Processamento de Sinal (2013/14)

Teste 2 – 21 de janeiro de 2014

Nome:____ Nº_____________ Curso_________

Grupo I

Classifique, neste enunciado, as questões que se seguem indicando se são verdadeiras (V) ou falsas (F). Duas respostas erradas anulam uma resposta correta. Atenção às siglas que se seguem:

SFTC - Série de Fourier em Tempo Contínuo
SFTD - Série de Fourier em Tempo Discreto
TFTC - Transformada de Fourier em Tempo Contínuo
TFTD - Transformada de Fourier em Tempo Discreto
f_a – Frequência de amostragem

1. Os coeficientes da SFTD são periódicos, com período igual a 2π._____F________
2. Tal como na SFTC, na SFTD os coeficientes $|a_k| = |a_{-k}|$ desde que o sinal seja real. _____V______
3. Caso o sinal seja real e observe uma simetria ímpar, então os coeficientes da sua SFTD serão puramente imaginários. ______V________
4. A TFTC pode ser usada caso o sinal seja aperiódico ou periódico. _______V__________
5. O espetro de um sinal contínuo corresponde um impulso de *Dirac* (escalado). _____V____ ____
6. A energia do sinal pode ser calculada pela sua evolução no tempo, ou usando o conteúdo espetral que resulta do cálculo da TFTC . ____V_______
7. O resultado da TFTD apenas é periódico se o sinal também for periódico. _______F________
8. O resultado da TFTD é sempre discreto, pois estamos a tratar de tempo discreto. _______F__________
9. Um sinal amostrado pode ser recuperado desde que usemos uma f_a superior a duas vezes a largura de banda do sinal. ______V______
10. Se a f_a for inferior a duas vezes a largura de banda do sinal, então podemos recuperar o sinal usando um filtro passa-baixo ideal. _______F________
11. O espetro de um sinal que foi amostrado só é periódico se o sinal original também o era. _______F__________
12. O aliasing pode ser evitado usando filtros passa-banda. ______F__________

Grupo II

Responda às seguintes questões numa folha separada. Todas as respostas carecem de uma justificação adequada.

1. Sabendo que um sinal $x[n]$ é periódico com período 4 e que os coeficientes da série de Fourier que o define são dados pela expressão:

$$a_k = \frac{1}{4}\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)$$

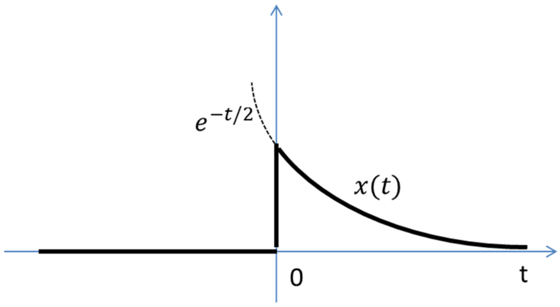
   a) Defina os coeficientes da série de Fourier dos seguintes sinais:
      a. $g[n] = 3x[n-2] + 1$
      b. $f[n] = x[n] * x[n]$, (em que * é o operador de convolução)
   b) Calcule a potência média total associada a um período de $x[n]$.

2. Um sistema LIT é caracterizado pela seguinte resposta em frequência:

$$H(j\omega) = \frac{e^{-j\omega 2}}{\frac{1}{2} + j\omega}$$

a) Calcule a resposta impulsional do sistema.

b) Calcule o espetro de uma entrada $x(t)$ que é definida pelo seguinte gráfico:



c) Calcule o espetro da saída deste sistema, $Y(j\omega)$,quando a entrada é $x(t)$

d) Calcule a resposta do sistema, $y(t)$, quando a entrada é $x(t)$.

Caso não tenha conseguido resolver c), considere $Y(j\omega) = \frac{e^{-j\omega}}{(1+j\omega)^2} - e^{j\omega}$

3. Um sistema LIT em tempo discreto é descrito pela seguinte equação às diferenças

$$2y[n] = -2x[n] + y[n-1]$$

a) Calcule a resposta em frequência deste sistema.

b) Calcule a saída do sistema, $y[n]$, quando a entrada é o sinal $x[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]$.

