UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

PAUTA - EVALUACION Nº 1
ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Problema 1. (Este problema consta de dos partes, cada una independiente de la otra)

(a) Determine la solución del siguiente problema con valor inicial:

$$\begin{cases} t\,y'(t) + (t^2 - t)y(t) &= 2t^2 - 2t,\ t > 0, \\ y(2) &= -1. \end{cases}$$

(10 Pto.)

(b) Un tanque de forma cilíndricade 5000 $[L]$ de capacidad, contiene 1000 $[L]$ de una mezcla de agua y sal a una concentración de 0.1 $[Kg/L]$.
Por una válvula de entrada al tanque ingresan 4 $[L/(min)]$ de mezcla de agua y sal a una concentración de 0.01 $[Kg/L]$. Si la mezcla al interior del tanque es siempre homogénea y por una válvula de salida se pierden al exterior desde el tanque 4 $[L/(min)]$ de mezcla. Determine, si existe, el instante en que la concentración de sal dentro del tanque llega a la mitad de la concentración inicial en el tanque.

(10 Pts.)

Solución:

(a) Normalizando la EDO dada, el PVI a resolver es

$$\begin{cases} y'(t) + (t-1)y(t) &= 2(t-1), \\ y(2) &= -1. \end{cases}$$

Aquí el factor de integración es $\mu(t) = \mathrm{e}^{(1/2)t^2 - t}$. Por tanto luego de multiplicar la EDO normalizada por $\mu(t)$, se obtiene

$$\frac{d}{dt}\left[y(t)\,\mathrm{e}^{(1/2)t^2 - t}\right] = 2(t-1)\mathrm{e}^{(1/2)t^2 - t},$$

(04 puntos)

de donde

$$\begin{aligned} y(t)\,\mathrm{e}^{(1/2)t^2 - t} &= 2\int (t-1)\mathrm{e}^{(1/2)t^2 - t} dt\, +\, C \\ &= 2\mathrm{e}^{(1/2)t^2 - t}\, +\, C. \end{aligned}$$

Sigue que

$$y(t) = 2 \, + \, C\mathrm{e}^{t-(1/2)t^2},$$

donde C es una constante arbitraria. Para $t = 2$ se obtiene $y(2) = 2 + C$; como $y(2) = -1$, sigue que $C = -3$. Finalmente, la única solución al PVI dado es:

$$y(t) = 2 \, - \, 3\mathrm{e}^{t-(1/2)t^2}.$$

(06 puntos)

Alternativamente, si se usa el factor de integración $\alpha(t) = \mathrm{e}^{(1/2)(t-1)^2}$ entonces luego de multiplicar la EDO normalizada por $\alpha(t)$, se obtiene

$$\frac{d}{dt}\left[y(t)\,\mathrm{e}^{(1/2)(t-1)^2}\right] = 2(t-1)\mathrm{e}^{(1/2)(t-1)^2},$$

de donde $y(t)\,\mathrm{e}^{(1/2)(t-1)^2} = 2\mathrm{e}^{(1/2)(t-1)^2} \, + \, K$. Así,

$$y(t) = 2 \, + \, K\mathrm{e}^{-(1/2)(t-1)^2},$$

donde K es una constante arbitraria. Para $t = 2$ se obtiene $y(2) = 2 + C\,\mathrm{e}^{-(1/2)}$; como $y(2) = -1$, sigue que $C = -3\,\mathrm{e}^{(1/2)}$. Finalmente, la única solución al PVI dado es (la misma determinada anteriormente),

$$y(t) = 2 \, - \, 3\mathrm{e}^{t-(1/2)t^2}.$$

o equivalentemente

$$y(t) = 2 \, - \, 3\mathrm{e}^{-(1/2)t(t-2)}.$$

(b) Ponemos $x(t)$ la cantidad de sal (en kilogramos) dentro del tanque en el instante t.
$V(t)$ el volumende mezcla de agua y sal dentro del tanque en el instante t.
V_0 volumen inicial dentro del tanque.
$c(t)$ la concentración de sal dentro del tanque en el instante t, en $[Kg/L]$
c_0 la concentración inicial de sal dentro del tanque.
x_0 la cantidad inicial de sal dentro del tanque, en $[Kg]$

