Índice general

3. Transformaciones lineales **2**

3.2. Inyectividad y sobreyectividad de transformaciones lineales 2

3.3. Operaciones entre transformaciones lineales: suma, producto por escalar y composición 7

3.4. Transformaciones lineales invertibles 11

Capítulo 3

Transformaciones lineales

En Álgebra 1, al trabajar con funciones, también analizamos cuando una función es inyectiva, sobreyectiva y biyectiva y vimos además que solo las funciones biyectivas tienen inversa. El análisis de la inyectividad y sobreyectividad de transformaciones lineales es mucho más sencillo que el de una función real.

3.2. Inyectividad y sobreyectividad de transformaciones lineales

Definición 3.1. Sea $T : U \longrightarrow V$ una transformación lineal.

T es *inyectiva* si y solo si vectores distintos de U tienen imágenes distintas en V o, escrito en lenguaje matemático, si y solo si para todo par de vectores $u_1, u_2 \in U$ se tiene que si $u_1 \neq u_2$, entonces $T(u_1) \neq T(u_2)$ o, de manera equivalente, si para todo $u_1, u_2 \in U$ se cumple que $T(u_1) = T(u_2)$ si y solo si $u_1 = u_2$.

T es *sobreyectiva* si y solo si $\mathrm{im}(T) = V$.

Si T es inyectiva y sobreyectiva, entonces T es *biyectiva.*

Si $T : U \to V$ es una transformación lineal, es muy sencillo averiguar si ella es sobreyectiva. Dado que $\mathrm{im}(T)$ es un s.e.v. de V se cumple que $\mathrm{im}(T) = V$ si y solo si su dimensión es igual a la dimensión de V. Es decir, T es sobreyectiva si y solo si el rango de T es igual a la dimensión de V.

El siguiente lema nos muestra que también es sencillo averiguar si una transformación lineal es inyectiva.

Lema 3.2. Sea $T : U \longrightarrow V$ una transformación lineal entre U y V. T es inyectiva si y solo si $\ker(T) = \{\theta_U\}$ o, dicho de otro modo, T es inyectiva si y solo si $\eta(T) = 0$.

Demostración. Mostremos primero que si T es inyectiva, entonces $\ker(T) = \{\theta_U\}$. Utilicemos la técnica de demostración indirecta, es decir, supongamos que $\ker(T) \neq \{\theta_U\}$ y demostremos que T no es inyectiva. Esto es relativamente sencillo pues si $\ker(T) \neq \{\theta_U\}$, entonces existe $u_1 \in U, u_1 \neq \theta_U$ tal que $u_1 \in \ker(T)$, pero entonces u_1 y θ_U son vectores en U, distintos entre sí, que tienen la misma imagen, $T(u_1) = T(\theta_U) = \theta_V$. Esto significa que T no es inyectiva.

Mostremos que si $\ker(T) = \{\theta_U\}$, entonces T es inyectiva. Nuevamente utilicemos la técnica de demostración indirecta. Supongamos que T no es inyectiva y demostremos que existen vectores distintos de θ_U en $\ker(T)$. Si T no es inyectiva, existen $u_1, u_2 \in U$, $u_1 \neq u_2$ tales que $T(u_1) = T(u_2)$. Entonces, el vector $u_1 - u_2 \in U$ es un vector distinto de θ_U para el que se cumple que $T(u_1 - u_2) = T(u_1) - T(u_2) = \theta_V$, es decir, $u_1 - u_2 \in \ker(T)$. □

Ejemplo 3.3. *Consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que*

$$T\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}\right) = (a+b)x^2 + (c+d)x + d$$

Determinemos si T es inyectiva y/o sobreyectiva.

$$\begin{aligned}
\ker(T) &= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \ T\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}\right) = 0x^2 + 0x + 0 \right\}, \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \ (a+b)x^2 + (c+d)x + d = 0x^2 + 0x + 0 \right\}.
\end{aligned}$$

De aquí se tiene que $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ deben ser tales que

$$\begin{aligned}
a + b &= 0, \\
c + d &= 0, \\
d &= 0,
\end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned}
a &= -b, \\
c &= 0, \\
d &= 0.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$
\begin{aligned}
\ker(T) &= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \ a = -b, c = d = 0 \right\}, \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -b \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \ b \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle .
\end{aligned}
$$

Podemos concluir entonces que $\eta(T) = 1$*, es decir,* T *no es inyectiva.*

Por otro lado, por teorema de las dimensiones: $\eta(T) + \mathrm{r}(T) = \dim(\mathbb{R}^4)$*, se tiene:* $1 + \mathrm{r}(T) = 4$ *y, por tanto,* $\mathrm{r}(T) = 3$.

