Lu 26/09/22 (Clase 15)

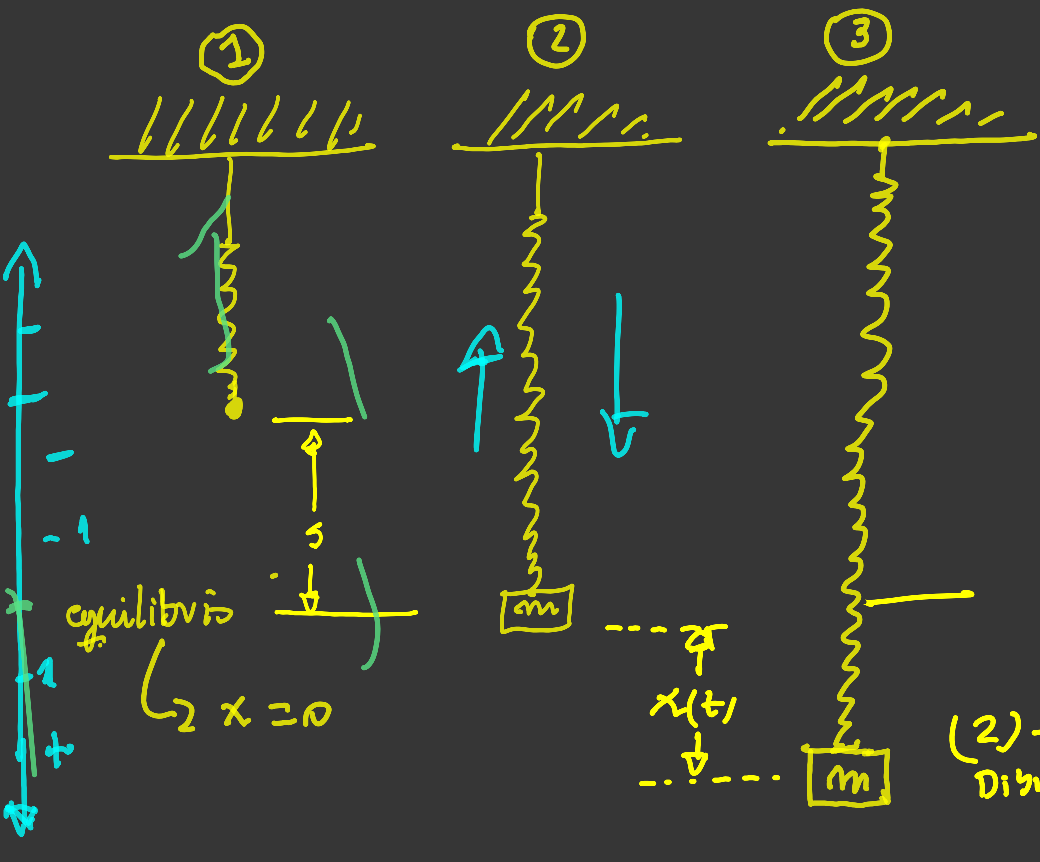
Estabamos viendo que el movimiento $x(t)$ realizado por un cuerpo de masa m que cuelga de un resorte, viene gobernado por la EDO

$$\boxed{m\,x''(t) + b\,x'(t) + k\,x(t) = f(t)\,,}$$ donde

b: es la constante (≥ 0) de roce del SMR.

k: es la constante del resorte (que viene dada por la ley de Hooke : $\boxed{F_k = -ks}$

$f(t)$: fuerzas externas.



De (1) a (2) recorre s [cm]

De (2) a (3) $\boxed{m}$ recorre $s + x(t)$ [cm].

$(2)\to(3)$ $F_k = -k(s + x(t))$

Dibujo la F_k $\uparrow \Rightarrow$ es $-$.

Nuestro objetivo es determinar $x(t)$, resolviendo la correspondiente EDO + C.I.

