UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (521218)
Listado $N°4$ (EDO lineales no homogéneas, Aniquiladores).

Problemas a resolver en práctica

PROBLEMA 1.

Determine un operador diferencial lineal L **con coeficientes constantes**, de menor orden posible, de modo que su nucleo $\mathrm{Ker}(L)$ contenga a las funciones $y_1(x) = \mathrm{e}^{-x}$ y $y_2(x) = x^2$. Escriba la correspondiente EDO lineal homogénea.

Solución: Sean L_1 y L_2 operadores diferenciales con coeficientes constantes, de menor orden posible, tales que L_1 anula a $y_1(x)$ y L_2 anula a $y_2(x)$. Entonces, el producto de los operadores L_1L_2 anula la suma $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$. En efecto,

$$L_1L_2[y_1 + y_2] = \underbrace{L_1L_2}_{\text{comutan}}[y_1] + L_1L_2[y_2] = L_2\underbrace{L_1[y_1]}_{=0} + L_1\underbrace{L_2[y_2]}_{=0} = 0 \ ,$$

donde usamos que L_1 y L_2 comutan entre si pues tienen coeficientes constantes. Un anulador de $y_1(x) = \mathrm{e}^{-x}$ de menor orden es $L_1 = D + 1$ y un anulador de $y_2(x) = x^2$ de menor orden es $L_3 = D^3$. Luego, un anulador de $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ de menor orden con coeficientes constantes es:

$$L = L_1L_2 = (D + 1)D^3.$$

La correspondiente EDO lineal homogénea que resulta es de cuarto orden, a saber

$$y^{(iv)}(x) \ + \ y^{(iii)}(x) \ = \ 0.$$

Observaciones:

(1) En este caso una base para el espacio solución de la EDO lineal homogénea que resulta es $B = \{1, x, x^2, \mathrm{e}^{-x}\}$.

PROBLEMA 2.

En este problema, si prefiere, se puede usar el siguiente Teorema

(a) **Teorema:**
Para cada función derivable $z(x)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, resulta

$$D[\mathrm{e}^{\lambda x}z](x) = \mathrm{e}^{\lambda x}(D + \lambda)[z](x) \ x \in \mathbb{R}, \ \text{ donde } D = \frac{d}{dx}.$$

En general, si $p(r) = a_n r^n + \cdots + a_1 r + a_0$ es un polinomio y z una función n veces derivable, entonces

$$p(D)[\mathrm{e}^{\lambda x} z](x) = \mathrm{e}^{\lambda x} p(D+\lambda)[z](x) \quad , \; x \in \mathbb{R} \, .$$

(La demostración del Teorema se hace al final de este Listado, seguir la demostración es un acto voluntario).

(b) Determine un anulador para cada uno de las siguientes funciones:

(i) $f(x) = \mathrm{e}^{6\,x}\,(x^3 + 4\,x + 10)$

(ii) $f(x) = \mathrm{e}^{-4\,x}\,\mathrm{sen}(5\,x)$

(iii) $f(x) = \mathrm{e}^{-4\,x}\,x^2\,\mathrm{sen}(4\,x) + e^{-4x}\,x\,\cos(4\,x)$

Solución:

(a)

(b) (i) Sea $z(x) := x^3 + 4\,x + 10$, y notemos que un aniquilador de z es D^4. Utilizando lo demostrado en el ítem anterior con el polinomio $p(r) = (r-6)^4$ y $\lambda = 6$, se deduce que

$$p(D)[\mathrm{e}^{6\,x}\,z](x) = \mathrm{e}^{6\,x}\,p(D+6)[z](x) = \mathrm{e}^{6\,x}\,D^4[z](x) = 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, un aniquilador de f es $p(D) = (D-6)^4$.

(ii) Sea $z(x) := \mathrm{sen}(5\,x)$, y notemos que un aniquilador de z es $D^2 + 25$. Utilizando lo demostrado en el ítem anterior con el polinomio $p(r) = (r+4)^2 + 25$ y $\lambda = -4$, se deduce que

$$p(D)[\mathrm{e}^{-4\,x}\,z](x) = \mathrm{e}^{-4\,x}\,p(D-4)[z](x) = \mathrm{e}^{-4\,x}\,(D^2+25)[z](x) = 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, un aniquilador de f es $p(D) = (D+4)^2 + 25$.

