MajecSTIC 2009
Avignon, France, du 16 au 18 novembre 2009

Modélisation de la segmentation du *Klavierstueck III* de Stockhausen.

Yun-Kang Ahn[1], Carlos Agon[1] et Moreno Andreatta[1]

1 : Institut de Recherche et Coordination Acoustique/Musique, 1 place Igor Stravinsky, 75004 Paris - France.

Contact : yun-kang.ahn@ircam.fr

Résumé
Le *Klavierstueck III* de Stockhausen est une pièce ayant fait l'objet de plusieurs analyses musicales. Parmi celles-ci, l'analyse de David Lewin consiste à créer une segmentation qui couvre la partition à l'aide de groupes liés les uns avec les autres par des transformations inhérentes à la Set Theory. Cette théorie analytique se focalise sur les hauteurs musicales et les relations entre elles. Plus précisément, cette analyse s'attache à montrer que la structure de la pièce repose sur l'ensemble de 5 notes (encore appelé pentacorde) initial à partir duquel toute la composition est générée. Une première étape consiste alors à chercher des segments qui pourront être utilisés dans la suite, et pour cela nous limitons leur recherche. Ensuite, la démarche de Lewin n'étant pas explicitée, notre objectif est de modéliser sa segmentation selon deux critères : la progression, c'est-à-dire un parcours du pentacorde au sein de la pièce, et la couverture qui représente la portion de la partition comprise dans la segmentation. Nous proposons donc une approche qui vise à orienter la segmentation soit vers la progression du processus musical, soit vers la couverture maximale de la partition. Enfin, les résultats de cette méthode seront comparés à l'analyse de Lewin en vue de la valider et de l'étendre.

Abstract
The *Klavierstuecke III* composed by Stockhausen has been analysed by several theorists. Among them, David Lewin creates a segmentation which covers the musical score with sets related by musical transformations used in Set Theory. This analytic theory focuses on musical pitches and their relations. Lewin's work deals with showing that the piece structure is based on the first five-note set (or pentachord) that generates the whole composition. We start with the search for segments which would be used and we limit this search. Then, as Lewin's approach is not explained, we aim at modelling his segmentation according two criteria : progression, i.e. a chronological path within the piece, and covering, which represents the amount of the score reached by the segmentation.Thus, our segmentation will lead to a progression of the musical process or a maximal covering of the score. Finally, the results of our method will be compared to Lewin's analysis in order to validate and to extend it.

Mots-clés : Set Theory musicale, Analyse assistée par ordinateur, Segmentation, Graphe

Keywords: Musical Set Theory, Computer-Aided Analysis, Segmentation, Graph

1. Introduction

L'évolution musicale au cours du XXème siècle s'est appuyée sur l'avènement de la musicologie systématique, à opposer à la musicologie historique et qui veut s'imposer comme une discipline scientifique, intégrant dans cette optique d'autres champs d'étude tels que la psychologie, la cognition ou encore les mathématiques. Elle aura irrigué tous les champs musicaux, amorçant des développements aussi bien au niveau de la théorie que de la composition tout en passant par l'analyse. L'analyse musicale est désormais une discipline appartenant à la formation musicale, entretenant un lien avec l'interprétation et surtout la composition. L'analyse est le cadre de travaux informatiques visant à automatiser sa pratique [7]. Dans ce processus, la segmentation est un versant de l'analyse souvent non explicitée. Nous choisissons une pièce dont le créateur, Stockhausen, est un éminent compositeur, mais également un théoricien et analyste reconnu. Après une introduction de l'œuvre, nous donnerons les concepts nécessaires à la compréhension de l'analyse effectuée par Lewin afin de présenter cette dernière.

1.1. Le *Klavierstueck III* de Stockhausen

Les *Klavierstuecke* forment un cycle de compositions pour piano fondamental dans l'histoire de l'instrument. Parmi celles-ci, la troisième pièce a fait l'objet de plusieurs analyses dont celle de Lewin que nous allons présenter après avoir donné les concepts inhérents au type d'analyse à laquelle il procède.

