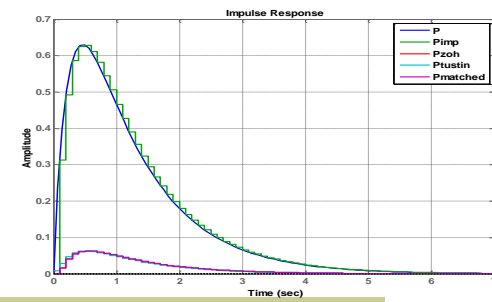


Control Automático

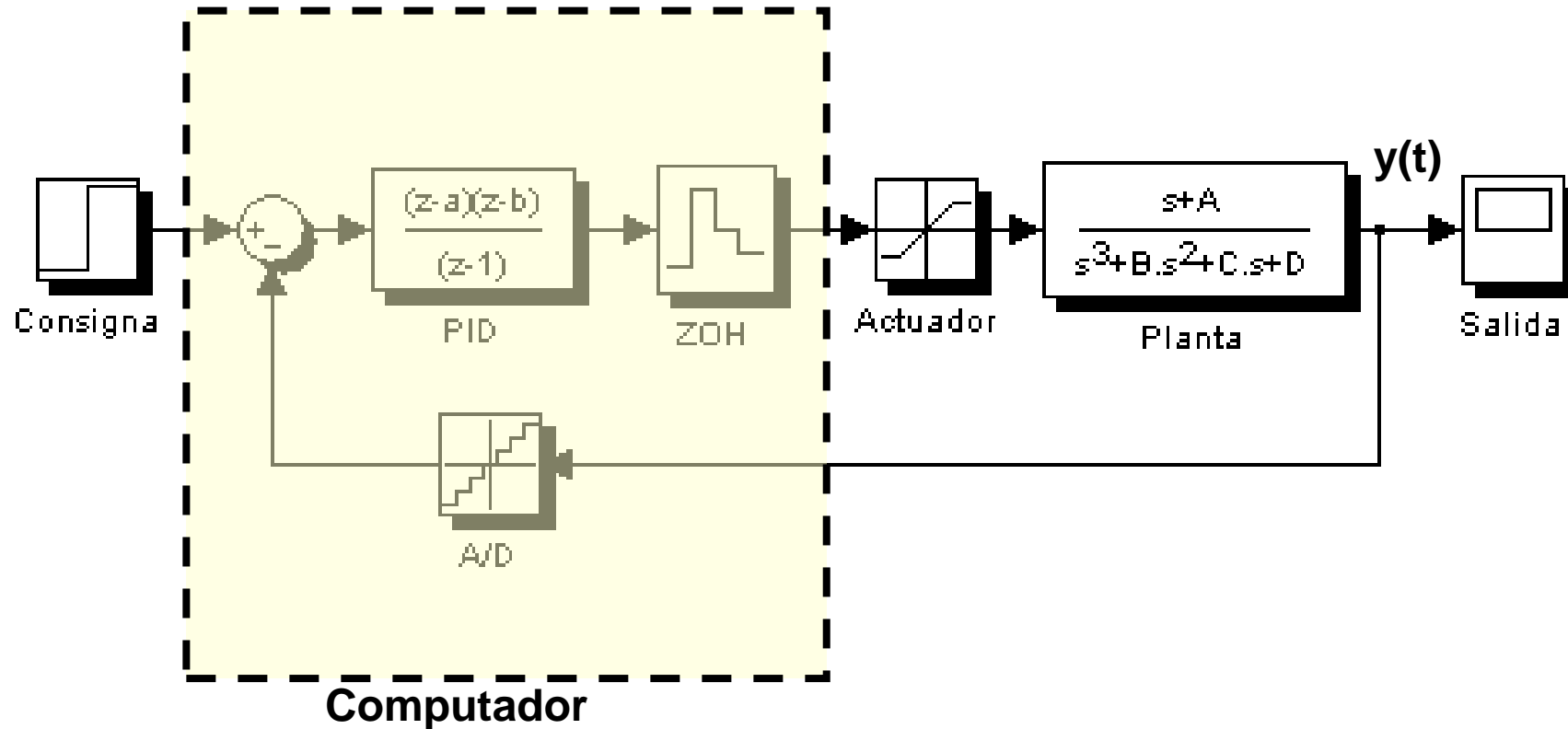
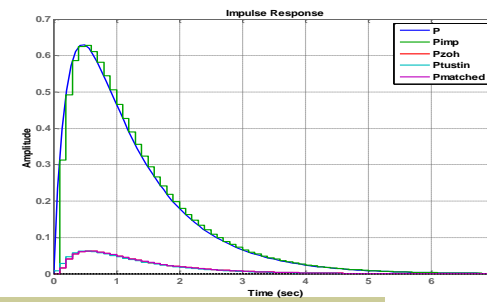
Discretización de reguladores y plantas

Contenido

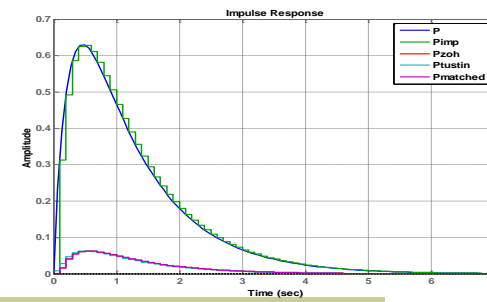


- Discretización a partir de la función de transferencia en tiempo continuo
 - Por respuesta invariante al impulso
 - Por retenedor de orden cero (ZOH)
 - Por Tustin o transformación bilineal
 - Por mapeo de polos (solo para SISO)
- Ejemplos
- Ejercicios

Esquema de un control digital



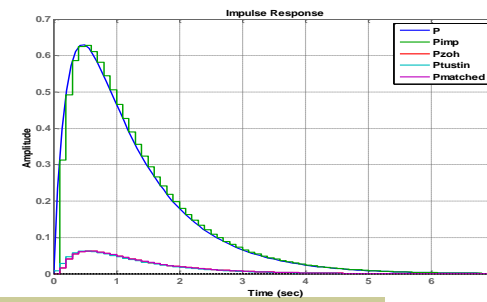
Escogencia del periodo de muestreo



- El periodo de muestreo T_s debe ser escogido para que sea menor que una décima parte de la constante de tiempo dominante, del sistema que se espera en **lazo cerrado**

$$T_s < \frac{1}{10} T_{dom.}$$

Escogencia del periodo de muestreo

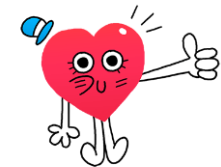


- Recomendaciones para escoger el periodo de muestreo T o frecuencia de muestreo f_T .

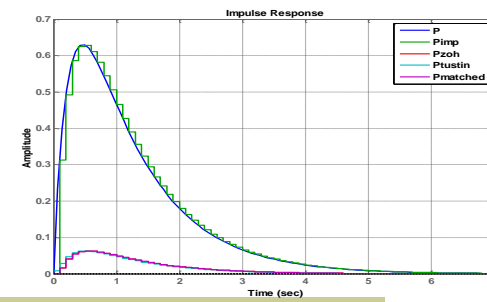
- En lazo cerrado: $\frac{t_r}{20} < T < \frac{t_r}{10}$; tiempo de subida

$$\frac{t_s}{75} < T < \frac{t_s}{25}, \text{ tiempo de estabilización}$$
$$20BW < f_T < 40BW, \text{ ancho de banda [Hz]}$$
$$30\omega_d < \omega_T < 60\omega_d, \text{ frecuencia amortiguada [rad / s]}$$

