

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (521218)  
Listado N°5 (Método de Variación de Parámetros).

Problemas a resolver en práctica

Problema 1.

Resolver el PVI

$$\begin{cases} (1 + e^x) y''(x) - 3(1 + e^x) y'(x) + 2(1 + e^x) y(x) = e^x, & x \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Desarrollo:

Haciendo  $D = \frac{d}{dx}$ , la EDO se puede re-escribir en forma de operador como

$$\left( (1 + e^x) D^2 - 3(1 + e^x) D + 2(1 + e^x) \right) [y](x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Puesto que  $(1 + e^x)$  es siempre positivo, podemos normalizar (la EDO) obteniendo

$$(D^2 - 3D + 2)[y](x) = \frac{e^x}{1 + e^x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Aquí se identifica la función del lado derecho

$$g(x) := \frac{e^x}{1 + e^x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Aplicando el Principio de Superposición, la solución de la EDO puede descomponerse como  $y = y_h + y_p$ , donde  $y_p$  es una solución particular de la EDO no homogénea dada, e  $y_h$  es la solución general de la EDO homogénea asociada,

$$(D^2 - 3D + 2)[y_h] = 0, \quad \text{en } \mathbb{R}.$$

La ecuación característica asociada a la EDO precedente, está dada por

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \iff (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \iff \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2.$$

Por lo discutido en clases, a  $\lambda_1 = 1$  (raíz simple) le corresponde la función  $\mathbb{R} \ni x \mapsto y_1(x) := e^x$ , mientras que a  $\lambda_2 = 2$  (también raíz simple), se le asocia la función  $\mathbb{R} \ni x \mapsto$

$y_2(x) := e^{2x}$ . Además, el conjunto  $B := \{y_1, y_2\}$  resulta ser un CONJUNTO/SISTEMA FUNDAMENTAL DE SOLUCIONES de la EDO homogénea considerada.

De esta manera, la solución general de la EDO homogénea asociada está dada por

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{con } C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ ctes. arbitrarias.}$$

Para determinar una solución particular, aplicaremos el método de variación de parámetros (puesto que no es directo identificar un aniquilador a coeficientes constantes para la función  $g$  ya definida). Así, se propone como solución particular la función

$$y_p(x) = A_1(x) e^x + A_2(x) e^{2x}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

siendo  $A_1$  y  $A_2$  funciones a determinar, tales que sus respectivas derivadas,  $A_1'$  y  $A_2'$  resuelven el siguiente sistema de ecuaciones, escrito en forma matricial, para  $x \in \mathbb{R}$  fijo (pero arbitrario):

$$\begin{bmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1'(x) \\ A_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{e^x}{1+e^x} \end{bmatrix}.$$

Escalonando la matriz aumentada, resulta

$$\begin{pmatrix} e^x & e^{2x} & 0 \\ e^x & 2e^{2x} & \frac{e^x}{1+e^x} \end{pmatrix} \xrightarrow[e^{-x}f_2]{e^{-x}f_1} \begin{pmatrix} 1 & e^x & 0 \\ 1 & 2e^x & \frac{1}{1+e^x} \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 - f_1} \begin{pmatrix} 1 & e^x & 0 \\ 0 & e^x & \frac{1}{1+e^x} \end{pmatrix}$$

De esta manera, se deduce el sistema de ecuaciones equivalente:

$$\begin{pmatrix} 1 & e^x \\ 0 & e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1'(x) \\ A_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+e^x} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} A_2'(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^x} = \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}} \\ A_1'(x) = -\frac{1}{1+e^x} = -\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \end{cases}$$

En vista que  $x \in \mathbb{R}$  es fijo pero arbitrario, hemos obtenido la regla de correspondencia de las funciones derivada de  $A_1$  y  $A_2$ , respectivamente.

Ahora, integrando con respecto a  $x$  las expresiones precedentes, y considerando el cambio de variable  $t = e^{-x}$  ( $dt = -e^{-x}dx = -t dx$ ), se deduce que

$$\begin{aligned} A_1(x) &= \int -\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = \int \frac{dt}{1+t} = \ln(1+t) + K_1 = \ln(1+e^{-x}) + K_1, \\ A_2(x) &= \int \frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}} dx = \int -\frac{t}{1+t} dt = \int \left( \frac{1}{1+t} - 1 \right) dt = \ln(1+t) - t + K_2 \\ &= \ln(1+e^{-x}) - e^{-x} + K_2. \end{aligned}$$

Podemos elegir las constantes de integración  $(K_1, K_2)$ , tales que  $K_1 = K_2 = 0$  pues buscamos **una** solución particular. Por lo tanto, ésta viene dada por

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \ln(1+e^{-x}) e^x + \left( \ln(1+e^{-x}) - e^{-x} \right) e^{2x} \\ &= \ln(1+e^{-x}) e^x + \ln(1+e^{-x}) e^{2x} - e^x. \end{aligned}$$

