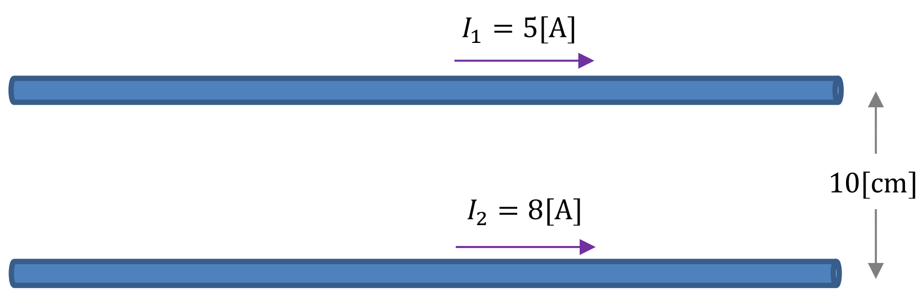
Electromagnetismo 543201

Guía de Problemas #8

Fuerza magnética, Inductancia, energía en el campo magnético

1) Dos conductores largos y paralelos, separados por 10 cm, transportan corrientes en la misma dirección. El primer cable lleva la corriente I_1 =5 A y el segundo lleva I_2= 8 A. (a) ¿Cuál es la magnitud del campo magnético creado por I_1 en la ubicación de I2? (b) ¿Cuál es la fuerza por unidad de longitud ejercida por I_1 sobre I_2? (c) ¿Cuál es la magnitud del campo magnético creado por I_2 en la ubicación de I_1? (d) ¿Cuál es la fuerza por longitud ejercida por I_2 sobre I_1?

En primera instancia, dibujemos la situación electromagnética, tal como se muestra en la siguiente figura.



El campo magnético que provoca el primer cable en su entorno está dado por la ley de Ampere (revisar las guías anteriores en caso de que no sepa cómo se obtiene la expresión):

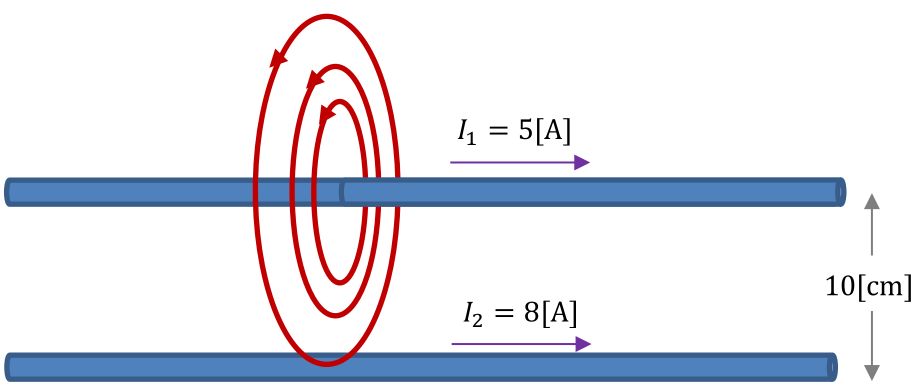
$$|\vec{B}_1| = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

donde r es la distancia desde el cable hasta el punto de análisis.

Luego, la densidad de campo provocado por el cable 1 en la posición del cable 2 está dada por:

$$|\vec{B}_{1/2}| = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(0.1)} \approx 1 \cdot 10^{-5}[\mathrm{T}]$$

La distribución de campo magnético alrededor del cable 1 es circulante, y su dirección de circulación puede obtenerse mediante la aplicación de la regla de la mano derecha. Con ello, resulta lo que se muestra en la siguiente figura.



