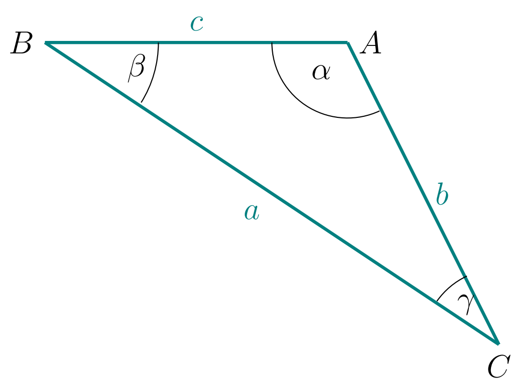
Prof.: Isabel Donoso, Anahí Gajardo, Jorge Moya, Alejandra Pérez
Cinthya Rivas, Mónica Selva, Filip Thiele, Gladis Torres

La semana pasada estudiamos lo que pasaba con el triángulo rectángulo. Pero la mayoría de los triángulos no son así, necesitamos entonces poder aplicar lo que hemos aprendido a otros triángulos, para lo cual usaremos varias *astucias* y ampliaremos las definiciones de la clase pasada.

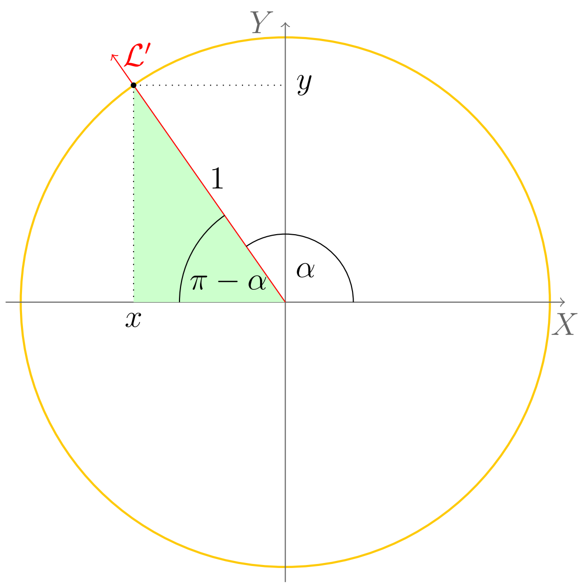


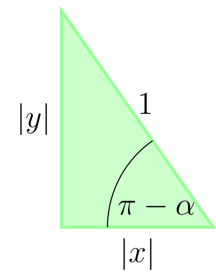
Como vemos, en un triángulo arbitrario pueden haber ángulos mayores que $\frac{\pi}{2}$ (obtusos). Pero NO puede tener MÁS que UN ángulo mayor que $\frac{\pi}{2}$, ya que los ángulos del triángulo suman π, tal como vimos la semana pasada.

Sin embargo, las funciones trigonométricas las hemos definido solo para ángulos menores que $\frac{\pi}{2}$ (agudos). Lo primero que tenemos que hacer es extender nuestra noción de manera conveniente a ángulos obtusos, esto es, ángulos en $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, y lo hacemos valiéndonos de la circunferencia unitaria y la noción de coordenada.

El ángulo $\angle(XO\mathcal{L}')$ de medida α en la figura es obtuso. Definiremos $(\cos(\alpha), \operatorname{sen}(\alpha))$ como las coordenadas (x, y) del punto donde $\mathcal{L}'$ intersecta a la circunferencia. La pregunta es ¿cómo calcular estas coordenadas?. El triángulo rectángulo que se forma lo hemos coloreado en verde, y el ángulo que está en su base mide $\pi - \alpha$, el cual es un ángulo agudo, por lo tanto podemos aplicar las fórmulas vistas en la clase pasada, así: $\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \frac{|y|}{1} = y$, $\cos(\pi - \alpha) = \frac{|x|}{1} = -x$. Por lo tanto, cuando $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ definimos:

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \operatorname{sen}(\pi - \alpha) \quad \text{y} \quad \cos(\alpha) = -\cos(\pi - \alpha).$$





$$
\begin{aligned}
&\operatorname{sen}(\pi-\alpha) = \tfrac{|y|}{1} = y\\
&\cos(\pi-\alpha) = \tfrac{|x|}{1} = -x\\
&\operatorname{sen}(\alpha) \equiv y\\
&\cos(\alpha) \equiv x
\end{aligned}
$$