Así, la SOLUCIÓN GENERAL DE LA EDO PLANTEADA está definida por

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \ln(1 + e^{-x}) e^x + \ln(1 + e^{-x}) e^{2x} - e^x \\ &= (C_1 - 1) e^x + C_2 e^{2x} + \ln(1 + e^{-x}) e^x + \ln(1 + e^{-x}) e^{2x}, \end{aligned}$$

donde  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$  son constantes arbitrarias. Haciendo  $\widetilde{C}_1 := C_1 - 1$ , se tiene que  $\widetilde{C}_1 \in \mathbb{R}$  es también constante arbitraria. En consecuencia, la solución general de la EDO dada se puede expresar, de forma más simplificada, por

$$y(x) = \widetilde{C}_1 e^x + C_2 e^{2x} + \ln(1 + e^{-x}) e^x + \ln(1 + e^{-x}) e^{2x}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

siendo  $\widetilde{C}_1, C_2 \in \mathbb{R}$  constantes arbitrarias. Ahora, notemos que la derivada de la solución general de la EDO original está dada por

$$y'(x) = \widetilde{C}_1 e^x + 2 C_2 e^{2x} - \frac{1 + e^x}{1 + e^{-x}} + \ln(1 + e^{-x}) e^x + 2 \ln(1 + e^{-x}) e^{2x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Imponiendo las condiciones iniciales, se deduce que

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \widetilde{C}_1 + C_2 + 2 \ln(2) = 0 \\ \widetilde{C}_1 + 2 C_2 - 1 + 3 \ln(2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \widetilde{C}_1 = -1 - \ln(2) \\ C_2 = 1 - \ln(2) \end{cases}$$

Por lo tanto, la única solución de PVI está dada por

$$y(x) = -[1 + \ln(2)] e^x + [1 - \ln(2)] e^{2x} + \ln(1 + e^{-x}) e^x + \ln(1 + e^{-x}) e^{2x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

### Problema 2.

Resolver el PVI

$$\begin{cases} 2y''(x) - 4y'(x) + 2y(x) = \frac{e^x}{x} & x > 0, \\ y(1) = 0, \quad y'(1) = 0. \end{cases}$$

### Desarrollo:

Tomando  $D = \frac{d}{dx}$ , la EDO se puede re-escribir en forma de operador y a la vez **normalizada** como

$$(D^2 - 2D + 1)[y](x) = \frac{e^x}{2x}, \quad \forall x > 0,$$

y se identifica aquí

$$f(x) := \frac{e^x}{2x}, \quad \forall x > 0.$$

Aplicando el Principio de Superposición, la solución de la EDO se descompone en  $y = y_h + y_p$ , donde  $y_p$  es una solución particular de la EDO, e  $y_h$  es la solución general de la EDO homogénea asociada,

$$(D^2 - 2D + 1)[y_h] = 0, \quad \text{en } \Omega := (0, +\infty).$$

La ecuación característica correspondiente a la EDO precedente, está dada por

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \iff (\lambda - 1)^2 = 0 \iff \lambda_1 = \lambda_2 = 1,$$

de donde, las funciones asociadas a esta raíz (doble), son  $\Omega \ni x \mapsto y_1(x) := e^x$ , y  $\Omega \ni x \mapsto y_2(x) := x e^x$ .

De esta manera, la solución general de la EDO homogénea asociada, está dada por

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ ctes. arbitrarias.}$$

Para encontrar una solución particular por el método de variación de parámetros, se propone como solución particular a

$$y_p(x) = A_1(x) e^x + A_2(x) x e^x,$$

donde las funciones  $A_1$  y  $A_2$  son tales que sus funciones derivadas,  $A'_1, A'_2$ , resuelven el siguiente sistema de ecuaciones, escrito en forma matricial, para cada  $x \in \Omega$ .

$$\begin{bmatrix} e^x & x e^x \\ e^x & e^x + x e^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A'_1(x) \\ A'_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{e^x}{2x} \end{bmatrix}.$$

Escalonando la matriz aumentada del sistema, resulta

$$\begin{pmatrix} e^x & x e^x & 0 \\ e^x & (1+x) e^x & \frac{e^x}{2x} \end{pmatrix} \xrightarrow[e^{-x} f_2]{e^{-x} f_1} \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 1 & 1+x & \frac{1}{2x} \end{pmatrix} \xrightarrow[f_2 - f_1]{f_2 - f_1} \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2x} \end{pmatrix}$$

De esta manera, el sistema equivalente a resolver es

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'_1(x) \\ A'_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2x} \end{pmatrix} \iff \begin{cases} A'_2(x) = \frac{1}{2x}, \\ A'_1(x) = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

En vista que  $x \in \Omega$  es fijo pero arbitrario, hemos obtenido la regla de correspondencia de las funciones derivada de  $A_1$  y  $A_2$ , respectivamente.

