

Application d'un nouveau critère de robustesse pour le problème du plus court chemin

June 7, 2010

Virginie Gabrel, Cécile Murat, Lei Wu

Université Paris-Dauphine, LAMSADE

Place du Maréchal de Lattre de Tassigny, 75775 Paris Cedex 16, France

E-mail: gabrel,murat@lamsade.dauphine.fr

Université de Picardie Jules Verne E-mail: lei.wu@u-picardie.fr

Abstract

In optimization, it is used to deal with uncertain and unaccurate factors which make difficult the assignment of a single value to each model parameters. It may be more relevant to assign a set of values to each uncertain model parameters. A scenario is defined by choosing one value in each uncertainty set. In this context, a robust solution has to be as good as possible under a majority of scenarios and never be too bad. This characterization leaves place to many possible interpretations and therefore gives rise to various approaches of robustness. These approaches differ from models used to represent uncertain factors, from methodology used to measure robustness, and finally from analysis and design of resolution methods. In this paper, we focus on the application of new criteria for the shortest path problem with uncertain arc lengths. At first, we present two uncertainty models usually considered : the interval model and the discrete scenario set model. For each model, we apply new criteria of robustness, called *bw*-robustness and *bw*-deviation (originally proposed by B. Roy) which respectively generalize the worst case criterion and the maximum regret criterion. In each case, we have to solve large scale integer linear programs. Our computational experiments on large scale graphs show that a standard solver like Cplex is able to solve these new problems which are very promising for robustness analysis.

Keywords: robustness analysis, shortest path problem, worst case criterion, maximum regret, integer linear programming.

Abstract

En optimisation, les sources d'incertitude et d'imprécision sont nombreuses et rendent souvent difficiles l'affectation d'une unique valeur plausible à chacun des paramètres du modèle. Il peut alors être plus pertinent de retenir un ensemble de valeurs possibles pour chacun des paramètres. Un scénario est défini en choisissant une unique valeur dans chacun des ensembles. Dans ce contexte, une solution robuste doit être aussi bonne que possible dans une grande majorité de scénarios et jamais trop mauvaise. Cette caractérisation donne lieu à de nombreuses interprétations possibles qui justifient différentes approches de la robustesse. Ces approches se distinguent par les différents modèles utilisés pour représenter les facteurs d'incertitude, par les méthodologies utilisées pour mesurer la robustesse, et finalement par la conception et l'analyse des méthodes de résolution. Dans ce papier, nous nous focalisons sur l'application de nouveaux critères pour le plus court chemin avec des valeurs incertaines sur les arcs. Nous commençons par rappeler deux modèles d'incertitude habituellement considérés : le modèle par intervalle et le modèle par ensemble discret de scénarios. Pour chacun d'entre eux, nous appliquons les nouveaux critères de robustesse appelés *bw*-robustesse et *bw*-déviations (proposés initialement par B. Roy) qui généralisent respectivement les critères du pire

cas et du regret maximum. Dans chacun des cas, nous avons à résoudre des programmes linéaires en nombres entiers de très grandes tailles. Nos expérimentations numériques sur des graphes de grandes tailles montrent qu'un solveur standard de type Cplex est capable de résoudre ces nouveaux problèmes, ce qui est très prometteur du point de vue de l'analyse de robustesse.

1 Introduction

En optimisation, il est fréquent de faire face à des éléments d'incertitude et d'imprécision qui rendent difficile l'attribution d'une valeur unique plausible à chacun des paramètres du modèle. Deux approches sont alors possibles : la première consiste à affecter une valeur à chacun des paramètres, calculer la solution optimale correspondante, puis déterminer dans quel intervalle peut varier chacun des paramètres de façon à préserver l'optimalité de la solution ; la seconde consiste à intégrer les variations éventuelles des paramètres dans le modèle à optimiser. En programmation mathématique, la première approche est celle de l'analyse de sensibilité. En ce qui concerne la seconde approche, lorsque les valeurs des paramètres peuvent être décrites par des lois de probabilités, certaines problématiques relèvent de l'optimisation stochastique. Lorsqu'il n'est pas possible, ni pertinent, d'associer des lois de probabilités aux paramètres du modèle, il est alors préférable d'attribuer un ensemble de valeurs à chacun d'entre eux. La spécification d'une valeur pour chacun des paramètres correspond à un scénario. Dans ce cadre, le problème d'optimisation est résolu en déterminant une solution qui soit optimale sur tous les scénarios. En général, une telle solution n'existe pas et il s'agit de déterminer une solution qui se comporte relativement bien quel que soit le scénario qui puisse se réaliser, une telle solution étant qualifiée de robuste.

La plupart des travaux portant sur la robustesse en optimisation combinatoire s'accorde à qualifier de robuste une solution qui soit acceptable dans une grande majorité des scénarios et, qui ne soit jamais trop mauvaise (voir par exemple [16, 19]). Cette caractérisation laisse place à de nombreuses interprétations possibles et, a donc donné lieu à différentes approches de la robustesse. Ces approches diffèrent de par la modélisation des éléments d'incertitude et d'indétermination du problème de décision considéré, par la méthodologie utilisée pour appréhender la robustesse, et enfin par l'analyse et la conception de méthodes de résolution. Dans cet article, nous nous intéressons à l'application de nouveaux critères sur le problème du plus court chemin.

Nous considérons un 1-graphe orienté $G = (X, U)$ connexe, valué, tel que $X = \{1, \dots, n\}$ et U comporte m arcs. Un chemin μ allant de 1 à n dans G est une séquence d'arcs : $\mu = \{(i_0 = 1, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_{k-1}, i_k = n)\}$ ou de façon équivalente une séquence de sommets $\mu = \{i_0 = 1, i_1, i_2, \dots, i_{k-1}, i_k = n\}$. Dans le cadre déterministe, à chaque arc $u = (i, j) \in U$ est associée une unique valeur notée c_u ou c_{ij} . La valeur de μ est alors donnée par : $c(\mu) = \sum_{(i,j) \in \mu} c_{ij}$. Un problème classique de l'optimisation combinatoire consiste à chercher le plus court chemin, noté μ_G^* , parmi l'ensemble \mathcal{C} des chemins allant de 1 à n dans G . Il est possible de représenter ce problème sous la forme d'un programme linéaire en variables binaires comme suit :

$$(P) \begin{cases} \min & cx \\ \text{s.t} & Ax = d \\ & x \in \{0, 1\}^m \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Dans ce programme linéaire, A est la matrice d'incidence sommets-arcs de G , $d = (d_i)_{i=1, \dots, n}$ vaut $d_1 = 1$, $d_n = -1$ et $d_i = 0$ pour tout i compris entre 2 et $n - 1$, et x correspond au vecteur caractéristique d'un chemin avec $x_u = 1$ si l'arc u appartient au chemin et 0 sinon. Du fait des propriétés de A , l'optimum de P peut être obtenu en résolvant sa relaxation continue. Le problème du plus court chemin déterministe ne présente donc aucune difficulté théorique. Si des éléments d'incertitude et d'indétermination interviennent dans les évaluations des arcs, les problèmes sont alors moins faciles à représenter et à résoudre.

En un premier temps, nous présentons deux modèles classiquement étudiés pour représenter l'incertitude dans ce contexte. Puis, nous rappelons les principaux résultats connus sur l'application de critères de robustesse classiques issus de la théorie de la décision. Dans les deux sections suivantes, nous présentons deux nouveaux critères de robustesse, appelés le critère de la *bw*-robustesse et celui de la *bw*-deviation, initialement proposés par B. Roy, qui généralisent les critères classiques et, permettent de mettre en oeuvre une analyse plus fine des solutions robustes. Nous montrons alors comment ces critères s'appliquent sur le problème du plus court chemin dans chacun des deux modèles d'incertitude. Dans la dernière section, nous présentons des résultats de calcul sur les problèmes de robustesse définis préalablement.

2 Prise en compte de l'incertitude : les différents modèles

Lorsque des éléments d'incertitude, d'indétermination et/ou d'imprécision doivent être pris en compte, il peut ne plus être pertinent, voire possible, de fixer une valeur unique c_{ij} pour chacun des arcs (i, j) .

Dans certains contextes, ces valeurs sont décrites par des lois de probabilités. Le problème devient alors celui du plus court chemin stochastique que nous n'aborderons pas dans cet article.

Dans d'autres contextes, les incertitudes ne peuvent pas être appréhendées de façon satisfaisante par des lois de probabilités. Depuis le milieu des années 1990, deux modèles ont été plus particulièrement développés dans la littérature : le modèle dit par intervalle et le modèle par ensemble fini de scénarios. Dans ces deux modélisations, est associé, non plus une unique valeur à chacun des arcs, mais un ensemble de valeurs, cet ensemble pouvant être de taille infinie ou finie. L'hypothèse sous-jacente est que sur chaque arc, la valeur réellement constatée, appartient à l'ensemble qui lui est associé. Un scénario correspond à la spécification d'une valeur pour chacun des arcs. Nous noterons S l'ensemble des scénarios possibles, c_{ij}^s la valeur de l'arc (i, j) dans le scénario s , $c^s(\mu)$ la valeur du chemin μ pour le scénario s , G^s le graphe valué selon le scénario s , $\mu_{G^s}^*$ le plus court chemin allant de 1 à n dans le scénario s .

Dans les deux prochaines sections, nous présentons en détail le modèle par intervalle et le modèle par ensemble discret de scénarios.

2.1 Le modèle par intervalle

Dans le modèle par intervalle, à chaque arc (i, j) du graphe est associé un intervalle, noté $[\underline{c}_{ij}, \bar{c}_{ij}]$, tel que $c_{ij} \in [\underline{c}_{ij}, \bar{c}_{ij}]$. Cet intervalle représente l'ensemble des valeurs possibles de l'arc (i, j) . L'ensemble S des scénarios est infini et se définit comme le produit cartésien des m intervalles $[\underline{c}_u, \bar{c}_u]$. Dans ce contexte, un chemin μ peut prendre toute valeur appartenant à l'intervalle $[\underline{c}(\mu), \bar{c}(\mu)]$ avec $\underline{c}(\mu) = \sum_{(i,j) \in \mu} \underline{c}_{ij}$ et $\bar{c}(\mu) = \sum_{(i,j) \in \mu} \bar{c}_{ij}$. Ce modèle s'applique lorsqu'il y a indépendance totale entre les variations des coûts sur les arcs.

Exemple 1 *Considérons le chemin $\mu_3 = (1, 2, 5, 4, 6)$ dans le graphe G de la figure 1 dont les arcs sont valués par des intervalles. La valeur de μ_3 n'est donc pas connue avec certitude mais varie dans l'intervalle $[7, 36]$.*

Ce modèle est considéré pour le problème du plus court chemin dans [1, 7, 8, 11, 13, 12, 15].

Par ailleurs, le modèle par intervalle a été appliqué sur d'autres problèmes combinatoires, par exemple celui de l'arbre couvrant [10, 20], celui de sélectionner p éléments parmi n de poids total minimal [5], ou encore le problème d'affectation [3].

2.2 Le modèle par ensemble discret de scénarios

Dans le modèle par ensemble discret de q scénarios, chaque scénario s de S est défini par les m valeurs c_{ij}^s des arcs. A chaque arc (i, j) du graphe est donc associé un ensemble fini de q valeurs $\{c_{ij}^1, \dots, c_{ij}^q\}$ possibles. Notons qu'à la différence du modèle par intervalle, toutes les combinaisons de valeurs c_{ij} ne

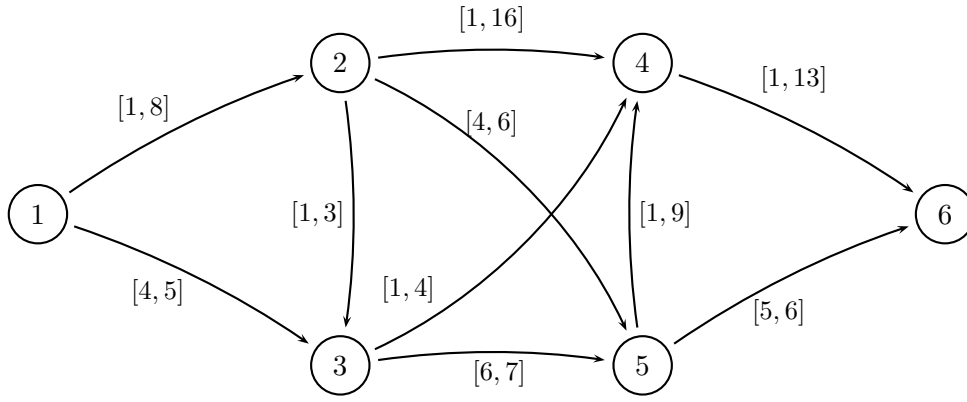


Figure 1: Exemple pour le modèle par intervalle

constituent pas un scénario pertinent. Ce modèle s'applique lorsqu'il existe des corrélations entre les variations possibles des coûts des arcs. Par conséquent, à chaque chemin μ est associé un vecteur $V(\mu)$ de dimension q tel que $V(\mu) = (c^1(\mu), \dots, c^q(\mu))$, où $c^s(\mu) = \sum_{(i,j) \in \mu} c_{ij}^s$ avec $s \in \{1, \dots, q\}$.

Exemple 2 Considérons le graphe G de la figure 2 ci-dessous dont les arcs sont valués selon 6 scénarios. L'ensemble des chemins élémentaires allant de 1 à 6 ainsi que leurs valeurs sur les six scénarios sont présentés dans le tableau 1.

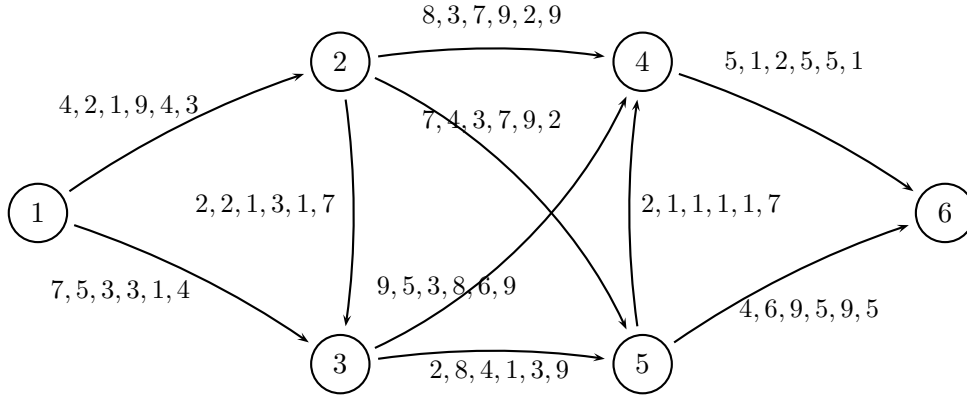


Figure 2: Exemple pour le modèle par scénarios

Ce modèle est considéré pour le problème du plus court chemin dans [9, 14, 18, 21].

Par ailleurs, le modèle par ensemble discret de scénarios a été appliqué sur d'autres problèmes combinatoires, par exemple celui de l'arbre couvrant dans [9, 18], celui de sélectionner p éléments parmi n de poids total minimal dans [5], le problème du 1-médian dans [9, 6], ou encore sur le problème d'affectation [3, 2].

Une fois un modèle d'incertitude choisi, il faut donner un sens à la notion de chemin robuste et en déduire une formulation mathématique pour définir formellement ce que l'on cherche à déterminer. Deux critères ont été très étudiés : le critère du pire cas et celui du regret maximum, tous deux issus de la théorie de la décision. Nous rappelons, dans la section suivante, les principaux résultats obtenus sur l'application de ces deux critères dans chacun des deux modèles d'incertitude sur le problème du plus court chemin.

μ	$c^1(\mu)$	$c^2(\mu)$	$c^3(\mu)$	$c^4(\mu)$	$c^5(\mu)$	$c^6(\mu)$
$\mu_1 = (1, 2, 4, 6)$	17	6	10	23	11	13
$\mu_2 = (1, 2, 5, 6)$	15	12	13	21	22	10
$\mu_3 = (1, 2, 5, 4, 6)$	18	8	7	22	19	13
$\mu_4 = (1, 2, 3, 4, 6)$	20	10	7	25	16	20
$\mu_5 = (1, 2, 3, 5, 6)$	12	18	15	18	17	24
$\mu_6 = (1, 2, 3, 5, 4, 6)$	15	14	9	19	14	27
$\mu_7 = (1, 3, 4, 6)$	21	11	8	16	12	14
$\mu_8 = (1, 3, 5, 6)$	13	19	16	9	13	18
$\mu_9 = (1, 3, 5, 4, 6)$	16	15	10	10	10	21

Table 1: Ensemble des chemins de 1 à 6

3 Les critères classiques issus de la théorie de la décision

3.1 Critère du pire cas

Avec le critère du pire cas, un chemin μ est évalué sur la base du scénario qui lui est le plus défavorable. Pour le problème du plus court chemin, la valeur sur le critère du pire cas d'un chemin μ , notée $v_{\text{PIR}}(\mu)$, est définie par :

$$v_{\text{PIR}}(\mu) = \max_{s \in S} c^s(\mu)$$

Il s'agit alors de déterminer le chemin μ_{PIR}^* qui minimise v_{PIR} comme suit :

$$v_{\text{PIR}}(\mu_{\text{PIR}}^*) = \min_{\mu \in \mathcal{C}} v_{\text{PIR}}(\mu)$$

Choisir μ_{PIR}^* revient à choisir un chemin qui, quel que soit le scénario, présente une valeur inférieure ou égale à $v_{\text{PIR}}(\mu_{\text{PIR}}^*)$. En ce sens, $v_{\text{PIR}}(\mu_{\text{PIR}}^*)$ peut être assimilée à une borne supérieure qui offre une garantie absolue. D'ailleurs, dans l'ouvrage de Kouvelis et Yu [9], les solutions qui optimisent ce critère sont appelées solutions robustes en absolu.

En théorie de la décision, par opposition à ce critère qui modélise le comportement d'un décideur dit prudent ou averse au risque, on trouve un critère représentant le comportement inverse. Ceci revient à évaluer un chemin μ sur la base du scénario qui lui est le plus favorable. Dans ce contexte, la valeur d'un chemin μ , notée $v_{\text{FAV}}(\mu)$, est définie par :

$$v_{\text{FAV}}(\mu) = \min_{s \in S} c^s(\mu)$$

Il s'agit alors comme précédemment de déterminer le chemin μ_{FAV}^* qui minimise v_{FAV} comme suit :

$$v_{\text{FAV}}(\mu_{\text{FAV}}^*) = \min_{\mu \in \mathcal{C}} v_{\text{FAV}}(\mu)$$

3.1.1 Complexité et résolution pour le modèle par intervalle

Dans le modèle par intervalle, le problème du plus court chemin robuste au sens du pire cas, noté ROBINTPIR, est étudié dans [7]. Etant donné un chemin μ de 1 à n , le scénario qui maximise $c^s(\mu)$ est celui pour lequel chaque arc $u \in U$ a le plus grand coût possible, soit \bar{c}_u . Ce scénario du pire cas, noté $s^{\bar{c}}$, étant unique, il suffit de considérer le graphe qui lui est associé et, d'y rechercher le plus court chemin afin de trouver μ_{PIR}^* tel que $v_{\text{PIR}}(\mu_{\text{PIR}}^*) = \min_{\mu \in \mathcal{C}} \bar{c}(\mu)$. Il en découle le théorème suivant.

Théorème 1 [7] *Le problème ROBINTPIR est polynomial.*

Exemple 3 Reprenons le chemin $\mu_3 = (1, 2, 5, 4, 6)$ du graphe de la figure 1 : le scénario qui lui est le plus défavorable est celui pour lequel chacun des coûts des arcs est à sa borne supérieure. Dans ce cas, $v_{\text{PIR}}(\mu) = 36$. Le scénario qui lui est le plus favorable est celui pour lequel chacun des coûts des arcs est à sa borne inférieure. Dans ce cas, $v_{\text{FAV}}(\mu) = 7$. La valeur de μ_3 varie donc entre 7 et 36. Dans ce graphe, le chemin optimal selon le critère du pire cas est donc $\mu_{\text{PIR}}^* = (1, 3, 5, 6) = \mu_8$ de valeur 18.

De façon analogue, le chemin qui permet d'optimiser le critère dit du meilleur cas est obtenu en calculant le plus court chemin sur le graphe dont les arcs sont valués par les bornes inférieures des intervalles. En l'occurrence, pour notre exemple le chemin optimal pour le critère du meilleur cas est $\mu_{\text{FAV}}^* = (1, 2, 4, 6) = \mu_1$ de valeur 3.

3.1.2 Complexité et résolution pour le modèle par ensemble discret de scénarios

Pour le modèle par scénarios, le problème du plus court chemin robuste au sens du pire cas, noté ROBDISPIR, est étudié dans [9, 21]. Yu et Yang montrent que ce problème est NP-difficile si le nombre de scénarios est borné et fortement NP-difficile si le nombre de scénarios est non borné. Yu et Yang, dans [21], proposent un algorithme de résolution exacte de ROBDISPIR lorsque le nombre de scénarios est borné. Il est fondé sur le principe de la programmation dynamique et est de complexité pseudo-polynomiale.

Il est également possible de proposer une formulation sous la forme d'un programme mathématique comme suit :

$$(P_{\text{PIR}}) \begin{cases} \min & z \\ \text{s.t.} & Ax = d \\ & z \geq c^s x \quad \forall s \in S \\ & x \in \{0, 1\}^m \end{cases} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

La relaxation continue de ce problème n'admet alors plus nécessairement une solution optimale en 0-1.

Le problème de trouver le plus court chemin selon le critère du meilleur cas, est lui polynomial. En effet, il suffit de calculer le plus court chemin de chaque scénario G^s , $\forall s \in S$ et de retenir celui qui a la plus petite valeur.

Exemple 4 Reprenons le chemin $\mu_3 = (1, 2, 5, 4, 6)$ du graphe de la figure 2. D'après le tableau 1, le scénario qui lui est le plus défavorable est le 4 qui donne $v_{\text{PIR}}(\mu_3) = 22$ et, le scénario qui lui est le plus favorable est le 3 qui lui attribue $v_{\text{FAV}}(\mu_3) = 7$. Dans le tableau 2 sont représentées les pires et meilleures valeurs de chaque chemin du graphe.

Nous pouvons en déduire que le chemin optimal sur le critère du pire cas est $\mu_{\text{PIR}}^* = \mu_8$ de valeur 19. Avec le critère du meilleur cas, le chemin μ_1 présente la meilleure valeur 6.

