Universidad de Concepción

Cálculo III (510215)

Tarea 3

Mella Morales Ricardo Javier , 2019400100

Navarrete Marchant Hugo Ignacio , 2019441302

Vera Diaz Claudio Salvador , 2021446915

Profesor: Carlos Martinez

2 de Noviembre de 2022

Pregunta 1

Encontrar los puntos de la curva $C \subset \mathbb{R}^3$, definida como la intersección de las superficies dadas por las ecuaciones

$$x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1 \text{ y } x^2 + y^2 = 1$$

que están a distancia máxima y mínima del origen.

Solución:

Sean

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= x^2 - xy + y^2 - z^2 - 1 \\ h(x, y, z) &= x^2 + y^2 - 1 \end{aligned}$$

Debemos optimizar la función distancia al origen la cual es $D(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
Pero optimizar esta función es equivalente a optimizar $d(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.
Luego, siguiendo el método de multiplicadores de Lagrange se obtiene:

$$\begin{aligned} \triangle d(x, y, z) &= \alpha \triangle g(x, y, z) + \beta \triangle h(x, y, z) \\ \big(2x, 2y, 2z\big) &= \alpha \left(2x - y, 2y - x, -2z\right) + \beta \left(2x, 2y, 0\right) \end{aligned}$$

De esta ecuación y las condiciones se obtiene el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{cc} I) & 2x = \alpha(2x - y) + \beta(2x) \\ II) & 2y = \alpha(2y - x) + \beta(2y) \\ III) & 2z = \alpha(-2z) \\ IV) & x^2 - xy + y^2 - z^2 - 1 = 0 \\ V) & x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array}\right|$$

Resolviendo el sistema:

Se puede ver en $III)$:

$$2z = \alpha(-2z) \quad \Rightarrow \quad z = -\alpha z$$

A partir de este resultado se analizan 2 casos, $z \neq 0$ y $z = 0$

Comenzaremos con el caso $z \neq 0$.

Caso Z≠0

Volviendo a $III)$:

$$z = -\alpha z \quad \Rightarrow \quad \alpha = -1$$

Por otra parte si restamos $IV)$ de $V)$ obtendremos:

$$\left.\begin{array}{cc} IV) & x^2 - xy + y^2 - z^2 - 1 = 0 \\ V) & x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array}\right|$$

$$\begin{aligned} V) - IV) \Rightarrow xy + z^2 &= 0 \\ z^2 &= -xy \end{aligned}$$

Conservaremos este resultado momentaneamente,
Reemplazando $\alpha = -1$ en $I)$ y $II)$ obtenemos:

$$\left.\begin{array}{cc} I) & 2x = \alpha(2x - y) + \beta(2x) \\ II) & 2y = \alpha(2y - x) + \beta(2y) \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{cc} I) & 2x = -2x + y + \beta(2x) \\ II) & 2y = -2y + x + \beta(2y) \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{cc} I) & x(4 - 2\beta) = y \\ II) & y(4 - 2\beta) = x \end{array}\right|$$

Multiplicando $I)$ y $II)$:

$$I) \times II) \Rightarrow xy(4 - 2\beta)^2 = xy \qquad \textbf{Usando } z^2 = -xy \qquad \Rightarrow z^2 = z^2(4 - 2\beta)^2$$

$$\textbf{Como } z \neq 0 \Rightarrow 1 = (4 - 2\beta)^2 \quad \textbf{De aquí las posibles soluciones son } \beta = \frac{3}{2} \textbf{ o } \beta = \frac{5}{2}$$

Comenzaremos con $\beta = \frac{3}{2}$.

Caso Z≠0 , $\alpha = -1$ y $\beta = \frac{3}{2}$

Se puede notar que para $I)$ y $II)$ el resultado es el mismo:

$$I), II) \Rightarrow x(4 - 2 \cdot \frac{3}{2}) = y \Rightarrow x = y$$

Reemplazando este resultado en $IV)$:

$$x^2 - x^2 + x^2 + x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Podemos notar que bajo estas condiciones y para cualquiera de los 4 casos posibles de x e y, $z \notin \mathbb{R}$

Caso Z≠0 , $\alpha = -1$ y $\beta = \frac{5}{2}$

$$\textbf{De } I) \textbf{ y } II) \ \Rightarrow x(4 - 2 \cdot \frac{5}{2}) = y \Rightarrow x = -y$$

Reemplazando en $IV)$:

$$x^2 + x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \mp\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow z^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

