Clase 1

Cálculo 3

Carlos Martínez Ranero

Departamento de Matemática
Universidad de Concepción

Evaluaciones

Forma de evaluación:

- Cértamen 1 - ponderación 35 %
- Cértamen 2 - ponderación 45 %
- 4 Tareas - ponderación de 20 % (máximo cuatro personas por equipo)
- Cértamen de Recuperación - ponderación 40 %

Plan de la clase de hoy.

- Recordatorio de nociones básicas de Algebra Lineal.

Plan de la clase de hoy.

- Recordatorio de nociones básicas de Algebra Lineal.
- Nociones topológicas: puntos interiores, frontera, exteriores.

Plan de la clase de hoy.

- Recordatorio de nociones básicas de Algebra Lineal.
- Nociones topológicas: puntos interiores, frontera, exteriores.
- Gráficas de funciones y conjuntos de nivel.

Algebra Lineal.

Recordemos que $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq n\}$ es un espacio vectorial, es decir, tiene una suma y un producto por escalares. Además existen tres operaciones interconectadas, el producto punto, la norma y la métrica.

Algebra Lineal.

Recordemos que $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq n\}$ es un espacio vectorial, es decir, tiene una suma y un producto por escalares. Además existen tres operaciones interconectadas, el producto punto, la norma y la métrica.

Definición

1. $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ (producto punto).

Recordemos que $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq n\}$ es un espacio vectorial, es decir, tiene una suma y un producto por escalares. Además existen tres operaciones interconectadas, el producto punto, la norma y la métrica.

Definición

1. $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ (producto punto).
2. $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$ (norma).

Recordemos que $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq n\}$ es un espacio vectorial, es decir, tiene una suma y un producto por escalares. Además existen tres operaciones interconectadas, el producto punto, la norma y la métrica.

Definición

1. $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ (producto punto).
2. $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$ (norma).
3. $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$ (distancia).

Proposición

Para cada $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ se tiene:

Proposición

Para cada $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ se tiene:

1. La desigualdad de Cauchy-Schwarz $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|$.

Proposición

Para cada $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ se tiene:

1. La desigualdad de Cauchy-Schwarz $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$.
2. La desigualdad triangular $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

Topología.

Sean $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\epsilon > 0$.

Sean $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\epsilon > 0$.

Definición

$B_\epsilon(\vec{x}_0) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \epsilon\}$ denota la bola abierta con centro en $\vec{x}_0$ y radio $\epsilon > 0$.

Sean $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\epsilon > 0$.

Definición

$B_\epsilon(\vec{x}_0) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \epsilon\}$ denota la bola abierta con centro en $\vec{x}_0$ y radio $\epsilon > 0$.

Definición

$\overline{B}_\epsilon(\vec{x}_0) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \leq \epsilon\}$ denota la bola cerrada con centro en $\vec{x}_0$ y radio $\epsilon > 0$.

Ejemplo 1

Bosquejar las bolas $\overline{B}_1(-2,-3)$ y $B_1(2,2)$.

Ejemplo 1

Bosquejar las bolas $\overline{B}_1(-2,-3)$ y $B_1(2,2)$.

- Primero observemos que en el primer caso $\epsilon = 1$ y $\vec{x}_0 = (-2,-3)$

Ejemplo 1

Bosquejar las bolas $\overline{B}_1(-2,-3)$ y $B_1(2,2)$.

- Primero observemos que en el primer caso $\epsilon = 1$ y $\vec{x}_0 = (-2,-3)$
- $\overline{B}_1(-2,-3) = \{(x,y) : \|(x,y) - (-2,-3)\| \leq 1\}$

Ejemplo 1

Bosquejar las bolas $\overline{B}_1(-2,-3)$ y $B_1(2,2)$.

- Primero observemos que en el primer caso $\epsilon = 1$ y $\vec{x}_0 = (-2,-3)$
- $\overline{B}_1(-2,-3) = \{(x,y) : \|(x,y) - (-2,-3)\| \leq 1\}$
- $\overline{B}_1(-2,-3) = \{(x,y) : \sqrt{(x+2)^2 + (y+3)^2} \leq 1\}$

Ejemplo 1

Bosquejar las bolas $\overline{B}_1(-2,-3)$ y $B_1(2,2)$.

