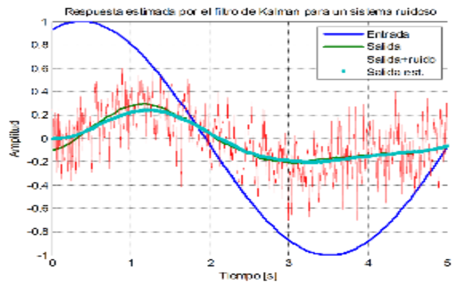
Control Automático

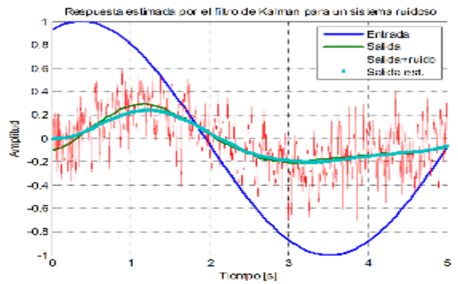
Introducción al filtro de Kalman

Contenido



- Principio de funcionamiento
- Ecuaciones de predicción y actualización
- Proceso
- Ejemplo

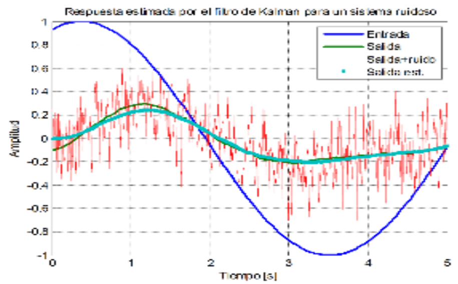
Principio de Funcionamiento



- Es un método recursivo para estimar el estado de un sistema ***lineal*** minimizando la media del error cuadrático

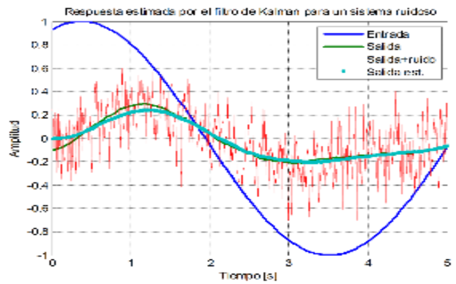
- Mediante el conocimiento del comportamiento actual, el filtro de Kalman estima el estado futuro del sistema aplicando un término de ***corrección*** proporcional al factor de predicción.

Clases de filtros de Kalman

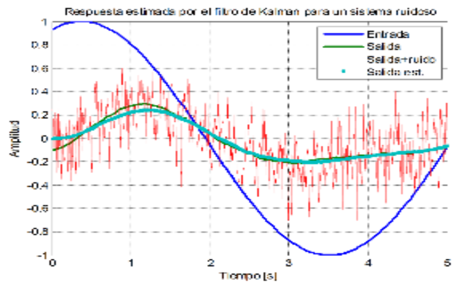


- El filtro de Kalman continuo
  - Aplicable a sistemas continuos **lineales**
- El filtro de Kalman discreto
  - Aplicable a sistemas discretos **lineales**
- El filtro extendido de Kalman
  - Aplicable a sistemas discretos **no lineales**

Ecuaciones de predicción



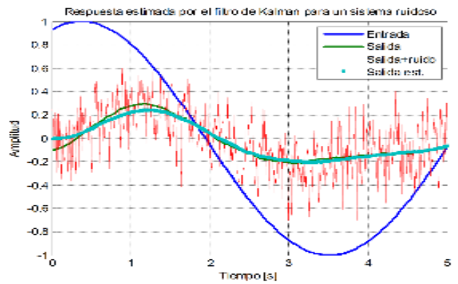
- Son responsables de la proyección del estado al momento “k” tomando como referencia el estado en el momento “k-1” y la actualización intermedia de la matriz de covarianza del estado.



Ecuaciones de actualización

- Son responsables de la retroalimentación, es decir, incorporan nueva información dentro de la estimación anterior con lo cual se llega a una estimación mejorada del estado.

