Лабораторная работа № 3

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Цель: используя пакет **Octave,** найти приближенное решение нелинейной системы методом простой итерации и методом Ньютона. Сравнить метод простой итерации и метод Ньютона по количеству итераций.

Задача № 1. Используя пакет **Octave**, локализовать корни системы графически. Найти один (любой) корень с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$, используя метод простой итерации.

Задача № 2. Найти те же корни системы с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$, используя метод Ньютона. Сравнить скорости сходимости методов Ньютона и простой итерации (по числу итераций). Сравнить точности методов между собой и со встроенной функцией. Сделать вывод.

Примечание. Использовать одинаковые начальные приближения для всех методов. В каждом методе должно быть не менее трех итераций.

Порядок выполнения работы

Задача № 1

1. Разрешить каждое уравнение системы $\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$ относительно x_1 или x_2. В **Octave** построить графики функций $x_1 = g_1(x_2)$ и $x_1 = g_2(x_2)$ или $x_2 = g_1(x_1)$ и $x_2 = g_2(x_1)$, по графикам определить интервалы $[ax, bx]$, $[ay, by]$ локализации любого корня по осям OX OY соответственно.

2. Привести систему к итерационному виду $\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_2) \\ x_2 = \varphi_2(x_1) \end{cases}$ или $\begin{cases} x_2 = \varphi_1(x_1) \\ x_1 = \varphi_2(x_2) \end{cases}$.

3. Написать скрипт, рассчитывающий члены итерационной последовательности по формуле $\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_2^{(k+1)}) \\ \varphi_2(x_1^{(k+1)}) \end{pmatrix}$ и вычисляющий

$q = \left\| J(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) \right\|$, где J – матрица Якоби. Убедиться, что выполняется условие сходимости.

1. Рассчитать значение $\varepsilon_0 = \frac{1-q}{q}\varepsilon$. Результаты представить в виде таблицы.

Таблица

№ итерации	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$\left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\|$	точность
1	$x_1^{(1)}$	$x_2^{(1)}$	$\left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\|$	ε_0

5. Сравнить две последние колонки таблицы и определить номер итерации, на которой достигается заданная точность.

6. Выписать соответствующее найденному в предыдущем пункте номеру итерации решение системы x*.

Задача № 2

1. Написать скрипт, рассчитывающий члены итерационной последовательности по формуле $\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \\ f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) \end{pmatrix}$

2. Результаты представить в виде таблицы.

Таблица

№ итерации	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$\left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\|$	точность
1	$x_1^{(1)}$	$x_2^{(1)}$	$\left\| x^{(1)} - x^{(0)} \right\|$	ε

3. Сравнить две последние колонки таблицы и определить номер итерации, на которой достигается заданная точность.

4. Выписать соответствующее найденному в предыдущем пункте номеру итерации решение системы x*.

Варианты заданий

Варианты 1–10 – ℓ_1 норма.

Варианты 11–20 – ℓ_∞ норма.

Варианты 21–30 – Эвклидова норма.

Таблица

№	Система	№	Система
1	$\begin{cases} \sin(x_1+1) - x_2 = 1.2 \\ 2x_1 + \cos(x_2) = 2 \end{cases}$	16	$\begin{cases} \cos(x_1) + x_2 = 1.2 \\ 2x_1 - \sin(x_2 - 0.5) = 2 \end{cases}$
2	$\begin{cases} \cos(x_1 - 1) + x_2 = 0.5 \\ x_1 + \cos(x_2) = 3 \end{cases}$	17	$\begin{cases} \sin(x_1 + 2) - x_2 = 1.5 \\ x_1 + \cos(x_2 - 2) = 0.5 \end{cases}$
3	$\begin{cases} \cos(x_2 + 0.5) + x_1 = 0.8 \\ \sin(x_1) - 2x_2 = 1.6 \end{cases}$	18	$\begin{cases} \cos(x_1 - 1) + 2x_2 = 2.5 \\ x_1 - \cos(x_2) = 3 \end{cases}$
4	$\begin{cases} \sin(x_2 - 1) + x_1 = 1.3 \\ x_2 + \sin(x_1 + 1) = 0.8 \end{cases}$	19	$\begin{cases} \cos(x_1 - 1) + x_2 = 0.5 \\ x_1 + \sin(x_2)\cos(x_2) = 0.4 \end{cases}$

