

1 Control de procesos

Toda una gama de procesos estables y sobreamortiguados de segundo orden y órdenes superiores que tienen un tipo de respuesta tipo “S” ante una entrada escalón, pueden ser representados de manera aproximada por un modelo de retardo de primer orden con tiempo muerto; tal como se muestra en la ecuación siguiente:

$$G(s) = \frac{k \cdot e^{-s t_d}}{(s + a)} \quad (1.1)$$

En esta ecuación, la constante a representa el recíproco de la constante de tiempo dominante del sistema y el tiempo muerto se ajusta para representar las otras constantes de tiempo, correspondientes a polos alejados del origen y cuya influencia desaparece rápidamente.

Por ejemplo, el sistema descrito por la función de transferencia $G_1(s)$ puede ser representado por $G_2(s)$ sin pérdida apreciable:

$$G_1(s) = \frac{0.2}{(s + 0.1)(s + 2)^2} \cong G_2(s) = \frac{0.05 \cdot e^{-s}}{(s + 0.1)}$$

1.1 Cómo encontrar el modelo empírico de un proceso

Los pasos para encontrar un modelo empírico son: **identificación**, que es escoger el modelo para el proceso; **estimación**, que es calcular los coeficientes del modelo que mejor calzan y **verificación**, que consiste en determinar la validez del modelo.

Una vez identificado el modelo, existen varios métodos [1] para la estimación:

1.1.1 Método estocástico [3]

Está basado en estimación de mínimos cuadrados a través de análisis estadístico de muestras tomadas de la entrada y la salida. Este método no requiere que la entrada sea una función determinística y tiene la ventaja que se puede integrar dentro de un regulador *adaptativo*, el cual realiza, de forma periódica o a petición, el estímulo del sistema y la estimación con propósitos de autoajuste. Dos programas en Matlab llamados *stochastic* y *stochastic2* que implementan este método para un modelo ARX se encuentran en [2].

1.1.2 Método de respuesta ante escalón

Es un método gráfico que implica el tomar datos de una gráfica de respuesta ante escalón y que describiremos a continuación, es más fácil de utilizar ya que los datos pueden ser tomados con un graficador, un osciloscopio de memoria o eventualmente punto a punto si el proceso es suficientemente lento. Usaremos como ejemplo este método un sistema térmico que se puede aproximar por un modelo de retardo de primer orden con tiempo muerto, tal como se muestra en la ecuación 1.1.

1.1.3 Encontrando las constantes k , a y t_d del modelo empírico en tiempo continuo

Primero realizamos un experimento con el sistema. El experimento consiste en medir la salida del sistema, llamada respuesta de lazo abierto, ante un cambio de escalón en la entrada. En la figura 1 se muestra el modelo del montaje experimental, donde el actuador lineal tiene una ganancia de 48 W/V. La temperatura ambiente, considerada como una perturbación al sistema, se encuentra en 24°C y se aplica un escalón en el tiempo $t_i = 10s$, el que produce en la entrada de la planta una potencia de 120W.

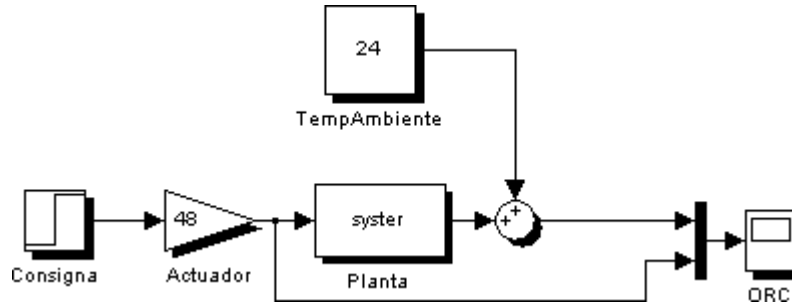


Figura 1: Modelo del experimento de un sistema térmico

Con los datos obtenidos hacemos una gráfica similar a la de la figura 2 y obtenemos la constante de tiempo τ (tau) del sistema observando tiempo $t_{63\%}$ en el cual la salida alcanza el 63.2% de la diferencia entre el valor final y valor inicial. A este tiempo hay que restarle cualquier tiempo muerto t_d existente en el sistema; que es el tiempo que transcurre desde la aplicación de la entrada hasta que la salida empieza a cambiar.

