

Ex 1)

$$\mathcal{L}(X|Y=0) = \mathcal{U}([0, \theta]) , \quad \theta \in (0,1)$$
$$\mathcal{L}(X|Y=1) = \mathcal{U}([0, 1])$$

$\Rightarrow \theta \in [0,1]$

$$p = P(Y=1)$$

$$\varphi(x) = P(Y=1 | X=x).$$

D'après le cours, on a

$$\varphi(x) = \frac{p f_+(x)}{p f_+(x) + (1-p) f_-(x)}$$

avec f_+ & f_- densités cond.
aux classes.

$$= \frac{p \mathbf{1}_{[0,1]}(x)}{p \mathbf{1}_{[0,1]}(x) + (1-p) \frac{\mathbf{1}_{[0,\theta]}(x)}{\theta}}$$

. Si $0 < x \leq 1$, $\varphi(x) = p/p = 1$

. Si $x > 1$ ou $x < 0$ (indéfini) impossible pq $x \in [0,1]$

. Si $0 \leq x \leq \theta$, $\varphi(x) = \frac{p}{p + \frac{(1-p)}{\theta}} = \frac{\theta p}{\theta p + 1 - p}$

$$\text{Donc, } \eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta < x \\ \frac{\theta p}{\theta p + 1-p} & \text{si } 0 < x \leq \theta \end{cases}$$

$$\text{Si } \theta = 1/2, \quad \eta(x) = \begin{cases} 1 & \frac{1}{2} < x \\ \frac{p_1}{p_1 + 1-p} & 0 < x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ex 2)

⚠ Dans le cours, $y \in \{-1, 1\}\!$

$$L_x = P_x, \quad L_{y_1|x=x} = \text{Ber}(\eta(x)), \quad \eta(x) = \frac{x}{x+\theta},$$

$$\forall \theta > 0.$$

$$\text{Par définition, } g^*(x) = \mathbb{1}_{\{\eta(x) > y_1\}}$$

$$\text{Dans notre cas, } \eta(x) > \frac{1}{2} (\Rightarrow \frac{x}{x+\theta} > \frac{1}{2})$$

$$(\Rightarrow \frac{2x}{x+\theta} > 1 \Rightarrow x + \theta < 2x \\ \Rightarrow \theta < x)$$

$$\text{Donc, } g^*(x) = \mathbb{1}_{\{x \geq \theta\}}.$$

$$\text{Par définition, } L(g^*) = L^* = \mathbb{E} \left[\min \{ \eta(x), 1 - \eta(x) \} \right]$$

$$= \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{x \leq \theta\}} \eta(x) + \mathbb{1}_{\{x > \theta\}} (1 - \eta(x)) \right]$$

Si $x \leq \theta$, alors $\eta(x) \leq \frac{1}{2}$
donc $\min \{\eta(x), 1 - \eta(x)\} = \eta(x)$.

On a la densité de la distribution marginale P_X :

$$P_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto \frac{\mathbb{1}_{[0, x\theta]}}{\alpha \theta}, \quad \forall x > 1.$$

On peut donc écrire l'espérance:

$$L^* = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{x \leq \theta\}} \eta(x) + \mathbb{1}_{\{x > \theta\}} (1 - \eta(x)) dP(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left[\mathbb{1}_{\{x \leq \theta\}} \eta(x) + \mathbb{1}_{\{x > \theta\}} (1 - \eta(x)) \right] P_X(x) dx$$

$$= \frac{1}{\alpha \theta} \int_0^{\alpha \theta} \mathbb{1}_{\{x \leq \theta\}} \eta(x) + \mathbb{1}_{\{x > \theta\}} (1 - \eta(x)) dx$$

$$L^* = \frac{1}{\alpha\theta} \left(\int_0^\alpha 2(x) dx + \int_\theta^{\alpha\theta} 1 - 2(x) dx \right)$$

$$= \frac{1}{\alpha\theta} \left(\int_0^\theta 1 - (1 - 2(x)) dx + \int_\theta^{\alpha\theta} 2 - 1(x) dx \right)$$

$$= \frac{1}{\alpha\theta} \left(\int_0^\theta 2 - \frac{\theta}{x+\theta} dx + \int_\theta^{\alpha\theta} \frac{\theta}{x+\theta} dx \right)$$