Como puede verse a partir de la figura anterior, el campo magnético provocado por el cable 1 en la posición del cable 2 es entrante a la hoja. Con ello en mente, puede determinarse la fuerza que aplica el cable 1 sobre el cable 2, dada por:

$$\left|\vec{F}_{1/2}\right| = I_2 \cdot l \cdot \left|\vec{B}_{1/2}\right|$$

Dividiendo ambos términos de la ecuación en l, se puede determinar la fuerza por unidad de longitud:

$$\frac{\left|\vec{F}_{1/2}\right|}{l} = I_2 \cdot \left|\vec{B}_{1/2}\right|$$

Evaluando los datos entregados en el enunciado:

$$\frac{\left|\vec{F}_{1/2}\right|}{l} = 8[\mathrm{A}] \cdot 1 \cdot 10^{-5}[\mathrm{T}] \approx 8 \cdot 10^{-5}\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$$

Por la regla de la mano derecha, puede obtenerse que la fuerza que ejerce el cable 2 sobre el 1 es de atracción.

De manera análoga, la magnitud del campo magnético que provoca el cable 2 sobre el cable 1 está dada por:

$$\left|\vec{B}_{2/1}\right| = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(0.1)} \approx 1.6 \cdot 10^{-5}[\mathrm{T}]$$

Por la tercera ley de Newton, la fuerza que el cable 2 ejerce sobre el cable 1 tiene la misma magnitud y sentido contrario a la ejercida por el cable 1 sobre el 2. Luego:

$$\frac{\left|\vec{F}_{2/1}\right|}{l} = 5[\mathrm{A}] \cdot 1.6 \cdot 10^{-5}[\mathrm{T}] \approx 8 \cdot 10^{-5}\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$$

2) En la figura, la corriente en el cable largo y recto es I_1=5 A y el cable se encuentra en el plano de la espira rectangular, que lleva una corriente I_2= 10 A. Si las dimensiones son c =0.1 m, a= 0.15 m, l= 0.45m. Encuentre la magnitud y dirección de la fuerza neta ejercida sobre la espira por el campo magnético creado por el cable.

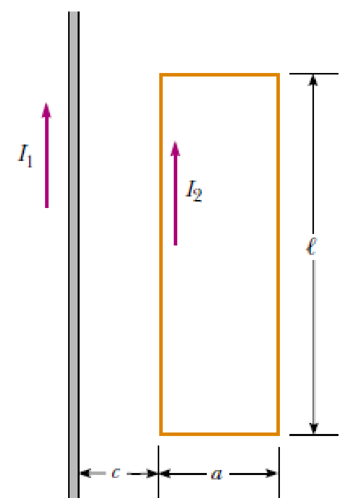


Figura 2

Para determinar la fuerza neta ejercida sobre la espira, puede ocuparse el principio de superposición: la fuerza neta corresponde a la suma de las fuerzas aplicadas sobre cada lado de la espira, enumerados del 1 al 4.

Ahora bien, la expresión de la fuerza magnética para cada lado depende de la densidad de flujo magnético presente en cada uno de esos lados. A través de la aplicación de la ley de Ampere (revisar ejercicio 14 de guía Nº6), la magnitud de la densidad de flujo magnético provocada por un alambre con corriente sobre un punto a una distancia radial r corresponde a:

$$\left|\vec{B}_{\text{alambre}}(r)\right| = \frac{\mu_o I}{2\pi r}$$

Con ello como base, el lado 1 de la espira (lado izquierdo): si se fijan, todo punto del lado 1 se encuentra a la misma distancia respecto del alambre con corriente. Luego, la densidad de flujo para todo punto de este lado es igual, y está dada por la siguiente expresión:

$$\left|\vec{B}_1\right| = \frac{\mu_o I_1}{2\pi c}$$

Así, la magnitud de la fuerza magnética sobre el lado 1 puede calcularse a través de:

$$\left|\vec{F}_1\right| = I_2 \cdot l \cdot \left|\vec{B}_1\right| = I_2 \cdot l \cdot \frac{\mu_o I_1}{2\pi c} \approx 4.5 \cdot 10^{-5}\ [\mathrm{N}]$$

