Electromagnetismo 543201
Guía de Problemas #4
Capacidad y energía en el campo eléctrico

1) Un capacitor está conformado por una esfera metálica de radio **5 [cm]**, ubicada en el centro de un delgado cascarón esférico de metal, de radio **12 [cm]**. Si el espacio entre ambas esferas está vacío.
¿Cuál es la capacitancia de este dispositivo?

En primera instancia, hay que considerar que un capacitor se concibe como un dispositivo que es capaz de almacenar energía en su interior en forma de campo eléctrico. Luego, la determinación de dicho campo eléctrico es fundamental para el correcto cálculo de la capacitancia.

Como se especifica que se está trabajando con un capacitor, puede suponerse que tanto la esfera como el cascarón esférico de metal tienen una carga Q de signos contrarios, tal como se muestra en la Fig. A, que representa el corte transversal del capacitor.

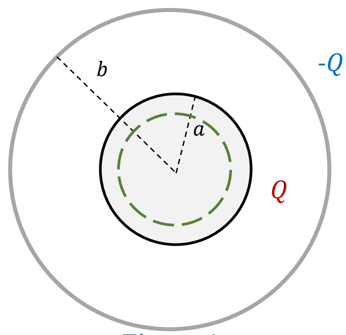


Figura A

A partir de lo ya trabajado en guías anteriores, puede saberse que el campo eléctrico al interior de la esfera ($r < a$) es nulo, dado que nos encontramos al interior de un material conductor. Por otro lado, al exterior del cascarón ($r > b$) el campo eléctrico también debe ser nulo por cuanto la carga encerrada por una superficie gaussiana especial en esta zona sería cero (*en caso de que tengas dudas con esto, revisa la guía Nº2*). En definitiva, **sólo hay campo eléctrico entre la esfera y el cascarón**, el cual puede ser determinado a través de la ley de Gauss para campos eléctricos:

$$\vec{E}_{a<r<b} = \frac{\mathrm{k} \cdot Q}{r^2} \cdot \hat{r}$$

Es importante el hecho de que todo el campo eléctrico se encuentra entre $r = a$ y $r = b$. Ello nos permite encontrar una diferencia de potencial electrostática al interior del dispositivo, dada por:

$$\Delta V = -\int_{r=b}^{r=a} \frac{\mathrm{k} \cdot Q}{r^2} dr = \mathrm{k} \cdot Q \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

Luego, la capacitancia del dispositivo corresponde a:

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|}$$

Reemplazando los valores previamente calculados:

$$C = \frac{Q}{\mathrm{k} \cdot Q\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)} = \frac{1}{\mathrm{k}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}$$

Evaluando las dimensiones del dispositivo:

$$C = \frac{1}{\mathrm{k}\left(\frac{1}{5 \cdot 10^{-2}} - \frac{1}{12 \cdot 10^{-2}}\right)} \approx 9.52 \cdot 10^{-12}[\mathrm{F}] = 9.52[p\mathrm{F}]$$

En definitiva, para determinar la capacitancia de un dispositivo del cual se saben dimensiones, geometría y materiales, se pueden seguir los siguientes tres pasos:

Paso 1: Determinar la zona en la que se almacena el campo eléctrico.

Paso 2: Determinar una expresión para el campo eléctrico en la zona energética del dispositivo. Lo más fácil en este paso es aplicar la ley de Gauss para campos eléctricos.

Paso 3: Determinar la diferencia de potencial electrostático al interior del dispositivo, a través de:

$$\Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Paso 4: Determinar la capacitancia del dispositivo a través de:

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|}$$

2) Un capacitor está conformado por dos discos conductores paralelos entre sí, de radio **20 [cm]**, y separados por una distancia de **1,0 [mm]**. ¿Cuál es la capacitancia de este dispositivo? ¿Cuánta carga almacenará si es conectado a una batería de **12 [V]**?

Dibujemos la situación, en primera instancia:

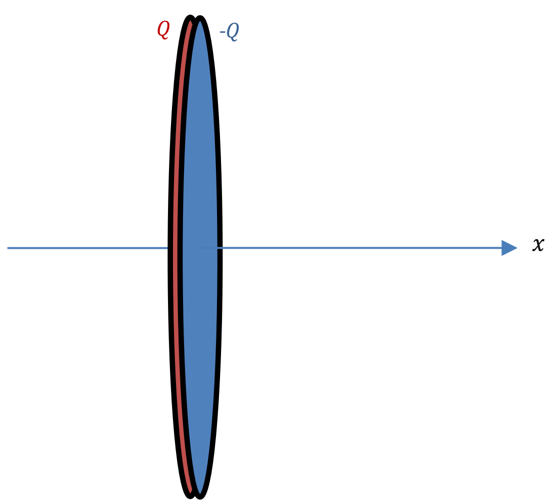


Figura B

Notar que la distancia entre los discos es mucho más pequeña que el radio de dichos discos. Más aún, el campo eléctrico entre estos dos discos, suponiendo que uno tiene carga Q y el otro carga -Q, debería parecerse al que existe entre dos placas infinitas cargadas:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{x}$$

Donde $\sigma = \frac{Q}{A}$. Luego:

$$\vec{E} = \frac{Q}{A\varepsilon_0}\hat{x}$$

Para las zonas al exterior de los discos (a la derecha del disco con carga -Q o a la izquierda del disco con carga Q en la Fig. A) el campo eléctrico debería ser nulo.

Ahora bien, la diferencia de potencial electrostático entre ambos discos está dado por:

$$\Delta V = \frac{Q}{A\varepsilon_0}d$$

Donde d es la distancia que separa a ambos discos.

Luego, la capacitancia del dispositivo está dada por:

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} = \frac{Q}{\frac{Q}{A\varepsilon_0}d} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

Lo anterior corresponde a la capacitancia de un dispositivo de placas paralelas, aplicable para cuando la distancia que separa las placas es muy pequeña en comparación con el área de ellas.

Por lo tanto, la capacitancia del dispositivo de este ejercicio es:

$$C = \frac{\varepsilon_0(\pi \cdot 0.2^2)}{0.001} \approx 1.11 \cdot 10^{-9}[\mathrm{F}] =$$

Así, si se aplica una diferencia de potencial de 12[V] en los terminales de este capacitor, entonces las placas adquirirán una carga dada por:

$$Q = C|\Delta V| \approx 1.11[\mathrm{pF}] \cdot 12[\mathrm{V}] \approx 1.33 \cdot 10^{-8}[\mathrm{C}]$$

3) Un capacitor está conformado por dos cascarones esféricos conductores concéntricos. Si el cascarón interno tiene un radio **a**, y el cascarón externo un radio **b**. ¿Cuál es la capacitancia de este arreglo?

