

Nome Número **Justifique, convenientemente, todas as respostas.**

Exercício 1. (5 valores) Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

$$(x, y) \mapsto x^3 + 3xy^2 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}y^2$$

- (a) Determine os pontos estacionários de f .
- (b) Verifique se $(1, 0)$ é minimizante local de f .
- (c) Seja $\Sigma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\}$. Calcule $\min f|_{\Sigma}$.

Exercício 2. (2.5 valores) Considere o integral $\mathcal{I} = \int_0^3 \int_{y^2}^9 y \cos(x^2) dx dy$.

Esboce o domínio de integração, e calcule \mathcal{I} invertendo a ordem de integração.

Exercício 3. (2 valores) Mude para coordenadas polares o integral $\int_0^4 \int_{\sqrt{4-(x-2)^2}}^{\sqrt{16-x^2}} x dy dx$.

Exercício 4. (2.5 valores) Calcule, usando coordenadas polares, o integral $\iint_X \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, onde

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y \geq \sqrt{3}x\}.$$

Exercício 5. (5.5 valores) Considere o sólido \mathcal{S} definido por

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \wedge 3z \geq x^2 + y^2\}.$$

- (a) Faça um esboço de \mathcal{S} .
- (b) Estabeleça um integral triplo (ou soma de vários integrais triplos) em coordenadas cilíndricas que permita determinar o volume de \mathcal{S} .
- (c) Estabeleça um integral triplo (ou soma de vários integrais triplos) em coordenadas esféricas que permita determinar o volume de \mathcal{S} .
- (d) Calcule o volume de \mathcal{S} , recorrendo a um integral ou a uma soma de integrais.

Exercício 6. (2.5 valores) Responda a **uma e uma só** das duas questões seguintes:

I. Calcule o valor do integral

$$\iint_X \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dx dy, \quad \text{onde } X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\},$$

efetuando a mudança de variáveis definida por $x - y = u, x + y = v$.

II. Seja $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z-1)^2 \geq 1 \wedge x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4 \wedge z \geq 1\}$.

Estabeleça um integral triplo (ou soma de vários integrais triplos) em coordenadas esféricas que permita determinar o volume de \mathcal{S} .