1 Introducción

Este es un curso de Cálculo Diferencial de funciones reales de una variable real. Se estudian funciones del tipo $f : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$, donde $I \subseteq \mathbb{R}$.

La función f establece una relación entre las variables (reales) x e y, dada por

$$y = f(x)$$

Para cada valor de la variable x, la función asigna un único valor y, $y = f(x)$. Por esto se dice que x es la variable independiente e y es la variable dependiente (y depende de x).

A modo de ejemplo tenemos:

- El área A de un círculo es función de su radio r. Esto a través de la relación

$$A = \pi r^2 \quad , \text{ para } r > 0$$

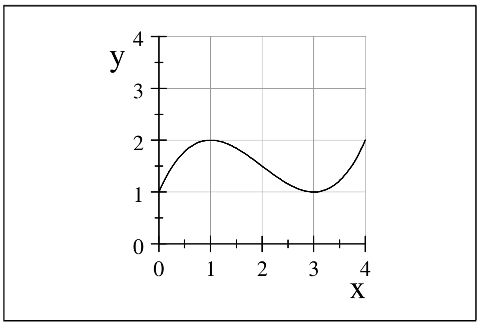
- La temperatura T de un líquido hirviendo (a $100°C$), colocado en un medio ambiente a temperatura menor, disminuye y se describe mediante una función

$$t \mapsto T(t)\,, \text{ definida para } t \geq 0$$

  donde t (tiempo) es la variable independiente.

Volviendo al caso general dado por la relación $y = f(x)$, el cálculo estudia las características de la variación de y con respecto a x.

Para esto será importante poder disponer de una representación geométrica de la función f, que denominamos su gráfica, y que se realiza en un sistema de coordenadas cartesianas de ejes x e y, como se ilustra en la siguiente figura, donde se consideran los puntos de la forma $(x, f(x))$, para x entre 0 y 4.



La gráfica muestra que:

Para x entre 0 y 1, la variable y crece cuando x crece; mientras que para x entre 1 y 3, la variable y disminuye cuando x aumenta.

Para abordar este estudio se necesita una plena compresión sobre las características del conjunto de los números reales y sus propiedades.

Intente responder a las siguientes preguntas:

- ¿Existe un número real cuyo cuadrado sea igual a -4? (resuelva $x^2 = -4$)
- ¿Cuánto números reales hay entre 0 y 1?
- ¿Cuál es el menor de todos los números positivos? (sabiendo que 0 no es positivo).
- Encuentre el número real más grande que sea menor que 1.
- ¿Se puede escribir el número 1.41 como el cuociente de dos números enteros?
- ¿Se puede expresar el número $\sqrt{2}$ como el cuociente de dos números enteros?

2 Descripción general de los números reales

Los números reales se clasifican de acuerdo a su conceptualización a lo largo de la historia del hombre, quien los ideó según sus necesidades.

- Primero fueron los números naturales $(\mathbb{N})$, usados para **contar** objetos

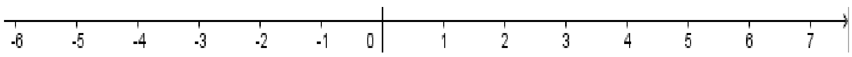
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$$

  Tienen infinitos elemento y sobre él están definidas las operaciones suma $(+)$ y multiplicación $(\cdot)$.

- Si necesitamos **medir**, por ejemplo la temperatura de un líquido o bien la altura de un lugar de la Tierra con respecto al nivel del mar, necesitamos también (al menos) los negativos de los naturales y el cero, dando origen al conjunto de números enteros

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, ...\}$$

  Este conjunto se puede representar mediante algunos puntos de una recta de la siguiente forma:



  disponiendo de esta manera de la posibilidad de medir la distancia $d(a, b)$ entre dos números enteros a y b. Por ejemplo, $d(-2, 3) = 5$ unidades, siendo la unidad de medida (longitud) la distancia entre el 0 y el 1.

