Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática

Cálculo para Engenharia

Licenciatura em Engenharia Biomédica

Teste 2 A :: 12 de janeiro de 2022

Nome [ ] Número [ ]

I

As respostas às questões deste grupo devem ser convenientemente justificadas.

Questão 1. [3 valores] Calcule

a) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+1}\,dx.$ *b)* $\displaystyle\int \frac{1}{x+x\ln^2 x}\,dx.$

Questão 2. [3 valores] Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{1}(2x+1)\,\text{arctg}\,x\,dx.$

Questão 3. [3 valores] Considere a região do plano

$$R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2-2x-8\le y\le 4-x^2 \wedge x-y+2\ge 0\right\}.$$

a) Apresente um esboço gráfico da região R.

b) Escreva uma expressão integral que permita calcular o valor da área da região R.

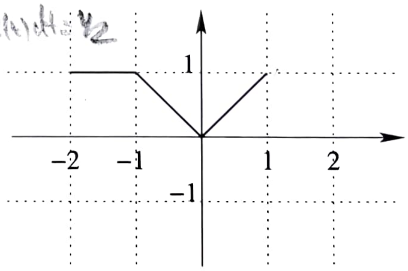
Questão 4. [5 valores] Considere a função $f:[-2,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ cujo gráfico se apresenta na figura anexa e seja $F:[-2,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt.$

a) Considere a partição $P=\{-2,0,1\}$ do intervalo $[-2,1]$. Determine $s(f,P)$ e $S(f,P)$.

$s(f,P) = 2\times 0 + 1\times 0 = 0 \quad S(f,P) = 2\times 1 + 1\times 1 = 3$

b) Determine $F(-2)$ e $F(1)$.

$F(-2)=\int_0^{-2} f(t)dt = -\int_{-2}^{0} f(t)dt = -\frac{3}{2} \quad F(1)=\int_0^1 f(t)dt = 1/2$



c) Determine o conjunto dos zeros da função F.

$F(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

d) Determine, caso existam, $F'(-1)$ e $F'(0)$.

$F'(-1)=f(-1)=1 \; ; \; F'(0)=f(0)=0$

e) Apresente, definindo de modo analítico, caso exista, uma primitiva da função f.

F é uma primitiva de f

$F(x)=\begin{cases} x+1/2 & -2\le x\le -1 \\ -x^2/2, & -1\le x\le 0 \\ \frac{x^2}{2}, & 0\le x\le 1\end{cases}$

f) Apresente, caso exista, uma função $g:[-2,2]\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que g é um prolongamento contínuo de f (ao intervalo $[-2,2]$) e tal que $\displaystyle\int_{-2}^{2} g(x)\,dx = 0.$

$g(1)=1$
$g(2)=t$

$\frac{y-1}{x-1}=t-1 \Leftrightarrow y-1=(x-1)(t-1) \Leftrightarrow y=(x-1)(t-1)+1$

$g(x)=(x-1)(t-1)+1 \Big\} -2=\int_1^2 g(x)dx \Rightarrow t=-5 \quad g(x)=\begin{cases} f(x), & -2\le x\le 1 \\ 7-6x, & 1\le x\le 2\end{cases}$

Q1

a) $\int \frac{x-1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$

$= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x + C$

$= \ln\sqrt{x^2+1} - \operatorname{arctg} x + C,\ C \in \mathbb{R}$

b) $\int \frac{1}{x + x\ln^2 x}\,dx = \int \frac{1}{x}\,\frac{1}{1+\ln^2 x}\,dx$

$= \operatorname{arctg}(\ln x) + C,\ C \in \mathbb{R}$

ou

$\int \frac{1}{x + x\ln^2 x}\,dx = \int \frac{1}{e^t + e^t t^2}\, e^t\,dt$

$t = \ln x$
$x = e^t$
$dx = e^t\,dt$

$= \int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}(\ln x) + C,\ C \in \mathbb{R}$

Q2 $\int_{-1}^{1} (2x+1)\operatorname{arctg} x\,dx =$

$\boxed{\int_{-1}^{1} uv' = uv\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} u'v}$

$u = \operatorname{arctg} x \quad u' = \frac{1}{x^2+1}$

$v' = 2x+1 \quad v = x^2+x$

$= (x^2+x)\operatorname{arctg} x\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{x^2+x}{x^2+1}\,dx$

