Maths DataScience

Programme

- Algèbre linéaire
  - Espace vectoriel
  - Matrices et applications linéaires
- Probabilités
- Statistique paramétrique
- Projet

Evaluation

- 3 évaluations
- 2 évaluations théoriques et pratiques (40%)
- 1 évaluation projet (60%)

Algèbre linéaire

Plan

I. Espace vectoriel réel

II. Combinaison linéaire

III. Espace vectoriel de dimension finie

IV. Somme de sous-espaces

Espace vectoriel réel

Espace vectoriel réel

Un **espace vectoriel,** également appelé **espace linéaire,** est un ensemble de vecteurs E muni de deux lois de composition

- La loi interne
- La loi externe

Espace vectoriel réel

La loi interne qui associe deux vecteurs de E à un autre vecteur de E. Tout opération d'addition effectuée sur deux vecteurs de E, le résultat est un vecteur dans E.

Quels que soient les vecteurs x, y et z de E, les quatre propriétés suivantes sont satisfaites

1. Commutativité: $x + y = y + x$
2. Associativité: $x + (y + z) = (y + x) + z$
3. Existence d'un élément neutre 0 : $x + 0 = x \quad \forall\, x$
4. $\forall\, x$ est symétrisable: $x + -x = 0$

Espace vectoriel réel

La loi externe associe un couple de $\mathbb{R} \times E$ dans E. Toute multiplication d'un vecteur par un scalaire résulte en un vecteur dans E.

Quels que soient les vecteurs x et y de E et λ et μ de $\mathbb{R}$, les quatre propriétés suivantes sont satisfaites

1. Axiome de distributivité: $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

2. Axiome de distributivité: $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

3. Axiome d'associativité: $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

4. Elément identité de la multiplication scalaire (existence d'un élément neutre 1) : $1x = x$

Sous-espace vectoriel

- Un sous-espace vectoriel (ou sous-espace linéaire) S est un espace vectoriel contenu dans un espace vectoriel plus grand E.

- On dit que S soit un sous-espace de E s'il remplit les trois conditions suivantes :

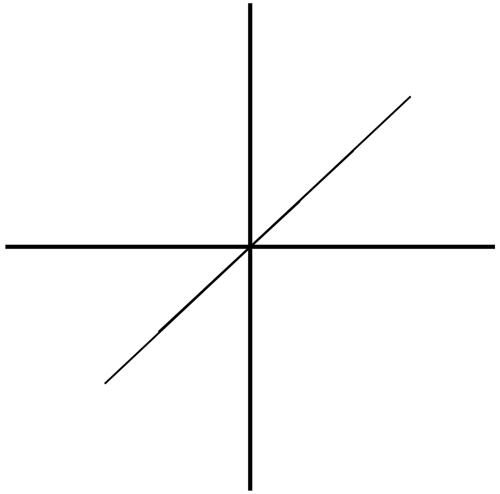
1. Existence d'un élément neutre 0 dans ℝ-e.v , $0_E \in S$

2. La somme de deux vecteurs de S appartient à S:
   $$\forall\, s_1, s_2 \epsilon\, S, \qquad (s_1, s_2\,) \to s_1 + s_2 \,\epsilon\, S$$

1. Le produit d'un vecteur de S par un scalaire appartient à S:
   $$\forall\, \alpha \,\epsilon\, \mathbb{R} \quad \alpha s_i \;\in S$$

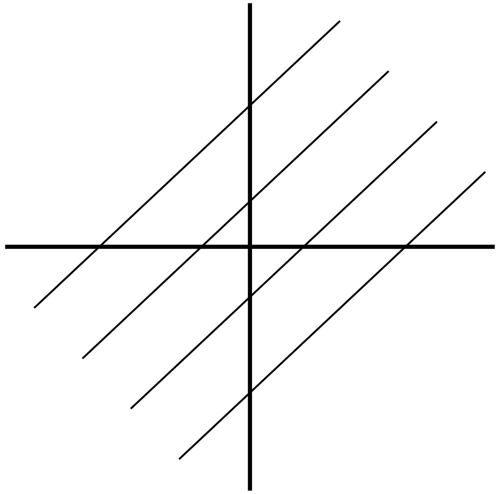
Sous-espace vectoriel

Ensemble de vecteurs dans une ligne droite qui traversent l'origine



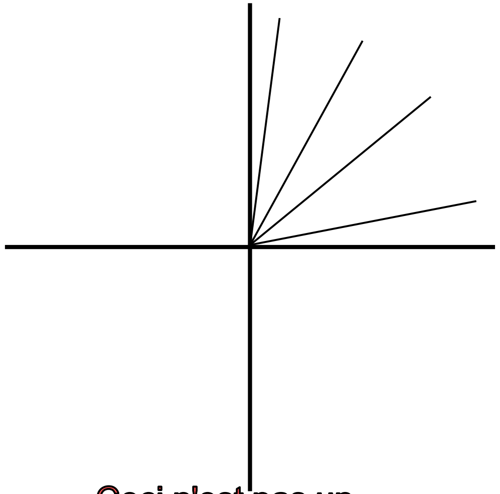
Ceci est un sous-espace du plan

Ensemble de vecteurs dans une ligne droite qui ne traversent pas l'origine



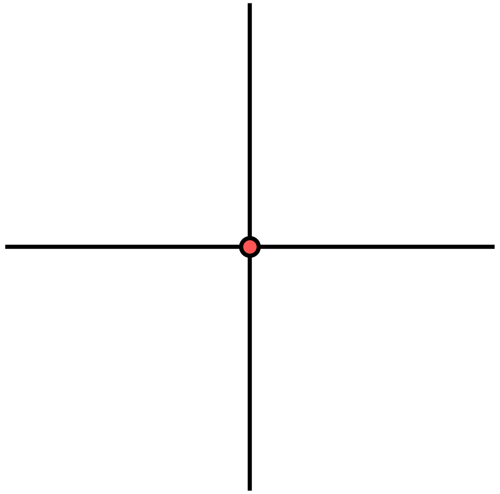
Ceci n'est pas un sous-espace du plan: *il ne contient pas le vecteur 0*

Ensemble de vecteurs en forme de quadrant touchant l'origine



Ceci n'est pas un sous-espace du plan: la fermeture sous la multiplication négative n'est pas respectée

