UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

JAG/VAQ/MPB/CMS/GAJ/FOC/PHL/SBB/HPV

CERTAMEN I

CÁLCULO II - 527150

Pregunta 1: (20 puntos) Justificando su respuesta indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a. (6 puntos) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable y positiva, entonces

$$\int \frac{f'(1+2x)}{f(1+2x)}dx = 2\ln(f(1+2x)) + C$$

donde C es una constante real.
Solución: Realizando el cambio de variable $t = f(1+2x)$ se obtiene $\frac{1}{2}dt = f'(1+2x)dx$. Luego

$$\int \frac{f'(1+2x)}{f(1+2x)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}du = \frac{1}{2}\ln(f(1+2x)) + C.$$

ya que f es positiva. **Por lo que la afirmación es falsa.**

b. (8 puntos) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y positiva, entonces

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin(x))}{f(\sin(x)) + f(\cos(x))}dx = \frac{\pi}{4}$$

Hint: Hacer el cambio de variable $t = \dfrac{\pi}{2} - x$.
Solución: Con el cambio de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$, se obtiene $dt = -dx$. Luego para $x = 0$ tenemos que $t = \frac{\pi}{2}$, y para $x = \frac{\pi}{2}$ tenemos que $t = 0$. Además, $\sin(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos(t)$ y $\cos(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin(t)$. Reemplazando y usando la propiedad de cambio de variable para integrales definidas se tiene

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin(x))}{f(\sin(x)) + f(\cos(x))}dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{f(\cos(t))}{f(\sin(t)) + f(\cos(t))}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\cos(t))}{f(\sin(t)) + f(\cos(t))}dt.$$

Por lo tanto

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(\sin(x)) + f(\cos(x)}{f(\sin(x)) + f(\cos(x))}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dx = \frac{\pi}{2}$$

asi que $I = \frac{\pi}{4}$ y luego **la afirmación es verdadera.**

c. (6 puntos) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable la cual satisface la siguiente relación

$$\int_{-x}^{x} f(t)dt = f(x) + \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

entonces se cumple que $f'(0) = 2$.

Solución: Derivando a ambos lados de la expresión y utilizando el T.F.C obtenemos:

$$f(x) - (-1)f(-x) = f'(x) - \sin(x).$$

Evaluamos en $x = 0$:

$$2f(0) = f'(0)$$

y ocupando la relación inicial tenemos que

$$f(0) = \int_0^0 f(t)dt - \cos(0) = -1.$$

Por lo tanto $f'(0) = -2$ y **la afirmación es falsa.**

Pregunta 2: (20 puntos) Considere la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad x \in \mathbb{Q} \\ \\ x+1 & si \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

y sea $\mathcal{P}$ la partición regular de $[0, 1]$ de $n + 1$ puntos.

a. (15 puntos) Calcular $\underline{S}(f, \mathcal{P})$ en función de n. *Recuerde que* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

b. (5 puntos) Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, \mathcal{P})$. *Recuerde que* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Solución:

a. Sean $[x_{k-1}, x_k]$ para $k = 1, 2, \ldots, n$ los n subintervalos determinados por la partición regular de $n + 1$ puntos de $[0, 1]$. Como $m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} = f(x_{k-1}) = \frac{k-1}{n}$, se tiene

$$\underline{S}(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} = \frac{n(n-1)}{2n^2}.$$

b. De la parte (a) y del álgebra de limites infinitos, se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, \mathcal{P}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)}{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Pregunta 3: (20 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ una función cuya derivada es continua y además $f'(1) = 0$. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\int_1^{x^2} f(t)dt}{\int_1^{x} f(t)dt} & si \quad x \neq 1 \\ \\ a & si \quad x = 1. \end{cases}$$

a. (5 puntos) Probar que g es continua para $x \neq 1$.

b. (7 puntos) Calcular el valor de a para que g sea continua en $x = 1$.

c. (8 puntos) Calcular $g'(1)$.

Solución:

a. Por hipotesis f es continua en $\mathbb{R}$ y por lo tanto integrable en $[1,x]$ y en $[1,x^2]$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Entonces, por el T.F.C, $\displaystyle\int_1^{x^2} f(t)dt$ y $\displaystyle\int_1^{x} f(t)dt$ son continuas.

Además, como $f(x)>0$ y continua, tenemos que $\displaystyle\int_1^{x} f(t)dt > 0\ \forall x\neq 1$. De esto concluimos que g es continua en $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ por cuociente de funciones continuas.

b. Para que g sea continua en $x=1$ debe ocurrir: $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = g(1) = a$. Calculamos el limite

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1}\frac{\int_1^{x^2} f(t)dt}{\int_1^{x} f(t)dt} \overset{\text{(L'Hop)}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{2xf(x^2)}{f(x)} = \frac{2f(1)}{f(1)} = 2$$

puesto que $f(1)>0$. Se sigue que $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = a = 2 = g(1)$.

c. Por definición

$$\begin{aligned}
g'(1) &= \lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{\int_1^{x^2} f(t)dt}{\int_1^{x} f(t)dt}-2}{x-1}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{\int_1^{x^2} f(t)dt - 2\int_1^{x} f(t)dt}{(x-1)\int_1^{x} f(t)dt}\\
&\overset{\text{(L'Hop)}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{2xf(x^2)-2f(x)}{\int_1^{x} f(t)dt + (x-1)f(x)}\\
&\overset{\text{(L'Hop)}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{2f(x^2)+4x^2f'(x^2)-2f'(x)}{2f(x)+(x-1)f'(x)} = \frac{2f(1)+4f'(1)-2f'(1)}{2f(1)+0\cdot f'(1)} = \frac{2f(1)}{2f(1)} = 1
\end{aligned}$$

donde $f'(1)=0$ pues por hipotesis $x=1$ es un punto critico de f. Por lo tanto $g'(1)=1$.