Universidad de Concepción

Cálculo III (510215)

Tarea 4

Mella Morales Ricardo Javier , 2019400100

Navarrete Marchant Hugo Ignacio , 2019441302

Vera Diaz Claudio Salvador , 2021446915

Profesor: Carlos Martinez

28 de Noviembre de 2022

Pregunta 1

Sea S el sólido limitado por el manto cónico $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, el hemisferio $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2$ y los planos $x = 0$, $z = 1$ e $y = x$.

Calcular el volumen $V(S)$ del sólido S.

(a) Usando coordenadas cilíndricas.

(b) Usando coordenadas esféricas.

Solución: Comenzaremos graficando el sólido en coordenadas rectangulares:

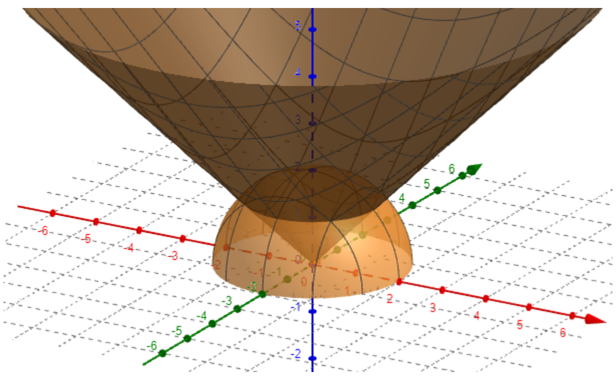


Imagen 1 Gráficas del manto cónico y el hemisferio

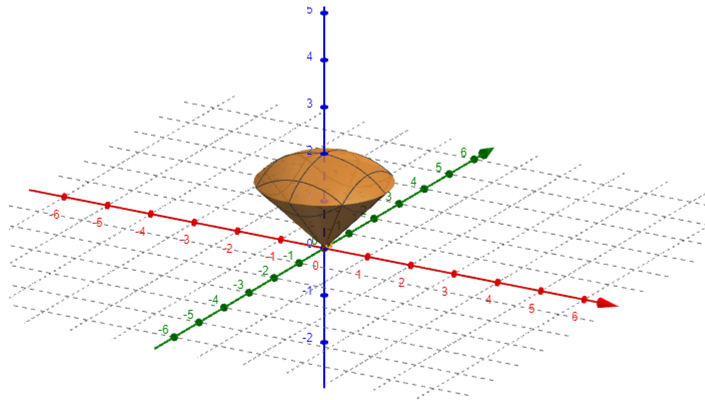


Imagen 2 Sólido resultante (a)

