Capítulo 1*

Conjuntos (intuitivos)

En este capítulo, se introducen los conceptos básicos de la teoría intuitiva de conjuntos. En este contexto, el concepto de conjunto es un "concepto primitivo", es decir que no le vamos a dar una definición formal matemática. Sin embargo, a partir del concepto intuitivo de conjunto, vamos a poder desarrollar algunos de los conceptos más básicos de la matemática. Cabe notar que existe también una teoría *formal* de conjuntos, la cual requiere material mucho más avanzado de lo que este texto pretende presentar.

1.1. Definiciones básicas

El concepto primitivo

Empezamos por dar una definición intuitiva (informal) del concepto de conjunto.

Definición 1.1.1 (definición intuitiva de conjunto)**.** Un *conjunto* es una colección bien definida de objetos bien definidos.

Los objetos que constituyen un conjunto son de cualquier naturaleza, pero en este texto nos concentraremos en *objetos matemáticos*, como por ejemplo números, conjuntos, funciones, etc. Cuando decimos "objetos bien definidos", queremos decir que, en algún sentido, tienen una existencia propia (por ejemplo, el número 5, el conjunto de los números enteros, la función cuadrado con dominio y codominio $\mathbb{R}$, etc.). Por ejemplo, podemos considerar el conjunto constituido por los tres objetos siguientes:

el número 3

el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros

la letra a

Notemos en esta descripción el uso de artículos determinados: vemos a la letra a como un objeto "concreto", bien determinado (aunque abstracto), no como una variable (ver Convención 1.1.12).

El conjunto que no tiene ningún elemento se llama *conjunto vacío*, y se denota por $\varnothing$.

Pertenencia

Si C es un conjunto, llamamos *elementos* a los objetos que lo constituyen. Si x es elemento de un conjunto C, se dice también que x *pertenece* a C, que x es *miembro* de C, o que C *contiene* a x. Por convención, no se autoriza que un conjunto sea elemento de sí mismo.

** Extracto del borrador del libro "Números" del profesor Xavier Vidaux del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Concepción*

A menudo en matemática, especialmente en un apunte o en la pizarra, se hace uso de un *lenguaje simbólico* (lo cual llamaremos a veces *lenguaje de pizarra*), para enunciar teoremas, introducir objetos nuevos, definir objetos o conceptos nuevos, o introducir notaciones.

Por ejemplo, si x es un objeto matemático y C es un conjunto, la sucesión de símbolos

$$x \in C$$

se lee como "x es elemento de C". Cuando x y C están fijados (o sea, cuando el lector sabe de qué objetos se trata), la frase "$x \in C$" es un enunciado que sólo puede ser verdadero o falso, es decir, es una *proposición* matemática[1]. Cuando la proposición $x \in C$ es cierta, podemos afirmarlo escribiendo:

Se tiene: $x \in C$.

También hay un símbolo para el concepto de *no-pertenencia*: se puede escribir

$$x \notin C$$

en lugar de "x no es elemento de C".

Ejemplos 1.1.2. 1. La proposición

$$\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$$

es cierta, pero la proposición

$$\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$$

no es cierta, ya que un medio no es un entero. Luego, se tiene: $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ y $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

2. Se tiene $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ y $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, como veremos más adelante.

Igualdad

Se dice que dos conjuntos son *iguales* cuando tienen los mismos elementos. Si C y D son conjuntos, la sucesión de símbolos

$$C = D$$

se puede leer como "C es igual a D" o como "C igual D", dependiendo del contexto.

Decir que dos conjuntos tienen los mismos elementos es equivalente a decir que todo objeto que es elemento de uno es elemento del otro. Luego, si C y D son símbolos que representan conjuntos, en lenguaje simbólico[2] se tiene[3]:

$$\begin{aligned} C = D &\underset{\text{(def.)}}{\iff} C \text{ y } D \text{ tienen los mismos elementos} \\ &\iff \text{para cualquier objeto } x,\ x \text{ es elemento de } C \text{ si y sólo si } x \text{ es elemento de } D. \\ &\iff \forall x (x \in C \iff x \in D). \end{aligned}$$

[1] Acabamos de introducir una *notación* para el concepto de pertenencia. A medida que vayamos avanzando en el libro, veremos varias convenciones que permiten introducir notaciones de manera más informal.

[2] La expresión "(def.)" por debajo del símbolo de equivalencia lógica significa que la equivalencia entre los dos enunciados viene directamente de una definición o de una notación.

[3] El punto que aparece al final del texto centrado puntúa la frase que empieza por "Luego". Es fundamental, en matemática, respetar las reglas básicas de puntuación, teniendo cuidado en no generar ambigüedades cuando se usa el lenguaje simbólico.

