Les matrices

Plan

I. Définition d'une matrice

II. Définitions de matrices particulières

III. Opérations sur les matrices

Définition d'une matrice

Définition: Une matrice $\mathbf{A}$ de format $m \times n$ est un tableau rectangulaire ordonné de mn éléments disposés sur m lignes et n colonnes.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m\times n}$$

Parfois, on spécifie la taille de la matrice ici

Définition d’une matrice

Définition:

- Les nombres qui composent la matrice sont appelés les éléments de la matrice (ou aussi les coefficients).

- Une matrice à m lignes et n colonnes est dite matrice d’ordre (m, n) ou de dimension $m \times n$.

- L’ensemble des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients réels se note $A_{m,n}$

- Lorsque $m = n$, on dit que A est une matrice carrée d’ordre n; la famille $\{a_{ii}\}$ est la diagonale principale de A.

Définition d'une matrice

Définition: Une matrice ligne est une matrice de dimension $1 \times n$

Exemple: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Définition: Une matrice colonne est une matrice de dimension $\mathrm{m} \times 1$

Exemple: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Définition de matrices particulières

- Matrice nulle
- Matrice rectangulaire
- Matrice carrée
- Matrice diagonale
- Matrice triangulaire
- Matrice scalaire
- Matrice identité
- Matrice symétrique et anti-symétrique
- Matrice inverse

Matrice nulle

Définition: Une matrice nulle est une matrice dont toutes les entrées sont nulles.

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice rectangulaire

Définition: Une matrice rectangulaire est une matrice de dimension $m \times n$ avec $m \neq n$.

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Matrice carrée

Définition: Une matrice carrée est une matrice de dimension $n \times n$

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \pi & \sqrt{2} & -1 \\ e & e^2 & e^3 & e^4 \\ 37 & 41 & 17 & 5 \\ \sqrt[3]{\pi} & 1 & 2\pi & 3 \end{pmatrix}$$

Diagonale principale

Définition: La diagonale principale d'une matrice carrée est l'ensemble des éléments de la forme a_{ii}.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{diag}(A) = \{a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}\}$$

Matrice triangulaire supérieure (inférieure)

Définition: Une matrice triangulaire supérieure (inférieure) est une matrice carrée dont tous les éléments sous (au dessus) la diagonale principale sont nuls.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrice identité

Définition: Une matrice identité est une matrice carrée dont les éléments de la diagonale principale sont tous 1 et les autres sont tous nuls.

$$\mathbf{I}_n = (\delta_{ij})_{n\times n} \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice scalaire

Définition:

Les matrices diagonales sont dites scalaires lorsque tous les éléments le long de sa diagonale principale sont égaux. $A = \alpha I$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrice symétrique

Définition: Une matrice symétrique est une matrice carrée qui est symétrique par rapport à la diagonale principale.
C'est-à-dire que $a_{ij} = a_{ji}$

$$\mathbf{A}_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrice anti-symétrique

Définition: Une matrice anti-symétrique est une matrice carrée qui est anti-symétrique par rapport à la diagonale principale. C'est-à-dire que $a_{ij} = -a_{ji}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice inverse

Définition:

Soit A, une matrice carrée d'ordre n. On appelle matrice inverse de A, si elle existe, la matrice A^{-1} telle que :

$$A \bullet A^{-1} = A^{-1} \bullet A = I$$

où I est la matrice identité d'ordre n.

Propriétés d'une matrice inverse

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$$

Si $\lambda \epsilon \mathbb{R}^*$, $\quad (\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$

Opérations sur les matrices

- Egalité de deux matrices
- La somme de matrices
- La multiplication d’une matrice par un scalaire
- La multiplication de matrices
- Matrice permuttable
- Transposée d’une matrice
- Rang d’une matrice
- Trace d’une matrice

Egalité de deux matrices

Définition:

Deux matrices A et B sont égales si elles sont de même ordre et si elles ont les mêmes coefficients.