Tal como se calculó para el caso del ejercicio 1), la capacitancia de un capacitor esférico concéntrico con zona activa entre $r = a$ y $r = b$ está dado por:

$$C = \frac{1}{\mathrm{k}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}$$

En caso de que tengas dudas de este resultado, revisa la resolución del ejercicio 1).

4) Un capacitor variable, de placas paralelas, tiene una distancia entre placas fija de **d = 0,5 [mm]** (ver figura 1). El área de las placas puede ser modificada moviendo una placa respecto de la otra (movimiento paralelo). Si la capacitancia puede ser modificada entre **10 [pF]** y **120 [pF]**, ¿cuáles son las áreas de superposición entre placas para los valores de capacitancia antes mencionados?

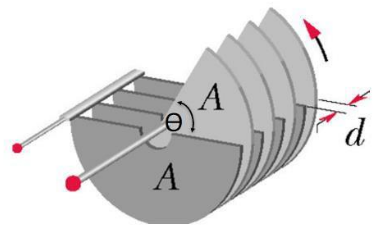


Figura 1

Tal como se mencionó en el ejercicio 2), la capacitancia de un capacitor de placas paralelas responde a la siguiente expresión:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

Luego, si la capacitancia debe variarse entre 10[pF] y 120[pF], entonces las áreas de dichos límites del rango posible están dados por:

$$A_{10[\mathrm{pF}]} \approx \frac{10 \cdot 10^{-12} \cdot 0.5 \cdot 10^{-3}}{8.85 \cdot 10^{-12}} \approx 5.65 \cdot 10^{-4}[\mathrm{m}^2]$$

$$A_{120[\mathrm{pF}]} \approx \frac{120 \cdot 10^{-12} \cdot 0.5 \cdot 10^{-3}}{8.85 \cdot 10^{-12}} \approx 6.78 \cdot 10^{-3}[\mathrm{m}^2]$$

5) Algunos equipos electrónicos inalámbricos modernos, utilizan ***supercapacitores***, que corresponden a dispositivos con valores de capacitancia extremadamente grandes. ¿Cuánta carga es almacenada en un ***supercapacitor*** de **50 [F]** conectado a una diferencia de potencial de **2,5 [V]**?

La relación entre carga, capacitancia y diferencia de potencial está dada por:

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|}$$

Luego, la carga almacenada por este supercapacitor está dada por:

$$Q = C|\Delta V| = 50[\mathrm{F}] \cdot 2.5[\mathrm{V}] = 125[\mathrm{C}].$$

Puede parecer una cifra común y corriente, pero créanme que 125[C] no es una cantidad menor. Si no me creen, recuerden el ejercicio 1) de la primera guía de este curso.

6) ¿Cuál es la capacitancia total de **tres** capacitores de **3 [uF]**, **5 [uF]** y **7,5 [uF]**, conectados en **paralelo**? ¿Cuál es la capacitancia total si se conectan en **serie**?

Cuando tres capacitores se conectan en paralelo, la capacitancia equivalente está dada por la suma de la capacitancia de cada uno de los capacitores conectados de esa manera. En este caso, como son tres los capacitores conectados en paralelo, entonces la capacitancia equivalente (total) corresponde a:

Cuando los capacitores se conectan en paralelo , la capacitancia equivalente (total) está dada por la suma de la capacitancia de cada uno de los capacitores conectados de esa manera. En este caso, como son tres los capacitores conectados en paralelo, entonces la capacitancia equivalente corresponde a:

$$C_{\text{paralelo}} = 3[\mu\mathrm{F}] + 5[\mu\mathrm{F}] + 7.5[\mu\mathrm{F}] = 15.5[\mu\mathrm{F}].$$

Por otro lado, cuando los capacitores se conectan en serie , la capacitancia equivalente (total) está dada por el inverso de la suma de los inversos de la capacitancia de cada uno de los capacitores conectados de esa manera. En español:

$$C_{\text{eq}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots + \frac{1}{C_n}}$$

En este caso, como son tres los capacitores conectados en serie, entonces la capacitancia equivalente corresponde a:

$$C_{\text{eq}} = \frac{1}{\frac{1}{3[\mu\text{F}]} + \frac{1}{5[\mu\text{F}]} + \frac{1}{7.5[\mu\text{F}]}} = 1.5[\mu\text{F}]$$

Notar que, en serie, la capacitancia equivalente siempre será menor a la capacitancia más pequeña. Eso siempre se cumple para los capacitores conectados en serie.

7) Tres capacitores de capacidad **C_1 = 5 [uF]**, **C_2 = 3 [uF]** y **C_3 = 8 [uF]**, están conectados como se muestra en la figura 2. Encuentre la capacitancia combinada.

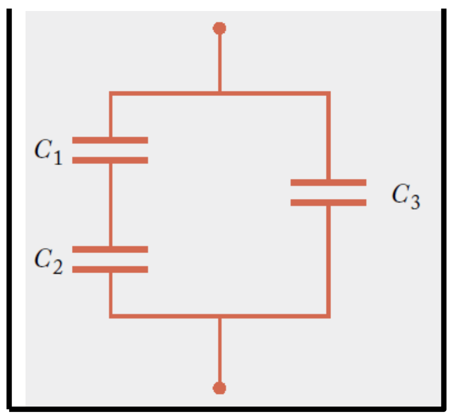


Figura 2

Para encontrar la capacitancia equivalente de circuitos como estos, es necesario analizarlo por parte y reducirlo de a poco. Por ejemplo, puede notarse que los capacitores C_1 y C_2 están en serie. Luego, la capacitancia equivalente de estos dos capacitores equivale a:

$$C_{C_1,C_2} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{1}{\frac{1}{5[\mu\text{F}]} + \frac{1}{3[\mu\text{F}]}} = 1.875[\mu\text{F}].$$

Lo que se hace con esta reducción intermedia es reemplazar los capacitores C_1 y C_2 por C_{C_1,C_2}, tal como se muestra en la Figura C.

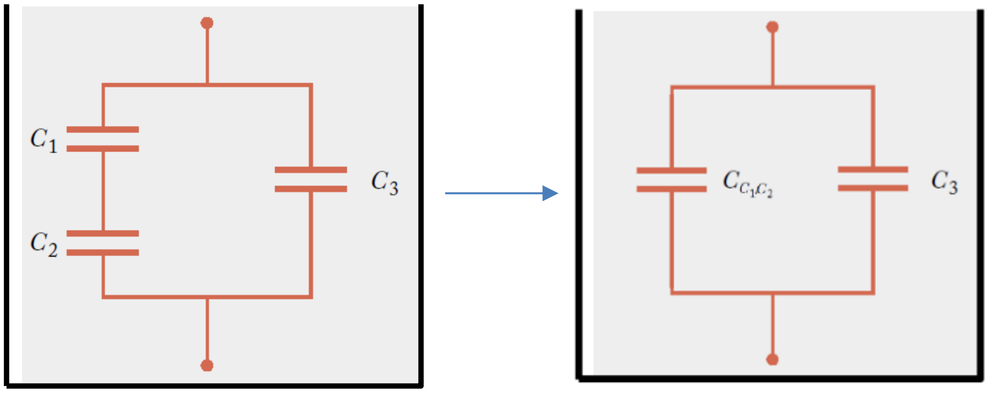


Figura C

Notar que C_{C_1,C_2} y C_3están conectados en paralelo. Luego, la capacitancia equivalente total de este circuito corresponde a:

$$C_{\text{eq,total}} = C_{C_1,C_2} + C_3 = 9.875[\mu\text{F}].$$

8) ¿Cuál es la carga total almacenada en los **tres** capacitores conectados a una batería de **30 [V]** según el arreglo ilustrado en la figura 3?

