Análise Matemática para Engenharia

Licenciatura em Engenharia Biomédica

1º Teste :: 11 de abril de 2024

Duração :: 2h

Nome [   ] Número [   ]

Justifique, convenientemente, todas as respostas.

Exercício 1. (2.5 valores) Considere o conjunto $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < (x + 2)^2 + (y - 1)^2 \leq 1\} \cup \{(0, -1)\}$.

(a) Faça um esboço dos seguintes conjuntos: (i) B; (ii) $\overset{\circ}{B}$; (iii) B'; (iv) $\text{fr}(B)$.

(b) Diga, justificando, se o conjunto B é compacto.

Exercício 2.

1. (2 valores) Estude a existência de **<u>um e um só</u>** dos seguintes limites:

$$\textbf{I.} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 - \text{sen}\,(x^2)}{x^2 + y^2} \qquad\qquad \textbf{II.} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy - 2y^2}{x^2 + y^2}.$$

2. (4 valores) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \begin{cases} 2(x^2 + y^2) - 1 & \text{se} \quad x^2 + y^2 \leq 1, \\ x^2 & \text{se} \quad x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$

(a) Estude a existência dos seguintes limites: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} f(x, y)$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x, y)$ e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x, y)$.

(b) Determine, justificando, o conjunto dos pontos onde a função f é contínua.

Exercício 3. (5.5 valores) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2\,x^3}{x^2 + y^2} & \text{se} \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se} \quad (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

(a) Mostre que f é contínua no ponto $(0, 0)$.

(b) Determine a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ segundo qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^2$.

(c) Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 2$ e que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

(d) Mostre que f não é diferenciável em $(0, 0)$.

Exercício 4. (3 valores) Seja $f(x, y) = \left(2x + \dfrac{1}{y + 1}, \sqrt{x^2 - y^2}\right)$.

(a) Faça um esboço do domínio de f.

(b) Calcule $f'(1, 0)(3, 2)$.

Exercício 5.

1. (2 valores) Seja $f \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $(1, -2, e)$ tal que $\nabla f(1, -2, e) = (e, -1, e)$. Seja $g \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = f(\cos(xy^2), x^2 - 2y^2 - x, e^y)$. Determine $\nabla g(0, 1)$.

2. (1 valor) Determine uma equação do plano tangente ao gráfico da função $f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 1 + y^2 - x^2$ no ponto $(0, 2, 5)$.

FIM