MajecSTIC 2009
Avignon, France, du 16 au 18 novembre 2009

Modélisation hybride en coordonnées Lagrangiennes de flux de trafic routier

Samia Smaili[1*]
1 :Université d'Evry, Laboratoire IBISC, 40 rue du Pelvoux, 91020 Evry – France.

Contact : Samia.Smaili@ibisc.univ-evry.fr

Résumé
Dans cette présentation, nous développons une nouvelle approche de modélisation hybride de flux de trafic routier. Il s'agit d'un couplage d'une classe de modèles macroscopiques du second ordre (Aw-Rascle-Zhang, ARZ) et d'une classe de modèles microscopiques (follow-the-leader, FL) en coordonnées Lagrangiennes. Cette nouvelle façon d'hybrider offre des avantages non négligeables. En effet, dans le modèle hybride purement Lagrangien, les interfaces sont mobiles et le problème de conservation de La masse ne se pose pas.

Abstract
We propose a simple discrete hybrid model for vehicular traffic flow, for which both the macroscopic and the microscopic models are based on a Lagrangian discretization of the "Aw-Rascle-Zhang" (ARZ) model.This hybridization makes use of the relation between the ARZ macroscopic model and a follow-the-leader (FL) microscopic model. Moreover, in the hybrid model, the total variation in space of velocity is non-increasing, the total variation in space of the specific volume is bounded and the total variation in time are bounded.

Mots-clés : Flux de trafic, macroscopique, microscopique, discrétisation Lagrangienne, hybride.

Keywords: Traffic flow, macroscopic, microscopic, Lagrangian discretization, hybrid.

---

1. Introduction

Depuis les premières théories, qui ont donné naissance au modèle de Lighthill-Whitham et Ross LWR [4, 6], au milieu des années cinquante, la modélisation du trafic routier n'a cessé d'être un domaine de recherche d'un intérêt croissant. En effet, comprendre, et plus encore, prédire l'évolution de l'écoulement du trafic à partir de son état actuel est un défi scientifique aux plusieurs retombées économiques considérables.
Le trafic routier est un phénomène relativement complexe du fait qu'il résulte de la combinaison de plusieurs facteurs, entre autres le comportement des conducteurs, la géométrie des infrastructures, la composition du flux de véhicules, etc.. L'étude du trafic routier a donné lieu à de nombreux travaux de recherche allant de l'amélioration du modèle LWR à son extension aux modèles d'ordre supérieur, mais aussi au développement d'autres techniques de modélisation du trafic.

D'une manière générale les modèles d'écoulement se répartissent en deux catégories, selon leur échelle de représentation. On distingue : les modèles *macroscopiques* qui considèrent le trafic comme un « fluide » en mouvement et les modèles *microscopiques* qui traitent de la dynamique des véhicules, de manière individuelle. Les modèles macroscopiques sont adaptés à la

[*] .

représentation de réseaux de grande taille [1, 7]. Par ailleurs, les modèles microscopiques sont mieux adaptés à la description d'éléments plus ponctuels du réseau, mais sont par contre très onéreux dans leur mise en œuvre sur un réseau routier de grande taille. Afin de répondre à cette problématique, une des approches récentes les plus prometteuses consiste à coupler les deux visions du trafic [2, 5]. Cette approche est aussi connue sous le nom de modélisation *hybride*. L'une des difficultés liées à cette approche consistent à expliciter la cohérence entre les différents modèles à coupler et la manière de passer de l'un à l'autre tout en conservant précisément la masse ainsi que la structure des solutions des modèles à travers les interfaces. Nous proposons un modèle hybride générique basé sur le couplage d'une classe de modèles macroscopiques de second ordre Aw-Rascle-Zhang (ARZ) [1, 7] et d'une classe de modèles microscopiques (follow-the-leader) [2, 3].
Afin d'assouplir les contraintes liées à l'implémentation des modèles hybrides, nous proposons Une nouvelle approche qui consiste à modéliser les deux parties du modèle hybride en coordonnées Lagrangiennes, qui offre des avantages non négligeables. En effet, les interfaces sont mobiles et le problème de conservation de la masse ne se pose pas.

