

Control Automático

Control con observadores de estado

Contenido



- Observabilidad
- Observadores de estado sin entrada $r(t)$
- Cálculo de la ganancia K_f del observador usando Ackermann
- Compensadores con entrada de referencia
- La función de transferencia del compensador con observador de estado
- Ejemplos y ejercicios

Observabilidad: definición



Partimos del sistema

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

- se dice que el estado $x(t_0)$ es observable si dada cualquier entrada $u(t)$, existe un tiempo finito $t_f \geq t_0$ tal que, el conocimiento de:
 - $u(t)$ para $t_0 \leq t < t_f$
 - las matrices A , B , C y D
 - la salida $y(t)$ para $t_0 \leq t < t_f$sea suficiente para determinar $x(t_0)$.

Observabilidad: definición



- Si cada estado del sistema es observable para un tiempo finito, se dice que el sistema es **completamente observable**, o simplemente **observable**.
- Para que el sistema descrito sea **completamente observable**, es necesario y suficiente que **S**, la matriz de observabilidad de $n \times np$, tenga un rango n .

$$S = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Pruebas para la observabilidad



- Si el sistema tiene solo una salida, \mathbf{C} es una matriz de reglón de $1 \times n$ y \mathbf{S} es una matriz cuadrada de $n \times n$. Entonces, el sistema es completamente observable si \mathbf{S} es no singular
- Para un sistema SISO, el par $[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$ es completamente observable si \mathbf{A} y \mathbf{C} están en la forma canónica observable (FCO) o son transformables a la FCO mediante una transformación de similitud.

Pruebas para la observabilidad (2)



- Si \mathbf{A} está en la forma canónica diagonal (FCD) el par $[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$ es completamente observable si todos los elementos en las columnas de \mathbf{C} son diferentes de cero.

- Si \mathbf{A} está en la forma canónica de Jordan (FCJ), el par $[\mathbf{A}, \mathbf{C}]$ es completamente observable si NO todos los elementos en las columnas de \mathbf{C} que corresponden a la primera columna de cada bloque de Jordan son cero.

Observabilidad a partir de $G(s)$ o $G(z)$



- Si la función de transferencia entrada-salida de un sistema lineal tiene cancelación de polos y ceros, el sistema será o no observable dependiendo de cómo se definan las variables de estado.
- Si la función de transferencia entrada-salida no tiene cancelación de polos y ceros, el sistema siempre se puede representar mediante las ecuaciones dinámicas como un sistema totalmente observable.

Ejemplo 1a



- Sea la función de transferencia

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s + 1}{(s + 1)(s + 2)}$$

- Se descompone en la forma FCC

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Cuya matriz de observabilidad, **S**, es singular y por ello el par **[A,C]** no es observable

$$C = [1 \quad 1]$$

$$S = [C \quad CA] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1a: continuación

- El sistema en forma FCC se transforma a la forma FCO
- Debido a que la FCO se puede ***realizar***, el par **[A, C] es observable**
- Note que se pierde la controlabilidad !



$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 1] \mathbf{x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C &= [0 \quad 1]\end{aligned}$$

la realimentación puede alterar la observabilidad



- Sea el sistema del cual puede demostrarse que es observable

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u \\ y &= [1 \ 2]x\end{aligned}$$

- Aplicamos realimentación de estado con $u(t) = r(t) - Kx(t)$ $K = [k_1, k_2]$

- La matriz **S** tiene el determinante

$$S = \begin{bmatrix} C \\ C(A - BK) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -k_1 - 4 & -3k_2 - 5 \end{bmatrix}$$

$$|S| = 6k_1 - 3k_2 + 3$$

Por lo que si k_1 y k_2 se seleccionan para que $|S| = 0$, el sistema en lazo cerrado sería no observable

Observabilidad en tiempo discreto



Partimos del sistema

$$\begin{aligned} \mathbf{x}((k+1)T) &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}_d \mathbf{u}(kT) \\ \mathbf{y}(kT) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(kT) + \mathbf{D} \mathbf{u}(kT) \end{aligned}$$

Para que este sistema sea observable la matriz de $nm \times n$ debe tener rango n

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA}_d \\ \mathbf{CA}_d^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}_d^{n-1} \end{bmatrix}$$

Ejercicio 1



Encuentre si el sistema es observable

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1.65 & -0.675 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 \quad 0.825] \mathbf{x}(k) \quad T = 0.01s$$

Ejemplo 1b: Observabilidad en tiempo discreto



- Los sistemas mostrados son completamente observables

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k);$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

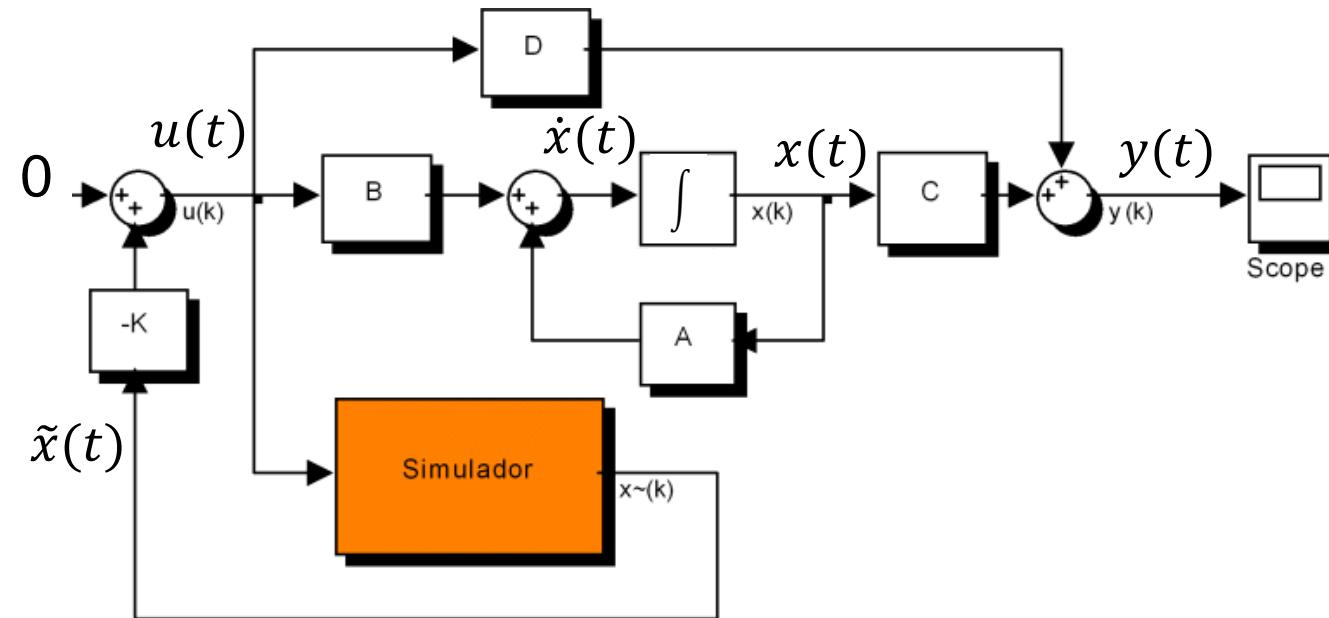
$$\mathbf{x}(k+1) = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0.9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0.5 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \mathbf{x}(k) + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \mathbf{x}(k)$$

Observadores de estado (1)

