

Лабораторная работа № 4

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Цель: используя пакет **Octave**, проинтерполировать непрерывную функцию с помощью полиномов Лагранжа, Ньютона, Эрмита и кубических сплайнов. Сравнивать погрешности интерполяции на равномерной и Чебышевской сетках для полиномов Лагранжа и Ньютона. Сравнить погрешности интерполяции полиномом Эрмита и кубическим сплайном.

Задача № 1. Приблизить функцию $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ интерполяционным многочленом Лагранжа третьей степени по табличным значениям на равномерной сетке. Вычислить погрешность в указанных точках. В **Octave** построить графики исходной функции $f(x)$ и интерполяционного многочлена Лагранжа, а также отметить узлы интерполяции и точки, в которых вычислялась погрешность.

Приблизить функцию $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ интерполяционным многочленом Лагранжа третьей степени по табличным значениям на Чебышевской сетке. Вычислить погрешность в указанных точках. В **Octave** построить графики исходной функции $f(x)$ и интерполяционного многочлена Лагранжа, а также отметить узлы интерполяции и точки, в которых вычислялась погрешность.

Сравнить величины погрешностей на разных сетках и сделать вывод. Результаты представить с 6-значными цифрами.

Задача № 2. Приблизить функцию $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ интерполяционным многочленом Ньютона третьей степени по табличным значениям на равномерной сетке. Вычислить погрешность в указанных точках. В **Octave** построить графики исходной функции $f(x)$ и интерполяционного многочлена Ньютона, а также отметить узлы интерполяции и точки, в которых вычислялась погрешность.

Приблизить функцию $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ интерполяционным многочленом Ньютона третьей степени по табличным значениям на Чебышевской сетке. Вычислить погрешность в указанных точках. На одном чертеже построить графики исходной функции $f(x)$ и интерполяционного многочлена Ньютона, а также отметить узлы интерполяции и точки, в которых вычислялась погрешность.

Сравнить величины погрешностей на разных сетках и сделать вывод. Результаты представить с 6-значными цифрами.

Порядок выполнения работы

Задача № 1

1. В **Octave** рассчитать узлы равномерной сетки $x_i = a + i \frac{b-a}{3}, i = \overline{0,3}$ и значение функции $f(x)$ в этих узлах.
2. Написать скрипт, вычисляющий значения полинома Лагранжа $L_3(x)$ по этим узлам.

3. Рассчитать значения полинома Лагранжа $L_3^r(x_j)$ в точках $x_j = \{(5a+b)/6, (a+b)/2, (a+5b)/6\}$, рассчитать значение функции $f(x)$ в этих же точках. Рассчитать погрешность по формуле $|f(x_j) - L_3^r(x_j)|$.
4. На одном чертеже построить графики исходной функции $f(x)$ и интерполяционного многочлена Лагранжа, а также отметить узлы интерполяции.
5. Рассчитать узлы Чебышевской сетки $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2i+1}{8}\pi\right), i = \overline{0,3}$ и значение функции $f(x)$ в этих узлах.
6. Написать скрипт, вычисляющий значения полинома Лагранжа по этим узлам.
7. Рассчитать значения полинома Лагранжа $L_3^c(x_j)$ в точках $x_j = \{(5a+b)/6, (a+b)/2, (a+5b)/6\}$, рассчитать значение функции $f(x)$ в этих же точках. Рассчитать погрешность по формуле $|f(x_j) - L_3^c(x_j)|$.
8. На одном чертеже построить графики исходной функции $f(x)$ и интерполяционного многочлена Лагранжа, а также отметить узлы интерполяции.
9. Занести результаты в таблицу:

j	x_j	$f(x_j)$	$L_3^r(x_j)$	$ f(x_j) - L_3^r(x_j) $	$L_3^c(x_j)$	$ f(x_j) - L_3^c(x_j) $
0						
1						
2						

$L_3^r(x_j)$ – значения полинома Лагранжа в узлах равномерной сетки.

$L_3^c(x_j)$ – значения полинома Лагранжа в узлах Чебышевской сетки.

10. В одной системе координат построить графики погрешностей интерполяции по обеим сеткам и отметить на обоих графиках точки, в которых вычислялась погрешность.