Por razones de orden, primero suponemos que

$\underbrace{b=0}_{\hookrightarrow \text{ sin Amortig.}}$ y $\underbrace{f\equiv 0}_{\to \text{ mov. libre}}$ (mov. libre sin amortiguación)

$$(P)\ \boxed{\begin{array}{l} x''(t) + w^2 x(t) = 0 \\ \text{C.I.} \begin{cases} x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases} \end{array}}$$

donde $\boxed{w^2 = \frac{K}{m}}$

$p(\alpha) = \alpha^2 + w^2$
$= \underline{(\alpha + iw)(\alpha - iw)}$

$\underline{x(t)} = x_h(t) = c_1 \cos(wt) + c_2 \operatorname{sen}(wt).$

$\Rightarrow \quad \underline{x'(t)} = w[-c_1 \operatorname{sen}(wt) + c_2 \cos(wt)]$

$w^2 = \frac{K}{m}$

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = c_1 = x_0 \\ x'(0) = c_2 w = v_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = x(0) = x_0 \\ c_2 = \frac{v_0}{w} = \sqrt{\frac{m}{K}}\, x'(0) \end{cases}$$

Por tanto,

$$\boxed{x(t) = x_0 \cos(wt) + \sqrt{\frac{m}{K}}\, x'(0) \operatorname{sen}(wt)}$$

respuesta libre sin amortiguamiento.

$= A\,\text{sen}(\omega t)$ con desfase de $\frac{\varphi}{\omega}$

Notar que!

$0 \le \omega t \le 2\pi$

$0 \le t \le \frac{2\pi}{\omega}$

$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$ (período)

De otra parte.

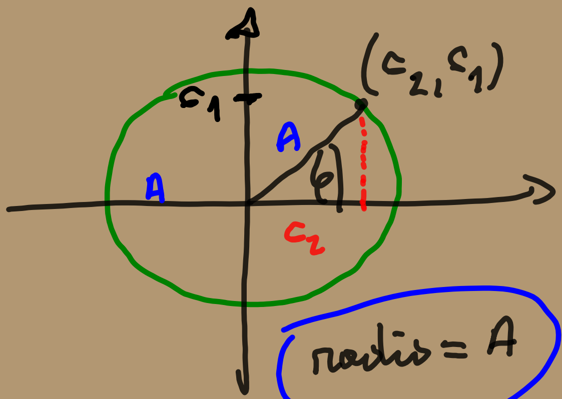
$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2\, \text{sen}(\omega t)$$

$$= A\,\text{sen}(\omega t + \varphi)$$

$$= A\left[\text{sen}(\omega t)\cos(\varphi) + \text{sen}(\varphi)\cos(\omega t)\right]$$

$$\begin{array}{l} A\,\text{sen}(\varphi) = c_1 \\ A\cos(\varphi) = c_2 \end{array} \implies \begin{cases} A^2 = c_1^2 + c_2^2 = (x(0))^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 \\ \tan(\varphi) = \frac{c_1}{c_2} \end{cases}$$

(con el signo correspondiente)

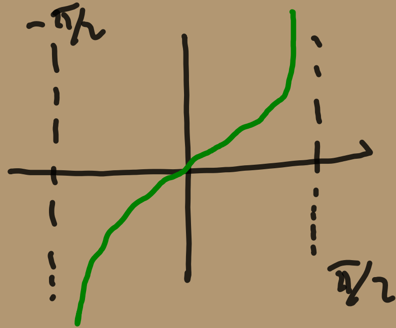


radio = A

Notar que: $0 \le \omega t \le 2\pi$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ Período

$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ frecuencia (oscilaciones por unidad de tiempo).



$$\begin{cases} A^2 = c_1^2 + c_2^2 = (x(0))^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 \\ \tan(\varphi) = \frac{c_1}{c_2} \end{cases}$$

→ con el signo que corresponda.

Así, tenemos que: (P) $\begin{cases} x''(t) + w^2 x(t) = 0 \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases}$

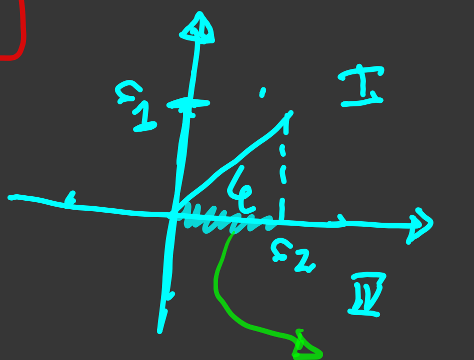
tiene por solución:

$$\begin{cases} c_2 = \dfrac{x'(0)}{w} = \dfrac{v_0}{w} \\ c_1 = x(0) \end{cases}$$

$$\boxed{x_h(t) = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{w}\right)^2}\ \operatorname{sen}(wt + \varphi)}$$ donde

