# Índice general

# Capítulo 2

# Espacios Vectoriales

## 2.7. Dependencia e independencia lineal de vectores. Base

En el último ejemplo de la sección anterior nos encontramos con dos conjuntos generadores de $\mathbb{R}^3$, uno con tres vectores (los canónicos) y otro, con cuatro. En esta sección entenderemos que el segundo de ellos tiene información redundante.

**Definición 2.1.** Sean $V$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $v_1, v_2, \ldots, v_k$ elementos de $V$. Se dice que el conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es ***linealmente dependiente*** (ld) si y solo si existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$, no todos iguales a cero, tales que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k = \theta$.

El conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es ***linealmente independiente*** (li) si y solo si no es linealmente dependiente, es decir, si y solo si la única combinación lineal de ellos que da como resultado el vector nulo de $V$ es con escalares iguales a cero o, escrito en lenguaje matemático, si y solo si

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = \theta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0.$$

Dados vectores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ de un $\mathbb{K}$-e.v. $V$ la combinación lineal de ellos con escalares iguales a cero es igual al vector nulo de $V$ pues para todo vector $v \in V$ se cumple que $0v = \theta$. Sin embargo, pudiera ocurrir que existan otras combinaciones lineales de esos vectores que resulten iguales a $\theta$. Si eso ocurre, el conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es linealmente dependiente, si no ocurre, entonces el conjunto es linealmente independiente.

**Ejemplo 2.2.** *El conjunto*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \tag{2.1}$$

*que, como ya sabemos, genera a $\mathbb{R}^3$ es un conjunto ld. Una combinación lineal de ellos es igual al vector nulo de $\mathbb{R}^3$ si y solo si existen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ de modo que*

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

*lo que se traduce en el siguiente sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned} \alpha + 2\gamma - \delta &= 0, \\ \beta + \gamma &= 0, \\ -\alpha - \beta + \delta &= 0. \end{aligned}$$

*De la segunda ecuación tenemos que* $\beta = -\gamma$*. Reemplazado a* $\beta$ *por* $-\gamma$ *en la tercera ecuación obtenemos* $\alpha = \gamma + \delta$*. Si reemplazamos esta expresión para* $\alpha$ *en la primera ecuación se obtiene que* $\gamma = 0$*, con lo que* $\beta = 0$ *y* $\alpha = \delta$*, siendo* $\delta$ *un número real cualquiera. Efectivamente, las combinaciones lineales*

$$\delta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \delta \in \mathbb{R}$$

*son iguales al vector nulo de* $\mathbb{R}^3$*, independientemente del valor de* $\delta$*. El conjunto es, por tanto, linealmente dependiente. Observa que los vectores primero y último del conjunto satisfacen que uno es inverso aditivo del otro, es decir, uno es el resultado de multiplicar al otro por un escalar distinto de cero.*

Volvamos a los ejemplos en las primeras semanas de clases, cuando trabajamos con combinaciones lineales de vectores de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

**Ejemplo 2.3.** *Demostraremos que el conjunto*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \tag{2.2}$$

*es un conjunto li de vectores de* $\mathbb{R}^3$*, mientras que*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \tag{2.3}$$

*y*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \tag{2.4}$$

*son conjuntos ld.*

*En efecto, una combinación lineal de los vectores en el primer conjunto*

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

*es igual al vector nulo de* $\mathbb{R}^3$ *si y solo si*

$$\begin{aligned} a + 2b &= 0, \\ b &= 0, \\ a - 2b + 3c &= 0. \end{aligned}$$

*La única solución de este sistema de ecuaciones es* $a = b = c = 0$*.*

*Por otro lado, la combinación lineal con escalares iguales a cero de los vectores en el segundo conjunto da como resultado el vector nulo de* $\mathbb{R}^3$*, pero existen otras combinaciones lineales de ellos que también son iguales a* $\theta$*:*

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \theta$$

*si y solo si*

$$\begin{aligned} a + 3b - c &= 0, \\ -3a - 9b + 4c &= 0, \\ 2a + 6b + 2c &= 0. \end{aligned}$$

*Sumando las tres ecuaciones se obtiene* $5c = 0$*, es decir,* $c = 0$*. Reemplazando este valor en las ecuaciones anteriores se tiene que* $a$ *y* $b$ *deben ser tales que*

$$a + 3b = 0, \qquad -3(a + 3b) = 0, \qquad 2(a + 3b) = 0.$$

*Todas estas ecuaciones son equivalentes a* $a + 3b = 0$*, es decir,* $a = -3b$*. Todas las combinaciones lineales de la forma*

$$(-3b) \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad b \in \mathbb{R}$$

*son iguales a* $\theta$*. El segundo conjunto de vectores es ld.*

*Por último, la combinación lineal con escalares iguales a cero de los vectores en el tercer conjunto da como resultado el vector nulo de* $\mathbb{R}^3$*, pero ¿existen otras combinaciones lineales de ellos que también son iguales a* $\theta$*?*

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \theta$$

*si y solo si*

$$\begin{aligned} a - 3c &= 0, \\ 2b + 3c &= 0, \\ -a - 2b &= 0. \end{aligned}$$

*De la primera ecuación se obtiene* $a = 3c$*, de la segunda tenemos que* $b = -\frac{3}{2}c$*. Reemplazando ambos en la tercera ecuación se obtiene* $0 = 0$*. Todas las combinaciones lineales de la forma*

$$3c\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - \frac{3}{2}c\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}, \qquad c \in \mathbb{R} \tag{2.5}$$

*son iguales a* $\theta$*. El tercer conjunto de vectores es ld.*

Cuando vimos este ejemplo en clases notamos que el vector $(1,4,2)^{\mathrm{T}}$ podía escribirse, de manera única, como combinación lineal de los vectores en el conjunto (2.2) (conjunto li), mientras que había infinitas formas de escribir a $(-3,10,-2)^{\mathrm{T}}$ como combinación lineal de los vectores en el conjunto 2.3 (conjunto ld) y, por último, no había forma de escribir a $(1,4,2)^{\mathrm{T}}$ como combinación lineal de los vectores en el conjunto (2.4) (conjunto ld). Todo esto nos indica que el vector $(1,4,2)^{\mathrm{T}}$ no pertenece al espacio generado por (2.4), mientras que él sí pertenece al espacio generado por (2.2) y $(-3,10,-2)^{\mathrm{T}}$ pertenece al espacio generado por (2.3). Nota además que si tomamos, por ejemplo, el vector

$$1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\5\\-3\end{pmatrix}$$

que sí pertenece al espacio generado por el conjunto (2.4), podemos encontrar infinitas formas de escribirlo como combinación lineal de los vectores en este conjunto, que es ld. Encontremos, con ayuda de la ecuación (2.5), las infinitas formas de escribir a $\begin{pmatrix}-2\\5\\-3\end{pmatrix}$ como combinación lineal de los vectores en el conjunto (2.4)

