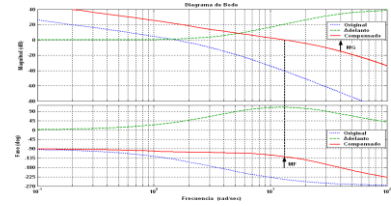


Control Automático

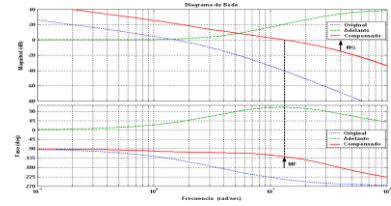
Compensadores de adelanto en el dominio de la
frecuencia

Contenido



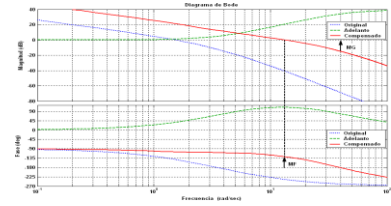
- Introducción
- Estrategia
- Ecuaciones del compensador de adelanto
- Cálculo de un compensador de adelanto para corrección simultánea del margen de fase y del ancho de banda
- Ejemplos y ejercicios

Introducción



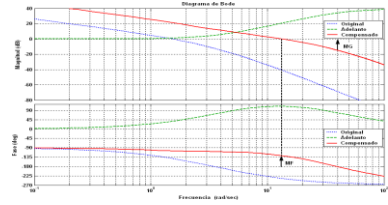
- Los métodos corrientes de diseño implican realizar iteraciones o probar varios compensadores, evaluar sus resultados y seleccionar el más adecuado.
- Se pueden establecer ecuaciones para la ganancia y fase que deben ser aportadas por los compensadores a una frecuencia particular y luego resolver los sistemas de ecuaciones para obtener de un solo paso el compensador de adelanto requerido.

Estrategia



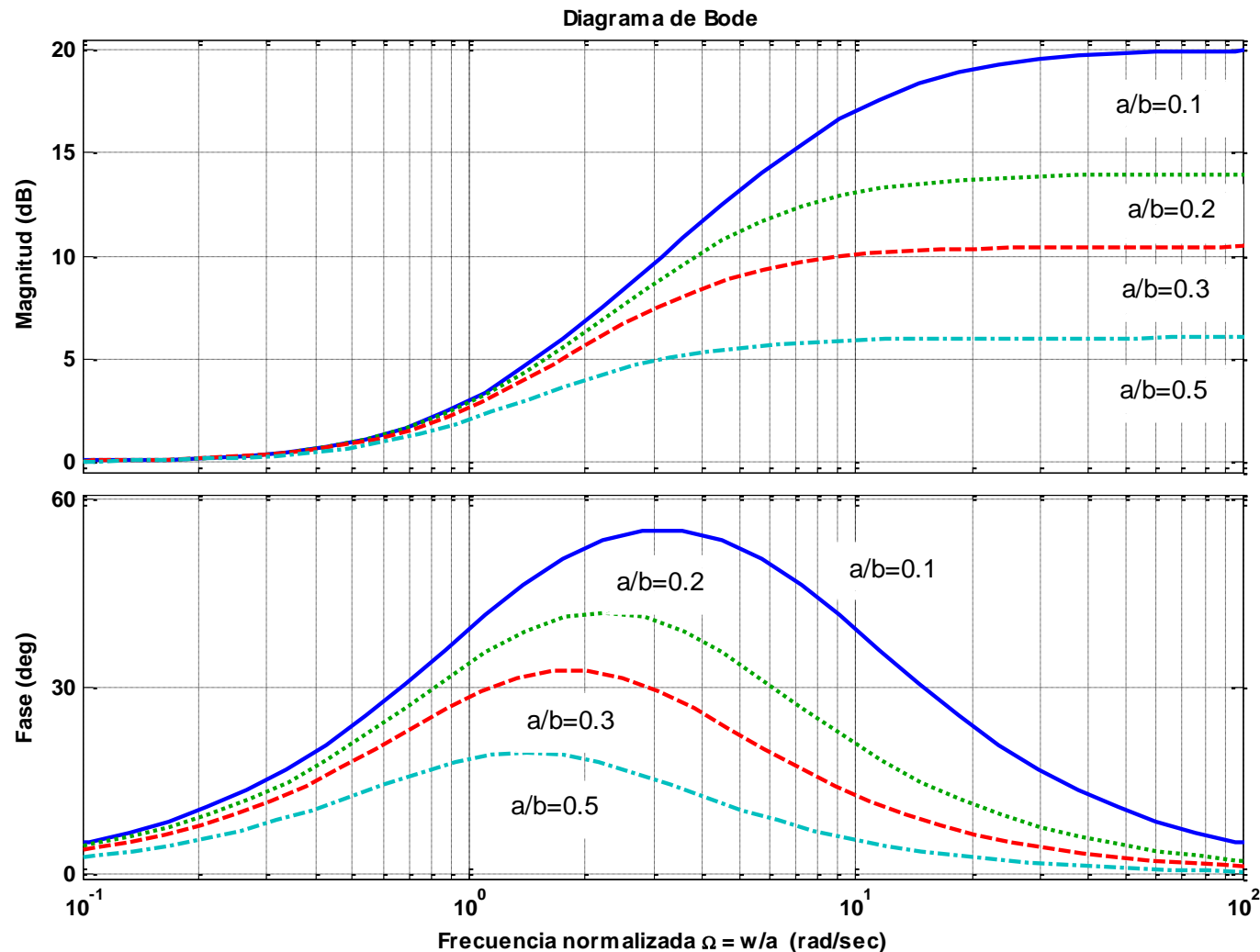
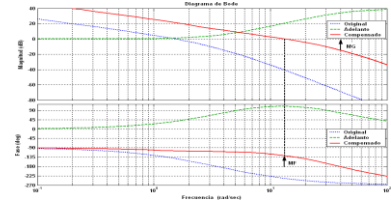
- Según la estrategia de cálculo, el compensador de adelanto es el último en ser calculado después de haber corregido el error de estado estacionario.
- Para corregir el ancho de banda y el margen de fase en un solo paso, se tienen que satisfacer dos condiciones: un adelanto de fase y una ganancia a una frecuencia específica
- Ya que existe interacción entre los diferentes parámetros: polo, cero y atenuación o ganancia, existirá solamente un compensador de adelanto que pueda satisfacer simultáneamente tales condiciones

