Solución Parcial

Listado 6 : Transformaciones lineales

7. Sean U y V espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Sea $T : U \to V$ una transformación lineal entre ellos. Suponga además que $u_1, u_2, u_3, u_4 \in U$.

(a) Demuestre que si $\{T(u_1), T(u_2), T(u_3), T(u_4)\}$ es li, entonces $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ es li.

(b) Encuentre una transformación T que convierta al conjunto li $\{w_1, w_2, w_3, w_4\} \subseteq U$ en un conjunto ld.

(c) Demuestre que si T es inyectiva y $\{w_1, w_2, w_3, w_4\} \subseteq U$ es li, entonces el conjunto $\{T(w_1), T(w_2), T(w_3), T(w_4)\}$ también es li, es decir, una transformación lineal inyectiva transforma a un conjunto li en un conjunto li.

Solución

(a) Supongamos que $\{T(u_1), T(u_2), T(u_3), T(u_4)\}$ es l.i. Determinemos si $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ lo es.
Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{K}$ tales que: $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = \theta_U$
Entonces
$T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4) = T(\theta_u)$ y por lo tanto $\alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2) + \alpha_3 T(u_3) + \alpha_4 T(u_4) = \theta_v$
Como $\{T(u_1), T(u_2), T(u), T(u_4)\}$ es l.i, los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ son todos nulos.
De esto se concluye que $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ es también l.i.

(b) La transformación lineal Θ es tal que
$\Theta(w_1) = \theta_v$ $\quad \Theta(w_2) = \theta_v$ $\quad \Theta(w_3) = \theta_v$ y $\Theta(w_4) = \theta_v$
y el conjunto $\{\theta_v\}$ es un conjunto l.d

(c) Supongamos que T es inyectiva. Supongamos que $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ es l.i y probemos que $\{T(u_1), T(u_2), T(u_3), T(u_4)\}$ también lo es.
Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{K}$ tales que $\alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2) + \alpha_3 T(u_3) + \alpha_4 T(u_4) = \theta_v$.
Entonces $T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4) = \theta_v$ y como T inyectiva, es decir $\mathrm{Ker}(T) = \{\theta_u\}$, y $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 \in \mathrm{Ker}(T)$ entonces $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = \theta_u$. Como además $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ es l.i, los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ son todos nulos, de lo que se concluye que $\{T(u_1), T(u_2), T(u_3), T(u_4)\}$ es l.i.