Álgebra I. 525140 - DIM - CFM
7 de junio de 2021
Prof.: L. Badilla, I. Donoso, A. Gajardo, J. Moya
A. Pérez, C. Rivas, M. Selva, F. Thiele, G. Torres

. **Pregunta 1**

I. Sea $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$ definida por definida por

$$f(x) = \begin{cases} 8 - 2x - x^2 & x \leq 2 \\ x^2 & x > 2 \end{cases}$$

a. Determine si f es o no inyectiva, justificando claramente su razonamiento.
Solución: No es inyectiva.
Para ser inyectiva es necesario que todos los elementos del dominio tengan distinta imagen.
En este caso consideramos $x_1 = 1$ y $x_2 = \sqrt{5}$. Observamos que $0 \leq x_1 \leq 2$ y $\sqrt{5} > 2$, por lo tanto

$$f(x_1) = 8 - 2x_1 - x_1^2 = 8 - 2(1) - 1^2 = 5$$
$$f(x_2) = x_2^2 = (\sqrt{5})^2 = 5$$

Como hemos encontrado $x_1, x_2 \in [0, \infty[$, $x_1 \neq x_2$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$, entonces f no puede ser inyectiva.

b. Determine si f es o no sobreyectiva, justificando claramente su razonamiento.
Solución: Es sobreyectiva.
En efecto, tenemos que en el primer tramo

$$\begin{aligned} f(0) &= 8 - 2(0) - 0 = 8 \\ f(2) &= 8 - 2(2) - 2^2 = 0 \\ &\Rightarrow rec(f) = [0, 8],\ 0 \leq x \leq 2 \end{aligned}$$

y en el segundo tramo

$$\begin{aligned} x^2 >& 2^2 = 4 \\ &\Rightarrow rec(f) =]4, \infty[,\ x > 2 \end{aligned}$$

Al unir ambos, obtenemos que

$$rec(f) = [0, 8] \cup]4, \infty[= [0, \infty[$$

Por lo tanto, como el recorrido es igual al co-dominio, entonces es sobreyectiva.

c. Considere además la función $g : [0, 15] \to \mathbb{R}$. Restrinja y/o co-restrinja f para que $(g \circ f)$ esté bien definida.
Solución: Para que $g \circ f$ esté bien definida, se necesita que $rec(f) \subseteq [0, 15] = Dom(g)$.

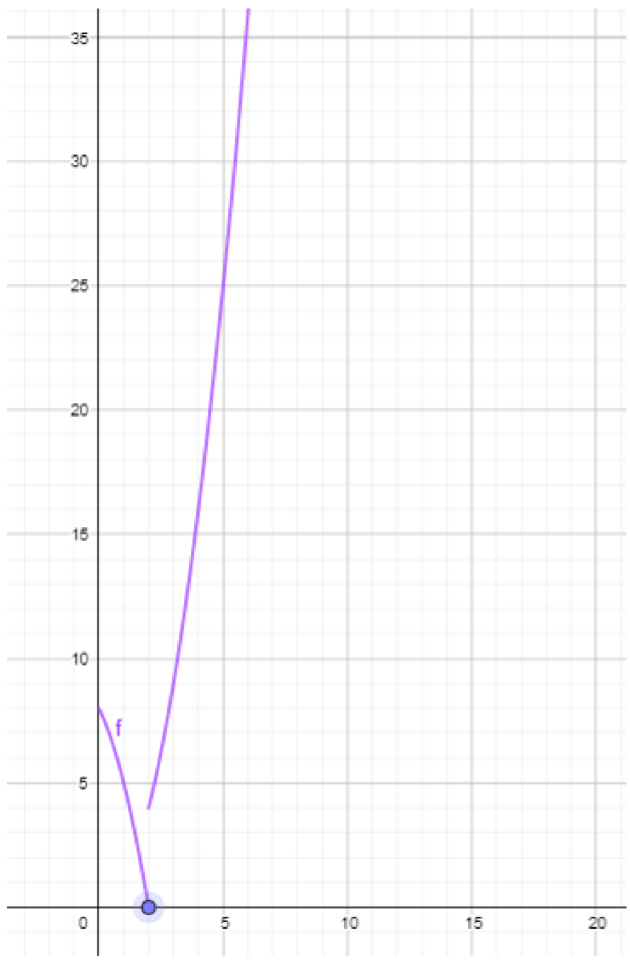
De (b) se sabe que $f([0,2]) = [0,8]$
pues si $0 \leq x \leq 2,\ f(x) = 8 - 2x - x^2$ entonces

