Conservación de la Cantidad de Movimiento Lineal y Colisiones

Física II - 510510

Prof. José G. Aguirre Gómez

Departamento de Física

Universidad de Concepción

jaguirre@udec.cl - Oficina: 315

Atención de Estudiantes:
Jueves de 10:00 a 12:00 hrs.

1. Introducción
2. Momentum Lineal y su Conservación
3. Impulso y Momentum Lineal
4. Colisiones en una dimensión
   - Colisiones perfectamente inelásticas
   - Colisiones perfectamente elásticas
5. Colisiones en dos dimensiones
6. Ejemplos
7. Centro de masa
8. Movimiento de un sistema de partículas

Hay muchas preguntas que la segunda ley de Newton no puede contestar si aplicamos directamente sus ecuaciones. Por ejemplo, si dos autos colisionan ¿qué determina hacia dónde se mueven los autos después de la colisión? Cuando jugamos pool, ¿cómo decidimos la dirección que debemos dar a la bola blanca para que la bola 8 ingrese al agujero?

Para abordar estos fenómenos se deben utilizar dos conceptos nuevos; **momentum lineal** e **impulso** y una nueva ley de conservación- la de **conservación del momentum lineal**, la cual es tan importante como la ley de conservación de la energía.

La ley de conservación del momentum lineal es aplicable en situaciones en las cuales las leyes de Newton son inadecuadas, tales como cuerpos que se mueven con una rapidez muy alta (cercana a la rapidez de la luz) u objetos muy pequeños como las partículas fundamentales.

En el contexto de la mecánica newtoniana, la conservación del momentum lineal nos permite analizar situaciones que resultarían muy dificiles de estudiar si emplearamos las leyes de Newton, entre ellas se encuentran las **colisiones** o **choques**, en los que dos cuerpos ejercen, uno sobre el otro, fuerzas muy grandes en instantes de tiempo muy breves.

Considere un sistema aislado de sólo dos partículas (**Fig.4.1**) de masas m_1 y m_2 con velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, respectivamente, en un dado instante de tiempo.

Como el sistema está aislado, la única fuerza sobre una partícula es la ejercida por la otra partícula en el instante del impacto. Las fuerzas entre las dos partículs forman un par acción-reacción, esto es, $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. Luego

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0}$$

En un cierto intervalo de tiempo, las partículas mútuamente interactuantes aceleran en respuesta a la fuerza, así

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = \vec{0},$$
$$m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2\frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{0}.$$

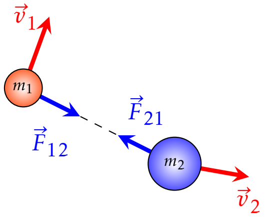

Figura 4.1: Sistema aislado de dos partículas en mútua interacción. $\vec{F}_{12}$: fuerza que la partícula de masa m_2 ejerce sobre la partícula de masa m_1.

Si las masas son constantes, podemos escribir

$$\frac{d(m_1\vec{v}_1)}{dt} + \frac{d(m_2\vec{v}_2)}{dt} = \vec{0}, \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = \vec{0}. \tag{1}$$

Dado que la derivada de la suma $(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2)$ con respecto al tiempo es cero, entonces dicha suma debe ser una constante.

Newton llamó a la cantidad $m\vec{v}$ **momentum lineal** o **cantidad de movimiento lineal**. La palabra **momentum** proviene del latín que significa **movimiento**.

Definición de momentum lineal.

El **momentum lineal** de una partícula - u objeto modelado como una partícula - de masa m que se mueve con velocidad $\vec{v}$ se define como el producto de la masa y la velocidad de la partícula:

$$\vec{p} \equiv m\vec{v}. \tag{2}$$

El momentum lineal es una cantidad vectorial y su dirección apunta en la dirección de $\vec{v}$. Las dimensiones del momentum lineal son $[p] = \mathrm{L}^1\mathrm{M}^1\mathrm{T}^{-1}$ y su unidad de medida en el sistema internacional es $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m/s}$.

El concepto de **momentum lineal** o **cantidad de movimiento** permite distinguir, cuantitativamente, partículas ligeras y pesadas que se mueven con la misma velocidad.

La segunda ley de Newton del movimiento puede ser reescrita como

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}, \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.} \tag{3}$$

la cual describe que **la tasa de cambio de la cantidad de movimiento lineal de una partícula es igual a la fuerza neta que actúa sobre ella**.

La Ec.(3) es la forma en que Newton presentó su segunda ley, la cual resulta ser más general que $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, puesto que permite describir situaciones en las cuales la masa varía con respecto al tiempo. Por ejemplo, la masa de un cohete cambia conforme el combustible se quema y los gases son expulsado del cohete.

Ahora, la Ec.(1) puede ser reescrita como

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \vec{0}.$$

Haciendo $\vec{p}_{\text{total}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$, entonces, el **momentum total** del sistema de dos partículas de la Fig.1 es constante:

$$\vec{p}_{\text{total}} = \text{constante} \tag{4}$$

o, de forma equivalente,

$$\Delta\vec{p}_{\text{total}} = 0, \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{p}_{\text{total,i}} = \vec{p}_{\text{total,f}}, \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}}. \tag{5}$$

El resultado de la Ec.(5) se conoce como la **ley de conservación del momentum lineal** y puede ser extendido a cualquier número de partículas en un sistema aislado. Se considera una de las leyes más importantes de la mecánica y se puede establecer como sigue:

Conservación del momentum lineal.

Siempre que interactúan dos o más partículas en un sistema aislado, la cantidad de movimiento total del sistema permanece constante.

En esta formulación no se menciona el tipo de fuerzas actuando sobre las partículas del sistema, ni se especifica si las fuerzas son conservativas o no conservativas. El único requisito es que las fuerzas deben ser **internas** al sistema.

Retomando la Ec.(5),

$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f},$$

en término de las componentes rectangulares, tenemos

$$\begin{aligned} \Delta p_x = 0, \quad &\Longleftrightarrow \quad p_{1ix} + p_{2ix} = p_{1fx} + p_{2fx} \\ \Delta p_y = 0, \quad &\Longleftrightarrow \quad p_{1iy} + p_{2iy} = p_{1fy} + p_{2fy} \\ \Delta p_z = 0, \quad &\Longleftrightarrow \quad p_{1iz} + p_{2iz} = p_{1fz} + p_{2fz}. \end{aligned}$$

Esto significa que las cantidades de movimiento totales en las direcciones x, y y z **se conservan todas de manera independiente**.

