

1 Curvas en \mathbb{R}^n .

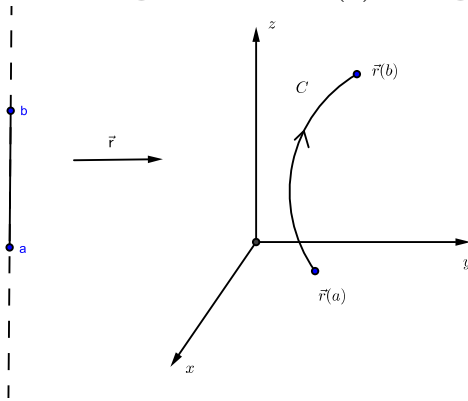
Definición 1 Una curva en \mathbb{R}^n es una función $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \vec{r}(t)$ (función de variable real t y a valores vectoriales).

La curva está determinada por sus n funciones componentes en la forma $\vec{r}(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t))$. Cuando $n = 2$ y $n = 3$, la curva se representa por:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \text{ para curvas en el plano}$$

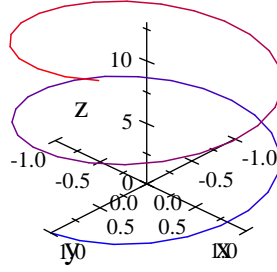
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \text{ para curvas en el espacio.}$$

Una curva en \mathbb{R}^3 se representa también en la forma $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \hat{i} + y(t) \cdot \hat{j} + z(t) \cdot \hat{k}$, con $a \leq t \leq b$. Si consideramos la imagen C (el recorrido) de esta función, ella es un conjunto de puntos en \mathbb{R}^3 que geoméricamente constituyen una **curva**. Además ella se puede orientar a partir de la orientación de los números reales en el intervalo $[a, b]$. Físicamente, la curva C puede representar la trayectoria recorrida por un punto en el espacio, durante el intervalo de tiempo que va de $t = a$ hasta $t = b$, teniendo un punto inicial $\vec{r}(a)$ y un punto terminal $\vec{r}(b)$.



Desde un punto de vista más geométrico o físico, la curva es el conjunto de puntos C , orientado, y \vec{r} es una **parametrización** de la curva.

Por ejemplo, la función $\vec{r}(t) = \cos t \cdot \hat{i} + \sin t \cdot \hat{j} + t \cdot \hat{k}$, con $0 \leq t \leq 13$; es una parametrización de la *espiral* mostrada abajo.



Note que por conveniencia el eje z tiene una escala diferente de los ejes x e y . (el resorte es más estirado que lo que se muestra). Observe también que las dos primeras componentes de la curva (parametrización) satisfacen la relación $x(t)^2 + y(t)^2 = 1$, lo que muestra que la espiral está en el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

El concepto de límite para una función como la \vec{r} establece que:

Definición 2 Para $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \hat{i} + y(t) \cdot \hat{j} + z(t) \cdot \hat{k}$, $t_0 \in (a, b)$ y $\vec{r}_0 = x_0 \cdot \hat{i} + y_0 \cdot \hat{j} + z_0 \cdot \hat{k}$ vector fijo, se tiene:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0 \text{ si, y sólo si,}$$

$$\text{dado } \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que, } \forall t : 0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow \|\vec{r}(t) - \vec{r}_0\| < \varepsilon$$

Las desigualdades: $|x_i| \leq \|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| \quad \forall i$, para la norma en \mathbb{R}^n , permiten probar que:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}_0 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x_0, \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = y_0, \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = z_0,$$

Del concepto de límite se obtiene la noción de continuidad:

Definición 3 La curva $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \hat{i} + y(t) \cdot \hat{j} + z(t) \cdot \hat{k}$ es continua en t_0 cuando

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$$

Es claro entonces que: $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \hat{i} + y(t) \cdot \hat{j} + z(t) \cdot \hat{k}$ es continua en t_0 cuando las funciones componentes son continuas en dicho punto. En términos

geométricos, que la parametrización sea una función continua significa que C es una curva que no se corta (continua).

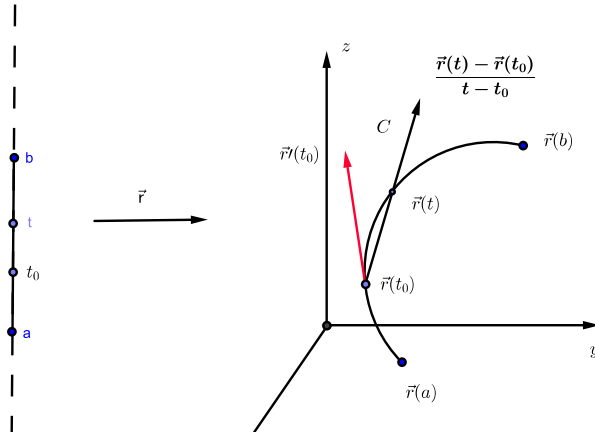
La espiral del ejemplo anterior es una curva continua, porque sabemos que las funciones $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$ y $z(t) = t$ son todas funciones continuas.

