esta última, que corresponde a la derivada de la función $f\,'$, se le llama *segunda derivada de* f. Más formalmente, damos la siguiente definición.

Definición 23 *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función con derivada $f\,' : I \to \mathbb{R}$. En un punto $a \in I$ se define la* segunda derivada de f en a *por*

$$f\,''(a) = \lim_{x \to a} \frac{f\,'(x) - f\,'(a)}{x - a}$$

cuando este límite existe.

Es claro que $f\,''(a)$ es la derivada de $f\,'$ en el punto a y, en consecuencia, para calcular $f\,''(a)$ se podrán usar las reglas de derivación, según corresponda.

En forma inductiva, si la derivada de orden $n-1$ de f, denotada $f^{(n-1)}$, existe en el intervalo I, se define la derivada de orden n en el punto a por

$$f^{(n)}(a) = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x - a}$$

cuando este límite existe.

Para referirse a éstas se habla de derivadas de orden superior de f.

Ejemplo 24 *Calcular las derivadas de orden superior de* $f(x) = 5x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 7x - 16$

$\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f\,'(x) &= 20x^3 - 6x^2 + x + 7 \\ f^{(2)}(x) &= 60x^2 - 12x + 1 \\ f^{(3)}(x) &= 120x - 12 \\ f^{(4)}(x) &= 120 \\ f^{(n)}(x) &= 0 \text{ , } \textit{para todo } n \geq 5 \end{aligned}$$

Ejemplo 25 *Calcular las derivadas de orden superior de* $f(x) = \sin x$

Aquí se tiene, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f\,'(x) &= \cos x \\ f^{(2)}(x) &= -\sin x \\ f^{(3)}(x) &= -\cos x \\ f^{(4)}(x) &= \sin x \\ &\ldots \end{aligned}$$

Como la cuarta derivada resultó igual a la función, de ahí en adelante se vuelve a repetir el ciclo. Así por ejemplo

$$f^{(1071)}(x) = ?$$

Ejemplo 26 *Calcular las derivadas de orden superior de* $f(x) = x^{5/3}$
Se tiene:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{5}{3}x^{2/3}\ ,\ \forall x \in \mathbb{R} \\ f^{(2)}(x) &= \frac{10}{9}x^{-1/3},\ \forall x \neq 0 \end{aligned}$$

Note que existe $f'(0)$ *, pero no existe* $f^{(2)}(0)$

$$\begin{aligned} f^{(3)}(x) &= -\frac{10}{27}x^{-4/3},\ \forall x \neq 0 \\ &\quad \textit{etc.} \end{aligned}$$

Ejemplo 27 *Calcular la derivada de segundo orden de*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

$\forall x \neq 0 :\ f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ *y*

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ahora, $\forall x \neq 0 : f^{(2)}(x) = 2\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *y como* f' *no es continua en* 0 *(¿por qué?) ,* $f^{(2)}(0)$ *no existe.*

2.3. Interpretación física de la derivada

Como se vio al comienzo del capítulo, para estudiar el movimiento de un *móvil* sobre una línea recta L (movimiento rectilíneo). se considera la función *itinerario*

$$x : [a, b] \to \mathbb{R}\ ,\ t \mapsto x(t)$$

que determina la posición del móvil $x(t)$ sobre la recta L, en cada instante t.

La velocidad instantánea, en cada instante t, está dada por la derivada

$$v(t) = x'(t) = \lim_{t \to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$

que se obtiene mediante el proceso de límite sobre las velocidades medias $v_M = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$, correspondientes a intervalos de la forma $[t_0, t]$.

Un razonamiento similar permite pasar del concepto de aceleración media $a_M = \frac{v(t)-v(t_0)}{t-t_0}$ al de aceleración instantánea $a\,(t)$, dada por la derivada de la función velocidad. Esto es,

$$a\,(t) = v'\,(t) = x''\,(t)$$

y la aceleración es la segunda derivada de la función posición.

Ejemplo 28 *La caída libre de un cuerpo (en el vacío), desde una altura h_0 y con una velocidad inicial igual a v_0, está modelada por la función altura*

$$h\,(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

donde $g = 9{,}8 \frac{mt}{seg^2}$ es la aceleración de gravedad.

En el caso que el cuerpo "se deje caer" desde una altura h_0 se tendrá que $v_0 = 0$ y por tanto

$$h\,(t) = h_0 - 4{,}9t^2$$

Problema.- Un cuerpo se deja caer en el vacío desde una altura de 200 mts. Determine cuánto tiempo demora en llegar al suelo y la velocidad con que choca contra el suelo.

Observación 29 *La interpretación física del concepto de derivada como velocidad instantánea puede ser generalizada en el sentido siguiente:*

Como hemos visto la función f establece una relación entre la variable independiente *x y la* variable dependiente y *a través de la ecuación*

$$y = f\,(x)$$

Con respecto a esta relación, la derivada

$$\frac{dy}{dx} = f\,'\,(x)$$

*se interpreta como la **"razón de cambio"** de la variable y con respecto a x. También se usa el término "tasa de cambio" de y con respecto a x.*

Por ejemplo, el área de un círculo es función de su radio según

$$A = \pi r^2$$

La derivada de esta función es

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi r$$

Cuando r es pequeño, *la derivada $\frac{dA}{dr}$ es* pequeña, *luego un incremento en r produce un* pequeño *aumento del área.*

Cuando r es grande, *la derivada $\frac{dA}{dr}$ es* grande, *luego el mismo incremento en r produce un* gran *aumento del área.*

2.4. Derivación implícita

El concepto de derivada se definió para una función f de modo que para $y = f(x)$ se tiene

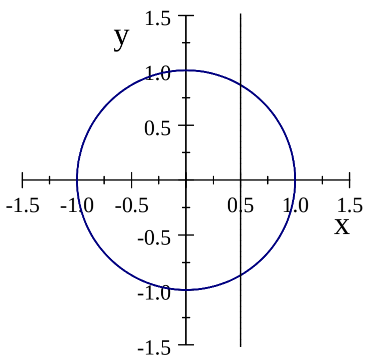
$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Sin embargo hay situaciones en las cuales se tiene una *ecuación* de la forma

$$R(x, y) = 0$$

la cual, globalmente, sólo define una *relación* entre las variables x e y y **no una función** del tipo $y = f(x)$.

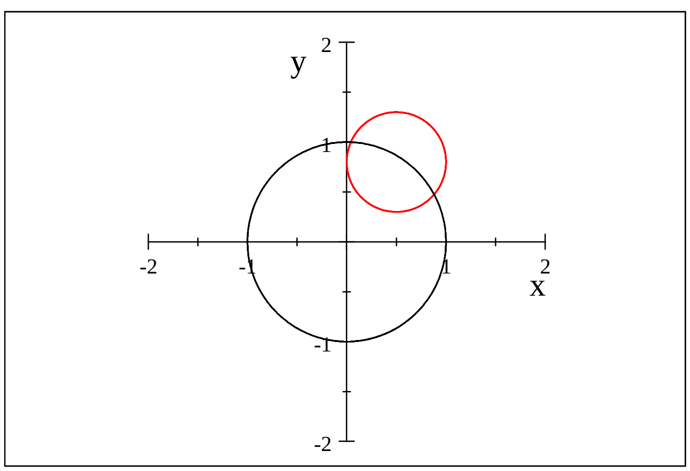
Considere por ejemplo la ecuación



$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

cuya gráfica es la circunferencia unitaria. Ella define sólo una relación, lo que queda determinado por el hecho que existe una recta vertical cortando a la curva en más de un punto (dos, en este caso).

Al considerar un punto sobre esta curva, como por ejemplo $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, y un pequeño círculo con centro en este punto, el arco de circunferencia unitaria en el interior de este círculo corresponde al gráfico de una función de la forma $y = f(x)$



Por esto se dice que la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ define implícitamente a la variable y como función de la variable x, alrededor del punto $\left(\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Debe considerarse que esta es una propiedad de *carácter local* en este punto.

Ahora, si además *suponemos* que la función f es derivable, podemos escribir

$$x^2 + [f(x)]^2 = 1$$

y derivar con respecto a x para obtener

$$2x + 2f(x) \cdot f'(x) = 0$$

y despejar

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)}$$

Esta fórmula permite encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, cuya pendiente es

$$\begin{aligned} m &= f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1/2}{\sqrt{3}/2} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Así la ecuación está dada por

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Este método para calcular la derivada de la función (desconocida) $y = f(x)$ se llama **derivación implícita**. Se efectúa en forma más directa partiendo de la ecuación

$$x^2 + y^2 = 1$$

y derivando implícitamente con respecto a x:

$$\begin{aligned} 2x + 2y\frac{dy}{dx} &= 0 \\ \text{y así } \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \end{aligned}$$

(note que y debe ser distinto de cero).

Una observación interesante en este sencillo ejemplo es considerar que en la ecuación de la circunferencia podemos despejar

$$y^2 = 1 - x^2$$
$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad \vee \quad y = -\sqrt{1 - x^2}$$

y como el punto considerado está en la semicircunferencia superior la función f es $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, lo que nos permite derivar (explícitamente)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-1/2}(-2x) \\ &= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

y obtener el mismo resultado encontrado en forma implícita. Esto ocurre porque la ecuación es lo suficientemente simple para permitir despejar y como función de x.

