UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (521218)
Listado $N°5$ (Método de Variación de Parámetros).

Problemas a resolver en práctica

Problema 1.

Resolver el PVI

$$\begin{cases} (1+\mathrm{e}^x)\, y''(x) - 3\,(1+\mathrm{e}^x)\, y'(x) + 2\,(1+\mathrm{e}^x)\, y(x) = & \mathrm{e}^x, \quad x \in \mathbb{R}\,, \\ y(0) = & 0, \\ y'(0) = & 0. \end{cases}$$

Desarrollo:
Haciendo $D = \dfrac{d}{dx}$, la EDO se puede re-escribir en forma de operador como

$$\Big((1+\mathrm{e}^x)\, D^2 - 3\,(1+\mathrm{e}^x)\ D + 2\,(1+\mathrm{e}^x) \Big)[y](x) = \mathrm{e}^x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Puesto que $(1+\mathrm{e}^x)$ es siempre positivo, podemos normalizar (la EDO) obteniendo

$$(D^2 - 3\,D + 2)[y](x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Aquí se identifica la función del lado derecho

$$g(x) := \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Aplicando el Principio de Superposición, la solución de la EDO puede descomponerse como $y = y_h + y_h$, donde y_h es una solución particular de la EDO no homogénea dada, e y_h es la solución general de la EDO homogénea asociada,

$$(D^2 - 3\,D + 2)[y_h] = 0\,, \quad \text{en } \mathbb{R}\,.$$

La ecuación característica asociada a la EDO precedente, está dada por

$$\lambda^2 - 3\,\lambda + 2 = 0 \Longleftrightarrow (\lambda - 1)\,(\lambda - 2) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2\,.$$

Por lo discutido en clases, a $\lambda_1 = 1$ (raíz simple) le corresponde la función $\mathbb{R} \ni x \mapsto y_1(x) := \mathrm{e}^x$, mientras que a $\lambda_2 = 2$ (también raíz simple), se le asocia la función $\mathbb{R} \ni x \mapsto$

$y_2(x) := \mathrm{e}^{2x}$. Además, el conjunto $B := \{y_1, y_2\}$ resulta ser un Conjunto/Sistema Fundamental de Soluciones de la EDO homogénea considerada.
De esta manera, la solución general de la EDO homogénea asociada está dada por

$$y_h(x) = C_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,\mathrm{e}^{2\,x}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \text{con } C_1,\, C_2 \in \mathbb{R} \text{ ctes. arbitrarias}\,.$$

Para determinar una solución particular, aplicaremos el método de variación de parámetros (puesto que no es directo identificar un aniquilador a coeficientes constantes para la función g ya definida). Así, se propone como solución particular la función

$$y_p(x) = A_1(x)\,\mathrm{e}^x + A_2(x)\,\mathrm{e}^{2\,x}\,, \forall\, x \in \mathbb{R}\,,$$

siendo A_1 y A_2 funciones a determinar, tales que sus respectivas derivadas, A_1' y A_2' resuelven el siguiente sistema de ecuaciones, escrito en forma matricial, para $x \in \mathbb{R}$ fijo (pero arbitrario):

$$\begin{bmatrix} \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{2\,x} \\ \mathrm{e}^x & 2\,\mathrm{e}^{2\,x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1'(x) \\ A_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} \end{bmatrix}.$$

Escalonando la matriz aumentada, resulta

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{2\,x} & 0 \\ \mathrm{e}^x & 2\,\mathrm{e}^{2\,x} & \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} \end{pmatrix} \overset{\substack{\mathrm{e}^{-x} f_1 \\ \mathrm{e}^{-x} f_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e}^x & 0 \\ 1 & 2\,\mathrm{e}^x & \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} \end{pmatrix} \overset{f_2 - f_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e}^x & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^x & \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} \end{pmatrix}$$

De esta manera, se deduce el sistema de ecuaciones equivalente:

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e}^x \\ 0 & \mathrm{e}^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1'(x) \\ A_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A_2'(x) \;=\; \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^x} = \dfrac{\mathrm{e}^{-2\,x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} \\ A_1'(x) \;=\; -\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x} = -\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} \end{cases}$$