Corrección del ancho de banda



- El ancho de banda se puede corregir utilizando:
 - **Una ganancia estática**
 - Aumenta o disminuye el ancho de banda; aunque afecta el margen de ganancia.
 - **Un compensador de adelanto**
 - Puede aumentar el ancho de banda; además aumenta el margen de ganancia
 - **Una combinación de ganancia estática + compensador de adelanto**
 - Utilizada si el compensador de adelanto escogido no es capaz de llevar el ancho de banda al valor deseado

Gráficas de Bode del compensador de adelanto



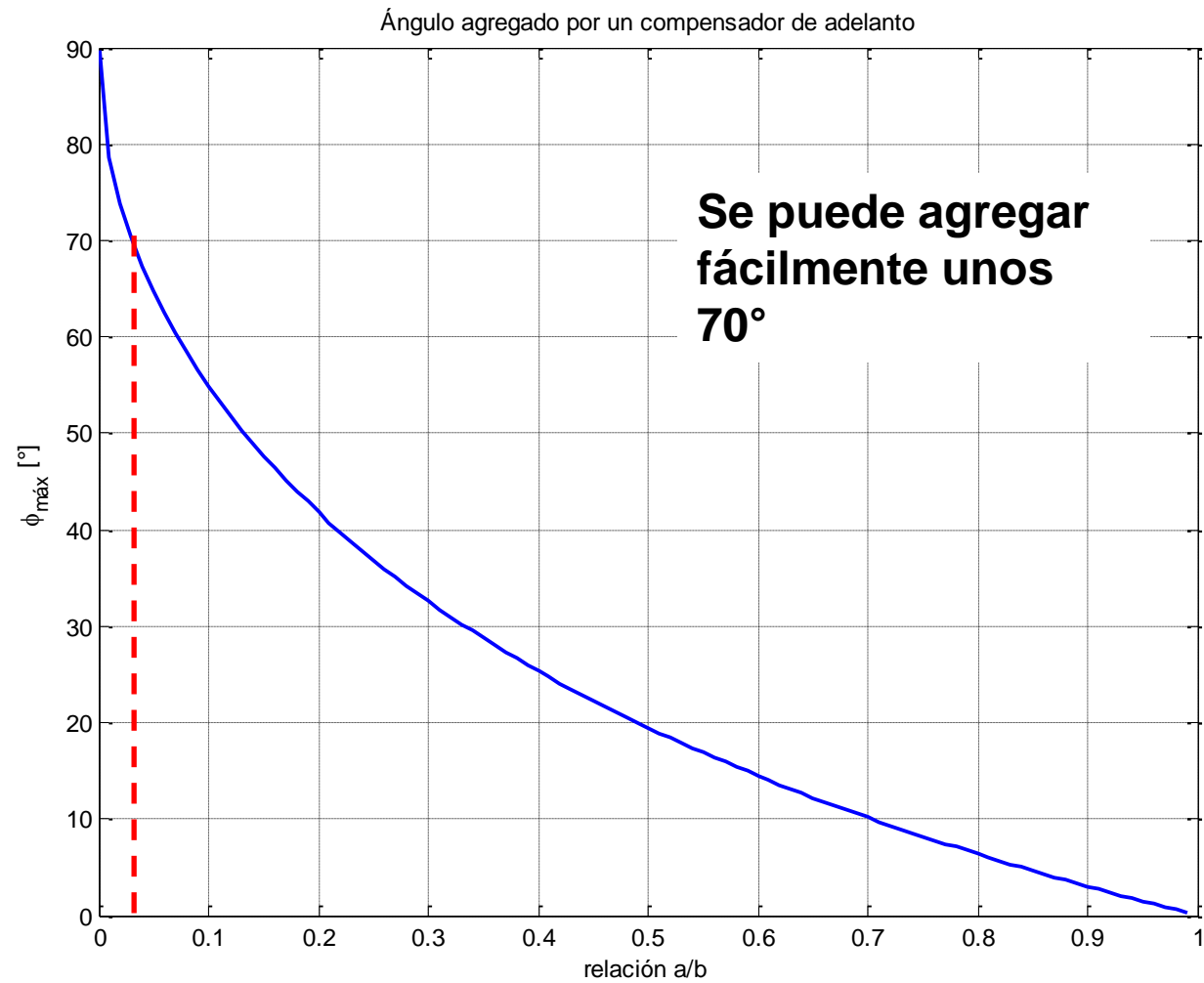
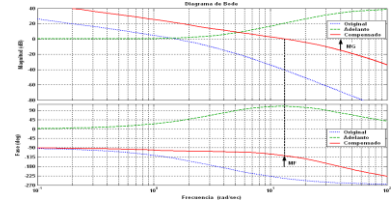
$$\lim_{s \rightarrow j\omega} K_{LEAD}(s) = \lim_{s \rightarrow j\omega} \left(\frac{b}{a} \right) \frac{(s + a)}{(s + b)}$$

$$\phi_{\max} = \left(90^\circ - 2 * \tan^{-1} \sqrt{\frac{a}{b}} \right)$$

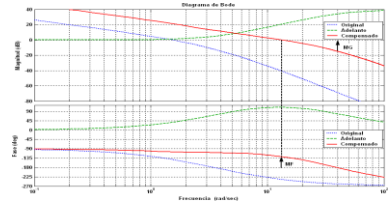
$$\omega_m = b \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{a \cdot b}$$