- Primero observemos que en el primer caso $\epsilon = 1$ y $\vec{x}_0 = (-2,-3)$
- $\overline{B}_1(-2,-3) = \{(x,y) : \|(x,y)-(-2,-3)\| \leq 1\}$
- $\overline{B}_1(-2,-3) = \{(x,y) : \sqrt{(x+2)^2+(y+3)^2} \leq 1\}$
- $\overline{B}_1(-2,-3) = \{(x,y) : (x+2)^2+(y+3)^2 \leq 1\}$

Ejemplo 1

Bosquejar las bolas $\overline{B}_1(-2,-3)$ y $B_1(2,2)$.

- Primero observemos que en el primer caso $\epsilon = 1$ y $\vec{x}_0 = (-2,-3)$
- $\overline{B}_1(-2,-3) = \{(x,y) : \|(x,y) - (-2,-3)\| \leq 1\}$
- $\overline{B}_1(-2,-3) = \{(x,y) : \sqrt{(x+2)^2 + (y+3)^2} \leq 1\}$
- $\overline{B}_1(-2,-3) = \{(x,y) : (x+2)^2 + (y+3)^2 \leq 1\}$
- Para el segundo caso tenemos $\epsilon = 1$ y $\vec{x}_0 = (2,2)$

Ejemplo 1

Bosquejar las bolas $\overline{B}_1(-2,-3)$ y $B_1(2,2)$.

- Primero observemos que en el primer caso $\epsilon = 1$ y $\vec{x}_0 = (-2,-3)$
- $\overline{B}_1(-2,-3) = \{(x,y) : \|(x,y) - (-2,-3)\| \leq 1\}$
- $\overline{B}_1(-2,-3) = \{(x,y) : \sqrt{(x+2)^2 + (y+3)^2} \leq 1\}$
- $\overline{B}_1(-2,-3) = \{(x,y) : (x+2)^2 + (y+3)^2 \leq 1\}$
- Para el segundo caso tenemos $\epsilon = 1$ y $\vec{x}_0 = (2,2)$
- $B_1(2,2) = \{(x,y) : \|(x,y) - (2,2)\| < 1\}$

Ejemplo 1

Bosquejar las bolas $\overline{B}_1(-2,-3)$ y $B_1(2,2)$.

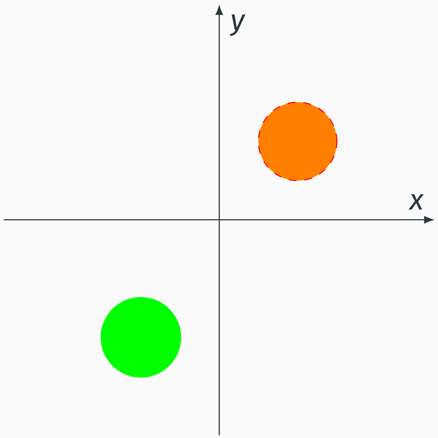
- Primero observemos que en el primer caso $\epsilon = 1$ y $\vec{x}_0 = (-2,-3)$
- $\overline{B}_1(-2,-3) = \{(x,y) : \|(x,y) - (-2,-3)\| \leq 1\}$
- $\overline{B}_1(-2,-3) = \{(x,y) : \sqrt{(x+2)^2 + (y+3)^2} \leq 1\}$
- $\overline{B}_1(-2,-3) = \{(x,y) : (x+2)^2 + (y+3)^2 \leq 1\}$
- Para el segundo caso tenemos $\epsilon = 1$ y $\vec{x}_0 = (2,2)$
- $B_1(2,2) = \{(x,y) : \|(x,y) - (2,2)\| < 1\}$
- $B_1(2,2) = \{(x,y) : \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} < 1\}$

Ejemplo 1

Bosquejar las bolas $\overline{B}_1(-2,-3)$ y $B_1(2,2)$.