Задача № 2

1. Написать скрипт, вычисляющий значения полинома Ньютона по узлам равномерной сетки.
2. Рассчитать значения полинома Ньютона $P_3^r(x_j)$ в точках $x_j = \{(5a+b)/6, (a+b)/2, (a+5b)/6\}$, рассчитать значение функции $f(x)$ в этих же точках. Рассчитать погрешность по формуле $|f(x_j) - P_3^r(x_j)|$.
3. На одном чертеже построить графики исходной функции $f(x)$ и интерполяционного многочлена Ньютона, а также отметить узлы интерполяции.
4. Написать скрипт, вычисляющий значения полинома Ньютона по узлам Чебышевской сетки.

5. Рассчитать значения полинома Ньютона $P_3^c(x_j)$ в точках $x_j = \{(5a+b)/6, (a+b)/2, (a+5b)/6\}$, рассчитать значение функции $f(x)$ в этих же точках. Рассчитать погрешность по формуле $|f(x_j) - P_3^c(x_j)|$.
6. На одном чертеже построить графики исходной функции $f(x)$ и интерполяционного многочлена Ньютона, а также отметить узлы интерполяции.
7. Занести результаты в таблицу:

j	x_j	$f(x_j)$	$P_3^r(x_j)$	$ f(x_j) - P_3^r(x_j) $	$P_3^c(x_j)$	$ f(x_j) - P_3^c(x_j) $

$P_3^r(x_j)$ – значения полинома Ньютона в узлах равномерной сетки.

$P_3^c(x_j)$ – значения полинома Ньютона в узлах Чебышевской сетки.

8. В одной системе координат построить графики погрешностей интерполяции по обоим сеткам и отметить на обоих графиках точки, в которых вычислялась погрешность.

9. Варианты заданий

№ варианта		№ варианта		№ варианта	
$f(x)$	$[a,b]$	$f(x)$	$[a,b]$	$f(x)$	$[a,b]$
1		2		3	
$x^2 - \sqrt{1+x}$	$[0,3]$	$tg(x + \sqrt{x})$	$[0.1, 0.7]$	$x^2 - 2x + \frac{16}{(x-1)} - 13$	$[2,5]$
4		5		6	
$\ln(\sin(\sqrt{x}))$	$[1,4]$	$4^{\cos(x)}$	$[-3,0]$	$x^3 \cos(x^2)$	$[0,3]$
7		8		9	
$x + e^{-x^2}$	$[-1,2]$	$e^{-x} - x^3$	$[-1,2]$	$x \ln \sqrt{x-2}$	$[2.5, 3.1]$
10		11		12	
$\frac{2x^2+6}{x^2-2x+5}$	$[-3,3]$	$x^2 \cos(x)$	$\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$	$x \sin(x^2)$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
13		14		15	
$(x-0.5)^3 \ln(x)$	$[0.3, 0.9]$	$0.4^{x \sin(x)}$	$[0,3]$	$x^{-3} e^x$	$[-2.5, 0.5]$
16		17		18	

$tgx-1/(x+2)^2$	$\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$	$\frac{(\sin x+1)}{(x^2+1)}$	$[-3,2]$	$e^x - 1/x^2$	$[0.5,2]$
19		20		21	
$\ln x - e^x$	$[1,4]$	$\sqrt{1+x} - \cos x$	$[0,\pi]$	$\ln x - 1/(1+x^2)$	$[1,4]$
22		23		24	
$\sin x - \ln x$	$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$	$\ln x + x^2$	$[0.5,2]$	$\sqrt{x} + \ln x$	$[1,4]$
25		26		27	
$arctgx - e^x$	$[0,1.5]$	$e^{2x} - x$	$[-3,0]$	$x^2 arctgx$	$[0,1.5]$
28		29		30	
$x^3 - \ln^2 x$	$[0.5,2]$	$\sin x - 1/(x+1)$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	$e^{x-2} - \ln^2 x$	$[1,4]$
$\cos(e^x)$	$[-1,2]$	$e^{\sin(2x)}$	$[-\pi,\pi]$	$\frac{1}{1+25x^2}$	$[-1,1]$