Oscilaciones

Física - II

Prof. José G. Aguirre Gómez

Departamento de Física

Universidad de Concepción

jaguirre@udec.cl - Oficina: 315

Atención de Estudiantes:
Jueves 15:15 a 19:00 hrs.

- Describir las oscilaciones en términos de su amplitud, periodo, frecuencia y frecuencia angular.
- Realizar cálculos de Movimiento Armónico Simple (MAS).
- Utilizar los conceptos de energía para analizar el MAS.
- Aplicar las ideas de MAS en diferentes situaciones físicas.
- Analizar el movimiento de un péndulo simple.
- Caracterizar un péndulo físico y calcular las propiedades de su movimiento.
- Caracterizar las variables que determinan la duración de una oscilación.
- Describir un Movimiento Armónico Amortiguado (MAA) y determinar el efecto que una fuerza actuando sobre un oscilador, en la frecuencia precisa, lleva a la resonancia.

En un **movimiento periódico** u **oscilatorio** un objeto regresa regularmente a una dada posición después de un intervalo de tiempo fijo.

- Moléculas en un sólido oscilan en torno a sus posiciones de equilibrio.
- Ondas electromagnéticas (ondas de luz, radar, radio, rayos-X, etc.) son caracterizadas por vectores de campo eléctrico y magnéticos oscilatorios.
- Circuitos eléctricos de corriente alterna, voltaje, corriente y carga eléctrica varían periódicamente con el tiempo.

En sistemas mecánicos, si la fuerza actuando sobre el objeto es proporcional a la posición del objeto (según una posición de equilibrio) y dirijida hacia la posición de equilibrio, da origen a un **Movimiento Armónico Simple (MAS)**.

Considere un bloque de masa m unido al extremo de un resorte (**Fig.1**).

El bloque se mueve libremente sobre una superficie horizontal sin fricción.

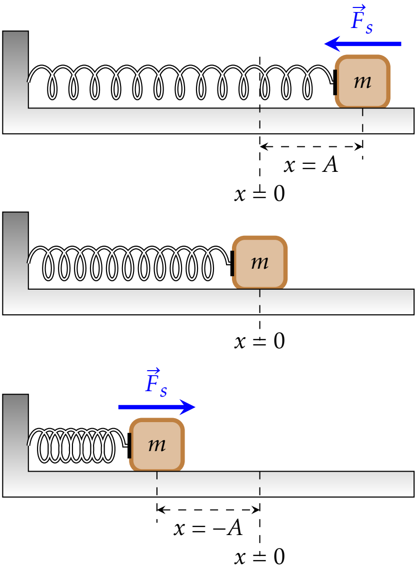

Figura 1: *Resorte-objeto: (a) estirado; (b) equilibrio; (c) comprimido.*

Para el sistema bloque-resorte de la **Fig.1**, se tiene:

- El bloque es desplazado a la posición $x = A$; se libera desde el reposo; el resorte ejerce una fuerza hacia la izquierda; la aceleración inicial es $a_x = -kA/m$.
- El bloque pasa por la posición $x = 0$; su aceleración es cero; su rapidez es máxima (cambio de signo de la aceleración).
- El bloque llega a la posición $x = -A$; su rapidez es cero; el resorte ejerce una fuerza hacia la derecha; la aceleración es $a_x = +kA/m$.
- El bloque se mueve hacia la derecha, pasa por la posición $x = 0$ y llega a su posición inicial en $x = A$.

El bloque **osclila** entre las posiciones $x = \pm A$. Movimiento eterno en ausencia de fricción (movimiento idealizado).

Situaciones como las de la **Fig.1** son habituales: Se aplica el modelo de **partícula en movimiento armónico simple (MAS)** para describirlas.

Consideremos al eje-x como el eje del movimiento. Recordemos que

$$ma_x = F_x, \quad a_x = -\frac{kx}{m} \quad \text{y} \quad a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

de modo que se tiene la ecuación de movimiento de la partícula

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \tag{1}$$

Haciendo

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad \therefore \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2}$$

la Ec.(1) se reescribe como

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x} \quad \text{o} \quad \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0} \tag{3}$$

Una posible solución de esa ecuación diferencial parcial de segundo orden es

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi), \quad A,\ \omega \text{ y } \phi \text{ son constantes.} \tag{4}$$

En la ecuación anterior:

- A es la **amplitud** del movimiento; **el máximo valor de la posición de la partícula en la dirección x positiva o negativa desde su posición de equilibrio.**
- ω **es la frecuencia angular** $\mathrm{rad/s}$; mide que tan rápido se presentan las oscilaciones [note la definición en la Ec.(2)].
- ϕ es la **fase constante** (o ángulo de fase inicial). A y ϕ son determinados a partir de la posición y la velocidad de la partícula en $t = 0$.
- $(\omega t + \phi)$ es la **fase** del movimiento.

