Processamento de Sinal (2014/15)

Teste 1 – 4 de novembro de 2014 – Duração: 1h45

Nome:____ Nº_____________ Curso_________

Grupo I

Classifique, neste enunciado, as questões que se seguem indicando se são verdadeiras (V) ou falsas (F). Duas respostas erradas anulam uma resposta correta. Atenção às siglas que se seguem:

SFTC - Série de Fourier em Tempo Contínuo

1. O degrau de *heaviside* é uma função própria dos sistemas LIT. F
2. O impulso de Dirac, $\delta(t)$, é definido como sendo nula para $t \neq 0$ e tomando o valor 1 para $t = 0$. F
3. Caso o sinal seja real e observe uma simetria ímpar, então os coeficientes da sua SFTC terão sempre parte real nula. V
4. A potencia de um sinal pode ser calculada pela sua evolução no tempo, ou usando o conteúdo espetral que resulta do cálculo dos coeficientes da SFTC . V
5. Um sistema sem memória é causal. V
6. Num sistema LIT, se a sua entrada corresponder a um sinal sinusoidal de frequência f_0, então a sua saída será um sinal igualmente sinusoidal de frequência f_0, mas, possivelmente, com variação de amplitude e fase. V
7. Num sistema LIT definido pela sua resposta impulsional $h(t)$ se a entrada é um impulso de Dirac, então a saída é $\delta(t)$. F
8. A resposta impulsional corresponde ao integral da resposta ao degrau. F
9. Um sistema tem memória se, por exemplo, h[n]=δ[n+1]. V
10. A resposta impulsional $h(t)$ da série (ou cascata) de dois sistemas LIT ($h_1(t)$ e $h_2(t)$ respetivamente) é definida como $h(t) = h_1(t) * h_2(t)$. V
11. A exponencial complexa em tempo discreto é sempre periódica. F
12. A convolução de um sinal com um impulso de Dirac resulta no próprio sinal, isto é: $x(t) * \delta(t) = x(t)$. V

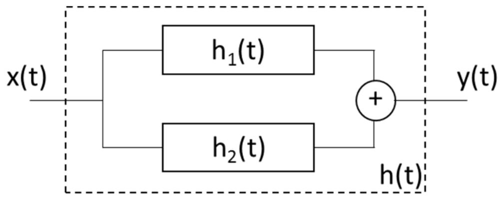
Grupo II

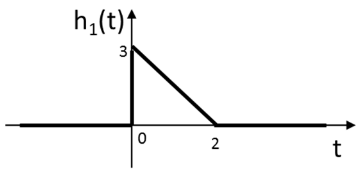
Responda às seguintes questões numa folha separada. Todas as respostas carecem de uma justificação adequada.

1. Caracterize o sistema em tempo discreto definido por $y[n] = x[n-1] + x[1-n] + 2$, em que $x[n]$ é a entrada e $y[n]$ é a saída, relativamente às propriedade de: memória, causalidade, linearidade, invariância no tempo e estabilidade.

Tem memória, é linear e estável. Não é causal nem invariante no tempo.

2. Considere um sistema LIT, de saída $y(t)$ e entrada $x(t)$, composto por dois subsistemas em paralelo, de resposta impulsional $h_1(t)$ e $h_2(t)$, respetivamente, conforme esquematizado na figura seguinte (à esquerda), que também apresenta a resposta impulsional de um dos subsistemas (à direita):





Considere ainda que $h_2(t) = \delta(t-5)$ e que a entrada desse sistema, $x(t)$, é definida por:

$$x(t) = u(3+t) - u(t)$$

Responda às seguintes questões relativamente a este sistema:

a) Qual a resposta impulsional do sistema total, isto é, qual a expressão (ou gráfico) que define $h(t)$?

