

FÍSICA Y MEDICIONES

FÍSICA I - 510140

PROF. JOSÉ AGUIRRE GÓMEZ

DEPARTAMENTO DE FÍSICA
OFICINA 315

CONTENIDOS

- 1 INTRODUCCIÓN
- 2 ESTÁNDARES DE LONGITUD, MASA Y TIEMPO
- 3 ANÁLISIS DIMENSIONAL
- 4 CONVERSIÓN DE UNIDADES
- 5 ESTIMACIÓN Y CÁLCULO DE ORDEN DE MAGNITUD
- 6 CIFRAS SIGNIFICATIVAS
- 7 PROPAGACIÓN DE INCERTIDUMBRES
- 8 EJERCICIOS

1. INTRODUCCIÓN

La **física** (ciencia) está sustentada en observaciones experimentales y mediciones cuantitativas. Como finalidad, intenta:

- Identificar un número limitado de leyes que rigen los fenómenos naturales y usarlas para desarrollar teorías capaces de anticipar los resultados experimentales.

Las leyes fundamentales usadas para elaborar teorías se expresan en el lenguaje de las matemáticas (herramienta): Puente entre teoría y experimento.

Cuando el pronóstico de una teoría y los resultados experimentales no concuerdan:

- formular nuevas teorías o modificar las existentes para resolver desacuerdos.

Algunas teorías se aplican sólo a ciertas condiciones, mientras que otras se aplican casi de manera general. Por ejemplo,

- Leyes del movimiento (Isaac Newton 1642-1727): Precisas para explicar el movimiento de objetos que se mueven con rapidez normales. No se aplica a objetos que se mueven con rapidez cercanas a la de luz.
- Teoría especial de la relatividad (Albert Einstein 1879-1955): Se aplica tanto a objetos que se mueven con rapidez normales y también cercanas a la de la luz.

Física Clásica: Principios de la mecánica clásica, la termodinámica, la óptica y el electromagnetismo (desarrollados antes de 1900).

- Newton: Importantes contribuciones a la física clásica y uno de los creadores del cálculo diferencial (herramienta matemática).
- Durante el siglo XVIII: Grandes adelantos en mecánica.
- Finales del siglo XIX: Gran despliegue de la termodinámica y del electromagnetismo.

Física Moderna: Tiene inicio a finales del siglo XIX. Nace de la necesidad de explicar fenómenos físicos que la física clásica no conseguía explicar.

- Teorías de la Relatividad: La teoría especial de la relatividad modifica por completo los conceptos tradicionales de espacio, tiempo y energía. La rapidez de la luz es el límite superior de la rapidez que puede alcanzar un objeto. Establece la relación entre masa y energía.
- Mecánica Cuántica: Formulada para describir fenómenos físicos a escala atómica. Muchos dispositivos prácticos han sido desarrollado basados en los principios de esta física.

En la actualidad científicos, ingenieros y técnicos trabajan en conjunto para mejorar la calidad de vida y un mejor entendimiento de las leyes de la naturaleza, con enormes beneficios para la humanidad.

2. ESTÁNDARES DE LONGITUD, MASA Y TIEMPO

La descripción de los fenómenos naturales requiere de mediciones. Cada medición está asociada a una cantidad física medible (por ejemplo, la longitud de un objeto).

Cualquier unidad que se elija como estándar de medición debe ser accesible y poseer ciertas propiedades que se puedan medir de manera confiable.

- Los estándares de medición que usan diferentes personas en diferentes lugares del universo, deben producir el mismo resultado.
- Los estándares usados para mediciones no deben cambiar con el tiempo.

El conjunto de estándares para las cantidades fundamentales de la ciencia se llama **SI** (sistema internacional):

Cantidad fundamental	Unidad SI	Símbolo	Dimensión
longitud	metro	m	L
masa	kilogramo	kg	M
tiempo	segundo	s	T
temperatura	kelvin	K	Θ
corriente eléctrica	ampere	A	I
intensidad luminosa	candela	cd	J
cantidad de sustancia	mol	mol	N

Leyes física se expresan como relaciones matemáticas entre cantidades físicas.

Cantidades físicas fundamentales en mecánica son la **longitud, masa y tiempo**. Otras cantidades se expresan en función de ellas.

Longitud (m).

- En 1779, Francia adoptó como estándar legal de longitud el **metro (m)**: diezmillonésima parte de la distancia del ecuador al Polo Norte a lo largo de una línea longitudinal particular que pasa por París.
- En 1960, la longitud del metro se definió como la distancia entre dos líneas en una barra específica de platino-iridio almacenada bajo condiciones especiales en Francia.
- En la década de los sesenta y setenta del siglo XX, el metro se definió como 1 650 763.73 longitudes de onda de la luz naranja-rojo emitida desde una lámpara de kriptón 86 (^{86}Kr).
- En octubre de 1983, se definió el metro como **la distancia recorrida por la luz en el vacío durante un tiempo de $1/(299\,792\,458)$ segundos**. Esta definición establece que la luz en el vacío tiene una rapidez de 299 792 458 metros por segundo.