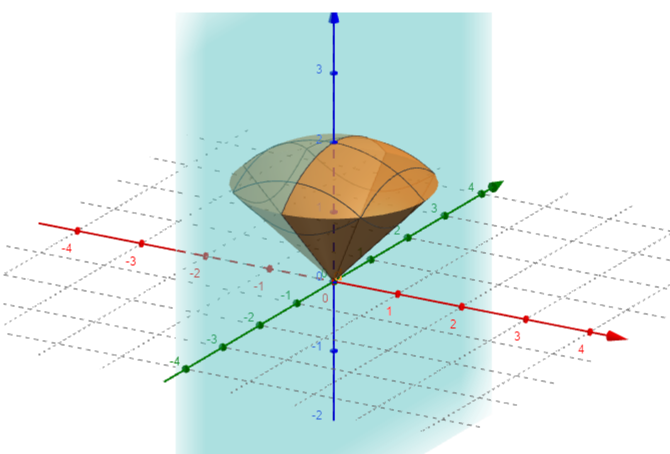


Imagen 3 Gráficas de (a) y plano $x = 0$

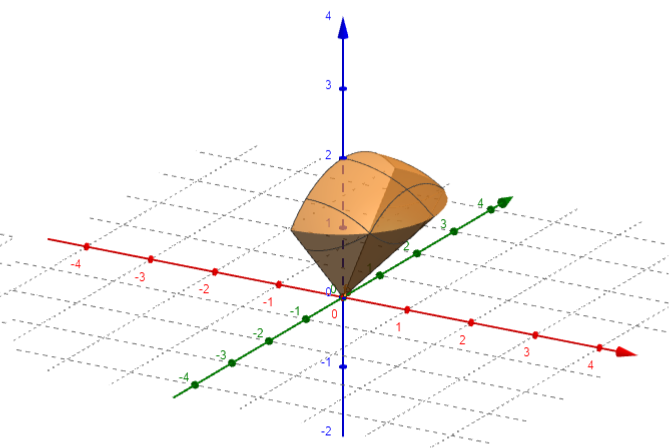


Imagen 4 Sólido resultante (b), se escogió el lado tal que $x \geq 0$

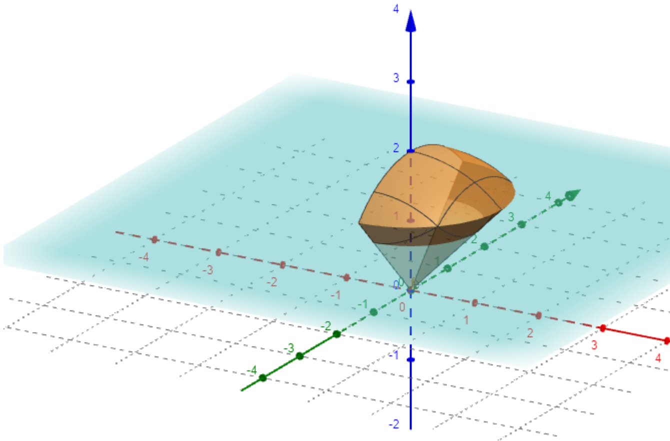


Imagen 5 Gráficas de (b) y plano $z = 1$

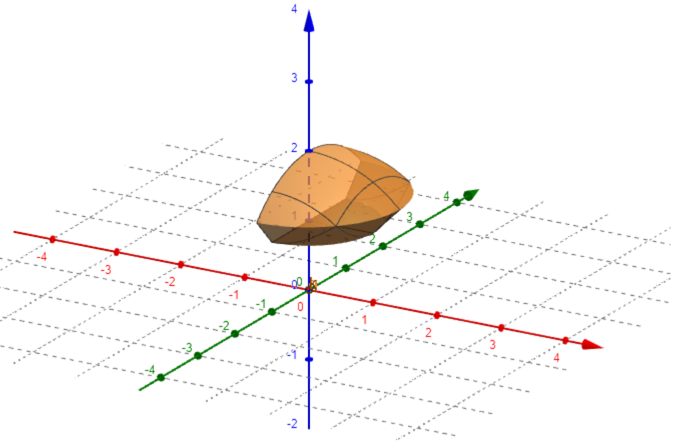


Imagen 6 Sólido resultante (c).

