clase 12 (lu 12/09/22)

VARIACIÓN de PARÁMETROS

Note que en la EDO

$$y''(t) + y(t) = (\cos(t))^{-1}$$

para determinar una solución particular $y_p(t)$, no podemos usar aniquiladores, pues $f(t) = (\cos(t))^{-1}$ no es aniquilable.

Por otro lado: en la EDO

$$\boxed{y''(t) + t\,y'(t) - t^2 y(t) = t^3}$$

el término $g(t) = t^3$ es aniquilable, pero la EDO tiene coeficientes variables

¡Necesitamos otro método!

Consideremos la EDO $Ly = f$ donde

$$\boxed{L = D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)}$$

es un operador diferencial lineal a coeficientes variables y de orden n.

Ejemplo.: $y''(x) - x^3 y'(x) + e^x y(x) = \cos(x)$

En general, queremos resolver.

$$\boxed{1.\ y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) y^{n-1}(x) + \cdots + a_1(x) y'(x) + a_0(x) y(x) = f(x)}$$

(Note que la EDO está normalizada)

donde $\forall j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ las funciones $f(x)$ y $a_j(x)$ son continuas en algún intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$.

supongamos que conocemos

$B = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ sistema Fundamental para $Ly = 0$. Entonces, el problema es determinar una solución particular, y_p, para $Ly = f$.

El Método de Variación de parámetros, consiste en buscar una solución particular, y_p, del tipo:

$$\left(y_p(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j(x)\, y_j(x) \right)$$

$$\boxed{y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + \cdots + c_n(x)\, y_n(x).}$$

donde las incógnitas son los coeficientes

$c_1(x), c_2(x), \ldots, c_n(x)$.

$\boxed{\text{supongamos } N = 2}$: $\boxed{L = D^2 + a_1(x)D + a_0(x)D^0}$

$$\Longleftrightarrow \boxed{1 \cdot y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x)}$$

entonces conocida $B = \{y_1(x), y_2(x)\}$ base para $\ker(L)$, $\boxed{\text{proponemos}}$

$$\boxed{y_p(x) = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x)}$$

$c_1(x), c_2(x)$ incógnitas.

Entonces para determinar $c_1(x)$, $c_2(x)$ debemos seguir el protocolo, esto es, debe verificarse que:

$$\boxed{L\,y_p(x) = f(x)}\ , \text{ esto es,}$$

$$\boxed{y_p''(x) + a_1(x)\,y_p'(x) + a_0(x)\,y_p(x) = f(x)} \,. \quad (*)$$

Ahora explicitemos el valor de y_p en $(*)$:

$$\underbrace{\left(c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)\right)''}_{y_p''(x)} + a_1(x)\underbrace{\left(c_1y_1 + c_2y_2\right)'}_{y_p'(x)} + a_0(x)\underbrace{\left(c_1y_1 + c_2y_2\right)}_{y_p(x).} = f(x)$$

Tenemos: $\boxed{y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)}$ $\left(= \sum_{j=1}^{2} c_j(x)\,y_j(x)\right)$

$$\Longrightarrow \quad y_p'(x) = \sum_{i=1}^{2}\left(c_i'(x)\,y_i(x) + c_i(x)\,y_i'(x)\right) \ldots (*)$$

Ahora en $(*)$ imponemos que

$$\boxed{\sum_{i=1}^{2} c_i'(x)\,y_i(x) = 0} \quad (1)$$

Así, en $(*)$ tendremos que:

$$\boxed{y_p'(x) = \sum_{i=1}^{2} c_i(x)\, y_i'(x)}$$

$$\Longrightarrow \boxed{y_p''(x) = \sum_{i=1}^{2} \left(c_i'(x) y_i'(x) + c_i(x)\, y_i''(x) \right)}$$

Por tanto, en $\boxed{L y_p = f}$ tendremos

$$\sum_{i=1}^{2} \left\{ \left(c_i' y_i' + c_i y_i'' \right) + \left(a_1(x)\, c_i(x) y_i'(x) \right) + a_0(x)\, c_i(x) y_i(x) \right\} = f(x)$$

Ahora recordando que para $i \in \{1,2\}$ $\left(L y_i = 0, \right)$

$$\boxed{y_i''(x) + a_1(x) y_i'(x) + a_0(x)\, y_i(x) = 0},$$

sigue que: (2) $\boxed{\sum_{i=1}^{2} c_i'(x)\, y_i'(x) = f(x)}$

Por tanto, para determinar $c_1(x)$, $c_2(x)$

debemos trabajar con las condiciones impuestas

en (1) y (2). Esto es, resolver

$$\sum_{i=1}^{2} c_i'(x)\, y_i(x) = 0$$
$$\sum_{i=1}^{2} c_i'(x)\, y_i'(x) = f(x)$$

Observe que las incógnitas del sistema son:

$c_1'(x)$ y $c_2'(x)$.