$\begin{cases} v_0 = x'(0) \\ w = \sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}$, y φ es tal que:

$$\boxed{\tan(\varphi) = \frac{c_1}{c_2} = \left(\frac{x(0)}{x'(0)}\right) w = \frac{x_0}{v_0} w}$$; esto es,

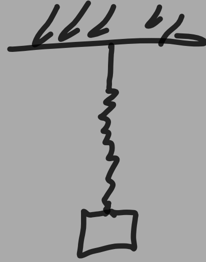


$x'(0) \longleftrightarrow \cos(\varphi)$

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(x(0)) & \text{si } x'(0) = 0 \\ \arctan\left(\frac{x(0)}{x'(0)} w\right) & \text{si } x'(0) > 0 \ (\text{I o IV cuad.}) \\ \arctan\left(\frac{x(0)}{x'(0)} w\right) + \pi & \text{si } x'(0) < 0 \ (\text{II o III cuad.}) \end{cases}$$

OBS: Por ejemplo, si el SMA parte desde el reposo, $x'(0) = 0$, desde abajo del equilibrio ($x_0 \geq 0$) entonces $\varphi = \frac{\pi}{2}$. !!!

(B) Movimiento Forzado sin Amortiguamiento.



Suponemos $b=0$; $f(t) = G_0 \cos(w_0 t)$.

↳ G_0 es una constante.

Esto es:

Un cuerpo de masa m (en kg) se sujeta a un resorte suspendido desde el techo. En la posición de equilibrio ($l = s\,[mt]$) el cuerpo es desplazado en el sentido de la gravedad a $x(0)$, desde ahí se suelta imprimiéndole cierta velocidad $v(0)$. Determine el movimiento del cuerpo si sobre él actúa una fuerza externa (en el sentido de la gravedad) $f(t) = G_0 \cos(w_0 t)$ (>0) en donde $G_0, w_0 \in \mathbb{R}$ y el tiempo es dado en segundos.

Desarrollo:

De acuerdo a lo visto anteriormente, en este caso el PVI, es:

$$(P_f) \begin{cases} m x''(t) + k\,x(t) = G_0 \cos(w_0 t) \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases} ; \quad \left(G_0, w_0 \text{ son ctes reales} \right)$$

$$\left(w^2 = \frac{k}{m} \right)$$

Sabemos que toda solución $y(t)$ de (P_f),

es del tipo:

$$\boxed{y(t) = y_h(t) + y_p(t)}$$

respuesta forzada del SMR

donde $y_h(t)$ es la solución del problema homogéneo asociado y que resolvimos en el desarrollo anterior; esto es:

respuesta libre del sistema,

$$\boxed{x_h(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \operatorname{sen}(\omega t)},$$

c_1, c_2 constantes, por ahora, arbitrarias

Falta determinar una solución particular, y_p, para el problema; esta solución particular, $y_p(t)$, se denomina:

"La respuesta Forzada, $y_p(t)$, del SMR".

Note que el PVI del problema, es:

$$\begin{cases} m x''(t) + k\, x(t) = F_0 \cos(\omega_0 t) \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases}$$

, es , ó de modo equivalente

$$(P_f)\begin{cases} x''(t) + w^2 x(t) = F_0 \cos(w_0 t) \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases} \quad , \quad \text{donde}$$

$$\frac{F_0}{m}$$

$$w^2 = \frac{K}{m}$$

$$(D^2 + w^2)\, x(t)$$

Tenemos $f(t) = F_0 \cos(w_0 t)$.

Existen dos casos: $\begin{cases} (i) & w_0 \neq w \\ (ii) & w_0 = w \end{cases}$ $\quad \left(w^2 = \frac{K}{m} \right)$

En cualquiera de los dos casos buscamos y_p usando ANIQUILADORES:

caso i: $w_0 \neq w$ (sin amortiguamiento, $b = 0$)

Buscamos $\hat{L}$ tq: $\hat{L}\left(F_0 \cos(w_0 t)\right) = 0$.