Como $\mathrm{im}(T)$ *es s.e.v de* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *y tiene la misma dimensión que* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$*, entonces* $\mathrm{im}(T) = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$*, esto es,* T *es sobreyectiva.*

También pudimos haber procedido de forma distinta, en lugar de calcular el núcleo de T *podríamos determinar primero la imagen de* T*. Dado que* $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ *es una base de* $\mathbb{R}^4$ *y*

$$
\begin{aligned}
&T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = (1+0)x^2 + (0+0)x + 0 = x^2, \qquad && T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = (0+1)x^2 + (0+0)x + 0 = x^2, \\
&T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = (0+0)x^2 + (1+0)x + 0 = x, && T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = (0+0)x^2 + (0+1)x + 1 = x + 1,
\end{aligned}
$$

se tiene que $\mathrm{im}(T) = \langle \{x^2, x, x+1\} \rangle$*. Como* $\{x^2, x, x+1\}$ *es li, él es base de* $\mathrm{im}(T)$ *y, en consecuencia,* $\mathrm{r}(T) = 3$*, es decir,* T *es sobreyectiva. Aplicando nuevamente el teorema de las dimensiones:* $\eta(T) + \mathrm{r}(T) = \dim(\mathbb{R}^4)$*, se tiene que* $\eta(T) + 3 = 4$ *y, por tanto,* $\eta(T) = 1$ *y, en consecuencia,* T *no es inyectiva.*

Veamos nuevamente las transformaciones lineales en los apuntes de la semana pasada.

Ejemplo 3.4. *La transformación* T_1 *en el ejemplo 3.2 de la semana pasada no es inyectiva, mientras que* T_2 *sí lo es.*

T_1 *tampoco es sobreyectiva, su imagen tiene dimensión 2, que es menor que la dimensión del espacio de llegada.*

T_2 tampoco es sobreyectiva, su imagen tiene dimensión 2 y el espacio de llegada tiene, como e.v. real, dimensión 4. Recordar que T_2 no es una transformación lineal si sus espacios de partida y llegada se consideran espacios vectoriales complejos.

La transformación nula no es ni inyectiva ni sobreyectiva (si los espacios de partida y llegada no son e.v. triviales). La transformación identidad es biyectiva.

La transformación en ejemplo 3.7 de la semana pasada es inyectiva y sobreyectiva.

La transformación L que construimos en ejemplo 3.10 de la semana pasada no es ni inyectiva ni sobreyectiva.

Nota además que, en ese mismo ejemplo, aunque de T no nos dijeran cuál debe ser su núcleo, no es posible construir una transformación lineal inyectiva $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ con

$$\operatorname{im}(T) = \left\langle \left\{ (2,-1,0)^T, (-1,2,2)^T \right\} \right\rangle .$$

Esto se debe a que, dado que el conjunto $\left\{ (2,-1,0)^T, (-1,2,2)^T \right\}$ es li, cualquier transformación $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ cuya imagen sea igual al subespacio dado satisface que su rango es 2. El lema 3.8 de la semana pasada establece que el núcleo de T tiene que tener dimensión 2 y, por tanto, T no es inyectiva.

La semana pasada también vimos que si $T : U \to V$ es una transformación lineal y $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es una base de U, entonces $\{T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n)\}$ es generador de la imagen de T. Si además se cumple que T es inyectiva, entonces el rango de T es n y el conjunto $\{T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_n)\}$ no solo es generador de la imagen de T, sino que es base de la imagen de T.

Utilicemos todo lo que conocemos hasta el momento. Sea $T : U \longrightarrow V$ una transformación lineal entre los espacios vectoriales U y V. Por el teorema de las dimensiones (lema 3.8 de la semana pasada) sabemos que

$$\eta(T) + \mathrm{r}(T) = \dim(U). \tag{3.1}$$

Nota que

1. T es inyectiva si y solo si $\eta(T) = 0$ y, teniendo en cuenta (3.1), se cumple que si T es inyectiva, entonces $\mathrm{r}(T) = \dim(U)$. Dado que $\operatorname{im}(T) \subseteq V$ se cumple además que $\mathrm{r}(T) \leq \dim(V)$, es decir,

   $$T \text{ es inyectiva} \Rightarrow \dim(U) \leq \dim(V)$$

   lo cual es equivalente a

   $$\dim(U) > \dim(V) \Rightarrow T \text{ no es inyectiva.}$$

   Es decir, si la dimensión de un espacio vectorial U es mayor que la de un espacio vectorial V, no es posible construir una aplicación lineal inyectiva de U a V. Esto lo puedes razonar directamente desde la igualdad (3.1). Si $\dim(V) < \dim(U)$, entonces $\mathrm{r}(T) \leq \dim(V) < \dim(U)$, lo que significa que para que la suma $\eta(T) + \mathrm{r}(T)$ sea igual a $\dim(U)$ es necesario que $\eta(T) > 0$ y esto es equivalente a que la transformación no es inyectiva.

2. Si T es sobreyectiva, el rango de T es igual a la dimensión de V. Teniendo en cuenta nuevamente la ecuación (3.1), se cumple la siguiente relación entre las dimensiones de U, V y $\mathrm{im}(T)$, $\dim(V) = \dim(\mathrm{im}(T)) \leq \dim(U)$. Es decir,
$$T \text{ es sobreyectiva} \Rightarrow \dim(V) \leq \dim(U),$$
lo cual es equivalente a
$$\dim(V) > \dim(U) \Rightarrow T \text{ no es sobreyectiva.}$$
3. Es necesario que U y V tengan la misma dimensión para poder construir una transformación lineal biyectiva $T : U \longrightarrow V$. Además, si U y V tienen la misma dimensión, entonces
$$T \text{ es inyectiva } \Leftrightarrow T \text{ es sobreyectiva.}$$

Ejemplo 3.5. *Considere las aplicaciones lineales*
$$T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad L : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
tales que
$$T(p) = \int_{-1}^{1} p(x)\,dx, \quad L(p) = (p(-1), p(0), p(1)).$$
Observe que ninguna de las dos puede ser inyectiva y, por tanto, ninguna de las dos puede ser biyectiva, pero sí pueden ser sobreyectivas.

