1. Geometría Analítica.

La Geometría Analítica consiste esencialmente en el estudio de objetos geométricos clásicos (geometría euclidiana) del plano y del espacio 3-d, a través de técnicas del álgebra.

Se establecerá una relación:

$$\text{Geometría} \leftrightarrow \text{Algebra}$$

en que cada objeto geométrico se representa mediante un objeto algebraico, y en consecuencia se estudiarán las propiedades geométricas de estos a través de características algebraicas.

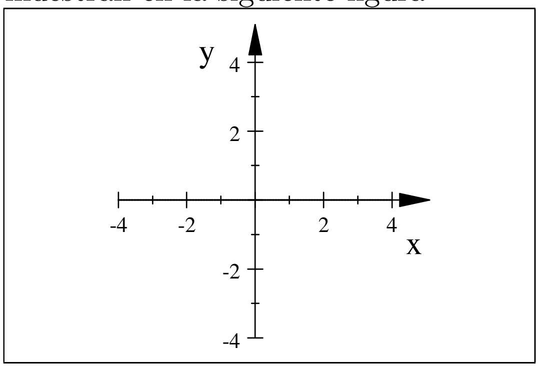
1.1. Sistema cartesiano.

La base fundamental es la asociación entre el conjunto de pares ordenados de números reales

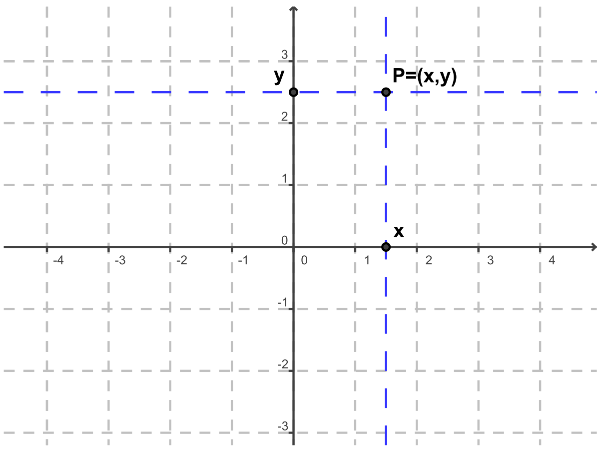
$$\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$$

y un plano:

Para esto se consideran dos rectas perpendiculares en el plano, llamadas *ejes* (por comodidad una puede tomarse horizontal y la otra vertical) y sobre cada una de ellas se representan los números reales (la conocida recta real) de modo que el 0 en cada una de ellas sea el punto de intersección de ambas rectas. El eje horizontal se denomina eje de las *abscisas* o eje x y el eje vertical se llama eje de las *ordenadas* o eje y. Más detalles se muestran en la siguiente figura



Ahora, dado un punto P del plano se consideran la recta vertical l_v y la recta horizontal l_h que pasan por P.



La recta vertical que pasa por P intersecta al eje horizontal en un único punto asociado al número real x y la recta horizontal corta al eje vertical en un único punto asociado al número y. Por esto el punto P se asocia al par ordenado (x, y) y así $P = (x, y)$. O sea, el objeto geométrico "punto P"se identifica con el objeto algebraico "par ordenado (x, y)".

En la identificación $P = (x, y)$, se dice que x es la **abscisa** o primera coordenada de P y que y es la **ordenada** o segunda coordenada del punto P.

De esta manera se obtiene un **sistema de coordenadas rectangulares** o *cartesianas* del plano, mediante el cual cada punto del plano está representado por un único par ordenado de números reales (un elemento del conjunto $\mathbb{R}^2$).

Observe que el punto del plano que corresponde a la intersección de los dos ejes coordenados corresponde al par $(0, 0)$. Se denota O y se denomina el *origen*.

También se puede ver que un punto A del plano que esté en el eje de las abscisas se *caracteriza* por el hecho que su ordenada (2^a coordenada) es **nula**. Esto es, $A = (x, 0)$ con $x \in \mathbb{R}$.

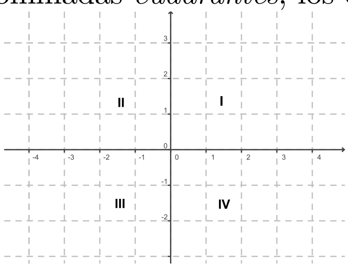
Por lo tanto, el eje x se representa por la **ecuación** $\boxed{y = 0}$

Mas precisamente, *eje* $x = \{(x, y) : y = 0\}$

Aparece así un objeto geométrico, la recta correspondiente al eje de las abscisas, representado por el objeto algebraico que es una **ecuación (**la ecuación de una recta, en este caso).

Debe ser claro que el eje de las ordenadas se representa mediante la ecuación $\boxed{x = 0}$

Otro hecho importante es que los ejes coordenados dividen al plano en cuatro regiones denominadas *cuadrantes*, los cuales se enumeran según se indica:

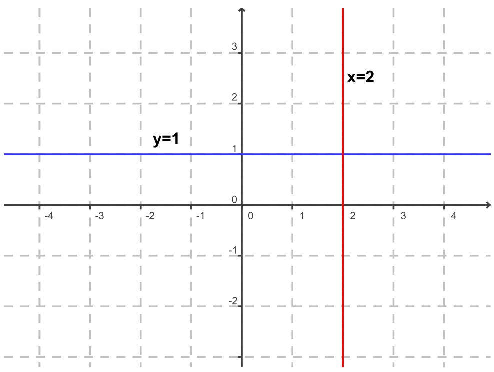


Problema 1 *Encuentre caracterizaciones para cada uno de los cuadrantes.*

Ejercicio 2 *Represente en un sistema de coordenadas los puntos correspondientes a los pares:* $A = (2, 1)$, $B = (1, 2)$, $C = (0, 3)$, $D = (-3, 2)$, $E = (-1, -3)$, $F = (2, -3)$.
Dibuje también las rectas horizontal y vertical que pasan por el punto A. ¿Qué ecuación caracteriza a los puntos de cada una de estas recta?

De acuerdo al trabajo desarrollado en el ejercicio anterior quedará claro que:

- Toda recta horizontal tiene ecuación de la forma $\boxed{y = b}$, donde $(0, b)$ es el punto donde la recta corta al eje y
- Toda recta vertical tiene ecuación de la forma $\boxed{x = a}$, donde $(a, 0)$ es el punto donde la recta corta al eje x



De esta forma tenemos caracterizadas a todas las rectas del plano que son paralelas a los ejes coordenados. Por supuesto que también estamos interesados en encontrar la caracterización de cualquier *otra* recta (esto es, su ecuación).

