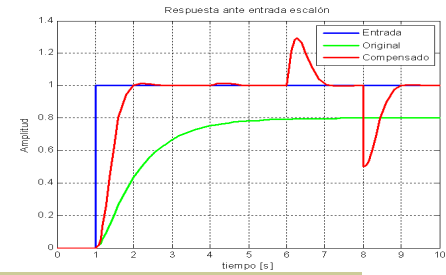


Control Automático

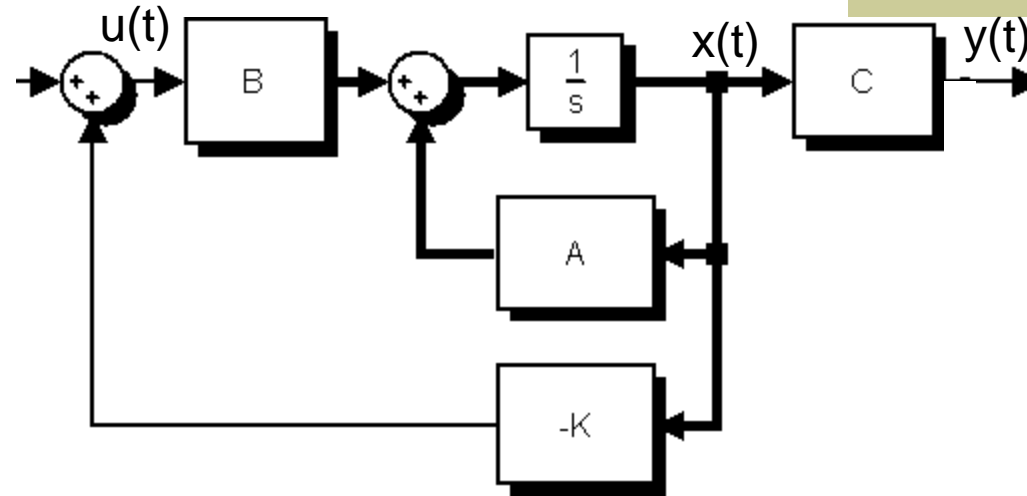
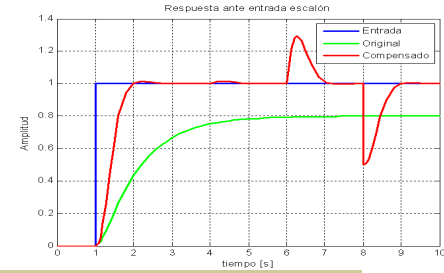
Realimentación de estado integral

Contenido



- Realimentación de estado integral (REI)
- Cálculo del compensador
 - Controlabilidad del sistema REI
 - Cálculo de la matriz $\hat{\mathbf{K}}$
- Ejemplos y ejercicios
- Resumen
- Referencias

Control con realimentación de estado integral



- Partimos de un sistema tipo 0, que no tiene polos en el origen

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$

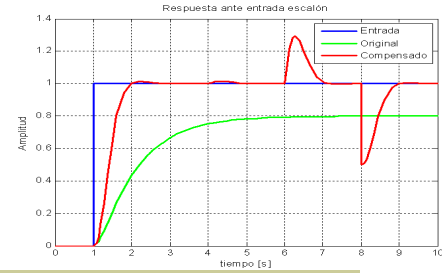
$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

- Aumentamos el sistema con un estado (por ser SISO)

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + k_I \xi(t)$$

$$\dot{\xi} = r(t) - y(t) = r(t) - \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

Control con realimentación de estado integral (2)



- Se define un nuevo vector de estado aumentado

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}$$

- Se escriben las ecuaciones del sistema aumentado para $t > 0$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

- Se desea que en estado estacionario $y(\infty) = r$; por lo que $\dot{\xi} = 0$, con $\xi(\infty)$, $u(\infty)$ y $\mathbf{x}(\infty)$ tendiendo a valores constantes.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(\infty) \\ \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\infty) \\ \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u(\infty) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r(\infty)$$

Control con realimentación de estado integral (4)



- Con $r(t)$ escalón, $r(\infty) = r$, constante, para $t > 0$. Al restar las dos ecuaciones anteriores tenemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(\infty) \\ \dot{\xi}(t) - \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(\infty) \\ \xi(t) - \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} [u(t) - u(\infty)]$$

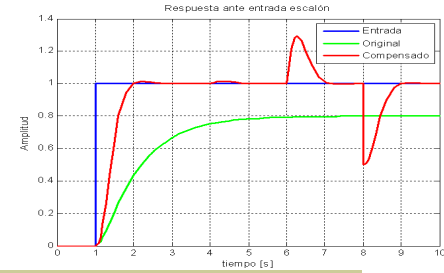
- Se definen las variables

$$\dot{\mathbf{x}}_e(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(\infty)$$

$$\xi_e(t) = \xi(t) - \xi(\infty)$$

$$u_e(t) = u(t) - u(\infty)$$

Control con realimentación de estado integral (5)



■ Entonces

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_e(t) \\ \dot{\xi}_e(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{A}}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{B}}} u_e(t)$$

$$u_e(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}_e(t) + k_I \xi_e(t)$$

■ Se definen

$$\mathbf{e}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix}_{n+1} \quad \hat{\mathbf{K}} = [\mathbf{K} \quad -k_I]_{n+1}$$

■ Por lo que

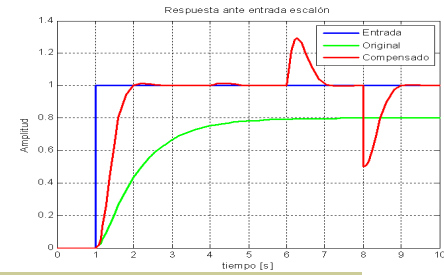
$$u_e(t) = -\hat{\mathbf{K}}\mathbf{e}(t)$$

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{e}(t) + \hat{\mathbf{B}}u_e(t)$$

■ Finalmente

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{K}}) \cdot \mathbf{e}(t)$$

Controlabilidad



- La controlabilidad está dada si puede probarse que la matriz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}$$

tiene rango $n+1$ (para un sistema SISO).