De la Ec.(3), la cantidad de movimiento lineal de una partícula cambia cuando la fuerza neta que actúa sobre la partícula cambia.

Suponga que una fuerza neta $\sum \vec{F}(t)$ actúa sobre una partícula y que esta fuerza puede variar con el tiempo. La segunda ley de Newton tenemos,

$$\sum \vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \Longrightarrow \quad d\vec{p} = \sum \vec{F}(t)\,dt \tag{6}$$

Si el momentum lineal cambia $\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$ en el intervalo $\Delta t = t_f - t_i$, obtenemos

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{F}(t)\,dt \tag{7}$$

Para evaluar la Ec.(7) necesitamos saber $\sum \vec{F}(t)$. La cantidad al lado derecho de la igualdad en la Ec.(7) es un vector llamado **impuslo**.

$$\boxed{\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{F}(t)\,dt} \tag{8}$$

El vector impulso $\vec{I}$ tiene la misma dirección del vector $\Delta\vec{p}$ de la partícula. Las dimensiones del impulso son $[\vec{I}] = \mathrm{L}^1\mathrm{M}^1\mathrm{T}^{-1}$.

El impulso **no es una propiedad de la partícula**, sino una medida del grado en el que la fuerza externa cambia la cantidad de movimiento de la partícula.

La magnitud del impulso es igual al área bajo la curva de una gráfica fuerza v/s tiempo como ilustrado en la **Fig.4.2(a)**.

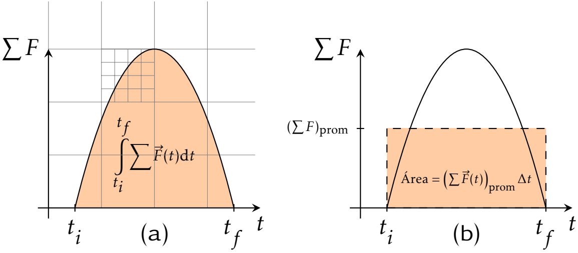

Figura 4.2: (a) Representación de una fuerza variable $\sum \vec{F}$ en el tiempo. El área bajo la curva representa el impulso realizado por la fuerza neta. (b) Representación de una fuerza neta promedio $\left(\sum \vec{F}\right)_{\text{prom}}$. El área bajo esta curva representa el impulso realizado por la fuerza neta.

Como la fuerza neta que produce el impulso sobre una partícula varía con respecto al tiempo, se define la fuerza neta promedio $\left(\sum \vec{F}\right)_{\text{prom}}$ mediante la aplicación del teorema de valor medio del cálculo

$$\left(\sum \vec{F}\right)_{\text{prom}} \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{F}(t)\, dt, \quad \Delta t = t_f - t_i. \tag{9}$$

Considerando esto, la Ec.(8) puede ser expresada como

$$\boxed{\vec{I} = \left(\sum \vec{F}\right)_{\text{prom}} \Delta t.} \tag{10}$$

Esta fuerza neta promediada en el tiempo (**Fig.4.2(b)**), se puede interpretar de la siguiente manera: Al aplicar una fuerza neta constante sobre un cuerpo, en un intervalo de tiempo Δt, le provoca al cuerpo **el mismo impulso que la fuerza neta variable en el mismo intervalo de tiempo**.

En principio, si $\sum \vec{F}$ es una función del tiempo conocida, el impulso se calcula a partir de la Ec.(8).

Cuando la fuerza neta $\sum \vec{F}$ es constante el cálculo se simplifica, puesto que $\left(\sum \vec{F}\right)_{\text{prom}} = \sum \vec{F}$. Así la Ec.(10) se convierte en

$$\boxed{\vec{I} = \sum \vec{F} \Delta t.} \tag{11}$$

En muchas situaciones físicas se utiliza la **aproximación del impulso**, la cual consiste en suponer que, durante un breve instante de tiempo, **una de las fuerzas que actúa sobre la partícula tiene un módulo mucho mayor que cualquier otra fuerza presente**.

Esta aproximación es importante en análisis de colisiones, donde el tiempo de contacto entre las partículas es muy breve. En esta aproximación la fuerza $\vec{F}$ es conocida como **fuerza impulsiva**. Tomemos como ejemplo un bateador de baseball:

- El instante del impacto es aprox. $\Delta t \approx 10^{-2}\,\mathrm{s}$.
- La fuerza promedio del impacto $\sum F \approx 10^{3}\,\mathrm{N}$, mientras que $F_g \approx 10^{0}\,\mathrm{N}$.
- Como $\sum F \gg F_g$, la aproximación de impulso implica que podemos ignorar la fuerza de gravedad sobre la pelota.

Ejemplo 1: En una prueba de choque, un automóvil de $1500\,\mathrm{kg}$ de masa choca con una pared (**Fig.4.3**). Las velocidades del automóvil antes y después de la colisión son $\vec{v}_i = (-15.0\,\mathrm{m/s})\hat{\imath}$ y $\vec{v}_f = (2.60\,\mathrm{m/s})\hat{\imath}$, respectivamente. Si la colisión dura $0.150\,\mathrm{s}$, encuentre el impulso causado por la colisión y la fuerza promedio ejercida por la pared sobre el automóvil.

Por un lado, sabemos que $\vec{I} = \Delta\vec{p}$, de modo tal que

$$\vec{I} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i = m(\vec{v}_f - \vec{v}_i)$$

$$\vec{I} = (1500\,\mathrm{kg})\,[(2.60 - (-15.0))\,\mathrm{m/s}]\,\hat{\imath}$$

$$\vec{I} = \left(2.64 \times 10^4\,\mathrm{kg\,m/s}\right)\hat{\imath}$$

Por otro lado, sabemos que

$$\vec{I} = \vec{F}_{\mathrm{prom}}\,\Delta t \quad \Longrightarrow \quad \vec{F}_{\mathrm{prom}} = \frac{\vec{I}}{\Delta t} = (1.76\times 10^5\,\mathrm{N})\hat{\imath}.$$

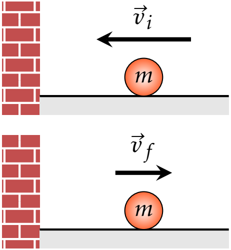

Figura 4.3 Un auto de prueba chocando contra una pared.