Le vecteur zéro



Ceci est un sous-espace du plan

Démonstration

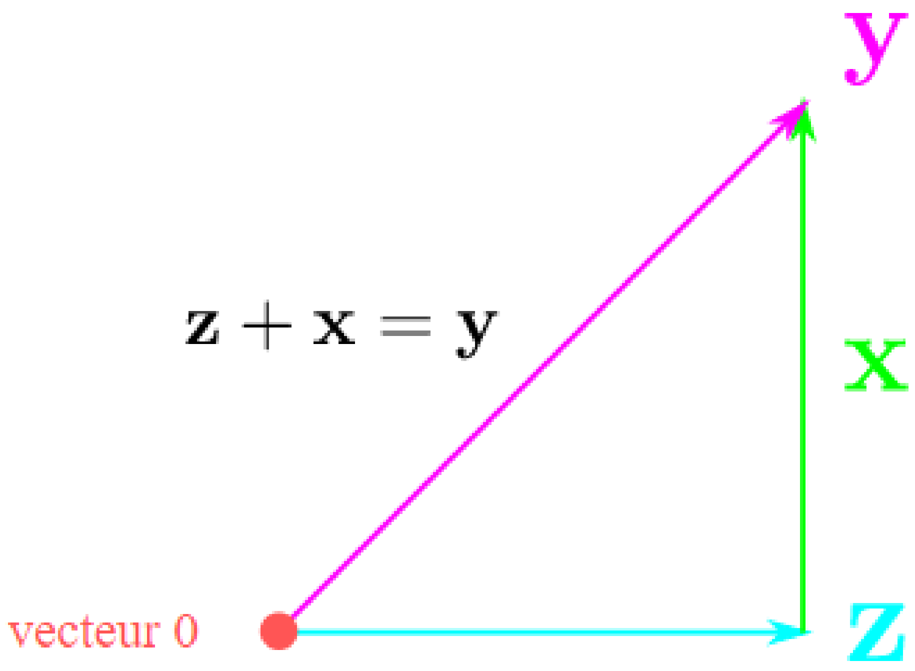
Démontrer que l'élément neutre 0_E est unique

Démonstration

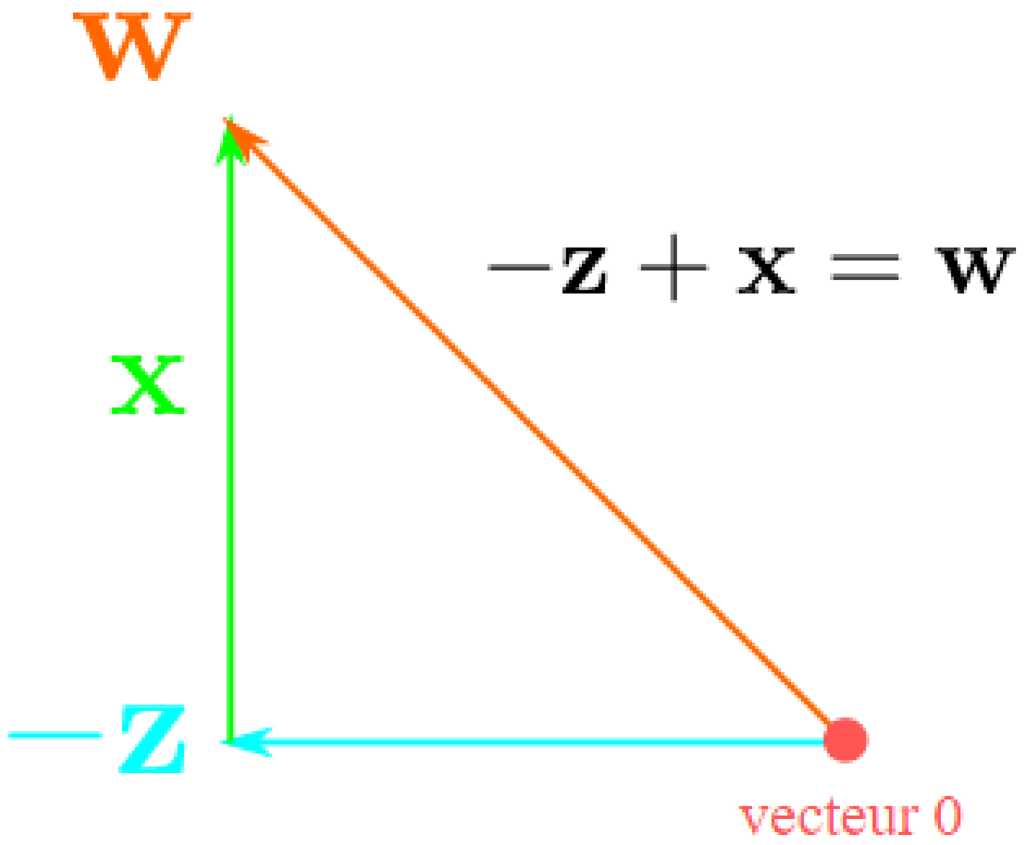
Démontrer que le symétrique d'un vecteur de l'espace vectoriel E est unique

Espace vectoriel – Interprétation géométrique de la somme de vecteurs

Soit x, y et z un ensemble de vecteurs géométriques. Les vecteurs x et z sont perpendiculaires les uns aux autres, donc indépendants. Au contraire, le vecteur y peut être obtenu comme une combinaison linéaire de x et z , donc, dépendant.