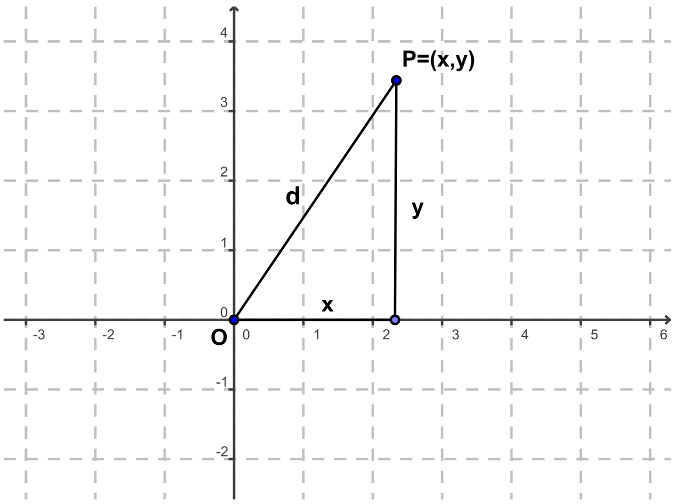
1.2. Distancia en el plano

Un importante elemento de la geometría es la noción que nos permite **medir** objetos unidimensionales. El objeto unidimensional básico es el *segmento* y su medida es su **longitud**.

Al considerar sólo una línea recta donde tenemos representados los números reales, la longitud del segmento que va del punto a al punto b, donde $a < b$, es por definición $d(a, b) = b - a$. Observe que este segmento es lo que también se denomina intervalo de extremos a y b. Es fácil generalizar esta noción a la de distancia entre dos puntos a y b por $d(a, b) = |a - b|$, sin necesidad de tener que comparar ambos números.

¿Cómo se generaliza esta noción de *distancia* entre dos puntos, ahora a todo el plano?

La situación más simple corresponde a la distancia de un punto $P = (x, y)$ al origen $O = (0, 0)$ del sistema de coordenadas, como muestra la figura

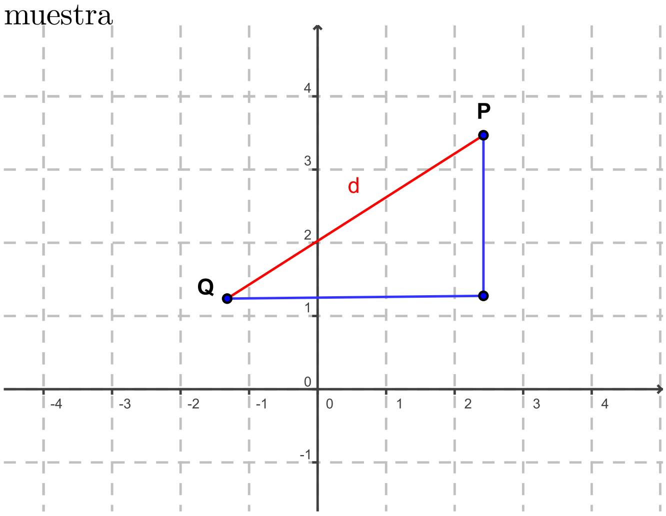


En el triángulo rectángulo podemos medir los catetos, sobre cada eje coordenado, con valores x e y, luego el teorema de Pitágoras determina que $d^2 = x^2 + y^2$ y así

$$d\,(O,P) := d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Aunque la situación del dibujo es ideal ($x > 0$ e $y > 0$) uno debe entender que la fórmula se aplica con cualquier punto del plano, incluso sobre los ejes.

La situación general es $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ dos puntos del plano, como se muestra



Queda de ejercicio explicar la fórmula para la distancia entre P y Q dada por

$$d\,(P,Q) := d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Ejercicio 3 *Verificar que los puntos* $A(5,-2)$, $B(-5,-4)$ *y* $C(-1,2)$ *son los vértices de un triángulo rectángulo isósceles.*

$d(A,B) = \sqrt{(5+5)^2 + (-2+4)^2} = \sqrt{104} = 10.198$

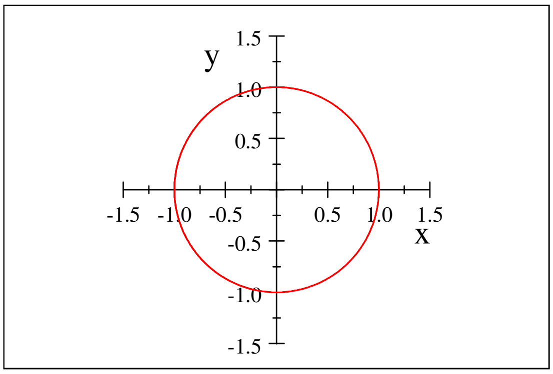
$d(A,C) = \sqrt{(5+1)^2 + (-2-2)^2} = 2\sqrt{13} = 7.211\,1$
$d(B,C) = \sqrt{(-5+1)^2 + (-4-2)^2} = 2\sqrt{13} = 7.211\,1$
$d(A,C) = d(B,C) \Longrightarrow T$ *es isósceles*
$d(A,B)^2 = 104$
$d(A,C)^2 + d(B,C)^2 = 4(13) + 4(13) = 104 = d(A,B)^2$
implica que T es rectángulo.

1.2.1. La circunferencia

A partir de la fórmula de distancia resulta inmediato obtener la ecuación de una de las figuras geométricas básicas más interesantes, la *circunferencia.*

Por definición, la circunferencia de centro en el origen O y radio 1 (llamada circunferencia unitaria) es el *lugar geométrico* de los puntos cuya distancia al origen vale 1. Luego su ecuación está dada por

$$d(O,P) = \sqrt{x^2+y^2} = 1$$
$$\text{o bien,} \qquad x^2 + y^2 = 1$$



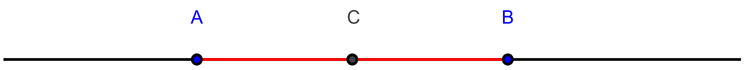
queda de ejercicio encontrar 5 puntos de esta circunferencia.

Problema 4 *Encontrar la ecuación de la circunferencia que tiene centro en $P_0 = (x_0, y_0)$ y radio r $(r > 0)$.*

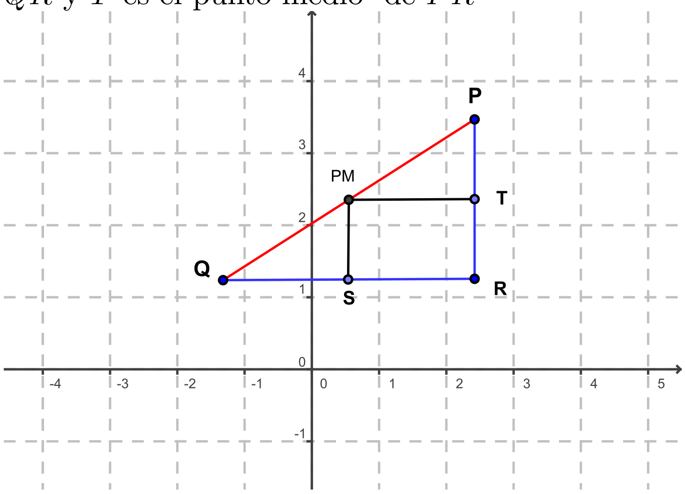
Problema 5 *Encontrar la ecuación de la circunferencia que tiene centro en $P_0 = (-2, 3)$ y radio 4*

