Solución Parcial

Listado 8 : Matrices

6. Sea $C \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ la matriz triangular superior que satisface que para cada par de valores $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$C(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{si } 1 \leq i \leq 4 \text{ y } j = i, \\ 1; & \text{si } 1 \leq i \leq 3 \text{ y } j = i+1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Determine $N = C - I$ (I es la matriz identidad de orden 4).

(b) Determine N^i, $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

(c) Muestre que $C = N + I$ es invertible y

$$C^{-1} = I - N + N^2 - N^3.$$

Solución :

Como $C(i,j) = 1$ si $i = j \wedge 1 \leq i \leq 4$, entonces $C(1,1) = C(2,2) = C(3,3) = C(4,4) = 1$.
$C(i,j) = 1$ si $1 \leq i \leq 3 \wedge j = i+1$, entonces $C(1,2) = C(2,3) = C(3,4) = 1$.
Los elementos de C no considerados anteriormente, toman el valor 0.

Así $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) $N = C - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ //

b) $N^0 = I$

$N^1 = N$

$$N^2 = N \cdot N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^3 = N^2 \cdot N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N^4 = N^3 \cdot N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Theta_4$$

c) Consideremos $H = I - N + N^2 - N^3$ y obtengamos CH y HC

$$
\begin{aligned}
CH &= (N+I)\cdot(I - N + N^2 - N^3) \\
&= N(I - N + N^2 - N^3) + I(I - N + N^2 - N^3) \\
&= \cancel{N} - \cancel{N^2} + \cancel{N^3} - N^4 + I - \cancel{N} + \cancel{N^2} - \cancel{N^3} \\
&= I - N^4 \\
&= I - \Theta \\
&= I
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
HC &= (I - N + N^2 - N^3)(N + I) \\
&= (I - N + N^2 - N^3)N + (I - N + N^2 - N^3)\cdot I \\
&= \cancel{N} - \cancel{N^2} + \cancel{N^3} - N^4 + I - \cancel{N} + \cancel{N^2} - \cancel{N^3} \\
&= I - N^4 \\
&= I - \Theta \\
&= I
\end{aligned}
$$

Por lo tanto H es la matriz inversa de C. Así pues C es invertible y

$$C^{-1} = I - N + N^2 - N^3.$$