UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Caso No Homogéneo:
Veamos ahora como se determina la solución del sistema

$$X'(t) = A\,X(t) + F(t) \tag{1}$$

en que A es una matriz de orden $n \times n$ en que todas sus entradas a_{ij} son constantes reales y $F(t)$ es un vector conocido de n componentes, cuyas componentes son funciones continuas, esto es, $F(t) = (f_1(t), \cdots, f_n(t))$.

Recordemos que de acuerdo a la Proposición (*) Toda solución $Z(t)$ de (1), se escribe como

$$Z(t) = X_h(t) + X_p(t).$$

donde X_h es solución del SEDO homogéneo asociado y
X_p es una solución particular de (1).

Usamos el método de Variación de Parámetros. Este consiste en buscar una solución particular, X_p para (1) como

$$X_p(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j(t)\,X_j(t) \tag{2}$$

donde para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, $c_j(t)$ son incógnitas y $\{X_1(t), \ldots, X_n(t)\}$ forman base del espacio solución del SEDO homogéneo.
Veamos si es posible determinar las funciones incógnitas $c_j(t)$ de modo que (2) sea solución particular para el sistema (1).
Para lo anterior determinamos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}X_p(t) &= \frac{d}{dt}\Big[\textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j(t)\,X_j(t)\Big] \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt}\Big[c_j(t)\,X_j(t)\Big] \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j'(t)\,X_j(t) + \sum_{j=1}^{n} c_j(t)\,X_j'(t) \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j'(t)\,X_j(t) + \sum_{j=1}^{n} c_j(t)\,A\,X_j(t) \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j'(t)\,X_j(t) + \sum_{j=1}^{n} A\Big[c_j(t)\,X_j(t)\Big] \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j'(t)\,X_j(t) + A\Big[\sum_{j=1}^{n} c_j(t)\,X_j(t)\Big] \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j'(t)\,X_j(t) + AX_p(t)
\end{aligned}$$

Así, vemos que

$$X_p'(t) = AX_p(t) + \sum_{j=1}^{n} c_j'(t)\,X_j(t),$$

de donde sigue que la propuesta (2) para $X_p(t)$ será solución de (1) sí, y solamente si

$$\sum_{j=1}^{n} c_j'(t)\, X_j(t) = F(t).$$

Al incorporar la forma de X_p en (2) en el sistema (1) se puede ver que las funciones $c_j(t)$ buscadas deben satisfacer el sistema:

$$\sum c_j'(t)\, X_j(t) = f_j(t) \tag{3}$$

donde $F_j(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))^t$.
Así, vale el siguiente

Teorema (solución particular ...)
Asuma que el conjunto $\{X_1(t), X_1(t), \cdots, X_n(t)\}$ es un Sistema Fundamental para el sistema homogéneo

$$X'(t) = AX(t),$$

entonces el vector $X_p(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j(t)\, X_j(t)$ donde las $c_j(t)$ son n funciones reales de variable real por determinar, es una solución particular del sistema no homogéneo $X'(t) = A\,X(t) + F(t)$, sí, y solamente si

$$\sum_{j=1}^{n} c_j'(t)\, X_j(t) = F(t).$$

Ejemplo 1.
Aplicando el método de valores y vectores propios, resolver el sistema EDO:

$$\boldsymbol{X}'(t) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{X}(t) \;+\; \begin{pmatrix} 2\,\mathrm{e}^{2t} \;-\; 1 \\ 3\,\mathrm{e}^{2t} \;+\; 1 \end{pmatrix}.$$

Planteamiento: Sea $\boldsymbol{A} := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, y $\boldsymbol{B}(t) \;:=\; \begin{pmatrix} 2\,\mathrm{e}^{2t} \;-\; 1 \\ 3\,\mathrm{e}^{2t} \;+\; 1 \end{pmatrix}$.

Primero: Resolviendo el sistema EDO homogéneo asociado (por el método de valores y vectores propios)

Valores propios de $\boldsymbol{A}$:

$$|\boldsymbol{A} - \lambda\,\boldsymbol{I}| \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 \;-\; 3\lambda \;-\; 4 \;=\; 0\,,$$

de donde $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = -1$ son los valores propios (simples) de $\boldsymbol{A}$. Calculando los espacios propios asociados a λ_1 y λ_2, se encuentra que

$$S_{\lambda_1} \;=\; \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

y

$$S_{\lambda_2} \;=\; \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle\,,$$

de donde se concluye que $\boldsymbol{v}_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ es un vector propio de $\boldsymbol{A}$ asociado a λ_1, mientras que $\boldsymbol{v}_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es el correspondiente a λ_2. Esto da lugar a las funciones vectoriales, $\boldsymbol{X}_1(t) \;:=\; \mathrm{e}^{4t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, y

$\boldsymbol{X}_2(t) := \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, las cuales forman el conjunto fundamental de soluciones. Luego, la solución general del sistema EDO homogéneo asociado es

$$\boldsymbol{X}_H(t) = C_1\,\boldsymbol{X}_1(t) + C_2\,\boldsymbol{X}_2(t) = C_1\mathrm{e}^{4t}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

siendo C_1, C_2 constantes reales arbitrarias.

