UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Ecuaciones Diferenciales ordinarias (521218)
Transformada de Laplace

Definición:
Decimos que la función f es continua a trozos en $[0,\infty[$, denotado por $f \in C_T([0,\infty[)$, si $f \in C([0,\infty[)$ excepto en un número finito de puntos. Se entiende que la diferencia de los límites laterales en cada punto de discontinidad, es finita. Esto es, si f es discontina en t_1 entonces $|\lim_{t\to t_1^-} f(t) - \lim_{t\to t_1^+} f(t)| < \infty$. En $t_0 = 0$ se entiende que existe $\lim_{t\to 0^+} f(t) := f(0^+)$.
Ejemplo:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 2, \\ t+4 & \text{si } t \geq 2. \end{cases}$$

Definición:
Para $f \in C_T([0,\infty[)$ se define su Transformada de Laplace, TL, como

$$\mathcal{L}[f(t)](s) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{st}}\,\mathrm{f(t)}\,\mathrm{dt} \tag{1}$$

donde $s \in \mathbb{R}$ debe ser tal que la integral impropia (1) converge.
Note que la la TL de $f = f(t)$ es una función de la variable s, es decir, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(s)$.

Ejemplo
Si $f(t) = c$ donde c es una constante real, entonces por cálculo directo sigue

$$\mathcal{L}[c](s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{st}}\,\mathrm{c}\,\mathrm{dt} = \lim_{\mathrm{b}\to\infty} \int_0^{\mathrm{b}} \mathrm{e}^{-\mathrm{st}}\,\mathrm{c}\,\mathrm{dt} = \begin{cases} \dfrac{c}{s} & \text{si } s > 0, \\ \pm\infty & \text{si } s < 0. \end{cases} \tag{2}$$

Definición:
Diremos que la función $f \in C_T([0,\infty[)$ es de orden exponencial α, si existen constantes α y c de modo que $|f(t)| \leq c\,\mathrm{e}^{\alpha \mathrm{t}}$ para todo $t > 0$.

Teorema
Sea f una función de orden exponencial α, entonces $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{st}}\,\mathrm{f(t)}\,\mathrm{dt}$ converge para todo $s > \alpha$.
Dem:
Para $b > 0$ suficientemente grande, tenemos

$$\left|\int_0^b \mathrm{e}^{-\mathrm{st}}\,\mathrm{f(t)}\,\mathrm{dt}\right| \leq \int_0^b \mathrm{e}^{-\mathrm{st}}\,|\mathrm{f(t)}|\,\mathrm{dt} \leq \mathrm{c}\int_0^{\mathrm{b}} \mathrm{e}^{-\mathrm{st}}\,\mathrm{e}^{\alpha\mathrm{t}}\,\mathrm{dt} \leq \cdots \leq \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{s}-\alpha},$$

solamente si $s > \alpha$.

Ejemplo (cálculos directos)

1. $\mathcal{L}[\cos(at)](s) = \displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{st}} \cos(\mathrm{at})\, \mathrm{dt} = \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}^2 + \mathrm{a}^2}$ para $s > 0$.

2. $\mathcal{L}[\mathrm{e}^{\mathrm{at}}](\mathrm{s}) = \dfrac{1}{\mathrm{s} - \mathrm{a}}$ para $s > a$.

3. $\mathcal{L}[t](s) = \dfrac{1}{s^2}$ para $s > 0$.

Teorema (Linealidad de la TL) (Atención con la variable "independiente" s).

Sean f y g dos funciones de orden exponencial α_1 y α_2 respectivamente, entonces

(i) $\mathcal{L}[f(t) + g(t)](s) \; = \; \mathcal{L}[f(t)](s) \; + \; \mathcal{L}[g(t)](s)$ para todo $s > \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$.

(ii) Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}[\lambda\, f(t)](s) = \lambda \mathcal{L}[f(t)](s)$ para todo $s > \alpha_1$. $\square$

Observación: El Teorema anterior dice que para $f \in C_T(\mathbb{R})$, el operador $f \to \mathcal{L}[f]$ es lineal solamente para los valores de s en que tengan sentido las funciones correspondientes.

Ejemplo
Sean $f(t) = \cos(3t)$ y $g(t) = \mathrm{e}^{5\mathrm{t}}$ entonces $\mathcal{L}[\cos(3t) + \mathrm{e}^{5\mathrm{t}}](\mathrm{s}) \; = \; \mathcal{L}[\cos(3\mathrm{t})](\mathrm{s}) \; + \; \mathcal{L}[\mathrm{e}^{5\mathrm{t}}](\mathrm{s})$ para todo $s > 5$. $\square$

Otras Transformadas:
Muestre que:

1. $\mathcal{L}[\cosh(d\,t)](s) \; = \; \dfrac{s}{s^2 - d^2}$ para $s > d$.

2. $\mathcal{L}[\,\mathrm{senh}\,(d\,t)](s) \; = \; \dfrac{d}{s^2 - d^2}$ para $s > d$.

Basta recordar que por definición:
$\cosh(d\,t) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{d\,t}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{d\,t}})$,

$\mathrm{senh}\,(d\,t) = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{d\,t}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{d\,t}})$.

Para resolver EDO es de vital importancia el

Teorema (TL de una derivada)

(*i*) Sea f de modo que f' sea de orden exponencial α entonces

$$\mathcal{L}[f'(t)](s) \;=\; s\,\mathcal{L}[f(t)](s) \;-\; f(0^+) \tag{3}$$

(*ii*) Si además f es de clase C^2, entonces

$$\mathcal{L}[f''(t)](s) \;=\; s^2\,\mathcal{L}[f(t)](s) \;-\; s\,f(0^+) \;-\; f'(0^+).$$

Ejemplo

Sabemos que para $s > 0$, $\mathcal{L}[1](s) = \dfrac{1}{s}$, entonces para $f(t) = t$, de (3) sigue

$$\frac{1}{s} \;=\; s\,\mathcal{L}[t](s) - 0,$$

esto es, $\mathcal{L}[f(t)](s) \;=\; \mathcal{L}[t](s) \;=\; \dfrac{1}{s^2}$ para todo $s > 0$.

Por inducción se puede mostrar que para $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{L}[t^n]s = \frac{n!}{s^{n+1}} \text{ para todo } s > 0.$$

Ejercicio:

Usando la propiedad de la derivada, muestre que $\mathcal{L}[\operatorname{sen}(bt)](s) = \dfrac{b}{s^2+b^2}$ para todo $s > 0$.

Teorema (De Lerch)

Sean f y g dos funciones de orden exponencial, de modo que existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathcal{L}[f](s) \;=\; \mathcal{L}[g](s) \;\text{ para todo } s > s_0.$$

Entonces $f(t) \;=\; g(t)$ para todo $t > 0$ exceptuando los puntos (finitos) en que f y g no son continuas.

Observación:

1. El Teorema anterior, en esencia, dice que el Operador Transformada de Laplace es inyectivo. esto es, si la ecuación
$$\mathcal{L}[y(t)](s) = \varphi(s)$$
tiene sentido, entonces la función y es única. Esta solución y se denomina la Transformada Inversa de Laplace de la función φ, lo anterior se denota
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[\varphi(s)](t).$$

2. La Transformada de Laplace Inversa, cuando existe, es una transformación lineal.

Ejemplo

1. Sabemos que $\mathcal{L}[\mathrm{e^{at}}](\mathrm{s}) = \dfrac{1}{\mathrm{s-a}}$ para $s > a$. Por tanto, $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-a}\right](t) = \mathrm{e^{at}}.\square$

Sin embargo, del Teorema que sigue se deduce que el operador Transformada de Laplace no es sobreyectivo.

Teorema
Sea f una función de orden exponencial α. Entonces

$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}[f(t)](s) = 0.$$

Dem:

$$|\int_0^\infty \mathrm{e^{-st}\, f(t)\, dt} \,| \leq \mathrm{c} \int_0^\infty \mathrm{e^{-st}\, e^{\alpha t}\, dt} \leq \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{s}-\alpha}.$$

Ejemplos:

1. Sea $\varphi(s) = \dfrac{s^2}{s-2}$ entonces como $\lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{s^2}{s-2} = +\infty$, sigue que no existe $f \in C_T([0,\infty])$ de modo que $\mathcal{L}[f](s) = \varphi(s)$.

2. Determinar el valor de $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2s+3}{s^2+4^2}\right](t)$. Tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s+3}{s^2+4^2}\right](t) &= 2\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4^2}\right](t) \,+\, \frac{3}{2}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4^2}\right](t) \\
&= 2\cos(2t) \,+\, 3\,\mathrm{sen}\,(2t),\ t > 0.
\end{aligned}$$

Antes de hacer otros calculos de TL inversa, es útil ver otras propiedades:

Teorema (Primera Traslación)
Sea f una función de orden exponencial α, entonces

$$\mathcal{L}[\mathrm{e^{at}\, f(t)}](\mathrm{s}) \,=\, \mathcal{L}[\mathrm{f(t)}](\mathrm{s-a}),\ \text{para } (\mathrm{s-a}) > \alpha. \tag{4}$$

Dem: Sigue por cálculo directo.

Ejemplo: $\mathcal{L}[\mathrm{e^{2t}\, sen\,(3t))}](\mathrm{s}) = \mathcal{L}[\mathrm{sen\,(3t)}](\mathrm{s-2}) = \dfrac{3}{(\mathrm{s-2})^2+9}$, para $s > 2$.

Observación:
Si ponemos $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$ entonces el teorema anterior dice que

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)](t) \,=\, \mathrm{e^{at}}\mathcal{L}^{-1}[\mathrm{F(s)}](\mathrm{t})$$

Ejemplo

Determine $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{5s}{s^2-6s+13}\right](t)$.

Desarrollo:

Se tiene que $\dfrac{5s}{s^2-6s+13} = \dfrac{5(s-3)}{(s-3)^2+4} + \dfrac{15}{(s-3)^2+4}$.

