Índice general

2. Espacios Vectoriales **2**

2.5. Suma de subespacios vectoriales 2

2.6. Conjuntos generadores 8

Capítulo 2

Espacios Vectoriales

2.5. Suma de subespacios vectoriales

En los ejemplos de la sección anterior confirmamos el hecho (demostrado en lema 2.15) de que la unión de dos subespacios vectoriales no es, en general, un subespacio vectorial.

Recordemos el primer ejemplo de la sección anterior.

Ejemplo 2.1. *Las rectas*

$$\mathcal{L}_1 = \left\{(2t,\, 3t,\, 4t) \in \mathbb{R}^3 \ : \ t \in \mathbb{R}\right\}, \qquad \mathcal{L}_2 = \left\{(t, 3t, 0) \in \mathbb{R}^3 \ : \ t \in \mathbb{R}\right\}.$$

son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$, e.v. real [1]*.*

En el apunte de la semana pasada vimos que $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{\theta\}$ (es un s.e.v. trivial de $\mathbb{R}^3$) y que $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ no es un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

Para demostrar que $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ no es un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ encontramos un punto en $\mathcal{L}_1$ y uno en $\mathcal{L}_2$ tales que el punto resultante de la suma no pertenecía a ninguna de las dos rectas y, por tanto, tampoco a la unión.

¿Podremos definir un nuevo conjunto que incorpore a todos estos vectores (puntos) que resulten de sumar a un elemento de $\mathcal{L}_1$ con uno de $\mathcal{L}_2$? ¿Será este nuevo conjunto, a diferencia de $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$, un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$?

La respuesta es sí. Definamos formalmente este conjunto y veamos luego qué elementos contiene él en este ejemplo particular.

Definición 2.2. Dados dos subespacios vectoriales W, U de un $\mathbb{K}$-e.v. V, se define la *suma* de U y W como el conjunto cuyos elementos son todos los vectores que resulten de sumar a un vector

[1] Las rectas están formadas por puntos, pero a cada punto le podemos hacer corresponder el vector desde el origen al punto y viceversa, a cada vector lo podemos representar como un vector en el origen y hacerle corresponder su punto final. Teniendo en cuenta esta correspondencia entre puntos y vectores, consideramos a los puntos de una recta como elementos de $\mathbb{R}^3$.

de W con uno de U, es decir,

$$W + U = \{w + u \mid w \in W \ \text{ y } \ u \in U\}.$$

Ejemplo 2.3. *Determinemos ahora qué puntos de $\mathbb{R}^3$ pertenecen a $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$.*

Primero observe que un punto cualquiera de $\mathcal{L}_1$ puede escribirse como suma de él mismo con $(0,0,0) \in \mathcal{L}_2$. Por tanto, $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$. De manera similar, un punto cualquiera de $\mathcal{L}_2$ puede escribirse como suma de él mismo con $(0,0,0) \in \mathcal{L}_1$. Por tanto, $\mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$. Con esto podemos concluir que $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$.

Ahora, la suma de $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ es:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 &= \left\{ \ w + v \in \mathbb{R}^3 : \ w \in \mathcal{L}_1 \ \ y \ \ v \in \mathcal{L}_2 \right\} \\ &= \left\{ (x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \right. \\ &\qquad \left. \exists t_1, t_2 \in \mathbb{R} \ : \ (x,y,z) = (2t_1,\, 3t_1,\, 4t_1) + (t_2, 3t_2, 0), \right\}\end{aligned}$$

Este conjunto está formado por los vectores (x,y,z) para los que es posible determinar $t_1 \in \mathbb{R}$ (define un punto en $\mathcal{L}_1$) y $t_2 \in \mathbb{R}$ (define un punto en $\mathcal{L}_2$) de modo que

$$\begin{aligned} 2t_1 + t_2 &= x, \\ 3t_1 + 3t_2 &= y, \\ 4t_1 &= z \end{aligned}$$

De la última ecuación obtenemos $t_1 = \dfrac{z}{4}$. Insertando este valor para t_1 en la segunda ecuación se tiene que $t_2 = \dfrac{y}{3} - \dfrac{z}{4}$. Insertando ambos valores en la primera ecuación, que también debe cumplirse, se tiene que el punto (x,y,z) se puede escribir como suma de un punto en $\mathcal{L}_1$ y uno en $\mathcal{L}_2$ si y solo si

$$\frac{z}{4} + \frac{y}{3} - x = 0,$$

que podemos escribir, multiplicando la ecuación anterior por -12, de manera equivalente como,

$$\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = \left\{ (x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 12x - 4y - 3z = 0 \right\}. \tag{2.1}$$

Éste es un plano que contiene al origen de coordenadas y es también un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, es el plano que contiene al origen de coordenadas (punto de intersección de $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$) y del que $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ (vector director de $\mathcal{L}_1$) y $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ (vector director de $\mathcal{L}_2$) son vectores directores y se muestra en la figura 2.1. Era de esperarse que justo este plano sea $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$. Si escribimos su ecuación vectorial podremos notarlo mejor: él es el que está formado por los puntos (x,y,z) tales *que el vector* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *es combinación lineal de* $\vec{r}_1$ *y* $\vec{r}_2$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{L}_1} + \beta \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{L}_2}$$

