+++**UNIVERSIDAD DE CONCEPCION**
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
21/11/22

Pauta - Tarea nº4 - 521227
(**Cálculo III**)

1. (25 ptos) Sea S el sólido limitado por el manto cónico $z = \sqrt{x^2+y^2}$, el hemisferio $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2$ y los planos $z = 1$, $x = 0$ e $y = x$.

Calcule el volumen $V(S)$ del sólido S :

a) Usando coordenadas cilíndricas
b) Usando coordenadas esféricas

Resp. Notar que el sólido S esta conformado por una parte en el primer octante y su simétrica en el octante $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+$.

Ahora, sea S_e la parte del cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ en el primer octante limitado por el hemisferio $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2$ y los planos $x = 0$ e $y = x$, y sea S_c la parte del cono en el primer octante limitado por los planos $z = 1$, $x = 0$ e $y = x$.

Por simetría,

$$V(S) = 2(V(S_e) - V(S_c))$$

a. Usando coordenadas cilíndricas

En coordenadas cilíndricas S_e se describe mediante:

$$S_e = \left\{(r,\theta,z) \;/\; \tfrac{\pi}{4} \le \theta \le \tfrac{\pi}{2},\ 0 \le r \le \sqrt{2}, r \le z \le \sqrt{4-r^2}\right\}$$

Así,

$$V_e = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{2}}\int_r^{\sqrt{4-r^2}} rdz\,dr\,d\theta = \frac{1}{3}\pi\left(2-\sqrt{2}\right)$$

Por otro lado S_c es un octavo del cono de altura 1 y radio basal $r = \sqrt{2}$, luego

$$V_c = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{24}$$

Luego,

$$V(S) = 2\left(\frac{1}{3}\pi\left(2-\sqrt{2}\right) - \frac{\pi}{24}\right) = 2\left(\frac{5}{8}\pi - \frac{\sqrt{2}}{3}\pi\right) \approx 2 * (0.48253)$$ 13 ptos

b. Usando coordenadas esféricas

S_e se describe en coordenadas cilindricas mediante

$$S_e = \left\{(\rho,\theta,\phi) \;/\; \tfrac{\pi}{4} \le \theta \le \tfrac{\pi}{2},\ 0 \le \phi \le \pi/4\ , 0 \le \rho \le 2\right\}$$

Así,

$$V_e = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/2}\int_0^{\pi/4}\int_0^2 \rho^2 \sin\phi d\rho\, d\phi\, d\theta = \frac{1}{3}\pi\left(2-\sqrt{2}\right)$$

y luego

$$V(S) = 2\left(\frac{1}{3}\pi\left(2-\sqrt{2}\right) - \frac{\pi}{24}\right) = 2\left(\frac{5}{8}\pi - \frac{\sqrt{2}}{3}\pi\right) \approx 2 * 0.48253$$ 12 ptos

Nota: **Si en el informe los estudiantes consideran solo la parte en el primer octante**,

evaluar con el puntaje de 25 puntos como máximo.

2. (15 ptos) Suponga que una partícula se mueve en la trayectoria C definida por

$$\sigma(t) = (2\cos t, 2\sin t, t), \text{ con } t \geq 0.$$

a. Si cuando $t = \pi$ la partícula abandona la trayectoria C y sigue por la tangente a C en $(-2, 0, \pi)$ ¿Cuáles son las coordenadas del punto en que se encuentra la particula en el instante $t = 2\pi$?

b. Calcule la longitud del trayecto recorrido por la partícula entre $t = 0$ y $t = 2\pi$.

Resp.

a. La tangente a C cuando $t = \pi$ esta dada por

$$T : (x,y,z) = \sigma(\pi) + \sigma'(\pi)(t - \pi)$$

esto es

$$T : (x,y,z) = (-2, -2(t - \pi), t)$$

Así, la posición de la partícula cuando $t = 2\pi$ es es el punto P de coordenadas $= (-2, -2\pi, 2\pi)$, ya que esta sigue la tangente T.

07 ptos

b. Calcule la longitud del trayecto recorrido por la partícula entre $t = 0$ y $t = 2\pi$.