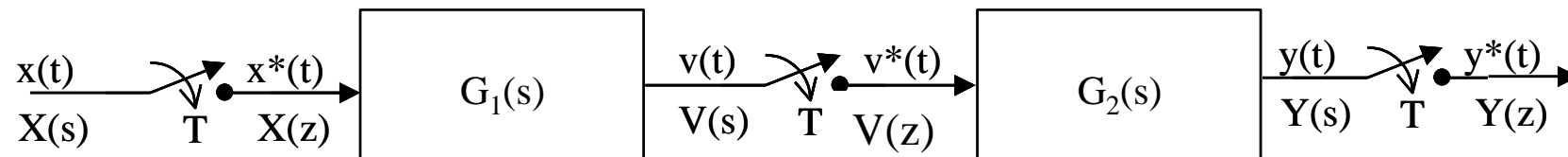
- En lazo abierto:

$$40\omega_{cg} < \omega_T < 80\omega_{cg}, \text{ frecuencia de cruce de g. [rad / s]}$$


Condiciones de la conversión

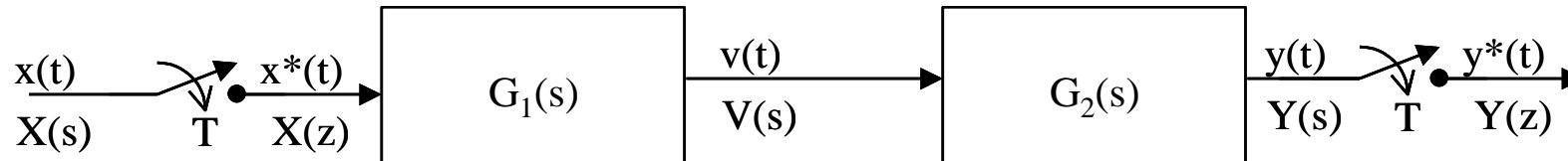


- Dos funciones continuas son discretizadas y se encuentran en cascada



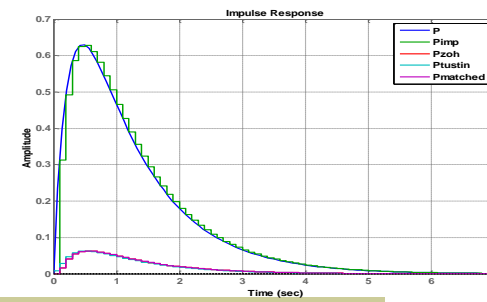
$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = G_1(z) \cdot G_2(z) = Z\{G_1(s)\} \cdot Z\{G_2(s)\}$$

- Dos funciones continuas en cascada son discretizadas; $G(s) = G_1(s)G_2(s)$



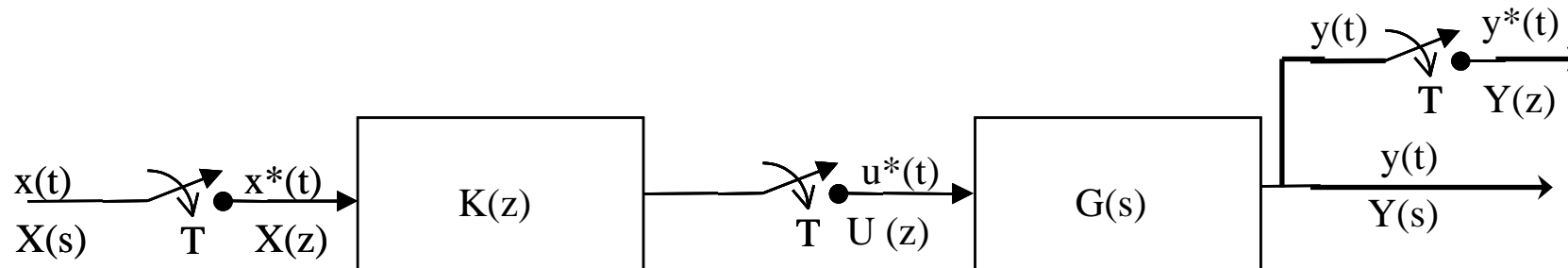
$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = Z\{G(s)\} = Z\{G_1(s)G_2(s)\}$$

Condiciones de la conversión



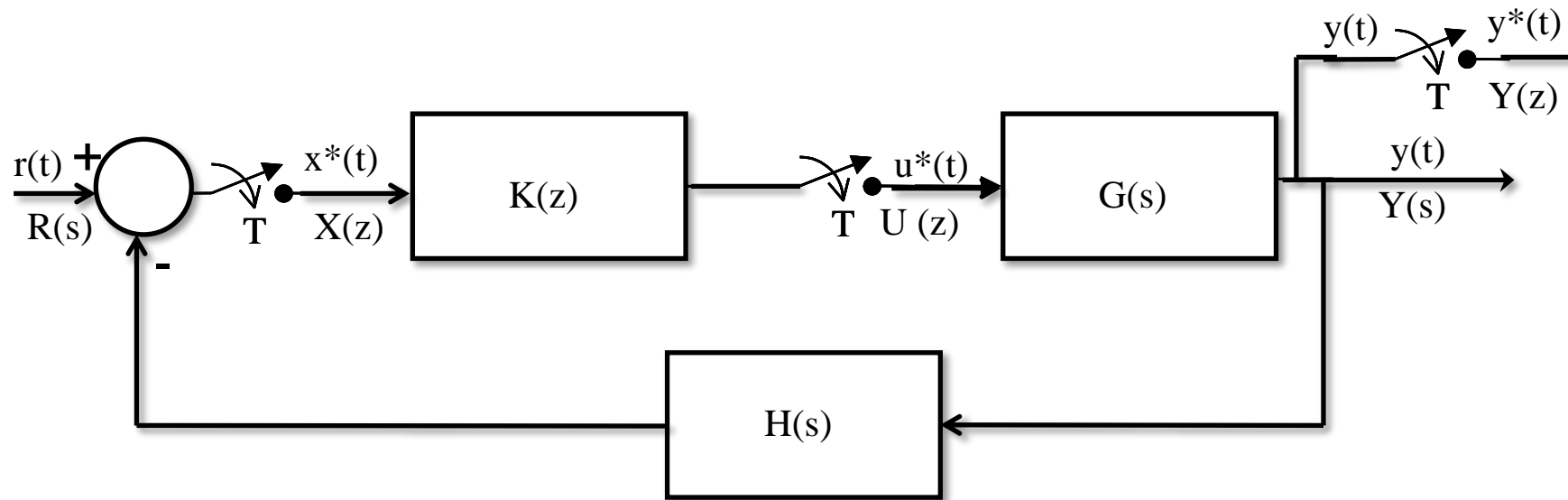
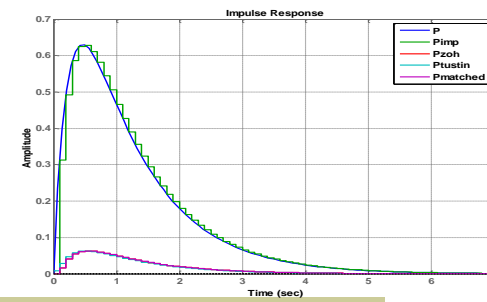
■ Procedimiento:

- Combinar todos los elementos continuos que se encuentren directamente conectados en cascada en una única función $G(s)$



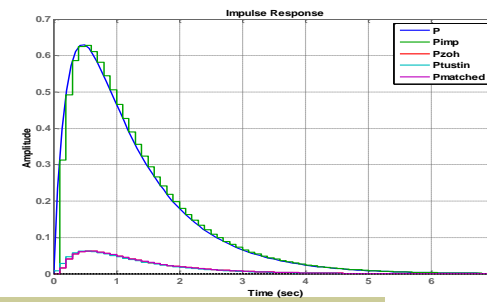
- Considerar como si la función $G(s)$, tiene además, paralelamente a su salida continua, una salida muestreada. $G(z) = Y(z)/U(z)$

El sistema híbrido de control



$$T(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{K(z)G(z)}{1 + K(z)GH(z)} = \frac{K(z)Z\{G(s)\}}{1 + K(z)Z\{G(s)H(s)\}}$$