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{5s}{s^2-6s+13}\right](t) &= 5\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-3}{(s-3)^2+4}\right](t) + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{15}{(s-3)^2+4}\right](t) \\
&= 5\,\mathrm{e}^{3\mathrm{t}}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}^2+4}\right](\mathrm{t}) + \frac{15}{2}\mathrm{e}^{3\mathrm{t}}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{\mathrm{s}^2+4}\right](\mathrm{t}) \\
&= 5\,\mathrm{e}^{3\mathrm{t}}\cos(2\mathrm{t}) + \frac{15}{2}\,\mathrm{e}^{3\mathrm{t}}\,\mathrm{sen}\,(2\mathrm{t}).
\end{aligned}$$

Observación: En general valen las siguientes propiedades:

1. $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\right](t) = \mathrm{e}^{\mathrm{at}}\cos(\mathrm{bt})$.
2. $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}\right](t) = \mathrm{e}^{\mathrm{at}}\mathrm{sen}\,(\mathrm{bt})$.
3. $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s-a}{(s-a)^2-d^2}\right](t) = \mathrm{e}^{\mathrm{at}}\cosh(\mathrm{dt})$.
4. $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{d}{(s-a)^2-d^2}\right](t) = \mathrm{e}^{\mathrm{at}}\,\mathrm{senh}\,(\mathrm{dt})$.

Definición (La función de Heaviside)

Para $a \geq 0$ se define

$$H(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a, \\ 1 & \text{si } t \geq a. \end{cases}$$

Observación

(i) Para $0 \leq a < b$, $H(t-a) - H(t-b) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a, \\ 1 & \text{si } a \leq t < b \\ 0 & \text{si } t \geq b. \end{cases}$

(ii) Para $g \in C([0,\infty[)$, $\Big[H(t-a) - H(t-b)\Big]g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a, \\ g(t) & \text{si } a \leq t < b \\ 0 & \text{si } t \geq b. \end{cases}$

Ejemplo

Usando la función de Heaviside, la función $g(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t <, 2 \\ 4-t & \text{si } 2 \leq t < 4 \\ 0 & \text{si } 4 \leq t < 6 \\ 1 & \text{si } 6 \leq t, \end{cases}$

se puesde escribir como

$$\begin{aligned} g(t) &= t\Big[H(t) - H(t-2)\Big] + (4-t)\Big[H(t-2) - H(t-4)\Big] + H(t-6) \\ &= tH(t) + H(t-2)(4-2t) - H(t-4)(4-t). \end{aligned}$$

Teorema
Sean f de orden exponencial, $c \geq 0$. Entonces
$\mathcal{L}[H(t-c)f(t-c)](s) = \mathrm{e}^{-\mathrm{c\,s}}\,\mathcal{L}[\mathrm{f(t)}](\mathrm{s})$

Dem: Sigue por cálculo directo haciendo el cambio de variable $\tau = t - c$.

Ejemplo
Determine el valor de $\mathcal{L}[t\,H(t-2)](s)$.

Ponemos $tH(t-2) = f(t-2)H(t-2)$ donde $f(t-2) = t$. Por tanto, $f(t) = t+2$.
Así, del Teorema

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t\,H(t-2)](s) &= \mathcal{L}[f(t-2)\,H(t-2)](s) = \mathrm{e}^{-2\mathrm{s}}\,\mathcal{L}[\mathrm{f(t)}](\mathrm{s}) \\ &= \mathrm{e}^{-2\mathrm{s}}\,\mathcal{L}[\mathrm{t}+2](\mathrm{s}) = \mathrm{e}^{-2\mathrm{s}}\left(\frac{1}{\mathrm{s}^2} + \frac{2}{\mathrm{s}}\right). \end{aligned}$$

Ejemplo 2: Determine el valor de $\mathcal{L}[\mathrm{e}^{3\mathrm{t}}\mathrm{H}(\mathrm{t}-2)](\mathrm{s})$.
Por el teorema sigue que:

$$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{3\mathrm{t}}\mathrm{H}(\mathrm{t}-2)](\mathrm{s}) = \mathrm{e}^{-2\mathrm{s}}\,\mathcal{L}[\mathrm{f(t)}](\mathrm{s})$$

donde $f(t-2) = \mathrm{e}^{3\mathrm{t}}$. Entonces $f(t) = f[(t+2)-2] = \mathrm{e}^{3(\mathrm{t}+2)}$. De este modo,

$$\mathcal{L}[\mathrm{e}^{3\mathrm{t}}\mathrm{H}(\mathrm{t}-2)](\mathrm{s}) = \mathrm{e}^{-2\mathrm{s}}\,\mathcal{L}[\mathrm{e}^{6}\,\mathrm{e}^{3\mathrm{t}}](\mathrm{s}) = \frac{\mathrm{e}^{6-2\mathrm{s}}}{\mathrm{s}-3}.$$

Note que $\displaystyle\lim_{s\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{6-2\mathrm{s}}}{s-3} = 0$. Por tanto, podemos asegurar que existe $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{\mathrm{e}^{6-2\mathrm{s}}}{s-3}\right](t)$ y además

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{6-2\mathrm{s}}}{s-3}\right](t) = \mathrm{e}^{3\mathrm{t}}\mathrm{H}(\mathrm{t}-2).$$

