Clase 2

Cálculo 3

Carlos Martínez Ranero

Departamento de Matemática
Universidad de Concepción

Recordatorio de la clase anterior.

- Puntos interiores, exteriores y frontera.
- Conjuntos abiertos y conjuntos cerrados.
- Conjuntos acotados y no acotados.

Plan de la clase de hoy.

- Puntos aislados y puntos de acumulación.
- Gráficas de funciones y conjuntos de nivel.
- Límites.

Definición

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ y $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Decimos que $\vec{x}_0$ es un punto de acumulación si para $\forall \epsilon > 0$ $(B_\epsilon(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap S \neq \varnothing$. En otro caso, decimos que $\vec{x}_0$ es un punto aislado.

Ejemplo 1

Determinar los puntos de acumulación del conjunto $S = \{(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2}) : n \in \mathbb{N}\}$.

Solución:
El origen es el único punto de acumulación.

Gráficas y conjuntos de nivel.

Nuestro objetivo es entender como visualizar funciones de varias variables, esto requiere las nociones de gráfica de una función y de curvas (o superficies) de nivel.

Definición

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. La gráfica de f es el conjunto $\Gamma_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}$.

Definición

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Una curva de nivel es el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}$ donde c es una constante.

Ejemplo 2

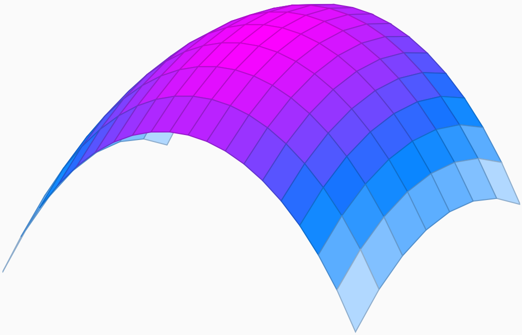
Encontrar las curvas de nivel de la función $f(x, y) = \sqrt{36 - 4x^2 - y^2}$.

Solución:

- Las curvas de nivel corresponden a elipses.

Ejemplo 3

Bosquejar la gráfica de la función $f(x, y) = \sqrt{36 - 4x^2 - y^2}$.



Gráficas y conjuntos de nivel.

Definición

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

1. La gráfica de f es el conjunto $\Gamma_f = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \; x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)\}$.
2. Un conjunto de nivel es el conjunto $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \; f(x_1, \dots, x_n) = c\}$ donde c es una constante.

Limites

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, denotamos por A' el conjunto de sus puntos de acumulación.

Definición

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in A'$, y $f : A \to \mathbb{R}^m$. Decimos que $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = \vec{L}$ si $\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0$ tal que si $\vec{x} \in A, 0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta$, entonces $\|f(\vec{x}) - \vec{L}\| < \epsilon$.

Intuitivamente si $\vec{x}$ es muy cercano a $\vec{a}$, entonces $\vec{f}(\vec{x})$ es muy cercano a $\vec{L}$.