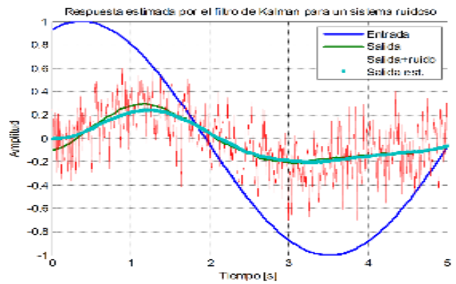
Aplicaciones



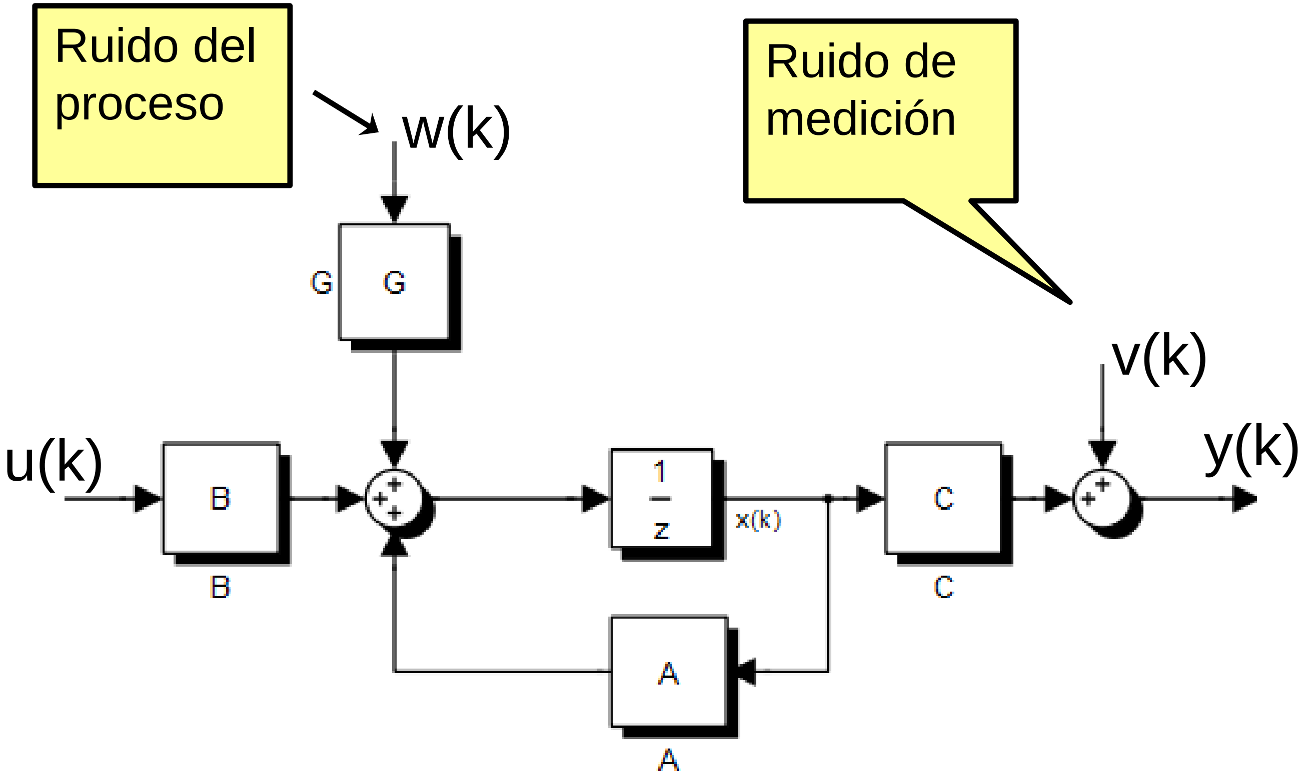
- Estimación de parámetros que cambian en el tiempo.

- Estimación del estado de un sistema en el pasado, presente y futuro, aún cuando la naturaleza precisa del sistema modelado es desconocida.