De aquí las únicas soluciones para x, y y z que satisfacen $IV)$ son:

$$
\begin{array}{llll}
x = -\frac{1}{\sqrt{2}} & y = \frac{1}{\sqrt{2}} & z = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow & P_1 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \\
x = -\frac{1}{\sqrt{2}} & y = \frac{1}{\sqrt{2}} & z = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow & P_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \\
x = \frac{1}{\sqrt{2}} & y = -\frac{1}{\sqrt{2}} & z = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow & P_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \\
x = \frac{1}{\sqrt{2}} & y = -\frac{1}{\sqrt{2}} & z = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow & P_4 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})
\end{array}
$$

Caso Z=0

Bajo esta condición $III)$ nos entrega:

$$III) \Rightarrow z = -\alpha z \Rightarrow z(1+\alpha) = 0 \Rightarrow z = 0 \vee \alpha = -1$$

Adicionalmente la diferencia $V) - IV)$ queda:

$$
\left.\begin{array}{lc}
IV) & x^2 - xy + y^2 - z^2 - 1 = 0 \\
V) & x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ \hline
\end{array}\right| \Rightarrow \textbf{con } z = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{lc}
IV) & x^2 - xy + y^2 - 1 = 0 \\
V) & x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ \hline
\end{array}\right|
$$

$$V) - IV) \Rightarrow xy = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$$

Caso Z=0 , $\alpha = -1$ y $x = 0$

Bajo estas condiciones $IV)$ resulta en:

$$IV) \Rightarrow x^2 - xy + y^2 - z^2 - 1 = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

Los puntos resultantes entonces son: $P_5 = (0, 1, 0)$ y $P_6 = (0, -1, 0)$

Caso Z=0 , $\alpha = -1$ y $y = 0$

Bajo estas condiciones $IV)$ resulta en:

$$IV) \Rightarrow x^2 - xy + y^2 - z^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Los puntos resultantes entonces son: $P_7 = (1, 0, 0)$ y $P_8 = (-1, 0, 0)$

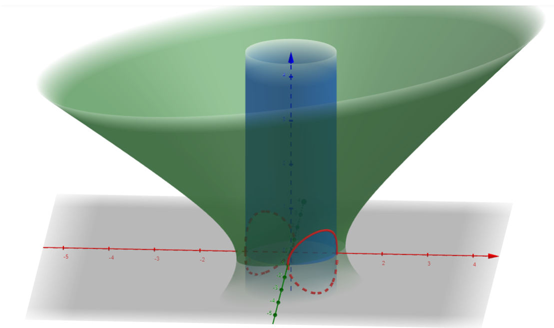
Queda determinar que puntos están a máxima y a mínima distancia del origen, para ello, evaluaremos cada punto en la función $d(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

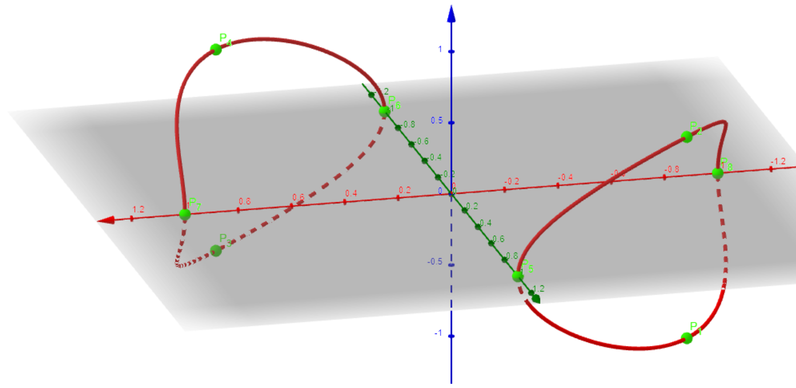
$$
\begin{array}{llll}
P_1 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) & P_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) & P_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) & P_4 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \\
P_5 = (0, 1, 0) & P_6 = (0, -1, 0) & P_7 = (1, 0, 0) & P_8 = (-1, 0, 0)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
d(P_1) = d(P_2) = d(P_3) = d(P_4) = 1{,}5 \\
d(P_5) = d(P_6) = d(P_7) = d(P_8) = 1
\end{array}
$$

De aquí se puede observar que P_1, P_2, P_3 y P_4 se encuentran a máxima distancia del origen y P_5, P_6, P_7 y P_8 se encuentran a la mínima distancia del origen.

$$D(P_1) = D(P_2) = D(P_3) = D(P_4) = \sqrt{1{,}5} \approx 1{,}2247$$
$$D(P_5) = D(P_6) = D(P_7) = D(P_8) = 1$$





Problema 2:

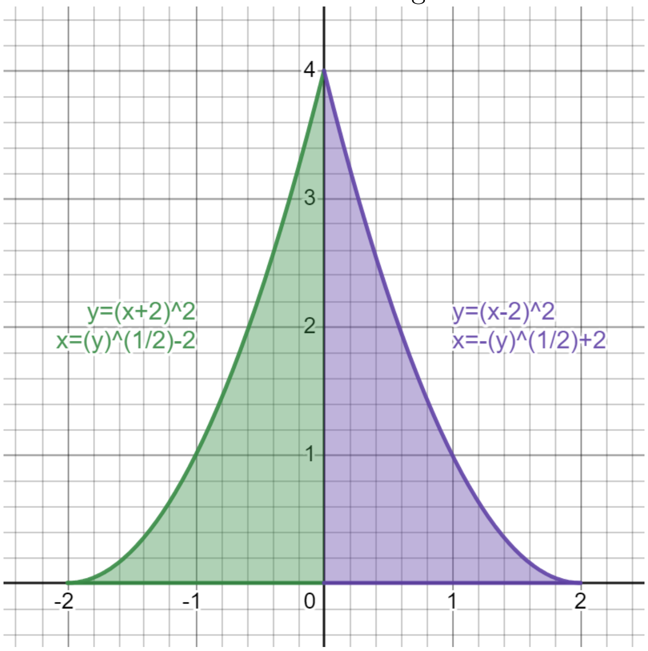
(a) Identificar la región $D \subset \mathbb{R}^2$ correspondiente a la siguiente suma de integrales, y expresar la integral sobre dicha región cambiando el orden de integración

$$\int_{-2}^{0} \int_{0}^{(x+2)^2} f(x,y)dydx + \int_{0}^{2} \int_{0}^{(x-2)^2} f(x,y)dydx.$$

(b) Calcular la integral sobre la región D cuando $f(x,y) = 1 + xe^{-y^2}$

Solución (a):

Gráficamente el dominio de integración es:



Despejando x en cada una de las escuaciones se obtiene:

$$y = (x+2)^2$$
$$\pm\sqrt{y} = x + 2$$
$$x = \pm\sqrt{y} - 2$$

$$y = (x-2)^2$$
$$\pm\sqrt{y} = x - 2$$
$$x = \pm\sqrt{y} + 2$$

De las 4 funciones resultantes, solo $x = \sqrt{y} - 2$ y $x = -\sqrt{y} + 2$, modelan el dominio de integración original

Con respecto al eje x, la variable y recorre desde $x = \sqrt{y} - 2$ a $x = -\sqrt{y} + 2$, y con respecto al eje y recorre el intervalo $[0, 4]$, por lo que podemos expresar la suma de integrales anteriores como una sola integral de tipo 2, cambiando sus límites de integración obteniendo:

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}-2}^{-\sqrt{y}+2} f(x,y)dxdy$$

Solución (b):

Calcularemos la integral de $f(x,y) = 1 + xe^{-y^2}$ sobre la región D.

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}-2}^{-\sqrt{y}+2} 1 + xe^{-y^2}dxdy = \int_0^4 \int_{\sqrt{y}-2}^{-\sqrt{y}+2} 1dxdy + \int_0^4 \int_{\sqrt{y}-2}^{-\sqrt{y}+2} xe^{-y^2}dxdy$$

Resolviendo el primer término se obtiene:

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}-2}^{-\sqrt{y}+2} 1dxdy = \int_0^4 x|_{\sqrt{y}-2}^{-\sqrt{y}+2}dy = \int_0^4 (-2\sqrt{y}+4)dy = -\frac{4}{3} \cdot y^{\frac{3}{2}}|_0^4 + 4y|_0^4 = -\frac{4 \cdot 4^{\frac{3}{2}}}{3} + 4 \cdot 4 = \frac{16}{3}$$

Resolviendo el segundo término:

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}-2}^{-\sqrt{y}+2} xe^{-y^2}dxdy = \int_0^4 e^{-y^2} \int_{\sqrt{y}-2}^{-\sqrt{y}+2} xdxdy = \int_0^4 e^{-y^2}(\frac{x^2}{2}|_{\sqrt{y}-2}^{-\sqrt{y}+2})dy \Rightarrow$$

$$\int_0^4 e^{-y^2}(\frac{(-\sqrt{y}+2)^2}{2} - \frac{(\sqrt{y}-2)^2}{2})dy = \int_0^4 e^{-y^2}(\frac{y^2-4\sqrt{y}+4}{2} - \frac{y^2-4\sqrt{y}+4}{2})dy = \int_0^4 e^{-y^2}(0)dy = 0$$

En total el resultado obtenido es:

$$\frac{16}{3} + 0 = \frac{16}{3}$$

Y por Rufini, también es verdadero:

$$\int_{-2}^0 \int_0^{(x+2)^2} 1 + xe^{-y^2}dydx + \int_0^2 \int_0^{(x-2)^2} 1 + xe^{-y^2}dydx = \frac{16}{3}$$