Casos más interesantes de uso del proceso de derivación implícita se muestran en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 30 *Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva*

$$3\left(x^2+y^2\right)^2 = 100xy$$

en el punto $(3,1)$.

Note primero que el punto indicado efectivamente satisface la ecuación.

Se deriva implícitamente la ecuación, con respecto a x *para obtener*

$$\begin{aligned} 6\left(x^2+y^2\right)\left(2x+2y\frac{dy}{dx}\right) &= 100y+100x\frac{dy}{dx} \\ 12x\left(x^2+y^2\right)+12y\left(x^2+y^2\right)\frac{dy}{dx} &= 100y+100x\frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

y se despeja $\frac{dy}{dx}$

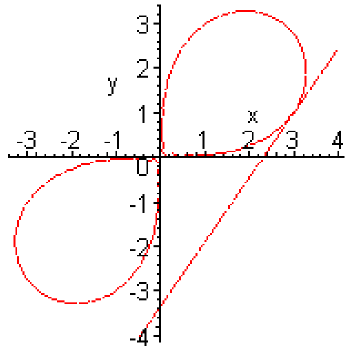
$$\frac{dy}{dx} = \frac{100y-12x\left(x^2+y^2\right)}{12y\left(x^2+y^2\right)-100x}$$

Ahora calculamos la derivada en $(3,1)$ *para obtener la pendiente*

$$m = \frac{100-36(10)}{12(10)-300} = \frac{13}{9}$$

y la ecuación de la recta tangente en $(3,1)$:

$$y-1 = \frac{13}{9}(x-3)$$



Lemniscata

Ejercicio 1 *Encontrar la recta tangente a la curva* $x^3 + y^3 - 6xy = 0$ *en el punto* $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$ *. Esta curva se llama Folio de Descartes.*

Usando derivación implícita es posible obtener la fórmula para la derivada de las funciones trigonométricas inversas, siempre que aceptemos que estas funciones son derivables. Por ejemplo, para la función arco tangente:

$$\begin{array}{rcl} \arctan & : & \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x & \mapsto & \arctan x \end{array}$$

es la inversa de la restricción

$$\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$$

luego se tiene

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[: y = \arctan x \ \Leftrightarrow \ x = \tan y$$

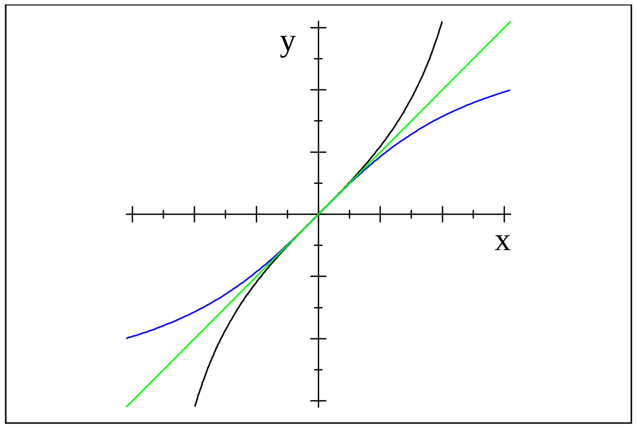
y derivando implícitamente, la ecuación de la derecha, con respecto a x, queda

$$\begin{aligned} 1 &= \sec^2 y \cdot \frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{\tan^2 y + 1} \\ &= \frac{1}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

Así, la derivada de arcotangente es

$$\frac{d}{dx}[\arctan x] = \frac{1}{x^2 + 1}\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Los siguientes gráficos corresponden a tangente (negro) y arcotangente (azul). La recta $y = x$ (verde) es sólo para recordar la relación de simetría de los dos gráficos.



Recuerde también el comportamiento asintótico de estas curvas

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x &= +\infty \quad \left(x = \frac{\pi}{2} \text{ es asíntota vertical}\right) \\ \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x &= -\infty \quad \left(x = -\frac{\pi}{2} \text{ es asíntota vertical}\right) \end{aligned}$$

lo que se traduce para su inversa a

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \arctan x &= \frac{\pi}{2} \quad \left(y = \frac{\pi}{2} \text{ es asíntota horizontal}\right) \\ \lim_{x\to-\infty} \arctan x &= -\frac{\pi}{2} \quad \left(y = -\frac{\pi}{2} \text{ es asíntota horizontal}\right) \end{aligned}$$

Ejercicio 2 *Queda de ejercicio deducir de la manera anterior las derivadas de las otras funciones trigométricas inversas, principalmente arcoseno y arcocoseno.*

2.5. Derivada de una inversa

En el proceso anterior obtuvimos la derivada de la función inversa de *tangente* aplicando derivación implícita, para lo cual fue necesario **suponer** que ella (arcotangente) tenía derivada. En un contexto más general es posible estudiar cuándo una función inversa f^{-1} de f , posee derivada y cómo la derivada de f^{-1} se relaciona con la derivada de f.

Sea $f : I \to J$ una biyección entre los *intervalos* abiertos I y J. Se puede probar que: f es continua $\Longrightarrow f^{-1}$ es continua.

Desde el punto de vista geométrico es fácil aceptar que si la curva $y = f(x)$ es continua (no se corta), entonces la curva $y = f^{-1}(x)$ también es continua. Esto porque ambas son reflexiones en el plano xy con respecto a la recta $y = x$.

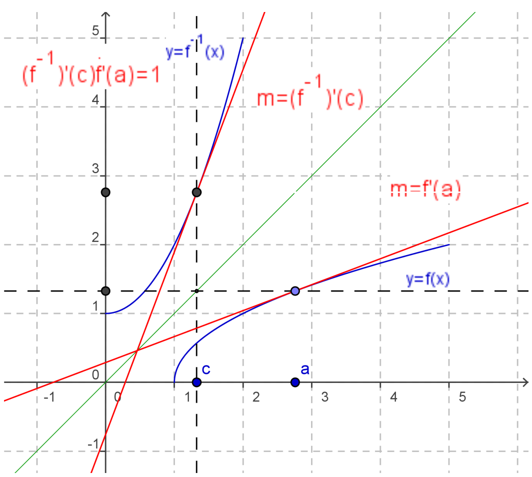
Recuerde que

$$\forall x \in I, \forall y \in J : y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Si ahora consideramos $a \in I$ y $c = f(a)$, con $f'(a) \neq 0$, entonces calculamos, para $x = f^{-1}(y)$

$$\begin{aligned}
\left(f^{-1}\right)'(c) &= \lim_{y \to c} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(c)}{y - c} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(a))}{f(x) - f(a)} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}} = \frac{1}{f'(a)}
\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se aplica teorema de sustitución para límites, haciendo $x = f^{-1}(y)$, con $\lim\limits_{y \to c} f^{-1}(y) = a$.



Vemos así que, en puntos $y = f(x) \in J$ con $f'(x) \neq 0$

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Lo importante aquí es que se consigue mostrar que, cuando $f'(x) \neq 0$, la inversa f^{-1} **tiene** derivada en el punto $y = f(x)$ y que ella se calcula de acuerdo a la fórmula encontrada.

Por otro lado si se supone que f^{-1} tiene derivada en $y = f(x)$, la fórmula se obtiene fácilmente de la regla de la cadena, dado que $f^{-1} \circ f = Id$

$$\begin{aligned}
f^{-1}(f(x)) = x &\Longrightarrow \left(f^{-1}\right)'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \\
&\Longrightarrow \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}
\end{aligned}$$

2.5.1. Derivada de la función exponencial logaritmo

En el curso anterior ya se inició el estudio de dos importantes funciones de la matemática, la función exponencial base a, donde $a > 0$ y $a \neq 1$, y su inversa la función logaritmo base a.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+, x \mapsto a^x \\ \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}, x \mapsto \log_a x \end{array}$$

Note que aquí a es un valor fijo (constante).

Recuerde que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall x > 0 : y = a^x \Longleftrightarrow x = \log_a y$.

Por lo tanto, si una de ellas tiene derivada que no se anula, entonces la otra también tiene derivada, que puede ser obtenida con la fórmula vista anteriormente.

Aunque las derivadas de estas funciones se obtendrán con mayor propiedad en el siguiente curso de cálculo, daremos algunas ideas sobre estas derivadas.

Estudiemos primero la derivada de $f(x) = a^x$.

En el punto $x = 0 : f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \left[\dfrac{a^h - 1}{h} \right]$

En un punto $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} a^x \frac{a^h - 1}{h} \\ &= a^x \lim_{h \to 0} \left[\frac{a^h - 1}{h} \right] \\ &= a^x \cdot f'(0) \\ &= f'(0) \cdot f(x) \end{aligned}$$

O sea, la derivada f' de f es proporcional a ella misma.

