Processamento de Sinal (2014/15)

Teste 2 – 7 de janeiro de 2015

Nome:____ Nº___________ Curso________

Grupo I

Classifique, neste enunciado, as questões que se seguem indicando se são verdadeiras (V) ou falsas (F). Duas respostas erradas anulam uma resposta correta. Atenção às siglas que se seguem:

SFTC - Série de Fourier em Tempo Contínuo
SFTD - Série de Fourier em Tempo Discreto
TFTC - Transformada de Fourier em Tempo Contínuo
TFTD - Transformada de Fourier em Tempo Discreto
f_a – Frequência de amostragem

1. Os coeficientes da SFTD são periódicos, com período igual a 2π/N.____________
2. Tal como na SFTC, na SFTD os coeficientes $|a_k| = |a_{-k}|$ desde que o sinal seja par. __________
3. Caso o sinal seja real e observe uma simetria impar, então os coeficientes da sua SFTD serão sempre puramente imaginários positivos. ____________
4. A TFTC só pode ser usada caso o sinal seja aperiódico. _______________
5. A energia do sinal pode ser calculada pela sua evolução no tempo, ou usando o conteúdo espetral que resulta do cálculo da TFTC . __________
6. O resultado da TFTD é sempre discreto e periódico. _______________
7. Um sinal amostrado pode ser recuperado desde que usemos uma f_a igual ou superior a duas vezes a largura de banda do sinal. ___________
8. O espetro de um sinal em tempo contínuo que foi amostrado é sempre periódico, com período igual a 2π. _______________
9. O aliasing pode ser evitado usando filtros passa-baixo ideais com frequência de corte igual à frequência de amostragem. ______________
10. A decimação (após amostragem com período N) equivale a reduzir a frequência de amostragem de um fator de N. ___________
11. Se um sinal pode ser decimado sem gerar aliasing, então significa que foi sobreamostrado. __________
12. Num processo de interpolação, a recuperação do sinal faz-se usando um filtro passa-baixo.

Grupo II

Responda às seguintes questões numa folha separada. Todas as respostas carecem de uma justificação adequada.

1. Considere que um sinal $x[n]$ é real, ímpar e com período 5 e que os coeficientes da série de Fourier que o define são ak. Sabendo que: a-3=j2, que |a1|=1 e que a fase de a6=90º, calcule:
   a) Os coeficientes a-2, a-1… a2.
   b) A potência média do sinal ao longo de um período (caso não tenha respondido à questão anterior, considere que os coeficientes são definidos pela seguinte expressão: $a_k = \frac{j}{5}\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)$

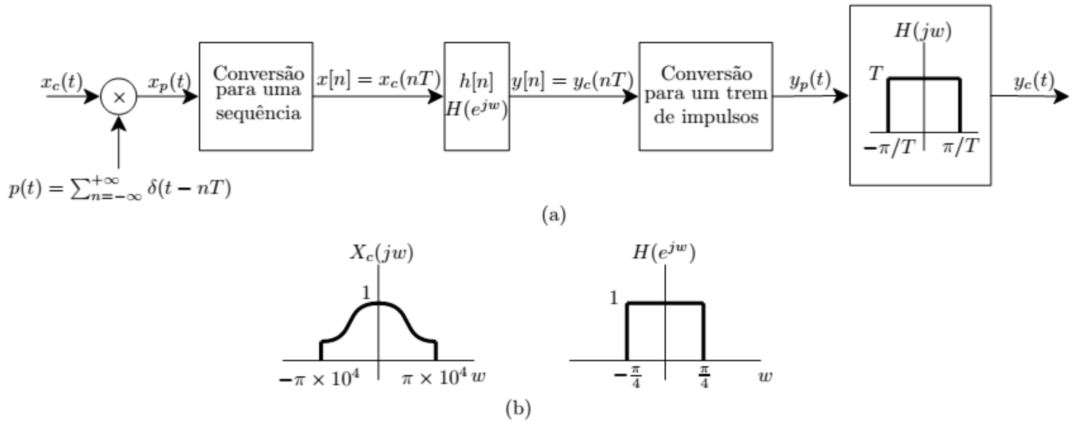
2. Considere o sinal $x(t) = f(t).g(t)$, em que $f(t) = \cos(10t)$ e $g(t) = \frac{\sin(2t)}{\pi t}$:
   a) Calcule o espetro de $x(t)$, isto é calcule $X(j\omega)$.
   b) Qual será a saída de um sistema LIT com resposta impulsional $h(t) = e^{-t}u(t)$, quando a entrada é $f(t)$.

