Listado 4: Conjuntos li y ld, base y dimensión de espacios vectoriales.

Los problemas marcados con **(P)** serán resueltos en práctica.

1. Encuentre un número $a \in \mathbb{R}$ de modo que el siguiente conjunto de vectores del e.v. real $\mathbb{R}^3$ sea ld $\{(1,2,3)^{\mathrm{T}}, (3,2,1)^{\mathrm{T}}, (5,1,a)^{\mathrm{T}}\}$.

2. Demuestre que los siguientes conjuntos son li (considere como cuerpo a $\mathbb{R}$).

   (a) **(P)** $B = \{x^3, x^2-1, x-1\}$

   (b) $B = \{(2,1,3)^{\mathrm{T}}, (2,1,-2)^{\mathrm{T}}\}$

   (c) (es ld) $B = \{(1,0,0)^{\mathrm{T}}, (0,1,1)^{\mathrm{T}}, (1,1,1)^{\mathrm{T}}\}$,

   (d) $B = \{1, x-1, (x-1)(x-2)\}$.

   ¿Es el primero una base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$? ¿Son el segundo y el tercero bases de $\mathbb{R}^3$? ¿Es el último una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$? Justifique sus respuestas. Si su respuesta es negativa, complete los conjuntos a bases de los espacios correspondientes.

3. Considere los siguientes espacios vectoriales V sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ indicado. Determine una base para cada uno de los siguientes subespacios vectoriales U de V.

   (a) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $U = \{(x,y,z) \in V \ : \ x = y\}$,

   (b) $V = \mathbb{C}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $U = \{(x,y) \in V \ : \ x + \overline{y} = 0\}$,

   (c) $V = \mathbb{C}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $U = \{(x,y) \in V \ : \ \mathrm{Re}(x) = \mathrm{Re}(y)\}$,

   Determine las coordenadas de los siguientes vectores de cada s.e.v. U con respecto a la base encontrada

   (a) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$,

   (b) $u = \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}$,

   (c) $u = \begin{pmatrix} i \\ -i \end{pmatrix}$.

4. Muestre que el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$ $\left\{\left(2+\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\right)^{\mathrm{T}}, \left(1, -1+\sqrt{3}\right)^{\mathrm{T}}\right\}$ es ld si se considera a $\mathbb{R}^2$ un e.v. real, pero es li si se considera a $\mathbb{R}^2$ un e.v. sobre $\mathbb{Q}$.

5. Demuestre que los siguientes conjuntos son ld y encuentre en cada caso un conjunto li que genere el mismo subespacio (considere como cuerpo a $\mathbb{R}$).

   (a) $B = \{x^3 + x^2 + x, x^2 + 1, x - 1, x^3\}$,

   (b) **(P)** $B = \{(1,1,0)^{\mathrm{T}}, (0,1,1)^{\mathrm{T}}, (1,1,1)^{\mathrm{T}}, (2,5,3)^{\mathrm{T}}, (5,3,1)^{\mathrm{T}}\}$.

6. Demuestre que el conjunto $B = \{2-i, 1-2i\}$ es li considerando a $\mathbb{C}$ como e.v. sobre $\mathbb{R}$, pero es ld considerando a $\mathbb{C}$ como e.v. sobre $\mathbb{C}$.

7. Demuestre que los siguientes pares de conjuntos generan el mismo subespacio vectorial.

(a) $A = \{(1,2,0)^{\mathrm{T}}, (2,1,2)^{\mathrm{T}}\}$ y $B = \{(3,3,2)^{\mathrm{T}}, (-1,1,-2)^{\mathrm{T}}, (1,5,-2)^{\mathrm{T}}\}$.

(b) $A = \{x^2+1, 1+x, x^3\}$ y $B = \{x^3+x^2+1, x^3+x+1, x^3\}$.

En ambos casos el conjunto A es li. Reduzca, de ser necesario, a B a una base C de $\langle A \rangle$ y complete ambos conjuntos (A y C) a una base de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ respectivamente.

8. Considere los subespacios vectoriales W_1 y W_2 de los espacios vectoriales V indicados. De cada uno de ellos

   - determine base y dimensión,
   - analice si $W_1 + W_2 = V$ y, de no cumplirse la igualdad, determine W_3 de modo que $(W_1 + W_2) + W_3 = V$,
   - determine si $W_1 + W_2$ es suma directa.

   (a) **(P)** $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$, $W_1 = \{p \in V \ : \ p \text{ es par}\}$, $W_2 = \{p \in V \ : \ p(1) = 0\}$,

   (b) $V = \mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$, $W_1 = \left\{(x,y,z)^{\mathrm{T}} \in V \ : \ 2x + z = 0\right\}$, $W_2 = \left\langle \left\{(1,0,0)^{\mathrm{T}}\right\}\right\rangle$.

