Universidade de São Paulo
IME-USP

Relatório Final
MAC0331

Gabriel Fernandes de Oliveira - 9345370
Luis Gustavo Bitencourt Almeida - 9298207

1 Projeto

O projeto implementado foi o do par de pontos mais próximos. Programamos, como orientado, as quatro soluções: força bruta, o algoritmo aleatorizado de Golin et all descrito no livro de Kleinberg e Tardos[1], o algoritmo de divisão e conquista de Shamos e Hoey[2] visto em sala e um algoritmo de linha de varredura[3].

2 Implementação

Não serão tratados aqui os algoritmos força bruta e divisão e conquista, que foram abordados em classe.

2.1 Linha de varredura

A ideia do algoritmo é analisar os pontos da entrada em ordem crescente de coordenada x, mantendo um par de pontos mais próximo dentre os pontos analisados até o momento bem como a distância δ entre esses dois pontos. Para tanto, o algoritmo mantem em uma árvore de busca binária (uma Treap na nossa implementação) com os pontos já visitados cuja coordenada x difere de no máximo δ do ponto que está sendo analisado agora. A chave utilizada na ABBB é a coordenada y do ponto. Caso dois pontos tenham a mesma coordenada y, usa-se a coordenada x para desempatá-los.

A análise de cada ponto p se dá em três etapas:

1. Remove-se da ABBB todos os pontos com coordenada x menor que $p.x-\delta$, pois é impossível que esses pontos façam parte de um par de pontos cuja distância seja menor que δ.

2. Verifica-se se algum dos pontos armazenados na ABBB, cuja coordenada y difere de $p.y$ de no máximo δ, forma um par com o ponto p à distância menor que δ, atualizando δ se for o caso.

3. Insere-se p na ABBB.

Cada remoção no passo 1 custa tempo esperado $\mathcal{O}(\lg n)$, perfazendo um total de tempo esperado de $\mathcal{O}(n \lg n)$, pois cada ponto é removido uma única vez. Similarmente, o passo 3 consome tempo esperado $\mathcal{O}(\lg n)$ por ponto inserido, totalizando também tempo esperado $\mathcal{O}(n \lg n)$.

Para realizar o passo 2, primeiramente busca-se na ABBB o ponto q sucessor a $(p.x - \delta, p.y - \delta)$. Repetidamente calcula-se a distância entre p e q, movendo q para o seu sucessor na ABBB, até atingir um ponto maior, na ordem da ABBB, que o ponto $(p.x, p.y + \delta)$. O ponto p deverá ser comparado por todos os pontos da área cinza escura ilustada na figura 1. Durante esse processo, o valor de δ é atualizado bem como o par de pontos mais próximo corrente, se for o caso.

A busca inicial e as buscas de sucessor na ABBB custam tempo esperado $\mathcal{O}(\lg n)$ e são feitas no máximo 8 outras buscas por sucessor por uma análise análoga à feita no algoritmo de divisão e conquista. Sendo assim, o tempo total esperado do passo 2 também é $\mathcal{O}(\lg n)$, totalizando assim um consumo de tempo total esperado $\mathcal{O}(n \lg n)$.

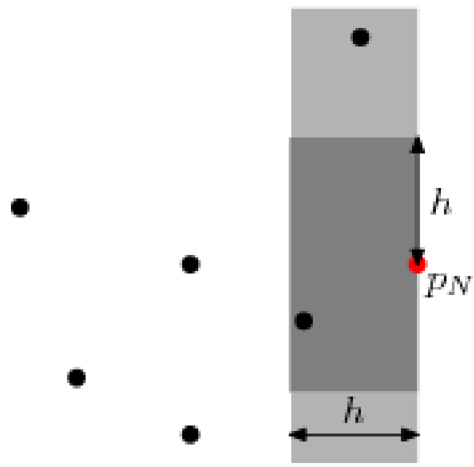


Figura 1: Exemplo do passo 2 de análise do ponto p_n

O passo 3, que consiste de uma simples inserção na ABBB, também ocorre em tempo $\mathcal{O}(\lg n)$

Portanto, como cada uma das três etapas da análise do line sweep é feita em complexidade $\mathcal{O}(\lg n)$ e essa análise vale para cada um dos pontos da entrada, concluímos que o algoritmo final roda em tempo $\mathcal{O}(n \lg n)$.

