Clase 19

Cálculo 3

Carlos Martínez Ranero

Departamento de Matemática
Universidad de Concepción

Recordatorio de la clase anterior.

- Integrales triples.
- Interpretación de integrales triples.

Objetivos de la clase de hoy.

- Teorema de cambio de variable.
- Coordenadas cilíndricas.
- Coordenadas esféricas.

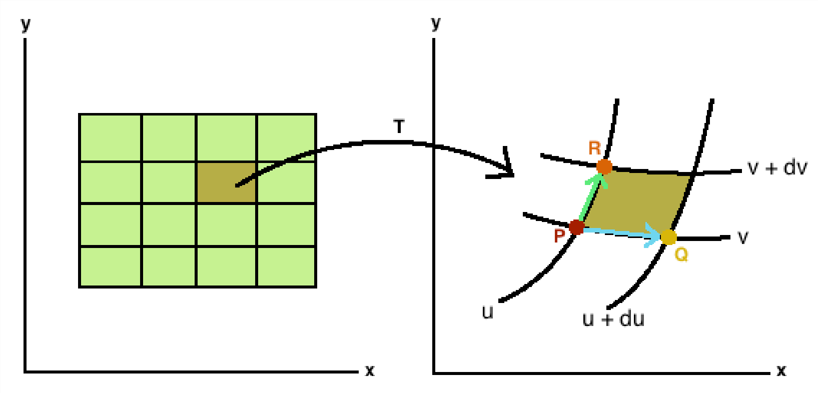
Teorema Cambio de Variables

Sea $G : D \to E$ una función biyectiva de clase C^1, entre las regiones $D, E \subset \mathbb{R}^3$. Si $JG(u,v,w) = \left|\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|$ es el valor absoluto del determinante de la matriz Jacobiana, entonces

$$\iiint_E f(x,y,z)dV(x,y,z) =$$

$$\iiint_D f(G(u,v,w))|JG(u,v,w)|dV(u,v,w).$$

Teorema de Cambio de Variables.



Coordenadas Cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas están dadas por:

$$G(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$$

$$G : [0,\infty[\times[0,2\pi]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$$

Coordenadas Cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas están dadas por:

$$G(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$$

$$G : [0,\infty[\times[0,2\pi]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$$

Teorema (Cambio de Variable Coordenadas Cilíndricas)

$$\iiint\limits_{E} f(x,y,z)\,dV(x,y,z) = \iiint\limits_{G^{-1}(E)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\,dz\,dr\,d\theta.$$

Coordenadas Cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas están dadas por:

$$G(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$$

$$G : [0,\infty[\times[0,2\pi]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$$

Teorema (Cambio de Variable Coordenadas Cilíndricas)

$$\iiint_E f(x,y,z)dV(x,y,z) = \iiint_{G^{-1}(E)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)rdzdrd\theta.$$

Demostración:

- $DG = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Las coordenadas cilíndricas están dadas por:

$$G(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$$

$$G : [0,\infty[\times[0,2\pi]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$$

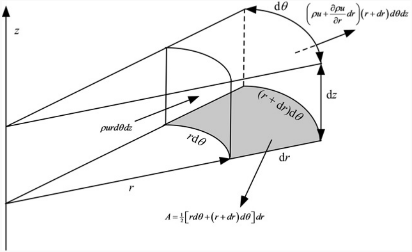
Teorema (Cambio de Variable Coordenadas Cilíndricas)

$$\iiint_E f(x,y,z)dV(x,y,z) = \iiint_{G^{-1}(E)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r dz dr d\theta.$$

Demostración:

- $DG = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $JG = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$

Coordenadas Cilíndricas



Ejemplo 1

Calcular $\iiint_E x\,dV$ donde E es la región en el primer octante, acotada abajo por $z = x^2 + y^2$ y arriba por el plano $z = 4$.

Solución:

- De la figura observamos que E se puede expresar como una región de tipo I.

Coordenadas Cilíndricas.

Solución:

- De la figura observamos que E se puede expresar como una región de tipo I.
- La sombra esta determinada por la región en el primer cuadrante donde $x^2 + y^2 \leq 4$

Coordenadas Cilíndricas.