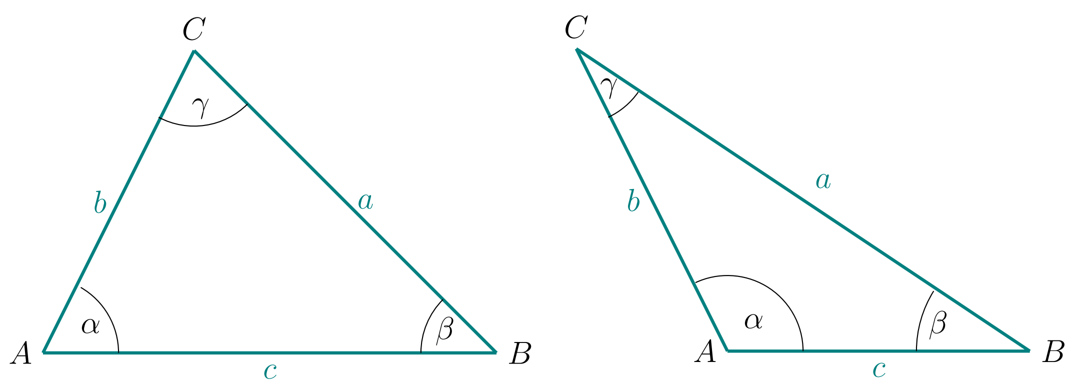
$$
\Longrightarrow \begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha) &= \operatorname{sen}(\pi-\alpha)\\ \cos(\alpha) &= -\cos(\pi-\alpha) \end{aligned}
$$

Teorema del Seno

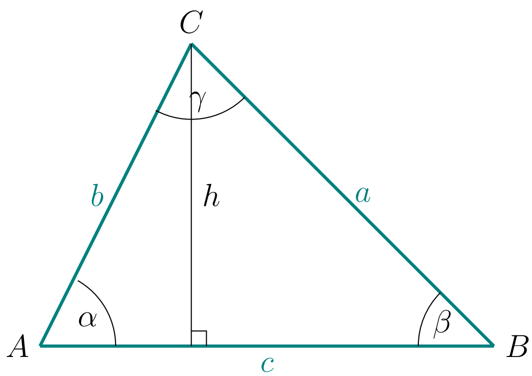
Teorema 1 (del seno). *Consideremos entonces un triángulo cualquiera (ABC), con lados de longitudes a, b y c y ángulos α (opuesto a lado de longitud a), β (opuesto a lado de longitud b) y γ (opuesto a lado de longitud c), entonces se cumplen las siguientes igualdades.*

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

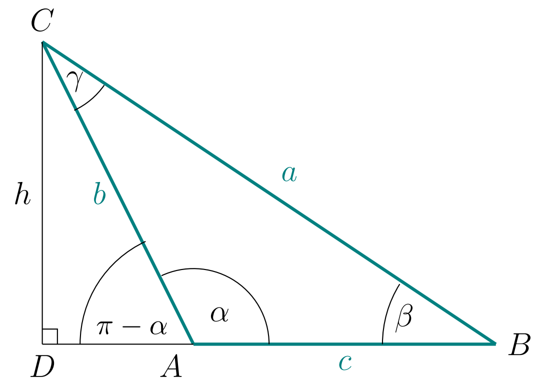
Demostración. Primero que nada dibujamos el triángulo reposando sobre su lado AB. Hay varios casos, según la forma del triángulo, tal como se ve en la figura siguiente, según α, β o ninguno sea mayores que $\frac{\pi}{2}$. El caso en que α es obtuso es análogo al caso en que β lo es, de manera que solo analizaremos el caso α obtuso.



Necesitamos triángulos rectángulos para poder aplicar lo que hemos aprendido, entonces trazamos una línea desde C que sea perpendicular al segmento AB, y decimos que tiene longitud h.



α agudo



α obtuso

(α agudo) Entonces usando la definición del seno tenemos lo siguiente.

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b\operatorname{sen}(\alpha) \;\text{ y }\; \operatorname{sen}(\beta) = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a\operatorname{sen}(\beta)$$

Por tanto,

$$b\operatorname{sen}(\alpha) = a\operatorname{sen}(\beta) \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{b}{\operatorname{sen}(\beta)}.$$

(α obtuso) Nuevamente usamos la definición del seno, pero esta vez sobre el triángulo rectángulo que se forma adyacente al segmento AC por fuera del triángulo. Aplicando las definiciones establecidas al comienzo de este apunte, tenemos lo siguiente.

$$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = b\operatorname{sen}(\alpha) \;\text{ y }\; \operatorname{sen}(\beta) = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a\operatorname{sen}(\beta)$$