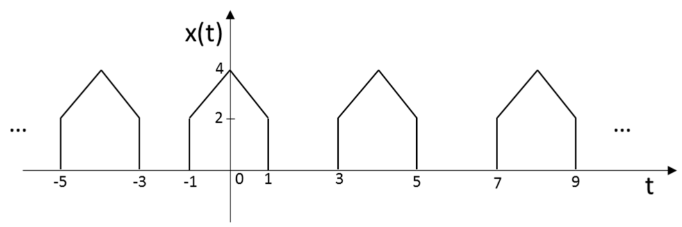
NOTA: caso não consiga responder a esta questão e precise de $h(t)$ para responder a uma das questões seguintes, então pode considerar que $h(t) = h_1(t)$, mas neste caso apenas terá cotação parcial.

b) Calcule a resposta do sistema, $y(t)$, quando a entrada é o $x(t)$ definido anteriormente.

c) Calcule a resposta do sistema no instante 0 quando a entrada é $g(t) = 3x(t-2)$, isto é calcule $y(0)$.

d) Caracterize este sistema relativamente à existência de memória, à causalidade e à estabilidade.

3. Considere um sinal periódico, $x(t)$, representado na figura seguinte:



a) Qual o período e o valor médio do sinal?

b) Calcule a expressão que define os coeficientes da série de Fourier deste sinal.

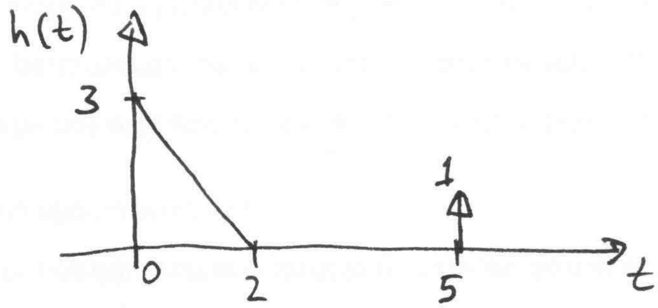
NOTA: serão valorizadas as resoluções que não partem da equação de análise.

c) Calcule o módulo e a fase do 1º e 2º harmónicos.

d) Calcule os coeficientes da série de Fourier do sinal $r(t) = x(t).g(t)$, sabendo que $g(t)$ é periódico com período igual ao de $x(t)$ e que $g(t)$ é definido pela série de Fourier que tem os coeficientes dados pela seguinte expressão:

$$b_k = \begin{cases} j\dfrac{2}{|k|}, & \text{se } k = \{-2,2\} \\ 0, & \text{se } k \neq \{-2,2\} \end{cases}$$

② a) $h(t) = h_1(t) + h_2(t)$



b) $y(t) = x(t) * h(t) = x(t) * \left(h_1(t) + h_2(t)\right)$

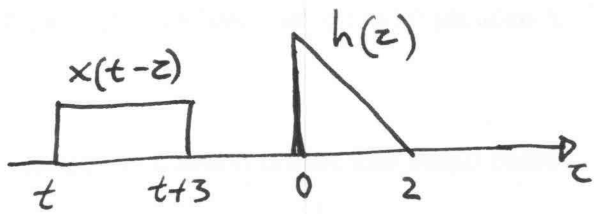
$$= \underbrace{x(t) * h_1(t)}_{y_1(t)} + \underbrace{x(t) * h_2(t)}_{y_2(t)}$$

$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$

—— $y_1(t)$ ——

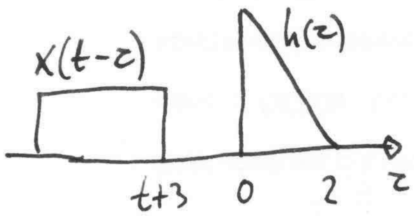
$y_1(t) = x(t) * h_1(t) \Leftrightarrow$

$y_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$



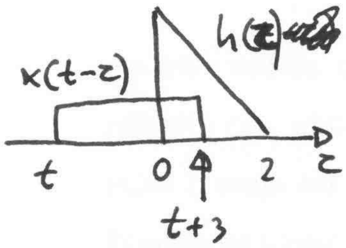
$h(\tau) = -\frac{3}{2}\tau + 3, \quad 0 \leq t \leq 2$