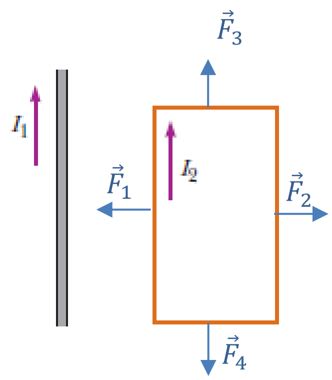
Siguiendo la misma lógica, la magnitud de la fuerza magnética sobre el lado 2 corresponde a:

$$\left|\vec{F}_2\right| = I_2 \cdot l \cdot \left|\vec{B}_2\right| = I_2 \cdot l \cdot \frac{\mu_o I_1}{2\pi(c+a)} \approx 1.8 \cdot 10^{-6}\ [\mathrm{N}]$$

A partir de una inspección sencilla, puede verse que $\left|\vec{F}_2\right| < \left|\vec{F}_1\right|$, dado que el lado 2 se encuentra más lejos de la espira que el lado 1.

Para los lados 3 y 4 el análisis es levemente distinto, ya que el valor de densidad de flujo para estos lados no es constante. Para aquellos puntos que están más cerca de la espira, la densidad de campo magnético es mayor, mientras que para puntos más lejanos de la espira la densidad es menor. Ello implica que debe expresarse una integral para poder calcular la fuerza sobre estos lados.

Sin embargo, el valor de la fuerza para el lado 3 y el lado 4 debe ser igual, ya que se encuentran a la misma distancia del alambre recto con corriente. A partir del análisis de direcciones, se tiene lo mostrado en la siguiente figura.



Como $\vec{F}_3$ y $\vec{F}_4$ tienen la misma magnitud y apuntan en sentidos contrarios, entonces se anula (lo que nos salva de tener que resolver la integral de fuerza para estos lados).

En definitiva, la fuerza neta sobre la espira cuadrada corresponde a:

$$\vec{F}_\mathrm{N} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4$$

Como $\vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 0$, entonces:

$$\vec{F}_\mathrm{N} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

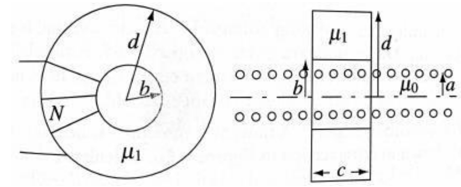
Evaluando y simplificando:

$$\vec{F}_\mathrm{N} \approx -4.5 \cdot 10^{-5}[\mathrm{N}] \cdot \hat{\imath} + 1.8 \cdot 10^{-6}[\mathrm{N}] \cdot \hat{\imath}$$

$$\vec{F}_\mathrm{N} \approx -2.7 \cdot 10^{-5}[\mathrm{N}] \cdot \hat{\imath}$$

3) Una bobina toroidal tiene **N** vueltas distribuidas uniformemente. Si se inserta un solenoide de radio **a** < **b** y que tiene **n** vueltas por metro de longitud en el orificio central del toroide; calcular

a. La inductancia propia de la bobina toroidal.
b. La inductancia propia, por unidad de longitud, del solenoide.
c. La inductancia mutua entre la bobina toroidal y el solenoide.