Tarea: ¿Qué pasaría si el automóvil no rebota de la pared? Suponga que $\vec{v}_f = (0.0\,\mathrm{m/s})\hat{\imath}$ y que el tiempo de colisión es $\Delta t = 0.150\,\mathrm{s}$. ¿Esto representaría una fuerza mayor o menor ejercida por la pared sobre el automóvil?

Una **colisión** es un evento en el cual dos partículas se acercan una hacia la otra e interactúan mediante fuerzas. Debido a esta colisión, las fuerzas entre las partículas son mucho mayores que otras fuerzas externas, por lo tanto la aproximación del impulso es válida.

Una colisión puede involucrar contacto físico entre dos objetos macroscópicos (**Fig.4.4** (a)).

Sin embargo el concepto de contacto físico está mal definido en una escala microscópica y por lo tanto no tiene significado.

Por ejemplo, considere una colisión de un protón con una partícula alfa (el núcleo de un átomo de He) (**Fig.4.4** (b)). Ambas partículas tienen carga positiva, luego se repelen debido a la enorme fuerza electrostática entre ellas en separaciones cercanas y nunca entran en "contacto físico"

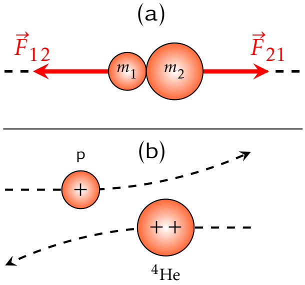

Figura 4.4: (a) Colisión directa entre dos objetos macroscópicos. (b) ´´Colisión" entre dos partículas cargadas eléctricamente.

Como mostrado en las **Figs.4.4**, las fuerzas impulsivas pueden variar en el tiempo de manera complicada. Sin embargo, sin importar su complejidad, son fuerzas internas en un sistema compuesto por dos partículas. Por lo tanto, las dos partículas forman un sistema aislado y el **momentum lineal total del sistema se conserva**.

Por otra parte, la energía cinética total del sistema de partículas, **puede** o **no** conservarse. Dependiendo de esta condición, las colisiones se pueden clasificar en dos conjuntos

Colisiones elásticas.

Son colisiones donde se conserva tanto la energía cinética total como el momentum total del sistema, es decir,

$$\Delta\vec{p}_{\text{tot}} = \vec{0}, \qquad \Delta K_{\text{tot}} = 0.$$

En el mundo macroscópico las colisiones son **aproximadamente elásticas**, puesto que existen pérdidas de energía producto de la deformación de los objetos que colisionan.

Las colisiones **verdaderamente elásticas** o **perfectamente elásticas** ocurren solo entre partículas atómicas y sub-atómicas.

Colisiones inelásticas.

Son colisiones donde la energía cinética total del sistema no es la misma antes ni después de la colisión aún cuando el momentum total del sistema se conserve. Esto es,

$$\Delta\vec{p}_{\text{tot}} = \vec{0}, \qquad \Delta K_{\text{tot}} \neq 0.$$

Podemos clasificar las colisiones inélasticas en dos tipos:

- **Colisión perfectamente inelástica**: Ocurre cuando los objetos después de la colisión **quedan unidos formando un solo cuerpo**. Por ejemplo cuando un meteorito choca contra la tierra.
- **Colisión inelástica**: Ocurre cuando los cuerpos después de chocar pierden parte de su energía cinética. Por ejemplo, si dejamos caer una pelota de hule hacia el suelo, parte de la energía cinética del objeto se pierde en la deformación producto del impacto con el piso.

Colisiones perfectamente inelásticas

Considere dos partículas de masas m_1 y m_2 que se mueven con velocidades iniciales $\vec{v}_{1i}$ y $\vec{v}_{2i}$, respectivamente, y a lo largo de una línea recta (**Fig.4.5**).

Como la cantidad de movimiento lineal total es **conservada** en cualquier tipo de colisión, se tiene

$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_f$$

$$m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = (m_1 + m_2)\vec{v}_f. \qquad (12)$$

Resolviendo para la velocidad final, se obtiene

$$\boxed{\vec{v}_f = \frac{m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i}}{m_1 + m_2}} \qquad (13)$$

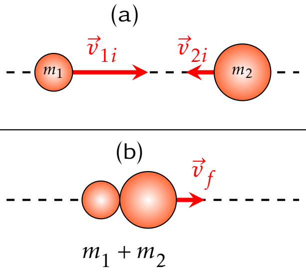

Figura 4.5: Una colisión frontal perfectamente inelástica. (a) Antes de la colisión. (b) Después de la colisión.

Colisiones perfectamente elásticas

Considere dos partículas de masas m_1 y m_2 que se mueven con velocidades iniciales $\vec{v}_{1i}$ y $\vec{v}_{2i}$, respectivamente, y a lo largo de una línea recta horizontal (**Fig.4.6.**). Después de la colisión las velocidades de las partículas son, respectivamente, $\vec{v}_{1f}$ y $\vec{v}_{2f}$

Como la colisión es **perfectamente elástica** y unidimensional, $\Delta p_{\text{sist}} = 0$ y $\Delta K_{\text{sist}} = 0$. Luego,

$$\boxed{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}.} \tag{14}$$

y

$$\boxed{\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2.} \tag{15}$$

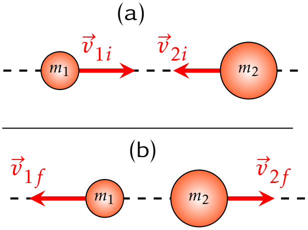

Figura 4.6: Una colisión frontal elástica. (a) Antes de la colisión. (b) Después de la colisión.

Debido a que el movimiento es unidimensional, las velocidades pueden ser representadas usando las magnitudes de las velocidades junto con un signo algebraico que indique su dirección. Se usará v como **positivo** si una partícula **se mueve hacia la derecha** y **negativo si se mueve hacia la izquierda**.