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}-2\\5\\-3\end{pmatrix} &= 1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix},\\
&= 1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix} + \theta,\\
&= 1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix} + 3c\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - \frac{3}{2}c\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}, \qquad c \in \mathbb{R},\\
&= (1+3c)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \left(1 - \frac{3}{2}c\right)\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix} + (1+c)\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}, \qquad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Con $c = 0$ obtenemos la combinación lineal con escalares iguales a 1. Con $c = 1$ obtenemos una combinación lineal con escalares $4, -\frac{1}{2}, 2$ que también es igual a $(-2,5,-3)^{\mathrm{T}}$.

Utilizando esta misma idea podemos demostrar el siguiente lema.

**Lema 2.4.** Sean $V$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, $S \subseteq V$, de cardinalidad finita, $S \neq \emptyset$, $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$. Para cada $v \in \langle S \rangle$, existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ tales que $v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$. Esta combinación lineal es única si y solo si $S$ es li.

*Demostración.* Debemos demostrar que

1. si para cada $v \in \langle S \rangle$ existen únicos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ de modo que $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k$, entonces el conjunto $S$ es li y
2. si $S$ es li, entonces cada $v \in \langle S \rangle$ se escribe de manera única como combinación lineal de los vectores en $S$.

La primera afirmación es equivalente a la siguiente: si $S$ es ld, existen vectores en $\langle S \rangle$ que pueden escribirse de distintas formas como combinación lineal de los vectores en $S$. Para demostrar esta afirmación utilizamos la idea que desarrollamos en el ejemplo anterior. Supongamos que $v \in \langle S \rangle$, entonces existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ de modo que $v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$. Si $S$ es ld, existen $\beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{K}$, no todos iguales a cero, tales que $\sum_{i=1}^{k} \beta_i v_i = \theta$ ($\theta$ denota al elemento neutro para la suma en $V$). Dado que

$$v = v + \theta = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_i v_i = \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i + \beta_i) v_i$$

y existe al menos un índice $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tal que $\beta_j \neq 0$, la combinación lineal con escalares $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_k + \beta_k$ es distinta a la original (con escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$), hemos podido escribir a $v$ de dos maneras distintas como combinación lineal de los vectores en $S$.

La segunda afirmación es equivalente a la siguiente: si existe $v \in \langle S \rangle$ que pueda expresarse de dos formas distintas como combinación lineal de los vectores en $S$, entonces $S$ es ld. Supongamos entonces que existe $v \in \langle S \rangle$, $v \neq \theta$[1], que puede representarse de dos formas distintas como combinación lineal de los vectores en $S$, es decir, existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ y $\beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{K}$ tales que

$$v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \quad \text{y} \quad v = \sum_{i=1}^{k} \beta_i v_i$$

y, al menos para un $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ se cumple que $\alpha_j \neq \beta_j$. Dado que estas dos combinaciones lineales son distintas, la diferencia entre ellas,

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i - \sum_{i=1}^{k} \beta_i v_i = \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - \beta_i) v_i$$

es una combinación lineal de vectores en $S$ y con escalares no todos iguales a cero que da como resultado al vector nulo de $V$, lo que, según la definición 2.1, significa que $S$ es ld. □

**Ejemplo 2.5.** *Consideremos los conjuntos $\mathcal{C}_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ (formado por los vectores canónicos*

[1] Si $v = \theta$, ya podríamos afirmar que $S$ es ld.

*de $\mathbb{R}^3$) y*

$$\mathcal{C}_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_4} \right\}.$$

*Ambos generan a $\mathbb{R}^3$, el primero es li y el segundo es ld.*

*Cada vector de $\mathbb{R}^3$ puede escribirse, de manera única, como combinación lineal de los vectores en $\mathcal{C}_1$, pero puede escribirse de infinitas formas como combinación lineal de los vectores en $\mathcal{C}_2$.*

*Tomemos, por ejemplo, el vector $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.*

*La única forma de escribir a $x$ como combinación lineal de los vectores en $\mathcal{C}_1$ es con escalares $1, 2$ y $3$. Por el contrario, y porque, por ejemplo, $\theta = 2v_1 + 0v_2 + 0v_3 + 2v_4$,*

$$x = (-3)v_1 + 0v_2 + 2v_3 + 0v_4 = (-3)v_1 + 0v_2 + 2v_3 + 0v_4 + \theta = (-3)v_1 + 0v_2 + 2v_3 + 0v_4 + \underbrace{(2v_1 + 0v_2 + 0v_3 +}_{=\theta}$$

*también podemos escribir a $x$ como $-v_1 + 0v_2 + 2v_3 + 2v_4$. Hemos encontrado dos combinaciones lineales de los vectores en $\mathcal{C}_2$, una con escalares $-3, 0, 2, 0$ y otra con escalares $-1, 0, 2, 2$, que son iguales a $x$. Pero no son solo dos las combinaciones lineales de los vectores en $\mathcal{C}_2$ que son iguales a $x$, sino que todas las combinaciones lineales de la forma*

$$(-3)v_1 + 0v_2 + 2v_3 + 0v_4 + \underbrace{\delta v_1 + 0v_2 + 0v_3 + \delta v_4}_{=\theta} = (-3+\delta)v_1 + 0v_2 + 2v_3 + \delta v_4, \qquad \delta \in \mathbb{R}$$

