Clase 15

Cálculo 3

Carlos Martínez Ranero

Departamento de Matemática
Universidad de Concepción

Recordatorio de la clase anterior.

- Criterio de la segunda derivada.
- Multiplicadores de Lagrange.

Objetivos de la clase de hoy.

- Multiplicadores de Lagrange.
- Integrales Múltiples.
- Teorema de Fubini.

Multiplicadores de Lagrange

Teorema (multiplicadores de Lagrange)

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, y $f, g : A \to \mathbb{R}$ funciones de clase C^1. Si $\vec{a}$ es un extremo local de f sujeto a la restricción $g(\vec{a}) = c$, y $\nabla(g)(\vec{a}) \neq \vec{0}$, entonces $\nabla(f)(\vec{a}) = \lambda \nabla(g)(\vec{a})$.

El Teorema nos da un medio para encontrar los extremos pero es necesario justificar porque existen.

Ejemplo 1 :

Maximizar la función $f(x, y) = xy^2$ sujeto a la restricción $g(x, y) = x^2 + 4y^2 = 4$.

Multiplicadores de Lagrange

Solución:

- Primero notemos que el conjunto $S = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 = 4\}$ es compacto y por lo tanto se sigue del Teorema de los valores extremos que el máximo existe.
- Ahora utilizaremos el Teorema de multiplicadores de Lagrange para encontrarlo.
- $\nabla(f) = (y^2, 2xy), \nabla(g) = (2x, 8y)$
- Observemos que $\nabla(g)(a, b) \neq \vec{0}$ para $(a, b) \in S$.

Multiplicadores de Lagrange

- de esto tenemos el sistema

$$y^2 = 2\lambda x, \tag{1}$$
$$2xy = 8\lambda y, \tag{2}$$
$$x^2 + 4y^2 = 4 \tag{3}$$

- Si $y = 0$, $x = \pm 2$
- Si $y \neq 0 \implies \lambda, x \neq 0$
- $\frac{(2)}{(1)} \implies \frac{2x}{y} = \frac{4y}{x} \implies 2x^2 = 4y^2$

Multiplicadores de Lagrange

- Sustituyendo en (3) tenemos $6y^2 = 4 \implies$

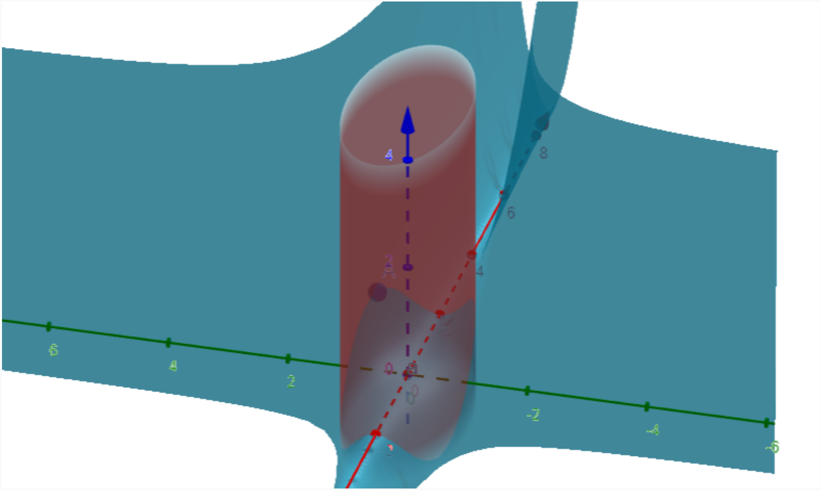
$$x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}, y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad (x, y) = \left(\pm\sqrt{\frac{4}{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

- Comparando los valores obtenidos tenemos
- $f(\pm 2, 0) = 0$
- $f\left(\sqrt{\frac{4}{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{4}{3\sqrt{3}}$
- $f\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -\frac{4}{3\sqrt{3}}$

Multiplicadores de Lagrange

- Por lo tanto el máximo es $\frac{4}{3\sqrt{3}}$ y
- el mínimo es $-\frac{4}{3\sqrt{3}}$.