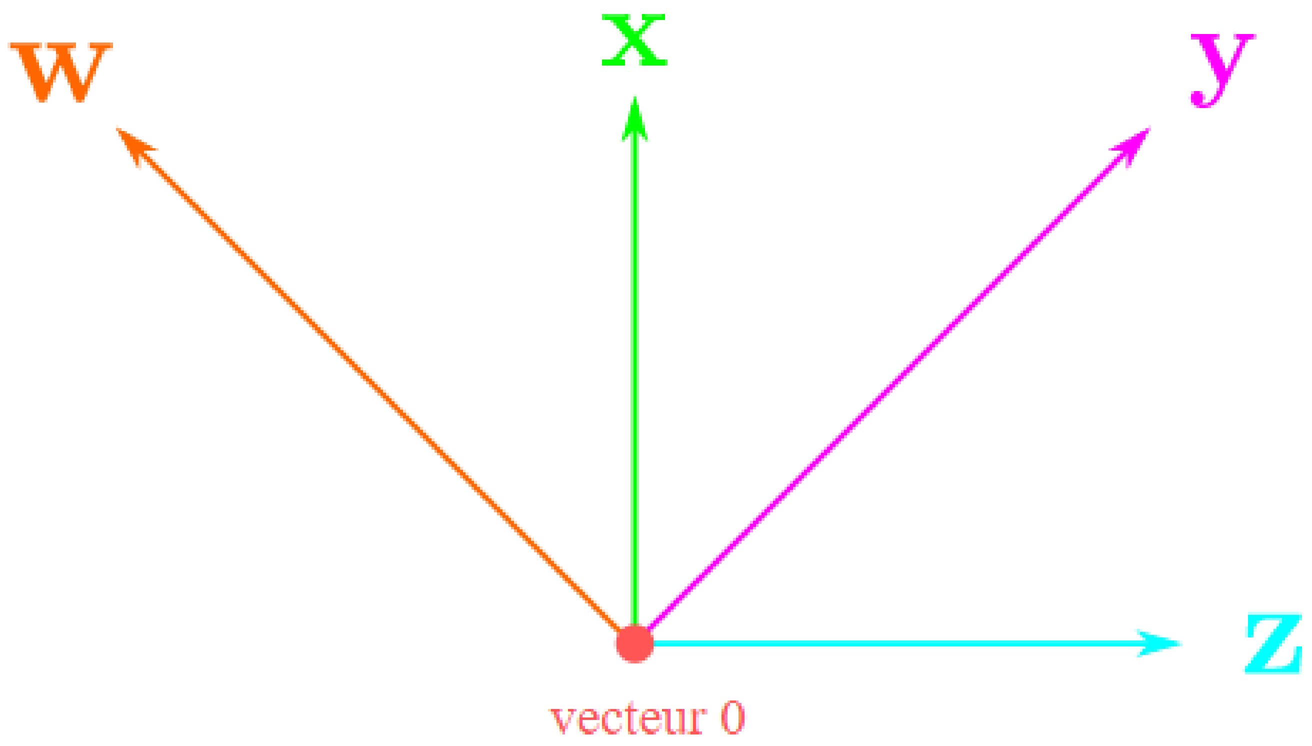


Espace vectoriel – Interprétation géométrique de la somme de vecteurs



Espace vectoriel – Interprétation géométrique de la somme de vecteurs

Exercice Proposer des combinaisons linéaires menant au vecteur nul



Combinaison linéaire

Combinaison linéaire

Soit $\{x_i\}_{i\epsilon I}$ une famille, finie ou non, de vecteurs d'un espace vectoriel E.
On dit qu'un vecteur x de E est combinaison linéaire des vecteurs x_i s'il existe une famille de scalaires $\{\lambda_i\}_{i\epsilon I}$ telle que :

$$x = \sum_{i\epsilon I} \lambda_i x_i$$

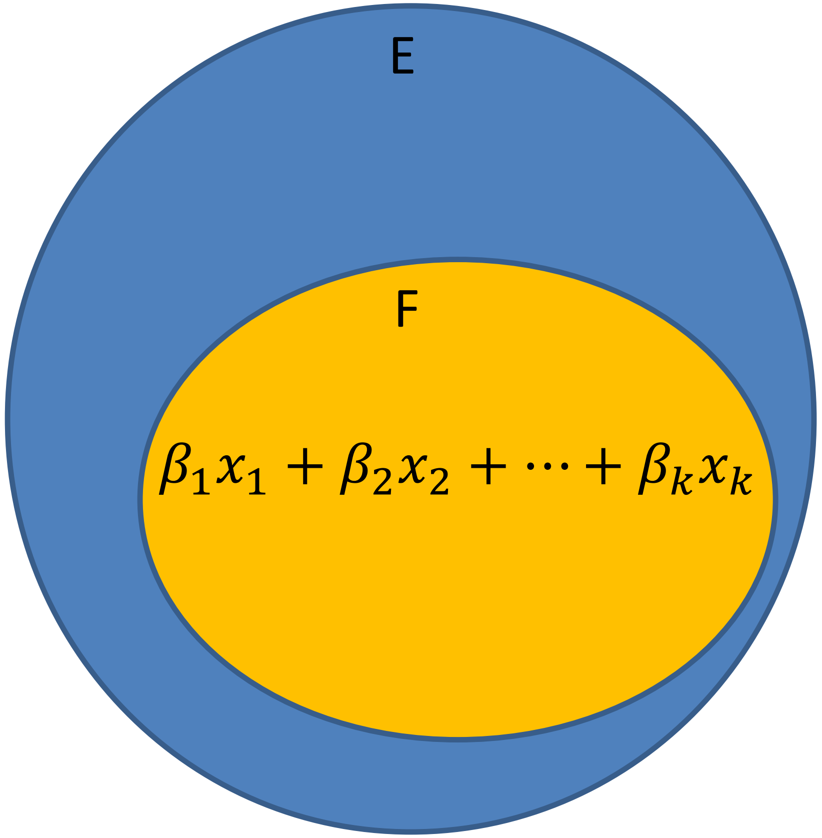
Système générateur

Soit E un espace vectoriel et $\beta_{i=1\ldots k} \in \mathbb{R}$

- L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs d'une famille de vecteurs $\{x_1, x_2 \ldots, x_k\}$ de E est un sous-espace vectoriel (F) de E.