1.2. Les éléments théoriques préalables à l'analyse du *Klavierstueck III*

1.2.1. Les ensembles de classes de hauteurs

Nous nous intéressons ici aux notes et à leurs hauteurs et plus précisément aux classes de hauteurs. Le concept de classes de hauteurs réduit l'ensemble des notes possibles à 12 éléments allant de Do jusqu'à Si, sans distinction entre, par exemple, Do dièse et Ré bémol, ni entre un Do grave ou un Do aigu. Pour des raisons de commodité, les classes de hauteurs sont écrites sous forme numérique : le zéro correspond au Do (par convention), le 1 au Do dièse et ainsi de suite jusqu'au 11 qui correspond à Si.
Pour mieux visualiser cette approche théorique, une représentation géométrique du nom de *cercle chromatique* est employée [5]. On divise l'octave musicale en 12 parties égales en se plaçant dans le groupe cyclique $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, ce qui fournit donc une représentation graphique circulaire analogue celle de l'horloge 1 [1].

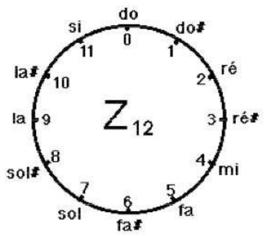

FIGURE 1 – Le cercle chromatique.

1.3. Les transformations élémentaires de classes de hauteurs

Les opérations de transposition et d'inversion sont des procédés musicaux usuels dans la tradition compositionnelle de transformations de notes. Elles sont formalisables mathématiquement dès lors que l'on utilise les classes de hauteurs : la restriction des registres à des classes de hauteurs conduit à une modélisation de l'espace musical dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. La transposition est un concept largement abordé dans les théories classiques : le transposé d'un ensemble de classes de hauteurs de *n* demi-tons est obtenu en ajoutant *n* demi-tons à chacune de ses classes de hauteurs. Conventionnellement, on définit la transposition en demi-tons ascendants. Cette opération est notée T_i, l'indice indiquant le nombre de demi-tons variant de 0 à 11. Géométriquement, en reprenant la représentation du cercle chromatique, cette transformation s'exprime par la rotation dans les sens des aiguilles d'une montre (sens anti-trigonométrique) du polygone symbolisant l'ensemble de classes de hauteurs d'un nombre d'unités égal au nombre de demi-tons de l'opération.

1. Aussi naturelle qu'elle puisse paraître, cette représentation a été fondamentale dans le développement des théories musicales du XXème siècle et de la systématisation de principes compositionnels [2].

L'inversion est une opération qui est similaire du point de vue formel : la transposition d'une classe de hauteur x de n demi-tons pouvant être formulée par : $T_n(x) = x + n$, l'inversion quant à elle du même nombre de demi-tons s'écrit : $I_n(x) = n - x$ [2]. La représentation d'une inversion est le symétrique de l'ensemble de départ par rapport à un axe dans le cercle chromatique, axe dont la position dépend de l'indice d'inversion : I_0 est l'inversion dont l'axe est le diamètre passant par 0 et 6, I_1 celle dont l'axe est le diamètre passant entre 0 et 1, I_2 est l'inversion dont l'axe est le diamètre passant par 1 et 7, etc. jusqu'à I_{11} [3].
Vient s'ajouter l'opération de multiplication qui provient cette fois non plus des techniques compositionnelles de la théorie musicale classique, mais justement de cette formalisation mathématique en termes d'éléments modulo 12. Formellement, la multiplication est définie par : $M_n(x) = x * n$. Cependant, comme nous travaillons dans l'espace $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ avec $k = 12$, les multiplications sont des bijections lorsque le coefficient multiplicateur est premier avec k. Ainsi les multiplications qui nous intéressent sont M_1, M_5, M_7 et M_{11}. Finalement, comme $M_1(x)$ est l'identité et $M_{11}(x) = I_0$, nous n'utiliserons que M_5, M_7 par la suite.