El conjunto de los puntos (x, y, z) *que satisfacen la condición anterior con* $\beta = 0$ *son los que están en* $\mathcal{L}_1$*, los que satisfacen la ecuación anterior con* $\alpha = 0$ *pertenecen a* $\mathcal{L}_2$*.*

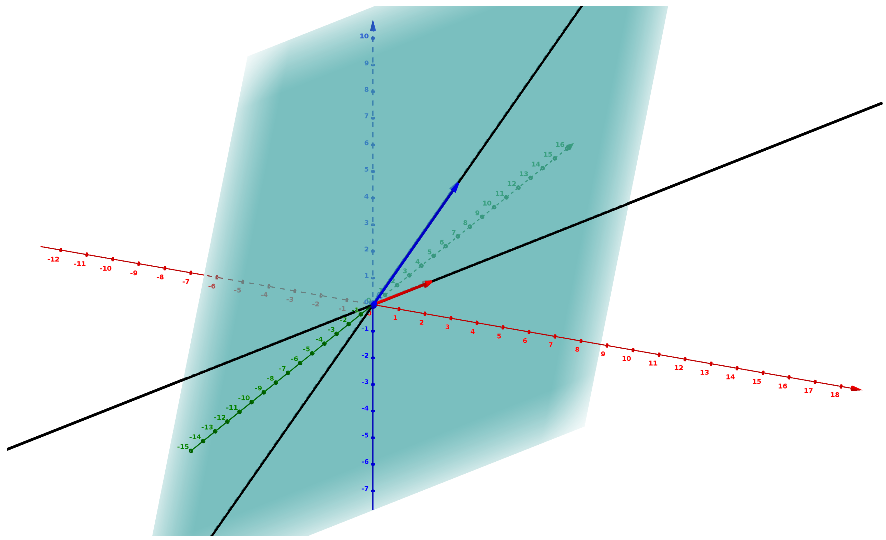

Figura 2.1: Subconjunto de $\mathbb{R}^3$ $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$

En el apunte de la semana pasada también consideramos los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(x, y, z) \in V \ : \ x + y + z = 0\},$$
$$W = \{(x, y, z) \in V \ : \ x - 2y + z = 0\}$$

Obtuvimos que

$$U \cap W = \{(-z, 0, z) \in V \ : \ z \in \mathbb{R}\}.$$

Notamos que $U \cup W$ no era un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ porque la suma de $u = (1, -1, 0)$ (elemento de U) y $w = (1, 1, 1)$ (elemento de W) no pertenecía ni a U ni a W y, por tanto, tampoco a la unión.

¿Ocurrirá nuevamente que el conjunto formado por los puntos de $\mathbb{R}^3$ que pueden escribirse como la suma de uno en U y uno en W es un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$? Sí, pero antes de seguir probando ejemplos particulares, que son importantes para entender mejor los conceptos que estamos aprendiendo, demostremos un resultado general, el que establece que si U y W son s.e.v. cualesquiera de un $\mathbb{K}$-e.v. V, entonces $U + W$ es s.e.v. de V.

Lema 2.4. Si V es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y U y W son subespacios vectoriales de V, entonces $U + W$ es también subespacio vectorial de V.

Demostración. Debemos demostrar que $U+W$ satisface que el vector nulo de V pertenece a él y que la suma de vectores y el producto por escalar son operaciones bien definidas en $U+W$, es decir, el resultado de ambas son vectores en $U+W$:

1. Dado que U y W son subespacios vectoriales de V, se cumple que $\theta \in U$ y $\theta \in W$, por tanto, $\theta + \theta \in U + W$, es decir, $\theta \in U + W$.
2. Sean ahora u, w elementos de $U+W$.

$$u \in U + W \Rightarrow \text{ existen } u_1 \in U \text{ y } u_2 \in W \text{ de modo que } u = u_1 + u_2,$$
$$w \in U + W \Rightarrow \text{existen } w_1 \in U \text{ y } w_2 \in W \text{ de modo que } w = w_1 + w_2,$$

   por tanto,
$$u + w = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) = (u_1 + w_1) + (u_2 + w_2)$$
   donde $u_1 + w_1 \in U$ (porque U es s.e.v. de V y u_1 y w_1 son elementos de U) y $u_2 + w_2 \in W$ (porque W es s.e.v. de V y u_2 y w_2 pertenecen a W). Por tanto, $u + w \in U + W$, es decir, $U + W$ es cerrrado para la suma.
3. Sean $\alpha \in \mathbb{K}$ y $u \in U + W$, entonces

$$u \in U + W \Rightarrow \exists\, u_1 \in U \ : \ \exists u_2 \in W \ : \ u = u_1 + u_2,$$

   por tanto, $\alpha u = \alpha u_1 + \alpha u_2$. Como U y W son s.e.v. de V se cumple que $\alpha u_1 \in U$ (U es cerrado para el producto) y $\alpha u_2 \in W$ (W es cerrado para el producto). Con esto se tiene que $\alpha u \in U + W$.