Más adelante estableceremos que para $f(x) = e^x$, la función exponencial natural, se tiene

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

y luego $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = f(x)$. Es decir,

$$\forall x \in \mathbb{R} : \frac{d}{dx} [e^x] = e^x$$

Además también podemos derivar una compuesta de la forma $h(x) = e^{f(x)}$, donde f sea una función derivable. Mediante la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx} \left[e^{f(x)} \right] = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

Por ejemplo, para $a^x = e^{x(\ln a)}$

$$\frac{d}{dx} [a^x] = (\ln a) \cdot a^x$$

Ahora, para la inversa $f^{-1}(x) = \ln x$, de la función $f(x) = e^x$, en un punto $y = e^x$:

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

Luego,

$$\forall x > 0 : \frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}$$

De la misma forma para $\log_a$

$$\frac{d}{dx}[\log_a x] = \frac{1}{(\ln a) \cdot x}$$

Por último, para una función f derivable y positiva se tiene

$$\frac{d}{dx}[\ln(f(x))] = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

2.6. Variaciones relacionadas.

Entendiendo que la derivada $\frac{dy}{dx}$ de la función $y = f(x)$ representa una tasa de cambio o *variación* de la variable y con respecto a la variable x, podemos estudiar un tipo de problemas, principalmente del ámbito de la física, que analizan estas *variaciones*. A manera de ejemplo introductorio considere el siguiente problema.

Un globo de forma esférica se infla, mediante un compresor, de manera que su volumen y su radio están dados, respectivamente, por las funciones

$$\begin{array}{ccc} t & \mapsto & V(t) \\ t & \mapsto & r(t) \end{array}$$

donde la variable t representa el tiempo.

Las dos variables V y r dependen del tiempo.

Por otro lado, sabemos que el volumen de una esfera se calcula a partir de su radio mediante la fórmula

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

lo que indica que el volumen es función del radio. Esto permite escribir

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi r(t)^3$$

Si se deriva esta relación, con respecto a t, se obtiene

$$\frac{dV}{dt}(t) = 4\pi r(t)^2 \frac{dr}{dt}(t)$$

que es una *relación* entre las *variaciones* $\frac{dV}{dt}$ y $\frac{dr}{dt}$. Conocida una se puede calcular la otra.

Pregunta.- Si el globo se infla a razón de $4\frac{lts}{\text{mín}}$, ¿con qué rapidez crece su radio (se expande) cuando éste es de 10 cm.?

Si el globo se infla de modo que su volumen aumenta a razón de $4\frac{lts}{\text{mín}} = 4000\frac{cm^3}{\text{mín}}$ Podemos calcular la variación de su radio de la fórmula

$$\frac{dr}{dt}(t) = \frac{\frac{dV}{dt}(t)}{4\pi r(t)^2} = \frac{1000}{\pi r(t)^2}$$

Por tanto, en el instante t_0 para el cual $r(t_0) = 10\ cm$.

$$\frac{dr}{dt}(t_0) = \frac{10}{\pi} = 3{,}18\ \frac{cm}{\text{mín}}$$

Observación 31 *Otra manera de entender este procedimiento es: Si el volumen depende del radio y el radio depende del tiempo, entonces el volumen depende del tiempo y la regla de la cadena establece que*

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} \\ \frac{dV}{dt} &= 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \end{aligned}$$

Observación 32 *Todos los problemas denominados de variaciones relacionadas tienen en común el hecho que a partir de una relación entre dos funciones, derivando, se obtiene una relación entre sus variaciones (derivadas).*

Los siguientes ejemplos ilustran este estudio.

Ejemplo 33 *Una piedra se deja caer sobre un estanque en reposo y produce ondas circulares concéntricas. El radio r de la onda exterior crece a una tasa constante de 30 cm/seg. Cuando su radio es 120 cm. ¿A qué ritmo está creciendo el área total A de la zona perturbada?*

El área del círculo de radio exterior r está dada por

$$A(r) = \pi r^2$$

Ahora si el radio r y el área A del círculo están cambiando en el tiempo, ellos están determinados por funciones

$$\begin{aligned} t &\mapsto r(t) \\ t &\mapsto A(t) \end{aligned}$$

relacionadas por

$$A(t) = \pi r(t)^2 \quad ,$$

y luego sus derivadas (variaciones) están relacionadas por

$$\frac{dA}{dt}(t) = 2\pi r(t)\frac{dr}{dt}(t)$$

Además, como se sabe que $\frac{dr}{dt}(t) = 30,\ \forall t$ *; en el instante* t_0 *para el cual* $r(t_0) = 120$ *se tendrá*

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt}(t_0) &= 2\pi(120) \times 30 \\ &= 7200\pi \\ &= 22619.47\,\frac{cm^2}{seg}\end{aligned}$$

Ejemplo 34 *Un avión que vuela (horizontalmente) a 8 km. de altura pasa justo sobre una antena de radar. Cuando el avión está a 15 km. de la antena, el radar detecta que la distancia está cambiando a razón de 350 km/h. ¿Cuál es la velocidad del avión?*

Ejemplo 35 *Un estanque tiene la forma de cono (circular recto) invertido de* 2 *mts de altura y* 50 *cms de radio basal. Si se llena a razón de* 5 *lts/min, determinar con qué rapidez sube el nivel de agua en el estanque cuando éste es* 70 *cms.*

2.7. La Diferencial

Ahora volvemos al estudio de la derivada, explicando en mayor profundidad el concepto de recta tangente.

Considere una función f derivable en el punto a. Se tiene :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= f'(a) \\ \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right] &= 0 \\ \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a}\right] &= 0\end{aligned}$$

y si hacemos $g(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$, notando que la gráfica de g es la recta que pasa por $(a, f(a))$ y tiene pendiente $f'(a)$ (anteriormente definida como recta tangente al gráfico de f en el punto $(a, f(a))$), entonces la condición anterior se escribe

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{x-a} = 0$$

De acuerdo a la definición de límite tenemos: dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \forall x \quad : \quad 0 < |x-a| < \delta \;\Rightarrow\; \frac{|f(x) - g(x)|}{|x-a|} < \varepsilon \\ \Rightarrow \quad |f(x) - g(x)| < \varepsilon \cdot |x-a| \end{aligned}$$

Como esta condición es válida para todo $\varepsilon > 0$ (piense por ejemplo en $\varepsilon = 10^{-100}$), vemos que suficientemente cerca de a, la diferencia $|f(x) - g(x)|$ es muchísimo más pequeña que $|x-a|$.

Esto justifica la *aproximación*

$$f(x) \approx g(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

válida "cerca del punto a".

Esta aproximación también puede escribirse

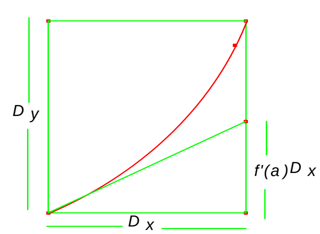
$$f(x) - f(a) \approx f'(a)(x-a)$$

e interpretarse como

$$\Delta y \approx f'(a) \cdot \Delta x$$

donde $\Delta x = x - a$ y $\Delta y = f(x) - f(a)$ son las variaciones en x e y $(y = f(x))$ respectivamente. Recuerde también que

$$f'(a) \equiv \frac{dy}{dx}|_{x=a} = \lim_{x \to a} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



Teniendo en cuenta las aproximaciones anteriores se define la aplicación df_a : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$df_a(h) = f'(a) \cdot h$$

Su gráfica es la recta que pasa por el origen y tiene pendiente $f'(a)$ (es paralela a la recta tangente a $y = f(x)$ en $(a, f(a))$). Esta aplicación se denomima la *diferencial de* f en al punto a y verifica

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) \quad &\approx \quad df_a(x-a) \\ \text{o bien,} \quad f(x) \quad &\approx \quad f(a) + df_a(x-a) \end{aligned}$$

Ejercicio 3 *Se desea pintar el exterior de una cúpula semiesférica de radio* $2\ mts.$, *con una capa de pintura de* $0,5\ cm.$ *de espesor. Use la diferencial para* aproximar *la cantidad de pintura que se necesita.*

La fórmula para calcular el volumen de una semiesfera de radio r *es*

$$V\left(r\right)=\frac{2}{3}\pi r^{3}$$

Luego la cantidad exacta de pintura estará dada por

$$V\left(200,5\right)-V\left(200\right)$$

y se aproxima por el valor

$$V'\left(200\right)\left(0,5\right)$$

donde $V'\left(r\right)=2\pi r^{2}$. *Así entonces, la cantidad aproximada es*

$$\begin{aligned}2\pi\left(200\right)^{2}\left(0,5\right) &= 40000\pi \\ &= 125663{,}7\ cm^{3}\end{aligned}$$

Esta aproximación la comparamos con el valor exacto

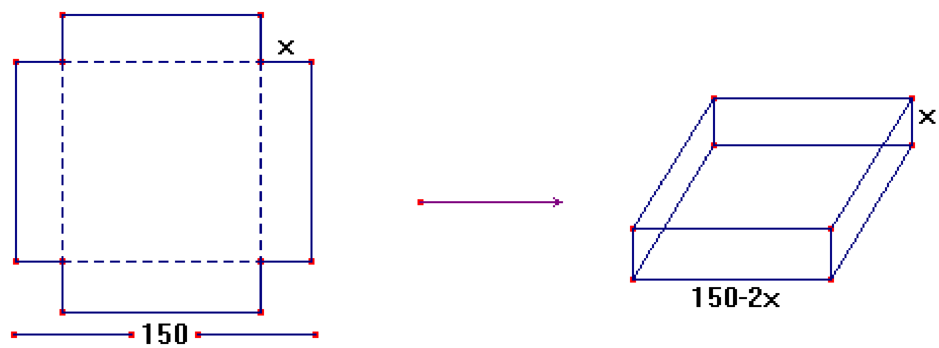
$$\begin{aligned}\frac{2}{3}\pi\left(200{,}5\right)^{3}-\frac{2}{3}\pi\left(200\right)^{3} &= 40100\pi \\ &= 125978{,}1\ cm^{3}\end{aligned}$$

3. Máximos y mínimos

3.1. Introducción

Problema.- Con un trozo cuadrado de cartón, de 1,5 mts. de lado, se construye una caja rectangular como se indica: en cada esquina se corta un cuadrado del mismo tamaño y se pliegan las aletas sobrantes en cada lado.