Descripción extensiva

Hay esencialmente dos maneras de describir un conjunto. La primera, que se llama *descripción extensiva*, consiste en listar todos sus elementos. Por ejemplo, el conjunto

$$\{5, 37, 8\}$$

es el conjunto cuyos elementos son los números 5, 37 y 8. Notemos el uso de *llaves*, alrededor de la lista de los elementos, y de comas para separar los objetos entre sí. En la notación con llaves, se pueden listar los elementos en cualquier orden, y posiblemente con repetición. Por ejemplo, el conjunto

$$\{37, 5, 5, 37, 8, 37\}$$

tiene como elementos 37, 5 y 8, al igual que el conjunto que $\{5, 37, 8\}$. Por lo tanto, estos dos conjuntos son iguales. Así, vemos que hay más de una manera de describir un conjunto de manera extensiva.

En resumen, en una descripción extensiva de un conjunto:

- el orden de aparición de los elementos no es relevante, y
- las repeticiones no son relevantes.

Terminamos esta sección con un simple lema que usaremos más adelante, y que usamos aquí como pretexto para presentar una *demostración por casos*.

Lema 1.1.3. *Sean a, b y c objetos matemáticos. Si los conjuntos $\{a, b\}$ y $\{a, c\}$ son iguales entonces b es igual a c.*

Demostración. Hacemos una demostración por casos.

- *Caso 1:* $b = a$ (es decir: las letras a y b representan un mismo objeto matemático). En este caso, el conjunto $\{a, b\}$ tiene un solo elemento, luego por hipótesis también $\{a, c\}$ tiene un solo elemento, o sea se tiene $a = c$. Cómo b es igual a a y a es igual a c, deducimos que b es igual a c.
- *Caso 2:* $b \neq a$. En este caso, como b es elemento de $\{a, b\}$, y $\{a, b\}$ es igual a $\{a, c\}$ por hipótesis, deducimos que b es elemento de $\{a, c\}$. Como b es distinto de a, concluimos que b es igual a c.

La proposición queda demostrada, porque en todos los casos posibles llegamos a la conclusión que queríamos. □

En la pizarra queremos ganar tiempo, por lo que a menudo, para enunciar resultados matemáticos (lemas, proposiciones, teoremas etc.), se usa el lenguaje simbólico, o una mezcla de lenguaje simbólico y de lenguaje natural. Así, el Lema 1.1.3 podría estar enunciado de cualquiera de las maneras siguientes, dependiendo del estilo del profesor y de qué tanto esté apurado:

1. Lema: $\forall a, b, c\,(\{a, b\} = \{a, c\} \Longrightarrow b = c)$.
2. Lema: Para objetos a, b y c cualesquiera, se tiene: $\{a, b\} = \{a, c\} \Longrightarrow b = c$.
3. Lema: Para todo a, b, c, $\{a, b\} = \{a, c\}$ implica $b = c$.
4. Lema: $\forall a, b, c$, si $\{a, b\} = \{a, c\}$ entonces $b = c$.

Para poder estudiar matemática a nivel universitario, es absolutamente fundamental aprender a pasar del lenguaje natural al lenguaje simbólico y vice-versa.

Descripción intensiva

La segunda manera de describir un conjunto, que se llama *descripción intensiva*, consiste en identificar una propiedad que *caracterice* a sus elementos. Para poder hacer eso, hacemos uso del concepto de *variable*.

Definición 1.1.4 (definición intuitiva de variable)**.** Una *variable* es una entidad que puede tomar distintos valores dentro de un cierto *ámbito*, el cual es o bien un conjunto, o bien una clase de objetos determinados por una cierta propiedad que tienen en común.

Por ejemplo, el conjunto C siguiente

$$\{4, 6, 8, 10\}$$

es el conjunto de (todos los) números enteros pares mayores que 3 y menores que 11, por lo que una descripción intensiva de dicho conjunto podría ser[4]

$$\{n \in \mathbb{Z} \colon n \text{ es par, es mayor que 3 y es menor que 11}\},$$

lo cual se lee:

"el conjunto de los n en $\mathbb{Z}$ tales que n es par, es mayor que 3 y es menor que 11".

Notemos que esta descripción hace uso de llaves, al igual que la descripción extensiva. Los dos puntos que aparecen entre las llaves se leen "tales que". Además:

- A la izquierda de estos dos puntos viene una variable y un conjunto en lo cual puede variar dicha variable (el ámbito de la variable); en el ejemplo se usa el símbolo n para representar la variable y el conjunto $\mathbb{Z}$ para su ámbito.

- A la derecha de estos dos puntos viene una propiedad que pueden tener o no tener los elementos del ámbito considerado.

A veces se precisa el ámbito de la variable a la derecha de los dos puntos. Por ejemplo, el conjunto C de nuestro ejemplo se puede denotar también como:

$$\{n \colon n \text{ es un } \textbf{número entero} \text{ par mayor que 3 y menor que 11}\}.$$

Nota 1.1.5. En el ejemplo anterior, usamos la letra n como variable para poder describir un conjunto. En este contexto, la letra n no tiene una existencia propia como objeto matemático, es decir: cuando escribimos n, no nos referimos a *la letra* n *del alfabeto del castellano*. En algún sentido, el símbolo n en este contexto se usa como un artificio. De hecho, podríamos haber usado cualquier otro símbolo, ó ningún símbolo. Por ejemplo, el conjunto

$$\{n \in \mathbb{Z} \colon n \text{ es par}\}$$

se puede describir también como

$$\{x \in \mathbb{Z} \colon x \text{ es par}\},$$

o como

$$\{\diamond \in \mathbb{Z} \colon \diamond \text{ es par}\},$$

o como:

El conjunto de todos los números pares.

