Universidade do Minho
Dep. de Matemática

LEBiom
23/maio/2022
[Duração: 90m]

Análise Matemática para Engenharia

Nome completo::

Número::

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

Grupo I (12 valores)

Justifique convenientemente todas as suas respostas.

1. **(2 valores)** Seja f uma função real de duas variáveis reais, definida por $f(x,y)=x^3-3xy^2$

(a) Determine, se existirem, os pontos críticos de f.

Resolução Pontos críticos são aqueles onde o gradiente não existe ou é o vetor nulo.
Neste caso, $\nabla f(x,y)=(3x^2-3y^2,-6xy)$, isto é, para cada ponto do domínio ($\mathbb{R}^2$) de f, o vetor gradiente existe. Donde

$$\nabla f(x,y)=\vec{0} \iff \begin{cases} 3x^2-3y^2=0 \\ -6xy=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2=y^2 \\ x=0 \vee y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Ou seja, $(0,0)$ é o único ponto crítico de f.

(b) Prove que o teste das segundas derivadas é inconclusivo, quanto à classificação dos pontos críticos de f.

Resolução Teste das segundas derivadas, para funções de duas variáveis reais, permite classificar os pontos críticos e consiste em analisar o sinal do discriminante $\mathcal{D}$ (determinante de uma matriz de ordem 2 cujos elementos são as segundas derivadas parciais de f):
Neste caso, $\mathcal{D}=f_{xx}(0,0)\times f_{yy}(0,0)-(f_{xy}(0,0))^2$, com $f_{xx}(x,y)=6x$, $f_{yy}(x,y)-6x$, $f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=-6y$. Ou seja

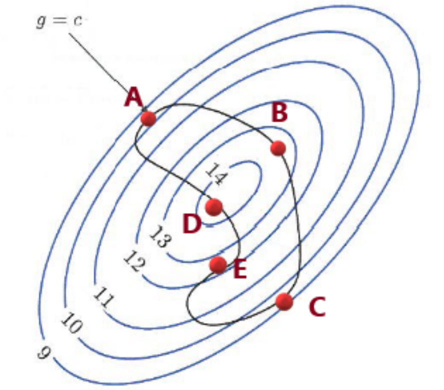
$$\mathcal{D}=f_{xx}(0,0)\times f_{yy}(0,0)-(f_{xy}(0,0))^2=0\times 0-0^2=0$$

O que significa que este teste é inconclusivo: na prática, f poderá ter em $(0,0)$ um maximizante, ou um minimizante, ou um ponto de sela, ou nenhuma destas hipóteses. Requerer-se-iam outras formas (incluindo o recurso à definição, ou o uso de um diagrama de nível apropriado) para se classificar o ponto crítico.

***(Grupo III-1.)**/Justificação: $\nabla g(2,1)=2\nabla f(2,1)$, isto é, $(2,1)$ é 'candidato' a ser um maximizante. Como as linhas de nível (de f e de g), em redor do ponto $(2,1)$ são paralelas e as cotas de f aumentam na direção e sentido do vector $\nabla f(2,1)=-3\vec{e_1}+4\vec{e_2}$ (noroeste, aproximadamente) e o centro da circunferência representada pela restrição é $(5,-3)$ (sudeste, aproximadamente, em relação ao ponto $(2,1)$,)... O ponto é candidato a ser maximizante.

Nota: No caso da outra opção $-g(x,y)=(x+1)^2+(y-5)^2-$ o ponto $(2,1)$ era, também, um candidato a extremante, mas seria minimizante!

2. (2 valores) Na figura, representa-se uma função f, real de duas variáveis reais, por um diagrama de níveis (9, 10, 11, 12, 13 e 14) e uma restrição, definida por $g(x,y)=c$. Assinale, na figura,



(a) dois dos pontos onde $\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y)$.

Resolução Pontos onde os dois vetores gradiente são colineares, são pontos onde as curvas de nível de f e a de g são paralelas. Por exemplo: A, B, C, D e E, assinalados na figura.

(b) um ponto onde f tem um máximo, condicionado por $g=c$.

Resolução Ponto D, porque dos pontos assinalados em **(a)**, D é o que tem maior cota, isto é, o maior valor de f.

D é por conseguinte o maximizante de f, condicionado por $g(x,y)=c$.

