

1 Nociones de Topología en \mathbb{R}^n .

$\mathbb{R}^n = \{X = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$ con las operaciones $+$ (suma) y \cdot (producto por escalar) es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} .

1. La norma euclidiana de un vector $X \in \mathbb{R}^n$ se define por

$$\|X\| = \|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Recuerde las propiedades de una norma en un espacio vectorial.

Un resultado importante son las desigualdades:

$$|x_k| \leq \|X\| \text{ para cada componente } x_k \text{ del vector } X$$

2. A partir de la norma se define la noción de distancia entre dos puntos $X = (x_1, \dots, x_n)$ e $Y = (y_1, \dots, y_n)$ de \mathbb{R}^n por

$$d(X, Y) = \|X - Y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

3. En \mathbb{R}^n se tiene también un producto interior definido por

$$\langle X, Y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

y para el cual se tiene: $\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$ o bien $\langle X, X \rangle = \|X\|^2$.

También es válida la desigualdad de Schwarz: $|\langle X, Y \rangle| \leq \|X\| \|Y\|$.

En \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 : $\langle X, Y \rangle = \|X\| \|Y\| \cos \theta$, donde θ es el ángulo ($\leq 180^\circ$) formado por los dos vectores, lo que implica que

$$\langle X, Y \rangle = 0 \Leftrightarrow X \perp Y$$

1.1 Bola abierta, punto interior y conjunto abierto.

Vecindad abierta de un punto en \mathbb{R}^n .-

Sea X_0 un punto de \mathbb{R}^n . ¿Cuáles son todos los puntos vecinos de él? (los que están más próximos, los que lo rodean)

Definición 1 Se llama bola abierta de centro X_0 y radio $r > 0$ al conjunto

$$\begin{aligned} B(X_0, r) &= \{X \in \mathbb{R}^n : d(X, X_0) < r\} \\ &= \{X \in \mathbb{R}^n : \|X - X_0\| < r\} \end{aligned}$$

Cuanto **más pequeño** es el $r > 0$, el conjunto contiene a los puntos **más próximos** de X_0 .

En \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 este conjunto es, respectivamente, un círculo y una esfera (abierta) de centro X_0 y radio r .

Definición 2 Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $X_0 \in A$. Se dice que X_0 es un punto interior de A cuando: $\exists r > 0$ tal que $B(X_0, r) \subset A$.

Por ejemplo, para el conjunto $A = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ el punto $(1, 2)$ es un punto interior y el punto $(0, 2)$ no es un punto interior. Para el conjunto $C = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$, todos sus puntos son interiores.

Definición 3 Un conjunto A es abierto cuando todos sus puntos son interiores.

Definición 4 Con $A \subset \mathbb{R}^n$, $\overset{\circ}{A} = \{X : X \text{ es punto interior de } A\}$ se llama el interior de A .

Es claro que: $\overset{\circ}{A} \subset A$, $\overset{\circ}{A}$ es un conjunto abierto y $\overset{\circ}{A}$ es el mayor conjunto abierto contenido en A .

Una bola abierta es un conjunto abierto.

1.2 Punto de acumulación.

Definición 5 Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $X_0 \in \mathbb{R}^n$ (es posible que $X_0 \notin A$). Se dice que X_0 es un punto de acumulación de A cuando

$$\forall r > 0 : [B(X_0, r) - \{X_0\}] \cap A \neq \emptyset$$

Por ejemplo, para el conjunto $C = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$, (el cual es abierto) los puntos $(1, 2)$ y $(0, 2)$ son de acumulación. Uno pertenece al conjunto y el otro no.

Un ejercicio interesante es mostrar que, siendo X_0 un punto de acumulación de A , es posible encontrar una sucesión $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ de puntos (distintos) de A tal que $d(X_n, X_0) < \frac{1}{n}$. Es decir, los puntos X_n se **acercan** al punto X_0 , o equivalentemente, la sucesión de puntos de A **converge** al punto X_0 .

Se define el conjunto $A' = \{X \in \mathbb{R}^n : X \text{ es punto de acumulación de } A\}$.

1.3 Conjunto cerrado, clausura, punto frontera.

Definición 6 Un conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado cuando F^C es abierto.

Por ejemplo, $\bar{B}(X_0, r) = \{X \in \mathbb{R}^n : \|X - X_0\| \leq r\}$, llamado bola cerrada de centro X_0 y radio r (positivo), es un conjunto cerrado.

Teorema 7 F es cerrado $\Leftrightarrow F$ contiene todos sus puntos de acumulación.

Definición 8 Se llama clausura de F al conjunto $\bar{F} = F \cup F'$ (F junto con todos sus puntos de acumulación)

Es obvio que: $F \subset \bar{F}$ y, según el Teorema, F es cerrado $\Leftrightarrow \bar{F} = F$.

Además, \bar{F} es el menor cerrado que contiene a F .

Un punto $X \in \bar{F}$ se llama punto de clausura o punto de adherencia de F .

Definición 9 Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $X_0 \in \mathbb{R}^n$. Se dice que X_0 es un punto frontera de A cuando:

$$\forall r > 0 : B(X_0, r) \cap A \neq \emptyset \wedge B(X_0, r) \cap A^C \neq \emptyset$$

X_0 es punto frontera de A cuando pertenece a la clausura de A y a la clausura de su complemento.

1.4 Conjunto compacto.

Definición 10 Un conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es acotado cuando $\exists r > 0$ tal que $K \subset B(0, r)$.

Definición 11 Un conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto cuando es cerrado y es acotado.

Por ejemplo, una bola cerrada es un conjunto compacto; mientras que el conjunto $A = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ no es compacto, porque (aunque es cerrado) no es acotado.

Ejercicios.-

1. Sea $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(2 + \frac{1}{n}, 0) : n \in \mathbb{N}\}$ Determine el interior, el conjunto de puntos adherentes y el conj. de puntos de acumulación de A .

2. Sean

$$A = \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(\frac{1}{n}, y) : n \in \mathbb{N} \wedge 0 \leq y \leq 1\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < x\}$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 \wedge x > 0\}$$

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

- a) Haga una gráfica que ilustre el conjunto.
- b) Determine: el interior y su clausura.
- c) Decida si el conjunto es abierto o si es cerrado.

2 Límite.

Se estudiarán funciones de varias variables reales y con valores en el espacio vectorial \mathbb{R}^m . Es decir, una función

$$F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, X \mapsto F(X)$$

con dominio un conjunto A de \mathbb{R}^n .

Como $X = (x_1, \dots, x_n)$, $F(X) = (f_1(X), \dots, f_m(X))$, con $f_k : A \rightarrow \mathbb{R}$, $X \mapsto f_k(X)$, la función F está determinada por las m funciones componentes f_1, \dots, f_m .

La función $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (y + x^2 \cos xy, 5x + e^{xy})$, es una función de 2 variables con valores en \mathbb{R}^2 . Sus componentes son $f_1(x, y) = y + x^2 \cos xy$ y $f_2(x, y) = 5x + e^{xy}$.

2.1 Definición de límite.

Al igual que en el cálculo de una variable, interesa estudiar el comportamiento de F cerca de un punto X_0 , el cual puede pertenecer al conjunto A (dominio de la función) o no. En todo caso debe ser un punto de acumulación de A , para poder **acercarse a X_0 a través de puntos del conjunto A** (donde es posible evaluar la función).

Definición 12 Sean $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, X_0 un punto de acumulación de A y $L \in \mathbb{R}^m$. Se escribe $\lim_{X \rightarrow X_0} F(X) = L$ cuando se cumple la condición

$$\begin{aligned} &\text{dado } \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que:} \\ &\forall X : \|X - X_0\| < \delta, X \in A, X \neq X_0 \Rightarrow \|F(X) - L\| < \varepsilon \quad (1) \end{aligned}$$

Observaciones.-

1. La condición (1) puede darse en forma equivalente por:

$$\begin{aligned} &\text{dado } \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que:} \\ &\forall X : X \in A, X \neq X_0, X \in B(X_0, \delta) \Rightarrow F(X) \in B(L, \varepsilon) \end{aligned}$$

Esto significa que si X es cercano de X_0 entonces su imagen $F(X)$ es próxima de L .

2. Puede existir un L que satisfaga la condición (1), o puede no existir.

3. Si el límite existe, es único.
4. La notación $\lim_{\substack{X \rightarrow X_0 \\ X \in A}} F(X) = L$ enfatiza el hecho que la evaluación de F se hace sobre puntos próximos de X_0 y que pertenecen al conjunto A (dominio de la función).
5. Considerando que $F(X) = (f_1(X), \dots, f_m(X))$, $L = (L_1, \dots, L_m)$ y

$$|f_k(X) - L_k| \leq \|F(X) - L\|, \forall k \quad (*)$$

se obtiene

$$\lim_{X \rightarrow X_0} F(X) = L \Leftrightarrow \lim_{X \rightarrow X_0} f_k(X) = L_k, \forall k$$

Las desigualdades (*) permiten probar la implicación \Rightarrow en la equivalencia anterior.

Esto justifica que los teoremas posteriores sobre límites se den sólo para funciones a valores reales: $f : A \rightarrow \mathbb{R}$

6. El caso más trivial a considerar es la función constante $f(X) = c$, donde se tiene

$$\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = \lim_{X \rightarrow X_0} [c] = c$$

2.2 Teoremas sobre límites.

Es directo de la definición que al estudiar el límite: $\lim_{\substack{X \rightarrow X_0 \\ X \in A}} f(X) = L$, podemos considerar una parte $B \subset A$, con la condición que X_0 continúe siendo un punto de acumulación de B . Entonces se tiene:

$$\lim_{\substack{X \rightarrow X_0 \\ X \in A}} f(X) = L \Rightarrow \lim_{\substack{X \rightarrow X_0 \\ X \in B}} f(X) = L$$

Es obvio que si la implicación en la condición (1) vale para puntos del conjunto A , debe continuar valiendo para puntos de una parte B de dicho conjunto. Como conclusión se tiene el siguiente resultado.

Teorema 13 Si B_1 y B_2 son partes de A , que tienen a X_0 como punto de acumulación, $\lim_{\substack{X \rightarrow X_0 \\ X \in B_1}} f(X) = L$, $\lim_{\substack{X \rightarrow X_0 \\ X \in B_2}} f(X) = M$ con $L \neq M$, entonces

$\lim_{\substack{X \rightarrow X_0 \\ X \in A}} f(X)$ **no existe**.

De hecho, si el límite sobre A existe entonces los dos límites sobre B_1 y sobre B_2 deben ser iguales.

Ejemplo 14 *Estudio del límite*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Basta encontrar dos trayectorias que pasen por $(0,0)$ a lo largo de las cuales se obtengan límites diferentes. Considere dos rectas que pasan por el origen.

Ejemplo 15 *Estudio del límite*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 - y}$$

El dominio de la función $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 - y}$ es $A = \mathbb{R}^2 - \{(x, y) \in A : y = x^2\}$.

