Simulation numérique de surfaces d'océan

1 – Éléments pédagogiques

1.1 Objectifs

Bien qu'une connaissance théorique des outils soit indispensable pour résoudre les problèmes, la mise en oeuvre pratique de ces techniques dans un contexte proche de la réalité est tout aussi important.

L'objectif de cette suite d'exercices pratiques est de mettre les méthodes de programmation et les concepts du `C++` présentés en cours à travers une application de simulation. Le travail proposé est une sensibilisation à la mise en place d'architectures logicielles dans le cadre des mathématiques appliquées.

Le travail est à réaliser en binôme uniquement. Vous devez programmer en `C++` en utilisant les standards présents sur les compilateurs des stations de travail de l'école.

Votre travail devra faire l'objet d'un compte-rendu précis, clair et concis mettant en avant les résultats obtenus ainsi que vos observations sur les méthodes utilisées.

1.2 Livrables

Vous devez rédiger un compte-rendu dans lequel vous répondrez à toutes les questions de l'énoncé, expliciterez les méthodes employées, présenterez et commenterez les résultats obtenus. Il ny a qu'un seul compte-rendu à rendre par binôme.

Notez que ce document ne constitue que la base de ce qui vous est demandé : soyez critique par rapport à vos résultats, proposez dautres idées, solutions ou tests. Chaque partie qui vous ai proposé peut faire l'objet d'extensions ou d'approfondissements.

Le compte-rendu ne devra pas excéder 15 pages et ne devra pas contenir de programme. L'ensemble des fichiers de votre travail devra être soumis sous `Teide`.

Le compte-rendu devra être au format `PDF`.

La qualité de la rédaction, de la synthèse, de l'analyse des résultats obtenus sont des critères importants dans l'évaluation finale.

La seconde partie de votre rendu est l'ensemble des sources qui vous a servi à produire le travail attendu. Vous êtes libre d'organiser le code source de la manière que vous souhaitez.

La lisibilité du code et la pertinence des commentaires seront pris en compte dans l'évaluation.

1.3 Organisation du travail

Ce travail est à réaliser sur l'ensemble des 8 séances de TP du cours. Le travail demandé est conséquent. Chaque séance s'appuie sur le travail réalisé pendant les séances précédentes. Soyons donc rigoureux dans la réalisation du travail et n'attendez pas la dernière séance pour commenter votre travail.

N'hésitez pas à demander des conseils, des précisions ou à poser vos questions par mail aux enseignants.

1.4 Remise des livrables

Le rendu est à soumettre pour le Vendredi 11 Mai 2018 à 20h00 sous `Teide`. Votre livrable devra contenir

- le compte rendu au format `PDF`.
- l'ensemble des fichiers sources de votre travail.
- les images et animations mettant en valeur votre travail.

Un livrable soumis hors délai se verra attribuer la note `0`.

2 – Modélisation

Cette première partie présente comment, à partir des équations de Navier-Stokes incompressible en 3D qui décrivent le comportement d'un fluide en espace libre, nous allons obtenir un ensemble d'équations modélisant l'évolution de la surface de l'océan.

Une fois ces équations obtenues, nous verrons comment les exploiter afin de générer numériquement des ondes de surfaces réalistes.

2.1 Description du problème

Dans cette partie, nous nous intéressons à la modélisation et à la simulation de la surface d'un océan sans interaction avec des objets physiques avec pour but de l'intégrer dans des animations vidéos.

Afin de simplifier la réalisation du travail et avec un souci de contrainte de calcul, nous proposons un certain nombres d'hypothèses validées par des mesures, des simulations complexes et des analyses mathématiques de la communauté océanographique.

Les approximations réalisées ici ne permettront pas de simuler correctement l'ensemble des phénomènes qui se passent à la surface d'un océan, mais donnent les bases des outils mathématiques, numériques et logiciels permettant d'approfondir le travail réalisé.

Pour aller plus loin

Les techniques de simulation des surfaces d'océan sont extrêmement répandues dans les films, les jeux vidéos ou encore en réalité virtuelle pour les systèmes d'entraînements.

Décrire les vagues sur les océans est relativement complexe, non seulement parce que les longueurs d'ondes varient de quelques millimètres à plusieurs kilomètres, mais également parce qu'il y a un couplage important entre le comportement des vagues avec le vent, les marées, le fond de l'océan où même la pluie.

Il est souvent nécessaire de faire un compromis entre le modèle physique précis mais extrêmement coûteux et le modèle réaliste calculable en temps réel.

