Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemática
Departamento de Matemática

Cálculo II

Ingeniería Civil

Prof. Víctor Aros Quinán

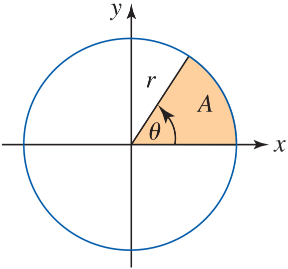
Segundo Semestre 2021

Clase N$^{\underline{o}}$22: Cálculo II

Coordenadas Polares y Sucesiones de Números Reales

Área de Curvas Polares

Para determinar el área de una región acotada por gráficas de curvas polares usaremos un recurso al igual como lo hicimos anteriormente, en este caso seran sectores circulares.

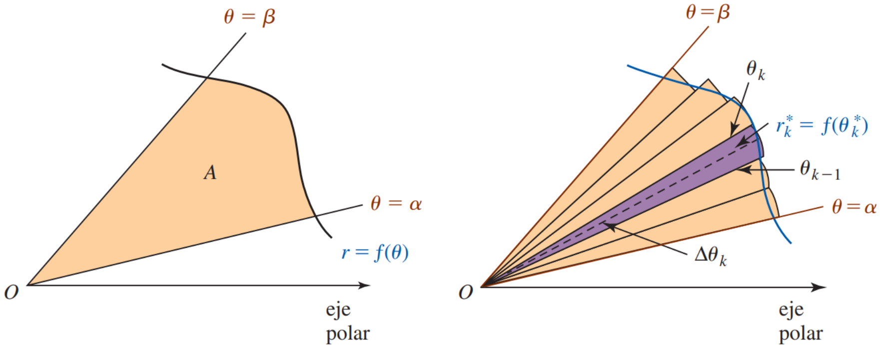


Recordemos que el área de un sector circular es proporcional al ángulo central θ, medido en radianes, de hecho:

$$\frac{A}{\pi r^2} = \frac{\theta}{2\pi} \Leftrightarrow A = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

Área de Curvas Polares

Consideremos una curva polar $r = f(\theta)$ es una función continua no negativa sobre el intervalo $[\alpha, \beta]$, donde $0 \leq \alpha \leq \beta < 2\pi$. Para determinar el área de la región que se muestra a continuación:



que está acotada por la gráfica de f y los rayos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$, debemos considerar una partición P del intervalo $[\alpha, \beta]$.

Área de Curvas Polares

Si θ_k^* denota un punto en el subintervalo $[\theta_{k-1}, \theta_k]$, entonces por el área del sector circular de radio $r_k^* = f(\theta_k^*)$, se tiene:

$$A_k = \frac{1}{2}\left[f(\theta_k^*)\right]^2 \Delta\theta_k$$

donde $\Delta\theta_k = \theta_k - \theta_{k-1}$ es su ángulo central. Luego, el área de la región de manera aproximada, está dada por:

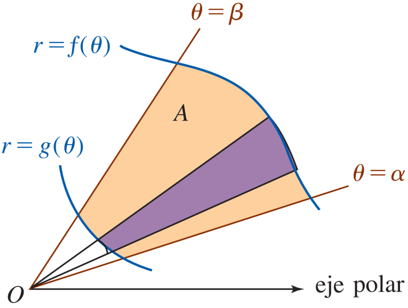
$$A(R) \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left[f(\theta_k^*)\right]^2 \Delta\theta_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[f(\theta_k^*)\right]^2 \Delta\theta_k$$

Notemos el que la suma anterior corresponde a una suma de Riemann, por ende el área de la región queda representada por:

$$A(R) = \lim_{\|P\|\to 0} \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[f(\theta_k^*)\right]^2 \Delta\theta_k = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta)\, d\theta$$

Área entre dos Curvas Polares

El área $A(R)$ de la región que se muestra en la figura se puede determinar sustrayendo áreas.