1) Si tomamos el conjunto $B_m = \{(x, y) \in A : y = mx\}$ (recta que pasa por el origen), se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in B_m}} \frac{x^3}{x^2 - y} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2 - mx} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x - m} = 0 \end{aligned}$$

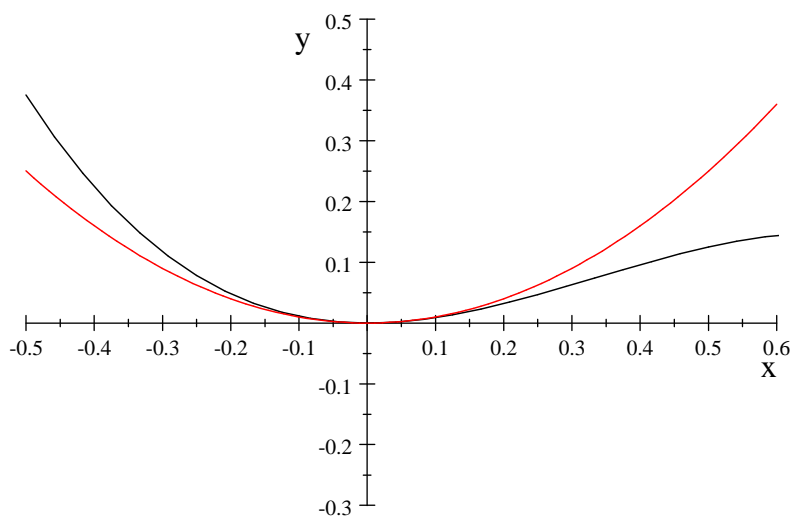
2) Por otro lado, si se considera el conjunto

$$C_1 = \left\{ (x, y) \in A : \frac{x^3}{x^2 - y} = 1 \right\}$$

(curva de nivel de f) vemos que:

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{x^2 - y} &= 1 \Leftrightarrow x^3 = x^2 - y \\ &\Leftrightarrow y = x^2 - x^3 \end{aligned}$$

lo que muestra que C_1 es una curva que pasa por el origen. La siguiente es su gráfica



Ahora podemos calcular

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in C_1}} \frac{x^3}{x^2 - y} = 1$$

Por lo tanto, de 1) y 2), $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 - y}$ **no existe**.

Es claro que cuando $\lim_{\substack{X \rightarrow X_0 \\ X \in A}} f(X) = L$ **exista**, cualquier parte B de A va a conducir al mismo resultado (L) y por supuesto que el Teorema anterior no va a ser aplicable. En este caso, una parte B convenientemente elejida nos proporciona el único valor posible L para el límite y entonces podemos aplicar el siguiente Teorema.

Teorema 16 Si es válido el acotamiento

$$|f(X) - L| \leq h(X), \text{ para } X \in B(X_0, r)$$

(para X cerca de X_0) y $\lim_{X \rightarrow X_0} h(X) = 0$, entonces $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = L$

Ejemplo 17 Estudio del límite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$$

Considerando la recta $B_0 : y = 0$ (eje x) se obtiene $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in B_0}} \frac{xy^2}{x^2+y^2} =$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = 0 = L$, **único** posible valor para el límite.

Ahora, dado que $|x| \leq \|(x, y)\|$, $|y| \leq \|(x, y)\|$ y $x^2 + y^2 = \|(x, y)\|^2$, se tiene el acotamiento

$$\begin{aligned} |f(x, y) - L| &= \left| \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \right| \\ &= \frac{|x| |y|^2}{\|(x, y)\|^2} \\ &\leq \frac{\|(x, y)\|^3}{\|(x, y)\|^2} = \|(x, y)\| \end{aligned}$$

con $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \|(x, y)\| = 0$. por tanto

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = 0$$

Ejemplo 18 Estudio del límite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - 2xy^5}{x^2 + y^4}$$

Al igual que en el cálculo de una variable se tiene los teoremas sobre álgebra de límites:

Teorema 19 Si $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = L$ y $\lim_{X \rightarrow X_0} g(X) = M$ entonces:

- a) $\lim_{X \rightarrow X_0} [f(X) + g(X)] = L + M$.
- b) $\lim_{X \rightarrow X_0} [f(X) \cdot g(X)] = L \cdot M$
- c) $\lim_{X \rightarrow X_0} [c \cdot f(X)] = c \cdot L$, para una constante c
- d) $\lim_{X \rightarrow X_0} \left[\frac{f(X)}{g(X)} \right] = \frac{L}{M}$, cuando $M \neq 0$

Aplicación.- Al tomar las funciones proyecciones:

$$\begin{aligned} pr_1 &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, pr_1(x, y) = x \\ pr_2 &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, pr_2(x, y) = y \end{aligned}$$

y aplicar la definición de límite se tiene: $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [pr_1(x, y)] = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [x] = x_0$ y $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [pr_2(x, y)] = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [y] = y_0$.

Luego, $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [c x^n y^m] = c x_0^n y_0^m$ para el producto de la constante c por un producto finito de n veces la primera proyección y m veces la segunda proyección.

Ahora, usando el Teorema, resulta el valor del límite para una función polinomial $f(x, y)$ en dos variables:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0) \quad (2)$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} [5x^3y - 2xy^2 + 3] &= 5(-1)^3 2 - 2(-1) 2^2 + 3 = 1 \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} [x^4 + y - 2xy] &= (-1)^4 + 2 - 2(-1)(2) = 7 \end{aligned}$$

También este procedimiento es válido para funciones que son cociente de polinomios, como por ejemplo

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} \left[\frac{5x^3y - 2xy^2 + 3}{x^4 + y - 2xy} \right] = \frac{1}{7}, \text{ al aplicar la parte d) del Teorema.}$$

Note que este razonamiento es aplicable a funciones de tres o más variables.

Otro resultado es el Teorema de sustitución para límites:

Teorema 20 Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, y $h : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = L$ y $\lim_{t \rightarrow L} h(t) = M$, entonces

$$\lim_{X \rightarrow X_0} h(f(X)) = \lim_{t \rightarrow L} h(t) = M$$

Por ejemplo, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

3 Continuidad.

La noción de función continua es la misma que en el cálculo de una variable.

Definición 21 Sean $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $X_0 \in A$. Se dice que F es una función continua en el punto X_0 cuando $\lim_{X \rightarrow X_0} F(X) = F(X_0)$.

En la definición se pide que:

- i) F esté definida en X_0 .
- ii) $\lim_{X \rightarrow X_0} F(X)$ exista y
- iii) el límite anterior coincida con el valor que toma F en el punto X_0 .

Observe que la condición (2) en la discusión anterior para funciones polinomiales establece simplemente que éstas son funciones continuas en todo su dominio (\mathbb{R}^n).

3.1 Interpretación geométrica

En el caso de una función de dos variables y a valores reales

$$\begin{aligned} f : A \subseteq \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

se tiene su representación geométrica mediante la gráfica en \mathbb{R}^3 de la ecuación

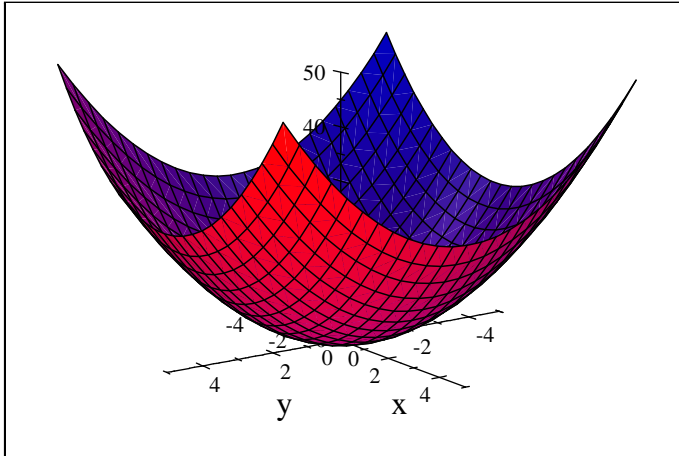
$$z = f(x, y)$$

en el sistema cartesiano de ejes perpendiculares xyz . Esto genera una superficie en \mathbb{R}^3 , gráfica del conjunto

$$S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in A\}$$

Por ejemplo, para la función polinomial continua $f(x, y) = x^2 + y^2$, su gráfica es el paraboloide de ecuación

$$z = x^2 + y^2$$



El hecho que la función f sea continua en (x_0, y_0) significa que: para (x, y) cercano de (x_0, y_0) , la imagen $z = f(x, y)$ es próxima de la imagen $z_0 = f(x_0, y_0)$, lo que determina que la superficie $S : z = f(x, y)$ es un *manto* continuo alrededor del punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

En el caso del paraboloide $z = x^2 + y^2$, dado que la función polinomial $f(x, y) = x^2 + y^2$ es continua en todo su dominio, la superficie es continua en todos sus puntos.

3.2 Ejemplos de continuidad.-

Ejemplo 22 Estudie la continuidad de la función f , en cada punto de su dominio

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ejemplo 23 Estudie la continuidad de la función f , en cada punto de su dominio

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Ejemplo 24 Estudie la continuidad de la función f , en cada punto de su dominio

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

4 Derivadas parciales.

Tomemos la base canónica de \mathbb{R}^n : $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, donde $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$.

Definición 25 Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y X_0 un punto interior de A . Se definen las derivadas parciales de f en el punto X_0 mediante los límites:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(X_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(X_0 + h \cdot e_k) - f(X_0)}{h} \right] \quad (3)$$

cuando estos existen.

Tenemos derivada parcial con respecto a cada variable x_k de la cual depende la función (k va de 1 a n).

Es fácil ver que si se toma la función $\varphi(t) = f(X_0 + t \cdot e_k)$, entonces

$$\varphi'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} \right] = \frac{\partial f}{\partial x_k}(X_0)$$

O sea, una derivada parcial es una derivada (ordinaria) del cálculo de una variable. Lo que permite trabajar, en muchos casos, con todas las reglas de derivación conocidas del curso anterior.

Para una función de dos variables: x, y , la definición queda:

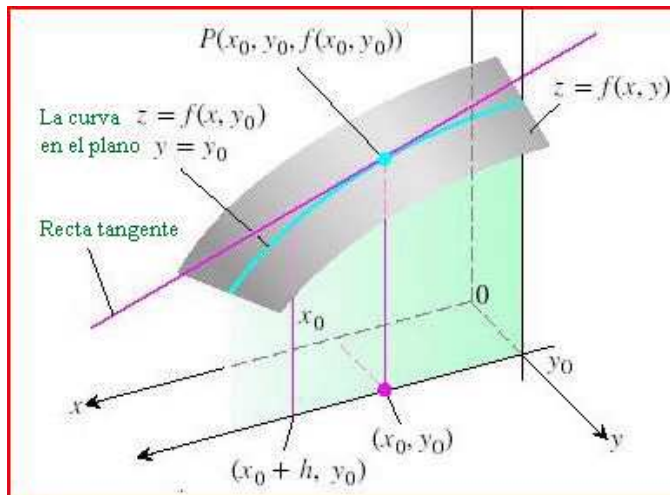
$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \right] \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} \right] \end{aligned}$$

Cabe mencionar que las derivadas parciales respecto de cada variables son independientes entre si. Puede existir una y no la otra, por ejemplo.

