Tp1 : Algèbre linéaire

Dans ce tp nous allons traiter les opérations basiques sur les vecteurs. Trois parties principales composent ce tp, la première porte sur les opérations sur des vecteurs 2d, la seconde sur les vecteurs unitaires et la troisième sur les opérations sur les vecteurs 3d. On note dans la suite de ce document qu'un vecteur 2d est un vecteur composé de deux éléments. Un vecteur 3d est composé de trois éléments.

I.Opérations sur les vecteurs 2d

1- Ecrire une fonction appelée viz2d qui affiche, dans un espace à deux dimensions, une liste de vecteurs. Le vecteur doit avoir une forme de flèche avec une direction , un sens et une longueur. De plus, la fonction affiche aussi sur chaque vecteur le nom ou libellé associé.

2- Générer deux vecteurs aléatoirement définis dans $\mathbb{R}^2$, qu'on appellera respectivement $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Pour homogénéiser les échelles des vecteurs, les valeurs de ces vecteurs ne devraient pas dépasser 10.

3- Visualiser $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

4- Effectuer les opérations suivantes :

   a. $\vec{u} + \vec{0}$
   b. $\vec{u} + (-\vec{v})$
   c. $\vec{v} - \vec{u}$
   d. $\vec{v} + (-\vec{u})$
   e. $\vec{u} + \vec{v}$
   f. $\vec{v} + \vec{u}$

5- Visualiser les résultats des opérations de 4-

6- Y a-t-il des différences entre les résultats de 4.a et 4.b ?

7- Même question pour (4.c et 4.d) et (4.e et 4.f).

La norme euclidienne d'un vecteur quelconque $\vec{x}$ est calculée de la manière suivante :

$$||\vec{x}|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_i^2} \text{ avec } d \in \mathbb{N}^* \text{ le nombre d'éléments du vecteur}$$

8- Calculer la norme de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et des vecteurs obtenus dans 4-

9- Effectuer les opérations de 4- en remplaçant $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par leurs normes. Par exemple, remplacer $\vec{u} - \vec{v}$ par $||\vec{u}|| - ||\vec{v}||$.

10- Les résultats de 8- et 9- sont-ils identiques ?

11- Peut-on confirmer que $||\vec{u}|| - ||\vec{v}||$ est égale à $||\vec{u} - \vec{v}||$ (4.a) ? Même question pour 4.b, 4.c, 4.d, 4.e et 4.f.

12- Générer aléatoirement les scalaires $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ne dépassant pas la valeur 5.0.

13- Effectuer les opérations suivantes :

a. $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$
b. $-\alpha\vec{u} - \beta\vec{v}$
c. $\alpha\vec{u} - \beta\vec{v}$
d. $-\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

14- Visualiser le résultat de chacune des opérations de 13-.

15- Calculer les normes des vecteurs obtenus dans 13-.

16- Effectuer les opérations de 13- en remplaçant $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par leurs normes.

17- Les résultats de 15- et 16- sont-ils identiques ?

18- Peut-on confirmer que $||\alpha\vec{u}|| + ||\beta\vec{v}||$ est égale à $||\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}||$?

II.Vecteurs unitaires

Définition : S

Un vecteur $\vec{v}$ pour lequel la norme $||\,\vec{v}|| = 1$ est qualifié de vecteur unitaire.

Soit $\vec{z} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ un vecteur.

19- Ecrire une fonction qui vérifie si un vecteur est unitaire. D'après la fonction, $\vec{z}$ est-il un vecteur unitaire ?

20- Ecrire une fonction qui calcule les coordonnées du vecteur unitaire colinéaire à un vecteur donné en entrée. Appliquer cette fonction au vecteur $\vec{v}$ = (7, -3).

III. Opérations sur les vecteurs 3d

21- Ecrire une fonction de visualisation des vecteurs appelée viz3d. Celle-ci est similaire à la fonction viz2d tout en étant adaptée pour un espace de trois dimensions.

22- Générer trois vecteurs aléatoirement définis dans $\mathbb{R}^3$, qu'on appellera respectivement $\vec{t}$, $\vec{w}$ et $\vec{z}$. Pour homogénéiser les échelles des vecteurs, les valeurs de ces vecteurs ne devraient pas dépasser 10.

23- Visualiser $\vec{t}$, $\vec{w}$ et $\vec{z}$

24- Effectuer les opérations suivantes :

a. $\vec{t} + \vec{z} + \vec{w}$
b. $\vec{t} + \vec{w} + \vec{z}$
c. $\vec{t} + \vec{z} + \vec{w} + \vec{0}$

d. $(\vec{t} + \vec{z}) + \vec{w}$
e. $\vec{t} + (\vec{z} + \vec{w})$

f. $\vec{t} * \vec{z} * \vec{w}$
g. $\vec{t} * \vec{w} * \vec{z}$
h. $\vec{t} * \vec{z} * \vec{w} * \vec{0}$

i. $(\vec{t} * \vec{z}) * \vec{w}$
j. $\vec{t} * (\vec{z} * \vec{w})$

k. $\vec{t} * \vec{z} + \vec{w}$
l. $\vec{t} + \vec{z} * \vec{w}$

m. $\vec{t} * (\vec{z} + \vec{w})$
n. $\overrightarrow{tz} + \overrightarrow{tw}$

o. $(\vec{t} - \vec{z})$
p. $(\vec{z} - \vec{w})$
q. $(\vec{t} - \vec{w})$

25- Qu'observez-vous dans les résultats 24.a, 24.b et 24.c ? Même question pour (24.d et 24.e), (24.f, 24.g et 24.h), (24.i et 24.j), (24.k et 24.l) et (24.m et 24.n).

Note :

Pensez aux notions de distributivité, d’associativité, de commutativité et de priorité des opérateurs.

26- Visualiser les vecteurs obtenus dans 24.o, 24.p et 24.q.

27- Quelle est l’inéquation ou l’équation impliquant ces trois vecteurs ?

28- Calculer les normes des vecteurs 24.o, 24.p et 24.q.

29- Peut-on déduire à ces normes la même relation obtenue dans 27- ?