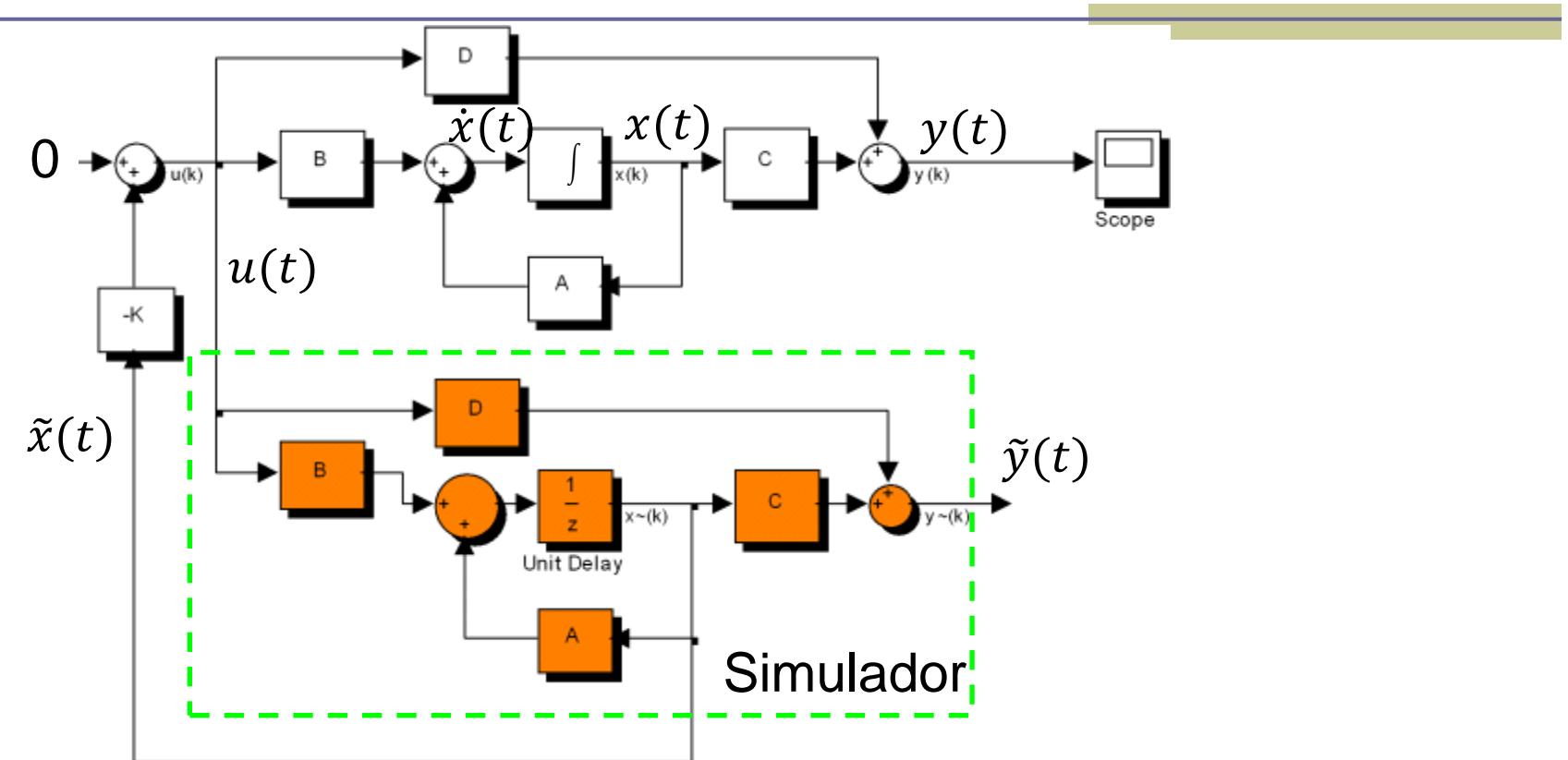


No siempre es posible medir el estado x



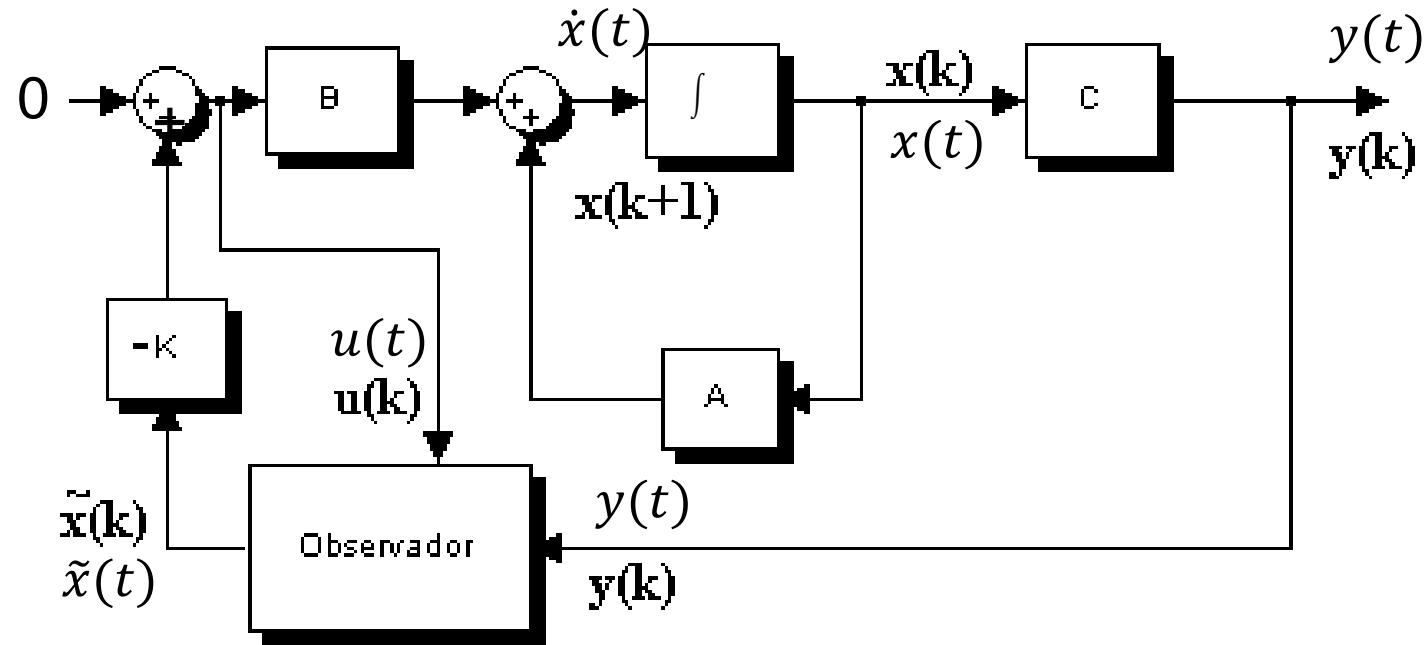
A veces es necesario estimar las variables de estado no medibles a partir de las variables de salida y de las variables de control

Observadores de estado (2)



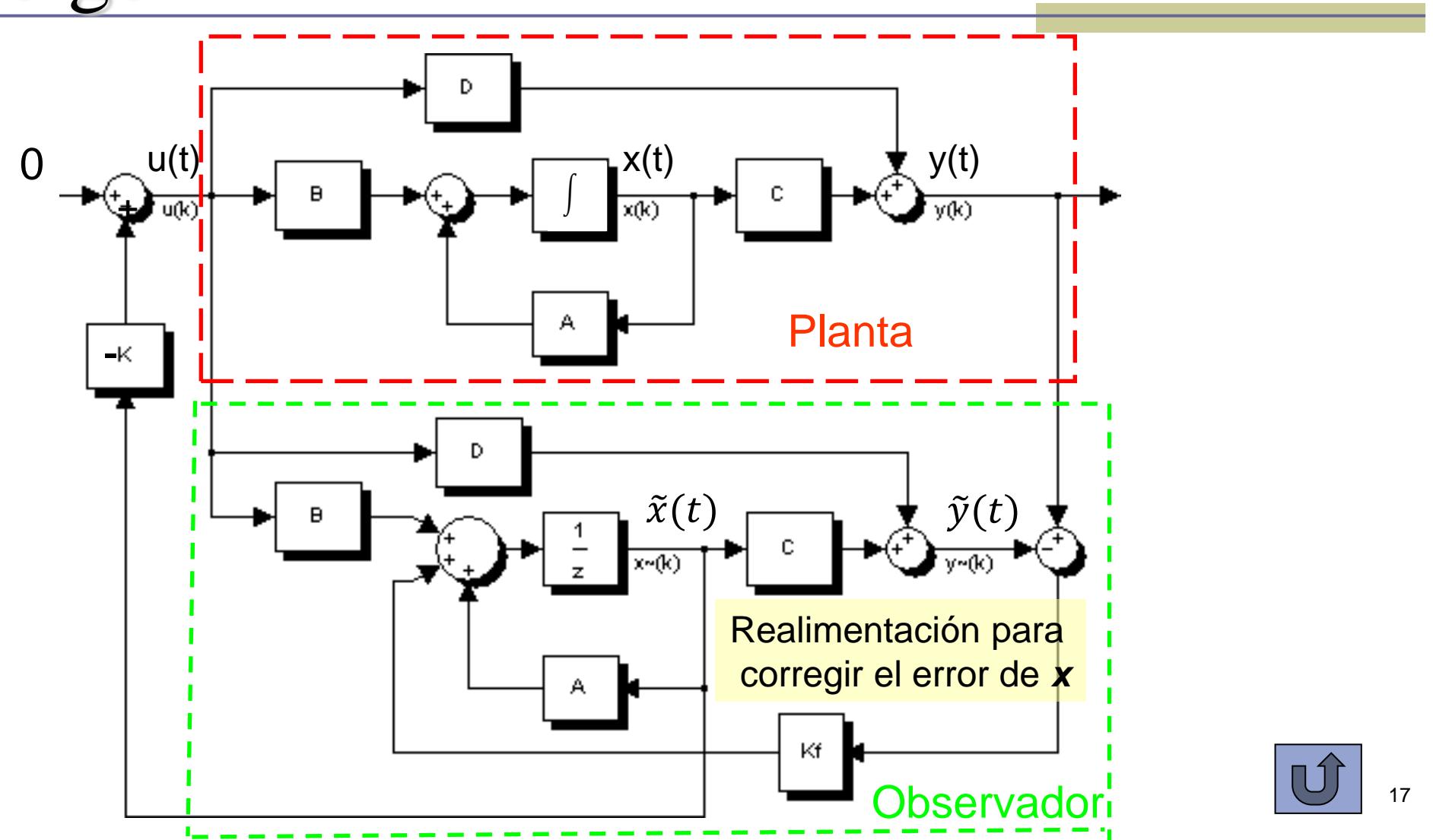
El estado \tilde{x} simulado es diferente al estado x real debido a incertidumbres del modelo

