clase 6.

Recordemos que nuestro objetivo es resolver EDO lineales de orden ≥ 1.

$$\boxed{y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x).} \qquad (*)$$

donde p, q, f son funciones continuas y conocidas definidos en algún intervalo $I =]a,b[$.

La EDO $(*)$ tiene asociado el PVI

$$(P) \begin{cases} y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

$\left.\begin{array}{l} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{array}\right\}$ estas son las condiciones Iniciales, C.I.

Aquí $x_0 \in I$, donde I es el intervalo donde estará definida la solución al PVI (P).

Note que el intervalo I debe estar contenido en el dominio común a p, q y f.

Retomemos la clase anterior.

Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ó $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

Consideremos el operador lineal $\boxed{T : V \to V}$

Entonces se pueden definir los operadores:

(1) $T+2 : V \to V$ como la aplicación

$x \in V$, $x \longmapsto (T+2)(x) = T(x) + 2x$.

$\longmapsto (T + 2\,Id)(x)$

En general, para $\alpha \in \mathbb{R}$, se puede definir

$(T+\alpha) : V \longrightarrow V$ como

$x \in V$, $x \mapsto (T+\alpha)(x) = T(x) + \alpha x \in V$.

(3) Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, podemos definir el producto

$(T+\alpha)(T+\beta) : V \to V$ como

$x \mapsto (T+\alpha)(T+\beta)(x)$ donde

$(T+\alpha)(T+\beta)(x) = T(T+\beta)(x) + \alpha(T+\beta)(x)$

$$= T\left(T(x) + \beta x\right) + \alpha\left(T(x) + \beta x\right)$$

$$= T^2(x) + \beta T(x) + \alpha T(x) + (\alpha \cdot \beta) x$$

$$= T^2(x) + (\alpha + \beta) T(x) + \alpha\beta \cdot x$$

(Note que $(\alpha\ \beta)x$ es la aplicación $V \to V$ que $x \mapsto (\alpha \cdot \beta) x$)

OBS: El valor de $(T+\alpha)(T+\beta)$ se puede determinar de distintas formas

(b) $$(T+\alpha)(T+\beta)(x) = (T+\alpha)(Tx + \beta x)$$

$$= T(Tx + \beta x) + \alpha(Tx + \beta x)$$

$$= T^2 x + T(\beta x) + \alpha T x + \alpha \beta x$$

$$= T^2 x + (\alpha + \beta) T x + \alpha\beta \cdot x$$

En concreto, para $I =]a,b[\subseteq \mathbb{R}$ y

$k \in \mathbb{N}$, $\underline{k \geq 1}$. definimos:

$$\| \underline{C^k(I,\mathbb{R})} = \{ u : I \to \mathbb{R} : u \text{ es } k\text{-veces derivable en } I \}$$

si $k = 0$, ponemos:

$$\| C^0(I,\mathbb{R}) = \{ u : I \to \mathbb{R} : u \text{ es continua en } I \}$$

($\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $C^k(I,\mathbb{R})$ es un espacio vectorial

- $\dim [C^k(I,\mathbb{R})] = \infty$; $\underbrace{p(t)}_{} = t^m$; $m \in \mathbb{N}$ $\longrightarrow p \in C^m(I,\mathbb{R})$
- $C^k(I,\mathbb{R}) \leq \underline{\underline{C^0(I,\mathbb{R})}}$

<u>Ejemplo</u>: si $k = 1$ definamos

$$D : C^1(I,\mathbb{R}) \longrightarrow C^0(I,\mathbb{R}) \quad \text{por}$$

$$y \longmapsto Dy = \frac{dy}{dt} \; . \; \left(g(t) := y'(t) \right)$$

$\hookrightarrow g$

Recuerde que $\frac{dy}{dt}$ es la función continua

que a $t \in I \longmapsto \frac{dy}{dt}(t) = \underline{y'(t)}$.

$\hookrightarrow \underline{\underline{g(t)}}$

Además, recuerde:

Lema: Si u es una función derivable sobre I, entonces u es continua en I.