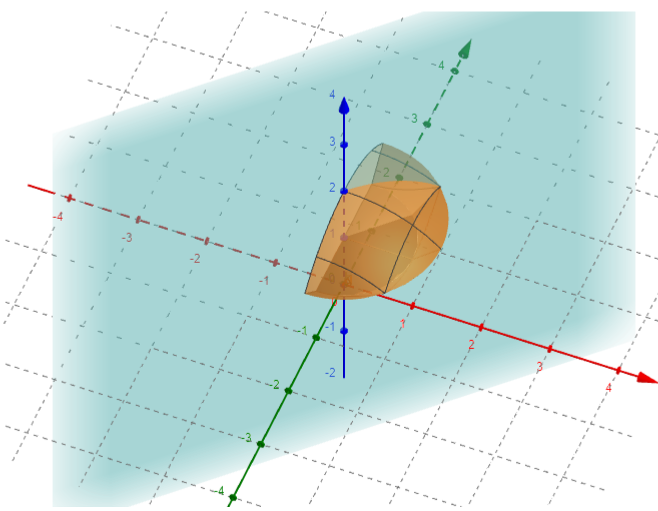


Imagen 7 Gráficas de (c) y plano $y = x$

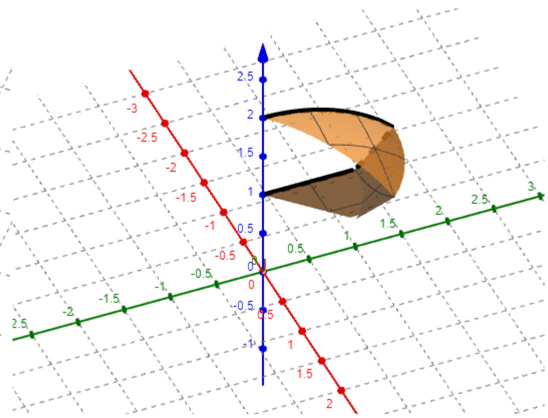


Imagen 8 Sólido resultante (d), se escogió el trozo de sólido tal que $y \geq x$.

Observaciones:

- Se debe tener en cuenta que el volúmen de la otra opción("trozo grande"), es el triple del volumen de (d)
- (d) es un sólido macizo (pese a que la figura no lo muestre).

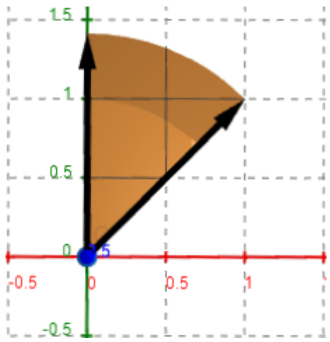


Imagen 9 Vista del plano xy desde eje z

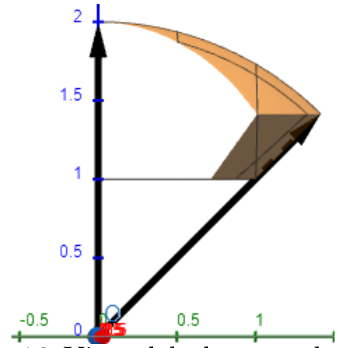


Imagen 10 Vista del plano yz desde eje x

Volumen de S usando coordenadas cilíndricas.

Recordemos que el cambio de variables para coordenadas cilíndricas sigue las correspondencias:

$$x = rcos(\theta) \qquad dV = rdzdrd\theta$$
$$y = rsen(\theta) \qquad x^2 + y^2 = r^2$$
$$z = z \qquad \int\int\int_R dV = \int\int\int_R rdzdrd\theta$$

- Las funciones que definen a S en coordenadas cilíndricas son:

  Manto cónico: $z = \sqrt{x^2 + y^2} \to z = r$

  Hemisferio: $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2 \to z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \to z = \sqrt{4 - r^2}$

- De acuerdo a la imagen 9, $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.
- Dividiremos al sólido S en 2 sólidos generados por:

$$S_1 := \{(\theta, r, z) : \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq 1 \quad , 1 \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}\}$$
$$S_2 := \{(\theta, r, z) : \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 1 \leq r \leq \sqrt{2} \quad , r \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}\}$$

Así, el el sólido S será generado por $S_1 \cup S_2$, luego el volumen de S será:

$$V(S) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_1^{\sqrt{4-r^2}} rdzdrd\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{\sqrt{2}} \int_r^{\sqrt{4-r^2}} rdzdrd\theta$$

$$\Longrightarrow V(S) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r(z)\Big|_1^{\sqrt{4-r^2}} drd\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{\sqrt{2}} r(z)\Big|_r^{\sqrt{4-r^2}} drd\theta$$

$$\Longrightarrow V(S) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r\sqrt{4 - r^2} - rdrd\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{\sqrt{2}} r\sqrt{4 - r^2} - r^2 drd\theta$$

$$\Longrightarrow V(S) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{(4 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_0^1 - \frac{r^2}{2}\Big|_0^1 d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{(4 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_1^{\sqrt{2}} - \frac{r^3}{3}\Big|_1^{\sqrt{2}} d\theta$$

$$\Longrightarrow V(S) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{3\sqrt{3}}{3} + \frac{8}{3} - \frac{1}{2} d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3} d\theta = \frac{(15 - 8\sqrt{2})\pi}{24} \approx 0{,}4825344...$$