Segundo: Calculando una solución particular del sistema original. Aquí aplicaremos el método de Variación de Parámetros, gracias al cual una solución particular es de la forma

$$\boldsymbol{X}_P(t) = \alpha_1(t)\,\boldsymbol{X}_1(t) + \alpha_2(t)\,\boldsymbol{X}_2(t)\,,$$

donde α_1 y α_2 satisfacen:

$$\Big(\boldsymbol{X}_1(t)\,|\,\boldsymbol{X}_2(t)\Big)\begin{pmatrix} \alpha_1'(t) \\ \alpha_2'(t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}(t)\,.$$

Resolviendo el sistema, resulta

$$\alpha_1'(t) = \mathrm{e}^{-2t} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1(t) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\,,$$

y

$$\alpha_2'(t) = \mathrm{e}^{t} \quad \Rightarrow \quad \alpha_2(t) = \mathrm{e}^{t}\,.$$

Así, tenemos

$$\boldsymbol{X}_P(t) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\,\boldsymbol{X}_1(t) + \mathrm{e}^{t}\,\boldsymbol{X}_2(t) = \ldots = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{2t} - 1 \\ -\frac{3}{2}\mathrm{e}^{2t} + 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, por la linealidad del sistema, se concluye que la solución general buscada es

$$\boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{X}_H(t) + \boldsymbol{X}_P(t) = C_1\mathrm{e}^{4t}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2\,\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{2t} - 1 \\ -\frac{3}{2}\mathrm{e}^{2t} + 1 \end{pmatrix},$$

siendo C_1, C_2 constantes reales arbitrarias.

Ejemplo 2.

Determine la solución general del SEDO no homogéneo

$$\begin{cases} x'(t) = & -2x(t) + y(t) + z(t) \\ y'(t) = & -x(t) - 2y(t) - z(t) \quad + \mathrm{e}^{-t} \\ z'(t) = & x(t) - y(t) - 2z(t) \quad - (\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-3t}) \end{cases}$$

SOLUCION

como sabemos la solución general del problema es $X(t) = X_h(t) + X_p(t)$, donde $X_h(t)$ es la solución general del problema homogéneo asociado y $X_p(t)$ es una solución particular del problema.

Aquí la matriz de coeficientes del sistema homogéneo, es $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

El polinomio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$ proporciona los valores propios

$$\lambda_1 = -2;\ \lambda_2 = -3;\ \lambda_3 = -1$$

Los espacios propios, S_{λ_i}, resultan ser:

$$\begin{array}{rcl} S_{\lambda_1} & = & \langle\{(1,1,-1)\}\rangle \\ S_{\lambda_2} & = & \langle\{(1,0,-1)\}\rangle \\ S_{\lambda_3} & = & \langle\{(0,1,-1)\}\rangle. \end{array}$$

Asi, obtenemos que toda solución, $X_h(t)$, del problema homogéneo asociado es

$$X_h(t) = A\,\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + B\,\mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C\,\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donde A, B y C son constantes arbitrarias.

Usando variación de paramétros buscamos una solución particular $X_p(t)$ del tipo

$$X_p(t) = c_1(t)X_1(t) + c_2(t)X_2(t) + c_3(t)X_3(t),$$

donde las derivadas de las incógnitas $c_1(t)$, $c_2(t)$ y $c_3(t)$ deben verificar el sistema

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-3t} & 0 \\ \mathrm{e}^{-2t} & 0 & \mathrm{e}^{-t} \\ -\mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-3t} & -\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ c_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{-t} \\ -\left(\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-3t}\right) \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el sistema anterior, resulta

$$\begin{cases} c_1(t) & = \mathrm{e}^{-t} \\ c_2(t) & = t \\ c_3(t) & = t - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}. \end{cases}$$

Así, se obtiene la solución particular

$$X_p(t) = \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + (t - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t})\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

esto es,

$$X_p(t) = \mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\,\mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + (t\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

Finalmente, la solución general del sistema es:

$$\begin{aligned} X(t) = {} & A\,\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + B\,\mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C\,\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ & + \mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\,\mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + (t\mathrm{e}^{-t} - \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-3t})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde A, B y C son constantes arbitrarias.

JMS//jms
Noviembre 09 de 2022.