Clase 21

Cálculo 3

Carlos Martínez Ranero

Departamento de Matemática
Universidad de Concepción

Recordatorio de la clase anterior.

- Teorema de cambio de variable.
- Coordenadas esféricas.

Objetivos de la clase de hoy.

- Curvas parametrizadas.
- Campos vectoriales.

Curvas Parametrizadas.

Definición

- Una **curva parametrizada** en el espacio es una función continua $\vec{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ donde $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Curvas Parametrizadas.

Definición

- Una **curva parametrizada** en el espacio es una función continua $\vec{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ donde $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.
- Una curva parametrizada es **regular** si $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$ para cada $t \in [a,b]$.

Curvas Parametrizadas.

Definición

- Una **curva parametrizada** en el espacio es una función continua $\vec{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ donde $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.
- Una curva parametrizada es **regular** si $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$ para cada $t \in [a,b]$.
- Una curva parametrizada es **suave** si es regular y de clase C^1.

Curvas Parametrizadas.

Definición

- Una **curva parametrizada** en el espacio es una función continua $\vec{r}\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ donde $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.
- Una curva parametrizada es **regular** si $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$ para cada $t \in [a, b]$.
- Una curva parametrizada es **suave** si es regular y de clase C^1.

Una curva parametrizada describe el movimiento de una particula a través del tiempo.

Definición

- Una curva parametrizada es **suave por tramos** si existe una partición $a = a_0 < a_i < \cdots < a_n = b$ tal que continua $\vec{r} \upharpoonright [a_i, a_{i+1}]$ es una curva suave.

Definición

- Una curva parametrizada es **suave por tramos** si existe una partición $a = a_0 < a_i < \cdots < a_n = b$ tal que continua $\vec{r} \restriction [a_i, a_{i+1}]$ es una curva suave.
- Sean $\vec{r}_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $\vec{r}_2 : [b, c] \to \mathbb{R}$ tales que $\vec{r}_1(b) = \vec{r}_2(b)$, entonces $\vec{r}_1 + \vec{r}_2$ es la concatenación de las dos curvas.

Definición

- Una curva parametrizada es **suave por tramos** si existe una partición $a = a_0 < a_i < \cdots < a_n = b$ tal que continua $\vec{r} \upharpoonright [a_i, a_{i+1}]$ es una curva suave.
- Sean $\vec{r}_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $\vec{r}_2 : [b, c] \to \mathbb{R}$ tales que $\vec{r}_1(b) = \vec{r}_2(b)$, entonces $\vec{r}_1 + \vec{r}_2$ es la concatenación de las dos curvas.
- La imagen de la curva $\vec{r}([a, b])$ se llama la **traza.**

Ejemplos de curvas parametrizadas.

Ejemplos:

- Segmento de recta del punto p al punto q,
  $\vec{r}(t) = (1-t)p + tq, 0 \leq t \leq 1.$

Ejemplos de curvas parametrizadas.

Ejemplos:

- Segmento de recta del punto p al punto q, $\vec{r}(t) = (1-t)p + tq, 0 \leq t \leq 1$.
- $\vec{r}_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{r}_1(t) = (\cos(t), \sin(t))$.

Ejemplos de curvas parametrizadas.

Ejemplos:

- Segmento de recta del punto p al punto q, $\vec{r}(t) = (1 - t)p + tq, 0 \leq t \leq 1$.
- $\vec{r}_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{r}_1(t) = (\cos(t), \sin(t))$.
- $\vec{r}_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{r}_2(t) = (\sin(t), -\cos(t))$.

Ejemplos de curvas parametrizadas.

Ejemplos:

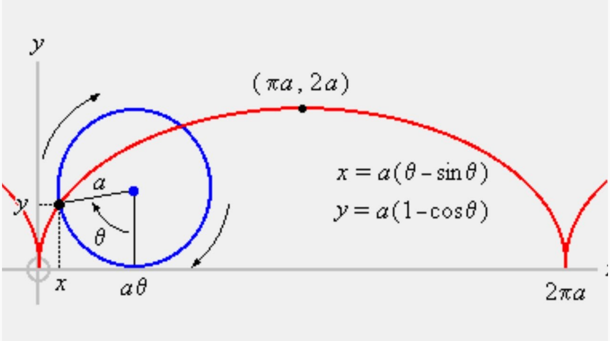
- Segmento de recta del punto p al punto q, $\vec{r}(t) = (1-t)p + tq, 0 \leq t \leq 1$.
- $\vec{r}_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{r}_1(t) = (\cos(t), \sin(t))$.
- $\vec{r}_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{r}_2(t) = (\sin(t), -\cos(t))$.
- $\vec{r}_3 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{r}_3(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$.

Ejemplos de Curvas Parametrizadas.