Entonces $\hat{L} = (D + i w_0)(D - i w_0) = D^2 + w_0^2$.

$$\left(0 = \hat{L}\left(F_0 \cos(w_0 t)\right) = (D^2 + w_0^2)\left[F_0 \cos(w_0 t)\right] \right.$$

$$= (D^2 + w_0^2)(D^2 + w^2)\, y(t) = 0$$

$$\Rightarrow \hat{y}(t) = a \cos(w_0 t) + b \operatorname{sen}(w_0 t) + c \cos(wt) + d \operatorname{sen}(wt)$$

a, b, c, d ctes

Luego en $(D^2+w^2)(\hat{y}(t)) = 0$

$\hat{y}(t)$ se reduce a $\boxed{y_p(t) = a\cos(w_0 t) + b\,\mathrm{sen}(w_0 t)}$

a, b incógnitas

esta es nuestra propuesta de solución forzante (o particular)

Al llevar $y_p(t)$ a la EDO, esto es,

$$\overbrace{(D^2+w^2)}^{w^2=\frac{k}{m}}\, y_p(t) = F_0 \cos(w_0 t) \iff$$

$$\left(a\cos(w_0 t) + b\,\mathrm{sen}(w_0 t)\right)'' + w^2\left(a\cos(w_0 t) + b\,\mathrm{sen}(w_0 t)\right) = F_0\cos(w_0 t)$$

se obtiene:

$$\begin{cases} a = \dfrac{F_0}{k - m w_0^2} \\ b = 0 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\boxed{y_p(t) = \left(\frac{F_0}{k - m w_0^2}\right)\cos(w_0 t)}$$

respuesta forzada del SMR. (sin amort.)

Note que: $\left(\dfrac{F_0}{k - m w_0^2}\right)$ es la amplitud de la respuesta forzada del SMR.

Así, $x(t) = \underbrace{x_h(t)}_{\text{respuesta libre}} + \underbrace{x_p(t)}_{\text{resp. forzada}}$, entonces;

$$x(t) = \underbrace{c_1 \cos(wt) + c_2 \operatorname{sen}(wt)}_{A \operatorname{sen}(wt+\varphi)} + \left(\frac{F_0}{k - m w_0^2}\right) \cos(w_0 t)$$

$$x'(t) = w\left[c_2 \cos(wt) - c_1 \operatorname{sen}(wt)\right] - \left(\frac{F_0 w_0}{k - m w_0^2}\right) \operatorname{sen}(w_0 t)$$

Haciendo $t = 0$, sigue

$$\begin{cases} x(0) = c_1 + \dfrac{F_0}{k - m w_0^2} = x_0 \Rightarrow c_1 = x_0 - \dfrac{F_0}{k - m w_0^2} \\ x'(0) = c_2 w = v_0 \Rightarrow c_2 = \dfrac{v_0}{w} = \dfrac{x'(0)}{w} = \sqrt{\dfrac{m}{k}}\, x'(0) \end{cases}$$

$\hookrightarrow w^2 = \frac{k}{m}$

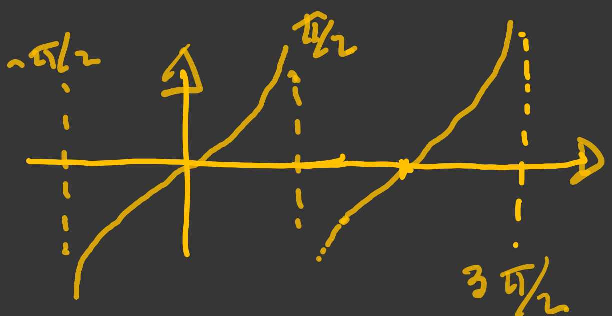
Repitiendo el cálculo para el caso anterior $f \equiv 0$, sigue.