Multiplicadores de Lagrange

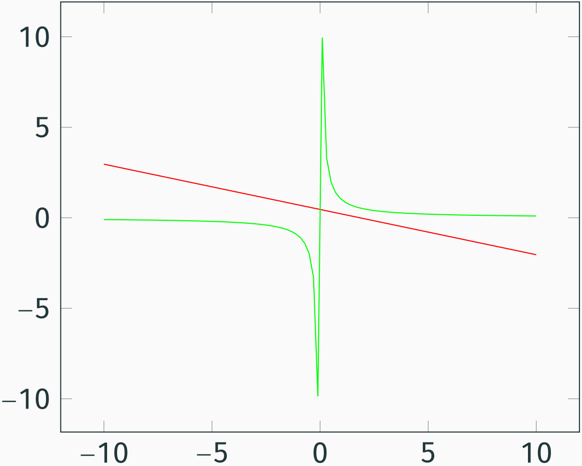


Teorema (multiplicadores de Lagrange)

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, y $f, g_1, \dots, g_k : A \to \mathbb{R}$ funciones de clase C^1. Si $\vec{a}$ es un extremo local de f sujeto a las restricciones $g_1(\vec{a}) = c_1, \dots, g_k(\vec{a}) = c_k$, y los vectores $\nabla(g_1)(\vec{a}), \dots, \nabla(g_k)(\vec{a})$ son linealmente independientes, entonces $\nabla(f)(\vec{a}) = \lambda_1 \nabla(g_1)(\vec{a}) + \cdots + \lambda_k \nabla(g_k)(\vec{a})$.

Ejemplo 2:

Encontrar la distancia de la recta L dada por la ecuación $x + 4y = \frac{15}{8}$ y la hipérbola C dada por $xy = 1$.



Multiplicadores de Lagrange

Solución:

- Sea $f(x,y,u,v) = (x-u)^2 + (y-v)^2$
- Necesitamos minimizar f sujeto a las restricciones $g_1(x,y,u,v) = xy = 1$ y $g_2(x,y,u,v) = u + 4v = \frac{15}{8}$
- $\nabla(f) = (2x - 2u, 2y - 2v, 2u - 2x, 2v - 2y$
- $\nabla(g_1) = (y, x, 0, 0)$
- $\nabla(g_2) = (0, 0, 1, 4)$
- Notemos que $xy = 1$ implica que x, y son distintos de cero y por lo tanto, $\nabla(g_1)$ y $\nabla(g_2)$ son linealmente independientes.

Multiplicadores de Lagrange

- Utilizando los multiplicadores de Lagrange tenemos $\nabla(f) = \lambda_1 \nabla(g_1) + \lambda_2 \nabla(g_2)$

$$2x - 2u = \lambda_1 y \tag{4}$$

$$2y - 2v = \lambda_1 x \tag{5}$$

$$2u - 2x = \lambda_2 \tag{6}$$

$$2v - 2y = 4\lambda_2 \tag{7}$$

$$xy = 1 \tag{8}$$

$$u + 4v = \frac{18}{5} \tag{9}$$

Multiplicadores de Lagrange

- Caso 1: Si $\lambda_1 = 0$ o $\lambda_2 = 0 \implies u = x, v = y$
- $(9) \implies x = \frac{15}{8} - 4y$
- Sustituyendo en (8) se sigue $-4y^2 + \frac{15}{8}y - 1 = 0$
- No tiene soluciones reales.
- Caso 2: Si $\lambda_1 \neq 0$ y $\lambda_2 \neq 0$
- $\frac{(1)}{(2)} = \frac{(3)}{(4)} \implies \frac{1}{4} = \frac{y}{x}$
- $4y^2 = 1 \implies x = \pm 2, y = \pm\frac{1}{2}$ (mismos signos)
- $(2, \frac{1}{2})$ y $(-2, -\frac{1}{2})$ son los puntos que minimizan la distancia y la distancia es $\frac{\sqrt{17}}{8}$.