$$= \frac{1}{\alpha\theta} \left(\left[x - \theta \ln(x+\theta) \right]_0^\theta + \left[\theta \ln(x+\theta) \right]_\theta^{\alpha\theta} \right)$$

$$= \frac{1}{\alpha\theta} \left(\theta - \theta \ln(2\theta) + \theta \ln(\theta) + \theta \ln(\alpha\theta + \theta) - \theta \ln(2\theta) \right)$$

$$= \frac{1}{\alpha\theta} \left(\theta - 2\theta \ln(2\theta) + \theta \ln \theta + \theta \ln(\theta(\alpha+1)) \right)$$

$$= \frac{1}{\alpha\theta} \left(\theta \left(1 - 2 \ln(2\theta) + 2 \ln \theta + \ln(\alpha+1) \right) \right)$$

$$= \frac{1}{\alpha} \left(1 + 2 \ln \left(\frac{\theta}{2\theta} \right) + \ln(\alpha+1) \right)$$

$$= \frac{1}{\alpha} \left(1 - 2 \ln 2 + \ln(\alpha+1) \right)$$

On peut calculer la dérivée :

$$\begin{aligned}\frac{\partial L^*}{\partial \alpha} &= \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\alpha+1} - \left(1 - 2\ln 2 + \ln(\alpha+1)\right) \frac{1}{\alpha^2} \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \left(2\ln 2 - \ln(\alpha+1) - 1\right) + \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\alpha+1}\end{aligned}$$

Si on développe, on voit que

$$\textcircled{R} \quad \frac{\partial L^*}{\partial \alpha} > 0 \iff h > (\alpha+1)e^{\frac{1}{\alpha+1}}$$

Si $\alpha = 1$, $\frac{\partial L^*}{\partial \alpha} > 0$ et si $\alpha = 2$, $\frac{\partial L^*}{\partial \alpha} < 0$. Comme $(\alpha+1)e^{\frac{1}{\alpha+1}}$ est strictement croissant sur $[1, +\infty[$, $\alpha^* \in]1, 2[$.

On peut trouver numériquement $\alpha \approx 1,80$

On peut même se rapporter à $\frac{2^{\alpha+1}}{e} > (\alpha+1)^{\alpha+1}$ (aucune solution analytique). \textcircled{R}

$$\textcircled{X} \quad \frac{\partial L^*}{\partial x} = \frac{1}{x^2} (2\ln 2 - \ln x+1 - 1) + \frac{1}{x} \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{2\ln 2 - \ln x+1 - 1}{x^2} + \frac{1}{x^2+x}$$

$$= \frac{(2\ln 2 - \ln x+1 - 1)(x^2+x)}{x^2(x^2+x)} + \frac{x^2}{x^2(x^2+x)}$$

$$= \frac{1}{x^4(x^2+x)} \left(2x^2 \ln 2 - x^2 \ln x+1 - \cancel{x^2} + 2x \ln 2 - x \ln x+1 - x + x^2 \right)$$

$$= \frac{x}{x^2(x^2+x)} (2x \ln 2 - x \ln x+1 + 2 \ln 2 - \ln x+1 - 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow 2x \ln 2 + 2 \ln 2 > x \ln x+1 + \ln x+1 + 1$$

$$\Leftrightarrow (2x+2) \ln 2 > (x+1) \ln(x+1) + 1 \quad \ln 2 > \frac{1}{2} \ln(x+1) + \frac{1}{2(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \ln(2^{2x+2}) > \ln((x+1)^{x+1}) + \ln e \quad \ln 2 > \frac{1}{2} \left(\ln(x+1) + \frac{1}{x+1} \right)$$

$$\Leftrightarrow \ln(2^{2x+2}) > \ln((x+1)^{x+1}) e \quad \ln 2 > \frac{1}{2} \left(\ln(x+1) e^{\frac{1}{x+1}} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x+2} > (x+1)^{x+1} e$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^{2x+2}}{e} > (x+1)^{x+1}$$

$$\left. \begin{array}{l} \ln 2 > \ln(x+1) e^{\frac{1}{x+1}} \\ \ln 2 > \ln(x+1) e^{\frac{1}{x+1}} \\ \ln 2 > (x+1) e^{\frac{1}{x+1}} \end{array} \right\}$$

E_x 3]