Observe que la derivada $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ sólo considera el comportamiento de f en puntos de la forma $(x_0 + h, y_0)$ con h real, no en puntos de toda una vecindad (bidimensional) de (x_0, y_0) . De hecho se mantiene fija la segunda variable y en el valor y_0 .

En el caso de $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, la interpretación geométrica corresponde a la pendiente de la recta tangente que se muestra en la siguiente figura:

Análoga es la interpretación para la derivada $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.



Ejemplo 26 Para la función polinomial $f(x, y) = 2x^3y^4 + 5x + 6y - 1$ el cálculo de las dos derivadas parciales es muy simple.

Según la definición, para derivar f con respecto a x en un punto (x_0, y_0) , se deriva la función

$$f(x, y_0) = 2x^3y_0^4 + 5x + 6y_0 - 1$$

con respecto a la variable x en el punto x_0 . Para ello se aplican las reglas de derivación para obtener

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= (6x^2y_0^4 + 5)|_{x_0} \\ &= 6x_0^2y_0^4 + 5 \end{aligned}$$

Se ve entonces que en un punto (x, y) cualquiera

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 6x^2y^4 + 5 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 8x^3y^3 + 6 \end{aligned}$$

Ejemplo 27 Calcule las derivadas parciales, en todo punto donde existan, de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) En un punto que no sea el origen, la fórmula que define a la función no cambia en una pequeña vecindad de ese punto, así que se pueden aplicar las reglas de derivación a esta fórmula para obtener

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right) \\ &= \frac{y(x^2 + y^2) - 2x(xy)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

y de la misma forma

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

b) En el punto $(0, 0)$: la fórmula $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ válida en una vecindad del punto, sin su centro, no aplica para evaluar $f(0, 0) = 0$. Por tanto, no se aplican reglas de derivación y se debe proceder mediante la definición para obtener

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} [0] \\ &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} \right] = 0\end{aligned}$$

Volviendo a la definición (general) de derivada parcial podemos notar que ella se da en términos de los vectores de la base canónica. Cada vector e_k determina geoméricamente una dirección en \mathbb{R}^n , precisamente la dirección del eje coordenado correspondiente. Así, la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_k}(X_0)$ es una derivada en la dirección del eje x_k y mide la tasa de cambio de la función en dicha dirección.

Note además que, de acuerdo al ejemplo anterior, una función puede tener todas sus derivadas parciales en un punto sin que sea *continua* en dicho punto.

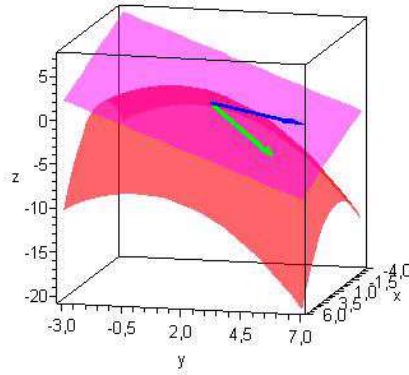
4.1 Derivada direccional.

En la definición de derivada parcial (3) podemos cambiar el vector e_k que da la dirección, por otro vector *unitario* \vec{v} que determine otra dirección en el espacio \mathbb{R}^n .

Definición 28 Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, X_0 un punto interior de A y \vec{v} un vector unitario. Se define la derivada direccional de f en el punto X_0 en la dirección dada por el vector \vec{v} por:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(X_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(X_0 + h \cdot \vec{v}) - f(X_0)}{h} \right]$$

Esta también corresponde a una tasa de cambio de f en X_0 en la dirección del vector \vec{v} (de color azul)



El siguiente ejemplo muestra que una función puede tener derivada direccional en un punto, en todas las direcciones, sin que ella sea continua en ese punto.

Ejemplo 29 Calcule las derivadas direccionales en $(0,0)$, en todas las direcciones, de la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Muestre también que la función no es continua en el origen.

5 La Diferencial.-

Definición 30 Sea $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $X \mapsto F(X)$, una función de n variables y a valores vectoriales, definida en un conjunto abierto A y sea $X_0 \in A$. Se dice que F es **diferenciable** en X_0 cuando existe una aplicación lineal

$L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $H \mapsto L(H)$ tal que:

$$\lim_{H \rightarrow \theta} \frac{F(X_0 + H) - F(X_0) - L(H)}{\|H\|} = \Theta \quad (\text{vector nulo}) \quad (4)$$

Si en la condición 4 se reemplaza $H = X - X_0$ se obtiene:

$$\lim_{X \rightarrow X_0} \frac{F(X) - F(X_0) - L(X - X_0)}{\|X - X_0\|} = \Theta \quad (5)$$

Mirando esta última condición podemos tomar la aplicación

$$G(X) = (F(X_0) - L(X_0)) + L(X) \quad (6)$$

que es la suma de un vector constante más una aplicación lineal (se llama aplicación afín), y escribir

$$\lim_{X \rightarrow X_0} \frac{F(X) - G(X)}{\|X - X_0\|} = \Theta \quad (7)$$

La condición 7 se expresa diciendo que la función G definida en 6 es una **buena aproximación** de la función F en una vecindad del punto X_0 . El límite 7 puede entenderse en el sentido que la diferencia $F(X) - G(X)$ tiende a cero (vector nulo), más rápidamente que $\|X - X_0\|$, cuando $X \rightarrow X_0$.

Por esto, cuando F es diferenciable en el punto X_0 , se tiene la aproximación

$$F(X) \approx G(X) = F(X_0) + L(X - X_0)$$

válida para X próximo de X_0 .

La aplicación lineal L de 4 se llama *La Diferencial de F en el punto X_0* y se denota $DF(X_0) = L$.

Observaciones.-

1. Se puede probar que existe a lo más una aplicación lineal satisfaciendo la condición (4).

2. Cuando no existe una L lineal que cumpla (4), se dice que F no es diferenciable en el punto X_0 .
3. En el caso particular que F sea una aplicación lineal, es inmediato verificar que $L = F$ verifica la condición 4 de la definición. O sea, $DF(X_0) = F$, en cualquier punto X_0 .
4. También, cuando F es una aplicación afín, es decir $F(X) = B + L(X)$ (un vector constante más una aplicación lineal) se tiene que $DF(X_0) = L$, en cualquier punto X_0 .

Este resultado es el análogo de la propiedad para una función afín (en una variable) $f(x) = b + mx$, para la cual $f'(x_0) = m$, en cualquier punto x_0 .

El problema a abordar enseguida es ¿cómo averiguar si una función F es diferenciable en el punto X_0 ? y cuando lo sea, ¿cómo encontrar la diferencial $DF(X_0)$?

Recuerde que siendo $DF(X_0)$ una aplicación lineal de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m , ella se puede representar mediante una matriz A de orden $m \times n$, cuando se fijan bases en dominio y codominio, por ejemplo las bases canónicas.

Tomemos una F **diferenciable** en X_0 y considere el j -ésimo vector \hat{e}_j de la base canónica de \mathbb{R}^n . Podemos restringir el límite de la condición (4) al camino determinado por el eje x_j ($h \mapsto h \cdot \hat{e}_j$) y obtener

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(X_0 + h \cdot \hat{e}_j) - F(X_0) - L(h \cdot \hat{e}_j)}{\|h \cdot \hat{e}_j\|} = \Theta$$

lo que lleva fácilmente a:

$$L(\hat{e}_j) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(X_0 + h \cdot \hat{e}_j) - F(X_0)}{h}$$

Ahora si consideramos que $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ está determinada por sus funciones componentes, lo mismo que $L = (L_1, L_2, \dots, L_m)$; la fórmula anterior da

$$L_i(\hat{e}_j) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_i(X_0 + h \cdot \hat{e}_j) - f_i(X_0)}{h} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X_0)$$

Esto muestra que, con respecto a las bases canónicas en el dominio y codominio, la matriz de L está dada por:

$$JF(X_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(X_0) & \dots & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(X_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(X_0) & \dots & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(X_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(X_0) & \dots & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(X_0) \end{pmatrix}$$

llamada *matriz jacobiana de F en el punto X_0* .

Caso particular.- $n=2$ y $m=1$.

Para $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x, y)$. diferenciable en (x_0, y_0) se tiene:

$$\begin{aligned} Jf(x_0, y_0) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \\ Df(x_0, y_0)(h, k) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot k \end{aligned}$$

La **buena aproximación** de f en una vecindad de (x_0, y_0) es

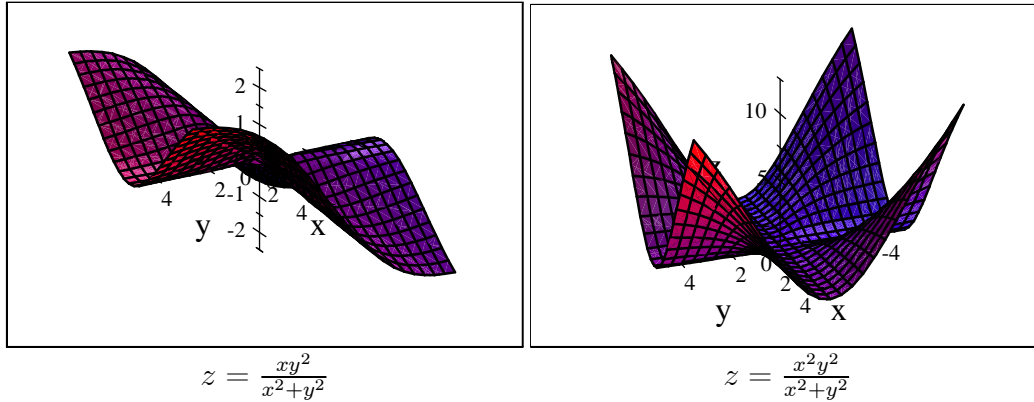
$$g(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

cuyo gráfico $z = g(x, y)$ corresponde a un plano que pasa por el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Precisamente la condición (4) que define diferenciabilidad de f en (x_0, y_0) , hace que este plano sea tangente a la superficie $S : z = f(x, y)$, gráfico de f en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Ejemplo 31 Estudie la diferenciabilidad en $(0, 0)$ de las funciones

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\ g(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

Cuando corresponda, encuentre el plano tangente a la gráfica de la función en el origen.



5.1 Teoremas sobre diferenciabilidad.

La relación entre diferenciabilidad y continuidad está determinada en el siguiente teorema.

Teorema 32 F diferenciable en $X_0 \Rightarrow F$ continua en X_0 .

