

Nome Número **Justifique, convenientemente, todas as respostas.**Exercício 1. (2.5 valores) Considere o conjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < (x - 2)^2 + (y + 1)^2 \leq 1\} \cup \{(0, 1)\}$.

- (a) Faça um esboço dos seguintes conjuntos: (i) X ; (ii) $\overset{\circ}{X}$; (iii) X' ; (iv) $\text{fr}(X)$.
 (b) Diga, justificando, se o conjunto X é compacto.

Exercício 2.

1. (2 valores) Estude a existência de um e um só dos seguintes limites:

$$\text{I. } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 - xy}{x^2 + y^2} \quad \text{II. } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2 - 2 \sin(x^2)}{x^2 + y^2}.$$

2. (4 valores) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \begin{cases} 2(x^2 + y^2) - 1 & \text{se } x^2 + y^2 \leq 1, \\ y^2 & \text{se } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$

- (a) Estude a existência dos seguintes limites: $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} f(x, y)$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x, y)$ e $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x, y)$.
 (b) Determine, justificando, o conjunto dos pontos onde a função f é contínua.

Exercício 3. (5.5 valores) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

- (a) Mostre que f é contínua no ponto $(0, 0)$.
 (b) Determine a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ segundo qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^2$.
 (c) Mostre que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ e que $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 2$.
 (d) Mostre que f não é diferenciável em $(0, 0)$.

Exercício 4. (3 valores) Seja $f(x, y) = \left(4y + \frac{1}{x+1}, \sqrt{y^2 - x^2}\right)$.

- (a) Faça um esboço do domínio de f .
 (b) Calcule $f'(0, 1)(2, 3)$.

Exercício 5.

1. (2 valores) Seja $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $(-2, 1, e)$ tal que $\nabla g(-2, 1, e) = (-1, e, e)$.
 Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = g(y^2 - 2x^2 - y, \cos(x^2 y), e^x)$. Determine $\nabla f(1, 0)$.
 2. (1 valor) Determine uma equação do plano tangente ao gráfico da função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 1 + y^3 - x^3$ no ponto $(0, 1, 2)$.