Álgebra I. 525140 - DIM - CFM
24 de junio de 2021
Prof.: L. Badilla, I. Donoso, A. Gajardo, J. Moya
A. Pérez, C. Rivas, M. Selva, F. Thiele, G. Torres

Progresiones

En este capítulo estudiaremos progresiones aritméticas y geométricas, que son sucesiones de números reales con propiedades especiales.

En los libros *La medición del mundo* (escrito por Daniel Kehlmann en 2008) y *El hombre que calculaba* (escrito por Malba Tahan, seudónimo de Julio César de Mello y Souza, en 1938) se hace referencia a estas progresiones (la aritmética en el primer libro y la geométrica en el segundo), no son las primeras referencias bibliográficas a las progresiones aritmética y geométrica, pero son referencias interesantes.

1. Progresiones aritméticas - La medición del mundo

En el capítulo *El maestro* del libro *La medición del mundo* (del que también hay una película y que narra pasajes de las vidas de Gauss y Humboldt) se cuenta que al maestro de Gauss *le complacía imponer tareas que sus alumnos* (niños de 8 años) *fuesen incapaces de resolver sin faltas, a pesar de trabajar en ellas mucho rato*, así que un día les pidió que sumaran todos los números del 1 al 100. Gauss, a quién no le gustaba llamar la atención del maestro, esta vez no lo consiguió y tres minutos después de orientada la tarea su pizarrita tenía una sola línea escrita *cinco mil cincuenta*, el resultado exacto de la suma de los números del 1 al 100. ¿Cómo logró Gauss, en tan poco tiempo, encontrar el resultado de sumar los números del 1 al 100?

Gauss se dió cuenta de que, si el escribía los números del 1 al 100 en dos filas, pero en la segunda comenzaba en 100 y terminaba en 1, entonces, la suma de los números en cada columna era la misma e igual a 101

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 2 & 3 & \ldots & 99 & 100 \\ + & 100 & 99 & 98 & \ldots & 2 & 1 \\ \hline & 101 & 101 & 101 & \ldots & 101 & 101 \end{array}$$

y, por tanto, la suma de los números del 1 al 100

$$1+2+3+\ldots+100 = \frac{\begin{array}{cccccc} & 1 & +2 & +3 & +\ \ldots & +100 \\ + & 100 & +99 & +98 & +\ \ldots & +1 \end{array}}{2}$$

$$= \frac{101+101+\ldots+101}{2} = \frac{100\cdot 101}{2} = 5050.$$

¿Por qué hemos contado esta historia en este capítulo sobre progresiones aritméticas? Porque, como veremos enseguida, los números naturales son una progresión aritmética y la idea de Gauss para determinar la suma de los 100 primeros números naturales puede utilizarse para determinar la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética.

Una *progresión aritmética* es una sucesión indexada de números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ en la que cada término, a partir del segundo, difiere del anterior una cantidad constante, es decir, $a_1 = a$, $a \in \mathbb{R}$ y, para cada $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 2$, $a_i = a_{i-1} + d$ siendo d un número real,

$$a_1 = a, \quad a_2 = a_1 + d, \quad \ldots, \quad a_i = a_{i-1} + d, \ldots.$$

El número d se denomina *diferencia común* de la progresión aritmética y a es el *primer término de la progresión aritmética.*

Observa que en una progresión aritmética, si $i \in \mathbb{N}$ es mayor o igual que 2, se tiene que

$$a_i = a_{i-1} + d = a_{i-2} + d + d = \ldots = a_1 + d + \cdots + d = a + (i-1)d,$$

Los números naturales $1, 2, \ldots, 100, 101, \ldots$ forman una progresión aritmética con primer término igual a 1 y diferencia común igual a 1. La suma que Gauss realizó a los 8 años fue la de los 100 primeros términos de la progresión aritmética con $a_1 = 1$ y $d = 1$. ¿Podemos extender su idea a la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética cualquiera?

¿Qué ocurre si, al igual que Gauss, escribimos los n primeros términos de la progresión aritmética dos veces, primero desde a_1 hasta a_n y, debajo desde a_n hasta a_1? Si utilizamos que para cada $i \in \mathbb{N}$ se tiene que $a_i = a + (i-1)d$, entonces

$$\begin{array}{ccccccc} & a & a+d & a+2d & \ldots & a+(n-2)d & a+(n-1)d \\ + & a+(n-1)d & a+(n-2)d & a+(n-3)d & \ldots & a+d & a \\ \hline & 2a+(n-1)d & 2a+(n-1)d & 2a+(n-1)d & \ldots & 2a+(n-1)d & 2a+(n-1)d \end{array}$$

es decir, la suma del primer y el último términos es igual a la suma del segundo y el penúltimo y así sucesivamente y todas son iguales a $2a + (n-1)d$.

