UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Listado 2 : Cálculo I (527140)

1. Demuestre las siguientes consecuencias de los axiomas de orden.

   (a) $\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall b \in \mathbb{R}_0^+ : \dfrac{1}{a+b} \leq \dfrac{1}{a}$ **(F)**

   (b) $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y : x^2 + y^2 > 2xy$ **(P)**

   (c) $\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : a > b \Longrightarrow a^2 > b^2$ **(P)**

   (d) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^+ : x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$

   (e) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^+ : 3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2$

2. Sean a y b números reales. Demuestre que si $a < b$, entonces $a < \dfrac{a+b}{2} \wedge \dfrac{a+b}{2} < b$. Utilizando lo anterior demuestre que $1 < \frac{3}{2} < 2$. **(P)**

3. Sean x e y números reales positivos. Demuestre

   (a) $\dfrac{2}{x^2 + y^2} \leq \dfrac{1}{xy}$ (b) $\dfrac{1}{9x^2 + y^2} \leq \dfrac{1}{6xy}$

   Utilizando (b) muestre que $\frac{1}{10} < \frac{1}{6}$. (**Indicación:** para demostrar (b) puedes considerar (a)).

4. Mostrar que si $a < b$ y $c < d$ entonces $ad + bc < ac + bd$.

5. Sean $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$. Demostrar que:

$$(x_0 - x)(x - x_1) \leq \frac{1}{4}\left[(x_0 + x_1)^2 - 4x_0x_1\right] \quad \textbf{(F)}$$

6. Resuelva las siguientes inecuaciones y grafique su conjunto solución:

   (a) $x + 1 < 2x + 5$ (b) $(x - 2)(x + 5) < 0$ (c) $x^4 + x^2 < 0$

   (d) $x^4 - x^2 < 0$ (e) $4x^2 + 2x + \dfrac{1}{4} \geq 0$ **(P)** (f) $x^4 \leq 2x^2 + 8$ **(P)**

   (g) $\dfrac{1}{x+1} \leq 1 + \dfrac{2}{x-1}$ **(P)** (h) $\dfrac{x-3}{2} - \dfrac{2-x}{3} > 3$ (i) $\dfrac{x^2-9}{x-1} \leq 0$

   (j) $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 6} < 0$ (k) $\dfrac{x^2+1}{2x^2+3x-2} > \dfrac{x}{2x^2+3x-2}$ **(F)** (l) $\dfrac{4x + x^2 - 2}{x^2 + x} \geq \dfrac{x^2 - 2}{x}$

   (m) $-1 < \dfrac{1}{x+5} < 3$ **(P)** (n) $1 > \dfrac{3x+1}{1-x} > x$ **(F)** (ñ) $\dfrac{x^2 + 10x + 16}{x - 1} > 10$