TD0 Structure de l'espace vectoriel

Exercice 1

1) Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$, on définit une de composition interne par :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

Cette loi possède-t-elle les propriétés d'un groupe commutatif * ?

2) On définit ensuite la loi de composition externe suivante :

$$\begin{cases} \lambda.(x, y) = (\lambda x, \frac{y}{\lambda}) \ \ \lambda \epsilon \mathbb{R}^* \\ 0.(x, y) = (0,0) \end{cases}$$

L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de ces deux lois est-il un espace vectoriel ?

* groupe commutatif : structure algébrique qui vérifie les quatre axiomes de la loi de composition interne

Exercice 2

Sur l'ensemble $\mathbb{P}_n[X]$ des polynômes à une indéterminée X, de degré égal $n \in \mathbb{N}^*$, on définit une loi de composition interne, notée +, et une loi de composition externe, notée ., telles que, quels que soient $P \ et \ Q \in \mathbb{P}_n[X]$, $\lambda \epsilon \mathbb{R}$, $X \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} (P + Q)(X) \ = \ P(X) + Q(X) \\ (\lambda.P)(X) \ = \ \lambda P(X) \end{cases}$$

L'ensemble $\mathbb{P}_n[X]$, muni de ces deux lois, est-il un espace vectoriel ?

Exercice 3

Soit F l'ensemble des fonctions réelles f d'une variable x, définies et continues sur $[0,1]$, vérifiant pour tout $x \in [0,1]$:

$$f(x) = f(1 - x)$$

L'ensemble F est muni des deux lois de composition suivantes :

- Une loi interne additive (notée +) définie pour tout couple (f, g) de F^2 par :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \forall x \in [0,1] \ ;$$

- Une loi externe multiplicative (notée .), définie pour tout couple (λ, f) de $\mathbb{R} \times F$ par :

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \qquad \forall x \in [0,1]$$

Monter que F est un espace vectoriel réel.