Álgebra I. 525140 - DIM - CFM
15 de junio de 2021
Prof.: Isabel Donoso, Anahí Gajardo, Jorge Moya, Alejandra Pérez
Cinthya Rivas, Mónica Selva, Filip Thiele, Gladis Torres

Números Complejos

1. Introducción

El matemático, físico y astrólogo francés Gerolamo Cardano (1501-1576) fue uno de los primeros en hacer referencia a los números complejos. En su libro Ars Magna, publicado en 1545, él formula el siguiente problema: *se tiene una cuerda de longitud, digamos 10, ¿cómo dividirla en 2 partes, de longitudes a y b* ($a+b=10$) *de modo que el rectángulo con lados de longitudes a y b tenga área, digamos 40?*

Si, por ejemplo, dividimos la cuerda en pedazos de longitudes 1 y 9, el área del rectángulo resultante sería 9. Si la dividimos en pedazos de longitudes 2 y 8, el rectángulo tendría área 16. ¿Será posible encontrar valores $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que $a+b=10$ y $ab=40$?

Note que si $a+b=10$, entonces $ab=a(10-a)=10a-a^2$. Denotemos $y(a)=10a-a^2$, es decir, $y(a)$ es el área del rectángulo con lados de longitudes a y $10-a$. Entonces, se tiene

$$10\,a-a^2=y(a) \quad \Leftrightarrow \quad (a-5)^2=-(y(a)-25),$$

igualdad que es válida si y solo si $y(a)-25\leq 0$. Esto significa que el mayor valor que puede alcanzar el área del rectángulo de lados a y $10-a$ es 25 y se obtiene con $a=5$.

El problema de Cardano, por tanto, no tiene solución real. En su libro él dice que, a pesar de esto, el álgebra da una solución pues los números "imaginarios" (no reales)

$$5+\sqrt{-15} \quad \text{y} \quad 5-\sqrt{-15}$$

son tales que su suma es 10 y su producto 40,

$$5+\sqrt{-15}+5-\sqrt{-15}=10, \qquad (5+\sqrt{-15})\,(5-\sqrt{-15})=25-(-15)=40.$$

Estos números "imposibles" o "imaginarios" siguieron mencionándose en años siguientes, por ejemplo, Descartes los mencionó en 1637 al analizar los valores de x para los que $x^3-6x^2+13x-10=0$, note que esta igualdad es tal que

$$x^3-6\,x^2+13\,x-10=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (x-2)\,(x^2-4\,x+5)=(x-2)\,((x-2)^2+1)=0.$$

Fue Euler (suizo, 1707-1783) quien formalizó la teoría de los números complejos, llamando i a un número que satisface que su cuadrado es -1 ($i^2=-1$) y definiendo como número complejo a un nuevo número con la estructura $a+i\,b$ con $a, b\in\mathbb{R}$.

Años después Gauss y Argand consideraron a un número complejo $a + i\, b$ como un par ordenado (a, b) y lo representaron en el plano cartesiano (plano de Argand). A pesar de que un número complejo z no refleje una cantidad como sí lo hace un número real, es perfectamente lógico pensar en él, más aún por su enorme utilidad en la descripción de ondas de cualquier tipo (por ejemplo).

1.1. Definición del conjunto de los números complejos

Como se comentó anteriormente, uno de los problemas del tiempo de Cardano fue el considerar raíces cuadradas de números negativos, o bien, definir "algo" cuyo cuadrado sea -1. Se concibe entonces un número cuyo cuadrado es -1, y se le llama i. Admitiendo este número, podemos comenzar a hacer cálculos con él, al hacerlos solo usamos la propiedad que lo define: que su cuadrado es -1 y las propiedaes usuales de los números reales, por ejemplo:

$$\begin{aligned}(3i + 4)5i &= 15i^2 + 20i \\ &= 15(-1) + 20i \\ &= -15 + 20i\end{aligned}$$

Pero puede que la aritmética no sea consistente con esta definición. Para verificar esto, trabajemos de manera más genérica. Siguiendo el trabajo de Euler, consideremos un nuevo conjunto de números, que incluya a i y a todos los números que sea posible formar con sumas y multiplicaciones de este y los números reales, concretamente definamos el siguiente conjunto.

Definición 1. *Conjunto de los números complejos* Considerando i como una constante fija que cumple $i^2 = -1$, definimos:

$$\mathbb{C} = \{x + y\, i \ : \ x, y \in \mathbb{R}\} \tag{1}$$

Notamos que $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, ya que si tomamos $y = 0$ obtenemos que $x + y\, i = x \in \mathbb{R}$. Entonces este nuevo conjunto es una extensión de los números reales, tal como los racionales son una extensión de los enteros.