La constante a será, el recíproco de la constante de tiempo τ :

$$a = \frac{1}{\tau} \quad (1.2)$$

Y finalmente, la constante de ganancia estática k será el cociente entre el valor final medido para la salida del sistema y la amplitud A del escalón aplicado, escalado por la constante a :

$$k = \frac{\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) - T_i}{A} * a \quad (1.3)$$

A veces es difícil determinar el tiempo muerto t_d para poder calcular la constante de tiempo τ . En estos casos es posible determinar de manera independiente la constante τ por otro método en el cual se mide además del tiempo $t_{63\%}$ el tiempo $t_{39\%}$, que es el tiempo en el cual la salida alcanza el 39.3% de la diferencia entre el valor final y valor inicial. Entonces tenemos:

$$\tau = 2(t_{63\%} - t_{39\%}) \quad (1.4)$$

Con el escalón aplicado en el tiempo t_i , que puede ser mayor o igual a cero; el tiempo muerto t_d será:

$$t_d = t_{63\%} - (t_i + \tau) \quad (1.5)$$

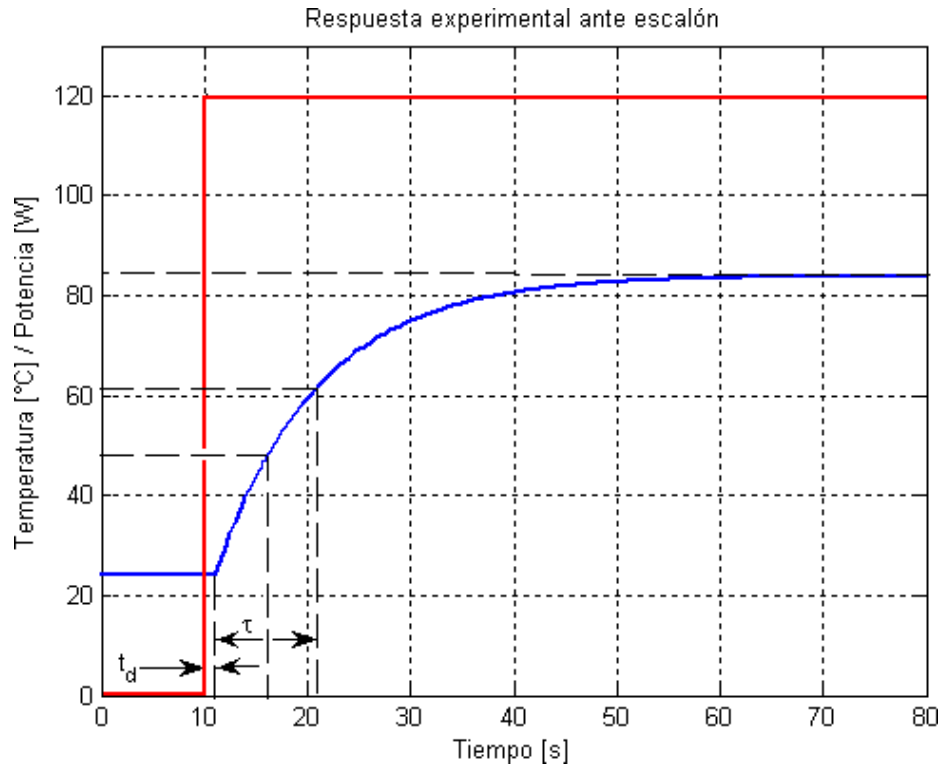


Figura 2: Respuesta experimental de un sistema térmico

Para el ejemplo de la figura 1, cuya respuesta se muestra en la figura 2, se alcanzó un valor final de temperatura de 84°C en el tiempo $t = 41s$, obteniéndose un cambio de 60K pues se partió de la temperatura inicial de 24°C.