□

Volvamos a los subespacios U y W que mencionamos antes del lema. Calculemos su suma que, ya sabemos, va a ser un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 2.5. *Notemos primero que*

$$U = \left\{ (x, y, -x-y) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

y

$$W = \left\{ (x, y, 2y-x) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Un punto $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ pertenece a $U+W$ si y solo si él puede escribirse como suma de un elemento $(a,b,-a-b)$ de U y uno $(c,d,2d-c)$ de W, es decir, $(x,y,z) \in U+W$ si y solo si existen $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ de modo que

$$(x, y, z) = (a, b, -a-b) + (c, d, 2d-c) = (a+c, b+d, -a-b+2d-c). \tag{2.2}$$

Esta igualdad es equivalente a las siguientes tres

$$\begin{aligned} a + c &= x, \\ b + d &= y, \\ -a - b + 2d - c &= z. \end{aligned}$$

Antes de continuar recordemos que estamos interesados en averiguar para qué valores de $x, y, z \in \mathbb{R}$ podemos encontrar $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ de modo que estas tres ecuaciones se cumplan.

De la primera ecuación obtenemos $a = x - c$ y de la segunda tenemos que $b = y - d$. Insertando ambos valores en la tercera se tiene que $d = \frac{1}{3}(x + y + z)$ que, reemplazándolo en la expresión para b nos permite obtener finalmente

$$a = x - c, \qquad b = \frac{1}{3}(2y - z - x), \qquad d = \frac{1}{3}(x + y + z), \qquad c \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Independientemente de los valores que tengan x, y, z podemos determinar $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ de modo que (2.2) se cumpla. Podemos asegurar que $U + W = \mathbb{R}^3$.

Consideremos un vector cualquiera de $U + W = \mathbb{R}^3$, por ejemplo $(2, 0, 1)$, él puede escribirse como suma de un vector de U y un vector de W:

$$(2,0,1) = \underbrace{(2,-1,-1)}_{\in U} + \underbrace{(0,1,2)}_{\in W}$$

(aquí $x = 2$, $y = 0$ y $z = 1$, y se escogió $c = 0$, luego se sustituyeron en (2.3) y se obtuvo $a = 2$, $b = -1$, $d = 1$).

Observe que $(2, 0, 1)$ también puede escribirse así $(2,0,1) = \underbrace{(1,-1,0)}_{\in U} + \underbrace{(1,1,1)}_{\in W}$, en efecto, como:

$$(2,0,1) = \underbrace{(2,-1,-1)}_{\in U} + \underbrace{(0,1,2)}_{\in W}$$

entonces

$$(2,0,1) = \underbrace{(2,-1,-1)}_{\in U} + \theta_{\mathbb{R}^3} + \underbrace{(0,1,2)}_{\in W}$$

pero $\theta_{\mathbb{R}^3} = (-1, 0, 1) - (-1, 0, 1)$ donde $(-1, 0, 1)$ pertenece a $U \cap W$, luego:

$$\begin{aligned}
(2,0,1) &= (2,-1,-1) + (0,1,2), \\
&= (2,-1,-1) + (-1,0,1) - (-1,0,1) + (0,1,2), \\
&= \left(\underbrace{(2,-1,-1) + (-1,0,1)}_{\in U} \right) + \left(\underbrace{-(-1,0,1) + (0,1,2)}_{\in W} \right), \\
&= (1,-1,0) + (1,1,1).
\end{aligned}$$

por tanto, no hay una única forma de descomponer al vector $(2, 0, 1) \in U + W$ como suma de un elemento de U con un elemento de W.

Lo anterior no ocurre en el ejemplo que considera las rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$. Tomemos un punto cualquiera en el plano (2.1), por ejemplo, $(1, 0, 4)$. Busquemos cuáles son los puntos $(2t_1, 3t_1, 4t_1)$, $t_1 \in \mathbb{R}$ en $\mathcal{L}_1$ y $(t_2, 3t_2, 0)$, $t_2 \in \mathbb{R}$ en $\mathcal{L}_2$ de modo que

$$(1,0,4) = (2t_1, 3t_1, 4t_1) + (t_2, 3t_2, 0).$$

Nota que esta igualdad se cumple si y solo si $t_1 = 1$ *y* $t_2 = -1$*, es decir, hay un solo punto en* $\mathcal{L}_1$ *y uno solo en* $\mathcal{L}_2$ *que, sumados, resultan* $(1, 0, 4)$.

¿Existen para cada P en $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$, y no solo para $(1, 0, 4)$, únicos $P_1 \in \mathcal{L}_1$ y $P_2 \in \mathcal{L}_2$ de modo que $P = P_1 + P_2$ [2]? ¿Existen para cada P en $U + W$, y no solo para $(2, 0, 1)$, infinitos pares de puntos $P_1 \in U$ y $P_2 \in W$ de modo que $P = P_1 + P_2$?

¿A qué se debe esta diferencia entre estos dos ejemplos? ¿Tendrá algo que ver el hecho que $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = \{(0, 0, 0)\}$ y $U \cap W = \{(-z, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z \in \mathbb{R}\}$?.

Antes de responder estas preguntas veamos la siguiente definición y el siguiente lema.

Definición 2.6 (Suma directa)**.** Sean V un e.v. sobre $\mathbb{K}$ y U y W s.e.v. de V. El subespacio suma $U + W$ se denomina ***suma directa*** de U y W, y se denota $U \oplus W$, si y sólo si para cada $s \in U + W$ existen un único vector $u \in U$ y un único vector $w \in W$ tales que $s = u + w$.