2.2 Algoritmo randomizado

A implementação e análise desse algoritmo foram totalmente baseadas no livro de Kleinberg e Tardos [1], no capítulo 13, subseção 7.

Incialmente, se realiza um embaralhamento aleatório dos pontos recebidos na entrada. Assume-se, por simplicidade, que os pontos na ordem aleatória estabelecida são $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

O algoritmo randomizado se organiza em etapas. Para cada etapa, define-se um valor δ, a distância mínima de um par de pontos analisada até o momento, e testa-se a hipótese de que δ é a menor distância entre todos pares de pontos.

Caso o teste confirme a hipótese, o programa é finalizado, retornando o valor atual de δ. Do contrário, atualiza-se o valor de δ, e repete-se o mesmo teste.

No início do algoritmo, δ é iniciado com a distância entre os pontos p_1 e p_2. Antes de se executar a rotina de teste, verifica-se se o valor de δ é zero. Se sim, o problema já está solucionado, pois não há como existir um par de pontos com distância negativa. Do contrário, executa-se normalmente a rotina de teste:

O primeiro passo consiste na subdivisão do plano em quadrados de lado $\delta/2$, formando uma grade, como representado na figura 2.

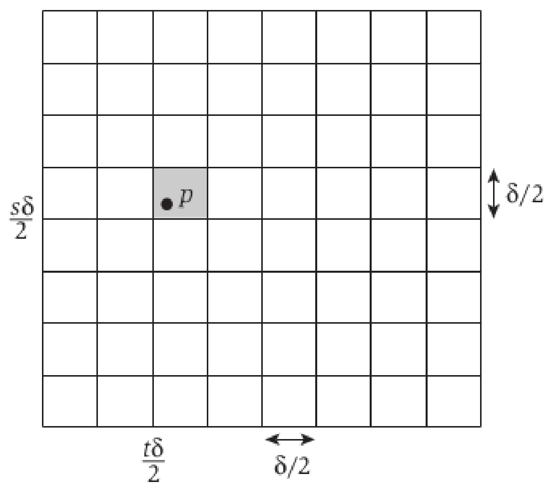


Figura 2: Subdivisão do plano

Em seguida, são analisados os pontos na ordem aleatória estabelecida. Para cada ponto, deve-se verificar se o mesmo dista menos que δ de algum ponto já adicionado.

Define-se como Q_{st} o quadrado da subdivisão de plano localizado na coluna s e linha t.

$$Q_{st} = \{(x, y) : s\delta/2 \leq x < (s + 1)\delta/2;\ t\delta/2 \leq y < (t + 1)\delta/2\}$$

Lema 2.1. *Para verificar se um ponto p_i atualiza δ basta avaliar a distância de p_i aos pontos já analisados que estiverem localizados em quadrados $Q_{s't'}$, onde $|s - s'| \leq 2$ e $|t - t'| \leq 2$.*

Demonstração. Considere um ponto p_j, que pertença a um quadrado $Q_{s't'}$ que não satisfaz a condição do lema em relação a um ponto p_i, pertencente ao quadrado Q_{st}, isto é, não vale que $|s - s'| \leq 2$ e $|t - t'| \leq 2$.

Sendo assim, conclui-se que, ou $|s - s'| > 2$ ou $|t - t'| > 2$. De qualquer modo, isso implica que entre o quadrado Q_{st} e $Q_{s't'}$, devem existir pelo menos dois outros quadrados.

O que, por sua vez, implica que os pontos p_i e p_j, distarão, mais que o dobro do lado de um quadrado, que vale, exatamente δ.

Deste modo, não há como p_i e p_j atualizarem o valor da distância mínima, δ, atual.

