Solución Parcial

Listado 1: Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

2. Considere los puntos $A=(-1,0,1)$, $B=(0,1,2)$ y $C=(1,1,1)$ y los vectores $\vec{a}=\vec{OA}$, $\vec{b}=\vec{OB}$ y $\vec{c}=\vec{OC}$, donde $O=(0,\ 0,\ 0)$. Determine

(a) $\vec{AB}$ y $\vec{BC}$,

(b) $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{c}\|$, $\left\|2\vec{a}-\vec{b}\right\|$, SOLUCIÓN:

$$\vec{a}=\vec{OA}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\ \text{luego}\ \|\vec{a}\|=\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

$$\vec{b}=\vec{OB}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\ \text{luego}\ \|\vec{b}\|=\sqrt{0^2+1^2+2^2}=\sqrt{5}$$

$$2\vec{a}-\vec{b}=2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix},\ \|2\vec{a}-\vec{b}\|=\sqrt{5}$$

4. Para cada uno de los tríos de vectores v_1, v_2, v_2 de vectores en $\mathbb{R}^2$ presentados, determine escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tales que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = (0,0)^{\mathrm{T}}.$$

(a)

$$v_1 = (1,0)^{\mathrm{T}}$$
$$v_2 = (0,1)^{\mathrm{T}}$$
$$v_3 = (1,1)^{\mathrm{T}}$$

(b)

$$v_1 = (2,-2)^{\mathrm{T}}$$
$$v_2 = (0,-3)^{\mathrm{T}}$$
$$v_3 = (-1,0)^{\mathrm{T}}$$

(c)

$$v_1 = (2,-2)^{\mathrm{T}}$$
$$v_2 = (-4,4)^{\mathrm{T}}$$
$$v_3 = (0,0)^{\mathrm{T}}$$

<u>SOLUCIÓN</u>:

Se deben encontrar $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De aquí: $$\alpha_1\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

se tiene: $$\begin{pmatrix}2\alpha_1-\alpha_3\\-2\alpha_1-3\alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

es decir: $$2\alpha_1-\alpha_3=0 \qquad (1)$$
$$-2\alpha_1-3\alpha_2=0 \qquad (2)$$

y sumando ambas ecuaciones entre si resulta: $-\alpha_3-3\alpha_2=0$

$$\Rightarrow \alpha_3=-3\alpha_2$$

Sustituyendo en la ecuación ① : $2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0$

que es igual a ② : $-2\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0$, se tiene : $\alpha_1 = -\frac{3}{2}\alpha_2$

donde $\alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto: $\alpha_1 = -\frac{3}{2}\alpha_2$, $\alpha_3 = -2\alpha_2$, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Por ejemplo, si $\alpha_2 = 1$ entonces :

$$-\frac{3}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

8. Determine qué puntos (x, y, z) pertenecen al plano que contiene a $(0, 1, 2)$ y del que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ son vectores directores.

SOLUCIÓN :

¿Qué ocurre si, en lugar de buscar todos los vectores en $\mathbb{R}^n$ que, partiendo de un punto A son paralelos a cierto vector $\vec{r}$ dado, buscamos todos los vectores que, partiendo de A son combinación lineal de dos vectores dados $\vec{r}$, $\vec{s}$ no nulos y no paralelos? Es decir, ¿podemos determinar cuáles son los puntos $P \in \mathbb{R}^n$ para los que existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\overrightarrow{AP} = \alpha\,\vec{r} + \beta\,\vec{s}\,?$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x - A_1 \\ y - A_2 \\ z - A_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

8. Determine qué puntos (x, y, z) pertenecen al plano que contiene a $(0,1,2)$ y del que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ son vectores directores.

SOLUCIÓN:

En este caso: $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underbrace{\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ y } \vec{s} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$

vectores directores

por lo tanto la ecuación del plano queda así:

$$\begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \\ z-2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

8. Determine qué puntos (x, y, z) pertenecen al plano que contiene a $(0, 1, 2)$ y del que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ son vectores directores.

