Movimiento en Dos o Tres dimensiones

Física I - 510140

Prof. José Aguirre Gómez

Departamento de Física
Oficina 315
e-mail:jaguirre@udec.cl

Contenidos

4.1 Objetivos

Este capítulo es dedicado al estudio del movimiento en el espacio. La idea es generalizar el análisis del capítulo anterior al caso de movimientos es dos y tres dimensiones.

Los principales objetivos de este estudio son:

1. Representar, vectorialmente, la posición de un cuerpo en dos o tres dimensiones.
2. Determinar el vector velocidad de un cuerpo conociendo su trayectoria.
3. Obtener el vector aceleración de un cuerpo.
4. Interpretar las componentes paralela y perpendicular del vector aceleración de un cuerpo según su trayectoria.
5. Describir la trayectoria curva seguida por un proyectil.
6. Describir el movimiento en una trayectoria circular con rapidez constante o variable.

4.2 Vector de posición y vector velocidad

La descripción del **movimiento** de un cuerpo en el espacio requiere del conocimiento de su **posición**, según un sistema de coordenadas específico.

Vector de posición $\vec{r}$

Es un vector que va desde el origen del sistema de coordenadas al punto en el cual se encuentra el cuerpo. En un sistema de coordenadas rectangulares x, y, z, el vector de posición es dado por

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}. \quad (1)$$

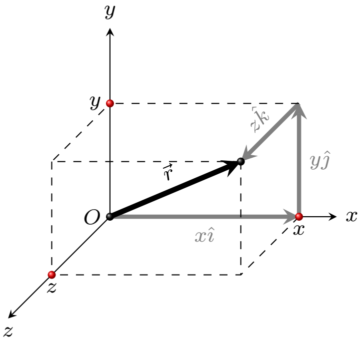


Figura 4.1: Vector de posición de una partícula en el espacio.

En un intervalo de tiempo Δt el cuerpo se mueve desde el punto P_1 (vector de posición $\vec{r}_1 = x_1\hat{\imath} + y_1\hat{\jmath} + z_1\hat{k}$ en el tiempo t_1) al punto P_2 (vector de posición $\vec{r}_2 = x_2\hat{\imath} + y_2\hat{\jmath} + z_2\hat{k}$ en el tiempo t_2). El vector desplazamiento es

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\hat{\imath} + (y_2 - y_1)\hat{\jmath} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$
$$\Delta\vec{r} = \Delta x\hat{\imath} + \Delta y\hat{\jmath} + \Delta z\hat{k}.$$

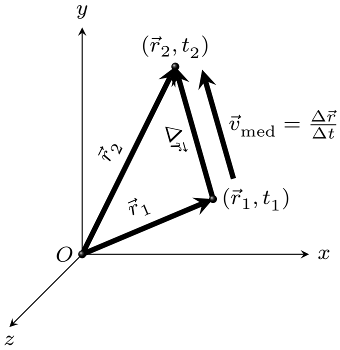


Figura 4.2: Vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ y vector velocidad media $\vec{v}_{\text{med}}$.

Vector velocidad media $\vec{v}_{\rm med}$

Vector desplazamiento dividido por el intervalo de tiempo:

$$\vec{v}_{\rm med} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} \qquad (2)$$

Vector velocidad instantánea $\vec{v}$

Límite de $\vec{v}_{\rm med}$ cuando $\Delta t \to 0$:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (3)$$

$|\vec{v}| = v$; **rapidez** de la partícula en un instante dado. $\vec{v}$ apunta en la dirección del movimiento de la partícula en ese instante.

En cualquier punto de la trayectoria, el vector de velocidad instantánea es tangente a la trayectoria en ese punto. Las componentes de $\vec{v}$ son

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \qquad (4)$$

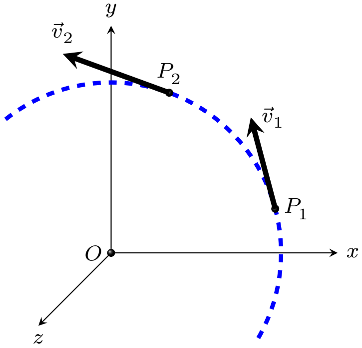


Figura 4.3: Vectores velocidad instantánea de una partícula en P_1 y P_2. Línea segmentada azul representa una posible trayectoria de la partícula.

De lo anterior se tiene

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k}. \qquad (5)$$

La magnitud del vector velocidad $\vec{v}$ es

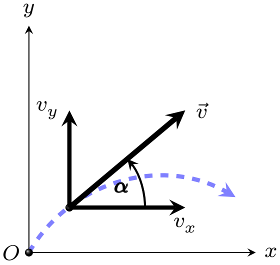
$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \qquad (6)$$

En la Fig.3.4 el cuerpo se mueve en el plano xy (en una trayectoria arbitraria dibujada en línea segmentada), luego $z = 0$ y $v_z = 0$, con

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

siendo la dirección del vector velocidad $\vec{v}$ obtenida a partir del ángulo α que forma con el eje x

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} \;\rightarrow\; \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right). \qquad (7)$$



3.4: Vector velocidad $\vec{v}$ y sus componentes v_x y v_y para una partícula que se mueve en el plano xy.

4.3 Vector aceleración media $\vec{a}_{\text{med}}$

Para un cuerpo que se mueve desde la posición $P_1 : (\vec{r}_1,\ \vec{v}_1,\ t_1)$ a la posición $P_2 : (\vec{r}_2,\ \vec{v}_2,\ t_2)$, se define el vector **aceleración media** $\vec{a}_{\text{med}}$, como el cambio de velocidad $\Delta\vec{v}$ por el intervalo de tiempo Δt,

$$\vec{a}_{\text{med}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}. \tag{8}$$

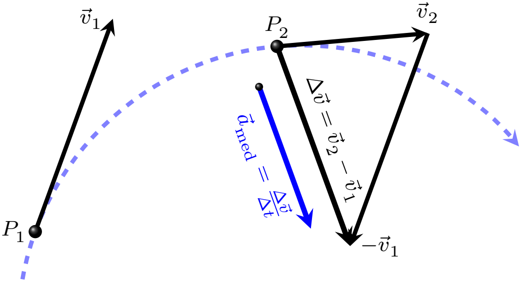


Figura 4.5: Movimiento de una partícula desde el punto P_1 al punto P_2. Vector cambio de velocidad y vector aceleración media.

