Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemática
Departamento de Matemática

Cálculo II

Ingeniería Civil

Prof. Víctor Aros Quinán

Segundo Semestre 2021

Clase N$^{\underline{o}}$9: Cálculo II
Aplicaciones del Teorema Fundamental del Cálculo

Teorema Fundamental del Cálculo

El siguiente teorema, que llamaremos

"Primer Teorema Fundamental del Cálculo"

muestra que toda función continua admite una función que, al derivarla nos entrega la original.

Teorema

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en I y sea $c \in I$. Entonces, la función G definida por:

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \;\; x \in I$$

es derivable sobre I y $G'(x) = f(x)$ en el interior de I.

Teorema Fundamental del Cálculo

El siguiente teorema que llamaremos

"Segundo Teorema Fundamental del Cálculo"

nos ayudará a calcular el valor de una integral definida.

Teorema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y sea F una primitiva de f, entonces:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Teorema Fundamental del Cálculo

Demostración: Sea G la función definida por $G(x) = \int_a^x f(x)\,dx$, para ella se cumple:

$$G(a) = 0 \text{ y } G(b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

luego, considerando ambas condiciones, se tiene:

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

Ahora bien, podemos notar que F y G son primitivas de f, por ende $G(x) = F(x) + C$, siendo C una constante real. Por lo tanto:

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a)$$

Teorema Fundamental del Cálculo

Observación:

1. Para efectos prácticos, adoptaremos la siguiente notación:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

2. Puesto que $F'(x) = f(x)$, lo que realmente tenemos es lo siguiente:

$$\frac{d}{dx}\int_c^x f(t)\,dt = f(x)$$

Ahora bien, por el TFC, también tenemos:

$$\int_a^x \frac{d}{dt}F(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

Ejercicios

1. Sea $F : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \, dt$$

   Calcule $F'(x)$ y determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

2. Usando la sustitución $x = 2t^4$, calcule la siguiente integral

$$\int_0^2 \frac{\sqrt[4]{2x}}{\sqrt{2} + \sqrt{x}} \, dx$$

3. Determine el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} \int_x^2 \text{Arcsin}\left(\frac{1}{t}\right) \, dt$$

Ejercicios

Solución b): Notemo lo siguiente:

$$x = 2t^4 \Rightarrow dx = 8t^3 dt, \quad x = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ y } x = 2 \Rightarrow t = 1$$

luego, se tiene:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{\sqrt[4]{2x}}{\sqrt{2} + \sqrt{x}}\, dx &= \int_0^1 \frac{\sqrt[4]{2 \cdot 2t^4}}{\sqrt{2} + \sqrt{2t^4}} \cdot 8t^3\, dt \\
&= 2^{1/2} \int_0^1 \frac{8t^4}{\sqrt{2}(1 + t^2)}\, dt \\
&= 8 \int_0^1 \frac{t^4}{1 + t^2}\, dt
\end{aligned}$$

además, sabemos que:

$$t^4 = (1 + t^2)(t^2 - 1) + 1 \Rightarrow \frac{t^4}{1 + t^2} = t^2 - 1 + \frac{1}{1 + t^2}$$

Ejercicios

Dado lo anterior, se tiene:

$$\begin{aligned} 8\int_0^1 \frac{t^4}{1+t^2}\,dt &= 8\int_0^1 t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\,dt \\ &= 8\left(\frac{t^3}{3} - t + \text{Arctan(t)}\Big|_0^1\right) \\ &= 2\pi - \frac{16}{3} \end{aligned}$$

finalmente,

$$\int_0^2 \frac{\sqrt[4]{2x}}{\sqrt{2}+\sqrt{x}}\,dx = 2\pi - \frac{16}{3}$$

de esta forma se obtiene lo solicitado.

Integración por Sustitución

Para calcular integrales definidas usando el método de sustitución, podemos considerar el siguiente teorema:

Teorema

Sean I y J dos intervalos cerrados en $\mathbb{R}$, y sean $f : I \to \mathbb{R}$ y $g : J \to \mathbb{R}$ dos funciones de clase C^1, además $g(J) \subset I$. Entonces $f \circ g$ es una función continua en J y se verifica que:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du, \quad \forall a, b \in J$$

Ejemplos:

1. Calcular $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\,dx$.

   Solución: haciendo la siguiente sustitución:

   $$u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx; \quad x = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ y } x = \sqrt{\pi} \Rightarrow u = \pi$$

   se tiene:

   $$\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin(u)\,du = -\cos(u)\Big|_0^{\pi} = 2$$

   Pero también podemos aplicar lo siguiente:

Ejemplos:

2. Sabiendo que $\int_0^1 f(t)\, dt = 7$. Determinar el valor de

$$\int_0^2 f\left(\frac{t}{2}\right) dt$$

Solución:

Integración por Partes

Para calcular integrales definidas usando el método de integración por partes podemos considerar el siguiente teorema:

Teorema

Sean $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $v : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en $]a, b[$, tales que sus derivadas son funciones integrables en $[a, b]$. Entonces,

$$\int_a^b u(x)v'(x)\, dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)\, dx$$

Ejemplos:

1. Calcular $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(x)\,dx$.

   Solución: haciendo

$$u = x \Rightarrow du = dx; \quad dv = \cos(x)\,dx \Rightarrow v = \sin(x)$$

   luego,

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(x)\,dx = x\sin(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\,dx$$
$$=$$

Ejemplos:

2. Sabiendo que $\int_0^1 f(t)e^t \, dt = 2$, $f(1) = 3$ y $f(0) = 0$. Calcular el valor de

$$\int_0^1 f'(t)e^t \, dt$$