Observadores de estado (3)



Introducimos la salida y al simulador para mejorar la estimación del estado x y obtenemos un observador

El observador de estado completo de Luenberger





Ecuaciones del observador de estado

- Las ecuaciones del observador son similares a las del sistema, excepto porque se ha añadido un término a partir de la resta de las salidas del sistema y del observador. Observe que la contribución de la matriz \mathbf{D} se cancela durante la resta de las salidas.

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{K}_f\mathbf{C}[\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)]$$

$$\tilde{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}u(t)$$

- Este término agregado, que corresponde a una realimentación, ponderada por la matriz \mathbf{K}_f , ayudará a reducir la diferencia entre el estado del modelo y estado del sistema real



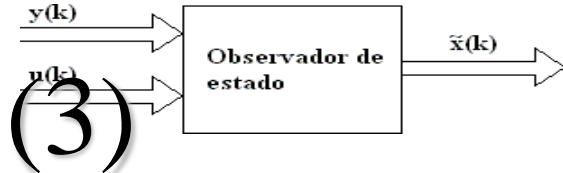
Ecuaciones del observador de estado (2)

- Restando a la ecuación de estado del sistema original, la ecuación del estado estimado obtenemos

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) - \cancel{[\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{K}_f\mathbf{C}(\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t))]}$$

- Después de factorizar

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_f\mathbf{C})[\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)]$$



Ecuaciones del observador de estado (3)

- Definimos $e(t)$ como el error entre el estado de la planta y el estado estimado

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\tilde{x}}(t) = (A - K_f C)e(t)$$

- Esta ecuación homogénea para el error, es muy similar a la que se obtuvo cuando se analizó la realimentación de estado.
- Se debe calcular K_f para que el observador sea: estable y más rápido que el sistema realimentado y así el error se extinga rápidamente; lo que equivale a que el estado estimado converja en el estado real rápidamente.

Ecuaciones del observador de estado en tiempo discreto



$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}_d \tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}_d \mathbf{u}(k) + \mathbf{K}_f \mathbf{C} [\mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k)]$$

$$\tilde{y}(k) = \mathbf{C} \cdot \tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{D}u(k)$$

$$\mathbf{x}(k+1) - \tilde{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{A}_d - \mathbf{K}_f \mathbf{C}) [\mathbf{x}(k) - \tilde{\mathbf{x}}(k)]$$

$$\mathbf{e}(k+1) = \mathbf{x}(k+1) - \tilde{\mathbf{x}}(k+1) = (\mathbf{A}_d - \mathbf{K}_f \mathbf{C}) \mathbf{e}(k)$$



Formas de cálculo de K_f

- Por sustitución directa de

$$K_f = \begin{bmatrix} k_{f1} \\ k_{f2} \\ \vdots \\ k_{fn} \end{bmatrix}$$

- Por medio de la transformación a la forma FCO
- Por la fórmula de Ackerman para observador



Transformación a FCO

Sea **Q** la matriz de transformación, con **S** la matriz de observabilidad

$$Q = (WS)^{-1}$$

Y con

$$W = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \bullet & \bullet & \bullet & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \bullet & \bullet & \bullet & 1 & 0 \\ \bullet & \bullet & & & & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & & & & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & & & & \bullet & \bullet \\ a_{n-1} & 1 & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Transformación a FCO

- Se define \hat{x} como un nuevo vector de estado

$$x = Q\hat{x}$$

- Si el sistema es observable, la matriz Q tiene inversa.

- Utilizando la matriz Q se puede transformar el sistema a la forma ***canónica observable***:

$$\dot{\hat{x}} = \overbrace{Q^{-1}AQ\hat{x} + Q^{-1}Bu}^{\text{red}}$$

$$y = \overbrace{CQ\hat{x} + Du}^{\text{red}}$$



La forma canónica observable

$$\widehat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\mathbf{C}} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]$$

- Los elementos de las matrices $\widehat{\mathbf{B}}$ y $\widehat{\mathbf{D}}$ no están restringidos a ninguna forma



Ecuación característica

La ecuación característica del observador se encuentra como

$$|\lambda I - (A - K_f C)| = |Q^{-1}(\lambda I - (A - K_f C))Q| = |\lambda I - Q^{-1}AQ + Q^{-1}K_f CQ| = 0$$

Donde $Q^{-1} K_f$ se define como la matriz de coeficientes δ

$$Q^{-1}K_f = \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_{n-1} \end{bmatrix}$$

Sustituyendo $Q^{-1}AQ$, $Q^{-1}K_f$ y CQ en

$$|\lambda I - Q^{-1}AQ + Q^{-1}K_f CQ| = 0$$



Ecuación característica (2)

Obtenemos

$$\begin{aligned}
 & \left| \lambda I - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \cdots & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_{n-1} \end{bmatrix} [0 \ 0 \ \cdots \ 1] \right| = \\
 & = \left| \begin{array}{ccccc} \lambda & 0 & 0 & \cdots & a_0 + \delta_0 \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & a_1 + \delta_1 \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \cdots & a_{n-2} + \delta_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda + a_{n-1} + \delta_{n-1} \end{array} \right| =
 \end{aligned}$$

$$= \lambda^n + (a_{n-1} + \delta_{n-1})\lambda^{n-1} + \cdots + (a_1 + \delta_1)\lambda + (a_0 + \delta_0) = 0$$



La matriz \mathbf{K}_f

Igualando los coeficientes del polinomio característico de $(\mathbf{A} - \mathbf{K}_f \mathbf{C})$ con los coeficientes de potencias iguales de λ obtenidos antes

$$(\lambda - \mu_1)(\lambda - \mu_2) \cdots (\lambda - \mu_n) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0$$

$$a_0 + \delta_0 = \alpha_0 \Rightarrow \delta_0 = \alpha_0 - a_0$$

$$a_1 + \delta_1 = \alpha_1 \Rightarrow \delta_1 = \alpha_1 - a_1$$

⋮

$$a_{n-1} + \delta_{n-1} = \alpha_{n-1} \Rightarrow \delta_{n-1}$$

$$= \alpha_{n-1} - a_{n-1}$$

$$\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{K}_f = \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_{n-1} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{K}_f = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_{n-1} \end{bmatrix}$$

Finalmente

$$\mathbf{K}_f = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} \alpha_0 - a_0 \\ \alpha_1 - a_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Pasos para el diseño del observador por transformación FCO



1. Verifique la condición de observabilidad del sistema con **S**.
2. A partir del polinomio característico de la matriz **A**,

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

determine los valores de a_i

3. Determine la matriz de transformación **Q** que transforma la ecuación de estado del sistema a la forma canónica observable (si ya esta en forma FCO, entonces **Q** = **I**).
4. Utilizando los valores propios μ_i deseados para el observador, halle el polinomio característico correspondiente

$$(\lambda - \mu_1)(\lambda - \mu_2) \cdots (\lambda - \mu_n) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

determine los valores de α_i

5. Determine la matriz **K_f** de ganancia

$$K_f = Q \begin{bmatrix} \alpha_0 - a_0 \\ \alpha_1 - a_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Fórmula de Ackermann para observadores



