Les matrices

Déterminants

- Définitions
- Calcul d’un déterminant
- Propriétés d’un déterminant

Déterminant d'une matrice carrée

Définition:

Soit la matrice carrée $A = \left(a_{ij}\right)_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Le déterminant de A est une fonction qui associe un nombre réel à la matrice A.

- Le déterminant de la matrice A d'ordre n, est représenté par un tableau carré contenant les éléments de la matrice limité par deux traits verticaux.

$$|A| = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Déterminant d'une matrice carrée

Exemple:

- $n = 2$ $$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

- $n = 3$ $$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Déterminant d'une matrice carrée

Définition 1 On appelle **mineur** $|M_{ij}|$ de l'élément a_{ij} du déterminant d'ordre n, le déterminant d'ordre $(n-1)$ obtenu en supprimant la ième ligne et la jème colonne de $|\mathrm{A}|$.

Déterminant d’une matrice carrée

Exemple (mineur):

- $n = 2$ $\qquad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

$|M_{11}| = a_{22}$, $|M_{12}| = a_{21}$, …

- $n = 3$ $\qquad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$|M_{12}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21} \times a_{33} - a_{31} \times a_{23}$$

$$|M_{21}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12} \times a_{33} - a_{31} \times a_{32}$$

Déterminant d'une matrice carrée

Définition 2 On appelle **comatrice** (ou **matrice adjointe**) de A, la matrice carrée d'ordre n, notée $com(A)$ (ou $adj(A)$) définie par :

$$com(A) = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \cdots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \dots & \Delta_{nn} \end{pmatrix}$$

On appelle cofacteur Δ_{ij} ou C_{ij} de l'élément a_{ij}, le mineur $|M_{ij}|$ affecté du signe + ou – suivant la relation : $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}\,|M_{ij}|$

Calcul d'un déterminant

La valeur $|A|$ d'un déterminant d'ordre n est donné par l'un des développements suivants :

- Une ligne i : $|A| = a_{i1}\Delta_{i1} + \cdots + a_{in}\Delta_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}$
- Une colonne $|A| = a_{1j}\Delta_{1j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}$

Exemple:

Soit la matrice d'ordre 2 : $A_2 = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Si on effectue un développement suivant la 1ère ligne, nous avons:

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} = a_{11}(-1)^{1+1}|M_{11}| + a_{12}(-1)^{1+2}|M_{12}|$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Calcul de déterminant

1. Repérer la colonne (ou la ligne) où il est plus simple de faire apparaître des zéros.
2. Faire apparaître les zéros en ajoutant à une colonne (ou à une ligne) un multiple d'une autre colonne (ou d'une autre ligne). Répéter le procédé au plus grand nombre de colonnes (ou de lignes) :

$$\mathbf{C}_i \to \mathbf{C}_i + k\mathbf{C}_j, \text{ où } k \in \mathbf{R} \text{ ou } \mathbf{L}_i \to \mathbf{L}_i + k\mathbf{L}_j, \text{ où } k \in \mathbf{R}$$

3. Développer le déterminant selon la colonne (ou la ligne) contenant les zéros.
4. Si nécessaire, refaire les opérations dans le déterminant d'ordre $n - 1$.

Calcul de déterminant

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & -5 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ Utiliser les propriétés pour calculer det A.

Calcul de déterminant

Exercice

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & -5 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} L_1 + L_3 \\ L_2 - 2L_3 \\ L_3 \\ L_4 - L_3 \end{array} \begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 & 5 \\ -3 & 7 & 0 & -7 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times \begin{vmatrix} 5 & -2 & 5 \\ -3 & 7 & -7 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} C_1 - 2C_2 \\ C_2 - C_3 \\ C_3 \end{array} 2 \times \begin{vmatrix} -5 & -7 & 5 \\ 11 & 14 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\,(-70 + 77) = 14$$

Matrice inverse

Définition:

La matrice inverse de la matrice carrée inversible A est donnée par :

$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\ {}^{t}com(A)$ avec ${}^{t}com(A)$ la transposée de la comatrice

Propriétés du déterminant

Propriété 1 Si tous les éléments d'une ligne (ou d'une colonne) d'une matrice carrée A sont nuls, alors :

$$\det A = 0$$

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$.