Observación
Si en el Teorema anterior ponemos $F(s) := \mathcal{L}[f(t)](s)$, entonces el Teorema dice que
$\mathcal{L}[H(t-c)f(t-c)](s) = \mathrm{e}^{-\mathrm{c\,s}}\,\mathrm{F(s)}$, por tanto tenemos

$$\mathcal{L}^{-1}[\mathrm{e}^{-\mathrm{cs}}\,\mathrm{F(s)}](\mathrm{t}) = \mathrm{H}(\mathrm{t}-\mathrm{c})\,\mathrm{f}(\mathrm{t}-\mathrm{c}) = \mathrm{H}(\mathrm{t}-\mathrm{c})\mathcal{L}^{-1}[\mathrm{F(s)}](\mathrm{t}-\mathrm{c}).$$

Ejemplo

Determine el valor de $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{3\,\mathrm{e}^{-5\mathrm{s}}}{s^2+4}\right](t)$.
De la observación se sigue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3\,\mathrm{e}^{-5\mathrm{s}}}{s^2+4}\right](t) &= H(t-5)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{s^2+4}\right](t-5)\\
&= \frac{3}{2}\,H(t-5)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right](t-5)\\
&= \frac{3}{2}H(t-5)\,\mathrm{sen}\,[2(t-5)].
\end{aligned}$$

Observación:
Supoga que queremos determinar el valor de

1. $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s-3)(s+1)}\right](t)$,
2. $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s^2-4)(s^2+9)}\right](t)$.

El problema se puede abordar de tres formas, que finalmente llegan a la misma solución. Sin embargo, el camino intermedio tiene distinto grado de complicación dependiendo del camino elegido.

Ejemplo: (Primera Forma)
Lo más simple, pero no siempre lo más adecuado, es hacer fracciones parciales (en el segundo caso de la Observación, este método no es seguramente lo óptimo). Esto es:

$$\frac{1}{(s-3)(s+1)} = \frac{1}{(s-1)^2-4} = \frac{1/4}{s-3} - \frac{1/4}{s+1}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-3)(s+1)}\right](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/4}{s-3}\right](t) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/4}{s+1}\right](t)\\
&= \frac{1}{4}\left[\mathrm{e}^{3\mathrm{t}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{t}}\right].
\end{aligned}$$

Ejemplo: Segunda Forma
Usando el Teorema de la Primera Traslación:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-3)(s+1)}\right](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2-4}\right](t)\\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{senh}\,(2\mathrm{t})
\end{aligned}$$

(la ventaja de esta última forma es que no se necesita calcular los coeficientes de las fracciones parciales).

Tercera Forma Para la tercera forma, se necesitan ciertos elementos que desarrollamos ahora:

Definición (de Convolución):
Para f y g funciones $C_T([0,\infty[)$ definimos la **convolución** de f y g, denotado por $(f*g)(t)$, como

$$(f*g)(t) \;=\; \int_0^t f(t-u)g(u)\,du$$

Ejemplos
Si $f(t)=t$ y $g(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}$, entonces $(f*g)(t) \;=\; \displaystyle\int_0^t (t-u)\mathrm{e}^{-\mathrm{u}}\mathrm{du}=\mathrm{t}-1+\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}$.

Propiedades
Sean f,g y h funciones continuas a trozos en $\mathbb{R}$. Entonces

1. $f*g \;=\; g*f$.
2. $f*(g*h) \;=\; (f*g)*h$.
3. $f*(g+h) \;=\; (f*g)+(f*h)$.

La relación con la TL viene del siguiente

Teorema
Sean f y g dos funciones de orden exponencial,si escribimos $\begin{cases} F(s) := & \mathcal{L}[f(t)](s), \\ G(s) := & \mathcal{L}[g(t)](s), \end{cases}$ entonces

1. $\mathcal{L}[(f*g)(t)](s) \;=\; F(s)\,G(s)$.
2. $\mathcal{L}^{-1}[F(s)\,G(s)](t) \;=\; (f*g)(t)$, donde $f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t)$ y $g(t)=\mathcal{L}^{-1}[G(s)](t)$.

Ejemplos:

(i) Si $f(t)=t$ y $g(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}$,entonces $\mathcal{L}[t*\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}](\mathrm{s})=\dfrac{1}{\mathrm{s}^2(\mathrm{s}+1)}$, $s>0$.

Corolario (TL de la Integral de una función)
Sea f una función de orden exponencial, entonces

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)du\right](s) \;=\; \frac{\mathcal{L}[f(t)](s)}{s}$$

Dem:
Basta aplicar el Teorema anterior para $g(t)=1$.