Solución:

- De la figura observamos que E se puede expresar como una región de tipo I.
- La sombra esta determinada por la región en el primer cuadrante donde $x^2 + y^2 \leq 4$
- En coordenadas cilíndricas se tiene $G^{-1}(E) = \{(r, \theta, z) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2, r^2 \leq z \leq 4\}$

Solución:

- De la figura observamos que E se puede expresar como una región de tipo I.
- La sombra esta determinada por la región en el primer cuadrante donde $x^2 + y^2 \leq 4$
- En coordenadas cilíndricas se tiene $G^{-1}(E) = \{(r, \theta, z) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2, r^2 \leq z \leq 4\}$
- Por lo tanto, utilizando el teorema de cambio de variables se tiene

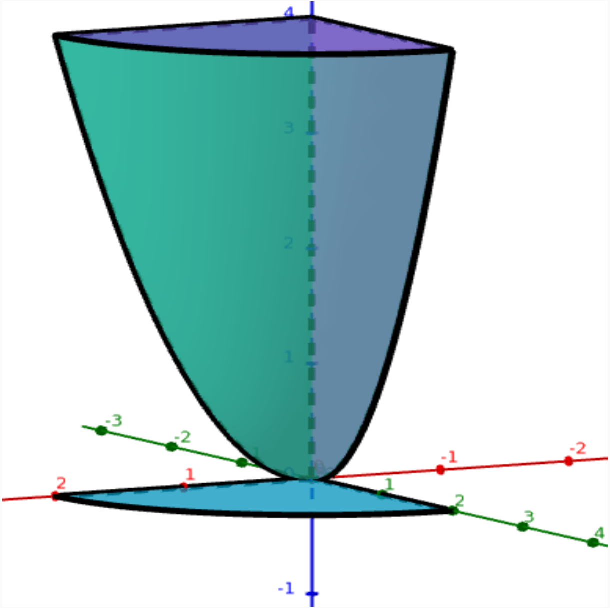
Coordenadas Cilíndricas.

Solución:

- De la figura observamos que E se puede expresar como una región de tipo I.
- La sombra esta determinada por la región en el primer cuadrante donde $x^2 + y^2 \leq 4$
- En coordenadas cilíndricas se tiene $G^{-1}(E) = \{(r, \theta, z) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2, r^2 \leq z \leq 4\}$
- Por lo tanto, utilizando el teorema de cambio de variables se tiene
- $\iiint\limits_E x dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \int_{r^2}^4 (r \cos\theta) r dz dr d\theta =$
  $\int_0^{\pi/2} \int_0^2 4r^2 \cos\theta - r^4 \cos\theta dr d\theta =$

Solución:

- De la figura observamos que E se puede expresar como una región de tipo I.
- La sombra esta determinada por la región en el primer cuadrante donde $x^2 + y^2 \leq 4$
- En coordenadas cilíndricas se tiene $G^{-1}(E) = \{(r, \theta, z) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2, r^2 \leq z \leq 4\}$
- Por lo tanto, utilizando el teorema de cambio de variables se tiene
- $\iiint\limits_E x dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \int_{r^2}^4 (r\cos\theta) r dz dr d\theta =$ $\int_0^{\pi/2} \int_0^2 4r^2\cos\theta - r^4\cos\theta dr d\theta =$
- $\int_0^{\pi/2} \frac{32\cos\theta}{3} - \frac{32\cos\theta}{5} d\theta = \frac{64}{15}$


4
3
2
1
-1
-3
-2
2
1
-1
-2
1
2
3
4

Ejemplo 2

Calcular $\iiint\limits_{E} z dV$ donde E es la región en acotada abajo por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y arriba por el paraboloide $z = 6 - x^2 - y^2$.

Solución:

- De la figura observamos que E se puede expresar como una región de tipo I.

Coordenadas Cilíndricas.

Solución:

- De la figura observamos que E se puede expresar como una región de tipo I.
- La sombra esta determinada por la región donde $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 6 - x^2 - y^2$

Coordenadas Cilíndricas.

Solución:

- De la figura observamos que E se puede expresar como una región de tipo I.
- La sombra esta determinada por la región donde $\sqrt{x^2+y^2} \leq 6 - x^2 - y^2$
- En cilíndricas se tiene $r \leq 6 - r^2 \implies r^2 + r - 6 \leq 0$

Coordenadas Cilíndricas.