Observen que $U + W$ no es suma directa pues escribimos a $(2, 0, 1)$ de dos formas distintas como suma de un punto en U y uno en W. En cuanto a $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ aún no podemos asegurar que la suma sea directa pues solamente hemos comprobado que $(1, 0, 4) \in \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ puede escribirse de manera única como suma de un elemento de $\mathcal{L}_1$ y uno de $\mathcal{L}_2$, pero no hemos demostrado que esto sea cierto para cualquier elemento de $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$.

Lema 2.7. Sean U y W subespacios vectoriales de un cierto espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. La suma $U + W$ es directa si y solo si $U \cap W = \{\theta\}$.

Dado que $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{(0, 0, 0)\}$, ahora sí podemos asegurar que la suma $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ es directa, es decir, para cada vector p en $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ existen únicos $p_1 \in \mathcal{L}_1$ y $p_2 \in \mathcal{L}_2$ tales que $p = p_1 + p_2$.

Por último demostraremos el lema y presentaremos unos resultados adicionales.

Demostración. Demostremos primero que si $U \cap W \neq \{\theta\}$, entonces la suma es directa. Utilizaremos la técnica de demostración *indirecta*. Supondremos que la suma **no** es directa y demostraremos que $U \cap W \neq \{\theta\}$. Si $U + W$ no es directa, existe al menos un vector $s \in U + W$ para el que pueden encontrarse dos pares de vectores $s_1, s_2 \in U$ y $r_1, r_2 \in W$ tales que $s_1 \neq s_2$, $r_1 \neq r_2$ y $s = s_1 + r_1 = s_2 + r_2$,

$$s = s_1 + r_1 = s_2 + r_2 \ \Rightarrow \ \underbrace{s_1 + (-s_2)}_{\in U} = \underbrace{r_2 + (-r_1)}_{\in W},$$

si el vector $s_1 + (-s_2) \in U$ es igual a $(-r_2) + r_1 \in W$, entonces $s_1 + (-s_2) \in W$, es decir, $s_1 + (-s_2)$ es un vector distinto de θ en $U \cap W$. Hemos demostrado que $U \cap W \neq \{\theta\}$.

Demostremos ahora que si la suma $U + W$ es directa, entonces $U \cap W = \{\theta\}$. Esta afirmación es equivalente a que si $U \cap W \neq \{\theta\}$, entonces $U + W$ no es directa. Demostremos esto. Sean

[2]Nuevamente teniendo en cuenta la correspondencia entre puntos y vectores, el punto que resulta de sumar P_1 y P_2 es el que corresponde al vector que resulta de sumar los vectores correspondientes a P_1 y P_2. Cada coordenada de P es la suma de las coordenadas correspondientes de P_1 y P_2.

$s \in U + W$ y $u \in U \cap W$, $u \neq \theta$. Como $s \in U + W$, existen $s_1 \in U$ y $r_1 \in W$ de modo que $s = s_1 + r_1$, pero

$$s = s_1 + r_1 = s_1 + \theta + r_1 = s_1 + u + (-u) + r_1 = \underbrace{(s_1 + u)}_{\in U} + \underbrace{((-u) + r_1)}_{\in W}.$$

Si $u \neq \theta$, entonces $s_1 + u \neq s_1$ y $(-u) + r_1 \neq r_1$. Los vectores $s_2 = s_1 + u$ y $r_2 = (-u) + r_1$ son nuevos vectores en U y W cuya suma es igual a s, por tanto, la suma $U + W$ no es directa. □

Si U y W son subespacios vectoriales cualesquiera de un mismo e.v. V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, entonces:

1. $U \cap W \subseteq U \cup W \subseteq U + W$. Recuerda que definimos la suma precisamente para completar $U \cup W$ a ser un s.e.v. de V.
   Pero no solo esto se cumple, sino que si S es un s.e.v. de V que contiene a $U \cup W$, entonces $U + W \subseteq S$, es decir, $U + W$ es el menor s.e.v. de V que contiene a $U \cup W$.
   Te daremos una idea de la demostración: debemos suponer que S es un s.e.v. de V que contiene a $U \cup W$ y demostrar que cualquier vector $v \in U + W$ pertenece a S. Nota que si $v \in U + W$, entonces existen $u_1 \in U$ y $w_1 \in W$ de modo que $v = u_1 + w_1$. ¿Puedes justificar por qué $u_1 \in S$ y $w_1 \in S$? Si S es un s.e.v. de V y $u_1, w_1 \in S$, ¿no tiene que cumplirse $u_1 + w_1 \in S$?
2. $U + U = U$.
   $U \subseteq U + U$ porque cualquier $u \in U$ puede escribirse como $u = u + \theta \in U + U$.
   Por otro lado, $U + U \subseteq U$ porque si $u \in U + U$, existen $u_1 \in U$, $u_2 \in U$ tales que $u = u_1 + u_2$. Como U es subespacio vectorial de V, $u_1 + u_2 \in U$.
3. si $U \subseteq W$, entonces $U + W = W$ (queda como ejercicio).

2.6. Conjuntos generadores

Antes de trabajar con rectas y planos en el primer capítulo del curso definimos qué es una combinación lineal de vectores de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ y este concepto nos sirvió para escribir las ecuaciones vectoriales de rectas y planos.

La definición de espacio vectorial es una generalización de las propiedades de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Si V es un e.v. sobre $\mathbb{K}$, podemos sumar sus elementos y multiplicarlos por escalares en $\mathbb{K}$ y además los resultados de ambas operaciones son elementos de V. Nada nos impide construir combinaciones lineales de elementos de un espacio vectorial.