$X = (T, U, V)^T$ où T, U, V iid et $T, U, V \sim E(1)$.

$$Y = \mathbb{1}_{\{T+U+V < \theta\}} \quad \forall \theta > 0.$$

$$\mathcal{L}_x = E(1)^{\otimes 3}$$

1) V n'est pas observé

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(t, u) &= P(T + U + V < \theta \mid T=t, U=u) \\ &= P(V < \theta - T - U \mid T=t, U=u) \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(t, u) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{V < \theta - t - u\}}\right] \\ &= \int_0^{\theta-t-u} \underbrace{\mathbb{1}_{\{t+u < \theta\}}}_{e^{-v}} e^{-v} dv \end{aligned}$$

V est ≥ 0 . Si $t+u \geq \theta$, alors V doit être $\leq \theta - t - u \leq \theta$. Impossible

$$\begin{aligned} &= \mathbb{1}_{\{t+u < \theta\}} \left[-e^{-v} \right]_0^{\theta-t-u} = \mathbb{1}_{\{t+u < \theta\}} \\ &\quad (1 - e^{-(\theta-t-u)}) \end{aligned}$$

On calcule le classifieur de Bayes :

$$g^*(t, u) = \mathbb{1}_{\{f_2(t, u) > \frac{1}{2}\}}$$

$$\{f_2(t, u) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} t + u < \theta \\ e^{-(\theta - t - u)} < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t + u < \theta \\ \theta - t - u > \ln 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \theta > t + u + \ln 2$$

$$g^*(t, u) = \mathbb{1}_{\{t + u < \theta - \ln 2\}}$$

On peut calculer l'erreur de Bayes :

$$L^* = \mathbb{E}_{t, u} \left[\min \{g(t, u), 1 - g(t, u)\} \right]$$

$$= \mathbb{E}_{t, u} \left[\mathbb{1}_{\{t + u \geq \theta - \ln 2\}} g(t, u) + \mathbb{1}_{\{t + u < \theta - \ln 2\}} (1 - g(t, u)) \right]$$

Calculons la densité de $Z = T + U$:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(u) f_U(z - u) du$$

$$\begin{aligned}
 f_t(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(k) \prod_{k>z} (z-k) e^{-k} e^{-(z-k)} dk \\
 &= \int_0^z e^{-k} e^{-(z-k)} dk \\
 &= \int_0^z e^{-2} dk = e^{-z} \lambda([0,z]) = z e^{-z} -
 \end{aligned}$$

On peut donc ré-écrire l'espérance :

$$L^* = \mathbb{E}\left[\frac{1}{z} \left(\mathbb{1}_{\{z \geq \theta - \ln 2\}} \varrho(z) + \mathbb{1}_{\{z < \theta - \ln 2\}} (1 - \varrho(z)) \right) \right]$$

$$\text{avec } \varrho(z) = (1 - e^{-\theta+z}) \mathbb{1}_{\{z < \theta\}}.$$

$$\begin{aligned}
 L^* &= \int_0^{\theta - \ln 2} (1 - \varrho(z)) f_t(z) dz + \int_{\theta - \ln 2}^\theta \varrho(z) f_t(z) dz \\
 &= \int_0^{\theta - \ln 2} e^{-\theta+z} z e^{-z} dz + \int_{\theta - \ln 2}^\theta (1 - e^{-\theta+z}) z e^{-z} dz \\
 &= \int_0^{\theta - \ln 2} e^{-\theta} z dz + \int_{\theta - \ln 2}^\theta z e^{-z} - z e^{-\theta} dz
 \end{aligned}$$

$$= e^{-\theta} \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_0^{\theta - \ln 2} + \underbrace{[-ze^{-z}]_{\theta - \ln 2}^\theta}_{\theta - \ln 2} + \underbrace{[-e^{-z}]_{\theta - \ln 2}^\theta}_{\theta - \ln 2} - e^{-\theta} \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{\theta - \ln 2}^\theta$$