Nos gustaría, al igual que hacemos con los números reales, poder sumar y multiplicar'números complejos. Sean entonces dos números en $\mathbb{C}$, digamos, $a + b\, i$ y $c + d\, i$. Partamos viendo cómo resulta sumar estos números.

$$\begin{aligned}(a + b\, i) + (c + d\, i) &= a + b\, i + c + d\, i \\ &= a + c + b\, i + d\, i \\ &= (a + c) + (b + d)\, i,\end{aligned}$$

Vemos que la suma resultó ser también un número de $\mathbb{C}$ ya que puede expresarse como suma de un número real más otro real multiplicado por i.

Exploremos ahora la multiplicación.

$$\begin{aligned}(a+b\,i)(c+d\,i) &= a\,c+a\,d\,i+b\,c\,i+b\,d\,i^2\\ &= a\,c+a\,d\,i+b\,c\,i-b\,d\\ &= a\,c-b\,d+a\,d\,i+b\,c\,i\\ &= (a\,c-b\,d)+(b\,c+a\,d)\,i,\end{aligned}$$

Observamos nuevamente el hecho importante que los resultados, tanto en (2) como en (2), son números de la forma (1), es decir, elementos del conjunto $\mathbb{C}$, lo cual muestra que las operaciones de sum ay multiplicación de elementos de $\mathbb{C}$ dan como resultado elementos de $\mathbb{C}$.

Ahora nace la pregunta de si estas operaciones verifican en $\mathbb{C}$ las mismas propiedades que verifican en $\mathbb{R}$.

1.2. Propiedades de las operaciones aritméticas entre números complejos

A continuación se mostrará que la suma y el producto definidos sobre $\mathbb{C}$ tienen las mismas propiedades que la suma y el producto sobre $\mathbb{R}$, lo que nos permite asegurar que $(\mathbb{C},+,\cdot)$, al igual que $(\mathbb{R},+,\cdot)$, es un *cuerpo*.

1. **Conmutatividad de la suma y el producto:**

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}: \qquad z_1+z_2=z_2+z_1 \qquad \text{y} \qquad z_1z_2=z_2z_1.$$

En efecto, si $z_1=x_1+y_1\,i$ y $z_2=x_2+y_2\,i$ con $x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{R}$, entonces

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)\,i=(x_2+x_1)+(y_2+y_1)\,i=z_2+z_1.$$

Por su parte,

$$\begin{aligned}z_1z_2 &= (x_1+y_1\,i)(x_2+y_2\,i)\\ &= (x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+y_1x_2)\,i\\ &= (x_2x_1-y_2y_1)+(x_2y_1+y_2x_1)\,i\\ &= (x_2+y_2\,i)(x_1+y_1\,i)\\ &= z_2z_1.\end{aligned}$$

2. **Asociatividad de la suma y el producto:**

$$\forall z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}: \qquad z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3 \qquad \text{y} \qquad z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3.$$

En efecto, si $z_1 = x_1 + y_1\, i$, $z_2 = x_2 + y_2\, i$ y $z_3 = x_3 + y_3\, i$ con $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
(z_1 + z_2) + z_3 &= ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\, i) + x_3 + y_3\, i \\
&= ((x_1 + x_2) + x_3) + ((y_1 + y_2) + y_3)\, i \\
&= (x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3)\, i \\
&= (x_1 + (x_2 + x_3)) + (y_1 + (y_2 + y_3))\, i \\
&= x_1 + (x_2 + x_3) + y_1\, i + (y_2 + y_3)\, i \\
&= x_1 + y_1\, i + (x_2 + x_3) + (y_2 + y_3)\, i \\
&= z_1 + (z_2 + z_3).
\end{aligned}$$

Por su parte,

$$\begin{aligned}
(z_1 z_2) z_3 &= ((x_1 + y_1\, i)(x_2 + y_2\, i))(x_3 + y_3\, i) \\
&= ((x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)\, i)(x_3 + y_3\, i) \\
&= ((x_1x_2 - y_1y_2)x_3 - (x_1y_2 + y_1x_2)y_3) + ((x_1x_2 - y_1y_2)y_3 + (x_1y_2 + y_1x_2)x_3)\, i \\
&= (x_1x_2x_3 - y_1y_2x_3 - x_1y_2y_3 - y_1x_2y_3) + (x_1x_2y_3 - y_1y_2y_3 + x_1y_2x_3 + y_1x_2x_3)\, i \\
&= (x_1(x_2x_3 - y_2y_3) - y_1(y_2x_3 + x_2y_3)) + (x_1(x_2y_3 + y_2x_3) + y_1(x_2x_3 - y_2y_3))\, i \\
&= (x_1 + y_1\, i)((x_2x_3 - y_2y_3) + (x_2y_3 + y_2x_3)\, i) \\
&= (x_1 + y_1\, i)((x_2 + y_2\, i)(x_3 + y_3\, i)) \\
&= z_1(z_2z_3).
\end{aligned}$$