(Caso não tenha conseguido resolver a) considere o seguinte resultado:$H(\Omega) = \frac{1}{e^{j\Omega}(4+2e^{-j\Omega})}$)

① $a_k = \frac{1}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{4}\right)$, $N_0 = 4$

a) a. $g[n] = 3x[n-2] + 1$

$g[n] \longrightarrow b_k$

$b_k = 3\, a_k\, e^{-jk\Omega_0 2}$, $k \neq 0$

$= \frac{3}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{4}\right) e^{-jk\frac{2\pi}{4}\cdot 2} =$

$= \frac{3}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{4}\right) e^{-jk\pi}$, $k \neq 0$

$b_0 = 1$

b. $f[n] = x[n] * x[n]$

$f[n] \longrightarrow c_k$

$c_k = N_0 \cdot a_k \cdot a_k = 4 \cdot \frac{1}{4^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{k\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2\left(\frac{k\pi}{4}\right)$

b) $\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} |a_k|^2$

$a_0 = 0$

$a_1 = \frac{1}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{8}$

$a_2 = \frac{1}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}$

$a_3 = \frac{1}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{8}$

$\sum_{k=\langle N \rangle} |a_k|^2 = 0 + \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^2 = \frac{2}{64} + \frac{4}{64} + \frac{2}{64} = \frac{1}{8}$

2

$$H(j\omega) = \frac{e^{-j\omega 2}}{\frac{1}{2} + j\omega}$$

a) $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\}$

$$H(j\omega) = \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{2} + j\omega}}_{H_1(j\omega)} e^{-j\omega 2}$$

$$H(j\omega) = H_1(j\omega)\, e^{-j\omega 2}$$

$$h_1(t) = e^{-\frac{1}{2}t} u(t)$$

$$h(t) = h_1(t-2)$$

$$h(t) = e^{-\frac{t-2}{2}} u(t-2)$$

b) $x(t) = e^{-t/2} \cdot u(t)$

$$X(j\omega) = \frac{1}{\frac{1}{2} + j\omega}$$

c) $$Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega) = \frac{e^{-j\omega 2}}{\frac{1}{2} + j\omega} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} + j\omega} =$$

$$= \frac{e^{-j\omega 2}}{\left(\frac{1}{2} + j\omega\right)^2}$$

d) $$Y(j\omega) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + j\omega\right)^2} \cdot e^{-j\omega 2} = Y_1(j\omega)\, e^{-j\omega 2}, \quad Y_1(j\omega) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + j\omega\right)^2}$$

$$y(t) = y_1(t-2)$$

$$y_1(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y_1(j\omega)\} = t\, e^{-\frac{1}{2}t} u(t)$$

$$y(t) = (t-2)\, e^{-\frac{t-2}{2}} u(t-2)$$

3

$$2y[n] = -2x[n] + y[n-1] \qquad (1)$$

a) $$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$$

Aplicando a Transformada de Fourier à equação (1)

$$2Y(\Omega) = -2X(\Omega) + Y(\Omega)\,e^{-j\Omega} \iff$$

$$\iff \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{-2}{2-e^{-j\Omega}} = H(\Omega)$$

b) $$H(\Omega) = \frac{-2}{2-e^{-j\Omega}} = \frac{-1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

$$x[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] \Rightarrow X(\Omega) = 1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}$$

$$Y(\Omega) = H(\Omega).X(\Omega) = -\frac{1}{1\cancel{+}-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right) \iff$$

$$Y(\Omega) = -\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}} - \frac{1}{2}\,\frac{e^{-j\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

$$y[n] = \mathcal{F}^{-1}\{Y(\Omega)\} = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n] - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]$$

ALTERNATIVAS

2. a) $$Y(j\omega) = \frac{e^{-j\omega}}{(1+j\omega)^2} - e^{j\omega}$$

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(j\omega)\} = (t-1)\,e^{-(t-1)}u(t-1) - \delta(t+1)$$

3. b) $$H(\Omega) = \frac{1}{e^{j\Omega}(4+2e^{-j\Omega})} = \frac{e^{-j\Omega}}{4(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega})}$$

$$X(\Omega) = 1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}$$

$$Y(\Omega) = H(\Omega)\cdot X(\Omega) = \frac{e^{-j\Omega}}{4\cancel{(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega})}}\cdot\cancel{\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)} = \frac{e^{-j\Omega}}{4}$$

$$y[n] = \mathcal{F}^{-1}\{Y(\Omega)\} = \frac{1}{4}\delta[n-1]$$