3. Um sistema LIT em tempo discreto é pela seguinte equação às diferenças:

$$2y[n] = -2x[n] + y[n-1] + x[n-2]$$

   a) Calcule a resposta em frequência deste sistema.
   b) Calcule a resposta impulsional do sistema.
   c) Calcule a saída do sistema, $y[n]$, quando a entrada é o sinal $x[n] = u[n+1] - u[n-1]$.

4. A figura seguinte apresenta um sistema que processa sinais contínuos em tempo discreto (como por exemplo um microcontrolador que processa sinais amostrados). O período de amostragem é T=1us.



Relativamente a este sistema, responda às questões seguintes:
   a) Esboce os espetros $X_p(j\omega)$, $X(e^{j\Omega})$, $Y(e^{j\Omega})$, $Y_p(j\omega)$ e $Y_c(j\omega)$;
   b) Qual seria a menor frequência de amostragem que se poderia usar e que evitava o aliasing?

1) a) $x[n]$ real e í-par, $N=5$

Porque é real $|a_k| = |a_{-k}|$

Porque é real e ímpar, os coeficientes são puramente imaginários e ímpares também, então

$$a_k = -a_{-k}$$

Para além disso $a_k = a_{k \pm N}$

Então:

$a_{-2} = a_3 = j2 = -a_2$

$a_{-1} = -a_1$

$a_0 = 0$

$a_1 = 1 \angle 90° = j$

$a_2 = -a_{-2} = -j2$

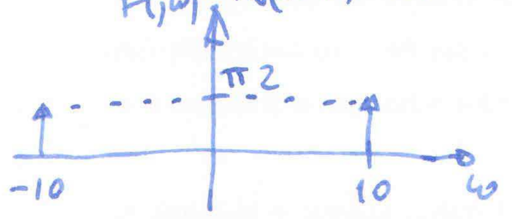
b) $P_{med} = \sum_{k=-2}^{2} |a_k|^2 = |2|^2 + |1|^2 + |1|^2 + |2|^2 = 10$

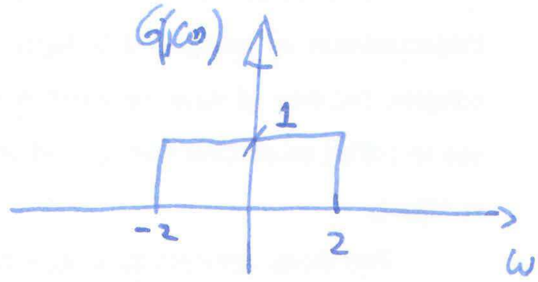
(2) $x(t) = f(t) \cdot g(t)$, $f(t) = 2\cos(10t)$, $g(t) = \frac{\operatorname{sen}(2t)}{\pi t}$

a) $X(j\omega) = ?$

$$x(t) = f(t) \cdot g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot F(j\omega) * G(j\omega)$$

