Álgebra II. 525150
Listado para clase práctica 6: 7 de mayo
Prof.: A. González, F. Jara, M. Selva.

Listado 6: Transformaciones lineales inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.

Los problemas marcados con **(P)** serán resueltos en práctica.

1. Decida si las transformaciones en problemas 2, 3, 6, 8, 9 y 10 del listado 5 son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas. Si la transformación no es inyectiva, determine dos vectores del espacio de partida que tengan la misma imagen. Si la transformación no es sobreyectiva, encuentre un vector en espacio de llegada que no pertenezca a la imagen de la transformación.

   (P): Responder preguntas anteriores para transformaciones en problema 8 del listado 5.

2. Sean U y V espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Demuestre que

$$\mathcal{L}(U,V) = \{T : U \to V \ : \ T \text{ es lineal}\}$$

   es, con las operaciones de suma de transformaciones lineales y producto de transformación lineal por escalar, un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

   Observación: $\mathcal{L}(U,V)$ es el conjunto de las transformaciones lineales entre los espacios vectoriales U y V.

3. **(P)** Considere el $\mathbb{K}$-e.v. $\mathcal{L}(U,V)$. Demuestre que

$$\mathcal{N}(U,V) = \{T \in \mathcal{L}(U,V) \ : \ T \text{ no es inyectiva}\} \subseteq \mathcal{L}(U,V)$$

   no es s.e.v. de $\mathcal{L}(U,V)$.

   Sugerencia: Demuestre que $\mathcal{N}(U,V)$ no es cerrado para la suma.

4. Considere el $\mathbb{K}$-e.v. $\mathcal{L}(U,V)$. Demuestre que

$$\mathcal{O}(U,V) = \{T \in \mathcal{L}(U,V) \ : \ T \text{ no es sobreyectiva}\} \subseteq \mathcal{L}(U,V)$$

   no es s.e.v. de $\mathcal{L}(U,V)$.

5. **(P)** Sean U, V y W espacios vectoriales sobre cierto cuerpo K y $T : U \to V$ y $S : V \to W$, transformaciones lineales. Demuestre que $S \circ T : U \to W$ también es una transformación lineal.

6. Sean U, un $\mathbb{K}$-e.v. y $T : U \to U$ y $L : U \to U$, transformaciones lineales tales que $T \circ L = L \circ T$. Demuestre que si $u \in \ker(L)$, entonces $T(u) \in \ker(L)$.

7. Sean U y V espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Sea $T : U \to V$ una transformación lineal entre ellos. Suponga además que $u_1, u_2, u_3, u_4 \in U$.

(a) Demuestre que si $\{T(u_1), T(u_2), T(u_3), T(u_4)\}$ es li, entonces $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ es li.

(b) Encuentre una transformación T que convierta al conjunto li $\{w_1, w_2, w_3, w_4\} \subseteq U$ en un conjunto ld.

(c) Demuestre que si T es inyectiva y $\{w_1, w_2, w_3, w_4\} \subseteq U$ es li, entonces el conjunto $\{T(w_1), T(w_2), T(w_3), T(w_4)\}$ también es li, es decir, una transformación lineal inyectiva transforma a un conjunto li en un conjunto li.

8. **(P)** Considere las transformaciones lineales

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad T((x, y, z)^{\mathrm{T}}) = (x + y + z, y + z, z)^{\mathrm{T}},$$
$$L : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3, \qquad L(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = (a_0, a_1 + a_2, a_0 + a_1)^{\mathrm{T}}.$$

(a) Demuestre que T es invertible.

(b) Demuestre que

$$S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

tal que

$$S((x, y, z)^{\mathrm{T}}) = (x - y, y - z, z)^{\mathrm{T}},$$

es la inversa de T.

(c) Considere

$$R : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$$

tal que

$$R((1, 0, 0)^{\mathrm{T}}) = 1 - x + x^2, \quad R((0, 1, 0)^{\mathrm{T}}) = x^2, \quad R((0, 0, 1)^{\mathrm{T}}) = x - x^2.$$

Demuestre que $L \circ R = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ y que $R \circ L = \mathrm{id}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}$. ¿Puede asegurar que L es biyectiva?

(d) ¿Cuál es la pre-imagen por T de $(1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$? ¿Cuál es la pre-imagen por R de $1 + x + x^2$?

Observaciones:

(a) Recuerde que dos transformaciones lineales $T : U \to V$ y $L : U \to V$ son iguales si y solo si transforman a los vectores en una base de U en los mismos vectores de V. Usted puede demostrar que $R \circ L = \mathrm{id}_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}$ comprobando que $R \circ L$ transforma a los vectores en una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ en ellos mismos, es decir, que

$$(R \circ L)(1) = 1, \quad (R \circ L)(x) = x, \quad (R \circ L)(x^2) = x^2.$$

(b) Si dos transformaciones lineales $T : U \to V$ y $L : V \to U$ son tales que

$$T \circ L : V \to V \quad \text{y} \quad L \circ T : U \to U$$

satisfacen $T \circ L = \mathrm{id}_V$ y $L \circ T = \mathrm{id}_U$, es decir,

$$\forall\, u \in U \ : \ L(T(u)) = u \qquad \text{y} \qquad \forall\, v \in V \ : \ T(L(v)) = v,$$

entonces T y L son biyectivas y para cada $v \in V$ la pre-imagen por T de v es $L(v)$ y para cada $u \in U$ la pre-imagen por L de u es $T(u)$.