UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS 521218

PAUTA EVALUACION 2

Problema 1

Resolver el siguiente PVI $\begin{cases} y''(t) - 8y'(t) + 28y(t) = \delta(t-3), \\ y(0) = 3, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$

Desarrollo:
Aplicando T. de L. a ambos miembros de la EDO, y escribiendo $Y(s) = \mathcal{L}\left[y\left(t\right)\right](s)$ se obtiene

$$\left(s^2 Y(s) - 3s\right) \; - \; 8\left(sY(s) - 3\right) \; + \; 28Y(s) \; = \; \mathrm{e}^{-3s}$$

reagrupando terminos, sigue

$$(s^2 - 8s + 28)Y(s) + 24 - 3s \; = \; \mathrm{e}^{-3s}.$$

Escribiendo $(s^2 - 8s + 28)$ como $(s-4)^2 + 12$, obtenemos

$$Y(s) \; = \; \frac{\mathrm{e}^{-3s}}{[(s-4)^2 + 12]} + \frac{3s - 24}{[(s-4)^2 + 12]},$$

de donde la solución $y(t)$ viene dada por

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t), \quad \text{donde}$$

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{-3s}}{[(s-4)^2 + 12]}\right](t) \\ y_2(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s - 24}{(s-4)^2 + 12}\right](t) \end{aligned}$$

En el primer caso, aplicando la Segunda Propiedad de Traslación, obtenemos:

$$y_1(t) = H(t-3)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{[(s-4)^2 + 12]}\right](t-3)\,,$$

donde, invocando la Primera Propiedad de Traslación, resulta

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{[(s-4)^2 + 12]}\right](t) = \mathrm{e}^{4t}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + 12}\right](t) = \frac{\mathrm{e}^{4t}}{\sqrt{12}}\mathrm{sen}(\sqrt{12}t)$$

Por lo tanto,

$$y_1(t) = \frac{1}{\sqrt{12}}\, H(t-3)\, \mathrm{e}^{4(t-3)}\, \mathrm{sen}[\sqrt{12}(t-3)].$$

De otra parte, para $y_2(t)$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
y_2(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s-24}{(s-4)^2+12}\right](t) \;=\; \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3(s-4)-12}{(s-4)^2+12}\right](t) \\
&= \mathrm{e}^{4t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s-12}{s^2+12}\right](t) \\
&= \mathrm{e}^{4t}\Big[\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s}{s^2+12}\right](t) \;-\; \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{12}{s^2+12}\right](t)\Big] \\
&= \mathrm{e}^{4t}\Big[3\cos(\sqrt{12}t) - \sqrt{12}\mathrm{sen}(\sqrt{12}t)\Big].
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{12}}\, H(t-3)\, \mathrm{e}^{4(t-3)}\, \mathrm{sen}[\sqrt{12}(t-3)] \;+\; \mathrm{e}^{4t}\Big[3\cos(\sqrt{12}t) - \sqrt{12}\mathrm{sen}(\sqrt{12}t)\Big].$$

Problema 2 ([20 puntos])

Aplicando el Método de valores y vectores propios, determine la solución general de $\boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, siendo $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

Desarrollo:

Desarrollo Problema 2.1: Primero, calculamos los Valores propios de $\boldsymbol{A}$ (en $\mathbb{C}$):

$$|\boldsymbol{A} - \lambda\, \boldsymbol{I}| \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 4\lambda + 13 \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda-2)^2 \;+\; 3^2 \;=\; 0\,,$$

de donde $\lambda_1 = 2+3i$ y $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = 2-3i$ son los valores propios (complejos conjugados) de $\boldsymbol{A}$.