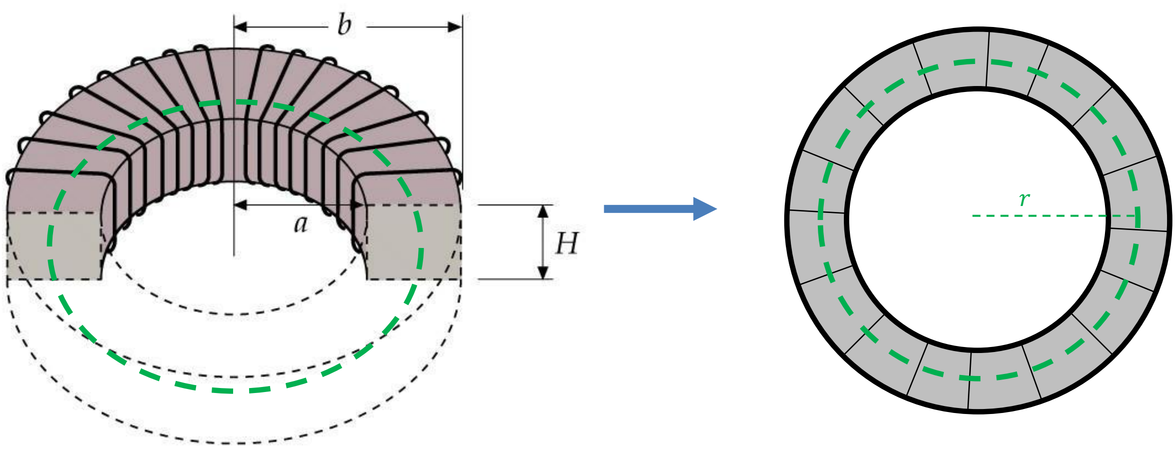


La inductancia propia de una bobina está dada por la siguiente expresión:

$$L_{11} = \frac{\Phi_m \cdot N}{I}$$

Donde Φ es el flujo magnético que imprime la bobina en la zona activa, N es la cantidad de vueltas de vueltas de la bobina, y I es la corriente que circula a través de ella.

a. En este caso, primero hay que determinar la densidad de campo magnético al interior del toroide.



En esta situación, la ley de Ampere se puede expresar como:

$$\left|\vec{B}(r)\right| \cdot 2\pi r = \mu_0 N I$$

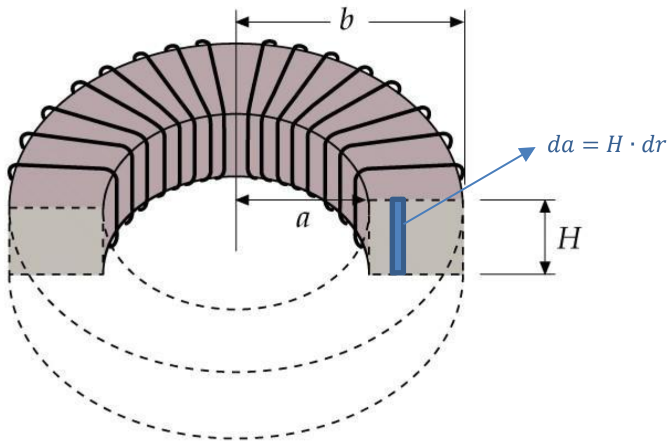
Luego:

$$\left|\vec{B}(r)\right| = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

Ahora bien, el flujo magnético al interior del toroide está dado por la siguiente integral:

$$\Phi_m = \int \vec{B} \bullet d\vec{s} = \int \vec{B} \bullet \hat{n}\, da$$

Lo cual implica que tenemos que definir correctamente nuestro elemento diferencial de área. Ello puede hacerse observando la siguiente figura:



Luego, el flujo magnético está dado por:

$$\Phi_{\text{m,toroide}} = \int \left|\vec{B}(r)\right| da = \int_{r=a}^{r=b} \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} H \cdot dr$$

Resolviendo la integral:

$$\Phi_{\text{m,toroide}} = \frac{\mu_0 N I H}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Luego, la inductancia propia de la bobina toroidal del enunciado (véase Figura 2) está dada por:

$$L_{\text{p,toroide}} = \frac{\Phi_{\text{m,toroide}} \cdot \mathrm{N}}{I} = \frac{\frac{\mu_0 N I c}{2\pi} \ln\left(\frac{d}{b}\right) \cdot \mathrm{N}}{I}$$

$$L_{\text{p,toroide}} = \frac{\mu_0 N^2 c}{2\pi} \ln\left(\frac{d}{b}\right)$$

b. Por otro lado, la densidad de campo magnético al interior de un solenoide puede considerarse como constante e igual a:

$$\left|\vec{B}_{\text{solenoide}}\right| = \mu_0 \cdot n \cdot I$$

donde n es la cantidad de vueltas por unidad de longitud.

