Aplicaciones: MEZCLAS.

(Clase 04 17/08/2022)

Consideremos un tanque cilíndrico

Dos orificios por los cuales hay UNA VÁLVULA de entrada y una de salida:

Entra un flujo, fe, de agua pura o con algún contaminante; por el conducto de salida se pierde al exterior la mezcla del TANQUE con un cierto flujo de SALIDA, fs.

V_T: Volumen del Tanque

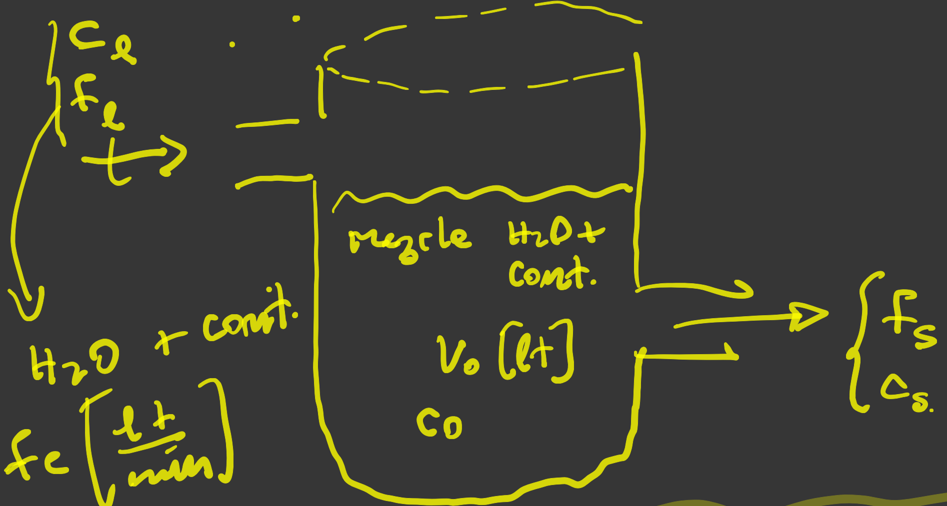
V_0: Volumen inicial en tanque (Agua + contaminante)

$C_e = \left[\frac{kg}{lt}\right]$

C_e: concentración entrada

C_s: concentración SALIDA.

C_0: concentración INICIAL



$\forall t \geq 0$

$$\boxed{c(t) = \frac{x(t)}{V(t)}}$$

x(t): masa de contaminante dentro del tanque en el tiempo t.

Modelo: Tasa de cambio, $x'(t)$, de la masa de contaminante, dentro del tanque, es:

$$\boxed{x'(t) = f_e \cdot c_e - f_s \cdot c_s}$$

$+$ C.I. dada por c_0 y/o x_0.

donde para todo $t \geq 0$: $\boxed{c(t) = \dfrac{x(t)}{V(t)}}$

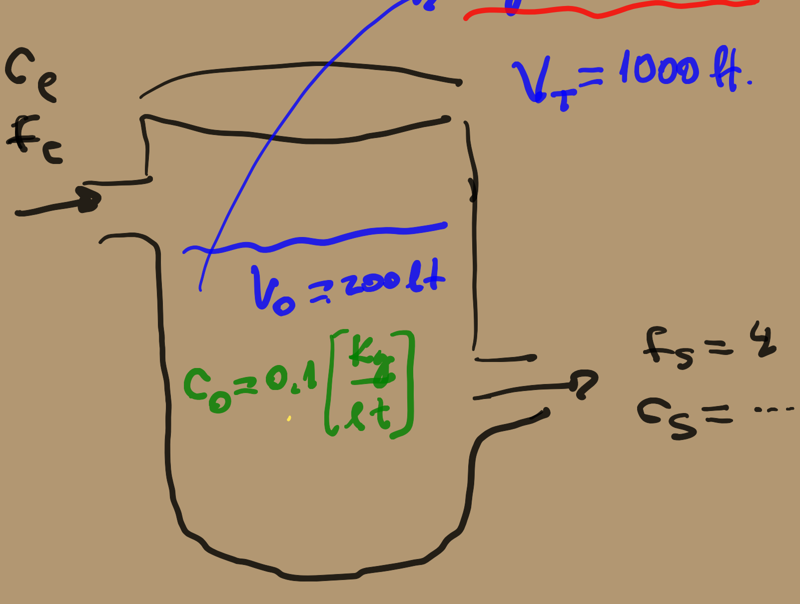
Por tanto, para escribir la EDO que modela $x(t)$ la CANTIDAD de masa de contaminante DENTRO del tanque en el tiempo t, necesitamos determinar $V(t)$ en todo t.

$$\boxed{V'(t) = V_e - V_s} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } V' > 0 \text{, existirá un } t_1 \text{ tal que } V(t_1) = V_{Total} \\ \text{(DERRAME)} \\ \text{Si } V' < 0 \rightsquigarrow V(t_x) = 0 \end{array} \right.$$

agua + sal

Analicemos un caso concreto:

Supongamos:



$$\left\{ \begin{array}{l} f_e = 6 \, [lt/min] \\ c_e = 0{,}01 \, [kg/lt] \end{array} \right.$$

$f_s = 4 \, [lt/min]$

$$\left\{ c_s = \frac{x(t)}{V(t)} \right.$$

$\Longrightarrow x_0(t) = c_0(t)\cdot V_0(t) = 20$ kg

El objetivo del problema es determinar la masa de contaminante, $x(t)$, en todo instante $t \geq t_0$ (t_0 tiempo de inicio que generalmente es cero)

Modelo:

$$\begin{cases} x'(t) = f_e \cdot c_e - f_s \cdot c_s \\ x(t_0) \quad \text{c. I.} \end{cases}$$

$$V'(t) = \Delta V = V_e - V_s = 6 \text{ lt/min} - 4 \text{ lt/min}$$

$$V'(t) = 2 \text{ lt/min}$$

$$\Longrightarrow \boxed{V(t) = 2t + c} \; ; \; t \geq 0$$

pero $t_0 = 0$ $\quad V(0) = 200 = 2\cdot 0 + c$

$$\Longrightarrow c = 200$$

Entonces: Primero determinar $V = V(t)$

(a) ¿ En qué instante el tanque se llena ? y/o eventualmente

(b) ¿ En qué instante el tanque queda vacío ?

$V'(t) = 6 - 4 = 2 \Rightarrow \boxed{V(t) = 2t + c}$. c = cte.

$\boxed{V' > 0}$ ↳ derrame

$\Rightarrow t = 0$; $V(0) = 200 = c$

$\Rightarrow \boxed{V(t) = 2t + 200}$ $t \in$?

Como $V'(t)$ (variación de Volumen es > 0),

existirá t_M tal que $V(t_M) = V_M = 1000$ lt.

↳ incógnita

Así, $V(t_M) = 1000 = 2t_M + 200 \Rightarrow t_M = 400$

$\Rightarrow \boxed{t_M = 400 \text{ [min]}}$

Por tanto: $\boxed{V(t) = 2t + 200, \quad 0 \leq t \leq 400 \text{ min}}$

↳ si el proceso sigue su curso.

$$\boxed{V(t) = \begin{cases} 2t + 200 ; & 0 \leq t \leq 400 \\ 1000 ; & t \geq 400 \end{cases}}$$

Modelo:

$$\boxed{x'(t) = f_e \cdot c_e - f_s \, c_s}$$

$$= 6 \cdot 0{,}01 - 4 \cdot c_s(t) \rightarrow \text{incógnita}$$

$$= 0{,}06 - 4 \cdot \frac{x(t)}{V(t)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'(t) + 4\,\dfrac{x(t)}{2t+200} = 0{,}06 \; ; & \boxed{0 \le t \le 400 \text{ min}} \\ x(0) = c(0)\cdot v(0) = (200)\cdot(0.1) = 20 \text{ [kg]} \end{cases}$$

Obtenemos el siguiente PVI (P)

$$\Rightarrow (P) \begin{cases} x'(t) + \left(\dfrac{2}{t+100}\right) x(t) = 0.06 & 0 \le t \le 400 \text{ min} \\ x(0) = 20 \text{ [kg]} \end{cases}$$

$$\boxed{x'(t) + p(t)\,x(t) = h(t)} \Rightarrow A'(t) = p(t) \Rightarrow \mu(t) = e^{A(t)}$$

$$= \ln(t+100)^2$$

Resolvemos:

$$A'(t) = \frac{2}{t+100} \Rightarrow A(t) = 2\ln|t+100|$$

Pero $(t+100) > 0$

$$\Rightarrow \boxed{\mu(t) = e^{A(t)} = (t+100)^2}$$

Ahora de la EDO:

$$x'(t) + \left(\frac{2}{t+100}\right) x(t) = 0{,}06 \quad / \quad \boxed{\mu(t) = (t+100)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x'(t)(t+100)^2 + 2(t+100)\,x(t) = 0{,}06\,(t+100)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left[(t+100)^2\, x(t)\right] = 0{,}06\,(t+100)^2$$

$$(t+100)^2 x(t) = (0{,}06)\int (t+100)^2\,dt + K = \frac{0{,}06}{3}(t+100)^3 + K$$

(también es posible integrar en $[0,t]$.

$$(t+100)^2 x(t) - \left[(t+100)^2 x(t)\right]\Big|_{t=0} = (0{,}06)\int_0^t (\tau+100)^2\,d\tau\Big)$$

$$\Longrightarrow \quad x(t) = (0{,}02)(t+100) + \frac{K}{(t+100)^2} \ ; \quad t \in [0, 400].$$

