Лабораторная работа №1.

Численные методы решения нелинейных уравнений.

Цель. Используя пакет **Octave** найти приближенный корень нелинейного уравнения методом простой итерации, его модификации и методом Ньютона. Сранить методы по количеству итераций.

Задача 1.

Используя пакет **Octave**, локализовать корни уравнения $f(x) = 0$ графически.

Написать скрипт на встроенном в **Octave** языке программирования реализующий метод простой итерации. С помощью этого скрипта найти любой корень уравнения с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

Задача 2.

Написать скрипт на встроенном в **Octave** языке программирования реализующий модифицированный метод простой итерации. С помощью этого скрипта найти тот же корень уравнения с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

Задача 3.

Написать скрипт на встроенном в **Octave** языке программирования реализующий метод Ньютона. С помощью этого скрипта найти тот же корень уравнения с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

Сравнить результаты всех трех методов между собой и с результатами встроенной в **Octave** функции **fzero()**.

Примечание. Использовать одинаковые начальные приближения для всех методов. В каждом методе должно быть не менее 3-х итераций.

Порядок выполнения работы

Задача 1.

1. Используя **Octave** построить график функции $y = f(x)$ и по графику определить интервал $[a, b]$ локализации любого корня.

2.Привести уравнение к итерационному виду $x = \varphi(x)$, всеми возможными способами.

3.Для каждой функции $y = \varphi(x)$, полученной во 2 пункте используя **Octave,** в одной системе координат на отрезке локализации $[a, b]$ построить графики:

$$y = f(x), y = x, y = \varphi(x)$$

и определить те функции $y = \varphi(x)$, которые имеют абсциссу точки пересечения графиков функций $y = \varphi(x)$ и $y = x$ совпадающую с абсциссой точки пересечения графиков функций $y = f(x)$ и $y = 0$.

4. Используя **Octave,** в одной системе координат построить графики всех функций $y = |\varphi'(x)|$ и функции $y = 1$. Визуально выбрать ту функцию, для которой выполняется условие сходимости метода простой итерации $|\varphi'(x)| \leqslant q < 1$.

5. Для выбранной в пункте 4 функции по графику определить на каком из концов отрезка $[a, b]$ функция $y = |\varphi'(x)|$ принимает максимальное значение и найти $q = \max\limits_{x \in [a,b]} |\varphi'(x)|$, т.е. $q = |\varphi'(b)|$ если функция $y = |\varphi'(x)|$ возрастает на $[a, b]$ и $q = |\varphi'(a)|$ если функция $y = |\varphi'(x)|$ убывает на $[a, b]$.

6. Написать скрипт рассчитатывающий члены итерационной последовательности по формуле $x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$ и значение $\varepsilon_0 = \frac{1-q}{q}\varepsilon$. Результаты представить в виде таблицы. Каждое значение округлить до 6 значащих цифр.

№ итерации	корень	разность	точность
1	$x^{(1)}$	$\|x^{(1)} - x^{(0)}\|$	ε_0
2	$x^{(2)}$	$\|x^{(2)} - x^{(1)}\|$	ε_0
…	…	…	…
k	$x^{(k)}$	$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$	ε_0

7. Определить номер итерации k начиная с которого выполняется условие $|x^{(k)} - x^{(k-1)}| \leqslant \varepsilon_0$.

8. Выписать $x^{(k)}$ —корень, найденный с точностью не меньшей чем ε.

Задача 2.

1. В **Octave** построить график функции $y = f'(x)$ на интервале $[a, b]$.Если $f'(x) < 0$, то положить $f(x) = -f(x)$, т.е. решать уравнение $-f(x) = 0$

2. Используя построенный в предыдущем пункте график определить на каком из концов отрезка $[a, b]$ функция $y = f'(x)$ принимает минимальное значение и найти $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f'(x)$, т.е. $m = f'(a)$ если функция $y = f'(x)$ возрастает на $[a, b]$ и $m = f'(b)$ если функция $y = f'(x)$ убывает на $[a, b]$.Определить на каком из концов отрезка $[a, b]$ функция $y = f'(x)$ принимает максимальное значение и найти $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f'(x)$, т.е. $M = f'(b)$ если функция $y = f'(x)$ возрастает на $[a, b]$ и $M = f'(a)$ если функция $y = f'(x)$ убывает на $[a, b]$.