Además
$$\ker(T) = \left\langle \left\{ x^3, x^2 - \frac{1}{3}, x \right\} \right\rangle \Rightarrow \dim\left(\ker(T)\right) = 3 \Rightarrow \dim\left(\mathrm{im}(T)\right) = 1 \Rightarrow \mathrm{im}(T) = \mathbb{R},$$
por tanto, T es sobreyectiva. También pudimos calcular la imagen de T como el espacio generado por los vectores de $\mathbb{R}$
$$\left\{ T\left(1\right), T\left(x\right), T\left(x^2\right), T\left(x^3\right) \right\}.$$
Dado que la dimensión de este espacio es 0 o 1, sabemos que basta que T, aplicada a alguno de los vectores de la base canónica sea distinto de cero, para estar seguros de que $\mathrm{im}(T) = \mathbb{R}$.

En cuanto a L, ésta cumple que
$$\ker(L) = \left\langle \left\{ x^3 - x \right\} \right\rangle \Rightarrow \dim\left(\ker(L)\right) = 1 \Rightarrow \dim\left(\mathrm{im}(L)\right) = 3 \Rightarrow \mathrm{im}(L) = \mathbb{R}^3.$$
Por tanto, L es sobreyectiva. También puede calcularse $\mathrm{im}(L)$ *teniendo en cuenta que*
$$\mathrm{im}(L) = \left\langle \left\{ L\left(1\right), L\left(x\right), L\left(x^2\right), L\left(x^3\right) \right\} \right\rangle = \left\langle \left\{ (1,1,1)^T, (-1,0,1)^T, (1,0,1)^T, (-1,0,1)^T \right\} \right\rangle$$
que puede reducirse a la base de $\mathrm{im}(L)$
$$\left\{ (1,1,1)^T, (-1,0,1)^T, (1,0,1)^T \right\},$$
y, como este conjunto tiene 3 vectores se cumple que $\mathrm{r}(L) = 3$ *y, por tanto,* $\mathrm{im}(L) = \mathbb{R}^3$.

3.3. Operaciones entre transformaciones lineales: suma, producto por escalar y composición

Las operaciones suma y composición de transformaciones lineales y producto de transformación lineal por escalar se definen del mismo modo que se definieron estas operaciones para funciones en el curso de Álgebra 1.

Sean $T : U \to V$, $L : U \to V$ y $S : V \to W$ transformaciones lineales entre los $\mathbb{K}$-espacios vectoriales U, V y W.

Entonces, si $\alpha \in \mathbb{K}$, las transformaciones

$$T + L : U \to V, \quad \alpha T : U \to V, \quad S \circ T : U \to W$$

que a cada $u \in U$ hacen corresponder el vector

$$(T + L)(u) = T(u) + L(u), \quad (\alpha T)(u) = \alpha T(u), \quad (S \circ T)(u) = S(T(u))$$

también son transformaciones lineales. $T + L$ es la suma de las transformaciones T y L, αT es el producto de T por el escalar α y $S \circ T$ es la composición de las transformaciones S y T. Nota que S y T son tales que el espacio de llegada de T es igual al espacio de partida de S, solo cuando se cumpla esta relación entre los espacios de partida y llegada de dos transformaciones lineales podremos calcular su composición.

Demostremos que la composición de transformaciones lineales también es una transformación lineal. Sean $u, w \in U$, entonces

$$(S \circ T)(u + w) = S(T(u + w)).$$

Como T es lineal, $T(u+w) = T(u)+T(w)$ y, por tanto, $(S\circ T)(u+w) = S(T(u)+T(w))$, pero, como S también es lineal, $(S\circ T)(u+w) = S(T(u)+T(w)) = S(T(u))+S(T(w)) = (S\circ T)(u)+(S\circ T)(w)$.

Sean ahora $\alpha \in \mathbb{K}$ y $u \in U$, entonces

$$(S \circ T)(\alpha u) = S(T(\alpha u)).$$

Como T es lineal, $T(\alpha u) = \alpha T(u)$ y, por tanto, $(S \circ T)(\alpha u) = S(\alpha T(u))$, pero, como S también es lineal, $(S \circ T)(\alpha u) = S(\alpha T(u)) = \alpha S(T(u)) = \alpha(S \circ T)(u)$.

Veamos, con un ejemplo, la utilidad de componer transformaciones lineales.