- Estimación en presencia de ruido

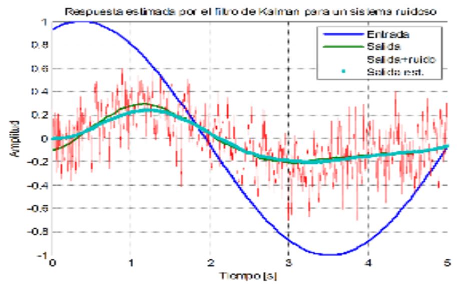


Planta en tiempo discreto como un proceso estocástico

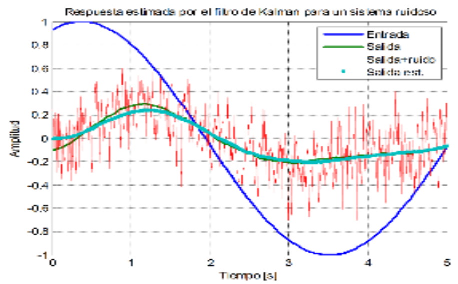


- Vamos a suponer **A**, **B** y **C** constantes y G =1

Condiciones de operación

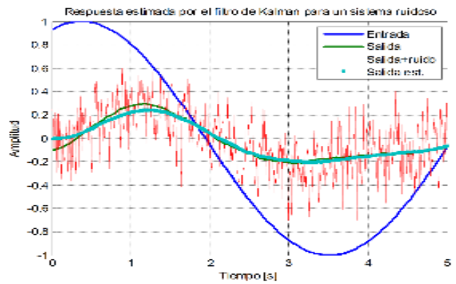


- Los ruidos de proceso y de medición deben ser independientes entre si, ruidos blancos (no correlacionados consigo mismo) y de distribución normal de probabilidad.
- Las matrices de covarianza de ruido de proceso, Q, y de covarianza de ruido de medición, R, se suponen constantes; aunque pueden variar ligeramente entre cada paso de medición
- También se supone que A y C son constantes; pero podrían cambiar en el tiempo



Ecuaciones del proceso

- $\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k\text{-}1) + \mathbf{B}u(k\text{-}1) + w(k\text{-}1)$
- $y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(\mathrm{k}) + v(k)$
- Usaremos, para facilitar la escritura, la notación sin paréntesis para el ordinal k, ej.: $\mathbf{x}(k)$ será entonces escrita $\mathbf{x}_k$



Valores que se deben conocer

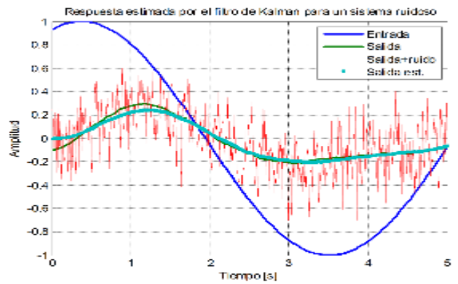
- Se debe conocer el ruido del proceso w(k) y el ruido de medición v(k) que son secuencias aleatorias de media cero, esto es:

$$E\{w(k)\} = E\{v(k)\} = 0$$

- Y las covarianzas de ruido de proceso y de medición:

$$E\{w(\mathrm{k})w^{T}(k)\} = \mathbf{Q}(k)$$

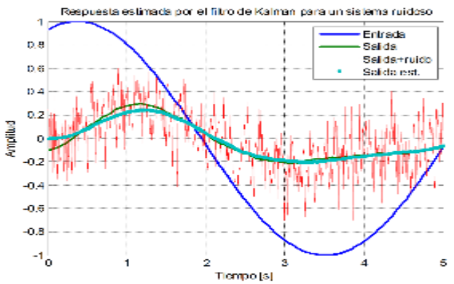
$$E\{v(\mathrm{k})v^{T}(k)\} = \mathbf{R}(k)$$



Los errores

- Si $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ es el estimado a *priori* del estado en el tiempo *k*, conocidos el proceso antes del tiempo *k* y $\hat{\mathbf{x}}_k$ es el estimado a *posteriori* del estado en el tiempo *k*, dada la medición y_k.
  - El error a priori $\mathbf{e}_k^- = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^-$
  - El error a posteriori $\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k$

La covarianza



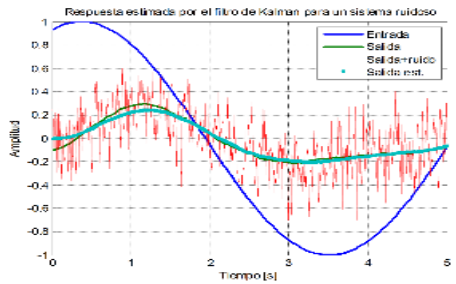
- La covarianza del estimado a *priori* del error

$$\mathbf{P}_k^- = E[\mathbf{e}_k^- \cdot \mathbf{e}_k^{-T}]$$

- La covarianza del estimado a *posteriori* del error

$$\mathbf{P}_k = E[\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_k^T]$$

El estado estimado a *posteriori*



- Se calcula como una combinación lineal del estado estimado *a priori* y una porción ponderada de la diferencia entre la medición y el valor estimado de la medición.

