CLASE 05: (Lunes 22 Agosto)

EDO ORDEN SUPERIOR

DEF: una EDO de orden DOS es LINEAL, si ella puede escribirse como:

$$\boxed{a(t)\,y''(t) + b(t)\,y'(t) + c(t)\,y(t) = f(t).}$$

donde $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ y $f(t)$ son funciones continuas y conocidas. Si $f \equiv 0$, la EDO se dice HOMOGÉNEA. (Note que la EDO NO está normalizada).

Ejemplo: $(t-1)\,y'' - t^3\,y'(t) + y(t) = \operatorname{sen}(t)$.

(Aquí: $a(t) = t-1$ ; $b(t) = -t^3$, $c(t) = 1$ ; $f(t) = \operatorname{sen}(t)$)

DEF: (solución)

una solución para una EDO lineal de orden dos es una función que satisface la ecuación.

Ejemplo: la EDO homogénea $\boxed{y''(t) - y'(t) - 6y(t) = 0}$

tiene por solución a $\boxed{y(t) = e^{3t}}$

En efecto, basta reemplazar $y'(t) = 3e^{3t}$ e $y''(t) = 9e^{3t}$.

en la EDO: $e^{3t}\left[9 - 3 - 6\right] = 0$.

✓✓

OK!

Ejemplo 2

La función $\boxed{z(x) = c_1 x^5 + c_2 x^{-2} - \frac{1}{12} x}$

es solución de la EDO lineal de segundo orden y a coeficientes variables:

$$\boxed{x^2 y''(x) - 2x y'(x) - 10 y(x) = x \quad \ldots (*)}$$

En efecto; $z'(x) = 5c_1 x^4 - 2c_2 x^{-3} - \frac{1}{12}$

$$z''(x) = 20 c_1 x^3 + 6 c_2 x^{-4}$$

Ahora, reemplazando en la EDO (*) ...

(Ejercicio).

OBS: Veremos que la EDO $\boxed{y''(x) - 2y(x) = x}$

se podrá escribir como:

$\boxed{L y = x}$, donde $L = (D^2 - 2)$

con $D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$ (próxima clase)

OBS: La EDO lineal de 2º orden puede ser a

- coef. variables.
- coef. constantes.

(i) coeficientes variables:

$$\boxed{(x-1)y''(x) - xy'(x) + e^{x}y(x) = \operatorname{sen}(x)}$$

$a(x) = x-1$ ; $b(x) = -x$ ; $c(x) = e^{x}$ ; $f(x) = \operatorname{sen}(x)$

(ii) coef. constantes:

$$\boxed{y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0}$$

Veremos métodos para la busqueda de solución en ambos casos. Estos métodos son diferentes.

# Elementos de Álgebra Lineal. Recordemos:

Sea $V$ espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ ($=\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$)

- Sean $u, v, w \in V \Rightarrow \begin{cases} u+v = v+u \in V \\ (u+v)+w = u+(v+w) \in V. \end{cases}$

- Existen $1 \in \mathbb{K}$, $\theta \in V$ tal que $\begin{cases} \forall u \in V, \ 1\cdot u = u \\ \theta + u = u. \end{cases}$

- $\forall u \in V$, existe $(-u) \in V$ tal que: $u + (-u) = \theta$

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall u, w \in V$: $\begin{cases} (\alpha\cdot\lambda)\, u = \alpha\cdot(\lambda u) \\ \alpha\cdot(u+w) = \alpha u + \alpha w \end{cases}$

Ejemplos: ① $V = \mathbb{R}^n$ ; $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

② $V = C(I, \mathbb{R}) = \{ f : I \to \mathbb{R}, \ f \text{ continua en } I \}$

(aquí $I = ]a, b[ \subseteq \mathbb{R}$, también puede ser $I = \mathbb{R}$)

¡ Aquí los vectores son funciones !

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall f, g \in V$ $\Rightarrow \begin{cases} \underline{f+g} \in V \\ \underline{\lambda f \in V} \end{cases}$ (suma de funciones continuas es continua).

Note que: $\dim[C(I, \mathbb{R})] = +\infty$.

Sean $V, W$ dos $\mathbb{K}$ espacios vectoriales, una aplicación (función) $T: V \to W$ es lineal, si

esta + es en $V$ + es $W$

$$\begin{array}{l} \forall\, u, v \in V \\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} T(u+v) = T(u) + T(v) \\ T(\lambda u) = \lambda T(u) \end{array} \right.$$

Sigue que $T(\theta_V) = \theta_W$

Ejemplo: sea $V = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

- Note que si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es definido por $f(t) = e^{2t}$, entonces $f \in V$.
- Pero $g(t) = \dfrac{1}{t-1}$ no pertenece a $V$.

Sin embargo, si ponemos $W = C(I, \mathbb{R})$ con $I = ]-1, 1[$, entonces $g \in W$.

Ejemplo: Definamos $V = C(I, \mathbb{R})$ e $I = ]-2, 2[$.

$T: V \to \mathbb{R}$ como $T(f) = f(1)$. Entonces $T$ es lineal

$(V \ni f \mapsto T(f) = f(1) \in \mathbb{R})$ ; $g \in V$ ; $g \to g(1)$

porque $T(f+g) = (f+g)(1) = f(1) + g(1)$

$= T(f) + T(g)$

( En general,

DEF: Para $T \in \mathcal{L}(V, W)$ ($T: V \to W$ aplicación lineal),

se define

$$\boxed{\ker(T) = \{ u \in V : T(u) = \theta_W \}}$$ )

Ejemplo: $V = C(I, \mathbb{R})$; $I = [-2, 2]$.