La siguiente figura muestran el proceso cuando en cada esquina se cortan cuadrados de lado x cm.:



Es claro que el volumen (tamaño) de la caja depende del valor de x. Se presenta entonces el problema de encontrar qué valor de x determina el **mayor** volumen.

Para esto se calcula el volumen de la caja anterior y se encuentra la función

$$V(x) = x(150 - 2x)^2$$

Los valores admisibles para x serán naturalmente: $0 < x < 75$. Sin embargo también podemos considerar $x = 0$ y $x = 75$ correspondiendo a casos extremos en que el volumen de la caja es nulo. De este modo, la función y su dominio son

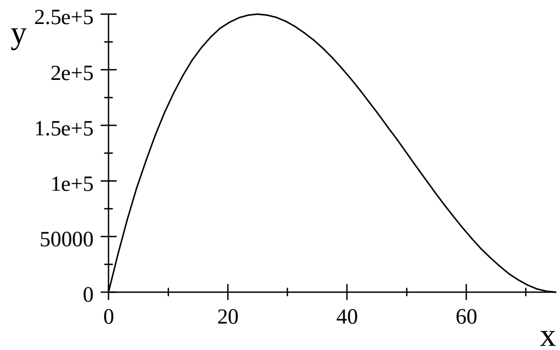
$$V(x) = 4x^3 - 600x^2 + 22500x\ ,\ 0 \leq x \leq 75$$

Nuestro problema ahora es, encontrar $x_0 \in [0, 75]$ tal que

$$\forall x \in [0, 75] : V(x_0) \geq V(x)$$

Este punto x_0, se denominará **máximo absoluto** de V en el intervalo $[0, 75]$.

Al hacer un análisis en la gráfica de la función



puede apreciarse que ella tiene un punto de máximo absoluto entre 20 y 30. Además en este punto la derivada es nula porque la recta tangente es horizontal.

Note que estas conclusiones se han obtenido *mirando* la gráfica de la función.

Ejercicio 4 *Resolver la ecuación* $V'(x) = 0$ *y encontrar las dimensiones de la caja de mayor volumen que se puede construir como se indicó en el problema. Además determine el volumen de esta caja.*

El principal soporte teórico para resolver el problema anterior es el teorema denominado **de los valores extremos:**

Teorema 36 *Si* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *es continua, entonces existen* $x_1, x_2 \in [a,b]$ *tales que*

$$\forall x \in [a,b] : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$

x_1 y x_2 se llaman, respectivamente, puntos de mínimo y de máximo absolutos para f , en el intervalo$[a,b]$ y los valores asumidos por f en estos puntos, $f(x_1)$ y $f(x_2)$ se llaman valores extremos. El teorema garantiza su existencia, pero no indica cómo encontrarlos.

Ejercicio 5 *En relación a las hipótesis (necesarias) en el teorema, queda de ejercicio discutir la existencia de los valores extremos de* f *para los siguientes casos:*

- $f(x) = 2 - x,$ *con* $0 < x \leq 1$
  función continua sobre un intervalo acotado, pero no cerrado.

- $f(x) = \begin{cases} 2x & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 2 - x & si \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$
  función no continua sobre un intervalo cerrado y acotado.

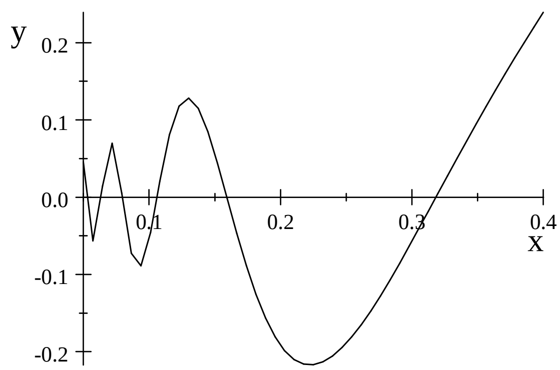
3.2. Máximos y mínimos relativos

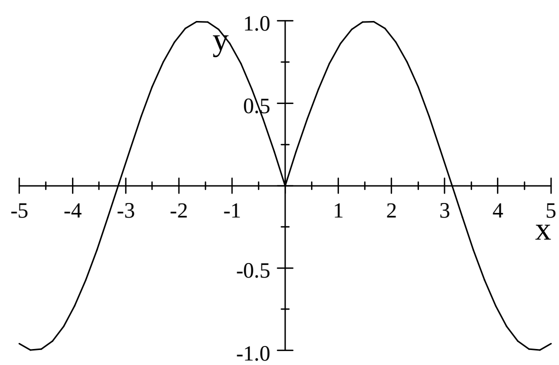
Comenzaremos estudiando el problema de los puntos extremos (máximos y mínimos) en un sentido **local**.

Definición 37 *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo* ***abierto*** *I.*
1) Se dice que x_1 es un punto de mínimo relativo para f cuando existe un $\delta > 0$ tal que $\forall x \in (x_1 - \delta, x_1 + \delta) : f(x_1) \leq f(x)$.
2) Se dice que x_2 es un punto de máximo relativo para f cuando existe un $\delta > 0$ tal que $\forall x \in (x_2 - \delta, x_2 + \delta) : f(x) \leq f(x_2)$.

Como el $\delta > 0$ puede ser muy pequeño, las imágenes $f(x)$ se comparan con $f(x_j)$ sólo para x en una (pequeña) vecindad del punto x_j. Esto hace que el concepto de extremos relativos sea de carácter local (no global).

Los siguientes gráficos muestran algunos puntos de extremos relativos que no son extremos absolutos





Enseguida veremos qué caracteristicas tiene un punto extremo relativo cuando la función f es derivable en este punto.

Teorema 38 *Si f es derivable en x_0 y $f'(x_0) \neq 0$, entonces x_0 no es un punto extremo relativo.*

Dem. *Supongamos $f'(x_0) = a > 0$. Como*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$$

existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x : x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

y luego

$$\begin{aligned} x &\in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f(x) < f(x_0) \\ x &\in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) > f(x_0) \end{aligned}$$

lo que muestra que x_0 no es un extremo relativo. ■

El contrarecíproco de este teorema (también verdadero) es:

Corolario 39 *x_0 extremo relativo de $f \Rightarrow f'(x_0) = 0 \vee f'(x_0)$ no existe.*

En virtud de este resultado se define el concepto de **punto crítico**

Definición 40 *Para f definida en el intervalo abierto I, $x_0 \in I$ es punto crítico de f cuando*

$$f'(x_0) \text{ no existe, o bien, } f'(x_0) = 0$$

Con esto el corolario queda

$$x_0 \text{ extremo relativo de } f \Rightarrow x_0 \text{ punto crítico de } f$$

y así el conjunto de extremos relativos de una función es subconjunto del conjunto de puntos críticos.

Es posible que en un extremo relativo de f la función no tenga derivada. Por ejemplo, para $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$ es un mínimo relativo y $f'(0)$ no existe (recordar la gráfica de $y = |x|$).

Debe observarse que, en el caso de estudiar una función derivable, la determinación del conjunto de puntos críticos se obtiene resolviendo la ecuación

$$f'(x) = 0$$

También es importante notar que un punto crítico puede ser máximo relativo, mínimo relativo ,o incluso puede no ser un extremo relativo.

Queda de ejercicio encontrar todos los puntos críticos de la funciones indicadas y analizar su naturaleza:
$f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2$, $h(x) = x^3$.

El último ejemplo muestra que, en general

$$x_0 \text{ punto crítico de } f \not\Rightarrow x_0 \text{ extremo relativo de } f$$

La discusión anterior nos indica que una vez encontrado el conjunto de puntos críticos debe aplicarse algún criterio para decidir cuáles de ellos son máximos o mínimos relativos y cuáles no son extremos relativos.

Este criterio aparece como consecuencia de uno de los resultados más importantes del cálculo diferencial, conocido como Teorema del valor medio.

