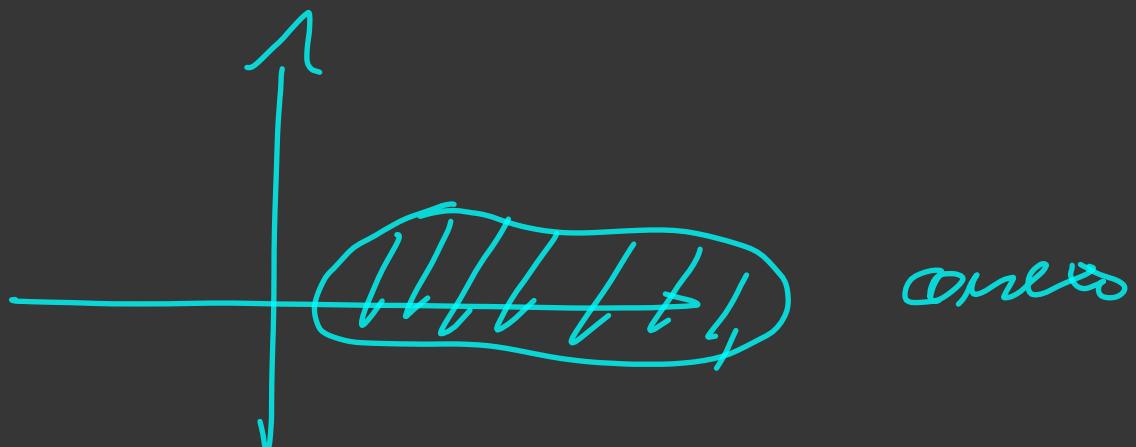
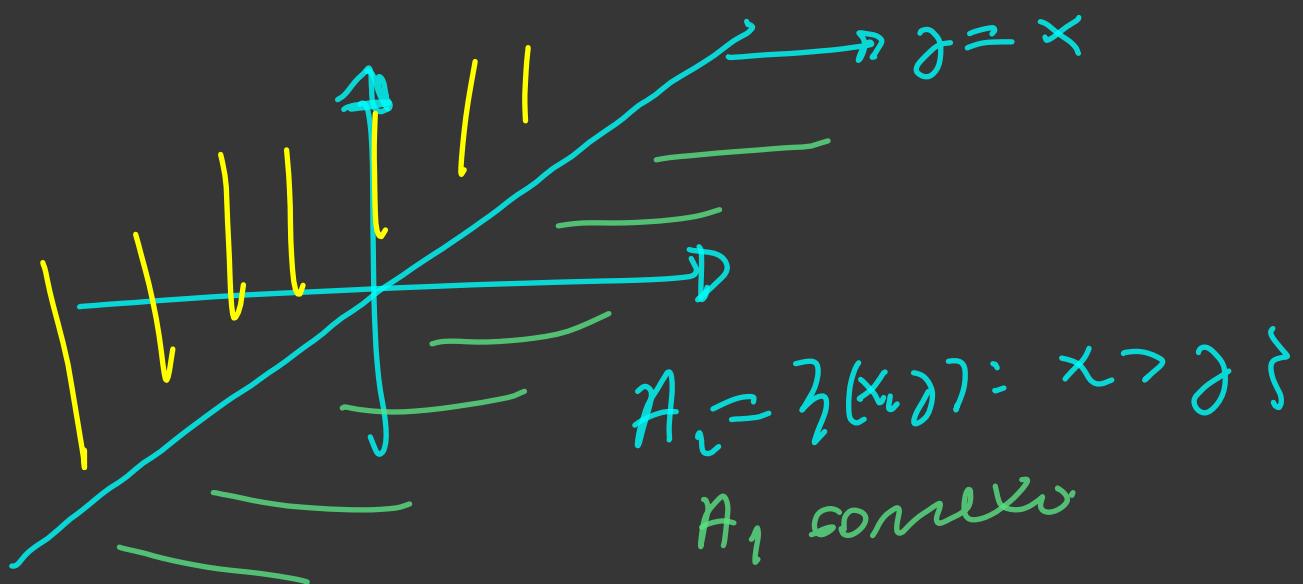


plano:



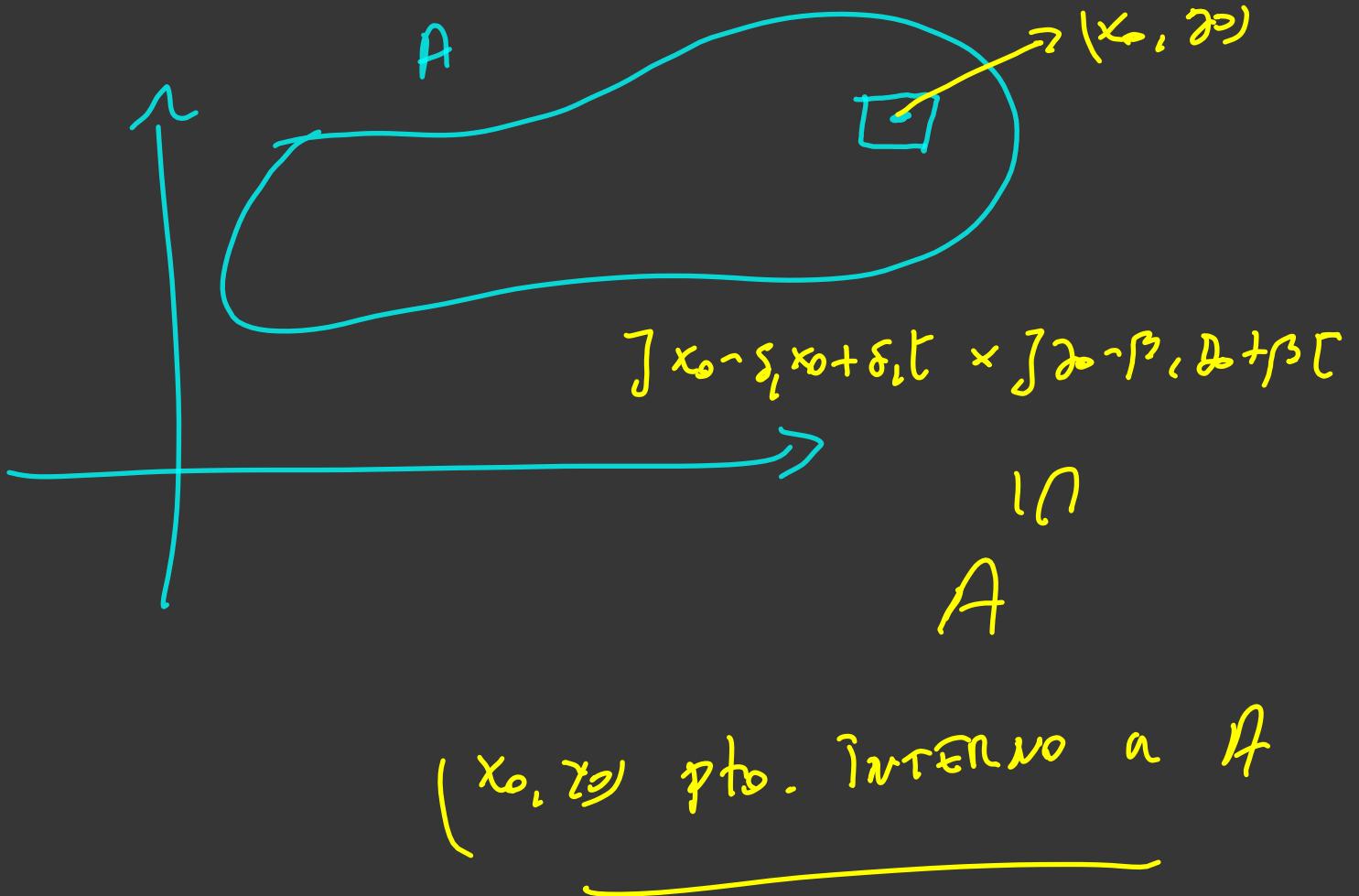
E23



Però $A_2 = \{x_1 : x < y\}$

A_2 tb-n conexo

Però $A_1 \cup A_2$ No es conexo

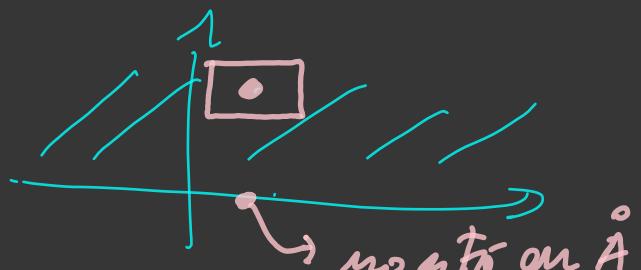


Lunes 03/11/22

DEF. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^2$ diremos que (x_0, y_0) es un **PUNTO INTERNO** de A , o que (x_0, y_0) es **INTERIOR** al conjunto A , si existe $\delta > 0$ tal que el rectángulo $R(x_0, y_0) = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$ está completamente contenido en A . En tal caso escribiremos $(x_0, y_0) \in \overset{\circ}{A}$ ($\overset{\circ}{A}$ indica el conjunto de todos los puntos interiores de A).

Ejemplo: sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$
Entonces el punto $(1, 2) \in \overset{\circ}{A}$

Note que $\forall x \in \mathbb{R}, (x, 2) \in \overset{\circ}{A}$

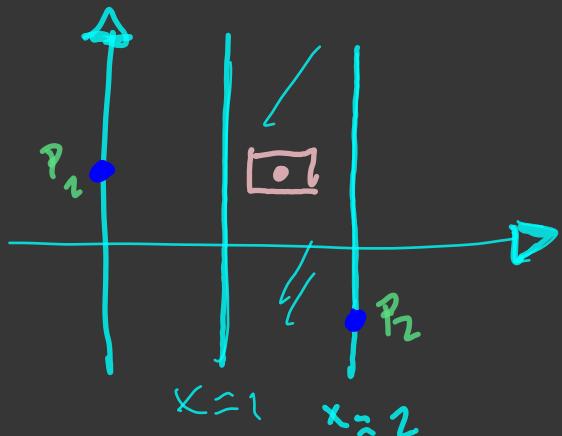


sin embargo $(1, 0) \notin \overset{\circ}{A}$.