  Esto corresponde a la medida en dimensión 1.

- Ahora si tenemos el problema de repartir equitativamente una barra de chocolate entre 3 personas, la debemos dividir en 3 partes iguales dando origen a la fracción $\frac{1}{3}$, que representa a la tercera parte de la unidad.

  2 veces $\frac{1}{3}$: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ representan dos terceras partes de la unidad y
  3 veces $\frac{1}{3}$: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$ representan tres terceras partes de la unidad. que resulta ser igual a la unidad.

  De esta forma se genera el conjunto de los números racionales $(\mathbb{Q})$ que son los números que se pueden expresar como el cuociente de dos números enteros

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \wedge \ q \neq 0 \right\}$$

  el número $\frac{p}{q} = p\left(\frac{1}{q}\right)$ representa p veces la q ésima parte de la unidad.

- Por último, cuando consideramos un cuadrado de lado 1, al querer medir su diagonal d nos encontramos con la condición $d^2 = 2$ (según el teorema de Pitágoras). Este es un número que al multiplicarlo por si mismo debe resultar igual a 2.

  Pues bien, se puede probar que un número con estas características no se puede expresar como el cuociente de dos enteros, o sea no es racional.

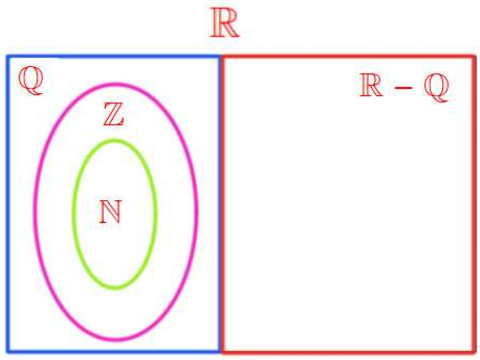
  Se considera entonces el conjunto de los números que no pueden expresarse como el cuociente de dos enteros, llamado conjunto de los números irracionales (no son racionales), que denotaremos por $\mathbb{I}$, aunque esta notación no es universal.

De esta manera el conjunto de números reales se particiona en dos conjuntos: los racionales y los irracionales, quedando en consecuencia que $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

Además se tiene

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

El siguiente diagrama de Venn describe esta clasificación de los números reales, destacando las relaciones de inclusión entre los distintos subconjuntos



3 Representación decimal

Los números reales admiten una representación en la forma

$$\pm a_1 a_2 ... a_n , b_1 b_2 b_3 ...$$

donde $a_1 a_2 ... a_n$ es un entero mayor o igual a cero de n dígitos y $b_1 b_2 b_3$...es una cadena de dígitos, que puede ser finita o infinita. La primera cadena (finita) se denomina parte entera y la segunda parte decimal. Por ejemplo,

$$1,23456789012$$
$$3,14156787652$$
$$52,7840286142$$
$$1,\ 414\,213\,562\,373...$$

El último número tiene infinitas cifras decimales y solo se muestran las 12 primeras,corresponde a $\sqrt{2}$.

Se puede mostrar que los números reales tienen expresión en forma decimal que corresponde a parte decimal finita o bien parte decimal infinita con la presencia de una cadena que se repite periódicamente. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} 21,44583 &= \frac{2144583}{100000} \\ 0,\bar{3} &= 0.333... = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Queda de ejercicio escribir $21,1\overline{234}$ como el cuociente de dos números enteros.

En cambio, los números irracionales se caracterizan por una expresión en forma decimal que posee infinitas cifras decimales y sin periodo. Por esto, cuando escribimos un número irracional en forma decimal se realiza truncando (cortando) su parte decimal a un número finito de cifras, lo que en definita significa dar una aproximación racional para este número irracional. Por ejemplo $\sqrt{2} \approx 1.414\,213\,562\,373\,095\,048\,8$.