3.3. Teorema del valor medio

Una primera versión de este teorema es el llamado teorema de Rolle que se enuncia a continuación.

Teorema 41 *(de Rolle).- Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si f es continua en $[a,b]$, derivable en todo punto del intervalo $]a,b[$ y además $f(a) = f(b)$, entonces $\exists c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$.*

Dem. *Si f es constante, no hay nada que demostrar.(¿por qué?) En caso contrario, aplicamos teorema de los valores extremos a f (continua) sobre el intervalo $[a,b]$ y escojemos $c \in]a,b[$ un punto extremo absoluto y relativo. Como f es derivable en c, se debe tener $f'(c) = 0$.* ■

Obs.- Dibuje a su antojo una gráfica de $C : y = f(x)$, curva continua y suave con $f(a) = f(b)$, y convénzase que debe haber al menos un punto donde la recta tangente es horizontal.

Teorema 42 *(del valor medio).- Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si f es continua en $[a,b]$ y derivable en todo punto del intervalo $]a,b[$, entonces $\exists c \in]a,b[$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

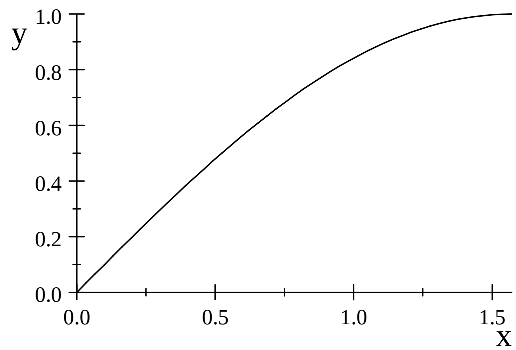
Dem. *Se aplica teorema de Rolle a la función*

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

■

Observación.- El cuociente $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ corresponde a la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Luego, el teorema indica que en al menos un punto de la gráfica de $y = f(x)$ la recta tangente es paralela a la recta anterior.

A modo de ejemplo considere la gráfica de $y = \sin x$, en el intervalo $[0, \pi/2]$. Encuentre el punto c dado por el teorema del valor medio.



Otra interpretación interesante, desde el punto de vista físico, se da cuando la función $x : [a,b] \to \mathbb{R}$, $t \longmapsto x(t)$ corresponde a la función posición para el movimiento de un objeto sobre una línea recta. En este caso el cuociente $\dfrac{x(b)-x(a)}{b-a}$ es la velocidad media en el intervalo considerado y el teorema del valor medio indica que, en algún instante t_0 la velocidad instantánea $x'(t_0)$ coincide con la velocidad media.

3.4. Aplicaciones del Teorema del valor medio

Los siguientes resultados son todos consecuencias del teorema del valor medio.

3.4.1. Antiderivadas

Teorema 43 *Sea f definida en el intervalo I.*
$\forall x \in I : f'(x) = 0 \Rightarrow \forall x \in I : f(x) = C$ *(o sea, f es constante)*

Dem. *Sean $a, b \in I$, con $a < b$, cualquier par de puntos. Se aplica TVM a f sobre el intervalo $[a,b]$ y se concluye que $\exists c \in I$ tal que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) = 0$$

y luego $f(a) = f(b)$, lo que muestra que f es constante sobre I. ■

Corolario 44 *Sean f, g definidas en el intervalo I.*
$\forall x \in I : f'(x) = g'(x) \Rightarrow \forall x \in I : f(x) = g(x) + C$ *(o sea, f difiere de g en una constante)*

Dem. *Se aplica teorema anterior a la función $h(x) = f(x) - g(x)$.* ■

Definición 45 *Dada una función f sobre un intervalo I, se dice que F es una* ***antiderivada*** *de f cuando $\forall x \in I : F'(x) = f(x)$.*

Por ejemplo, una antiderivada de la función $f(x) = x^2$ es la función
$F(x) = \frac{1}{3}x^3$, $x \in \mathbb{R}$.

El teorema anterior dice que *todas* la antiderivadas de la función nula (sobre un intervalo) son las funciones constantes.

El corolario establece que conocida **una antiderivada** F de la función f, sobre un intervalo I, entonces *todas* las otras antiderivadas de f son de la forma $F(x)+C$, con $C \in \mathbb{R}$. Así entonces, todas las antiderivadas de $f(x) = x^2$ son las funciones $\frac{1}{3}x^3 + C$, con $C \in \mathbb{R}$.

Una aplicación física de este resultado se tiene en el estudio del *movimiento rectilíneo uniformamente acelerado*: cuando un objeto se mueve sobre una línea recta con aceleración constante a, entonces para la función posición $t \mapsto x(t)$ se tiene:

$$x''(t) = a \Rightarrow v(t) = x'(t) = at + C$$

donde la constante C se determina evaluando en el instante inicial $t = 0$,
con $C = v(0) = v_0$: velocidad inicial. Así,

$$v(t) = x'(t) = v_0 + at$$

y luego

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 + D$$

con $D = x(0) = x_0$: posición inicial. Por lo tanto, la posición sobre la línea recta está dada por

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

3.4.2. Monotonía

Teorema 46 *Sea f definida en el intervalo abierto I.*
a) $\forall x \in I : f'(x) > 0 \Rightarrow f$ *es estrictamente creciente en I.*
b) $\forall x \in I : f'(x) < 0 \Rightarrow f$ *es estrictamente decreciente en I.*

Dem. *Basta discutir la demostración en el caso a).*
Supongamos entonces que $f'(x) > 0$ en todo el intervalo I y elijamos dos puntos $a, b \in I$ con $a < b$.

Al aplicar el TVM a f sobre $[a,b]$ (¿se cumplen condiciones de hipótesis?) se tiene que existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) > 0$$

Luego $f(b)-f(a) > 0$ y así $f(a) < f(b)$; lo que muestra que f es estrictamente creciente ■

Queda de ejercicio analizar qué conclusión se obtiene si la hipótesis en a) se reemplaza por: $\forall x \in I : f'(x) \geq 0$.

En forma resumida el teorema dice que el signo de f', en un intervalo, determina si la f crece o decrece (una propiedad de la función f).

Ejemplo 47 *Sea $f(x) = 3x^4 - 4x^3,\ x \in \mathbb{R}$. Determine:*
a) los puntos críticos de f.
b) intervalos donde f crece y donde decrece. Deduzca de lo anterior la naturaleza de los puntos críticos.

$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$. *Luego*

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$

y hay dos puntos críticos. Además,

		0		1	
x^2	$++$	0	$++$	$+$	$++$
$x-1$	$--$	$-$	$--$	0	$++$
$f'(x)$	$--$	0	$--$	0	$++$
	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Luego, f decrece (estrictamente) en el intervalo $(-\infty,0)$ y en el intervalo $(0,1)$. Siendo además f continua en toda la recta, se concluye que f es estrictamente decreciente en el intervalo $]-\infty,1]$. También se obtiene que f es estrictamente creciente en el intervalo $[1,+\infty[$.

Se puede deducir entonces que $x=1$ es un mínimo relativo y $x=0$ no es extremo relativo.

Con la información obtenida en el ejemplo anterior intente un esbozo para la gráfica de $y = 3x^4 - 4x^3$.

Un razonamiento importante en el ejemplo anterior fue el análisis sobre la naturaleza de los puntos críticos de la función a partir de la tabla de signos de su derivada. Más precisamente, a la izquierda de 1 la derivada es negativa (entre 0 y 1) y a la derecha de 1 la derivada es positiva.

Diremos que f' *cambia de* $-$ a $+$ *en* x_0 cuando existe $\delta > 0$ tal que:
$\forall x : x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f'(x) < 0$ y $\forall x : x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f'(x) > 0$.

¿Cuándo diremos que f' cambia de + a − en x_0?

Con esto podemos enunciar, como consecuencia del teorema anterior, el llamado **criterio de la primera derivada para puntos críticos:**

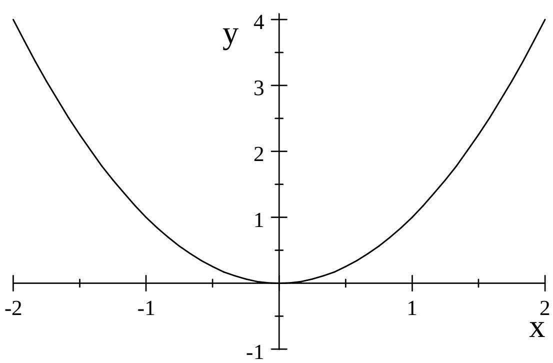
Corolario 48 *Sea f una función **continua** en el punto x_0.*
a) f' cambia de − a + en $x_0 \Rightarrow x_0$ es un mínimo relativo de f.
b) f' cambia de + a − en $x_0 \Rightarrow x_0$ es un máximo relativo de f.

Lo indicado por el corolario es intuitivamente claro, cuando f es continua en x_0 : que f sea decreciente a la izquierda de x_0 y creciente a la derecha (caso a) determina obviamente que x_0 es un mínimo relativo. Sin embargo, es importante que construya un ejemplo de una función no continua en un punto x_0, donde no se cumpla la implicación a) del corolario.

