

O problema do Carteiro Chinês

Gabriel Fernandes de Oliveira

Orientador: Carlos Eduardo Ferreira

São Paulo, 2020

Sumário

1	Grafos eulerianos	3
1.1	As sete pontes de Königsberg	3
1.2	Grafos não direcionados	4
1.3	Grafos direcionados	8
1.4	Algoritmo de Hierholzer	15
2	O problema do Carteiro Chinês (PCC)	22
2.1	Grafos não direcionados	23
2.2	Grafos direcionados	28
2.3	Grafos mistos	37
2.4	Problema do carteiro rural	43
2.4.1	PCR em grafos não direcionados	44
2.4.2	PCR em grafos direcionados	48
3	Problemas resolvidos	55
3.1	Tanya and Password	55
3.2	Sereja and the Arrangement of Numbers	57
3.3	Jogging Trails	61

1 Grafos eulerianos

1.1 As sete pontes de Königsberg

O problema das sete pontes de Königsberg foi descrito e solucionado pelo matemático Leonhard Euler em 1736. O problema consistia em decidir se seria possível traçar no mapa de Königsberg um trajeto que percorresse cada uma de suas 7 pontes uma única vez, sem repetições.

Euler resolveu esse problema do seguinte modo: Primeiramente, ele identificou cada uma das massas de terra do mapa com as letras A, B, C e D.

Em seguida, ele definiu que um trajeto nesse mapa seria descrito por uma sequência dessas letras: por exemplo, “ACD” indicaria o trajeto que se inicia na massa de terra A, move-se para a massa de terra C, usando uma das pontes, e termina na massa D.



Figura 1: Representação das sete pontes de Königsberg



Figura 2: Representação de Euler

Euler então começou a definir algumas restrições, assumindo que o problema possuiria alguma solução:

Como o trajeto final deverá passar por todas as 7 pontes exatamente uma vez, isso implica que a sequência de letras que o representa deverá ter tamanho 8.

Além disso, como a massa de terra A possui 5 pontes, necessariamente a letra A aparecerá exatamente 3 vezes na sequência.

A massa B, C e D, no entanto possuem 3 pontes, portanto, suas letras correspondentes deverão aparecer apenas 2 vezes na sequência.

Chegamos assim a um absurdo, pois provamos que a sequência de letras que representa uma solução deveria ter tamanho 8 e 9. Provando assim que não existe um trajeto como o pedido no enunciado do problema.

Essa observação que, aos olhos de hoje, parece muito simples, teve um impacto profundo nas áreas da Matemática e Computação. A modelagem de

Euler, tratando as massas de terra e pontes de forma abstrata foi absolutamente inovadora e é o embrião da área da teoria dos grafos.

1.2 Grafos não direcionados

Antes de voltar ao problema de Euler, realizaremos algumas definições de teoria dos grafos.

Define-se como **passeio** em um grafo uma sequência finita não vazia $P = \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$, cujos termos são vértices v_i tais que, para todo i , $0 \leq i < k$, os vértices v_i e v_{i+1} são ligados por uma aresta. Os vértices v_0 e v_k são a origem e o término de P , respectivamente; e os vértices v_1, v_2, \dots, v_{k-1} são chamados vértices internos de P .

Uma **trilha** é um passeio sem arestas repetidas enquanto que um **caminho** é um passeio sem vértices repetidos. Definimos o comprimento de um passeio, denotado por $\|P\|$, como o número de arestas de P .

Um passeio é considerado **fechado** se sua origem e término são iguais.

Uma trilha fechada é um **circuito**.

Devido às contribuições de Euler ao problema descrito, chama-se **trilha euleriana** como uma trilha que passa por todas arestas de um grafo e **grafo euleriano** como um grafo que possui um circuito euleriano fechado.



Figura 3: Grafo de Königsberg

Euler modelou essa área da cidade como um grafo, representado na figura 3, tratando as pontes como arestas e as massas de terra como vértices.

A partir de tal modelagem e das definições feitas, o problema das pontes de Königsberg consiste, em definir se o grafo que representa a cidade possui ou não uma trilha euleriana.

Apesar de ter recebido grande parte do crédito histórico pelas suas implicações, Euler não provou que qualquer grafo conexo com vértices de grau par é euleriano, essa prova só foi publicada mais de cem anos depois, em 1873, por Carl Hierholzer [Hie73], no que se tornou o conhecido Teorema de Euler.

Teorema 1.1 (Teorema de Euler ou de Euler-Hierholzer). *Um grafo é euleriano se, e somente se, é conexo e todos seus vértices possuem grau par.*

Para suportar a prova de tal teorema, primeiramente apresentaremos o seguinte lema:

Seja $\delta(G)$ o **grau mínimo** de um vértice pertencente a G .

Lema 1. Se G é um grafo tal que $\delta(G) \geq 2$, então G possui um circuito.

Demonstração. Vamos assumir que um grafo qualquer $G = \{V, A\}$ não possui um caminho fechado. Seja P um caminho de comprimento maximal pertencente a G , denominamos v um dos extremos de P . Como P é um caminho de comprimento maximal, é impossível, por definição, que v possua uma aresta vu que o ligue a um vértice u não pertencente a P .

Como, da premissa, todos vértices possuem grau maior ou igual a 2, isso implica que v possuirá ao menos duas arestas que o ligam a vértices pertencentes a P .

Porém, como v é um vértice extremo de P , apenas uma dessas arestas pode pertencer ao caminho P . Isso implica que a outra aresta, digamos vw , não pertencente a P , implica na existência de um caminho fechado.

Basta tomar o subcaminho entre os vértices v e w pertencente à P juntamente com a aresta vw que teremos um caminho fechado. Chegando assim em uma contradição.

Demonstra-se assim que G deverá possuir ao menos um caminho fechado dadas as condições do lema. \square

Provado tal lema, podemos agora provar o teorema 1.1:

Demonstração. Seja $G = \{V, E\}$ o grafo em questão.

(\Rightarrow) Começamos provando que se um grafo é euleriano então todos seus vértices possuem grau par.

Seja T um circuito euleriano, cuja existência é garantida já que G é euleriano. Analisaremos o grau de um vértice qualquer v de G .

Se v não for um vértice extremo de T , então sempre que o mesmo aparecer em T ele deverá ser precedido e sucedido de arestas, indicando assim que v deverá possuir um grau par.

Do contrário, se v for o vértice extremo de T ele necessariamente possui duas arestas, uma ligando-o ao segundo vértice do circuito, e outra o ligando ao penúltimo vértice de T . Além disso, cada aparição de v como vértice interno de T contabiliza mais duas arestas ao vértice em questão, de modo que v possuirá um grau par ao final.

Sendo assim, se G é euleriano, então todos seus vértices (extremos ou não) possuem grau par, como queríamos demonstrar.

(\Leftarrow) Agora, provaremos por indução no número de arestas de G que se o grafo for conexo e se todos seus nós possuem grau par, então ele é euleriano.

O caso base da indução é quando não há arestas em G . O único grafo conexo que respeita tal condição é o grafo que possui apenas um vértice v . Neste exemplo, $\{v\}$ é o circuito euleriano do grafo.

A hipótese de indução é que todo grafo simples, conexo, que possui até $k - 1$ arestas e cujos vértices têm grau par é euleriano. Seja G um grafo conexo, de vértices de grau par e que possua $k > 1$ arestas, provaremos que ele também deverá ser euleriano.

Como G é conexo, vale que $\delta(G) \geq 1$ e como todos nós de G têm grau par, podemos afirmar que $\delta(G) \geq 2$. Sendo assim, pelo lema 1, G deverá possuir um circuito C .

Se C possui todas arestas de G , então C é um circuito euleriano do grafo, finalizando a prova.

Do contrário, aplicamos o seguinte procedimento para constuir um circuito euleriano \mathcal{C} de G :

Retira-se de G as arestas pertencentes a C , resultando assim em um grafo G' . Possivelmente G' será desconexo, por isso definimos que G' será a união de k componetes conexas G'_1, G'_2, \dots, G'_k disjuntas entre si.

O grau dos vértices dessas componentes G'_i deverá ser par, já que, ao retirar todas as arestas de um circuito do grafo G , diminuimos o grau de um vértice qualquer v em duas vezes o número de aparições do mesmo no circuito. mantendo assim a paridade dos graus.

Além disso, cada componete conexa de G' possuirá uma quantidade de arestas menor do que k . Portanto, pela hipótese da indução, cada uma dessas componentes deverá possuir um circuito euleriano próprio. Chamaremos de C_i o circuito euleriano da componente G'_i .

Ao longo do algoritmo, os circuitos C_i serão adicionados, um a um, ao circuito resultante \mathcal{C} . Definimos \mathcal{T} , como o conjunto dos circuitos eulerianos C_i que ainda não fazem parte de \mathcal{C} . Inicialmente, \mathcal{T} é igual ao conjunto $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$.

$$C = \{v, v_2, \dots, v_n, v\}$$

Para cada vértice u de C devemos realizar as seguintes verificações:

Começamos adicionando u ao circuito euleriano \mathcal{C} que estamos construindo.

Enquanto houver um circuito euleriano C_i pertencente a \mathcal{T} do qual u faz parte, fazemos o seguinte:

1. Representamos C_i como:

$$C_i = \{u, u_2, \dots, u_l, u\}$$

2. Adicionamos ao final de \mathcal{C} o circuito C_i como representado, exceto pelo primeiro vértice u .
3. Removemos de \mathcal{T} o circuito C_i , indicando que o mesmo já foi adicionado a \mathcal{C} .

Repetem-se então as mesmas verificações para os próximos vértices de \mathcal{C} .

Ao final desse procedimento, o conjunto \mathcal{T} deverá ser vazio, já que toda trilha C_i possui pelo menos um vértice em \mathcal{C} . Além disso, toda trilha C_i deverá ter sido adicionada à \mathcal{C} uma única vez, já que logo após adicionar uma trilha à \mathcal{C} já a removíamos de \mathcal{T} , impedindo que ela fosse adicionada outra vez na trilha euleriana final.

Comprovado o passo da indução, finalizamos a prova do Teorema de Euler por indução.

□

Corolário 1. *Um grafo possui uma trilha euleriana se, e somente se, é conexo e possui apenas zero ou dois vértices de grau ímpar.*

Demonstração. Seja G um grafo conexo qualquer. Realizaremos a demonstração para os seguintes casos:

1. G não possui vértices de grau ímpar. Neste caso, G possui, segundo o teorema 1.1, um circuito euleriano, e portanto, uma trilha euleriana.
2. G possui apenas um vértice de grau ímpar. Este caso é impossível de se acontecer, já que a soma do grau de todos vértices deve ser par, impossibilitando assim que apenas um vértice tenha grau ímpar.
3. G possui dois vértices de grau ímpar.

Sejam u e v os únicos vértices de G que possuem grau ímpar. Adiciona-se uma aresta fictícia ao grafo G , a aresta uv , fazendo com que tanto

u quanto v possuam graus pares. Chamaremos o grafo G acrescido da aresta uv de G' . Como u e v eram os únicos vértices de grau ímpar de G , vale que todos vértices de G' possuirão grau par. Além disso, vale que G' é conexo, pois faz parte da premissa que o grafo original G era conexo.

Sendo assim, podemos aplicar o teorema 1.1, provando a existência de um circuito euleriano G' , que chamaremos de C . Por ser euleriano, C deverá percorrer a aresta uv inserida, portanto podemos representar C com u e v lado a lado, do seguinte modo:

$$C = \{u, v, w_1, w_2, \dots, w_k, u\}$$

Tome, agora, T igual ao circuito C sem seu vértice inicial:

$$T = \{v, w_1, w_2, \dots, w_k, u\}$$

Tal procedimento retira do circuito C a aresta artificial uv , transformando-o em uma trilha T , que percorre todas arestas de G' exceto uv , sendo portanto uma trilha euleriana do grafo G .

4. G possui três ou mais vértices de grau ímpar.

Assuma que existe uma trilha euleriana T para G . Neste caso, como pelo menos 3 vértices possuem grau ímpar, necessariamente existirá um vértice v que não é nem o primeiro nem o último vértice de T . Isso implica que todas aparições de v em T são internas ao caminho, ou seja, toda aparição de v será precedida e sucedida de arestas ligadas a v . Como estamos tratando de uma trilha euleriana, sabemos que todas arestas adjacentes a v estão presentes em T uma única vez. Mas como todas arestas de v devem aparecer em pares (precedendo e sucedendo v), isso implica que o grau de v deverá ser par. Contradizendo a premissa.

Por essa contradição provamos que G não possuirá trilha euleriana se tiver três ou mais vértices de grau ímpar.

□

1.3 Grafos direcionados

Até então tratamos apenas de grafos não direcionados, mas podemos expandir esses mesmos conceitos para grafos direcionados, os **digrafos**.

Um grafo é direcionado quando suas arestas são orientadas, chamaremos de **arcos** tais arestas.

Numa analogia com trânsito, uma aresta é como uma estrada de mão dupla, pode-se percorrê-la nos dois sentidos, enquanto isso, um arco é como uma rua de mão única, em que apenas um sentido é permitido.

Quanto tratamos de grafos direcionados (ou digrafos), é necessário refinar a noção de grau de um vértice: Por isso, denominamos **grau de saída** de um vértice v , $\delta^-(v)$, como o número de arcos que saem de v , e **grau de entrada**, $\delta^+(v)$, como o número de arcos que entram em v .

Definimos como **fortemente conexo** um digrafo que possui um caminho entre todo par de vértices, e como **fracamente conexo** um digrafo que possui para todo par de vértices u e v um caminho de u a v ou de v a u .

Dadas as devidas definições, apresentamos agora o teorema de Euler para o caso de digrafos:

Teorema 1.2 (Teorema de Euler para digrafos). *Seja G um digrafo fortemente conexo. G é euleriano se, e somente se, todos seus vértices têm valores de grau de entrada e saída iguais, ou seja, se para todo vértice v de G vale que $\delta^+(v) = \delta^-(v)$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Seja G um digrafo euleriano e C o circuito euleriano do mesmo.

Vamos assumir, contrariando o teorema, que G possui um vértice v que tem valores diferentes de grau de entrada e saída.

Assumimos, sem perda de generalidade, que $\delta^-(v) > \delta^+(v)$. Para que cada arco que sai de v seja percorrido uma única vez, é necessário que o circuito C passe por v exatamente δ^+ vezes. Porém, como v tem grau de entrada menor que o grau de saída, C deverá percorrer algum arco que entra em v mais de uma vez. Contradizendo assim a condição inicial de que C é um circuito euleriano.

Por absurdo, provamos que todos vértices de um digrafo euleriano devem possuir o mesmo valor de grau de entrada e saída.

(\Leftarrow) Provaremos a volta por indução no número de arcos de G . A prova a seguir é similar à utilizada na prova do teorema 1.1 caso de grafos não direcionados.

O caso base desta indução é o digrafo G conexo sem arcos. Neste caso G consistirá de um único vértice v , sendo assim $\{v\}$ será um circuito euleriano válido.

A hipótese de indução é que todo digrafo fortemente conexo, que possui vértices com grau de entrada e saída iguais e que possui até $k - 1$ arcos é euleriano.

Seja G , portanto, um digrafo fortemente conexo, em que todos vértices têm grau de entrada igual ao de saída mas que possui $k > 0$ arcos.

Inicialmente provaremos que G deve possuir um caminho fechado C :

Provando a existência de um caminho fechado em um digrafo G que possui vértices com grau de entrada e saída iguais

Tome um caminho maximal P de G , sendo v o último vértice de tal caminho.