1.2.2. Punto medio de un segmento

Dado dos puntos a y b sobre la recta real y suponiendo $a < b$, el punto medio entre ambos corresponde a la *media aritmética* $c = \dfrac{a+b}{2}$. Esto porque $a < \frac{a+b}{2} < b$ y $d(a,c) = d(c,b) = \frac{b-a}{2}$



En el caso que el segmento esté determinado por los puntos $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ del plano entonces el punto medio P_M tiene la misma abscisa que S y la misma ordenada que T (ver figura siguiente). Además por semejanza de triángulos S es el punto medio de $\overline{QR}$ y T es el punto medio de $\overline{PR}$



Luego, $P_M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

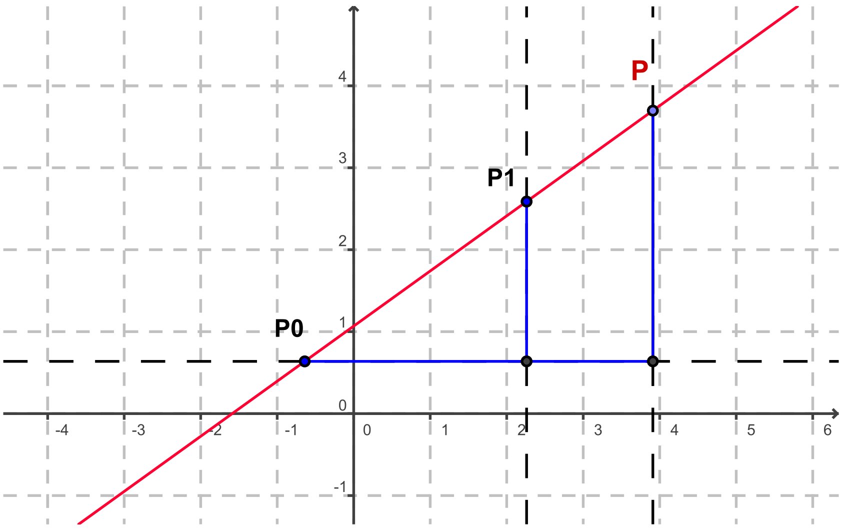
También se puede llegar a este resultado, posterior a encontrar la ecuación de la recta que pasa por Q y P.

Problema 6 *Sea T el triángulo de vértices $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$, $R = (x_3, y_3)$. Encuentre la relación entre la longitud del segmento que une los punto medios de $\overline{PR}$ y de $\overline{QR}$ con la longitud de $\overline{PQ}$.*

1.3. Ecuación de la recta

Ahora consideraremos una recta L que no sea vertical ni horizontal. Recuerde queda completamente determinada por (cualesquiera) dos de sus puntos.

Sea entonces L la recta que pasa por $P_0 = (x_0, y_0)$ y $P_1 = (x_1, y_1)$ (L una recta "diagonal").



Para un punto $P = (x, y) \in L$ se tiene, usando semejanza de triángulos:

$$\begin{aligned}
\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \\
\frac{y - y_0}{x - x_0} &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\
y - y_0 &= \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right)(x - x_0)
\end{aligned}$$

Así entonces los puntos $P = (x, y)$ de la recta L satisfacen la ecuación

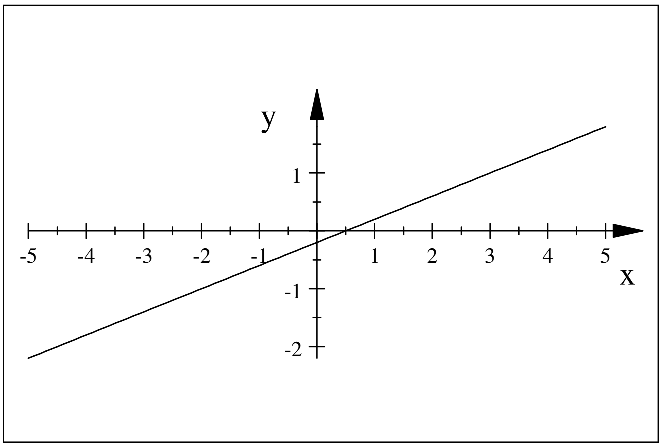
$$y = y_0 + \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right)(x - x_0) \tag{1}$$

La ecuación (1) anterior es la *ecuación general de la recta* L que pasa por los puntos $P_0 = (x_0, y_0)$ y $P_1 = (x_1, y_1)$ (podemos referirnos a ella como ecuación punto-punto).

Exemplo 7 *Encuentre la ecuación de la recta L que pasa por los puntos $P_0 = (-2, -1)$ y $P_1 = (3, 1)$. Dibuje la recta en un sistema de coordenadas y determine un punto de ella que tenga ordenada igual a $\frac{1}{2}$. Encuentre también los puntos donde la recta intersecta a los ejes coordenados.*

En este caso $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{1-(-1)}{3-(-2)} = \frac{2}{5}$. Luego la ecuación es

$$\begin{aligned}
y &= -1 + \frac{2}{5}(x + 2) \\
y &= \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}
\end{aligned}$$



El punto de la recta de ordenada $\frac{1}{2}$ *tiene abscisa* x *que satisface* $\frac{2}{5}x - \frac{1}{5} = \frac{1}{2}$. *Luego,* $x = \frac{7}{4}$. *Así corresponde a* $\left(\frac{7}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

La intersección con el eje y *se obtiene haciendo en la ecuación* $x = 0$. *Luego resulta* $y = -\frac{1}{2}$. *El punto es* $\left(0, -\frac{1}{5}\right)$.

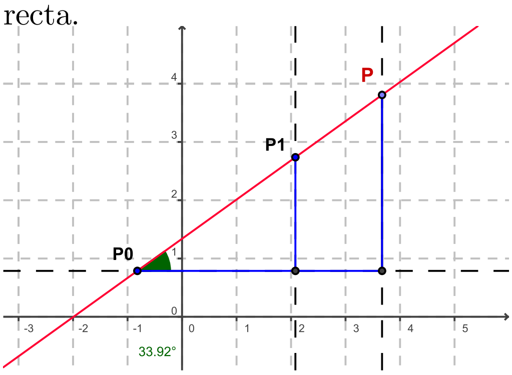
Haciendo $y = 0$ *se obtiene* $x = \frac{1}{2}$. *El punto de intersección con el eje* x *es* $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

1.3.1. Pendiente de una recta

Si observamos la ecuación (1), en el lado derecho aparece el factor

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

donde $x_1 - x_0 \neq 0$ (ya que la recta no es vertical) es la *razón* entre el cateto vertical y el cateto horizontal del triángulo rectángulo de la figura y por lo tanto determina el ángulo que forma la recta con la horizontal (también con el eje x). Se llama *pendiente* de la recta.



De la trigonometría elemental sobre el triángulo rectángulo se tiene que

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \tan \alpha$$

donde α es la medida del ángulo de *inclinación* de la recta.

