Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemática
Departamento de Matemática

Cálculo II

Ingeniería Civil

Prof. Víctor Aros Quinán

Segundo Semestre 2021

Clase Nº3: Cálculo II

Antiderivada y Métodos de Integración

Integración por sustitución trigonométrica

Antes de comenzar a trabajar con el método de sustitución trigonométrica debemos recordar algunos identidades importantes:

- $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, sabemos que las siguientes igualdades también son válidas:

$$\cos^2(\alpha) = 1 - [\sin(\alpha)]^2 \;\; \vee \;\; \sin^2(\alpha) = 1 - [\cos(\alpha)]^2$$

- $\tan^2(\alpha) + 1 = \sec^2(\alpha)$, análogo al anterior, se tiene:

$$\tan^2(\alpha) = [\sec(\alpha)]^2 - 1$$

Dado esto, el método de sustirución trigonométrica sirve para transformar una integral en otra que involucra funciones trigonometricas simples, lo cual es mucho más sensillo de integrar.

Integración por sustitución trigonométrica

Cada vez que se encuentren una de las siguientes expresiones;

$$\sqrt{a^2 - x^2}, \quad \sqrt{x^2 - a^2} \quad \text{y} \quad \sqrt{x^2 + a^2}, \ \text{con} \ a > 0$$

Luego, consideremos lo siguiente:

- $\sqrt{x^2 + a^2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$. De acuerdo con lo anterior podemos hacer:

$$x = a\tan(\theta) \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} =$$

Así, se tiene lo siguiente:

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2\tan^2(\theta) + a^2} =$$

además, si queremos determinar θ solo debemos aplicar la función inversa de tangente, obteniéndose así:

$$\theta = \text{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right)$$

Integración por sustitución trigonométrica

Observación: Notemos que:

$$x = a\tan(\theta) \Leftrightarrow \theta = \text{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right)$$

se debe cumplir que $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, con esto se obtiene lo siguiente:

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2\tan^2(\theta) + a^2} = a|\sec(\theta)|$$

luego, dado el intervalo de definición de θ, se tiene:

$$\sqrt{x^2 + a^2} =$$

Integración por sustitución trigonométrica

- $\sqrt{a^2 - x^2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -1 \leq \frac{x}{a} \leq 1$. De acuerdo con lo anterior podemos hacer:

$$x = a\sin(\theta) \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} =$$

Así, se tiene lo siguiente:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2(\theta)} =$$

además, si queremos determinar θ solo debemos aplicar la función inversa de seno, obteniéndose así:

$$\theta = \text{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right)$$

Integración por sustitución trigonométrica

Observación: Notemos que:

$$x = a\sin(\theta) \Leftrightarrow \theta = \text{Arcsin}\left(\frac{x}{a}\right)$$

se debe cumplir que $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, con esto se obtiene lo siguiente:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2(\theta)} = a|\cos(\theta)|$$

luego, dado el intervalo de definición de θ, se tiene:

$$\sqrt{a^2 - x^2} =$$

Integración por sustitución trigonométrica

- $\sqrt{x^2 - a^2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{x}{a} \leq -1 \vee \frac{x}{a} \geq 1$. De acuerdo con lo anterior podemos hacer:

$$x = a\sec(\theta) \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} =$$

Así, se tiene lo siguiente:

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2\sec^2(\theta) - a^2} =$$

además, si queremos determinar θ solo debemos aplicar la función inversa de secante, obteniéndose así:

$$\theta = \text{Arcsec}\left(\frac{x}{a}\right)$$

Integración por sustitución trigonométrica

Observación: Notemos que:

$$x = a\sec(\theta) \Leftrightarrow \theta = \text{Arcsec}\left(\frac{x}{a}\right)$$

se debe cumplir que $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, con esto se obtiene lo siguiente:

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2\sec^2(\theta) - a^2} = a|\tan(\theta)|$$

luego, dado el intervalo de definición de θ, se tiene:

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a\tan(\theta), \quad \text{si} \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$$

Ejemplos

Resuelve las siguientes integrales usando el método de integración por sustitución trigonométrica:

(a) $$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

(b) $$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx$$

(c) $$\int \frac{\sqrt{1-4x^2}}{x}\,dx$$

(d) $$\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2}\,dx$$

(e) $$\int \frac{1}{(x^2-4x+5)^2}\,dx$$

(f) $$\int \frac{\sec^2(x)}{\sqrt{\tan^2(x)-4}}\,dx$$

Ejemplos

Solución (d): para integrar por sustitución trigonométrica, hacemos:

$$x = 4\sin(\theta) \Rightarrow dx = 4\cos(\theta)\, d\theta$$

Así,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x^2}\, dx &= \int \frac{\sqrt{16 - 16\sin^2(\theta)}}{16\sin^2(\theta)} 4\cos(\theta)\, d\theta \\
&= \int \frac{\cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)}\, d\theta \\
&= \int \cot^2(\theta)\, d\theta \\
&= \int \left(\csc^2(\theta) - 1\right)\, d\theta
\end{aligned}$$

Ejemplos

Luego,

$$\int \left(\csc^2(\theta) - 1\right)\, d\theta = -\cot(\theta) - \theta + C$$

Notemos lo siguiente:

$$x = 4\sin(\theta) \Rightarrow \cot(\theta) = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x}$$

Finalmente:

$$\int \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x^2}\, dx = -\frac{\sqrt{16 - x^2}}{x} - \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{4}\right) + C$$

Comprueba el resultado

Ejemplos

Solución (e): primero notemos lo siguiente:

$$x^2 - 4x + 5 = (x^2 - 4x + 4) + 1 = (x-2)^2 + 1$$

Ahora bien, para comenzar a integrar haremos lo siguiente:

$$u = x - 2 \Rightarrow du = dx$$

Así,

$$\int \frac{1}{(x^2 - 4x + 5)^2}\, dx = \int \frac{1}{(u^2+1)^2}\, du$$

luego, para integrar por sustitución trigonométrica hacemos:

$$u = \tan(\theta) \Rightarrow du = \sec^2(\theta)\, d\theta$$

Ejemplos

dada la sustitución trigonométrica anterior, se tiene:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(u^2+1)^2}\,du &= \int \frac{\sec^2(\theta)}{\sec^4(\theta)}\,d\theta\\ &= \int \cos^2(\theta)\,d\theta\\ &= \int \frac{1}{2}+\frac{\cos(2\theta)}{2}\,d\theta\\ &= \frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin(2\theta)+C\end{aligned}$$

notemos que:

$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta) = 2\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} = 2\frac{u}{1+u^2}$$

Ejemplos

por lo tanto, se tiene:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2} + \frac{\cos(2\theta)}{2}\, d\theta &= \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin(2\theta) + C \\ &= \frac{1}{2}\text{Arctan}(u) + \frac{1}{2}\frac{u}{1+u^2} + C \\ &= \frac{1}{2}\text{Arctan}(x-2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{(x-2)}{1+(x-2)^2} + C\end{aligned}$$

finalmente,

$$\int \frac{1}{(x^2-4x+5)^2}\, dx = \frac{1}{2}\text{Arctan}(x-2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{(x-2)}{1+(x-2)^2} + C$$

Comprueba el resultado

Ejercicios

Resuelve las siguientes integrales usando el método de integración por sustitución trigonométrica:

(a) $$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-7}}\,dx$$

(b) $$\int \frac{x^3}{(25-x^2)^2}\,dx$$

(c) $$\int \frac{\sec^2(x)}{(4-\tan^2(x))^{3/2}}\,dx$$

(d) $$\int \frac{e^y}{(e^{2y}+8e^y+7)^{3/2}}\,dy$$

(e) $$\int \frac{\ln^3(u)}{u\sqrt{\ln^2(u)-4}}\,du$$

Integración por fracciones parciales

Para poder utilizar el método de integración por descomposición de fracciones parciales debemos aprender como descomponer una fracción racional propia en suma de fracciones parciales.

Por ejemplo, podremos resolver la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{5x+7}{x^2+x-20}\,dx = \int \frac{2}{x+5} + \frac{3}{x-4}\,dx$$

Fracciones Parciales

Consideremos las siguientes fracciones racionales

$$\frac{2}{x+5} \quad \text{y} \quad \frac{3}{x-4}$$

Notemos que si efectuamos la siguiente operación:

$$\frac{2}{x+5} + \frac{3}{x-4} = \frac{5x+7}{x^2+x-20}$$

claramente podemos obtener el resultado aplicando propiedad y conceptos que ya conocemos, pero que sucede si tenemos la siguiente fracción racional

$$\frac{5x+7}{x^2+x-20} =$$

cómo se puede descomponen en suma de dos o más fracciones racionales más simples. A las fracciones racionales más simples se les llama **fracciones parciales**.

Funciones Racionales

Definición

Dado un cuerpo de números $\mathbb{K}$ y $p, q \in \mathbb{K}[x]$, la función $h = p/q$ se denomina función racional, es decir, una función racional es la que resulta del cociente de dos polinomios y es tal que para cada $x \in \mathbb{K}$, se tiene que $q(x) \neq 0$, por ende:

$$h(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

en este caso, p y q se denominan **dividendo** y **divisor**, respectivamente.

