Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemática
Departamento de Matemática

Cálculo II

Ingeniería Civil

Prof. Víctor Aros Quinán

Segundo Semestre 2021

Clase Nº20: Cálculo II
Aplicaciones de Curvas definidas de forma Paramétrica y Coordenadas Polares

Curvas definidas Paramétricamente

En el estudio de las ecuaciones paramétricas existen algunas ecuaciones ya definidas, por ejemplo:

1. Una curva C descrita por una función continua $y = f(x)$, con $x \in [a, b]$, también se parametriza haciendo $x = t$. Así las ecuaciones paramétricas

$$x = t \text{ e } y = f(t), \quad t \in [a, b]$$

2. Un segmento de recta que une los puntos x_0 y x_1, se puede parametrizar de la siguiente forma:

$$\vec{r}(t) = x_0(1 - t) + x_1 t, \quad t \in [0, 1]$$

3. La curva $C : b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, puede ser parametrizada por:

$$\vec{r}(t) = (a\cos(t), b\sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi]$$

Aplicaciones

Al igual que con las gráficas de funciones $y = f(x)$, podemos obtener información útil acerca de una curva C definida paramétricamente al examinar la derivada $\frac{dy}{dx}$.

La **pendiente** de la recta tangente en el punto $P(x, y)$ sobre C está dada por $\frac{dy}{dx}$. Para calcular esta derivada podemos considerar que la función cartesiana es de la forma $y = f(t)$, luego si parametrizamos esta curva nos queda:

$$x = x(t) \quad \text{e} \quad y = y(t)$$

Luego, si reemplazamos estas ecuaciones en la curva original, se obtiene:

$$y(t) = f(x(t)) \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Ejemplos

Determinar una ecuación de la una recta tangente a la curva

$$x(t) = t^2 - 4t - 2, \quad y(t) = t^5 - 4t^3 - 1$$

en punto correspondiente a $t = 1$.

Solución: Primero determinamos la pendiente $\frac{dy}{dx}$ de la recta tangente, para esto debemos determinar:

$$\frac{dx}{dt} = \qquad\qquad \frac{dy}{dt} =$$

Luego, si $t = 1$, se tiene:

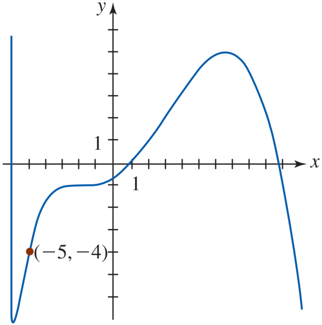
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1} = \qquad\qquad = \frac{7}{2}$$

Ejemplos

Al sustituir $t = 1$ en las ecuaciones paramétricas originales, encontramos que el punto de tangencia es $(-5, -4)$. En consecuencia, la ecuación de la recta tangente en ese punto es:

$$R_T : y - (-4) = \frac{7}{2}(x - (-5)) \Leftrightarrow R_T : y = \frac{7}{2}x + \frac{27}{2}$$

La gráfica de esta situación se puede apreciar en la siguiente figura:



Ejemplos

Grafique la curva definida por las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$x(t) = t^2 - 4, \;\; y(t) = t^3 - 3t$$

Solución: Primero determinamos la intersección con el eje X y con el eje Y, como sigue:

$$x = 0 \Rightarrow t^2 - 4 = 0 \Rightarrow t = -2 \vee t = 2$$
$$y = 0 \Rightarrow t(t^2 - 3) = 0 \Rightarrow t = 0 \vee t = -\sqrt{3} \vee t = \sqrt{3}$$

Luego, las tangentes horizontales,

$$\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow t = -1 \vee t = 1$$

notar que $\frac{dx}{dt}$, para $t = -1$ y $t = 1$, es distinta de cero.

Ejemplos

además, las tangentes verticales, se obtienen si:

$$\frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow t = 0$$

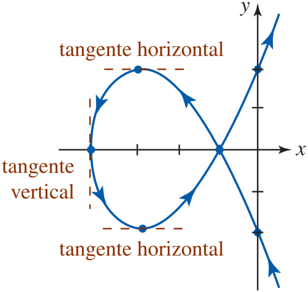
al igual que antes $\frac{dy}{dt}$, para $t = 0$, es distinta de cero. Ahora construimos una tabla de valores:

t	-2	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	2
x	0	-1	-3	-4	-3	-1	0
y	-2	0	2	0	-2	0	2

Observemos que las intersecciones con el eje X son $(-1,0)$ y $(-4,0)$, las intersecciones con el eje Y son $(0,-2)$ y $(0,2)$, los puntos de tangencia horizontal son $(-3,2)$ y $(-3,-2)$ y el punto de tangencia vertical es $(-4,0)$.