En el caso del ejemplo anterior, la recta tiene pendiente $m = \frac{2}{5}$.

Ahora representando por m la pendiente de la recta que pasa por P_0 y P_1, la ecuación (1) se escribe

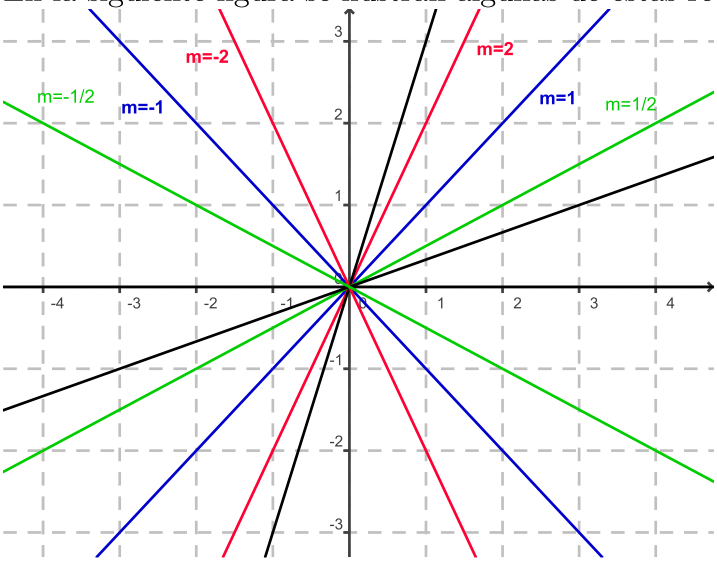
$$\begin{aligned} y &= y_0 + m(x - x_0) \qquad (2) \\ y &= mx + (y_0 - mx_0) \\ y &= mx + b \qquad (3) \end{aligned}$$

La forma de la ecuación (2) se denomina ecuación punto-pendiente. En ella aparece las cordenadas de sólo un punto de la recta y su pendiente. En cambio en la ecuación (3), aparece la pendiente m y el parámetro b que tiene la característica de determinar el punto donde la recta corta al eje y. (Esto es, la recta pasa por $(0, b)$).

En el caso particular que $b = 0$, la recta pasa por el origen y su ecuación es de la forma

$$y = mx$$

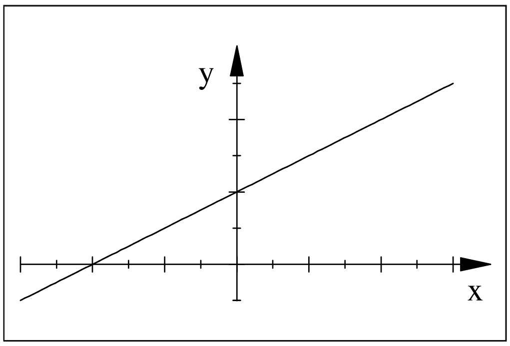
En la siguiente figura se ilustran algunas de estas rectas, con los valores de m indicados

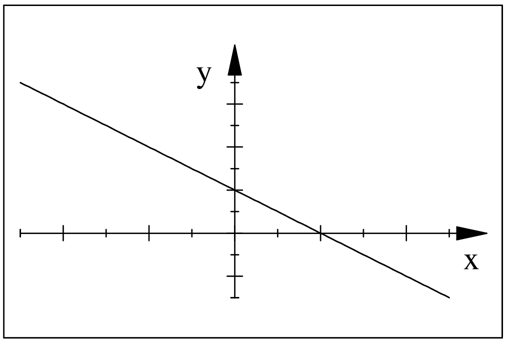


En general, la ecuación de una recta en la forma $y = mx + b$, puede entenderse como una *relación* entre la *variable independiente* x y la *variable dependiente* y. Se puede observar a partir de una tabla de valores

x	0	1	2	3
y	b	$b+m$	$b+2m$	$b+3m$

que un incremento de una unidad en la variable x produce un incremento de m unidades en la variable y. Esto en el caso que la pendiente m es positiva. Si m es negativa, el incremento de una unidad en la variable x produce una disminución de $|m|$ unidades en la variable y.





$m > 0$, $b > 0$ $m < 0$, $b > 0$

Observe también que una recta de pendiente $m = 0$ es una recta horizontal (de ecuación $y = b$).

Una recta vertical **no tiene pendiente** (por definición).

La forma más general para la ecuación de una recta es

$$ax + by = c \tag{4}$$

donde a, b, c son constantes con $a \neq 0$ o bien $b \neq 0$.

En el caso que $b \neq 0$: la pendiente se obtiene al despejar la variable y para obtener

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

y así $m = -\frac{a}{b}$. De la ecuación es fácil obtener los puntos donde la recta corta a los ejes coordenados.

Ejercicio 8 *Encuentre la pendiente de la recta de ecuación $2x + 4y = 12$. También determine los puntos donde esta recta corta a los ejes coordenados y grafique la recta.*

1.4. Paralelismo y Perpendicularidad

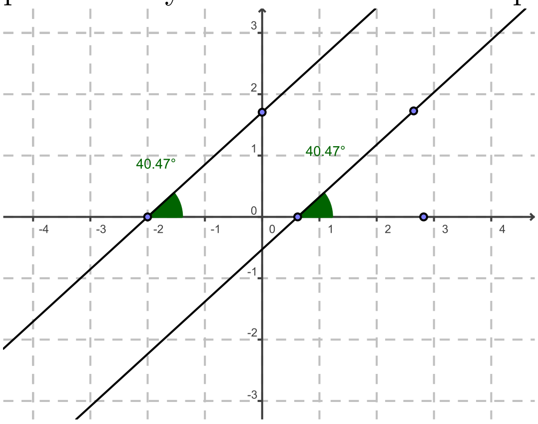
En vista que la pendiente de una recta determina el ángulo de inclinación de ella con respecto al eje x es natural entender que la condición geométrica de que dos rectas sean paralelas o perpendiculares debe estar determinada por sus pendientes. De hecho se tiene:

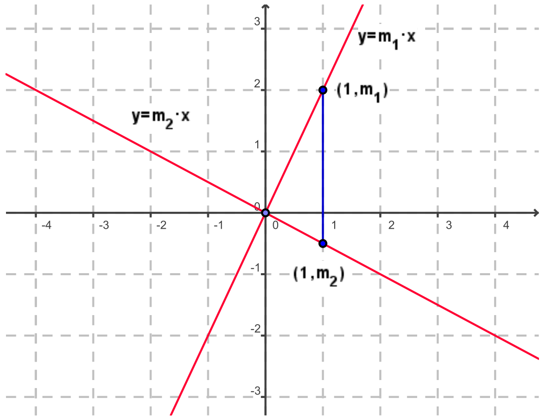
Theorem 9 *Sean $L_1 : y = m_1x + b_1$, $L_2 : y = m_2x + b_2$ dos rectas del plano.*
a) $L_1 \parallel L_2 \Longleftrightarrow m_1 = m_2$
b) $L_1 \perp L_2 \Longleftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$

La demostración de estos resultados requiere establecer las dos implicaciones, en cada item. Se discutirá parcialmente en clases.