- Para sistemas SISO, existe además de la sustitución directa y la transformación a FCO, la forma sistemática dada por Ackermann para calcular la matriz K_f
- $\Phi_e(A)$ es el polinomio característico deseado **para el estimador u observador**, evaluado en la matriz A , del sistema original
- Si el sistema es completamente observable, la matriz de observabilidad S tiene rango n y es no singular.

$$K_f = \Phi_e(A)^{-1} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2: El controlador



■ El sistema

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1.65 & -0.675 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 \quad 0.825] \mathbf{x}(k) \quad T = 0.01s$$

Ha sido realimentado de estado para ubicar los polos de lazo cerrado en

$$\mu_{1,2} = 0.5 \pm j0.25$$

Con $\mathbf{K} = [0.65 \quad -0.3625]$ y $K_0 = 0.1712$ para reducir el error de estado estacionario a cero (en ausencia del observador)

Ejemplo 2: El observador



El observador debe responder más rápido que la planta realimentada por lo que los polos del observador se ubicarán en

$$\mu_{1,2} = 0.125 \pm j0.25$$

El polinomio característico del observador es

$$\varphi_e(z) = z^2 - 0.25z + 0.07813$$

Comprobamos la observabilidad

$$S = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.825 \\ 2.475 & -0.675 \end{bmatrix}$$



Ejemplo 2: cálculo de $\Phi_e(A)$

Calculamos $\Phi_e(A)$

$$\Phi_e(A) = A^2 - 0.25A + 0.07813I$$

$$\Phi_e(A) = \begin{bmatrix} 2.0475 & -1.1138 \\ 1.65 & -0.675 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.4125 & -0.1688 \\ 0.25 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0781 & 0 \\ 0 & 0.0781 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_e(A) = \begin{bmatrix} 1.7131 & -0.945 \\ 1.4 & -0.5969 \end{bmatrix}$$

La matriz K_f

$$K_f = \Phi_e(A) \cdot \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Ejemplo 2: El observador realimentado

Finalmente

$$K_f = \begin{bmatrix} 1.7131 & -0.945 \\ 1.4 & -0.5969 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0.825 \\ 2.475 & -0.675 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.868 \\ 0.6448 \end{bmatrix}$$

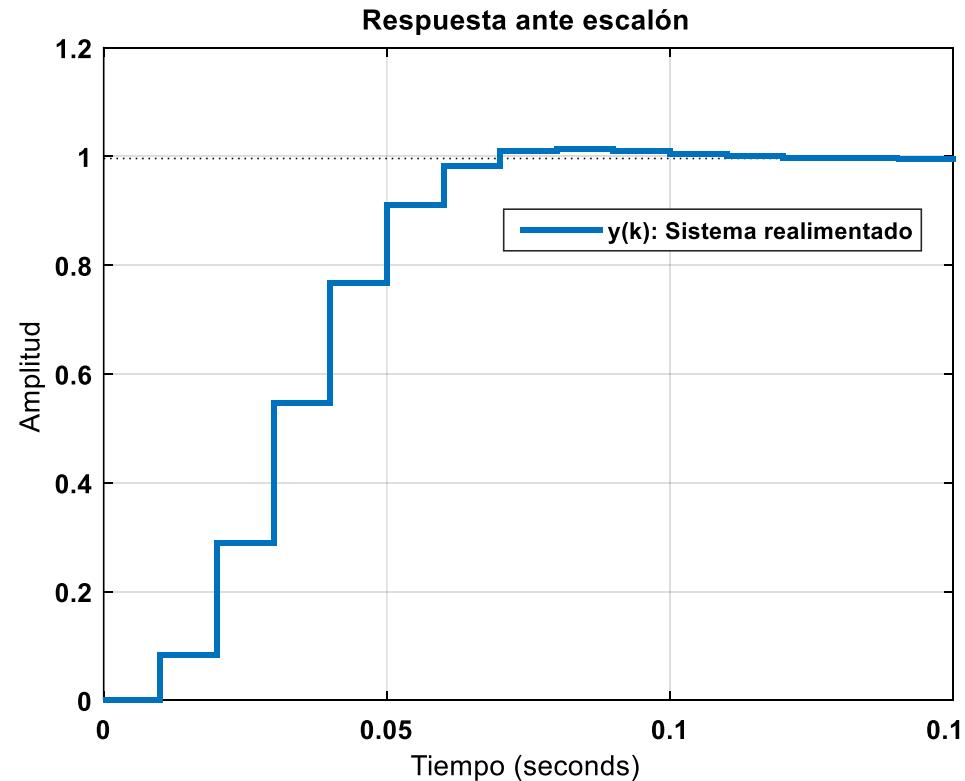
La nueva matriz \tilde{A}

$$\tilde{A} = A - K_f C = \begin{bmatrix} 1.65 & -0.675 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.868 \\ 0.6448 \end{bmatrix} \cdot [1 \quad 0.825]$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0.7820 & -1.3911 \\ 0.3552 & -0.532 \end{bmatrix}$$