Pour tout $i \in \{1, \dots\dots, m\}$ et tout $j \epsilon \{1, \dots\dots, n\}$, on a $a_{ij} = b_{ij}$

Somme de deux matrices

Définition: Soit $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}} = (\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{ij}})$ et $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}} = (\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{ij}})$ deux matrices de même ordre:

$$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$$

L'opération de la somme est définit comme suit:

$$Mat_{m\times n}(\mathbb{R}) \times Mat_{m\times n}(\mathbb{R}) \to Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$$

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \to \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{ij}}) + (\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{ij}}) = (\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{ij}} + \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{ij}})$$

Somme de deux matrices

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ -3 & 0 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2-5 & 3+1 \\ 2-3 & 1+0 & 4+11 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & 15 \end{pmatrix}$$

Propriétés de la somme de matrices

Soit $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{C} \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$

- Commutativité $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$
- Associativité $\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C}$
- L'élément neutre $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{A}$
- Matrice opposée $\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$

Multiplication d'une matrice par un scalaire

Définition: Soit $\mathbf{A} = (a_{ij})$ une matrice et k un nombre réel, la multiplication par un scalaire est l'opération externe définit comme suit;

$$\mathbb{R} \times \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$$

$$(k, \mathbf{A}) \longmapsto k\mathbf{A}$$

$$k\mathbf{A} = k(a_{ij}) = (ka_{ij})$$

Multiplication d'une matrice par un scalaire

Exemple:

$$3\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 3 & 3\cdot 1 \\ 3\cdot 0 & 3\cdot 5 & 3\cdot -2 \\ 3\cdot -1 & 3\cdot 3 & 3\cdot 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 0 & 15 & -6 \\ -3 & 9 & 18 \end{pmatrix}$$

Propriétés de la multiplication par un scalaire

- L'élément neutre $$1\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

- Distributivité $$k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$$

$$(k + r)\mathbf{A} = k\mathbf{A} + r\mathbf{A}$$

- Associativité $$(kr)\mathbf{A} = k(r\mathbf{A})$$

Produit de matrices

Définition:

Soit $\mathbf{A}_{m\times n} = (a_{ij})$ et $\mathbf{B}_{n\times r} = (b_{ij})$ deux matrices, on définit le produit de ces deux matrices comme étant la matrice

$$\mathbf{C}_{m\times r} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right)$$

Remarque:

$$\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{B}_{n\times r} = \mathbf{C}_{m\times r}$$

Produit de matrices

$$\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{B}_{n\times r} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kr} \\ \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{kr} \\ \ddots & \vdots \\ \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{mk}b_{kr} \end{pmatrix}$$

Produit de matrices

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1)(2)+(3)(5)+(-1)(-3) & (1)(4)+(3)(-1)+(-1)(1) \\ (2)(2)+(0)(5)+(-3)(-3) & (2)(4)+(0)(-1)+(-3)(1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 13 & 5 \end{pmatrix}$$

Produit de matrices

Exemple:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = (13)$$

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 8 & 12 & 4 \\ -6 & -9 & -3 \end{pmatrix}$$

Le produit matriciel n'est pas commutatif

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

Propriétés de la multiplication de matrices

- Elément neutre $\boldsymbol{A\,I = A}$

- Associativité $\boldsymbol{A\,(BC) = (AB)\,C}$

$$\boldsymbol{k\,(A\,B) = (kA)B = A(kB)}$$

- Distributivité $\boldsymbol{A\,(B + C) = AB + AC}$

$$\boldsymbol{(A + B)C = AC + BC}$$

Produit d'Hadamard

Définition: Le produit d'Hadamard de deux matrices A et B de type $m\ x\ n$, noté $A \cdot B = (c_{ij})$, est une matrice de type $m\ x\ n$ donnée par

$$c_{ij} = a_{ij} * b_{ij}$$

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 0 & 3\times 0 & 2\times 2 \\ 1\times 7 & 0\times 5 & 0\times 0 \\ 1\times 2 & 2\times 1 & 2\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 7 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrice permutable

Définition: Le produit matriciel n’est pas commutatif.

Dans le cas particulier de deux matrices carrées de même ordre, Telles que $AB = BA$, on dit que A et B commutent ou qu’elles sont permutables.

Puissances successives

Définition:

Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, on définit les puissances successives de A par $A^0 = I_n$ et $A^{p+1} = A^p \times A$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
Autrement dit, $A^p = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{p \text{ facteurs}}$.