Ejemplo 3.6. *Rotaciones y reflexiones son transformaciones lineales. Podemos convencernos gráficamente de ello, vea la figura 3.1. Por ejemplo, si $\vec{x}$ es un vector de $\mathbb{R}^2$ y $a \in \mathbb{R}$, el vector que resulta de primero, rotar $\vec{x}$ α radianes en sentido anti-horario y después multiplicar al vector resultante por a es igual al que resulta de multiplicar $\vec{x}$ por a y rotar al vector resultante α radianes en sentido anti-horario. Esto significa que la rotación respeta al producto por escalar.*

De manera similar podemos observar que, dados $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$, el vector que resulta de rotar $\vec{x} + \vec{y}$ α radianes en sentido anti-horario es el mismo que resulta de, primero, rotar $\vec{x}$ e $\vec{y}$ y, después, calcular la suma de los vectores resultantes. Observa un ejemplo en la figura 3.2.

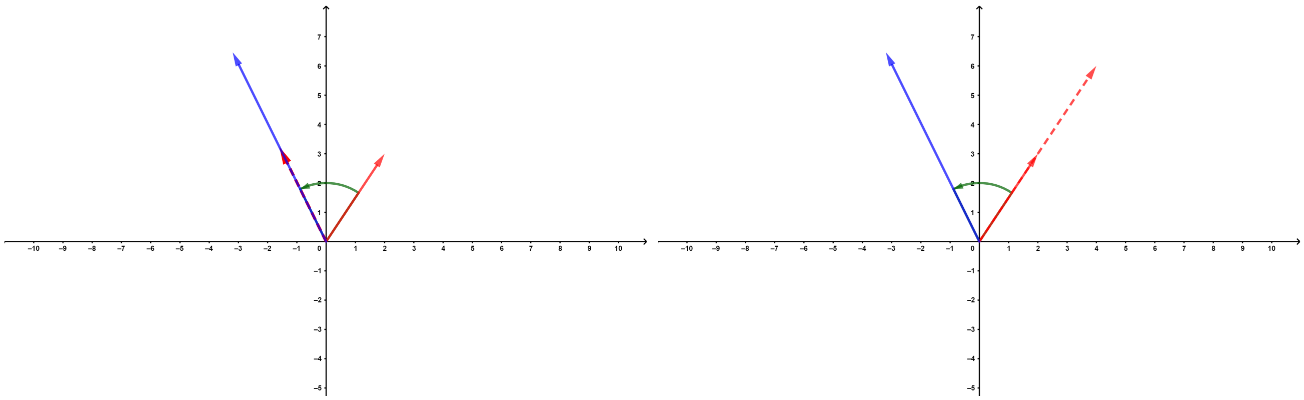

Figura 3.1: En la figura de la izquierda se rotó el vector rojo $\frac{\pi}{3}$ radianes en sentido anti-horario y el resultado se multiplicó por 2. En la figura de la derecha primero multiplicamos por 2 y después rotamos. El resultado es el mismo.

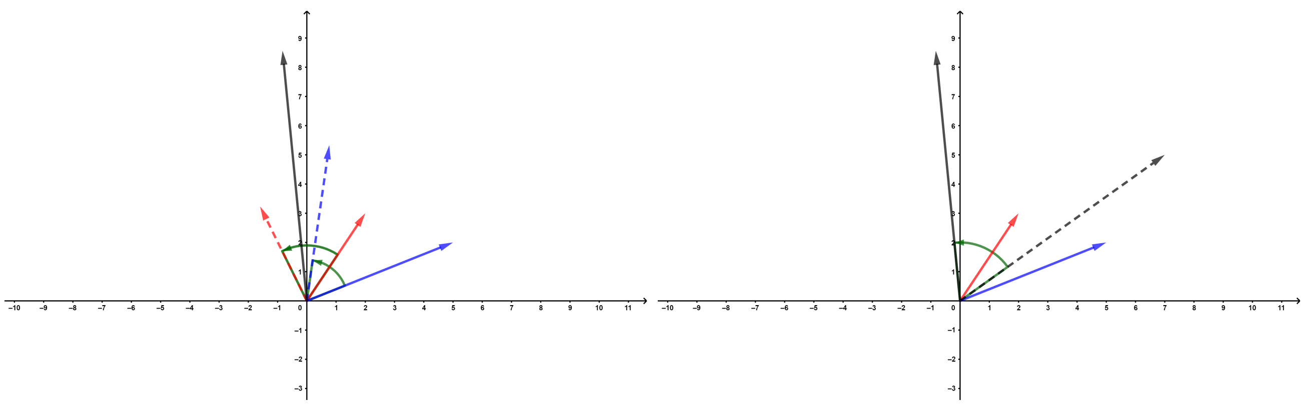

Figura 3.2: En la figura de la izquierda se rotaron los vectores azul y rojo y se sumaron los vectores resultantes. El vector resultante es el mismo que si primero sumamos los vectores azul y rojo y rotamos el resultado.

¿Cómo calcular el vector que resulta de rotar a un vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ α radianes en sentido anti-horario? Afortunadamente, para responder esta pregunta, solo debemos preocuparnos por calcular qué vectores resultan de rotar $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ α radianes en sentido anti-horario. Observa la figura 3.3. El vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (en imagen a la izquierda) se transforma en el vector $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$. [1] *El vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (en imagen a la izquierda) se transforma en el vector $\begin{pmatrix} \cos(\pi/2+\alpha) \\ \sin(\pi/2+\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$.*

Si llamamos R_α a la transformación lineal rotación α radianes en sentido anti-horario, entonces

$$R_\alpha\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = xR_\alpha\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + yR_\alpha\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = x\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

[1] debes recordar cómo se definieron las funciones seno y coseno como coordenadas de puntos en circunferencia unitaria, el punto final del vector que se obtiene después de rotar el primer vector canónico α radianes en sentido anti-horario es $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$.