Para determinar la constante de tiempo τ , encontramos que el $t_{63\%}$ se produce a la temperatura de 61.8°C a los 21s y que el $t_{39\%}$ se da a la temperatura de 47.6°C a los 16s por lo tanto $\tau = 10s$ ($10s = 2 \cdot (21s - 16s)$); dando lugar a una constante $a = 0.1s^{-1}$. Se puede determinar también que el tiempo muerto $t_d = 1s$ ($1 = 21s - (10s + 10s)$); pues, el escalón se aplicó en $t_i = 10s$ y la salida comienza a cambiar en el tiempo $t = 11s$. La ganancia estática, que se calcula como a por el cociente del cambio de temperatura entre la amplitud del escalón, $0.1s^{-1} \cdot 60K/120W$, es $k = 0.05$ [K/J].

$$G(s) = \frac{0.05 \cdot e^{-s}}{(s + 0.1)} \text{ [K/W]}$$

Si se utiliza en el sistema un sensor de temperatura calibrado en grados Celsius; con una ganancia de 40mV/K, y se usa además un convertidor A/D de 8 bits con 5V de tensión máxima de entrada, se obtiene entonces una resolución de $\frac{1}{2}$ K, con una lectura máxima de 125°C.

1.1.4 El modelo en tiempo discreto

Podemos convertir, con un periodo de muestreo T adecuado, el modelo en tiempo continuo a un modelo en tiempo discreto.

$$G(z) = \frac{k_d \cdot z^{-\text{ceiling}(\frac{t_d}{T})}}{(z - e^{(-T \cdot a)})} \quad (1.6)$$

Donde k_d se calcula para que ambos sistemas tengan el mismo valor final ante una entrada tipo escalón:

$$k_d = \frac{\lim_{s \rightarrow 0} G(s)}{\lim_{z \rightarrow 1} \hat{G}(z)} = \frac{\frac{k}{a}}{\frac{1}{(1 - e^{-T \cdot a})}} \quad (1.7)$$

Donde $\hat{G}(z)$ es el modelo en tiempo discreto al cual se le ha despejado la ganancia estática k_d .

1.1.5 Cómo encontrar el periodo T adecuado para un sistema digital

El periodo de muestreo T puede ser encontrado de manera aproximada de la siguiente forma, donde $\hat{\tau}$ es la constante de tiempo dominante esperada del sistema regulado:

$$T \leq \frac{\hat{\tau}}{10} \quad (1.8)$$

Para el ejemplo de la figura 1, se pretende que la nueva constante de tiempo sea de unos 6 segundos, por lo que escogemos $T = 0.5s < 6s/10$.

Con este tiempo de muestreo podemos encontrar la ganancia estática de la función de transferencia en tiempo discreto:

$$k_d = \frac{\frac{0.05}{0.1}}{\frac{1}{(1 - e^{-0.5 \cdot 0.1})}} = \frac{0.05 \cdot (1 - 0.9512)}{0.1} = 0.0244$$

Finalmente la función de transferencia en tiempo discreto es:

$$G(z) = \frac{0.0244 \cdot z^{-2}}{(z - 0.9512)}$$

1.2 Regulando el sistema

Para regular el sistema necesitamos cerrar el lazo y aplicar un regulador, que puede tener diferente estructura dependiendo de los requisitos de regulación. En este caso el requisito será eliminar el error de estado estacionario y las perturbaciones, típico en el control de procesos. Para cumplir este requisito el regulador adecuado es uno de tipo PI.

1.2.1 Cómo encontrar un regulador PI analógico

Un regulador PI analógico con ganancia estática 1 tiene únicamente un valor variable, que llamaremos b , como se muestra a continuación:

$$K_{PI}(s) = k \cdot \frac{(s+b)}{s} \quad (1.9)$$

La constante b será, de manera aproximada, entre el 95% y el 130% del recíproco de la constante a del modelo en tiempo continuo. El límite inferior de b produce un sistema que no será más rápido que el sistema original; el límite superior produce en cambio un sistema más rápido, pero a costa de un pequeño sobreimpulso en la salida y mayores exigencias al regulador y al actuador, que pueden incluso saturarlos. En todo caso la salida del sistema estará exenta de variaciones o desviaciones de su valor a causa de perturbaciones o no linealidades externas o internas del sistema. Si se desea un sistema más rápido, puede agregarse un compensador de adelanto.

$$b = [0.95 \cdot a, 1.30 \cdot a] \quad (1.10)$$

El regulador PI analógico, usando el límite superior queda como:

$$K_{PI}(s) = \frac{(s+0.13)}{s}$$

Es conveniente que la implementación del regulador permita la variación de la constante b entre los límites indicados, para lograr un ajuste adecuado en cuanto a velocidad del sistema y saturación.