(iii) Sea $z(x) := x^2\,\mathrm{sen}(4\,x) + x\,\cos(4\,x)$, y notemos que un aniquilador de z es $(D^2+4)^3$, pues no es difícil notar que un aniquilador de $z_1(x) := x^2\,\mathrm{sen}(4\,x)$ está dado por $L_1 := (D^2+16)^3$, y un aniquilador de $z_2(x) := x\,\cos(4\,x)$ es $L_2 := (D^2+16)^2$. Por lo tanto, un aniquilador de z será el **mínimo común múltiplo** entre L_1 y L_2, es decir, $L := (D^2+16)^3$. Utilizando lo demostrado en el ítem anterior con el polinomio $p(r) = ((r+4)^2+16)^3$ y $\lambda = -4$, se deduce que

$$\begin{aligned} p(D)[\mathrm{e}^{-4\,x}\,z](x) &= \mathrm{e}^{-4\,x}\,p(D-4)[z](x) \\ &= \mathrm{e}^{-4\,x}\,(D^2+16)^3[z](x) = 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, un aniquilador de f es $p(D) = ((D+4)^2+16)^3$.

PROBLEMA 3.
Resolver aplicando método de aniquiladores:

(a) $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = t$

(b) $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = \mathrm{e}^{-2t} + t$

(c) $y''(t) + 4y'(t) + 6y(t) = 1 + \mathrm{e}^{-t}, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

En lo que sigue, $D = \frac{d}{dt}$.
Solución a): La EDO se puede re-escribir en forma de operador como

$$(D^2 - 2\,D + 1)[y](t) = t.$$

Aplicando el Principio de Superposición, la solución de la EDO se descompone en $y = y_h + y_p$, donde y_p es una solución particular de la EDO, e y_h es la solución general de la EDO homogénea asociada,

$$(D^2 - 2\,D + 1)[y_h] = 0.$$

La ecuación característica de la EDO precedente está dada por

$$\lambda^2 - 2\,\lambda + 1 = 0 \Longleftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1,$$

de donde, la solución genera de la EDO homogénea asociada está dada por

$$y_h(t) = C_1\,\mathrm{e}^t + C_2\,t\,\mathrm{e}^t, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \text{con } C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Para encontrar una solución particular por el método de aniquiladores, notemos que un aniquilador de $f(t) := t$ está dado por $L_1 = D^2$. Aplicando L_1 a la EDO original, se deduce que

$$D^2\,(D - 1)^2[y](t) = D^2[t] = 0,$$

la cual es una EDO homogénea, siendo su polinomio característico

$$p(\lambda) = \lambda^2\,(\lambda - 1)^2,$$

de raíces $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$, de donde

$$y(t) = C_1\,\mathrm{e}^t + C_2\,t\,\mathrm{e}^t + C_3 + C_4\,t.$$

Comparando con y_h, se propone como solución particular a

$$y_p(t) = C_3 + C_4\,t,$$

siendo C_3 y C_4 constantes por determinar. Reemplazando la propuesta en la EDO original, se obtiene

$$
\begin{aligned}
y_p''(t) - 2\,y_p'(t) + y_p(t) = t \quad &\Longleftrightarrow \quad -2\,C_4 + C_3 + C_4\,t = t \\
&\Longleftrightarrow \quad (C_3 - 2\,C_4) + C_4\,t = t \\
&\Longleftrightarrow \quad (C_3 - 2\,C_4 = 0) \wedge (C_4 = 1) \\
&\Longleftrightarrow \quad (C_3 = 2) \wedge (C_4 = 1).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $y_p(t) = 2 + t$, y así, la solución general de la EDO planteada está dada por

$$y(t) = C_1\,\mathrm{e}^t + C_2\,t\,\mathrm{e}^t + 2 + t, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \text{con } C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Solución b): La EDO se puede re – escribir en forma de operador como

$$(D^2 + D - 2)[y](t) = \mathrm{e}^{-2\,t} + t.$$

Aplicando el Principio de Superposición, la solución de la EDO se descompone en $y = y_h + y_p$, donde y_p es una solución particular de la EDO, e y_h es la solución general de la EDO homogénea asociada,

$$(D^2 + D - 2)[y_h] = 0.$$

La ecuación característica de la EDO precedente está dada por

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Longleftrightarrow (\lambda - 1)\,(\lambda + 2) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -2,$$

