Processamento de Sinal (2013/14)

Teste 2 – 24 de janeiro de 2014

Nome:____ Nº_____________ Curso_________

Grupo I

Classifique, neste enunciado, as questões que se seguem indicando se são verdadeiras (V) ou falsas (F). Duas respostas erradas anulam uma resposta correta. Atenção às siglas que se seguem:

SFTC - Série de Fourier em Tempo Contínuo
SFTD - Série de Fourier em Tempo Discreto
TFTC - Transformada de Fourier em Tempo Contínuo
TFTD - Transformada de Fourier em Tempo Discreto
f_a – Frequência de amostragem

1. Os coeficientes da SFTD são periódicos, com período igual a 2π._____F________
2. Tal como na SFTC, na SFTD os coeficientes $|a_k| = |a_{-k}|$ desde que o sinal seja real. _____V______
3. Caso o sinal seja real e observe uma simetria par, então os coeficientes da sua SFTD serão sempre positivos. ______F________
4. A TFTC pode ser usada caso o sinal seja aperiódico ou periódico. ________V_________
5. O espetro de um sinal constante corresponde um impulso de *Dirac* (escalado). _______V__ ____
6. A energia do sinal pode ser calculada pela sua evolução no tempo, ou usando o conteúdo espetral que resulta do cálculo da TFTC . ____V_______
7. O resultado da TFTD apenas é periódico se o sinal também for periódico. ______F_________
8. O resultado da TFTD é sempre discreto, pois estamos a tratar de tempo discreto. _______F__________
9. Um sinal amostrado pode ser recuperado desde que usemos uma f_a igual ou superior a duas vezes a largura de banda do sinal. ______F______
10. Se a f_a for inferior a duas vezes a largura de banda do sinal, então podemos recuperar o sinal usando um filtro passa-baixo ideal. ______F_________
11. O espetro de um sinal que foi amostrado só é periódico se o sinal original também o era. _______F__________
12. O aliasing pode ser evitado usando filtros passa-banda. _______F_________

Grupo II

Responda às seguintes questões numa folha separada. Todas as respostas carecem de uma justificação adequada.

1. Sabendo que um sinal $x[n]$ é periódico com período 5 e que os coeficientes da série de Fourier que o define são dados pela expressão:

$$a_k = \frac{1}{4}\cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)$$

Responda às seguintes questões sem calcular explicitamente o valor de $x[n]$.

a) Defina os coeficientes da série de Fourier dos seguintes sinais:
   a. $g[n] = x[-n] + 1$
   b. $f[n] = x[n-1] * x[n]$, (em que * é o operador de convolução)

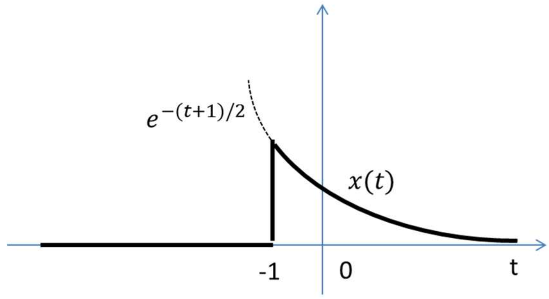
b) Calcule a potência média total associada a um período de $x[n]$.

2. Um sistema LIT tem a sua relação entre entrada, $x(t)$, e saída, $y(t)$, definida pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 9y(t) = -\frac{1}{2}x(t) - \frac{dx(t)}{dt}$$

a) Calcule a resposta em frequência do sistema.

b) Calcule o espetro de uma entrada $x(t)$ que é definida pelo seguinte gráfico (traço cheio):



c) Calcule o espetro da saída deste sistema, $Y(j\omega)$,quando a entrada é $x(t)$

d) Calcule a resposta do sistema, $y(t)$, quando a entrada é $x(t)$.

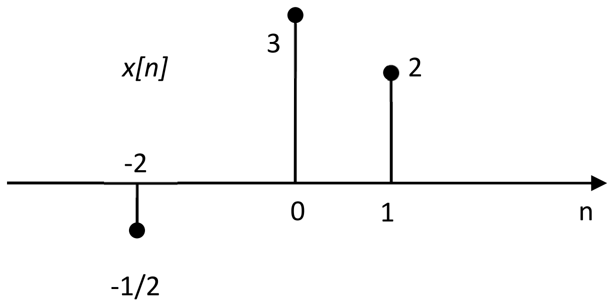
(Caso não tenha conseguido resolver c), considere $Y(j\omega) = \frac{e^{-j\omega}}{(1+j\omega)^3} - e^{j\omega}$)

3. Um sistema LIT em tempo discreto é descrito pela seguinte resposta em frequência

$$H(\Omega) = \frac{2}{e^{j2\Omega}(3 + 2e^{-j\Omega})}$$

a) Calcule a resposta impulsional deste sistema.

