Análise Matemática para Engenharia

Licenciatura em Engenharia Biomédica

1º Teste :: 11 de abril de 2024

Duração :: 2h

Nome [ ] Número [ ]

Justifique, convenientemente, todas as respostas.

Exercício 1. (2.5 valores) Considere o conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < (x+1)^2 + (y-2)^2 \leq 1\} \cup \{(1,0)\}$.

(a) Faça um esboço dos seguintes conjuntos: (i) A; (ii) $\overset{\circ}{A}$; (iii) A'; (iv) fr(A).

(b) Diga, justificando, se o conjunto A é compacto.

Exercício 2.

1. (2 valores) Estude a existência de **um e um só** dos seguintes limites:

$$\textbf{I.} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - \text{sen}\,(y^2)}{x^2+y^2} \qquad\qquad \textbf{II.} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy - 3y^2}{x^2+y^2}.$$

2. (4 valores) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} 2(x^2+y^2) - 1 & \text{se} \quad x^2+y^2 > 1, \\ x^2 & \text{se} \quad x^2+y^2 \leq 1. \end{cases}$

(a) Estude a existência dos seguintes limites: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$ e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$.

(b) Determine, justificando, o conjunto dos pontos onde a função f é contínua.

Exercício 3. (5.5 valores) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Mostre que f é contínua no ponto $(0,0)$.

(b) Determine a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ segundo qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^2$.

(c) Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ e que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

(d) Mostre que f não é diferenciável em $(0,0)$.

Exercício 4. (3 valores) Seja $f(x,y) = \left(\sqrt{x^2-y^2}, x + \dfrac{1}{y-1}\right)$.

(a) Faça um esboço do domínio de f.

(b) Calcule $f'(1,0)(3,2)$.

Exercício 5.

1. (2 valores) Seja $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $(1,-1,e)$ tal que $\nabla f(1,-1,e) = (e,-1,e)$. Seja $g\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x,y) = f(\cos(xy^2), x^2 - y^2 - x, e^y)$. Determine $\nabla g(0,1)$.

2. (1 valor) Determine uma equação do plano tangente ao gráfico da função $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = 1 + x^2 - y^2$ no ponto $(2,0,5)$.

FIM