*son iguales a $x$.*

Sea $A = \{v_1, \ldots, v_k\}$. Note que

1. si $A$ es ld, entonces cualquier conjunto de vectores que contenga a $A$ es ld. En particular, $\{\theta\}$ es ld y cualquier conjunto que contenga a $\theta$ es ld.
2. si $A$ es li, cualquier subconjunto de $A$ es li.
3. si $k = 1$ y $v_1 \neq \theta$, entonces $A$ es li.
4. si $A$ es ld, entonces al menos uno de los vectores en $A$ puede escribirse como combinación lineal de los restantes. Esto ocurre porque si $A$ es ld, existen $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\ldots$, $\alpha_k$ no todos iguales a cero tales que

$$\theta = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i.$$

Sea $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tal que $\alpha_j \neq 0$, entonces

$$\theta = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_j v_j + \ldots + \alpha_k v_k \;\Rightarrow\; \alpha_j v_j = -\alpha_1 v_1 - \ldots - \alpha_{j-1} v_{j-1} - \alpha_{j+1} v_{j+1} - \ldots - \alpha_k v_k$$

y, dividiendo la expresión anterior por $\alpha_j$, que es distinto de cero, podemos escribir al vector $v_j$ como combinación lineal de los restantes vectores en $A$,

$$v_j = \frac{1}{\alpha_j}\sum_{i=1, i\neq j}^{k}(-\alpha_i v_i) = -\frac{\alpha_1}{\alpha_j}v_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_j}v_2 - \ldots - \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j}v_{j-1} - \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j}v_{j+1} - \ldots - \frac{\alpha_k}{\alpha_j}v_k. \quad (2.6)$$

Veamos ejemplos de esta última afirmación.

**Ejemplo 2.6.** *Ya sabemos que el conjunto* (2.1) *es ld y que para cada* $\delta \neq 0$ *la combinación lineal*

$$\delta\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad \delta \in \mathbb{R} \quad (2.7)$$

*es una combinación lineal de los vectores en el conjunto* (2.1)*, con escalares no todos iguales a cero, que da como resultado al vector nulo de* $\mathbb{R}^3$*. Los vectores* $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ *no pueden escribirse como combinación lineal de los restantes*[2]*, pero* $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ *sí pues*

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

*y*

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

*También demostramos que el conjunto* (2.3) *es ld y que las combinaciones lineales de la forma*

$$(-3b)\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\-9\\6\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}, \qquad b \in \mathbb{R}$$

*dan como resultado al vector nulo de* $\mathbb{R}^3$*. El vector* $\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}$ *no puede escribirse como combinación lineal de los demás vectores en el conjunto* (2.3)*, pero*

$$\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\-9\\6\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}$$

[2]nota que en las combinaciones lineales (2.7) el escalar frente a ellos es cero.

*y*

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

*Por último, todas las combinaciones lineales de la forma*

$$3c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}c \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad c \in \mathbb{R}$$

*dan como resultado al vector nulo de* $\mathbb{R}^3$*. En este caso cada vector del conjunto* (2.4) *puede escribirse como combinación lineal de los restantes, por ejemplo,*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Volviendo a los conjuntos $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ del ejemplo 2.5, generadores li y ld de $\mathbb{R}^3$: en $\mathcal{C}_2$ hay dos vectores ($v_1$ y $v_4$) que pueden escribirse como combinación lineal de los restantes, mientras que ninguno de los vectores en $\mathcal{C}_1$ es combinación lineal de los restantes. Como $v_1$ y $v_4$ se escriben como combinación lineal de los restantes vectores en $\mathcal{C}_2$, podemos eliminar a uno de ellos de $\mathcal{C}_2$ y el conjunto resultante seguiría siendo generador de $\mathbb{R}^3$. Veamos por qué: dado que $\mathcal{C}_2$ genera a $\mathbb{R}^3$, para cada $x \in \mathbb{R}^3$ existen escalares $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ de modo que

$$x = av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4,$$

pero, dado que $v_1 = 0v_2 + 0v_3 - v_4$, se tiene que

$$x = a(-v_4) + bv_2 + cv_3 + dv_4 = bv_2 + cv_3 + (d - a)v_4,$$

es decir, $x$ también puede escribirse como combinación lineal de los vectores en $\{v_2, v_3, v_4\}$. El vector $v_1$ en $\mathcal{C}_2$ es un vector redundante, no necesitamos de él para describir a los vectores de $\mathbb{R}^3$, cada vector que se escribe como combinación lineal de los vectores en $\mathcal{C}_2$ también se escribe como combinación lineal de los vectores en $\{v_2, v_3, v_4\}$. Por el contrario, no es posible eliminar vectores de $\mathcal{C}_1$ (conjunto li) y que el conjunto resultante siga generando a $\mathbb{R}^3$. Si, por ejemplo, eliminamos a $e_1$ de $\mathcal{C}_1$, el conjunto resultante $\{e_2, e_3\}$ no genera a $\mathbb{R}^3$.

Esta particularidad de un conjunto generador ld (podemos eliminar vectores de él y seguir generando el mismo espacio) se demuestra en el siguiente lema.

**Lema 2.7** (Lema de Dependencia Lineal)**.** Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ un conjunto linealmente dependiente en $V$, espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Entonces existe $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ de modo que:

1. $v_j \in \langle\{v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_k\}\rangle$, es decir, $v_j$ se escribe como combinación lineal de los restantes vectores en el conjunto, y
2. $\langle\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \setminus \{v_j\}\rangle = \langle\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}\rangle$.

*Demostración.* La primera propiedad la demostramos anteriormente cuando mencionamos que si un conjunto $A$ es ld, al menos uno de los vectores en $A$ puede escribirse como combinación lineal de los restantes vectores en el conjunto, es decir, al menos uno de los vectores en $A$ pertenece al conjunto generado por los restantes vectores del conjunto.

Demostremos la segunda de las afirmaciones anteriores. Como debemos demostrar una igualdad entre conjuntos, separaremos la demostración en dos partes.

- $\langle\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \setminus \{v_j\}\rangle \subseteq \langle\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}\rangle$ y
- $\langle\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}\rangle \subseteq \langle\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \setminus \{v_j\}\rangle$.

La primera inclusión es clara: si $v \in \langle\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \setminus \{v_j\}\rangle$, entonces

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_{j-1} v_{j-1} + \alpha_{j+1} v_{j+1} + \ldots + \alpha_k v_k$$

que también puede escribirse como $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_{j-1} v_{j-1} + 0 v_j + \alpha_{j+1} v_{j+1} + \ldots + \alpha_k v_k$, es decir, si $v$ es combinación lineal de los vectores en $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \setminus \{v_j\}$, también es combinación lineal de los vectores en $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$.