Volumen usando coordenas esféricas

Recordemos que el cambio de variables para coordenadas cilíndricas sigue las correspondencias:

$$x = \rho sen(\phi)cos(\theta) \qquad dV = \rho^2 sen(\phi)d\rho d\phi d\theta$$
$$y = \rho sen(\phi)sen(\theta) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$
$$z = \rho cos(\phi)$$

- De acuerdo a la imagen 9, $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
- De acuerdo a la imagen 10, $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$
- De la imagen 10 también podemos notar que la norma del vector ρ está acotada superiormente por $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ e inferiormente por el plano $z = 1$, luego en coordenadas esféricas obtenemos:

$$\begin{aligned} z =&\sqrt{4 - x^2 - y^2} \implies \rho cos(\phi) = \sqrt{4 - \rho^2 sen^2(\phi)cos^2(\theta) - \rho^2 sen^2(\phi)sen^2(\phi)} \implies & \rho =&2 \\ z =&1 \qquad \rho cos(\phi) = 1 & \rho =&sec(\phi) \end{aligned}$$

Así podemos calcular el volumen usando:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} \leq \ &\theta \ \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \ &\phi \ \leq \frac{\pi}{4} \\ sec(\phi) \leq \ &\rho \ \leq 2 \end{aligned} \quad , \quad V(S) = \int\int\int_R dV \implies \quad V(S) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{sec(\phi)}^{2} \rho^2 sen(\phi) d\rho d\phi d\theta$$

$$\implies V(S) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{sen(\phi)\rho^3}{3}\Big|_{sec(\phi)}^{2} d\phi d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{8sen(\phi)}{3} - \frac{sen(\phi)sec^3(\phi)}{3} d\phi d\theta$$

$$\implies V(S) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{8cos(\phi)}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{sec^2(\phi)}{6}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{8}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} d\theta$$

$$\implies V(S) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{15 - 8\sqrt{2}}{6} d\theta = \frac{(15 - 8\sqrt{2})\pi}{24} \approx 0{,}4825344...$$

Problema 2

Suponga que una partícula se mueve en la trayectoria C definida por

$$\sigma(t) = (2\cos(t), 2\sin(t), t), t \geq 0$$

(a) Si cuando $t = \pi$ la partícula abandona la trayectoria C y sigue por la tangente a C en $(-2, 0, \pi)$ ¿Cuales son las coordenadas del punto en que se encuentra la particula en el instante $t = 2\pi$?.

(b) Calcular la longitud del trayecto recorrido por la partícula entre $t = 0$ y $t = 2\pi$.

Solución(a):
Sabemos que la recta tangente a la trayectoria C en $(-2, 0, \pi)$ estará determinada por:

$$\begin{aligned}
L(t) := \sigma(\pi) + \sigma'(\pi)(t - \pi) =& (-2, 0, \pi) + (-2sen(t), 2cos(t), 1)\Big|_{t=\pi}(t - \pi) \\
L(t) =& (-2, 0, \pi) + (0, -2, 1)(t - \pi) \\
L(t) =& (-2, 0, \pi) + (0, -2t + 2\pi, t - \pi) \\
L(t) =& (-2, -2t + 2\pi, t), t \geq \pi
\end{aligned}$$

Luego las coordenadas del punto para $t = 2\pi$ serán:

$$\begin{aligned}
L(2\pi) =& (-2, -2(2\pi) + 2\pi, 2\pi) \\
L(2\pi) =& (-2, -2\pi, 2\pi)
\end{aligned}$$

