CLASE 9 (Mi; 31/08/22)

Estamos resolviendo $\boxed{Ly = 0}$

cuando L es un operador dif. lineal de orden n y a coeficientes constantes, e sea,

$$L = D^n + c_{n-1}D^{n-1} + \cdots + c_1 D + c_0 .$$ Así $Ly = 0$

$$\Longleftrightarrow y^{(n)}(x) + \sum_{j=1}^{n} c_{n-j}\, y^{(n-j)}(x) = 0$$

Buscamos soluciones del tipo $y(x) = e^{\alpha x}$.

Entonces como

$$L(e^{\alpha x}) = \underbrace{(\alpha^n + c_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + c_1\alpha + c_0)}(e^{\alpha x})$$

Sigue que las soluciones de $\boxed{Ly = 0}$

son del tipo $\boxed{y(x) = e^{\alpha x}}$. donde

α es una raíz del polinomio

$$\boxed{p(\alpha) = \alpha^n + c_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + c_1\alpha + c_0}$$

donde $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ son constantes reales

Vimos que podemos iniciar suponiendo que el

Polinomio p es de grado 2. , es decir,

$$\boxed{p(\alpha) = \alpha^2 + b\alpha + c} \Longrightarrow \boxed{L = D^2 + bD + c}$$

Las raíces de p se dividen en tres casos dependiendo del valor: $\boxed{\Delta = b^2 - 4c}$

$$\begin{cases} (b^2 - 4c) > 0 \\ (b^2 - 4c) = 0 \\ (b^2 - 4c) < 0 \end{cases}$$

(clase anterior).

Caso 1. $\boxed{b^2 - 4c > 0} \Longrightarrow$ $p(\alpha)$ tiene raíces α_1, α_2 en $\mathbb{R}$, con $\alpha_1 \neq \alpha_2$

Caso 2: $\boxed{b^2 - 4ac = 0} \Longrightarrow$ $p(\alpha)$ tiene raíces repetidos $\alpha_1 = \alpha_2$.

Caso 3: $\boxed{b^2 - 4ac < 0} \Longrightarrow$ $p(\alpha)$ tiene raíces complejos conjugadas.

Nos corresponde ver el caso (ii), esto es, cuando

$b^2 - 4c = 0$

En este caso $\boxed{p(\alpha) = \alpha^2 + b\alpha + c = \left(\alpha - \frac{b}{2}\right)^2}$

Ponemos $\alpha_1 = \frac{b}{2}$, entonces $p(\alpha) = (\alpha - \alpha_1)^2$

$\hookrightarrow y(x) = e^{\alpha_1 x} \in Ker(L)$

Ejemplo:

Consideremos $\boxed{y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 0}$

Aquí L es el operador

$$L = D^2 - 6D + 9 = (D-3)^2$$

Por tanto $\alpha_1 = \alpha_2 = 3$, y obtenemos

la solución: $\boxed{y_1(x) = e^{3x}}$ $\rightarrow$ ¡comprobar!

Como $\dim[Ker(L)] = 2$, nos falta una

solución para completar un sistema fundamental.

Teorema: Sea L un operador dif. lineal a coef. ctes.

Si y es tal que $\boxed{Ly = 0}$ $(y \in Ker(L))$ entonces.

$$\boxed{u(x) := x\,y(x) \in Ker(L^2)}$$

Por inducción, $\boxed{v(x) = x^k y(x) \in Ker(L^{k+1})}$

$Ly = y''(x) - 6y'(x) + 9y(x)$

Ejemplo: Si $L = (D-3)^2$, entonces

$(D-3)e^{3x} = 0$

$y(x) = e^{3x} \in Ker(D-3)$ Por tanto, del Teorema

$\times$ cp $z(x) = x\,e^{3x} \in Ker[(D-3)^2]$ $\left(\Rightarrow (D-3)^2(xe^{3x}) = 0 \right)$

Por tanto, el Problema : $\boxed{y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 0}$

tiene soluciones $\begin{cases} y_1(x) = e^{3x} \\ y_2(x) = xe^{3x}. \end{cases}$

