Table des matières

1 Introduction sur la théorie des ondelettes et premières définitions :

La transformation en ondelettes est apparue pour la première fois dans le domaine de la géophysique vers 1980 pour l'analyse des données sismiques.Elle aura été formalisée par Morlet, Grassmann et Goupillard.

De manière analogue à la théorie des séries de Fourier, les ondelettes sont principalement utilisées pour la décomposition de fonctions. La décomposition d'une fonction en ondelettes consiste à l'écrire comme une somme pondérée de fonctions obtenues à partir d'opérations simples effectuées sur une fonction principale appelée ondelette-mère. Ces opérations consistent en des translations et dilatations de la variable. Selon que ces translations et dilatations sont choisies de manière continue ou discrète, on parlera d'une transformée en ondelettes discrète ou continue.

Le travail suivant fera l'objet du cas particulier de la transformation en ondelettes unidimensionnelle.

1.1 Définition d'une ondelette

Définition 1 Une ondelette est d'un point de vue géométrique et schématique une forme d'onde, l'idéalisation d'une note de musique, d'une durée limitée et qui a une valeur moyenne égale à 0.

Plus formellement, pour le cas d'une ondelette-mère (celle que l'on va pouvoir dilater et translater afin d'obtenir les autres ondelettes définissant ainsi une famille d'ondelettes), il s'agit d'une fonction ψ de l'espace de Lebesgue $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$(espace des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ de carré intégrable) et telle que : $\int_{\mathbb{R}} \psi(t).dt = 0$.

Ceci provient de la condition suivante, dite condition d'admissibilité : $\int_{\mathbb{R}} \frac{\left|\widehat{\psi}(\omega)\right|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$, où $\widehat{\psi}$ désigne la transformée de Fourier de ψ, donnée par la formule $\widehat{\psi}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t).e^{-2i\pi\omega t}dt$.

Cette condition, dite condition d'admissibilité est nécessaire pour que la transformée en ondelettes d'une fonction existe !

Si l'ondelette -fonction analysante- est convenablement choisie, la transformation en ondelettes est inversible et la fonction peut être reconstruite après analyse suivant l'équation :

$$f = C_{\psi}^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2} \langle f, \psi_{a,b} \rangle \, \psi_{a,b} \, da.db$$

Le coefficient C_{ψ}, si donc il existe est donné par : $C_{\psi} = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{\left|\widehat{\psi}(\omega)\right|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$

De manière plus « imagée », l'ondelette doit osciller localement autour de l'axe des abscisses. Il existe une infinité de fonctions d'ondelettes car toute fonction oscillante localisée est une ondelette-mère possible. Différentes familles d'ondelettes peuvent être utilisées en fonction du problème à résoudre. C'est un des nombreux avantages de la transformée en ondelettes par rapport à la transformée de Fourier (qui est liée exclusivement aux fonctions sinus et cosinus) que de pouvoir choisir l'ondelette à utiliser pour l'analyse.

1.2 Exemples d'ondelettes mères :

1. L'ondelette de Haar :

Il s'agit de la fonction suivante :

$$\mathcal{H} : [0,1] \longrightarrow \{-1;1\}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & si\, x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ -1 & sinon \end{cases}$$

On remarquera que $\mathcal{H}$est discontinue en $\frac{1}{2}$.

....

2 La transformation en ondelettes.

2.1 La transformée en ondelettes continue.

...

2.2 La transformée en ondelettes discrète.

... # préférer \psi comme notation plutôt que f pour les ondelettes

On a alors avec $t_0 = k.\Delta t, \psi_{t_0,\Delta t} = 2^{\frac{p}{2}} \psi\left(2^p x - k\right)$, c'est-à-dire on peut considérer la famille d'ondelettes $\psi_{k,p} = 2^{\frac{p}{2}} \psi\left(2^p x - k\right.$ $(k,p) \in \mathbb{Z}^2$.

+ Il est intéressant de considérer des familles orthogonales d'ondelettes formant une base hilbertienne de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ car alors toute fonction f de cet espace peut s'écrire $f = \sum_{(k,p)\in\mathbb{Z}^2} f_{k,p}\psi_{k,p}$où les $f_{k,p} = \langle f|\psi_{k,p}\rangle$ sont appelés coefficients d'ondelettes.

3 Algorithme de transformation par les ondelettes # analyse+éventuellement synthèse.

3.1 Principe

3.2 Démonstration dans un cas simple : le cas des ondelettes de Haar.

3.3 Algorithme

4 Applications et utilisation des ondelettes