1.4. Une analyse conduite selon les principes de la Set Theory

L'ouvrage fondamental d'Allen Forte [4] comporte une classification des ensembles de classes de hauteurs formant un catalogue se basant sur l'équivalence d'accords au moyen de transformations telles que la transposition et l'inversion [4].
Ce catalogue fournit une réduction du nombre des ensembles de classes de hauteurs possibles grâce une transformation : deux ensembles sont équivalents si l'un est une transposition ou une inversion de l'autre. Une des conséquences les plus importantes est l'équivalence formelle entre l'accord majeur et l'accord mineur (qui sont équivalents par inversion) : l'identification des accords majeur et mineur pose alors un problème dans l'analyse de la musique tonale dont les principes harmoniques reposent sur cette différenciation, et conduit naturellement à privilégier l'analyse de la structure de la musique atonale qui est celle du *Klavierstueck III*, musique dans laquelle les deux notions de majeur et de mineur peuvent plus aisément être confondues.
Le but d'une analyse mettant en œuvre les principes de la Set Theory est de mettre en évidence des segments de la partition constitués par des ensembles de classes de hauteurs qui sont susceptibles de réapparaître, et qui par conséquent peuvent représenter des candidats dans l'optique d'un rôle structurel au sein de la composition [4].

1.4.1. Musicologie computationnelle et analyse assistée par ordinateur

La musicologie systématique et ses développements dont nous venons de résumer quelques concepts se prête naturellement à des formalisations et à une modélisation informatique [1]. De nombreuses applications ont donc émergé, en particulier en analyse musicale dont les précurseurs sont Marcel Mesnage et André Riotte [9] [10]. Nous allons désormais présenter l'analyse de Lewin et montrer en quoi elle peut poser un problème informatique.

1.5. L'analyse de David Lewin

Nous ne présentons ici qu'une partie de la segmentation de Lewin : la figure 2 est la segmentation couvrante minimale composée de 13 segments.
Cette analyse réputée [6] n'a jamais fait l'objet d'une étude informatique malgré la complexité de la segmentation qui a été effectuée à la main ici. En effet, la segmentation a un statut flou et a été peu étudiée en tant que problème en soi que ce soit dans les analyses effectuées à la main ou assistées par ordinateur [8].
Dans notre cas, nous choisissons de chercher une segmentation optimale selon deux critères :

– La progression : la segmentation est considérée comme un déroulement musical chronologique, qui doit éviter les intersections entre les segments, les *sauts harmoniques* ou *verticaux* (toutes les notes d'un accord ne sont pas prises en compte comme le montre le segment en figure 3) ainsi que les *sauts séquentiels* ou *horizontaux* (des notes dans la chronologie sont évitées, un exemple

2. Dans la littérature est souvent employée comme notation équivalente $T_n I(x)$ où $I(x) = I_0(x)$ car l'inversion de n demi-tons correspond à une combinaison de l'inversion "élémentaire" avec une transposition de n demi-tons.
3. L'inversion est la symétrie passant par l'axe $(n/2, n/2 + 6)$
4. En supplément des relations que nous évoquons, Allen Forte définit d'autres relations à portée ensembliste comme l'inclusion et la complémentarité.