Estas dos funciones constituyen un sistema

Fundamental para $\boxed{Ly = 0}$, $(L = D^2 - 6D + 9)$

ssi $\{ \underline{e^{3x}}, \underline{xe^{3x}} \}$ es l.i. Para ello

vemos el wronskiano

$$W(e^{3x}, xe^{3x}; x=0) = \begin{vmatrix} e^{3x} & xe^{3x} \\ 3e^{3x} & (1+3x)e^{3x} \end{vmatrix}_{x=0} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$I = \mathbb{R}$

Por tanto $B = \{ e^{3x}, xe^{3x} \}$ es l. i. en $C^2(I, \mathbb{R})$

y por tanto forma base para el espacio solución

de $\boxed{Ly = 0} \iff \boxed{y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 0.}$,

esto es, si $u \in C^2(I, \mathbb{R})$ es tal que:

$$\boxed{u''(x) - 6u'(x) + 9u(x) = 0},$$ entonces

existen constantes reales c_1 y c_2 de modo que.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}}.$$

OBS: Note que
$$\begin{cases} (D-3)\, e^{3x} = 0 \\ (D-3)^2 (x e^{3x}) = 0 \end{cases}$$

Ejercicio: Resolver: $Ly=0$ si $L=(D-2)^3$

$y_1(x)=e^{2x}$; $y_2(x)=xe^{2x}$; $y_3(x)=x^2e^{2x}$

$W(x=0)\neq 0.$

Note que $\boxed{Ly=0} \iff \boxed{y^{(3)}(x)-6y''(x)+12y'(x)-8y(x)=0.}$

OBS:

Recordemos que si $z\in\mathbb{C}$, entonces

$z=a+ib$ donde $\begin{cases} a=Re(z) \\ b=Im(z) \end{cases}$

$=Re(z)+i\,Im(z)$

Ejemplo:

(1) si $z=4-3i$, entonces

$z=Re(z)+i\,Im(z)$: $\begin{cases} Re(z)=4 \\ Im(z)=-3. \end{cases}$

(2) si $z=e^{ix}$, entonces

$z=\cos(x)+i\,\operatorname{sen}(x)$

$\left.\begin{aligned} Re(z)&=\cos(x) \\ Im(z)&=\operatorname{sen}(x) \end{aligned}\right\} \Leftarrow$ $=Re(z)+i\,Im(z)$

$=Re(e^{ix})+i\,Im(e^{ix})$

CASO (iii) : Relativo a $\boxed{y''(x)+by'(x)+cy(x)=0}$

Caso : $\boxed{b^2-4c<0}$.

En este caso las raíces de $\boxed{p(\alpha)=\alpha^2+b\alpha+c}$,

son complejos y conjugados.

Ponemos $\boxed{\alpha_1=a+ib}$; $\boxed{\alpha_2=a-ib.}$

$$\left(\Rightarrow p(\alpha)=[\alpha-(a+ib)][\alpha-(a-ib)]\right)$$

entonces, $L=[D-(a+ib)][D-(a-ib)]=(D-a)^2+b^2$

$$=D^2-2aD+(a^2+b^2).$$

En este caso $\boxed{p(\alpha)=\alpha^2-2a\alpha+a^2+b^2}$.

$$y''-2ay'+(a^2+b^2)y=0$$

Las soluciones son del tipo:

$$y(x)=e^{(a+ib)x}=e^{ax}e^{ibx} \quad ; \quad i^2=-1$$

$$=e^{ax}[\cos(bx)+i\,\mathrm{sen}(bx)]$$

$$e^x=\sum_{0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

$$e^{ix} = \sum_{0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$$
$$= \cos(x) + i\,\text{sen}(x)$$

Recordando que:

$$e^{(a+ib)x} = e^{ax} e^{ibx} = e^{ax}\left[\cos(bx) + i\,\text{sen}(bx)\right]$$
$$= \text{Re}\left[e^{(a+ib)x}\right] + i\,\text{Im}\left[e^{(a+ib)x}\right],$$

tenemos: $\left(e^{ibx} = \cos(bx) + i\,\text{sen}(bx), \right.$

Teorema: (a, b constantes en $\mathbb{R}$)