Como $\left|\vec{B}_{\text{solenoide}}\right|$ es constante al interior del solenoide, entonces:

$$\Phi_{\text{m,solenoide}} = \left|\vec{B}_{\text{solenoide}}\right| \cdot A$$

donde A es el área de la sección transversal del solenoide, con lo cual:

$$\Phi_{\text{m,solenoide}} = \mu_0 \cdot n \cdot I \cdot \pi \cdot a^2$$

Luego, la inductancia propia del solenoide es:

$$L_{\text{p,solenoide}} = \frac{\Phi_{\text{m,solenoide}} \cdot \mathrm{N}}{I} = \mu_0 \cdot n \cdot \pi \cdot a^2 \cdot N$$

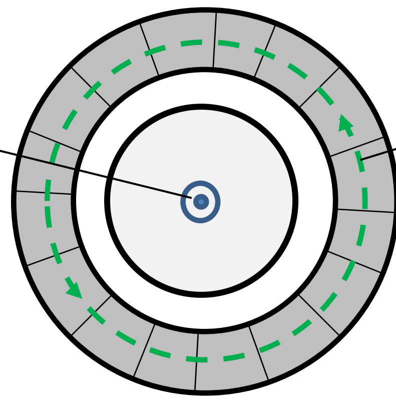
Ahora bien, como $N = n \cdot L$, entonces:

$$L_{\text{p,solenoide}} = \mu_0 \cdot n \cdot \pi \cdot a^2 \cdot n \cdot L$$

Con lo cual, finalmente:

$$\frac{L_{\text{p,solenoide}}}{L} = \mu_0 \cdot n^2 \cdot \pi \cdot a^2$$

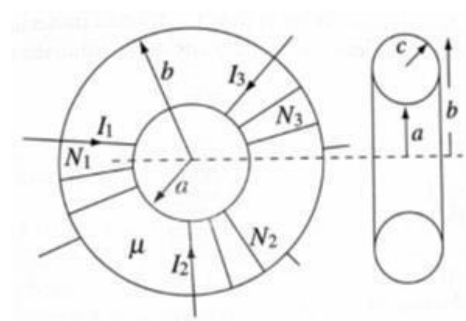
c. Debe notarse que la densidad de flujo al interior del toroide es perpendicular a la densidad de flujo al interior del solenoide. Más aún, la densidad de flujo del toroide no enlaza flujo magnético en el solenoide, ni viceversa.



Luego, las bobinas están desacopladas y la inductancia mutua entre ellas es nula.

4) Tres bobinas son enrolladas en torno a un núcleo toroidal con las propiedades y dimensiones mostradas en la figura. Asumiendo que **b-a** << **a** y que **b** > **a**, calcular:

a. La inductancia propia de las tres bobinas.
b. La inductancia mutua entre las bobinas **1** y **2, 2** y **3**, y **1 y 3**.



a. La inductancia propia de una bobina está dada por la siguiente expresión:

$$L_{11} = \frac{\Phi_m \cdot \mathrm{N}}{I}$$

Partamos por la bobina 1. Por ley de Ampere, la densidad de flujo magnético provocada por la bobina 1 es:

$$\left|\vec{B}(r)\right| = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{2\pi r}$$

Ahora bien, como la sección transversal del núcleo toroidal es relativamente pequeña, dado que $b - a \ll a$, entonces puede considerarse que la densidad de flujo magnético al interior del toroide es constante e igual a:

$$\left|\vec{B}_{\text{toroide}}\right| = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{2\pi\left(a + \frac{c}{2}\right)}$$

Otras posibles aproximaciones podrían ser:

$$\left|\vec{B}_{\text{toroide}}\right| = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{2\pi(a)} \quad \text{ó} \quad \left|\vec{B}_{\text{toroide}}\right| = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{2\pi(b)}$$

Luego, el flujo magnético provocado por la bobina 1 al interior del toroide corresponde, en este caso, a:

$$\Phi_{1,\text{toroide}} = \left|\vec{B}_{\text{toroide}}\right| \cdot A$$

Con lo cual:

$$\Phi_{1,\text{toroide}} = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{2\pi\left(a + \frac{c}{2}\right)} \cdot \pi c^2$$