El solo hecho de que podamos construir combinaciones lineales de elementos de un espacio vectorial no es la única razón para estudiarlas, sino que, del mismo modo que podemos describir rectas a través de un punto y un vector director o planos a través de un punto y dos vectores directores, podremos describir espacios vectoriales a través de un conjunto de vectores que ”representarán” a todo el espacio, lo cual será muy útil cuando, en el siguiente capítulo, estudiemos las transformaciones a vectores de un espacio vectorial.

Definición 2.8. Sean V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $v_1, v_2, \ldots, v_m$, elementos de V. Una *combinación lineal* de estos vectores con escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ es una suma de la forma

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m.$$

Un vector $w \in V$ es *combinación lineal* de $v_1, v_2, \ldots, v_m$ si existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ tales que

$$w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m.$$

Ejemplo 2.9. *En el primer capítulo del curso mencionamos que cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ puede escribirse como combinación lineal de los vectores canónicos de $\mathbb{R}^2$ y cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ puede escribirse como combinación lineal de los vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$. En general, si $\mathbb{K}$ es un cuerpo, $\mathbb{K}^n$, $n \in \mathbb{N}$, es un e.v. sobre $\mathbb{K}$. Si nombramos $e_1, e_2, \ldots, e_n$ a los vectores canónicos de $\mathbb{K}^n$*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \ldots,\ e_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

entonces cualquier vector de $\mathbb{K}^n$ puede escribirse como combinación lineal de ellos,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n.$$

Consideremos vectores distintos de los canónicos, ¿qué vectores pueden escribirse como combinación lineal de ellos?

Ejemplo 2.10.

1. *En la imagen 2.2 se muestran los vectores $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, elementos del espacio vectorial real $\mathbb{R}^2$.*
   $\frac{1}{2}\vec{x}$ es una combinación lineal de $\vec{x}$ e $\vec{y}$, con escalares $\frac{1}{2}$ y 0, $-2\vec{y}$ es otra combinación lineal de $\vec{x}$ e $\vec{y}$, ésta es con escalares 0 y -2.
   El vector $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de $\vec{x}$ e $\vec{y}$ si y solo si existen $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que

   $$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 3 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   Esta igualdad se cumple si y solo si

   $$-\frac{3}{2} = a + b, \qquad 3 = 2a - b$$

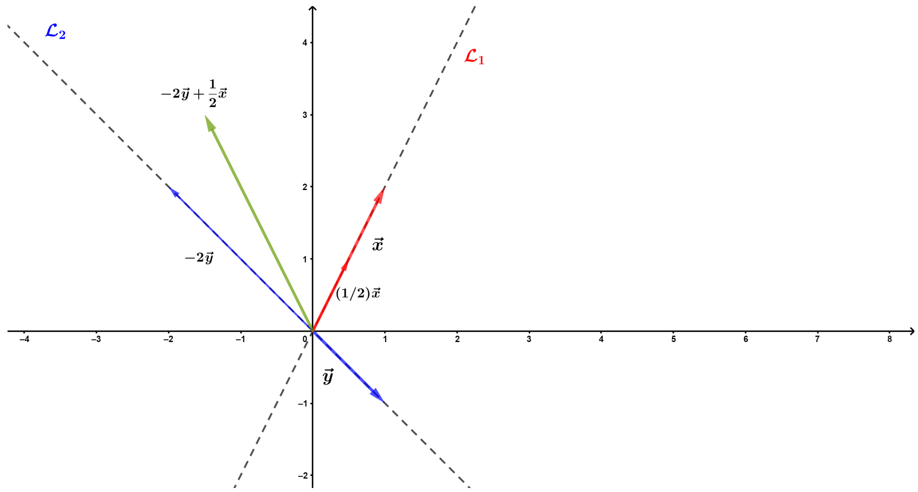

Figura 2.2: Combinaciones lineales en $\mathbb{R}^2$

y, a su vez, estas dos igualdades se cumplen si y solo si $a=\frac{1}{2}$ *y* $b=-2$*. Podemos concluir que* $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$ *es combinación lineal de* $\vec{x}$ *e* $\vec{y}$ *con escalares* $\frac{1}{2}$ *y* -2*.*

Cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ *es combinación lineal de* $\vec{x}$ *e* $\vec{y}$*. Trata de convencerte de esta afirmación con ayuda de la figura 2.2. Dibuja varios vectores en ella y nota que pueden escribirse como suma de un vector en* $\mathcal{L}_1$ *y uno en* $\mathcal{L}_2$*. Ahora demostrémoslo.*

Sea $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ *un vector de* $\mathbb{R}^2$*. Él es combinación lineal de* $\vec{x}$ *e* $\vec{y}$ *si y solo si existen* $a,b\in\mathbb{R}$ *de modo que*

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Esta igualdad se cumple si y solo si

$$z_1 = a+b, \qquad z_2 = 2a-b.$$

Estas dos igualdades se cumplen si y solo si $a=\frac{1}{3}(z_1+z_2)$ *y* $b=\frac{1}{3}(2z_1-z_2)$*, es decir,*

