

Listado 1 : Cálculo I (527140)

1. Considerando que a y b son números reales cualesquiera. Determine las condiciones que deben verificar para que las siguientes expresiones sean válidas.

$$\begin{array}{ll} \text{(P) (a) } (a+b)(a-b) = (b+a)(b-a) & \text{(P) (b) } (a+b)^2 = a^2 + b^2 \\ \text{(F) (c) } (a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3 & \text{(F) (d) } b^2 + a^2 \neq (b+a)^2 \end{array}$$

2. Demuestre las siguientes consecuencias de los axiomas de cuerpo.

$$\text{(P)(a) } \forall x \in \mathbb{R} : 1 + x^4 = (1 + \sqrt{2}x + x^2)(1 - \sqrt{2}x + x^2)$$

$$\text{(P)(b) } \forall x \in \mathbb{R} : x(x+1)(x+2)(x+3) + 1 = (1 + 3x + x^2)^2$$

$$\text{(F)(c) } \text{Si } a + b + c = 2p \text{ con } a, b, c, p \in \mathbb{R} \text{ se cumple que } (p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2 + p^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\text{(F)(d) } \forall x, y \in \mathbb{R} (x-y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$$

3. Sean $x \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Si $a = \frac{x^n + x^{-n}}{2}$ y $b = \frac{x^n - x^{-n}}{2}$, determinar $a^2 - b^2$.

4. Si $x = 5$ en la expresión siguiente, encontrar el valor de a :

$$\frac{3x-a}{x-a} + \frac{x-a}{3x-a} = \frac{10}{3}$$

5. Despejar la variable $x \in \mathbb{R}$:

$$a) \frac{a+b-x}{x^2} = \frac{a^2-b^2}{x^3} - \frac{1}{x} \dots \text{(P)}$$

$$b) \frac{x^2 + (a+b)x + ab}{x^2 - (a-b)x - ab} \cdot \frac{x+b}{x-b} = 4 \dots \text{(F)}$$

6. Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas, utilizando dos de los siguientes métodos: factorización, completación de cuadrados o fórmula de los ceros de una ecuación cuadrática.

$$\text{(a) } x(x-1) = 6 \quad \text{(P)(b) } x^2 = 8(x-2) \quad \text{(c) } 4x^2 + 2x + \frac{1}{4} = 0$$

$$\text{(d) } 2x^2 - 7x + 6 = 0 \quad \text{(e) } (x-4)^2 = 9 \quad \text{(P)(f) } (x+1)^2 = (2x-3)^2$$

7. Sean m, n, k números reales. Encontrar la solución de la ecuación $(x-m)(x-n) = k^2$ y mostrar que está en los números reales.

8. Considere la siguiente ecuación cuadrática $2x^2 - 7x + k = 0$, siendo k un número real fijo. Determine el o los valores de k de modo que:

$$\text{(P)(a) } x_1 = 3 \text{ sea una solución de la ecuación.}$$

$$\text{(P)(b) } x_2 = \frac{1}{2} \text{ sea una solución de la ecuación.}$$

$$\text{(c) la ecuación cuadrática tenga solución única.}$$

$$\text{(d) la ecuación cuadrática no tenga solución en } \mathbb{R}.$$

$$\text{(e) la ecuación cuadrática tenga dos soluciones distintas en } \mathbb{R}^+$$

9. Determine los valores de j reales de modo que la ecuación $x^2 - 2(j-5)x + j^2 - 1 = 0$, de variable $x \in \mathbb{R}$ tenga dos soluciones reales y determínelas.

10. Resuelva los siguientes problemas utilizando ecuaciones o inecuaciones.

- (a) El producto de dos números es -27 y la suma de estos es 6. Hallar dichos números.
- (F)(b) Dentro de 11 años la edad de Javier será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. ¿Cuál es la edad de Javier?
- (P)(c) Halla un número entero sabiendo que la suma con su inverso multiplicativo es $\frac{26}{5}$
- (P)(d) Un jardín rectangular de 50 m de largo por 34 m de ancho está rodeado por un camino de arena uniforme. Hallar la anchura de dicho camino si se sabe que su área es 540 m^2 .
- (F)(e) Un padre decide ir a un concierto con sus hijos y tiene \$75000. Si compra entradas de \$15000 le falta dinero, pero si compra entradas a \$11000 le sobra. ¿Cuántos hijos tiene?