Clase 18

Cálculo 3

Carlos Martínez Ranero

Departamento de Matemática
Universidad de Concepción

Recordatorio de la clase anterior.

- Interpretación de integrales dobles.
- Integrales en coordenadas polares.

Objetivos de la clase de hoy.

- Integrales triples.

Coordenadas Polares

Recordemos que las coordenadas polares están dadas por

- $\Phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$
- Observemos que Φ transforma el rectángulo $R = [r_1, r_2] \times [\theta_1, \theta_2]$, de área $(r_2 - r_1)(\theta_2 - \theta_1)$, en un trapecio circular S de área aproximadamente $(r_2 - r_1)(\theta_2 - \theta_1)r_1$.

Teorema (Cambio de Variable Coordenadas Polares)

$$\iint_R f(x, y)d(x, y) = \iint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta)rd(r, \theta).$$

Ejemplo 1:

Calcular $\iint_D 3x + 4y^2 dA$ en la región D contenida en el plano superior y acotada por las curvas $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$.

Solución:

- Observemos que la región $D = \{(x, y) : -2 \leq x \leq 2 \wedge \sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\} =$
- $\{(r, \theta) : 0 \leq \theta \leq \pi, 1 \leq r \leq 2\}$
- $\iint_D 3x + 4y^2 dA = \int_0^\pi \int_1^2 3r \cos\theta + 4r^2 \sin^2\theta (rdrd\theta)$
- $\int_0^\pi r^3 \cos\theta\Big|_1^2 + r^4 \sin^2\theta\Big|_1^2 d\theta$

Coordenadas Polares

- $\int_0^\pi r^3 \cos\theta\Big|_1^2 + r^4 \sin^2\theta\Big|_1^2 d\theta$
- $= \int_0^\pi 7\cos\theta + 15\sin^2\theta d\theta$
- Recordemos la identidad trigonométrica $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$.
- Se sigue que $\int_0^\pi 7\cos\theta + 15\sin^2\theta d\theta$ esta dada por
- $7\sin\theta|_0^\pi + \frac{15\theta}{2}|_0^\pi - \frac{15\sin 2\theta}{4}\Bigg|_0^\pi = \frac{15\pi}{2}$.

Ejemplo 2:

Calcular $\int_D x^2 + y^2 dA$ donde D es la región acotada por las curvas $x^2 + y^2 = 4$ y $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

Solución:

- Dividimos la región D en dos partes $D = D_1 \cup D_2$
- Donde $D_1 = D \cap \{(x, y) : x \leq 0\}$ y $D_2 = D \cap \{(x, y) : x \geq 0\}$.
- D_1 corresponde $\{(r, \theta) : \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \wedge 0 \leq r \leq 2\}$.
- D_2 corresponde $\{(r, \theta) : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \wedge 2\cos\theta \leq r \leq 2\}$.

Coordenadas Polares

- $\iint\limits_{D} x^2 + y^2 dA = \iint\limits_{D_1} x^2 + y^2 dA + \iint\limits_{D_2} x^2 + y^2 dA$
- $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^2 r^2 (r dr d\theta) + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{2\cos\theta}^{2} r^2 (r dr d\theta)$
- $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{r^4}{4}\Big|_0^2 + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^4}{4}\Big|_{2\cos\theta}^2$
- $= 4\pi + \frac{5\pi}{2}$.

Integrales Triples.

Sea $C = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ una caja y $f : C \to \mathbb{R}$ una función continua, excepto en un conjunto de volumen 0, definimos

$$\iiint_C f(x, y, z)dV = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i,j,k=1}^{n,m,\ell} f(x_i, y_j, z_k) volumen C_{i,j,k}$$

donde P es la partición dada por $a \leq x_0 \leq \cdots \leq x_n = b$,
$c \leq y_0 \leq \cdots \leq y_m = d$, $e \leq z_0 \leq \cdots \leq z_\ell = f$,
$C_{i,j,k} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$, y $(x_i, y_j, z_k) \in C_{i,j,k}$.

Teorema(Fubini)

Sea $C = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$ una caja y $f : C \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces

$$\iiint\limits_C f(x,y,z)dV = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x,y,z)dzdydx$$

Ejemplo 3:

Calcular $\iiint\limits_E xyz^2 dV$ donde $E = [0,1] \times [-1,2] \times [0,3]$.