Observemos que en esta última descripción, no se hace uso de ningun símbolo de variable.

[4]En la descripción del conjunto siguiente, usamos el símbolo de pertenencia en la expresión "$n \in \mathbb{Z}$", sin embargo esta expresión no representa un enunciado, porque el símbolo n no representa un objeto matemático bien definido, sino una variable.

Nota 1.1.6. Cuando se usa un símbolo para una variable, lo importante es que no sea un símbolo que se esté ya usando para otra cosa. Por ejemplo, nunca usaríamos el símbolo $\mathbb{Z}$ como variable, ya que generaría una tremenda ambigüedad: la expresión simbólica $\{\mathbb{Z} \in \mathbb{Z} : \mathbb{Z} \text{ es par}\}$ no tiene ningún sentido matemático.

La gracia de la descripción intensiva, en comparación con la descripción extensiva, es que permite describir conjuntos infinitos, así como conjuntos que serían demasiado grandes para que se pueda listar todos sus elementos. Por ejemplo, el conjunto de los números enteros pares no-negativos que son menores que 10.000 es un conjunto finito, pero toma mucho menos espacio describirlo como

$$\{n \in \mathbb{Z} : n \text{ es par y } 0 \leq n < 10.000\}$$

que con una descripción extensiva:

$$\{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60, 62, 64, 66, 68, 70, 72, 74$$

Una variante en la descripción intensiva consiste en precisar la "forma" de los elementos a la izquierda de los dos puntos, y el ámbito de la ó las viariable(s) a la derecha, junto con propiedades extra si necesario. Por ejemplo, el conjunto de los números pares no-negativos se puede denotar por

$$\{2n : n \in \mathbb{Z} \text{ y } n \text{ es no-negativo}\},$$

lo cual se lee como: "el conjunto cuyos elementos son de la forma $2n$, donde n es un entero no-negativo".

A veces la propiedad que determina cuáles son los elementos de un conjunto se puede adivinar sin ambigüedad al listar unos pocos elementos. Por ejemplo, el conjunto de los números enteros pares no-negativos se puede denotar también por

$$\{0, 2, 4, 6, 8, \dots\},$$

y el conjunto de todos los números enteros pares se puede denotar por

$$\{\dots, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \dots\}.$$

Sin embargo, cuando se usan puntos suspensivos, hay que tener cuidado en que realmente no haya ambigüedad. En particular, el orden y las posibles repeticiones de los elementos que se listan es altamente relevante para que se pueda adivinar la propiedad escondida sin ambigüedad. Por ejemplo, el conjunto

$$\{8, 6, 4, 2, 0, \dots\},$$

se entenderá probablemente como el conjunto de los números enteros pares menores o iguales a 8, es decir, como:

$$\{8, 6, 4, 2, 0, -2, -4, -6, \dots\}.$$

Por lo tanto, aunque sólo el orden de aparición de los elementos cambió, las descripciones extensivas

$$\{0, 2, 4, 6, 8, \dots\} \qquad \text{y} \qquad \{8, 6, 4, 2, 0, \dots\}$$

corresponden a conjuntos distintos. A veces la ambigüedad es poco obvia. Por ejemplo, el conjunto

$$\{2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, \dots\}$$

puede ser entendido como el conjunto cuyos elementos son todos los números impares no negativos junto con los números 2 y 4 o, por ejemplo, como el conjunto cuyos elementos son los números primos junto con sus cuadrados (habría que agregar al menos un elemento a la lista para, quizás, salir de la ambigüedad). En fin, se pueden usar los puntos suspensivos en una descripción intensiva solamente si no hay ambigüedad alguna: el lector debe entender sin ninguna ambigüedad (tomando en cuenta el contexto en lo cual aparece la descripción intensiva) a cuál conjunto el escritor se está refiriendo.

Nota 1.1.7. (Errores comunes) En los ejemplos siguientes, se subrayan las partes relevantes.

1. No se debe escribir:

   El conjunto $\{n \in \mathbb{Z} : n \text{ es par}\}$ es el conjunto de los $\mathbb{Z}$ pares.

   sino:

   El conjunto $\{n \in \mathbb{Z} : n \text{ es par}\}$ es el conjunto de los **enteros** pares.

2. No se debe escribir:

   Sea $C = \{2, 4, 5\}$. No todos los $\mathbb{N}$ en C son impares.

   sino por ejemplo:

   Sea $C = \{2, 4, 5\}$. No todos los **elementos** de C son números impares.

