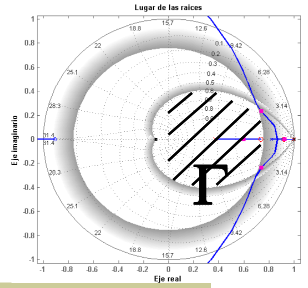
Control Automático

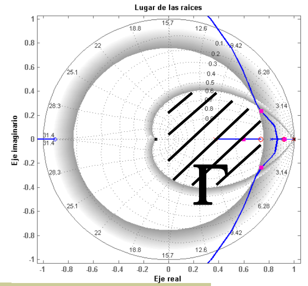
El lugar de las raíces en tiempo discreto

Contenido



- Transformación del plano s al plano z
- El lugar de las raíces en tiempo discreto
- Ejemplos y ejercicios

Transformación de ***s*** a ***z***



Partimos de la definición de ***z*** en términos de ***s***

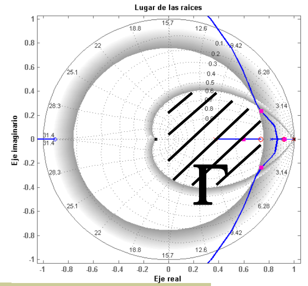
$$z = e^{sT}$$

Que se puede escribir de la siguiente forma

$$z = \mathrm{e}^{(\sigma + j\omega)T} = \mathrm{e}^{\sigma T} \cdot \mathrm{e}^{j\omega T} = \mathrm{e}^{\sigma T}\left[\cos\omega T + j\,\mathrm{sen}\,\omega T\right]$$

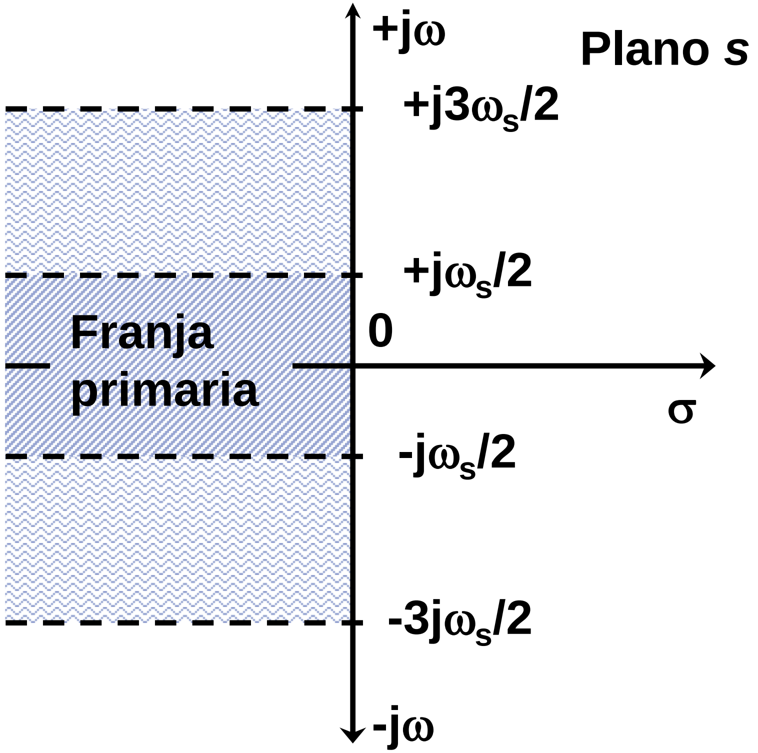
Puede observarse que el número complejo ***z*** depende de ω periódicamente con una frecuencia angular de muestreo $\omega_S = 2\pi/T$ y que su magnitud es $e^{\sigma T} < 1$, cuando $\sigma < 0$

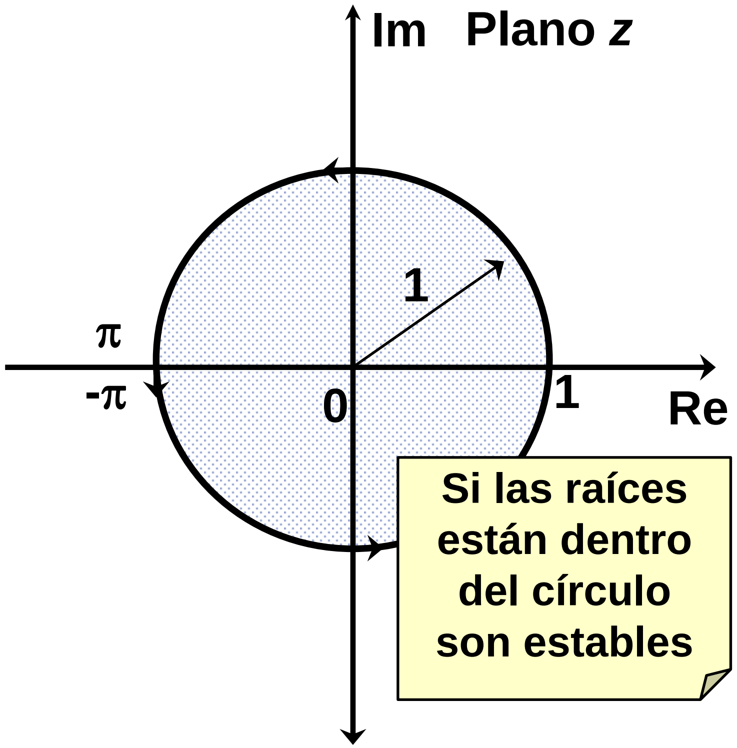
$$z = \mathrm{e}^{\sigma T} \angle(\omega T + 2\pi\, k)$$



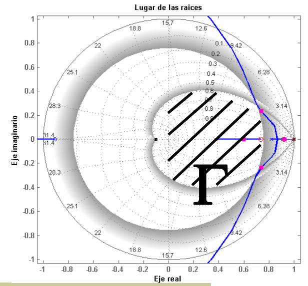
Transformación de ***s*** a ***z*** (2)

Con $\sigma < 0$, si variamos la parte imaginaria $j\omega$ desde $-j\omega_s/2$ hasta $+j\omega_s/2$ obtenemos la franja primaria. Si lo hacemos con $\sigma = 0$, que corresponde al eje imaginario, obtenemos el círculo unitario.

