Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática

Cálculo para Engenharia

Licenciatura em Engenharia Biomédica

Teste 2 A :: 3 de janeiro de 2024

Nome ______________________ Número __________

I

As respostas às questões deste grupo devem ser dadas na folha de exame.

Questão 1. [2 valores] Determine $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x^2}$.

Questão 2. [2 valores] Calcule $\displaystyle\int \frac{1+\operatorname{arctg} x}{x^2+1}\,dx$.

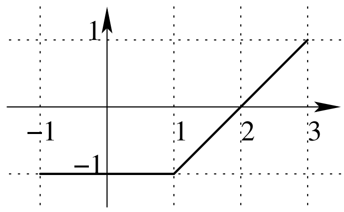
Questão 3. [2 valores] Calcule $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{2x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx$.

Questão 4. [3 valores] Considere a região do plano $R = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y \geq 0 \wedge 3x \leq y \leq 4-x^2\right\}$.

a) Apresente um esboço da região R.

b) Escreva uma expressão integral que permita calcular a área da região R.

Questão 5. [4 valores] Considere a função $f : [-1,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ cujo gráfico se apresenta na figura anexa e seja $F : [-1,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.



a) Determine $F(-1)$ e $F(2)$.

b) Determine o conjunto dos zeros da função F.

c) Determine, caso existam, $F'(1)$ e $F'(2)$.

d) Defina analiticamente, caso exista, uma primitiva da função f.

II

Assinale neste enunciado se cada uma das proposições é verdadeira ou falsa.
Cada resposta certa vale 0.5 valor e cada resposta errada -0,5 valores.

	V	F
a) Se f é uma função derivável e F é uma sua primitiva então $f'(x) = F(x)$.	○	○
b) Se $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ é uma função contínua e ímpar então dado $a\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.	○	○
c) Se $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ é uma função integrável tal que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ então $\exists c\in\,]0,1[$ tal que $f(c)=0$.	○	○
d) Se f é integrável no intervalo $[-1,1]$ então $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(\lvert x\rvert)\,dx = 2\int_0^1 f(x)\,dx$.	○	○

Em cada uma das questões seguintes, assinale neste enunciado, a afirmação verdadeira.
Não deve apresentar qualquer justificação.
Cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada -0,25 valores.

Questão 1. Seja $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ uma função derivável tal que $f(-1) = f(1) = -1$ e $f(0) = 1$. Então:

- ◯ f' tem pelo menos um zero;
- ◯ f' nunca se anula;
- ◯ f' tem um zero à esquerda de $\frac{1}{2}$ e outro à sua direita;
- ◯ f é crescente em $[-1,0]$ e decrescente em $[0,1]$.

Questão 2. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função derivável cuja derivada nunca se anula. Então:

- ◯ f não tem mínimo nem máximo;
- ◯ f' é derivável;
- ◯ $f(x) \neq 0,\ \forall x \in [0,1]$;
- ◯ f é monótona.

Questão 3. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua não negativa e seja F uma sua primitiva. Então:

- ◯ F é não negativa;
- ◯ F é crescente;
- ◯ F admite pelo menos um ponto de descontinuidade;
- ◯ F verifica a desigualdade $F(x) \geq f(x)$, para todo o $x \in [0,1]$.

Questão 4. O integral $\displaystyle\int \frac{8}{x(x^2-4)}\,dx$ é igual a:

- ◯ $\displaystyle\int \frac{8}{x}\,dx \int \frac{1}{x^2-4}\,dx;$
- ◯ $\displaystyle\int \frac{1}{x+2}\,dx + \int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx;$
- ◯ $\displaystyle\int \frac{1}{x+2}\,dx + \int \frac{1}{x-2}\,dx - \int \frac{2}{x}\,dx;$
- ◯ nenhuma das anteriores.

Questão 5. Seja $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,2] \setminus \{1\} \\ 1, & x = 1 \end{cases}$. Então:

- ◯ $\displaystyle\underline{\int_0^2} f(x)\,dx < \overline{\int_0^2} f(x)\,dx;$
- ◯ $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx > 0;$
- ◯ qualquer que seja a partição P do intervalo $[0,2]$, $s(f,P) = 0$;
- ◯ existe uma partição P do intervalo $[0,2]$ tal que $S(f,P) = 0$.