Si $t+3 < 0 \Leftrightarrow t < -3$



$y_1(t) = 0$

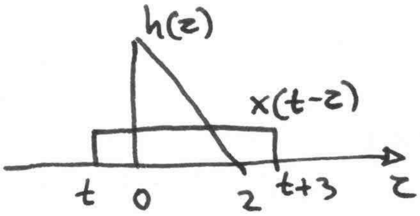
Se $0 \le t+3 < 2 \iff -3 \le t < -1$



$$y_1(t) = \int_0^{t+3} 1.\left(-\frac{3}{2}\tau + 3\right) d\tau = \left[-\frac{3}{4}\tau^2 + 3\tau\right]_0^{t+3}$$

$$= -\frac{3}{4}t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{9}{4}$$

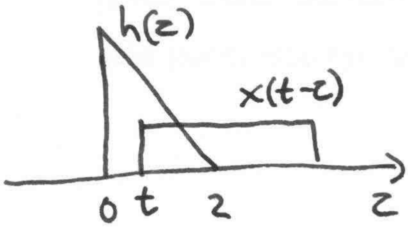
Se $t \le 0 \wedge t+3 > 2 \iff -1 \le t \le 0$



$$y_1(t) = \int_0^{2} 1.\left(-\frac{3}{2}\tau + 3\right) d\tau = \left[-\frac{3}{4}\tau^2 + 3\tau\right]_0^{2}$$

$$y_1(t) = 3$$

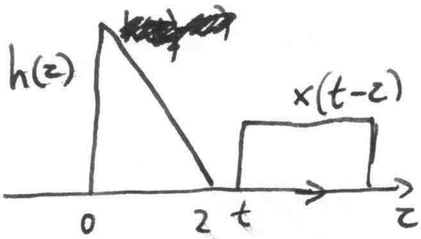
Se $0 \le t \le 2$



$$y_1(t) = \int_t^{2} 1.\left(-\frac{3}{2}\tau + 3\right) d\tau = \left[-\frac{3}{4}\tau^2 + 3\tau\right]_t^{2}$$

$$= \frac{3}{4}t^2 - 3t + 3$$

Se $t \ge 2$



$$y_1(t) = 0$$

$y_2(t)$

$$y_2(t) = x(t) * h_2(t) = x(t) * \delta(t-5) = x(t-5) \Rightarrow$$

$$y_2(t) = u(t-2) - u(t-5) \quad , \quad \forall t \quad \text{ou} \quad y_2(t) = \begin{cases} 1, & 2 \leq t \leq 5 \\ 0, & \text{outros} \end{cases}$$

$y(t)$

$y(t) = y_1(t) + y_2(t)$, então

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < -3 \\ -\frac{3}{4}t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{9}{4}, & -3 \leq t < -1 \\ 3, & -1 \leq t < 0 \\ \frac{3}{4}t^2 - 3t + 3, & 0 \leq t < 2 \\ 1, & 2 \leq t \leq 5 \\ 0, & t > 5 \end{cases}$$

c) $g(t) = 3x(t-2) \longrightarrow y_1(t)\Big|_{t=0} = ?$

Se o sistema é LIT, então

$$x(t) \longrightarrow y(t)$$

$$3x(t-2) \longrightarrow 3y(t-2)$$

logo

$y_1(t) = 3y(t-2)$, para $t=0$

$$y_1(0) = 3y(-2) = 3\left(-\frac{3}{4}(-2)^2 - \frac{3}{2}(-2) + \frac{9}{4}\right) = \frac{27}{4}$$

d) $h(t) \neq 0$ para $t \neq 0$, logo tem memória

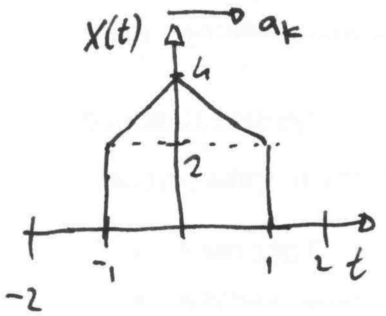
$h(t) = 0$, para $t < 0$, logo é causal

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\,dt = 3+1 = 4 < \infty$, logo é estável.

