Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemática
Departamento de Matemática

Cálculo II

Ingeniería Civil

Prof. Víctor Aros Quinán

Segundo Semestre 2021

Clase N$^{\underline{o}}$26: Cálculo II

Criterios de Convergencia y Series de Potencias

Series Numéricas

Definición

Diremos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **absolutamente convergente** si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente. Además, si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es divergente, entonces diremos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **condicionalmente convergente**.

Criterios de Convergencia

A continuación se establecen dos criterios de convergencia (convergencia absoluta) de series numéricas.

Criterio del Cociente

Sea $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie numérica y $r = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ con $r \in \mathbb{R}$ o $+\infty$.

(a) Si $0 \leq r < 1$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente.

(b) Si $r > 1$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente,

(c) Si $r = 1$, entonces el criterio no proporciona información.

Demostración:

https://youtu.be/KQbwad_rLL0

Criterios de Convergencia

Criterio de la Raíz

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie numérica y $r = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ con $r \in \mathbb{R}$ o $+\infty$.

(a) Si $0 \leq r < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente.

(b) Si $r > 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente,

(c) Si $r = 1$, entonces el criterio no proporciona información.

Observación:

La demostración de este criterio es similar a la del anterior.

Ejercicios

Analizar la convergencia de las siguientes series.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdots (3n-2)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n+1}}{n^n}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{n!}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^{n^2}$

Demuestre que:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (2n+1)} = 0$$

Ejercicios

Solución a): Notemos lo siguiente:

$$a_n = \frac{3^n}{n!} \text{ y } a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!}$$

Luego,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n \cdot 3 \cdot n!}{(n+1)n! \cdot 3^n} = 0$$

dado lo anterior, podemos concluir que la serie es convergente absolutamente, por ende es convergente.

Ejercicios

Solución b): Notemos lo siguiente:

$$a_n = \frac{1 \cdot 4 \cdots (3n-2)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \text{ y } a_{n+1} = \frac{1 \cdot 4 \cdots (3n-2)(3(n+1)-2)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)(2(n+1))}$$

luego,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdots (3n-2)(3n+1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)(2n+2)} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{1 \cdot 4 \cdots (3n-2)}$$
$$=$$

dado lo anterior, podemos concluir que la serie numérica es ....

Ejercicios

Solución f): Sabemos que el término central de la serie es:

$$a_n = \left(\frac{1+n^2}{1+n^3} \right)^{n^2}$$

luego, para aplicar el criterio de la raíz debemos determinar:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{1+n^2}{1+n^3} \right)^{n^2}} = \left(\frac{1+n^2}{1+n^3} \right)^{n}$$

ahora bien,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3} \right)^{n} =$$

Series de Potencias

Definición

Una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

donde $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales y x una variable real, es llamada **serie de potencias**.

Observaciones:

1. Notar que al asignar a x un valor real fijo, se obtiene una serie numérica, de las que acabamos de estudiar, luego ella puede ser convergente o divergente.
2. Nuestro nuevo objetivo es estudiar para que valores de x la serie es converge y para cuales diverge.

Series de Potencias

Existe una forma mas general de expresar una serie de potencias, la cual está dada por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + ... + a_n(x-c)^n + ...$$

donde c es una constante. Estas son llamadas **series de potencias alrededor del punto c**. Notar que si $c = 0$, se obtiene la serie de potencias en su forma original.

Ejemplos:

1.

2.

3.

Ejercicios

Estudiar la convergencia de las siguientes series de potencias.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Ejercicios

Solución 1):

Ejercicios

Solución 2):

Ejercicios

Solución 3):

Ejercicios

Solución 4):

Series de Potencias

En general es posible mostrar que una serie de potencias centrada en c se comporta como indica el siguiente teorema.

Teorema

Sea $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ una serie de potencias centrada en el punto c.

Una de las siguientes tres posibilidades es verficada:

1. la serie converge sólo para c.
2. existe $R > 0$ tal que la serie converge para $|x-c| < R$ y diverge para $|x-c| > R$.
3. la serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

Series de Potencias

Observaciones:

1. R es llamado **radio de convergencia** de la serie.
2. si $R = 0$ quiere decir que la serie solo para $x = c$.
3. si $R = +\infty$ quiere decir que la serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$.
4. toda serie de potencias tiene un radio de convergencia.
5. al conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}$ donde la serie converge se le denomina **intervalo de convergencia** de la serie.

Ejercicios

Determine el radio e intervalo de convergencia de las siguientes series.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-5)^n}{n5^n}$
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\left(\frac{x}{2}\right)^n$
5. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{3^n n!}(x-1)^n$

Series de Potencias

Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$ podemos definir la función:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \text{ para } x \in \left]c-R, c+R\right[$$

Luego, resulta natural preguntarse ¿qué buenas propiedades tiene esta función? ¿Es f continua, derivable o integrable?

Series de Potencias

Teorema

La función $f :]c-R, c+R[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ es derivable e integrable. La derivada de f está dada por:

$$f'(x) =$$

y una primitiva de f es:

$$\int f(x)\, dx =$$

Observaciones:

1. Las series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-c)^{n-1}$ y $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(x-c)^{n+1}}{n+1}$ tendrán el mismo radio de convergencia de la serie original.

2. Lo anterior no quiere decir que tengan el mismo intervalo de convergencia.

Ejemplo 1

Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Notar que f es derivable y $R = +\infty$. Luego, para cada $x \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$f'(x) =$$

Ejemplo 1

En particular,

$$f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} =$$

$$f(-1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} =$$

$$f(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} =$$

$$f(x^2) =$$

$$f(-x^2) =$$

Ejemplo 2

Partiendo de la serie geométrica

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots; \text{ para } |x| < 1$$

Reemplazando x por $-x$, se obtiene:

$$f(-x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n =$$

y ahora, reemplazando x por $-x^2$, se tiene:

$$f(-x^2) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} =$$

Ejemplo 2

Podemos integrar la expresión anterior para obtener:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n t^{2n}\,dt$$

de donde se sigue que:

Ejercicios

1. Muestre que:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}, \text{ con } |x| < 1$$

2. Determine una expresión en series de potencias para la función $f(x) = \frac{1}{1+x}$ centrada en 3. HINT: en el denominador puedes sumar un 0 y hacer lo siguiente $1 + x - 3 + 3 = 4 + (x - 3)$
3. Exprese mediante series de potencias las funciones

$$g(x) = \frac{2}{x+1} \text{ y } h(x) = \frac{1}{x-1}$$

y luego deduzca la serie de potencias que representa a la función $f(x) = \frac{3x-1}{x^2-1}$. HINT: sumar las funciones puede ayudar.