<u>SOLUCIÓN</u>: Otra forma de escribir la ecuación del plano es:

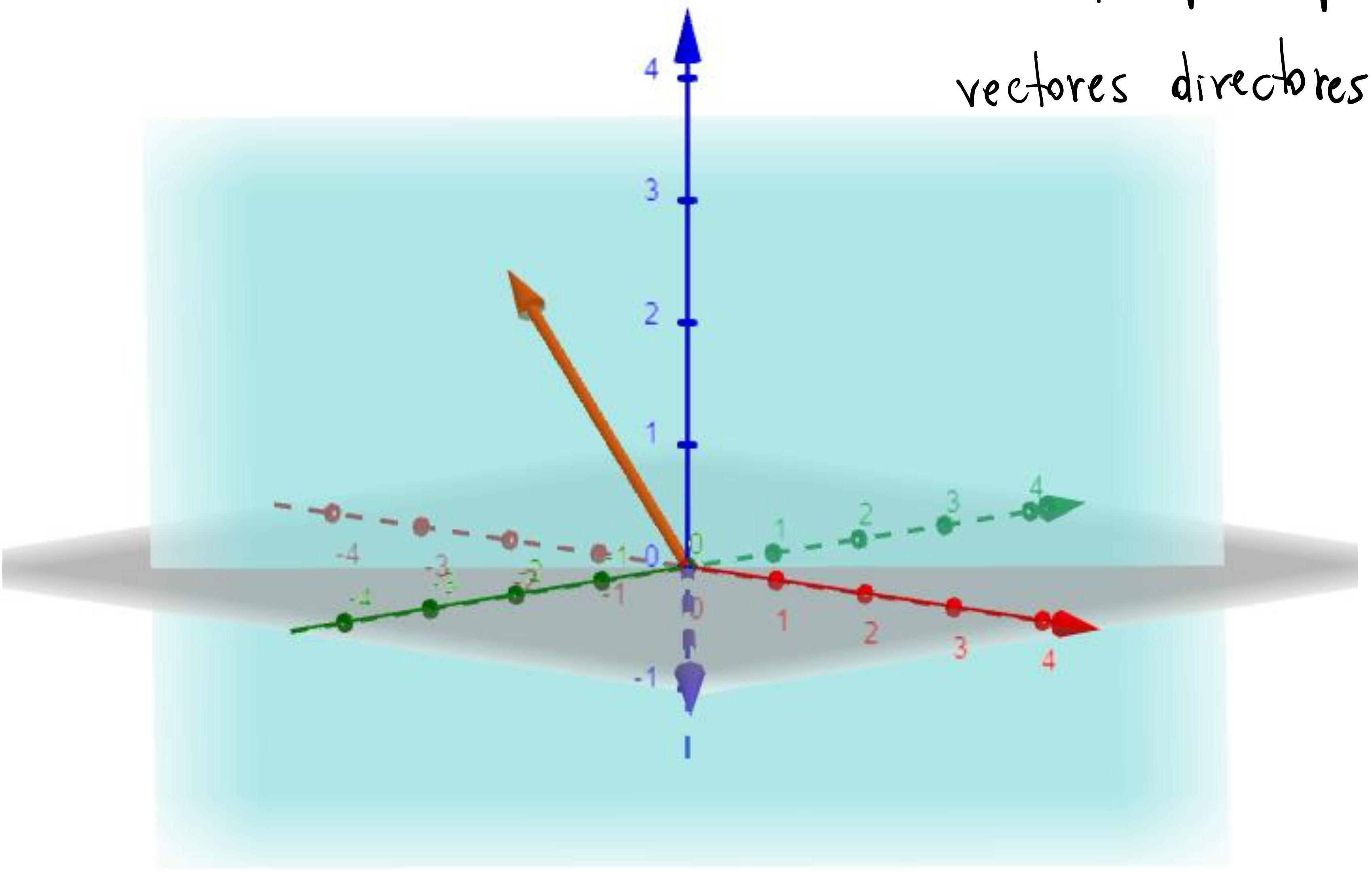
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

de aquí, los $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ para los que existen α y β son los que cumplen:

$$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - z = -\frac{3}{2}$$

OBSERVACIÓN:

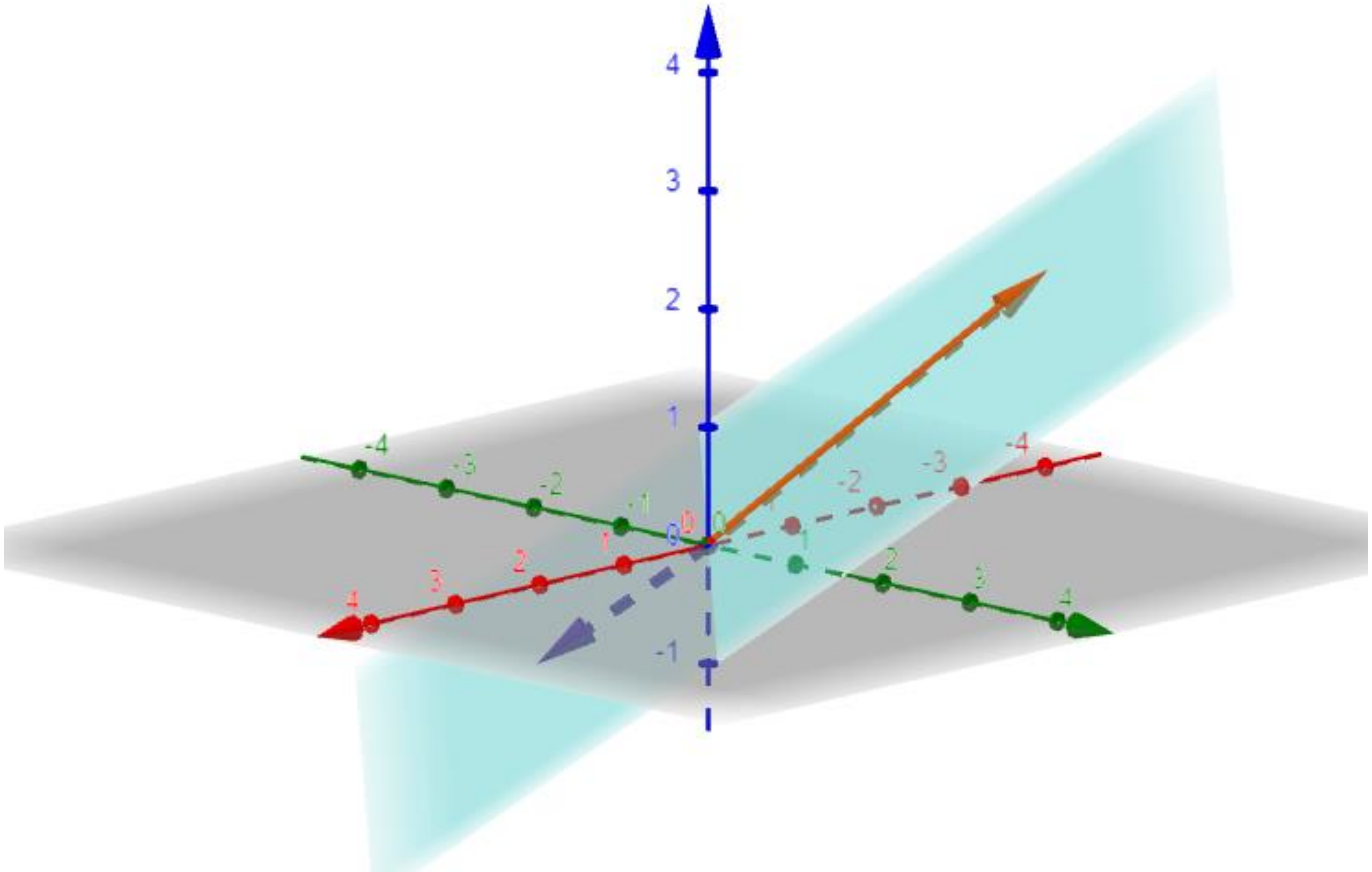
Plano que pasa por el origen con vectores directores $\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}}$ y $\underbrace{\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}}$