- La controlabilidad también puede probarse con la matriz de controlabilidad aumentada

$$\hat{\mathbf{M}} = [\hat{\mathbf{B}} \quad \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}} \quad \hat{\mathbf{A}}^2\hat{\mathbf{B}} \quad \dots \quad \hat{\mathbf{A}}^{n-1}\hat{\mathbf{B}}]$$

Cálculo de K y ki

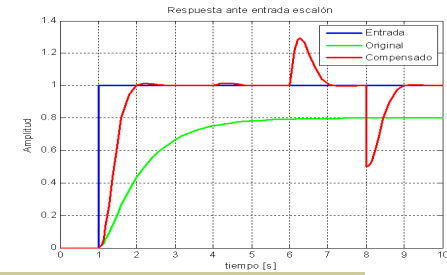


- Los valores propios $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n+1}$ deseados para $\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{K}}$ se especifican y entonces, si el sistema es de estado completamente controlable, la matriz $\hat{\mathbf{K}} = [\mathbf{K} \quad -k_i]$, compuesta de la matriz de realimentación de estados y de la constante integral para el sistema homogéneo (SISO).

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = (\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{K}}) \cdot \mathbf{e}(t)$$

pueden determinarse con los métodos conocidos.

Ejemplo 1: Controlabilidad



- Para el sistema SISO siguiente, con realimentación de estado integral, coloque los polos de lazo cerrado en las ubicaciones $[-4+3j, -4-3j, -10]$

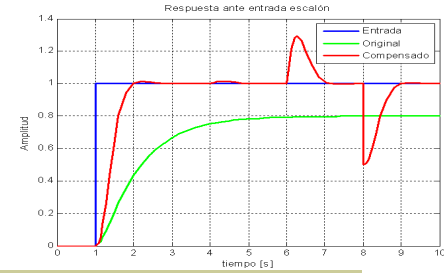
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [4 \quad 0] \mathbf{x}(t)$$

- Probamos la controlabilidad y resulta que la matriz tiene rango $n+1$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -5 & -6 & 1 \\ \hline -4 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Ejemplo 1: Cálculo de \mathbf{K} y k_i



$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{c} & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -5 & -6 & 0 \\ \hline -4 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

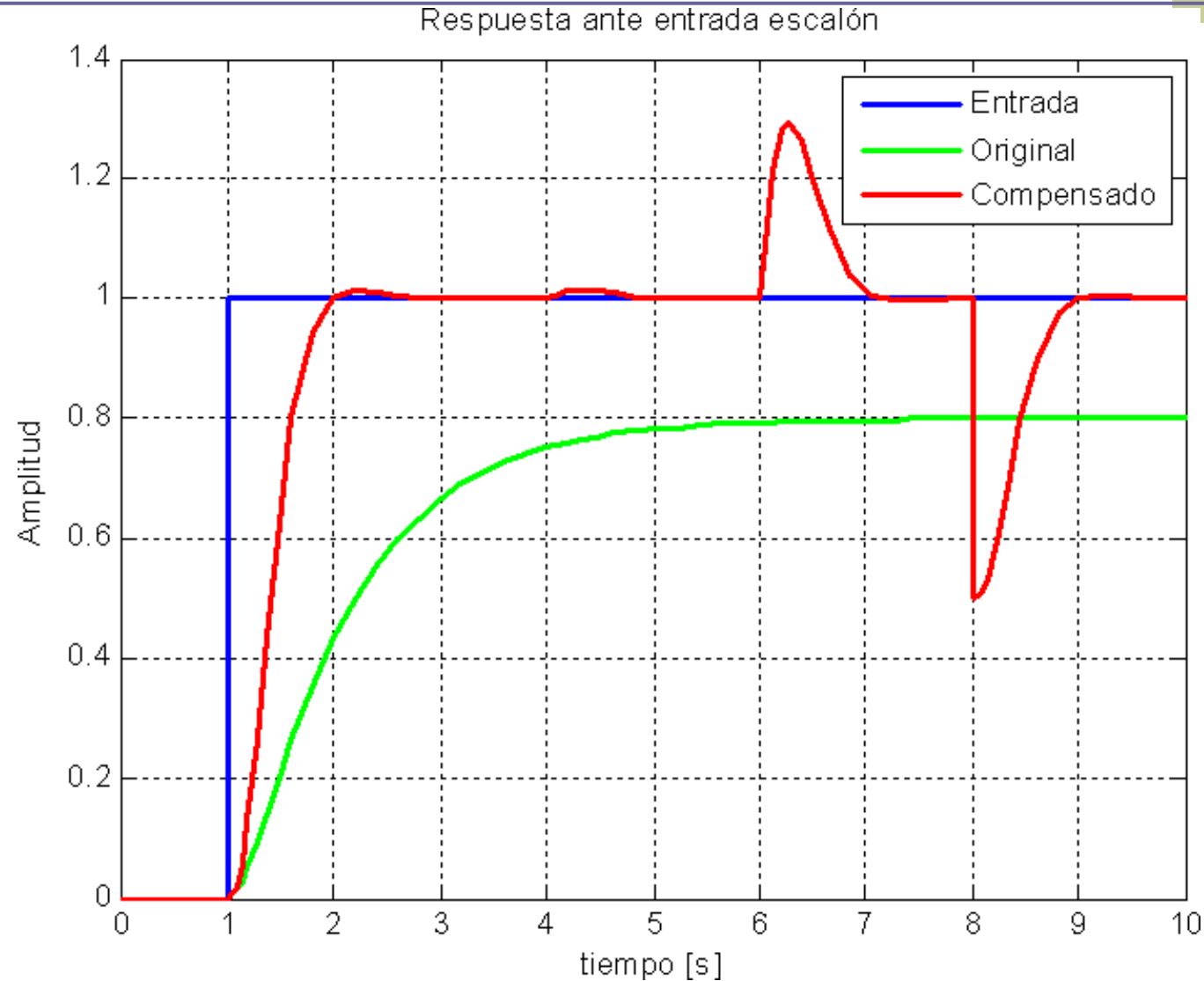
■ Por Ackermann $\hat{\mathbf{K}} = [0 \quad 0 \quad 1] \hat{\mathbf{M}}^{-1} \varphi(\hat{\mathbf{A}})$