3.2 Critère du regret maximum

3.2.1 Présentation générale

Etant donné un scénario s , le fait d'avoir choisi un chemin μ qui n'est pas nécessairement le chemin minimal dans G^s , engendre un sur-coût appelé regret et noté $r^s(\mu) = c^s(\mu) - c^s(\mu_{G^s}^*)$. Un chemin μ est alors évalué par $v_{\text{REG}}(\mu)$ sur la base du scénario impliquant le regret maximal :

$$v_{\text{REG}}(\mu) = \max_{s \in S} r^s(\mu)$$

μ	$v_{\text{FAV}}(\mu)$	$v_{\text{PIR}}(\mu)$
$\mu_1 = (1, 2, 4, 6)$	6	23
$\mu_2 = (1, 2, 5, 6)$	10	22
$\mu_3 = (1, 2, 5, 4, 6)$	7	22
$\mu_4 = (1, 2, 3, 4, 6)$	7	25
$\mu_5 = (1, 2, 3, 5, 6)$	12	24
$\mu_6 = (1, 2, 3, 5, 4, 6)$	9	27
$\mu_7 = (1, 3, 4, 6)$	8	21
$\mu_8 = (1, 3, 5, 6)$	9	19
$\mu_9 = (1, 3, 5, 4, 6)$	10	21
valeur optimale	6	19

Table 2: Meilleures et pires valeurs des chemins de 1 à 6

La solution optimale selon le critère du regret sera notée μ_{REG}^* et vérifie :

$$v_{\text{REG}}(\mu_{\text{REG}}^*) = \min_{\mu \in \mathcal{C}} v_{\text{REG}}(\mu)$$

Dans l'ouvrage de Kouvelis et Yu [9], les solutions qui optimisent ce critère sont appelées les solutions robustes en termes de déviation absolue. Averbakh, dans [4], propose une interprétation très éclairante du critère du regret maximum. Il s'attache, assez naturellement, à qualifier de robuste une solution relativement bonne sur tous les scénarios. Or, pour un scénario s , cela revient à considérer l'ensemble, noté \mathcal{C}_ϵ^s , des solutions dites ϵ -optimales vérifiant :

$$c^s(\mu) - c^s(\mu_{G^s}^*) \leq \epsilon.$$

L'ensemble, noté $\mathcal{C}_\epsilon^{\text{ROB}}$, des solutions robustes contient les solutions ϵ -optimales pour tous les scénarios, ou en d'autres termes :

$$\mathcal{C}_\epsilon^{\text{ROB}} = \bigcap_{s \in S} \mathcal{C}_\epsilon^s$$

Il est évident que si ϵ est trop petit, $\mathcal{C}_\epsilon^{\text{ROB}}$ sera vide, et plus ϵ augmente, plus la cardinalité de $\mathcal{C}_\epsilon^{\text{ROB}}$ est susceptible d'augmenter. Si ϵ est trop grand, alors $\mathcal{C}_\epsilon^{\text{ROB}}$ va contenir des solutions présentant de mauvaises évaluations sur certains scénarios. Il est donc particulièrement intéressant de déterminer la plus petite valeur de ϵ telle que $\mathcal{C}_\epsilon^{\text{ROB}}$ contienne au moins une solution. Averbakh montre que cette valeur n'est autre que $v_{\text{REG}}(\mu_{\text{REG}}^*)$. En effet, les solutions de $\mathcal{C}_\epsilon^{\text{ROB}}$ sont telles que :

$$\begin{aligned} & \forall \mu \in \mathcal{C}_\epsilon^{\text{ROB}}, \quad \forall s \in S, \quad c^s(\mu) - c^s(\mu_{G^s}^*) \leq \epsilon \\ \Rightarrow & \forall \mu \in \mathcal{C}_\epsilon^{\text{ROB}}, \quad \max_{s \in S} (c^s(\mu) - c^s(\mu_{G^s}^*)) = v_{\text{REG}}(\mu) \leq \epsilon \end{aligned}$$

Or, comme $\forall \mu \in \mathcal{C}_\epsilon^{\text{ROB}}, v_{\text{REG}}(\mu) \geq v_{\text{REG}}(\mu_{\text{REG}}^*)$, si $\epsilon < v_{\text{REG}}(\mu_{\text{REG}}^*)$ alors $\mathcal{C}_\epsilon^{\text{ROB}}$ est vide, et sinon, $\mathcal{C}_\epsilon^{\text{ROB}}$ contient au moins μ_{REG}^* . En conséquence, $v_{\text{REG}}(\mu_{\text{REG}}^*)$ est le plus petit ϵ possible tel qu'il existe au moins une solution ϵ -optimale pour tous les scénarios.

3.2.2 Complexité et résolution pour le modèle par intervalle

Dans le modèle par intervalle, le problème du plus court chemin robuste au sens du maximum regret, noté ROBINTEG, est étudié dans [7, 15, 1, 11, 13, 12]. Une partie des résultats obtenus repose sur la propriété qui suit, établie par Karaşan, Pinar et Yaman.

Propriété 1 [7] Etant donné un chemin μ de 1 à n , le scénario, noté $s(\mu)$, qui maximise $r^s(\mu)$ est celui pour lequel chaque arc (i, j) de μ a le plus grand coût possible, soit $c_{ij}^{s(\mu)} = \bar{c}_{ij}$ et chaque arc (k, h) qui n'appartient pas au chemin μ a le plus petit coût, soit $c_{kh}^{s(\mu)} = \underline{c}_{kh}$.

Le scénario $s(\mu)$ est appelé le scénario induit par μ . Le problème de déterminer le chemin robuste, selon le critère du regret maximum, revient donc dans ce cas à trouver μ_{REG}^* tel que :

$$v_{\text{REG}}(\mu_{\text{REG}}^*) = \min_{\mu \in \mathcal{C}} (c^{s(\mu)}(\mu) - c^{s(\mu)}(\mu_{G^{s(\mu)}}^*))$$

Exemple 5 Reprenons le chemin $\mu_3 = (1, 2, 5, 4, 6)$ du graphe de la figure 1 et considérons le scénario induit par μ_3 noté $s(\mu_3)$. La valeur de μ_3 sur ce scénario est 36. Le plus court chemin dans $s(\mu_3)$ est le chemin μ_8 de valeur $c^{s(\mu_3)}(\mu_8) = 15$. Par conséquent, le regret maximum associé à μ_3 est de 21.

Pour ce graphe, le tableau 3 ci-dessous présente le regret maximum de chacun des chemins.

μ	$c^{s(\mu)}(\mu)$	$c^{s(\mu)}(\mu_{G^{s(\mu)}}^*)$	$v_{\text{REG}}(\mu)$
$\mu_1 = (1, 2, 4, 6)$	37	15	22
$\mu_2 = (1, 2, 5, 6)$	20	6	14
$\mu_3 = (1, 2, 5, 4, 6)$	36	15	21
$\mu_4 = (1, 2, 3, 4, 6)$	28	15	13
$\mu_5 = (1, 2, 3, 5, 6)$	24	6	18
$\mu_6 = (1, 2, 3, 5, 4, 6)$	40	16	24
$\mu_7 = (1, 3, 4, 6)$	22	10	12
$\mu_8 = (1, 3, 5, 6)$	18	3	15
$\mu_9 = (1, 3, 5, 4, 6)$	34	10	24

Table 3: Regret maximum des chemins allant de 1 à 6

Nous en déduisons que le chemin μ_7 est optimal pour le critère du regret maximum.

Ce problème a été montré NP-difficile pour les graphes orientés par Zieliński dans [15]. Parallèlement, Averbakh et Lebedev ont établi dans [1] que ROBINTREG est fortement NP-difficile pour les graphes non-orientés. De nombreux travaux [7, 11, 13, 12] ont pour objet de définir des algorithmes exacts de résolution de ROBINTREG fondés sur des techniques de programmation mathématique.

3.2.3 Complexité et résolution pour le modèle par ensemble discret de scénarios

Dans le modèle par scénarios, le problème du plus court chemin robuste au sens du regret maximum, noté ROBDISREG, est étudié dans [21]. Yu et Yang y montrent que le problème de 2-partition se réduit au problème ROBDISREG, dans lequel il s'agit de décider s'il existe un chemin μ allant de 1 à n tel que $v_{\text{REG}}(\mu) = v$. Par ailleurs, les algorithmes pseudo-polynomiaux présentés pour le critère du pire cas, s'adaptent moyennant quelques modifications mineures pour le critère du regret maximum.

Exemple 6 Reprenons le graphe de la figure 2 pour lequel six scénarios sont considérés. Pour calculer les regrets, il nous faut les valeurs des plus courts chemins dans chacun des scénarios. Ces valeurs sont données dans le tableau ci-dessous.

Nous pouvons alors déterminer les regrets associés à chaque chemin et chaque scénario et en déduire $v_{\text{REG}}(\mu)$ pour tout chemin μ , donnés dans le tableau 5.

La solution optimale sur le critère du regret maximum est donc le chemin μ_7 .

Scénarios	c^1	c^2	c^3	c^4	c^5	c^6
Valeur optimale	12	6	7	9	10	10
Plus court chemin	μ_5	μ_1	μ_3	μ_8	μ_9	μ_2

Table 4: Ensemble des plus courts chemin de chaque scénario

μ	$r^1(\mu)$	$r^2(\mu)$	$r^3(\mu)$	$r^4(\mu)$	$r^5(\mu)$	$r^6(\mu)$	$v_{\text{REG}}(\mu)$
$\mu_1 = (1, 2, 4, 6)$	5	0	3	14	1	3	14
$\mu_2 = (1, 2, 5, 6)$	3	6	6	12	12	0	12
$\mu_3 = (1, 2, 5, 4, 6)$	6	2	0	13	9	3	13
$\mu_4 = (1, 2, 3, 4, 6)$	8	4	0	16	6	10	16
$\mu_5 = (1, 2, 3, 5, 6)$	0	12	8	9	7	14	14
$\mu_6 = (1, 2, 3, 5, 4, 6)$	3	8	2	10	4	17	17
$\mu_7 = (1, 3, 4, 6)$	9	5	1	7	2	4	9
$\mu_8 = (1, 3, 5, 6)$	1	13	9	0	3	8	13
$\mu_9 = (1, 3, 5, 4, 6)$	4	9	3	1	0	11	11

Table 5: Regrets des chemins pour chaque scénario

Les critères classiques issus de la théorie de la décision offrent des garanties quant à la qualité des solutions qu'ils fournissent en évaluant les solutions sur la base de scénarios extrêmes. L'inconvénient majeur dans l'utilisation de ces critères est donc de se polariser sur un unique scénario, principalement le pire, et de ne pas tenir compte des évaluations sur l'ensemble des scénarios.

Dans [16, 17], B. Roy remet en cause l'utilisation des critères classiques issus de la théorie de la décision pour appréhender la notion de robustesse. Il préconise l'utilisation de mesures de robustesse qui "cherchent à atténuer le rôle joué par le pire cas" et, qui intègrent l'arbitrage entre prise de risque et valeur garantie. Selon B. Roy, une solution qualifiée de robuste est une solution qui présente une bonne évaluation dans la plupart des scénarios sans jamais être trop mauvaise sur aucun scénario. Il a récemment proposé dans [R05] deux nouveaux critères, appelés le critère de la *bw*-robustesse et celui de la *bw*-déviante. Dans la section suivante, nous montrons dans quelle mesure il est possible d'appliquer le premier critère sur le problème du plus court chemin dans le modèle par scénarios, puis dans le modèle par intervalle.

4 La *bw*-robustesse pour le problème du plus court chemin

4.1 Présentation du critère

Le critère de la *bw*-robustesse fait intervenir deux paramètres, notés b et w . Ces paramètres, fixés par le décideur, sont tels que :

- b est une valeur que l'on cherche à ne pas dépasser dans le plus grand nombre (ou proportion) de scénarios possibles,
- w est une valeur que l'on n'accepte pas de dépasser quel que soit le scénario, cette valeur est dite garantie.

Si l'on note $v_{bw-\text{ROB}}(\mu)$ la valeur du chemin μ selon le critère de la *bw*-robustesse, nous aurons :

- s'il existe un scénario s tel que $c^s(\mu) > w$ alors $v_{bw-\text{ROB}}(\mu) = 0$,

- sinon $v_{bw-rob}(\mu) = \text{nombre des scénarios tels que } c^s(\mu) \leq b$.

Appliquer le critère de la bw -robustesse sur le problème du plus court chemin revient à rechercher une solution μ qui maximise le nombre de scénarios pour lesquels $c^s(\mu) \leq b$, tout en vérifiant $c^s(\mu) \leq w$ sur chacun des scénarios. w s'interprète donc comme une valeur maximale admissible sur tous les scénarios (c'est une valeur que le décideur souhaite garantir quel que soit le scénario) et b , avec $b \leq w$, une valeur (ou borne) à ne pas dépasser dans la plus grande majorité de scénarios.

Il est possible de borner supérieurement et inférieurement les valeurs pertinentes des paramètres w et b .

Concernant w , pour qu'il existe au moins un chemin vérifiant la contrainte portant sur w , on doit nécessairement avoir $w \geq v_{\text{PIR}}(\mu_{\text{PIR}}^*)$. De plus, pour que tous les chemins vérifient la contrainte sur w , on doit avoir :

$$\begin{aligned} c^s(\mu) &\leq w \quad \forall s \in S \quad \forall \mu \in \mathcal{C} \\ \Leftrightarrow v_{\text{PIR}}(\mu) &= \max_{s \in S} c^s(\mu) \leq w \quad \forall \mu \in \mathcal{C} \\ \Leftrightarrow \max_{\mu \in \mathcal{C}} v_{\text{PIR}}(\mu) &\leq w \end{aligned}$$

La plus grande des pires évaluations étant $\max_{\mu \in \mathcal{C}} v_{\text{PIR}}(\mu)$, aucun chemin n'admet une plus grande valeur. Il s'en suit que $w \in [v_{\text{PIR}}(\mu_{\text{PIR}}^*), \max_{\mu} v_{\text{PIR}}(\mu)]$.

En ce qui concerne les valeurs pertinentes pour b , il est clair que b doit être supérieur ou égal à $v_{\text{FAV}}(\mu_{\text{FAV}}^*)$ car, dans le cas contraire, la valeur b n'est atteinte par aucun chemin quel que soit le scénario considéré. Par ailleurs, pour toute valeur de b supérieure à $v_{\text{PIR}}(\mu_{\text{PIR}}^*)$, la solution μ_{PIR}^* est telle que $c^s(\mu_{\text{PIR}}^*) \leq b$ pour tout s et, cette solution reste optimale sur le critère de la bw -robustesse. Il s'en suit que $b \in [v_{\text{FAV}}(\mu_{\text{FAV}}^*), v_{\text{PIR}}(\mu_{\text{PIR}}^*)]$.

Pour une valeur de b donnée, plus w est grand, plus on augmente l'ensemble des solutions réalisables en y incorporant des solutions plus risquées. Ce risque est contrôlé par le décideur lorsqu'il choisit la valeur w . Pour une valeur de w donnée, choisir une petite valeur pour b revient à évaluer une solution sur ses meilleurs scénarios. Lorsqu'on augmente b (en s'approchant de w), on considère davantage de scénarios dans l'évaluation de la solution ce qui permet de mieux maîtriser le risque pris. La valeur d'une solution sur le critère de la bw -robustesse est le nombre de scénarios vérifiant la contrainte sur b ; sur les scénarios restant la valeur du chemin est dans l'intervalle $]b, w]$. Aussi, si la valeur d'une solution est relativement grande (donc proche du nombre total de scénarios), alors les risques associés au choix de cette solution sont maîtrisés : la valeur de la solution est comprise dans l'intervalle $]b, w]$ sur une faible proportion de scénarios.

Dans les deux sections suivantes, nous nous attachons à appliquer le critère de la bw -robustesse sur le problème du plus court chemin dans le modèle par scénario, puis dans le modèle par intervalle.

4.2 Modèle par scénarios

Considérons le programme linéaire (P) représentant le problème du plus court chemin défini dans l'introduction. L'application du critère de la bw -robustesse nous conduit, d'une part, à ajouter des contraintes assurant que la valeur du chemin soit inférieure ou égale à w sur tous les scénarios et, d'autre part, à introduire des variables supplémentaires, notées $y = (y_s)_{s \in S}$, pour compter le nombre de scénarios sur lesquels la valeur du chemin est inférieure ou égale à b . On obtient le programme linéaire suivant :

Solutions réalisables	$\begin{matrix} b \\ w \end{matrix}$	6	10	13	16
μ_8	19	$\{\mu_8\}$ 0	$\{\mu_8\}$ 1	$\{\mu_8\}$ 3	$\{\mu_8\}$ 4
μ_7, μ_8, μ_9	21	$\{\mu_7, \mu_8, \mu_9\}$ 0	$\{\mu_9\}$ 3	$\{\mu_7, \mu_8, \mu_9\}$ 3	$\{\mu_7, \mu_9\}$ 5
$\mathcal{C} \setminus \{\mu_4, \mu_5, \mu_6\}$	23	$\{\mu_1\}$ 1	$\{\mu_9\}$ 3	$\{\mu_1\}$ 4	$\{\mu_7, \mu_9\}$ 5
$\mathcal{C} \setminus \{\mu_6\}$	25	$\{\mu_1\}$ 1	$\{\mu_9\}$ 3	$\{\mu_1\}$ 4	$\{\mu_7, \mu_9\}$ 5

Table 6: Solutions robustes selon le critère de la bw -robustesse dans le modèle par scénario

$$(P_{bw-ROB}^{\text{DIS}}) \begin{cases} \max & \sum_{s \in S} y_s \\ s.t & c^s x \leq w(1 - y_s) + by_s \quad \forall s \in S \quad (1) \\ & Ax = d \quad (2) \\ & x \in \{0, 1\}^m \quad (3) \\ & y_s \in \{0, 1\} \quad \forall s \in S \end{cases}$$

Si $y_s = 0$, la contrainte (1) devient $c^s x \leq w$. Sinon, la contrainte (1) devient $c^s x \leq b \leq w$.

Si on pose $b = w = v_{\text{PIR}}(\mu_{\text{PIR}}^*)$, la solution optimale de $(P_{bw-ROB}^{\text{DIS}})$ correspond à celle du pire cas et sa valeur est $|S|$. En conséquence, le critère de la bw -robustesse engendre un problème d'optimisation au moins aussi difficile à résoudre que celui induit par le critère du pire cas. Or, comme nous l'avons vu précédemment, rechercher le chemin optimal au sens du critère du pire cas est NP-difficile, il s'en suit que rechercher la solution robuste selon le critère de la bw -robustesse est NP-difficile également. Concernant le programme linéaire à résoudre, $(P_{bw-ROB}^{\text{DIS}})$ comporte $|S|$ variables 0-1 supplémentaires.

Exemple 7 Afin d'illustrer l'application du critère de la bw -robustesse, reprenons le graphe de la figure 2 et les valeurs de tous les chemins (cf le tableau 1). Nous avons déterminé pour différents couples de valeurs de $w \in [19, 27]$ et $b \in [6, 19]$, les solutions optimales de P_{bw-ROB}^{DIS} et leur valeur. Les résultats sont présentés dans le tableau 6.

Rappelons que la solution optimale sur le critère du pire cas est μ_8 avec une pire valeur de 19. C'est donc la seule solution réalisable lorsque $w = 19$. Si on considère comme acceptables des solutions dont la pire valeur ne dépasse pas de 10 % la pire valeur de μ_8 , ce qui revient à poser $w = 21$, on élargit l'ensemble des solutions potentiellement intéressantes en considérant : μ_7, μ_8 et μ_9 . On constate alors que μ_9 permet de garantir une valeur inférieure ou égale à 10 dans 50% des scénarios. μ_9 apparaît alors comme une solution robuste même pour des valeurs plus élevées de b . Par contre, si on élargit encore l'ensemble des solutions potentielles en augmentant w , μ_1 , solution optimale sur le critère du meilleur cas, peut alors être proposée pour certaines valeurs de b .

Remarque 1 Quelques cas particuliers selon les valeurs de b et w .

- Si $b = v_{\text{PIR}}(\mu_{\text{PIR}}^*)$, μ_{PIR}^* est solution optimale de $(P_{bw-ROB}^{\text{DIS}})$.
- Si $w = v_{\text{PIR}}(\mu_{\text{PIR}}^*)$, les solutions réalisables de $(P_{bw-ROB}^{\text{DIS}})$ sont les solutions optimales de ROBDISPIR.

4.3 Modèle par intervalle

L'évaluation d'un chemin μ varie donc entre $\underline{c}(\mu)$ et $\bar{c}(\mu)$. Ainsi, considérant le programme mathématique associé, imposer que la valeur du chemin représenté par x soit inférieure ou égale à w quel que soit le scénario, revient à ajouter la contrainte $\bar{c}x \leq w$. En outre, on cherche à déterminer le chemin

représenté par x qui maximise la proportion de scénarios ne dépassant pas la limite de b . Cette proportion peut se calculer comme suit :

$$p_b(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } b \leq \underline{c}x \\ \frac{b - \underline{c}x}{\bar{c}x - \underline{c}x} & \text{si } \underline{c}x \leq b \leq \bar{c}x \\ 1 & \text{si } \bar{c}x \leq b \end{cases}$$

Pour que $p_b(x)$ soit définie, il faut que $\bar{c}x - \underline{c}x \neq 0$. Ceci est vérifié lorsque, sur tous les chemins allant de 1 à n , il existe au moins un arc (i, j) avec incertitude (tel que $\underline{c}_{ij} \neq \bar{c}_{ij}$).

On aboutit donc au programme non linéaire suivant :

$$(P_{bw-ROB}^{\text{INT}}) \begin{cases} \max & \min\{\frac{b - \underline{c}x}{\bar{c}x - \underline{c}x}; 1\} \\ s.t & \bar{c}x \leq w \\ & \underline{c}x \leq b \\ & Ax = d \\ & x \in \{0, 1\}^m \end{cases}$$

L'ensemble des solutions réalisables de ce programme linéaire est vide lorsqu'aucune solution x ne vérifie la contrainte sur b .

En introduisant une variable z qui représente $\min\{\frac{b - \underline{c}x}{\bar{c}x - \underline{c}x}; 1\}$, on obtient:

$$(P_{bw-ROB}^{\text{INT}}) \begin{cases} \max & z \\ s.t & \bar{c}x \leq w \\ & \underline{c}x \leq b \\ & z \leq \frac{b - \underline{c}x}{\bar{c}x - \underline{c}x} \\ & z \leq 1 \\ & Ax = d \\ & x \in \{0, 1\}^m \\ & z \geq 0 \end{cases}$$

La contrainte sur z peut s'écrire : $\sum_{u \in U} (\bar{c}_u - \underline{c}_u)x_u z \leq b - \sum_{u \in U} \underline{c}_u x_u$. Il est alors possible de linéariser cette contrainte en effectuant le changement de variables suivant : $e_u = x_u z$. Comme z est compris entre 0 et 1, on peut écrire le programme linéaire en variables mixtes équivalent :

$$(P_{bw-ROB}^{\text{INT}}) \begin{cases} \max & z \\ s.t & \bar{c}x \leq w \\ & \underline{c}x \leq b \\ & (\bar{c} - \underline{c})e \leq b - \underline{c}x \\ & Ax = d \\ & e_u \leq x_u & \forall u = 1, \dots, m \\ & e_u \geq z - (1 - x_u) & \forall u = 1, \dots, m \\ & e_u \leq z & \forall u = 1, \dots, m \\ & x_u \in \{0, 1\} & \forall u = 1, \dots, m \\ & 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

Rappelons que dans le modèle par intervalle, il est possible de déterminer le plus court chemin sur le critère du pire cas en un temps polynomial. L'application du critère de la bw -robustesse sur le problème du plus court chemin induit donc un saut de difficulté important, contrairement au cas par scénario. La propriété suivante peut néanmoins être établie.

$w \backslash b$	3	7	11	15
18	\emptyset	\emptyset	\emptyset	$\{\mu_8\}$ 0%
20	\emptyset	\emptyset	$\{\mu_2\}$ 10%	$\{\mu_2\}$ 50%
22	\emptyset	$\{\mu_7\}$ 6.25%	$\{\mu_7\}$ 31.25%	$\{\mu_7\}$ 56.25%
28	\emptyset	$\{\mu_4\}$ 12.5%	$\{\mu_7\}$ 31.25%	$\{\mu_7\}$ 56.25%

Table 7: Solutions robustes selon le critère de la bw -robustesse dans le modèle par intervalle

Propriété 2 Soient deux chemins μ et μ' garantissant w et tels que $\underline{c}(\mu) \leq \underline{c}(\mu')$.

- Si $\bar{c}(\mu) \leq \bar{c}(\mu')$, alors $p_b(\mu) \geq p_b(\mu')$ pour tout b .
- Si $\bar{c}(\mu) \geq \bar{c}(\mu')$, alors $p_b(\mu) \geq p_b(\mu')$ pour tout $b \leq b_I = \frac{\underline{c}(\mu)\bar{c}(\mu') - \underline{c}(\mu')\bar{c}(\mu)}{\bar{c}(\mu') - \underline{c}(\mu') - \bar{c}(\mu) + \underline{c}(\mu)}$ et $p_b(\mu) \leq p_b(\mu')$ pour tout $b \geq b_I$.

