Estabilidad de los sistemas en tiempo discreto

En tiempo discreto también se puede hablar de estabilidad de estado y de estabilidad de entrada salida de forma similar a la empleada para los sistemas en tiempo continuo.

Podemos probar:

Estabilidad de estado

Estabilidad de entrada salida

Estabilidad de estado de los sistemas en tiempo discreto

Con *u(k) = 0* $\forall$ *k*, podemos observar que para que el sistema sea estable asintóticamente de estado según Lyapunov, la matriz $\mathbf{\Phi}(k) = \mathbf{A}_d{}^k$ debe extinguirse asintóticamente cuando $k \to \infty$.

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}_d{}^k \cdot \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}_d{}^{k-j-1} \mathbf{B}_d \cdot u(j)$$

Esto es la norma $\left\| \mathbf{\Phi}(k) \right\| = \left\| \mathbf{A}_d{}^k \right\|$ debe tender a cero cuando $k \to \infty$.

$$\lim_{k \to \infty} \left\| \mathbf{\Phi}(k) \right\| \to 0$$

con

$$\mathbf{\Phi}(k) = \mathbf{V} \cdot \left(\hat{\mathbf{A}}_d\right)^k \cdot \mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{diag}(\lambda_i{}^k) \cdot \mathbf{V}^{-1}$$

La condición será satisfecha cuando todos los modos $\lambda_i{}^k$ se extinguen. Lo anterior implica que todos los valores propios λ_i de la matriz $\mathbf{A}_d$ deben ser menores que 1 lo que se expresa en la condición.

“condición necesaria y suficiente para estabilidad asintótica en tiempo discreto”

$$|\lambda_\mathrm{i}| < 1 \ \forall\, \mathrm{i} \in (1, 2, \ldots, \mathrm{n})$$

Criterios de estabilidad de estado a partir de los coeficientes de la e. c.

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}_\mathrm{d}) = p(\lambda) = 0$$

$$\mathrm{p}(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

Método de Jury

Se basa en el arreglo de Jury, que tiene 2n-3 filas donde n es el orden del polinomio característico en tiempo discreto.

- Los coeficientes a_i se arreglan dos filas
- Se calculan las filas por pares hasta obtener una fila con solo tres coeficientes.
- Se comparan las magnitudes de los coeficientes a determinar la estabilidad del sistema.

Tabla para evaluar el criterio de estabilidad de Jury

Arreglo de Jury							
Fila	λ^0	λ^1	λ^2	...	λ^{n-2}	λ^{n-1}	λ^n
1	a_0	a_1	a_2	...	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
2	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_2	a_1	a_0
3	b_0	b_1	b_2	...	b_{n-2}	b_{n-1}	
4	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	...	b_1	b_0	
5	c_0	c_1	c_2	...	c_{n-2}		
6	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	...	c_0		
.				.			
.				.			
.				.			
2n-5	r_0	r_1	r_2	r_3			
2n-4	r_3	r_2	r_1	r_0			
2n-3	s_0	s_1	s_2				

Criterio de estabilidad de Jury

Todos los ceros del polinomio característico tienen magnitud menor que uno exactamente si las siguientes condiciones son satisfechas:

1) El polinomio característico evaluado en 1 es mayor que cero

$$p(1) > 0$$

2) El polinomio característico evaluado en -1 es positivo para polinomios de orden par y negativo para polinomios de orden impar.

$$(-1)^n p(-1) > 0$$

3) El coeficiente $\boldsymbol{a_n}$ del polinomio característico debe ser positivo y mayor que el valor absoluto del coeficiente $\boldsymbol{a_0}$.

$$|a_0| < a_n > 0$$

4) Todos los coeficientes calculados de la columna izquierda en las filas impares del arreglo deben tener una magnitud mayor que el coeficiente más a la derecha de la misma fila.

$$
\begin{gathered}
|b_0| > |b_{n-1}| \\
|c_0| > |c_{n-2}| \\
\vdots \\
|s_0| > |s_2|
\end{gathered}
$$

Pasos para la prueba de Jury

Pruebe primero las condiciones 1, 2 y 3.