Otro concepto importante para una curva es el de derivada:

Definición 4 La curva $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \hat{i} + y(t) \cdot \hat{j} + z(t) \cdot \hat{k}$ es derivable en t_0 cuando existe el límite

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{t - t_0} = \vec{r}'(t_0)$$

Geométricamente, el vector $r'(t_0)$ es un vector tangente a la curva C en el punto $r(t_0)$. Cuando la curva C representa el movimiento de un punto en el espacio, la derivada $r'(t_0) = v(t_0)$ es la velocidad instantánea en el instante t_0 . También podemos considerar la segunda derivada $r''(t_0)$ para obtener la aceleración en t_0 .

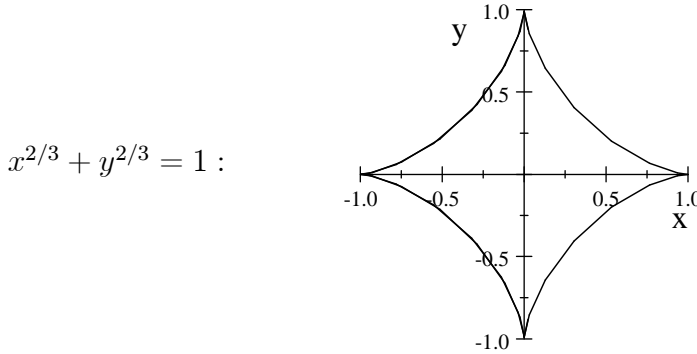


Cuando $r'(t_0) \neq \theta$ (no es el vector nulo), el vector $T(t_0) = \frac{r'(t_0)}{\|r'(t_0)\|}$ es tangente y unitario.

Definición 5 Se dice que la curva $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \hat{i} + y(t) \cdot \hat{j} + z(t) \cdot \hat{k}$ definida para $t \in (a, b)$ es **suave** cuando la función es de clase C^1 (su derivada es continua) y $r'(t) \neq \theta$, $\forall t \in (a, b)$.

Cuando la curva es suave, admite en cada uno de sus puntos un vector tangente unitario.

Se dice que la curva es seccionalmente suave (o suave por tramos) en (a, b) cuando la condición de ser de clase C^1 y $r'(t) \neq \theta$ falla sólo en un número finito de puntos. Por ejemplo, la curva de ecuación cartesiana $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$, que tiene parametrización $x(t) = \cos^3 t$, $y(t) = \sin^3 t$; es seccionalmente suave. Es posible considerarla como una curva formada por cuatro secciones suaves (una en cada cuadrante)



Es posible que una curva C admita más de una parametrización según se precisa:

Definición 6 Se dice que $\vec{r}_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\vec{r}_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ son parametrizaciones de la misma curva C cuando existe una biyección $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ de clase C^1 y creciente tal que $\forall t \in [a, b] : \vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(\varphi(t))$.

Geométricamente, las dos funciones (parametrizaciones) "recorren" la misma curva C . La diferencia está en que $\vec{r}_1'(t) = \varphi'(t) \cdot \vec{r}_2'(\varphi(t))$.

Se dice también que \vec{r}_2 es una reparametrización de \vec{r}_1 , o al revés.

Un ejemplo simple: $\vec{r}_1(t) = \cos t \cdot \hat{i} + \sin t \cdot \hat{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, y $\vec{r}_2(t) = \cos 2t \cdot \hat{i} + \sin 2t \cdot \hat{j}$, $0 \leq t \leq \pi$ son parametrizaciones de la misma curva C , circunferencia unitaria recorrida una vez en sentido antihorario.

Otras propiedades importantes para curvas son:

- la curva $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es cerrada cuando $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.
- la curva $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ es simple cuando es inyectiva en el intervalo $[a, b]$. O sea, la curva no se corta a si misma.
- una curva simple y cerrada se denomina curva de Jordan.
- dada una curva C parametrizada por $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, la función $\vec{r}_- : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\vec{r}_-(t) = \vec{r}(b + (a - b)t)$ parametriza una curva que recorriendo el mismo conjunto C tiene punto inicial $\vec{r}(b)$ y punto terminal $\vec{r}(a)$. Se denomina curva opuesta a C y se denota C^- .

Definición 7 Dada una curva C parametrizada por $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 , su longitud se define por

$$l(C) = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt$$

Es importante notar que esta definición no depende de la parametrización dada a la curva C . En efecto, si r_1 y r_2 son dos parametrizaciones como en la definición anterior, entonces el teorema del cambio de variable indica que

$$\int_a^b \|\vec{r}'_1(t)\| dt = \int_c^d \|\vec{r}'_2(t)\| dt$$

Para una curva en \mathbb{R}^3 , $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \hat{i} + y(t) \cdot \hat{j} + z(t) \cdot \hat{k}$, su longitud está dada por

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

Ejemplo 8 Calcule la longitud de la espiral C con parametrización $\vec{r}(t) = \cos t \cdot \hat{i} + \sin t \cdot \hat{j} + t \cdot \hat{k}$, con $0 \leq t \leq 4\pi$

Aquí, $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $z(t) = t$ y luego $x'(t) = -\sin t$, $y'(t) = \cos t$, $z'(t) = 1$ y

$$l(C) = \int_0^{4\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1} dt = 4\pi\sqrt{2}$$

2 Integrales de línea.

Se definirán los conceptos de integral de línea para dos tipos de funciones

a) **Campos escalares:** que son funciones $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, de varias variables y con valores en \mathbb{R} . En términos físicos, un campo escalar puede determinar la temperatura de cada punto de una región del espacio.

b) **Campos vectoriales:** que son funciones $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, de varias variables y con valores vectoriales. Considere un campo de fuerzas, como por ejemplo un campo gravitacional.

