MAE 221 - Conjunto de Exercícios 8

Profa. Beti Kira

Entregar os exercícios assinalados com $\clubsuit$ em 15.maio.2019

Os exercícios assinalados com 🍃 serão resolvidos em sala de aula.

1. Encontre a função densidade de probabilidade de $Y = \frac{1}{X} - X$ com X sendo uma v.a. com distribuição uniforme no intervalo [0,1].

2. Se X tem distribuição exponencial dupla com densidade $\frac{\lambda}{2}\exp(-\lambda|x|)$, encontre e identifique a função densidade de probabilidade de $\mid X \mid$.

3. $\clubsuit$ Sejam X e Y com função densidade de probabilidade conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = 2e^{-(x+y)}\mathbb{1}_{[0,y]}(x)\mathbb{1}_{[0,\infty)}(y) \ ,$$

   (a) Determine a distribuição conjunta de X e $X+Y$;

   (b) Encontre as distribuições marginais de X e de $X+Y$ e identifique-as.

4. Uma agência bancária está com 2 caixas operando. Três clientes A, B e C chegam simultaneamente. A e B vão diretamente aos caixas e C então espera até A ou B sair para ser atendido. Calcule a probabilidade de que A ainda esteja no banco após B e C terem saído se:

   (a) o tempo de serviço de cada caixa é exatamente de 5 minutos.

   (b) os tempos de serviços de cada caixa podem ser 1, 2 ou 3 minutos com igual probabilidade.

   (c) os tempos de serviços de cada caixa são exponencias com taxa λ para ambos os caixas, independentes entre caixas e entre clientes.

5. $\clubsuit$ Sejam X e Y duas v.a. independentes, com $X \sim \text{Gama}(\alpha, \lambda)$ e $Y \sim \text{Gama}(\beta, \lambda)$. Considere $T = X/(X+Y)$ e $U = X+Y$.

   (a) Encontre a distribuição conjunta de T e U.

   (b) Encontre e identifique as distribuições marginais de T e U.

   (c) Baseado em (a) e (b), T e U são independentes ?

6. 🍃 Sejam X e Y independentes e com mesma distribuição exponencial(1).

   (a) Encontre as distribuições de probabilidade de $X+Y$ e X/Y.

   (b) Mostre que $X+Y$ e X/Y também são independentes.

7. Se X e Y são independentes cada um com distribuição exponencial(λ), $\lambda > 0$, encontre a função densidade de probabilidade de

   (a) $\mid X - Y \mid$ (b) $\min(X,Y)$ (c) $\max(X,Y)$

8. ♣ Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes com $X_j \sim$ Exponencial (λ_j), $j = 1, \ldots, n$.

   (a) Encontre a distribuição de $Y_1 = \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

   (b) Mostre que $P(Y_1 = X_k) = \dfrac{\lambda_k}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}$.

9. Sejam X e Y contínuas e independentes, ambas com distribuição uniforme(0,1). Encontre as funções densidades de probabilidade de

   (a) $X + Y$ (b) $X - Y$ (c) $\mid X - Y \mid$ (d) 🖉 X/Y (e) $X/(X + Y)$

10. 🖉 Sejam X e Y contínuas e independentes, ambas com distribuição uniforme(0,1). Determine a f.d.p. conjunta de $T = X + Y$ e $Z = X - Y$ e as densidades marginais de T e de Z. Justifique se T e Z são ou não são independentes.

11. ♣ Sejam X e Y contínuas e independentes, ambas com distribuição uniforme(0,1).

    Considere $T = X + Y$ e $U = X/(X + Y)$.

    (a) Determine a função densidade de probabilidade conjunta de T e U.

    (b) Encontre as funções densidades marginais de T e de U.
    Justifique se T e U são ou não são independentes.

12. Lança-se um dado equilibrado duas vezes, independentemente. Sejam X e Y as variáveis aleatórias que representam os número obtidos no primeiro e no segundo lançamentos, respectivamente.

    (a) Determine $P(X = Y)$.

    (b) Descreva a distribuição de $W =\mid X - Y \mid$.

    (c) Seja

    $$Z = \begin{cases} 1 & \text{se } X + Y \text{ é par.} \\ 0 & \text{se } X + Y \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

    Explique por que X e Z são, ou não são, independentes.

13. 🖉 Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com função densidade de probabilidade conjunta $f_{X,Y}(x, y)$ e sejam $Z = X/Y$ e $T = XY$. Mostre que

    $$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |u| \, f_{X,Y}(uz, u) \, du \quad \text{e}$$

    $$f_T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|u|} f_{X,Y}\left(\frac{t}{u}, u\right) \, du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|v|} f_{X,Y}\left(v, \frac{t}{v}\right) \, dv.$$