Processamento de Sinal (2013/14)

Teste 1 – 15 de novembro de 2013

Nome:____ Nº_____________ Curso_________

Grupo I

Classifique, neste enunciado, as questões que se seguem indicando se são verdadeiras (V) ou falsas (F). Duas respostas erradas anulam uma resposta correta.

1. Um sistema causal tem que ter memória.______F_________
2. Se um sinal é real então a_k=a_{-k} (relativamente aos coeficientes da série de Fourier). ______F_______
3. Um sistema linear verifica sempre a propriedade da aditividade e da homogeneidade. ____V_________
4. Se o $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt = -30$, então o sistema com resposta impulsional $h(t)$ é estável. ________V________
5. O sistema em tempo discreto definido por y[n]=(n+1).x[n] é um sistema sem memória. ____V________
6. Se os coeficientes de um sinal são pares e puramente reais, então o sinal também é par e real. ____V_______
7. O sistema definido pela resposta impulsional h[n]=u[1-n] é um sistema não causal. ______V_________
8. Num sistema LIT definido pela sua resposta impulsional $h(t)$ se a entrada é um impulso de Dirac, então a saída também é um impulso de Dirac. ________F_________
9. Se um sistema é variante no tempo, então a saída do sistema não pode ser calculada usando o integral de convolução. ____V________
10. Um sistema não tem memória se, por exemplo, h[n]=1. ______F_________
11. Para que possamos calcular a saída de um sistema usando o somatório de convolução, o sistema tem que verificar a propriedade da causalidade. ____F_____________
12. O impulso de Dirac é uma função própria dos sistemas LIT. _____F___________
13. A resposta impulsional $h(t)$ da cascata de dois sistemas LIT ($h_1(t)$ e $h_2(t)$ respetivamente) é definida como $h(t) = h_1(t) * h_2(t)$. ________V__________

Grupo II

Responda às seguintes questões numa folha separada. Todas as respostas carecem de uma justificação adequada.

1. Considere um sistema LIT, de saída $y(t)$, caracterizado pela sua resposta impulsional, $h(t)$, definida por:

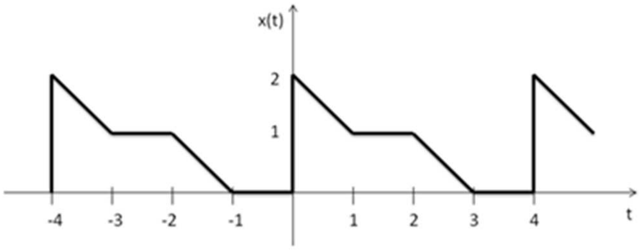
$$h(t) = \begin{cases} -t+1, |t| < 1 \\ 0, |t| \geq 1 \end{cases}$$

   Considere ainda a entrada desse sistema, x(t), definida por:

$$x(t) = \begin{cases} -1, |t| < 1 \\ 0, |t| \geq 1 \end{cases}$$

   a) Esboce as funções $h(t)$ e $x(t)$.
   b) Calcule a saída, $y(t)$, deste sistema quando o sinal de entrada é o $x(t)$ definido anteriormente (isto é resolva o integral de convolução $y(t) = h(t) * x(t)$.
   c) Qual a saída deste sistema se a entrada for o sinal g(t)=2.x(t)+1, em que x(t) é o sinal definido anteriormente.

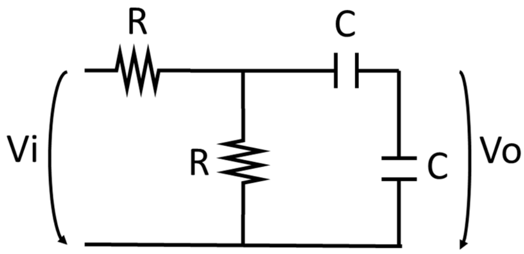
2. Considere o sinal x(t) periódico (com período 4), definido pela figura seguinte:



a) Calcule o valor médio do sinal.
b) Calcule os coeficientes (de ordem diferente de 0) da série de Fourier que define o sinal x(t). (A resolução deste exercício pela equação de análise é muito demorada, por isso sugere-se a utilização das propriedades da série de Fourier)
c) Calcule a potência associada ao 2º harmónico.