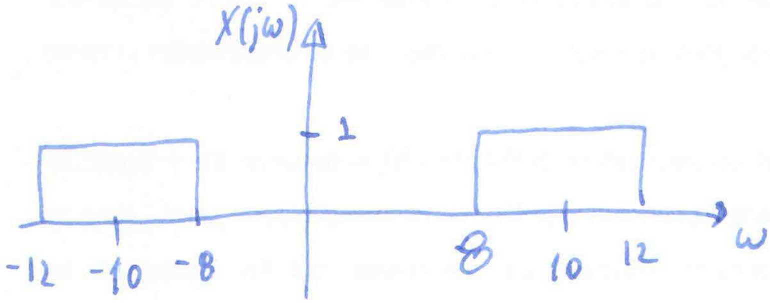
$F(j\omega) = \pi\delta(\omega-10) + \pi\delta(\omega+10)$





$$X(j\omega) = \frac{2\pi}{2\pi}\Big(\delta(\omega-10) * G(j\omega) + \delta(\omega+10) * G(j\omega)\Big)$$

$$= G(j(\omega-10)) + G(j(\omega+10))$$



b) $y(t) = f(t) * h(t)$ ou $\left| \begin{array}{l} Y(j\omega) = F(j\omega) \cdot H(j\omega) \\ y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(j\omega)\} \end{array} \right.$

$$H(j\omega) = \frac{20}{10+j\omega}$$

$$Y(j\omega) = [2\pi\,\delta(\omega-10) + 2\pi\,\delta(\omega+10)] \cdot H(j\omega) =$$

$$= 2\pi\,\delta(\omega-10) \cdot H(j10) + 2\pi\,\delta(\omega+10) \cdot H(-j10)$$

$$= 2\pi\sqrt{2}\,e^{-j\pi/4}\,\delta(\omega-10) + 2\pi\sqrt{2}\,e^{j\pi/4}\,\delta(\omega+10)$$

$$H(j10) = \frac{20}{10+j10} = \frac{2}{\sqrt{2}\angle\pi/4} = \sqrt{2}\angle{-\pi/4} = \sqrt{2}\,e^{-j\pi/4}$$

$$H(-j10) = \sqrt{2}\,e^{j\pi/4}$$

$$Y(j\omega) = 2\pi\sqrt{2}\, e^{-j\pi/4}\, \delta(\omega - 10) + 2\pi\sqrt{2}\, e^{j\pi/4}\, \delta(\omega + 10)$$

$$y(t) = \sqrt{2}\, e^{-j\pi/4} \cdot e^{j10t} + \sqrt{2}\, e^{j\pi/4}\, e^{-j10t}$$

$$= \cancel{2}\sqrt{2}\left[e^{j(10t - \pi/4)} + e^{-j(10t - \pi/4)}\right]$$

$$= 2\sqrt{2}\cos\left(10t - \pi/4\right)$$

3

a) $2y[n] = -2x[n] + y[n-1] + x[n-2]$

$$\downarrow \mathcal{F}$$

$$2Y(e^{j\Omega}) = -2X(e^{j\Omega}) + e^{-j\Omega} \cdot Y(e^{j\Omega}) + e^{-j2\Omega} X(e^{j\Omega})$$

$$\left(2 - e^{-j\Omega}\right) Y(e^{j\Omega}) = \left(e^{-j2\Omega} - 2\right) X(e^{j\Omega})$$

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{Y(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})} = \frac{e^{-j2\Omega} - 2}{2 - e^{-j\Omega}}$$

b) $h[n] = \mathcal{F}^{-1}\left\{H(e^{j\Omega})\right\}$

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1/2\, e^{-j2\Omega} - 1}{1 - 1/2\, e^{-j\Omega}} = 1/2 \frac{e^{-j2\Omega}}{1 - 1/2\, e^{-j\Omega}} - \frac{1}{1 - 1/2\, e^{-j\Omega}}$$

$$h[n] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2] - \left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n]$$