En vista que $x \in \mathbb{R}$ es fijo pero arbitrario, hemos obtenido la regla de correspondencia de las funciones derivada de A_1 y A_2, respectivamente.
Ahora, integrando con respecto a x las expresiones precedentes, y considerando el cambio de variable $t = \mathrm{e}^{-x}$ ($dt = -\mathrm{e}^{-x}dx = -t\,dx$), se deduce que

$$\begin{aligned} A_1(x) &= \int -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,dx = \int \frac{dt}{1+t} = \ln(1+t) + K_1 = \ln(1+\mathrm{e}^{-x}) + K_1, \\ A_2(x) &= \int \frac{\mathrm{e}^{-2\,x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,dx = \int -\frac{t}{1+t}\,dt = \int \left(\frac{1}{1+t} - 1\right) dt = \ln(1+t) - t + K_2 \\ &= \ln(1+\mathrm{e}^{-x}) - \mathrm{e}^{-x} + K_2. \end{aligned}$$

Podemos eligir las constantes de integración (K_1, K_2), tales que $K_1 = K_2 = 0$ pues buscamos **una** solución particular. Por lo tanto, ésta viene dada por

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{e}^x + \Big(\ln(1+\mathrm{e}^{-x}) - \mathrm{e}^{-x}\Big)\,\mathrm{e}^{2\,x} \\ &= \ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{e}^x + \ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{e}^{2\,x} - \mathrm{e}^x. \end{aligned}$$

Así, la Solución General de la EDO planteada está definida por

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{2\,x} + \ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{e}^{x} + \ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{e}^{2\,x} - \mathrm{e}^{x} \\ &= (C_1 - 1)\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{2\,x} + \ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{e}^{x} + \ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{e}^{2\,x}\,, \end{aligned}$$

donde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ son constantes arbitrarias. Haciendo $\widetilde{C_1} := C_1 - 1$, se tiene que $\widetilde{C_1} \in \mathbb{R}$ es también constante arbitraria. En consecuencia, la sollución general de la EDO dada se puede expresar, de forma más simplificada, por

$$y(x) = \widetilde{C_1}\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{2\,x} + \ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{e}^{x} + \ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{e}^{2\,x}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,,$$

siendo $\widetilde{C_1}$, $C_2 \in \mathbb{R}$ constantes arbitrarias. Ahora, notemos que la derivada de la solución general de la EDO original está dada por

$$y'(x) = \widetilde{C_1}\,\mathrm{e}^{x} + 2\,C_2\,\mathrm{e}^{2\,x} - \frac{1+\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} + \ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{e}^{x} + 2\,\ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{e}^{2\,x}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Imponiendo las condiciones iniciales, se deduce que

$$\left\{\begin{array}{rcl} y(0) &=& 0 \\ y'(0) &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \widetilde{C_1} + C_2 + 2\,\ln(2) &=& 0 \\ \widetilde{C_1} + 2\,C_2 - 1 + 3\,\ln(2) &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \widetilde{C_1} &=& -1 - \ln(2) \\ C_2 &=& 1 - \ln(2) \end{array}\right.$$

Por lo tanto, la única solución de PVI está dada por

$$y(x) = -[1+\ln(2)]\,\mathrm{e}^{x} + [1-\ln(2)]\,\mathrm{e}^{2\,x} + \ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{e}^{x} + \ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{e}^{2\,x}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Problema 2.
Resolver el PVI

$$\left\{\begin{array}{rl} 2y''(x) - 4y'(x) + 2y(x) = & \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x} \qquad x > 0\,, \\ y(1) = 0, \quad y'(1) = 0\,. & \end{array}\right.$$

Desarrollo:
Tomando $D = \dfrac{d}{dx}$, la EDO se puede re-escribir en forma de operador y a la vez **normalizada** como

$$(D^2 - 2\,D + 1)[y](x) = \frac{\mathrm{e}^{x}}{2\,x}, \quad \forall\, x > 0,$$

y se identifica aquí

$$f(x) := \frac{\mathrm{e}^{x}}{2\,x}\,, \quad \forall\, x > 0.$$

Aplicando el Principio de Superposición, la solución de la EDO se descompone en $y = y_h + y_p$, donde y_p es una solución particular de la EDO, e y_h es la solución general de la EDO homogénea asociada,