Si f y g son continuas sobre $[\alpha, \beta]$ y $f(\theta) \geq g(\theta)$ sobre el intervalo, entonces el área acotada por las gráficas de $r_1 = f(\theta)$, $r_2 = g(\theta)$, $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$, está dada por:

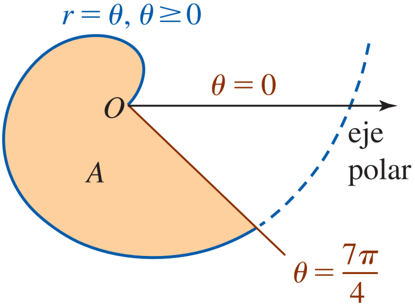
$$A(R) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta)\, d\theta - \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} g^2(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) - g^2(\theta)\, d\theta$$

Ejercicios

1. Determine el área de la región que está acotada por el espiral $r = \theta$, con $\theta \geq 0$, entre los rayos $\theta = 0$ y $\theta = \frac{7\pi}{4}$.
2. Calcular el área de un pétalo de la curva $r = 2\cos(5\theta)$.
3. Determine el área de la región que es común a los interiores del cardioide $r = 2 - 2\cos(\theta)$ y el caracol $r = 2 + \cos(\theta)$.
4. Encuentre el área de la región en el primer cuadrante que está fuera de la circunferencia $r = 1$ y dentro de la rosa $r = 2\sin(2\theta)$.
5. Determine el área que se encuentra entre el lazo interior y exterior del caracol $r = 1 + 2\cos(\theta)$.
6. Determine el área de la región interior a la circunferencia $r = 2$ y exterior a la rosa de tres pétalos $r = 2\sin(3\theta)$.

Ejercicios

Solución 1): Notemos que curva representa una espiral y el área barrida entre $\theta = 0$ y $\theta = \frac{7\pi}{4}$, esta dada por:



Por ende, su área se puede calcular mediante:

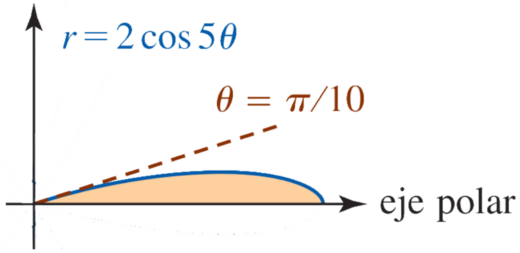
$$A(R) = \qquad\qquad = \frac{343}{384}\pi^3 \approx 27.7\, u^2$$

Ejercicios

Solución 2): Notemos que curva representa una rosa de 5 pétalos, por ende basta graficar solo uno de ellos para determinar lo solicitado, para esto consideremos que si $\theta = 0$, se tiene que $r = 2$, ahora calcularemos las intersecciones con el polo, como sigue:

$$r = 0 \Leftrightarrow 2\cos(5\theta) = 0 \Leftrightarrow 5\theta = \frac{\pi}{2} + \pi k, \;\; k \in \mathbb{Z}$$

dado lo anterior podemos notar que:

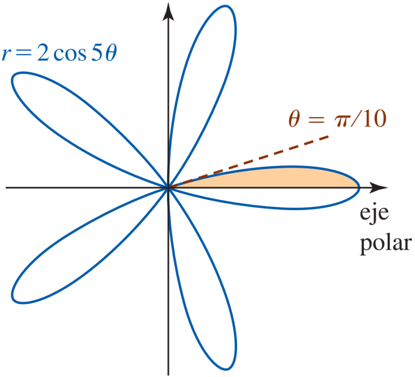


Ejercicios

Por ende, el área de un pétalo puede ser reprsentada por:

$$A(R) = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \frac{\pi}{5} \approx 0.6\ u^2$$

de hecho podemos concluir que el área de la rosa completa es $\pi\ u^2$.



Ejercicios

Solución 3): Primero podemos analizar la simetría, como sigue:

$$f(-\theta) = 2 - 2\cos(-\theta) = 2 - 2\cos(\theta) = f(\theta)$$
$$g(-\theta) = 2 + \cos(-\theta) = 2 + \cos(\theta) = g(\theta)$$

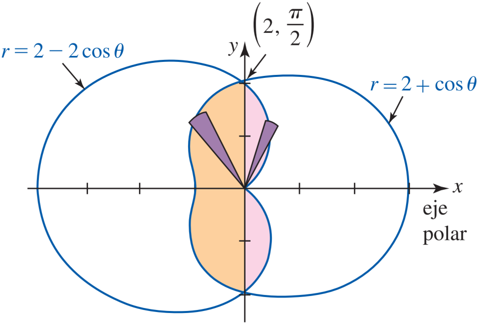
con lo anterior concluimos que ambas curvas son simétricas con respesto . Ahora determinaremos los puntos de intersección entre ambas curvas:

$$2 - 2\cos(\theta) = 2 + \cos(\theta) \Leftrightarrow \cos(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}$$

luego, dada la simetría y la intersección concluimos que un punto en común es $\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$.