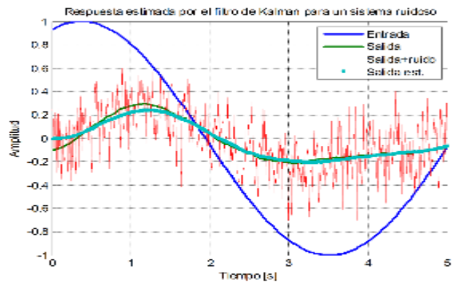
$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (y_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k^-)$$

- La diferencia entre la medición y su estimado se llama ***innovación*** de la medición o residuo.

- La matriz **K** se escoge para minimizar la covarianza del error *a posteriori*

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}^T (\mathbf{C}\mathbf{P}_k^- \mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{\mathbf{R}_k \to 0} \mathbf{K}_k = \mathbf{C}^{-1} \\ \lim\limits_{\mathbf{P}_k^- \to 0} \mathbf{K}_k = \mathbf{0} \end{cases}$$

El proceso del filtro



a posteriori

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}^T (\mathbf{C}\mathbf{P}_k^- \mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1} \\
\hat{\mathbf{x}}_k &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (y_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k^-) \\
\mathbf{P}_k &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C})\mathbf{P}_k^-
\end{aligned}
$$

Actualización
en el tiempo
(*predicción*)

Actualización
de medición
(*corrección*)

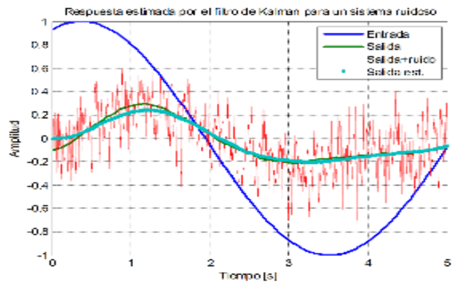
a priori

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{x}}_k^- &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}u_{k-1} \\
\mathbf{P}_k^- &= \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}
\end{aligned}
\quad \leftarrow \quad \hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{P}_{k-1}
$$

iniciales

El filtro estima el proceso en un instante determinado y luego obtiene realimentación en la forma de una medición *ruidosa*.

