

ELECTROMAGNETISMO

543201

Leonardo Palma

Contenido

1. Introducción.....	1
1.1 Operaciones con vectores	1
1.2 Sistemas de Coordenadas.....	3
1.2.1 Sistema de Coordenadas cartesiano	3
1.2.2 Sistema de Coordenadas cilíndrico	4
1.2.3 Sistema de coordenadas esférico.....	5
2. Electroestática	7
2.1 Carga y densidad de carga.....	7
2.1.1 Carga puntual.....	7
2.1.2 Distribución lineal de carga.....	7
2.1.3 Distribución de carga superficial.....	8
2.1.4 Distribución de carga volumétrica.....	8
2.2 Ley de Coulomb	10
2.3 Intensidad de Campo Eléctrico.....	14
2.3.1 Campo eléctrico de cargas puntuales.....	17
2.3.2 Campo Eléctrico de distribuciones de carga	20
2.3.2.1 Campo Eléctrico de una distribución lineal de carga.....	20
2.3.2.2 Campo Eléctrico de una distribución superficial de carga	22
2.3.2.2 Campo Eléctrico de una distribución volumétrica de carga.....	24
2.4 Densidad de flujo eléctrico	25
2.5 Ley de Gauss	27
2.6 Potencial Eléctrico	35
2.6.1 Potencial Eléctrico debido a cargas puntuales.....	36
2.6.2 Potencial Eléctrico debido a distribuciones de carga	40
2.6.3 Calculo de Campo Eléctrico a partir del Potencial Eléctrico	44
2.7 Materiales en el Campo Eléctrico	45
2.7.1 Materiales Conductores.....	45
2.7.2 Materiales Dieléctricos	46

2.8 Capacidad	51
2.8.1 Condensador de placas paralelas	52
2.8.2 Interconexión de condensadores.....	56
2.9 Energía en el campo electrostático	58
2.9.1 Energía en el campo electrostático considerando variables del campo	62
2.10 Problemas de valor de borde, solución del campo eléctrico.....	64
2.10.1 Ecuación de Poisson para el campo eléctrico.....	64
2.10.2 Ecuación de Laplace para el campo eléctrico	65
2.10.3 Métodos de solución.....	66
2.10.3.3 Método de Separación de Variables	76
3. Corriente Eléctrica Estacionaria.....	81
3.1 Conservación de carga	81
3.2 Cargas en movimiento en el campo eléctrico	81
3.2.1 Corriente de convección	81
3.2.2 Corriente y densidad de corriente de conducción.....	84
3.3 Ley de Ohm	85
3.4 Resistencia equivalente	87
3.4.1 Conexión de resistencias en serie	87
3.4.1 Conexión de resistencias en paralelo	88
3.5 Disipación de potencia y Ley de Joule.....	92
4. Campo magnético estacionario	97
4.1 Ley de Biort-Savart.....	98
4.2 Aplicación de la ley de Biort-Savart a corrientes distribuidas	102
4.3 Ley de Ampere	105
4.4 Flujo Magnético	111
4.5 Postulados del campo magnético estacionario	112
4.6 Funciones potenciales.....	113
4.6.1 Potencial vectorial magnético	113
4.6.1 Potencial escalar magnético	114
4.7 Propiedades magnéticas de los materiales	116
4.7.1 Magnetización	116
4.7.2 Permeabilidad relativa	121
4.8 Comportamiento de materiales magnéticos.....	122

4.8.1 Materiales diamagnéticos	122
4.8.2 Materiales paramagnéticos.....	123
4.8.3 Materiales ferromagnéticos	123
4.9 Inductancia	125
4.10 Energía en el campo magnético	129
4.11 Circuitos Magnéticos	132
4.12 Fuerza en el campo magnético	137
5. Campos eléctrico y magnético variable en el tiempo.....	141
5.1 Ley de Faraday	141
5.2 Ley de Lenz.....	142
5.3 Fuerza electromotriz inducida por el movimiento	143
5.4 Fuerza electromotriz por efecto transformador	147
5.5 Fuerza electromotriz combinada.....	148
5.6 Corrientes Eddy	150
5.7 Generador de corriente alterna	152
5.8 Transformador Ideal	156
6. Ecuaciones de Maxwell.....	159
6.1 Ecuaciones de Maxwell en forma puntual	160
6.2 Ecuaciones de Maxwell en forma integral.....	162

1. Introducción

Dado que el campo electromagnético es un campo vectorial es necesario antes de avocarse al estudio de las leyes que lo rigen el recordar conceptos básicos relacionados con los vectores y operaciones entre ellos. Asimismo, es conveniente abordar los sistemas de coordenadas, que, por sus características de simetría, son comúnmente utilizados para resolver problemas relacionados con el campo electromagnético.

1.1 Operaciones con vectores

Las cantidades vectoriales son representadas generalmente por una magnitud y una dirección de acuerdo con:

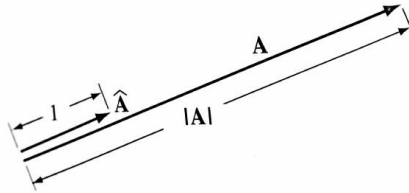


Figura 1 Definición de vector

$$\vec{A} = |A| \hat{u}_a$$

donde $|A|$ es la magnitud y \hat{u}_a corresponde a un vector unitario que define la dirección del vector en el espacio.

La suma de vectores se realiza de acuerdo con

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

$$\vec{C} = (A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}) + (B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z})$$

$$\vec{C} = (A_x + B_x) \hat{x} + (A_y + B_y) \hat{y} + (A_z + B_z) \hat{z}$$

$$\vec{C} = C_x \hat{x} + C_y \hat{y} + C_z \hat{z}$$

Por otro lado, la multiplicación puede darse de varias formas, siendo una de ellas la multiplicación entre un escalar y un vector; en cuyo caso se tiene:

$$k \cdot \vec{A} = k(A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}) = kA_x \hat{x} + kA_y \hat{y} + kA_z \hat{z}$$

El producto entre dos vectores puede darse en forma de producto escalar (producto punto) o de producto vectorial (producto cruz); los que operan de según sigue:

El producto escalar está definido por

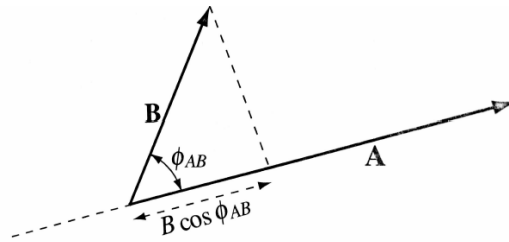


Figura 2 Definición de producto escalar

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos(\theta_{AB}) = A_x B_x \hat{x} + A_y B_y \hat{y} + A_z B_z \hat{z}$$

y se caracteriza por ser conmutativo, es decir

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

Asimismo, este tipo de producto tiene la propiedad de ser distributivo

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

Por otro lado, en el caso del producto vectorial se tiene:

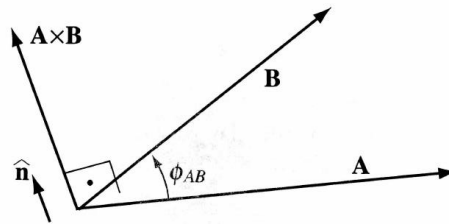


Figura 3 Definición de producto vectorial

$$\vec{A} \times \vec{B} = \hat{n} |AB \sin(\theta_{ab})|$$

donde \hat{n} corresponde a un vector unitario normal al plano generado por \vec{A} y \vec{B}

Esto se traduce en la siguiente expresión en términos de las componentes de los vectores

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{x} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{y} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{z}$$

Alternativamente este producto puede obtenerse calculando el determinante de la siguiente matriz de 3x3:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \det \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{bmatrix}$$

En cuanto a las propiedades del producto cruz se tiene que este no es conmutativo, es decir:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

Por otro lado, el producto cruz es distributivo cumpliéndose que:

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

1.2 Sistemas de Coordenadas

En la práctica para modelar cualquier tipo de situación que se manifieste en el espacio es necesario contar con un sistema de referencia. Estos sistemas de referencia pueden ser definidos de varias formas, dependiendo principalmente de la geometría y simetría del problema. Generalmente para las situaciones relacionadas con los campos electromagnéticos se utilizan preferentemente tres tipos de marcos de referencia, el cartesiano, cilíndrico y esférico; los que se detallan más adelante.

1.2.1 Sistema de Coordenadas cartesiano

Este sistema de coordenadas considera tres ejes, los que son perpendiculares entre sí permitiendo ubicar cualquier punto en el espacio como la conjunción de tres coordenadas.

$$A(x, y, z) = A_x(x, y, z)\hat{x} + A_y(x, y, z)\hat{y} + A_z(x, y, z)\hat{z}$$

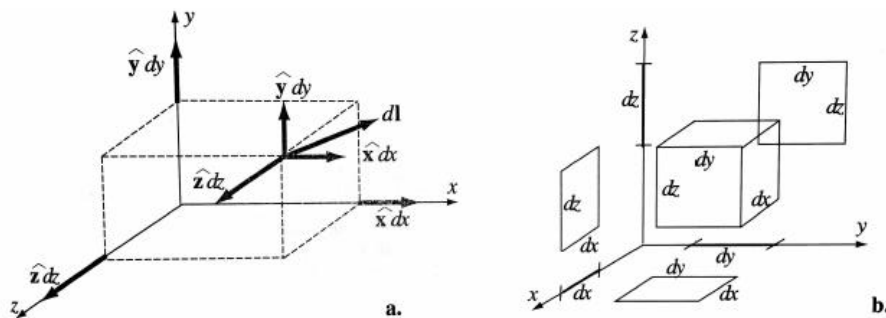


Figura 4 Sistema de coordenadas cartesiano

El cálculo de diferentes cantidades definidas en este sistema de coordenadas se puede realizar por medio de integrales de línea, de superficie o de volumen; para lo cual es necesario conocer las definiciones de los elementos diferenciales correspondientes.

$$dl = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z} \quad (\text{Elemento diferencial de largo})$$

$$dS_x = dydz / dS_y = dx dz / dS_z = dx dy \quad (\text{Elementos diferenciales de superficie})$$

$$dv = dx dy dz \quad (\text{Elemento diferencial de volumen})$$

1.2.2 Sistema de Coordenadas cilíndrico

El sistema de coordenadas cilíndrico describe de buena forma aquellas estructuras que tengan simetría en torno a un eje central tales como cilindros y discos. Este sistema de coordenadas también tiene tres ejes coordenados los que se muestran en la figura 5 a continuación.

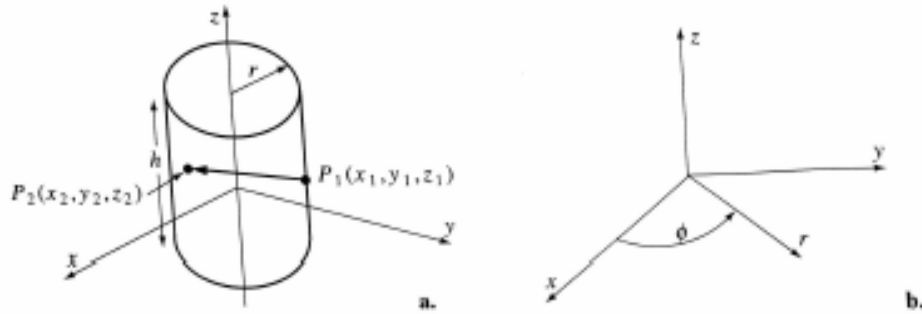


Figura 5 Sistema de coordenadas cilíndrico

Así los vectores en un espacio definido por un sistema de coordenadas cilíndrico son expresados de acuerdo con:

$$\vec{A} = A_r(r, \phi, z)\hat{r} + A_\phi(r, \phi, z)\hat{\phi} + A_z(r, \phi, z)\hat{z}$$

En el caso de este sistema de coordenadas los elementos diferenciales que describen líneas, superficies y volúmenes están dados por:

$$dl = dr \hat{r} + r d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z} \quad (\text{Elemento diferencial de largo})$$

$$dS_r = r d\phi dz / dS_\phi = dr dz / dS_z = r dr d\phi \quad (\text{Elementos diferenciales de superficie})$$

$$dv = r dr d\phi dz \quad (\text{Elemento diferencial de volumen})$$

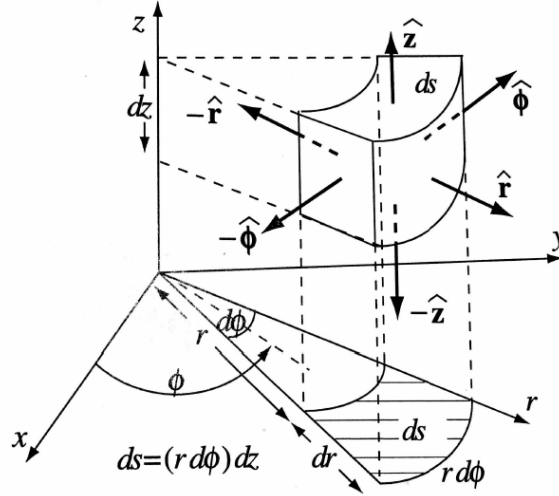


Figura 6 Elementos diferenciales en un sistema de coordenadas cilíndrico

El cambio de un sistema de coordenadas cartesiano a uno cilíndrico puede hacerse por medio de las siguientes ecuaciones

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad z = z$$

1.2.3 Sistema de coordenadas esférico

Este sistema de coordenadas está definido en función de los ejes mostrados en la figura 7. El sistema de coordenadas esférico es generalmente útil en situaciones donde se tenga una simetría esférica.

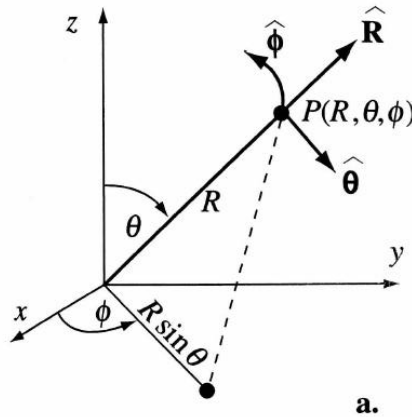


Figura 7 Sistema de coordenadas esférico

En este caso los vectores en el espacio son definidos de acuerdo con:

$$\vec{A} = A_r(r, \phi, \theta) \hat{r} + A_\phi(r, \phi, \theta) \hat{\phi} + A_\theta(r, \phi, \theta) \hat{\theta}$$

En este sistema de coordenadas los elementos diferenciales necesarios para calcular una longitud, superficie o volumen están definidos por:

$$dl = dr \hat{r} + r \sin(\theta) d\phi \hat{\phi} + r d\theta \hat{\theta} \quad (\text{Elemento diferencial de largo})$$

$$dS_r = r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi / dS_\theta = r \sin(\theta) dr d\phi / dS_\phi = r dr d\theta$$

(Elementos diferenciales de superficie)

$$dv = r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi \quad (\text{Elemento diferencial de volumen})$$

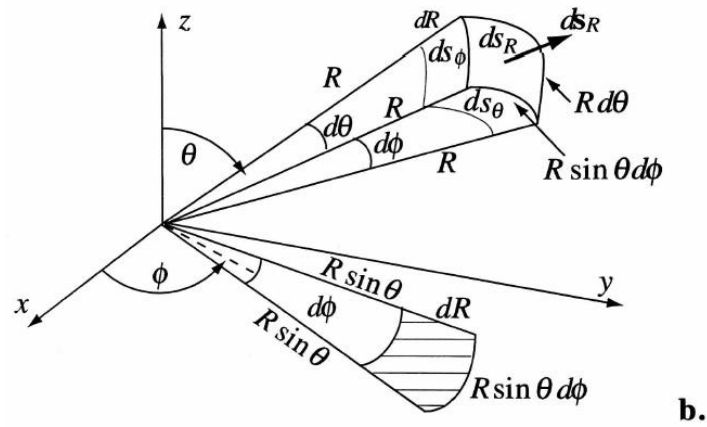


Figura 8 Elementos diferenciales en un sistema esférico

El cambio de coordenadas desde un sistema cartesiano a uno esférico puede realizarse por medio de las siguientes ecuaciones.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

2. Electroestática

2.1 Carga y densidad de carga

En la naturaleza la carga eléctrica fundamental es la de un electrón. La unidad de carga es el Coulomb y la carga de un solo electrón es de -1.6019×10^{-19} [C]. Esta cantidad es considerada como la carga más pequeña existente y todas las demás cargas son entonces múltiplos de ella. La carga puede ser positiva o negativa dependiendo de la presencia o ausencia de electrones.

Ahora bien, las cargas pueden ser ordenadas de diferentes formas constituyendo entonces distribuciones de carga.

2.1.1 Carga puntual

Se entiende por una carga puntual la acumulación de cargas en un volumen muy pequeño de forma que puede considerarse para efectos de análisis que se trata de solo una sola carga ubicada en un punto específico del espacio.

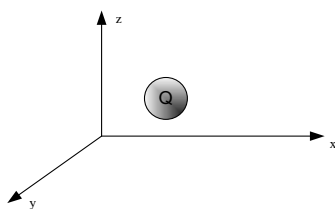


Figura 9 Carga puntual en el espacio

2.1.2 Distribución lineal de carga

Una distribución lineal de carga corresponde al ordenamiento de varias cargas a lo largo de una línea, como por ejemplo la acumulación de cargas en un alambre muy delgado. En efecto, si se tiene una carga Δq a lo largo de una línea de largo Δl la densidad de carga lineal estará dada por:

$$\rho_l = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl} \left[\frac{c}{m} \right]$$

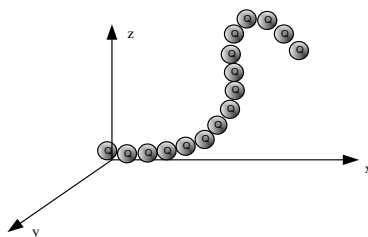


Figura 10 Distribución lineal de cargas en el espacio

2.1.3 Distribución de carga superficial

Una distribución de carga superficial corresponde a un conjunto de cargas dispuestas sobre la superficie de un cuerpo, tal como una hoja de papel o una esfera. Considerando que la carga en la superficie es Δq y el área cubierta por ella es Δs , se tiene que la densidad de carga superficial es:

$$\rho_s = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS} \left[\frac{c}{m^2} \right]$$

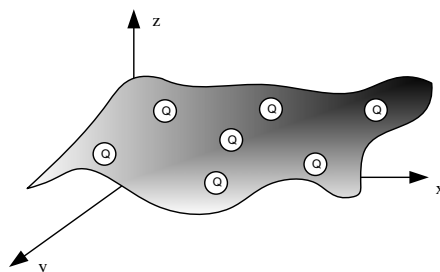


Figura 11 Distribución de cargas sobre una superficie en el espacio

2.1.4 Distribución de carga volumétrica

Una distribución de carga volumétrica corresponde a un conjunto de cargas distribuidas dentro de un volumen de material. Si se considera que la carga dentro del volumen Δv es Δq se tiene que la densidad de carga volumétrica está definida por:

$$\rho_v = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta v} = \frac{dq}{dv} \left[\frac{c}{m^3} \right]$$

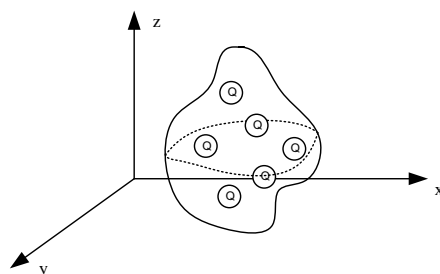


Figura 12 Distribución de cargas dentro de un volumen en el espacio

Ejemplo #1

Una carga está distribuida uniformemente en las siguientes estructuras de forma que la carga total en ellas es de $Q=10^{-9}$ [C].

- a) Un alambre delgado de l [m] de longitud
- b) Un cable de radio $r = 10$ [mm] y l [m] de largo, asumiendo que la carga se distribuye uniformemente solo sobre la superficie del cable y no en sus extremos.
- c) Un cilindro no conductor de radio $r = 10$ [mm] y l [m] de largo, asumiendo que la carga distribuida uniformemente dentro del volumen.

Solución

$$a) \rho_l = \frac{Q}{l} = \frac{10^{-9}}{1} = 10^{-9} \left[\frac{C}{m} \right]$$

$$b) \rho_s = \frac{Q}{S} = \frac{10^{-9}}{2\pi r l} = \frac{10^{-9}}{2\pi(10 \cdot 10^{-3})1} = 1.591 \cdot 10^{-8} \left[\frac{C}{m^2} \right]$$

$$c) \rho_v = \frac{Q}{V} = \frac{10^{-9}}{\pi r^2 l} = \frac{10^{-9}}{\pi(10 \cdot 10^{-3})^2 1} = 1.591 \cdot 10^{-8} \left[\frac{C}{m^3} \right]$$

Ejemplo #2

Una carga está distribuida dentro de un volumen esférico. La carga está dispuesta en forma no uniforme de modo que $\rho_v = \rho_o R \left[\frac{C}{m^3} \right]$; donde $\rho_o = 10^{-7}$ y R es la distancia medida desde el centro del volumen esférico. Calcular la carga total contenida dentro de una esfera de radio $R_o = 10$ [m].

Solución

Para calcular la carga total contenida dentro del volumen esférico de radio dado es necesario integrar la densidad de carga dentro del volumen en cuestión. Estableciendo un sistema de coordenadas esférico centrado en el centro del volumen se tiene que:

$$\begin{aligned} Q &= \int_v \rho_v dv = \int_0^{10} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho_o R^2 \sin \theta dR d\theta d\phi \\ &= \rho_o \int_0^{10} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^3 \sin \theta dR d\theta d\phi \\ &= 2\pi \rho_o \int_0^{10} \int_0^\pi R^3 \sin \theta dR d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi\rho_o \int_0^{10} R^3 (-\cos\theta)|_0^\pi dR \\
&= 4\pi\rho_o \int_0^{10} R^3 dR \\
&= 4\pi\rho_o \frac{R^4}{4} \Big|_0^{10} = \pi\rho_o 10^4 = 3.14159 \times 10^{-3} [C]
\end{aligned}$$

2.2 Ley de Coulomb

La ley de Coulomb describe cuantitativamente la fuerza que resulta de la interacción de dos cargas en el espacio. Esta ley fue derivada a partir de experiencias experimentales realizadas por Charles Agustín de Coulomb y esta enunciada según sigue:

“La fuerza entre dos cargas puntuales Q_1 y Q_2 es proporcional al producto de las dos cargas, inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas, y direccionada a lo largo de la línea que las conecta.”

En términos matemáticos dicha ley es representada por la siguiente ecuación:

$$\vec{F} = k \frac{Q_1 Q_2}{|R|^2} \hat{r} [N]$$

donde, k es una constante de proporcionalidad que depende del medio donde se produzca la interacción entre las cargas. Esta constante está dada por:

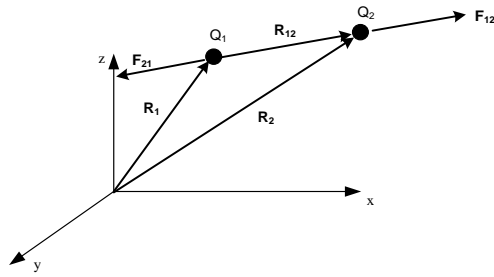
$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon}$$

En que ϵ corresponde a la constante dieléctrica o permitividad y es una característica del medio. En particular para el espacio libre la permitividad tiene un valor de $\epsilon_o = 8.854 \times 10^{-12} [\frac{F}{m}]$.

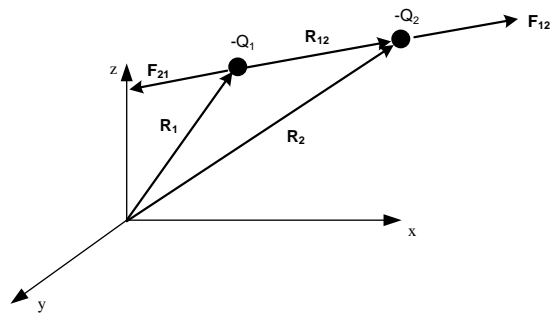
Luego la ley de Coulomb queda expresada como:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1 Q_2}{|R|^2} \hat{r} [N]$$

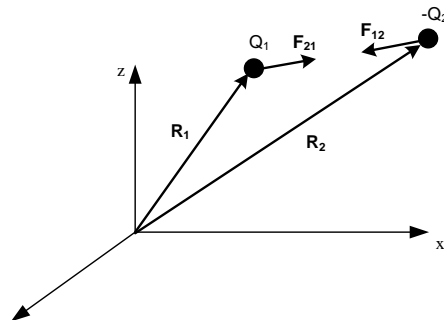
En la figura 13 se muestran diferentes interacciones entre pares de cargas de distintas polaridades y la fuerza resultante en cada caso al aplicar la ley de Coulomb.



a



b



c

Figura 13 Interacción entre cargas a. dos cargas positivas, b dos cargas negativas, c una carga positiva y otra negativa

Ejemplo #3

Dos cargas puntuales Q_1 y Q_2 están ubicadas en los puntos $P_1 = (1, 1, 0)$ y $P_2 = (2, 3, 0)$ respectivamente.

a) Calcular la fuerza en Q_1 y Q_2 si $Q_1 = 2 \times 10^{-9} [C]$ y $Q_2 = 4 \times 10^{-9} [C]$

b) Calcular la fuerza en Q_1 y Q_2 si $Q_1 = 2 \times 10^{-9} [C]$ y $Q_2 = -4 \times 10^{-9} [C]$

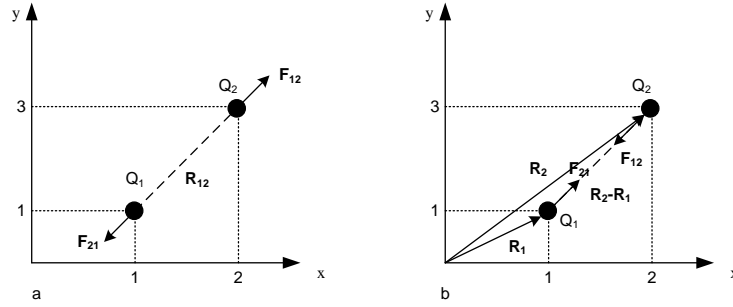


Figura 14 Cálculo de fuerza entre Q_1 y Q_2

Solución

a) De la figura 14 tenemos que el vector que une los puntos P_1 y P_2 está dado por:

$$\vec{R}_{12} = P_2 - P_1 = (2 - 1)\hat{x} + (3 - 1)\hat{y} + (0 - 0)\hat{z} = \hat{x} + 2\hat{y}$$

Entonces su norma es

$$|\vec{R}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} [m]$$

Por lo tanto, el vector unitario correspondiente está dado por

$$\hat{r}_{12} = \frac{\hat{x} + 2\hat{y}}{\sqrt{5}}$$

Así la fuerza en Q_1 debido a Q_2 es:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{12} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{R}|^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{5} \frac{\hat{x} + 2\hat{y}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2 \times 10^{-9} * 4 \times 10^{-9}}{5} \frac{\hat{x} + 2\hat{y}}{\sqrt{5}} \\ &= 6.431 \times 10^{-9} (\hat{x} + 2\hat{y}) [N]\end{aligned}$$

Análogamente la fuerza en Q_2 debido a Q_1 es

$$\begin{aligned}\vec{F}_{21} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{R}|^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{5} \frac{-\hat{x} - 2\hat{y}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2 \times 10^{-9} * 4 \times 10^{-9}}{5} \frac{-\hat{x} - 2\hat{y}}{\sqrt{5}} \\ &= 6.431 \times 10^{-9} (-\hat{x} - 2\hat{y}) [N]\end{aligned}$$

b) En este caso tenemos que las cargas están ubicadas en las mismas posiciones que en el primer caso, pero la polaridad de la carga Q_2 es invertida. Luego se tiene que las fuerzas resultantes son:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{12} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{R}|^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{5} \frac{\hat{x} + 2\hat{y}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2 \times 10^{-9} * -4 \times 10^{-9}}{5} \frac{\hat{x} + 2\hat{y}}{\sqrt{5}} \\ &= -6.431 \times 10^{-9} (\hat{x} + 2\hat{y}) [N]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{F}_{21} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{|R|^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{5} \frac{-\hat{x} - 2\hat{y}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2 \times 10^{-9} * -4 \times 10^{-9}}{5} \frac{-\hat{x} - 2\hat{y}}{\sqrt{5}} \\ &= -6.431 \times 10^{-9} (-\hat{x} - 2\hat{y}) [N]\end{aligned}$$

Ejemplo #4

Considerando el siguiente modelo para un átomo de helio; el que está compuesto por un núcleo de dos protones y posee dos electrones orbitando en torno a su centro. Si se asume que los electrones son estacionarios como se muestra en la figura y que los protones se ubican en un solo punto; y considerando que $m_e = 9.107 \times 10^{-31} \text{ [kg]}$, $R_e = 0.5 \times 10^{-10} \text{ [m]}$, $q_e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ [C]}$.

- Calcular la fuerza que aparece entre los dos electrones y la fuerza que aparece entre los dos protones y un electrón.
- Despreciando todas las otras fuerzas dentro del átomo; ¿Cuál debe ser la velocidad angular de los electrones para que estos se mantengan a una distancia dada del núcleo? (Asumir para esto que los electrones están siempre en la misma posición relativa)

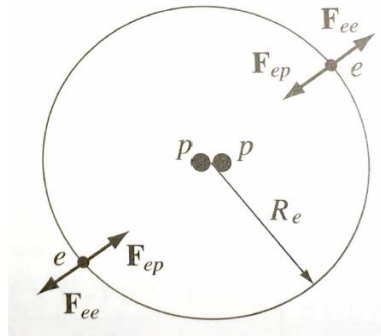


Figura 15 Modelo simplificado del átomo de Helio

Solución

- A partir de la figura pueden calcularse las fuerzas entre los dos electrones y entre los protones y un electrón en función de las siguientes ecuaciones.

$$\vec{F}_{ee} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{(2R_e)^2} \hat{r} = \frac{(-1.6 \times 10^{-19})^2}{16\pi\epsilon_0 R_e^2} \hat{r} = 23 \times 10^{-9} \hat{r} [N]$$

$$\vec{F}_{ep} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^2}{(R_e)^2} \hat{r} = \frac{(-1.6 \times 10^{-19})^2}{2\pi\epsilon_0 R_e^2} \hat{r} = -184 \times 10^{-9} \hat{r} [N]$$

- Para que los electrones permanezcan en su órbita la fuerza neta en el sistema tiene que ser balanceada por la fuerza centrífuga; esto es:

$$\vec{F}_{cent} + \vec{F}_{ee} + \vec{F}_{ep} = 0 \rightarrow \vec{F}_{cent} = -(\vec{F}_{ee} + \vec{F}_{ep})$$

esto es:

$$\vec{F}_{ee} + \vec{F}_{ep} = \frac{m_e v^2}{R_e} \rightarrow v = \sqrt{\frac{R_e(\vec{F}_{ee} + \vec{F}_{ep})}{m_e}} = \sqrt{\frac{0.5 \times 10^{-16}(161 \times 10^{-9})}{9.107 \times 10^{-31}}} = 2.97 \times 10^6 \left[\frac{m}{s} \right]$$

O bien en términos de la velocidad angular:

$$\omega = \frac{v}{R_e} = \frac{2.97 \times 10^6}{0.5 \times 10^{-16}} = 59.46 \times 10^{15} \left[\frac{rad}{s} \right]$$

2.3 Intensidad de Campo Eléctrico

Que existen fuerzas actuando sobre cargas debido a la presencia de otras cargas en el espacio es ahora un tema conocido. Además, también sabemos cómo calcular la magnitud y dirección de dichas fuerzas. Ahora, si cambiamos levemente el punto de vista y fijamos la posición de una de las cargas; podemos entonces decir que esta carga es la fuente de la fuerza que actúa sobre las demás cargas en el espacio.

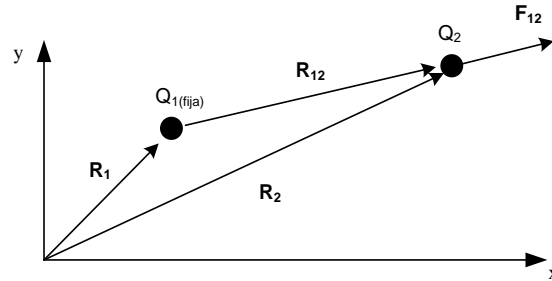


Figura 16 Fuerza en la carga Q_2 debido a la carga Q_1

Teniendo esto en consideración, y tomando como ejemplo la disposición de cargas mostrada en la figura 16 se tiene que la fuerza sobre la segunda carga es:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{|R|^2} \hat{r} = \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 |R|^2} \right) Q_2 \hat{r} [N]$$

O bien si dividimos ambos términos por la carga Q_2 se tiene;

$$\frac{\vec{F}_{12}}{Q_2} = \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 |R|^2} \right) \hat{r} [N/C]$$

Que corresponde a un campo vectorial que solo depende de la carga (Q_1).

De la última expresión podemos ver lo siguiente:

- 1) La cantidad que se obtiene tiene unidades de fuerza por unidad de carga (N/C).
- 2) La fuerza por unidad de carga varía en forma inversamente proporcional con respecto al cuadrado de la distancia desde la fuente.
- 3) El lado derecho de la ecuación solo es función de Q_1 , es decir el campo vectorial resultante es generado por dicha carga.

Dado que el vector \hat{r} es arbitrario, este está definido para cualquier punto en el espacio. Por otro lado $\frac{\vec{F}_{12}}{Q_2}$ es un campo vectorial que permite calcular la fuerza por unidad de carga para cualquier punto del espacio.

Ahora bien, en base a lo anterior es posible definir este campo vectorial, que se conocerá como intensidad de campo eléctrico haciendo tender el valor de la carga Q_2 a cero; esto es:

$$E = \lim_{Q_2 \rightarrow 0} \frac{F_{12}}{Q_2} \left[\frac{N}{C} \right]$$

De esta definición tenemos entonces que la intensidad de campo eléctrico es un vector colineal con la fuerza eléctrica (o de Coulomb) y es proporcional a ella. Además, permite calcular la fuerza por unidad de carga producida en el espacio. En la práctica generalmente la unidad utilizada para la intensidad de campo eléctrico es de Volt por metro [V/m]; sin embargo, como aún no se ha definido el concepto de diferencia de potencial se continuará utilizando como unidades para este campo vectorial las de [N/C].

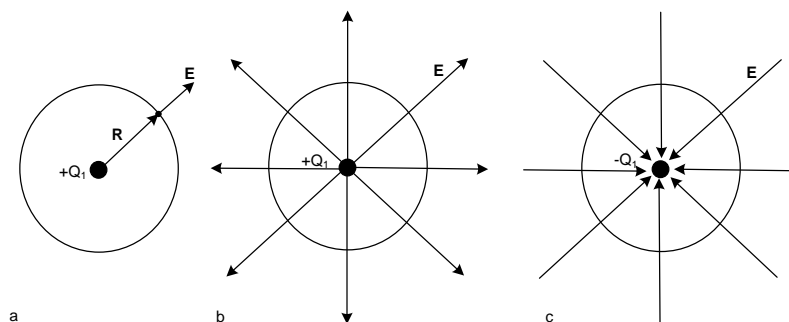


Figura 17 Definición de campo eléctrico

Ahora, si consideramos la carga puntual Q_1 mostrada en la figura 17, tenemos entonces que la intensidad de campo eléctrico producida por ella es

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{|R|^2} \hat{r} \text{ [N/C]}$$

De esto último se puede observar que:

- 1) Que la intensidad de campo eléctrico depende de la carga y de la distancia a que esta ésta.
- 2) Si la carga es positiva la dirección del campo eléctrico resultante es radial y alejándose de la carga. (figura 17 b y c)
- 3) A distancias iguales de la carga se tiene que la magnitud del campo eléctrico idéntica.
- 4) La intensidad de campo eléctrico varía inversamente con el cuadrado de la distancia a la carga.

Ahora, si conocemos el campo eléctrico existente en el espacio, podemos calcular la fuerza resultante sobre una carga ubicada en un punto en particular utilizando la siguiente relación:

$$\vec{F} = q\vec{E} [N]$$

Esta última expresión constituye una definición alternativa para la ley de Coulomb

Ejemplo #5

Un electrón está ubicado en un punto en el espacio.

- a) Calcular la intensidad de campo eléctrico en cualquier punto del espacio.
- b) Encontrar la fuerza que el electrón ejerce sobre una partícula de polvo cargada con $3.2 \times 10^{-19} [C]$ y ubicada a una distancia R del electrón.

Solución

a) Tomando un sistema de coordenadas centrado en el electrón, se puede calcular que la intensidad de campo eléctrico a una distancia R de este es:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{R^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-1.6 \times 10^{-19}}{R^2} \hat{r} = \frac{-1.44 \times 10^{-9}}{R^2} \hat{r} \left[\frac{N}{C} \right]$$

b) La fuerza ejercida sobre la partícula de polvo entonces está dada por:

$$\vec{F} = q\vec{E} = 3.2 \times 10^{-19} * \frac{-1.44 \times 10^{-9}}{R^2} \hat{r} = \frac{-4.6 \times 10^{-28}}{R^2} \hat{r} [N]$$

2.3.1 Campo eléctrico de cargas puntuales

Como se trata de un campo vectorial, el principio de superposición es válido para la intensidad de campo eléctrico. En consecuencia, el campo eléctrico producido por una carga no es afectado por la existencia de otras cargas en el espacio. Por esta razón la intensidad de campo eléctrico en un punto dado del espacio resulta de la superposición de los campos eléctricos de todas las cargas que pudieran existir. Esto es, el campo eléctrico total se obtiene a partir de la suma vectorial de los campos eléctricos individuales que existan en el espacio debido a la presencia de diferentes cargas.

$$\vec{E}_t = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i \left[\frac{N}{C} \right]$$

Evidentemente esto es consistente con lo conocido de mecánica clásica puesto que la fuerza resultante sobre una partícula cargada debido a distintos campos eléctricos también resulta de la suma vectorial de todas las fuerzas actuando sobre la partícula, es decir:

$$\vec{F}_t = q \sum_{i=1}^n \vec{E}_i [N]$$

Ejemplo #6

Tres cargas puntuales **Q** están ubicadas según se muestra en la figura 18. Cada par de cargas está conectado por medio de una cuerda delgada de forma de mantenerlas ubicadas en una misma posición. La cuerda está diseñada para romperse cuando la fuerza sobre ella sea de **0.1 [N]**

- Calcular la carga **Q** requerida para romper la cuerda si **a = 20 [mm]**
- ¿Cuál es la intensidad de campo eléctrico en el centro de la cuerda **A-B**?

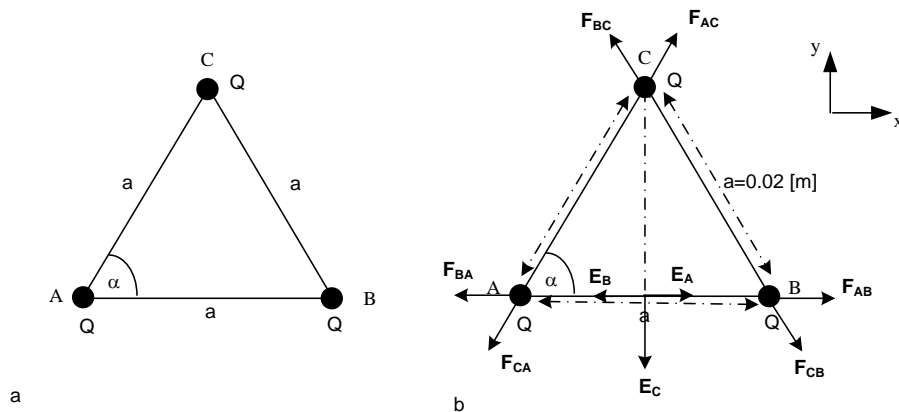


Figura 18 Disposición de cargas en ejemplo

Solución

a) De la figura se tiene que la fuerza total que debe soportar cada cuerda está dada por

$$|\vec{F}_c| = |\vec{F}_{ij}| + |\vec{F}_{ij}| \cos \alpha$$

donde la fuerza F_{ij} es

$$|\vec{F}_{ij}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i Q_j}{|R_{ij}|^2} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \text{ [N]}$$

Luego

$$|\vec{F}_c| = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} + \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cos \alpha = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} (1 + \cos \alpha)$$

Como se trata de un triángulo equilátero se tiene que $\alpha = 60^\circ$, entonces

$$|\vec{F}_c| = \frac{3Q^2}{8\pi\epsilon_0 a^2} \text{ [N]}$$

Así, para que la cuerda se corte debe cumplirse que:

$$|\vec{F}_c| = \frac{3Q^2}{8\pi\epsilon_0 a^2} \geq 0.1 \rightarrow Q \geq a \sqrt{\frac{0.8\pi\epsilon_0}{3}} = 5.44 \times 10^{-8} \text{ [C]}$$

b) La intensidad de campo eléctrico en el punto P está en el eje “y” en dirección negativa. Los campos eléctricos debidos a las cargas en A y B son de igual magnitud y dirección opuesta en el eje “x” por lo que se cancelan. De esto se tiene que

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} - \hat{a}_y \left[\frac{N}{C} \right]$$

$$\text{con } R = a \text{ sen } \alpha = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

así

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \frac{3a^2}{4}} - \hat{a}_y = \frac{Q}{3\pi\epsilon_0 a^2} - \hat{a}_y \left[\frac{N}{C} \right]$$

Ejemplo #7

Tres cargas puntuales están dispuestas como se muestra en la figura 19.

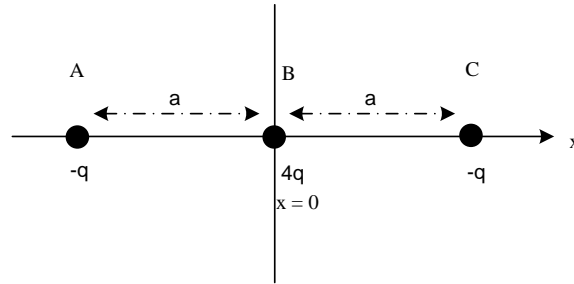


Figura 19 Disposición de cargas en ejemplo

- a) Calcular la intensidad de campo eléctrico para puntos en el eje “x”
- b) En qué puntos del eje “x” la intensidad de campo eléctrico es cero (que no sea el infinito)

Solución

a) De la figura tenemos que para el cálculo del campo eléctrico sobre el eje “x” es conveniente separar el problema en cuatro regiones; $x < -a$, $-a < x < 0$, $0 < x < a$, y $x > a$.

Así para $x > a$ se tiene

$$\vec{E} = \hat{x} \left(\frac{4q}{4\pi\epsilon_0 x^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (x-a)^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (x+a)^2} \right) \left[\frac{N}{C} \right]$$

Análogamente para $x < -a$

$$\vec{E} = -\hat{x} \left(\frac{4q}{4\pi\epsilon_0 x^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (x-a)^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (x+a)^2} \right) \left[\frac{N}{C} \right]$$

Para $0 < x < a$

$$\vec{E} = \hat{x} \left(\frac{4q}{4\pi\epsilon_0 x^2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (a-x)^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (x+a)^2} \right) \left[\frac{N}{C} \right]$$

Y finalmente para $-a < x < 0$

$$\vec{E} = -\hat{x} \left(\frac{4q}{4\pi\epsilon_0 x^2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (a-x)^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (x+a)^2} \right) \left[\frac{N}{C} \right]$$

b) Para encontrar los puntos sobre el eje “x” en que el campo eléctrico se hace cero, se debe igualar las ecuaciones de \vec{E} obtenidas anteriormente a cero, y despejar el valor de x. Entonces:

$$\vec{E} = \hat{x} \left(\frac{4q}{4\pi\epsilon_0 x^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (x-a)^2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (x+a)^2} \right) = 0$$

$$\left(\frac{4}{x^2} - \frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x+a)^2} \right) = 0 \rightarrow \frac{4}{x^2} - \frac{2(x^2 + a^2)}{(x^2 - a^2)^2} = 0$$

De donde se obtiene

$$(x^2)^2 - 5a(x^2) + 2a^4 = 0$$

Y cuyos resultados son

$$x = \pm 2.13578a$$

$$x = \pm 0.66215a$$

Donde las ultimas soluciones no son válidas puesto que $x > a$. Para obtener el resto de las soluciones se debe proceder de la misma forma con las otras tres ecuaciones.

2.3.2 Campo Eléctrico de distribuciones de carga

La carga en general no estará concentrada en un solo punto en el espacio, y como hemos visto estas pueden disponerse ya sea sobre una línea, una superficie o dentro de un volumen; dando origen a densidades de carga. Por ello, cabe preguntarse si es posible utilizar la ley de Coulomb y la definición de campo eléctrico para calcular el efecto que estas producen en el espacio de la misma forma que se ha hecho para el caso de las cargas puntuales.

Para dar respuesta a esto extenderemos los conceptos utilizados para cargas puntuales y aplicaremos el principio de superposición, por medio de un diferencial de carga definido en un punto en el espacio (emulando una pequeña carga puntual) y sumando su contribución al efecto producido por toda la distribución de carga.

2.3.2.1 Campo Eléctrico de una distribución lineal de carga

Considerando la distribución de carga mostrada en la figura 20, y tomando un pequeño trozo de esta de largo diferencial dl' y ubicado en el punto (x', y', z') se tiene que la carga contenida en él es $\rho_l \cdot dl'$.

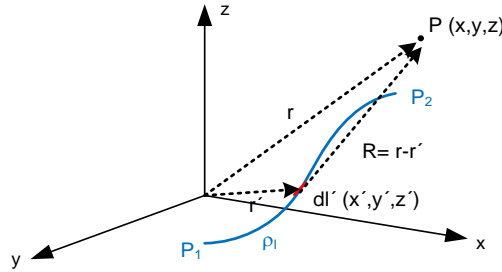


Figura 20 Campo Eléctrico generado por una distribución lineal de carga

Esta carga puede ser vista como una pequeña carga puntual de magnitud $dQ = \rho_l \cdot dl'$, así el campo eléctrico generado por esta carga diferencial es

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l dl'}{(|R|)^2} \hat{r}$$

A partir del principio de superposición, para obtener el campo eléctrico generado por la distribución de carga completa, es necesario sumar el efecto de cada uno de los segmentos diferenciales de largo que pueden definirse sobre la línea. Esto equivale entonces a sumar vectorialmente los diferenciales de campo eléctrico ya calculados, o bien tomar la integral de línea sobre la distribución de carga del diferencial de campo eléctrico. Esto es:

$$E = \int_l dE = \int_{P_1}^{P_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l dl'}{(|R|)^2} \hat{r}$$

Ejemplo #8

Un alambre delgado está doblado para formar un semicírculo de radio $a = 10 \text{ [mm]}$, y sobre él se ha dispuesto una carga lineal de densidad $\rho_l = 10^{-9} \text{ [C/m]}$. Calcular la intensidad de campo eléctrico producida en el centro del semicírculo.