5	$\begin{cases} 2x_1 - \cos(x_2 + 1) = 0 \\ x_2 + \sin(x_1) = -0.4 \end{cases}$	20	$\begin{cases} \cos(2x_1 - 1) + 4x_2 = 0.5 \\ x_1 x_2 + \cos(x_2) = 3 \end{cases}$
6	$\begin{cases} \cos(x_2 + 0.5) - x_1 = 2 \\ \sin(x_1) - 2x_2 = 1 \end{cases}$	21	$\begin{cases} \sin(x_1) + 2x_2 = 2 \\ x_1 + \cos(x_2 - 1) = 0.7 \end{cases}$
7	$\begin{cases} \sin(x_1 + 0.5) - x_2 = 1 \\ x_1 + \cos(x_2 - 2) = 0 \end{cases}$	22	$\begin{cases} \cos(x_1) + x_2 = 1.5 \\ 2x_1 - \sin(x_2 - 0.5) = 1 \end{cases}$
8	$\begin{cases} \sin(x_2 + 2) - x_1 = 1.5 \\ x_2 + \cos(x_1 - 2) = 0.5 \end{cases}$	23	$\begin{cases} \sin(x_1 + 0.5) - x_2 = 1.2 \\ x_1 + \cos(x_2 - 2) = 0 \end{cases}$
9	$\begin{cases} \cos(x_1 + 0.5) + x_2 = 0.8 \\ -2x_1 + \sin(x_2) = 1.6 \end{cases}$	24	$\begin{cases} \sin(x_2 + 1) - x_1 = 1.2 \\ 2x_2 + \cos(x_1) = 2 \end{cases}$
10	$\begin{cases} \sin(x_1 + 1) - x_2 = 1 \\ 2x_1 + \cos(x_2) = 2 \end{cases}$	25	$\begin{cases} \cos(x_1 + 05) + x_2 = 1 \\ -2x_1 + \sin(x_2) = 2 \end{cases}$
11	$\begin{cases} \sin(x_1 - 1) + x_2 = 1.3 \\ x_1 - \sin(x_2 + 1) = 0.8 \end{cases}$	26	$\begin{cases} \cos(x_2 - 1) + x_1 = 0.5 \\ x_2 + \cos(x_1) = 3 \end{cases}$
12	$\begin{cases} \cos(x_1 - 1) + x_2 = 0.8 \\ x_1 - \cos(x_2) = 2 \end{cases}$	27	$\begin{cases} \sin(x_1 - 1) + x_2 = 1.5 \\ x_1 - \sin(x_2 + 1) = 1 \end{cases}$
13	$\begin{cases} -\cos(x_1 + 1) + 2x_2 = 0 \\ x_1 + \sin(x_2) = -0.4 \end{cases}$	28	$\begin{cases} \sin(x_2) + 2x_1 = 2 \\ x_2 + \cos(x_1 - 1) = 0.7 \end{cases}$
14	$\begin{cases} \sin(x_1) + 2x_2 = 1.6 \\ x_1 + \cos(x_2 - 1) = 1 \end{cases}$	29	$\begin{cases} \sin(x_2 + 1) - x_1 = 1 \\ 2x_2 + \cos(x_1) = 2 \end{cases}$
15	$\begin{cases} \cos(x_1 + 0.5) - x_2 = 2 \\ -2x_1 + \sin(x_2) = 1 \end{cases}$	30	$\begin{cases} \cos(x_2) + x_1 = 1.5 \\ 2x_2 + \sin(x_1 - 0.5) = 1 \end{cases}$