Transformación por respuesta invariante al impulso



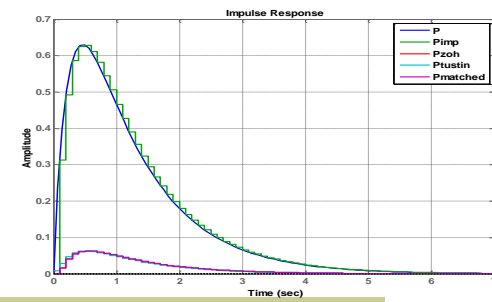
- Combinar todos los elementos continuos que se encuentren directamente conectados en cascada en una única función $G(s)$
- Representar $G(s)$ en fracciones parciales
- Convertir cada fracción parcial a su forma en Z usando la transformada Z de la función exponencial muestreada y con ayuda de tablas.

$$L\{e^{-at}\} = \frac{1}{(s + a)}$$

$$Z\{e^{-at}\} = Z\{e^{-akT}\} = \frac{1}{1 - e^{-aT} Z^{-1}}$$

Tiene problemas de *aliasing* dependiente de T

Respuesta invariante al impulso



- Para raíces simples

$$G(z) = T \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{(1 - e^{p_i T} z^{-1})}$$

Donde: R_i = residuo del polo i-ésimo; p_i = polo i-ésimo;
 T = periodo de muestreo

- Para raíces repetidas

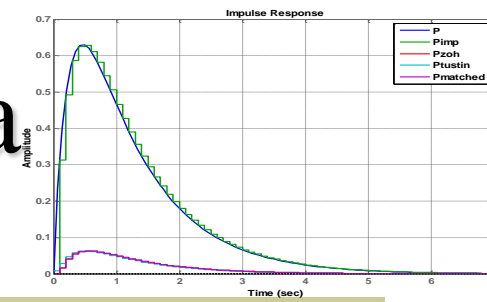
$$G(z) = T \sum_{i=1}^j \sum_{l=1}^{m_i} \frac{(-1)^{l-1} R_{il}}{(l-1)!} \frac{\partial^{l-1}}{\partial p_i^{l-1}} \left[\frac{1}{(1 - e^{p_i T} z^{-1})} \right]$$

Donde: R_{il} = residuo de la repetición l del polo i-ésimo; p_i = polo i-ésimo; T = periodo de muestreo

m_i = número de veces que la raíz p_i está repetida

j = número de raíces diferentes

Ejemplo 1: Discretización de una planta por respuesta invariante al impulso

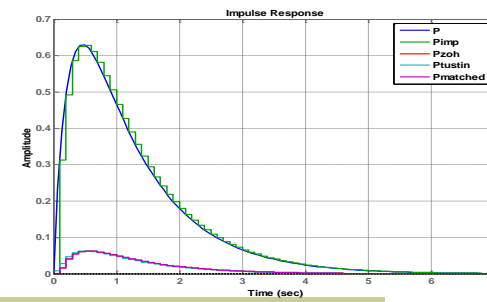


- Encuentre el modelo en tiempo discreto para la planta $P(s)$ mostrada, con $T = 0.1s$

$$P(s) = \frac{4}{(s + 1)(s + 4)} = \left(\frac{R_1}{(s + 4)} + \frac{R_2}{(s + 1)} \right)$$

- Evaluando los residuos para los polos
 - $P = [-4 \ -1]$
 - $R = [-4/3 \ 4/3]$

Ejemplo 1: cont.



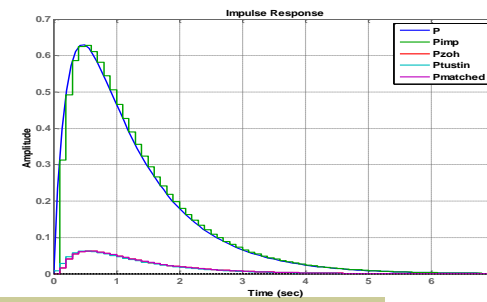
■ Evaluando

$$P(z) = 0.1 * \sum_{i=1}^2 \frac{R_i}{(1 - e^{p_i T} z^{-1})} = 0.1 * \left[\frac{-4/3}{(1 - e^{-4*0.1} z^{-1})} + \frac{4/3}{(1 - e^{-1*0.1} z^{-1})} \right]$$

$$P(z) = 0.1 * \left[\frac{-4/3 * z}{(z - 0.6703)} + \frac{4/3 * z}{(z - 0.9048)} \right]$$

$$P(z) = \frac{0.031269z}{(z - 0.6703)(z - 0.9048)} \quad T = 0.1s$$

Ejercicio 1



- Convierta con $T = 0.1s$

$$P(s) = \frac{3}{(s + 2)^2}$$

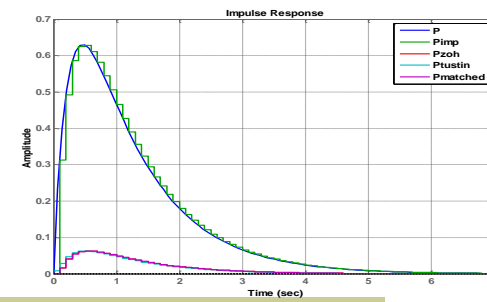
- Evaluando los residuos para los polos

- $P = [-2 \ -2]$

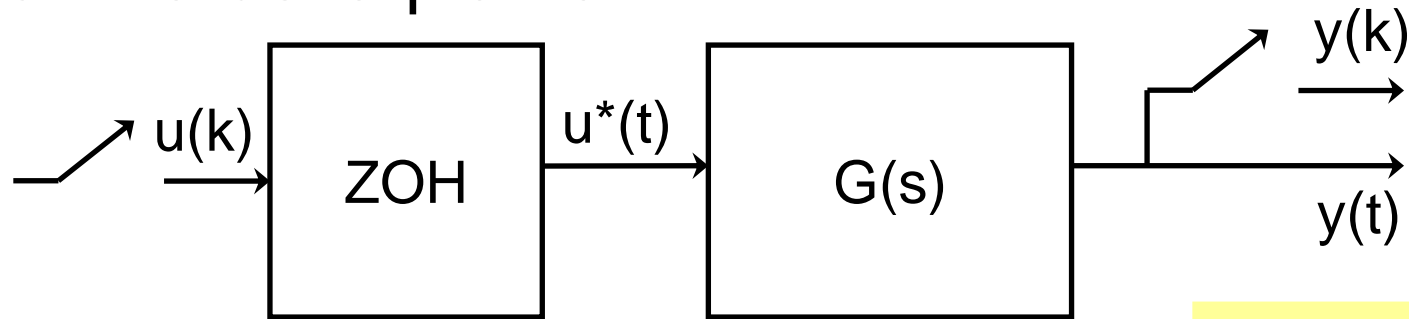
- $R = [0 \ 3]$

$$P(z) = \frac{0.024562 z}{(z - 0.8187)^2}$$

Por retenedor de orden cero



- Se combina la función de transferencia del retenedor de orden cero con la de la planta.

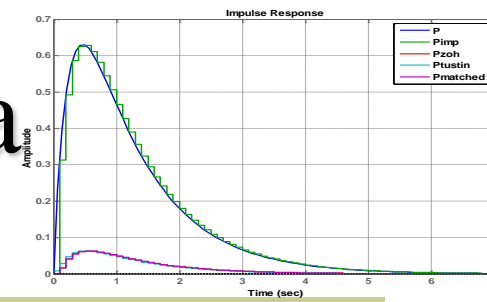


$$Z\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s} * G(s)\right\} = (1-z^{-1}) * Z\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$$

Método preferible
para sistemas con
tiempo muerto

- El resultado se descompone en fracciones parciales y cada fracción se transforma a Z.