Como o grau de entrada e saída dos vértices de G é igual, e que o vértice v tem ao menos um arco entrando nele, que é percorrido no caminho P , podemos concluir que v possui também um arco saindo dele, vw , não percorrido por P . Além disso, como P é maximal, podemos concluir w já deve pertencer a P .

Com isso prova-se a existência de um caminho fechado no grafo G , formado pelo arco vw e o subcaminho de w a v de P .

Provada a existência de C temos dois casos a analisar:

1. C **percorre todos arcos de G** . Neste caso, C é o circuito euleriano, finalizando a prova.
2. C **não percorre todos arcos de G** . Definimos então G' como o grafo G sem os arcos pertencentes a C .

Como estamos retirando do grafo G um caminho fechado, todo vértice em C perderá apenas um arco de entrada e de saída, mantendo em G' a característica de igualdade do grau de entrada e saída dos vértices.

Porém, não é garantido que G' é fortemente conexo.

Seja G a união de k componentes fortemente conexas G'_1, G'_2, \dots, G'_k disjuntas entre si.

Sabemos que cada componente G'_i possuirá uma quantidade de arcos menor que k . Portanto, pela hipótese de indução definida, cada componente de G' é euleriana. Chamaremos de C_i o circuito euleriano da componente G'_i .

Mostraremos agora um algoritmo que construirá um circuito euleriano \mathcal{C} de G a partir de C e dos circuitos eulerianos C_i :

Definimos \mathcal{T} , como o conjunto dos circuitos eulerianos C_i que ainda não fazem parte de \mathcal{C} . Inicialmente, \mathcal{T} é igual ao conjunto $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$.

Para cada vértice u de C devemos realizar as seguintes verificações:

Começamos adicionando u ao circuito euleriano \mathcal{C} que estamos construindo.

Enquanto houver um circuito euleriano C_i pertencente a \mathcal{T} do qual u faz parte, fazemos o seguinte:

- (a) Representamos C_i como:

$$C_i = \{u, w, \dots, v, u\}$$

- (b) Adicionamos ao final de \mathcal{C} o circuito C_i como representado, exceto pelo primeiro vértice u .
- (c) Removemos de \mathcal{T} o circuito C_i , indicando que o mesmo já foi adicionado a \mathcal{C} .

Repetem-se então as mesmas verificações para os próximos vértices de C .

Ao final desse procedimento, o conjunto \mathcal{T} deverá ser vazio, já que todo circuito C_i possui pelo menos um vértice em C . Além disso, todo circuito C_i deverá ter sido adicionado a \mathcal{C} uma única vez, já que logo após adicionar um circuito a \mathcal{C} já o removíamos de \mathcal{T} , impedindo que ele fosse adicionado outra vez no circuito euleriano final.

Como é possível realizar a construção de um circuito euleriano \mathcal{C} provamos que qualquer digrafo fortemente conexo com vértices possuindo valores iguais de grau de entrada e saída é euleriano.

□

Corolário 2. *Um digrafo G possui uma trilha euleriana se, e somente se, é fracamente conexo, possui no máximo um par de vértices u, v tal que $\delta^-(v) - \delta^+(v) = 1$, $\delta^+(u) - \delta^-(u) = 1$ e todos outros vértices w de $V(G) \setminus \{u, v\}$ possuem $\delta^+(w) = \delta^-(w)$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Começaremos provando que G deverá ser fracamente conexo.

Se um digrafo G possui uma trilha euleriana T , podemos derivar um caminho entre qualquer par de vértices u, v a partir de T , como mostra-se a seguir:

Como T é euleriana, ela deve conter os vértices u e v , portanto podemos representar T de um dos seguintes modos:

$$T = \{w_1, \dots, w_i = u, w_{i+1}, \dots, w_{j-1}, w_j = v, \dots\}$$

$$T = \{w_1, \dots, w_i = v, w_{i+1}, \dots, w_{j-1}, w_j = u, \dots\}$$

Para ambos casos, a subtrilha de $w_i \dots w_j$ representa uma trilha entre os vértices u e v . A partir de uma trilha entre quaisquer dois vértices, podemos derivar um caminho, seguindo o seguinte método:

Método para derivar um caminho de um passeio qualquer

Seja P um passeio que liga dois vértices quaisquer, mostraremos como construir um caminho ligando esses mesmos vértices a partir de P .

Como P é um passeio, possivelmente ele percorre um mesmo vértice mais que uma vez. Do contrário, já podemos considerar P um caminho, finalizando o método.

Enquanto houver um vértice v percorrido mais que uma vez por P executa-se o seguinte passo:

Retiramos de P todos os vértices entre a primeira e a última aparição do vértice v , mantendo apenas tal vértice:

Portanto um passeio P qualquer com repetição do vértice v , como o seguinte:

$$P = \{u_1, \dots, u_i, v, \dots, v, u_j, \dots, u_n\}$$

Passa a ser:

$$P = \{u_1, \dots, u_i, v, u_j, \dots, u_n\}$$

P continua sendo um passeio, já que é garantido que u_i liga-se a v e v liga-se a u_j , porém agora P possui apenas uma aparição do vértice v . Repete-se tal passo até que P não percorra um mesmo vértice duas vezes, se tornando assim, por definição, um caminho.

Esse procedimento pode ser utilizado para encontrar um caminho entre quaisquer dois vértices de T , mas como T é euleriano, possuindo todos vértices de G , prova-se assim que G é fracamente conexo.

Basta, portanto, provar que G possui todos os vértices w tal que $\delta^+(w) = \delta^-(w)$ ou que existe um par de vértices u, v tal que $\delta^+(u) - \delta^-(u) = 1$, $\delta^-(v) - \delta^+(v) = 1$ e $\delta^+(w) = \delta^-(w)$ para todo $w \in V(G) \setminus \{u, v\}$.

Analisaremos dois casos em relação à trilha euleriana T de G :

- Se T é um circuito:

$$T = \{v, w_1, w_2, \dots, w_n, v\}$$

O vértice v é o vértice inicial e final de T , mas também pode estar

presente internamente em T . Considere os vértices w_i como vértices diferentes de v , internos a T .

Todo vértice w_i possui, em cada uma de suas aparições em T , um vértice que o precede e um vértice que o sucede, conseqüentemente em cada aparição de w_i em T , dois arcos ligados a w_i podem ser contabilizados: um entrando em w_i e outro saindo do mesmo. Isso implica que os arcos que entram e saem de um vértice interno a T são sempre contabilizados em pares, mantendo assim a igualdade $\delta^+(w_i) = \delta^-(w_i)$.

Analisaremos o vértice v a parte:

No início de T , há uma aparição de v em que contabilizamos uma única aresta saindo de v , o que adiciona uma unidade ao grau de saída do mesmo $\delta^-(v)$.

As aparições de v como vértice interno de T contribuem igualmente para o grau de entrada e saída do mesmo, similarmente ao que ocorre com os vértices w_i .

No fim de T , há outra aparição de v , que contabiliza uma única aresta entrando em v , adicionando uma unidade ao grau de entrada do vértice $\delta^+(v)$.

Finalmente, nota-se que apesar de v ser um vértice extremo, seus graus de saída e entrada também se igualam, já que v é tanto o vértice inicial quanto o vértice final de T .

Provando assim que todos vértices de G possuem grau de saída e entrada iguais, satisfazendo a implicação do corolário.

- Devemos analisar agora o caso em que T não é um circuito.

$$T = \{u, w_1, w_2, \dots, w_n, v\}$$

A diferença neste caso é que os vértices extremos são diferentes. O vértice u , do início de T , possuirá exatamente uma unidade a mais de grau de saída em relação ao seu grau de entrada $\delta^-(u) - \delta^+(u) = 1$, enquanto que v , o vértice final de T , possuirá uma unidade a mais de grau de entrada em relação ao grau de saída, $\delta^+(v) - \delta^-(v) = 1$. Todos vértices w_i diferentes de u e v possuirão um valor igual de grau de entrada e saída, já que são apenas vértices internos de T .

Este caso também é válido, condizendo com a implicação do corolário.

(\Leftarrow) Seja G um digrafo fracamente conexo, com vértices u, v tal que $\delta^+(u) - \delta^-(u) = 1$, $\delta^-(v) - \delta^+(v) = 1$ e $\delta^+(w) = \delta^-(w)$ para todo $w \in V(G) \setminus \{u, v\}$, provaremos que deverá existir uma trilha euleriana em G .

Seja G' uma cópia do grafo G em que adiciona-se um arco de u a v . A adição de tal arco aumenta o grau de saída de u e o grau de entrada de v em uma unidade, fazendo com que $\delta^+(u) = \delta^-(u)$ e $\delta^+(v) = \delta^-(v)$.

Deste modo, todos vértices de G' possuem o mesmo grau de entrada e saída e G' continua sendo fracamente conexo.

Provaremos inicialmente que G' deverá ser fortemente conexo. Sejam w_i, w_j dois vértices quaisquer de G' , como este grafo é fracamente conexo podemos assumir, sem perda de generalidade, que existe ao menos um caminho de w_i a w_j . Provaremos que também deverá existir um caminho no sentido inverso, de w_j a w_i .

Seja T uma trilha maximal que percorre um dos caminhos de w_i a w_j :

$$T = \{w_1, w_2, \dots, w_i, \dots, w_j, \dots, w_n\}$$

Como T é maximal, podemos afirmar que todos os arcos que saem do vértice w_n são percorridos por T , já que do contrário T não seria maximal.

Além disso, como todos os vértices possuem grau de saída e entrada iguais em G' , deve valer que $w_1 = w_n$, já que do contrário $\delta^-(w_1) - \delta^+(w_1) = 1$ e $\delta^+(w_n) - \delta^-(w_n) = 1$. Consequentemente podemos reescrever a trilha T de outro modo, que chamaremos de T' , evidenciando a existência de uma trilha de w_j a w_i :

$$T' = \{w_j, w_{j+1}, \dots, w_n = w_1, w_2, \dots, w_i\}$$

A partir da trilha T' é possível derivar um caminho de w_j a w_i , como realizado anteriormente na demonstração deste corolário.

Prova-se assim que todo par de vértices w_i, w_j possui um caminho em G' de w_i a w_j e de w_j a w_i . G' , pela definição, é um grafo fortemente conexo.

Além disso, pelo teorema 1.2, G' é euleriano, possuindo assim um circuito euleriano C :

$$C = \{w_1, w_2, \dots, w_k = u, w_{k+1} = v, \dots, w_n, w_1\}$$

Podemos reescrever C do seguinte modo, tornando o arco artificial, de u a v , o último arco percorrido em C :

$$C = \{w_{k+1} = v, \dots, w_n, w_1, w_2, \dots, w_{k-1}, w_k = u, w_{k+1} = v\}$$

A partir de C podemos derivar uma trilha T , removendo apenas o arco artificial de C :

$$T = \{w_{k+1} = v, \dots, w_n, w_1, w_2, \dots, w_{k-1}, w_k = u\}$$

Ao remover de C o único arco que não pertencia ao grafo original G , criamos uma trilha euleriana T em relação a G , provando assim a volta do corolário.

□

1.4 Algoritmo de Hierholzer

O algoritmo de Hierholzer foca em encontrar e unir um conjunto de circuitos C_1, C_2, \dots, C_k , tal que não existe aresta pertencente a dois circuitos diferentes, e que toda aresta pertence ao menos a um circuito. Tal união gera um grafo conexo euleriano.

O algoritmo desenvolvido se baseia em percorrer o grafo euleriano com uma busca em profundidade, apagando todas as arestas percorridas nesta busca. Quando o vértice atual da busca não possui mais arestas para se percorrer, o mesmo é adicionado ao começo da trilha euleriana que está sendo construída.

Segue o pseudo código do algoritmo de Hierholzer para encontrar uma trilha euleriana dado um grafo euleriano.

Algoritmo 1 Solução de Hierholzer

```

1: função EULER_HIERHOLZER( $u$ )
2:   para cada  $v$  em  $\text{adj}[u]$  faça
3:     apaga a aresta de  $u$  a  $v$ 
4:     EULER_HIERHOLZER( $v$ )
5:   Insere  $u$  no início de trilha_euleriana

```

Digamos que a função apresentada seja chamada com um vértice inicial v , pertencente a um grafo euleriano G . A busca segue visitando vértices e apagando arestas até chegar no primeiro vértice em que não existem mais arestas para se percorrer.

Em grafos que possuem um circuito euleriano, tal vértice será o próprio vértice inicial v , e podemos chamar o circuito formado de C_1 . Enquanto que, grafos que possuem apenas uma trilha euleriana, tal vértice será aquele cujo grau de entrada é maior que o grau de saída.

Em ambos casos, após encontrar tal vértice sem arestas, o algoritmo deve continuar percorrendo o grafo em uma busca em profundidade, ou seja voltando por todos os vértices percorridos anteriormente, procurando algum que ainda possua arestas não apagadas, para que ela possa encontrar um

novo circuito C_i e juntar o mesmo ao circuito, ou trilha, inicial, unindo ambas estruturas.

Apesar da união dos circuitos ser um procedimento complexo e possivelmente custoso, não é necessário manter o resultado de todas uniões a serem realizados durante o algoritmo, já que apenas estamos interessados no resultado final, a trilha euleriana. Para manter tal trilha, basta adicionar a uma pilha todo vértice encontrado na busca quando o mesmo não possui mais arestas a serem percorridas.

Pode-se observar tal procedimento em prática com o seguinte exemplo:



Figura 4: Grafo G , foco do exemplo do algoritmo de Hierholzer

O grafo apresentado possui uma grande quantidade de circuitos, por isso encontrar uma partição do mesmo em circuitos C_1, C_2, \dots, C_k não é uma tarefa simples. Uma possibilidade para este grafo é tomar $C_1 = \{A, B, C, A\}$, $C_2 = \{B, D, E, B\}$, $C_3 = \{C, E, F, C\}$, outra possibilidade é separar G em dois circuitos apenas $C_1 = \{A, B, D, E, F, C, A\}$, $C_2 = \{B, E, C, B\}$.



Figura 5: Dois exemplos de partição de G em circuitos. Em vermelho representou-se C_1 , em azul C_2 e em verde C_3 .

Felizmente, não é necessário particionar o grafo nos circuitos para se determinar o circuito euleriano de G .

Simularemos nos próximos passos a busca em profundidade que o algoritmo realiza em G , tomando o vértice A como o vértice inicial:

Neste exemplo, digamos que o trajeto inicial percorrido na busca é $\{A, B, C, A\}$.



Figura 6: Representam-se pontilhadas as arestas percorridas na busca e em negrito o vértice atual da busca.

Após percorrido o caminho $\{A, B, C, A\}$ as arestas AB , BC , BA são apagadas e a busca não consegue progredir para novas arestas a partir do vértice A .

Seja T uma trilha inicialmente vazia. Como A não possui mais caminhos a se percorrer, adiciona-se o mesmo ao início da trilha T , e a busca continua recursivamente com o vértice C .



Figura 7: Representam-se em negrito os arcos que ainda fazem parte da pilha de recursão da busca.

Seja $\{C, E, F, C\}$ o caminho percorrido na continuação da busca:



De modo similar ao primeiro passo, adicionamos o vértice C ao início de T e voltamos, recursivamente ao vértice F .



Como F também não possui arestas, ele é adicionado ao início de T , e a busca volta ao vértice E . Até o momento, $T = \{F, C, A\}$



A partir de E a busca continua no caminho, por exemplo, $\{E, D, B, E\}$.



Como todas as arestas de G foram percorridas, a busca realiza, nos próximos passos, uma série de retornos, sempre adicionando à T o vértice atual da busca.



de um digrafo, sendo assim o mesmo possui complexidade $\mathcal{O}(|E|)$.