Puissances successives

Exemple

On cherche à calculer A^p avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

calcule A^2, A^3 et A^4

Puissances successives

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad A^4 = A^3 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

L'observation de ces premières puissances permet de penser que la formule est : $A^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^p - 1 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}$. Démontrons ce résultat par récurrence.

Puissances successives

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad A^4 = A^3 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

L'observation de ces premières puissances permet de penser que la formule est : $A^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^p - 1 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}$. Démontrons ce résultat par récurrence.

Il est vrai pour $p = 0$ (on trouve l'identité). On le suppose vrai pour un entier p et on va le démontrer pour $p+1$. On a, d'après la définition,

$$A^{p+1} = A^p \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^p - 1 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^{p+1} - 1 \\ 0 & (-1)^{p+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{p+1} \end{pmatrix}.$$

Donc la propriété est démontrée.

Identité usuelle

Formule du binôme

Comme la multiplication n'est pas commutative, les identités binomiales usuelles sont fausses. En particulier, $(A+B)^2$ ne vaut en général pas $A^2+2AB+B^2$, mais on sait seulement que

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2.$$

Binôme de Newton

Proposition

(Calcul de $(A+B)^p$ lorsque $AB = BA$).

Soient A et B deux éléments de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent, *c'est-à-dire tels que $AB = BA$. Alors, pour tout entier $p \geqslant 0$, on a la formule*

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^{p-k} B^k$$

où $\binom{p}{k}$ désigne le coefficient du binôme.

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!\,(p-k)!} \qquad k! = \prod_{i=0}^{k} i = k \times (k-1) \times (k-2) \times \cdots \times 1$$

Binôme de Newton

Exercices

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ On pose } N = A - I$$

Calcule A^P

Note: Si une matrice X est strictement triangulaire alors elle est nilpotente, c-a-d il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $X^k = 0$

Binôme de Newton

Solution

On pose $N = A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice N est nilpotente (c'est-à-dire il existe

$k \in \mathbb{N}$ tel que $N^k = 0$) comme le montrent les calculs suivants :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N^4 = 0.$$

Binôme de Newton

Comme on a $A = I + N$ et les matrices N et I commutent (la matrice identité commute avec toutes les matrices), on peut appliquer la formule du binôme de Newton. On utilise que $I^k = I$ pour tout k et surtout que $N^k = 0$ si $k \geqslant 4$. On obtient

$$A^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} N^k I^{p-k} = \sum_{k=0}^{3} \binom{p}{k} N^k = I + pN + \tfrac{p(p-1)}{2!} N^2 + \tfrac{p(p-1)(p-2)}{3!} N^3.$$

D'où

$$A^p = \begin{pmatrix} 1 & p & p^2 & p(p^2-p+1) \\ 0 & 1 & 2p & p(3p-2) \\ 0 & 0 & 1 & 3p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Transposée d'une matrice

Définition:

La transposée d'une matrice $\mathbf{A}_{m\times n} = (a_{ij})$, notée $\mathbf{A}^T$ est la matrice $\mathbf{B}_{n\times m} = (a_{ji})$.

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Propriétés de la transposée d'une matrice

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$$

$$(k\mathbf{A})^T = k\left(\mathbf{A}^T\right)$$

Symétrie et transposée

$\boldsymbol{A}$ est symétrique $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{A}$

$\boldsymbol{A}$ est anti-symétrique $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} = -\,\boldsymbol{A}$

Rang d'une matrice

Définition: Le rang d'une matrice A est le nombre maximal des vecteurs lignes (ou colonnes) qui sont linéairement indépendants.

Exemple:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

La matrice M a pour rang 2 car la ligne 2 est le double de la ligne 1, elles ne sont pas linéairement indépendantes.

Trace d’une matrice

Définition:

Soit A une matrice carrée d’ordre *n*.
La trace d’une matrice A est égale à la somme des éléments sur la diagonale principale.

$$T_r\ \mathrm{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Exercices de cours

Mini-exercices.

1. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -3 & 2 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$. Quels produits sont possibles ? Les calculer !
2. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, B^2, AB et BA.
3. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^p et B^p pour tout $p \geqslant 0$. Montrer que $AB = BA$. Calculer $(A+B)^p$.