3. No se debe escribir:

   Sea $C = \{2, 4, 5\}$. El $4 \in C$, luego C contiene a un número par.

   sino por ejemplo:

   Sea $C = \{2, 4, 5\}$. El número 4 es elemento de C, luego C contiene a un número par.

   o bien

   Sea $C = \{2, 4, 5\}$. El conjunto C contiene a un número par, ya que $4 \in C$.

Inclusión

Se dice que un conjunto C es un *subconjunto* de un conjunto D si todo elemento de C es elemento de D. Si además C y D son distintos, se dice que C es un subconjunto *propio* de D. Si C es un subconjunto de D, se puede decir también que C *está incluido* en D, o que D *contiene a* C. Escribimos[5]

$$C \subseteq D$$

ó

$$D \supseteq C$$

si C es un subconjunto de D. En lenguaje de pizarra, se tiene:

$$C \subseteq D \underset{\text{(def.)}}{\iff} \forall x (x \in C \Rightarrow x \in D).$$

En particular, para cualquier conjunto C, se tiene trivialmente $C \subseteq C$ (ya que "todo elemento de C es elemento de C").

Escribimos $C \subsetneq D$ ó $D \supsetneq C$ en lugar de $C \subseteq D$ y $D \supseteq C$ para precisar en la notación que C es un subconjunto propio de D — ver Figura 2. En lenguaje de pizarra:

$$C \subsetneq D \underset{\text{(def.)}}{\iff} C \subseteq D \land C \neq D.$$

Escribimos $C \nsubseteq D$ ó $D \nsupseteq C$ si C no es un subconjunto de D. Si C no está incluido en D, es porque *no todos* los elementos de C están en D, o sea, *hay algún* elemento de C que no está en D, o sea:

Existe un objeto que es elemento de C, pero no de D.

En lenguaje simbólico, esto último es

$$\exists x (x \in C \land x \notin D),$$

luego se tiene (en lenguaje de pizarra):

$$C \nsubseteq D \underset{\text{(def.)}}{\iff} \exists x (x \in C \land x \notin D).$$

Por ejemplo, se tiene:

[5] Como el sentido del símbolo $\subset$ cambia según los autores, evitaremos su uso en este texto.

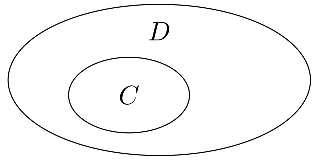

Figura 2: Representación con “manzanas” — Inclusión propia: $C \subsetneq D$

- $\{4,6,8\} \subseteq \{4,6,7,8,63\}$
- $\{4,6,8\} \subsetneq \{4,6,7,8,63\}$
- $\{4,6,8\} \subseteq \{4,6,8\}$
- $\{4,6,8\} \nsubseteq \{4,8\}$
- $\{4,6,8\} \supseteq \{4,8\}$.

El lema siguiente (y su versión en lenguaje simbólico) es muy simple, pero es muy importante porque se usa casi sistemáticamente para demostrar que dos conjuntos son iguales.

Lema 1.1.8. *Dos conjuntos son iguales si y sólo si cada uno está contenido en el otro.*

Este lema se podría haber enunciado también de la manera siguiente:

“Para conjuntos C y D cualesquiera, se tiene $C = D$ si y sólo si $C \subseteq D$ y $D \subseteq C$.”

Esta segunda versión tiene la ventaja de poder traducirse directamente al lenguaje simbólico[6]:

$$\forall C, D \text{ conjuntos}, \; C = D \iff C \subseteq D \wedge D \subseteq C \tag{1.1}$$

Demostración del Lema 1.1.8 (en castellano). Dos conjuntos son iguales si y sólo si[7] tienen los mismos elementos, si y sólo si[8] todos los elementos de uno son elementos del otro, si y sólo si[9] cada uno está contenido en el otro. □

Demostración del Lema 1.1.8 (en lenguaje simbólico). Sean C y D conjuntos. Se tiene

$$\begin{aligned} C = D \; &\underset{\text{(def.)}}{\iff} \forall x (x \in C \iff x \in D) \\ &\iff \forall x (x \in C \implies x \in D \wedge x \in D \implies x \in C) \\ &\iff \forall x (x \in C \implies x \in D) \wedge \forall x (x \in D \implies x \in C) \\ &\underset{\text{(def.)}}{\iff} C \subseteq D \wedge D \subseteq C, \end{aligned}$$

donde

- la segunda equivalencia viene del hecho que para proposiciones A y B cualesquiera, el enunciado $A \iff B$ es equivalente al enunciado $A \implies B \wedge B \implies A$, y
- la tercera equivalencia viene del hecho que el cuantificador universal se *distribuye* sobre la conjunción.

---

[6]El enunciado (1.1) se debe entender como

$$\forall C, D \text{ conjuntos}, \; C = D \iff (C \subseteq D \wedge D \subseteq C),$$

ya que por convención de la Lógica Matemática, los símbolos $\iff$ y $\implies$ se leen después de los símbolos $\wedge$ y $\vee$.

[7]Por definición de igualdad de conjuntos.

[8]Por sentido común.

[9]Por definición de inclusión de conjuntos.