Ocurre entonces que

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \frac{\begin{array}{cccccc} & a_1 & + a_2 & + a_3 & + \ \ldots & + a_n \\ + & a_n & + a_{n-1} & + a_{n-2} & + \ \ldots & + a_1 \end{array}}{2}$$

$$= \frac{(2a + (n-1)d) + (2a + (n-1)d) + \ldots + (2a + (n-1)d)}{2}$$

$$= \frac{2an + n(n-1)d}{2} = an + \frac{n(n-1)d}{2}.$$

Ejemplo 1.

1. ¿Cuál es la suma de los 10 primeros términos de la progresión aritmética que satisface: su primer término es 2 y su término 15 es 9.

   Si llamamos d a la diferencia común de esta progresión aritmética, se tiene que

   $$a_1 = 2,\ a_2 = 2 + d,\ \ldots,\ a_{15} = 2 + 14d.$$

   El término quienceavo es 9 si y solo si d es tal que $2 + 14d = 9$, es decir, $d = \frac{1}{2}$.

   La suma de los 10 primeros términos de esta progresión es

   $$\begin{aligned} 2 + (2 + d) + (2 + 2d) + \ldots + (2 + 9d) &= \underbrace{2 + 2 + \ldots + 2}_{\text{10 veces}} + d\,(1 + 2 + \ldots + 9)\,, \\ &= 20 + \frac{1}{2} \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} = 20 + \frac{45}{2} = \frac{85}{2}. \end{aligned}$$

2. Calcule la suma de los números impares entre 50 y 100.

   Los números impares entre 50 y 100 son los números

   $$51,\ 53,\ 55,\ \ldots,\ 99.$$

   Su suma es la suma de los 25 primeros términos de la progresión aritmética con primer término 51 y diferencia común igual a 2. Ella es

   $$51 + (51 + 2) + (51 + 2 \cdot 2) + (51 + 3 \cdot 2) + \ldots + (51 + 24 \cdot 2)$$

   y es igual a

   $$\sum_{i=0}^{24} (51 + 2\,i) = \sum_{i=0}^{24} 51 + 2 \sum_{i=0}^{24} i = 51 \cdot 25 + 2 \frac{24 \cdot 25}{2} = 1875.$$

3. Calcule la suma de los múltiplos de 3 entre 9 y 99.

   Los múltiplos de 3 entre 9 y 99 son los números

   $$9,\ 12,\ 15,\ 18,\ \ldots,\ 99$$

que pueden escribirse como términos de una progresión aritmética con primer término igual a 9 y diferencia común igual a 3

$$9,\ 9+3,\ 9+2\cdot 3,\ \ldots,\ 9+30\cdot 3$$

Su suma es la de los 31 primeros términos de la progresión aritmética con primer término igual a 9 y diferencia común igual a 3 y es igual a

$$\sum_{i=0}^{30}(9+3\,i) = 31\cdot 9 + 3\sum_{i=1}^{30} i = 279 + 3\frac{30\cdot 31}{2} = 1674.$$

2. Progresiones geométricas - El hombre que calculaba

En el capítulo XVI del libro *El hombre que calculaba*, que les recomiendo leer porque es un capítulo con muchísimas enseñanzas[1], se cuenta la historia de un rey que pregunta a un ciudadano del reino, de nombre Sessa, cómo agradecerle que le haya mostrado el juego del ajedrez. Sessa no deseaba otro pago que *la satisfacción de haber proporcionado un pasatiempo al rey con el que había logrado aliviar las horas prolongadas de la melancolía por la muerte de su hijo*, pero el rey insiste en recompensarlo con algo material, a lo que Sessa responde: *"no quiero oro ni tierras ni palacios. Deseo mi recompensa en granos de trigo. Me daréis un grano de trigo por la primera casilla del tablero de ajedrez, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta y así sucesivamente hasta llegar a la última casilla del tablero.* Todos se echaron a reír ante tan extraña petición, pero contemos cuánto trigo debería pagar el rey a Sessa.

Nota que por la casilla i el rey debe pagar 2^{i-1} granos de trigo. La cantidad total de granos de trigo a pagar

$$\sum_{i=1}^{64} 2^{i-1} = 1+2+4+8+\ldots+2^{63}.$$

Los números $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots$ son términos de una progresión geométrica.

Una *progresión geométrica* es una sucesión de números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ con $a_1 = a$, $a \in \mathbb{R}$ y para cada $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 2$, $a_i = a_{i-1}r$ siendo r un número real. El número a es el *primer término* de la progresión, mientras que r es su *razón.*

Los números $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ forman una progresión geométrica con primer término igual a 1 y razón igual a 2.

Nota que si $a_1 = a$ y para $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 2$ se tiene que $a_i = a_{i-1}r$, entonces

$$a_i = a_{i-1}r = (a_{i-2}r)r = a_{i-2}r^2 = (a_{i-3}r)r^2 = a_{i-3}r^3 = \cdots = a_1 r^{i-1} = ar^{i-1}.$$

[1] *Infeliz aquel que toma sobre sus hombros el compromiso de una deuda cuya magnitud no puede valorar* que, traído a la actualidad, es: no pidamos préstamos sin calcular cuánto tendremos que pagar a cambio.