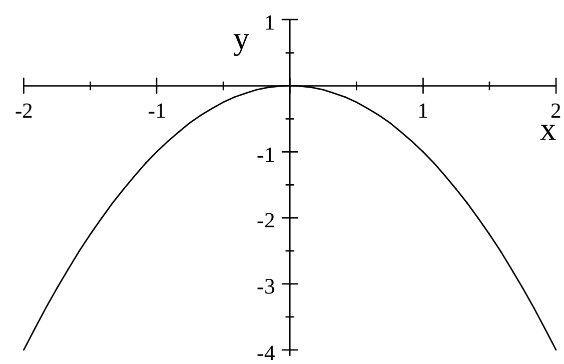
3.4.3. Concavidad

Otro aspecto importante a considerar al graficar una función es la *forma como se curva* la gráfica y se estudiará mediante el concepto denominado **concavidad**.

Es una propiedad que se define en un punto de la gráfica y tiene que ver con la idea simple de si la curva se dobla hacia arriba o hacia abajo. Las siguientes dos curvas ilustran los casos de: concavidad hacia arriba y concavidad hacia abajo.



cóncavo hacia arriba



cóncavo hacia abajo

En el caso de una función derivable, esta propiedad está determinada por la posición relativa de la gráfica con respecto a su recta tangente. Es claro que, en el caso de la concavidad hacia arriba la recta tangente en el punto queda situada por debajo de la gráfica (a lo menos alrededor del punto de tangencia). Se tiene entonces:

Definición 49 *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en x_0. Se dice que el gráfico de f es cóncavo hacia arriba en el punto $(x_0, f(x_0))$ si para todo x próximo de x_0 :*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Además se dice que el gráfico de f es cóncavo hacia arriba en el intervalo I cuando éste es cóncavo hacia arriba en todo punto correspondiente a este intervalo.

La concavidad hacia abajo se define cambiando $\geq$ por $\leq$ en la desigualdad anterior.

El criterio para determinar concavidad de un gráfico en un intervalo está dado en el siguiente

Teorema 50 *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ e I un intervalo, $I \subset A$.*
a) $\forall x \in I : f''(x) \geq 0 \Rightarrow$ graf(f) es cóncavo hacia arriba en I.
b) $\forall x \in I : f''(x) \leq 0 \Rightarrow$ graf(f) es cóncavo hacia abajo en I.
Dem. *Comentaremos sólo la demostración de la parte a): Como $f'' \geq 0$, se sigue que f' es una función creciente.*

Por otro lado, según el TVM, para x_0 fijo: dado x existe t_x entre x_0 y x tal que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(t_x)$$

luego para $x > x_0$ se tiene $t_x > x_0$ y

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= f'(t_x) \geq f'(x_0) \qquad \textit{implica} \\ f(x) &\geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \end{aligned}$$

Queda de ejercicio mostrar que la misma desigualdad se obtiene para $x < x_0$.

Por lo tanto, el gráfico de f es cóncavo hacia arriba en todo punto $(x, f(x))$ para $x \in I$. ■

Ejemplo 51 *Complete el ejemplo anterior determinando intervalos de concavidad para la gráfica de la función $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ y haciendo un esbozo de la curva*

De la segunda derivada de f

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^3 - 12x^2 \\ f''(x) &= 36x^2 - 24x = 12x(3x - 2) \end{aligned}$$

tenemos la tabla de signos

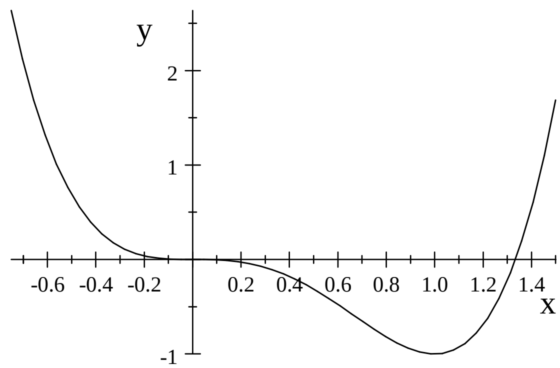
		0		2/3	
x	$--$	0	$++$	$+$	$++$
$3x-2$	$--$	$-$	$--$	0	$++$
$f''(x)$	$++$	0	$--$	0	$++$
	$\cup$		$\cap$		$\cup$

con la concavidad indicada.

Luego, considerando la información obtenida anteriormente sobre puntos críticos, extremos relativos e intervalos de crecimiento y la pequeña tabla de valores

x	0	$2/3$	1
$f(x)$	0	$-\frac{16}{27}$	-1

tenemos la gráfica



Observación.- Con respecto a la gráfica anterior, un hecho importante ocurre en los puntos $(0,0)$ y $\left(\frac{2}{3}, -\frac{16}{27}\right)$, donde cambia la concavidad. Esto es consecuencia del cambio de signo de f'' en los puntos $x = 0$ y $x = \frac{2}{3}$, como se aprecia en la tabla de signos de f''.

En general, un punto de la gráfica de $y = f(x)$, donde f sea continua y *cambie la concavidad* de la curva, se denomina un **punto de inflexión**.

A veces se confunde un punto de inflexión con un punto donde se anula la segunda derivada. Un ejemplo para aclarar esta situación se tiene con $f(x) = x^4$, donde $f''(0) = 0$ y sin embargo $x = 0$ no es un punto de inflexión.

3.4.4. Criterio de la segunda derivada

Otra aplicación del TVM es el siguiente criterio, para analizar la naturaleza de un punto crítico.

Teorema 52 *Sea x_0 con $f'(x_0) = 0$.*
a) $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ es un punto de máximo relativo de f.
b) $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ es un punto de mínimo relativo de f.

Dem. *Se muestra sólo a). La hipótesis (considerando que f'' es la derivada de f') indica que*

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} < 0 \ ,$$

lo que permite concluir que en una (pequeña) vecindad $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ de x_0 :

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} < 0$$

luego,

$$\begin{aligned} \forall x &: x \in \left]x_0 - \delta, x_0\right[\Rightarrow f'(x) > 0 \\ \forall x &: x \in \left]x_0, x_0 + \delta\right[\Rightarrow f'(x) < 0 \end{aligned}$$

Esto muestra que f' cambia de signo, de $+$ a $-$, en x_0 y así, x_0 es punto de máximo relativo de f. ■

Observación.- En el caso que $f''(x_0) = 0$ (y $f'(x_0) = 0$), el criterio no entrega información. Para ver esto basta considerar las funciones: $f(x) = x^4$, $g(x) = -x^4$ y $h(x) = x^3$. Para cada una de ellas, el punto $x_0 = 0$ es crítico con segunda derivada nula y, en cada caso, la naturaleza es distinta.

Ejercicio 6 *Dibuje la gráfica de una función f que sea continua sobre $[0, 3]$ y tenga las propiedades dadas:*

1. *Máximo absoluto en 0, mínimo absoluto en 3, mínimo local en 1 y máximo local en 2*
2. *Máximo absoluto en 1 y mínimo absoluto en 2.*
3. *2 es un punto crítico, pero no tiene extremos relativos.*
4. *Mínimo absoluto en 0, máximo absoluto en 2, máximos relativos en 1 y 2, mínimo relativo en $1{,}5$.*

Ejercicio 7 *Trace la gráfica de una función que tenga las siguientes características:*

1. *Un máximo local en 2 y sea continua pero no derivable en 2.*
2. *Un máximo local en 2 y no sea continua en 2.*
3. *Dominio el intervalo $[-1, 2]$, que tenga un máximo absoluto, pero no mínimo absoluto.*

Ejercicio 8 *Aplique el teorema del valor intermedio para funciones continuas y el teorema de Rolle para demostrar que la ecuación*

$$x^3 + x - 1 = 0$$

tiene una y solo una raíz real.

Ejercicio 9 *Demuestre que la ecuación $x^4 + 4x + c = 0$ tiene a lo más dos raíces reales.*

Ejercicio 10 *Sea* $f(x) = |x-1|$. *Demuestre que no hay un valor de* c *tal que* $f(3) - f(0) = f'(c)(3-0)$.*¿Por qué esto no contradice el teorema del valor medio?*

Ejercicio 11 *Use el teorema del valor medio para demostrar que*

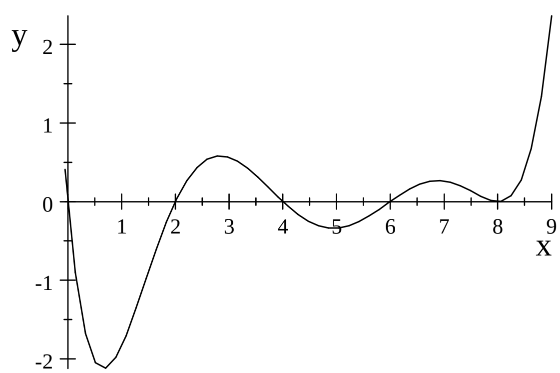
$$|\sin a - \sin b| \leq |a - b| \ , \ \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 12 *Para las siguientes funciones, determine los intervalos donde* f *crece y donde decrece, sus estremos relativos, intervalos de concavidad del gráfico y puntos de inflexión. Con esta información bosqueje la gráfica de* f.