Luego, la inductancia propia de la bobina 1 es:

$$\mathrm{L}_{11} = \frac{\Phi_{1,\text{toroide}} \cdot N_1}{I_1}$$

Con lo que:

$$\mathrm{L}_{11} = \frac{\mu_0 {N_1}^2 c^2}{2\left(a + \frac{c}{2}\right)}$$

Repitiendo el mismo procedimiento, se tiene que la inductancia propia de la bobina 2 y la bobina 3 corresponden a:

$$\mathrm{L}_{22} = \frac{\Phi_{2,\text{toroide}} \cdot N_2}{I_2} = \frac{\mu_0 {N_2}^2 c^2}{2\left(a + \frac{c}{2}\right)}$$

$$\mathrm{L}_{33} = \frac{\Phi_{3,\text{toroide}} \cdot N_3}{I_3} = \frac{\mu_0 {N_3}^2 c^2}{2\left(a + \frac{c}{2}\right)}$$

b. Por otro lado, la inductancia mutua entre la bobina 1 y la bobina 2 corresponde a:

$$\mathrm{M}_{12} = N_1 \frac{\Phi_{2,\text{toroide}}}{I_2}$$

Ello también puede determinarse como:

$$\mathrm{M}_{12} = \mathrm{M}_{21} = N_2 \frac{\Phi_{1,\text{toroide}}}{I_1}$$

Con lo cual:

$$\mathrm{M}_{12} = \mathrm{M}_{21} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 c^2}{2\left(a + \frac{c}{2}\right)}$$

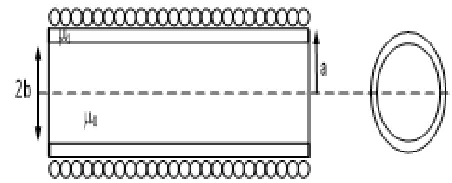
Repitiendo la metodología, se tiene que la inductancia mutua entre la bobina 1 y la bobina 3 corresponde a:

$$\mathrm{M}_{13} = \mathrm{M}_{31} = \frac{\mu_0 N_1 N_3 c^2}{2\left(a + \frac{c}{2}\right)}$$

Por último, la inductancia mutua entre la bobina 2 y la bobina 3 es:

$$\mathrm{M}_{23} = \mathrm{M}_{32} = \frac{\mu_0 N_2 N_3 c^2}{2\left(a + \frac{c}{2}\right)}$$

5) Un solenoide largo es bobina en torno a un cilindro hueco hecho de acero, de dimensiones dadas en la figura. Si la permitividad del acero es **$\mu_1 > \mu_0$**, el solenoide lleva una corriente **I** y tiene **n** vueltas por metro de longitud; calcular su inductancia propia por unidad de longitud.



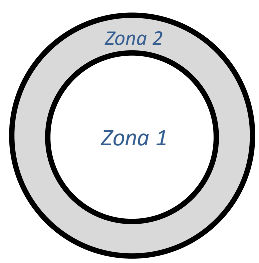
Tal como se vio en el ejercicio anterior, y como también se desarrolló en la Guía Nº7, la densidad de campo magnético al interior de un solenoide compuesto por vacío está dada por:

$$\left|\vec{B}_{\mathrm{s,vacío}}\right| = \mu_0 \cdot n \cdot I$$

Por otro lado, la densidad de flujo magnético al interior de un solenoide relleno de acero corresponde a:

$$\left|\vec{B}_{\mathrm{s,acero}}\right| = \mu_1 \cdot n \cdot I$$

Para determinar el flujo magnético al interior del solenoide, es necesario separar la expresión matemática en dos partes, según las dos zonas mostradas en la siguiente figura.



