Análise Matemática para Engenharia

Licenciatura em Engenharia Biomédica

2º Teste :: 21 de maio de 2024

Duração :: 2h

Nome [ ] Número [ ]

Justifique, convenientemente, todas as respostas.

Exercício 1. (5 valores) Considere a função $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ (x,y) & \longmapsto & 3x^2y + y^3 - \frac{3}{2}y^2 - \frac{3}{2}x^2 \end{array}$

(a) Determine os pontos estacionários de f.

(b) Verifique se $(0,1)$ é minimizante local de f.

(c) Seja $\Sigma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\}$. Calcule $\min f_{|\Sigma}$.

Exercício 2. (2.5 valores) Considere o integral $\mathcal{I} = \displaystyle\int_0^2 \int_{x^2}^4 x\cos(y^2)\,dydx$.
Esboce o domínio de integração, e calcule $\mathcal{I}$ invertendo a ordem de integração.

Exercício 3. (2 valores) Mude para coordenadas polares o integral $\displaystyle\int_0^2 \int_{\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{4-x^2}} y\,dydx$.

Exercício 4. (2.5 valores) Calcule, usando coordenadas polares, o integral $\displaystyle\iint_X \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, onde

$$X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge y \geq \frac{\sqrt{3}}{3}x\right\}.$$

Exercício 5. (5.5 valores) Considere o sólido $\mathcal{S}$ definido por

$$\mathcal{S} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \ \wedge \ 3z \geq x^2 + y^2 \right\}.$$

(a) Faça um esboço de $\mathcal{S}$.

(b) Estabeleça um integral triplo (ou soma de vários integrais triplos) em coordenadas cilíndricas que permita determinar o volume de $\mathcal{S}$.

(c) Estabeleça um integral triplo (ou soma de vários integrais triplos) em coordenadas esféricas que permita determinar o volume de $\mathcal{S}$.

(d) Calcule o volume de $\mathcal{S}$, recorrendo a um integral ou a uma soma de integrais.

Exercício 6. (2.5 valores) Responda a **uma e uma só** das duas questões seguintes:

I. Calcule o valor do integral

$$\iint_X \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx\,dy\,, \qquad \text{onde} \quad X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ x + y \leq 1\}\,,$$

efetuando a mudança de variáveis definida por $x - y = u\,,\ x + y = v\,.$

II. Seja $\mathcal{S} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + (z-1)^2 \geq 1 \ \wedge \ x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4 \ \wedge \ z \geq 1 \right\}$.
Estabeleça um integral triplo (ou soma de vários integrais triplos) em coordenadas esféricas que permita determinar o volume de $\mathcal{S}$.

FIM