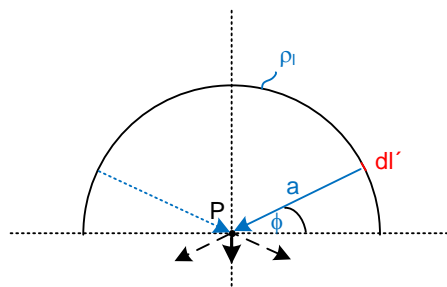


Figura 21 Campo eléctrico generado por una distribución lineal de carga

Solución

En base a la figura, en este caso es conveniente utilizar un sistema de coordenadas cilíndrico con el origen dispuesto en el centro del semicírculo (punto P). Así, el elemento diferencial de largo queda definido como $dl' = a d\phi$; y la carga contenida en él es $dq = \rho_l dl' = \rho_l a d\phi$.

De esta forma el elemento diferencial de campo eléctrico producido por la carga contenida en el elemento diferencial de largo está dado por:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{a^2} - \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l a d\phi}{a^2} - \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l d\phi}{a} - \hat{r}$$

Ahora de la figura se puede ver que dada la simetría de la figura las componentes horizontales del campo eléctrico resultante se cancelan, sumándose solo las verticales. Por lo tanto:

$$|dE_{vertical}| = 2dE \cos(\phi - 90) = 2dE \sin(\phi) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l \sin(\phi) d\phi}{a}$$

El campo eléctrico total entonces se obtiene integrando sobre medio semicírculo, esto es entre $\phi = 0$ y $\phi = \pi/2$.

$$E = \int_0^{\pi/2} dE_{vertical} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\rho_l \sin(\phi) d\phi}{a} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 a} \left[\frac{N}{C} \right]$$

2.3.2.2 Campo Eléctrico de una distribución superficial de carga

Similarmente al caso anterior, considerando el caso de la figura 22 se tiene que la carga contenida en un elemento diferencial de superficie está dada por $dQ = \rho_s \cdot dS'$.

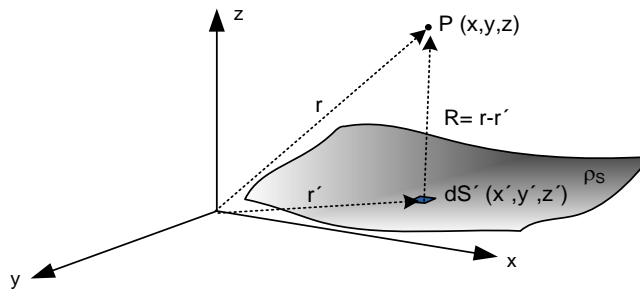


Figura 22 Campo Eléctrico generado por una distribución superficial de carga

Entonces la contribución al campo eléctrico total producido por el elemento diferencial de carga es:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_s dS'}{(|R|)^2} \hat{r}$$

Y el campo eléctrico total producido por la distribución superficial de carga es obtenido integrando sobre toda la superficie.

$$E = \int_S dE = \int_{S'} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_s dS'}{(|R|)^2} \hat{r} \text{ [N/C]}$$

Ejemplo #9

Una distribución uniforme de cargas ρ_s está dispuesta sobre la superficie de un hemisferio de radio R [m]. Calcular la fuerza electrostática que se ejercerá sobre una carga q [C] ubicada en el centro del hemisferio.

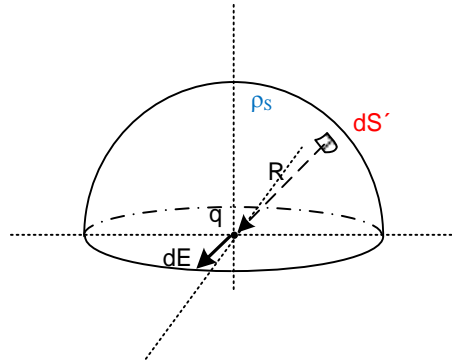


Figura 23 Fuerza eléctrica generada por una distribución superficial de carga

Solución

Observando la figura se puede ver que debido a su simetría el campo eléctrico resultante solo tendrá una componente dirigida hacia abajo (eje z negativo), por lo que los cálculos pueden ser simplificados. Ahora tomando un elemento diferencial de superficie dS se tiene que este contiene una carga diferencial $dQ = \rho_s dS$. Además, se tiene que usando un sistema de coordenadas esférico centrado en el centro del hemisferio, el diferencial de superficie estará dado por $dS = R^2 \sin(\theta) d\theta d\phi$. Así se obtiene que el diferencial de campo eléctrico generado en el centro del hemisferio por la superficie diferencial dS es

$$|dE| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_s R^2 \sin(\theta) d\theta d\phi}{R^2} = \frac{\rho_s \sin(\theta) d\theta d\phi}{4\pi\epsilon_0} \text{ [N/C]}$$

La componente del campo eléctrico en el eje z está dada por

$$dE_z = |dE| \cos(\theta) = \frac{\rho_s \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta d\phi}{4\pi\epsilon_0} \text{ [N/C]}$$

Entonces el campo eléctrico total se obtiene integrando sobre el hemisferio $\theta \rightarrow 0 - \frac{\pi}{2}$ y $\phi \rightarrow 0 - 2\pi$, así:

$$E = \iint_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \frac{\rho_S \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta d\phi}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\rho_S}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta = \frac{\rho_S}{4\epsilon_0} \left(-\frac{\cos(\theta)}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\rho_S}{4\epsilon_0} [\text{N/C}]$$

La fuerza en tanto se obtiene multiplicando la magnitud del campo eléctrico por la carga, esto es:

$$F = qE = q \frac{\rho_S}{4\epsilon_0} [\text{N}]$$

2.3.2.2 Campo Eléctrico de una distribución volumétrica de carga

El mismo concepto aplicado en las situaciones anteriores puede ser usado en el caso de distribuciones de cargas dentro de un volumen. Punto de partida para esto es tomar un volumen diferencial dV dentro del volumen general; de esta forma la carga contenida dentro de él estará dada por $dQ = \rho_V dV$. Entonces considerando la figura 24 y aplicando la ley de Coulomb el diferencial de campo eléctrico generado por las cargas contenidas dentro del volumen diferencial estará dado por:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_V dV}{|R|^2} \hat{r}$$

El campo eléctrico total en tanto se obtiene a partir de la integración sobre todo el volumen que contiene la distribución de carga

$$E = \int_V dE = \int_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho_V dV}{|R|^2} \hat{r} [\text{N/C}]$$

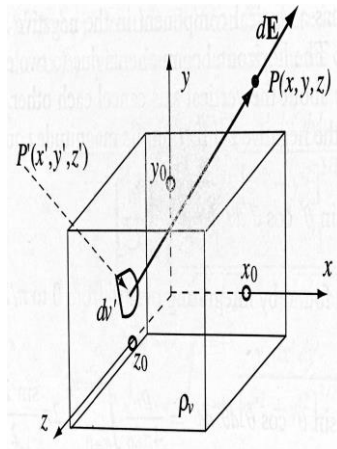


Figura 24 Campo Eléctrico generado por una distribución volumétrica de carga

2.4 Densidad de flujo eléctrico

Hasta el momento hemos hecho uso de distintos materiales sin hacer mayor distinción en cuanto a sus propiedades, o discutir el significado de la permitividad o de sus efectos sobre el campo eléctrico. Esto principalmente porque la ley de Coulomb es de origen experimental y por lo tanto el efecto que los materiales producen sobre el campo también fue determinado experimentalmente.

Analíticamente, y dada la ecuación de intensidad de campo eléctrico, es posible independizarse de las propiedades del medio multiplicándola por su permitividad.

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \left[\frac{C}{m^2} \right]$$

El vector que resulta de esta operación tiene la misma dirección que el campo eléctrico, pero a diferencia de este no es afectado por las características del medio. Por otro lado, de las unidades se desprende que el vector resultante es una densidad. Por ello se le conoce como densidad de flujo eléctrico; y estará dado por la siguiente ecuación.

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{|\vec{R}|^2} \hat{r} \left[\frac{C}{m^2} \right]$$

Ejemplo #10

Una carga puntual Q está ubicada en un punto en el espacio. Si la carga está rodeada por dos capas esféricas concéntricas de distintos materiales; calcular:

- La densidad de flujo eléctrico en el espacio.
- La intensidad de campo eléctrico en el espacio.

Solución

a. Tomando la definición de densidad de flujo eléctrico y utilizando un sistema de coordenadas esférico centrado en la carga se tiene:

$$\vec{D} = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{|\vec{R}|^2} \hat{r} \left[\frac{C}{m^2} \right]$$

b. Considerando que la primera capa esférica concéntrica tiene un radio interno R_1 y externo R_2 , y que la segunda capa esférica tiene radio interno R_2 y externo R_3 ; se tiene

que las magnitudes de la intensidad de campo eléctrico en cada una de las zonas del espacio definidas en torno a las capas son:

Para el rango de radios definido entre $0 < R < R_1$

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{R}|^2} \hat{r} \left[\frac{N}{C} \right]$$

Para el rango de radios definido entre $R_1 < R < R_2$

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \frac{Q}{|\vec{R}|^2} \hat{r} \left[\frac{N}{C} \right]$$

Para el rango de radios definido entre $R_2 < R < R_3$

$$\vec{E}_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{Q}{|\vec{R}|^2} \hat{r} \left[\frac{N}{C} \right]$$

Para el rango de radios definido entre $R < R_3$

$$\vec{E}_4 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\vec{R}|^2} \hat{r} \left[\frac{N}{C} \right]$$

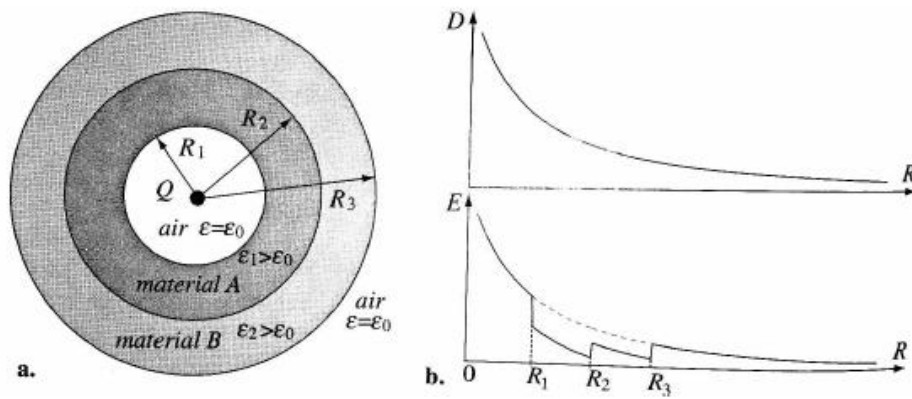


Figura 25 Ejemplo densidad de flujo eléctrico

2.5 Ley de Gauss

Ahora que sabemos cómo calcular el campo eléctrico debido a la presencia de una carga puntual y distintas distribuciones de carga; es conveniente analizar el problema desde el punto de vista de un campo vectorial.

Para que un campo vectorial esté totalmente definido, tanto su divergencia como su rotacional deben ser conocidos. O bien, desde el punto de vista más práctico debe saberse cuáles son las fuentes escalares y vectoriales del campo. En otras palabras, si sabemos cuáles son las fuentes del campo, podemos entonces determinar su intensidad y distribución en el espacio.

Para poder determinar estas dos propiedades del campo se toma como punto de partida la definición de campo eléctrico dado por la ley de Coulomb:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{|\vec{R}|^2} \hat{r} \left[\frac{N}{C} \right]$$

Aplicando el teorema de la divergencia a esta expresión se tiene:

$$\int_v (\nabla \cdot \vec{E}) \cdot dv = \oint_s E \cdot ds = \oint_s \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{|\vec{R}|^2} \hat{r} \cdot dS \hat{r} = \frac{Q}{\epsilon}$$

,donde el elemento de superficie fue tomado apuntando hacia afuera del volumen.

De aquí se tienen dos resultados de interés:

$$\int_v (\nabla \cdot \vec{E}) \cdot dv = \frac{Q}{\epsilon} \quad \text{y} \quad \oint E \cdot ds = \frac{Q}{\epsilon}$$

los que son dos formas distintas de describir la misma cantidad.

Podemos ver entonces que las integrales de volumen y superficie están relacionadas con el flujo total que sale de la superficie S o volumen V. Ahora, si asumimos que la carga está distribuida dentro del volumen V con una densidad de carga ρ_v , entonces tenemos.

$$\int_v (\nabla \cdot \vec{E}) \cdot dv = \frac{1}{\epsilon} \int_v \rho_v \cdot dv \quad \text{o bien} \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon}$$

Es así como a partir de este resultado se tiene, por ejemplo:

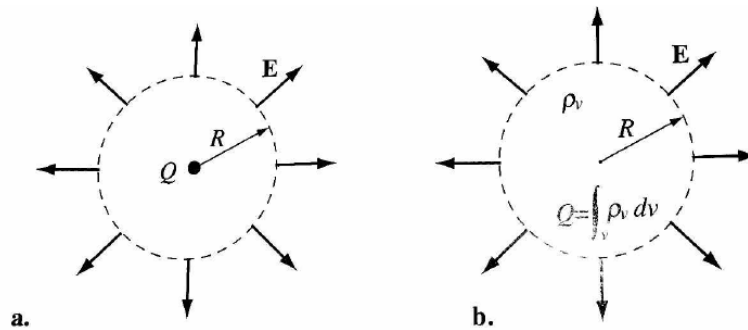


Figura 26 Dos distribuciones de carga que producen campos eléctricos idénticos fuera de un volumen esférico de radio R; a. Campo eléctrico resultante de una carga puntual positiva b. Campo eléctrico resultante de una distribución volumétrica de carga.

De la figura se tiene que en ambos casos fuera del volumen esférico se produce una misma distribución de campo eléctrico a una misma distancia del origen. Este resultado es importante en los dos aspectos siguientes:

- Define la fuente del campo eléctrico
- Provee de un método para calcular la intensidad de campo eléctrico.

Por otro lado, la segunda propiedad del campo vectorial puede ser obtenida tomando la integral sobre una superficie cerrada S al rotacional del campo eléctrico.

$$\int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_c \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{|\vec{R}|^2} \hat{r} \cdot d\vec{l}$$

Para el caso tenemos que el contorno cerrado c está en una esfera de radio R produciendo una superficie circular abierta.

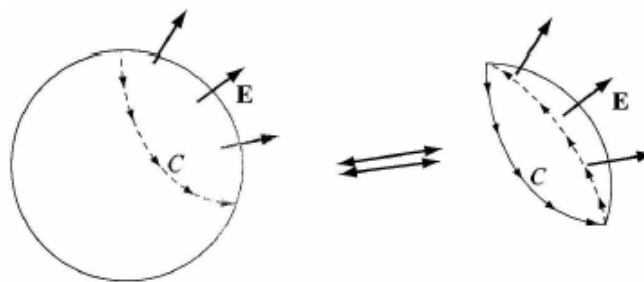


Figura 27 Contorno cerrado en la superficie de una esfera

Como el campo eléctrico es radial en todo punto de esta superficie, se tiene entonces que:

$$\hat{r} \cdot d\vec{l} = 0 \rightarrow \nabla \times \vec{E} = 0$$

Así, en resumen, la divergencia y rotacional del campo eléctrico en forma integral y puntual están definidos por:

<u>Divergencia</u>	<u>Rotacional</u>
$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_V}{\epsilon}$	$\nabla \times \vec{E} = 0$
$\oint E \cdot ds = \frac{Q}{\epsilon}$	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

En este set de ecuaciones la divergencia corresponde al flujo total que cruza la superficie cerrada S , y por lo tanto es posible ver que dicho flujo es igual a la carga encerrada por la superficie. Esta característica es conocida como ley de Gauss y es útil para el cálculo del campo eléctrico.

Algunos puntos que se pueden destacar a partir de la formulación de la ley de Gauss son los siguientes:

- La carga Q corresponde a la carga total encerrada por la superficie S , pudiendo esta ser puntual, distribuida o ambas.
- El lado derecho de la ecuación corresponde al flujo total que cruza la superficie S .
- La ley de Gauss enuncia que el flujo total que sale de la superficie es igual a la carga en su interior. Por lo tanto, se tiene que la carga es lo que da origen al flujo y por lo tanto al campo eléctrica.
- La ley de Gauss corresponde a una formulación alternativa de la ley de Coulomb.
- Esta ley puede ser usada tanto para calcular la carga total encerrada en un volumen como para calcular el campo eléctrico generado por esta.

Ejemplo #11

Dos cascarones esféricos delgados, uno de radio **a** y otro de radio **b** (tal que $b > a$), están cargados (ver figura 28). El cascaron interior tiene una carga total de $-Q$ [C] y el cascaron externo una carga total Q [C]. Considerando que dicha carga está distribuida uniformemente:

- Calcular la intensidad de campo eléctrico en el espacio.
- Si una carga puntual de magnitud Q es insertada en el centro de los cascarones; calcular el campo eléctrico producido en el espacio.
- Graficar la solución.

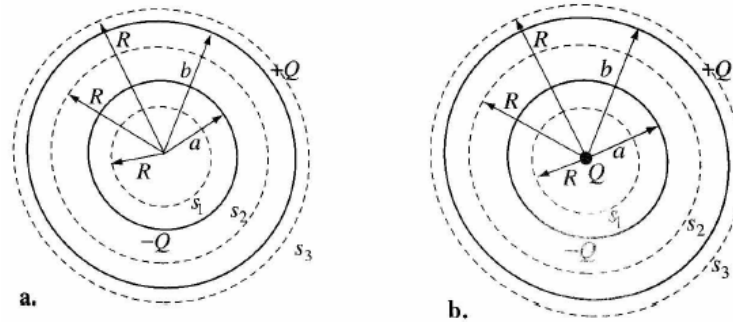


Figura 28 Figura ejemplo ley de Gauss, a. Dos cascarones concéntricos b. Dos cascarones concéntricos y una carga puntual.

Solución

a. Considerando una superficie esférica de radio $R < a$ se puede plantear la ley de Gauss tal que:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \rightarrow |\vec{E}| = 0$$

Por otro lado, para un radio $a < R < b$ se tiene

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow |\vec{E}| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} [N/C]$$

Finalmente, para un radio $R > b$ se obtiene

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{-Q + Q}{\epsilon_0} \rightarrow |\vec{E}| = 0$$

b. Al colocar una carga en el centro del sistema de cascarones concéntricos se obtiene para $R < a$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow |\vec{E}| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} [N/C]$$

Analógicamente para $a < R < b$,

$$\oint_S E \cdot dS = \frac{Q - Q}{\epsilon_o} \rightarrow |\vec{E}| = 0$$

y para $R > b$

$$\oint_S E \cdot dS = -\frac{Q - Q + Q}{\epsilon_o} \rightarrow |\vec{E}| = \frac{Q}{4\pi\epsilon_o R^2} [N/C]$$

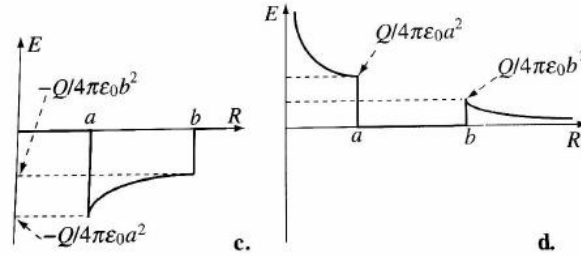


Figura 29 Figura ejemplo ley de Gauss; c. Campo eléctrico en sistema de cascarones concéntricos
d. campo eléctrico en sistema de cascarones concéntricos y carga puntual

Ejemplo #12

Considerando la geometría de la figura 28a y asumiendo que una densidad de carga superficial $-\rho_s$ [C/m^2] es colocada sobre el cascaron interior y que una densidad de carga superficial ρ_s [C/m^2] es colocada sobre el cascaron externo; calcular el campo eléctrico generado en el espacio.

Solución

Planteando la ecuación para la ley de Gauss en el intervalo $R < a$ se obtiene

$$\oint_S E \cdot dS = 0 \rightarrow |\vec{E}| = 0$$

Similarmente en el rango comprendido entre $a < R < b$

$$\oint_S E \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_o} \int_S -\rho_s \cdot dS = \frac{1}{\epsilon_o} -\rho_s 4\pi a^2 [N/C]$$

$$|\vec{E}| = \frac{-\rho_s 4\pi a^2}{4\pi\epsilon_o R^2} = \frac{-\rho_s a^2}{\epsilon_o R^2} \left[\frac{N}{C} \right]$$

Y para el rango $R > b$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\int_S -\rho_s \cdot d\vec{S} + \int_S \rho_s \cdot d\vec{S} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} (-\rho_s 4\pi a^2 + \rho_s 4\pi b^2) [N/C]$$

$$|\vec{E}| = \frac{\rho_s(-4\pi a^2 + 4\pi b^2)}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\rho_s(b^2 - a^2)}{\epsilon_0 R^2} \left[\frac{N}{C} \right]$$

Ejemplo #13

Una carga superficial de densidad uniforme ρ_s [C/m²] está dispuesta sobre una superficie plana muy extensa. Calcular la intensidad de campo eléctrico generada en el espacio.

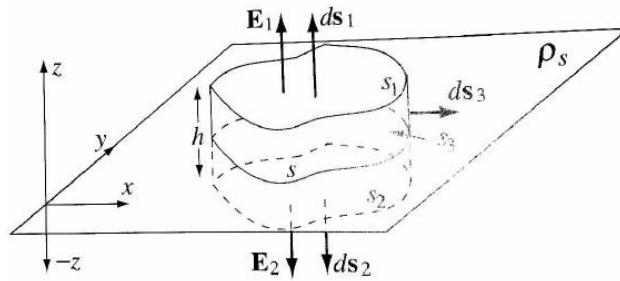


Figura 30 Una superficie muy extensa con una densidad de carga uniforme.

Solución

Para poder aplicar la ley de Gauss en esta situación es necesario definir una superficie cerrada tal que encierre la densidad de carga (Figura 30). Como puede verse esta superficie cerrada es construida a partir de tres superficies, cada una con su respectivo diferencial de superficie apuntando hacia afuera. Luego al plantear la ley de Gauss se obtiene:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2 + \int_{S_3} \vec{E}_3 \cdot d\vec{S}_3 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_S \rho_s \cdot d\vec{S} [N/C]$$

Se puede ver de la figura que el campo eléctrico y $d\vec{S}_3$ son perpendiculares, y por lo tanto su producto es cero. Asimismo, se tiene que las superficies S_1 y S_2 son iguales, entonces:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2 \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_S \rho_s \cdot d\vec{S} [N/C]$$

$$2|\vec{E}| \cdot S = \frac{\rho_s S}{\epsilon_0} \rightarrow |\vec{E}| = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \left[\frac{N}{C} \right]$$

Y entonces para el espacio sobre la superficie se tiene

$$\vec{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{z} \left[\frac{N}{C} \right]$$

Y bajo la superficie

$$\vec{E} = -\frac{\rho_s}{2\epsilon_0} \hat{z} \left[\frac{N}{C} \right]$$

Ejemplo #14

Considerando una línea de transmisión muy larga ubicada a una distancia $d = 10 \text{ [m]}$ sobre el suelo y cargada con una densidad de carga lineal uniforme de $\rho_l = 10^{-7} \text{ [C/m]}$;

- Calcular la intensidad de campo eléctrico en el espacio.
- ¿Cuál es la magnitud de la intensidad de campo a nivel del suelo?
- Si una segunda línea es colocada a 2 [m] bajo la primera y esta está cargada con $-\rho_l \text{ [C/m]}$; calcular la intensidad de campo eléctrico en el espacio.

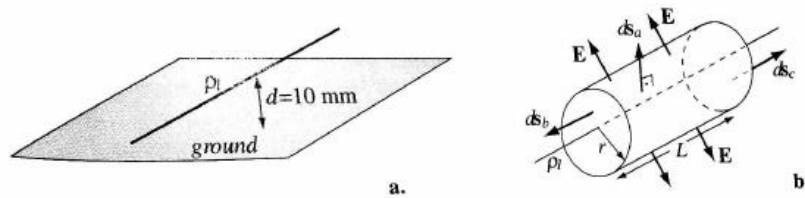


Figura 31 a. Línea de transmisión sobre el piso b. Superficie gaussiana utilizada para el cálculo del campo eléctrico

Solución

a. En función de una superficie gaussiana cilíndrica en torno a la línea de transmisión se tiene que el producto entre el campo eléctrico y los diferenciales de superficie son distintos de cero solo en la dirección radial. Entonces,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_a} \vec{E} \cdot d\vec{S}_a = \frac{1}{\epsilon_0} \int_l \rho_l \cdot dl$$

$$|\vec{E}| 2\pi R l = \frac{\rho_l l}{\epsilon_0} \rightarrow |\vec{E}| = \frac{\rho_l}{2\pi \epsilon_0 R}$$

y en notación vectorial, $\vec{E} = \frac{\rho_l}{2\pi \epsilon_0 R} \hat{r} \text{ [N/C]}$.

b. Para conocer la magnitud del campo eléctrico a nivel del suelo solo es necesario evaluar la ecuación resultante del punto anterior para $R = 10 \text{ [m]}$, esto es:

$$|\vec{E}(10)| = \frac{10^{-7}}{2\pi \cdot 8.854 \times 10^{-12} \times 10} \hat{r} = 179.75 \text{ [N/C]}$$

c. En el último caso se agrega una segunda línea de transmisión a 2 [m] bajo la primera teniéndose el caso mostrado en la figura 32.

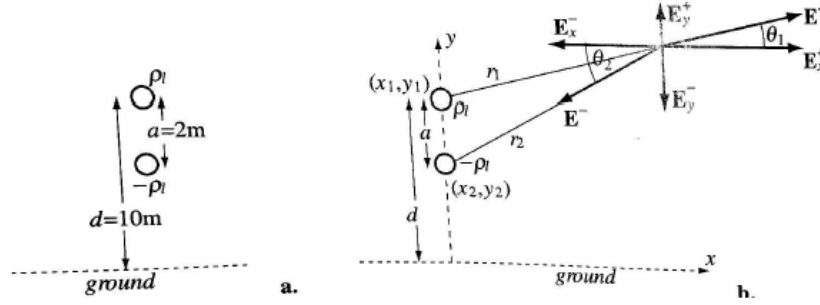


Figura 32 Campo eléctrico generado por dos líneas de transmisión cargadas.

De la figura se tiene que definiendo un sistema de coordenadas cartesiano con el origen sobre el suelo y bajo la línea de transmisión, las coordenadas donde se ubica dada una de las líneas corresponden a $L_1 = (0, d)$ y $L_2 = (0, d-a)$. Luego para un punto de coordenadas arbitrarias (x, y) las distancias desde las dos líneas son:

$$r_1 = \sqrt{x^2 + (y - y_1)^2}$$

$$r_2 = \sqrt{x^2 + (y - y_2)^2}$$

Entonces considerando la magnitud para el campo eléctrico producido por una de las líneas calculada en el punto anterior se tiene:

$$|\vec{E}_1| = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + (y - y_1)^2}}$$

$$|\vec{E}_2| = \frac{-\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{-\rho_l}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + (y - y_2)^2}}$$

Por otro lado, de la figura se tiene que:

$$\vec{E}_1 = |\vec{E}_1| \cos \theta_1 \hat{x} + |\vec{E}_1| \sin \theta_1 \hat{y}$$

$$\vec{E}_2 = |\vec{E}_2| \cos \theta_2 \hat{x} + |\vec{E}_2| \sin \theta_2 \hat{y}$$

donde;

$$\cos \theta_1 = \frac{x}{r_1} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y - y_1)^2}}$$

$$\sin \theta_1 = \frac{y - y_1}{r_1} = \frac{y - y_1}{\sqrt{x^2 + (y - y_1)^2}}$$

$$\cos \theta_2 = \frac{x}{r_2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y - y_2)^2}}$$

$$\sin \theta_2 = \frac{y - y_2}{r_2} = \frac{y - y_2}{\sqrt{x^2 + (y - y_2)^2}}$$

Así finalmente reemplazando se obtiene:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \hat{x} \frac{\rho_l x}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + (y - y_1)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y - y_2)^2}} \right) + \hat{y} \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{y - y_1}{\sqrt{x^2 + (y - y_1)^2}} - \frac{y - y_2}{\sqrt{x^2 + (y - y_2)^2}} \right) \left[\frac{N}{C} \right]$$

2.6 Potencial Eléctrico

Hasta ahora hemos calculado el campo eléctrico en forma directa a partir de las cargas o distribuciones de cargas en el espacio. Cosa que tiene sentido, siendo que las cargas son las fuentes del campo eléctrico. Sin embargo, en la práctica existen situaciones en las cuales es más útil poder obtener el valor del campo eléctrico o bien su distribución en forma indirecta. En este contexto es de particular interés el poder utilizar una cantidad que pueda ser medida directamente utilizando instrumentos y que es conocida como potencial eléctrico.

Antes de definir formalmente esta cantidad es conveniente definir que se entenderá por trabajo a favor o en contra del campo. En general se entiende por un trabajo positivo a aquel que se realiza en contra del campo vectorial de forma que se debe utilizar energía en contra del sistema. Por el contrario, se considera trabajo negativo cuando el campo es quien entrega energía a favor del sistema.

Teniendo esto en cuenta, consideremos que se tiene en el origen de un sistema cartesiano una carga puntual positiva. Esta carga producirá a su alrededor un campo eléctrico, el que será de mayor intensidad mientras más cerca del origen se esté. Ahora, si se quiere traer una pequeña carga, también positiva, desde el infinito hacia un punto cercano al origen. A partir de la ley de Coulomb se tiene que a medida que la carga se acerca al origen esta experimentará una fuerza de repulsión que aumentará en intensidad en forma cuadrática; y por lo tanto para seguir acercando la carga al origen cada vez se tendrá que realizar un esfuerzo mayor. Este esfuerzo se hace en contra del campo, es decir se debe realizar un trabajo positivo. Por otro lado, si se deja la carga libre esta será empujada por el campo debido a la repulsión entre las cargas, y por lo tanto se tendrá un trabajo realizado por el campo o bien un trabajo negativo.

Se puede ver de este análisis que el proceso de llevar la carga hacia el origen equivale a ganar energía potencial en el campo eléctrico. Produciéndose el efecto contrario al repelerse la carga.

En base a esto se puede definir que la diferencia en trabajo al mover la carga dentro del campo eléctrico está dada por:

$$dW = -\vec{F} \cdot d\vec{l} = -q\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Ahora si se mueve la carga a velocidad constante por un camino cualquiera dentro del campo eléctrico el trabajo total será:

$$W = -q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = W_a - W_b \quad [J]$$

Como el trabajo depende de la carga Q , es más conveniente expresar esta diferencia entre las energías potenciales entre los puntos a y b como una razón por unidad de carga. Esta razón se conoce como diferencia de potencial y queda definida por:

$$\frac{W}{q} = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{W_a - W_b}{q} = V_b - V_a \quad [J/C] \text{ o } [Nm/C]$$

Las unidades de la diferencia de potencial eléctrico son entonces Joule por Coulomb o bien Newton metro por Coulomb. Sin embargo, considerando que la diferencia de potencial eléctrico es comúnmente utilizada en el electromagnetismo o en teoría de circuitos, se le asigna una unidad propia la que se conoce como Volt $[V]$.

Una consecuencia de esto es que la unidad de capó eléctrico puede ser renombrada según sigue:

$$[V] = \left[\frac{N}{C} \right] \cdot m \rightarrow \left[\frac{V}{m} \right]$$

2.6.1 Potencial Eléctrico debido a cargas puntuales

Consideremos el caso mostrado en la figura, donde se tiene una carga puntual ubicada en el origen del sistema de coordenadas.

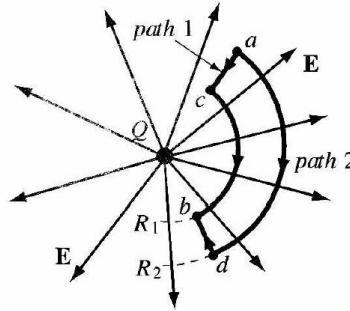


Figura 33 Cálculo de diferencia de potencial eléctrico en torno a una carga puntual

De la definición dada, el cálculo de la diferencia de potencial entre los puntos a y b involucra tomar la integral de línea del campo eléctrico desde el punto a al punto b . Para ello existen múltiples trayectorias posibles. Por ejemplo, se puede ir desde el punto a al c y desde ahí al b ; o bien se puede ir desde el punto a al d y luego al b . considerando el primer caso se tiene.

$$V_{ab} = V_b - V_a = (V_c - V_a) - (V_b - V_c) = - \int_a^c \vec{E} \cdot d\vec{l}_1 + \int_c^b \vec{E} \cdot d\vec{l}_2$$

De la figura, y utilizando un sistema de coordenadas esféricas se tiene que los diferenciales de largo dl_1 y dl_2 están dados por:

$$dl_1 = dr \hat{r}$$

$$dl_2 = d\theta \hat{\theta}$$

Luego reemplazando se tiene,

$$V_{ab} = - \int_a^c \vec{E} \cdot dl_1 + \int_c^b \vec{E} \cdot dl_2 = - \int_a^c \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot dr \hat{r} + \int_c^b \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot d\theta \hat{\theta}$$

Dado que los ejes r y θ son ortogonales su producto escalar es igual a cero. Por otro lado, el producto escalar entre dos vectores unitarios en r es igual a 1, entonces;

$$V_{ab} = V_b - V_a = - \int_a^c \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_b} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_a} [\text{V}]$$

o bien

$$V_a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_a} [\text{V}]$$

$$V_b = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_b} [\text{V}]$$

En el análisis anterior se asumió que la carga que genera el campo eléctrico estaba ubicada en el origen del sistema de coordenadas. Sin embargo, esto no siempre es el caso, por lo que conviene extender el análisis a una situación más general.

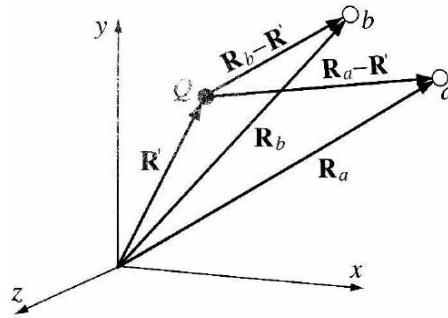


Figura 34 Cálculo del potencial eléctrico para carga ubicada en un punto arbitrario del espacio

En este caso se tiene de la figura que los potenciales eléctricos en los puntos **b** y **a** están dados por:

$$V_b = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |R_b - R|} [\text{V}]$$

$$V_a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |R_a - R|} [\text{V}]$$

entonces;

$$V_b - V_a = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|R_b-R|} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|R_a-R|} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|R_b-R|} - \frac{1}{|R_a-R|} \right) [\text{V}]$$

Una de las cosas importantes que se desprenden del potencial eléctrico es que la diferencia de potencial es independiente del camino que se utilice para ir de un punto a otro. Solo depende de la distancia relativa con respecto al campo eléctrico.

Por otro lado, el potencial eléctrico en cualquier superficie esférica encerrando una carga puntual es constante.

Es importante destacar que como el potencial eléctrico es una cantidad escalar el potencial en un punto P en el espacio es la suma de los potenciales correspondientes a todas las cargas que puedan existir en el espacio; esto es:

$$V(P) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0|R-R_1|} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0|R-R_2|} + \dots \dots + \frac{Q_n}{4\pi\epsilon_0|R-R_n|} [\text{V}]$$

Lo que puede escribirse con;

$$V(P) = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0|R-R_i|} [\text{V}]$$

Ejemplo #15

Tres cargas puntuales están dispuestas como se muestra en la figura. Calcular el potencial eléctrico en el punto **P(x,y)** ubicado en el plano de las cargas.

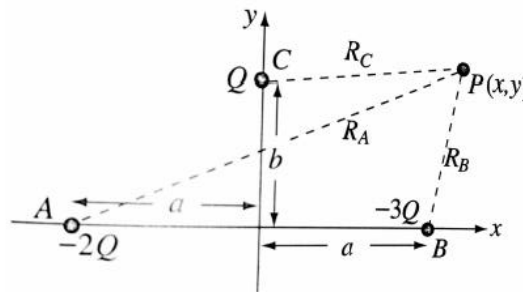


Figura 35 Ejemplo de potencial eléctrico debido a tres cargas puntuales

Solución

Dado que el potencial eléctrico debido a una carga puntual está dado por:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} [\text{V}]$$

Donde R es la distancia medida desde la ubicación de la carga hasta el punto donde se desea evaluar el potencial, se tiene que para calcular el potencial en el punto P se debe primero evaluar las distancias entre cada una de las cargas y el punto P.

$$R_a = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$$

$$R_b = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

$$R_c = \sqrt{x^2 + (y-b)^2}$$

Una vez calculadas las distancias el potencial en el punto P estará dado por la suma de los potenciales debido a cada una de las cargas;

$$V(x, y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-2Q}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} - \frac{3Q}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} + \frac{Q}{\sqrt{x^2 + (y-b)^2}} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-2}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} - \frac{3}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-b)^2}} \right)$$

Ejemplo #16

Tres cargas cada una con $Q=10^{-7}$ [C] están situadas en el eje x en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$. Calcular el potencial eléctrico en el punto $x = 0$, $y = 1$.

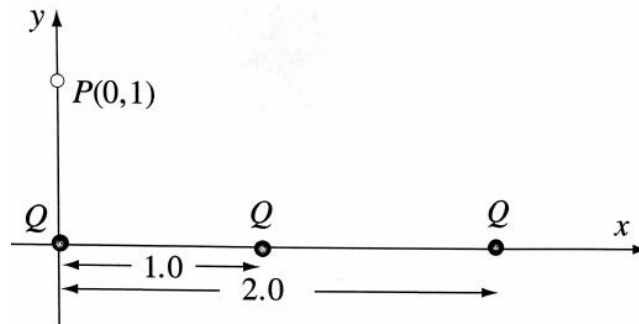


Figura 36 Tres cargas puntuales ubicadas sobre el eje x

Solución

A partir de la figura 36 se puede calcular que las distancias desde cada una de las cargas al punto P están dadas por:

$$r_1 = 1$$

$$r_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$r_3 = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

Entonces el potencial eléctrico en el punto P es

$$V(0,1) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = \frac{10^{-7}}{4\pi \cdot 8.854 \times 10^{-12}} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = 1936 \text{ [V]}$$

2.6.2 Potencial Eléctrico debido a distribuciones de carga

En muchos casos no se tendrá solo cargas puntuales en el espacio, sino que más bien un sinnúmero de cargas distribuidas ya sea uniformemente o no en una, dos o tres dimensiones. En particular las tres posibles formas de encontrar la carga distribuida es sobre una línea, una superficie o bien un volumen.

Considerando la definición de encontrada para la diferencia de potencial eléctrico, la que es:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |R-R'|} [V]$$

Se tiene que en el caso de encontrarse con una distribución de carga se deberá determinar el valor total de la carga, la que puede ser obtenida dependiendo del caso por medio de una de las siguientes expresiones;

$$Q_{linea} = \int_l \rho_l \cdot dl [C]$$

$$Q_{superficie} = \int_S \rho_S \cdot dS [C]$$

$$Q_{volumen} = \int_v \rho_V \cdot dv [C]$$

Entonces reemplazando la carga total correspondiente en la definición de diferencia de potencial se obtiene:

$$V(R)_{linea} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\rho_l \cdot dl}{|R - R'|} [V]$$

$$V(R)_{superficie} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_S \cdot dS}{|R - R'|} [V]$$

$$V(R)_{volumen} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\rho_V \cdot dv}{|R - R'|} [V]$$

Ejemplo #17

Un segmento corto de alambre delgado de largo **2 [m]** tiene una carga definida por una distribución de carga lineal $\rho_l = 10^{-7} [\frac{C}{m}]$.

- Calcular el potencial eléctrico en un punto cualquiera del espacio.
- ¿Cuál es el potencial eléctrico en una posición radial a **d = 0,1 [m]** medidos desde el centro del segmento?

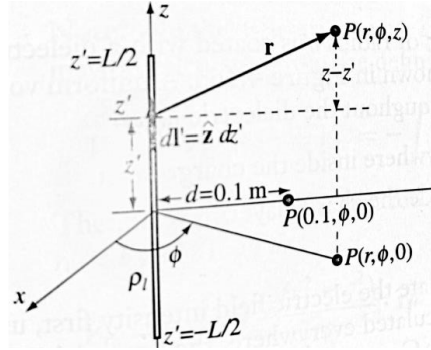


Figura 37 Cálculo del potencial eléctrico generado por un segmento corto de alambre cargado

Solución

- Tomando un punto arbitrario en el espacio de coordenadas $P(r, \phi, z)$ y definiendo un elemento diferencial de largo $dl = dz' \hat{z}$ sobre el alambre; se tiene que el vector que une el elemento de largo y el punto P es:

$$\vec{R} = r \hat{r} + (z - z') \hat{z}$$

y su largo;

$$|\vec{R}| = \sqrt{r^2 + (z - z')^2}$$

Por otro lado, la carga total distribuida sobre el alambre es:

$$Q_{\text{alambre}} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \rho_l \cdot dl$$

Luego utilizando la definición de potencial eléctrico se obtiene;

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\rho_l \cdot dl}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dz'}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} \\ &= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \ln (2\sqrt{r^2 + (z - z')^2} + 2z' + 2z) \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \\ &= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{2\sqrt{r^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2} + L + 2z}{2\sqrt{r^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2} - L + 2z} \right) [V] \end{aligned}$$

Así, para los datos dados en el enunciado se obtiene;

$$V = \frac{10^{-7}}{4\pi 8.854 \cdot 10^{-12}} \ln \left(\frac{2\sqrt{r^2 + (z-1)^2} + 2 + 2z}{2\sqrt{r^2 + (z+1)^2} - 2 + 2z} \right) = 898.8 \ln \left(\frac{2\sqrt{r^2 + (z-1)^2} + 2 + 2z}{2\sqrt{r^2 + (z+1)^2} - 2 + 2z} \right) [V]$$

b. Ahora para una distancia $d = 0.1$ [m] se tiene

$$V = 898.8 \ln \left(\frac{2\sqrt{(0.1)^2 + (0-1)^2} + 2}{2\sqrt{(0.1)^2 + (0+1)^2} - 2} \right) = 5389 [V]$$

Ejemplo #18

Un cilindro muy largo de radio “a” esta cubierto con una capa dieléctrica y conectado a cero potencial. Si una densidad de carga volumétrica $\rho_v = \rho_0$ se distribuye dentro de la capa dieléctrica;

- Calcular el potencial eléctrico en cualquier punto del espacio.
- Calcular el potencial eléctrico fuera de la capa dieléctrica.

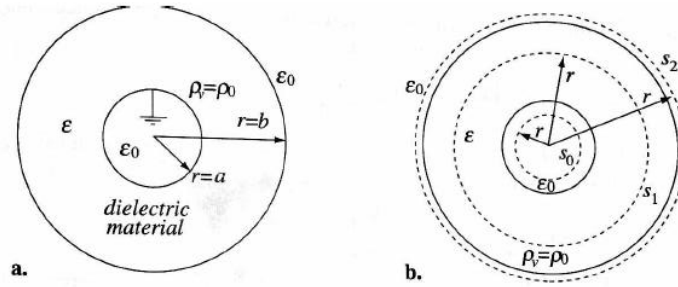


Figura 38 Calculo del potencial eléctrico en una geometría cilíndrica; a. Geometría del problema b. Superficies Gaussianas utilizadas

Solución

En este caso para poder calcular el potencial eléctrico es necesario primero contar con la intensidad de campo eléctrico en el espacio. Para ello, aprovechando la simetría del problema, se puede utilizar la ley de Gauss generado superficies gaussianas dentro del cilindro, dentro del dieléctrico y para el resto del espacio (Figura 38b). Luego;

Para $r < a$ se tiene

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \rightarrow |\vec{E}| = 0$$

Similarmente para $a < r < b$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_v \rho_v dv$$

$$|\vec{E}| \cdot 2\pi r l = \frac{1}{\epsilon} \rho_o (\pi r^2 - \pi a^2) l \rightarrow |\vec{E}| = \frac{\rho_o (r^2 - a^2)}{2\epsilon r}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_o (r^2 - a^2)}{2\epsilon r} \hat{r}$$

y finalmente para $r > b$;

$$\vec{E} = \frac{\rho_o (b^2 - a^2)}{2\epsilon_o r} \hat{r}$$

Esto dado que fuera del cilindro no hay más carga acumulada.

Ahora utilizando la definición de potencial eléctrico en términos del campo eléctrico se obtiene;

$$V = - \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^{r_o} \frac{\rho_o (r^2 - a^2)}{2\epsilon r} \hat{r} \cdot dr = - \frac{\rho_o}{2\epsilon} \left(\frac{r^2}{2} - a^2 \ln r \right) \Big|_a^{r_o}$$

$$= - \frac{\rho_o}{2\epsilon} \left(r_o^2 - a^2 - 2a^2 \ln \frac{r_o}{a} \right) [V]$$

y en particular para $r_o = b$

$$V = - \frac{\rho_o}{2\epsilon} \left(b^2 - a^2 - 2a^2 \ln \frac{b}{a} \right) [V]$$

b. Como se encontró que para el dominio $r > b$ el campo eléctrico es,

$$\vec{E} = \frac{\rho_o (b^2 - a^2)}{2\epsilon_o r} \hat{r}$$

Entonces el potencial eléctrico será:

$$V = - \int_b^{r_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_b^{r_1} \frac{\rho_o (b^2 - a^2)}{2\epsilon_o r} \hat{r} \cdot dr \hat{r} = \frac{\rho_o (b^2 - a^2)}{2\epsilon_o} \ln r \Big|_b^{r_1} = \frac{\rho_o (b^2 - a^2)}{2\epsilon_o} \ln \frac{r_1}{b} [V]$$

2.6.3 Cálculo de Campo Eléctrico a partir del Potencial Eléctrico

Se tiene de los postulados del campo eléctrico, en particular de su rotacional que

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \rightarrow \vec{E} = -\nabla V$$

O bien en coordenadas cartesianas

$$E = -\nabla V = -\hat{x} \frac{dV}{dx} - \hat{y} \frac{dV}{dy} - \hat{z} \frac{dV}{dz} \left[\frac{V}{m} \right]$$

Ejemplo #19

Calcular el campo eléctrico producido en el espacio debido a las tres cargas de la figura.