Ejemplo 2: Discretización de una planta por ZOH

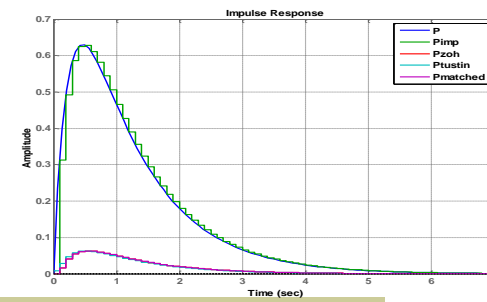


- Encuentre el modelo en tiempo discreto para la planta $P(s)$ mostrada, con $T = 0.1s$

$$P(s) = \frac{4}{(s+1)(s+4)}$$

- Descomponiendo en fracciones parciales $P(s)/s$ los residuos y polos son:
 - $R = [0.3333 \quad -1.3333 \quad 1.0000]$
 - $P = [-4 \quad -1 \quad 0]$

Ejemplo 2: cont.



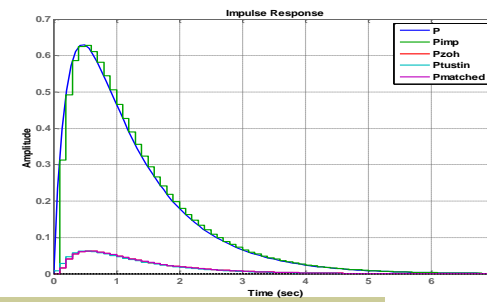
- Después de transformar cada fracción parcial aplicando el periodo de muestreo $T = 0.1s$

$$P(z) = (1 - z^{-1}) \left[\frac{0.33}{(1 - e^{(-4*0.1)}z^{-1})} - \frac{1.33}{(1 - e^{(-1*0.1)}z^{-1})} + \frac{1}{(1 - e^0 z^{-1})} \right]$$

- Se suma y aplica el factor $(1 - z^{-1})$, se factoriza y se simplifica:

$$P(z) = \frac{0.01699 (z+0.8466)}{(z-0.9048)(z-0.6703)}, T = 0.1s$$

Por el método de Tustin o transformación bilineal



- Se parte de la relación de definición de z

$$z = e^{sT}$$

- Se despeja s y se desarrolla la serie de potencias del logaritmo

$$s = \frac{1}{T} \ln z$$

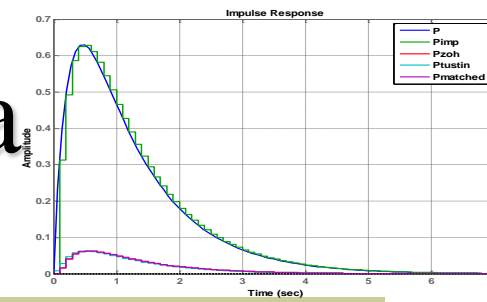
$$s = \frac{2}{T} \frac{(z-1)}{(z+1)} + \frac{2}{3T} \frac{(z-1)^3}{(z+1)^3} + \frac{2}{5T} \frac{(z-1)^5}{(z+1)^5} + \dots$$

No tiene problemas de *aliasing* dependiente de T

- Finalmente se aproxima la serie al primer término

$$s \approx \frac{2}{T} \frac{(z-1)}{(z+1)}$$

Ejemplo 3: Discretización de una planta por Tustin



- Encuentre el modelo en tiempo discreto para la planta $P(s)$ mostrada, con $T = 0.1s$

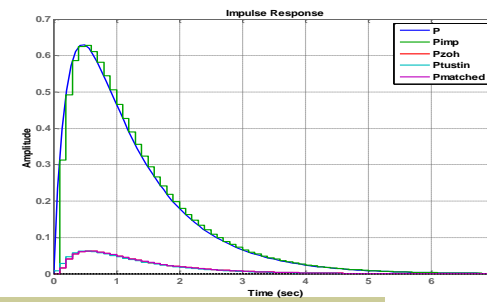
$$P(s) = \frac{4}{(s+1)(s+4)}$$

- Sustituyendo

$$P(z) = \frac{4}{\left(\frac{2}{0.1} \frac{(z-1)}{(z+1)} + 1\right) \left(\frac{2}{0.1} \frac{(z-1)}{(z+1)} + 4\right)}$$

$$P(z) = \frac{0.0079365(z+1)^2}{(z-0.6667)(z-0.9048)}$$

Por mapeo de polos y ceros



Solo para sistemas SISO. Se sustituye cada polo de la forma $(s - p_i)$ por $(z - e^{p_i T})$ y cada cero de la forma $(s - z_i)$ por $(z - e^{z_i T})$. Finalmente se ajusta la ganancia K' para una respuesta igual, típicamente a frecuencia cero.

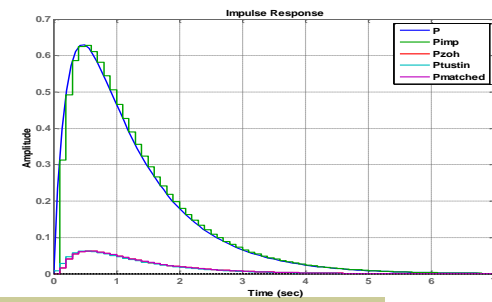
$$G(s)|_{s=0} = G(z)|_{z=1}$$

$$G(s) = K \frac{\prod_{i=1}^q (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

$$G(z) = K' (z + 1)^{n-q-1} \frac{\prod_{i=1}^q (z - e^{z_i T})}{\prod_{i=1}^n (z - e^{p_i T})}$$

$\omega = \infty$ en dom.
analógico $\approx \omega = \frac{1}{2} \omega_s$
en el dom. discreto.

Por mapeo de polos y ceros



La ganancia K' se calcula como

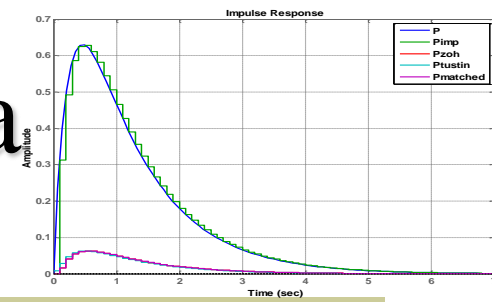
$$K^1 = K_B \cdot \frac{\prod_{i=1}^n (z - e^{p_i T})}{(z + 1)^{(n-q-1)} \prod_{i=1}^q (z - e^{z_i T})} \bigg|_{z=1}$$

$$K_B = G(s) \big|_{s=0} = K \frac{\prod_{i=1}^q -z_i}{\prod_{i=1}^n -p_i}$$

Se satisface exactamente la relación

$$z = e^{sT}$$

Ejemplo 4: Discretización de una planta por mapeo $z = e^{sT}$

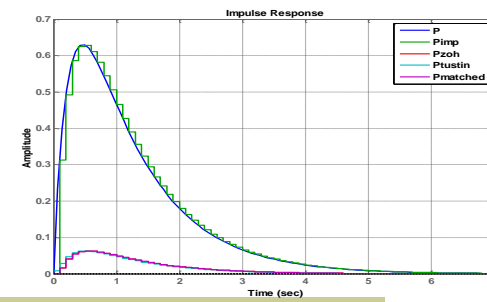


- Encuentre el modelo en tiempo discreto para la planta $P(s)$ mostrada, con $T = 0.1s$

$$P(s) = \frac{4}{(s+1)(s+4)}$$

- Los datos del sistema continuo son:
 - $P = [-4 \ -1]$
 - $n = 2; q = 0$
 - $K_B = P(0) = 1$

Ejemplo 4: cont.