Le champ de recherche associé est celui de la synthèse d'images réalistes. Les résultats obtenus sont le fruit de collaborations entre l'océanographie, les mathématiques et l'informatique.

2.2 Équation de Bernouilli

Afin de comprendre les approximations réalisées dans ce travail, nous commençons par présenter la démarche qui conduit au premier modèle mathématique que nous simulerons.

Soit $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ la vitesse d'un fluide incompressible pour $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$. Cette vitesse est solution des équations de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} & = -\nabla p + \mathbf{F} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) & = 0 \end{cases} \tag{1}$$

où $p(\mathbf{x}, t)$ est la pression exercée sur le fluide et $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ est une force extérieure appliquée sur le fluide. Dans le contexte qui nous intéresse, la force est conservative, c'est-à-dire qu'il existe un potentiel $U(\mathbf{x}, t)$ tel que $\mathbf{F} = -\nabla U$.

Dans le cadre de la dynamique de la surface des océans, on peut se restreindre aux écoulements potentiels, ce qui permet d'écrire que le champ de vitesse dérive d'une fonction scalaire potentielle, c'est-à-dire,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla \phi(\mathbf{x}, t) \tag{2}$$

ce qui permet de transformer le problème initial dont l'inconnue possède trois composantes en un problème dont l'inconnue, la vitesse potentielle, possède une seule composante. Le système à quatre équations initial se réécrit donc

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial t} + \dfrac{1}{2}(\nabla \phi)^2 & = -p - U \\ \nabla^2 \phi(\mathbf{x}, t) & = 0 \end{cases} \tag{3}$$

La première équation de ce modèle est l'équation de Bernoulli. Elle permet entre autre de simuler des effets de surface complexes notamment le bris des vagues sur une plage.

La non-linéarité de ce problème et les trois dimensions de l'espace du problème le rendent difficile à utiliser dans le cas d'applications en temps quasi-réel. Non allons donc devoir procéder à sa linéarisation.

2.2.1 Linéarisation

La linéarisation de l'équation consiste à négliger le terme quadratique des équations de Navier-Stokes, $\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2$. Avec cette simplification, le modèle ne sera pas en mesure de rendre compte de manière précise des effets de surfaces violents. L'équation obtenue s'écrit alors

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -p - U \tag{4}$$

Les grandeurs ϕ, p et U restent dépendantes de la variable 3D $\mathbf{x}$ et de la variable t.

La simplification suivante consiste à décrire la surface comme un champ dynamique de la hauteur $h(\mathbf{x}_\perp, t)$, qui dépend donc uniquement de deux coordonnées spatiales $\mathbf{x}_\perp = (x, y)$ et du temps t.

Le potentiel U qui intervient dans la formulation (3) est le potentiel du à la force de gravité, la seule force extérieure du problème. En prenant en compte la notation introduite, le potentiel de gravité s'écrit

$$U = gh$$

avec g la constante de gravité.

En combinant les différentes approximations développées précédemment, nous obtenons pour l'équation de Bernouilli

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}_\perp, t)}{\partial t} = -gh(\mathbf{x}_\perp, t) \tag{5}$$

où $\perp$ indique la dépendance par rapport aux variables d'espace en $2D$.

En se restreignant à la surface de l'océan, l'équation de conservation de la masse se réécrit

$$\left\{\nabla_\perp^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right\} \phi(\mathbf{x}_\perp, t) = 0. \tag{6}$$

La vitesse dérive d'un potentiel, on a donc en particulier la vitesse de déplacement verticale qui s'écrit

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z}. \tag{7}$$

En combinant les équations (5) et (7), on obtient une équation dont l'unique inconnue est h

$$\frac{\partial^2 h(\mathbf{x}_\perp, t)}{\partial t^2} = -g \frac{\partial h(\mathbf{x}_\perp, t)}{\partial z}. \tag{8}$$

En dérivant encore 2 fois l'expression (8), on obtient une équation faisant intervenir un opérateur spatial du second ordre

$$\frac{\partial^4 h(\mathbf{x}_\perp, t)}{\partial t^4} = -g^2 \frac{\partial^2 h(\mathbf{x}_\perp, t)}{\partial z^2} \tag{9}$$

$$= g^2 \nabla_\perp^2 h(\mathbf{x}_\perp, t). \tag{10}$$

2.2.2 Equation de dispersion

L'équation (10) est une équation des ondes d'ordre 4. Les solutions particulières de cette équation s'écrivent sous la forme

$$h(\mathbf{x}_\perp, t) = h_0 \exp\{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_\perp - i\omega t\} \tag{11}$$

où $\mathbf{k}$ est un vecteur 2D, ω et h_0 sont des paramètres génériques indéterminées. En injectant cette solution particulière dans (10), on obtient l'équation algébrique suivante

$$h_0\{\omega^4 - g^2 k^2\} = 0 \tag{12}$$

avec $k = |\mathbf{k}|$.