Ejemplo
De acuerdo al Teorema

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \cos(bt)\right](s)=\frac{\mathcal{L}[\cos(bt)](s)}{s}=\frac{1}{s}\,\frac{s}{s^2+b^2}=\frac{1}{s^2+b^2}$$

De otra parte, $\displaystyle\int_0^t \cos(bu)\,du = \frac{\text{sen}\,(bt)}{b}$.
Por tanto,

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \cos(bt)\right](s) = \mathcal{L}\left[\frac{\text{sen}\,(bt)}{b}\right](s) = \frac{1}{s^2+b^2}.$$

Ejemplo: Tercera Forma

Determine el valor de:

1. $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s-3)(s+1)}\right](t)$,
2. $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s^2-4)(s^2+9)}\right](t)$

En el primer ejemplo tenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-3)(s+1)}\right](t) &= \left(\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right] * \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]\right)(t) \;=\; \mathrm{e}^{3\mathrm{t}} * \mathrm{e}^{-\mathrm{t}} \\ &= \int_0^t \mathrm{e}^{3(\mathrm{t}-\mathrm{u})}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{u}}\,\mathrm{du} \;=\; \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{3\mathrm{t}} \;-\; \mathrm{e}^{-\mathrm{t}}) \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{t}}\,\mathrm{senh}\,(2\mathrm{t}).\end{aligned}$$

El segundo ejemplo queda como ejercicio.

Aplicación a la resolución de EDO

Determine la solución del siguiente PVI:

$$\begin{cases} y''(t) - 6y' + 5y(t) &= e^{2t}\,H(t-2) \\ \quad y(0) \;=\; 1,\; y'(0) &= 0 \end{cases}$$

Solución: Aplicando T. de L. a ambos miembros de la EDO, y escribiendo $Y(s) = \mathcal{L}\,[y\,(t)]\,(s)$ se obtiene

$$(s^2-6s+5)Y(s) - s + 6 \;=\; \mathrm{e}^4\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{s}}\frac{1}{\mathrm{s}-2};$$

escribiendo $s^2 - 6s + 5 = (s-3)^2 - 4$, sigue

$$Y(s) \;=\; \frac{\mathrm{e}^4\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{s}}}{(s-2)[(s-3)^2-4]} + \frac{s-6}{[(s-3)^2-4]}$$

de donde la solución $y(t)$ viene dada por

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) \quad \text{donde}$$

$$\begin{aligned} y_1\,(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}e^4}{(s-2)[(s-3)^2-4]}\right](t) \\ y_2\,(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-6}{(s-3)^2-4}\right](t) \end{aligned}$$

Se obtiene que

$$y_1(t) = \mathrm{e}^4\,\mathrm{H(t-2)}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(\mathrm{s}-2)[(\mathrm{s}-3)^2-4]}\right](\mathrm{t}-2)$$

donde

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)[(s-3)^2-4]}\right](t) = (f*g)(t),$$

con

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right](t) = \mathrm{e}^{2\mathrm{t}}$$

y

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-3)^2-4}\right](t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3\mathrm{t}}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{\mathrm{s}^2-4}\right](\mathrm{t}) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{3\mathrm{t}}\,\mathrm{senh}\,(2\mathrm{t})$$

Teniendo presente que $\mathrm{senh}\,(t) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{t}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{t}})$, se obtiene

$$y_1(t) = \mathrm{e}^4\mathrm{H(t-2)}\left[\frac{1}{4}\mathrm{e}^{(\mathrm{t}-2)} + \frac{1}{12}\mathrm{e}^{5(\mathrm{t}-2)} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{2(\mathrm{t}-2)}\right].$$

De otra parte, para $y_2(t)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-6}{(s-3)^2-4}\right](t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-3}{(s-3)^2-4} - \frac{3}{(s-3)^2-4}\right](t) \\ &= \mathrm{e}^{3\mathrm{t}}\left[\cosh(2\mathrm{t}) - \frac{3}{2}\,\mathrm{senh}\,(2\mathrm{t})\right] \\ &= \frac{5}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{t}} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{5\mathrm{t}}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{5}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{t}} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{5\mathrm{t}} + \mathrm{e}^4\mathrm{H(t-2)}\Big[\frac{1}{4}\mathrm{e}^{(\mathrm{t}-2)} + \frac{1}{12}\mathrm{e}^{5(\mathrm{t}-2)} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{2(\mathrm{t}-2)}\Big] + \\ &= \frac{5}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{t}} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{5\mathrm{t}} + \mathrm{H(t-2)}\Big[\frac{1}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{t}+2} + \frac{1}{12}\mathrm{e}^{5\mathrm{t}-6} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{2\mathrm{t}}\Big] \end{aligned}$$

La Delta de Dirac

Para definir la Delta de Dirac, denotada por, δ consideremos una sucesión de funciones $\{f_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ definidas para cada n como siguiente:

$$f_n(t) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } |t| < \dfrac{1}{n}, \\ \\ 0 & \text{si } |t| \geq \dfrac{1}{n}, \end{cases}$$

con la condición que para cada n,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)dt = \int_{-(1/n)}^{(1/n)} f_n(t)dt = 1.$$

Tomando límite (en el sentido de las Distribuciones, concepto fuera de alcance de este curso) cuando $n \to \infty$, se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) \;=\; \delta(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t \neq 0, \end{cases}$$

con la condición $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$.

Observación 1
Si en lugar de 0, el análisis anterior se centra en $t_0 = a$ con $a > 0$, se obtiene la función **delta** centrada en $t_0 = a$, esto es,

$$\delta(t-a) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t = a \\ 0 & \text{si } t \neq a, \end{cases}$$

con la condición $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)dt = 1$.

Observación 2
Usando propiedades de la TL, se puede demostrar el siguiente

Teorema

1. Para $a \geq 0$,
$$\mathcal{L}[\delta(t-a)](s) \;=\; \mathrm{e}^{-a\,s}.$$
(note que en particular, $\mathcal{L}[\delta(t)](s) \;=\; 1$).

2. Sean $f \in C(\mathbb{R}),\; a \in \mathbb{R}$. Entonces
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\, f(t)\, dt \;=\; f(a).$$

Veamos como se aplica todo lo anterior en la resolución de EDO:

Ejemplo
Resolver el Problema con Valor Inicial, PVI,

$$\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = \delta(t-2), \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Aplicando TL a ambos miembros de la EDO, y escribiendo $Y(s) := \mathcal{L}\left[y\left(t\right)\right]\left(s\right)$ se obtiene

$$(s^2 - 2s - 3)Y(s) - 2s + 4 \;=\; \mathrm{e}^{-2s};$$

escribiendo $(s^2 - 2s - 3)$ como $(s-1)^2 - 4$, sigue

$$Y(s) \;=\; \frac{\mathrm{e}^{-2s}}{[(s-1)^2 - 4]} + \frac{2s-4}{[(s-1)^2 - 4]} \tag{5}$$

de donde la solución $y(t)$ viene dada por

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t), \quad \text{donde}$$

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{e}^{-2\mathrm{s}}}{[(s-1)^2-4]}\right](t) \\ y_2(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s-4}{(s-1)^2-4}\right](t) \end{aligned}$$

En el primer caso, obtenemos:

$$y_1(t) = H(t-2)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{[(s-1)^2-4]}\right](t-2)\,,$$

donde

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{[(s-1)^2-4]}\right](t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{t}}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{[\mathrm{s}^2-4]}(\mathrm{t})\right] = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{t}}}{2}\,\mathrm{senh}\,(2\mathrm{t})$$

Por lo tanto,

$$y_1(t) = \frac{1}{2}\,H(t-2)\,\mathrm{e}^{\mathrm{t}-2}\ \mathrm{senh}\,[2(\mathrm{t}-2)].$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned} y_1(t) &= H(t-2)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{[(s-1)^2-4]}\right](t-2)\,, \\ &= (1/4)H(t-2)\Big[\mathrm{e}^{3(\mathrm{t}-2)} - \mathrm{e}^{-(\mathrm{t}-2)}\Big]. \end{aligned}$$

De otra parte, para $y_2(t)$ obtenemos:

$$y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2(s-1)}{(s-1)^2-4}\right](t) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s-1)^2-4}\right](t) = \mathrm{e}^{\mathrm{t}}\Big[2\,\cosh(2\mathrm{t}) - \,\mathrm{senh}\,(2\mathrm{t})\Big].$$

Equivalentemente,

$$y_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s-4}{(s-1)^2-4}\right](t) = (1/2)\,\mathrm{e}^{3\mathrm{t}} + (3/2)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}.$$

Finalmente,

$$y(t) = \frac{1}{2}\,H(t-2)\,\mathrm{e}^{\mathrm{t}-2}\ \mathrm{senh}\,[2(\mathrm{t}-2)]\ +\ \mathrm{e}^{\mathrm{t}}\Big[2\,\cosh(2\mathrm{t}) - \,\mathrm{senh}\,(2\mathrm{t})\Big].$$

Equivalentemente,

$$y(t) = (1/4)H(t-2)\Big[\mathrm{e}^{3(\mathrm{t}-2)} - \mathrm{e}^{-(\mathrm{t}-2)}\Big] + (1/2)\,\mathrm{e}^{3\mathrm{t}} + (3/2)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}.$$

Definición: Una ecuación integro-diferencial es una ecuación en que aparecen la derivada y la integral de la función incógnita.

Ejemplo: $t\,y'(t) - \int_0^t y(u)du = \cos(3t).$

Aplicación:

Resuelva la siguiente ecuación integro-diferencial:

$$y'(t) - 6y(t) + 11\int_0^t y(u)du = \delta(t-2) + 1, \text{ con } y(0) = 2.$$

Solución:

Aplicando Transformada de Laplace a ambos miembros de

$$y'(t) - 6y(t) + 11\int_0^t y(u)du = \delta(t-2) + 1, \text{ con } y(0) = 2,$$

y escribiendo $Y(s) = \mathcal{L}\left[y\left(t\right)\right](s)$ se obtiene

$$\left[\frac{s^2 - 6s + 11}{s}\right] Y(s) \;=\; \mathrm{e}^{-2\mathrm{s}} + 2 + \frac{1}{\mathrm{s}}.$$

Poniendo $(s^2 - 6s + 11) = (s-3)^2 + 2$, sigue

$$\begin{aligned} Y(s) \;&=\; \frac{s}{[(s-3)^2+2]}\left[\mathrm{e}^{-2\mathrm{s}} + 2 + \frac{1}{\mathrm{s}}\right] \\ &=\; \frac{(s-3)\mathrm{e}^{-2\mathrm{s}} + 3\mathrm{e}^{-2\mathrm{s}} + 2(\mathrm{s}-3) + 7}{[(s-3)^2+2]}. \end{aligned}$$