$$(D^2 - 2\,D + 1)[y_h] = 0\,, \quad \text{en } \Omega := (0, +\infty)\,.$$

La ecuación característica correspondiente a la EDO precedente, está dada por

$$\lambda^2 - 2\,\lambda + 1 = 0 \Longleftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1,$$

de donde, las funciones asociadas a esta raíz (doble), son $\Omega \ni x \mapsto y_1(x) := \mathrm{e}^x$, y $\Omega \ni x \mapsto y_2(x) := x\,\mathrm{e}^x$.
De esta manera, la solución general de la EDO homogénea asociada, está dada por

$$y_h(x) = C_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,x\,\mathrm{e}^x\,, \qquad \forall\,x \in \Omega\,, \quad \forall\,C_1,\,C_2 \in \mathbb{R} \text{ ctes. arbitrarias.}$$

Para encontrar una solución particular por el método de variación de parámetros, se propone como solución particular a

$$y_p(x) = A_1(x)\,\mathrm{e}^x + A_2(x)\,x\,\mathrm{e}^x\,, \qquad \forall\,x \in \Omega\,,$$

donde las funciones A_1 y A_2 son tales que sus funciones derivadas, A_1', A_2', resuelven el siguiente sistema de ecuaciones, escrito en forma matricial, para cada $x \in \Omega$.

$$\begin{bmatrix} \mathrm{e}^x & x\,\mathrm{e}^x \\ \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1'(x) \\ A_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{\mathrm{e}^x}{2\,x} \end{bmatrix}.$$

Escalonando la matriz aumentada del sistema, resulta

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^x & x\,\mathrm{e}^x & 0 \\ \mathrm{e}^x & (1+x)\,\mathrm{e}^x & \frac{\mathrm{e}^x}{2x} \end{pmatrix} \overset{\substack{\mathrm{e}^{-x} f_1 \\ \mathrm{e}^{-x} f_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 1 & 1+x & \frac{1}{2x} \end{pmatrix} \overset{f_2 - f_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2x} \end{pmatrix}$$

De esta manera, el sistema equivalente a resolver es

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1'(x) \\ A_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2x} \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A_2'(x) \;=\; \frac{1}{2x}\,, \\ A_1'(x) \;=\; -\frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

En vista que $x \in \Omega$ es fijo pero arbitrario, hemos obtenido la regla de correspondencia de las funciones derivada de A_1 y A_2, respectivamente.
Ahora, integrando con respecto a x las expresiones precedentes, se deduce que

$$A_1(x) = \int -\frac{1}{2}\,dx = -\frac{x}{2} + K_1, \quad x > 0$$

$$A_2(x) = \int \frac{1}{2\,x}\,dx = \frac{1}{2}\,\ln(x) + K_2, \quad x > 0.$$

Sin pérdida de generalidad, eligiendo las constantes de integración $K_1 = K_2 = 0$, se determina una solución particular, la cual viene dada por

$$y_p(x) = -\frac{x}{2}\,\mathrm{e}^x + \frac{x}{2}\,\ln(x)\,\mathrm{e}^x\,, \quad \forall\,x \in \Omega\,.$$

Así, la solución general de la EDO planteada está dada por

$$
\begin{aligned}
y(x) &= C_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,x\,\mathrm{e}^x - \frac{x}{2}\,\mathrm{e}^x + \frac{x}{2}\,\ln(x)\,\mathrm{e}^x \\
&= C_1\,\mathrm{e}^x + (C_2 - 1/2)\,x\,\mathrm{e}^x + \frac{x}{2}\,\ln(x)\,\mathrm{e}^x \\
&(\widetilde{C_2} := C_2 - 1/2 \quad \text{también cte. arbitraria}) \\
&= C_1\,\mathrm{e}^x + \widetilde{C_2}\,x\,\mathrm{e}^x + \frac{x}{2}\,\ln(x)\,\mathrm{e}^x, \qquad \forall\, x > 0, \qquad \text{con}\, C_1, \widetilde{C_2} \in \mathbb{R} \quad \text{ctes. arbitrarias}\,.
\end{aligned}
$$

Ahora, notemos que la derivada de la solución general de la EDO original está dada por

$$
y'(x) = C_1\,\mathrm{e}^x + \widetilde{C_2}\,\mathrm{e}^x + \widetilde{C_2}\,x\,\mathrm{e}^x + \frac{\ln(x)\,\mathrm{e}^x}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x + \frac{x}{2}\,\ln(x)\,\mathrm{e}^x, \qquad \forall\, x > 0.
$$

