Análise Matemática para Engenharia

Licenciatura em Engenharia Biomédica

1º Teste :: 11 de abril de 2024

Duração :: 2h

Nome Número

Justifique, convenientemente, todas as respostas.

Exercício 1. (2.5 valores) Considere o conjunto $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < (x-1)^2 + (y+2)^2 \leq 1\} \cup \{(-1,0)\}$.

(a) Faça um esboço dos seguintes conjuntos: (i) C; (ii) $\overset{\circ}{C}$; (iii) C'; (iv) fr(C).

(b) Diga, justificando, se o conjunto C é compacto.

Exercício 2.

1. (2 valores) Estude a existência de **<u>um e um só</u>** dos seguintes limites:

$$\textbf{I.} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2 - xy}{x^2+y^2} \qquad\qquad \textbf{II.} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + 2\,\text{sen}\,(y^2)}{x^2+y^2}.$$

2. (4 valores) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} 2(x^2+y^2) - 1 & \text{se} \quad x^2+y^2 > 1, \\ y^2 & \text{se} \quad x^2+y^2 \leq 1. \end{cases}$

(a) Estude a existência dos seguintes limites: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} f(x,y)$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$ e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$.

(b) Determine, justificando, o conjunto dos pontos onde a função f é contínua.

Exercício 3. (5.5 valores) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Mostre que f é contínua no ponto $(0,0)$.

(b) Determine a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ segundo qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^2$.

(c) Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ e que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$.

(d) Mostre que f não é diferenciável em $(0,0)$.

Exercício 4. (3 valores) Seja $f(x,y) = \left(\sqrt{y^2 - x^2}, 3y + \dfrac{1}{x-1}\right)$.

(a) Faça um esboço do domínio de f.

(b) Calcule $f'(0,1)(2,3)$.

Exercício 5.

1. (2 valores) Seja $g\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $(-1,1,e)$ tal que $\nabla g(-1,1,e) = (-1,e,e)$.
Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = g(y^2 - x^2 - y, \cos(x^2 y), e^x)$. Determine $\nabla f(1,0)$.

2. (1 valor) Determine uma equação do plano tangente ao gráfico da função $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = 1 + x^3 - y^3$ no ponto $(1,0,2)$.

FIM