Cuadro 1. Valores aproximados de ciertas longitudes medidas

	Longitud (m)
Distancia de la Tierra al quasar conocido más remoto	1.4×10^{26}
Distancia de la Tierra a las galaxias normales más remotas	9×10^{25}
Distancia de la Tierra a la galaxia grande más cercana (Andrómeda)	2×10^{22}
Distancia del Sol a la estrella más cercana (Próxima Centauri)	4×10^{16}
Un año luz	9.46×10^{15}
Radio orbital medio de la Tierra en torno al Sol	1.50×10^{11}
Distancia media de la Tierra a la Luna	3.846×10^8
Distancia del ecuador al Polo Norte	1.00×10^7
Radio medio de la Tierra	6.37×10^6
Altitud típica (sobre la superficie) de un satélite que orbita la Tierra	2×10^5
Longitud de un campo de football	9.1×10^1
Longitud de una mosca	5×10^{-3}
Tamaño de la partícula de polvo más pequeña	$\sim 10^{-4}$
Tamaño de las células de la mayoría de los organismos vivientes	$\sim 10^{-5}$
Diámetro de un átomo de hidrógeno	$\sim 10^{-10}$
Diámetro de un núcleo atómico	$\sim 10^{-14}$
Diámetro de un protón	$\sim 10^{-15}$

Masa (kg)

La unidad fundamental del SI de masa, el kilogramo (kg), es definido como **la masa de un cilindro de aleación platino-iridio específico que se conserva en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas en Sevres, Francia.** No ha cambiado desde 1887 porque la aleación platino-iridio es inusualmente estable.

Cuadro 2. Masas aproximadas de varios objetos

	Masa (kg)
Universo observable	$\sim 10^{52}$
Galaxia Vía Láctea	$\sim 10^{42}$
Sol	1.9×10^{30}
Tierra	5.98×10^{24}
Luna	7.36×10^{22}
Tiburón	$\sim \times 10^3$
Humano	$\sim 10^2$
Rana	$\sim 10^{-1}$
Mosquito	$\sim \times 10^{-5}$
Bacteria	$\sim 1 \times 10^{-15}$
Átomo de Hidrógeno	1.67×10^{-27}
Electrón	9.11×10^{-31}

Tiempo (s).

- 1967 El segundo se redefinió con base en la precisión del **reloj atómico** basado en las vibraciones de átomos de cesio: Un segundo equivale a **9 192 631 770 veces el periodo de vibración del átomo de cesio 133** (^{133}Cs)

Cuadro 3. Valores aproximados de algunos intervalos de tiempo

	Intervalo de Tiempo (s)
Edad del Universo	5×10^{17}
Edad de la Tierra	1.3×10^{17}
Edad promedio de un estudiante universitario	6.3×10^8
Un año	3.2×10^7
Un día	8.6×10^4
Un periodo de clase	3.0×10^4
Intervalo de tiempo entre latidos normales	8×10^{-1}
Periodo de ondas sonoras audibles	$\sim 10^{-3}$
Periodo de ondas de radio típicas	$\sim 10^{-6}$
Periodo de vibración de un átomo en un sólido	$\sim 10^{-13}$
Periodo de una onda de luz visible	$\sim 10^{10-15}$
Duración de una colisión nuclear	$\sim 10^{-22}$
Intervalo de tiempo para que la luz cruce un protón	$\sim 10^{-24}$

El **sistema usual estadounidense** aún es usado en Estados Unidos y otros países de habla inglesa. Las unidades de longitud, masa y tiempo son, respectivamente, pie (ft), slug y segundo.

Otras unidades, denotando multiplicadores de las unidades básicas establecidas en potencias de diez, son habitualmente usadas.

Cuadro 4. Prefijos para potencias de diez

Potencia	Prefijo	abreviatura	Potencia	Prefijo	abreviatura
10^{-24}	yocto	y	10^3	kilo	k
10^{-21}	zepto	z	10^6	mega	M
10^{-18}	atto	a	10^9	giga	G
10^{-15}	femto	f	10^{12}	tera	T
10^{-12}	pico	p	10^{15}	peta	P
10^{-9}	nano	n	10^{18}	exa	E
10^{-6}	micro	μ	10^{21}	zetta	Z
10^{-3}	mili	m	10^{24}	yotta	Y
10^{-2}	centi	c			
10^{-1}	deci	d			

Por ejemplo, 10^{-3} m es equivalente a 1 milímetro (mm) y 10^3 m corresponde a 1 kilómetro (km). De igual modo, 1 kilogramo (kg) es 10^3 gramos (g) y 1 megavolt (MV) es 10^6 volts (V).

Las variables longitud, tiempo y masa son **cantidades fundamentales**.

Cantidades expresadas como una combinación matemática de cantidades fundamentales son **cantidades deducidas**. Por ejemplo, *área* (producto de dos longitudes) y *rapidez* (relación de una longitud a un intervalo de tiempo).

Otra cantidad deducida es la **densidad**. La densidad ρ de cualquier sustancia se define como su *masa por unidad de volumen*:

$$\rho \equiv \frac{m}{V}. \quad (1)$$

En términos de cantidades fundamentales, la densidad es una proporción de una masa a un producto de tres longitudes. Ejemplos

$$\text{densidad del aluminio} = \rho_{\text{Al}} = 2.70 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3},$$

$$\text{densidad del hierro} = \rho_{\text{Fe}} = 7.86 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

3. ANÁLISIS DIMENSIONAL

En física la palabra *dimensión* denota la naturaleza física de una cantidad. Aún cuando una distancia se mida en pies, metros, pulgadas o brazas, sigue siendo una distancia; se dice que su dimensión es la *longitud*.

Los símbolos de las dimensiones de longitud, masa y tiempo usados son, respectivamente L, M y T.