Solución(b):
La longitud del trayecto recorrido por la partícula entre $t = 0$ y $t = 2\pi$, con $A = (-2, 0, \pi)$ y $B = (-2, -2\pi, 2\pi)$ será:

$$\begin{aligned}
R =& \int_0^\pi ||\sigma'(t)||dt + d_{AB} \\
R =& \int_0^\pi ||(-2sen(t), 2cos(t), 1)||dt + \sqrt{(-2 - (-2))^2 + (-2\pi - 0)^2 + (2\pi - \pi)^2} \\
R =& \int_0^\pi \sqrt{4sen^2(t) + 4cos^2(t) + 1}dt + \sqrt{4\pi^2 + \pi^2} \\
R =& \int_0^\pi \sqrt{5}dt + \pi\sqrt{5} \\
R =& 2\pi\sqrt{5}
\end{aligned}$$

Problema 3: Sea R la región del plano acotada por las rectas $y = x$ e $y = -x + 4$ y el arco de circunferencia $y = 2 - \sqrt{2 - (x-2)^2}$ y sean F, G los campos vectoriales definidos por:

$$F(x,y) = (-y(x-2)^2, x(y-2)^2)$$
$$G(x,y) = \left(\frac{1-y}{(x-2)^2 + (y-1)^2}, \frac{x-2}{(x-2)^2 + (y-1)^2}\right)$$

respectivamente. Calcular cada una de las siguientes integrales de línea.

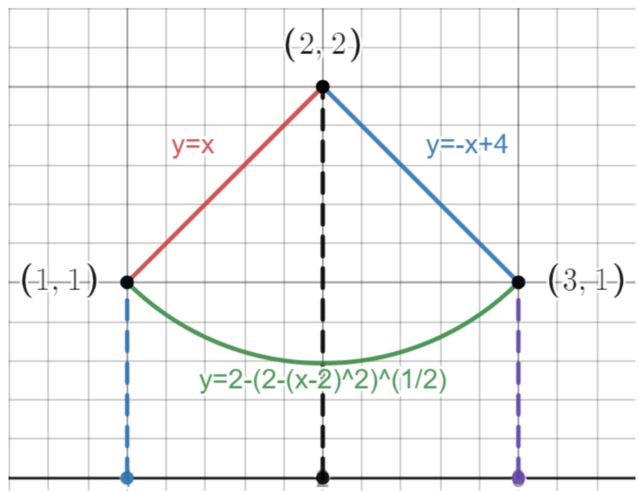
$$(a) \int_C F \cdot dr$$

$$(b) \int_C G \cdot dr$$

donde C es la frontera de la región R recorrida en sentido antihorario.

Solución (a)**:**
Tenemos la región acotada por:

$$y = x \longrightarrow \text{Recta}$$
$$y = -x + 4 \longrightarrow \text{Recta}$$
$$y = 2 - \sqrt{2 - (x-2)^2} \longrightarrow \text{Semi-Circunferencia dezplazada}$$



Usamos el primer campo vectorial

$$F(x,y) = (-y(x-2)^2, x(y-2)^2)$$

Al ser una curva cerrada simple y orientada en sentido anti-horario podemos usar el Teorema de Green.

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = \int\int_D rot(\vec{F}) dA = \int\int_D (y-2)^2 - (-(x-2)^2) dA = \int\int_D (y-2)^2 + (x-2)^2 dA$$

