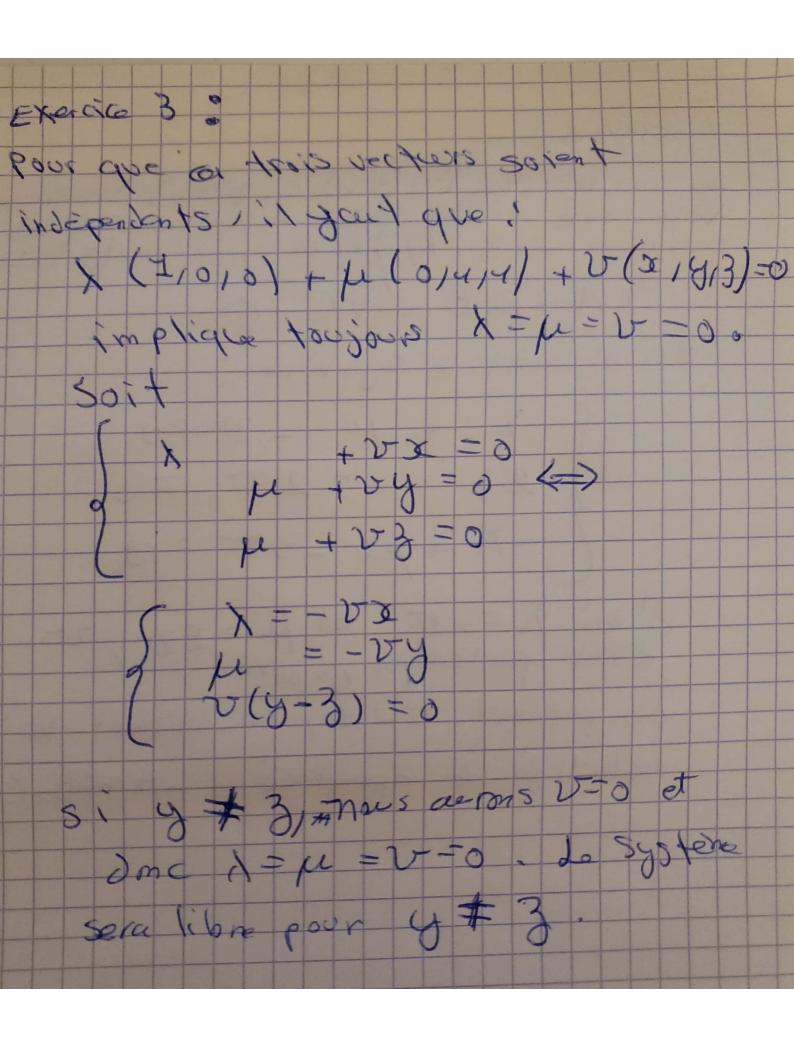
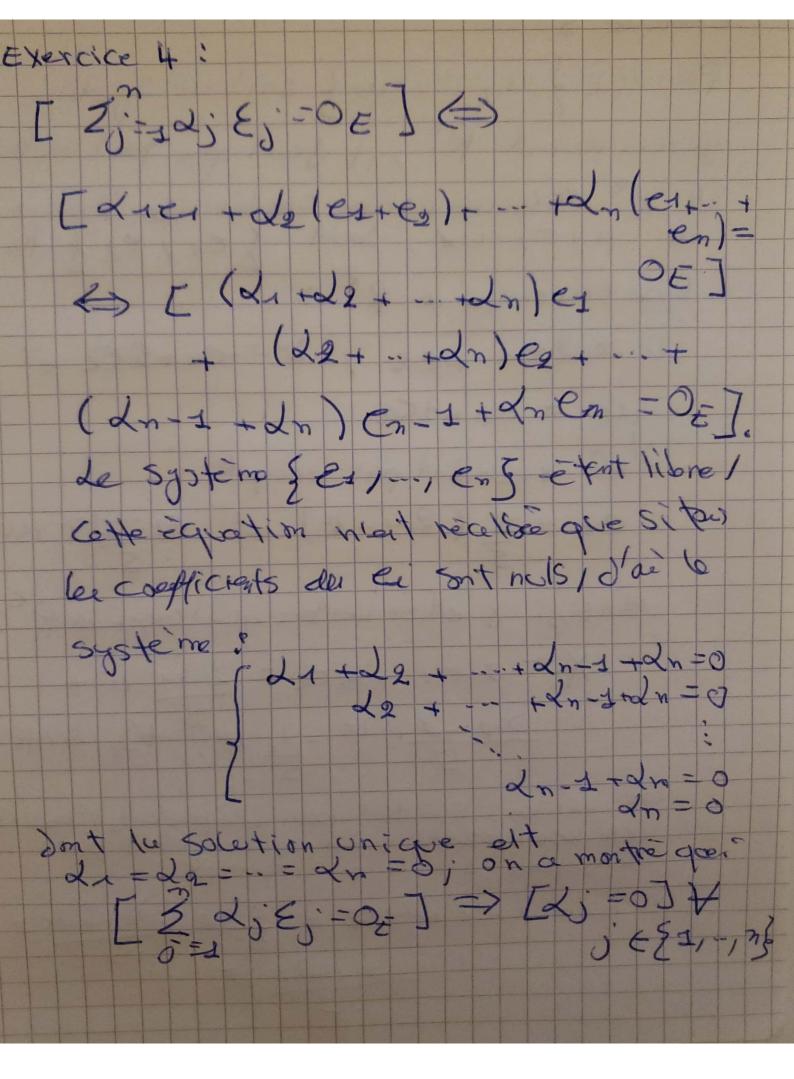
Exercice 2 dépendents si l'on pert 400 ver 1505 ralation de décendance.