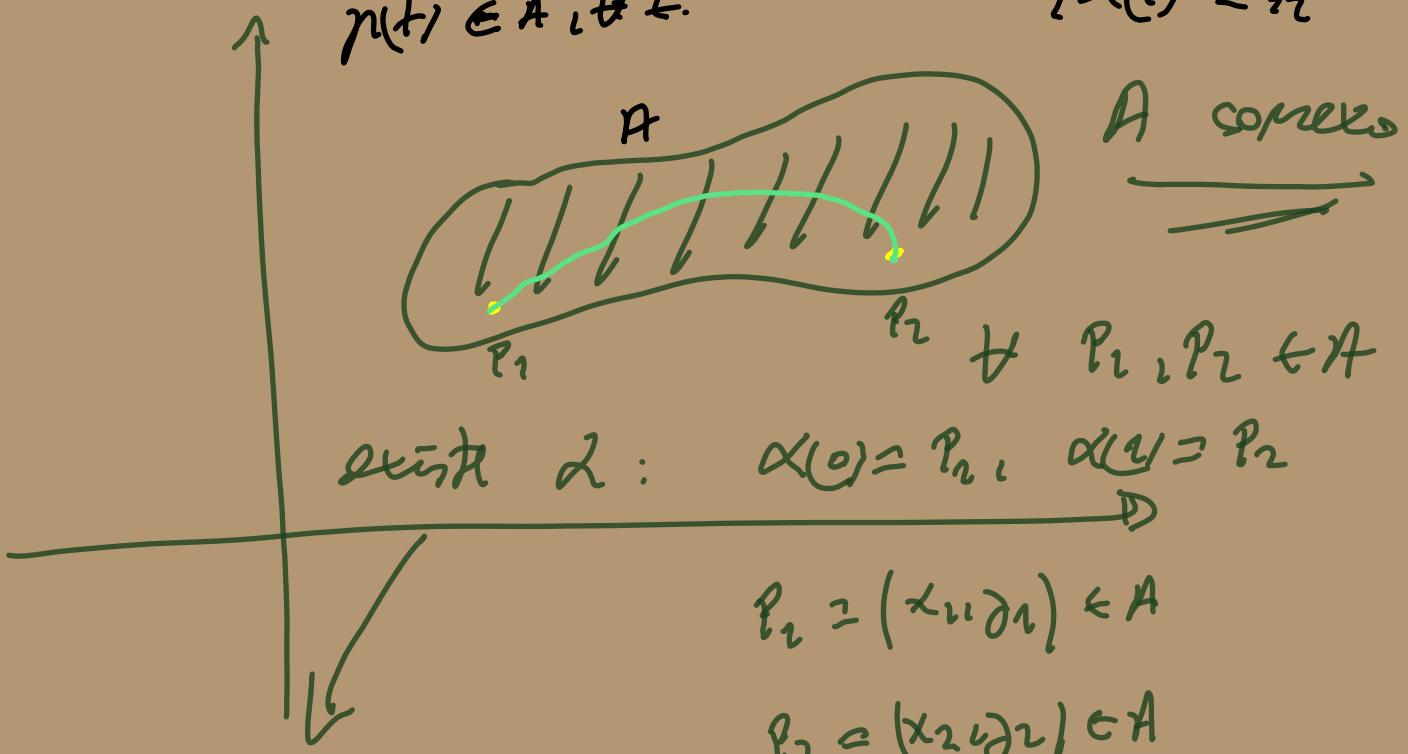
Ejemplo 2: sea $A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 2\}$

Entonces $\forall \delta \in \mathbb{R}$, el punto $(3/2, 2) \in \overset{\circ}{A}_4$

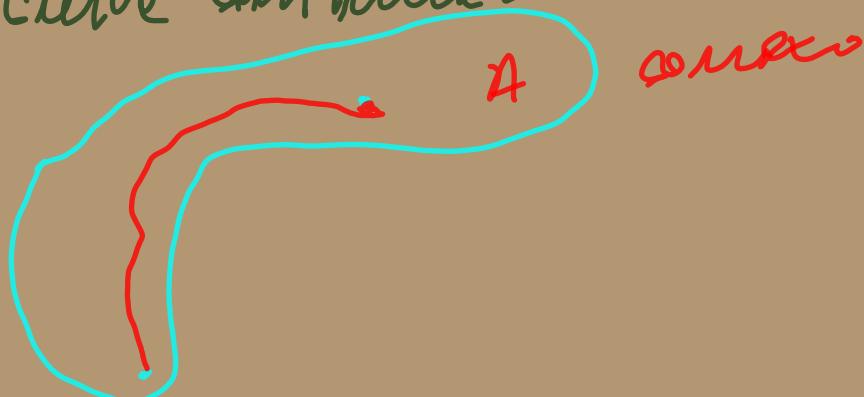
observe que $p_1(0, 2) \notin \overset{\circ}{A}_4$
 $p_2(2, -1) \notin \overset{\circ}{A}_4$.



A convexo si, $\forall P_1, P_2 \in A$, existe
curva continua α tal que $\begin{cases} \alpha(0) = P_1 \\ \alpha(1) = P_2 \end{cases}$
 $\alpha(t) \in A, \forall t \in [0, 1]$.