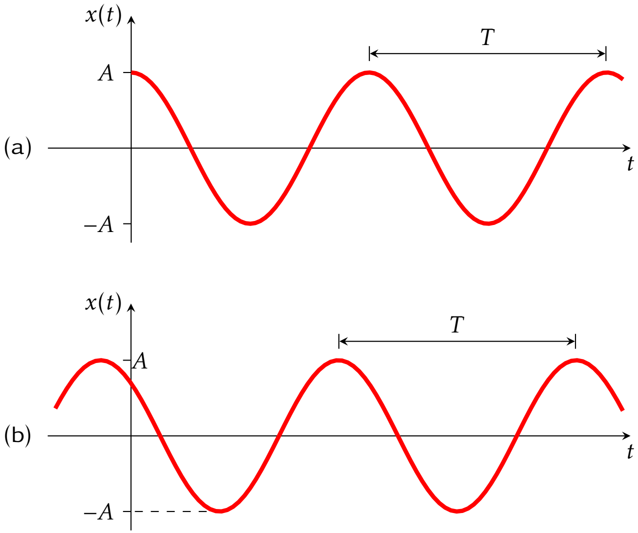

Figura 2: *Gráfico $x(t)$ de un objeto com MAS. (a) En $t = 0$; $x = A$ y $\phi = 0$. (b) Un MAS general.*

El **periodo** T: Intervalo de tiempo requerido para que la partícula pase a través de un ciclo completo de su movimiento, esto es

$$x(t+T) = x(t), \quad \text{y} \quad v_x(t+T) = v_x(t).$$

La fase aumenta en 2π rad en el intervalo de tiempo T. O sea

$$\omega(t+T) + \phi - (\omega t + \phi) = 2\pi$$

de la cual se obtiene

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \tag{5}$$

La **frecuencia** f: Es el inverso del periodo; es el **número de oscilaciones que experimenta la partícula por unidad de intervalo de tiempo**:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}, \quad \text{unidades SI :} \quad 1\,\text{Hz} \equiv \frac{1}{\text{s}} \tag{6}$$

De la Ec.(6), se obtiene

$$\boxed{\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}} \tag{7}$$

Usando la Ec.(2) para ω, se tiene

$$\text{Periodo} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{8a}$$

$$\text{Frecuencia} \quad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{8b}$$

las que dependen **solamente** de la masa de la partícula y de la constante de fuerza del resorte y **no** de los parámetros del movimiento como A o ϕ.

Además, para un MAS,

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \tag{9}$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x \tag{10}$$

Los valores máximos de la magnitud de v_x y a_x son

$$\boxed{v_{\text{máx}} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}}A} \quad \text{y} \quad \boxed{a_{\text{máx}} = \omega^2 A = \frac{k}{m}A} \tag{11}$$

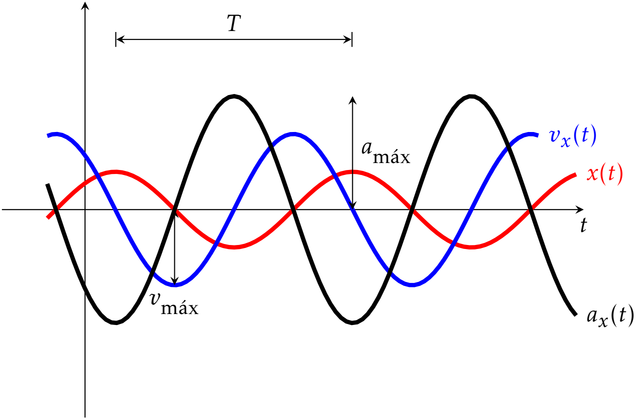

Figura 3: *Gráficos $x(t)$ [línea roja], $v_x(t)$ [línea azul] y $a_x(t)$ [línea negra] de un objeto com MAS.*

La Ec.(4) describe el MAS de una partícula en general.

La frecuencia angular ω se calcula usando la Ec.(2) y las constantes A y ϕ, a partir de las condiciones iniciales, es decir, en $t = 0$.

Considere la situación esquematizada en la Fig.4.

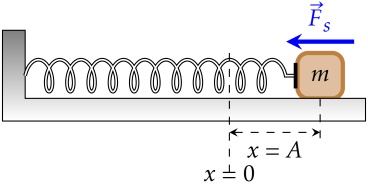

Figura 4: *Sistema bloque-resorte partiendo desde el reposo con el bloque en* $x = A$ *en* $t = 0$*:* $x(t) = A\cos(\omega t)$.

En este caso, las condiciones iniciales son $x(0) = A$ y $v_x(0) = 0$, o sea

$$x(0) = A\cos\phi = A \quad \text{y} \quad v_x(0) = -\omega A\sin\phi = 0$$

las que se cumplen si $\phi = 0$: $\cos(0) = 1$ y $\sin(0) = 0$.

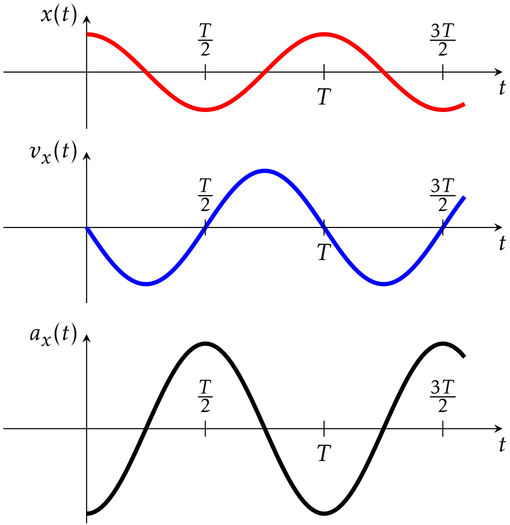

Figura 5: *Gráficos $x(t)$, $v_x(t)$ y $a_x(t)$ para la situación anterior.*

Considere, ahora, la situación esquematizada en la la **Fig.6**.