3. **Existencia del neutro aditivo y del neutro multiplicativo:**

   Los reales 0 y 1, que tal como comentamos, también son considerados números complejos, siguen siendo neutros para la suma y la multiplicación, respectivamente.

$$\forall\, z \in \mathbb{C} \,:\, z + 0 = z \qquad \wedge \qquad z \cdot 1 = z.$$

   En efecto, si $z = x + y\, i$, con $x, y \in \mathbb{R}$, entonces,

$$\begin{aligned}
z + 0 &= x + y\, i + 0 + 0\, i \\
&= (x + 0) + (y + 0)\, i \\
&= x + y\, i.
\end{aligned}$$

   Por su parte,

$$\begin{aligned}
z \cdot 1 &= (x + y\, i)(1 + 0\, i) \\
&= (x \cdot 1 - y \cdot 0) + (y \cdot 1 + x \cdot 0)\, i \\
&= (x - 0) + (y + 0)\, i \\
&= x + y\, i.
\end{aligned}$$

4. **Inverso aditivo:**

   Si $z = a + b\,i$, entonces $-z = (-a) + (-b)\,i$ cumple:

$$z + (-z) = (a + b\,i) + ((-a) + (-b)\,i) = (a + (-a)) + (b + (-b))\,i = 0 + 0\,i = 0$$

5. **Inverso multiplicativo para $z \neq 0$:**

   Dado $z \in \mathbb{C}$ no nulo, existe $u \in \mathbb{C}$ tal que $zu = 1$.

   En efecto, dado $z = a + b\,i$, buscamos algo así como $u = \dfrac{1}{a + b\,i}$, trabajemos esta expresión para encontrar la forma binomial de u y demostrar así que u existe y está en $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a + b\,i} &= \frac{1}{a + b\,i} \times \frac{a - b\,i}{a - b\,i} \\
&= \frac{a - b\,i}{a^2 - (b\,i)^2} \\
&= \frac{a - b\,i}{a^2 - b^2(-1)} \\
&= \frac{a - b\,i}{a^2 + b^2} \\
&= \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\,i
\end{aligned}$$

   Dado que tanto $\dfrac{a}{a^2 + b^2}$ como $-\dfrac{b}{a^2 + b^2}$ son números reales siempre, concluimos que $u = \dfrac{1}{a + b\,i} \in \mathbb{C}$ es el inverso multiplicativo de $z = a + b\,i$. El único caso en que esta expresión no está definida es cuando $a = b = 0$, es decir cuando $z = 0$, caso que ya habíamos excluido.

6. **Distributividad del producto con respecto a la suma:**

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} : \qquad z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

   En efecto, si $z_1 = x_1 + y_1\,i$, $z_2 = x_2 + y_2\,i$ y $z_3 = x_3 + y_3\,i$ con $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
z_1(z_2 + z_3) &= (x_1 + y_1\,i)((x_2 + y_2\,i) + (x_3 + y_3\,i)) \\
&= (x_1 + y_1\,i)((x_2 + x_3) + (y_2 + y_3)\,i) \\
&= (x_1(x_2 + x_3) - y_1(y_2 + y_3)) + (y_1(x_2 + x_3) + x_1(y_2 + y_3))\,i \\
&= (x_1x_2 + x_1x_3 - y_1y_2 - y_1y_3) + (y_1x_2 + y_1x_3 + x_1y_2 + x_1y_3)\,i \\
&= (x_1x_2 - y_1y_2 + x_1x_3 - y_1y_3) + (y_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_3 + x_1y_3)\,i \\
&= ((x_1x_2 - y_1y_2) + (y_1x_2 + x_1y_2)\,i) + ((x_1x_3 - y_1y_3) + (y_1x_3 + x_1y_3)\,i) \\
&= (x_1 + y_1\,i)(x_2 + y_2\,i) + (x_1 + y_1\,i)(x_3 + y_3\,i) \\
&= z_1z_2 + z_1z_3
\end{aligned}$$

Con todo lo anterior $\mathbb{C}$ resulta ser un cuerpo, al igual que los reales. El hecho de ser cuerpo solo involucra las 6 propiedades anteriores, referentes a la suma y la multiplicación. Todas las demás propiedades de los reales que se refieren a estas operaciones serán válidas también para los complejos, por lo tanto podremos trabajar con ellos con la misma soltura que lo hacemos con los reales. Debemos tener cuidado sí con la relación de orden de $\mathbb{R}$ pues esta no se puede definir en $\mathbb{C}$, por lo tanto ni siquiera podemos usarla en este nuevo conjunto.

