Prof.: A. González, F. Jara, M. Selva.

Listado 3: Operaciones entre subespacios vectoriales. Conjunto Generador.

Los problemas marcados con **(P)** serán resueltos en práctica.

1. Considere los siguientes subespacios vectoriales del espacio vectorial real $\mathbb{R}^4$.

$$U = \left\{(x,y,z,t)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4 \,:\, y+z+t=0\right\}, \qquad W = \left\{(x,y,z,t)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4 \,:\, x=t=0\right\}$$

   (a) Encuentre un conjunto generador para U y W respectivamente.

   (b) Encuentre un conjunto generador para $U+W$.

   (c) Determine $U \cap W$. ¿Están U y W en suma directa?

   (d) Escriba de dos formas distintas, si es posible, al vector $(0,1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ de $\mathbb{R}^4$ como suma de un vector de U y otro en W. De no ser posible, justifique por qué.

2. **(P)** Considere los siguientes subespacios vectoriales del espacio vectorial real $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

$$U = \{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \,:\, p(1)=0\}, \qquad W = \left\{ax+bx^2 \,:\, a,b \in \mathbb{R}\right\}$$

   (a) Encuentre un vector no nulo en cada espacio y represéntelo gráficamente.

   (b) Encuentre un conjunto generador para U y W respectivamente.

   (c) Encuentre un conjunto generador para $U+W$.

   (d) Determine $U \cap W$. ¿Están U y W en suma directa?

   (e) Escriba, de ser posible, a los siguientes vectores $p,q,r \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ como suma de un vector en U y otro en W: $p(x)=x^2-x+1$, $q(x)=x^2-1$, $r(x)=x^3-1$.

3. **(P)** Sea $V=\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, e.v. sobre $\mathbb{R}$. Considere:

$$U = \{p \in V \;:\; p(0)=0\}, \qquad W = \{p \in V \;:\; p(0)=0 \,\wedge\, p'(0)=0\}.$$

   Determine $U \cap W$, obtenga un generador de $U+W$ y responda ¿ es $U \cup W$ subespacio vectorial?.

4. Sean S y T los siguientes subespacios de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

$$S = \langle\left\{x^2-1, x^2+1\right\}\rangle, \qquad T = \left\{ax^2+bx+c \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \,:\, a+b=0 \,\wedge\, c=0\right\}$$

   (a) Obtenga un generador de $S+T$, ¿están en suma directa?

   (b) Escriba, de ser posible, a $2x^2-5x+6$ como suma de un vector en S y otro en T.

5. Exprese, si es posible, al vector v indicado como combinación lineal de los vectores del conjunto dado.

   (a) $v = (2,1,3)^{\mathrm{T}}$, $\left\{(0,2,1)^{\mathrm{T}}, (2,0,0)^{\mathrm{T}}, (2,1,2)^{\mathrm{T}}\right\}$ en el e.v. $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$.

   (b) **(P)** $v = (2,1,3)^{\mathrm{T}}$, $\left\{(1,0,0)^{\mathrm{T}}, (0,1,1)^{\mathrm{T}}, (1,1,0)^{\mathrm{T}}\right\}$ en el e.v. $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$.

   (c) $v = (0,0,i)^{\mathrm{T}}$, $\left\{(0,0,1)^{\mathrm{T}}, (1,1,0)^{\mathrm{T}}, (1,0,1)^{\mathrm{T}}\right\}$ en el e.v. $\mathbb{C}^3$ sobre $\mathbb{C}$.

   (d) $v(x) = x^2 + x - 1$, $\{x^2 - 1, x - 1, x^2 - x\}$ en el e.v. $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$.

   (e) **(P)** $v(x) = x^3 - 2x + 3$, $\{x, x^3 + 1, 1\}$ en el e.v. $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$.

   (f) $v(x) = i$, $\{1, x + x^2, x^2 + 1\}$ en el e.v. $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{C}$.

   (g) $v(x) = e^{-x}$, $\{e^x + e^{-x}, e^x - e^{-x}\}$ en el e.v. $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$.

6. Determine si el vector $u \in V$ dado pertenece a $\langle\, S \,\rangle$.

   (a) $u = (1,i)^{\mathrm{T}}$ donde $V = \mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$ y $S = \left\{(1,1)^{\mathrm{T}}, (-1,1)^{\mathrm{T}}, (0,1)^{\mathrm{T}}\right\}$.

   (b) $u = (1,i)^{\mathrm{T}}$ donde $V = \mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$ y $S = \left\{(1,1)^{\mathrm{T}}, (-1,1)^{\mathrm{T}}, (0,1)^{\mathrm{T}}\right\}$.

   (c) **(P)** $u = (1,i,i,-i)^{\mathrm{T}}$ donde $V = \mathbb{C}^4$ sobre $\mathbb{R}$ y $S = \left\{\left(i, -1, -\dfrac{i}{2}, 1\right)^{\mathrm{T}}, (-1,-i,1,i)^{\mathrm{T}}\right\}$.

   (d) **(P)** $u = (1,i,i,-i)^{\mathrm{T}}$ donde $V = \mathbb{C}^4$ sobre $\mathbb{C}$ y $S = \left\{\left(i, -1, -\dfrac{i}{2}, 1\right)^{\mathrm{T}}, (-1,-i,1,i)^{\mathrm{T}}\right\}$.

7. Obtenga un conjunto generador de los siguientes subespacios vectoriales.

   (a) **(P)** $U = \left\{(x,y)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^2 \ :\ x + \bar{y} = 0\right\}$, e.v. $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$.

   (b) $U = \left\{(x,y,z)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3 \ :\ x - y = 0\right\}$, e.v. $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$.

   (c) $U = \left\{(x,y,z)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3 \ :\ x - 2y + 2z = 0\right\}$, e.v. $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$.

   (d) $U = \left\{(a,b,-b,-a)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4 \ :\ a,b \in \mathbb{R}\right\}$, e.v. $\mathbb{R}^4$ sobre $\mathbb{R}$.

   (e) **(P)** $U = \{(a+1)x^2 + b(x+1) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \ :\ a,b \in \mathbb{R}\}$, e.v. $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$.

   (f) $U = \{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \ :\ p(2) = 0 \ \wedge\ p(0) = 0\}$, e.v. $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$.

   (g) **(P)** Sea $n \in \mathbb{N}$, $U = \left\{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n :\ z_1 = z_n\right\}$, e.v $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$.

   (h) $U = \left\{(z_1,z_2,z_3,z_4)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^4 \ :\ z_1 - z_2 = 0 \ \wedge\ 3z_3 - z_4 = 0\right\}$, e.v. $\mathbb{C}^4$ sobre $\mathbb{C}$.