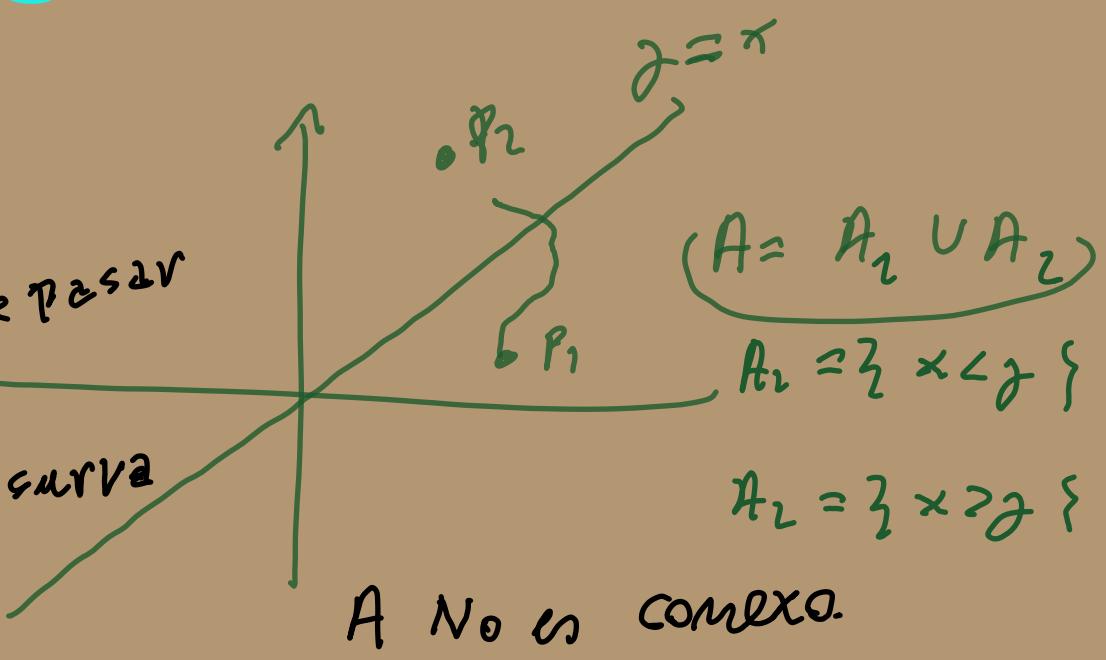


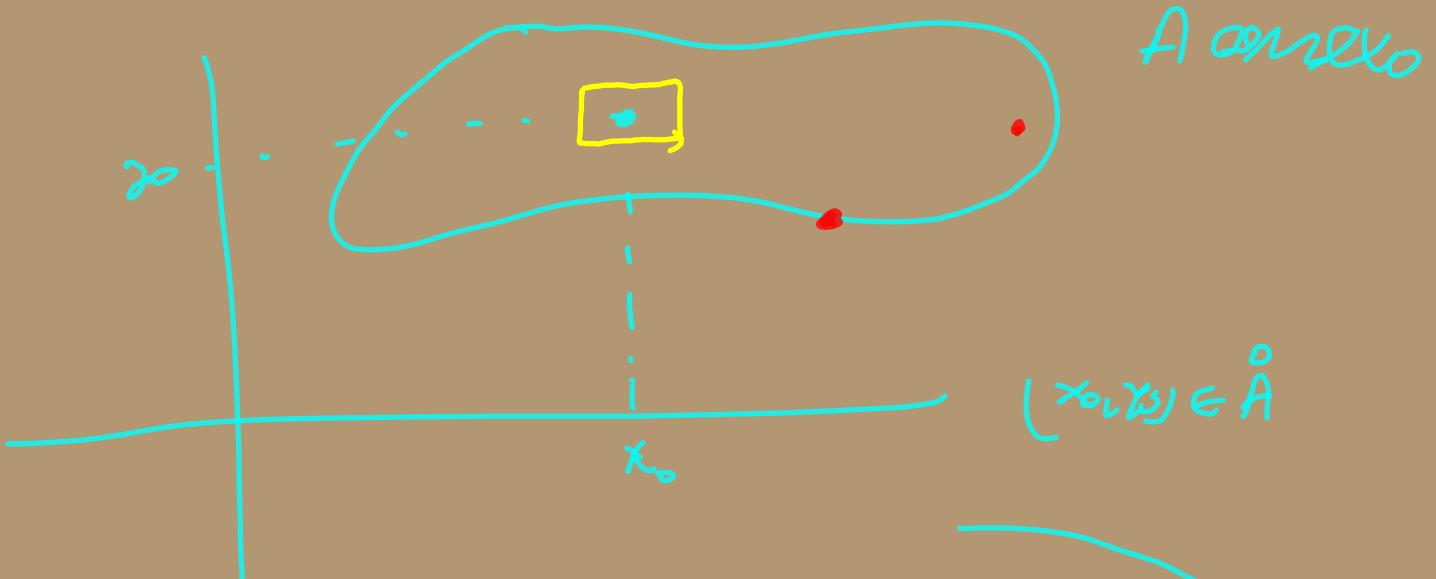
α curve continua.



Ej 3.

No es posible pasar
de P_1 a P_2
através de curva
continua

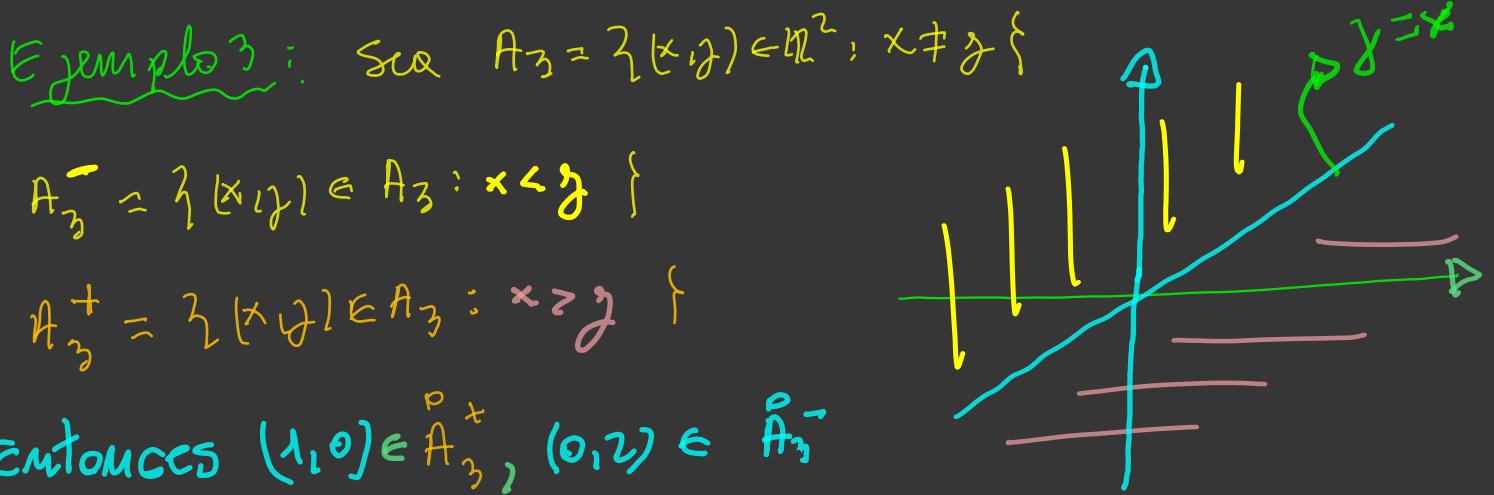




A convexo

$$(x_1, x_2) \in A$$





DEFINICIÓN: Decimos que $A \subseteq \mathbb{R}^2$ es conexo, si $\forall P_1, P_2 \in A$, existe curva continua que une P_1 y P_2 y que está contenida en A .

Regresemos a las EDO: Sea $A \subseteq \mathbb{R}^2$ $\underset{A \text{ conexo}}{\wedge}$. \rightarrow Fin clase 17.