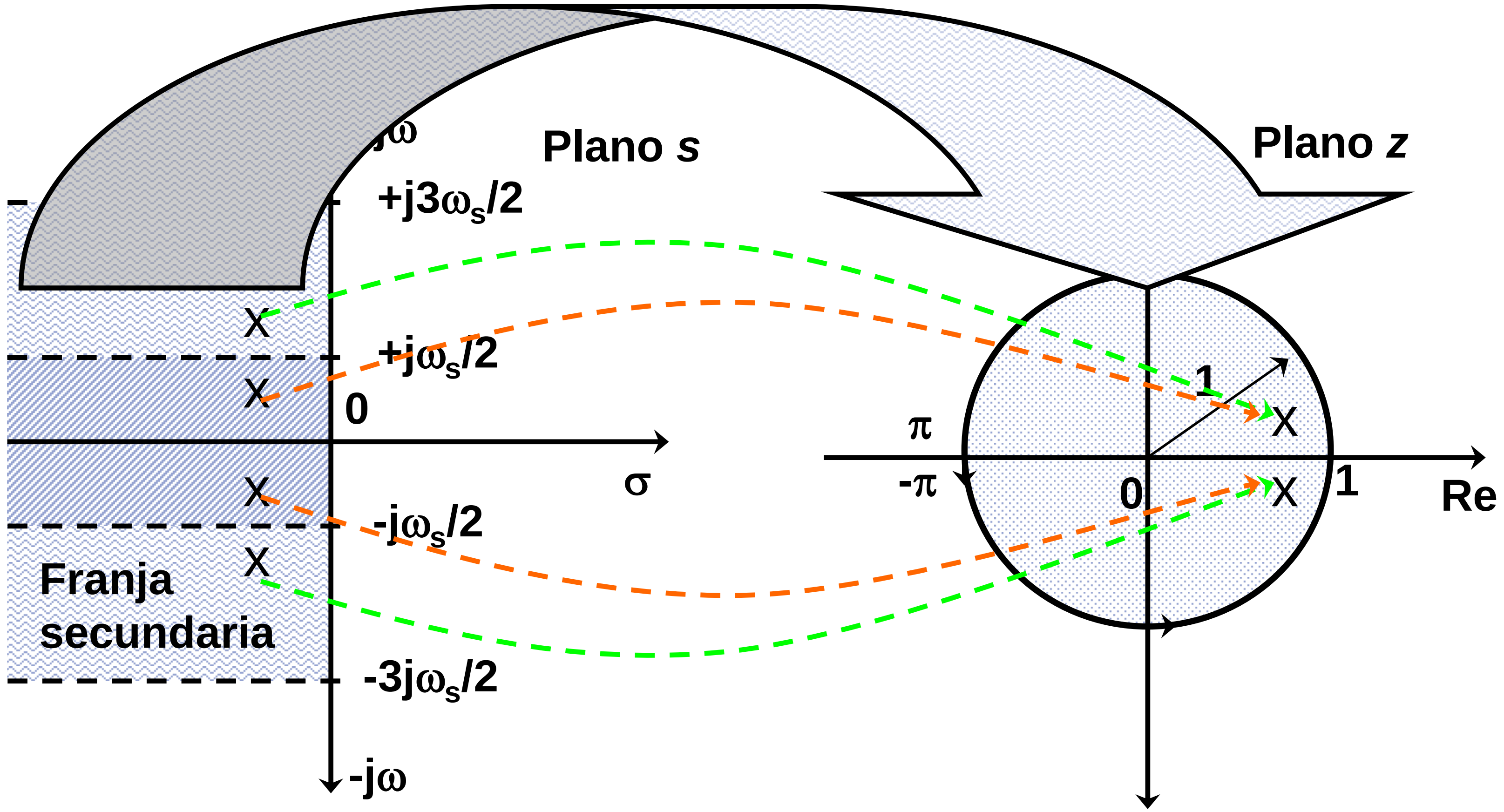


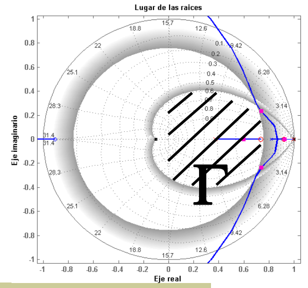


Transformación de ***s*** a ***z*** (3)



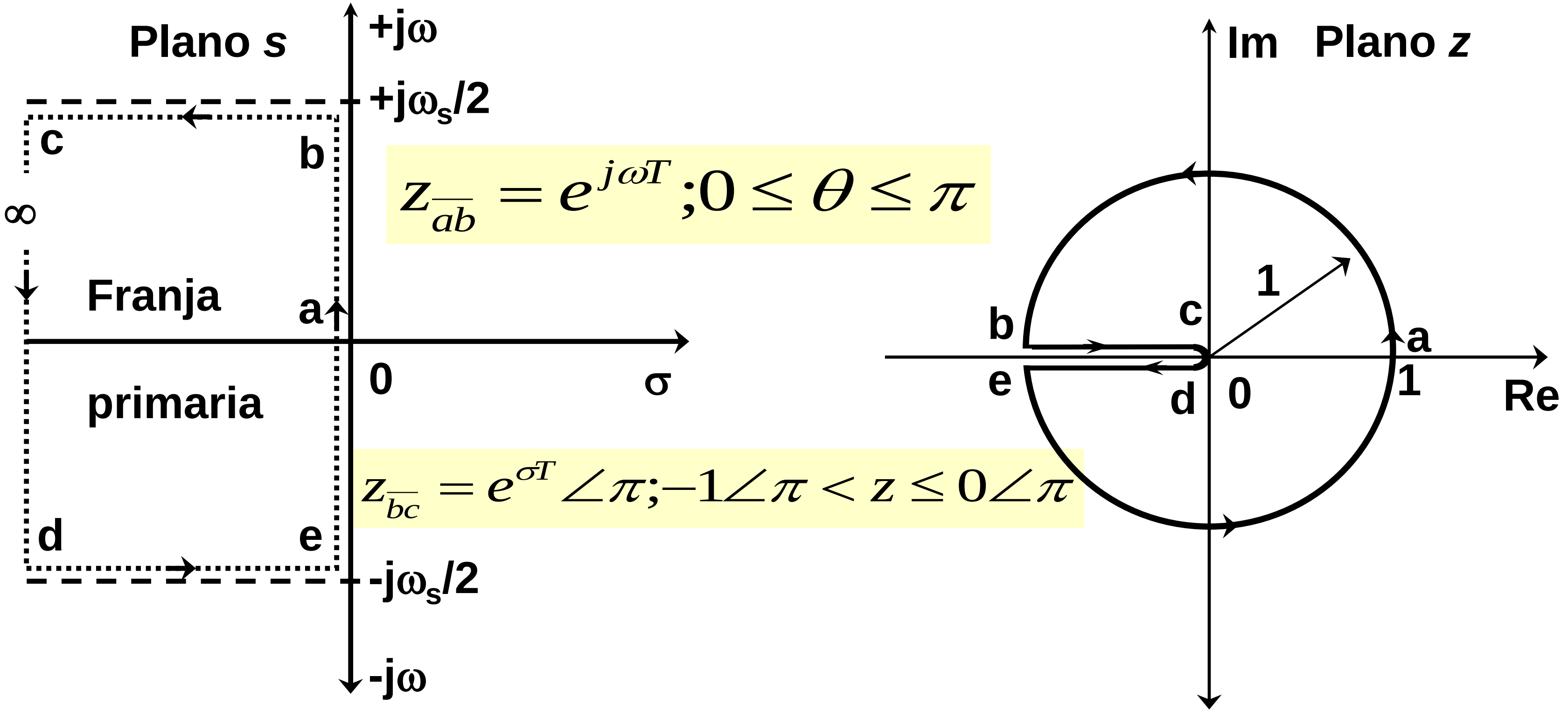
Las franjas secundarias también se transforman dentro del círculo unitario