$$8 \geq 8 - 2x - x^2 \geq 0$$

y si tomamos $2 < x \leq \sqrt{15},\ f(x) = x^2$ entonces

$$4 < x^2 \leq 15$$

De modo que f puede ser restringida a $f : [0, \sqrt{15}] \to [0, 15]$ y así se obtiene lo pedido.



II. Considere la función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que f está definida por

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \text{ es par} \\ x & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$$

a. No es inyectiva
b. No es sobreyectiva.
c. $g : \{0,1,2,3,4,5\} \to \mathbb{R}$. $f : \{1,3,5\} \to \{1,3,5\}$

III. Sea $f : \mathcal{P}(\{1,2,\ldots,10\}) \to \mathbb{Z}$ definida por

$$f(S) = s, \text{ donde } s \text{ es la cantidad de elementos de } S.$$

a. No es inyectiva.

b. No es sobreyectiva.

c. $g:\{0,1,2,3,4,5\}\to\mathbb{R}$. $f:\mathcal{P}(\{1,2,3,4,5\})\to\{0,1,2,3,4,5\}$.

IV. Considere la función $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ tal que f está definida por

$$f(x)=\begin{cases}-5x+10 & x\leq 2\\ \frac{x}{5}+\frac{2}{3} & x>2\end{cases}$$

a. No es inyectiva.

b. No es sobreyectiva.

c. $g:\{0,1,2,3,4,5\}\to\mathbb{R}$.
$f:D\subset\mathbb{Q}\to\{0,1,2,3,4,5\}$ con $D=\{x\in\mathbb{Q}:x=1+\frac{i}{5},i\in\{0,\ldots,5\}\}$.

V. Sea $f:[0,\infty[\to[0,\infty[$ definida por

$$f(x)=\begin{cases}8-2x-x^2 & x\leq 2\\ x^2 & x>2\end{cases}$$

a. No es inyectiva.

b. Es sobreyectiva.

c. $g:[0,15]\to\mathbb{R}$. $f:[0,\sqrt{15}]\to[0,15]$

VI. Considere la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que f está definida por

$$f(x)=\begin{cases}-5x-\frac{2}{3} & x\leq 2\\ \frac{x}{5}+\frac{2}{3} & x>2\end{cases}$$

a. No es inyectiva.

b. No es sobreyectiva

c. $g:[0,15]\to\mathbb{R}$. $f:[\frac{-2}{15},\frac{-47}{15}]\to[0,15]$.

VII. Considere la función $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ tal que f está definida por

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}+3 & \text{si } x \text{ es par}\\ x-1 & \text{si } x \text{ es impar}\end{cases}$$

a. No es inyectiva.

b. Es sobreyectiva.

c. $g:\{0,1,2,3,4,5\}\to\mathbb{R}$. $f:\{-6,-4,-2,0,2,4\}\to\{0,1,2,3,4,5\}$.

VIII. Considere la función $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ tal que f está definida por

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{x}{3}+4 & x\leq 1\\ 3x-5 & x>1\end{cases}$$

a. No es inyectiva.

b. No es sobreyectiva.

c. $g:\{0,1,2,3,4,5\}\to\mathbb{R}$.
$f:D\subset\mathbb{Q}\to\{0,1,2,3,4,5\}$ con $D=\{x\in\mathbb{Q}:x=\frac{5+3i}{3},i\in\{0,1,2,3,4,5\}\}$

IX. Sea $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 4 + 2x & x \leq 2 \\ 7 + \frac{2x}{3} & x > 2 \end{cases}$$

a. Es inyectiva.
b. No es sobreyectiva.
c. $g : \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \to \mathbb{R}$. $f : \{0, \frac{1}{2}\} \to \{4, 5\}$.

X. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que f está definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 4 & x \leq 25 \\ 3x - 5 & x > 25 \end{cases}$$

a. Es inyectiva.
b. No es sobreyectiva.
c. $g : [0, 15] \to \mathbb{R}$. $f : [-8, 22] \to [0, 15]$.

XI. Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 400 & x \geq 20 \\ x^2 - 40x + 400 & x < 20 \end{cases}$$

a. No es inyectiva.
b. No es sobreyectiva.
c. $g : \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \to \mathbb{R}$.
$f : D \subset \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ con $D = \{x \in \mathbb{R}^+ : \sqrt{400 + i}, i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
c. $g : [0, 15] \to \mathbb{R}$. $f[20, \sqrt{415}] \to [0, 15]$.

XII. Sea $f : [0, \infty[\to [0, \infty[$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 9 - x^2 & x \leq 3 \\ x^2 & x > 3 \end{cases}$$

a. Es inyectiva
b. Es sobreyectiva.
c. $g : \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \to \mathbb{R}$.
$f : D \subset [0, \infty[\to \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ con $D = \{x \in [0, \infty[: x = \sqrt{n}, n \in \{4, \ldots, 9\}\}$.
c. $g : [0, 15] \to \mathbb{R}$. $f : [0, \sqrt{15}] \to [0, 15]$.

. **Pregunta 2**

a. Se sabe que en una reacción química la concentración de cierta sustancia, t minutos después de comenzada la reacción se rige por una función del tipo

$$c(t) = K_0 \, e^{\alpha t},$$

donde K_0 es la concentración inicial de la sustancia y α es un parámetro a determinar.

i) Determine el valor de α si se sabe que la sustancia es tal que, 80 minutos después de comenzada la reacción el 75 % de ella se habrá descompuesto, luego encuentre la función $c(t)$ para éste caso.
Solución: De los datos del problema se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} 25\,\%K_0 = K_0 e^{\alpha(80)} &\iff \tfrac{1}{4} = e^{80\alpha} \\ &\iff \ln(\tfrac{1}{4}) = 80\alpha \\ &\iff \alpha = \tfrac{\ln(\frac{1}{4})}{80} \\ &\iff \alpha = \ln(4^{-\frac{1}{80}}). \end{aligned}$$

Luego, como sabemos el valor de α, reemplazamos en la función $c(t)$, obteniendo $c(t) = K_0 e^{\ln(4^{-\frac{1}{80}})(80)} = K_0\ 4^{-\frac{t}{80}}$.

ii) ¿Qué porcentaje de la concentración inicial K_0 de la sustancia queda después de 2 horas y 40 minutos de haber comenzado la reacción?
Solución: Dado que la función $c(t)$ nos entrega la concentración de dicha sustancia t minutos después de comenzar la reacción, reemplazamos t=2 horas 40 minutos=180 minutos,

$$c(160) = K_0\,4^{-\frac{160}{80}} = K_0\,4^{-2} = \frac{K_0}{16} = 6,25\,\%K_0.$$

Respuesta. Queda $6,25\,\%$ de la concentración inicial, depsués de 2 horas y 40 minutos.

b. Una población de moscas comienza creciendo según una función exponencial. Si no se presentan catástrofes (incendios, plagas, depredadores, etc.) la población puede llegar a saturar los recursos del hábitat, y su crecimiento se amortigua. Entonces el crecimiento se describe por la función logística:

$$f(t) = \frac{250}{1 + 4\ e^{-at}},$$

donde $a > 0$ es un parámetro (constante) que no depende del tiempo t medido en días.

i) Si después de 10 días, la población de moscas se duplica, calcular el valor de a.

ii) Con los datos anteriores, después de 10 días más, ¿se vuelve a duplicar la población?.

