Clase 07.

Relativo a la EDO $\boxed{1\cdot y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0}$ $(*)$

en la clase anterior se vió que $\{e^{3x}, e^{-2x}\} \subseteq \ker(L)$.

Por el Teorema de la Dimensión, el conjunto

$B = \{e^{3x}, e^{-2x}\}$ es una base para el espacio

solución de $(*)$.

DEF: Toda base B para el $\ker(L)$ se denomina SISTEMA FUNDAMENTAL para

$$\boxed{Ly = 0}$$

Por tanto, si $z = z(x)$ es solución de

$$\boxed{y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0},$$ entonces

existen constantes c_1, c_2 de modo que

(c.l. en $C^2(I, \mathbb{R})$) $\Leftarrow$ $\boxed{z = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}}$, esto es,

$\forall x \in I$, $\left(z(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}\right)$ donde c_1, c_2

son constantes arbitrarias.

TAREA:

Muestre que si $u = u(x)$ es solución de

$$\boxed{y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 0}$$

entonces $u(x) \in \underbrace{\text{gen}\{e^{2x}, xe^{2x}\}}_{\text{espacio vectorial generado por } y_1(x) = e^{2x},\ y_2(x) = xe^{2x}}$.

¿Cómo se escribe u?

(optativo:

Demostración (T. de la dimensión: optativo)

Se basa en el Teorema de Ex. y Unicidad de soluciones.

Supongamos $N = 2$:

El Teorema de Ex. y Unicidad implica que los PVI

$$(P_1)\ \begin{cases} y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \\ y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \end{cases}$$

y

$$(P_2)\ \begin{cases} y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 1 \end{cases}$$

tienen única solución.

si $z = z(x)$ es tal que $z \in \mathrm{Ker}(L)$ $(\Leftrightarrow Lz = 0)$

entonces se afirma que existen constantes c_1, c_2

tales que $\boxed{z = c_1 y_1 + c_2 y_2}$

En efecto, definamos $\boxed{y = z(x_0)\, y_1 + z'(x_0)\, y_2 .}$

entonces y verifica el PVI:

$$(\hat{P})\ \begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = z(x_0) \\ y'(x_0) = z'(x_0) \end{cases}$$

Pues $L(y) = z(x_0)\underbrace{L(y_1)}_{0} + z'(x_0)\underbrace{L(y_2)}_{0} = 0$

$$g(x_0) = z(x_0)\,\cancel{g_1(x_0)}^{\to 1} + z'(x_0)\,\cancel{g_2(x_0)}^{\to 0} = z(x_0)$$

$$g'(x_0) = z(x_0)\,\cancel{g_1'(x_0)}^{\to 0} + z'(x_0)\,\cancel{g_2'(x_0)}^{\to 1} = z'(x_0)$$

Esto es,
$$\begin{cases} L\,g = 0 \\ g(x_0) = z(x_0) \\ g'(x_0) = z'(x_0) \end{cases}$$

Además por el Teorema de Ex. y Unicidad la función g es única. Se concluye notando que z obviamente verifica el PVI $(\hat{P})$

Por tanto, $\boxed{z = g}$, esto es,

$$\boxed{z = c_1 g_1 + c_2 g_2}.$$

FIN Teorema de la Dim$(\ker(L))$.

OBS · Para determinar si un conjunto de n soluciones de $Ly=0$, con $\underline{\text{orden}(L)=n}$ es base de $\ker(L)$, es útil el wronskiano, a saber

DEF: Dadas las funciones $y_1, y_2, \dots, y_n \in C^n(I,\mathbb{R})$, se define:

$$W(y_1,\dots,y_n;x_0) = \det \begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}_{n\times n}$$

$(x_0 \in I)$

$W(y_1, y_2, \dots, y_n; x_0)$ se denomina el WRONSKIANO de las funciones $y_1, \dots, y_n$ evaluado en el punto $x_0 \in \bigcap_{j=1}^{n} \operatorname{Dom} y_j$

Ejemplo:

$$W(e^{-2x}, e^{3x}; x_0=0) = \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \\ \multicolumn{2}{c}{\left| \begin{matrix} e^{-2x} & e^{3x} \\ -2e^{-2x} & 3e^{3x} \end{matrix} \right|_{x_0=0}} \end{array}$$

$$y_1 = \underline{e^{-2x}}, \quad y_2 = \underline{e^{3x}} \qquad = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