Para probar la segunda inclusión utilizaremos la misma idea que cuando comentamos más arriba las diferencias entre $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$. Tomemos un elemento arbitrario $u \in \langle\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}\rangle$, entonces existen escalares $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k \in \mathbb{K}$ tales que

$$u = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_j v_j + \ldots + \beta_k v_k.$$

Ahora podemos reemplazar $v_j$ por (2.6) y obtenemos

$$\begin{aligned} u &= \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots + \beta_j \left( -\frac{\alpha_1}{\alpha_j} v_1 - \ldots - \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j} v_{j-1} - \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j} v_{j+1} - \ldots - \frac{\alpha_k}{\alpha_j} v_k \right) + \beta_{j+1} v_{j+1} + \ldots + \beta_k v_k, \\ &= \left( \beta_1 - \frac{\beta_j}{\alpha_j} \alpha_1 \right) v_1 + \left( \beta_2 - \frac{\beta_j}{\alpha_j} \alpha_2 \right) v_2 + \ldots + \left( \beta_{j-1} - \frac{\beta_j}{\alpha_j} \alpha_{j-1} \right) v_{j-1} + \left( \beta_{j+1} - \frac{\beta_j}{\alpha_j} \alpha_{j+1} \right) v_{j+1} + \ldots + \left( \beta_k \right. \\ &= \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \ldots + \gamma_{j-1} v_{j-1} + \gamma_{j+1} v_{j+1} + \ldots + \gamma_k v_k, \end{aligned}$$

con lo que hemos probado que $u$ también puede escribirse como combinación lineal de los vectores en el conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \setminus \{v_j\}$, es decir, $u$ también es elemento del espacio generado por estos vectores, que se escribe como $\langle\{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \setminus \{v_j\}\rangle$. □

**Observación 2.8.** *Note que el lema anterior también es cierto si $k = 1$. En ese caso, que $S$ sea ld significa que $S = \{\theta\}$ con lo que $\langle S \rangle = \{\theta\}$. Si eliminamos de $S$ al único vector en $S$ obtenemos el conjunto vacío, $S \setminus \{\theta\} = \emptyset$, que, por definición, genera a $\{\theta\}$*

A un conjunto generador li, es decir, a un conjunto generador del que no podemos eliminar vectores sin cambiar el espacio que el conjunto genera le damos un nombre especial, le damos el nombre de *base*. Los conjuntos $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son generadores de $\mathbb{R}^3$, pero solo $\mathcal{C}_1$ es base de $\mathbb{R}^3$.

**Definición 2.9** (Base de un espacio vectorial)**.** Una *base de un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial* $V$ es una *familia ordenada* de vectores $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ que cumple que

- $\mathcal{B}$ es conjunto generador de $V$, $(V = \langle \mathcal{B} \rangle)$, y

- $\mathcal{B}$ es linealmente independiente.

**Ejemplo 2.10.** *Las siguientes son ejemplos de bases en los espacios dados.*

1. *$V = \mathbb{K}^n$, e.v. sobre $\mathbb{K}$,*

   $$\mathcal{B}_c = \left\{(1,\, 0,\, \ldots,\, 0,\, \ldots,\, 0)^T, (0,\, 1,\, \ldots,\, 0,\, \ldots,\, 0)^T, \ldots,\, (0,\, 0,\, \ldots,\, 1,\, 0)^T,\, (0,\, 0,\, \ldots,\, 0,\, \ldots,\, 1)^T\right\}.$$

   *es una base de $\mathbb{K}^n$ pues cualquier combinación lineal de los vectores anteriores es un vector en $\mathbb{K}^n$ y además cualquier vector de $\mathbb{K}^n$ se escribe como combinación lineal de los vectores anteriores. En efecto, si $(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)^T \in \mathbb{K}^n$, entonces*

   $$\begin{aligned}(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n)^T = x_1&(1,\, 0,\, \ldots,\, 0,\, \ldots,\, 0)^T + \\ &x_2(0,\, 1,\, \ldots,\, 0,\, \ldots,\, 0)^T + \ldots + x_{n-1}(0,\, 0,\, \ldots,\, 1,\, 0)^T + \\ &x_n(0,\, 0,\, \ldots,\, 0,\, \ldots,\, 1)^T,\end{aligned}$$

   *Por último, debemos mostrar que el conjunto es li: una combinación lineal*

   $$\alpha_1(1,\, 0,\, \ldots,\, 0,\, \ldots,\, 0)^T + \alpha_2(0,\, 1,\, \ldots,\, 0,\, \ldots,\, 0)^T + \ldots + \alpha_n(0,\, 0,\, \ldots,\, 0,\, \ldots,\, 1)^T = \theta$$

   *si y solo si $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. $\mathcal{B}_c$ se denomina* **base canónica de** $\mathbb{K}^n$*.*
2. *Si $V = \mathcal{P}_n(\mathbb{K})$, e.v. sobre $\mathbb{K}$, el conjunto de vectores*

   $$\mathcal{B}_c = \left\{1,\, x,\, x^2,\, \ldots,\, x^n\right\}.$$

   *es una base de $V$ y se denomina **base canónica de** $\mathcal{P}_n(\mathbb{K})$.*

Volviendo a los conjuntos $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$: el primero ya es base de $\mathbb{R}^3$, el segundo no, pero

$$\langle \mathcal{C}_2 \rangle = \langle \mathcal{C}_2 \setminus \{v_1\} \rangle = \langle \mathcal{C}_2 \setminus \{v_4\} \rangle .$$

Los conjuntos $\mathcal{C}_2 \setminus \{v_1\}$ y $\mathcal{C}_2 \setminus \{v_4\}$ son ambos li y, por tanto, bases de $\mathbb{R}^3$.

Esto que hicimos con $\mathcal{C}_2$ puede hacerse con cualquier generador de cardinalidad finita de un e.v., esto es lo que plantea el siguiente lema.

**Lema 2.11.** Sea $V$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial tal que $V = \langle \{v_1, \ldots, v_n\} \rangle$. Entonces el conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ puede reducirse a una base de $V$, es decir, podemos construir una base de $V$ eliminando vectores del conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$, generador de $V$.

*Demostración.* La demostración se hace por construcción.

Supongamos que para todo $k \in \{1,\, 2,\, \ldots,\, n\}$ se cumple que $v_k \neq \theta$. Si alguno de los vectores en $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es igual a $\theta$, lo podemos eliminar del conjunto sin cambiar el espacio generado por él.

Denotemos $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $r = n$.

Procedemos de la siguiente forma:

Paso 1: Si $\mathcal{B}$ es li, entonces $\mathcal{B}$ es base de $V$, nuestro proceso termina.