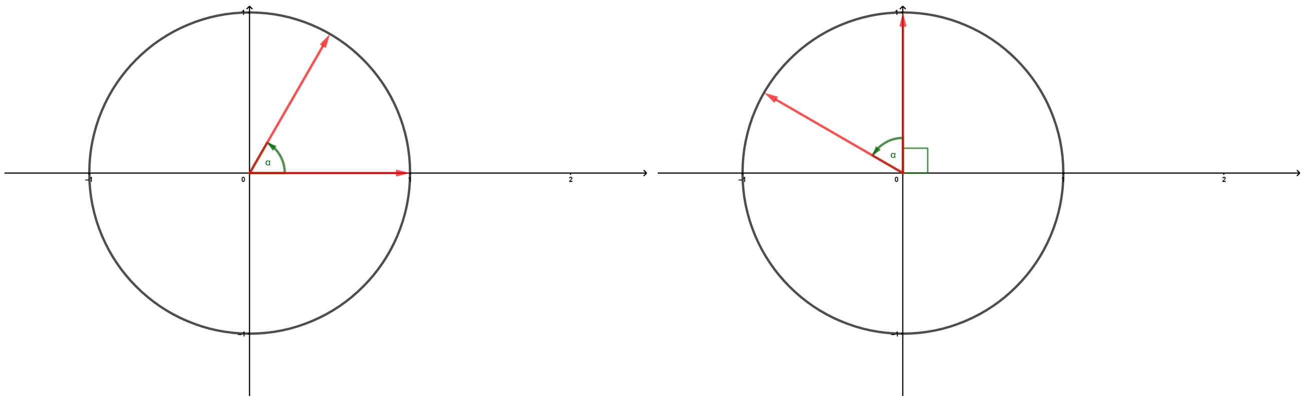

Figura 3.3: Rotación de vectores en base canónica de $\mathbb{R}^2$ α radianes en sentido anti-horario. La circunferencia mostrada es la circunferencia de radio 1 y centro en el origen de coordenadas.

Este ejemplo nos ha servido para entender la importancia de poder definir una transformación lineal solo teniendo en cuenta cómo ella transforma los vectores de una base del espacio de partida.

Veamos ahora cómo reflejar un vector de $\mathbb{R}^2$ con respecto al eje X. Llamemos F a esta transformación. Entonces $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es tal que

$$F\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad F\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$F\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}.$$

Por último, supón que queremos reflejar un vector de $\mathbb{R}^2$ con respecto a la recta $y = mx$, con $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Esta reflexión no es tan sencilla como la anterior. Sin embargo, podemos utilizar las transformaciones que ya conocemos (rotación y reflexión con respecto a eje X) para construir ésta. Tomemos, por simplicidad, $m = 1$, pero nota que todo lo que haremos a partir de ahora puede hacerse del mismo modo cuando $m \neq 1$, solo cambia el ángulo α que la recta forma con la parte positiva del eje X, si $m = 1$, $\alpha = \pi/4$ radianes. La reflexión de un vector con respecto a la recta $y = mx$ puede ser descompuesta en los siguientes pasos:

- *Paso 1: rotar el vector que queremos reflejar α radianes en sentido horario (si $m = 1$, $\alpha = \pi/4$), esto es equivalente a rotar el vector $2\pi - \alpha$ radianes en sentido anti-horario. Nota que este paso se hace porque reflejar el vector original con respecto a $y = mx$ es equivalente a reflejar el vector rotado con respecto al eje X, algo que ya sabemos hacer.*
- *Paso 2: reflejar el vector resultante de la rotación con respecto al eje X.*
- *Paso 3: deshacer la rotación, es decir, rotar el vector reflejado α radianes en sentido anti-horario. El vector resultante es el resultado de reflejar el vector original con respecto a la recta $y = mx$.*

Puedes entender mejor estos pasos si observas las figuras 3.4 y 3.5.

Nota que los pasos anteriores también pueden aplicarse si, en lugar de reflejar con respecto a la recta $y = x$ quisiéramos reflejar con respecto a otra recta que pase por el origen, solo debemos