Dem.- Se sigue del hecho que toda aplicación lineal L es una función continua, es decir $\lim_{X \rightarrow X_0} L(X) = L(X_0)$, y además

$$F(X) - F(X_0) = F(X) - F(X_0) - L(X - X_0) + L(X - X_0).$$

$$\text{Luego, } \|F(X) - F(X_0)\| \leq \|F(X) - F(X_0) - L(X - X_0)\| + \|L(X - X_0)\|$$

Como (5) implica que $\lim_{X \rightarrow X_0} \|F(X) - F(X_0) - L(X - X_0)\| = 0$, se concluye que

$$\lim_{X \rightarrow X_0} F(X) = F(X_0)$$

En forma práctica el Teorema se usa aplicando su contrarecíproco:

F no continua en $X_0 \Rightarrow F$ no diferenciable en X_0 .

Definición 33 Una función $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ definida en el **abierto** $A \subset \mathbb{R}^n$ y con valores en \mathbb{R}^m es de clase C^1 en el conjunto A cuando todas las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} : A \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas.

Observe que son $m \cdot n$ derivadas parciales.

La importancia de esta condición está en el siguiente resultado (cuya demostración está fuera del alcance de este curso):

Teorema 34 Una función F de clase C^1 en el **abierto** A es diferenciable en cada punto de este conjunto.

El teorema anterior muestra que la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es diferenciable en todo punto $(x, y) \neq (0, 0)$ (el conjunto $A = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ es abierto y f es de clase C^1 en A). Además, f no es diferenciable en $(0, 0)$, porque no es continua en dicho punto.

¿Cuál es la ecuación del plano tangente al gráfico de f en el punto $(2, 3, \frac{6}{13})$? ($f(2, 3) = \frac{6}{13}$).

Determinéla a partir de

$$z = f(2, 3) + \frac{\partial f}{\partial x}(2, 3)(x - 2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2, 3)(y - 3)$$

Se calcula

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = -y \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \text{ evaluado en } (2, 3): -3 \frac{4-9}{13^2} = \frac{15}{169}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = x \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \text{ evaluado en } (2, 3): 2 \frac{4-9}{13^2} = -\frac{10}{169}$$

La ecuación es: $z = \frac{6}{13} + \frac{15}{169}(x - 2) - \frac{10}{169}(y - 3)$.

Recuerde que este plano tiene la virtud de generar la aproximación

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} \approx \frac{6}{13} + \frac{15}{169}(x - 2) - \frac{10}{169}(y - 3)$$

para (x, y) cercano de $(2, 3)$.

La relación entre diferenciability y derivadas direccionales está dada por:

Teorema 35 Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en el punto X_0 y \vec{v} un vector unitario. Se tiene entonces

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(X_0) = Df(X_0)(\vec{v})$$

Dem.- De la definición de diferenciability en X_0 :

$$\lim_{H \rightarrow 0} \frac{f(X_0 + H) - f(X_0) - Df(X_0)(H)}{\|H\|} = 0$$

Si el límite anterior se restringe al camino determinado por $h \rightarrow h \cdot \vec{v}$ se obtiene

$$Df(X_0)(\vec{v}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(X_0 + h\vec{v}) - f(X_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(X_0)$$

Observación.- Al definir el **vector**

$$\nabla f(X_0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) \right)$$

llamado *gradiente de f en X_0* , la igualdad

$$Df(X_0)(H) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0)h_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0)h_n$$

puede escribirse

$$Df(X_0)(H) = \nabla f(X_0) \cdot H$$

donde “ \cdot ” representa el producto interior de los dos vectores. La fórmula del teorema anterior ahora se escribe

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(X_0) = Df(X_0)(\vec{v}) = \nabla f(X_0) \cdot \vec{v}$$

y luego, utilizando la desigualdad de Scharwz,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(X_0) \right| &= |\nabla f(X_0) \cdot \vec{v}| \\ &\leq \|\nabla f(X_0)\| \|\vec{v}\| \\ &= \|\nabla f(X_0)\| \end{aligned}$$

O sea, $\|\nabla f(X_0)\|$ es una cota superior para el valor absoluto de cualquier derivada direccional en X_0 .

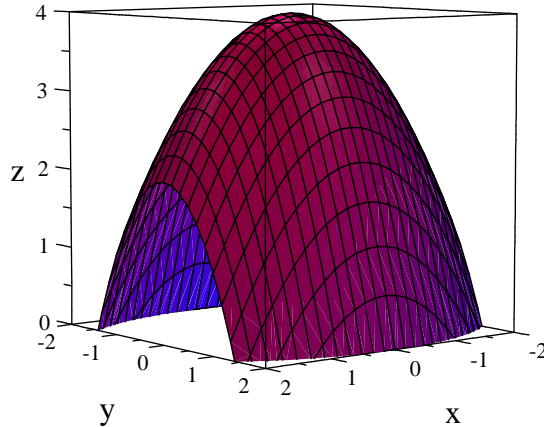
Por otra parte, al considerar el vector unitario $\vec{u} = \frac{\nabla f(X_0)}{\|\nabla f(X_0)\|}$ (siempre que el vector gradiente no es nulo) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(X_0) &= \nabla f(X_0) \cdot \frac{\nabla f(X_0)}{\|\nabla f(X_0)\|} \\ &= \|\nabla f(X_0)\| \end{aligned}$$

lo que indica que la dirección del vector \vec{u} determina la máxima derivada direccional de f en X_0 .

Por lo tanto, $\nabla f(X_0)$ proporciona la **dirección de mayor crecimiento** para la función f . La dirección contraria $-\nabla f(X_0)$ corresponderá a la de mayor disminución de la función. Esto explica que el flujo de calor se produzca en la dirección de $-\nabla T(X)$, cuando T es la función temperatura para los distintos puntos de un cuerpo.

Ejemplo 36 Suponga que $z = f(x, y) = \frac{1}{2}(8 - x^2 - 2y^2)$ modela la ladera de una montaña



Ud. se encuentra en el punto de coordenadas $(1, 1, \frac{5}{2})$ ¿En qué dirección debería caminar para subir más rápidamente? y ¿con qué pendiente asciende en dicha dirección?

El problema se resuelve determinando la dirección en la cual f (la función altura) crece más rápidamente, en el punto $(1, 1)$. Esta función de clase C^1 tiene derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -x$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y$

Sabemos que esta dirección está dada por $\nabla f(1, 1) = (-1, -2) \equiv -\hat{i} - 2\hat{j}$

Además, el valor de esta derivada direccional máxima es

$$\|\nabla f(1, 1)\| = \sqrt{5}$$

y por tanto, el ángulo de inclinación es $\theta = \arctan \sqrt{5} = 65.9^\circ$

5.2 Derivadas de orden superior.-

Dada una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ de n variables, definida en el abierto A de \mathbb{R}^n y con derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_i} : A \rightarrow \mathbb{R}$ se definen las derivadas parciales de

segundo orden en el punto $X_0 \in A$ por

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X_0) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right] (X_0) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0 + h \cdot \hat{e}_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)}{h} \right]\end{aligned}$$

cuando el límite existe. Esta definición es para cada $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ (hay n^2 derivadas de segundo orden).

Las derivadas de segundo orden de f son la derivadas parciales (de primer orden) de las funciones $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. En forma inductiva se definen las derivadas parciales de tercer orden, cuarto orden, etc.

Por ejemplo para la función $f(x, y) = x^2 y^3 + e^{2x} \sin 3y$ se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 y^3 + e^{2x} \sin 3y) = 2xy^3 + 2e^{2x} \sin 3y.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 y^3 + e^{2x} \sin 3y) = 3x^2 y^2 + 3e^{2x} \cos 3y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (2xy^3 + 2e^{2x} \sin 3y) = 2y^3 + 4e^{2x} \sin 3y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (2xy^3 + 2e^{2x} \sin 3y) = 6xy^2 + 6e^{2x} \cos 3y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (3x^2 y^2 + 3e^{2x} \cos 3y) = 6xy^2 + 6e^{2x} \cos 3y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2 y^2 + 3e^{2x} \cos 3y) = 6x^2 y - 9e^{2x} \sin 3y$$

Se puede observar que las derivadas mixtas $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ coinciden (note que se obtienen de procesos distintos). Este resultado proviene de una propiedad más general que se comenta a continuación.

Una función f es de clase C^2 en el abierto A cuando todas las derivadas parciales de segundo orden son continuas en A . Para funciones de clase C^2 se verifica la igualdad

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X), \quad \forall X \in A$$

El siguiente ejemplo muestra el caso de una función donde no se verifica la igualdad anterior.

$$\text{Sea } f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{si } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}.$$

Calcule $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

5.3 Regla de la cadena.-

En el cálculo de una variable la regla de la cadena indica cómo calcular la derivada de una compuesta de dos funciones derivables:

$$\frac{d}{dx} [g(f(x))] = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

La derivada de $g \circ f$ es el producto de la derivada de g y la derivada de f , calculadas en los puntos que se indica.

También podemos representar esta fórmula considerando las relaciones entre variables determinadas por las funciones f y g , a saber

$$\begin{aligned} z &= g(y), \text{ con derivada } \frac{dz}{dy} = g'(y) \\ y &= f(x), \text{ con derivada } \frac{dy}{dx} = f'(x) \end{aligned}$$

y al componer resulta

$$z = g(y) = g(f(x))$$

o sea, la variable z expresada en términos de la variable x , a través de la función $g \circ f$, cuya derivada es $\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx} [g(f(x))]$. La regla de la cadena establece que:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

En el cálculo de varias variables se tiene

Teorema 37 Si $F : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en X_0 y $G : B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ es diferenciable en $Y_0 = F(X_0)$, entonces la compuesta $G \circ F$ es diferenciable en X_0 y

$$D(G \circ F)(X_0) = DG(Y_0) \circ DF(X_0)$$

O sea, la diferencial de la compuesta es igual a la compuesta de las diferenciales respectivas.

Obs.- En el teorema se supone además que A y B son conjuntos abiertos y que la composición está bien definida.

Según se vio en álgebra lineal, al representar aplicaciones lineales mediante matrices la composición de aplicaciones corresponde a la multiplicación de sus matrices. Por esto, la fórmula del teorema se expresa en términos de matrices jacobianas por

$$J(G \circ F)(X_0) = JG(Y_0) \cdot JF(X_0)$$

Recuerde que la matriz jacobiana está formada por las derivadas parciales de las componentes de la función. Luego, podemos concluir que las derivadas parciales (de las componentes) de la $G \circ F$ están determinadas por las derivadas parciales (de las componentes) de la F y de la G , según se analiza a continuación:

Asociamos $F (X \rightarrow F(X) = Y)$ con las fórmulas que definen sus m componentes

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\dots\dots\dots \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Sus mn derivadas parciales son: $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}$ o $\frac{\partial y_k}{\partial x_j}$, que representan las tasas de cambio de las variables y_k con respecto a las variables x_j .

