

Reguladores de compensación

Definimos la salida deseada para el sistema

$$T(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \cdot z^{-d_m}$$

La función de transferencia generalizada $T(z)$ posee un retardo dado por d_m .

$$G(z) = \frac{b_q + b_{q-1}z^{-1} + \cdots + b_1z^{-q+1} + b_0z^{-q}}{1 + a_{n-1}z^{-1} + \cdots + a_1z^{-n+1} + a_0z^{-n}} \cdot z^{-d} = \frac{B(z)}{A(z)} \cdot z^{-d}$$

Condiciones:

$$b_q \neq 0,$$

d = tiempo muerto de la planta,

$G(z)$ tiene los polos y ceros dentro del círculo unitario

$$T(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K(z)G(z)}{1 + K(z)G(z)}$$

Obtenemos la función de transferencia del regulador $K(z)$:

$$K(z) = \frac{1}{G(z)} \cdot \frac{T(z)}{1 - T(z)}$$

Condiciones para el compensador

Primera condición:

Causalidad

$$K(z) = \frac{A(z)}{B(z) \cdot z^{-d}} \cdot \frac{\frac{N(z)}{D(z)} \cdot z^{-dm}}{1 - \frac{N(z)}{D(z)} \cdot z^{-dm}} = \frac{A(z) \cdot N(z) \cdot z^{-dm}}{B(z) \cdot z^{-d} D(z) - B(z) \cdot z^{-d} N(z) \cdot z^{-dm}}$$

Para que el compensador $K(z)$ sea realizable el exponente de la expresión $z^{-(d_m-d)}$ debe ser negativo o cero.

$$K(z) = \frac{A(z) \cdot N(z)}{B(z) \cdot (D(z) - N(z) \cdot z^{-dm})} \cdot z^{-(dm-d)}$$

Donde debe cumplirse que

$$d_m - d \geq 0$$

Por lo tanto el tiempo muerto de la nueva función de transferencia esperada debe ser mayor o igual al tiempo muerto del sistema; pero, nunca menor.

$$d_m \geq d$$

Segunda condición

El compensador resultante debe ser propio o estrictamente propio

$$\text{grad}(A(z) \cdot N(z)) \leq \text{grad}(B(z)) + \max(\text{grad}(D(z)), \text{grad}(N(z)) + d_m)$$

Compensador para error de estado estacionario cero

Aplicamos el teorema del valor final; y para error de estado estacionario cero, a la salida, ante una entrada escalón debe cumplirse que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T(z) = T(1) = 1$$

Se requiere que el sistema sea tipo 1; $\rightarrow G_E(z)$ tiene que tener un factor $(z-1)$ en el denominador.

$$G_E(z) = K(z) \cdot G(z) = \frac{T(z)}{1 - T(z)}$$

La función de transferencia de lazo abierto debe tener comportamiento integral.

Pasos generales para el diseño de reguladores de compensación:

- Definir la función de transferencia deseada $T(z)$
- Verificar que se cumplen las condiciones para realizar el compensador
- Calcular el compensador $K(z)$

Compensador con error cero y tiempo de estabilización finito

La salida $y(k)$ debe de llegar a su valor final con error de régimen permanente cero después de un número finito \bar{n} de periodos de muestreo. Compensador "dead beat".

$$\bar{n} = d + q$$

Donde:

d : es el tiempo muerto de la planta

q : es el tiempo de estabilización pedido

Definiciones

$$D(z) = 1$$

$$d_m = d$$

La función de transferencia será:

$$T(z) = \sum_{i=0}^q c_i z^{-i-d} = \sum_{i=0}^q c_i z^{-\bar{n}}$$

Propiedad *dead beat*

$$T(z)\big|_{z=1} = \sum_{i=0}^q c_i = 1$$

Función de transf. normalizada

$$T(z) = \frac{B(z)}{B(1)} z^{-d}$$

donde

$$B(z) = \sum_{i=0}^n b_i \cdot z^{-i}$$

Verificación de las condiciones de error cero

$$T(z)\Big|_{z=1} = \frac{B(1)}{B(1)} = 1$$

✓

Cálculo del reg. *dead beat*

$$K(z) = \frac{A(z)}{B(z)} \cdot \frac{B(z)}{(B(1) - B(z) \cdot z^{-d})} = \frac{A(z)}{B(1) - B(z) \cdot z^{-d}}$$

Pasos del diseño:

- Dada la planta $G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \cdot z^{-d}$
- Calcule el regulador como $K(z) = \frac{A(z)}{B(1) - B(z) \cdot z^{-d}}$; con $\bar{n} \geq n + d$;
donde **n** es el orden de la planta.
- No trate de compensar polos o ceros fuera del círculo unitario.