Calcule los coeficientes del arreglo de Jury de la siguiente forma y evalúe la condición 4 con ellos.

$$b_0 = \det\begin{pmatrix} a_0 & a_n \\ a_n & a_0 \end{pmatrix} \qquad b_1 = \det\begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} \\ a_n & a_1 \end{pmatrix} \qquad b_k = \det\begin{pmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{pmatrix}$$

$$c_0 = \det\begin{pmatrix} b_0 & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_0 \end{pmatrix} \qquad c_k = \det\begin{pmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{pmatrix}$$

NOTA: Ya que el coeficiente $\boldsymbol{s_1}$ del arreglo de Jury no se emplea para determinar la estabilidad, no es necesario calcularlo.

Ejemplo 1: Probar la estabilidad de estado del sistema.

$$p(\lambda) = 2\lambda^4 - 3\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 1$$

Procedemos a probar las tres primeras condiciones

$p(1) = 1 > 0$ √

$(-1)^n p(-1) = (-1)^4 \cdot 9 = 9 > 0$ √

$|a_0| = 1 < a_n = 2 > 0$ √

Las tres condiciones primeras fueron satisfechas por lo que procedemos a calcular los coeficientes del arreglo de Jury y a probar la condición 4.

Ejemplo 1: Arreglo de Jury

Fila	λ^0	λ^1	λ^2	λ^3	λ^4
1	1	-1	2	-3	2
2	2	-3	2	-1	1
3	-3	5	-2	-1	
4	-1	-2	5	-3	
5	8	-17	11		

Pruebas	
$\lvert -3 \rvert > \lvert -1 \rvert$	√
$\lvert 8 \rvert < \lvert 11 \rvert$	X

La condición 4 no es satisfecha pues no se cumple que $\lvert s_0 \rvert > \lvert s_2 \rvert$ en la última fila del arreglo. **Por lo tanto el sistema es inestable.**

Método de estabilidad de Routh-Hurwitz en tiempo discreto

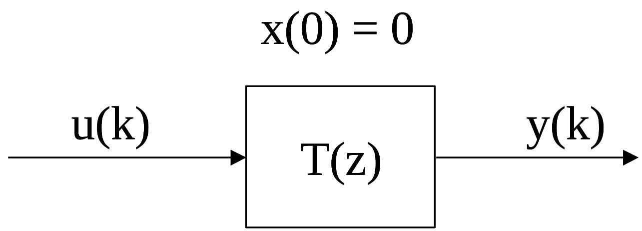
- Se realiza una transformación bilineal del plano z al plano w, que es similar al plano s.

- La transformación al plano w se efectúa al sustituir cada ocurrencia de la variable z en el polinomio característico.

$$z = \frac{w+1}{1-w}$$

- Se aplica al polinomio en w el criterio de Routh-Hurwitz.

Estabilidad de entrada salida de los sistemas en tiempo discreto (SISO)



Salida *y(k)* para una entrada *u(k)* con condiciones iniciales cero.

Si la entrada *u(k)* es limitada entonces la salida *y(k)* debe estar limitada.

$$|u(k)| \le k_u \Rightarrow |y(k)| \le k_y$$

Sumatoria de convolución

Si hacemos el estado inicial cero, la salida será.

$$y(k) = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{\Phi}(k - j - 1) \cdot \mathbf{B}_d \cdot u(j) + \mathbf{d} \cdot u(k)$$

$$y(k) = \sum_{j=0}^{k} g(k - j) \cdot u(j)$$

Tomando el valor absoluto

$$\left| y(k) \right| = \left| \sum_{j=0}^{k} g(k - j) \cdot u(j) \right|$$

Reemplazando los valores absolutos de *y(k)* y *u(k)* por sus límites

$$|y(k)| \le \sum_{j=0}^{k} |g(k-j)| \cdot |u(j)|$$

$$|y(k)| \le \sum_{j=0}^{k} |g(k-j)| \cdot k_u$$

$$|y(k)| \le \sum_{j=0}^{k} |g(k-j)| \cdot k_u < k_y$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} |g(j)| < \infty$$

Conclusión: Para tener estabilidad de entrada salida la sumatoria de *g(k)* debe tener un límite.