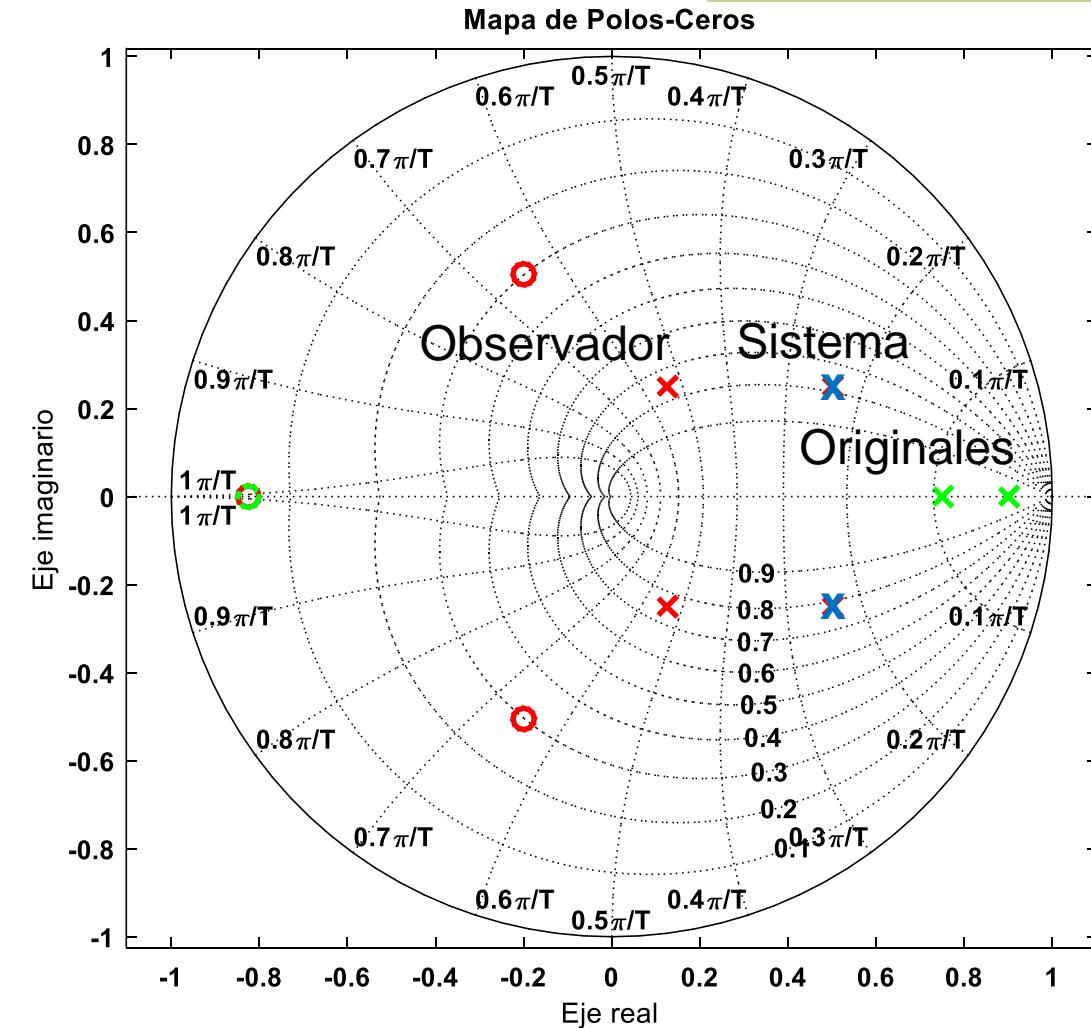
Tiene $\lambda_{1,2} = 0.125 \pm j0.25$

Ejemplo 2: Resultados



Respuesta sistema compensado
Con $K_0 = 0.0837$

E. Interiano

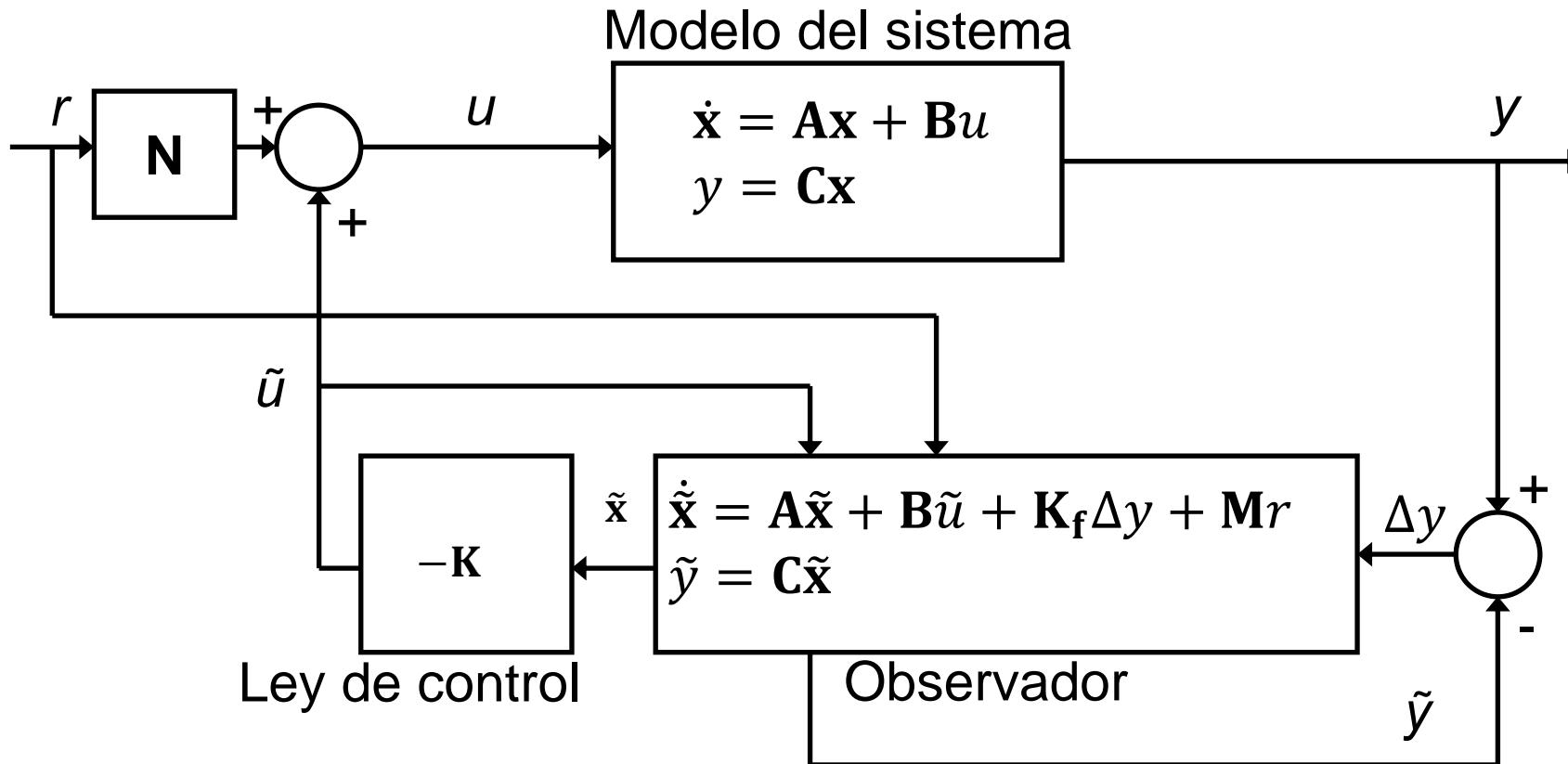


Ejemplo 2: Análisis de resultados



- Los polos de lazo cerrado se encuentran en el sitio deseado para el observador y para el sistema.
- El error de estado estacionario se hace cero, ajustando K_0 al valor 0.0837.
- El tiempo de muestreo parece muy grande para la ubicación deseada de los polos de la planta.
- El estimador es más rápido que el sistema realimentado en estado y el estado estimado se producirá con suficiente anticipación como para que pueda ser usado en la realimentación.

Estructura de la forma general del compensador por real. estado



Compensador realimentado en variables de estado: Caso general.



■ Las ecuaciones generales del compensador

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \mathbf{A}\tilde{x}(t) + \mathbf{B}\tilde{u}(t) + \mathbf{K}_f\Delta y(t) + \mathbf{M}r(t)$$

$$u(t) = \tilde{u}(t) + \mathbf{N}r(t) = -\mathbf{K}\tilde{x}(t) + \mathbf{N}r(t)$$

$$\Delta y(t) = y(t) - \mathbf{C} \cdot \tilde{x}(t)$$

■ La ecuación para el error

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}(t) &= \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) - \\ &\quad [\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\tilde{u}(t) + \mathbf{K}_f\Delta y(t) + \mathbf{M}r(t)]\end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_f\mathbf{C})\mathbf{e}(t) + (\mathbf{B}\mathbf{N} - \mathbf{M})r(t)$$

Compensadores y reguladores



- A un compensador en variables de estado sin entrada de referencia se le llama regulador
- Si \mathbf{N} y \mathbf{M} son cero, las ecuaciones del compensador se reducen a las del regulador.
- Para un sistema de una única entrada, \mathbf{N} es un escalar, que llamaremos K_0 , y \mathbf{M} es un vector columna de longitud n .

Compensador realimentado en variables de estado: Caso 1



- Si \mathbf{N} y \mathbf{M} se seleccionan de forma tal que el error $\mathbf{e}(t)$ sea independiente de $r(t)$

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_f \mathbf{C}) \cdot \mathbf{e}(t) + (\mathbf{B} K_0 - \mathbf{M}) \cdot r(t)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{B} K_0$$

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_f \mathbf{C}) \cdot \mathbf{e}(t)$$

- Si escogemos K_0 para hacer cero el error de estado estacionario ante entrada escalón

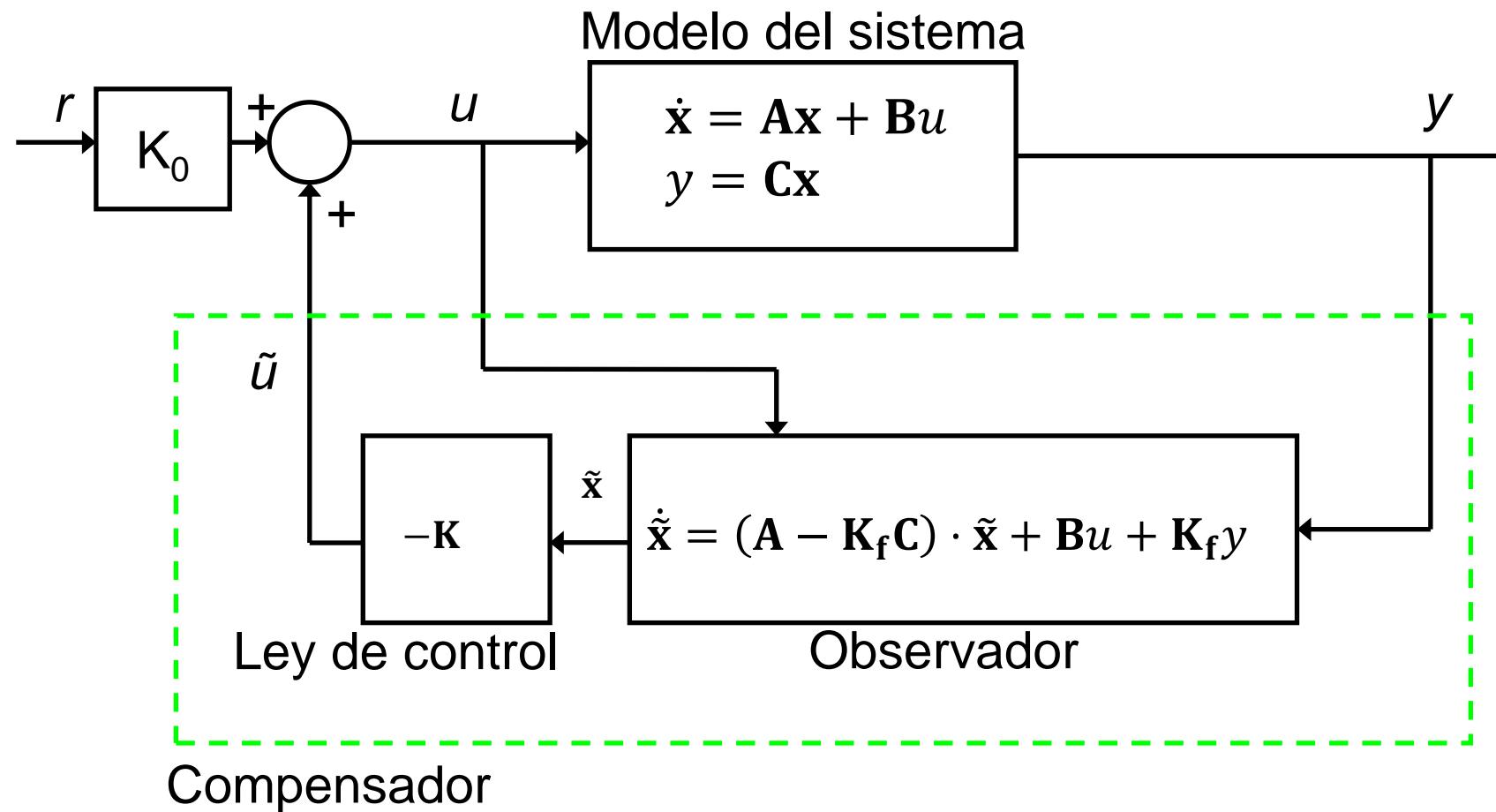
$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{K}_f \Delta y(t)$$