Solución:

i) Primero vemos que la población inicial de moscas es $f(0) = 50$, enconces, debemos calcular a en, $f(10) = 100$,

$$100 = \frac{250}{1 + 4e^{-10a}} \iff 1 + 4e^{-10a} = \frac{5}{2} \iff a = \ln((8/3)^{1/10}).$$

Luego, $f(t) = \dfrac{250}{1 + 4\ e^{-\ln((8/3)^{1/10})t}} = \dfrac{250}{1 + 4\left(\frac{3}{8}\right)^{t/10}}$

ii) $f(20) = \dfrac{250}{1+4\left(\frac{3}{8}\right)^{20/10}} = 160$. No se vuelve a duplicar.

c. Felipe acaba de terminar un curso de Álgebra. El porcentaje del curso que él recordará dentro de t meses se puede calcular como,

$$P(t) = 35 + 40\log\left(\frac{30}{t+1} + 1\right).$$

i) Determinar el porcentaje del curso que Felipe recordará dentro de 2 años y un mes.

ii) Después de cuantos meses, Felipe habrá olvidado el 50 % del curso.

Solución:

i) $P(25) = 35 + 40\log\left(\frac{30}{25+1} + 1\right) = 35 + 40\log\left(\frac{30}{26} + 1\right) \approx 48,33$. Recordará el 48, 33 % del curso, después de 2 años y un mes.

ii) Debemos calcular t, en $P(t) = 50$

$$50 = 35+40\log\left(\frac{30}{t+1} + 1\right) \iff \log\left(\frac{30}{t+1} + 1\right) = \frac{3}{8} \iff t = \frac{30}{10^{3/8} - 1} - 1 \approx 20,88.$$

Después de 20 meses aproximadamente, Felipe recordará el 50 % del curso.

d. En 1800 la población de una ciudad era de cincuenta mil habitantes. En 1850, habían cien mil habitantes. Asumamos que el número de habitantes en función del tiempo se ajusta a la fórmula,

$$P(t) = c\ e^{\kappa t},$$

donde c y κ son constantes.

i) ¿Cuál fue la población en 1895?

ii) ¿En qué año la población es de doscientos mil habitantes?

Solución:

i) Primero calculamos las constantes c y κ.
$P(0) = c = 50000$, $P(50) = 50000e^{50\kappa}$, entonces, $\kappa = \ln(2^{1/50})$. Por lo tanto,

$$P(t) = 50000\ 2^{t/50}.$$

Luego, $P(95) = 50000\ 2^{95/50} \approx 186606$ habitantes.

ii) Calcular t en $P(t) = 200000$, en efecto

$$200000 = 50000\ 2^{t/50} \iff t = 100.$$

En 1900 a población es de doscientos mil habitantes.

e. Un flujo luminoso atraviesa perpendicularmente una solución y su energía es parcialmente absorbida por el soluto.

Se sabe que la intensidad lumínica l del flujo luminoso dentro de la solución, depende de la longitud x del camino recorrido por el flujo dentro de la solución mediante

$$l(x) = 4^{-\kappa x + A}, \quad \kappa, A \in \mathbb{R}.$$

i) Sea l_1 la intensidad lumínica del flujo luminoso a la entrada de la solución y l_2 la intensidad del mismo después de recorrer un camino de longitud d. Muestre que la *transmisión lumínica* $\dfrac{l_2}{l_1}$ es igual a $4^{-\kappa d}$.

ii) Si $\kappa = 150c$, siendo c la concentración de la solución atravesada por el flujo luminoso, ¿para qué valor de c se cumple que la *transmisión lumínica* es igual a $\frac{1}{3}$?

Solución:

i) De lo anterior y de los datos del problema $l_1 = l(0) = 4^A$ y $l_2 = l(d) = 4^{-\kappa d + A}$, así

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{4^{-\kappa d+A}}{4^A} = 4^{-\kappa d}.$$

ii) La transmisión lumínica es $\frac{1}{3}$, es decir $4^{-150cd} = \frac{1}{3}$, de donde $c = \frac{1}{150d}\log_4(3)$.

f. La siguiente fórmula, que es válida para los terremotos en el este de Estados Unidos, relaciona la magnitud R del sismo con el área que lo rodea A (en millas cuadradas), que es afectada por el temblor

$$R(A) = \frac{23}{10}\log(A + 34000) - \frac{15}{2}.$$

i) Si el área afectada es de 30000 millas cuadradas. ¿De qué magnitud es el temblor?

ii) Si la magnitud es de $7,5$. ¿Cuántas millas serán afectadas?

