Álgebra II. 525150
Listado para clase práctica 7: 14 de mayo
Prof.: A. González, F. Jara, M. Selva.

Listado 7: Matrices. Matrices y transformaciones lineales.
Los problemas marcados con **(P)** serán resueltos en práctica.

1. Matrices

1. Considere las siguientes matrices y vectores

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (a) **(P)** Calcule, si es posible, $A + A = 2A$, $A + B$, $B - D$, Ax, By, Cx.

   (b) ¿Qué otras sumas de matrices y productos matriz-vector son posibles?

2. Demuestre que los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales del espacio vectorial de matrices correspondiente

   (a) $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ : \ A \text{ es antisimétrica}\}$,

   (b) **(P)** $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{K}^n \ : \ Ax = \theta\}$, siendo $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y θ el vector nulo de $\mathbb{K}^m$. ¿Cuál subconjunto de $\mathbb{K}^n$ es $\mathcal{S}$ si A es la matriz nula de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$?

   Observación: Una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es antisimétrica si y solo para todo par de índices $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se cumple que $A(i, j) = -A(j, i)$. Si $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es antisimétrica si y solo si $a = -a \Rightarrow a = 0$, $b = -c$, $c = -b$ y $d = -d \Rightarrow d = 0$.

3. Encuentre una base para cada uno de los siguientes espacios vectoriales

   (a) $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \ a + b = c \wedge d = 3a \right\}$,

   (b) $T = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) : \ a_{11} + a_{22} = 0 \wedge a_{23} = a_{13} \right\}$,

   (c) $U = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : \ a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0 \wedge a_{21} = a_{12} \right\}$,

(d) **(P)** $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}) : \ b = 0 \wedge c = 2a \right\}$, e.v. real,

(e) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) : \ a_{11} = a_{22} \wedge a_{23} = 0 \right\}$.

4. Calcule la suma y la intersección de los e.v. T y W del problema anterior.

5. **(P)** Sea V el espacio vectorial real $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Considere los siguientes subespacios vectoriales de V:

$$W = \left\{ A \in V \ : \ A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \text{ con } a, b \in \mathbb{R} \right\}, \ U_1 = \left\{ A \in V \ : \ A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \text{ con } a, b \in \mathbb{R} \right\},$$
$$U_2 = \left\{ A \in V \ : \ A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \text{ con } a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Compruebe que $W + U_1 = W + U_2$, pero $U_1 \neq U_2$. ¿Son las sumas anteriores sumas directas?

(b) Determine S, un subespacio vectorial de V distinto de W, de modo que $W \cup S$ también sea un subespacio vectorial de V.

6. Sea $\kappa \in \mathbb{C}$, fijo. Considere los siguientes subconjuntos de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$,

$$H_\kappa = \left\{ A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \ : \ A \begin{pmatrix} \kappa \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad S_\kappa = \left\{ A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \ : \ \begin{pmatrix} \kappa & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Demuestre que H_κ es subespacio vectorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{C}$. El conjunto S_κ es s.e.v. de $M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{C}$, no tiene que demostrarlo.

(b) Calcule $H_1 \cap S_1$ y $H_1 + S_1$. ¿Es $H_1 + S_1$ una suma directa?

(c) Determine para qué valores de κ los espacios H_κ y S_κ están en suma directa.

(d) Determine para qué valores de κ se tiene que $H_\kappa + S_\kappa = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

Observación: Ya sabemos que $A \begin{pmatrix} \kappa \\ 1 \end{pmatrix}$ es la combinación lineal de las columnas de A con escalares κ y 1. El producto $(\kappa \ 1)\, A$ es la combinación lineal de las filas de A con escalares κ y 1, es decir, si

$$A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix},$$

entonces,

$$A \begin{pmatrix} \kappa \\ 1 \end{pmatrix} = \kappa \begin{pmatrix} z_1 \\ z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa z_1 + z_2 \\ \kappa z_3 + z_4 \end{pmatrix}, \quad (\kappa \quad 1)A = \kappa(z_1 \quad z_2) + (z_3 \quad z_4) = (\kappa z_1 + z_3 \quad \kappa z_2 + z_4)$$

2. Matrices y transformaciones lineales

1. Determine las matrices asociadas a las siguientes transformaciones lineales con respecto a las bases canónicas de los espacios de partida y llegada

(a) $T_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ T_1((x,y)^{\mathrm{T}}) = (-2x+y,\, x-y,\, 0)^{\mathrm{T}}$,

(b) $T_2 : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2,\ T_2((x,y)^{\mathrm{T}}) = (x+y,\, 0)^{\mathrm{T}}$, considerando a $\mathbb{C}^2$ e.v. complejo,

(c) $T_2 : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2,\ T_2((x,y)^{\mathrm{T}}) = (x+y,\, 0)^{\mathrm{T}}$, considerando a $\mathbb{C}^2$ e.v. real,

(d) $T_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ T_3((x,y)^{\mathrm{T}}) = (7x,\, y-x)^{\mathrm{T}}$,

(e) **(P)** $T_4 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4,\ T_4((x,y,z)^{\mathrm{T}}) = (2x-2y-2z, y-3x+z, x+z, 3z-y)^{\mathrm{T}}$

(f) $T_5 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ T_5((x,y)^{\mathrm{T}}) = 2x-y$,

(g) $T_6 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ T_6((x,y,z)^{\mathrm{T}}) = (x+2y+3z, 2x+z, 3x+y-z)^{\mathrm{T}}$,

(h) $T_7 : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que

$$T_7(p) = (p'(0), p'(1), p(0), p(1))^{\mathrm{T}},$$

(i) $T_8 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ tal que

$$T_8((x,y,z)^{\mathrm{T}}) = y+z+yt+xt^3,$$

(j) **(P)** $T_9 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$T_9\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1+x_2+\ldots+x_n \\ x_1+x_2+\ldots+x_n \\ \vdots \\ x_1+x_2+\ldots+x_n \end{pmatrix}.$$

Calcule, con ayuda de las matrices asociadas a las transformaciones, los siguientes vectores

$$T_1((1,1)^{\mathrm{T}}), T_2((1+i, 2i)^{\mathrm{T}}), T_6((1,2,1)^{\mathrm{T}}), T_7(1-x), T_9((2,2,\cdots,2)^{\mathrm{T}}).$$

2. Sea $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ la aplicación lineal definida por

$$T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = 2a_2 x + a_1.$$

Calcule la matriz asociada a esta aplicación con respecto a las siguientes bases B_1 de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y B_2 de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$.

(a) B_1 es la base canónica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y B_2 es la base canónica de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$.

(b) $B_1 = \{1-x,\, 1+x,\, 1+x+x^2\}$, $B_2 = \{1+x,\, 1-x\}$.

3. **(P)** Considere las transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. La matriz asociada a $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ con respecto a las bases B y B_c (base canónica de $\mathbb{R}^2$) es

$$[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]_B^{B_c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

y la matriz asociada a T con respecto a la base B, tanto en el espacio de partida como en el de llegada, es

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

¿Qué vectores de $\mathbb{R}^2$ pertenecen a B? Encuentre $T((x,y)^{\mathrm{T}})$.

4. Sea $L : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ la transformación lineal cuya matriz asociada con respecto a la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ es

$$[L]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine $L(A)$, si A es una matriz cualquiera con 2 filas y 2 columnas y coeficientes reales.