$$\hat{\mathbf{M}} = [\hat{\mathbf{B}} \quad \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}} \quad \hat{\mathbf{A}}^2\hat{\mathbf{B}}]$$

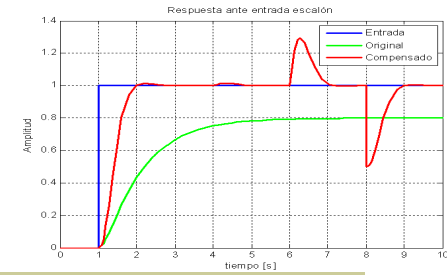
$$\varphi(\hat{\mathbf{A}}) = \hat{\mathbf{A}}^3 + 18\hat{\mathbf{A}}^2 + 105\hat{\mathbf{A}} + 250\mathbf{I}$$

$$\hat{\mathbf{K}} = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 31 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 190 & 28 & 0 \\ -140 & 22 & 0 \\ -400 & -48 & 250 \end{bmatrix} = \underbrace{[100 \quad 12]}_{\mathbf{K}} \underbrace{[-62.5]}_{-K_i}$$

Ejemplo 1: Resultados

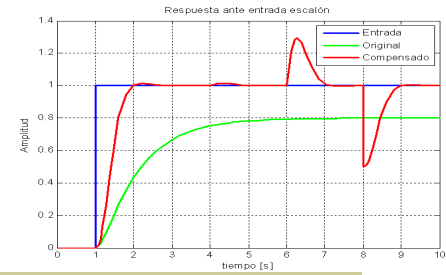


Ejemplo 1: Análisis de resultados



- Puede observarse en la gráfica de respuesta temporal que la salida se comporta como se esperaba:
 - Tiene un tiempo de estabilización de aproximadamente 1s, debido a la ubicación de los polos dominantes a cuatro unidades del eje imaginario.
 - Posee un sobreimpulso menor al 2% debido a que los polos dominantes tienen un amortiguamiento de 0.8.
 - Presenta un error de estado estacionario cero ante una entrada escalón, debido a la acción integral.
 - Muestra la eliminación del efecto a la salida de las perturbaciones; aplicadas a la entrada y salida de la planta en 6 y 8 segundos respectivamente, también debido a la acción integral.

Ejemplo 2: PID_2DoF



- Se tiene el modelo de un levitador magnético $G(s)$, linealizado alrededor de 2cm. Se desea:

$$G(s) = \frac{-2200}{(s + 220)(s + 30)(s - 30)}$$

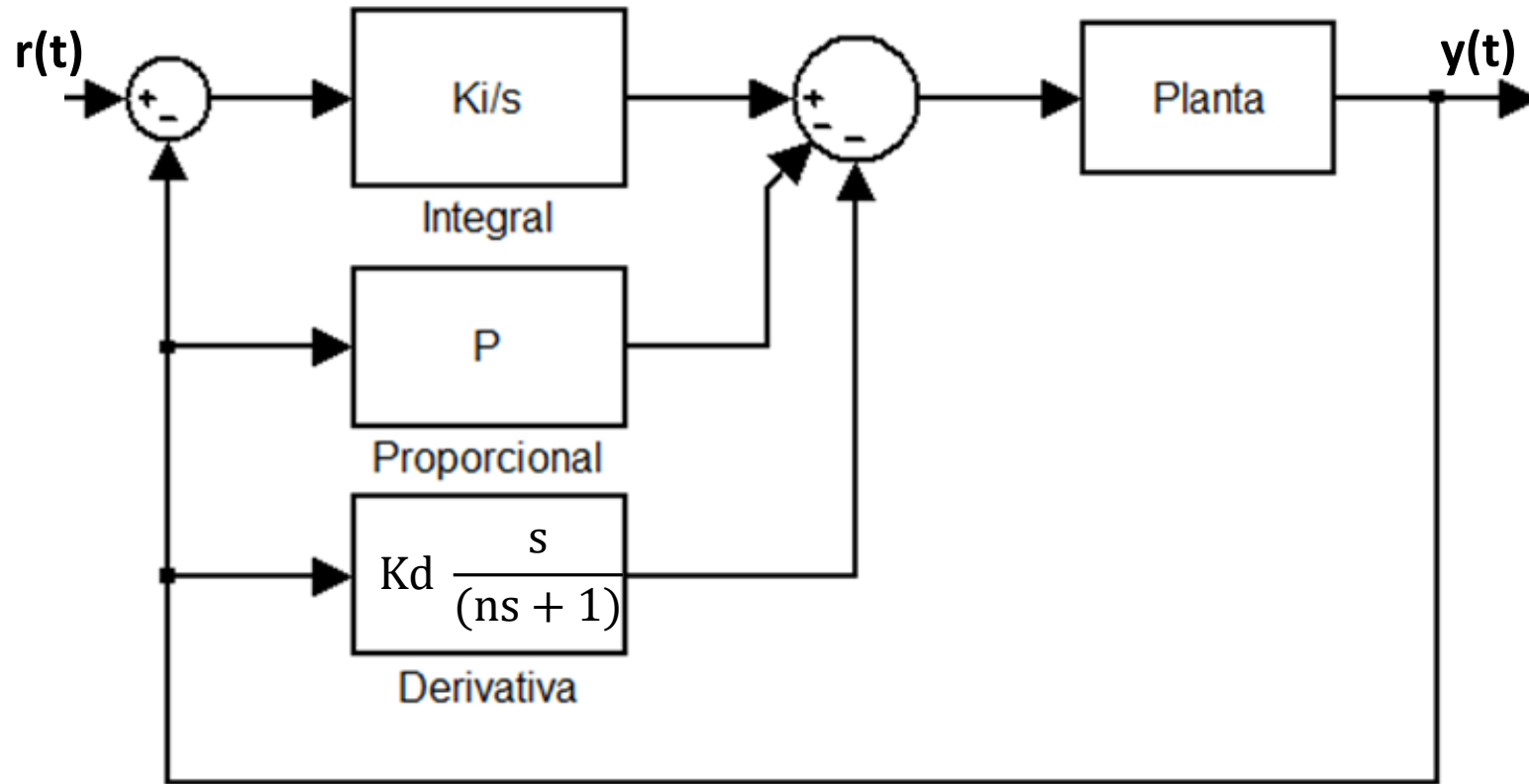
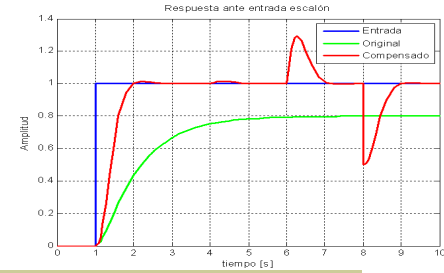
- a) Estabilizar el sistema y ubicar los polos dominantes de lazo cerrado en:

$$s_{1,2} = -3 \pm j3 \text{ y en } s_3 = -20$$

- a) b) Eliminar el error de estado estacionario

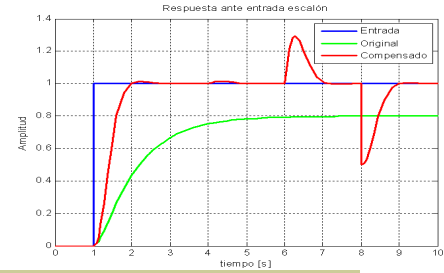
Dimensione un compensador PID_2DoF para cumplir con estos objetivos

Ejemplo 2: Estructura del PID_2DoF



$$I_{PD}(s) = +(R(s) - Y(s)) \frac{K_i}{s} - Y(s)K_p - Y(s)K_d \frac{s}{(ns + 1)}$$

Ejemplo 2: Reducción del orden de la planta



- Se sustituye el polo menos dominante por su equivalente de CD

$$\hat{G}(s) = \frac{-2200}{(s + 30)(s - 30) \lim_{s \rightarrow 0} (s + 220)} = \frac{-10}{(s + 30)(s - 30)}$$

Ejemplo 2: Representación en forma FCC



- Se expresa $\hat{G}(s)$ en forma de cociente de polinomios

$$\hat{G}(s) = \frac{-10}{s^2 - 900}$$

- Se transcribe a “forma canónica controlable”, con **la salida como primera variable de estado**. $y = x_1$; $dy/dt = x_2$.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 900 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] \mathbf{x}$$

Ejemplo 2: Prueba de controlabilidad



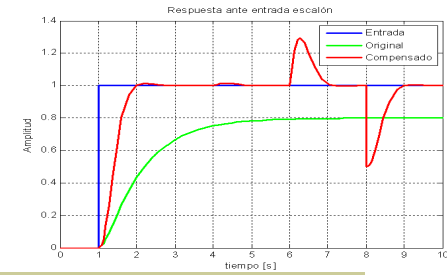
- Se comprueba que el rango de la matriz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}$$

- sea $n+1$

$$\text{rango} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 900 & 0 & -10 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3$$

Ejemplo 2: Cálculo de $\hat{\mathbf{K}}$



- Para este caso, la matriz de ganancias es

$$\hat{\mathbf{K}} = [Kp \quad Kd \quad -Ki]$$

- Como es un sistema SISO usamos la fórmula de Ackermann

$$\hat{\mathbf{K}} = [0 \quad 0 \quad 1] \hat{\mathbf{M}}^{-1} \boldsymbol{\varphi}(\hat{\mathbf{A}})$$

- con

$$\hat{\mathbf{M}} = [\hat{\mathbf{B}} \quad \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}} \quad \hat{\mathbf{A}}^2\hat{\mathbf{B}}]$$

$$\boldsymbol{\varphi}(\hat{\mathbf{A}}) = [(\lambda - \mu_1) * (\lambda - \mu_2) * (\lambda - \mu_3)] \Big|_{\hat{\mathbf{A}}}$$

Ejemplo 2: Cálculo de $\hat{\mathbf{K}}$ cont.