Asociamos $G (Y \rightarrow G(Y) = Z)$ con las fórmulas que definen sus p componentes

$$\begin{aligned} z_1 &= g_1(y_1, y_2, \dots, y_m) \\ z_2 &= g_2(y_1, y_2, \dots, y_m) \\ &\dots\dots\dots \\ z_p &= g_p(y_1, y_2, \dots, y_m) \end{aligned}$$

Sus pm derivadas parciales son: $\frac{\partial g_i}{\partial y_k}$ o $\frac{\partial z_i}{\partial y_k}$, que representan las tasas de cambio de las variables z_i con respecto a las variables y_k .

Ahora, si las variables z_i dependen de las y_k y las y_k dependen de las x_j , al componer las dos aplicaciones las variables z_i dependerán de las x_j .

El cálculo de las derivadas parciales $\frac{\partial z_i}{\partial x_j}$ resulta de

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \frac{\partial z_1}{\partial x_2} & \dots\dots & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial z_2}{\partial x_1} & \frac{\partial z_2}{\partial x_2} & \dots\dots & \frac{\partial z_2}{\partial x_n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \frac{\partial z_p}{\partial x_1} & \frac{\partial z_p}{\partial x_2} & \dots\dots & \frac{\partial z_p}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \frac{\partial z_1}{\partial y_2} & \dots\dots & \frac{\partial z_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial z_2}{\partial y_1} & \frac{\partial z_2}{\partial y_2} & \dots\dots & \frac{\partial z_2}{\partial y_m} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \frac{\partial z_p}{\partial y_1} & \frac{\partial z_p}{\partial y_2} & \dots\dots & \frac{\partial z_p}{\partial y_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots\dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots\dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \dots\dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Así se tiene que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z_i}{\partial x_j} &= \frac{\partial z_i}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \frac{\partial z_i}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial z_i}{\partial y_m} \frac{\partial y_m}{\partial x_j} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial z_i}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_j}\end{aligned}$$

Con mayor precisión, cuando $\frac{\partial z_i}{\partial x_j}$ está calculado (evaluado) en el punto X_0 , $\frac{\partial z_i}{\partial y_k}$ se evalúa en $Y_0 = F(X_0)$ y $\frac{\partial y_k}{\partial x_j}$ se evalúa en X_0 .

Ejemplo 38 Cambio de coordenadas rectangulares a polares.-

La transformación es $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) = (x, y)$ Es decir,

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta\end{aligned}$$

Note que T es de clase C^1 , con

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial r} &= \cos \theta, & \frac{\partial x}{\partial \theta} &= -r \sin \theta \\ \frac{\partial y}{\partial r} &= \sin \theta, & \frac{\partial y}{\partial \theta} &= r \cos \theta\end{aligned}$$

Para la función $z = f(x, y)$, el cambio de coordenadas da $z = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ y las derivadas quedan

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial z}{\partial x} r \sin \theta + \frac{\partial z}{\partial y} r \cos \theta\end{aligned}$$

La regla se recuerda mediante el siguiente esquema

$$\begin{array}{ccccc} & & z & & \\ & \nearrow \frac{\partial z}{\partial x} & & \nwarrow \frac{\partial z}{\partial y} & \\ & x & & y & \\ \frac{\partial x}{\partial r} \nearrow & & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial r} \nearrow & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ r & & \theta & r & \theta \end{array}$$

Para calcular las derivadas de segundo orden, por ejemplo $\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}$, conviene recordar que la fórmula para $\frac{\partial z}{\partial r}$ es

$$\frac{\partial z}{\partial r}(r, \theta) = \frac{\partial z}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \sin \theta$$

Luego,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \frac{\partial y}{\partial r} \right) \cos \theta + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \frac{\partial y}{\partial r} \right) \sin \theta \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cos^2 \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \sin \theta \cos \theta\end{aligned}$$

donde en la última igualdad se ha supuesto que $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ (consideramos el caso que f es C^2).

Queda de ejercicio calcular las otras tres derivadas de segundo orden.

Ejemplo 39 Para el caso $w = f(x, y, z)$ diferenciable y la curva $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ derivable, se tiene la compuesta $w(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ con derivada

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= \nabla f \cdot \vec{r}'\end{aligned}$$

es decir

$$\frac{dw}{dt}(t) = \nabla f(r(t)) \cdot \vec{r}(t)$$

Ejemplo 40 Con $z = f(u)$ derivable y $u = g(x, t)$ diferenciable, la compuesta queda $z = f(g(x, t))$ y sus derivadas parciales son

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = f' \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{df}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = f' \frac{\partial u}{\partial t}\end{aligned}$$

5.4 Teorema de la función inversa.-

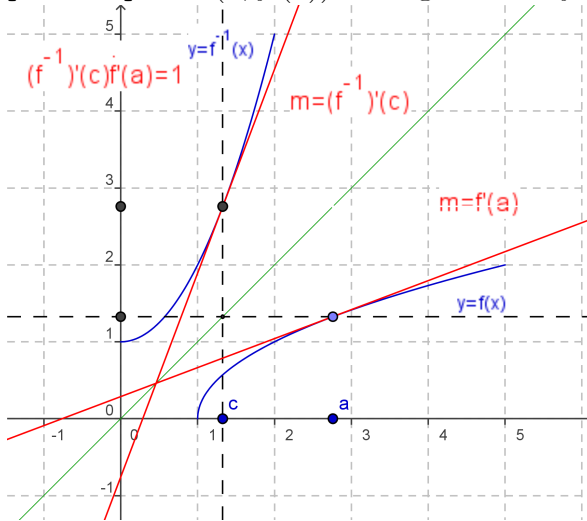
Desde el punto de vista (más básico) del álgebra, para que una función tenga inversa ella debe ser biyectiva. Sin embargo sabemos que restringiendo apropiadamente una función podemos conseguir que ella tenga inversa. Es el caso de las funciones trigonométricas, con las conocidas arcsin, arccos, etc.

El cálculo diferencial se preocupa de estudiar la diferenciabilidad (o derivabilidad, según sea el caso) de esta inversa. Primero damos una versión particular de este teorema para el cálculo en una variable.

Teorema 41 Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, y $x_0 \in I$ tal que $f'(x_0) \neq 0$. Entonces existen vecindades V de x_0 y W de $y_0 = f(x_0)$ tales que:

- a) $f : V \rightarrow W$ es biyectiva
- b) la inversa $f^{-1} : W \rightarrow V$ es derivable y
- c) para todo $y = f(x) \in W : (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$

En el gráfico siguiente se muestra la relación entre $f'(a)$ y $(f^{-1})'(f(a))$, para un punto $(a, f(a))$ en el gráfico de f .



Por ejemplo, para $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, se tiene:
 $f'(x) = \cos x \neq 0$. Luego, $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$,
 dado que $y = \sin x \Leftrightarrow x = \arcsin y$.

Por lo tanto, $\frac{d}{dx} [\arcsin x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\forall x \in]-1, 1[$.

Teorema 42 (Caso general) Sea $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, $X \rightarrow F(X)$, de clase C^1 en el abierto A de \mathbb{R}^n . Si $JF(X_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X_0) \right)$ tiene inversa (esto es,

$\det JF(X_0) \neq 0$), entonces existen vecindades abiertas V de X_0 y W de $Y_0 = F(X_0)$ tales que:

- a) la restricción $F : V \rightarrow W$ es biyectiva
- b) la inversa $F^{-1} : W \rightarrow V$ es de clase C^1 (luego diferenciable) y
- c) para todo $Y \in W : DF^{-1}(Y) = DF(X)^{-1}$. Lo que se traduce en $JF^{-1}(Y) = (JF(X))^{-1}$.

Nótese que el teorema garantiza la existencia de una **inversa local** para F , la cual es de clase C^1 y además sin conocer la fórmula que define a F^{-1} , podemos acceder a su diferencial.

Un ejemplo importante lo constituye la transformación de coordenadas rectangulares a polares:

$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(r, \theta) = (x, y)$, con

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned}$$

T es de clase C^1 con

$$\begin{aligned} JT(r, \theta) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \\ \det JT(r, \theta) &= \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \end{aligned}$$

Luego, para (r_0, θ_0) con $r_0 \neq 0$, T admite una inversa local en una vecindad abierta V de (r_0, θ_0) con

$$JT^{-1}(x, y) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

para todo $(x, y) = T(r, \theta) \in W = T(V)$.

En este ejemplo particular, recuerde que, al menos para el primer y cuarto cuadrante del plano xy se tiene que:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned}$$

equivale a

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

Es decir, podemos obtener la fórmula que define a la inversa de T y a partir de aquí

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

lo que coincide con el elemento 1 1 de la matriz $JT^{-1}(x, y)$ obtenida del Teorema. Lo mismo puede verificar para los otros 3 elementos de esta matriz.

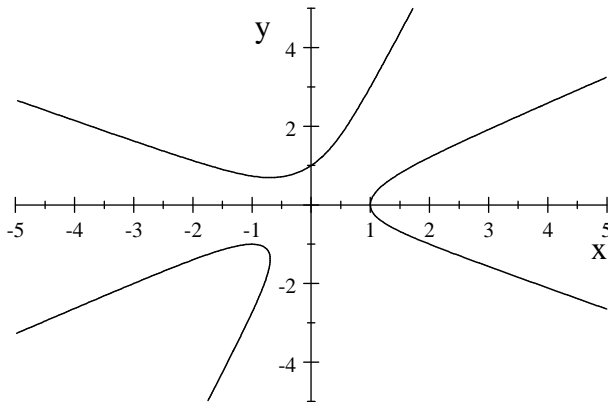
5.5 Teorema de la función implícita.-

Primero se discute el caso más simple, dada una función $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, de dos variables y de clase C^1 , podemos considerar una “curva de nivel” correspondiente a la ecuación

$$f(x, y) = 0$$

(todos los puntos del dominio que tienen por imagen el valor 0). Algebraicamente, este conjunto corresponde a una *relación* de \mathbb{R} en \mathbb{R} , la cual no define necesariamente una función (ya sea de la variable independiente $x : y = g(x)$, o bien de la variable $y : x = h(y)$)

Discutámoslo a través de un ejemplo concreto, la función de clase C^1 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy^2 - 1$, determina la curva $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy^2 - 1 = 0$ que se muestra a continuación:



Es claro que esta curva **no define globalmente una función**, ya sea de la variable x o de la variable y . Algebraicamente, la ecuación $f(x, y) = 0$ **no es equivalente** a una ecuación de la forma $y = g(x)$ (o bien $x = h(y)$).

