Listado 11

Números complejos

1. Escriba los siguientes números complejos en forma polar (con su argumento principal) y grafiquelos en el plano de Argand.

   a) $z_1 = \frac{1}{1+i}$.

   b) **(P)** $z_2 = \frac{\text{cis}(7\pi)}{4\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)}$.

   c) **(P)** $z_3 = (\sqrt{3} - i)^{12}$.

   d) $z_4 = \frac{(1+\sqrt{3}i)^{-3}}{(1-\sqrt{3}i)^{-6}}$.

2. Determine la forma polar (no necesariamente con el argumento principal) de los siguientes números complejos para $n \in \mathbb{N}$

   a) $(1 + i\sqrt{3})^n + (1 - i\sqrt{3})^n$.

   b) **(P)** $\frac{1}{(1+i)^{2n}} + \frac{1}{(1-i)^{2n}}$.

3. Encuentre las raíces que se indican a continuación y representelas en el plano de Argand:

   a) La raíces cuadradas de $1 + i$.

   b) **(P)** Las raíces quintas de i.

   c) **(P)** Las raíces cuartas de $5 + \sqrt{75}i$.

   d) Las raíces cuartas de 16.

4. Encuentre todos los valores de $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen las siguientes ecuaciones:

   a) $z^2 + \sqrt{3}i = 1$.

   b) **(P)** $z^2 + 3z + \frac{5}{4} = 0$.

   c) **(P)** $z^4 - 2z^2 + i = 0$.

   d) $z^4 - 2z^2 = 0$.

5. Sabiendo que $w = i$ es una de las raíces quintas de z, determine las otras raíces y obtenga z^2.

6. Sabiendo que la suma de las raíces n-esimas de la unidad es siempre cero, demuestre

   a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) = -1.$

   b) **(P)** $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) = -1.$