Ejemplo 1: Regulador *dead beat*

$$G(s) = \frac{1}{1 + sT_1} \cdot e^{-sT_d}$$

El tiempo muerto es $T_d = \bar{d} \cdot T$; donde T es el periodo de muestreo.

Planta en tiempo discreto

$$G(z) = \frac{1 - e^{\frac{-T}{T_1}}}{z - e^{\frac{-T}{T_1}}} \cdot z^{-\bar{d}}$$

Ejemplo 1: Definición de T(z)

Planta como cociente de polinomios en z^{-1}

$$G(z) = \frac{\left(1 - e^{\frac{-T}{T_1}}\right)}{1 - e^{\frac{-T}{T_1}} \cdot z^{-1}} \cdot z^{-(\bar{d}+1)}; \text{ con } \bar{d} + 1 = d$$

La función de transferencia requerida:

$$T(z) = \frac{B(z)}{B(1)} \cdot z^{-d} = \frac{1 - e^{\frac{-T}{T_1}}}{1 - e^{\frac{-T}{T_1}}} \cdot z^{-d} = z^{-d}$$

Ejemplo 1: Regulador $K(z)$

Por lo que el compensador será:

$$K(z) = \frac{A(z)}{B(1) - B(z) \cdot z^{-d}} = \frac{1 - e^{\frac{-T}{T_1}} \cdot z^{-1}}{\left(1 - e^{\frac{-T}{T_1}}\right) - \left(1 - e^{\frac{-T}{T_1}}\right) \cdot z^{-d}}$$

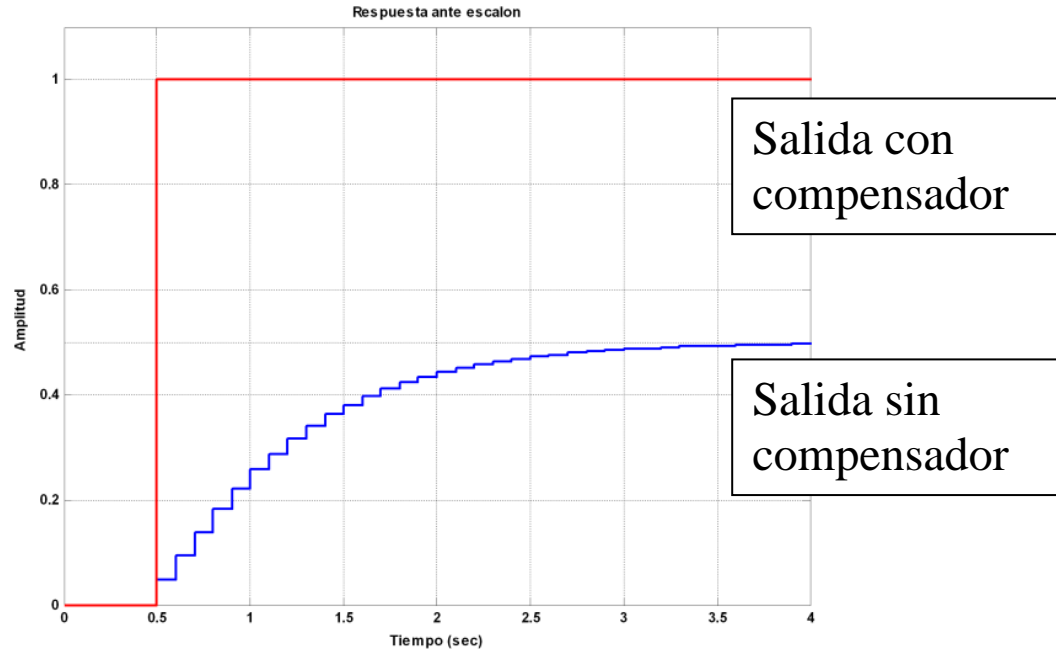
$$K(z) = \frac{1 - e^{\frac{-T}{T_1}} \cdot z^{-1}}{\left(1 - e^{\frac{-T}{T_1}}\right)(1 - z^{-d})}$$