Ejemplos

La gráfica de la curva está dada por:



Observación: Notemos que la gráfica de una función diferenciable $y = f(x)$ puede tener sólo una recta tangente en un punto sobre su gráfica. No así con una curva C definida paramétricamente, ya que quizas no se la gráfica de una función, por ende es posible que una curva de este tipo pueda tener más de una recta tangente en un punto.

Ejemplos

Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva

$$x(t) = t^2 - 4, \;\; y(t) = t^3 - 3t$$

en los puntos correspondientes a $t = -\sqrt{3}$ y a $t = \sqrt{3}$.

Solución: Notemos que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 - 3}{2t}$$

luego,

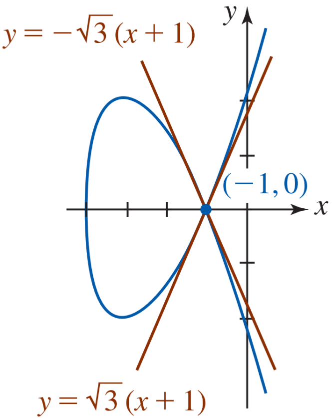
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-\sqrt{3}} = -\sqrt{3} \qquad \text{y} \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Ejemplos

Por ende, las dos rectas tangentes en el punto $(-1, 0)$ están dadas por:

$$R_{T_1} : y = -\sqrt{3}(x+1) \qquad \text{y} \qquad R_{T_2} : y = \sqrt{3}(x+1)$$

Así, se tiene:



Aplicaciones

También podemos calcular derivadas de orden superior usando la misma forma que antes, por ejemplo:

- $\dfrac{d^2y}{dx^2} =$

- $\dfrac{d^3y}{dx^3} =$

- $\dfrac{d^4y}{dx^4} =$

- $\dfrac{d^ny}{dx^n} =$

Aplicaciones

Sabemos que para una curva $y = f(x)$ positiva y continua para todo $x \in [a, b]$, el **área bajo la curva** está dada por:

$$A(R) = \int_a^b f(x)\, dx$$

Ahora bien, si la curva se define de manera paramétrica como:

$$x = x(t), \;\; y = y(t)$$

tal que se recorre una vez de izquierda a derecha cuando t crece de α a β, entonces:

$$A(R) = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\, dt$$

Aplicaciones

Sabemos que para una curva $y = F(x)$ continua para todo $x \in [c, d]$ y derivable en (c, d) (curva suave), su **longitud de curva** está dada por:

$$L(C) = \int_c^d \sqrt{1 + [F'(x)]^2}\, dx$$

Ahora bie, si la curva se define de manera paramétrica como:

$$x = f(t), \;\; y = g(t), \qquad t \in [a, b]$$

su longitud de arco está dada por:

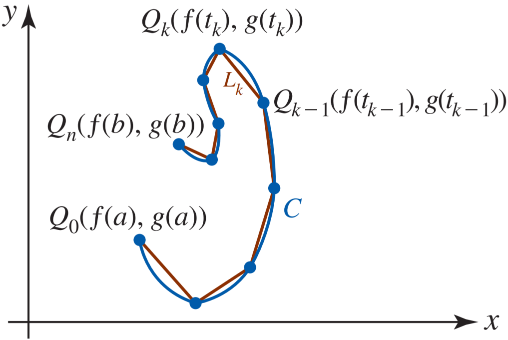
$$L(C) = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Aplicaciones

Suponga que $x = f(t)$ e $y = g(t)$ con $t \in [a, b]$, son las ecuaciones paramétricas de una curva suave C que no se intersecta a sí misma en $a < t < b$. Si P es una aprtición del intervalo $[a, b]$ dada por lo términos:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$$

entonces, como se muestra en la siguiente figura:



Aplicaciones

parece ser razonable que C pueda aproximarse mediante una trayectoria poligonal a través de los puntos $Q_k(f(t_k), g(t_k))$ con $k = 0, ..., n$. Al denotar la longitud del segmento de recta a través de Q_{k-1} y Q_k mediante L_k escribimos la longitud aproximada de C como:

$$L(C) \approx \sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[f(t_k) - f(t_{k-1})]^2 + [g(t_k) - g(t_{k-1})]^2}$$

Ahora bien, puesto que f y g tienen derivadas continuas y por T.V.M. existen u_k y v_k en el intervalo (t_{k-1}, t_k) tales que:

$$f(t_k) - f(t_{k-1}) = f'(u_k)(t_k - t_{k-1}) = f'(u_k)\Delta t_k$$
$$g(t_k) - g(t_{k-1}) = g'(v_k)(t_k - t_{k-1}) = g'(v_k)\Delta t_k$$

Aplicaciones

Dado lo anterior, podemos notar que:

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[f'(u_k)]^2 + [g'(v_k)]^2}\Delta t_k$$