La condición para estabilidad de entrada salida en sistemas continuos

$$\int_0^{\infty} \left| g(t) \right| dt < \infty$$

Conclusión: Para probar la estabilidad de entrada salida en tiempo discreto podemos usar los mismos criterios que para probar la estabilidad de estado en tiempo discreto.

Método: Se reemplaza la variable λ por z en la fila superior del arreglo de Jury y en el polinomio característico, que es el polinomio denominador de la función de transferencia *G(z)* y se procede a la prueba de estabilidad de estado

Ejemplo 2: Encuentre el valor de K para garantizar la estabilidad de E/S.

$$T(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K \cdot (0.37z + 0.27)}{z^2 + (0.37 \cdot K - 1.37)z + 0.37 + 0.27 \cdot K}$$

$$p(z) = z^2 + (0.37 \cdot K - 1.37)z + 0.37 + 0.27 \cdot K$$

Dado que se trata de un sistema de segundo orden, (2n-3 = 1), con $a_n > 0$; las condiciones de estabilidad pueden simplemente escribirse como:

$$p(1) > 0$$

$$(-1)^2 p(-1) = p(-1) > 0$$

$$|a_0| < a_n$$

Ejemplo 2: cont.

Probamos entonces la estabilidad de entrada salida para el sistema.

$$p(1) = 0.64 \cdot K > 0 \qquad \Rightarrow K > 0$$

$$p(-1) = 2.74 - 0.1 \cdot K > 0 \qquad \Rightarrow K < 27.4$$

$$|a_0| = |0.37 + 0.27 \cdot K| < a_n = 1 \qquad \Rightarrow -5.07 < K < 2.33$$

Conclusión: Para que el sistema en tiempo discreto sea estable

$$0 < K < 2.33$$

Ejercicio 1

Con un controlador proporcional de ganancia variable K, se crea un sistema realimentado unitariamente para la planta G(z), con T = 0.01s. Pruebe la estabilidad de estado.

$$G(z) = \frac{0.5}{(z^3 - 0.97z^2)}$$

Solución: -0.06 < K < 1.2528

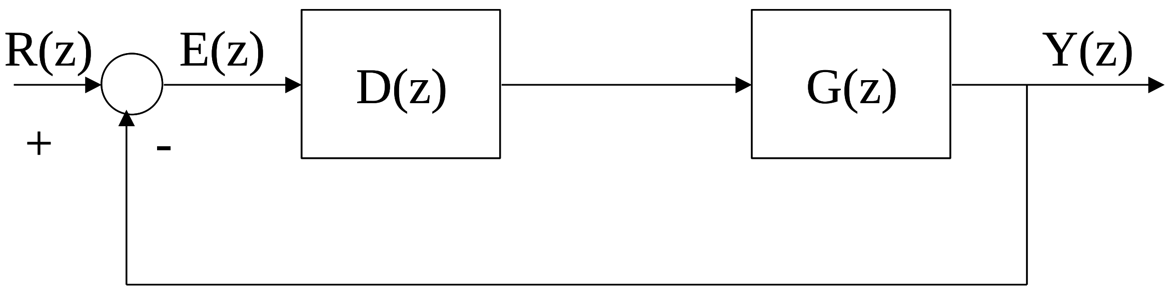
Error de estado estacionario en tiempo discreto

Aplicamos el teorema del valor final en tiempo discreto a la transmitancia de error $T_E(z)$ o a la transmitancia equivalente directa $G_E(z)$.

$$\lim_{k\to\infty}\left[e(k)\right]=\lim_{k\to\infty}\left[r(k)-y(k)\right]=\lim_{z\to 1}\left[(z-1)E(z)\right]=\lim_{z\to 1}\left[(z-1)T_E(z)R(z)\right]$$

$$e(k)=r(k)-y(k)$$

$$\left[T_E(z)=\frac{1}{1+D(z)G(z)}\right]$$



Sistema en tiempo discreto con realimentación unitaria.