Consideraremos algunas definiciones más.

1.3. Parte real y parte imaginaria de un número complejo

Si tenemos un complejo $z \in \mathbb{C}$, por definición este siempre será la suma de un real más otro real multiplicado por i, es decir será de la forma $z = a + b\,i$, donde $a, b \in \mathbb{R}$. Para referirnos a estas dos componentes de z hablamos de parte real y parte imaginaria.

Definición 2. *Parte real y parte imaginaria de un número complejo* Dado $z = a + b\,i \in \mathbb{C}$ decimos que a es la *parte real de* z, y la denotamos por $\mathrm{Re}(z) = a$. Asimismo, el real que va multiplicado por i lo llamamos *parte imaginaria de* z, y lo denotamos por $\mathrm{Im}(z) = b$.

Debemos enfatizar que tanto la parte real como la parte imaginaria de un complejo son números reales, así tenemos la ecuación:

$$z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)\,i.$$

Ejemplo 3. Calculemos la parte real y la parte imaginaria de $\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i} + 5i$.

Calculemos primero el cociente

$$\frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i} = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} + i}\right) = \frac{\sqrt{3} + i + 3i + \sqrt{3}i^2}{3 - i^2} = \frac{4i}{4} = i$$

Entonces,

$$\frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i} + 5i = i + 5i = 6i$$

y, por tanto,

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i} + 5i\right) = 0, \qquad \mathrm{Im}\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i} + 5i\right) = 6.$$

1.4. Conjugado de un número complejo

Al calcular el inverso de z, recurrimos a un truco que en el colegio solíamos llamar “racionalizar”, es decir, valiéndonos de la fórmula de la “suma por su diferencia” hicimos “desaparecer” el imaginario i del denominador; esto es, amplificamos la fracción $\dfrac{1}{a + b\,i}$ por el número $a - b\,i$.

Dado que este número prestó tan inmensa utilidad a nuestros cálculos, le hacemos homenaje poniéndole un nombre particular.

Definición 4. *Conjugado de un número complejo* Definimos el *conjugado de* $z = a + b\,i$ como

$$\overline{z} = a - b\,i.$$

Dicho de otra manera, el conjugado de z se denota por $\overline{z}$ y se define como:

$$\overline{z} = \operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z)\,i.$$

Muchas son las propiedades que se tiene esta nueva operación, las listamos a continuación.

1. $\overline{0} = 0$.

2. $\overline{1} = 1$.

3. $\overline{i} = -i$

4. $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(\overline{z})$ y $\operatorname{Im}(z) = -\operatorname{Im}(\overline{z})$.

   En efecto, si $z = a + b\,i$, entonces $\operatorname{Re}(z) = a$ e $\operatorname{Im}(z) = b$, por su parte $\overline{z} = a - b\,i$, por lo tanto $\operatorname{Re}(\overline{z}) = a = \operatorname{Re}(z)$ e $\operatorname{Im}(\overline{z}) = -b = -\operatorname{Im}(z)$.

5. $z = \overline{z}$ si y solo si z es real.

   En efecto, si $z = \overline{z}$, significa que $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(\overline{z})$, pero usando la propiedad anterior esto se traduce en que $\operatorname{Im}(z) = -\operatorname{Im}(z)$, lo cual solo puede cumplirse si $\operatorname{Im}(z) = 0$, es decir solo si z es real.

6. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.

   En efecto, si $z = a + b\,i$ y $w = x + y\,i$, con $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
\overline{z + w} &= \overline{(a + b\,i) + (x + y\,i)} \\
&= \overline{(a + x) + (b + y)\,i} \\
&= (a + x) - (b + y)\,i \\
&= (a + x) + (-b - y)\,i \\
&= (a - b\,i) + (x - y\,i) \\
&= \overline{(a + b\,i)} + \overline{(x - y\,i)} \\
&= \overline{z} + \overline{w}.
\end{aligned}$$

7. $\overline{-z} = -\overline{z}$.

   En efecto, $\overline{z + (-z)} = \overline{0} = 0$, o bien, de forma equivalente, $\overline{z} + \overline{-z} = 0$, entonces $-\,\overline{z} = \overline{-z}$. Es decir, el inverso aditivo del conjugado de un número complejo z es el conjugado del inverso aditivo de z.

8. $\overline{z\,w} = \overline{z}\,\overline{w}$.