Geométricamente, las recta L_1 y L_2 son paralelas **ssi** son iguales o bien no tienen puntos comunes (intersección vacía) y son perpendiculares **ssi** el ángulo determinado por ambas mide 90°.

Más allá de la demostración, el item a) es intuitívamente claro que dos recta serán paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

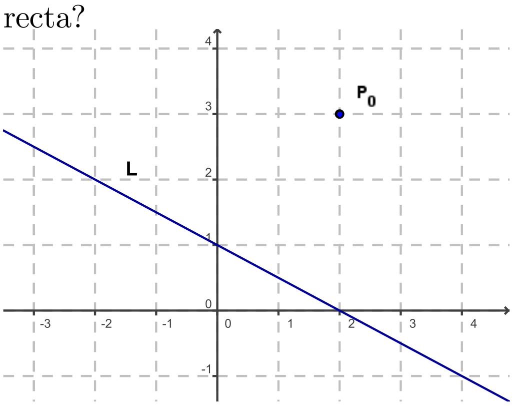




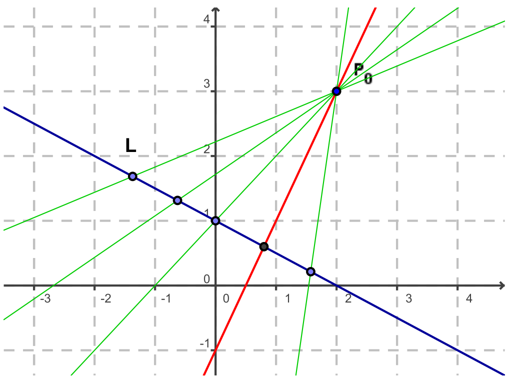
Para el item b), se puede obtener fácilmente la caracterización para dos rectas perpendiculares que se corten en el origen, aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo de la figura. ¡Hágalo!

1.4.1. Distancia de un punto a una recta

Problema.- Dada una recta L y un punto $P_0 \notin L$ ¿cuál es la distancia del punto a la recta?



Si se considera un punto P cualquiera sobre la recta y se mide la distancia de P_0 a P, podemos "ver" que para un punto P_1 particular esta distancia es mínima, justamente esta *mínima* distancia es la que se denomina distancia del punto P_0 a la recta L.



El problema es entonces, ¿cómo se determina este punto P_1?

Piense en un argumento geométrico elemental que justifique que este punto P_1 corresponde a la intersección de L con la recta perpendicular a L que pasa por P_0.

Exemplo 10 *Sea L la recta de ecuación $x + 2y = 1$ y $P_0 = (2, 3)$.*

a) Encuentre la ecuación de la recta L_1, perpendicular a L y que pasa por P_0.

b) Determine el punto P_1 de intersección de las dos rectas, es decir $P_1 = L \cap L_1$.

c) Calcule la distancia $d(P_0, P_1)$.

Mediante el mismo razonamiento utilizado en el ejemplo anterior se obtiene una fórmula general para calcular la distancia del punto $P_0 = (x_0, y_0)$ a la recta $L : ax + by + c = 0$. Esta es

$$d(P_0, L) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Verifique esta fórmula para el resultado obtenido en el ejemplo anterior.

Ejercicio 11 *Sean $P_0 = (2, -1)$ y $P_1 = (0, 3)$. Encuentre la ecuación del **lugar geométrico** (conjunto de puntos) de los puntos del plano que equidistan de P_0 y P_1.*

1.4.2. Sistemas lineales de dos ecuaciones y dos incognitas

Una ecuación en las dos incognitas x e y se dice *lineal* cuando es de la forma

$$ax + by = c$$

donde a, b, c son números reales fijos (constantes). Una *solución* de la ecuación es un par de valores $x = x_0$, $y = y_0$ que verifican la relación de igualdad.

Geométricamente, la ecuación corresponde a un recta en el plano xy y una solución de ella es un punto de esta recta. En consecuencia la ecuación posee infinitas soluciones (cada uno de los puntos de la recta).

Ahora, dos de estas ecuaciones definen lo que se denomina un *sistema lineal* de dos ecuaciones en las dos incognitas x e y :

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

Si $L_1 : a_1x + b_1y = c_1$ y $L_2 : a_2x + b_2y = c_2$ son las rectas determinadas por estas ecuaciones, entonces una solución de este sistema (de ambas ecuaciones) es un punto que pertenece a ambas rectas. Esto es, un punto de la intersección de las dos rectas.

Pensando en términos estrictamente geométricos, ¿qué resulta de la intersección de las rectas L_1 y L_2?:

- Cuando las rectas no son paralelas, la intersección es un *único* punto.
- Cuando las rectas son paralelas, habría que distinguir:
  - No existe punto de intersección, si $L_1 \neq L_2$.
  - Es toda una recta, si $L_1 = L_2$.

En resumen, el sistema puede :

- Tener *única* solución.
- No tener solución.
- Tener infinitas soluciones.

Vimos en la discusión anterior que el sistema tiene única solución cuando las rectas no son paralelas, es decir cuando tienen **pendientes** diferentes.

Luego, en el caso que $b_1 \neq 0$ y $b_2 \neq 0$, siendo $m_1 = -\frac{a_1}{b_1}$ la pendiente de L_1 y $m_2 = -\frac{a_2}{b_2}$ la pendiente de L_2 se tiene que el sistema tiene única solución si y sólo si

$$\begin{aligned} -\frac{a_1}{b_1} &\neq -\frac{a_2}{b_2} \\ a_1b_2 - b_1a_2 &\neq 0 \end{aligned}$$

Obs.- $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2$ se llama *determinante* de la matriz de coeficiente del sistema.

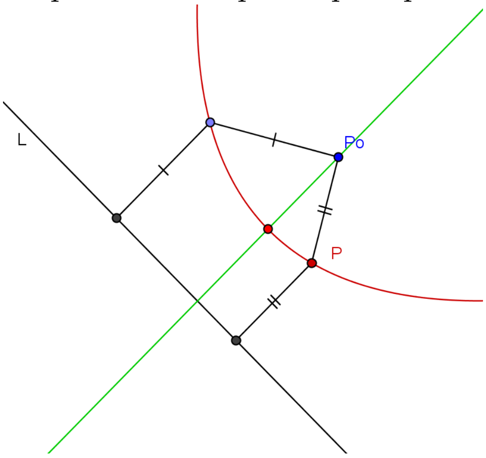
Problema 12 *Construya un sistema lineal de dos ecuaciones y dos incognitas que:*
a) tenga única solución.
b) no tenga solución.
c) tenga infinitas soluciones.
En cada caso, ilustre geométricamente.

1.5. Cónicas.

En esta sección se estudian ciertas curvas del plano que se representan mediante ecuaciones de segundo grado en las variables x e y. De esta familia de curvas se distinguen tres tipos: *parábolas, elipses e hipérbolas*, las cuales se definen a continuación.