Si $\alpha = a + ib$ es raíz de

$$\boxed{p(\alpha) = \alpha^2 - 2a\alpha + a^2 + b^2},$$ entonces la EDO

$$\boxed{y''(x) - 2a\,y'(x) + (a^2 + b^2)\,y(x) = 0}$$

tiene por sistema fundamental a $\mathcal{B} = \{y_1, y_2\}$,

donde

$$y_1(x) = e^{ax}\,\text{Re}\left[e^{ibx}\right] = e^{ax}\cos(bx)$$
$$y_2(x) = e^{ax}\,\text{Im}\left[e^{ibx}\right] = e^{ax}\,\text{sen}(bx).$$

Ejemplo: Resolver $\boxed{y''(x) + 2y'(x) + 17y(x) = 0}$

Note que aquí $\boxed{L = D^2 + 2D + 17}$ y

$p(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 17$ (recuerde que $p(\alpha)$ tiene su origen en calcular $L(e^{\alpha x}) = 0$)

Además: $p(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha + 17 = (\alpha+1)^2 + 16$

$$\Leftrightarrow p(\alpha) = [(\alpha+1) + 4i][(\alpha+1) - 4i]$$

$$= [\alpha - (-1-4i)]\,[\alpha - (-1+4i)]$$

$$\Rightarrow \left\| \begin{cases} \alpha_1 = -1-4i \\ \alpha_2 = -1+4i \end{cases} \right\| \qquad (u^2 - v^2 = (u-v)(u+v))$$

Por tanto, el sistema fundamental viene dado por

$B = \{y_1, y_2\}$, donde $\begin{cases} y_1(x) = e^{-x}\cos(4x) \\ y_2(x) = e^{-x}\operatorname{sen}(4x) \end{cases}$

Note que: $\begin{cases} (D^2 + 2D + 17)[e^{-x}\cos(4x)] = 0 \\ (D^2 + 2D + 17)(e^{-x}\operatorname{sen}(4x)) = 0 \end{cases}$

$$W\left(e^{-x}\cos(4x), e^{-x}\operatorname{sen}(4x); x=0\right) = \begin{vmatrix} e^{-x}\cos 4x & e^{-x}\operatorname{sen}(4x) \\ (e^{-x}\cos(4x))' & (e^{-x}\operatorname{sen}(4x))' \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\left(e^{-x}\cos(4x)\right)' = \left[-e^{-x}\cos(4x) - 4e^{-x}\operatorname{sen}(4x)\right]_{x=0} \quad \left(= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \right.$$

$$= -1 - 0 = -1$$

$$\left(e^{-x}\operatorname{sen}(4x)\right)' = e^{-x}\left(-1\operatorname{sen}(4x) + 4\cos(4x)\right)\Big|_{x=0} = 4$$

En general $\{e^{ax}\cos(bx), e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\}$ es un sistema FUNDAMENTAL para la EDO

$$\boxed{y''(x) - 2a\,y'(x) + (a^2+b^2)\,y(x) = 0}$$

(Note que $W(y_1, y_2; x=0) \neq 0$)

Ejemplo 2: Del ejemplo anterior, si consideramos

$$L = D^2 + 2D + 17,$$

entonces la EDO

$$\boxed{L^2 y(x) = 0} \qquad \left(Ly = 0 \Rightarrow L^2 y = 0 \right)$$

tiene por sistema fundamental a

$$B = \{ e^{ax}\cos(bx), e^{ax}\operatorname{sen}(bx), x e^{a}\cos(bx), x e^{ax}\operatorname{sen}(bx) \}$$

Tom: $\left(D^2 + 2D - 17\right)^4 y = 0$

Ejemplo

Note que
$$p(\alpha) = (\alpha-2)(\alpha+3)(\alpha-4)$$
$$= (\alpha-2)(\alpha^2-\alpha-12)$$
$$= \alpha^3 - 3\alpha^2 - 10\alpha + 24.$$

Por tanto, la EDO:

$$y'''(x) - 3y''(x) - 10y(x) + 24y(x) = 0$$

tiene soluciones
$$\left.\begin{cases} y_1(x) = e^{2x} \\ y_2(x) = e^{-3x} \\ y_3(x) = e^{4x} \end{cases}\right\} \quad (*).$$

Puesto que $W(y_1, y_2, y_3; x=0) \neq 0$

(ejercicio), sigue que:

$B = \{y_1, y_2, y_3\}$ con y_1, y_2, y_3 como en $(*)$,

forma un sistema fundamental para $L y = 0$,

FIN.