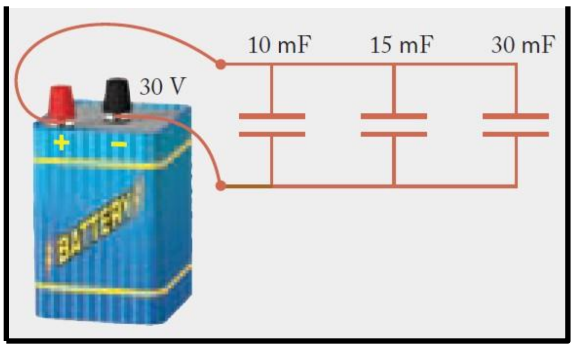
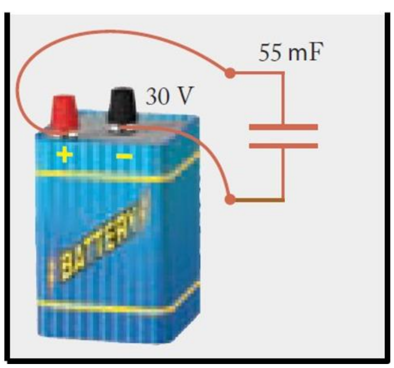


Figura 3

Al igual que en el caso anterior, encontraremos en primera instancia la capacitancia equivalente de los tres capacitores individuales conectados en paralelo. En este caso:

$$C_{\text{eq,total}} = 10[\text{mF}] + 15[\text{mF}] + 30[\text{mF}] = 55[\text{mF}]$$

Con ello, el circuito equivalente puede representarse como:



Luego, la carga total almacenada en los tres capacitores corresponde a la carga almacenada en el capacitor equivalente:

$$Q_{\text{total}} = 55[\text{mF}] \cdot 30[\text{V}] = 1.65[\text{C}]$$

9) Seis condensadores idénticos, de capacidad **C**, están conectados como se muestra en la figura 4. ¿Cuál es la capacidad neta de dicho arreglo?

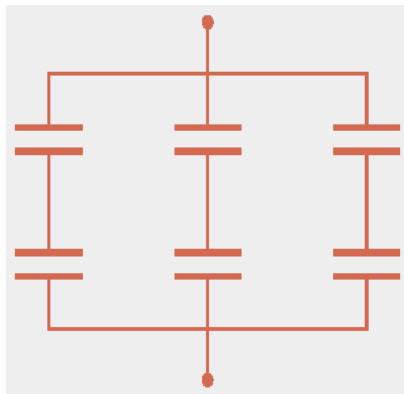
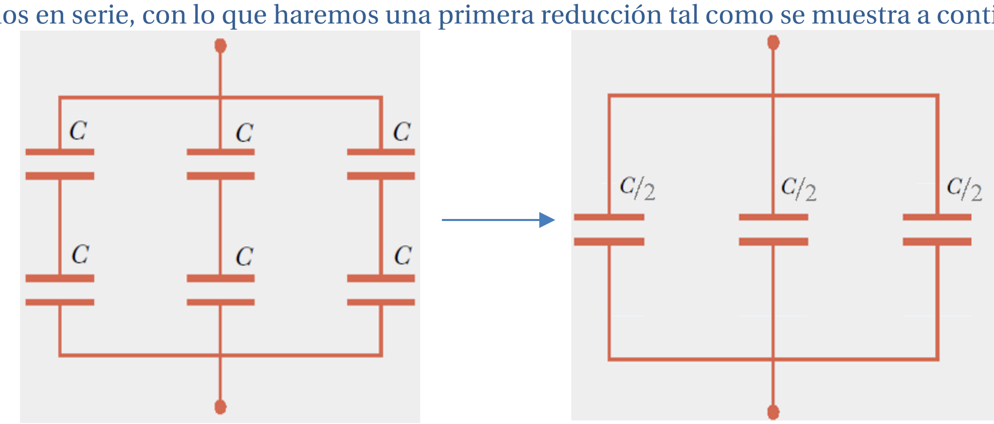
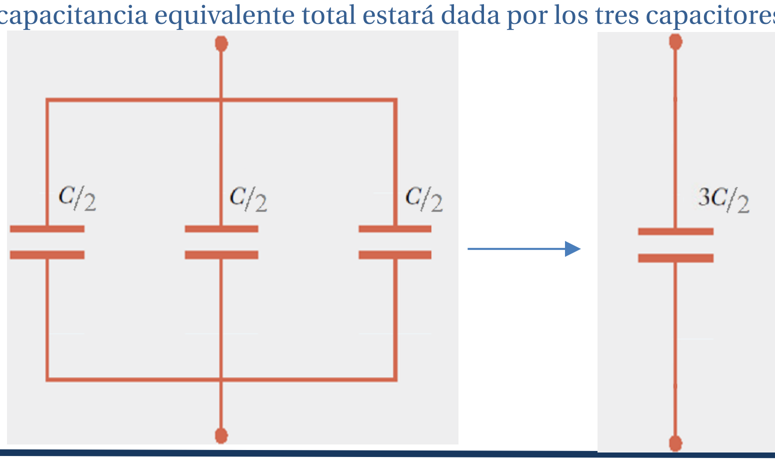


Figura 4

Supongamos que cada capacitor del arreglo mostrado en la Figura 4 tiene una capacitancia C. Luego, y siguiendo la misma metodología que en el ejercicio 7), debe reducirse el circuito de a poco. Puede notarse que hay varios capacitores que están conectados en serie, con lo que haremos una primera reducción tal como se muestra a continuación:



Por último, la capacitancia equivalente total estará dada por los tres capacitores en paralelo:



En definitiva, la capacitancia equivalente de esta combinación es 1.5 veces la capacitancia de cualquiera de los capacitores individuales.

10) Siete capacitores están conectados como se muestra en la figura 5. ¿Cuál es la capacitancia neta de esta combinación?