Devem considerar-se assim, apenas os pontos pertencentes a quadrados que estão em quadrados que satisfazem a condição do lema apresentado. □

Porém, isso implica que, para cada ponto p_i é necessário apenas analisar-se um subquadrado 5x5 centrado no quadrado que contem p_i, comparando a distância de p_i com os pontos presentes na área deste subquadrado.

Além disso, como provaremos, no máximo existirá um ponto já analisado em cada quadrado do plano sem que a distância mínima seja menor que δ. Portanto, para analisar cada um dos 25 quadrados próximos à p_i, no pior dos casos, comparar-se-a o ponto p_i com 25 outros pontos.

Demonstração. Imagine que o algoritmo está analisando o ponto p_i, que a menor distância entre um par de pontos já analisados é δ e que existe um quadrado na divisão do plano que possui dois pontos p_j e p_k já analisados, ou seja, $j, k < i$.

Neste caso, como p_j e p_k pertencem ao mesmo quadrado de lado $\delta/2$, então sua distância máxima será igual à diagonal do quadrado. Porém tal diagonal tem valor $\delta/\sqrt{2}$, que é menor que δ. Portanto p_j e p_k necessariamente tem que distar menos que δ um do outro. Chegamos assim a um absurdo, já que faz parte da hipótese que δ é a distância mínima entre os pontos já analisados.

Provamos assim que deve haver no máximo um ponto para cada quadrado em que o plano foi subdividido. $\square$

Esta análise realizada nos dá uma cota superior para o número de operações realizadas, um pouco maior que a cota superior real, que pode ser encontrada com cálculos mais detalhados, porém ela serve para nos indicar que o número de comparações que cada ponto analisado fará é constante. Totalizando assim um tempo $\mathcal{O}(n)$ para realizar a análise dos n pontos da entrada.

Ao analisar um ponto p_i, há duas possibilidades, ou ele forma, com um dos pontos previamente analisados uma distância menor que δ, ou não.

No primeiro caso, é necessário que se atualize o valor de δ para a menor distância formada em um par contendo p_i. Esse procedimento é custoso, pois implica que a subdivisão feita do plano, usando o valor anterior de δ, seja refeita para o novo valor δ.

Com a atualização da subdivisão, se faz necessária a repetição da rotina descrita até o momento. Não é necessário, no entanto, realizar novamente a análise de cada ponto até o i-ésimo ponto, já que eles, com certeza, não conseguirão diminuir o valor de δ atualizado.

A única operação que se faz necessária para esses pontos é inserí-los na nova divisão de plano feita com o valor de δ atualizado. Usando uma tabela de hash, é possível inserir pontos nos seus respectivos quadrados em tempo médio $\mathcal{O}(1)$. Como a atualização do i-ésimo ponto implica na reinserção de i pontos na tabela de hash, gasta-se um tempo médio total $O(i)$ caso o i-ésimo ponto altere o valor de δ.

A outra possibilidade é que o i-ésimo ponto não altere o valor de δ, neste caso, simplesmente o inserimos no seu quadrado correspondente da divisão de plano já existente, o que pode ser feito em tempo médio $\mathcal{O}(1)$ usando uma estrutura de Tabela de Hash.

Finalmente, temos que o consumo de tempo final do algoritmo é:

$$n + \sum_i iX_i$$

Definimos as variáveis aleatórias X_i como 1 se o i-ésimo ponto altera o valor de δ, gastando assim tempo $\mathcal{O}(i)$, e 0 do contrário, gastando então um tempo constante.

Analisaremos agora a probabilidade $Pr[X_i = 1]$, assumindo que o i-ésimo ponto muda o valor de δ.

Lema 2.2. $Pr[X_i = 1] \leq 2/i$

Demonstração. Imagine os primeiros i pontos da entrada na ordem aleatória definida. Definimos que a menor distância entre quaisquer dois desses pontos é atingida pelos pontos p e q.