$$u(t) = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}(t) + K_0 r(t)$$

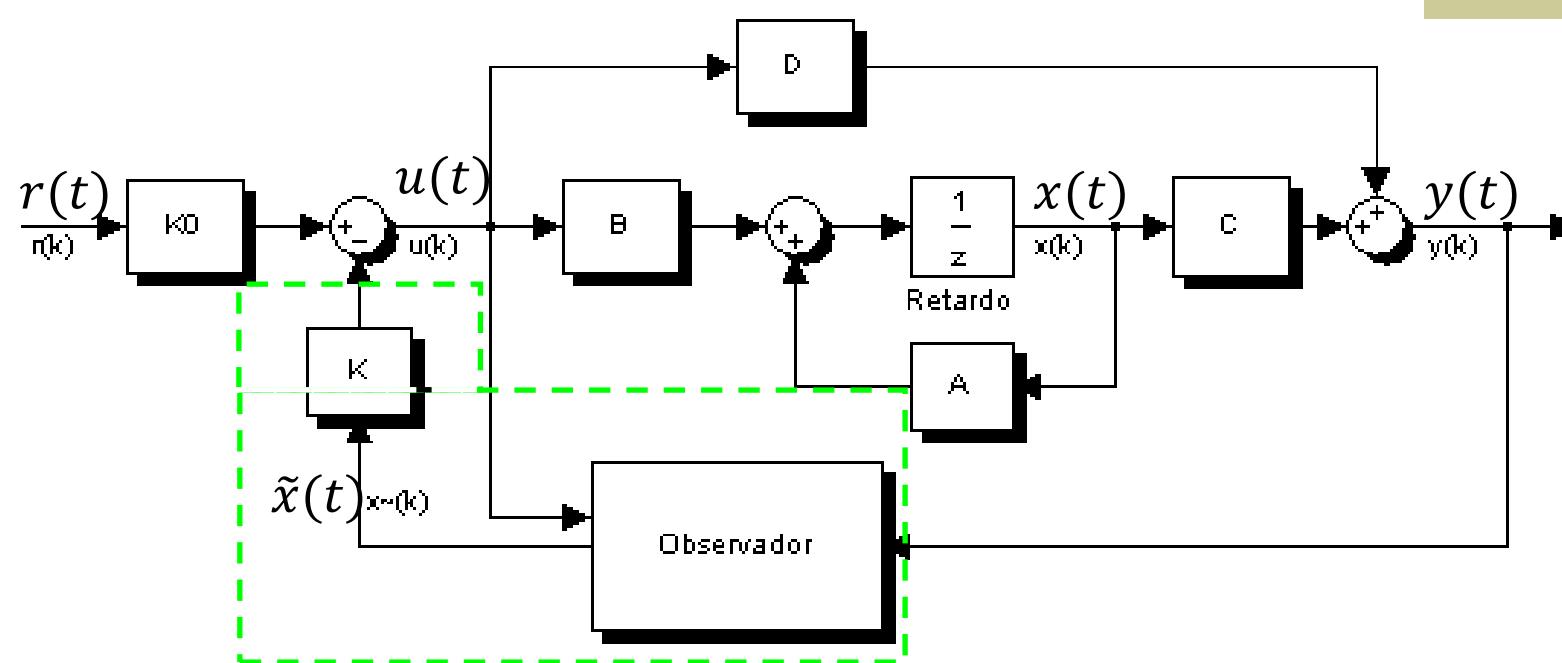
Estructura del caso 1



- El compensador se encuentra en el lazo de realimentación



El compensador con observador



Con $\mathbf{M} = \mathbf{B}\mathbf{K}_0$ las ecuaciones del compensador con observador de estado son

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{K}_f\mathbf{C}] \cdot \tilde{x}(t) + \mathbf{K}_f y(t) \\ u(t) &= -\mathbf{K} \cdot \tilde{x}(t) + k_0 r(t)\end{aligned}$$

La función de transferencia



- Como puede observarse de las ecuaciones, $u(t)$ es la salida del controlador con observador y la entrada es $y(t)$.
- Aplicando la transformada de Laplace y despejando

$$K(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = -\mathbf{K} \cdot [s\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{K}_f\mathbf{C})]^{-1} \cdot \mathbf{K}_f$$

- Este regulador se debe aplicar con realimentación positiva y se calcula de la misma forma para sistemas discretos

El compensador con observador en tiempo discreto



Con $\mathbf{M} = \mathbf{B}K_0$ las ecuaciones del controlador con observador son:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}(k+1) &= [\mathbf{A}_d - \mathbf{B}_d \mathbf{K} - \mathbf{K}_f \mathbf{C}] \cdot \tilde{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{K}_f y(k) \\ u(k) &= -\mathbf{K} \cdot \tilde{\mathbf{x}}(k) + k_0 r(k)\end{aligned}$$

Aplicando la transformada Z y despejando encontramos la función de transferencia, en tiempo discreto, del regulador con observador

$$K(z) = \frac{U(z)}{Y(z)} = -\mathbf{K} \cdot [z\mathbf{I} - (\mathbf{A}_d - \mathbf{B}_d \mathbf{K} - \mathbf{K}_f \mathbf{C})]^{-1} \cdot \mathbf{K}_f$$

Ejemplo 3: Calcular G(z)



- Sea el sistema del ejemplo 1

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1.65 & -0.675 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 \quad 0.825] \mathbf{x}(k) \quad T = 0.01s$$

$$\mathbf{K} = [0.65 \quad -0.3625] \quad \mathbf{K}_f = \begin{bmatrix} 0.868 \\ 0.6448 \end{bmatrix}$$

$$K(z) = \frac{U(z)}{Y(z)} = \frac{-0.3305(z - 0.6412)}{(z^2 + 0.4z + 0.2952)}$$

¿polos?