Vector aceleración instantánea $\vec{a}$

El vector aceleración instantánea $\vec{a}$ en un punto P es dado por

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{9}$$

Las componentes del vector aceleración instantánea son

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}. \tag{10}$$

o, en términos de los vectores unitarios,

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k}. \tag{11}$$

Además

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}, \tag{12}$$

o

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}. \tag{13}$$

Componentes perpendicular y paralela de la aceleración

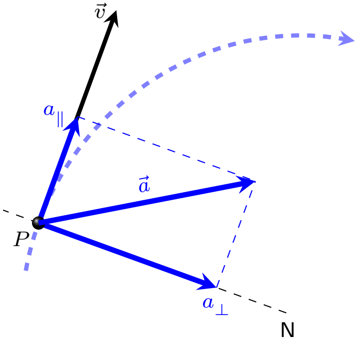


Figura 4.6: Componentes de aceleración paralela $a_{\|}$ y perpendicular $a_{\perp}$ a la trayectoria.

En el punto P la velocidad de la partícula, en la dirección de la tangente a la trayectoria en ese punto, es $\vec{v}$.

La aceleración de una partícula puede describir cambios en la rapidez $|\vec{v}|$ de la partícula, en la dirección de su movimiento o en ambas.

La componente de $\vec{a}$ *paralela* a la trayectoria, $a_{\|}$, indica cambios en la **rapidez de la partícula**;

La componente de $\vec{a}$ *perpendicular* a la trayectoria, $a_{\perp}$, perpendicular a la velocidad, indica cambios en la **dirección del movimiento**.

N representa la normal a la trayectoria de la partícula en el punto P.

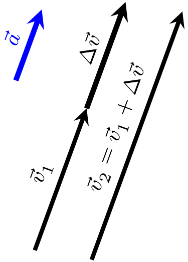


Figura 4.7: **Aceleración paralela a la velocidad de la partícula**. Existe un cambio en la **magnitud** de la velocidad, pero no en su **dirección**. La partícula se mueve en línea recta con rapidez variable.

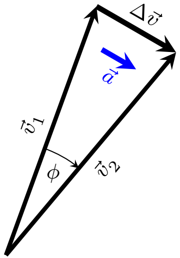


Figura 4.8: **Aceleración perpendicular a la velocidad de la partícula**. Existe un cambio en la **dirección** de la velocidad, pero no en su **magnitud**. La partícula se mueve en una trayectoria curva con rapidez constante.

En general, la aceleración $\vec{a}$ tiene **ambas componentes** paralela y perpendicular a la velocidad $\vec{v}$.

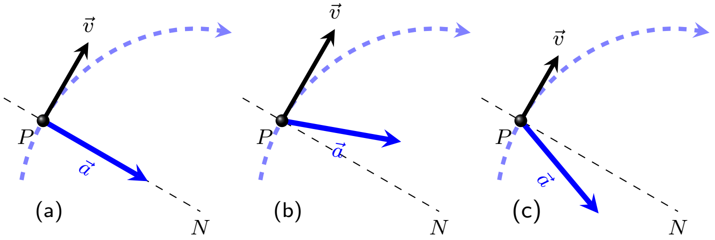


Figura 4.9: Vectores velocidad y aceleración para una partícula que pasa por un punto P de una trayectoria curva con rapidez (a) constante, (b) creciente y (c) decreciente.

Si $|\vec{v}| = \text{cte.}$, $\vec{a}$ es perpendicular a la trayectoria y a $\vec{v}$: La aceleración apunta en la dirección normal a la trayectoria y hacia el lado cóncavo de la misma.

Si $|\vec{v}|$ aumenta, se tiene que $a_\perp \neq 0$ y, además, $a_\parallel$ con la misma dirección de $\vec{v}$: La aceleración $\vec{a}$ apunta en una dirección arriba de la normal a la trayectoria.

Si $|\vec{v}|$ disminuye, la componente $a_\parallel$ tiene dirección opuesta a la de $\vec{v}$ y $\vec{a}$ apunta en una dirección debajo de la normal a la trayectoria.

4.4 Movimiento de proyectiles

Proyectil: cualquier cuerpo que recibe una velocidad inicial y luego sigue una trayectoria determinada totalmente por los efectos de la aceleración de gravedad y de la resistencia del aire.

El camino que sigue un proyectil es su **trayectoria**.

Consideremos al proyectil como una partícula y con aceleración (debida a la gravedad) de magnitud y dirección constante, y sin considerar los efectos de la resistencia del aire (vital en el caso de un paracaidista) y la curvatura (misiles de largo alcance) y rotación de la tierra.

El movimiento de un proyectil está siempre limitado a un plano vertical determinado por la velocidad inicial [ver Figura 4.10] (debido a que la aceleración es exclusivamente vertical).

Se tiene un movimiento en *dos dimensiones*. Sea el plano del movimiento el plano xy, con el eje y vertical hacia arriba y el eje x horizontal.

Las componentes de la aceleración en este movimiento son, entonces,

$$a_x = 0, \quad a_y = -g. \tag{14}$$

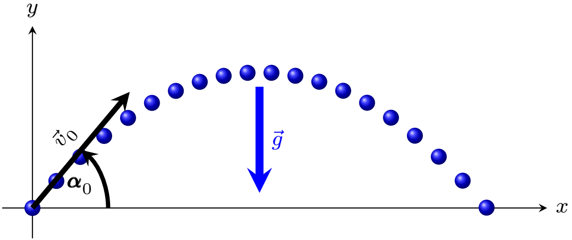


Figura 4.10: Trayectoria de un proyectil. El proyectil se mueve en un plano vertical que contiene al vector $\vec{v}_0$. La trayectoria del proyectil depende sólo de $\vec{v}_0$ y de la aceleración de gravedad $\vec{g}$.

Como a_x y a_y son constantes, usaremos las ecuaciones vistas en el Capítulo §3.

Suponga que en $t = 0$ la partícula está en el punto de coordenadas iniciales (x_0, y_0) con componentes de velocidad de valores iniciales v_{0x} y v_{0y}. Para el movimiento en el eje x, se tiene

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t \quad \rightarrow \quad v_x = v_{0x}, \quad a_x = 0 \tag{15a}$$

$$x(t) = x_0 + v_x t \quad \rightarrow \quad x(t) = x_0 + v_{0x} t. \tag{15b}$$

Podemos tratar separadamente la coordenada x de la coordenada y.