Por tanto,

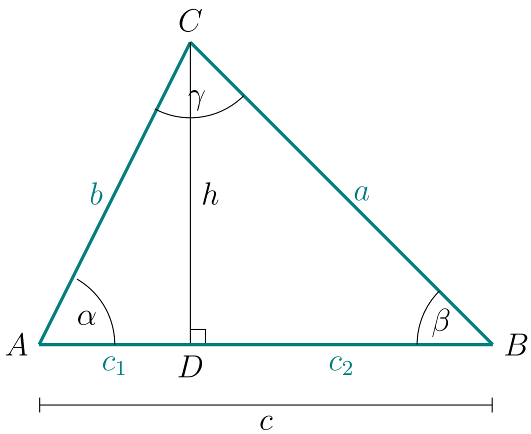
$$b\operatorname{sen}(\alpha) = a\operatorname{sen}(\beta) \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \frac{b}{\operatorname{sen}(\beta)}.$$

Repitiendo esto mismo, pero con la altura sobre otro de los lados del triángulo demostramos el teorema. □

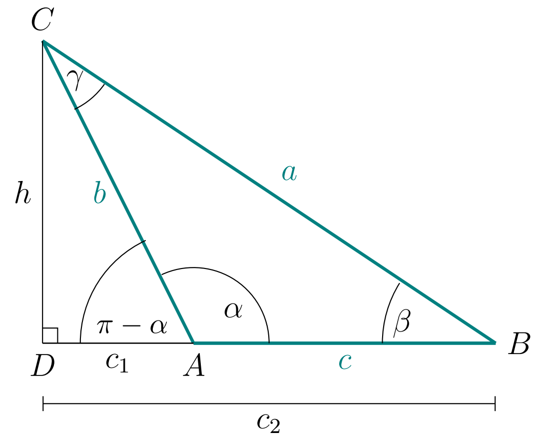
Este teorema nos dice que existe una proporcionalidad entre los senos de los ángulos y las longitudes de sus segmentos opuestos en un triángulo cualquiera. Por lo tanto es un teorema muy útil para trabajar con triángulos de todo tipo, en especial cuando se conocen más ángulos que lados.

Teorema del Coseno

Tomemos nuevamente el triángulo de la figura y su altura para hacer otro análisis. Supongamos que esta altura cae en un punto D sobre la recta que contiene al segmento AB. Llamamos c_1 a la longitud del segmento AD, c_2 a la longitud del segmento DB y c a la longitud del segmento AB. Nuevamente el dibujo cambia dependiendo si α es agudo u obtuso.



α agudo



α obtuso

Lo que sigue es una aplicación muy astuta, cuidadosa y conveniente del Teorema de Pitágoras, la definición del coseno y la definición de c_1. Primero, el Teorema de Pitágoras aplicado a los dos triángulos rectángulos adyacentes al segmento CD.

$$b^2 = h^2 + c_1^2 \quad \text{(triángulo}(ADC)) \tag{1}$$
$$a^2 = h^2 + c_2^2 \quad \text{(triángulo}(BDC)) \tag{2}$$

Despejando h^2 en (1) y (2) y juntando obtenemos:

$$a^2 - c_2^2 = b^2 - c_1^2 \tag{3}$$

Cuando α es agudo tenemos que $c_1 = c - c_2$, mientras que cuando α es obtuso tenemos que $c_1 = c_2 - c$; en cualquiera de los dos casos se tiene que $c_1^2 = (c - c_2)^2 = c^2 + c_2^2 - 2cc_2$. Reemplazando esto en (3) se obtiene lo siguiente.

$$a^2 - c_2^2 = b^2 - c^2 - c_2^2 + 2cc_2 \tag{4}$$
$$a^2 = b^2 - c^2 + 2cc_2 \tag{5}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2cc_2 \tag{6}$$

Usamos la definición del coseno sobre el ángulo β en el triángulo rectángulo (BDC), y obtenemos lo siguiente.

$$\cos(\beta) = \frac{c_2}{a} \Rightarrow c_2 = a\cos(\beta)$$

Reemplazando en (6) se concluye que el Teorema del Coseno aplicado al ángulo β.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ca\cos(\beta)$$

Si repetimos el mismo razonamiento para los demás ángulos, concluimos identidades análogas.

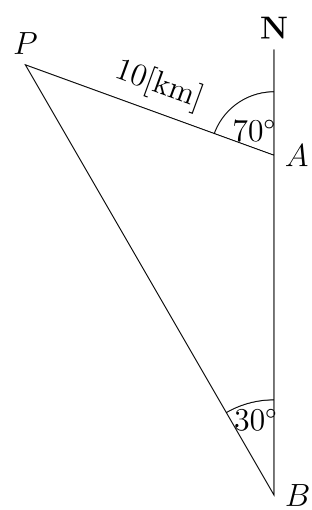
Teorema 2 (del coseno). *Consideremos entonces un triángulo cualquiera (ABC), con lados de longitudes a, b y c y ángulos α (opuesto a lado de longitud a), β (opuesto a lado de longitud b) y γ (opuesto a lado de longitud c), entonces se cumplen las siguientes igualdades.*

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) \end{aligned}$$

Aplicaciones

Ejemplo 3. *Desde cierta ciudad costera A se observa, a $10[\mathrm{km}]$ de A y en dirección $N70°O$, una isla P. Un barco parte desde A en dirección sur y en cierto momento de su travesía se observa desde él la misma isla P, pero en dirección $N30°O$, ¿qué distancia d ha recorrido el barco hasta ese momento?.*

Esta situación corresponde a la mostrada en la figura siguiente.