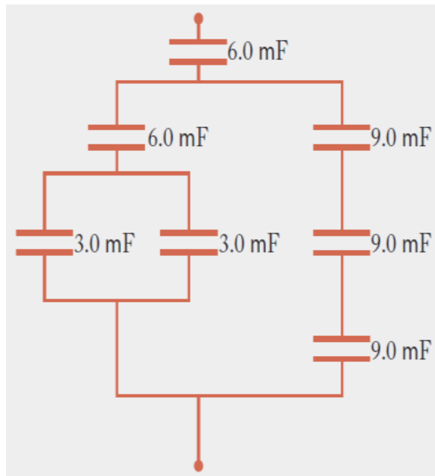
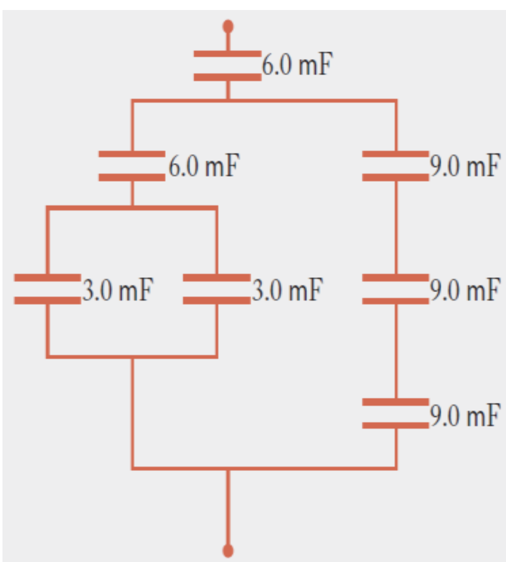
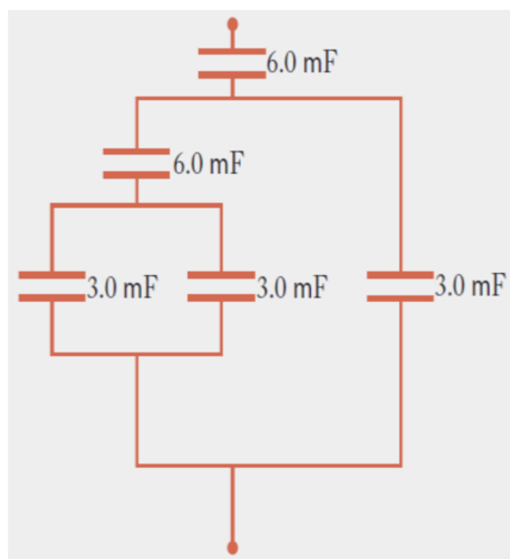


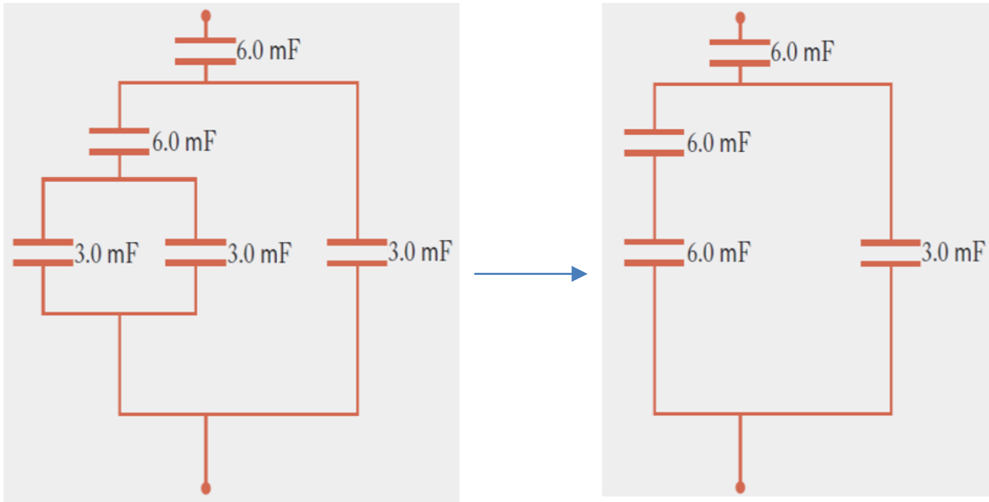
Figura 5

Tal como en los ejercicios anteriores, hay que reducir el circuito de a poco para lograr determinar la capacitancia equivalente (neta). Por ejemplo, la rama derecha del circuito tiene tres capacitores de 9.0[mF] en serie, por lo que podría hacerse una primera reducción como se muestra a continuación:

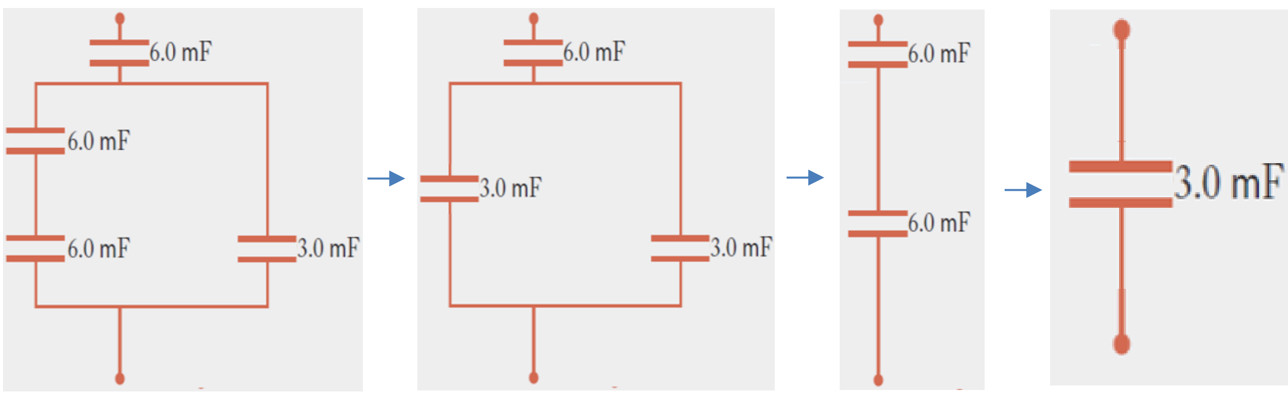




Por otro lado, hay dos capacitores de 3.0[mF] que están en paralelo, con lo cual se puede hacer otra reducción:



De esta manera, reduciéndose el circuito, tal como se muestra en las siguientes figuras:



En definitiva, la capacitancia equivalente total de esta combinación es de 3.0[mF].

11) Un condensador multi-placa, como el utilizado en radios, está conformado por cuatro placas paralelas dispuestas una sobre otra tal como se muestra en la figura 6. Si el área de cada placa es **A**, y la distancia entre placas adyacentes es **d**. ¿Cuál es la capacitancia de este arreglo?

