**Universidad de Concepción**
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

GAJ/EBC/CFS/CMR/ARP

# Cálculo 3 (521227)

Tarea 2

## Problema 1 (20 puntos)

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3xy^2-2y^3}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

i. Sea $\vec{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$ un vector unitario. Probar que la derivada direccional $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)$ existe, para cada $\theta \in [0, 2\pi]$, e indicar su respuesta en función de $\theta$.

**Solución:** Utilizando la definición se tiene que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h\cos\theta, h\sin\theta) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h^3\cos\theta\sin^2\theta - 2h^3\sin^3\theta}{h(h^4\cos^4\theta + h^2\sin^2\theta)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3\cos\theta\sin^2\theta - 2\sin^3\theta}{h^2\cos^4\theta + \sin^2\theta}$$

Ahora tenemos 2 casos:

Si $\sin\theta = 0$, entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{3\cos\theta\sin^2\theta - 2\sin^3\theta}{h^2\cos^4\theta + \sin^2\theta} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

y si $\sin\theta \neq 0$, entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{3\cos\theta\sin^2\theta - 2\sin^3\theta}{h^2\cos^4\theta + \sin^2\theta} = 3\cos\theta - 2\sin\theta$$

**(7 puntos)**

ii. Determinar si $f$ es continua en $(0,0)$.

**Solución:** Demostraremos que $f$ es continua en $(0,0)$ para esto es suficiente probar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

Para esto acotamos $\left|\frac{3xy^2-2y^3}{x^4+y^2}\right| \leq \left|\frac{3xy^2}{y^2}\right| + \left|\frac{2y^3}{y^2}\right| \leq 3|x|+2|y|$ y como esta expresión tiende a 0, se sigue del Teorema del Acotamiento que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. y por lo tanto $f$ es continua en el origen.

**(6 puntos)**

iii. Determinar si $f$ es diferenciable en $(0,0)$

**Solución:** Del item i. sabemos que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -2$.

Tenemos que $f$ es diferenciable en $(0,0)$ si y sólo si

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Simplificando tenemos que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{3hk^2 - 2k^3 + 2k(h^4+k^2)}{(h^4+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{3hk^2 + 2kh^4}{(h^4+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$$

Tomando el límite a lo largo de la trayectoria $h = k$ se tiene que

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h=k}} \frac{3hk^2 + 2kh^4}{(h^4+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h=k}} \frac{3h^3 + 2h^5}{\sqrt{2}(h^2+1)h^3} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Por lo tanto, como el límite no es cero, se tiene que $f$ no es diferenciable en el origen. **(7 puntos)**

## Problema 2 (20 puntos)

Sea $g : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^2$, sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función definida por $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ y sea $h = g \circ f$. Expresar la ecuación

$$E = x\frac{\partial g}{\partial y} - y\frac{\partial g}{\partial x}$$

en coordenadas polares, es decir, expresar $E$ en términos de $r, \theta$ y $h$.

**Solución:** Utilizando la regla de la cadena, para derivar la función $h(r,\theta)$ obtenemos

$$\frac{\partial h}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial g}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial h}{\partial y}$$

$$\frac{\partial h}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial g}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial h}{\partial y}$$

Recordando que $x = r\cos\theta$ y $y = r\sin\theta$ vemos que

$$x\frac{\partial g}{\partial y} - y\frac{\partial g}{\partial x} = -r\sin\theta\frac{\partial g}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial h}{\partial y}$$

Es decir, $E = \frac{\partial h}{\partial \theta}$ **(20 puntos)**

## Problema 3 (20 puntos)

Considere la ecuación $xy = \ln(\frac{x}{y})$. Mostrar que, para valores cercanos a $\sqrt{e}$, existe una función $g$ de clase $C^1$ tal que $y = g(x), g(\sqrt{e}) = \frac{1}{\sqrt{e}}$ y demostrar que $\sqrt{e}$ es un máximo local de $g$.

**Solución:** Sea $F(x,y) : W \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $F(x,y) = xy - \ln(\frac{x}{y})$ donde $W = \{(x,y) : x > 0, y > 0\}$. Primero observemos que la función $F$ es de clase $C^1$ en el abierto $W$ ya que las derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial x} = y - \frac{1}{x}$ y $\frac{\partial F}{\partial y} = x + \frac{1}{y}$ son continuas en $W$. Evaluamos $\frac{\partial F}{\partial y}(\sqrt{e}, \frac{1}{\sqrt{e}}) = 2\sqrt{2} \neq 0$. Se sigue del Teorema de la Función Implícita que existe una función $g$ de clase $C^1$ tal que $y = g(x)$, y además se tiene que

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)} = -\frac{y - \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{y}} = -\frac{g(x) - \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{g(x)}}$$

**(10 puntos)**

Notemos que $g'(\sqrt{e}) = 0$ y por lo tanto es un punto crítico. Ahora probaremos que $g''(\sqrt{e}) < 0$ y utilizando el criterio de la segunda derivada se tiene que $\sqrt{e}$ es un máximo local.

$$g''(x) = -\frac{\left(g'(x) + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{g(x)}\right) - \left(g(x) - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{g'(x)}{g(x)^2}\right)}{\left(x + \frac{1}{g(x)}\right)^2}$$

Usando $g(\sqrt{e}) = \frac{1}{\sqrt{e}}$ y $g'(\sqrt{e}) = 0$ se tiene que

$$g''(\sqrt{e}) = -\frac{\frac{2\sqrt{e}}{e}}{4e} = -\frac{1}{2e\sqrt{e}}$$

Por lo tanto $\sqrt{e}$ es un máximo local de $g$.

**(10 puntos)**