TEOREMA

Si las funciones $g_1, g_2, \ldots, g_n \in C^n(I, \mathbb{R})$ son tales que para algún $x_0 \in I$

$$\boxed{W(g_1, g_2, \ldots, g_n; x_0) \neq 0},$$ entonces

$\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ es l.i. en $V = C^n(I, \mathbb{R})$

DEM:

1º Hacemos la combinación lineal nula en $C^n(I, \mathbb{R})$ para las funciones $g_1, \ldots, g_n$:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} c_j g_j = \theta} \quad (\theta \in C^n(I, \mathbb{R}))$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes.

$$\Rightarrow \forall x \in I, \quad \boxed{\sum_{j=1}^{n} c_j g_j(x) = \theta(x) = 0 \text{ en } \mathbb{R}!}$$

Para simplificar, pensemos que $\boxed{n = 2}$.

Entonces tenemos

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = \theta(x) = 0 \\ c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) = \theta'(x) = 0 \end{array} \right\} (S)$$

¡El objetivo es ver si $c_1 = c_2 = 0$. !

Evaluamos el sistema (S) en $x = x_0$, se obtiene:

$$\boxed{\begin{array}{l} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = 0 \end{array}} \quad (*) \quad \left(A \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Este es un sistema de ecuaciones de 2×2 con incognitas c_1 y c_2, donde la matriz de los coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix}.$$

(Aquí es necesario recordar :

TEOREMA: Sean $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$. El sistema

$\boxed{A\bar{x} = B}$ tiene única solución ssi $\det(A) \neq 0$.

$\left(\text{para } \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)$)

En nuestro caso,

$$A = \begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por hipótesis, tenemos que:

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix} = W\left(y_1(x_0), y_2(x_0)\right) \neq 0$$

Por tanto, el sistema homogéneo

$$\boxed{\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) &= 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) &= 0 \end{aligned}} \quad (*)$$

tiene única solución, a saber $c_1 = c_2 = 0$.

Por tanto, las funciones y_1, y_2 son l. i.

Corolario:

Sean $g_1, \dots, g_m$ funciones $\in C^m(I, \mathbb{R})$

si $\{g_1, \dots, g_m\}$ es l.d. en $V = C^m(I, \mathbb{R})$,

entonces:

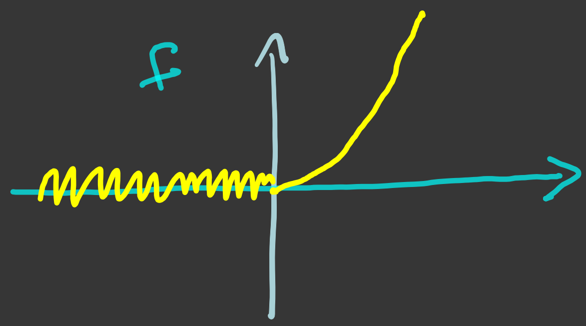
$$\forall x \in I =]a,b[\ ; \ W(g_1, \dots, g_m; x) = 0.$$

OBS:

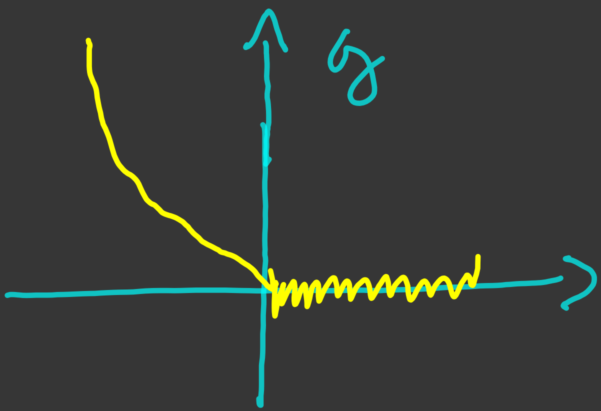
sin embargo, si las funciones g_1, g_2 son l.i. en $C^1(I, \mathbb{R})$, entonces en general, no IMPLICA que

$$W(g_1, g_2; x) \neq 0$$

Ejemplo: Consideremos f y g definidos como



$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Se puede ver que $\{f, g\}$ es l. i en $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

y $W(f, g; x) = 0$. Para esto último

existen dos casos: $\begin{cases} \text{(i)} & x \leq 0 \\ \text{(ii)} & x > 0 \end{cases}$

Veamos otro resultado importante.

$$\boxed{L = D^2 + a_1(x) D + a_0(x) D^0}$$

Teorema:

Si las funciones y_1, y_2 son dos soluciones l.i de $Ly = 0$ $\left(\{y_1, y_2\} \subseteq \ker(L) \right)$ donde

$$\boxed{Ly = y''(x) + a_1(x) y'(x) + a_0(x) y(x) = 0}$$

donde $a_1(x)$, $a_0(x)$ son funciones continuas en $I =]a, b[$. Entonces

$\forall x \in]a, b[$, $W(y_1, y_2; x) \neq 0$

Demost: (optativa).