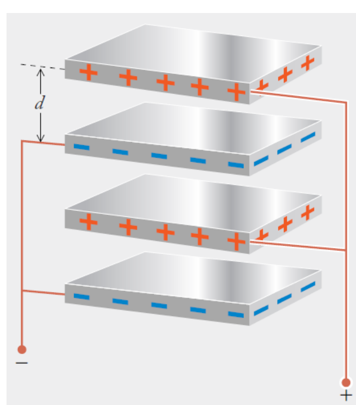


Figura 6

En primera instancia, puede parecer que este ejercicio es complicado. Sin embargo, es simple una vez que se dan cuenta de la conexión entre las placas paralelas: este arreglo está conformado realmente por tres capacitores en paralelo. En la Figura C se muestran los tres capacitores involucrados:

Figura C

Luego, la capacitancia equivalente total de este arreglo de tres capacitores en paralelo corresponde a:

$$C_{\text{eq}} = \frac{\varepsilon_0 A}{d} + \frac{\varepsilon_0 A}{d} + \frac{\varepsilon_0 A}{d} = 3\,\frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

donde $\frac{\varepsilon_0 A}{d}$ corresponde a la capacitancia de un capacitor de placas paralelas de área A separadas una distancia d.

12) Suponga que usted desea construir un condensador utilizando una hoja de polietileno, de grosor **5 x10^{-2} [mm]** y permitividad relativa de **2,3**. Si esta hoja estará ubicada entre dos hojas de aluminio, y si la capacitancia debe ser de **3 [uF]**, ¿cuál debe ser el área de estas hojas?

La capacitancia de un condensador de placas paralelas con espacio vacío entre sus placas, tal como se ha trabajado en ejercicios anteriores, está dada por:

$$C_{\text{placas paralelas}} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

Ahora bien, si entre las placas se ubica un material dieléctrico, entonces la capacitancia se ve alterada, ya que el campo eléctrico ahora no se desarolla en espacio vacío sino que en otro material con permitividad eléctrica relativa ε_r. Así:

$$C'_{\text{placas paralelas}} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}{d}$$

ε_r también es conocido como la constante dieléctrica k. Luego, la expresión de la capacitancia general para cualquier condensador de placas paralelas es:

$$C_{\text{placas paralelas}} = \frac{k \varepsilon_0 A}{d}$$

Por lo tanto, para el caso del ejercicio planteado, se tiene que:

$$3 \cdot 10^{-6} \approx \frac{2.3 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot A}{5 \cdot 10^{-5}}$$

Luego, el área requerida es:

$$A \approx 7.37[\text{m}^2]$$

13) Un condensador de placas paralelas tiene placas de **0,050 [m²]**, separadas por una distancia de **0,20 [mm]**. Si el espacio entre las placas está lleno de Plexiglás:

a) ¿Cuál es la capacidad de este dispositivo?

b) ¿Cuál es la máxima diferencia de potencial que este capacitor puede resistir? Considerar para esto que la máxima intensidad de campo eléctrico que puede soportar el Plexiglás, antes de llegar a la ruptura dieléctrica, es de **40 x 10⁶ [V/m]**.

c) ¿Cuál es la máxima cantidad de carga que podemos depositar sobre las placas?

Tal como se explicó en el ejercicio 12), la capacitancia de un condensador de placas paralelas con un material dieléctrico entre sus placas está dado por:

$$C_{\text{placas paralelas}} = \frac{k\varepsilon_0 A}{d}$$

a) En este caso, y considerando lo mostrado en la Tabla 1 de permitividad relativa de distintos materiales, la constante dieléctrica del Pexiglás corresponde a 3.4. Luego, la capacidad C de este dispositivo es:

$$C = \frac{3.4 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 0.05}{0.2 \cdot 10^{-3}} [\mathrm{F}] \approx 7.5[\mathrm{nF}]$$

b) Ahora bien, la relación entre campo eléctrico y potencial electrostático en un capacitor de placas paralelas, tal como fue desarrollado en ejercicios de la Guía Nº3, corresponde a:

$$|\vec{E}| \cdot d = \Delta V$$

Luego, si el máximo campo eléctrico soportado por el material dieléctrico es de $40 \cdot 10^6 [\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}]$, entonces:

$$\Delta V_{max} = |\vec{E}|_{max} \cdot d = 40 \cdot 10^6 \cdot 0.2 \cdot 10^{-3} = 8 \cdot 10^3 [\mathrm{V}]$$

c) Considerando que la relación elemental entre capacitancia y carga corresponde a $C = \frac{Q}{|\Delta V|}$, entonces:

$$Q_{max} = C|\Delta V_{max}|$$

$$Q_{max} = 7.5 \cdot 10^{-9} \cdot 8 \cdot 10^3 [\mathrm{C}] = 6.0 \cdot 10^{-5} [\mathrm{C}]$$

14) Un condensador de placas paralelas de área **A**, y separación entre placas **d**, está lleno por dos bloques dieléctricos paralelos, de grosor idéntico, con permitividades relativas $\mathbf{k_1}$ y $\mathbf{k_2}$, respectivamente (ver figura 7). ¿Cuál es la capacitancia de este arreglo?

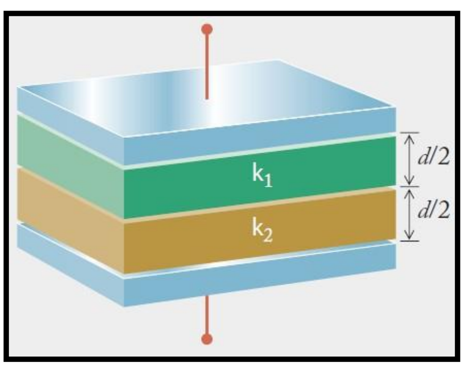


Figura 7

En primera instancia, hay que notar que los bloques dieléctricos se encuentran dispuestos de tal manera que la diferencia de potencial entre los extremos del primero más la diferencia de potencial entre los extremos del segundo bloque dieléctrico dan como resultado la diferencia de potencial total total del dispositivo. En otras palabras, los bloques dieléctricos están dispuestos de una forma similar a la que se puede encontrar en dos capacitores dispuestos en serie. Más aún, el capacitor mostrado en la Figura 7 es equivalente al arreglo mostrado en la Figura D.