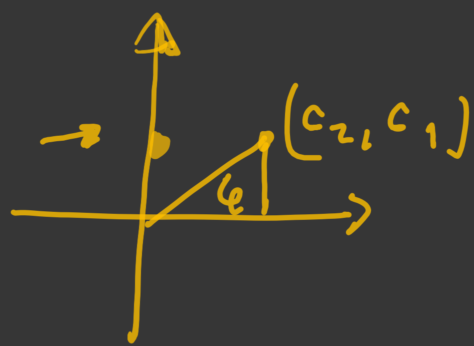
$$x(t) = \tilde{A}\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi) + \left(\frac{F_0}{k - m\omega_0^2}\right)\cos(\omega_0 t) \quad ; \quad \tan(\varphi) = \frac{c_1}{c_2}$$

$$x(t) = \tilde{A}\left(\mathrm{sen}(\omega t)\cos(\varphi) + \mathrm{sen}(\varphi)\cos(\omega t)\right) + x_p(t)$$

donde $\tilde{A} = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{\left(x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{x'(0)}{\omega}\right)^2}$

φ es tal $\quad \tan(\varphi) = \left(\frac{x_0 - \frac{F_0}{k - m\omega_0^2}}{x'(0)}\right)\omega$





$$\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}[\alpha] & \text{si } x'(0) = 0 \\ \arctan\left[\dfrac{x_0(k - m\omega_0^2) - F_0}{v_0\,(k - m\omega_0^2)}\right] & \text{si } x'(0) > 0 \\ \arctan\left[\dfrac{x_0(k - m\omega_0^2) - F_0}{v_0\,(k - m\omega_0^2)}\right] + \pi, & \text{si } x'(0) < 0. \end{cases}$$

donde $\alpha = \boxed{x(0) - \dfrac{F_0}{k - m\omega_0^2}}$

OBS: (1) En este caso la solución

$$\boxed{x(t) = \underbrace{A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)}_{\text{Parte libre o } x_h} + \underbrace{\left(\frac{F_0}{k - m\omega_0^2}\right)\cos(\omega_0 t)}_{\text{resp. forzada o soln. particular, } x_p}}$$

es ACOTADA.

(2) $\lim_{m\omega_0^2 \to k} \left|\dfrac{F_0}{k - m\omega_0^2}\right| = +\infty$. Esto es, la amplitud de forzada explota para $m\omega_0^2 \to k$ (Note que $m\omega_0^2 \to k$ ssi $\omega_0 \to \omega$)

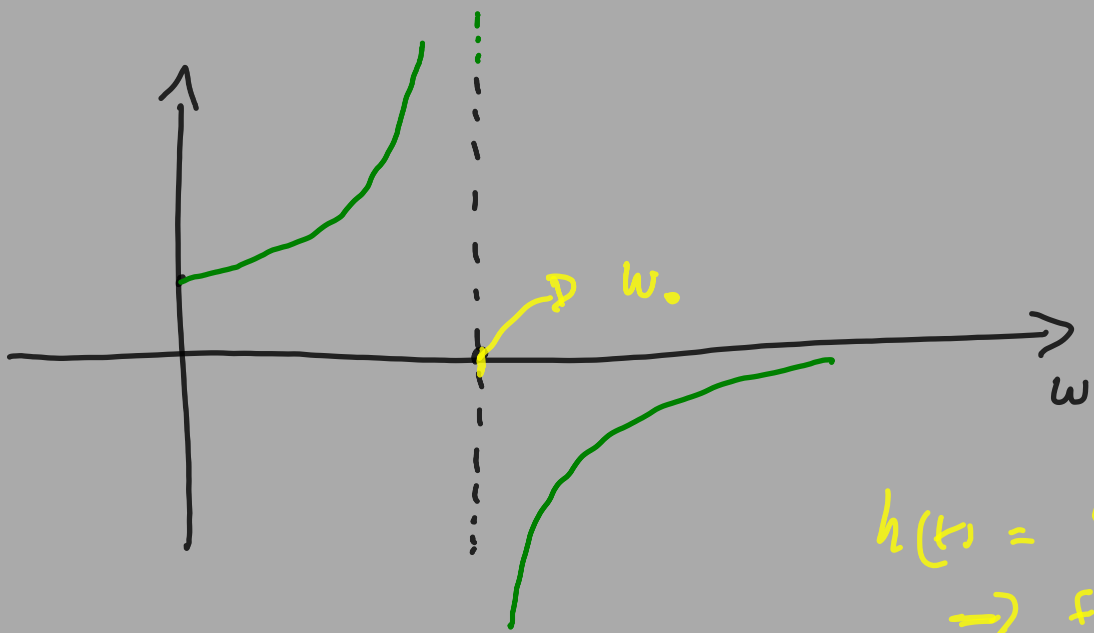
(3) Note que si ponemos $\alpha = \dfrac{\text{amplitud de } x_p(t)}{\text{amplitud de } F(t)}$, el cociente entre amplitud de la respuesta forzada a amplitud del término forzante:

$$\alpha = \left(\frac{F_0}{k - m\omega_0^2}\right) \cdot \frac{1}{F_0} = \frac{1}{k - m\omega_0^2}$$

donde $\omega^2 = \dfrac{k}{m} \Rightarrow \boxed{k = m\omega^2}$

Pero $K - m\omega_0^2 = m\omega^2 - m\omega_0^2$

$$\Longrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{m(\omega^2 - \omega_0^2)}$$



$h(t) = G_0 \cos(\omega t)$

$\Longrightarrow f(t) = \dfrac{h(t)}{m} = F_0 \cos(\omega t)$

CASO (ii): $\omega_0 = \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (sin amort. $b \equiv 0$)

Nuevamente usando aniquiladores, se deduce que la propuesta de solución particular $x_p(t)$ es del tipo: $\boxed{x_p(t) = t\left[a\cos(\omega t) + b\,\mathrm{sen}(\omega t)\right].}$

Al reemplazar $x_p(t)$ en la EDO

$$\begin{cases} x''(t) + w^2\, x(t) = F_0 \cos(w t) \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases}$$

$$\hat{L} = (D^2 + w^2)$$

$$0 = \hat{L}\left(F_0 \cos(wt)\right) = (D^2 + w^2)(D^2 + w^2)$$

$$= (D^2 + w^2)^2$$

$$x_p(t) = a_1 \cos(wt) + b_1 \operatorname{sen}(wt) +$$

$$+ a_2 t \cos(wt) + b_2 t \operatorname{sen}(wt)$$

$$(D^2 + w^2)\, x_p(t) = F_0 \cos(wt)$$

$\Longrightarrow$ $x_p(t)$ se reduce a

$$x_p(t) = a\, t \cos(wt) + b\, t \operatorname{sen}(wt)$$

$$\boxed{x''(t) + w^2 x(t) = F_0 \cos(wt)} \quad \text{con} \quad \boxed{w^2 = \frac{K}{m}}$$

se obtiene que : $\begin{cases} a = 0 \\ b = \dfrac{F_0}{2mw} \end{cases}$.

Entonces se obtiene la respuesta forzada $x_p(t)$

con $$\boxed{x_p(t) = \left(\frac{F_0}{2mw}\right) t \, \text{sen}(wt)} \quad \left(= A(t)\,\text{sen}(wt) \right)$$

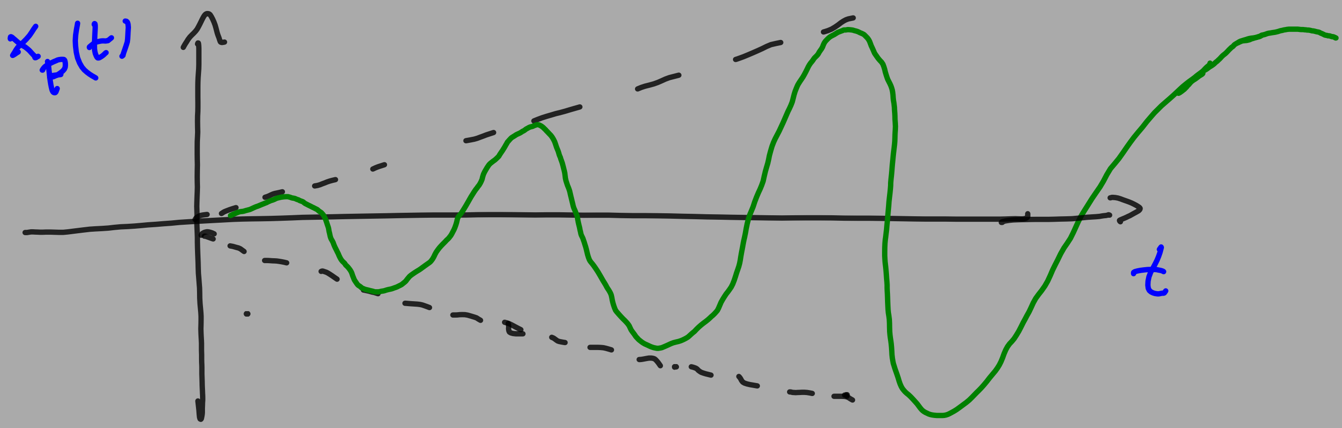
donde $\boxed{A(t) = \underbrace{\frac{F_0}{2mw}}_{\text{cte}} \cdot t}$ es la PSEUDO AMPLITUD (FORZADA) de la respuesta forzada $x_p(t)$.