Ejemplo 2:

Ponemos $L = D + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. $\quad L = (D + \alpha\, Id)$

$$D + \alpha : \underbrace{C^1(I, \mathbb{R})} \longrightarrow \underline{C^0(I, \mathbb{R})}$$

$$u \longmapsto (D+\alpha)(u) = \underbrace{u' + \alpha u}_{g}.$$

Note que $Lu = (D+\alpha)u$ es la función continua tal que a $t \in I \Rightarrow u'(t) + \alpha u(t) \in \mathbb{R}$

Como se dijo en la clase 06, a veces, identificamos:

$$\underbrace{Lu = u' + \alpha u}_{g \in C^0(I,\mathbb{R})} \quad \text{con } (Lu)(t) = \underbrace{u'(t) + \alpha u(t)}_{\in \mathbb{R}}.$$

Ejemplo: Para $k=2$, definamos

$$D^2 : C^2(I,\mathbb{R}) \longrightarrow C^0(I,\mathbb{R}) \text{ por}$$

$$y \longmapsto D^2 y = \frac{d^2 y}{dt^2}$$

donde $\frac{d^2y}{dt^2}$ representa a la función continua que a $t \in I \longmapsto \underbrace{\frac{d^2y}{dt^2}(t)}_{\mathbb{R}} = y''(t)$

Aplicación:

Sea $\boxed{L = D^2 - 2D + 3}$.

Note que $L : C^2(I,\mathbb{R}) \longrightarrow C^0(I,\mathbb{R})$

es tal que $\quad y \longmapsto Ly = \underbrace{y'' - 2y' + 3y}_{\text{y continua}}.$

Entonces, para $f \in C^0(I,\mathbb{R})$, la EDO

$$\boxed{y''(t) - 2y'(t) + 3y(t) = f(t)}$$

se puede representar usando el operador L como

$$\boxed{Ly = f}$$

En particular, si $f \equiv 0$, la EDO homogénea

$$\boxed{y''(t) - 2y'(t) + 3y(t) = 0},$$

puede ser representada como:

$$\boxed{Ly = \theta}$$

(se suele escribir $\underline{Ly} = \underline{0}$)

$\theta : t \in I \mapsto \theta(t) = 0$).

Ejemplo:

En modo análogo podemos definir

$$L = \underline{(D+\alpha)(D-\beta)}$$

$$L : C^2(I,\mathbb{R}) \longrightarrow C^0(I,\mathbb{R})$$

$$z \longrightarrow Lz = \left[D^2 + (\alpha-\beta)D - \alpha\beta\right](z)$$

Aquí: $\underline{Ly} = \underline{y'' + (\alpha-\beta)y' - \alpha\beta y}$.

Ly es la función continua definida como

a $\quad t \in I \Longrightarrow Ly(t) = y''(t) + (\alpha-\beta)y'(t) - \alpha\beta y(t)$

OBS: Ahora consideremos EDO con coeficientes variables.

Ejemplo: usando operadores, la EDO

$$\boxed{y''(t) - (t-1)^3 y'(t) + e^t y(t) = t+3}$$

puede ser escrita como

$$Ly = t+3, \quad \text{donde}$$

$$\boxed{L = D^2 - (t-1)^3 D + \underline{e^t}}$$

<u>observe que</u>: si ponemos $D^0 = Id$.

entonces $\forall f \in C^0(I, \mathbb{R})$,

resulta $D^0 f = f$. . Entonces

El operador L anterior, puede ser escrito

<u>como</u>:

$$L = D^2 - (t-1)^3 D + e^t D^0 .$$

Recordemos que toda EDO lineal de segundo orden es del tipo.

$$\boxed{y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x).}$$

o de manera equivalente $\boxed{Ly = f}$

donde $\boxed{Ly = D^2 + p(x)D + q(x)}$.

Aquí, obviamente el operador L es

lineal de $C^2(I,\mathbb{R}) \longrightarrow C^0(I,\mathbb{R})$.

En efecto si y_1 e y_2 son funciones

de $C^2(I,\mathbb{R})$ (y_1, y_2 funciones que

admiten segunda derivada en el intervalo I)

Entonces:

$$L(y_1+y_2) = [D^2 + p(x)D + q(x)D^0](y_1+y_2)$$

$$= D^2(y_1+y_2) + p(x)D(y_1+y_2) + q(x)(y_1+y_2)$$

$$\left(D^2(y_1+y_2) = \frac{d^2}{dx^2}(y_1+y_2) = \frac{d^2}{dx^2}y_1 + \frac{d^2}{dx^2}y_2 \right)$$

$$= D^2 y_1 + D^2 y_2 + \underbrace{p(x)(Dy_1 + Dy_2)}_{p(x)Dy_1 + p(x)Dy_2} + q(x)y_1 + q(x)y_2$$