Definición 9 Sea C una curva parametrizada por $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase \mathcal{C}^1 y $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo en un abierto A que contiene a la curva C . La integral de f al lo largo de C es

$$\int_C f \, ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| \, dt$$

Definición 10 Sea C una curva parametrizada por $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase \mathcal{C}^1 y $\vec{F}: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo en un abierto A que contiene a la curva C . La integral de F al lo largo de C es

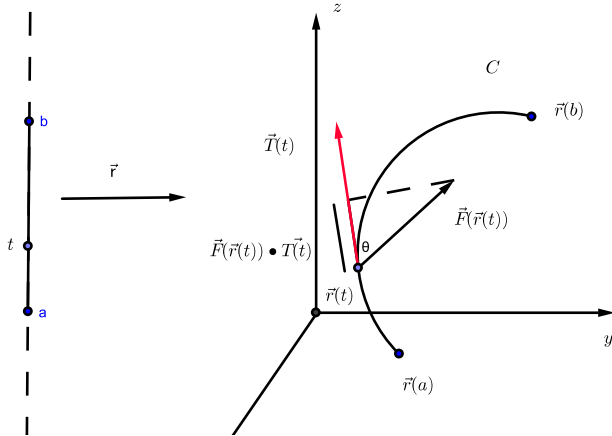
$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) \, dt$$

Estas definiciones no dependen de la parametrización elegida para la curva C .

En el caso de la segunda definición, para campos vectoriales, al considerar una curva suave ($r'(t) \neq \theta$) podemos escribir

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) &= \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \|\vec{r}'(t)\| \\ &= \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{T}(t) \|\vec{r}'(t)\| \end{aligned}$$

donde el campo escalar $g = \vec{F} \cdot \vec{T}$ representa la componente del campo de fuerza \vec{F} a lo largo del vector velocidad \vec{r}'



Por tanto, la definición queda

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{T}(t) \|\vec{r}'(t)\| dt \\ &= \int_C g ds\end{aligned}$$

Así la integral de línea del campo vectorial \vec{F} , a lo largo de la curva C , coincide con la integral de línea del campo escalar $\vec{F} \cdot \vec{T}$, que es la componente de \vec{F} a lo largo del vector tangente a la curva.

2.1 Ejemplos para campos escalares.

En \mathbb{R}^3 , $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \hat{i} + y(t) \cdot \hat{j} + z(t) \cdot \hat{k}$ para $a \leq t \leq b$ y

$$\int_C f ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

En el caso particular que $f(x, y, z) = 1$, se tiene

$$\int_C 1 ds = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt = l(C)$$

Ejemplo 11 Si la imagen C de $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ representa un alambre con densidad de masa dada por la función $f(x, y, z)$ entonces

$$M = \int_C f ds \text{ es la masa total del alambre.}$$

y el centro de masa es el punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ con

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \int_C x f(x, y, z) ds, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \int_C y f(x, y, z) ds, \quad \bar{z} = \frac{1}{M} \int_C z f(x, y, z) ds$$

Ejercicio.- Un alambre está situado en el semicírculo superior $x^2 + y^2 = a^2$, $y \geq 0$. Si la densidad de masa está dada por $f(x, y) = y$, encuentre el centro de masa.

Una parametrización para el alambre es $\vec{r}(t) = a \cos t \cdot \hat{i} + a \sin t \cdot \hat{j}$ con $0 \leq t \leq \pi$, luego $\vec{r}'(t) = -a \sin t \cdot \hat{i} + a \cos t \cdot \hat{j}$ y $\|\vec{r}'(t)\| = a$. De aquí, la masa del alambre está dada por

$$\begin{aligned} M &= \int_C y \, ds = \int_0^\pi a^2 \sin t \, dt \\ &= 2a^2 \end{aligned}$$

y las coordenadas del centro de masa son

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{M} \int_C xy \, ds = \frac{1}{2a^2} \int_0^\pi a^3 \sin t \cos t \, dt = 0 \\ \bar{y} &= \frac{1}{M} \int_C y^2 \, ds = \frac{1}{2a^2} \int_0^\pi a^3 \sin^2 t \, dt = \frac{1}{4}\pi a \end{aligned}$$

Ejemplo 12 Si $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva C en el plano xy y $f(x, y)$ es campo escalar con $f(x, y) \geq 0$, entonces $\int_C f \, ds$ tiene interpretación geométrica natural como el área de una “valla” que tiene la imagen C de \vec{r} como base y altura $f(x, y)$ en cada punto (x, y) de C .