Error de estado estacionario ante una entrada escalón

Para la entrada escalón en tiempo discreto *r(k) = Aσ(k)*, la entrada escalón en Z es $R(z) = A \cdot \frac{z}{z-1}$. Aplicando el teorema del valor final tenemos:

$$\lim_{k\to\infty}\left[e(k)\right] = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)E(z)\right] = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)R(z)T_E(z)\right] = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{A\dfrac{z}{(z-1)}}{1+D(z)G(z)}\right]$$

$$\lim_{k\to\infty}\left[e(k)\right] = \lim_{z\to 1}\left[\frac{A\cdot z}{1+D(z)G(z)}\right] = \frac{A}{1+\lim_{z\to 1}\left[D(z)G(z)\right]}$$

Coeficiente de error de posición K_p

Hacemos

$$K_P = \lim_{z \to 1}\left[D(z)G(z)\right] = \lim_{z \to 1}\left[G_E(z)\right]$$

K_P es el coeficiente de error de posición y $G_E(z)$ es la transmitancia directa equivalente.

El error de estado estacionario normalizado ante escalón, utilizando K_p es:

$$\underset{normalizado}{e_{SS}} = \frac{\lim_{k \to \infty}\left[e(k)\right]}{A} = \frac{1}{1 + K_P}$$

Error de estado estacionario ante una entrada rampa

Para la entrada rampa en tiempo discreto dada por $r(k) = A(kT)\sigma(k)$; la entrada rampa en Z será $R(z) = A \cdot \dfrac{Tz}{(z-1)^2}$.

$$\lim_{k\to\infty}[e(k)] = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\,\frac{A \cdot \dfrac{Tz}{(z-1)^2}}{1 + D(z)G(z)} \right]$$

$$\lim_{k\to\infty}[e(k)] = \lim_{z\to 1}\left[\frac{A}{(z-1)} \cdot \frac{Tz}{1 + D(z)G(z)} \right] = \frac{A}{\lim_{z\to 1}\left[\dfrac{(z-1)}{T} D(z)G(z) \right]}$$

Coeficiente de error de velocidad K_v

Hacemos

$$K_V = \lim_{z \to 1} \left[\frac{(z-1)}{T} D(z)G(z) \right] = \lim_{z \to 1} \left[\frac{(z-1)}{T} G_E(z) \right]$$

K_V es la constante de error de velocidad; por lo que el error de estado estacionario normalizado ante una rampa, usando K_v es:

$$\underset{normalizado}{e_{SS}} = \frac{1}{K_V}$$

Error de estado estacionario ante una entrada parabólica

La entrada de prueba parabólica en tiempo discreto que vamos a aplicar es $r(k) = ½A(kT)^2\sigma(k)$, entonces la entrada parabólica correspondiente en Z es $R(z) = A \cdot \dfrac{T^2 z(z+1)}{2 \cdot (z-1)^3}$.

$$\lim_{k\to\infty}[e(k)] = \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{A \cdot \dfrac{T^2 z(z+1)}{2\cdot(z-1)^3}}{1 + D(z)G(z)}\right]$$

$$\lim_{k\to\infty}[e(k)] = \lim_{z\to 1}\left[\frac{A}{2\cdot(z-1)^2}\cdot\frac{T^2 z(z+1)}{1+D(z)G(z)}\right] = \frac{A}{\lim\limits_{z\to 1}\left[\left(\dfrac{z-1}{T}\right)^2 D(z)G(z)\right]}$$

Coeficiente de error de aceleración K_a

Hacemos

$$K_a = \lim_{z \to 1}\left[\left(\frac{z-1}{T}\right)^2 D(z)G(z)\right] = \lim_{z \to 1}\left[\left(\frac{z-1}{T}\right)^2 G_E(z)\right]$$

Ka es la constante de error de aceleración y en consecuencia, el error de estado estacionario normalizado, ante una entrada parabólica es:

$$\underset{normalizado}{e_{SS}} = \frac{1}{K_a}$$

Tipo de sistema

En tiempo discreto el tipo de sistema se define como el número de factores ***(z-1)*** del numerador de $T_E(z)$ o el número de factores ***(z-1)*** del denominador de $G_E(z)$.