La periferia de la franja primaria

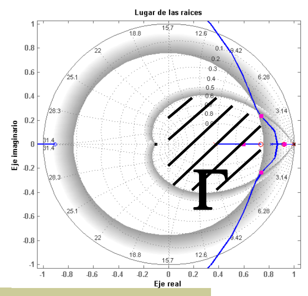
En la franja primaria, siguiendo la secuencia de puntos a-b-c-d-e-a obtenemos en el plano z la trayectoria mostrada



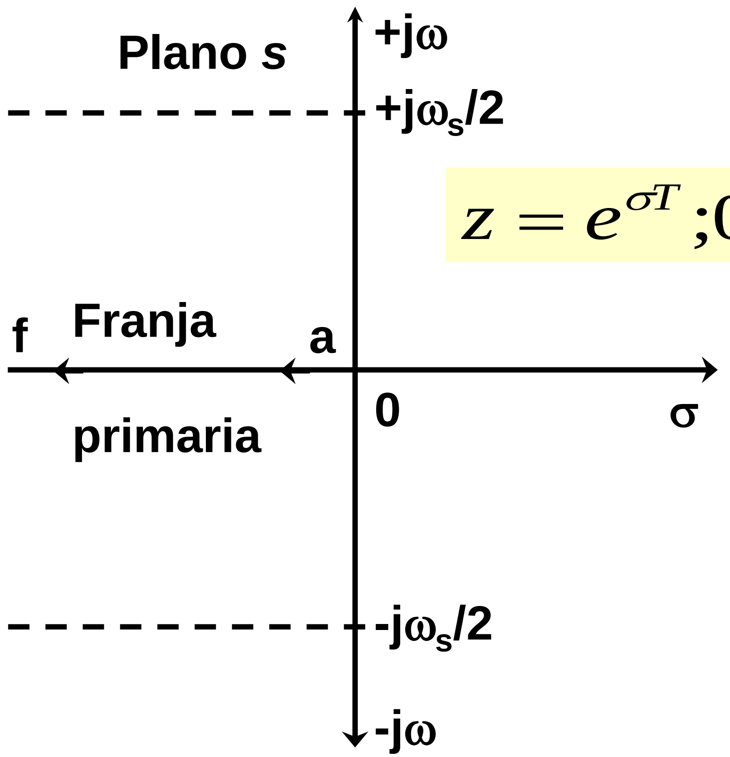
$$z_{\overline{ab}} = e^{j\omega T}; 0 \le \theta \le \pi$$

$$z_{\overline{bc}} = e^{\sigma T}\angle\pi; -1\angle\pi < z \le 0\angle\pi$$

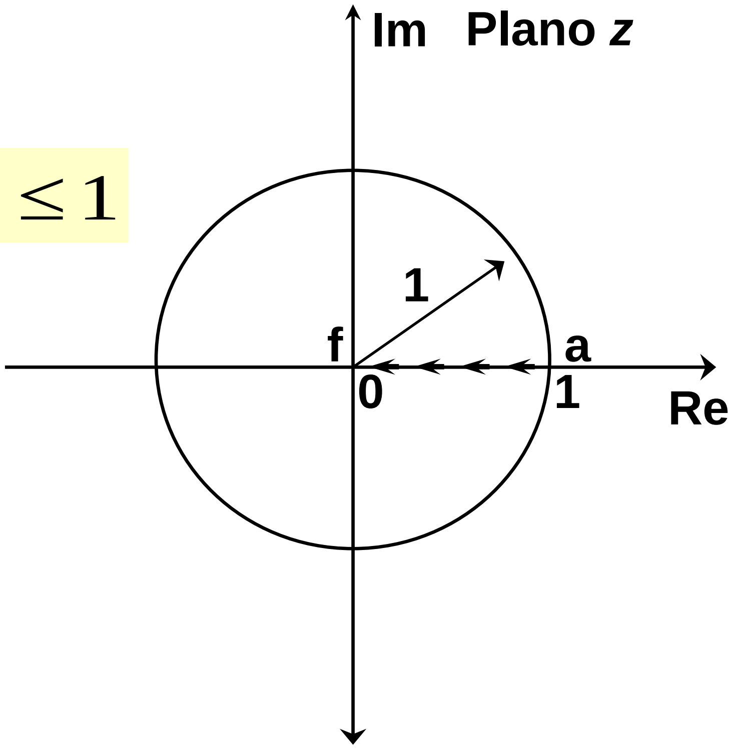
El eje real negativo



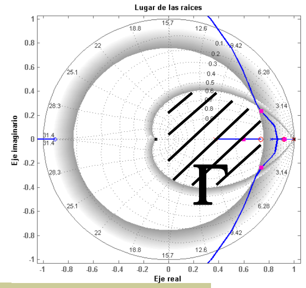
En la franja primaria, siguiendo la secuencia de puntos a-f, con $\sigma \leq 0$ obtenemos en el plano z la trayectoria mostrada