Pode-se adaptar este algoritmo para grafos não direcionados mudando o modo como arestas são apagadas. O algoritmo mostrado não funciona para grafos não direcionados pois o mesmo trata cada sentido de uma aresta uv como dois arcos separados, $u \rightarrow v$ e $v \rightarrow u$. Sendo assim, quando uma aresta é deletada, digamos $u \rightarrow v$, seu arco reverso $v \rightarrow u$, não é deletado automaticamente.

Para corrigir isto, pode-se criar um identificador único para cada aresta (igual para os dois sentidos de uma mesma aresta) que pode ser utilizado para marcar as arestas já percorridas na busca em profundidade ¹.

2 O problema do Carteiro Chinês (PCC)

Com o passar dos anos, a área de teoria dos grafos se desenvolveu muito, tratando dos mais variados tipos de problemas.

Em 1962, mais de 200 anos após Euler descrever sua solução para o problema de Königsberg, o matemático chinês Meigu Guan publicou um estudo que generalizava ainda mais o problema dos grafos eulerianos. Esse problema foi denominado Problema da Inspeção de Rotas, ou, como também é conhecido hoje: Problema do carteiro chinês, nomeado assim em homenagem a Guan.

O problema consiste em encontrar um passeio fechado que visite toda aresta de um grafo conexo pelo menos uma vez e que possua menor custo. A grande diferença aqui é que as arestas podem ser repetidas, ou seja, usadas mais de uma vez no passeio final.

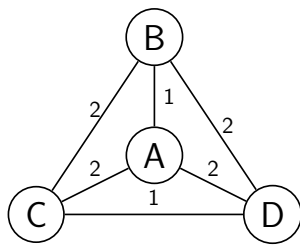


Figura 8: Exemplo

O nome do problema está relacionado a um problema que carteiros encontram no planejamento de suas rotas: dada uma cidade com várias ruas de diferentes comprimentos e um posto de carteiros, encontrar a menor rota que um carteiro deve percorrer de modo a passar por todas ruas da cidade entregando cartas e voltar ao posto de carteiros no fim de sua rota.

Por exemplo, para a figura 8, um passeio fechado de custo ótimo seria:

$$\{A, B, D, C, A, D, C, B, A\}$$

¹Segue uma implementação do algoritmo para grafos não direcionados, que utiliza as modificações descritas https://github.com/gafeol/chinese-postman/blob/master/euler_hierholzer_undirected.cpp

Sendo este um caminho fechado de custo 12. Neste exemplo foi necessário que as arestas AB e DC fossem percorridas duas vezes no passeio, porém nem sempre é necessária esta repetição.

No caso em que o grafo tratado é euleriano, a resposta para o problema do carteiro chinês é justamente o circuito euleriano do grafo. Nos outros casos, sendo o grafo conexo, o procedimento que seguiremos será a realizar a cópia de algumas arestas do grafo de modo a torná-lo euleriano.

A solução do PCC para um grafo G terá duas partes: Tornar G euleriano com o menor custo possível, criando cópias de arestas existentes e encontrar o ciclo euleriano do grafo G modificado.

Uma generalização do Problema do Carteiro Chinês é o **problema das T-junções**. Este problema consiste em, dado um grafo (V, E) e um conjunto de vértices $T \subseteq V$, definir um conjunto de arestas J de custo mínimo tal que todo vértice do conjunto T possui grau ímpar no grafo (V, J) e todo vértice em $V \setminus T$ possui grau par no mesmo grafo.

Se tomamos, por exemplo, T como o conjunto de vértices de grau ímpar em um grafo não direcionado, um T-join J de menor custo representa exatamente o conjunto de arestas que, se adicionadas a um grafo qualquer torna-o euleriano. Sendo assim, o problema das T-junções resolve a primeira parte do PCC: tornar um grafo euleriano com o menor custo possível. Por esse motivo podemos dizer que o problema das T-junções é uma generalização do problema do carteiro chinês.

Discutiremos nas seções a seguir a solução para o problema em questão com base nas especificidades do grafo do problema. Desconsideraremos nas análises a seguir grafos que possuam vértices isolados, isto é, vértices que não possuam arestas, já que tais vértices não afetam a solução do problema.

2.1 Grafos não direcionados

Analisaremos o caso em que o problema é modelado a partir de um grafo $G(V, E)$ simples, conexo e não direcionado.

Uma solução qualquer T do problema do carteiro chinês deverá percorrer cada aresta de G pelo menos uma vez, sendo assim uma trilha fechada. Se G é euleriano, então uma solução para o PCC é o próprio circuito euleriano do grafo. Do contrário, será necessário que T percorra pelo menos uma aresta múltiplas vezes.

Seja $1 + x_e$ o número de vezes que uma aresta $e \in E$ é percorrida em T . Definimos G' como o grafo formado por G adicionado de x_e cópias de cada aresta $e \in E$. Isto é, cada aresta e de G aparecerá em G' $1 + x_e$ vezes e a trilha fechada T (solução do PCC em G) percorre cada uma dessas arestas

uma única vez. Por definição G' será euleriano, e a trilha euleriana de G' corresponderá à T , solução do PCC para o grafo G .

Sendo assim, podemos separar a solução do PCC em duas partes: Encontrar o valor ótimo de x_e para o problema descrito e, em seguida, encontrar um circuito euleriano no grafo G' construído.

Resolveremos a primeira parte do problema com um algoritmo de emparelhamento.

Lema 2. *Para todo grafo simples e conexo, existe uma solução ótima do PCC em que cada aresta é copiada no máximo 1 vez, ou seja que x_e vale 0 ou 1.*

Demonstração. Seja T uma solução ótima do PCC para um grafo G e x um vetor indicando a quantidade de cópias necessárias de cada aresta de G para a solução T . Sabemos que x deverá possuir valores inteiros não negativos, além disso, sabemos que o grafo G' , induzido por x , deverá ser euleriano e que o valor de $\sum_e c_e x_e$ será mínimo.

Seja x^* um vetor definido do seguinte modo:

$$x_e^* = x_e \bmod 2$$

Como o grafo G' induzido por x era euleriano, o grafo G^* induzido por x^* também deverá ser euleriano, pois a paridade dos vértices em ambos grafos é a mesma, e também pois tanto G' quanto G^* possuem G , que é conexo, como um subgrafo, e portanto também são conexos.

Pela definição, G^* usa um número menor ou igual de arestas duplicadas que G' , fazendo com que o seguinte se mantenha: $\sum_e c_e x_e^* \leq \sum_e c_e x_e$.

No entanto, como x foi derivado da solução ótima T , sabemos que $\sum_e c_e x_e$ deverá ser mínimo, e portanto, $\sum_e c_e x_e^* = \sum_e c_e x_e$.

Sendo assim, os valores de x^* serão apenas 0 ou 1, por definição, e T^* consistirá em uma solução ótima, assim como T , provando o lema. \square

Lema 3. *Para todo grafo G simples e conexo, existe uma solução ótima do PCC cujo conjunto de arestas duplicadas consiste na união de caminhos aresta-disjuntos entre vértices de grau ímpar.*

Demonstração. Inicialmente trataremos o caso em que G não possui nenhum vértice de grau ímpar: Se todos vértices de G tem grau par, então o mesmo deve possuir um circuito euleriano. Por isso, o vetor $x' = \{0, 0, \dots, 0\}$ induz uma solução válida para o PCC, e possui custo zero, sendo assim esta uma solução ótima. Como o conjunto de arestas duplicadas nesta solução é vazio, vale o lema para este grafo.

Provado este caso, seguiremos a demonstração assumindo que G possui ao menos um vértice de grau ímpar.

Seja T uma solução ótima do PCC para um grafo $G(V, E)$ em que cada aresta é copiada no máximo 1 vez, ou seja que x_e valerá 0 ou 1. A existência de tal solução é garantida pelo lema 2. Realizaremos uma prova por indução no número de arestas duplicadas de G , ou seja, em $\sum_e x_e$, para toda aresta $e \in E$.

O caso base dessa indução é quando $\sum_e x_e = 0$. Neste caso, o conjunto de arestas duplicadas será vazio, valendo então a propriedade do lema.

A hipótese de indução será que a propriedade do lema vale para uma soma $\sum_e x_e < k$, com $k > 0$.

Analisaremos agora a situação em que $\sum_e x_e = k$, com $k > 0$.

Seja v um vértice de G de grau ímpar, C um caminho de tamanho maximal que começa no vértice v e percorre apenas arestas duplicadas e seja G' o grafo, possivelmente desconexo, G decrescido das arestas pertencentes a C .

Todos os vértices em G e G' terão a mesma paridade de grau, exceto pelos vértices extremos de C . Como estes eram vértices de grau ímpar em G e apenas uma aresta foi retirada dos mesmos, ambos terão grau par em G' .

Sendo assim, podemos definir um vetor x' que induz uma solução ótima para G' do seguinte modo:

$$x'_e = \begin{cases} 0 & e \in C \\ x_e & e \notin C \end{cases}$$

Vale também o seguinte:

$$\begin{aligned} \sum_e x'_e &= \sum_e x_e - |C| \\ \sum_e x'_e &< \sum_e x_e \\ \sum_e x'_e &< k \end{aligned}$$

Sendo assim, vale a hipótese de indução para o grafo G' , ou seja, existe um conjunto \mathcal{C} de caminhos aresta-disjuntos entre vértices de grau ímpar composto por arestas duplicadas (ou seja, para as quais $x'_e = 1$).

Como o grafo G' não possui as arestas do caminho C , temos que todo caminho de \mathcal{C} deverá ser aresta-disjunto com C . Deste modo, o conjunto de caminhos aresta-disjuntos entre vértices de grau ímpar $\mathcal{C} \cup C$, que induz o grafo T , consistirá de uma solução ótima para o PCC em G . Provando assim o passo da indução.



Figura 9: Possível estrutura em grafo com vértices de grau ímpar

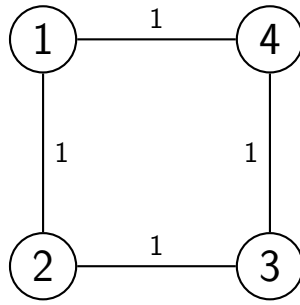


Figura 10: Caso em que o grafo tratado não possui vértices de grau ímpar

Finalizando então a prova por indução do lema.

□

Lema 4. *Para todo grafo G simples e conexo, existe uma solução ótima do PCC cujo conjunto de arestas duplicadas é a união de caminhos de custo mínimo entre vértices de grau ímpar.*

Demonstração. Seja S o conjunto de arestas duplicadas em uma solução ótima do PCC para o grafo G , que consiste de uma união de caminhos aresta-disjuntos entre vértices de grau ímpar.

Imagine que um caminho C pertencente a S , que liga os vértices quaisquer u e v , não é o caminho mínimo entre os vértices que liga. Isto é, existe um caminho C' de custo menor que C que liga u e v .

Neste caso, poderíamos retirar de S as arestas do caminho C e adicionar ao conjunto as arestas de C' . Deste modo, o conjunto S possuiria um custo menor que o original, nos permitindo derivar de S uma solução para o PCC

de custo menor que a solução original.

Porém, fazia parte da hipótese que a solução original era ótima, nos levando assim a uma contradição.

Provamos assim o lema, garantindo a existência de uma solução para o PCC que consiste de uma união de caminhos mínimos entre vértices de grau ímpar. □

Um algoritmo que soluciona o problema se baseia em criar um novo grafo completo $G'(V', E')$. V' é definido como o subconjunto de vértices de V que possuem um grau ímpar em G . O custo de uma aresta de E' entre dois vértices u e v quaisquer será o custo de um caminho mínimo entre u e v no grafo original G .

Pelo lema 4, uma solução ótima do PCC em G possui um conjunto de arestas duplicadas que pode ser representado como a união de caminhos de custo mínimo entre vértices de grau ímpar. Como V' é o conjunto dos vértices de grau ímpar em G e cada aresta de E' representa um caminho de custo mínimo entre dois vértices de V' , podemos reduzir o problema original a um problema de emparelhamento perfeito de custo mínimo no grafo G' .

Dado um emparelhamento perfeito M em G' de custo mínimo, é possível derivar uma solução ótima do PCC. Esta solução será dada por um circuito euleriano no grafo G^* que construímos abaixo:

Considere $G^* = (V, E)$. Agora, para cada aresta $e = uv \in M$ (emparelhamento de G'), tome C um caminho de custo mínimo de u a v em G e faça $G^* \leftarrow G^* \cup C$, ou seja, duplique as arestas de C em G^* .

A duplicação das arestas de um caminho modifica apenas a paridade de grau dos vértices extremos. Como, no procedimento acima, estamos duplicando as arestas de todos caminhos derivados do emparelhamento perfeito M , isso implica que modificamos as paridades dos graus de todos os vértices de G^* , ou seja, modificamos apenas as paridades dos graus dos vértices de grau ímpar de G .

Sendo assim, o grafo G^* resultante é euleriano, e a solução para o PCC do grafo G é o circuito euleriano de G^* .

Segue no algoritmo 2 uma versão em pseudo-código do algoritmo descrito.

Escolheu-se o algoritmo de Floyd-Warshall para encontrar as distâncias mínimas entre todo par de vértices de G . Apesar de tal algoritmo possuir complexidade $\mathcal{O}(|V|^3)$, ele possui uma simples implementação.

Se G não possuir arestas de custo negativo, uma alternativa ao algoritmo de Floyd-Warshall é utilizar o algoritmo de Dijkstra $|V'|$ vezes, calculando a distância mínima de cada vértice de grau ímpar a todos outros vértices do grafo, possuindo assim uma complexidade $\mathcal{O}(|V'| |E| \log |V|)$.

Algoritmo 2 Solução do PCC em grafos não direcionados

```
1: função PCC( $G$ )
2:    $(V, E, dist) \leftarrow G$ 
3:    $V' \leftarrow \{v \in V : \delta[v] \text{ é ímpar}\}$ 
4:    $dist' \leftarrow \text{FLOYD\_WARSHALL}(V, E, dist)$ 
5:    $E' \leftarrow V' \times V'$ 
6:    $G' \leftarrow (V', E', dist')$ 
7:    $M \leftarrow \text{EMPARELHAMENTO\_PERFEITO\_MINIMO}(G')$ 
8:    $E^* \leftarrow E$ 
9:   para  $uv \in M$  faça
10:      $C \leftarrow \text{EXPANDE}(uv, E, dist, dist')$ 
11:      $E^* \leftarrow E^* \cup C$ 
12:    $G^* \leftarrow (V, E^*)$ 
13:   devolve  $\text{CIRCUITO\_EULERIANO}(G^*)$ 
14: função  $\text{EXPANDE}(uv, E, dist, dist')$ 
15:   se  $u = v$  então devolve  $\emptyset$ 
16:   para  $w : uw \in E$  faça
17:     se  $dist'[u][v] = dist[u][w] + dist'[w][v]$  então
18:       devolve  $\{uw\} \cup \text{EXPANDE}(wv, E, dist, dist')$ 
```

Uma solução para se encontrar o emparelhamento perfeito mínimo de um grafo não direcionado com custos é usar o algoritmo Blossom de Edmonds[Edm61]. Encontra-se nas referências deste trabalho uma implementação do algoritmo de Edmonds intitulada “Blossom V” e publicada por Vladimir Kolmogorov em 2009[Kol09].

2.2 Grafos direcionados

Analisaremos agora o problema do carteiro chinês aplicado a digrafos.

Lema 5. *Um digrafo G possui solução para o problema do carteiro chinês se, e somente se, é fortemente conexo.*

Demonstração. (\Rightarrow) Começamos provando que para que um digrafo G possua solução para o problema do carteiro chinês é necessário que o mesmo seja fortemente conexo.