Cuadro 5. Dimensiones y unidades de cuatro cantidades deducidas

Cantidad	Área	Volumen	Rapidez	Aceleración
Dimensiones	L^2	L^3	$\frac{L}{T}$	$\frac{L}{T^2}$
Unidades SI	m^2	m^3	$\frac{m}{s}$	$\frac{m}{s^2}$
Sistema usual estadounidense	ft^2	ft^3	$\frac{ft}{s}$	$\frac{ft}{s^2}$

Algunas veces se usará el corchete para denotar las dimensiones de una cantidad física. Por ejemplo, las dimensiones de la rapidez se escriben como $[v] = \text{L}/\text{T}$.

El **análisis dimensional** ayuda a la verificación de una ecuación específica, en la cual **las dimensiones son tratadas como cantidades algebraicas**.

- Las cantidades se suma o restan sólo si tienen las mismas dimensiones.
- Los términos a ambos lados de una ecuación deben tener las mismas dimensiones.

Como ejemplo, considere la situación en la cual desea determinar la posición x de un automóvil en un tiempo t que parte del reposo en $x = 0$ y se mueve con aceleración constante a . La expresión correcta para esa situación es $x = \frac{1}{2}at^2$.

Las dimensiones a ambos lados de la igualdad deben ser iguales. Escribamos esto como sigue:

$$[x] = [at^2] = [a] \times [t]^2$$

Usando las dimensiones de aceleración del Cuadro 5, se tiene

$$[x] = \frac{\text{L}}{\text{T}^2} \times (\text{T}^2) = \text{L}.$$

Un procedimiento más general de análisis dimensional sería establecer una expresión de la forma:

$$x \propto a^n t^m, \quad n \text{ y } m \text{ exponentes a ser determinados.}$$

Las dimensiones a ambos lados de la igualdad deben ser iguales. Escribamos esto como sigue:

$$\begin{aligned} [x] &= [a^n t^m] \\ L^1 T^0 M^0 &= [a^n t^m] = [a]^n [t]^m \end{aligned}$$

Usando las dimensiones de aceleración del Cuadro 5, se tiene

$$\begin{aligned} L^1 T^0 M^0 &= \left(\frac{L}{T^2} \right)^n \times T^m = \left(\frac{L^n}{T^{2n}} \right) \times T^m \\ L^1 T^0 M^0 &= (L^n T^{-2n}) \times T^m \\ L^1 T^0 M^0 &= L^n T^{(m-2n)}. \end{aligned}$$

Los exponentes de L y T deben ser iguales a ambos lados de la igualdad, respectivamente. Se deduce, entonces, que $n = 1$ y $m - 2n = 0$ y sustituyendo el valor de $n = 1$ se obtiene $m = 2$. Se concluye así que $x \propto at^2$.

Ejemplo 1.1. Análisis dimensional de una ley de potencias

Suponga que la aceleración a de una partícula que se mueve con rapidez uniforme v en un círculo de radio r es proporcional a alguna potencia de r , digamos r^m , y a alguna potencia de v , digamos v^n . Determine los valores de n y m y escriba la forma más simple para una ecuación para la aceleración de dicha partícula.

Solución

- 1) Escribamos la expresión para la aceleración a de dicha partícula con una constante de proporcionalidad adimensional k , esto es,

$$a = kr^m v^n.$$

- 2) Sustituya en esa ecuación las dimensiones de la aceleración a , el radio r y la rapidez v de dicha partícula:

$$\frac{\text{L}}{\text{T}^2} = \left(\frac{\text{L}}{\text{T}} \right)^n \times \text{L}^m = \frac{\text{L}^{n+m}}{\text{T}^n}.$$

- 3) Iguale los exponentes de L y T de modo a tener una ecuación dimensionalmente correcta

$$n = 2, \quad n + m = 1$$

- 4) Sustituya el valor de $n = 2$ en la segunda ecuación y encuentre el valor de m

$$(2) + m = 1, \quad m = -1.$$

- 5) Sustituya los valores de n y m en la expresión del ítem 1) y escriba la expresión para la aceleración a de la partícula

$$a = kv^2r^{-1} = k\frac{v^2}{r}.$$

En el Capítulo §.4, acerca del movimiento circular uniforme, se muestra que $k = 1$ si se usa un conjunto consistente de unidades. La constante de proporcionalidad k no sería igual a 1 si, por ejemplo, la rapidez v estuviese en km/h y quisiéramos obtener la aceleración, a , en m/s².

4. CONVERSIÓN DE UNIDADES

La equivalencia entre unidades de longitud del SI y las usuales estadounidenses son las siguientes

$$1 \text{ mi} = 1\,609 \text{ m} = 1.609 \text{ km}$$

$$1 \text{ ft} = 0.3048 \text{ m} = 30.48 \text{ cm}$$

$$1 \text{ m} = 39.37 \text{ in} = 3.281 \text{ ft}$$

$$1 \text{ pulg} = 0.0254 \text{ m} = 2.54 \text{ cm} \text{ (exactamente).}$$

Del mismo modo que las dimensiones, las unidades se manipulan como cantidades algebraicas que se cancelan mutuamente. Por ejemplo, imagine que desea convertir 15.0 in a centímetros. Dado que 1 in se define, exactamente, como 2.54 cm, se encuentra que

$$15.0 \text{ pulg} = (15.0 \cancel{\text{ in}}) \times \left(\frac{2.54 \text{ cm}}{1 \cancel{\text{ in}}} \right) = 38.1 \text{ cm}.$$

Ejemplo 1.2. ¿Pasó del límite de velocidad permitida?

En una autopista intercomunal en una dada región del país, un automóvil viaja con una rapidez de 38.0 m/s . ¿El conductor pasó del límite de velocidad de 75 mi/h permitido? ¿Cuál es la rapidez del automóvil en km/h ?