□

Nota 1.1.9. En la demostración en lenguaje simbólico, empezamos por introducir conjuntos arbitrarios C y D (para eso usamos la palabra "Sean" o "Sea"). En general, para demostrar una propiedad que empieza por "para cualquier", "para cada" o "para todo" (*cuantificación universal*), usamos el *principio de generalización*. Este principio consiste en considerar un objeto *arbitrario*, usando una letra para nombrarlo, demostrar que la propiedad que se quiere demostrar es cierta para este objeto arbitrario, y concluir que es cierta *para todo objeto en particular*.

Del Lema 1.1.8, podemos deducir varios corolarios:

Corolario 1.1.10. *Para conjuntos C y D cualesquiera, se tiene $C \neq D$ si y sólo si $C \nsubseteq D$ ó $D \nsubseteq C$.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata del Lema 1.1.8, usando el principio lógico siguiente:

"Si A y B son proposiciones, entonces el enunciado $\neg(A \wedge B)$ es equivalente al enunciado $\neg A \vee \neg B$."

En efecto, dados conjuntos C y D, se tiene:

$$\begin{aligned} C \neq D &\underset{\text{(def.)}}{\iff} \neg C = D \\ &\iff \neg(C \subseteq D \wedge D \subseteq C) \\ &\iff \neg C \subseteq D \vee \neg D \subseteq C \\ &\underset{\text{(def.)}}{\iff} C \nsubseteq D \vee D \nsubseteq C. \end{aligned}$$

donde la segunda equivalencia viene del Lema 1.1.8. □

Corolario 1.1.11. *Para conjuntos C y D cualesquiera, se tiene $C \subsetneq D$ si y sólo si $C \subseteq D$ y $D \nsubseteq C$.*

Demostración. Sean C y D conjuntos. Se tiene (en lenguaje de pizarra):

$$\begin{aligned} C \subsetneq D &\underset{\text{(def.)}}{\iff} C \subseteq D \wedge C \neq D \\ &\iff C \subseteq D \wedge (C \nsubseteq D \vee D \nsubseteq C) \\ &\iff C \subseteq D \wedge D \nsubseteq C, \end{aligned}$$

donde la segunda implicación viene del Corolario 1.1.10, y la tercera del hecho que para proposiciones A y B cualesquiera, el enunciado $A \wedge (\neg A \vee B)$ es equivalente al enunciado $A \wedge B$ (tomar "$C \subseteq D$" para la proposición A, y "$D \nsubseteq C$" para la proposición B). □

Terminamos esta sección con unos comentarios sobre la manera como hemos enunciado el Corolario 1.1.11.

Primero, es un enunciado de tipo *universal*, porque se trata de una propiedad que se cumple para "cualquier" objeto dentro de un cierto ámbito: C y D son variables, que tienen como ámbito los conjuntos, y que están cuantificadas universalmente. Consideremos el siguiente enunciado:

"Dados C y D conjuntos, se tiene $C \subsetneq D$ si y sólo si $C \subseteq D$ y $D \nsubseteq C$."

En esta versión, empezamos por fijar conjuntos C y D arbitrarios (ya no son variables) antes de enunciar una propiedad que cumplen. Sabemos por el principio de generalización que este enunciado es equivalente al enunciado del Corolario 1.1.11.

Segundo, si el contexto lo permite (hace que no haya ambigüedad), también se puede usar la siguiente convención.

Convención 1.1.12. Cuando una letra aparece en un enunciado matemático sin haber sido introducida antes, juega el papel de variable, y se entiende que está cuantificada de manera universal.

Así, como en el contexto de este capítulo, está claro que estamos hablando de conjuntos, podríamos haber enunciado el Corolario 1.1.11 de manera más simple:

Corolario 3.2.4. $C \subsetneq D$ si y sólo si $C \subseteq D$ y $D \nsubseteq C$.

Ejercicios

1. ¿Cuántos elementos tiene el conjunto $\{0,1,2,1,0\}$?

2. ¿Es cierto que $\{0,1,2,3\}$ es igual a $\{3,2,1,0\}$?

3. ¿Es cierto que $\{0,1,2,3,\dots\}$ es igual a $\{3,2,1,0,\dots\}$?

4. ¿Hay ambigüedad en la notación $\{3,5,7,\dots\}$?

5. Dar dos descripciones intensivas distintas del conjunto C de todos los números enteros que son menores o igual a 8, una especificando el ámbito de la variable a la izquierda de los dos puntos, y la otra especificando el ámbito de la variable a la derecha de los dos puntos.

6. Dar una descripción intensiva y una descripción extensiva (la más simple posible) del conjunto C de todos los cuadrados de enteros que son menores o igual a 25.

7. Sea C el conjunto de números enteros $\{1,10,100,1000,10000\}$. Dar una descripción intensiva y una descripción en castellano del conjunto C.

8. Describir en castellano al conjunto $C = \{3k : k \in \mathbb{Z}\}$. ¿Se puede describir este conjunto sin ambigüedad usando la notación con puntos suspensivos?