Sea L la longitud del trayecto recorrido por la partícula entre $t = 0$ y $t = 2\pi$, entonces

$$L = l(c) + l(T)$$

donde $l(c)$ es la longitud del trayecto recorrido a lo largo de la curva C entre $t = 0$ y $t = \pi$ y $l(T)$ es la longitud del trayecto rectilineo a lo largo de la tangente T entre $t = \pi$ y $t = 2\pi$, entonces

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi} \|\sigma'(t)\| dt + \sqrt{5}\,\pi \\ &= \int_0^{\pi} \sqrt{5}\, dt + \sqrt{5}\,\pi \end{aligned}$$

Así, la longitud del trayecto recorrido por la partícula entre $t = 0$ y $t = 2\pi$ es $L = 2\sqrt{5}\,\pi$

08 ptos

3. (20 ptos) Sea R la región del plano acotada por las rectas $y = x$ e $y = -x + 4$ y el arco de circunferencia $y = 2 - \sqrt{2 - (x-2)^2}$, y sean F, G los campos vectoriales definidos por

$$F(x,y) = \left(-y(x-2)^2,\ x(y-2)^2\right)$$

$$G(x,y) = \left(\frac{1-y}{(x-2)^2 + (y-1)^2}, \frac{x-2}{(x-2)^2 + (y-1)^2}\right)$$

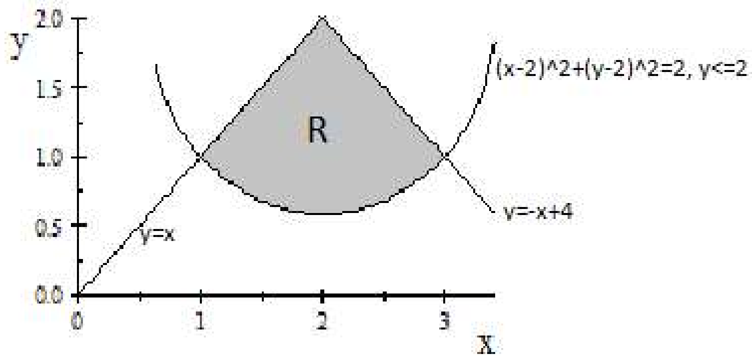
respectivamente. Calcule cada una de las siguientes integrales de línea

$$\text{a)} \int_C F \cdot dr$$

$$\text{b)} \int_C G \cdot dr$$

donde C es la frontera de la región R recorrida en sentido antihorario.

Resp.



a. Sean $P(x,y) = -y(x-2)^2$ y $Q(x,y) = x(y-2)^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Claramente R es un simple conexo contenido en el dominio de F, entonces aplicamos el teorema de Green para regiones simple conexas para calcular $\int_C F \cdot dr$.

$$\int_C F \cdot dr = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d(x,y)$$
$$= \iint_R \left((x-2)^2 + (y-2)^2 \right) d(x,y)$$

Usando coordenadas polares (modificadas)

$$x = 2 + r\cos\theta, \ y = 2 + r\sin\theta$$

donde $\frac{5}{4}\pi \le \theta \le \frac{7}{4}\pi$, $0 \le r \le \sqrt{2}$

$$\iint_R \left((x-2)^2 + (y-2)^2 \right) d(x,y) = \int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} \int_0^{\sqrt{2}} r^3 dr \, d\theta$$
$$= \frac{\pi}{2}$$

Luego,

$$\int_C F \cdot dr = \frac{\pi}{2}$$ 10 ptos

b. Claramente G no esta definida en el punto $(2,1)$, y como este es un punto en el interior de la región R, entonces para calcular $\int_C G \cdot dr$ aplicamos el teorema de Green para regiones multiconexas.

$$\int_C G \cdot dr = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d(x,y) + \int_\gamma G \cdot dr$$

donde $P(x,y) = \dfrac{1-y}{(x-2)^2 + (y-1)^2}$, $Q(x,y) = \dfrac{x-2}{(x-2)^2 + (y-1)^2}$, γ es la circunferencia $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$ recorrida en sentido antihorario y D es la región entre las curvas C y γ.

Como

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{(y-1)^2 - (x-2)^2}{\left[(x-2)^2 + (y-1)^2 \right]^2}$$

entonces

$$\int_C G \cdot dr = \int_\gamma G \cdot dr$$

Ahora, representando γ mediante $r(t) = (2 + 2\cos t, 1 + 2\sin t)$, con $0 \leq t \leq 2\pi$ se tiene que

$$\begin{aligned}\int_\gamma G \cdot dr &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sin t}{2}, \frac{\cos t}{2}\right) \cdot (-2\sin t, 2\cos t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi\end{aligned}$$

Luego,

$$\int_C G \cdot dr = 2\pi$$

10 ptos