Ejemplo 1.2. ¿Pasó del límite de velocidad permitida?

En una autopista intercomunal en una dada región del país, un automóvil viaja con una rapidez de 38.0 m/s. ¿El conductor pasó del límite de velocidad de 75 mi/h permitido? ¿Cuál es la rapidez del automóvil en km/h?

Solución

- 1) Convierta la rapidez de m/s a mi/h:

$$\left(38.0 \frac{\cancel{\text{m}}}{\cancel{\text{s}}}\right) \times \left(\frac{1 \text{ mi}}{1609 \cancel{\text{m}}}\right) \times \left(\frac{60 \cancel{\text{s}}}{1 \cancel{\text{min}}}\right) \times \left(\frac{60 \cancel{\text{min}}}{1 \text{ h}}\right) = 85.0 \frac{\text{mi}}{\text{h}}.$$

El conductor pasó del límite de velocidad permitido y debe reducirla.

Ejemplo 1.2. ¿Pasó del límite de velocidad parmitida?

En una autopista intercomunal en una dada región del país, un automóvil viaja con una rapidez de 38.0 m/s. ¿El conductor pasó del límite de velocidad de 75 mi/h permitido? ¿Cuál es la rapidez del automóvil en km/h?

Solución

- 1) Convierta la rapidez de m/s a mi/h:

$$\left(38.0 \frac{\cancel{\text{m}}}{\cancel{\text{s}}}\right) \times \left(\frac{1 \text{ mi}}{1609 \cancel{\text{m}}}\right) \times \left(\frac{60 \cancel{\text{s}}}{1 \cancel{\text{min}}}\right) \times \left(\frac{60 \cancel{\text{min}}}{1 \text{ h}}\right) = 85.0 \frac{\text{mi}}{\text{h}}.$$

El conductor pasó del límite de velocidad permitido y debe reducirla.

- 2) Convierta la rapidez de m/s a km/h:

$$\left(38.0 \frac{\cancel{\text{m}}}{\cancel{\text{s}}}\right) \times \left(\frac{1 \text{ km}}{1000 \cancel{\text{m}}}\right) \times \left(\frac{60 \cancel{\text{s}}}{1 \cancel{\text{min}}}\right) \times \left(\frac{60 \cancel{\text{min}}}{1 \text{ h}}\right) = 137 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

5. ESTIMACIONES Y CÁLCULOS DE ORDEN DE MAGNITUD

¿Cuál es el número de bits de datos en un disco compacto musical de uso común? La respuesta no debe ser necesariamente exacta, sino más bien un valor estimado. El valor debe ser expresado como notación científica.

El **orden de magnitud** de un número se determina de la siguiente manera:

- 1 Exprese el número en notación científica, con el multiplicador de la potencia de 10 entre 1 y 10 unidades.
- 2 Si el multiplicador es menor que $3.162 = \sqrt{10}$ (raíz cuadrada de diez), el orden de magnitud del número es la potencia de diez en la notación científica. Si el multiplicador es mayor que 3.162, el orden de magnitud es uno más grande que la potencia de diez en la notación científica.

El símbolo \sim , para “es del orden de”, es usado.

Ejemplos de órdenes de magnitud de algunas longitudes

longitud	notación científica	orden de magnitud
0.008 6 m	$8.6 \times 10^{-3} \text{ m}$	$\sim 10^{-2} \text{ m}$
0.002 1 m	$2.1 \times 10^{-3} \text{ m}$	$\sim 10^{-3} \text{ m}$
720 m	$7.20 \times 10^2 \text{ m}$	$\sim 10^3 \text{ m}$

Ejemplo 1.3. Respiración en una vida

Estime el número de respiraciones durante una vida humana promedio.

Solución

- 1) Comience por estimar que la vida humana promedio es de unos 70.0 años.
- 2) Considere el número promedio de respiraciones que una persona realiza en 1 minuto (considere ejercitación, dormir, rabia, tranquilidad y cosas por el estilo). Digamos que el promedio es de 10.0 respiraciones por minuto.
- 3) Estime el número de minutos en 1 año:

$$1 \text{ año} \times \left(\frac{365 \cancel{\text{ día}}}{1 \cancel{\text{ año}}} \right) \times \left(\frac{24.0 \cancel{\text{ h}}}{1 \cancel{\text{ día}}} \right) \times \left(\frac{60.0 \text{ min}}{1 \cancel{\text{ h}}} \right) = 5.26 \times 10^5 \text{ min.}$$

- 4) Estime el número de minutos en una vida promedio de 70.0 años:

$$70.0 \cancel{\text{ año}} \times \left(\frac{5.26 \times 10^5 \text{ min}}{1 \cancel{\text{ año}}} \right) = 3.68 \times 10^7 \text{ min.}$$

- 5) Estime el número de respiraciones (N) en una vida humana promedio

$$N = \left(\frac{10.0 \text{ respiraciones}}{1.00 \text{ min}} \right) \times (3.68 \times 10^7 \text{ min}) = 3.68 \times 10^8 \text{ respiraciones}$$

De acuerdo a la segunda regla para estimación del orden de magnitud se tiene que en una vida humana promedio de 70 años una persona realiza $\sim 10^9$ respiraciones.

6. CIFRAS SIGNIFICATIVAS

En una medición de una cantidad física, los valores medidos son exactos dentro de los límites del error experimental (calidad del aparato, habilidad de experimentador y número de medidas).

El número de **cifras significativas** en una medición nos expresa algo sobre el error. Por ejemplo, se le pide que determine el área de un CD usando una regla con una precisión de ± 0.1 cm.