$$b = \frac{\omega_m}{\sqrt{a/b}}$$

Gráfica de $\phi_{m\acute{a}x}$



Ecuaciones



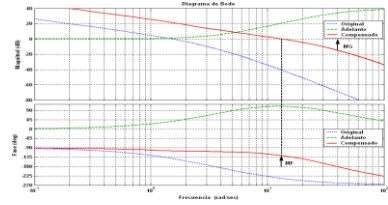
- Se parte del compensador de adelanto de primer orden con ganancia unitaria a $\omega = 0$

$$K_{LEAD}(j\omega) = \alpha \frac{(j\omega + z)}{(j\omega + p)} = \left(\alpha \frac{z}{p}\right) \frac{\left[1 + j\frac{\omega}{z}\right]}{\left[1 + j\frac{\omega}{p}\right]} = \frac{(1 + j\omega\alpha\tau)}{(1 + j\omega\tau)}; \quad \alpha > 1$$

- Con $\tau = 1/p$, $\alpha = p/z$
- El ángulo de fase del compensador

$$\varphi(\omega) = \tan^{-1}(\alpha\omega\tau) - \tan^{-1}(\omega\tau)$$

Ecuaciones (2)



- La ecuación del ángulo puede reescribirse, utilizando identidades trigonométricas generales, en la forma:

$$\varphi(\omega) = \tan^{-1} \frac{\alpha\omega\tau - \omega\tau}{1 + \alpha(\omega\tau)^2}$$

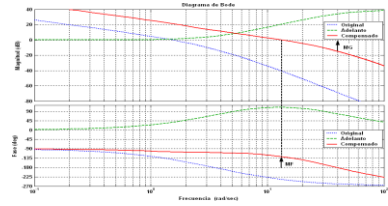
- Evaluando a la frecuencia de cruce de ganancia, ω_c , la tangente p es:

$$p = \tan(\varphi(\omega_c)) = \frac{\alpha\omega_c\tau - \omega_c\tau}{1 + \alpha(\omega_c\tau)^2}$$

- Y la magnitud M (en dB) del compensador, expresada como número real c es:

$$M = 20\log_{10}\left(\frac{1 + (\alpha\omega_c\tau)^2}{1 + (\omega_c\tau)^2}\right)^{1/2} \longrightarrow c = 10^{M/10} = \frac{1 + (\alpha\omega_c\tau)^2}{1 + (\omega_c\tau)^2}$$

Ecuaciones (3)



- Despejando $\omega_c \tau$ de las ecuaciones para \mathbf{c} y \mathbf{p} y resolviendo las ecuaciones simultáneas

$$(p^2 - c + 1)\alpha^2 + (2*p^2*c)\alpha + (p^2*c^2 + c^2 - c) = 0$$

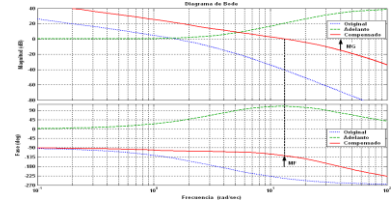
- Luego resolviendo para α real debe satisfacerse la condición

$$c > p^2 + 1$$

- sustituyendo el valor de α en cualquiera de las ecuaciones para \mathbf{c} o \mathbf{p} obtenemos τ

$$\tau = \frac{1}{\omega_c} \times \sqrt{\frac{1-c}{c-\alpha^2}}$$

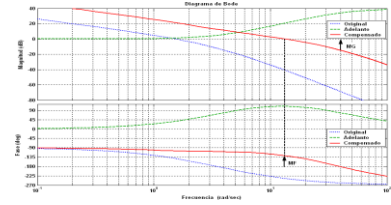
Cálculo del compensador de adelanto con ganancia unidad



- a) Defina la frecuencia de cruce de ganancia ω_c requerida, que garantice que se cumple la especificación de ancho de banda BW. (BW se lee entre -6dB y -7.5dB en una gráfica de Bode de lazo abierto).
- b) Defina el margen de fase deseado MF a la frecuencia de cruce de ganancia requerida, según la especificación de sobreimpulso.

$$MF = 100 \cdot \zeta$$

Cálculo del compensador de adelanto con ganancia unidad (2)



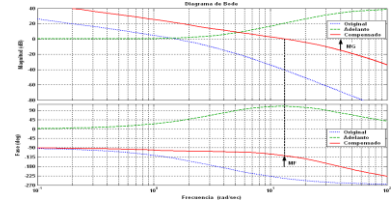
- c) Determine la fase φ_m , ($\varphi_m > 0$), que desea aumentar a la frecuencia de cruce de ganancia requerida, ω_c , y tomando en cuenta que existe incertidumbre en la lectura del gráfico, sobrecompense con un pequeño margen de seguridad (3° ó 4° , dependiendo de la gráfica).
- Si el ángulo requerido es $> 70^\circ$, puede ser necesario usar hasta un compensador doble.

d) Luego calcule p

$$\varphi_m = MF_{deseado} - MF_{\omega_c} + MSeg$$

$$p = \tan(\varphi_m)$$

Cálculo del compensador de adelanto con ganancia unidad (3)



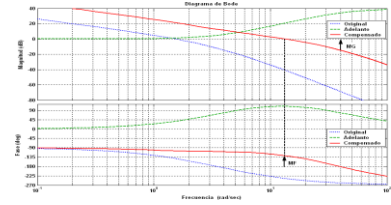
- e) Encuentre el margen de ganancia MG en dB ($MG > 0$), a la frecuencia ω_c , para que la curva de magnitud cruce por cero a esta frecuencia
- f) Luego encuentre la ganancia c , en números reales, que debe ser aportada por el compensador de adelanto, a la frecuencia de cruce de ganancia definida, ω_c .

$$c = 10^{\frac{MG_{\omega_c}}{10}}$$

- g) Garantice, para un compensador de orden 1, que los valores de α sean reales verificando que:

$$c > p^2 + 1$$

Cálculo del compensador de adelanto con ganancia unidad (4)