Ejercicios

Dado lo anterior, el gráfico de la región está dado por:



por ende, el área de la región está representada por:

$$A(R) = \qquad = \frac{21\pi}{4} - 12 \approx 4.49\ u^2$$

Ejercicios

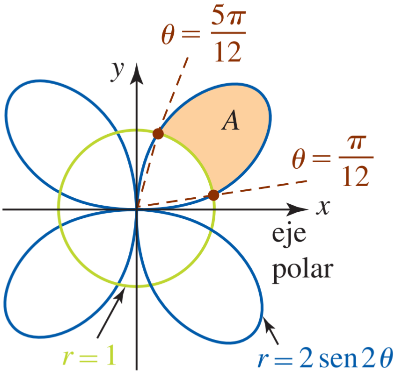
Solución 4): Primero determinamos los puntos de intersección entre ambas curvas, como sigue:

$$
\begin{aligned}
1 = 2\sin(2\theta) \Leftrightarrow \sin(2\theta) = \frac{1}{2}\\
\Leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{6} + 2\pi k_1 \vee 2\theta = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k_2;\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Luego, los puntos de intersección en el primer cuadrante son $\left(1, \frac{\pi}{12}\right)$ y $\left(1, \frac{5\pi}{12}\right)$. Además, se puede notar que ambas curvas poseen los tres tipos de simetrías.

Ejercicios

Dado lo anterior, se conluye que el gráfico está dado por:



Finalmente, el área de la región está representada por:

$$A(R) = \qquad = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0.96$$

Sucesiones de Números Reales

Definición

Llamaremos **sucesión de números reales** a cualquier función

$$X : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, X(n) = x_n$$

es decir, una función que asocia a cada número natutal n un número real x_n, donde este último recibe el nombre de n-ésimo término de la sucesión.

Observaciones:

1. Los números $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ es una colección ordenada de números reales, donde cada uno de ellos es llamado **elemento** de la sucesión.
2. Si el término x_n está determinado por una fórmula general que permite determinar todos los términos de la sucesión, entonces decimos que x_n es el **término general de la sucesión**.

Sucesiones de Números Reales

3. Cuando existe el término general de una sucesión, es común utilizar las siguientes notaciones

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}},\quad (x_n)_{n\geq 1},\quad (x_n)_{n=1}^{\infty},\quad \{x_n\}_{n=1}^{\infty},\quad (x_n)$$

para representar una sucesión en término general x_n.

Ejemplos:

1. $1, 2, 5, 8, 0, 0, 10, 30, 50, ...$
2. $(7n-3)_{n\in\mathbb{N}}$, los elementos de esta sucesión son:

$$4, 11, 18, 25, ..., 7n-3, ...$$

3. $(k)_{n=1}^{\infty}$, los elmentos de esta sucesión son:

$$k, k, k, k, k, k, k, ..., k, ...$$

Sucesiones de Números Reales

4. $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, los elementos de esta sucesión son:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{100}, \ldots, \frac{1}{200000}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

5. $(2n)$, los elementos de esta sucesión son:

6, $(2n-1)_{n\geq 5}$, los elementos de esta sucesión son:

7. $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$, los elementos de esta sucesión son:

8. $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ para $n \geq 2$, los elementos de esta sucesión son:

Sucesiones de Números Reales

Nuestro objetivo ahora será estudiar el comportamiento de una sucesión, es decir, analizar su convergencia, lo cual hace referencia a la existencia o no de un límite de sucesiones.

Definición

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y sea $L \in \mathbb{R}$. Diremos que L es el límite de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon$$