Suponga que mide un radio de 6.0 cm. Dada la precisión de la regla, sólo puede afirmar que el valor del radio está en algún lugar entre 5.9 y 6.1 cm.

En este caso, el valor medido de 6.0 cm tiene dos cifras significativas. Las **cifras significativas incluyen el primer dígito estimado**. Así, el radio del CD puede ser escrito como

$$r = (6.0 \pm 0.1) \text{ cm.}$$

Usando la ecuación para el área del círculo, Ud. encontró que el área del CD es

$$A = \pi r^2 = (3.1415) \times (6.0 \text{ cm})^2 = 113 \text{ cm}^2 = 1.13 \times 10^2 \text{ cm}^2,$$

o sea, un valor con tres cifras significativas!

Cifras significativas en la multiplicación y en la división

- Cuando se multiplican varias cantidades, el número de cifras significativas en el resultado final es el mismo que el número de cifras significativas en la cantidad que tiene el número menor de cifras significativas. La misma regla se aplica a la división.

En el ejemplo del cálculo del área del CD, el radio medido tiene el menor número de cifras significativa (sólo 2), de modo que el área del CD es $1.1 \times 10^2 \text{ cm}^2$.

Los ceros pueden o no ser cifras significativas. Los ceros usados para la ubicación del punto decimal en los números 0.03 y 0.0075 no son significativos. Así, esos números tienen una y dos cifras significativas, respectivamente.

Pero cuando los ceros vienen después de otros dígitos, existe una posibilidad de mal interpretación. Se acostumbra a usar notación científica para indicar el número de cifras significativas. Considere los siguientes ejemplos:

cantidad	notación científica	cifras significativas
1 500 g	$1.5 \times 10^3 \text{ g}$	2
	$1.50 \times 10^3 \text{ g}$	3
	$1.500 \times 10^3 \text{ g}$	4
0.000 23 g	$2.3 \times 10^{-4} \text{ g}$	2
0.000 230 g	$2.30 \times 10^{-4} \text{ g}$	3

Cifras significativas en la suma y la resta

- Cuando los números se sumen o resten, el número de lugares decimales en el resultado debe ser igual al número de lugares decimales del sumando o restando con el menor número de lugares decimales.

Considere los siguientes ejemplos:

número 1	número 2	suma	CS	número 1	número 2	resta	CS
123	5.35	128	3	123	5.35	118	3
1.000 1	0.000 3	1.000 4	5	1.000 1	0.000 3	0.9998	4
1.002	0.998	2.000	4	1.002	0.998	0.004	1

Cuando se debe reducir el número de cifras significativas en la suma o resta:

- Si el primer dígito eliminado es mayor que 5, el último dígito retenido se aumenta en una unidad.
- Si el primer dígito eliminado es menor que 5, el último dígito permanece como está.
- Si el primer dígito eliminado es igual a 5, el último dígito retenido debe redondearse al número par mayor. Si ya es un número para se deja igual.

Ejemplo 1.4. Instalación de una alfombra

En una habitación de 12.71 m de longitud y 3.46 m de ancho se instalará una alfombra. Determine el área de la habitación.

Solución

- 1) La longitud de 12.71 m tiene 4 CS y dos lugares decimales y el ancho de 3.46 m tiene 3 CS y, también, dos lugares decimales.
- 2) Usando la calculadora, se obtiene el siguiente resultado

$$A = (12.71 \text{ m})(3.46 \text{ m}) = 43.9766 \text{ m}^2.$$

- 3) Usando la regla de la multiplicación para cantidades con cifras significativas se sabe que el resultado debe tener sólo 3 CS, igual al número de CS de 3.46 m (el número con menor número de cifras significativas).
- 4) Ahora, note que el dígito a ser eliminado es 7 que es mayor que 5, de modo que el dígito retenido que es el 9 debe aumentar en una unidad, o sea a 10, de modo tal que, el área de la habitación es

$$A = 44.0 \text{ m}^2.$$

7. PROPAGACIÓN DE INCERTIDUMBRES O DE ERRORES

Medidas experimentales actúan como datos crudos (longitud, intervalos de tiempo, temperatura, masa, voltaje, corrientes eléctricas, etc.): Son tomadas con una variedad de instrumentos.

Independiente de la medida y de la calidad de los instrumentos, **siempre existe un error asociado con una medición física:**

- Asociado al instrumento de medida, por ejemplo, inhabilidad para determinar exactamente la posición de una medida de longitud entre dos líneas de una regla métrica.
- Sistema bajo medición, por ejemplo, variación de temperatura dentro de una muestra de agua, de modo que una única temperatura de la muestra es difícil de determinar

Suponga que mide las cantidades a, b, c, \dots con errores $\Delta a, \Delta b, \Delta c, \dots$

Desea calcular otra cantidad Q que depende de a, b y así en adelante.

Los errores $\Delta a, \Delta b$, etc. “se propagan” al error de la cantidad Q .

7.1 PROPAGACIÓN DE ERROR EN LA ADICIÓN O SUSTRACCIÓN:

Sea la cantidad Q una combinación de sumas y diferencias, esto es.

$$Q = a + b + \cdots + c - (x + y + \cdots + z) \quad (2)$$

entonces

$$\Delta Q = \sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2 + \cdots + (\Delta c)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + \cdots + (\Delta z)^2}, \quad (3)$$

es decir, los errores se suman *en cuadratura* (nombre coloquial para el cálculo de la raíz cuadrada de la suma de cuadrados).

