Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemática
Departamento de Matemática

Cálculo II

Ingeniería Civil

Prof. Víctor Aros Quinán

Segundo Semestre 2021

Clase N$^{\underline{o}}$24: Cálculo II
Series de Números Reales

Introducción

Sabemos que, si tenemos una colección finita de números reales $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$, entonces éstos pueden ser sumados, como sigue:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Por ejemplo:

$$1 + 2 + 3 + ... + 25 = 300$$
$$2 + 4 + 6 + ... + 50 =$$
$$1 + 2 + 3 + ... + 100 =$$

además, podemos recordar algunas sumas cocinadas, como la siguiente:

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + ... + \left(\frac{1}{2}\right)^{100} =$$

Introducción

Ahora, nuestro objetivo será sumar una colección infinita de términos, por ejemplo:

- $1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+\ldots$
- $1+2+3+4+5+\ldots$
- $1+(-1)+1+(-1)+1+(-1)+\ldots$
- $1+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots$

Series de Números Reales

Dado lo anterior, podemos considerar una sucesión de números reales $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ya que esta es una colección infinita de términos los cuales podemos sumar con el objetivo de darse sentido a:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Considerando esta última expresión, construimos una nuvea sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que llamamos sucesión de sumas parciales de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dada por:

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \\
s_1 &= a_1 + a_2 = s_1 + a_2 \\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3 \\
&\vdots \\
s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n = s_{n-1} + a_n
\end{aligned}$$

Serie de Números Reales

Definición

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión. Al sumar los términos de la sucesión se obtiene una expresión de la forma

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... + ...$$

que llamaremos **serie infinita** o simplemente **serie** numérica y la denotaremos por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Ejemplos:

Series de Números Reales

Observaciones:

1. Si la sucesión de sumas parciales $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge al valor S, entonces la serie convergen, es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = S$$

2. El número S es llamado **suma de la serie**.
3. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$ no existe, entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Series de Números Reales

Ejemplos: Estudiar la convergencia de las siguientes series:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + n + \ldots$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2$

Series de Números Reales

Solución a): Para analizar la convergencia debemos construir la sucesión de sumas parciales, como sigue:

$$s_1 = a_1 = 1$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = 1 + 2 = 3 = \frac{2 \cdot 3}{2}$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 2 + 3 = 6 = \frac{3 \cdot 4}{2}$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10 = \frac{4 \cdot 5}{2}$$

$$\vdots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n =$$

Dado lo anterior, se tiene:

Series de Números Reales

Solución b): Para analizar la convergencia construiremos la sucesión de sumas parciales, como sigue:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 = 1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 = 1 - 1 = 0 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = 1 - 1 + 1 = 1 \\ s_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Dado lo anterior, podemos notar que existen dos subsucesiones de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, las cuales son $s_{2n-1}=$ .... y s_{2n} =.......... Luego, se concluye

Sucesiones de Números Reales

Solución c): Primero debemos notar que:

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Ahora, construiremos la sucesión se sumas parciales para poder analizar la convergencia de la serie, como sigue:

$$s_1 = a_1 = 1 - \frac{1}{2}$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3}$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n =$$

Dado lo anterior, se tiene que:

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$$

en consecuencia la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ es convergente y su suma es igual a 1, es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1$$

Observación: series como la presentada reciben el nombre de **serie telescópica** debido a la forma de las sumas parciales donde se cancelan todos los sumandos, salvo el primero y el último.

Series Geométricas

A continuación, estudiaremos otro tipo de series cuya convergencia puede ser utilizada directamente de la sucesión de sumas parciales, estas son llamadas **series geométricas**. Por ende, consideremos la siguiente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n + \ldots$$

donde $a_n = r^n$ con $n \geq 0$, y r es un número real fijo llamado razón de la serie. Si consideramos $r = 1$, entonces la n-ésima suma parcial es $s_n = n$. Como $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = +\infty$, la serie diverge.

Considerando ahora $r \neq 1$, Luego, la n-èsima suma parcial es:

$$s_n = 1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Series Geométricas

que corresponde a la suma de los n términos de una progresión geométrica. Así, para todo $|r| < 1$, se cumple:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{1}{1-r}$$

Ahora bien, si $|r| > 1$ el límite de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no existe. En consecuencia, se tiene lo siguiente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-r} & , |r| < 1 \\ \text{diverge} & , |r| > 1 \end{cases}$$

De manera general, se puede considerar lo siguiente:

$$\sum_{n=p}^{\infty} ar^n = \begin{cases} \dfrac{ar^n}{1-r} & , |r| < 1 \\ \text{diverge} & , |r| > 1 \end{cases}$$

Ejercicios

1. Analizar la convergencia de las siguientes series geométricas y en caso de ser convergente, determine la suma de la serie.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{8^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^n$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} 3^{1-n}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)}{\pi^{2n}}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{2}\right)^{1-2n}$

2. Escriba el número decimal 0.1212121212.... como una fracción.

3. Determine la suma de las siguientes series telescópicas.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+7n+12}$

Series de Números Reales

A continuación estudiaremos algunos resultados básicos que deben conocer en el estudio de las series de números reales.

Teorema

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Demostración: sabemos que la sucesión se sumas parciales, está dada por:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = s_{n-1} + a_n$$

por ende, se tiene que:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (s_n - s_{n-1}) = S - S = 0$$

Series de Números Reales

Observación: El teorema precedente establece que para que una serie se convergente es necesario que el término general a_n tienda a cero. Por ejemplo, en la serie geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$, tenemos que $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. Además, el recíproco del teorema no es válido, esto es "que el término central de la serie tienda a cero no implica que la serie es convergente". Para visualizarlo es suficiente considerar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, cuyo término central $\frac{1}{n}$ tiende a cero, pero la serie no es convergente.

Series de Números Reales

Corolario

Si el $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Ejemplo: Estudie la convergencia de la siguientes series:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2}{9n^2+7}$

2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n^2}\right)$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 7^{2n} 8^{1-n}$

Serie de Números Reales

Teorema

Dadas las siguientes series convergentes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$$

se tiene que:

1. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm b_n$ es convergente y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm b_n = A \pm B$.
2. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ es convergente y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = cA$.

Observaciones: note que el teorema habla de series convergentes, por ende en caso de tener una divergente la suma sera divergente y lo mismo pasa si es que tengo una serie divergente y multiplico el término central por una constante real.

Ejercicios

1. Determine la suma de las siguientes series:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right]$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5^n} + \frac{1}{n(n+1)} \right)$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n^2 - 1} + \frac{3}{9^n} \right)$

2. Determine el valor del siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} 4 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot \frac{4}{9} + 4 \cdot \frac{8}{27} + \ldots + 4 \cdot \frac{2^n}{3^n}$$

   ¿Qué representa el valor del límite?

3. Muestre que si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(n+1) = L$, donde L es un número real, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} [f(n+1) - f(n)] = L - f(1)$$

Ejercicios

4. Calcule la suma de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{n}^{n+1} xe^{-x}\, dx\right)$$

5. Determine el o los valores de $x \in \mathbb{R}$ de modo que las siguientes series sean convergentes.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{2n}$

6. Escriba el siguiente número decimal

$$0.5262626262626....$$

como una fracción.