1 O problema do Carteiro Chinês (PCC)

1.1 Grafos não direcionados

[...]

1.2 Problema do carteiro chinês com vento

Quando houver em um grafo uma aresta que possui custos diferentes dependendo do sentido em que a mesma é percorrida estamos tratando do Problema do Carteiro Chinês com Vento (PCCV).

A motivação dessa variação é que podem existir estradas com uma corrente de vento que o carteiro deve percorrer. A corrente de vento tanto pode ajudar o carteiro se ele anda no mesmo sentido que a corrente, quanto pode atrapalhar o carteiro se ele anda no sentido contrário do vento.

Outra ilustração possível para esta variação é imaginar que uma estrada pode ser inclinada, sendo assim mais difícil subir tal estada do que descé-la.

Esta variação do problema do carteiro chinês também é NP-difícil.

Porém, como provado por Meigu Guan [Gua83], se todo circuito de um grafo G possui o mesmo custo independente do sentido em que é percorrido, então é possível encontrar uma solução para o PCCV usando um algoritmo polinomial, trataremos esse caso a seguir.

Seja c_{ij} o custo de se percorrer a aresta ij de i a j e c_{ji} o custo de percorrer a mesma aresta no sentido contrário.

O algoritmo sugerido por Guan se baseia em criar uma nova função de custo c' para o problema, tal que $c'_{ij} = c'_{ji} = \frac{c_{ij}+c_{ji}}{2}$ para toda aresta ij. Essa transformação reduz o problema a um PCC não direcionado, que possui solução polinomial, como tratado na seção 1.1.

O teorema 1.1 enunciado a seguir, garante que uma resposta ótima do PCC no grafo (G, c') equivale a uma resposta ótima, de mesmo custo, do PCCV no grafo original (G, c).

Lema 1. *Seja C um circuito de G, vale que:*

$$\sum_{ij\in C} c'_{ij} = \sum_{ij\in C} c'_{ji} = \sum_{ij\in C} c_{ij} = \sum_{ij\in C} c_{ji}$$

Demonstração. Como G respeita a propriedade que todo circuito possui custo igual, não importando a ordem em que o mesmo é percorrido, pode-se afirmar que:

$$\sum_{ij\in C} c_{ij} = \sum_{ij\in C} c_{ji}$$

Além disso, por definição $c'_{ij} = c'_{ji}$, valendo assim que:

$$\sum_{ij \in C} c'_{ij} = \sum_{ij \in C} c'_{ji}$$

Finalmente, pela definição de c':

$$\sum_{ij \in C} c'_{ij} = \sum_{ij \in C} \frac{c_{ij} + c_{ji}}{2}$$

$$\sum_{ij \in C} c'_{ij} = \frac{1}{2} \left(\sum_{ij \in C} c_{ij} + \sum_{ij \in C} c_{ji} \right)$$

$$\sum_{ij \in C} c'_{ij} = \sum_{ij \in C} c_{ij}$$

□

Teorema 1.1. *Seja G um grafo conexo não direcionado cujos circuitos possuem o mesmo custo, independente do sentido que são percorridos.*

Qualquer solução ótima para o PCC em (G, c') também é uma solução ótima do PCCV em (G, c).

Demonstração. Seja T uma solução para o PCC em (G, c'). T será um passeio fechado composto por arestas orientadas de G.

Pode-se dividir T em circuitos de arcos $C_1, C_2, \ldots, C_k$, com $k \in \mathbb{N}$. Podemos expressar o custo da solução T como a soma dos custos de cada arco dos circuitos $C_1, C_2, \ldots, C_k$.

Provaremos por indução, que para um circuito qualquer C_i vale que:

$$\sum_{ij \in C_i} c_{ij} = \sum_{ij \in C_i} c'_{ij}$$

A indução é realizada com base no tamanho do circuito C_i analisado.

Há dois casos base desta indução:

- Quando o circuito analisado C_i é vazio.
- Quando C_i é um circuito que é presente no grafo original G. Isto é, C_i não percorre uma mesma aresta de G mais que uma vez. O lema 1 garante a hipótese de igualdade neste caso.

Assume-se que a hipótese de indução vale para circuitos com até k arcos.

Seja C_i um circuito que não faz parte do caso base e que possui $k + 1$ arcos.

Pela definição de circuitos, C_i não pode possuir arcos duplicados. Sendo assim, para C_i não estar presente em G, deverá existir uma aresta uv de G tal que $uv \in C_i$ e $vu \in C_i$, como representa-se a seguir:

$$C_i = \{w_1w_2, \ldots, w_iu, uv, vw_{i+1}, \ldots, w_jv, vu, uw_{j+1}, \ldots w_kw_1\}$$

É possível, a partir de tal representação retirar de C_i os arcos uv e vu, separando-o em dois circuitos direcionados de tamanho menor:

$$C_i' = \{w_1w_2, \ldots w_iu, uw_{j+1}, \ldots, w_kw_1\}$$
$$C_i'' = \{vw_{i+1}, \ldots, w_jv\}$$

Como ambos novos circuitos tem tamanho menor que $|C_i| = k+1$, vale a hipótese para ambos:

$$\sum_{ij \in C_i'} c_{ij} = \sum_{ij \in C_i'} c'_{ij} \tag{1}$$
$$\sum_{ij \in C_i''} c_{ij} = \sum_{ij \in C_i''} c'_{ij} \tag{2}$$

Além disso, vale pela definição da função c', que:

$$c_{uv} + c_{vu} = c'_{uv} + c'_{vu} \tag{3}$$

Somando as três igualdades apresentadas temos a representação do custo de C_i:

$$\sum_{ij \in C_i'} c_{ij} + \sum_{ij \in C_i''} c_{ij} + c_{uv} + c_{vu} = \sum_{ij \in C_i'} c'_{ij} + \sum_{ij \in C_i''} + c'_{ij} c'_{uv} + c'_{vu}$$
$$\sum_{ij \in C_i} c_{ij} = \sum_{ij \in C_i} c'_{ij}$$

Provando assim que a hipótese de indução também vale para um circuito de tamanho $k+1$.

Finalmente, temos que o custo da solução T do PCCV de (G, c) será igual ao custo da solução do PCC em (G, c'):

$$
\begin{aligned}
\sum_{ij\in T} c_{ij} &= \sum_{1\le u\le k} \sum_{ij\in C_u} c_{ij} \\
&= \sum_{1\le u\le k} \sum_{ij\in C_u} c'_{ij} \\
&= \sum_{ij\in T} c'_{ij}
\end{aligned}
$$

$\square$

Referências

[Gua83] Meigu Guan. "On the Windy Postman Problem". Em: *Discrete Applied Mathematics 9* (1983), pp. 41–46.