En particular, si $Q = a + b$ o $Q = a - b$, entonces

$$\Delta Q = \sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2}. \quad (4)$$

Ejemplo 1.5: Propagación de error en la sustracción.

Suponga que la medida de la altura H de una puerta es (2.00 ± 0.03) m. La puerta tiene una manilla que se encuentra a la altura $h = (0.88 \pm 0.04)$ m desde la base de la puerta. Determine la distancia desde la manilla al tope de la puerta.

Solución

Deseamos encontrar $Q = H - h$ y su error, ΔQ . Primero, determinamos

$$Q = H - h = (2.00 - 0.88) \text{ m} = 1.12 \text{ m}.$$

Luego, determinamos ΔQ usando la Ec.4, esto es:

$$\begin{aligned}\Delta Q &= \sqrt{(\Delta H)^2 + (\Delta h)^2} \\ &= \sqrt{(0.03 \text{ m})^2 + (0.04 \text{ m})^2} \\ &= \sqrt{0.0009 \text{ m}^2 + 0.0016 \text{ m}^2} \\ &= \sqrt{0.0025 \text{ m}^2} = 0.05 \text{ m}\end{aligned}$$

de modo que la cantidad procurada, Q , puede ser escrita como

$$Q = (1.12 \pm 0.05) \text{ m}$$

La Ec.(4) pone más peso en los errores mayores. Por ejemplo, suponga que $\Delta a = 5 \text{ cm}$ y $\Delta b = 2 \text{ cm}$, entonces la Ec.(4) da

$$\begin{aligned}\Delta(a + b) &= \sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2} = \sqrt{(5 \text{ cm})^2 + (2 \text{ cm})^2} = \sqrt{(2 \times 10^1 \text{ cm}^2) + (4 \text{ cm}^2)} \\ &= \sqrt{2.4 \times 10^1 \text{ m}^2} = 5 \text{ cm}\end{aligned}$$

Por lo general se redondea el error a una cifra significativa. En el caso anterior $\Delta(a + b) = 5 \text{ cm}$, y la incertidumbre de $\Delta b = 2 \text{ cm}$ prácticamente no importa en el resultado final.

Como regla general:

cuando se están adicionando o restando dos cantidades y uno de los errores es más de dos veces mayor que el error de la otra, entonces puede usar el error mayor como el error de la suma o resta y descartar el error menor por completo.

Si está adicionando más de dos cantidades, no debería descartar los errores menores a menos que ellos sean menores a $1/3$ del valor del error mayor.

Como un caso especial de esto, si usted suma una cantidad con un error a una cantidad *exacta* (sin error), el error en la suma es exactamente igual al error de la cantidad con error.

7.2 PROPAGACIÓN DE ERROR EN LA MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN.

Sea

$$Q = \frac{ab \cdots c}{xy \cdots z}, \quad (5)$$

entonces

$$\frac{\Delta Q}{|Q|} = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{z}\right)^2}. \quad (6)$$

Los errores fraccionales

$$\frac{\Delta a}{a}; \quad \frac{\Delta b}{b}, \dots, \frac{\Delta y}{y}; \quad \frac{\Delta z}{z}$$

se suman en cuadratura. En la práctica, es usualmente simple convertir todas los errores a **porcentajes** antes de aplicar la fórmula.

$$\text{error porcentual de una cantidad } x : \left(\frac{\Delta x}{|x|} \right) 100\%$$

Ejemplo 1.6: Propagación de error en una división.

Un pájaro vuela una distancia $d = (120 \pm 3)$ m durante un tiempo $t = (20 \pm 1)$ s. Determine la rapidez del pájaro, $v = d/t$, y el error asociado a ella.

Solución

La rapidez del pájaro es

$$v = \frac{d}{t} = \frac{120 \text{ m}}{20 \text{ s}} = 6.0 \text{ m/s}$$

El error porcentual en el cálculo de v es

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta v}{|v|} \right) 100\% &= \sqrt{\left[\left(\frac{\Delta d}{d} \right) 100\% \right]^2 + \left[\left(\frac{\Delta t}{t} \right) 100\% \right]^2} \\ &= \sqrt{(2\%)^2 + (5\%)^2} = \sqrt{4\%^2 + (2 \times 10^1)\%^2} = 5\% \end{aligned}$$

Luego,

$$\Delta v = |v| \left(\frac{5\%}{100\%} \right) = (6.0 \text{ m/s})(0.05) = 0.3 \text{ m/s}$$

Luego, la rapidez del pájaro es $v = (6.0 \pm 0.3) \text{ m/s}$.

Tal como vimos en la adición y resta, la fórmula se simplifica si uno de los errores porcentuales es significativamente mayor que el de la otra.

En el momento en que notamos que el error porcentual de t era de un 5% y el de d sólo de un 2%, podríamos haber usado 5% para el error porcentual y hubiéramos obtenido el mismo resultado para el error $\Delta v = 0.3 \text{ m/s}$.

En el caso de la multiplicación o división por una cantidad exacta (error porcentual de 0%) el resultado final tiene el mismo error porcentual de la cantidad original.

Por ejemplo, si mide el diámetro de una esfera $d = (1.00 \pm 0.01) \text{ cm}$, entonces el error porcentual en d es $(\Delta d/|d|)100\% = 1\%$.

Suponga que desea saber el error en el cálculo del radio de la esfera. Se tiene

$$r = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}(1.00 \text{ cm}) = 0.500 \text{ cm}$$

Luego, el error fraccional en r también es 1%. El 1% de 0.500 es 0.005, así el valor del radio de la esfera es $r = (0.500 \pm 0.005) \text{ cm}$.