Imponiendo las condiciones iniciales, se deduce que

$$
\left\{\begin{array}{rcl} y(1) &=& 0 \\ y'(1) &=& 0 \end{array}\right.
\iff
\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{e}\,C_1 + \mathrm{e}\,\widetilde{C_2} &=& 0 \\ \\ \mathrm{e}\,C_1 + 2\,\mathrm{e}\,\widetilde{C_2} + \frac{1}{2}\mathrm{e} &=& 0 \end{array}\right.
\iff
\left\{\begin{array}{rcl} C_1 &=& \dfrac{1}{2} \\ \\ \widetilde{C_2} &=& -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.
$$

Por lo tanto, la única solución de PVI está dada por

$$
y(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\,x\,\mathrm{e}^x + \frac{x}{2}\,\ln(x)\,\mathrm{e}^x, \quad \forall\, x > 0.
$$

Problema 3.
Usando el Problema 2, determine la solución general de

$$
y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{2x} + x\,, \quad x > 0\,.
$$

Desarrollo:

Usando el Principio de Superposición de soluciones, basta resolver la EDO

$$
y''(x) - 2y'(x) + y(x) = x\,, \quad x > 0\,.
$$

Esta última, se puede resolver usando aniquiladores o variación de parámetros. Usando aniquiladores (Hacerlo), se deduce que una solución particular es del tipo $y_p(x) = a + bx$ con a y b constantes reales por determinar.
Al desarrollar

$$
(D^2 - 2\,D + 1)(a + bx) = x\,, \quad \forall\, x > 0\,,
$$

se deduce que $a = 2$ y $b = 1$. Por tanto, la solución particular buscada viene dada por $y_p(x) = 2 + x\,, \quad \forall\, x > 0$. Finalmente, teniendo presente la solución del Problema 2, la solución general de

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{2x} + x,$$

es:

$$u(x) = d_1\,\mathrm{e}^x \;+\; d_2\,x\,\mathrm{e}^x \;+\; \frac{x}{2}\,\ln(x)\,\mathrm{e}^x \;+\; (2+x)\,, \quad \forall\, x > 0\,,$$

donde d_1 y d_2 son constantes reales arbitrarias.

Problemas propuestos para el estudiante:

1. Usando el método de variación de parámetros, resuelva:

   a) $y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = \mathrm{e}^x\,, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y(0) = 0,\, y'(0) = 0;$

   b) $y'''(t) + 3y''(t) + 3y'(t) + y(t) = t^{-3}\mathrm{e}^{-t}\,, \quad t > 0\,;$

   c) $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \mathrm{e}^{-t}\,\ln(t)\,, \quad t > 0, \quad y(1) = 0,\, y'(1) = 0.$

   d) $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1+x^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}.$

2. *a*) Encuentre las soluciones de la EDO

   $$x^3\,y^{(3)}(x) - 2x^2y^{(2)}(x) - 2xy^{(1)}(x) + 8y(x) = 0 \qquad \forall x > 0$$

   con la forma $y(x) = x^r$ con r escalar a determinar. Recuerde que interesa obtener soluciones a VALORES REALES.

   b) Encuentre la solución general de la EDO:

   $$x^3\,y^{(3)}(x) - 2x^2y^{(2)}(x) - 2xy^{(1)}(x) + 8y(x) = x \qquad \forall x > 0.$$

3. Determine la solución general de

   $$(9-2x)y''(x) - 4(x-5)y'(x) + 4y(x) = 4x^2 - 36x + 81\,, \quad x < 0\,,$$

   sabiendo que el kernel (o núcleo) del operador asociado a la EDO tiene una base dada por $\{y_1(x) = x - 5,\, y_2(x) = \mathrm{e}^{-2x}\}$.

4. Combinar los métodos de anuladores y de variación de parámetros para resolver el PVI:

   $$\begin{aligned} 3y''(t) - 6y'(t) + 30y(t) &= 15\,\mathrm{sen}(t) + \mathrm{e}^t\tan(3t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,\\ y(0) &= 0\,,\\ y'(0) &= 1\,. \end{aligned}$$

12/09/22
RBP/JMS/FST//rbp/fst/jms