Si ***i*** es el exponente de (***kT)*** para la entrada de prueba en tiempo discreto, entonces la constante de error es $\boldsymbol{K_i}$ y se calcula de la manera siguiente:

$$K_i = \lim_{z \to 1}\left[\left(\frac{z-1}{T}\right)^i D(z)G(z)\right] = \lim_{z \to 1}\left[\left(\frac{z-1}{T}\right)^i G_E(z)\right] \textit{ para } i = 0, 1, 2, \ldots$$

Error normalizado generalizado de estado estacionario

Error normalizado generalizado de estado estacionario			
Tipo/entrada	Escalón (i = 0) r(k) = Aσ(k)	Rampa (i = 1) r(k) = A(kT)σ(k)	Parábola (i = 2) r(k) =½A(kT)$^2\sigma$(k)
0	$\frac{1}{1+K_P}$	∞	∞
1	0	$\frac{1}{K_V}$	∞
2	0	0	$\frac{1}{K_a}$

Ejemplo 3: Error de estado estacionario ante entrada escalón

$$G_E(z) = 0.385\frac{(z+0.7659)}{(z-0.7408)(z-0.6065)};\mathrm{T}=0.1\mathrm{s}$$

Primero verificamos la estabilidad del sistema en lazo cerrado evaluando el polinomio característico 1 + K$G_E(z)$

$$p(z) = 2.597\,z^2 + (K-3.499)z + (0.766\,K + 1.167)$$

Se trata de un sistema de segundo orden, (2n-3 = 1), con a_n = 2.597 > 0.

Ejemplo 3: cont.

Probamos entonces la estabilidad de entrada salida para el sistema.

$$p(1) = 0.265 + 1.766K > 0 \qquad \Rightarrow K > -0.15$$

$$p(-1) = 7.263 - 0.234K > 0 \qquad \Rightarrow K < 31.038$$

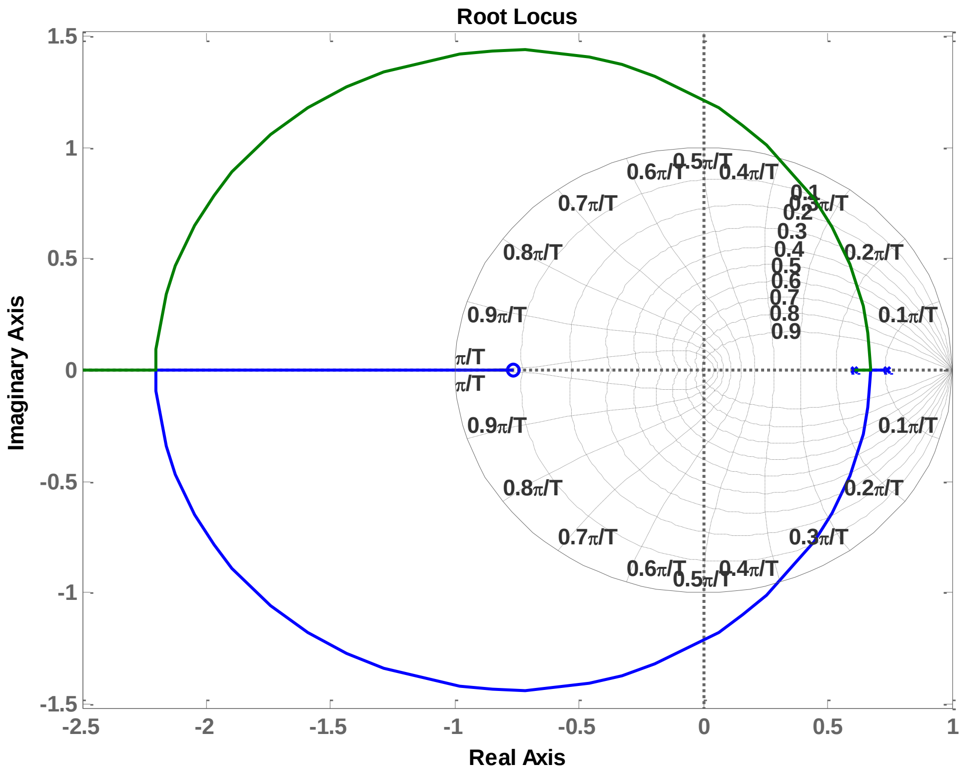
$$|a_0| = |0.766K + 1.167| < a_n = 2.597 \qquad \Rightarrow -4.914 < K < 1.867$$