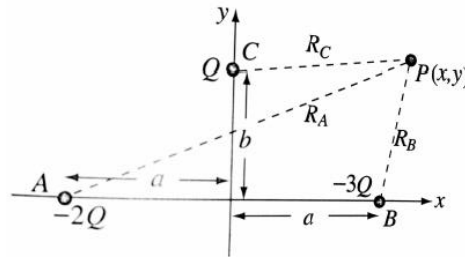


Figura 39 Cálculo del campo eléctrico a partir de la diferencia de potencial

Solución

En uno de los ejemplos anteriores se determinó que el potencial eléctrico producido por la distribución de cargas de la figura esta dad por:

$$V(x, y) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-2}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} - \frac{3}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-b)^2}} \right) [V]$$

Como sabemos que $\vec{E} = -\nabla V$; entonces:

$$\begin{aligned} \vec{E} = & -\hat{x} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{dx} \left(\frac{-2}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} - \frac{3}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-b)^2}} \right) \\ & - \hat{y} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{dy} \left(\frac{-2}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}} - \frac{3}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-b)^2}} \right) \end{aligned}$$

Realizando las dos diferenciaciones se obtiene:

$$\begin{aligned} \vec{E} = & -\hat{x} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2(x+a)}{((x+a)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3(x-a)}{((x-a)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x}{(x^2 + (y-b)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ & - \hat{y} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2y}{((x+a)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3y}{((x-a)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{(y-b)}{(x^2 + (y-b)^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \left[\frac{V}{m} \right] \end{aligned}$$

2.7 Materiales en el Campo Eléctrico

Hasta ahora solo hemos tratado a los distintos materiales indicando que existe un cambio en la permitividad de ϵ_0 a ϵ . Sin embargo, es necesario definir con mayor precisión las características de los distintos tipos de materiales cuando se encuentran en presencia de un campo eléctrico.

En general los materiales pueden ser divididos en dos grandes grupos, los conductores y los dieléctricos (o no conductores); teniendo en cuenta por el momento que se considerara que los materiales estudiados tienen la característica de “perfectos”, es decir no se consideraran aquellos que son algo conductor y algo dieléctrico.

2.7.1 Materiales Conductores

La principal característica de los materiales conocidos como conductores es que las cargas pueden moverse libremente en su interior. Estas solo se verán afectadas por las fuerzas externas (campo eléctrico) o por los límites del material (sus paredes, por ejemplo).

Otra propiedad interesante de los materiales conductores es la facilidad con que las cargas pueden moverse. Si a un conductor le aplicamos una fuerza externa como un campo eléctrico, la carga que exista en su interior se moverá hacia su superficie.

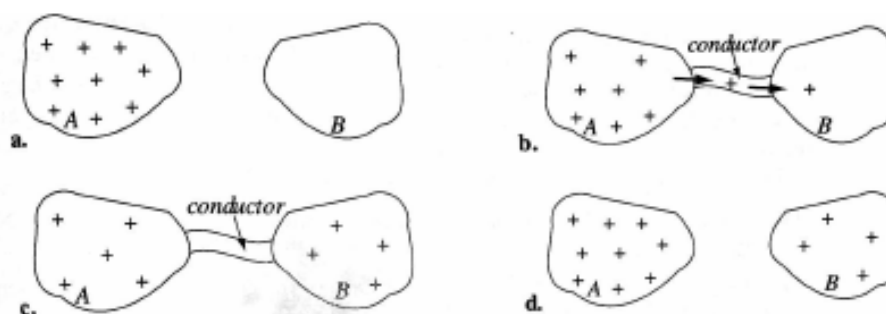


Figura 40 Cargas en materiales conductores; a. Las cargas en un material conductor son libres e moverse por ello debido a la fuerza de repulsión estas se situarán en la superficie del material b. si se establece un “puente” entre un conductor cargado y uno descargado las cargas se moverán desde el lugar de mayor concentración a donde existan menos cargas buscando minimizar la fuerza de repulsión entre ellas c. una vez que se logra el estado de menor energía el movimiento de cargas se detiene. d. nuevamente las cargas se ubican en la superficie del material.

En resumen, las propiedades de los materiales conductores son:

- 1) La carga introducida en un material conductor se mueve hacia la superficie de este. Es decir, no habrá carga en su interior.
- 2) Las cargas se distribuyen sobre la superficie a fin de producir un campo eléctrico nulo en su interior. Esto ocurre en forma independiente de la forma que tenga el material.
- 3) Una carga puntual puede existir en cualquier punto del conductor. Esto porque no hay fuerzas de atracción o repulsión actuando sobre ella.
- 4) La densidad de carga volumétrica dentro del conductor es cero.
- 5) El campo eléctrico en la superficie del conductor debe ser siempre perpendicular a esta. Por ello se tiene que el potencial en la superficie de un conductor es constante.

2.7.2 Materiales Dieléctricos

A diferencia de los materiales conductores los dieléctricos no permiten el movimiento de cargas en su interior puesto que estas están firmemente unidos a sus átomos. Si bien es cierto esta es una condición “ideal” ya que siempre será posible lograr que algunas de las cargas dentro del medio se muevan. Sin embargo, para el presente análisis se tratará al material como si este fuera un dieléctrico “perfecto”.

2.7.2.1 Polarización y vector de polarización.

Como se mencionó en el párrafo anterior un material dieléctrico se caracteriza por no contar con cargas libres que puedan moverse ante la acción de un campo eléctrico puesto que los electrones están fuertemente ligados a sus átomos. Sin embargo, cabe preguntarse; ¿qué ocurrirá entonces al someter un material dieléctrico a las fuerzas de atracción y repulsión resultantes de la acción del campo?

Si vemos cada átomo dentro del material dieléctrico este estará compuesto por una nube de electrones orbitando el núcleo.

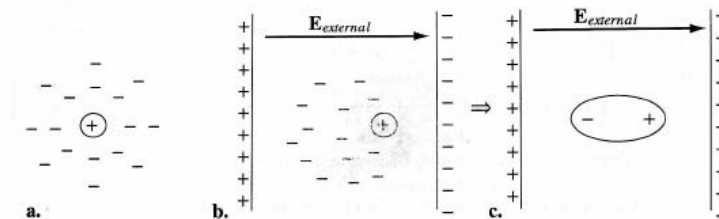


Figura 41 Cargas de polarización en un dieléctrico a. un átomo con carga neutra b. como los electrones están firmemente unidos al átomo ante la presencia de un campo eléctrico solo es posible desplazar sus orbitas debido a las fuerzas de atracción y repulsión c. como efecto neto se tiene el establecimiento de un dipolo

Dado que en este tipo de materiales los electrones que orbitan el núcleo del átomo están fuertemente unidos a él; al aplicarse un campo eléctrico externo no será posible que estos sean removidos. Por ello el efecto de las fuerzas de atracción o repulsión (según sea el caso para los electrones o el núcleo) se traducirá en un desplazamiento relativo de las orbitas de los electrones y de la posición de núcleo. Lo que en definitiva tiene como efecto neto la generación de un dipolo eléctrico.

Esto último tiene dos particularidades; una es que el momento dipolar total en el material depende de lo que ocurra con todas las moléculas que conforman el material dieléctrico y de la fuerza relativa a todas las cargas individuales que hubiera dentro de él. La segunda es que cada momento dipolar puede verse como dos cargas puntuales separadas por una pequeña distancia, y entonces un campo eléctrico resultante es generado en la dirección de positivo a negativo. Luego este campo se opondrá al campo externo.

En función de lo anterior se puede escribir entonces que el momento dipolar total, que conoceremos como vector de polarización y está dado por:

$$\vec{P} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i \left[\frac{C}{m^2} \right]$$

Esta forma de calcular la polarización en el material no es muy útil en la práctica, esto dado que es difícil de conocer los momentos dipolares (p_i) de cada átomo dentro del material. Sin embargo, el efecto neto del campo eléctrico debido al vector de polarización si es posible de ser evaluado.

Ahora bien, si se toma un elemento de volumen dv' , se puede utilizar la idea de dipolo y calcular el potencial eléctrico resultante a una distancia R de este.

$$dV = \frac{\vec{P} \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R}|^2} \cdot dv'$$

En esta expresión el producto $\vec{P} \cdot dv'$ es equivalente al momento dipolar del volumen dv' puesto que el vector de polarización fue definido como el momento dipolar por unidad de volumen. Teniendo esto en cuenta el potencial eléctrico que resulta estará dado por:

$$V = \int_{v'} dv' = \int_{v'} \frac{\vec{P} \cdot \hat{r}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R}|^2} \cdot dv' [V]$$

En este punto, si se compara esta última expresión por la correspondiente a la del potencial eléctrico producido por una densidad de carga volumétrica que es:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \frac{\rho_v \cdot dv'}{|\vec{R}|} [V]$$

Se tiene que es posible definir una densidad de carga equivalente producida por el vector de polarización la que estará dada por:

$$\rho_{pv} = \frac{\vec{P} \cdot \hat{r}}{|\vec{R}|} \left[\frac{C}{m^3} \right]$$

Para los cálculos posteriores resulta de interés poder dividir esta densidad de carga volumétrica en dos una superficial y otra también volumétrica. Para esto se puede entonces reescribir la ecuación derivada para el potencial producido por el vector de polarización de la siguiente forma;

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \vec{P} \cdot \frac{\hat{r}}{|\vec{R}|^2} \cdot dv' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \vec{P} \cdot \nabla \left(\frac{1}{R} \right) dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \vec{P} \cdot \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) dv'$$

A partir de la cual se puede llegar a:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\rho_{ps}}{R} dS + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \frac{\rho_{pv}}{R} dv' [V]$$

Donde ρ_{ps} y ρ_{pv} son densidades de carga superficial y volumétrica de polarización; y están dadas por:

$$\rho_{ps} = \vec{P} \cdot \hat{n} \quad \text{y} \quad \rho_{pv} = -\nabla \cdot \vec{P}$$

2.7.2.2 Densidad de flujo eléctrico y permitividad

Luego de haber discutido el fenómeno de polarización de materiales dieléctricos y sus efectos; todavía se tiene el problema de que estos no son fácilmente calculables. Para poder hacer esto consideremos que en un volumen de material dieléctrico se tienen tanto una densidad de carga volumétrica, como una densidad de carga superficial debido a la polarización.

$$\rho = \rho_v + \rho_{pv} \left[\frac{C}{m^3} \right]$$

Entonces como a partir de la forma puntual de la ley de Gauss se tiene que $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$; luego reemplazando

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon_0} + \frac{\rho_{pv}}{\epsilon_0}$$

y si esta expresión se multiplica por ϵ_0 ,

$$\nabla \cdot \epsilon_0 \vec{E} = \rho_v + \rho_{pv}$$

reordenando términos;

$$\nabla \cdot \epsilon_0 \vec{E} - \rho_{pv} = \rho_v$$

Y como se encontró en el punto anterior que $\rho_{pv} = -\nabla \cdot \vec{P}$; se tiene entonces

$$\nabla \cdot \epsilon_0 \vec{E} + \nabla \cdot \vec{P} = \rho_v$$

Además, como sabemos que $\nabla \cdot D = \rho_v$; se puede reemplazar esta última ecuación

$$\nabla \cdot \epsilon_0 \vec{E} + \nabla \cdot \vec{P} = \nabla \cdot \vec{D} \rightarrow \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Por otro lado, también tenemos que como la polarización depende de la magnitud del campo eléctrico externo, se puede escribir que;

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \left[\frac{C}{m^2} \right]$$

donde χ_e es una constante que depende de que tan fácil o difícil sea polarizar el material y se conoce como la susceptibilidad eléctrica del medio. Así se tiene que:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = (\epsilon_0 + \epsilon_0 \chi_e) \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$$

En este punto se define $\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e)$ como la permitividad del medio. Como puede verse que la permitividad del medio resulta del producto de la permitividad del espacio libre con otro término, se denomina al segundo término la permitividad relativa del medio y es en definitiva una medida de que tan susceptible es el material de ser polarizado.

$$\epsilon_r = (1 + \chi_e)$$

Luego, utilizando el concepto de permitividad del medio y permitividad relativa se puede reescribir la ecuación que relaciona la densidad de flujo eléctrico con el campo eléctrico

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

Ejemplo #20

Dos cascarones cilíndricos concéntricos de un material conductor están separados por un dieléctrico de permitividad ϵ . Si una carga total **+Q [C]** es distribuida uniformemente por unidad de largo del cascaron interno; calcular:

- Magnitud y dirección del vector de polarización.
- Densidad de carga volumétrica de polarización en el dieléctrico
- Densidad de carga superficial de polarización en el dieléctrico.

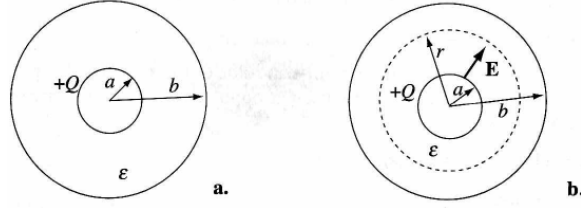


Figura 42 a. Un cable coaxial fabricado a partir de dos cascarones concéntricos conductores separados por un dieléctrico b. Superficie Gaussiana utilizada para determinar el campo.

Solución

a. Definiendo una superficie gaussiana de radio r y largo l en el espacio entre los dos cascarones se tiene que:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Ql \rightarrow |\vec{D}| 2\pi r l = Ql \rightarrow |\vec{D}| = \frac{Q}{2\pi r}$$

Dado que la densidad de flujo eléctrico esta direccionada en forma radial entre los dos cascarones se tiene entonces;

$$\vec{D} = \frac{Q}{2\pi r} \hat{r} \rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{2\pi r \epsilon} \hat{r}$$

Por otro lado como

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

entonces;

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E} = \frac{Q}{2\pi r} \hat{r} - \epsilon_0 \frac{Q}{2\pi r \epsilon} \hat{r} = \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \frac{Q}{2\pi r} \hat{r}$$

b. Dado que el vector de polarización obtenido solo tiene una componente en el eje \hat{r} , se tiene entonces que;

$$\rho_{pv} = -\nabla \cdot \vec{P} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r P_r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \frac{Q}{2\pi r} \right) = 0$$

c. Para el caso de la densidad de carga superficial de polarización se tiene que

$$\rho_{ps} = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

Donde \hat{n} corresponde a un vector unitario orientado hacia afuera de las paredes del dieléctrico. Para este caso se tiene entonces que existirán dos paredes una en la cara interna del material y otra en la cara externa, y cuyos vectores apuntaran en el sentido opuesto al eje r para el primero y en el sentido del eje r para el segundo. así;

$$\rho_{ps_interno} = \vec{P} \cdot \hat{n} = \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \frac{Q}{2\pi r} \hat{r} \cdot -\hat{r} = -\left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \frac{Q}{2\pi r} \left[\frac{C}{m^2}\right]$$

$$\rho_{ps_externo} = \vec{P} \cdot \hat{n} = \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \frac{Q}{2\pi r} \hat{r} \cdot \hat{r} = \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right) \frac{Q}{2\pi r} \left[\frac{C}{m^2}\right]$$

2.8 Capacidad

Si bien los capacitores o condensadores son relativamente conocidos, puesto que se encuentran dentro de los elementos comúnmente utilizados en circuitos eléctricos y electrónicos; el concepto de capacidad desde el punto de vista del campo eléctrico es más amplio y general.

Se define la capacidad como la razón entre la carga y potencial eléctrico, esto es la cantidad de carga que puede ser acumulada por un cuerpo para una diferencia de potencial dada.

$$C = \frac{Q}{V} \left[\frac{C}{V}\right]$$

A partir de esta definición general se tiene que un cuerpo puede tener cierta capacidad siendo está completamente independiente de la carga que este contenga o de la diferencia de potencial a la que este sujeto en un momento dado.

Consecuentemente la capacidad es esencialmente una función de la geometría del cuerpo y de sus propiedades constructivas.

Puede verse entonces que esta definición es adecuada para cualquier configuración de cargas y potencial eléctrico. Sin embargo, se debe tener en cuenta que el potencial eléctrico solo está definido correctamente si hablamos de una diferencia de potencial. Asimismo, también es necesario tener en mente que para que se tenga un cuerpo a potencial constante, este debe ser construido a partir de un material conductor. Dadas estas razones es conveniente definir la capacidad entre dos cuerpos conductores o la capacidad de un cuerpo conductor con respecto a otro.

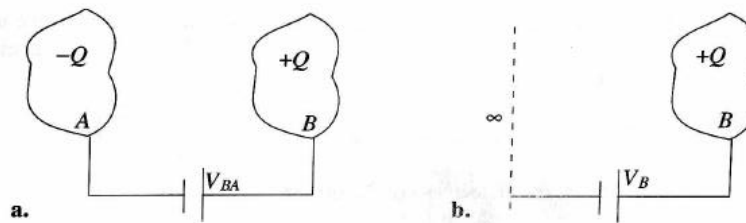


Figura 43 Definición de capacidad a. capacidad entre dos cuerpos conductores b capacidad de un cuerpo conductor

A partir de la figura 43a se puede ver que la diferencia de potencial entre los dos cuerpos está dada por $V_{AB} = V_B - V_A$ la que se muestra como una fuente. Esta es la que suministra la carga que se deposita sobre los dos cuerpos conductores. En base a esto se tiene entonces que la capacidad del conjunto de conductores está dada por:

$$C = \frac{|Q|}{|V_B - V_A|}$$

Debe tenerse en cuenta que debido a que se toman los valores absolutos de la carga y diferencia de potencial, la capacidad será siempre una cantidad positiva.

Por otro lado, tomando esta misma definición puede obtenerse la capacidad de un cuerpo conductor con respecto a un punto de referencia ubicado en el infinito (Figura 43b). Considerando que el punto de referencia está ubicado en el infinito, su potencial puede asumirse como cero, entonces;

$$C = \frac{|Q|}{|V_B - V_\infty|} = \frac{|Q|}{|V_B - 0|} = \frac{|Q|}{|V_B|}$$

En cuanto a las unidades, a partir de la definición de capacidad se tiene que estas son de Coulomb por Volt. Sin embargo, considerando que la capacidad es ampliamente utilizada se le asigna una unidad propia la que lleva el nombre de Faradio.

$$1 [F] = \frac{1[C]}{1[V]}$$

Como la carga de un Coulomb es relativamente grande en comparación con las cargas que se tiene en la práctica, resulta que la unidad de capacidad también lo es. Por ello generalmente se utilizara capacidades varios ordenes de magnitud más pequeños que la unidad encontrándose típicamente en los rangos de los mili faradios ($1 mF = 10^{-3} F$), micro faradios ($1 \mu F = 10^{-6} F$), nano faradios ($1 nF = 10^{-9} F$), y pico faradios ($1 pF = 10^{-12} F$).

Ahora, el cálculo de capacidad puede hacerse con la formula recién descrita o también mediante el campo eléctrico utilizando la ley de Gauss y la definición de diferencia de potencial.

$$C = \frac{\left| \oint_S \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{S} \right|}{\left| - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \right|}$$

2.8.1 Condensador de placas paralelas

El condensador de placas paralelas, como muestra la figura 44, está compuesto por dos placas conductoras de cierta área separadas por un material dieléctrico de espesor finito. Y por su simplicidad este condensador es probablemente uno de los componentes más comunes en circuitos eléctricos y electrónicos.

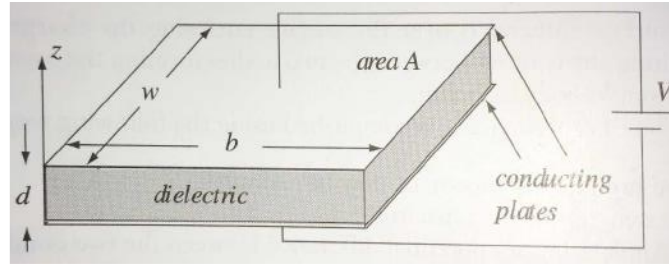


Figura 44 Condensador de placas paralelas

Para la determinación de la capacidad de este condensador se considera como punto de partida que una carga Q está dispuesta sobre la superficie de sus placas ($+Q$ en la placa superior y $-Q$ en la placa inferior). Consecuentemente la densidad de carga sobre las placas será $\rho_s = \frac{Q}{A} \left[\frac{C}{m^2} \right]$ en la placa superior y $\rho_s = -\frac{Q}{A} \left[\frac{C}{m^2} \right]$ en la placa inferior.

Entonces aplicando la ley de Gauss a una superficie ubicada entre las dos placas se tiene

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon} \int_S \rho_s \cdot dS \rightarrow |\vec{E}|S = \frac{QS}{\epsilon A} \rightarrow |\vec{E}| = \frac{Q}{\epsilon A}$$

Luego aplicando la definición de diferencia de potencial se obtiene:

$$V = - \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_0^d \frac{Q}{\epsilon A} \cdot dl = \frac{Qd}{\epsilon A} [V]$$

así al aplicar la definición de capacidad;

$$C = \frac{Q}{\frac{Qd}{\epsilon A}} = \frac{\epsilon A}{d} [F]$$

Este resultado muestra algunas de las principales características de la capacidad;

- 1) El valor de capacidad no depende de la cantidad de carga dispuesta en el sistema o de la diferencia de potencial aplicada
- 2) La capacidad solo es función de las dimensiones y geometría del sistema, así como también del material utilizado.
- 3) El cálculo de la capacidad requiere que se asuma la existencia de cargas o densidades de carga para permitir el cálculo de la intensidad de campo eléctrico y diferencia de potencial generados. Sin embargo, estas pueden ser asumidas en forma arbitraria ya que en el proceso se cancelan eliminando su influencia en el resultado final.

Ejemplo #21

Un condensador de placas paralelas de alto voltaje está hecho a partir de dos láminas de aluminio de **30[mm]** de ancho y **2 [m]** de largo. Entre ellas se coloca una capa de papel para que las láminas no se toquen. Si este papel está impregnado con aceite para lograr una permitividad relativa de **2.5**, tiene un espesor de **0.1 [mm]** y una rigidez dieléctrica de **20.000 [V/m]**:

- Calcular la capacidad del sistema
- ¿Cuál será la máxima diferencia de potencial que este condensador puede soportar?
- Si en el proceso de fabricación se generó una pequeña rajadura en el papel provocando que solo aire separe las placas; ¿cuál será la máxima diferencia de potencial que puede soportar este condensador dada esta falla de fabricación?

Solución

a. Tomando la ecuación ya derivada para la capacidad de un condensador de placas paralelas se tiene en este caso que la capacidad del sistema es:

$$C = \frac{\epsilon A}{d} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d} = \frac{8.854 * 10^{-12} * 2.5 * (0.03 * 2)}{0.1 * 10^{-3}} = 13.28 * 10^{-9} = 13.28 [nF]$$

b. La máxima diferencia de potencial que podrá resistir este condensador está determinada por el máximo campo eléctrico que soporta el material dieléctrico antes de que este pierda su propiedad y se transforme en un medio conductor. Dado que el papel impregnado con aceite que se utilizó para construir este condensador tiene una rigidez dieléctrica de 20.000 [V/mm], se tiene que este soportara como máximo un campo eléctrico de ese valor antes de que el medio deje de ser dieléctrico. Entonces la máxima tensión aplicable es:

$$V_{max} = - \int_l E_{max} \cdot dl = - \int_0^d |E_{max}| dl = E_{max} \cdot d = 20000 * 0.1 = 2000 [V]$$

c. Dado que el dieléctrico en una sección del condensador es solo aire, el que tiene una rigidez dieléctrica de 3000 [V/mm]; se tendrá que la máxima diferencia de potencial se verá reducida a:

$$V_{max} = E_{max_aire} \cdot d = 3000 * 0.1 = 300 [V]$$

Ejemplo #22

Un cable coaxial está hecho en base a un conductor interno de 2 [mm] de radio y un conductor externo con forma de cascaron cilíndrico de 6 [mm] de radio. En este cable en particular es necesario utilizar tres capas de aislación entre los conductores. Para la primera capa se usa una goma con permitividad relativa de 4 y 1 [mm] de espesor, la segunda capa está hecha de plástico con permitividad relativa de 9 y 1 [mm] de espesor, y la tercera capa consiste en espuma de permeabilidad relativa de 1,5 y 2 [mm] de espesor.

Calcular la capacidad por metro de este cable.

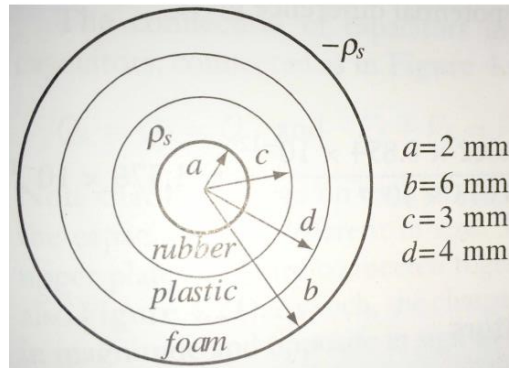


Figura 45 Corte transversal del cable coaxial

Solución

Para hacer el cálculo de capacidad por unidad de longitud de este cable coaxial se asume que existe una distribución de carga superficial ρ_s sobre el conductor central. Con esto es posible determinar la densidad de flujo eléctrico existente entre el conductor central y el cascaron exterior, lo que se hace utilizando la ley de Gauss;

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_S \rho_s \cdot dS \rightarrow |\vec{D}| 2\pi r l = \rho_s 2\pi a l \rightarrow |\vec{D}| = \frac{\rho_s a}{r} \rightarrow \vec{D} = \frac{\rho_s a}{r} \hat{r}$$

Entonces se tiene que las intensidades de campo eléctrico en cada uno de los dieléctricos existentes entre el conductor central y el cascaron externo son

Para $a < r < c$

$$\vec{E}_{goma} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_{goma}} = \frac{\rho_s a}{\epsilon_{rgoma} \epsilon_o r} \hat{r} = \frac{\rho_s a}{4 \epsilon_o r} \hat{r}$$

Para $c < r < d$

$$\vec{E}_{plástico} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_{plástico}} = \frac{\rho_s a}{\epsilon_{rplástico} \epsilon_o r} \hat{r} = \frac{\rho_s a}{9 \epsilon_o r} \hat{r}$$

Para $d < r < b$

$$\vec{E}_{plástico} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_{espuma}} = \frac{\rho_s a}{\epsilon_{respuma} \epsilon_0 r} \hat{r} = \frac{\rho_s a}{1.5 \epsilon_0 r} \hat{r}$$

Entonces la diferencia de potencial que existe entre el conductor interno y externo se obtiene a partir de la definición de diferencia de potencial:

$$V = - \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_c^a \vec{E}_{goma} \cdot dr - \int_d^c \vec{E}_{plástico} \cdot dr - \int_b^d \vec{E}_{espuma} \cdot dr$$

$$V = - \int_c^a \frac{\rho_s a}{4 \epsilon_0 r} \cdot dr - \int_d^c \frac{\rho_s a}{9 \epsilon_0 r} \cdot dr - \int_b^d \frac{\rho_s a}{1.5 \epsilon_0 r} \cdot dr$$

$$V = \frac{\rho_s a}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{4} \ln \left(\frac{a}{c} \right) + \frac{1}{9} \ln \left(\frac{c}{d} \right) + \frac{1}{1.5} \ln \left(\frac{d}{b} \right) \right) = \frac{\rho_s 0.002}{8.854 \cdot 10^{-12}} \left(\frac{1}{4} \ln \left(\frac{0.002}{0.003} \right) + \frac{1}{9} \ln \left(\frac{0.003}{0.004} \right) + \frac{1}{1.5} \ln \left(\frac{0.004}{0.006} \right) \right) = 91.179 \cdot 10^6 \rho_s [V]$$

así la capacidad del cable por unidad de largo es

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\rho_s 2\pi a}{91.179 \cdot 10^6 \rho_s} = \frac{\rho_s 2\pi 0.002}{91.179 \cdot 10^6 \rho_s} = 137.8 \cdot 10^{-12} = 137.8 [nF]$$

2.8.2 Interconexión de condensadores

Es común que varios condensadores sean conectados para lograr valores distintos de capacidad. Existen dos posibles. Dado que los condensadores son elementos con dos terminales es existen dos posibilidades para conectar dos de ellos, las que son en serie o en paralelo.

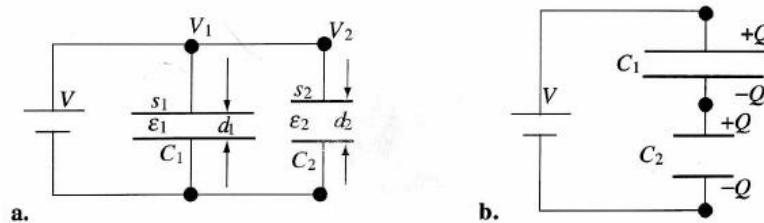


Figura 46 Conexión de dos condensadores a. en paralelo b. en serie

Desde el punto de vista de la fuente de potencial mostrada en la Figura 46 el conectar dos condensadores se verá como si existiese solo un condensador equivalente, el que tendrá un valor distinto al de los condensadores individuales C_1 y C_2 . El valor de capacidad del condensador equivalente dependerá de la forma que los condensadores estén conectados. Por ejemplo, para el caso de la conexión en paralelo (Figura 46a) la capacidad equivalente se obtiene considerando que la carga total acumulada en los dos condensadores es:

$$Q_T = Q_{C_1} + Q_{C_2} [C]$$

Luego la capacidad equivalente será:

$$C_{eq} = \frac{Q_T}{V} = \frac{Q_{C_1} + Q_{C_2}}{V} = \frac{Q_{C_1}}{V} + \frac{Q_{C_2}}{V} = C_1 + C_2 [F]$$

Ahora este resultado puede ser extendido para un conjunto de n condensadores conectados en paralelo, resultando en

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^n C_i [F]$$

Por otro lado, si se considera un par de condensadores conectados en serie (Figura 46b), al estar la placa inferior del condensador C_1 conectada a la placa superior del condensador C_2 se tiene que estas pueden ser vistas como si fueran una sola placa así que:

$$Q_T = Q_1 = Q_2$$

Y se tiene además que

$$V = V_{C_1} + V_{C_2}$$

Además, debido a la definición de capacidad se tiene en cada caso que;

$$V_{C_1} = \frac{Q_1}{C_1} \quad \text{y} \quad V_{C_2} = \frac{Q_2}{C_2}$$

Y reemplazando en la expresión para la diferencia de potencial se tiene;

$$V = V_{C_1} + V_{C_2} \rightarrow V = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2}$$

Y como vimos que $Q_T = Q_1 = Q_2$;

$$V = \frac{Q_T}{C_1} + \frac{Q_T}{C_2} \rightarrow \frac{V}{Q_T} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Pero $\frac{V}{Q_T} = \frac{1}{C_{eq}}$, así que;

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \rightarrow C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} [F]$$

O bien, extendiendo el resultado para n condensadores conectados en serie se tiene:

$$C_{eq} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}} [F]$$

2.9 Energía en el campo electrostático

Como hemos visto hasta ahora el campo eléctrico es un campo de fuerza que actúa sobre las cargas. Por lo que la idea de trabajo y energía potencial aparecieron como extensiones naturales de la ley de Coulomb. Ahora, el uso de la energía para hacer los cálculos de campo eléctrico tiene la misma ventaja que el potencial eléctrico, esto es dado que la energía también es una cantidad escalar y no vectorial.

Recordando la definición de potencial eléctrico, la energía potencial relacionada con el campo eléctrico la podemos calcular a partir de;

$$V_{ba} = \frac{w}{Q} = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \rightarrow w = Q * V_{ba} [J]$$

Ahora, ¿qué ocurre si se tiene un sistema de cargas en el espacio? Para contestar a esta pregunta consideremos en primer lugar que se tiene al espacio vacío y se trae en primer lugar una carga Q_1 desde el infinito a una posición dada. Dado que se define la energía como el trabajo realizado en contra del campo; el traer una carga a un espacio donde no hay un campo eléctrico previo resulta en cero energía. Esto es la energía relacionada con la primera carga es $w_1=0$ [J].

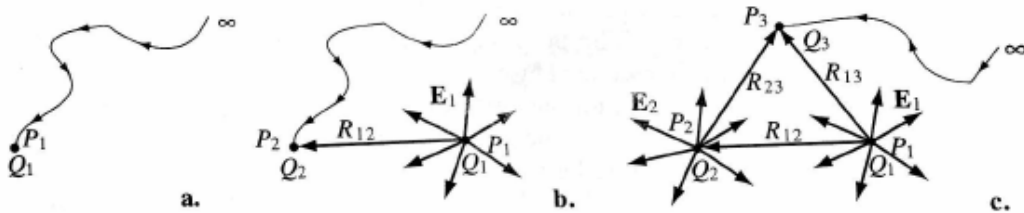


Figura 47 Energía potencial de un sistema de cargas a. la carga Q_1 no agrega energía al sistema dado que no existía campo eléctrico inicialmente b. la carga Q_2 es agregada al sistema c. la carga Q_3 es agregada al sistema

Ahora si se trae una segunda carga desde el infinito se tiene que se debe realizar un trabajo en contra del campo eléctrico establecido por la primera carga, y entonces la energía relacionada con este proceso será;

$$V_2 = - \int_{\infty}^{P_2} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^{P_2} \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_o |\vec{R}|^2} \cdot d\vec{l} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_o |\vec{R}_{12}|} [V]$$

$$w_2 = Q_2 V_2 = Q_2 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_o |\vec{R}_{12}|} [J]$$

Y si se trae una tercera carga también desde el infinito la energía relacionada con esto será

$$\begin{aligned} V_3 &= - \int_{\infty}^{P_3} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} - \int_{\infty}^{P_3} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = - \int_{\infty}^{P_3} \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_o |\vec{R}_{13}|^2} \cdot d\vec{l} - \int_{\infty}^{P_3} \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_o |\vec{R}_{23}|^2} \cdot d\vec{l} \\ &= \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_o |\vec{R}_{13}|} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_o |\vec{R}_{13}|} [V] \end{aligned}$$

$$w_3 = Q_3 V_3 = Q_3 \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_o |\vec{R}_{13}|} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_o |\vec{R}_{13}|} \right) [J]$$

Y así, la energía relacionada con el sistema será:

$$w_{sistema} = w_1 + w_2 + w_3 = 0 + Q_2 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_o |\vec{R}_{12}|} + Q_3 \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_o |\vec{R}_{13}|} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_o |\vec{R}_{13}|} \right) [J]$$

Ahora bien, esta energía fue obtenida en forma arbitraria trayendo en primer lugar la carga Q_1 desde el infinito y luego las otras dos. Sin embargo, cabe preguntarse, ¿qué ocurrirá si es que se altera el orden en que se traen las cargas a sus ubicaciones en el espacio? La lógica indica que para un sistema dado la energía potencial existente debiera ser independiente de la forma en que este se configuró. En efecto, como puede verse del resultado anterior, la energía contenida en el sistema depende de la magnitud de las cargas, las diferencias de potencial eléctrico existentes, y de las distancias relativas entre cada carga.

Teniendo esto último en cuenta, si invertimos el orden en que se traen las cargas a sus posiciones se obtendrá:

$$w_{sistema} = w_3 + w_2 + w_1 = 0 + Q_2 \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_o |\vec{R}_{32}|} + Q_1 \left(\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_o |\vec{R}_{21}|} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_o |\vec{R}_{31}|} \right) [J]$$

sumando los dos resultados se tiene,

$$\begin{aligned} 2w_{sistema} &= Q_1 \left(\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_o |\vec{R}_{21}|} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_o |\vec{R}_{31}|} \right) + Q_2 \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_o |\vec{R}_{12}|} + \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_o |\vec{R}_{32}|} \right) \\ &\quad + Q_3 \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_o |\vec{R}_{13}|} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_o |\vec{R}_{23}|} \right) [J] \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo;

$$2w_{sistema} = Q_1V_1 + Q_2V_2 + Q_3V_3 [J]$$

Así, la energía del sistema es:

$$w_{sistema} = \frac{1}{2}(Q_1V_1 + Q_2V_2 + Q_3V_3) [J]$$

Este resultado puede ser extendido a un sistema con n cargas puntuales resultando en;

$$w_{sistema} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_i [J]$$

Por otro lado, en el caso de tener distribuciones de carga en el espacio este mismo resultado puede ser escrito como sigue:

Para distribuciones lineales de carga: $w_{sistema} = \frac{1}{2} \int_l \rho_l V dl [J]$

Para distribuciones superficiales de carga: $w_{sistema} = \frac{1}{2} \int_S \rho_S V dS [J]$

Para distribuciones volumétricas de carga: $w_{sistema} = \frac{1}{2} \int_v \rho_v V dv [J]$

Ejemplo #23

Cuatro cargas puntuales están situadas en las esquinas de un rectángulo tal como se muestra en la figura. Calcular la energía electrostática almacenada en el sistema.

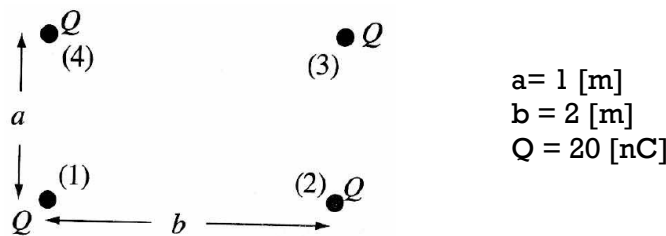


Figura 48 Disposición de cargas para ejemplo de cálculo de energía electrostática

Solución

A partir de la definición para la energía electrostática se tiene que esta estará dada por la suma del producto entre la carga y el potencial eléctrico existente en el punto donde está situada la carga. Entonces es necesario encontrar en primer lugar el potencial eléctrico en cada una de las esquinas del rectángulo. Tomando como punto de partida

la carga ubicada en la esquina inferior izquierda se tiene que el potencial en esa ubicación es:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + b^2}} [V]$$

Se puede verificar fácilmente que el potencial eléctrico en las otras tres esquinas tiene el mismo valor puesto que las cargas están todas ubicadas a la misma distancia y tienen todas las mismas magnitudes.

En cuanto a la energía del sistema se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} w_{sistema} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_i = \frac{1}{2} (Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3 + Q_4 V_4) \\ &= \frac{4}{2} \left(Q \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + b^2}} \right) \right) = \frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) [J] \end{aligned}$$

Reemplazando por los valores dados en el enunciado se tiene que $w_{sistema} = 1.4 \cdot 10^{-5} [J]$

Ejemplo #24

Una nube de forma esférica de radio a tiene una densidad de carga uniforme ρ_v en su interior. Calcular la energía asociada con la nube si $a = 1 [m]$ y $\rho_v = 10 [\frac{nC}{m^3}]$.

Solución

Antes de poder calcular la energía asociada a la nube debido a la presencia de la carga distribuida en su volumen es necesario obtener una relación para el potencial eléctrico. Para esto en tanto se debe obtener en primer lugar la ecuación para el campo eléctrico. Luego a partir de la aplicación de la ley de Gauss se tiene que

Para $r < a$

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_v \rho_v dv \rightarrow |\vec{E}| 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_v \frac{4\pi r^3}{3} \rightarrow |\vec{E}| = \frac{\rho_v r}{3\epsilon_0} \left[\frac{V}{m} \right] \rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_v r}{3\epsilon_0} \hat{r} \left[\frac{V}{m} \right]$$

y análogamente para $r > a$

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_v \rho_v dv \rightarrow |\vec{E}| 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_v \frac{4\pi a^3}{3} \rightarrow |\vec{E}| = \frac{\rho_v a^3}{3\epsilon_0 r^2} \left[\frac{V}{m} \right] \rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_v a^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r} \left[\frac{V}{m} \right]$$

Entonces el potencial eléctrico estará dado por:

$$V_{r_0} = - \int_{\infty}^a \frac{\rho_v a^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot d\vec{r} \hat{r} - \int_a^{r_0} \frac{\rho_v r}{3\epsilon_0} \hat{r} \cdot d\vec{r} \hat{r} = \frac{\rho_v a^3}{3\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_{\infty}^a - \frac{\rho_v r^2}{6\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_a^{r_0} = \frac{\rho_v a^2}{3\epsilon_0} - \frac{\rho_v r_0^2}{6\epsilon_0} [V]$$

Definiendo en este punto un cascaron esférico dentro de la nube de espesor dr_o se tiene

$$dQ = \rho_v dv = \rho_v 4\pi r_o^2 dr_o$$

e integrando sobre todo el volumen;

$$w_{nube} = \frac{1}{2} \int_v \rho_v V dv = \frac{1}{2} \int_0^a \rho_v 4\pi r_o^2 \left(\frac{\rho_v a^2}{3\epsilon_o} - \frac{\rho_v r_o^2}{6\epsilon_o} \right) dr_o = \frac{\rho_v^2 \pi}{\epsilon_o} \left(\frac{r_o^3 a^2}{3} - \frac{r_o^5}{15} \right) \Big|_0^a = \frac{4\pi a^5 \rho_v^2}{15\epsilon_o} [J]$$

Reemplazando con los valores dados en el enunciado se obtiene $w_{nube} = 9.46 \times 10^9 [J]$

2.9.1 Energía en el campo electrostático considerando variables del campo

En la sección anterior se determinó que en general la energía asociada con una distribución de cargas dentro un volumen v está dada por:

$$w_{sistema} = \frac{1}{2} \int_v \rho_v V dv [J]$$

Ahora bien, es frecuente que sea más conveniente calcular la energía en términos de las variables del campo (\vec{E} o \vec{D}) que en función de la distribución de carga. Para esto es conveniente recordar los postulados del campo eléctrico (divergencia y rotacional), de donde se tiene que:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$$

A partir de esto se puede escribir entonces que

$$w_{sistema} = \frac{1}{2} \int_v (\nabla \cdot \vec{D}) V dv [J]$$

Ahora utilizando la siguiente identidad vectorial;

$$\nabla \cdot (V * \vec{D}) = V * \nabla \cdot \vec{D} + \vec{D} * \nabla V$$

Luego reemplazando se obtiene;

$$w_{sistema} = \frac{1}{2} \int_v (\nabla \cdot (V * \vec{D}) - \vec{D} * \nabla V) dv [J] = \frac{1}{2} \int_v \nabla \cdot (V * \vec{D}) dv - \frac{1}{2} \int_v \vec{D} * \nabla V dv [J]$$

En este punto se puede utilizar el teorema de la divergencia para transformar la primera integral de volumen en una integral cerrada de superficie con lo que se tiene;

$$w_{sistema} = \frac{1}{2} \oint_s V * \vec{D} dS - \frac{1}{2} \int_v \vec{D} * \nabla V dv [J]$$

En este resultado la integral de superficie está tomada sobre cualquier superficie que envuelva el volumen v , y de su cálculo se obtiene que esta es cero basado en el siguiente argumento. Al tomar el volumen como una esfera de gran tamaño, su superficie varía en función de su radio al cuadrado (r^2). Al mismo tiempo en tanto el producto de $V * \vec{D}$ varía al menos en función r^{-3} (para cargas puntuales, para dipolos la variación es en función de r^{-5}). Entonces, a medida que r varía, el integrando varía a una razón de r^{-1} . Así al aumentar la superficie el valor de la integral disminuye, y por tanto para una esfera muy grande (donde $r \rightarrow \infty$), el valor de la integral tiene a cero.

Por otro lado, se tiene que $\vec{E} = -\nabla V$, luego la expresión anterior puede ser simplificada a;

$$w_{sistema} = \frac{1}{2} \int_v \vec{D} * \vec{E} dv [J]$$

y como $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$;

$$w_{sistema} = \frac{1}{2} \int_v \vec{D} * \vec{E} dv = \frac{1}{2} \int_v \epsilon \vec{E} * \vec{E} dv = \frac{1}{2} \int_v \epsilon E^2 dv [J]$$

Ejemplo #25

Se tiene un condensador de placas paralelas de S [m^2] de área y cuyas placas están separadas por una distancia de d [m]. Si la permitividad del material dieléctrico dispuesto entre las placas es de ϵ y se aplica una diferencia de potencial V entre ellas; calcular la energía electrostática almacenada en el dispositivo.

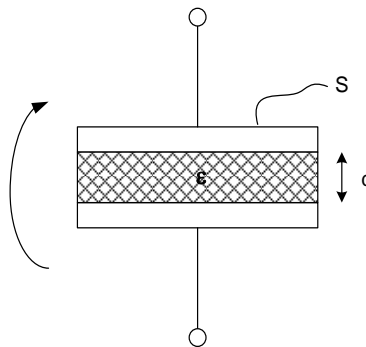


Figura 49 Condensador de placas paralelas para el ejemplo de cálculo de energía electrostática

Solución

De la figura se tiene que la intensidad de campo eléctrico entre las placas del condensador está dada por:

$$|\vec{E}| = \frac{V}{d} \left[\frac{V}{m} \right]$$

Luego la energía almacenada en el campo es;

$$W_{condensador} = \frac{1}{2} \int_v \epsilon |\vec{E}|^2 dv = \frac{1}{2} \int_v \epsilon \left(\frac{V}{d}\right)^2 dv = \frac{1}{2} \epsilon \left(\frac{V}{d}\right)^2 \int_v dv = \frac{1}{2} \epsilon \left(\frac{V}{d}\right)^2 (S * d) \\ = \frac{1}{2} \frac{\epsilon S}{d} V^2 [J]$$

Ahora recordando que la capacidad de un condensador de placas paralelas es

$$C = \frac{\epsilon S}{d} [F]$$

Entonces se tiene que la energía en el condensador es

$$W_{condensador} = \frac{1}{2} CV^2 [J]$$

2.10 Problemas de valor de borde, solución del campo eléctrico

Las ecuaciones y métodos discutidos en los capítulos anteriores permiten calcular los campos eléctricos que producen cargas puntuales o distribuciones de cargas relativamente sencillas. Sin embargo, si la forma en que están dispuestas las cargas en el espacio no es conocida, o bien si cómo estas están ubicadas es relativamente compleja; el uso de las ecuaciones vistas hasta ahora no es posible. Dado lo anterior, en este punto se presentan técnicas alternativas para determinar el campo eléctrico y las diferencias de potencial eléctrico basado en las condiciones de borde o de contorno del problema.

2.10.1 Ecuación de Poisson para el campo eléctrico

Recordando que los postulados del campo eléctrico para un medio dieléctrico lineal, homogéneo e isotrópico son:

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v}{\epsilon}$$

Además, como es posible obtener el campo eléctrico a partir del potencial mediante $\vec{E} = -\nabla V$, se tiene entonces sustituyendo en la ecuación de la divergencia:

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla \cdot (\nabla V) = \frac{\rho_v}{\epsilon}$$

y como $\nabla \cdot (\nabla V) = \nabla^2 V$, entonces $\nabla^2 V = \frac{\rho_v}{\epsilon}$. Por otro lado, si se expande esta última ecuación se obtiene para un sistema de coordenadas cartesianas el siguiente resultado:

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$$

Esta ecuación es conocida como la **ecuación de Poisson**, la cual corresponde a una ecuación diferencial parcial escalar, que permite obtener el potencial eléctrico. Es así como si es posible aplicar alguna técnica para resolver esta ecuación diferencial es posible calcular el campo eléctrico. Esta misma ecuación puede obtenerse para los sistemas de coordenadas cilíndrico y esférico, resultando en:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{d^2V}{d\phi^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{dV}{d\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{d^2V}{d\phi^2} = -\frac{\rho_v}{\epsilon}$$

2.10.2 Ecuación de Laplace para el campo eléctrico

A partir de la ecuación de Poisson escrita en un sistema de coordenadas cartesiano vista anteriormente, y considerando que se está en un espacio libre de cargas ($\rho_v=0$) se puede escribir lo siguiente.