II. Modèle macroscopique: ARZ

Le modèle macroscopique de second ordre "Aw-Rascle-Zhang" (ARZ) est basé sur les équations suivantes:

1. Equation de conservation:
$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho v) = 0 \tag{1}$$
2. Equation de vitesse:

Modèle de Aw-Rascle:
$$\partial_t v + (v - \rho P'(\rho))\partial_x v = \frac{A}{T}(V_e(\rho) - v) \tag{2}$$
Modèle de Zhang:
$$\partial_t v + (v + \rho V'(\rho))\partial_x v = 0 \tag{3}$$
Où ρ et v représentent respectivement la densité du trafic et la vitesse et ∂_t et ∂_x représentent les dérivées partielles par rapport au temps et espace respectivement.
$V_e(\rho)$ représente la vitesse d'équilibre.
Dans l'équation (2), la quantité $P(\rho)$ représente la "pression du trafic", par analogie avec la dynamique des gaz. $P(\rho)$ est définie par :
$$P(\rho) \overset{déf}{=} V_{\max} - V_e(\rho)$$

La forme conservatrice consiste dans les équations suivantes:
$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x (\rho v) = 0 \\ \partial_t (\rho I) + \partial_x (v \rho I) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

où $I = v - V_e(\rho)$ représente la *vitesse relative*, i.e. la différence entre l'actuelle vitesse v et la vitesse d'équilibre $V_e(\rho)$

Soit $\tau = \dfrac{1}{\rho}$ l'interdistance entre deux véhicules consécutifs et on note par (X, T) la "masse" en coordonnées Lagrangiennes, où $X = \int^{x} \rho(u,t)du$ représente le nombre cumulé de véhicules qui sont passés au point x et $T = t$

Le système (4) s'écrit en coordonnées Lagrangiennes (X, T) comme :
$$\begin{cases} \partial_T \tau - \partial_X v = 0 \\ \partial_T I = 0 \end{cases} \tag{5}$$

III. Discrétisation Lagrangienne du modèle macroscopique ARZ

On considère le problème de Riemann suivant

$$\begin{cases} \partial_T \tau - \partial_X v = 0 \\ \partial_T I = 0 \end{cases} \tag{6}$$

avec la donnée initiale

$$\begin{cases} U^+(X,0) = (\tau^+, I^+) si X > 0 \\ U^-(X,0) = (\tau^-, I^-) si X < 0 \end{cases} \tag{7}$$

Pour définir le schéma de Godunov associé au problème de Riemann, on introduit $X_j := j\Delta X,\, j \in Z$ et $t_n = n\Delta t, n \in N$.

Soit $h := (\Delta X, \Delta t)$ tend vers (0,0), avec $\tau := \dfrac{\Delta t}{\Delta X} = cons\tan t$ et on suppose que $\forall(\Delta X, \Delta t)$ la CFL condition est satisfaite:

$$\tau \sup_{U \in G}(\max_{i=1,2}\{|\lambda_i(U)|\}) \leq 1$$

(8)

où $U(X,T) = (\tau, I)$, λ_i les valeurs propres et $G = \{[v^{\min}, v^{\max}] \times [I^{\min}, I^{\max}]\} \cap \{I \geq v\}$ est la région invariante contenant la donnée initiale $U(x), \forall x \in R$ et $\inf\{I - v, (v,I) \in G\} > 0$

La discrétisation Lagrangiennes de (6) est donnée par

$$\begin{cases} \tau_j^{n+1} = \tau_j^n + \dfrac{\Delta t}{\Delta X}(v_{j+1}^n - v_j^n) \\ I_j^{n+1} = I_j^n \end{cases} \tag{9}$$

avec la donnée initiale

$$\begin{cases} \tau_j(0) = \tau_j^0 \geq \dfrac{1}{\rho_m} = \tau_m = 1 \\ 0 \leq v_j(0) = v_j^0 \leq I_j + V_e\left(\dfrac{1}{\tau_m}\right) \end{cases} \tag{10}$$

IV- Le modèle microscopique Follow-the-Leader (FL)

On s'intéresse au modèle microscopique follow-the-leader [2, 3].