Puesto que el flujo de entrada y salida de mezcla es 4 $[L/(min)]$, la variación de volumen dentro del tanque es cero. Por tanto el volumen, $V(t)$, es $V(t) = V_0 = 1000\,[L]$. Además, como $c(t) = \dfrac{x(t)}{V(t)}$, sigue que $c_0 = \dfrac{x_0}{V(t)}$. Por tanto, el PVI que expresa la cantidad de sal dentro del tanque, es

$$\begin{cases} x'(t) &= 4\cdot(0.01) - 4\dfrac{x(t)}{1000}, \;\; 0 \leq t \leq t_c, \\ x(0) &= c_0\,V_0 = 100, \end{cases}$$

donde t_c es el instante dentro del tanque en que $c(t_0) = 0.05\,[\frac{kg}{L}]$. **(04 puntos)**

Esto es,

$$\begin{cases} x'(t) + \dfrac{x(t)}{250} & = 0.04, \;\; 0 \leq t \leq t_c, \\ x(0) & = 100, \end{cases}$$

Primero determinaremos $x(t)$.

Para resolver la EDO la multiplicamos por $\mu(t) = \mathrm{e}^{t/(250)}$, de donde sigue

$$\begin{aligned} x'(t)\mathrm{e}^{t/(250)} + \frac{x(t)}{250}\mathrm{e}^{t/(250)} &= 0.04\mathrm{e}^{t/(250)} \\ \frac{d}{dt}[\mathrm{e}^{t/(250)}\, x(t)] &= 0.04\, \mathrm{e}^{t/(250)}. \end{aligned}$$

Al integrar la última ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{t/(250)} x(t) &= 0.04\, \mathrm{e}^{t/(250)}\, 250 + C \\ x(t) &= 10 + C\mathrm{e}^{-t/(250)}, \;\; 0 \leq t \leq t_c. \end{aligned}$$

Usando la condición inicial $x(0) = 100$ se obtiene que $C = 90$.

Por lo tanto,

$$x(t) = 10 + 90\mathrm{e}^{-t/(250)} \text{ para } 0 \leq t \leq t_c$$

Finalmente como

$$c(t) = \frac{x(t)}{1000},$$

sigue que el instante t_c buscado es tal que

$$\frac{10 + 90\mathrm{e}^{-t_c/(250)}}{1000} = 0.05,$$

de donde $\mathrm{e}^{t_c/(250)} = 9/4$. Esto es,

$$\frac{t_c}{250} = \mathrm{Ln}(9/4).$$

Por tanto $t_c = (250)\,\mathrm{Ln}(9/4)$ (minutos). **(06 puntos)**

Problema 2

(i) Determine la solución general de

$$y'''(x) - 4\, y''(x) - 6\, y'(x) + 20\, y(x) = 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

sabiendo que para $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = e^{2x}$ es una solución de la EDO dada.

(08 Pts.)

(ii) **Usando el método de los aniquiladores (no se admitirá otro método)**, determine la solución general de

$$y''(x) + 6\, y'(x) + 9\, y(x) = -6e^{-3x}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

(12 Pts.)

Solución:

(i) La E.D.O puede ser escrita como

$$(D^3 - 4D^2 - 6D + 20)y = 0,$$

Así, la ecuación característica es

$$r^3 - 4r^2 - 6r + 20 = 0.$$

Dado que e^{2x} es una solución de la E.D.O homogenea, entonces $r = 2$ es raíz de la ecuación caracteristica. Aplicando Ruffini para factorizar la ecuación se tiene

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -4 & -6 & 20 \\ \hline 2 & 1 & -2 & -10 & 0 \end{array}$$

Así,

$$\begin{aligned} r^3 - 4r^2 - 6r + 20 = 0 \Leftrightarrow &\quad (r-2)(r^2 - 2r - 10) = 0 \\ \Leftrightarrow &\quad r - 2 = 0 \quad \vee \quad r^2 - 2r - 10 = 0 \\ \Leftrightarrow &\quad r = 2 \quad \vee \quad r = 1 \pm \sqrt{11} \end{aligned}$$

Así, el conjunto fundamental de soluciones para la E.D.O es $\{e^{2x}, e^{(1+\sqrt{11})x}, e^{(1-\sqrt{11})x}\}$ y la solución general

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{(1+\sqrt{11})x} + C_3 e^{(1-\sqrt{11})x}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

Con C_1, C_2, $C_3 \in \mathbb{R}$ constantes arbitrarias.

(ii) Como la EDO es lineal y no homogénea entonces su solución general es

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

Donde y_h es la solución general de la EDO homogénea asociada e y_p es una solución particular de la EDO no homogénea que determinaremos usando aniquiladores. Resolviendo la EDO homogénea asociada

$$y'' + 6y' + 9y = 0 \Leftrightarrow (D^2 + 6D + 9)y = 0,$$

luego la ecuación caractarística es

$$r^2 + 6r + 9 = 0 \Leftrightarrow \quad (r+3)^2 = 0.$$

Dado que $r = -3$ es raíz con multiplicidad 2, se tiene que la solución de la EDO homogénea es

$$y_h(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

y C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$ constantes arbitrarias.