Solución:

- De la figura observamos que E se puede expresar como una región de tipo I.
- La sombra esta determinada por la región donde $\sqrt{x^2+y^2} \leq 6 - x^2 - y^2$
- En cilíndricas se tiene $r \leq 6 - r^2 \implies r^2 + r - 6 \leq 0$
- $(r-3)(r+2) \leq 0 \implies r \leq 3$
- En coordenadas cilíndricas se tiene $G^{-1}(E) = \{(r,\theta,z) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 3, r \leq z \leq 6 - r^2\}$

Solución:

- Por lo tanto, utilizando el teorema de cambio de variables se tiene

Coordenadas Cilíndricas.

Solución:

- Por lo tanto, utilizando el teorema de cambio de variables se tiene
- $\iiint\limits_{E} z dV = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_r^{6-r^2} zr dz dr d\theta =$

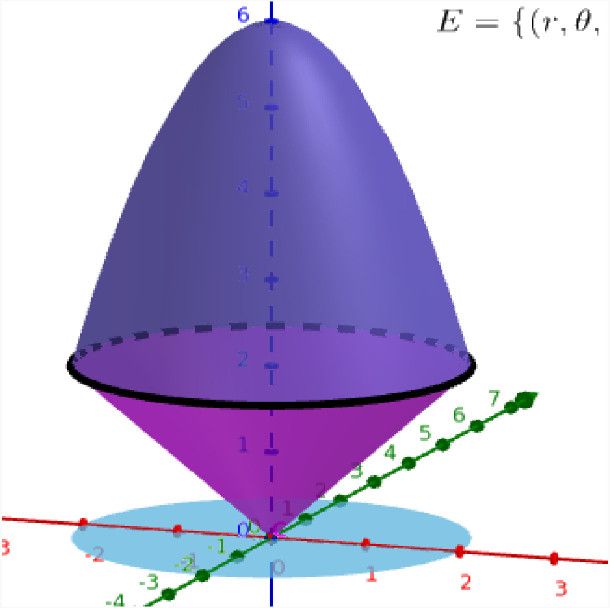
Solución:

- Por lo tanto, utilizando el teorema de cambio de variables se tiene
- $\iiint\limits_E z dV = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_r^{6-r^2} zr dz dr d\theta =$
- $\int_0^{2\pi} \int_0^3 \frac{r}{2}((6-r^2)^2 - r^2) dr d\theta =$

Solución:

- Por lo tanto, utilizando el teorema de cambio de variables se tiene
- $\iiint\limits_{E} z dV = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_r^{6-r^2} z r dz dr d\theta =$
- $\int_0^{2\pi} \int_0^3 \frac{r}{2}((6-r^2)^2 - r^2) dr d\theta =$
- $\pi \left(-\frac{(6-r^2)^3}{6} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^3 = \pi \left(-\frac{9}{2} - \frac{81}{4} + 36 \right) = \frac{43\pi}{4}$

Coordenadas Cilíndricas.



Momento de Inercia.

Ejemplo 3:

Calcular el momento de inercia $I = \iiint\limits_{C} (x^2 + y^2)\delta dV$ de un cilindro (solido) C de radio a y altura h con densidad constante alrededor del eje z.

Solución:

- Utilizando coordenadas cilíndricas se tiene que

Momento de Inercia.

Solución:

- Utilizando coordenadas cilíndricas se tiene que
- $C = \{(r, \theta, z) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a, 0 \leq z \leq h\}$

Momento de Inercia.

Solución:

- Utilizando coordenadas cilíndricas se tiene que
- $C = \{(r, \theta, z) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a, 0 \leq z \leq h\}$
- $I = \iiint_C (x^2 + y^2)\delta dV$ donde δ representa la densidad.
- Utilizando cambio de variables a coordenadas cilíndricas tenemos

Momento de Inercia.

Solución:

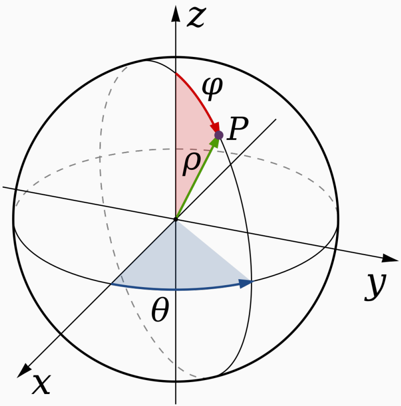
- Utilizando coordenadas cilíndricas se tiene que
- $C = \{(r,\theta,z) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a, 0 \leq z \leq h\}$
- $I = \iiint\limits_{C} (x^2 + y^2)\delta dV$ donde δ representa la densidad.
- Utilizando cambio de variables a coordenadas cilíndricas tenemos
- $I = \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{h} r^2\delta(rdzdrd\theta) = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} r^3\delta h drd\theta =$

Momento de Inercia.

Solución:

- Utilizando coordenadas cilíndricas se tiene que
- $C = \{(r, \theta, z) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a, 0 \leq z \leq h\}$
- $I = \iiint\limits_{C} (x^2 + y^2)\delta dV$ donde δ representa la densidad.
- Utilizando cambio de variables a coordenadas cilíndricas tenemos
- $I = \int_0^{2\pi} \int_0^{a} \int_0^{h} r^2 \delta (r dz dr d\theta) = \int_0^{2\pi} \int_0^{a} r^3 \delta h dr d\theta =$
- $\int_0^{2\pi} \frac{a^4 h\delta}{4} d\theta = \frac{(\pi a^2 h\delta)a^2}{2} = \frac{ma^2}{2}$

Coordenadas Esféricas



Coordenadas Esféricas.

Las coordenadas esféricas están dadas por la transformación

$$G\colon [0,\infty[\times[0,2\pi[\times[0,\pi[\to \mathbb{R}^3,$$

$$G(\rho,\theta,\varphi) = (\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)$$

Coordenadas Esféricas.

Las coordenadas esféricas están dadas por la transformación

$$G\colon [0,\infty[\times[0,2\pi[\times[0,\pi[\to \mathbb{R}^3,$$

$$G(\rho,\theta,\varphi) = (\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)$$

Teorema Cambio de Variable Coordenadas Esféricas

$$\iiint\limits_{G^{-1}(E)} f(x,y,z)dV =$$

$$\iiint\limits_{E} f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi d\rho d\theta d\varphi$$

Coordenadas Esféricas.

Demostración:

- $DG = \begin{bmatrix} \sin\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{bmatrix}$

Coordenadas Esféricas.

Demostración:

- $DG = \begin{bmatrix} \sin\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{bmatrix}$
- $JG = |\det DG| =$
  $|\cos\varphi(-\rho^2\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta - \rho^2\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\theta) +$

Coordenadas Esféricas.

Demostración:

- $DG = \begin{bmatrix} \sin\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{bmatrix}$
- $JG = |\det DG| =$
  $|\cos\varphi(-\rho^2\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta - \rho^2\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\theta)+$
- $-\rho\sin\varphi(\rho\sin^2\varphi\cos^2\theta + \rho\sin^2\varphi\sin^2\theta)| =$

Coordenadas Esféricas.

Demostración:

- $DG = \begin{bmatrix} \sin\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{bmatrix}$
- $JG = |\det DG| =$
  $|\cos\varphi(-\rho^2\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta - \rho^2\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\theta) +$
- $-\rho\sin\varphi(\rho\sin^2\varphi\cos^2\theta + \rho\sin^2\varphi\sin^2\theta)| =$
- $|-\rho^2\sin\varphi\cos^2\varphi - \rho^2\sin\varphi\sin^2\varphi| =$

Coordenadas Esféricas.

Demostración:

- $DG = \begin{bmatrix} \sin\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{bmatrix}$
- $JG = |\det DG| =$
  $|\cos\varphi(-\rho^2\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta - \rho^2\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\theta) +$
- $-\rho\sin\varphi(\rho\sin^2\varphi\cos^2\theta + \rho\sin^2\varphi\sin^2\theta)| =$
- $|-\rho^2\sin\varphi\cos^2\varphi - \rho^2\sin\varphi\sin^2\varphi| =$
- $|-\rho^2\sin\varphi| = \rho^2\sin\varphi.$

Momento de Inercia.

Ejemplo 4:

Calcular el momento de inercia de una bola B de radio a con densidad constante alrededor de un eje que pasa por su centro.

Solución:

- Utilizando coordenadas esféricas se tiene que

Momento de Inercia.

Solución:

- Utilizando coordenadas esféricas se tiene que
- $B = \{(\rho, \theta, \varphi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \rho \leq a\}$

Momento de Inercia.

Solución:

- Utilizando coordenadas esféricas se tiene que
- $B = \{(\rho, \theta, \varphi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \rho \leq a\}$
- $I = \iiint\limits_B (x^2 + y^2)\delta dV$ donde δ representa la densidad.
- Utilizando cambio de variables a coordenadas esféricas tenemos

Momento de Inercia.

Solución:

- Utilizando coordenadas esféricas se tiene que
- $B = \{(\rho, \theta, \varphi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \rho \leq a\}$
- $I = \iiint\limits_B (x^2 + y^2)\delta dV$ donde δ representa la densidad.
- Utilizando cambio de variables a coordenadas esféricas tenemos
- $I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{a} (\rho^2 \sin^2 \varphi)\delta(\rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta)$

Momento de Inercia.

Solución:

- Utilizando coordenadas esféricas se tiene que
- $B = \{(\rho,\theta,\varphi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \rho \leq a\}$
- $I = \iiint\limits_B (x^2+y^2)\delta dV$ donde δ representa la densidad.
- Utilizando cambio de variables a coordenadas esféricas tenemos
- $I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}(\rho^2\sin^2\varphi)\delta(\rho^2\sin\varphi d\rho d\varphi d\theta)$
- $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{a^5\delta\sin^3\varphi}{5} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{a^5\delta(1-\cos^2\varphi)\sin\varphi}{5}$

Momento de Inercia.

Solución:

- Utilizando coordenadas esféricas se tiene que
- $B = \{(\rho, \theta, \varphi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \rho \leq a\}$
- $I = \iiint\limits_B (x^2 + y^2)\delta dV$ donde δ representa la densidad.
- Utilizando cambio de variables a coordenadas esféricas tenemos
- $I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{a} (\rho^2 \sin^2 \varphi)\delta(\rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta)$
- $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{a^5 \delta \sin^3 \varphi}{5} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{a^5 \delta (1 - \cos^2 \varphi) \sin\varphi}{5}$
- $\frac{2\pi a^5 \delta}{5} \left(-\cos\varphi + \frac{\cos^3 \varphi}{3}\right)\Big|_0^{\pi}$

Momento de Inercia.

Solución:

- $\frac{2\pi a^5\delta}{5}\left(-\cos\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{8\pi a^5\delta}{15}$

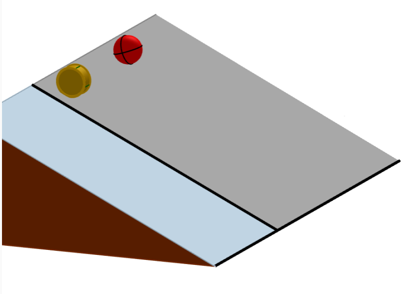
Momento de Inercia.

Solución:

- $\frac{2\pi a^5 \delta}{5}\left(-\cos\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{8\pi a^5 \delta}{15}$
- $I = \left(\frac{4\pi a^3 \delta}{3}\right)\left(\frac{2a^2}{5}\right) = \frac{2ma^2}{5}$

Momento de Inercia

Si hacemos rodar una bola y un cilindro en un plano inclinado, ¿Qué objeto llega primero?



Momento de Inercia

Notemos que el objeto tiene energia potencial $E_p = mgh$ la cual se transforma en energía cinética $\frac{1}{2}(mv^2 + I\omega^2)$. Utilizando la ley de conservación de la energía se tiene

$$mgh = \frac{1}{2}(mv^2 + I\omega^2) = \frac{1}{2}(mv^2 + I\omega^2)$$

La velocidad del cilindro es

$$mgh = \frac{1}{2}(mv^2 + I\omega^2) = \frac{1}{2}(mv^2 + \frac{1}{2}ma^2(\frac{v^2}{a^2}))$$

$$v = \sqrt{\frac{4gh}{3}}$$

Momento de Inercia

La velocidad de la esfera es

$$mgh = \frac{1}{2}(mv^2 + I\omega^2) = \frac{1}{2}(mv^2 + \frac{2}{5}ma^2(\frac{v^2}{a^2}))$$

$$v = \sqrt{\frac{10gh}{7}}$$