Observaciones:

1. Si h es tal que $\mathrm{gr}(p) \geq \mathrm{gr}(q)$, entonces h es una función racional impropia.
2. Si h es tal que $\mathrm{gr}(p) < \mathrm{gr}(q)$, entonces h es una función racional propia.

Descomposición en Fracciones Parciales

Teorema: Dada una fracción propia $\dfrac{p(x)}{d(x)}$ con $p, d \in \mathbb{R}[x]$ puede descomponerse en suma de fraccciones parciales, como sigue:

1. Si $d(x)$ tiene factor lineal de la forma $ax + b$, no repetido, entonces la descomposición en fracciones parciales tiene un término de la forma $\dfrac{A}{ax+b}$, donde A es una constante real.
2. Si $d(x)$ tiene un factor lineal de la forma $ax+b$ repetido k veces, es decir, $(ax+b)^k$, entonces la descomposición en fracciones parciales contiene los términos

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + ... + \frac{A_k}{(ax+b)^k}$$

donde los A_i son constantes reales, donde $i = 1, 2, ..., k$.

Descomposición en Fracciones Parciales

3. Si $d(x)$ tiene un factor cuadrático irreducible en $\mathbb{R}[x]$ de la forma $ax^2 + bx + c$, no repetido, entonces la descomposición en fracciones parciales contiene en término de la forma $\dfrac{A_1 x + A_2}{ax^2 + bx + c}$, donde A_1 y A_2 son constantes reales.

4. Si $d(x)$ tiene un factor cuadrático irreducible en $\mathbb{R}[x]$ de la forma $ax^2 + bx + c$ repetido k veces, es decir, $(ax^2 + bx + c)^k$, entonces la descomposición en fracciones parciales contiene los términos

$$\frac{A_1 x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2 x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_k x + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}$$

donde los A_i y B_i son constantes reales, donde $i = 1, 2, \dots, k$.

Ejemplos

Descomponer las siguientes funciones racionales en suma de fracciones parciales.

(a) $$\frac{7x+6}{x^2+x-6}$$

(b) $$\frac{x^2}{x^4-1}$$

(c) $$\frac{x^4-3x^3-19x^2+4x+18}{x^2-3x-18}$$

Ejemplos

Solución (b) Notemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{(x^2-1)(x^2+1)} &= \frac{x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} \\ &= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3x + A_4}{x^2+1}\end{aligned}$$

Entonces,

$$x^2 = A_1(x+1)\left(x^2+1\right) + A_2(x-1)\left(x^2+1\right) + (A_3x + A_4)\left(x^2-1\right).$$

Ejemplos

Solución (c)

La fracción racional no es fracción propia, no es aplicable el teorema, efectuemos primero la división:

$$
\begin{array}{rrrrrcccc}
(x^4 & -3x^3 & -19x^2 & +4x & +18) & : & (x^2-3x-18) & = & x^2-1 \\
x^4 & -3x^3 & -18x^2 & & & & & & \\
\hline\hline
 & & -x^2 & +4x & +18 & & & & \\
 & & -x^2 & +3x & +18 & & & & \\
\cline{3-5}\cline{3-5}
 & & & x & & & & &
\end{array}
$$

Luego:

$$\frac{x^4-3x^3-19x^2+4x+18}{x^2-3x-18} = x^2-1+\frac{x}{x^2-3x-18}$$

Ejemplos

Descompondremos la fracción propia $\dfrac{x}{x^2-3x-18}$ *en fracciones parciales.*

$$\frac{x}{x^2-3x-18}=\frac{x}{(x-6)(x+3)}=\frac{A_1}{x-6}+\frac{A_2}{x+3}$$

Por lo tanto,

$$\frac{x^4-3x^3-19x^2+4x+18}{x^2-3x-18}=x^2-1+\frac{2}{3(x-6)}+\frac{1}{3(x+3)}.$$

Ejemplos

Calcule las siguientes integrales con el método de fracciones parciales:

(a) $\displaystyle\int \frac{7x+6}{x^2+x-6}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^4-1}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^4-3x^3-19x^2+4x+18}{x^2-3x-18}\,dx$

Ejercicios

Calcule las siguientes integrales con el método de fracciones parciales:

(a) $\displaystyle\int \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{6x^2-2x-1}{4x^3-x}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+2}{x^2-1}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^4+2x^2+1}\,dx$