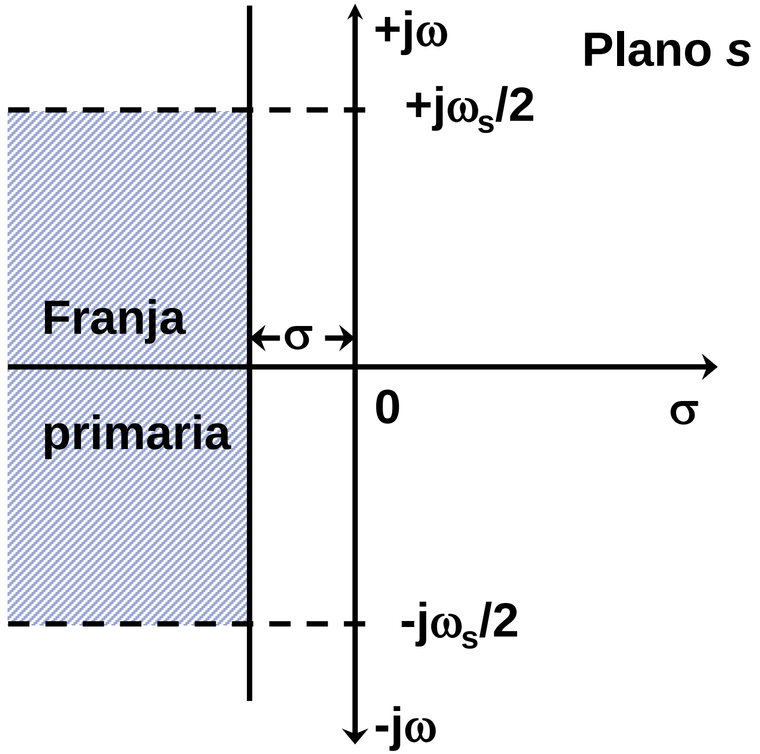
$$z = e^{\sigma T}; 0 \leq z \leq 1$$



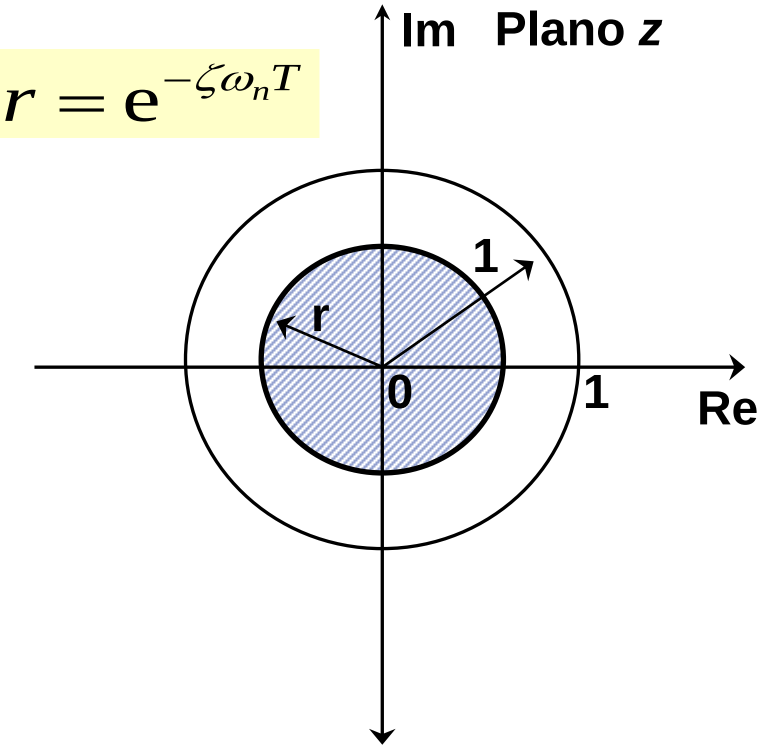
Una recta con $\zeta\omega_n$ constante



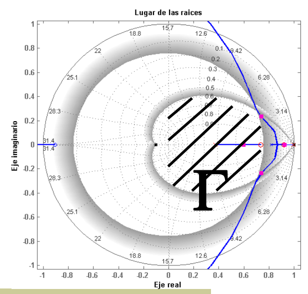
En la franja primaria, variando $j\omega$ desde $-j\omega_s/2$ hasta $+j\omega_s/2$ con σ = cte. = $-\zeta\omega_n$ obtenemos en el plano z el círculo mostrado