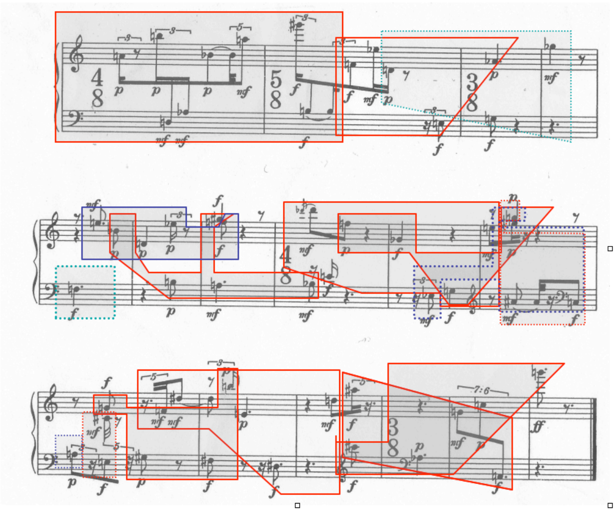

FIGURE 2 – La première partie de la segmentation de Lewin, segmentation couvrante minimale.

est illustré par la figure 4).
– La couverture : la segmentation doit prendre en compte le maximum de notes de la partition

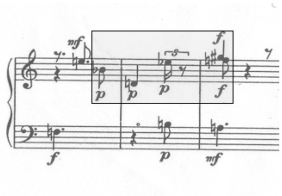

FIGURE 3 – Un segment disjoint avec deux sauts harmoniques (une note manquante pour les deux derniers accords).

2. Approches informatiques de la segmentation de Lewin

La segmentation ici consiste à former des segments composés d'ensembles de classes de hauteurs appelés *polycordes* (bicorde : 2 notes, tricorde : 3 notes, tétracorde : 4 notes etc.). Nous définissons la *cardinalité* d'un polycorde comme étant le nombre de classes de hauteurs distinctes qui le composent. Ainsi sur une même segmentation, nous cherchons des segments ou polycordes possédant tous la même cardinalité, qui est différente du nombre de notes comprises au sein de ce polycorde : on peut avoir par exemple un segment de 7 notes de cardinalité 5 s'il comprend des classes de hauteurs répétées.

2.1. Modélisation des séquences musicales

Nous faisons abstraction de la durée des notes ainsi que des pauses : tout comme Lewin procède dans son analyse, nous travaillons sur une séquence de classes de hauteurs constitués par le nombre de notes se produisant au même moment.

2.2. Les classes d'équivalence induites par les transformations

La représentation des ensembles de classes de hauteurs assure l'exhaustivité de la recherche de la segmentation car il existe un nombre fini de classes d'équivalence sous couvert des opérations

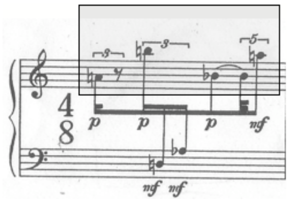

FIGURE 4 – Un segment disjoint avec un saut séquentiel ou horizontal.

présentées plus haut. Par exemple, on a 38 classes d'équivalence de pentacordes sous couvert des opérations de tranposition et d'inversion et donc il y a au maximum 38 familles de pentacordes qui couvrent éventuellement la composition.

2.3. La recherche des segments

Si n est le nombre de notes de la partition, il est possible de former 2^n segments possibles au sein de cette partition. Afin de limiter la combinatoire de la recherche, nous choisissons de nous limiter à certains segments pour réduire la complexité. Pour cela, nous adoptons une démarche analogue à celle de l'analyste : nous cherchons des segments "faciles" avant de procéder à la recherche de segments plus complexes. La segmentation idéale serait de paver la pièce à l'aide d'une segmentation ne contenant que des segments convexes (i.e. sans notes manquantes) qui représenterait une partition de l'œuvre au sens mathématique (i.e. les segments ne se chevauchent pas).

Une première stratégie consiste à rechercher des ensembles de n classes de hauteurs différentes en considérant des événements [5] successifs : on collecte les événements jusqu'à obtenir un ensemble de notes de cardinalité n , puis on prend tous les sous-ensembles parmi celui-ci qui forment un segment de cardinalité n.