Ejemplo 3: Cálculo de T(z)



La función de transferencia de lazo cerrado es

$$T(z) = \frac{G(z)}{1 - K(z)G(z)}$$

$$T(z) = \frac{(z + 0.825)}{(z^2 - 1.65z + 0.675)} \\ 1 - \frac{-0.3305(z - 0.6412)}{(z^2 + 0.4z + 0.2952)} \frac{(z + 0.825)}{(z^2 - 1.65z + 0.675)}$$

$$T(z) = \frac{(z + 0.825)(z^2 + 0.4z + 0.2952)}{(z^2 - z + 0.3125)(z^2 - 0.25z + 0.07812)}$$

_____ ¿polos? _____ ¿polos?



Ejemplo 3: Haciendo $e_{ss} = 0$

Encontramos la nueva constante K_0 para el sistema realimentado con observador

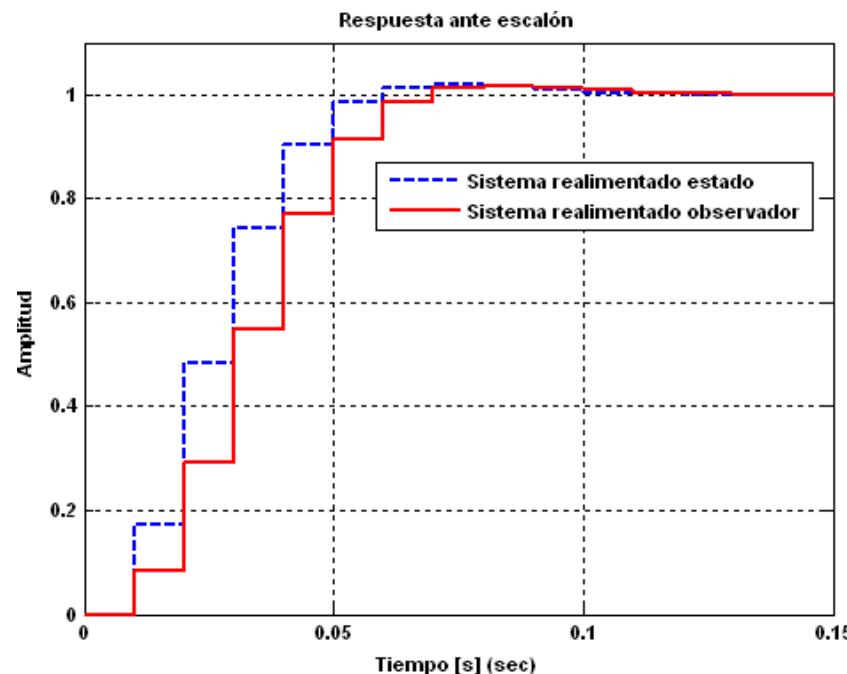
$$K_0 = \frac{1}{\lim_{z \rightarrow 1} T(z)}$$

$$K_0 = \frac{1}{\lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{(z + 0.825)(z^2 + 0.4z + 0.2952)}{(z^2 - z + 0.3125)(z^2 - 0.25z + 0.07812)} \right)}$$

$$K_0 = 0.0837$$

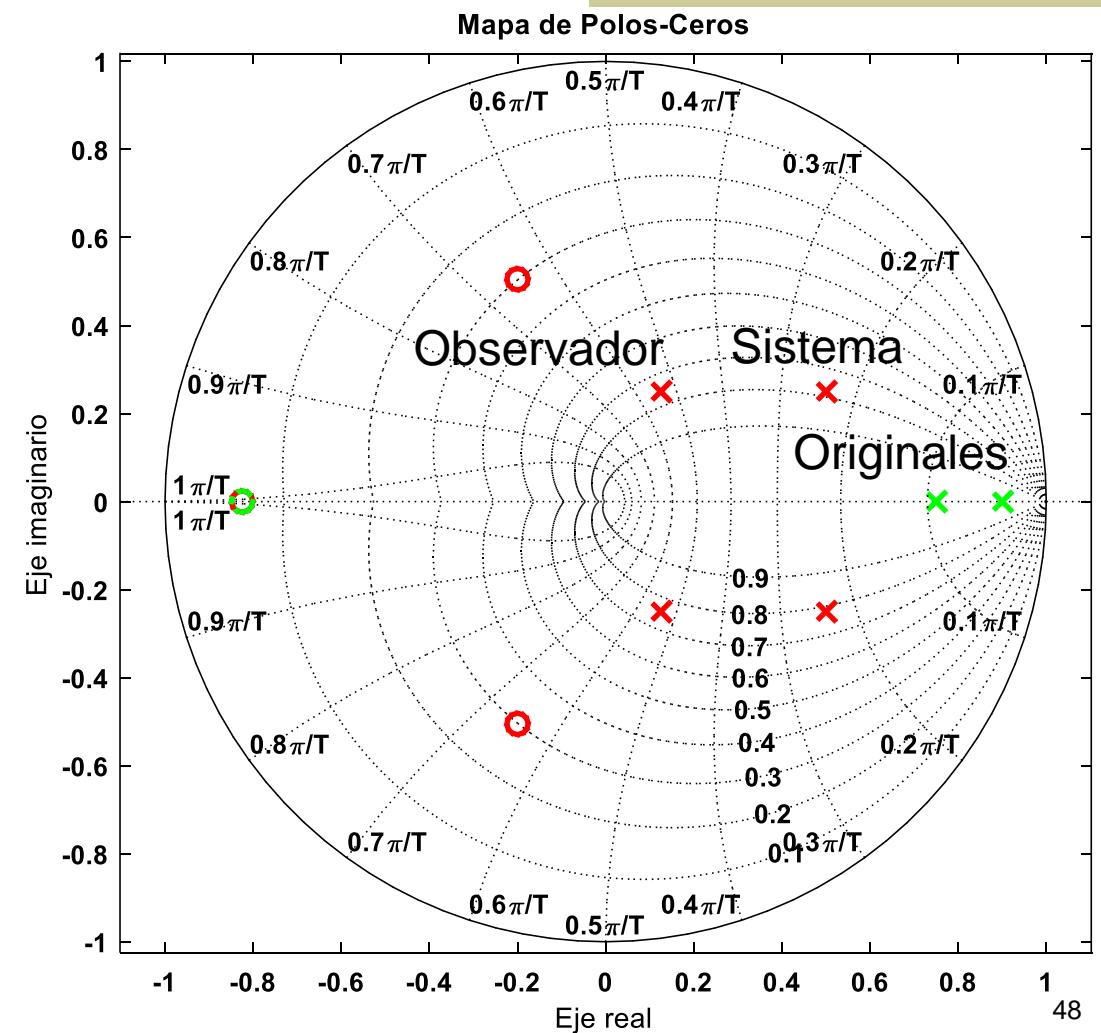


Ejemplo 3: Resultados



Respuesta del sistema realimentado en estado con la matriz $-K$, y realimentado con observador.

E. Interiano

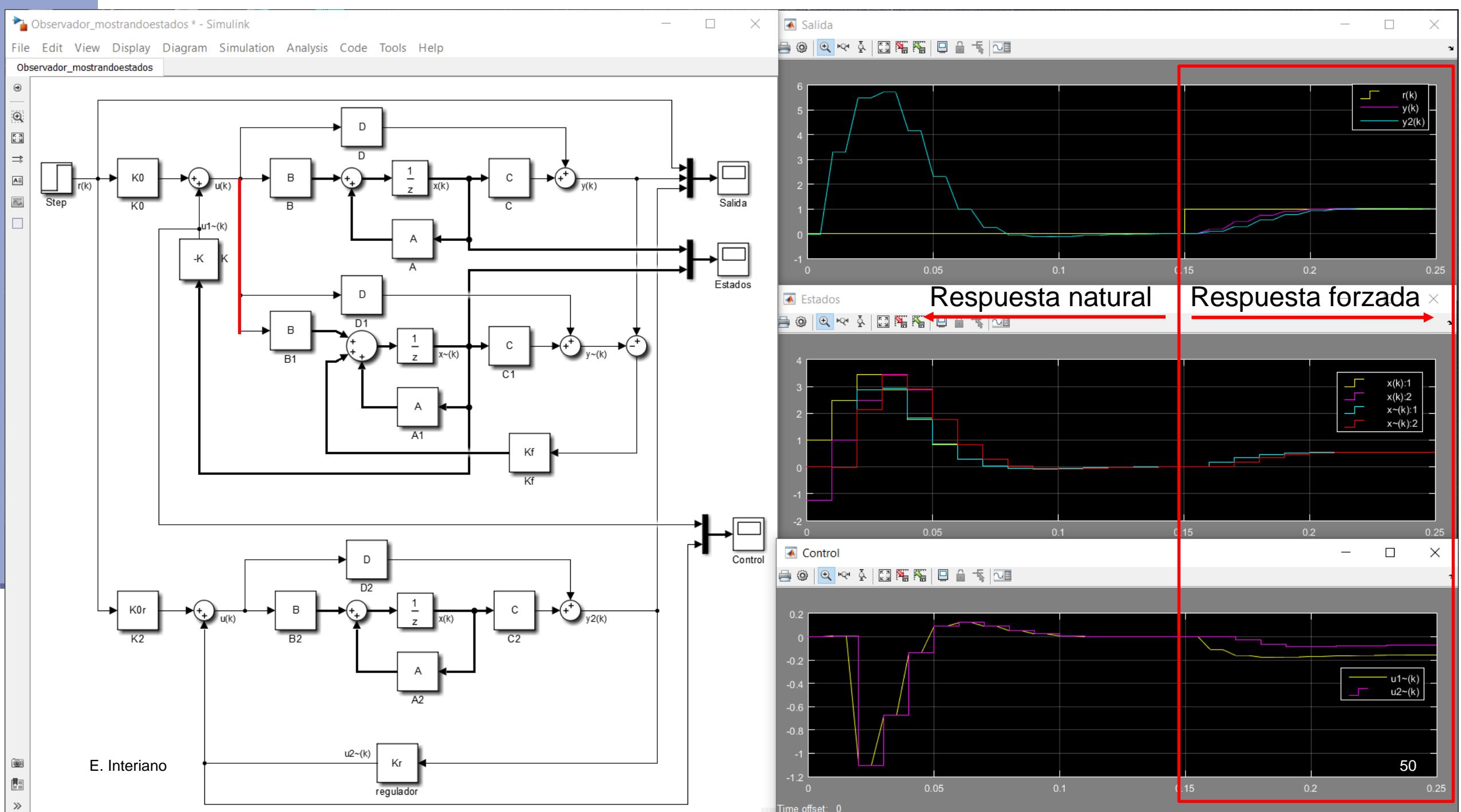


Ejemplo 3: Análisis de resultados



- Hay una pequeña diferencia entre el sistema realimentado con el estado y el sistema realimentado con observador de estado; aunque ambos alcanzan el mismo valor final casi al mismo tiempo y tienen $e_{ss} = 0$