Algunas curvas interesantes:

- La curva de Lissajous que representa un movimiento ármonico complejo esta dada por $\vec{r}(t) = (cos(3t), sin(5t)), 0 \leq t \leq 2\pi$.
- La curva $\vec{r} = (\cos t + 0{,}1\cos(17t), \sin t + 0{,}1\sin(17t)), 0 \leq t \leq 2\pi$ representa un epicicloide y se utiliza en el diseño de engranes.

Ejemplos de Curvas Parametrizadas.



Definición

Un **campo vectorial**, en el plano es una función $\vec{F}(x, y) = \langle P(x, y), Q(x, y)\rangle$. Un campo vectorial en el espacio es una función $\vec{F}(x, y, z) = \langle P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\rangle$.

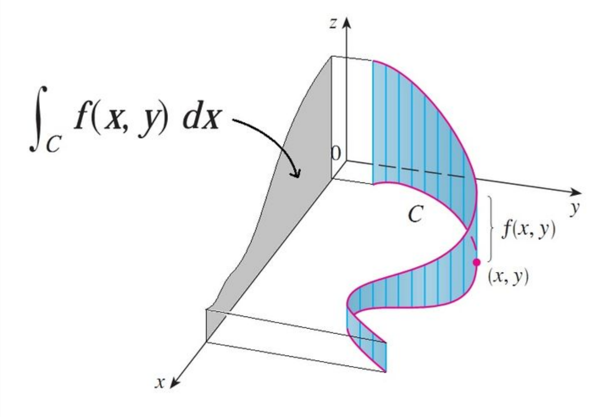
Ejemplos.

Para visualizar los ejemplos dar click en los siguientes enlaces Campos Vectoriales Planos y Campos Vectoriales Espaciales.

1. $\vec{F}(x, y) = \langle x, y \rangle$;
2. $\vec{F}(x, y) = \langle -x, -y \rangle$;
3. $\vec{F}(x, y) = \langle x + y, x - y \rangle$;
4. $\vec{F}(x, y) = \langle -y, x \rangle$.
5. $\vec{F}(x, y, z) = \langle -y, x, z \rangle$.
6. $\vec{F}(x, y, z) = \langle y, z, x \rangle$.

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y C una curva en D, dada por $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle, a \leq t \leq b$.
Calcular el área de la superficie entre la curva C y la gráfica de f.

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y C una curva en D, dada por $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle, a \leq t \leq b$.
Calcular el área de la superficie entre la curva C y la gráfica de f.



La idea es utilizar sumas de Riemann para aproximar el área y posteriormente tomar limites.

$$\int_C f ds = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x(t_i), y(t_i))\sqrt{x'(t_i)^2 + y'(t_i)^2}(t_{i+1} - t_i)$$

donde $P = \{a = t_0 < \cdots < t_n = b\}$ es una partición del intervalo $[a, b]$.

Teorema

Sea C una curva suave y $f : C \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces

$$\int_C f ds = \int_a^b f(\vec{r}(t))\|\vec{r}'(t)\| dt$$

donde $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización de la curva C.

Teorema

Sea C una curva suave y $f : C \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces

$$\int_C f ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt$$

donde $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización de la curva C.

Definición

Sea $C = C_1 + \cdots + C_n$ es una curva suave por tramos y $f : C \to \mathbb{R}$ una función continua, definimos

$$\int_C f ds = \int_{C_1} f ds + \ldots \int_{C_n} f ds.$$

- La integral $\int_C ds$ representa la longitud de la curva.

Integrales de Linea.

- La integral $\int_C ds$ representa la longitud de la curva.
- La integral de linea $\int_C f ds$ la podemos interpretar también como el área arriba de la curva C y debajo de la gráfica de la función.

Ejemplo 1

Calcular $\int\limits_C \frac{1}{1+z} ds$ donde C es la curva parametrizada por $\vec{r}(t) = (-2\sin t, 2\cos t, t^2), 0 \leq t \leq 1.$

Solución:

- $\vec{r}'(t) = (-2\cos t, -2\sin t, 2t)$

Solución:

- $\vec{r}'(t) = (-2\cos t, -2\sin t, 2t)$
- $\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{4\cos^2 t + 4\sin^2 t + 4t^2} = 2\sqrt{1+t^2}.$

Solución:

- $\vec{r}'(t) = (-2\cos t, -2\sin t, 2t)$
- $\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{4\cos^2 t + 4\sin^2 t + 4t^2} = 2\sqrt{1+t^2}.$
- $\int\limits_C ds = \int_0^1 f(\vec{r}(t))\|\vec{r}'(t)\|dt = \int_0^1 (\frac{1}{1+t^2})2\sqrt{1+t^2}dt.$

Solución:

- $\vec{r}'(t) = (-2\cos t, -2\sin t, 2t)$
- $\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{4\cos^2 t + 4\sin^2 t + 4t^2} = 2\sqrt{1+t^2}$.
- $\int\limits_C ds = \int_0^1 f(\vec{r}(t))\|\vec{r}'(t)\|dt = \int_0^1 (\frac{1}{1+t^2})2\sqrt{1+t^2}dt$.
- $\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{1+t^2}}dt$

Solución:

- $\vec{r}'(t) = (-2\cos t, -2\sin t, 2t)$
- $\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{4\cos^2 t + 4\sin^2 t + 4t^2} = 2\sqrt{1+t^2}$.
- $\int\limits_C ds = \int_0^1 f(\vec{r}(t))\|\vec{r}'(t)\|dt = \int_0^1 (\frac{1}{1+t^2})2\sqrt{1+t^2}dt$.
- $\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{1+t^2}}dt$
- Haciendo la sustitución trigonométrica $t = \tan\theta$ tenemos

Solución:

- $\vec{r}'(t) = (-2\cos t, -2\sin t, 2t)$
- $\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{4\cos^2 t + 4\sin^2 t + 4t^2} = 2\sqrt{1+t^2}$.
- $\int\limits_C ds = \int_0^1 f(\vec{r}(t))\|\vec{r}'(t)\|dt = \int_0^1 (\frac{1}{1+t^2})2\sqrt{1+t^2}dt$.
- $\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{1+t^2}}dt$
- Haciendo la sustitución trigonométrica $t = \tan\theta$ tenemos
- $\int_0^{\pi/4} \frac{2\sec^2\theta}{\sec\theta}d\theta = 2\ln(\sec\theta + \tan\theta)\Big|_0^{\pi/4} = 2\ln(1+\sqrt{2})$

Integrales de Linea de Campos Vectoriales.

Definición

Sea $\vec{F} : U \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial y $C \subset U$ una curva parametrizada por $\vec{r}(t), a \leq t \leq b$. Definimos

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)dt$$

Integrales de Linea de Campos Vectoriales.

Definición

Sea $\vec{F} : U \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial y $C \subset U$ una curva parametrizada por $\vec{r}(t), a \leq t \leq b$. Definimos

$$\int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)dt$$

- Si $\vec{F} = \langle P, Q, R\rangle$, y $d\vec{r} = \langle dx, dy, dz\rangle$. Podemos denotar a la integral como $\int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\limits_C Pdx + Qdy + Rdz$.

Integrales de Linea de Campos Vectoriales.

Definición

Sea $\vec{F} : U \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial y $C \subset U$ una curva parametrizada por $\vec{r}(t), a \leq t \leq b$. Definimos

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)dt$$

- Si $\vec{F} = \langle P, Q, R \rangle$, y $d\vec{r} = \langle dx, dy, dz \rangle$. Podemos denotar a la integral como $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C Pdx + Qdy + Rdz$.
- Si $\vec{F}$ representa un campo de fuerza, entonces la integral de linea $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ representa el **trabajo**.

Integrales de Linea de Campos Vectoriales.

Definición

Sea $\vec{F} : U \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial y $C \subset U$ una curva parametrizada por $\vec{r}(t), a \leq t \leq b$. Definimos

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)dt$$

- Si $\vec{F} = \langle P, Q, R \rangle$, y $d\vec{r} = \langle dx, dy, dz \rangle$. Podemos denotar a la integral como $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C Pdx + Qdy + Rdz$.
- Si $\vec{F}$ representa un campo de fuerza, entonces la integral de linea $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ representa el **trabajo**.
- La integral depende de la orientación de la curva.

Ejemplo 2

Sea C la elipse dada por la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $z = 2y + 1$ orientada en sentido antihorario visto desde arriba y sea $\vec{F} = (y, z, x)$ un campo vectorial. Calcular $\int\limits_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$.

Solución:

- Primero parametrizamos la elipse por medio de la función

Solución:

- Primero parametrizamos la elipse por medio de la función
- $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 2\sin t + 1), 0 \leq t \leq 2\pi$

Solución:

- Primero parametrizamos la elipse por medio de la función
- $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 2\sin t + 1), 0 \leq t \leq 2\pi$
- $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 2\sin t + 1$

Integrales de Linea de Campos Vectoriales.