S'ajoute une seconde stratégie de recherche des n classes de hauteurs minimales avec le nombre de sauts noté k. Pour cela on opère d'une manière analogue à la précédente mais sur n+k éléments. Puis on retire le premier et dernier élément de la séquence, ce qui nous laisse une séquence de taille n+k-2. Les ensembles de classes de hauteurs cherchés seront les sous-ensembles sur cette séquence de taille n-2 (ce qui revient à chercher n-2 éléments parmi n+k-2) auxquels on rajoute les premier et dernier éléments retirés et qui contiennent bien n classes de hauteurs distinctes.

Ces deux types de stratégie s'apparentent à la démarche de l'analyste qui intuitivement construit des segments contenant des notes proches au niveau chronologique, puis essaie d'éviter certaines notes afin de construire des segments adaptés à sa recherche.

2.4. La segmentation vue comme une progression au sein de la partition

Dans le but de déterminer une segmentation comme une structure chronologique, nous construisons un graphe orienté valué (les arêtes sont munies d'un poids, entier positif ou nul ici) décrivant la répartition d'une classe d'équivalence au sein de la composition : ainsi les sommets sont les segments appartenant à une même classe d'équivalence et les arêtes sont les segments liés entre eux par des opérations de transposition, d'inversion ou/et de multiplication.

Cependant, le graphe n'est pas connexe et tous les segments ne sont pas forcément liés au premier. En effet, deux segments sont liés dans le graphe si :

- Ils se succèdent immédiatement dans l'œuvre.
- Ils ont une intersection séquentielle : plus l'intersection est grande, plus le poids est grand.
- Si un segment ne possède pas de successeur direct ou intersectant, on le relie au(x) segment(s) le(s) plus proche(s) dans la chronologie.

La détermination des poids se fait selon deux critères :

- La distance entre les deux segments, c'est-à-dire le nombre d'événements musicaux qui les séparent ou qu'ils partagent (puisque deux segments peuvent se chevaucher). Nous fixons le plus petit poids pour le cas où les deux segments se succèdent immédiatement ; un poids plus grand

5. Nous définissons un *événement* dans toute la suite comme un événement temporel qui peut être constitué d'une ou plusieurs notes. A contrario, un silence ou une pause n'est pas considéré comme un événement dans notre cas.

est affecté à l'arête selon le nombre d'événements musicaux qu'ils ont en commun ; finalement le poids maximal est attribué lorsque les segments sont séparés chronologiquement. Nous montrons dans l'ordre croissant de poids les situations qui lient les segments sur la figure 5.

FIGURE 5 – Trois situations de liaisons entre deux segments dans l'ordre croissant de poids : 2 segments successifs, 2 segments qui se chevauchent et deux segments éloignés chronologiquement.

– Le nombre de sauts que présente le segment d'arrivée de l'arête : plus le segment d'arrivée présente de sauts harmoniques et mélodiques, plus le poids est important. Nous considérons qu'un saut harmonique est moins pénalisant pour l'analyse qu'un saut séquentiel : en effet, un saut harmonique n'affecte pas la chronologie de la segmentation puisqu'une note au moins de l'accord concerné est inclus dans la segmentation. À l'inverse, un saut séquentiel implique une rupture de la chronologie du segment.

Un exemple du graphe formé et représentant la progression des polycordes (ici en l'occurrence, des tétracordes puisque 4 classes de hauteurs) est donné sur la figure 6. Nous disposons les polycordes successifs chronologiques horizontalement alors que les segments simultanés (c'est-à-dire dont le premier événement est commun) sont disposés verticalement ; ici les arêtes indiquent la relation entre les segments et non pas le poids des arêtes.

Une segmentation optimale, selon ce qui a été évoqué plus haut, doit minimiser le nombre de sauts à l'intérieur des segments ainsi que minimiser dans l'ordre les distances entre polycordes et les intersection. Avec la configuration des poids décrite ci-dessus, il faut donc trouver un sous-graphe dont la somme des arêtes est minimisée. Par ailleurs, pour prendre en compte la notion de progression et en se référant à l'analyse de base de Lewin, nous devons sélectionner le "premier" polycorde au sein d'une classe d'équivalence (i.e. celui qui intervient le plus tôt dans le déroulement de l'œuvre).

