Universidade do Minho
Dep. de Matemática

LEBiom
30/março/2022
[Duração: 120m]

Análise Matemática para Engenharia

Nome completo::

Número::

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

Grupo I (12 valores)

Justifique convenientemente todas as suas respostas.

1. **(3 valores)** Considere a função f, real de duas variáveis reais, definida por $f(x, y) = x\,(y^2 - x^2)$.

(a) **(1 valor)** Defina o domínio e o contradomínio de f.

$\boxed{\text{Domínio}=\mathbb{R}^2,}$ porque a 'lei' de transformação (polinomial) não impõe quaisquer restrições às variáveis independentes x e y.

$\boxed{\text{Contradomínio}=\mathbb{R},}$ porque a variável dependente $f(x, y)$ pode ser igual a zero, ou positiva (com ambas as parcelas do produto $x(y^2 - x^2)$, por exemplo, negativas), ou negativa (com uma das parcelas do produto $x(y^2 - x^2)$, negativa e a outra positiva).

(b) **(2 valores)** Defina e esboce os traços de f.

Traço em XOY:

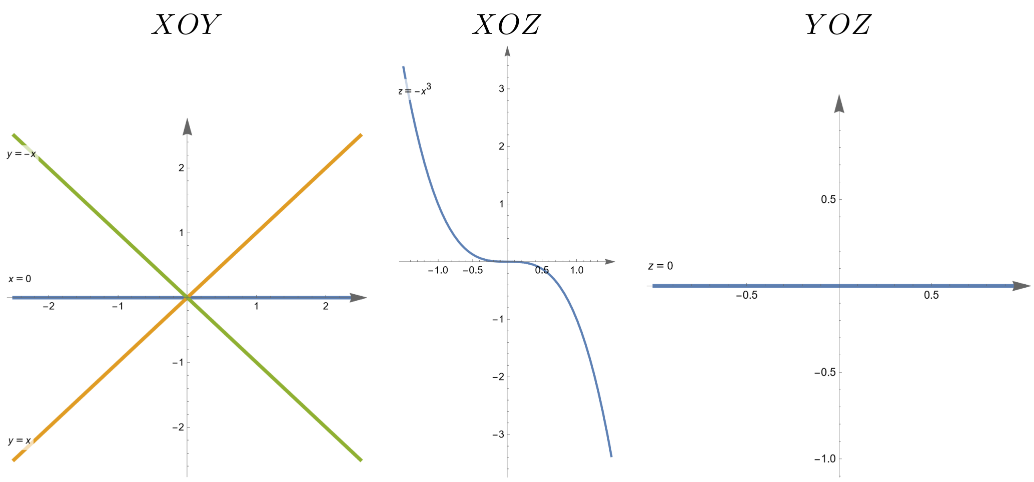
$$\begin{cases} z = x(y^2 - x^2) \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x(y^2 - x^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee (y^2 - x^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee y = \pm x$$

Traço em XOZ:

$$\begin{cases} z = x(y^2 - x^2) \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = x(0 - x^2) \quad \Leftrightarrow \quad z = -x^3$$

Traço em YOZ:

$$\begin{cases} z = x(y^2 - x^2) \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = 0(y^2 - 0) \quad \Leftrightarrow \quad z = 0$$



2. **(2 valores)** Calcule, se existir, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{y^2 + x}$.

O limite NÃO existe, porque é possível encontrar dois limites trajetoriais que existem, mas são distintos.

Por exemplo, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0),\,x=0} \frac{y^2}{y^2 + x} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{y^2 + 0} = 1$ e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0),\,y=0} \frac{y^2}{y^2 + x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{0 + x} = 0.$

3. **(4 valores)** Considere a função f, real de duas variáveis reais, definida por $f(x,y) = \begin{cases} 1-x, & \text{se} \quad y \geq 0 \\ -2, & \text{se} \quad y < 0 \end{cases}$ e, no domínio de f, os pontos de coordenadas $(a,0)$, com $a \in \mathbb{R}$.

(a) **(1 valor)** Calcule, se existirem, $\lim\limits_{(x,y)\to(a,0)} f(x,y)$ (para $y>0$) e $\lim\limits_{(x,y)\to(a,0)} f(x,y)$ (para $y<0$).

(para $y>0$):
$\lim\limits_{(x,y)\to(a,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(a,0)} (1-x) = 1-a.$

(para $y<0$):
$\lim\limits_{(x,y)\to(a,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(a,0)} -2 = -2.$

(b) **(1.5 valores)** Para que valores de a existe o $\lim\limits_{(x,y)\to(a,0)} f(x,y)$?

$\lim\limits_{(x,y)\to(a,0)} f(x,y)$ existe quando o limite ao longo do eixo das abcissas existir, isto é, quando

$$1-a=-2 \quad \Leftrightarrow \quad a=3.$$

(c) **(1.5 valores)** Estude a continuidade de f.

O domínio de f é $\mathbb{R}^2$ (, isto é, qualquer ponto do plano XOY).