Para $t = 0$

$$\Longrightarrow \quad x(0) = (0{,}02)\,100 + \frac{K}{10^4} = 20$$

$$\Longrightarrow \quad K = (18)\,10^4.$$

Así, finalmente:

$$\boxed{x(t) = (0{,}02)(t+100) + \frac{18 \times 10^4}{(t+100)^2} \ ; \quad 0 \leq t \leq 400 \, [\text{min}]}$$

Note que para $t = 0$, $x(0) = 2 + \frac{18 \times 10^4}{10^4} = 20 \, [\text{Kg}]$ ✓

OBS: Por ejemplo, ¿Existe $\bar{t}$ tal que
$$c(\bar{t}) = c_e = 0{,}01 \left[\frac{\text{Kg}}{\text{lt}}\right] ?$$

↳ incógnita

$$c(\bar{t}) = \frac{x(\bar{t})}{V(\bar{t})}$$

2ª Parte:

usualmente se puede modificar el problema.

Ejemplo:

cuando el tanque llega a la mitad de su capacidad, podemos, por ejemplo, igualar los fe y fs.

Esto es:

¿En qué tiempo el volumen llega a la mitad de la capacidad del tanque?

Sea t_x el instante en cuestión, entonces

$$V(t_x) = \underbrace{2t_x} + 200 \overset{?}{=} 500[lt] \text{ (la mitad del volumen tanque)}$$

$$\Longrightarrow \boxed{t_x = 150 \text{ min}}$$

Así, en $t = 150$. Igualamos $f_e = f_s = 4\,[lt/min]$

$$\left(\Longrightarrow V'(t) = 0 \;,\quad t \geq 150 \quad \Longrightarrow \boxed{V(t) = c = 500 \text{ lt.}} \right)$$

Así,

$$v(t) = \begin{cases} 2t + 200 \ ; & 0 \leq t \leq 150 \text{ [min]} \\ 500 \ ; & t \geq 150 \text{ [min]} \end{cases}$$

Problema: Determinar el PVI que describe la cantidad de masa de contaminante dentro del tanque desde el instante $t = 150$ [min] en adelante. (con la misma ce.)

Sea $y(t)$ = la masa de contaminante dentro del tanque, desde 150 min en adelante. Entonces

$$y'(t) = (f_e c_e) - f_s \cdot c_s \ ; \quad 150 \leq t \text{ (min)}$$

$$(P_2) \begin{cases} y'(t) = 4\, c_e - 4 \dfrac{y(t)}{v(t)} \ ; & t \geq 150 \\ y(150) = x(150) \end{cases}$$

$v(t) = 500 = \text{cte}$

$$\boxed{\begin{cases} y'(t) + \dfrac{4}{500} y(t) = (4) \cdot 0{,}01 = 0{,}04 \\ y(150) = x(150) = 5 + \dfrac{18}{6{,}25} \end{cases}}$$

Determinemos $x(150)$. (con el valor de $x(t)$, para $t = 150$, de la página 8)

$$x(150) = (2\cdot 10^{-2})(150+100) + \frac{180000}{(150+100)^2}$$

$$= 5 + \left[\frac{18}{625}\right]100 = 5 + \frac{18}{6{,}25}.$$

$$(*)\quad \begin{cases} y'(t) + \dfrac{4}{500}\,y(t) = (4)\cdot 0{,}01 = 0{,}04 \\ y(150) = x(150) = 5 + \dfrac{18}{6{,}25}. \end{cases}$$

Resolvemos: $y(t)$ $t \geq 150 \ldots$

$$\Rightarrow \boxed{c(t) = \frac{y(t)}{500}\ ;\ t \geq 250}$$

$$(*)\quad A'(t) = \frac{1}{125} \Rightarrow A(t) = \frac{t}{125} \Rightarrow \mu(t) = e^{t/125}$$

$$y'(t)\,e^{bt} + \frac{1}{125}e^{bt}y(t) = (0{,}04)e^{bt}$$

$$\boxed{b = \frac{1}{125}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left[e^{bt}\,y(t)\right] = 0{,}04\,e^{bt}}$$

$$\Rightarrow e^{bt}y(t) = \frac{0{,}04}{b}e^{bt} + c$$

$$y(t) = \underbrace{(4)(10^{-2})(125)}_{5} + c\,e^{-\frac{1}{125}t}\quad ;\ t \geq 150$$

Pero para $t = 150$

$$y(150) = x(150) = \boxed{5 + c e^{-\frac{150}{125}} = 5 + \frac{18}{6{,}25}}$$

$$\Rightarrow c e^{-\frac{150}{125}} = \frac{18}{6{,}25}$$

$$\Rightarrow c = \left(\frac{18}{6{,}25}\right) e^{\frac{150}{125}}$$

Así,
$$y(t) = 5 + \left(\frac{18}{6{,}25}\right) e^{\frac{150}{125}} e^{-\frac{t}{125}}$$

$$\boxed{y(t) = 5 + \left(\frac{18}{6{,}25}\right) e^{\frac{1}{125}(150-t)} \; ; \; t \geq 150.}$$