Listado 1: Vectores de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Rectas y planos.

Los problemas marcados con **(P)** serán resueltos en práctica.

1. Sean $\vec{x} = (-1, 2)^{\mathrm{T}}$, $\vec{y} = (3, 1, -5)^{\mathrm{T}}$, $\vec{z} = (7, -3)^{\mathrm{T}}$ y $\vec{w} = \left(2, 4, \frac{16}{3}\right)^{\mathrm{T}}$. Realice, si es posible, las siguientes operaciones entre ellos.

   (a) **(P)** $\vec{x} + \vec{y}$,
   (b) $\vec{x} + \vec{z}$,
   (c) $4\vec{w}$,
   (d) **(P)** $\vec{y} - \vec{w}$,
   (e) $5\vec{x} + 2\vec{z} - \vec{w}$,
   (f) $\frac{1}{3}(\vec{y} + \vec{w})$.

2. Considere los puntos $A = (-1, 0, 1)$, $B = (0, 1, 2)$ y $C = (1, 1, 1)$ y los vectores $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$ y $\vec{c} = \vec{OC}$, donde $O = (0,\ 0,\ 0)$. Determine

   (a) $\vec{AB}$ y $\vec{BC}$,
   (b) $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{c}\|$, $\left\|2\vec{a} - \vec{b}\right\|$,
   (c) distancia entre $\vec{AB}$ y $\vec{a}$.

   Además describa el conjunto de los vectores $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ tales que

   (a) **(P)** $\vec{x}$ es paralelo a $\vec{c}$ y $\|\vec{x}\| = 1$,
   (b) $\vec{x}$ es paralelo a $\vec{b}$ y la distancia de $\vec{x}$ a $\vec{c}$ es igual a $\sqrt{2}$.

3. En cada caso, encuentre x tal que la igualdad se cumpla, y determine si x es elemento de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$.

   (a) **(P)** $(2, 3)^{\mathrm{T}} + 3x = (-5, 7)^{\mathrm{T}}$,
   (b) **(P)** $x(1, -3)^{\mathrm{T}} = (0, 6)^{\mathrm{T}} + (4, -18)^{\mathrm{T}}$,
   (c) $(3, -3, 1)^{\mathrm{T}} + x = (5, -3, 2)^{\mathrm{T}}$,
   (d) $(1 - 3\sqrt{2}, 3)^{\mathrm{T}} = x - (3\sqrt{2}, 4 - \sqrt{8})^{\mathrm{T}}$.

4. Para cada uno de los tríos de vectores v_1, v_2, v_2 de vectores en $\mathbb{R}^2$ presentados, determine escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tales que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = (0, 0)^{\mathrm{T}}.$$

   (a)
$$v_1 = (1, 0)^{\mathrm{T}} \quad v_2 = (0, 1)^{\mathrm{T}} \quad v_3 = (1, 1)^{\mathrm{T}}$$

   (b)
$$v_1 = (2, -2)^{\mathrm{T}} \quad v_2 = (0, -3)^{\mathrm{T}} \quad v_3 = (-1, 0)^{\mathrm{T}}$$

   (c)
$$v_1 = (2, -2)^{\mathrm{T}} \quad v_2 = (-4, 4)^{\mathrm{T}} \quad v_3 = (0, 0)^{\mathrm{T}}$$

5. **(P)** Sea $\mathcal{L}_1$ la siguiente recta

$$\mathcal{L}_1 : \quad \frac{x-5}{3} = -\frac{y}{6} = \frac{z-6}{5}.$$

   (a) Determine un vector director para $\mathcal{L}_1$.

   (b) ¿Pertenece $(2,4,7)$ a $\mathcal{L}_1$?

   (c) Determine la ecuación de la recta $\mathcal{L}_2$ paralela a $\mathcal{L}_1$ que contiene al punto $Q = (2,\, 4,\, 7)$.

6. Considere el siguiente par de rectas:

$$\mathcal{L}_1 : x - 4 = \frac{2-y}{3} = \frac{z+3}{5}, \qquad \mathcal{L}_2 : \frac{x-11}{3} = \frac{y+9}{-4} = \frac{z+3}{-3}.$$

   Determine si son paralelas y si se intersectan en un punto.

7. **(P)** Considere el siguiente par de rectas:

$$\mathcal{L}_1 : (x,y,z) = (11,-3,4) + \lambda(3,-1,3), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

$$\mathcal{L}_2 : P \in \mathbb{R}^3 \text{ tales que } \vec{AP} \text{ es paralelo a } \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ y } A = (6,-2,-15).$$

   Determine si son paralelas y si se intersectan en un punto.

8. Determine qué puntos (x,y,z) pertenecen al plano que contiene a $(0,1,2)$ y del que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ son vectores directores.

9. **(P)** Considere los puntos $A = (2,1,2)$, $B = (0,-1,1)$ y $C = (-1,1,5)$.

   (a) Muestre que ellos nos son colineales, es decir, no están ubicados sobre la misma recta.

   (b) Encuentre qué puntos (x,y,z) pertenecen al plano que contiene a estos tres puntos.