- Se evalúa las fórmulas

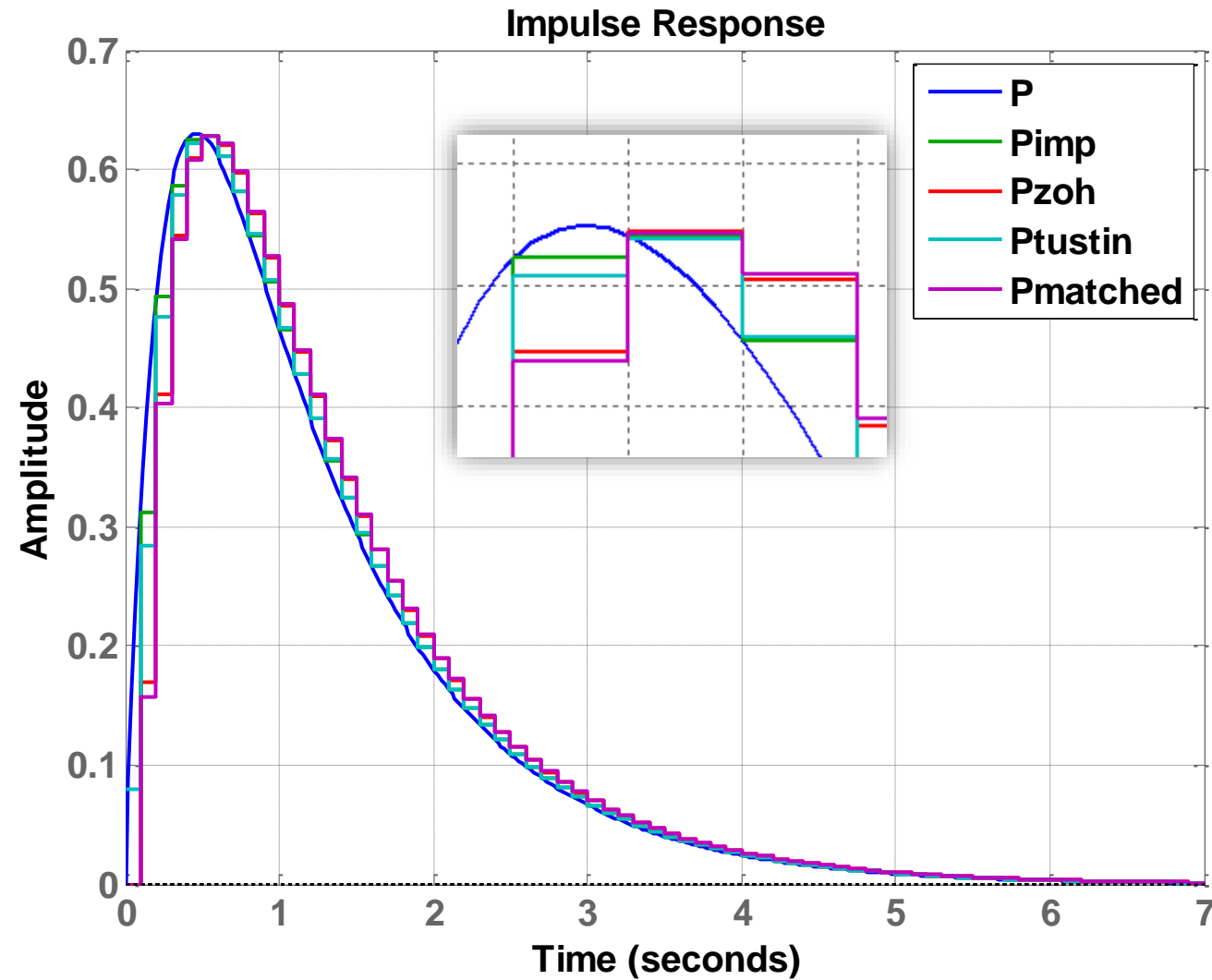
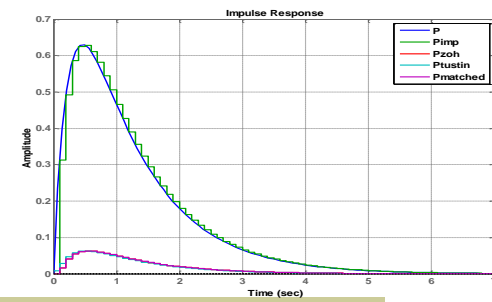
$$P(z) = K^1 * \hat{P}(z)$$

$$\hat{P}(z) = \frac{(z+1)^{(2-0-1)}}{(z - e^{-4*0.1})(z - e^{-1*0.1})}$$

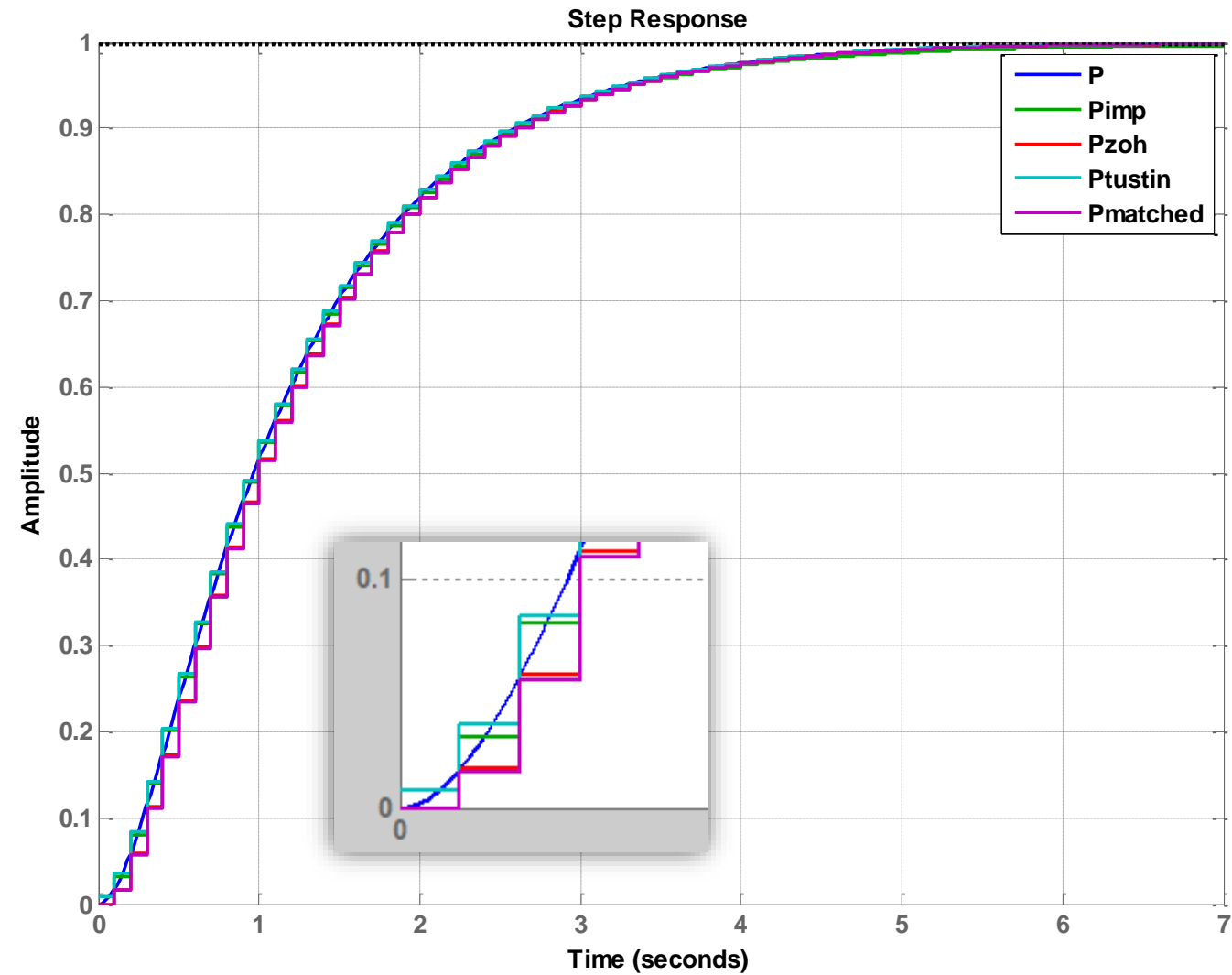
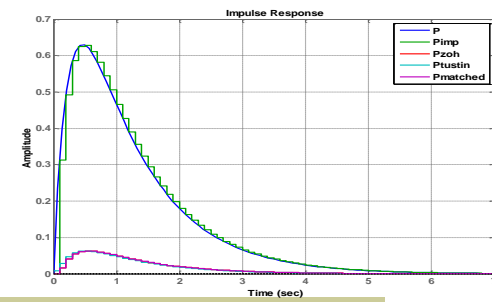
$$\hat{P}(1) = 63.7486 \quad K^1 = 1 / 63.7486$$