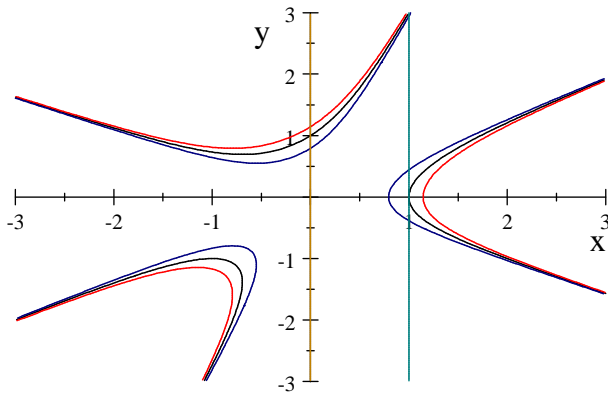
Sin embargo, en términos **locales**, alrededor de un punto (x_0, y_0) de la curva, la situación puede ser distinta. Como ejemplo podemos analizar los puntos $(0, 1)$ y $(1, 0)$ de esta curva:

Si se observa un *pequeño* arco de la curva que pase por el punto $(0, 1)$, vemos que éste corresponde a la gráfica de una función del tipo $y = g(x)$. O sea, $f(x, y) = 0 \iff y = g(x)$, cerca del punto $(0, 1)$; lo que se expresa diciendo que la ecuación $f(x, y) = 0$ **define implícitamente** a y como función de la variable x .

Por otro lado, cualquier pequeño arco pasando por $(1, 0)$ **no** corresponde a la gráfica de una función del tipo $y = g(x)$. O sea, en el punto $(1, 0)$ la ecuación $f(x, y)$ **no** define a y como función de la variable x .

¿Cuál es la diferencia entre estos dos puntos?

En el gráfico siguiente se han agregados las curvas $f(x, y) = \frac{1}{2}$ de color rojo, y $f(x, y) = -\frac{1}{2}$ de color azul; que de alguna manera representan un nivel positivo y un nivel negativo respectivamente, para la función f .



Si se considera una recta vertical, en la dirección en que la variable y crece (y x se mantiene constante), en el punto $(0, 1)$ se ve que f es creciente, de valores negativos a valores positivos al pasar por dicho punto, es decir $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) > 0$; mientras que en el punto $(1, 0)$, f se mantiene en valores negativos antes y después del punto, es decir $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 0$.

Esta discusión se formaliza en el teorema de la función implícita que se enuncia a continuación en su versión más simple:

Teorema 43 Sean $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, de clase C^1 y (x_0, y_0) un punto tal que

$$f(x_0, y_0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

Entonces existen: vecindad abierta de M de (x_0, y_0) , vecindad abierta N de x_0 y única función de clase C^1 $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in N : (x, g(x)) \in M$

(su gráfico está en M)

$$(x, y) \in M \wedge f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \in N \wedge y = g(x)$$

$$\forall x \in N : g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}$$

Observe que el teorema no sólo garantiza que la ecuación $f(x, y) = 0$ define implícitamente a y como función de x (la existencia de la función $y = g(x)$) sino que ésta es de clase C^1 y da una fórmula para calcular la derivada de ella.

En nuestro ejemplo, $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy^2 - 1$ tiene derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 6xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 3 \neq 0$$

y luego la función implícita $y = g(x)$ tiene derivada en $x_0 = 0$ dada por

$$\frac{dy}{dx}|_0 = g'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1)} = -\frac{-3}{3} = 1$$

resultado que obteníamos en el cálculo I mediante el llamado proceso de derivación implícita aplicado como sigue

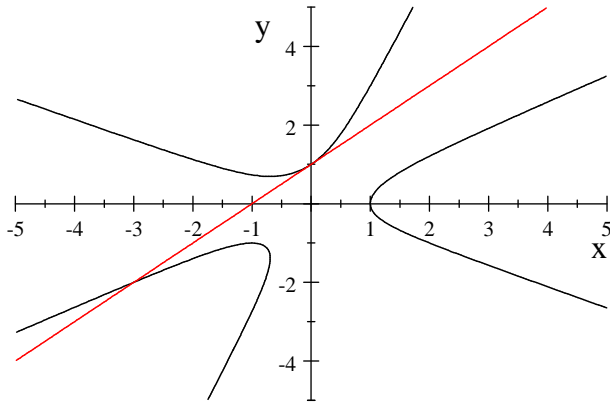
$$x^3 + y^3 - 3xy^2 - 1 = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} - 3y^2 - 6xy \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 - 3y^2}{3y^2 - 6xy}$$

que evaluado en $(0, 1)$ da $\frac{dy}{dx} = 1$.

Geométricamente, la recta tangente a la curva $x^3 + y^3 - 3xy^2 - 1 = 0$, en el punto $(0, 1)$ tiene pendiente $m = 1$. Su ecuación es $y = x + 1$ como se ve en la gráfica



Vamos ahora al teorema en su **forma general**.

Notación.- $X = (x_1, \dots, x_n)$ es un vector de \mathbb{R}^n , $Y = (y_1, \dots, y_m)$ es un vector de \mathbb{R}^m y $(X; Y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ es un vector de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Recuerde que $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ puede ser considerado como \mathbb{R}^{n+m} .

Teorema 44 Sea $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$,
 $(X, Y) \mapsto F(X, Y) = (F_1(X, Y), \dots, F_m(X, Y))$, una función de $n + m$ variables, de clase \mathcal{C}^r y sea $P_0 = (X_0, Y_0)$ un punto tal que

i) $F(X_0, Y_0) = \theta$

$$ii) \frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}(P_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(P_0) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(P_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(P_0) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(P_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

Entonces existen:

una vecindad abierta M de (X_0, Y_0) (en \mathbb{R}^{n+m})

una vecindad abierta N de X_0 (en \mathbb{R}^n)

y una única función $G : N \rightarrow \mathbb{R}^m$, $X \mapsto G(X)$, de clase \mathcal{C}^r , tal que:

$$\begin{aligned} \forall X \in N : (X, G(X)) \in M \\ (X, Y) \in M \wedge F(X, Y) = \theta \Leftrightarrow X \in N \wedge Y = G(X) \end{aligned} \quad (8)$$

(en particular $Y_0 = G(X_0)$) y $\forall X \in N :$

$$JG(X) = - \left[\frac{\partial F}{\partial Y}(X; G(X)) \right]^{-1} \cdot \left[\frac{\partial F}{\partial X}(X; G(X)) \right]$$

Observación.-

La ecuación $F(X, Y) = \theta$ corresponde al sistema de m ecuaciones y $n + m$

incognitas

$$F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0$$

$$F_2(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0$$

$$F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0$$

y el Teorema da condiciones para que este sistema se pueda resolver de manera única para las incognitas y_1, \dots, y_m en términos de las incognitas (variables) x_1, \dots, x_n , en una vecindad del punto (X_0, Y_0) , conforme indica (8).

Ejercicio 45 Considere la superficie $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ¿Cerca de qué puntos es posible representar S como gráfica de $z = g(x, y)$, con g diferenciable?

Considerando $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ de clase \mathcal{C}^1 en \mathbb{R}^3 , tenemos $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2z$. Luego, para todo punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ con $z_0 \neq 0$ es posible despejar, en la ecuación $f(x, y, z) = 0$, $z = g(x, y)$ con g de clase \mathcal{C}^1 .

Un razonamiento más general se da en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 46 Sea S la superficie, definida en forma implícita, por $f(x, y, z) = 0$ con f de clase \mathcal{C}^1 y considere un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ donde

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq \theta$$

Muestre que el vector $\nabla f(P_0)$ es perpendicular (ortogonal) al plano tangente a S en el punto P_0 .

Una de las componentes del vector gradiente es no nula. Para fijar ideas suponga que

$$\frac{\partial f}{\partial z}(P_0) \neq 0$$

Por teorema de la función implícita, cerca de (x_0, y_0, z_0) :

$$f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = g(x, y)$$

con g de clase \mathcal{C}^1 y

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{pmatrix} = -\frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(P_0)} \quad y \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(P_0)}$$

y la ecuación del plano tangente a S en P_0 es

$$\begin{aligned} z = g(x_0, y_0) - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(P_0)}(x - x_0) - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(P_0)}(y - y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0)(z - z_0) = 0 \end{aligned}$$

lo que muestra que $\nabla f(P_0)$ es perpendicular a la superficie S en P_0 .

Ejercicio 47 Mostrar que cerca del punto $(x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1)$ se puede resolver el sistema

$$\begin{aligned} xu + yvu^2 &= 2 \\ xu^3 + y^2v^4 &= 2 \end{aligned}$$

de manera única para u y v como función de x e y . Calcular $\frac{\partial u}{\partial x}(1, 1)$.

Con

$$\begin{aligned} F_1(x, y, u, v) &= xu + yvu^2 - 2 \\ F_2(x, y, u, v) &= xu^3 + y^2v^4 - 2 \end{aligned}$$

y $F = (F_1, F_2)$ el sistema es $F(x, y, u, v) = (0, 0)$, siendo F de clase C^∞ . Además,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix}_{(1,1,1,1)} &= \begin{vmatrix} x + 2yvu & yu^2 \\ 3u^2x & 4y^2v^3 \end{vmatrix}_{(1,1,1,1)} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0 \end{aligned}$$

Por TFI existe $(x, y) \mapsto G(x, y) = (u, v)$ de clase C^∞ que resuelve el sistema

y se tiene

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}_{(1,1)} &= - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u & vu^2 \\ u^3 & 2yv^4 \end{pmatrix}_{(1,1,1,1)} \\
 &= -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{9} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

y así $\frac{\partial u}{\partial x}(1,1) = -\frac{1}{3}$.

Una forma alternativa de obtener este resultado, quizás más práctica, es a partir del sistema

$$\begin{aligned}
 xu + yvu^2 &= 2 \\
 xu^3 + y^2v^4 &= 2
 \end{aligned}$$

ya estableciendo que él define implícitamente a u y v como funciones de x e y , aplicar derivación implícita con respecto a la variable x :

$$\begin{aligned}
 u + x \frac{\partial u}{\partial x} + yu^2 \frac{\partial v}{\partial x} + 2yvu \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\
 u^3 + 3xu^2 \frac{\partial u}{\partial x} + 4y^2v^3 \frac{\partial v}{\partial x} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (x + 2yuv) \frac{\partial u}{\partial x} + yu^2 \frac{\partial v}{\partial x} &= -u \\
 3xu^2 \frac{\partial u}{\partial x} + 4y^2v^3 \frac{\partial v}{\partial x} &= -u^3
 \end{aligned}$$

En el punto $(1,1,1,1)$ éste queda

$$\begin{aligned}
 3 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} &= -1 \\
 3 \frac{\partial u}{\partial x} + 4 \frac{\partial v}{\partial x} &= -1
 \end{aligned}$$

y se obtiene $\frac{\partial u}{\partial x}(1,1) = -\frac{1}{3}$ y $\frac{\partial v}{\partial x}(1,1) = 0$.

Repitiendo el proceso, derivando con respecto a y , se obtienen las otras dos derivadas parciales.

6 Máximos y mínimos.

6.1 Máximos y mínimos relativos.

El término relativo corresponde al concepto local, esto es un extremo en relación sólo a los puntos vecinos de él.