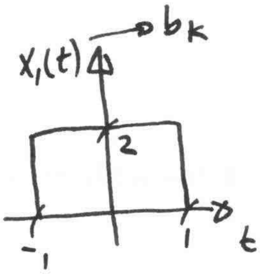
③ a) $T = 4$

valor médio $= \frac{3}{2}$

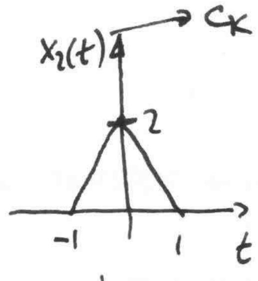
b) Considerando 1 período



=

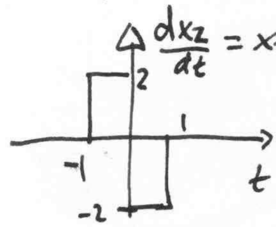


+



↓ derivando

$\frac{dx_2}{dt} = x_3(t) \to d_k$



$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, então

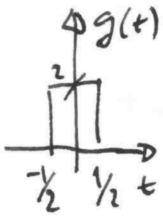
$$\begin{array}{ccccc} x(t) & = & x_1(t) & + & x_2(t) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ a_k & = & b_k & + & c_k \end{array}$$

$b_k = \frac{2\operatorname{sen}\left(2k\pi/4 \cdot 1\right)}{k\pi}$ (diretamente do formulário)

$b_k = \frac{2\operatorname{sen}(k\pi/2)}{k\pi}$

Considerando

$g(t) \to g_k = \frac{2\operatorname{sen}(k\pi/4)}{k\pi}$



então $x_3(t) = g(t+1/2) - g(t-1/2)$

$$d_k = g_k \cdot e^{jk\frac{2\pi}{4}\cdot\frac{1}{2}} - g_k \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{4}\cdot\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2\operatorname{sen}(k\pi/4)}{k\pi} \cdot 2j\operatorname{sen}(k\pi/4)$$

$$= \frac{j}{k\pi}\left(2\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{4}\right)\right)^2$$

Se $x_2(t) = \int_{-\infty}^{t} x_3(t)\,dt$, então

$$c_k = \frac{1}{jk\frac{2\pi}{4}} \cdot \frac{j}{k\pi} \cdot \left(2\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{4}\right)\right)^2 = 2\left(\frac{2}{k\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{4}\right)\right)^2$$

finalmente

$$a_k = \frac{2\operatorname{sen}(k\pi/2)}{k\pi} + 2\left(\frac{2}{k\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{4}\right)\right)^2$$

c) $a_1 = \frac{2 \cdot \text{Sen}(\pi/2)}{\pi} + 2 \cdot \left(\frac{2}{\pi} \text{Sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = \frac{2}{\pi} + \frac{8}{\pi^2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi^2}$

Como o sinal é real e par, então os coeficientes também são reais e pares, logo

$a_1 = a_{-1}$ e $a_2 = a_{-2}$

$|a_1| = |a_{-1}| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi^2}$ $\quad \angle a_1 = \angle a_{-1} = 0°$

$a_2 = \frac{2 \cdot \cancel{\text{Sen}(\pi)}^{0}}{\cancel{2}\pi} + 2 \cdot \left(\frac{2}{\pi} \text{Sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 = 2 \cdot \frac{4}{\pi^2} = \frac{8}{\pi^2}$

$|a_2| = |a_{-2}| = \frac{8}{\pi^2}$; $\angle a_2 = \angle a_{-2} = 0°$

d) $z(t) = x(t) \cdot g(t)$, $\quad b_k = \begin{cases} j\frac{2}{|k|}, & k = \{-2, 2\} \\ 0, & k \neq \{-2, 2\} \end{cases}$

$\downarrow$

c_k

$b_{-2} = b_2 = j$

Pela propriedade da multiplicação:

$x(t) \cdot g(t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} b_l \, a_{k-l}$, então:

$c_k = b_{-2} \cdot a_{k+2} + b_2 \cdot a_{k-2}$, pois todos os outros termos são nulos!

$c_k = j a_{k+2} + j a_{k-2}$