Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

GAJ/EBC/CF/CMR/ARP

Cálculo III (521227)
Práctica 9

Integrales en Coordenadas Esféricas.

1. Calcular $\iiint_E (x^2+y^2)dV$ donde E es la región acotada por las esferas $x^2+y^2+z^2=4$ y $x^2+y^2+z^2=4$.

2. Calcular $\iiint_E (x^2+y^2)dV$ donde E es la región solida dada por $x^2+y^2+z^2 \leq 9$ y $y \geq 0$.

3. Calcular $\iiint_E \sqrt{x^2+y^2+z^2}dV$ donde E es la región acotada por las esferas $x^2+y^2+z^2=1$ y $x^2+y^2+z^2=4$ y dentro del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

4. Encontrar el volumen del solido dentro de la esfera $x^2+y^2+z^2=4$, arriba del plano x, y y debajo del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Integrales con Cambios de Variables Generales.

5. Sea E el triángulo con vertices en $(0,0),(1,0)$ y $(0,1)$, y $f(x,y)=e^{x-y/x+y}$. Calcular $\iint_E f(x,y)dA$, haciendo el cambio de variable $x-y=u$ y $x+y=v$.

6. Sea $E \subset \mathbb{R}^2$ la región acotada por $y=0, 2x+y=1, 2x+y=5, -x+3y=1$. Calcular $\iint_E \frac{x-3y}{2x+y}dA$.

7. Sea E la región en el primer cuadrante acotada por $y=0, y=x, xy=1$ y $x^2-y^2=1$. Calcular $\iint_E x^2+y^2 dA$.

8. Sea E la región con $x \geq 0$ y acotada por $y+x^2=0, x-y=2$ y $x^2-2x+4y=0$. Calcular $\iint_E \frac{1}{(x-y+1)^2}dA$.

Aplicaciones Físicas.

Si $\delta(x,y,z)$ representa la densidad del solido E el punto (x,y,z), entonces la masa m esta dada por

$$m=\iiint_E \delta(x,y,z)dV$$

y los momentos con respecto a los planos coordenados estan dados por

$$M_{y,z}=\iiint_E x\delta(x,y,z)dV, M_{x,z}=\iiint_E y\delta(x,y,z)dV, M_{x,y}=\iiint_E z\delta(x,y,z)dV$$

El centro de masa del solido E se encuentra en el punto $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ donde

$$\overline{x} = \frac{My,z}{m}, \overline{y} = \frac{Mx,z}{m}, \overline{z} = \frac{Mx,y}{m}.$$

Los momentos de inercia alrededor de los ejes coordenados estan dados por

$$I_x = \iiint_E (y^2+z^2)\delta(x,y,z)dV, I_y = \iiint_E (x^2+z^2)\delta(x,y,z)dV, I_z = \iiint_E (x^2+y^2)\delta(x,y,z)dV$$

9. Encontrar el centro de masa del solido $E = \{(x,y,z)\colon x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq 0\}$ con densidad uniforme $\delta(x,y,z) = k$.

10. Encontrar el centro de masa del tetraedro acotado por los planos coordenados y el plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ con densidad uniforme $\delta(x,y,z) = k$.

11. Sea E el solido acotado arriba por $x^2+y^2+z^2 = 4$ y abajo por $z\sqrt{3} = \sqrt{x^2+y^2}$. Encontrar el momento de inercia de E alrededor del eje z con $\delta(x,y,z) = 1$.