**Exame de Recurso de ÁLGEBRA LINEAR para a Engenharia**

Licenciatura em Engenharia Biomédica - Licenciatura em Engenharia Química e Biológica

9 de fevereiro de 2022 Duração: 2h

Nome : ______________________________ Nº __________ Curso ______________

*Relativamente às questões seguintes notar que nas suas respostas:*

*i) devem ser apresentados os cálculos essenciais e uma* ***justificação*** *das respostas, nos espaços indicados.*

*ii) a resolução de sistemas de equações lineares deve ser feita pelo método de Gauss, de Gauss- Jordan ou pela regra de Cramer;*

*iii) o cálculo de determinantes deve ser feito por aplicação do teorema de Laplace ou através da condensação de Gauss.*

1. Considere as matrizes de entradas reais: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) Caso exista, determine uma matriz $X$ tal que $AX = 2D^T$.

   (b) Sejam $C = \{(1,-1,0),\ (2,0,1),\ (1,1,2)\}$ e $\mathcal{S} = \langle C \rangle$. Diga se $(-2,2,2) \in \mathcal{S}$ e, em caso afirmativo, escreva $(-2,2,2)$ como combinação linear dos vetores de $C$.

2. (a) Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

(i) Calcule o produto $AC$ e $\mathtt{r}(AC)$. (ii) Resolva o sistema $(AC)X = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(b) Sejam $B_4$ a base canónica de $\mathbb{R}^4$ e $\mathcal{B} = (\,(1,1,1),\ (1,0,2),\ (0,1,0)\,)$ uma base de $\mathbb{R}^3$.
Sejam $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ aplicações lineares tais que $\mathcal{M}(f; B_4, \mathcal{B}) = A$ e $\mathcal{M}(g; B_4, B_4) = C$.
Calcule: (i) $f \circ g\,(1,0,-1,0)$ ; (ii) uma base do subespaço $Im\, f \circ g$ .

3. (a) Discuta o seguinte sistema de quatro equações lineares, de coeficientes reais, nas incógnitas $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ e $x_5$, em função dos parâmetros $a$ e de $b$:

$$\left\{\begin{array}{rrrrrcl} x_1 & +ax_2 & +x_3 & & +x_5 & = & 1 \\ & -x_2 & -ax_3 & +x_4 & & = & -b \\ -x_1 & -ax_2 & -x_3 & -bx_4 & & = & 3 \\ ax_1 & & & +x_4 & +x_5 & = & -b+1 \end{array}\right.$$

(b) Verifique se $\langle\, (1,0,-1,1),\ (1,-1,-1,0),\ (0,1,0,1),\ (1,0,0,1)\,\rangle = \{(x_1,\cdots,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1+x_2 = x_4\}$.

4. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ matrizes de entradas reais.

(a) Calcule: (i) $|A|$; (ii) $|AB(AB)^T|$.

(b) (i) Verifique se $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ é um vetor próprio da matriz $B\,B^T$. (ii) Calcule os valores próprios de $B\,B^T$.

(Sugestão: no cálculo do determinante, comece por usar a Teorema de Laplace pela 1ª linha)

COTAÇÃO: cada alínea vale 2.5 valores .