OBS: Para $(x_0, y_0) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f: \tilde{A} \rightarrow \mathbb{R}$ continua,

consideremos el $\begin{cases} g^1(x) = \underline{\underline{f(x, g(x))}} \\ g(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \cdots (1)$

P VI

Integrando en (1)

$$\boxed{\int_{x_0}^x g^1(s) ds = \int_{x_0}^x f(t, g(t)) dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{g(x) = \underline{g(x_0)} + \int_{x_0}^x f(s, g(s)) ds \quad \cdots (2)} \quad \left(\begin{array}{l} \text{note que} \\ g(x_0) = y_0 \end{array} \right)$$

OBS: Si f n continua, entonces (1) \Leftrightarrow (2).

DEF: Consideremos el PVI

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} y'(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right.$$

Daremos que la curva derivable α

$\alpha:]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\rightarrow \mathbb{R}$ es solución para el PVI (P), si:

(i) Existe $\delta > 0$ tal que, $\forall x \in J = \overline{]x_0 - \delta, x_0 + \delta[}$

$$(x, \alpha(x)) \in \text{Dom}(f), \quad (\Rightarrow \forall x \in J; f(x, \alpha(x)) \in \mathbb{R})$$

$$(ii) \left\{ \begin{array}{l} \alpha'(x) = \underline{f(x, \alpha(x))} \\ \alpha(x_0) = y_0 \end{array} \right.$$

Ejemplo: consideremos (P)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = y^2 \\ y(0) = -\frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

Entonces se necesita ver que:

$$\boxed{\alpha(x) = \frac{-1}{x+1}}$$

es una solución para (P).

En efecto. Primero notemos que

$$\text{Si } x = 1, \text{ entonces } \alpha(1) = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

Por tanto, α verifica la condición inicial, C.I., $\alpha(1) = -\frac{1}{2}$.

Vemos si α satisface la EDO.

Como $\alpha(x) = \frac{-1}{x+1}$; sigue f'

$$\alpha'(x) = (-1)(-1) (x+1)^{-2} \frac{d}{dx}(x+1)$$

$$\Rightarrow \alpha'(x) = \left(\frac{1}{x+1}\right)^2 \cdot 1$$

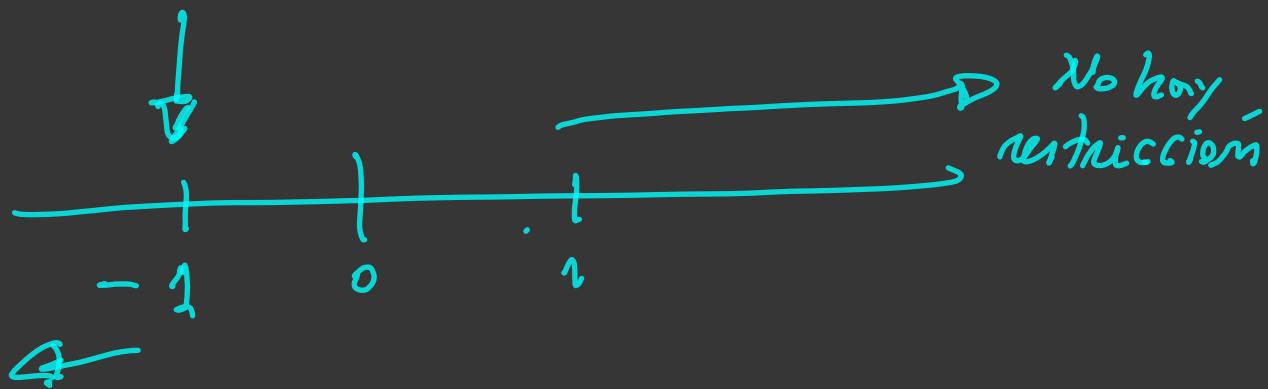
$$\Leftrightarrow \alpha'(x) = (\alpha(x))^2$$

Así, α también verifica la EDO. Por tanto α es solución para el PVI(P). ¿Cuál es el Dom(α)?

Note que $x = -1$ NO puede pertenecer a Dom(α).

Puesto que la C.I. es $\alpha(1)$, entonces Dom(α) es del tipo $\underline{]1-\pi, 1+\pi[}$ con $0 < \pi < 2$

(x podría pensar que $\underline{\text{Dom}(x) = } \underline{[-n, 1+n]} \cup [a, b]}$
 $0 < n < 2$



$$\text{Dom}(x) =]-1, t[, \quad t \geq 0$$

eventualmente $t \rightarrow +\infty$

(siempre se debe "ver" si
 eso es posible)

Por ejemplo, $\text{Dom}(\alpha) =]1-y_4, 1+y_4[$

El $\text{Dom}(\alpha)$ no puede incluir a $x = -1$.

TEOREMA (Existencia de soluciones para EDO ...)

Supongamos que la función $f = f(x, y)$

sea continua sobre $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in A$.

Entonces el PVI $\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

tiene solución.

EDO de primer orden, No lineal

Ejemplo:

Consideremos la EDO:
$$\boxed{y'(x) = 3y^2}$$

Notemos que si $\alpha(x) := \left[\frac{1}{3}(x+c)\right]^3$ donde c

es una constante arbitraria, entonces

$$\boxed{\alpha'(x) = 3\left(\frac{x+c}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}(x+c)^2}$$

$$2 \quad [\alpha(x)]^{\frac{2}{3}} = \left[\left(\frac{x+c}{3}\right)^2\right]^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{x+c}{3}\right)^2 = \underline{\underline{\left(\frac{1}{3}\right)\alpha'(x)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha'(x) = 3(\alpha(x))^{\frac{2}{3}}}$$

Consideremos el PVS:

$$(P_1) \quad \begin{cases} \alpha'(x) = 3x^{\frac{2}{3}} \\ \alpha(0) = 0 \end{cases}$$

Observe que $x=0$
 $(\forall x, \alpha(x)=0)$, satisface
 la EDO $\alpha'(x)=3x^{\frac{2}{3}}$

Como sabemos que $\alpha(x) = \left(\frac{x+c}{3}\right)^3$, c cte.

es solución de $\alpha'(x) = 3x^{\frac{2}{3}}$. Debe ser

$$\alpha(0) = \left(\frac{c}{3}\right)^3 = 0 \Rightarrow \boxed{c=0}$$

Por tanto, $\alpha(x) = \left(\frac{x}{3}\right)^3$ es solución del PVS (P_1)

De otra parte, si definimos $\underbrace{\beta(x) \equiv 0}_{(P_1)}$
 entonces ρ también es solución de (P_1)
 (obvio!).