- On dit que F est un sous-espace vectoriel engendré par $x_1, x_2 \ldots, x_k$

- $x_1, x_2 \ldots, x_k$ sont dit générateurs

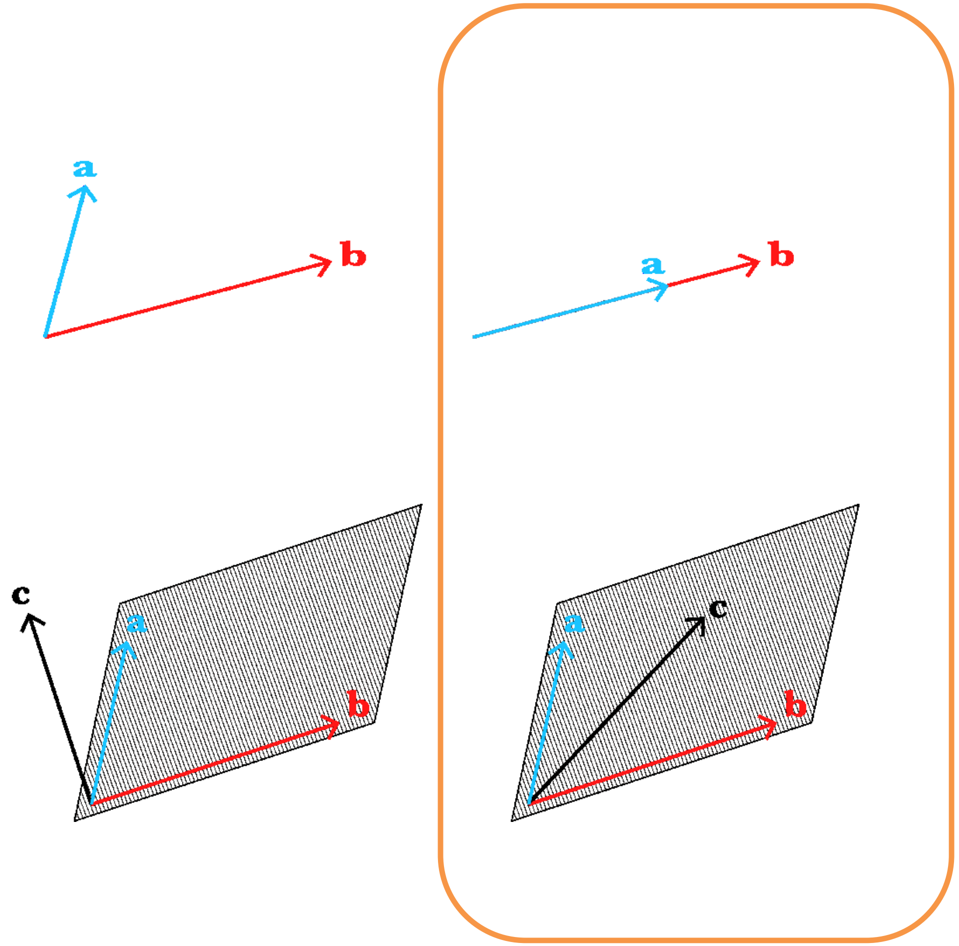


Système lié

- Un ensemble de vecteurs est **linéairement dépendant** si au moins un vecteur peut être obtenu en tant que combinaison linéaire d'autres vecteurs de l'ensemble.

- Soit $x_1, x_2..., x_k$ un ensemble de vecteurs et $\beta \in \mathbb{R}$ un ensemble de scalaires. Les vecteurs sont linéairement dépendants si

$\sum_{i=1}^{k} \beta_i \, x_i = 0$ avec au moins un $\beta \neq 0$

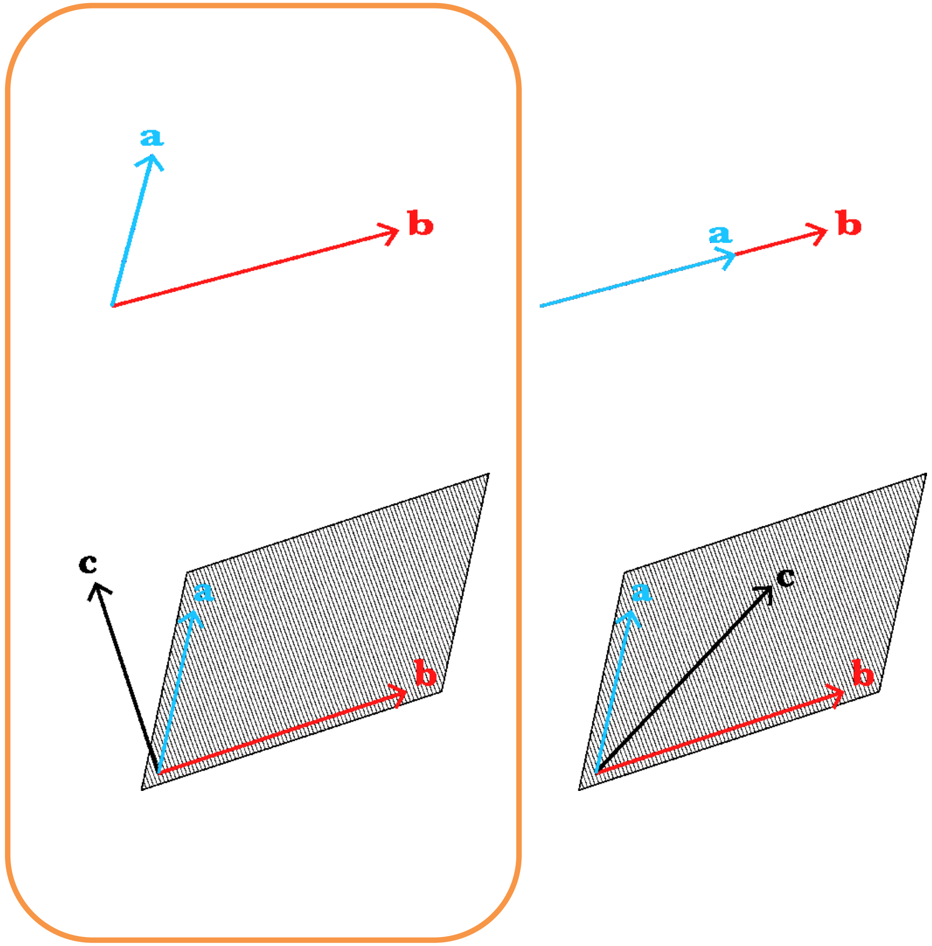


Système libre

- Un ensemble de vecteurs est **linéairement indépendant** si aucun vecteur ne peut être obtenu en tant que combinaison linéaire d'autres vecteurs de l'ensemble.

- Soit $x_1, x_2..., x_k$ un ensemble de vecteurs et $\beta \in \mathbb{R}$ un ensemble d scalaires. Les vecteurs sont linéairement indépendants si

$\sum_{i=1}^{k} \beta_i x_i = 0$ nécessite tout $\beta_1, \dots, \beta_k = 0$



Rang d'un système de vecteurs

Définition:

- Le rang d'un système S fini de vecteurs est le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants extraits de S.

Exemple:

Dans $\mathbb{R}^5$ le rang du système $\{(2,0,0,0,2), (1,3,0,0,0), (4,5,6,0,0), (8,1,0,2,0)\}$ est égal à 4, car aucun vecteur ne peut être combinaison linéaire des autres.