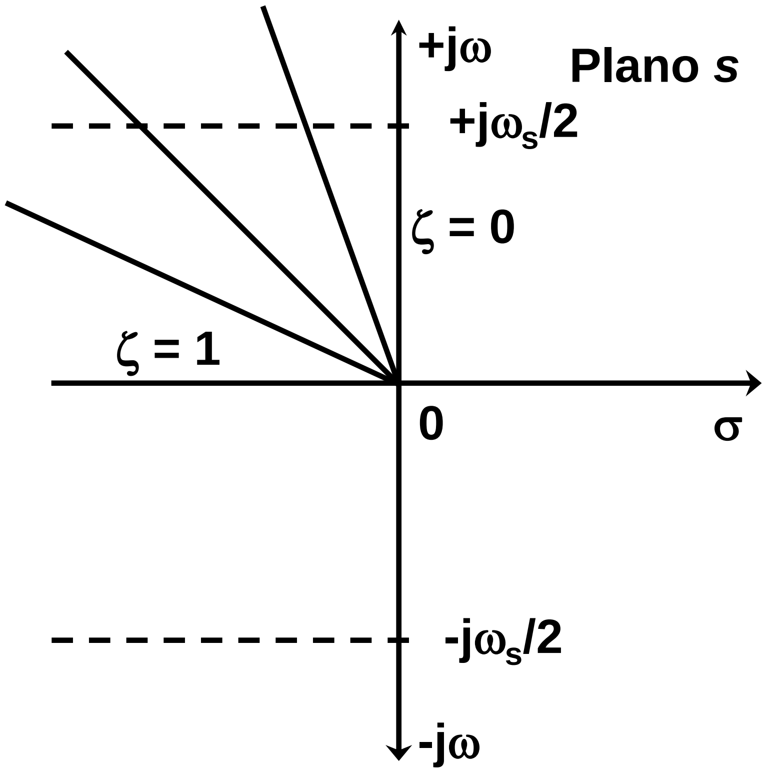
$$r = e^{-\zeta\omega_n T}$$

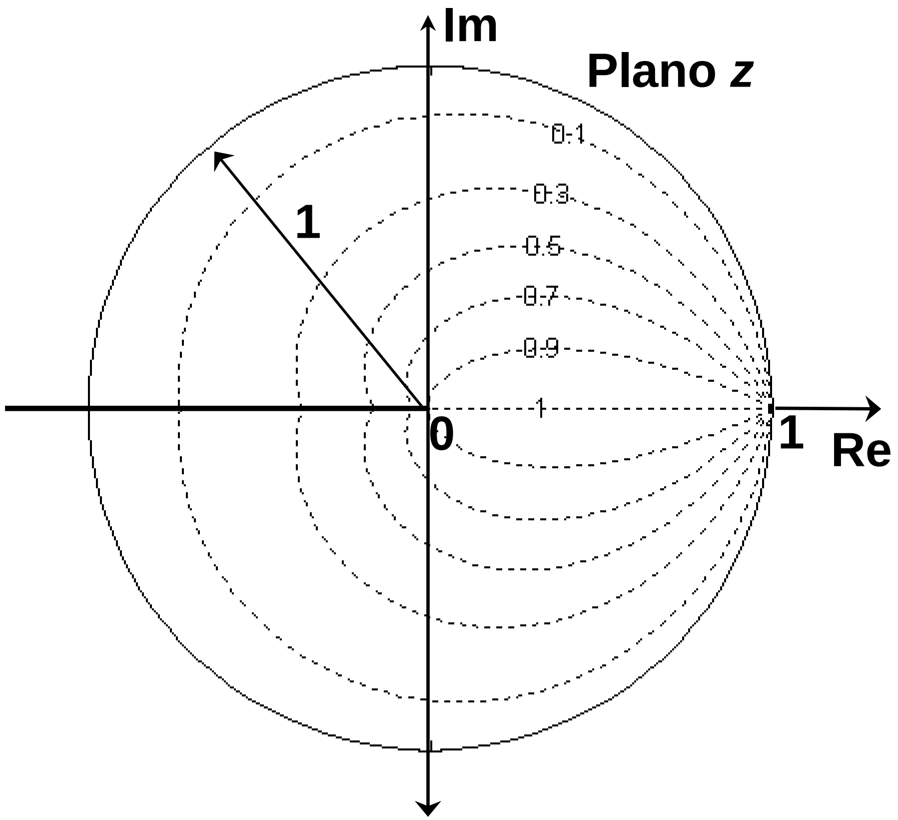


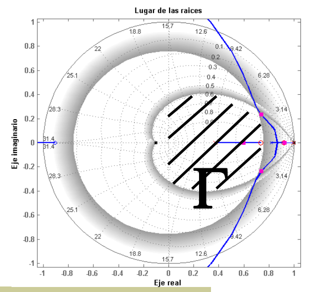
Rectas con ζ constante



Las rectas con ζ = cte. se transforman también

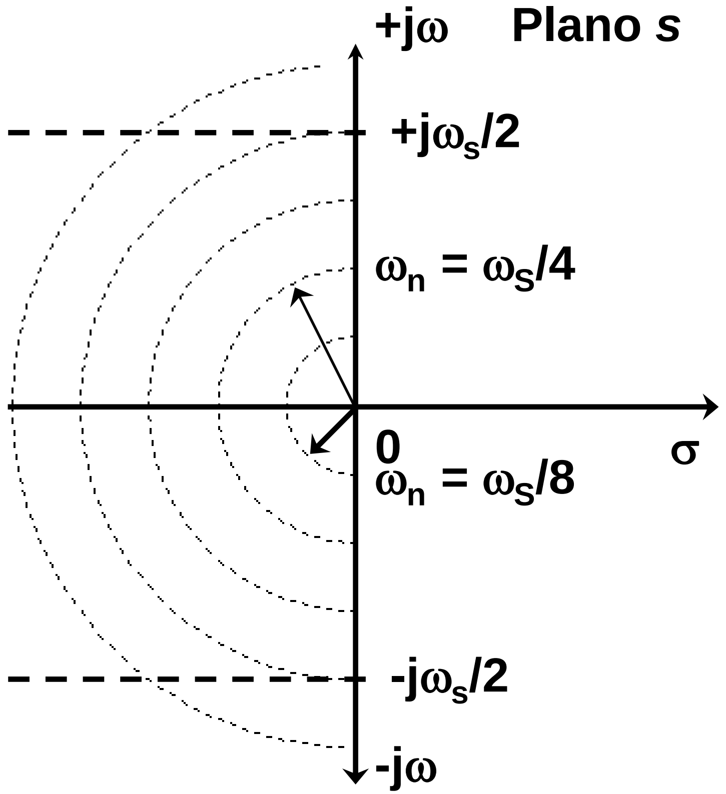


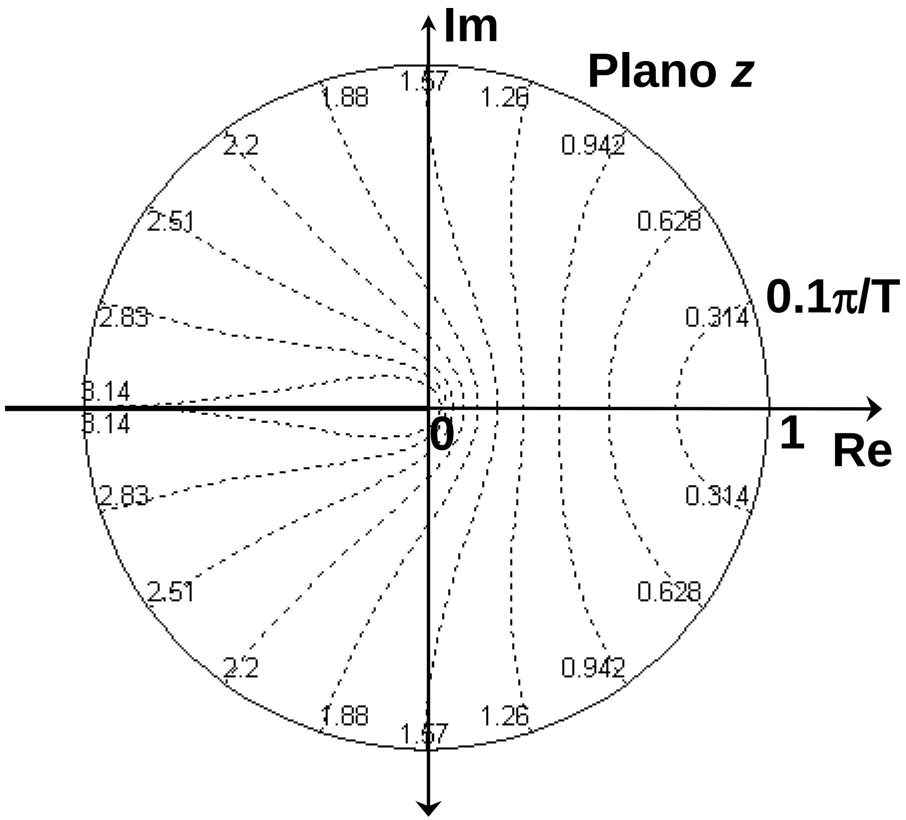




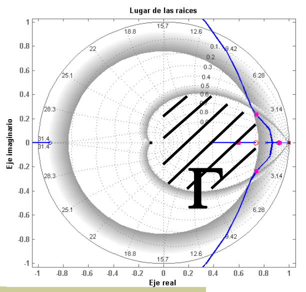
Semicírculos con ω_n constante

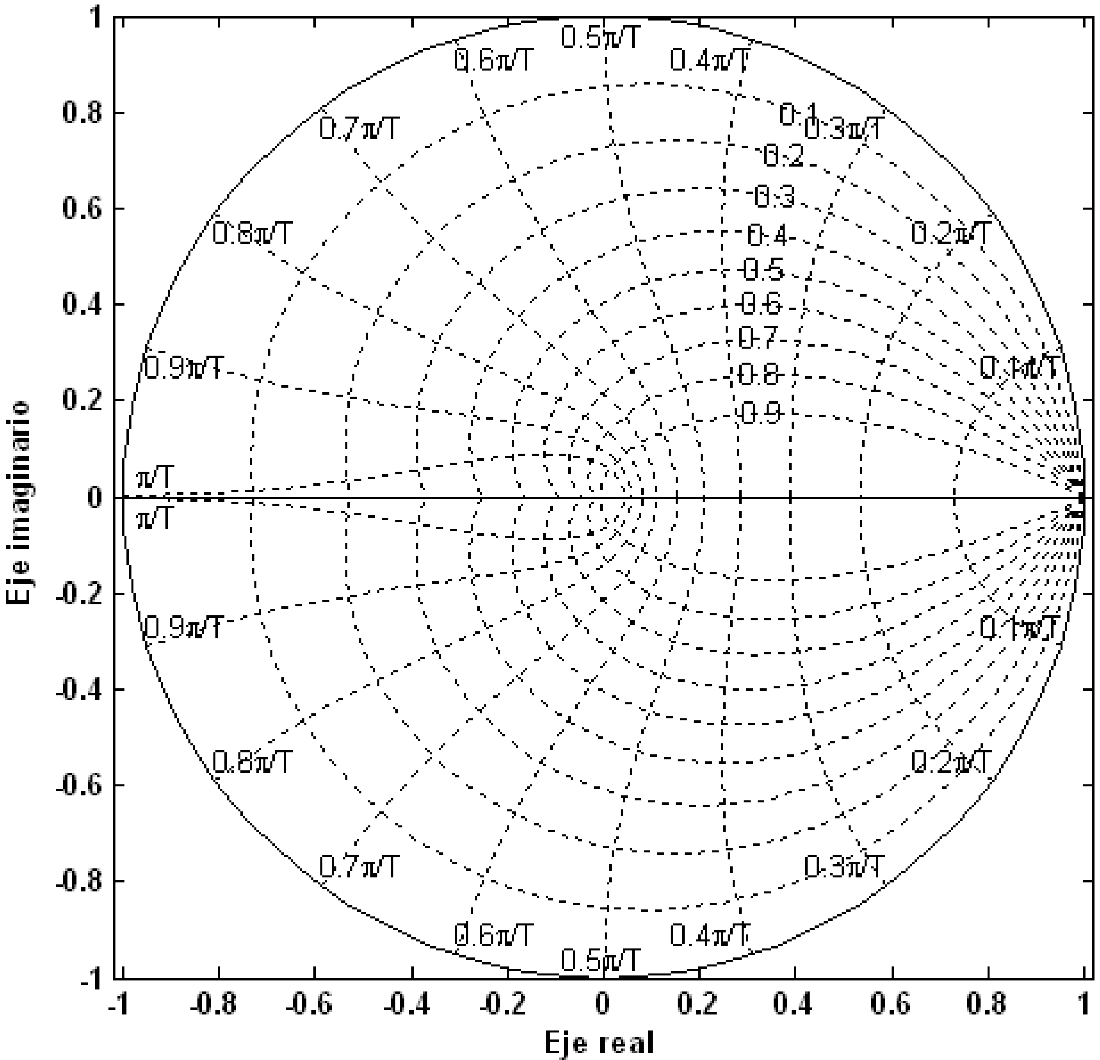
Los semicírculos con ω_n = cte. se transforman también dentro del círculo unitario. Ej. con T = 1s





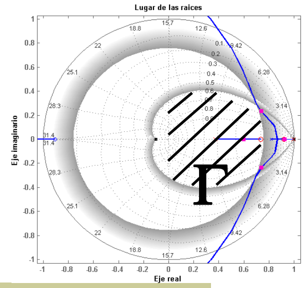
El plano z con ζ = cte. y ω_n = cte.





La transformación $z = e^{sT}$ es conforme o isogonal; por lo que la relación entre los ángulos se mantiene, como