Definición 48 Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida en un abierto A y X_0 un punto de A . Se dice que X_0 es un punto de máximo relativo cuando

$$\exists r > 0 \text{ tal que } \forall X \in B(X_0, r) : f(X) \leq f(X_0)$$

Para la definición de mínimo relativo se reemplaza \leq por \geq .

Si la f diferenciable tiene un máximo relativo en X_0 , entonces al darse un vector unitario \vec{v} en \mathbb{R}^n y definir $\varphi(t) = f(X_0 + t \cdot \vec{v})$ se tiene claramente que φ alcanza un máximo relativo en $t = 0$ y luego

$$\varphi'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(X_0 + h \cdot \vec{v}) - f(X_0)}{h} = 0$$

Esto indica que todas las derivadas direccionales de f en X_0 son nulas (en particular las derivadas parciales), o sea $Df(X_0) = \theta$

Definición 49 Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida en un abierto A y X_0 un punto de A . Se dice que X_0 es un punto crítico de f cuando

$$f \text{ no es diferenciable en } X_0, \text{ o bien } Df(X_0) = \theta$$

Para f diferenciable, X_0 es punto crítico cuando todas las derivadas parciales se anulan en el punto. En este caso los puntos críticos son las soluciones del sistema de n ecuaciones y n incógnitas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

De acuerdo al razonamiento anterior se tiene:

Teorema 50 X_0 extremo relativo de $f \Rightarrow X_0$ punto crítico.

Los ejemplos, $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) = -x^2 - y^2$ y $h(x, y) = y^2 - x^2$ muestran que un punto crítico puede ser mínimo relativo o máximo relativo, o incluso, no ser máximo ni mínimo. En el último caso el punto se denomina punto de **silla**.

Nos interesa pues un criterio que permita decidir cual es la naturaleza de un punto crítico encontrado.

Cuando las derivadas parciales segundas $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ son todas continuas (f es de clase C^2), la diferencial segunda de f en X_0 es la forma cuadrática

$$D^2 f(X_0)(H) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} h_i h_j, \quad \text{con } a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_0)$$

Note que $a_{ij} = a_{ji}$, de acuerdo al Teorema de Schwarz.

En el caso de dos variables se tiene

$$\begin{aligned} D^2 f(x_0, y_0)(h, k) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) hk + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) kh + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) k^2 \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) k^2 \end{aligned}$$

polinomio homogéneo de grado 2 en las variables h y k .

Según el Teorema de Taylor en varias variables, en una vecindad de X_0 se puede escribir

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + Df(X_0)(H) + \frac{1}{2!} D^2 f(X_0)(H) + R_2(H)$$

$$\text{con } \lim_{H \rightarrow \theta} \frac{R_2(H)}{\|H\|^2} = 0. \quad (*)$$

En un punto crítico, $Df(X_0)(H) = 0$, $\forall H \in \mathbb{R}^n$; así que

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + \frac{1}{2!} D^2 f(X_0)(H) + R_2(H)$$

En vista de (*), en una vecindad de X_0 (o sea para todo H con $\|H\|$ pequeña):

$$\begin{aligned} f(X_0 + H) - f(X_0) &\leq 0 \Leftrightarrow D^2 f(X_0)(H) \leq 0 \\ f(X_0 + H) - f(X_0) &\geq 0 \Leftrightarrow D^2 f(X_0)(H) \geq 0 \end{aligned}$$

Observe que las condiciones del lado izquierdo en las equivalencias indican que X_0 es un extremo relativo. Las condiciones del lado derecho se estudian para formas cuadráticas en el contexto del algebra lineal.

6.1.1 Formas cuadráticas.

Una forma cuadrática es una aplicación $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, de la forma

$$q(X) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j, \quad \text{con } a_{ij} = a_{ji}$$

La matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, simétrica de orden $n \times n$, representa a q en el sentido que $q(X) = X^T A X$, es decir

$$q(x_1, \dots, x_n) = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Definición 51 Para una forma cuadrática q se dice:

q es definida positiva $\Leftrightarrow q(X) \geq 0, \quad \forall X \neq \theta$

q es definida negativa $\Leftrightarrow q(X) \leq 0, \quad \forall X \neq \theta$

q es no definida \Leftrightarrow Existen X_1, X_2 tales que $q(X_1) < 0 < q(X_2)$.

En vista que la matriz A que representa a la forma cuadrática es simétrica, se tiene que todos sus valores propios son reales. y se puede probar que:

- a) todos los valores propios de A son positivos $\Rightarrow q$ definida positiva.
- b) todos los valores propios de A son negativos $\Rightarrow q$ definida negativa
- c) si la matriz posee al menos un valor propio positivo y un valor propio negativo, entonces la forma cuadrática es no definida.

El criterio que permite determinar de que tipo es una forma cuadrática considera el cálculo de los siguientes n determinantes obtenidos a partir de la

matriz $A : \Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = |A|$

Teorema 52 Para cada k entre 1 y n sea Δ_k el determinante de orden k formado por las primeras k filas y k columnas de la matriz A . Si se tiene $\Delta_n = |A| \neq 0$, entonces:

- a) $\forall k : \Delta_k > 0 \Rightarrow q$ es definida positiva.
- b) $\forall k : (-1)^k \Delta_k > 0 \Rightarrow q$ es definida negativa.
- c) en todo otro caso q es no definida.

La matriz A que representa a la forma cuadrática diferencial segunda de f en el punto X_0 se denomina matriz *Hessiana de f en X_0* y corresponde a

$$Hf(X_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(X_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(X_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(X_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(X_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(X_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(X_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(X_0) & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(X_0) \end{pmatrix}$$

Como se mencionó anteriormente, en el caso de f de clase C^2 , es una matriz simétrica.

Caso de dos variables.-

Para $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ de clase C^2 en el abierto A . Sea (x_0, y_0) un punto crítico, esto es, un punto tal que

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0 \quad \text{y sea}$$

$$\Delta = \Delta(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}(x_0, y_0)^2$$

se tiene entonces:

- a) $f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \wedge \Delta > 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ es un mínimo relativo.
- b) $f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \wedge \Delta > 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ es un máximo relativo.
- c) $\Delta < 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ es un punto de silla.
- d) Para $\Delta = 0$, el criterio no da información.

Ejemplo 53 Identifique y clasifique los puntos críticos de

$$f(x, y) = x^2y - 2xy + 2y^2 - 15y$$

Caso de tres variables.-

Para $f : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ de clase C^2 en el abierto A . Sea (x_0, y_0, z_0) un punto crítico, esto es, un punto tal que

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = f_y(x_0, y_0, z_0) = f_z(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad \text{y sea}$$

$$\Delta_3 = \Delta_3(x_0, y_0, z_0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0, z_0) & f_{xy}(x_0, y_0, z_0) & f_{xz}(x_0, y_0, z_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0, z_0) & f_{yy}(x_0, y_0, z_0) & f_{yz}(x_0, y_0, z_0) \\ f_{zx}(x_0, y_0, z_0) & f_{zy}(x_0, y_0, z_0) & f_{zz}(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

se tiene entonces:

- a) $f_{xx} > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0 \Rightarrow (x_0, y_0, z_0)$ es un mínimo relativo.
- b) $f_{xx} < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0 \Rightarrow (x_0, y_0, z_0)$ es un máximo relativo.
- c) en otro caso el punto es silla.

Ejemplo 54 Identifique y clasifique los puntos críticos de

$$f(x, y, z) = -x^2 - y^3 + xy - z^2 + 2z$$

6.2 Extremos absolutos

En este caso los extremos son de carácter global. Al respecto contamos con el siguiente resultado.

Teorema 55 *(de los valores extremos).* Si $f : K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es continua sobre el compacto K , entonces existen $X_1, X_2 \in K$ tales que

$$\forall X \in K : f(X_1) \leq f(X) \leq f(X_2)$$

X_1 se denomina el punto de mínimo absoluto de f sobre K y $f(X_1)$ el valor mínimo absoluto de f sobre K . En forma análoga, X_2 será máximo absoluto.

¿Cómo encontrar estos puntos X_k , con $k = 1, 2$, de extremos absolutos?
Se deben tener en cuenta los siguientes hechos:

1. Si X_k pertenece al interior del compacto K , entonces será también un extremo relativo y, en consecuencia, un punto crítico.
2. Si X_k no pertenece al interior del compacto K , entonces el punto está en la frontera de K .

Por esta razón el procedimiento para determinar los extremos absolutos considera:

- a) Encontrar todos los puntos críticos en $\overset{\circ}{K}$.
- b) Encontrar los extremos en $Fr(K)$.
- c) Finalmente, evaluar f en todos los puntos encontrados en a) y en b), para elegir los extremos.

Ejemplo 56 Encuentre el máximo y el mínimo absoluto de la función

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20 \text{ en } R = \{(x, y) : x + y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

f es continua sobre el compacto R , por tanto existen los extremos absolutos.

- a) Determinación de los puntos críticos de f en el interior de R
El sistema es

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3 &= 0 \\ 3y^2 - 12 &= 0 \end{aligned}$$

con solución $(1, 2)$, $(1, -2)$, $(-1, 2)$, $(-1, -2)$. De estos sólo $(1, 2)$ está en el interior de R

b) Encontrar extremos en $Fr(R)$.

La frontera de R es el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$ y $(0, 4)$, la cual consta de tres segmentos que se describen independientemente. Por tanto, el análisis de los extremos se realiza separadamente en cada lado del triángulo.

Lado en el eje x .-

La función es $h(x) = f(x, 0) = x^3 - 3x + 20$, con $0 \leq x \leq 4$. Ella tiene puntos críticos

$$h'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \iff x = 1$$

$$h(0) = 20, \quad h(1) = 18, \quad h(4) = 64 - 12 + 20 = 72.$$

Luego, el punto de mínimo es $(1, 0)$ y el de máximo $(4, 0)$.

Lado en el eje y .-

La función es $h(y) = f(0, y) = y^3 - 12y + 20$, con $0 \leq y \leq 4$. Ella tiene puntos críticos

$$h'(y) = 3y^2 - 12 = 0 \iff y = 2$$

$$h(0) = 20, \quad h(2) = 4, \quad h(4) = 64 - 48 + 20 = 36.$$

Luego, el punto de mínimo es $(0, 2)$ y el de máximo $(0, 4)$.