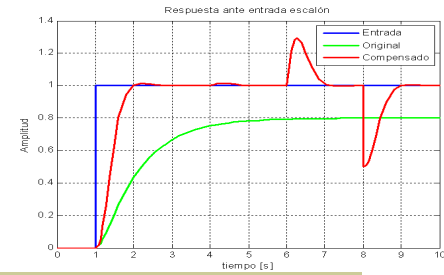
- Evaluando el polinomio característico del sistema deseado

$$\boldsymbol{\varphi}(\lambda) = (\lambda + 3 - 3j) * (\lambda + 3 + 3j) * (\lambda + 20)$$

$$\boldsymbol{\varphi}(\hat{\mathbf{A}}) = \hat{\mathbf{A}}^3 + 26\hat{\mathbf{A}}^2 + 138\hat{\mathbf{A}} + 360\mathbf{I}$$

$$\boldsymbol{\varphi}(\hat{\mathbf{A}}) = \begin{bmatrix} 23760 & 1038 & 0 \\ 934200 & 23760 & 0 \\ -1038 & -26 & 360 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2: Cálculo de $\hat{\mathbf{K}}$ continua



- Evaluando la matriz de controlabilidad

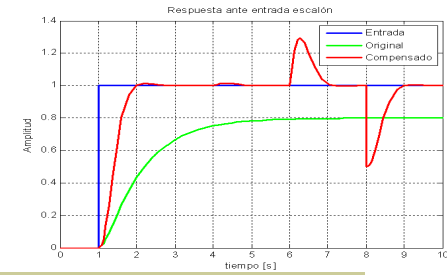
$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 0 & -10 & 0 \\ -10 & 0 & -9000 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

y finalmente

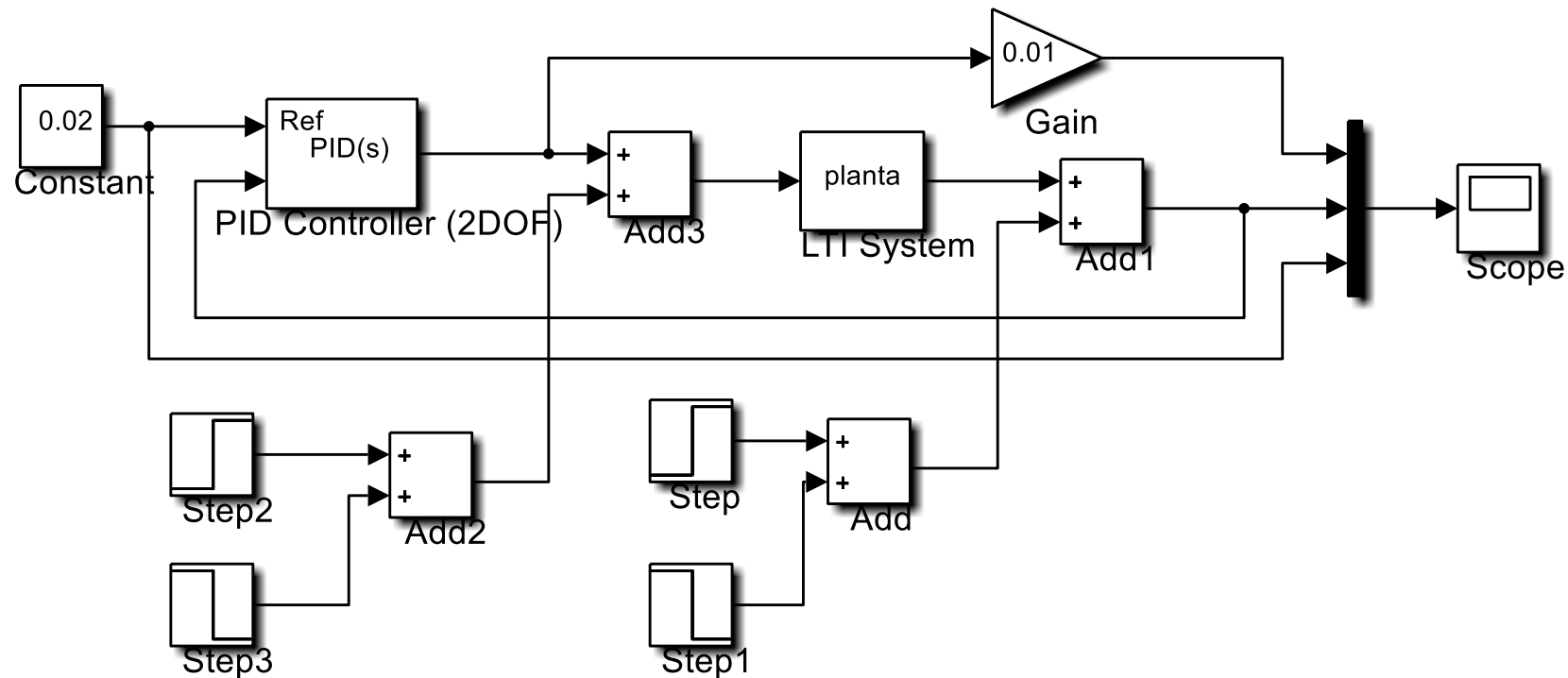
$$\hat{\mathbf{K}} = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & -10 & 0 \\ -10 & 0 & -9000 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 23760 & 1038 & 0 \\ 934200 & 23760 & 0 \\ -1038 & -26 & 360 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{K}} = [-103.8 \quad -2.6 \quad 36]$$