Ejercicio.- Encuentre el área de una pared con base en la curva de ecuación $x^2 + 4y^2 = 4$, que se encuentra en el primer cuadrante y cuya altura en (x, y) es $f(x, y) = xy$.

Indicación.- Considere la parametrización $\vec{r}(t) = 2 \cos t \cdot \hat{i} + \sin t \cdot \hat{j}$ con $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

2.2 Ejemplos para campos vectoriales.

En \mathbb{R}^3 , $\vec{r}(t) = x(t) \cdot \hat{i} + y(t) \cdot \hat{j} + z(t) \cdot \hat{k}$ para $a \leq t \leq b$ y $\vec{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z) \cdot \hat{i} + F_2(x, y, z) \cdot \hat{j} + F_3(x, y, z) \cdot \hat{k}$

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \vec{r}'(t) \, dt \\ &= \int_a^b [F_1(x, y, z) x'(t) + F_2(x, y, z) y'(t) + F_3(x, y, z) z'(t)] \, dt \end{aligned}$$

En vista de la última fórmula, también se escribe

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

Ejemplo 13 Cuando un objeto se mueve en el espacio, a lo largo de una trayectoria C bajo la acción de un campo de fuerzas \vec{F} , el trabajo realizado está dado por

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Un campo de fuerzas está definido por

$$\vec{F}(x, y, z) = (x + y^2) \cdot \hat{i} + (x + z) \cdot \hat{j} + xy \cdot \hat{k}$$

calcule el trabajo realizado por \vec{F} al mover una partícula desde el origen al punto $(1, -1, 1)$ a lo largo de:

- el segmento de recta que une dichos puntos.
- la curva parametrizada por $\vec{r}(t) = t \cdot \hat{i} - t^2 \cdot \hat{j} + t^3 \cdot \hat{k}$, $0 \leq t \leq 1$.

Teorema 14 Sean $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 y $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 . Se tiene entonces

$$\int_C \nabla f \cdot ds = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a))$$

Proof. Aplicar T.F.C. a $F(t) = f(\vec{r}(t))$ para la cual

$$F'(t) = \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)$$

■

En el caso que C sea una curva cerrada, esto es $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$, se tiene que

$$\oint_C \nabla f \cdot ds = 0$$

Ejemplo 15 Calcule la integral $\int_C yzdx + xzdy + xydz$ donde C es la curva parametrizada por $\vec{r}(t) = \sqrt{t^4 + 1} \cdot \hat{i} + e^{\sin \frac{\pi}{2}t} \cdot \hat{j} - (t^5 + 2) \cdot \hat{k}$, $0 \leq t \leq 1$.

2.3 Propiedades generales de la integral de línea

En general valen las fórmulas:

- $\int_C (f + g) ds = \int_C f ds + \int_C g ds$
- $\int_C cf ds = c \int_C f ds$

- $\int_C (\vec{F} + \vec{G}) \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_C \vec{G} \cdot d\vec{r}$
- $\int_C c\vec{F} \cdot d\vec{r} = c \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$
- Si C es una curva suave por secciones, con secciones suaves C_1 y C_2 , esto es $C = C_1 \vee C_2$ es la yuxtaposición de C_1 y C_2 , entonces

$$\begin{aligned} \int_C f \, ds &= \int_{C_1} f \, ds + \int_{C_2} f \, ds \\ \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

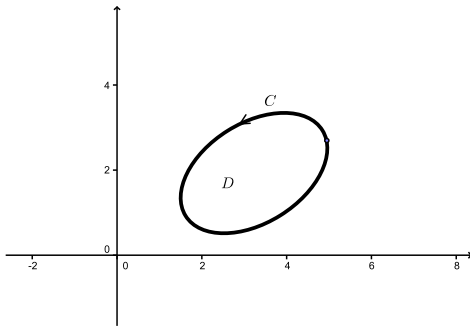
- Si C es una curva suave con curva opuesta C^- , entonces

$$\begin{aligned} \int_{C^-} f \, ds &= - \int_C f \, ds \\ \int_{C^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

2.3.1 Teorema de Green en el plano

Teorema 16 Sea C una curva en el plano, simple y cerrada con orientación positiva, y D la región interior a C . Si $F(x, y) = P(x, y) \cdot \hat{i} + Q(x, y) \cdot \hat{j}$ es de clase C^1 en un abierto que contiene a D , entonces

$$\oint_C P dx + Q dy = \int \int_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] d(x, y)$$



Ejercicio 17 Sea $F(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \cdot \hat{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \hat{j}$.

a) Muestre que $\oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = 0$ para cualquier curva C simple y cerrada C que no encierre el origen.

b) Mediante una parametrización de $C_a : x^2 + y^2 = a^2$ calcule $\oint_{C_a} F \cdot d\vec{r}$.

