Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática

Cálculo para Engenharia

Licenciatura em Engenharia Biomédica

Exame :: 15 de janeiro de 2024

Nome ____________________ Número __________

I

As respostas às questões deste grupo devem ser dadas na folha de exame.

Questão 1. [2 valores] Determine $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\operatorname{ch} x}{\operatorname{sen}^2 x}$.

Questão 2. [3 valores] Considere a função $f : [1,+\infty[\longrightarrow [0,\frac{\pi}{2}[$ tal que $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{x-1}$.

a) Calcule, para $x > 1$, $f'(x)$.

b) Justifique que a funçãof é bijetiva e determine a inversa da função f.

c) Calcule $\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Questão 3. [2.5 valores] Calcule $\displaystyle\int \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$.

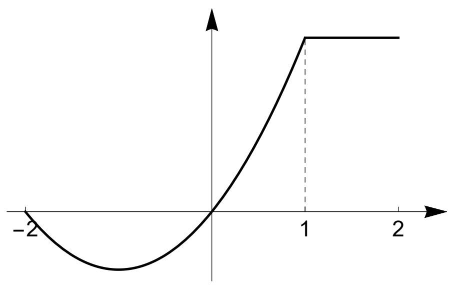
Questão 4. [2.5 valores] Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{0} x\sqrt{x+1}\,dx$.

Questão 5. [2 valores] Considere a região $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 2 - 2x \wedge y \leq 2\right\}$.

a) Apresente um esboço gráfico da região D.

b) Apresente uma expressão integral que permita obter a área de D.

Questão 6. [3 valores] Considere a função $f : [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico se apresenta na figura anexa e seja $F : [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(x) = \displaystyle\int_{-2}^{x} f(t)\,dt$. O gráfico da função f é formado por um arco de parábola e um segmento de reta horizontal. Sabe-se ainda que $F(1) = 0$.

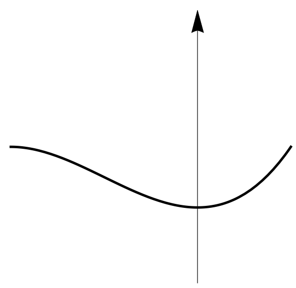


a) Classifique a função f quanto à injetividade.

b) Indique se a função f é derivável.

c) Mostre que $\displaystyle\int_{-2}^{0} |f(x)|dx = \int_{0}^{1} f(x)dx$.

d) Determine, caso exista, $c \in [-2,2]$ tal que $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)dx = f(c)$.



e) Na figura ao lado considere a curva correspondente ao gráfico de F no intervalo $[-2,1]$ e o eixo das ordenadas. Comece por representar na figura o eixo das abcissas e complete o gráfico de modo a corresponder ao gráfico de F (no intervalo $[-2,2]$).

f) Defina, analiticamente, a função f de modo a que $F(2) = 1$.

Em cada uma das questões seguintes, assinale neste enunciado, a afirmação verdadeira; não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

Questão 1. A condição $\dfrac{(x^2+1)(x+2)}{x-2} \geq 0$ é equivalente a

- ○ $(x^2+1)(x^2-4) \geq 0$
- ○ $x^2-4 \geq 0 \wedge x \neq 2$
- ○ $(x^2+1)(x+2) \geq 0 \wedge x-2 > 0$
- ○ $(x^2+1)(x+2) \geq 0$

Questão 2. Se $A = \{n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ então

- ○ $\inf A = 2$
- ○ A é limitado
- ○ $A' = \{0\}$
- ○ A é majorado

Questão 3. Sejam $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \in \mathbb{Z} \\ 1-x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$ e $z \in \mathbb{Z}$. Então $\lim\limits_{x \to z} f(x)$

- ○ não existe
- ○ é igual a $1-z$
- ○ é igual a z^2+1
- ○ existe sse $z=0$ ou $z=-1$

Questão 4. O valor de $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{3\pi}{5}\right)$ é

- ○ $\frac{3\pi}{5}$
- ○ $-\frac{2\pi}{5}$
- ○ $\frac{\pi}{5}$
- ○ $\frac{2\pi}{5}$

Questão 5. Seja $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,2] \setminus \{1\} \\ 1, & x = 1 \end{cases}$. Então

- ○ $\underline{\int_0^2} f(x)\,dx < \overline{\int_0^2} f(x)\,dx$
- ○ $\int_0^2 f(x)\,dx > 0$
- ○ qualquer que seja a partição P do intervalo $[0,2]$, $s(f,P) = 0$
- ○ existe uma partição P do intervalo $[0,2]$ tal que $S(f,P) = 0$