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0$$

Esta última expresión se conoce como la **ecuación de Laplace**, y corresponde a la ecuación que puede ser utilizada cuando no se tienen densidades de cargas en el dominio donde se quiere calcular el campo. De la misma forma se pueden encontrar formulaciones para esta ecuación para los sistemas de coordenadas cilíndrico y esférico, las que resultan ser:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{d^2V}{d\phi^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\sin(\theta) \frac{dV}{d\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{d^2V}{d\phi^2} = 0$$

La importancia de utilizar ya sea la ecuación de Poisson o de Laplace para el cálculo del campo radica en los siguientes puntos:

- Ambas ecuaciones son escalares y no vectoriales
- Muchas veces se dispone más bien de los potenciales eléctricos más que los valores de las densidades de carga o campos.
- Se pueden utilizar técnicas de solución matemáticas desarrolladas para ecuaciones diferenciales de segundo orden para resolver los problemas asociados con el campo.

2.10.3 Métodos de solución

Como regla general los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden son adecuados para el problema de calcular el potencial a partir de las ecuaciones de Poisson o Laplace. En nuestro caso cubriremos la utilización de los siguientes métodos para resolver el problema en cuestión:

- a) Integración directa de las ecuaciones de Laplace y Poisson
- b) Método de las imágenes para problemas donde la ecuación de Poisson es aplicable
- c) Método de separación de variables para problemas donde la ecuación de Laplace es aplicable

El primero de estos métodos solo es utilizable en problemas unidimensionales. El método de imágenes, por otro lado, es un método de solución bastante general que también tiene aplicaciones más allá del cálculo de campos electrostáticos. Además, vale la pena mencionar que cualquiera de las soluciones que, obtenidas hasta ahora, como la ley de Gauss, son, necesariamente, soluciones a las ecuaciones de Poisson o Laplace.

2.10.3.1 Solución por integración directa

En principio para resolver una ecuación diferencial se necesita integrar la ecuación. Esto, por supuesto, en general no es posible para una ecuación de segundo orden. Sin embargo, si el potencial varía solo en una dimensión del espacio, las derivadas parciales pueden ser reemplazadas por derivadas ordinarias y la ecuación puede ser integrada en forma directa. Así si consideramos la ecuación de Poisson unidimensional en coordenadas cartesianas,

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = \frac{\rho_v(x)}{\varepsilon}$$

Integrando ambos lados de la ecuación una vez se tiene

$$\frac{dV(x)}{dx} = \int \left[-\frac{\rho_v(x)}{\varepsilon} \right] dx + a$$

e integrando nuevamente

$$V(x) = \int \left[\int \left[-\frac{\rho_v(x)}{\varepsilon} \right] dx \right] dx + ax + b [V]$$

La notación utilizada aquí es un tanto inusual, sin embargo, es utilizada para indicar el proceso. Además, permite la existencia de densidades de carga que sean función de la posición a lo largo del eje x. De esto se tiene que en la práctica se comienza con una densidad de carga conocida en el lado derecho de la ecuación, para luego integrarla una vez. Con ese resultado se realiza la segunda integración, donde las constantes a y b deben ser determinadas en función de las condiciones particulares del problema. Esto es, se requiere conocer previamente valores de V que serán conocidos como las condiciones de borde o de contorno del problema.

Por otro lado, si en lugar de resolver la ecuación de Poisson se resuelve la ecuación de Laplace, se elimina la contribución de las cargas al análisis anterior, con lo que se obtiene simplemente

$$V(x) = ax + b \text{ [V]}$$

Ejemplo #26

Las placas de un condensador están separadas por una distancia d y aterrizadas (conectadas a potencial cero) como se muestra en la figura. El dieléctrico entre las placas tiene una permitividad ε y una distribución de carga de densidad $\rho_v(x) = \rho_0 x(x-d) \left[\frac{C}{m^3} \right]$ en su volumen. Encontrar el potencial y campo eléctrico en el espacio entre ambas placas.

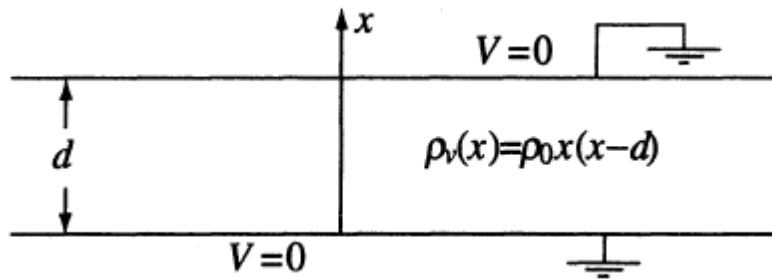


Figura 50 Placas paralelas de un condensador conectadas a cero potencial

Solución

Dado que la densidad de cargas en el dieléctrico es solo función del eje x podemos considerar que este corresponde a un problema unidimensional. Así es posible encontrar una solución integrando directamente la ecuación de Poisson para encontrar la ecuación que describe el potencial entre las placas. Luego si calculamos el gradiente del potencial encontraremos la magnitud el campo eléctrico.

De esto tenemos:

$$\frac{d^2 V(x)}{dx^2} = -\frac{\rho_v(x)}{\varepsilon} = -\frac{\rho_0 x(x-d)}{\varepsilon}$$

Ahora bien, del enunciado del problema podemos determinar las condiciones de borde de este que son que la tensión es 0 en $x=0$ y en $x=d$, o equivalentemente sobre cada una de las placas. Integrando dos veces se tiene

$$V(x) = -\frac{\rho_0 x^4}{12\varepsilon} + \frac{\rho_0 x^3 d}{6\varepsilon} + c_1 x + c_2 \text{ [V]}$$

Aplicando las condiciones de borde se obtiene

$$V(x = 0) = 0 = c_2 \rightarrow c_2 = 0$$

$$V(x = d) = 0 = -\frac{\rho_o d^4}{12\epsilon} + \frac{\rho_o d^3 d}{6\epsilon} + c_1 d + 0 \rightarrow c_1 = -\frac{\rho_o d^3}{12\epsilon}$$

Con esto se tiene entonces que la solución para el potencial eléctrico en el dieléctrico es

$$V(x) = -\frac{\rho_o x^4}{12\epsilon} + \frac{\rho_o x^3 d}{6\epsilon} - \frac{\rho_o x d^3}{12\epsilon} [V]$$

La intensidad del campo eléctrico en tanto resulta ser

$$\vec{E}(x) = -\nabla V(x) = -\hat{x} \frac{dV(x)}{dx} = \hat{x} \left(\frac{\rho_o x^3}{3\epsilon} - \frac{\rho_o x^2 d}{2\epsilon} + \frac{\rho_o d^3}{12\epsilon} \right) \left[\frac{V}{m} \right]$$

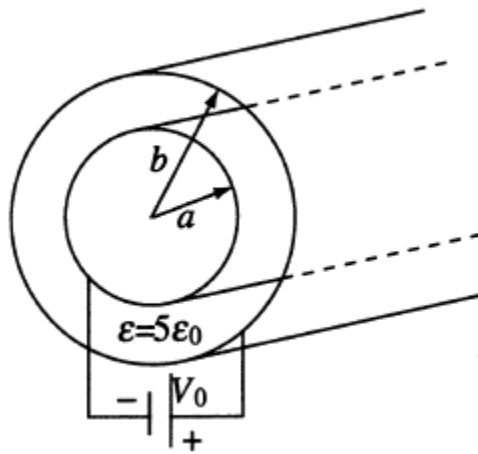


Figura 51 Cilindros coaxiales conectados a una fuente de potencial

Ejemplo #27

Dos cilindros conductores coaxiales muy largos están dispuestos como se muestra en la figura. Si una diferencia de potencial V_o se aplica entre ambos conductores:

- Asumiendo que solo es conocida la diferencia de potencial V_o , encontrar la distribución del potencial eléctrico en todo el espacio.
- ¿Como es la intensidad de campo eléctrico entre ambos conductores?

Solución

Dada la geometría del problema que es cilíndrica, y considerando que no existen fuentes en el dominio del espacio encerrado por los cilindros; utilizaremos la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas para resolver el problema. Por otro lado, considerando que solo es posible que varíe el potencial en el sentido del eje “r”, basta con utilizar la ecuación de Laplace en una dirección para encontrar la solución.

a) Por lo anterior la ecuación a resolver es:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = 0$$

integrando una vez se obtiene

$$r \frac{dV}{dr} = C_1 \rightarrow \frac{dV}{dr} = \frac{C_1}{r}$$

e integrando por segunda vez

$$V(r) = C_1 \ln r + C_2$$

Ambas constantes C_1 y C_2 se evalúan a partir de las condiciones de borde del problema, las que son $V(r=a) = 0$ y $V(r=b) = V_o$, así

$$V(a) = C_1 \ln a + C_2 = 0$$

$$V(b) = C_1 \ln b + C_2 = V_o$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se tiene

$$C_1 = \frac{V_o}{\ln \left(\frac{b}{a} \right)}$$

$$C_2 = -\frac{V_o \ln a}{\ln \left(\frac{b}{a} \right)}$$

y reemplazando la solución para el potencial es

$$V(r) = \frac{V_o}{\ln \left(\frac{b}{a} \right)} \ln r - \frac{V_o \ln a}{\ln \left(\frac{b}{a} \right)} = \frac{V_o}{\ln \left(\frac{b}{a} \right)} (\ln r - \ln a) [V]$$

b) Para obtener la intensidad de campo eléctrico, se utiliza el gradiente del potencial, con lo que

$$\vec{E}(r) = -\nabla V(r) = -\hat{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{V_o}{\ln \left(\frac{b}{a} \right)} (\ln r - \ln a) \right) = -\hat{r} \frac{V_o}{r \ln \left(\frac{b}{a} \right)} [V/m]$$

2.10.3.2 Método de las Imágenes

Este método para encontrar una solución para el campo eléctrico se basa en el principio de que un campo producido por un sistema de cargas ubicadas en una región del espacio puede ser también producido por otras configuraciones de cargas. Esto es, existe la posibilidad de que un campo eléctrico de determinada forma puede ser producido por cargas dispuestas en el espacio en configuraciones distintas. Esto siempre que se considere solo una región pequeña del espacio, siendo en general el resultado distinto si el punto de cálculo no fuera acotado.

Así el método de las imágenes permite resolver el campo para un problema en particular, por medio de reemplazar las fuentes por una configuración alternativa y que permita encontrar una solución con mayor facilidad, y que tenga un mismo efecto en el dominio de solución. Para problemas que envuelvan cargas puntuales, distribuciones de cargas o cuerpos conductores, pueden ser entonces reemplazados por cargas puntuales o distribuciones de carga equivalentes para los cuales la solución es ya conocida o puede ser obtenida fácilmente. Un ejemplo de lo anterior es el caso que se vio anteriormente en que se puede reemplazar una carga distribuida en la superficie de una esfera por una carga puntual ubicada en su centro. En ambos casos al aplicar la ley de Gauss sobre una superficie esférica que encierre la zona de estudio, se tendrá que el campo eléctrico en el exterior es el mismo.

La idea básica detrás de este método es que una carga o distribución de carga se refleja sobre una superficie conductora de la misma forma que la luz se refleja sobre un espejo. En una condición así el conductor puede ser reemplazado por una carga “imagen” y el campo producido por la carga real y la carga imagen puede ser calculado. Si bien esta idea está principalmente relacionada con conductores ideales, también puede ser extendida a conductores en general o materiales dieléctricos.

En términos más exactos, el método de las imágenes puede ser utilizado en situaciones donde un sistema de cargas puede ser identificado y una superficie equipotencial es generada por la presencia de estas cargas. Como ejemplo observemos el caso de la figura, donde la carga Q está ubicada sobre una superficie conductora. Para obtener la intensidad de campo eléctrico o el potencial en el espacio, el método de las imágenes requiere que se remueva la superficie conductora y esta sea reemplazada por una carga “imagen” ubicada a la misma distancia que la carga “real” pero bajo la superficie. Al hacer esto la superficie del conductor es reemplazada por una superficie donde el potencial es constante e idéntico al que se tendría con la configuración original, con lo que se obtiene que la solución para el campo es la misma que en la configuración original, pero solo válida para el espacio sobre la superficie. Por otro lado, la solución para el campo bajo la superficie será distinta, por lo que este método solo permitirá evaluar el campo para la parte superior del espacio.

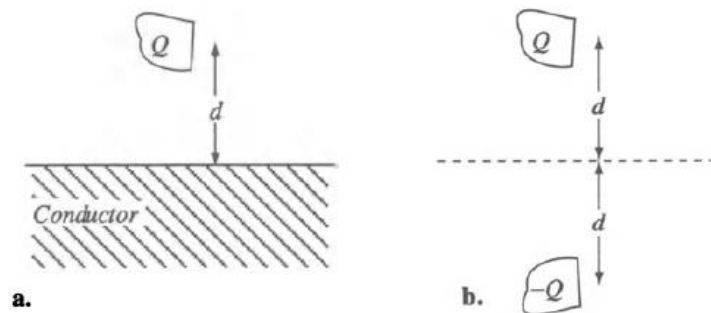


Figura 52 Aplicación del método de las imágenes para un cuerpo cargado sobre una superficie conductora a. Situación original, b. superficie conductora reemplazada por línea equipotencial y carga imagen

A partir de lo anterior tenemos que las siguientes son propiedades del método de las imágenes aplicado a geometrías planas.

1. La imagen es el negativo de la fuente. La magnitud de la imagen es la misma que la de la fuente.
2. La geometría es reflejada, a lo largo de la superficie equipotencial tal cual ocurre en un espejo.
3. La imagen y la fuente están ubicadas a la misma distancia de la superficie equipotencial
4. Múltiples fuentes producirán múltiples imágenes
5. Cargas puntuales individuales o múltiples, o distribuciones de carga frente a múltiples superficies equipotenciales producirán múltiples imágenes.

2.10.3.2.1 Aplicación a cargas puntuales

La aplicación más sencilla del método de las imágenes es a una carga puntual o a una distribución lineal de cargas ubicadas sobre un plano conductor. Para demostrar cómo se aplica este método consideremos primero una carga puntual Q ubicada a una distancia d por sobre una superficie conductora muy extensa como se muestra en la figura (a). Para la resolución de este problema asumiremos que el conductor está a potencial cero. Esto último no es estrictamente necesario, ya que el potencial de la superficie es solo un valor de referencia. Si este está a un valor distinto se puede sumar una vez obtenida la solución.

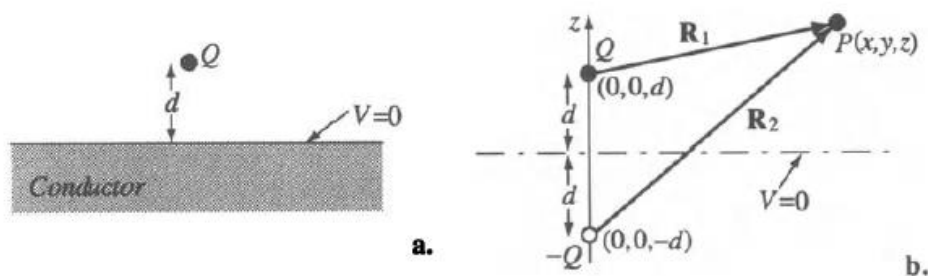


Figura 53 Aplicación de método de las imágenes a carga puntual sobre superficie conductora, a. situación original, b. reemplazo de conductor por carga imagen

Aplicando el método de las imágenes, removemos ahora la superficie conductora y la reemplazamos por una carga imagen de igual magnitud, pero polaridad opuesta la es ubicada debajo de la primera a una misma distancia del plano de referencia. Con esto se obtiene el sistema de cargas mostrado en la figura (b). Estas producen en el espacio una distribución de campo como la mostrada en la siguiente figura.

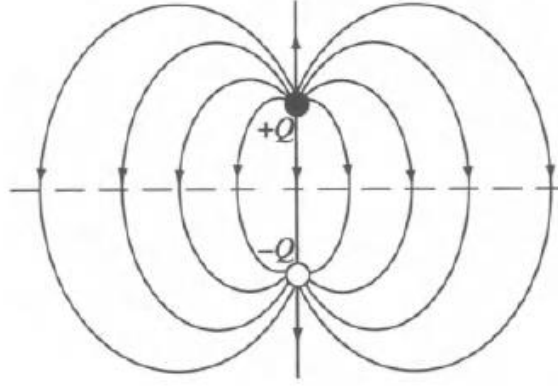


Figura 54 Distribución de líneas de campo eléctrico para sistema formado por carga y su imagen

Por la simetría del conjunto podemos notar que el potencial eléctrico en la línea ubicada a medio camino entre ambas cargas es cero, lo que coincide con la suposición inicial. Por lo que el cambio realizado para aplicar el método de las imágenes no ha cambiado esta condición. Hay que tener en mente, en todo caso, que la solución encontrada será solo válida para el espacio por sobre la línea equipotencial.

Ahora, resta encontrar la solución para el campo eléctrico a partir del conjunto de cargas. Por lo general es más sencillo encontrar el potencial eléctrico cuando se tienen cargas puntuales, y a partir de este derivar el campo eléctrico. Así, para un punto $P(x,y,z)$ arbitrario en el espacio de la figura se tiene que

$$V(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(x^2 + y^2 + (z - d)^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(x^2 + y^2 + (z + d)^2)^{\frac{1}{2}}} \right] [V]$$

De donde se puede verificar que para $z = 0$ el potencial será siempre cero, tal y como se ha asumido. Ahora para obtener la ecuación para el campo eléctrico en el espacio, calculamos el gradiente del potencial;

$$\begin{aligned} E(x, y, z) &= -\nabla V(x, y, z) = -\hat{x} \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} - \hat{y} \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} - \hat{z} \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\hat{x} x + \hat{y} y + \hat{z} (z - d)}{(x^2 + y^2 + (z - d)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\hat{x} x + \hat{y} y + \hat{z} (z + d)}{(x^2 + y^2 + (z + d)^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \end{aligned}$$

Evaluando esta expresión en $z = 0$ se obtiene la intensidad del campo sobre la superficie del conductor.

$$E(x, y, z) = -\hat{z} \frac{2Qd}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} [V/m]$$

De donde se puede ver que sobre la superficie del conductor la intensidad de campo eléctrico está orientada en el sentido negativo de z y su magnitud depende de la ubicación en el plano. En el conductor esta intensidad de campo debe ser cero por lo que debe aparecer una densidad de carga sobre su superficie como se observa en la siguiente figura.

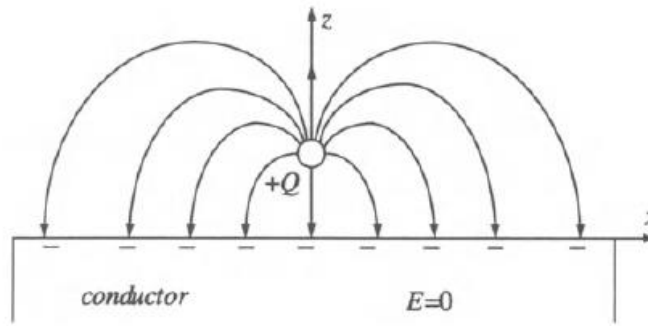


Figura 55 Líneas de campo eléctrico obtenidas a partir de la aplicación del método de las imágenes

El valor de dicha densidad de carga puede ser calculado a partir de las condiciones de interfase ya que el campo tiene solo una componente normal a la superficie.

$$D_t = 0, \quad D_n = \rho_s \rightarrow \epsilon_0 E_n = \rho_s$$

y usando la componente en sentido del eje z calculada anteriormente se tiene

$$\rho_s(x, y) = - \frac{2Qd}{4\pi (x^2 + y^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} [C/m^2]$$

Así la densidad de carga que se induce sobre la superficie es negativa y su valor depende de la ubicación. Esta tiene un máximo en $(x = 0, y = 0)$ directamente debajo de la carga puntual Q .

A partir de este ejemplo podemos definir los pasos básicos que son necesarios para aplicar el método, los que son:

- 1) Encontrar una superficie sobre la cual el potencial es constante. Normalmente esto ocurrirá sobre un conductor, no siendo necesario que dicho potencial sea cero.
- 2) Ubicar la carga imagen (o cargas) idénticas a las que están sobre la superficie, con signo opuesto y localizadas a igual distancia que sus contrapartes. Remover la superficie conductora que ha sido reemplazada por las cargas.
- 3) Encontrar la intensidad de campo eléctrico si se tiene pocas cargas o el potencial si el número de cargas es grande.
- 4) Calcular las otras cantidades requeridas basado en las fórmulas básicas de campo eléctrico y potencial.

Ejemplo #28

Una nube de forma esférica tiene una densidad de carga $-\rho_v$ y está ubicada sobre la tierra como se muestra en la figura. Sus dimensiones y distancia a la cual está de la tierra se muestran en la misma imagen.

- a) Calcular el campo eléctrico generado sobre la superficie de la tierra
- b) ¿Cuál será la máxima magnitud del campo eléctrico sobre la tierra? ¿Dónde ocurre?

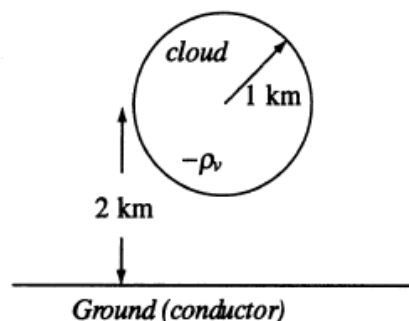


Figura 56 Diagrama de la situación enunciada en el ejemplo #28

Solución

- a) Para calcular la intensidad de campo eléctrico usando el método de las imágenes se remueve el plano de tierra y se reemplaza con una esfera de idéntico tamaño que la nube y ubicado a 2 km bajo el plano, pero con una densidad de carga positiva ρ_v . Con esto se obtiene el sistema de la siguiente figura.

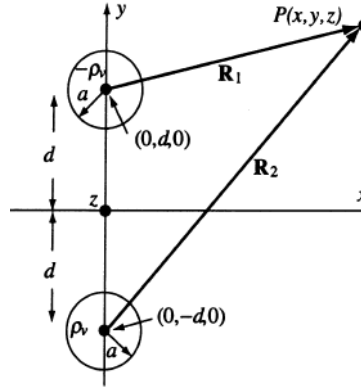


Figura 57 Reemplazo de la superficie de la tierra por línea equipotencial y carga imagen

Dado que las nubes (real e imaginaria) tienen forma esférica, para un punto fuera de ellas a partir de la ley de Gauss podemos verlas como si se tratara de dos cargas puntuales ubicadas en sus centros. Luego para un punto $P(x, y, z)$ tenemos que el potencial es:

$$V(P) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} \quad [V]$$

Donde la carga total Q en cada esfera se obtiene tomando la integral sobre el volumen de la nube y resulta ser:

$$Q = \frac{4\pi a^3 \rho_v}{3} \quad [C]$$

Las distancias R_1 y R_2 se pueden obtener de la figura y resultan ser:

$$R_1 = (x^2 + (y - d)^2 + z^2)^{1/2}$$

$$R_2 = (x^2 + (y + d)^2 + z^2)^{1/2}$$

Reemplazando el potencial en el punto P es

$$V(P) = -\frac{a^3 \rho_v}{3\epsilon_0 (x^2 + (y - d)^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{a^3 \rho_v}{3\epsilon_0 (x^2 + (y + d)^2 + z^2)^{1/2}} \quad [V]$$

Ahora calculando el gradiente del potencial se obtiene el campo eléctrico resultando en

$$\vec{E}(x, y, z) = -\nabla V(x, y, z) = -\hat{x} \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} - \hat{y} \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} - \hat{z} \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z}$$

$$= \frac{a^3 \rho_v}{3\epsilon_0} \left[-\frac{\hat{x}x + \hat{y}(y-d) + \hat{z}z}{(x^2 + (y-d)^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\hat{x}x + \hat{y}(y+d) + \hat{z}z}{(x^2 + (y+d)^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] [V/m]$$

Finalmente, para encontrar el campo eléctrico sobre la superficie de la tierra se evalúa esta expresión para $y=0$ con lo que se obtiene

$$\vec{E}(x, y, z) = \hat{y} \frac{2a^3 \rho_v}{3\epsilon_0} \left[\frac{d}{(x^2 + d^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] [V/m]$$

- b) De la expresión anterior que describe la intensidad del campo eléctrico a nivel de la tierra se puede ver que esta es máxima cuando $x = z = 0$ ya que el denominador llega a su mínimo valor. Así para el punto $(0,0,0)$ se tiene

$$\vec{E}(0,0,0) = \hat{y} \frac{2a^3 \rho_v}{3\epsilon_0 d^2} [V/m]$$

Utilizando los valores del enunciado esto resulta ser

$$\vec{E}(0,0,0) = \hat{y} 1.885 \times 10^{13} \rho_v [V/m]$$

2.10.3.3 Método de Separación de Variables

Un método alternativo para resolver la ecuación de Laplace es el de separación de variables. Se debe tener en cuenta que la aplicación de este método produce soluciones generales para la ecuación de Laplace más bien que soluciones particulares. Sin embargo, a pesar de esto, el método es de los más útiles para la solución de problemas para el campo eléctrico estático.

2.10.3.3.1 Separación de Variables en coordenadas Cartesianas

Comenzando con la ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = 0$$

En la cual el potencial eléctrico V es una ecuación escalar. Asumiendo que el potencial es una función lineal, la solución puede ser escrita como el producto de tres soluciones por separado, tal que

$$V(x, y, z) = X(x) * Y(y) * Z(z)$$

donde $X(x)$ es una función que solo depende de la variable x , $Y(y)$ solo de y , y $Z(z)$ solo de z . Esta dependencia de solo una variable permite la separación de la ecuación de Laplace en tres ecuaciones escalares, cada una dependiente de solo una variable. Con esto se tiene,

$$Y(y) * Z(z) * \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + X(x) * Z(z) * \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + X(x) * Y(y) * \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = 0$$

Donde las derivadas parciales de la ecuación de Laplace son reemplazadas por derivadas ordinarias dada la dependencia de una sola variable. Ahora, dividiendo ambos lados de la ecuación por $V(x,y,z)$ se tiene

$$\frac{1}{X(x)} * \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} * \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \frac{1}{Z(z)} * \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = 0$$

En esta última forma para la ecuación cada termino depende de solo una variable, y puede por tanto ser separada. Para que esta ecuación sea válida cada termino debe ser igualado a una constante a ser determinada en función de las condiciones de borde. Luego tenemos que

$$\frac{1}{X(x)} * \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -k_x^2$$

$$\frac{1}{Y(y)} * \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = -k_y^2$$

$$\frac{1}{Z(z)} * \frac{d^2 Z(z)}{dz^2} = -k_z^2$$

y entonces

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0$$

En la que cualquier constante puede ser usada mientras la ecuación se satisfaga. Se puede notar, eso sí que solo dos de las tres constantes son independientes y su elección fuerza el valor de la tercera. Reordenando los términos en las ecuaciones anteriores se tiene las siguientes ecuaciones diferenciales a resolver.

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + k_x^2 * X(x) = 0$$

$$\frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + k_y^2 * Y(y) = 0$$

$$\frac{d^2 Z(z)}{dz^2} + k_z^2 * Z(z) = 0$$

Estas ecuaciones diferenciales tienen soluciones conocidas. Asumiendo que k_x^2 y k_y^2 son ambas positivas la solución general para $X(x)$ y $Y(y)$ son

$$X(x) = A_1 \text{sen}(k_x x) + A_2 \text{cos}(k_x x) = B_1 e^{jk_x x} + B_2 e^{-jk_x x}$$

$$Y(y) = A_3 \text{sen}(k_y y) + A_4 \text{cos}(k_y y) = B_3 e^{jk_y y} + B_4 e^{-jk_y y}$$

Para encontrar la solución para el tercer término tenemos que $k_z^2 = -(k_x^2 + k_y^2)$. De donde se tendrá que la solución estándar es

$$Z(z) = A_5 \text{senh}(|k_z|z) + A_6 \text{cosh}(|k_z|z) = B_5 e^{|k_z|z} + B_6 e^{-|k_z|z}$$

Donde las constantes A_i y B_i deben ser evaluadas para encontrar la solución particular y son obtenidas a partir de las condiciones de borde específicas del problema. Con esto la solución general de la ecuación de Laplace ya sea en forma tiempo armónica como fasorial son

$$V(x, y, z) = [A_1 \sen(k_x x) + A_2 \cos(k_x x)][A_3 \sen(k_y y) + A_4 \cos(k_y y)][A_5 \sinh(|k_z|z) + A_6 \cosh(|k_z|z)]$$

$$V(x, y, z) = [B_1 e^{jk_x x} + B_2 e^{-jk_x x}][B_3 e^{jk_y y} + B_4 e^{-jk_y y}][B_5 e^{|k_z|z} + B_6 e^{-|k_z|z}]$$

Esta solución corresponde a la resolución de la ecuación de Laplace para un espacio tridimensional. Ahora, si el potencial no varía en alguna de las tres dimensiones, el problema a resolver se vuelve bidimensional y la solución general solo dependerá de dos variables espaciales. En este caso puede obtenerse que la solución general para el potencial es

$$V(x, z) = [A_1 \sen(k_x x) + A_2 \cos(k_x x)][A_5 \sinh(|k_z|z) + A_6 \cosh(|k_z|z)]$$

$$V(x, y, z) = [B_1 e^{jk_x x} + B_2 e^{-jk_x x}][B_5 e^{|k_z|z} + B_6 e^{-|k_z|z}]$$

con $k_z^2 = -k_x^2$

Ejemplo #29

En la figura se tiene una caja abierta donde sus dos paredes laterales están a potencial cero, y la pared inferior a un potencial V_0 . Si las superficies que componen esta caja son muy extensas (en sentido de los ejes “y” y “z”), calcular el potencial para cualquier punto del canal que se genera en el espacio encerrado por dichas superficies. Considerando que el potencial en el infinito es cero.

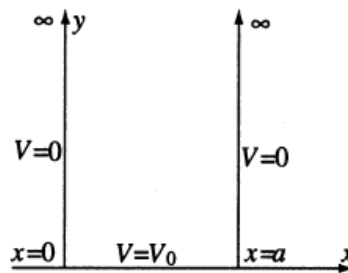


Figura 58 Caja conductora abierta y condiciones de borde para la obtención de la distribución de potencial en su interior

Solución

Dado que la geometría descrita en este puede reducirse a un problema bidimensional puesto que no habrá cambios en el resultado para el eje “z”. La solución general para este problema en dos dimensiones se encontró previamente, pero en este caso se tiene que el eje “y” corresponderá al eje “z”, con ello tenemos

$$V(x, z) = [A_1 \operatorname{sen}(kx) + A_2 \cos(kx)][B_1 e^{ky} + B_2 e^{-ky}]$$

donde $k_y^2 = -k_x^2 = -k^2$, y se utilizó la forma exponencial para la solución en dirección del eje “y”. Esto último ya que como las superficies se extienden en sentido del eje “y” hasta el infinito. Para valores en ese rango las funciones exponenciales son más convenientes que las hiperbólicas.

Ahora, para determinar los valores de las constantes en la ecuación del potencial se deben considerar las condiciones de borde del problema particular, de donde se obtiene:

$$\text{En } x=0, \rightarrow V(0, y) = 0 = (A_2)(B_1 e^{ky} + B_2 e^{-ky}) \rightarrow A_2 = 0$$

$$\text{En } x=a, \rightarrow V(a, y) = 0 = (A_1 \operatorname{sen}(ka))(B_1 e^{ky} + B_2 e^{-ky}) \rightarrow A_1 \operatorname{sen}(ka) = 0$$

O bien se tiene que $ka = m\pi \rightarrow k = \frac{m\pi}{a}$, donde m es un entero (incluido el 0). Sin embargo, excluimos el 0 ya que implica que $k=0$ y a una solución del tipo $Ax+B$ que no se ajusta a la realidad.

Con esto se tiene que la solución hasta ahora es

$$V(x, z) = A_1 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \left[B_1 e^{\frac{m\pi}{a}y} + B_2 e^{-\frac{m\pi}{a}y}\right]$$

$$\text{Ahora evaluando en } y = \infty \rightarrow V(x, \infty) = A_1 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \left[B_1 e^{\frac{m\pi}{a}\infty}\right] = 0 \rightarrow B_1 = 0$$

Con esto se obtiene como solución que $V(x, y) = C \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) e^{-\frac{m\pi}{a}y}$, con $C=A_1 B_2$

Finalmente evaluamos en $y=0$, $\rightarrow V(x, 0) = V_0$. Para satisfacer esta condición no basta con substituir $y=0$ en la solución anterior. Si se hiciera esto el resultado sería sinusoidal en el sentido del eje “x” y no constante como requiere la condición de borde. Sin embargo, es posible cumplir con esta condición si superponemos las múltiples soluciones que produce la ecuación anterior. Esto es

$$V(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) e^{-\frac{m\pi}{a}y}$$

Así con $y=0$

$$V(x, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} C \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) = V_o$$

Esta última ecuación corresponde a una serie de Fourier donde C_m corresponden a las amplitudes de cada una de las sinusoides posibles. Para obtener C_m multiplicamos ambos lados de la ecuación por $\operatorname{sen}\left(\frac{p\pi}{a}x\right)$ donde p es entero e integramos de cero a a , tal que

$$\int_0^a V_o \operatorname{sen}\left(\frac{p\pi}{a}x\right) dx = \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^a \operatorname{sen}\left(\frac{p\pi}{a}x\right) C \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx$$

De la integración se obtiene que

$$\int_0^a V_o \operatorname{sen}\left(\frac{p\pi}{a}x\right) dx = \begin{cases} \frac{2aV_o}{p\pi} & \text{para } p \text{ impar} \\ 0 & \text{para } p \text{ par} \end{cases}$$

$$\int_0^a \operatorname{sen}\left(\frac{p\pi}{a}x\right) C \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx = \begin{cases} \frac{C_m a}{2} & \text{para } p = m \\ 0 & \text{para } p \neq m \end{cases}$$

Para poder satisfacer ambas condiciones m debe ser impar y $p=m$, cualquier otra combinación resulta en cero. Entonces $C_m = \frac{4V_o}{m\pi}$ con $m=1,3,5,\dots$. Con esto la distribución de potencial en la caja es como se muestra en la figura a continuación.

3. Corriente Eléctrica Estacionaria

En el capítulo anterior hemos visto el campo eléctrico estacionario y sus aplicaciones. Para el análisis realizado las cargas estaban estacionarias en el espacio y no se consideró en ningún momento el movimiento de estas. En este capítulo comenzaremos a ver qué ocurre cuando las cargas se encuentran en movimiento y el efecto que estas producen en el espacio y sobre otras cargas.

3.1 Conservación de carga

El principio de conservación de carga es uno de los principios básicos de la naturaleza. La carga no puede crearse o destruirse; es más la carga total en el universo es constante. Esto es importante para el análisis siguiente pues si las cargas se mueven de un punto a otro en el espacio, tenemos entonces una forma de contarlas en todo momento. Además, la conservación de carga tiene como consecuencia los principios enunciados por las leyes de Kirchhoff y el proceso de carga de condensadores.

3.2 Cargas en movimiento en el campo eléctrico

Para que las cargas se muevan debe haber una fuerza actuando sobre ellas. Dicha fuerza puede ser del tipo mecánico, eléctrico o termal.

El movimiento de cargas produce lo que se conoce como un flujo o corriente. En este punto se considerarán dos tipos de flujo o corriente; el primero conocido como convección y el segundo conocido como conducción. Si bien los principios detrás de estos dos tipos de corriente son similares, las leyes que las gobiernan son diferentes. La mayor diferencia entre ellas está en que la corriente de convección la presencia de un campo eléctrico no es estrictamente necesaria.

3.2.1 Corriente de convección

Consideremos el caso de partículas de polvo cargadas en movimiento por acción del viento. Estas partículas tienen cierta velocidad y su movimiento es debido a la acción de una fuerza mecánica y no por la presencia de un campo eléctrico. Supongamos que queremos medir la cantidad de estas partículas que cruzan un punto del espacio en un tiempo determinado. Para esto podemos tomar un elemento pequeño de volumen ΔV el cual tiene una sección transversal también pequeña ΔS y un largo Δl como se muestra en la figura 59.

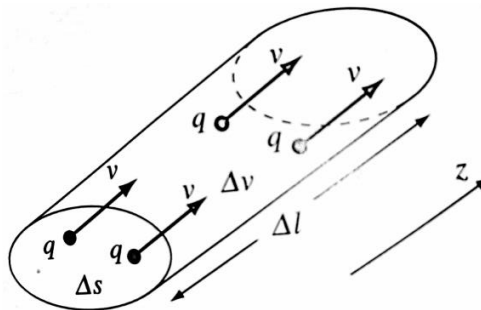


Figura 59 Un elemento pequeño de volumen a través del cual se mueven las partículas cargadas

Como el volumen ΔV es pequeño podemos asumir que todas las partículas se mueven a una velocidad similar \vec{v}_z , la que es perpendicular a la superficie ΔS . Tomando N cargas por unidad de volumen tenemos que el número de cargas total en el volumen es $N\Delta V$. Ahora si cada carga tiene una magnitud de q , la carga total en el volumen está dada por:

$$\Delta Q = Nq\Delta V [C]$$

Pero el volumen ΔV esta dado por

$$\Delta V = \Delta S \Delta l = \Delta S \vec{v}_z \Delta t$$

Entonces reemplazando se tiene;

$$\Delta Q = Nq\Delta V = Nq\Delta S \vec{v}_z \Delta t$$

Si se divide esta cantidad por el intervalo de tiempo Δt se tiene la carga por unidad de tiempo que cruza el volumen, esto es

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = Nq\vec{v}_z \Delta S \left[\frac{C}{seg} \right]$$

Esta razón tiene unidades de Coulomb por segundo, sin embargo, como es comúnmente utilizada para el cálculo de cantidades en electromagnetismo se le asigna la unidad de Ampere [A].

Ahora, esta cantidad ΔI corresponde al flujo o corriente de cargas que pasa por la superficie ΔS en un intervalo de tiempo. Así podemos ver que en la definición de corriente aparece un término que solo depende de las cargas, este término recibe el nombre de densidad de corriente; tal que:

$$\vec{J} = Nq\vec{v}_z \left[\frac{A}{m^2} \right]$$

Por otro lado, si la velocidad de las partículas no es perpendicular a la superficie ΔS como en el análisis anterior, es posible definir la corriente que pasa por la superficie tomando la componente perpendicular de la velocidad de acuerdo con:

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = Nq\vec{v}_z \cdot \Delta S \hat{n} \left[\frac{C}{seg} \right]$$

Donde \hat{n} es un vector unitario perpendicular a la superficie. Asimismo, considerando que $\vec{J} = Nq\vec{v}_z$, y como Nq corresponde a la carga por unidad de volumen, entonces se puede escribir que:

$$\vec{J} = \rho_v \vec{v}_z \left[\frac{A}{m^2} \right]$$

Teniendo todo esto en cuenta es posible entonces en este punto generalizar la definición de densidad de corriente, la que resulta ser;

$$\vec{j} = \hat{n} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} \left[\frac{A}{m^2} \right]$$

y además,

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad [A]$$

Ejemplo #30

a) Calcular la densidad de corriente producto de gotas de lluvia si la carga de cada una de las gotas que caen es igual a la de **1000** electrones. La velocidad de caída de las gotas es de **20 [m/s]** y el número de gotas por segundo por metro cuadrado de superficie es de **10.000**.

b) ¿Cuál es la corriente total que circula entre una nube cargada y la superficie de la tierra si la nube se extiende por **10 [km²]** y no hay viento?

c) ¿Qué ocurre si un viento horizontal de **30 [km/h]** sopla durante la lluvia?

Solución

a) Si se tienen 10.000 gotas cruzando una superficie de un [m²] por cada segundo a una velocidad de 20 [m/s]; tenemos que las gotas viajan una distancia de 1 [m] en un intervalo de $\frac{1}{20}$ [seg]; entonces en un volumen de 1 [m³] se tendrá:

$$N \left[\frac{\text{gotas}}{m^2 \text{seg}} \right] * \Delta t [\text{seg}] = 10.000 * \frac{1}{20} = 500 [\text{gotas } m^3]$$

Con esto es posible calcular la magnitud de la densidad de corriente producida por las gotas de lluvia.

$$|\vec{j}| = Nqv_z = 500 * 1000 * 1.6019 * 10^{-19} * 20 = 1.6 * 10^{-12} \left[\frac{A}{m^2} \right]$$

b) La corriente total se obtiene a partir de la integración de la densidad de corriente sobre la superficie donde caen las gotas;

$$\vec{I} = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \vec{j} * S = 1.6 * 10^{-12} * 10 * (1000)^2 = 1.6 * 10^{-5} [A]$$

c) La velocidad vertical no ha cambiado, sin embargo, ahora se tiene además una componente horizontal de 30 [km/h] → 8.34 [m/seg]. A partir de esto tenemos que la componente horizontal de la densidad de corriente será:

$$J_x = J * \frac{v_x}{v_z} = 1.6 * 10^{-12} * \frac{8.34}{20} = 6.672 * 10^{-13} \left[\frac{A}{m^2} \right]$$

3.2.2 Corriente y densidad de corriente de conducción

La conducción ocurre en materiales conductores, ya que debido a su estructura atómica poseen cargas que pueden ser removidas con relativa facilidad al aplicárseles una fuerza externa. Es así que, si se aplica un campo eléctrico a un conductor, este campo ejercerá una fuerza $\vec{F} = q\vec{E}$ sobre los electrones de las capas superiores. Dado que los electrones dichas capas en los conductores no están fuertemente unidos a su núcleo, estos se verán sujetos a una aceleración pudiendo entonces moverse de átomo en átomo dando entonces origen a una corriente. Ahora estos electrones al moverse por la estructura atómica del conductor eventualmente chocarán con otras partículas perdiendo de esa forma parte de su energía cinética. El número de choques que tengan los electrones dentro del medio conductor dicta entonces la velocidad a la que estos se mueven, la que es conocida como velocidad de deriva. En otras palabras, la velocidad de los electrones depende de la resistencia al movimiento que puedan encontrar en su camino.

Ahora, de este análisis podemos ver que por un lado la velocidad a la que se mueven los electrones dependerá de la fuerza que el campo eléctrico ejerce sobre ellos y por otro lado la densidad de corriente será proporcional a la velocidad de los electrones; esto es:

$$\vec{v} \propto \vec{E} \qquad \text{y} \qquad \vec{J} \propto \vec{v}$$

De esto se desprende entonces que la densidad de corriente será también proporcional a la intensidad del campo eléctrico; por ello se puede escribir que

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

Donde σ es entonces una constante de proporcionalidad. Dado que esta constante de cierta forma muestra que tan fácil o difícil resulta la conducción en el medio, entonces es una medida de la conductividad de este y por tanto se le conoce como conductividad del medio. Ahora sus unidades dependerán de;

$$\sigma = \frac{\vec{J}}{\vec{E}} \frac{\left[\frac{A}{m^2}\right]}{\left[\frac{V}{m}\right]} \rightarrow \left[\frac{A}{Vm}\right] \rightarrow \left[\frac{S}{m}\right]$$

y entonces se le asigna la unidad de Siemens por metro.

Ejemplo #31

El cobre tiene una densidad de electrones libres de 8×10^{28} [electrones/ m^3]. Si un alambre de cobre de 3 [mm] de diámetro lleva una corriente de 50 [A], calcular:

- a) La velocidad de deriva de los electrones
- b) La velocidad máxima de los electrones si la máxima densidad de corriente del cobre es de 10^9 [A/ m^2]

Solución

- a) La densidad de corriente en el conductor está dada por la corriente que circula por él y por su sección transversal;

$$J = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi r^2} = \frac{50}{\pi (1.5 \times 10^{-3})^2} = 7.073553 \times 10^6 \left[\frac{\text{A}}{\text{m}^2} \right]$$

y entonces la velocidad es;

$$J = nqv \rightarrow v = \frac{J}{nq} = \frac{7.073553 \times 10^6}{8 \times 10^{28} \times 1.6 \times 10^{-19}} = 5.5262 \times 10^{-4} \left[\frac{\text{m}}{\text{seg}} \right]$$

- b) Ahora considerando la densidad de corriente máxima para el cobre que es de 10^9 [A/ m^2]

se tiene que la velocidad es;

$$v = \frac{J}{nq} = \frac{10^9}{8 \times 10^{28} \times 1.6 \times 10^{-19}} = 7.8125 \times 10^2 \left[\frac{\text{m}}{\text{seg}} \right]$$

3.3 Ley de Ohm

La ley de Ohm define a nivel del campo la relación que existe entre la intensidad de campo eléctrico y la densidad de corriente. Esta ley es de corte experimental y fue obtenida por Georg Simon Ohm en 1827. En efecto, esta ley define que la densidad de corriente depende linealmente de la intensidad de campo eléctrico. Esto es en la práctica lo definido en la sección anterior para la densidad de corriente de conducción, es decir;

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

La que corresponde a la expresión de la ley de Ohm en términos del campo. Sin embargo, como veremos a continuación esta ecuación puede ser fácilmente adecuada para mostrar su forma más familiar y que es la utilizada para el análisis circuital ($V = RI$).

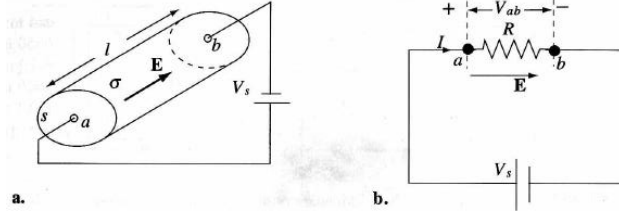


Figura 60 a. Representación en función del campo de la ley de Ohm, b. representación circuital de la ley de Ohm

Tomando en cuenta la figura 60a, donde se tiene un trozo de material conductor de conductividad σ y que está sujeto a un campo eléctrico E . De la definición de corriente se tiene que:

$$\vec{I} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_S \sigma \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Por otro lado, la diferencia de potencial entre los extremos del material conductor está dada por;

$$V_{ab} = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Substituyendo en la forma circuital de la ley de Ohm se obtiene;

$$V = RI \rightarrow R = \frac{V}{I} = \frac{\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\int_S \sigma \vec{E} \cdot d\vec{S}} \left[\frac{V}{A} \right]$$

Esta última ecuación corresponde a la forma general para la relación entre tensión y corriente en un conductor, y define la razón que existe entre ellas y que se conoce como resistencia. Las unidades de la resistencia son de Volt por Ampere o bien Ohm (Ω).

