Ex 1

a) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} x^n = a(x)$.

On regarde $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Critère d'Alembert :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \to 1. \text{ Donc, } R = 1.$$

b) $b(x) = \sum_{n \geq 3} a_n x^n$ où $a_{2n} = 0$ et $a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{3^n+1}$. Soit $\rho > 0$,

On a $a_{2n} \rho^{2n} = 0$ et $|a_{2n+1} \rho^{2n+1}| = \frac{\rho^{2n+1}}{3^n+1}$

Si $\rho > \sqrt{3}$, $\frac{\rho^{2n+1}}{3^n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

Si $\rho < \sqrt{3}$, $\frac{\rho^{2n+1}}{3^n+1} \to \sqrt{3}$, donc la suite est bornée. On en déduit que $R = \sqrt{3}$.

c) $a_n = 2^n - n$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1} - (n+1)}{2^n - n} \underset{\infty}{\sim} \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2.$$

Ainsi, $R = \frac{1}{2}$

d) On cherche un équivalent simple à $a_n = \tan\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}$.

$$a_n = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \frac{1}{2n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{2n^3}$$

Notons $b_n = \frac{1}{2n^3}$. On a

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2n^3}{2(n+1)^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Donc, $R = 1$.

e) $e(x) = \sum e^{-n^2} x^n$. On applique la règle de Cauchy :

$a_n = e^{-n^2}$.

$$a_n^{1/n} = \left(e^{-n^2}\right)^{1/n} = e^{-\frac{n^2}{n}} = e^{-n} \longrightarrow 0.$$ Ainsi,

$R = +\infty$.

f) $f(x) = \sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^{2n}$. Posons $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^{2n}$.

$$|u_n| = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} |x|^{2n}.$$

Appliquons la règle de Cauchy.

$$|u_n|^{1/n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} |x|^2 \longrightarrow e|x|^2.$$

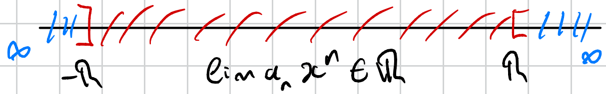
. Si $|x| < \frac{1}{\sqrt{e}}$, $e|x|^2 < 1$ et $\sum u_n$ converge absolument.

Cela implique donc que $R \geq \frac{1}{\sqrt{e}}$ (sup).

. Si $|x| > \frac{1}{\sqrt{e}}$, $e|x|^2 > 1$, et $\sum u_n$ diverge.

Cela implique donc que $R \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$.

On en conclut que $R = \frac{1}{\sqrt{e}}$.



Ex 2)

Comme $a_n \to 0$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Posons $C>0$ tel que $\forall n,\ a_n \leq C$. Ainsi, $((|a_n|))_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par C. On en déduit que $R \geq 1$.

Supposons $R>1$. Posons $1<\rho<R$. $\sum a_n$ diverge donc $\sum a_n \rho^n$ diverge aussi. Ainsi, $R \leq 1$. On en conclut que $R=1$

(et que $\sum a_n \rho^n$ converge $\forall \rho < R = 1$)

Ex 3)

D'après la définition, $\forall\, 0<r<R$, la suite $(|a_n| r^n)$ est majorée. Ainsi, $\forall\, 0<r_1<\sqrt{R}$, la suite $(|a_n|(r_1^2)^n)$ est majorée. Donc $R_{1/2} \geq \sqrt{R}$. D'autre part, si $r>R$, $(|a_n| r^n)$ diverge ce qui implique que $\forall\, r_1 > \sqrt{R}$, $(|a_n|(r_1^2)^n)$ diverge également. On en déduit que $R_{1/2} \leq \sqrt{R}$. Ainsi, $R_{1/2} = \sqrt{R}$.

Ex 4

$$f(x) = \sum \frac{x^{4n+1}}{4n+1}.$$

1) $f(x) = \sum a_n x^n$ avec $a_{4n+1} = \frac{1}{4n+1}$ et $a_n = 0$ si $n \not\equiv 1 [4]$.
Si $\rho < 1$, $a_n \rho^n \longrightarrow 0$ et donc $(a_n \rho^n)$ est bornée. Ce qui nous donne $R \geq 1$. Or, la série $\sum \frac{1}{4n+1}$ diverge, donc si $\rho \geq 1$, la série $\sum \frac{1}{4n+1} \rho^{4n+1}$ diverge également, ce qui implique $R \leq 1$. On a donc $R = 1$ et

$$f :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}.$$

2)
$$f'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{k \geq 0} (4k+1) \frac{1}{4k+1} x^{4k+1-1}$$
$$= \sum_{k \geq 0} x^{4k} = \frac{1}{1-x^4}.$$

3) On sait que $f'(x) = \frac{1}{1-x^4}$, $\forall x \in]-1, 1[$. On cherche une primitive de $f'(x)$.

$$\int_0^x \frac{1}{1-x^4}\,dx = \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int \frac{1}{1-x^2}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{1+x^2}\,dx + \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{1-x}\,dx + \int \frac{1}{1+x}\,dx\right)\right)$$

$$f_c(x) = \frac{\arctan(x)}{2} + \frac{1}{4}\left(\log(1+x) - \log(1-x)\right) + c$$

Or, $f(0) = 0$ donc, $f : x \mapsto \frac{\arctan(x)}{2} + \frac{1}{4}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Ex 5

a) $a(x) = \sum \frac{1}{n3^n} x^n$. Alembert, $R = 3$. Donc a est dérivable sur $]-3, 3[$:

$$a'(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{n x^{n-1}}{n 3^n} = \frac{1}{3} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{x}{3}\right)^n = \frac{1}{3-x}.$$

On intègre. $a(x) = -\log(3-x) + c$ et comme $a(0) = 0$, $c = \log(3)$. Ainsi

$$a(x) = \log\left(\frac{3}{3-x}\right).$$

b) $b(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{n+2}{n+1} x^n$

Alembert, $R = 1$. Pour $x \neq 0$,

$$c(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{n+1+1}{n+1} x^n = \sum_{n\geqslant 0}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) x^n = \sum_{n\geqslant 0} x^n + \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n+1} x^n$$

$$= \sum_{n\geqslant 0} x^n + \frac{1}{x}\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

$$= \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x}\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} x^n$$

$$= \frac{1}{1-x} - \frac{\log(1-x)}{x}.$$

De plus, pour $x = 0$, on trouve $c(0) = 2 = \lim_{x\mapsto 0} c(x)$

c) $c(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{n-1}{n!} x^n$.

Alembert : $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{(n+1)!} \frac{n!}{n-1} = \frac{n}{(n+1)(n-1)} = \frac{n}{n^2-1} \sim \frac{1}{n}$

$\to 0$

Donc $R = +\infty$.

On calcule $c(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{n}{n!} x^n - \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{n!} x^n - e^x$

$$= \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{(n-1)!} - e^x = x\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - e^x = x\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!} - e^x$$

$$= xe^x - e^x.$$