7.3 PROPAGACIÓN DE ERROR PARA POTENCIAS.

Si n es un número exacto y $Q = x^n$, entonces

$$\Delta Q = |n|x^{n-1}\Delta x, \quad (7)$$

o lo que es equivalente

$$\frac{\Delta Q}{|Q|} = |n|\frac{\Delta x}{|x|}. \quad (8)$$

Tal vez la segunda forma es más fácil de recordar: El error fraccional (o porcentual) es multiplicado por $|n|$ cuando x es elevado a la n -ésima potencia.

Existe un caso especial aquí, explícitamente $n = -1$. En este caso la regla dice que el error fraccional es inalterado si se toma el recíproco de una cantidad. (Esto es el porque la multiplicación y división son tratadas exactamente de la misma forma).

Ejemplo 1.7: Propagación de error en una potencia.

El periodo de oscilación (tiempo que demora en hacer una oscilación completa) de un movimiento oscilatorio es $T = (0.20 \pm 0.01) \text{ s}$. Calcule la frecuencia (oscilaciones por segundo) del movimiento oscilatorio y el error asociado a ésta.

Solución

La frecuencia del movimiento oscilatorio es

$$f = \frac{1}{T} = T^{-1} = \frac{1}{0.20 \text{ s}} = 5.0 \text{ s}^{-1}.$$

El error fraccional de T es

$$\left(\frac{\Delta T}{|T|} \right) = \left(\frac{0.01 \text{ s}}{0.20 \text{ s}} \right) = 0.05$$

Luego, el error fraccional en f también es 0.05, lo cual implica que

$$\Delta f = |f|(0.05) = (5.0 \text{ s}^{-1})(0.05) = 0.25 \text{ s}^{-1},$$

de modo que, redondeando a una cifra significativa,

$$f = (5.0 \pm 0.2) \text{ s}^{-1}$$

7.4 PROPAGACIÓN DE ERROR EN FÓRMULAS MÁS COMPLICADAS.

Cuando las cantidades derivadas son complicadas la combinación de las reglas de arriba puede funcionar bien.

Por ejemplo, una bola es lanzada verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial $v_0 = (4.0 \pm 0.2) \text{ m/s}$. Después de un tiempo $t = (0.60 \pm 0.06) \text{ s}$, la altura de la bola es dada por la expresión

$$\begin{aligned} y &= v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = (4.0 \text{ m s}^{-1}) (0.60 \text{ s}) - \frac{1}{2} (9.8 \text{ m s}^{-2}) (0.60 \text{ s})^2 \\ &= 2.4 \text{ m} - 1.8 \text{ m} = 0.6 \text{ m} \end{aligned}$$

Para determinar la incertidumbre de y comencemos renombrando algunas cantidades. Denotemos

$$\begin{aligned} Q_1 &= v_0 t = (4.0 \text{ m s}^{-1}) (0.60 \text{ s}) = 2.4 \text{ m} \\ Q_2 &= \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} (9.8 \text{ m s}^{-2}) (0.60 \text{ s})^2 = 1.764 \text{ m} = 1.8 \text{ m} \end{aligned}$$

Usando la regla de la multiplicación podemos obtener el error porcentual en Q_1

$$\begin{aligned}\left(\frac{\Delta Q_1}{|Q_1|}\right) 100\% &= \sqrt{\left[\left(\frac{\Delta v_0}{v_0}\right) 100\%\right]^2 + \left[\left(\frac{\Delta t}{t}\right) 100\%\right]^2} \\ &= \sqrt{(5\%)^2 + [(1 \times 10^1)\%]^2} = \sqrt{(2 \times 10^1)\%^2 + (1 \times 10^2)\%^2} \\ &= \sqrt{(1.20 \times 10^2)\%^2} = (1 \times 10^1)\% \\ \therefore \Delta Q_1 &= |Q_1| \left(\frac{(1 \times 10^1)\%}{100\%}\right) = (2.4 \text{ m})(0.1) = 0.2 \text{ m} \\ &\rightarrow Q_1 = (2.4 \pm 0.2) \text{ m}\end{aligned}$$

Para el caso de Q_2 note que podemos escribirla como

$$Q_2 = \frac{1}{2}gQ_3 \quad \text{con} \quad Q_3 = t^2 = (0.60 \text{ s})^2 = 0.36 \text{ s}^2$$

y el error fraccional en Q_3 es

$$\frac{\Delta Q_3}{|Q_3|} = 2 \left(\frac{\Delta t}{|t|}\right) = 2 \left(\frac{0.06 \text{ s}}{0.60 \text{ s}}\right) = 2(0.1) = 0.2 \quad \rightarrow \quad \Delta Q_3 = |Q_3|(0.2) = 0.07 \text{ s}^2$$

Dado que Q_2 es una constante, $\frac{1}{2}g$, (sin error) multiplicada por Q_3 , el error porcentual en Q_2 es igual al error porcentual en Q_3 , o sea

$$\left(\frac{\Delta Q_2}{|Q_2|} \right) 100\% = \left(\frac{\Delta Q_3}{|Q_3|} \right) 100\% = \left(\frac{0.07 \text{ s}^2}{0.36 \text{ s}^2} \right) 100\% = (2 \times 10^1)\%$$

Luego

$$\Delta Q_2 = (1.8 \text{ m}) \left(\frac{(2 \times 10^1)\%}{100\%} \right) = 0.4 \text{ m}$$

Finalmente, $y = Q_1 - Q_2$, de modo que podemos obtener Δy de la regla de la suma

$$\begin{aligned} \Delta y &= \sqrt{(\Delta Q_1)^2 + (\Delta Q_2)^2} = \sqrt{(0.2 \text{ m})^2 + (0.4 \text{ m})^2} = \sqrt{0.04 \text{ m}^2 + 0.2 \text{ m}^2} \\ &= \sqrt{0.2 \text{ m}^2} = 0.4 \text{ m} \end{aligned}$$

y podemos expresar y apropiadamente como

$$y = (0.6 \pm 0.4) \text{ m}$$

Siempre debe tener en mente que **los errores que están siendo propagados deben ser no correlacionados**. Es decir, escriba su ecuación de modo a no repetir una variable.