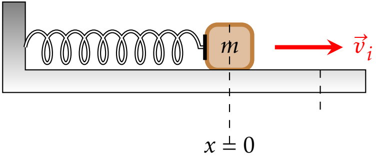

Figura 6: *Sistema bloque-resorte con* $x(0) = 0$; $v_x(0) = v_i$.

De la primera condición se tiene que

$$x(0) = A\cos(\overset{0}{\cancel{\omega t}} + \phi) = A\cos\phi = 0, \quad \phi = \pm\frac{\pi}{2}$$

la que aplicada a $v_x(0) = -\omega A\sin(\omega t + \phi) = -\omega A\sin\phi$, da

$$v_x(0) = -\omega A(\pm 1) = v_i; \quad A > 0, \quad v_i > 0 \quad \therefore \quad \phi = -\frac{\pi}{2}$$

Así

$$x(t) = A\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

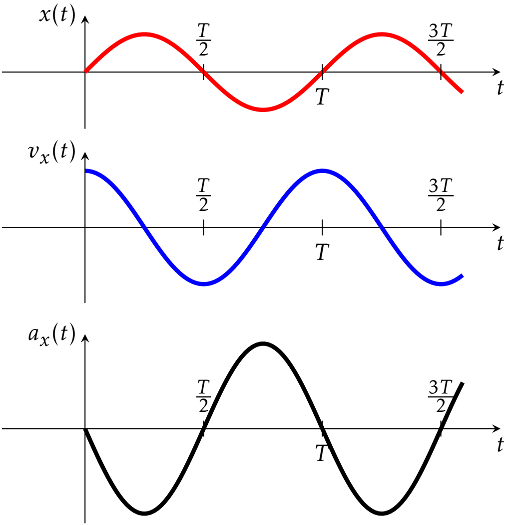

Figura 7: *Gráficos $x(t)$, $v_x(t)$ y $a_x(t)$ para la situación anterior.*

Ejemplo

Un bloque de 200 g de masa, conectado a un resorte ligero de constante de fuerza 5.00 N/m es libre de oscilar sobre una superficie horizontal sin fricción. El bloque se desplaza 5.00 cm desde el equilibrio y se libera desde el reposo como en la **Fig.4**.

(a) Hallar el periodo del movimiento del bloque.

(b) Determinar la máxima rapidez del bloque.

(c) Determinar la máxima aceleración del bloque.

(d) Exprese la posición, velocidad y aceleración del bloque en función del tiempo.

Solución

(a) Usemos la Ec.(2) para determinar la frecuencia angular de la oscilación:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5.00\,\mathrm{N/m}}{0.200\,\mathrm{kg}}} = 5.00\,\mathrm{rad/s}.$$

Continuación

Usemos la Ec.(8a) para determinar el periodo de la oscilación

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6.28}{5.00\,\mathrm{rad/s}} = 1.26\,\mathrm{s}$$

(b) La magnitud de la máxima rapidez de la oscilación es dada por la Ec.(11), con $A = 5.00 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}$,

$$v_{\text{máx}} = \omega A = (5.00\,\mathrm{rad/s})(5.00 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}) = 0.25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

(c) La magnitud de la máxima aceleración de la oscilación es dada, también, por la Ec.(11), con $A = 5.00 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}$,

$$a_{\text{máx}} = \omega^2 A = (5.00\,\mathrm{rad/s})^2(5.00 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}) = 1.25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

(d) Como el bloque parte desde el reposo en la posición $x = A = 5.00 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}$, se tiene

$$x(0) = (5.00 \times 10^{-2}\,\mathrm{m})\cos\phi = 5.00 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}, \quad \therefore \quad \phi = 0$$

Continuación

De lo anterior, se llega a

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) = (5.00\times 10^{-2}\,\mathrm{m})\cos(5.00t)$$

$$v_x(t) = -\omega A\sin(\omega t + \phi) = -\left(0.25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)\sin(5.00t)$$

y

$$a_x(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi) = -\left(1.25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)\cos(5.00t)$$

Tarea: Y si el bloque se libera desde la misma posición inicial, $x(0) = 5.00\,\mathrm{cm}$, pero con una velocidad inicial $v_x(0) = -0.100\,\mathrm{m/s}$, ¿qué partes de la solución cambian y cuáles son las nuevas respuestas a éstas? Note que en este caso la posición inicial no es la amplitud de la oscilación!

Ejemplo

Un automóvil de 1.30×10^3 kg de masa se construye de modo que su chasis está sostenido mediante cuatro amortiguadores. Cada amortiguador tiene una constante de fuerza de 2.00×10^4 N/m. El automóvil es levantado una cierta distancia desde el suelo y se libera de modo que las cuatro ruedas hacen contacto simultáneamente con el piso. Calcule la frecuencia de oscilación del automóvil asumiendo un MAS.

Solución

El contacto simultáneo de las cuatro ruedas con el piso implica que cada uno de los resortes se desplazó desde su posición de equilibrio la misma distancia, digamos x.

La fuerza de restauración de cada uno de los amortiguadores es $F_i = -k_i x$.