Teorema 18 (segunda versión del teorema de Green) Sean C una curva en el plano, simple y cerrada con orientación positiva, C_1 una curva simple y cerrada con orientación negativa, con C_1 en el interior de C y D la región interior a C y exterior a C_1 . Si $F(x, y) = P(x, y) \cdot \hat{i} + Q(x, y) \cdot \hat{j}$ es de clase C^1 en un abierto que contiene a D , entonces

$$\oint_C Pdx + Qdy + \oint_{C_1} Pdx + Qdy = \int \int_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] d(x, y)$$

3 Superficies en \mathbb{R}^3

Anteriormente hemos estudiado superficies en el espacio 3-d que corresponden a gráficos de funciones del tipo

$$z = f(x, y)$$

para $(x, y) \in D$, D región en el plano xy . Se dirá en este caso que la superficie está definida en forma explícita.

Por ejemplo, el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

Otra forma de definir una superficie es en forma implícita, como superficie de nivel

$$f(x, y, z) = 0$$

donde f es una función definida en una región del espacio 3-d.

Por ejemplo, la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

Vimos en este caso que, con f de clase C^1 , en todo punto (x_0, y_0, z_0) de esta superficie donde $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq \theta$, este vector gradiente es perpendicular a la superficie (a su plano tangente).

Superficies definidas explícitamente por $z = f(x, y)$ también son definidas implícitamente como $f(x, y) - z = 0$.

Una tercera manera de definir una superficie es en forma paramétrica. Tal como una curva se define paramétricamente mediante un parámetro, evidenciando su carácter uni-dimensional, una superficie se define mediante dos parámetros, lo que indica que es un objeto geométrico bi-dimensional.

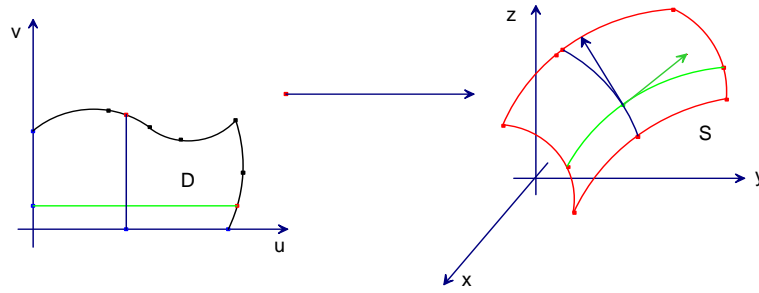
Definición 19 Una superficie S parametrizada en \mathbb{R}^3 es una función

$$\begin{aligned}\Phi &: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto \Phi(u, v) = (x, y, z)\end{aligned}$$

diferenciable o de clase C^1 .

Geoméricamente, la superficie es el conjunto de puntos $S = \{\Phi(u, v) : (u, v) \in D\}$ en el espacio \mathbb{R}^3 y la función Φ se denomina una parametrización de S .

Idealmente, cuando Φ es inyectiva, podemos entender que S es una “copia” de la región plana D dentro de \mathbb{R}^3 .



La parametrización puede representarse en forma escalar por las tres ecuaciones paramétricas de la superficie

$$\begin{aligned}x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \\ z &= z(u, v)\end{aligned}$$

con $(u, v) \in D$.

En un punto $\Phi(u_0, v_0) \in S$, los vectores

$$\begin{aligned}T_{u_0} &= \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot \hat{k} \\ T_{v_0} &= \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \cdot \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \cdot \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \cdot \hat{k}\end{aligned}$$

son tangentes a S y determinan el plano tangente a S en este punto.

Además el vector

$$n(u_0, v_0) = T_{u_0} \times T_{v_0}$$

es perpendicular a S en $\Phi(u_0, v_0)$.

Definición 20 La superficie S es suave cuando Φ es de clase C^1 y $\forall (u, v) \in D : n(u, v) \neq \theta$

Remark 21 En el caso de una superficie definida en forma explícita por $z = g(x, y)$, con g de clase C^1 para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ella puede expresarse en forma paramétrica por

$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= v \\ z &= g(u, v) \end{aligned}$$

o sea, usando como parámetros las mismas variables x e y .

Se tiene en este caso

$$\begin{aligned} T_u &= \hat{i} + \frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot \hat{k} \\ T_v &= \hat{j} + \frac{\partial g}{\partial v}(u_0, v_0) \cdot \hat{k} \end{aligned}$$

$$y \ n(u, v) = T_u \times T_v = -\frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot \hat{i} - \frac{\partial g}{\partial v}(u_0, v_0) \cdot \hat{j} + \hat{k}$$

También puede escribirse

$$n(x, y) = -\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \cdot \hat{i} - \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \cdot \hat{j} + \hat{k}$$

3.1 Area de una superficie

Para una superficie S suave y parametrizada por $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ con $(u, v) \in D$, se define la noción de *área* por

$$Area(S) = \int \int_D \|T_u \times T_v\| d(u, v)$$

Ejemplo 22 Deducir la fórmula del área del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leq z \leq h$.
Una parametrización del cilindro, a partir de las coordenadas cilíndricas, es

$$\begin{aligned}x &= a \cos \theta \\y &= a \sin \theta \\z &= z\end{aligned}$$

con $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq h$. Luego,

$$\begin{aligned}T_\theta &= -a \sin \theta \cdot \hat{i} + a \cos \theta \cdot \hat{j} \\T_z &= \hat{k}\end{aligned}$$

y $T_\theta \times T_z = a \cos \theta \cdot \hat{i} + a \sin \theta \cdot \hat{j}$. De aquí, $\|T_\theta \times T_z\| = a$ y

$$A(S) = \int_0^h \int_0^{2\pi} a \, d\theta dz = 2\pi a \cdot h$$

Ejemplo 23 Calcule el área de la hoja del cono $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$.
Una parametrización de la superficie es

