Clase 3

Cálculo 3

Carlos Martínez Ranero

Departamento de Matemática
Universidad de Concepción

Recordatorio de la clase anterior.

- Puntos aislados y puntos de acumulación.
- Gráficas de funciones y conjuntos de nivel.
- Límites.

Plan de la clase de hoy.

- Límites por trayectorias.
- Algebra de límites.
- Teorema de acotamiento.

Notemos que si $B \subset A$ tiene a $\vec{a}$ como punto de acumulación, entonces $\lim\limits_{\substack{\vec{x}\to\vec{a}\\ \vec{x}\in A}} f(\vec{x}) = \vec{L} \implies \lim\limits_{\substack{\vec{x}\to\vec{a}\\ \vec{x}\in B}} f(\vec{x}) = \vec{L}$. De esto conlcuimos que

Teorema

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in A'$. Si existen dos subconjuntos $B_0, B_1 \subset A$ con $\vec{a}$ como punto de acumulación, tales que

$$\lim_{\substack{\vec{x}\to\vec{a}\\ \vec{x}\in B_0}} f(\vec{x}) \neq \lim_{\substack{\vec{x}\to\vec{a}\\ \vec{x}\in B_1}} f(\vec{x}),$$

entonces el limite no existe.

Ejemplo 1

Sea $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Demostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

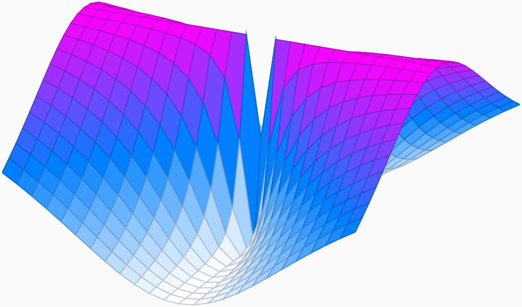
no existe.

Ejemplos.

Solución:

- Por un lado, notemos que
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$
- Por otro lado, tenemos que
- $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ x=0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1.$
- Como los límites por trayectorias son distintos el límite no existe.
- Es importante notar que $(0,0)$ es un punto de acumulación de los conjuntos $A = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ y $B = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$.

Ejemplos.



Ejemplo 2

Sea $f:\ \mathbb{R}^2 \backslash \{(1,2)\} \to \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x,y) = \frac{xy - 2x - y + 2}{(x-1)^2 + (y-2)^2}.$$

Demostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)$$

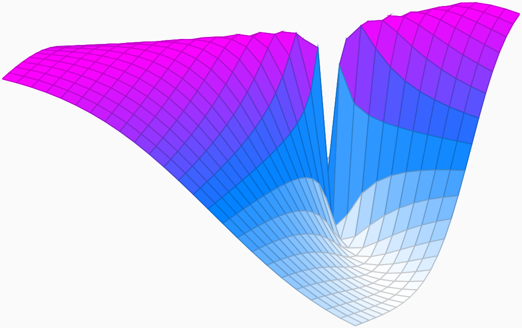
no existe.

Ejemplos.

Solución:

- Notemos que
- $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y=2}} \frac{xy-2x-y+2}{(x-1)^2+(y-2)^2} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{2x-2x-2+2}{(x-1)^2} = 0.$
- $\lim\limits_{\substack{y\to 2\\ x=1}} \frac{xy-2x-y+2}{(x-1)^2+(y-2)^2} = \lim\limits_{y\to 2} \frac{y-2-y+2}{(y-2)^2} = 0.$
- Consideremos una recta arbitraria con pendiente m que pase por $(1,2)$, es decir, $y-2 = m(x-1)$
- $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,2)\\ y-2=m(x-1)}} \frac{(x-1)(y-2)}{(x-1)^2+(y-2)^2} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{m(x-1)^2}{(x-1)^2+m^2(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{m}{1+m^2}.$
- Por ejemplo tomando $m = 1$ obtenemos límite igual a $\frac{1}{2}$.
- Por lo tanto el límite no existe. Notemos que el punto $(1,2)$ es un punto de acumulación de las rectas que consideramos.

Ejemplos.



Ejemplo 3

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & 0 < y < x^2 \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Encontrar $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ para

1. $(a,b) = (0,1)$
2. $(a,b) = (1,1)$
3. $(a,b) = (0,0)$.

Ejemplos.

Solución:

- $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = 0$, ya que la función es cero cerca del punto.
- $\displaystyle \lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x>0}} f(x,y) = 1$ y $\displaystyle \lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x<0}} f(x,y) = 0$.
- $\displaystyle \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y) = 0$ y $\displaystyle \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=\frac{x^2}{2}}} f(x,y) = 1$.

Observemos que la definición de limite es identica a la definición en una variable. Por lo tanto, se siguen satisfaciendo las reglas básicas de los limites.

Teorema (Álgebra de Límites)

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in A'$, y $f, g : A \to \mathbb{R}$. Si $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = L, y \lim_{\vec{x}\to\vec{a}} \vec{g}(\vec{x}) = M$ entonces:

1. $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}[f(\vec{x}) + g(\vec{x})] = L + M$,
2. $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}[f(\vec{x})g(\vec{x})] = LM$,
3. $\lim_{\vec{x}\to\vec{a}}[\frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})}] = \frac{L}{M}$, en caso $M \neq 0$.

Existencia de Límites.

Teorema (Acotamiento)

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in A'$ y $f : A \to \mathbb{R}$. Si $|f(\vec{x}) - L| \leq h(\vec{x})$, y $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{a}} h(\vec{x}) = 0$, entonces $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = L$.

Ejemplo 4

Demostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

existe.

Solución:

- Primero observemos que $\left|\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \leq 1$ y por lo tanto $\left|x\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \leq |x|$.
- Como $\lim_{x\to 0} |x| = 0$ se sigue del teorema del acotamiento que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0$.

Ejemplo 5

Demostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^2 \ln x}{(x-1)^2 + y^2}$$

existe.

Solución:

- Primero observemos que $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ x=1}} \frac{(x-1)^2 \ln x}{(x-1)^2+y^2} = 0$
- Notemos que $\left|\frac{(x-1)^2 \ln x}{(x-1)^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{(x-1)^2 \ln x}{(x-1)^2}\right| \leq |\ln x|$
- Utilizando $\lim\limits_{x\to 1} |\ln x| = 0$. Se sigue del teorema del acotamiento que $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^2 \ln x}{(x-1)^2+y^2} = 0.$

Ejemplo 6

Demostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2+y^2)$$

existe.

Ejemplos.

Solución:

- Primero observemos que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} xy\ln(x^2+y^2)=0$
- Utilizando coordenadas polares $x=r\cos\theta$ y $y=r\sin\theta$ tenemos que
  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2+y^2)=\lim_{r\to 0} r^2\cos\theta\sin\theta\ln(r^2)$$
- Acotando se tiene que $|r^2\cos\theta\sin\theta\ln(r^2)|\leq r^2\ln r^2$. Utilizando L'Hospital sabemos que $\lim\limits_{r\to 0} r^2\ln r^2=0$.
- Se sigue del teorema del acotamiento que
  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2+y^2)=0.$$