Le premier item est illustrée sur la figure 3. Un cas particulier du second item correspond à deux solutions ayant même valeur moyenne m et dans ce cas $b_I = m$. Si $b \geq m$ alors la solution la moins dispersée est jugée meilleure et si b est inférieur à la moyenne alors la solution la plus dispersée est jugée meilleure. La figure 4 illustre ce cas particulier.

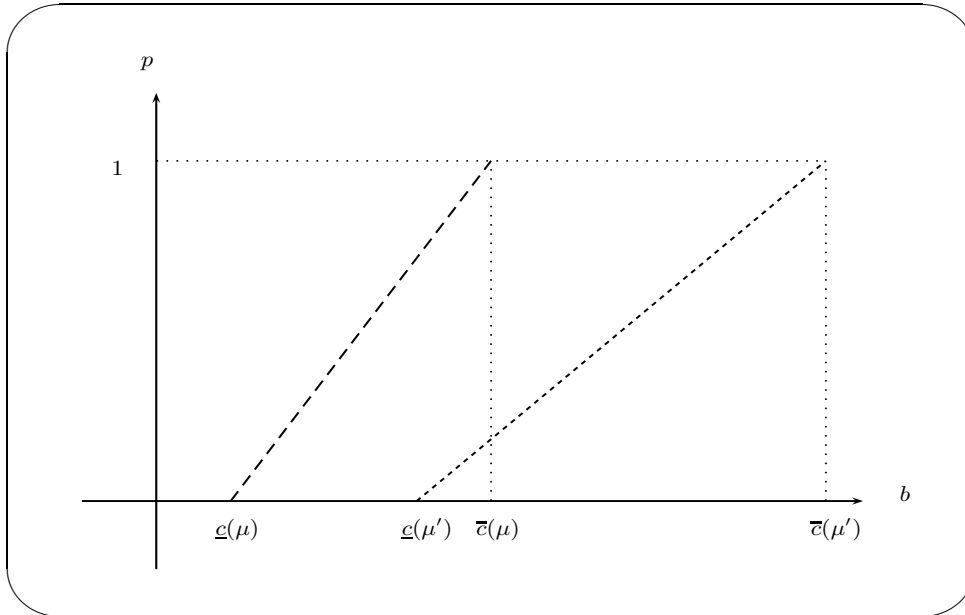


Figure 3: Cas où le chemin μ domine μ'

Par ailleurs, la remarque 1 de la section précédente reste vérifiée dans le cas par intervalle.

Exemple 8 Reprenons le graphe de la figure 1 et examinons les solutions optimales selon le critère de la bw -robustesse pour différentes valeurs de b et de w .

Lorsque $w = 18$, μ_8 (solution optimale selon le critère du pire cas) est le seul chemin garantissant cette valeur. Si $b < \underline{c}(\mu_8) = 15$, le chemin μ_8 viole la contrainte sur b et, le problème P_{bw-ROB}^{INT} n'admet donc pas de solution réalisable.

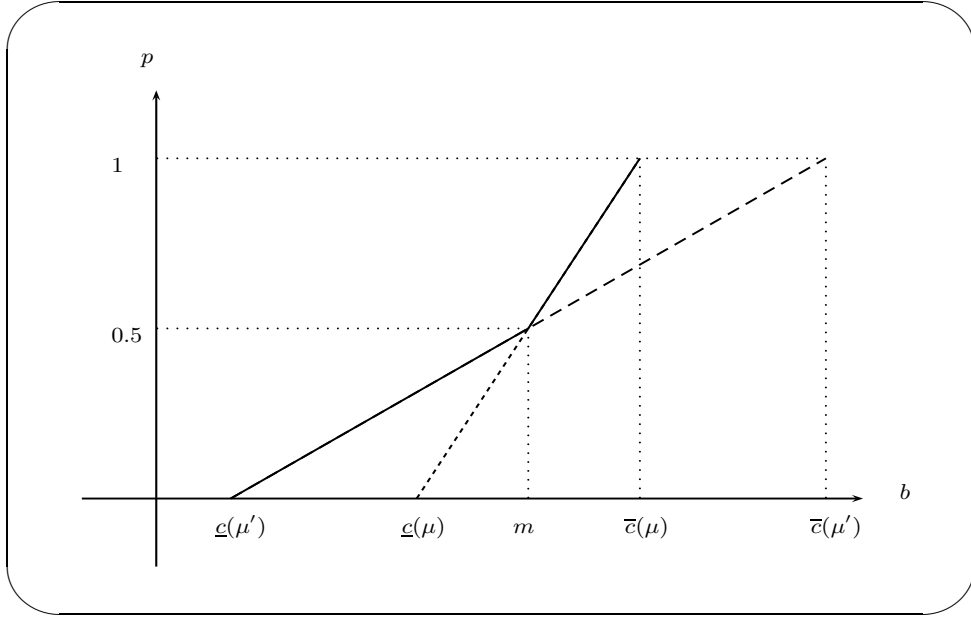


Figure 4: Proportion obtenue en fonction de b pour 2 chemins de même moyenne

Lorsque $w = 20$, seuls les chemins μ_8 et μ_2 garantissent cette nouvelle valeur ; tous les autres chemins μ sont tels que $\bar{c}(\mu) > 20$. Si $b = 15$, le chemin μ_2 est la solution optimale de valeur 50% : la valeur moyenne de l'intervalle $[\underline{c}(\mu_2) = 10, \bar{c}(\mu_2) = 20]$ étant 15, le chemin μ_2 garantit cette valeur pour 50% des scénarios.

Pour $w = 28$, on remarque que si $b = 7$ alors μ_4 est solution optimale alors qu'en prenant $b = 11$, c'est μ_7 qui devient optimale. En effet, d'après la propriété précédente qui est illustrée ici, $p_b(\mu_4)$ et $p_b(\mu_7)$ se coupent pour $b_I = \frac{4*22-6*28}{22-6-28+4} = 10$. Par conséquent, pour $b \leq 10$ c'est μ_4 qui est préféré alors que pour $b \geq 10$ c'est μ_7 qui devient préféré.

C'est lorsque $b = 15$ que l'on atteint des solutions pouvant être qualifiées de robustes avec des proportions supérieures à 50%.

5 Le critère de la bw -déviation pour le problème du plus court chemin

5.1 Présentation du critère

Le critère de la bw -déviation suit les mêmes principes que celui de la bw -robustesse en privilégiant la mesure du regret. La valeur du chemin μ sur le critère de la bw -déviation, notée $v_{bw-DEV}(\mu)$, est :

- 0 s'il existe un scénario s tel que $c^s(\mu) > w$,
- le nombre de scénarios tels que $r^s(\mu) = c^s(\mu) - c^s(\mu_{G^s}^*) \leq b$.

Appliquer le critère de la bw -déviation sur le problème du plus court chemin revient à rechercher une solution μ qui maximise le nombre de scénarios pour lesquels le regret est limité à b , tout en vérifiant $c^s(\mu) \leq w$ sur chacun des scénarios. w s'interprète à nouveau comme une valeur maximale admissible sur tous les scénarios (c'est une valeur de la solution que le décideur souhaite garantir quel que soit le scénario) et b représente le regret (ou l'écart avec la solution optimale du même scénario) à ne pas dépasser dans la plus grande majorité de scénarios.

Solutions réalisables	$w \backslash b$	0	4	8	12
μ_8	19	$\{\mu_8\}$ 1	$\{\mu_8\}$ 3	$\{\mu_8\}$ 4	$\{\mu_8\}$ 5
μ_7, μ_8, μ_9	21	$\{\mu_8, \mu_9\}$ 1	$\{\mu_9\}$ 4	$\{\mu_7\}$ 5	$\{\mu_7, \mu_9\}$ 6
$\mathcal{C} \setminus \{\mu_4, \mu_5, \mu_6\}$	23	$\{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_8, \mu_9\}$ 1	$\{\mu_1, \mu_9\}$ 4	$\{\mu_1, \mu_7\}$ 5	$\{\mu_2, \mu_7, \mu_9\}$ 6
$\mathcal{C} \setminus \{\mu_6\}$	25	$\mathcal{C} \setminus \{\mu_6, \mu_7\}$ 1	$\{\mu_1, \mu_9\}$ 4	$\{\mu_1, \mu_7\}$ 5	$\{\mu_2, \mu_7, \mu_9\}$ 6

Table 8: Solutions robustes selon le critère de la bw -déviation dans le modèle par scénario

L'intervalle de variation pertinent pour le choix de w est le même que pour le critère de la bw -robustesse. En ce qui concerne les valeurs possibles de b , il est clair que $b \geq 0$. Si la solution optimale μ_{REG}^* pour le critère du regret maximum vérifie la contrainte sur w , alors μ_{REG}^* est également solution optimale pour le critère de la bw -déviation dès lors que la valeur choisie pour b est supérieure ou égale à $v_{\text{REG}}(\mu_{\text{REG}}^*)$. Par conséquent, nous posons : $b \in [0, v_{\text{REG}}(\mu_{\text{REG}}^*)]$.

Pour une valeur de b donnée, plus w est grand, plus on augmente l'ensemble des solutions réalisables en y incorporant des solutions plus risquées. Pour une valeur de w donnée, choisir une petite valeur de b revient à évaluer une solution uniquement sur les scénarios où elle est la plus proche de l'optimum. Lorsqu'on augmente b , on considère des scénarios sur lesquels la valeur de la solution s'éloigne de la solution optimale.

5.2 Modèle par scénarios

L'application du critère de la bw -déviation nous conduit, d'une part, à ajouter des contraintes assurant que la valeur du chemin soit inférieure ou égale à w sur tous les scénarios et, d'autre part, à introduire des variables supplémentaires, notées $y = (y_s)_{s \in S}$, pour compter le nombre de scénarios sur lesquels la valeur du chemin est inférieure ou égale à la valeur de la solution optimale plus b . On obtient le programme linéaire suivant :

$$(P_{bw-\text{DEV}}) \left\{ \begin{array}{ll} \max & \sum_{s \in S} y_s \\ \text{s.t.} & c^s x \leq w(1 - y_s) + (b + c^s(\mu_{G^s}^*))y_s \quad \forall s \in S \quad (1) \\ & c^s x \leq w \quad (2) \\ & Ax = d \quad (3) \\ & x \in \{0, 1\}^m \quad (4) \\ & y_s \in \{0, 1\} \quad \forall s \in S \end{array} \right.$$

Si $y_s = 0$, la contrainte (1) devient $c^s x \leq w$. Sinon, la contrainte (1) devient $c^s x - c^s(\mu_{G^s}^*) \leq b$.

Si on pose $w \geq v_{\text{PIR}}(\mu_{\text{REG}}^*)$ et $b = v_{\text{REG}}(\mu_{\text{REG}}^*)$, alors la solution optimale de $(P_{bw-\text{DEV}})$ correspond à celle du regret maximum et sa valeur est $|S|$. En conséquence, le critère de la bw -déviation engendre un problème d'optimisation au moins aussi difficile à résoudre que celui induit par le critère du regret maximum. Or, comme nous l'avons vu précédemment, rechercher le chemin optimal au sens du critère du regret maximum est NP-difficile, il s'en suit que rechercher la solution robuste selon le critère de la bw -déviation est NP-difficile également.

Exemple 9 Afin d'illustrer les solutions robustes selon le critère de la bw -déviation, reprenons le graphe de la figure 2 et les valeurs de regret de chaque chemin données dans le tableau 5. Nous avons déterminé pour différents couples de valeurs de $w \in [19, 27]$ et $b \in [0, 12]$, les solutions optimales de $P_{bw-\text{DEV}}^{\text{DIS}}$ et leur valeur. Les résultats sont présentés dans le tableau 8.

Nous constatons que μ_7 , solution optimale sur le critère du regret maximum, ne le reste plus systématiquement. Par exemple, pour $w = 21$ (tolérance de 10% par rapport au pire cas) et $b = 4$, μ_9 est

solution optimale et sa valeur de 4 signifie qu'il existe 4 scénarios parmi 6 pour lesquels cette solution garantit une distance à l'optimum plus petite que 4. Le chemin μ_7 ne garantit cette distance à l'optimum que pour 3 scénarios.

5.3 Modèle par intervalles

L'application du critère de la bw -déviation nous conduit, d'une part, à ajouter des contraintes assurant que la valeur du chemin soit inférieure ou égale à w sur tous les scénarios et, d'autre part, à calculer dans l'intervalle des regrets la proportion des regrets dont la valeur est plus petite que b . Pour un chemin décrit par le vecteur x , on note $r_{\min}(x)$ la valeur du regret minimum et $r_{\max}(x)$ la valeur du regret maximum. On aboutit donc au programme mathématique suivant :

$$(P_{bw-DEV}^{\text{INT}}) \left\{ \begin{array}{l} \max \quad \min\{\frac{b-r_{\min}(x)}{r_{\max}(x)-r_{\min}(x)}; 1\} \\ s.t \quad \bar{c}x \leq w \\ r_{\min}(x) \leq b \\ Ax = d \\ x \in \{0, 1\}^m \end{array} \right.$$

En introduisant une variable z qui représente $\min\{\frac{b-r_{\min}(x)}{r_{\max}(x)-r_{\min}(x)}; 1\}$, nous obtenons :

$$(P_{bw-DEV}^{\text{INT}}) \left\{ \begin{array}{l} \max \quad z \\ s.t \quad \bar{c}x \leq w \\ r_{\min}(x) \leq b \\ Ax = d \\ zr_{\max}(x) + (1-z)r_{\min}(x) \leq b \\ z \leq 1 \\ x \in \{0, 1\}^m \\ z \geq 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \end{array}$$

Il est possible d'exprimer $r_{\max}(x)$ et $r_{\min}(x)$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} r_{\max}(x) &= \sum_{u \in U} \bar{c}_u x_u - \min_{y \in \mathcal{C}} \sum_{u \in U} (\underline{c}_u y_u + (\bar{c}_u - \underline{c}_u) y_u x_u) \\ r_{\min}(x) &= \sum_{u \in U} \underline{c}_u x_u - \min_{y \in \mathcal{C}} \sum_{u \in U} (\bar{c}_u y_u + (\underline{c}_u - \bar{c}_u) y_u x_u) \end{aligned}$$

Le scénario qui, étant donné un chemin x , engendre le regret minimum se définit à l'opposé du scénario induit comme suit : les arcs appartenant à x ont pour valeur \underline{c}_u alors que les arcs n'appartenant pas à x sont valués par \bar{c}_u .

On peut alors remplacer la contrainte (4) par le système suivant comportant un nombre exponentiel de contraintes :

$$\left\{ \begin{array}{l} z\bar{c}x - \alpha + (1-z)\underline{c}x - \beta \leq b \\ \alpha \leq z \sum_{u \in U} (\underline{c}_u y_u + (\bar{c}_u - \underline{c}_u) y_u x_u) \\ \beta \leq (1-z) \sum_{u \in U} (\bar{c}_u y_u + (\underline{c}_u - \bar{c}_u) y_u x_u) \end{array} \quad \forall y \in \mathcal{C} \right.$$

De la même façon, on remplace la contrainte (2) par

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{c}x - \gamma \leq b \\ \gamma \leq \sum_{u \in U} (\bar{c}_u y_u + (\underline{c}_u - \bar{c}_u) y_u x_u) \end{array} \quad \forall y \in \mathcal{C} \right.$$

Dans ce nouveau programme mathématique, on est alors face à une double difficulté : les termes quadratiques zx (on peut néanmoins appliquer les mêmes techniques de linéarisation que précédemment) et le nombre exponentiel de contraintes. Sa résolution implique donc de définir une méthode par génération de contraintes spécifique, ce que nous ne développerons pas dans cet article.

$w \backslash b$	2	6	12
18	μ_8 13,33%	μ_8 40%	μ_8 80%
20	μ_2 14,28%	μ_2 42,85%	μ_2 85,71%
22	μ_7 16,66%	μ_7 50%	μ_7 100%
28	μ_7 16,66%	μ_7 50%	μ_7 100%

Table 9: Solutions robustes selon le critère de la bw -déviation dans le modèle par intervalle

Exemple 10 Reprenons le graphe de la figure 1 et examinons les solutions optimales selon le critère de la bw -déviation pour différentes valeurs de b et de w présentées dans le tableau 9.

Pour $w = 18$, la seule solution réalisable est μ_8 : elle est donc optimale $\forall b$. En prenant $w = 20$, le chemin μ_2 réalisable. Comme $r_{\min}(\mu_2) = r_{\min}(\mu_8) = 0$ et $r_{\max}(\mu_2) = 14 \leq r_{\max}(\mu_8) = 15$, la propriété 2, adaptée au critère de la bw -déviation, établit que μ_2 est préféré à μ_8 pour tout b .

Au regard du tableau 9, la robustesse du chemin μ_7 , qui est optimal sur le critère du regret maximum, peut être opposée à celle de μ_2 . Lorsque $w = 22$ si la valeur de μ_7 est toujours supérieure à celle de μ_2 , seul μ_2 garantit une pire valeur de 20.

Afin de tester les capacités d'un solveur standard comme cplex à résoudre les problèmes émanant de la bw -robustesse et de la bw -déviation, nous avons réalisé des expérimentations numériques sur des graphes par niveaux.

6 Expérimentations numériques

6.1 Présentation des instances générées

Nous considérons des graphes dits par niveaux, notés $G(k, l)$ où k désigne le nombre de niveaux et l le nombre de sommets par niveau. L'ensemble des sommets est partitionné en $k + 2$ sous-ensembles notés V_i , pour i allant de 0 à $k + 1$, avec $V_0 = \{0\}$ et $V_{k+1} = \{n\}$. L'ensemble des arcs contient tous les arcs allant d'un sommet de V_i vers un sommet de V_{i+1} , pour tout i allant de 0 à k . Le sous-ensemble d'arcs ayant pour extrémité initiale un sommet de V_i est appelé l'ensemble des arcs de niveau i . La figure 5 représente un exemple de graphe par niveaux $G(k, 2)$. Nous recherchons alors des plus courts chemins robustes entre les sommets 0 et n .

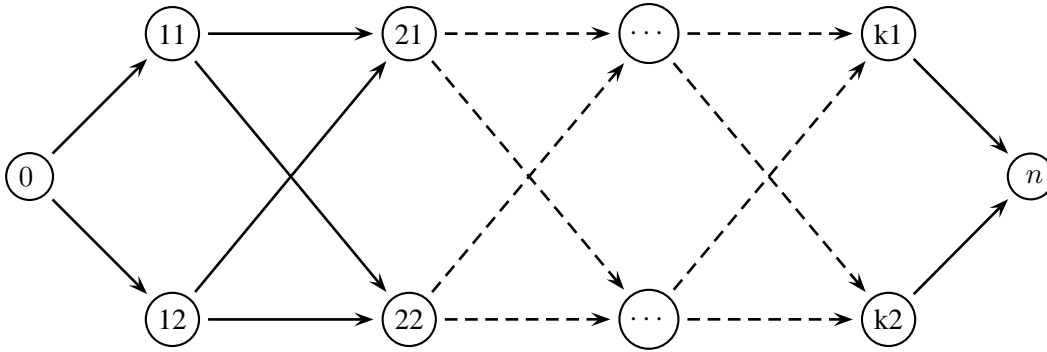


Figure 5: Un graphe à k niveaux et deux sommets sur chaque niveau

Pour le modèle par scénarios, le nombre total de scénarios associés à chaque arc est fixé à 20 et la valeur attribuée pour chaque scénario est générée selon une loi uniforme entre 1 et 20, notée $U(1, 20)$.

Pour le modèle par intervalle, les bornes inférieures et supérieures des intervalles sont générées sur le même principe que Karasan et al. [7]. Nous commençons par générer pour chaque niveau i , allant de 0 à k , une valeur q_i selon la loi uniforme $U(1, 20)$. Pour tout arc a de niveau i , sa borne inférieure \underline{c}_a est générée aléatoirement selon la loi uniforme : $U((1 - d)q_i, (1 + d)q_i)$ où d est un paramètre compris entre 0 et 1. La borne supérieure \bar{c}_a de l'arc a est générée aléatoirement selon la loi uniforme : $U(\underline{c}_a + 1, (1 + d)q_i + 1)$. Dans nos expérimentations, le paramètre d est fixé à 0.6.

Les programmes ont été codés en C++ en utilisant la bibliothèque de Cplex (version 12). Les programmes sont exécutés sur une machine de 2.13 GHZ et disposant de 4G de Ram.

Les valeurs pour n, k, l que nous avons considérées sont présentées dans le tableau 10 où chaque case contient le nombre de niveaux suivi du nombre d'arcs. Pour tous les couples k, l envisagés, trois graphes $G(k, l)$ ont été générés.

$l \backslash n$	62	122	182	362
2	30, 120	60, 240	90, 360	180, 720
3	20, 177	40, 357	60, 537	120, 1077
5	12, 285	24, 585	36, 885	72, 1785
12	5, 600	10, 1320	15, 2040	30, 4200

Table 10: Nombre de niveaux et nombre d'arcs pour chaque graphe

6.2 Présentation des résultats pour la bw -robustesse

6.2.1 Le modèle par scénario

Pour chaque instance de $G(k, l)$, nous résolvons (P_{bw-ROB}^{DIS}) pour différentes valeurs de b et w . Les 4 valeurs considérées pour b sont :

- $b_1 = v_{FAV}(\mu_{FAV}^*)$
- $b_2 = b_1 + \frac{1}{4}(v_{PIR}(\mu_{PIR}^*) - v_{FAV}(\mu_{FAV}^*))$
- $b_3 = b_2 + \frac{1}{4}(v_{PIR}(\mu_{PIR}^*) - v_{FAV}(\mu_{FAV}^*))$
- $b_4 = b_3 + \frac{1}{4}(v_{PIR}(\mu_{PIR}^*) - v_{FAV}(\mu_{FAV}^*))$

Pour chaque valeur de b , w prend 6 valeurs w_j : w est initialisé à $w_1 = v_{PIR}(\mu_{PIR}^*)$ puis est augmenté à chaque itération de 10% de cette valeur. Si w_j dépasse $\max_{\mu} v_{PIR}(\mu)$, alors c'est cette dernière valeur qui est prise pour w_j . Donc pour chaque graphe $G(k, l)$ généré, il y a $4*6$ problèmes $(P_{bw-ROB}^{DIS}(b_i, w_j))$ à résoudre.

Considérant $(P_{bw-ROB}^{DIS}(b_i, w_j))$, les solutions obtenues pour les couples (b_{i-1}, w_j) et (b_i, w_{j-1}) sont toutes deux réalisables pour $(P_{bw-ROB}^{DIS}(b_i, w_j))$. Nous utilisons cette propriété pour accélérer la résolution par Branch and Bound de $(P_{bw-ROB}^{DIS}(b_i, w_j))$ de la façon suivante :

- la meilleure des deux solutions est donnée à Cplex comme solution approchée de départ,

- une inégalité valide est ajoutée à $(P_{bw-ROB}^{DIS}(b_i, w_j))$ de la forme : $\sum_{s \in S} y_s \geq \max \{v(P_{bw-ROB}^{DIS}(b_{i-1}, w_j)); v(P_{bw-ROB}^{DIS}(b_i, w_{j-1}))\}$.

Pour le cas particulier de $(P_{bw-ROB}^{DIS}(b_1, w_1))$, on se contente de donner à Cplex μ_{PIR}^* comme solution approchée initiale. Nous limitons à 1800 secondes la recherche de μ_{PIR}^* . Si μ_{PIR}^* n'a pas été déterminée dans le temps imparti, nous considérons la solution approchée que nous donne Cplex.

Dans le tableau de résultats associé à un graphe $G(k, l)$, nous reportons :

- 1) la première ligne du tableau contient les différents b_i et la première colonne contient les différents w_j ,
- 2) pour tout couple (b_i, w_j) sont donnés 3 nombres : le premier est la valeur de la fonction objectif, le second est la valeur de la relaxation continue et le troisième est le temps d'exécution (CPU).