Al resolver las dos integrales del numerador y denominador se tiene que la resistencia está definida para el caso de conductores de largo l de sección constante S y conductividad homogénea σ que:

$$R = \frac{El}{\sigma ES} = \frac{l}{\sigma S} [\Omega]$$

Es común que en muchos casos se utilice el inverso de la conductividad y que se conoce como resistividad del material ($\rho = \frac{1}{\sigma}$) y que tiene por unidades Ohm metro, entonces;

$$R = \frac{\rho l}{S} [\Omega]$$

3.4 Resistencia equivalente

Dado que las resistencias son elementos que tienen dos puntos de conexión, es posible disponer dos de ellas en dos formas; en serie o en paralelo. Dado que el conjunto formado tiene también dos posibles puntos de conexión, se tendrá que entre sus terminales se obtendrá una resistencia equivalente de valor dado por la forma en que se haya conectado los dos elementos. Como se verá esto mismo es extensivo a conjuntos de múltiples resistencias.

3.4.1 Conexión de resistencias en serie

Dos resistencias individuales pueden ser conectadas uniendo solo uno de sus terminales, en cuyo caso se habla de una conexión en serie (figura 61). Como puede verse de la figura en esta situación la corriente circulando por cada uno de los elementos individuales es la misma. Por otro lado, a partir de la ley de Ohm se tiene que la diferencia de potencial en cada elemento es;

$$V_1 = R_1 I [V]$$

$$V_2 = R_2 I [V]$$

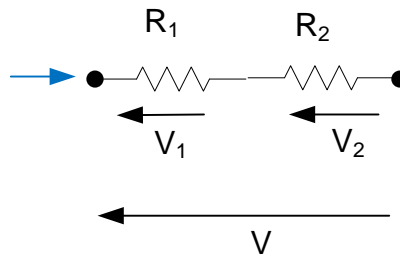


Figura 61 Conexión en serie de dos resistencias.

Así la diferencia de potencial entre los dos extremos del conjunto de la figura 61 es;

$$V = V_1 + V_2 = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2) I$$

y al aplicar la definición de resistencia se obtiene;

$$R_{eq} = \frac{V}{I} = \frac{(R_1 + R_2) I}{I} = (R_1 + R_2) [\Omega]$$

Este resultado puede ser entonces extendido a un conjunto de n resistencias dispuestas en serie, obteniéndose que su resistencia equivalente es:

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i [\Omega]$$

3.4.1 Conexión de resistencias en paralelo

La otra opción para conectar un conjunto de dos resistencias es disponer de cada par de terminales conectados entre sí tal como se muestra en la figura 62. Este tipo de conexión se conoce como conexión en paralelo.

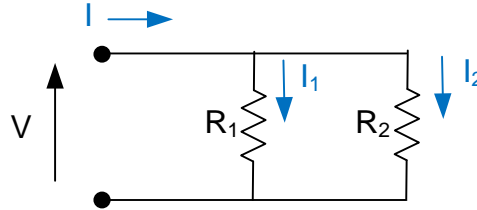


Figura 62 Conexión en paralelo de dos resistencias.

Como puede apreciarse de la figura en este caso la diferencia de potencial entre los terminales de cada resistencia es la misma, siendo la corriente que circula por ellas distinta. Se cumple en esta situación que:

$$I = I_1 + I_2$$

Tomando esto en cuenta y aplicando la definición de resistencia se obtiene;

$$R_{eq} = \frac{V}{I} = \frac{V}{I_1 + I_2}$$

Al tomar el inverso de esta relación resulta en;

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{I_1 + I_2}{V} = \frac{I_1}{V} + \frac{I_2}{V} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Ahora bien, este resultado puede ser generalizado por:

$$R_{eq} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}} [\Omega]$$

Ejemplo #32

Un fusible está hecho de cobre y tiene la forma que se muestra en la figura. El cobre puede llevar una densidad de corriente máxima de $10^8 \text{ [A/m}^2\text{]}$; corrientes sobre este valor hacen que el conductor se caliente rápidamente haciendo que este se derrita. Si el espesor del fusible es de 0.1 [mm] :

- Diseñar el ancho de la sección fungible del fusible de modo que este opere para corrientes superiores a 20 [A] .
- Calcular la resistencia total del fusible para las dimensiones dadas.

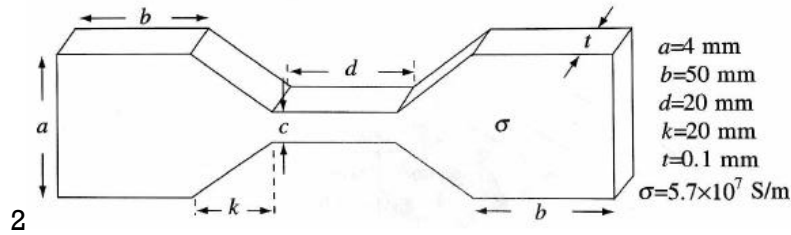


Figura 63 Forma y dimensiones del fusible del ejemplo

Solución

a. Dado que la máxima corriente que circulara por el fusible es de 20 [A], se tiene entonces que:

$$|\vec{I}| = |\vec{j}| * S = |\vec{j}| * t * c \rightarrow c = \frac{|\vec{I}|}{|\vec{j}|t} = \frac{20}{10^8 * 0.1 \times 10^{-3}} = 0.002 [m] \rightarrow C = 2 [mm]$$

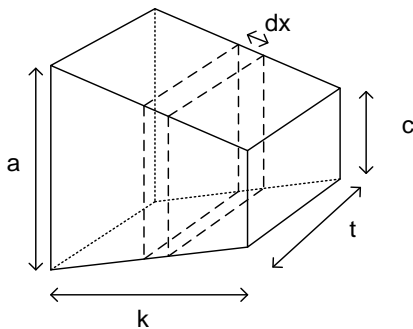
b. Dada la geometría del fusible es conveniente calcular la resistencia de cada una de las secciones que lo componen; luego con los resultados es posible obtener la resistencia equivalente del conjunto. Así la resistencia de las componentes de sección recta es:

sección delgada del fusible:

$$R_1 = \frac{l_1}{\sigma S_1} = \frac{d}{\sigma c t} = \frac{20 \times 10^{-3}}{5.7 \times 10^7 * 0.1 \times 10^{-3} * 2 \times 10^{-3}} = 1.754 \times 10^{-3} [\Omega]$$

sección gruesa del fusible:

$$R_2 = \frac{l_2}{\sigma S_2} = \frac{b}{\sigma a t} = \frac{50 \times 10^{-3}}{5.7 \times 10^7 * 0.1 \times 10^{-3} * 4 \times 10^{-3}} = 2.1931 \times 10^{-3} [\Omega]$$



La variación de altura en esta sección puede ser descrita por medio de:

$$y = mx = \frac{\frac{a}{2} - \frac{c}{2}}{k} x = \frac{1}{2} \frac{4 \times 10^{-3} - 2 \times 10^{-3}}{20 \times 10^{-3}} x = 0.05x$$

entonces, la sección transversal del conductor es

$$S(x) = (a - 2y)t = (4 \times 10^{-3} - 2 * 0.05x) * 0.1 \times 10^{-3} \\ = (0.004 - 0.1x) * 0.1 \times 10^{-3}$$

Con esto es posible entonces calcular la resistencia correspondiente a un elemento diferencial de largo dx

$$dR = \frac{dx}{\sigma S(x)} = \frac{dx}{\sigma(0.004 - 0.1x) * 0.1x10^{-3}}$$

Luego; integrando sobre el largo del segmento se obtiene;

$$R = \int_0^k dR = \int_0^{0.02} \frac{dx}{\sigma(0.004 - 0.1x) * 0.1x10^{-3}} = -1.7544x10^{-3} \ln(0.004 - 0.1x) \Big|_0^{0.02} \\ = 1.216x10^{-3} [\Omega]$$

Ahora la resistencia equivalente del fusible se obtiene tomando la resistencia de cada una de las secciones que están conectadas en serie, esto es

$$R_{fusible} = R_1 + 2R_2 + 2R_3 = 1.754x10^{-3} + 2 * 2.19310^{-3} + 2 * 1.216x10^{-3} \\ = 8.5724x10^{-3} [\Omega]$$

Ejemplo #33

Un sensor resistivo de posición está construido en base a tres barras idénticas de grafito tal como se muestra en la figura 64. Una de las barras se desliza entre las otras dos que son estacionarias; de tal forma que la resistencia medida entre sus extremos indica la posición x del sensor. Si las dimensiones de cada una de las barras son $l = 0.15$ [m]; $w = 0.02$ [m] y $d = 0.01$ [m]; y tomando en cuenta que la conductividad del grafito es $\sigma = 10^4$ [$\frac{S}{m}$]. Calcular la resistencia del sensor cuando este está completamente cerrado y completamente extendido.

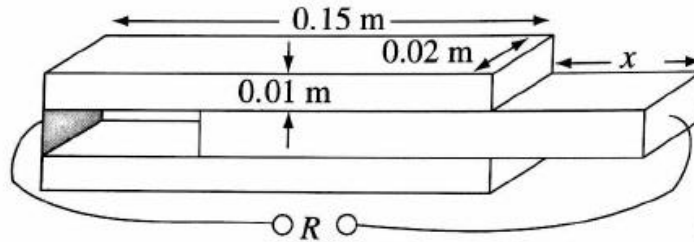


Figura 64 Sensor resistivo del ejemplo

Solución

A partir de la figura se puede ver que las tres secciones de grafito pueden ser descompuestas en pequeñas resistencias tal como se muestra en la figura; las que varían en función de la posición del sensor.

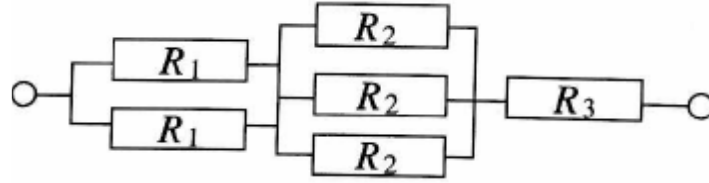


Figura 65 Diagrama esquemático del sensor de la figura 64

A partir de esto se tiene que la resistencia individual de cada resistencia está dada por;

$$R_1 = \frac{x}{\sigma S} \quad R_2 = \frac{l-x}{\sigma S} \quad R_3 = \frac{x}{\sigma S}$$

O bien reemplazando por la sección transversal de cada una de las barras;

$$R_1 = \frac{x}{\sigma dw} \quad R_2 = \frac{l-x}{\sigma dw} \quad R_3 = \frac{x}{\sigma dw}$$

De las conexiones en paralelo de dos resistencias R_1 y tres resistencias R_2 se obtiene;

$$R_{eq1} = \frac{R_1}{2}$$
$$R_{eq2} = \frac{R_2}{3}$$

Con esta reducción se obtienen tres resistencias en serie, luego la resistencia del sensor es

$$R_{sensor} = R_{eq1} + R_{eq2} + R_3 = \frac{R_1}{2} + \frac{R_2}{3} + R_3 = \frac{x}{2\sigma dw} + \frac{l-x}{3\sigma dw} + \frac{x}{\sigma dw}$$

Este último resultado puede reducirse a;

$$R_{sensor} = \frac{7x + 2l}{6\sigma dw} [\Omega]$$

Entonces para las dos posiciones solicitadas se obtiene que para $x = 0$ (sensor completamente cerrado) y $x = l$ (sensor completamente abierto);

$$R_{sensor_cerrado} = \frac{7 \cdot 0 + 2l}{6\sigma dw} = \frac{2 \cdot 0.15}{6 \cdot 10^4 \cdot 0.01 \cdot 0.02} = 0.025 [\Omega]$$

$$R_{sensor_abierto} = \frac{7l + 2l}{6\sigma dw} = \frac{9 \cdot 0.15}{6 \cdot 10^4 \cdot 0.01 \cdot 0.02} = 0.1125 [\Omega]$$

En todo el rango de operación del sensor la variación de la resistencia de este estará definida entonces de acuerdo con la siguiente figura.

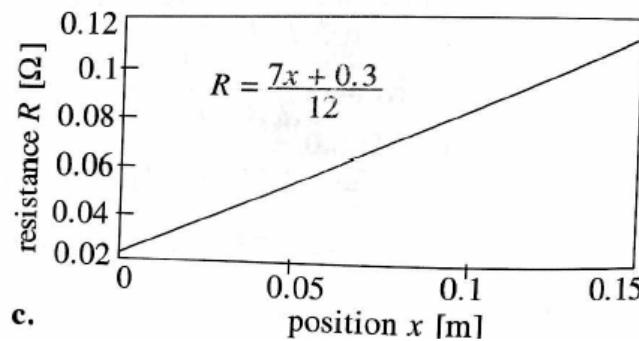


Figura 66 Resistencia del sensor en función de la posición

3.5 Disipación de potencia y Ley de Joule

Cuando las cargas se mueven dentro de un medio conductor estas chocan con átomos dentro del material. Estas colisiones provocan la pérdida de energía cinética, la que es transformada por el material aumentando su energía térmica. En función de esto se puede escribir que la potencia relacionada con este proceso está dada por:

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} [W]$$

Pero como sabemos que la fuerza eléctrica está dada por $\vec{F} = q\vec{E} [N]$, entonces:

$$P = q\vec{E} \cdot \vec{v} [W]$$

Ahora si se toma un elemento de volumen dentro de un medio conductor, tal que existen N cargas por unidad de volumen todas moviéndose a una velocidad v dada se tiene que el elemento diferencial de potencia estará dado por:

$$dP = Nq\vec{E} \cdot \vec{v} dv [W]$$

Si se recuerda en este punto que la densidad de corriente está definida por $\vec{J} = Nq\vec{v}$, entonces:

$$dP = \vec{J} \cdot \vec{E} dv [W] \rightarrow P = \int_v \vec{J} \cdot \vec{E} dv [W]$$

Esta última expresión corresponde a la forma integral de la ley de Joule y denota la potencia disipada en un volumen. Por otro lado, la forma puntual de esta misma ley puede obtenerse al dividir el diferencial de potencia por el diferencial de volumen, obteniéndose

$$\frac{dP}{dv} = \vec{J} \cdot \vec{E} \left[\frac{W}{m^3} \right]$$

En forma alternativa, y dado que la densidad de corriente de conducción está dada por $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ se tiene que

$$\frac{dP}{dv} = \vec{J} \cdot \vec{E} = \sigma \vec{E}^2 = \frac{\vec{J}^2}{\sigma} \left[\frac{W}{m^3} \right]$$

Ahora bien, tomando la forma integral de la ley de Joule se tiene;

$$P = \int_v \vec{J} \cdot \vec{E} dv = \left(\int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} \right) \left(\int_s \vec{J} \cdot d\vec{s} \right) = V * I [W]$$

Que corresponde a la expresión circuital para el cálculo de potencia.

Ejemplo #34

Un fusible está hecho de cobre y tiene la forma mostrada en la figura 63. Si el fusible fue diseñado para operar a una corriente de **20 [A]**, y asumiendo que la densidad de corriente de fusión del cobre es de **10⁸ [A/m²]**;

- ¿Cuál es el campo eléctrico en la sección delgada del fusible?
- ¿Cuál es la potencia total disipada en la sección delgada del fusible?

Solución

a) Dada la conductividad del cobre que es de $\sigma_{cu} = 5.7 \cdot 10^7 \left[\frac{S}{m} \right]$ y usando la ecuación constitutiva del medio se tiene;

$$|\vec{E}| = \frac{|\vec{J}|}{\sigma_{cu}} = \frac{10^8}{5.7 \cdot 10^7} = 1.754 \left[\frac{V}{m} \right]$$

b) A partir de la ley de Joule se tiene que la densidad de potencia en la sección delgada del fusible es;

$$p_d = \frac{|\vec{J}|^2}{\sigma_{cu}} = \frac{(10^8)^2}{5.7 \cdot 10^7} = 1.754 \cdot 10^8 \left[\frac{W}{m^3} \right]$$

Luego integrando sobre el volumen de la sección delgada se obtiene

$$P = \int_v p_d dv = p_d v = p_d t c d = 1.754 \cdot 10^8 * 0.1 \cdot 10^{-3} * 20 \cdot 10^{-3} * 2 \cdot 10^{-3} = 0.7018 [W]$$

Ejemplo #35

Los códigos eléctricos establecen que conductores de cobre y aluminio no deben conectarse directamente puesto que se forma una capa de óxido en la interface de los dos materiales. Si un conductor de cobre y otro de aluminio se conectan como se indica en la figura 67, y la corriente que circula por ellos es de **50 [A]**, calcular;

- La densidad de potencia en el aluminio, cobre y capa de óxido.
- La potencia total disipada en la capa de óxido.

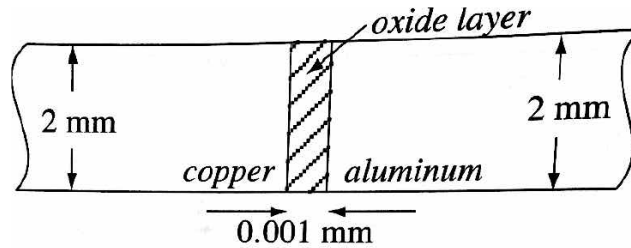


Figura 67 Conexión de conductor de cobre y aluminio

Solución

a) a partir de la definición de corriente se tiene que la densidad de corriente en el sistema compuesto por los dos conductores y capa de óxido está dada por:

$$J = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi r^2} = \frac{50}{\pi(0.001)^2} = 1.592 \times 10^7 \left[\frac{A}{m^2} \right]$$

Entonces a partir de la conductividad de cada uno de los tres medios ($\sigma_{al} = 3 \times 10^7 \left[\frac{S}{m} \right]$; $\sigma_{cu} = 5.7 \times 10^7 \left[\frac{S}{m} \right]$; y $\sigma_{oxido} = 10^3 \left[\frac{S}{m} \right]$), se tiene que la densidad de potencia en cada caso es:

$$dp_{cu} = \frac{J^2}{\sigma_{cu}} = \frac{(1.592 \times 10^7)^2}{5.7 \times 10^7} = 4.444 \times 10^6 \left[\frac{W}{m^3} \right]$$

$$dp_{al} = \frac{J^2}{\sigma_{al}} = \frac{(1.592 \times 10^7)^2}{3 \times 10^7} = 8.443 \times 10^6 \left[\frac{W}{m^3} \right]$$

$$dp_{oxido} = \frac{J^2}{\sigma_{oxido}} = \frac{(1.592 \times 10^7)^2}{10^3} = 2.533 \times 10^{11} \left[\frac{W}{m^3} \right]$$

b) En función de la densidad de potencia obtenida, la potencia disipada en la sección del óxido estará dada por

$$\begin{aligned} P_{disipada} &= pd_{oxido} \text{Volumen} = pd_{oxido} * \pi r^2 * l = 2.533 \times 10^{11} * \pi(0.001)^2 * 0.001 \times 10^{-3} \\ &= 0.796 [W] \end{aligned}$$

3.6 Leyes de Kirchhoff

El principio de conservación de carga se discutió al inicio de este capítulo. A partir de este principio se tienen como consecuencias dos leyes que se conocen como las leyes de Kirchhoff y que resultan en el fundamento para las técnicas de análisis de circuitos eléctricos y electrónicos.

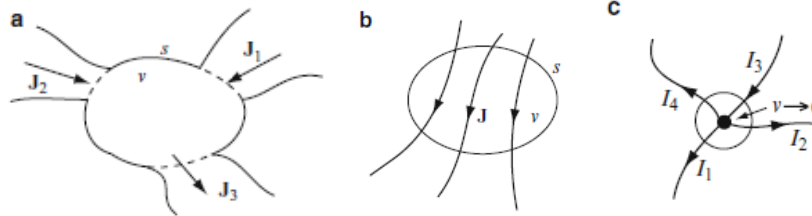


Figura 68 principio de conservación de carga aplicado a diferentes configuraciones

3.6.1 Ley de Corrientes de Kirchhoff

La primera de estas leyes, conocida como la ley de corrientes de Kirchhoff, se fundamenta en que, si se tienen una serie de densidades de corriente entrando y saliendo de un punto en el espacio, y si en dicho punto no es posible que se acumulen cargas, entonces si este punto es encerrado por una superficie cerrada S como se ve en la figura 68a, el principio de conservación de carga establece que la cantidad de carga en el volumen encerrado debe permanecer constante. Esto puede denotarse en forma matemática a partir de la siguiente expresión:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0$$

Esta última ecuación es aplicable a cualquier situación donde podamos encerrar un conjunto de cargas en movimiento donde encerremos un volumen con una superficie cerrada S (figura 68 b y c). Ahora tomando la definición de corriente eléctrica en función de la densidad de corriente, o bien que $\vec{I} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$, entonces se puede derivar que en general para un punto en el espacio (o también llamado nodo) se debe cumplir en términos de la corriente que entra y sale de este

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0$$

3.6.2 Ley de Voltajes de Kirchhoff

Para poder derivar esta segunda ley de Kirchhoff, consideremos la situación mostrada en la figura 69 a continuación. Esta figura representa una típica celda electroquímica a partir de la cual se construyen las baterías. Se tienen un ánodo (+) y un cátodo (-) sumergidos en un electrolito, los que además están conectados a una resistencia. A partir de la reacción química se tiene que entre ambos electrodos se establece un campo eléctrico $E_{\text{batería}}$. Este a su vez, dada la conductividad de la resistencia produce

que se establezca una densidad de corriente, y consecuentemente una corriente eléctrica a través de la resistencia. Por otro lado, sabemos de la ley de Ohm que esta circulación de corriente a través de la resistencia se producirá una diferencia de potencial entre sus dos terminales el cual redundará en un campo eléctrico entre ambos extremos de ella E_{carga} .

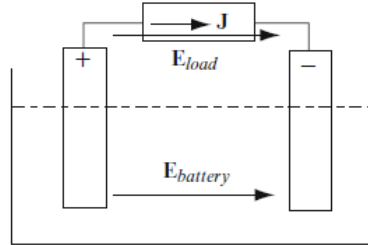


Figura 69 principio de conservación de carga aplicado a diferentes configuraciones

Ahora sabemos del capítulo donde se definió el potencial eléctrico que, si se calcula la diferencia de potencial a lo largo de una trayectoria cerrada se debe cumplir que

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Ahora si aplicamos la definición de diferencia de potencial la integral cerrada de la ecuación anterior puede transformarse en la suma de dos integrales abiertas cada una aplicada a los dos campos eléctricos que aparecen en el sistema, o bien

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{lb} E_{bateria} \cdot d\vec{l} + \int_{lcarga} E_{carga} \cdot d\vec{l} = 0$$

O lo que es lo mismo $V_{bateria} + V_{carga} = 0$. Este resultado puede extenderse a un camino cerrado donde pueden tenerse n diferencias de potencial tal que

$$\sum_{i=1}^n V_i = 0$$

Esta última ecuación es la que se conoce como la ley de voltajes de Kirchoff

4. Campo magnético estacionario

Antes de comenzar con el estudio de las leyes que dominan los campos magnéticos, cabe preguntarse qué es un campo magnético estacionario. Por un lado, sabemos que un imán permanente posee un campo magnético que se presenta en forma de un campo de fuerza a su alrededor. Esto de alguna forma es similar al campo eléctrico que aparece en torno a una carga puntual. Por otro lado, sabemos por medio de experimentación que una corriente eléctrica estacionaria también puede generar un campo de fuerza similar en torno al medio que sirve para su circulación. Esto indica que el campo magnético esta de alguna forma relacionado con la circulación de corriente en el conductor.

Para explicar mejor que es el campo magnético, tomemos en primer lugar dos imanes permanentes. Lo primero que se nota es que los polos opuestos de los imanes se atraen y los polos iguales se repelen. Como esta acción ocurre a una distancia, cada imán debe tener un dominio de acción, al cual llamamos campo.

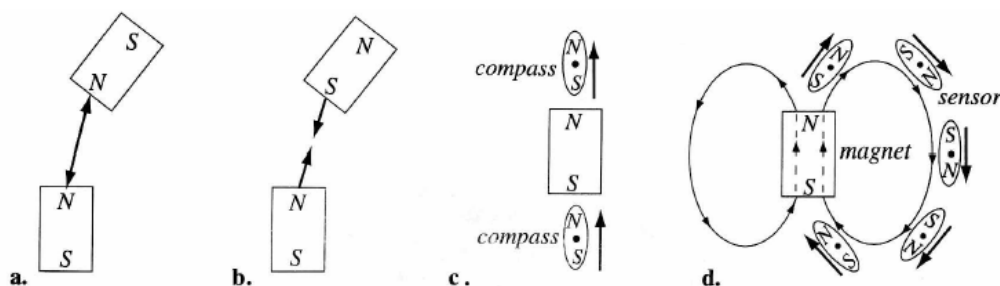


Figura 70 a. Polos iguales de dos imanes permanentes se repelen, b. polos opuestos de dos imanes permanentes de atraen, c. identificación de los polos e un imán utilizando una brújula, d. mapeo del campo magnético de un imán utilizando una brújula.

Ahora si tomamos una brújula podemos utilizarla para mapear el campo en torno al uno de los imanes. De esta experiencia se tendrá que la dirección de la brújula es siempre tangencial a cualquier círculo en torno al eje del imán.

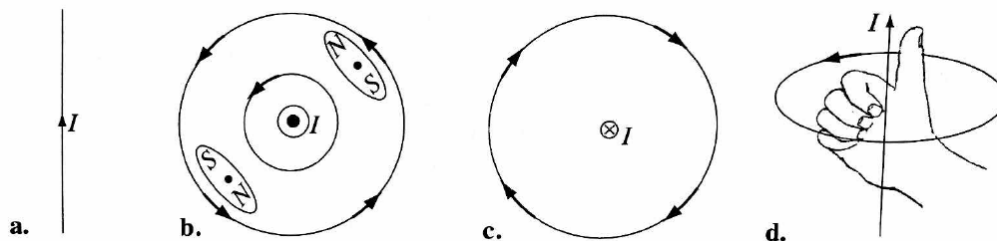


Figura 71 a. Conductor que lleva una corriente I , b. mapeo del campo magnético producido por la circulación de corriente utilizando una brújula, c. campo magnético resultante, d regla de la mano derecha para la determinación de la dirección del campo magnético.

Por otro lado, si tomamos un conductor y hacemos circular una corriente constante por él, el experimento anterior con la brújula puede ser repetido. De este se obtendrá que el campo en torno al conductor está direccionado según la regla de la mano derecha. También se obtendrá que el campo magnético es cerrado en torno al conductor.

Como este campo magnético es producido por cargas en movimiento (corriente eléctrica) podemos concluir entonces que éste será función de la velocidad de las cargas. La fuerza actuando sobre una carga en movimiento estará entonces definida por la fuerza de Lorentz y que está definida por:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} [N]$$

en que \vec{B} es llamada densidad de flujo magnético. Las unidades de esta cantidad vectorial son Tesla ([T]) tal que

$$1 T = \frac{N}{C} / \frac{m}{s}$$

Además de la densidad de flujo magnético se define la intensidad de campo magnético (\vec{H}) tal que

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

donde μ es una constante que depende de las características del medio y se conoce como permeabilidad. Para el espacio libre la permeabilidad tiene un valor de $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [\frac{H}{m}]$

4.1 Ley de Biot-Savart

La ley de Biot-Savart es de corte experimental y permite el cálculo del campo magnético en un punto en el espacio resultante de la circulación de corriente por un conductor delgado.

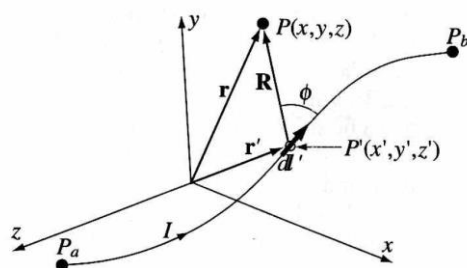


Figura 72 Derivación de la ley de Biot-Savart para un segmento conductor

Considerando la situación mostrada en la figura 72, se tiene que la intensidad de campo magnético producida por un elemento de largo diferencial a lo largo del conductor está dada por

$$d\vec{H} = \frac{I dl \sin\phi}{4\pi r^2} \left[\frac{A}{m}\right]$$

De esta forma para considerar la contribución de cada elemento de largo diferencial a la intensidad de campo magnético en el punto P, se puede integrar a lo largo de todo el conductor, con lo que se obtiene;

$$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int_l \frac{Idl \times \hat{r}}{|R|^2} \left[\frac{A}{m}\right]$$

Por otro lado, dada la definición de la densidad de flujo magnético, se tiene entonces que;

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \int_l \frac{Idl \times \hat{r}}{|R|^2} [T]$$

Ejemplo #36

Dado que el alambre delgado de la figura 73 tiene un largo de **2 [m]** lleva una corriente de **1 [A]**;

- Calcular la intensidad de campo magnético en el punto **A**
- Calcular la intensidad de campo magnético en el punto **B**
- ¿Cuál es la intensidad de campo magnético a una distancia **h = 1 [m]** de un alambre delgado infinitamente largo?

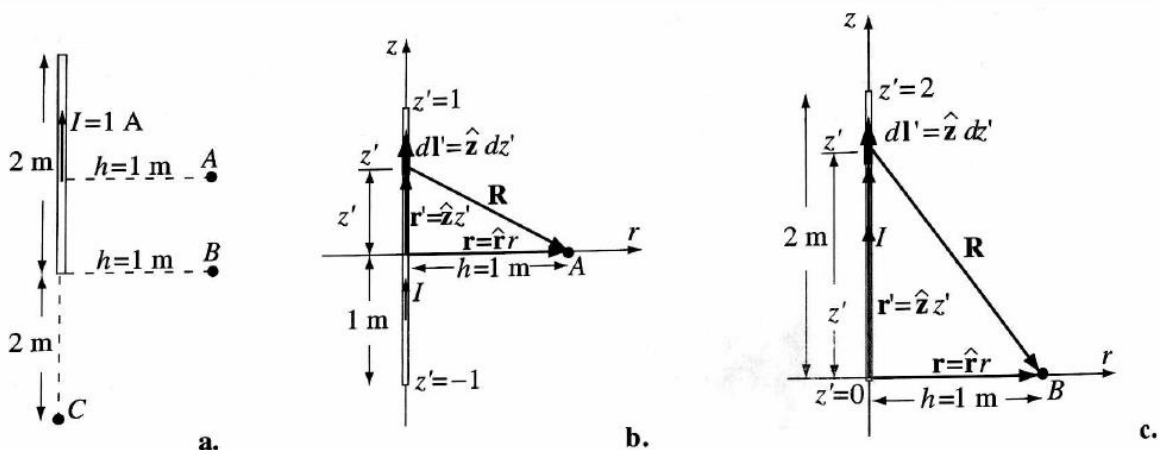


Figura 73 Campo magnético producido por un alambre delgado a. geometría y dimensiones, b. cálculo de H en el punto A, c. cálculo de H en el punto B

Solución

a) Considerando la geometría mostrada en la figura 73a, se puede ver que en esta situación es conveniente utilizar un sistema de coordenadas cilíndrico con el eje z colineal con el alambre. Además, por conveniencia se ubicará el origen en el punto medio del alambre. A partir de estas consideraciones se puede plantear la ley de Biot-Savart, lo que resulta en:

$$d\vec{H} = \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{4\pi |\vec{R}|^2}$$

con $\vec{R} = h \hat{r} - z \hat{z}$ y $d\vec{l} = dz \hat{z}$, luego

$$\hat{r} = \frac{h \hat{r} - z \hat{z}}{\sqrt{h^2 + z^2}}$$

Entonces;

$$d\vec{H} = \frac{I dz \hat{z} \times (h \hat{r} - z \hat{z})}{4\pi (h^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{I h dz}{4\pi (h^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{\phi}$$

Así integrando sobre el largo del alambre;

$$H = \frac{Ih}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{dz}{(h^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{\phi} = \frac{Ih}{2\pi} \int_0^1 \frac{dz}{(h^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{\phi} = \frac{Ih}{2\pi} \left[\frac{z}{(h^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_0^1 \hat{\phi} = \frac{Ih}{2\sqrt{2}\pi} \hat{\phi} \left[\frac{A}{m} \right]$$

b) Ahora, cambiando la ubicación del origen del eje z hacia el punto bajo del alambre se tiene;

$$H = \frac{Ih}{4\pi} \int_0^2 \frac{dz}{(h^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{\phi} = \frac{Ih}{4\pi} \left[\frac{z}{(h^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_0^2 \hat{\phi} = \frac{Ih}{2\sqrt{5}\pi} \hat{\phi} [A/m]$$

c) Para un alambre de longitud infinita se tiene que la condición es similar a “a”, sin embargo, en este caso se deberá integrar entre $-\infty$ y ∞ , así;

$$H = \frac{Ih}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(h^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{\phi} = \frac{Ih}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{dz}{(h^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{\phi} = \frac{Ih}{2\pi} \left[\frac{z}{(h^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_0^{\infty} \hat{\phi} = \frac{Ih}{2\pi} \hat{\phi} \left[\frac{A}{m} \right]$$

Ejemplo #37

Una corriente fluye en el sistema mostrado en la figura 74. Calcular la densidad de flujo magnético en el centro del semicírculo.

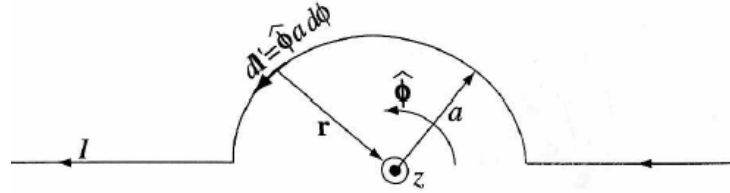


Figura 74 Cálculo de la densidad de flujo magnético producido por la circulación de corriente en una media espira

Solución

De la figura se tiene que $\vec{r} = -a \hat{r}$ y $dl = a d\phi \hat{\phi}$, entonces:

$$dl \times \hat{r} = a d\phi \hat{\phi} \times \hat{r} = a^2 d\phi \hat{z}$$

Así, aplicando la ley de Biort-Savart se obtiene;

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi \frac{a^2 d\phi}{a^3} \hat{z} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi \frac{d\phi}{a} \hat{z} = \frac{\mu_0 I}{4a} \hat{z} [T]$$

Ejemplo #38

Para el anillo conductor de la figura 75 que tiene radio a y lleva una corriente I :

- Calcular la intensidad de campo magnético resultante en el punto P ubicado a h metros sobre el centro del anillo.
- Calcular la intensidad de campo magnético en el centro del anillo.

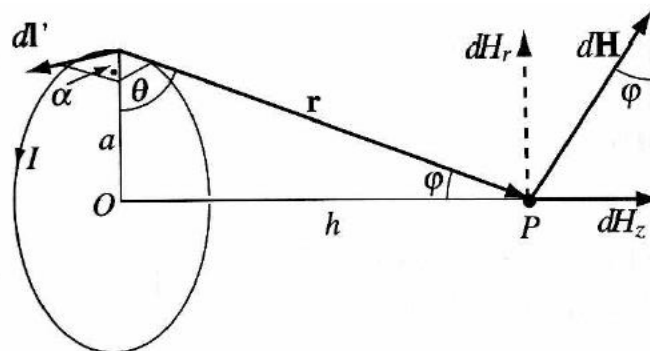


Figura 75 Cálculo de intensidad de campo magnético producido por un anillo de corriente

Solución

a) A partir de la figura 75 y de la aplicación de la ley de Biort-Savart a un arco de largo diferencial se obtiene que un diferencial de campo magnético estará dado por:

$$d\vec{H} = \frac{Idl \times \hat{r}}{4\pi|r|^2} \rightarrow d\vec{H} = \frac{Idl}{4\pi|r|^2} \text{sen}(\rho)$$

donde $\text{sen}(\rho) = \frac{a}{\sqrt{h^2+a^2}}$; luego

$$\overrightarrow{dH} = \frac{Idl}{4\pi(h^2 + a^2)} \frac{a}{\sqrt{h^2 + a^2}} = \frac{aIdl}{4\pi(h^2 + a^2)^{3/2}} \hat{z}$$

Pero como $dl = a d\phi \hat{\phi}$, entonces

$$\vec{H} = \int_0^{2\pi} \frac{Ia^2 d\phi}{4\pi(h^2 + a^2)^{3/2}} \hat{z} = \frac{Ia^2}{4\pi(h^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi \hat{z} = \frac{Ia^2}{2(h^2 + a^2)^{3/2}} \hat{z} \left[\frac{A}{m} \right]$$

b) En el centro del anillo se tiene que $h = 0$, luego evaluando lo obtenido en el punto anterior se tiene:

$$\vec{H} = \frac{Ia^2}{2(h^2 + a^2)^{3/2}} \hat{z} = \frac{I}{2a} \hat{z} \left[\frac{A}{m} \right]$$

4.2 Aplicación de la ley de Biort-Savart a corrientes distribuidas

Dada la forma en que la ley de Biort-Savart está definida, solo permite el cálculo del campo magnético de filamentos delgados que portan corriente. Por tanto, para poder extender su uso a distribuciones de corrientes distintas se requiere dividir la estructura que lleva la corriente en múltiples filamentos delgados.

En este sentido existen dos configuraciones de particular interés, distribuciones de corriente planas y distribuciones de corriente volumétricas.

Para el primer caso se puede considerar la estructura mostrada en la figura 76 que muestra un conductor plano de altura despreciable que lleva una corriente estacionaria I .

En este caso se tiene que la densidad de corriente estará dada por $\vec{j} = \frac{\vec{I}}{S} = \frac{\vec{I}}{2d} \left[\frac{A}{m} \right]$, entonces dividiendo la lámina conductora en elementos delgados de ancho diferencial dx se tiene

$$d\vec{H}(x, y, z) = \left[\int_{z'=-L}^{z'=L} \frac{\vec{I}}{2d} \frac{dl \times \hat{R}}{4\pi|r-r'|^2} dx \right]$$

Así, integrando sobre el eje x para incluir la contribución de cada uno de los filamentos posibles se obtiene

$$\vec{H}(x, y, z) = \int_{x=-d}^{x=d} \left[\int_{z'=-L}^{z'=L} \frac{\vec{I}}{2d} \frac{dl \times \hat{R}}{4\pi|r-r'|^2} \right] dx$$

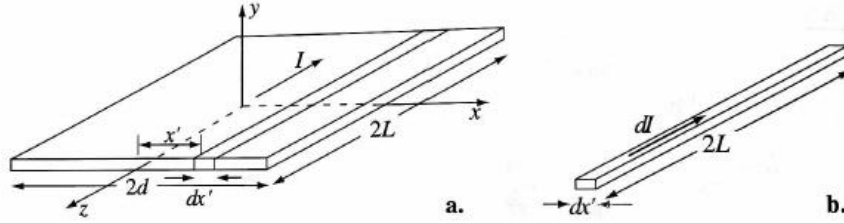


Figura 76 a. Lámina conductora llevando una corriente I, b. división de la lámina en elementos conductores delgados que llevan una corriente diferencial dI

Similarmente para distribuciones volumétricas de corriente como la mostrada en la figura 77, es posible dividir el volumen del conductor en filamentos portadores de corriente para calcular la intensidad de campo magnético producida por cada uno de ellos, y luego integrar sobre el volumen para sumar la cada contribución al campo magnético resultante.

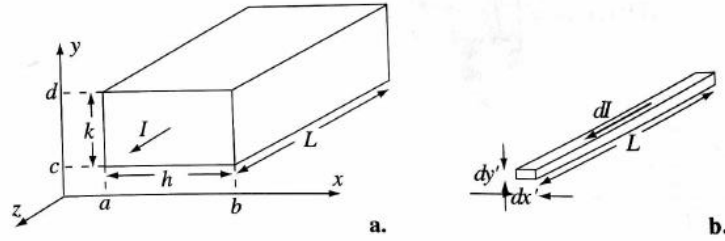


Figura 77 a. Un conductor grueso con corriente distribuida en su sección transversal, b. Un elemento diferencial de la sección transversal llevando una corriente diferencial

Así la corriente que lleva el elemento diferencial será dada por;

$$dI = \frac{I}{kh} dx dy$$

donde $\frac{I}{kh}$ corresponde a la densidad de corriente en el conductor. Entonces substituyendo en la ley de Biort-Savart se tiene;

$$d\vec{H}(x, y, z) = \int_{z'=0}^{z'=L} \frac{\vec{I}}{2kh} dx dy \frac{d\vec{l} \times \hat{R}}{4\pi|r - r'|^2}$$

en que $d\vec{l} = dz \hat{z}$. Y para obtener la intensidad de campo magnético total se deberá entonces integrar sobre el volumen tal que

$$\vec{H}(x, y, z) = \int_{y=c}^{y=d} \left[\int_{x=a}^{x=b} \left[\int_{z'=0}^{z'=L} \frac{\vec{I}}{2kh} dx dy \frac{d\vec{l} \times \hat{R}}{4\pi|r - r'|^2} \right] dx \right] dy \left[\frac{A}{m} \right]$$

Ejemplo #39

Una lámina de material conductor de $b = 1 \text{ [m]}$ de ancho es muy larga y lleva una corriente de $I = 100 \text{ [A]}$. Calcular la intensidad de campo magnético a una distancia de $h = 0.1 \text{ [m]}$ sobre el centro del conductor.

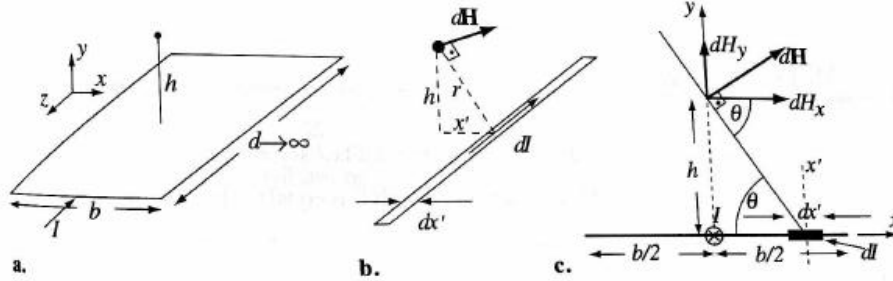


Figura 78 Cálculo de campo magnético generado por la circulación de una corriente estacionaria en una lámina conductora, a. geometría del problema, b. cálculo del campo magnético producido por un elemento de dimensión diferencial, c. cálculo del campo magnético resultante

Solución

La intensidad del campo magnético puede ser evaluada viendo la lámina conductora como el ensamble de múltiples conductores delgados, cada uno de ancho diferencial dx , infinitamente largos, y cada uno llevando una corriente diferencial dada por;

$$\vec{j} = \frac{\vec{I}}{b} \rightarrow d\vec{I} = \vec{j} dx = \frac{\vec{I}}{b} dx$$

Así aplicando la ley de Biort-Savart se tiene;

$$d\vec{H} = \frac{Idz \hat{z} \times (h \hat{r} - z \hat{z})}{4\pi (h^2 + z^2)^{3/2}}$$

En que el producto cruz es;

$$\begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\phi} & \hat{z} \\ 0 & 0 & Idz \\ h & 0 & -z \end{vmatrix} = Ih dz \hat{\phi}$$

y entonces

$$d\vec{H} = \frac{Ihdz}{4\pi (h^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\phi}$$

E integrando

$$\vec{H} = \frac{Ih}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(h^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\phi} = \frac{Ih}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{dz}{(h^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\phi} = \frac{I}{2\pi} \frac{z}{h\sqrt{h^2 + z^2}} \Big|_0^{\infty} \hat{\phi} = \frac{I}{2\pi h} \hat{\phi} \left[\frac{A}{m} \right]$$

Entonces un conductor delgado llevando la corriente dI producirá un elemento de campo magnético;

$$d\vec{H} = \frac{dI}{2\pi h} \hat{\phi} \left[\frac{A}{m} \right]$$

Y como de la figura 78c se tiene;

$$d\vec{H}_x = d\vec{H} \cos(90 - \theta) = \frac{dlh}{2\pi(h^2 + z^2)} = \frac{Ihdx}{2\pi b(h^2 + z^2)}$$

Finalmente integrando sobre el ancho de la lámina

$$\vec{H}_x = \int_{-0.5}^{0.5} \frac{Ihdx}{2\pi b(h^2 + z^2)} = \frac{Ih}{2\pi b} \int_{-0.5}^{0.5} \frac{dx}{(h^2 + z^2)} = \frac{Ih}{2\pi b} \frac{1}{h} \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{x}{h}\right) \Big|_{-0.5}^{0.5} = 43.72 \left[\frac{A}{m}\right]$$

4.3 Ley de Ampere

La ley de Ampere, también conocida como ley circuital de Ampere establece que:

“La circulación de campo magnético alrededor de un contorno cerrado C es igual a la corriente encerrada por el contorno”

Esto es en términos matemáticos que

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{encerrada}}$$

Si bien, se pueden obtener los mismos resultados que utilizando la ley de Biort-Savart, la ley de Ampere es útil para resolver problemas que presenten geometrías altamente simétricas.

Ejemplo #40

Calcular la intensidad de campo magnético producida por un conductor delgado recto que lleva una corriente I .

Solución

cerrado circular de radio r en torno al alambre conductor se obtiene;

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \rightarrow |\vec{H}| 2\pi r = I$$

o bien

$$|\vec{H}| = \frac{I}{2\pi r}$$

Para determinar la orientación de la intensidad de campo magnético se define un sistema de coordenadas cilíndrico centrado en el alambre conductor. Luego a partir de la aplicación de la regla de la mano derecha se tiene $\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \hat{\phi} \left[\frac{A}{m}\right]$

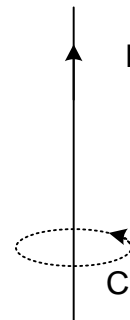


Figura 79 Aplicación de la ley de Ampere para el cálculo de la intensidad de campo magnético producida por un alambre rectilíneo

Ejemplo #41

Un alambre de radio $a = 10 \text{ [mm]}$ lleva una corriente de $I = 400 \text{ [A]}$. Considerando que el alambre es infinitamente largo, y que la corriente se distribuye dentro del conductor uniformemente:

- Calcular la intensidad de campo magnético producida en cualquier punto del espacio.
- Graficar la magnitud de la intensidad de campo magnético como función de la distancia medida desde el centro del conductor.