El flujo magnético en la zona 1 está dado por:

$$\Phi_1 = \left|\vec{B}_{\mathrm{s,vacío}}\right| \cdot A_1$$

Con lo que:

$$\Phi_1 = \mu_0 \cdot n \cdot I \cdot \pi b^2$$

Por otro lado, el flujo magnético en la zona 2 corresponde a:

$$\Phi_2 = \left|\vec{B}_{\mathrm{s,acero}}\right| \cdot A_2$$

Con lo cual:

$$\Phi_2 = \mu_1 \cdot n \cdot I \cdot \pi(a^2 - b^2)$$

Luego, el flujo magnético total en la sección transversal del solenoide es:

$$\Phi_{\text{total}} = \Phi_1 + \Phi_2$$

Por lo cual:

$$\Phi_{\text{total}} = \pi n I \cdot |\mu_0 b^2 + \mu_1(a^2 - b^2)|$$

Con ello como base, la inductancia propia de este solenoide corresponde a:

$$L_{\text{p}} = \frac{\Phi_{\text{total}} \cdot N}{I}$$

Evaluando:

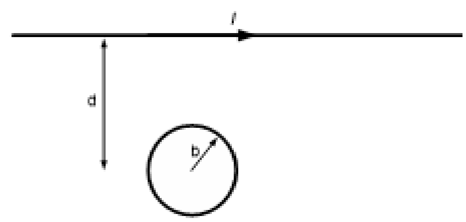
$$L_{\text{p}} = \frac{\pi n I \cdot |\mu_0 b^2 + \mu_1(a^2 - b^2)| \cdot N}{I}$$

$$L_{\text{p}} = \pi n \cdot |\mu_0 b^2 + \mu_1(a^2 - b^2)| \cdot N$$

Ahora bien, como $N = n \cdot L$, entonces, finalmente:

$$\frac{L_{\text{p}}}{L} = \pi n^2 \cdot |\mu_0 b^2 + \mu_1(a^2 - b^2)|$$

6) Un alambre muy largo (infinito para propósitos prácticos) es ubicado a una distancia **d** del centro de un solenoide infinito, cuyo radio es **b (b < d)** y tiene **n** vueltas por unidad de longitud. Si el solenoide y el alambre están a **90º** uno con respecto al otro; calcular la inductancia mutua entre solenoide y alambre.



Recordemos que la inductancia mutua entre dos bobinas se puede determinar de dos maneras en esta situación. La primera:

$$M = N_{\text{solenoide}} \frac{\Phi_{\text{cable/solenoide}}}{I_{\text{cable}}}$$

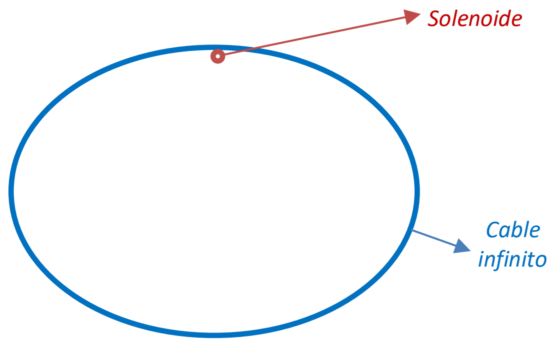
Calcular $\Phi_{\text{cable/solenoide}}$ implica que se debe calcular el flujo que provoca el cable sobre la sección transversal asociada a cada vuelta del solenoide. Si te pones a pensar detalladamente en este cálculo, es fácil llegar a la conclusión de que es altamente complicado: para cada vuelta del solenoide, el ángulo entre el campo magnético provocado por el cable y el vector normal a la superficie de la sección transversal cambia, y, adicionalmente, se debe hacer una integración en la superficie de dicha sección transversal considerando una parametrización de la circunferencia del solenoide. En resumen, un caos matemático que, creo, no les gustaría resolver de buenas a primeras.

Por otro lado, se tiene una segunda manera para determinar la inductancia mutua:

$$M = N_{\text{línea}} \frac{\Phi_{\text{solenoide/cable}}}{I_{\text{solenoide}}}$$

¿Cómo esto? Si la línea no tiene vueltas…

Si te pones creativo, y recuerdas cómo se aplicaba la ley de Ampere para determinar la densidad de campo magnético en un solenoide, puedes imaginar que el cable da una vuelta completa en el infinito. Vale decir, que el cable infinito encierra el solenoide, tal como se muestra en la siguiente figura:



Como el cable es infinito, el solenoide ve que dicho cable es recto (ya que se encuentra a una distancia finita del cable).