Multiplicando por 2 todos los miembros de la Ec.(15) y reordenando términos obtenemos

$$m_1\left(v_{1i}^2 - v_{1f}^2\right) = m_2\left(v_{2f}^2 - v_{2i}^2\right).$$

Factorizando,

$$m_1(v_{1i} + v_{1f})(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} + v_{2i})(v_{2f} - v_{2i}). \tag{16}$$

Por otra parte, la Ec.(14) puede escribirse como

$$m_1\left(v_{1i} - v_{1f}\right) = m_2\left(v_{2f} - v_{2i}\right) \tag{17}$$

Sustituyendo la Ecs.(17) en (16), obtenemos

$$\boxed{v_{1i} - v_{2i} = v_{2f} - v_{1f}.} \tag{18}$$

La Ec.(18) junto con la Ec.(14) se usan para resolver problemas de colisiones elásticas. La Ec.(18) señala que la **velocidad relativa** de las dos partículas antes de la colisión, $v_{1i} - v_{2i}$, es igual al negativo de la velocidad relativa después de la colisión $-(v_{1f} - v_{2f})$

Suponga que conocen m_1, m_2, v_{1i} y v_{2i}. Resolviendo las Ecs.(14) y (18) para v_{1f} y v_{2f}, se obtienen las expresiones

$$\boxed{v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{2i},} \tag{19}$$

$$\boxed{v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{2i}.} \tag{20}$$

Recuerde usar los signos apropiados para v_{1i} y v_{2i}.

Casos especiales

- Si $m_1 = m_2$, se tiene $v_{1f} = v_{2i}$ y $v_{2f} = v_{1i}$. Con esto se observa que las partículas intercambian velocidades.
- Si la partícula de masa m_2 está inicialmente en reposo, o sea $v_{2i} = 0$, se obtiene
$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} \quad \text{y} \quad v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i}. \tag{21}$$
- Si $m_1 \gg m_2$ y $v_{2i} = 0$, se tiene:
$$v_{1f} = \left(\frac{m_1(1 - \cancelto{0}{m_2/m_1})}{m_1(1 + \cancelto{0}{m_2/m_1})}\right) v_{1i} \quad \text{y} \quad v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1(1 + \cancelto{0}{m_2/m_1})}\right) v_{1i}.$$

  Es decir,
$$\boxed{v_{1f} \approx v_{1i}} \qquad y \qquad \boxed{v_{2f} \approx 2v_{1i}}.$$

Este resultado señala que cuando una partícula pesada choca frontalmente con una muy ligera- que inicialmente está en reposo- la partícula pesada continuará su movimiento sin cambios después de la colisión, mientras que la partícula liviana comenzará a moverse con aproximadamente el doble de la rapidez inicial de la partícula más pesada.

- Si $m_2 \gg m_1$ y $v_{2i} = 0$, se tiene

$$v_{1f} = \left(\frac{m_2(\cancelto{0}{m_1/m_2} - 1)}{m_2(\cancelto{0}{m_1/m_2} + 1)} \right) v_{1i} \quad \text{y} \quad v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_2(\cancelto{0}{m_1/m_2} + 1)} \right) v_{1i}.$$

Es decir,

$$\boxed{v_{1f} \approx -v_{1i}} \qquad y \qquad \boxed{v_{2f} \approx 0}$$

Este resultado nos señala que cuando una partícula ligera choca frontalmente con una partícula muy pesada que inicialmente se encuentra en reposo, la partícula ligera invierte su velocidad y la pesada permanece prácticamente en reposo.

Colisiones en dos dimensiones

Sabemos que la cantidad de movimiento total se conserva cuando el sistema está aislado.

En dos dimensiones, se tienen las siguientes ecuaciones escalares.

Para el eje-x, $\Delta p_x = 0$

$$p_{1xi} + p_{2xi} = p_{1xf} + p_{2xf}$$
$$m_1 v_{1xi} + m_2 v_{2xi} = m_1 v_{1xf} + m_2 v_{2xf} \tag{22}$$

Para el eje-y, $\Delta p_y = 0$

$$p_{1yi} + p_{2yi} = p_{1yf} + p_{2yf}$$
$$m_1 v_{1yi} + m_2 v_{2yi} = m_1 v_{1yf} + m_2 v_{2yf} \tag{23}$$

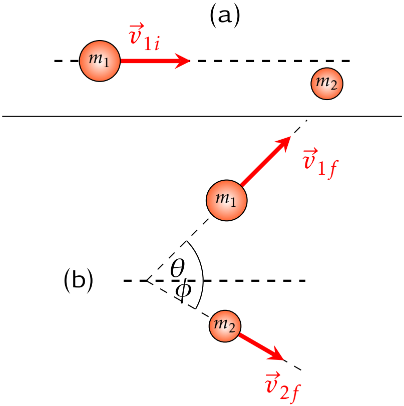

Figura 4.10: Colisión elástica indirecta entre dos partículas. (a) Antes de la colisión. (b) Después de la colisión.

De la Ec.(22) se obtiene una expresión para la conservación del momentum lineal para el eje-x,

$$\boxed{m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta + m_2 v_{2f} \cos\phi}. \tag{24}$$

De la Ec.(23) se obtiene una expresión para la conservación del momentum lineal para el eje-y,

$$\boxed{0 = m_1 v_{1f} \sin\theta - m_2 v_{2f} \sin\phi} \tag{25}$$

$$\Longrightarrow \qquad m_1 v_{1f} \sin\theta = m_2 v_{2f} \sin\phi.$$

En las ecuaciones anteriores v_{1i}, v_{1f} y v_{2f} son las magnitudes de las velocidades.

Ejemplo - Conservación del momentum lineal: Un arquero de masa $m_1 = 60\,\mathrm{kg}$ está de pie en reposo sobre una superficie de hielo sin fricción y dispara una flecha de masa $m_2 = 0.50\,\mathrm{kg}$ horizontalmente a $50\,\mathrm{m/s}$. ¿Después de disparar la flecha, con qué velocidad se mueve el arquero sobre el hielo? Considere que el eje-x positivo apunta hacia la derecha.