Paso 2: Si $\mathcal{B}$ no es li, al menos uno de los vectores en $\mathcal{B}$ se escribe como combinación lineal de los restantes, supongamos que $v_j$ con $j \in \{1, 2, \dots, r\}$ es ese vector. El conjunto $\mathcal{B} \setminus \{v_j\}$ es tal que $\langle \mathcal{B} \setminus \{v_j\} \rangle = \langle \mathcal{B} \rangle$.

Paso 3: Hacemos $\mathcal{B} = \mathcal{B} \setminus \{v_j\}$, $r = r - 1$ y volvemos al paso 1.

Repitiendo este proceso iremos reduciendo en 1 la cardinalidad del conjunto $\mathcal{B}$. Cuando obtengamos un conjunto li hemos construido una base de $V$. Recuerda que un conjunto con un solo vector distinto de $\theta$ es un conjunto li, por tanto, la cantidad de elementos del último conjunto $\mathcal{B}$ es mayor o igual que 1. $\square$

**Ejemplo 2.12.** *Volvamos a los conjuntos*

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{S}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{S}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \tag{2.8}$$

*El primero de ellos es un conjunto li. Te invitamos a demostrar que* $\langle \mathcal{S}_1 \rangle = \mathbb{R}^3$.

*Los otros dos conjuntos son ld.*

*En un ejemplo anterior vimos que el vector* $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2$ *puede escribirse como combinación lineal de los restantes vectores en el conjunto,*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

*Se cumple entonces que* $\left\langle \mathcal{S}_2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle = \langle \mathcal{S}_2 \rangle$. *El conjunto*

$$\mathcal{S}_2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \tag{2.9}$$

*es li (nota que al tener solo dos vectores el conjunto es ld si y solo si alguno de los vectores es el nulo o los vectores son paralelos) y, por tanto, base de* $\langle \mathcal{S}_2 \rangle$. *El vector* $\begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}$, *que ya sabemos pertenece a* $\langle \mathcal{S}_2 \rangle$ *puede escribirse, de manera única, como combinación lineal de los vectores en el conjunto* (2.9), *en efecto,*

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{2}{3} \ \wedge \ b = 1.$$

*Por otro lado, como*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

*se cumple que* $\langle \mathcal{S}_3 \rangle = \left\langle \mathcal{S}_3 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$*. El conjunto*

$$\mathcal{S}_3 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \tag{2.10}$$

*es un conjunto li. El vector* $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ *que, en un ejemplo anterior escribimos de infinitas formas como combinación lineal de los vectores en* $\mathcal{S}_3$ *ahora puede escribirse, de manera única, como combinación lineal de los vectores en el conjunto* (2.10)*, nota que*

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{3}{2} \wedge b = \frac{2}{3}.$$

Una base $\mathcal{B}$ de un espacio vectorial es un conjunto generador del espacio que tiene la cantidad justa de vectores: si se eliminan vectores del conjunto, éste deja de generar el espacio y si se añaden vectores a él, éste deja de ser li, deja de cumplirse que cada vector en el espacio puede escribirse, de manera única, como combinación lineal de los vectores en el generador.

Estas propiedades se demuestran en el siguiente lema.

**Lema 2.13.** Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$. $\mathcal{B}$ es una base de $V$ si y solo si $\mathcal{B}$ satisface:

- $\langle \mathcal{B} \rangle = V$ y para todo $v_r \in \mathcal{B}$, el conjunto $\{v_1, \ldots, v_{r-1}, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ ya no es un conjunto generador de $V$ y
- $\mathcal{B}$ es li y para todo $v \in V$, el conjunto $\mathcal{B} \cup \{v\}$ no es li.

*Demostración.* Supongamos que $\mathcal{B}$ es una base de un $\mathbb{K}$-e.v. $V$.

Sea $v_r \in \mathcal{B}$. Nota que si $\mathcal{B} \setminus \{v_r\}$ aún generara a $V$, entonces $v_r$ (elemento de $V$) podría escribirse como combinación lineal de los vectores en $\mathcal{B} \setminus \{v_r\}$, lo que indica que $\mathcal{B}$ sería ld y esto no es posible.

Por otro lado, si existiera $v \in V$ de modo que $\mathcal{B} \cup \{v\}$ es li, entonces el vector $v \in V$ no podría ser combinación lineal de los vectores en $\mathcal{B}$, lo que contradice el hecho de que $\langle \mathcal{B} \rangle = V$. $\square$

## 2.8. Dimensión de espacios vectoriales

Nuestro objetivo es ahora demostrar que todas las bases de un espacio vectorial tienen la misma cantidad de vectores. Esto nos permitirá definir la dimensión de un espacio vectorial como la cardinalidad (o cantidad de elementos) de cualquiera de sus bases. Para ello necesitamos primero demostrar los dos teoremas siguientes (teoremas de Steinnitz o teoremas de intercambio).

**Teorema 2.14.** Sean $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de $V$ y $w \in V$, $w \neq \theta$, $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Si $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ es tal que $\alpha_k \neq 0$, entonces el conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \ldots v_n\}$ también es base de $V$.

*Demostración.* Nota que en este teorema estamos construyendo una nueva base para $V$ a partir de una base conocida. La nueva base es el conjunto que resulta de reemplazar al vector $v_k$ en $B$ por $w$. Demostremos que este nuevo conjunto es base. Debemos demostrar que es generador de $V$ y que es li.

Mostremos primero que el nuevo conjunto genera a $V$. Para ello mostraremos que cualquier vector $v \in V$, que ya sabemos es combinación lineal de los vectores en $B$, también es combinación lineal de los vectores en $\{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \ldots v_n\}$. Sea $v \in V$, entonces

$$v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i = \sum_{i=1, i\neq k}^{n} \beta_i v_i + \beta_k v_k,$$

Como $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ y $\alpha_k$ es distinto de cero, podemos escribir a $v_k$ como

$$v_k = \frac{1}{\alpha_k} \left( w - \alpha_1 v_1 - \cdots - \alpha_{k-1} v_{k-1} - \alpha_{k+1} v_{k+1} - \cdots - \alpha_n v_n \right)$$

y entonces

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1, i\neq k}^{n} \beta_i v_i + \frac{\beta_k}{\alpha_k} \left( w - \sum_{i=1, i\neq k}^{n} \alpha_i v_i \right), \\ &= \sum_{i=1, i\neq k}^{n} \left( \beta_i - \frac{\beta_k}{\alpha_k} \alpha_i \right) v_i + \frac{\beta_k}{\alpha_k} w, \end{aligned}$$

es decir, si $v$ puede escribirse como combinación lineal de los vectores en $B$, también puede escribirse como combinación lineal de los vectores en $\{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \ldots v_n\}$, lo que significa que este conjunto es generador de $V$.