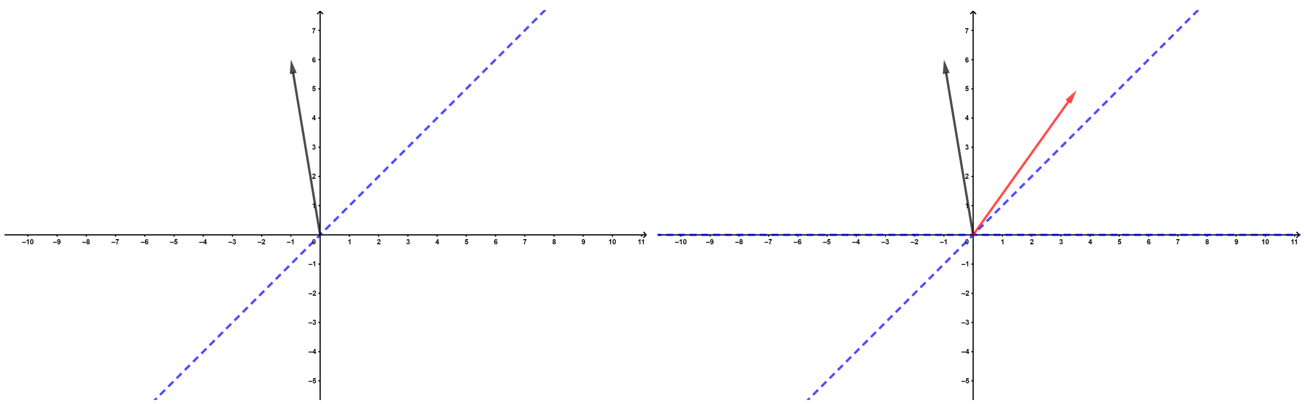

Figura 3.4: Nuestro objetivo es reflejar vector negro con respecto a recta $y = x$. Si rotamos el vector y la recta $\pi/4$ radianes en sentido horario, la recta queda encima del eje X y podemos reflejar al vector resultante de la rotación (dibujado de color rojo) con respecto al eje X.

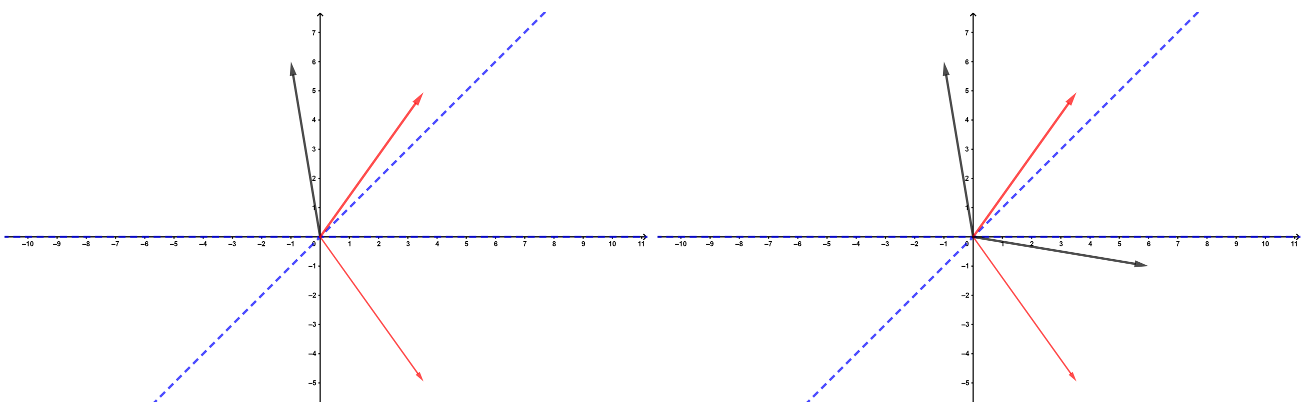

Figura 3.5: En la imagen de la izquierda se observa el resultado de reflejar al vector rotado con respecto al eje X. En la imagen de la derecha hemos revertido la rotación original. El nuevo vector negro es la reflexión del vector original con respecto a $y = x$.

adecuar las rotaciones en los pasos 1 y 3 al ángulo que forme esta recta con el eje X. Llamemos L *a la transformación que refleja a un vector de* $\mathbb{R}^2$ *con respecto a la recta* $y = x$*. Determinemos cuál es su fórmula. Según los pasos anteriores*

$$L = \underbrace{R_{\pi/4}}_{\text{paso3}} \circ (\underbrace{F}_{\text{paso2}} \circ \underbrace{R_{2\pi-\pi/4}}_{\text{paso1}}).$$

Dado que

$$\begin{aligned} R_{2\pi-\pi/4}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= x\begin{pmatrix} \cos(2\pi-\pi/4) \\ \sin(2\pi-\pi/4) \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -\sin(2\pi-\pi/4) \\ \cos(2\pi-\pi/4) \end{pmatrix}, \\ &= x\begin{pmatrix} \cos(-\pi/4) \\ \sin(-\pi/4) \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -\sin(-\pi/4) \\ \cos(-\pi/4) \end{pmatrix}, \\ &= x\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

se cumple que

$$\left(F\circ R_{2\pi-\pi/4}\right)\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}x+y\\-x+y\end{pmatrix}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}x+y\\x-y\end{pmatrix}$$

y, por último,

$$\begin{aligned}\left(R_{\pi/4}\circ\left(F\circ R_{2\pi-\pi/4}\right)\right)\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)&=R_{\pi/4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}x+y\\x-y\end{pmatrix}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}R_{\pi/4}\left(\begin{pmatrix}x+y\\x-y\end{pmatrix}\right),\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left((x+y)\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}+(x-y)\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\right),\\&=\frac{1}{2}\left((x+y)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+(x-y)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right),\\&=\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Más adelante definiremos la matriz asociada a una transformación lineal con respecto a bases de los espacios de partida y llegada, con ayuda de esta matriz será mucho más sencillo componer transformaciones lineales.