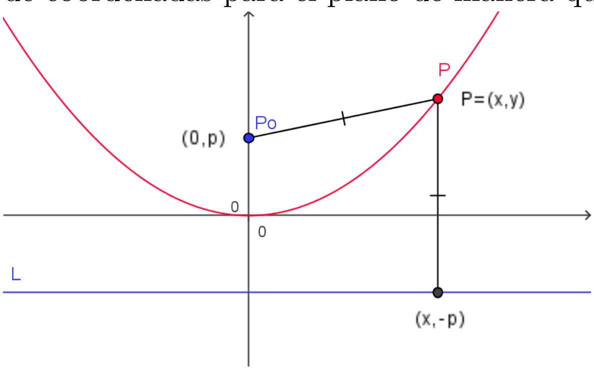
1.5.1. Parábola.

Dada una recta L y un punto P_0 fuera de L, una parábola es el lugar geométrico de los puntos P del plano que equidistan de P_0 y de L.



El punto P_0 se llama *foco* de la parábola y la recta L se denomina *directriz*. La recta perpendicular a L que pasa por P_0 (de color verde) se llama *eje de simetría* y la intersección del eje de simetría con la parábola es el *vértice* de la parábola.

Para obtener una descripción simple de esta curva se comienza considerando un sistema de coordenadas para el plano de manera que: $P_0 = (0, p)$ y $L : y = -p$, como se muestra:



Aquí, para un punto $P = (x, y)$ del plano se tiene $d(P, P_0) = \sqrt{x^2 + (y - p)^2}$,

$d(P,L) = \sqrt{(x-x)^2 + (y+p)^2}$ y luego $P \in$ parábola

$$\begin{aligned}
&\iff d(P,P_0) = d(P,L) \\
&\iff \sqrt{x^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(y+p)^2} \\
&\iff x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2 \\
&\iff x^2 = 4py
\end{aligned}$$

Vemos así que la ecuación de esta parábola es

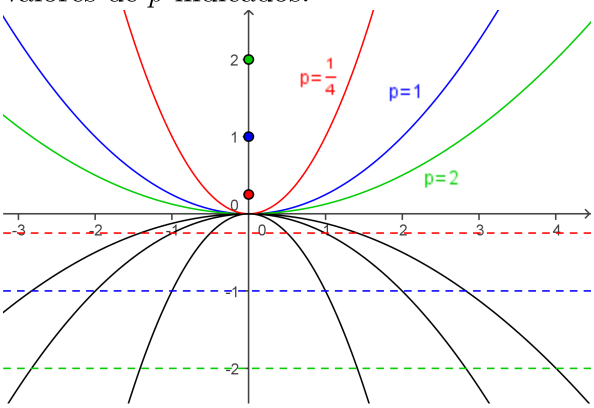
$$x^2 = 4p \cdot y$$

donde p es un parámetro real (constante) que indica la posición del foco (p es la distancia del vértice al foco y también la distancia del vértice a la directriz).

Estas corresponden a una familia de parábolas con vértice en el origen y eje de simetría el eje y (tienen foco ubicado en el eje y). Note que este análisis vale para $p > 0$ y también para $p < 0$.

La ecuación también puede verse en la forma $y = kx^2$ con k una constante real ($k = \frac{1}{4p}$). El hecho que en la ecuación aparezca x sólo elevado al cuadrado determina que por cada punto (x,y) en la parábola también está el punto $(-x,y)$ (su simétrico con respecto al eje y), o sea la curva es simétrica con respecto al eje y.

Las siguientes gráficas muestran las parábolas de esta familia que corresponden a los valores de p indicados:



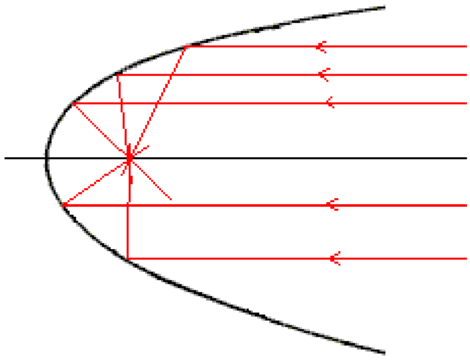
Aunque estas parábolas se ven distintas (unas más anchas y otras más estrechas), geométricamente todas ellas tienen la *misma forma* en el sentido que son *semejantes*, es decir dos cualesquiera de ellas son imagen homotética una de la otra.

Queda de ejercicio describir geométricamente las parábolas cuyas ecuaciones son de la forma

$$y^2 = 4px$$

con p parámetro real no nulo (indicar foco, directriz, vértice, eje de simetría y esbozar sus gráficas).

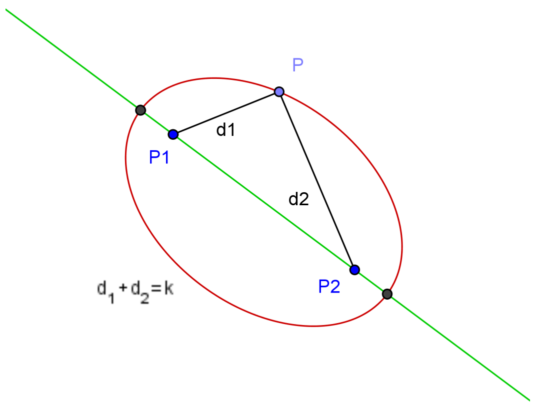
Una de las propiedades geométricas importante de la curva es la *propiedad reflectora* que determina que la parábola refleja sobre el foco un haz de rayos paralelos al eje de simetría e inversamente un emisor situado en el foco enviará un haz de rayos paralelos al eje. Una aplicación de esto está en las antenas parabólicas y en el foco de un vehículo.



1.5.2. Elipse

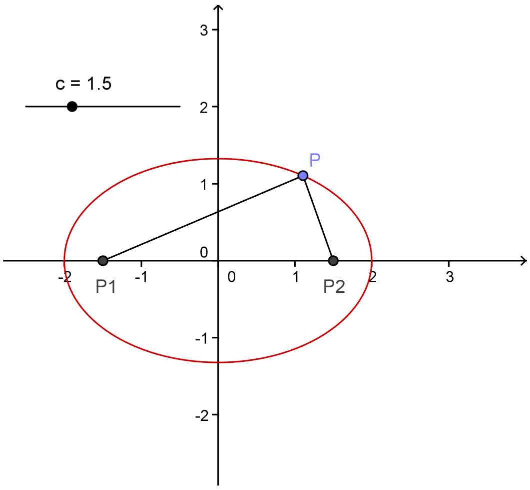
Dados dos puntos P_1 y P_2, una elipse es el lugar geométrico de todos los puntos P tales que la suma de las distancias de P a P_1 y a P_2 es constante. Esto es

$$d\left(P,P_1\right)+d\left(P,P_2\right)=k$$



Los puntos P_1 y P_2 se llaman *focos* de la elipse. Las intersecciones de la recta que pasa por P_1 y P_2 con la elipse son los *vértices*.