Conclusión: Para que el sistema en tiempo discreto sea estable

$$-0.15 < K < 1.867$$

Ejemplo 3: Lugar de las raíces

Graficamos el lugar de las raíces para $G_E(z)$



Ejemplo 3: Ess normalizado

Una vez confirmada la estabilidad de lazo cerrado, procedemos a calcular el error de estado estacionario para K = 1.

El sistema es tipo cero y por lo tanto el error estacionario ante entrada escalón es finito y se calcula el coeficiente de error K_P.

$$\underset{normalizado}{e_{SS}} = \frac{1}{1+K_P} = \frac{1}{1+\lim_{z\to 1}\left[G_E(z)\right]} = \frac{1}{1+\lim_{z\to 1}\left[0.385\dfrac{(z+0.7659)}{(z-0.7408)(z-0.6065)}\right]} = 0.1305$$

Resultado: e_{ss} = 13.05%

Ejercicio 2: Encontrar el error de estado estacionario normalizado

Encuentre el error de estado estacionario ante escalón y rampa para el sistema dado.

$$G_E(z) = 0.385\frac{(\mathrm{z}+0.7659)}{(z-0.7408)(z-0.6065)(z-1)}; \mathrm{T}=0.1\mathrm{s}$$

Primero verificamos la estabilidad del sistema en lazo cerrado evaluando el polinomio característico 1 + K$G_E(z)$

$$p(z) = z^3 - 2.3473 * z^2 + 1.7966 * z - 0.4493 + 0.385 K * z + 0.2949 K$$

Se trata de un sistema de orden 3, (2n-3 = 3), con $a_n = 1 > 0$.

Probamos entonces la estabilidad de entrada salida para el sistema.

$$p(1) = \text{-1.11e-16} + 0.6799 * \mathrm{K} > 0 \qquad \Rightarrow K > 0$$

$$(-1)^3 p(-1) = 5.5932 + 0.09\,\mathrm{K} > 0 \qquad \Rightarrow K > -62.058$$

$$|a_0| = |0.2949K - 0.4493| < a_n = 1 \qquad \Rightarrow -1.867 < K < 4.914$$

Como el sistema es de orden tres debemos ahora realizar el arreglo de Jury

Arreglo de Jury para el ejercicio

Fila	z^0	z^1	z^2	z^3
1	0.2949K-0.4493	0.385K+1.7966	-2.3473	1
2	1	-2.3473	0.385K+1.7966	0.2949K-0.4493
3	s_0	s_1	s_2	

Conclusión: Para que el sistema en tiempo discreto sea estable, tomando en cuenta todas las condiciones tenemos que:

$$0 < K < 0.0687$$

Ahora se deja al lector resolver el problema de error de estado estacionario para un valor de K = 0.04.

Ejercicio 3: Encontrar el e_{ss} para la planta G(z) mostrada

Encuentre los límites de la ganancia K, para garantizar la estabilidad del sistema realimentado unitariamente para la planta G(z), con T = 0.01. Encuentre el error de estado estacionario ante entradas normalizadas de prueba escalón y rampa para los valores de ganancia K = 1 y K = 5.

$$G(z) = \frac{0.5}{(z^3 - 0.97z^2)}$$

Solución:

Ganancia/Entrada	Escalón	Rampa
K = 1	$e_{ss} = \frac{1}{1 + \lim_{z-1}(KG(z))} = 0.0566$	∞
K = 5	No existe	No existe