$2^{\underline{o}}$ Teste (recurso) de ÁLGEBRA LINEAR para a Engenharia

Licenciatura em Engenharia Biomédica - Licenciatura em Engenharia Química e Biológica

9 de fevereiro de 2022 Duração: **1h40m**

Nome : ______________________________ Nº __________ Curso ______________

Relativamente às questões seguintes notar que nas suas respostas:
*i) devem ser apresentados os cálculos essenciais e uma **justificação** da resposta, nos espaços indicados.*
ii) a resolução de sistemas de equações lineares deve ser feita pelo método de Gauss, de Gauss- Jordan ou pela regra de Cramer;
iii) o cálculo de determinantes deve ser feito por aplicação do teorema de Laplace ou através da condensação de Gauss.

1. Sejam $C = \{(3,1,3),\ (2,0,1),\ (1,1,2)\}$ e $\mathcal{S} = \langle C \rangle$.

   (a) Diga se $(-2,2,2) \in \mathcal{S}$ e, em caso afirmativo, escreva $(-2,2,2)$ como combinação linear dos vetores de C.

   (b) Determine um sistema de equações lineares cujo conjunto das soluções é $\mathcal{S}$.

2. Em $\mathbb{R}^4$ considere os dois seguintes subespaços vetoriais: $\mathcal{U} = \{(x_1, \cdots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 + x_2 = x_4\}$ e $\mathcal{W} = \{(x_1, \cdots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ 2x_1 + x_3 = x_4, x_2 + 2x_4 = x_3, 2x_1 + x_3 + 2x_4 = x_2\}$.

   (a) Verifique se $\mathcal{U} = \langle\, (1, 0, -1, 1),\ (1, -1, -1, 0),\ (0, 1, 0, 1),\ (1, 0, 0, 1)\,\rangle$.

   (b) Verifique se $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$.

3. Sejam B_4 a base canónica de $\mathbb{R}^4$ e $\mathcal{B} = (\,(1,1,1),\,(1,0,2),\,(0,1,0)\,)$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Sejam $f\colon\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ e $g\colon\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ aplicações lineares tais que

$$\mathcal{M}(f;B_4,B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{M}(g;B_4,B_4) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule $dim\, Nuc\, g$.

(b) Calcule $f\circ g(2,-2,1,1)$ e uma base do subespaço $Im\, f\circ g$.

4. Seja $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ uma matriz de entradas reais.

(a) (i) Verifique se $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ é um vetor próprio da matriz $B\,B^T$. (ii) Calcule os valores próprios de $B\,B^T$.

(Sugestão: no cálculo do determinante, comece por usar a Teorema de Laplace pela 1ª linha)

(b) Calcule o conjunto dos vetores próprios associados ao valor próprio 5.

COTAÇÃO: cada alínea vale 2.5 valores .