Cette équation est vérifiée pour l'une des deux conditions suivantes

1. $h_0 = 0$ permettant d'obtenir une surface d'océan au repos (absence de vague).
2. $w = \pm\sqrt{gk}$, avec h_0 quelconque, permettant d'obtenir des surfaces réalistes.

Maintenant que nous avons établies des équations qui permettent de représenter l'évolution de la surface des océans, nous allons nous intéresser à la génération numérique de ces surfaces.

2.3 Génération d'un champ de hauteur

L'objectif de cette partie est de présenter des méthodes de générations numériques de houles.

2.3.1 Houle de Gerstner

Les ondes de Gerstner ont été proposées comme première solution approchée des équations de la dynamiques des fluides. Elles décrivent le comportement individuel de chacun des points de la surface.

Soit $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ un point au repos de la surface, c'est-à-dire $z_0 = 0$. Si on considère une onde d'amplitude A passant par ce point, alors

$$\mathbf{x} = \mathbf{x_0} - \frac{\mathbf{k}}{k} A \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x_0} - \omega t + \phi) \quad (13)$$

$$z = A \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x_0} - \omega t + \phi) \quad (14)$$

Le vecteur d'onde **k** donne la direction de propagation de l'onde.

En choisissant un ensemble de vecteurs d'ondes $\mathbf{k_i}$, d'amplitudes A_i, de fréquences ω_i et de phases ϕ_i pour $i = 1, \ldots, N$, la surface de l'océan s'écrit

$$\mathbf{x} = \mathbf{x_0} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathbf{k_i}}{k_i} A_i \sin(\mathbf{k_i} \cdot \mathbf{x_0} - \omega_i t + \phi_i) \quad (15)$$

$$z = \sum_{i=1}^{N} A_i \cos(\mathbf{k_i} \cdot \mathbf{x_0} - \omega_i t + \phi_i) \quad (16)$$

avec $k = |\mathbf{k}|$.

Le déplacement horizontal de la houle est cyclique, c'est à dire que pour un $\mathbf{x_0}$ au repos donné, la position $\mathbf{x}$ au cours du temps évolue en oscillant autour de cette position.

Dans le cas de la houle, la relation entre la fréquence et la norme des vecteurs d'onde s'écrit

$$\omega^2(k) = gk. \quad (17)$$

Deux autres situations réalistes peuvent également être simulées. En eau peu profonde, le sol situé à une distance D du niveau moyen modifie la relation de dispersion de la manière suivante

$$\omega^2(k) = gk \tanh(kD). \quad (18)$$

Le troisième cas pouvant être simulé prend en compte la tension de surface. L'équation de dispersion pour les ondes avec une très faible période contient ainsi un terme supplémentaire

$$\omega^2(k) = gk(1 + k^2 L^2). \quad (19)$$

La répétition des variations de hauteurs après une certaine période T impose $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$.

Cette approche, très simple d'un point de vue calculatoire, est complexe à mettre en oeuvre lorsque les vecteurs d'ondes sont distribués sur une grille régulière et que l'on souhaite avoir ω_0 sur la même grille régulière.

Pour simplifier la mise en oeuvre, on choisira

$$\bar{\omega} = \lfloor \frac{\omega(k)}{\omega_0} \rfloor \omega_0. \quad (20)$$

2.3.2 Modèle statistique

Dans le modèle statistique, la hauteur de l'onde est une variable aléatoire de la position horizontale et du temps $h(\mathbf{x}, t)$. La hauteur est décomposable dans une base trigonométrique à l'aide de la transformée de Fourier

$$h(\mathbf{x}, t) = \sum_{k} \tilde{h}(\mathbf{k}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (21)$$

avec t le temps, $\mathbf{k}$ un vecteur de dimension 2 de composantes $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$, $k_x = 2\pi n/L_x$, $k_y = 2\pi M/L_x$ où $-N/2 \leq n \leq N/2$ et $-M/2 \leq m \leq M/2$. Cette décomposition dans l'espace de Fourier permet de générer un champ de hauteur en tout point discret $\mathbf{x} = (nL_x/N, mL_y/M)$.