Lado en la recta $x + y = 4$.-

La función es $h(x) = f(x, 4 - x) = 9x - (x - 4)^3 + x^3 - 28 = 12x^2 - 39x + 36$, con $0 \leq x \leq 4$. Ella tiene puntos críticos

$$h'(x) = 24x - 39 = 0 \iff x = \frac{39}{24}$$

$$h(0) = 36, \quad h\left(\frac{39}{24}\right) = \frac{69}{16} = 4.3125, \quad h(4) = 12(4)^2 - 39(4) + 36 = 72.$$

Luego, el punto de mínimo es $\left(\frac{39}{24}, \frac{19}{8}\right)$ y el de máximo $(4, 0)$

c) Al evaluar $f(1, 2) = 2$ y comparar con los extremos obtenidos en los lados del triángulo resulta

$(1, 2)$ es el punto de mínimo

$(4, 0)$ es el punto de máximo

6.3 Extremos relativos condicionados (multiplicadores de Lagrange).

Según el teorema de la función implícita, la ecuación $g(x, y) = 0$, con g de clase C^1 , determina una curva C en el plano xy que admite recta tangente

en todo punto para el cual $\nabla g(x, y) \neq \theta$. Además en dichos puntos, $\nabla g(x, y)$ es perpendicular a la curva C .

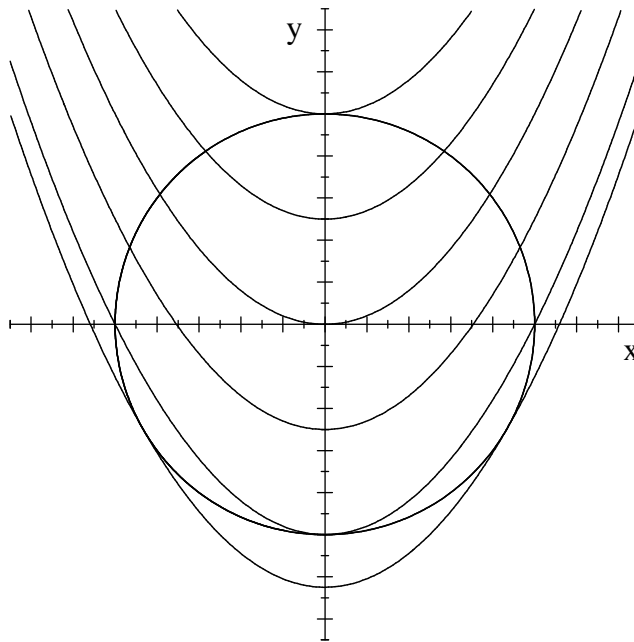
El problema a resolver es encontrar los extremos relativos de la función $f(x, y)$ sobre puntos de la curva C , el cual se escribe

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar (o minimizar) } f(x, y) \\ &\text{sujeto a } g(x, y) = 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 57 Encontrar los extremos relativos de $f(x, y) = y - x^2$ sujeto a $x^2 + y^2 = 1$.

Geométricamente, las curvas de nivel de f son parábolas de ecuación $f(x, y) = y - x^2 = c$, con c constante real.

El siguiente gráfico muestra la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$, junto con las curvas de nivel de f , para $c = -\frac{5}{4}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$ (en el mismo orden de abajo hacia arriba). Se ve que una curva de nivel para $c > 1$ no corta la circunferencia, como también para $c < -\frac{5}{4}$.



El análisis geométrico muestra que los puntos extremos relativos se producen cuando hay tangencia entre la circunferencia y alguna curva de nivel. Si consideramos los vectores gradientes a las curvas, que son perpendiculares a éstas, ellos serán paralelos en dichos puntos extremos.

Así $\nabla f(x, y) = \lambda \cdot \nabla g(x, y)$ en los puntos extremos relativos. El método de multiplicadores de Lagrange establece que los puntos extremos relativos se encuentran en las soluciones del sistema

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= \lambda \cdot \nabla g(x, y) \\ g(x, y) &= 0\end{aligned}$$

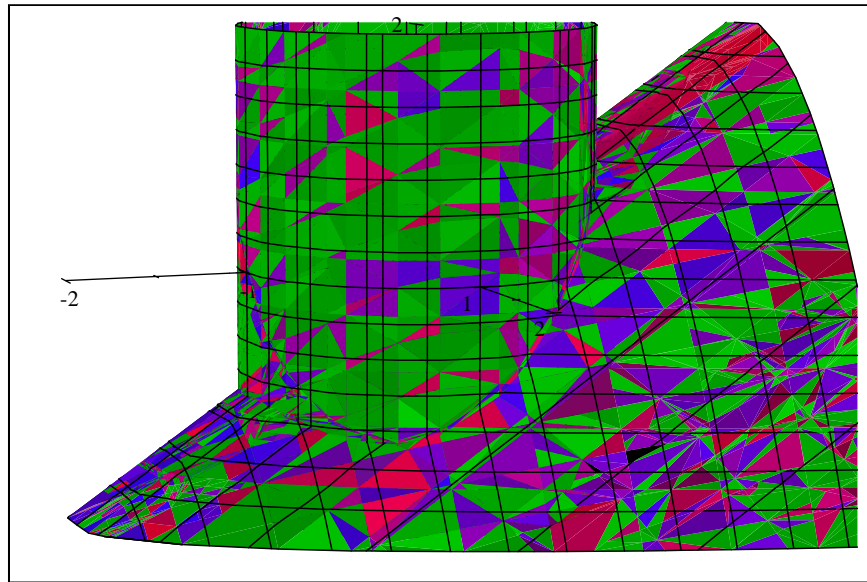
Este es un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas: x , y ; λ . Para nuestro ejemplo

$$\begin{aligned}-2x &= \lambda 2x \\ 1 &= \lambda 2y \\ x^2 + y^2 &= 1\end{aligned}$$

La primera ecuación da $x(\lambda + 1) = 0$, lo que implica dos posibilidades:

- a) $x = 0$: y así $y = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$ o también $y = -1$, $\lambda = -\frac{1}{2}$
- b) $\lambda = -1$: y así $y = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ o también $y = -\frac{1}{2}$, $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Tenemos 4 soluciones que conducen a los 4 extremos relativos: $(0, 1)$ y $(0, -1)$ máximos relativos, y $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2})$ y $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2})$ mínimos relativos.



Teorema 58 Sean $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase \mathcal{C}^1 . Si $(x_0, y_0) \in A$ es tal que $g(x_0, y_0) = 0$ y $\nabla g(x_0, y_0) \neq \theta$ entonces para que f alcance un extremo relativo en (x_0, y_0) es necesario que $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ (multiplicador de Lagrange) tal que $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \cdot \nabla g(x_0, y_0)$.

En el caso de una f de 3 variables $(x, y, z) \rightarrow f(x, y, z)$, una condición (restricción) del tipo $g(x, y, z) = 0$, con g de clase \mathcal{C}^1 , determina una superficie en \mathbb{R}^3 . Para ésta, si en un punto $\nabla g(x, y, z) \neq \theta$, entonces $\nabla g(x, y, z)$ es un vector perpendicular a la superficie (o sea perpendicular al plano tangente a la superficie).

Si se agrega una segunda condición $h(x, y, z) = 0$, del mismo tipo, tenemos dos superficies cuya intersección (casi siempre) es una curva en \mathbb{R}^3 . Si en un punto (x_0, y_0, z_0) de esta curva los gradientes de g y h son linealmente independientes (no son paralelos), entonces la curva posee una recta tangente perpendicular al plano generado por los gradientes.

El método de multiplicadores de Lagrange indica que:

- a) la función $f(x, y, z)$ de clase \mathcal{C}^1 , posee extremos relativos en los puntos de la superficie $g(x, y, z) = 0$ donde $\nabla f(x, y, z) = \lambda \cdot \nabla g(x, y, z)$.
- b) la función $f(x, y, z)$ de clase \mathcal{C}^1 , posee extremos relativos en los puntos de la curva $g(x, y, z) = 0$, $h(x, y, z) = 0$ donde $\nabla f(x, y, z) = \lambda \cdot \nabla g(x, y, z) + \mu \cdot \nabla h(x, y, z)$.

Ejemplo 59 La temperatura de la placa metálica $x^2 + y^2 \leq 6$ está dada por $T(x, y) = 4x^2 + 9y^2 - x^2y^2$.

a) Determine los puntos críticos de T en el conjunto $x^2 + y^2 < 6$ y determine la naturaleza de **uno** de ellos.

El sistema
$$\begin{aligned} 8x - 2xy^2 &= 0 \\ 18y - 2x^2y &= 0 \end{aligned}$$
, tiene soluciones: $\{y = 0, x = 0\}$, $\{x = 3, y = 2\}$, $\{x = 3, y = -2\}$, $\{x = -3, y = 2\}$, $\{x = -3, y = -2\}$.

Pero sólo el $(0, 0)$ pertenece al círculo abierto.

El Hessiano de T :

$$\begin{vmatrix} 8 - 2y^2 & -4xy \\ -4xy & 18 - 2x^2 \end{vmatrix}$$

En $(0, 0)$: $\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 18 \end{vmatrix}$, lo que indica que $(0, 0)$ es un mínimo relativo.

b) Encuentre los puntos de mayor y menor temperatura en la placa.

Aplicando el método de multiplicadores de Lagrange se resuelve el sistema

$$\begin{aligned}8x - 2xy^2 &= 2\lambda x \\18y - 2x^2y &= 2\lambda y \\x^2 + y^2 &= 6\end{aligned}$$

A partir de la primera ecuación: $x(4 - y^2 - \lambda) = 0$ se obtiene:

i) $x = 0$, $y = \pm\sqrt{6}$, $\lambda = 9$

ii) $\lambda = 4 - y^2$ y se resuelve

$$\begin{aligned}y(9 - x^2 - 4 + y^2) &= 0 \\x^2 + y^2 &= 6\end{aligned}$$

quedando $y(2y^2 - 1) = 0$. Así,

$$\begin{aligned}y &= 0, x = \pm\sqrt{6}, \lambda = 4 \\y &= \pm\sqrt{\frac{1}{2}}, x = \pm\sqrt{\frac{11}{2}}, \lambda = \frac{7}{2}\end{aligned}$$

Finalmente se evalúa: $T(0, 0) = 0$, $T(0, \pm\sqrt{6}) = 54$, $T(\pm\sqrt{6}, 0) = 24$,
 $T(\pm\sqrt{\frac{11}{2}}, \pm\sqrt{\frac{1}{2}}) = \frac{95}{4} = 23.75$

De donde, $(0, 0)$ es el punto de menor temperatura y los puntos $(\pm\sqrt{6}, 0)$ son los de mayor temperatura.

c) ¿En qué puntos de la placa la dirección de mayor crecimiento de la temperatura es vertical? (está dada por el eje y).

La dirección de mayor crecimiento está dada por

$$\nabla T(x, y) = (8x - 2xy^2) \cdot \hat{i} + (18y - 2x^2y) \cdot \hat{j}$$

Este vector es vertical cuando $x = 0$ (sobre el eje y) y cuando $y = \pm 2$ (dos segmentos de rectas)

Ejemplo 60 La temperatura en un punto (x, y, z) está determinada por la función

$T(x, y, z) = 20 + 2x + 2y + z^2$. Encuentre el (los) punto(s) de mayor temperatura sobre:

a) la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 11$

b) la curva intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 11$ y el plano $x + y + z = 3$.