Álgebra II. 525150
Listado para clase práctica 5: 30 de abril
Prof.: A. González, F. Jara, M. Selva.

# Listado 5: Transformaciones lineales entre espacios vectoriales. Núcleo e imagen de transformaciones lineales.

Los problemas marcados con **(P)** serán resueltos en práctica.

1. Decida cuáles de las siguientes funciones son lineales y cuáles no. Considere a $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^2$ y $\mathbb{C}^3$ e.v. complejos y a los restantes, como e.v. reales.

   (a) $G : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3, \qquad G((x,y)^{\mathrm{T}}) = (ix+y, 0, iy-x)^{\mathrm{T}}$,

   (b) **(P)** $H : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2, \qquad H((x,y,z)^{\mathrm{T}}) = (\overline{x}, y+z)^{\mathrm{T}}$,

   (c) **(P)** $Q : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}), \qquad (Q(p))(x) = x^2 p(x)$,

   (d) $M : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}), \qquad (M(p))(x) = p(x) + x^2$,

   (e) $N : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2, \qquad N(ax^2+bx+c) = (2a+b, a+b+c)^{\mathrm{T}}$,

   (f) $T_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad T_1((x,y)^{\mathrm{T}}) = (xy,\, x-y,\, 0)^{\mathrm{T}}$,

   (g) $T_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad T_2((x,y)^{\mathrm{T}}) = (x+y,\, 0)^{\mathrm{T}}$,

   (h) $T_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad T_3((x,y)^{\mathrm{T}}) = (7x-7,\, y-x)^{\mathrm{T}}$,

   (i) $T_4 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^2, \qquad T_4(z) = (\mathrm{Re}(z),\, \mathrm{Im}(z))^{\mathrm{T}}$,

   (j) $T_5 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$,
   $$T_5((x,y)^{\mathrm{T}}) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{y}, & \text{si } y \neq 0, \\[2ex] 0, & \text{si } y = 0, \end{cases}$$

   (k) $T_6 : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$,
   $$T_6(p) = (p'(0), p'(1), p(0), p(1))^{\mathrm{T}}.$$

   Si $G$, $H$ o $T_4$ no son lineales tomando a los e.v. involucrados como e.v. complejos, analice si lo son cuando ellos son e.v. reales.

   **Recomendación:** Antes de analizar si las transformaciones son o no lineales, evalúelas en algunos vectores del espacio de partida.

2. Calcule núcleo, imagen, rango y nulidad de las siguientes aplicaciones lineales entre los espacios vectoriales indicados.

   (a) $T_1 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T_1((a,b,c,d)^{\mathrm{T}}) = (a+b,\, b+c,\, d)^{\mathrm{T}}$.

   (b) **(P)** $T_2 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $T_2((a,b,c,d)^{\mathrm{T}}) = \frac{1}{2}(a+d,\, b+c,\, b+c,\, a+d)^{\mathrm{T}}$.

   (c) $T_3 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $T_3((a,b,c,d)^{\mathrm{T}}) = \dfrac{a+b+c+d}{4}(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$.

(d) $T_4 : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $T_4(p) = q$ siendo $q$ el polinomio que satisface

$$q(x) = p(x+1) + p(x-1) - 2p(x).$$

Note que $p(x+1)$ indica la evaluación de $p$ en $x+1$ y no el producto de $p$ por $x+1$.

(e) $T_5 : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $T_5(p) = \int_0^1 xp(x)\,\mathrm{d}\,x$.

3. **(P)** Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ tal que para $(x, y, z)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$

$$T((x, y, z)^{\mathrm{T}}) = y + z + yt + xt^3.$$

Determine una base para $\mathrm{im}(T)$ y $\ker(T)$. ¿Qué valores tienen el rango y la nulidad de $T$?

4. Demuestre que si $V$ y $W$ son espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $T : V \to W$ es una aplicación lineal, entonces $\eta(T) \geq \dim(V) - \dim(W)$. ¿Podemos concluir entonces que si $\dim(V) > \dim(W)$, entonces $\ker(T)$ contendrá vectores distintos de $\theta_V$? Justifique su respuesta.

5. Sean $V$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, una base de $V$.

(a) Sea $F : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$ la aplicación que a $v \in V$ hace corresponder $[v]_B \in \mathbb{K}^n$. Muestre que $F$ es una aplicación lineal.

(b) Muestre que $\{F(v_1), F(v_2), \ldots, F(v_n)\}$ es la base canónica de $\mathbb{K}^n$.

6. Construya, si es posible, una aplicación lineal $T$ entre los e.v. indicados que cumpla las condiciones dadas. Si no es posible, justifique por qué.

(a) $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\ker(T) = \left\{(a,\, b,\, c,\, d,\, e)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^5 \;:\; a = 3b,\, c = d = e\right\}$,

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$\ker(T) = \left\langle\left\{(1,\,0,\,0)^{\mathrm{T}}, (1,\,1,\,0)^{\mathrm{T}}\right\}\right\rangle, \quad T((1,1,1)^{\mathrm{T}}) = (1,-1)^{\mathrm{T}},$$

(c) $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(1 - x + x^2) = (1,-1)^{\mathrm{T}}, \qquad \ker(T) = \left\langle\{x-1, x+1, 1\}\right\rangle,$$

7. **(P)** Sean $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ y $L : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ tales que

$$T(p) = \int_{-1}^{1} p(x)\mathrm{d}x, \qquad L(p) = (p(-1), p(0), p(1))^{\mathrm{T}}.$$

(a) Demuestre que $T$ y $L$ son lineales.

(b) Determine $\ker(T)$ y $\ker(L)$.

(c) Muestre que $\ker(L)$ es subconjunto propio de $\ker(T)$, es decir, todo $p \in \ker(L)$ también es elemento de $\ker(T)$, pero existen vectores en $\ker(T)$ que no pertenecen a $\ker(L)$.

8. **(P)** Sean $U$ un e.v. sobre $\mathbb{K}$ y $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, una base de $U$. Las transformaciones lineales $T : U \to U$ y $L : U \to U$ son tales que

$$
\begin{aligned}
T(u_1) &= u_1 - u_4, & \qquad L(u_1) &= u_1 - u_4,\\
T(u_2) &= u_2 - u_4, & L(u_2) &= u_2 - u_4,\\
T(u_3) &= u_3 - u_4, & L(u_3) &= u_3 - u_4,\\
T(u_4) &= \theta_U, & L(u_4) &= u_1 + u_2 + u_3 + u_4,
\end{aligned}
$$

donde $\theta_U$ es el neutro para la suma en $U$.

(a) Calcule $T(u_1 + u_2 + u_3 + u_4)$ y $L(u_1 + u_2 + u_3 + u_4)$.

(b) Determine $\ker(T)$ y $\ker(L)$.

(c) Determine $\operatorname{im}(T)$ y $\operatorname{im}(L)$.

9. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$
T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + \ldots + x_n \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n \end{pmatrix}.
$$

(a) Demuestre que $T$ es lineal.

(b) Determine $\ker(T)$, $\eta(T)$, $\operatorname{im}(T)$ y $\mathrm{r}(T)$.

10. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $T : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ tal que

$$
(T(p))(x) = xp'(x) - p(x).
$$

Note que, por ejemplo,

$$
(T(x))(x) = x - x = \theta, \quad (T(x^2))(x) = x\,(2x) - x^2 = x^2.
$$

(a) Demuestre que $T$ es lineal.

(b) Determine bases para $\ker(T)$ e $\operatorname{im}(T)$.