Cependant, nous ne pouvons prendre automatiquement le "dernier" polycorde (i.e. celui qui intervient le plus tard) puisque nous devons prendre en compte la couverture du graphe. En effet, il est possible que la segmentation la plus couvrante ne prenne pas en compte ce dernier polycorde. Ainsi nous procédons en trouvant d'abord tous les plus courts chemins entre le premier polycorde et les autres du graphe. Pour cela, nous employons l'algorithme de Dijkstra [3] qui permet de trouver le plus court chemin entre deux sommets d'un graphe. Par la suite, parmi tous ces chemins optimaux pour chaque classe d'équivalence, nous choisissons le chemin le plus couvrant qui formera la segmentation désirée.

2.5. La segmentation vue comme une couverture de la partition

Nous délaissons la vue progressionnelle de la segmentation pour s'intéresser à la couverture de la partition par les segments. Nous utilisons un algorithme glouton classique : on prend les segments qui couvrent le plus de notes de la partition jusqu'à couvrir l'intégralité de la partition ou alors en ayant épuisé la liste des segments possibles.

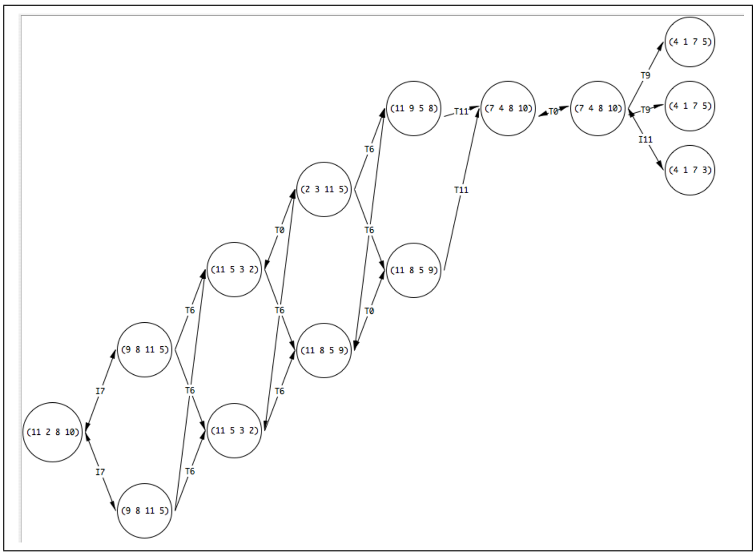

FIGURE 6 – Un graphe représentant la succession de tétracordes.

3. Méthodologie et tests menés

3.1. Transposition et Inversion : transformations minimales

Une première constatation générale valable pour tous les tests qui suivent est que l'ajout de l'opération de multiplication ne permet pas d'optimiser la segmentation dans le sens où, pour la même recherche, le résultat obtenu est le même selon que l'on autorise les transpositions/inversions entre segments ou les transpositions/inversions/multiplications.

3.2. Recherche d'une progression : variation de tailles et de sauts

La recherche des progressions va être effectuée en la cardinalité du segment et le nombre de sauts autorisés. Nous effectuons deux tests pour chaque élément : avec une recherche sans paramètre de saut explicite, puis avec ce paramètre que nous fixons à $k = 2$, Lewin s'autorisant deux sauts chronologiques maximum. Nous testons un tricorde, un tétracorde, un pentacorde et un hexacorde ; au final, la progression la plus couvrante se trouve être celle qui emploie un pentacorde avec 2 sauts indiqués.

3.3. Recherche d'une progression : variation des paramètres du graphe

Nous fixons le pentacorde avec deux sauts comme la structure optimale et nous effectuons 4 tests en variant les paramètres suivants lors de la création du graphe :
– le poids d'un saut vertical
– le poids d'un saut horizontal
– le poids de l'écart entre deux polycordes
– le poids de l'intersection entre deux polycordes

Pour certains jeux de paramètres, on trouve une partie des segments trouvés par Lewin : la segmentation intégrale de Lewin peut ainsi être retrouvée en même temps que de nouveaux segments.