Le temps d'exécution de Cplex a été limité à 1800 secondes. Lorsque ce temps est atteint, la valeur de la solution donnée correspond à la meilleure solution trouvée, non nécessairement optimale.

Les résultats obtenus sur toutes les instances considérées sont donnés en annexe 1.

A titre d'illustration, la table 11 présente les résultats de calcul sur un graphe $G(30, 2)$. Pour ce graphe, chaque solution optimale a pu être déterminée en moins de 13 secondes.

$Val(w) \backslash Val(b)$	153			195			237			279		
321	0	2	0.83	0	3	0.63	0	4	0.84	0	9	4.87
353	0	5	1.08	1	6	0.84	3	8	1.86	7	14	12.56
385	0	7	0.99	2	8	0.77	3	11	1.15	9	15	11
417	1	8	0.91	2	10	0.82	4	12	1.16	9	16	2.92
449	1	10	0.87	2	11	0.98	4	13	1.09	9	17	3.06
494	1	11	0.87	2	12	0.74	4	15	1.73	9	17	4.44

Table 11: $G_1(30, 2)$: 30 niveaux, 2 sommets par niveau

Dans la table 11, la valeur de la solution optimale est 0 lorsque $w = 321$ et $b = 153$ car le chemin μ_{PIR}^* dépasse sur tous les scénarios la valeur limite de $b = 153$.

Pour un même nombre de sommets, lorsque k diminue les temps de calcul augmentent. Dans le tableau 12, les résultats portent sur un graphe d'ordre 62 (comme précédemment) mais les temps de calcul sont significativement supérieurs : par exemple pour $b_4 = 49$ et $w_6 = 119$, il faut plus de 1200s pour résoudre le problème. Cette augmentation du temps de calcul est directement liée à l'augmentation du nombre d'arcs entre $G(30, 2)$ et $G(5, 12)$: on passe de 120 arcs à 285 arcs, ce qui correspond au nombre de variables binaires liées aux arcs.

$Val(w) \backslash Val(b)$	7			21			35			49		
66	0	4	5.73	0	6	9.85	2	9	46.12	4	15	94.23
72	0	6	16.39	1	7	7.33	3	10	38.84	9	16	185.94
78	0	7	4.76	2	9	6.14	5	12	34.63	10	17	503.71
84	0	8	4.15	2	10	7.88	6	13	9.5	12	17	125.44
90	0	9	5.03	2	11	8.69	6	13	12.47	12	18	88.42
119	1	12	9.21	2	13	7.18	6	16	50.17	12	18	1272.46

Table 12: $G_3(5, 12)$: 5 niveaux, 12 sommets par niveau

A partir de 800 arcs, pour un même graphe $G(k, l)$, le nombre de problèmes $(P_{bw-ROB}^{DIS}(b_i, w_j))$ non résolus à l'optimalité en moins de 1800s augmente. Par exemple, dans le tableau 13, pour un graphe représentatif comportant 885 arcs, la dernière colonne ne contient pas de solution optimale.

$Val(w) \backslash Val(b)$	82			148			214			280		
346	0	1	11.93	0	2	12.11	0	3	100.17	0	6	1800
380	0	3	12.5	1	4	30.47	2	6	291	6	11	1800
414	0	5	10.65	1	6	20.92	3	9	52.76	8	13	1800
448	1	6	10.93	1	8	19.35	3	10	89.73	8	14	1800
482	1	8	11.39	1	9	19.87	3	11	170.17	8	15	1800
686	1	12	16.19	1	13	26.26	3	15	54.75	8	17	1800

Table 13: $G_1(36, 5)$: 36 niveaux, 5 sommets par niveau

Nous remarquons que la valeur de la relaxation continue fournie dans les trois tableaux précédents est extrêmement mauvaise car très éloignée de la valeur de la solution optimale.

Les graphiques de la figure 6 permettent de juger de l'influence du choix des paramètres b et w sur les valeurs des solutions. Les courbes obtenues sont représentatives de celles constatées sur l'ensemble des graphes.

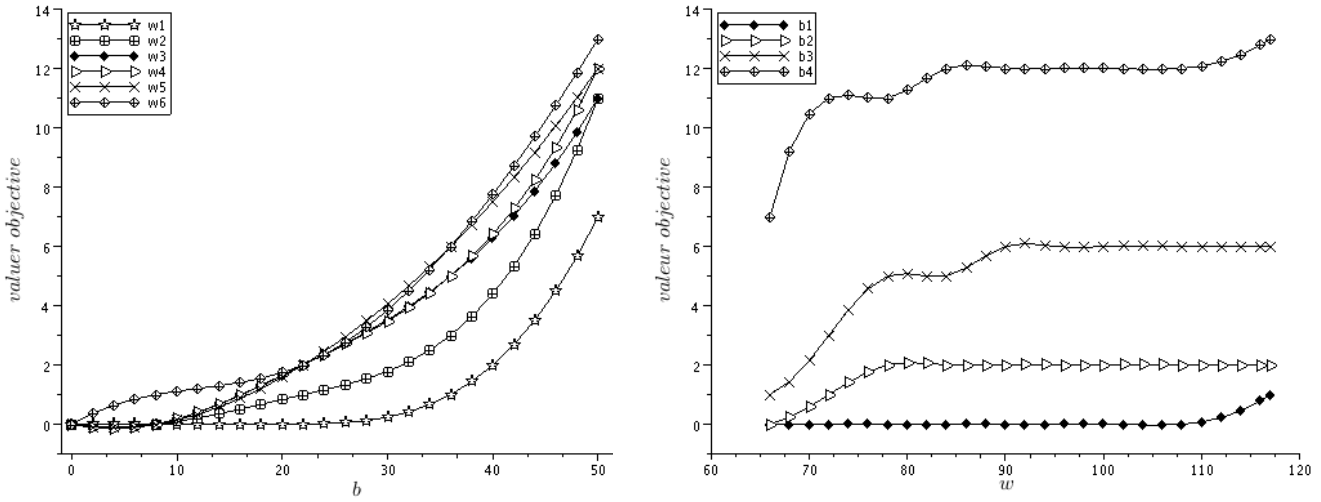


Figure 6: Valeur de (P_{bw-ROB}^{DIS}) en fonction de b avec w fixée (gauche) et de w avec b fixée (droite) sur $G_1(5, 12)$.

Il est à noter que pour un b donné, c'est la première augmentation de 10% sur la valeur initiale de w qui entraîne la plus forte augmentation de la fonction objectif : en prenant un peu de risque, on améliore notablement le nombre de scénarios satisfaisant la borne b . Pour un w fixé, la fonction objectif subit la plus forte augmentation pour les grandes valeurs de b .

6.2.2 Le modèle par intervalle

Les valeurs considérées pour b et w sont les mêmes que pour le modèle par scénarios. Les tableaux présentés en annexe 2 s'interprètent de la même façon que ceux du modèle par ensemble discret de

scénarios. Le symbole «—» représente l'absence de solution réalisable. Ce dernier vient du fait que, dans le graphe d'intervalle considéré, aucun chemin ne respecte les deux bornes w et b simultanément :

$$\nexists \mu \in \mathcal{C}, \text{ tel que } \underline{c}(\mu) \leq b \text{ et } \bar{c}(\mu) \leq w.$$

Concernant le temps de calcul, une grande partie des instances peut être résolue très rapidement. Par exemple, pour un graphe $G(36, 5)$ du tableau 14 les temps de résolution des problèmes P_{bw-ROB}^{INT} sont tous inférieurs à 10s alors que pour ce même graphe, dans le modèle par scénarios (cf. table 13), une partie des problèmes P_{bw-ROB}^{DIS} ne peut pas être résolu à l'optimum. C'est à partir de graphes comportant au moins 2000 arcs que certains problèmes P_{bw-ROB}^{INT} ne peuvent être résolus à l'optimum en moins de 1800s comme dans le graphe $G(15, 12)$ du tableau 15.

$Val(w) \backslash Val(b)$	76			111			146			181		
219	-	2.7259	0.56	0.0689	0.0909	0.78	0.3706	0.4886	0.79	0.6724	0.7448	0.78
240	-	1.4134	0.56	0.173	0.6489	9.27	0.4054	0.843	2.82	0.6724	0.9448	1.25
261	-	0.1666	0.51	0.1857	0.7585	1.38	0.4054	0.8931	1.24	0.6724	0.9576	1.03
282	0	0	0.49	0.1857	0.8102	0.99	0.4054	0.9106	1.02	0.6724	0.9582	0.88
303	0	0	0.46	0.1857	0.827	1	0.4054	0.9159	1.08	0.6724	0.9582	1.2
501	0	0	0.48	0.1857	0.8344	1.11	0.4054	0.9161	1.08	0.6724	0.9582	0.94

Table 14: $G_1(36, 5)$: 36 niveaux, 5 sommets par niveau

Le saut d'intégrité reste très élevé. Par exemple, dans un graphe $G(15, 12)$ présenté dans le tableau 15, le rapport de la valeur optimale de la relaxation continue sur la valeur optimale entière atteint 22,78.

Enfin, nous pouvons remarquer que la borne w a peu d'influence sur la valeur de la fonction objectif. Dans la plupart des cas, cette valeur augmente significativement entre w_0 et w_1 pour ne plus évoluer par la suite. A titre d'illustration, la figure 7 droite montre pour un graphe représentatif $G(5, 12)$ la variation de la valeur de la fonction objectif en fonction de w : chaque courbe correspondant à une valeur b_i particulière.

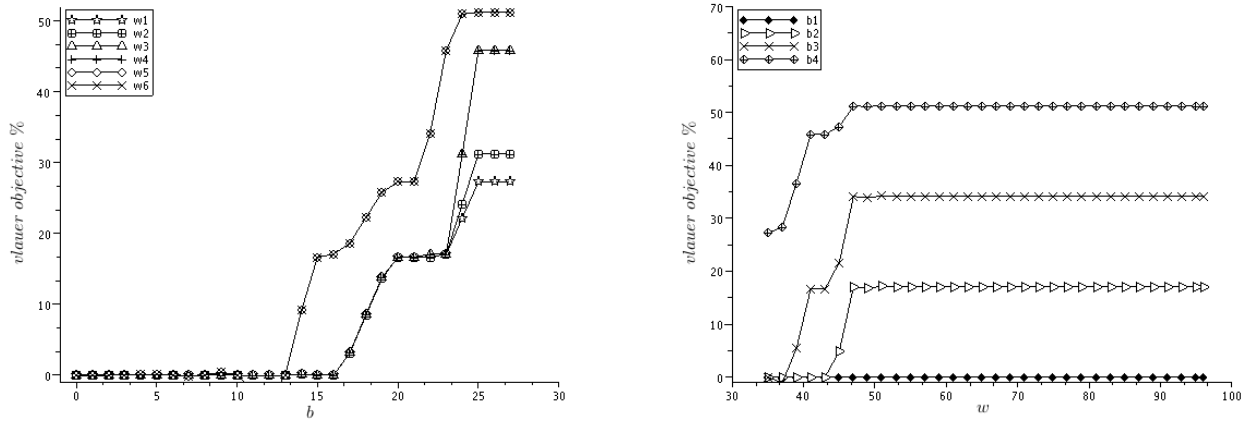


Figure 7: Valeur de (P_{bw-ROB}^{INT}) en fonction de b avec w fixée (gauche) et de w avec b fixée (droite) sur $G_1(5, 12)$.

$Val(w) \backslash Val(b)$	17			27			37			47		
60	-	1.2578	1.6	-	0.2499	1.97	0.1785	0.1785	1.97	0.5357	0.5357	1.93
66	-	1.0499	1.47	0.0256	0.5833	3.62	0.282	0.8636	8.96	0.5483	0.9554	7.79
72	-	1.027	1.62	0.0851	0.7636	7.66	0.2978	0.9269	6.79	0.5483	0.9766	6.44
78	-	0.4691	1.57	0.1071	0.8499	5.28	0.2978	0.9507	5.2	0.5483	0.9822	1800
84	-	0.396	1.67	0.1129	0.8898	4.7	0.2978	0.9607	4.49	0.5483	0.9841	1800
182	0	0	1.41	0.1159	0.9305	131.66	0.2978	0.9693	1800	0.5483	0.9845	1800

Table 15: $G_1(15, 12)$: 15 niveaux, 12 sommets par niveau

6.3 Présentation des résultats pour la bw -déviation

Les valeurs considérées pour b et w sont les mêmes que pour le critère de la bw -robustesse pour le modèle par scénarios. Les tableaux présentés en annexe 3 s'interprètent comme précédemment.

Concernant le temps de calcul, ils sont un peu plus importants que pour le critère de la bw -robustesse, cependant pour une grande partie des instances ils sont du même ordre de grandeur. Les premiers problèmes non résolus à l'optimalité en moins de 1800s apparaissent à partir de 300 arcs. C'est à partir de 700 arcs que le nombre de problèmes non résolus à l'optimalité en moins de 1800s devient significatif. Par exemple, dans le tableau 16, pour un graphe représentatif comportant 720 arcs, la dernière colonne ne contient aucune solution optimale.

Le saut d'intégrité reste très élevé. Par exemple, dans un graphe $G(180, 2)$ présenté dans le tableau 16, le rapport de la valeur optimale de la relaxation continue sur la valeur optimale entière atteint 13.

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			161			322			483		
1773	0	0	0.42	0	0	0.34	0	0	0.35	0	2	1800
1950	0	4	8.68	1	6	13.95	3	7	18.8	7	11	1800
2127	1	7	8.63	1	8	13.81	3	11	123.37	7	14	1800
2304	1	9	10.88	1	10	14.1	3	12	110.37	7	15	1800
2481	1	10	10.05	1	12	15.89	3	14	113.06	7	16	1800
2778	1	12	10	1	13	14.91	3	15	116.48	7	17	1800

Table 16: $G_1(180, 2)$: 180 niveaux, 2 sommets par niveau

Les graphiques de la figure 8 (construits pour un graphe représentatif $G(5, 12)$) permettent de juger de l'influence du choix des paramètres b et w sur les valeurs des solutions. Les courbes obtenues sont représentatives de celles constatées sur l'ensemble des graphes. Il est à noter que pour un b donné, c'est en général les deux premières augmentations de 10% et de 20% sur la valeur initiale de w qui entraînent les plus fortes augmentations de la fonction objectif : en prenant un peu de risque, on améliore notablement le nombre de scénarios satisfaisant la borne b . Ensuite, pour les autres augmentations de w la valeur de la fonction objectif n'évolue plus. Pour un w fixé, la fonction objectif subit la plus forte augmentation pour les grandes valeurs de b .

7 Conclusion

Nous avons montré dans cet article, dans quelle mesure il est possible d'appliquer deux nouveaux critères pour le problème du plus court chemin robuste avec incertitude sur les valeurs des arcs. Le critère de la bw -robustesse généralise le critère du pire cas alors que le critère de la bw -déviation généralise le critère du regret maximum. Ils permettent d'engager une analyse plus fine des performances des solutions sur l'ensemble des scénarios. Par l'intermédiaire des deux paramètres b et w , il est possible d'engager un

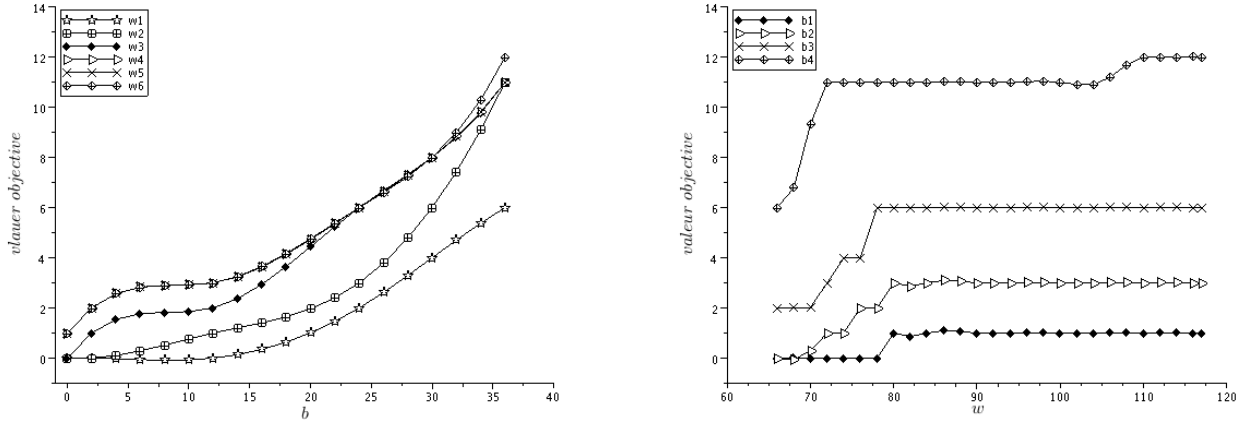


Figure 8: Valeur de (P_{bw-DEV}) en fonction de b avec w fixée (gauche) et de w avec b fixée (droite) sur $G_1(5, 12)$.

dialogue avec les décideurs afin de mettre en regard la valeur garantie et le risque encouru. Par ailleurs, les modèles proposés permettent de localiser dans l'espace des scénarios, à l'aide des variables y , ce qui a fondé une décision robuste.

Les premiers résultats expérimentaux que nous avons établis montrent qu'un solveur standard permet de résoudre des problèmes de relativement grandes tailles. Pour augmenter la taille des problèmes traités, il faut mettre en place une approche de résolution dédiée. Une voie possible, consiste à définir une approche permettant de réduire le saut d'intégrité.

Ce travail ouvre de nombreuses perspectives de recherche. Il nous reste à définir une méthode de résolution efficace pour le critère de la bw -déviation sur le modèle par intervalle. Concernant l'analyse de robustesse, les paramètres b et w sont souvent difficiles à fixer a priori et il est nécessaire de fournir au décideur les résultats obtenus pour différents jeux de paramètre. Il peut alors paraître plus aisé de demander au décideur de se fixer des objectifs en terme de valeur de solution. Par exemple, de lui demander, étant donnée une valeur garantie de w , quelle est la proportion p de scénario qu'il faut satisfaire pour qu'il juge une solution robuste? Dans le problème à résoudre, p et w deviennent des paramètres, et il faut déterminer la valeur de b minimum permettant de satisfaire cette proportion. Les problèmes mathématiques sont alors différents et nécessitent une étude spécifique pour être résolus. Cela sera le sujet de futures recherches.

References

- [1] I. Averbakh and V. Lebedev. Interval data minmax regret network optimization problems. *Discrete Applied Mathematics*, 138:289–301, 2004.
- [2] V. G. Deineko and G. J. Woeginger. On the robust assignment problem under a fixed number of cost scenarios. *Operations Research Letters*, 34(2):175–179, 2006.
- [3] Aissi H., Bazgan C., and Vanderpooten D. Complexity of the min-max and min-max regret assignment problems. *Operations Research Letters*, 33(6):634–640, 2005.
- [4] Averbakh I. Minmax regret solutions for minimax optimization problems with uncertainty. *Operations Research Letters*, 27:57–65, 2000.
- [5] Averbakh I. On the complexity of a class of combinatorial optimization problems with uncertainty. *Math. Program., Ser. A*, 90(6):263–272, 2001.
- [6] R. Kalai, M.A. Aloulou, P. Vallin, and D. Vanderpooten. Robust 1-median location problem on a tree. In *Proceedings of the ORP3 meeting*, Valencia, Espagne, September 2005.
- [7] O. E. Karaşan, M. Ç. Pinar, and H. Yaman. The robust shortest path problem with interval data. Technical report, Bilkent University, 2001.
- [8] A. Kasperski and P. Zieliński. The robust shortest path problem in series-parallel multidigraphs with interval data. *Operations Research Letters*, 34(1):69–76, 2006.
- [9] P. Kouvelis and G. Yu. *Robust discrete optimization and its applications*. Kluwer Academic Publishers, Boston, 1997.
- [10] R. Montemanni. A benders decomposition approach for the robust spanning tree problem with interval data. *European Journal of Operational Research*, 174(3):1479–1490, 2006.
- [11] R. Montemanni and L.M. Gambardella. An exact algorithm for the robust shortest path problem with interval data. *Computers and Operations Research*, 31:1667–1680, 2004.
- [12] R. Montemanni and L.M. Gambardella. The robust path problem with interval data via benders decomposition. *4OR*, 3(4):315–328, 2005.
- [13] R. Montemanni, L.M. Gambardella, and A.V. Donati. A branch and bound algorithm for the robust shortest path problem with interval data. *Operations Research Letters*, 32:225–232, 2004.
- [14] Perny P. and Spanjaard O. An axiomatic approach to robustness in search problems with multiple scenarios. In *Proceedings of the 19th conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*, pages 469–476, Acapulco, Mexico, 2003.
- [15] Zieliński P. The computational complexity of the relative robust shortest path problem with interval data. *European Journal of Operational Research*, 158:570–576, 2004.
- [16] B. Roy. *Flexibilité et Robustesse en Ordonnancement*, chapter A propos de robustesse en recherche Opérationnelle et Aide à la Décision. Hermès, Paris, 2005.
- [17] B. Roy. *Robustness in OR-DA, Annales du LAMSADE*, chapter La robustesse en recherche opérationnelle et aide à la décision : une préoccupation multi-facettes, pages 209–236. Université Paris Dauphine, Paris, 2007.

- [18] O. Spanjaard. *Exploitation de préférences non-classiques dans les problèmes combinatoires : modèles et algorithmes pour les graphes*. Thèse de doctorat, Université Paris Dauphine - LAMSADE, 2003.
- [19] P. Vincke. Robust solutions and methods in decision-aid. *Journal of multi-criteria decision analysis*, 8:181–187, 1999.
- [20] H. Yaman, O. E. Karaşan, and M. Ç. Pinar. The robust spanning tree problem with interval data. *Operations Research Letters*, 29:31–40, 2001.
- [21] G. Yu and J. Yang. On the robust shortest path problem. *Computers and Operations Research*, 25(6):457–468, 1998.