c) $x[n] = u[n+1] - u[n-1] = \delta[n+1] - \delta[n]$

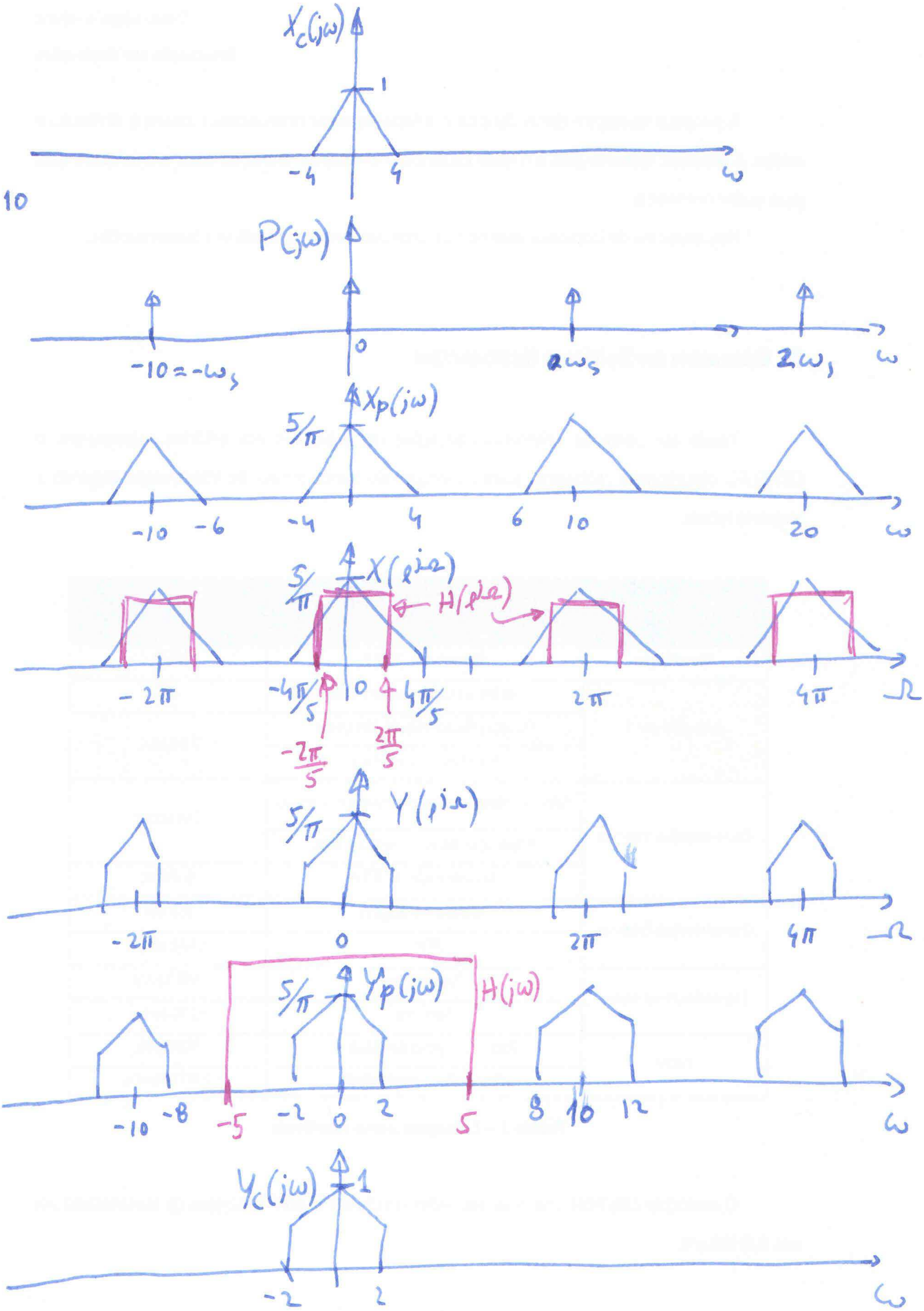
$$y[n] = x[n] * h(n) = \left(\delta[n+1] - \delta(n)\right) * h(n) = h[n+1] - h[n]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1] - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n+1] - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2] + \left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n]$$

4

a)

$\omega_s = \frac{2\pi}{T} = 10$



b) $\omega_s > 8$