Solución:

- Primero parametrizamos la elipse por medio de la función
- $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 2\sin t + 1), 0 \leq t \leq 2\pi$
- $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 2\sin t + 1$
- $dx = -\sin t dt, dy = \cos t dt, dz = 2\cos t$

Solución:

- Primero parametrizamos la elipse por medio de la función
- $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 2\sin t + 1), 0 \le t \le 2\pi$
- $x = \cos t,\; y = \sin t,\; z = 2\sin t + 1$
- $dx = -\sin t dt, dy = \cos t dt, dz = 2\cos t$
- $\int\limits_C y dx + z dy + x dz =$

Solución:

- Primero parametrizamos la elipse por medio de la función
- $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 2\sin t + 1), 0 \leq t \leq 2\pi$
- $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 2\sin t + 1$
- $dx = -\sin t dt, dy = \cos t dt, dz = 2\cos t$
- $\int\limits_C y dx + z dy + x dz =$
- $\int_0^{2\pi} -\sin^2 t + 2\cos t \sin t + \cos t + 2\cos^2 t dt = \frac{\pi^2}{4}.$

Ejemplo 3

Sea C la curva consistente del segmento de $(0,0)$ a $(1,0)$, seguido del sector de circunferencia de $(1,0)$ a $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, seguido del segmento de recta de $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ al origen. Calcular $\int\limits_C ydx + xdy$.

Integrales de Linea de Campos Vectoriales.

Solución:

- La curva C es suave por tramos. Por lo que la vamos a escribir como la unión de 3 curvas $C = C_1 + C_2 + C_3$

Integrales de Linea de Campos Vectoriales.

Solución:

- La curva C es suave por tramos. Por lo que la vamos a escribir como la unión de 3 curvas $C = C_1 + C_2 + C_3$
- $C_1 : \vec{r}_1(t) = (t, 0), 0 \leq t \leq 1$

Solución:

- La curva C es suave por tramos. Por lo que la vamos a escribir como la unión de 3 curvas $C = C_1 + C_2 + C_3$
- $C_1 : \vec{r}_1(t) = (t, 0), 0 \leq t \leq 1$
- $x = t,\ dx = dt,\ y = 0,\ dy = 0$

Solución:

- La curva C es suave por tramos. Por lo que la vamos a escribir como la unión de 3 curvas $C = C_1 + C_2 + C_3$
- $C_1 : \vec{r}_1(t) = (t, 0), 0 \leq t \leq 1$
- $x = t,\ dx = dt,\ y = 0,\ dy = 0$
- $C_2 : \vec{r}_2(t) = (\cos t, \sin t), 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$

Solución:

- La curva C es suave por tramos. Por lo que la vamos a escribir como la unión de 3 curvas $C = C_1 + C_2 + C_3$
- $C_1 : \vec{r}_1(t) = (t, 0), 0 \leq t \leq 1$
- $x = t,\ dx = dt,\ y = 0,\ dy = 0$
- $C_2 : \vec{r}_2(t) = (\cos t, \sin t), 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$
- $x = \cos t,\ dx = -\sin t dt,\ y = \sin t,\ dy = \cos t dt$

Solución:

- La curva C es suave por tramos. Por lo que la vamos a escribir como la unión de 3 curvas $C = C_1 + C_2 + C_3$
- $C_1 : \vec{r}_1(t) = (t, 0), 0 \leq t \leq 1$
- $x = t,\ dx = dt,\ y = 0,\ dy = 0$
- $C_2 : \vec{r}_2(t) = (\cos t, \sin t), 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$
- $x = \cos t,\ dx = -\sin t dt,\ y = \sin t,\ dy = \cos t dt$
- $C_3 : \vec{r}_3(t) = (\frac{1-t}{\sqrt{2}}, \frac{1-t}{\sqrt{2}}), 0 \leq t \leq 1$

Solución:

- La curva C es suave por tramos. Por lo que la vamos a escribir como la unión de 3 curvas $C = C_1 + C_2 + C_3$
- $C_1 : \vec{r}_1(t) = (t, 0), 0 \leq t \leq 1$
- $x = t,\ dx = dt,\ y = 0,\ dy = 0$
- $C_2 : \vec{r}_2(t) = (\cos t, \sin t), 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$
- $x = \cos t,\ dx = -\sin t dt,\ y = \sin t,\ dy = \cos t dt$
- $C_3 : \vec{r}_3(t) = (\frac{1-t}{\sqrt{2}}, \frac{1-t}{\sqrt{2}}), 0 \leq t \leq 1$
- $x = \frac{1-t}{\sqrt{2}},\ dx = -\frac{1}{\sqrt{2}}dt,\ y = \frac{1-t}{\sqrt{2}},\ dy = -\frac{1}{\sqrt{2}}dt$

Integrales de Linea de Campos Vectoriales.

- $\int\limits_{C} ydx + xdy = \int\limits_{C_1} ydx + xdy + \int\limits_{C_2} ydx + xdy + \int\limits_{C_3} ydx + xdy$

Integrales de Linea de Campos Vectoriales.

- $\int\limits_{C} ydx + xdy = \int\limits_{C_1} ydx + xdy + \int\limits_{C_2} ydx + xdy + \int\limits_{C_3} ydx + xdy$
- $\int_0^1 0dt + \int_0^{\pi/4} -\sin^2 t + \cos^2 tdt + \int_0^1 -1 + tdt = 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$