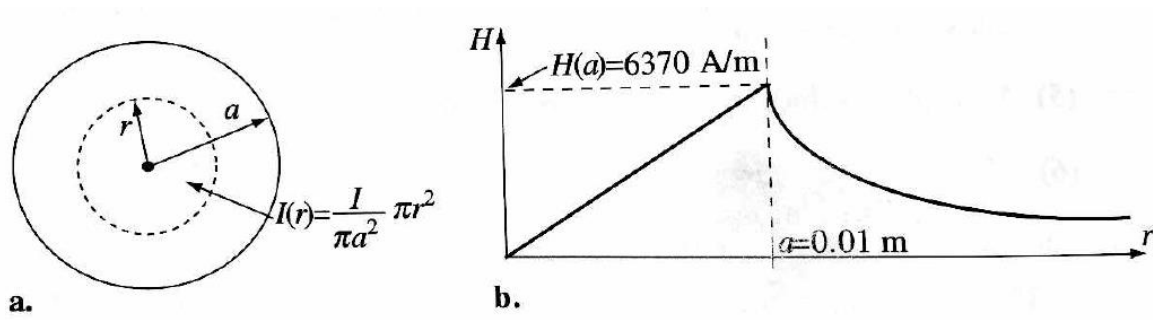


Figura 80 Intensidad de campo magnético debida a un conductor grueso que lleva una corriente distribuida uniformemente. a. Método de cálculo dentro del conductor, b. Gráfica de la magnitud de la intensidad de campo magnético en función de la distancia medida desde el centro del conductor.

Solución

a) Dada la geometría del problema el espacio puede ser dividido en dos grandes zonas; dentro y fuera del conductor. Por otro lado, escogiendo un sistema de coordenadas cilíndrico con su eje z colineal con el del conductor se tiene entonces para $r < a$;

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

donde $\vec{J} = \frac{I}{\pi a^2} \left[\frac{A}{m^2} \right]$; y

$$|\vec{H}| 2\pi r = \frac{I}{\pi a^2} \cdot \pi r^2$$

Con lo que se obtiene

$$\vec{H} = \frac{Ir}{2\pi a^2} \hat{\phi} \left[\frac{A}{m} \right]$$

Y reemplazando los valores del enunciado

$$\vec{H} = \frac{400r}{2\pi(0.01)^2} \hat{\phi} = 6.37 \times 10^5 r \hat{\phi} \left[\frac{A}{m} \right]$$

Por otro lado, para $r > a$ se tiene;

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

$$|\vec{H}|2\pi r = I \rightarrow |\vec{H}| = \frac{I}{2\pi r}$$

con lo que;

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \hat{\phi} \left[\frac{A}{m} \right]$$

y reemplazando los valores del enunciado;

$$\vec{H} = \frac{400}{2\pi r} \hat{\phi} = \frac{63.7}{r} \hat{\phi} \left[\frac{A}{m} \right]$$

b) graficando los resultados obtenidos en a) en función de r se obtiene la curva mostrada en la figura 80 b.

Ejemplo #42

Un alambre infinitamente largo es colocado en el centro de un cilindro conductor hueco también infinitamente largo. Si el cilindro conductor lleva una densidad de corriente \vec{J} y el alambre una corriente \vec{I} ambas en la misma dirección; encontrar la densidad de flujo magnético en las regiones $0 < r_1; r_1 < r < r_2$; y $r > r_2$.

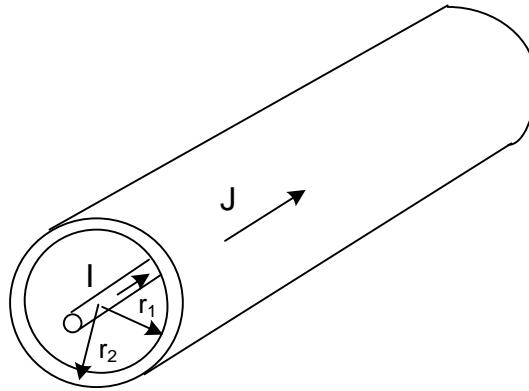


Figura 81 Figura para el cálculo de la densidad de flujo magnético en una estructura coaxial

Solución

De la figura se tiene que para $r < r_1$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi} [T]$$

De la misma forma para $r_1 < r < r_2$ se tiene;

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (\vec{I} + \int_s \vec{J} \cdot d\vec{S}) = \mu_0 (\vec{I} + \vec{J}(\pi r^2 - \pi r_1^2))$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_o(\vec{I} + \vec{J}(\pi r^2 - \pi r_1^2))}{2\pi r} \hat{\phi} [T]$$

y finalmente para $r > r_2$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o (\vec{I} + \vec{J}(\pi r_2^2 - \pi r_1^2))$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_o(\vec{I} + \vec{J}(\pi r_2^2 - \pi r_1^2))}{2\pi r} \hat{\phi} [T]$$

Ejemplo #43

Un cilindro conductor largo de radio b tiene una densidad de carga superficial ρ_s . Si el cilindro gira a una velocidad angular ω en torno a su eje; calcular la intensidad de campo magnético en cualquier punto del espacio.

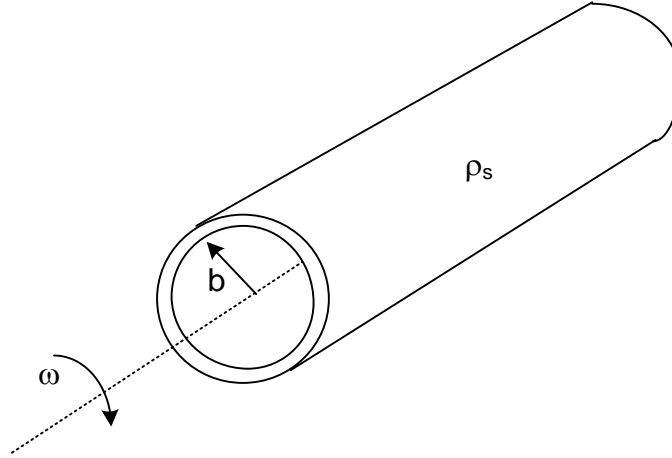


Figura 82 Cálculo de la densidad de flujo magnético generada por un cilindro cargado girando a velocidad constante.

Solución

De la figura se tiene que la velocidad lineal del cilindro está dada por;

$$v = \omega b \left[\frac{m}{s} \right]$$

Por otro lado, en un intervalo de tiempo dt una carga en la superficie del cilindro describirá un arco de longitud $b d\phi$, entonces

$$v dt = b d\phi \rightarrow d\phi = \omega dt$$

Asimismo, la carga por unidad de longitud del cilindro es

$$dq = b d\phi \rho_s [C]$$

Entonces, la corriente por unidad de longitud del cilindro estará dada por

$$|\vec{I}| = \left| \frac{dq}{dt} \right| = \omega b \rho_s [A]$$

Es así como en esencia se tiene que la densidad de carga en movimiento produce un efecto similar a un solenoide de radio b , luego

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 \omega b \rho_S l \rightarrow |\vec{B}| l = \mu_0 \omega b \rho_S l \rightarrow |\vec{B}| = \mu_0 \omega b \rho_S [T]$$

Ejemplo #44

Un toroide de dimensiones mostradas en la figura 83 está bobinado uniformemente con $N = 100$ vueltas de alambre. Si esta bobina lleva una corriente de $I = 1 [A]$; calcular la densidad de flujo magnético generado en cualquier punto del espacio.

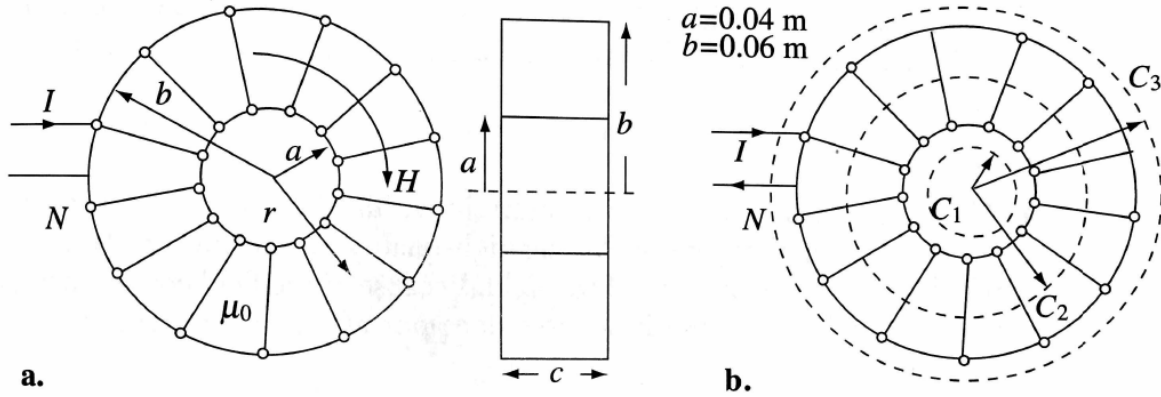


Figura 83 Una bobina toroidal a. dimensiones y construcción, b. contornos utilizados para la aplicación de la ley de Ampere.

Solución

Dados los contornos mostrados en la figura 83b, el espacio puede ser dividido en tres zonas, $r < a$; $a < r < b$; y $r > b$. Luego aplicando la ley de Ampere en cada uno de los tres casos se tiene:

Para $r < a$;

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0 \rightarrow \vec{H} = 0 \left[\frac{A}{m} \right] \text{ y } \vec{B} = 0 [T]$$

Para $a < r < b$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI \rightarrow |\vec{H}| 2\pi r = NI \rightarrow |\vec{H}| = \frac{NI}{2\pi r} \left[\frac{A}{m} \right] \text{ y } |\vec{B}| = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} [T]$$

Reemplazando los valores dados en el enunciado se obtiene;

$$|\vec{H}| = \frac{100 \cdot 1}{2\pi r} = \frac{15.915}{r} \left[\frac{A}{m} \right]$$

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_o \cdot 100 \cdot 1}{2\pi r} = \frac{2 \times 10^{-5}}{r} [T]$$

Y finalmente para $r > b$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I - I = 0 \rightarrow \vec{H} = 0 \left[\frac{A}{m} \right] \text{ y } \vec{B} = 0 [T]$$

Ejemplo #45

Un solenoide muy largo está bobinado con una densidad de vueltas de **1 vuelta por mm** de longitud. Si la corriente en el solenoide es de un **1 [A]**; calcular la intensidad de campo magnético y densidad de flujo magnético producidos en cualquier punto del espacio.

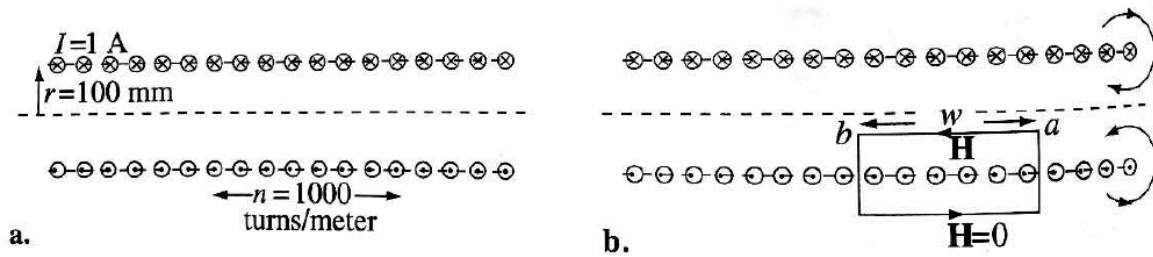


Figura 84 Un solenoide largo, a. dimensiones y propiedades (corte axial), b. contorno utilizado para el cálculo.

Solución

Como puede verse de la figura 84, la situación es equivalente a tener dos planos de corriente, cuyas direcciones están orientadas en sentido contrario. De la regla de la mano derecha se tiene que los campos producidos por cada plano están en direcciones opuestas fuera del solenoide y en la misma dirección dentro de él. Por ello la intensidad de campo magnético (y por lo tanto la densidad de flujo magnético) fuera del solenoide será cero. Por otro lado, tomando el contorno cerrado mostrado en la figura 84b se tiene

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = nwI \rightarrow |\vec{H}|w = nwI \rightarrow |\vec{H}| = nI \left[\frac{A}{m} \right]$$

Así se tiene que la densidad de flujo magnético es

$$|\vec{B}| = \mu_o nI [T]$$

4.4 Flujo Magnético

Definimos la densidad de flujo magnético \vec{B} tal que tiene unidades de Tesla o Weber/m². Como esta cantidad corresponde a una densidad por unidad de superficie, es posible entonces calcular el flujo magnético que cruza una superficie dada tomando la integral de superficie de dicha cantidad.

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \text{ [Wb] o [T m}^2\text{]}$$

El concepto detrás del flujo magnético corresponde a la cantidad de líneas de campo magnético que cruzan una superficie dada (figura 85)

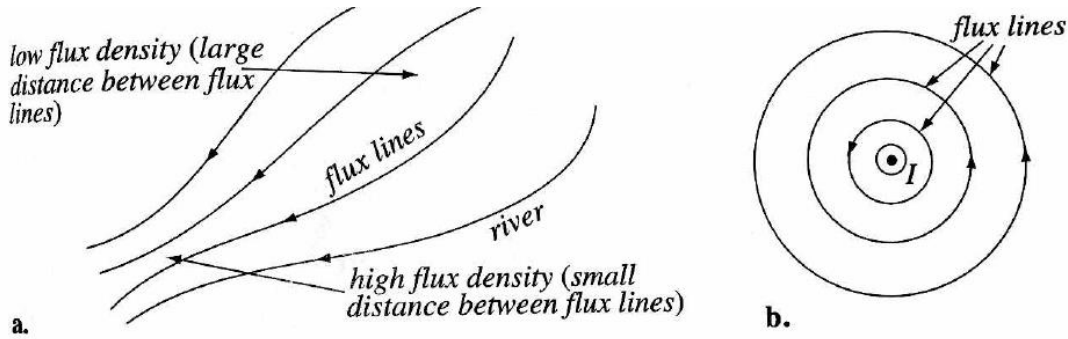


Figura 85 El concepto de flujo magnético, a. flujo en el espacio, b. líneas de flujo en torno a un filamento de corriente

Ejemplo #46

Un anillo rectangular es colocado cerca de un alambre conductor que lleva una corriente I . Si el anillo está dispuesto en el plano ϕ - z ;

- Calcular el flujo que enlaza el anillo
- Si el anillo es girado en 90° de forma que queda en posición perpendicular al plano r - z , y simétrico con respecto al alambre. Calcular el flujo magnético que cruza el anillo.

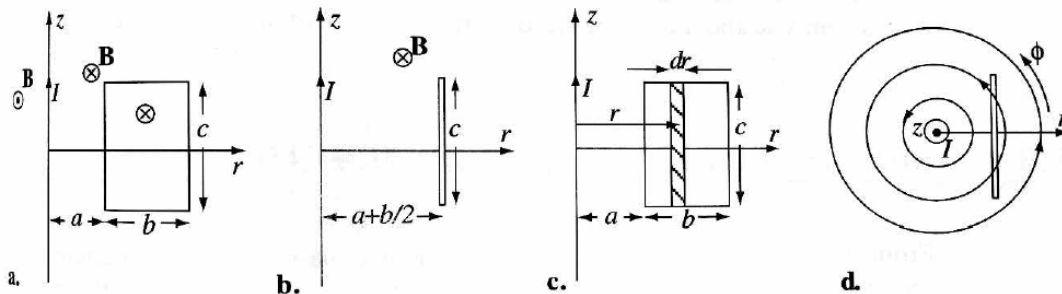


Figura 86 a. anillo rectangular colocado cerca de un alambre que lleva una corriente I , b. anillo en posición perpendicular al plano en a, c. método de cálculo del flujo en el anillo, d. flujo total en b es cero.

Solución

a) De la aplicación de la ley de Ampere utilizando un contorno circular en torno al alambre conductor se obtiene;

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o I \rightarrow |\vec{B}| 2\pi r = \mu_o I \rightarrow |\vec{B}| = \frac{\mu_o I}{2\pi r} [T]$$

Tomando un sistema de coordenadas cilíndrico colineal con el eje del alambre se tiene entonces,

$$\vec{B} = \frac{\mu_o I}{2\pi r} \hat{\phi} [T]$$

Ahora aplicando la definición de flujo magnético se obtiene;

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \frac{\mu_o I}{2\pi r} \cdot dS$$

Tomando el diferencial de superficie según lo mostrado en la figura 86c resulta en

$$\phi = \int_a^{a+b} \frac{\mu_o I}{2\pi r} \cdot c \, dr = \frac{\mu_o I c}{2\pi} \int_a^{a+b} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_o I c}{2\pi} \ln(r) \Big|_a^{a+b} = \frac{\mu_o I c}{2\pi} \ln\left(\frac{a+b}{a}\right) [Wb]$$

b) Si el anillo es girado en 90°, se tiene que como las líneas de campo magnético cruzan en ambas direcciones el anillo, la suma total de ellas es cero y por lo tanto el flujo que cruza el anillo también lo es.

4.5 Postulados del campo magnético estacionario

Usando las ecuaciones y leyes vistas hasta ahora es posible definir el conjunto de ecuaciones requeridas para especificar totalmente el campo magnético. Esto es determinar cuáles son las expresiones para la divergencia y rotacional del campo.

Para ello, en primer lugar, tomaremos la expresión correspondiente a la ley de Ampere,

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

aplicando el teorema de Stokes se tiene entonces;

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

de donde se obtiene que;

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

Por otro lado, como las líneas de campo magnético son cerradas se puede entonces escribir que para una superficie cerrada S el flujo total que entra y sale de ella será cero; es decir:

$$\phi = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

aplicando el teorema de la divergencia a esta última expresión se obtiene;

$$\phi = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_V (\nabla \cdot \vec{B}) \cdot dV = 0$$

o lo que es lo mismo;

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

En resumen, se tiene entonces que el campo magnético estacionario está definido por:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

4.6 Funciones potenciales

Se vio en el punto anterior que el campo magnético estacionario queda completamente definido por su divergencia y rotacional. Sin embargo, en algunos casos su uso directo puede ser complicado. Por otro lado, recordando lo visto en electrostática, se tiene que el uso de funciones potenciales permite en algunos casos simplificar los cálculos. Por ello cabe preguntarse si en el caso del campo magnético es posible utilizar funciones de este tipo para resolver los distintos problemas.

Es así, que se puede llegar a la respuesta de que existen dos funciones potenciales en el caso del campo magnético. Una de ellas es un potencial vectorial que puede ser utilizada en general para describir el campo. La otra corresponde a una función escalar que puede ser utilizada dadas ciertas condiciones.

4.6.1 Potencial vectorial magnético

Para la definición del potencial vectorial es necesario en primer lugar tener en mente algunas expresiones del álgebra vectorial. Por ejemplo, se tiene a partir de la siguiente identidad vectorial que la divergencia del rotacional de un vector es cero;

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

Entonces se tiene que, si la divergencia de un vector es cero, este se podrá escribir como el rotacional de otro vector. Luego tomando la divergencia de la densidad de flujo magnético, esta se podrá escribir como:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Donde, el vector \vec{A} resultante recibe el nombre de potencial vectorial magnético. Hay que tener presente en este punto que \vec{A} fue obtenido solamente en función de las

propiedades matemáticas de \vec{B} y por lo tanto no tiene un significado físico. Por otro lado, se puede encontrar a partir de la definición anterior que el vector de potencial vectorial magnético está dado por;

$$A = \frac{\mu_o I}{4\pi} \int_a^b \frac{dl}{|r - r'|} \left[\frac{Wb}{m} \right]$$

Por otro lado, también se puede obtener que

$$\phi = \oint_c \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad [Wb]$$

4.6.1 Potencial escalar magnético

La condición para que el potencial escalar pueda ser definido es que el campo vectorial deberá ser irrotacional; esto es, el campo debe ser conservativo. Cualquier campo vectorial \vec{F} que satisfaga esta condición $\nabla \times \vec{F} = 0$ puede ser entonces descrito por el gradiente de una función potencial, tal que:

$$\vec{F} = -\nabla\phi$$

Luego substituyendo en la ecuación para el rotacional se tiene;

$$\nabla \times (-\nabla\phi) = 0$$

En cualquier situación donde se verifique esto permitirá entonces que el campo sea calculado en términos de una función escalar.

Se tiene, sin embargo, que el campo magnético en general no es irrotacional, y por lo tanto en general no podrá ser representado por una función escalar. A pesar de esto, existen algunas situaciones en que el campo si cumple con el requisito necesario; siendo estas aquellas en que no hay una densidad de corriente involucrada; siendo las más obvias aquellas en que se tienen imanes permanentes. Entonces, con $J = 0$;

$$\nabla \times \vec{H} = 0 \rightarrow \vec{H} = -\nabla\psi$$

Donde ψ corresponde al potencial magnético escalar. Este potencial tiene propiedades similares a las del potencial eléctrico, dado que fue definido de la misma forma. Por ello la integral del potencial escalar magnético sobre un contorno cerrado es cero. Asimismo, el potencial escalar magnético puede ser definido por;

$$\psi = \psi_b - \psi_a = - \int_a^b \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad [A]$$

y además;

$$\nabla^2\psi = 0$$

Ejemplo #47

Un alambre delgado finito mostrado en la figura 87 lleva una corriente de I [A], calcular:

- El potencial vectorial magnético en el punto P_1
- El potencial vectorial magnético en el punto P_2

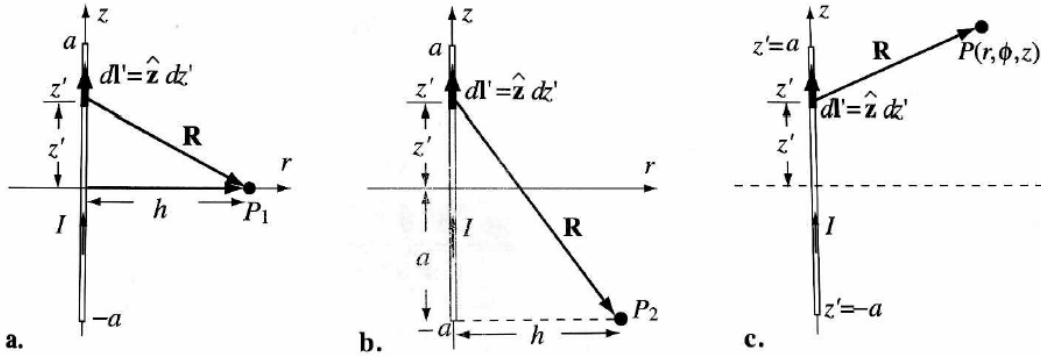


Figura 87. Vector potencial magnético de un segmento corto que lleva corriente a. cálculo de \vec{A} en el punto P_1 , b. cálculo de \vec{A} en el punto P_2 , c. cálculo de \vec{A} en un punto arbitrario.

Solución

a) Usando el sistema de coordenadas definido en la figura, y tomando $dl = dz$, y definiendo el vector \vec{R} de la siguiente forma;

$$\vec{R} = h \hat{r} - z \hat{z} \rightarrow |\vec{R}| = \sqrt{h^2 + z^2}$$

Se tiene que un elemento diferencial de \vec{A} es;

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 I dz \hat{z}}{4\pi |\vec{R}|}$$

Luego integrando sobre el largo del alambre

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{dz}{\sqrt{h^2 + z^2}} \hat{z} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln(z + \sqrt{h^2 + z^2}) \Big|_{-a}^a \hat{z} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left(\frac{a + \sqrt{h^2 + a^2}}{\sqrt{h^2 + a^2} - a} \right) \hat{z}$$

b) Basado en la figura 87b se tiene que;

$$\vec{R} = h \hat{r} - (z + a) \hat{z} \rightarrow |\vec{R}| = \sqrt{h^2 + (z + a)^2}$$

así;

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2a} \frac{dz}{\sqrt{h^2 + (z + a)^2}} \hat{z} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2a} \frac{dz}{\sqrt{h^2 + 2az + z^2 + a^2}} \hat{z} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln(2\sqrt{h^2 + 2az + z^2 + a^2} + 2z + 2a) \Big|_0^{2a} \hat{z} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left(\frac{\sqrt{4a^2 + h^2} + 2a}{h} \right) \hat{z} \end{aligned}$$

4.7 Propiedades magnéticas de los materiales

Para estudiar las propiedades magnéticas de los materiales es conveniente primero contar con un modelo para estos. Como sabemos toda la materia está formada por átomos, los que a su vez están compuestos por un núcleo con carga neta positiva el cual es orbitado por una nube de electrones.

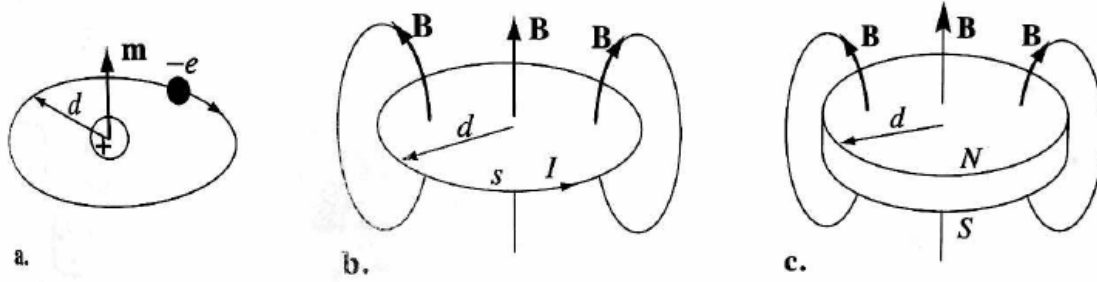


Figura 88 Modelo del dipolo magnético para un átomo a. órbita del electrón y el momento dipolar magnético resultante b. densidad de flujo magnético producida por el momento dipolar magnético c. modelo equivalente con un imán permanente

Ahora, como se tienen electrones en movimiento, orbitando en torno al núcleo a cierta velocidad, tendremos entonces una corriente eléctrica. Por esta razón es posible modelar cada átomo como un pequeño anillo conductor llevando una corriente I ; esto es como un dipolo magnético.

Es así como si calculamos la densidad de campo magnético producida por este pequeño anillo conductor se obtiene que;

$$\vec{B} \approx \frac{\mu_0 I d^2}{4R^3} (\hat{r} 2 \cos \theta + \hat{\theta} \sin \theta) [T]$$

Ahora, si se define el momento dipolar magnético como;

$$m = I \pi d^2 [Am^2]$$

Entonces se tiene que la densidad de flujo magnético es

$$\vec{B} \approx \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} (\hat{r} 2 \cos \theta + \hat{\theta} \sin \theta) [T]$$

4.7.1 Magnetización

Como cualquier material está formado por un gran número de átomos, cada uno produciendo un momento dipolar magnético, es posible calcular que el efecto neto dentro de un volumen dv estará dado por:

$$\vec{M} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^n \vec{m}_i \left[\frac{A}{m} \right]$$

Donde \vec{M} se conoce como magnetización del material y \vec{m}_i corresponde al momento dipolar magnético de cada átomo en el volumen.

Si los momentos dipolares magnéticos están direccionados al azar, se tendrá que la magnetización del material es cero. Por otro lado, si los momentos dipolares magnéticos están orientados en un mismo sentido, entonces el resultado será un imán permanente.

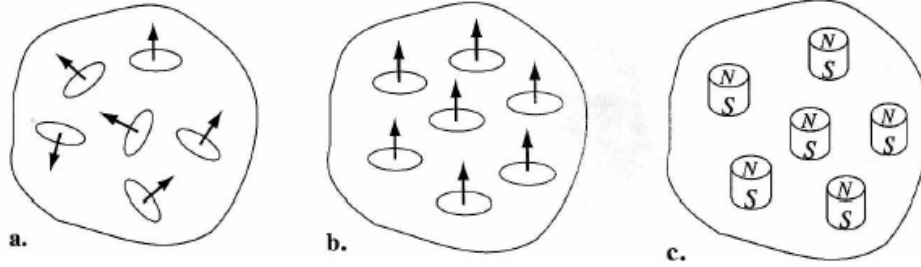


Figura 89 Modelo para la magnetización de materiales a. momentos dipolares magnéticos orientados al azar b. momentos dipolares magnéticos orientados en un mismo sentido c. modelo equivalente de un imán permanente

Como puede verse de la figura 89, el concepto de magnetización puede ser utilizado para evaluar el campo magnético producido por un imán permanente.

Ahora si se tiene una magnetización \vec{M} dentro de un volumen, entonces el momento dipolar magnético producido será;

$$dn = \vec{M} \cdot d\vec{v}$$

A partir de esto se puede obtener entonces que el momento dipolar magnético resultante es;

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 dn \times \hat{R}}{4\pi R^2} = \frac{\mu_0 \vec{M} \times \hat{R}}{4\pi R^2} dv = \frac{\mu_0 \vec{M} \times \vec{R}}{4\pi R^3} dv$$

así integrando sobre el volumen dv

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\vec{M} \times \vec{R}}{R^3} dv$$

y de donde se puede obtener que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

Ahora si consideramos que en un material magnetizado todos los dipolos están alineados, podemos ver esto como un solenoide donde cada espira corresponde a un dipolo magnético; entonces:

$$\vec{B}_n = \hat{z} \mu_0 n I = \hat{z} \mu_0 \frac{N}{l} I [T]$$

luego multiplicando y dividiendo por el área del dipolo magnético se obtiene

$$\vec{B}_n = \hat{z} \frac{\mu_0 N \pi d^2 I}{\pi d^2 l} = \hat{z} \frac{\mu_0 N m}{v} I = \mu_0 \vec{M} [T]$$

O bien, tenemos que la magnetización corresponde a una intensidad de campo magnético.

$$\vec{H}_m = \vec{M} \left[\frac{A}{m} \right]$$

Aplicando la ley de Ampere en este punto se logra

$$\nabla \times \vec{H}_m = \nabla \times \vec{M} = \vec{J}_m$$

De donde obtenemos que la presencia de magnetización puede modelarse entonces por una densidad de corriente equivalente.

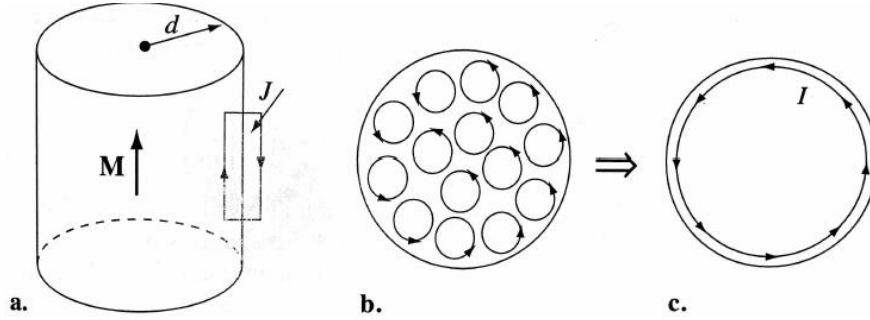


Figura 90 a. Un imán permanente b. un corte transversal del imán mostrando la orientación de los dipolos magnéticos y como las densidades de corriente equivalentes se cancelan en el interior c. el efecto neto es una densidad de corriente sobre la superficie.

Ahora bien, si la magnetización es constante las densidades de corriente equivalentes en su interior se cancelan como se muestra en la figura 90. Por otro lado, si existe una densidad de corriente superficial de magnetización, la que es normal a la superficie del material. De esto se tiene que:

$$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} \left[\frac{A}{m^2} \right]$$

$$\vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \hat{n} \left[\frac{A}{m^2} \right]$$

Ejemplo #48

Un imán permanente en forma de cilindro recto muy largo tiene una magnetización constante en su interior $\vec{M} = 5000 \text{ [A/m]}$, la cual esta direccionada en el sentido de su eje. Si el diámetro del cilindro es de **40 [mm]**:

- Calcular la densidad de flujo magnético debido a este imán en cualquier punto del espacio.
- Diseñar un solenoide equivalente que produzca la misma densidad de flujo magnético en el espacio.

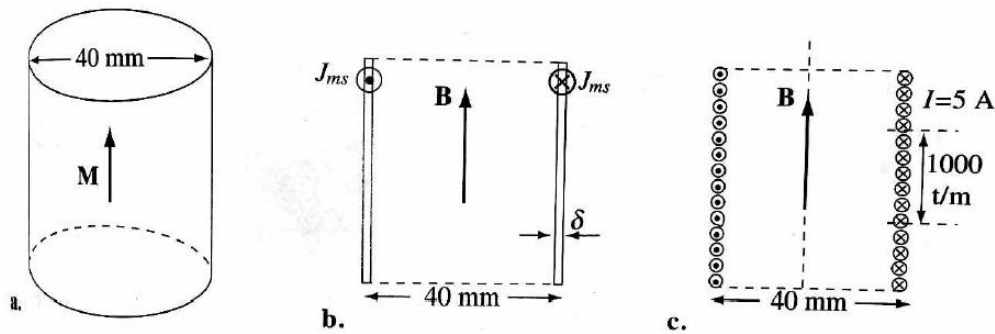


Figura 91 a. Imán permanente con magnetización constante \vec{M} b. Densidad de corriente equivalente en la superficie c. solenoide equivalente

Solución

- Del cálculo de las densidades de corriente equivalentes se obtiene;

$$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} = \nabla \times 5000 \hat{z} = 0 \left[\frac{A}{m^2} \right]$$

$$\vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \hat{n} = 5000 \hat{z} \times \hat{r} = 5000 \hat{\phi} \left[\frac{A}{m^2} \right]$$

Luego al aplicar la ley de Ampere se tiene;

$$\int_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \rightarrow |\vec{B}|l = \mu_o |\vec{J}_{ms}|l \rightarrow |\vec{B}| = \mu_o |\vec{J}_{ms}| = \mu_o 5000 = 0.00628 \text{ [T]}$$

Por otro lado, fuera del cilindro se tiene $\vec{B} = 0 \text{ [T]}$.

- Tenemos que la densidad de corriente de magnetización superficial es de 5000 [A/m] , luego si tomamos un conductor de 1 [mm] y damos 1000 vueltas por metro y hacemos circular una corriente de 5 [A] se obtiene el mismo resultado.

Ejemplo #49

Un imán cilíndrico muy largo, de radio $a = 20 \text{ [mm]}$ tiene una magnetización dada por $\vec{M} = \hat{z} 500000(a - r) \left[\frac{A}{m}\right]$, donde r es la distancia medida desde el eje del imán.

- Calcular la densidad de flujo magnético dentro y fuera del imán.
- Diseñar un solenoide o combinación de solenoides que produzcan un campo magnético equivalente.

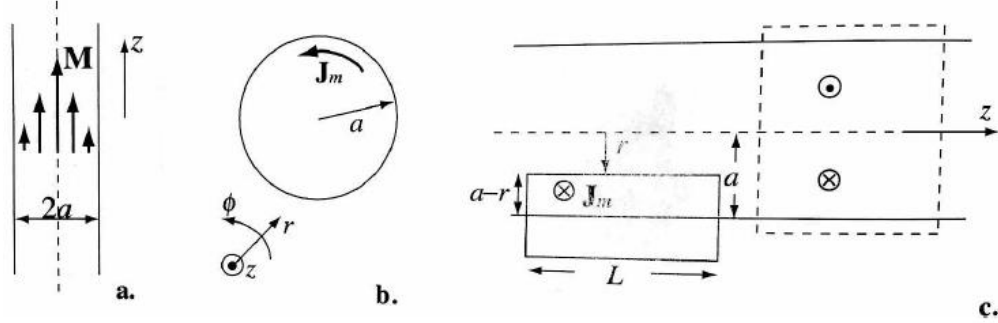


Figura 92 a. Un imán cilíndrico muy largo con magnetización $M(r)$ b. densidad de corriente equivalente dentro del imán c. uso de la ley de Ampere para el cálculo de la densidad de flujo magnético en el interior del imán.

Solución

a) De la ecuación correspondiente a la magnetización se tiene que las densidades de corriente equivalentes son:

$$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} = -\hat{\phi} \frac{d}{dr} (500000(r - a)) = 500000 \hat{\phi} \left[\frac{A}{m^2}\right]$$

$$\vec{J}_{ms} = \vec{M} \times \hat{n} = 500000(r - a) \hat{z} \times \hat{r} = 500000 (r - a) \hat{\phi} \left[\frac{A}{m^2}\right]$$

Además, evaluando \vec{J}_{ms} en $r=a$ se tiene que $\vec{J}_{ms} = 0 \left[\frac{A}{m^2}\right]$.

Usando este resultado y aplicando la ley de Ampere se obtiene;

$$\int_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \rightarrow |\vec{B}|l = \mu_o |\vec{J}_{ms}|l \rightarrow |\vec{B}| = \mu_o |\vec{J}_{ms}| \rightarrow |\vec{B}| = \mu_o 500000 (r - a)$$

Y el vector de densidad de flujo magnético resulta ser

$$\vec{B} = \mu_o 500000 (r - a) \hat{z} [T]$$

Así la densidad de flujo magnético está en el sentido del eje \hat{z} y decae linealmente en función de r . En particular para $r = a$ $\vec{B} = 0$. Fuera del imán el campo es cero.

b) Un solenoide equivalente se puede construir utilizando varias capas. Es así como si tomamos una bobina con una sección de $1 \text{ [mm}^2\text{]}$ y usamos alambres de 1 [mm] de

diámetro; a corriente total en la bobina será de 500000 [A]. Como se tendrán 106 alambres en total la corriente total por cada uno es de 0,5 [A].

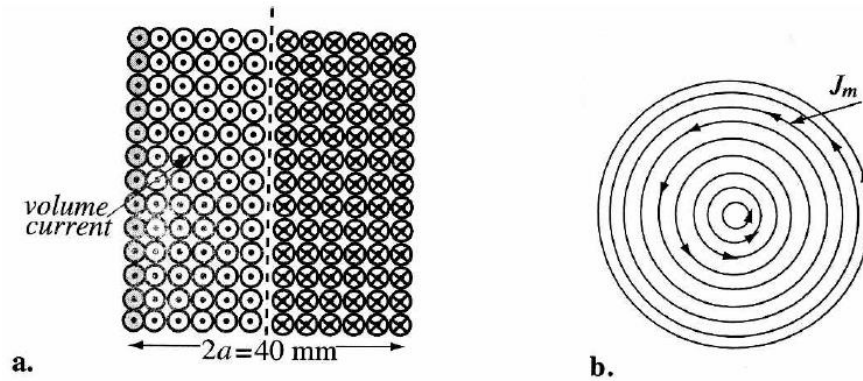


Figura 93 Diseño de una bobina que produce un campo magnético semejante al del imán permanente del ejemplo a. estructura del bobinado y dirección de la corriente b. vista superior de la bobina resultante.

4.7.2 Permeabilidad relativa

Continuando con el modelo utilizado, en que cada átomo se comporta como un pequeño imán (o dipolo magnético), y cuyo campo magnético está determinado por la órbita de los electrones en torno al núcleo. Se tiene que, ante la presencia de un campo magnético externo, estos dipolos tenderán a alinearse como resultado de la fuerza magnética de acuerdo con lo mostrado en la figura 94. Como puede verse de esta figura la acción de la densidad de flujo magnético externa \vec{B}_{ext} hace que resulte del alineamiento de los dipolos del material una densidad de flujo magnético de magnetización \vec{B}_{mag} .

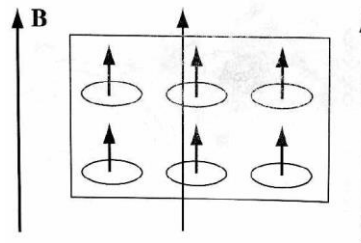


Figura 94 Alineamiento de los momentos dipolares magnéticos en el material por acción de un campo magnético externo

De esto se tiene entonces que la densidad de flujo magnético en el material es entonces

$$\vec{B}_t = \vec{B}_{ext} + \vec{B}_{mag} [T]$$

o bien en términos de la intensidad de campo magnético y magnetización;

$$\vec{B}_t = \mu_0 \vec{H}_{ext} + \mu_0 \vec{M}_{mag} = \mu_0 (\vec{H}_{ext} + \vec{M}_{mag}) [T]$$

Por otro lado, como la magnetización es generada por el campo magnético externo; se tendrá entonces que dependiendo del material será más fácil o difícil que este se

magnetic. Siendo que, para una intensidad de campo débil, solo algunos de los momentos dipolares se orientaran y a medida que este aumente más de ellos cambiaran su orientación. Esto puede ser descrito por;

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}_{ext} \left[\frac{A}{m} \right]$$

donde, χ_m recibe el nombre de susceptibilidad magnética e indica cuan susceptible es el material a la magnetización, y corresponde a una propiedad fundamental de los materiales. Substituyendo se obtiene;

$$\vec{B}_t = \mu_o (\vec{H}_{ext} + \chi_m \vec{H}_{ext}) = \mu_o (1 + \chi_m) \vec{H}_{ext} [T]$$

Ahora como la relación $\vec{B}_t = \mu \vec{H}_{ext}$ se mantiene en general, se puede escribir que

$$\mu = \mu_o (1 + \chi_m) = \mu_o \mu_r \left[\frac{H}{m} \right]$$

En la que μ corresponde a la permeabilidad magnética del material. Dado que esta depende de la susceptibilidad, la que varía de material a material, el término $(1 + \chi_m)$ puede ser reemplazado por una sola constante que recibe el nombre de permeabilidad relativa. Esta constante entonces define que tan fácil o difícil es magnetizar un material en particular.

4.8 Comportamiento de materiales magnéticos

En las secciones anteriores se discutieron la magnetización de los materiales y su relación con el campo magnético. Ahora, es conveniente evaluar las propiedades de estos desde el punto de vista macroscópico, es decir a un nivel útil para las aplicaciones de ingeniería.

En función de los resultados obtenidos anteriormente se tiene que la susceptibilidad magnética y consecuentemente la permeabilidad relativa, indican que tan magnetizable es un material, es así como estas características de los materiales pueden ser utilizadas para clasificar los materiales.

4.8.1 Materiales diamagnéticos

Estos materiales están caracterizados por presentar una permeabilidad relativa menor que 1 ($\mu_r < 1$). Este tipo de materiales incluye elementos importantes tales como el mercurio, oro, plata, cobre, plomo, silicona y agua; y para todos los efectos prácticos pueden ser considerados como no magnetizables.

4.8.2 Materiales paramagnéticos

Este tipo de materiales está caracterizado por que su permeabilidad relativa es levemente superior a 1 ($\mu_r \sim 1$). En estos materiales se tiene que los momentos orbitales y spin no se cancelan y los átomos tienen un momento magnético en ausencia de un campo magnético externo. Sin embargo, como los átomos están orientados al azar y por lo tanto el campo neto es cero o muy cercano a cero. Ahora, en presencia de un campo externo estos momentos tienden a alinearse produciendo que el campo total tienda a aumentar levemente.

Las permeabilidades relativas de los materiales paramagnéticos están en el rango de 1.0000001 a 1.001 y materiales que pueden ser clasificados bajo esta categoría incluyen al aluminio, paladio, tungsteno, y el aire.

4.8.3 Materiales ferromagnéticos

Estos materiales se caracterizan por ser fácilmente magnetizables y derivan su nombre del hierro ya que es el más común de los materiales que caen dentro de esta categoría. Dado que una magnetización externa puede fácilmente orientar los dipolos magnéticos en el material, la permeabilidad relativa de estos es mucho mayor que 1 ($\mu_r \gg 1$) y puede ser típicamente en el rango de los miles o mayores. Materiales que pueden clasificarse como de este tipo son el hierro, cobalto, y níquel.

Este tipo de materiales tiene a magnetizarse en la misma dirección que el campo externo, y pueden retener esta magnetización después de que el campo externo es retirado. Cuando esto ocurre el material se vuelve un imán permanente. Otra propiedad importante de los materiales ferromagnéticos es que la dependencia entre la magnetización y el campo, magnético externo es no lineal.

La facilidad para magnetizarse de este tipo de materiales puede ser explicada por que en lugar de que los dipolos magnéticos estén orientados al azar como en otros casos, los dipolos magnéticos en materiales ferromagnéticos tienden a estar alineados en porciones del material formando dominios. Es así como cuando un campo externo es aplicado, aquellos dominios que estaban ya en la dirección del campo no se deben realinear. Y es el campo generado por los dominios en conjunto con el campo externo los que hacen que sea más fácil orientar los dominios adyacentes.

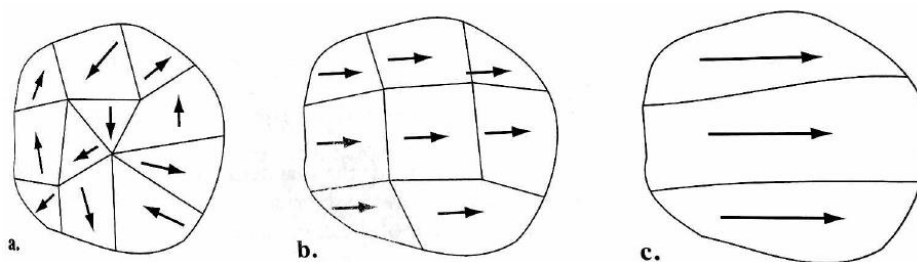


Figura 95 Modelo de dominios ferromagnéticos a. orientación al azar b. al aplicar un campo externo los dominios se alinean en dirección del campo c. dominios alineados en una dirección en común forman macro dominios

Este aspecto de la magnetización es mejor explicado por medio de la curva de magnetización o curva de histéresis, que representa la densidad de flujo magnético dentro de un material en función de una intensidad de campo magnético externo.

Como puede verse de la figura 96, considerando que el material no estaba magnetizado inicialmente, al aplicarse un campo externo la densidad de flujo dentro del material aumenta inicialmente con cierta rapidez, la cual disminuye a medida que el número de dominios disponibles para ser alineados disminuye. En cierto punto, todos los dominios dentro del material ya están alineados y por lo tanto aumentar el campo externo, no aumenta la densidad de flujo magnéticos en el material. El punto donde esto ocurre M_1 se conoce como punto de saturación. Por otro lado, el segmento de curva entre el punto O y M_1 se conoce como curva de magnetización inicial.

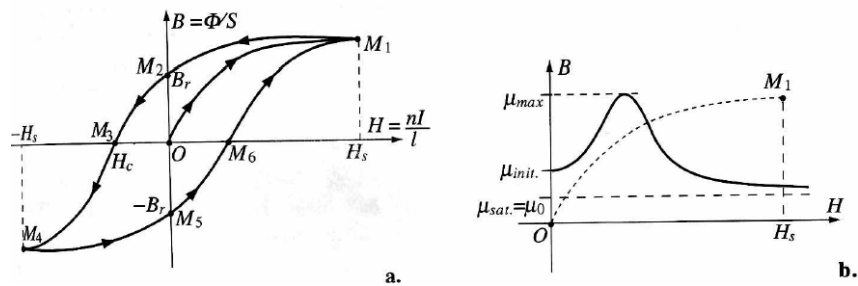


Figura 96 a. Curva de magnetización para un trozo de hierro b. permeabilidad relativa a lo largo de la curva de magnetización inicial

Ahora si se decrece el campo externo, la curva de magnetización no sigue la curva inicial. Es más, la densidad de flujo magnético varía en forma más lenta ya que los dominios no recuperan su estado inicial al mismo ritmo. Reduciendo la magnetización más aún se alcanza el punto M_2 , en el cual la magnetización externa es cero. Sin embargo, la densidad de flujo magnético mantiene un valor, dado que no todos los dominios han regresado a su orientación inicial, quedando entonces el material magnetizado, existiendo entonces un magnetismo remanente o residual.