   En efecto, si $z = a + b\,i$ y $w = x + y\,i$, con $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, entonces

$$
\begin{aligned}
\overline{zw} &= \overline{(a + b\,i)(x + y\,i)} \\
&= \overline{(ax - by) + (bx + ay)\,i} \\
&= (ax - by) - (bx + ay)\,i \\
&= (ax - by) + (-bx - ay)\,i \\
&= (ax - (-b)(-y)) + ((-b)x + a(-y))\,i \\
&= (a - b\,i)(x - y\,i) \\
&= \overline{(a + b\,i)}\ \overline{(x + y\,i)} \\
&= \overline{z}\,\overline{w}
\end{aligned}
$$

9. $\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$.

   En efecto, de la propiedad anterior tenemos que $1 = \overline{1} = \overline{z\,z^{-1}} = \overline{z}\ \overline{z^{-1}}$. Por tanto, $\overline{z}\ \overline{z^{-1}} = 1$, entonces $\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}\,1 = \overline{z}^{\,-1}$. Es decir, el inverso multiplicativo del conjugado de un número complejo $z \neq 0$ es el conjugado del inverso multiplicativo de z.

10. Si z, $w \in \mathbb{C}$ y $w \neq 0$, entonces

$$
\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{z\,w^{-1}} = \overline{z}\ \overline{w^{-1}} = \overline{z}\ \overline{w}^{\,-1} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}.
$$

11. $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$.

    En efecto, si $z = a + b\,i$, entonces

$$
\begin{aligned}
z + \overline{z} &= (a + b\,i) + (a - b\,i) \\
&= (a + a) + (b - b)\,i \\
&= 2a \\
&= 2\mathrm{Re}(z)
\end{aligned}
$$

12. $z - \overline{z} = 2\,i\,\mathrm{Im}(z)$.

    En efecto, si $z = a + b\,i$, entonces

$$
\begin{aligned}
z - \overline{z} &= (a + b\,i) - (a - b\,i) \\
&= (a + b\,i) + (-a + b\,i) \\
&= (a + (-a)) + (b + b)\,i) \\
&= 2b\,i \\
&= 2\mathrm{Im}(z)\,i \\
&= 2\,i\,\mathrm{Im}(z)
\end{aligned}
$$

13. $\overline{\overline{z}} = z$.

En efecto, si $z = a + b\,i$, entonces

$$\begin{aligned} \overline{\overline{z}} &= \overline{\overline{(a + b\,i)}} \\ &= \overline{(a - b\,i)} \\ &= (a + b\,i) \\ &= z \end{aligned}$$

Veamos algunos ejemplos del uso de estas propiedades.

Ejemplo 5. Determinemos parte real. parte imaginaria y conjugado de $z = \dfrac{\overline{2 + 2\,i + \overline{3 + 2\,i}}}{\overline{2}}$.

Se cumple que $\overline{2} = 2$, y además,

$$\overline{2 + 2\,i + \overline{3 + 2\,i}} = \overline{2 + 2\,i + 3 - 2\,i} = \overline{5} = 5.$$

Entonces,

$$z = \frac{\overline{2 + 2\,i + \overline{3 + 2\,i}}}{\overline{2}} = \frac{5}{2}.$$

Por tanto, la parte real del número dado es $\frac{5}{2}$, su parte imaginaria es 0, y su conjugado es $\frac{5}{2}$.

Ejemplo 6. Pruebe que para todo $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$, se cumple que

$$\overline{z + \frac{1}{z}} - \frac{\overline{1 + z}}{z} = \overline{z} - 1.$$

Solución: Dado que

$$\overline{z + \frac{1}{z}} = \overline{z} + \overline{\frac{1}{z}} = \overline{z} + \frac{1}{\overline{z}}, \qquad \frac{\overline{1 + z}}{z} = \frac{\overline{1 + z}}{\overline{z}} = \frac{1 + \overline{z}}{\overline{z}} = \frac{1}{\overline{z}} + 1,$$

se tiene entonces que

$$\overline{z + \frac{1}{z}} - \frac{\overline{1 + z}}{z} = \overline{z} + \frac{1}{\overline{z}} - \frac{1}{\overline{z}} - 1 = \overline{z} - 1.$$

2. Representación en el Plano de Argand

Los números complejos se pueden representar como puntos en lo que se conoce como el *Plano de Argand*, en honor al matemático autodidacta *Jean-Robert Argand*. El Plano de Argand consta de un plano con dos ejes perpendiculares, llamados *eje real* y *eje imaginario*, tal cual se representa en la figura 1. En otras palabras, el Plano de Argand no es otra cosa más que el producto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Dado que un número complejo tiene una parte real y otra imaginaria, que son totalmente independientes entre sí, resulta práctico ver al número complejo como si fuera un *par ordenado* de números reales. En otras palabras, estamos diciendo que resulta práctico asociar a $z = a + b\,i \in \mathbb{C}$ con el par ordenado, o punto, $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. De esta forma, los números reales quedarían representados en el eje horizontal, y los números imaginarios quedarían en el eje vertical.