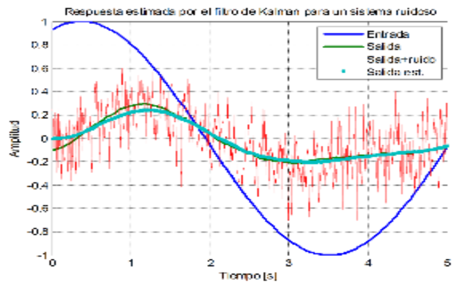
Condiciones del filtro

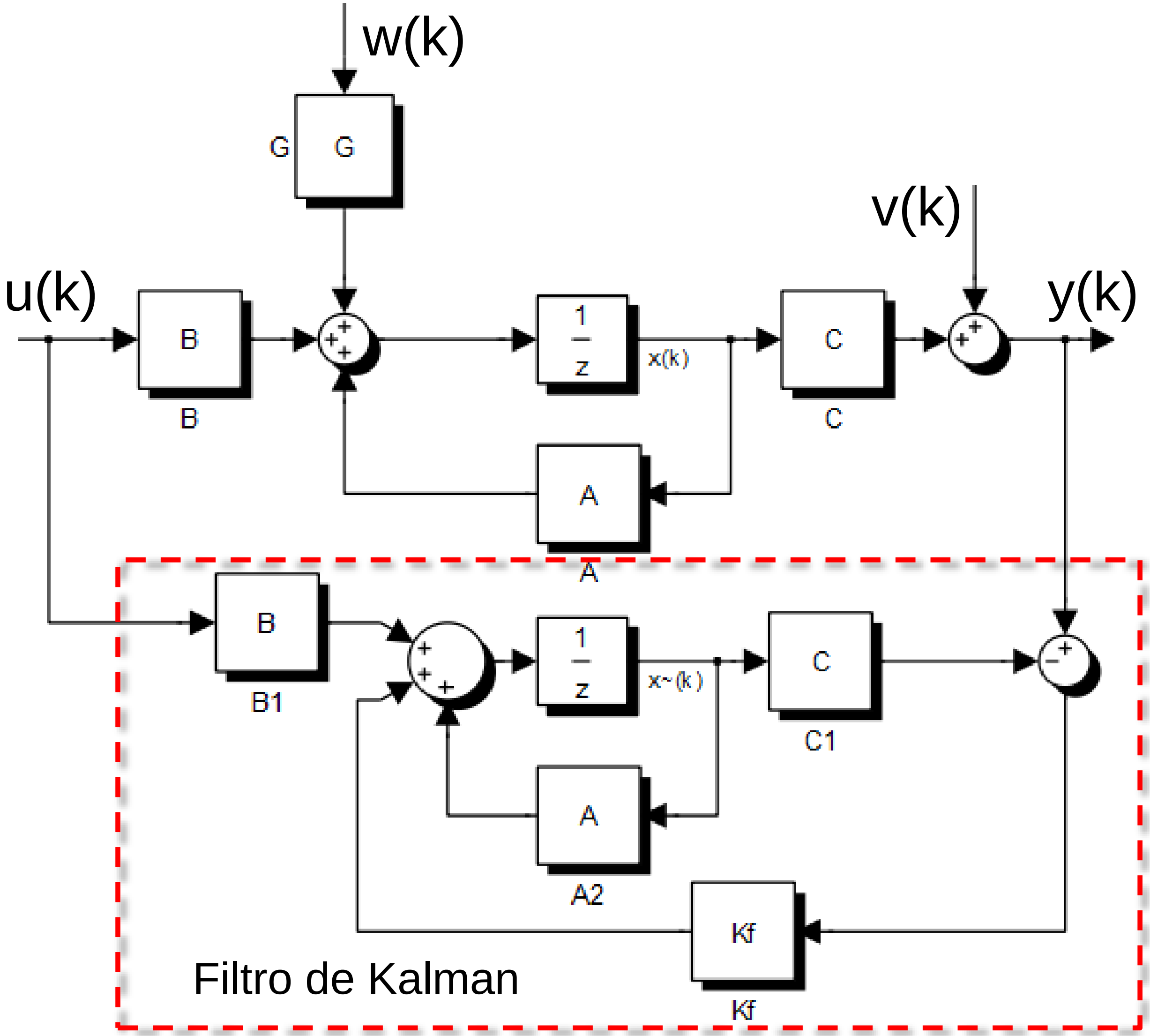


- Bajo las condiciones de que ***R*** (varianza del ruido de medición) y ***Q*** (varianza del ruido del proceso) son constantes; entonces, la covarianza estimada del error P_k y la ganancia de Kalman K_k, se estabilizarán rápido y permanecerán constantes.

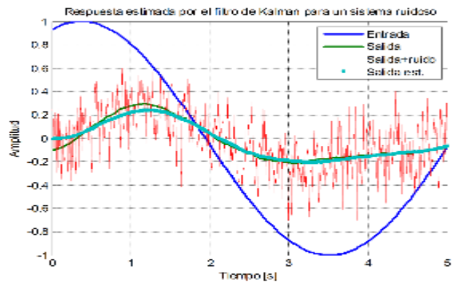
- En este caso, ambas pueden ser calculadas fuera de línea, o encontrando el valor estático de P_k.