Por ejemplo, suponga que mide la variable x con un error Δx . Desea calcular el error propagado a Q , dado por $Q = x^3$.

Puede asumir que $Q = x \cdot x \cdot x$ y usar la regla para la multiplicación, Ec.(5). Veamos que pasa

$$\begin{aligned}\Delta Q &= |Q| \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2} \\ &= |Q| \sqrt{3 \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2} = |Q| \sqrt{3} \left(\frac{\Delta x}{x}\right) = \sqrt{3} x^2 \Delta x.\end{aligned}$$

Errado! La Ec.(5) se aplica sólo si las tres cantidades tienen errores no correlacionados.

Lo correcto es usar la Ec.(7). Esto es

$$\Delta Q = nx^{n-1} \Delta x = 3x^2 \Delta x.$$

Lo mismo puede suceder de varias maneras con expresiones de la forma

$$Q = \frac{x}{x+y}.$$

No se pueden usar las reglas usuales cuando tanto el numerador y el denominador contenga x . Lo primero sería reescribir Q como

$$Q = \frac{\cancel{x}}{\cancel{x} \left(1 + \frac{y}{x}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{y}{x}}.$$

Ahora aplique las reglas: Primero, la regla del cociente para obtener el error de, digamos, $Q_1 = y/x$:

$$\frac{\Delta Q_1}{|Q_1|} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2}.$$

Segundo, la regla de la adición para obtener el error de, digamos, $Q_2 = 1 + Q_1$:

$$\Delta Q_2 = \Delta Q_1.$$

Finalmente, la regla de las potencias para obtener el error de $Q = 1/Q_2 = (Q_2)^{-1}$:

$$\Delta Q/|Q| = \Delta Q_2/|Q_2|.$$

7.5 COMPARACIÓN DE DOS CANTIDADES

Suponga que Pedro y Pablo ambos miden la rapidez de una bola en movimiento. Pedro mide (3.6 ± 0.2) m/s y Pablo obtiene (3.3 ± 0.3) m/s. ¿Concuerdan las dos mediciones?

Si los dos valores fueran muy próximos entre sí, o si los errores fueran ligeramente mayores, la respuesta sería un bonito SÍ!

Si los errores fueran pequeños, o los valores muy diferentes, la respuesta sería un rotundo NO!. Pero en este caso la respuesta no sería del todo clara.

Sea la medida de Pedro $A \pm \Delta A$ y la de Pablo $B \pm \Delta B$. Para ver si concuerdan, se calcula la diferencia $D = A - B$. El error de D sería ΔD : La cuestión de si A concuerda con B , con errores en ambos lados, ha sido reducida a la cuestión de si D concuerda con cero, con error en un sólo lado.

Usando la regla de la suma (o la diferencia), obtenemos

$$\begin{aligned}\Delta D &= \sqrt{(\Delta A)^2 + (\Delta B)^2} = \sqrt{(0.2 \text{ m/s})^2 + (0.3 \text{ m/s})^2} \\ &= \sqrt{(0.04 \text{ m}^2/\text{s}^2) + (0.09 \text{ m}^2/\text{s}^2)} = 0.36 \text{ m/s} \approx 0.4 \text{ m/s}.\end{aligned}$$

Dado que

$$D = A - B = 3.6 \text{ m/s} - 3.3 \text{ m/s} = 0.3 \text{ m/s}, \quad \therefore \quad D = (0.3 \pm 0.4) \text{ m/s}.$$

de modo que el cero está cómodamente dentro del rango del error de D , de modo que las dos medidas concuerdan.

No hemos mostrado que las medidas de Pedro y de Pablo sean *iguales*, sino que ellas **podrían** ser iguales. Si hubieramos encontrado que $D = (0.003 \pm 0.004) \text{ m/s}$, estaríamos más convencido de que $A = B$).

Se podría mostrar que dos cantidades *no son iguales*, por lo menos en un alto grado de seguridad. Por ejemplo, si D es 3 veces mayor que ΔD , pone serias dudas en la hipótesis de que las dos cantidades sean iguales, debido a que $D = 0$ está tres desviaciones estándares lejos de su resultado observado: Puede estar un 99.7% seguro de que las dos cantidades eran, en realidad, diferentes.

A menudo, las descubiertas en la ciencia se realizan con ese procedimiento: Primero, se hace una predicción sobre lo que se verá *si sea lo que sea que está tratando de descubrir no está realmente ahí*: **hipótesis nula**.

Luego, se compara la hipótesis nula con los resultados experimentales.

Si los dos difieren por tres desviaciones estándares, $3\Delta = 3\sigma$, puede estar un 99.7% seguro de que la hipótesis nula estaba errada. *Se hizo una descubierta!!!*

Si la descubierta es importante, la comunidad científica querrá repetir o extender el experimento, para aumentar el nivel de seguridad en el resultado más allá de una simple medición de 3σ .