Para que o i-ésimo ponto, ao ser analisado, atualize a menor distância de um par, deve valer que $p_i = p$ ou $p_i = q$. Como os pontos estão em ordem aleatória, existe uma probabilidade igual a $2/i$ de que $p_i = p \vee p_i = q$. □

Podemos concluir assim que o tempo total esperado desse algoritmo será:

$$
\begin{aligned}
&E[X] = n + \sum_i iE[X_i] \\
&E[X] \leq n + 2n \\
&E[X] \leq 3n
\end{aligned}
$$

Temos então um algoritmo de tempo total esperado médio linear, caso se use uma implementação utilizando tabelas de hash de tempo médio constante por inserção e acesso.

3 Animação

Nesta seção indicaremos como fizemos a escolha das cores da animação para cada um dos algoritmos implementados.

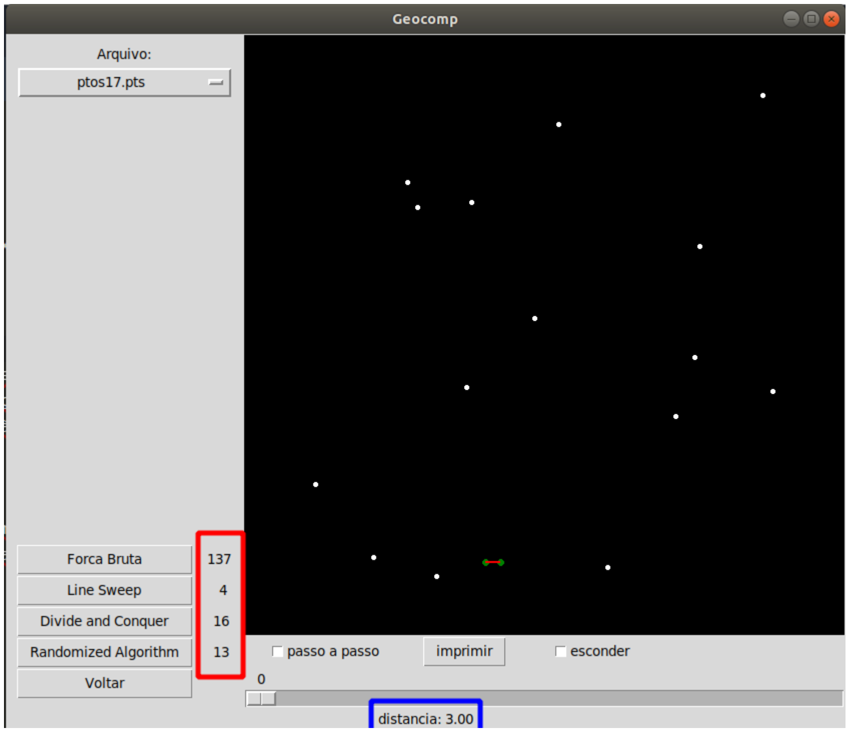


Figura 3: Interface gráfica fornecida

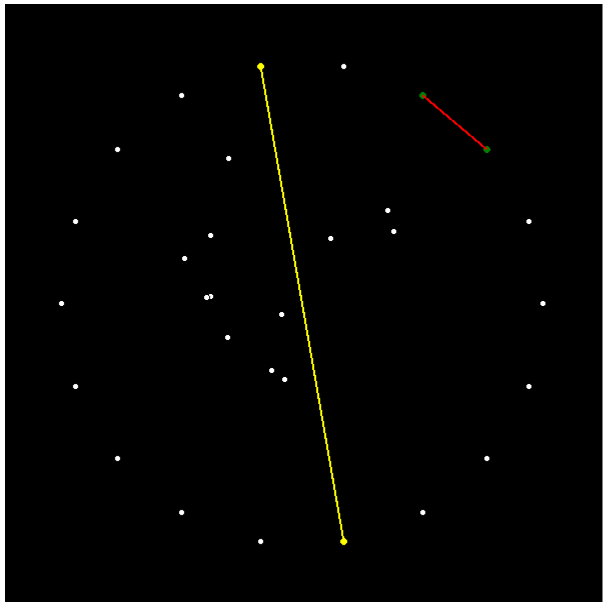
Na figura 3 podemos ver um pouco da interface gráfica que nos foi fornecida. Em vermelho se encontra destacado o número de chamadas à *dist*2 realizadas por cada algoritmo já rodado e em azul o valor da menor distância encontrado, referente ao último algoritmo executado.