b) Calcule a saída do sistema, $y[n]$, quando a entrada, $x[n]$, é o sinal representado no gráfico que se segue:



(1) $a_k = \frac{1}{4} \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)$

a) a. $g[n] = \cancel{x}[-n] + 1$

$\downarrow$

$b_k = a_{-k} \quad , \quad k \neq 0$

$b_k = \frac{1}{4} \cos\left(-\frac{k\pi}{4}\right) = \frac{1}{4} \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right), \; k \neq 0$

$b_0 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$

b. $f[n] = x[n-1] * x[n]$

$\downarrow$

$c_k = N. \overbrace{a_k e^{-j\frac{2k\pi}{5}}} . a_k =$

$= 5. \left[\frac{1}{4} \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right)\right]^2 e^{-j\frac{2k\pi}{5}}$

$= \frac{5}{16} \cos^2\left(\frac{k\pi}{4}\right) e^{-j\frac{2k\pi}{5}}$

b) $a_0 = \frac{1}{4} \cos 0 = \frac{1}{4}$

$a_1 = \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4} . \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{8}$

$a_2 = \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{2} = 0$

$a_3 = \frac{1}{4} \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{8}$

$a_4 = \frac{1}{4} \cos \pi = -\frac{1}{4}$

Potência $= \sum_{k=\langle N \rangle} |a_k|^2$

(Relação de parseval)

$\sum_{k=0}^{4} |a_k|^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 =$

$= \frac{1}{16} + \frac{2}{64} + \frac{2}{64} + \frac{1}{16}$

$= \frac{2}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{2}{32} =$

$= \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$ //

② $$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 9y(t) = -\frac{1}{2}x(t) - \frac{dx(t)}{dt}$$

a) $\mathcal{F}\{-\} \Rightarrow (j\omega)^2 Y(j\omega) + 6j\omega Y(j\omega) + 9Y(j\omega) = -\frac{1}{2}X(j\omega) - j\omega X(j\omega)$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{-1/2 - j\omega}{(j\omega)^2 + 6j\omega + 9} = \frac{-1/2 - j\omega}{(j\omega+3)^2}$$

b) $x(t) = e^{-(t+1)/2}u(t+1)$

$$X(j\omega) = \frac{1}{1/2 + j\omega} \cdot e^{j\omega}$$

c) $Y(j\omega) = H(j\omega) \cdot X(j\omega) =$

$$= \frac{-(1/2 + j\omega)}{(j\omega+3)^2} \cdot \frac{e^{j\omega}}{1/2 + j\omega} = \frac{-e^{j\omega}}{(j\omega+3)^2}$$

d) $Y(j\omega) = -e^{j\omega}Y_1(j\omega)$, $Y_1(j\omega) = \frac{1}{(j\omega+3)^2}$

$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(j\omega)\} = y_1(t+1)$, $y_1(t) = t e^{-3t}u(t)$

$$y(t) = -(t+1)e^{-3(t+1)}u(t+1)$$

(3)

$$H(\Omega) = \frac{2}{e^{j2\Omega}\left(3 + 2e^{-j\Omega}\right)}$$

a) $$H(\Omega) = \frac{2\,e^{-j2\Omega}}{3\left(1 + \frac{2}{3}e^{-j\Omega}\right)} = \frac{2}{3}e^{-j2\Omega}H_1(\Omega)$$

$$H_1(\Omega) = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}e^{-j\Omega}} \qquad h_1(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\Omega)\} = \left(-\frac{2}{3}\right)^n u[n]$$

$$h[n] = \mathcal{F}^{-1}\{H(\Omega)\} = \frac{2}{3}h_1[n-2] = \frac{2}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-2}u[n-2]$$

b) $$x[n] = -\frac{1}{2}\delta[n+2] + 3\delta[n] + 2\delta[n-1]$$

$$X(\Omega) = \mathcal{F}\{x[n]\} = -\frac{1}{2}e^{j2\Omega} + 3 + 2e^{-j\Omega}$$

$$Y(\Omega) = H(\Omega)\cdot X(\Omega) = \frac{2}{e^{j2\Omega}\left(3+2e^{-j\Omega}\right)}\left[-\frac{1}{2}e^{j2\Omega} + 3 + 2e^{-j\Omega}\right]$$

$$= \frac{-2\cdot\frac{1}{2}\,e^{j2\Omega}}{e^{j2\Omega}\left(3+2e^{-j\Omega}\right)} + \frac{2\left(3+2e^{-j\Omega}\right)}{e^{j2\Omega}\left(3+2e^{-j\Omega}\right)} =$$

$$= \frac{-1}{3+2e^{-j\Omega}} + 2e^{-j2\Omega}$$

$$y[n] = \mathcal{F}^{-1}\{Y(\Omega)\} = -\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)^n u[n] + 2\delta[n-2]$$