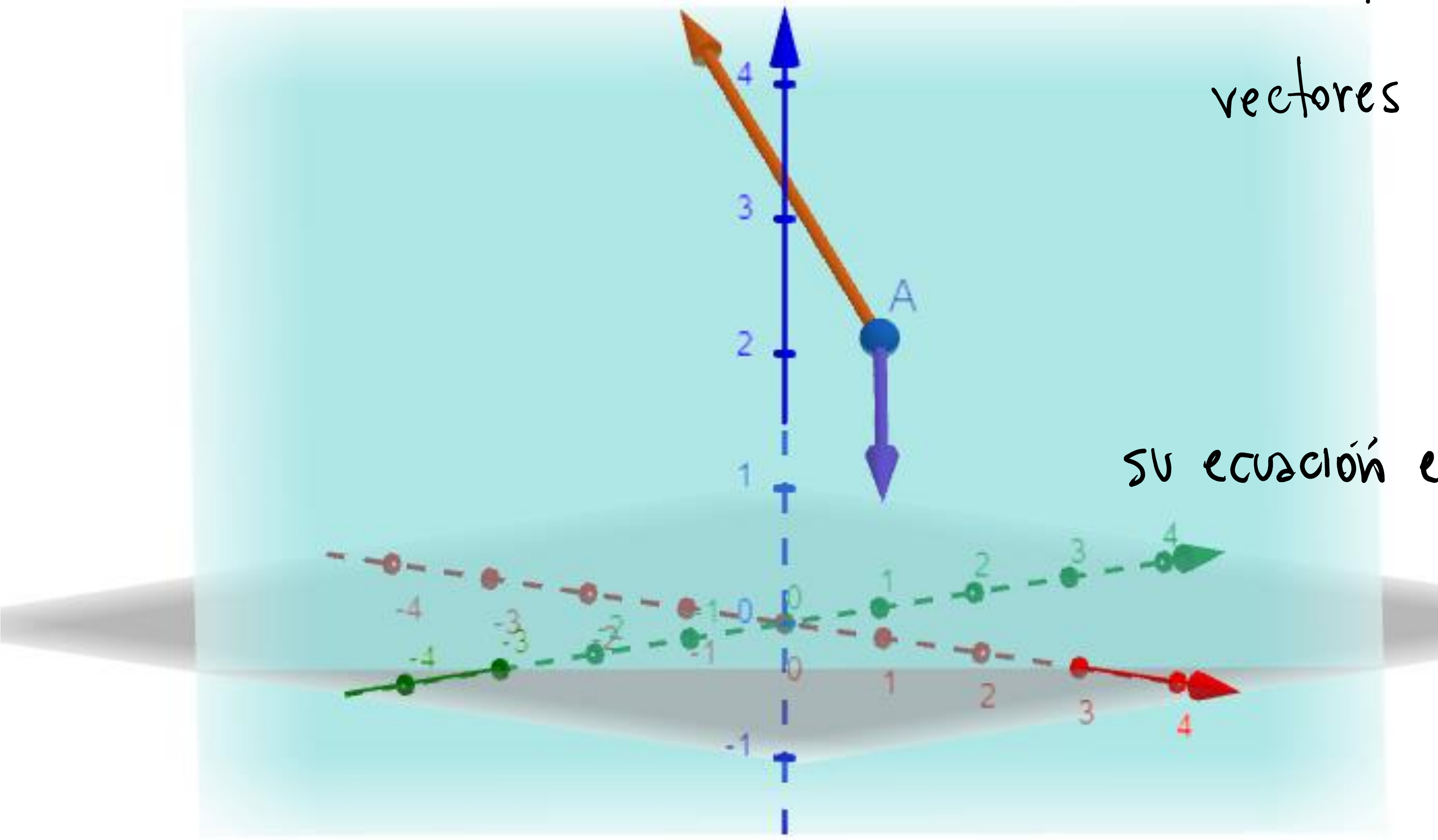
su ecuación es:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$$

$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$


4
3
2
1
0
-1
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
-4
-3
-2
1
2
3
4

Plano que pasa por el punto $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y vectores directores $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}$ y $\underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$.



su ecuación es:

$$\begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \\ z-2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Figura que muestra el punto A, los vectores directores trasladados a A y el plano generado por éstos.