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(z_1+z_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}(2z_1-z_2)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. *Veamos qué vectores de* $\mathbb{R}^3$ *(e.v. real) son combinación lineal de los vectores* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$*.*

   Una combinación lineal de ellos es $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *pues*

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A diferencia del ejemplo anterior, no es cierto que todo vector de $\mathbb{R}^3$ *pueda escribirse como combinación lineal de* $\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$*. Por ejemplo,* $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ *no es combinación lineal de ellos, lo sería si existieran escalares* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\beta\\\alpha\\3\alpha+\beta\end{pmatrix},$$

que se traduce en las igualdades

$$1 = \beta \tag{2.4a}$$

$$1 = \alpha \tag{2.4b}$$

$$1 = 3\alpha + \beta \tag{2.4c}$$

De las dos primeras ecuaciones ya sabemos que $\beta = 1$ *y* $\alpha = 1$*, pero si reemplazamos estos valores en la tercera ecuación obtenemos:* $3\alpha + \beta = 4 \neq 1$*, por lo tanto las tres ecuaciones no se pueden cumplir simultáneamente,* α*,* β *no existen.*

¿Es $(1, -1, -2)^T$ *combinación lineal de* $\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$*?. ¿Puedes determinar qué vectores de* $\mathbb{R}^3$ *se escriben como combinación lineal de los vectores dados?*

Veamos ejemplos con otros espacios vectoriales.

Ejemplo 2.11.

1. *Ya sabemos que* $\mathbb{C}^2$ *es un e.v. sobre* $\mathbb{C}$ *y también es e.v. real. Consideremos los vectores* $x = \begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$*,* $y = \begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$ *de* $\mathbb{C}^2$*.*

   El vector $\begin{pmatrix}3i\\1\end{pmatrix} = ix + 2y$ *es combinación lineal de* x *e* y *con escalares* $i, 2 \in \mathbb{C}$*, es decir, él es combinación lineal de* x *e* y*, considerados todos elementos del e.v.* ***complejo*** $\mathbb{C}^2$*.*

   Averigüemos si $\begin{pmatrix}3i\\1\end{pmatrix}$ *es combinación lineal de* x *e* y*, cuando los consideramos elementos del e.v.* ***real*** $\mathbb{C}^2$*. Esto se cumple si y solo si existen* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *de modo que*

$$\begin{pmatrix}3i\\1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha + i\beta\\i\alpha + \beta\end{pmatrix}$$

   Esta igualdad es equivalente a

$$3i = \alpha + i\beta,$$
$$1 = \beta + i\alpha$$

   y, dado que α *y* β *son números reales, la primera de las igualdades anteriores se cumple si y solo si* $\alpha = 0$ *y* $\beta = 3$*, mientras que la segunda se satisface si y solo si* $\alpha = 0$ *y* $\beta = 1$*.*

*No existen valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ de modo que se cumplan las dos simultáneamente. El vector $\begin{pmatrix} 3i \\ 1 \end{pmatrix}$ no es, por tanto, combinación lineal de x e y, cuando consideramos a x e y elementos del espacio vectorial **real** $\mathbb{C}^2$.*

2. *Determinemos si el polinomio $2+x$ es combinación lineal de los vectores 1, $1-x$, $(1-x)^2$, elementos de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, e.v. real.*
Esto es cierto si y solo si existen escalares $a, b, c \in \mathbb{R}$ de modo que

$$2 + x = a + b(1-x) + c(1-x)^2. \tag{2.5}$$

En Álgebra 1 aprendiste que los polinomios $2+x$ y $a+b(1-x)+c(1-x)^2$ son iguales si y solo si

- *sus coeficientes son iguales o si*
- *evaluados en 3 puntos (porque son polinomios de grado menor o igual que 2) de sus dominios resultan los mismos valores.*

Utilicemos el segundo criterio: llamemos p al polinomio tal que $p(x) = 2 + x$.
Dado que $p(1) = 3$ y $a + b(1-1) + c(1-1)^2 = a$, se tiene que $a = 3$.
Si evaluamos en 0 a los polinomios a ambos lados de (2.5) obtenemos la igualdad

$$2 = 3 + b(1) + c(1),$$

que podemos escribir como $-1 = b + c$.
Por último, si los evaluamos en 2 obtenemos $4 = 3 - b + c$, que podemos escribir como $1 = -b + c$.
Tenemos entonces que $a = 3$, $b = -1$, $c = 0$. Así $2 + x$ es la combinación lineal de 1, $1-x$ y $(1-x)^2$ con escalares 3, 1 y 0.

Si V es un e.v. sobre $\mathbb{K}$, entonces

- el conjunto de vectores que se pueden escribir como combinación lineal de θ es $\{\theta\}$ (s.e.v trivial de V),
- si $v \in V$, el conjunto de vectores que se escriben como combinación lineal de v es

$$U = \{\alpha\, v \ : \ \alpha \in \mathbb{K}\}.$$

  El vector nulo de V pertenece a U. Si $v \neq \theta$, entonces U no es $\{\theta\}$.
  Si V es $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ y v no es el vector nulo, U es la recta[3] que pasa por el origen y tiene a v como vector director. Ya mencionamos que U es, en estos casos, un s.e.v. de V. ¿Se cumple que U es también s.e.v. de V cuando V no sea ni $\mathbb{R}^2$ ni $\mathbb{R}^3$?
- si $v_1, v_2 \in V$, el conjunto de vectores que se escriben como combinación lineal de v_1, v_2 es

$$U = \{\alpha\, v_1 + \beta v_2 \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{K}\}.$$

  El vector nulo de V pertenece a U.