Ahora, integrando con respecto a  $x$  las expresiones precedentes, se deduce que

$$A_1(x) = \int -\frac{1}{2} dx = -\frac{x}{2} + K_1, \quad x > 0$$

$$A_2(x) = \int \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} \ln(x) + K_2, \quad x > 0.$$

Sin pérdida de generalidad, eligiendo las constantes de integración  $K_1 = K_2 = 0$ , se determina una solución particular, la cual viene dada por

$$y_p(x) = -\frac{x}{2} e^x + \frac{x}{2} \ln(x) e^x, \quad \forall x \in \Omega.$$

Así, la solución general de la EDO planteada está dada por

$$\begin{aligned}
 y(x) &= C_1 e^x + C_2 x e^x - \frac{x}{2} e^x + \frac{x}{2} \ln(x) e^x \\
 &= C_1 e^x + (C_2 - 1/2) x e^x + \frac{x}{2} \ln(x) e^x \\
 (\widetilde{C}_2 &:= C_2 - 1/2 \quad \text{también cte. arbitraria}) \\
 &= C_1 e^x + \widetilde{C}_2 x e^x + \frac{x}{2} \ln(x) e^x, \quad \forall x > 0, \quad \text{con } C_1, \widetilde{C}_2 \in \mathbb{R} \quad \text{ctes. arbitrarias.}
 \end{aligned}$$

Ahora, notemos que la derivada de la solución general de la EDO original está dada por

$$y'(x) = C_1 e^x + \widetilde{C}_2 e^x + \widetilde{C}_2 x e^x + \frac{\ln(x) e^x}{2} + \frac{1}{2} e^x + \frac{x}{2} \ln(x) e^x, \quad \forall x > 0.$$

Imponiendo las condiciones iniciales, se deduce que

$$\begin{cases} y(1) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} e C_1 + e \widetilde{C}_2 = 0 \\ e C_1 + 2 e \widetilde{C}_2 + \frac{1}{2} e = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = \frac{1}{2} \\ \widetilde{C}_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Por lo tanto, la única solución de PVI está dada por

$$y(x) = \frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2} x e^x + \frac{x}{2} \ln(x) e^x, \quad \forall x > 0.$$

### Problema 3.

Usando el Problema 2, determine la solución general de

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \frac{e^x}{2x} + x, \quad x > 0.$$

### Solución:

Usando el Principio de Superposición de soluciones, basta resolver la EDO

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = x, \quad x > 0.$$

Esta última, se puede resolver usando aniquiladores o variación de parámetros. Usando aniquiladores (HACERLO), se deduce que una solución particular es del tipo  $y_p(x) = a + bx$  con  $a$  y  $b$  constantes reales por determinar.

Al desarrollar

$$(D^2 - 2D + 1)(a + bx) = x, \quad \forall x > 0,$$

se deduce que  $a = 2$  y  $b = 1$ . Por tanto, la solución particular buscada viene dada por  $y_p(x) = 2 + x$ ,  $\forall x > 0$ . Finalmente, teniendo presente la solución del Problema 2, la solución general de

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \frac{e^x}{2x} + x,$$

es:

$$u(x) = d_1 e^x + d_2 x e^x + \frac{x}{2} \ln(x) e^x + (2 + x), \quad \forall x > 0,$$

donde  $d_1$  y  $d_2$  son constantes reales arbitrarias.

### Problemas propuestos para el estudiante:

1. Usando el método de variación de parámetros, resuelva:

a)  $y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ ;

b)  $y'''(t) + 3y''(t) + 3y'(t) + y(t) = t^{-3}e^{-t}$ ,  $t > 0$ ;

c)  $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = e^{-t} \ln(t)$ ,  $t > 0$ ,  $y(1) = 0$ ,  $y'(1) = 0$ .

d)  $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \frac{e^{-x}}{1+x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

2. a) Encuentre las soluciones de la EDO

$$x^3 y^{(3)}(x) - 2x^2 y^{(2)}(x) - 2xy^{(1)}(x) + 8y(x) = 0 \quad \forall x > 0$$

con la forma  $y(x) = x^r$  con  $r$  escalar a determinar. Recuerde que interesa obtener soluciones a VALORES REALES.

b) Encuentre la solución general de la EDO:

$$x^3 y^{(3)}(x) - 2x^2 y^{(2)}(x) - 2xy^{(1)}(x) + 8y(x) = x \quad \forall x > 0.$$

3. Determine la solución general de

$$(9 - 2x)y''(x) - 4(x - 5)y'(x) + 4y(x) = 4x^2 - 36x + 81, \quad x < 0,$$

sabiendo que el kernel (o núcleo) del operador asociado a la EDO tiene una base dada por  $\{y_1(x) = x - 5, y_2(x) = e^{-2x}\}$ .

4. Combinar los métodos de anuladores y de variación de parámetros para resolver el PVI:

$$\begin{aligned} 3y''(t) - 6y'(t) + 30y(t) &= 15 \operatorname{sen}(t) + e^t \tan(3t), & t \in \mathbb{R}, \\ y(0) &= 0, \\ y'(0) &= 1. \end{aligned}$$