Para determinar y_p consideramos que un aniquilador para $-6\mathrm{e}^{-3x}$ es $(D+3)$. Así,

$$\begin{aligned} y''+6y'+9y=-6\mathrm{e}^{-3x} &\Leftrightarrow \quad (D^2+6D+9)y=-6\mathrm{e}^{-3x} \\ &\Leftrightarrow \quad (D+3)^2(y)=-6\mathrm{e}^{-3x} \\ &\Leftrightarrow \quad (D+3)(D+3)^2(y)=0 \\ &\Leftrightarrow \quad (D+3)^3(y)=0 \end{aligned}$$

La última EDO, al ser homogénea, tiene como solución general

$$y(x)=A\mathrm{e}^{-3x}+Bx\mathrm{e}^{-3x}+Cx^2\mathrm{e}^{-3x}$$

Considerando que los dos primeros términos son parte de la solución homogenea, concluimos que una solución particular de la EDO es de la forma

$$y_p(x)=Ax^2\mathrm{e}^{-3x},$$

con $A\in\mathbb{R}$ a determinar. Reemplazando y_p en la EDO, se tiene

$$y_p''+6y_p'+9y_p=-6\mathrm{e}^{-3x}, \quad \forall x\in\mathbb{R},$$

lo que es equivalente a

$$A(9x^2\mathrm{e}^{-3x}-12x\mathrm{e}^{-3x}+2\mathrm{e}^{-3x})+6A(2x\mathrm{e}^{-3x}-3x^2\mathrm{e}^{-3x})+9Ax^2\mathrm{e}^{-3x}=-6\mathrm{e}^{-3x}, \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Simplificando, nos queda

$$2A\mathrm{e}^{-3x}=-6e^{-3x}, \quad \forall x\in\mathbb{R},$$

concluyendo que

$$2A=-6 \Leftrightarrow A=-3.$$

Así,

$$y_p(x)=-3x^2e^{-3x}.$$

Finalmente, la solución general de la EDO es

$$y(x)=C_1e^{-3x}+C_2xe^{-3x}-3x^2e^{-3x}, \quad \forall x\in\mathbb{R},$$

con C_1, $C_2\in\mathbb{R}$ constantes arbitrarias.

Problema 3.

Considere la ecuación diferencial ordinaria, a coeficientes variables

$$t^2\,y''(t)\;-\;(t^2+2t)\,y'(t)\;+\;(t+2)\,y(t)\;=\;t^4\,\mathrm{e}^t\,, \quad t>0\,. \tag{1}$$

Para $t\in(0,+\infty)$ considere las funciones y_1 e y_2, definidas respectivamente por $y_1(t)\;:=\;t$, e $y_2(t)\;:=\;t\,\mathrm{e}^t$.

a) Verifique $\{y_1,y_2\}$ es un Conjunto/Sistema Fundamental de Soluciones de la EDO homogénea asociada a (1) (lo anterior es equivalente a verificar que $\{y_1,y_2\}$ es base para el Kernel del operador lineal asociado a las EDO (1). **(08 puntos)**

b) **Aplicando el M étodo de Variación de Parámetros**, determine una Solución Particular de (1). Debe explicitar el sistema de ecuaciones que involucra esta técnica. Finalmente, escriba la solución general de la EDO (1). **(12 puntos)**

Desarrollo:

a) Veamos primero que tanto y_1 como y_2 son soluciones de la EDO homogénea asosiada a (1), la cual es lineal de segundo orden.

$$t^2\,y''(t)\;-\;(t^2+2t)\,y'(t)\;+\;(t+2)\,y(t)\;=\;0\,,\qquad t>0\,. \tag{2}$$

PARA y_1: Sea $t>0$ (fijo pero arbitrario). Tenemos (simplificando)

$$\begin{aligned} t^2\,y_1''(t)\;-\;(t^2+2t)\,y_1'(t)\;+\;(t+2)\,y_1(t) &= t^2\,(0)\;-\;(t^2+2t)\,(1)\;+\;(t+2)\,t \\ &= \;-\,(t^2+2t)\;+\;(t^2+2t) \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

