Nome ______________________ Número __________

Justifique, convenientemente, todas as respostas.

Exercício 1. (5 valores) Considere a função $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}. \\ (x,y) & \longmapsto & y^3+3x^2y-\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}y^2 \end{array}$

(a) Determine os pontos estacionários de f.

(b) Verifique se $(0,1)$ é minimizante local de f.

(c) Seja $\Sigma=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=2\}$. Calcule $\min f_{|\Sigma}$.

Exercício 2. (2.5 valores) Considere o integral $\mathcal{I}=\displaystyle\int_0^2\int_{y^2}^4 y\cos(x^2)\,dxdy.$

Esboce o domínio de integração, e calcule $\mathcal{I}$ invertendo a ordem de integração.

Exercício 3. (2 valores) Mude para coordenadas polares o integral $\displaystyle\int_0^4\int_{\sqrt{4-(x-2)^2}}^{\sqrt{16-x^2}} y\,dydx.$

Exercício 4. (2.5 valores) Calcule, usando coordenadas polares, o integral $\displaystyle\iint_X \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, onde

$$X=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\, x^2+y^2\leq 4 \,\wedge\, y\geq\sqrt{3}\,x\right\}.$$

Exercício 5. (5.5 valores) Considere o sólido $\mathcal{S}$ definido por

$$\mathcal{S}=\left\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\; x^2+y^2+z^2\leq 4 \;\wedge\; 3z\geq x^2+y^2\,\right\}.$$

(a) Faça um esboço de $\mathcal{S}$.

(b) Estabeleça um integral triplo (ou soma de vários integrais triplos) em coordenadas cilíndricas que permita determinar o volume de $\mathcal{S}$.

(c) Estabeleça um integral triplo (ou soma de vários integrais triplos) em coordenadas esféricas que permita determinar o volume de $\mathcal{S}$.

(d) Calcule o volume de $\mathcal{S}$, recorrendo a um integral ou a uma soma de integrais.

Exercício 6. (2.5 valores) Responda a **uma e uma só** das duas questões seguintes:

I. Calcule o valor do integral

$$\iint_X \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\,dx\,dy\,,\qquad \text{onde}\quad X=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x\geq 0\,,\; y\geq 0\,,\; x+y\leq 1\right\}\,,$$

efetuando a mudança de variáveis definida por $x-y=u\,,\; x+y=v\,.$

II. Seja $\mathcal{S}=\left\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\; x^2+y^2+(z-1)^2\geq 1 \;\wedge\; x^2+y^2+(z-2)^2\leq 4 \;\wedge\; z\geq 1\,\right\}.$
Estabeleça um integral triplo (ou soma de vários integrais triplos) em coordenadas esféricas que permita determinar o volume de $\mathcal{S}$.

FIM