Se puede analizar el movimiento de un proyectil como una combinación de un movimiento horizontal con velocidad constante y un movimiento vertical con aceleración constante.

La Fig.11 muestra dos proyectiles con diferentes movimientos a lo largo del eje x, pero con idéntico movimiento a lo largo del eje y.

El de la izquierda se deja caer desde el reposo.

El de la derecha se proyecta horizontalmente $(\alpha_0 = 0)$ con velocidad inicial $\vec{v}_0$.

Ambos proyectiles tienen coordenada x diferente, mas coordenada y igual en todo t.

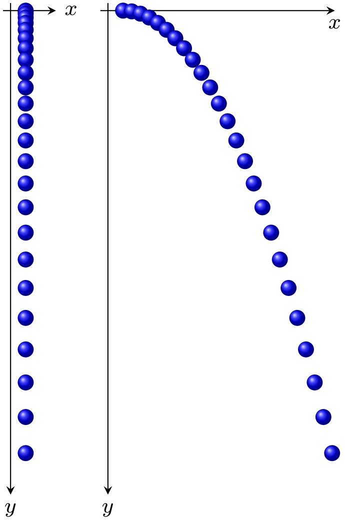


Figura 4.11: Dos proyectiles.

Para el movimiento en el eje y, las ecuaciones son:

$$v_y(t) = v_{0y} - gt, \quad ; \quad y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2. \tag{16}$$

Generalmente, se toma la posición inicial (en $t = 0$) como origen; así $x_0 = y_0 = 0$.

Representando la velocidad inicial $\vec{v}_0$ a través de v_0 (la rapidez inicial de la partícula) y el ángulo α_0 con el eje x, se tiene

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha_0, \quad v_{0y} = v_0 \sin\alpha_0. \tag{17}$$

Usándolas en las Ecs.(15a) a (16) y, haciendo $x_0 = y_0 = 0$, se tienen las ecuaciones para el movimiento de un proyectil

$$x(t) = (v_0 \cos\alpha_0)t \tag{18a}$$

$$y(t) = (v_0 \sin\alpha_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{18b}$$

$$v_x = v_0 \cos\alpha_0 \tag{18c}$$

$$v_y(t) = v_0 \sin\alpha_0 - gt. \tag{18d}$$

Esas ecuaciones describen la posición y la velocidad del proyectil en cualquier tiempo t.

Información a partir de esas ecuaciones, para cualquier tiempo t:

1. La distancia r del proyectil al origen es:

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{19}$$

La rapidez del proyectil es:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \tag{20}$$

2. La *dirección* de la velocidad, en términos del ángulo α que forma con el eje x, es:

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} \quad \rightarrow \quad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right). \tag{21}$$

El vector velocidad $\vec{v}$ es tangente a la trayectoria en todos los puntos.

3. Despejando t de la Ec.(18a), se tiene $t = x/(v_0 \cos\alpha_0)$, y sustituyendo esa expresión para t en la Ec.(18b),

$$y = (\tan\alpha_0)x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha_0}x^2. \tag{22}$$

o sea, de la forma general, $y = bx - cx^2$, con b y c constantes: Con este modelo simplificado, la trayectoria de un proyectil siempre es una **parábola**.

4.5 Ejemplos y Ejercicios

Ejemplo 1: Se está usando un vehículo robot para explorar la superficie de Marte. El módulo de descenso está en el origen de coordenadas; entanto que la superficie marciana circundante está en el plano xy. El vehículo, que será representado por un punto, tiene coordenadas x e y que varían con el tiempo según

$$x(t) = 2.0\,\mathrm{m} - \left(0.25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)t^2$$
$$y(t) = \left(1.0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)t + \left(0.025\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\right)t^3$$

1. Obtenga las coordenadas del vehículo y su distancia al módulo en $t = 2.0\,\mathrm{s}$.
2. Obtenga los vectores de desplazamiento y el de velocidad media del vehículo entre $t = 0.0\,\mathrm{s}$ y $t = 2.0\,\mathrm{s}$.
3. Deduzca una expresión general para el vector velocidad instantánea del vehículo. Exprese la velocidad instantánea en $t = 2.0\,\mathrm{s}$, en forma de componentes y además en términos de magnitud y de dirección.

Desarrollo: En este caso el movimiento es en dos dimensiones (plano xy).

(1) Las coordenadas del vehículo en $t_2 = 2.0\,\mathrm{s}$ son

$$x(t_2) = 2.0\,\mathrm{m} - \left(0.25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(2.0\,\mathrm{s})^2 = 1.0\,\mathrm{m}$$
$$y(t_2) = \left(1.0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)(2.0\,\mathrm{s}) + \left(0.025\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\right)(2.0\,\mathrm{s})^3 = 2.2\,\mathrm{m}$$

De esto, el vector posición en el instante $t_2 = 2.0\,\mathrm{s}$ es

$$\vec{r}(t_2) = x(t_2)\hat{\imath} + y(t_2)\hat{\jmath} = (1.0\hat{\imath} + 2.2\hat{\jmath})\,\mathrm{m}$$

y su distancia al módulo en ese instante es

$$|\vec{r}(t_2)| = r(t_2) = \sqrt{[x(t_2)]^2 + [y(t_2)]^2} = \sqrt{(1.0)^2 + (2.2)^2}\,\mathrm{m} = 2.4\,\mathrm{m}.$$

(2) En $t_0 = 0.0\,\mathrm{s}$, las coordenadas del vehículo son $x(t_0) = 2.0\,\mathrm{m}$ e $y(t_0) = 0.0$. De esto, el vector posición en el instante $t = 0.0\,\mathrm{s}$ es $\vec{r}(t_0) = 2.0\hat{\imath}\,\mathrm{m}$ y su distancia al módulo es $|\vec{r}(t_0)| = r_0 = 2.0\,\mathrm{m}$.