Demostremos ahora que $\{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \ldots v_n\}$ es li. Supongamos que $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k \in \mathbb{K}$ son tales que $\sum_{i\neq k} \beta_i v_i + \beta_k w = \theta$, es decir,

$$\begin{aligned} \theta &= \sum_{i=1, i\neq k}^{n} \beta_i v_i + \beta_k w = \sum_{i=1, i\neq k}^{n} \beta_i v_i + \beta_k \left( \sum_{i=1, i\neq k}^{n} \alpha_i v_i + \alpha_k v_k \right), \\ &= (\beta_1 + \beta_k \alpha_1) v_1 + (\beta_2 + \beta_k \alpha_2) v_2 + \ldots + (\beta_{k-1} + \beta_k \alpha_{k-1}) v_{k-1} + \beta_k \alpha_k v_k + (\beta_{k+1} + \beta_k \alpha_{k+1}) v_{k+1} + \ldots + (\beta_n + \end{aligned}$$

La combinación lineal anterior es una combinación lineal de los vectores en $B$ que es igual a $\theta$. Dado que $B$ es base de $V$, la igualdad anterior se cumple si y solo si

$$\alpha_k\beta_k = 0$$

y

$$\beta_1+\beta_k\alpha_1 = 0 \wedge \beta_2+\beta_k\alpha_2 = 0 \wedge \cdots \wedge \beta_{k-1}+\beta_k\alpha_{k-1} = 0 \wedge \beta_{k+1}+\beta_k\alpha_{k+1} = 0 \wedge \cdots \wedge \beta_n+\beta_k\alpha_n = 0$$

Dado que $\alpha_k \neq 0$, el producto $\beta_k\alpha_k = 0$ si y solo si $\beta_k = 0$.

Si $\beta_k = 0$, entonces para cualquier $i \in \{1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n\}$ los coeficientes $\beta_i+\beta_k\alpha_i$ son iguales a $\beta_i$ y son iguales a cero si y solo si $\beta_i = 0$. Con esto se tiene que $\{v_1, \ldots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ es li.

Podemos concluir entonces que $\{v_1, \ldots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ es base de $V$. □

**Ejemplo 2.15.** *En este ejemplo entenderemos mejor qué plantea el teorema anterior.*

*Ya sabemos que*

$$\mathcal{B} = \left\{1, x, x^2, x^3\right\}$$

*es una base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. El polinomio $p$ tal que $p(x) = 2+3x^2$ es combinación lineal de los polinomios en $\mathcal{B}$ con escalares iguales a cero frente a las funciones $x$ y $x^3$. Los conjuntos*

$$\left\{2 + 3x^2, x, x^2, x^3\right\}, \qquad \left\{1, x, 2 + 3x^2, x^3\right\}$$

*son también bases de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Nota que el conjunto de la izquierda lo obtuvimos de reemplazar $1$ por $2 + 3x^2$ y el de la derecha lo obtuvimos de intercambiar $x^2$ por $2 + 3x^2$ en la base conocida de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Sin embargo, como en $p$ no hay "información" sobre $x$ ni $x^3$, si reemplazamos las funciones $x$ o $x^3$ en $\mathcal{B}$ por $p$, el conjunto resultante no tendría ninguna de las dos propiedades que debe tener para ser base: ser li y generar el espacio.*

En el siguiente teorema se plantea un resultado importante: cualquier conjunto li de elementos de un espacio vectorial $V$ tiene una cantidad de elementos menor o igual que la cantidad de elementos en una base. Esto se demuestra con ayuda del teorema anterior, el ejemplo que sigue a la demostración del teorema puede ayudarte a entender mejor la demostración.

**Teorema 2.16.** Sean $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de $V$ y $\{w_1, \ldots, w_r\}$ un conjunto li de vectores en $V$. Entonces, $r \leq n$ y existen índices $i_1, \ldots, i_{n-r} \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tales que $\tilde{B} = \{w_1, \ldots, w_r, v_{i_1}, \ldots, v_{i_{n-r}}\}$ es una base de $V$.

*Demostración.* Esto es equivalente a demostrar que existen $j_1, \ldots, j_r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tales que después de intercambiar $v_{j_1}$ por $w_1$, $v_{j_2}$ por $w_2$,...,$v_{j_r}$ por $w_r$ se obtiene una nueva base de $V$.

Comencemos con $w_1$. Aplicando el teorema de intercambio anterior podremos construir una nueva base de $V$, llamémosla $B_1$, intercambiando uno de los elementos de $B$ por $w_1$.

Sea $B_i$ la base que hemos obtenido después de aplicar el procedimiento anterior $i$ veces,

$$B_i = \left\{w_1, \ldots, w_i, v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n-i}}\right\}.$$

El vector $w_{i+1}$ puede escribirse como combinación lineal de los vectores en $B_i$. Además en esta combinación lineal, si $i+1 \leq r \leq n$, existe al menos un coeficiente distinto de cero acompañando a uno de los elementos en $\{v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n-i}}\}$ (de no existir estaría escribiendo $w_{i+1}$ como combinación lineal de elementos en $\{w_1, \ldots, w_i\}$ y esto no es posible pues $\{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$ es li). Denotemos a este elemento por $\tilde{v}$. Intercambiando a $\tilde{v}$ en $B_i$ por $w_{i+1}$ se construye la nueva base $B_{i+1}$ de $V$.

Si $r > n$, después de repetir este proceso $n$ veces se tiene que $B_n = \{w_1, \ldots, w_n\}$ es base de $V$ y $w_{n+1}$ debería poder escribirse como combinación lineal de los elementos en $B_n$, lo cual es una contradicción con el hecho de que el conjunto $\{w_1, \ldots, w_r\}$ es li. El elemento $w_{n+1}$ tampoco puede añadirse a $B_n$ pues, al ser este conjunto una base de $V$, al añadirle un elemento deja de serlo. $\square$

Veamos, con un ejemplo, la idea de la demostración anterior.