Annexe: résultats expérimentaux

Annexe 1 : le critère de la bw -robustesse dans le modèle par scénarios

$Val(w) \backslash Val(b)$	153			195			237			279		
321	0	2	0.83	0	3	0.63	0	4	0.84	0	9	4.87
353	0	5	1.08	1	6	0.84	3	8	1.86	7	14	12.56
385	0	7	0.99	2	8	0.77	3	11	1.15	9	15	11
417	1	8	0.91	2	10	0.82	4	12	1.16	9	16	2.92
449	1	10	0.87	2	11	0.98	4	13	1.09	9	17	3.06
494	1	11	0.87	2	12	0.74	4	15	1.73	9	17	4.44

Table 17: $G_1(30, 2)$: 30 niveaux, 2 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	142			186			230			274		
321	0	2	0.77	0	3	0.62	0	5	1.5	1	9	9.68
353	0	5	1.17	1	6	0.84	3	9	1.77	8	14	10.86
385	1	7	0.79	1	9	0.75	4	11	1.81	10	15	8.67
417	1	8	0.8	1	10	0.58	4	13	0.97	10	16	3.05
449	1	10	0.61	1	11	0.78	4	14	0.98	10	17	3.08
483	1	11	0.62	1	12	0.65	4	14	0.97	10	17	3.85

Table 18: $G_2(30, 2)$: 30 niveaux, 2 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	157			197			237			277		
319	0	2	0.68	0	3	0.76	0	4	1.94	0	9	11.06
350	0	5	0.87	1	6	0.84	3	9	1.8	9	14	11.05
381	1	7	0.6	2	9	0.75	3	11	1.36	10	15	9.38
412	1	9	0.74	2	10	0.59	4	13	1.37	10	16	3.66
443	1	10	0.89	2	11	0.89	4	14	2.21	10	17	4.05
474	1	11	0.6	2	12	0.6	4	14	1.55	10	17	5.39

Table 19: $G_3(30, 2)$: 30 niveaux, 2 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	81			115			149			183		
218	0	2	1.19	0	3	1.02	0	5	4.12	2	9	22.81
239	0	5	1.3	1	6	1.19	3	8	5.95	8	13	57.7
260	0	6	1.08	2	8	1.24	4	10	2.56	9	15	88.59
281	0	8	1.1	2	9	1.3	4	12	2.73	10	16	34.68
302	1	9	0.94	2	11	1.28	4	13	3.53	10	17	15.25
368	1	11	1.22	2	13	1.61	4	15	3.15	10	18	22.59

Table 20: $G_1(20, 3)$: 20 niveaux, 3 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	76			110			144			178		
212	0	3	0.95	0	4	1.2	0	6	10.8	1	11	16.44
233	0	5	1.22	1	7	1.73	3	9	3.88	9	14	81.43
254	0	7	0.97	2	8	1.3	4	11	4.15	10	16	90.79
275	1	8	1.1	2	10	1.56	4	12	3.14	10	17	30.38
296	1	9	1.12	2	11	1.41	4	13	3.65	10	17	34.74
368	1	12	1.15	2	13	1.83	4	15	3.42	10	18	88.82

Table 21: $G_2(20, 3)$: 20 niveaux, 3 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	57			95			133			171		
211	0	2	1.49	0	3	1.02	0	5	8.52	1	10	59.94
232	0	4	1.49	1	6	1.11	2	8	4.13	8	13	20.22
253	0	6	1.62	1	7	1.07	4	10	2.07	9	15	14.29
274	1	7	1.26	1	9	1.08	4	11	2.56	9	16	15.75
295	1	8	1.47	1	10	1.63	4	12	2.38	9	16	17.64
372	1	11	1.6	1	13	1.89	4	15	5.64	9	18	22.82

Table 22: $G_3(20, 3)$: 20 niveaux, 3 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	30			55			80			105		
132	0	3	1.61	0	4	1.93	0	6	8.41	1	10	20.64
145	0	5	1.57	1	6	4.58	2	9	8.04	8	13	29.8
158	1	6	2.28	1	8	2.9	3	10	9.08	9	15	37.08
171	1	7	2.28	2	9	3.38	4	12	7.28	9	16	43.16
184	1	8	1.57	2	10	2.28	4	13	6.3	9	16	131.38
246	1	12	2.84	2	13	3.17	4	15	6.85	9	18	182.61

Table 23: $G_1(12, 5)$: 12 niveaux, 5 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	27			52			77			102		
130	0	3	1.85	0	4	2.31	0	6	12.34	3	11	28.62
143	0	5	2.57	1	6	3.53	3	9	13.78	8	14	200.53
156	0	6	2.17	1	8	2.35	4	10	4.53	9	15	73.31
169	1	7	2.25	2	9	2.67	4	12	5.36	10	16	33.16
182	1	8	2.4	2	10	2.37	4	13	5.35	10	17	81.46
243	1	12	2.65	2	13	3.12	4	15	8.51	10	18	44.12

Table 24: $G_2(12, 5)$: 12 niveaux, 5 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	30			55			80			105		
131	0	2	2.21	0	3	3	0	5	23.44	1	11	38.17
144	0	5	2.6	1	6	3.02	2	8	23.9	8	14	565.22
157	0	6	1.41	1	8	2.98	4	10	8.82	10	15	215.02
170	1	7	2.25	2	9	2.78	4	12	8.37	10	16	90.36
183	1	8	1.93	2	10	2.12	5	13	6.92	10	17	100.27
240	1	11	2.66	2	13	4.03	5	15	8.57	10	18	152.69

Table 25: $G_3(12, 5)$: 12 niveaux, 5 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	8			22			36			50		
66	0	5	8.36	0	6	9.21	1	9	341.27	7	17	38.53
72	0	6	6.83	1	8	7.65	3	11	220.09	11	18	56.86
78	0	7	3.34	2	9	7.71	5	12	23.72	11	18	223.5
84	0	8	5.46	2	10	5.84	5	13	29.41	12	18	319.85
90	0	9	4.99	2	11	5.84	6	14	22.53	12	18	230.01
117	1	12	4.27	2	13	12.7	6	16	67.45	13	19	193.28

Table 26: $G_1(5, 12)$: 5 niveaux, 12 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	9			22			35			48		
63	0	4	5.03	0	5	7.33	0	8	30.54	4	14	9.66
69	0	6	5.59	1	7	9.32	3	10	34.61	9	16	70.87
75	0	7	6.12	2	9	6.44	4	12	32.17	9	17	249.92
81	0	8	4.71	2	10	6.9	5	13	19.66	11	17	130.03
87	1	9	4.41	2	11	6.5	5	14	27.88	11	17	163.21
118	1	12	7.19	2	14	8.28	5	16	29.09	11	18	555.93

Table 27: $G_2(5, 12)$: 5 niveaux, 12 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	7			21			35			49		
66	0	4	5.73	0	6	9.85	2	9	46.12	4	15	94.23
72	0	6	16.39	1	7	7.33	3	10	38.84	9	16	185.94
78	0	7	4.76	2	9	6.14	5	12	34.63	10	17	503.71
84	0	8	4.15	2	10	7.88	6	13	9.5	12	17	125.44
90	0	9	5.03	2	11	8.69	6	13	12.47	12	18	88.42
119	1	12	9.21	2	13	7.18	6	16	50.17	12	18	1272.46

Table 28: $G_3(5, 12)$: 5 niveaux, 12 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	335			405			475			545		
616	0	1	1.5	0	2	1.45	0	3	1.84	0	6	510.17
677	0	5	1.6	1	6	2	3	8	7.26	8	12	77.48
738	0	7	1.78	1	8	2.37	3	11	2.75	8	15	92.84
799	1	8	1.92	1	10	2.16	3	12	3.03	8	16	113.83
860	1	10	1.78	1	11	2.21	3	13	3.02	8	17	107.71
973	1	11	2.07	1	13	2.7	3	15	4.2	8	17	123.4

Table 29: $G_1(60, 2)$: 60 niveaux, 2 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	329			397			465			533		
602	0	1	1.19	0	2	1.38	0	3	3.97	0	5	281.44
662	0	4	1.5	1	6	2.1	3	8	4.99	8	12	201
722	1	7	1.77	1	8	2.03	3	11	5.62	9	15	188.75
782	1	8	1.65	1	10	2.15	3	12	3.21	9	16	10.59
842	1	10	1.98	1	11	2.28	3	13	6.26	9	16	13.45
946	1	11	2.02	1	13	2.59	3	15	6.53	9	17	56.91

Table 30: $G_2(60, 2)$: 60 niveaux, 2 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	328			396			464			532		
602	0	1	1.5	0	1	1.5	0	2	2.77	0	5	230.91
662	0	4	2.17	1	6	2.06	3	8	3.88	7	12	188.11
722	1	7	1.82	1	8	1.79	3	11	2.92	8	14	92.88
782	1	8	1.95	1	10	2.02	3	12	5.99	8	16	21.32
842	1	10	2	1	11	2.11	3	13	6.53	8	16	64.36
955	1	11	1.92	1	13	2.43	3	15	3.56	8	17	23.35

Table 31: $G_3(60, 2)$: 60 niveaux, 2 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	147			211			275			339		
404	0	1	2.33	0	1	2.44	0	2	10.55	0	5	1308.44
444	0	4	3.39	1	5	4.8	2	7	12.95	6	11	1800
484	1	6	3.13	1	7	4.26	3	9	6.52	8	13	496.55
524	1	7	3.42	1	9	2.96	3	11	11.12	8	15	142.81
564	1	8	3.25	1	10	4.44	3	12	13.7	8	16	70.35
710	1	11	3.41	1	13	4.55	3	15	8.59	8	17	199.12

Table 32: $G_1(40, 3)$: 40 niveaux, 3 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	154			212			270			328		
386	0	1	2.87	0	2	2.59	0	3	8.3	1	6	314.26
424	0	4	2.95	1	5	4.15	2	7	38.58	6	12	1800
462	0	6	3.25	1	7	3.77	3	10	7.57	9	14	1173.68
500	1	7	3.15	1	9	4.05	4	11	8.49	9	15	28.01
538	1	9	3.28	1	10	3.79	4	12	6.91	9	16	95.32
710	1	12	3.35	1	13	4.8	4	15	16.03	9	18	138.03

Table 33: $G_2(40, 3)$: 40 niveaux, 3 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	141			204			267			330		
395	0	1	2.56	0	2	2.53	0	3	7.37	0	6	1800
434	0	4	3.31	1	5	5.41	2	7	33.64	5	11	1800
473	1	5	2.96	1	7	3.99	4	9	6.2	8	13	939.37
512	1	7	3.39	1	8	3.56	4	11	4.91	9	15	237.6
551	1	8	2.79	1	10	4.52	4	12	5.79	9	15	71
709	1	11	3.91	1	13	4.91	4	15	7.51	9	17	34.98

Table 34: $G_3(40, 3)$: 40 niveaux, 3 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	30			55			80			105		
132	0	3	1.61	0	4	1.93	0	6	8.41	1	10	20.64
145	0	5	1.57	1	6	4.58	2	9	8.04	8	13	29.8
158	1	6	2.28	1	8	2.9	3	10	9.08	9	15	37.08
171	1	7	2.28	2	9	3.38	4	12	7.28	9	16	43.16
184	1	8	1.57	2	10	2.28	4	13	6.3	9	16	131.38
246	1	12	2.84	2	13	3.17	4	15	6.85	9	18	182.61

Table 35: $G_1(24, 5)$: 24 niveaux, 5 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	27			52			77			102		
130	0	3	1.85	0	4	2.31	0	6	12.34	3	11	28.62
143	0	5	2.57	1	6	3.53	3	9	13.78	8	14	200.53
156	0	6	2.17	1	8	2.35	4	10	4.53	9	15	73.31
169	1	7	2.25	2	9	2.67	4	12	5.36	10	16	33.16
182	1	8	2.4	2	10	2.37	4	13	5.35	10	17	81.46
243	1	12	2.65	2	13	3.12	4	15	8.51	10	18	44.12

Table 36: $G_2(24, 5)$: 24 niveaux, 5 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	30			55			80			105		
131	0	2	2.21	0	3	3	0	5	23.44	1	11	38.17
144	0	5	2.6	1	6	3.02	2	8	23.9	8	14	565.22
157	0	6	1.41	1	8	2.98	4	10	8.82	10	15	215.02
170	1	7	2.25	2	9	2.78	4	12	8.37	10	16	90.36
183	1	8	1.93	2	10	2.12	5	13	6.92	10	17	100.27
240	1	11	2.66	2	13	4.03	5	15	8.57	10	18	152.69

Table 37: $G_3(24, 5)$: 24 niveaux, 5 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	15			38			61			84		
107	0	3	23.26	0	4	53.38	0	6	1800	3	12	1800
117	0	4	16.63	1	6	51.59	3	8	1191.71	8	14	1800
127	0	6	12.92	2	7	36.69	4	10	710.36	10	16	1800
137	0	7	779.01	2	9	27.19	4	11	243.52	10	16	1800
147	1	8	11.36	2	10	31.17	5	12	635.95	10	17	1800
214	1	12	26.32	2	13	59.5	5	15	193.72	10	18	1800

Table 38: $G_1(10, 12)$: 10 niveaux, 12 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	15			37			59			81		
105	0	3	18.91	0	4	42.58	0	7	1800	1	12	1800
115	0	5	17.82	1	6	33.61	2	9	1800	8	14	1800
125	0	6	16.97	2	8	24.97	3	10	1800	10	15	1800
135	0	7	28.3	2	9	27.47	4	12	514.77	10	16	1800
145	0	8	15.74	2	10	24.72	5	13	196.49	10	17	1800
218	1	12	13.29	2	14	32.6	5	16	471.58	10	18	1800

Table 39: $G_2(10, 12)$: 10 niveaux, 12 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	15			38			61			84		
108	0	3	19.58	0	4	92.62	0	6	1800	3	11	1800
118	0	4	32.49	1	6	57.07	3	8	806.42	8	14	1800
128	0	6	255.72	1	7	52.63	4	10	1419.27	8	15	1800
138	1	7	319.61	2	8	29.99	4	11	531.38	9	16	1800
148	1	8	15.87	2	9	31	5	12	160.46	10	16	1800
216	1	12	25.22	2	13	72.05	5	15	471.96	10	18	1800

Table 40: $G_3(10, 12)$: 10 niveaux, 12 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	505			605			705			805		
908	0	1	0.17	0	1	2.62	0	2	2.98	0	4	893.7
998	0	4	2.46	1	5	3.63	3	7	6.26	7	11	739.56
1088	1	7	2.62	1	8	3.62	3	10	5.56	8	14	140.67
1178	1	8	2.99	1	10	4.22	3	12	8.45	8	15	65.37
1268	1	10	2.75	1	11	3.93	3	13	7.22	8	16	165.5
1409	1	11	3.24	1	13	4.43	3	14	8.8	8	17	104.79

Table 41: $G_1(90, 2)$: 90 niveaux, 2 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	502			598			694			790		
886	0	1	0.18	0	1	2.46	0	2	3.69	0	4	1800
974	0	4	2.8	1	5	4.19	3	8	11.2	7	12	1305.29
1062	1	7	2.16	1	8	4.02	3	10	5.45	8	14	66.14
1150	1	8	2.83	1	10	3.76	3	12	5.8	8	15	178.39
1238	1	10	2.94	1	11	3.96	3	13	13.34	8	16	185.64
1403	1	12	3.24	1	13	4.53	3	15	14.19	8	17	245.26

Table 42: $G_2(90, 2)$: 90 niveaux, 2 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	480			582			684			786		
888	0	0	0.12	0	1	0.77	0	1	3.23	0	3	1800
976	0	4	2.68	1	5	3.07	3	7	15.51	7	11	118.13
1064	1	6	2.83	1	8	3.23	3	10	6.19	8	14	174
1152	1	8	3	1	10	3.62	3	12	8.24	8	15	76.24
1240	1	9	3.13	1	11	3.84	3	13	5.25	8	16	117.23
1418	1	11	3.7	1	13	3.93	3	15	11.33	8	17	159.3

Table 43: $G_3(90, 2)$: 90 niveaux, 2 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	238			325			412			499		
589	0	1	4.21	0	1	5.97	0	2	75.93	0	4	1800
647	0	4	5.35	1	5	6.8	3	7	18.58	5	11	1800
705	0	6	4.77	1	7	8.48	3	9	27.56	8	13	1369.33
763	1	7	5.3	1	9	7.98	3	11	16.12	8	15	893.37
821	1	8	5.67	1	10	8.31	3	12	38.21	8	15	935.76
1054	1	12	6.67	1	13	8.84	3	15	71.35	8	17	956.43

Table 44: $G_1(60, 3)$: 60 niveaux, 3 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	228			313			398			483		
571	0	1	1.23	0	1	6	0	2	7.84	0	4	1800
628	0	4	5.28	1	5	7.49	2	6	15.98	5	11	1800
685	0	6	6.03	1	7	8.02	3	9	12.11	8	13	202.93
742	1	7	5.47	1	9	7.87	3	11	27.72	8	14	190.19
799	1	8	5.96	1	10	7.99	3	12	13.21	8	15	227.96
1040	1	12	6.34	1	13	8.71	3	15	14.54	8	17	428.19

Table 45: $G_2(60, 3)$: 60 niveaux, 3 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	217			308			399			490		
583	0	0	0.19	0	1	3.68	0	1	5.77	0	3	1800
641	0	3	4.53	1	4	6.11	2	6	119.54	5	10	1800
699	0	5	4.4	1	6	6.54	3	9	17.38	8	12	810.98
757	1	7	4.33	1	8	6.55	3	10	12.99	8	14	301.06
815	1	8	5.08	1	9	6.73	3	12	24.81	8	15	381.39
1046	1	11	6.52	1	13	9.06	3	14	29.63	8	17	466.56

Table 46: $G_3(60, 3)$: 60 niveaux, 3 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	82			148			214			280		
346	0	1	11.93	0	2	12.11	0	3	100.17	0	6	1800
380	0	3	12.5	1	4	30.47	2	6	291	6	11	1800
414	0	5	10.65	1	6	20.92	3	9	52.76	8	13	1800
448	1	6	10.93	1	8	19.35	3	10	89.73	8	14	1800
482	1	8	11.39	1	9	19.87	3	11	170.17	8	15	1800
686	1	12	16.19	1	13	26.26	3	15	54.75	8	17	1800

Table 47: $G_1(36, 5)$: 36 niveaux, 5 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	92			154			216			278		
342	0	1	8.33	0	1	13.3	0	2	143.67	0	5	1800
376	0	3	9.71	1	4	26.68	2	6	532.61	5	10	1800
410	0	5	10.47	1	6	18.15	3	9	37.36	7	13	1800
444	1	6	11.01	2	8	17.29	3	10	46.32	8	14	1800
478	1	8	9.37	2	9	17.2	3	11	45.04	8	15	1800
691	1	12	19.71	2	13	23.09	3	15	62.03	8	17	1800

Table 48: $G_2(36, 5)$: 36 niveaux, 5 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	80			145			210			275		
342	0	1	2.26	0	1	10.12	0	2	19.88	0	4	1800
376	0	3	14.36	1	4	125.33	2	6	445.12	4	10	1800
410	0	5	10.59	1	6	19.1	3	8	55.59	6	12	1800
444	0	6	10.89	1	7	31.31	3	10	188.89	7	14	1800
478	1	7	12.19	1	9	19.86	3	11	126.8	7	15	1800
684	1	11	17.43	1	13	23.63	3	15	59.94	7	17	1800

Table 49: $G_3(36, 5)$: 36 niveaux, 5 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	22			52			82			112		
144	0	2	43.02	0	3	68.54	0	4	826.14	0	8	1800
158	0	4	32.63	1	5	1089.65	2	7	1343.79	5	12	1800
172	0	5	27.45	1	7	66.58	3	9	368.85	8	14	1800
186	0	6	23.03	2	8	71.5	4	10	230.95	8	15	1800
200	1	7	25.24	2	9	35.42	4	12	474.66	8	16	1800
315	1	12	24.35	2	14	41.31	4	15	886.96	8	18	1800

Table 50: $G_1(15, 12)$: 15 niveaux, 12 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	22			52			82			112		
144	0	2	38.8	0	3	42.64	0	4	1800	1	8	1800
158	0	4	29.45	1	5	165.41	2	7	614.84	5	12	1800
172	0	5	28.59	1	7	51.85	3	9	608.81	7	14	1800
186	0	6	24.22	2	8	51.13	4	11	193.51	8	15	1800
200	1	8	24.52	2	9	38.11	4	12	225.46	8	16	1800
314	1	12	22.67	2	14	52.38	4	15	726.31	8	18	1800

Table 51: $G_2(15, 12)$: 15 niveaux, 12 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	21			54			87			120		
153	0	2	34.49	0	3	1210.55	0	5	1800	3	11	1800
168	0	4	63.03	1	6	83.69	3	8	1192.94	7	14	1800
183	0	6	25.96	2	7	59.28	4	10	500	10	15	1800
198	0	7	26.72	2	8	40.53	4	11	1303.63	10	16	1800
213	0	8	25.52	2	10	50.22	4	12	524.23	10	17	1800
315	1	12	27.76	2	13	70.83	4	15	1708.29	10	18	1800

Table 52: $G_3(15, 12)$: 15 niveaux, 12 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	1029			1215			1401			1587		
1773	0	0	0.24	0	0	0.25	0	0	0.24	0	1	17.56
1950	0	4	7.02	1	5	10.76	2	7	34.86	7	10	540.95
2127	1	6	6.43	1	8	8.73	3	10	28.16	7	13	806.1
2304	1	8	6.42	1	10	11.64	3	12	32.78	7	15	1248.47
2481	1	10	8.04	1	11	11.5	3	13	32.33	7	16	1198.44
2778	1	11	7.86	1	13	12.2	3	14	34.92	7	17	1472.23

Table 53: $G_1(180, 2)$: 180 niveaux, 2 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	1017			1199			1381			1563		
1745	0	0	0.27	0	0	0.25	0	1	7.31	0	2	1800
1919	0	4	7.12	1	5	9.58	2	7	39.78	7	11	1534.37
2093	1	7	7.63	1	8	12.48	3	10	41.11	7	14	1099.05
2267	1	8	8.67	1	10	13.66	3	12	42.55	7	15	1303.4
2441	1	10	6.49	1	11	12.92	3	13	46.63	7	16	1579.94
2808	1	12	9.83	1	13	16.07	3	15	48.4	7	17	1711.56

Table 54: $G_2(180, 2)$: 180 niveaux, 2 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	1013			1199			1385			1571		
1760	0	0	0.31	0	0	0.3	0	0	0.2	0	1	1800
1936	0	4	5.97	1	5	10.82	3	7	56.54	6	10	1800
2112	1	6	7.73	1	8	10.29	3	10	32.9	7	13	223.03
2288	1	8	7.2	1	10	12.48	3	12	37.84	7	15	978.76
2464	1	10	8.07	1	11	12.32	3	13	90.38	7	16	1178.37
2776	1	11	9.08	1	13	17.49	3	14	48.98	7	17	1310.49

Table 55: $G_3(180, 2)$: 180 niveaux, 2 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	487			649			811			973		
1135	0	0	0.46	0	0	0.48	0	1	0.92	0	2	1800
1248	0	3	12.09	1	4	19.13	2	6	52.13	5	9	1800
1361	0	5	12.89	1	7	26.74	3	9	68.73	7	12	1800
1474	1	7	14.26	1	8	19.64	3	10	89.42	7	14	1800
1587	1	8	16.44	1	10	21.83	3	12	93.07	7	15	1800
2067	1	12	19.49	1	13	35.69	3	15	113.06	7	17	1800

Table 56: $G_1(120, 3)$: 120 niveaux, 3 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	463			627			791			955		
1121	0	0	0.51	0	0	0.33	0	1	6.86	0	2	1800
1233	0	3	14.51	1	4	16.15	2	6	40.18	4	10	1800
1345	0	5	13.79	1	7	31.58	3	9	64.26	6	12	1800
1457	1	7	15.14	1	8	26.75	3	10	71.59	7	14	1800
1569	1	8	17.63	1	10	30.11	3	12	84.96	7	15	1800
2056	1	12	19.11	1	13	36.09	3	15	102.34	7	17	1800

Table 57: $G_2(120, 3)$: 120 niveaux, 3 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	468			633			798			963		
1131	0	0	0.62	0	0	0.57	0	0	0.54	0	1	1800
1244	0	3	12.71	1	4	22.09	2	5	187.86	5	9	1800
1357	0	5	18.18	1	6	35.21	3	8	57.97	7	12	1800
1470	1	7	19.92	1	8	30.28	3	10	77.59	7	14	1800
1583	1	8	17.84	1	9	29.67	3	11	93.96	7	15	1800
2069	1	11	25.86	1	13	35.59	3	15	105.09	7	17	1800

Table 58: $G_3(120, 3)$: 120 niveaux, 3 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	176			295			414			533		
652	0	0	0.81	0	1	1.51	0	1	34.01	0	3	1800
717	0	3	27.71	1	4	411.08	2	5	1400.37	4	9	1800
782	0	5	39.18	1	6	77.08	3	8	707.48	6	12	1800
847	0	6	41.76	1	7	77.36	3	10	184.03	6	13	1800
912	1	7	44.01	1	9	74.11	3	11	224.73	6	14	1800
1349	1	12	53.06	1	13	80.3	3	15	685.01	6	17	1800

Table 59: $G_1(72, 5)$: 72 niveaux, 5 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	191			306			421			536		
654	0	0	0.92	0	1	25.22	0	1	31.87	0	3	1800
719	0	3	27.38	1	4	126.38	2	5	181.11	5	9	1800
784	0	5	42.43	1	6	70.24	3	8	783.09	6	12	1800
849	1	6	40.64	1	8	64.97	3	10	209.5	7	13	1800
914	1	7	33.63	1	9	61.93	3	11	214.6	7	14	1800
1359	1	12	60.58	1	13	74.59	3	15	631.41	7	17	1800