$= 2\,\frac{\pi}{4} - \int_{-1}^{1} \frac{x^2+1+x-1}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2} - \int_{-1}^{1} dx - \int_{-1}^{1} \frac{x-1}{x^2+1}\,dx$

$= \frac{\pi}{2} - 2 - \left[\ln\sqrt{x^2+1} - \operatorname{arctg} x\right]_{-1}^{1} =$

$= \frac{\pi}{2} - 2 - \ln 2 + \frac{\pi}{4} + \ln 2 + \frac{\pi}{4} = \pi - 2.$

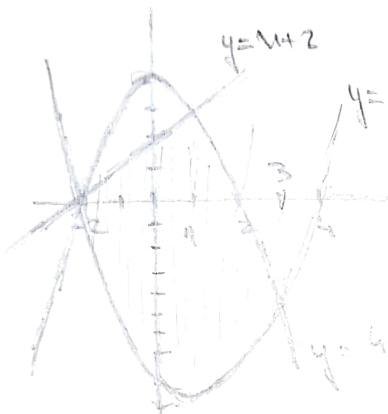
Q3

a) $y = x^2 - 2x - 8$

$x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{1+8} \Leftrightarrow x = 1 \pm 3 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 4$

$y = 4 - x^2$

$4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \pm 2$



$x^2 - 2x - 8 = 4 - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 12 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 3$

$4 - x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm 3}{2}$

$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$

b) $\displaystyle\int_{-2}^{1} (x + 2 - x^2 + 2x + 8)\,dx + \int_{1}^{3} (4 - x^2 - x^2 + 2x + 8)\,dx$

$\displaystyle = \int_{-2}^{1} (-x^2 + 3x + 10)\,dx + \int_{1}^{3} (-2x^2 + 2x + 12)\,dx$

- $\displaystyle\int_{-2}^{1} (x+2)\,dx + \int_{1}^{3} (4 - x^2)\,dx - \int_{-2}^{3} (x^2 - 2x - 8)\,dx$

- $\displaystyle\int_{-2}^{3} (4 - x^2 - x^2 + 2x + 8)\,dx - \int_{-2}^{1} (4 - x^2 - x - 2)\,dx$

Em cada uma das questões seguintes, assinale neste enunciado, a afirmação verdadeira. não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada desconta 0,25 valores.

Questão 1. Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0$. Então:

- ○ f é uma função ímpar.
- ○ $f(x) = 0 \; \forall x \in [-1, 1]$.
- ○ $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} f(x)\,dx = 0$.
- ● $\exists c \in \,]-1, 1[$ tal que $f(c) = 0$.

Questão 2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma sua primitiva. Então:

- ○ f e F são contínuas.
- ○ f e F são deriváveis.
- ○ f é contínua e F é derivável.
- ● nenhuma das respostas anteriores é verdadeira.

Questão 3. Seja f uma função tal que $\int_{1}^{2} f(x)\,dx = 2$. Então :

- ○ $\int_{1}^{2} f(-x)\,dx = -2$.
- ○ $\int_{-2}^{-1} f(-x)\,dx = -2$.
- ● $\int_{-2}^{-1} f(-x)\,dx = 2$.
- ○ $\int_{1}^{2} |f(x)|\,dx = 2$.

Questão 4. A identidade $\int_{1}^{3} \frac{1}{\ln(4x)}\,dx = k \int_{a}^{b} \frac{1}{\ln t}\,dt$ verifica-se quando:

- ● $a = 4, \; b = 12, \; k = \frac{1}{4}$.
- ○ $a = 4, \; b = 12, \; k = 1$.
- ○ $a = 1, \; b = 3, \; k = \frac{1}{4}$.
- ○ $a = 1, \; b = 3, \; k = 1$.

Questão 5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Se $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma primitiva de f então:

- ○ $F(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- ○ $F(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- ● F é uma função crescente.
- ○ F é uma função decrescente.

Questão 6. O integral $\int \frac{2(x^2 + x + 1)}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx$ é igual a:

- ○ $\int \frac{2}{(x^2+1)^2}\,dx \int \frac{x^2+x+1}{x^2+1}\,dx$.
- ○ $\int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx + \int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx$.
- ● $\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$.
- ○ nenhuma das respostas anteriores é verdadeira.