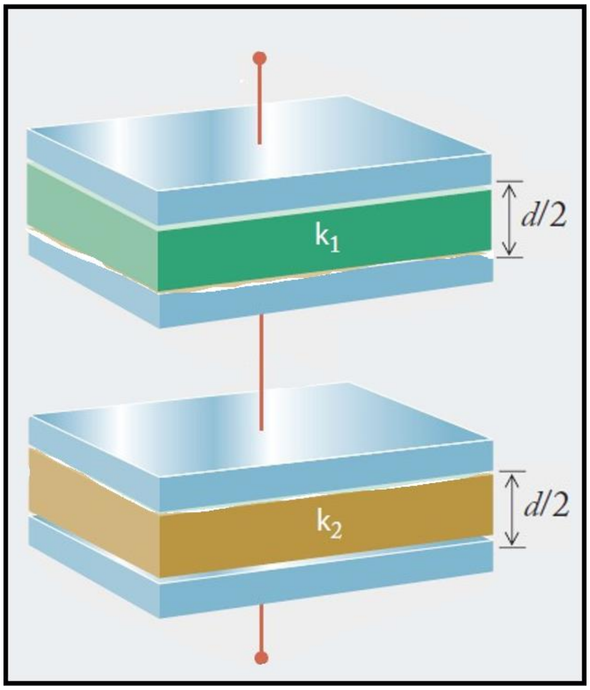


Figura D

Luego, la capacitancia equivalente C_{eq} de este arreglo corresponde a:

$$C_{\text{eq}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

donde C_1 corresponde a la capacitancia del condensador superior con material dieléctrico k_1 y y C_2 es la capacitancia del condensador inferior con material dieléctrico k_2. Luego:

$$C_{\text{eq}} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{k_1\,\varepsilon_0 A}{d/2}} + \frac{1}{\frac{k_2\,\varepsilon_0 A}{d/2}}} = \frac{1}{\frac{d}{2k_1\,\varepsilon_0 A} + \frac{d}{2k_2\,\varepsilon_0 A}}$$

$$C_{\text{eq}} = \frac{1}{\frac{dk_2}{2k_1\,k_2\varepsilon_0 A} + \frac{dk_1}{2k_1 k_2\,\varepsilon_0 A}} = \frac{2k_1 k_2\,\varepsilon_0 A}{dk_1 + dk_2}$$

$$C_{\text{eq}} == \frac{\varepsilon_0 A}{d} \cdot \left(\frac{2k_1 k_2}{k_1 + k_2}\right)$$

15) Un condensador de placas paralelas, de área **A**, y separación entre placas **d**, está lleno por dos bloques dieléctricos de igual tamaño, dispuestos uno al lado del otro, tal como se muestra en la figura 8. Si sus permitividades relativas son $\mathbf{k_1}$ y $\mathbf{k_2}$. ¿Cuál es la capacitancia de este arreglo?

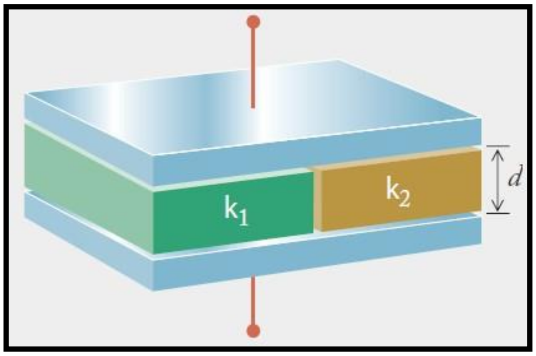


Figura 8

Este es un ejercicio similar al anterior. Hay que notar esta vez que los bloques dieléctricos se encuentran dispuestos de manera que la diferencia de potencial entre los extremos de ambos bloques es el mismo. Luego, este dispositivo es equivalente a dos capacitores dispuestos en paralelo, tal como se muestra en la Figura E.

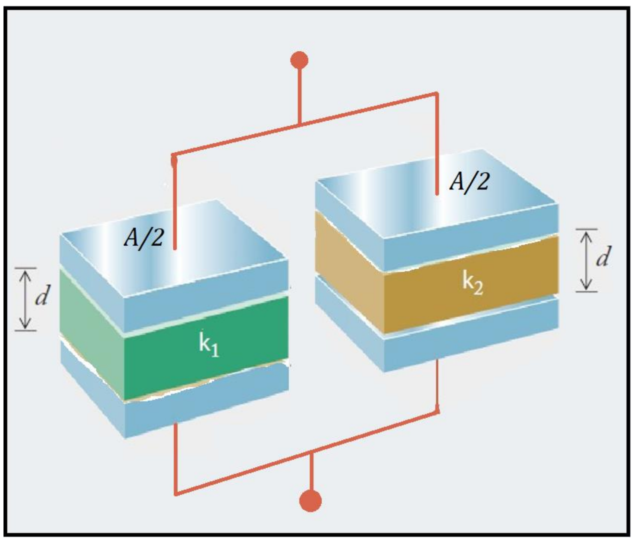


Figura E

Luego, la capacitancia equivalente C_{eq} de este arreglo corresponde a:

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2$$

donde C_1 corresponde a la capacitancia del condensador izquierdo con material dieléctrico k_1 y y C_2 es la capacitancia del condensador derecho con material dieléctrico k_2. Luego:

$$C_{\text{eq}} = \frac{k_1\, \varepsilon_0\, {}^{A}\!/_{2}}{d} + \frac{k_2\, \varepsilon_0\, {}^{A}\!/_{2}}{d}$$

$$C_{\text{eq}} = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \cdot \left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right)$$

16) ¿Cuánta energía es almacenada en un condensador de **3,0x10³ [uF]**, y que tiene una diferencia de potencial de **100 [V]** entre sus terminales?

La energía almacenada en un capacitor en función de su capacidad y la diferencia de potencial entre sus terminales está dada por:

$$U = \frac{1}{2} \cdot C\Delta V^2$$

Luego:

$$U = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^{-3} \cdot 100^2 [\mathrm{J}] = 15[\mathrm{J}]$$

17) Se tiene un condensador de placas paralelas, de área **900 [cm²]** y separación entre placas **0,50 [cm]**. Si el espacio entre placas está lleno de Plexiglás.

a) ¿Cuál es su capacidad?
b) ¿Cuál es la diferencia de potencial si la carga en las placas es de **±6,0x10⁻⁸ [C]**?
c) ¿Cuál es el campo eléctrico entre las placas?
d) ¿Cuál es la densidad de energía?
e) ¿Cuál es la energía total?