Solución:

i) $R(30000) = \frac{23}{10}\log(30000 + 34000) - \frac{15}{2} \approx 3,6$

ii)

$$R(A) = 7,5 \Longleftrightarrow \frac{23}{10}\log(A+34000) - \frac{15}{2} = 7,5 \Longleftrightarrow \log(A+34000) = \frac{150}{23} \Longleftrightarrow A \approx 3290597,9$$

g. La distancia D alcanzada por un proyectil depende del ángulo de elevación α con el que sea lanzado según la siguiente función,

$$D(\alpha) = \frac{v_0^2\operatorname{sen}(2\alpha)}{10}.$$

Donde v_0 es la velocidad del proyectil al momento en que se lanza.

i) Si al lanzarlo con un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ alcanza una distancia de 25 metros, ¿cuál es la velocidad inicial v_0?

ii) Indique para qué valor(es) de α el proyectil alcanza una distancia igual a 10 metros.

Solución:

i)

$$25 = \frac{v_0^2\operatorname{sen}(2(\frac{\pi}{4}))}{10} \Longleftrightarrow v_0^2 = 250 \Longleftrightarrow v_0 = \sqrt{250}.$$

ii)

$$10 = \frac{\sqrt{250}^2 \operatorname{sen}(2\alpha)}{10} \iff \operatorname{sen}(2\alpha) = \frac{2}{5} \iff 2\alpha = \begin{cases} \arcsin(2/5) + 2\pi k \\ \pi - \arcsin(2/5) + 2\pi k \end{cases},\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff 2\alpha = \begin{cases} 0,41 + 2\pi k \\ 2,73 + 2\pi k \end{cases},\ k \in \mathbb{Z} \iff \alpha = \begin{cases} 0,205 + \pi k \\ 1,37 + 2\pi k \end{cases},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Por lo tanto $\alpha \in \{0{,}205\,, 1{,}37\}$.

h. La altura H alcanzada por un proyectil depende del ángulo de elevación α con el que sea lanzado según la siguiente función,

$$H(\alpha) = \frac{(v_0 \operatorname{sen}(\alpha))^2}{20}.$$

Donde v_0 es la velocidad del proyectil al momento en que se lanza.

i) Si al lanzarlo con un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ alcanza una altura de 90 metros, ¿cuál es la velocidad inicial v_0?

ii) Indique para qué valor(es) de α el proyectil alcanza una altura igual a 45 metros.

Solución:

i)

$$90 = \frac{(v_0 \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}))^2}{20} \iff v_0 = 30\sqrt{2}$$

ii)

$$45 = \frac{(30\sqrt{2} \operatorname{sen}(\alpha))^2}{20} \iff \operatorname{sen}^2(\alpha) = \frac{1}{2} \iff |\operatorname{sen}(\alpha)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Así, $\alpha = \pi/4$

. **Pregunta 3**

I. a) Demuestre por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}, 10^n - 1$ es múltiplo de 9.

Solución: Para $n = 1$ se tiene que $10^1 - 1 = 9$. Por lo tanto se cumple la proposición para este caso. Supongamos que $10^n - 1$ es múltiplo de 9 esto quiere decir que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $10^n - 1 = 9m$. Ahora queremos probar que $10^{n+1} - 1$ es divisible por 9, es decir, que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $10^{n+1} - 1 = 9r$. Veamos que ocurre:

$$10^{n+1} - 1 = 10^n \cdot 10 - 1 = (9m + 1) \cdot 10 - 1 = 9(10m) + 9 = 9(10m - 1).$$

Renombrando $10m - 1 = r$ tenemos que $10^{n+1} - 1 = 9r$ con $r \in \mathbb{N}$, por lo tanto, acabamos de probar que $10^{n+1} - 1$ es múltiplo de 9. Por principio de inducción la proposición , $10^n - 1$ es múltiplo de 9 es verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) ¿Cuál debe ser el valor de a para que los coeficientes de los términos x^3 y x^4 de la expansión $(3+ax)^9$ tengan el mísmo valor?