Si denotamos por δ al ángulo BAP y por γ al ángulo APB se cumple

$$\delta = 180° - 70° = 110° \quad \text{y} \quad \gamma + \delta + 30° = 180° \Rightarrow \gamma = 40°,$$

con lo que, aplicando el teorema del seno a los ángulos APB y ABP obtenemos

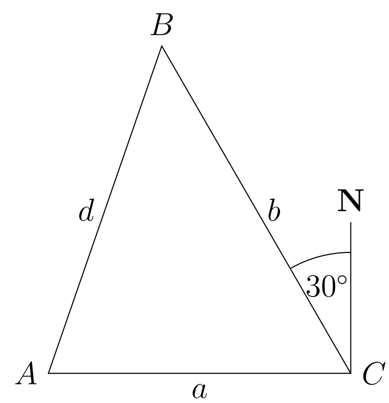
$$\frac{\mathrm{sen}(30°)}{10[\mathrm{km}]} = \frac{\mathrm{sen}(\gamma)}{d} = \frac{\mathrm{sen}(40°)}{d}.$$

De donde

$$d = \frac{10\,\mathrm{sen}(40°)}{\mathrm{sen}(30°)}[\mathrm{km}] \sim 12,856[\mathrm{km}]$$

Ejemplo 4. *A las 12:00 horas, parten del aeropuerto de Concepción dos aviones, A y B, para rastrear un avión que se precipitó al mar. El Avión A viaja directamente al Oeste a* 400[km] *por hora, y el avión B hacia el* $N30°O$ *a* 500[km] *por hora. A las 14:00 horas el avión A encuentra a los sobrevivientes del avión caído y llama por radio al avión B para que acuda y ayude en el rescate. ¿A qué distancia está el avión B del avión A en ese momento? ¿Cuánto tiempo demorará el avión B en llegar al rescate?.*

Consideremos el triángulo ABC con C en el origen, A en el eje X y B en el segundo cuadrante (ver figura).



Como la velocidad es igual a la distancia dividida por el tiempo y han transcurrido 2 horas, se tiene $a = 2 \times 400[\text{km}] = 800[\text{km}]$ y $b = 2 \times 500[\text{km}] = 1000[\text{km}]$.

Por otra parte, como el avión A viaja hacia el Oeste, en ángulo (ACB) mide 60°.

Por el Teorema del Coseno

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{800^2 + 1000^2 - 2 \times 800 \times 1000 \times \cos 60}[\text{km}] \\ &= \sqrt{640{,}000 + 1{,}000{,}000 - 1{,}600{,}000 \times \frac{1}{2}}[\text{km}] \\ &= \sqrt{1{,}640{,}000 - 800{,}000}[\text{km}] \\ &= \sqrt{840000}[\text{km}] \\ &= 100\sqrt{84}[\text{km}] \end{aligned}$$

Entonces el tiempo que tardará el avión B en llegar al lugar del accidente, suponiendo que mantiene la velocidad (y que puede dar un giro instantáneo sin perder ni un segundo)[1] será de:

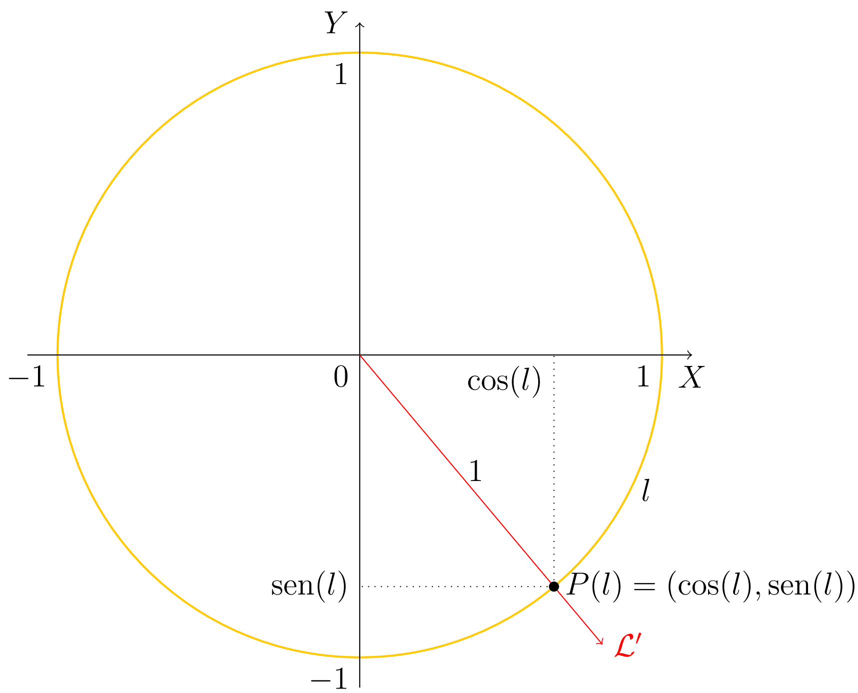
$$t = \frac{d}{v} = \frac{100\sqrt{84}}{500} = \frac{\sqrt{84}}{5} \sim 1,8 \text{ horas.}$$