3.4. Transformaciones lineales invertibles

Definición 3.7. Una transformación lineal $T:U\to V$ es **invertible** si y solo si existe una transformación lineal $S:V\longrightarrow U$ tal que

$$\forall\, v\in V\ :\ T(S(v))=v\qquad\text{y}\qquad\forall\, u\in U\ :\ S(T(u))=u,$$

es decir, T es invertible si y solo si existe una transformación lineal $S:V\to U$ de modo que $T\circ S$ es igual a la transformación identidad en V y $S\circ T$ es la transformación identidad en U.

Lema 3.8. Sean U y V espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$. La transformación lineal $T:U\to V$ entre los espacios vectoriales U y V es biyectiva si y solo si ella es invertible.

Demostración. Demostremos primero que si T es biyectiva, es posible construir una transformación lineal $S:V\to U$ de modo que para todo $u\in U$ se cumpla que $S(T(u))=u$ y para todo $v\in V$, $T(S(v))=v$.

Si T es biyectiva, entonces para cada $w\in V$, w tiene una única pre-imagen por T en U, es decir, para cada $w\in V$, existe un único $u\in U$ tal que $T(u)=w$. Sea $S:V\to U$ la transformación que a cada $w\in V$ hace corresponder su pre-imagen por T. Demostremos que S es lineal.

(i). Sean $v_1,v_2\in V$. Como T es sobreyectiva, existen $u_1,u_2\in U$ tales que $T(u_1)=v_1,T(u_2)=v_2$. Denotemos $s=S(v_1+v_2)$. Debemos probar que $s=S(v_1)+S(v_2)=u_1+u_2$.

Por la forma en que hemos definido la transformación S, se cumple que $s = S(v_1 + v_2)$ si y solo si s es la pre-imagen por T de $v_1 + v_2$, es decir,

$$\begin{aligned} s = S(v_1+v_2) &\Leftrightarrow T(s) = v_1 + v_2, \\ &\Leftrightarrow T(s) = T(u_1) + T(u_2), && \text{porque } v_1 = T(u_1), v_2 = T(u_2), \\ &\Leftrightarrow T(s) = T(u_1 + u_2), && \text{porque } T \text{ es lineal,} \\ &\Leftrightarrow s = u_1 + u_2, && \text{porque } T \text{es inyectiva.} \end{aligned}$$

Hemos demostrado que S respeta la suma.

(ii). Sea ahora $s = S(\lambda\, v_1)$. Como T es sobreyectiva, existe $u_1 \in U$ de modo que $T(u_1) = v_1$. Debemos probar que $s = \lambda\, S(v_1) = \lambda u_1$. Además $s = S(\lambda v_1)$ si y solo si s es la pre-imagen, por T, de λv_1. Entonces,

$$\begin{aligned} s = S(\lambda\, v_1) &\Leftrightarrow T(s) = \lambda\, v_1, \\ &\Leftrightarrow T(s) = \lambda T(u_1), && \text{porque } v_1 = T(u_1), \\ &\Leftrightarrow T(s) = T(\lambda\, u_1), && \text{porque } T \text{ es lineal,} \\ &\Leftrightarrow s = \lambda\, u_1, && \text{porque } T \text{ es inyectiva.} \end{aligned}$$

Hemos demostrado que S respeta el producto por escalar.

Podemos concluir entonces que S es lineal. Solo resta demostrar que las composiciones $S \circ T$ y $T \circ S$ son iguales a las identidades en U y V respectivamente. Por la manera en que se ha definido S ésta satisface además que para $u \in U$, $S(T(u)) = u$ pues para cada $T(u) \in V$ el vector u es su pre-imagen por T. S también cumple que para cada $v \in V$, $T(S(v)) = v$ pues si $S(v)$ es la pre-imagen por T de v, entonces $T(S(v)) = v$.

Demostremos la implicación en el otro sentido. Es decir, supongamos ahora que T es invertible o, de manera equivalente, que existe $S : V \to U$, lineal, tal que

$$\forall\, u \in U \ : \ S(T(u)) = u \quad \text{ y } \quad \forall\, v \in V \ : \ T(S(v)) = v$$

y demostremos que T es biyectiva.

T es biyectiva si y solo si es inyectiva y sobreyectiva.

Para demostrar que T es inyectiva, supongamos que $u_1, u_2 \in U$ son tales que y $T(u_1) = T(u_2)$. T es inyectiva si podemos demostrar que esta igualdad implica que $u_1 = u_2$

$$\begin{aligned} T(u_1) = T(u_2) \ &\Rightarrow \ T(u_1) - T(u_2) = \theta_V, \\ &\Rightarrow \ T(u_1 - u_2) = \theta_V, && \text{porque } T \text{ es lineal,} \\ &\Rightarrow \ S(T(u_1 - u_2)) = S(\theta_V), \\ &\Rightarrow \ u_1 - u_2 = \theta_U, && \text{porque } S \circ T = \mathrm{id}_U \text{ y } S \text{ es lineal,} \\ &\Rightarrow \ u_1 = u_2. \end{aligned}$$

Como hemos demostrado que $T(u_1) = T(u_2) \Rightarrow u_1 = u_2$, podemos afirmar que T es inyectiva.