1.- $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$	*2.-* $f(x) = x^4 - 6x^2$
3.- $f(x) = 200 + 8x^3 + x^4$	*4.-* $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$
5.- $f(x) = x - 3x^{1/3}$	*6.-* $f(x) = x + \cos x \ , \ -2\pi \leq x \leq 2\pi$

Ejercicio 13 *La gráfica siguiente corresponde a la derivada* f' *de un función* f, *en el intervalo* $[0, 9]$ *Determine:*

- *Intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función* f.
- *¿Qué valores de* x *corresponden a extremos relativos para* f*?*
- *Intervalos de concavidad de* f.
- *Las abscisas de los puntos de inflexión de* f.
- *Haga un esbozo de una gráfica para* f.



3.5. Problemas de máximos y mínimos absolutos.

Se considerarán dos situaciones posibles:

3.5.1. Funciones continuas definidas sobre un intervalo cerrado y acotado.-

Para una $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, el teorema de los valores extremos garantiza la existencia de puntos de máximo y de mínimo absolutos. ¿Cómo se encuentran estos puntos?

Si un punto de extremo absoluto pertenece al intervalo abierto $]a, b[$, entonces es claro que él también es un extremo relativo y por tanto es un punto crítico.

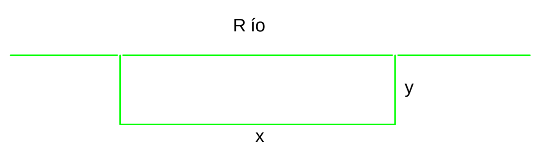
La otra posibilidad es que el punto extremo esté en la frontera del intervalo cerrado $[a, b]$, esto es, corresponda al punto a o al punto b.

Por lo tanto, el procedimiento para encontrar los extremos absolutos de f sobre el intervalo $[a, b]$ es:

(1) Se determinan todos los puntos críticos de f en $]a, b[$.

(2) Se evalúa f en cada uno de los puntos obtenidos en (1) y también se evalúa en a y en b. Se elije el mayor y el menor de todos los valores encontrados.

Ejemplo 53 *Un granjero dispone de 800 metros de cerca y desea cercar un terreno rectangular que limita con un río recto. Suponiendo que no necesita cercar a lo largo del* ***b****río, ¿cuáles son las dimensiones del terreno de mayor área?*



Si x e y son las dimensiones del terreno, entonces se debe tener

$$\begin{aligned} x + 2y &= 800 \\ x &= 800 - 2y \end{aligned}$$

y el área del terreno está dada por

$$\begin{aligned} A &= xy \\ A(y) &= 800y - 2y^2 \ , \ 0 \le y \le 400 \end{aligned}$$

Se debe encontrar el máximo absoluto de A en $[0, 400]$.
(1) Puntos críticos de A en $]0, 400[$:

$$\begin{aligned} A'(y) &= 800 - 4y = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 200 \end{aligned}$$

(2) Se evalúa A en los puntos críticos y en los bordes del intervalo

$$\begin{aligned} A(200) &= 160000 - 80000 = 80000 \\ A(0) &= A(400) = 0 \end{aligned}$$

Luego, $y = 200$ es el máximo absoluto de A en $[0, 400]$.

Las dimensiones del terreno son $x = 400$ mts., $y = 200$ mts.

3.5.2. Funciones continuas sobre un intervalo que no es cerrado y acotado.-

En este caso no se dispone del teorema de los valores extremos, por lo que la existencia de los extremos absolutos no está garantizada.

Sin embargo hay muchas situaciones en que la función tiene un **único** punto crítico x_0 en el intervalo I :

(a) Si $f'(x) > 0$ para toda $x < x_0$ y $f'(x) < 0$ para toda $x > x_0$, entonces x_0 es un máximo absoluto de f.

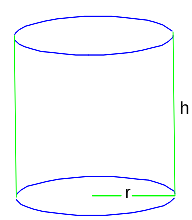
(b) Si $f'(x) < 0$ para toda $x < x_0$ y $f'(x) > 0$ para toda $x > x_0$, entonces x_0 es un mínimo absoluto de f.

Estos criterios se pueden reemplazar por:

(a) $\forall x \in I : f''(x) < 0 \Rightarrow x_0$ es un máximo absoluto de f.

(b) $\forall x \in I : f''(x) > 0 \Rightarrow x_0$ es un mínimo absoluto de f.

Ejemplo 54 *Una empresa va a envasar su producto en una lata cilíndrica de 400 cm^3. ¿Qué dimensiones de la lata minimizan la cantidad de material necesaria para su fabricación?*



La capacidad de la lata es $V = \pi r^2 h = 400$ y luego $h = \dfrac{400}{\pi r^2}$.

La cantidad de material que se requiere está dada por

$$\begin{aligned} A &= 2\pi r^2 + 2\pi r h \\ A(r) &= 2\pi r^2 + \frac{800}{r}, \ r > 0 \end{aligned}$$

Se debe encontrar el mínimo absoluto de A en $]0,\infty[$.
(1) Puntos críticos de A en $]0,\infty[$:

$$\begin{aligned} A'(r) &= 4\pi r - \frac{800}{r^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}} \approx 3{,}99 \end{aligned}$$

(2) $\forall r > 0 : A''(r) = 4\pi + \frac{1600}{r^3} > 0$. Luego, el gráfico de A es cóncavo hacia arriba en todo su dominio y el único punto crítico es un mínimo absoluto.

Las dimensiones del tarro que requiere la menor cantidad de material es

$$\begin{aligned} r &= \sqrt[3]{\frac{200}{\pi}} \approx 3{,}99 \ \mathit{cms.} \\ h &= \frac{400}{\pi\left(\frac{200}{\pi}\right)^{2/3}} \approx 7.986 \ \mathit{cms.} \end{aligned}$$

4. Regla de L'Hôpital.-

Una forma indeterminada del tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$ es un límite $\lim\limits_{x\to a^+}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$, donde $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = 0$.

Una forma indeterminada del tipo $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ es un límite $\lim\limits_{x\to a^+}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$, donde $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty$ (cualquiera de las cuatro combinaciones).

La regla de L'Hôpital entrega una poderosa herramienta para calcular límites de formas indeterminadas:

Teorema 55 *Sean $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ funciones derivables con $g'(x) \neq 0$ y $\lim\limits_{x\to a^+}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]$ una forma indeterminada $\left(\frac{0}{0}\right)$ o $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$*

$$\lim_{x\to a^+}\left[\frac{f'(x)}{g'(x)}\right] = L \Rightarrow \lim_{x\to a^+}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = L$$

donde L puede ser un número real (el límite existe) o bien L puede ser $+\infty$ o $-\infty$ (el límite diverge a ∞).

El teorema también vale para $F.I.$ con $\lim\limits_{x\to b^-}$, $\lim\limits_{x\to c}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}$.

Observación 56 *La demostración de este teorema se fundamenta en una generalización del teorema del valor medio que se enuncia a continuación:*

Teorema 57 *(del valor medio de Cauchy) Sean f y g derivables en $]a,b[$ y continuas en $[a,b]$. Si $g'(x) \neq 0$ en todo el intervalo, entonces existe un número $c \in]a,b[$ tal que*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Note que con $g(x) = x$ (o sea, g la función idéntidad) se obtiene el teorema del valor medio.

Dem. del teorema del valor medio de Cauchy.

Se aplica teorema de Rolle a la función

$$G(x) = [g(b) - g(a)][f(x) - f(a)] - [g(x) - g(a)][f(b) - f(a)]$$

en el intervalo $[a,b]$ (es claro que G es una función continua en $[a,b]$, derivable en $]a,b[$ con $G(a) = G(b) = 0$).

Queda de ejercicio concluir la demostración. ■

Dem. de la regla de L'Hopital.

Considere que f y g son derivables en $]a,b[$ con $g'(x) \neq 0$ y cuando $x \to a^+$: $f(x) \to 0,\ g(x) \to 0$ y $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to L$.

Haciendo $f(a) = g(a) = 0$, obtenemos f y g continuas en $[a, a+h]$. Por TVM generalizado, existe $c_h \in]a, a+h[$ tal que

$$\frac{f'(c_h)}{g'(c_h)} = \frac{f(a+h) - f(a)}{g(a+h) - g(a)} = \frac{f(a+h)}{g(a+h)}$$

Ahora tomando límite cuando $h \to 0$ se obtiene el resultado

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

■

Algunos ejemplos de utilización de la regla de L'Hopital:

1. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \frac{\cos x}{\pi - 2x}$

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

   Calcule $f'(0)$.

   $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x}\right] = \lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{\sin x - x}{x^2}\right] = \ldots$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\arctan x}{\arctan 2x}\right]$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}\right]$

5. Resolución de ecuaciones.

En reiteradas oportunidades nos hemos encontrado con la necesidad de resolver una ecuación de la forma

$$f(x)=0$$

donde f es alguna función de variable real.