Solución:

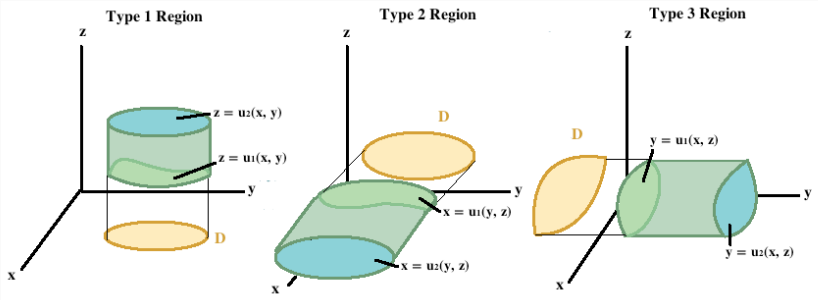
- Por Teorea de Fubini se tiene que
- $\iiint\limits_E xyz^2 dV = \int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^1 xyz^2 dxdydz$
- $= \int_0^3 \int_{-1}^2 \frac{x^2yz^2}{2}\Big|_0^1 dydz = \int_0^3 \int_{-1}^2 \frac{yz^2}{2} dydz$
- $= \int_0^3 \frac{y^2z^2}{4}\Big|_{-1}^2 dz = \int_0^3 \frac{3}{4}z^2 dz = \frac{27}{4}$.

Definición

Una región en $\mathbb{R}^3$ se dice que es de :

- Tipo 1 si se escribe como
  $E_1 = \{(x,y,z) : (x,y) \in D, u_1(x,y) \leq z \leq u_1(x,y)\}$.
- Tipo 2 si se escribe como
  $E_2 = \{(x,y,z) : (y,z) \in D, u_1(y,z) \leq x \leq u_1(y,z)\}$.
- Tipo 3 si se escribe como
  $E_3 = \{(x,y,z) : (z,x) \in D, u_1(z,x) \leq y \leq u_1(z,x)\}$.

Integrales Triples.



Integrales Triples.

Teorema (Fubini generalizado)

- $\iiint_{E_1} f(x,y,z)dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right] dA$
- $\iiint_{E_2} f(x,y,z)dV = \iint_D \left[\int_{u_1(y,z)}^{u_2(y,z)} f(x,y,z)dx\right] dA$
- $\iiint_{E_3} f(x,y,z)dV = \iint_D \left[\int_{u_1(z,x)}^{u_2(z,x)} f(x,y,z)dy\right] dA$

Ejemplo 4

Calcular $\iiint\limits_E \sqrt{x^2+y^2}\,dV$ donde E es la región acotada por el paraboloide $y = x^2 + z^2$ y el plano $y = 4$.

Integrales Triples.

Solución:

- Observemos que E es una región de tipo 3
- $E = \{(x,y,z) : \sqrt{x^2+z^2} \leq y \leq \sqrt{4}, (x,z) \in D\}$ donde $D = \{(x,y) : x^2 + z^2 \leq 4\}$
- Usando el Teorema de Fubini tenemos que
- $\iiint\limits_E \sqrt{x^2+z^2}dV = \iint\limits_D \int_{x^2+z^2}^{4} \sqrt{x^2+z^2}dydA =$
- $\iint\limits_D \sqrt{x^2+z^2}(4-x^2-z^2)dA$

Integrales Triples.

- Pasando a coordenadas polares se tiene
- $\iint\limits_D \sqrt{x^2+z^2}(4-x^2-z^2)dA = \int_0^{2\pi}\int_0^2 r(4-r^2)rdrd\theta =$
- $= \int_0^{2\pi}\left(\frac{4r^3}{3}-\frac{r^5}{5}\right)\Big|_0^2 = 2\pi(\frac{16}{3}-\frac{32}{5}) = \frac{128\pi}{15}.$

Interpretación de integrales triples.

La intepretación de la integral triple $\iiint_E f(x,y,z)dV$ depende de lo que representa la función f.

- Si $f(x,y,z) = 1$ (función constante 1), entonces $\iiint_E f(x,y,z)dV = Volumen(E)$
- Si $f \geq 0$ y f representa la densidad de la región E en cada punto, entonces $\iiint_E f(x,y,z)dV$ representa la masa de la región E.

Interpretación de integrales triples.

- El centro de masa del solido E tiene coordenadas $\left(\frac{M_{yz}}{M}, \frac{M_{xz}}{M}, \frac{M_{xy}}{M}\right)$ donde:
- $M_{yz} = \iiint_E \delta(x,y,z)x dV$, primer momento alrededor del plano yz.
- $M_{xz} = \iiint_E \delta(x,y,z)y dV$, primer momento alrededor del plano xz.
- $M_{xy} = \iiint_E \delta(x,y,z)z dV$, primer momento alrededor del plano xy.

Interpretación de integrales triples.

- El momento de inercia del solido E con respecto al eje L esta dado por:
  $\iiint_E r^2\delta(x,y,z)dV$ donde r es la distancia del punto al eje de rotación L.En particular,
- $I_x = \iiint_E \delta(x,y,z)(y^2+z^2)dV$ inercia con respecto al eje x.
- $I_y = \iiint_E \delta(x,y,z)(x^2+z^2)dV$ inercia con respecto al eje y.
- $I_z = \iiint_E \delta(x,y,z)(x^2+y^2)dV$ inercia con respecto al eje z