9. En cada uno de los ítemes siguientes, decir si se tiene $C \subseteq D$, $D \subseteq C$, $C \subsetneq D$ o $D \subsetneq C$.
   - $C = \{0,3,8,4,3,2\}$ y $D = \{3,8,4,2\}$
   - $C = \{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : n \text{ es un cuadrado perfecto}\}$ y $D = \{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : n \text{ es una potencia cuarta perfecta}\}$

10. Dados conjuntos C, D y E, mostrar que si $C \subseteq D$ y $D \subseteq E$ entonces $C \subseteq E$. ¿Sigue siendo cierto si reemplazamos el símbolo $\subseteq$ por el símbolo $\subsetneq$?

11. Mostrar que los conjuntos $C = \{n \in \mathbb{Z} : \exists m, k \in \mathbb{Z} \text{ tales que } m^2 = n \text{ y } m = 2k\}$ y $D = \{4u^2 : u \in \mathbb{Z}\}$ son iguales.

Soluciones

1. Tiene 3 elementos, porque en la descripción extensiva de un conjunto, las repeticiones no son relevantes.

2. Sí, porque en la descripción extensiva de un conjunto, el orden no es relevante.

3. No, porque, por convención, el primer conjunto se entiende como el conjunto de los enteros no-negativos, mientras el segundo se entiende como el conjunto de los enteros menores que 4.

4. Dependiendo del contexto, podría haber ambigüedad, porque podría referirse al conjunto de los números primos impares, o al conjunto de los números impares mayores que 1.

5. Se tiene $C = \{n \in \mathbb{Z} : n \leq 8\} = \{n : n \in \mathbb{Z} \text{ y } n \leq 8\}$.

6. Por ejemplo, se puede escribir

$$
\begin{aligned}
C &= \{n^2 : n \in \mathbb{Z} \text{ y } n^2 \leq 25\} \\
&= \{m \in \mathbb{Z} : \text{existe } y \in \mathbb{Z} \text{ tal que } m = y^2 \text{ y } m \leq 25\} \\
&= \{0,1,4,9,16,25\}.
\end{aligned}
$$

7. Se tiene $C = \{10^n : n \in \mathbb{Z} \text{ y } 0 \leq n \leq 4\}$, lo cual se puede describir en castellano como: "el conjunto de las potencias de 10 mayores o iguales a 1 y menores o iguales a 10000".

8. Se trata del conjunto de todos los números enteros que son múltiplos de 3. Por ejemplo, la descripción $C = \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$ no presenta ambigüedad.

9.
   - No se tiene $C \subseteq D$ porque, por ejemplo, $0 \in C$ pero $0 \notin D$. Luego tampoco se tiene $C \subsetneq D$. Se tiene $D \subseteq C$ porque cada elemento de D es elemento de C. Se tiene $D \subsetneq C$ porque existe un elemento de C que no está en D.
   - Si $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ es una potencia cuarta perfecta, entonces existe $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $n = k^4$, o sea $n = (k^2)^2$. Por lo tanto, toda potencia cuarta es un cuadrado, y deducimos que se tiene $D \subseteq C$. Sin embargo, no todos los cuadrados son potencias cuartas, ya que por ejemplo 4 no es potencia cuarta. Lo demostramos haciendo un *razonamiento por contradicción*. Asumimos que 4 es potencia cuarta. Luego, existe $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $4 = k^4$. Si $k \geq 2$ entonces $k^4 \geq 2^4 = 16 > 4$, lo que contradice la hipótesis que k^4 es igual a 4. Por lo tanto se tiene $k = 0$ ó $k = 1$. Si $k = 0$ ó $k = 1$ entonces k^4 es 0 ó 1, o sea k^4 es distinto de 4. Como llegamos a una contradicción, deducimos que 4 no es una potencia cuarta. En fin, deducimos que se tiene $D \subsetneq C$, y que no se tiene ni $C \subseteq D$ ni $C \subsetneq D$.

10. Asumimos que se tiene $C \subseteq D$ y $D \subseteq E$. Sea x un elemento arbitrario de C. Como se tiene $C \subseteq D$, se tiene $x \in D$, y como $D \subseteq E$, se tiene $x \in E$. Por el principio de generalización, deducimos que todo elemento x de C es elemento de E, o sea que se tiene $C \subseteq E$.
    Si $C \subsetneq D$ y $D \subsetneq E$, entonces en particular $C \subseteq D$ y $D \subseteq E$, luego $C \subseteq E$ por el argumento anterior. Sea x un elemento de E que no es elemento de D (existe tal x porque $D \subsetneq E$ por hipótesis). Como x no es elemento de D y C está incluido en D, este x no es elemento de C tampoco. Luego se tiene $C \neq E$, y deducimos que se tiene $C \subsetneq E$. Por lo tanto, la respuesta a la pregunta es "sí".

11. Demostremos que se tiene $C \subseteq D$. Sea $n \in C$. Sean m y k enteros tales que $n = m^2$ y $m = 2k$ (existen tales m y k por definición de C). Luego, se tiene $n = m^2 = (2k)^2 = 4k^2$. Deducimos que n es elemento de D.