Este ejercicio es similar al ejercicio 13). La capacitancia de un condensador de placas paralelas con un material dieléctrico entre sus placas está dado por:

$$C_{\text{placas paralelas}} = \frac{k\varepsilon_0 A}{d}$$

a) En este caso, y considerando lo mostrado en la Tabla 1 de permitividad relativa de distintos materiales, la constante dieléctrica del Pexiglás corresponde a 3.4. Luego, la capacidad C de este dispositivo es:

$$C = \frac{3.4 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 900 \cdot 10^{-4}}{0.5 \cdot 10^{-2}} [\mathrm{F}] \approx 5.42 \cdot 10^{-10} [\mathrm{F}] = 542[\mathrm{pF}]$$

b) Considerando que la relación elemental entre capacitancia y carga corresponde a $C = \frac{Q}{|\Delta V|}$, entonces:

$$|\Delta V| = \frac{Q}{C} \approx \frac{6.0 \cdot 10^{-8}}{5.42 \cdot 10^{-10}} [\mathrm{V}] \approx 111[\mathrm{V}]$$

c) A partir de lo señalado en el ejercicio 13, la relación entre campo eléctrico y potencial electrostático en un capacitor de placas paralelas está dada por:

$$\left|\vec{E}\right| \cdot d = \Delta V$$

Luego:

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{\Delta V}{d} \approx \frac{111[\mathrm{V}]}{0.5 \cdot 10^{-2}[\mathrm{m}]} = 2.2 \cdot 10^4 \left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right]$$

d) La densidad de energía de un capacitor está dada por:

$$u = \frac{1}{2} k\varepsilon_0 E^2$$

Luego:

$$u \approx \frac{1}{2} \cdot 3.4 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot (2.2 \cdot 10^4)^2 \approx 7.14 \cdot 10^{-3} \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}\right]$$

e) La energía total está dada por:

$$U = \frac{1}{2} \cdot C\Delta V^2$$

Luego:

$$U \approx \frac{1}{2} \cdot 5.42 \cdot 10^{-10} \cdot 111^2[\mathrm{J}] \approx 3.3 \cdot 10^{-6}[\mathrm{J}]$$

18) Dos placas conductoras paralelas de área **0,5[m^2]**, están ubicadas en el vacío y tienen una diferencia de potencial de **2,0x10^5 [V]** entre ellas cuando las placas tienen una carga de **±4,0x10^{-3} [C]**, respectivamente.

a) ¿Cuál es la capacidad del conjunto?
b) ¿Qué distancia hay entre las placas?
c) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico entre las placas?
d) ¿Cuál es la energía eléctrica almacenada?

En primera instancia, debe considerarse la capacitancia de un condensador cualquiera, dada por:

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|}$$

a) Luego, la capacitancia del conjunto de este ejercicio es:

$$C = \frac{4.0 \cdot 10^{-3}}{2.0 \cdot 10^5}[\mathrm{F}] \approx 2.0 \cdot 10^{-8}[\mathrm{F}] = 20[\mathrm{nF}]$$

b) Por otro lado, la distancia entre placas puede determinarse a partir de la expresión de capacitancia para un condensador de placas paralelas con vacío entre ellas:

$$C_{\text{placas paralelas}} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

Luego:

$$d = \frac{\varepsilon_0 A}{C_{\text{placas paralelas}}} \approx \frac{8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 0.5}{2.0 \cdot 10^{-8}}[\mathrm{m}] \approx 2.2 \cdot 10^{-4}[\mathrm{m}]$$

c) La magnitud del campo eléctrico entre las placas está dado por la siguiente expresión:

$$|\vec{E}| \cdot d = \Delta V$$

Luego:

$$|\vec{E}| = \frac{\Delta V}{d} \approx \frac{2.0 \cdot 10^5[\mathrm{V}]}{2.2 \cdot 10^{-4}[\mathrm{m}]} \approx 9.1 \cdot 10^8 \left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right]$$

d) Al igual que para los ejercicios anteriores, la energía eléctrica almacenada en un capacitor puede determinarse a través de

$$U = \frac{1}{2} \cdot C\Delta V^2$$

Luego:

$$U = \frac{1}{2} \cdot 2.0 \cdot 10^{-8}(2.0 \cdot 10^5)^2 = 400[\mathrm{J}]$$

19) Dos condensadores rellenos con aire (vacío) son idénticos, y están conectados en serie. Considerando que la combinación de condensadores está conectada permanentemente a una fuente de potencial **V**. Si uno de los condensadores es llenado con un material dieléctrico de permitividad relativa ***k***, ¿la energía total almacenada aumenta o disminuye? ¿Cuál es el factor de aumento o disminución?

La capacitancia equivalente de dos condensadores conectados en serie, tal como se explicó en el ejercicio 6, está dada por:

$$C_{\text{eq}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

La ecuación anterior también puede expresarse (después de un trabajo algebraico breve) como:

$$C_{\text{eq}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Ahora bien, si se inserta material dieléctrico en uno de los capacitores la capacitancia de dicho capacitor aumentará en un factor k. A modo de ejemplo, si se inserta un dieléctrico entre las placas de C_1, entonces la nueva capacitancia C_{eq}' del arreglo es:

$$C_{\text{eq}}' = \frac{kC_1 C_2}{kC_1 + C_2}$$

Como se menciona que los capacitores son idénticos, entonces $C_1 = C_2$ y:

$$C'_{\text{eq}} = \frac{k{C_1}^2}{kC_1 + C_1} = C_1\left(\frac{k}{k+1}\right)$$

A modo de comparación, la capacitancia equivalente sin insertar el material dieléctrico es:

$$C_{\text{eq}} = \frac{C_1 C_1}{C_1 + C_1} = \frac{C_1}{2}$$

Así, el factor de aumento de la capacitancia al insertar el dieléctrico está dado por:

$$\frac{C'_{\text{eq}}}{C_{\text{eq}}} = \frac{C_1\left(\frac{k}{k+1}\right)}{\frac{C_1}{2}} = \frac{2k}{k+1}$$

Es decir:

$$C'_{\text{eq}} = \frac{2k}{k+1} C_{\text{eq}}$$

Luego, como la energía almacenada está dada por $U = \frac{1}{2} \cdot C\Delta V^2$ y la diferencia de potencial se mantiene constante, entonces el aumento de la energía almacenada es directamente proporcional al aumento de la capacitancia. En definitiva, al agregar el dieléctrico a uno de los dos capacitores, la energía almacenada aumenta a través de un factor $\frac{2k}{k+1}$, tal como se enuncia a continuación:

$$U' = \frac{2k}{k+1} U$$

donde U' es la energía almacenada tras insertar el dieléctrico y U es la energía almacenada del arreglo original sin dieléctrico añadido.

20) Partiendo desde la expresión general $\frac{1}{2}Q\Delta V$ para la energía eléctrica almacenada en un condensador de placas paralelas (igualmente válida para capacitores con o sin dieléctrico entre las placas), pruebe que la densidad de energía en el campo eléctrico entre las placas del condensador es $\frac{1}{2}k\varepsilon_0 E^2$.