1.2.2 Cómo encontrar un regulador PI discreto

Un regulador PI discreto, como su contraparte analógica, tiene únicamente un valor variable, que en este caso llamaremos z_0 , como se muestra a continuación:

$$K_{PI}(z) = k' \frac{(z-z_0)}{(z-1)} \quad (1.11)$$

La constante z_0 se calcula utilizando el periodo de muestreo T , que ha sido calculado apropiadamente para el sistema.

$$z_0 = e^{(-T \cdot b)} \quad (1.12)$$

El regulador PI discreto queda como:

$$K_{PI}(z) = 1.0325 \frac{(z - 0.9371)}{(z - 1)}$$

1.3 Cómo implementar un regulador PI discreto en un computador digital

Debemos calcular la ecuación de diferencias del regulador, para lo cual partimos del modelo en tiempo discreto del regulador PI:

$$K_{PI}(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = k' \cdot \frac{(z - z_0)}{(z - 1)} \quad (1.13)$$

Agrupando términos

$$M(z) \cdot (z - 1) = k' \cdot E(z) \cdot (z - z_0)$$

Redistribuyendo

$$z \cdot M(z) - M(z) = z \cdot k' \cdot E(z) - z_0 \cdot k' \cdot E(z)$$

Dividiendo entre z

$$M(z) - z^{-1} \cdot M(z) = k' \cdot E(z) - z_0 \cdot k' \cdot z^{-1} \cdot E(z)$$

Antitransformando al dominio del tiempo discreto

$$m(k) - m(k-1) = k' \cdot e(k) - z_0 \cdot k' \cdot e(k-1)$$

Despejando el término de salida para la muestra k

$$m(k) = k' \cdot e(k) - z_0 \cdot k' \cdot e(k-1) + m(k-1)$$

Agrupando términos según su dependencia del tiempo actual o pasado

$$m(k) = k' \cdot e(k) + [m(k-1) - z_0 \cdot k' \cdot e(k-1)] \quad (1.14)$$

En este punto se tiene que tomar en cuenta que la salida $m(k)$ debe de estar lista en un tiempo menor o igual a una décima del periodo de muestreo T , contada a partir de la lectura de la realimentación $y(k)$, para que las propiedades del regulador digital sean una buena aproximación al regulador en tiempo continuo equivalente. En caso de que eso no se pueda satisfacer, se debe de aplicar un algoritmo de cálculo más eficiente tal como el de precálculo.

Aplicando un algoritmo con precálculo a la ecuación de diferencias

$$m(k) = k' \cdot e(k) + p(k) \quad (1.15)$$

Donde:

$$p(k) = m(k-1) - z_0 \cdot k' \cdot e(k-1), \quad (1.16)$$

es el término que solo depende de las muestras anteriores y por lo tanto puede ser calculado posteriormente a la salida del valor actual $m(k)$ y quedar listo para el próximo periodo de muestreo.

Para implementar la ecuación de diferencias en un microcontrolador de 8 bits debemos escalar las constantes, para lo cual multiplicamos la ecuación por 256.

$$256 \cdot m(k) = 256 \cdot k' \cdot e(k) + 256 \cdot p(k)$$

Antes de exportar o sacar el valor $m(k)$ lo escalamos hacia abajo.

$$m(k) = \frac{1}{256} \cdot [256 \cdot k' \cdot e(k) + P(k)] \quad (1.17)$$

Donde $P(k) = 256 \cdot m(k-1) - 256 \cdot z_0 \cdot k' \cdot e(k-1)$. Para actualizar $m(k)$ a la salida, dividiremos entre 256 el resultado de la suma entre paréntesis rectangulares.

Debe tomarse en cuenta que la salida $m(k)$ debe pasar además por una saturación, de carácter no lineal, debida al ancho de palabra del convertidor usado para producir una salida analógica a partir del valor digital. Esto es, en el caso de un convertidor D/A o PWM de 8 bits, el valor de $m(k)$ no podrá ser nunca mayor a 255.