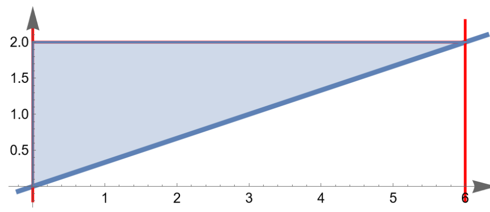
3. (3 valores) Considere o integral duplo $\displaystyle\int_0^6\int_{\frac{x}{3}}^2 x\sqrt{y^3+1}\,dy\,dx$.

(a) Esboce a região de integração.

Resolução A região de integração é

$$\mathcal{R}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 6 \quad\wedge\quad \frac{x}{3}\le y\le 2\right\},$$

conforme o triângulo delimitado por $x=0$, $y=2$ e $y=\dfrac{x}{3}$ e representado (sombreado) na figura.



(b) Reescreva o integral, invertendo a ordem de integração.

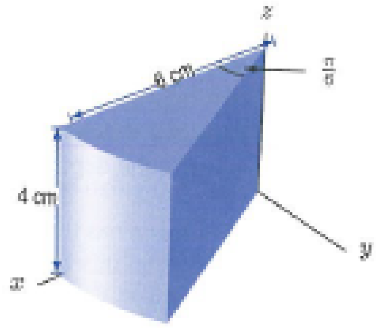
Resolução Invertendo a ordem de integração, o triângulo sombreado na figura (da alínea anterior) será descrito 'horizontalmente' por $0\le y\le 2$ e $0\le x\le 3y$. Por conseguinte, tem-se

$$\int_0^6\int_{\frac{x}{3}}^2 x\sqrt{y^3+1}\,dy\,dx=\int_{y=0}^2\int_{x=0}^{3y} x\sqrt{y^3+1}\,dx\,dy$$

(c) Calcule o integral.

Resolução A escolha 'acertada' é calcular $\displaystyle\int_{y=0}^2\int_{x=0}^{3y} x\sqrt{y^3+1}\,dx\,dy$!

$$\begin{aligned}
\int_{y=0}^2\int_{x=0}^{3y} x\sqrt{y^3+1}\,dx\,dy &= \int_{y=0}^2\sqrt{y^3+1}\left(\int_{x=0}^{3y}x\,dx\right)dy = \int_{y=0}^2\sqrt{y^3+1}\left(\left.\frac{x^2}{2}\right|_{x=0}^{3y}\right)dy = \\
&= \int_{y=0}^2\sqrt{y^3+1}\left(\frac{9y^2}{2}\right)dy = \frac{3}{2}\int_{y=0}^2\sqrt{y^3+1}\,(3y^2)\,dy = \\
&= \frac{3}{2}\int_{y=0}^2 (y^3+1)^{\frac{1}{2}}\,(3y^2)\,dy = \frac{3}{2}\left.\frac{(y^3+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_{y=0}^2 = \\
&= \sqrt{9^3}-1 = 26
\end{aligned}$$



4. (2 valores) Na figura, representa-se um sólido (porção de um cilindro) com $4\,cm$ de altura, $6\,cm$ de raio e com um ângulo ao centro igual a $\frac{\pi}{6}\,rad$.

Exprima o volume deste sólido, usando um integral duplo e um sistema de coordenadas polares.

Resolução O cálculo de um volume usando um integral duplo significa que se definirá a 'base' do sólido, que permitirão estabelecer a região de integração e se considera a 'altura' do sólido a partir de uma função f, real de duas variáveis reais, que será a função integranda, no integral duplo.

Importa ainda ter em linha de conta que dA –ou seja, o denominado 'elemento de área'– é diferente consoante a grelha seja retangular (para coordenadas cartesianas) ou não.

Assim, no caso do presente sólido, a 'base' $\mathcal{B}$ –definida em coordenadas polares (r, θ), respetivamente raio polar e ângulo polar– é tal que

$$\mathcal{B} = \left\{(r,\theta) : 0 \leq r \leq 6 \quad \wedge \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}\right\}$$

e a 'altura' do sólido é constante e igual a 4. Além disso, $dA = r\,dr\,d\theta$. Nestas condições a expressão requerida (cujo cálculo permite encontrar o volume do sólido na figura) é:

$$\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{6}} \int_{r=0}^{6} 4\,r\,dr\,d\theta.$$

5. (3 valores) Use um sistema de coordenadas apropriado para deduzir a fórmula do volume de uma esfera de raio a.