[1]hipótesis muy irrealista, pero necesaria para responder este problema con las herramientas que tenemos.

Extensión de las funciones trigonométricas a $\mathbb{R}$

Hasta ahora hemos definido las funciones trigonométricas para cualquier ángulo en $[0, \pi]$, pero ¿qué pasa con los demás ángulos? nos interesa definir las funciones en ángulos arbitrarios en $\mathbb{R}$ pues encontramos estos ángulos en el reloj, en una cuerda enrollada a un pilar, en el movimiento rotatorio de los cuerpos, etc.

Consideremos la circunferencia unitaria (centro en origen de coordenadas y radio 1). Su perímetro es igual a 2π.

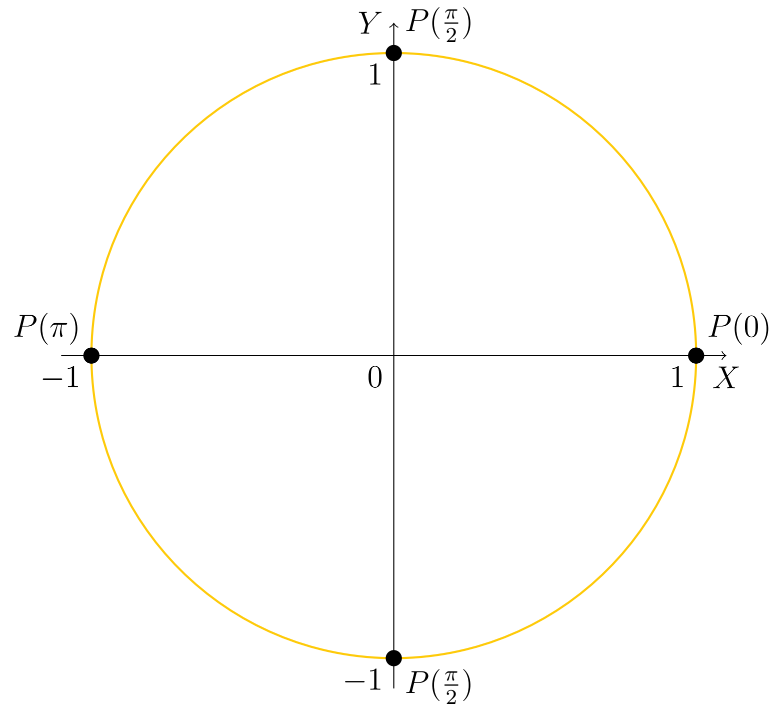


Definición 5. *Dado $l \in \mathbb{R}$, definimos el punto $P(l)$ como sigue.*

- *Si $l \geq 0$, identificaremos con $P(l)$ al punto sobre la circunferencia unitaria que se obtiene luego de recorrer un arco de longitud l sobre ella comenzando en $(1, 0)$ y en sentido anti-horario.*
- *Si $l \leq 0$, identificaremos con $P(l)$ al punto sobre la circunferencia unitaria que se obtiene luego de recorrer un arco de longitud $|l|$ sobre ella comenzando en $(1, 0)$ y en sentido horario.*

Las coordenadas de $P(l)$ definen las funciones trigonométricas $\operatorname{sen}(l)$ y $\cos(l)$ como aquellos números que cumplen $(\cos(l), \operatorname{sen}(l)) = P(l)$.

Los puntos $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ y $(0,-1)$ en la figura corresponden a $P(0), P\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $P(\pi)$ y $P\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ respectivamente.



Deducimos de esto los siguientes valores para el seno y el coseno.

