Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemática
Departamento de Matemática

Cálculo II

Ingeniería Civil

Prof. Víctor Aros Quinán

Segundo Semestre 2021

Clase Nº28: Cálculo II
Ejercitación sobre Series Numéricas

Ejercicios

1. Calcule, si existe, la suma de la siguientes series:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)(n+5)}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4^{n-2}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 4$

2. Muestre que si $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n+1) = L$, donde L es un número real, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} [f(n+1) - f(n)] = L - f(1)$$

Ejercicios

3. Determine si las siguientes series numéricas son convergentes o divergentes:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-1}{1+7k}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+2)}{n}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{8n^5+7}}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}}{n3^n}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

   (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(n)}{1+n^2}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(-1)^{n+1}n}{4n+1}$ (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

4. Determinar para que valores de $p \in \mathbb{R}$ la serie converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)[\ln(\ln(n))]^p}$$

Ejercicios

5. Utilice el criterio de Leibniz para mostrar que la siguiente serie es convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (2n+1)}$$

6. Determine el intervalo y radio de convergencia de las siguientes series de potencias.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n (n+1)^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n 3^n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!(x+10)^n$

Ejercicios

7. Muestre que:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}, \text{ con } |x| < 1$$

8. Determine una expresión en series de potencias para la función $f(x) = \frac{1}{1+x}$ centrada en 3. HINT: en el denominador puedes sumar un 0 y hacer lo siguiente $1 + x - 3 + 3 = 4 + (x - 3)$
9. Exprese mediante series de potencias las funciones

$$g(x) = \frac{2}{x+1} \text{ y } h(x) = \frac{1}{x-1}$$

y luego deduzca la serie de potencias que representa a la función $f(x) = \frac{3x-1}{x^2-1}$. HINT: sumar las funciones puede ayudar.

Ejercicios

10. Considere la función $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$.

    (a) Determine la serie de potencias que representa a f e indique su radio de convergencia.

    (b) Determine la serie de potencias que representa a f' e indique su radio de convergencia.

    (c) Use el resultado obtenido para calcular la suma de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n}$$

Ejercicios

11. Determine la serie de Maclaurin de $f(x) = \cos(x)$ y demuestre que la serie converge a $\cos(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

12. Determine la serie de Maclaurin de $f(x) = \sin(x^2)$ y luego aproxima mediante tres términos de la serie el valor de la siguiente integral

$$\int_0^1 \sin(x^2)\, dx$$

13. Use la serie de Maclaurin de la función seno y arcotangente, para determinar el valor de los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{Arctan}(x)}{x^3}$

Series de Taylor y Maclaurin

Series de Maclaurin	Intervalos de convergencia
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$	$(-\infty, \infty)$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$	$(-\infty, \infty)$
$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$	$(-\infty, \infty)$
$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}$	$[-1, 1]$
$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$	$(-\infty, \infty)$
$\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$	$(-\infty, \infty)$
$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}$	$[-1, 1]$