UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS 521218
Listado de Ejercicios 8
Sistemas Lineales de EDO: Primera Parte

Problemas a resolver en práctica

1. Escriba la EDO lineal de orden 3 que sigue, como un sistema de 3 ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:
$x'''(t) - t^3\, x''(t) + 4\mathrm{e}^{-3t}\, x'(t) + 2t\, x(t) = t^2\, \mathrm{e}^{3t}\,, \quad t \in \mathbb{R}.$

Desarrollo:

Haciendo $\left\{\begin{array}{l} y_1(t) = x(t) \\ y_2(t) = x'(t) \\ y_3(t) = x''(t), \end{array}\right.$ obtenemos el sistema $\left\{\begin{array}{l} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = y_3(t) \\ y_3'(t) = x'''(t). \end{array}\right.$

Notemos que la última ecuación es:

$$y_3'(t) = x'''(t) = -2tx(t) - 4\mathrm{e}^{-3t}x'(t) + t^3x''(t) + t^2\mathrm{e}^{3t}$$

Por tanto, el sistema requerido, es

$$\left\{\begin{array}{l} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = y_3(t) \\ y_3'(t) = -2ty_1(t) - 4\mathrm{e}^{-3t}y_2(t) + t^3y_3(t) + t^2\mathrm{e}^{3t} \end{array}\right. \,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Observemos que en forma matricial, el sistema de EDO anterior, se expresa como:

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2t & -4\mathrm{e}^{-3t} & t^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t^2\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

2. Exprese el sistema de ecuaciones diferenciales dado como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.
$\left\{\begin{array}{l} x''(t) - 3x'(t) + 2y'(t) + 2x(t) = 0\,, t \in \mathbb{R} \\ y''(t) - x'(t) = y'(t) + y(t)\,, t \in \mathbb{R}\,. \end{array}\right.$

Desarrollo.

Introducimos las funciones $\mathbb{R} \ni t \;\mapsto\; z_k(t)$, $k \in \{1,2,3,4\}$, tales que $z_1 := x$, $z_2 := x'$, $z_3 := y$, $z_4 := y'$.

Entonces, para cada $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \\ z_3'(t) \\ z_4'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ x''(t) \\ z_4(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ 3\,z_2(t) - 2\,z_4(t) - 2\,z_1(t) \\ z_4(t) \\ z_2(t) + z_4(t) + z_3(t) \end{pmatrix}.$$

En forma matricial, el sistema EDO de primer orden (lineal) se expresa como

$$\begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \\ z_3'(t) \\ z_4'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

3. Considere el sistema $\boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{X}(t)$, $\quad t \in \mathbb{R}$, siendo $\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

   (i) Muestre que las funciones vectoriales $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$, definidas para cada $t \in \mathbb{R}$, por $\boldsymbol{u}(t) := \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}(t) := \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{w}(t) := \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, son solución del sistema dado.

   (ii) Muestre que toda combinación lineal $c_1\boldsymbol{u}(t) + c_2\boldsymbol{v}(t) + c_3\boldsymbol{w}(t)$ es también solución del sistema dado (c_1, c_2 y c_3 son constantes reales arbitrarias).

   (iii) Muestre que $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ es linealmente independiente en el conjunto de las funciones vectoriales (por columnas) de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$.

Solución.

(i) Primero comprobamos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que $\exp'(\lambda\,x) = \lambda\,\exp(\lambda\,x)$, para cada $t \in \mathbb{R}$, obtenemos

$$\frac{d}{dt}\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^t\,\boldsymbol{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \left(\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right),$$

$$\frac{d}{dt}\mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = -\mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-t}\boldsymbol{A} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \left(\mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

y

$$\frac{d}{dt}\mathrm{e}^{2\,t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\,\mathrm{e}^{2\,t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{2\,t}\boldsymbol{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \left(\mathrm{e}^{2\,t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

(ii) Como la derivada es lineal,

$$\frac{d}{dt}\left(c_1\boldsymbol{u}(t) + c_2\boldsymbol{v}(t) + c_3\boldsymbol{w}(t)\right) = c_1\frac{d}{dt}\boldsymbol{u}(t) + c_2\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}(t) + c_3\frac{d}{dt}\boldsymbol{w}(t).$$