1. $P(0) = (1,0) \Rightarrow \cos(0) = 1, \operatorname{sen}(0) = 0,$
2. $P\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0,1) \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,$
3. $P(\pi) = (-1,0) \Rightarrow \cos(\pi) = -1, \operatorname{sen}(\pi) = 0,$
4. $P\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (0,-1) \Rightarrow \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1,$

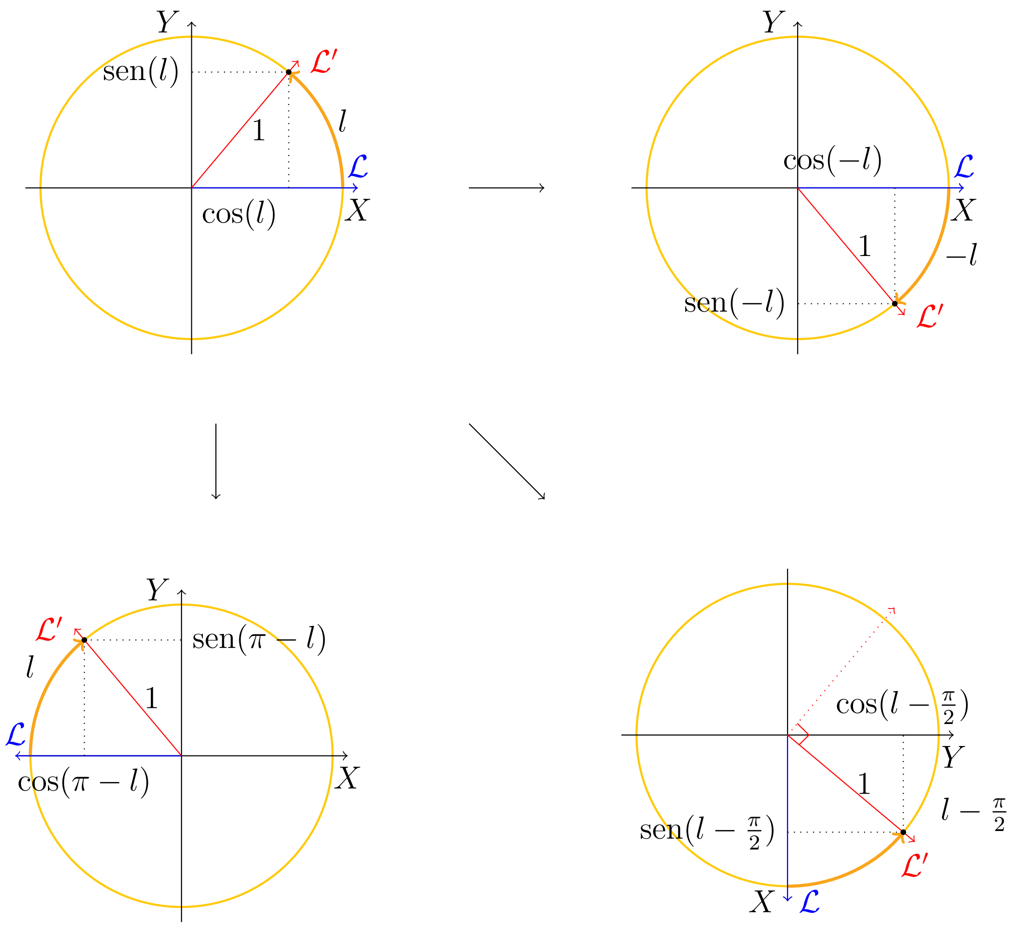
De la definición se desprende además que cualquiera sea $l \in \mathbb{R}$, se cumple que

1. $\cos^2(l) + \operatorname{sen}^2(l) = 1$, tal como vimos en el apunte anterior.
2. $-1 \leq \cos(l) \leq 1$ y $-1 \leq \operatorname{sen}(l) \leq 1$, ya que las coordenadas se mantienen dentro de la circunferencia de radio 1.
3. $\cos(l + 2\pi) = \cos(l)$ y $\operatorname{sen}(l + 2\pi) = \operatorname{sen}(l)$, pues agregar 2π solo hace al punto dar una vuelta completa.