Explícitamente:

$$\begin{cases} c_1'(x)\, y_1(x) + c_2'(x)\, y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)\, y_1'(x) + c_2'(x)\, y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

Observe que el sistema anterior se puede escribir:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Determine la solución general de

$$\boxed{y''(x) + y(x) = \cot(x)} \longrightarrow f(x) = \cot(x)$$

Desenvolto:

(1°) Buscos sistema fundamental para

$$y''(x) + y(x) = 0$$

Aquí $p(\alpha) = \alpha^2 + 1 \longrightarrow p(\alpha) = 0$

$\Longrightarrow \alpha = \pm i$

$$y(x) = e^{ix} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_1(x) = \cos(x) \\ y_2(x) = \operatorname{sen}(x) \end{array} \right\} \in \operatorname{Ker}(L)$$

$$L = D^2 + 1$$

Observe que:

$$\forall x, \quad W(x) = W(y_1, y_2; x) = \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen}(x) \\ -\operatorname{sen}(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = 1$$

Por tanto, $B = \{\cos(x), \operatorname{sen}(x)\}$ es un sistema fundamental para $Ly = 0$.

Así, si $y_h \in \ker(L)$, entonces

$$\boxed{y_h(x) = d_1 \cos(x) + d_2 \operatorname{sen}(x), \quad d_1, d_2 \in \mathbb{R}}$$

2º <u>Buscamos solución y_p de la forma:</u>

$$\boxed{y_p(x) = c_1(x) \cos(x) + c_2(x) \operatorname{sen}(x).}$$

donde las incógnitas $c_1(x)$ y $c_2(x)$ deben satisfacer:

$$\left\| \begin{array}{l} c_1'(x) \cos(x) + c_2'(x) \operatorname{sen}(x) = 0 \\ -c_1'(x) \operatorname{sen}(x) + c_2'(x) \cos(x) = \cot(x) \end{array} \right.$$

<u>CRAMER</u>:

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen}(x) \\ \cot(x) & \cos(x) \end{vmatrix}}{W(x)} = \frac{-\operatorname{sen}(x) \cot(x)}{1}$$

$$\Rightarrow c_1'(x) = -\cos(x), \quad x \text{ tq: } \operatorname{sen}(x) \neq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{c_1(x) = -\operatorname{sen}(x) + \alpha} \; ; \; \alpha \text{ constante} \quad (*)$$

Además:

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos(x) & 0 \\ \operatorname{sen}(x) & \cot(x) \end{vmatrix}}{W(x)} = \cos(x)\cot(x)$$

$$c_2'(x) = \frac{\cos^2(x)}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{1-\operatorname{sen}^2(x)}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} - \operatorname{sen}(x)$$

$$c_2'(x) = \csc(x) - \operatorname{sen}(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{c_2(x) = \ln\left|\csc(x) - \cot(x)\right| + \cos(x) + \beta} \quad (**)$$

β constante.

Finalmente:

$$y_p(x) = \left(\alpha - \operatorname{sen}(x)\right)\cos(x) + \\ + \left[\ln\left|\csc(x) - \cot(x)\right| + \cos(x) + \beta\right]\operatorname{sen}(x).$$

observe que podemos escribir:

$$y_p(x) = -\operatorname{sen}(x)\cos(x) + \left[\ln|\csc(x) - \cot(x)| + \cos(x)\right]\operatorname{sen}(x) + $$
$$+ \alpha\cos(x) + \beta\operatorname{sen}(x)$$

Recordando que la solución general de la EDO dada, es:

$$\boxed{y(x) = y_h(x) + y_p(x)}$$

donde $\boxed{y_h(x) = A\cos(x) + B\operatorname{sen}(x)}$ A, B constantes.

sigue, finalmente, que:

$$\boxed{\begin{aligned} y(x) = &\left(d_1\cos(x) + d_2\operatorname{sen}(x)\right) - \operatorname{sen}(x)\cos(x) + \\ &+ \ln|\csc(x) - \cot(x)| + \cos(x)\operatorname{sen}(x)\end{aligned}}$$

$\hookrightarrow$ d_1, d_2 constantes arbitrarias.