Por ejemplo, para encontrar el conjunto de puntos críticos de una función derivable f se debe resolver la ecuación

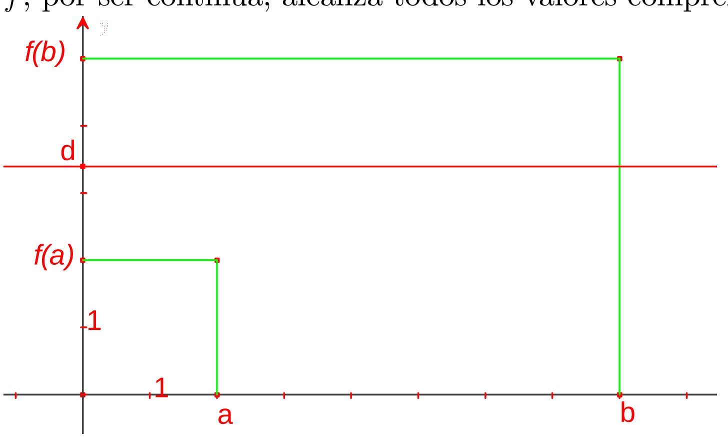
$$f'(x)=0$$

Con respecto a este problema se tiene un primer resultado conveniente enunciado en el siguiente teorema.

Teorema 58 *(del valor intermedio) Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua y d es un número real entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces $\exists\ c\in[a,b]$ tal que*

$$f(c)=d$$

La demostración de este teorema está por sobre el nivel de este curso. Sin embargo la interpretación geométrica de él es muy simple. El teorema establece que la función f, por ser continua, alcanza todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$.



Es claro que al trazar la gráfica de f, la cual es una curva continua que va de $(a,f(a))$ hasta $(b,f(b))$, ella debe cortar la recta horizontal $y=d$ (al menos en un punto) lo que determina un punto $c\in[a,b]$ tal que $f(c)=d$.

Como caso particular, para f continua en $[a,b]$, con $f(a)$ y $f(b)$ de signos diferentes, debe existir un punto $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$. Esto es, la ecuación

$$f(x) = 0$$

tiene (al menos) una solución en $[a,b]$.

Este resultado conduce a un simple método para determinar en forma *aproximada* una solución de la ecuación $f(x) = 0$, llamado **método de la bisección**; el cual pasamos a describir:

Siendo $f(a)$ y $f(b)$ de signos distintos, hacemos $x_1 = \frac{a+b}{2}$ y evaluamos $f(x_1)$.

En el caso que $f(x_1) = 0$, hemos encontrado de forma exacta la solución.

Si $f(x_1) \neq 0$, escojemos a_1 igual a a o a b de manera que $f(a_1)$ y $f(x_1)$ tengan signos diferentes. Ahora hacemos $x_2 = \frac{a_1+x_1}{2}$. y repetimos el procedimiento anterior.

Esencialmente, en cada etapa, se divide el intervalo en dos partes iguales (se bisecta) y se escoje el subintervalo que contiene a la solución de la ecuación.

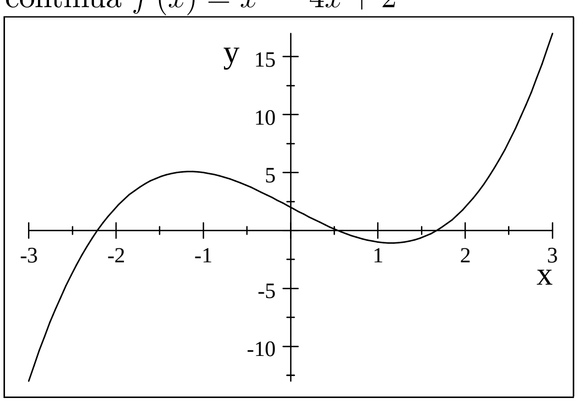
Este es un *algoritmo* que en cada *iteración* reduce a la mitad la longitud del intervalo donde se encuentra la solución. Así entonces como el intervalo inicial tiene longitud $b-a$, en la primera iteración el siguiente intervalo tiene longitud $\frac{b-a}{2}$ y al cabo de n iteraciones el intervalo tendrá longitud $\frac{b-a}{2^n}$, la cual tiende a cero.

Esto indica que se puede aproximar tanto como se quiera la solución a condición que se haga un número suficiente de iteraciones.

Tarea.-

Mostrar que la ecuación $x^3 - 4x + 2 = 0$ tiene tres raíces (soluciones) distintas entre $[-3,3]$. Ubíquelas entre enteros consecutivos y mediante el método de la bisección encuentre en forma aproximada una de ellas con dos cifras decimales exactas

Resp.- Las soluciones aproximadas de la ecuación $x^3 - 4x + 2 = 0$ son $x = 0{,}53919$, $x = -2{,}2143$ y $x = 1{,}6751$ como se aprecia en el gráfico de la función continua $f(x) = x^3 - 4x + 2$



Obs.- El estudiante que tiene algunos conocimientos de programación puede intentar escribir un programa para implementar este algoritmo.

Otro método para resolver una ecuación de la forma $f(x) = 0$, donde f es una función derivable, utiliza la recta tangente a la gráfica en cada punto y se conoce como **método de Newton-Raphson**. Se describe a continuación:

Para la función $f(x) = \frac{1}{10}(x^3 - 4x + 2)$ aproximaremos la solución que está entre -4 y -2 partiendo con el valor (arbitrario)

$$x_1 = -4$$

y calculando la recta tangente a la gráfica en $(-4, f(-4))$:
$f(-4) = -\frac{23}{5}$, $f'(-4) = \frac{22}{5}$, ecuación de la recta tangente es $y = -\frac{23}{5} + \frac{22}{5}(x+4)$
Ahora determinamos donde la recta corta al eje x : $-\frac{23}{5} + \frac{22}{5}(x+4) = 0 \Rightarrow$

$$x_2 = -\frac{65}{22} \approx -2.9545$$

Con este valor repetimos el procedimiento, obteniendo la ecuación de la recta tangente en $(x_2, f(x_2))$:
$f\left(-\frac{66}{22}\right) = -\frac{13}{10}$, $f'\left(-\frac{66}{22}\right) = \frac{23}{10}$, $y = -\frac{13}{10} + \frac{23}{10}\left(x + \frac{66}{22}\right)$
e intersectamos con el eje x : $-\frac{13}{10} + \frac{23}{10}\left(x + \frac{66}{22}\right) = 0 \Rightarrow$

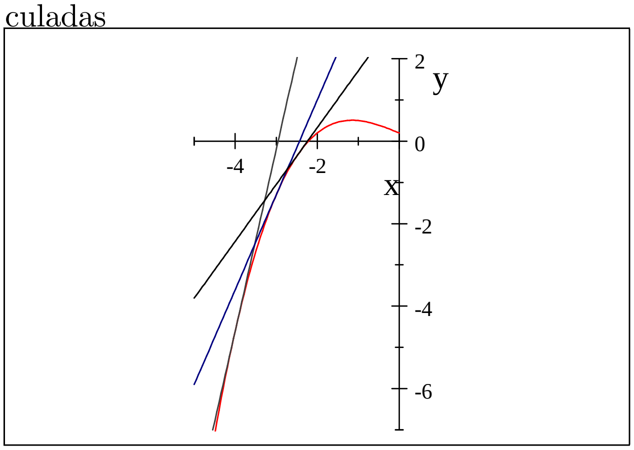
$$x_3 = -\frac{56}{23} \approx -2.4348$$

Una nueva iteración produce
$f\left(-\frac{56}{23}\right) = -\frac{16\,393}{60\,835}$, $f'\left(-\frac{56}{23}\right) = \frac{3646}{2645}$, $y = -\frac{16\,393}{60\,835} + \frac{3646}{2645}\left(x + \frac{56}{23}\right)$
y la intersección con el eje x da: $-\frac{16\,393}{60\,835} + \frac{3646}{2645}\left(x + \frac{56}{23}\right) = 0 \Rightarrow$

$$x_4 = -\frac{187\,783}{83\,858} \approx -2.2393$$

El proceso continúa generándose una sucesión x_n que converge a la solución de la ecuación.

En la siguiente gráfica están representadas la función y las recta tangentes calculadas



En general, la ecuación de la recta tangente en $(x_n, f(x_n))$ es

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

Su intersección x_{n+1} con el eje x se obtiene despejando x en

$$f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0$$

lo que implica

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Usando un programa matemático se pueden determinar las soluciones de esta ecuación, para contrastarlas con las que podemos encontrar mediante este método (o el anterior). $\{x = 0{,}539\,19, x = -2.\,214\,3, x = 1.\,675\,1\}$

Es un tema del cálculo numérico determinar cuando este método es aplicable en el sentido que la sucesión así construida converja a la solución buscada (de hecho no siempre funciona).

Aquí sólo mencionaremos que si se verifica la condición

$$f(x)\, f''(x) > 0$$

en un intervalo que contenga a la solución x^* y al primer valor x_1, el método converge a la solución.