Para obtener la ecuación de una elipse en el caso más simple se considera que los focos están situados en el eje de las abscisas (simétricamente) en los puntos $P_1=(-c,0)$ y $P_2=(c,0)$, como se muestra



La condición que define la elipse es

$$\begin{aligned}
d(P,P_1)+d(P,P_2) &= k \\
\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2} &= k \\
\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= k-\sqrt{(x-c)^2+y^2}
\end{aligned}$$

y elevando al cuadrado

$$\begin{aligned}
(x+c)^2+y^2 &= k^2+(x-c)^2+y^2-2k\sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
4cx-k^2 &= -2k\sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
16c^2x^2+k^4-8ck^2x &= 4k^2\left(x^2-2cx+c^2+y^2\right) \\
16c^2x^2+k^4-8ck^2x &= 4k^2x^2-8ck^2x+4k^2c^2+4k^2y^2 \\
4\left(4c^2-k^2\right)x^2-4k^2y^2 &= 4k^2c^2-k^4=k^2\left(4c^2-k^2\right) \\
\frac{4x^2}{k^2}+\frac{4y^2}{k^2-4c^2} &= 1
\end{aligned}$$

Además, si considera el punto $P=(a,0)$ en la elipse (con $a>0$) resulta

$$(a+c)+(a-c)=k \quad \text{y} \quad k=2a$$

y si se considera $P=(0,b)$ en la elipse (con $b>0$) se obtiene

$$c^2+b^2=\left(\frac{k}{2}\right)^2$$

Luego tenemos $\boxed{c^2=a^2-b^2}$ y la ecuación queda

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

donde los parámetros a y b determinan las intersecciones de la elipse con los ejes coordenados. La ubicación de los focos depende de a y b según la relación anterior.

Los puntos $(a,0)$ y $(-a,0)$ son los vértices de la elipse y los ejes coordenados son ejes de simetría. Se habla de eje mayor y eje menor al considerar los segmentos de los ejes encerrados por la elipse.

En esta descripción los focos están situados en el eje x y por tanto $a > b$ (note que $c^2 = a^2 - b^2$). Debe entenderse también que si los focos están en el eje y, en $(0,-c)$ y $(0,c)$, se obtiene la misma ecuación con $c^2 = b^2 - a^2$ y así $b > a$ (grafique la situación).

Otro hecho interesante es que si en la ecuación se considera $a = b$ se obtiene una circunferencia ($c = 0$ y los dos focos coinciden con el origen).

Una de las aplicaciones importante de la elipse está en las *órbitas* de los planetas alrededor del sol, teniendo al sol como un de sus focos. Queda de tarea el revisar en la bibliografía estas aplicaciones.

1.5.3. Hipérbola

Dados dos puntos P_1 y P_2, una hipérbola es el lugar geométrico de todos los puntos P tales que el valor absoluto de la diferencia de las distancias de P a P_1 y a P_2 es constante. Esto es

$$|d(P,P_1) - d(P,P_2)| = k$$

Igual que para la elipse, para deducir su ecuación se escoge el sistema de coordenadas de manera que (los llamados *focos*) $P_1 = (-c,0)$ y $P_2 = (c,0)$ y entonces los puntos $P = (x,y)$ de la hipérbola quedan caracterizados por

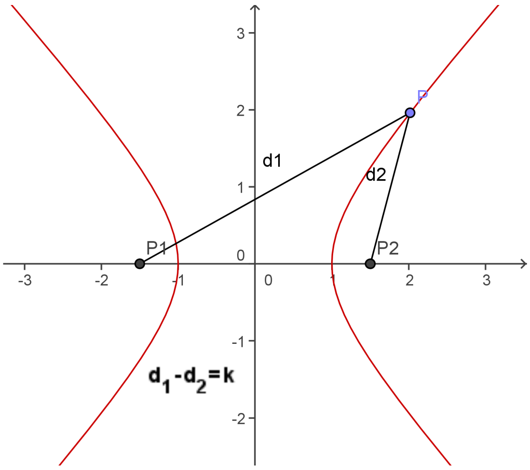
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm k$$

Un razonamiento similar al caso anterior conduce a la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde los parámetros a y b determinan c (la ubicación de los focos) según las relación

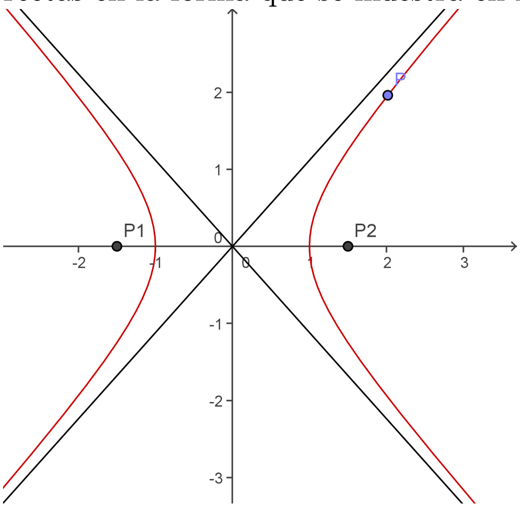
$$c^2 = a^2 + b^2$$



Más adelante se mostrará que la hipérbola posee dos *rectas asíntotas* que son las rectas

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

Intuitivamente, que las rectas sean asíntotas significa que la hipérbola **se acerca** a las rectas en la forma que se muestra en la figura siguiente:



Queda de ejercicio describir la hipérbola de ecuación

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

1.5.4. Traslación paralela de ejes

En la discusión anterior se trataron las cónicas que se encuentran en una posición "privilegiadarespecto al sistema de coordenadas, parábolas con vértice en el origen y eje de simetría alguno de los ejes coordenados, elipses e hipérbolas centradas en el origen y con ejes de simetría los ejes coordenados.

Naturalmente pueden considerarse cónicas en posición más general. Aunque en este capítulo no abordaremos el estudio con todo el grado de generalidad posible, se presentarán las cónicas que resultan de traslaciones de las cónicas de la sección anterior.

La herramienta para este estudio es la *traslación del sistema de coordenadas:*

Dado un sistema de coordenadas xy y un punto fijo $P_0 = (a, b)$ en él, las rectas horizontal y vertical que pasan por P_0 tienen ecuaciones $y = b$ y $x = a$ respectivamente.