- Puede observarse que el sistema en lazo cerrado $T(z)$ tiene 4 polos, (color rojo), los dos del observador y los dos del sistema realimentado; mostrados como polos de lazo abierto para ganancia cero. Todos los polos se encuentran en las ubicaciones escogidas y definidas por las matrices K y K_f .



Ejemplo 3: Análisis de resultados de la simulación



- Hay una pequeña diferencia entre las salidas del sistema realimentado con el estado observado y el sistema realimentado con regulador; aunque ambos alcanzan el mismo valor final casi al mismo tiempo y tienen $e_{ss} = 0$, el primero adelanta al segundo.
- Una vez transcurrido el transitorio, no hay diferencia entre los estados del sistema realimentado y los estados del observador.
- En las acciones de control, si existe una diferencia en el valor final entre la acción de control $\tilde{u}_1(k)$ del sistema realimentado con el estado del observador y la acción de control $\tilde{u}_2(k)$ del sistema realimentado con regulador. Esto es debido principalmente a que el regulador no recibe $u(k)$ directamente.

Compensador realimentado en variables de estado: Caso 2



- Si seleccionamos $N = 0$ y $\mathbf{M} = -\mathbf{K}_f$

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{K}_f\Delta y(t) - \mathbf{K}_f r(t)$$

$$u(t) = -\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}(t)$$

$$\Delta y(t) = y(t) - \mathbf{C} \cdot \tilde{\mathbf{x}}(t)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} - \mathbf{K}_f\mathbf{C}) \cdot \tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}_f(y(t) - r(t))$$

- El error será

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_f\mathbf{C}) \cdot \mathbf{e}(t) - \mathbf{M} \cdot r(t)$$

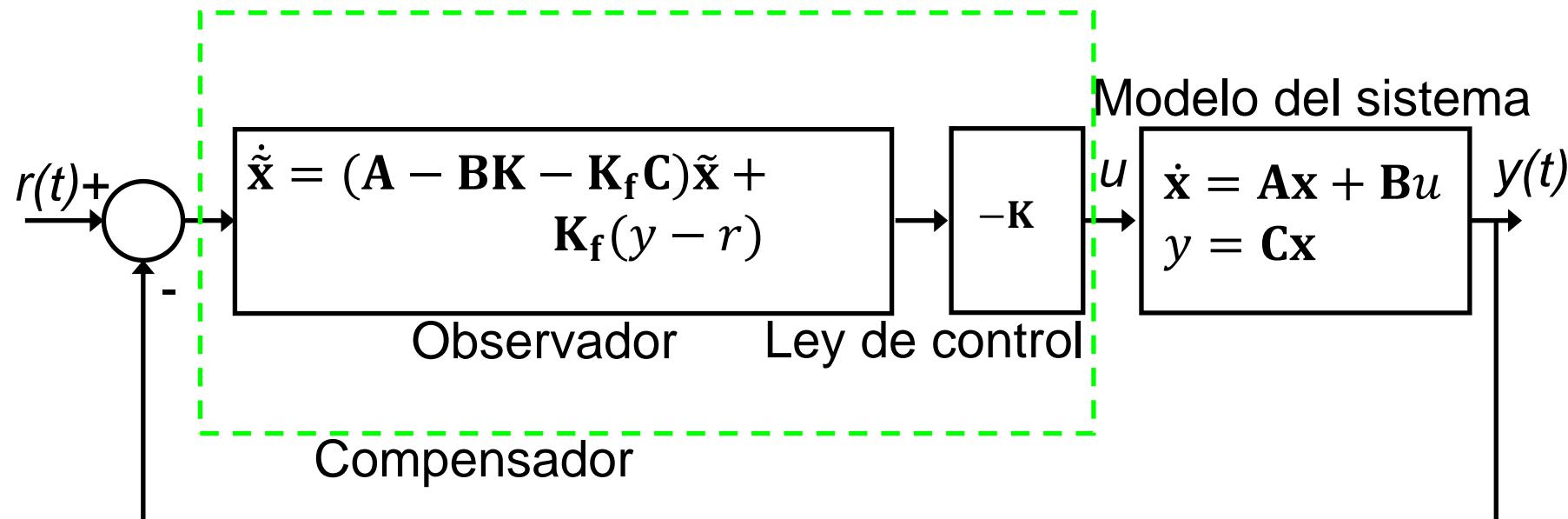
$$\mathbf{M} = -\mathbf{K}_f$$

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_f\mathbf{C}) \cdot \mathbf{e}(t) + \mathbf{K}_f \cdot r(t)$$

Estructura del caso 2



- El compensador se encuentra en el camino directo con realimentación unitaria



Ejercicios



1. Encuentre si el sistema discreto mostrado, con $T = 0.01s$, es controlable y observable.

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.9319 & -0.02414 \\ 0.03863 & 0.99951 \end{bmatrix} \cdot x(k) + \begin{bmatrix} 0.01931 \\ 0.0003908 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y(k) = [0 \quad 1.25] \cdot x(k)$$

2. Haga que el sistema tenga los polos de lazo cerrado ubicados en $\mu = 0.6 +/- 0.25j$ y que tenga error de estado estacionario cero ante un escalón en la entrada $r(k)$

Ejercicios (2)



- Verifique el cálculo de la matriz K y el escalar K_0 para el ejemplo 1.
- Para el sistema mostrado, diseñe un regulador con observador que haga que los polos de lazo cerrado del sistema se ubiquen en $\lambda = -1.5 \pm j2$.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u \\ y &= [1 \quad 0]x\end{aligned}$$

Ejercicios (3)



Para el sistema mostrado, diseñe un compensador discreto con observador que tenga respuesta *dead-beat*, (polos en $z = 0$) y que haga que los polos de lazo cerrado del sistema se ubiquen en $\mu_{1,2} = 0.7 \pm j0.25$. Calcule además K_0 para eliminar el error de estado estacionario ante una entrada escalón

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} -0.35 & -1.375 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 \quad 2.825] \mathbf{x}(k) \quad T = 0.01s$$

Ejercicios (4)



- Para la estructura del caso 2, encuentre la función de transferencia del compensador
- ¿Encuentre el error de estado estacionario para entrada escalón para el caso 2?
- ¿Será posible para el caso 2, hacer que el error de estado estacionario ante entrada escalón sea 0?

Tarea



- Investigue que es un observador de estado incompleto o de orden reducido y cuándo puede ser aplicado.
- Investigue qué es el principio de dualidad de Kalman.
- ¿Qué establece el principio de separación de Kalman? ¿Cómo se prueba?
- Demuestre la fórmula de Ackerman para K
- ¿Cuán rápidos deben ser los polos del observador de Luenberger respecto a los de la planta?
- ¿Cuál tipo de observador resuelve el problema del observador en presencia de ruido?

Referencias



- [1] Ogata, Katsuhiko. „**Ingeniería de Control Moderna**“, Pearson, Prentice Hall, 2003, 4^a Ed., Madrid.
- [2] Ogata, Katsuhiko. „**Sistemas de Control en tiempo discreto**“, Prentice Hall, 1996, 2^a Ed., México.
- [3] Dorf, Richard, Bishop Robert. „**Sistemas de control moderno**“, 10^a Ed., Prentice Hall, 2005, España.
- [4] http://en.wikipedia.org/wiki/State_observer
- [5] <http://www.stanford.edu/dept/MSandE/people/faculty/luenberger/articles/otsoals.pdf>