Solucion: De la conservación del momentum lineal, tenemos

$$\vec{p}_{\mathrm{tot,i}} = \vec{p}_{\mathrm{tot,f}}.$$

Haciendo $\vec{p}_{1f}$ el momentum del arquero al momento de lanzar la flecha y $\vec{p}_{2f}$, el de la flecha al ser disparada hacia la derecha, tenemos

$$\vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} = \vec{0}; \quad m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{v}_{1f} = -\left(\frac{m_2}{m_1}\right)\vec{v}_{2f}.$$

Como $\vec{v}_{2f} = (50\,\mathrm{m/s})\hat{\imath}$, obtenemos

$$\vec{v}_{1f} = -\frac{m_2}{m_1}\vec{v}_{2f} = -\left(\frac{0.50\,\mathrm{kg}}{60\,\mathrm{kg}}\right)(50\,\mathrm{m/})\hat{\imath} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{v}_{1f} = (-0.42\,\mathrm{m/s})\hat{\imath}}$$

Tarea: Analice la situación anterior en la cual la flecha es lanzada con la misma velocidad pero con un cierto ángulo θ con relación a la horizontal.

Ejemplo - Colisión perfectamente inelástica: Un auto de masa $M = 1800\,\mathrm{kg}$, que se encuentra detenido en un semáforo, es golpeado en la parte trasera por un auto de masa $m = 900\,\mathrm{kg}$. Los dos autos quedan unidos y se mueven a lo largo de la misma trayectoria que la del auto en movimiento. Si el auto más pequeño se movía con una rapidez de $20.0\,\mathrm{m/s}$ antes de la colisión, ¿cuál es la velocidad de los autos unidos después de la colisión? Considere que el eje-x positivo apunta hacia la derecha.

Solución: Con el eje-x positivo en la dirección del vehículo en movimiento, $v_{1i} = (20.0\,\mathrm{m/s})$ y $v_{2i} = 0$

Como el momentum lineal se conserva, $\Delta p_x = 0$, se tiene

$$\Longrightarrow \quad m v_{1i} + \cancelto{0}{M v_{2i}} = (m+M) v_{12f} \quad \Longrightarrow \quad v_{12f} = \left(\frac{m}{m+M}\right) v_{1i}.$$

Del planteamiento, tenemos

$$v_{12f} = \left(\frac{900\,\mathrm{kg}}{(900+1800)\,\mathrm{kg}}\right)\left(20.0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{v_{12f} = 6.67\,\mathrm{m/s}}$$

Tarea: Suponga que se invierten las masas de los automóviles. ¿La velocidad final es la misma que en el caso anterior?

Ejemplo: Un bloque de masa $m_1 = 1.60\,\mathrm{kg}$, moviéndose inicialmente hacia la derecha con una rapidez de $v_{1i} = 4.00\,\mathrm{m/s}$ sobre una pista horizontal y sin fricción, colisiona con un resorte unido a un segundo bloque de masa $2.10\,\mathrm{kg}$ que inicialmente se mueve hacia la izquierda con una rapidez de $v_{2i} = 2.50\,\mathrm{m/s}$, como se muestra en la Fig.4.9(a). La constante del resorte es $k = 600\,\mathrm{N/m}$.

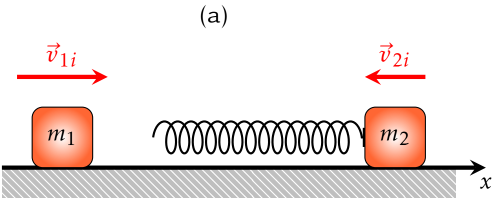

Figura 4.9: (a) Esquema para el ejemplo.

(a) Encuentre las velocidades de los dos bloques después de la colisión.
(b) Durante la colisión, en el instante en el que el bloque 1 se mueve hacia la derecha con una rapidez de $v_{1f} = 3.00\,\mathrm{m/s}$, como en la Fig.4.9(b), determine la velocidad del bloque 2.
(c) Determine la distancia Δx que se comprime el resorte en ese instanate.

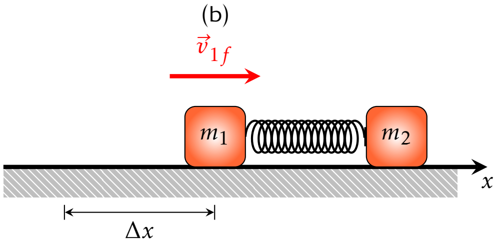

Figura 4.9: (b) Esquema para las partes (b) y (c) del ejemplo.

Solución:

(a) Esta es una colisión elástica. En esta parte podemos usar las Ecs.(19) y (20) directamente

$$\begin{aligned} v_{1f} &= \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{2i} \\ &= \left(\frac{(1.60 - 2.10)\,\mathrm{kg}}{(1.60 + 2.10)\,\mathrm{kg}}\right)(4.0\,\mathrm{m/s}) + \left(\frac{2(2.10\,\mathrm{kg})}{(1.60 + 2.10)\,\mathrm{kg}}\right)(-2.50\,\mathrm{m/s}) \\ &= \boxed{-3.38\,\mathrm{m/s}} \end{aligned}$$

y

$$
\begin{aligned}
v_{2f} &= \left(\frac{2m_1}{m_1+m_2}\right)v_{1i} + \left(\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\right)v_{2i} \\
&= \left(\frac{2(1.60\,\mathrm{kg})}{(1.60+2.10)\,\mathrm{kg}}\right)(4.00\,\mathrm{m/s}) + \left(\frac{(2.10-1.60)\,\mathrm{kg}}{(1.60+2.10)\,\mathrm{kg}}\right)(-2.50\,\mathrm{m/s}) \\
&= \boxed{3.12\,\mathrm{m/s}}
\end{aligned}
$$

(b) Usando la conservación del momentum lineal total del sistema podemos escribir, haciendo $v_{1f} = 3.00\,\mathrm{m/s}$,

$$
\begin{aligned}
m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} &= m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\
v_{2f} &= \frac{m_1(v_{1i} - v_{1f}) + m_2 v_{2i}}{m_2} \\
&= \frac{(1.60\,\mathrm{kg})(1.00\,\mathrm{m/s}) + (2.10\,\mathrm{kg})(-2.50\,\mathrm{m/s})}{2.10\,\mathrm{kg}} \\
v_{2f} &= \boxed{-1.74\,\mathrm{m/s}}
\end{aligned}
$$

(c) Note que en ese instante se tiene el sistema bloque1-resorte-bloque2. La conservación de la energía mecánica en este caso es

$$K_i + U_{si} = K_f + U_{sf}$$

Como antes de la colisión el resorte está en equilibrio, se tiene:

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2i}^2 + \cancelto{0}{U_{si}} = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}^2 + \frac{1}{2}k(\Delta x)^2$$

$$\Delta x = \sqrt{\frac{m_1 v_{1i}^2 + m_2 v_{2i}^2 - (m_1 v_{1f}^2 + m_2 v_{2f}^2)}{k}}$$

