Clase 13

Cálculo 3

Carlos Martínez Ranero

Departamento de Matemática
Universidad de Concepción

Recordatorio de la clase anterior.

- Máximos y mínimos.

Objetivos de la clase de hoy.

- Teorema de Taylor.
- Matriz Hessiana.
- Criterio de la segunda derivada.

Ejemplo 1

Construir una caja, sin tapa, de volumen 16. Costo de la base es de 2 y el costo de los lados es 0,5. Minimizar la cantidad de material.

Solución:

- Sean x, y, z las dimensiones de la caja.
- El costo del material es $C(x, y, z) = 2xy + yz + xz$
- Utilizando la relación $xyz = 16$, tenemos que $z = \frac{16}{xy}$.
- Por lo que tenemos que minimizar la función $C(x, y) = 2xy + \frac{16}{x} + \frac{16}{y}$ en el dominio $A = \{(x, y) : x > 0 \wedge y > 0\}$.
- La región A no es cerrada ni acotada por lo que no podemos aplicar el Teorema de los valores extremos.

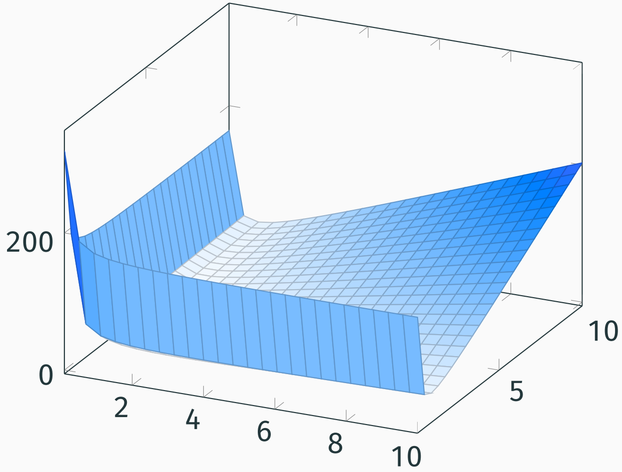
Problemas de optimización

- Ahora encontremos los puntos críticos.
- $\nabla(C) = (2y - \frac{16}{x^2}, 2x - \frac{16}{y^2})$
- $2y = \frac{16}{x^2}, 2x = \frac{16}{y^2}$
- $x = \frac{x^4}{8} \implies 8x = x^3 \implies x = 2$ ya que $x > 0$, y se sigue que $y = 2$.
- Por lo tanto, $(2, 2)$ es el único punto crítico.
- El plan es encontrar un conjunto compacto A tal que $(2, 2) \in A$ y $f(x, y) \geq 24$ para $(x, y) \notin A$.

Problemas de optimización

- Sea $A = \{(x, y) : 0{,}1 \leq x, y \leq 1000\}$
- Notemos que si $(x, y) \notin A$ entonces tenemos 2 casos:
- $x \leq 0{,}1 \vee y \leq 0{,}1$
- En este caso $C(x, y) \leq \frac{16}{0{,}1} = 160 > 24$
- $x \geq 1000 \wedge y \geq 0{,}1$ $(y \geq 1000 \wedge x \geq 0{,}1)$
- En este caso $C(x, y) \leq 2 \cdot 1000 \cdot 0{,}1 = 200 > 24$
- Como es compacto f alacanza un mínimo en A y como $f(x, y) > 24$ para $(x, y) \in \partial A$ se sigue que 24 es un mínimo global.

Problemas de optimización



Criterio de la Segunda Derivada.

Para poder entender la naturaleza de los puntos críticos, utilizaremos el Teorema de Taylor.

Teorema de Taylor

Sea $g :]-a, a[\to \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable, entonces $g(x) \approx g(0) + g'(0)x + \frac{1}{2}g''(0)x^2$ cerca del 0.

Es decir, si $g'(0) = 0, g''(0) \neq 0$, entonces cerca del origen $g(x)$ es una parábola.

Criterio de la Segunda Derivada.