Ahí, se obtienen dos soluciones para el PVI

$$(P_1) \quad \begin{cases} \rho^1(x) = 3x^{2/3} \\ \rho(0) = 0 \end{cases}$$

a saber:

$$\boxed{\beta_1(x) \equiv 0} \quad \text{y} \quad \boxed{\beta_2(x) = \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Existirá algún modo de asegurar la existencia.

de una única curva solución para el
 PVI (P) ?

TEOREMA. (Existencia y unicidad de solución)

Sean $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una función de modo que:

$$(H) \left\{ \begin{array}{l} f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ \frac{\partial f}{\partial y}: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \end{array} \right.$$

sean ambas continuas.

Entonces para $(x_0, y_0) \in A$ resulta por el PVI

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{array} \right.$$

tiene única solución α definida en un

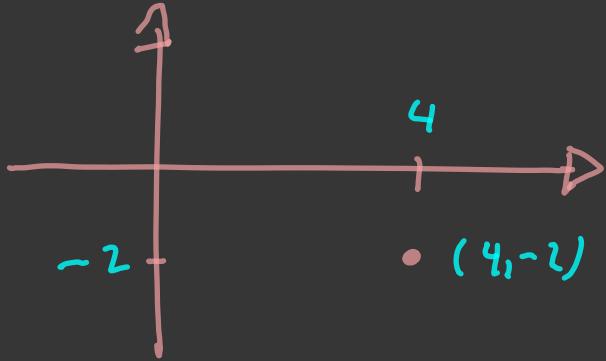
intervalo alrededor de x_0 . Esto es, existen

$\delta > 0$ y única curva $\alpha:]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\rightarrow \mathbb{R}$

tal que $\left\{ \begin{array}{l} \alpha'(x) = f(x, \alpha(x)) \\ \alpha(x_0) = y_0. \end{array} \right.$

Ejemplo: \Rightarrow EDO No lineal (Tarea)

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} y'(x) = \frac{x}{y} \quad ||| \\ y(4) = -2 \end{array} \right.$$



Aquí $f(x, y) = \frac{x}{y}$ i es la gráf. de $x/y \in \mathbb{R}$.

el punto $(x_0, 0) \notin \text{Dom}(f)$.

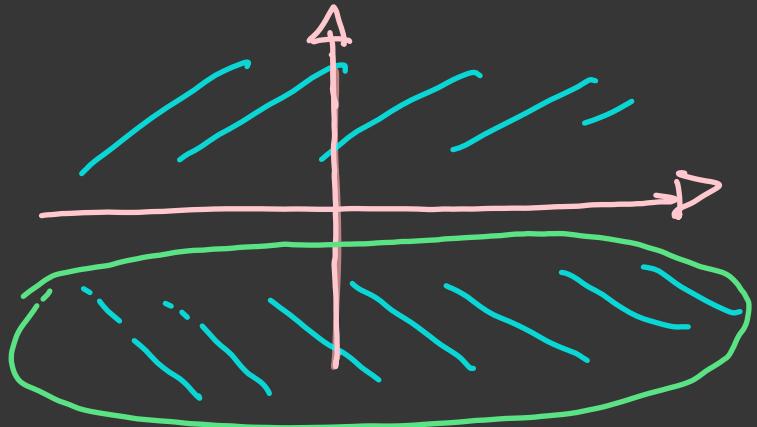
Además, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{x}{y^2}$

Observamos que f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas para todo (x, y) tal que $y > 0$ o $y < 0$.

Además, $(4, -2) \in \mathbb{A}^\circ$

$$A = \{(x, y) | : y < 0\}$$

(III y IV cuadrante)



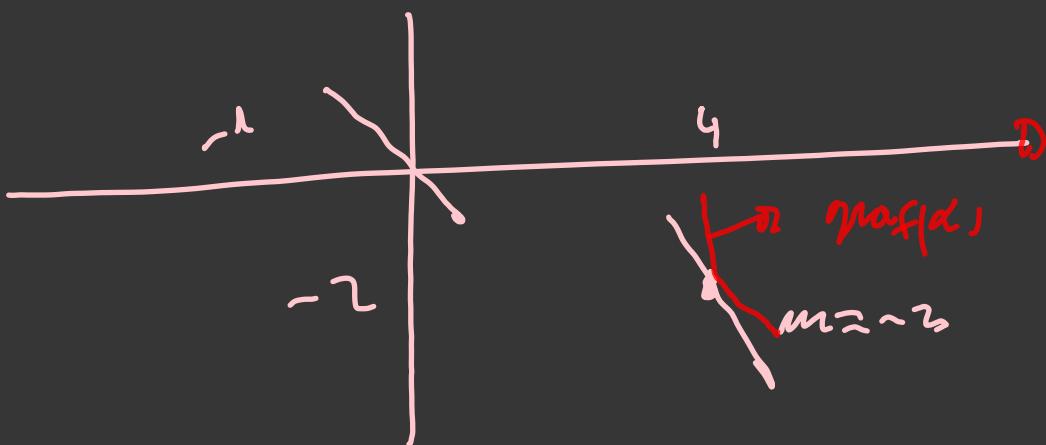
Existe única solución $\alpha:]4-8, 4+8[\rightarrow \mathbb{R}$
($S \geq 0$)
del PVI dado

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha'(x) = \frac{x}{\alpha(x)} \\ \alpha(4) = -2 \end{array} \right.$$