$$P(z) = \frac{0.015687 (z+1)}{(z-0.6703)(z-0.9048)}, T = 0.1s$$

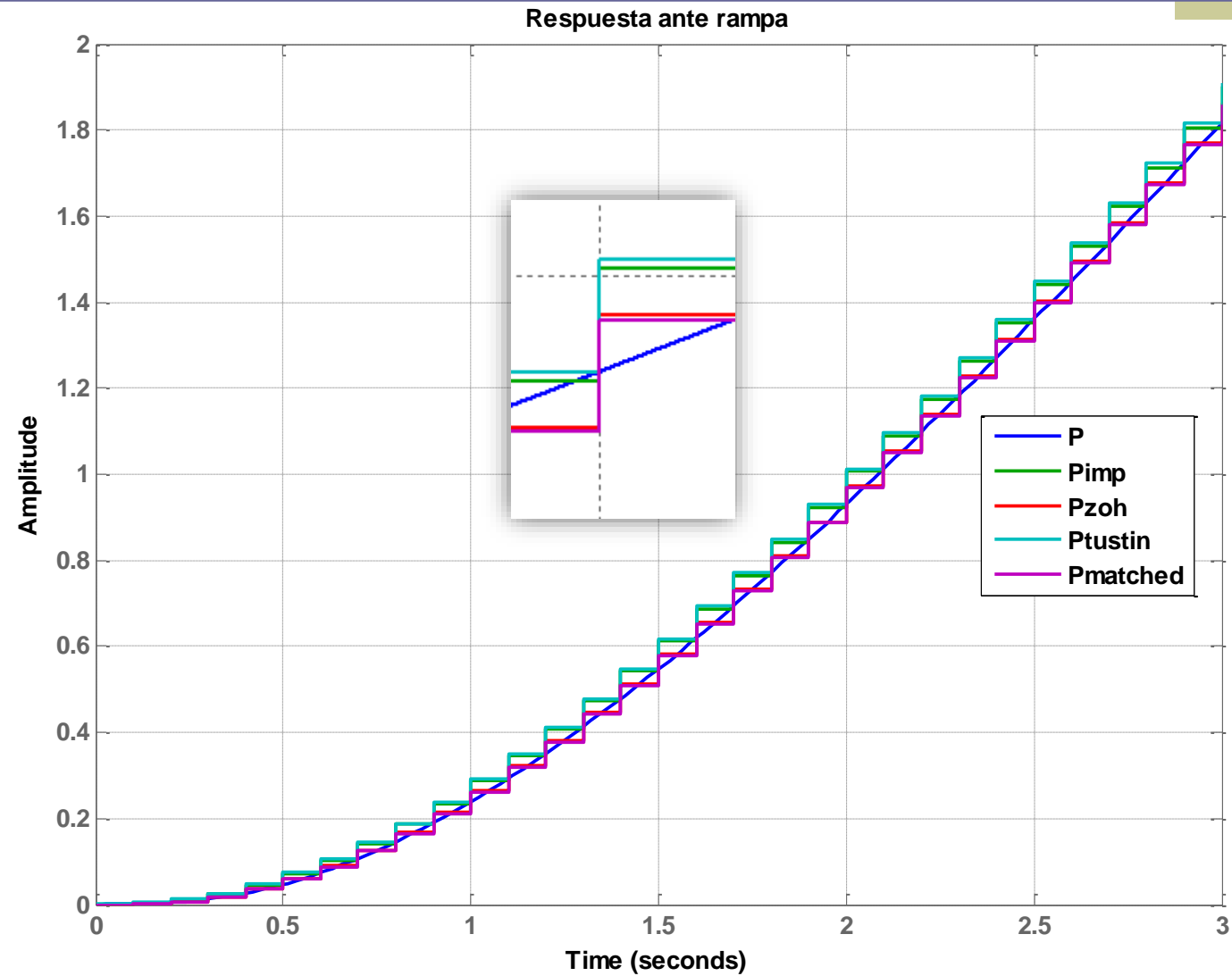
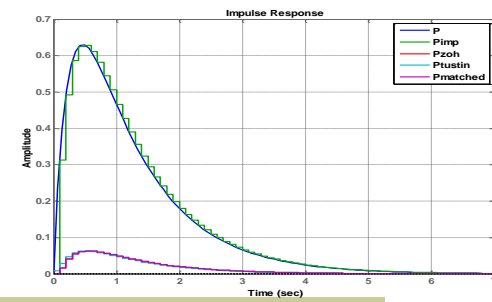
Respuesta al impulso



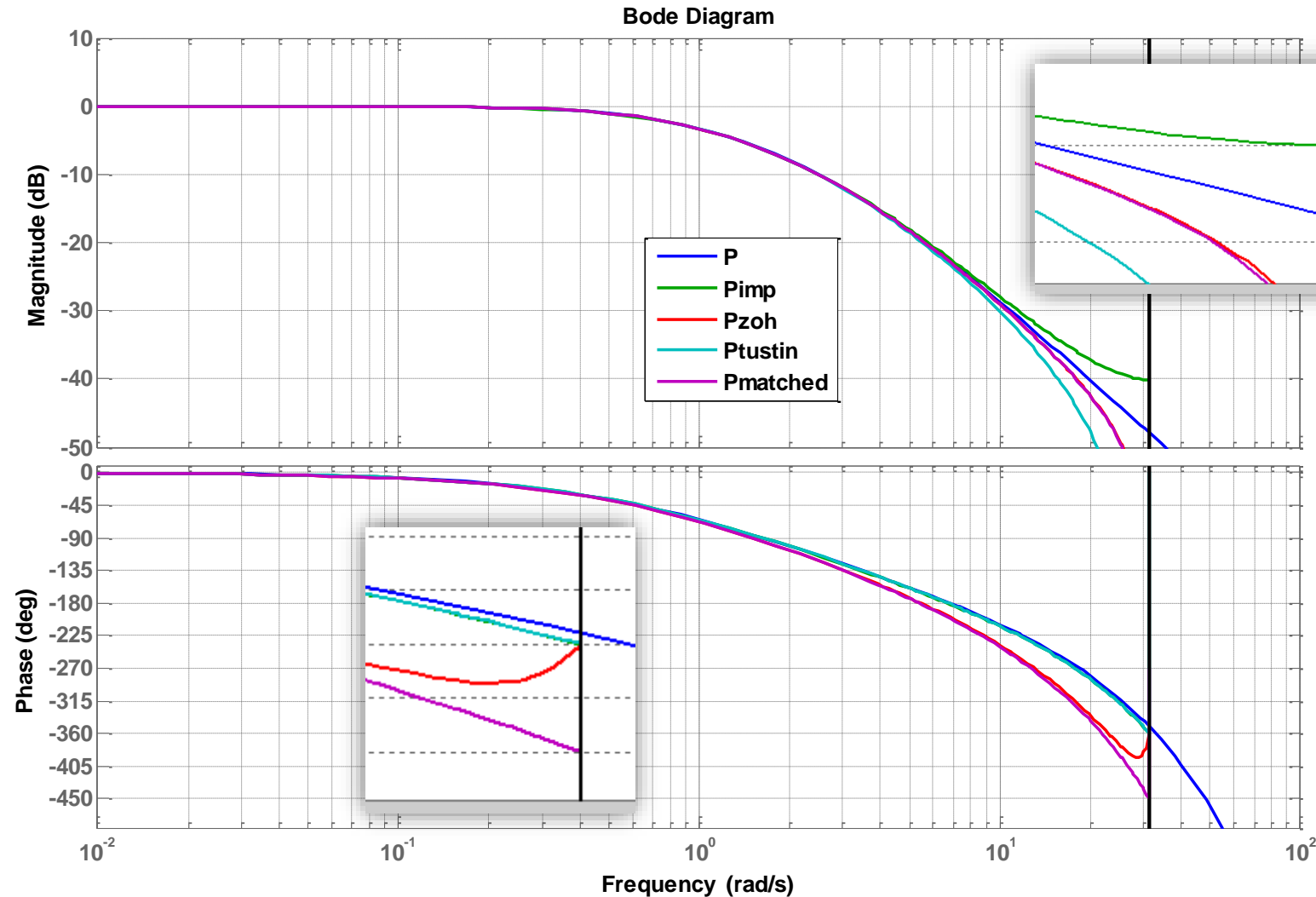
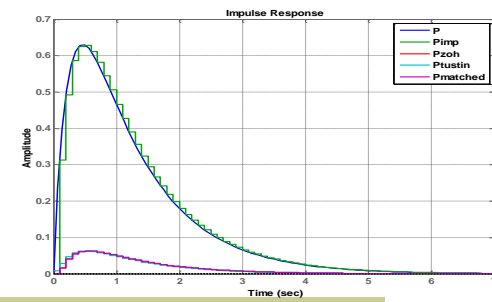
Respuesta al escalón



