UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Listado de Ejercicios Resueltos 3 (527140)

Ejercicios resueltos del listado 3

2) Encuentre el conjunto solución de las siguientes ecuaciones con valor absoluto.

b) $|2x+3|+4=5x$

Solución: Para resolver la inecuación consideremos los siguientes casos:

I) $x \geq -3/2$, se tiene:

$$\begin{aligned} |2x+3|+4=5x &\iff 2x+3+4=5x \\ &\iff 3x=7 \\ &\iff x=\frac{7}{3} \end{aligned}$$

De esta forma la solución esta dada por $S_i = [-3/2, +\infty[\cap \{7/3\} = \{7/3\}$.

II) $x < -3/2$, se tiene:

$$\begin{aligned} |2x+3|+4=5x &\iff -2x-3+4=5x \\ &\iff 7x=1 \\ &\iff x=\frac{1}{7} \end{aligned}$$

De esta forma la solución esta dada por $S_{ii} =]-\infty, -3/2[\cap \{1/7\} = \varnothing$.

Por lo tanto, el conjunto solución de la inecuación esta dado por

$$S_F = S_i \cup S_{ii} = \{7/3\}.$$

c) $|x+1|+|x-2|=3$

Solución: De la definición de valor absoluto, se tiene que

	$]-\infty,-1]$	$]-1,2]$	$]2,\infty[$
$x+1$	$-(x+1)$	$x+1$	$x+1$
$x-2$	$-(x-2)$	$-(x-2)$	$x-2$

Se analizará por casos, en efecto

i) $x \leq -1$:

$$\begin{aligned} |x+1|+|x-2|=3 &\iff -(x+1)-(x-2)=3 \\ &\iff x=-1 \end{aligned}$$

Por ende, se concluye $S_i =]-\infty,-1] \cap \{-1\} = \{-1\}$.

ii) $-1 < x \leq 2$:

$$\begin{aligned} |x+1| + |x-2| = 3 &\iff x + 1 - (x-2) = 3 \\ &\iff 3 = 3 \end{aligned}$$

Por ende, se concluye $S_{ii} = \mathbb{R} \cap]-1, 2] =]-1, 2]$.

iii) $x > 2$:

$$\begin{aligned} |x+1| + |x-2| = 3 &\iff x + 1 + x - 2 = 3 \\ &\iff x = 2 \end{aligned}$$

Por ende, se concluye $S_{iii} =]2, +\infty[\cap \{2\} = \varnothing$.

De es este modo, de i), ii) y iii) se concluye que el conjunto solución esta dado por

$$S_F = (S_i \cup S_{ii}) \cup S_{iii} = [-1, 2].$$

3 Encuentre el conjunto solución de la inecuación $\left| \dfrac{6x-5}{3+x} \right| \leq 1$

Solución: De la definición, se tiene que

$$\left| \frac{6x-5}{3+x} \right| \leq 1 \iff -1 \leq \frac{6x-5}{3+x} \leq 1$$

Se resuelve por separado, en efecto:

$$\begin{aligned} -1 \leq \frac{6x-5}{3+x} &\iff 0 \leq \frac{6x-5}{3+x} + 1 \\ &\iff 0 \leq \frac{7x-2}{3+x} \end{aligned}$$

Gracias a la tabla de signo, se tiene

	$]-\infty, -3[$	$]-3, 2/7[$	$]2/7, \infty[$
$x+3$	$-$	$+$	$+$
$7x-2$	$-$	$-$	$+$
$\dfrac{7x-2}{3+x}$	$+$	$-$	$+$

Así, se concluye que $S_1 =]-\infty, -3[\cup [2/7, \infty[$. Análogamente

$$\begin{aligned} \frac{6x-5}{3+x} \leq 1 &\iff \frac{6x-5}{3+x} - 1 \leq 0 \\ &\iff \frac{5x-8}{3+x} \leq 0 \end{aligned}$$

Por la tabla de signo, se tiene

	$]-\infty,-3[$	$]-3,8/5[$	$]8/5,\infty[$
$x+3$	$-$	$+$	$+$
$5x-8$	$-$	$-$	$+$
$\dfrac{7x-2}{3+x}$	$+$	$-$	$+$

Así, se concluye que $S_2 =]-3,8/5]$ la solución. Finalmente, se tiene que el conjunto solución final esta dado por

$$S_F = S_1 \cap S_2 = [2/7, 8/5]$$

Ejercicos Resueltos Adicionales.

1. Determinar el conjunto de solución, considerando $x \in \mathbb{R}$:

   (a) $||x+2|+3| = 5 - |5x-1|$

   Solución: De la definicion de valor absoluto (notar que $|x+2|+3>0$), se tiene:

$$\begin{aligned} ||x+2|+3| = 5-|5x-1| &\iff |x+2|+3 = 5-|5x-1| \\ &\iff |x+2| = 2-|5x-1| \end{aligned}$$

   Luego, construimos la tabla de valores, obteniendose:

	$]-\infty,-2]$	$]-2,1/5]$	$]1/5,+\infty[$
$x+2$	$-(x+2)$	$x+2$	$x+2$
$5x-1$	$-(5x-1)$	$-(5x-1)$	$5x-1$

   Luego, si $x \in]-\infty,-2]$, se tiene:

$$\begin{aligned} |x+2| = 2-|5x-1| &\iff -(x+2) = 2+(5x-1) \\ &\iff x = -\frac{5}{6} \end{aligned}$$

   Por ende, $S_1 =]-\infty,-2] \cap \{-5/6\} = \varnothing$.

