O problema do carteiro chinês

Carlos Eduardo Ferreira
Gabriel Fernandes de Oliveira

1 As sete pontes de Königsberg

Teorema 1.1 (Teorema de Euler ou de Euler-Hierholzer)**.** *Um grafo é euleriano se, e somente se, é conexo e todos seus vértices possuem grau par.*

(texto sobre circuitos eulerianos em grafos não direcionados cortado)

Até então tratamos apenas de grafos não direcionados, mas podemos expandir esses mesmos conceitos para grafos direcionados, os **digrafos**.

Um grafo é direcionado quando suas arestas são orientadas, ~~as quais~~ chamaremos de **arcos**. tais arestas .

Numa analogia com trânsito, uma aresta é como uma estrada de mão dupla, pode-se percorrê-la nos dois sentidos, enquanto que um arco é como uma rua de mão única, em que apenas um sentido é permitido.

Como agora as arestas possuem uma orientação, é necessário refinar a noção de grau de um vértice: Denominamos **grau de saída** de um vértice v como o número de arcos que saem de v, e **grau de entrada** como o número de arcos que entram em v. Denotaremos o grau de entrada de v como $\delta_{in}(v)$ e seu grau de saída como $\delta_{out}(v)$.

δ^-

δ^+

?

Podemos dizer que um digrafo é **fortemente conexo** quando existe um caminho orientado entre quaisquer dois vértces do mesmo. ?

Dadas as devidas definições, apresentaremos agora o teorema de Euler para o caso de digrafos:

Teorema 1.2 (Teorema de Euler para digrafos)**.** *Seja G um digrafo fortemente conexo.*

G é euleriano se, e somente se, todos seus vértices têm valores de grau de entrada e saída iguais, ou seja, se para todo vértice v de G vale que $\delta_{in}(v) = \delta_{out}(v)$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja G um digrafo euleriano e C o circuito euleriano do mesmo.

Vamos assumir, contrariando o teorema, que G possui um vértice v que tem valores diferentes de grau de entrada e saída.

Assumimos, sem perda de generalidade, que o grau de saída de v, $\delta_{out}(v)$ é maior que seu grau de entrada, $\delta_{in}(v)$. Para que cada arco que sai de v seja percorrido uma única vez, é necessário que o circuito C passe por v exatamente δ_{out} vezes. Porém, como v tem grau de entrada menor que o grau de saída, C deverá percorrer algum arco que entra em v mais de uma vez. Contradizendo assim a condição inicial de que C é um circuito euleriano.

Por absurdo, provamos que todos vértices de um digrafo euleriano devem possuir o mesmo valor de grau de entrada e saída.

($\Leftarrow$) Provaremos a volta por indução no número de arcos de G. A prova a seguir é similar à utilizada na prova do teorema 1.1 para o caso de grafos não direcionados.

O caso base desta indução é o digrafo G fortemente conexo e sem arcos. Neste caso G consistirá de um único vértice v, sendo assim $\{v\}$ será um circuito euleriano válido.

A hipótese de indução é que todo digrafo fortemente conexo, que possui vértices com grau de entrada e saída iguais e que possui até $k-1$ arcos é euleriano.

Seja G, portanto, um digrafo fortemente conexo, em que todos vértices tem igual grau de entrada e saída mas que possui $k > 0$ arcos.

Inicialmente provaremos que G deve possuir um caminho fechado C:

Provando a existência de um caminho fechado em um digrafo G que possui vértices com grau de entrada e saída iguais
Tome um caminho maximal P de G, sendo v o último vértice de tal caminho.
Como o grau de entrada e saída dos vértices de G é igual, e que o vértice v tem ao menos um arco entrando nele, que é percorrido no caminho P, podemos concluir que v possui também um arco saindo dele, vw, não percorrido por P. Além disso, como P é maximal, podemos concluir w já deve pertencer a P.
Com isso prova-se a existência de um caminho fechado no grafo G, formado pelo arco vw e o subcaminho de w a v de P.

Provada a existência de C temos dois casos a analisar:

1. C **percorre todos arcos de** G. Neste caso, C é o circuito euleriano, finalizando a prova.

2. C **não percorre todos arcos de** G. Definimos então G' como o grafo G sem os arcos pertencentes a C.

Como estamos retirando do grafo G um caminho fechado, todo vértice em C perderá apenas um arco de entrada e de saída, mantendo em G' a característica de igualdade do grau de entrada e saída dos vértices.

Porém, não é garantido que G' é fortemente conexo.

Seja G então a união de k componentes fortementes conexas $G'_1, G'_2, \ldots, G'_k$ disjuntas entre si.

Sabemos que cada componente G'_i possuirá uma quantidade de arcos menor que k. Portanto, pela hipótese de indução definida. cada componente de G' é euleriana. Chamaremos de C_i o circuito euleriano da componente G'_i.

Mostraremos

~~Definiremos~~ agora um algoritmo que construirá um circuito euleriano $\mathcal{C}$ de G a partir de C e dos circuitos eulerianos C'_i:

Definimos $\mathcal{T}$, como o conjunto dos circuitos eulerianos C_i que ainda não fazem parte de $\mathcal{C}$. Inicialmente, $\mathcal{T}$ é igual ao conjunto $\{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$.