**Ejemplo 2.17.** *Sea $B = \{1, x, x^2\}$ una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Supongamos que el conjunto $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ es un conjunto li de vectores de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. El teorema anterior nos dice que esto es imposible, que cualquier conjunto li de vectores de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ debe tener 1, 2 o 3 vectores, pero no más. Veamos cómo se explica esto en la demostración anterior. Para ello se utiliza varias veces el teorema 2.14. Pero antes de empezar a utilizarlo debemos notar que $p_1, p_2, p_3$ y $p_4$ tienen que ser todos distintos del polinomio nulo pues ningún conjunto que contenga a $\theta$ es li.*

1. *Como $B$ es base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $p_1$ se escribe como combinación lineal de los vectores en $B$ y alguno de los escalares en esa combinación lineal es distinto de cero. Supongamos $p_1(x) = \alpha + \beta x$ con $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$. Entonces el teorema 2.14 garantiza que el conjunto $B_1 = \{1, p_1, x^2\}$ es base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.*
2. *Tomemos ahora $p_2$. Como $B_1$ es base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $p_2$ es combinación lineal de los vectores en $B_1$. Además en esa combinación lineal el escalar que acompaña a $1$ o a $x^2$ tiene que ser distinto de cero (de lo contrario, $p_2 = \alpha p_1$ con $\alpha \neq 0$ y el conjunto $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ no sería li). Supongamos $p_2(x) = \alpha + \beta p_1(x)$ con $\alpha$ y $\beta$ distintos de cero. Intercambiemos a $1$ por $p_2$. El conjunto $B_2 = \{p_2, p_1, x^2\}$ es base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.*
3. *Llegamos a $p_3$. Este polinomio es combinación lineal de los polinomios en $B_2$ y el coeficiente que acompaña a 1 en esa combinación lineal tiene que ser distinto de cero, de lo contrario, $p_3$ sería combinación lineal de $p_1$ y $p_2$ y el conjunto $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ no sería li. Podemos intercambiar a $1$ por $p_3$ en $B_2$, el conjunto resultante es base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $B_3 = \{p_3, p_1, p_2\}$.*
4. *Ahora tenemos a $p_4$, él tiene que ser combinación lineal de los polinomios en $B_3$, pero esto indica que el conjunto $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ no es li. Por tanto, para que el conjunto $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ fuera li, la cantidad de elementos en él no puede ser superior a 3.*

**Lema 2.18.** Todas las bases de un espacio finito dimensional $V$ ($V$ es finito dimensional si podemos encontrar un conjunto generador para $V$ con una cantidad finita de vectores) tienen la misma cardinalidad.

*Demostración.* Si $\{v_1, \ldots, v_m\}$ y $\{w_1, \ldots, w_n\}$ son bases de $V$. Aplicando el teorema anterior con base $\{v_1, \ldots, v_m\}$ y conjunto li $\{w_1, \ldots, w_n\}$ se tiene que $n \leq m$.

Si aplicamos el teorema anterior con base $\{w_1, \ldots, w_n\}$ y conjunto li $\{v_1, \ldots, v_m\}$, entonces $m \leq n$.

Estas dos desigualdades se cumplen si y solo si $m = n$. □

Ahora tiene sentido la siguiente definición.

**Definición 2.19.** Sea $V$ un $\mathbb{K}$-e.v. La ***dimensión*** de $V$, que se denota por $\dim(V)$, es la cardinalidad de cualquiera de sus bases. La ***dimensión*** del e.v. trivial $\{\theta\}$ es cero.

De esta forma tenemos $\dim(\mathbb{K}^n) = n$, $\dim(\mathcal{P}_n(\mathbb{K})) = n + 1$, si consideramos a cada uno de ellos como $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. Además $\dim(\mathbb{C}^n)$ como espacio vectorial real es $2n$ pues puede comprobarse que el conjunto

$$\left\{(1, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}, (0, 1, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}, \ldots, (0, 0, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}, (i, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}, \ldots, (0, 0, \ldots, i)^{\mathrm{T}}\right\}.$$

es una base de $\mathbb{C}^n$ como espacio vectorial real.

En el siguiente teorema se relacionan la dimensión de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $V$ a las dimensiones de subespacios vectoriales de él.

**Teorema 2.20.** Sea $V$ un espacio vectorial finito dimensional sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Sean $U, W \subseteq V$ subespacios vectoriales de $V$. Entonces

1. $W$ es finito dimensional y $\dim(W) \leq \dim(V)$,
2. si $\dim(W) = \dim(V)$, entonces $V = W$,
3. $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$.

Ésta última relación se denomina teorema de Grassmann.

*Demostración.*

1. Cualquier base de $W$ es un generador para $W$ y un conjunto li de vectores en $V$. Como consecuencia del teorema 2.16 este conjunto li de vectores debe tener cardinalidad menor o igual a la dimensión de $V$, por tanto, la dimensión de $W$ es menor o igual a la de $V$.
2. Supongamos que $\dim(W) = \dim(V)$ y que $V$ y $W$ no son iguales. Sea $\{w_1, \ldots, w_n\}$ una base de $W$. Como $V$ y $W$ no son iguales, existe $v \in V$ que no puede escribirse como combinación lineal de $\{w_1, \ldots, w_n\}$, por tanto, $\{w_1, \ldots, w_n, v\}$ es un conjunto li de vectores en $V$, lo cual según lema 2.16 no es posible pues cualquier conjunto li de vectores de $V$ tiene, a lo sumo, $n$ vectores.
3. Sea $\{v_1, \ldots, v_r\}$ una base de $U \cap W$.
   Ésta puede completarse a bases $\{v_1, \ldots, v_r, u_1, \ldots, u_n\}$ y $\{v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_m\}$ de $U$ y $W$ respectivamente. Construyamos a partir de estas bases una base para $U + W$.
   Si $v \in U + W$, entonces existen $u \in U$ y $w \in W$ tales que $v = u + w$. Esto significa que

   $$v = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{r} \beta_i v_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_i w_i,$$

   es decir, $v = \sum_{i=1}^{r}(\alpha_i + \beta_i) v_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{m} \beta_i w_i$ con lo que

   $$\mathcal{B}_{U+W} := \{v_1, \ldots, v_r, u_1, \ldots, u_n, w_1, \ldots, w_m\}$$

es generador de $U+W$.
Probemos que el conjunto $\mathcal{B}_{U+W}$ es li. Sean $\alpha_i, \beta_i, \delta_i \in \mathbb{R}$ tales que

$$\theta = \underbrace{\sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i}_{=u_1} + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \delta_i w_i}_{=u_2} . \tag{2.11}$$