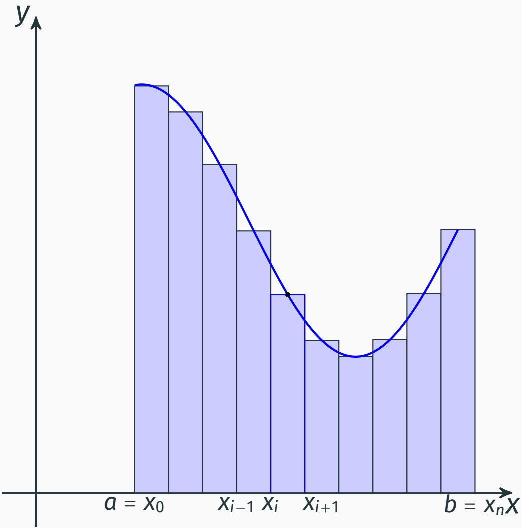
Recordemos que dada una función continua, positiva $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ la integral se define como

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

donde $x_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$.

La integral representa el área bajo de la curva.

Integrales Dobles.



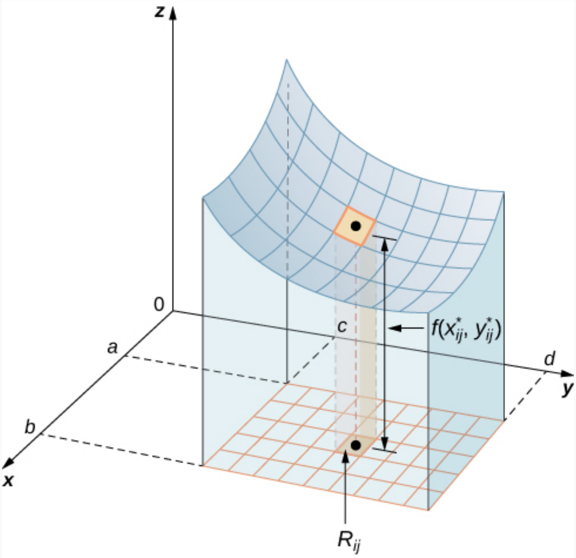
Definición (Partición de un rectángulo)

Sea $R = [a,b] \times [c,d]$ un rectángulo. Una partición es un conjunto $P = \{(x_i, y_j) : a = x_0 < \cdots < x_n = b, c = y_0 < \cdots < y_m = d\}$ Además, definimos $R_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$.

Definición (Refinamiento)

Decimos que una partición Q es un refinamiento de la participación P si $P \subseteq Q$.

Integrales Dobles.