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\y &= r \sin \theta \\z &= r\end{aligned}$$

con $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq 1$. Luego,

$$\begin{aligned}T_r &= \cos \theta \cdot \hat{i} + \sin \theta \cdot \hat{j} + \hat{k} \\T_\theta &= -r \sin \theta \cdot \hat{i} + r \cos \theta \cdot \hat{j}\end{aligned}$$

y $T_r \times T_\theta = -r \cos \theta \cdot \hat{i} - r \sin \theta \cdot \hat{j} + r \cdot \hat{k}$. De aquí, $\|T_r \times T_\theta\| = \sqrt{2}r$ y

$$A(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{2}r \, dr d\theta = \pi\sqrt{2}$$

Ejemplo 24 Obtenga la fórmula para calcular el área de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Una parametrización de la esfera está dada por

$$\begin{aligned}x &= a \sin u \cos v \\y &= a \sin u \sin v \\z &= a \cos u\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}0 &\leq u \leq \pi \\0 &\leq v \leq 2\pi\end{aligned}$$

$$T_u = a \cos u \cos v \cdot \hat{i} + a \cos u \sin v \cdot \hat{j} - a \sin u \cdot \hat{k}$$

$$T_v = -a \sin u \sin v \cdot \hat{i} + a \sin u \cos v \cdot \hat{j}$$

El vector normal queda dado por

$$\begin{aligned}&[a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, -a \sin u] \times [-a \sin u \sin v, a \sin u \cos v, 0] \\&= [a^2 \sin^2 u \cos v, a^2 \sin^2 u \sin v, a^2 \cos u \cos^2 v \sin u + a^2 \cos u \sin^2 v \sin u]\end{aligned}$$

$$n(u, v) = a \sin u [a \sin u \cos v \cdot \hat{i} + a \sin u \sin v \cdot \hat{j} + a \cos u \cdot \hat{k}]$$

$$y \|n(u, v)\| = \|T_u \times T_v\| = a^2 \sin u$$

Luego,

$$\begin{aligned}A(S) &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} a^2 \sin u dv du \\&= 4\pi a^2\end{aligned}$$

4 Integrales de superficie

Al igual que para integrales de línea, se define integral de superficies para campos escalares y campos vectoriales.

Definición 25 Sea S una superficie parametrizada por $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase \mathcal{C}^1 y $f : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo en un abierto A que contiene a la superficie S . La integral de f sobre S es

$$\int \int_S f dS = \int \int_D f(\Phi(u, v)) \|T_u \times T_v\| d(u, v)$$

Como aplicación de la integral de superficie de un campo escalar tenemos:

- Para el caso particular en que el campo escalar es constante e igual a 1 resulta

$$\begin{aligned}\int \int_S 1 \, dS &= \int \int_D \|T_u \times T_v\| \, d(u, v) \\ &= A(S)\end{aligned}$$

- Si S representa una placa de cierto material con densidad de masa en (x, y, z) dada por $f(x, y, z)$, entonces $\int_S f \, dS$ es la masa total de la placa.

Si además $d(x, y, z)$ denota la distancia de cada $(x, y, z) \in S$ a una recta fija L , entonces la integral

$$\int \int_S d(x, y, z)^2 f(x, y, z) \, dS$$

representa el momento de inercia del material con respecto a la recta L .

Ejemplo 26 Una esfera de radio a y centro el origen tiene densidad en cada punto igual a 1 (en c/u de sus puntos). Encuentre el momento de inercia con respecto a un diámetro (considere L : eje z).

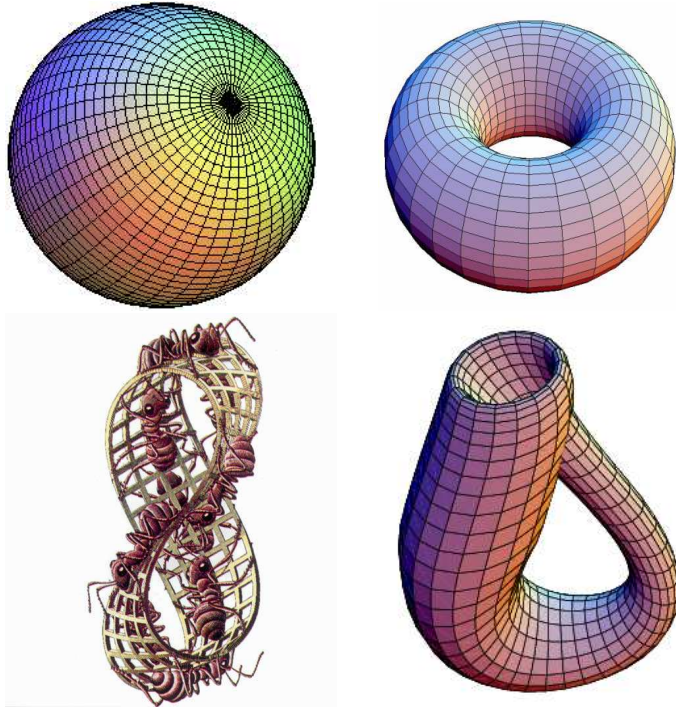
Para la definición de integral de un campo de vectores sobre una superficie vamos a requerir la noción de *orientación* de la superficie, similar a lo que es la orientación de una curva.