$$\begin{aligned}
 \int z e^{-z} dz &= \int_a^b z (e^{-z})' dz \\
 &= [-ze^{-z}]_a^b - \int_a^b -e^{-z} dz \\
 &= [-ze^{-z}]_a^b + [-e^{-z}]_a^b
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U^* &= e^{-\theta} \frac{(\theta - \ln 2)^2}{2} - \theta e^{-\theta} + (\theta - \ln 2) e^{-(\theta - \ln 2)} - e^{-\theta} + e^{-(\theta - \ln 2)} \\
 &\quad - \frac{\theta^2}{2} e^{-\theta} + \frac{(\theta - \ln 2)^2}{2} e^{-\theta} \\
 &= -e^{-\theta} \left(1 + \theta + \frac{\theta^2}{2} - (\theta - \ln 2)^2 \right) + e^{-(\theta - \ln 2)} \left(1 + (\theta - \ln 2) \right) \\
 &= -e^{-\theta} \left(1 + \theta + \frac{\theta^2}{2} - (\theta - \ln 2)^2 \right) + 2e^{-\theta} (\theta - \ln 2) \\
 &= e^{-\theta} \left(-1 - \theta - \frac{\theta^2}{2} + (\theta - \ln 2)^2 + 2 + 2\theta - 2\ln 2 \right) \\
 &= e^{-\theta} \left(-1 - \theta - \frac{\theta^2}{2} + \theta^2 - 2\theta\ln 2 + \ln^2 2 + 2 + 2\theta - 2\ln 2 \right) \\
 &= e^{-\theta} \left(1 + \theta + \frac{\theta^2}{2} - 2\ln 2 (1 + \theta) + \ln^2 2 \right)
 \end{aligned}$$

$$S: \Theta = 9, L^* \approx 0,006.$$

2) Seulement T est observé.

$$\begin{aligned} \eta(t) &= P(T+U+V < \Theta \mid T=t) \\ &= P(U+V < \Theta - T \mid T=t) \end{aligned}$$

On pose Z = U+V.

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \mathbb{P}_{\{t < \Theta\}} \int_0^{\Theta-t} z e^{-z} dz = \mathbb{P}_{\{t < \Theta\}} \left([-ze^{-z}]_0^{\Theta-t} - [e^{-z}]_0^{\Theta-t} \right) \\ &= \mathbb{P}_{\{t < \Theta\}} \left((\Theta-t) e^{-(\Theta-t)} - e^{-(\Theta-t)} + 1 \right) \\ &= \mathbb{P}_{\{t < \Theta\}} \left(1 + ((\Theta-t)-1) e^{-(\Theta-t)} \right) \\ &= \mathbb{P}_{\{t < \Theta\}} \left(1 - (\Theta-t+1) e^{-(\Theta-t)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta(t) > \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \begin{cases} t < \Theta \\ 1 - (\Theta-t+1) e^{-(\Theta-t)} > \frac{1}{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t < \Theta \\ (\Theta-t+1) e^{-(\Theta-t)} < \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow e^{-(\theta-t)} < \frac{1}{2(\theta-t+1)} \quad \wedge \quad t < \theta$$

$$\Leftrightarrow t - \theta < -\ln(2(\theta-t+1)) \quad \wedge \quad t < \theta$$

$$\Leftrightarrow t - \theta < -\ln 2 - \ln(\theta-t+1) \quad \wedge \quad t < \theta$$

$$\Leftrightarrow \theta - t - \ln(\theta-t+1) > \ln 2 \quad \wedge \quad t < \theta$$

$$g(t) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta - t - \ln(\theta-t+1) > \ln 2 \quad \wedge \quad t < \theta$$

$$g^*(t) = \mathbb{1}_{\{\theta - t - \ln(\theta - t + 1) > \ln 2\}} \mathbb{1}_{\{t < \theta\}}$$

$$L^* = \mathbb{E} \left[\min \{ g(t) ; 1 - g(t) \} \right]$$

$$= \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{\theta - t - \ln(\theta - t + 1) \leq \ln 2\}}^{2g(t)} + \mathbb{1}_{\{\theta - t - \ln(\theta - t + 1) > \ln 2\}} \mathbb{1}_{\{t < \theta\}} (1 - g(t)) \right]$$

Le terme $\mathbb{1}_{\{t < \theta\}}$ est présent dans $g(t)$

$$= \int_0^\theta \left[\mathbb{1}_{\{t < \theta\}} 1 - (\theta - t + 1) e^{-\theta+t} + \mathbb{1}_{\{t > \theta\}} (\theta - t + 1) e^{-\theta+t} \right] e^{-t} dt$$

Si $\theta = 9$

$$L^* \approx 0,0059$$

Plus grand que lorsque T et U sont observés.