    Demostremos que se tiene $D \subseteq C$. Sea $n \in D$. Sea $u \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 4u^2$ (existe tal u por definición de D). Luego, se tiene $n = (2u)^2$. Eligiendo $k = u$ y $m = 2u$, vemos que $n = m^2$ y $m = 2k$, o sea, n cumple con la propiedad que caracteriza los elementos de C, es decir, n es elemento de C.

    Por el Lema 1.1.8, deducimos que C y D son iguales.

1.2. Operaciones básicas sobre conjuntos

En esta sección y en la siguiente, vamos a ver cómo construir conjuntos nuevos a partir de conjuntos conocidos.

Si C y D son conjuntos, denotamos por

$$C \cup D,$$

lo cual se lee "C unión D", al conjunto cuyos elementos son elementos de C o de D — ver Figura 3.

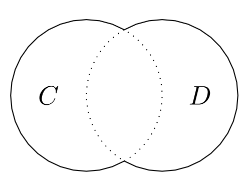

Figura 3: Unión: $C \cup D$

Denotamos por

$$C \cap D,$$

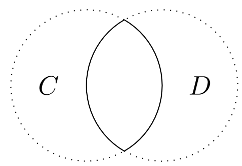

Figura 4: Intersección: $C \cap D$

lo cual se lee "C intersección D", al conjunto cuyos elementos son elementos de ambos C y D — ver Figura 4.

Denotamos por

$$C \smallsetminus D,$$

lo cual se lee "C menos D", o "complemento de D en C", al conjunto cuyos elementos son elementos de C, pero no de D — Ver Figura 5.

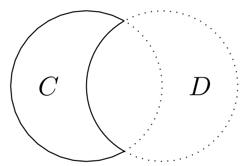

Figura 5: Complemento de D en C: $C \smallsetminus D$

Denotamos por

$$\mathcal{P}(C),$$

lo cual se lee "partes de C", al conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de C.

En lenguaje simbólico, se tiene entonces:

$$C \cup D = \{a \colon a \in C \text{ ó } a \in D\},$$

$$C \cap D = \{a \colon a \in C \text{ y } a \in D\},$$

$$C \smallsetminus D = \{a \colon a \in C \text{ y } a \notin D\}$$

y

$$\mathcal{P}(C) = \{X \colon X \subseteq C\}.$$

El conjunto $\mathcal{P}(C)$ se suele llamar *conjunto potencia de C*.

Finalmente, se dice que C y D son *disjuntos* si $C \cap D$ es el conjunto vacío — ver Figura 6.

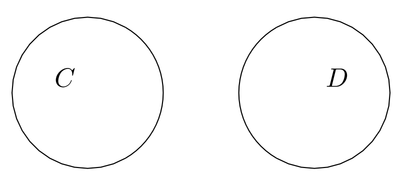

Figura 6: Los conjuntos C y D son disjuntos

Veamos unos ejemplos. Se tiene:

- $\{4, 6, 5\} \cup \{2, 7\} = \{4, 6, 5, 2, 7\}$
- $\{4, 6, 5\} \cup \{2, 4, 7\} = \{4, 6, 5, 2, 4, 7\} = \{4, 6, 5, 2, 7\}$
- $\{4, 6, 5\} \cap \{2, 7\} = \varnothing$

- $\{4,6,5\} \cap \{2,4,7\} = \{4\}$
- $\mathcal{P}(\{2,7\}) = \{\varnothing, \{2\}, \{7\}, \{2,7\}\}$
- $\mathcal{P}(\{4,6,5\}) = \{\varnothing, \{4\}, \{6\}, \{5\}, \{4,6\}, \{4,5\}, \{6,5\}, \{4,6,5\}\}$
- $\{n \in \mathbb{Z} : n \text{ es par}\} \cup \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ es impar}\} = \mathbb{Z}$
- $\{n \in \mathbb{Z} : n \text{ es par}\} \cap \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ es impar}\} = \varnothing$
- $\mathbb{Z} \smallsetminus \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ es par}\} = \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ es impar}\}$.

Ejercicios

1. Dar una descripción extensiva (la más simple posible) de los conjuntos siguientes:

$$
\begin{array}{ll}
C_1 = \{6,5\} \cup \{12,9\} & C_2 = \{6,5\} \cup \{12,6,5,4,7\} \\
C_3 = \{14,16\} \cap \{12,17\} & C_4 = \{14,16,25\} \cap \{2,14,7,25\} \\
C_5 = \mathcal{P}(\{1\}) & C_6 = \mathcal{P}(\{1,2\}) \\
C_7 = \mathcal{P}(\{1,2,2\}) & C_8 = \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \\
C_9 = \mathcal{P}(\{1,2,3\}) \smallsetminus \mathcal{P}(\{1,2\}) & C_{10} = \mathcal{P}(\{\varnothing,4\}) \\
C_{11} = \mathcal{P}(\varnothing) & C_{12} = \{n^2 : n \in \mathbb{Z}\} \cap \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}
\end{array}
$$