9. Considere el espacio vectorial real $\mathbb{C}^2$. Sean

$$\mathcal{B}_U = \{(-i, 2+2i)^{\mathrm{T}}, (-2+i, 0)^{\mathrm{T}}\} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{B}_W = \{(-1, 1+i)^{\mathrm{T}}, (i, -i)^{\mathrm{T}}\},$$

   bases de los subespacios vectoriales de $\mathbb{C}^2$, U y W, respectivamente.

   (a) Encuentre una base para $U + W$.

   (b) ¿Es $U + W = \mathbb{C}^2$? Justifique su respuesta.

   (c) ¿Es $U + W$ una suma directa? Justifique su respuesta.

10. **(P)** Sean V un $\mathbb{K}$-e.v., $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, un conjunto li de vectores en V y $w \in V$. Demuestre que si el conjunto $\{v_1 + w, v_2 + w, v_3 + w, v_4 + w\}$ es ld entonces $w \in \langle B \rangle$.

11. Sean V un $\mathbb{K}$-e.v. y $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, un conjunto li de vectores de V. Demuestre que el conjunto $\{v_1 - 2v_2, v_2, v_3, v_4\}$ es li.

12. Sean V un $\mathbb{K}$-e.v. y $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, un conjunto li de vectores de V. Demuestre que el conjunto $\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4\}$ es li.

13. Sean V un $\mathbb{K}$-e.v. y $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, un conjunto li de vectores de V. ¿Para qué valores de $\alpha \in \mathbb{K}$ se cumple que el conjunto $\{v_2 - v_1, \alpha v_3 - v_2, v_1 - v_3\}$ es li? Justifique su respuesta.

14. Sean V un $\mathbb{K}$-e.v., $\{v_1, v_2, v_3\}$, un conjunto ld de vectores de V y $\{v_2, v_3, v_4\}$, un conjunto li de vectores de V. Muestre que entonces v_1 es combinación lineal de v_2 y v_3. Muestre también que v_4 no es combinación lineal de v_1, v_2 y v_3.

15. Sea $B = \{p_0, p_1, p_2, p_3\} \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ tal que $p_j(5) = 0$ para todo $j \in \{0,1,2,3\}$. Demuestre que B es ld.

16. Suponga que $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es un conjunto li de vectores en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V. Decida si los siguientes conjuntos son li. Justifique sus respuestas.

(a) $\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, \ldots, v_{n-1} - v_n, v_n - v_1\}$,

(b) $\{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, \ldots, v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1}, v_1 + v_2 + \ldots + v_n\}$,

(c) $S \setminus \{v_i\}$, siendo v_i un elemento cualquiera de S.

17. Suponga que $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V. Decida si los siguientes conjuntos son base de V. Justifique sus respuestas.

    (a) $\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, \ldots, v_{n-1} - v_n, v_n - v_1\}$,

    (b) $\{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, \ldots, v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1}, v_1 + v_2 + \ldots + v_n\}$,

    (c) $S \setminus \{v_i\}$, siendo v_i un elemento cualquiera de S.

    En los casos en que el conjunto sea base de V determine las coordenadas de $u, v \in V$ con respecto a él siendo u y v los vectores que satisfacen

$$[u]_S = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad [v]_S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

18. Considere el espacio vectorial real $\mathcal{P}_{2n}(\mathbb{R})$ de los polinomios de grado menor o igual que $2n$, $n \in \mathbb{N}$, con coeficientes reales con las operaciones usuales de suma de polinomios y producto por un escalar real. Sea además U el subespacio vectorial de $\mathcal{P}_{2n}(\mathbb{R})$ que satisface

$$U = \left\{ p \in \mathcal{P}_{2n}(\mathbb{R}) \ : \ p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + a_n x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{2n-i} \right\}.$$

    Note que los polinomios en U son tales que $\forall\, j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ el coeficiente de x^j es igual al de x^{2n-j}, es decir, el término independiente es igual al coeficiente de x^{2n}, el coeficiente de x es igual al de x^{2n-1} y así sucesivamente.

    (a) Determine ua base para U.

    (b) Muestre que $U \oplus \mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{R}) = \mathcal{P}_{2n}(\mathbb{R})$.

19. Analice si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

    - Si V es un $\mathbb{K}$-e.v. de dimensión n, entonces todo conjunto li con n vectores de V es base de V.
    - Si V es un $\mathbb{K}$-e.v. de dimensión n, y S es un conjunto con n vectores de V que genera a V, entonces S es base de V.
    - **(P)** Si $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es base de V, entonces $\langle \mathcal{B}_1 \rangle \oplus \langle \mathcal{B}_2 \rangle = V$.
    - **(P)** Si $\mathcal{B}$ es base de V y $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}$, entonces $\langle \mathcal{B}_1 \rangle \oplus \langle \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_1 \rangle = V$.

20. Muestre que si $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V, entonces $\mathcal{B}_2 = \{a_1 v_1, a_2 v_2, \ldots, a_n v_n\}$ también lo es si y solo si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son escalares distintos de cero. Determine las coordenadas de $v_1 + 2v_2 + \ldots + nv_n$ con respecto a $\mathcal{B}_1$ y con respecto a $\mathcal{B}_2$.