3) Aucun n'est observé.

On pose $Z = T + U$ et $S = V + Z$. On calcule la densité de S , $f_S(s) = \int_0^{+\infty} z e^{-z} e^{-(s-z)} \underbrace{\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(s-z) dz}_{\checkmark \in \mathbb{R}_+}$

$$= \int_0^s z e^{-s} dz = e^{-s} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^s = \frac{s^2 e^{-s}}{2}$$

On calcule $\gamma(x) = P(Y=1 | X=x) = P(S < \theta)$

$$= \int_0^\theta \frac{s^2 e^{-s}}{2} ds$$
$$= \left[-\frac{s^2 + 2s + 2}{2} e^{-s} \right]_0^\theta = 1 - \frac{e^{-\theta}}{2} (\theta^2 + 2\theta + 2)$$

$$\gamma(x) \rightarrow \frac{1}{2} \quad (\Rightarrow e^{-\theta} (\theta^2 + 2\theta + 2) \leq 1)$$

$$g^* = \mathbb{1}\{e^{-\theta} (\theta^2 + 2\theta + 2) \leq 1\}$$

$$L^* = \mathbb{E}[\min \{ \gamma(x) ; 1 - \gamma(x) \}]$$

$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}\{e^{-\theta} (\theta^2 + 2\theta + 2) \geq 1\} \gamma(x) + \mathbb{1}\{.\}\right] (1 - \gamma(x))$$

Si $\theta = 3$,

$$L^* \approx 0,0062 \quad \text{Encore plus grand que } q^* L !$$

Ex 1

$$1) f^+(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\Sigma_+|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu_+)^T \Sigma_+^{-1} (x - \mu_+)\right)$$

$$f^-(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\Sigma_-|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu_-)^T \Sigma_-^{-1} (x - \mu_-)\right)$$

$$2) \frac{p f_+}{p f_+ + (1-p) f_-} = \frac{p}{(2\pi)^{d/2} |\Sigma_+|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu_+)^T \Sigma_+^{-1} (x - \mu_+)\right)$$

$$\text{Donc, } 2(x) = \frac{(2\pi)^{d/2} |\Sigma_+|^{1/2}}{(2\pi)^{d/2} |\Sigma_+|^{1/2} e^{-\frac{1}{2}(x - \mu_+)^T \Sigma_+^{-1} (x - \mu_+)} + (2\pi)^{d/2} |\Sigma_-|^{1/2} e^{-\frac{1}{2}(x - \mu_-)^T \Sigma_-^{-1} (x - \mu_-)}}$$

$$\text{On pose } \pi_{\{+, -\}} = (2\pi)^{d/2} |\Sigma_{\{+, -\}}|^{1/2} \text{ et}$$

$$e_{\{+, -\}} = \exp\left(-\frac{1}{2} ((x - \mu_{\{+, -\}})^T \Sigma_{\{+, -\}}^{-1} (x - \mu_{\{+, -\}}))\right)$$

Etudions $\frac{p e_+}{\pi_+} + \frac{(1-p)e_-}{\pi_-}$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi_+ - p}{\pi_+ + \pi_-} e_+ + \frac{(1-p)\pi_+ + c_-}{\pi_+ + \pi_-} &= \frac{\pi_+ - p e_+ + (1-p)\pi_+ e_-}{\pi_+ + \pi_-} \\
 &= \underbrace{p \pi_- e_+}_{\pi_+ + \pi_-} + \underbrace{\pi_+ e_- - p \pi_+ e_-}_{\pi_+ + \pi_-} \\
 &= \frac{p \pi_- e_+ + (1-p)\pi_+ e_-}{\pi_+ + \pi_-}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \eta(x) &= \frac{p e_+}{\pi_+} \frac{\pi_+ \pi_-}{p \pi_- e_+ + (1-p)\pi_+ e_-} = \frac{p e_+ \pi_-}{p(\pi_- e_+ + (1-p)\pi_+ e_-)} \\
 &\quad \underbrace{e_+ \pi_-}_{e_+ \pi_- \left(1 + \frac{1-p}{p} \frac{\pi_+ e_-}{\pi_- e_+}\right)} \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{1-p}{p} \frac{(2\pi)^{d/2} |\sum_+|^{1/2} \exp(-\frac{1}{2} (x - \mu_+)^T \sum_+^{-1} (x - \mu_+))}{(2\pi)^{d/2} |\sum_-|^{1/2} \exp(-\frac{1}{2} (x - \mu_-)^T \sum_-^{-1} (x - \mu_-))}} \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{1-p}{p} \left| \frac{\sum_+}{\sum_-} \right|^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} ((x - \mu_+)^T \sum_+^{-1} (x - \mu_+) - (x - \mu_-)^T \sum_-^{-1} (x - \mu_-))\right)}
 \end{aligned}$$