Vamos assumir, por absurdo, que G possui uma solução para o PCC mas não é fortemente conexo.

Como G possui uma solução para o PCC, então existe um passeio fechado T que passa por todos arcos de G .

Além disso, como T é um passeio fechado, para cada par de vértices u, v de G , sabemos que T passa por u e v . Assim, $T = \{v_0, v_1, \dots, v_i = u, \dots, v_j = v, \dots\}$.

A partir de um passeio entre dois vértices sempre é possível derivar um caminho entre os mesmos seguindo o seguinte método:

Método para derivar um caminho de um passeio qualquer

Seja P um passeio que liga dois vértices quaisquer, mostraremos como construir um caminho ligando esses mesmos vértices a partir de P .

Como P é um passeio, possivelmente ele percorre um mesmo vértice mais que uma vez. Do contrário, já podemos considerar P um caminho, finalizando o método.

Enquanto houver um vértice v percorrido mais que uma vez por P executa-se o seguinte passo:

Retiramos de P todos os vértices entre a primeira e a última aparição do vértice v , mantendo apenas tal vértice:

Portanto um passeio P qualquer com repetição do vértice v , como o seguinte:

$$P = \{u_1, \dots, u_i, v, \dots, v, u_j, \dots, u_n\}$$

Passa a ser:

$$P = \{u_1, \dots, u_i, v, u_j, \dots, u_n\}$$

Repete-se tal passo até que P não percorra um mesmo vértice duas vezes, se tornando assim, por definição, um caminho.

Sendo assim, afirmamos que todo par de vértices presentes em T possui um caminho entre si.

Já que não estamos considerando neste trabalho digrafos que possuem vértices isolados, cada vértice de G deve ser incidente ao menos a um arco. Além disso, como todos arcos são percorridos em T , já que ele é uma solução do PCC, todos os vértices deverão estar presentes no passeio fechado T . Por consequência para todo par de vértices de G existe um caminho entre eles o que define G como um grafo fortemente conexo, contradizendo a hipótese inicial.

Provando assim que um digrafo que possua solução para o PCC é necessariamente fortemente conexo.

(\Leftarrow) Provaremos agora que todo grafo fortemente conexo G possui uma solução para o PCC.

Seja v um vértice qualquer de G . Podemos construir uma solução P para o problema do carteiro chinês do seguinte modo:

Para qualquer arco uw de G definimos um circuito C_{uw} que passa por uw e pelo vértice v como a concatenação do caminho de v a u , do arco uw e do caminho de w a v .

A existência de um caminho entre quaisquer dois vértices é garantida, já que G é fortemente conexo, garantindo assim a existência de C_{uw} .

Para construir a solução P , finalmente, basta realizar a concatenação dos circuitos C_e para todo arco e presente em G .

Deste modo garantimos que toda aresta de G é percorrida, provando assim a volta do lema: todo digrafo fortemente conexo possui uma solução para o problema do carteiro chinês.

□

Em linhas gerais, o algoritmo que soluciona o problema do carteiro chinês para digrafos envolve multiplicar arestas do grafo original até que o mesmo se torne euleriano. O circuito euleriano desse digrafo modificado será a solução do problema do carteiro chinês para o digrafo original, do modo similar à solução para o PCC em grafos não direcionados.

Uma grande diferença na solução do problema do carteiro chinês é que, para digrafos, não vale o lema 2, que garante a existência de uma solução para todo PCC em que cada aresta do grafo é percorrida no máximo duas vezes. Um contra-exemplo disso é o caso ilustrado na figura 11.

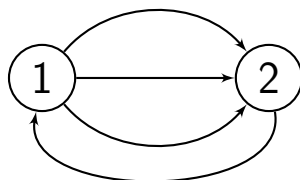


Figura 11: Contra exemplo do lema 2 para os digrafos

Para que um passeio fechado percorra os três arcos de 1 a 2 da figura 11, é necessário que esse mesmo passeio percorra três vezes o arco de 2 a 1.

O lema 2 é utilizado para justificar a utilização de um algoritmo de emparelhamento perfeito para definir quais arestas duplicar na solução do PCC. Como tal lema não vale para digrafos, a escolha dessas arestas deverá ser feita de um modo diferente, utilizando um algoritmo de fluxo máximo de custo mínimo, como veremos a seguir, no detalhamento do algoritmo que soluciona o PCC.

A solução do PCC para um digrafo G fortemente conexo pode ser dividida em 4 passos:

- 1º** Define-se F como o conjunto dos vértices que possuam grau de entrada (δ^+) maior que o grau de saída (δ^-) e S como o conjunto dos vértices que possuam grau de saída maior que o grau de entrada.

Calcula-se o custo do menor caminho entre todos os pares de vértices u, v onde $u \in F$ e $v \in S$.

- 2º** Modela-se um problema de transporte: Seja b uma função demanda definida para todo vértice como $b(v) = \delta^-(v) - \delta^+(v)$. Os vértices de F serão vértices de oferta (com função demanda b negativa), cada vértice $u \in F$ terá que escoar $-b(u)$ unidades de fluxo. Já os vértices de S serão vértices de demanda, cada vértice $v \in S$ terá que receber $b(v)$ unidades de fluxo.

Todo par de vértices u, v com $u \in F$ e $v \in S$ será ligado por um arco que pode transportar qualquer quantidade de fluxo, mas que tem custo igual ao custo de um menor caminho de u a v por unidade de fluxo transportada, calculado no primeiro passo.

Deve-se resolver tal problema de transporte no grafo F, S -bipartido minimizando o custo total e respeitando a função demanda definida.

- 3º** Usa-se a solução do problema de transporte para criar um digrafo euleriano G^* a partir de G . Inicialmente $G^* = G$.

Uma solução do problema de transporte descrito será uma função $f : F \times S \rightarrow \mathbb{N}$ que determina a quantidade de fluxo transportada entre cada par de vértices de F e S .

Se um arco uv é escolhido para transportar uma quantidade $f(uv)$ positiva de fluxo, deve-se criar $f(uv)$ cópias de todos arcos do menor caminho de u a v em G^* , chamaremos esse processo de expansão de uv .

Após a duplicação dos arcos de um caminho entre dois vértices u e v a diferença absoluta dos graus de entrada e saída de u e v diminuirão em uma unidade, essa mesma diferença de graus se manterá constante para vértices internos ao caminho.

Ao final da expansão de todos arcos que possuem f positivo, todos vértices de G^* possuirão um mesmo valor de grau de entrada e saída, tornando G^* euleriano pelo teorema 1.2.

- 4º** Encontrar o circuito euleriano de G^* , que será também a solução do problema do carteiro chinês para o grafo original G .

O algoritmo 3 é a implementação em pseudo-código da solução descrita acima.

Na função *PROBLEMA_DE_TRANSPORTE* define-se uma redução do problema para o problema do fluxo máximo de custo mínimo. Para se resolver esta redução, pode-se utilizar um algoritmo de Simplex para Redes como discutido por Orlin [Orl95], de complexidade $\mathcal{O}(VE \log V \log(VC))$, sendo C a capacidade máxima dos arcos da rede. Outra solução para a redução é usar uma variação do algoritmo de Edmonds-Karp [Edm72] para fluxo de custo mínimo de complexidade $\mathcal{O}(V^2 E^2)$. A explicação e implementação dessa variação estão disponíveis online, no site E-maxx [Ema14].

Aplicaremos agora o passo a passo apresentado acima em um exemplo.

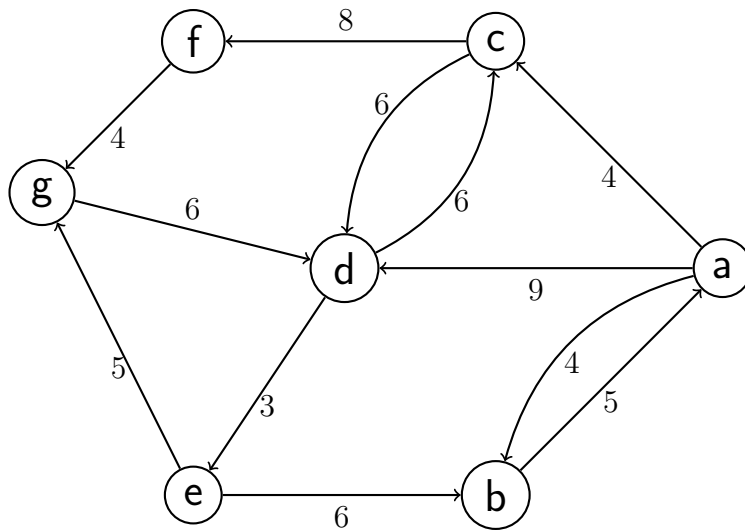


Figura 12: Digrafo retirado de exercício do site do MIT[LO81]

1º Definimos então os conjuntos F e S :

$$F = \{b, d, g\}$$

$$S = \{a, e\}$$

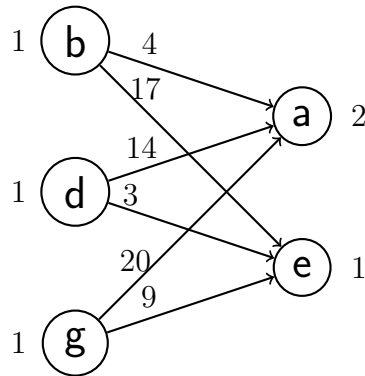
Computamos também a distância mínima entre os pares de vértices dos dois conjuntos:

	a	e
b	4	17
d	14	3
g	20	9

Algoritmo 3 Solução do PCC em digrafos

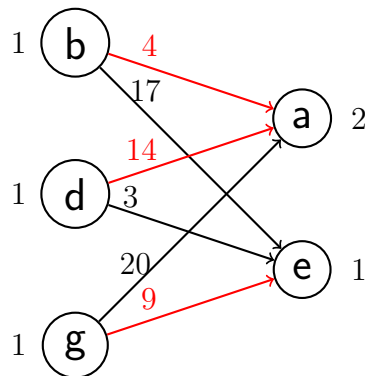
```
1: função PCC( $G$ )
2:    $(V, E, dist) \leftarrow G$ 
3:    $dist' \leftarrow \text{FLOYD\_WARSHALL}(V, E, dist)$ 
4:   para  $v \in V$  faça
5:      $b(v) \leftarrow \delta^-(v) - \delta^+(v)$  ▷ Calcula a função demanda
6:    $F \leftarrow \{v \in V : b(v) < 0\}$ 
7:    $S \leftarrow \{v \in V : b(v) > 0\}$ 
8:    $f \leftarrow \text{PROBLEMA\_DE\_TRANSPORTE}(F, S, dist, b)$ 
9:    $E^* \leftarrow E$  ▷ Cria uma cópia de  $E$ 
10:  para  $uv \in E$  faça
11:     $C \leftarrow \text{EXPANDE}(uv, E, dist, dist')$ 
12:    para  $i$  de 1 a  $f(uv)$  faça
13:       $E^* \leftarrow E^* \cup C$  ▷ Duplica  $f(uv)$  vezes os arcos de  $C$ 
14:   $G^* \leftarrow (V, E^*)$ 
15:  devolve  $\text{CIRCUITO\_EULERIANO}(G^*)$ 
16: função  $\text{EXPANDE}(uv, E, dist, dist')$ 
17:   se  $u = v$  então devolve  $\emptyset$ 
18:   para  $w : uw \in E$  faça
19:     se  $dist'[u][v] = dist[u][w] + dist'[w][v]$  então
20:       devolve  $\{uw\} \cup \text{EXPANDE}(wv, E, dist, dist')$ 
21: função  $\text{PROBLEMA\_DE\_TRANSPORTE}(F, S, custo, b)$ 
22:   Define dois vértices artificiais, uma fonte  $s$  e um sorvedouro  $t$ 
23:    $E \leftarrow F \times S$ 
24:   para  $uv \in E$  faça
25:      $cap(uv) = \infty$ 
26:   para  $u \in F$  faça
27:      $cap(su) = -b(u)$ 
28:      $custo(su) = 0$ 
29:      $E = E \cup \{su\}$ 
30:   para  $v \in S$  faça
31:      $cap(vt) = b(v)$ 
32:      $custo(vt) = 0$ 
33:      $E = E \cup \{vt\}$ 
34:   devolve  $\text{FLUXO\_CUSTO\_MINIMO}(s, t, E, custo, cap)$ 
```

2º Modelamos então o problema de transporte, os vértices b, d, g escoando uma unidade de fluxo cada e os vértices a, e com demandas 2 e 1, respectivamente.



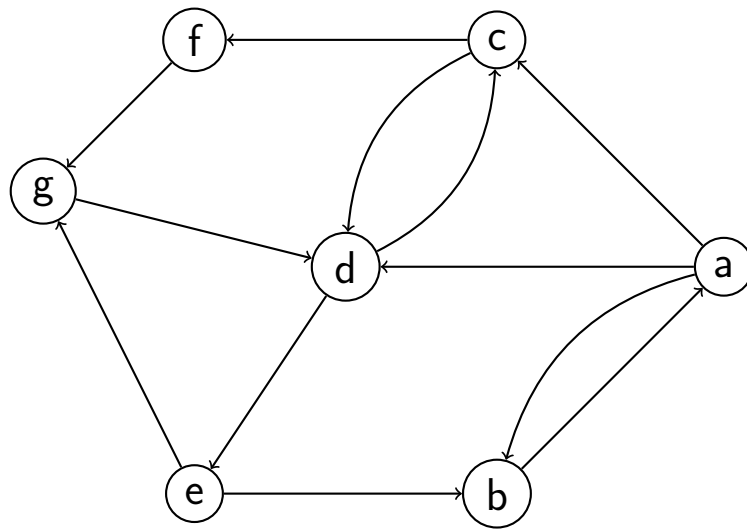
Os arcos definidos entre os vértices de F e S possuem capacidade infinita e custo igual à distância mínima dos mesmos vértices em G , como já calculado no primeiro passo.

Uma solução ótima para o problema apresentado consiste em transportar uma unidade de fluxo pelos arcos de custo 4, 14 e 9, escoando os vértices b, d e g e suprimindo a demanda dos vértices a e e .

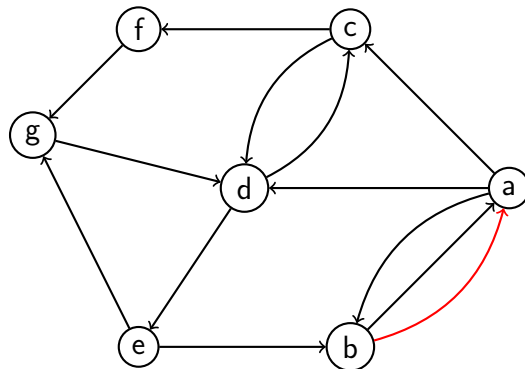


3º Agora devemos realizar a duplicação dos caminhos representados pelos arcos ba, da e ge .

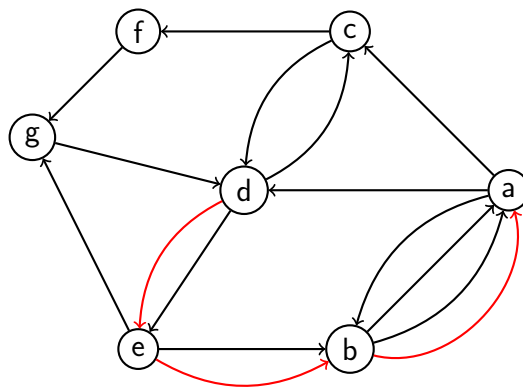
Representamos o estado inicial do digrafo G , sem os pesos nos arcos:



Faremos tal duplicação passo a passo, começando a duplicar os arcos do caminho mínimo de b a a . Representamos os arcos adicionados em vermelho.