De manera burda, una superficie *orientable* es una superficie *con dos caras*. Al elegir una de estas dos caras la superficie queda *orientada*.

Más precisamente

Definición 27 Una superficie S es orientable si existe un campo de vectores unitarios, normales a S , $\vec{n} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ que sea continuo. El campo \vec{n} determina la orientación de S . Existen dos posibles orientaciones para S .

Ejemplos de superficies orientables son: la esfera, el cilindro, el toro; y de superficies no orientables: la cinta de Mobius y la botella de Klein.



Definición 28 Sea S una superficie suave y orientable parametrizada por $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase \mathcal{C}^1 y $\vec{F} : A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo en un abierto A que contiene a la superficie S . Se considera la orientación de S dada por $\vec{n}(\Phi(u, v)) = \frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|}$. La integral de \vec{F} sobre S es

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \int \int_D \vec{F}(\Phi(u, v)) \cdot [T_u \times T_v] \, d(u, v)$$

Estas definiciones no dependen de la parametrización elegida para la superficie S .

Si se considera que

$$\begin{aligned} \vec{F}(\Phi(u, v)) \cdot [T_u \times T_v] &= \vec{F}(\Phi(u, v)) \cdot \frac{[T_u \times T_v]}{\|T_u \times T_v\|} \|T_u \times T_v\| \\ &= \vec{F}(\Phi(u, v)) \cdot \vec{n}(\Phi(u, v)) \|T_u \times T_v\| \\ &= f(\Phi(u, v)) \|T_u \times T_v\| \end{aligned}$$

donde $f = \vec{F} \cdot \vec{n}$ es la componente normal de \vec{F} sobre la superficie. Así entonces

$$\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \int_S f \, dS$$

Físicamente la integral $\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ representa el **flujo** del campo \vec{F} a través de la superficie.

Ejemplo 29 Sea S la parte del plano $x + y + z = 1$ que se encuentra en el primer octante, orientada según su cara superior, y \vec{F} el campo vectorial

$$\vec{F}(x, y, z) = x \cdot \hat{i} + y^2 \cdot \hat{j} + z \cdot \hat{k}$$

Calcule $\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$

Ejemplo 30 Sea S la superficie suave por tramos, con secciones suaves

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x, y, z) : z = 1 - x^2 - y^2 \wedge z \geq 0\} \\ S_2 &= \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1 \wedge -1 \leq z \leq 0\} \\ S_3 &= \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge z = -1\} \end{aligned}$$

y orientación exterior. Calcule $\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, donde

$$\vec{F}(x, y, z) = x \cdot \hat{i} + y \cdot \hat{j} + z \cdot \hat{k}$$

- Para S_1 : Parametrización $\Phi(x, y) = (x, y, 1 - x^2 - y^2)$ definida en $D : x^2 + y^2 \leq 1$ genera orientación dada por $T_x \times T_y = 2x \cdot \hat{i} + 2y \cdot \hat{j} + \hat{k}$. Luego

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \int \int_D \vec{F}(\Phi(x, y)) \cdot [T_x \times T_y] d(x, y) \\ &= \int \int_D [x \cdot \hat{i} + y \cdot \hat{j} + (1 - x^2 - y^2) \cdot \hat{k}] \cdot [2x \cdot \hat{i} + 2y \cdot \hat{j} + \hat{k}] d(x, y) \\ &= \int \int_D (2x^2 + 2y^2 + 1 - x^2 - y^2) d(x, y) \\ &= \int \int_D (x^2 + y^2 + 1) d(x, y) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 + 1) r dr d\theta = \frac{3}{2}\pi \end{aligned}$$

- Para S_2 : Parametrización $\Phi(\theta, z) = (\cos \theta, \sin \theta, z)$ definida en $D : [0, 2\pi] \times [-1, 0]$

genera orientación determinada por $T_r \times T_\theta = \cos \theta \cdot \hat{i} + \sin \theta \cdot \hat{j}$. Luego

$$\begin{aligned} \int_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \int \int_D \left[\cos \theta \cdot \hat{i} + \sin \theta \cdot \hat{j} + z \cdot \hat{k} \right] \cdot [\cos \theta \cdot \hat{i} + \sin \theta \cdot \hat{j}] \, d(\theta, z) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^0 dz d\theta = 2\pi \end{aligned}$$

- Para S_3 : Parametrización $\Phi(x, y) = (x, y, -1)$ definida en $D : x^2 + y^2 \leq 1$ genera la orientación $T_x \times T_y = \hat{k}$, contraria a la requerida. Luego

$$\begin{aligned} \int_{S_3} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= - \int \int_D -d(x, y) \\ &= A(D) = \pi \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \int_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS + \int_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS + \int_{S_3} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS \\ &= \frac{3}{2}\pi + 2\pi + \pi = \frac{9}{2}\pi \end{aligned}$$

4.1 Teoremas integrales

Aquí veremos los dos importantes teoremas para integrales de superficie: el teorema de Gauss y el teorema de Stokes.