$$2) \log \left(\frac{\varrho_\theta(x)}{1 - \varrho_\theta(x)} \right) = \theta^T x$$

$$\Rightarrow \frac{\varrho_\theta(x)}{1 - \varrho_\theta(x)} = e^{\theta^T x}$$

On peut donc écrire :

$$\varrho_\theta(x) \left(1 + e^{\theta^T x} \right) = \varrho_\theta(x) + \frac{\varrho_\theta^2(x)}{1 - \varrho_\theta(x)}$$

$$= \frac{\varrho_\theta(x) - \varrho_\theta^2(x) + \varrho_\theta^2(x)}{1 - \varrho_\theta(x)} = \frac{\varrho_\theta(x)}{1 - \varrho_\theta(x)} = e^{\theta^T x}$$

On obtient :

$$\varrho_\theta(x) = \frac{e^{\theta^T x}}{1 + e^{\theta^T x}} = \frac{1}{1 + e^{-\theta^T x}}.$$

Par définition, on sait que $\varrho_\theta(u) = \frac{p f_+}{f_x}$,
avec $f_x = p f_+ + (1-p) f_-$.

$$\text{On a donc } f_+ = \frac{\varrho_\theta(u) f_x(u)}{p} = \frac{f_x(u)}{p + p e^{-\theta^T x}}.$$

Ex 5)

1) $w \in [0, 1]$.

$$L_w(q_x) = 2 \mathbb{E}_{x,y} \left[(1-w) \mathbb{1}_{\{y=1\}} \mathbb{1}_{\{q(x)=-1\}} + w \mathbb{1}_{\{y=-1\}} \mathbb{1}_{\{q(x)=1\}} \right]$$

$$= \mathbb{E}_{x,y} \left[(1-w) \underbrace{\mathbb{E}_y \left[\mathbb{1}_{\{y=1\}} | x \right] \mathbb{1}_{\{q(x)=-1\}}} + w \mathbb{E}_y \left[\mathbb{1}_{\{y=-1\}} | x \right] \mathbb{1}_{\{q(x)=1\}} \right]$$

Law of total expectation

$$\leq \mathbb{E} \left[(1-w) \eta(x) \mathbb{1}_{\{q(x)=-1\}} + w (1-\eta(x)) \mathbb{1}_{\{q(x)=1\}} \right]$$

Donc, $g^*(x) = 1 \Leftrightarrow w(1-\eta(x)) \leq (1-w)\eta(x)$

(g^* minimise L . Donc, si $g^*(x) = 1$, $w(1-\eta(x))$ est plus petit que $w\eta(x)$)

$$\Leftrightarrow w - w\eta(x) \leq \eta(x) - w\eta(x)$$

$$\Leftrightarrow w \leq \eta(x)$$

Donc, $g^*(x) = 2 \mathbb{1}_{\{w < \eta(x)\}} - 1$.

Calculons $L_w(g^*)$

$$\begin{aligned} L_w(g^*) &= 2 \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{\gamma(X) < w\}} (1-w) \gamma(X) + \mathbb{1}_{\{w \leq \gamma(X)\}} w (1-\gamma(X)) \right] \\ &= 2 \mathbb{E} \left[\left(\mathbb{1}_{\{\gamma(X) < w\}} + \mathbb{1}_{\{w \leq \gamma(X)\}} \right) \min \left\{ (1-w) \gamma(X), w (1-\gamma(X)) \right\} \right] \\ &= 2 \mathbb{E} \left[\min \left\{ (1-w) \gamma(X), w (1-\gamma(X)) \right\} \right] \end{aligned}$$

$$2) \quad \mu \in [0, 1]$$

On cherche g tq. $g \in \underset{g}{\operatorname{argmin}} \mathbb{P}(Y \neq g(X))$

$$\text{s.t. } \mathbb{P}(g(X) = 1) = \mu.$$

On peut trouver un q tq $\mathbb{P}(\gamma(X) > q) = \mu$.