La fuerza restauradora total debida a los cuatro amortiguadores es

$$F_{\text{neta}} = -k_{\text{neta}} x = -\left(\sum_i k_i \right) x, \quad \therefore \; k_{\text{neta}} = \sum_i k_i = 4k$$

Continuación

La frecuencia angular de la oscilación del automóvil como un cuerpo con MAS es

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{\text{neta}}}{m}} = \sqrt{\frac{8.00 \times 10^4\,\text{N/m}}{1.30 \times 10^3\,\text{kg}}} = 7.84\,\text{rad/s}$$

así, la frecuencia de oscilación del automóvil es

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{7.84\,\text{rad/s}}{6.28} = 1.25\,\text{Hz}.$$

En el sistema bloque-resorte de la **Fig.1** la energía mecánica es un cantidad conservada. Con masa del resorte despreciable, en una posición arbitraria x, la energía cinética del sistema es

$$K = \frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2}m\left[-\omega A\sin(\omega t+\phi)\right]^2 = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\phi). \tag{12}$$

La energía potencial elástica almacenada en el resorte es

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\left[A\cos(\omega t+\phi)\right]^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\phi). \tag{13}$$

Con K y U cantidades **siempre** positivas, la energía mecánica del oscilador armónico simple es

$$E = K+U = \frac{1}{2}kA^2\left[\sin^2(\omega t+\phi)+\cos^2(\omega t+\phi)\right] = \frac{1}{2}kA^2 \tag{14}$$

La energía mecánica total de un oscilador armónico simple es una constante de movimiento y es proporcional a la amplitud al cuadrado de las oscilaciones.

Variacones de K y U, en el tiempo y en la posición, para un oscilador armónico son graficadas en la **Fig.8**.

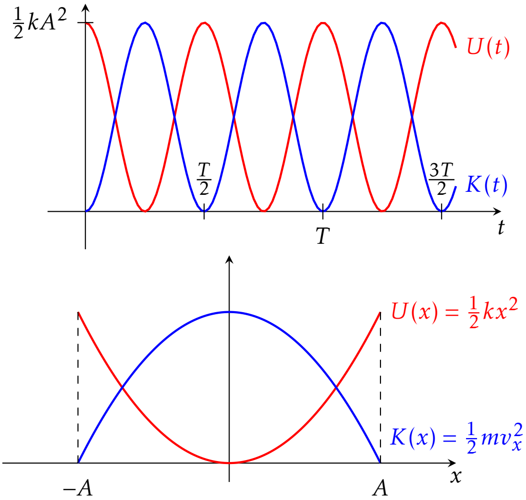

Figura 8: *Energía cinética y potencial de un oscilador armónico simple. (a) En función del tiempo. (b) En función de la posición.*

Finalmente, la velocidad del bloque en una posición arbitraria se obtiene de la ecuación energética

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

Después de cierta álgebra se llega a

$$v_x = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}. \tag{15}$$

Los osciladores armónicos son buenos modelos en el estudio de una gran variedad de fenómenos físicos. Sistemas bloques-resortes, átomos, salto *bungee*, sintonía en aparatos de radio y televisión, emisión de luz láser, etc.

Ejemplo

Un carro de 0.500 kg conectado a un resorte de constante de fuerza 20.0 N/m oscila sobre una pista (de aire) horizontal sin fricción:

(a) Calcule la energía total del sistema y la rapidez máxima del carro si la amplitud del movimiento es de 3.00 cm.

(b) Determine el valor de la velocidad del carro en la posición 2.00 cm.

(c) Calcule la energía cinética y potencial del carro en la posición 2.00 cm.

Solución

A) Se tiene $A = 3.00 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}$, $m = 5.00 \times 10^{-1}\,\mathrm{kg}$ y $k = 20.0\,\mathrm{N/m}$. La energía total del sistema es

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}\left(20.0\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right)(3.00 \times 10^{-2}\,\mathrm{m})^2 = 9.00 \times 10^{-3}\,\mathrm{J}$$

Continuación

Cuando el carro está en la posición $x = 0$ la energía total es puramente cinética y la rapidez del carro es máxima. En $x = 0$,

$$\frac{1}{2}mv_{\text{máx}}^2 = 9.00\times 10^{-3}\,\text{J},\quad v_{\text{máx}} = \sqrt{\frac{2(9.00\times 10^{-3}\,\text{J})}{5.00\times 10^{-1}\,\text{kg}}} = 0.190\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(b) La frecuencia angular del sistema es

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20.0\,\text{N/m}}{0.500\,\text{kg}}} = 6.32\,\text{rad/s}$$

Usando la Ec.(15), con $x = 2.00\times 10^{-2}\,\text{m}$

$$v_x = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} = (6.32\,\text{rad/s})\sqrt{(0.03^2 - 0.02^2)\,\text{m}^2} = \pm 0.141\,\text{m/s}$$

con (+) carro moviéndose hacia la derecha y (-), caso contrario.

Continuación

(c) Con el carro en $x = 0.0200\,\text{m}$, la energía potencial del sistema es

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\left(20.0\,\frac{\text{N}}{\text{m}}\right)(2.00\times 10^{-2}\,\text{m})^2 = 4.00\times 10^{-3}\,\text{J}$$

y la energía cinética es

$$K = E - U = (9.00\times 10^{-3} - 4.00\times 10^{-3})\,\text{J} = 5.00\times 10^{-3}\,\text{J}$$

Consideremos una partícula ubicada en el punto P sobre la circunferencia de un círculo de radio A: En $t = 0$, la línea OP forma un ángulo ϕ con el eje x. El círculo es llamado **círculo de referencia** y permite comparar el MAS con el MCU. Se escoje la posición P en $t = 0$ como la posición de referencia, **Fig.9(a)**.