La ecuación de diferencias, escalada, para el ejemplo 1 queda como:

$$256 \cdot m(k) = 264 \cdot e(k) + 256 \cdot m(k-1) - 248 \cdot e(k-1)$$

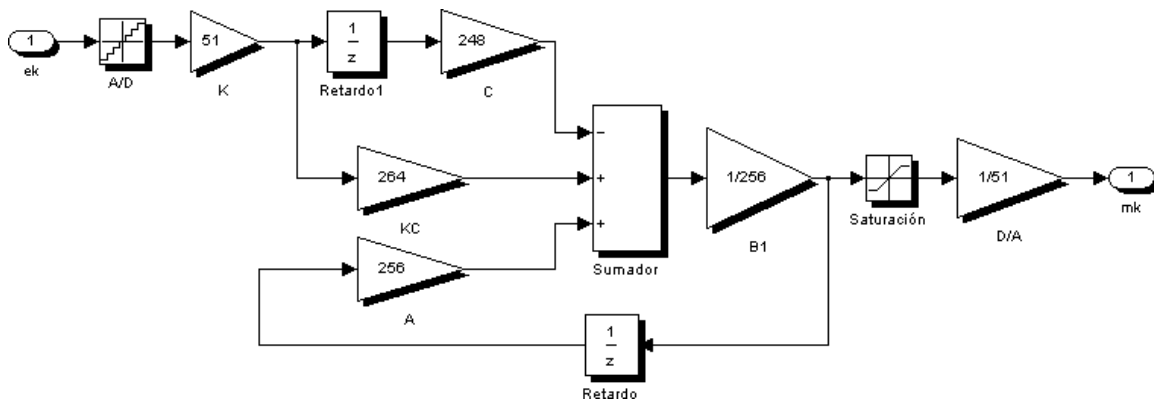


Figura 3: Estructura de la implementación de una ecuación de diferencias PI

En la figura 3 se muestra la implementación de una ecuación de diferencias PI, en un procesador de 8 bits. Se han tomado en cuenta los efectos de la conversión A/D, tales como la retención de las muestras y el redondeo de la cuantificación; lo mismo que el redondeo del escalado de las constantes. Se tiene además una saturación de la salida entre 0 y 255. Los valores negativos a la salida equivaldrían a enfriar, cosa que no se puede hacer con una resistencia de calefacción y por ello se limitan.

Las ganancias de 51 a la entrada y 1/51 a la salida representan las ganancias de los convertidores, asumiendo que ambos trabajan de 0 a 5 voltios; esto es, 1 voltio equivale a 51 en cuentas del convertidor A/D. Esto permite tomar conciencia de cuáles son los resultados típicos de las operaciones y del valor acumulado; para así escoger los registros con la longitud adecuada, con signo o sin éste.

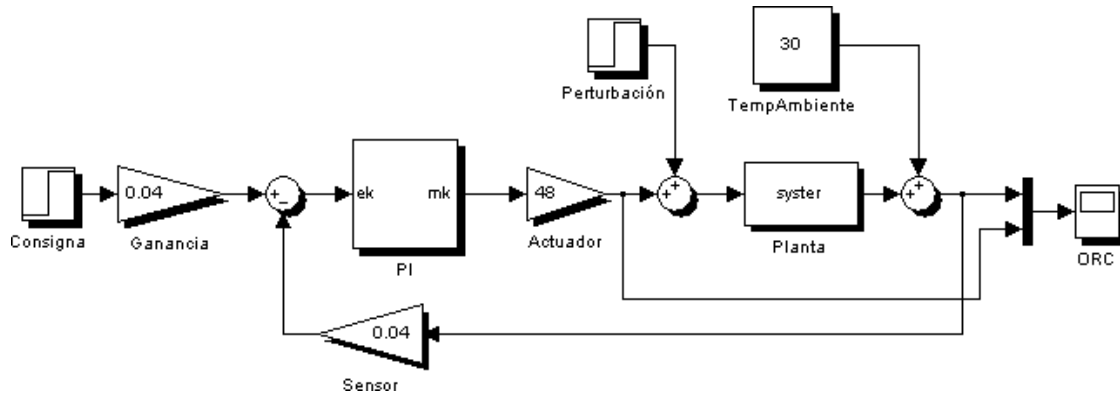


Figura 4: Sistema de control de temperatura con regulador PI

En la figura 4 se muestra el sistema de control de temperatura completo, incluyendo una entrada de perturbación que representa una variación de potencia de 48W debida a fluctuaciones de la tensión de alimentación de red. Además, la temperatura ambiente, otra perturbación del sistema, se encuentra en 30°C. La consigna se establece en 80°C iniciando en $t_i = 10$ s y en $t = 60$ segundos entra la perturbación.