4.9 Inductancia

Una cantidad muy útil en la práctica es la inductancia, puesto que corresponde a uno de los elementos fundamentales utilizados en circuitos eléctricos y electrónicos. Para poder definir esta cantidad consideremos en primer lugar una espira C_1 ubicada en el espacio. Si una corriente I_1 circula por ella, se tendrá que se establece una densidad de flujo magnético B_1 . Como sabemos esta densidad de flujo magnético estará presente en todo el espacio con una intensidad que variará en función de las características de la espira.

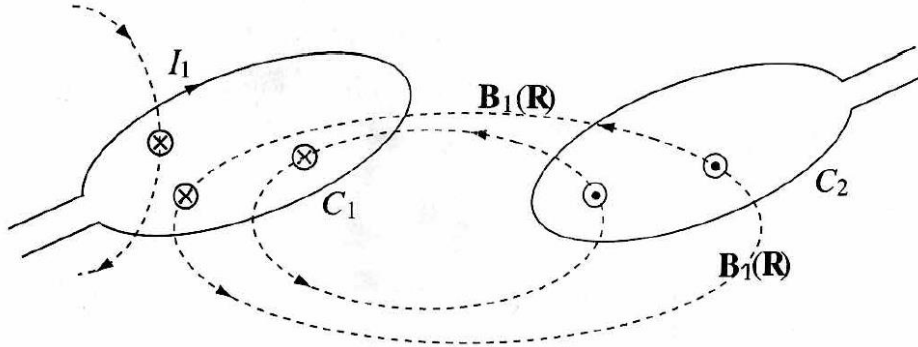


Figura 97 La espira C_1 produce una densidad de flujo magnético, parte de la cual es enlazada por la espira C_2

Ahora, si consideramos una segunda espira C_2 , ubicada en algún otro punto del espacio (figura 97) se tendrá que algunas de las líneas de campo magnético producidas por C_1 cruzaran esta segunda espira. Así, a partir de la definición de flujo magnético se puede calcular el flujo que pasa por cada una de las dos espiras debido a la densidad de flujo producida por la espira C_1 .

$$\phi_{11} = \int_{S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_1 \text{ [Wb]}$$

$$\phi_{21} = \int_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 \text{ [Wb]}$$

donde ϕ_{11} corresponde al flujo magnético que cruza la espira C_1 debido a la densidad de flujo en C_1 y ϕ_{21} al flujo magnético que cruza C_2 debido a la densidad de flujo producida por C_1 .

Para poder calcular la densidad de flujo magnético B_1 es necesario conocer primero las dimensiones físicas de la espira C_1 y la corriente I_1 , sin embargo, si la corriente es constante se puede obtener a partir de la ley de Biot-Savart que;

$$\vec{B}_1 = I_1 \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l} \times \hat{R}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}'|^2} \right] \text{ [T]}$$

donde $\vec{R} = |r_1 - r'|$ es el vector de posición del punto donde B1 quiere ser calculado y r' es el vector de posición del elemento diferencial de largo dl . Suponiendo que se utiliza esta ecuación para determinar la densidad de flujo magnético y luego se calculan los flujos correspondientes a través de ambas espiras, que son directamente proporcionales a la corriente I_1 , se obtiene entonces;

$$\phi_{11} = L_{11}I_1 [Wb]$$

$$\phi_{21} = L_{21}I_1 [Wb]$$

En este último resultado los términos L_{11} y L_{21} son constantes independientes de la corriente y solo son funciones de la geometría y configuración física de las espiras. A partir de esto cada uno de estos dos términos puede obtenerse entonces por

$$L_{11} = \frac{\phi_{11}}{I_1} \left[\frac{Wb}{A} \right] o [H]$$

$$L_{21} = \frac{\phi_{21}}{I_1} \left[\frac{Wb}{A} \right] o [H]$$

Donde la primera cantidad se conoce como la inductancia propia de la espira C_1 y el segundo término como la inductancia mutua entre C_1 y C_2 .

De estos resultados se tiene que la inductancia (propia o mutua) tiene unidades de $[Wb/A]$, la que se llama Henry ([H]). Por otro lado, se tiene que la inductancia depende solo de la configuración física de las espiras y es independiente de la corriente. Además, se tendrá que cualquier elemento que produzca una inductancia se conocerá como un inductor.

Ahora bien, si en lugar de espiras en el espacio se tienen dos bobinas de N vueltas, el flujo enlazado por cada una de ellas (o enlace de flujo) estará dado por;

$$\Lambda_{11} = N_1\phi_{11} [Wb - vuelta]$$

$$\Lambda_{21} = N_2\phi_{21} [Wb - vuelta]$$

Y entonces la inductancia propia y mutua estará dada por:

$$L_{11} = \frac{\Lambda_{11}}{I_1} [H]$$

$$L_{21} = \frac{\Lambda_{21}}{I_1} [H]$$

Por otro lado, si se considera que la espira C_2 también lleva una corriente (I_2), entonces se tendrá que esta produce una densidad de campo magnético en el espacio. Por lo tanto, se tendrá que también existe una inductancia propia debida al flujo producido por

C_2 y que ella misma enlaza y una inductancia mutua entre C_2 y C_1 debida al flujo producido por C_2 y enlazado por C_1 . Así se obtiene;

$$L_{22} = \frac{N_2 \phi_{22}}{I_2} [H]$$

$$L_{12} = \frac{N_1 \phi_{12}}{I_2} [H]$$

Es así como en general se tendrá que cada bobina en el espacio tendrá una inductancia, la que estará dada por una componente propia y otra mutua debida a los enlaces de flujo debidos a la circulación de corriente en otras bobinas en el espacio. Luego para un sistema de dos bobinas, ambas llevando corriente se tendrá;

$$L_1 = L_{11} \pm L_{12} = \frac{N_1 \phi_{11}}{I_1} \pm \frac{N_1 \phi_{12}}{I_2} [H]$$

$$L_2 = L_{22} \pm L_{21} = \frac{N_2 \phi_{22}}{I_2} \pm \frac{N_2 \phi_{21}}{I_1} [H]$$

Ejemplo #50

Un toroide de sección rectangular tiene las dimensiones mostradas en la figura 98, donde $b = 50$ [mm], $c = 20$ [mm], y $d = 70$ [mm]. Si la bobina consiste en **1000 vueltas** de alambre muy delgado enrolladas uniformemente en una sola capa, y la permeabilidad del toroide es la del espacio libre; ¿Cuál será la inductancia propia de la estructura?

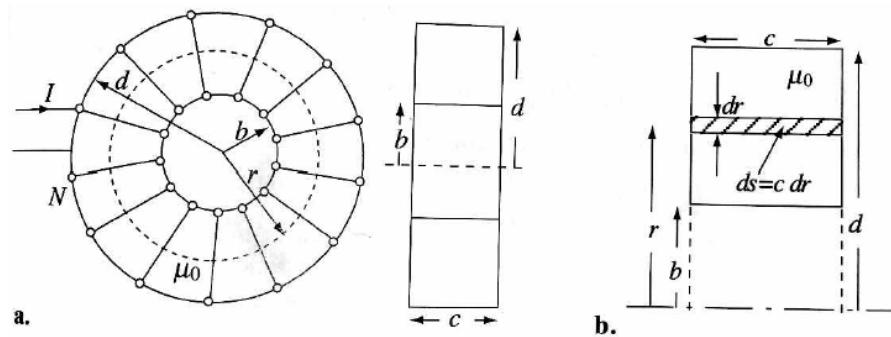


Figura 98 Calculo de la inductancia propia de una bobina toroidal a. dimensiones b. cálculo del flujo

Solución

Utilizando la ley de Ampere se tiene que la densidad de flujo magnético en el toroide es

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o N I \rightarrow |\vec{B}| = \frac{\mu_o N I}{2\pi r} [T]$$

Como la densidad de flujo magnético calculada no es constante dentro del toroide, para calcular el flujo se deberá integrar tomando como elemento diferencial de superficie $dS = c \, dr$, luego

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_b^d \frac{\mu_o N I}{2\pi r} \cdot c \, dr = \frac{\mu_o N I c}{2\pi} \int_b^d \frac{dr}{r} = \frac{\mu_o N I c}{2\pi} \ln\left(\frac{d}{b}\right) [Wb]$$

Entonces de la definición de inductancia se tiene que la inductancia propia es

$$L_{11} = \frac{N\phi}{I} = \frac{\mu_o N^2 I c}{2\pi I} \ln\left(\frac{d}{b}\right) = \frac{\mu_o N^2 c}{2\pi} \ln\left(\frac{d}{b}\right) [H]$$

y reemplazando por los valores del enunciado se obtiene;

$$L_{11} = \frac{\mu_o (1000)^2 20 \times 10^{-3}}{2\pi} \ln\left(\frac{0.07}{0.05}\right) = 1.346 \times 10^{-3} [H]$$

Ejemplo #51

Un toroide de radio medio r_o y sección transversal según se muestra en la figura 99 es bobinado fuertemente con N vueltas de un alambre. Si un alambre conductor recto que lleva una corriente I pasa por el centro del toroide:

a) Calcular la inductancia mutua entre el alambre conductor y la bobina toroidal suponiendo que $r_o \gg b$.

b) Si para aumentar el valor de la inductancia se utiliza ferrita, que tiene una permeabilidad relativa de **3000**; ¿Qué valor de inductancia mutua se obtiene?

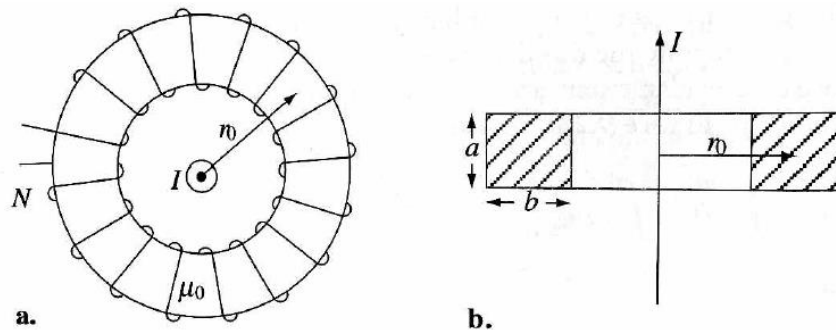


Figura 99 a. Un alambre llevando una corriente a través de una bobina toroidal b. corte transversal

Solución

a) Utilizando la ley de Ampere se tiene que la densidad de flujo magnético producida por el alambre es de;

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o I \rightarrow |\vec{B}| = \frac{\mu_o I}{2\pi r} [T]$$

Considerando el radio medio del toroide dado que $r_o \gg b$, se tiene que el flujo magnético que pasa por la sección transversal de este es;

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \frac{\mu_o I}{2\pi r_o} \cdot dS = \frac{\mu_o I}{2\pi r_o} S = \frac{\mu_o I}{2\pi r_o} ab [Wb]$$

Luego la inductancia mutua será;

$$L_{12} = \frac{N\phi_{12}}{I_2} = \frac{\mu_o N I_2}{2\pi r_o I_2} ab = \frac{\mu_o N ab}{2\pi r_o} [H]$$

b) considerando ahora que la permitividad relativa del material es $\mu_r = 3000$ se tiene entonces que la inductancia mutua será

$$L_{12} = \frac{N\phi_{12}}{I_2} = \frac{\mu N I_2}{2\pi r_o I_2} ab = \frac{\mu_o \mu_r N ab}{2\pi r_o} = \frac{3000 \mu_o N ab}{2\pi r_o} [H]$$

4.10 Energía en el campo magnético

Para definir la energía en el campo magnetostático, consideremos en primer lugar un circuito R-L como el mostrado en la figura 100. De la ley de voltaje de Kirchhoff se tiene que;

$$V = V_R + V_L = RI + L \frac{dI}{dt} [V]$$

Dado que la intención es obtener la energía magnética en este sistema, solo corresponde enfocarse en el segundo término de esta ecuación (aquel correspondiente a la inductancia). De esto se tiene que la potencia instantánea será;

$$P_L = V_L I = L \frac{dI}{dt} I [W]$$

Y entonces la energía magnética almacenada en el inductor puede ser calculada entonces integrando la potencia sobre un intervalo de tiempo.

$$W_m = \int_0^t P_L dt = \int_0^t L \frac{dI}{dt} I dt = \int_0^I L I dI = \frac{1}{2} L I^2 [J]$$

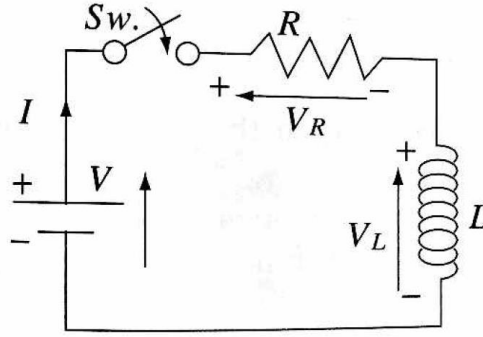


Figura 100 Circuito RL utilizado para definir la energía almacenada en un inductor L

En este punto es útil comparar el resultado anterior con la expresión de energía almacenada en el campo eléctrico en un condensador, la cual está dada por $W_e = \frac{1}{2} CV^2$ [J]. De esto se puede observar la similitud entre ellas, destacándose entonces que la energía en el campo magnético depende del cuadrado del valor de la corriente en el inductor y que en el campo eléctrico la energía almacenada depende del cuadrado de la diferencia de potencial entre las placas del condensador.

Ahora bien, la expresión encontrada es útil para calcular la energía almacenada en un inductor, sin embargo, queda determinar una forma para calcular la energía en otras configuraciones. Por ejemplo, si se considera el sistema formado por dos espiras mostrado en la figura 97, donde cada una de ellas puede ser vista como un inductor con inductancias propias L_{11} y L_{22} e inductancias mutuas L_{12} y L_{21} . En este punto considerando que en el espacio se tendrán flujos enlazados producidos por ambas bobinas tal que:

$$\phi_{11} = \text{Flujo que enlaza } C_1 \text{ y es producido por } C_1$$

$$\phi_{12} = \text{Flujo que enlaza } C_1 \text{ y es producido por } C_2$$

$$\phi_{22} = \text{Flujo que enlaza } C_2 \text{ y es producido por } C_2$$

$$\phi_{21} = \text{Flujo que enlaza } C_2 \text{ y es producido por } C_1$$

Así el flujo total que enlaza cada una de las espiras será;

$$\phi_1 = \phi_{11} \pm \phi_{12} \text{ [Wb]}$$

$$\phi_2 = \phi_{22} \pm \phi_{21} \text{ [Wb]}$$

Y utilizando la definición de enlace de flujo para cada una de las dos espiras se tendrá;

$$\Lambda_1 = N_1 \phi_1 = N_1 (\phi_{11} \pm \phi_{12}) \text{ [Wb - vuelta]}$$

$$\Lambda_2 = N_2 \phi_2 = N_2 (\phi_{22} \pm \phi_{21}) \text{ [Wb - vuelta]}$$

A partir de esto se puede definir la inductancia total asociada a cada una de las espiras, la que queda definida según sigue;

$$L_1 = \frac{\Lambda_1}{I_1} = \frac{N_1 \phi_1}{I_1} = \frac{N_1(\phi_{11} \pm \phi_{12})}{I_1} = \frac{N_1 \phi_{11}}{I_1} \pm \frac{N_1 \phi_{12}}{I_1} [H]$$

$$L_2 = \frac{\Lambda_2}{I_2} = \frac{N_2 \phi_2}{I_2} = \frac{N_2(\phi_{22} \pm \phi_{21})}{I_2} = \frac{N_2 \phi_{22}}{I_2} \pm \frac{N_2 \phi_{21}}{I_2} [H]$$

En base a este resultado y utilizando la definición de energía almacenada en una inductancia se tiene entonces;

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 [J]$$

y sustituyendo

$$W_m = \frac{1}{2} \left[\frac{N_1 \phi_{11}}{I_1} \pm \frac{N_1 \phi_{12}}{I_1} \right] I_1^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{N_2 \phi_{22}}{I_2} \pm \frac{N_2 \phi_{21}}{I_2} \right] I_2^2 [J]$$

Esto es se obtiene una relación que es función de los flujos en cada una de las espiras

$$W_m = \frac{1}{2} N_1 (\phi_{11} \pm \phi_{12}) I_1 + \frac{1}{2} N_2 (\phi_{22} \pm \phi_{21}) I_2 = \frac{1}{2} N_1 \phi_1 I_1 + \frac{1}{2} N_2 \phi_2 I_2 [J]$$

La que puede ser generalizada para un sistema de n espiras tal que

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n N_i \phi_i I_i [J]$$

Ahora, también de la definición de inductancia se puede escribir que $L I = N \phi$, entonces reemplazando se obtiene

$$W_m = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2 \pm \frac{1}{2} L_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2 \pm \frac{1}{2} L_{21} I_1 I_2 [J]$$

Agrupando términos y teniendo en cuenta que $L_{12}=L_{21}$ se tiene que

$$W_m = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2 \pm L_{12} I_1 I_2 [J]$$

Lo que puede ser generalizado por

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m L_{ij} I_i I_j [J]$$

4.11 Circuitos Magnéticos

Un concepto útil para el diseño de elementos magnéticos es el de los circuitos magnéticos, a través del cual es posible modelar un sistema magnético por medio de un circuito equivalente. Para esto se debe considerar la analogía que existe entre los campos magnético y eléctrico, y que puede ser verificada a partir de las siguientes ecuaciones:

Campo eléctrico

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} \left[\frac{V}{m} \right]$$

$$V = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} \text{ [V]}$$

$$\vec{I} = \int \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Campo magnético

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

$$NI = \int \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

$$\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

A partir de esto puede verse que la corriente en un circuito eléctrico es análoga al flujo en un sistema magnético. Por otro lado, el producto NI en un sistema magnético es análogo a la diferencia de potencial en un circuito eléctrico.

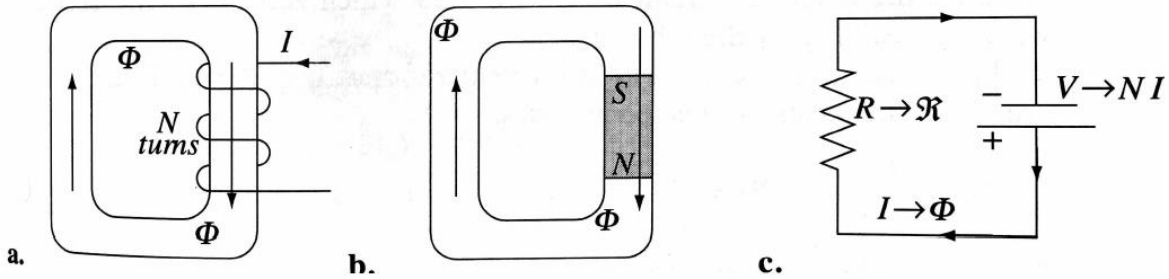


Figura 101 a. Fuerza magneto motriz en un circuito magnético constituido por una bobina de N vueltas por la que circula una corriente I b. Fuerza magneto motriz generada por un imán permanente c. circuito equivalente para sistemas de a y b

Así, por ejemplo, tomando el sistema magnético conformado por un núcleo de material ferromagnético al cual se le instala una bobina de N vueltas por la cual circula una corriente de I [A] mostrado en la figura 101a, puede ser modelado por un circuito conformado por una fuente de voltaje y una resistencia \mathcal{R} (figura 101c), la cual puede ser definida tomando el toroide de la figura 100. Aplicando la ley de Ampere a el elemento de esta figura se tiene que la intensidad de campo magnético resultante es de;

$$\vec{H} = \frac{NI}{2\pi r_a} \left[\frac{A}{m} \right]$$

y el flujo en el núcleo magnético es

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \mu \vec{H} \cdot d\vec{S} = \mu \frac{NI}{2\pi r_a} S \text{ [Wb]}$$

Entonces basándose en la analogía entre Voltaje $-NI$, y corriente ϕ se tiene que la resistencia de este circuito es

$$\mathfrak{R} = \frac{NI}{\phi} = \frac{NI}{\mu \frac{NI}{2\pi r_a} S} = \frac{2\pi r_a}{\mu S} = \frac{l}{\mu S} \left[\frac{1}{H} \right]$$

donde $l = 2\pi r_a$ corresponde al largo medio del circuito magnético (toroide), y \mathfrak{R} a la reluctancia del circuito magnético y representa como el núcleo se opone a la circulación de flujo magnético.

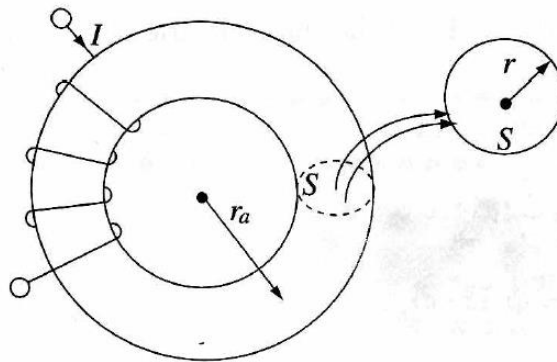


Figura 102 Circuito magnético cerrado utilizado para la definición de reluctancia

Ejemplo #52

Dado el circuito magnético de la figura 103; calcular la intensidad de campo magnético en el entre hierro.

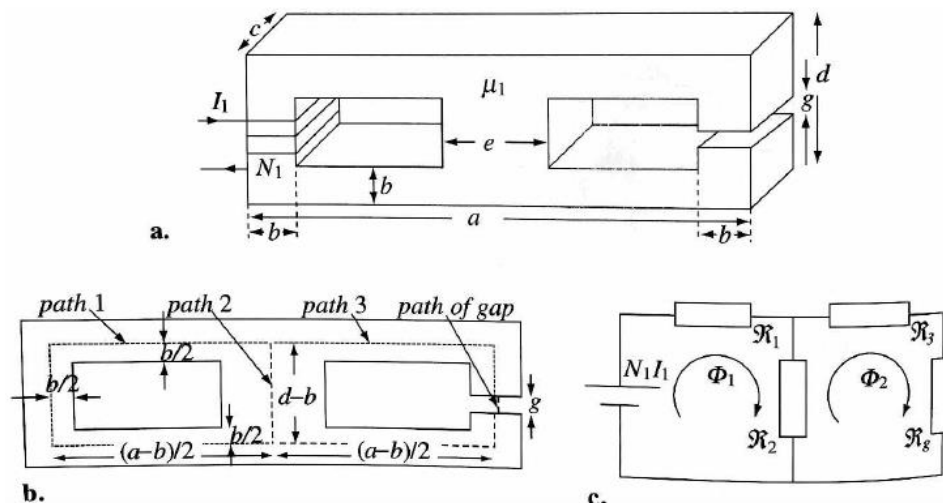


Figura 103 a. dimensiones del circuito magnético b. definición de los largos medios c. circuito equivalente

Solución

A partir del circuito magnético se obtiene su equivalente eléctrico considerando como una reluctancia cada uno de los segmentos de material o entrehierro que se tienen en él. Asimismo, se modela la bobina como una fuente de voltaje tal que su polaridad está dada por la regla de la mano derecha. Teniendo esto en cuenta se obtiene el circuito mostrado en la figura 103c.

Definiendo arbitrariamente la dirección de los flujos magnéticos en cada una de las ventanas del circuito magnético tal como se muestra en la figura 103c, se obtiene a partir de la ley de voltajes de Kirchhoff las siguientes ecuaciones para cada malla

$$\begin{aligned} NI &= R_1\phi_1 + R_2(\phi_1 - \phi_2) \\ 0 &= R_2(\phi_2 - \phi_1) + R_3\phi_2 + R_g\phi_2 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones para los flujos se obtiene

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{NI(R_2 + R_3 + R_g)}{(R_2 + R_3 + R_g)(R_1 + R_2) - R_2^2} [Wb] \\ \phi_2 &= \frac{NIR_2}{(R_2 + R_3 + R_g)(R_1 + R_2) - R_2^2} [Wb] \end{aligned}$$

A partir de este resultado se tiene entonces que la densidad de flujo en el entrehierro es;

$$B_g = B_2 = \frac{\phi_2}{S} = \frac{\phi_2}{bc} = \frac{NIR_2}{bc(R_2 + R_3 + R_g)(R_1 + R_2) - R_2^2} [T]$$

y consecuentemente la intensidad de campo magnético en el entrehierro;

$$H_g = \frac{NIR_2}{\mu_0 bc(R_2 + R_3 + R_g)(R_1 + R_2) - R_2^2} \left[\frac{A}{m}\right]$$

Ahora de la figura se tiene que las reluctancias estarán dadas por;

$$R_1 = \frac{a+b-2b}{\mu_1 bc}; R_2 = \frac{d-b}{\mu_1 ec}; R_3 = \frac{a+d-2b-g}{\mu_1 bc}; R_g = \frac{g}{\mu_0 bc}$$

Así reemplazando se obtiene;

$$H_g = \frac{\mu_{r1} NI(d-b)bc}{e(b(d-b) + e(a+d-2b-g) + \mu_{r1} eg)(e(a+d-2b) + b(d-b)) - b^2(d-b)^2} \left[\frac{A}{m}\right]$$

Ejemplo #53

Un imán de largo a y radio b con magnetización uniforme \vec{M} es insertado en un circuito magnético de la forma indicada en la figura 104. La sección del circuito magnético es circular de radio b y uniforme e igual a la del imán. Dado que hay dos pequeños entrehierros de largo d ubicados en los costados del circuito magnético, y asumiendo que la permeabilidad del material utilizado para el núcleo es infinita; calcular la intensidad de campo magnético \mathbf{H} en los entrehierros.

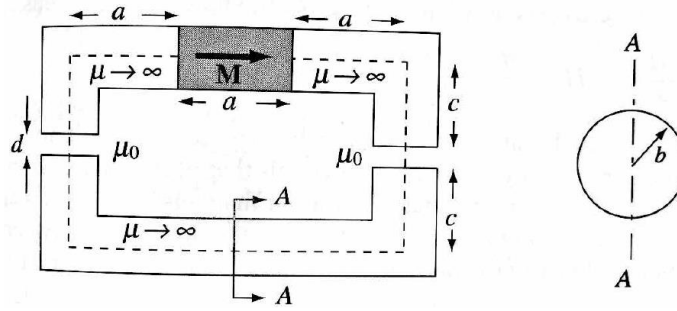


Figura 104 Uso de un imán permanente para generar flujo en un circuito magnético

Solución

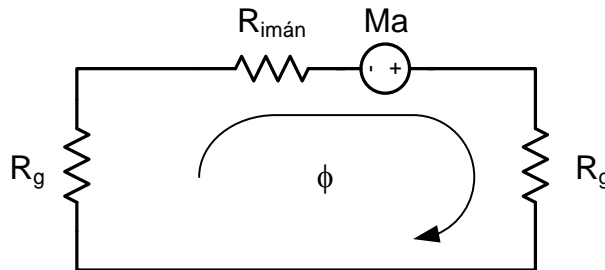
Como en este caso se tiene un imán permanente, es posible modelar la situación como si se tratase de una densidad de corriente equivalente sobre la superficie de este, en forma similar a un solenoide. Así se tiene;

$$\vec{J}_{mag} = \vec{M} \times \hat{n} = M \hat{\phi} \left[\frac{A}{m} \right]$$

Entonces la fuerza magneto motriz generada por este será;

$$f_{mm} = Ma [A - vuelta]$$

Por otro lado, el circuito equivalente de este sistema magnético es el mostrado en la siguiente figura.



De aquí se tiene que las reluctancias estarán dadas por

$$R_g = \frac{d}{\mu_0 \pi b^2} \text{ y } R_{imán} = \frac{a}{\mu_0 \pi b^2}$$

Luego aplicando la ley de voltajes de Kirchhoff al lazo se tiene

$$Ma = R_g \phi + R_g \phi + R_{imán} \phi = 2R_g \phi + R_{imán} \phi = (2R_g + R_{imán}) \phi = \left(2 \frac{d}{\mu_o \pi b^2} + \frac{a}{\mu_o \pi b^2} \right) \phi$$

$$= \frac{2d + a}{\mu_o \pi b^2} \phi$$

despejando por el flujo se tiene

$$\phi = \frac{\mu_o \pi b^2 Ma}{2d + a} [Wb]$$

y la densidad de flujo en el entrehierro es

$$B = \frac{\phi}{S} = \frac{\phi}{\pi b^2} = \frac{\mu_o Ma}{2d + a} [T]$$

y entonces la intensidad de campo magnético resulta ser

$$H = \frac{B}{\mu_o} = \frac{Ma}{2d + a} \left[\frac{A}{m} \right]$$

Ejemplo #54

Considerando el circuito magnético mostrado en la figura 105, calcular:

- El flujo magnético en la bobina **2**
- La inductancia propia de la bobina **1**
- la inductancia mutua entre las bobinas **1** y **2**

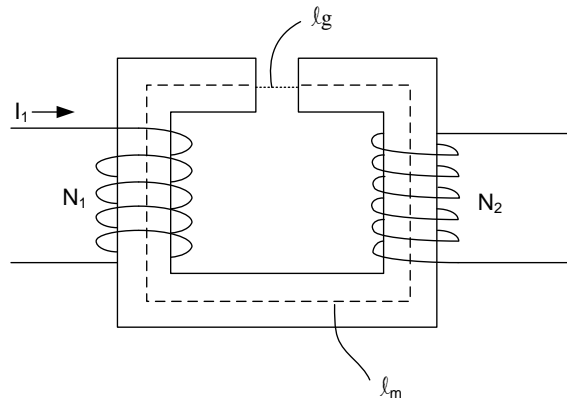
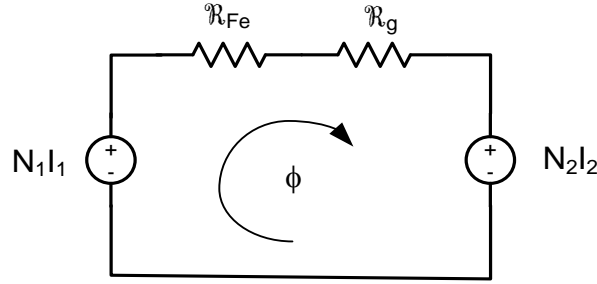


Figura 105 Núcleo ferro magnético con dos bobinas

Solución

a) A partir de la figura 105 se puede construir el equivalente eléctrico que estará formado por dos reluctancias y dos fuentes tal como se indica a continuación.



donde las reluctancias están dadas por;

$$\mathfrak{R}_{Fe} = \frac{l_m}{\mu_r \mu_o S} \left[\frac{1}{H} \right]$$

$$\mathfrak{R}_g = \frac{l_g}{\mu_o S} \left[\frac{1}{H} \right]$$

Aplicando la LVK en el lazo cerrado formado por el circuito se tiene que el flujo es

$$\phi = \frac{N_1 I_1 - N_2 I_2}{\mathfrak{R}_{Fe} + \mathfrak{R}_g} [Wb]$$

Y si se asume que no hay circulación de corriente en la bobina 2 ($I_2=0$), se obtiene;

$$\phi = \frac{N_1 I_1}{\mathfrak{R}_{Fe} + \mathfrak{R}_g} [Wb]$$

b) A partir de la definición de inductancia se tiene que la inductancia propia de la bobina 1 es;

$$L_{11} = \frac{\Lambda_{11}}{I_1} = \frac{N_1 \phi_1}{I_1} = \frac{N_1 \phi}{I_1} = \frac{N_1}{I_1} \frac{N_1 I_1}{\mathfrak{R}_{Fe} + \mathfrak{R}_g} = \frac{N_1^2}{\mathfrak{R}_{Fe} + \mathfrak{R}_g} [H]$$

c) Asimismo a partir de la definición de inductancia mutua se obtiene;

$$L_{21} = \frac{\Lambda_{21}}{I_1} = \frac{N_2 \phi_2}{I_1} = \frac{N_2 \phi}{I_1} = \frac{N_2}{I_1} \frac{N_1 I_1}{\mathfrak{R}_{Fe} + \mathfrak{R}_g} = \frac{N_1 N_2}{\mathfrak{R}_{Fe} + \mathfrak{R}_g} [H]$$

4.12 Fuerza en el campo magnético

Como se vio en la definición de la fuerza de Lorentz, el campo magnético ejerce una fuerza sobre las cargas en movimiento, la que es proporcional a su velocidad y la intensidad de la densidad de flujo magnético tal que

$$\vec{F}_{magnetica} = q \vec{v} \times \vec{B} [N]$$

Luego si se tiene un campo eléctrico y magnético en forma simultánea en un punto en el espacio una carga puntual experimentará una fuerza combinada resultante de la fuerza de Coulomb y la fuerza de Lorentz, conocida como fuerza de Coulomb-Lorentz y dada por;

$$\vec{F}_{electomagnetica} = \vec{F}_{coulomb} + \vec{F}_{lorentz} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) [N]$$

Ejemplo #55

Un electrón es inyectado en ángulo recto con respecto a un campo magnético. Si la velocidad del electrón es constante e igual a $\mathbf{v} = 100.000 \text{ [m/seg]}$ y la densidad de flujo magnético es de $\vec{B} = 0.5 \hat{z} \text{ [T]}$; calcular la trayectoria del electrón (asumir que la velocidad es perpendicular al campo)

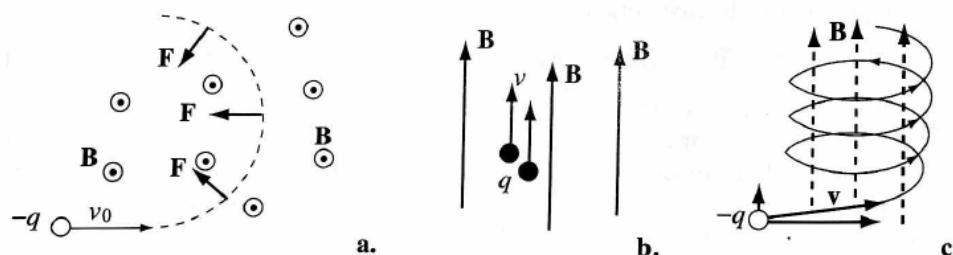


Figura 106 a. Una carga moviéndose perpendicular al campo magnético experimenta una fuerza radial causando una trayectoria circular. **b.** movimiento de la carga paralelo al campo no produce la aparición de una fuerza magnética **c.** movimiento de una carga con componentes paralelos y perpendiculares al campo produce que la trayectoria resultante sea helicoidal

Solución

A partir de la definición de la fuerza de Lorentz se obtiene;

$$\vec{F}_{magnetica} = q\vec{v} \times \vec{B} = qv\hat{r} \times B\hat{z} = -qvB\hat{\phi} = -(-1.6 \times 10^{-19}) \cdot 10^5 \cdot 0.5\hat{\phi} = 0.8 \times 10^{-14}\hat{\phi} [N]$$

De donde se tiene que la fuerza resultante está en el eje $\hat{\phi}$, por lo que el electrón se mueve en una trayectoria circular. El radio del círculo resultante está definido por la fuerza centrífuga;

$$\frac{mv^2}{r} = F_m \rightarrow r = \frac{mv^2}{F_m} = \frac{9.1 \times 10^{-31} \cdot 10^{10}}{0.8 \times 10^{-14}} = 1.138 \times 10^{-6} [m]$$

Ahora, la expresión vista para la fuerza magnética solo considera el efecto experimentado por una sola carga en el espacio. Por lo que cabe preguntarse; ¿qué ocurrirá sobre un conjunto de cargas moviéndose en conjunto? En particular, es de interés poder determinar que ocurre cuando se tiene una corriente eléctrica, que corresponde a un conjunto de cargas moviéndose en una dirección común y una misma velocidad.

Para contestar a esta pregunta consideremos en primer lugar que se tiene un conjunto de N cargas en un volumen pequeño tal que estas se muevan a la misma velocidad y

dirección. De esto se tiene que el elemento diferencial de fuerza resultante estará dado por;

$$dF_{mag} = Ndvq\vec{v} \times \vec{B} = Nq\vec{v} \times \vec{B} dv = \vec{J} \times \vec{B} dv$$

así integrando sobre el volumen se obtiene;

$$F_m = \int_v \vec{J} \times \vec{B} dv [N]$$

Por otro lado, como sabemos que $\vec{I} = \int_S \vec{J} ds$, o bien que $I \cdot dl = J \cdot dv$, entonces podemos escribir la expresión anterior tal que;

$$dF_{mag} = \vec{I} dl \times \vec{B}$$

luego;

$$F_m = \int_l \vec{I} dl \times \vec{B} [N]$$

Que es válida entonces para segmentos conductores de largo l . Asimismo se tendrá para lazos cerrados que;

$$F_m = \oint_c \vec{I} dl \times \vec{B} [N]$$

Ejemplo #56

Una línea de transmisión en corriente continua tiene un largo de **500 [km]** y lleva una corriente de **1000 [A]**.

- Asumiendo que la componente perpendicular del campo magnético terrestre es de 50 [μT]; calcular la fuerza magnética total ejercida sobre el conductor
- Considerando que la línea está compuesta por dos conductores, cada uno llevando corriente en sentidos opuestos, encontrar la dirección de la fuerza resultante.

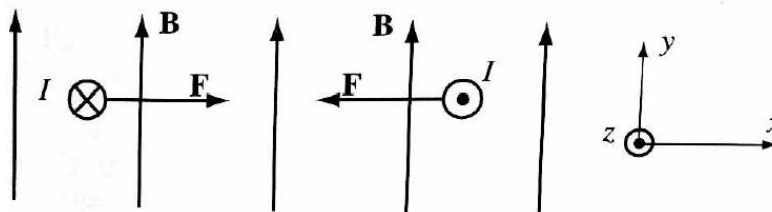


Figura 107 Fuerzas en una línea de transmisión aérea debidas al campo magnético terrestre

Solución

a) Como puede verse de la figura 107, corriente y densidad de flujo magnético son en este caso perpendiculares, luego la fuerza magnética actuando sobre el conductor será;

$$F_m = \int_l Idl(-\hat{z}) \times B \hat{y} = IB \int_l dl \hat{x} = IB l \hat{x} = 500.000 \cdot 1000 \cdot 50 \times 10^{-6} = 25.000 [N]$$

Si bien esta fuerza es de gran magnitud, hay que considerar que actúa sobre todo el largo de la línea. Si se considera la fuerza ejercida por cada metro de esta la magnitud de la fuerza es de solo 0.05 [N].

b) Utilizando la ley de Ampere se tiene que las densidades de flujo magnético producidas por la circulación de corriente en cada uno de los conductores en el sistema de referencia dado en la figura 107 y en la ubicación del segundo conductor es;

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_o I}{2\pi r} (-\hat{y}) [N]$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_o I}{2\pi r} (-\hat{y}) [N]$$

Entonces la fuerza magnética que ejerce el conductor 2 sobre el conductor 1 y viceversa son;

$$F_{12} = \int_l Idl(-\hat{z}) \times B (-\hat{y}) = -IB l \hat{x} = -\frac{\mu_o I^2}{2\pi r} l \hat{x} [N]$$

$$F_{21} = \int_l Idl(\hat{z}) \times B (-\hat{y}) = IB l \hat{x} = \frac{\mu_o I^2}{2\pi r} l \hat{x} [N]$$

5. Campos eléctrico y magnético variable en el tiempo

En los capítulos anteriores se trató los fenómenos eléctrico y magnético en forma separada, definiendo ambos campos en términos de su divergencia y rotacional. Este enfoque permitió trabajar en forma independiente ambos campos dado el supuesto de que estos son invariantes en el tiempo.

Ahora bien, ¿serán los postulados obtenidos para el campo eléctrico y magnético validos si es que estos son variables en el tiempo? La teoría necesaria para dar respuesta a esta pregunta será desarrollada en este capítulo; obteniéndose como resultado que ambos campos no pueden en general ser tratados en forma independiente puesto que estos están interrelacionados. Siendo de hecho un solo campo el que llamaremos en adelante campo electromagnético.

5.1 Ley de Faraday

La relación conocida como ley de Faraday corresponde a una expresión de corte experimental que resulto de las experiencias llevadas a cabo por Michael Faraday en 1831. Las observaciones realizadas por Faraday mostraron que al mover una espira cerrada en torno a un campo magnético producido por un imán permanente se generaba la circulación de corriente por la espira (figura 108). Esto ocurría independientemente de si la espira se mantenía estacionaria y se movía el imán o viceversa. Es así como Faraday concluyo que, dado que no existían fuentes en el sistema que pudieran producir la circulación de corriente, esta era debido a la inducción de una diferencia de potencial a lo largo de la espira, la que llamo fuerza electromotriz (o fem). La expresión derivada entonces para describir este fenómeno corresponde a la siguiente en que la variación en el tiempo del flujo magnético enlazado por la bobina produce una diferencia de potencial;

$$fem = -\frac{d\phi}{dt} [V]$$

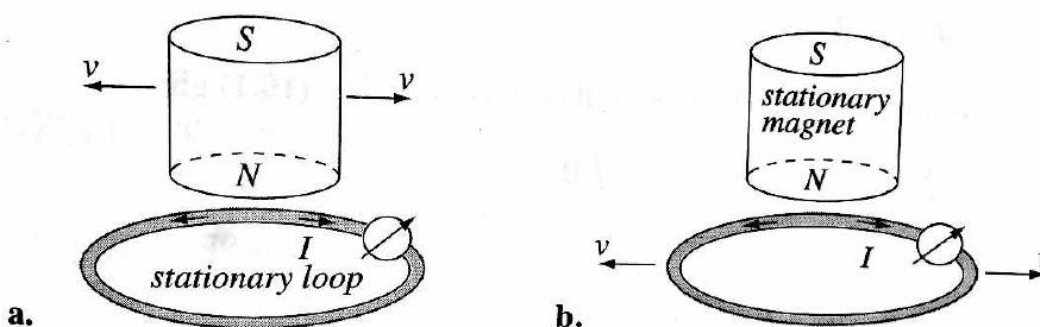


Figura 108 Ley de Faraday a. movimiento de un imán permanente en presencia de una espira estacionaria genera una fem y una corriente en ella b. movimiento de una espira en presencia de un imán estacionario genera una fem y una corriente en ella

Ahora, si en lugar de contar con una espira se tiene una bobina con múltiples vueltas, se tiene entonces que la magnitud de la fem inducida aumentara proporcionalmente de acuerdo con la cantidad de vueltas contenidas en la bobina. Luego la ley de Faraday en forma más general queda expresada como sigue;

$$fem = -N \frac{d\phi}{dt} [V]$$

donde N corresponde al número de vueltas en la bobina, y ϕ al flujo enlazado por ella.

Ahora, como sabemos que la diferencia de potencial en un lazo cerrado c está dada por;

$$fem = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} [V]$$

y como por otro lado el flujo que cruza una espira está definido de acuerdo con;

$$\phi = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s} [Wb]$$

Entonces substituyendo estas expresiones en la ley de Faraday se tiene;

$$fem = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s} [V]$$

Aplicando el teorema de Stokes para trasformar la integral de línea en una integral de superficie

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_s (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{s} = \int_s \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{s} [V]$$

luego;

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

La que corresponde a la forma puntual de la ley de Faraday; la que claramente muestra que existe una interdependencia entre variaciones en el campo magnético y el campo eléctrico.

5.2 Ley de Lenz

En la ecuación correspondiente a la ley de Faraday el signo negativo indica que, si el flujo magnético enlazado por la espira aumenta, la fuerza electromotriz inducida producirá una corriente cuyo flujo magnético resultante se opondrá al aumento del campo magnético. Para ver esto consideremos el sistema compuesto por dos espiras mostrado en la figura 109a.

Utilizando la regla de la mano derecha se puede ver que un aumento en la corriente circulando por la espira 1 producirá un aumento en el flujo magnético que cruza ambas espiras. Como resultado de esto, se inducirá una fem en la espira 2 de acuerdo con la ley de Faraday. Si la espira 2 está abierta no se tendrá circulación de corriente por ella, y por lo tanto esta no producirá un flujo (figura 109a). Ahora si se cierra la espira 2 la fem de polaridad negativa producirá una corriente en ella. Como puede verse de la figura 109b, dado el sentido de circulación de corriente impuesto por la polaridad de la fem el flujo magnético resultante estará en dirección opuesta a aquel producido por la espira 1.

Esta relación existente entre fem inducida y enlace de flujo magnético es definida por la ley de Lenz que establece que:

“la dirección de la fuerza electromotriz inducida es tal que el flujo generado por la corriente inducida se opone al cambio de flujo.”

Una consecuencia directa de la ley de Lenz es que el flujo enlazando un circuito tiende a mantener su valor (magnitud y dirección), resistiéndose a cualquier cambio.

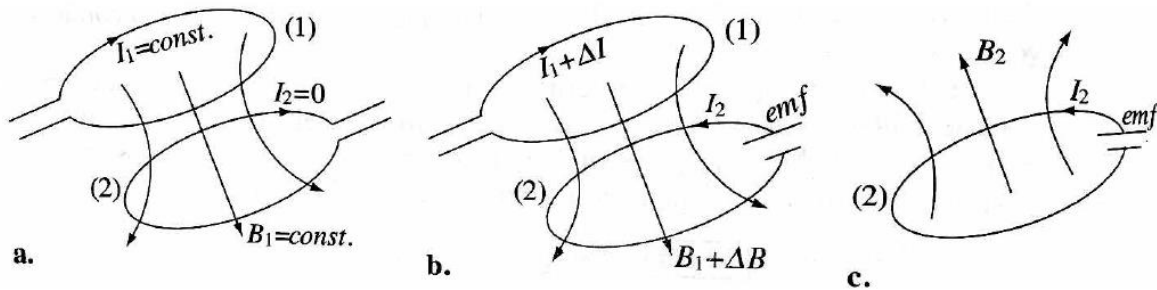


Figura 109 a. Flujo magnético generado por la circulación de una corriente constante en la espira 1 b. fem inducida en la espira 2 debido a un cambio en la corriente en la espira 1 c. flujo en la espira 2 debido a la fem inducida se opone al cambio en el flujo impuesto por la espira 1.

