TD1 Algèbre linéaire

Exercice 1

Déterminer le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{Q}^4$ engendré par les vecteurs :

a = (-1, 0, 1, 2)   et   b = (0, 1, -3, 1)

Le vecteur x = (-3, 2, -3, 8) appartient-il à F ?

Exercice 2

Considérons les vecteur lignes de $\mathbb{R}^3$ A = (1, 2, -1), B = (1, 0, 1) et C = (-1, 2, -3).

Montrer que A, B et C sont linéairement dépendants . Ecrire la relation liant ces trois vecteurs.

Exercice 3

Déterminer tous les vecteurs $(x, y, z\ )$ de $\mathbb{Q}^3$ tels que le système suivant soit libre :

$$\{\ (1,0,0),\ \ (0,1,1),\ \ (x,y,z)\}$$

Exercice 4

Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ un système libre de n vecteurs d'un espace vectoriel E. On définit les vecteurs $\varepsilon_j = e_1 + e_2 + \cdots . + e_j$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Démontrer que $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\ \dots, \varepsilon_n\}$ est un système libre.

Exercice 5

Montrer que les vecteurs $u = (2, 1)$, $v = (-1, 2)$, $et\ w = (1, 3)$ constituent un système générateur de $\mathbb{R}^2$. Exprimer le vecteur $X = (x_1, x_2)$ comme combinaison linéaire de ces vecteurs sachant que u = $2e_1 + e_2$, $v = -e_1 + 2e_2$ $et\ w = e_1 + 3e_2$ avec $\{e_1, e_2\}$ une base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Cette décomposition suivant u, v, w est-elle unique ?

Exercice 6

Soit

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = 0\ et\ x + 2z - t = 0 \right\}$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$