Solución Parcial

Listado 3 : Espacios vectoriales

4. Sean S y T los siguientes subespacios de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

$$S = \langle \{x^2 - 1, x^2 + 1\} \rangle, \qquad T = \{ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \,:\, a + b = 0 \;\wedge\; c = 0\}$$

(a) Obtenga un generador de $S + T$, ¿están en suma directa?

(b) Escriba $2x^2 - 5x + 6$ como suma de un vector en S y otro en T.

(a) Encontremos un conjunto generador de T

$$\begin{aligned} T &= \{ax^2+bx+c \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : a=-b \wedge c=0\} \\ &= \{-bx^2+bx+0 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{b(-x^2+x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : b \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle \{-x^2+x\} \rangle \end{aligned}$$

Notamos que los elementos de T son aquellos que son c.l de $-x^2+x$.

Considerando que además $S = \langle\{x^2-1, x^2+1\}\rangle$ se concluye que $S+T = \langle\{x^2-1, x^2+1, -x^2+x\}\rangle$, es decir, un conjunto generador de $S+T$ es $\{x^2-1, x^2+1, -x^2+x\}$

Estudiamos $S \cap T$. Supongamos que existen $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que

$a(x^2-1) + b(x^2+1) = c(-x^2+x), \forall x \in \mathbb{R}$. Se obtiene que $a+b=-c$, $0=c$, $-a+b=0$ y por tanto $a=b=c=0$. Así $S \cap T = \{\theta\}$ y la suma $S+T$ es suma directa.

4. Sean S y T los siguientes subespacios de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

$$S = \langle\{x^2 - 1, x^2 + 1\}\rangle, \qquad T = \{ax^2 + bx + c \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \,:\, a + b = 0 \ \wedge \ c = 0\}$$

(a) Obtenga un generador de $S + T$, ¿están en suma directa?

(b) Escriba $2x^2 - 5x + 6$ como suma de un vector en S y otro en T.

(b) Debemos determinar $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que

$$a(x^2-1) + b(x^2+1) + c(-x^2+x) = 2x^2-5x+6 \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b-c = 2 \\ c = -5 \\ -a+b = 6 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a &= -9/2 \\ b &= 3/2 \\ c &= -5 \end{aligned}$$

Así
$$-\frac{9}{2}(x^2-1) + \frac{3}{2}(x^2+1) = -3x^2+6 \in S$$
$$-5(-x^2+x) = 5x^2-5x \in T$$

y $2x^2-5x+6 = (-3x^2+6) + (5x^2-5x)$

5. Exprese, si es posible, al vector v indicado como combinación lineal de los vectores del conjunto dado.

(g) $v(x) = e^{-x}$, $\{e^{x} + e^{-x}, e^{x} - e^{-x}\}$ en el e.v. $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$.

Sol: Supongamos existen $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$e^{-x} = \alpha_1 (e^{x} + e^{-x}) + \alpha_2 (e^{x} - e^{-x}) \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

entonces

$$e^{-x} = \alpha_1 e^{-x} - \alpha_2 e^{-x} \quad y \quad 0 = \alpha_1 e^{x} + \alpha_2 e^{x} \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

Luego

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1 - \alpha_2 \\ 0 = \alpha_1 + \alpha_2 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones, obteniendo que

$$\alpha_1 = 1/2 \quad y \quad \alpha_2 = -1/2$$

Por lo tanto, el vector v se puede expresar como

$$v(x) = e^{-x} = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) - \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$$

6. Determine si el vector $u \in V$ dado pertenece a $\langle S \rangle$.

(a) $u = (1, i)^T$ donde $V = \mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$ y $S = \{(1,1)^T, (-1,1)^T, (0,1)^T\}$.

Notemos que no existen escalares reales $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tales que:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pues claramente cualquiera sean los valores de α_1, α_2 y $\alpha_3 \in \mathbb{R}$:

$$i \neq \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

Por lo tanto $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \notin \langle S \rangle$