Pour que d'u, v, un & soit un système générateur de R2, 11 greet que tout voites de R° 5/exprime commo combinações liveraise de de 10 / ces. Soit & Er/ez & lee base canonique de R°? u = 2e1 +e2 / 2-e1+2e2 et u = e + 3 ta d'ai on déduit par exemple. er = 1 (24-2) et ez=1(2+w); ains, si x ett en vectory que conque de R? X = 0,21 + xace = 231 le + Xe x v + x w 7 Ve Jec 18 ce verteers vie font par indépendants (cu=u+v), cette manners touter de composition n'est part unique, on a par exemple. X = 3-121 + xe@ = 3-1 11 + Je -23-17, 5 5 5

Solution : (i) Pour que F soit un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 :

- 1. F doit être non vide,
- 2. pour tout $w, v \in F$ on doit avoir $w + v \in F$,
- 3. pour tout $w \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on doit avoir $\lambda w \in F$.

Vérifions ces trois propriétés.

- 1. Il est clair que le vecteur nul $(0,0,0,0) \in \mathbb{R}^4$ appartient à F donc F est non vide.
- 2. Soit $w=(w_1,w_2,w_3,w_4)\in\mathbb{R}^4$ et $v=(v_1,v_2,v_3,v_4)\in\mathbb{R}^4$ deux éléments de F. Comme $w,v\in F$, on sait que

$$\begin{cases} w_1 + w_2 + w_3 = 0 \\ w_1 + 2w_3 - w_4 = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 + 2v_3 - v_4 = 0. \end{cases}$$
 (**)

Pour le vecteur $\psi + v = (w_1 + v_1, w_2 + v_2, w_3 + v_3, w_4 + v_4)$ nous avons

$$(w_1 + v_1) + (w_2 + v_2) + (w_3 + v_3) = (w_1 + w_2 + w_3) + (v_1 + v_2 + v_3) \stackrel{(**)}{=} 0 + 0 = 0$$

et

$$(w_1 + v_1) + 2(w_3 + v_3) - (w_4 + v_4) = (w_1 + 2w_3 - w_4) + (v_1 + 2v_3 - v_4) \stackrel{(**)}{=} 0 + 0 = 0.$$

On a montré que $w + v \in F$.

3. Soit $w = (w_1, w_2, w_3, w_4) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $w \in F$, ses coordonnées vérifient (**). Pour le vecteur $\lambda w = (\lambda w_1, \lambda w_2, \lambda w_3, \lambda w_4)$ nous avons donc

$$\lambda w_1 + \lambda w_2 + \lambda w_3 = \lambda (w_1 + w_2 + w_3) \stackrel{(**)}{=} \lambda \cdot 0 = 0$$

et

$$\lambda w_1 + 2\lambda w_3 - \lambda w_4 = \lambda (w_1 + 2w_3 - w_4) \stackrel{(**)}{=} \lambda \cdot 0 = 0.$$

Nous avons montré que $\lambda w \in F$.

L'ensemble F est donc un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .