Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

525150 – Álgebra 2 – Pauta de Evaluación de Recuperación

Problema 1. (15 puntos)

Sea W el siguiente s.e.v. de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$,

$$W = \left\{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \ : \ p(x) = a_1 x + a_2 x^2 + (a_1 + a_2)x^3 \text{ con } a_1, a_2 \in \mathbb{R}\right\}.$$

1.1 Determine una base y dimensión de W. Justifique sus respuestas.

1.2 Sean

$$U_1 = \left\langle \left\{1, x, x^3\right\} \right\rangle, \qquad U_2 = \mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$$

Decida si $U_1 + W$ es directa y si $U_2 + W = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Justifique sus respuestas.

Solución:

1.1 Dado que

$$W = \left\{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \ : \ p(x) = a_1(x + x^3) + a_2(x^2 + x^3) \text{ con } a_1, a_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

se tiene que el conjunto $\{x + x^3, x^2 + x^3\}$ es generador de W.

Éste es un conjunto li, la combinación lineal $\alpha(x + x^3) + \beta(x^2 + x^3)$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ es igual al polinomio nulo si y solo si $\alpha x + \beta x^2 + (\alpha + \beta)x^3 = \theta$ y esta igualdad, a su vez, es cierta si y solo si $\alpha = \beta = 0$.

Se tiene entonces que

$$\{x + x^3, x^2 + x^3\}$$

es una base para W y $\dim(W) = 2$. **(5 puntos)**

1.2 Como $x + x^3 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot x^3$ es la combinación lineal con escalares $0, 1, 1$ de los vectores en el conjunto generador de U_1 se tiene que $x + x^3$ pertenece a U_1 y también a W ($x + x^3$ es uno de los vectores en base de W), por tanto, $U_1 \cap W \neq \{\theta\}$ y esto significa que $U_1 + W$ no es directa. **(5 puntos)**

Por otro lado, como $\{1, x, x^2\}$ es una base para U_2 se tiene que un generador para $U_2 + W$, s.e.v. de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, es

$$\{1, x, x^2, x + x^3, x^2 + x^3\}.$$

Éste es un conjunto ld (pues es un conjunto de 5 vectores de un e.v. de dimensión 4). Por ejemplo,

$$x^2 + x^3 = x^2 + (x + x^3) - x$$

con lo que podemos asegurar que $\{1, x, x^2, x + x^3\}$ también es generador de $U_2 + W$. Veamos si este conjunto es li: sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que

$$a(1) + b(x) + c(x^2) + d(x + x^3) = a(1) + (b + d)x + c(x^2) + d(x^3) = \theta.$$

Esta igualdad se cumple si y solo si $a = 0$, $b + d = 0$, $c = 0$, $d = 0$. Como $d = 0$, de la segunda ecuación obtenemos que $b = 0$ y podemos entonces asegurar que $\{1, x, x^2, x + x^3\}$ es una base para $U_2 + W$, es decir, $\dim(U_2 + W) = 4$.

Como $U_2 + W$ es un s.e.v. de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ con la misma dimensión que $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ se cumple que $U_2 + W = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. **(5 puntos)**

Problema 2. (15 puntos)

Sea $a \in \mathbb{R}$. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rcr} ax + y & = & 1, \\ -x + ay + z & = & 2, \\ -y + az & = & -1. \end{array}$$

2.1 ¿Existen valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que el sistema no tenga solución? Justifique su respuesta.

2.2 Considere $a = 0$. Si A denota la matriz del sistema anterior, obtenga una base para $\text{Im}(A)$ y calcule $\eta(A)$.

Solución:

Sean A y b la matriz y parte derecha del sistema de ecuaciones anterior, es decir,

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & a & 1 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Por operaciones por filas a $(A|b)$ se escalona esta matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 0 & 1 \\ -1 & a & 1 & 2 \\ 0 & -1 & a & -1 \end{array}\right) \overset{f_1 \leftrightarrow f_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & a & 1 & 2 \\ a & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & a & -1 \end{array}\right) \overset{f_2 \leftarrow f_2 + af_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & a & 1 & 2 \\ 0 & a^2+1 & a & 2a+1 \\ 0 & -1 & a & -1 \end{array}\right)$$

$$\overset{f_3 \leftrightarrow f_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & a & 1 & 2 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ 0 & a^2+1 & a & 2a+1 \end{array}\right) \overset{f_3 \leftarrow f_3 + (a^2+1)f_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & a & 1 & 2 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ 0 & 0 & a^3+2a & -a^2+2a \end{array}\right)$$

El sistema no tiene solución si $\text{r}(A) \neq \text{r}(A|b)$.
En este caso, si $a \neq 0$ entonces $\text{r}(A) = \text{r}(A|b) = 3$ y si $a = 0$ entonces $\text{r}(A) = \text{r}(A|b) = 2$, por tanto no existe valor de a de manera que el sistema no tenga solución. **(7 puntos)**

Si $a = 0$, entonces la matriz del sistema es $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, luego

$\text{Im}(A) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$ **(2 puntos)**

Como el tercer vector es igual a -1 por el primero, el conjunto de vectores que son columnas de A es ld y $\text{Im}(A) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$.

El conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es li y es, por tanto, una base de $\text{Im}(A)$. **(4 puntos)**

Con esto se tiene que $\text{r}(A) = 2$ y, dado que

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \text{r}(A) + \eta(A),$$

se obtiene $\eta(A) = 1$. **(2 puntos)**

Problema 3. (15 puntos)

Verifique si la siguiente matriz A es diagonalizable (justifique su respuesta). De ser diagonalizable, obtenga las matrices D, diagonal, y P, invertible, tales que $A = PDP^{-1}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solución:
Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, λ es valor propio de A si y solo si $\det(A - \lambda I) = 0$,

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)(3-\lambda).$$

(2 puntos)

Podemos asegurar que $\sigma(A) = \{1, 2, 3\}$. Como la multiplicidad algebraica de 2 y 3 es 1, su multiplicidad geométrica también es 1. La matriz A es diagonalizable si y solo la multiplicidad geométrica de 1 es 2. **(2 puntos)**

$$S_1(A) = \ker(A - I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \theta_{\mathbb{R}^4} \right\},$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ y = 0 \ \wedge \ z + t = 0 \right\}.$$

Se tiene entonces que

$$S_1(A) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

(2 puntos)

El conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ es li pues

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \beta \\ -\beta \end{pmatrix} = \theta_{\mathbb{R}^4} \ \Leftrightarrow \ \alpha = 0 \ \wedge \ \beta = 0.$$

La dimensión de$S_1(A)$, que es igual a la multiplicidad geométrica del valor propio 1 de A es entonces 2.
Como la suma de las multiplicidades algebraicas y geométricas de los valores propios de A es 4 se cumple que A es diagonalizable. **(2 puntos)**
Para determinar las matrices P y D debemos determinar vectores propios asociados a los restantes valores propios de A,

$$S_2(A) = \ker(A - 2I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \theta_{\mathbb{R}^4} \right\},$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ x = 2y \ \wedge \ z = 0 \ \wedge \ t = 0 \right\}.$$

Se tiene entonces que

$$S_2(A) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

(2 puntos)

y

$$S_3(A) = \ker(A - 3I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \theta_{\mathbb{R}^4} \right\},$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ : \ x = 0 \ \wedge \ y = 0 \ \wedge \ z = 0 \right\}.$$

Se tiene entonces que

$$S_3(A) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

(2 puntos)

Como

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y el conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es li (pues resulta de unir bases de subespacios propios distintos de A), se cumple que la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es invertible y

$$AP = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Matrices P, invertible, y D, diagonal, que cumplen $A = PDP^{-1}$ son

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(3 puntos)

Problema 4. (15 puntos)

Resuelva, en el sentido de los mínimos cuadrados, el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solución:

La solución del sistema en el sentido de los mínimos cuadrados consiste en determinar $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c,$$

siendo c la proyección ortogonal, según producto interior usual en $\mathbb{R}^4$, de $b = (4, 2, 0, 1)^{\mathrm{T}}$ sobre la imagen de la matriz del sistema.

La proyección ortogonal de b sobre la imagen de la matriz del sistema corresponde al vector

$$c = \alpha(1, 0, 1, 2)^{\mathrm{T}} + \beta(2, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}},$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ son tales que $(4, 2, 0, 1)^{\mathrm{T}} - \alpha(1, 0, 1, 2)^{\mathrm{T}} - \beta(2, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ es ortogonal a la imagen de A, es decir, α y β son tales que

$(4-\alpha-2\beta, 2-\beta, -\alpha-\beta, 1-2\alpha-\beta)^{\mathrm{T}}$ es ortogonal a $(1,0,1,2)^{\mathrm{T}}$ y a $(2,1,1,1)^{\mathrm{T}}$. **(5 puntos)**

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 4-\alpha-2\beta \\ 2-\beta \\ -\alpha-\beta \\ 1-2\alpha-\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \ &\Leftrightarrow \ 4-\alpha-2\beta-\alpha-\beta+2-4\alpha-2\beta = 0 \\
&\Leftrightarrow \ 6-6\alpha-5\beta = 0 \\
\begin{pmatrix} 4-\alpha-2\beta \\ 2-\beta \\ -\alpha-\beta \\ 1-2\alpha-\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \ &\Leftrightarrow \ 8-2\alpha-4\beta+2-\beta-\alpha-\beta+1-2\alpha-\beta = 0 \\
&\Leftrightarrow \ 11-5\alpha-7\beta = 0
\end{aligned}$$

(5 puntos)

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 6-6\alpha-5\beta = 0 \\ 11-5\alpha-7\beta = 0 \end{cases}$$

obtenemos que $\alpha = -\frac{13}{17}$ y $\beta = \frac{36}{17}$. **(3 puntos)**
De este modo obtenemos que $c = \frac{-13}{17}(1,0,1,2)^{\mathrm{T}} + \frac{36}{17}(2,1,1,1)^{\mathrm{T}} = \left(\frac{59}{17}, \frac{36}{17}, \frac{23}{17}, \frac{10}{17}\right)^{\mathrm{T}}$ es la proyección ortogonal de b sobre la imagen de la matriz del sistema y la solución del sistema en el sentido de los mínimos cuadrados es entonces $\begin{pmatrix} \frac{-13}{17} \\ \\ \frac{36}{17} \end{pmatrix}$. **(2 puntos)**