puede observarse en la figura con las curvas de ζ = cte. y ω_n = cte., que se mantienen perpendiculares entre sí, tal como en el plano **s**

El punto z para ζ y ω_n dados



Podemos obtener el valor de un punto z que corresponde a valores de amortiguamiento relativo y frecuencia natural dados, para un periodo de muestreo T, de dos maneras:

a) Evaluando primero el punto s y luego sustituyendo en $z = e^{sT}$

b) Directamente evaluando z para valores de ζ y ω_n

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

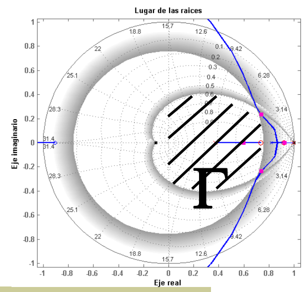
$$z = \mathrm{e}^{sT}$$

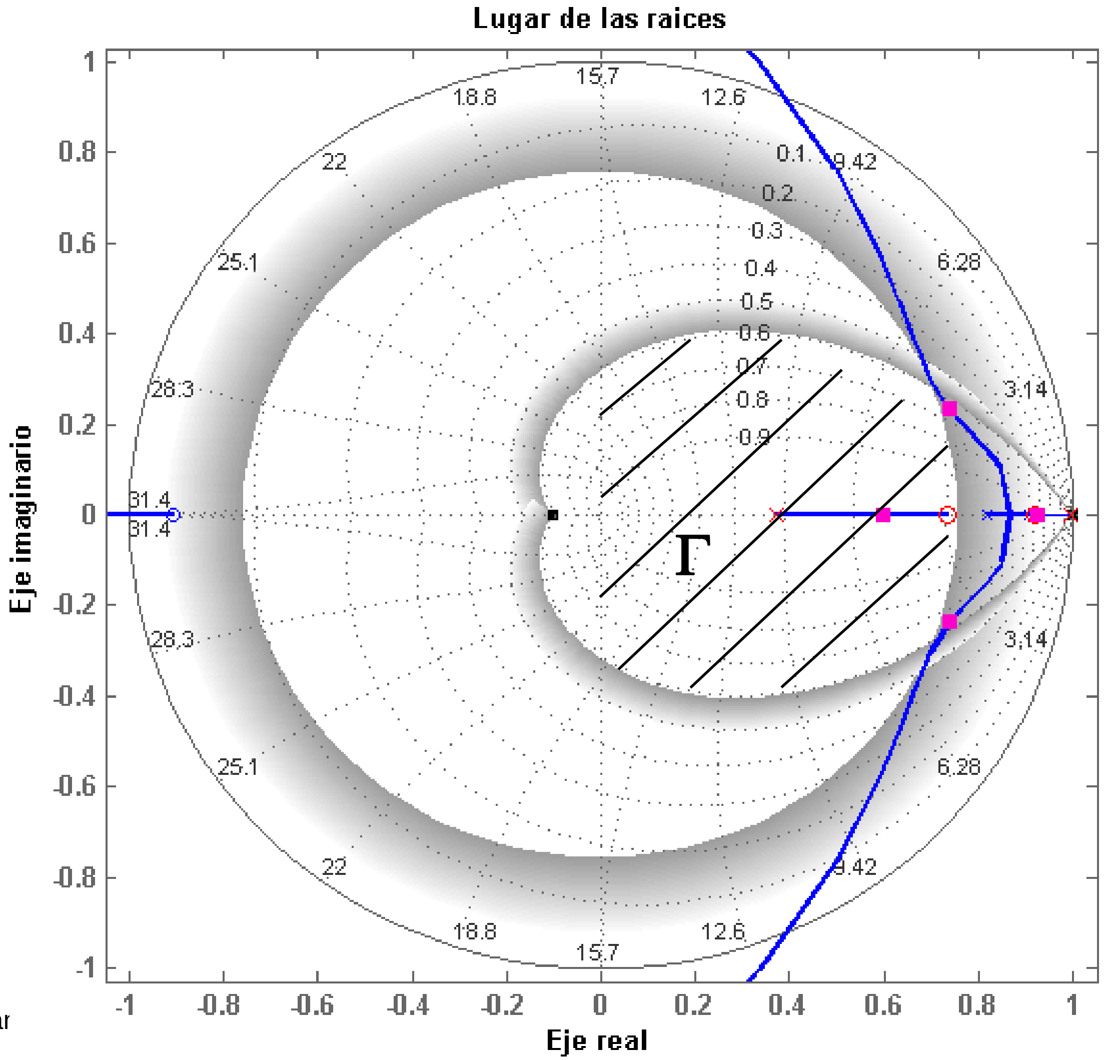
$$\Rightarrow z = \mathrm{e}^{\left(-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)T}$$