Luego, al tomar $\|P\| \to 0$, obtenemos una fórmula para la longitud de una curva suave. Además, se debe notar que el límite de la suma no es la definición usual de una integral definida, puesto que trabajamos con dos términos (u_k, v_k) mas que con uno en el intervalo (t_{k-1}, t_k), a pesar de esto igual podemos concluir que:

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Aplicaciones

Sabemos que para una curva $y = F(x)$ continua sobre un intervalo $[c, d]$, si hacemos girar la región bajo la curva en todo al eje X, e el **área de la superficie de revolución** está dada por:

$$A(S) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Ahora bien, sea C la curva definida paramétricamente por las ecuaciones $x = x(t), \quad y = y(t)$, con $t \in [a, b]$, donde C es una curva suave que no se intersecta a si misma. Se tiene que el área de la superficie de revolución que se genera al rotar la curve C en torno a una recta L paralela a uno de los ejes coordenadados está dada por:

$$A(S) = 2\pi \int \rho(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

donde $\rho(t)$ es la distancia desde la recta L al arco.

Ejercicios

1. Determine la ecuación de la recta tangente a las siguientes curvas en el punto correspondiente al valor del parámetro dado:
   (a) $x(t) = t^3 + 3t, \quad y(t) = 6t^2 + 1;\ t = -1.$
   (b) $x(t) = 2t + 4, \quad y(t) = t^2 + \ln(t);\ t = 1$
2. Una curva C tiene ecuaciones paramétricas $x(t) = 2t - 5$, $y(t) = t^2 - 4t + 3$. Encuentre una ecuación de la recta tangente a C que es paralela a la recta $y = 3x + 1$.
3. Verifique que la curva dada por

$$x(\theta) = -\frac{2}{\pi} + \cos(\theta),\ y(\theta) = -\frac{2\theta}{\pi} + \sin(\theta),$$

con $x \in [-\pi, \pi]$ se intersecta a sí misma. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes en el punto de intersección.

Ejercicios

4. Considere la una circunferencia de radio $r > 0$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

   (a) Parametrice la circunferencia de dos formas disntitas y en ambos orientaciones.

   (b) Demuestre que el área de la circunferencia parametrizada de ambas formas está dada por πr^2.

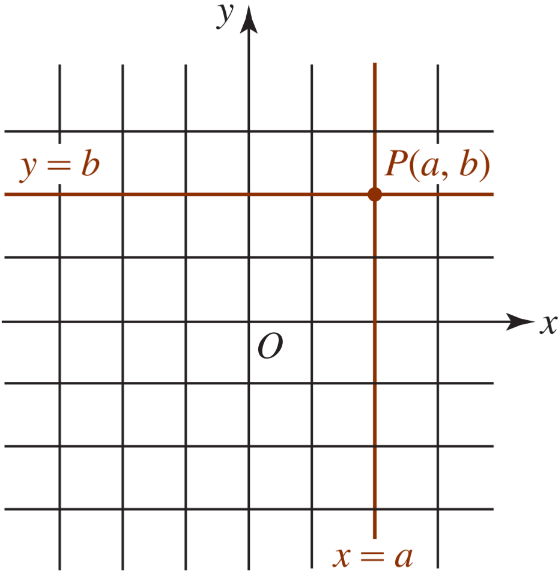
   (c) Demuestre que el perímetro de la circunferencia parametrizada de ambas formas está dado por $2\pi r$.

   (d) Demuestre que el área de la superficie de revolución de la esfera generada generada al hacer rotar la circunferencia parametrizada de ambas formas está dada por $4\pi r^2$.

Coordenadas Rectangulares

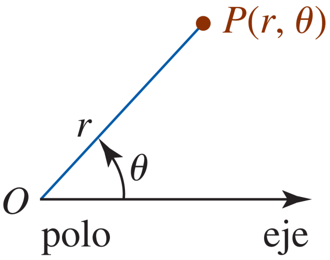
Hasta ahora hemos utilizado el sistema de coordenadas rectangulares o cartesiano para especificar un punto P o describir una curva C en el plano. Podemos considerar este sistema como una retícula de líneas horizontales y verticales. Las coordenadas (a, b) de un punto P están determinadas por la intersección de dos rectas: una recta $x = a$ perpendicular a la recta de referencia horizontal llamada eje X y la otra $y = b$ que es perpendicular a la recta vertical denominada eje Y.