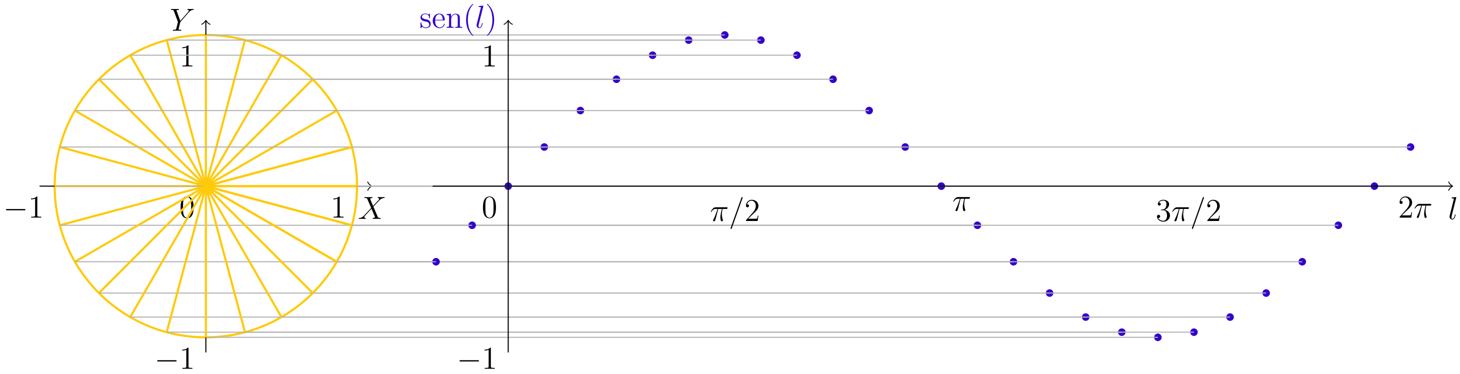
4. $\cos(-l) = \cos(l)$ y $\operatorname{sen}(-l) = -\operatorname{sen}(l)$, pues tomar el ángulo con signo opuesto equivale a reflejar la figura respecto al eje X, se preserva todo pero el signo de la coordenada vertical cambia.

5. $\cos(\pi - l) = -\cos(l)$ y $\operatorname{sen}(\pi - l) = \operatorname{sen}(l)$, pues tomar $\pi - l$ en lugar de l es equivalente a tomar el ángulo respecto a la recta opuesta, y medirlo en sentido inverso, es decir, es equivalente a reflejar la figura respecto al eje Y.

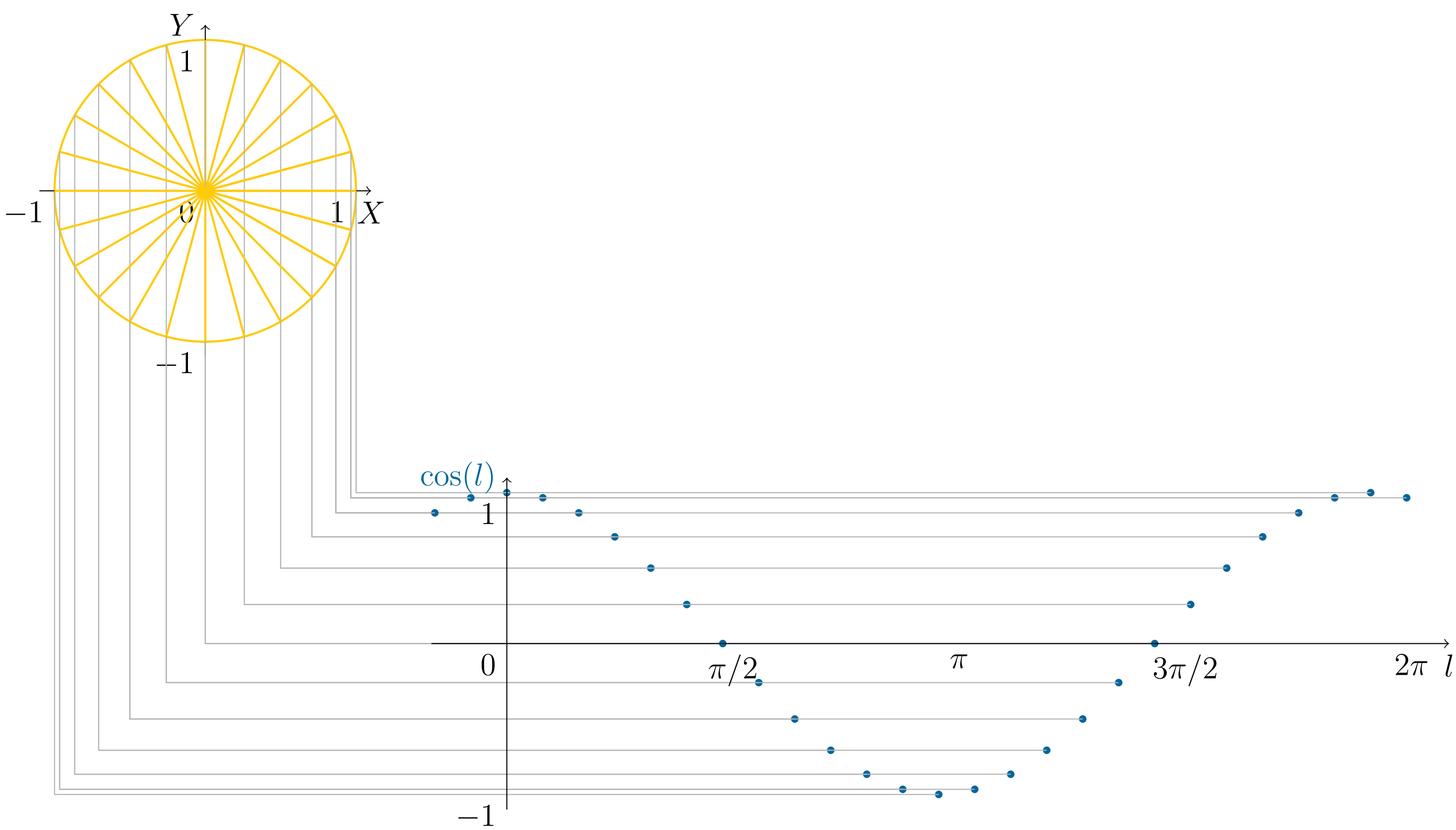
6. $\cos(l - \frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen}(l)$ y $\operatorname{sen}(l - \frac{\pi}{2}) = -\cos(l)$, pues restar $\frac{\pi}{2}$ equivale a rotar la figura en $\frac{\pi}{2}$, esto hace que los ejes se intercambien y lo que antes era positivo en la vertical, para a ser negativo en la horizontal.



