Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

GAJ/EB/CF/CMR/AR

Cálculo III (521227)
Práctica 4

Regla de la Cadena.

1. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y sea $h(x,y) = f(\sqrt{x^2+y^2})$ para $(x,y) \neq (0,0)$. Sea $r = \sqrt{x^2+y^2}$, verificar
$$x\frac{\partial h}{\partial x} + y\frac{\partial h}{\partial y} = rf'(r).$$

2. Una función $f(x,y)$ es homogénea de grado n (donde n es un entero positivo)si $f(tx,ty) = t^n f(x,y)$ para todo t, x, y. Sea f una función homogénea de clase C^2, verificar que
   (a) $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf(x,y)$
   (b) $x^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) + 2xy\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) + y^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = n(n-1)f(x,y)$

Recta y Plano tangente a conjuntos de nivel.

3. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva de nivel en el punto $\vec{a}$.
   (a) $x^3 + y^3 = 9, \vec{a} = (1,2)$;
   (b) $3xy^2 + e^{xy} - \sin(\pi y) = 1, \vec{a} = (0,1)$;
   (c) $x^3 + xy^2 - y^4 = 1, \vec{a} = (1,-1)$.

4. Encontrar la ecuación del plano tangente a la superficie de nivel en el punto $\vec{a}$.
   (a) $x^2 + y^2 + z^2 = 5, \vec{a} = (1,0,2)$;
   (b) $x^3 + xz^2 + y^2 z + y^3 = 0, \vec{a} = (-1,1,0)$;
   (c) $e^{2x+z}\cos(3y) - xy + z = 3, \vec{a} = (-1,0,2)$.

Teorema de la Función Implícita.

5. Verificar que en los siguientes casos la ecuación $F(\vec{x}) = 0$ define a $\vec{y}$ localmente como una función de clase C^1, $g(\vec{x}) = \vec{y}$ alrededor del punto $\vec{a} = (\vec{x}_0, \vec{y}_0)$, y calcular $Dg(\vec{x}_0)$.
   (a) $F(x,y) = y^2 - x^3 - 2\sin(\pi(x-y))$, en el punto $\vec{x}_0 = 1, \vec{y}_0 = -1$.
   (b) $F(x_1,x_2,y) = e^{x_1 y} + y^2 \arctan(x_2) - (1+\pi/4)$, en el punto $\vec{x}_0 = (0,1), \vec{y}_0 = 1$.
   (c) $F(x,y_1,y_2) = (x^2 - y_1^2 - y_2^2 - 2, x - y_1 + y_2 - 2)$, en el punto $\vec{x}_0 = 2, \vec{y}_0 = (1,1)$.
   (d) $F(x_0,x_1,y_1,y_2) = (x_1^2 - x_2^2 - y_1^3 + y_2^2 + 4, 2x_1x_2 + x_2^2 - 2y_1^2 + 3y_2^4 + 8)$, en el punto $\vec{x}_0 = (2,-1), \vec{y}_0 = (2,1)$.

6. Demostrar que el sistema de ecuaciones $x^2y + xy^2 + t^2 - 1 = 0$ y $x^2 + y^2 - 2yt = 0$ define x e y implícitamente como una función de clase C^1 en términos de t cerca del punto $(-1,1,1)$. Encontrar la recta tangente a la curva (definida por el sistema de ecuaciones) en este punto.

Teorema de la Función Inversa.

7. Utilizar el teorema de la función inversa, para determinar en que puntos $\vec{x}_0$ la función f tiene una inversa (local) g de clase C^1, y calcular $Dg(f(\vec{x}_0))$.

   (a) $f(x, y) = (x^2 - y^2, xy)$.

   (b) $f(x, y) = (x + e^y, y + e^x)$.

   (c) $f(x, y, z) = (x + y + z, xy + xz + yz, xyz)$.

8. Sea $U = \{(u, v) \colon 0 < v < u\}$, y definimos $f \colon U \to \mathbb{R}^2$ por $f(u, v) = (u + v, uv)$.

   (a) Demostrar que f tiene una inversa global g. Determinar el dominio de g y encontrar una fórmula explicita para g.

   (b) Calcular Dg directamente y por medio del Teorema de la función inversa. Comparar sus respuestas.