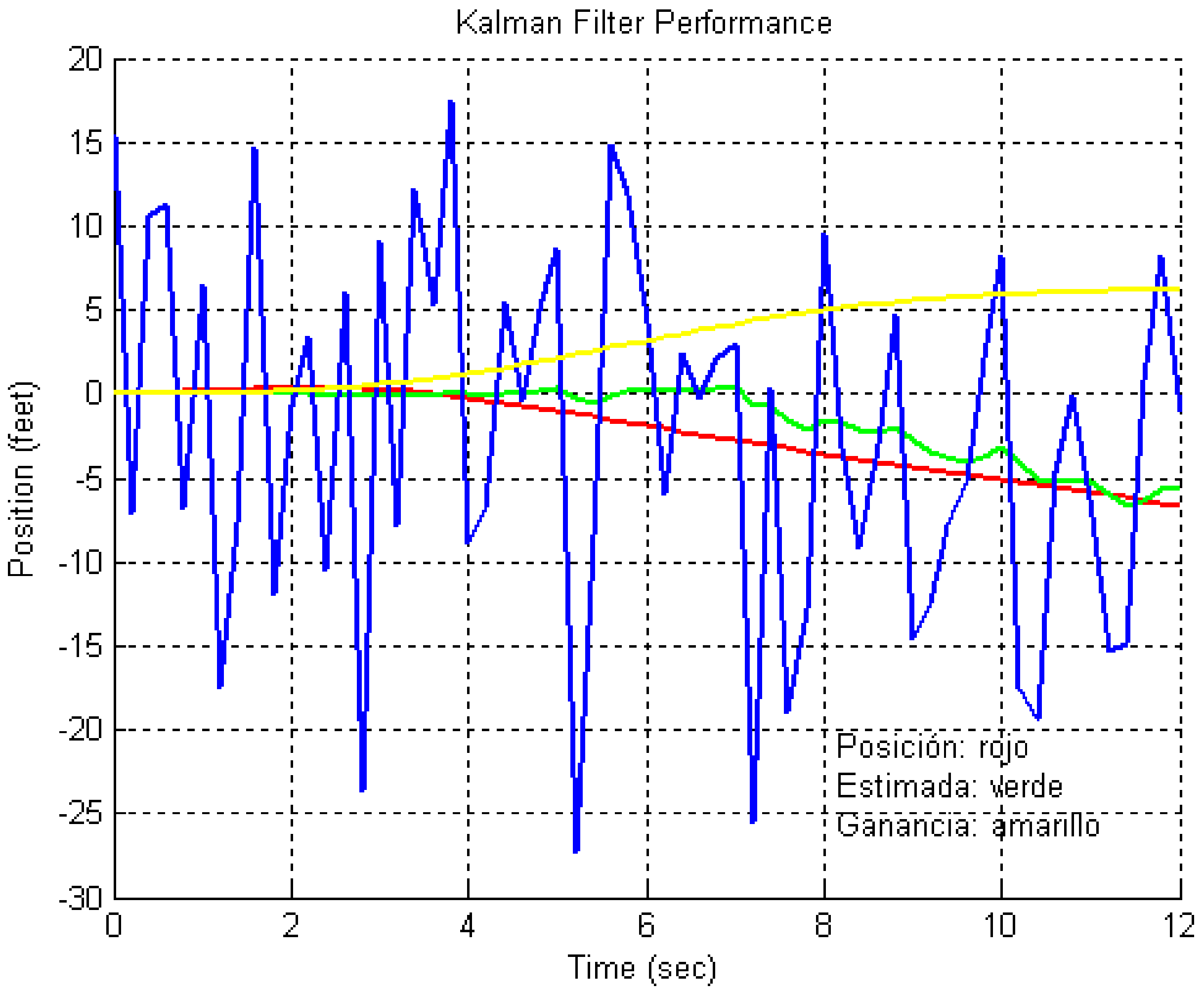
Estimador con filtro de Kalman

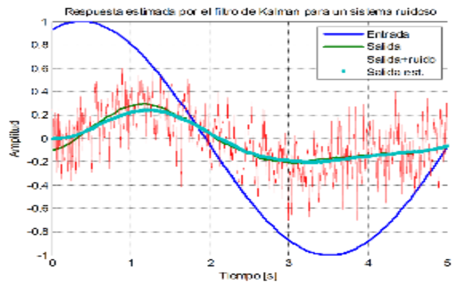




Ejemplo 1: Filtro de Kalman







Ejemplo 2: Estimador de Kalman

- Usamos las funciones *reg*, *place* (MIMO) y *kalman* de Matlab para construir un estimador para la planta siguiente llamada sys, con Q = 0.1 y R = 0.2; donde los polos de la planta se deben ubicar en s = -2 ± i.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}$$

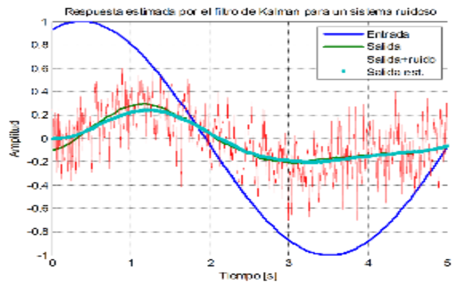
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

  - K = place(sys.A,sys.B,[-2+i -2-i])
  - [Kest,Kf,P] = kalman(sys,Q,R)
  - Regulador = zpk(reg(sys,K,Kf))

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_f = \begin{bmatrix} 0.2582 \\ -0.2167 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2: Resultados