de donde, la solución genera de la EDO homogénea asociada está dada por

$$y_h(t) = C_1\,\mathrm{e}^t + C_2\,\mathrm{e}^{-2\,t}, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \text{con } C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Para encontrar una solución particular por el método de aniquiladores, notemos que un aniquilador de $f(t) := \mathrm{e}^{-2\,t} + t$ está dado por $L_1 = (D + 2)\,D^2$. Aplicando L_1 a la EDO original, se deduce que

$$(D + 2)\,D^2\,(D - 1)\,(D + 2)[y](t) = (D + 2)\,D^2[f](t) = 0,$$

o de forma equivalente,

$$D^2\,(D - 1)\,(D + 2)^2[y] = 0,$$

la cual es una EDO homogénea, siendo su polinomio característico

$$p(\lambda) = \lambda^2\,(\lambda - 1)\,(\lambda + 2)^2,$$

de raíces $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 1$, $\lambda_4 = \lambda_5 = 0$, de donde

$$y(t) = C_1\,\mathrm{e}^t + C_2\,\mathrm{e}^{-2\,t} + C_3\,t\,\mathrm{e}^{-2\,t} + C_4 + C_5\,t.$$

Comparando con y_h, se propone como solución particular a

$$y_p(t) = C_3\,t\,\mathrm{e}^{-2\,t} + C_4 + C_5\,t,$$

siendo C_3, C_4 y C_5 constantes por determinar. Notemos que las primeras dos derivadas de y_p están dadas por

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= C_3\,\mathrm{e}^{-2\,t} - 2\,C_3\,t\,\mathrm{e}^{-2\,t} + C_5,\\ y_p''(t) &= -4\,C_3\,\mathrm{e}^{-2\,t} + 4\,C_3\,t\,\mathrm{e}^{-2\,t}. \end{aligned}$$

Reemplazando la propuesta en la EDO original, se obtiene

$$\begin{aligned} y_p''(t) + y_p'(t) - 2\,y_p(t) = \mathrm{e}^{-2\,t} + t \quad &\Longleftrightarrow \quad -3\,C_3\,\mathrm{e}^{-2\,t} + (C_5 - 2\,C_4) - 2\,C_5\,t = \mathrm{e}^{-2\,t} + t\\ &\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} -3\,C_3 &=& 1\\ C_5 - 2\,C_4 &=& 0\\ -2\,C_5 &=& 1 \end{array}\right. \end{aligned}$$

cuya única solución es $C_3 = -1/3$, $C_4 = -1/4$ y $C_5 = -1/2$. Por lo tanto,

$$y_p(t) = -\frac{1}{3}\,t\,\mathrm{e}^{-2\,t} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\,t,$$

y así, la solución general de la EDO planteada está dada por

$$y(t) = C_1\,\mathrm{e}^{t} + C_2\,\mathrm{e}^{-2\,t} - \frac{1}{3}\,t\,\mathrm{e}^{-2\,t} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\,t, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \text{con } C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Solución c): La EDO se puede re – escribir en forma de operador como

$$(D^2 + 4\,D + 6)[y](t) = 1 + \mathrm{e}^{-t}.$$

Aplicando el Principio de Superposición, la solución de la EDO se descompone en $y = y_h + y_p$, donde y_p es una solución particular de la EDO, e y_h es la solución general de la EDO homogénea asociada,

$$(D^2 + 4\,D + 6)[y_h] = 0.$$

La ecuación característica de la EDO precedente está dada por

$$\lambda^2 + 4\,\lambda + 6 = 0 \Longleftrightarrow (\lambda + 2)^2 + 2 = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = -2 + \sqrt{2}\,i, \quad \lambda_2 = -2 - \sqrt{2}\,i,$$

de donde, la solución general de la EDO homogénea asociada está dada por

$$y_h(t) = C_1\,\mathrm{e}^{-2\,t}\,\cos(\sqrt{2}\,t) + C_2\,\mathrm{e}^{-2\,t}\,\operatorname{sen}(\sqrt{2}\,t), \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \text{con } C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Para encontrar una solución particular por el método de aniquiladores, notemos que un aniquilador de $f(t) := 1 + \mathrm{e}^{-t}$ está dado por $L_1 = D\,(D+1)$. Aplicando L_1 a la EDO original, se deduce que

$$D\,(D+1)\,(D^2 + 4\,D + 6)[y](t) = D\,(D+1)[f](t) = 0,$$

la cual es una EDO homogénea, siendo su polinomio característico

$$p(\lambda) = \lambda\,(\lambda + 1)\,(\lambda^2 + 4\,\lambda + 6),$$

de raíces $\lambda_1 = -2 + \sqrt{2}\, i$, $\lambda_2 = -2 - \sqrt{2}\, i$, $\lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = 0$, de donde

$$y(t) = C_1\, \mathrm{e}^{-2\,t} \cos(\sqrt{2}\, t) + C_2\, \mathrm{e}^{-2\,t} \operatorname{sen}(\sqrt{2}\, t) + C_3\, \mathrm{e}^{-t} + C_4.$$