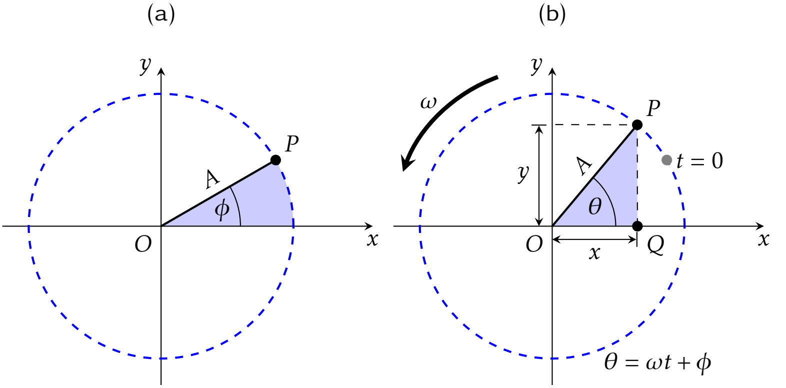

Figura 9: *Correspondencia entre MAS y MCU.*

Conforme la partícula se mueve sobre la trayectoria circular con rapidez angular constante ω, desde $t = 0$ a t, su posición angular muda a $\theta = \omega t + \phi$.

La proyección del punto P sobre el eje x, punto Q, en una vuelta completa se mueve hacia la izquierda y hacia la derecha entre los límites $x = \pm A$.

Del triángulo OPQ vemos que

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \tag{16}$$

la cual es equivalente a la Ec.(4) y muestra que el punto Q tiene un MAS a lo largo del eje x:

El MAS a lo largo de una línea recta puede ser representado mediante la proyección del MCU a lo largo de un diámetro de un círculo de referencia.

El intervalo de tiempo para una revolución completa del punto P sobre el círculo de referencia es igual al periodo T del MAS entre $x = \pm A$: ω para P es igual a ω del MAS a lo largo del eje x.

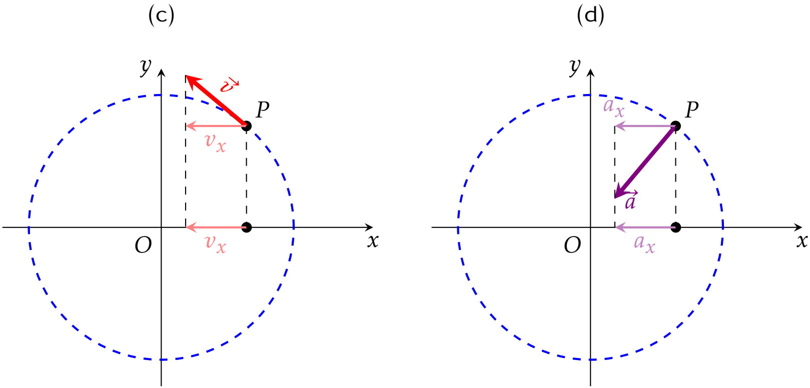

Figura 10: *Velocidad y aceleración de una partícula en un MCU.*

Recuerde que en un MCU: $v = \omega r$ y $a = v^2/r$, como en este caso $r = A$, entonces $v = \omega A$ y $a = \omega^2 A$.

El punto Q se mueve con:

$$v_x = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \quad \text{y} \quad a_x = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$$

Ejemplo

Una partícula da vuelta en la dirección contraria a las manecillas de un reloj en un círculo de $3.00\,\mathrm{m}$ de radio, con una rapidez angular constante de $8.00\,\mathrm{rad/s}$. En $t = 0$, la partícula tiene una coordenada x de $2.00\,\mathrm{m}$ y se mueve hacia la derecha.

(a) Determinar la coordenada x de la partícula en función del tiempo.

(b) Encuentre la componente x de la velocidad y la aceleración de la partícula para cualquier instante t

Solución

Se tiene $A = 3.00\,\mathrm{m}$; $\omega = 8.00\,\mathrm{rad/s}$

(a) En $t = 0$ se tiene $x(0) = 2.00\,\mathrm{m}$, luego

$$x(0) = A\cos\phi = 2.00\,\mathrm{m}; \quad \cos\phi = \frac{2.00\,\mathrm{m}}{3.00\,\mathrm{m}}; \quad \therefore \quad \phi = \pm 0.268\pi$$

Ahora, $\sin(0.268\pi) = 0.746$ y $\sin(-0.268\pi) = -0.746$. En $t = 0$, $v_x(0) = -\omega A\sin\phi > 0$, de modo que $\phi = -0.268\pi$ y

$$x(t) = (3.00\,\mathrm{m})\cos(8.00t - 0.286\pi)$$

Continuación

(b) La velocidad de la partícula es

$$v_x(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi) = (-24.0\,\mathrm{m/s})\sin(8.00t - 0.268\pi)$$

y la aceleración de la partícula es

$$a_x(t) = -\omega^2 x(t) = (-192\,\mathrm{m/s^2})\cos(8.00t - 0.268\pi)$$

Una plomada (partícula) de masa m se suspende de una cuerda ligera de longitud L fija al extremo superior. Movimiento vertical cercano a un MAS para ángulo $\theta < 10°$.