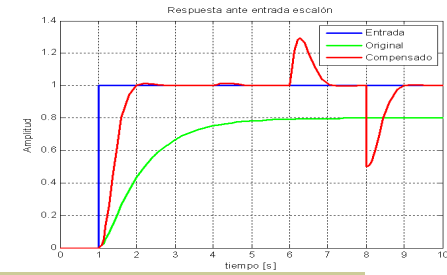
Ejemplo 2: Modelo en Simulink



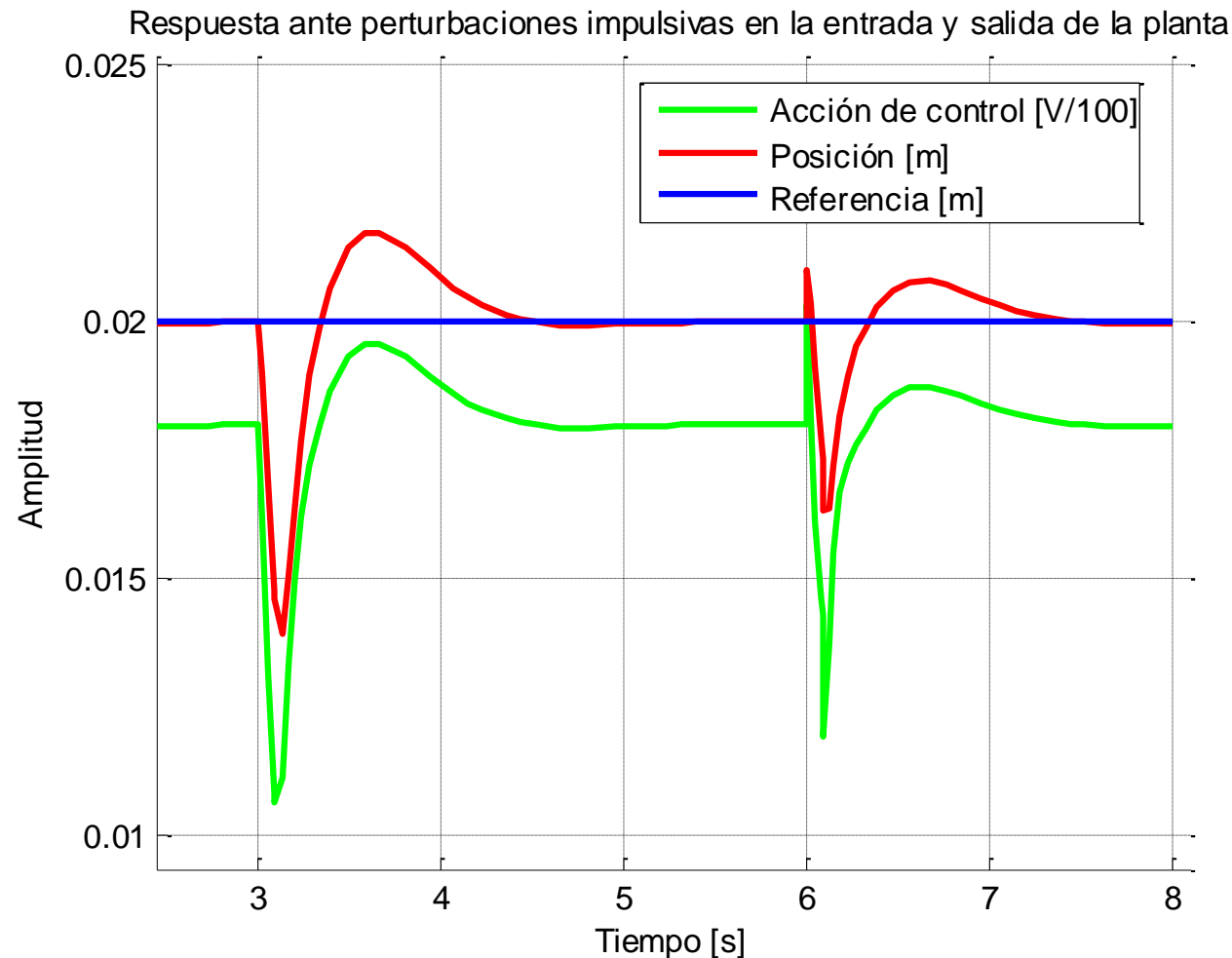
- Simulación del comportamiento ante perturbaciones, con una referencia = 0.02 m.



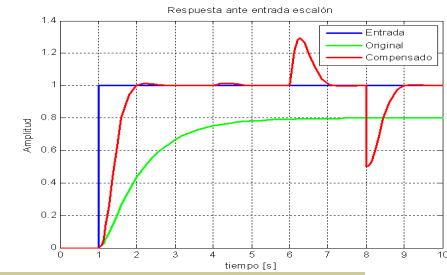
Ejemplo 2: Resultados PID_DoF



- Respuesta ante perturbaciones con ref. = 0.02 m cte.