Comparando con y_h, se propone como solución particular a

$$y_p(t) = C_3\, \mathrm{e}^{-t} + C_4,$$

siendo C_3 y C_4 constantes por determinar. Reemplazando la propuesta en la EDO original, se obtiene

$$\begin{aligned} y_p''(t) + 4\, y_p'(t) + 6\, y_p(t) = 1 + \mathrm{e}^{-t} \quad &\Longleftrightarrow \quad C_3\, \mathrm{e}^{-t} - 4\, C_3\, \mathrm{e}^{-t} + 6\, C_3\, \mathrm{e}^{-t} + 6\, C_4 = 1 + \mathrm{e}^{-t} \\ &\Longleftrightarrow \quad 3\, C_3\, \mathrm{e}^{-t} + 6\, C_4 = 1 + \mathrm{e}^{-t} \\ &\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 3\, C_3 & = & 1 \\ 6\, C_4 & = & 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

cuya única solución es $C_3 = 1/3$ y $C_4 = 1/6$. Por lo tanto,

$$y_p(t) = \frac{1}{3}\, \mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{6},$$

y así, la solución general de la EDO planteada está dada por

$$y(t) = C_1\, \mathrm{e}^{-2\,t} \cos(\sqrt{2}\, t) + C_2\, \mathrm{e}^{-2\,t} \operatorname{sen}(\sqrt{2}\, t) + \frac{1}{3}\, \mathrm{e}^{-\,t} + \frac{1}{6}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \text{con } C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ahora, notemos que la derivada de la solución general de la EDO original está dada por

$$y'(t) = (-2\, C_1 \,+\, \sqrt{2}\, C_2)\, \mathrm{e}^{-2t} \cos(\sqrt{2}\, t) \,+\, (-2\, C_2 \,-\, \sqrt{2}\, C_1)\, \mathrm{e}^{-2t} \operatorname{sen}(\sqrt{2}\, t) \,-\, \frac{1}{3}\, \mathrm{e}^{-\,t}.$$

Imponiendo las condiciones iniciales, se deduce que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y(0) & = & 0 \\ y'(0) & = & 0 \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} C_1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} & = & 0 \\[2ex] -2\, C_1 + \sqrt{2}\, C_2 - \dfrac{1}{3} & = & 0 \end{array} \right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} C_1 & = & -\dfrac{1}{2} \\[2ex] C_2 & = & -\dfrac{\sqrt{2}}{3} \end{array} \right.$$

Por lo tanto, la única solución de PVI está dada por

$$y(t) = -\frac{1}{2}\, \mathrm{e}^{-2\,t} \cos(\sqrt{2}\, t) - \frac{\sqrt{2}}{3}\, \mathrm{e}^{-2\,t} \operatorname{sen}(\sqrt{2}\, t) + \frac{1}{3}\, \mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{6}, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Problemas propuestos para el estudiante:

1. Determine un anulador para cada una de las siguientes funciones:

   (i) $k(x) = \cos(x) + x$

   (ii) $k(x) = \text{sen}(3x) + e^{-4x}$

   (iii) $k(x) = x\,\text{sen}(3x) + x^2 e^{-4x}$

   (iv) $k(x) = x^2 e^{-4x}\cos(3x)$

2. Sea L un operador diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes. Encuentre una solución particular para la EDO dada por:

   (i) $L(y) = \cos(x)$ si se sabe que $L(\mathrm{e}^x - 3\,\text{sen}(x)) = 7\cos(x)$.

   (ii) $L(y) = x^3 + \text{sen}(x)$ si se sabe que $L(\mathrm{e}^x) = 5\ \text{sen}(x)$ y $L(\cos(x)) = \frac{1}{4}x^3$.

   (iii) $L(y) = 0$ si se sabe que $L(x + \mathrm{e}^x) = \text{sen}(x)$ y $L(\mathrm{e}^{-x}) = 4\,\text{sen}(x)$.

   (iv) $L(y) = \left[\frac{1}{x}\right]^2$ si se sabe que $L(\mathrm{e}^{3x} + \cos^2(x)) = \frac{1}{x}$.