Rang d'un système de vecteurs

Exercice

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, déterminer le rang du système de vecteurs A = $\{v1, v2, v3, v4\}$

Avec : $v1$ = (1, 0, 2, 3) $v2$ = (2, 0, 4, 6) $v3 = (0, 2, 2, 0)$ $v4$ = (1, 2, 4, 3)

Rang d'un système de vecteurs

Exercice

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, déterminer le rang du système de vecteurs A = $\{v1, v2, v3, v4\}$

Avec : $v1$ = (1, 0, 2, 3) $v2$ = (2, 0, 4, 6) $v3 = (0, 2, 2, 0)$ $v4$ = (1, 2, 4, 3)

Solution

$On\ a$ $v2 = 2 \times v1 \Rightarrow$ rang (A) = rang ($v1$, $v3$, $v4$)

Et $v4$ = $v1$ + $v3 \Rightarrow$ rang (A) = rang ($v1$, $v3$)

Les vecteurs $v1$ et $v3$ sont linéairement indépendants donc rang (A) = 2

Espace vectoriel de dimension finie

Espace vectoriel de dimension finie

- On dit qu'un espace vectoriel E et de dimension finie s'il existe une famille finie $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ de générateurs de E.

- Tout vecteur x de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs générateurs a_i $(i = 1, \dots, p)$

Base d’un espace vectoriel

- Une famille $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie et appelée une base de E si B était un système libre et générateur de E.

- Pour tout x de E, il existe une famille unique de scalaires $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ tel que :

$$x = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$$

Les α_i sont appelés les composantes scalaires, ou encore les coordonnées de x par rapport à la base $B = \{b_1, \dots, b_n\}$

Base d’un espace vectoriel

L’espace vectoriel E

- E admet au moins une base.

- Une famille libre maximale dans E est une base. Libre maximale signifie que si on **ajoute** un vecteur de E, on obtient une **famille liée**.

- Une famille génératrice minimale de E est une base. Génératrice minimale signifie que si on **retire** un vecteur de la famille, on obtient une **famille qui n’est plus génératrice.**

Base canonique d'un espace vectoriel

La base canonique $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ d'un espace vectoriel est la base formée des vecteurs dont toutes les composantes sont nulles, sauf une égale à 1

Exemple: Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, la base canonique est ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)).

Note: L'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à *n*, noté $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace sur $\mathbb{R}$ *de* dimension $n + 1$. Sa base canonique est $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$

Dimension

- Dans un espace vectoriel E de dimension finie, toutes les bases ont le même cardinal, appelé dimension de E; on le note dim E

- Un espace vectoriel qui n'est pas de dimension finie est dit de dimension infinie.

- On a l'équivalence :

$$\dim E = 0 \Leftrightarrow E = \{0_E\}$$

Somme de sous-espaces vectoriels

Somme de sous-espaces vectoriels

Soit F et G sont deux sous espaces vectoriels d'un $\boldsymbol{K}$-espace vectoriel E, la somme de F et G résulte en un sous-espace vectoriel. L'ensemble de tous les éléments $x + y$ où x est un élément de F et y un élément de G, est appelé somme des sous-espaces vectoriels F et G . Cette somme est notée :

$$F + G = \{z \in E \mid \exists x \in F \ et \ \exists y \in G, \qquad z = x + y\}$$

Somme de sous-espaces

Soit F et G sont deux sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie, on a la relation :

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Démonstration

Soient F et G deux sous espaces vectoriels d'un $\boldsymbol{K}$-espace vectoriel E, démontrer que la somme de F et G est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

Démontrez que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E

Vecteurs

Vecteurs

- Un vecteur est une liste d'éléments de $\mathbb{R}$. La notation d'un vecteur $\boldsymbol{x}$ de dimension arbitraire n est:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \boldsymbol{x_n} \end{bmatrix} \epsilon \ \mathbb{R}^n$$

- Les vecteurs peuvent avoir n'importe quel nombre de dimensions, les plus courants sont de 2 ou 3 dimensions.

Vecteurs et apprentissage automatique

- La représentation des données en vecteurs, est sans doute la plus couramment utilisée pour construire des modèles d'apprentissage automatique.

- La plupart des problèmes d’apprentissage automatique impliquent plus de deux dimensions, parfois des centaines ou des milliers de dimensions.

- Exemple
  - Un vecteur est une observation et un élément du vecteur est une mesure d’une caractéristique
  - Un vecteur est une séquence de valeurs ordonnées ou série temporelle, utile pour représenter du texte, la parole ou une suite de mesure météo.

Dimensions des vecteurs et système de coordonnées

- Les dimensions des vecteurs sont mappés dans **des systèmes de coordonnées ou des axes perpendiculaires.**

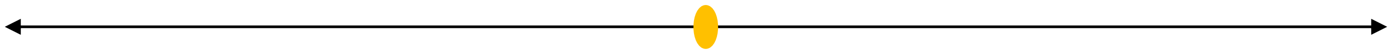
- Les systèmes de coordonnées ont une origine à (0,0,0), par conséquent, lorsque nous définissons un vecteur :

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \epsilon \; \mathbb{R}^3$$

- Nous disons: à partir de l'origine, déplacez 3 unités dans le 1er axe perpendiculaire, 2 unités dans le 2ème axe perpendiculaire et 1 unité dans le 3ème axe perpendiculaire.