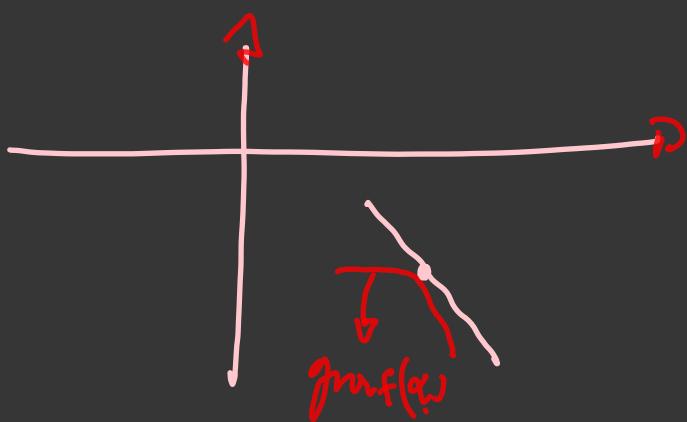
Note que $\alpha'(4) = -2$; además

$$\alpha'(4) = \frac{4}{-2} = -2 < 0$$

por tanto, la curva solución es decreciente
alrededor de $x_0 = 4$



obtenemos

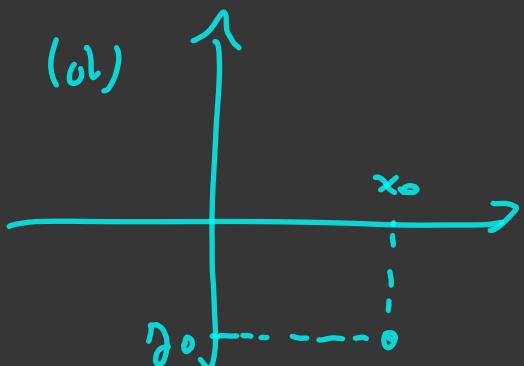
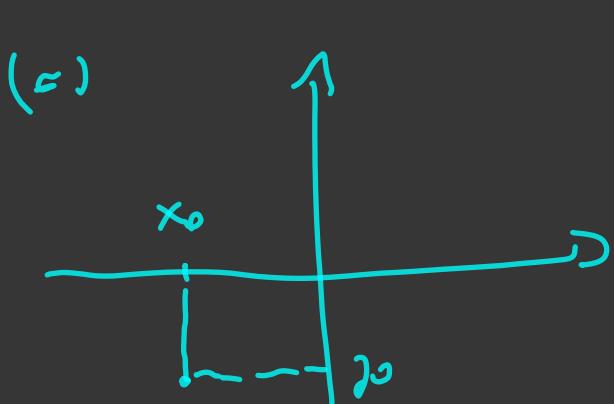
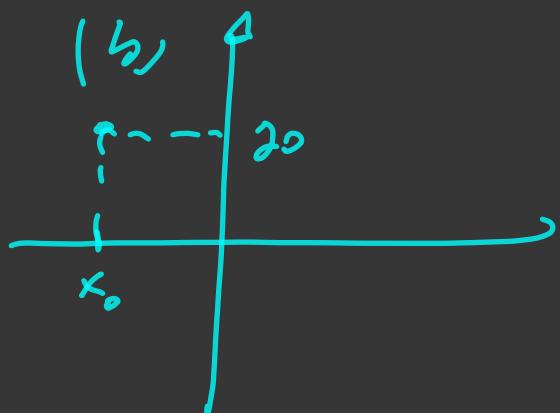
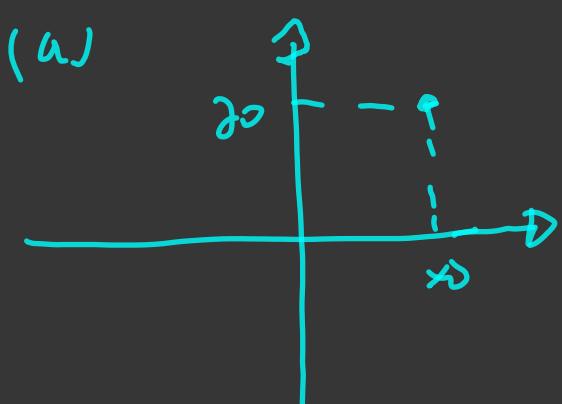


curva solución
decreciente
porque $\alpha'(4) < 0$

$$\alpha'(4) = \frac{4}{-2} = -2 < 0$$

OBS: Note que en general tenemos el

$$\text{PVI} \quad \begin{cases} f'(x) = \frac{x}{\alpha} \\ f(x_0) = \alpha_0 \end{cases}$$



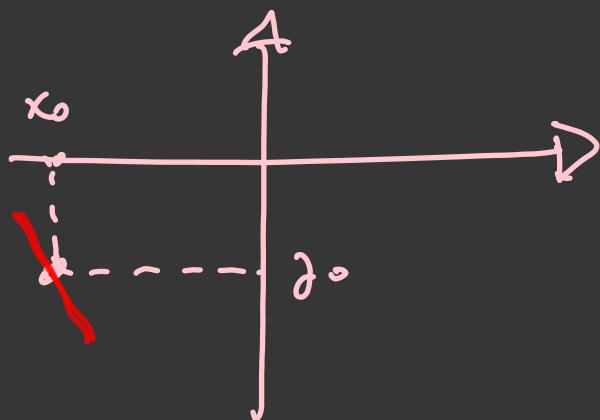
en el caso (a): $\frac{x_0}{\alpha_0} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{curva solución es creciente} \\ \end{cases}$

$$\left(\Rightarrow f'(x_0) = \frac{x_0}{\alpha_0} > 0 \right)$$

caso (c): $f'(x_0) = \frac{x_0}{\alpha_0} < 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{curva solución es decreciente.} \\ \text{etc, etc} \end{cases}$

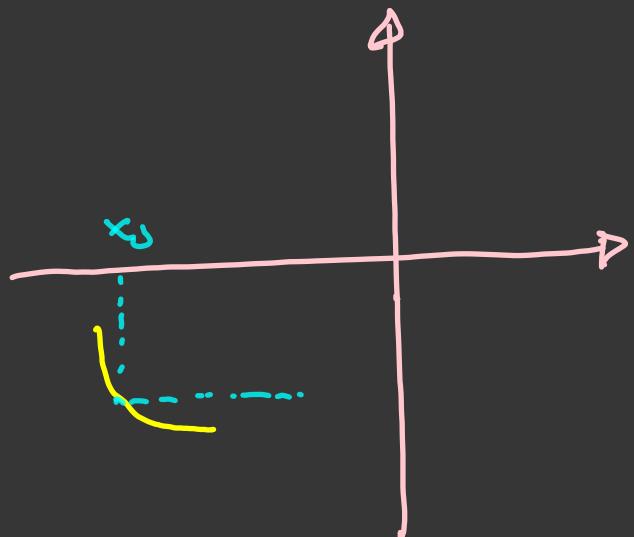
Note que el caso (a) : $\partial^l(x_0) = \frac{x_0}{d_0} < 0$.

