Índice general

Capítulo 1

Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

1.6. Planos en $\mathbb{R}^3$.

¿Qué ocurre si, en lugar de buscar todos los vectores en $\mathbb{R}^n$ que, partiendo de un punto A son paralelos a cierto vector $\vec{r}$ dado, buscamos todos los vectores que, partiendo de A son combinación lineal de dos vectores dados $\vec{r}$, $\vec{s}$ no nulos y no paralelos? Es decir, ¿podemos determinar cuáles son los puntos $P \in \mathbb{R}^n$ para los que existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\overrightarrow{AP} = \alpha\,\vec{r} + \beta\,\vec{s}\,?$$

Más adelante veremos que:

- si A es un punto de $\mathbb{R}^2$ y $\vec{r}$ y $\vec{s}$ son vectores no nulos y no paralelos de $\mathbb{R}^2$, entonces para cualquier $P \in \mathbb{R}^2$ se cumple que el vector $\overrightarrow{AP}$ puede escribirse como combinación lineal de $\vec{r}$ y $\vec{s}$.
- En $\mathbb{R}^3$ la situación es distinta: si A es un punto en $\mathbb{R}^3$ y $\vec{r}$ y $\vec{s}$ son no nulos y no paralelos, los puntos P de $\mathbb{R}^3$ para los que se cumple que el vector $\overrightarrow{AP}$ puede escribirse como combinación lineal de $\vec{r}$ y $\vec{s}$ es un subconjunto propio de $\mathbb{R}^3$. Este subconjunto recibe el nombre de *plano que contiene a A, con vectores directores $\vec{r}$ y $\vec{s}$.* Uno de los conceptos de la próxima sección hará más fácil escribir una ecuación para describir a los puntos en un plano.

Ejemplo 1.1. *Veamos dos ejemplos que ilustran lo escrito antes.*

Tomemos $\vec{r}$ y $\vec{s}$ iguales a los dos vectores canónicos de $\mathbb{R}^2$, que son no nulos y no paralelos, y $A = (1,1)$. Entonces $P = (x,y)$ es tal que $\vec{AP}$ es combinación lineal de $\vec{r}$ y $\vec{s}$ si y solo si existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\vec{AP} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}.$$

Si hacemos $\alpha = x-1$, $\beta = y-1$, entonces

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} = (x-1)\vec{i} + (y-1)\vec{j}.$$

Si $P = (2,1)$,

$$\vec{AP} = (2-1)\vec{i} + (1-1)\vec{j}.$$

Si $P = (5,-2)$,

$$\vec{AP} = (5-1)\vec{i} + (-2-1)\vec{j}.$$

Para cualquier punto P de $\mathbb{R}^2$ se cumple que el vector $\vec{AP}$ es combinación lineal de $\vec{i}$ y $\vec{j}$.

En cambio, si tomamos $\vec{r}$ igual al primer vector canónico de $\mathbb{R}^3$; $\vec{s}$, al segundo y $A = (1, 0, 1)$, entonces un punto $P = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ pertenece al plano que contiene a A y tiene a estos vectores como directores si y solo si el vector

$$\vec{AP} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}$$

es combinación lineal de $\vec{i}$ y $\vec{j}$ y esto ocurre si y solo si es posible encontrar escalares α y β de modo que

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dado que la igualdad anterior entre vectores es equivalente a

$$\begin{aligned} x-1 &= \alpha, \\ y &= \beta, \\ z-1 &= 0, \end{aligned}$$

los puntos $P = (x, y, z)$ para los que se cumple que $\vec{AP}$ es combinación lineal de los dos primeros vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$ son los que satisfacen $z = 1$. Es decir, si P es un punto de $\mathbb{R}^3$ con tercera coordenada distinta de 1, el vector $\vec{AP}$ no puede escribirse como combinación lineal de $\vec{i}$ y $\vec{j}$. Si P es un punto de $\mathbb{R}^3$ con tercera coordenada igual a 1, entonces $\vec{AP}$ sí puede escribirse como combinación lineal de $\vec{i}$ y $\vec{j}$. Por ejemplo, si $P = (1, 2, 3)$, $\vec{AP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ no puede escribirse como $\alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$, pero si $P = (1, 3, 1)$, entonces

$$\vec{AP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\vec{i} + 3\vec{j}.$$

En la figura 1.1 observan dos vistas de este plano.

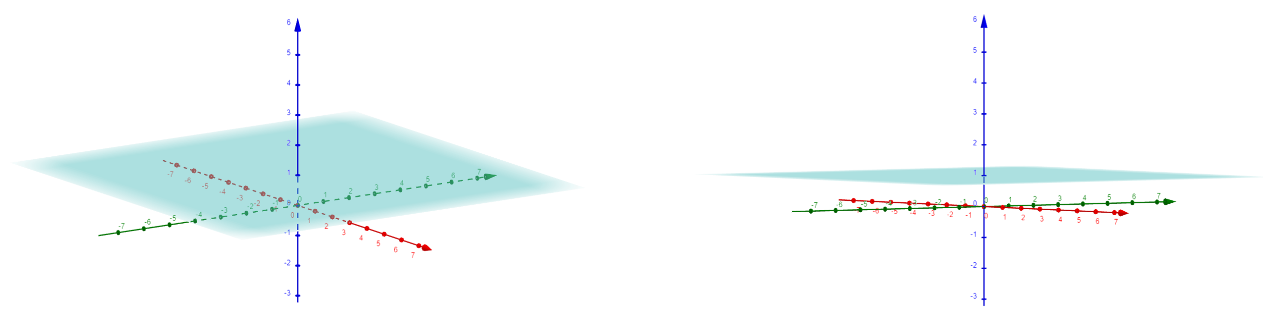

Figura 1.1: El plano que contiene a $(1, 0, 1)$ con vectores directores $\vec{i}$ y $\vec{j}$ es la región de color celeste en estas imágenes. En el plano cartesiano el eje X es rojo, el eje Y, verde y el eje Z, azul.