Supongamos que existe $x_0 \in]a, b[$ tal que $W(y_1, y_2; x_0) = 0$. Entonces existen $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ con al menos α_1 o $\alpha_2 \neq 0$ tal que el sistema

$$(*)\left\{\begin{array}{l} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) = 0 \end{array}\right.$$

tiene

tiene solución no trivial ($\alpha_1 \neq 0$ y/o $\alpha_2 \neq 0$)

Se define $\varphi(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x)$

Entonces:

$$(S)\left\{\begin{array}{ll} L\varphi = 0 & (\text{pues } L g_1 = L g_2 = 0) \\ \varphi(x_0) = 0 & (\varphi(x_0) = \alpha_1 g_1(x_0) + \alpha_2 g_2(x_0) = 0) \\ \varphi'(x_0) = 0 & (\varphi'(x_0) = \alpha_1 g_1'(x_0) + \alpha_2 g_2'(x_0) = 0) \end{array}\right.$$

Pero por el Teorema de Ex. y Unicidad de soluciones, el sistema (S) tiene única solución; esta solución debe ser la solución nula. Esto es,

$$\varphi(x) \equiv 0 \quad (\varphi(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) = 0)$$

Pero esto es imposible, caso contrario

$$g_1(x) = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} g_2(x) \quad \text{ó} \quad g_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} g_1(x)$$

en contra de que $\{g_1, g_2\}$ es l.i.

Aplicación:

(1) El conjunto $A_2 = \{y_1(x) = x \, ; \, y_2(x) = e^x\}$ es l.i. en $C^2(I, \mathbb{R})$ pues

$$W(y_1(x), y_2(x), x_0) = \begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix}_{x = x_0 = 0}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Veamos si existe un operador diferencial lineal L de orden dos de modo que el espacio solución tenga como base a $B = \{y_1, y_2\}$ donde

$$\boxed{y_1(x) = x} \qquad \boxed{y_2(x) = e^x}$$

Puesto que orden$(L) = 2 \Rightarrow \dim[\operatorname{Ker}(L)] = 2$

$\Leftrightarrow$ el problema es dadas dos funciones l. i. en $V = C^2(I, \mathbb{R})$. Existe EDO homogénea $Ly = 0$ tal que las funciones l. i. dadas son base para su espacio solución?

Desarrollo: supongo que hemos encontrado un tal operador dif. lineal de orden dos

sea $y = y(x)$ una solución cualquiera

de $\boxed{Ly = 0}$ (Donde L es un operador dif. lineal de orden 2 a determinar, sabiendo que $B = \{x, e^x\}$ debe ser base de $Ker(L)$)

$y \in Ker(L)$

Entonces $\boxed{\{y(x), x, e^x\}}$ forma un conjunto de tres funciones l.d. en $C^2(I, \mathbb{R})$, esto es,

$$\boxed{\forall x_0 \in I, \quad W(y(x), \underbrace{x}_{y_1(x)}, \underbrace{e^x}_{y_2(x)}; x = x_0) = 0}$$

Desarrollemos la expresión

$$W(y(x), x, e^x; x = x) = 0.$$

Hipótesis $W = 0$

$$\begin{array}{cccc} & y & y_1(x) & y_2(x) \\ W(y(x), x, e^x; x) = & \left| \begin{matrix} y(x) & x & e^x \\ y'(x) & 1 & e^x \\ y''(x) & 0 & e^x \end{matrix} \right| \end{array} \to \ \Big/ \ -x \Rightarrow$$