$$= \underline{\underline{Ly_1}} + Ly_2$$

En modo análogo, si $\alpha \in \mathbb{R}$ es constante

$$L(\alpha y) = D^2(\alpha y) + p(x)D(\alpha y) + q(x)\alpha y$$

$$= \alpha D^2 y + p(x)\alpha Dy + \alpha q(x)y.$$

$$= \alpha\left(D^2 y + p(x)Dy + q(x)y\right)$$

$$= \underline{\alpha L(y)}.$$

Ejemplo:

considere la EDO homogénea

$$\boxed{y''(x) - x y'(x) + 2 y(x) = 0.} \quad (*)$$

Veamos si $y(x) = x^2$ es solución de $(*)$.

Note que basta calcular el valor de $L(x^2)$

donde L es el operador definido por

$$L : C^2(I, \mathbb{R}) \longrightarrow C^0(I, \mathbb{R}) \quad \text{como}$$

$$L y = (D^2 - xD + 2)(y).$$

Desarrollo: $\quad y(x) = x^2 \longrightarrow L(y)$

$$L(x^2) = (D^2 - x D + 2) x^2$$

$$= D^2 x^2 - x D(x^2) + 2x^2$$

$$= \frac{d^2}{dx^2}(x^2) - x \frac{d}{dx}(x^2) + 2x^2$$

$$= \frac{d}{dx}(2x) - x(2x) + 2x^2$$

$$= 2 - 2x^2 + 2x^2 = 2$$

Como $Lx^2 \neq 0 \iff y(x) = x^2 \notin \operatorname{Ker}(L)$.

sigue que $y(x) = x^2$ No es solución de

$$\boxed{y''(x) - x y'(x) + 2y(x) = 0.}$$

OBSERVACIÓN:

Note que $y(x) = x^2$ es solución de la EDO $Ly = 2$ o equivalentemente, x^2 es solución de:

$$\boxed{y''(x) - x y'(x) + 2y(x) = 2}.$$

$$\left(Ly = 2 \iff y'' - xy' + 2y = 2 \;\Big/\; \frac{d}{dx} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(y'' - xy' + 2y\right) = \frac{d}{dx} 2$$

$$\left. \Rightarrow \boxed{y''' - y' - xy'' + 2y' = 0} \right)$$

Ejemplo: Consideremos la EDO lineal de 2º orden $\boxed{y''(x) + y(x) = x}$ (*).

↳ la EDO ya está normalizada

(*) es ⟺ $Ly = x$,

donde $L = D^2 + 1$ operador diferencial lineal de 2º orden. (a coeficientes constantes)

Observe que $\begin{cases} y_1(x) = \cos(x) \\ y_2(x) = \sin(x) \end{cases}$

(TAREA)

son funciones tales que $\{y_1, y_2\} \subseteq \ker(L)$.

Además $y(x) = x$ es solución de (*).

Es fácil ver que: $\forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ constantes

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) \in \ker(L).$$

y que $\forall\, c_1, c_2$ constantes.

$$\varphi(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + x$$

es también solución de $\boxed{Ly = x}$ ⟺ $y'' + y = x$

(($y''(x) + y(x) = 0$ ($Ly=0$)

$L = D^2 + Id$

$y(x) = \cos(x)$ solución de $Ly=0$

$\Longleftrightarrow$ $\cos(x) \in \mathrm{Ker}(L)$

$\Longleftrightarrow$ $(\cos(x))'' + \cos(x) \stackrel{?}{=} 0.$

$\Longleftrightarrow$ $L(\cos(x)) = \theta$

Desarrollo. $L(\cos(x)) = (\cos(x))'' + \cos(x)$

$= (-\mathrm{sen}(x))' + \cos(x)$

$= -\cos(x) + \cos(x) = 0, \forall x$

$\longrightarrow$ $y(x) = \cos(x) \in \mathrm{Ker}(L).$

Análogamente (Tarea) $L(\mathrm{sen}(x)) = \theta$

Además. $\forall$ constantes c_1 y c_2

$L\, c_1 \cos(x) = \theta$

$L(c_2\, \mathrm{sen}(x)) = \theta$

y además $L(c_1 \cos(x) + c_2\, \mathrm{sen}(x)) = \theta$

(YA LO SABIAMOS ¡sin cálculos !!)