1.7. Caso particular: rectas y planos que contienen al origen

En el caso particular en que el origen de coordenadas sea un punto en una recta con vector director $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$, ésta está formada por los puntos $Q = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ tales que el vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sea paralelo a $\vec{r}$ y su ecuación es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\vec{r}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

En el caso particular en que el origen de coordenadas sea un punto en una recta con vector director $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$, ésta está formada por los puntos $P = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ tales que el vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sea paralelo a $\vec{r}$ y su ecuación es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\vec{r}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

En el caso particular en que el origen de coordenadas sea un punto en un plano con vectores directores $\vec{r}$ y $\vec{s}$, éste está formada por los puntos $P = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ tales que el vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sea combinación lineal de $\vec{r}$ y $\vec{s}$ y su ecuación es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha\vec{r} + \beta\vec{s}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 1.2. *Determinemos las ecuaciones paramétrica y vectorial de la recta que pasa por los puntos* $(0, 0, 0)$ *y* $(1, -2, 1)$.

La recta está formada por los puntos (x, y, z) *en* $\mathbb{R}^3$ *que pueden escribirse como*

$$(0, 0, 0) + \lambda(1, -2, 1), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ésta es su ecuación paramétrica. El vector entre cualquier par de puntos en la recta es paralelo al vector desde $(0, 0, 0)$ *a* $(1, -2, 1)$, *esto puede expresarse mediante:* (x, y, z) *pertenece a la recta si y solo si*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Esta recta es la mostrada en la figura 1.2.

Ejemplo 1.3. *Determinemos al plano que contiene al origen de coordenadas y del que* $(1, 2, 1)^T$ *y* $(1, 0, 1)^T$ *son vectores directores.*

Este plano está formado por los puntos $P = (x, y, z)$ *tales que el vector desde el origen de coordenadas a* P *es combinación lineal de* $(1, 2, 1)^T$ *y* $(1, 0, 1)^T$. *De este modo,* (x, y, z) *pertenece a este plano si y solo si existen* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *de modo que*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La igualdad anterior se cumple si y solo si se satisface

$$\begin{aligned} x &= \alpha + \beta, \\ y &= 2\alpha, \\ z &= \alpha + \beta. \end{aligned}$$

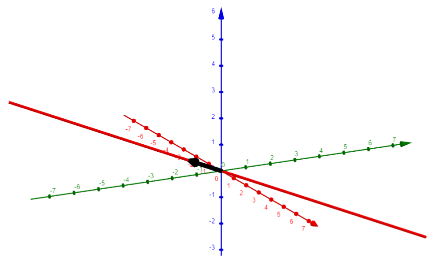

Figura 1.2: Recta que contiene al origen de coordenadas y uno de sus vectores directores.

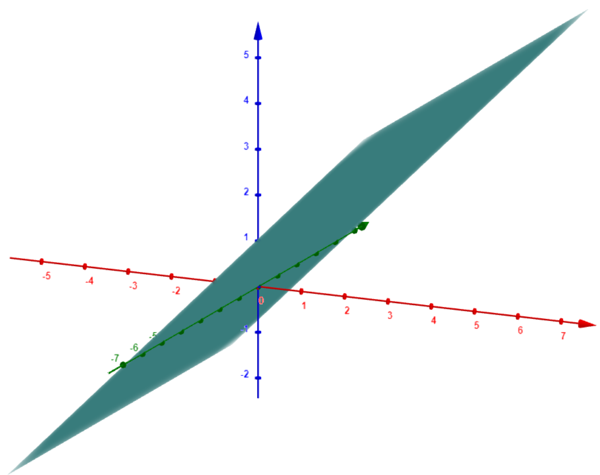

Figura 1.3: Plano que contiene al origen de coordenadas. El eje X es el mostrado en color rojo, el eje Y, en verde y el eje Z, en azul.

Sin importar el valor de y*, de la segunda ecuación podemos calcular* $\alpha = \frac{y}{2}$*. Reemplazando este valor en la primera ecuación obtenemos*

$$\beta = x - \frac{y}{2}$$

y reemplazando los valores de α *y* β *en la tercera ecuación tenemos que*

$$z = \frac{y}{2} + x - \frac{y}{2} = x.$$

Con esto podemos concluir que si el punto (x, y, z) *es tal que* $x \neq z$*,* (x, y, z) *no pertenece al plano que estamos analizando, mientras que si* (x, y, z) *es tal que* $x = z$*, sí pertenece.*

Los puntos (x, y, z) *que pertenecen al plano que pasa por el origen con vectores directores* $(1, 2, 1)^T$ *y* $(1, 0, 1)^T$ *son los que satisfacen que su primera y tercera coordenadas son iguales. Esta plano es el mostrado en la figura 1.3.*