Solución: Por teorema del binomio sabemos que:

$$(3+ax)^9 = \sum_{k=0}^{9} \binom{9}{k} 3^{9-k}(ax)^k,$$

entonces buscamos los términos con $(ax)^3$ y $(ax)^4$ esto es:

$$\begin{aligned}
\text{Para } k=3: \quad \binom{9}{3}3^{9-3}(ax)^3 &= \frac{9!}{3!6!}3^6(ax)^3 = 84\times 3^6a^3x^3,\\
\text{Para } k=4: \quad \binom{9}{4}3^{9-4}(ax)^4 &= \frac{9!}{4!5!}3^5(ax)^4 = 126\times 3^5a^4x^4,
\end{aligned}$$

entonces, lo que buscamos es que $84\times 3^6a^3 = 126\times 3^5a^4$. Simplificando obtenemos:

$$\begin{aligned}
84\times 3^6a^3 &= 126\times 3^5a^4,\\
84\times 3 &= 126a,\\
\Longrightarrow a &= 2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para que el coeficiente que acompaña a x^3 sea igual al coeficiente del término x^4, a debe valer 2.

II. a) Pruebe por inducción que $\forall n\in\mathbb{N}, n^3+2n$ is divisible por 3.

Solución: Para $n=1$ tenemos que $1^3+2\cdot 1=3$. Supongamos que k^3+2k es múltiplo de 3, esto quiere decir que $k^3+2k=3m$ con $m\in\mathbb{N}$. Luego, para $k+1$ tenemos que

$$\begin{aligned}
(k+1)^3+2(k+1) &= k^3+3k^2+3k+1+2k+2,\\
&= (k^3+2k)+3k^2+3k+3,\\
&= 3m+3k^2+3k+3,\\
&= 3(m+k^2+k+1).
\end{aligned}$$

como m y $k\in\mathbb{N}$ tenemos que $m+k^2+k+1=r$ con $r\in\mathbb{N}$. por lo tanto $(k+1)^3+2(k+1)=3r$. Por principio de inducción tenemos que la proposición esa verdadera $\forall n\in\mathbb{N}$.

b) Utilizando el teorema del binomio determine si $1{,}1^{10000}$ es mayor o menor que 1000.

Solución: Por teorema del binomio sabemos que:

$$
\begin{aligned}
1{,}1^{10000} = (1+0{,}1)^{10000} &= \sum_{k=0}^{10000} \binom{10000}{k} 1^{10000-k}(0{,}1)^k, \\
&= \sum_{k=0}^{10000} \binom{10000}{k} (0{,}1)^k, \\
&= \frac{10000!}{0!10000!}(0{,}1)^0 + \frac{10000!}{1!9999!}(0{,}1)^1 + \ldots, \\
&= 1 + 10000 \cdot 0{,}1 + \ldots, \\
&= 1001 + \ldots.
\end{aligned}
$$

Como todos los términos de la expansión son positivos, deducimos que $1{,}1^{10000}$ es mayor que 1000.

III. a) Pruebe por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Solución: Para $n = 1$ tenemos que

$$1^3 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1.$$

Ahora bien, supongamos que la proposición se cumple para m, esto quiere decir que

$$\sum_{k=1}^{m} k^3 = \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2,$$

Luego, para $m+1$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{m} k^3 + (m+1)^3, \\
&= \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2 + (m+1)^3, \\
&= \frac{1}{4}\left(m^2(m+1)^2 + 4(m+1)^3\right), \\
&= \frac{1}{4}(m+1)^2(m^2+4m+4), \\
&= \frac{1}{4}(m+1)^2(m+2)^2, \\
&= \left(\frac{(m+1)(m+2)}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Por principio de inducción tenemos que la proposición esa verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) ¿Cuál es el coeficiente que acompaña al término con x^6 en la expansión de $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^{14}$?