Así, la solución $y(t)$ viene dada por

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s-3)\mathrm{e}^{-2\mathrm{s}} + 3\mathrm{e}^{-2\mathrm{s}} + 2(\mathrm{s}-3) + 7}{[(s-3)^2+2]}\right\},$$

es decir,

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) + y_4(t), \quad \text{donde}$$

$$\begin{aligned} y_1(t) \;&=\; \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s-3)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{s}}}{[(s-3)^2+2]}\right](t) \\ y_2(t) \;&=\; \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{s}}}{[(s-3)^2+2]}\right](t) \\ y_3(t) \;&=\; \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2(s-3)}{(s-3)^2+2}\right](t) \\ y_4(t) \;&=\; \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{7}{(s-3)^2+2}\right](t) \end{aligned}$$

Calculando las Transformadas inversas, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
y_1\,(t) &= H(t-2)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-3}{(s-3)^2+2}\right](t-2)\,, \\
&= H(t-2)\Big[\mathrm{e}^{3\mathrm{t}}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}^2+2}\right](\mathrm{t}-2)\,, \\
&= H(t-2)\Big[\mathrm{e}^{3(\mathrm{t}-2)}\cos[\sqrt{2}(\mathrm{t}-2)].
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_2\,(t) &= \frac{3}{\sqrt{2}}H(t-2)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}}{(s-3)^2+2}\right](t-2)\,, \\
&= \frac{3}{\sqrt{2}}H(t-2)\Big[\mathrm{e}^{3\mathrm{t}}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}}{\mathrm{s}^2+2}\right](\mathrm{t}-2)\,, \\
&= \frac{3}{\sqrt{2}}H(t-2)\Big[\mathrm{e}^{3(\mathrm{t}-2)}\mathrm{sen}\,[\sqrt{2}(\mathrm{t}-2)].
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_3(t) &= 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s-3)}{(s-3)^2+2}\right](t) \\
&= 2\mathrm{e}^{3\mathrm{t}}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}^2+2}\right](\mathrm{t}) \\
&= 2\mathrm{e}^{3\mathrm{t}}\cos(\sqrt{2}\mathrm{t}).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_4(t) &= 7\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-3)^2+2}\right](t) \\
&= \frac{7}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{3\mathrm{t}}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}}{\mathrm{s}^2+2}\right](\mathrm{t}) \\
&= \frac{7}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{3\mathrm{t}}\mathrm{sen}\,(\sqrt{2}\mathrm{t}).
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
y(t) &= H(t-2)\mathrm{e}^{3(\mathrm{t}-2)}\Big[\cos[\sqrt{2}(\mathrm{t}-2)]+\frac{3}{\sqrt{2}}\mathrm{sen}\,[\sqrt{2}(\mathrm{t}-2)]\Big] \\
&+ \mathrm{e}^{3\mathrm{t}}\Big[2\cos(\sqrt{2}\mathrm{t})+\frac{7}{\sqrt{2}}\mathrm{sen}\,(\sqrt{2}\mathrm{t}).\Big]
\end{aligned}
$$

Finalmente, veamos una propiedad de la TL que nos permitirá resolver EDO con coeficientes variables:

Teorema

Para $n \in \mathbb{N}$ resulta $\mathcal{L}[t^n f(t)](s) = (-1)^n F^{(n)}(s)$
donde $F(s) := \mathcal{L}[f(t)](s)$.

Dem: $n = 1$ Del cálculo diferencial $\dfrac{d}{ds}\left[\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{s\,t}}\mathrm{f(t)}\right] = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}[\mathrm{e}^{-\mathrm{s\,t}}\mathrm{f(t)}]\,\mathrm{dt}$.

Por tanto,
$$F'(s) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}[\mathrm{e}^{-\mathrm{s\,t}}\mathrm{f(t)}]\,\mathrm{dt} = -\mathcal{L}[\mathrm{t\,f(t)}](\mathrm{s}).$$

Ejemplo: Determine la solución del siguiente PVI $\begin{cases} t\,y''(t) \,+\, 2\,y'(t) \,+\, t\,y(t) \,=\, 4\,\cos(t), \\ y(0^+) = 0\,, \quad y'(0^+) = 2\,. \end{cases}$

Solución:
Aplicando transformada de Laplace a la EDO, y teniendo en cuenta la propiedad de la derivada de la transformada, se tiene

$$-\frac{d}{ds}\mathcal{L}[y''(t)](s) \,+\, 2\,\mathcal{L}[y'(t)](s) \,-\, \frac{d}{ds}\mathcal{L}[y(t)](s) \,=\, \frac{4\,s}{s^2\,+\,1}\,.$$

Llamando $F(s) := \mathcal{L}[y(t)](s)$, la expresión anterior nos queda

$$-\frac{d}{ds}\left(s^2\,F(s) \,-\, s\,y(0^+) \,-\, y'(0^+)\right) \,+\, 2\left(s\,F(s) \,-\, y(0^+)\right) \,-\, F'(s) \,=\, \frac{4\,s}{s^2\,+\,1}\,.$$