Agora duplicaremos os arcos do caminho mínimo de d a a :



Finalmente, duplicamos os arcos do caminho mínimo de g a e :



As sucessivas duplicações de caminho realizadas em G fazem com que todos os vértices possuam grau de saída e entrada iguais. Pelo teorema 1.2 temos que o novo grafo é euleriano. No quarto passo derivaremos um circuito euleriano para o digrafo construído.

4º Um possível circuito euleriano \mathcal{C} que se inicia no vértice a é o seguinte:

$$\mathcal{C} = \{a, c, f, g, d, c, d, e, g, d, e, b, a, d, e, b, a, b, a\}$$

Representamos tal circuito no grafo abaixo, indicando em cada arco a ordem em que o mesmo é percorrido:



Figura 13: Representa-se em preto os arcos presentes no grafo G original, e em vermelho os arcos resultantes das duplicações realizadas no terceiro passo da solução.

O circuito \mathcal{C} percorrido no grafo original G representa o passeio fechado que soluciona o Problema do Carteiro Chinês, já que percorre todo arco de G ao menos uma vez.

Analisando o peso dos arcos de G concluímos que a solução \mathcal{C} tem custo $66 + 27 = 93$, 66 é o custo de se percorrer todas os arcos de G , representados em preto, uma única vez, e 27 é o custo de se percorrer os arcos em vermelho.

2.3 Grafos mistos

Já analisamos o Problema do Carteiro Chinês aplicado a grafos e digrafos, agora discutiremos o mesmo problema aplicado a grafos mistos, ou seja, grafos que tenham tanto arestas quanto arcos.

Ao contrário do que uma análise breve pode sugerir, não é possível reduzir o PCC para grafos mistos ao caso de grafos direcionados simplesmente transformando as arestas não direcionadas em dois arcos de sentidos opostos.

Um contra-exemplo para este pensamento é o seguinte:



Na esquerda temos um grafo misto, e na direita temos o mesmo grafo com sua aresta substituida por dois arcos em sentidos opostos.

Apesar da similaridade dos grafos, suas soluções para o problema do carteiro chinês diferem. Uma solução do problema para o primeiro grafo é $\{1, 2, 1\}$, enquanto que uma solução possível para o segundo grafo é $\{1, 2, 1, 2, 1\}$, como representado visualmente a seguir.



Apesar de conseguirmos encontrar uma solução para o caso direcionado derivado, não há um modo trivial de transformar uma solução para tal caso em uma solução do caso não direcionado.

Diferentemente do problema aplicado a grafos ou digrafos, o PCC aplicado a grafos mistos não possui solução polinomial, sendo um problema NP-hard.

Trataremos, portanto, de um algoritmo de aproximação para solucionar este problema, publicado em 1973 por Edmonds e Johnson [EJ73] e posteriormente explicado em mais detalhes por .

O algoritmo é composto por três passos principais:

1. Adicionar cópias de arestas ao grafo de modo a tornar o grau de todo vértice par, considerando arcos como arestas sem orientação
2. Igualar o grau de entrada e saída de todo vértice, adicionando cópias de arcos e orientando arestas existentes, mantendo par o grau de cada vértice
3. Encontrar um circuito euleriano no digrafo construido

Apresenta-se no algoritmo 4 um pseudo-código adaptado de Frederickson [Fre79] que segue esses passos. Seja E o conjunto de arestas não direcionadas,

A o conjunto de arcos e c a função de custo das arestas e arcos de ambos conjuntos. Tome $\delta(v)$ como a quantidade de arestas que incidem no vértice v , $\delta^+(v)$ como o grau de entrada de v , isto é, a quantidade de arcos que apontam a v e $\delta^-(v)$ como o grau de saída de v , o número de arcos que saem de v .

Trataremos como **grau total** de um vértice v , $\delta_t(v)$ a soma do grau de arestas não direcionadas ($\delta(v)$), grau de entrada ($\delta^+(v)$) e grau de saída ($\delta^-(v)$).

Algoritmo 4 Função principal do algoritmo sugerido por Frederickson

```

1: função MIXED( $G, c$ )
2:    $(V, E, A) \leftarrow G$ 
3:    $G' \leftarrow \text{GRAU\_TOTAL\_PAR}(G, c)$  ▷ Torna  $\delta_t$  par
4:    $M, U \leftarrow \text{IGUALA\_GRAU\_DIR}(G', c)$  ▷ Iguala  $\delta^+$  e  $\delta^-$ 
5:    $M', U' \leftarrow \text{GRAU\_PAR}(G', M, U)$  ▷ Torna  $\delta$  par, mantendo  $\delta^+ = \delta^-$ 
6:    $G_e = (V, U', M')$ 
7:   devolve CIRCUITO_EULERIANO( $G_e$ )

```

A função auxiliar “GRAU_TOTAL_PAR” apresentada no algoritmo 5 devolve um conjunto de arestas e arcos de custo mínimo que, se adicionado ao grafo G , faz com que todos vértices tenham grau total par.

Algoritmo 5 Função auxiliar GRAU TOTAL PAR

```

1: função GRAU_TOTAL_PAR( $G, c$ )
2:    $(V, E, A) \leftarrow G$ 
3:    $V' \leftarrow \{v \in V : \delta_t(v) \text{ é ímpar}\}$ 
4:    $custMin \leftarrow \text{FLOYD\_WARSHALL}(G, c)$  ▷ Ignora o sentido dos arcos de  $A$ 
5:    $K \leftarrow (V', V' \times V', custMin)$  ▷ Grafo completo de  $V'$ 
6:    $M \leftarrow \text{EMPARELHAMENTO\_PERFEITO\_MINIMO}(K)$ 
7:   Expande cada aresta de  $M$  nos arcos e arestas do grafo original que ela representa, adicionando ao multiconjunto  $A'$  os arcos expandidos e ao multiconjunto  $E'$  as arestas expandidas.
8:   devolve  $(V, E + E', A + A')$ 

```

Por sua vez, a função “IGUALA_GRAU_DIR” devolve dois multiconjuntos M e U , de arcos e arestas, respectivamente, de menor custo tal que todo vértice do grafo (V, U, M) possui grau de entrada e saída iguais.

O multiconjunto M será formado por ao menos uma cópia de todos arcos de A e cópias de arestas de E direcionadas. Já U será composto pelas arestas de E que não foram direcionadas e adicionadas a M .

Algoritmo 6 Função auxiliar IGUALA GRAU DIR

```
1: função IGUALA_GRAU_DIR( $G, c, \text{custMin}$ )
2:      $\triangleright$  Devolve dois multiconjuntos  $M$  e  $U$ , tal que  $M$  contém ao
        menos uma cópia de cada arco de  $A$  e algumas arestas de  $E$  orientadas,
        e  $U \subseteq E$  contém apenas arestas não orientadas e não pertencentes a  $M$ .
3:      $(V, E, A) \leftarrow G$ 
4:     para  $v \in V$  faça
5:          $b(v) \leftarrow \delta^-(v) - \delta^+(v)$   $\triangleright$  Calcula a função demanda
6:      $F \leftarrow \{v \in V : b(v) < 0\}$ 
7:      $S \leftarrow \{v \in V : b(v) > 0\}$ 
8:      $f \leftarrow \text{PROBLEMA\_DE\_TRANSPORTE}(F, S, \text{custMin}, b)$ 
9:     Seja  $f_a$  a quantidade de fluxo que passa por cada arco  $a \in A$ 
10:    Sejam  $f_{uv}$  e  $f_{vu}$  as quantidades de fluxo transportadas pelas duas
        orientações de uma aresta  $uv \in E$ 
11:     $M, U \leftarrow \emptyset$ 
12:    para  $a \in A$  faça
13:        Insere  $f_a + 1$  cópias do arco  $a$  em  $M$ 
14:    para  $uv \in E$  faça
15:        se  $f_{vu} \geq 1$  ou  $f_{uv} \geq 1$  então  $\triangleright$  Se  $\text{custMin} > 0$  é impossível que
             $f_{uv} \geq 1$  e  $f_{vu} \geq 1$ 
16:            Insere  $f_{uv}$  cópias de  $uv$  e  $f_{vu}$  cópias de  $vu$  em  $M$ 
17:        senão
18:            Insere  $uv$  em  $U$ 
19:    devolve  $M, U$ 
```

Apesar do algoritmo 6 devolver multiconjuntos M, U que igualam o grau de entrada e saída dos vértices de V , ele não garante que grau total desses vértices continua par. Por esse motivo é necessária a função GRAU PAR, do algoritmo 7, que deriva de M, U outros multiconjuntos M' e U' que tornam δ_t par para todo vértice mantendo a igualdade de δ^+ e δ^- .

Algoritmo 7 Função auxiliar GRAU PAR

```

1: função GRAU_PAR( $G, M, U$ )
2:    $M' \leftarrow M$ 
3:    $U' \leftarrow U$ 
4:   O multiconjunto  $M' \subseteq M$  deverá possuir apenas as arestas direcio-
      nadas e as cópias de arcos criadas em GRAU_DIR.
5:   Seja  $V' = \{v \in V : \delta^+ + \delta^- + \delta \text{ é ímpar} \}$ 
6:   enquanto  $V'$  não é vazio faça
7:     Selecciona um vértice qualquer  $v_{ini}$  de  $V'$ 
8:      $v \leftarrow v_{ini}$ 
9:     enquanto  $v \in V'$  faça
10:       $V' \leftarrow V' \setminus v$ 
11:      repita
12:        Seja  $a$  um arco incidente a  $v$ , da forma  $vw$  ou  $wv$ , pertencente a  $M''$ 
13:        se  $a$  é o arco  $vw$  então
14:          Insere outra cópia de  $a$  em  $M'$ 
15:        senão
16:          Apague uma cópia de  $a$  de  $M'$ 
17:         $v \leftarrow w$ 
18:      enquanto  $v \notin V'$ 
19:      repita
20:        Remove uma aresta  $vw$  de  $U'$ 
21:        Orienta tal aresta no sentido de  $v$  para  $w$  e a adiciona em  $M'$ 
22:       $v \leftarrow w$ 
23:    enquanto  $v \notin V'$  e  $v \neq v_{ini}$ 

```

Os multiconjuntos M', U' são escolhidos de modo a tornar $\delta_t(v)$ par e $\delta^+(v) = \delta^-(v)$ para todo vértice $v \in V$. Como $\delta(v) = \delta_t(v) - (\delta^+(v) + \delta^-(v))$, isso implica que $\delta(v)$ também deve ser par.

Teorema 2.1. *Um grafo misto fortemente conexo que possui $\delta(v)$ par e $\delta^+(v) = \delta^-(v)$ para todo vértice v , possui um circuito euleriano.*

Demonstração. Seja $G = (V, E, A)$, sendo E um multiconjunto de arestas e A um multiconjunto de arcos. Definimos como G_e o grafo induzido pelas arestas de E , e de G_a o grafo induzido por A . Apesar de não necessariamente conexos, ainda valerá que todo vértice de G_e possui um δ par e que todo vértice de G_a tem $\delta^+ = \delta^-$.

G_e será composto por diferentes componentes conexas com vértices de grau par, consequentemente cada componente será euleriana, pelo teorema 1.1. Sejam C_1, C_2, \dots, C_k os circuitos eulerianos das k componentes de G_e .

A mesma análise pode ser feita com o grafo G_a , cada uma de suas componentes fortemente conexas possuirá grau de entrada e saída iguais, sendo assim grafos eulerianos pelo teorema 1.2. Sejam C'_1, \dots, C'_l os circuitos eulerianos dessas componenetes.

Pode-se definir um procedimento de união de dois circuitos em um único circuito se ambos possuem ao menos um vértice em comum:

Digamos que dois circuitos \mathcal{C}_i e \mathcal{C}_j possuem um vértice v em comum. Podemos descrever ambos circuitos por seus arcos ou arestas do seguinte modo:

$$\mathcal{C}_i = \{vw_1, w_1w_2, \dots, w_nv\}$$

$$\mathcal{C}_j = \{vu_1, u_1u_2, \dots, u_mv\}$$

Se representados desse modo, a união dos circuitos será equivalente à justaposição de ambos:

$$\mathcal{C}_i \cup \mathcal{C}_j = \{vw_1, w_1w_2, \dots, w_nv, vu_1, u_1u_2, \dots, u_mv\}$$

A união de todos circuitos C_1, \dots, C_k e C'_1, \dots, C'_l forma um circuito euleriano do grafo original G .

Como o grafo original é fortemente conexo, sempre é possível realizar a união de todos circuitos. Do contrário, se não houver meio de realizar tal união deverá existir um circuito \mathcal{C}_i que não possui vértice em comum com nenhum outro circuito, implicando assim que $\bigcup \mathcal{C}_i = G$ não seria fortemente conexo, contradizendo a base do raciocínio.

Lema 6. *Os multiconjuntos M, U e M', U' retornados pelas funções 6 e 7 possuem o mesmo custo.*

Demonstração. Como os conjuntos M, U foram gerados resolvendo um problema de transporte, possuímos a garantia que eles são os multiconjuntos de menor custo que igualam o grau de entrada e saída de um grafo.

Portanto já podemos descartar a possibilidade de que M', U' possui um custo menor que M, U . Assumimos, por absurdo, que M', U' possui um

custo maior que M, U . A diferença de custos entre ambos será causada pela duplicação e deleção de alguns arcos de M . Definimos como C_+ o custo dos arcos escolhidos para serem duplicados e C_- o custo dos arcos deletados em M' .

Como assumimos que M', U' tem custo maior que M, U , deve valer:

$$\begin{aligned} 2C_+ - C_- &> C_+ + C_- \\ C_+ &> 2C_- \end{aligned}$$

Vamos tomar agora outros multiconjuntos M'', U'' , em que $U'' = U'$ e que M'' será o inverso de M' , todo arco que foi deletado em M' será duplicado em M'' , todo arco duplicado em M' será deletado em M'' e toda aresta orientada adicionada a M' terá sua orientação invertida em M'' .

Como M'', U'' também igualam os graus de entrada e saída de G , então eles devem ter um custo maior ou igual que o mesmo de M, U . Podemos escrever essa condição como:

$$\begin{aligned} 2C_- - C_+ &\geq C_+ + C_- \\ C_- &\geq 2C_+ \end{aligned}$$

□

□

2.4 Problema do carteiro rural

Nesta variação, além do grafo $G(V, A)$, sendo V o conjunto de vértices e A o conjunto de arestas, uma função de custo c_e , para algum $e \in A$, é também necessário se especificar um subconjunto $R \subseteq A$.

Nesta versão mais geral do PCC devemos realizar o planejamento de uma rota de custo mínimo que se inicia e termina no mesmo vértice e passa ao menos uma vez por toda aresta pertencente a R . Isto é, não há necessidade de se percorrer as arestas de $A \setminus R$.

Denomina-se esta variação de Problema do Carteiro Rural (PCR).

Esse problema possui aplicações mais gerais que a sua versão original, por exemplo: pode-se modelar a rota de um carteiro que não necessariamente precisa percorrer todas as ruas de uma cidade, ou mesmo a rota de um ônibus escolar, que precisa passar apenas nas ruas dos alunos que ele atende, e não necessariamente por todas ruas de um bairro.

O PCR é um problema NP-completo [LKG76].

De modo similar aos outros casos do PCC, a solução padrão para este problema consiste em estender G adicionando cópias de arestas de modo que o mesmo se torne euleriano e em sequência construir uma solução a partir do circuito euleriano do grafo estendido.