Ao final de todos algoritmos sempre se mantem destacado no plano o par de pontos mais próximos, em cor verde, sendo os pontos ligados por um segmento vermelho.

3.1 Força bruta

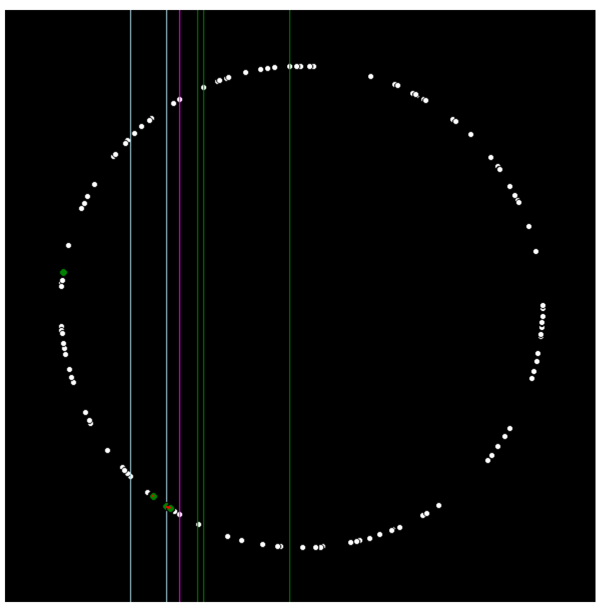
O par de pontos verdes ligado por um segmento vermelho indica o par de pontos mais próximo analisado até o momento.

Em amarelo estão indicados os testes de distância que o algoritmo realiza, caso a distância testada seja menor que a menor distância encontrada até o momento, retira-se o destaque do que era o par de pontos mais próximos, e pinta-se o segmento então amarelo de vermelho, e seus pontos extremos de verde.



3.2 Divisão e conquista

Escolhemos três cores de retas verticais para sabermos o estado da recursão.



A cor verde de uma reta vertical indica que foi realizada uma chamada recursiva para a esquerda da reta, a cor azul claro indica que houve uma chamada

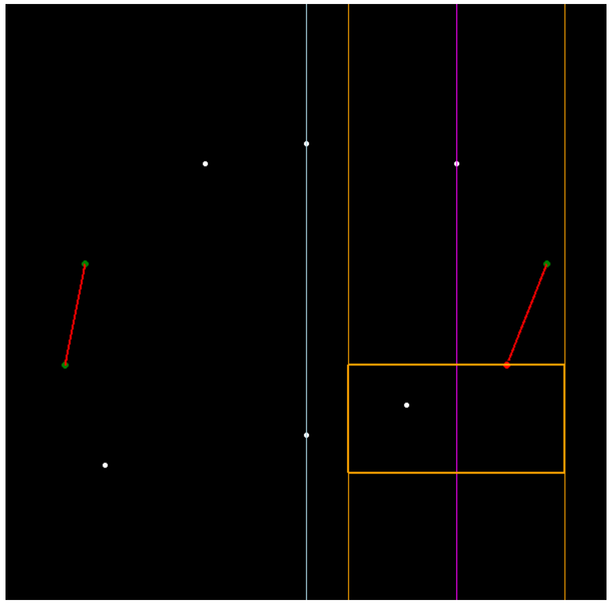


Figura 4: Vemos dois segmentos vermelhos na figura, resultados das recursões já resolvidas

recursiva para a direita da reta. Já o magenta indica que uma função acabou de receber o retorno de suas chamadas recursivas, e irá entrar no processo de "merge".

Os pontos vermelhos vistos na animação indicam o ponto que se está atualmente considerando no processo de "merge".