- Primero observemos que en el primer caso $\epsilon = 1$ y $\vec{x}_0 = (-2,-3)$
- $\overline{B}_1(-2,-3) = \{(x,y) : \|(x,y) - (-2,-3)\| \leq 1\}$
- $\overline{B}_1(-2,-3) = \{(x,y) : \sqrt{(x+2)^2 + (y+3)^2} \leq 1\}$
- $\overline{B}_1(-2,-3) = \{(x,y) : (x+2)^2 + (y+3)^2 \leq 1\}$
- Para el segundo caso tenemos $\epsilon = 1$ y $\vec{x}_0 = (2,2)$
- $B_1(2,2) = \{(x,y) : \|(x,y) - (2,2)\| < 1\}$
- $B_1(2,2) = \{(x,y) : \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} < 1\}$
- $B_1(2,2) = \{(x,y) : (x-2)^2 + (y-2)^2 < 1\}$

Topología



Ejemplo 2

Bosquejar la bola $\overline{B}_2(0,0,0)$.

Ejemplo 2

Bosquejar la bola $\overline{B}_2(0,0,0)$.

- Primero observemos que $\epsilon = 2$ y $\vec{x}_0 = (0,0,0)$

Ejemplo 2

Bosquejar la bola $\overline{B}_2(0, 0, 0)$.

- Primero observemos que $\epsilon = 2$ y $\vec{x}_0 = (0, 0, 0)$
- $\overline{B}_2(0, 0, 0) = \{(x, y, z) : \|(x, y, z) - (0, 0, 0)\| \leq 2\}$

Topología

Ejemplo 2

Bosquejar la bola $\overline{B}_2(0,0,0)$.

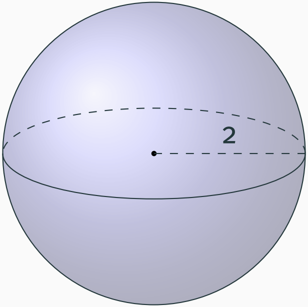
- Primero observemos que $\epsilon = 2$ y $\vec{x}_0 = (0,0,0)$
- $\overline{B}_2(0,0,0) = \{(x,y,z) : \|(x,y,z) - (0,0,0)\| \leq 2\}$
- $\overline{B}_2(0,0,0) = \{(x,y,z) : \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 2\}$

Ejemplo 2

Bosquejar la bola $\overline{B}_2(0,0,0)$.

- Primero observemos que $\epsilon = 2$ y $\vec{x}_0 = (0,0,0)$
- $\overline{B}_2(0,0,0) = \{(x,y,z) : \|(x,y,z) - (0,0,0)\| \leq 2\}$
- $\overline{B}_2(0,0,0) = \{(x,y,z) : \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq 2\}$
- $\overline{B}_2(0,0,0) = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$

Topología



Definición

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$. Definimos los siguientes conjuntos:

Definición

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$. Definimos los siguientes conjuntos:

1. El interior de S es el conjunto

$$int(S) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \exists \epsilon > 0,\ B_\epsilon(\vec{x}) \subset S\}$$

Definición

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$. Definimos los siguientes conjuntos:

1. El interior de S es el conjunto

$$int(S) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \exists \epsilon > 0,\ B_\epsilon(\vec{x}) \subset S\}$$

2. El exterior de S es el conjunto

$$ext(S) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \exists \epsilon > 0,\ B_\epsilon(\vec{x}) \subset \mathbb{R}^n \backslash S\}$$

Definición

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$. Definimos los siguientes conjuntos:

1. El interior de S es el conjunto

$$int(S) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \exists \epsilon > 0,\ B_\epsilon(\vec{x}) \subset S\}$$

2. El exterior de S es el conjunto

$$ext(S) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \exists \epsilon > 0,\ B_\epsilon(\vec{x}) \subset \mathbb{R}^n \setminus S\}$$

3. La frontera de S es el conjunto

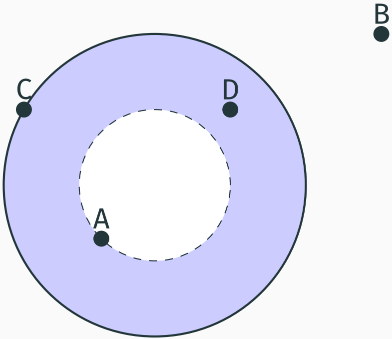
$$\partial(S) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \forall \epsilon > 0,\ B_\epsilon(\vec{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus S) \neq \varnothing \wedge B_\epsilon(\vec{x}) \cap S \neq \varnothing\}$$

Ejemplo 3

Sean $S = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$ y $A = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $B = (3, 2)$, $C = (-\sqrt{3}, 1)$ y $D = (1, 1)$. Determinar cuales de los puntos A, B, C y D pertenecen al interior, al exterior y a la frontera de S.

