Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemática
Departamento de Matemática

Cálculo II

Ingeniería Civil

Prof. Víctor Aros Quinán

Segundo Semestre 2021

Clase Nº6: Cálculo II
Integral de Riemann y Aproximación Numérica de una Integral Definida

Integral de Riemann

La siguiente definición de integral es mucho más general que la dada anteriormente pues no considera sólo a funciones continuas, y es conocidad como Integral de Riemann.

Definición

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función y sea $P = \{a = x_0, ..., x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$, si escogemos $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ con $k = 1, ..., n$. La suma de Riemann de f asociada a la partición P es definida por:

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\left(x_k - x_{k-1}\right)$$

Integral de Riemann

Definición

Diremos que una función es **Riemann - Integrable** en $[a, b]$ si existe $L \in \mathbb{R}$, tal que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \text{ partición } P : \|P\| < \delta \Rightarrow \left| L - \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k \right| < \varepsilon$$

donde L está dado por:

$$L = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\, dx$$

Observación: El valor de el limite anterior es llamado **integral de Riemann** de f en el intervalo $[a, b]$. Además,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

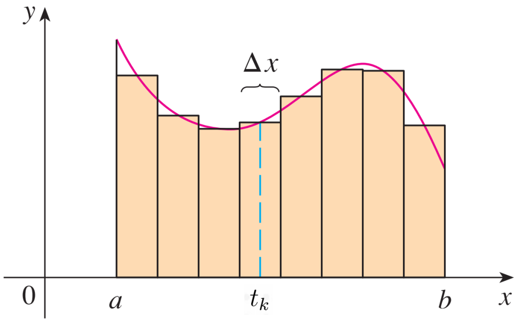
Integral de Riemann

A continuación definiremos una partición regular que nos ayudarán a realizar algunos cálculos de integrales definidas.

Sea $n \in \mathbb{N}$, se define la partición regular P_n del intervalo $[a, b]$ como:

$$x_0 = a, \quad x_1 =$$

lo cual se puede visualizar en la siguiente figura,



Integral de Riemann

Además, si consideramos $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ con $k = 1, 2, ..., n$, la suma de Riemann de f con respecto a P_n está dada por:

$$S(f, P_n) =$$

Corolario

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces:

$$\int_a^b f(x)\, dx =$$

El corolario anterior nos aclara el uso de la notación $\int_a^b f(x)\, dx$ para representar la integral de una función, pues para n suficientemente grande,

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)$$

Integral de Riemann

Con lo anterior se puede pensar que para n muy grande, el símbolo dx representa $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ y $\int$ representa el símbolo de la suma, escrito como un S alargada.

Observaciones: Las elecciones más típicas de $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ son:

1. el extremos izquierdo $t_k = x_{k-1} = a + (k-1)\frac{b-a}{n}$.
2. el extremo derecho $t_k = x_k = a + k\frac{b-a}{n}$.
3. el punto medio $t_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2} = a + (k - \frac{1}{2})\frac{b-a}{n}$.

Ejercicios

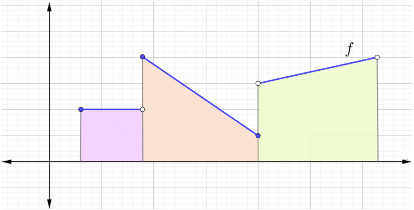
1. Utilice la definición de integral de Riemann para con P una partición regular cualquiera para comprobar los siguientes resultados.
   (a) $\int_a^b c\, dx = c(b-a)$
   (b) $\int_a^b x\, dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$
2. Utilizando la suma de Riemann $\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)$, evalúe las siguientes integrales definidas:
   (a) $\int_1^3 (x^2 - x)\, dx$; eligiendo a t_k como el punto medio y $n = 10$.
   (b) $\int_o^{\pi/4} \tan(x)\, dx$; eligiendo a t_k como el extremo superior y $n = 10$.
   (c) $\int_1^2 \frac{1}{x}; dx$; eligiendo a t_k como extremo inferior y $n = 10$.

Condición de Integrabilidad

Teorema

Si f es una función continua en todo $[a, b]$, entonces f es una función Riemann Integrable en $[a, b]$.

Observación: La clase de funciones integrables en $[a, b]$ es más amplia que la indicada en el teorema anterior. Por ejemplo, se puede probar que son funciones integrables todas aquellas funciones continuas en todo punto del intervalo $[a, b]$, excepto en un número finito de ellos, por ejemplo $x_1, x_2, ..., x_n$ donde los límites laterales existen. Lo anterior se puede visualizar en la siguiente figura.



Ejercicios

1. Muestre que la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 1 & , x \in \mathbb{Q}^c \cap [0,1] \end{cases}$$

   no es Riemann Integrable. **Hint:** determina la suma inferior y superior.

2. Sea $f : [0,5] \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x < 2 \\ 3 & , 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

   Determine el valor de las siguientes integrales definidas:

$$\int_0^2 f(x)\, dx; \qquad \int_2^5 f(x)\, dx; \qquad \int_0^5 f(x)\, dx$$

Aproximación Numérica

A continuación daremos una muestra de cómo obtener métodos para integrales de manera aproximada. Denotaremos por

$$E_n = \left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \right|$$

al error obtenido al calcular $\int_a^b f(x)\,dx$ usando la suma de Riemann

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)$$

asociada a la partición regular P_n. El siguiente teorema nos entrega cotas para el cálculo aproximado de integrales definidas usando este tipo de sumas.

Aproximación Numérica

Teorema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si f' es continua en $[a, b]$ y $K \in \mathbb{R}$ es tal que $|f'(x)| \leq K$, para todo $x \in [a, b]$, entonces:

$$E_n \leq \frac{K}{2n}(b-a)^2$$

siempre y cuando t_k sea o el extremo inferior o el extremo superior de $[x_{k-1}, x_k] \subset [a, b]$.

Observación: Si queremos calcular $\int_a^b f(x)\ dx$ de manera aproximada usando la suma de Riemann con un error de magnitud menor que $\varepsilon > 0$, entonces lo único que debemos hacer es plantearnos la siguiente inecuacaión:

$$E_n \leq \frac{K}{2n}(b-a)^2 < \varepsilon$$

Aproximación Numérica

De lo expresión anterior, podemos despejar n, es decir,

$$\frac{K}{2\varepsilon}(b-a)^2 < n$$

Así, eligiendo el entero n mayor que $\frac{k}{2\varepsilon}(b-a)^2$, sabremos cuantos intervalos requerimos para obtener una buena aproximación del valor de la integral definida con un error menor que el $\varepsilon > 0$ elegido, esto es,

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)$$

Ejemplo:

Calcular el valor aproximado de la integral definida

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx$$

con un error estimado de $\varepsilon = 0,1$.

Aproximación Numérica

Observación: La siguiente tabla resume el valor aproximado de la integral y cota para el error cometido para distintos valores de ε teniendo en consideración que:

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx \approx 1,08943$$

ε	nº subin.	valor aproximado	error	cota del error
10^{-1}	10	1,0716	0,0178	0,09
10^{2}	10^{2}	1,0874	0,0002	0,009
10^{3}	10^{3}	1,0894	0,00003	0,0009