Entonces:



en rojo recta tangente a la gráfica de la solución d.

Possibles curvas d



Ejemplo: Consideremos el PVI

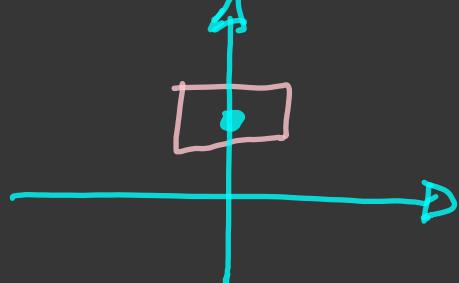
$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha'(x) = \frac{x-1}{x^2} \\ \alpha(0) = 1 \end{array} \right.$$

Aquí

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, \alpha) = \frac{x-1}{x^2} \\ \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha) = 1 \end{array} \right. \quad \text{y entornos}$$

ambas funciones (la f y la $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$) son continuas en todo \mathbb{R}^2 . Además, el punto $(0, 1) \in \mathbb{A}$ con $A = \mathbb{R}^2$.

Entonces, el Teorema anterior



nos asegura que (P_x) tiene única solución

Esto es, existe $\delta > 0$ y única curva derivable $\alpha:]-\delta, \delta[\rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

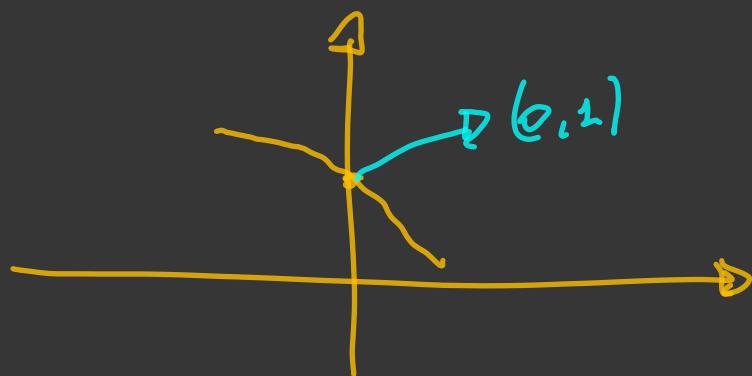
$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha'(x) = \frac{x-1}{x^2} \\ \alpha(0) = 1 \end{array} \right.$$

$$\text{Para } x_0 = 0: \alpha'(0) = (-1)(\alpha(0))^2 = -1$$

$$\alpha'(0) < 0.$$

\Rightarrow ¡el punto $(0,1)$ en una curva γ está desaciendo!

Por tanto, la curva debe ser como



resolvemos γ la EDO;

$$\begin{cases} \gamma'(x) = (x-1) (\gamma(x))^2 \\ \gamma(0) = 1 \end{cases} \text{ tiene solución única}$$

Pero en lugar de $(0,1)$, NO hay restricciones para poner $\gamma(x_0) = y_0$, es decir,

$$\begin{cases} \gamma'(x) = (x-1) \gamma^2 \\ \gamma(x_0) = y_0 \end{cases}$$

también tiene solución única.

Ejemplo: Consideremos el PVI

$$(P_1) \quad \begin{cases} \alpha'(x) = \sqrt{\alpha} \\ \alpha(1) = 1 \end{cases}$$

entonces la curva $\alpha(x)$ tal que:

$$(*) \quad \sqrt{\alpha(x)} = \frac{1}{2}x + C \quad \text{es solución de}$$

$$\boxed{\alpha'(x) = \sqrt{\alpha}}$$

En efecto, en (*) derivando implícitamente tenemos:

$$\frac{d}{dx} (\sqrt{\alpha(x)}) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2}x + C \right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{\alpha(x)}} \alpha'(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha'(x) = \sqrt{\alpha(x)}}$$

$$\text{Pero } \alpha(1) = 1 \Rightarrow \alpha(1) = \frac{1}{2} + C = 1$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

Así, $\alpha(x)$ es tal que: $\sqrt{\alpha(x)} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\alpha(x)| = \left[\frac{1}{2}(x+1)\right]^2 \\ \alpha(x) = \frac{1}{4}(x+1)^2 \end{cases}.$$

Ahí, α resuelve el PVI (P_1).

¿Existe otra solución?

Veamos las hipótesis del Teorema:

Aquí, $f(x, y(x)) = \sqrt{y} = \gamma$

Resulta que f es continua alrededor del punto

$(1, 1)$

$$\text{Además: } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

que también es continua alrededor de $(1, 1)$

Por tanto, la solución $\alpha(x) = \frac{1}{4}(x+1)^2$ es
única para (P_1)

Sin embargo, veamos y sucede con el PVI.

$$(P_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} g^1(x) = \sqrt{x} \\ g(b) = 0 \end{array} \right. .$$

Aquí para todo (x, y) tal que $y \neq 0$, $f(x, y) = \sqrt{x^2}$ es una función continua. Sin embargo, como $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}}$ no es continua en $(x, 0)$, para todo $x \in \mathbb{R}$; solamente podemos afirmar y el PVI

$$(P_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} g^1(x) = \sqrt{x} \\ g(b) = 0 \end{array} \right. .$$

solamente admite solución.