Resolução Tratando-se de uma esfera o sistema de coordenadas mais apropriado para estabelecer o seu volume é o 'esférico', segundo o qual as coordenadas (ρ, θ, ϕ) dos pontos sobre a superfície esférica (centrada, convenientemente na origem de um referencial em $\mathbb{R}^3$) de raio a são definidos por $\rho = a$ e dV, elemento de volume, é $dV = \rho^2 \operatorname{sen}\phi$. Nestas condições, podemos calcular/deduzir o volume da esfera a partir do seguinte integral triplo:

$$\int_{\phi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{a} 1\rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi.$$

$$\begin{aligned}
\int_{\phi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{a} 1\rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi &= \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \operatorname{sen}\phi \left(\int_{\rho=0}^{a} \rho^2\,d\rho\right) d\theta\,d\phi &= \\
&= \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \operatorname{sen}\phi \left(\left.\frac{\rho^3}{3}\right|_{\rho=0}^{a}\right) d\theta\,d\phi &= \\
&= \int_{\phi=0}^{\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \operatorname{sen}\phi \left(\frac{a^3}{3}\right) d\theta\,d\phi &= \\
&= \frac{a^3}{3} \int_{\phi=0}^{\pi} \operatorname{sen}\phi \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta\right) d\phi &= \\
&= \frac{a^3}{3} \int_{\phi=0}^{\pi} \operatorname{sen}\phi \left(\theta|_{\theta=0}^{2\pi}\right) d\phi &= \\
&= \frac{a^3}{3}\,2\pi \int_{\phi=0}^{\pi} \operatorname{sen}\phi\,d\phi &= \\
&= \frac{a^3}{3}\,2\pi \left(-\cos\phi|_{\phi=0}^{\pi}\right) &= \frac{4}{3}\pi\,a^3
\end{aligned}$$

Grupo II (4 valores)

Em cada uma das questões seguintes, assinale se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F).

<u>Não deve apresentar qualquer justificação</u>.

Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,5 valores.

	V	F
1. Seja f uma função real de duas variáveis reais x e y. Se $f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0$, então P_0 é um ponto crítico de f.	⊗	○
2. Se $\mathcal{R} = [2,4] \times [5,9]$ e $f(x,y) = 2x$ e $g(x,y) = x + y$, então o valor médio de f em $\mathcal{R}$ é menor ou igual do que o valor médio de g em $\mathcal{R}$.	⊗	○
3. $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-y-z} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$	⊗	○
4. $\vec{r}(t) = (t^2 - 1)\,\vec{e_1} + t\,\vec{e_2}$, com $t \leq 0$, define vetorialmente a metade inferior da parábola $x = y^2 + 1$.	○	⊗

Grupo III (4 valores)

Em cada uma das questões seguintes, assinale a única afirmação verdadeira.

<u>Não deve apresentar qualquer justificação</u>.

Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

1. Seja f, uma função real de duas variáveis reais, diferenciável e tal que $\nabla f(2,1) = -3\vec{e_1} + 4\vec{e_2}$. O ponto de coordenadas $(2,1)$ é um possível maximizante de f, sujeita á restrição definida por

○ $x^2 + y^2 = 5$.

○ $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 25$.

⊗ * $(x-5)^2 + (y+3)^2 = 25$.

○ Nenhuma das anteriores.

2. Seja ϕ o ângulo esférico, num referencial de coordenadas esféricas, e $\mathcal{W} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Nestas condições,

○ $\int\int\int_{\mathcal{W}} (\text{sen}\,\phi)\ dV\ = 0$.

⊗ $\int\int\int_{\mathcal{W}} (\text{sen}\,\phi)\ dV\ > 0$.

○ $\int\int\int_{\mathcal{W}} (\text{sen}\,\phi)\ dV\ < 0$.

○ Nenhuma das anteriores.

3. Fazendo $x = a\,s$ e $y = b\,t$, a elipse definida, no plano XOY, por $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ corresponde à circunferência definida, no plano SOT, por $s^2 + t^2 = 1$ e o Jacobiano, para esta mudança de variáveis, é

○ $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = 1$.

○ $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \dfrac{1}{ab}$.

⊗ $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = ab$.

○ Nenhuma das anteriores.

4. Seja f uma função, real de três variáveis reais, definida por $f(x,y,z) = x - 3y^2 + z$ e $\mathcal{C}$ o segmento de reta que une o ponto de coordenadas $(0,0,0)$ ao ponto cujas coordenadas são $(1,1,1)$. Nestas condições, $\int_{\mathcal{C}} f\,ds =$

○ $= \int_0^1 -\sqrt{3}\,(2t - 3t^2)\,dt$.

⊗ $= \int_0^1 (2t - 3t^2)\,\sqrt{3}\,dt$.

○ $= \int_0^1 (2t - 3t^2)\,dt$.

○ Nenhuma das anteriores.