Partamos de la base que la densidad de energía corresponde a la energía almacenada en el capacitor en un determinado volumen, dado ello por la siguiente expresión:

$$u = \frac{U}{v}$$

donde U es la energía almacenada y v es el volumen en el que se encierra campo eléctrico. Para un condensador de placas paralelas, $v = Ad$. Luego:

$$u = \frac{1/2\, Q\Delta V}{Ad}$$

Se sabe que la carga Q de un capacitor se relaciona con la capacitancia y la diferencia de potencial de manera que $Q = C\Delta V$. Luego:

$$u = \frac{1}{2}\frac{C\Delta V \Delta V}{Ad}$$

Adicionalmente, se sabe que la diferencia de potencial entre las placas de un capacitor de placas paralelas puede determinarse como $\Delta V = Ed$. Luego:

$$u = \frac{1}{2}\frac{CE^2 d^2}{Ad} = \frac{1}{2}\frac{CE^2 d}{A}$$

Por último, se sabe que la capacitancia de un condensador de placas paralelas con dieléctrico entre ellas corresponde a $\frac{k\varepsilon_0 A}{d}$, por lo cual:

$$u = \frac{1}{2}\frac{\frac{k\varepsilon_0 A}{d}E^2 d}{A} = \frac{1}{2}k\varepsilon_0 E^2$$

21) Un condensador de placas paralelas tiene capacidad $\mathbf{C_0}$ cuando el dieléctrico entre sus placas es vacío. Si tres bloques,cadauno con un áreaequivalente a la mitad delárea de las placas, se insertanentre las placas, tal como se muestra en la figura 9. ¿Cuál es la capacidad de este dispositivo?

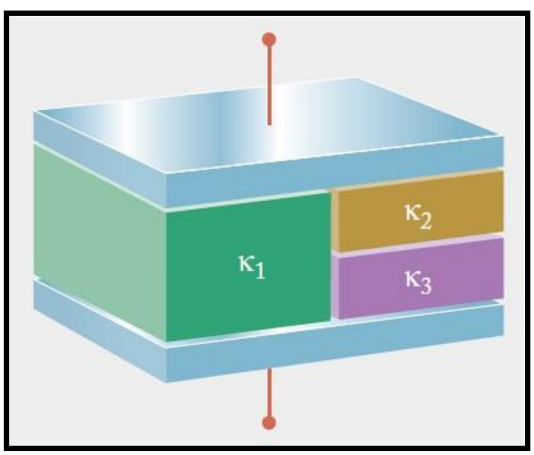


Figura 9

En primera instancia, es necesario determinar la capacitancia de este dispositivo sin haber insertados los bloques dieléctricos entre sus placas. Ello está dado por:

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

donde A corresponde al área de las placas y d es la distancia que las separa.

Ahora bien, para determinar la capacitancia del dispositivo después de agregar los bloques dieléctricos, hay que seguir la misma metodología que la desarrollada en los ejercicios 13 y 14. Luego, el dispositivo mostrado en la Figura 8 equivale a una conexión de tres capacitores tal como se muestra en la Figura F.

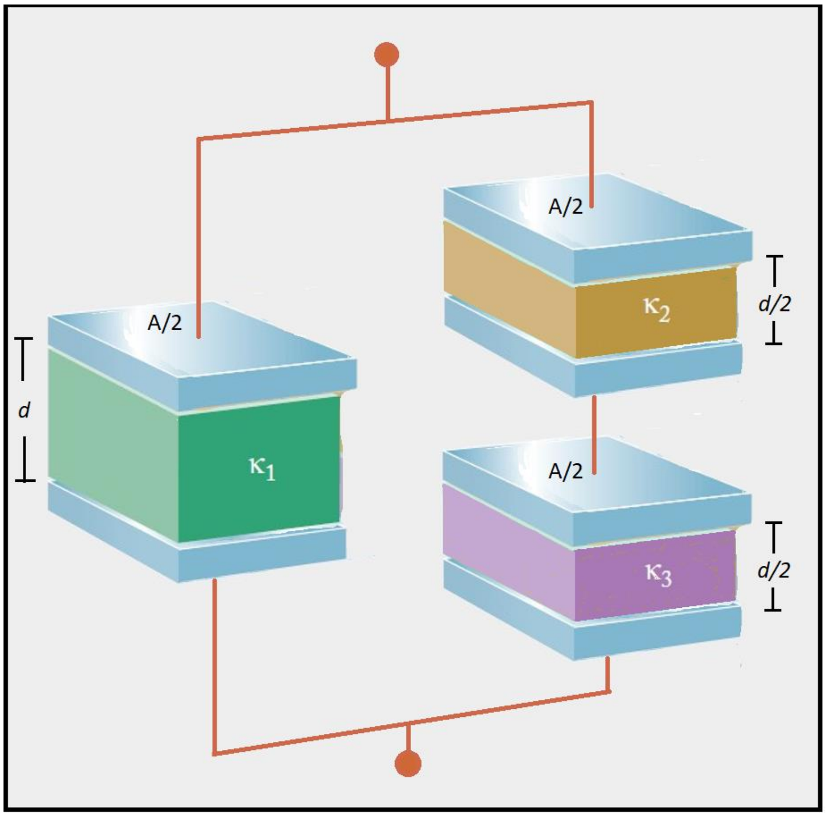


Figura F

Luego, la capacitancia de este arreglo C está dada por:

$$C = C_1 + \frac{1}{\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} = C_1 + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3}$$

Reemplazando las capacitancias de cada uno de los condensadores en la expresión anterior resulta en;

$$C = \frac{k_1 \varepsilon_0 A/2}{d} + \frac{\frac{k_2 \varepsilon_0 A/2}{d/2} \cdot \frac{k_3 \varepsilon_0 A/2}{d/2}}{\frac{k_2 \varepsilon_0 A/2}{d/2} + \frac{k_3 \varepsilon_0 A/2}{d/2}}$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \cdot \left(\frac{k_1}{2}\right) + \frac{\frac{k_2 \varepsilon_0 A}{d} \cdot k_3}{k_2 + k_3} = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \cdot \left(\frac{k_1}{2}\right) + \frac{\varepsilon_0 A}{d} \cdot \left(\frac{k_2 k_3}{k_2 + k_3}\right) = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \cdot \left(\frac{k_1}{2} + \frac{k_2 k_3}{k_2 + k_3}\right)$$

Luego, como $C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$, entonces:

$$C = C_0 \cdot \left(\frac{k_1}{2} + \frac{k_2 k_3}{k_2 + k_3}\right)$$

ANEXO

Tabla 1: Permitividad relativa(constante dieléctrica) de algunos materiales

Material	***k***
Vacío	1
Aire	1,00054
Dióxido de carbono	1,00098
Polietileno	2,3
Poliestireno	2,5
Goma dura	2,8
Aceite de transformador	3
Plexiglás	3,4
Nailon	3,5
Resina epóxica	3,6
Papel	4
Vidrio	6
Porcelana	7
Agua destilada	80
Titanato de estroncio	320

Cualquier consulta o corrección la pueden hacer llegar a carlosmadariaga@udec.cl. Responderé en la medida de lo posible.