- h) Resuelva para α y tome el valor positivo, (ya que α es una ganancia), como solución de la ecuación

$$(p^2 - c + 1)\alpha^2 + (2*p^2*c)\alpha + (p^2*c^2 + c^2 - c) = 0$$

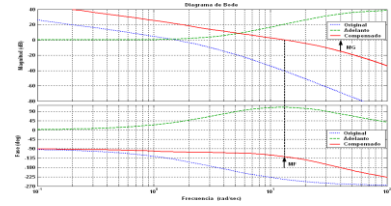
- i) Encuentre la constante de tiempo τ

$$\tau = \frac{1}{\omega_c} \times \sqrt{\frac{1-c}{c-\alpha^2}}$$

- j) Finalmente escriba el compensador de adelanto como

$$K_{LEAD}(s) = \alpha \frac{(s + 1/\alpha\tau)}{(s + 1/\tau)}; \quad \alpha > 1$$

Ejemplo 1: Descripción

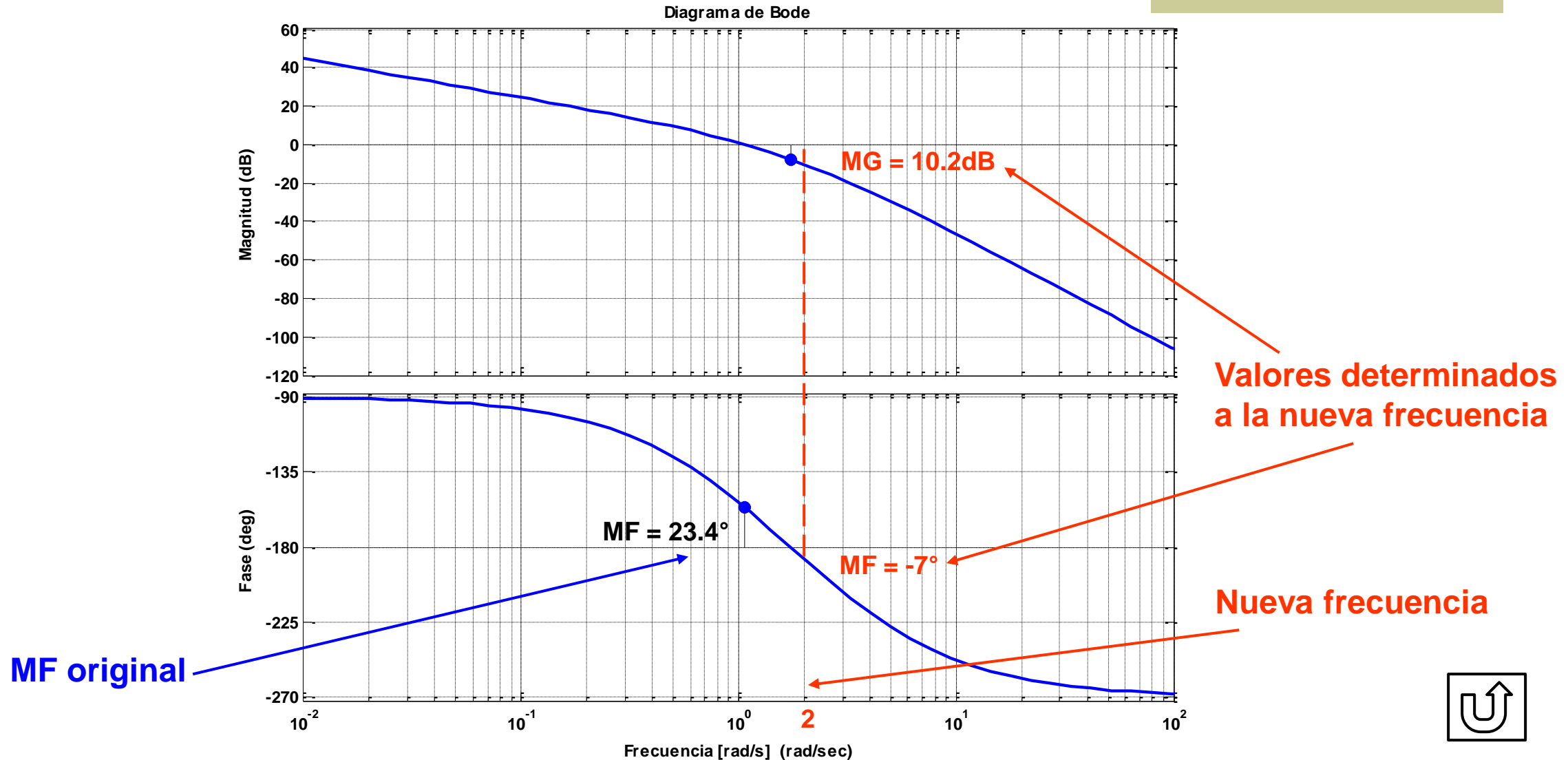
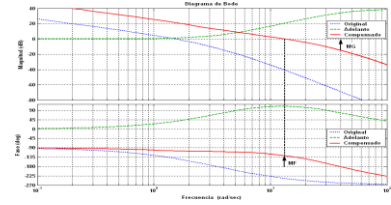


Dado el sistema cuya gráfica de Bode se muestra

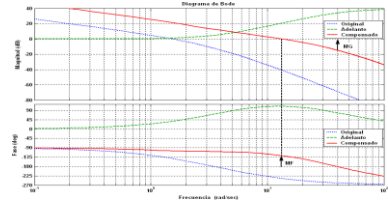
$$G(s)H(s) = \frac{5}{s(s+1)(s+3)} \quad H(s) = 1$$

- Haga que el margen de fase sea al menos de 45° a la frecuencia de 2 rad/s

Ejemplo 1: Diagrama de Bode



Ejemplo 1: Cálculos



- El margen de ganancia requerido para el compensador a la nueva frecuencia de cruce de ganancia, $\omega_c = 2$ rad/s, es $MG = 10.2\text{dB}$ y el margen de fase a 2 rad/s será $= -7^\circ$. Usando 3.125° como margen de seguridad se tiene:

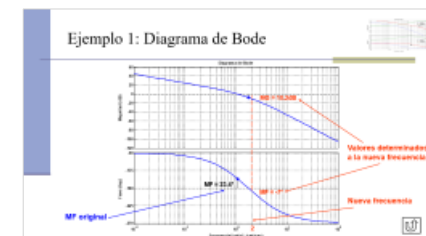
$$\varphi_m = 45^\circ - (-7^\circ) + 3.125^\circ = 55.125^\circ$$

- Con $p = \tan(\varphi_m) = 1.4348$ y $c = 10^{(MG/10)} = 10.4$, se verifica la condición ($c > p^2 + 1$), la cual se cumple y se obtiene:

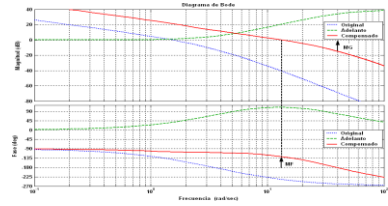
$$(-7.3413)\alpha^2 + (42.82)\alpha + (320.424) = 0$$

- Resolviendo para α y tomando la raíz positiva

$$\alpha = \begin{Bmatrix} 10.138 \\ -4.3053 \end{Bmatrix}$$



Ejemplo 1: Cálculos (2)



- Se calcula la constante de tiempo del polo

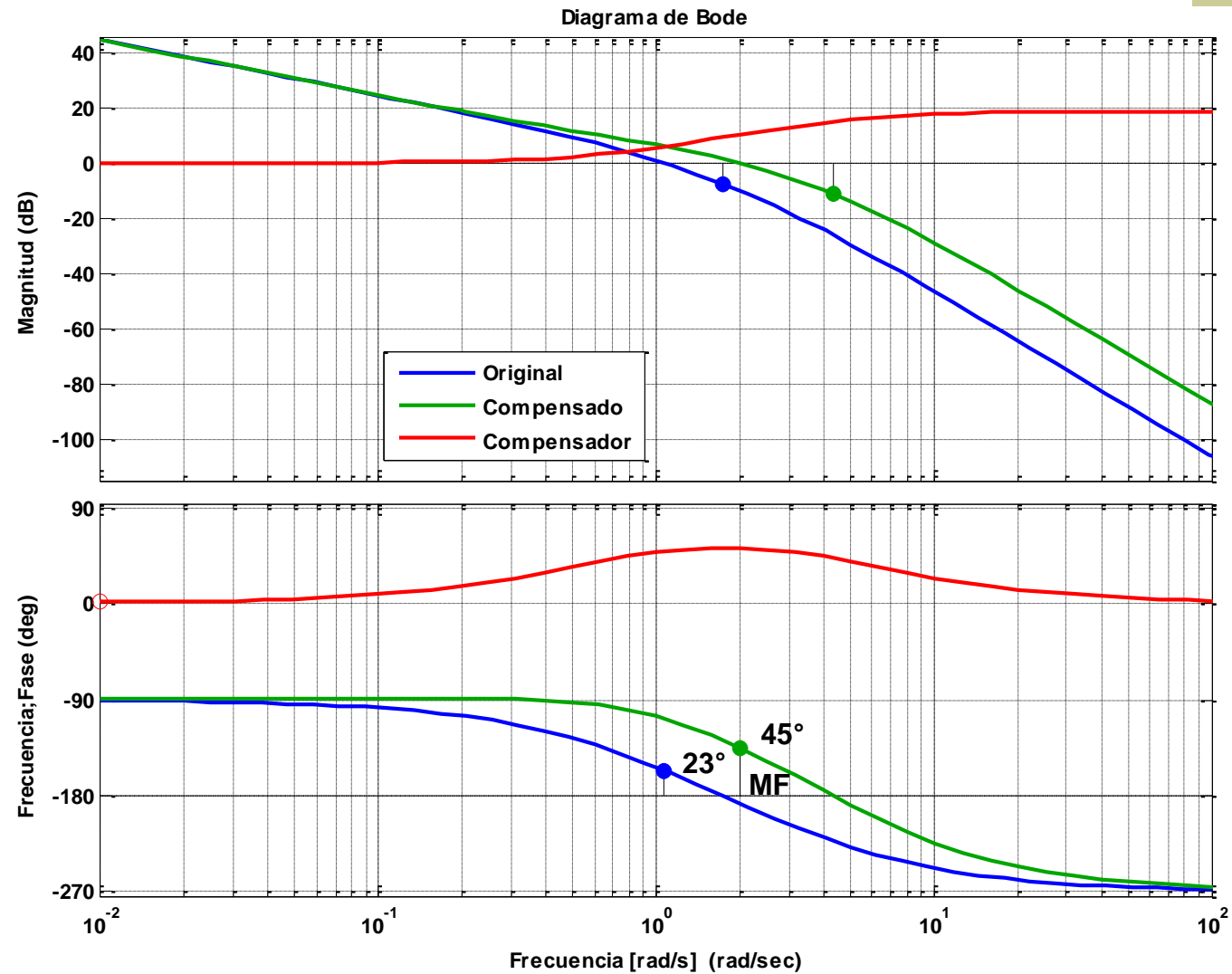
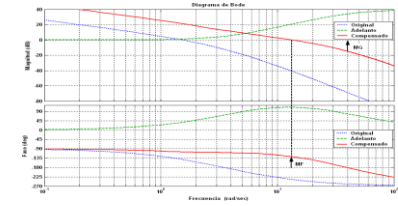
$$\tau = \frac{1}{\omega_c} \times \sqrt{\frac{1-c}{c-\alpha^2}} = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{1-10.4}{10.4-10.138^2}} = 0.1595$$

