UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Listado de Ejercicios Resueltos 1 (527140)

Ejercicios resueltos del listado 1

1.a) Considerando que a, b y c son números reales cualesquiera. Determine los valores para los cuales las siguientes expresiones son válidas.

$(a+b)(a-b) = (b+a)(b-a)$

Solución: Para determinar los valores en los que la igualdad se cumple, desarrollamos ambos lados de la expresión aplicando los axiomas de cuerpo.

$$\begin{aligned}
& a^2 - ab + ba - b^2 = b^2 - ba + ab - a^2 \qquad \text{(conmutatividad del producto para } ba) \\
\Leftrightarrow\ & a^2 - ab + ba - b^2 = b^2 - ab + ab - a^2 \qquad \text{(existencia del opuesto de } ab) \\
\Leftrightarrow\ & a^2 - b^2 = b^2 - a^2 \quad / + a^2 \qquad \text{(opuesto de } -a^2) \\
\Leftrightarrow\ & 2a^2 - b^2 = b^2 \quad / + b^2 \qquad \text{(opuesto de } -b^2) \\
\Leftrightarrow\ & 2a^2 = 2b^2 \quad / : 2 \qquad \text{(ley de cancelación para el producto)} \\
\Leftrightarrow\ & a^2 = b^2
\end{aligned}$$

En este punto podemos notar que los valores cuadrado de a y b deben ser iguales, es decir, $a = b \vee a = -b$. Finalmente, el enunciado es verdadero para cualquier valor de a y de b en los números reales cuando $a = b$ o cuando $a = -b$.

4. Si consideramos a $x = 5$ en la ecuación, determine el valor de a:

$$\frac{3x-a}{x-a} + \frac{x-a}{3x-a} = \frac{10}{3}$$

Solución: Antes de reemplazar el valor de x en la ecuación, primero reduciremos la expresión, como sigue:

$$\begin{aligned}
\frac{3x-a}{x-a} + \frac{x-a}{3x-a} = \frac{10}{3} &\Longrightarrow \frac{(3x-a)(3x-a) + (x-a)(x-a)}{(x-a)(3x-a)} = \frac{10}{3} \\
&\Longrightarrow 3[(3x-a)(3x-a) + (x-a)(x-a)] = 10(x-a)(3x-a) \\
&\Longrightarrow 3[9x^2 - 6ax + a^2 + x^2 - 2ax + a^2] = 10[3x^2 - xa - 3xa + a^2] \\
&\Longrightarrow 3[10x^2 - 8ax + 2a^2] = 10[3x^2 - 4ax + a^2] \\
&\Longrightarrow 30x^2 - 24ax + 6a^2 = 30x^2 - 40ax + 10a^2 \\
&\Longrightarrow 16ax - 4a^2 = 0 \\
&\Longrightarrow 4a(4x - a) = 0
\end{aligned}$$

Ahora bien, sabemos que si el producto de dos números reales es 0, entonces al menos uno de ellos es 0, por ende:

$$4a = 0 \vee 4x - a = 0 \Longrightarrow a = 0 \vee a = 4x$$

Así, reemplazando el valor de x, se concluye que $a = 0$ ó $a = 20$.

6.c Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas, utilizando dos de los siguientes métodos: factorización, completación de cuadrados o fórmula de los ceros de una ecuación cuadrática

- $4x^2 + 2x + \dfrac{1}{4} = 0$

  Solución:

  ▷ Método 1: Fórmula general de una ecuación cuadrática

  $$4x^2 + 2x + \frac{1}{4} = 0 \ \ / : 4 \Longrightarrow x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = 0$$

  Notemos que en la segunda ecuación $a = 1$, $b = \dfrac{1}{2}$ y $c = \dfrac{1}{16}$, además sabemos que las soluciones de la ecuación están dadas por:

  $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

  Ahora bien, reemplazando los valores de a, b y c, se tiene:

  $$x = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}}}{2} = -\frac{\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}$$

  Con lo anterior concluimos que la ecuación posee dos soluciones reales iguales y esta es $x = -\dfrac{1}{4}$.

