Álgebra I. 525140 - DIM - CFM
17 de septiembre de 2021
Prof.: S. Caro, F. Thiele, F. Jara.

Listado 3
Relaciones

Recordar que $A \times B := \{(a,b) : a \in A \text{ y } b \in B\}$.

1. **(P)** Sean los conjuntos $A = \{1,2\}$ y $B = \{5,7\}$. Hallar y mostrar gráficamente los siguientes conjuntos

   a) $A \times B$
   b) $B \times A$

   ¿Se cumple $A \times B = B \times A$?

2. Sean los conjuntos $E = \{a,b,c\}$ y $F = \{1,3\}$. Hallar y mostrar gráficamente los siguientes conjuntos

   a) $E \times F$
   b) $F \times E$

3. Determinar

   a) Sean $A = \{5,8,11\}$ y $B = \{4,7,10\}$. Hallar $\mathcal{R} = \{(a,b) \in A \times B : a < b\}$.
   b) **(P)** Sean $P = \{3,5,7,9\}$ y $Q = \{1,2,3,4\}$. Hallar $\mathcal{R} = \{(a,b) \in P \times Q : a + b > 9\}$.

4. Considere los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 7\}$ y $B = \{-1,0,1\}$. Indicar la veracidad o falsedad de las siguientes sentencias

   a) $(-1,0) \in A \times B$
   b) $(5,0) \in A \times B$
   c) **(P)** $(0,6) \in A \times B$
   d) $(1,-1) \in A \times B$
   e) **(P)** $A \times B \subset [0,7] \times [-2,2]$

5. **(P)** Para la siguiente relación binaria interna, verifique si se cumple la reflexividad, simetría, transitivadad y antisimetría y muestre gráficamente esta relación. Justifique sus afirmaciones.

$$L = \{(2,2),(1,1),(1,3)\} \text{ como relación de } B = \{1,2,3\} \text{ en sí mismo.}$$

6. Para las siguientes relaciones, determine si son de equivalencia, de orden, o ninguna, demuestre sus afirmaciones. En caso de ser de equivalencia, describa una de sus clases de equivalencia.

   a) $C = \{1,2,3,4,5\}$ y $R = \{(1,1),(1,3),(4,2),(5,5)(2,4),(3,3),(3,1),(2,2),(4,4)\}$ en C.

b) **(P)** $E = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ : \ a - b \in \mathbb{Z}\}$

c) $N = \{(C,D) \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \ : \ C \cup D \neq \phi\}$

d) $Eq = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ : \ \exists k \in \mathbb{Z}, \ x - y = 2k\pi\}$

e) $B = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ : \ a - b \text{ es par}\}$

f) $S = \{((x,y),(a,b)) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^2 \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})^2 \ : \ xb = ay\}$

g) **(P)** $L = \{((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \ : \ x_1 \leq y_1 \wedge x_2 \leq y_2\}$

h) T en el conjunto de las personas, definida por $a \ T \ b$ si y solo si a tiene menor o igual estatura que b.

7. Dado un conjunto F y $K \subseteq F$ fijo, definimos la relación binaria interna $\mathcal{R}_K$ en $\mathcal{P}(F)$ por

$$\mathcal{R}_K = \{(A,B) \in \mathcal{P}(F) \times \mathcal{P}(F) : B \cap K \subset A\}.$$

a) Pruebe que $\mathcal{R}_K$ es refleja y transitiva.

b) Dé condiciones sobre el conjunto K para que $\mathcal{R}_K$ sea antisimétrica.