A cor laranja foi utilizada em dois objetos:

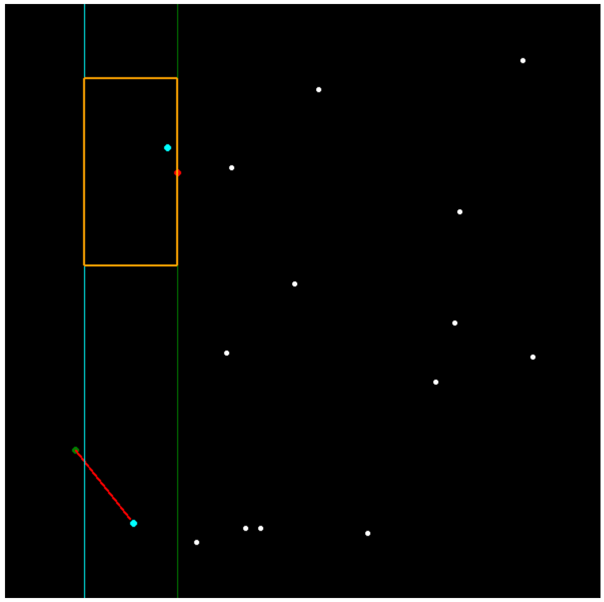
- Duas retas verticais, indicando os pontos que serão analisados no "merge"
- Um retângulo que indica, mais especificamente, quais os pontos que serão comparados com o ponto vermelho atualmente analisado

Outra decisão de projeto que tomamos foi manter desenhado no plano o menor par de pontos encontrado pelas chamadas recursivas já resolvidas. Por isso, em alguns momentos, haverá mais que um segmento vermelho com extremos verdes desenhado, como ocorre em 4.

3.3 Linha de varredura

Para animar a linha de varredura usamos uma reta vertical de cor verde. Sempre acompanhando essa reta vem outra reta vertical ciano, à distância δ da reta verde.

As duas retas verticais representam o intervalo de pontos que pertence à ABBB. Para ressaltar ainda mais os pontos que pertencem à ABBB, também



optamos por pintá-los de ciano.

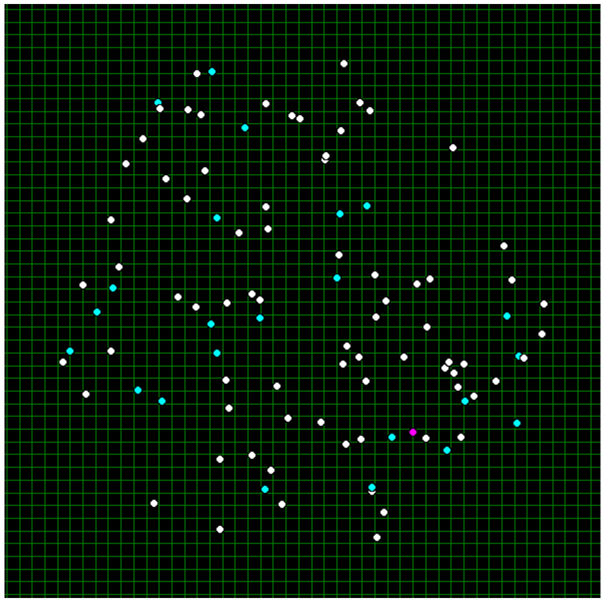
Representa-se o ponto atualmente analisado pela cor vermelha.

Mantem-se com um segmento vermelho e cores verdes o par de pontos mais próximo analisado até o instante.

Além disso, similarmente ao algoritmo de divisão e conquista, mantemos um retângulo laranja que contem os pontos que serão comparados com o ponto vermelho, atualmente analisado.

3.4 Algoritmo randomizado

Em verde representa-se a divisão do plano em quadrados de lado $\delta/2$. Usamos o ciano para representar os pontos já analisados, e o magenta para o ponto que está sendo analisado no momento.



Referências

[1] Jon Kleinberg e Éva Tardos, *Algorithm Design*. Addison-Wesley Professional; 1ª Edição

[2] M. I. Shamos e D. Hoey. *Closest-point problems*. In Proc. 16th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS), pp. 151—162, 1975 (DOI 10.1109/SFCS.1975.8)

[3] Post de bmerry sobre algoritmos de Line Sweep
`https://www.topcoder.com/community/competitive-programming/tutorials/line-sweep-algorithms/`