Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemática
Departamento de Matemática

Cálculo II

Ingeniería Civil

Prof. Víctor Aros Quinán

Segundo Semestre 2021

Clase Nº27: Cálculo II

Series de Potencias, Maclaurin y Taylor

Series de Potencias

Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$ podemos definir la función:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n \text{ para } x \in \,]c-R, c+R[$$

Luego, resulta natural preguntarse ¿qué buenas propiedades tiene esta función? ¿Es f continua, derivable o integrable?

Series de Potencias

Teorema

La función $f :]c-R, c+R[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ es derivable e integrable. La derivada de f está dada por:

$$f'(x) =$$

y una primitiva de f es:

$$\int f(x)\, dx =$$

Series de Potencias

Observaciones:

1. Las series $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}$ y $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (x-c)^{n+1}}{n+1}$ tendrán el mismo radio de convergencia de la serie original.

2. Lo anterior no quiere decir que tengan el mismo intervalo de convergencia.

Ejemplo 1

Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Notar que f es derivable y $R = +\infty$. Luego, para cada $x \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$f'(x) =$$

Ejemplo 1

En particular,

$$f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} =$$

$$f(-1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} =$$

$$f(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} =$$

$$f(x^2) =$$

$$f(-x^2) =$$

Ejemplo 2

Partiendo de la serie geométrica

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots; \text{ para } |x| < 1$$

Reemplazando x por $-x$, se obtiene:

$$f(-x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n =$$

y ahora, reemplazando x por $-x^2$, se tiene:

$$f(-x^2) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} =$$

Ejemplo 2

Podemos integrar la expresión anterior para obtener:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n t^{2n}\,dt$$

de donde se sigue que:

Ejercicios

1. Muestre que:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}, \text{ con } |x| < 1$$

2. Determine una expresión en series de potencias para la función $f(x) = \frac{1}{1+x}$ centrada en 3. HINT: en el denominador puedes sumar un 0 y hacer lo siguiente $1 + x - 3 + 3 = 4 + (x - 3)$
3. Exprese mediante series de potencias las funciones

$$g(x) = \frac{2}{x+1} \text{ y } h(x) = \frac{1}{x-1}$$

y luego deduzca la serie de potencias que representa a la función $f(x) = \frac{3x-1}{x^2-1}$. HINT: sumar las funciones puede ayudar.

Series de Taylor y Maclaurin

Como ya vimos anteriormente, podemos expresar una función a través de una serie de potencias, es decir,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$$

lo cual sucede para todo $x \in (-R, R)$. Ahora bien, podemos notar que esta función posee derivadas de todos los órdenes, de hecho se cumple lo siguiente:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow f(0) = a_0$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + ... + n a_n x^{n-1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \Rightarrow f'(0) = a_1$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \Rightarrow f''(0) = 2a_2$$

Series de Taylor y Maclaurin

$$f'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3} \Rightarrow f'''(0) = 6a_3$$

$$f^{(4)}(x) = \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)(n-2)(n-3)a_n x^{n-4} \Rightarrow f^{(4)}(0) = 24a_4$$

de lo anterior, podemos decir que:

$$a_0 = f(0), a_1 = f'(0), a_2 = \frac{f''(0)}{2}, a_3 = \frac{f^{(3)}(0)}{6}, a_4 = \frac{f^{(4)}(0)}{24}$$

y de manera general, se tiene que:

$$a_n =$$

Series de Taylor y Maclaurin

Entonces, podemos reescribir la función inicial en términos de sus derivadas, de hecho:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Definición

Si f es una función que tiene derivadas de todos los órdenes en el punto c, luego la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = f(c) + f'(x)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots +$$

se llama **serie de Taylor** de f alrededor del punto c. Si $c = 0$ la serie se denomina **serie de Maclaurin** de f.

Ejemplo 1

Determine la serie de Taylor de $f(x) = \ln(x)$ centrada en $a = 1$ con su respectivo intervalo de convergencia.

Solución: consideremos la siguiente tabla:

$f(x) = \ln x$	$f(1) = 0$
$f'(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(1) = 1$
$f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$	$f''(1) = -1$
$f'''(x) = \dfrac{1 \cdot 2}{x^3}$	$f'''(1) = 2!$
$\vdots$	$\vdots$
$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$	$f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!$

Ejemplo 1

Notemos que $\dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$, con $n \geq 1$, luego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$$

Ahora, para analizar la convergencia de la serie usaremos el criterio del cociente, como sigue:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(-1)^{n-1}(x-1)^n} \right| \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} |x-1| \\
&= |x-1|
\end{aligned}$$

Ejemplo 1

con lo anterior, podemos concluir que la serie converge para

$$|x-1|<1$$

es decir sobre el intervalo $(0,2)$. Ahora debemos, analizar si en los extremos del intervalo, $x=0$ y $x=2$, la serie converge. Luego, las series asociadas son:

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

las cuales son divergentes y convergantes, respectivamente. Finalmente, el intervalo de convergencia la serie es $(0,2]$ y su radio de convergencia es $R=1$.

Ejemplo 2

Determine la serie de Taylor de $f(x) = \sin(x)$ centrada en $a = 0$ con respectivo intervalo de convergencia.

Solución: consideremos la siguiente tabla:

$f(x) = \sin(x)$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \cos(x)$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = -\sin(x)$	$f''(0) = 0$
$f^{(3)}(x) = -\cos(x)$	$f^{(3)}(0) = -1$
$f^{(4)}(x) = \sin(x)$	$f^{(4)}(0) = 0$
$f^{(5)}(x) = \cos(x)$	$f^{(5)}(0) = 1$
$\vdots$	$\vdots$

Ejemplo 2

Luego, de la definición de serie de Taylor, se tiene:

$$\begin{aligned}\sin(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + ...+ \\ &= 0 + \frac{x}{1} + 0 - \frac{x^3}{6} + 0 + \frac{x^5}{120} + ...+ \\ &= \frac{x}{1} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + ...+\end{aligned}$$

dado lo anterior, podemos notar que la serie de Taylor está dada por:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Polinomios de Taylor

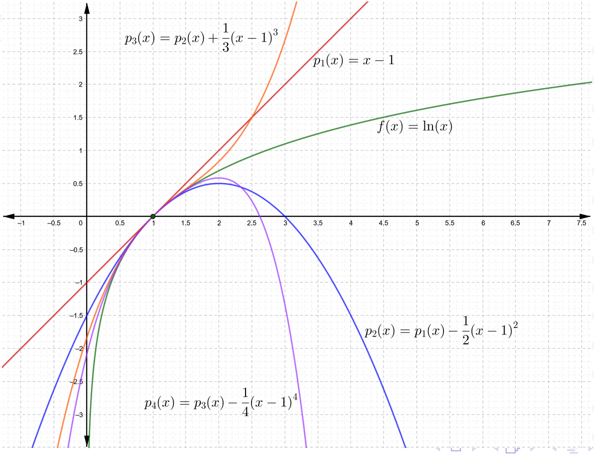
Dada una función f con derivadas de todos los órdenes en c, los polinomios de Taylor de f alrededor de este punto son:

$$p_0(x) = f(c)$$
$$p_1(x) = f(c) + f'(c)(x-c)$$
$$p_2(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2$$
$$\ldots$$
$$p_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

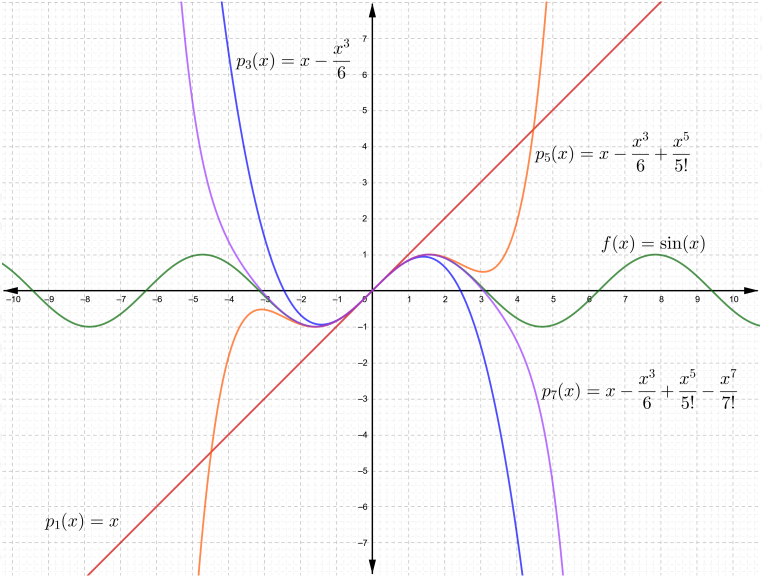
podemos notar que estos polinomios corresponden a las **sumas parciales** de la serie de Taylor de f alrededor del punto c. Además, el polinomio $p_n(x)$ recibe el nombre de **polinomio de Taylor** del punto c.

Polinomios de Taylor

Observación: Los polinomios de Taylor lo que hacen es aproximarse a la función f entorno al un punto y esta aproximación es cada vez más exacta a medida que aumenta el orden del polinomio. Por ejemplo:



Polinomios de Taylor



Polinomios de Taylor

Notemos que en las imágenes anteriores se puede visualizar como los polinomios de Taylor aproximan a la función a medida que aumenta el orden del polinomio. Sin embargo, es posible observar que esta aproximación no es exacta y posee un margen de error.

Por esta razón, se define el resto de orden n, definido por:

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

y luego, el error al aproximar $f(x)$ por el polinomio $p_n(x)$ es:

$$\text{ERROR} = |R_n(x)| = |f(x) - p_n(x)|$$

nuestro objetivo ahora es determinar una estimación del error.

Teorema de Taylor

Teorema

Si una función f tiene derivada hasta el orden $n+1$ en un intervalo I que contiene al punto c, entonces:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + ... + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + R_n(x)$$

donde

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}, \text{ y } z \text{ es un punto entre } x \text{ y } c$$

Notemos que, el teorema anterior indica que:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!}(x-c)^n \Leftrightarrow f(x) = \lim_{n\to+\infty} p_n(x)$$

Ejemplo 1

Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$ representa a $f(x) = \ln(x)$ sobre el intervalo $(0,2]$.

Solución: recordemos que la derivada n-ésima de f, está dada por:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$$

luego, $f^{(n+1)}(c) = \dfrac{(-1)^n n!}{c^{n+1}}$, así obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} |R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}|x-1|^{n+1} &= \left|\frac{(-1)^n n!}{c^{n+1}(n+1)!} \cdot (x-1)^{n+1}\right| \\ &= \frac{1}{n+1}\left|\frac{x-1}{c}\right|^{n+1} \end{aligned}$$

donde c es algún número en el intervalo $(0,2]$ entre 1 y x.

Ejemplo 1

Si $x \in [1,2]$, entonces $0 < x-1 \leq 1$. Puesto que $1 < c < x$, tenemos que $0 < x-1 \leq 1 < c$ y en consecuencia, $(x-1)/c < 1$. Por consiguiente:

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \quad \text{y} \quad \lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$$

Ahora bien, si $x \in (0,1)$, también se puede probar que $\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$. Finalmente, se concluye que:

$$\ln(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$$

para todos los valores de x en el intervalo $(0,2]$.

Ejemplo 2

Demuestre que la función $f(x) = \sin(x)$ con $x \in \mathbb{R}$ se representa por $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

Solución: para mostrar que esta serie converge a $f(x) = \sin(x)$ basta ver que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$. Así, notamos que:

$$f^{(n+1)}(x) = \pm\sin(x) \text{ ó } f^{(n+1)}(x) = \pm\cos(x)$$

y luego, $|f^{(n+1)}(z)| \leq 1$ cualquiera sea $z \in \mathbb{R}$. Luego, para cualquier x fijo:

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)|} x^{n+1} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ejemplo 2

ahora bien,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = |x|^{n+1} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)!} = 0$$

se concluye que:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Series de Taylor y Maclaurin

En la siguiente tabla se muestran algunas series de Maclaurin ya demostradas:

Series de Maclaurin	**Intervalos de convergencia**
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$	$(-\infty, \infty)$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$	$(-\infty, \infty)$
$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$	$(-\infty, \infty)$
$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$	$[-1, 1]$
$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$	$(-\infty, \infty)$
$\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$	$(-\infty, \infty)$
$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}$	$[-1, 1]$

Ejercicios

1. Determine la serie de Maclaurin de $f(x) = \cos(x)$ y demuestre que la serie converge a $\cos(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

2. Determine la serie de Maclaurin de $f(x) = \sin(x^2)$ y luego aproxima mediante tres términos de la serie el valor de la siguiente integral
$$\int_0^1 \sin(x^2)\, dx$$

3. Use la serie de Maclaurin de la función seno y arcotangente, para determinar el valor de los siguientes límites:

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{Arctan}(x)}{x^3}$