$x - 1(x)$

keep same ele File 1

$$= \left| \begin{matrix} y - xy' & 0 & e^x(1-x) \\ y'(x) & 1 & e^x \\ y''(x) & 0 & e^x \end{matrix} \right| = (1)(-1)^2 \left| \begin{matrix} y - xy' & e^x(1-x) \\ y'' & e^x \end{matrix} \right|$$

$$\left(= W(y, x, e^x; x_0) = 0 \right)$$

$$= \boxed{(y - xy')e^x - e^x(1-x)y'' = 0} \quad \Big/ \ e^{-x}$$

$$\Rightarrow (1-x)y''(x) - (y(x) - xy'(x)) = 0 \quad \Big/ : 1-x \quad (x \neq 1)$$

$$\Rightarrow \boxed{y''(x) + \left(\frac{x}{1-x}\right) y'(x) - \left(\frac{1}{1-x}\right) y(x) = 0 \quad (*) \quad \forall x \in]-\infty, 1[\text{ or } x \in]1, +\infty[}$$

OBS: Note que para $\begin{cases} y_1(x) = x \\ y_2(x) = e^x \end{cases}$

Resulta que

$$W(y_1, y_2; x) = \begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix} = xe^x - e^x = e^x(x-1)$$

Por tanto, $W(x, e^x; x_0 = 1) = 0$

Ejercicio:

Considere la EDO: $\boxed{y'' + \left(\frac{x}{1-x}\right)y' - \left(\frac{1}{1-x}\right)y = 0}$ $(*)$

Muestre que $\begin{cases} y_1(x) = x \\ y_2(x) = e^x \end{cases}$

son soluciones l. i de la EDO $(*)$

en $]-\infty, 1[$ y $]1, +\infty[$.

OBS: si f y g son dos funciones $C^1(I,\mathbb{R})$, entonces

$$W(f,g;t) = \begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{vmatrix} = f(t)\,g'(t) - g(t)\,f'(t).$$

Teorema: (Teorema de Abel)

si y_1 e y_2 son soluciones de

$$\boxed{y''(x) + p(x)\,y'(x) + q(x)\,y(x) = 0,}$$

EDO lineal Homog de orden 2 a coef variables

y_1, y_2 definidas en $I =]a,b[$ con p, q continuas en I;

entonces:

$$\boxed{W(y_1,y_2;x) = c\,e^{-\int p(x)dx}}$$

con c constante.

Dem :

Sea $W(x) = W(y_1, y_2; x)$, entonces.

$$\boxed{W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2} \Big/ \frac{d}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad W'(x) = (\underline{y_1' y_2'} + y_1 y_2'') - (y_1'' y_2 + \underline{y_1' y_2'})$$

$$= y_1 y_2'' - \underline{y_1''}\, \underline{y_2} \quad \text{- - - } (*)$$

Pero para $i = 1, 2$:

$$y_i'' = -(p(x) y_i'(x) + q(x) y_i(x))$$

Ahora en $(*)$:

$$W'(x) = y_1(x)\left(-p(x) y_2' - \underline{q(x) y_2(x)}\right) -$$

$$-\underline{y_2(x)}\left(-p(x) y_1' - \underline{q(x) y_1(x)}\right)$$

$$\Rightarrow W'(x) = -p(x)\left[y_1(x) y_2'(x) - y_1'(x) y_2(x)\right] = -p(x) W(x)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{W'(x) + p(x) W(x) = 0}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{W(x) = c\, e^{-\int p(x)\, dx}}$$

COROLARIO

El wronskiano de dos soluciones y_1, y_2 de

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0$$

es SIEMPRE cero o NUNCA es cero.

Dem:

$$W(x) = c\, e^{-\int p(x)\,dx} \qquad \text{con } \exp(t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\therefore\ W(x) = 0 \iff c = 0 \iff \begin{cases} W(x) = 0 \\ \forall x \in I \end{cases}$$

Aplicación: (1)

Las funciones $\begin{cases} y_1(x) = \underline{e^x} \\ y_2(x) = \underline{\cos(x)} \end{cases}$

no pueden ser solución de la EDO

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0 \quad \text{en} \quad \boxed{I =]-\pi, \pi[}$$

cualesquiera sean $\begin{cases} p = p(x) \\ q = q(x) \end{cases}$, continuas en I

en efecto:

$$W(\underline{e^x, \cos(x)}; (x)) = \begin{vmatrix} e^x & \cos(x) \\ e^x & -\operatorname{sen}(x) \end{vmatrix}$$

$$= -e^x\left[\operatorname{sen}(x) + \cos(x)\right]$$

$\longrightarrow$ FIN Mi 24/08/22