Además $\boxed{z(x) = x}$ es solución de

$$\boxed{Lz = x}$$

$\iff z''(x) + z(x) = x$

En efecto: $L(z) = z'' + z$
$= \frac{d^2}{dx^2}(x) + x$
$= \frac{d}{dx}(1) + x$
$= 0 + x = x$

$\Rightarrow$ $Lz = x$ ✓

Así, $\boxed{y'' + y = x}$

tiene por solución a ,

$u(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \operatorname{sen}(x) + x$; $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

puesto $Lu = L\left(c_1 \cos(x) + c_2 \operatorname{sen} x + x\right)$

$= c_1 L(\cos(x)) + c_2 L(\operatorname{sen}(x)) + Lx$

$= Lx = x.$

Pero si consideramos el PVI

$$(P_1)\left\{\begin{aligned} y''(x) + y(x) &= x \\ y(0) &= \pi \\ y'(0) &= -\pi \end{aligned}\right.$$

entonces, por ejemplo,

$z(x) = \underline{2\cos(x) + 3\operatorname{sen}(x) + x}$ $\quad (L z = x)$

No es solución de (P_1).

Es más, veremos que la solución del PVI (P_1) es ÚNICA.

($z(0) = 2 + 3 \cdot 0 + 0 = 2$

$\Rightarrow$ z No es solución del PVI (P_1).)

TEOREMA (Ex. y unicidad de soluciones, EDO lineales)

Sea L un operador diferencial lineal con coeficientes $a_j = a_j(x)$ continuos en algún intervalo abierto $I \subseteq \mathbb{R}$.

Además, sean $h \in C(I, \mathbb{R})$, $x_0 \in I$, d_1, d_2 números reales dados. Entonces el PVI

$$
(P) \begin{cases} y''(x) + a_1(x) y'(x) + a_0(x) y(x) = h(x) \\ y(x_0) = d_1 \in \mathbb{R} \\ y'(x_0) = d_2 \in \mathbb{R} \end{cases}
$$

Tiene ÚNICA solución. !

Ejemplo:

$$
(\hat{P}) \begin{cases} y''(x) + e^x y'(x) + (x-1) y(x) = x-2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}
$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1(x) = e^x \\ a_0(x) = x-1 \\ h(x) = x-2 \end{array}\right\}$$ Son funciones continuas definidas en algún intervalo que contiene a $x_0 = 0$.

TEOREMA $\Longrightarrow$ ¡ $(\hat{P})$ admite única solución !

$$(\hat{P}) \quad \begin{cases} L\, y = h(x) \\ y(x_0) = \alpha_1 \\ y'(x_0) = \alpha_2 \end{cases}$$

si $h \equiv 0$, entonces

se verá que $\ker(L)$ tiene dimensión 2.

En efecto, se tiene el siguiente

Teorema:

Sean $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_{n-1}(x)$, n funciones continuas (conocidas) definidas en $\Omega \subseteq \mathbb{R}$.

Sea $L = D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)D^0)$

un operador diferencial lineal de orden n

Entonces $\boxed{\dim[\operatorname{Ker}(L)] = n}$

Aplicación:

Consideremos el problema de determinar las soluciones de

$$\boxed{y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0} \quad (*)$$

Es fácil ver que $\begin{cases} y_1(x) = e^{3x} \\ y_2(x) = e^{-2x} \end{cases}$

son soluciones de $(*)$. De modo

equivalente; $\{y_1, y_2\} \subseteq \ker(L)$

donde $L = D^2 - D - 6$

(L es un operador diferencial lineal de orden 2).

si mostramos que $\{y_1 = e^{3x}; y_2 = e^{-2x}\}$

es un conjunto l.i. en $C^2(\Omega, \mathbb{R})$

(en este caso $\Omega = \mathbb{R}$)

Entonces, toda solución $z = z(x)$ de la

EDO $y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0$,

será tal que

$$z = c_1 y_1 + c_2 y_2, \iff$$

$$\forall x, \quad z(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}.$$

$$c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} = 0 \qquad \Big/ \frac{d}{dx}$$

$$\underbrace{\left.\begin{aligned} c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x} &= 0 \\ 3c_1 e^{3x} - 2c_2 e^{-2x} &= 0 \end{aligned}\right\}}\ (*)$$

$$\left.\begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-2x} \\ 3e^{3x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix}\right|_{x=0} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Por tanto el sistema $(*)$ tiene solución única, esto es, $c_1 = c_2 = 0$. Por tanto

$\{ e^{3x}, e^{-2x} \}$ es l. i.