- Finalmente se escribe el compensador de adelanto

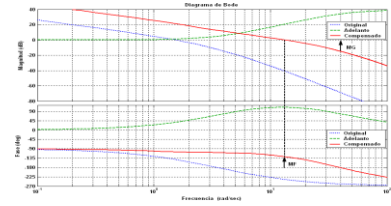
$$K_{LEAD}(s) = 10.138 \frac{\left(s + \frac{1}{(10.138 * 0.1595)}\right)}{\left(s + \frac{1}{0.1595}\right)} =$$

$$K_{LEAD}(s) = 10.138 \frac{(s + 0.6184)}{(s + 6.27)}$$

Ejemplo 1: Resultados

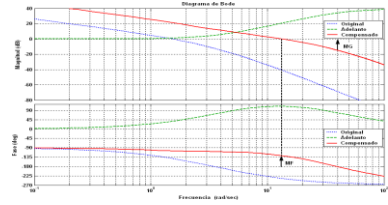


Ejemplo 1: Análisis



- La frecuencia de cruce de ganancia ω_c es de 2 rad/s como se pidió; la ganancia requerida de 10.2 dB, fue proporcionada por el compensador de adelanto
- Se cumple el margen de fase pedido más el margen de seguridad; y todo ese adelanto de fase fue proporcionado por el compensador de adelanto a la frecuencia $\omega_c = 2$ rad/s
- En este caso, de casualidad, la combinación de ambas, la ganancia y el adelanto de fase a la frecuencia ω_c , se cumplen a aproximadamente la frecuencia media del compensador.