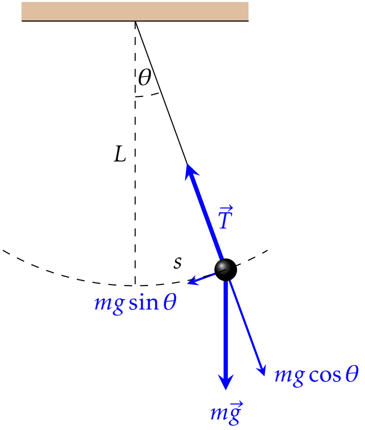

Figura 11. *Esquema de un péndulo simple.*

La componente tangencial de $m\vec{g}$ tiende a llevar a la partícula hacia $\theta = 0$. Usando Newton se tiene

$$-mg\sin\theta = m\frac{d^2s}{dt^2},$$

con s la posición de la masa a lo largo del arco. Dado que $s = L\theta$; $ds/dt = Ld\theta/dt$ y $d^2s/dt^2 = Ld^2\theta/dt^2$, se tiene

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

Si $\theta < 10°$, entonces $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$ así

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta \quad o \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \qquad (17)$$

La solución de la Ec.(17) es

$$\theta(t) = \theta_{\text{máx}} \cos(\omega t + \phi):$$

$\theta_{\text{máx}}$ es la *máxima posición angular* y la frecuencia angular es

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \tag{18}$$

El periodo de las oscilaciones es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{19}$$

El periodo y la frecuencia de un péndulo simple dependen sólo de la longitud de la cuerda y la magnitud de la aceleración de gravedad.

Péndulos simples pueden usarse como cronómetros, mediciones precisas de aceleración en caida libre (variaciones locales de g pueden dar información de yacimientos de pretróleo y otros recursos subterráneos.)

Ejemplo

Christian Huygens (1629-1695), el mayor relojero de la historia, sugirió que se podía definir una unidad internacional de longitud como la longitud de un péndulo simple con un periodo de exactamente 1 s. ¿Cuánto más corta sería la unidad de longitud actual si se hubiese seguido su sugerencia? Asuma $g = 9.80\,\mathrm{m/s^2}$

Solución

Se debe determinar L:

$$L = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{(1\,\mathrm{s}^2)(9.80\,\mathrm{m/s^2})}{39.5} = 0.248\,\mathrm{m}$$

La unidad de longitud sería aproximadamente $\frac{1}{4}$ el valor de la longitud estándar actual.

Tarea ¿Y si Huygens hubiera nacido en otro planeta, cuál debería ser el valor de g para que el metro en función del péndulo de Huygens tuviera el mismo valor que el actual?

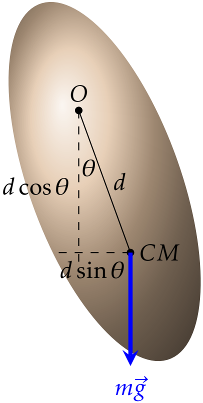

Figura 12: *Esquema de un péndulo físico.*

Sea O el punto de giro a la distancia d del centro de masa.

El torque en torno de O debido a la fuerza gravitacional es

$$\tau = I\alpha; \quad -mgd\sin\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Usando la aproximación de ángulos pequeños se obtiene

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{mgd}{I}\right)\theta \qquad (20)$$

cuya solución se puede escribir como

$$\theta(t) = \theta_{\text{máx}}\cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \quad \text{y} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \qquad (21)$$

Ejemplo

Una barra uniforme de masa M y longitud L se articula en torno a un extremo y oscila en un plano vertical. Encuentre el periodo de oscilación si la amplitud del movimiento es pequeña.

Solución

El momento de inercia de una barra en torno a un eje en uno de sus extremos a la distancia $L/2$ del centro de masa es

$$I = \frac{1}{3}ML^2$$

El brazo de torsión de la fuerza gravitacional es $d = \frac{L}{2}$, así

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\left(\frac{2}{MgL}\right)} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{L}{g}}$$

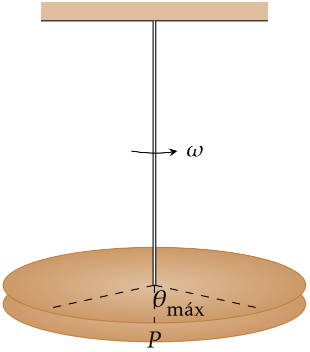

Figura 13: *Un péndulo de torsión.*

El cuerpo rota un ángulo θ. El alambre ejerce un momento de torsión restaurador

$$\tau = -\kappa\theta; \quad \kappa \text{ constante de torsión}$$

Aplicando un torque de valor conocido para girar el alambre a través de un ángulo medible θ. Usando Newton para el movimiento rotacional

$$\tau = -\kappa\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

o, simplemente

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I}\theta; \quad \omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \tag{22}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} \tag{23}$$

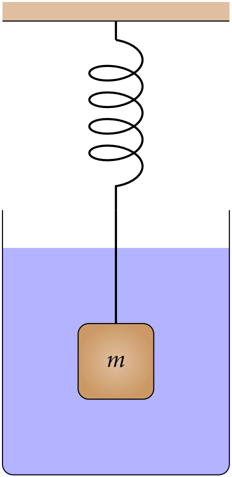

Figura 14: *Un péndulo amortiguado.*

Fuerzas no conservativas retardan un MAS. La energía mecánica disminuye produciendo un **Movimiento amortiguado.**