Ejemplo 1: Sustituyendo valores

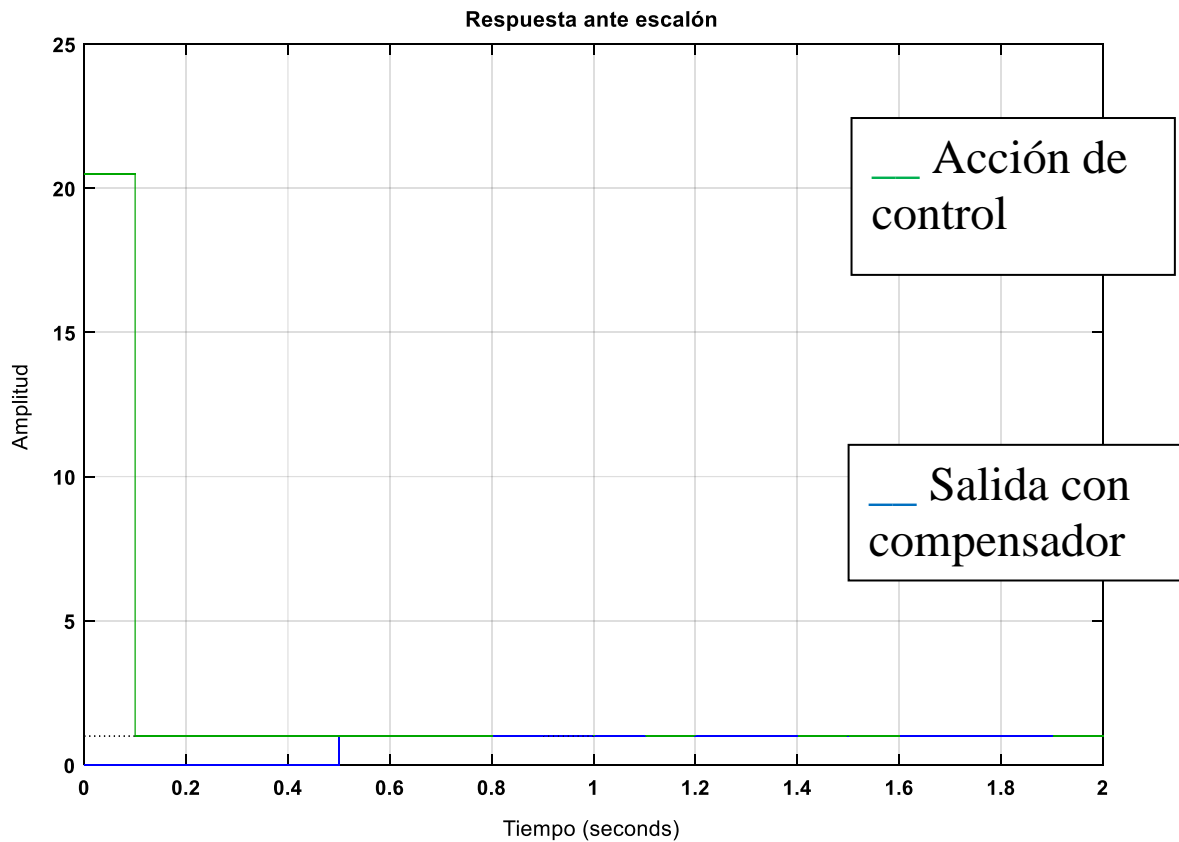
Para $T = 0.1\text{s}$, $T_d = 0.4\text{s}$ y $T_1 = 2\text{s}$

$$K(z) = \frac{1 - e^{\frac{-0.1}{2}} \cdot z^{-1}}{\left(1 - e^{\frac{-0.1}{2}}\right)(1 - z^{-5})} = \frac{1 - 0.9512 \cdot z^{-1}}{0.0488 \cdot (1 - z^{-5})}$$

Ejemplo 1: Resp. ante escalón



Respuestas de lazo cerrado ante entrada escalón



Respuestas de lazo cerrado ante entrada escalón

Compensador para respuesta de primer orden

Debido a que en ocasiones la respuesta *dead beat* es demasiado exigente para un sistema debido a:

Cambios grandes en la entrada

Tiempo de muestreo muy pequeño

➔ Utilizamos una respuesta de primer orden

T(z) p/respuesta de primer orden

$$T(z) = K \cdot \frac{\left(1 - e^{\frac{-T}{\tau}}\right)}{\left(z - e^{\frac{-T}{\tau}}\right)} \cdot z^{-d_m}$$

Con $d_m = d$ y haciendo $K = 1$

$$K(z) = \frac{A(z)}{B(z)} \cdot \frac{\left(1 - e^{\frac{-T}{\tau}}\right)}{\left[\left(z - e^{\frac{-T}{\tau}}\right) - \left(1 - e^{\frac{-T}{\tau}}\right) \cdot z^{-d}\right]} \cdot z^{\overbrace{-(d_m - d)}^0}$$

Ejemplo 2: Resp. de primer orden

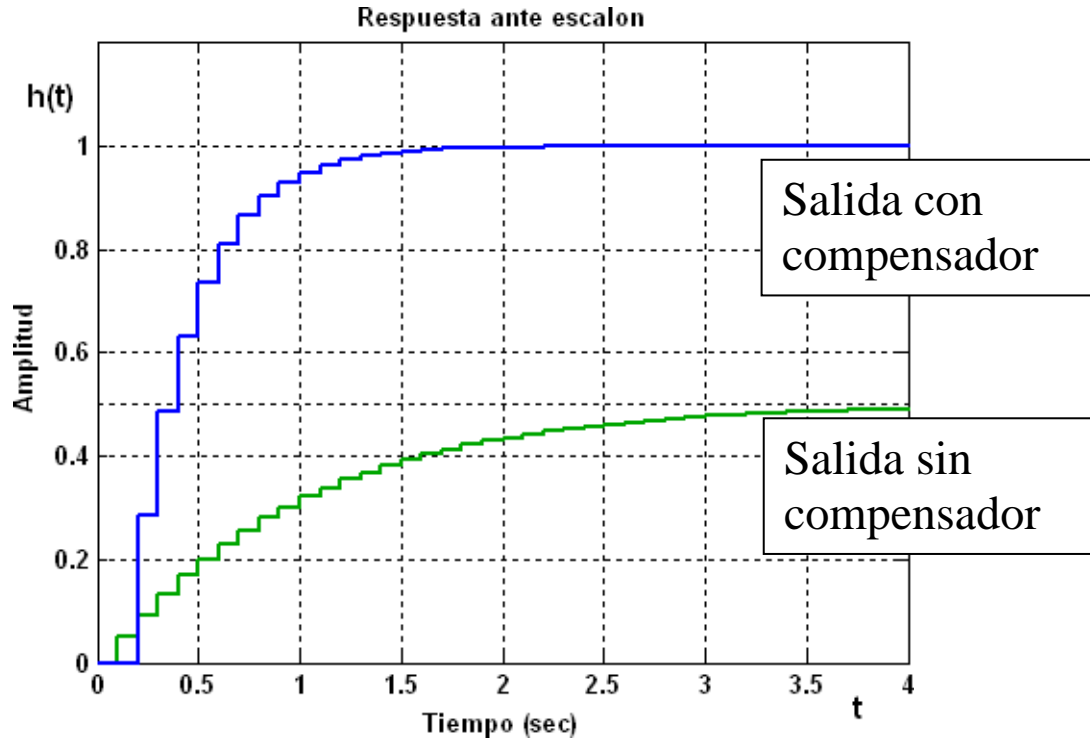
$\tau = 0.3\text{s}$ con un periodo de muestreo de $T = 0.1\text{s}$

$$G(z) = \frac{0.0488}{1 - 0.9512 \cdot z^{-1}} \cdot z^{-1} \quad T = 0.1\text{s}$$