Del inciso (i) tenemos que

$$\begin{aligned} c_1 \frac{d}{dt}\boldsymbol{u}(t) + c_2 \frac{d}{dt}\boldsymbol{v}(t) + c_3 \frac{d}{dt}\boldsymbol{w}(t) &= c_1\, \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}(t) + c_2\, \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}(t) + c_3\, \boldsymbol{A}\boldsymbol{w}(t) \\ &= \boldsymbol{A}\left(c_1\boldsymbol{u}(t) + c_2\boldsymbol{v}(t) + c_3\boldsymbol{w}(t)\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{d}{dt}\left(c_1\boldsymbol{u}(t) + c_2\boldsymbol{v}(t) + c_3\boldsymbol{w}(t)\right) = \boldsymbol{A}\left(c_1\boldsymbol{u}(t) + c_2\boldsymbol{v}(t) + c_3\boldsymbol{w}(t)\right).$$

(iii) El Wronskiano de $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$, evaluado en $t = 0$, es igual a

$$W[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}](0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \quad \text{(matriz es triangular inferior)},$$

luego es diferente de 0. Por ende $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ resulta ser un conjunto linealmente independiente.

4. Considere el sistema no homogéneo

$$\boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t) \,+\, \boldsymbol{F}(t).$$

Verifique que la función vectorial $\mathbb{R} \ni t \mapsto \boldsymbol{X}_p(t) := \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\,\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, es una solución, cuando $\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $\boldsymbol{F}(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Desarrollo

Calculamos la derivada de $\boldsymbol{X}_p(t)$:

$$\boldsymbol{X}_p'(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (\mathrm{e}^t + t\mathrm{e}^t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De otra parte, para $t \in \mathbb{R}$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_p(t) + \boldsymbol{F}(t) = \mathrm{e}^t \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\mathrm{e}^t \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + t\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Así tenemos $\boldsymbol{X}_p'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_p(t) + \boldsymbol{F}(t)$ y por tanto $\boldsymbol{X}_p(t)$ es una solución (particular) del sistema de EDOs propuesto.

Problemas propuestos para el estudiante

1. Dos tanques A y B se conectan a través de dos tubos. Inicialmente, el tanque A contiene 50 [lt] de salmuera a una concentración de 0.05 [kg/lt] y el tanque B contiene 100 [lt] de agua pura. Al tanque A desde el exterior ingresan 2 [lt/min] de salmuera (una mezcla de agua y sal) a una concentración de 0.01 [kg/lt]; al mismo tiempo, 6 [lt/min] de salmuera ingresan desde el exterior al tanque B, a un concentración de 0.001 [kg/lt]. Además, en todo instante fluyen 2 [lt/min] de salmuera desde el tanque A al tamque B, y 6 [lt/min] (de salmuera) del tanque B al tanque A. Adicionalmente, desde el tanque B se pierden al exterior 4 [lt/min] de mezcla. Suponga que las mezclas en cada tanque, se mantienen homogéneas en todo instante.

   Sabiendo que las capacidades de los tanques A y B son, respectivamente, 400 [lt] y 600 [lt], **determine** el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, EDO, que proporciona la cantidad de sal en cada tanque, hasta el instante en que dicho sistema de EDO cambia en su formulación. ¿Qué instante es ese? Debe explicitarlo.

   NO SE PIDE RESOLVER EL SISTEMA.

2. Verifique que la función vectorial $\mathbb{R} \ni t \mapsto \boldsymbol{X}(t) := \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ t\,\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t(t + \dfrac{t^2}{2}) \end{pmatrix}$ es solución del sistema

$$\boldsymbol{Y}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{Y}(t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

3. Muestre que la función vectorial $\mathbb{R} \ni t \mapsto \boldsymbol{Z}_p(t) := \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t - \frac{1}{16} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^t \\ \\ \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}t - \frac{1}{32} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^t \end{pmatrix}$, es una solución particular del sistema de ecuaciones diferenciales no homogéneo:

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + 4y(t) + \mathrm{e}^t \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) + t. \end{cases}$$

4. Exprese la EDO / sistema EDO lineal de alto orden dada(o) como un sistema EDO lineal de primer orden.

   (i) $y'''(t) - (t-1)y''(t) - t^2 y'(t) + y(t) = \mathrm{sen}(2t)$, $t \in \mathbb{R}$.

   (ii) $\begin{cases} x''(t) - x(t) + y(t) = \mathrm{sen}(t) \\ x' + 3y' = \mathrm{e}^t. \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

   (iii) $\begin{cases} x''(t) = 3x'(t) + 4y'(t) - x(t) \\ y''(t) = 3x'(t) + y'(t). \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

5. Verifique que $\left\{ \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \mathrm{sen}(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\mathrm{sen}(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \right\}$, es un **conjunto fundamental** de soluciones para el sistema de EDO homogéneo.

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

RBP/JMS/FST//rbp
19 de Octubre de 2022.