Coordenadas Rectangulares

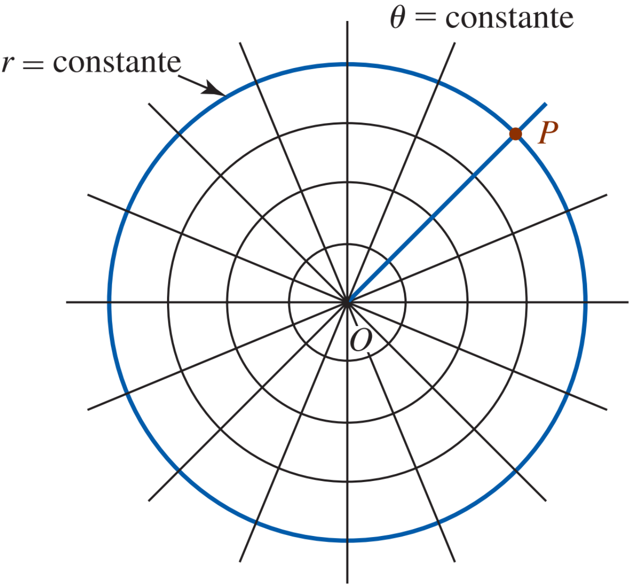


Coordenadas Polares

Para establecer un sistema de coordenadas polares empleamos un sistema de círculos centrados en un punto O, denominado **polo**, y líneas rectas o rayos que emanan de O. Tomamos como eje de referencia una media línea horizontal dirigida hacia la derecha del polo, a la cual se le denomina **eje polar**. Para especificar una distancia r dirigida (con signo) desde O y un ángulo θ cuyo lado inicial es el eje polar y cuyo lado final es el rayo OP, se identifica el punto P mediante (r, θ). Se dice que el par ordenado (r, θ) son las coordenadas polares de P.



Coordenadas Polares



Coordenadas Polares

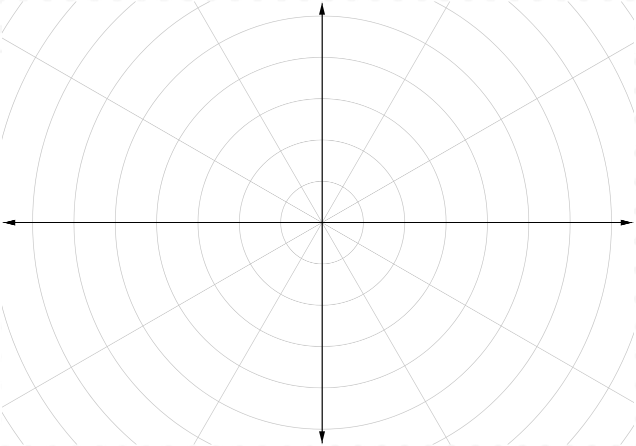
Convenciones

1. Los ángulos $\theta > 0$ se miden en el sentido contrario al de las manecillas del reloj a partir del eje polar, en tanto que los ángulos $\theta < 0$ se miden en el sentido de las menecillas del reloj.
2. Para graficar un punto $(-r, \theta)$, donde $-r < 0$, se mide $|r|$ unidades a lo largo del rayo $\theta + \pi$.
3. Las coordenadas del polo O son $(0, \theta)$, donde θ es cualquier ángulo.

Ejemplos:

Grafique los siguientes puntos en el sistema de coordenadas polares:

(a) $P_1\left(4, \dfrac{\pi}{6}\right)$ (b) $P_2\left(2, -\dfrac{\pi}{4}\right)$ (c) $P_3\left(-3, \dfrac{3\pi}{4}\right)$



Coordenadas Polares

Observación: Notemos que en sistema rectangular un punto posee solo una representación, pero en las coordenadas polares esta no es única. De hecho:

$$(r, \theta) \qquad \text{y} \qquad (r, \theta + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

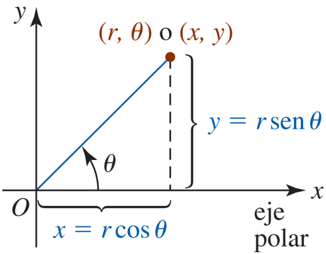
son equivalentes. Además, se pueden considerar valores negativos para r.

Por ejemplo, el punto $P\left(2, \dfrac{\pi}{6}\right)$ puede ser representado por:

Coordenadas Polares

Ahora veremos como podemos hacer una conversión entre los sistemas de coordenadas polares y rectangulares.

Consideremos la siguiente figura:



Al sobreponer un sistema de coordenadas rectangulares sobre un sistema de coordenadas polares, podemos convertir la descripción polar de un punto en coordenadas rectangulares utilizando:

$$x = r\cos(\theta), \qquad y = r\sin(\theta)$$

Coordenadas Polares

Por otro lado, se tiene:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

en este caso $r > 0$ y $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Ejemplos:

1. Convierta el punto $P_1\left(2, \dfrac{\pi}{6}\right)$ en coordenadas rectangulares.
2. Convierta el punto $P_2(-1, 1)$ en coordenadas polares.