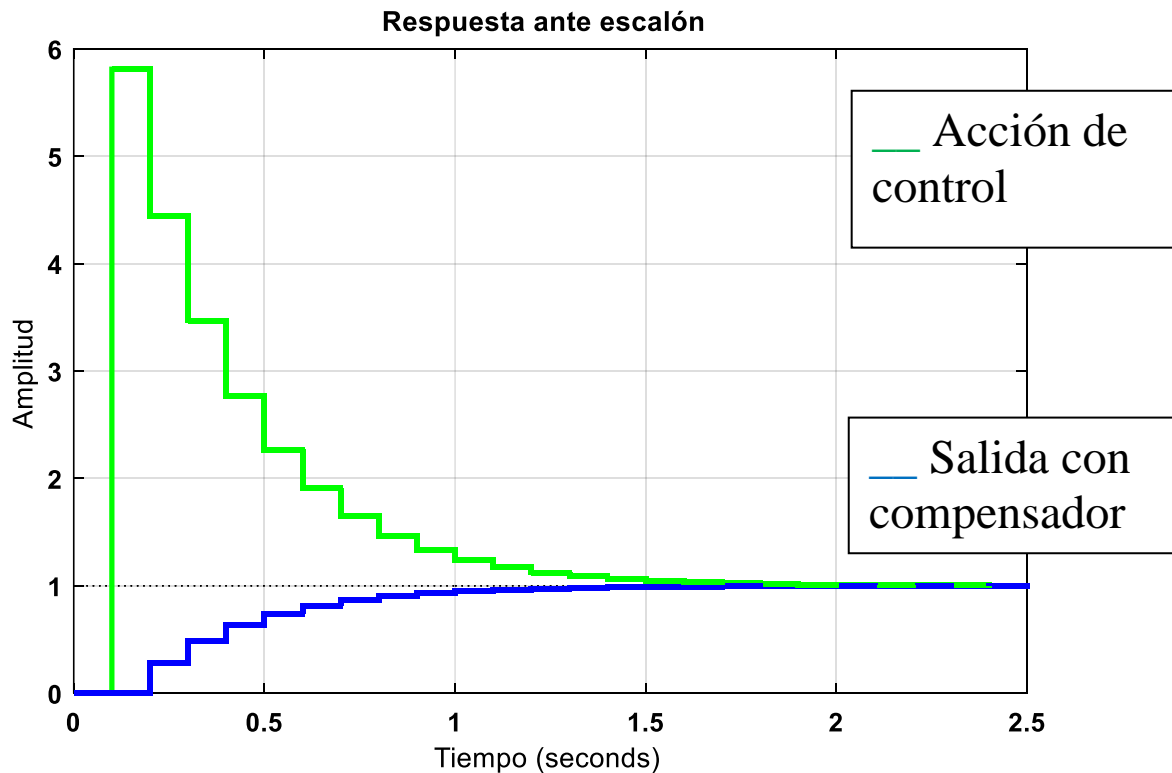
Evaluando con $d = 1$, $\tau = 0.3\text{s}$, $T = 0.1\text{s}$ obtenemos

$$K(z) = \frac{1 - 0.9512 \cdot z^{-1}}{0.0488} \cdot \frac{(1 - e^{-0.33})}{(z - e^{-0.33}) - (1 - e^{-0.33})z^{-1}} \quad T = 0.1\text{s}$$
$$K(z) = 5.81 \cdot \frac{(z - 0.9512)}{(z - 1)(z + 0.2835)}$$

Ejemplo 2: Resp. ante escalón



Respuesta de lazo cerrado ante entrada escalón



Respuesta de lazo cerrado ante entrada escalón

Ejemplo3: Planta subamortiguada

Para la planta mostrada, encuentre un compensador de respuesta de primer orden con un tiempo de estabilización $t_{s2\%} = 4s$.

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.5s + 0.8}$$

Para un $\tau = t_{s2\%}/4 = 1s$, escogemos un $T = 0.1s$.