El vector desplazamiento entre $t_0 = 0.0\,\mathrm{s}$ y $t_2 = 2.0\,\mathrm{s}$, es

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_0)\\ &= [x(t_2) - x(t_0)]\hat{\imath} + [y(t_2) - y(t_0)]\hat{\jmath} = [(1.0 - (2.0))\hat{\imath} + (2.2 - 0.0)\hat{\jmath}]\,\mathrm{m}\\ &= [(-1.0)\hat{\imath} + 2.2\hat{\jmath}]\,\mathrm{m}.\end{aligned}$$

El vector velocidad media entre $t_0 = 0.0\,\mathrm{s}$ y $t_2 = 2.0\,\mathrm{s}$, esto es, en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_0 = 2.0\,\mathrm{s}$, es

$$\begin{aligned}\vec{v}_{\mathrm{med}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} &= \left(\frac{(-1.0)}{2.0}\hat{\imath} + \frac{2.2}{2.0}\hat{\jmath}\right)\ \mathrm{m/s}\\ &= (-0.50\hat{\imath} + 1.1\hat{\jmath})\ \mathrm{m/s}\end{aligned}$$

(3) Para obtener las componentes v_x y v_y de la velocidad instantánea del vehículo, derivamos las expresiones de las coordenadas de posición $x(t)$ e $y(t)$ una vez con respecto al tiempo, así

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\left(0.50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)t \quad \text{y} \quad v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = 1.0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + \left(0.075\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\right)t^2$$

De las expresiones anteriores, las componentes de la velocidad instantánea en $t_2 = 2.0\,\mathrm{s}$, son

$$\begin{aligned} v_x(t_2) &= -\left(0.50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(2.0\,\mathrm{s}) = -1.0\,\mathrm{m/s} \\ v_y(t_2) &= \left[1.0\,\mathrm{m/s} + \left(0.075\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\right)(2.0\,\mathrm{s})^2\right] = 1.3\,\mathrm{m/s} \\ \vec{v}(t_2) &= (-1.0\hat{\imath} + 1.3\hat{\jmath})\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

La magnitud de la velocidad instantantánea en $t_2 = 2.0\,\mathrm{s}$, o sea, la rapidez del vehículo en ese instante es

$$|\vec{v}(t_2)| = v(t_2) = \sqrt{[v_x(t_2)]^2 + v_y(t_2)]^2} = \sqrt{(-1.0)^2 + (1.3)^2}\,\mathrm{m/s} = 1.6\,\mathrm{m/s}$$

La dirección con respecto al eje $+x$ es dada por el ángulo α_2

$$\alpha_2 = \tan^{-1}\left(\frac{v_y(t_2)}{v_x(t_2)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1.3}{-1.0}\right) = \tan^{-1}(-1.3) = -52^\circ.$$

Antes de asegurar que ésta es la dirección correcta, es preciso hacer un digrama de vectores del movimiento, pués, $\tan(128^\circ) = -1.3$.

De la siguiente figura es claro que la dirección con respecto al eje $+x$ es $\alpha_2 = (-52^\circ + 180^\circ) = +128^\circ$.

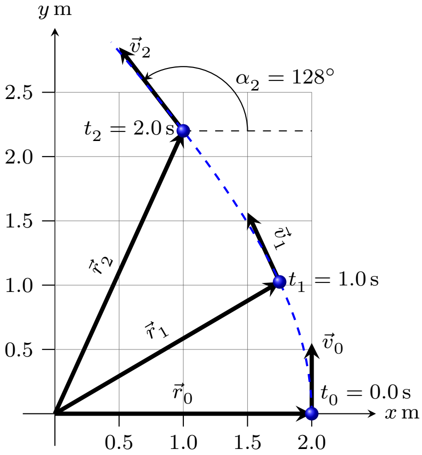


Figura 4.12: Trayectoria y vectores de posición y velicidad en $t_0 = 0.0\,\mathrm{s}$, $t_1 = 1.0\,\mathrm{s}$ y $t_2 = 2.0\,\mathrm{s}$ del vehículo robot.

Ejemplo 2: Veamos otra vez los movimientos del vehículo robot del Ejemplo 1.

1. Obtenga las componentes de la aceleración media en el intervalo de tiempo de $t = 0.0\,\mathrm{s}$ a $t = 2.0\,\mathrm{s}$.
2. Determine la aceleración instantánea en $t = 2.0\,\mathrm{s}$.

Desarrollo: (1) En el desarrollo del Ejemplo 1, encontramos las siguientes expresiones para las componentes de velocidad del vehículo robot en función del tiempo

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\left(0.50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)t$$
$$v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = 1.0\,\mathrm{m/s} + \left(0.075\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\right)t^2.$$

Luego, para $t_0 = 0.0\,\mathrm{s}$, se tiene

$$v_x(t_0) = 0.0\,\mathrm{m/s},$$
$$v_y(t_0) = 1.0\,\mathrm{m/s}.$$

Para $t_2 = 2.0\,\mathrm{s}$, se tiene

$$v_x(t_2) = -\left(0.50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(2.0\,\mathrm{s}) = -1.0\,\mathrm{m/s}$$
$$v_y(t_2) = 1.0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + \left(0.075\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\right)(2.0\,\mathrm{s})^2 = 1.3\,\mathrm{m/s}$$

Luego, para el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1 = (2.0\,\mathrm{s} - 0.0\,\mathrm{s}) = 2.0\,\mathrm{s}$, las componentes de la aceleración media del vehículo robot son

$$a_{\mathrm{med}-x} = \frac{v_x(t_2) - v_x(t_0)}{\Delta t} = \frac{-1.0\,\mathrm{m/s} - 0.0\,\mathrm{m/s}}{2.0\,\mathrm{s}} = -0.50\,\mathrm{m/s}^2$$
$$a_{\mathrm{med}-y} = \frac{v_y(t_2) - v_y(t_0)}{\Delta t} = \frac{1.3\,\mathrm{m/s} - 1.0\,\mathrm{m/s}}{2.0\,\mathrm{s}} = 0.2\,\mathrm{m/s}^2$$

(2) Para obtener la aceleración instantánea, derivamos las expresiones, con respecto al tiempo, para las componentes de la velocidad y evaluamos en el punto en consideración. Se obtiene, así

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = -\left(0.50\,\mathrm{m/s}^2\right)$$
$$a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = 2\left(0.075\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\right)t.$$

de modo que para el instante $t_2 = 2.0\,\mathrm{s}$, esas componentes son

$$a_x(t_2) = -0.50\,\mathrm{m/s}^2$$
$$a_y(t_2) = 2\left(0.075\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\right)(2.0\,\mathrm{s}) = 0.30\,\mathrm{m/s}^2.$$

El vector aceleración en ese instante es

$$\vec{a}(t_2) = (-0.50\hat{\imath} + 0.30\hat{\jmath})\ \mathrm{m/s}^2.$$

La magnitud de la aceleración, en ese instante, es

$$a(t_2) = |\vec{a}(t_2)| = \sqrt{a_x^2(t_2) + a_y^2(t_2)}$$
$$= \sqrt{(-0.50\,\mathrm{m/s^2})^2 + (0.30\,\mathrm{m/s^2})^2} = 0.58\,\mathrm{m/s}^2.$$

La dirección que el vector aceleración $\vec{a}(t_2)$ forma con el eje x es

$$\beta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{a_y(t_2)}{a_x(t_2)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0.30\,\mathrm{m/s}^2}{-0.50\,\mathrm{m/s}^2}\right) = -31^\circ.$$

Para estar seguro de la dirección es necesario que se haga un diagrama vectorial como el mostrado en la Fig.3.13. de la cual queda claro que $\beta_2 = 180° - 31° = 149°$.

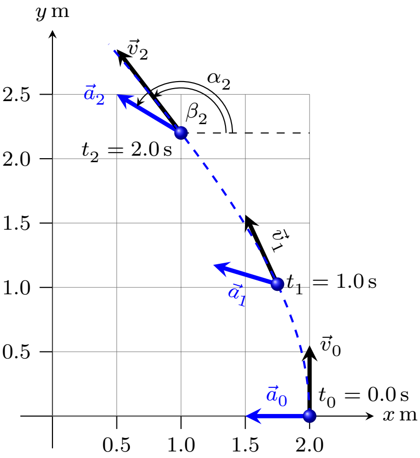


Figura 4.13: Trayectoria del vehículo robot mostrando, además, los vectores velocidad y aceleración en $t = 0.0\,\mathrm{s}$ $(\vec{v}_0, \vec{a}_0)$ y en $t = 2.0\,\mathrm{s}$ $(\vec{v}_2, \vec{a}_2)$.

Ejemplo 3: Un acróbata en motocicleta se lanza del borde de un risco. Justo en el borde, su velocidad es horizontal con magnitud $9.0\,\mathrm{m/s}$. Obtenga la distancia $|\vec{r}|$, distancia desde el borde, y la rapidez del motociclista $|\vec{v}|$, despué de $0.50\,\mathrm{s}$.

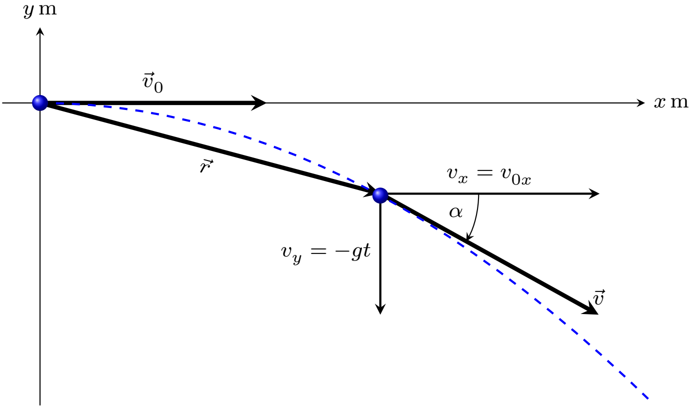


Figura 4.14: Esquema para el Ejemplo 3.

Desarrollo: Escojamos el borde del risco como nuestro origen de coordenadas. En este caso $\vec{v}_0$ es puramente horizontal, así, usando $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$, tenemos:

$$\alpha_0 = 0, \quad v_{0x} = v_0 \cos\alpha_0 = 9.0\,\mathrm{m/s}, \quad v_{0y} = v_0 \sin\alpha_0 = 0.$$

Las componentes x e y de la posición del motociclista en el instante $t = 0.50\,\mathrm{s}$ son

$$x(t) = v_{0x}t = (9.0\,\mathrm{m/s})(0.50\,\mathrm{s}) = 4.5\,\mathrm{m}$$
$$y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = -(4.9\,\mathrm{m/s^2})(0.50\,\mathrm{s})^2 = -1.2\,\mathrm{m}$$

La distancia del motociclista desde el borde a ese punto es

$$r(t) = |\vec{r}(t)| = \sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2} = \sqrt{(4.5\,\mathrm{m})^2 + (-1.2\,\mathrm{m})^2} = 4.6\,\mathrm{m}$$

Las componentes v_x y v_y de la velocidad del motociclista, en el instante $t = 0.50\,\mathrm{s}$, son

$$v_x(t) = v_{0x} = 9.0\,\mathrm{m/s}$$
$$v_y(t) = v_{0y} - gt = -gt = -(9.8\,\mathrm{m/s^2})(0.50\,\mathrm{s}) = -4.9\,\mathrm{m/s}$$

de modo que la rapidez del motociclista en ese instante es

$$\begin{aligned} v(t) = |\vec{v}(t)| &= \sqrt{[v_x(t)]^2 + [v_y(t)]^2} \\ &= \sqrt{(9.0\,\mathrm{m/s})^2 + (-4.9\,\mathrm{m/s})^2} \\ &= 10\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

La dirección del motociclista en ese instante es

$$\begin{aligned} \alpha &= \tan^{-1}\left(\frac{v_y(t)}{v_x(t)}\right) \\ &= \tan^{-1}\left(\frac{-4.9\,\mathrm{m/s}}{9.0\,\mathrm{m/s}}\right) \\ &= \tan^{-1}(-0.54) = -29^\circ. \end{aligned}$$

Ejemplo 4: Una pelota de baseball es bateada con una rapidez $v_0 = 37.0\,\mathrm{m/s}$ y un ángulo $\alpha_0 = 53.1^\circ$, en un lugar donde $g = 9.80\,\mathrm{m/s^2}$.

1. Calcule el vector de posición de la pelota y la magnitud y dirección de su velocidad cuando $t = 2.00\,\mathrm{s}$.
2. Determine el tiempo en el que la pelota alcanza su punto más alto y su altura $y_{\text{máx}}$ en ese punto.
3. Obtenga el *alcance horizontal* R: la distancia horizontal desde el punto de partida hasta donde la pelota cae al suelo.

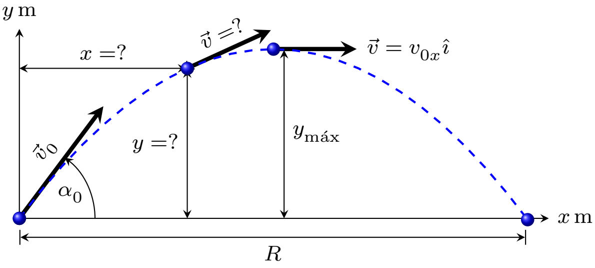


Figura 4.15: Esquema para el Ejemplo 4.

Desarrollo.

(1) Sean $x_0 = y_0 = 0$ las coordenadas iniciales, desde la cual la pelota sale. Las componentes de la velocidad inicial en el plano xy son:

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha_0 = (37.0\,\mathrm{m/s})\cos(53.1^\circ) = 22.2\,\mathrm{m/s}$$
$$v_{0y} = v_0 \sin\alpha_0 = (37.0\,\mathrm{m/s})\sin(53.1^\circ) = 29.6\,\mathrm{m/s}$$

En $t = 2.00\,\mathrm{s}$, las coordenadas x e y de la pelota son, respectivamente,

$$\begin{aligned} x(t) &= v_{0x}t = (22.2\,\mathrm{m/s})(2.00\,\mathrm{s}) = 44.4\,\mathrm{m} \\ y(t) &= v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = (29.6\,\mathrm{m/s})(2.00\,\mathrm{s}) - (4.90\,\mathrm{m/s^2})(2.00\,\mathrm{s})^2 \\ &= 59.2\,\mathrm{m} - 19.6\,\mathrm{m} = 39.6\,\mathrm{m}. \end{aligned}$$

El vector de posición de la pelota en $t = 2.00\,\mathrm{s}$, entonces, es

$$\vec{r}(t) = (44.4\hat{\imath} + 39.6\hat{\jmath})\,\mathrm{m}$$

Las componentes v_x y v_y de la velocidad de la partícula en el instante $t = 2.00\,\mathrm{s}$ son, respectivamente,

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_{0x} = 22.2\,\mathrm{m/s} \\ v_y(t) &= v_{0y} - gt = 29.6\,\mathrm{m/s} - (9.80\,\mathrm{m/s^2})(2.00\,\mathrm{s}) \\ &= 29.6\,\mathrm{m/s} - 19.6\,\mathrm{m/s} = 10.0\,\mathrm{m/s}. \end{aligned}$$

La rapidez de la pelota en $t = 2.00\,\mathrm{s}$, entonces, es

$$\begin{aligned} v(t) = |\vec{v}(t)| &= \sqrt{[v_x(t)]^2 + [v_y(t)]^2} \\ &= \sqrt{(22.2\,\mathrm{m/s})^2 + (10.0\,\mathrm{m/s})^2} \\ &= 24.3\,\mathrm{m/s}. \end{aligned}$$

La dirección de la velocidad (dirección del movimiento) es

$$\begin{aligned} \alpha &= \tan^{-1}\left(\frac{v_y(t)}{v_x(t)}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{10.0\,\mathrm{m/s}}{22.2\,\mathrm{m/s}}\right) \\ &= \tan^{-1}(0.454) = 24.5^\circ \end{aligned}$$

(2) En el punto más alto de la trayectoria $v_y = 0$, así el tiempo en el cual la pelota alcanza su altura máxima es

$$v_y = 0 \quad \to \quad v_{0y} - gt = 0 \quad \to \quad t = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{29.6\,\mathrm{m/s}}{9.80\,\mathrm{m/s^2}} = 3.02\,\mathrm{s}.$$

Usando ese valor para el tiempo en la expresión para la coordenada y se obtiene la altura máxima

$$\begin{aligned} y_{\text{máx}}(t) &= v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = (29.6\,\mathrm{m/s})(3.02\,\mathrm{s}) - (4.90\,\mathrm{m/s^2})(3.02\,\mathrm{s})^2 \\ &= 89.4\,\mathrm{m} - 44.7\,\mathrm{m} = 44.7\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

(3) El alcance horizontal R se obtiene cuando la pelota toca el suelo, esto es cuando la altura de la pelota es $y = 0$, de modo tal que

$$v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \quad \to \quad t\left(v_{0y} - \frac{1}{2}gt\right) = 0 \tag{23}$$

De esa expresión se obtienen las siguientes soluciones

$$t = 0, \quad \text{y} \quad t = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2(29.6)}{9.80}\,\mathrm{s} = 6.04\,\mathrm{s}.$$

El tiempo $t = 0$ equivale al instante en el que la pelota sale lanzada como un proyectil y el tiempo $t = 6.04\,\mathrm{s}$ corresponde al tiempo en el que la pelota regresa al nivel horizontal, nuevamente. El alcance horizontal R, entonces, es

$$R = v_{0x}t = (22.2\,\mathrm{m/s})(6.04\,\mathrm{s}) = 134\,\mathrm{m}$$

La componente vertical de la velocidad en ese punto es

$$\begin{aligned} v_y(t) &= v_{0y} - gt = 29.6\,\mathrm{m/s} - (9.80\,\mathrm{m/s^2})(6.04\,\mathrm{s}) \\ &= 29.6\,\mathrm{m/s} - 59.2\,\mathrm{m/s} = -29.6\,\mathrm{m/s}. \end{aligned}$$

Note que la componente v_y de la velocidad en ese punto es $v_y = -v_{0y}$, o sea, tiene la misma magnitud de la componente y de la velocidad inicial del proyectil, mas signo opuesto. Dado que $v_x = v_{0x}$ es constante, el ángulo de llegada es $\alpha = -53.1^\circ$.

Ejemplo 5: Para un proyectil lanzado con rapidez v_0 y ángulo inicial α_0 (entre 0° y 90°), deduzca expresiones generales para la altura máxima $y_{\text{máx}}$ y el alcance horizontal R. Para una v_0 dada, ¿qué valor de α_0 da la altura máxima? y ¿qué valor da el alcance horizontal?

Desarrollo

La altura máxima $y_{\text{máx}}$ se alcanza cuando la componente v_y de la velocidad es cero, esto es, $v_y = 0$. Esto acontence en el tiempo

$$t = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g}.$$

Así, reemplazando $y_{\text{máx}}$ por y y la expresión aterior para t en la expresión para la coordenada y del proyectil se tiene

$$\begin{aligned} y_{\text{máx}} &= v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = (v_0 \sin \alpha_0)\left(\frac{v_0 \sin \alpha_0}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \sin \alpha_0}{g}\right)^2 \\ &= \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{g^2}\right) = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{2g} \end{aligned}$$

Para un dado valor de v_0, la altura máxima se alcanza cuando $\sin\alpha_0 = 1$, o sea cuando $\alpha_0 = 90^\circ$, es decir, cuando el proyectil es lanzado verticalmente.

El tiempo t en el cual el proyectil retorna al suelo es obtenido haciendo $y = 0$, o sea,

$$t = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \sin\alpha_0}{g}.$$

Sustituyendo x por R y esa expresión para t en la expresión para la coordenada x se tiene

$$R = v_{0x}t = v_0 \cos\alpha_0 \left(\frac{2v_0 \sin\alpha_0}{g}\right) = \frac{2v_0^2 \sin\alpha_0 \cos\alpha_0}{g}$$

Usando la identidad trigonométrica $2\sin\alpha_0 \cos\alpha_0 = \sin 2\alpha_0$, obtenemos

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g}.$$

El máximo valor de R se alcanza cuando $\sin 2\alpha_0 = 1$, esto es cuando $2\alpha_0 = 90^\circ$ o $\alpha_0 = 45^\circ$. Así, para un dado valor de v_0 el alcance máximo se obtiene cuando el proyectil es lanzado con un ángulo inicial $\alpha_0 = 45^\circ$ con relación a la horizontal.

Ejemplo 6: Suponga que Ud. lanza una pelota desde la ventana de su casa a $8.00\,\mathrm{m}$ sobre el nivel del suelo. Cuando la pelota sale de su mano, se mueve con una rapidez de $10.0\,\mathrm{m/s}$ con un ángulo de 20.0° debajo de la horizontal. ¿A qué distancia horizontal desde su ventana estará la pelota cuando llegue al suelo? Desprecie la resistencia del aire. Use $g = 9.80\,\mathrm{m/s^2}$.

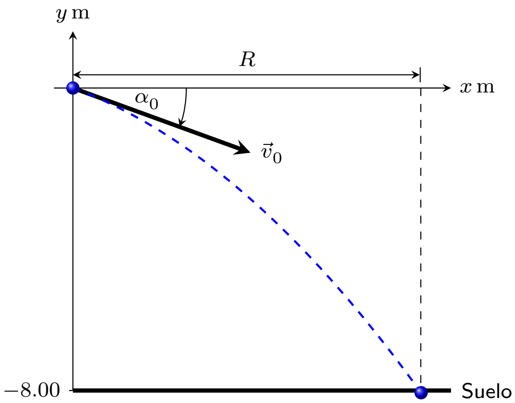


Figura 4.16: Esquema para el Ejemplo 6.

Desarrollo

Se desea encontrar el alcance máximo R, esto es, la coordenada de posición x cuando $y = -8.00\,\mathrm{m}$. El origen del sistema es, en este caso, la ventana con $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$. De la expresión para la coordenada y del proyectil se tiene

$$y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \rightarrow \quad t^2 - \frac{(2v_0 \sin\alpha_0)}{g}t + 2\frac{y}{g} = 0$$

Resolviendo esa ecuación cuadrática tenemos

$$\begin{aligned} t &= \frac{v_0 \sin\alpha_0}{g} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4v_0^2 \sin^2\alpha_0}{g^2} - 8\frac{y}{g}} = \frac{v_0 \sin\alpha_0 \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha_0 - 2gy}}{g} \\ &= \left(\frac{(10.0)\sin(-20.0) \pm \sqrt{(10.0)^2 \sin^2(-20.0) - 2(9.80)(-8.00)}}{9.80} \right) \mathrm{s} \\ &= \left(\frac{-3.42 \pm 13.0}{9.80} \right) \mathrm{s} \end{aligned}$$

De las cuales se obtienen las siguientes soluciones

$$t = -1.7\,\mathrm{s}, \quad \text{y} \quad t = 0.98\,\mathrm{s}.$$

La raiz negativa se refiere a un tiempo anterior al lanzamiento (lo descartamos). Usando el valor positivo de t en la expresión para la coordenada x, obtenemos

$$x(t) = R = v_0 \cos\alpha_0 t = (10.0\,\mathrm{m/s})\cos(-20.0^\circ)(0.98\,\mathrm{s}) = 9.2\,\mathrm{m},$$

la cual corresponde a la distancia horizontal desde su ventana cuando la pelota llega al suelo.

4.6 Movimiento en un círculo

Si una partícula se mueve en una trayectoria curva la dirección de su velocidad muda. Existe una componente perpendicular de la aceleración, $a_\perp$, aún cuando la rapidez de la partícula sea constante, esto es, $|\vec{v}| = \text{cte}$.

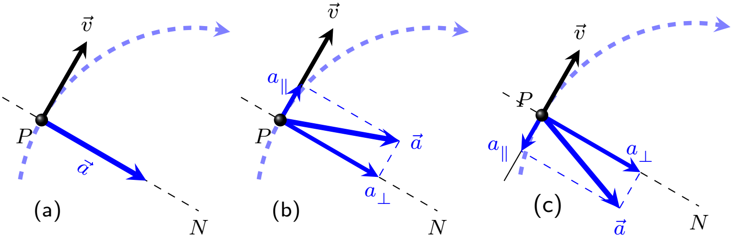


Figura 4.17: (a) Movimiento circular uniforme. (b) movimiento circular con rapidez creciente. (c) Movimiento circular con rapidez decreciente.

Movimiento circular uniforme

El cuerpo describe una trayectoria circular (un círculo) con $|\vec{v}| = \text{cte.}$: $\vec{a}_\parallel = \mathbf{0}$.

El vector aceleración es normal (perpendicular) a la trayectoria; se dirige hacia el centro de la trayectoria circular. Muda **la dirección de la velocidad** pero no su rapidez.

Sea un cuerpo que se mueve con rapidez constante en una trayectoria circular de radio R con centro en O. La partícula se mueve desde P_1 a P_2 en un tiempo Δt.

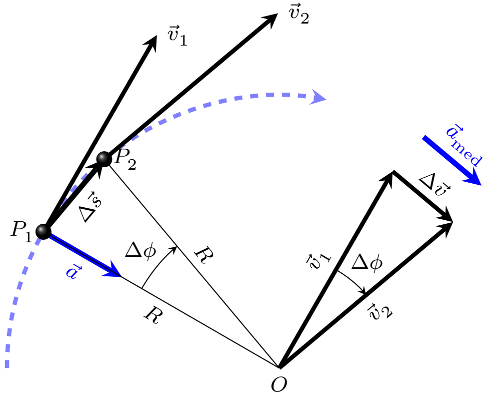


Figura 4.18: Movimiento circular uniforme.

