Clase 24

Cálculo 3

Carlos Martínez Ranero

Departamento de Matemática
Universidad de Concepción

Recordatorio de la clase anterior.

- Teorema de Green.
- Superfices parametrizadas.

Objetivos de la clase de hoy.

- Integrales de Superficie sobre campos escalares.
- Integrales de Superficie sobre campos vectoriales.

Superficies Parametrizadas.

Definición

Una superficie parametrizada es una función de clase $C^1, G\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

- Los vectores $G_u = \frac{\partial G}{\partial u}$ y $G_v = \frac{\partial G}{\partial v}$ son tangentes a la superficie.
- Si $G_u \times G_v \neq \vec{0}$ para todo punto de la superficie, entonces decimos que la superficie es suave.

Área de una superficie.

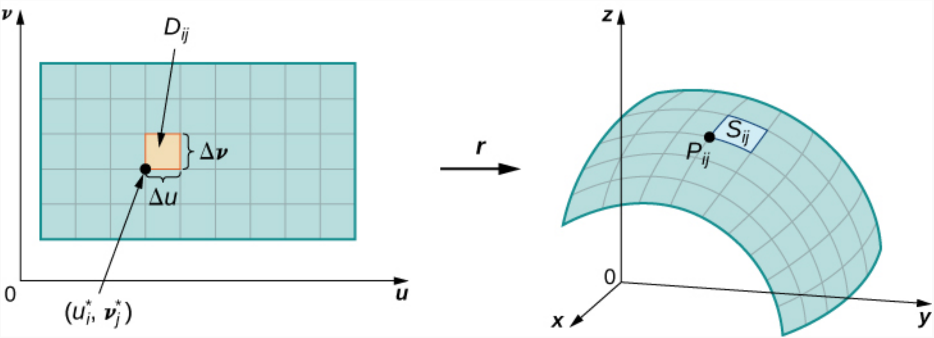
De la misma manera que utilizamos integrales para calcular la longitud de una curva, podemos utilizar integrales para calcular el area de una superficie.

Definición

Sea $G : D \to \mathbb{R}^3$ una superficie suave parametrizada el

$$area(S) = \iint_D \left\| \frac{\partial G}{\partial u} \times \frac{\partial G}{\partial v} \right\| dA.$$

Área de una Superficie.



Área de una Superficie.

Ejemplo 1

Encontrar el área de la superficie S definida por la parte del paraboloide $x^2 + y^2 + z = 25$, arriba del plano x, y.

Area de una Superficie.

Solución:

- Primero parametrizamos la superficie.
- $G(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 25 - r^2)$, $0 \leq r \leq 5, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.
- Ahora calculamos los vectores tangentes
- $\frac{\partial G}{\partial r} = (\cos\theta, \sin\theta, -2r)$
- $\frac{\partial G}{\partial \theta} = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$
- $G_u \times G_v = \det \begin{bmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \sin\theta & -2r \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{bmatrix}$
- $\|G_u \times G_v\| = r\sqrt{1 + 4r^2}$

Integrales de Superficie

Solución:

- $Area = \iint_D \|G_u \times G_v\| dA = \int_0^{2\pi} \int_0^5 r\sqrt{1 + 4r^2} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{(1+4r^2)^{3/2}}{12} \right) \Bigg|_0^5 = \frac{\pi}{6}(101^{3/2} - 1)$

Integrales de Superficie

Definición

Sea S una superficie regular parametrizada por la función $G : D \to \mathbb{R}^3$ y $f : S \to \mathbb{R}$ un campo escalar definimos la integral de superfice

$$\iint_S f\,dS = \iint_D f(G(u,v)) \left\| \frac{\partial G}{\partial u} \times \frac{\partial G}{\partial v} \right\| dA$$

Ejemplo 2

Calcular la integral $\iint_S y + z dS$ donde S es la porción del plano $z = 4 - y$ encerrada por el cilindro $x^2 + y^2 = 3$.

Solución:

- Primero parametrizamos S.
- $G : D \to \mathbb{R}^3, D = \{(u,v) : u^2 + v^2 \leq 3\},\ G(u,v) = (u,v,4-v)$
- $G_u = (1,0,0)$
- $G_v = (0,1,-1)$
- $\|G_u \times G_v\| = \sqrt{2}$
- $\iint_S y + z dS = \iint_D 4\sqrt{2} dA = 12\sqrt{2}\pi$

Integrales de Superficie.