- No semiplano superior de XOY, $\boxed{\text{quando } y>0,}$ a função é polinomial ($f(x,y) = 1-x$) e por conseguinte é contínua.
- No semiplano inferior de XOY, $\boxed{\text{quando } y<0,}$ a função é constante ($f(x,y)=-2$) e por conseguinte também aqui f é contínua.
- Ao longo do eixo das abcissas, $\boxed{\text{quando } y=0,}$ têm-se pontos definidos por $(a,0)$, (com $a \in \mathbb{R}$) e provou-se, na alínea anterior, que $\lim\limits_{(x,y)\to(3,0)} f(x,y) = -2$. Ora $f(3,0) = 1-3 = -2$.
  Portanto, a função f é contínua, também, no ponto de coordenadas $(3,0)$.
  Nos outros pontos de coordenadas $(a,0)$, (com $a \neq 3$,) o $\lim\limits_{(x,y)\to(a,0)} f(x,y)$ não existe; ou seja, a função f é descontínua nesses pontos.

4. (3 valores) Sabendo que a função f, real de duas variáveis reais, se define por $z = e^{-y}\cos x$, calcule

(a) (1 valor) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-y}\cos x\right)\right]\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left[\cos x\,\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-y}\right)\right]\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left[\cos x\,(-1)\left(e^{-y}\right)\right]\\
&= -\left(e^{-y}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left[\cos x\right]\\
&= -\left(e^{-y}\right)\left(-\operatorname{sen} x\right)\\
&= e^{-y}\operatorname{sen} x
\end{aligned}$$

(b) (2 valores) a derivada direcional de f, num ponto $(a, b) \neq (0, 0)$, ao longo de um vetor que liga (a, b) à origem.

Seja $\vec{u}$ o vetor que liga o ponto de coordenadas (a, b) à origem:

$$\vec{u} = (0, 0) - (a, b) = -a\,\vec{e_1} - b\,\vec{e_2}.$$

Como o cálculo das derivadas direcionais 'exige' que o vetor, ao longo do qual se efetua o cálculo, seja unitário, considerar-se-á, neste caso, o versor do vetor $\vec{u}$:

$$vers\,\vec{u} = \frac{1}{||\vec{u}||}\left(-a\,\vec{e_1} - b\,\vec{e_2}\right) = \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\vec{e_1} - \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\vec{e_2}.$$

Além disso,

$$\nabla f(a, b) = f_x(a, b)\,\vec{e_1} + f_y(a, b)\,\vec{e_2} = \left(-e^{-b}\operatorname{sen} a\right)\,\vec{e_1} + \left(-e^{-b}\cos a\right)\,\vec{e_2}$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned}
f_{\vec{u}}(a, b) &= \nabla f(a, b) \bullet vers\,\vec{u}\\
&= \left(-e^{-b}\operatorname{sen} a, -e^{-b}\cos a\right) \bullet \left(\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\\
&= \frac{ae^{-b}\operatorname{sen} a + be^{-b}\cos a}{\sqrt{a^2+b^2}}
\end{aligned}$$

Grupo II (4 valores)

Em cada uma das questões seguintes, assinale se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F).

<u>Não deve apresentar qualquer justificação</u>.

Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,5 valores.

	V	F
1. Numa tabela de valores, relativa a uma função real de duas variáveis reais, não pode aparecer duas vezes o mesmo valor da variável dependente.	○	⊗
2. O triângulo cujos vértices são os pontos $\mathcal{A}(1,1,0)$, $\mathcal{B}(0,1,0)$ e $\mathcal{C}(0,1,1)$ é retângulo.	⊗	○
3. O traço, no plano XOY, da função g, real de duas variáveis reais, definida por $g(x,y) = 1 - y^2$ é uma parábola.	○	⊗
4. Se $f_x(a,b) < 0$, então os valores de $f(x,y)$ diminuem à medida que, partindo de (a,b), nos deslocamos no sentido negativo do eixo das abcissas.	○	⊗

Grupo III (4 valores)

Em cada uma das questões seguintes, assinale a única afirmação verdadeira.

<u>Não deve apresentar qualquer justificação</u>.

Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

1. A função f, real de duas variáveis reais, tal que $f(0,0) = 1$, $f(0,1) = 4$ e $f(0,3) = 5$,

○ tem que ser linear.

⊗ pode ser linear.

○ não pode ser linear.

○ Nenhuma das anteriores.

2. O domínio da função, real de três variáveis reais, definida por $f(x,y,z) = \dfrac{\sqrt{9 - z^2}}{1 + \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}}$ é

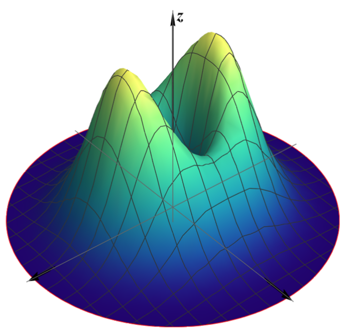
⊗ um cilindro circular.

○ um elipsóide.

○ um parabolóide circular.

○ Nenhuma das anteriores.

3. Qual das equações define a superfície representada na figura?



⊗ $z = (2x^2 + y^2)e^{1-x^2-y^2}$

○ $z = xye^{-x^2-y^2}$

○ $z = \cos\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$

○ Nenhuma das anteriores.

4. Seja f uma função real de duas variáveis reais e P_0 um ponto do seu domínio. Nestas condições,

⊗ se f é diferenciável em P_0, então f é contínua em P_0.

○ f é contínua em P_0 se e só se f é diferenciável em P_0.

○ se f é contínua em P_0, então f é diferenciável em P_0.

○ Nenhuma das anteriores.