Ejemplo 2: Descripción



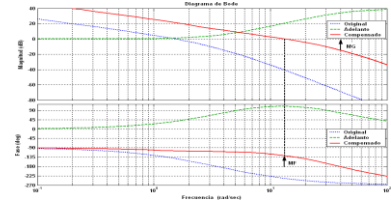
Dado el sistema

$$G(s)H(s) = \frac{24}{s(s+2)(s+6)} \quad H(s) = 1$$

cuya gráfica de bode se muestra en la siguiente figura

- Haga que el margen de fase sea al menos de 60° a 3 rad/s

Ejemplo 2: Compensador de adelanto



MG = 9.6 dB @ 3 rad/s

MF'=7° @ 3 rad/s

$\phi_m = 60^\circ - 7^\circ + 2^\circ = 55^\circ$

$p = 1.428$

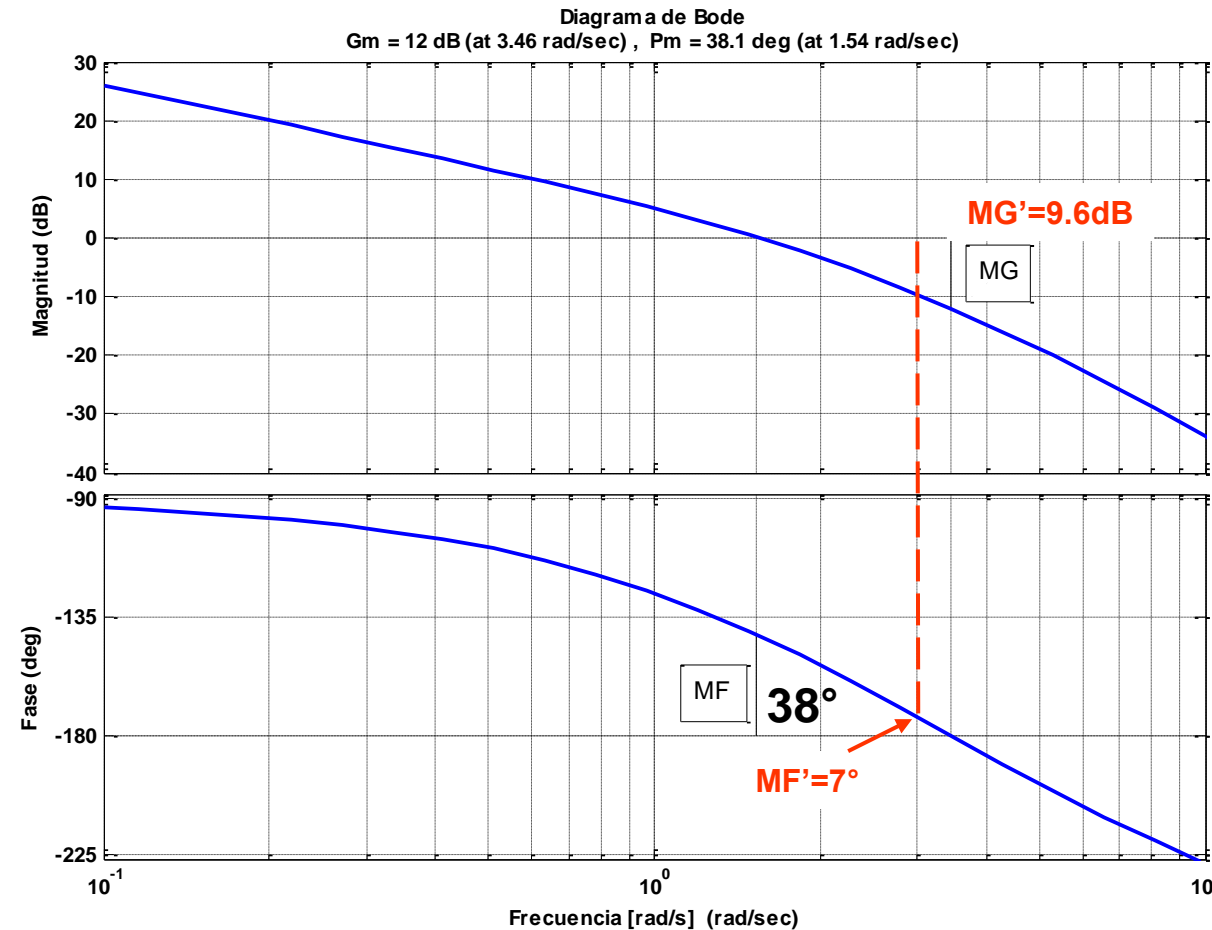
$c = 9.12$

Cumple: $c > p^2 + 1$

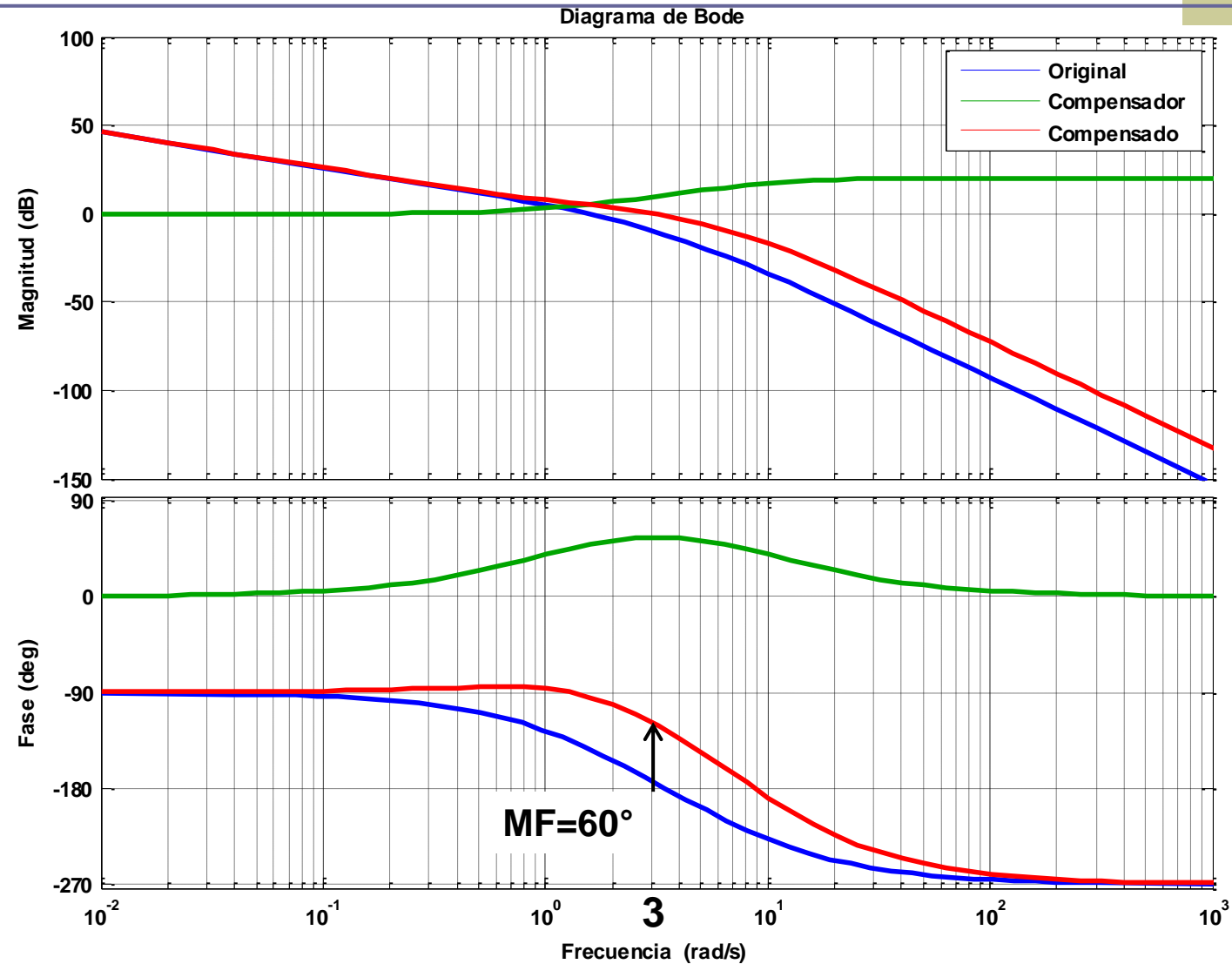
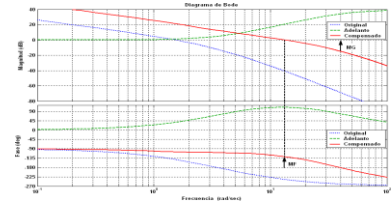
$$\alpha = \begin{cases} 10.0904 \\ -3.972 \end{cases}$$

$$\tau = 0.0987$$

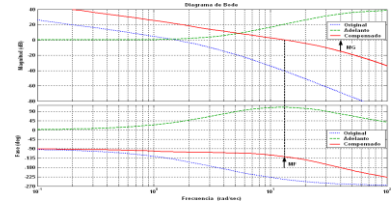
$$K_{lead}(s) = 10.09 \cdot \frac{(s + 1.005)}{(s + 10.14)}$$



Ejemplo 2: Resultados

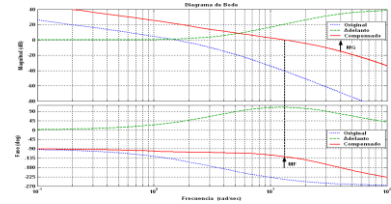


Ejemplo 2: Análisis



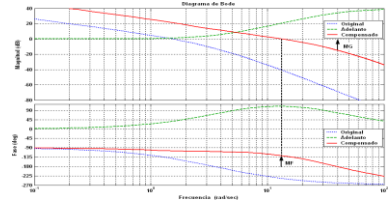
- Se logró dimensionar el compensador que produce simultáneamente un margen de fase de $+60^\circ$ a la frecuencia escogida de 3 rad/s (relacionada con el ancho de banda).
- El margen de fase original de 7° fue llevado a $+60^\circ$ por el compensador de adelanto calculado
- El margen de seguridad utilizado de 2° fue suficiente para que el resultado fuese satisfactorio.
- Si se obtienen los datos de MF y MG, sin demasiados errores, a la frecuencia escogida, el cálculo produce directamente un compensador adecuado.