PARA y_2: Sea $t>0$ (fijo pero arbitrario). Tenemos (después de simplificar)

$$\begin{aligned} t^2\,y_2''(t)\;-\;(t^2+2t)\,y_2'(t)\;+\;(t+2)\,y_2(t) &= t^2\,(2\mathrm{e}^t+t\,\mathrm{e}^t)\;-\;(t^2+2t)\,(\mathrm{e}^t+t\,\mathrm{e}^t)\;+\;(t+2)\,t\,\mathrm{e}^t \\ &= (2\,t^2\,\mathrm{e}^t+t^3\,\mathrm{e}^t)-(t^3\,\mathrm{e}^t+3t^2\,\mathrm{e}^t+2t\,\mathrm{e}^t)+(t^2\,\mathrm{e}^t+2t\,\mathrm{e}^t)) \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

(05 puntos)

De esta manera, se ha verificado que $\{y_1,y_2\}$ es un conjunto de soluciones de (2). Veamos que es linealmente independiente. Calculando el WRONSKIANO de estas funciones en $t>0$, fijo pero arbitrario, resulta

$$W[y_1,y_2](t)\;:=\;\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t)\end{vmatrix}\;=\;\begin{vmatrix} t & t\,\mathrm{e}^t \\ 1 & (1+t)\,\mathrm{e}^t\end{vmatrix}\;=\;t^2\,\mathrm{e}^t\qquad\Rightarrow\qquad \forall\,t>0\;:\;W[y_1,y_2](t)\neq 0\,.$$

Esto asegura, por un resultado visto en clases, que $\{y_1,y_2\}$ es linealmente independiente. En consecuencia, $\{y_1,y_2\}$ es un CONJUNTO/SISTEMA FUNDAMENTAL DE SOLUCIONES de la EDO homogénea (2). **(03 puntos)**

b) Primero, debemos considerar la EDO NORMALIZADA asociada a (1), la cual viene dada por

$$y''(t)\;-\;\frac{t+2}{t}\,y'(t)\;+\;\frac{t+2}{t^2}\,y(t)\;=\;t^2\,\mathrm{e}^t\,,\qquad t>0\,. \tag{3}$$

El MÉTODO DE VARIACIÓN DE PARÁMETROS propone que la solución particular buscada se expresa como

$$y_P(t)\;:=\;A_1(t)\,y_1(t)\;+\;A_2(t)\,y_2(t)\;=\;A_1(t)\,t\;+\;A_2(t)\,t\,\mathrm{e}^t\,,\qquad t>0\,, \tag{4}$$

donde A_1, A_2 son funciones derivables, que satisfacen el sistema

$$\begin{pmatrix} t & t\,\mathrm{e}^t \\ 1 & (1+t)\,\mathrm{e}^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1'(t) \\ A_2'(t)\end{pmatrix}\;=\;\begin{pmatrix} 0 \\ t^2\,\mathrm{e}^t\end{pmatrix}\,.$$

(04 puntos)

Aplicando la REGLA DE CRAMER, tenemos

$$\left\{\begin{aligned} A_1'(t) &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & t\mathrm{e}^t \\ t^2\mathrm{e}^t & (1+t)\mathrm{e}^t \end{vmatrix}}{W[y_1,y_2](t)} = \frac{-t^3\mathrm{e}^{2t}}{t^2\mathrm{e}^t} = -t\mathrm{e}^t \\ A_2'(t) &= \frac{\begin{vmatrix} t & 0 \\ 1 & t^2\mathrm{e}^t \end{vmatrix}}{W[y_1,y_2](t)} = \frac{t^3\mathrm{e}^t}{t^2\mathrm{e}^t} = t \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} A_1(t) &= (1-t)\mathrm{e}^t \\ A_2(t) &= \tfrac{1}{2}t^2\,. \end{aligned}\right.$$

En consecuencia, reemplazando en (4), resulta

$$y_P(t) = \left(\frac{1}{2}t^3 - t^2 + t\right)\mathrm{e}^t\,, \quad \forall\, t > 0\,.$$

Finalmente, en virtud del llamado PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN, la solución general de (1) es

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = C_1\,\mathrm{e}^t + C_2\,t\,\mathrm{e}^t + \left(\frac{1}{2}t^3 - t^2 + t\right)\mathrm{e}^t\,, \quad \forall\, t > 0\,,$$

siendo $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ constantes arbitrarias. **(08 puntos)**

Observación: agrupando convenientemente, la solución general de (1) también puede expresarse como

$$y(t) = C_1\,\mathrm{e}^t + \tilde{C}_2\,t\,\mathrm{e}^t + \left(\frac{1}{2}t^3 - t^2\right)\mathrm{e}^t\,, \quad \forall\, t > 0\,,$$

siendo $C_1, \tilde{C}_2 \in \mathbb{R}$ constantes arbitrarias.

16/10/2022.
RBP//JMS//FST//rbp//jms//fst