$$\begin{aligned} \text{Posons } q &= q_{1-\mu}(\gamma(X)) \quad \left(\mathbb{P}(\gamma(X) \leq q) = 1-\mu \Leftrightarrow 1 - \mathbb{P}(\gamma(X) > q) \right. \\ &\quad \left. = \mu \right) \\ &\quad \Leftrightarrow \mathbb{P}(\gamma(X) > q) = \mu \end{aligned}$$

$$\text{On a } L_\mu(g) = \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{g(X) = 1\}} \gamma(X) + \mathbb{1}_{\{g(X) = 0\}} (1-\gamma(X)) \right]$$

$$= \mathbb{E} \left[(\eta(X) - q) \mathbb{1}_{\{g(X)=1\}} + q \mathbb{1}_{\{g(X)=1\}} + (q - \eta(X)) \mathbb{1}_{\{g(X)=1\}} + (1-q) \mathbb{1}_{\{g(X)=1\}} \right]$$

Or,

$$- \mathbb{E} \left[q \mathbb{1}_{\{g(X)=1\}} \right] = q \mathbb{P}(g(X) \neq 1) = q(1-n)$$

$$- \mathbb{E} \left[(1-q) \mathbb{1}_{\{g(X)=1\}} \right] = (1-q) \mathbb{P}(g(X)=1) = (1-q)n$$

On peut donc écrire

$$\text{L}_n(q) = \mathbb{E} \left[(\eta(X) - q) \mathbb{1}_{\{g(X)=1\}} + (q - \eta(X)) \mathbb{1}_{\{g(X)=1\}} \right] + q(1-n) + (1-q)n.$$

Par définition, $g^*(X) = 1 \Leftrightarrow q < \eta(X) \leq q$

$$\Leftrightarrow -2\eta(X) < -2q$$

$$\Leftrightarrow q < \eta(X)$$

Donc, $g^*(X) = 2 \mathbb{1}_{\{q < \eta(X)\}} - 1$ et, $\mathbb{P}(g^*(X)=1) = \mathbb{P}(\eta(X) > q) = n$.

$$\text{L}_n^* = \mathbb{E} \left[\min \left\{ \eta(X) - q ; q - \eta(X) \right\} \right] + q(1-n) + (1-q)n.$$

3) ① est une valeur spécifique de rejet.
 $\gamma \in]0, \frac{1}{2}[$.

$$\begin{aligned}
 L_{\gamma}^q(g) &= P(Y \neq g(X), g(X) \neq ①) + \gamma P(g(X) = ②) \\
 &= E[\mathbb{1}_{\{g(X)=-1\}} \gamma(X) + \mathbb{1}_{\{g(X)=1\}} (1-\gamma(X))] + \gamma P(g(X)=②) \\
 &= E[\mathbb{1}_{\{g(X)=-1\}} \gamma(X) + \mathbb{1}_{\{g(X)=1\}} (1-\gamma(X)) + \gamma \mathbb{1}_{\{g(X)=②\}}]
 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow g^+(X) = 1 \Leftrightarrow 1 - \gamma(X) < \gamma(X) \wedge 1 - \gamma(X) < \gamma$
 $\Leftrightarrow g^+(X) = -1 \Leftrightarrow \gamma(X) < 1 - \gamma(X) \wedge \gamma(X) < \gamma$
 $\Leftrightarrow g^+(X) = ② \Leftrightarrow \gamma < \gamma(X) \wedge \gamma < 1 - \gamma(X)$

Donc

$$g^+(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 - \gamma(X) < \gamma(X) \wedge 1 - \gamma(X) < \gamma \\ -1 & \text{si } \gamma(X) < 1 - \gamma(X) \wedge \gamma(X) < \gamma \\ ② & \text{si } \gamma < \gamma(X) \wedge \gamma < 1 - \gamma(X) \end{cases}$$