5.3 Fuerza electromotriz inducida por el movimiento

Como se vio anteriormente, la fuerza ejercida sobre una carga en movimiento a velocidad v dentro de un campo magnético está dada por:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} [N]$$

Ahora, como la intensidad de campo eléctrico se definió en su momento como fuerza por unidad de carga, entonces a partir de la expresión anterior puede encontrarse que;

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \vec{v} \times \vec{B} [V/m]$$

Luego a partir de la definición de potencial eléctrico se tendrá que a partir del movimiento de un elemento en un campo magnético se induce una diferencia de potencial, llamada fuerza electromotriz, la que puede ser calculada utilizando;

$$fem = \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_l (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} [V]$$

Ejemplo #57

Una barra conductora delgada se mueve a velocidad v en un campo magnético constante y uniforme. El largo de la barra es de $l=1$ [m] y su velocidad de $v = 20$ [m/seg]. Si la magnitud de la densidad de campo magnético es $B=0.5$ [T]; calcular la fuerza electromotriz inducida a lo largo de la barra bajo las siguientes condiciones:

- La barra se mueve en forma perpendicular al campo magnético
- La barra se mueve a 30° con respecto al eje x de la forma indicada en la figura

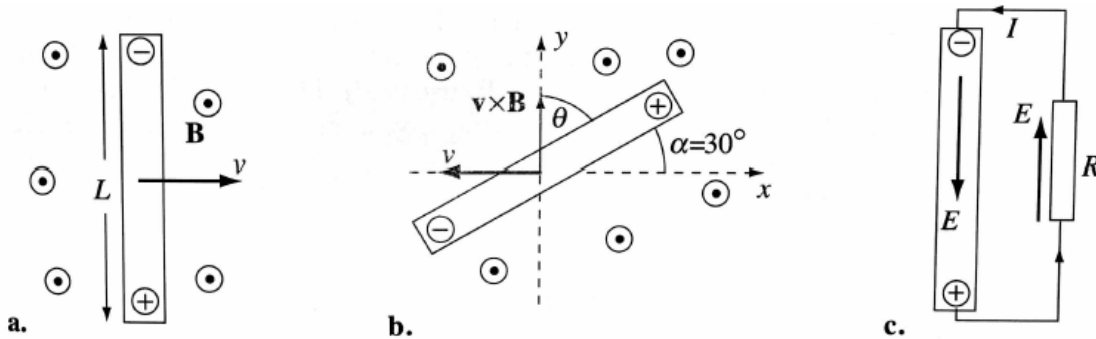


Figura 110 La fem generada en un elemento conductor a. el conductor se mueve en forma perpendicular con el campo magnético b. el conductor se mueve formando un ángulo con respecto al campo magnético c. circuito equivalente mostrando al sistema como un generador de corriente continua.

Solución

a) Considerando la figura 110a se tiene que la fem inducida a lo largo de la barra estará dada por:

$$\begin{aligned} fem &= \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_l (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} = \int_l (v \hat{x} \times B \hat{z}) \cdot d\vec{l} = \int_l -vB \hat{y} \cdot d\vec{l} = -vBl \\ &= 20 * 0.5 * 1 = -10 [V] \end{aligned}$$

La polaridad de esta fem se obtiene a partir del resultado del producto cruz entre v y B , el que indica que el extremo inferior de la barra corresponde al polo positivo.

b) Como la barra es delgada no se considera la componente de la fem en el sentido del ancho de esta. Por otro lado, la componente del campo eléctrico sobre el largo de la barra estará dada por:

$$E = E_o \sin \alpha = vB \sin \alpha \left[\frac{V}{m} \right]$$

así la fem es;

$$fem = \int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_l vB \sin \alpha \cdot dl = 20 * 0.5 * 1 * \sin(30) = 5 [V]$$

Ejemplo #58

Un generador de corriente continua puede ser construido de la forma mostrada en la figura 111. En esta estructura la barra, carga y rieles forman un circuito cerrado. Los dos rieles están separados por una distancia de $d=1.5 [m]$ y la carga tiene una resistencia de $R=10 [\Omega]$. Asumiendo que los rieles y la barra son conductores perfectos y que la barra se mueve hacia la derecha a velocidad constante $v = 10 [m/seg]$, que la densidad de flujo magnético es constante y dirigida hacia arriba con una intensidad de $B = 0.1 [T]$; calcular:

- La fuerza electromotriz producida por este generador
- La fuerza requerida para mover la barra a velocidad constante.
- La energía mecánica necesaria para mover al generador.

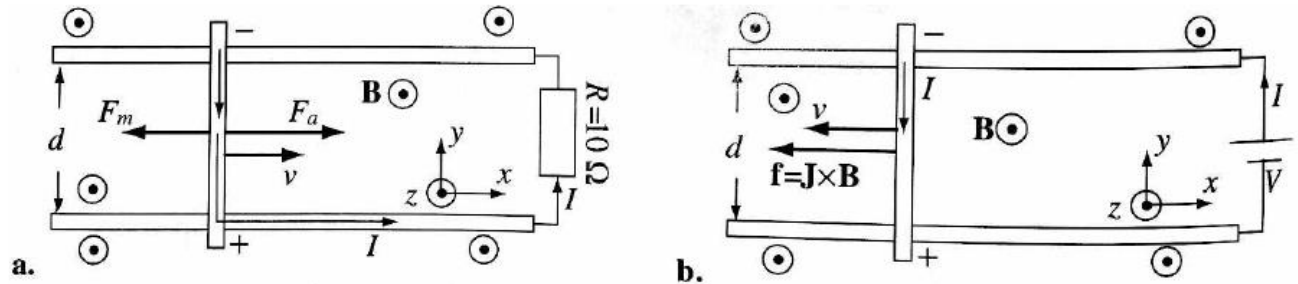


Figura 111 a. generador DC lineal b. motor DC lineal

Solución

a) Para calcular la fem es necesario primero calcular la razón de cambio de flujo por unidad de tiempo. Luego se obtiene;

$$dx = v dt$$

así la variación en el flujo enlazado por los rieles y la barra es

$$d\phi = B d \cdot dx = B d v \cdot dt$$

y de acuerdo con la ley de Faraday se tiene

$$fem = \frac{d\phi}{dt} = \frac{B d v dt}{dt} = B d v = 0.1 * 1.5 * 10 = 1.5 [V]$$

Por otro lado, la polaridad de la fem inducida podemos obtenerla a partir del producto cruz de \vec{v} y \vec{B} siendo $\vec{v} \times \vec{B} = v \hat{x} \times B \hat{z} = vB - \hat{y}$; esto es el polo positivo está en la parte inferior de la barra.

b) La circulación de una corriente a través de la resistencia debido a la fem inducida dará origen a una fuerza magnética, la que de acuerdo con la ley de Lenz se opondrá al cambio de flujo.

$$F_m = \int_0^d \vec{I} dl \times \vec{B} = I \int_0^d -\hat{y} dl \times \hat{z} B = -\hat{x} IBd [N]$$

Reemplazando con la expresión de fem obtenida se tiene entonces que

$$F_m = -\hat{x} \frac{fem}{R} Bd = -\hat{x} \frac{B v d}{R} Bd = -\hat{x} \frac{B^2 v d^2}{R} = -\hat{x} \frac{(0.1)^2 * 10 * (1.5)^2}{10} = 0.0225 -\hat{x} [N]$$

Entonces para que la barra se mueva a velocidad constante se requiere aplicar una fuerza de 0.0225 [N] en sentido del eje \hat{x} , tal que se contrarreste la fuerza resistente.

c) La potencia mecánica necesaria para desplazar la barra a velocidad constante está dada por

$$P_{mec} = F_m * v = \frac{B^2 v d^2}{R} * v = \frac{B^2 v^2 d^2}{R} = \frac{(0.1)^2 * (10)^2 * (1.5)^2}{10} = 0.225 [W]$$

Ejemplo #59

Un motor lineal puede ser construido reemplazando la resistencia del ejemplo anterior por una fuente de voltaje (figura 112b), de polaridad tal que la dirección de la corriente se mantenga. Considerando las dimensiones del ejemplo anterior y que la fuente de voltaje utilizada tiene una magnitud de **12 [V]**, y que la barra tiene una resistencia de **R = 1 [Ω]** y que la magnitud de la densidad de flujo magnético se mantiene en **0.1 [T]**:

- Calcular la fuerza ejercida sobre la barra si esta se mantiene estacionaria
- Si la barra es libre de moverse, encontrar la máxima velocidad que esta alcanzaría.
- Encontrar la ecuación de movimiento de la barra si esta tiene una masa de **m [kg]**

Solución

a) Si la barra esta estacionaria, la corriente que circula por el sistema estará dada por;

$$I = \frac{V}{R} = \frac{12}{1} = 12 [A]$$

la que estará en sentido de $-\hat{y}$ a lo largo de la barra.

Entonces la fuerza magnética actuando sobre la barra será;

$$\vec{F}_m = \int_0^d \vec{I} dl \times \vec{B} = I \int_0^d -\hat{y} dl \times \hat{z} B = -\hat{x} IBd = -\hat{x} 12 * 0.1 * 1.5 = -1.8 \hat{x} [N]$$

b) Si se permite que la barra se desplace por sobre los rieles libremente, dada la fuerza calculada en el punto anterior se tiene que el movimiento será en el sentido de $-\hat{x}$. Ahora

producto del movimiento de la barra se inducirá sobre ella una fuerza electromotriz tal que;

$$f_{em} = -\frac{d\phi}{dt}$$

Donde el cambio de flujo estará dado por $d\phi = B \, d \, v \, dt$, así

$$f_{em} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{B \, d \, v \, dt}{dt} = -B \, d \, v \, [V]$$

Entonces aplicando la ley de Kirchhoff sobre el lazo cerrado formado por la fuente, rieles y barra se obtiene;

$$V - f_{em} - IR = 0 \rightarrow I = \frac{V - f_{em}}{R} = \frac{V - B \, d \, v}{R} \, [A]$$

y la fuerza magnética resultante entonces es;

$$|\vec{F}_m| = IBd = \frac{V - B \, d \, v}{R} B d = \frac{(V - B \, d \, v) B d}{R} \, [N]$$

De aquí podemos ver que esta fuerza es máxima cuando $v=0$ (barra detenida) y que llega a un mínimo en el momento en que $Bdv=V$. Como el sistema no tiene fricción entre sus partes, cuando la fuerza magnética se hace cero la barra continuara moviéndose a velocidad constante. La velocidad máxima de la barra estará dada entonces por;

$$v = \frac{V}{Bd} = \frac{12}{0.1 * 1.5} = 80 \left[\frac{m}{seg} \right]$$

c) Del balance de fuerzas se tiene que

$$ma = F_m \rightarrow m \frac{dv}{dt} = \frac{(V - B \, d \, v) B d}{R}$$

5.4 Fuerza electromotriz por efecto transformador

Al describir la ley de Faraday se mencionó que la fem producida por un flujo variable en el tiempo es conocida como efecto transformador. La razón para esto es para poder distinguirla de la fem inducida por el movimiento de conductores en un campo magnético, y su nombre viene ya que es el efecto detrás del funcionamiento de los transformadores.

Ejemplo #60

Un campo magnético uniforme es generado por una fuente que varía en función del tiempo, tal que su densidad de flujo está dada por $B(t) = B_0 \sin(\omega t) [T]$, donde $B_0 = 0.1 [T]$ y $\omega = 100\pi$. Si un anillo rectangular de lados $a=0.1 [m]$ y $b=0.1 [m]$ es colocado de forma que su plano sea perpendicular a la densidad de flujo magnético B :

a) Calcular la fem inducida en el anillo

b) Cual es la fem inducida en el anillo si este está compuesto por $N = 100$ vueltas de alambre.

Solución

a) La fem estará dada por

$$fem = -\frac{d\phi}{dt}$$

donde el flujo es

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B * S = B_o S \sin(\omega t) [Wb]$$

y entonces;

$$\begin{aligned} fem &= -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(B_o S \sin(\omega t)) = -B_o S \omega \cos(\omega t) = -B_o a b \omega \cos(\omega t) \\ &= -0.1 * 0.1 * 0.1 * 100\pi \cos(100\pi t) = -0.314 \cos(100\pi t) [V] \end{aligned}$$

b) Considerando que el anillo está compuesto por 100 vueltas de alambre entonces;

$$\begin{aligned} fem &= -N \frac{d\phi}{dt} = -N \frac{d}{dt}(B_o S \sin(\omega t)) = -N B_o a b \omega \cos(\omega t) \\ &= -100 * 0.1 * 0.1 * 0.1 * 100\pi \cos(100\pi t) = -31.4 \cos(100\pi t) [V] \end{aligned}$$

5.5 Fuerza electromotriz combinada

Si bien se separó la fuerza electromotriz inducida en dos efectos separados, debida al movimiento y por efecto transformador, en la práctica se trata de un solo efecto que se manifiesta de estas dos formas. En ambos casos la fem inducida es debida a la ley de Faraday y por tanto producida por la variación de la densidad de flujo magnético en el tiempo.

Debido a lo anterior, la expresión de fuerza electromotriz puede ser escrita en una forma más general de la siguiente forma.

$$fem = \oint_c (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\mathbf{l} - N \frac{d\phi}{dt} [V]$$

O equivalentemente en una forma más consistente;

$$fem = \oint_c (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\mathbf{l} - N \int_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\mathbf{S} [V]$$

Ejemplo #61

Un generador de corriente alterna es construido colocando una espira de radio $d = 50$ [mm] dentro de un solenoide largo de radio $b = 60$ [mm]. El número de vueltas por unidad de longitud del solenoide es de $n = 1000$ [vueltas/m] y cada vuelta en él lleva una corriente de 1 [A]. Considerando que la espira es conectada al exterior del solenoide y provista de un eje para que esta pueda girar en su interior:

- Si la espira gira a **3000 r.p.m.**; calcular la fem inducida en la espira
- Si la espira está hecha de alambre de cobre de un diámetro de **1 [mm]**; calcular la máxima corriente que este generador puede suministrar.

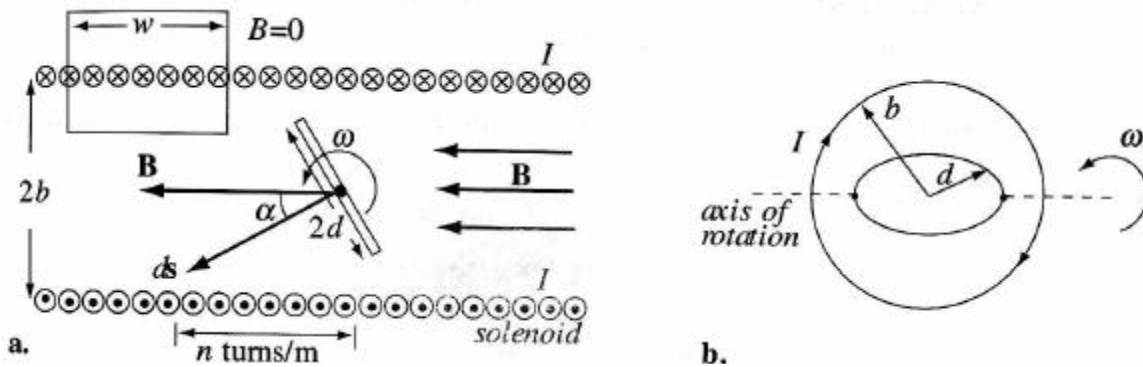


Figura 112 Generador AC a. vista longitudinal b. vista radial

Solución

- Aplicando la ley de Ampere al contorno cerrado indicado en la figura 113a se tiene;

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o \int n \vec{I} \cdot d\vec{l} \rightarrow |\vec{B}|l = \mu_o n |\vec{I}|l \rightarrow |\vec{B}| = \mu_o n |\vec{I}| = 4\pi * 10^{-7} * 1000 * 1$$

$$= 4\pi * 10^{-4} \text{ [T]}$$

Entonces el flujo que pasa por la espira es;

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = |\vec{B}| \cos(\alpha) * S \text{ [Wb]}$$

Asumiendo que en $t = 0$ $\alpha = 0$; tenemos entonces que $\alpha = \omega t$, luego:

$$\phi = |\vec{B}| \cos(\omega t) * S \text{ [Wb]}$$

y de aquí se obtiene a partir de la ley de Faraday

$$fem = -N \frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} (|\vec{B}| \cos(\omega t) * S) = |\vec{B}| S \omega \sin(\omega t) \text{ [V]}$$

reemplazando los datos el enunciado se obtiene

$$fem = 4 \times 10^{-6} \pi * \left(\pi \left(\frac{50 \times 10^{-2}}{2} \right)^2 \right) * \left(\frac{2\pi * 3000}{60} \right) \text{sen} \left(\left(\frac{2\pi * 3000}{60} \right) * t \right)$$

$$= 3.1 \times 10^{-3} \text{sen}(314.16t) [V]$$

b) Para calcular la máxima corriente que puede suministrar este generador es necesario conocer primero cuál es su resistencia interna, es decir la resistencia que presenta la espira a la circulación de corriente. Como sabemos la resistencia de un conductor de sección recta es;

$$R = \frac{l}{\sigma S} = \frac{2\pi r_{\text{espira}}}{\sigma \pi r_c^2} = \frac{2r_{\text{espira}}}{\sigma r_c^2} = \frac{50 \times 10^{-3}}{5.7 \times 10^7 (0.5 \times 10^{-3})^2} = 7 \times 10^{-3} [\Omega]$$

Luego la máxima corriente que se podrá suministrar ocurre al cortocircuitar los terminales de la espira, con lo que su valor estará dado por:

$$I = \frac{fem}{R} = \frac{3.1 \times 10^{-3}}{7 \times 10^{-3}} = 0.443 [A]$$

5.6 Corrientes Eddy

En general se asume que la fuerza electromotriz será inducida a lo largo de una espira o loop, o en cualquier alambre conductor independiente de su geometría. Por otro lado, si el loop forma un circuito cerrado, la fem inducida dará origen a la circulación de una corriente.

Sin embargo, la forma en que está escrita la ley de Faraday no requiere que exista una espira para que se induzca una fuerza electromotriz; es decir la inducción de un flujo y por tanto de una fem, se producirá aun cuando el loop no sea obvio.

Para ilustrar esta última idea consideremos una densidad de flujo magnético uniforme y variable en el tiempo. Si se coloca un disco hecho de material conductor en el espacio cubierto por la densidad de flujo magnético, se tendrá la situación mostrada en la figura 113b.

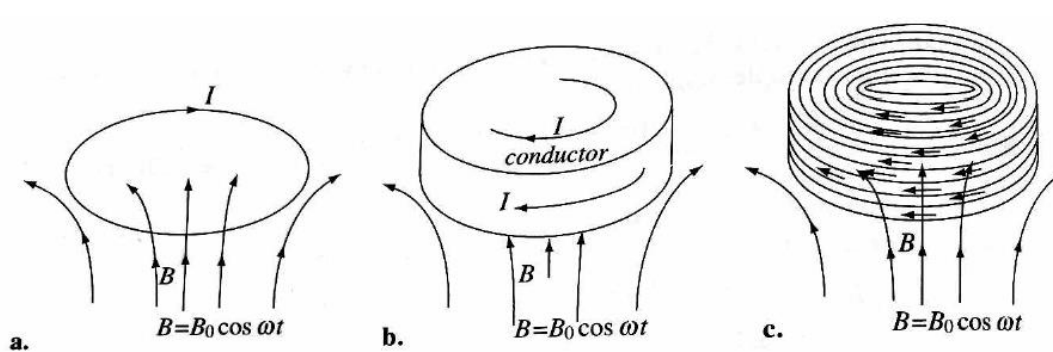


Figura 113 a. Una densidad de flujo magnético variable en el tiempo produce la inducción de una corriente en un loop cerrado b. al colocar un volumen conductor esta densidad de flujo induce una corriente circulante c. este efecto puede ser visto como si el volumen estuviera compuesto de una infinidad de loops de alambres delgados, dentro de cada cual se induce una corriente.

Si bien no se tiene un loop per se, se puede ver la situación como un conjunto de múltiples loops cortocircuitados. En cada uno de los loops se inducirá a su vez una fem, la cual dará origen a la circulación de una corriente. Las corrientes resultantes se conocen como corrientes Eddy o de Foucault.

Ejemplo #62

Un disco circular de radio $r = 100 \text{ [mm]}$ y espesor $c = 1 \text{ [mm]}$ es colocado en un campo magnético uniforme variable en el tiempo dado por $|\vec{B}| = B_o \text{ sen } (\omega t) [T]$, el cual está orientado de forma perpendicular al disco. Si la conductividad del disco es $\sigma = 10^7 \text{ [S/m]}$ y la frecuencia del campo de 50 [Hz] , y la amplitud de la densidad de flujo de $B_o = 0.2 \text{ [T]}$;

- Calcular la potencia disipada en el disco debido a la circulación de corrientes Eddy en su interior. Para esto asumir que las circulaciones de estas corrientes no afectan el campo magnético externo.
- ¿Cómo serán las pérdidas debido a la circulación de las corrientes Eddy si la frecuencia del campo aumenta a 100 [Hz] ?

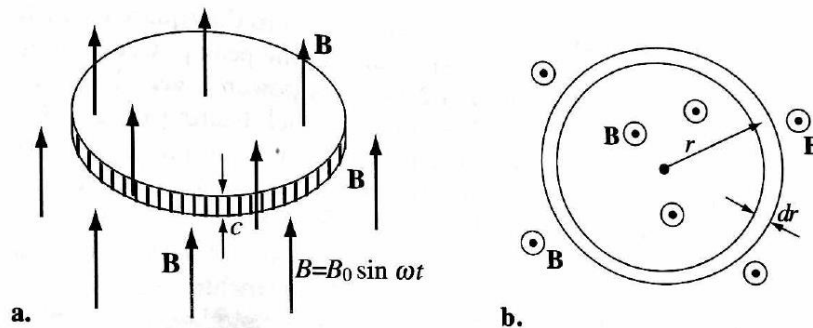


Figura 114 a. Corrientes inducidas en un disco debido a una densidad de flujo variable en el tiempo
b. anillo de radio diferencial para el cálculo de la corriente inducida

Solución

a) De la figura se tiene que el flujo que cruza el disco es;

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = |\vec{B}| \pi r^2 = \pi r^2 B_o \text{ sen } (\omega t) [Wb]$$

Luego aplicando la ley de Faraday se tiene;

$$fem = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt} (\pi r^2 B_o \text{ sen } (\omega t)) = \pi r^2 B_o \omega \cos(\omega t) [V]$$

Ahora, para calcular la potencia disipada en el disco por acción de la corriente que se inducirá en él es necesario calcular su resistencia. Como la resistencia depende del

largo del conductor, y el disco puede ser construido a partir de múltiples anillos de radio infinitesimal se tiene entonces que;

$$R = \frac{l}{\sigma S} = \frac{2\pi r}{\sigma c dr} [\Omega]$$

Con esto es posible entonces calcular la potencia instantánea disipada en un anillo de dimensiones infinitesimales mediante;

$$\begin{aligned} dP(t) &= \frac{V^2}{R} = \frac{fem^2}{R} = \frac{(\pi r^2 B_o \omega \cos(\omega t))^2}{\frac{2\pi r}{\sigma c dr}} = \frac{\pi^2 r^4 B_o^2 \omega^2 \cos^2(\omega t) \sigma c dr}{2\pi r} \\ &= \frac{\pi r^3 B_o^2 \omega^2 \cos^2(\omega t) \sigma c dr}{2} [W] \end{aligned}$$

De esta expresión se obtiene la potencia instantánea al integrar sobre todo el disco;

$$\begin{aligned} P(t) &= \int_0^r dP(t) = \int_0^r \frac{\pi r^3 B_o^2 \omega^2 \cos^2(\omega t) \sigma c dr}{2} = \frac{\pi r^4 B_o^2 \omega^2 \cos^2(\omega t) \sigma c}{8} \\ &= \frac{\pi (0.1)^4 (0.2)^2 (2\pi * 50)^2 \cos^2(2\pi * 50t) 10^7 10^{-3}}{8} = 1550.3 \cos^2(100\pi t) [W] \end{aligned}$$

b) Considerando ahora que la frecuencia es de 100 [Hz], se tiene reemplazando que la potencia es;

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{\pi r^4 B_o^2 \omega^2 \cos^2(\omega t) \sigma c}{8} = \frac{\pi (0.1)^4 (0.2)^2 (2\pi * 100)^2 \cos^2(2\pi * 100t) 10^7 10^{-3}}{8} \\ &= 6201.2 \cos^2(200\pi t) [W] \end{aligned}$$

O bien se obtiene que la potencia disipada en el disco es cuatro veces mayor que cuando la frecuencia del campo era 50 [Hz].

5.7 Generador de corriente alterna

Como se vio en un ejemplo anterior, a partir de la aplicación de la ley de Faraday es posible la construcción de un generador de corriente alterna utilizando un solenoide y una espira. Ahora bien, esa no es la única configuración que permite la construcción de un generador. Por ejemplo, consideremos el caso mostrado en la figura 115, donde una espira gira a velocidad constante en un campo magnético uniforme. Como puede verse de 103b al girar la espira en torno a su eje, la superficie generada en su interior formara un ángulo α con respecto a la densidad de flujo magnético, el cual varía a medida que la espira cambia de posición.

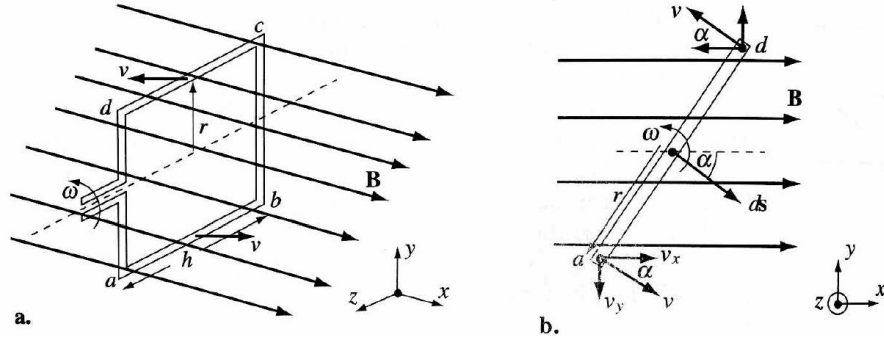


Figura 115 Generador de corriente alterna a. una espira girando a velocidad constante en una densidad de campo magnético constante b. ángulo formado entre la densidad de campo magnético y la superficie generada por la espira.

En la situación vista en la figura se tiene que como el campo magnético es constante en el tiempo, la fem inducida no tendrá una componente debida a un cambio de flujo en el tiempo. Por otro lado, se observa que si habrá una inducción debido al movimiento de la espira dentro del campo. El valor de la fem inducida por este medio se obtiene tomando en cuenta la contribución de cada uno de los cuatro segmentos que componen la espira, esto es;

$$fem = fem_{ab} + fem_{bc} + fem_{cd} + fem_{da} [V]$$

Ahora bien, de la figura puede observarse que el elemento de largo diferencial dl y el resultado del producto cruz de $\vec{v} \times \vec{B}$ son siempre perpendiculares en los lados bc y da de la espira, y por lo tanto la fem resultante en dichas secciones será cero.

Por otro lado, la velocidad a la que se mueven los segmentos restantes es

$$\vec{v}_{ab} = r\omega(\hat{x} \cos(\alpha) - \hat{y} \sin(\alpha)) [m/s]$$

$$\vec{v}_{cd} = r\omega(-\hat{x} \cos(\alpha) + \hat{y} \sin(\alpha)) [m/s]$$

así el producto cruz $\vec{v} \times \vec{B}$ en cada caso es;

$$\vec{v}_{ab} \times \vec{B} = r\omega(\hat{x} \cos(\alpha) - \hat{y} \sin(\alpha)) \times B \hat{x} = \hat{z} Br\omega \sin(\alpha)$$

$$\vec{v}_{cd} \times \vec{B} = r\omega(-\hat{x} \cos(\alpha) + \hat{y} \sin(\alpha)) \times B \hat{x} = -\hat{z} Br\omega \sin(\alpha)$$

e integrando considerando los diferenciales de largo correspondientes se obtiene;

$$fem_{ab} = \int_0^b \hat{z} Br\omega \sin(\alpha) \cdot dl \hat{z} = Br\omega b \sin(\alpha) [V]$$

$$fem_{cd} = \int_b^0 -\hat{z} Br\omega \sin(\alpha) \cdot dl - \hat{z} = Br\omega b \sin(\alpha) [V]$$

y entonces la fem total inducida en la espira es

$$fem = fem_{ab} + fem_{cd} = Br\omega b \sin(\alpha) + Br\omega b \sin(\alpha) = 2Br\omega b \sin(\alpha) = BS\omega \sin(\alpha) [V]$$

y como $\alpha = \omega t$, entonces:

$$fem = BS\omega \sin(\omega t) [V]$$

Ahora un caso más general puede producirse si es que se tiene la misma estructura con la espira girando, pero además el campo es variable en el tiempo como se muestra en la figura 116. A diferencia del caso anterior, en esta situación la fem inducida en la espira se deberá tanto a la variación del flujo en el tiempo como al movimiento.

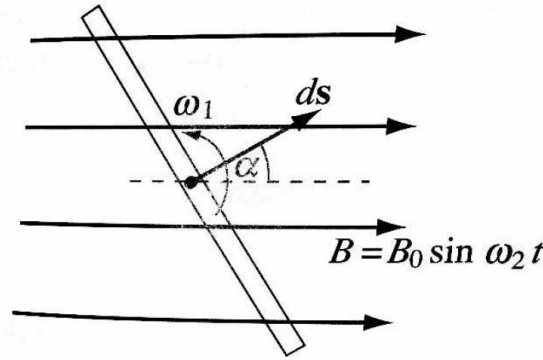


Figura 116 Espira rotando en un campo magnético variable en el tiempo

Por lo tanto, se puede escribir la siguiente expresión para la fem inducida entre los terminales de la espira.

$$fem = fem_{transformador} + fem_{movimiento} = -N \frac{d\phi}{dt} + \oint (\hat{v} \times \hat{B}) \cdot d\mathbf{l} [V]$$

donde la fem debida al cambio del flujo en el tiempo está dada por;

$$\begin{aligned} fem_{transformador} &= -N \frac{d}{dt} \left(\int \vec{B} \cdot d\mathbf{S} \right) = -NS \cos(\alpha) \frac{d\vec{B}}{dt} = -NS \cos(\alpha) \frac{d}{dt} (B_0 \sin(\omega_2 t)) \\ &= -NSB_0 \omega_2 \cos(\alpha) \cos(\omega_2 t) [V] \end{aligned}$$

donde $S=ab$ y N el número de vueltas en la espira.

Por otro lado, la ecuación que describe la fem inducida por el movimiento concuerda con la encontrada anteriormente y es en este caso;

$$fem_{movimiento} = B_0 \sin(\omega_2 t) S \omega \sin(\omega t) [V]$$

Luego, la fem total inducida en la espira será,

$$\begin{aligned} fem &= fem_{transformador} + fem_{movimiento} \\ &= -NSB_0\omega_2 \cos(\alpha) \cos(\omega_2 t) + B_0 \sin(\omega_2 t) S \omega \sin(\omega t) [V] \end{aligned}$$

Ejemplo #63

Un generador de corriente alterna (AC) tiene la forma y dimensiones indicadas en la figura 117. Considerando que la bobina tiene $N = 500$ vueltas y es suministrada con una corriente sinusoidal de $60 [A]$ y $60 [Hz]$, y asumiendo que la densidad de flujo magnético es uniforme y perpendicular a la superficie en el entrehierro, y que la curva de histéresis del hierro usado es lineal:

a) Calcular la fem inducida en la espira

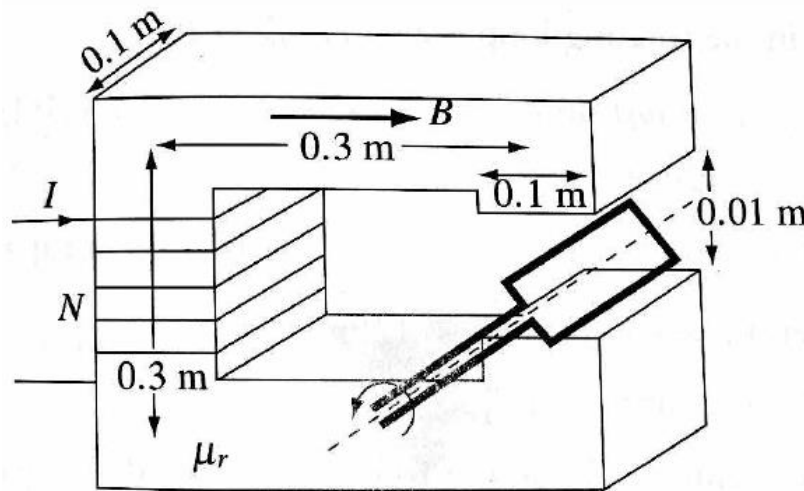


Figura 117 Un generador AC simple

Solución

En este caso tenemos que se establece un flujo magnético en el circuito ferromagnético de la figura por acción de la corriente que circula en la bobina. Usando un equivalente eléctrico simple para el circuito ferromagnético se puede encontrar que el flujo resultante es;

$$\phi = \frac{NI}{\mathcal{R}_{fe} + \mathcal{R}_g} [Wb]$$

luego, a partir de esto puede determinarse la densidad de flujo magnético en el entrehierro, la que resulta ser de;

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = |\vec{B}|S \rightarrow |\vec{B}| = \frac{\phi}{S} = \frac{NI}{S(\mathcal{R}_{fe} + \mathcal{R}_g)} [T]$$

Como la reluctancia está definida por $\mathcal{R} = \frac{l}{\mu S}$, entonces la densidad de flujo es;

$$|\vec{B}| = \frac{NI}{S \left(\frac{l_{fe}}{\mu_{fe} S} + \frac{l_g}{\mu_o S} \right)} = \frac{NI}{\left(\frac{l_{fe}}{\mu_{fe}} + \frac{l_g}{\mu_o} \right)} = \frac{\mu_r \mu_o NI}{\mu_o l_{fe} + \mu_r l_g} = \frac{100 * 4\pi * 10^{-7} * 10 \text{sen}(120\pi t)}{1.19 * 4\pi * 10^{-7} + 1000 * 10 * 10^{-3}}$$

$$= 0.5615 \text{sen}(120\pi t) [T]$$

Ahora aplicando el resultado obtenido en el punto anterior se tiene que la fem inducida en la espira será de;

$$fem = -NSB_o \omega_2 \cos(\alpha) \cos(\omega_2 t) + B_o \text{sen}(\omega_2 t) S \omega \text{sen}(\omega t)$$

$$= -1 * 2\pi * 60 * 0.01 * 0.01 * 0.5615 \cos(120\pi t) \cos\left(2\pi * \frac{3600}{60} t\right) + 120\pi$$

$$* 0.01 * 0.01 * 0.5615 \text{sen}^2(120\pi t) = -0.0212(\cos^2(120\pi t) - \text{sen}^2(120\pi t))$$

$$= -0.0212 \cos(240\pi t) [V]$$

5.8 Transformador Ideal

El transformador es un equipo diseñado para convertir niveles de voltaje y corriente (y por lo tanto impedancia). En esencia es un dispositivo que opera en corriente alterno puesto que su principio de funcionamiento se basa en el cambio en el flujo en el tiempo, esto es a partir de la ley de Faraday.

El transformador consiste en dos o más bobinas enrolladas sobre un núcleo ferromagnético, resultando en un circuito magnético (figura 118).

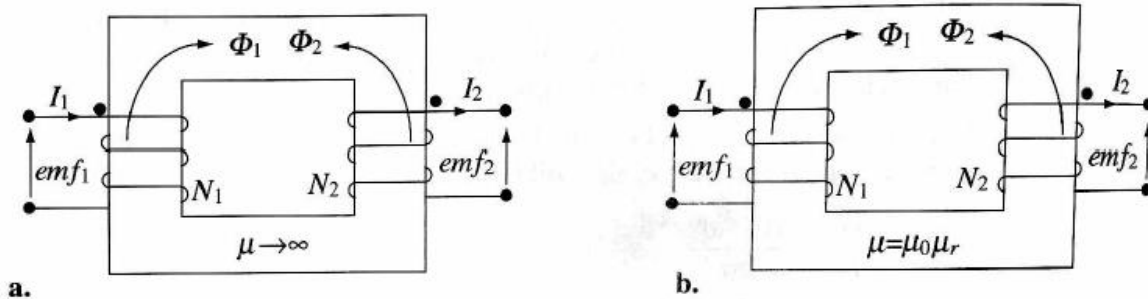


Figura 118 Transformador a. el transformador ideal consiste en un núcleo de permeabilidad infinita b. en un transformador real el núcleo tiene una permeabilidad alta pero no infinita.

La estructura mostrada en la figura 118 puede ser transformada en el circuito magnético de la figura 119, donde el valor de la reluctancia será función de la permeabilidad del material utilizado.

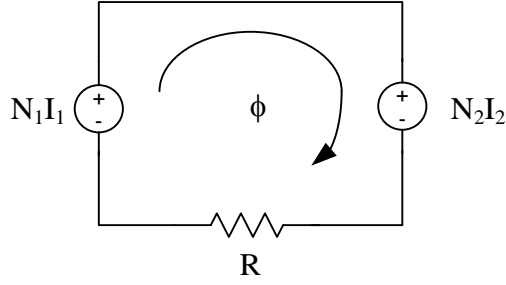


Figura 119 Circuito equivalente para la estructura magnética del transformador.

A partir del circuito equivalente se puede calcular que el flujo dentro del núcleo del transformador es;

$$\phi = \frac{N_1 I_1 - N_2 I_2}{R} \rightarrow \phi R = N_1 I_1 - N_2 I_2$$

Ahora si se considera que el transformador es ideal, es decir la permeabilidad del material es infinita se tiene que la reluctancia resultante será cero, luego;

$$0 = N_1 I_1 - N_2 I_2 \rightarrow N_1 I_1 = N_2 I_2$$

De donde se obtiene que

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{I_2}{I_1} = a$$

Donde a se conoce como la razón de transformación del transformador.

Por otro lado, a partir del flujo se tiene;

$$V_1 = fem_1 = -N_1 \frac{d\phi}{dt}$$

$$V_2 = fem_2 = -N_2 \frac{d\phi}{dt}$$

así la relación entre la tensión de los dos bobinados es;

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{fem_1}{fem_2} = \frac{-N_1 \frac{d\phi}{dt}}{-N_2 \frac{d\phi}{dt}} = \frac{N_1}{N_2} = a$$

En cuanto a la relación entre las impedancias a ambos lados del transformador se tiene;

$$Z_1 = \frac{V_1}{I_1} \quad \text{y} \quad Z_2 = \frac{V_2}{I_2}$$

reemplazando se obtiene

$$Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = \frac{aV_2}{\frac{I_2}{a}} = \frac{a^2 V_2}{I_2} = a^2 Z_2 \quad [\Omega]$$

Ahora bien, si el transformador no se considera como ideal, es decir la reluctancia del circuito magnético resulta ser distinta de cero, se tendrá;

$$\phi = \frac{N_1 I_1 - N_2 I_2}{R} = \frac{N_1 I_1 - N_2 I_2}{\frac{l}{\mu S}} = \frac{\mu S (N_1 I_1 - N_2 I_2)}{l} \quad [Wb]$$

Entonces al aplicar la ley de Faraday se obtiene;

$$V_1 = -N_1 \frac{d\phi}{dt} = -N_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu S (N_1 I_1 - N_2 I_2)}{l} \right) = -\frac{\mu S}{l} N_1^2 \frac{dI_1}{dt} + \frac{\mu S}{l} N_1 N_2 \frac{dI_2}{dt} \quad [V]$$

$$V_2 = -N_2 \frac{d\phi}{dt} = -N_2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu S (N_1 I_1 - N_2 I_2)}{l} \right) = -\frac{\mu S}{l} N_1 N_2 \frac{dI_1}{dt} + \frac{\mu S}{l} N_2^2 \frac{dI_2}{dt} \quad [V]$$

Estas últimas expresiones pueden ser modificadas utilizando el concepto de inductancia propia y mutua, talque;

$$L_{11} = \frac{\mu S}{l} N_1^2 \quad [H] \quad ; \quad L_{12} = \frac{\mu S}{l} N_1 N_2 \quad [H] \quad ; \quad L_{22} = \frac{\mu S}{l} N_2^2 \quad [H]$$

así;

$$V_1 = L_{11} \frac{dI_1}{dt} - L_{12} \frac{dI_2}{dt} \quad [V]$$

$$V_2 = L_{12} \frac{dI_1}{dt} - L_{22} \frac{dI_2}{dt} \quad [V]$$

6. Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell son un set de expresiones matemáticas que permiten describir completamente el campo electromagnético. Si bien gran parte de las ecuaciones ya son conocidas con otros nombres tales como ley de Gauss, Ampere o Faraday; la gran diferencia presente en el set desarrollado por Maxwell radica en la aparición de las corrientes de desplazamiento.

El origen de las ecuaciones de Maxwell viene de preguntarse si las ecuaciones con las que se contaba en su momento son consistentes, y si estas son aplicables en general. Antes de Maxwell el campo electromagnético estaba definido por las leyes de Faraday, Ampere Gauss y la inexistencia de monopolos que se indican a continuación;

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Para probar la consistencia y generalidad de este set de ecuaciones, se puede tomar la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{d\rho_v}{dt} \rightarrow \nabla \cdot \vec{J} + \frac{d\rho_v}{dt} = 0$$

Ahora si tomamos la segunda ecuación del set indicado anteriormente (ley de Ampere) y calculamos su divergencia se obtiene;

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \vec{J}$$

Sin embargo, para cualquier campo vectorial se tiene que la divergencia de su rotacional es cero, esto es se debe cumplir que $\nabla \cdot \vec{J} = 0$. Como podemos ver esto entra en conflicto con la ecuación de continuidad, y para que la relación se sostenga es necesario agregar el termino $\frac{d\rho_v}{dt}$. Si se hace esto se obtiene;

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \vec{J} + \frac{d\rho_v}{dt}$$

pero como sabemos de la ley de Gauss se tiene que $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$, así reemplazando

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \vec{J} + \frac{d}{dt}(\nabla \cdot \vec{D}) \rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \nabla \cdot \vec{J} + \nabla \cdot \left(\frac{d\vec{D}}{dt} \right)$$

o lo que es lo mismo

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt}$$

Lo que resulta entonces que para que la ley de Ampere sea válida en general es necesario agregar un término, el que es conocido como corriente de desplazamiento. Maxwell noto esta deficiencia y modifico el set de ecuaciones existentes hasta ese momento, por ello el set de ecuaciones se conoce como ecuaciones de Maxwell y permiten entonces describir completamente el campo electromagnético.

6.1 Ecuaciones de Maxwell en forma puntual

Como se vio en el punto anterior la contribución de Maxwell al electromagnetismo es notar que en las ecuaciones existentes hasta el momento requerían de una modificación para que estas fueran validas en general. Es así como agrego el término correspondiente a la corriente de desplazamiento a la ley de Ampere. Este cambio que si bien puede parecer pequeño tiene amplias implicancias para la teoría electromagnética, dentro de las cuales se puede destacar:

1. Existe una interdependencia entre los campos eléctrico y magnético.
2. Da origen a la existencia de las ondas electromagnéticas
3. A partir de las ecuaciones resultantes se tiene que la velocidad de propagación de estas ondas es finita.
4. La propagación de las ondas electromagnéticas en el espacio libre es a la velocidad de la luz, y la luz en si es una onda electromagnética.

El set de ecuaciones resultantes a partir de la contribución de Maxwell queda definido entonces como sigue en forma puntual.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Ejemplo #64

Considerar el circuito mostrado en la figura 120 en que se tiene un condensador de placas paralelas conectado a una fuente sinusoidal; calcular la corriente de desplazamiento en el condensador.

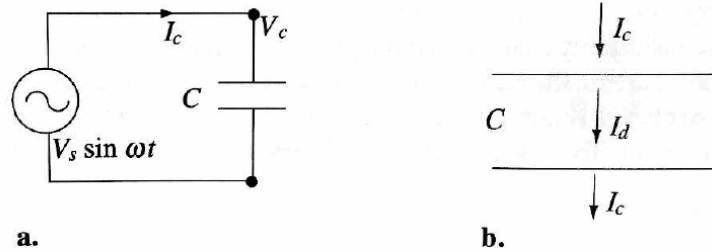


Figura 120 Corriente de desplazamiento en un condensador a. circuito formado por una fuente de voltaje y un condensador b. relación entre corriente de conducción y desplazamiento

Solución

Se tiene que la intensidad de campo eléctrico en un condensador de placas paralelas es de

$$|\vec{E}| = \frac{V}{d} = \frac{V_o \sin(\omega t)}{d} \left[\frac{V}{m} \right]$$

de esto se obtiene que la densidad de flujo eléctrico es;

$$|\vec{D}| = \epsilon |\vec{E}| = \frac{\epsilon V_o \sin(\omega t)}{d}$$

luego la densidad de corriente de desplazamiento resultante es;

$$|\vec{J}|_{desp} = \frac{d|\vec{D}|}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\epsilon V_o \sin(\omega t)}{d} \right) = \frac{\epsilon}{d} V_o \omega \cos(\omega t) \left[\frac{A}{m^2} \right]$$

integrando para obtener la corriente se tiene;

$$I_{desp} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_S \frac{\epsilon}{d} V_o \omega \cos(\omega t) dS = \frac{\epsilon}{d} V_o \omega \cos(\omega t) \int_S dS = \frac{\epsilon}{d} V_o S \omega \cos(\omega t) [A]$$

recordando que la capacidad de un condensador de placas paralelas está dada por $C = \frac{\epsilon S}{d} [F]$, se obtiene entonces que la corriente de desplazamiento es;

$$I_{desp} = V_o C \cos(\omega t) [A]$$

o lo que es lo mismo

$$I_{desp} = C \frac{dV}{dt} [A]$$

En este punto hay que notar que sin el concepto de la corriente de desplazamiento no sería posible analizar este circuito. Esto debido a que la presencia del dieléctrico en el condensador implica que no hay circulación de corriente debido a conducción, esto es no debiera existir circulación de corriente.

6.2 Ecuaciones de Maxwell en forma integral

Para muchas aplicaciones contar con las ecuaciones de Maxwell en forma puntual no es de utilidad, por ello se hace necesario contar con el mismo set de ecuaciones en forma integral. Para lograr esto se puede tomar como punto de partida la expresión correspondiente a la ley generalizada de Ampere.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt}$$

Tomando una integral sobre una superficie S a ambos lados de la ecuación se tiene;

$$\int_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_S \frac{d\vec{D}}{dt} \cdot d\vec{S}$$

Aplicando el teorema de Stokes para transformar la integral de superficie del lado izquierdo se obtiene;

$$\int_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{cond} + \int_S \frac{d\vec{D}}{dt} \cdot d\vec{S} = I_{cond} + I_{desp}$$

donde I_{cond} corresponde a la corriente de conducción e I_{desp} a la corriente de desplazamiento.

Tratando el resto de las ecuaciones de Maxwell de la misma forma se puede entonces llegar al siguiente set de ecuaciones

$\oint E \cdot dl = -N \frac{d\phi}{dt}$	(Ley de Faraday)
$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_S \frac{d\vec{D}}{dt} \cdot d\vec{S}$	(Ley generalizada de Ampere)
$\oint D \cdot d\vec{S} = Q$	(Ley de Gauss)
$\oint B \cdot d\vec{s} = 0$	(No existencia de monopolos)