Dimensions des vecteurs et système de coordonnées

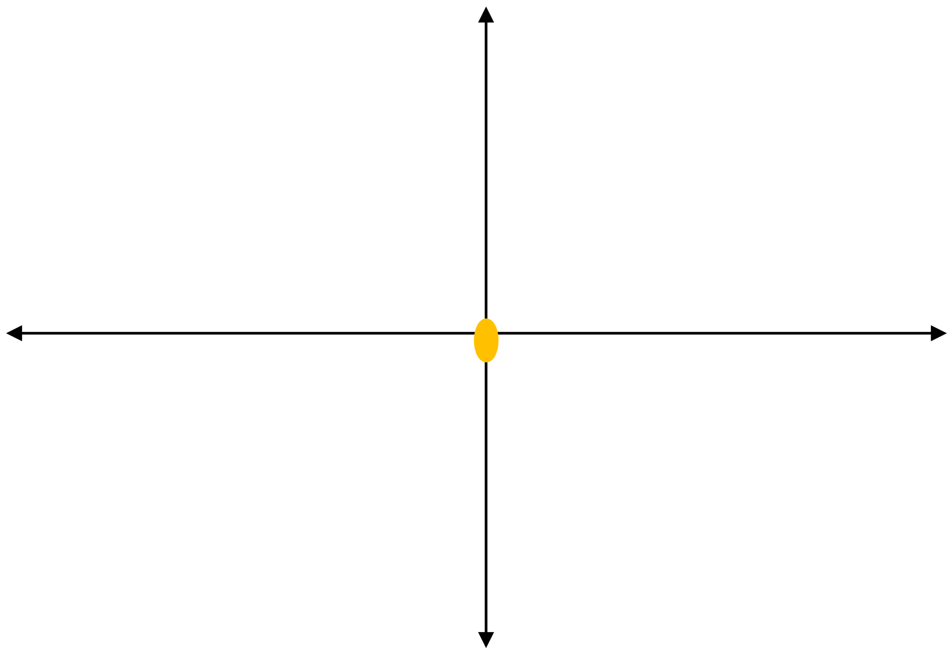
Système de coordonnées à une dimension



Origine à $x = (\ 0\ )$

Dimensions des vecteurs et système de coordonnées

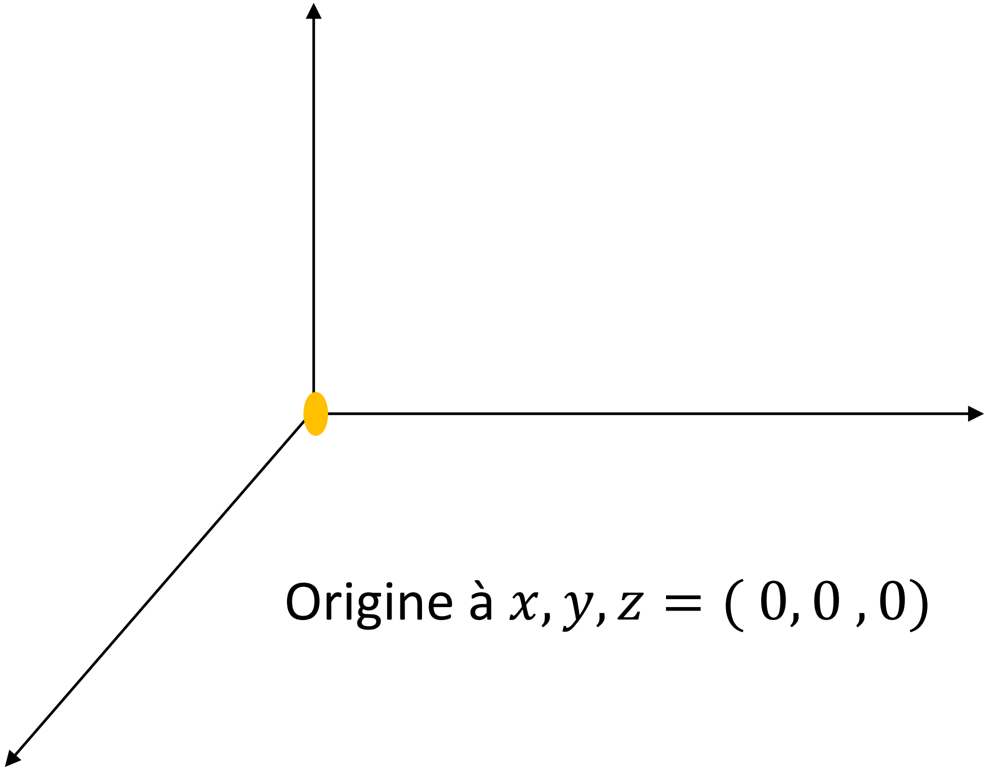
Système de coordonnées à 2 dimensions



Origine à $x, y = (\ 0{,}0\ )$

Dimensions des vecteurs et système de coordonnées

Système de coordonnées à 3 dimensions

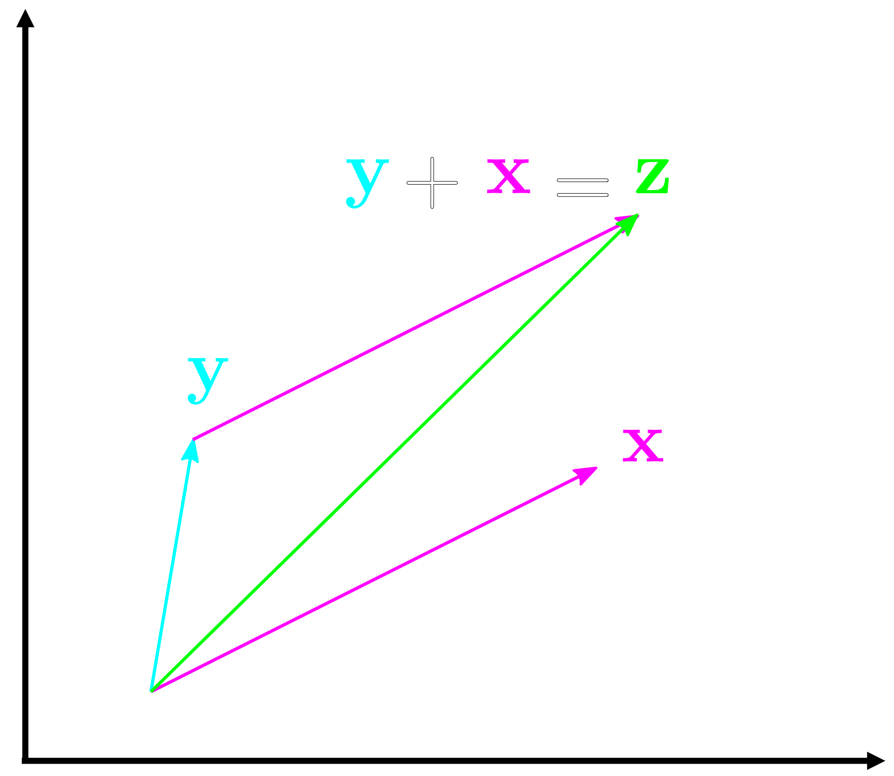


Origine à $x, y, z = (0, 0, 0)$

Caractéristiques d’un vecteur

- Les vecteurs, au sens géométrique, sont des segments caractérisés par
  - Une direction
  - Un sens
  - Une longueur (norme)

- De nombreux concepts d'algèbre linéaire proviennent du point de vue géométrique des vecteurs : espace, plan, distance, etc.



Types de vecteurs

Vecteur zéro

- **Les vecteurs** zéro , sont des vecteurs composés de zéros et de zéros uniquement.

