# TD6

Ex 4. c) d)

Ex 5 : Revenir sur $C^1\left(\bigcup_{a>0} [a, +\infty[\right) \Rightarrow C^1(\mathbb{R}_{>0})$.

Si une fonction est $C^1$ sur $A$ et $B$, alors elle est $C^1$ sur $\mathring{A} \cup \mathring{B}$.

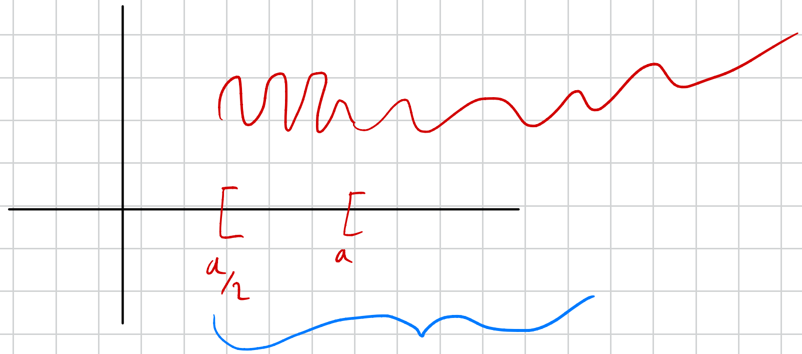
Ex : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \sin x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$


$f$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}_-$ $\left(f'(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_-\right)$

$f$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}_+$ $\left(f'(x) = -\cos x, \ \forall x \in \mathbb{R}_+\right)$

Donc, $f$ est $C^1$ sur $\mathring{\mathbb{R}}_- \cup \mathring{\mathbb{R}}_+$ i.e. $\mathbb{R}_{\neq 0}$.

Dans notre cas, l'union des intervalles $[a, +\infty[$ est égale à $\mathbb{R}_{>0}$ :




l'union des intérieurs est $]a/2, +\infty[$

⚠ $\bigcup_{a>0} [a, +\infty[ \neq \mathbb{R}_+$ !!

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_{>0}$, on pose $a = \frac{x}{2}$. On a la convergence normale de $\sum u_n'$ sur $[a, +\infty[$ et donc $S'(x)$ existe.

(Dérivée, continuité sont des notions locales : elles sont définies pour chaque point individuellement. Il suffit de considérer un voisinage de chaque point (d'où l'intérêt de trouver un intervalle où $x$ est inclus). On choisit un point dans $A$ $(\forall x \in A)$, on cherche un voisinage $(\exists B, x \in B)$ intéressant pour montrer la propriété)

Ex 6

1) $\forall n \geq 2$, $x \mapsto \frac{1}{n-x}$ et $x \mapsto \frac{1}{n+x}$ sont définies, continues et $C^\infty$ sur $]-2, 2[$. Or, $[0,1] \subset ]-2,2[$.

$]-n, n[$

Donc $u_n$ est continue sur $[0,1]$.

$\forall x \in [0,1]$, $\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} = \frac{n+x-n+x}{(n-x)(n+x)} = \frac{2x}{n^2+\cancel{nx}-\cancel{nx}-x^2} = \underbrace{\frac{2x}{n^2-x^2}}$

$\forall x \in [0,1]$, $\forall n \geq 2$, $u_n(x) \geq 0$

Ainsi, $\forall x \in [0,1]$,

$|u_n(x)| = u_n(x) = \frac{2x}{n^2-x^2} \leq \frac{2}{n^2-x^2} \leq \frac{2}{n^2-1}$

$\left( n^2 - x^2 \geq n^2 - 1 \, , \; \forall x \in [0,1] \right)$.

Or, $\frac{1}{n^2-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$. Le critère d'équivalence s'applique et les 2 suites sont de même nature.

$\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann conv.

donc $\sum \frac{1}{n^2-1}$ conv.

On en déduit que :

$\sum_{n\geq 2} \|u_n\|_{\infty,[0,1]} \leq 2 \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2-1}$.

La série des majorants converge donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge normalement sur $[0,1]$.

2) On commence par montrer que $u$ est $C^0([0,1],\mathbb{R})$

On pose $S_n = \sum_{k=2}^{n} u_k$. $S_n$ est une somme de fonction continue, $S_n$ est donc continue. On a montré à la q° que $(S_n)_{n\geq 2}$ converge uniformément. $u \in C^0([0,1],\mathbb{R})$. On veut montrer que $u'$ est $C^0$ sur $[0,1]$. On pose $S_n' = \sum_{k=2}^{n} u_k'$.

$$\forall n \geq 2, \forall x \in [0,1], u_n'(x) = \frac{1}{(n-x)^2} + \frac{1}{(n+x)^2} \leq \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2}$$
$$\leq \frac{2}{(n-1)^2}.$$

On obtient $S_n' \leq 2\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(n-1)^2}$. Or, la série

$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(n-1)^2}$ est une série de Riemann convergente. $u'$ converge donc uniformément (normalement), on en déduit que $u' \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ et finalement que $u \in C^1([0,1],\mathbb{R})$.