Ejercicio



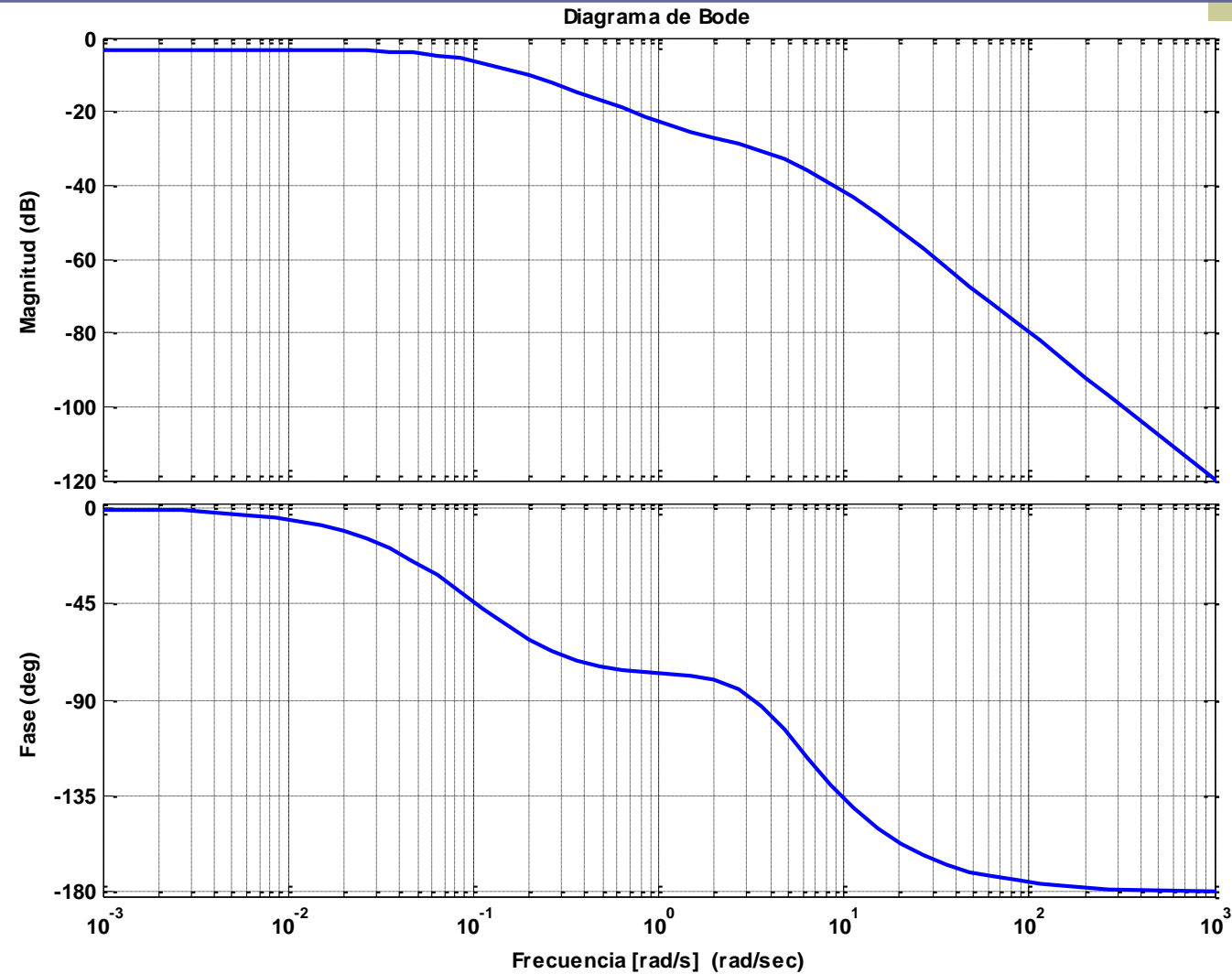
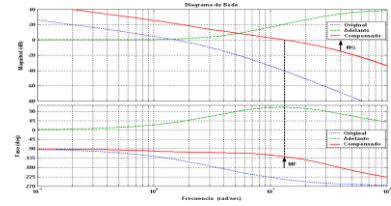
- Sintetice un compensador de adelanto-atraso para el ejemplo 2 que haga que el sistema tenga una respuesta con:
 - Sobreimpulso 21% \pm 5%
 - Error de estado estacionario menor al 5%
 - Tiempo de subida menor a 0.15s

Ejercicios

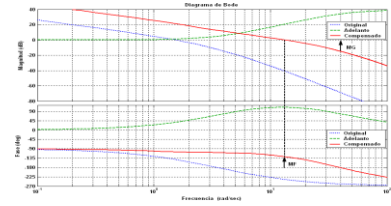


1. Encuentre la forma de calcular un compensador doble cuando el ángulo a aumentar sobrepasa unos 70° o cuando no se satisface que
$$c > p^2 + 1$$
2. Calcule un compensador de adelanto para la planta dada en el ejemplo 1 que satisfaga:
 - Margen de fase 60° a $\omega_c = 3 \text{ rad/s}$
3. Haga que el sistema cuya gráfica de Bode se muestra en la página siguiente tenga:
 - $e_{ss} < 2\%$ y MF 60° a una frecuencia de cruce de ganancia tal que tenga unos 30 rad/s de BW
 - **Restricción:** la ganancia estática solamente puede ser aumentada en incrementos de $+5\text{dB}$
4. Encuentre como calcular un compensador de atraso usando un método similar al presentado para compensadores de adelanto.

Diagrama de Bode para el ejercicio 2



Referencias



- [1] Dorf, Richard; Bishop Robert. „**Sistemas de control moderno**“, 10^a Ed., Prentice Hall, España, 2005