$\forall t \in]0, \frac{1}{2}[$

$$\gamma \leq 1 - \gamma$$

$$\text{Donc } g^+(X) < \gamma$$

$$\Rightarrow \gamma > 1 - \gamma > \gamma > 0$$

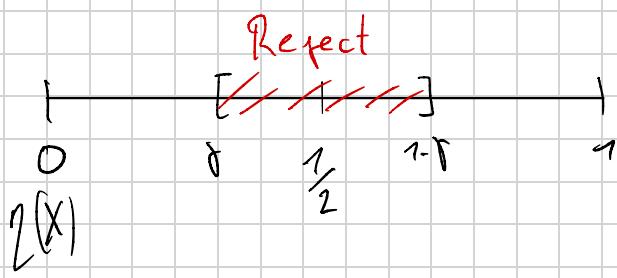
$$\text{et } 1 - \gamma < \gamma$$

$$\Leftrightarrow -\gamma < \gamma - 1$$

$$\Rightarrow \gamma > 1 - \gamma > \gamma > 0$$

$$\Rightarrow \gamma > 1 - \gamma > \gamma > 0$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } 1 - \gamma(X) < \gamma \\ -1 & \text{si } \gamma(X) < \gamma \\ ② & \text{si } \gamma < \gamma(X) < 1 - \gamma(X) \end{cases}$$



Ex 8)

$$\begin{aligned}
 \text{S) } A(f) &= \mathbb{E} \left[\max \{ 0, 1 - f(x) \} \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\max \{ 0, 1 - f(x) \} \mathbb{1}_{\{Y=1\}} + \max \{ 0, 1 + f(x) \} \mathbb{1}_{\{Y=-1\}} \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\max \{ 0, 1 - f(x) \} \mathbb{E} [\mathbb{1}_{\{Y=1\}} | X] + \max \{ 0, 1 + f(x) \} \mathbb{E} [\mathbb{1}_{\{Y=-1\}} | X] \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\max \{ 0, 1 - f(x) \} g(x) + \max \{ 0, 1 + f(x) \} (1 - g(x)) \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{f(x) \leq 1\}} (1 - f(x)) g(x) \right. \\
 &\quad \left. + \mathbb{1}_{\{f(x) \geq -1\}} (1 + f(x)) (1 - g(x)) \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{f(x) \leq -1\}} (1 - f(x)) g(x) \right] \xrightarrow{\text{2. max } \{g(x), 1 - g(x)\}} \text{f}(x) \leq -1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{s: } f(x) \in [-1, 1] &\quad 2 \min \{g(x), 1 - g(x)\} \leq + \mathbb{1}_{\{-1 \leq f(x) \leq 1\}} (1 - f(x)) g(x) + (1 + f(x))(1 - g(x)) \xrightarrow{\text{2. max } \{g(x), 1 - g(x)\}} \\
 &\quad + \mathbb{1}_{\{f(x) \geq 1\}} (1 + f(x))(1 - g(x)) \\
 &\quad \xrightarrow{\text{2. } 1 - g(x) \text{ s: } f(x) \geq 1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 2 \mathbb{1}_{\{1 - g(x) \leq 2\}} - 1 \\
 &= 2 \mathbb{1}_{\{\frac{1}{2} \leq g(x)\}}
 \end{aligned}$$

Disfonction de cas :

Fixons X .

Si $\gamma(x) < 1 - \gamma(x)$:

soit $f(x) < -1$:

$$(1 - f(x))\gamma(x) > 2\gamma(x)$$

si $f(x) > 1$:

$$(1 + f(x))(1 - \gamma(x)) > 2(1 - \gamma(x)) > 2\gamma(x)$$

si $f(x) \in [-1, 1]$:

$$2\gamma(x) < (1 - f(x))\gamma(x) + (1 + f(x))(1 - \gamma(x)) < 2(1 - \gamma(x))$$

$2\gamma(x)$ minore donc ces 3 termes. $f(x) = -1$ minimise donc l'intégrande pour un X fixé si $\gamma(x) < 1 - \gamma(x)$.

De la même manière, si $1 - \gamma(x) < \gamma(x)$, $2(1 - \gamma(x))$ minore les 3 termes. $f(x) = 1$ minimise donc l'intégrande pour un X fixé si $1 - \gamma(x) < \gamma(x)$.

Donc, $f(x) = 2\mathbb{I}_{\{\gamma(x) > \frac{1}{2}\}} - 1$.