Denotemos $u_1 = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i$ y $u_2 = \sum_{i=1}^{m} \delta_i w_i$. Note que $u_1 \in U$ y $u_2 \in W$.
Pero

$$\theta = u_1 + u_2 \Rightarrow u_1 = -u_2 \Rightarrow u_1 \in W$$

pues, al ser $W$ es subespacio vectorial de $V$, si $u_2 \in W$, se cumple que $-u_2 \in W$.
Con esto se tiene que $u_1 \in U \cap W$, esto es, existen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r \in \mathbb{K}$ tales que $u_1 = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i v_i$ y, por tanto, $u_1 + u_2 = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i v_i + \sum_{i=1}^{m} \delta_i w_i$.
Entonces

$$\theta = u_1 + u_2 \Leftrightarrow \theta = \sum_{i=1}^{r} \gamma_i v_i + \sum_{i=1}^{m} \delta_i w_i$$

Dado que $\{v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_m\}$ es base de $W$, la igualdad anterior es equivalente a

$$\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, m\} \ : \ \delta_i = 0 \quad \text{y} \quad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, r\} \ : \ \gamma_i = 0$$

De aquí se tiene que entonces $u_1 = \theta$, $u_2 = \theta$ y la ecuación (2.11) puede reescribirse como

$$\theta = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i$$

Dado que $\{v_1, \ldots, v_r, u_1, \ldots, u_n\}$ es base de $U$, esta última igualdad se cumple si y solo si

$$\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, r\} \ : \ \alpha_i = 0 \quad \text{y} \quad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, m\} \ : \ \beta_i = 0.$$

Dado que (2.11) es equivalente a

$$\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n\} \ : \ \beta_i = 0 \quad \text{y} \quad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, r\} \ : \ \alpha_i = 0 \quad \text{y} \quad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, m\} \ : \ \delta_i = 0,$$

el conjunto $\mathcal{B}_{U+W}$ es una base de $U+W$ y, con ello,

$$\dim(U+W) = n + m + r = (n+r) + (m+r) - r = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

$\square$

Note que ahora sabemos que $U+W$ es directa si y solo si $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W)$.

En los siguientes ejemplos usaremos el teorema anterior para probar que un subespacio vectorial de cierto espacio vectorial es igual a todo el espacio.

**Ejemplo 2.21.**

1. *Ahora podemos entender por qué si $U$ y $W$ son rectas distintas en $\mathbb{R}^2$ que pasan por el punto $(0,0)$, su suma es $\mathbb{R}^2$. Sean $\vec{r}$ y $\vec{s}$ los vectores directores de las rectas $U$ y $W$, entonces*
$$U = \langle \{\vec{r}\} \rangle\,, \qquad W = \langle \{\vec{s}\} \rangle$$
*y*
$$U + W = \langle \{\vec{r}, \vec{s}\} \rangle\,.$$
*El conjunto $\{\vec{r}, \vec{s}\}$ es li (porque $\vec{r}$ y $\vec{s}$ no son paralelos), por tanto, $dim(U+W) = 2$, es decir, $U+W$ es un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$ cuya dimensión es igual a la dimensión de $\mathbb{R}^2$, tiene que cumplirse entonces que $U + W = \mathbb{R}^2$.*
2. *La semana pasada trabajamos también con las siguientes rectas en $\mathbb{R}^3$:*
$$\mathcal{L}_1 = \left\langle \left\{ (2,3,4)^T \right\} \right\rangle \quad y \quad \mathcal{L}_2 = \left\langle \left\{ (1,3,0)^T \right\} \right\rangle$$
*Ellas son tales que $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{\theta\}$, por tanto, $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$. Aplicando el teorema de Grassmann se tiene que*
$$dim(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2) = dim(\mathcal{L}_1) + dim(\mathcal{L}_2) - dim(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2) = 1 + 1 - 0 = 2,$$
*por lo que podemos asegurar, sin calcular $\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2$, que $\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ que no coincide con $\mathbb{R}^3$. Además, como sabemos que su dimensión es 2 y $\{(2,3,4)^T, (1,3,0)^T\}$ es un sistema generador para él formado por 2 vectores, él es una base, no tenemos que comprobar que el conjunto es li.*
3. *Consideremos ahora dos planos, $U$ y $W$, en $\mathbb{R}^3$, planos que contengan al origen, pero distintos entre sí. Entonces $dim(U) = 2$, $dim(W) = 2$ y, aplicando Grassmann tenemos que*
$$dim(U + W) = 4 - dim(U \cap W).$$
*El espacio $U \cap W$ no puede tener dimensión cero (el único espacio de dimensión cero es $\{\theta\}$). Si esto ocurriera, la dimensión de $U + W$, s.e.v. de $\mathbb{R}^3$, sería 4 y esto es imposible. Como $U \cap W$ es s.e.v. de $U$ y de $W$, que tienen dimensión 2, se cumple que la dimensión de $U \cap W$ solo puede ser 1 o 2. Si es 2, $U \cap W = U$, pero esto es imposible si $W$ es un plano distinto a $U$. La dimensión de $U \cap W$ tiene que ser 1 ($U \cap W$ es una recta) y entonces $dim(U + W) = 3$, es decir, $U + W = \mathbb{R}^3$.*
4. *Los subespacios $U, W$ de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$*
$$U = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \;:\; p(0) = p'(0) = 0\}\,, \quad W = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \;:\; \forall\, x \in \mathbb{R} \;:\; p(-x) = p(x)\}$$
*son tales que $dim(U \cap W) = 1$, con esto sabemos que la suma de ellos no es directa. Además,*
$$dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3,$$
*y, por tanto, $U + W$ es un s.e.v. de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ que no es igual a $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.*
5. *Los subespacios $U, W$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$*
$$U = \{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \;:\; p(0) = 0\}\,, \quad W = \{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \;:\; p(0) = p'(0) = 0\}$$
*son tales que $U + W = \langle \{x, x^2\} \rangle$. Aplicando el teorema de Grassmann se tiene que*
$$dim(U + W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W) \Rightarrow dim(U \cap W) = 2 + 1 - 2 = 1$$
*y con esto podemos asegurar que $U + W$ no es directa.*

**Definición 2.22.** Sean $V$ un $\mathbb{K}$-e.v. y $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de $V$, entonces para cada $v \in V$ existen únicos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ se denominan ***coordenadas de*** $v$ ***en*** $\mathcal{B}$ y se denotan mediante

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

**Ejemplo 2.23.** *Los conjuntos*

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

*son bases de* $\mathbb{R}^3$*. Se cumple que*

$$\left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}, \qquad \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}_3} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ \frac{17}{3} \end{pmatrix}.$$