$$|z| = \mathrm{e}^{-\zeta\omega_n T}$$

$$\angle z = T\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

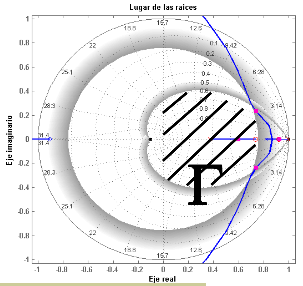
El lugar de las raíces en z



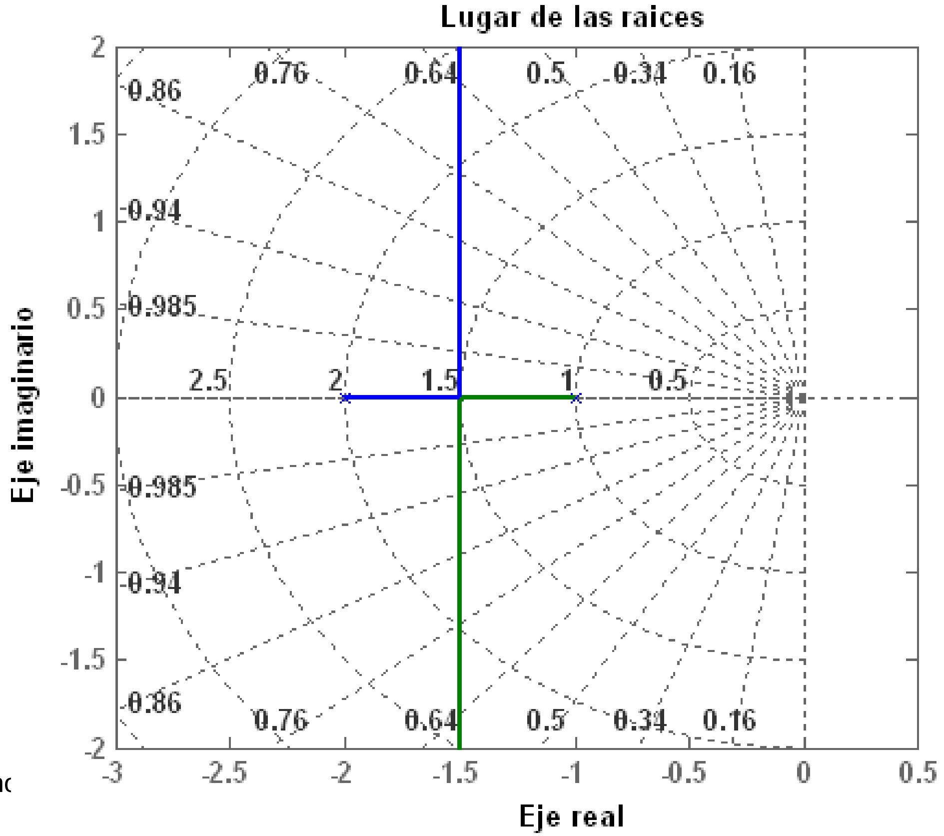


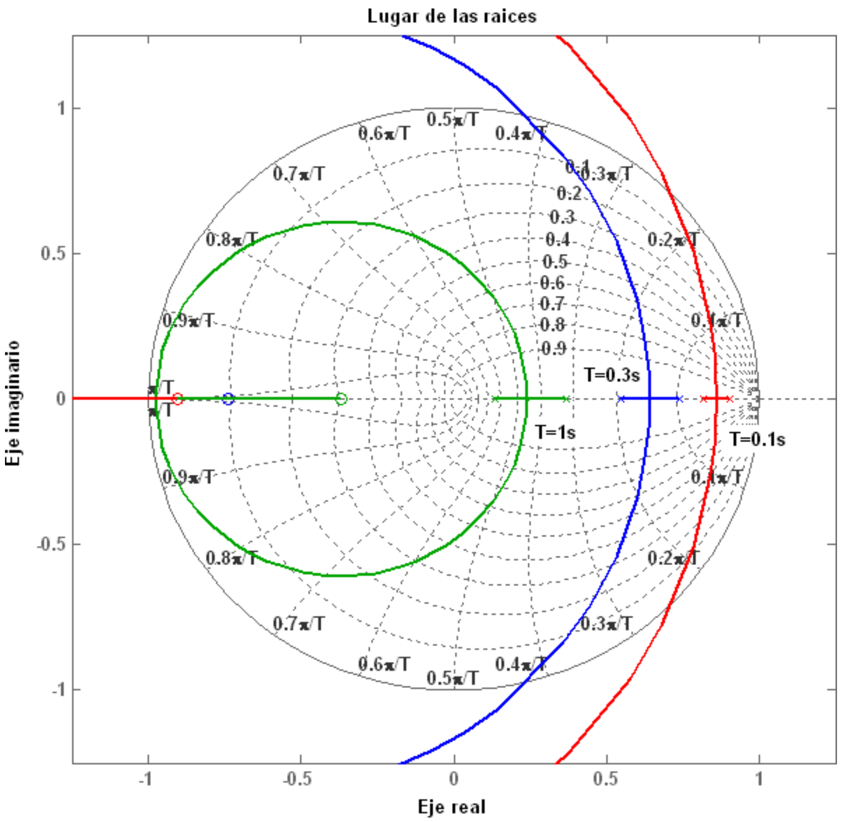
Debido a que la transformación es conforme, para realizar el lugar de las raíces en el plano **z**, se emplean las mismas reglas que para el lugar de las raíces en el plano **s**. El límite de estabilidad se encuentra en el borde del círculo de radio 1. Se muestra un sistema con los límites de la zona Γ en la que se deben ubicar los polos de lazo cerrado