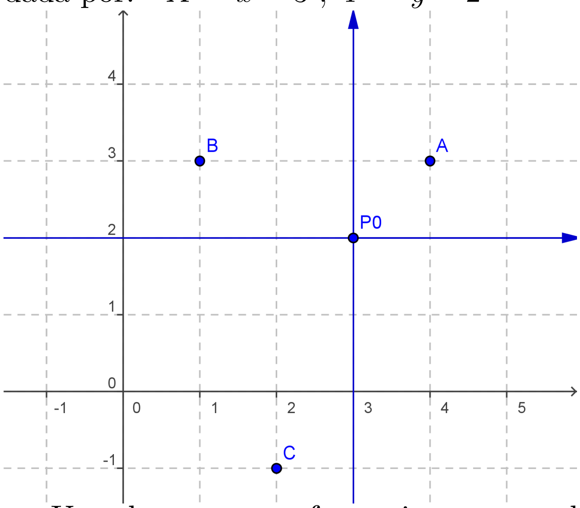
Por lo tanto, si en este plano definimos un segundo sistema de coordenadas XY cuyo eje de las abscisas sea la recta $y = b$ y cuyo eje de las ordenadas la recta $x = a$, entonces la relación entre las coordenadas "mayúsculas y minúsculas"de un punto P del plano está dada por

$$\begin{aligned} X &= x - a \\ Y &= y - b \end{aligned}$$

Por supuesto que el origen del nuevo sistema de coordenadas $(X = Y = 0)$ corresponde al punto P_0 de coordenadas $x = a\ ,\ y = b$ en el sistema original.

Ver la idea gráfica de la siguiente figura.

Cada punto tiene coordenadas en cada sistema, la transformación de coordenadas está dada por: $\quad X = x - 3\ ,\ Y = y - 2$



punto	xy	XY
P_0	$(3, 2)$	$(0, 0)$
A	$(4, 3)$	$(1, 1)$
B	$(1, 3)$	$(-2, 1)$
C	$(2, -1)$	$(-1, -3)$

Usando estas transformaciones se establece que:

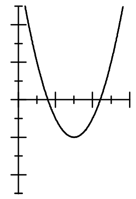
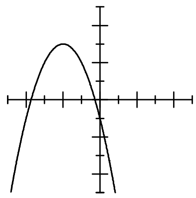
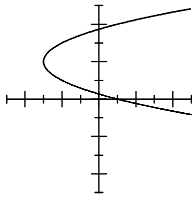
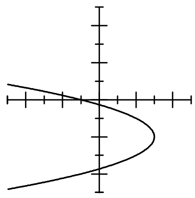
En general, cualquier ecuación de segundo grado en las variables x e y, de la forma

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

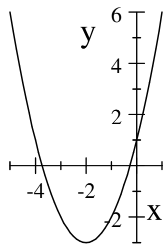
se puede transformar en una de los tipos descritos a continuación. O sea, es la ecuación de una cónica con eje(s) de simetría paralelo a los ejes coordenados. Esta transformación se realiza vía el procedimiento de completación de cuadrados en cada variable.

Note que en esta discusión no se considera en la ecuación el término Cxy (también cuadrático), que llevaría a una cónica “rotada”.

Parábolas.-

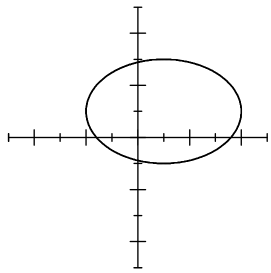
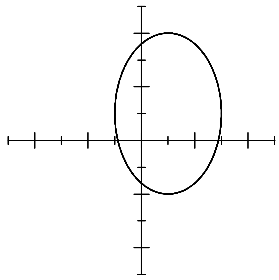
$(x-h)^2 = 4p(y-k)$ $V : (h,k)$ $F : (h, k+p)$ $D : y = k-p$ Eje simet: $x = h$	 $p > 0$	 $p < 0$
$(y-k)^2 = 4p(x-h)$ $V : (h,k)$ $F : (h+p, k)$ $D : x = h-p$ Eje simet: $y = k$	 $p > 0$	 $p < 0$

Ejemplo.- La ecuación $y = x^2 + 4x + 1$ se puede escribir en la forma $(x+2)^2 = y+3$ y corresponde a una parábola con vértice $V = (-2,-3)$. Como $p = \frac{1}{4}$, su foco es $F = \left(-2, -\frac{11}{4}\right)$ y su directriz $D : y = -\frac{13}{4}$



Elipses.- Ecuación general:

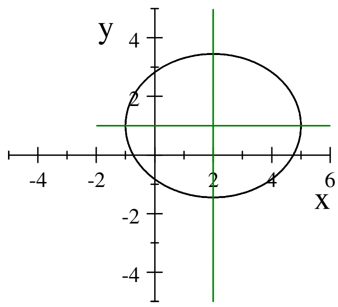
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

<table>
<tr><td>Caso $a>b$.-
$C=(h,k)$
$F_1=(h-c,k)$
$F_2=(h+c,k)$
$V_1=(h+a,k)$
$V_2=(h-a,k)$
donde $c^2=a^2-b^2$</td><td></td></tr>
<tr><td>Caso $a<b$.-
$C=(h,k)$
$F_1=(h,k-c)$
$F_2=(h,k+c)$
$V_1=(h,k+a)$
$V_2=(h,k-a)$
donde $c^2=b^2-a^2$</td><td></td></tr>
</table>

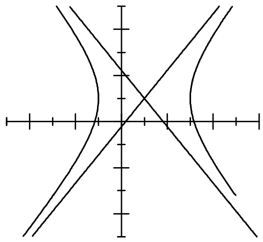
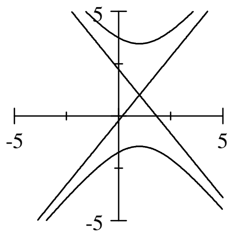
Ejemplo.- La ecuación $2x^2+3y^2-8x-6y-7=0$ se transforma en la ecuación

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{6}=1$$

que corresponde a una elipse con centro $C=(2,1)$. Además, $c^2=9-6=3$ implica $c=\sqrt{3}$. Luego, los focos son $F_1=\left(2+\sqrt{3},1\right)$ y $F_2=\left(2-\sqrt{3},1\right)$



Hipérbolas.-

$\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ $C = (h, k)$ $F_1 = (h-c, k)$ $F_2 = (h+c, k)$ donde $c^2 = a^2 + b^2$	$V_1 = (h-a, k)$ $V_2 = (h+a, k)$ Asíntotas: $L_1 : y-k = \frac{b}{a}(x-h)$ $L_2 : y-k = -\frac{b}{a}(x-h)$	
$\dfrac{(y-k)^2}{b^2} - \dfrac{(x-h)^2}{a^2} = 1$ $C = (h, k)$ $F_1 = (h, k-c)$ $F_2 = (h, k+c)$ donde $c^2 = a^2 + b^2$	$V_1 = (h, k-a)$ $V_2 = (h, k+a)$ Asíntotas: $L_1 : y-k = \frac{b}{a}(x-h)$ $L_2 : y-k = -\frac{b}{a}(x-h)$	

Ejemplo.- La ecuación $4x^2 - 9y^2 + 16x + 18y = 29$ se transforma en

$$\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

Esta es una hipérbola con centro en $C = (-2, 1)$. Además $c^2 = 9 + 4 = 13$ implica $c = \sqrt{13}$. Luego, los focos son $F_1 = \left(-2 - \sqrt{13}, 1\right)$ y $F_2 = \left(-2 + \sqrt{13}, 1\right)$. Las asíntotas son las rectas: $L_1 : y - 1 = \frac{2}{3}(x+2)$ y $L_2 : y - 1 = -\frac{2}{3}(x+2)$