Clase 23

Cálculo 3

Carlos Martínez Ranero

Departamento de Matemática
Universidad de Concepción

Recordatorio de la clase anterior.

- Teorema Fundamental de integrales de linea.
- Campos conservativos.

Objetivos de la clase de hoy.

- Teorema de Green.
- Superficies.

Teorema de Green.

Definición:

Una curva $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ se dice cerrada simple si $\vec{r} \restriction [a, b[$ es inyectiva y $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.Se dice que la curva tiene orientación positiva si esta orientada anti-horario.

Teorema de Green

Si C es una curva cerrada simple, C^1 por tramos, orientada positivamente. Sea D la región encerrada por C y $\vec{F} : D \subset U \to \mathbb{R}^2$ un campo de clase C^1.

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D rot(\vec{F}) dA$$

Teorema de Green.

Demostración:

- Primero veremos que el Teorema es cierto para rectángulos.
- Sea C la frontera del cuadrado $[a,b]\times[c,d]$
  $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$
- $\iint\limits_D rot(\vec{F}) = \int_c^d \int_a^b \partial_x Q dxdy - \int_a^b \int_c^d \partial_y P dydx$
- $= \int_c^d Q(b,y) - Q(a,y)dy - \int_a^b P(x,d) - P(x,c)dx$
- $C_1 : \vec{r}_1(t) = (t,c), a \leq t \leq b,\ x = t, dx = dt, y = c, dy = 0$
- $C_2 : \vec{r}_2(t) = (b,t), c \leq t \leq d,\ x = b, dx = 0, y = t, dy = dt$

Teorema de Green.

Demostración:

- $C_3 : \vec{r}_3(t) = (b + a - t, d), a \leq t \leq b,\ x = a + b - t, dx = -dt, y = d, dy = 0$
- $C_4 : \vec{r}_4(t) = (a, c + d - t), c \leq t \leq d,\ x = a, dx = 0, y = c + d - t, dy = -dt$
- $\int\limits_C Pdx + Qdy = \sum_{i=1}^{4} \int\limits_{C_i} Pdx + Qdy =$
- $\int_a^b P(t,c)dt - P(t,d)dt + \int_c^d Q(b,t) - Q(a,t)dt$
- El teorema general se sigue aproximado una curva por cuadrados.

Ejemplo 1:

Calcular $\oint\limits_C \vec{F}\cdot\vec{r}$ donde C es la frontera del cuadrado $D = [0,1]\times[0,1]$ orientado anti-horario y $\vec{F} = \langle e^y, 2xe^y\rangle$

Solución:

- $rot(\vec{F}) = 2e^y - e^y = e^y$
- Como $\vec{F}$ esta definido en D podemos aplicar el Teorema de Green
- $\oint\limits_C \vec{F} \cdot \vec{r} = \iint\limits_D rot(\vec{F}) dA = \int_0^1 \int_0^1 e^y dy dx = e - 1$

Ejemplo 3:

Utilizar el Teorema de Green para calcular el área de la elipse $D = \left\{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$

Teorema de Green.

Solución:

- La idea es encontrar un campo vectorial $\vec{F}$ tal que $rot(\vec{F}) = 1$
- $\vec{F} = \langle -\frac{y}{2}, \frac{x}{2} \rangle$
- Por el Teorema de Green tenemos
- $Area = \iint\limits_{D} dA = \oint\limits_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r}$
- Parametrizamos $\partial D : \vec{r}(t) = (a \cos t, b \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$
- $x = a \cos t, dx = -a \sin t, y = b \sin t, dy = b \cos t dt$
- $\oint\limits_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} ab \sin^2 t + ab \cos^2 t dt = ab\pi$

Teorema de Green.

Ejemplo 3:

Sea $\vec{F} = \langle \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \rangle$.

- Calcular $\oint\limits_C \vec{F} \cdot \vec{r}$ para cualquier curva cerrada C que no encierre al origen.
- Calcular $\oint\limits_{C_a} \vec{F} \cdot \vec{r}$ donde C_a denota el circulo de radio a con centro en el origen.
- Utilizar el item anterior para calcular $\oint\limits_{C_a} \vec{F} \cdot \vec{r}$ donde C es cualquier curva cerrada simple que encierra al origen.