Para realizar a primeira parte da solução do problema, ou seja, criar uma extensão euleriana de G , serão apresentadas tanto heurísticas quanto discussões das soluções ótimas existentes.

2.4.1 PCR em grafos não direcionados

Heurística da árvore geradora mínima

Em 1979 Christofides sugeriu um algoritmo aproximado para o problema do caixeiro viajante que possui o melhor fator de aproximação para grafos gerais provado [Chr76].

Será apresentada uma adaptação de tal algoritmo que pode ser aplicada ao PCR, sugerida por Frederickson (1979). Pode-se provar que tal algoritmo possui uma razão de aproximação de $3/2$ para grafos cuja função de custo respeita a desigualdade triangular.

Para resolver o PCR em grafos não direcionados define-se um grafo $G' = (V', A')$, onde $V' = \{u \in V : (u, v) \in R \text{ para algum } v \in V\}$.

A' é obtido por adicionar ao conjunto A uma aresta (v_i, v_j) para todo par $v_i, v_j \in V'$ cujo custo é igual ao custo do menor caminho de v_i a v_j ; e retirar-se de A' duplicatas de arestas paralelas de mesmo custo e todas arestas $(u, v) \in A \setminus R$ tal que $c_{uv} = c_{uw} + c_{wv}$ para algum vértice w .

Pode-se visualizar um exemplo de tal separação a seguir:

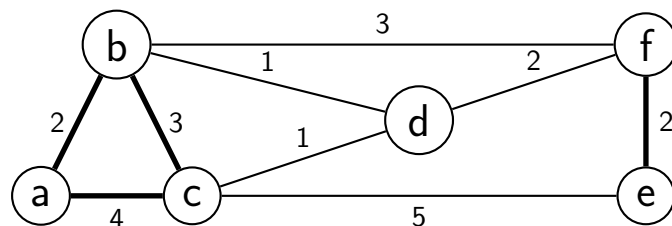


Figura 14: Exemplo de grafo G , destacam-se no mesmo as arestas pertencentes a R

Define-se o conjunto de vértices de G' : $V' = \{a, b, c, e, f\}$. Exclui-se de tal conjunto apenas o vértice d , que não possui qualquer ligação com aresta em R .

O conjunto A' é definido em duas etapas: primeiramente criam-se novas arestas entre os vértices de V' com custo igual ao custo da menor distância

entre os mesmos vértices em G , tais arestas são representadas em azul na imagem 15.

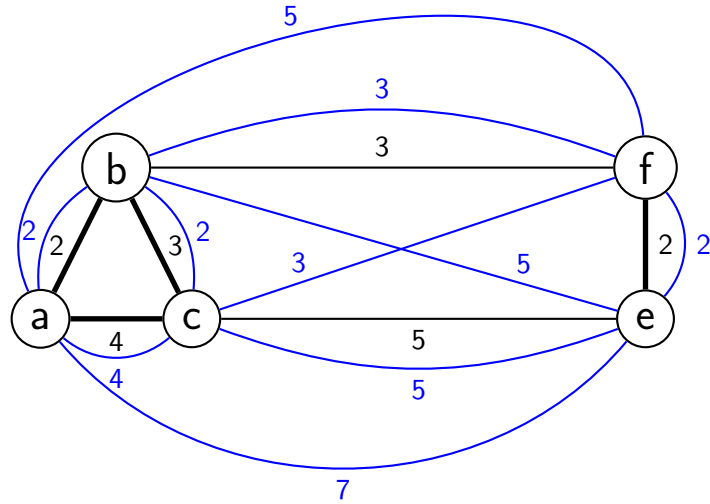


Figura 15: Grafo intermediário na transformação de G em G'

Após a criação das novas arestas são deletadas do grafo todas arestas $uv \notin R$ tal que existe $w \in V'$ para que $c_{uw} = c_{uw} + c_{wv}$, assim como as arestas paralelas não pertencentes a R de mesmo custo.

No exemplo são retiradas de A' uma cópia das arestas ab, ac, bf, ce, ef pois já existem arestas paralelas a estas de mesmo custo. Retiram-se também as arestas: af já que $c_{af} = c_{ab} + c_{bf}$, be já que $c_{be} = c_{bf} + c_{fe}$, ae já que $c_{ae} = c_{af} + c_{fe}$.

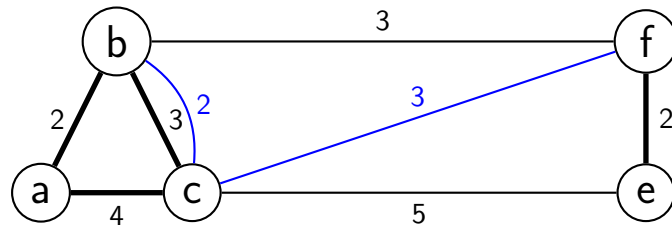


Figura 16: Grafo transformado G'

Considere o subgrafo de G' induzido pelas arestas de R . Este grafo possui k componentes conexas, que são denominadas G_1, G_2, \dots, G_k .

No exemplo tal separação gera dois subgrafos G_1 e G_2 , que são representadas na figura 17, compostas pelos conjuntos de vértices $V_1 = \{a, b, c\}$ e $V_2 = \{f, e\}$ respectivamente.

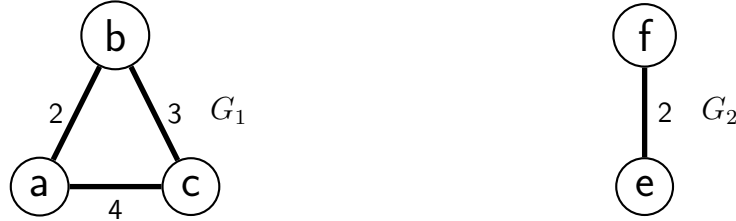


Figura 17: Separação induzida pelas arestas de R em G'

Segue agora uma descrição da heurística de Frederickson (1979) como apresentado por Michel Gendreau e Gilbert Laporte[EGL95].

Passo 1. Construir uma árvore geradora mínima T em G' que conecte os k subgrafos G_i induzidos por R .

No exemplo, uma árvore de custo mínimo que liga os subgrafos G_1 e G_2 tem custo 3, como se vê nas figuras 18 e 19, sendo composta pelos vértices c , f e a aresta entre os mesmos.

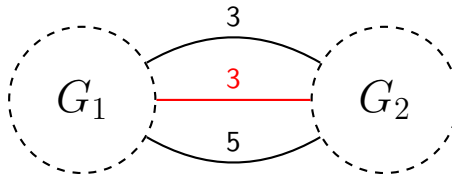


Figura 18: Árvore geradora mínima T representada em vermelho no grafo G' condensado

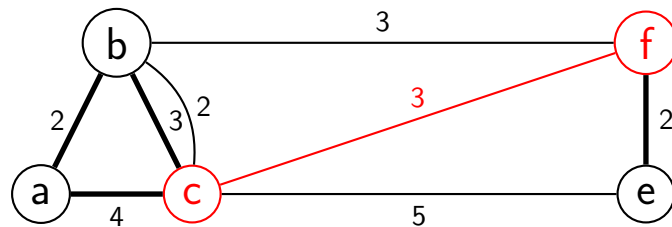


Figura 19: Representação de T em G'

Passo 2. Encontrar um emparelhamento perfeito M de custo mínimo entre os vértices de grau ímpar do grafo induzido por $R \cup T$.

No exemplo, os únicos vértices de grau ímpar em $R \cup T$ são os vértices c e e .

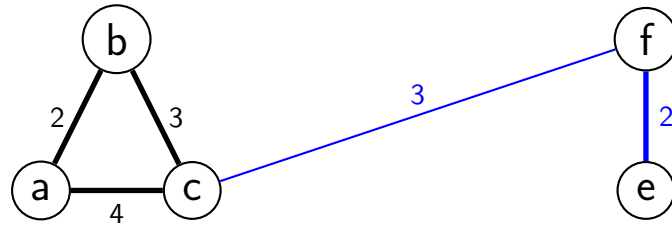


Figura 20: Grafo induzido por $R \cup T$ evidenciando o emparelhamento dos vértices c e e de custo mínimo

Passo 3. Encontrar um circuito euleriano no grafo induzido por $R \cup T \cup M$. A partir de tal circuito é possível derivar-se um circuito de mesmo custo no grafo G original que resolve o PCR.

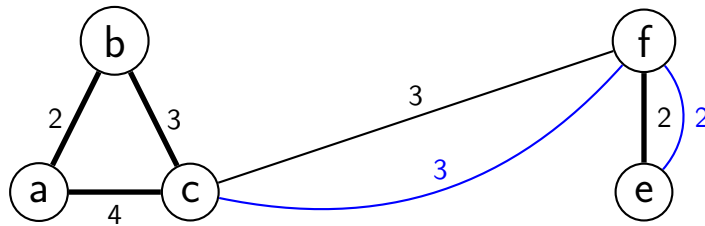


Figura 21: Grafo induzido por $R \cup T \cup M$

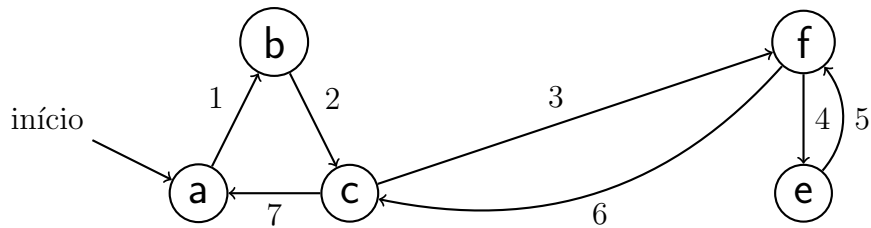


Figura 22: Circuito euleriano em $R \cup T \cup M$

Segue agora o caminho que resolve o PCR no grafo original baseado no circuito euleriano da figura 22:

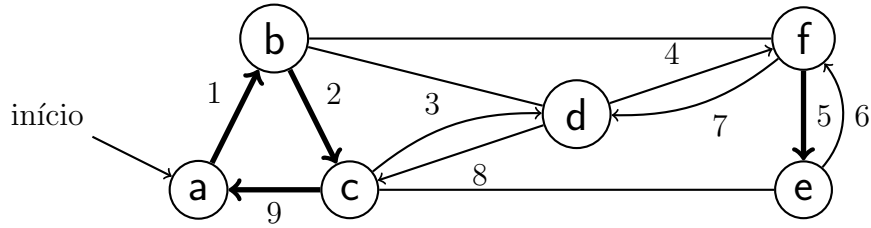


Figura 23: Solução do PCR encontrada pela heurística de Christofides

2.4.2 PCR em grafos direcionados

Para tratar sobre a versão direcionada do PCR, tomaremos $G = (V, A)$ como o digrafo original e um conjunto $R \subseteq A$ de arcos que devem ser percorridos no circuito que resolve o PCR para G .

Assim como no PCR para grafos não direcionados, a solução deste caso se baseia em estender o digrafo G em um digrafo euleriano, cujo circuito euleriano representa uma solução para o PCR do digrafo original G .

Será apresentada agora uma heurística que resolve esse problema, proposta por Christofides [Chr+86], muito semelhante à heurística apresentada para o caso de grafos não direcionados.

Heurística da arborescência geradora mínima

Para guiar a explicação da heurística toma-se, como exemplo, o digrafo G , a seguir:

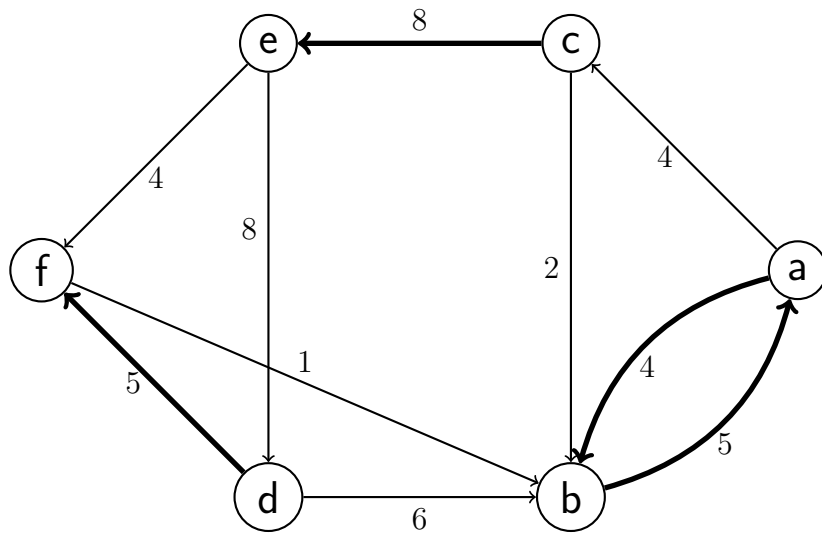


Figura 24: Digrafo G , o conjunto R corresponde aos arcos em negrito

A extensão de G em um digrafo euleriano $G' = (V', A')$ se dá de modo similar àquela do caso com grafos não direcionados:

O conjunto de vértices possui a mesma definição, $V' = \{u \in V : (u, v) \in R \text{ para algum } v \in V\}$.

Como no grafo da figura 24 todos vértices possuem ao menos um arco pertencente a R , define-se $V' = V$.

De modo semelhante, o conjunto de arcos A' será inicialmente acrescido dos arcos (v_i, v_j) para todo par $v_i, v_j \in V'$, de custo igual ao custo do menor caminho de v_i a v_j . Posteriormente remove-se de A' todo arco que pertence também a $A \setminus R$ e cujo custo c_{uv} é igual a $c_{uw} + c_{wv}$ para algum vértice w , removem-se também os arcos paralelos de mesmo valor que pertencem a $A \setminus R$.

Realizando tal extensão no exemplo sugerido, teremos o digrafo G' representado na figura 25.

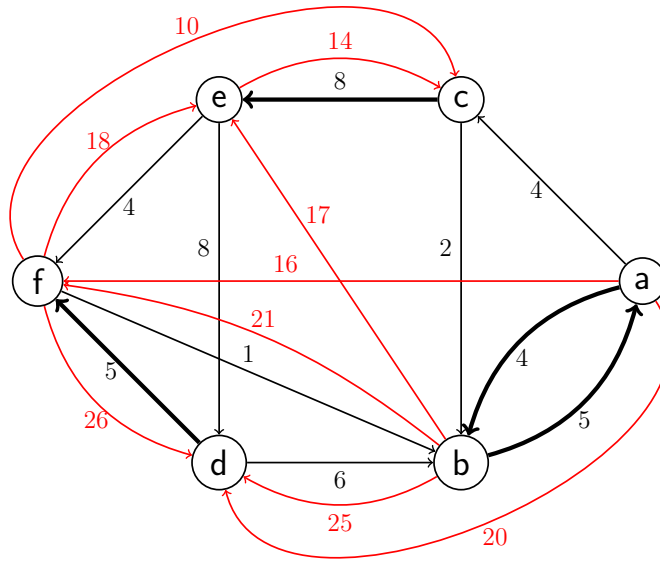


Figura 25: São vermelhas as arestas criadas na extensão G'

O grafo G' será composto por k conjuntos conexos G_1, G_2, \dots, G_k , induzidos por R . Isto é, cada conjunto G_i será composto apenas por arcos pertencentes a R e será conexo, mas não necessariamente fortemente conexo.

No exemplo apresentado, G possui três componentes, G_1 composta pelos vértices a, b , G_2 composta por c, e e G_3 composta por d, f .