En la figura se han representado, los números complejos $z_2 = 2$ (complejo real), $z_3 = 3i$ (imaginario puro) y $z_1 = 1 + i$. Note que los complejos reales corresponden a puntos sobre el eje real, mientras que los números imaginarios puros son puntos sobre el eje imaginario.

Otra cosa nueva que se aprecia en la figura es que dibujamos una flecha que parte del origen y termina en el punto representado. Tal flecha tendrá utilidad para entender mejor las operaciones de suma y multiplicación de números complejos, tal como veremos más abajo y en el capítulo siguiente. Dibujar esta flecha corresponde a la visión de los elementos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ como *vectores*, noción que sin duda ya han comenzado a usar en Física I.

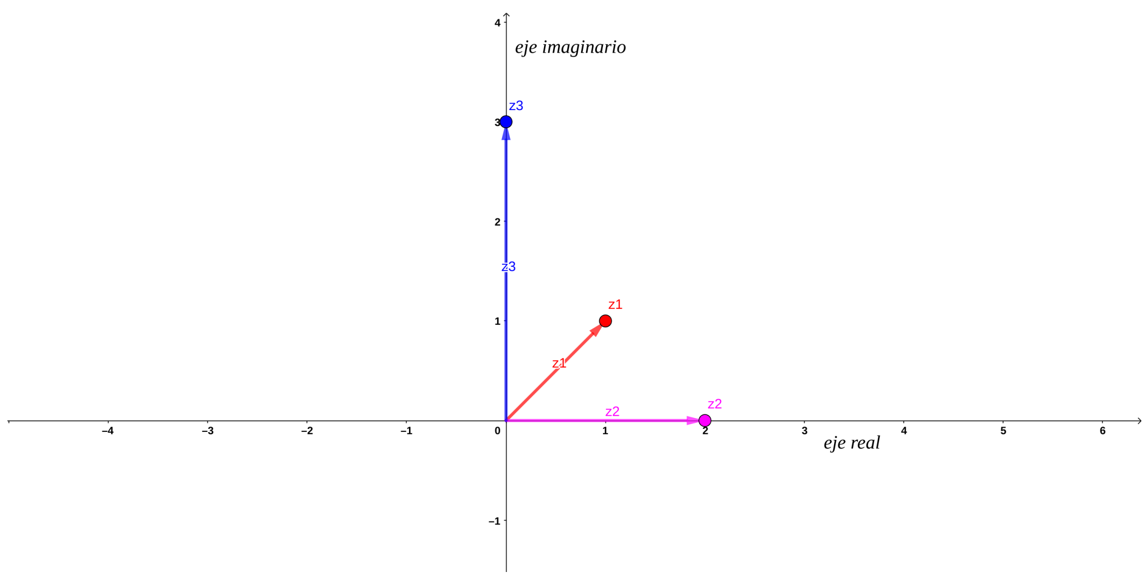

Figura 1: Representación de números complejos en el plano de Argand

A continuación se muestran una serie de ejemplos donde se ilustran gráficamente las operaciones de suma y producto de números complejos.

Ejemplo 7. Consideremos $z_1 = 1 + 2\,i$ y $z_2 = 3 - 4\,i$. La suma de ellos es el número complejo

$$z_1 + z_2 = (1 + 2\,i) + (3 - 4\,i) = (1 + 3) + (2 - 4)\,i = 4 - 2\,i.$$

Observe en la figura 2 que la suma de los números $1 + 2\,i$ (representado como una flecha roja) y $3 - 4\,i$ (representado como una flecha azul) es $4 - 2\,i$ que, gráficamente, corresponde a la diagonal del paralelógramo formado por la flecha azul y la roja. Es decir, el cuadrilatero consistente en la flecha azul, la flecha roja y sus traslaciones.