Suponga una fuerza retardadora $\vec{R} = -b\vec{v}$ (b es el **coeficiente de amortiguamiento**). Si $F_x = -kx$, aplicando Newton se obtiene

$$\sum F_x = -kx - bv_x = ma_x$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \qquad (24)$$

La cual es una ecuación diferencial ordinaria que requiere algo de cálculo diferencial para resolverla. Si se supone una solución de la forma:

$$x(t) = Ae^{\lambda t}$$

La ecuación diferencial rápidamente se transforma en:

$$m\lambda^2 + b\lambda + k = 0$$

Esta ecuación es una cuadrática la que podemos reescribir como:

$$\frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{b}{2m}\lambda + \frac{k}{2m} = 0$$

La solución de esta cuadrática tiene la siguiente discriminante:

$$\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = \left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \omega_0^2$$

con

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

siendo ω_0 la frecuencia natural que tendría el oscilador en ausencia de la fuerza retardadora.

Esta discriminante es importantísima para describir el movimiento resultante, dando 3 posibles casos:

- $\left(\frac{b}{2m}\right) - \omega_0 > 0$; Caso sobreamortiguado.
- $\left(\frac{b}{2m}\right) - \omega_0 = 0$; Caso críticamente amortiguado.
- $\left(\frac{b}{2m}\right) - \omega_0 < 0$; Caso subamortiguado.

Revisaremos cada uno de los casos.

Caso Sobreamortiguado

Este comportamiento se produce cuando se cumple que

$$\left(\frac{b}{2m}\right) - \omega_0 > 0$$

En esta situación la fuerza retardadora es mucho mas relevante que la fuerza de restitución y la solución para x será la siguiente:

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

con

$$\lambda_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4km}}{2m} \quad \lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4km}}{2m}$$

donde los coeficientes A_1, A_2, λ_1 y λ_2 son constantes que dependen de la posición y la velocidad inicial del sistema.

El sistema se aproximará asintóticamente al punto de equilibrio, por lo tanto no oscilará.

Si el sobreamortiguamiento es fuerte, la fuerza retardadora rápidamente disminuirá la velocidad del sistema, el cual se moverá lentamente hacia su posición final.

Figura 15: *Ejemplo de sobreamortiguamiento.*

El cierre mecánico de una puerta automática, es un mecanismo con el cual queremos que la puerta llegue a una posición de equilibrio que es estar cerrada, sin embargo, no queremos que la puerta dé un portazo, o sea, queremos que la puerta llegue lentamente a su posición de equilibrio. Para diseñar ese mecanismo, requerimos forzosamente de un oscilador sobreamortiguado.

Caso Subamortiguado:

Este comportamiento se produce cuando se cumple que

$$\left(\frac{b}{2m}\right) - \omega_0 < 0$$

En esta situación la fuerza de restitución es mucho mas relevante que la fuerza retardadora y la solución para x será la siguiente:

$$x(t) = Ae^{\frac{-b}{2m}t}cos(\omega t + \phi)$$

con

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

Ante esta situación, el sistema oscilará de manera similar al oscilador armónico simple con la diferencia de que la amplitud irá disminuyendo de manera exponencial.
Si el subamortiguamiento es fuerte, entonces el sistema se parecerá cada vez mas a un oscilador armónico simple.

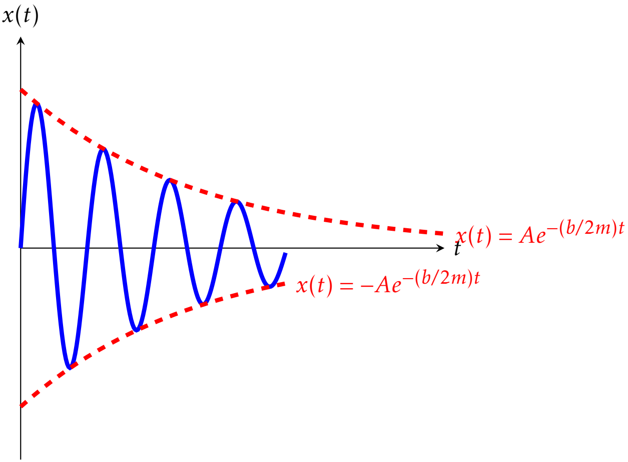

Figura 16: *Gráfico del desplazamiento versus tiempo para el oscilador armónico subamortiguado.*

Figura 17: *Ejemplo de Subamortiguamiento.*

En este caso hay un movimiento periódico con una pequeña fuerza retardadora que terminará deteniendo el movimiento tarde o temprano. De esa manera, un columpio, una silla mecedora o las cuerda de una guitarra podrían ser ejemplos de osciladores subamortiguados ya que son mecanismos en los cuales buscamos que oscilen la mayor cantidad de tiempo posible antes de detenerse.

Caso Críticamente Amortiguado

Este comportamiento se produce cuando se cumple que

$$\left(\frac{b}{2m}\right) - \omega_0 = 0$$

Esta es la situación de frontera entre el caso subamortiguado y el caso sobre-amortiguado con la siguiente solución para x:

$$x(t) = (x_0 + ct)e^{(-\omega_0 t)}$$

con

$$c = v_0 + x_0\omega_0$$

Su comportamiento es muy similar al caso sobreamortiguado, sin embargo, es el movimiento que mas rápidamente vuelve a su posición de equilibrio.