De lo anterior encontramos:

$$m_1 v_{1i}^2 + m_2 v_{2i}^2 = (1.60)(4.00)^2 + (2.10)(-2.50)^2 = 38.725\,\mathrm{N\cdot m}$$
$$m_1 v_{1f}^2 + m_2 v_{2f}^2 = (1.60)(3.00)^2 + (2.10)(-1.74)^2 = 20.758\,\mathrm{N\cdot m}$$

De lo anterior se llega a

$$\Delta x = \sqrt{\frac{(38.725 - 20.758)\,\mathrm{N\cdot m}}{600\,\mathrm{N/m}}} = \boxed{0.173\,\mathrm{m}}$$

Ejemplo - Colisión perfectamente inelástica: Un automóvil de masa $m_1 = 1.50 \times 10^3\,\mathrm{kg}$, que viaja al este con una rapidez de $v_{1i} = 25.0\,\mathrm{m/s}$, colisiona en un cruce con una camioneta de masa $m_2 = 2.50 \times 10^3\,\mathrm{kg}$ que viaja al norte con una rapidez de $v_{2i} = 20.0\,\mathrm{m/s}$, como esquematizado en la Fig.4.11. Encuentre la dirección y magnitud de la velocidad después de la colisión, asumiendo que los vehículos quedan unidos.

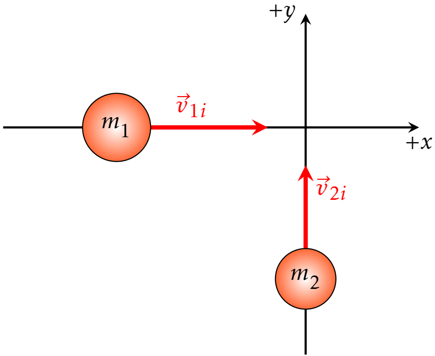

Figura 4.11: Diagrama del ejemplo.

Solucion: Se tiene una colisión completamente inelástica. Conservación del momentum lineal implica

$$m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = (m_1 + m_2)\vec{v}_f$$

Conservación de la componente x del momentum lineal implica

$$\begin{aligned} p_{xi} &= p_{xf} \\ m_1 v_{1xi} + \cancelto{0}{m_2 v_{2xi}} &= (m_1 + m_2)v_{xf} \\ (1.50\times 10^3\,\mathrm{kg})(25.0\,\mathrm{m/s}) &= [(1.50+2.50)\times 10^3\,\mathrm{kg}]v_f\cos\theta \\ 3.75\times 10^4\,\mathrm{kg\cdot m/s} &= (4.00\times 10^3\,\mathrm{kg})v_f\cos\theta \end{aligned}$$

Conservación de la componente y del momentum lineal implica

$$\begin{aligned} p_{yi} &= p_{yf} \\ \cancelto{0}{m_1 v_{1yi}} + m_2 v_{2yi} &= (m_1 + m_2)v_{yf} \\ (2.50\times 10^3\,\mathrm{kg})(20.0\,\mathrm{m/s}) &= [(1.50+2.50)\times 10^3\,\mathrm{kg}]v_f\sin\theta \\ 5.00\times 10^4\,\mathrm{kg\cdot m/s} &= (4.00\times 10^3\,\mathrm{kg})v_f\sin\theta \end{aligned}$$

Dividiendo la segunda ecuación por la primera, se obtiene

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{5.00\times 10^4\,\mathrm{kg\cdot m/s}}{3.75\times 10^4\,\mathrm{kg\cdot m/s}} = 1.333$$

de modo tal que

$$\boxed{\theta = \tan^{-1}(1.333) = 53.1^\circ}$$

Usando ese valor para θ, en la primera ecuación, resulta

$$v_f = \frac{(1.50\times 10^3\,\mathrm{kg})(25.0\,\mathrm{m/s})}{(4.00\times 10^3\,\mathrm{kg})\cos(53.1^\circ)} = \boxed{15.6\,\mathrm{m/s}}$$

El movimiento global de un sistema puede ser descrito en términos de un punto del sistema llamado **centro de masa** (cdm).

El movimiento traslacional del centro de masa es el mismo como si toda la masa del sistema se concentrara en él.

El sistema se mueve como si la fuerza externa neta se aplicara en una sola partícula ubicada en el centro de masa.

Comportamiento que no depende de otro tipo de movimiento (vibración o rotación).

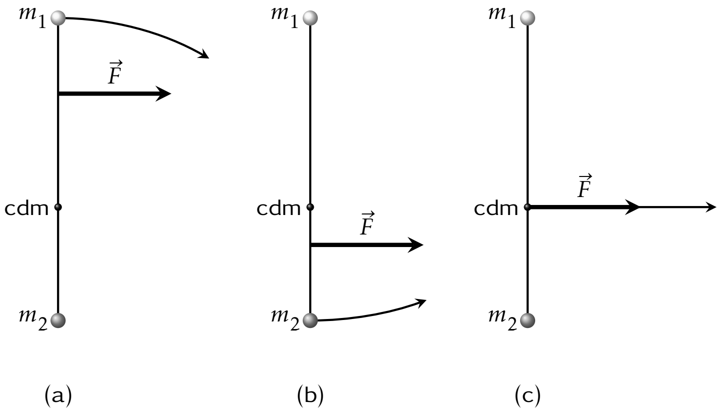

Figura 1: Partículas de distinta masa unidas a través de una barra rígida y ligera. (a) Fuerza aplicada arriba del cdm: Giro en sentido horario. (b) Fuerza aplicada abajo del cdm: Giro en sentido anti-horario. (c) Fuerza aplicada en el cdm: movimiento en la dirección de la fuerza aplicada.

En la **Fig.2**, el cdm se ubica sobre el eje x, en algún lugar entre las partículas. La coordenada x del centro de masa es

$$\boxed{x_{\text{cdm}} \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2},} \tag{26}$$

donde x_1 y x_2 son las coordenadas x de la posición de las partículas de masa m_1 y m_2, respectivamente.