- Ce vecteur est noté simplement 0, quelle que soit la dimensionnalité.

$$0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Types de vecteurs

Vecteur unitaire

- **Les vecteurs unitaires**, sont des vecteurs composés d'un seul élément égal à 1, et le reste à zéro.
- Par exemple, x_1, x_2 et x_3 sont des vecteurs unitaires.

$$\boldsymbol{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Types de vecteurs

Vecteur clairsemé

- **Les vecteurs clairsemés**, sont des vecteurs dont la plupart de ses éléments sont égaux à zéro.
- Le vecteur le plus clairsemé possible est le vecteur zéro.
- Les vecteurs clairsemés sont courants dans les applications d’apprentissage automatique et nécessitent souvent un certain type de méthode pour les traiter efficacement.

Opérations sur les vecteurs

Opérations sur les vecteurs

Addition vecteur-vecteur

- L'addition vecteur-vecteur est une opération par élément, définie uniquement pour les vecteurs de même taille (c'est-à-dire le nombre d'éléments).

- Considérons deux vecteurs de même taille, alors :

$$x + y = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}$$

Opérations sur les vecteurs

Addition vecteur-vecteur

Exemple:

$$x + y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 \\ 2+2 \\ 4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Opérations sur les vecteurs

Addition vecteur-vecteur

Propriétés

1. Commutativité: $x + y = y + x$
2. Associativité: $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. L'ajout du vecteur zéro n'a aucun effet : $x + 0 = 0 + x = x$
4. La soustraction d'un vecteur à partir de lui-même renvoie le vecteur zéro : $x - x = 0$

Opérations sur les vecteurs

Multiplication vectorielle-scalaire

La multiplication vectorielle-scalaire est une opération par élément. Elle est défini comme suit :

$$\alpha x = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ . \\ . \\ \alpha x_n \end{bmatrix}$$

Exemple:

$\alpha = 2$ et x =[1,2,3]

$$\alpha x = 2 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 \\ 2 \times 2 \\ 2 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Opérations sur les vecteurs

Multiplication vectorielle-scalaire

Propriétés

1. Associativité $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$
2. Distributivité à gauche $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
3. Distributivité à droite $x(\alpha + \beta) = x\alpha + x\beta$
4. Distributivité à droite pour l'addition vectorielle $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

Opérations sur les vecteurs

Combinations linéaires de vecteurs

- Il n'y a que deux opérations légales avec les vecteurs en algèbre linéaire : l'addition et la multiplication par des nombres.

- Quand on les combine, on obtient une combinaison linéaire.

$$\alpha x + \beta y = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \end{bmatrix}$$

- Les combinaisons linéaires sont l'opération la plus fondamentale de l'algèbre linéaire. Par exemple, la régression linéaire est une combinaison linéaire de vecteurs.

Opérations sur les vecteurs

Combinations linéaires de vecteurs

Exemple:

$\alpha = 2, \ \beta = 3, \ \ x = [2 \ 3], \ \ y = [4,5]$

$$\alpha x + \beta y = 2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}16\\21\end{bmatrix}$$

Opérations sur les vecteurs

Combinations linéaires de vecteurs

- Une autre façon d'exprimer les combinaisons linéaires que vous verrez souvent est la notation de la somme.

- Considérons un ensemble de vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_k$ et les scalaires $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k \epsilon \mathbb{R}$ alors :

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_i \, x_i = \beta_1 x_1 + \ldots . + \beta_k x_k$$

Opérations sur les vecteurs

Multiplication vecteur-vecteur : Produit scalaire

- La multiplication vecteur-vecteur, communément appelée produit scalaire ou produit interne ($E \times E \rightarrow K$, avec E espace vectoriel défini le corps K)

- Le produit scalaire de x et y est défini comme suit :

$$x^T . y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = x_1 \times y_1 + x_2 \times y_2$$

Où T L exposant désigne la transposition du vecteur. Transposer un vecteur signifie simplement « retourner » le vecteur colonne en un vecteur ligne dans le sens inverse des aiguilles d’une montre.

Norme d'un vecteur

- La norme d'un vecteur est une fonction qui attribue une longueur $\|x\| \in \mathbb{R}$ à un vecteur x ($E \rightarrow K$, avec E espace vectoriel défini le corps K)

- Pour être valide, une norme doit satisfaire ces **quatre** propriétés :

1. **Absolument homogène** $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, $\|\boldsymbol{\alpha x}\| = |\boldsymbol{\alpha}|\|\boldsymbol{x}\|$. En termes : pour tous les scalaires à valeur réelle, la norme s'échelonne proportionnellement à la valeur du scalaire

2. **Inégalité triangulaire** $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. En termes géométriques, pour tout triangle, la somme des deux côtés quelconques doit être supérieure ou égale à la longueur du troisième côté.

3. La **longueur** de tout x doit être une **valeur positive:** $\|x\| \geq 0$

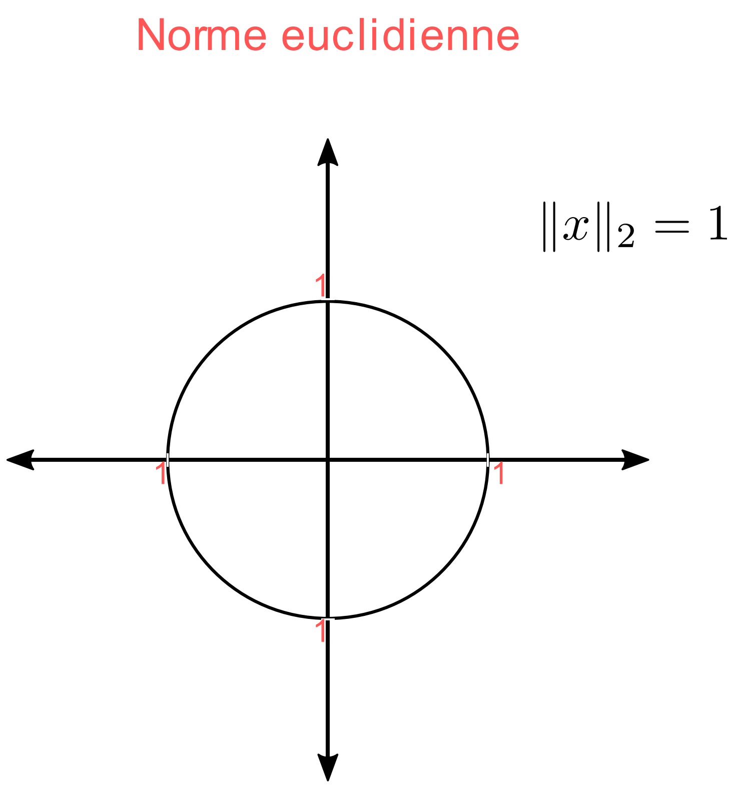
4. Une **longueur de 0** se produit uniquement si $\boldsymbol{x}$=0: $\|x\| = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0$

Norme d'un vecteur

Norme euclidienne

La norme euclidienne (L_2) d'un vecteur est définie par :

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2} = \sqrt{x^T x}$$



Norme d'un vecteur

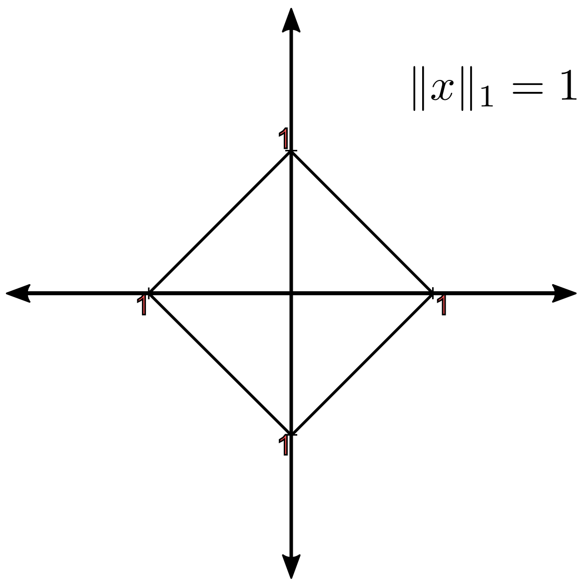
Norme de Manhattan

La norme de Manhattan (L_1) est définie par :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Où $|x_i|$ est la valeur absolue

Norme de Manhattan (city block)



Norme d’un vecteur

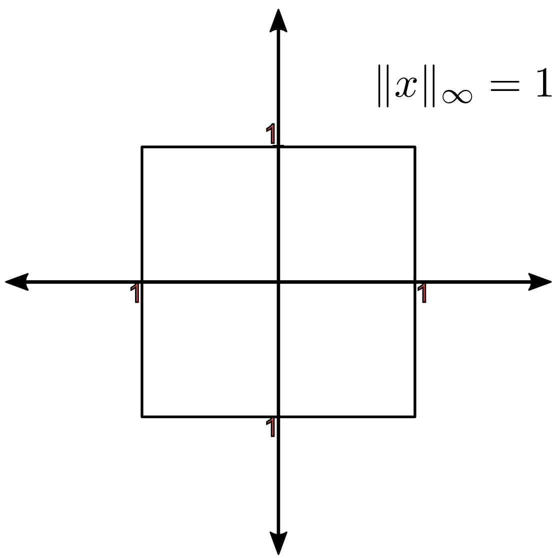
Norme maximale

Norme infinie (ou norme maximale)

La norme maximale ou norme infinie est la **valeur absolue du plus grand élément du vecteur.**

Elle est définie par :

$$\|x\|_\infty = max_i |x_i|$$

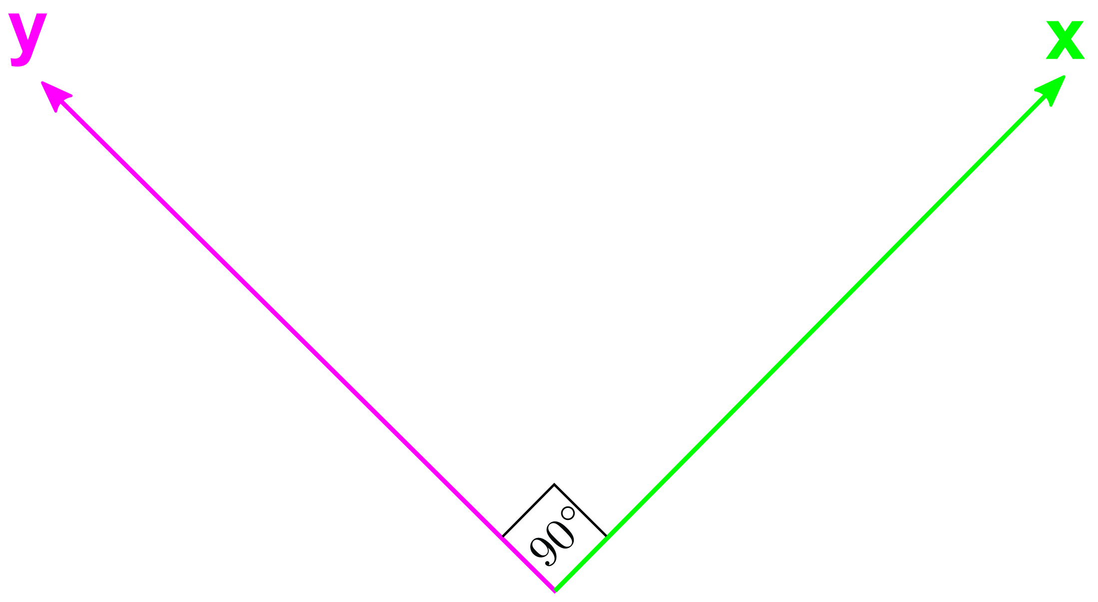


Orthogonalité

- Deux vecteurs x et y sont orthogonaux si leur produit scalaire est **nul**.

- La notation pour une paire de vecteurs orthogonaux est $x \perp y$. Dans le plan bidimensionnel, cela équivaut à une paire de vecteurs formant un angle 90°.

Vecteurs orthogonaux



Orthogonalité

- Parties orthogonales

  On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel sont orthogonaux, qu'on dénote $F \perp \mathrm{G}$, si:

  $$\forall x \in F \; et \; \forall y \in G, \quad on \;\; a \qquad \boldsymbol{x}.\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$$ (autre notation $< x, y >= 0$)

- Famille orthogonale

  On dit qu'une **famille de vecteurs** est orthogonale si les vecteurs qui la composent sont **deux à deux orthogonaux.**

  ➔ Toute famille de vecteurs non nuls orthogonale est **libre**.

- Pythagore

  Deux vecteurs x et y sont orthogonaux si, et seulement si: $(x+y)^2 = x^2 + y^2$