Además si S_n denota la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica con primer término igual a a y razón r, es decir, $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, entonces $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = S_n + ar^n$. Además

$$S_{n+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1} = a + \sum_{i=2}^{n+1} ar^{i-1} = a + \sum_{i=1}^{n} ar^i = a + r\sum_{i=1}^{n} ar^{i-1} = a + r\sum_{i=1}^{n} a_i = a + rS_n.$$

Hemos escrito S_{n+1} como $S_n + ar^n$ y como $a + rS_n$. Entonces $S_n + ar^n = a + rS_n$ y

$$\begin{aligned} S_n + ar^n = a + rS_n \ &\Rightarrow\ (1-r)S_n = a(1-r^n) \\ &\Rightarrow\ S_n = a\frac{1-r^n}{1-r}. \end{aligned}$$

Es decir,

$$S_n = a\sum_{i=1}^{n} r^{i-1} = a\frac{1-r^n}{1-r}.$$

Utilizando esto se tiene que la cantidad de granos de maíz que el rey debía pagar a Sessa es

$$1 + 2 + \ldots + 2^{63} = \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1$$

y este número (según Wikipedia) es igual a 18446744073709551615 y es, también según Wikipedia, superior a la producción anual de trigo del mundo. ¿Qué crees que ocurrió cuando el rey se enteró de lo que debía pagar? ¿Decidió Sessa perdonar su deuda al rey? Puedes leer la historia completa en el capítulo XVI de *El hombre que calculaba*.

Ejemplo 2. Una población de mariposas en un laboratorio es tal que: por cada par de mariposas adultas en una generación nacen 3 nuevas mariposas, de las cuales 50 son vendidas a un parque. Si suponemos que todas las mariposas de una generación mueren antes de que sus descendientes lleguen a la edad adulta y que la cantidad inicial de mariposas es 1000, ¿cuántas mariposas en edad adulta hay en cada generación en el laboratorio?

La cantidad de mariposas en edad adulta en la generación 1 es $M_1 = 1000$.

Por cada par de mariposas en M_1 nacerán 3 nuevas mariposas: $\frac{3}{2}M_1$ es entonces la cantidad total de mariposas que nacerán. De ellas, 50 son vendidas a un parque, por tanto, el número de mariposas adultas en la 2da generación es $M_2 = \frac{3}{2}M_1 - 50$. Esto se cumple también para generaciones posteriores y, por tanto, si M_n denota el número de mariposas adultas en la generación n-ésima se cumple que

$$M_1 = 100, \quad M_n = \frac{3}{2}M_{n-1} - 50,\ n = 2, 3, \ldots$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
M_1 &= 1000,\\
M_2 &= \frac{3}{2}M_1 - 50,\\
M_3 &= \frac{3}{2}M_2 - 50 = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}M_1 - 50\right) - 50 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 M_1 - \left(\frac{3}{2} + 1\right) 50,\\
M_4 &= \frac{3}{2}M_3 - 50 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 M_1 - \left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} + 1\right) 50,
\end{aligned}
$$

Se tiene entonces que

$$M_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} M_1 - 50\sum_{j=0}^{n-2}\left(\frac{3}{2}\right)^j.$$

La suma $\sum_{j=0}^{n-2}\left(\frac{3}{2}\right)^j$ es la suma de los $n-1$ primeros términos de la progresión geométrica

$$1, \frac{3}{2}, \left(\frac{3}{2}\right)^2, \ldots$$

y es igual a

$$1\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{3}{2}} = 2\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1\right).$$

Por tanto, la cantidad de mariposas en la generación n-ésima es

$$M_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} M_1 - 100\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1\right).$$

Ejemplo 3. De una progresión geométrica se sabe que su primer término es -2 y su quinto término es -162. ¿Qué valores reales puede tomar su razón? ¿Cuál es su razón si se sabe que el décimo término es mayor que cero? ¿Cuál es la suma de sus n primeros términos?

Si el primer término es -2 y la razón es $r \in \mathbb{R}$, entonces el segundo término es $-2r$, el tercero es $-2r^2$, el quinto es $-2r^4$.

Sabiendo que este término es igual a -162 podemos calcular posibles valores para r,

$$-2r^4 = -162 \iff r^4 = 81 \iff r = 3 \vee r = -3.$$

Dado que el décimo término de la progresión es $-2r^9$, éste es positivo si y solo si $r = -3$.

La suma de los n primeros términos de la progresión geométrica con primer término igual a -2 y razón igual a -3 es

$$-2\frac{1-(-3)^n}{1-(-3)} = \frac{(-3)^n - 1}{2}\begin{cases} \frac{3^n-1}{2} & \text{si } n \text{ es par,}\\ \frac{-3^n-1}{2} & \text{si } n \text{ es impar.}\end{cases}$$