Il reste à déterminer une manière réaliste d'exprimer $\tilde{h}$. Pour cela, on utilise des résultats empiriques de mesures en pleine mer. Pour des vagues apparaissant naturellement en pleine mer, les amplitudes sont quasi stationnaire avec une fluctuation gaussienne qui s'écrit sous la forme

$$P_h(k) = \left\langle |\tilde{h} * h((k), t)|^2 \right\rangle$$

L'un des modèles permettant de représenter une houle réaliste est celui de Philips

$$P_h(\mathbf{k}) = A \frac{\exp\left(-1/(kL)^2\right)}{k^2} |\mathbf{k} \cdot \mathbf{w}|^2. \tag{22}$$

avec $L = V^2/g$ la plus grande vague possible avec un vent constant de vitesse V et de direction $\mathbf{w}$. A est une constante qui est indépendant de la fréquence.

Le champ $\tilde{h}$ final s'écrit

$$\tilde{h}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_r + i\xi_i) \exp\left(i\omega(k)t\right) \sqrt{P_h(\mathbf{k})} \tag{23}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_r - i\xi_i) \exp\left(-i\omega(k)t\right) \sqrt{P_h(-\mathbf{k})} \tag{24}$$

Afin de produire des surfaces réalistes, les nombres ξ_r et ξ_i sont des nombres tirés aléatoirement pour selon une loi gaussienne de moyenne 0 et de déviation standard 1. D'autres loi de distribution peuvent éventuellement être utilisées afin d'obtenir des comportement différents.

Cette description mathématique de l'évolution de la surface de l'océan permet de la simuler numériquement de manière relativement simple et efficace.

L'avantage de cette méthode est la possibilité d'utiliser des transformées de Fourier rapide pour réaliser les calculs dans l'espace de Fourier et l'indépendance temporelle entre les différentes hauteurs, c'est-à-dire que le calcul de la hauteur dans l'espace physique à un instant t_1 est indépendant de sa valeur à l'instant t_0.

Dans la prochaine section, nous allons mettre en place l'infrastructure logicielle qui permet de réaliser cette simulation.

Remarque 1

Les éléments apportés dans cette section permettent uniquement de faire la représentation de la surface de l'océan d'un point de vue géométrique.

Afin d'obtenir une représentation plus rigoureuse de la surface, il est nécessaire d'intégrer des textures et de calculer la luminosité de chaque pixel en fonction de la position de la caméra et des sources lumineuses.

3 – Eléments de conception

Afin de pouvoir de réaliser une solution logicielle efficace, nous allons développer une grande partie des objets mathématiques explicités dans la section précédente.

Cette section sera complétée au fur et à mesure du déroulement des séances pratiques.

Mise en pratique 1 : Le premier objet que nous allons devons écrire est celui qui va contenir l'ensemble des données de hauteur. Comme mentionné dans la construction du modèle, nous allons manipuler des données spatiales en dimension 2.

La tentation est donc d'écrire une classe `Array2D` qui serve de conteneur. Pour des raisons d'efficacité d'accès et d'alignement mémoire, il est préférable de travail avec des tableaux mono dimensionnelles. La première classe que nous allons écrire est donc une classe `Dvector`.

Mise en pratique 2 : Il s'agit d'enrichir la classe `Dvector` en ajoutant notamment la notion d'opérateur `C++` qui permettra de manipuler les objets de type `Dvector` comme des types intrinsèques.

Le système de `Makefile` sera remplacé par un système de génération automatique de `Makefile`, à savoir `cmake`.

Mise en pratique 3 : Les notions importantes commenceront à apparaître avec l'utilisation de l'héritage et du polymorphisme que permettrons de créer les modèles mathématiques qui décrivent le comportement des surfaces des océans.

La gestion des exceptions sera également mise en place afin de pouvoir gérer les situations imprévues.

Mise en pratique 4 : Les concepts de meta programmation seront intégrés dans le code. Cela permettra d'utiliser des générateurs pour les calculs sur les structures de données tout en faisant abstraction de certains aspects bas niveaux de leur l'implémentation. Il s'agira notamment d'utiliser la STL pour manipuler les tableaux de manière simple.

Le système de génération sera enrichi afin de pouvoir gérer les tests de façon simplifiée.

Mise en pratique 5 : Dans cette phase, il s'agira de se focaliser sur les aspects optimisation du coeur de calcul numérique en remplaçant la transformée de Fourier naïve par une approche plus efficace.