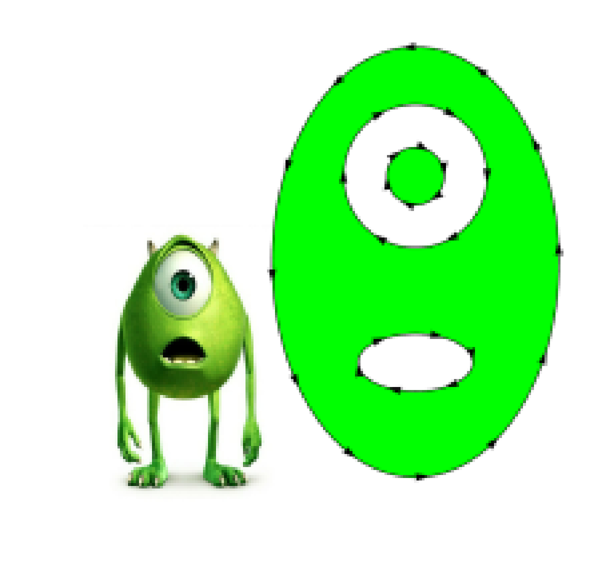
Solución:

- $rot(\vec{F}) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$
- Utilizando el Teorema de Green se tiene $\oint\limits_C \vec{F} \cdot \vec{r} = \iint_D rot(\vec{F})dA = 0$ para cualquier curva cerrada C que no encierre al origen.
- Parametrizamos C_a por $\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$
- $x = a\cos t, dx = -a\sin t dt, y = a\sin t, dy = a\cos t dt$
- $\int\limits_C \vec{F}d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t+\sin^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t+\sin^2 t}dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$
- La integral sobre cualquier curva es 2π por el número de vueltas.

Ejemplo 4 (Tarea)

Sea $f(x,y) = x^5 + xy^4$. Calcular la integral de linea del campo vectorial $\vec{F}(x,y) = (25y + 6y^2, 12xy + 10y^{44}) + \nabla(f)$, sobre la frontera de la región D (ver figura). La región tiene 4 curvas frontera, orientadas como en la figura, un elipse de área 16, dos círculos de área 1 y 2 y además una elipse pequeña de área 3.

Teorema de Green



Superficies Parametrizadas.

Definición

Una superficie parametrizada es una función de clase $C^1, G \colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

- Los vectores $\frac{\partial G}{\partial u}$ y $\frac{\partial G}{\partial v}$ son tangentes a la superficie.
- Si $\frac{\partial G}{\partial u} \times \frac{\partial G}{\partial v} \neq \vec{0}$ para todo punto de la superficie, entonces decimos que la superficie es suave.

Superficies Parametrizadas.

Ejemplos

- Las Gráficas de funciones son superficies parametrizadas y tienen la forma $G(u,v) = (u,v,f(u,v))$ donde $f : D \to \mathbb{R}$
- Las superficies de revolución están basadas en coordenadas cilíndricas y tienen la forma $G(u,v) = (g(v)\cos(u), g(v)\sin(u), v)$.

Área de una superficie.

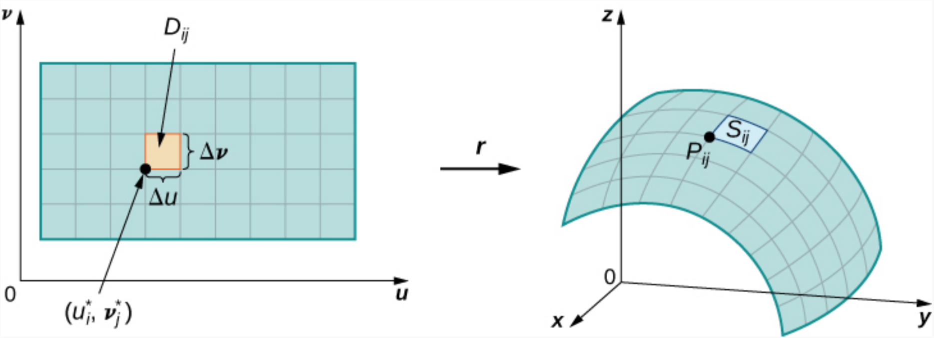
De la misma manera que utilizamos integrales para calcular la longitud de una curva, podemos utilizar integrales para calcular el area de una superficie.

Definición

Sea $G : D \to \mathbb{R}^3$ una superficie suave parametrizada el

$$area(S) = \iint_D \left\| \frac{\partial G}{\partial u} \times \frac{\partial G}{\partial v} \right\| dA.$$

Área de una Superficie.



Ejemplo 1

Encontrar el área de la superficie S definida por la parte del paraboloide $x^2 + y^2 + z = 25$, arriba del plano x, y.

Solución:

- Primero parametrizamos la superficie.
- $G(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 25 - r^2)$, $0 \leq r \leq 5$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
- Ahora calculamos los vectores tangentes
- $\frac{\partial G}{\partial r} = (\cos\theta, \sin\theta, -2r)$
- $\frac{\partial G}{\partial \theta} = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$
- $G_u \times G_v = \det\begin{bmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \sin\theta & -2r \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{bmatrix}$
- $\|G_u \times G_v\| = r\sqrt{1+4r^2}$

Integrales de Superficie

Solución:

- $Area = \iint_D \|G_u \times G_v\| dA = \int_0^{2\pi} \int_0^5 r\sqrt{1+4r^2}drd\theta =$ $\int_0^{2\pi} \left(\frac{(1+4r^2)^{3/2}}{12} \right) \Big|_0^5 = \frac{\pi}{6}(101^{3/2} - 1)$