Table 60: $G_2(72, 5)$: 72 niveaux, 5 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	173			294			415			536		
658	0	0	0.7	0	1	13.04	0	1	32.9	0	3	1800
723	0	3	26.56	1	4	59.97	2	5	390.98	4	9	1800
788	0	5	36.43	1	6	52.95	3	8	368.43	6	12	1800
853	0	6	35.94	1	7	67.35	3	10	191.51	7	13	1800
918	1	7	37.15	1	9	64	3	11	447.67	7	14	1800
1358	1	12	47.86	1	13	74.36	3	15	844.06	7	17	1800

Table 61: $G_3(72, 5)$: 72 niveaux, 5 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	42			99			156			213		
272	0	1	84.52	0	2	97.38	0	3	1800	0	7	1800
299	0	3	70.31	1	4	1375.39	1	6	1800	4	11	1800
326	0	5	159.59	1	6	194.75	2	9	1800	6	13	1800
353	0	6	100.26	2	8	155.68	4	10	1800	7	14	1800
380	0	7	93.08	2	9	159.13	4	11	1800	7	15	1800
608	1	12	95.75	2	14	181.74	4	15	1800	7	18	1800

Table 62: $G_1(30, 12)$: 30 niveaux, 12 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	43			100			157			214		
272	0	1	75.4	0	2	106.66	0	3	1800	0	7	1800
299	0	3	88.09	1	4	194.25	1	7	1800	4	11	1800
326	0	5	94.77	1	6	220.22	2	9	1800	6	13	1800
353	0	6	105.96	2	8	164.75	3	10	1800	8	14	1800
380	1	7	90.94	2	9	194.41	4	11	1800	8	15	1800
610	1	12	93.95	2	14	217.18	4	15	1800	8	18	1800

Table 63: $G_2(30, 12)$: 30 niveaux, 12 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	39			97			155			213		
272	0	1	75.22	0	2	107.84	0	3	1800	0	6	1800
299	0	3	101.86	1	4	949.43	1	6	1800	5	10	1800
326	0	5	80.66	1	6	253.26	2	8	1800	6	12	1800
353	0	6	105.28	2	7	157	4	10	1671.07	8	14	1800
380	1	7	96.33	2	8	149.37	4	11	1800	8	15	1800
612	1	12	101.2	2	13	170.41	4	15	1800	8	18	1800

Table 64: $G_3(30, 12)$: 30 niveaux, 12 sommets par niveau

Annexe 2 : le critère de la bw -robustesse dans le modèle par intervalle

$Val(w) \backslash Val(b)$	108			128			148			168		
188	-	0.0501	0.04	0.0769	0.0769	0.05	0.3846	0.3846	0.04	0.6923	0.6923	0.04
206	0	0	0.03	0.2298	0.5012	0.34	0.4597	0.7245	0.17	0.7123	0.8692	0.1
224	0	0	0.03	0.2298	0.5243	0.12	0.4597	0.7355	0.11	0.7123	0.8692	0.06
242	0	0	0.04	0.2298	0.5243	0.12	0.4597	0.7355	0.11	0.7123	0.8692	0.08
260	0	0	0.04	0.2298	0.5243	0.13	0.4597	0.7355	0.11	0.7123	0.8692	0.07
296	0	0	0.04	0.2298	0.5243	0.12	0.4597	0.7355	0.11	0.7123	0.8692	0.06

Table 65: $G_1(30, 2)$: 30 niveaux, 2 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	133			154			175			196		
219	-	0.0355	0.04	0.0441	0.0483	0.05	0.3529	0.387	0.04	0.6617	0.6891	0.06
240	0	0	0.04	0.2258	0.5714	1.01	0.4545	0.7419	0.54	0.6976	0.8654	0.12
261	0	0	0.03	0.2258	0.5714	0.07	0.4545	0.7419	0.1	0.6976	0.8654	0.08
282	0	0	0.03	0.2258	0.5714	0.06	0.4545	0.7419	0.1	0.6976	0.8654	0.09
303	0	0	0.03	0.2258	0.5714	0.07	0.4545	0.7419	0.11	0.6976	0.8654	0.09
325	0	0	0.03	0.2258	0.5714	0.07	0.4545	0.7419	0.11	0.6976	0.8654	0.08

Table 66: $G_2(30, 2)$: 30 niveaux, 2 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	138			169			200			231		
264	-	0.0251	0.03	0.2338	0.3222	0.08	0.4838	0.5949	0.09	0.7338	0.7911	0.07
290	0	0	0.02	0.2338	0.5263	0.08	0.4838	0.7326	0.06	0.7338	0.8647	0.05
316	0	0	0.03	0.2338	0.5263	0.07	0.4838	0.7326	0.06	0.7338	0.8647	0.07
342	0	0	0.03	0.2338	0.5263	0.07	0.4838	0.7326	0.05	0.7338	0.8647	0.05
368	0	0	0.02	0.2338	0.5263	0.04	0.4838	0.7326	0.06	0.7338	0.8647	0.08
415	0	0	0.03	0.2338	0.5263	0.06	0.4838	0.7326	0.06	0.7338	0.8647	0.05

Table 67: $G_3(30, 2)$: 30 niveaux, 2 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	76			97			118			139		
160	-	0.1576	0.04	-	0.0016	0.07	0.3225	0.3225	0.07	0.6612	0.6612	0.07
176	-	0.0946	0.04	0.1744	0.5526	0.88	0.432	0.7777	0.31	0.6913	0.9089	0.16
192	-	0.0404	0.06	0.1744	0.6754	0.12	0.432	0.8164	0.12	0.6913	0.909	0.11
208	0	0	0.04	0.1744	0.683	0.13	0.432	0.8164	0.12	0.6913	0.909	0.12
224	0	0	0.06	0.1744	0.683	0.12	0.432	0.8164	0.12	0.6913	0.909	0.12
279	0	0	0.04	0.1744	0.683	0.12	0.432	0.8164	0.12	0.6913	0.909	0.12

Table 68: $G_1(20, 3)$: 20 niveaux, 3 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	63			89			115			141		
169	-	0.1266	0.05	0.0909	0.1142	0.08	0.3863	0.4857	0.09	0.6818	0.7477	0.1
185	0	0	0.05	0.2131	0.69	0.96	0.4351	0.8313	0.24	0.6868	0.9169	0.15
201	0	0	0.04	0.2131	0.7021	0.13	0.4351	0.8367	0.16	0.6868	0.9169	0.14
217	0	0	0.04	0.2131	0.7021	0.13	0.4351	0.8367	0.17	0.6868	0.9169	0.12
233	0	0	0.03	0.2131	0.7021	0.13	0.4351	0.8367	0.16	0.6868	0.9169	0.13
275	0	0	0.04	0.2131	0.7021	0.13	0.4351	0.8367	0.14	0.6868	0.9169	0.12

Table 69: $G_2(20, 3)$: 20 niveaux, 3 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	58			77			96			115		
136	-	0.1216	0.06	-	0.0059	0.08	0.2857	0.3076	0.07	0.625	0.65	0.07
149	-	0.0341	0.07	0.1931	0.5689	1.52	0.421	0.7899	0.71	0.6712	0.9161	0.22
162	0	0	0.06	0.1958	0.6836	0.14	0.421	0.8419	0.17	0.6712	0.921	0.13
175	0	0	0.05	0.1958	0.7014	0.15	0.421	0.8482	0.17	0.6712	0.921	0.13
188	0	0	0.05	0.1958	0.7014	0.14	0.421	0.8482	0.16	0.6712	0.921	0.13
246	0	0	0.06	0.1958	0.7014	0.16	0.421	0.8482	0.17	0.6712	0.921	0.13

Table 70: $G_3(20, 3)$: 20 niveaux, 3 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	27			38			49			60		
74	-	0.1846	0.09	-	0.0131	0.11	0.2857	0.4	0.14	0.5999	0.6888	0.15
81	-	0.1057	0.09	0.1599	0.6009	0.42	0.38	0.8072	0.5	0.6046	0.917	0.29
88	-	0.0384	0.1	0.1698	0.7263	0.21	0.38	0.8584	0.21	0.6046	0.939	0.22
95	0	0	0.1	0.1698	0.7738	0.21	0.38	0.8815	0.17	0.6046	0.9435	0.23
102	0	0	0.08	0.1698	0.7846	0.16	0.38	0.8912	0.16	0.6046	0.9435	0.18
161	0	0	0.08	0.1698	0.7846	0.18	0.38	0.8915	0.17	0.6046	0.9435	0.31

Table 71: $G_1(12, 5)$: 12 niveaux, 5 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	32			46			60			74		
88	-	0.3249	0.1	-	0.082	0.12	0.125	0.125	0.12	0.5625	0.5625	0.1
96	-	0.2	0.1	0.0754	0.3163	0.17	0.3396	0.7687	0.52	0.6086	0.9352	0.29
104	-	0.0839	0.09	0.123	0.6645	0.35	0.3499	0.8696	0.25	0.6086	0.9514	0.24
112	0	0	0.1	0.1794	0.7627	0.37	0.3611	0.8945	0.19	0.6086	0.9518	0.23
120	0	0	0.08	0.1794	0.7887	0.19	0.3611	0.9026	0.18	0.6086	0.9518	0.24
192	0	0	0.08	0.1794	0.7966	0.17	0.3611	0.9026	0.18	0.6086	0.9518	0.21

Table 72: $G_2(12, 5)$: 12 niveaux, 5 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	31			45			59			73		
87	-	0.3221	0.1	0.0666	0.0749	0.14	0.3777	0.425	0.14	0.6888	0.7199	0.13
95	-	0.2147	0.1	0.1785	0.6941	0.57	0.4285	0.8627	0.4	0.6938	0.9483	0.26
103	-	0.1329	0.1	0.1785	0.755	0.2	0.4285	0.8943	0.21	0.6938	0.9558	0.25
111	-	0.0845	0.09	0.1785	0.7829	0.22	0.4285	0.9042	0.3	0.6938	0.9559	0.29
119	-	0.0362	0.1	0.1785	0.7948	0.17	0.4285	0.9054	0.24	0.6938	0.9559	0.27
177	0	0	0.1	0.1785	0.7948	0.16	0.4285	0.9054	0.3	0.6938	0.9559	0.2

Table 73: $G_3(12, 5)$: 12 niveaux, 5 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	6			13			20			27		
35	-	0.75	0.03	-	0.4437	0.13	-	0.2209	0.16	0.2727	0.4285	0.17
38	-	0.7468	0.04	-	0.2562	0.13	-	0.5217	0.31	0.3124	0.8833	0.31
41	-	0.4979	0.04	-	0.0912	0.15	0.1666	0.7826	0.47	0.4583	0.9213	0.55
44	-	0.2489	0.03	-	0.5617	0.51	0.1666	0.8324	0.52	0.4583	0.9352	0.41
47	0	0	0.04	0.1707	0.6769	0.35	0.3414	0.849	0.64	0.5121	0.943	0.4
96	0	0	0.04	0.1707	0.7027	0.19	0.3414	0.8688	0.27	0.5121	0.9499	0.28

Table 74: $G_1(5, 12)$: 5 niveaux, 12 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	9			14			19			24		
29	-	0.552	0.12	-	0.1666	0.16	0.2857	0.2857	0.15	0.6428	0.6428	0.13
31	-	0.3495	0.13	0	0.4347	0.27	0.3125	0.8395	0.26	0.6428	0.9521	0.3
33	-	0.4745	0.13	0.1363	0.7586	0.34	0.3636	0.9018	0.49	0.6428	0.9678	0.57
35	-	0.3389	0.14	0.1363	0.8141	0.32	0.3636	0.9212	0.47	0.6428	0.9731	0.35
37	-	0.1165	0.13	0.1481	0.8329	0.4	0.3636	0.9321	0.54	0.6428	0.975	0.45
77	0	0.5	0.18	0.1612	0.8813	0.5	0.3636	0.9439	0.35	0.6428	0.9754	0.33

Table 75: $G_2(5, 12)$: 5 niveaux, 12 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	10			14			18			22		
26	-	0.1875	0.11	-	0.0375	0.15	0.2727	0.2727	0.13	0.6363	0.6363	0.14
28	-	0.0625	0.12	-	0.3333	0.17	0.2727	0.7272	0.21	0.6363	0.9259	0.24
30	0	0	0.13	0.2105	0.5999	0.19	0.421	0.8461	0.29	0.6363	0.9626	0.28
32	0	0	0.11	0.2105	0.7183	0.19	0.421	0.8975	0.32	0.6363	0.9711	0.4
34	0	0	0.11	0.2105	0.7931	0.2	0.421	0.9228	0.32	0.6363	0.9736	0.35
76	0	0	0.11	0.2105	0.875	0.24	0.421	0.9404	0.28	0.6363	0.9743	0.26

Table 76: $G_3(5, 12)$: 5 niveaux, 12 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	230			287			344			401		
458	-	0.0844	0.1	0.0446	0.0457	0.15	0.3631	0.3714	0.13	0.6815	0.6885	0.13
503	-	0.0068	0.1	0.2061	0.5756	3.36	0.4393	0.7647	1.57	0.6963	0.8848	0.39
548	0	0	0.09	0.2061	0.6036	0.18	0.4393	0.769	0.44	0.6963	0.8848	0.17
593	0	0	0.09	0.2061	0.6036	0.16	0.4393	0.769	0.39	0.6963	0.8848	0.17
638	0	0	0.09	0.2061	0.6036	0.17	0.4393	0.769	0.31	0.6963	0.8848	0.16
710	0	0	0.09	0.2061	0.6036	0.17	0.4393	0.769	0.41	0.6963	0.8848	0.16

Table 77: $G_1(60, 2)$: 60 niveaux, 2 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	204			257			310			363		
416	-	0.0725	0.12	0.1675	0.1828	0.15	0.445	0.4857	0.17	0.7225	0.7439	0.18
457	-	0.0058	0.11	0.2118	0.531	1.43	0.4497	0.7475	0.35	0.7225	0.8795	0.17
498	0	0	0.11	0.2118	0.5813	0.29	0.4497	0.7575	0.24	0.7225	0.8795	0.17
539	0	0	0.09	0.2118	0.5813	0.3	0.4497	0.7575	0.24	0.7225	0.8795	0.17
580	0	0	0.09	0.2118	0.5813	0.3	0.4497	0.7575	0.26	0.7225	0.8795	0.19
671	0	0	0.1	0.2118	0.5813	0.28	0.4497	0.7575	0.23	0.7225	0.8795	0.16

Table 78: $G_2(60, 2)$: 60 niveaux, 2 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	234			288			342			396		
450	-	0.0742	0.11	0.0181	0.0201	0.17	0.3454	0.3825	0.14	0.6727	0.7016	0.16
495	-	0.0045	0.11	0.2088	0.5573	2.81	0.449	0.7523	1.33	0.7114	0.8767	0.36
540	0	0	0.09	0.2088	0.5714	0.28	0.449	0.7523	0.37	0.7114	0.8767	0.24
585	0	0	0.08	0.2088	0.5714	0.31	0.449	0.7523	0.39	0.7114	0.8767	0.24
630	0	0	0.1	0.2088	0.5714	0.3	0.449	0.7523	0.38	0.7114	0.8767	0.25
702	0	0	0.08	0.2088	0.5714	0.3	0.449	0.7523	0.35	0.7114	0.8767	0.22

Table 79: $G_3(60, 2)$: 60 niveaux, 2 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	99			135			171			207		
246	-	0.1768	0.13	0.0347	0.0373	0.21	0.3478	0.3738	0.19	0.6608	0.6829	0.21
270	-	0.0811	0.13	0.1614	0.4657	3.07	0.3918	0.7756	1.01	0.6693	0.9095	0.35
294	-	0.0253	0.13	0.1798	0.6276	0.62	0.3918	0.8233	0.34	0.6693	0.9109	0.29
318	0	0	0.12	0.1798	0.6525	0.28	0.3918	0.8249	0.34	0.6693	0.9109	0.22
342	0	0	0.12	0.1798	0.6525	0.28	0.3918	0.8249	0.35	0.6693	0.9109	0.29
487	0	0	0.11	0.1798	0.6525	0.29	0.3918	0.8249	0.39	0.6693	0.9109	0.3

Table 80: $G_1(40, 3)$: 40 niveaux, 3 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	93			137			181			225		
270	-	0.2467	0.13	-	0.0186	0.18	0.2704	0.2946	0.2	0.6311	0.664	0.19
297	-	0.1239	0.12	0.1311	0.5457	2.87	0.3722	0.8005	3.15	0.65	0.9199	0.51
324	-	0.0188	0.13	0.1822	0.6879	2.57	0.3802	0.8366	0.54	0.65	0.9207	0.28
351	0	0	0.12	0.1853	0.6943	0.42	0.3802	0.8377	0.42	0.65	0.9207	0.27
378	0	0	0.1	0.1853	0.6943	0.37	0.3802	0.8377	0.39	0.65	0.9207	0.29
491	0	0	0.12	0.1853	0.6943	0.39	0.3802	0.8377	0.39	0.65	0.9207	0.27

Table 81: $G_2(40, 3)$: 40 niveaux, 3 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	103			141			179			217		
256	-	0.1354	0.13	0.1015	0.1547	0.23	0.3984	0.5616	0.34	0.6953	0.7966	0.3
281	-	0.0394	0.14	0.1927	0.6073	3.06	0.4216	0.8191	0.63	0.6953	0.9207	0.33
306	0	0	0.11	0.2	0.6749	0.36	0.4216	0.8385	0.37	0.6953	0.9212	0.35
331	0	0	0.11	0.2	0.681	0.19	0.4216	0.8387	0.38	0.6953	0.9212	0.32
356	0	0	0.12	0.2	0.681	0.22	0.4216	0.8387	0.39	0.6953	0.9212	0.34
478	0	0	0.12	0.2	0.681	0.22	0.4216	0.8387	0.35	0.6953	0.9212	0.32

Table 82: $G_3(40, 3)$: 40 niveaux, 3 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	48			71			94			117		
141	-	1.4166	0.23	-	0.0833	0.3	0.2033	0.2105	0.33	0.5932	0.6065	0.35
155	-	0.7826	0.24	0.1276	0.6545	3.29	0.382	0.8391	5.22	0.6538	0.9421	1.55
169	-	0.2957	0.22	0.1666	0.7587	0.91	0.3823	0.8871	0.51	0.6538	0.9537	0.54
183	-	0.0314	0.24	0.1735	0.8021	0.56	0.3823	0.9038	0.57	0.6538	0.9541	0.62
197	0	0	0.22	0.1735	0.8146	0.45	0.3823	0.9076	0.52	0.6538	0.9541	0.65
325	0	0	0.19	0.1735	0.8161	0.39	0.3823	0.9076	0.51	0.6538	0.9541	0.58

Table 83: $G_1(24, 5)$: 24 niveaux, 5 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	47			68			89			110		
131	-	1.142	0.2	-	0.0192	0.27	0.2881	0.3541	0.33	0.644	0.7123	0.32
144	-	0.3333	0.19	0.2	0.5982	2.55	0.4269	0.836	3.6	0.6986	0.9412	0.72
157	0	0	0.18	0.202	0.7036	0.38	0.4269	0.8747	0.46	0.6986	0.9497	0.49
170	0	0	0.17	0.202	0.7437	0.42	0.4269	0.8874	0.47	0.6986	0.9502	0.5
183	0	0	0.18	0.202	0.7611	0.43	0.4269	0.8938	0.46	0.6986	0.9502	0.48
317	0	0	0.17	0.202	0.7678	0.36	0.4269	0.8945	0.48	0.6986	0.9502	0.46

Table 84: $G_2(24, 5)$: 24 niveaux, 5 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	36			60			84			108		
132	-	1.7586	0.19	0.04	0.0483	0.32	0.36	0.4354	0.3	0.68	0.7272	0.38
145	-	1.056	0.18	0.1515	0.6923	2.89	0.3939	0.8654	0.97	0.6829	0.9515	0.67
158	-	0.6395	0.17	0.1637	0.7722	0.65	0.3939	0.9017	0.75	0.6829	0.9585	0.48
171	-	0.2445	0.18	0.1637	0.8087	0.47	0.3939	0.9125	0.61	0.6829	0.9585	0.49
184	0	0	0.17	0.1666	0.8194	0.42	0.3939	0.9137	0.54	0.6829	0.9585	0.64
297	0	0	0.15	0.1666	0.8194	0.34	0.3939	0.9137	0.61	0.6829	0.9585	0.5

Table 85: $G_3(24, 5)$: 24 niveaux, 5 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	11			18			25			32		
40	-	0.375	0.58	-	0.0681	0.79	0.0625	0.1111	0.93	0.5	0.7058	0.94
44	-	0.1666	0.64	0.1724	0.6315	1.35	0.4137	0.884	1.92	0.6551	0.9696	2.7
48	0	0	0.6	0.1891	0.7749	1.26	0.4137	0.9325	1.43	0.6551	0.9832	1.74
52	0	0	0.52	0.1891	0.8392	1.32	0.4137	0.9539	2	0.6551	0.9865	84.87
56	0	0	0.59	0.1891	0.8795	1.51	0.4137	0.9642	1.4	0.6551	0.9873	187.01
125	0	0	0.48	0.1891	0.9189	1.2	0.4137	0.972	1.37	0.6551	0.9873	293.58

Table 86: $G_1(10, 12)$: 10 niveaux, 12 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	12			19			26			33		
40	-	0.5	0.59	0.125	0.1764	0.81	0.4166	0.5483	0.85	0.7083	0.7741	0.84
44	-	0.125	0.57	0.1935	0.5625	1.25	0.4193	0.8531	2.25	0.7083	0.9678	1.96
48	-	0.1	0.49	0.1935	0.7457	1.8	0.4193	0.9235	2.12	0.7083	0.9817	2
52	-	0.075	0.54	0.1935	0.8409	1.17	0.4193	0.9487	1.35	0.7083	0.9847	1.6
56	-	0.05	0.57	0.1935	0.875	1.77	0.4193	0.9585	1.89	0.7083	0.9853	1.41
109	0	0	0.54	0.1935	0.9	1.09	0.4193	0.9655	1.3	0.7083	0.9853	1.39

Table 87: $G_2(10, 12)$: 10 niveaux, 12 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	15			21			27			33		
41	-	0.5	0.64	0.0476	0.0555	0.81	0.3333	0.3888	0.71	0.619	0.6666	0.72
45	-	0.3472	0.71	0.1199	0.7263	1.75	0.3599	0.8833	2.26	0.619	0.9586	2.44
49	-	0.2916	0.7	0.12	0.826	1.7	0.3599	0.934	2.23	0.619	0.9755	3.14
53	-	0.2386	0.69	0.1199	0.875	2.4	0.3599	0.952	2.49	0.619	0.9811	1.74
57	-	0.1931	0.63	0.1199	0.9028	2.29	0.3599	0.9609	1.58	0.619	0.9829	2.05
129	0	0	0.68	0.1199	0.931	20.56	0.3599	0.9691	1.35	0.619	0.9832	1.31

Table 88: $G_3(10, 12)$: 10 niveaux, 12 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	393			483			573			663		
753	-	0.1053	0.16	-	0.0069	0.2	0.2996	0.3262	0.24	0.6498	0.683	0.26
828	-	0.0152	0.17	0.199	0.5495	6.03	0.4181	0.7544	4.59	0.6709	0.879	0.97
903	0	0	0.17	0.199	0.5786	0.46	0.4181	0.758	0.51	0.6709	0.879	0.37
978	0	0	0.16	0.199	0.5786	0.45	0.4181	0.758	0.52	0.6709	0.879	0.36
1053	0	0	0.15	0.199	0.5786	0.5	0.4181	0.758	0.52	0.6709	0.879	0.39
1152	0	0	0.16	0.199	0.5786	0.43	0.4181	0.758	0.51	0.6709	0.879	0.37