[3]Recuerda la correspondencia entre puntos y vectores.

Si V es $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ y v_1 y v_2 no son ni paralelos ni el vector nulo, entonces $U = \mathbb{R}^2$ (si $V = \mathbb{R}^2$) o es el plano [4] que pasa por el origen y tiene a v_1 y v_2 como vectores directores. En ambos casos se cumple que U es s.e.v. de V.
¿Se cumple que U es también s.e.v. de V cuando V no sea ni $\mathbb{R}^2$ ni $\mathbb{R}^3$?

Definición 2.12 (Conjunto Generador)**.** Dado un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $v_1, v_2, \ldots, v_k$, vectores de V. El conjunto de todas las combinaciones lineales de $v_1, v_2, \ldots, v_k$ se denomina *conjunto generado* por $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ y se denota por:

$$\langle \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \rangle.$$

Un vector $u \in V$ satisface $u \in \langle \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \rangle$ si y solo si existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ tales que:

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k.$$

Dicho en otras palabras:

$$\langle \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \rangle = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k \ : \ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}\}.$$

Además, si $S = \langle \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \rangle$ entonces se dice que S *es generado por* $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ y que $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ *genera a* S o que *es generador de* S. Por último, se define $\langle \emptyset \rangle = \{\theta\}$.

Ejemplo 2.13.

1. *Se cumple que*

$$\mathbb{R}^2 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle, \qquad \mathbb{R}^3 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

   En general, el $\mathbb{K}$*-e.v.* $\mathbb{K}^n$ *satisface*

$$\mathbb{K}^n = \langle \{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \rangle.$$

2. *Como vimos en un ejemplo anterior, también se cumple que*

$$\mathbb{R}^2 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

   Esto nos indica que conjuntos distintos pueden generar el mismo conjunto de vectores.

3. *Nota que si consideramos* $\mathbb{C}^2$ *como e.v. complejo,*

$$\mathbb{C}^2 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle,$$

   pero esta igualdad no es cierta si consideramos a $\mathbb{C}^2$ *como e.v. real pues, por ejemplo, el vector* $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ *de* $\mathbb{C}^2$ *no se puede escribir como combinación lineal de* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *con escalares* ***reales****.*

[4] Recuerda la correspondencia entre puntos y vectores.

4. *Consideremos el siguiente subespacio del espacio complejo* $\mathbb{C}^3$*:*

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \ : \ z_1 + 3z_2 - z_3 = 0 \right\}.$$

Note que los vectores en U *tienen la forma*

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_1 + 3z_2 \end{pmatrix} \qquad \text{con } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Estos vectores se pueden escribir como

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_1 + 3z_2 \end{pmatrix} = z_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{con } z_1, z_2 \in \mathbb{C},$$

es decir, cualquier vector de U *es combinación lineal, con escalares* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$*, de los vectores* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *y, viceversa, todos los vectores de la forma*

$$z_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{con } z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

pertenecen a U*. El conjunto* $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ *es generador de* U*. Los vectores* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *son, de un modo que quedará claro más adelante, "representantes" de los vectores en* U*. Esto se escribe como*

$$U = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle,$$

¿Podremos determinar, para cada $\mathbb{K}$-espacio vectorial V un conjunto generador? Esta pregunta la responderemos la próxima semana, lo que sí podemos asegurar ahora es que el conjunto generado por cualquier cantidad finita de vectores de un e.v. V es un subespacio vectorial de V.

Lema 2.14. Si V es un e.v. sobre $\mathbb{K}$ y S subconjunto de V de cardinalidad finita ($S \subseteq V$), entonces $\langle S \rangle$ es un s.e.v. de V.

Demostración. Esta demostración se verá en clases.

Si $S = \emptyset$, $\langle S \rangle = \{\theta\}$ que es s.e.v. de V. Podemos suponer entonces que S tiene, al menos, un elemento.

Primero vemos que el conjunto generado por S contiene al vector nulo de V pues

$$\theta = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_k.$$

Demostremos ahora que $\langle S \rangle$ es cerrado para la suma: si $p, q \in \langle \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \rangle$, entonces p se escribe como $\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i$ y q como $\sum_{i=1}^k \beta_i v_i$, por lo tanto

$$p + q = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^k \beta_i v_i = \sum_{i=1}^k (\alpha_i + \beta_i) v_i \in \langle \{v_1, .., v_k\} \rangle.$$

Por otra parte, $\langle S \rangle$ también es cerrado para el producto: en efecto, si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $p \in \langle S \rangle$, $p = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i$, entonces

$$\lambda p = \lambda \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^k \lambda \alpha_i v_i \in \langle \{v_1, .., v_k\} \rangle.$$

Como $\theta \in \langle S \rangle$, $\langle S \rangle$ es cerrado para la suma y también es cerrado para el producto, se cumple que $\langle S \rangle$ es s.e.v. de V. □

Observación 2.15. *Si $S \subseteq V$ tiene una cantidad infinita de vectores también se cumple que $\langle S \rangle$ es s.e.v. de V (de hecho, $\langle V \rangle = V$), pero el trabajo con los espacios vectoriales generados por conjuntos de cardinalidad infinita queda fuera de los objetivos de este curso.*

Observación 2.16. *Ya que hemos demostrado que si V es un e.v. sobre $\mathbb{K}$ y $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$, entonces $\langle \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \rangle$ es un s.e.v. de V, al conjunto $\langle \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \rangle$ podemos llamarle también* espacio generado por $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$.

Si te resultaba difícil calcular la suma de dos espacios vectoriales U y W, subespacios de un mismo $\mathbb{K}$-espacio vectorial V, presta atención al siguiente lema, que te permitirá describir a $U + W$ a través de un conjunto generador, si conoces conjuntos generadores de U y W.

Lema 2.17. Sean V un e.v. sobre $\mathbb{K}$, $S_U, S_W \subseteq V$ tales que S_U y S_W tienen cardinalidad finita y además llamemos U al espacio generado por S_U y W, al generado por S_W. Entonces,

$$U + W = \langle S_U \cup S_W \rangle .$$

Demostración. Esta demostración se verá en clases.

Si uno de los dos conjuntos es vacío, por ejemplo S_U, entonces $U = \{\theta\}$ y $U + W = W$. En este caso se cumple lo que deseamos demostrar pues $U + W = W = \langle S_W \rangle = \langle S_U \cup S_W \rangle$.

Supongamos que tanto S_U como S_W tienen al menos un elemento,

$$S_U = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\} , \qquad S_W = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\} .$$

Debemos demostrar que $U + W \subseteq \langle S_U \cup S_W \rangle$ y que $\langle S_U \cup S_W \rangle \subseteq U + W$.

La primera inclusión podemos leerla como: *todo vector que pueda escribirse como suma de un vector en U y uno en W puede escribirse como combinación lineal de vectores en $S_U \cup S_W$*. Supongamos entonces $v \in U+W$ y demostremos que $v \in \langle S_U \cup S_W \rangle$. Si $v \in U+W$, existen $v_1 \in U$ y $v_2 \in W$ de modo que $v = v_1 + v_2$. Como $v_1 \in U$ y S_U es generador de U, v puede escribirse como combinación lineal de los vectores en S_U, es decir, existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ de modo que

$$v_1 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i.$$

Del mismo modo, si $v_2 \in W$, existen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \in \mathbb{K}$ tales que

$$v_2 = \sum_{i=1}^{m} \beta_i w_i.$$

Pero entonces v es combinación lineal de los vectores en $S_U \cup S_W$ con escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_m$ pues

$$v = v_1 + v_2 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_i w_i.$$

La segunda inclusión que debemos demostrar, $\langle S_U \cup S_W \rangle \subseteq U + W$ se lee como: *si un vector es combinación lineal de los vectores en $S_U \cup S_W$, entonces él pertenece a $U + W$, es decir, él puede escribirse como suma de un vector en U y uno en W*, lo que también es sencillo de demostrar pues

$$v \in \langle S_U \cup S_W \rangle \qquad \Rightarrow \qquad v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_i w_i.$$

Pero, como $U = \langle S_U \rangle$ se cumple que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i$ es elemento de U, llamémosle v_1 y, como $W = \langle S_W \rangle$ se cumple que $\sum_{i=1}^{m} \beta_i w_i$ es elemento de W, llamémosle v_2, y así

$$v = v_1 + v_2 \qquad \text{con } v_1 \in U \quad \text{y} \quad v_2 \in W \qquad \Rightarrow \qquad v \in U + W.$$

Habiendo demostrado las dos inclusiones, podemos asegurar que $U + W = \langle S_U \cup S_W \rangle$. $\square$

Ejemplo 2.18. *Si volvemos a los ejemplos que vimos al principio de la sección anterior, en 2.1 se cumple que*

$$\mathcal{L}_1 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle, \qquad \mathcal{L}_2 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

Entonces

$$\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 = \left\{ (x,\, y,\, z)^T \in \mathbb{R}^3 \ : \ 12x - 4y - 3z = 0 \right\}$$

también puede escribirse como

$$\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

Nota que, dado que un vector $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ pertenece a $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ si y solo si satisface $12x - 4y - 3z = 0$, podemos encontrar otro conjunto generador de $\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$ de la siguiente forma

$$\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 4x - \frac{4}{3}y \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R} \right\},$$

lo que significa que

$$\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

Además, los conjuntos

$$U = \left\{ (x, y, z)^T \in V \ : \ x + y + z = 0 \right\},$$
$$W = \left\{ (x, y, z)^T \in V \ : \ x - 2y + z = 0 \right\},$$

que también vimos en la sección anterior, son tales que

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x - y \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

y, por tanto,

$$U = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

Por otro lado,

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 2y - z \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

y, por tanto,

$$W = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

Ya antes vimos que $U + W = \mathbb{R}^3$ lo que significa que el conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

también es generador de $\mathbb{R}^3$.

Recuerda que antes mencionamos que el conjunto formado por los tres vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$ es generador de $\mathbb{R}^3$ y en el ejemplo anterior encontramos a un generador de $\mathbb{R}^3$ con cuatro vectores. ¿Por qué en el ejemplo anterior necesitamos un vector más para generar el mismo espacio vectorial? ¿En verdad necesitamos a esos cuatro vectores para generar a $\mathbb{R}^3$?