Solución: Por teorema del binomio sabemos que:

$$\begin{aligned}
\left(2x - \frac{1}{x}\right)^{14} &= \sum_{k=0}^{14} \binom{14}{k} (2x)^{14-k} \left(-\frac{1}{x}\right)^k, \\
&= \sum_{k=0}^{14} \binom{14}{k} 2^{14-k} (-1)^k x^{14-k} x^{-k}, \\
&= \sum_{k=0}^{14} \binom{14}{k} 2^{14-k} (-1)^k x^{14-2k}.
\end{aligned}$$

entonces buscamos k tal que $14 - 2k = 6$. Esto significa que $k = 4$ y por tanto el coeficiente es

$$\binom{14}{4} 2^{10} = 1001 \times 2^{10} = 1025024.$$

IV. a) Pruebe por inducción que para todo $n \in \{3, 4, 5, 6, ...\}$ se cumple que $n^3 > 3n + 3$.

Solución: Para $n = 3$ se tiene que $3^3 = 27 > 3 \times 3 + 3$. Supongamos ahora que la proposición se cumple para algún $k \in \{3, 4, 5, 6, ...\}$, esto significa que $k^3 > 3k + 3$. Veamos que pasará para $k + 1$

$$\begin{aligned}
k^3 &> 3k + 3, \quad / + (3k^2 + 3k + 1), \\
k^3 + 3k^2 + 3k + 1 &> 3k + 3 + 3k^2 + 3k + 1, \\
(k+1)^3 &> 3k^2 + 6k + 4.
\end{aligned}$$

Como $k \in \{3,4,5,6,...\}$ esto significa que $k \geq 3$ y por tanto $k^2 \geq 9$. Luego

$$\begin{aligned}
(k+1)^3 &> 27+6k+4, \\
(k+1)^3 &> 6k+31, \\
(k+1)^3 &> (3k+6)+3k+25, \\
(k+1)^3 &> (3(k+1)+3)+3k+25, \\
(k+1)^3 &> 3(k+1)+3.
\end{aligned}$$

Por principio de inducción tenemos que la proposición esa verdadera $\forall n \in \{3,4,5,6,...\}$.

b) Si los primeros tres términos de la expansión de $(a-2x)^n$ son 1, $-16x$ y bx^2 , halle los valores de a, b y n.

Solución: Por teorema del binomio sabemos que:

$$\begin{aligned}
(a-2x)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a)^{n-k}(-2x)^k, \\
&= a^n + na^{n-1}(-2x) + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}(-2x)^2 + \cdots ,
\end{aligned}$$

como n no puede ser cero (ya que al menos debe ser igual a 2 para que el binomio tenga 3 términos), tenemos que $a^n = 1 \Longrightarrow a = 1$. Luego, tenemos que

$$\begin{aligned}
n1^{n-1}(-2x) &= -16x, \\
-2nx &= -16x, \\
n &= 8.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}(-2x)^2 &= bx^2, \\
\frac{8 \times 7}{2}1^{8-2}(-2x)^2 &= bx^2, \\
28 \times 4x^2 &= bx^2, \\
b &= 112.
\end{aligned}$$

v. a) Pruebe por inducción que $2^{n-3} \geq n-2$ siempre que $n \geq 4$.

Solución: Para $n = 4$ tenemos que $2^{4-3} = 2 \geq 2$. Supongamos ahora que la proposición se cumple para algún $k \geq 4$, esto significa que $2^{k-3} \geq k-2$.

Veamos que pasará para $k+1$

$$\begin{aligned} 2^{k+1-3} = 2 \times 2^{k-3} &\geq 2(k-2), \\ 2^{k+1-3} &\geq k+k-4, \\ 2^{k+1-3} &\geq (k+1-2)+k-3. \end{aligned}$$

Como $k \geq 4$ tenemos que $k-3 \geq 1$ entonces $(k+1-2)+k-3 \geq k+1-2$ y por lo tanto

$$2^{k+1-3} \geq k+1-2.$$

Por principio de inducción tenemos que la proposición esa verdadera $\forall n \geq 4$.

b) Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$, sean $a, b \in \mathbb{R}$ y sean p, q, r los 3 primeros coeficientes de la expansión de $(a+b)^n$, en ese orden, pruebe que $\dfrac{q^2}{pr} = \dfrac{2n}{n-1}$.