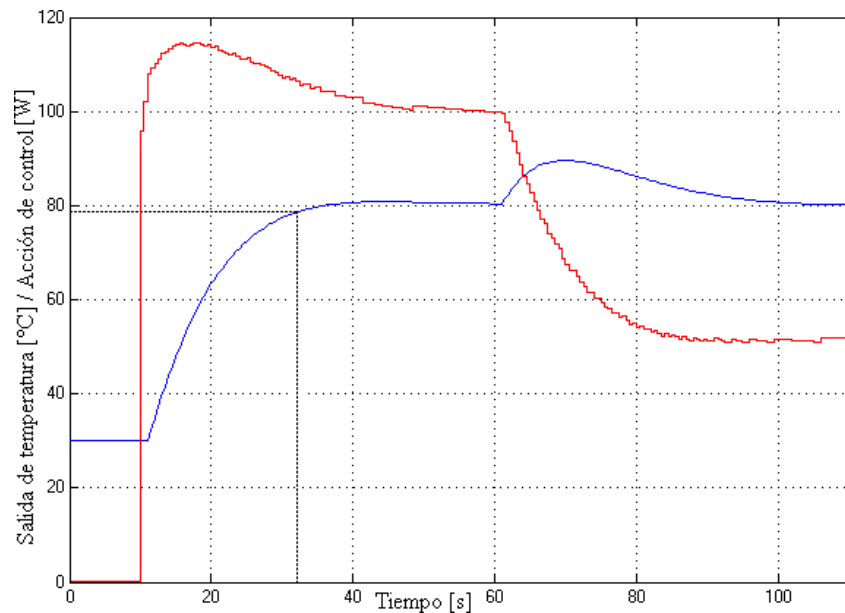


Figura 5: Respuesta del sistema de control de temperatura con regulador PI

En la figura 5 se muestran la salida de temperatura y la salida del actuador, para el sistema regulado ante un cambio en la consigna y ante perturbaciones. Puede apreciarse que la salida alcanza los 80°C, con un pequeño sobreimpulso del 2%; a pesar de variaciones en la temperatura ambiente y de variaciones en la potencia del calefactor. El

tiempo de estabilización del 2%, que ocurre en el tiempo $t = 33s$, indica que se ha mejorado mucho el tiempo de subida. Y ante la perturbación que ocurre en $t = 60s$, la variación máxima de la salida es de $+9.7^{\circ}C$, para un cambio de $+48W$ en la entrada de la planta, que finalmente es cancelado totalmente. Esto contrasta con la planta sin regulación; para la cual ese mismo cambio en la entrada hubiese representado un cambio permanente a la salida de $+24^{\circ}C$.

Tabla 1: Algoritmo en pseudocódigo para implementar el cálculo del regulador PI digital

```

/* Definición de constantes */
const byte A = 256;
const byte C = 248; /* Para el ejemplo en el que  $z_0 = 0.937$  */
const int KC = 264; /* Para el ejemplo en el que  $k' = 1.0325$  */
const byte T = 128; /* Supone que con 128 el periodo es de 0.5s; pero depende del sistema !!! */

/* Definición de variables */
word mk, mk_1, ek, ek_1, yk, rk = 0; /* Puede optimizarse el tamaño de las variables */

/* Programa principal */
inicio:
  InicieTodasLasVariables;
  InicieElPeriodoDeMuestreo(T);
  HabiliteInterrupcionTimer(TI1_EnInterrupción);

lazo:
  /* Ponga aquí su programa que se encarga de otras funciones */
  goto lazo;

  /* Rutina de atención de interrupciones periódicas, cálculo de la ecuación de diferencias PI */
  TI1_EnInterrupción:

    LeaConsigna(rk);
    LeaRealimentación(yk);
    ek = rk-yk;
    mk = (A * mk_1 + KC * ek - C * ek_1) / 256; /* Puede optimizarse con precálculo */
    EscribaAccionControl(mk);
    mk_1 = mk;
    ek_1 = ek;

  FindeInterrupción;

```

Referencias:

- [1] Bollinger, John G., Duffie, Neil A.. “Computer Control of Machines and Processes”, Addison-Wesley, USA, 1988.
- [2] www.ie.itcr.ac.cr/einteriano/control/TrabajosMatlab
- [3] www.ie.itcr.ac.cr/einteriano/control/clase/3.6ModeladoEstocastico.pdf