Teorema de Taylor (orden 2)

$f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \nabla(f)(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a}) + (\vec{x} - \vec{a})H(f)(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a}) + \epsilon_2(\vec{x})$, y $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} \frac{\epsilon_2(\vec{x})}{\|\vec{x}-\vec{a}\|^2} = 0$.

Donde $H(f) = D^2 f = \begin{bmatrix} f_{x_1 x_1} & \dots & f_{x_1 x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{x_n x_1} & \dots & f_{x_n x_n} \end{bmatrix}$

Criterio de la Segunda Derivada.

Definición

Sea A una matriz simétrica de $n \times n$. Se dice que A es:

- Positiva definida si $\vec{x}^t A\vec{x} > 0$ para todo vector columna $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$.
- Negativo definida si $\vec{x}^t A\vec{x} < 0$ para todo vector columna $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$.
- Indefinida si existen vectores columna $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ tales que $\vec{x}^t A\vec{x} < 0$ y $\vec{y}^t A\vec{y} > 0$.

Criterio de la Segunda Derivada.

Teorema (Criterio de la segunda derivada)

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f : A \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2, y $\vec{a}$ un punto crítico:

- Si $Hf(\vec{a})$ es positivo definida, entonces $\vec{a}$ es un mínimo local.
- Si $Hf(\vec{a})$ es negativo definida, entonces $\vec{a}$ es un máximo local.
- Si $Hf(\vec{a})$ es indefinida, entonces $\vec{a}$ es un punto silla, es decir, no es ni un máximo ni un mínimo.
- En otro caso el criterio no da información.

Criterio de la Segunda Derivada.

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f : A \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Para cada $k \leq n$ definimos

$$\Delta_k = det \begin{bmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} & \dots & f_{x_1 x_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{x_k x_1} & f_{x_k x_2} & \dots & f_{x_k x_k} \end{bmatrix}$$

Teorema

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f : A \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2, y $\vec{a}$ un punto crítico: Si $\Delta_n(\vec{a}) \neq 0$ entonces,

- $Hf(\vec{a})$ es positivo definida si y sólo si $\Delta_k(\vec{a}) > 0$ para cada $k \leq n$.
- $Hf(\vec{a})$ es negativo definida si y sólo si $(-1)^k \Delta_k(\vec{a}) > 0$ para cada $k \leq n$.
- En otro caso, es un punto silla.

Criterio de la Segunda Derivada.

Ejemplo 2

Determinar la naturaleza de los puntos críticos de la función $f(x, y) = x^4 - 4x + y^3 - 3y$.

Criterio de la Segunda Derivada.

Solución:

- $\nabla(f)(x,y) = (4x^3 - 4, 3y^2 - 3)$
- $4x^3 - 4 = 0, 3y^2 - 3 = 0$
- $x = 1, y = \pm 1$
- Los puntos críticos son $(1,1)$ y $(1,-1)$.
- $Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 6y \end{bmatrix}$
- $Hf(1,1) = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$
- $\Delta_1 = 12 > 0, \Delta_2 = 72 > 0$
- Por el criterio de la segunda derivada $(1,1)$ es un mínimo local.

Criterio de la Segunda Derivada.

- $Hf(1,-1) = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$
- $\Delta_1 = 12 > 0, \Delta_2 = 72 < 0$
- Por el criterio de la segunda derivada $(1,1)$ es un punto silla.

Criterio de la Segunda Derivada.

- Cerca de $(1, 1)$ tenemos que
  $$f(x, y) \simeq f(1, 1) + \begin{bmatrix} x-1 & y-1 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-1 & y-1 \end{bmatrix}$$
- $f(x, y) \simeq -5 + 12(x-1)^2 + 6(y-1)^2$
- Cerca de $(1, -1)$ tenemos que
  $$f(x, y) \simeq f(1, -1) + \begin{bmatrix} x-1 & y+1 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-1 & y+1 \end{bmatrix}$$
- $f(x, y) \simeq -1 + 12(x-1)^2 - 6(y+1)^2$

Punto de silla.