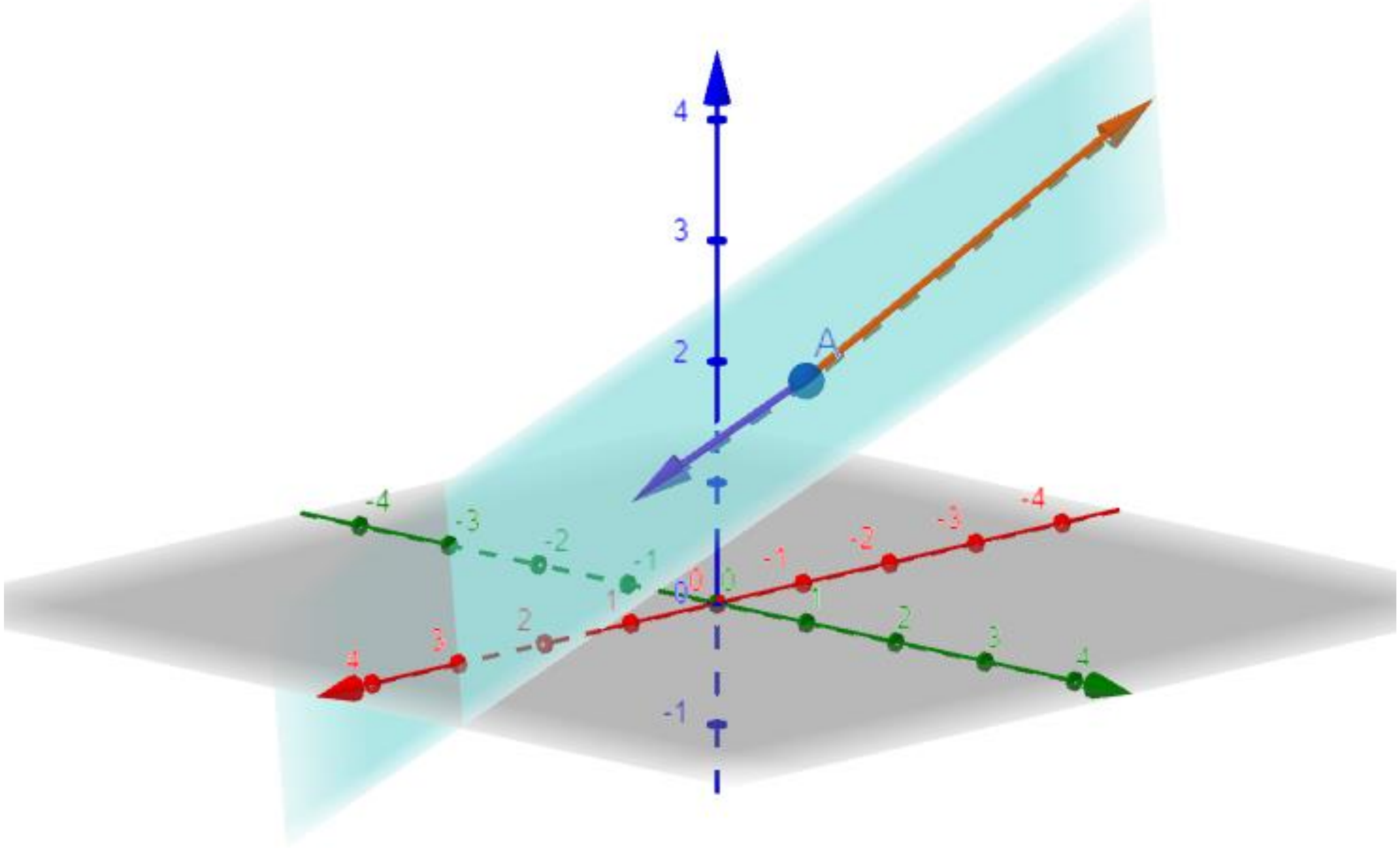


Figura que muestra el punto A, los vectores directores trasladados a A y el plano generado por éstos.