3. Resolver usando aniquiladores:

   (i) $y''(x) + 3y'(x) - 10y(x) = \mathrm{e}^{-5x}$,

   (ii) $y'' + 3y' - 10y = x\mathrm{e}^{-5x}$,

   (iii) $y'' + 3y' - 10y = \mathrm{e}^{2x}$,

   (iv) $y'' + 3y' - 10y = \mathrm{e}^{2x} + x\mathrm{e}^{-5x}$,

   (v) $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = \mathrm{e}^{-2x}$.

4. (Voluntario)
   Demostración del Teorema del Problema 2.
   Teorema:
   Para cada función derivable $z(x)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, resulta

   $$D[\mathrm{e}^{\lambda x} z](x) = \mathrm{e}^{\lambda x}(D + \lambda)[z](x)\ x \in \mathbb{R}, \quad \text{donde } D = \frac{d}{dx}.$$

   En general, si $p(r) = a_n r^n + \cdots + a_1 r + a_0$ es un polinomio y z una función n veces derivable, entonces

   $$p(D)[\mathrm{e}^{\lambda x} z](x) = \mathrm{e}^{\lambda x} p(D + \lambda)[z](x) \quad , \ x \in \mathbb{R}\ .$$

   Demostración:
   Sean z una función derivable en $\mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces, se deduce que

   $$\begin{aligned} D[\mathrm{e}^{\lambda x}\, z](x) &= \frac{d}{dx}\Big[\mathrm{e}^{\lambda x}\, z(x)\Big] = \lambda\, \mathrm{e}^{\lambda x}\, z(x) + \mathrm{e}^{\lambda x}\, z'(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}\,(z'(x) + \lambda\, z(x)) \\ &= \mathrm{e}^{\lambda x}\,(D + \lambda)\,[z](x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   A partir de lo anterior, si z tiene suficiente regularidad, se afirma que

   $$D^n[\mathrm{e}^{\lambda x}\, z](x) = \mathrm{e}^{\lambda x}\,(D + \lambda)^n\,[z](x), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*. \tag{1}$$

En efecto, se procede por inducción sobre n. Ya sabemos que es cierto para 1, y supongamos que se cumple para $n \in \mathbb{N}^*$, entonces,

$$\begin{aligned}
D^{n+1}[\mathrm{e}^{\lambda x} z](x) &= D\, D^n[\mathrm{e}^{\lambda x} z](x) = D\Big[D^n[\mathrm{e}^{\lambda x} z](x)\Big] = D\Big[\mathrm{e}^{\lambda x} (D+\lambda)^n [z](x)\Big] \\
&= \lambda\, \mathrm{e}^{\lambda x} (D+\lambda)^n [z](x) + \mathrm{e}^{\lambda x} D\, (D+\lambda)^n [z](x) \\
&= \mathrm{e}^{\lambda x} \Bigg(\lambda\, (D+\lambda)^n [z](x) + D\, (D+\lambda)^n [z](x)\Bigg) \\
&= \mathrm{e}^{\lambda x} \Bigg(\Big(\lambda\, (D+\lambda)^n + D\, (D+\lambda)^n\Big) [z](x)\Bigg) \\
&= \mathrm{e}^{\lambda x} (D+\lambda)^{n+1} [z](x), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

lo cual completa la demostración inductiva.

Finalmente, si $p(r) = a_n\, r^n + \cdots + a_1\, r + a_0$, usando lo anterior se prueba que

$$\begin{aligned}
p(D)[\mathrm{e}^{\lambda x} z](x) &= a_0\, \mathrm{e}^{\lambda x} z(x) + \sum_{k=1}^{n} a_k\, D^k[\mathrm{e}^{\lambda x} z](x) \\
&= a_0\, \mathrm{e}^{\lambda x} z(x) + \sum_{k=1}^{n} a_k\, \mathrm{e}^{\lambda x} (D+\lambda)^k [z](x) \\
&= \mathrm{e}^{\lambda x} \left(a_0\, z(x) + \sum_{k=1}^{n} a_k\, (D+\lambda)^k [z](x)\right) \\
&= \mathrm{e}^{\lambda x} \sum_{k=0}^{n} a_k\, (D+\lambda)^k [z](x) \\
&= \mathrm{e}^{\lambda x}\, p(D+\lambda)[z](x), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Septiembre de 2022. RBP/JMS/FST//jms