Passo 1. Encontrar uma arborescência geradora T de custo mínimo que conecte os subgrafos G_1, \dots, G_k e tem raiz em um vértice qualquer.

Para encontrar tal arborescência, pode-se utilizar o algoritmo proposto independentemente pela dupla Yoeng-Jin Chu e Tseng-Hong Liu e por Edmonds[Edm67], sendo, portanto, chamado de algoritmo de Chu-Liu/Edmonds.

Condensando o digrafo G' em suas componentes G_1, G_2, G_3 temos o grafo representado na figura 26.

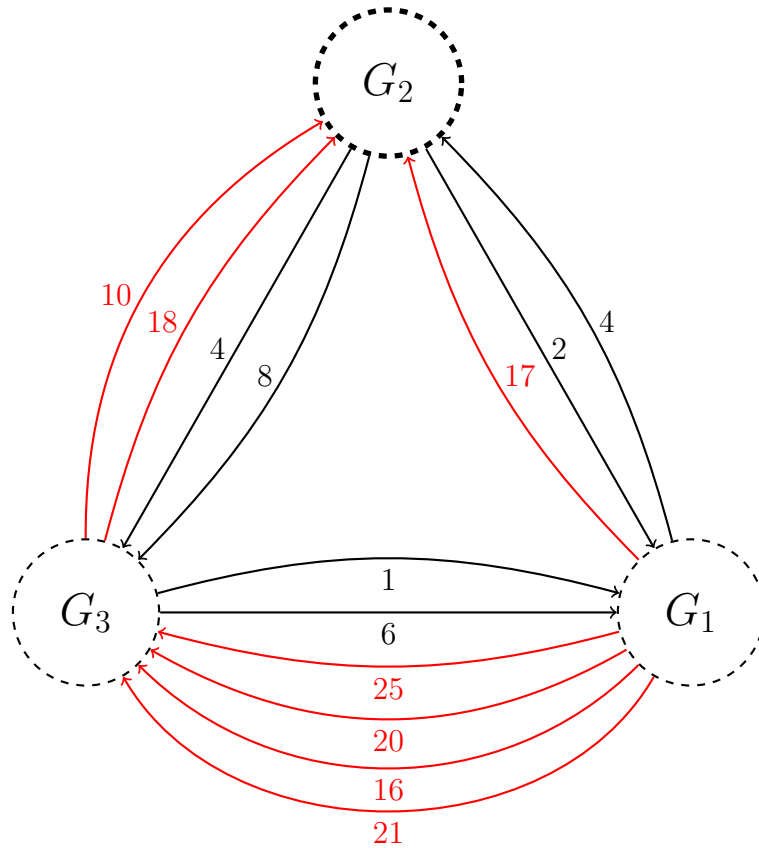


Figura 26: Digrafo G' condensado em suas componentes induzidas por R

O primeiro passo do algoritmo de Chu-Liu/Edmonds consiste em definir um vértice raiz r para a arborescência. Como a heurística de Christofides não requer que um vértice específico seja tal raiz, podemos escolher o vértice condensado G_1 para cumprir tal função ($r = G_1$).

Definida a raiz r , deve-se retirar do digrafo analisado todos arcos que tem como destino r . Além disso, pode-se também substituir qualquer conjunto de arcos paralelos por um único arco com custo igual ao menor custo dos arcos paralelos removidos. Pode-se visualizar o efeito de tais modificações em G' na figura 27.

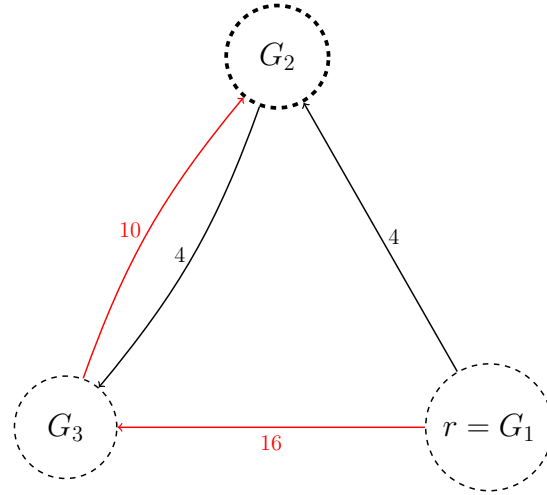


Figura 27: Digrafo G' após a remoção de arcos sugeridas pelo algoritmo de Chu-Liu/Edmonds

Para todo vértice v do grafo condensado diferente da raiz ($v \neq r$) encontra-se o arco de menor custo que chega em v . Define-se como $\pi(v)$ o vértice origem de tal arco.

Se o conjunto de arcos $T = \{(\pi(v), v) | v \neq r\}$ não contém circuitos, então T é uma arborescência de custo mínimo enraizada em r . Do contrário, realiza-se uma contração dos circuitos existentes em T , atualizam-se os custos dos arcos e repete-se recursivamente o mesmo procedimento de criação de T .

No exemplo analisado, o conjunto T consiste nos arcos de G_1 a G_2 e G_2 a G_3 , ambos de custo 4.

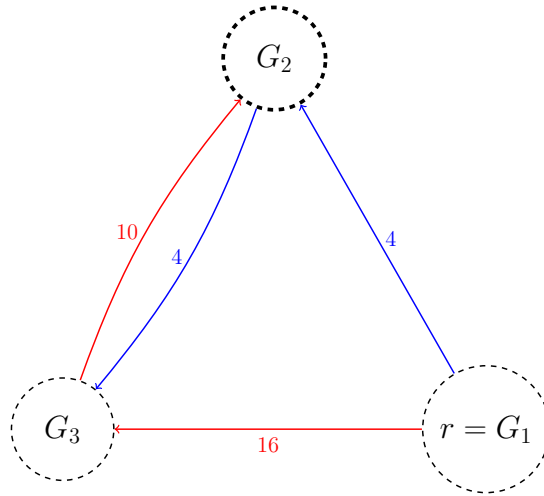


Figura 28: Em azul representa-se o conjunto de arcos T definidos pelo algoritmo de Chu-Liu/Edmonds.

Como T não possui circuitos, não é necessário realizar uma nova iteração do algoritmo. T é o conjunto de arcos que induz a arborescência de custo mínimo enraizada em G_1 .

Define-se como $R \cup T$ o digrafo induzido pelos arcos de R e da arborescência T .

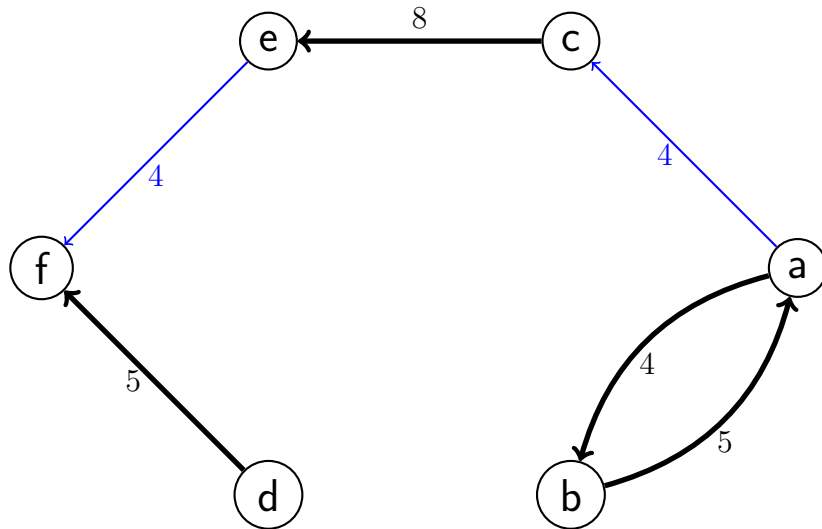


Figura 29: Digrafo $R \cup T$, os arcos de T são representados em azul

Passo 2. Encontrar um multiconjunto M de menor custo composto por arcos de

A' que torna o digrafo induzido por $R \cup T$ euleriano, ou seja iguala os graus de entrada e saída de todos vértices.

Pode-se determinar M a partir da resolução de um problema de transporte: O problema de transporte será definido tendo como base o grafo G' , porém as funções de oferta e demanda são definidas a partir dos graus dos vértices no grafo induzido por $R \cup T$.

Um vértice $v \in V(G')$ cujo grau de entrada é maior que seu grau de saída (em relação ao subgrafo $R \cup T$) possuirá uma oferta igual ao valor absoluto da diferença de seus graus, do contrário, o valor absoluto da diferença representará a demanda do vértice v .

No exemplo abordado, figura 29, o vértice f possui uma oferta de valor 2, os vértices a e d possuem uma demanda de valor 1 e os vértices restantes já se encontram em igualdade de grau de entrada e saída.

A resolução do problema de transporte modelado gera um conjunto de caminhos, representando a distribuição ótima da oferta. O multiconjunto dos arcos pertencentes a união dos caminhos que solucionam o problema é o multiconjunto M desejado.

Sendo assim, como apenas uma origem existe no problema apresentado como exemplo, a solução do mesmo consiste na utilização dos caminhos de menor custo de f a a e de f a d .

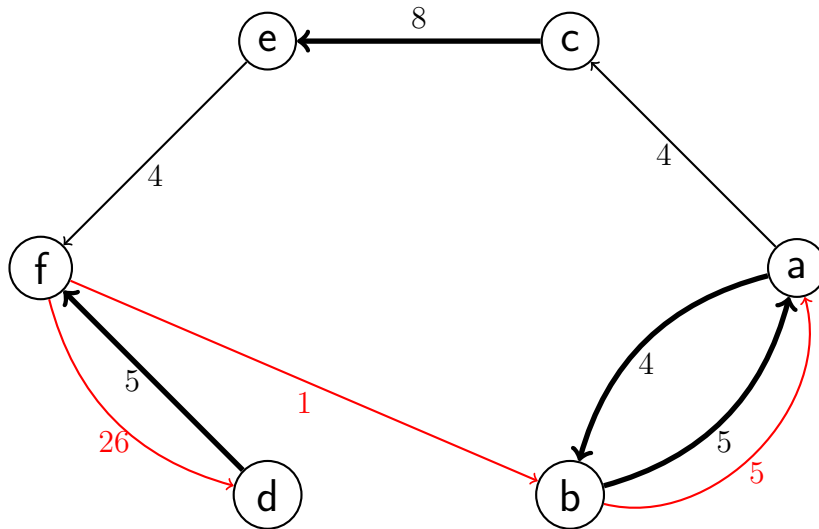


Figura 30: Digrafo euleriano $R \cup T \cup M$ com arcos de M representados em vermelho.

Na figura 30 pode-se visualizar o digrafo induzido pelos arcos $R \cup T \cup M$.

Note que o arco de b a a de custo 5 é representado duas vezes, isso pois ele pertence tanto a R quanto a M .

Passo 3. O digrafo induzido pelo multiconjunto de arcos $R \cup T \cup M$ é, pela definição de M , euleriano.

Portanto, pode-se derivar um circuito euleriano de tal grafo. Por sua vez, a partir deste circuito, é possível derivar uma solução do PCR para o grafo original G .

Um possível circuito euleriano para o exemplo apresentado é representado na figura 31 a seguir.

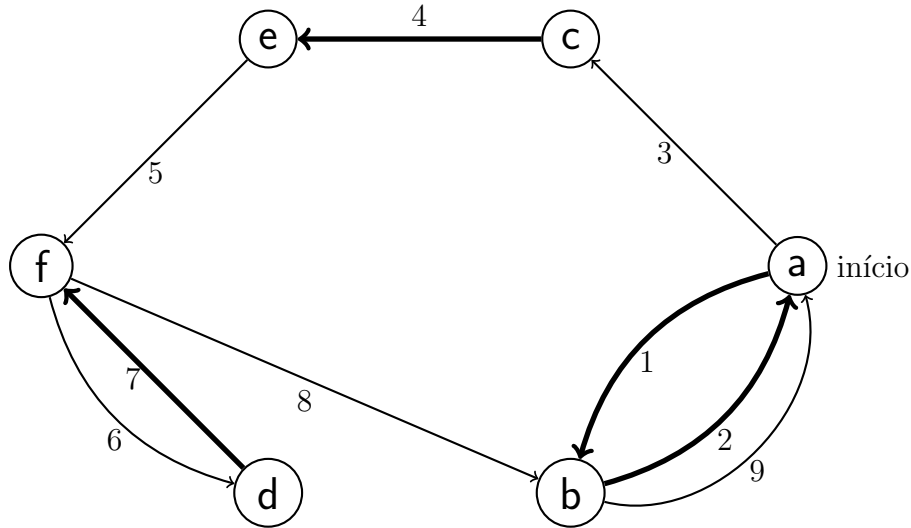


Figura 31: Circuito euleriano de $R \cup T \cup M$.

A partir de tal circuito pode-se encontrar uma solução para o PCR do digrafo original G expandindo os arcos contraídos na construção de G' e removendo as duplicatas de arcos criados no procedimento da heurística. Por exemplo, o arco do nó f ao d de custo 26 pertencente a M consiste na condensação do caminho mínimo de f a d : $\{f, b, a, c, e, d\}$.

Realizando a remoção dos arcos artificiais adicionados a G chegamos no seguinte circuito, baseado no circuito euleriano mostrado na figura 31:

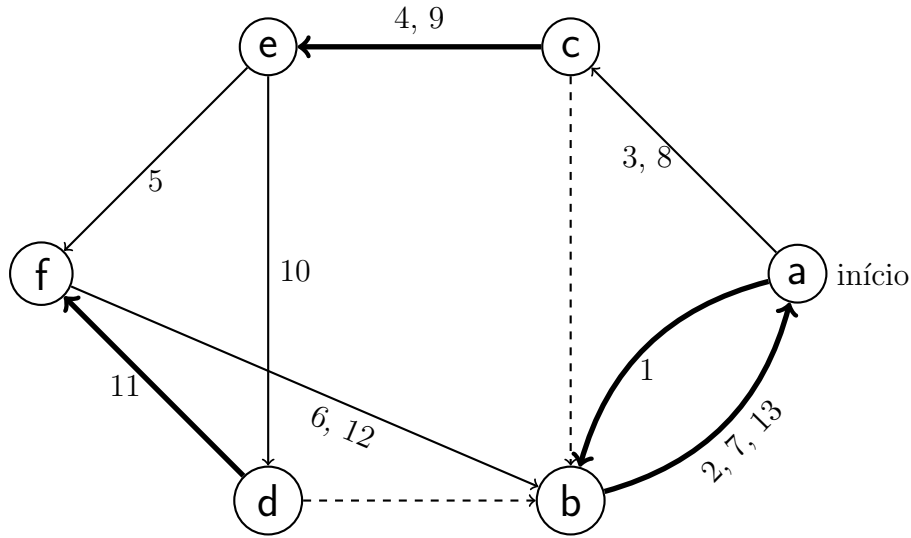


Figura 32: Construção de um circuito que resolve o PCR do grafo G . Representam-se em pontilhado os arcos de G não percorridos na solução desenvolvida.

Finaliza-se assim a execução da heurística da arborescência geradora mínima, que gera uma solução para o PCR de G com custo 62.

3 Problemas resolvidos

Esta seção se dedica a discutir aplicações do Problema do Carteiro Chinês em problemas de competições de programação.

3.1 Tanya and Password

URL do problema: <https://codeforces.com/contest/508/problem/D>

URL da solução: <https://github.com/gafeol/competitive-programming/blob/master/ojs/cf/508/D.cpp>

Este problema fornece um multiconjunto \mathcal{C} de n strings de tamanho 3 e pede para que se construa, se possível, uma string S de tamanho $n + 2$ com a restrição de que o conjunto das substrings de tamanho 3 da string S deve corresponder a \mathcal{C} .