Ejemplo 3

Sean $S = \{(x, y) : \; 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$ y $A = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $B = (3, 2)$, $C = (-\sqrt{3}, 1)$ y $D = (1, 1)$. Determinar cuales de los puntos A, B, C y D pertenecen al interior, al exterior y a la frontera de S.



Topología

Solución:

- A es un punto frontera.
- B es un punto exterior.
- C es un punto frontera.
- D es un punto interior.

Topología.

Proposición:

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$.

- $\mathbb{R}^n$ es la unión disjunta de los conjuntos $int(S), ext(S)$ y $\partial(S)$.

Proposición:

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$.

- $\mathbb{R}^n$ es la unión disjunta de los conjuntos $int(S), ext(S)$ y $\partial(S)$.
- $int(S) \subset S$ y $ext(S) \subset \mathbb{R}^n \backslash S$.

Proposición:

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$.

- $\mathbb{R}^n$ es la unión disjunta de los conjuntos $int(S), ext(S)$ y $\partial(S)$.
- $int(S) \subset S$ y $ext(S) \subset \mathbb{R}^n \setminus S$.

Los puntos frontera pueden o no pertenecer a S.

Proposición:

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$.

- $\mathbb{R}^n$ es la unión disjunta de los conjuntos $int(S), ext(S)$ y $\partial(S)$.
- $int(S) \subset S$ y $ext(S) \subset \mathbb{R}^n \backslash S$.

Los puntos frontera pueden o no pertenecer a S.

Definición

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$.

- S es abierto si $S = int(S)$

Topología.

Proposición:

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$.

- $\mathbb{R}^n$ es la unión disjunta de los conjuntos $int(S), ext(S)$ y $\partial(S)$.
- $int(S) \subset S$ y $ext(S) \subset \mathbb{R}^n \setminus S$.

Los puntos frontera pueden o no pertenecer a S.

Definición

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$.

- S es abierto si $S = int(S)$
- S es cerrado si $S = int(S) \cup \partial(S)$

Ejemplo 4

Sea $S = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$. Encontrar $int(S), ext(S)$ y ∂S. Utilizar esta información para determinar si S es abierto o cerrado.

Solución:

- $int(S) = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$.

Solución:

- $int(S) = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$.
- $ext(S) = \{(x, y) : x^2 + y^2 > 4 \ \vee \ x^2 + y^2 < 1\}$.

Solución:

- $int(S) = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$.
- $ext(S) = \{(x, y) : x^2 + y^2 > 4 \ \vee \ x^2 + y^2 < 1\}$.
- $\partial(S) = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1 \ \vee \ x^2 + y^2 = 4\}$.

Solución:

- $int(S) = \{(x, y) : 1 < x^2 + y^2 < 4\}$.
- $ext(S) = \{(x, y) : x^2 + y^2 > 4 \ \vee \ x^2 + y^2 < 1\}$.
- $\partial(S) = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1 \ \vee \ x^2 + y^2 = 4\}$.
- S no es ni abierto ni cerrado ya que $S \neq int(S)$ y $S \neq int(S) \cup \partial(S)$.

Definición

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$.

- S es acotado si existe $M > 0$ tal que $S \subset B_M(\vec{0})$

Definición

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$.

- S es acotado si existe $M > 0$ tal que $S \subset B_M(\vec{0})$
- S es no acotado si no existe tal M.

Definición

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$.

- S es acotado si existe $M > 0$ tal que $S \subset B_M(\vec{0})$
- S es no acotado si no existe tal M.

Ejemplo 5

- El conjunto $S = \{(x, y) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\}$ es acotado.

Definición

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$.

- S es acotado si existe $M > 0$ tal que $S \subset B_M(\vec{0})$
- S es no acotado si no existe tal M.

Ejemplo 5

- El conjunto $S = \{(x, y) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\}$ es acotado.
- El conjunto $R = \{(x, y) : xy = 1\}$ es no acotado.