  ▷ Método 2: Completación de cuadrados

  En este método se busca factorizar la expresión de la forma $(a \pm b)^2 = 0$; para ello necesitamos los siguientes términos algebraicos a^2, $2ab$ y b^2

  En este caso $4x^2 + 2x + \dfrac{1}{4} = 0$, el primer término al cuadrado es $4x^2$ y se puede escribir como $(2x)^2$, ahora buscamos el doble del primero por el segundo término que es equivalente a $2x$, sin embargo no es posible determinar el segundo término en esa forma, así que lo escribimos como $2 \cdot (2x) \cdot \frac{1}{2}$ lo que es igual a $2x$, pero podemos visualizar el primer y el segundo término, o el segundo término al cuadrado $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ el cual corresponde coincidentemente con la expresión $\left(\frac{1}{4}\right)$. Así podemos escribir la igualdad de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 2x + \frac{1}{4} = 0 &\Longrightarrow \left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \\ &\Longrightarrow 2x + \frac{1}{2} = 0 \\ &\Longrightarrow x = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Con lo anterior concluimos que la ecuación posee dos soluciones reales iguales y esta es $x = -\frac{1}{4}$.

Ejercicos Resueltos Adicionales.

1. Sean a, b y c números reales. Determine la solución de la ecuación $(x-a)(x-b) = c^2$ y demuestre que estas son números reales.

   Solución: Primero expresaremos la ecuación como una ecuación cuadrática de la forma $mx^2 + nx + p = 0$, como sigue:

   $$\begin{aligned} (x-a)(x-b) = c^2 &\Longrightarrow x^2 - xb - xa + ab = c^2 \\ &\Longrightarrow x^2 + x(-b-a) + (ab - c^2) = 0 \end{aligned}$$

   Sabemos que las soluciones de la ecuación cuadrática están dadas por:

   $$x = \frac{-n \pm \sqrt{n^2 - 4mp}}{2m}$$

   En este caso $m = 1$, $n = -b - a$ y $p = ab - c^2$, reemplazando los valores en la fórmula, se tiene:

   $$\begin{aligned} x &= \frac{(b+a) \pm \sqrt{(-b-a)^2 - 4(ab - c^2)}}{2} \\ &= \frac{b + a \pm \sqrt{b^2 + 2ab + a^2 - 4ab + 4c^2}}{2} \\ &= \frac{(b+a) \pm \sqrt{a^2 - 2ab + b^2 + 4c^2}}{2} \\ &= \frac{(b+a) \pm \sqrt{(a-b)^2 + 4c^2}}{2} \end{aligned}$$

   Notemos que $(a-b)^2 + 4c^2 > 0$, por ende se concluye que las soluciones de la ecuación cuadrática son reales y estas son:

   $$x_1 = \frac{(b+a) + \sqrt{(a-b)^2 + 4c^2}}{2} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{(b+a) - \sqrt{(a-b)^2 + 4c^2}}{2}$$

2. Considere la siguiente cuadrática $kx^2+10x-8=0$, se sabe que una solución es $x=-4$. Encuentre el valor de k y la otra solución.

Solución: Notar que si $x=-4$ es solución de la ecuación anterior, al reemplazarlo en la ecuación , esta debe dar cero, en efecto :

$$\begin{aligned}&kx^2+10x-8=0 \ \wedge \ x=-4\\ &\Longrightarrow 16k-48=0\\ &\Longrightarrow k=3\end{aligned}$$

De este modo, el valor de $k=3$.

Del desarrollo anterior se tiene que al ecuación es de la forma

$$3x^2+10x-8=0$$

Utilizando la fórmula de la ecuación cuadrática se tiene

$$x=\frac{-10\pm\sqrt{100+4\cdot 3\cdot 8}}{6}$$

De donde $x_1=-4$ y $x_2=\dfrac{2}{3}$

6.c Considere la siguiente cuadrática $2x^2+10x-k=0$. Determinar el o los valores de k para :

a) no tenga solución en los reales

b) Tenga dos soluciones distintas en los reales.

Solución: Calculando el discriminante de la ecuación cuadrática se tiene que

$$\triangle=100+4\cdot(2)\cdot k=100+8k$$

Por en de para que no tenga soluciones en los reales se necesita que

$$\triangle<0\Leftrightarrow 100+8k<0\Longrightarrow k<-\frac{25}{2}$$

Y para que tenga dos soluciones reales distintas se necesita que

$$\triangle>0\Leftrightarrow 100+8k>0\Longrightarrow k>-\frac{25}{2}$$