Uma instância desse problema é a seguinte, para $n = 5$:

$$\mathcal{C} = \{aca, aba, aba, cab, bac\}$$

Uma string S que resolve este exemplo é $abacaba$, já que existe uma bijeção entre toda substring de tamanho 3 de S e \mathcal{C} . A string $abacab$, no entanto, não satisfaz a restrição do problema já que a mesma não possui duas substrings aba , como ocorre em \mathcal{C} .

A solução que será apresentada para este problema envolve a teoria de caminhos eulerianos apresentada.

Iniciaremos por explicar a modelagem realizada. Cada vértice do digrafo que construiremos representará um conjunto de duas letras.

Representaremos cada string $w \in \mathcal{C}$ por dois vértices ligados por um arco. Um dos vértices, que chamaremos de u , representa os dois primeiros caracteres de w , enquanto que o segundo vértice, v , representa os dois últimos caracteres de w , cria-se ainda um arco de u a v .

Para exemplificar tal procedimento tome $w = aca$. Criam-se primeiramente dois vértices, um representando a string ac e outro representando ca , e liga-se ambos com um arco, como representado em 33.

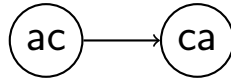
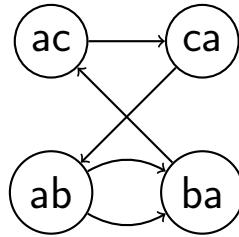


Figura 33: Exemplo da modelagem usada na solução

Deve repetir-se tal procedimento para toda string $w \in \mathcal{C}$. Segue a modelagem completa, que chamaremos de G , do exemplo inicial ($\mathcal{C} = \{aca, aba, aba, cab, bac\}$):



Cada arco criado na modelagem corresponde a uma string de \mathcal{C} , o arco entre ac e ca , por exemplo, representa a string aca . A partir dessa correspondência podemos representar também um passeio, P , em G como uma sequência de strings, seq , subconjunto de \mathcal{C} :

O passeio $P = \{ba, ac, ca, ab\}$, por exemplo, percorre os arcos que correspondem à sequência $seq = \{bac, aca, cab\}$.

Por sua vez, a partir de seq é possível montar uma string S que possua todas strings de seq como substrings:

$$seq = \{bac, aca, cab\} \rightarrow S = "bacab"$$

Tal procedimento permite que, a partir de um passeio P em G construa-se uma string S tal que:

- O tamanho de S é igual ao número de arcos percorridos em P mais 2;
- Se um arco e é percorrido em P , então a string de \mathcal{C} que e representa será uma substring de S .

Como o problema pede que encontremos uma string de tamanho $n + 2$ que possua todas strings de \mathcal{C} como substrings, basta encontrar, se existir, uma trilha que percorra todo arco de G uma única vez, isto é, uma trilha ou um circuito euleriano.

Deste modo a solução do problema consiste em checar as propriedades necessárias para a existência de uma trilha euleriana, que são estabelecidas neste trabalho pelo corolário 2.

Se uma trilha ou circuito euleriano existir em G , podemos usar o algoritmo de Hierholzer para encontrar tal passeio.

3.2 Sereja and the Arrangement of Numbers

URL do problema: <https://codeforces.com/problemset/problem/367/C>

URL da solução: <https://github.com/gafeol/competitive-programming/blob/master/ojs/cf/367/C.cpp>

Definição do problema

No enunciado do problema define-se uma sequência s como **bonita** quando existe um inteiro i para cada par de valores distintos u, v pertencentes a s , tal que $s_i = u, s_{i+1} = v$ ou $s_i = v, s_{i+1} = u$.

Em outras palavras, se uma sequência é bonita todo par de valores distintos pertencentes à essa sequência aparecem na mesma lado a lado ao menos uma vez.

Define-se também um sistema de recompensas: para cada valor há uma recompensa positiva associada. A recompensa total de uma sequência é igual à soma das recompensas de seus valores distintos, ou seja, a recompensa não depende do número de vezes que cada valor aparece na sequência.

O problema consiste então desenvolver um algoritmo que calcule a maior recompensa atingível para uma sequência bonita de tamanho n que seja constituída apenas por valores definidos pela entrada.

A entrada do programa, portanto será dada pelos valores n, m e por m pares q_i, w_i , indicando que q_i é um valor que pode ser utilizado e que

possui recompensa w_i , garante-se que os valores de q_i são distintos e que w_i é positivo.

Um exemplo de entrada para este problema é:

5 4	Neste exemplo $n = 5$ e $m = 4$
1 4	O primeiro valor é 1, e sua recompensa é 4
2 3	Segue o valor 2, com recompensa 3
4 2	Segue o valor 4, com recompensa 2
3 10	Finalmente temos o valor 3, de recompensa 10

Para este exemplo, uma solução ótima é a sequência 1, 2, 3, 1, 1, que é bonita e possui recompensa total igual a 17. Não existe uma sequência bonita que possua os quatro valores do exemplo.

Descrição da solução

Como todo valor possui uma recompensa positiva, a solução final deverá usar a maior quantidade de valores distintos que for possível.

Começaremos discutindo um problema mais simples: Qual o tamanho da menor sequência bonita que utiliza x valores distintos?

Para resolver esse problema faremos uma modelagem do problema usando um grafo completo K_x , que possui x vértices, onde cada vértice representa um valor distinto e cada aresta possui custo unitário.

Todo passeio do grafo K_x pode ser representado como uma sequência dos valores dos vértices do grafo, as sequências definidas como bonitas são aquelas que representam um passeio que percorre todas arestas do grafo K_x .

Para facilitar a análise deste problema, assumiremos que pode existir em um passeio dois vértices de mesmo valor em sequência, mesmo sem haver um loop neste vértice, além disso, vamos assumir que os valores distintos são $1, 2, \dots, x$.

Sendo assim, podemos interpretar uma sequência s que possua apenas valores entre 1 e x como um passeio em K_x , os valores da sequência representam os vértices do grafo K_x , e dois valores adjacentes u e v representam que a aresta uv está presente no passeio derivado de s .

Para que a sequência s seja bonita, todo par de valores distintos u, v deverá aparecer ao menos uma vez lado a lado, o que implica que o passeio derivado de s deverá percorrer a aresta uv ao menos uma vez.

Concluimos então que um passeio derivado de uma sequência que seja bonita, deverá percorrer todas arestas do grafo K_x , sendo assim uma solução do problema do carteiro chinês para o mesmo.

Voltamos assim à pergunta inicial, a menor sequência bonita que utiliza x valores distintos, será aquela que representa uma solução ótima do problema do carteiro chinês para o grafo K_x , já que a solução que minimiza o custo do PCC também minimizará o número de arestas percorridas, e portanto, o tamanho da sequência bonita.

Vejamos agora alguns exemplos:

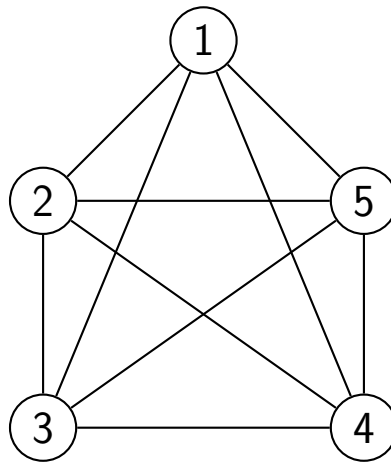


Figura 34: Exemplo com $x = 5$

Para $x = 5$, o grafo induzido é o K_5 , como representado na figura 34. Como todos os vértices do K_5 possuem grau par, a solução ótima do Problema do Carteiro Chinês para este exemplo é também um circuito euleriano, como o seguinte:

$$P = \{1, 2, 3, 4, 5, 1, 3, 5, 2, 4, 1\}$$

Como discutido anteriormente, P , além de solução do PCC é também uma sequência bonita que utiliza os x valores definidos pelos vértices do grafo.

Sendo assim, para utilizar 5 valores distintos, é necessário ter uma sequência de tamanho no mínimo 11, valor este que é igual a $1 + |E(K_5)| = 1 + 10 = 11$.

Analisaremos agora outro exemplo, em que $x = 4$, do qual se deriva o grafo K_4 representado na figura 35.

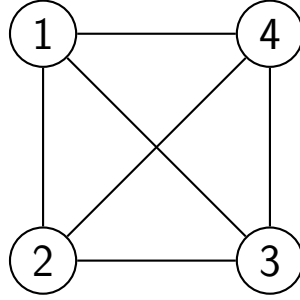


Figura 35: Exemplo com $x = 4$

Neste exemplo, todos os vértices de K_4 possuem grau ímpar, por isso, a primeira parte da solução do problema do carteiro chinês se baseia em duplicar algumas arestas do grafo, tornando-o um grafo euleriano.

Como estamos tratando de um grafo completo, com arestas de custo unitário, não é necessário criar uma condensação do grafo K_x , e achar um emparelhamento perfeito de custo mínimo. Basta apenas criar uma duplicação de aresta entre todo par de vértices de índices i e $i + 1$ para todo índice i ímpar, como representado na figura 36 para o exemplo em questão.

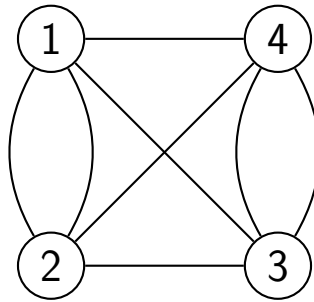


Figura 36: K_4 com arestas duplicadas

A partir do grafo euleriano criado, é possível encontrar o caminho euleriano P , que também é solução do PCC para o grafo K_4 , e, finalmente, sequência bonita de tamanho mínimo que usa 4 valores distintos.

$$P = \{1, 2, 3, 4, 1, 3, 4, 2, 1\}$$

Sendo assim, o tamanho mínimo de uma sequência bonita que possui 4 valores distintos é 9, valor este composto da seguinte forma: $1 + |E(K_4)| = 1 + 6 = 7$ somado ao número de arestas duplicadas $\frac{4}{2} = 2$.

Podemos assim abstrair uma fórmula geral para o tamanho mínimo de uma sequência bonita P que utilize k valores distintos em sua composição:

$$|P| = 1 + \frac{k(k-1)}{2} + \begin{cases} 0 & k \text{ ímpar} \\ \frac{k}{2} & k \text{ par} \end{cases}$$

Todo grafo completo com uma quantidade ímpar de vértices é euleriano, já que todos seus vértices possuem grau par, enquanto os grafos completos com quantidade par de vértices não são eulerianos. Por isso a diferença na fórmula de $|P|$.

A partir dessa fórmula fechada, é possível descobrir com uma busca binária, em complexidade $\mathcal{O}(\lg n)$, qual o maior valor de k tal que $|P| \leq n$.

Encontrado tal valor k , o número máximo de valores distintos que a solução pode possuir para ser bonita, basta descobrir quais valores da entrada escolher para maximizar a recompensa.

Se possuírmos na entrada uma quantidade de valores, m , tal que $m \leq k$, então a solução ótima será a soma das recompensas de todos valores, já que é possível encontrar uma sequência bonita que irá conter todos valores disponíveis.

Do contrário, a solução consistirá em escolher os k valores de maior recompensa disponíveis. Para encontrar tal valor, basta manter uma árvore de busca binária balanceada com as k maiores recompensas dos valores disponíveis, o que custa tempo $\mathcal{O}(m \lg k) = \mathcal{O}(m \lg \sqrt{n})$.

3.3 Jogging Trails

URL do problema: https://onlinejudge.org/index.php?option=com_onlinejudge&Itemid=8&page=show_problem&problem=1237

URL da solução: <https://github.com/gafeol/competitive-programming/blob/master/ojs/UVa/1237.cpp>

Neste problema devemos desenvolver um programa que calcula o custo de uma solução ótima para o problema do carteiro chinês em um grafo não direcionado de até 15 vértices com pesos nas arestas.

Este problema é uma aplicação direta do problema descrito nesse trabalho. Entretanto, em virtude do limite do número de vértices das instâncias, é possível resolver o problema de maneira mais simples.

Um dos últimos passos do algoritmo que resolve o problema do carteiro chinês em grafos não direcionados descrito neste trabalho é realizar a condensação do grafo original usando os vértices de grau ímpar e posteriormente construir o emparelhamento perfeito de custo mínimo usando o algoritmo de Edmonds.

Uma alternativa viável para este problema é realizar a construção do emparelhamento perfeito usando, ao invés do algoritmo de Edmonds, um

algoritmo de programação dinâmica:

Para esta solução devemos memoizar o custo mínimo de emparelhamento perfeito para todo subconjunto de vértices do grafo condensado.

Seja K o grafo completo condensado, S um subconjunto dos vértices de K , $dist$ uma função que retorna a distância entre dois vértices quaisquer de K e min_cost_S o menor custo de emparelhamento perfeito do subconjunto S de vértices, podemos definir a seguinte recorrência:

$$min_cost_S = \begin{cases} 0 & S = \{\} \\ \min_{u,v \in S} min_cost_{S-u-v} + dist(u,v) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Para representar os subconjuntos de vértices pode-se utilizar uma bit-mask. Como foi utilizado na implementação referenciada.

Referências

- [Chr+86] N. Christofides, V. Campos, A. Corberán e E. Mota. “An algorithm for the rural postman problem on a directed graph”. Em: (1986), pp. 155–166.
- [Chr76] Nicos Christofides. *Algoritmo de Christofides*. 1976. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Christofides_algorithm.
- [Ema14] E-maxx. *Minimum-cost flow - Successive shortest path algorithm*. 2014. URL: https://cp-algorithms.com/graph/min_cost_flow.html.
- [EJ73] J. Edmonds e E. L. Johnson. “Matching, Euler tours and the Chinese postman”. Em: (1973), pp. 88–124.
- [Edm61] Jack Edmonds. *Algoritmo Blossom*. 1961. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Blossom_algorithm.
- [Edm67] Jack Edmonds. *Optimum Branchings*. 1967. URL: https://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/jres/71B/jresv71Bn4p233_A1b.pdf.
- [Edm72] Richard M. Edmonds Jack e Karp. “Theoretical Improvements in Algorithmic Efficiency for Network Flow Problems”. Em: (1972). URL: <https://web.eecs.umich.edu/~pettie/matching/Edmonds-Karp-network-flow.pdf>.
- [EGL95] H. A. Eiselt, Michel Gendreau e Gilbert Laporte. *Arc Routing Problems, Part II: The Rural Postman Problem*. 1995. URL: <https://pubsonline.informs.org/doi/10.1287/opre.43.3.399>.
- [Fre79] Greg N. Frederickson. “Approximation Algorithms for Some Postman Problems”. Em: *Journal of the Association for Computing Machinery* 26 (3) (1979). URL: <https://dl.acm.org/doi/10.1145/322139.322150>.
- [Hie73] Carl Hierholzer. “Über die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu umfahren”. Em: (1873).
- [Kol09] Vladimir Kolmogorov. *Blossom V: A new implementation of a minimum cost perfect matching algorithm*. 2009.
- [LO81] Richard C. Larson e Amedeo R. Odoni. “Urban Operations Research, exercício 6.6”. Em: Prentice-Hall, 1981. Cap. 6. URL: http://web.mit.edu/urban_or_book/www/book/chapter6/problems6/6.6.html.

- [LKG76] J. K Lenstra, Rinnooy Kan e A H G. “On general routing problems Networks 6”. Em: (1976), pp. 273–280.
- [Orl95] James B. Orlin. *A polynomial time primal network simplex algorithm for minimum cost flows*. 1995. URL: <https://dspace.mit.edu/handle/1721.1/2584>.