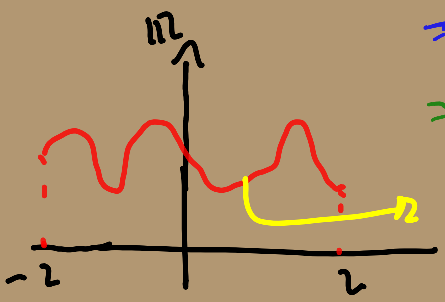
$T: C(I, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ ; $T(f) = f(1)$.

($T(\lambda f) = (\lambda f)(1)$
$= \lambda f(1)$
$= \lambda T(f)$)

$\ker(T) := \{ f \in V : f(1) = 0 \}$

$= \{ u \in V : T(u) = \theta_W \}$

$= \{ f \in V : f(1) = \theta_{\mathbb{R}} \}$





Note que si $I = ]a, b[$

$V = C(I, \mathbb{R})$ y si $g \in V$; entonces se

suele identificar a $g$ con $g(t)$

Note que $\begin{cases} g \in V = C(I, \mathbb{R}) \\ g(t) \in \mathbb{R} \end{cases}$

—— o ——

**Ejemplo:** (Importante)

Sea $T : C^1(I,\mathbb{R}) \longrightarrow C(I,\mathbb{R})$

definido por $T(y(t)) = y'(t) - e^t y(t)$

$\hookrightarrow$ (en rigor: $\boxed{T(y) = y' - e^t y}$).

• $T$ es lineal pues: $T(y+z) = (y+z)' - e^t(y+z)(t)$

$$= \left(y'(t) - e^t y(t)\right) + \left(z'(t) - e^t z(t)\right)$$

$$= T(y) + T(z), \text{ etc.}$$

OBS: ¿Qué es $Ker(T)$? vector nulo en $C^1(I,\mathbb{R})$

$\forall t \in I,$
$\theta(t) = 0_{\mathbb{R}}$.

$Ker(T) = \{ y \in C^1(I,\mathbb{R}) : T(y) = \theta \}$

Así, $z \in Ker(T) \Rightarrow T(z) = \theta$

$\Rightarrow z' - e^t z = \theta \iff \begin{cases} \forall t \in I, \\ z'(t) - e^t z(t) = 0 \end{cases}$

Esto es $z = z(t)$ es solución de la EDO

$$\boxed{y'(t) - e^t y(t) = 0}.$$

$T(y) = y' - e^t y \qquad ; \qquad I = ]a, b[$

$\boxed{T(y) \in C(I, \mathbb{R})}$ pero siendo $T(y) \in C(I, \mathbb{R})$

$T(y)$ se identifica con $(Ty)(t)$ $\left( T(y) \rightsquigarrow (Ty)(t) \right)$

Por lo tanto, $\boxed{y' - e^t y}$ se identifica con

$$\boxed{y'(t) - e^t y(t)}$$

Entonces. $T(y+z)$ indica a $y \in C(I, \mathbb{R})$

$\left( T(y+z)(t) = y(t) \right)$

$T(y+z) = (y+z)' - e^t(y+z) \in V = C(I, \mathbb{R})$

Así, $\left[ (y+z)' - e^t(y+z) \right](t) =$

$= (y+z)'(t) - e^t(y+z)(t)$

$= \underbrace{\left( y'(t) + e^t y(t) \right)}_{T(y)(t)} + \underbrace{\left( z'(t) - e^t z(t) \right)}_{T z(t)}; \quad \forall t$

$\Longleftrightarrow \qquad T(y+z) = T(y) + T(z)$

Además, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $T(\alpha y) = (\alpha y)' - e^t(\alpha y)$
$$= \alpha y' - \alpha e^t y$$
$$= \alpha\, T(y).$$

Así, T es lineal !

( $T : C^1(I,\mathbb{R}) \to C(I,\mathbb{R})$ :

Note que $y \in \ker(T) \iff T(y) = y' - e^t y = \theta$
$(\theta \in C(I,\mathbb{R})$

( $\theta$ es la función : $t \in I \to \theta(t) = 0_{\mathbb{R}}$ )

Por tanto, decir que $y \in \ker(T) \iff$

$$\iff \boxed{T(y) = y' - e^t y = \theta}$$

$$\iff \forall t \in I ; \ (y' - e^t y)(t) = \theta(t) = 0$$

$$\iff \boxed{\forall t \in I, \ y'(t) - e^t y(t) = 0}$$

se identifica con $\boxed{y' - e^t y = 0}$

Así, decir que $y \in \ker(T)$

( para $T$ definido como $\boxed{T(u) = u' - e^t u}$ )

significa que $y$ es solución de la EDO homogénea: $\boxed{z'(t) - e^t z(t) = 0}$

o

$$\boxed{u'(t) - e^t u(t) = 0}$$

**OBS:**

Sean $T_1$, $T_2$ dos aplicaciones lineales de $V \longrightarrow W$. Entonces podemos definir la aplicación lineal $T_1 + T_2$; donde:

$T_1 + T_2 : V \longrightarrow W$ es definida como

$$x \longrightarrow (T_1 + T_2)(x) := T_1(x) + T_2(x).$$

Además, si $T_3 : V \to W$ también es lineal, entonces

$$(T_1 + T_2) + T_3 : V \to W \text{ es tal que}$$

$$[(T_1 + T_2) + T_3](x) = (T_1 + T_2)(x) + T_3(x)$$

$$= T_1(x) + T_2(x) + T_3(x).$$