Para ello consideraremos primero los conceptos de *divergencia* y de *rotacional* de un campo de vectores

Definición 31 Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$, un campo diferenciable. La divergencia de \vec{F} es el campo escalar $\nabla \cdot \vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\nabla \cdot \vec{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(x, y, z)$$

La notación hace referencia al “operador nablá” $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ de manera que

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{F} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_1, F_2, F_3) \\ &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{aligned}$$

Definición 32 Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$, un campo diferenciable. El rotor o rotacional de \vec{F} es el campo vectorial $\nabla \times \vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$(\nabla \times \vec{F})(x, y, z) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \cdot \hat{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \cdot \hat{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \cdot \hat{k}$$

Note que esta definición resulta del esquema

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Tarea.- Mostrar que si f es un campo escalar de clase C^2 en \mathbb{R}^3 , entonces

$$\nabla \times (\nabla f) = \theta$$

Se dice que un campo vectorial \vec{F} es *irrotacional* cuando $\nabla \times \vec{F} = \theta$.

Tarea.- Mostrar que para un campo \vec{F} de clase C^2

$$\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$$

Se dice que el campo \vec{F} es *incompresible* cuando $\nabla \cdot \vec{F} = 0$.

Observación.- De la tarea

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{F} &\neq \theta \Rightarrow \vec{F} \text{ no es un gradiente} \\ \nabla \cdot \vec{F} &\neq 0 \Rightarrow \vec{F} \text{ no es un rotor} \end{aligned}$$

4.1.1 Teorema de Gauss o de la divergencia

Teorema 33 Si Ω es una región del espacio 3-d acotado por la superficie cerrada $S = \partial\Omega$, suave y orientada exteriormente; y \vec{F} es un campo vectorial suave en una abierto que incluye a $\Omega \cup S$, entonces

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int \int \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F} d(x, y, z)$$

Ejemplo 34 Calcule $\int \int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, donde

$$\vec{F}(x, y, z) = x \cdot \hat{i} + y \cdot \hat{j} + z \cdot \hat{k}$$

y S es la superficie suave por secciones del ejemplo anterior.

Ejemplo 35 Sean $\vec{F}(x, y, z) = 2x \cdot \hat{i} + y^2 \cdot \hat{j} + z^2 \cdot \hat{k}$ y $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con orientación exterior. Calcule

$$\int \int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

4.1.2 Teorema de Stokes

En el enunciado del Teorema de Stokes se considera una superficie S suave, orientada y con borde $C = \partial S$.

Intuitivamente, podemos considerar el borde de una superficie S como la curva $C = \partial S$ que corresponde a su *contorno*.

La parametrización $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, induce una orientación \vec{n} a partir de $T_u \times T_v$ y una orientación para la curva C , borde de S , a partir de la orientación positiva (antihorario) del contorno de D .

Teorema 36 *En el contexto anterior, si \vec{F} es un campo de clase C^1 en un abierto que contiene a $S \cup \partial S$, entonces*

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS$$

Tanto en la integral de línea como en la integral de superficie se consideran las orientaciones indicadas.

Ejemplo 37 *Sea $F(x, y, z) = ye^z \cdot \hat{i} + xe^z \cdot \hat{j} + xye^z \cdot \hat{k}$. Use el teorema de Stokes para mostrar que*

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

para cualquier curva de Jordan en \mathbb{R}^3 .

Ejemplo 38 *Use el teorema de Stokes para calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde $F(x, y, z) = -y^3 \cdot \hat{i} + x^3 \cdot \hat{j} - z^3 \cdot \hat{k}$ y C es la curva intersección de las superficies $x^2 + y^2 = 1$ y $x + y + z = 1$.*

Campos conservativos Se recuerda que cuando $\vec{F} = \nabla f$, entonces para una curva C que va de $\vec{r}(a)$ a $\vec{r}(b)$:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a))$$

o sea la integral de línea es independiente de la trayectoria, en el sentido que sólo depende de los puntos de inicio y término de la curva.

Teorema 39 Sea \vec{F} un campo de clase C^1 en \mathbb{R}^3 , salvo quizás en un número finito de puntos. Son equivalentes:

a) $\forall C$ curva de Jordan: $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

b) $\forall C_1, C_2$ curvas suaves con igual origen y extremo

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

c) $\vec{F} = \nabla f$.

d) $\nabla \times \vec{F} = \theta$.

Cuando el campo satisface una de las cuatro condiciones (y por lo tanto todas ellas) se denomina *conservativo*.

Ejemplo 40 Mostrar que el campo

$$F(x, y, z) = y \cdot \hat{i} + (x + z \cos yz) \cdot \hat{j} + y \cos yz \cdot \hat{k}$$

es irrotacional y encontrar su potencial.