3.4. Recherche de la couverture

Nous testons différentes tailles de polycordes en fixant le nombre de sauts maximum autorisés à 2 pour couvrir la partition. La segmentation par pentacorde est la seule qui couvre toute la partition : la couverture est partielle avec une taille de 2, 3, 4, 6 ou 7 notes.

Par ailleurs, en fixant le pentacorde mais en variant le nombre de sauts autorisés, il est nécessaire et suffisant d'avoir deux sauts pour obtenir la couverture optimale

4. Conclusion

Le pentacorde, aussi bien pour la progression que pour la couverture, représente la structure optimale. Le nombre de sauts, qui est fixé à 2 par Lewin, est également optimal pour minimiser le nombre de segments. Le premier pentacorde est bien un ensemble pertinent du point de vue analytique puisque générateur de la pièce si l'on considère cette composition comme dépendant du pentacorde et s'articulant autour de pentacordes tous liés à ce dernier. D'un point de vue musical, cette hypothèse est probable puisque Stockhausen débute la pièce par 5 classes de hauteurs différentes avant d'en répéter certaines, avant l'introduction de nouvelles classes de hauteurs.

Comparativement à l'analyse de Lewin, notre démarche est validée dans le sens où nous retrouvons la proéminence du pentacorde en tant que structure fondamentale de la pièce ; cependant un jeu de paramètres lors de la création du graphe des polycordes a permis d'exhiber un autre pentacorde plus significatif qui couvre surtout le milieu de la pièce. Une extension de cette méthode, hormis l'application à d'autres œuvres, serait d'envisager une recherche localisée selon ces paramètres et selon les sections de la composition.

En outre, le cadre d'application préférentiel de cette méthode est la musique atonale selon ce qui a été dit plus haut ; cependant, la formalisation effectuée implique que l'étude peut s'appliquer à tout style de musique. Ainsi, des essais sur des pièces plus traditionnelles pourraient être menés pour voir si les éléments musicologiques récents peuvent éclairer les compositions anciennes sous un jour nouveau.

Bibliographie

1. Moreno Andreatta. *Méthodes algébriques en musique et musicologie du XX siècle : aspects théoriques, analytiques et compositionnels*. Thèse de doctorat, Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales, Décembre 2003.
2. Milton Babbitt. *The function of Set Structure in the Twelve-Tone System*. Thèse de doctorat, Princeton University, 1946/1992.
3. Edger Dijkstra. A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*, pages 269–271, 1959.
4. Allen Forte. *The Structure of Atonal Music*. Yale University Press, 1973.
5. George D. Halsey et Edwin Hewitt. Eine gruppentheoretische methode in der musik-theorie. *Jahresber. der Dt. Math.-Vereinigung*, 80, 1978.
6. David Lewin. *Musical Form and Transformation : Four Analytic Essays*, chapter Making and Using a Pcset Network for Stockhausen's Stockhausen's Klavierstueck III, pages 16–67. Yale University Press, 1993.
7. Benoit Mathieu. Outils informatiques d'analyse musicale. Thèse de Master, ENST-Bretagne, dept. IASC, Juillet 2002.
8. Marcel Mesnage. Techniques de segmentation automatique en analyse musicale. *Musurgia*, 1994.
9. Marcel Mesnage et André Riotte. *Formalismes et modèles musicaux : Exemples de modélisation de partitions musicales*, volume 2 sur *Musique / Sciences*. Éditions Delatour France, 2006.
10. Marcel Mesnage et André Riotte. *Formalismes et modèles musicaux : Préliminaires et Formalismes Généraux*, volume 1 sur *Musique / Sciences*. Éditions Delatour France, 2006.