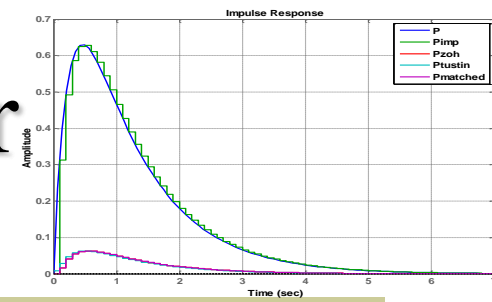
Respuesta ante rampa



Respuesta de frecuencia

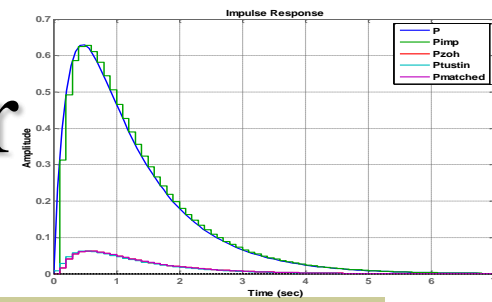


Ejemplo 5: Discretización del regulador PID

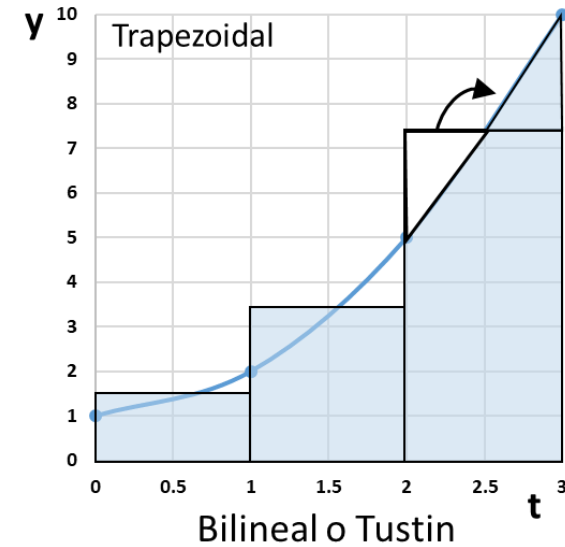
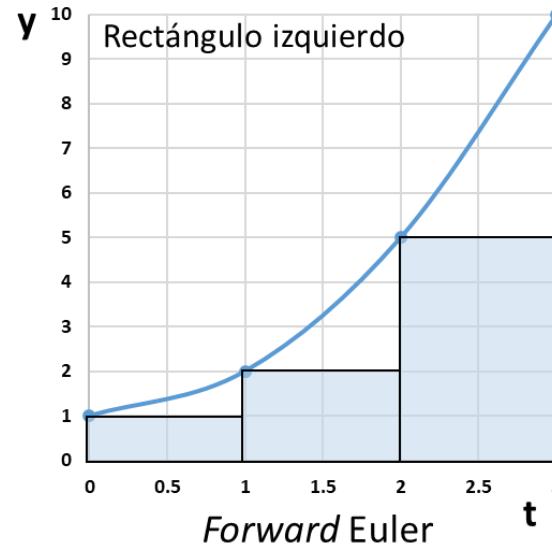
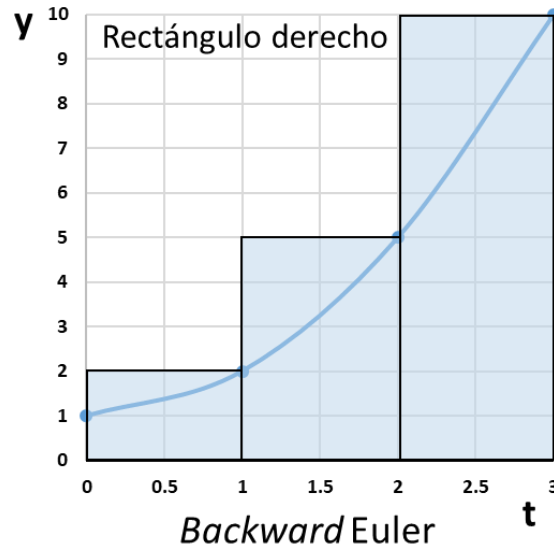


- El PID **ideal** se puede discretizar por los métodos de:
 - La aproximaciones varias a la integral y a la derivada (Euler, Trapezoidal)
 - Transformación bilineal o método de Tustin ($s \rightarrow z \rightarrow kT$)

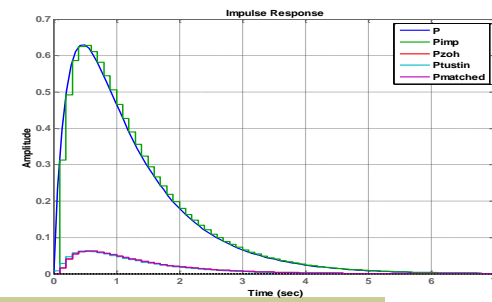
Ejemplo 5: Discretización del regulador PID



Aproximaciones a la integral



Discretización del PID por aproximaciones a la I y D



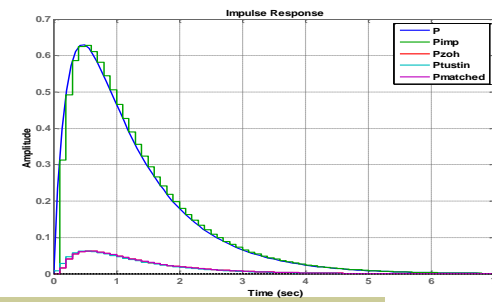
- Se parte de la expresión para el PID ideal en el dominio del tiempo continuo

$$m(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{d}{dt} e(t) + m_0$$

- Se obtiene la forma posicional del algoritmo del PID

$$m(k) = K_P e(k) + K_I \left(\frac{[e(k) + e(k-1)]T_s}{2} + Int_{prev.} \right) + K_D \frac{e(k) - e(k-1)}{T_s} + m_0$$

Discretización del PID por transformación bilineal



- Se parte de la expresión para el PID en el dominio de la frecuencia compleja

$$K_{PID}(s) = K_P + \frac{K_P}{T_i s} + s \cdot K_P T_d$$

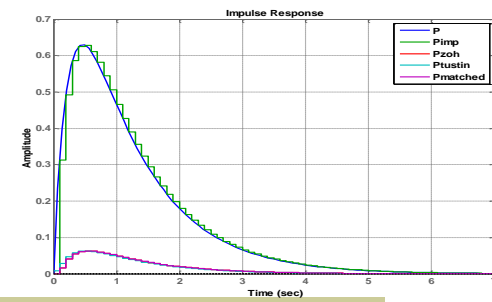
- Se sustituye

$$s \approx \frac{2}{T} \frac{(z-1)}{(z+1)}$$

y se obtiene la forma de velocidad del algoritmo del PID

$$m(k) = m(k-1) + K_P [e(k) - e(k-1)] + \frac{K_P T_s}{T_i} e(k) + \frac{K_P T_d}{T_s} [e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)]$$