El lugar de las raíces en z (2)

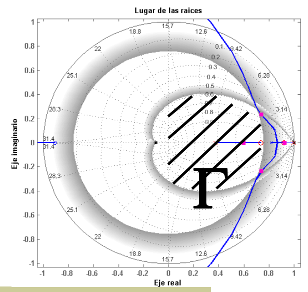


Un sistema en tiempo continuo, que es estable para cualquier valor de K > 0, es inestable en tiempo discreto para valores de K mayores que $K_{crítica}$, la cual depende de manera inversa del periodo de muestreo T.





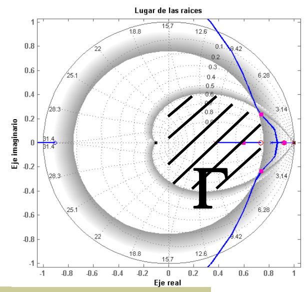
Ejemplo 1: Punto en el plano z

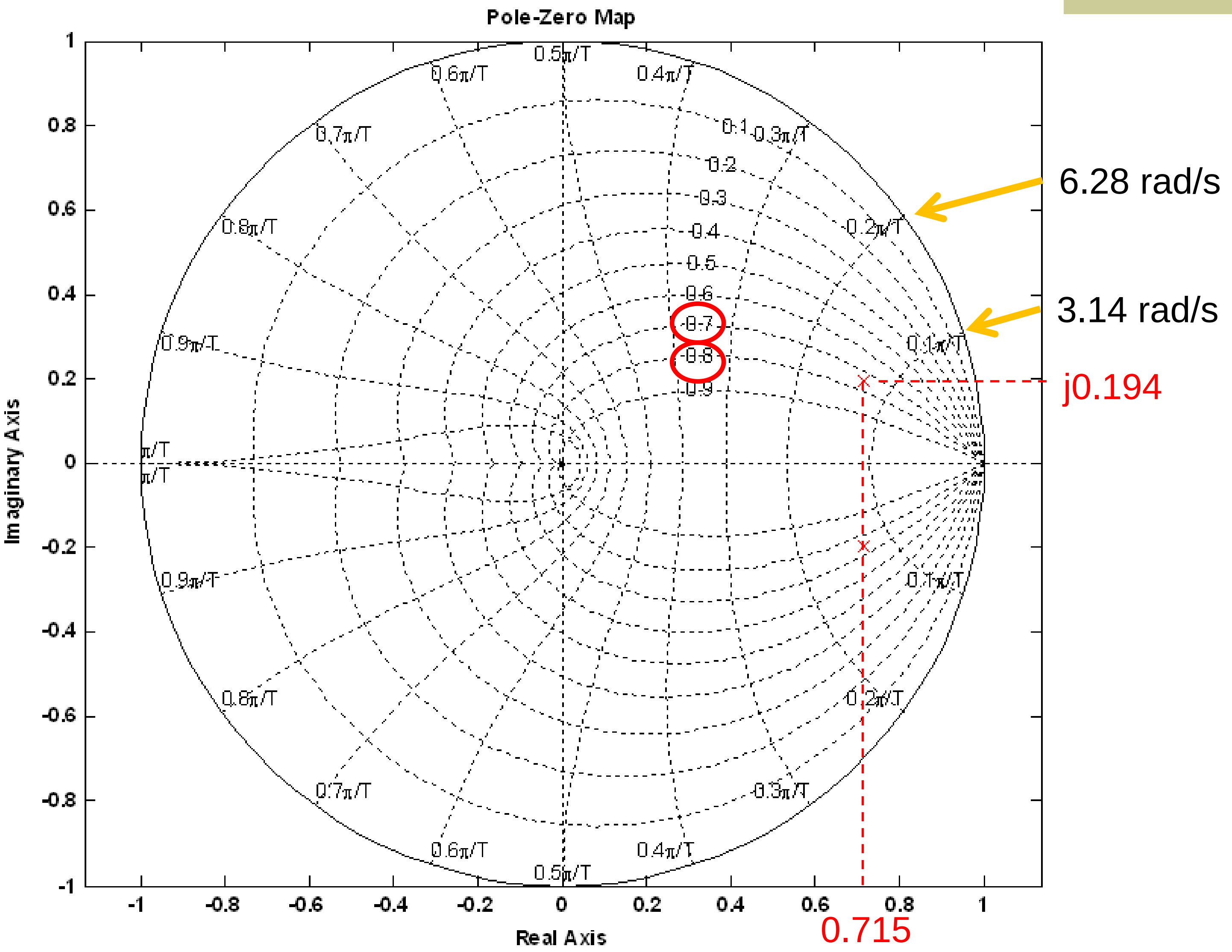


Encuentre en el plano z, con T = 0.1s, el punto z_1 en el cual el sistema tiene:

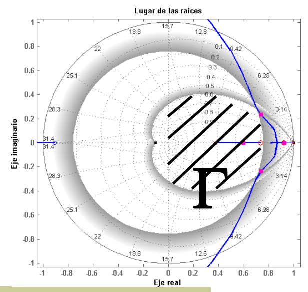
a) Un valor de amortiguamiento relativo $\zeta = 0.75$
b) Una frecuencia natural $\omega_n = 4$ rad/s.

Solución al ejemplo 1





Solución al ejemplo 1



El punto z_1 para ζ = 0.75, ω_n = 4 rad/s, T = 0.1

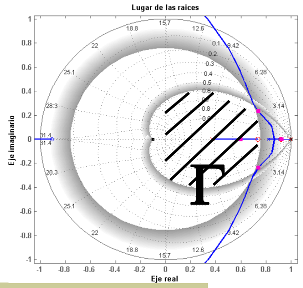
En el tiempo continuo encontramos el punto s_1 adecuado y lo convertimos con $z = e^{sT}$

$$s_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n * j(1-\zeta^2)^{1/2}$$

$$s_1 = -3.0 + j2.646$$

$$z_1 = e^{s1*T} = 0.715 + j0.194$$

Referencias



- Ogata, Katsuhiko. „**Sistemas de Control en tiempo discreto**“, Prentice Hall, 1996, 2ª Ed., México.