Calculando el espacio propio asociado a $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, se encuentra que

$$S_{\lambda_1} \;:=\; \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^{2\times 1} \;:\; (\boldsymbol{A} - \lambda_1\, \boldsymbol{I})\boldsymbol{v} \;=\; \boldsymbol{0}\}\,.$$

Escalonando (por filas), resulta

$$\boldsymbol{A} - \lambda_1\, \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} -3-3i & 6 \\ -3 & 3-3i \end{pmatrix} \overset{f_1-(1+i)f_2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 3-3i \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{A} - \lambda_1\, \boldsymbol{I})\boldsymbol{v} \;=\; \boldsymbol{0} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 3-3i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ -a + (1-i)b = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = (1-i)\alpha \\ b = \alpha \\ \alpha \in \mathbb{C} \end{cases}
\end{aligned}$$

De esta manera, se deduce que

$$S_{\lambda_1} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle ,$$

de donde se concluye que $\boldsymbol{v}_1 := \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio (complejo) de $\boldsymbol{A}$ asociado a λ_1. Se recuerda que $\boldsymbol{v}_2 := \bar{\boldsymbol{v}}_1$ es vector propio de $\boldsymbol{A}$ asociado a λ_2.

Como interesa obtener un sistema fundamental de soluciones a valores (por componente) en $\mathbb{R}$, construimos la función vectorial (a componentes complejas)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Z}(t) := \mathrm{e}^{(2+3i)t} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} &= \mathrm{e}^{2t}\mathrm{e}^{i(3t)} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} \cos(3t) + \operatorname{sen}(3t) + i(\operatorname{sen}(3t) - \cos(3t)) \\ \cos(3t) + i \operatorname{sen}(3t) \end{pmatrix} , \forall t \in \mathbb{R} , \end{aligned}$$

de donde se deducen las funciones vectoriales de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^{2\times 1}$:

$$\boldsymbol{X}_1(t) := \operatorname{Re}(\boldsymbol{Z}(t)) = \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} \cos(3t) + \operatorname{sen}(3t) \\ \cos(3t) \end{pmatrix} , \forall t \in \mathbb{R}$$

y

$$\boldsymbol{X}_2(t) := \operatorname{Im}(\boldsymbol{Z}(t)) = \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(3t) - \cos(3t) \\ \operatorname{sen}(3t) \end{pmatrix} , \forall t \in \mathbb{R} .$$

La teoría discutida en clases, asegura que $\{\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2\}$ resulta ser un Conjunto Fundamental de Soluciones del sistema EDO homogéneo planteado.

Luego, la solución general del sistema EDO homogéneo dado es

$$\boldsymbol{X}(t) = C_1 \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} \cos(3t) + \operatorname{sen}(3t) \\ \cos(3t) \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(3t) - \cos(3t) \\ \operatorname{sen}(3t) \end{pmatrix} , \forall t \in \mathbb{R} ,$$

siendo C_1, C_2 constantes reales arbitrarias.

Problema 3

Resuelva el PVI $\begin{cases} y'(x) &= (-1)\, \dfrac{x\sqrt{4-[y(x)]^2}}{y(x)} \\ y(0) &= 1. \end{cases}$

Desarrollo:

Puesto que $y(0) = 1$, sigue que para $y \in]0, 2[$, la EDO dada, a saber,

$$y'(x) = -\frac{x\sqrt{4-[y(x)]^2}}{y(x)}$$

es equivalente a la forma diferencial (EDO en variables separables)

$$
\begin{aligned}
(-1)\frac{y}{\sqrt{4-y^2}}dy &= xdx \\
\Leftrightarrow -\int \frac{y}{\sqrt{4-y^2}}dy &= \int xdx \\
\Leftrightarrow \sqrt{4-y^2} &= \frac{x^2}{2}+C.
\end{aligned}
$$

Nuevamente, considerando la condición inicial $y(0)=1$ sigue

$$\sqrt{4-1^2} = \frac{0^2}{2}+C \Leftrightarrow C=\sqrt{3}.$$

Así, la solución al PVI es

$$\sqrt{4-y^2} = \frac{x^2}{2}+\sqrt{3} \;\; \Leftrightarrow \;\; |4-y^2| \; = \; \left(\frac{x^2}{2}+\sqrt{3}\right)^2,$$

y dado que $y \in]0,2[$ podemos obtener la solución explícita

$$y(x) = \sqrt{4-\left(\frac{x^2}{2}+\sqrt{3}\right)^2}.$$

07/12/2022.
RBP//JMS//FST/rbp/jms/fst