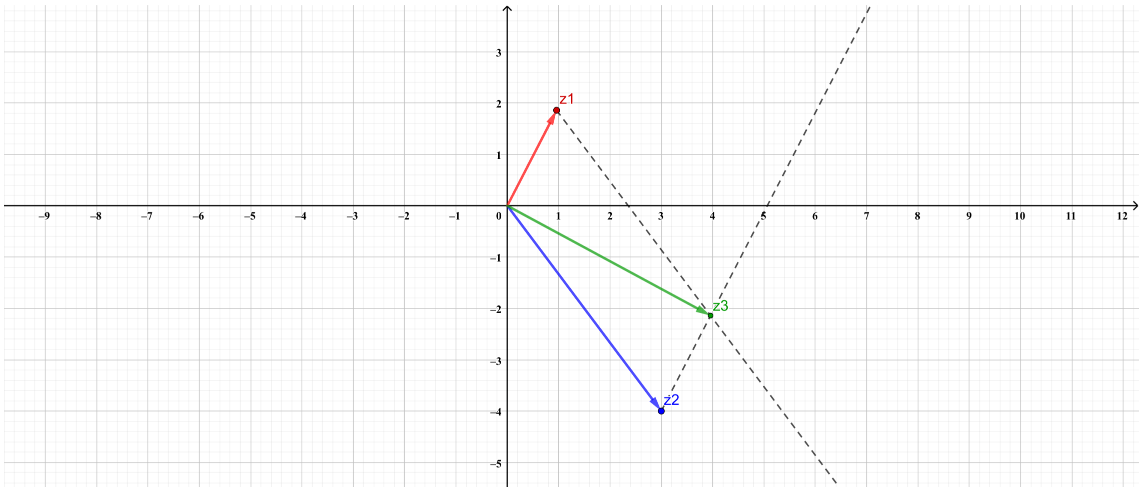

Figura 2: Suma de números complejos representados como vectores en el plano de Argand

2.1. Módulo de un número complejo

Dado que estamos representando los números complejos como puntos en el plano; más aún, los estamos representando como flechas que van desde el origen hasta un determinado punto del plano, entonces puede ser interesante conocer el tamaño de esa flecha, en otras palabras, nos interesará conocer la distancia del origen al punto que representa a z; tal magnitud la llamaremos *módulo de* z.

Definición 8. *Módulo de un número complejo* Dado un número complejo z, $z = x + y\,i$ con $x, y \in \mathbb{R}$, se define como *módulo de* z y se denota $|z|$ al número real

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Observe que $|z|$ es la distancia (usual) del origen de coordenadas al punto asociado a z en el plano de Argand. En general, para cada par de números complejos z y w el número real $|z - w|$ es la distancia entre los pares ordenados asociados z y w en el plano de Argand.

Recordemos que, si $z \in \mathbb{C}, z \neq 0, z = x + y\,i$ con $x, y \in \mathbb{R}$, entonces,

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}\,i = \frac{(x - y\,i)}{x^2 + y^2} = \frac{\overline{z}}{x^2 + y^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Adicionalmente, esta propiedad también puede escribirse como

$$|z|^2 = z\overline{z}, \tag{2}$$

y esta última igualdad también es válida para $z = 0$, ella nos dice que el producto de un número complejo z por su conjugado es siempre un número real, que resulta ser el cuadrado de su módulo.

Observación 9. Note que para cualquier número complejo $z = x + y\,i$ con $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$|z| = |-z| = |\overline{z}|.$$

Ejemplo 10. El número $z_1 = 4 + 3\,i$ es tal que

$$-z_1 = -4 - 3\,i.$$

Observe que $|-z_1| = |z_1| = 5$. En la figura 3 se muestran, en el plano de Argand, $z_1 = 4 + 3\,i$ y su inverso aditivo. Los puntos asociados a ambos se encuentran en la circunferencia de centro en $(0, 0)$ y radio 5.

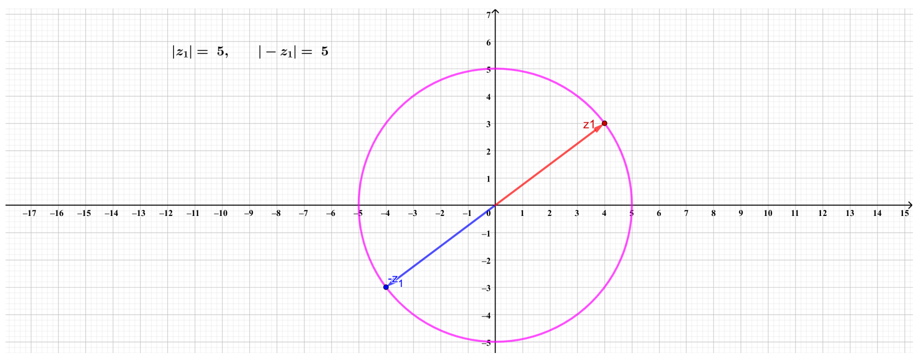

Figura 3: Un número complejo y su inverso aditivo. Ambos tienen el mismo módulo, es decir, los puntos asociados a ellos se encuentran a la misma distancia del origen de coordenadas

Ejemplo 11. El número $z_1 = 4 + 3\,i$ es tal que

$$|z_1| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5 \quad \text{y} \quad \overline{z_1} = 4 - 3\,i \quad \Rightarrow \quad z_1^{-1} = \frac{1}{25}(4 - 3\,i).$$

Note que el vector asociado al inverso multiplicativo de z_1 es el que resulta de multiplicar el vector asociado al conjugado de z_1 por el escalar real $\frac{1}{|z|^2} = \frac{1}{25}$.