3) $\int_0^1 u(x)\,dx = \int_0^1 \sum_{n\geq 2} u_n(x)\,dx$

Car la série conv. uni et est continue $\rightarrow$ $= \sum_{n\geq 2} \int_0^1 u_n(x)\,dx$ (La série de fct° $\sum_{n\geq} u_n$ conv unif donc les $u_n(x)$ sont de + en + petit EN MÊME TEMPS ⚠ le n est fixé dans l'intégrale)

$= \sum_{n\geq 2} \int_0^1 \frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x}\,dx$

$= \sum_{n\geq 2} \int_0^1 \frac{1}{n-x}\,dx - \int_0^1 \frac{1}{n+x}\,dx$

$= \sum_{n\geq 2} \left[-\ln(n-x) - \ln(n+x)\right]_0^1$

$= \sum_{n\geq 2} \left(-\ln(n-1) - \ln(n+1) + \ln(n) + \ln(n)\right)$

$= \sum_{n\geq 2} \left(\ln\left(\frac{n}{n-1}\right) + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right)$

$= \sum_{n\geq 2} \ln\frac{n}{n-1} - \ln\frac{n+1}{n}$

4) On reconnait une série télescopique. On a

$$\sum_{n=2}^{N} \ln\frac{n}{n-1} - \ln\frac{n+1}{n} = \ln\frac{2}{1} - \ln\frac{N+1}{N}$$

$$= \ln 2 - \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right)$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2$$

On en déduit donc que $\int_0^1 u(x)\,dx = \ln 2$.

Ex 8

$w_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \dfrac{x}{x^2+n^2}$.

$v_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto (-1)^{n-1} w_n$, $\forall n \geq 1$.

1) $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\left(\dfrac{x}{x^2+n^2}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante et tend vers 0. D'après le critère des séries alternées, la série $\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} w_n(x)$ converge. Ainsi, la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge simplement.

(Encadrement reste : $\left|\sum_{k\geq n-1}^{+\infty} (-1)^{k-1} w_k(x)\right| \leq w_n(x)$

$= \dfrac{x}{x^2+n^2} \leq \dfrac{x}{2nx} = \dfrac{1}{2n}$ car $0 \leq (x-n)^2 = x^2+n^2-2nx$.

Le reste tend vers 0 donc la série converge)

2)a) $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{x}{x^2+n^2} = \dfrac{1}{x+\frac{n^2}{x}}$. On étudie

$x + \dfrac{n^2}{x}$. $\left(x+\dfrac{n^2}{x}\right)' = 1 - \dfrac{n^2}{x}$

$1-\dfrac{n^2}{x^2} > 0$ ssi $x > n$

$1-\dfrac{n^2}{x^2} < 0$ ssi $x < n$

$1-\dfrac{n^2}{x^2} = 0$ ssi $x = n$.

Ainsi, $w_n$ est croissate sur $[0,n]$ et décroisante sur $[n,+\infty[$.

b) On étudie $\|v_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+}$, $\forall n \geq 1$

$$\|v_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} = \sup_{x\in\mathbb{R}_+}\left\{\left|(-1)^{n-1}\frac{x}{x^2+n^2}\right|\right\}$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}_+}\left\{\frac{x}{x^2+n^2}\right\}$$

$$= \frac{n}{n^2+n^2} = \frac{1}{2n}.$$

On obtient $\sum_{n\geq 1}\|v_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$. Or, la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente.

La série $\sum_{n\geq 1} v_n$ ne convergent pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

3) On sait que la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$. Pour étudier sa convergence uniforme on considère le supremum des restes d'ordre $n$ :

$$\forall n \geq 1, \quad \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \{|R_n(x)|\} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \{w_n(x)\} = \frac{1}{2n}.$$

On a $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \{|R_n(x)|\} = 0$. La série $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge donc uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

$(\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \forall x \in \mathbb{R}_+, R_n(x) < \varepsilon)$

Conv simple $\Rightarrow \sum^{\infty} u_n(x) - f(x) = 0$

$$\Rightarrow \sum^{N-1} u_n(x) - f(x) = -\sum_N^{\infty} u_n$$

Or, $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \left|\sum^{N-1} u_n(x) - f(x)\right| = \left|\sum_N^{\infty} u_n\right| < \varepsilon$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \left\|\sum^{N-1} u_n - f\right\|_\infty = \sup\left\{\left|\sum_N^{\infty} u_n(x)\right|\right\} < \varepsilon$$

$$\sum \frac{(-1)^n (n^2-1)}{2(n^2+1)^2}$$