Exercice 2 :

Les vecteurs A, B et C seront linéairement dépendants si l'on peut trouver trois scalaires réels λ, μ, ν, non nuls tels que :

$$\lambda A + \mu B + \nu C = 0$$

On obtient le système :

$$\begin{cases} \lambda + \mu - \nu = 0 \\ 2\lambda + 2\nu = 0 \\ -\lambda + \mu - 3\nu = 0 \end{cases}$$

d'où $\lambda = -\nu$ et $\mu = 2\nu$, ν étant quelconque, non nul.

En prenant $\nu = 1$, on obtient la relation de dépendance : $-A + 2B + C = 0$

Exercice 3 :

Pour que ces trois vecteurs soient indépendants, il faut que :

$$\lambda(1,0,0) + \mu(0,4,4) + v(x,y,z) = 0$$

implique toujours $\lambda = \mu = v = 0$.

Soit

$$\begin{cases} \lambda + vx = 0 \\ \mu + vy = 0 \\ \mu + vz = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda = -vx \\ \mu = -vy \\ v(y-z) = 0 \end{cases}$$

si $y \neq z$, nous aurons $v = 0$ et donc $\lambda = \mu = v = 0$. Le système sera libre pour $y \neq z$.

Exercice 4 :

$$\left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varepsilon_j = 0_E \right] \Leftrightarrow$$

$$\left[\alpha_1 e_1 + \alpha_2 (e_1 + e_2) + \dots + \alpha_n (e_1 + \dots + e_n) = 0_E \right]$$

$$\Leftrightarrow \left[(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) e_1 + (\alpha_2 + \dots + \alpha_n) e_2 + \dots + (\alpha_{n-1} + \alpha_n) e_{n-1} + \alpha_n e_n = 0_E \right].$$

Le système $\{e_1, \dots, e_n\}$ étant libre, cette équation n'est réalisée que si tous les coefficients des e_i sont nuls, d'où le système :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} + \alpha_n = 0 \\ \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} + \alpha_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} + \alpha_n = 0 \\ \alpha_n = 0 \end{cases}$$

dont la solution unique est $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$; on a montré que :

$$\left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varepsilon_j = 0_E \right] \Rightarrow [\alpha_j = 0] \ \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

Exercice 5

Pour que $\{u, v, w\}$ soit un système générateur de R^2, il faut que tout vecteur de R^2 s'exprime comme combinaison linéaire de u, v, w. Soit $\{e_1, e_2\}$ la base canonique de R^2 :

$u = 2e_1 + e_2$, $v = -e_1 + 2e_2$ et

$w = e_1 + 3e_2$

d'où on déduit par exemple :

$e_1 = \frac{1}{5}(2u - v)$ et $e_2 = \frac{1}{5}(v + w)$,

ainsi, si X est un vecteur quelconque de R^2:

$$X = x_1 e_1 + x_2 e_2 = \frac{2x_1}{5} u + \frac{x_2 - x_1}{5} v + \frac{x_2}{5} w, \quad \forall x_1, x_2 \in R$$

ces vecteurs n'étant pas indépendants ($w = u + v$), cette ~~démonstration~~ décomposition n'est pas unique, on a par exemple :

$$X = x_1 e_1 + x_2 e_2 = \frac{x_1}{5} u + \frac{x_2 - 2x_1}{5} v + \frac{x_1 + x_2}{5} v$$

Exercice 6

Solution : (i) Pour que F soit un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$:

1. F doit être non vide,
2. pour tout $w, v \in F$ on doit avoir $w + v \in F$,
3. pour tout $w \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on doit avoir $\lambda w \in F$.

Vérifions ces trois propriétés.

1. Il est clair que le vecteur nul $(0,0,0,0) \in \mathbb{R}^4$ appartient à F donc F est non vide.
2. Soit $w = (w_1, w_2, w_3, w_4) \in \mathbb{R}^4$ et $v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^4$ deux éléments de F. Comme $w, v \in F$, on sait que

$$\begin{cases} w_1 + w_2 + w_3 = 0 \\ w_1 + 2w_3 - w_4 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 + 2v_3 - v_4 = 0. \end{cases} \qquad (**)$$

Pour le vecteur $w + v = (w_1 + v_1, w_2 + v_2, w_3 + v_3, w_4 + v_4)$ nous avons

$$(w_1 + v_1) + (w_2 + v_2) + (w_3 + v_3) = (w_1 + w_2 + w_3) + (v_1 + v_2 + v_3) \overset{(**)}{=\!=} 0 + 0 = 0$$

et

$$(w_1 + v_1) + 2(w_3 + v_3) - (w_4 + v_4) = (w_1 + 2w_3 - w_4) + (v_1 + 2v_3 - v_4) \overset{(**)}{=\!=} 0 + 0 = 0.$$

On a montré que $w + v \in F$.

3. Soit $w = (w_1, w_2, w_3, w_4) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $w \in F$, ses coordonnées vérifient $(**)$.

Pour le vecteur $\lambda w = (\lambda w_1, \lambda w_2, \lambda w_3, \lambda w_4)$ nous avons donc

$$\lambda w_1 + \lambda w_2 + \lambda w_3 = \lambda(w_1 + w_2 + w_3) \overset{(**)}{=\!=} \lambda \cdot 0 = 0$$

et

$$\lambda w_1 + 2\lambda w_3 - \lambda w_4 = \lambda(w_1 + 2w_3 - w_4) \overset{(**)}{=\!=} \lambda \cdot 0 = 0.$$

Nous avons montré que $\lambda w \in F$.

L'ensemble F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.