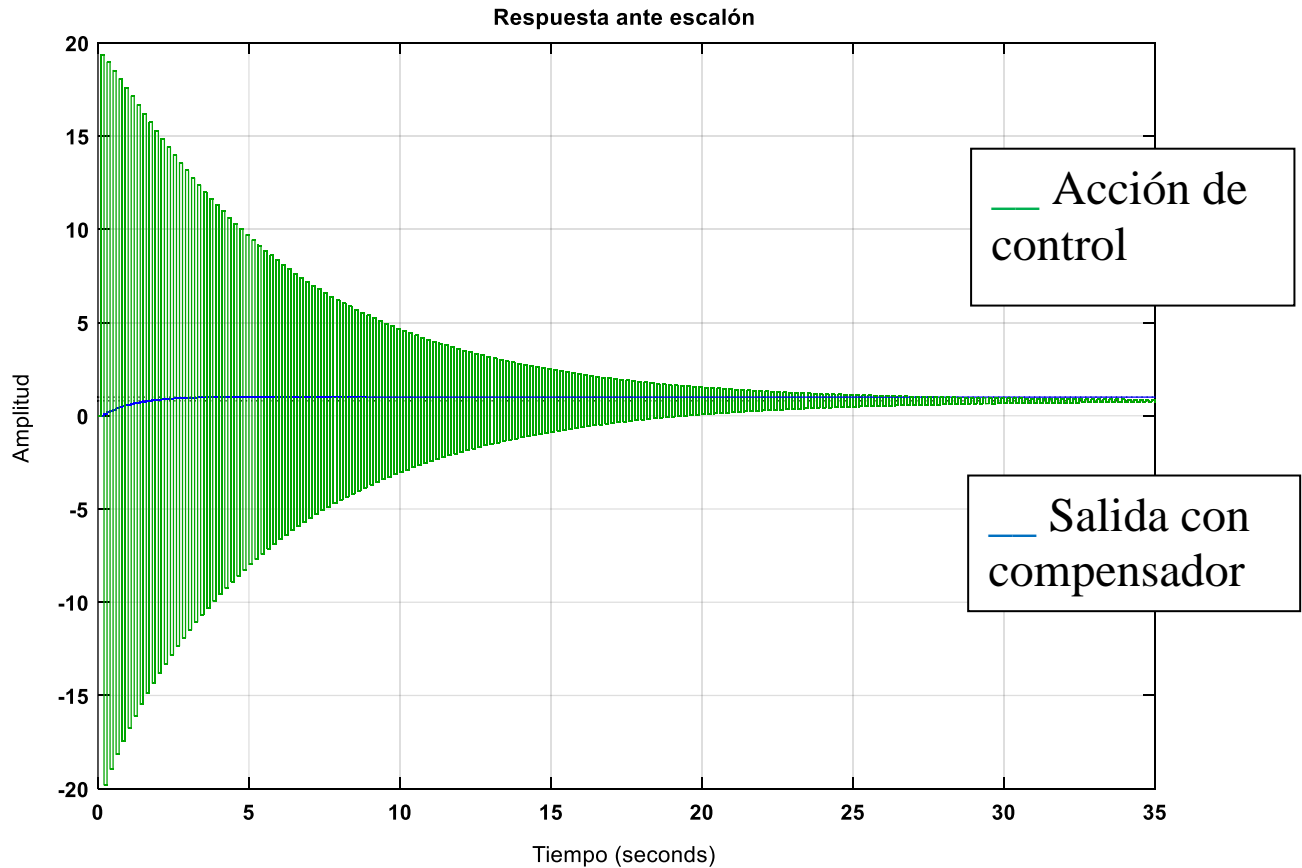
$$G(z) = \frac{0.0049(z + 0.9835)}{z^2 - 1.943z + 0.9512}; \quad T = 0.1s$$

$$K(z) = \frac{19.364(z^2 - 1.943z + 0.9512)}{(z - 1)(z + 0.9835)(z + 0.0952)}; \quad T = 0.1s$$

Ejemplo 3: Resultados



Respuesta de lazo cerrado ante entrada escalón



Respuesta de lazo cerrado ante entrada escalón

Conclusiones

Los métodos presentados posibilitan el cálculo de compensadores para diferentes tipos de plantas, incluyendo aquellas que presentan tiempos muertos y polos poco amortiguados.

Debido a la estrategia de cancelación, no se puede trabajar con plantas que tengan polos o ceros fuera del círculo unitario.

Habrà que evaluar la conveniencia de estos métodos comparados a otros menos automatizados; pues en casi todos los casos mostrados, el compensador ha resultado con una ganancia muy alta; y el sistema total posee polos de lazo cerrado en el eje real negativo. Su efecto en la salida del compensador puede resultar en valores muy elevados de ruido, oscilación de la salida y eventualmente en saturación.

Ejercicios

Para el sistema cuya planta tiene una función de transferencia en tiempo continuo,

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

- 1) Con $T = 0.2s$, sintetice un controlador que produzca una respuesta *dead-beat* con un retardo de un periodo de muestreo, para una entrada escalón.
- 2) Utilizando un periodo de muestreo $T = 0.1s$, sintetice un controlador que produzca una respuesta de primer orden con $\tau = 1s$, ante una entrada escalón.