Método de diferencias finitas

para problemas lineales

Gustavo A. Castrillon

Instituto de física

7 de mayo de 2020

Teoría

El método de diferencias finitas para problemas lineales se utiliza para solucionar ecuaciones del tipo:

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x)$$

con $a \leq x \leq b$ y $y(a) = \alpha, y(b) = \beta$. Se considera un numero de partes (N) en el cual partiremos el intervalos $[a, b]$ del cual tendremos $(N + 1)$ puntos, que podríamos representar de la forma $x_i = a + ih$ con $i = 1, 2, ..., N + 1$ donde $h = (b - a)/(N + 1)$ con esto podemos ver la ecuación (1) como:

$$y''(x_i) = p(x_i)y'(x_i) + q(x_i)y(x_i) + r(x_i)$$

realizando una expansión de Taylor para $y(x_{i+1}) = y(x_i + h)$ y $y(x_{i-1}) = y(x_i - h)$ nos queda que:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + \frac{h^4}{24}y^4(\xi_i^+)$$

$$y(x_i - h) = y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) - \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + \frac{h^4}{24}y^4(\xi_i^-)$$

sumando (3) y (4) tenemos que:

$$y(x_{i+1}) + y(x_{i-1}) = 2y(x_i) + h^2y''(x_i) + \frac{h^4}{24}[y^{(4)}(\xi_i^+) + y^{(4)}(\xi_i^-)]$$

despejando $y''(x_i)$ nos quedaría que:

$$y''(x_i) = \frac{1}{h^2}[y(x_{i+1} - 2y(x_i) + y(x_{i-1})] - \frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi_i)$$

por otro lado, podemos ver $y'(x_i)$ por medio del método de diferencias centradas como:

$$y'(x_i) = \frac{1}{2h}[y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})] - \frac{h^2}{6}y'''(\eta_i)$$

reemplazando en la ecuación (1) nos queda que:

$$\frac{1}{h^2}[y(x_{i+1} - 2y(x_i) + y(x_{i-1})] = p(x_i)(\frac{1}{2h}[y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})] + q(x_i)y(x_i) + r(x_i) - \frac{h^2}{12}[2p(x_i)y'''(\eta_i) - y^{(4)}(\xi_i)]$$

Por el método de diferencias finitas todos los términos de tipo $O(h^2)$ se vuelven cero e intercambiando $y(x_i)$ por ω_i y organizando términos nos queda que:

$$-(1 + \frac{h}{2}p(x_i))\omega_{i-1} + (2 + h^2 q(x_i))\omega_i - (1 - \frac{h}{2}p(x_i))\omega_{i+1} = -h^2 r(x_i)$$

con $\omega_0 = \alpha$ y $\omega_{N+1} = \beta$ y $i = 1, 2, ..., N$

Algoritmo

Se describirán los pasos necesarios para realizar el algoritmo
-Se necesita definir un intervalo $[a, b]$ y conocer $y(a) = \alpha$ y $y(b) = \beta$ y conocer el número (N) que partiremos el intervalo. -El algoritmo arrojara un arreglo ω_i. Primero definimos el h como $h = (b - a)/(N + 1)$
Para establecer los valores lo partimos en 3 pasos
Paso 1 (para $i = 1$) $x = a + h$.
$\mathrm{a}_1 = 2 + h^2 q(x_i)$
$\mathrm{b}_1 = -1 + \frac{h}{2} p(x_i)$
$\mathrm{d}_1 = -h^2 r(x_i) + (1 + \frac{h}{2} p(x_i))\alpha$
$\mathrm{a}_1 \omega_1 = d_1 - b_1 \omega_2$

paso 2 (para $i = 2, ..., N-1$) $x = a + ih$

$\mathrm{a}_i = 2 + h^2 q(x)$

$\mathrm{b}_i = -1 + \frac{h}{2} p(x)$

$\mathrm{c}_i = -1 - \frac{h}{2} p(x)$

$\mathrm{d}_i = -h^2 r(x)$

$\mathrm{a}_i \omega_i = d_i - c_i \omega_{i-1} - b_i \omega_{i+1}$

paso 3 (para $i = N$)

x=b-h

$\mathrm{a}_N = 2 + h^2 q(x)$

$\mathrm{c}_N = -1 - \frac{h}{2} p(x)$

$\mathrm{d}_N = -h^2 r(x) + (1 - \frac{h}{2} p(x))\beta$

$\mathrm{a}_N \omega_N = d_N - c_N \omega_{N-1}$

Ahora para métodos prácticos se establece
Para i=1, $l_1 = a_1$, $u_1 = b_1/a_1$, $z_1 = d_1/l_1$
Para $i = 2, ..., N-1$, $l_i = a_i - c_i u_{i-1}$, $u_i = b_i/l_i$,
$z_i = (d_i - c_i z_{i-1})/l_i$
Para $i = N$, $l_N = a_N - c_N u_{N-1}$, $z_N = (d_N - c_N z_{N-1})/l_N$
Teniendo en cuenta que:
$\omega_0 = \alpha$
$\omega_{N+1} = \beta$
$\omega_N = z_N$
Al final para $i = N-1, ..., 1$ se procesa que: $w_i = z_i - u_i \omega_{i+1}$