Si se aumenta ligéramente la fuerza de restitución, el sistema comenzará a oscilar, mientras que si se disminuye ligeramente la fuerza de restitución, el sistema llegará mas lentamente a su punto de equilibrio.

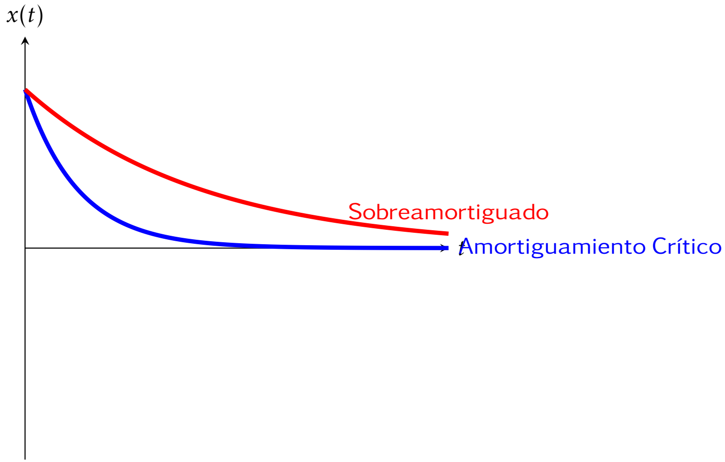

Figura 18: *Gráfico de comparación entre el movimiento sobreamortiguado y el críticamente amortiguado.*

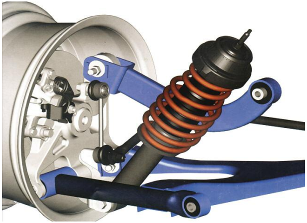

Figura 19: *Ejemplo de Amortiguamiento crítico.*

La suspensión de un automóvil es un mecanismo que permite que los automóviles se muevan con suavidad sobre irregularidades en el camino mediante un sistema de resortes. Si el resorte estuviese sobreamortiguado, la suspensión estaría demasiado dura, lo que no permitiría al vehículo que se moviera con suavidad o lo haría saltar. Si el resorte estuviese subamortiguado, el automóvil comenzaría a oscilar tras pasar por cualquier irregularidad y demoraría en detenerse. Por lo que una suspensión ideal busca estar en régimen críticamente amortiguado, de manera que la rueda pueda adaptarse al terreno, pero que pueda volver lo mas rápido posible a su posición de equilibrio.

La energía mecánica de un oscilador amortiguado disminuye con el tiempo (efecto de la fuerza resistiva).

Considere un oscilador amortiguado impulsado por una fuerza externa de variación periódica

$$F(t) = F_0 \sin \omega t,$$

con F_0 una constante y ω la frecuencia angular de la fuerza impulsora.

La segunda ley de Newton, en este caso, se escribe

$$\sum F = ma \quad \rightarrow \quad F_0 \sin \omega t - b\frac{dx}{dt} - kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{25}$$

Una solución de esa ecuación es

$$x(t) = A(\omega)\cos(\omega t + \phi), \tag{26}$$

donde

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}} \quad \text{y} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{27}$$

Cuando b es pequeño, $A(\omega)$ es grande si $\omega \approx \omega_0$: **Resonancia** y ω_0 es la **frecuencia de resonancia del sistema.**

Consideremos la primera derivada de la Ec.(26) con relación al tiempo

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\omega A(\omega)\sin(\omega t + \phi); \quad v_x(t) \propto \sin(\omega t + \phi)$$

Dado que $F \propto \sin \omega t$, entonces $\vec{F}$ está en fase con $\vec{v}$.

Sabemos que $\mathscr{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$; con $\mathscr{P}$ un máximo cuando $\vec{F}$ y $\vec{v}$ están en fase:

En la resonancia, la fuerza aplicada está en fase con la velocidad y la potencia transferida al oscilador es un máximo.

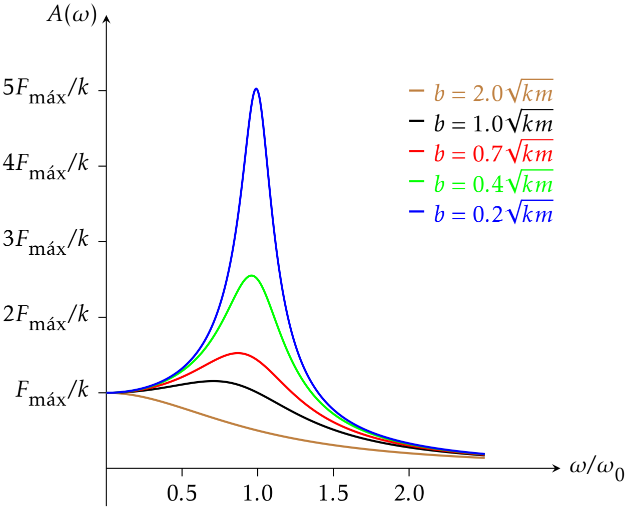

Figura 20. *Gráfico de la amplitud $A(\omega)$ en función de la frecuencia para un oscilador amortigüado en presencia de una fuerza impulsora.*