OBS: Como $\boxed{x_h(t) = c_1 \cos(wt) + c_2 \,\text{sen}(wt)}$ es acotada

en el tiempo; mientras que

$\lim_{t \to \infty} A(t) = +\infty$, sigue que

$$\boxed{\lim_{t \to \infty} x_p(t) = +\infty}$$



¿El muelle se rompe?

¡Veamos mejor la situación!

Tenemos:

$$\begin{cases} x''(t) + w^2 x(t) = F_0 \cos(wt) \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases} \quad ; \text{ con } w^2 = \frac{k}{m}$$

$$\boxed{x(t) = x_h(t) + x_p(t)}$$

x_h : respuesta libre

x_p : resp. forzada del SMR.

donde

$$\begin{cases} x_h(t) = c_1 \cos(wt) + c_2 \operatorname{sen}(wt) \\ x_p(t) = \left(\dfrac{F_0}{2mw}\right) t \operatorname{sen}(wt) \end{cases}$$

Así:

Mov. del SMR

$$x(t) = \big(c_1 \cos(wt) + c_2 \operatorname{sen}(wt)\big) + \overbrace{\left(\frac{F_0}{2mw}\right) t \operatorname{sen}(wt)}^{x_p(t)}$$

$$\Rightarrow x'(t) = w\left[c_2 \cos(wt) - c_1 \operatorname{sen}(wt)\right] + \frac{F_0}{2mw} \operatorname{sen}(wt) + \frac{F_0}{2m} t \cos(wt)$$

Así:

$$x(0) = x_0 = c_1 \qquad x'(0) = v_0 = c_2 w \quad \Rightarrow \begin{cases} c_1 = x(0) \\ c_2 = \dfrac{x'(0)}{w} \end{cases}$$

Así:

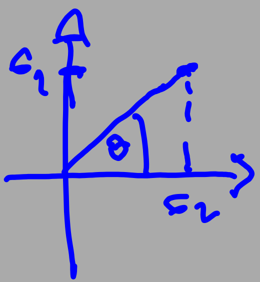
$$x(t) = x(0)\cos(wt) + \frac{x'(0)}{w}\,\mathrm{sen}(wt) + \frac{F_0}{2mw}\,t\,\mathrm{sen}(wt)$$

Como esta podemos escribir:

$$\boxed{x(t) = H\,\mathrm{sen}(wt+\theta) + \frac{F_0}{2mw}\,t\,\mathrm{sen}(wt)}$$

$$x(t) = H\left[\mathrm{sen}(wt)\cos(\theta) + \cos(wt)\,\mathrm{sen}(\theta)\right] + \frac{F_0}{2mw}\,t\cos(wt)$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} H\,\mathrm{sen}\,\theta = c_1 \\ H\cos\theta = c_2 \end{matrix} \;\Rightarrow \begin{cases} \tan(\theta) = \dfrac{c_1}{c_2} \\ H = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \end{cases}$$



$$\text{Con} \begin{cases} c_1 = x(0) \\ c_2 = \dfrac{x'(0)}{w} \end{cases} \Rightarrow \frac{c_1}{c_2} = \frac{x(0)}{x'(0)}\sqrt{\frac{m}{K}}$$

Podemos poner:

$$\boxed{x(t) = \underbrace{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}_{H}\,\mathrm{sen}(wt+\theta) + \frac{F_0\,t}{2mw}\,\mathrm{sen}(wt)}$$

donde $\sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{x'(0)}{w}\right)^2}$

$$w = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \left(\Rightarrow 2mw = 2\sqrt{mK}\right)$$

y θ es tal que:

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{c_1}{c_2}\right) & \text{si } c_2 > 0 \\ \frac{\pi}{2}\,\text{sgn}(c_1) & \text{si } c_2 = 0 \\ \arctan\left(\frac{c_1}{c_2}\right) + \pi & \text{si } c_2 < 0 \end{cases}$$

donde $\begin{cases} \frac{c_1}{c_2} = \frac{x(0)}{x'(0)}\sqrt{\frac{m}{K}} \\ c_2 = 0 \quad \text{si} \quad x'(0) = 0 \end{cases}$

si damos la siguiente definición:

DEF: Decimos que el sistema (mov. forzado sin amortiguamiento)

$$\boxed{m\,x''(t) + K\,x(t) = F(t)}$$

presenta RESONANCIA PURA cuando tiene soluciones en $[t_0, +\infty[$ que no son acotadas.

Entonces, tenemos:

TEOREMA:

El sistema masa resorte, SMR,

$$(M)\begin{cases} x'' + \underline{w}^2 x(t) = F_0 \cos(wt) \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases}$$

Presenta resonancia pura (Puesto que el coef angular de $F(t)$, w_0 $(=w)$ está en relación con $\frac{k}{m}$.

Ejemplo:

Para qué valores de masa m el sistema MR

$0 \leq wt \leq 2\pi$

$0 \leq t \leq \frac{2\pi}{w} = T$

$$m\,x''(t) + 49\,x(t) = 6\ s(wt)$$

$\boxed{f = \frac{1}{T}}$

manifiesta resonanci si $\boxed{f(t) = 6\cos(wt)}$ tiene una frecuenci de $\frac{1}{T} = 28$ Hertz.

Desarrollo:

La EDO es $\boxed{x''(t) + \frac{49}{m}x(t) = \frac{6}{m}\cos(wt)}$

entonces el sistema presentará resonancia (pura) cuando $w^2 = \frac{49}{m} \Rightarrow w = \frac{7}{\sqrt{m}}$

Además, como $\cos(wt)$ tiene $f = 28$ Hertz

entonces $T = \frac{2\pi}{w} \Rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{w}{2\pi} = 28.$ Hertz

$$\Rightarrow \quad \omega = (28)2\pi = 56\pi$$

$$\Rightarrow \quad \frac{7}{\sqrt{m}} = 56\pi$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{m} = \frac{7}{56\pi} \longrightarrow \boxed{m = \frac{49}{(56\pi)^2}}$$

Movimiento Amortiguado

vimos que la ecuación general es

$$m\,x''(t) + b\,x'(t) + k\,x(t) = h(t)$$

$$\Longleftrightarrow \quad x''(t) + \frac{b}{m}x'(t) + \frac{k}{m}x(t) = f(t)$$

escribiendo: $\frac{b}{m} = 2\lambda \quad ; \quad \frac{k}{m} = \omega^2$, tenemos

$$x''(t) + 2\lambda x'(t) + \omega^2 x(t) = f(t)$$

Movimiento forzado sin amortiguar

Si $f \equiv 0$, el mov. es libre amortiguado

$$\boxed{x''(t) + 2\lambda x'(t) + \omega^2 x(t) = 0}$$

$$\alpha^2 + 2\lambda\alpha + \omega^2 = 0$$

$$\alpha_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$$

$$\alpha_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$$

Note que $\left.\begin{matrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{matrix}\right\}$ son < 0.

De acuerdo el signo de $\lambda^2 - w^2$

existen tres casos:

(i) $\lambda^2 - w^2 > 0$ (Mov. sobreamortiguado)

Aquí:

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left\{ c_1 e^{\sqrt{\lambda^2 - w^2}\, t} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda^2 - w^2}\, t} \right\}$$

(ii) $\lambda^2 - w^2 = 0$ (sistema es críticamente amortiguado)

Aquí:

$$x(t) = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 t e^{\alpha_2 t}$$

$$= e^{-\lambda t}\left(c_1 + c_2 t \right)$$

(iii) $\lambda^2 - w^2 < 0$ (sistema subamortiguado)

Aquí,

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left\{ c_1 \cos\left(\sqrt{w^2 - \lambda^2}\, t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{w^2 - \lambda^2}\, t\right) \right.$$

$$= A e^{-\lambda t} \operatorname{sen}\left(\sqrt{w^2 - \lambda^2}\, t + \phi\right)$$