Luego de derivar (respecto de s) y simplificar, se obtiene:

$$-(s^2\,+\,1)\,F'(s) \,=\, \frac{4\,s}{s^2\,+\,1} \quad \Leftrightarrow \quad F'(s) \,=\, -\frac{4\,s}{(s^2\,+\,1)^2}\,.$$

Integrando con respecto de s, resulta

$$F(s) \,=\, \frac{2}{s^2\,+\,1} \,+\, C\,,$$

siendo $C \in \mathbb{R}$ una constante arbitraria (de integración). En vista que la solución y buscada es continua por tramos y de orden exponencial, su transformada de Laplace $F(s)$ verifica $\lim\limits_{s\to+\infty} F(s) \,=\, 0$, de donde se concluye que $C = 0$. Finalmente, aplicando la transformada de Laplace inversa, se deduce

$$y(t) \,=\, 2\,\mathrm{sen}\,(t)\,,$$

que es la solución pedida.

Problema. Determine la solución del siguiente problema con valor inicial:

$$\begin{cases} y''(t) - 4y'(t) + 9y(t) = 2\delta(t-1) - \delta(t-3) \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Solución Aplicando T. de L. a la EDO dada y poniendo $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$, se obtiene:

$$(s^2\,Y(s)-2s+1)-4(s\,Y(s)-2)+9\,Y(s)=2\mathrm{e}^{-\mathrm{s}}-\mathrm{e}^{-3\mathrm{s}},$$

esto es,

$$(s^2-4s+9)\,Y(s)-2s+9=2\mathrm{e}^{-\mathrm{s}}-\mathrm{e}^{-3\mathrm{s}},$$

y despejando

$$Y(s)=\frac{1}{\Big[(s-2)^2+5\Big]}\Big[2s-9+2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{s}}-\mathrm{e}^{-3\mathrm{s}}\Big]=\frac{\Big[2(\mathrm{s}-2)-5+2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{s}}-\mathrm{e}^{-3\mathrm{s}}\Big]}{\Big[(\mathrm{s}-2)^2+5\Big]}$$

de donde

$$y(t)=y_1(t)+y_2(t)+y_3(t)+y_4(t)\quad\text{con:}$$

$$y_1(t)=2\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-2}{(s-2)^2+5}\right](t)$$

$$y_2(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-5}{(s-2)^2+5}\right](t)$$

$$y_3(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{s}}}{(s-2)^2+5}\right](t)$$

$$y_4(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-\,\mathrm{e}^{-3\mathrm{s}}}{(s-2)^2+5}.\right](t)$$

Así, obtenemos que:

$$y_1(t)=2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{t}}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{s}^2+5}\right](\mathrm{t})=2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{t}}\,\cos(\sqrt{5}\mathrm{t})$$

$$y_2(t)=-\sqrt{5}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{t}}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{s}^2+5}\right](\mathrm{t})=-\sqrt{5}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{t}}\,\mathrm{sen}\,(\sqrt{5}\mathrm{t})$$

$$\begin{aligned}
y_3(t)&=2\,H(t-1)\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2+5}\right](t-1)\\
&=\frac{2}{\sqrt{5}}\,H(t-1)\,\Big[\mathrm{e}^{2\mathrm{t}}\,\mathrm{sen}\,(\sqrt{5}\mathrm{t})\Big](\mathrm{t}-1)\\
&=\frac{2}{5}\sqrt{5}\,H(t-1)\,\mathrm{e}^{2(\mathrm{t}-1)}\,\mathrm{sen}\,\Big[\sqrt{5}(\mathrm{t}-1)\Big]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y_4(t) &= (-1)\, H(t-3)\, \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)^2+5}\right](t-3) \\
&= (-1)\, H(t-3)\left[\mathrm{e}^{2\mathrm{t}}\, \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{s}^2+5}\right](\mathrm{t}-3)\right. \\
&= (-1)\,\frac{\sqrt{5}}{5}\, H(t-3)\, \mathrm{e}^{2(\mathrm{t}-3)}\, \mathrm{sen}\left[\sqrt{5}(\mathrm{t}-3)\right]
\end{aligned}
$$

Así, finalmente,

$$
\begin{aligned}
y(t) &= 2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{t}}\, \cos(\sqrt{5}\mathrm{t}) \,-\, \sqrt{5}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{t}}\, \mathrm{sen}\,(\sqrt{5}\mathrm{t}) \,+\, \frac{2}{5}\sqrt{5}\,\mathrm{H}(\mathrm{t}-1)\, \mathrm{e}^{2(\mathrm{t}-1)}\, \mathrm{sen}\left[\sqrt{5}(\mathrm{t}-1)\right] + \\
&+ (-1)\,\frac{\sqrt{5}}{5}\, H(t-3)\, \mathrm{e}^{2(\mathrm{t}-3)}\, \mathrm{sen}\left[\sqrt{5}(\mathrm{t}-3)\right].
\end{aligned}
$$

15/11/2022 JMS//jms