En la figura 4 se muestran, en el plano de Argand, los vectores asociados a $z_1 = 4 + 3\,i$ y su conjugado. Observe además que, dado que $|\overline{z_1}| = |z_1| = 5$, los puntos asociados a ambos se encuentran en la misma circunferencia de centro en $(0, 0)$ y radio 5.

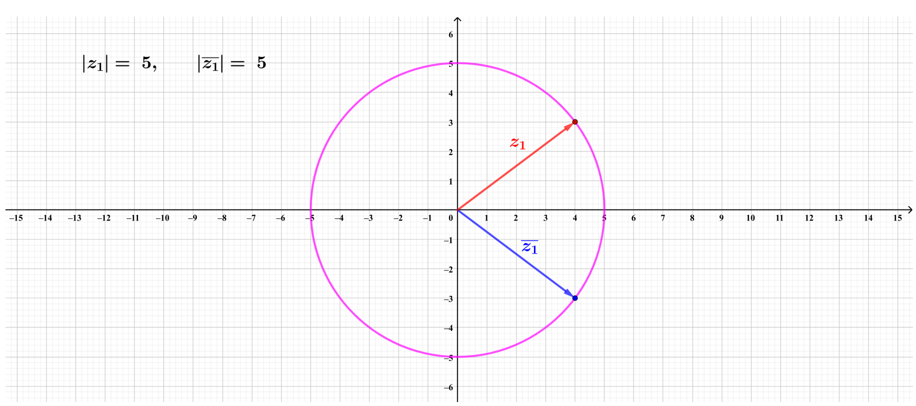

Figura 4: Un número complejo y su conjugado. Los puntos asociados a ambos se encuentran a la misma distancia del origen de coordenadas

Veamos ahora las notables propiedades del módulo en $\mathbb{C}$, las cuales son parecidas a las del módulo en $\mathbb{R}$, aunque no todas coinciden.

El módulo de $z \in \mathbb{C}$ es tal que

1. $|z| \geq 0$.

   En efecto, si $z = a + b\,i$, con $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, y como $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $a^2, b^2 \geq 0$, así $a^2 + b^2 \geq 0$ y la raíz cuadrada se puede calcular, y por definición es un número mayor o igual a 0.

2. $|z| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0$.

   En efecto, si $z = a + b\,i$, con $a, b \in \mathbb{R}$, entonces

   $$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0 \Leftrightarrow z = 0.$$

3. $|z| = |\overline{z}|$.

   En efecto, si $z = a + b\,i$, con $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $\overline{z} = a - b\,i$, por lo tanto $|\overline{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.

4. Si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces $|z\,w| = |z|\,|w|$.

   No es difícil demostrar esta propiedad. En efecto, basta observar, gracias a (2), que

   $$|z\,w|^2 = z\,w\,\overline{z\,w} = z\,w\,\overline{z}\;\overline{w} = z\,\overline{z}\,w\,\overline{w} = |z|^2\,|w|^2.$$

5. $|z^{-1}| = |z|^{-1}$

   En efecto, si $w = z^{-1}$ se tiene entonces que $|z|\,|z^{-1}| = |z\,z^{-1}| = |1| = 1$, es decir, $|z^{-1}| = \dfrac{1}{|z|} = |z|^{-1}$.

6. $$\left|\frac{z}{w}\right| = \left|zw^{-1}\right| = |z||w^{-1}| = \frac{|z|}{|w|}.$$

7. Si $w \in \mathbb{C}$ cualquiera, se cumple que $|z + w| \leq |z| + |w|$ **(Desigualdad triangular)**.

   Demostremos esta desigualdad. Haremos uso de las siguientes propiedades:

   - para todo número real x se cumple que $x \leq |x|$.

- para todo número complejo $z = x + i\,y$ se tiene que

$$|\mathrm{Re}(z)| = |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|.$$

Sean ahora z y w números complejos cualesquiera, entonces

$$\begin{aligned}
|z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z + w}) = (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) = |z|^2 + z\overline{w} + w\overline{z} + |w|^2, \\
&= |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} + |w|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2, \\
&\leq |z|^2 + 2|\mathrm{Re}(zw)| + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|zw| + |w|^2, \\
&= (|z| + |w|)^2 .
\end{aligned}$$

Hemos demostrado que los números reales no negativos $|z+w|$, $|z|$ y $|w|$ satisfacen $|z+w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$, por tanto, $|z+w| \leq |z|+|w|$, ya que podemos obtener esta desigualdad aplicando raíz cuadrada a ambos lados de la desigualdad anterior, la desigualdad se conserva ya que la función raíz cuadrada es creciente.