Dans ce genre de modèle, l'idée de base est que l'accélération en temps t dépend de la vitesse relative des véhicules et de leur " leader" véhicule en temps t, ainsi que de la distance entre les véhicules.

La dynamique d'un véhicule j est donnée par les deux équations

$$\begin{cases} \dfrac{dx_j}{dt} = v_j \\ \dfrac{dv_j}{dt} = P'\left(\dfrac{x_{j+1} - x_j}{\Delta X}\right)\left(\dfrac{v_{j+1} - v_j}{\Delta X}\right), \end{cases} \tag{11}$$

où $x_j(t)$ et $v_j(t)$ sont respectivement la position et la vitesse du véhicule j en temps t

et ΔX l'espace occupé par le véhicule. Ici, $\rho_j := \dfrac{\Delta X}{(x_{j+1}-x_j)}$ est la densité locale normalisée

$\tau_j = \dfrac{1}{\rho_j} = \dfrac{(x_{j+1}-x_j)}{\Delta X}$ et la densité maximale est $\rho_m = \rho_{\max} = \dfrac{1}{\tau_m} = 1 = \dfrac{1}{\tau_{\min}}$

Dans cette section, le véhicule $(j+1)$ précède le véhicule j et $I_j = v_j - V_e\left(\dfrac{1}{\tau_j}\right)$.

La discrétisation Lagrangienne du système (11) est

$$\begin{cases} \tau_j^{n+1} = \tau_j^n + \dfrac{\Delta t}{\Delta X}\left(v_{j+1}^n - v_j^n\right) \\ I_j^{n+1} = I_j^n \end{cases} \tag{12}$$

avec

$$v_j^{n+1} = I_j^{n+1} + V_e\left(\dfrac{1}{\tau_j^{n+1}}\right)$$

et les conditions initiales

$$\begin{cases} \tau_j(0) = \tau_j^0 \geq \dfrac{1}{\rho_m} = \tau_m = 1 \\ 0 \leq v_j(0) = v_j^0 \leq I_j + V_e(\tau_m) \end{cases} \tag{13}$$

V- Le modèle Hybride en coordonnées Lagrangiennes

Puisque le modèle macroscopique est perçu comme la limite d'un grand nombre de véhicules sur un long tronçon de route, nous pouvons considérer qu'une cellule macroscopique Lagrangienne contient "un long véhicule" fait par la juxtaposition de véhicules, tandis que dans le modèle microscopique, une cellule Lagrangienne contient un seul véhicule (simple). Des cellules Lagrangiennes, évidemment macroscopiques sont beaucoup plus grandes que les microscopiques. Dans le modèle hybride « Eulérien » [2, 5], "la région microscopique" est fixée dans des coordonnées Eulériennes. Ici, au contraire, cette "actuelle région microscopique" est fixée par morceaux en coordonnées Lagrangiennes. Il se déplace en coordonnées Lagrangiennes et est périodiquement régénéré pour toujours contenir une région Eulérienne fixe : "la région microscopique minimale" autour de la jonction, le feu de signalisation..., dans lequel notre description sera toujours microscopique.

Bibliographie

1. A.Aw, M.Rascle. *Derivation of continuum traffic flow models from microscopic follow-the-leader models*. SIAM applied mathematics, vol.63(1), 2000, p.205-221.
2. E.Bourrel et J.B.Lesort. *Mixing micro and macro representation of traffic flow.* Transportation Research Record, 1853, pp. 193-200, 2003.
3. R.E.Chandler et R.Hermann. *Traffic dynamics: Studies in car following*. Operations research, vol 1005, pp. 107-121.1958.

4. M.H.Lighthill et G.B.Whitham. *A theory of traffic flow on long crowded roads. Proc Royal Soc.* A 229: 317-345. 1955.
5. S.Mammar. *Développement d'un modèle de simulation macro-microscopique de trafic.* Thèse de doctorat, Université d'Evry Val d'Essonne, décembre 2006.
6. P.Ross. *Traffic dynamics*. Transportation research part B, Vol 22B, n°6, p : 421-435. 1956.
7. H.M.Zhang. *A non-equilibrium traffic model devoid of gas-like behaviour.* Transportation research part B, Vol 36, p:275-290. 2002.