Clase 6

Cálculo 3

Carlos Martínez Ranero

Departamento de Matemática
Universidad de Concepción

Recordatorio de la clase anterior.

- Derivadas parciales.
- Derivadas parciales de orden superior.

Objetivos de la clase de hoy.

- Funciones de clase C^k.
- Funciones diferenciables.

Definición

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea k un número natural. Decimos que una función $f : A \to \mathbb{R}$ es de clase C^k, si todas las derivadas hasta orden k, existen y son continuas en A. Decimos que f es de clase C^∞ si es de clase C^k para todo k.

Ejemplo 1

La función $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ es de clase C^1 ya que las derivadas parciales

$$f_x = 2x + y, f_y = x + 2y$$

existen y son continuas.

Derivadas Parciales de Orden Superior.

Las siguientes funciones son de clase C^∞.

- Las funciones polinomiales.
- Funciones exponenciales, trigonométricas.
- Las funciones racionales, logarítmicas y trigonométricas inversas en sus respectivos dominios.
- La suma, composición y producto de funciones de clase C^∞, también es de clase C^∞.

Derivadas Parciales de Orden Superior.

Lema de Schwarz

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $f : A \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2, entonces $f_{xy} = f_{yx}$.

Versión general de Lema de Schwarz.

Lema de Schwarz

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $f : A \to \mathbb{R}$ una función de clase C^k, entonces no imparta el orden de derivación en las derivadas parciales de hasta orden k.

Diferenciabilidad.

Definición

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\vec{a} \in A$ y $f : A \to \mathbb{R}$ decimos que f es diferenciable en $\vec{a}$ si:

- Todas las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})$, existen.
- La aproximación

$$f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})(x_i - a_i) + \epsilon(\vec{x})$$

satisface que

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \frac{\epsilon(\vec{x})}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = 0.$$

Diferenciabilidad.

Definición

- La función $L(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})(x_i - a_i)$ se llama la buena aproximación afín.
- La ecuación $x_{n+1} = L(x_1, \ldots, x_n)$ representa la ecuación del plano tangente.

Ejemplo 2

Sea $f(x, y) = x^2 y$.

- Demostrar que f es diferenciable en $(1, 2)$.
- Aproximar $f(1, 1{,}9)$ utilizando la buena aproximacón afín.
- Encontrar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(1, 2{,}2)$.

Diferenciabilidad.

Soución:

- $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \frac{\partial f}{\partial y} = x^2$
- $f(1,2) = 2, \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 4, \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 1$
- La buena aproximación afín esta dada por
- $L(x,y) = 2 + 4(x-1) + 1(y-2) = 4x + y - 4$
- El error esta dado por
- $\epsilon(x,y) = x^2y - 4(x-1) - (y-2) - 2$
- f es diferenciable en el punto $(1,2)$ si y sólo si
- $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{\epsilon(x,y)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}} = \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2y-4(x-1)-(y-2)-2}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}} = 0$

Diferenciabilidad.

- Haciendo el cambio de variable $x = 1 + h$ y $y = 2 + h$ tenemos que
- $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2y-4(x-1)-(y-2)-2}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}} = \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(1+h)^2(2+k)-4h-k-2}{\sqrt{h^2+k^2}} =$
- $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{2+4h+2h^2+k+2hk+h^2k-4h-k-2}{\sqrt{h^2+k^2}} =$
- $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{2h^2+2hk+h^2k}{\sqrt{h^2+k^2}}$
- Cambiando a coordenadas polares $h = r\cos\theta, k = r\sin\theta$
- $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{2h^2+2hk+h^2k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim\limits_{r\to 0} \frac{r^2(2\cos^2\theta+2\cos\theta\sin\theta+r\cos^2\theta\sin\theta)}{r}$
- Utilizando $|\cos\theta| \leq 1$ y $|\sin\theta| \leq 1$.

Diferenciabilidad.

- $\left|r(2\cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta + r\cos^2\theta\sin\theta)\right| \leq |2r + 2r + r^2|$
- Como esta ultima función tiende a cero. Se sigue del Teorema de Acotamiento que el limite es cero y por lo tanto la función es diferenciable en $(1, 2)$.
- Utilizando la buena aproximación afín se tiene que $f(1, 1{,}9) \sim L(1, 1, 9) = 2 + 4(1 - 1) + (1{,}9 - 2) = 1{,}9$
- Notemos que $(1)^2(1{,}9) = 1{,}9$
- Finalmente la ecuación del plano tangente esta dada por
- $z = 4x + y - 4$

Ejemplo 3

Sea $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$

Demostrar que f es una función continua, y que las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existen, pero que f no es diferenciable en el origen.

Soución:

- Primero observemos que por propiedades de limites la función es continua en todo el plano menos el origen.
- Para ver la continuidad en el origen utilizamos coordenadas polares, y acotamos
- $\left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{r^3(\cos^2\theta + \sin\theta)}{r^2}\right| \leq r$
- Como esta ultima expresión tiende a cero. Se tiene que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0$ y por lo tanto la función también es continua en el origen.
- Utilizamos la definición para calcular las derivadas parciales

Funciones Diferenciables.

- $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\frac{h^2 \cdot 0}{h^2 + 0} - 0}{h} = 0$
- $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\frac{0 \cdot h}{0 + h^2} - 0}{h} = 0$
- El error esta dado por
- $\epsilon(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - f(0, 0) - 0(x - 0) + 0(y - 0) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$
- f es diferenciable en el punto $(0, 0)$ si y sólo si
- $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\epsilon(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0.$

- Cambiando a coordenadas polares, tenemos
- $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2k}{(h^2+k^2)^{3/2}} = \lim\limits_{r\to 0} \frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^3} = \cos^2\theta\sin\theta$
- Notemos que el límite depende del ángulo, por ejemplo si $\theta = \frac{\pi}{4}$ (o $y = x$).
- Tenemos que
- $\lim\limits_{\substack{r\to 0\\ \theta=\frac{\pi}{4}}} \cos^2\theta\sin\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.
- Por lo tanto, f no es diferenciable en el origen.

Funciones Diferenciables.