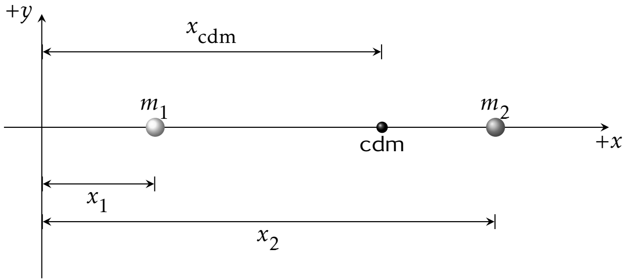

Figura 2: El cdm de un sistema de dos partículas sobre el eje x se ubica en x_{cdm}.

Extendiendo la idea anterior a un conjunto de n partículas en el espacio

$$x_{\mathrm{cdm}} \equiv \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i, \tag{27}$$

donde x_i es la coordenada x de la i-ésima partícula de masa m_i y la masa total del sistema de partículas es $M = \sum_i m_i$.

Las coordenadas y y z del centro de masa del sistema se definen de manera análoga y son dadas por las ecuaciones

$$y_{\mathrm{cdm}} \equiv \frac{1}{M} \sum_i m_i y_i \quad \text{y} \quad z_{\mathrm{cdm}} \equiv \frac{1}{M} \sum_i m_i z_i, \tag{28}$$

En tres dimensiones el cdm puede ser ubicado mediante su vector posición $\vec{r}_{\mathrm{cdm}}$,

$$\vec{r}_{\mathrm{cdm}} = x_{\mathrm{cdm}}\hat{\imath} + y_{\mathrm{cdm}}\hat{\jmath} + z_{\mathrm{cdm}}\hat{k} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i \tag{29}$$

donde $\vec{r}_i = x_i\hat{\imath} + y_i\hat{\jmath} + z_i\hat{k}$ es el vector posición de la i-ésima partícula.

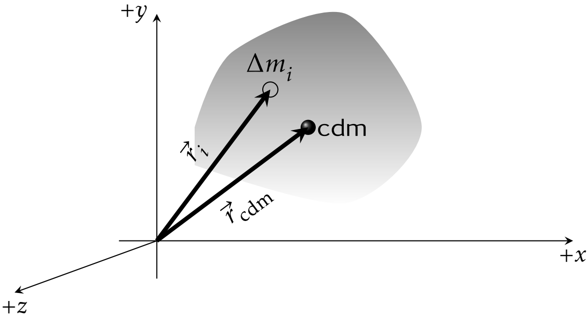

Figura 4: Un objeto extendido es considerado como un conjunto de pequeños elementos de masa Δm_i. El vector de posición del centro de masa es $\vec{r}_{\mathrm{cdm}}$.

Considere un sistema formado por un gran número de partículas (ver **Fig.4**).

La separación entre las partículas es muy pequeña; distribución continua de masa. Dividiendo al objeto en elementos de masa Δm_i con coordenadas x_i, y_i y z_i, se ve que la coordenada x del cdm es, aproximadamente, dada por

$$x_{\mathrm{cdm}} \sim \frac{1}{M} \sum_i x_i \Delta m_i,$$

con expresiones similares para y_{cdm} y z_{cdm}. Haciendo que el número n de elementos tienda a infinito y el tamaño de cada elemento tienda a cero, tenemos

$$x_{\mathrm{cdm}} = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{1}{M} \sum_i x_i \Delta m_i = \frac{1}{M} \int x\, dm, \tag{30}$$

con expresiones similares para y_{cdm} y z_{cdm},

$$y_{\mathrm{cdm}} = \frac{1}{M} \int y\, dm \quad \mathrm{y} \quad z_{\mathrm{cdm}} = \frac{1}{M} \int z\, dm. \tag{31}$$

La expresión vectorial para el centro de masa de un objeto extendido es dada por

$$\vec{r}_{\text{cdm}} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm, \tag{32}$$

equivalente a las expresiones dadas por las Ecs.(30) y (31).

El centro de masa de cualquier objeto simétrico se encuentra sobre un eje de simetría y sobre cualquier plano de simetría.

Por ejemplo, el cdm de una barra uniforme se encuentra a mitad de camino entre sus extremos. El cdm de una esfera o un cubo se encuentra en su centro geométrico.

Sobre cada pequeño elemento de masa de un objeto extendido actúa la fuerza gravitacional. Esto es equivalente al efecto de una sola fuerza $M\vec{g}$ que actúa a través del punto especial, llamado **centro de gravedad**.

Ejemplo 1: Se tiene un sistema de tres partículas de masas $m_1 = m_2 = 1.0\,\mathrm{kg}$ y $m_3 = 2.0\,\mathrm{kg}$.

Encuentre el centro de masa del sistema.

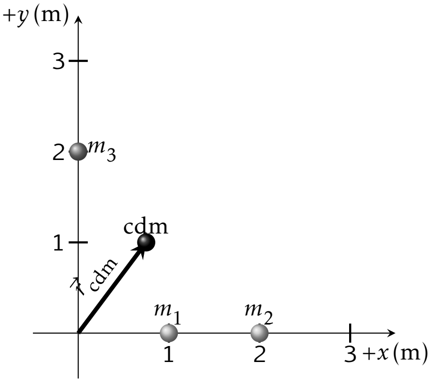

Figura 5: Sistema de tres partículas para el Ejemplo 1.

Solucion 1:

Sistema de partículas en el plano xy: $z_1 = z_2 = z_3 = 0$ y $z_{\text{cdm}} = 0$.

La coordenada x del centro de masa del sistema es

$$x_{\text{cdm}} = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3}[m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cancelto{0}{m_3 x_3}]$$
$$= \frac{1}{4.0\,\text{kg}}(1.0\,\text{kg})[(1.0 + 2.0)\,\text{m}] = \frac{3}{4}\,\text{m} = \boxed{0.75\,\text{m}}$$

La coordenada y del centro de masa del sistema es

$$y_{\text{cdm}} = \frac{1}{m_1 + m_2 + m_3}[\cancelto{0}{m_1 y_1} + \cancelto{0}{m_2 y_2} + m_3 y_3]$$
$$\frac{1}{4.0\,\text{kg}}(2.0\,\text{kg})[2.0\,\text{m}] = \boxed{1.0\,\text{m}}$$

El vector de posición del centro de masa del sistema es,

$$\vec{r}_{\text{cdm}} = (0.75\,\hat{\imath} + 1.0\,\hat{\jmath})\,\text{m}$$

Ejemplo 2: Suponga que una barra de masa M y longitud L tiene una masa uniforme por unidad de longitud, $\lambda = M/L$, también llamada *densidad de masa lineal*. Demuestre que el centro de masa de la barra se encuentra equidistante de sus extremos.