- Regulador y valores propios

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_f = \begin{bmatrix} 0.2582 \\ -0.2167 \end{bmatrix}$$

$$K_1(s) = \frac{2.024(s + 2.622)}{(s^2 + 4.258s + 5.733)}$$

$$K_2(s) = \frac{-0.083046(s + 13.44)}{(s^2 + 4.258s + 5.733)}$$

Valores propios

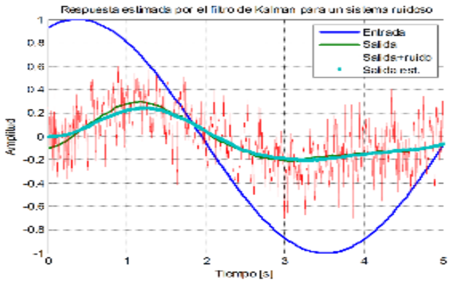
-0.6291+2.3761i

-0.6291 - 2.3761i

-2.0000 + 1.0000i

-2.0000 - 1.0000i

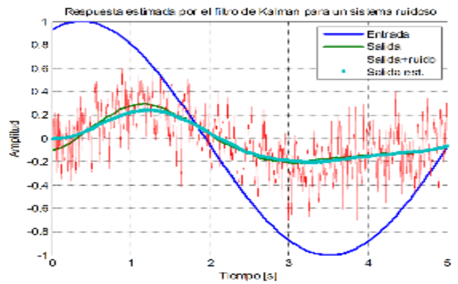
Demo filtro de Kalman

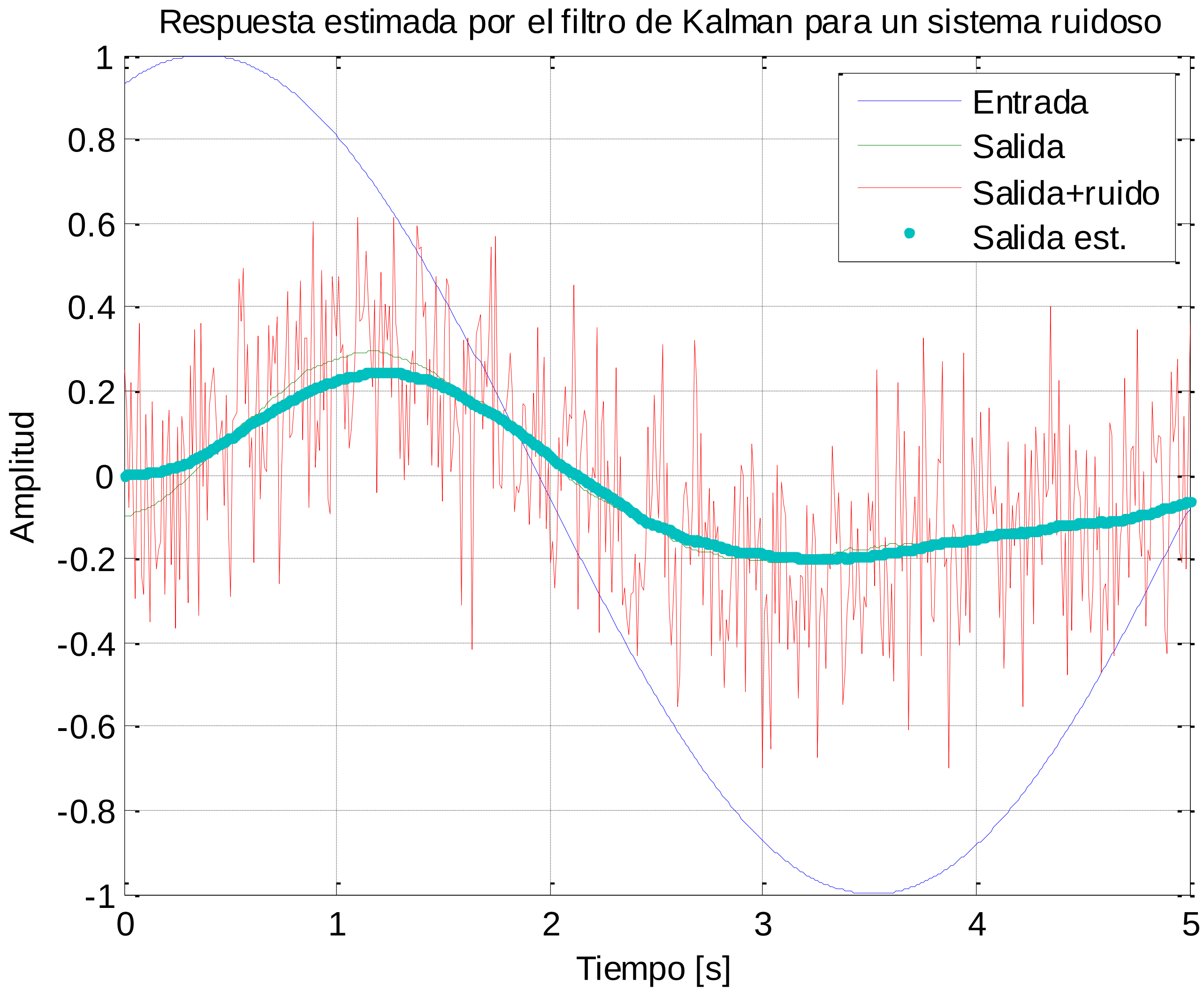



```
clear all
% Definimos algunos parámetros
t=0:0.01:5;
omega=1;
x0=[-0.1 0.1];
%
% Generamos la señal u y el ruido n
u=sin(omega*t+1.2);
n=randn(size(t));
w=randn(size(t));
%
% Establecemos o medimos las covarianzas
Q=cov(0.2*w);
R=cov(0.2*n);
%
% Creamos el sistema
sys=ss([0 1;-6 -1],[0 1;1 0],[1 0],0)
```