La forma de velocidad del PID discreto



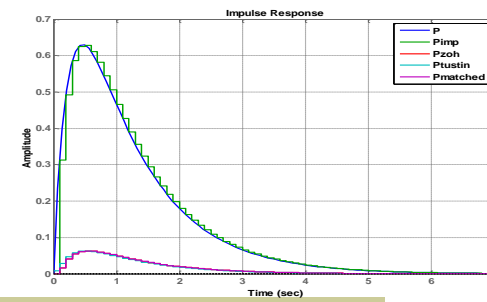
- La forma de velocidad del PID se puede simplificar a

$$m(k) = m(k-1) + A \cdot e(k) + B \cdot e(k-1) + C \cdot e(k-2)$$

donde las constantes A, B y C dependen de K_P , T_i , T_d y del tiempo de muestreo T_s

- También se puede llegar a esta forma si se resta la forma posicional del PID evaluada en k y en (k-1)
- Esta forma es menos propensa al *windup*

Ejercicios adicionales



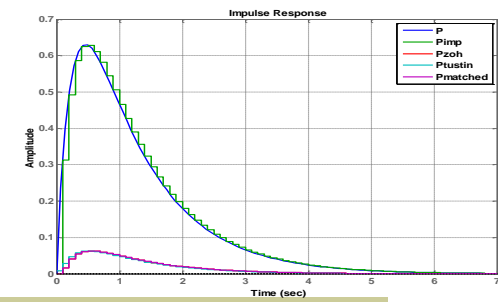
- Obtenga y compare los modelos discretos, con el periodo de muestreo T dado para las funciones $G(s)$, $F(s)$ y $H(s)$; por los cuatro métodos vistos en clase.

$$G(s) = \frac{3 * e^{-s*0.4}}{(s+1)(s+2)}; T = 0.2s$$

$$F(s) = \frac{(s+0.4)(s+3)}{s(s+9)}; T = 0.05s$$

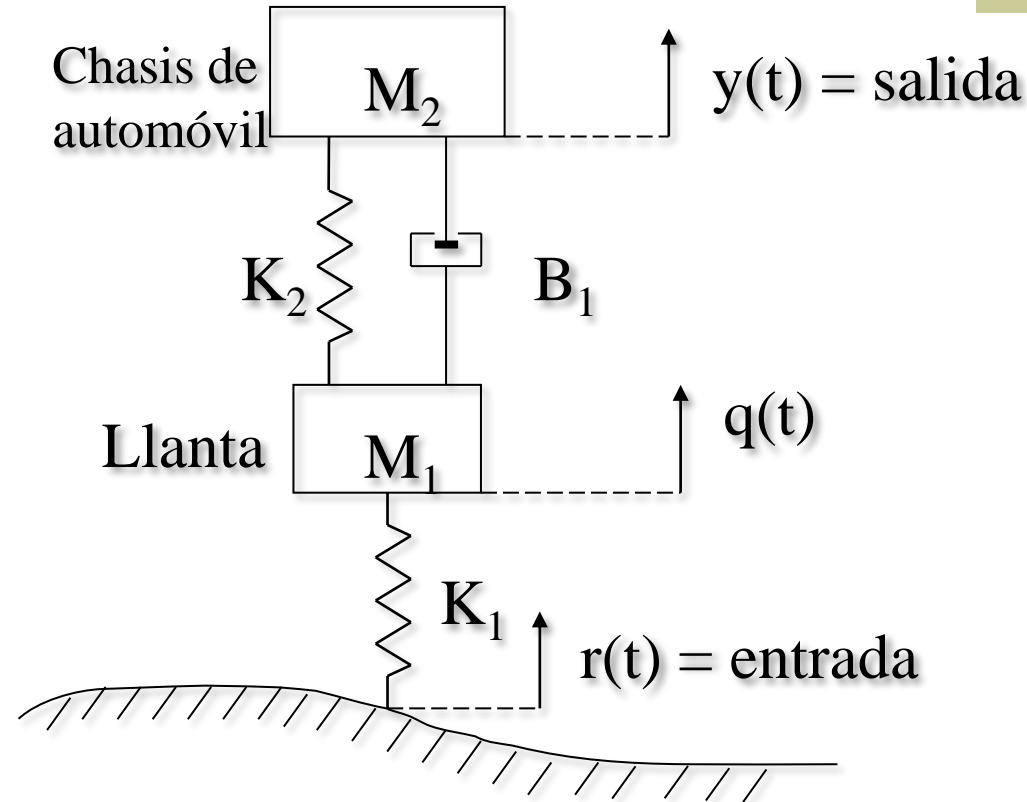
$$H(s) = \frac{(s+3)}{s(s+1)^2}; T = 0.1s$$

Ejercicios adicionales (2)



Escriba el modelo en variables de estado en tiempo continuo y luego encuentre el modelo en tiempo discreto utilizando un periodo de muestreo que sea aprox. 20 veces más pequeño que un periodo de la oscilación del chasis. Simule y compare ambos modelos. Use este vector de estado:

$$\dot{\mathbf{x}}^T [y \quad q \quad \dot{y} \quad \dot{q}]$$



$$M_2 = M / 4 = 225 \text{ kg}$$

$$K_2 = 3571 \text{ N / m}$$

$$B_1 = 357 \text{ N} \cdot \text{s} / \text{m}$$

$$M_1 = 10 \text{ kg}$$

$$K_1 = 17855 \text{ N / m}$$

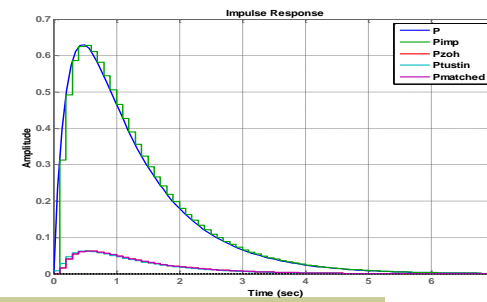
$$F_{ent.} = 544 \text{ N}$$

$$M_1 \ddot{q} + B_1 (\dot{q} - \dot{y}) + K_2 (q - y) + K_1 q = K_1 r$$

$$M_2 \ddot{y} + B_1 (\dot{y} - \dot{q}) + K_2 (y - q) = 0$$

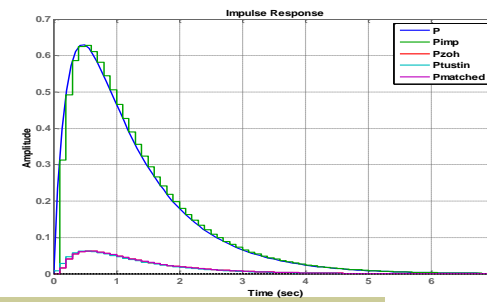
F_{ent} es producida por el desplazamiento $r(t)$

Preguntas adicionales



- ¿Cómo se transforma un PID paralelo?
- ¿Cómo es un PID real?
- ¿Qué es un filtro derivativo para PID?
- ¿Cuáles son las aproximaciones *backward* Euler y *forward* Euler a la integral y la derivada? ¿Ventajas y desventajas, cuál es más recomendable?
- ¿Encuentre las ecuaciones de diferencia de un PID ideal en paralelo? a) con *forward* Euler; b) con *backward* Euler; c) con Tustin.

Referencias



- Bollinger, John G., Duffie, Neil A.. **“Computer Control of Machines and Processes”**, Addison-Wesley, USA, 1988.
- Kuo, Benjamin C.. **„Sistemas de Control Automático“**, Ed. 7, Prentice Hall, 1996, México.
- <http://www.ie.itcr.ac.cr/einteriano/control/clase/3.0SistemasdeControlenTiempoDiscreto.pdf>
- <http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/toolbox/control/manipmod/f2-3161.html>