Definición

Si tenemos una superficie que es suave por tramos digamos $S = S_1 + S_2 + \cdots + C_n$ definimos

$$\iint_S f dS = \sum_{i=1}^{n} \iint_{S_i} f dS$$

Definición

Decimos que una superficie S es orientable si existe un campo vectorial continuo $\vec{n}$ que asocia un vector normal unitario a cada punto de la superficie.

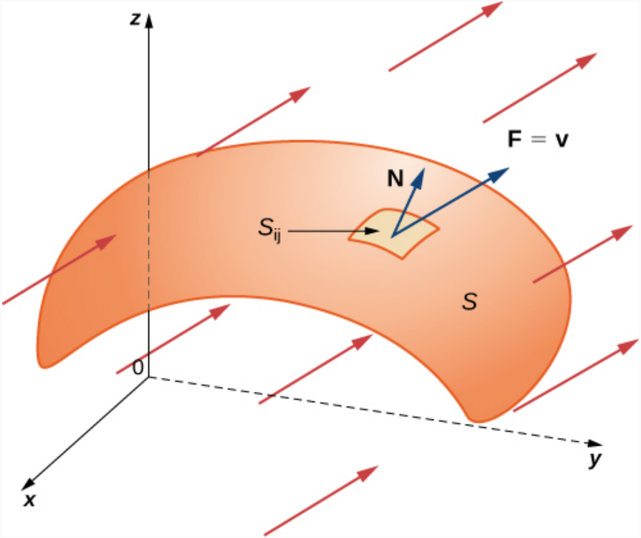
Integrales de Superficie

Definición

Sea S una superficie orientable, suave parametrizada, por la función $G : D \to \mathbb{R}^3$ y $\vec{F} : U \to \mathbb{R}$ un campo vectorial definimos la integral de superficie

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_D \vec{F}(G(u,v)) \cdot \frac{\partial G}{\partial u} \times \frac{\partial G}{\partial v} dA$$

Integrales de Superficie.



Ejemplo 3

Calcular la integral de superficie $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ donde $\vec{F}(x, y, z) = (0, y, -z)$ y S es la parte del paraboloide $y = x^2 + z^2, 0 \leq y \leq 1$ y el disco dado por $x^2 + y^2 \leq 1$ y $y = 1$, orientada de forma que la normal apunta hacia afuera.

Integrales de Superficie.

Solución:

- Primero observemos que S es suave por tramos y la podemos descomponer como la suma del parabolide S_1 y del disco S_2.
- Primero parametrizamos $S_1 : G(x,z) = (x, x^2 + z^2, z), G : \{(x,z) : x^2 + z^2 \leq 1\} \to \mathbb{R}^3$
- $G_x = (1, 2x, 0)$
- $G_z = (0, 2z, 1)$
- $G_x \times G_z = (2x, -1, 2z)$
- Observemos que esta bien orientado.
- $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_D (0, x^2 + z^2, -z) \cdot (2x, -1, 2z) dA = \iint_D -x^2 - 3z^2$

Integrales de Superficie.

- $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_D (0, x^2 + z^2, -z) \cdot (2x, -1, 2z) dA = \iint_D -x^2 - 3z^2$
- Haciendo el cambio de variabel $x = r\cos\theta$ y $z = r\sin\theta$ (coordenadas polares) se tiene
- $\iint_D -x^2 - 3z^2 dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-r^2 - 2r^2 \sin^2\theta) r dr d\theta = -\pi$
- Ahora parametrizamos
  $S_2 : G(x, z) = (x, 1, z), G : \{(x, z) : x^2 + z^2 \leq 1\} \to \mathbb{R}^3$
- $G_x = (1, 0, 0)$
- $G_z = (0, 0, 1)$
- $G_x \times G_z = (0, -1, 0)$

Integrales de Superficie.

- Observemos que esta bien mal orientado. Por lo que debemos cambiar el signo.
- $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_D (0, 1, -z) \cdot (0, 1, 0) dA = \iint_D 1 dA = \pi$
- Por lo tanto, $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = -\pi + \pi = 0.$