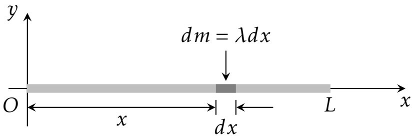

Figura 6: Geometría usada para encontrar el centro de masa de una barra uniforme.

Solucion 2: La coordenada x del centro de masa de una distribución uniforme es

$$x_{\text{cdm}} = \frac{1}{M}\int x\,dm$$

En este caso $dm = \lambda dx$, la integración va dese $x = 0$ hasta $x = L$, así

$$x_{\text{cdm}} = \frac{1}{M}\int_0^L x(\lambda dx) = \frac{\lambda}{M}\int_0^L x\,dx = \frac{\lambda}{M}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L = \frac{\lambda}{M}\left(\frac{L^2}{2}\right) = \left(\frac{M}{L}\right)\frac{1}{M}\left(\frac{L^2}{2}\right) = \frac{L}{2}$$

Ejemplo: Suponga que la barra del ejemplo anterior *no tiene una distribución de masa uniforme*, esto es, su masa por unidad de longitud varía linealmente con x de acuerdo con la expresión $\lambda = \alpha x$, donde α es una constante. Encuentre la coordenada x del centro de masa como una fracción de L.

Solución 3: En este caso $dm = \lambda dx = \alpha x dx$. La coordenada x del centro de masa es

$$x_{\text{cdm}} = \frac{1}{M}\int x dm = \frac{1}{M}\int_0^L x(\alpha x dx) = \frac{\alpha}{M}\int_0^L x^2 dx = \frac{\alpha}{M}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L = \frac{\alpha}{M}\left(\frac{L^3}{3}\right)$$

La masa total M de la barra es

$$M = \int dm = \int_0^L \lambda dx = \alpha\int_0^L x dx = \alpha\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L = \frac{\alpha L^2}{2}$$

Entonces

$$x_{\text{cdm}} = \cancel{\alpha}\left(\frac{2}{\cancel{\alpha}\cancel{L^2}}\right)\left(\frac{L^{\cancel{3}}}{3}\right) = \frac{2}{3}L$$

Para entender la utilidad del centro de masa derivemos el vector posición del centro de masa $\vec{r}_{\mathrm{cdm}}$ con respecto al tiempo. Asumiendo que la masa del sistema permanece constante, se tiene

$$\vec{v}_{\mathrm{cdm}} = \frac{d\vec{r}_{\mathrm{cdm}}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{v}_i, \tag{33}$$

donde $\vec{v}_i$ es la velocidad de la i-ésima partícula del sistema. De la Ec.(33), se obtiene

$$\vec{p}_{\mathrm{total}} = M\vec{v}_{\mathrm{cdm}} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{p}_i, \tag{34}$$

o sea,

---

el momentum lineal total del sistema es igual a la masa total del sistema multiplicada por la velocidad del centro de masa

---

Es decir, el momentum lineal total del sistema es igual al de una sóla partícula de masa M que se mueve con la velocidad $\vec{v}_{\mathrm{cdm}}$ del centro de masa.

Derivando la Ec.(33) con respecto del tiempo permite encontrar

$$\vec{a}_{\text{cdm}} = \frac{d\vec{v}_{\text{cdm}}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{a}_i, \tag{35}$$

es decir, la aceleración del centro de masa, donde $\vec{a}_i$ es la aceleración de la i-ésima partícula. De la Ec.(35) se obtiene

$$M\vec{a}_{\text{cdm}} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i, \tag{36}$$

donde $\vec{F}_i$ es la fuerza neta que actúa sobre la i-ésima partícula.

Las fuerzas que actúan sobre cualquier partícula del sistema pueden incluir tanto fuerzas externas como internas. De la tercera ley de Newton del movimiento, las fuerzas internas entre partículas son pares de acción-reacción cuyos efectos se anulan:

La fuerza neta que actúa sobre el sistema es causa **solamente** de fuerzas externas. Luego, la Ec.(36) se reescribe como

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{cdm}}, \tag{37}$$

o sea,

---

la fuerza neta externa sobre un sistema de partículas es igual a la masa total del sistema multiplicada por la aceleración del centro de masa.

Por comparación de la Ec.(37) con la segunda ley de Newton aplicada a una sola partícula, se ve que el modelo de partícula usado en el presente curso se describe en términos del centro de masa:

El centro de masa de un sistema de partículas de masa total M se mueve como una partícula equivalente de masa M que se movería bajo el efecto de la fuerza externa neta en el sistema.

La integración de la Ec.(37) en un intervalo de tiempo finito, da

$$\int \sum \vec{F}_{\text{ext}}\, dt = \int M\vec{a}_{\text{cdm}}\, dt = M \int d\vec{v}_{\text{cdm}} = M\Delta\vec{v}_{\text{cdm}},$$

la cual puede ser reescrita como

$$\vec{I} = \Delta\vec{p}_{\text{total}}, \tag{38}$$

En la Ec.(38) $\vec{I}$ es el impulso que las fuerzas externas ejercen sobre el sistema y $\vec{p}_{\text{total}}$ es la cantidad de movimiento total del sistema.

La Ec.(38) es la forma general del teorema impulso-cantidad de movimiento lineal para un sistema de partículas.

Para finalizar este análisis, si la fuerza neta externa sobre un sistema es cero, de la Ec.(37) se sigue que

$$M\vec{a}_{\text{cdm}} = M\frac{d\vec{v}_{\text{cdm}}}{dt} = \frac{d}{dt}(M\vec{v}_{cdm}) = \vec{0},$$

de modo tal que

$$M\vec{v}_{\text{cdm}} = \vec{p}_{\text{total}} = \text{constante} \quad \text{cuando} \sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}, \tag{39}$$

es decir, la cantidad de movimiento lineal total de un sistema de partículas se conserva si no existen fuerzas externas actuando sobre el sistema.

Tanto la cantidad de movimiento lineal total, cuanto la velocidad del centro de masa son constantes en el tiempo: Generalización de la idea de conservación de la cantidad de movimiento lineal aplicado a un sistema de partículas.