Table 89: $G_1(90, 2)$: 90 niveaux, 2 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	291			386			481			576		
672	-	0.0874	0.14	0.1145	0.1275	0.25	0.4086	0.4551	0.23	0.7027	0.7303	0.22
739	-	0.0085	0.1	0.2132	0.5	3.09	0.4452	0.715	2.32	0.7082	0.8636	0.5
806	0	0	0.16	0.2132	0.5264	0.51	0.4452	0.7252	0.51	0.7082	0.8636	0.27
873	0	0	0.13	0.2132	0.5264	0.53	0.4452	0.7252	0.5	0.7082	0.8636	0.28
940	0	0	0.12	0.2132	0.5264	0.42	0.4452	0.7252	0.49	0.7082	0.8636	0.27
1071	0	0	0.14	0.2132	0.5264	0.42	0.4452	0.7252	0.53	0.7082	0.8636	0.28

Table 90: $G_2(90, 2)$: 90 niveaux, 2 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	341			430			519			608		
700	-	0.0992	0.17	-	0.0015	0.22	0.3117	0.3778	0.31	0.6501	0.7083	0.31
770	-	0.0037	0.17	0.2042	0.546	6.01	0.4285	0.7459	3.78	0.6876	0.8718	2.1
840	0	0	0.13	0.206	0.5543	0.57	0.4285	0.7462	0.7	0.6876	0.8718	0.42
910	0	0	0.13	0.206	0.5543	0.44	0.4285	0.7462	0.73	0.6876	0.8718	0.44
980	0	0	0.14	0.206	0.5543	0.43	0.4285	0.7462	0.56	0.6876	0.8718	0.44
1099	0	0	0.14	0.206	0.5543	0.44	0.4285	0.7462	0.71	0.6876	0.8718	0.44

Table 91: $G_3(90, 2)$: 90 niveaux, 2 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	170			233			296			359		
422	-	2.493	0.25	0.0454	0.0532	0.39	0.3636	0.426	0.39	0.6818	0.726	0.38
464	-	0.2954	0.24	0.209	0.6387	6.92	0.441	0.8178	3.68	0.7013	0.9217	0.88
506	0	0	0.21	0.2094	0.7015	0.62	0.441	0.8423	0.64	0.7013	0.9223	0.57
548	0	0	0.2	0.2094	0.706	0.51	0.441	0.8431	0.69	0.7013	0.9223	0.58
590	0	0	0.21	0.2094	0.706	0.48	0.441	0.8431	0.67	0.7013	0.9223	0.59
772	0	0	0.2	0.2094	0.706	0.54	0.441	0.8431	0.68	0.7013	0.9223	0.56

Table 92: $G_1(60, 3)$: 60 niveaux, 3 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	187			251			315			379		
443	-	2.3007	0.27	0.0634	0.0722	0.35	0.3756	0.4277	0.31	0.6878	0.7217	0.37
487	-	0.6042	0.25	0.2036	0.5692	7.14	0.4401	0.7919	3.41	0.6983	0.9176	0.7
531	-	0.0597	0.25	0.2036	0.6645	0.62	0.4401	0.8329	0.61	0.6983	0.9183	0.46
575	0	0	0.24	0.2036	0.6861	0.59	0.4401	0.8338	0.6	0.6983	0.9183	0.46
619	0	0	0.22	0.2036	0.6861	0.52	0.4401	0.8338	0.58	0.6983	0.9183	0.45
804	0	0	0.22	0.2036	0.6861	0.56	0.4401	0.8338	0.58	0.6983	0.9183	0.45

Table 93: $G_2(60, 3)$: 60 niveaux, 3 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	155			225			295			365		
436	-	4.6534	0.25	0.0276	0.0301	0.37	0.3502	0.3819	0.38	0.6728	0.7066	0.37
479	-	2.1927	0.23	0.165	0.5352	5.98	0.396	0.7932	4.54	0.6728	0.9175	0.51
522	-	0.5528	0.24	0.1807	0.6564	1.38	0.3961	0.8344	0.68	0.6728	0.9195	0.53
565	-	0.0903	0.24	0.1807	0.6761	0.62	0.3961	0.8378	0.48	0.6728	0.9195	0.72
608	0	0	0.18	0.1807	0.6761	0.62	0.3961	0.8378	0.5	0.6728	0.9195	0.51
791	0	0	0.16	0.1807	0.6761	0.63	0.3961	0.8378	0.52	0.6728	0.9195	0.5

Table 94: $G_3(60, 3)$: 60 niveaux, 3 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	76			111			146			181		
219	-	2.7259	0.56	0.0689	0.0909	0.78	0.3706	0.4886	0.79	0.6724	0.7448	0.78
240	-	1.4134	0.56	0.173	0.6489	9.27	0.4054	0.843	2.82	0.6724	0.9448	1.25
261	-	0.1666	0.51	0.1857	0.7585	1.38	0.4054	0.8931	1.24	0.6724	0.9576	1.03
282	0	0	0.49	0.1857	0.8102	0.99	0.4054	0.9106	1.02	0.6724	0.9582	0.88
303	0	0	0.46	0.1857	0.827	1	0.4054	0.9159	1.08	0.6724	0.9582	1.2
501	0	0	0.48	0.1857	0.8344	1.11	0.4054	0.9161	1.08	0.6724	0.9582	0.94

Table 95: $G_1(36, 5)$: 36 niveaux, 5 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	61			96			131			166		
202	-	3.5673	0.39	-	0.4749	0.6	0.2446	0.2771	0.73	0.617	0.6571	0.73
222	-	2.41	0.39	0.0942	0.365	3.9	0.3478	0.7688	6.82	0.6181	0.9197	1.52
242	-	1.5646	0.37	0.1325	0.5949	1.89	0.3489	0.84	1.07	0.6181	0.9432	1.12
262	-	1.063	0.38	0.1421	0.6876	1.98	0.3489	0.8711	1.14	0.6181	0.9465	1.05
282	-	0.2295	0.37	0.1527	0.7313	1.17	0.3489	0.8837	1.01	0.6181	0.9465	1.09
509	0	0	0.34	0.1535	0.7422	0.82	0.3489	0.887	0.92	0.6181	0.9465	0.94

Table 96: $G_2(36, 5)$: 36 niveaux, 5 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	75			108			141			174		
208	-	2.9335	0.53	-	0.2874	0.73	0.2637	0.2999	0.78	0.6263	0.6767	0.77
228	-	1.6842	0.51	0.124	0.549	5	0.3649	0.8435	7.69	0.631	0.948	1.72
248	-	0.9354	0.52	0.1543	0.7551	2.3	0.3655	0.8973	1.28	0.631	0.9578	1.19
268	-	0.4341	0.54	0.1595	0.8102	1.47	0.3655	0.9139	1.23	0.631	0.9578	1.19
288	-	0.1187	0.47	0.1595	0.8377	1.21	0.3655	0.9152	1.03	0.631	0.9578	1.2
440	0	0	0.46	0.1595	0.8394	1.21	0.3655	0.9152	1.2	0.631	0.9578	1.58

Table 97: $G_3(36, 5)$: 36 niveaux, 5 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	17			27			37			47		
60	-	1.2578	1.6	-	0.2499	1.97	0.1785	0.1785	1.97	0.5357	0.5357	1.93
66	-	1.0499	1.47	0.0256	0.5833	3.62	0.282	0.8636	8.96	0.5483	0.9554	7.79
72	-	1.027	1.62	0.0851	0.7636	7.66	0.2978	0.9269	6.79	0.5483	0.9766	6.44
78	-	0.4691	1.57	0.1071	0.8499	5.28	0.2978	0.9507	5.2	0.5483	0.9822	1800
84	-	0.396	1.67	0.1129	0.8898	4.7	0.2978	0.9607	4.49	0.5483	0.9841	1800
182	0	0	1.41	0.1159	0.9305	131.66	0.2978	0.9693	1800	0.5483	0.9845	1800

Table 98: $G_1(15, 12)$: 15 niveaux, 12 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	16			25			34			43		
54	-	1.3653	1.54	-	0.1666	1.92	0.2592	0.2592	2.12	0.5925	0.5925	2.16
59	-	1.2121	1.66	0.0294	0.238	2.37	0.2941	0.8202	3.78	0.5925	0.9423	4.24
64	-	0.7633	1.6	0.0731	0.6249	3.29	0.2941	0.9015	5.12	0.5925	0.9696	4.61
69	-	0.6043	1.76	0.0869	0.792	4.01	0.2941	0.9325	4.1	0.5925	0.9777	4.94
74	-	0.4819	1.7	0.1111	0.8452	4.82	0.2941	0.9473	4.52	0.5925	0.9812	4.2
181	0	0	1.5	0.1142	0.9213	119.08	0.2941	0.9671	1800	0.5925	0.9836	1800

Table 99: $G_2(15, 12)$: 15 niveaux, 12 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	17			27			37			47		
58	-	0.8125	1.47	0.0312	0.1111	1.98	0.3437	0.7115	2.16	0.6562	0.8607	2.37
63	-	0.525	1.65	0.1081	0.7599	7.18	0.3783	0.9129	5.96	0.6562	0.9714	6.44
68	-	0.3173	1.66	0.1555	0.8461	4.55	0.3783	0.944	4.85	0.6562	0.9817	5.17
73	-	0.2211	1.64	0.1555	0.8888	4.14	0.3783	0.957	4.32	0.6562	0.9855	1800
78	-	0.125	1.62	0.1555	0.9126	4.87	0.3783	0.964	4.12	0.6562	0.9867	1800
182	0	0	1.51	0.1555	0.942	130.19	0.3783	0.9728	5	0.6562	0.9869	1800

Table 100: $G_3(15, 12)$: 15 niveaux, 12 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	661			865			1069			1273		
1479	-	7.0781	0.48	0.0597	0.065	0.75	0.3721	0.4049	0.77	0.6845	0.7126	0.83
1626	0	0	0.42	0.2129	0.5741	20.8	0.4411	0.7555	8.13	0.6995	0.8775	5.45
1773	0	0	0.39	0.2129	0.577	1.93	0.4411	0.7555	1.59	0.6995	0.8775	0.82
1920	0	0	0.36	0.2129	0.577	1.6	0.4411	0.7555	1.61	0.6995	0.8775	0.88
2067	0	0	0.42	0.2129	0.577	1.56	0.4411	0.7555	1.65	0.6995	0.8775	0.9
2148	0	0	0.41	0.2129	0.577	1.57	0.4411	0.7555	1.68	0.6995	0.8775	0.9

Table 101: $G_1(180, 2)$: 180 niveaux, 2 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	649			843			1037			1231		
1427	-	4.3125	0.45	0.1322	0.1483	0.8	0.4205	0.4716	0.88	0.7087	0.7395	0.81
1569	0	0	0.37	0.2243	0.5454	12.78	0.4614	0.7441	5.98	0.7213	0.8724	2.4
1711	0	0	0.42	0.2243	0.5486	1.75	0.4614	0.7445	0.88	0.7213	0.8724	0.76
1853	0	0	0.39	0.2243	0.5486	1.72	0.4614	0.7445	0.93	0.7213	0.8724	0.84
1995	0	0	0.41	0.2243	0.5486	1.43	0.4614	0.7445	0.83	0.7213	0.8724	0.83
2144	0	0	0.38	0.2243	0.5486	1.37	0.4614	0.7445	0.86	0.7213	0.8724	0.82

Table 102: $G_2(180, 2)$: 180 niveaux, 2 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	673			870			1067			1264		
1462	-	5.7695	0.51	0.0961	0.1097	0.79	0.3969	0.4529	0.92	0.6977	0.732	0.76
1608	0	0	0.47	0.2161	0.5717	14.25	0.4544	0.753	7.02	0.7142	0.877	4.9
1754	0	0	0.4	0.2161	0.5727	1.46	0.4544	0.753	1.56	0.7142	0.877	0.83
1900	0	0	0.44	0.2161	0.5727	1.4	0.4544	0.753	1.59	0.7142	0.877	0.91
2046	0	0	0.42	0.2161	0.5727	1.75	0.4544	0.753	1.53	0.7142	0.877	0.86
2152	0	0	0.43	0.2161	0.5727	1.82	0.4544	0.753	1.55	0.7142	0.877	0.79

Table 103: $G_3(180, 2)$: 180 niveaux, 2 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	284			408			532			656		
782	-	6.5	0.79	0.0079	0.0087	1.25	0.3368	0.3691	1.2	0.6657	0.6985	1.22
860	-	2.0416	0.79	0.1921	0.5885	14.04	0.4263	0.8119	14	0.6874	0.9225	4.3
938	-	0.1406	0.77	0.1933	0.7027	2.49	0.4263	0.8443	2.12	0.6875	0.9231	1.75
1016	0	0	0.73	0.1933	0.7133	2.02	0.4263	0.8448	2.05	0.6875	0.9231	1.42
1094	0	0	0.58	0.1933	0.7133	1.84	0.4263	0.8448	1.99	0.6875	0.9231	1.52
1387	0	0	0.53	0.1933	0.7133	2.04	0.4263	0.8448	1.99	0.6875	0.9231	1.56

Table 104: $G_1(120, 3)$: 120 niveaux, 3 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	297			406			515			624		
734	-	5.375	0.83	0.0267	0.0294	1.09	0.3501	0.3856	1.09	0.6735	0.7112	1.11
807	-	1.284	0.78	0.1971	0.5327	22.51	0.4279	0.7791	11.54	0.6875	0.9105	2.4
880	-	0.0062	0.76	0.1976	0.6381	1.83	0.4279	0.8182	1.82	0.6875	0.9133	1.5
953	0	0	0.72	0.1976	0.6625	1.74	0.4279	0.8222	1.81	0.6875	0.9133	1.51
1026	0	0	0.66	0.1976	0.6625	1.73	0.4279	0.8222	1.82	0.6875	0.9133	1.43
1472	0	0	0.65	0.1976	0.6625	1.74	0.4279	0.8222	1.8	0.6875	0.9133	1.55

Table 105: $G_2(120, 3)$: 120 niveaux, 3 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	289			416			543			670		
797	-	6.0625	0.81	-	0.011	1.1	0.328	0.4012	1.42	0.664	0.7274	1.32
876	-	1.2142	0.76	0.2027	0.5982	12.57	0.4313	0.8142	13.26	0.6945	0.9235	8.49
955	0	0	0.67	0.205	0.6993	3.46	0.4313	0.8443	1.9	0.6945	0.9239	1.53
1034	0	0	0.64	0.205	0.7122	1.82	0.4313	0.8447	2.05	0.6945	0.9239	1.47
1113	0	0	0.67	0.205	0.7122	1.86	0.4313	0.8447	2.12	0.6945	0.9239	1.78
1450	0	0	0.64	0.205	0.7122	1.8	0.4313	0.8447	2.1	0.6945	0.9239	1.78

Table 106: $G_3(120, 3)$: 120 niveaux, 3 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	113			173			233			293		
354	-	4.2109	1.77	0.0216	0.0272	2.67	0.3459	0.4353	2.63	0.6702	0.7342	2.68
389	-	2.1224	1.7	0.1562	0.6258	18.09	0.392	0.8356	21.4	0.6735	0.9461	4.17
424	-	1.1111	1.67	0.1696	0.7532	8.5	0.392	0.8901	3.65	0.6735	0.9579	3.55
459	-	0.4402	1.51	0.1696	0.8091	3.36	0.392	0.9087	3.45	0.6735	0.9581	3.34
494	0	0	1.55	0.1696	0.8311	3.24	0.392	0.9139	3.14	0.6735	0.9581	3.29
867	0	0	1.39	0.1696	0.8333	3.02	0.392	0.9139	3.07	0.6735	0.9581	3.2

Table 107: $G_1(72, 5)$: 72 niveaux, 5 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	120			192			264			336		
411	-	5.5625	1.52	-	0.2	2.37	0.2758	0.4552	2.83	0.6305	0.7557	2.68
452	-	3.034	1.48	0.1535	0.6298	16.47	0.3918	0.8453	31.24	0.6572	0.944	6.67
493	-	0.9218	1.41	0.1758	0.7518	10.45	0.3918	0.8874	3.91	0.6572	0.9549	3.89
534	-	0.0499	1.31	0.1797	0.7907	4.36	0.3918	0.9034	4.74	0.6572	0.9556	3.57
575	0	0	1.27	0.1797	0.8112	2.89	0.3918	0.9084	3.46	0.6572	0.9556	3.17
942	0	0	1.22	0.1797	0.8155	2.64	0.3918	0.9085	3.44	0.6572	0.9556	3.42

Table 108: $G_2(72, 5)$: 72 niveaux, 5 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	125			184			243			302		
361	-	4.1379	1.8	-	0.0535	2.58	0.3218	0.366	2.68	0.6609	0.7085	2.4
397	-	2.375	1.64	0.1463	0.558	21.62	0.3955	0.825	20.17	0.6733	0.9435	5.53
433	-	1.238	1.58	0.1616	0.7045	8.73	0.3955	0.8829	4.69	0.6733	0.9566	3.52
469	-	0.5312	1.61	0.1634	0.7776	3.67	0.3955	0.9035	3.83	0.6733	0.9573	3.27
505	-	0.2285	1.64	0.1634	0.8088	3.26	0.3955	0.9107	3.37	0.6733	0.9573	3.1
885	0	0	1.55	0.1634	0.8132	2.99	0.3955	0.9112	3.24	0.6733	0.9573	3.27

Table 109: $G_3(72, 5)$: 72 niveaux, 5 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	33			53			73			93		
114	-	1.3928	8.28	0.0615	0.0909	9.5	0.3692	0.525	9.37	0.6769	0.764	10.6
125	-	1.0859	8.42	0.1234	0.6726	59.62	0.3768	0.9005	40.39	0.6769	0.9725	32.13
136	-	0.8877	9.04	0.1333	0.8256	28.59	0.3768	0.9436	34.86	0.6769	0.9831	19.11
147	-	0.5962	8.96	0.1401	0.8834	30.22	0.3768	0.9585	23.71	0.6769	0.9866	1800
158	-	0.4624	8.5	0.1401	0.9081	17.4	0.3768	0.966	19.05	0.6769	0.9877	1800
365	0	0	8.2	0.1401	0.9442	1800	0.3768	0.9748	1800	0.6769	0.9878	1800

Table 110: $G_1(30, 12)$: 30 niveaux, 12 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	34			55			76			97		
118	-	1.4374	7.68	-	0.0277	9.49	0.3114	0.3454	10.93	0.6557	0.6956	10.26
129	-	0.7843	10.04	0.1647	0.7912	66.12	0.4117	0.9231	91.56	0.6805	0.9778	39.68
140	-	0.4462	9.32	0.18	0.8749	36.01	0.4117	0.9521	32.92	0.6805	0.9853	1800
151	-	0.2644	8.98	0.1799	0.905	16.16	0.4117	0.963	19.59	0.6805	0.9878	1800
162	-	0.1735	9.02	0.1799	0.9209	16.64	0.4117	0.9686	18.54	0.6805	0.9885	1800
384	0	0	8.24	0.1799	0.9432	14.64	0.4117	0.9746	16.57	0.6805	0.9885	1800

Table 111: $G_2(30, 12)$: 30 niveaux, 12 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	35			57			79			101		
125	-	1.2037	7.07	-	0.0249	10.24	0.3134	0.323	9.92	0.6417	0.6521	9.46
137	-	0.8888	7.9	0.1428	0.7105	62.35	0.3846	0.8886	84.86	0.6486	0.9623	30.02
149	-	0.7216	8.43	0.153	0.8102	17.84	0.3846	0.9245	16.6	0.6486	0.9765	19.36
161	-	0.5625	8.26	0.153	0.8473	23.14	0.3846	0.9422	17.7	0.6486	0.9818	16.32
173	-	0.4017	7.98	0.153	0.8713	21.46	0.3846	0.9529	15.96	0.6486	0.9839	18.31
389	0	0	7.76	0.153	0.9052	11.78	0.3846	0.9656	12.89	0.6486	0.9844	16.87

Table 112: $G_3(30, 12)$: 30 niveaux, 12 sommets par niveau

Annexe 3 : le critère de la bw -déviation dans le modèle par scénarios

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			33			66			99		
321	0	3	0.67	0	4	0.68	0	7	2.14	4	14	3
353	0	6	0.7	2	8	1.4	5	11	3.36	12	17	5.53
385	1	8	0.86	2	10	1.17	5	13	2.87	13	18	7.97
417	1	10	0.98	2	12	1.47	5	15	6.33	13	18	4.13
449	1	11	1.14	2	13	1.52	5	15	7.22	13	18	3.27
494	1	12	0.99	2	14	1.33	5	16	2.87	13	19	6.89

Table 113: $G_1(30, 2)$: 30 niveaux, 2 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			33			66			99		
321	0	3	0.76	0	4	0.89	0	7	6.17	4	13	6.46
353	0	7	0.81	2	8	1.19	5	11	2.52	12	16	19.01
385	1	9	0.77	2	11	1.39	5	13	8.94	13	17	9.91
417	1	10	0.87	2	12	1.33	6	15	9.64	13	18	3.82
449	1	11	1.03	2	13	0.96	6	15	5.59	13	18	3.76
483	1	12	1.08	2	14	1.23	6	16	3.11	13	18	5.9

Table 114: $G_2(30, 2)$: 30 niveaux, 2 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			31			62			93		
319	0	3	0.92	0	4	1.13	0	6	6.4	2	11	7.35
350	0	6	0.91	2	8	1.1	5	11	2.91	11	15	12.58
381	1	8	0.81	2	10	1.6	6	13	3.23	12	17	10.22
412	1	10	0.81	2	12	1.32	6	14	2.82	12	17	5.66
443	1	11	0.75	2	13	1.24	6	15	5.92	12	18	16.69
474	1	12	0.99	2	14	1.18	6	16	3.08	12	18	7.02

Table 115: $G_3(30, 2)$: 30 niveaux, 2 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			29			58			87		
218	0	3	1.08	0	4	1.29	0	6	11.53	4	12	9.98
239	0	5	1.48	1	7	1.99	4	10	9.36	9	15	101.49
260	1	7	1.26	2	9	1.83	5	12	4.51	12	16	47.32
281	1	9	1.21	2	10	1.8	5	13	5.1	12	17	6.07
302	1	10	1.04	3	12	1.63	5	14	11.21	12	17	8.02
368	1	12	1.41	3	14	2.2	5	16	6.49	12	18	11.61

Table 116: $G_1(20, 3)$: 20 niveaux, 3 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			29			58			87		
212	0	3	1.09	0	4	2.3	0	7	16.32	4	12	17.07
233	0	6	1.05	2	8	1.92	4	10	6.04	10	15	67.6
254	1	8	1.22	2	9	1.63	5	12	5.91	12	16	35.3
275	1	9	0.95	2	11	1.53	5	13	5.6	12	17	12.18
296	1	10	1.03	2	12	1.62	5	14	7.79	12	17	16.92
368	1	13	1.17	2	14	2.07	5	16	8.43	12	18	17.81

Table 117: $G_2(20, 3)$: 20 niveaux, 3 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			29			58			87		
211	0	3	1.17	0	4	2.18	0	7	73.87	6	13	14.27
232	0	6	1.41	2	7	1.79	4	10	6.19	11	15	22.44
253	1	7	1.04	2	9	1.5	5	12	5.18	11	16	49.35
274	1	9	1.15	2	11	1.7	6	13	8.17	11	17	193.18
295	1	10	1.07	2	12	1.57	6	14	3.89	11	17	77.98
372	1	13	1.64	2	14	1.8	6	16	6.04	11	18	105.73

Table 118: $G_3(20, 3)$: 20 niveaux, 3 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			23			46			69		
132	0	3	1.82	0	4	2.22	0	7	14.01	3	12	16.41
145	0	5	1.72	1	7	3.83	3	10	11.82	10	15	35.45
158	1	7	1.76	2	9	3.29	5	11	8.41	10	16	109.49
171	1	8	1.61	2	10	2.88	5	13	7.32	11	17	175.97
184	1	9	1.87	2	11	4.52	5	14	7.84	11	17	57.77
246	1	12	3.5	2	14	3.63	5	16	13.59	11	18	85.99