En développant le déterminant selon la colonne de zéros, on obtient : $\det A = 0$

Propriétés du déterminant

Propriété 2

Soit A, une matrice carrée et B obtenue en multipliant les éléments d'une ligne ou d'une colonne de A par un nombre réel k. Alors : $\det B = k \det A$

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}.$$

En développant le déterminant selon la colonne qui a été multipliée par k, on obtient :

$$\begin{aligned} \det B &= ka_{13}\,C_{13} + ka_{23}\,C_{23} + ka_{33}\,C_{33} \\ &= k\,(a_{13}C_{13} + a_{23}\,C_{23} + a_{33}\,C_{33}) \\ &= k \det A. \end{aligned}$$

Propriétés du déterminant

Exemple

Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & 2/5 \\ 4 & 8 & 16 \\ 7/2 & 3/2 & 5/2 \end{pmatrix}$

Propriétés du déterminant

Exemple

Tous les éléments de la première ligne ont 1/5 comme facteur, ceux de la deuxième ligne ont tous 4 comme facteur et ceux de la troisième ligne ont 1/2 comme facteur. On a donc :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1/5 & 1/5 & 2/5 \\ 4 & 8 & 16 \\ 7/2 & 3/2 & 5/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{5} \times 4 \times \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{2}{5} \left(1 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} \right)$$

$$= \frac{2}{5} \left[1(10 - 12) - 1(5 - 28) + 2(3 - 14)\right] = \frac{2}{5} \left[-2 + 23 - 22\right] = \frac{-2}{5}$$

Propriétés du déterminant

Propriété 3

Soit A, une matrice carrée d'ordre n, et k, un nombre réel. Alors :

$$\det(kA) = k^n \det A$$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, alors $kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}$.

$$\det kA = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k^3 \det A$$

De la même façon, on montre que pour un déterminant d'ordre n, on a :

$$\det(kA) = k^n \det A$$

Propriétés du déterminant

Propriété 4 Soit A, une matrice carrée d'ordre n. Si une matrice B est obtenue en permutant deux colonnes (ou deux lignes) consécutives de la matrice A, alors : $\det B = -\det A$

Exemple

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \text{et } B = \begin{pmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{pmatrix}.$$

$$\det B = \begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix} = -c(dh - ge) + f(ah - gb) - i(ae - db)$$

$$= -[c(dh - ge) - f(ah - gb) + i(ae - db)]$$

$$= -\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\det A$$

Propriétés du déterminant

Propriété 5 Soit A, une matrice carrée d'ordre n. Si deux colonnes ou deux lignes de A sont identiques, alors : $\mathbf{det}\ (A) = 0$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ d & e & e \\ g & h & h \end{pmatrix}$.

On peut, de façon plus simple, tenir le raisonnement suivant :

Soit A une matrice carrée ayant deux colonnes (ou deux lignes) identiques. La permutation de ces deux colonnes (ou de ces deux lignes) a pour effet de changer le signe du déterminant. Par ailleurs, cette permutation donne le même déterminant. On doit donc avoir :

$$\det A = -\det A, \text{ d'où } 2 \det A = 0 \text{ et } \det A = 0$$

Propriétés du déterminant

Propriété 6 Soit A, une matrice carrée d'ordre n. Si deux colonnes ou deux lignes de A sont proportionnelles, alors :

$$\det(A) = 0$$

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} a & b & kb \\ d & e & ke \\ g & h & kh \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b & kb \\ d & e & ke \\ g & h & kh \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b & b \\ d & e & e \\ g & h & h \end{vmatrix} = k \times 0 = 0$$

Propriétés du déterminant

Propriété 7

Si B est une matrice carrée d'ordre n formée de tous les éléments d'une matrice A, à l'exception d'une colonne (ou d'une ligne) à laquelle on a ajouté un multiple d'une autre colonne (ou d'une autre ligne), alors $\det B = \det A$.

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} a & b+ka & c \\ d & e+kd & f \\ g & h+kg & i \end{pmatrix}.$$

$$\det B = \begin{vmatrix} a & b+ka & c \\ d & e+kd & f \\ g & h+kg & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & ka & b \\ d & kd & e \\ g & kg & h \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + 0 = \det A$$

Propriétés du déterminant

Propriété 8 Si A est une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure) d'ordre n. Alors, le déterminant de A est le produit des éléments de sa diagonale principale. On écrit symboliquement :

$$\det \boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_{11}\,\boldsymbol{a}_{22}\,\boldsymbol{a}_{33} \ldots \boldsymbol{a}_{nn}$$

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$. En développant le déterminant selon la première colonne, on obtient :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,(a_{22}\,a_{33} - 0) = a_{11}\,a_{22}\,a_{33}$$

Autres propriétés du déterminant

$$\det {}^tA = \det A$$

$$\det(BA) = \det B \times \det A$$

Si A est réversible $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$