   Caso não tenha conseguido resolver b), considere $a_k = \frac{j}{k\pi} - \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{8}\right)e^{-j\frac{5k\pi}{4}}}{j(k\pi)^2}$

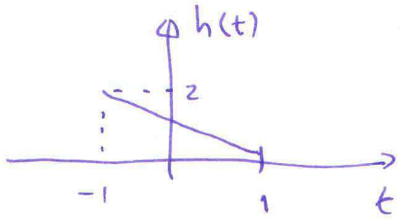
3. Considere o circuito representado ao lado:

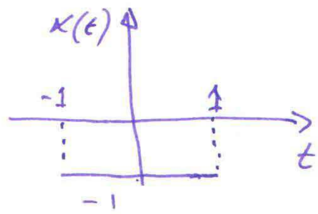


a) Calcule a função de transferência $H(j\omega) = \frac{V_O(j\omega)}{V_i(j\omega)}$.
b) Faça os diagramas de Bode (módulo e fase) do resultado obtido em a), considerando que R=1Ω e C=1F.

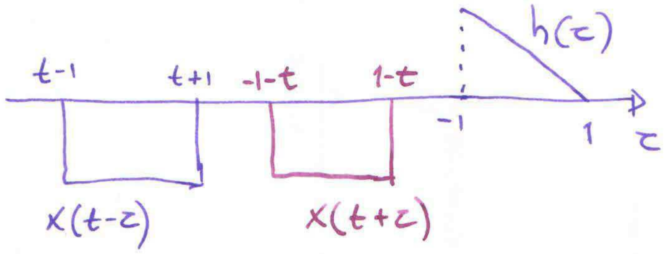
   (Caso não tenha conseguido resolver a) considere o seguinte resultado: $H(j\omega) = \frac{j\omega RC+2}{3+j\omega 2RC}$)

1 a)

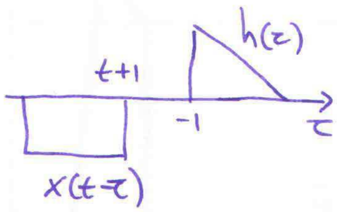




b)

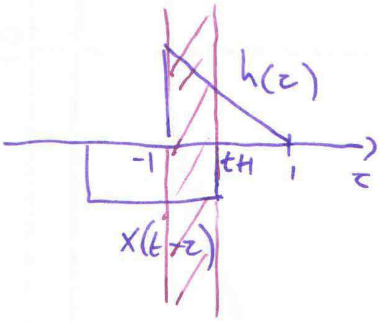


$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$



$t+1 \leq -1 \Rightarrow y(t) = 0$

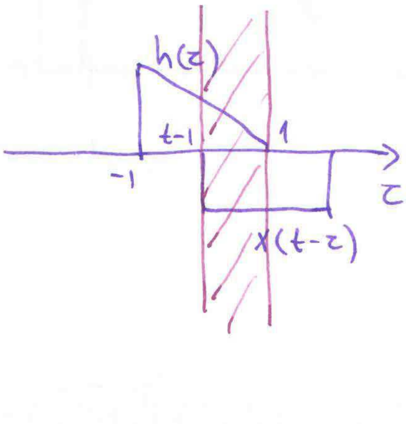
$t \leq -2$



$-1 < t+1 < 1 \iff -2 < t < 0$

$$y(t) = \int_{-1}^{t+1} (1-\tau)(-1)\, d\tau = \left[\frac{\tau^2}{2} - \tau\right]_{-1}^{t+1}$$

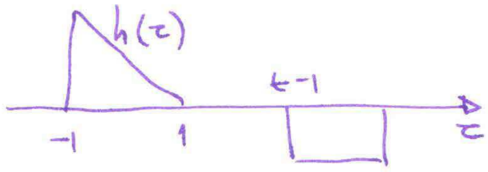
$$= \frac{t^2}{2} - 2$$



$-1 \leq t-1 \leq 1 \iff 0 \leq t \leq 2$

$$y(t) = \int_{t-1}^{1} (1-\tau)(-1)\, d\tau = \left[\frac{\tau^2}{2} - \tau\right]_{t-1}^{1}$$

$$= -\frac{t^2}{2} + 2t - 2$$



$t-1 > 1 \Rightarrow y(t) = 0$

$t > 2$

c) $y_1(t)$ é a saída a $g(t)$

porque o sistema é linear:

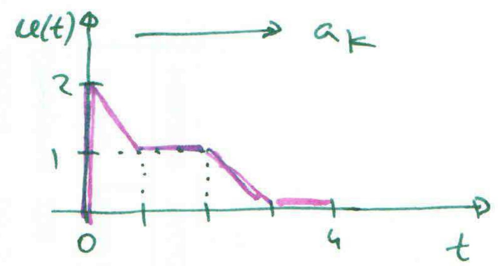
Se $y(t)$ é a saída de $x(t)$ e $g(t) = 2x(t) + 1$

então $y_1(t) = 2y(t) + y_2(t)$

em que $y_2(t)$ é a saída quando a entrada é 1

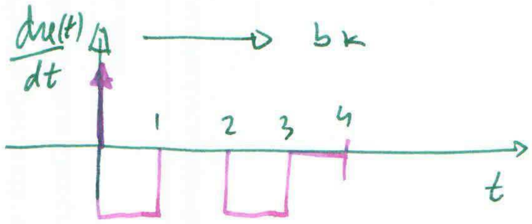
$$y_2(t) = \int_{-1}^{1} (1-\tau) \cdot 1 \, d\tau = \left[\tau - \frac{\tau^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 2$$

2

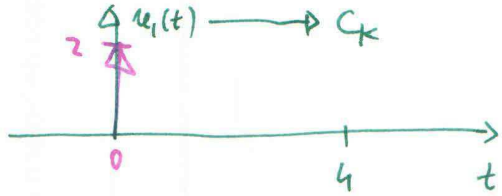


a) $a_0 = \frac{3 \cdot 1}{4} = \frac{3}{4}$

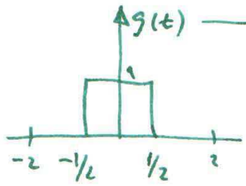
b)



=

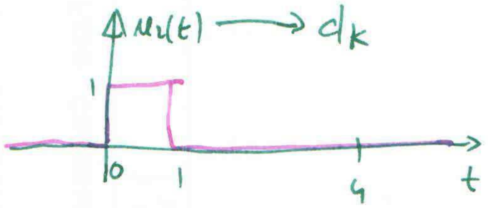


$c_k = 2 \cdot \frac{1}{T} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$



$g(t) \rightarrow f_k = \frac{\text{sen}\left(k\frac{2\pi}{4}\cdot\frac{1}{2}\right)}{k\pi} = \frac{\text{sen}\left(\frac{k\pi}{4}\right)}{k\pi}$

−

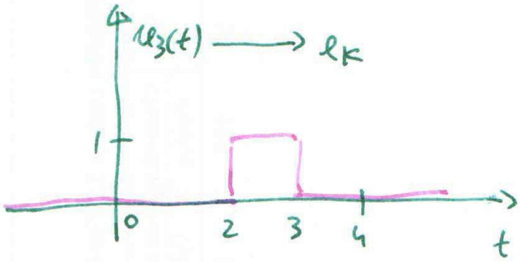


$x_2(t) = g\left(t - \frac{1}{2}\right)$

$\downarrow$

$d_k = f_k \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{4}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\text{sen}\left(\frac{k\pi}{4}\right)}{k\pi} \cdot e^{-j\frac{k\pi}{4}}$

−



$x_3(t) = g\left(t - \frac{5}{2}\right)$

$\downarrow$

$e_k = f_k \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{4}\cdot\frac{5}{2}} = \frac{\text{sen}(k\pi/4)}{k\pi} e^{-j5\frac{k\pi}{4}}$

$\frac{dx(t)}{dt} = x_1(t) - x_2(t) - x_3(t)$

$\downarrow$

$b_k = c_k - d_k - e_k = \frac{1}{2} - \frac{\text{sen}\left(\frac{k\pi}{4}\right)}{k\pi}\left(e^{-j\frac{k\pi}{4}} + e^{-j\frac{5\pi k}{4}}\right)$

Pela propriedade de integração

$a_k = \frac{1}{jk\frac{2\pi}{4}} b_k = \frac{1}{jk\pi} - \frac{2}{j}\frac{\text{sen}(k\pi/4)}{(k\pi)^2}\left(e^{-j\frac{k\pi}{4}} + e^{-j\frac{5k\pi}{4}}\right)$

c) $a_2 = \frac{1}{j2\pi} - \frac{2}{j} \frac{\text{sen}\left(\frac{2\pi}{4}\right)}{4\pi^2}\left(e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{-j5\frac{\pi}{2}}\right)$

$a_2 = \frac{1}{j2\pi} - \frac{2}{j} \frac{1}{4\pi^2}\left(j\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + j\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

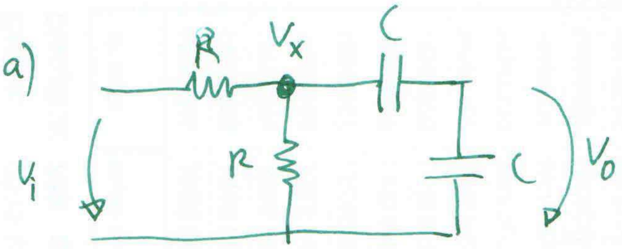
$= \frac{1}{j2\pi} - \frac{2}{j} \frac{1}{4\pi^2}(-2j) = \frac{1}{j2\pi} - \frac{-1}{\pi^2} = \frac{1}{\pi^2} - j\frac{1}{2\pi}$

$|a_2| = \sqrt{\left(\frac{1}{\pi^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2} = 0{,}1887$

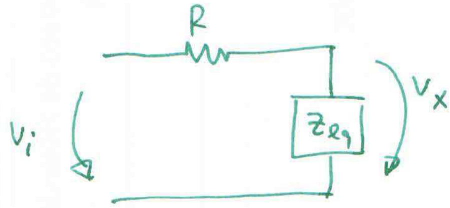
$|a_2| = |a_{-2}|$

$P_2 = |a_2|^2 + |a_{-2}|^2 = 0{,}0712$

③ a)



$$V_0(j\omega) = \frac{\bar{Z}_c}{\bar{Z}_c + \bar{Z}_c} \cdot V_x(j\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + \frac{1}{j\omega C}} V_x(j\omega) \Leftrightarrow V_0(j\omega) = \frac{1}{2} V_x(j\omega) \quad \oplus$$



$$V_x(j\omega) = \frac{\bar{Z}_{eq}}{R + \bar{Z}_{eq}} V_i(j\omega) \quad \otimes$$

$$\bar{Z}_{eq} = (\bar{Z}_c + \bar{Z}_c) // R = \frac{\frac{2}{j\omega C} \cdot R}{\frac{2}{j\omega C} + R} = \frac{2R}{2 + j\omega RC}$$

$$\otimes \quad V_x(j\omega) = \frac{\frac{2R}{2 + j\omega RC}}{R + \frac{2R}{2 + j\omega RC}} V_i(j\omega) \Leftrightarrow$$

$$V_x(j\omega) = \frac{2R}{2R + j\omega R^2 C + 2R} V_i(j\omega) \Leftrightarrow$$

$$V_x(j\omega) = \frac{2}{4 + j\omega RC} V_i(j\omega) \Leftrightarrow V_x(j\omega) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + j\omega \frac{RC}{4}} V_i(j\omega)$$

$$\oplus \quad V_0(j\omega) = \frac{1}{2} V_x(j\omega) \Leftrightarrow V_0(j\omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{1 + j\,\omega/\omega_0} V_i(j\omega) \quad , \quad \omega_0 = \frac{4}{RC}$$

$$\frac{V_0(j\omega)}{V_i(j\omega)} = \frac{1}{4} \frac{1}{1 + j\,\omega/\omega_0}$$

b)