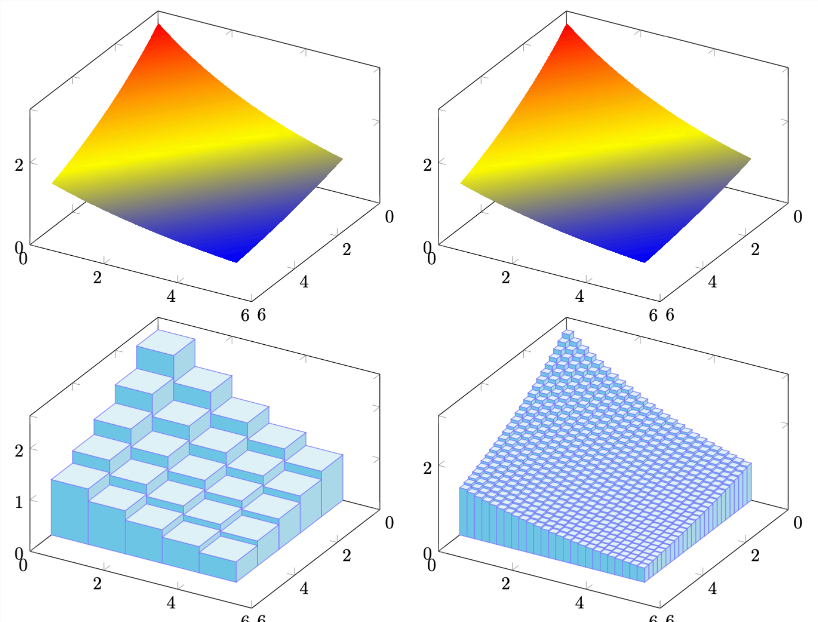


Sea $f : R \to \mathbb{R}$ una función acotada. Denotamos por
$m_{i,j} = minimo\{f(x,y) : (x,y) \in R_{i,j}\}$,
$M_{i,j} = maximo\{f(x,y) : (x,y) \in R_{i,j}\}$
$\Delta_{i,j} = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$,
$\|P\| = \text{máx}\{(x_i - x_{i-1}), (y_j - y_{j-1}) | i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\})$.

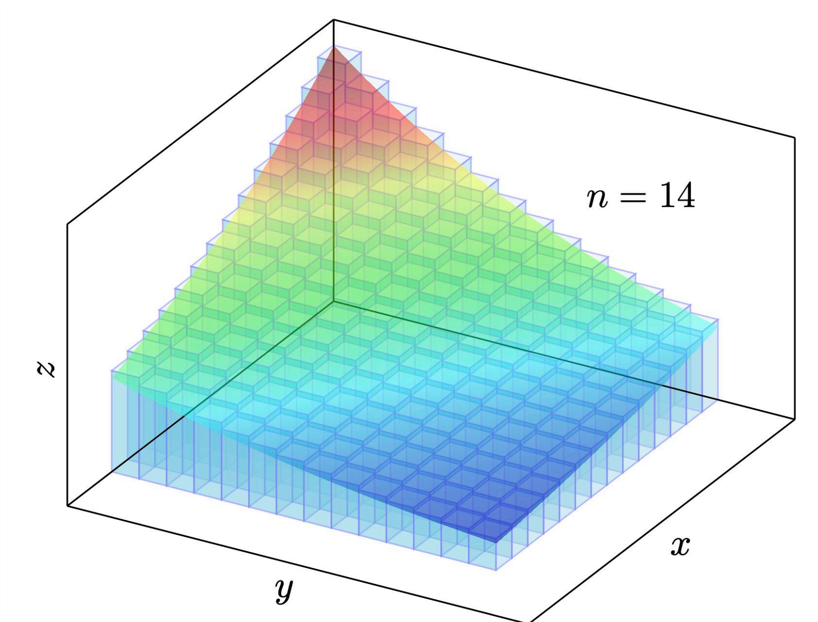
Definición (Sumas Superiores e Inferiores)

Sea $f : R \to \mathbb{R}$ una función acotada y P una partición. Denotamos por
$\underline{S}(f,P) = \sum_{i,j} m_{i,j}\Delta_{i,j}$, $\overline{S}(f,P) = \sum_{i,j} M_{i,j}\Delta_{i,j}$ a la suma inferior y superior, respectivamente.

Integrales Dobles.



Integrales Dobles.



Integrales Dobles

Definición

Sea $f : R \to \mathbb{R}$ una función acotada decimos que f es Riemann integrable si $\lim_{\|P\| \to 0} \underline{S}(f, P) = \lim_{\|P\| \to 0} \overline{S}(f, P)$, y denotamos el límite como $\iint_R f(x, y) dA$.

Teorema

Si $f : R \to \mathbb{R}$ es continua, entonces f es Riemann integrable.

Teorema (Fubini)

Sea $R = [a, b] \times [c, d]$ un rectángulo y $f : R \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces $\iint\limits_R f(x, y)dA$ es igual a

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy$$