Table 119: $G_1(12, 5)$: 12 niveaux, 5 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			22			44			66		
130	0	3	1.88	0	4	2.83	0	7	23.11	5	13	13.81
143	0	5	1.76	1	7	4.14	3	10	42.13	9	15	149.73
156	1	7	1.45	2	9	3.01	4	12	13.25	11	16	52.37
169	1	8	1.68	2	10	3.12	5	13	8.02	11	17	90.36
182	1	9	2.26	2	11	3.72	5	14	10.36	11	17	108.41
243	1	12	3.21	2	14	3.39	5	16	14.87	11	18	160.51

Table 120: $G_2(12, 5)$: 12 niveaux, 5 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			23			46			69		
131	0	3	2.09	0	4	4.3	0	6	29.82	2	13	33.13
144	0	5	2.16	1	7	3.41	4	9	38.66	9	15	441.49
157	1	7	2.1	2	8	3.04	5	11	21.35	11	16	169.6
170	1	8	1.98	2	10	2.81	5	13	27.75	11	17	323.68
183	1	9	1.82	2	11	3.68	5	14	14.2	12	17	162.27
240	1	12	2.77	2	14	3.81	5	16	19.6	12	18	119.5

Table 121: $G_3(12, 5)$: 12 niveaux, 5 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			12			24			36		
66	0	5	3.69	0	7	18.94	2	10	48.04	6	16	62.91
72	0	7	5.26	1	8	9.65	3	12	209.67	11	17	30.65
78	0	8	3.05	2	10	7.17	6	13	33.77	11	17	99.95
84	1	9	3.48	3	11	7.03	6	14	58.12	11	18	322.93
90	1	10	3.88	3	12	7.46	6	14	29.72	11	18	469.9
117	1	12	9.44	3	14	8.2	6	16	40.54	12	19	403.69

Table 122: $G_1(5, 12)$: 5 niveaux, 12 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			13			26			39		
63	0	4	4.5	0	6	7.81	2	9	22.51	6	18	12.54
69	0	6	4.28	1	8	15.68	4	11	53.06	10	18	50.97
75	0	7	3.62	2	9	8.98	5	13	57.97	12	19	96.88
81	1	8	5.66	3	11	6.68	7	14	17.4	12	19	277.03
87	1	9	4.73	3	11	12.96	7	14	68.43	13	19	124.72
118	1	12	18.13	3	14	18.16	7	16	42.34	13	19	1797.69

Table 123: $G_2(5, 12)$: 5 niveaux, 12 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			13			26			39		
66	0	5	9.85	0	6	26.08	2	10	127.43	3	17	35.92
72	0	6	7.75	1	8	16.99	5	12	76.5	11	18	109.63
78	1	8	5.53	2	10	10.19	6	13	71.95	12	18	114.41
84	1	9	7.03	3	11	8.91	6	14	42.11	12	19	280.8
90	1	9	4.57	3	11	8.66	7	14	61.31	12	19	511.33
119	1	12	9.06	3	14	10.75	7	16	38.4	12	19	1799.82

Table 124: $G_3(5, 12)$: 5 niveaux, 12 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			57			114			171		
616	0	1	1.31	0	2	1.47	0	4	32.55	0	8	275.99
677	0	5	1.65	2	7	2.34	4	9	3.82	10	14	120.19
738	1	8	1.72	2	10	2.51	5	12	15.64	11	16	28.26
799	1	10	2.01	2	11	2.22	5	14	11.39	11	17	28.14
860	1	11	1.79	2	12	2.53	5	15	11.67	11	17	11.5
973	1	13	2.17	2	14	2.48	5	16	16.66	11	18	13.93

Table 125: $G_1(60, 2)$: 60 niveaux, 2 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			57			114			171		
602	0	1	1.34	0	2	1.56	0	3	9.83	1	8	94.17
662	0	5	1.44	2	7	2.87	4	9	20.65	10	14	40.41
722	1	8	1.72	2	9	2.15	5	12	4.95	11	15	60.33
782	1	9	1.92	2	11	2.31	5	13	4.17	11	16	23.57
842	1	11	1.91	2	12	2.64	5	14	21.04	11	17	30.89
946	1	12	2.09	2	14	2.81	5	15	19.8	11	18	15.6

Table 126: $G_2(60, 2)$: 60 niveaux, 2 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			56			112			168		
602	0	1	1.24	0	2	1.24	0	3	6.93	1	7	114.69
662	0	5	1.75	1	7	2.52	4	9	14.45	9	14	62.92
722	1	8	1.72	2	9	1.89	4	12	12.51	10	16	47.46
782	1	9	1.94	2	11	2.26	4	13	6.07	10	16	59.95
842	1	11	2.18	2	12	2.64	4	14	17.16	10	17	22.49
955	1	12	2.12	2	14	2.87	4	16	10.43	10	18	26.23

Table 127: $G_3(60, 2)$: 60 niveaux, 2 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			54			108			162		
404	0	1	2.28	0	2	2.67	0	3	7.94	0	6	1800
444	0	4	2.97	1	6	4.98	3	8	18.28	7	12	1800
484	1	6	3.2	2	8	4.65	4	10	17.36	9	14	977.1
524	1	8	2.85	2	10	4.18	4	12	11.7	9	16	582.22
564	1	9	3.35	2	11	4.64	4	13	14.14	9	16	744.36
710	1	12	3.9	2	13	5.84	4	15	15.35	9	18	255.28

Table 128: $G_1(40, 3)$: 40 niveaux, 3 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			53			106			159		
386	0	1	2.8	0	2	2.73	0	3	18.99	1	7	194.81
424	0	4	3.02	1	6	4.51	3	8	19.88	8	13	1630.17
462	1	6	3.06	2	8	3.86	4	10	18.52	10	15	389.29
500	1	8	3.34	2	9	4.21	4	12	26.3	10	16	83.29
538	1	9	3.38	2	11	4.37	4	13	10.83	10	16	140.43
710	1	12	3.96	2	14	4.87	4	16	16.79	10	18	198.8

Table 129: $G_2(40, 3)$: 40 niveaux, 3 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			53			106			159		
395	0	1	2.32	0	2	3.11	0	3	203.31	1	8	1800
434	0	4	2.84	1	5	5.05	3	8	29.44	8	13	916.24
473	1	6	2.96	2	8	4.31	4	10	10.24	9	14	337.59
512	1	8	3.21	2	9	4.34	4	12	11.06	9	16	131.92
551	1	9	3.41	2	11	4.59	4	13	14.15	9	16	491.66
709	1	12	4.32	2	14	5.76	4	15	15.45	9	18	721.1

Table 130: $G_3(40, 3)$: 40 niveaux, 3 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			42			84			126		
240	0	2	4.85	0	2	7.19	0	4	1798.12	1	8	1800
264	0	4	5.35	1	5	13.4	3	8	314.2	8	13	1800
288	1	6	6.91	2	7	13.88	4	10	36.44	10	15	712.67
312	1	7	5.71	2	9	7.69	4	12	57.41	10	16	224.53
336	1	8	4.89	2	10	8.36	4	13	30.31	10	16	175.3
461	1	12	6.67	2	13	9.99	4	15	56.08	10	18	277.58

Table 131: $G_1(24, 5)$: 24 niveaux, 5 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			40			80			120		
236	0	2	5.04	0	2	7.86	0	4	97.5	1	9	1800
259	0	4	5.41	1	5	13.09	2	7	1579.81	5	13	1800
282	0	6	4.94	1	7	16.49	4	10	124.5	9	14	1800
305	1	7	4.83	2	9	7.64	4	11	51.14	10	15	1096.22
328	1	8	5.08	2	10	8.04	4	12	69.55	10	16	217.87
465	1	12	10.43	2	14	8.27	4	15	51.93	10	18	910.29

Table 132: $G_2(24, 5)$: 24 niveaux, 5 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			41			82			123		
238	0	2	4.6	0	2	5.7	0	4	1800	1	8	1800
261	0	4	5.24	1	5	31.23	3	7	45.48	7	12	1800
284	0	5	4.72	2	7	12.05	4	9	143.21	9	14	1800
307	1	7	4.65	2	8	7.8	4	11	29.2	10	15	1386.85
330	1	8	5.43	2	10	11.4	4	12	84.46	10	16	271.06
473	1	12	9.76	2	14	12.65	4	15	116.69	10	18	249.56

Table 133: $G_3(24, 5)$: 24 niveaux, 5 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			21			42			63		
107	0	3	26.86	0	4	67.9	0	6	1800	3	11	1800
117	0	5	32.38	1	6	65.96	1	8	1800	7	14	1800
127	0	6	15.52	2	8	41.07	4	10	175.2	9	15	1800
137	1	7	19.14	2	9	42.52	5	11	712.28	9	16	1800
147	1	8	11.7	2	10	33.75	5	12	154.13	9	16	1800
214	1	12	16.95	2	14	48.35	5	15	556.86	9	18	1800

Table 134: $G_1(10, 12)$: 10 niveaux, 12 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			21			42			63		
105	0	3	21.89	0	4	66.97	0	7	1800	0	12	1800
115	0	5	112.63	1	6	42.15	3	9	1133.5	8	15	1800
125	0	6	17.25	2	8	38.58	4	11	503.09	9	16	1800
135	1	7	14.27	2	9	211.98	5	12	317.22	9	16	1800
145	1	8	23.11	2	10	42.64	5	13	418.86	10	17	1800
218	1	12	17.02	2	14	49.37	5	16	208.59	10	18	1800

Table 135: $G_2(10, 12)$: 10 niveaux, 12 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			21			42			63		
108	0	3	24.65	0	4	134.98	0	6	1800	2	11	1800
118	0	5	16.51	1	6	45.24	3	8	1222.74	7	13	1800
128	0	6	13.96	2	7	34.69	4	10	1178.53	8	15	1800
138	1	7	17.59	2	9	33.98	4	11	208.84	8	16	1800
148	1	8	17.06	2	10	32.31	5	12	153.84	10	16	1794.41
216	1	12	18.27	2	13	63.6	5	15	194.26	10	18	1800

Table 136: $G_3(10, 12)$: 10 niveaux, 12 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			82			164			246		
908	0	1	0.58	0	1	3.02	0	2	3.59	0	5	1800
998	0	5	2.77	1	6	4.31	3	8	17.62	7	13	1800
1088	1	7	2.71	2	9	4	3	11	10.45	8	15	1800
1178	1	9	3.5	2	11	4.42	3	13	34.59	9	16	392.84
1268	1	11	3.56	2	12	4.3	3	14	37.33	9	17	206.11
1409	1	12	3.93	2	13	4.7	3	15	40.37	9	17	388.07

Table 137: $G_1(90, 2)$: 90 niveaux, 2 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			83			166			249		
886	0	1	1.16	0	1	2.91	0	2	19.46	0	5	1800
974	0	5	3.01	1	6	4.77	3	8	19.34	9	13	531.27
1062	1	7	3.06	1	9	3.91	4	11	8.58	9	15	542.79
1150	1	9	3.23	2	11	4.33	4	13	22.51	9	16	629.35
1238	1	10	3.47	2	12	4.51	4	14	28.19	9	17	713.35
1403	1	12	4.36	2	14	4.97	4	15	34.39	9	17	765.37

Table 138: $G_2(90, 2)$: 90 niveaux, 2 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			84			168			252		
888	0	1	0.24	0	1	2.83	0	2	17.81	1	6	1800
976	0	5	2.53	1	6	4.29	4	8	84.47	9	13	1399.54
1064	1	7	3.03	2	9	4.42	4	11	17.92	10	15	71.7
1152	1	9	2.97	2	11	4.59	4	13	31.97	10	16	89.17
1240	1	10	3.96	2	12	4.87	4	14	30.56	10	17	120.62
1418	1	12	3.68	2	14	5.23	4	15	29.78	10	18	161.09

Table 139: $G_3(90, 2)$: 90 niveaux, 2 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			78			156			234		
589	0	1	5.01	0	1	5.41	0	2	10.87	0	5	1800
647	0	4	5.37	1	5	8.67	3	7	44.5	6	11	1800
705	1	6	5.43	2	7	8.54	4	10	14.62	9	14	1671.46
763	1	8	5.95	2	9	8.61	4	11	37.15	9	15	223.64
821	1	9	6.55	2	10	8.5	4	13	19.04	9	16	331.15
1054	1	12	9.6	2	13	9.96	4	15	51.09	9	17	542.7

Table 140: $G_1(60, 3)$: 60 niveaux, 3 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			76			152			228		
571	0	1	3.55	0	1	4.23	0	2	6.99	0	5	1800
628	0	4	4.33	1	5	6.51	2	7	1800	5	11	1800
685	1	6	4.15	1	7	8.11	3	10	17.42	7	14	1800
742	1	8	4.95	1	9	6.81	3	11	19.72	8	15	616.97
799	1	9	5.16	1	10	7.31	3	13	19.44	8	16	632.12
1040	1	12	8.5	1	14	7.7	3	15	66.17	8	17	774.36

Table 141: $G_2(60, 3)$: 60 niveaux, 3 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			79			158			237		
583	0	1	0.42	0	1	3.86	0	2	10.1	0	5	1800
641	0	4	4.16	1	5	8	3	7	88.37	6	11	1800
699	1	6	4.44	1	7	7.96	4	9	54.55	8	14	1800
757	1	7	4.22	1	9	8.2	4	11	18.89	9	15	1800
815	1	9	5.37	1	10	7.71	4	12	23.73	10	16	619.66
1046	1	12	7.04	1	13	6.69	4	15	26.17	10	17	509.83

Table 142: $G_3(60, 3)$: 60 niveaux, 3 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			60			120			180		
346	0	1	11.79	0	2	18.47	0	3	1800	1	6	1800
380	0	4	11.54	1	5	18.99	3	7	87.06	6	12	1800
414	0	5	12.18	1	7	39.9	4	9	141.89	7	14	1800
448	1	7	12.4	2	8	21.34	4	11	62.66	8	15	1800
482	1	8	14.5	2	10	19.84	4	12	88.34	8	16	1800
686	1	12	23.86	2	14	21.86	4	15	231.39	8	18	1800

Table 143: $G_1(36, 5)$: 36 niveaux, 5 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			58			116			174		
342	0	1	10.23	0	2	11.67	0	3	1197.63	0	6	1800
376	0	4	10.63	1	5	153.12	2	7	1800	5	11	1800
410	0	5	9.56	1	7	86.97	3	9	86.64	7	13	1800
444	1	7	10.71	2	8	22.19	3	11	111.22	8	15	1800
478	1	8	12.67	2	9	21.61	4	12	185.42	8	15	1800
691	1	12	18.9	2	14	24.2	4	15	189.6	8	18	1800

Table 144: $G_2(36, 5)$: 36 niveaux, 5 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			59			118			177		
342	0	1	5.31	0	1	11.02	0	2	59.91	0	4	1800
376	0	3	10.16	1	4	25.23	2	6	943.23	5	10	1800
410	0	5	12.1	1	6	25.88	3	8	89.62	6	13	1800
444	1	6	13.85	2	8	27.8	4	10	85.53	8	14	1800
478	1	8	13.17	2	9	23.45	4	11	51.69	8	15	1800
684	1	12	21.52	2	13	35.15	4	15	66.43	8	17	1800

Table 145: $G_3(36, 5)$: 36 niveaux, 5 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			30			60			90		
144	0	2	40.03	0	3	46.71	0	5	1800	1	10	1800
158	0	4	36.51	1	5	206.01	3	8	321.33	7	13	1800
172	0	5	29.45	1	7	106.61	3	10	1295.92	10	15	1800
186	1	7	25.72	2	8	53.39	4	11	1005.17	10	16	1800
200	1	8	28.59	2	9	64.61	4	12	876.94	10	16	1800
315	1	12	33.64	2	14	82.33	4	16	696.28	10	18	1800

Table 146: $G_1(15, 12)$: 15 niveaux, 12 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			29			58			87		
144	0	2	35.48	0	3	54.96	0	4	1764.98	1	9	1800
158	0	4	39.46	1	5	216.17	2	7	1800	5	12	1800
172	0	5	27.63	1	7	92.88	3	9	926.58	7	14	1800
186	1	7	19.93	2	8	45.39	4	11	343.59	8	15	1800
200	1	8	23.17	2	9	81.14	4	12	823.15	9	16	1800
314	1	12	32.77	2	14	73.19	5	16	427.7	10	18	1800

Table 147: $G_2(15, 12)$: 15 niveaux, 12 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			31			62			93		
153	0	3	31.24	0	4	1799.42	0	6	1800	3	11	1800
168	0	4	23.61	1	6	132.59	2	8	1800	8	14	1800
183	0	6	20.95	2	7	57.3	4	10	878.41	8	15	1800
198	1	7	22.18	2	9	60.26	4	11	1800	9	16	1800
213	1	8	23.35	2	10	60.73	5	12	392.13	9	17	1800
315	1	12	23.42	2	14	139.3	5	16	1787.63	9	18	1800

Table 148: $G_3(15, 12)$: 15 niveaux, 12 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			161			322			483		
1773	0	0	0.42	0	0	0.34	0	0	0.35	0	2	1800
1950	0	4	8.68	1	6	13.95	3	7	18.8	7	11	1800
2127	1	7	8.63	1	8	13.81	3	11	123.37	7	14	1800
2304	1	9	10.88	1	10	14.1	3	12	110.37	7	15	1800
2481	1	10	10.05	1	12	15.89	3	14	113.06	7	16	1800
2778	1	12	10	1	13	14.91	3	15	116.48	7	17	1800

Table 149: $G_1(180, 2)$: 180 niveaux, 2 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			160			320			480		
1745	0	0	0.34	0	0	0.35	0	1	5.18	0	2	1800
1919	0	4	7.05	1	6	12.49	3	8	31.87	7	12	873.71
2093	1	7	6.43	1	9	10.92	3	11	91.03	7	14	1800
2267	1	9	8.12	1	10	12.68	3	13	106.2	7	16	1800
2441	1	10	8.84	1	12	12.05	3	14	107.2	7	16	1800
2808	1	12	11.23	1	14	14.44	3	15	99.03	7	17	1800

Table 150: $G_2(180, 2)$: 180 niveaux, 2 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			160			320			480		
1760	0	0	0.39	0	0	0.4	0	0	0.38	0	2	1800
1936	0	4	6.81	1	5	11.24	3	7	17.64	7	11	1800
2112	1	7	7.14	1	8	12.58	3	11	90.24	7	14	1800
2288	1	9	9.01	1	10	11.73	3	12	108.54	7	15	1800
2464	1	10	9.54	1	12	14.07	3	14	125.23	7	16	1800
2776	1	12	11.66	1	13	13.36	3	15	106.32	7	17	1800

Table 151: $G_3(180, 2)$: 180 niveaux, 2 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			151			302			453		
1135	0	0	0.65	0	0	0.66	0	1	2.19	0	2	1800
1248	0	3	18.19	1	4	32.16	2	6	63.78	5	10	1800
1361	1	5	18.5	1	7	34.19	3	9	149.09	7	13	1800
1474	1	7	16.39	1	9	29.38	3	11	200.21	7	14	1800
1587	1	8	19.18	1	10	34.51	3	12	236	7	15	1800
2067	1	12	44.13	1	13	39.99	3	15	232.47	7	17	1800

Table 152: $G_1(120, 3)$: 120 niveaux, 3 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			151			302			453		
1121	0	0	0.71	0	0	0.77	0	1	8.88	0	2	1800
1233	0	3	17.33	1	4	26.31	2	6	1800	6	10	1800
1345	1	6	17.9	1	7	38.97	3	9	59.9	7	13	1800
1457	1	7	17.49	1	9	31.71	3	11	161.39	7	14	1800
1569	1	9	20.89	1	10	47.28	3	12	189.87	7	15	1800
2056	1	12	30.21	1	13	31.51	3	15	216.83	7	17	1800

Table 153: $G_2(120, 3)$: 120 niveaux, 3 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			152			304			456		
1131	0	0	0.74	0	0	0.62	0	1	1.24	0	2	1800
1244	0	3	15.51	1	4	25.62	2	6	1800	6	10	1800
1357	1	5	14.64	1	7	28.88	3	9	217.15	7	13	1800
1470	1	7	17.83	1	9	30.97	3	11	220.72	8	14	1354.04
1583	1	8	20.26	1	10	47.83	3	12	254.45	8	15	1800
2069	1	12	34.76	1	13	62.6	3	15	283.21	8	17	1800

Table 154: $G_3(120, 3)$: 120 niveaux, 3 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			112			224			336		
652	0	0	1.17	0	1	2.31	0	1	26.16	0	3	1800
717	0	3	26.38	1	4	490.62	2	6	553.58	5	9	1800
782	0	5	41.8	1	6	72.59	3	8	264.97	7	12	1800
847	1	6	45.83	1	8	67.07	3	10	231.38	7	14	1800
912	1	7	45.5	1	9	81.24	3	11	267.6	7	15	1800
1349	1	12	79.78	1	13	78.16	3	15	341.44	7	17	1800

Table 155: $G_1(72, 5)$: 72 niveaux, 5 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			110			220			330		
654	0	0	1.08	0	1	24.51	0	1	36.62	0	4	1800
719	0	3	37.5	1	4	72.38	2	6	733.21	4	9	1800
784	0	5	40.71	1	6	83.83	3	8	844.03	6	12	1800
849	1	6	48.9	1	8	78.19	3	10	330.36	7	14	1800
914	1	8	44.31	1	9	70.54	3	11	1225.61	7	15	1800
1359	1	12	78.34	1	14	79.26	3	15	361.13	7	17	1800

Table 156: $G_2(72, 5)$: 72 niveaux, 5 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			113			226			339		
658	0	0	0.96	0	1	9.48	0	1	35.44	0	3	1800
723	0	3	31.21	1	4	168	1	5	1800	4	9	1800
788	0	5	40.22	1	6	71.19	3	8	434.42	6	12	1800
853	1	6	54.66	1	8	78.8	3	10	288.26	6	13	1800
918	1	7	48.17	1	9	107.32	3	11	324.93	6	15	1800
1358	1	12	65.32	1	13	70.7	3	15	363.81	7	17	1800

Table 157: $G_3(72, 5)$: 72 niveaux, 5 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			56			112			168		
272	0	1	77.62	0	2	99.61	0	3	1800	0	7	1800
299	0	3	115.81	1	5	621.5	1	7	1800	4	11	1800
326	0	5	103.12	2	6	355.36	3	9	1800	5	13	1800
353	1	6	107.02	2	8	197.11	4	10	1800	6	14	1800
380	1	7	102.51	2	9	239.91	4	11	1800	7	15	1800
608	1	12	107.01	2	14	282.57	4	15	1800	8	18	1800

Table 158: $G_1(30, 12)$: 30 niveaux, 12 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			56			112			168		
272	0	1	130.32	0	2	203.37	0	3	1800	0	7	1800
299	0	3	98.19	1	5	217.96	2	7	1800	4	11	1800
326	0	5	110.36	1	6	1261.79	3	9	1800	6	13	1800
353	1	6	84.81	2	8	180.04	4	10	1800	6	15	1800
380	1	7	89.6	2	9	262.98	4	11	1800	7	15	1800
610	1	12	115.87	2	14	291.49	4	16	1800	7	18	1800

Table 159: $G_2(30, 12)$: 30 niveaux, 12 sommets par niveau

$Val(w) \backslash Val(b)$	0			56			112			168		
272	0	1	60.43	0	2	83.33	0	3	1796.28	0	6	1800
299	0	3	81	0	4	1800	2	6	1793.43	5	11	1795.19
326	0	5	71.01	2	6	1213.86	3	8	1790.73	5	13	1796.12
353	1	6	72.75	2	8	182.5	4	10	1793.03	7	14	1796
380	1	7	81.45	2	9	233.64	4	11	1795.41	8	15	1796.24
612	1	12	89.55	2	14	302.6	4	15	1795.66	8	18	1795.68

Table 160: $G_3(30, 12)$: 30 niveaux, 12 sommets par niveau