Con ello, el flujo que genera el solenoide sobre la sección transversal de la espira infinita es:

$$\Phi_{\text{solenoide/cable}} = \left|\vec{B}_{\text{solenoide}}\right| \cdot A_{\text{solenoide}}$$

Solamente se ocupa el área de la sección transversal del solenoide, ya que fuera del solenoide la densidad de campo magnético es nula. Luego:

$$\Phi_{\text{solenoide/cable}} = \mu_0 \cdot n \cdot I \cdot \pi b^2$$

Y, en definitiva, asumiendo que $I_{\text{solenoide}} = I$:

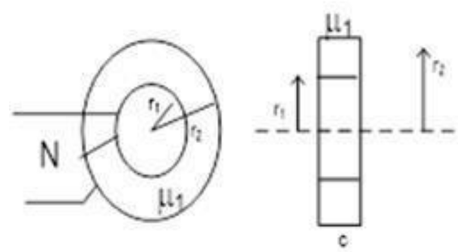
$$M = N_{\text{línea}} \cdot \frac{\Phi_{\text{solenoide/cable}}}{I_{\text{solenoide}}} = 1 \cdot \frac{\mu_0 \cdot n \cdot I \cdot \pi b^2}{I}$$

Con lo cual, finalmente:

$$M = \mu_0 n \pi b^2$$

Si algún valiente espartano lo quiere hacer por el primer método, ¡*avanti!*

7) Una bobina toroidal de radio interno $\mathbf{r_1}$, radio externo $\mathbf{r_2}$, y sección transversal cuadrada; está fabricada de un material de permitividad $\boldsymbol{\mu_1} > \boldsymbol{\mu_0}$ y tiene **N** vueltas. Si esta bobina lleva una corriente **I**, calcular el cambio en la energía almacenada si se remueve el material del núcleo (el núcleo es removido y reemplazado con espacio libre).



A partir del ejercicio 3, sabemos que la inductancia propia de una bobina toroidal con núcleo de aire es:

$$L_{\text{p,vacío}} = \frac{\mu_0 N^2 c}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

Por otro lado, si la bobina estuviera enrollada en torno a un núcleo con permitividad μ_1, entonces la inductancia propia estaría dada por:

$$L_{\mathrm{p,material}} = \frac{\mu_1 N^2 c}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

Ahora bien, la energía almacenada en este inductor responde a:

$$U = \frac{1}{2} L_{\mathrm{p}} I^2$$

Con ello, la energía inicial, considerando la bobina con el núcleo de material ferromagnético, es:

$$U_{\mathrm{inicial}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\mu_1 N^2 c}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\right] I^2$$

Y la energía final, extrayendo el material ferromagnético:

$$U_{\mathrm{final}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\mu_0 N^2 c}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\right] I^2$$

Con ello se sabe que:

$$U_{\mathrm{final}} = U_{\mathrm{inicial}}\left(\frac{\mu_0}{\mu_1}\right)$$

Luego, el cambio de energía está dado por:

$$\Delta U = U_{\mathrm{final}} - U_{\mathrm{inicial}} = U_{\mathrm{inicial}}\left(\frac{\mu_0}{\mu_1}\right) - U_{\mathrm{inicial}} = U_{\mathrm{inicial}}\left(\frac{\mu_0}{\mu_1} - 1\right)$$

$$\Delta U = U_{\mathrm{inicial}}\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\mu_1}\right)$$

Con lo cual, finalmente:

$$\Delta U = \frac{1}{2}\left[\frac{N^2 c}{2\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)\right] I^2 \cdot (\mu_0 - \mu_1)$$

$$\Delta U = \frac{N^2 I^2 c}{4\pi} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \cdot (\mu_0 - \mu_1)$$