Notemos además que si existe $S : V \to U$ tal que para todo $v \in V$ se cumple que $T(S(v)) = v$, entonces para cada $v \in V$, $S(v)$ es pre-imagen, por T, de v. Por tanto, T es sobreyectiva.

Si T es inyectiva y sobreyectiva, es biyectiva. $\square$

Ejemplo 3.9. *¿Crees que R_α es invertible?*

Podemos convencernos de que sí lo es: todo vector de $\mathbb{R}^2$ puede rotarse en sentido anti-horario y el resultado es distinto para cada vector. ¿Cuál es la pre-imagen por R_α del vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$? El vector que se obtiene de rotar a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ α radianes en sentido horario, ¿cierto?

Esto significa que $R_{2\pi-\alpha}$ es la inversa de R_α. Comprobémoslo. Debe cumplirse que las transformaciones $R_\alpha \circ R_{2\pi-\alpha}$ y $R_{2\pi-\alpha} \circ R_\alpha$ sean iguales a la identidad en $\mathbb{R}^2$.

Calculemos ambas compuestas, recuerda que

$$R_\alpha\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad R_{2\pi-\alpha}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Calcularemos $R_\alpha \circ R_{2\pi-\alpha}$ y queda como ejercicio comprobar que la composición contraria también es igual a la identidad en $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
(R_\alpha \circ R_{2\pi-\alpha})\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= R_\alpha\left(x\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}\right), \\
&= (x\cos(\alpha) + y\sin(\alpha))\begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} + (y\cos(\alpha) - x\sin(\alpha))\begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} x\cos^2(\alpha) + x\sin^2(\alpha) \\ y\sin^2(\alpha) + y\cos^2(\alpha) \end{pmatrix}, \\
&= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dado que para todo $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ se cumple que

$$(R_\alpha \circ R_{2\pi-\alpha})\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

podemos asegurar que $R_\alpha \circ R_{2\pi-\alpha} = \mathrm{id}$. Solo resta demostrar que la igualdad $R_{2\pi-\alpha} \circ R_\alpha = \mathrm{id}$ también es cierta.

Más adelante definiremos la matriz asociada a una transformación lineal con respecto a bases de los espacios de partida y llegada, con ayuda de esta matriz será mucho más sencillo calcular inversas de transformaciones lineales biyectivas.

Lema 3.10. Sea $T : U \to V$ biyectiva. Entonces existe una única transformación lineal $S : V \to U$ tal que

$$\forall\, v \in V \ : \ T(S(v)) = v \qquad \text{y} \qquad \forall\, u \in U \ : \ S(T(u)) = u.$$

Demostración. Supongamos que $T : U \to V$ es biyectiva y existen transformaciones lineales $S_1 : V \to U$ y $S_2 : V \to U$ tales que

$$\forall\, v \in V \ : \ T(S_1(v)) = v, \qquad \forall\, u \in U \ : \ S_1(T(u)) = u,$$
$$\forall\, v \in V \ : \ T(S_2(v)) = v \qquad \text{y} \qquad \forall\, u \in U \ : \ S_2(T(u)) = u.$$

Sea $v \in V$. Como $T(S_1(v)) = v$ y $T(S_2(v)) = v$, se tiene que

$$T(S_1(v)) - T(S_2(v)) = \theta_V \ \Rightarrow \ T(S_1(v) - S_2(v)) = \theta_V \ \Rightarrow \ S_1(v) - S_2(v) \in \ker(T).$$

Como T es inyevtiva tiene que cumplirse $S_1(v) - S_2(v) = \theta_U$, es decir, $S_1(v) = S_2(v)$. Hemos demostrado entonces que para cualquier $v \in V$ se cumple que $S_1(v) = S_2(v)$, por tanto, $S_1 = S_2$. □

Definición 3.11. Si T es invertible, la transformación lineal S que satisface

$$\forall\, v \in V \ : \ T(S(v)) = v \qquad \text{y} \qquad \forall\, u \in U \ : \ S(T(u)) = u,$$

que ya sabemos es única, se denomina **inversa** de T y se denota T^{-1}.

La próxima semana veremos qué es una matriz y definiremos la matriz asociada a una transformación lineal $T : U \to V$ con respecto a bases $\mathcal{B}_U$ y $\mathcal{B}_V$, de U y V respectivamente.

Este concepto facilitará mucho el trabajo con transformaciones lineales, nos permitirá, por ejemplo, calcular núcleo e imagen de transformaciones lineales o averiguar si una transformación lineal es invertible sin importarnos cuáles son los espacios vectoriales U y V.

Recordemos la transformación *rotación* $\frac{\pi}{2}$ *radianes en sentido anti-horario*, ella es tal que

$$R_{\pi/2}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

El resultado de rotar el vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\pi/2$ radianes en sentido anti-horario es la combinación lineal, con escalares x e y, de los vectores $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. La manera en que escribimos esta transformación (y todas, como veremos más adelante) se simplifica si escribimos los vectores $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ uno al lado del otro como

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

creando una nueva estructura, a la que llamamos *matriz*.

Veamos primero qué es una matriz, definamos las operaciones suma de matrices y producto de una matriz por escalar, estudiemos sus propiedades y, posteriormente, volvamos a este ejemplo para observar cómo las matrices nos permiten simplificar el trabajo con transformaciones lineales.