Listado 12: Valores y vectores propios. Subespacios propios. Matrices diagonalizables.

Los problemas marcados con **(P)** serán resueltos en práctica.

1. Determine si los $\lambda \in \mathbb{R}$ especificados son valores propios de la matriz y, de serlo, determine: multiplicidad algebraica de λ, un vector que sea vector propio de la matriz asociado a λ y uno que no sea vector propio de la matriz.

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda = 4$,

   (b) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \{1, 2, 3\}$,

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & -13 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda = -2$,

   (d) **(P)** $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\lambda = 4$.

2. Determine si el vector v especificado es vector propio de la matriz y, de serlo, determine: valor propio asociado a él, otro vector que sea vector propio de la matriz y uno que no sea vector propio de la matriz.

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -1, & -1, & -1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$,

   (b) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$,

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & -13 & 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$,

   (d) **(P)** $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -2, & 1, & 1, & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$.

3. Sea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ una de las siguientes matrices: determine el polinomio característico de A y calcule todas sus raíces, decida cuáles de ellas son valores propios de A y determine, justificadamente, si A es diagonalizable. En los casos en que lo sea, determine P, invertible, y D, diagonal, de modo que $AP = PD$.

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

   (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

   (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

   (d) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

   (e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & -13 & 1 \end{pmatrix}$,

   (f) **(P)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

4. **(P-solo A)** Considere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determine, sin calcular, una base para $\mathrm{im}(A)$ y una para $\mathrm{im}(B)$. ¿Tienen ambas matrices la misma imagen?

   (b) Justifique, sin calcular $p_A(\lambda)$ y $p_B(\lambda)$, por qué cero es valor propio de ambas matrices.

   (c) Encuentre, sin calcular $p_A(\lambda)$ y $p_B(\lambda)$, un segundo valor propio para ambas matrices.

5. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) Encuentre $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que $\lambda = 1$ sea un valor propio de A. ¿Cuál es la multiplicidad algebraica de λ?

   (b) Determine, con α igual al valor determinado antes, los restantes valores propios de A y sus multiplicidades algebraicas.

   (c) Determine, con α igual al valor determinado antes, los subespacios propios de A y una base para cada uno de ellos.

   (d) ¿Es A diagonalizable? En caso de serlo, determine P, invertible, y D, diagonal, de modo que $AP = PD$.

6. Diagonalice, si es posible, las siguientes matrices con coeficientes reales. Determine además si ellas son invertibles.

   (a) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & -6 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

7. **(P)** Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & a & a+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$.

   (a) Determine para qué valores de a se cumple que A es invertible. Justifique su respuesta.

   (b) Determine para qué valores de a se cumple que A es diagonalizable. Justifique su respuesta.

8. Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ un valor propio de A.

   (a) Demuestre que λ^2 es valor propio de A^2.

   (b) Demuestre que $2 + \lambda$ es valor propio de $A + 2I$.

9. **(P)** Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ (no necesariamente distintos entre sí) son valores propios de A. Entonces $\det(A - \lambda I) = p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$.

(a) Muestre, utilizando la expresión anterior para $p_A(\lambda)$, que el determinante de A es el producto de sus valores propios.

(b) Suponga ahora que $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ es tal que 0, 1 y 2 son los valores propios de A. Responda y justifique:

- ¿Es A diagonalizable?
- ¿Es A invertible?
- ¿Cuáles son la nulidad y el rango de A?