Para cada vértice u de C devemos realizar as seguintes verificações:

Começamos adicionando u ao circuito euleriano $\mathcal{C}$ que estamos construindo.
Enquanto houver um circuito euleriano C_i pertencente a $\mathcal{T}$ do qual u faz parte, fazemos o seguinte:

(a) Representamos C_i como:

$$C_i = \{u, u_2, \ldots, u_l, u\}$$

(b) Adicionamos ao final de $\mathcal{C}$ o circuito C_i como representado, exceto pelo primeiro vértice u.

(c) Removemos de $\mathcal{T}$ o circuito C_i, indicando que o mesmo já foi adicionado a $\mathcal{C}$.

Repetem-se então as mesmas verificações para os próximos vértices de C.

Ao final desse procedimento, o conjunto $\mathcal{T}$ deverá ser vazio, já que todo circuito C_i possui pelo menos um vértice em C. Além disso, todo circuito C_i deverá ter sido adicionado ~~a~~ $\mathcal{C}$ uma única vez, já que logo após adicionar um circuito ~~a~~ $\mathcal{C}$ já o removiamos de $\mathcal{T}$, impedindo que ele fosse adicionado outra vez no circuito euleriano final.

Como é possível realizar a construção de um circuito euleriano $\mathcal{C}$ provamos que qualquer digrafo fortemente conexo com vértices possuindo valores iguais de grau de entrada e saída é euleriano.

□

2 O problema do Carteiro Chinês (PCC)

Discutiremos nas seções a seguir a solução para o problema em questão com base nas especificidades do grafo do problema. Desconsideraremos nas análises a seguir grafos que possuam vértices isolados, isto é, vértices que não possuam arestas, já que tais vértices não afetam a solução do problema.

2.1 Grafos não direcionados

Acho que você removeu um pedaço...

Lema 1. *Para todo grafo simples e conexo, existirá uma solução ótima do PCC em que cada aresta é copiada no máximo 1 vez, ou seja que x_e valerá apenas 0 ou 1.* ?

Lema 2. *Para todo grafo G simples e conexo, haverá uma solução ótima do PCC cujo conjunto de arestas duplicadas consistirá na união de caminhos de custo mínimo entre vértices de grau ímpar.*

2.2 Grafos direcionados

Analisaremos agora o problema do carteiro chinês aplicado a digrafos.

Lema 3. *Um digrafo G possui solução para o problema do carteiro chinês se, e somente se, é fortemente conexo.*

Por que não fazer por absurdo?

Demonstração. (⇒) Começamos que para que um digrafo G possua solução para o problema do carteiro chinês é necessário que o mesmo seja fortemente conexo.

Pela definição, para que G possua uma solução do PCC é necessária a existência de um passeio fechado passando por todos arcos de G.

Por sua vez, a existência de um passeio fechado implica também na existência de um caminho entre qualquer par de vértices de G, isto é, G deve ser fortemente conexo. Por isso, podemos afirmar que um digrafo deve ser fortemente conexo para possuir uma solução do problema do carteiro chinês.

Está estranho?

(⇐) Além disso, podemos argumentar que todo digrafo, G, fortemente conexo possui solução para o problema do carteiro chinês.

Precisa formalizar . . .
Por que atinge todos?

Seja v um vértice qualquer de G. Podemos construir uma solução P para o problema do carteiro chinês do seguinte modo:

Para todo arco uw de G adicionamos a P um circuito que percorre tal aresta, que pode ser formado pela junção do caminho de v a u, da aresta uw e do camiho de w a v. A existência de tais caminhos é garantida já que G é fortemente conexo.

Deste modo é possível construir um passeio fechado P que percorre todos arcos de G, sendo assim uma solução para o PCC.

Provando assim, a volta do lema: todo digrafo fortemente conexo possui uma solução para o problema do carteiro chinês.

□

De modo análogo ao caso de grafos não direcionados, o algoritmo que soluciona o problema do carteiro chinês para digrafos envolve multiplicar arestas do grafo original até que o mesmo se torne euleriano, a partir do circuito euleriano desse digrafo modificado define-se o passeio fechado que é a solução do problema do carteiro chinês no digrafo original.

Uma grande diferença na solução do problema do carteiro chinês é que, para digrafos, não vale o lema 1, que garante a existência de uma solução para todo PCC em que cada aresta do grafo é percorrida no máximo duas vezes.

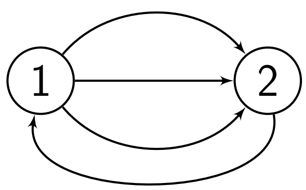

Figura 1: Contra exemplo do lema 1 para os digrafos

Para os digrafos, tal lema não vale, um contra-exemplo disso é o caso ilustrado em 1. Nele, para que um passeio fechado percorra os três arcos de 1 a 2, é necessário que esse mesmo passeio percorra três vezes o arco de 2 a 1.

O lema 1 é utilizado para justificar a utilização de um algoritmo de emparelhamento perfeito para definir quais arestas duplicar na solução do PCC. Como tal lema não vale para digrafos, a escolha dessas arestas deverá ser feita de um modo diferente, utilizando um algoritmo de fluxo máximo de custo mínimo, como veremos a seguir.