Variables Separables.

Problema. Resolver $\begin{cases} y'(x) = \dfrac{g(x)}{h(y)} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

donde g y h son funciones continuas (lo que garantiza existencia y unicidad de soluciones del PVI considerado.),

$h(y) \neq 0$ y (x_0, y_0) tal que $\begin{cases} x_0 \in Dom(g) \\ y_0 \in Dom(h) \end{cases}$

Notar que la EDO:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}(x) = \frac{g(x)}{h(y)}} \iff \boxed{h(y)\, y'(x) = g(x)}$$

Buscamos $H(y)$ y $G(x)$ de modo que:

$$H'(y) = h(y) \iff H(y) = \int h(y)\,dy + C$$

$$G'(x) = g(x) \iff G(x) = \int g(x)\,dx + C.$$

Entonces $h(y)\, y'(x) = H'(y)\, y'(x)$

$$= \frac{d}{dx}(H \circ y)(x)$$

Así: $h(y)\,y'(x) = g(x)$.

$$\iff \frac{d}{dx}(H\circ y)(x) = G'(x) = \frac{d}{dx}G(x)$$

$$\implies \frac{d}{dx}\left[(H\circ y)(x) - G(x)\right] = 0$$

$$\implies (H\circ y)(x) - G(x) = K, \quad K \text{ constante.}$$

Teorema:

En las condiciones dadas para las funciones g y h, la EDO:

$$\boxed{y'(x) = \frac{g(x)}{h(y)}}$$

tiene solución dada por:

$$\boxed{H(y(x)) - G(x) = \text{constante}}$$

donde H y G son tales que $\begin{cases} H'(y) = h(y) \\ G'(x) = g(x). \end{cases}$

Ejemplo: $y'(x) = \dfrac{x}{y}$

Aquí $\boxed{f(x,y) = \dfrac{x}{y}}$ (x e y deben ser vistos como variables independientes)

Sean $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$

$A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$

Entonces, como $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{x}{y^2}$

(Aquí y variable independiente)

Por tanto f y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en

A_1 y A_2 y el PVI:
$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{x}{y} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tiene ÚNICA solución para $(x_0, y_0) \in A_1$ o

$(x_0, y_0) \in A_2$.

¿cómo es la solución?

usamos variables separables.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

$g(x) = x$

$h(y) = y$

$$\Rightarrow \quad y\,dy = x\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$\frac{1}{2}(y^2 - x^2) = c$$

$\rightarrow$ soluciones Implícitas!!

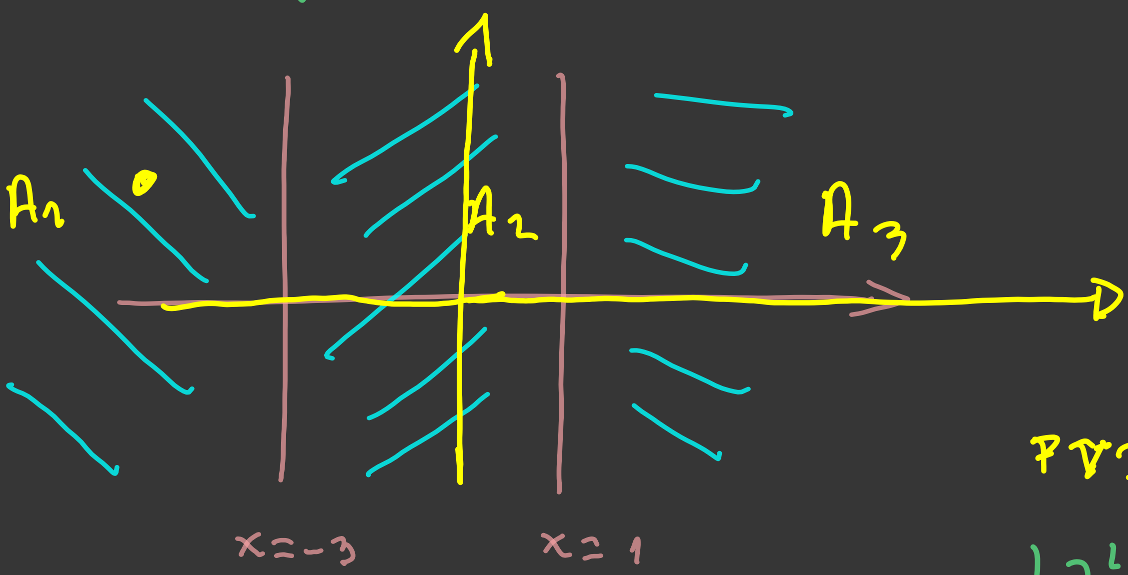
Ejemplo:

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y^2}{(x-1)(x+3)} = \dfrac{(y(x))^2}{(x-1)(x+3)} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} ;$$

Aquí
$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{y^2}{(x-1)(x+3)} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2y}{(x-1)(x+3)} \end{cases}$$

Para efectos del Teorema de E. y U., la ¡ f DEPENDE de las variables independientes x e y !

se puede ver que f y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en las 3 regiones conexas que se indican



$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < -3\}$ $\longrightarrow$ PVI en A_1

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y^2}{(x-1)(x+3)} \\ y(-4) = 5 \end{cases}$$

Tiene única solución

$A_2 = \{(x,y) : -3 < x < 1\}$

$A_3 = \{(x,y) : x > 1\}$

Del Teorema de existencia y unicidad.

si $(x_0, y_0) \in A_1$, el correspondiente PVI tiene única solución. Por ejemplo:

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y^2}{(x+3)(x-1)} \\ y(-4) = 2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_0 = -4 \\ y_0 = 2 \end{pmatrix}$$

Lo mismo sucede si $(x_0, y_0) \in A_2$ ó $(x_0, y_0) \in A_3$

Antes de buscar la solución al PVI, veamos el comportamiento de las soluciones.

Como $f(x,y) = \dfrac{y^2}{(x+3)(x-1)}$, el valor real de $f(x,y)$ depende solamente de x pues $y^2 \geq 0$.

	-3		1	
$(x+3)$	$-$		$+$	$+$
$(x-1)$	$-$		$-$	$+$
$y'(x)$	$+$		$-$	$+$

Es decir, las curvas solución de cualquier PVI con la C.I.:

- $(x_0, y_0) \in A_1$ será siempre creciente $\uparrow$
- $(x_0, y_0) \in A_2$ será " decreciente: $\searrow$
- $(x_0, y_0) \in A_3$ " " creciente: $\uparrow$

Busquemos soluciones para $\boxed{y'(x) = \dfrac{y^2}{(x+3)(x-1)}}$

Tenemos que $f(x,y) = \dfrac{g(x)}{h(y)}$ donde

$$\boxed{g(x) = \frac{1}{(x+3)(x-1)}} \wedge \boxed{h(y) = \frac{1}{y^2}}$$

$$\Rightarrow G(x) = \int \frac{dx}{(x+3)(x-1)} \wedge H(y) = \int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+3)} = \frac{1/4}{x-1} + \frac{(-1/4)}{x+3} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{(x+3)(x-1)} = \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+3| = \ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|^{1/4}$$

$$\Rightarrow G(x) = \ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|^{1/4}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{(x-1)(x+3)} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{(x-1)(x+3)}}$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}$$

$$= \int \frac{1/4}{x-1}dx + \int \frac{(-1/4)}{(x+3)}dx$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+3|$$

$$-\frac{1}{y} + K_1 = \frac{1}{4} \ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + K_2$$

$$\boxed{-\frac{1}{y} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| + C}$$

Pero estamos resolviendo en un entorno del punto $(-4,2)$ (pues queremos que $\underline{y(-4)=2}$)

Por tanto, $\left(\frac{x-1}{x+3}\right)\Big|_{x=-4} = \left(\frac{-5}{-1}\right) = 5 > 0.$

Así, $\left|\frac{x-1}{x+3}\right| = \frac{x-1}{x+3}$ para todo x "cercano" a -4.

y entonces $\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|^{1/4} = \ln\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{1/4}$

Además: $H(y) = -\frac{1}{y}$. Por tanto

$$H(y(x)) - G(x) = K \iff$$

$$(*) \quad \boxed{\frac{-1}{y} - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x-1}{x+3}\right) = K} \qquad \cancel{K}, \; y(-4)=2$$

Pero $y(-4)=2$, por tanto: $-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\ln 5 = K.$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\ln(5) - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x-1}{x+3}\right) =$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{5(x+3)}{x-1}\right)$$

Así, la única solución al PVI dado, viene dada implícitamente, por:

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{5(x+3)}{x-1}\right) \qquad \left(\begin{array}{l} \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \\ y(-4) = 2 \checkmark \end{array}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\frac{2-y}{2y} = \frac{1}{4} \ln\left[\frac{5(x+3)}{x-1}\right].}$$

En $(4,-2)$ ✓

Observe que para $x = -4$, se obtiene

$$\frac{1}{y(-4)} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \ln(1) \Rightarrow \frac{1}{y(-4)} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{y(-4)} = \frac{1}{2}.$$

$$\Longrightarrow \underline{y(-4) = 2}$$ ¡como debe ser!.

OBS. Existen diversos métodos para la busqueda de soluciones de EDO no lineales de primer orden.

¡VER Listados 7 parte 1 y parte 2!