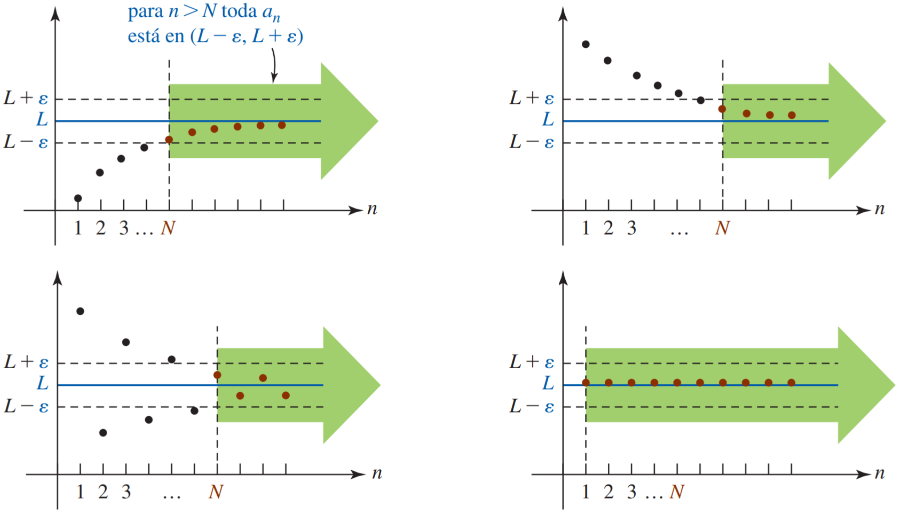
en tal caso escribiremos

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = L$$

Observación: Si existe un $L \in \mathbb{R}$, diremos que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es **convergente**. En caso contrario, diremos que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es **divergente**.

Sucesiones de Números Reales

Idea gráfica del límite de una sucesión de números reales.



Sucesiones de Números Reales

Teorema

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente, entonces su límite es único.

Demostración: Supongamos que existen $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = L_1$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = L_2$. Luego, por definición, para $\varepsilon > 0$ dado, existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que:

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_1 \Rightarrow |x_n - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

y

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_2 \Rightarrow |x_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ahora bien, si escogemos $N_\varepsilon = \max\{N_1, N_2\}$, tenemos que:

$$|L_1 - L_2| < |L_1 + x_n - x_n - L_2| < |x_n - L_1| + |x_n - L_2| < \varepsilon$$

Dada lo anterior, concluimos que $L_1 = L_2$.

Sucesiones de Números Reales

Antes de comenzar con la demostración de algunos límites de sucesiones de números reales, debemos recordar una consecuencia del Axioma del Supremo.

Propiedad Arquimediana

Dados un número real y cualquiera y un número $x > 0$, existe un natural m tal que $mx > y$.

Observaciones:

1. En particular si $x = 1$, dado un número real y, existe un número natural m tal que $m > y$.
2. Esta propiedad determina que dado cualquier $\varepsilon > 0$ (por muy pequeño que sea), existe un natural n tal que $m > \frac{1}{\varepsilon}$ y luego $\frac{1}{m} < \varepsilon$.

Sucesiones de Números Reales

1. Mostrar que $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Solución: Notemos lo siguiente

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{100}, \ldots, \frac{1}{200000}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

Sea $\varepsilon > 0$ dado. Por axioma de Arquímedes, cualquiera sea el número real ε existe un natural N tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Así,

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

dado lo anterior, concluimos que:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Sucesiones de Números Naturales

2. Mostrar que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1.$

   Solución:

   Sea $\varepsilon > 0$ dado. Por axioma de Arquímedes, cualquiera sea el número real ε existe un natural N tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Así,

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right|$$

Sucesiones de Números Reales

Definición

Sea $(x_n)_{n\in mn}$ una sucesión de números reales. Llamamos **subsucesión** de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a cualquier otra sucesión de la forma $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ donde $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números naturales estrictamente creciente.

Ejemplos:

1. Determine una subsucesión de $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

2. Determine dos subsucesiones de $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$.

Teorema

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces toda subsucesión de ella es también convergente y converge al mismo valor.

Ejemplo: Consideremos la sucesión $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 3}$ y determine dos subsucesiones y verifique el teorema precedente.

Sucesiones de Números Reales

Corolario

Sean $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ y $(x_{n_s})_{s\in\mathbb{N}}$ dos subsucesiones de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Si una subsucesión diverge, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
2. Si $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ y $(x_{n_s})_{s\in\mathbb{N}}$ convergen tal que

$$\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} \neq \lim_{s\to+\infty} x_{n_s}$$

entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Ejemplo:

Sucesiones de Números Reales

A continuación, presentaremos las propiedades de sucesiones convergentes.

Teorema

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son sucesiones convergentes, entonces también lo son $(x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(kx_n)_{n\in\mathbb{N}}$, siendo $k\in\mathbb{R}$, $(x_n\cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Además,

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n+\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}(kx_n)=k\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to+\infty}y_n$.
4. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)=\dfrac{\lim\limits_{n\to+\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to+\infty}y_n}$, siempre que $y_n\neq 0$.

Ejercicios

Determine el valor de los siguientes límites de sucesiones:

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+5n-1}{n^2+9}$

2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{8n^3+1}{n^5+4n^4-n}$

3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n}{3n-1}}$

4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$