Podemos graficar la función seno.



¿Cómo son las demás funciones?



¿Y la tangente?

Dado que la circunferencia es unitaria, es decir, la hipotenusa es de longitud 1, entonces, en el triángulo rectángulo con ángulo de medida l en la figura de la circunferencia unitaria se cumple que el cateto opuesto al ángulo mide $\operatorname{sen}(l)$ mientras que el cateto adyacente mide $\cos(l)$, por lo tanto:

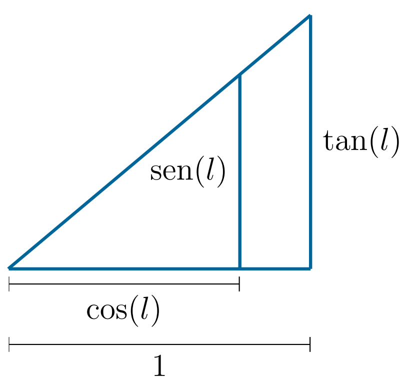
$$\tan(l) = \frac{\operatorname{sen}(l)}{\cos(l)}. \tag{7}$$

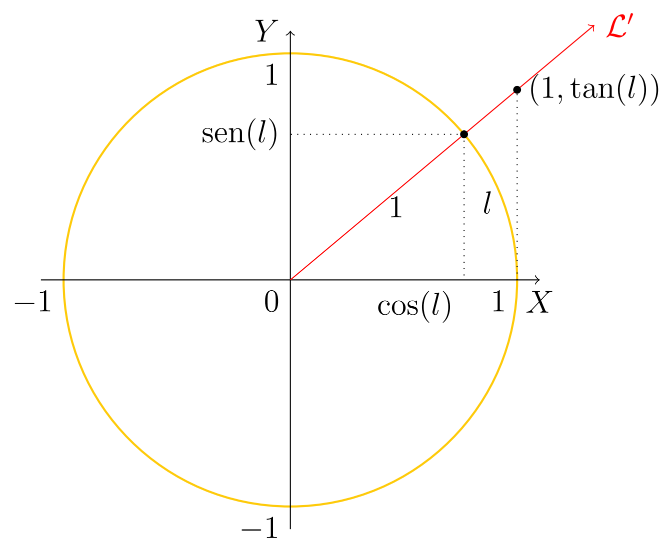
Esta es una buena manera de extender la tangente a los reales, hay que notar sin embargo, que cuando $\cos(l) = 0$, la tangente no se podrá definir, y no se le asignará un valor en ese caso. Pero ese caso corresponde a los ángulos de medida $\pm\pi/2$, es decir los ángulos rectos, lo cual tiene sentido.

Veamos si podemos visualizarla en la circunferencia unitaria, si es que hay algún trazo cuya longitud sea $\tan(l)$. En realidad la tangente aparece de varias maneras en el diagrama de la circunferencia unitaria. Primero observamos que $\tan(l)$ es a 1 como $\operatorname{sen}(l)$ es a $\cos(l)$, lo cual es evidente de la ecuación (7).

$$\tan(l) = \frac{\tan(l)}{1} = \frac{\operatorname{sen}(l)}{\cos(l)}$$

Esto significa que $\tan(l)$ se puede ver como el cateto opuesto de un triángulo rectángulo con el mismo ángulo l, pero con cateto adyacente 1:





Gracias a esta última observación, podemos graficar la función tangente como sigue.