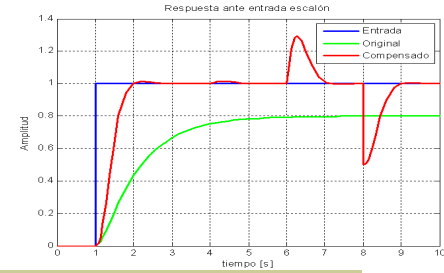


Ejemplo 2: Análisis de resultados



- El control REI para el PID_2DoF funciona estabilizando la planta y eliminando la influencia de las perturbaciones, impuestas tanto a la entrada como a la salida de la planta.
- La respuesta tiene un sobrepaso apreciable al recuperarse de las perturbaciones. Eventualmente ubicar los polos dominantes en una zona con un mayor amortiguamiento relativo mejora esta respuesta.

Ejercicio 1: Diseño de servo



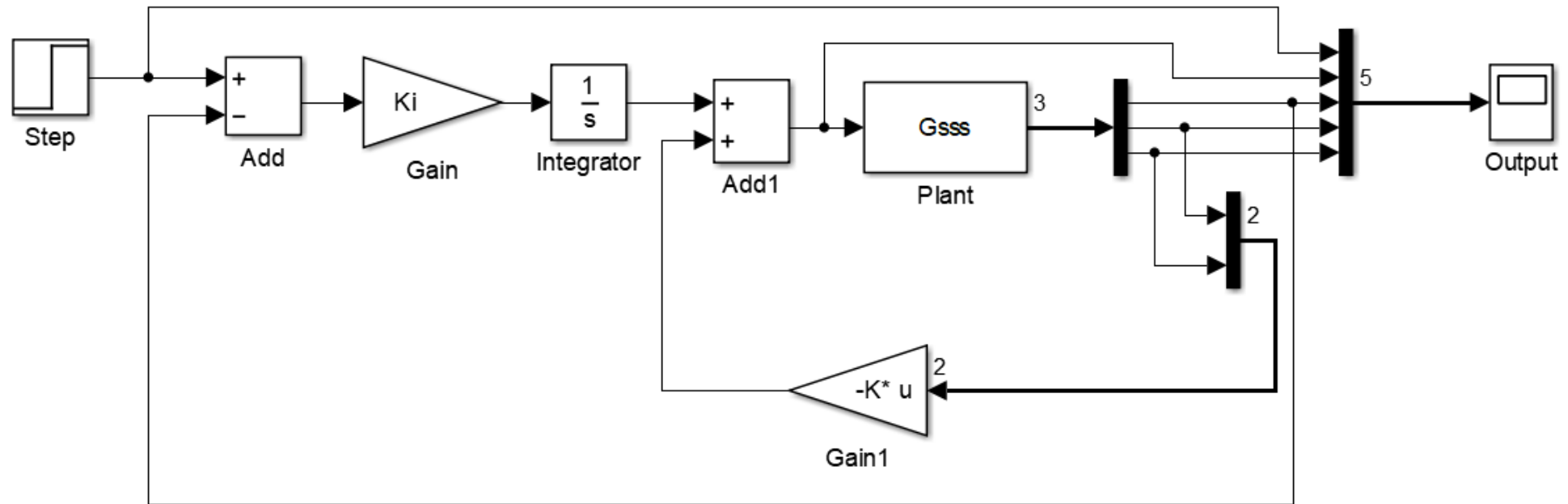
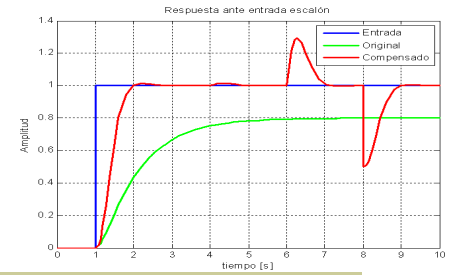
- Se tiene la planta dada por $G(s)$. Se desea:

$$G(s) = \frac{1331}{s^2 + 39.17s + 1265}$$

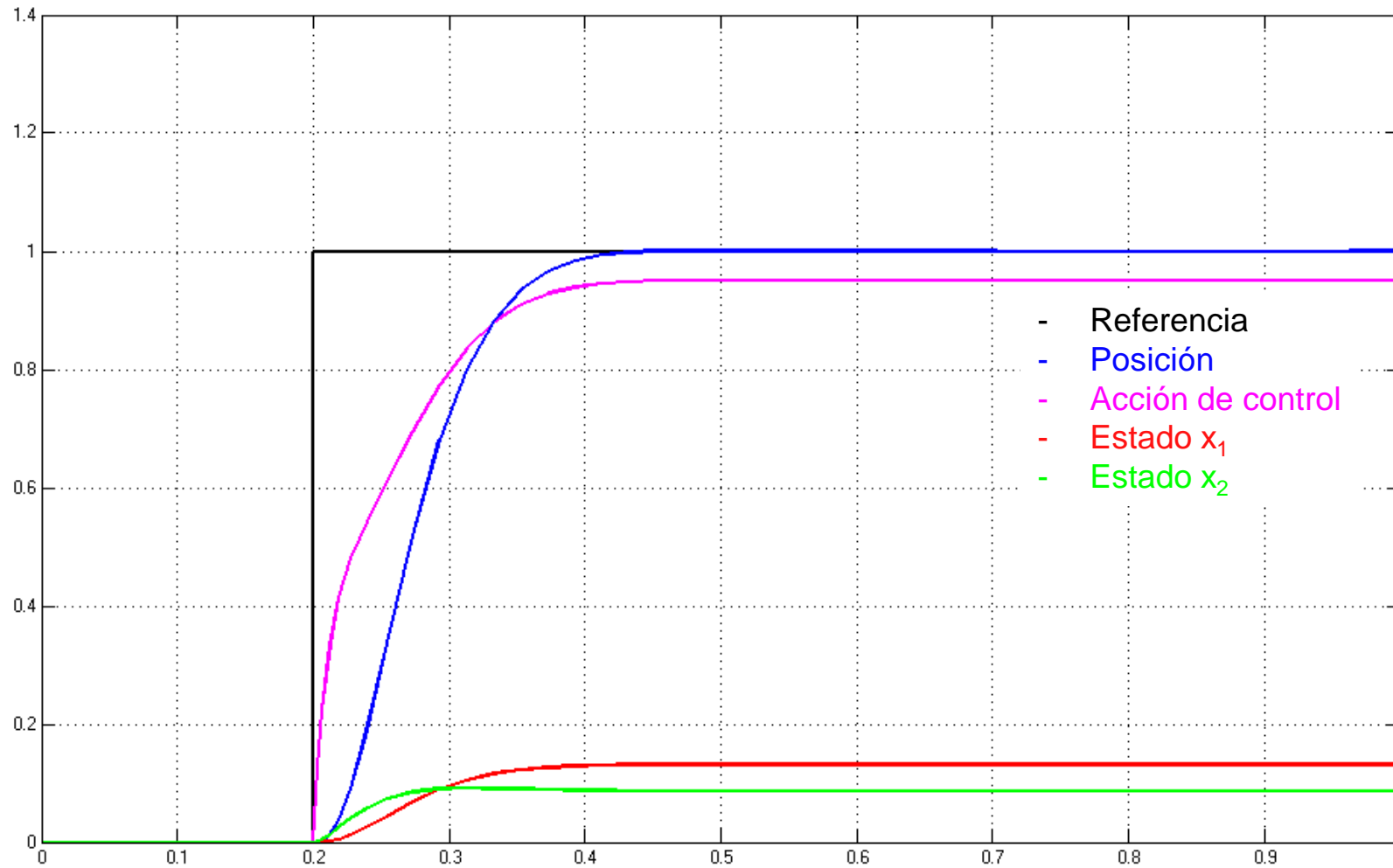
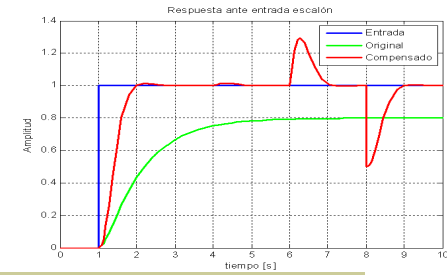
- Obtener una respuesta sin sobrepaso que se estabilice en 200 ms o menos y un $M_p \leq 5\%$.
- Eliminar el error de estado estacionario

Tarea: Dimensione un compensador PID_2DoF para cumplir con estos dos requisitos.

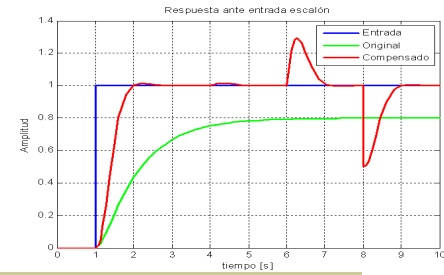
Ejercicio 1: Diseño de servo



Ejercicio 1: Diseño de servo



Preguntas



- ¿Cómo cambiarían las matrices $\hat{\mathbf{A}}$ y $\hat{\mathbf{B}}$ el cálculo para un sistema con una matriz \mathbf{D} diferente de cero?
- Para un sistema MIMO? digamos de “m” entradas y “m” salidas.

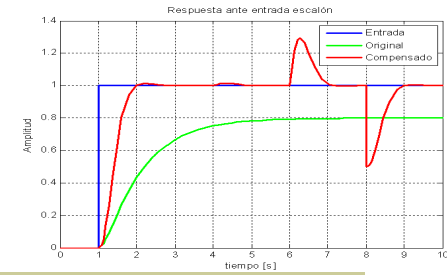
¿Cómo serían las matrices para el cálculo de la realimentación de estado integral.

$$\hat{\mathbf{A}} = ?; \quad \hat{\mathbf{B}} = ?; \quad \hat{\mathbf{K}} = ?; \quad \mathbf{C} = ?; \quad \mathbf{D} = ?; \quad \mathbf{K}_i$$

¿Cómo se probaría la controlabilidad?

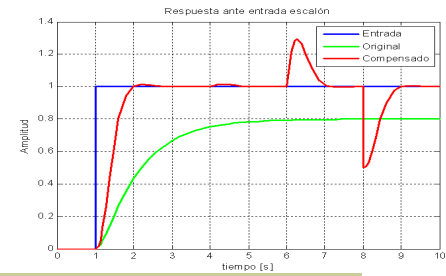
¿Cuántos integradores se requerirían?

Resumen



- El método de realimentación de estado integral corrige el error de estado estacionario, aún ante perturbaciones o variaciones de parámetros; pues, para un sistema SISO aumenta el tipo de sistema en uno.
- Las ganancias requeridas \mathbf{K} y k_i pueden ser calculadas con los métodos tradicionales de realimentación de estado, u otros:
 - Transformación a FCC
 - Sustitución directa
 - Ackermann (solo SISO) u otros similares (SISO, MIMO)

Referencias



- Ogata, Katsuhiko. „**Ingeniería de Control Moderna**“, Pearson, Prentice Hall, 2003, 4ª Ed., Madrid.
- Dorf, Richard, Bishop Robert. „**Sistemas de control moderno**“, 10ª Ed., Prentice Hall, 2005, España.