Solución: Por teorema del binomio sabemos que:

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a)^{n-k} (b)^k, \\ &= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots, \end{aligned}$$

Por lo tanto, $p = 1, \quad q = n, \quad r = n(n-1)/2$ luego

$$\frac{q^2}{pr} = \frac{n^2}{1\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2n^2}{n(n-1)} = \frac{2n}{n-1}.$$

VI. a) Pruebe por inducción que $\forall n \in \mathbb{N} : 2^{4n} - 1$ es divisible por 15.

Solución: Para $n = 1$ tenemos que $2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$. Supongamos ahora que la proposición se cumple para algún $k \in \mathbb{N}$, esto significa que $2^{4k} - 1 = 15m$ con $m \in \mathbb{N}$, además esto significa que Veamos que pasará para $2^{4k} = 15m + 1$. Para $k+1$ se tiene que

$$\begin{aligned} 2^{4(k+1)} - 1 &= 2^4 2^{4k} - 1, \\ &= 2^4(15m+1) - 1, \\ &= 15(2^4 m) + 16 - 1, \\ &= 15(2^4 m + 1). \end{aligned}$$

Como $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $(2^4 m + 1) = r$ con $r \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $2^{4(k+1)} - 1 = 15r$. Por principio de inducción tenemos que la proposición esa verdadera $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) En el desarrollo de $\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{3x}\right)^{100}$, determine el término que contiene a x y el término que contiene a x^5, si es que existen.

Solución: Por teorema del binomio sabemos que:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{3x}\right)^{100} &= \sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{100-k}\left(-\frac{1}{3x}\right)^{k},\\
&= \sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{100-k}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k}\left(x^2\right)^{100-k}x^{-k},\\
&= \sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{100-k}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k}x^{200-3k}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para tener x^1 se necesita que $200-3k=1$ lo cual implica que $k=66.\overline{3}$ y por ende la expansión no tiene término con x. Por el contrario para que tener x^5 se necesita que $200-3k=5$ lo que implica que $k=65$, así para $k=65$ se tiene que

$$\binom{100}{65}\left(\frac{1}{2}\right)^{100-65}\left(-\frac{1}{3}\right)^{6}5x^5=-\binom{100}{65}2^{-35}3^{-65}x^5.$$

VII. a) Pruebe por inducción que para todo $n\in\mathbb{N}$ se cumple que x^n-y^n es divisible por $x-y$ para $x,y\in\mathbb{Z}$ y $x\neq y$.

Solución: x^k-y^k es divisible por $x-y$, es decir, existe $m\in\mathbb{Z}$ tal que $x^k-y^k=m(x-y)$. Esto implica que $x^k=m(x-y)+y^k$.

$$\begin{aligned}
x^{k+1}-y^{k+1} &= x^kx-y^ky=(y^k+m(x-y))x-y^ky=y^k(x-y)+m(x-y)x,\\
x^{k+1}-y^{k+1} &= (x-y)(y^k+mx).
\end{aligned}$$

Como x, y y m pertenecen a $\mathbb{Z}$ tenemos que $(y^k+mx)=r$ con $r\in\mathbb{Z}$ y por lo tanto $x^{k+1}-y^{k+1}=r(x-y)$ demostrando por inducción que la proposición se cumple $\forall n\in\mathbb{N}$.

b) Determine el valor de n de modo que el tercer término de la expansión de $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^n$ y el tercer término de la expansión de $\left(x^3+\dfrac{1}{x^2}\right)^n$ sean iguales.

Solución: Por teorema del binomio sabemos que:

$$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x^2\right)^{n-k}\left(\frac{1}{x}\right)^{k},$$

y que

$$\left(x^3+\frac{1}{x^2}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x^3\right)^{n-k}\left(\frac{1}{x^2}\right)^k,$$

El tercer término de la expansión se obtiene para k=2, entonces:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{2}\left(x^2\right)^{n-2}\left(\frac{1}{x}\right)^2 &= \binom{n}{2}\left(x^3\right)^{n-2}\left(\frac{1}{x^2}\right)^2,\\
x^{2n-4}x^{-2} &= x^{3n-6}x^{-4},\\
x^{2n-6} &= x^{3n-10},\\
\Longrightarrow 2n-6 &= 3n-10,\\
n &= 4.
\end{aligned}$$