   Si $x \in]-2,1/5]$, se tiene:

$$\begin{aligned} |x+2| = 2-|5x-1| &\iff (x+2) = 2+(5x-1) \\ &\iff x = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

   Así, $S_2 =]-2,1/5] \cap \{1/4\} = \varnothing$.

   Si $x \in]1/5,+\infty[$, se tiene:

$$\begin{aligned} |x+2| = 2-|5x-1| &\iff (x+2) = 2-(5x-1) \\ &\iff x = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Así, $S_3 =]1/5, +\infty[\cap \{-1/6\} = \varnothing$. Finalmente, se concluye que el conjunto solución es

$$S_F = (S_1 \cup S_2) \cup S_3 = \varnothing$$

(b) $\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} \leq 0$

Solución: Puesto que la raices son no negativas, el único valor posibles es cuando

$$\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} = 0,$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} = \sqrt{(x^2-1)^2} = 0 &\Longrightarrow x^2 - 1 = 0 \\ &\Longrightarrow x^2 = 1 \\ &\Longrightarrow x = \pm 1 \end{aligned}$$

Luego, el conjunto solución a la inecuación es $S = \{-1, 1\}$

(c) $\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x-2}} \leq \sqrt{5}$

Solución: Notar que si $x \neq 2$ se tiene que

$$\frac{x^2-4}{x-2} = x + 2$$

de donde $\sqrt{x+2}$ está definida para $x \geq -2$. Luego, para $x \neq 2$ se tiene:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{x^2-4}{x-2}} = \sqrt{x+2} \leq \sqrt{5} &\Longrightarrow x + 2 \leq 5 \\ &\Longrightarrow x \leq 3 \end{aligned}$$

De este modo, el conjunto solución

$$S_F = [-2, \infty[\cap [-\infty, 3] - \{2\} = [-2, 3] - \{2\}$$

(d) $\sqrt{36 - x^2} = x + 8$

Solución: Puesto que el lado derecho de la expresión debe ser positivo, ya que está igualado a una raiz cuadrada, se tiene que

$$x \in [-8, +\infty[$$

para que la expresión este definida. De este modo, se tiene

$$\begin{aligned} \sqrt{36 - x^2} = x + 8 &\Longleftrightarrow 36 - x^2 = (x+8)^2 \\ &\Longleftrightarrow 36 - x^2 = x^2 + 16x + 64 \\ &\Longleftrightarrow 0 = 2x^2 + 16x + 28 \end{aligned}$$

Luego $x \in \{-4 + \sqrt{2}, -4 - \sqrt{2}\}$, por la restricción de $x \in [-8, +\infty[$ se concluye que el conjunto solución es $S = \{-4 + \sqrt{2}, -4 - \sqrt{2}\}$.

(e) $\sqrt{4-x} > 4 - \sqrt{x+8}$
Solución: Para que la expresión este bien definida, se tiene que $4-x \geq 0$ y $x+8 \geq 0$, se busca la intersección,

$$[-\infty, 4] \cap [-8, +\infty[= [-8, 4]$$

Luego si $x \in [-8, 4]$ la expresión está definida. Resolvemos, asegurandonos que los lados de la desigualdad sean mayor a cero, para poder elevar al cuadrado (axioma de los número reales):

$$\begin{aligned}
\sqrt{4-x} > 4 - \sqrt{x+8} &\Longrightarrow \sqrt{4-x} + \sqrt{x+8} > 4 \qquad /()^2 \\
&\Longrightarrow 2\sqrt{(4-x)}\sqrt{(x+8)} + 12 > 16 \\
&\Longrightarrow \sqrt{(4-x)}\sqrt{(x+8)} > 2 \\
&\Longrightarrow (4-x)(x+8) > 4
\end{aligned}$$

Calculando las raíces de la ecuación cuadrática, se obtiene que $x = -2 \pm 4\sqrt{2}$. Realizando la tabla de signo, se tiene que $x \in]-2-4\sqrt{2}, -2+4\sqrt{2}[$. Luego,

$$[-8, 4] \cap]-2-4\sqrt{2}, -2+4\sqrt{2}[=]-2-4\sqrt{2}, -2+4\sqrt{2}[$$

Se concluye que el conjunto solución es $S =]-2-4\sqrt{2}, -2+4\sqrt{2}[$.

DESAFÍO: Demostrar que no existe un número racional $\dfrac{m}{n}$ tal que $\left(\dfrac{m}{n}\right)^2 = 2$

Demostración: Razonando por contradicción (o reducción al absurdo), suponga que si existe el número racional $\dfrac{m}{n}$ que se pide. Sin pérdida de generalidad suponga que es positivo (si es negativo se razona de la misma forma y al elevarlo al cuadrado siempre será positivo) y que $m, n \in \mathbb{N}$, coprimos (no se pueden simplificar).

Con lo anterior se tiene que si el número existe cumple que

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2 \Longrightarrow m^2 = 2n^2$$

De donde se concluye que m es par (ya que su cuadrado es par), por ende

$$m = 2k \ , k \in \mathbb{N}$$

Reemplazando en lo anterior se tiene que

$$m^2 = 4k^2 = 2n^2 \Longrightarrow 2k^2 = n^2$$

Mostrando que n es un número par (al igual que m), lo cual es una contradicción ya que se supuso que m y n son coprimos.

Gracias a lo anterior se concluye que lo supuesto es falso, por ende, no existe un número racional $\dfrac{m}{n}$ que cumpla lo pedido.