OBS: En $(*)$ y $(**)$, las constantes α y β pueden ser tomadas como $\alpha = \beta = 0$.

CASO GENERAL.

Consideremos la EDO NORMALIZADA

$$1\cdot y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)\, y^{(1)}(x) + a_0(x)\, y(x) = f(x)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} Ly = f \quad \text{con} \\ L = 1\cdot D^n + \sum_{j=1}^{n} a_{n-j}(x)\, D^{n-j} \end{cases}$$

Supongamos que $B = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ base del $\ker(L)$ (B sistema fundamental para el operador L)

Entonces, buscamos una solución y_p del tipo

$$y_p(x) = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x) + \cdots + c_n(x)\, y_n(x)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} c_j(x)\, y_j(x)$$

donde las incógnitas $c_i'(x)$ satisfacen:

$$\boxed{\begin{aligned} c_1'(x)\, y_1(x) + \cdots + c_n'(x)\, y_n(x) &= 0 \\ c_1'(x)\, y_1'(x) + \cdots + c_n'(x)\, y_n'(x) &= 0 \\ &\vdots \\ c_1'(x)\, y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)\, y_n^{(n-1)}(x) &= f(x) \end{aligned}}$$

si ponemos

$W(x) := W(y_1(x), \dots, y_n(x), x)$ (el Wronskiano de las funciones $y_1, \dots, y_n$ evaluado en x),

entonces, por la Regla de CRAMER, el sistema lineal anterior tiene solución:

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ 0 & y_2'(x) & & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(x) & y_2^{(n-1)}(x) & & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}}{W(x)}.$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 & y_3(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & 0 & y_3'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & f(x) & y_3^{(n-1)}(x) & & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}}{W(x)},$$

etc.

Ejemplo:

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$$

- Note que la EDO es a coeficientes constantes,
- la EDO está NORMALIZADA.

- Aquí $L = D^2 - 2D + 1 = (D-1)^2$

$\Longrightarrow$ $B = \{ e^x, x e^x \}$ es un sistema fundamental para L.

Portanto, $y_h(x) = d_1 e^x + d_2 x e^x$, con d_1, d_2 constantes, es la solución general para $\ker(L)$.

Buscamos:

$$y_p(x) = c_1(x) e^x + c_2(x) x e^x$$

donde $c_1(x)$ y c_2 verifican:

$$\boxed{\begin{aligned} c_1'(x)e^x + c_2'(x)\,x e^x &= 0 \\ c_1'(x)e^x + c_2'(x)(e^x + xe^x) &= \frac{e^x}{1+x^2} \end{aligned}}$$

En la primera ecuación:

$$\boxed{c_1'(x) = -x\,c_2'(x)}.$$

Así, en la segunda.

$$-xe^x c_2'(x) + c_2'(x)(1+x)e^x = \frac{e^x}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \quad c_2'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \quad c_2(x) = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \quad c_2(x) = \arctan(x) + K_1 \rightarrow ¡K_1 = 0!$$

Ahora; de $c_1'(x) = -x\,c_2'(x)$

$$\Rightarrow \quad c_1(x) = \int \frac{-x\,dx}{1+x^2}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\int \frac{2x\,dx}{1+x^2}$$

$$\Longrightarrow \quad c_1(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)\ln|1+x^2| + K$$

¡ $K=0$!

Finalmente:

$$y_p(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)\ln|1+x^2|\, e^x + [\arctan(x)]\, x e^x$$

y la solución general de la EDO dada es:

$$\boxed{\begin{aligned} y(x) = {} & \left(d_1 e^x + d_2 x e^x\right) + \\ & + \left(-\frac{1}{2}\right)\ln|1+x^2|\, e^x + [\arctan(x)]\, x e^x \end{aligned}}$$

donde d_1, d_2 son constantes reales.