Clase 12

Cálculo 3

Carlos Martínez Ranero

Departamento de Matemática
Universidad de Concepción

Recordatorio de la clase anterior.

- Teorema de la función inversa.
- Máximos y mínimos.

Objetivos de la clase de hoy.

- Máximos y mínimos.

Máximos y mínimos

Estrategia para encontrar puntos extremos.

Sea $f : A \to \mathbb{R}$

- Encontrar los puntos críticos en el interior de A.
- Estudiar la función f en la frontera, i.e., encontrar los valores extremos de f en ∂A.
- Comparar los valores extremos de f en $int(A)$ y en ∂A.
- Justificar la existencia de máximos o mínimos globales.

Ejemplo 1

Sea $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x + 3$. Encontrar los valores máximos y mínimos de f.

Solución:

- Primero notemos que A es un conjunto compacto y f es una función continua.
- Se sigue del Teorema de los valores extremos que f alcanza un máximo y un mínimo en A.
- Primero encontraremos los puntos críticos en el interior de A.
- $\nabla(f) = (2x - 1, 4y)$ existe en todos lados.
- $\nabla(f) = \vec{0}$ si y sólo si $2x - 1 = 0, 4y = 0$.
- $(\frac{1}{2}, 0) \in int(A) = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$.

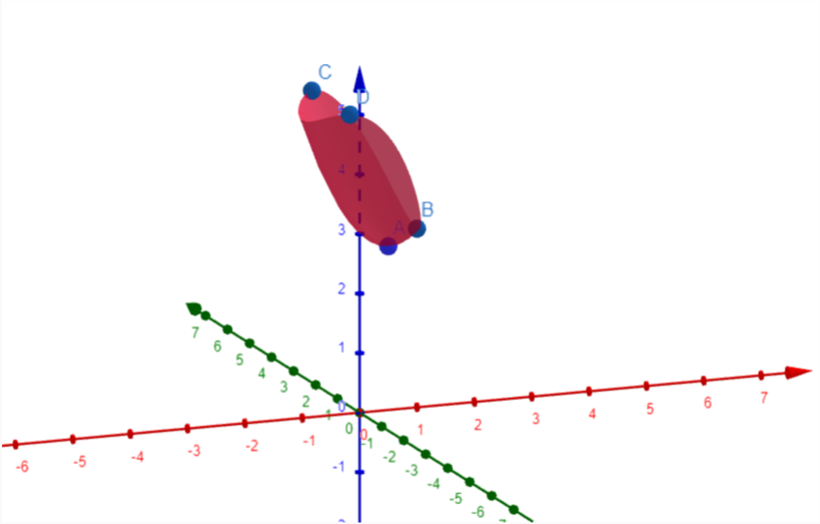
Máximos y mínimos

- Por lo tanto, $(\frac{1}{2}, 0)$ es el único punto crítico en el interior de A.
- $f(\frac{1}{2}, 0) = \frac{11}{4}$
- Ahora consideramos la frontera
- $\partial A = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$
- Como la frontera tiene dimensión 1 podemos parametrizar.
- $\partial A = \{(\cos\theta, \sin\theta) : \theta \in [0, 2\pi]\}$.

Máximos y mínimos

- $g(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta) = \sin^2\theta - \cos\theta + 4 =$
- $(1 - \cos^2\theta) - \cos\theta + 4 = -\cos^2\theta - \cos\theta + 5 =$
- $\frac{21}{4} - (\cos\theta + \frac{1}{2})^2.$
- El valor máximo en ∂A es $\frac{21}{4}$ y se alcanza cuando $\cos\theta = -\frac{1}{2}$
- $x = \cos\theta = -\frac{1}{2}, (x, y) = (-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$
- El valor mínimo en ∂A es 3 y se alcanza cuando $x = \cos\theta = 1, (x, y) = (1, 0).$
- Máximo global se alcanza en $(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$.
- Mínimo global se alcanza en $(\frac{1}{2}, 0)$.

Máximos y mínimos



Ejemplo 2

Sea $A = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1 \wedge -1 \leq y \leq 1\}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^4} - y$. Encontrar los máximos y mínimos de f en A.

Máximos y mínimos

Solución:

- Primero notemos que A es un conjunto compacto y f es una función continua.
- Se sigue del Teorema de los valores extremos que f alcanza un máximo y un mínimo en A.
- Primero encontraremos los puntos críticos en el interior de A.
- Es fácil verificar que $\frac{\partial f}{\partial x}$ no existe en $(0,0)$.
- $\nabla(f) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^4}}, \frac{2y^3}{\sqrt{x^2+y^4}} - 1\right)$ existe en $A \setminus \{(0,0)\}$.
- $\nabla(f) = (0,0)$ si y sólo si $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^4}} = 0$, $\frac{2y^3}{\sqrt{x^2+y^4}} - 1 = 0$.
- $x = 0, y = \frac{1}{2}$.

Máximos y mínimos

- Por lo tanto, $(0, \frac{1}{2})$ y $(0, 0)$ son los únicos punto críticos en el interior de A.
- $f(0, \frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{4}, f(0, 0) = 0$
- Ahora consideramos la frontera $\partial A =$
- $\{(x, y) : |x| = 1 \wedge -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, y) : |y| = 1 \wedge -1 \leq x \leq 1\}$
- $y = 1, -1 \leq x \leq 1$
- $f(x, 1) = \sqrt{x^2 + 1} - 1$
- $0 \leq \sqrt{x^2 + 1} - 1 \leq \sqrt{2} - 1$

Máximos y mínimos

- $y = -1, -1 \leq x \leq 1$
- $f(x, -1) = \sqrt{x^2 + 1} + 1$
- $2 \leq \sqrt{x^2 + 1} + 1 \leq \sqrt{2} + 1$
- $x = \pm 1, -1 \leq y \leq 1$
- $f(\pm 1, y) = \sqrt{1 + y^4} - y$
- $0 < \sqrt{1 + y^4} - y \leq \sqrt{2} + 1$
- Máximo global $f(\pm 1, -1) = \sqrt{2} + 1$.
- Mínimo global $f(0, \frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$.

Ejemplo 3

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 7$. Encontrar, si existen, los extremos globales de f.

Maximos y minimos

Solución:

- Primero obeservemos que como el dominio no es compacto los extremos pueden no existir.
- De hecho, $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x,y) = \infty$ y por lo tanto no existe un máximo global.
- Ahora veremos que el mínimo global si existe.
- $\nabla(f) = (2x - 4, 2y + 6)$
- $(2, -3)$ es el único punto critico.
- $f(2, -3) = -6$
- El plan es encontrar un conjunto compacto A tal que $(2, -3) \in A$ y $f(x, y) \geq -6$ para $(x, y) \notin A$.

Maximos y minimos

- Notemos que $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 7 \geq \|(x,y)\|^2 - 10\|(x,y)\| + 7$
- Sea $A = \overline{B}_{10}(0,0)$.
- Notemos que si $(x,y) \notin A$, entonces $f(x,y) \geq 7$.
- Por el Teorema de los valores extremos f tiene un mínimo en A, ya que A es compacto.
- $(2,-3) \in int(A)$ es su único punto crítico. Si $(x,y) \in \partial A$ entonces $f(x,y) \geq 7 > f(2,-3)$.
- Por lo tanto, $(2,-3)$ es mínimo global.

Máximos y mínimos.