Sabiendo que es un círculo(radio constante), y la porción que se pide es un cuarto de circunferencia tenemos que:

$$0 \leq r \leq \sqrt{2}$$
$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Cambiaremos a polares y resolveremos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{2}}(r^2cos^2(\theta)-4rcos(\theta)+r^2sin^2(\theta)-4rsin(\theta)+8)rdrd\theta$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{2}}r^3cos^2(\theta)-4r^2cos(\theta)+r^3sin^2(\theta)-4r^2sin(\theta)+8rdrd\theta$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{r^4cos^2(\theta)}{4}-\frac{4r^3cos(\theta)}{3}+\frac{r^4sin^2(\theta)}{4}-\frac{4r^3sin(\theta)}{3}+4r^2)\Big|_0^{\sqrt{2}}d\theta$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}cos^2(\theta)-\frac{8\sqrt{2}cos(\theta)}{3}+sin^2(\theta)-\frac{8\sqrt{2}sin(\theta)}{3}+8d)\theta$$
$$(-\frac{8\sqrt{2}sin(\theta)}{3}+\frac{8\sqrt{2}cos(\theta)}{3}+9\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{8\sqrt{2}}{3}-\frac{8\sqrt{2}}{3}+\frac{9\pi}{2}=-\frac{16\sqrt{2}}{3}+\frac{9\pi}{2}$$

Solución (b)**:**
Ahora con el campo:

$$G(x,y)=\left(\frac{1-y}{(x-2)^2+(y-1)^2},\frac{x-2}{(x-2)^2+(y-1)^2}\right)$$

Al no estar definido en $(2,1)$, no podemos aplicar el Teorema de Green, así que veremos si podemos usar un campo gradiente para usar el Teorema Fundamental de las integrales de linea, para ello denotaremos $G(x.y)=(g_1(x,y),g_2(x,y))$, luego integraremos cada coordenada tal que:

$$\int g_1(x,y)dx=\int g_2(x,y)dy=-arctan(\frac{x-2}{y-1})+g(y)$$

Definiremos $f(x,y)=-arctan(\frac{x-2}{y-1})+g(y)$, luego el gradiente de f será:

$$\bigtriangledown f(x,y)=\left(\frac{1-y}{(x-2)^2+(y-1)^2}+\frac{dg(y)}{dx},\frac{x-2}{(x-2)^2+(y-1)^2}+\frac{dg(y)}{dy}\right)$$
$$\text{Con }\frac{dg(y)}{dy}=0$$
$$\bigtriangledown f(x,y)=\left(\frac{1-y}{(x-2)^2+(y-1)^2},\frac{x-2}{(x-2)^2+(y-1)^2}\right)$$

Teniendo esto, vemos que G es un campo gradiente. Luego usando el Teorema fundamental de las integrales de linea:

Punto final		Punto inicial
$r_1:(2,2)$	$\longrightarrow$	$(1,1)$
$r_2:(3,1)$	$\longrightarrow$	$(2,2)$
$C:(1,1)$	$\longrightarrow$	$(3,1)$

Evaluando la coordenada x de cada punto y tomando el límite para y en cada punto obtenemos:

$$r_1 = \lim_{y \to 2} \left[-arctan(\frac{2-2}{y-1}) \right] + \lim_{y \to 1} \left[arctan(\frac{1-2}{y-1}) \right]$$
$$r_2 = \lim_{y \to 1} \left[-arctan(\frac{3-2}{y-1}) \right] + \lim_{y \to 2} \left[arctan(\frac{2-2}{y-1}) \right]$$
$$C = \lim_{y \to 1} \left[-arctan(\frac{1-2}{y-1}) \right] + \lim_{y \to 1} \left[arctan(\frac{3-2}{y-1}) \right]$$

Por lo que:

$r_1 + r_2 + C =$

$-arctan(0) + \lim_{y \to 1} \left[arctan(\frac{-1}{y-1}) \right] - \lim_{y \to 1} \left[arctan(\frac{1}{y-1}) \right] + arctan(0) - \lim_{y \to 1} \left[arctan(\frac{-1}{y-1}) \right] + ...$

$... \lim_{y \to 1} \left[arctan(\frac{1}{y-1}) \right] = \lim_{y \to 1} \left[-arctan(\frac{1}{y-1}) - arctan(\frac{1}{y-1}) + arctan(\frac{1}{y-1}) + arctan(\frac{1}{y-1}) \right] \longrightarrow$

$\lim_{y \to 1} [0] = 0$