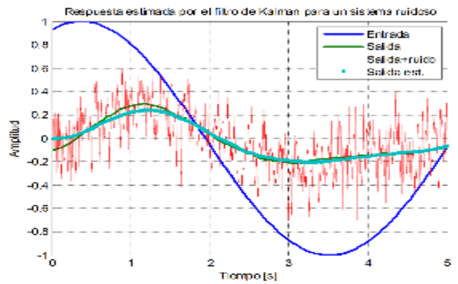
```
% Calculamos el filtro de Kalman
[Kest,Kf,P]=kalman(sys,Q,R)
%
% Simulamos el sistema para obtener la salida y
y=lsim(sys,[u' 0.2*w'],t,x0)';
%
% Creamos la salida ruidosa yn
yn=y+0.2*n;
%
% Estimamos la salida ye y el estado xe con u, yn
YY=lsim(Kest,[u',yn'],t);
%
% Graficamos los resultados
plot(t,u,t,y,t,yn,t,YY(:,1),'.')
legend('Entrada','Salida','Salida+ruido','Salida est.')
grid
```

Resultados de la simulación



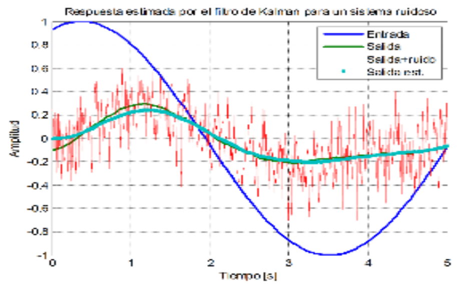


Conclusiones (1)

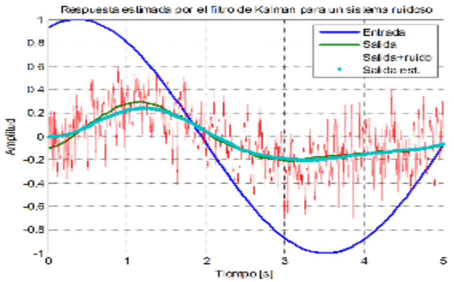


- El algoritmo de Kalman se basa en un mecanismo de predicción y corrección, que permite minimizar el error.
- El algoritmo de Kalman recurre a realimentación de estado para la corrección del error.
- Se necesitan condiciones iniciales como el ruido del proceso y el ruido del sistema.
- Requiere que la media del ruido sea cero, es decir, ruido blanco y que la covarianza del ruido sea distinta de cero.

Ejercicios



- Tome los datos del precio diario en ventanilla del dólar (escoja un banco) US desde el 1 de enero 2019 hasta el día de ayer y haga la predicción del valor del USD para el día de hoy.
- Alternativamente puede hacer lo mismo con la tasa básica pasiva actualizada semanalmente cada jueves y predecir la de la próxima semana.
- Investigue sobre fusión de sensores por el método de Kalman.



Bibliografia

- [1] “An Introduction to the Kalman Filter”. Greg Welch and Gary Bishop

- [2] http://www.innovatia.com/software