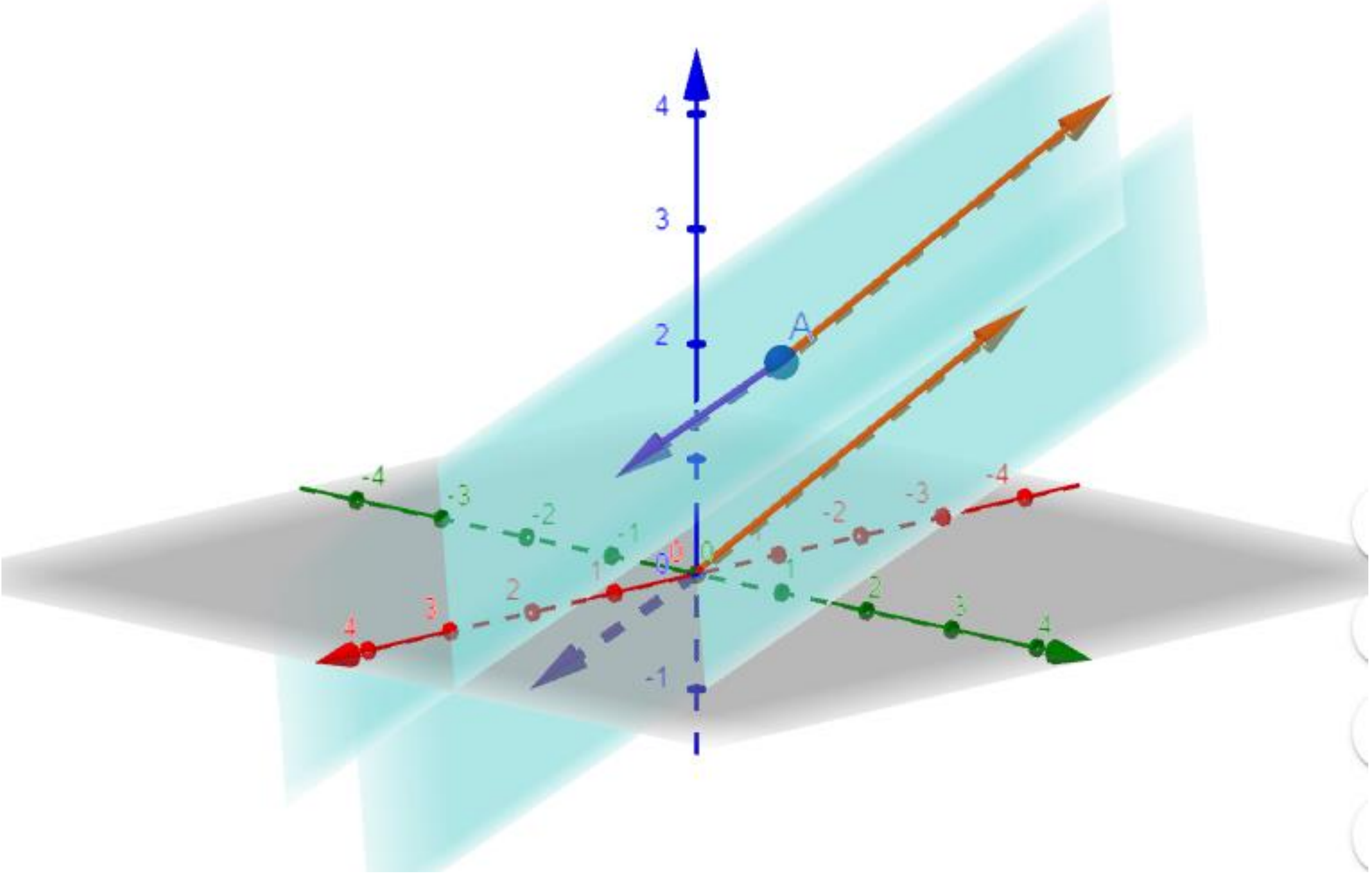


Figura que muestra ambos planos.