3.Рассчитать $\alpha = \frac{2}{M+m}$ и $q = \frac{M-m}{M+m}$.

4. Написать скрипт рассчитатывающий члены итерационной последовательности по формуле $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha f(x^{(k)})$ и значение $\varepsilon_0 = \frac{1-q}{q}\varepsilon$. Результаты представить в виде таблицы. Каждое значение округлить до 6 значащих цифр.

№ итерации	корень	разность	точность
1	$x^{(1)}$	$\lvert x^{(1)} - x^{(0)}\rvert$	ε_0
2	$x^{(2)}$	$\lvert x^{(2)} - x^{(1)}\rvert$	ε_0
...	...	...	...
k	$x^{(k)}$	$\lvert x^{(k)} - x^{(k-1)}\rvert$	ε_0

5. Определить номер итерации k начиная с которого выполняется условие $|x^{(k)} - x^{(k-1)}| \leqslant \varepsilon_0$.

6. Выписать $x^{(k)}$ —корень, найденный с точностью не меньшей чем ε.

Задача 3.

1. Написать скрипт рассчитатывающий члены итерационной последовательности по формуле $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$. Результаты представить в виде таблицы. Каждое значение округлить до 6 значащих цифр.

№ итерации	корень	разность	точность
1	$x^{(1)}$	$\|x^{(1)} - x^{(0)}\|$	ε
2	$x^{(2)}$	$\|x^{(2)} - x^{(1)}\|$	ε
…	…	…	…
k	$x^{(k)}$	$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$	ε

2. Определить номер итерации k начиная с которого выполняется условие $|x^{(k)} - x^{(k-1)}| \leqslant \varepsilon$.

3. Выписать $x^{(k)}$ —корень, найденный с точностью не меньшей чем ε.

4. Сравнить количество итераций k в задачах 1,2 и 3.

5. Найти решение с помощью встроенной функции с той же точностью. Сравнить результаты трех методов с результатами встроенной функции.

6. Вывод о скорости сходимости методов(по количеству итераций).

Варианты заданий.

№	Уравнение	№	Уравнение
1	$0.5^x + 1 = (x-2)^2$	16	$\sin(x - 0.5) - x + 0.8 = 0$
2	$(x-4)^2 \log_{0.5}(x-3) = -1$	17	$\mathrm{tg}^3 x = x - 1, -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$
3	$x^2 \cos(2x) = -1$	18	$\mathrm{arctg}(x-1) + 2x = 0$
4	$(x-2)^2 2^x = 1$	19	$2\cos(x + \pi/6) + x^2 = 4x - 3$
5	$\sqrt{x+1} = 1/x$	20	$x^2 - 5 + 0.4^{2x} = 0$
6	$(x-2)\cos(x) = 1$	21	$\sqrt{x} - \cos(0.374 + x) = 0$
7	$(x-2)^3 \lg(x+11) = 1$	22	$\sin(0.5 + x) = 2x - 0.5$
8	$5\sin(x) = x - 1$	23	$\ln(x) + (x+1)^3 = 0$
9	$x^4 3^x = 2$	24	$3x - 2e^x = -3$
10	$2\lg(x) - x/3 + 1 = 0$	25	$2\sin(x - 0.6) = 1.5 - x$
11	$2\sin(x + \pi/3) = 0.5x^2 - 1$	26	$5x - 8\ln(x) = 8$
12	$2x^2 - 0.5^x - 3 = 0$	27	$x = \sqrt{\lg(x+2)}$

13	$\cos(x + 0.5) = x^3$	28	$1.8x^2 - \sin(10x)$
14	$2e^x = 5x + 2$	29	$\mathrm{ctg}(1.05 + x) - x^2 = 0$
15	$\sin(x - 0.5) - x + 0.8 = 0$	30	$\lg(x) - 7/(2x + 6) = 0$