2. Dar una descripción la más simple posible de los conjuntos siguientes:
   - $C_1 = \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ es un cuadrado}\} \cap \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ es una potencia cuarta}\}$
   - $C_2 = \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ es positivo}\} \cup \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ es negativo}\}$
   - $C_3 = \mathbb{Z} \smallsetminus \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ es negativo}\}$

3. Sea C un conjunto. Sean a y b objetos. ¿Es cierto que si $C \cup \{a\} = C \cup \{b\}$ entonces $a = b$?

4. Sean n y m enteros no-negativos. Sean C un conjunto con exactamente n elementos y D un conjunto con exactamente m elementos. ¿Cuántos elementos tiene cada uno de los siguientes conjuntos? (si no se puede dar una fórmula exacta, tratar de dar cotas):

$$C \cup C \qquad C \cap C \qquad C \cup D \qquad C \cap D.$$

5. Mostrar que para conjuntos A, B y C cualesquiera se tiene:
   a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
   b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
   c) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
   d) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

6. Dados conjuntos A y B, mostrar que si $A \cup B = A$ entonces $B \subseteq A$.

7. La *Diferencia simétrica* de dos conjuntos A y B, denotada por $A \triangle B$, es el conjunto

$$A \triangle B = (A \cup B) \smallsetminus (B \cap A).$$

   Mostrar que se tiene $A \triangle B = (A \smallsetminus B) \cup (B \smallsetminus A)$.

Soluciones

1. Se tiene:

$$\begin{array}{ll} C_1 = \{6,5,12,9\} & C_2 = \{6,5,12,4,7\} \\ C_3 = \varnothing & C_4 = \{14,25\} \\ C_5 = \{\varnothing,\{1\}\} & C_6 = \{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\} \\ C_7 = \mathcal{P}(\{1,2\}) & C_8 = \{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\} \\ C_9 = \{\{3\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\} & C_{10} = \{\varnothing,\{\varnothing\},\{4\},\{\varnothing,4\}\} \\ C_{11} = \{\varnothing\} & C_{12} = \{0,1,4,9\} \end{array}$$

2.
   - $C_1 = \{n \in \mathbb{Z}: n \text{ es una potencia cuarta}\}$
   - $C_2 = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
   - $C_3 = \{n \in \mathbb{Z}: n \geq 0\}$

3. Si $C = \{1,2\}$, $a = 1$ y $b = 2$, tenemos $C \cup \{a\} = C = C \cup \{b\}$, pero $a \neq b$. Luego, la respuesta es NO.

4. Si X es un conjunto finito, denotamos por $|X|$ la cantidad de elementos de X. Se tiene:

$$|C \cup C| = |C| = n, \quad |C \cap C| = |C| = n, \quad \text{máx}\{n,m\} \leq |C \cup D| \leq n+m, \quad \text{y} \quad 0 \leq |C \cap D| \leq \text{mín}\{n,m\},$$

   donde $\text{mín}\{n,m\}$ es el mínimo entre n y m, y $\text{máx}\{n,m\}$ es el máximo entre n y m.

5. Se tiene

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cup C &= \{x : x \in A \cup B \text{ o } x \in C\} \\ &= \{x : x \in A \text{ o } x \in B, \text{ o } x \in C\} \\ &= \{x : x \in A \text{ o}, x \in B \text{ o } x \in C\} \\ &= \{x : x \in A \text{ o } x \in B \cup C\} \\ &= A \cup (B \cup C) \end{aligned}$$

   y

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap C &= \{x : x \in A \cup B \text{ y } x \in C\} \\ &= \{x : x \in A \text{ o } x \in B, \text{ y } x \in C\} \\ &= \{x : x \in A \text{ y } x \in C \text{ o}, x \in B \text{ y } x \in C\} \\ &= \{x : x \in A \cap C \text{ o } x \in B \cap C\} \\ &= (A \cap C) \cup (B \cap C). \end{aligned}$$

   Los dos otros ítemes se resuelven de manera análoga.

6. Sea x un elemento de B. Luego, como B está incluido en $A \cup B$, también x es elemento de $A \cup B$. Como por hipótesis se tiene $A \cup B = A$, deducimos que x es elemento de A. Concluimos por el principio de generalización.

7. Se tiene:

$$\begin{aligned} A \triangle B &\underset{\text{(def.)}}{=} (A \cup B) \setminus (A \cap B) \\ &= \{x : x \in x \in A \cup B \wedge (x \notin A \cap B)\} \\ &= \{x : x \in x \in A \cup B \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B)\} \\ &= \{x : (x \in A \vee x \in B) \wedge (\neg x \in A \vee \neg x \in B)\} \\ &= \{x : (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin A \vee x \notin B)\} \\ &= \{x : (x \in A \wedge (x \notin A \vee x \notin B)) \vee (x \in B \wedge (x \notin A \vee x \notin B))\} \\ &= \{x : (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\} \\ &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A). \end{aligned}$$