En las Fig.3.18 $\vec{v}_1$ es la velocidad de la partícula en el punto P_1 y $\vec{v_2}$ la velocidad de la partícula en el punto P_2.

Note que los ángulos $\Delta\phi$ son iguales: $\vec{v}_1 \perp \overline{OP_1}$ y $\vec{v}_2 \perp \overline{OP_2}$: los triángulos son *semejantes*; cocientes de lados correspondientes son iguales, así

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v_1} = \frac{|\Delta\vec{s}|}{R} \quad \text{o} \quad |\Delta\vec{v}| = \frac{v_1}{R}|\Delta\vec{s}|.$$

Por otro lado,

$$|\vec{a}_{\text{med}}| = a_{\text{med}} = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v_1}{R}\frac{|\Delta\vec{s}|}{\Delta t}$$

y, en el punto P_1, la magnitud de la **aceleración instantánea**, a, es

$$a = |\vec{a}| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v_1}{R}\frac{|\Delta\vec{s}|}{\Delta t} = \frac{v_1}{R}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{s}|}{\Delta t},$$

mas

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{s}|}{\Delta t} = v_1.$$

Dado que P_1 puede ser cualquier punto sobre la trayectoria, omitimos el subíndice 1 y representamos la rapidez en cualquier punto por v, así se tiene

$$|\vec{a}| = a_{\mathrm{rad}} = a_{\perp} = \frac{v^2}{R}. \tag{24}$$

En un **movimiento circular uniforme***, la magnitud de la aceleración constante es igual al cuadrado del valor de la rapidez v dividida por el radio R del círculo; su dirección es perpendicular a la de la velocidad instantánea en cualquier punto $\vec{v}$ y apunta hacia el centro del círculo sobre el radio.*

Esta aceleración es también llamada **aceleración centrípeta**: **centrípeta**, en griego, significa "que busca el centro".

En función del periodo del movimiento T (tiempo en una vuelta completa)

$$v = \frac{2\pi R}{T}. \tag{25}$$

La magnitud de la aceleración centrípeta es

$$a_{\mathrm{rad}} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}. \tag{26}$$

Movimiento circular no uniforme

En este movimiento la partícula describe una trayectoria circular con rapidez **variable** (rueda de la fortuna; acelera al moverse en un lazo vertical).

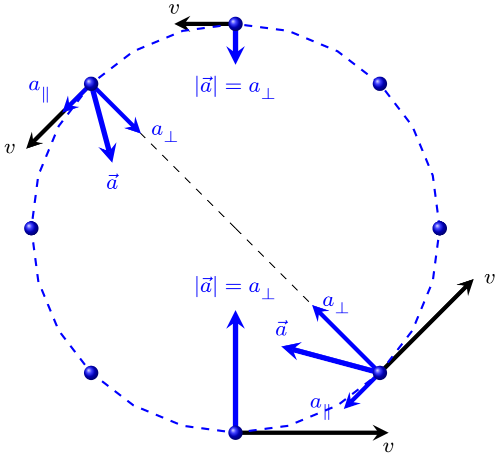


Figura 4.19: Esquema de un movimiento circular no uniforme.

Para este tipo de movimiento, la componente radial de la aceleración sigue siendo dada por la expresión

$$a_{\mathrm{rad}} = a_{\perp} = \frac{v^2}{R},$$

y es **perpendicular** a la velocidad instantánea y dirigida **hacia el centro** del círculo.

Dado que la rapidez v es diferente en diferentes puntos de la trayectoria, la componente radial de la aceleración, $a_{\mathrm{rad}} \neq \mathrm{constante}$. Mayor aceleración centrípeta a mayor rapidez.

En este tipo de movimiento existe una componente de aceleración **paralela** a la velocidad instantánea: $a_{\parallel}$.

Se sabe que la componente paralela de la aceleración $a_{\parallel}$ es igual a la **taza de cambio de la rapidez**, esto es

$$a_{\parallel} = \frac{d|\vec{v}|}{dt}. \tag{27}$$

La aceleración total en este movimiento es la suma vectorial de la componente radial o centrípeta y de la componente paralela o tangencial.

La componente tangencial de la aceleración tiene la dirección de la velocidad si la partícula está acelerando y opuesta, si está frenando.

Debe quedar claro que:

$$\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| \neq \frac{d|\vec{v}|}{dt}$$

Dado que $|\vec{v}|$ es el módulo de la velocidad instantánea (rapidez) de la partícula, la expresión

$$\frac{d|\vec{v}|}{dt}: \quad \text{es la tasa de cambio de la rapidez (aceleración paralela).}$$

y la expresión

$$\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right|: \quad \text{es la magnitud del vector aceleración instantánea.}$$

En un movimiento circular no uniforme

$$\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = |\vec{a}| = \sqrt{a_{\parallel}^2 + a_{\perp}^2}.$$

Ejemplo 7: ¿Cuál es la aceleración centrípeta de la Tierra a medida que se mueve en su órbita alrededor del Sol? Considere una órbita circular de radio 1.50×10^{11} m. Use $\pi = 3.14$

Desarrollo

Sabemos que la Tierra orbita alrededor del Sol en un año.

Recuerde que el periodo, T, es el tiempo que demora un objeto en dar una vuelta completa en una trayectoria circular, así el periodo de la órbita de la Tierra alrededor del Sol es:

$$T = 1\,\text{año}\left(\frac{365\,\text{días}}{1\,\text{año}}\right)\left(\frac{24\,\text{h}}{1\,\text{día}}\right)\left(\frac{60\,\text{min}}{1\,\text{h}}\right)\left(\frac{60\,\text{s}}{1\,\text{m}}\right) = 3.15 \times 10^7\,\text{s}.$$

La aceleración centrípeta de la Tierra en su trayectoria alrededor del Sol es:

$$\begin{aligned} a_\perp &= \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{4\pi^2(1.50 \times 10^{11}\,\text{m})}{(3.15 \times 10^7\,\text{s})^2} = \frac{4(9.86)(1.50 \times 10^{11}\,\text{m})}{1.02 \times 10^{15}\,\text{s}^2} \\ &= \frac{5.92 \times 10^{12}\,\text{m}}{1.02 \times 10^{15}\,\text{s}^2} = 5.80 \times 10^{-3}\,\text{m/s}^2 \end{aligned}$$