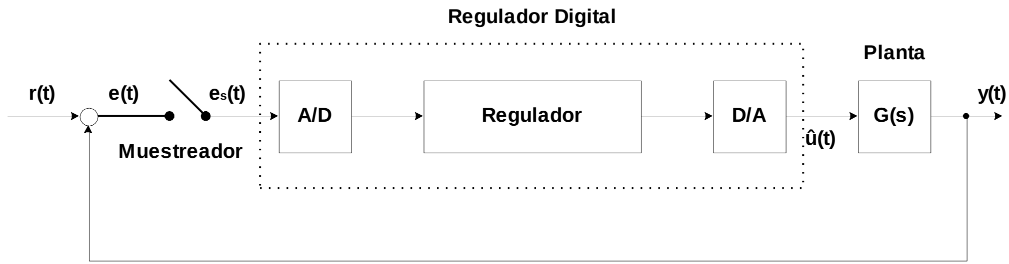
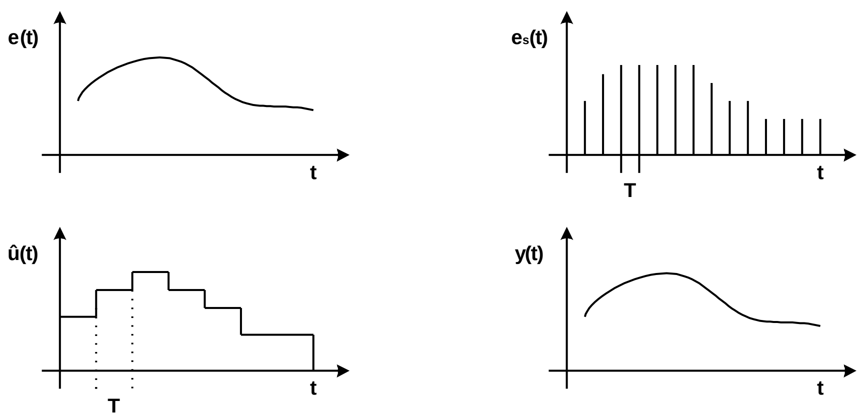
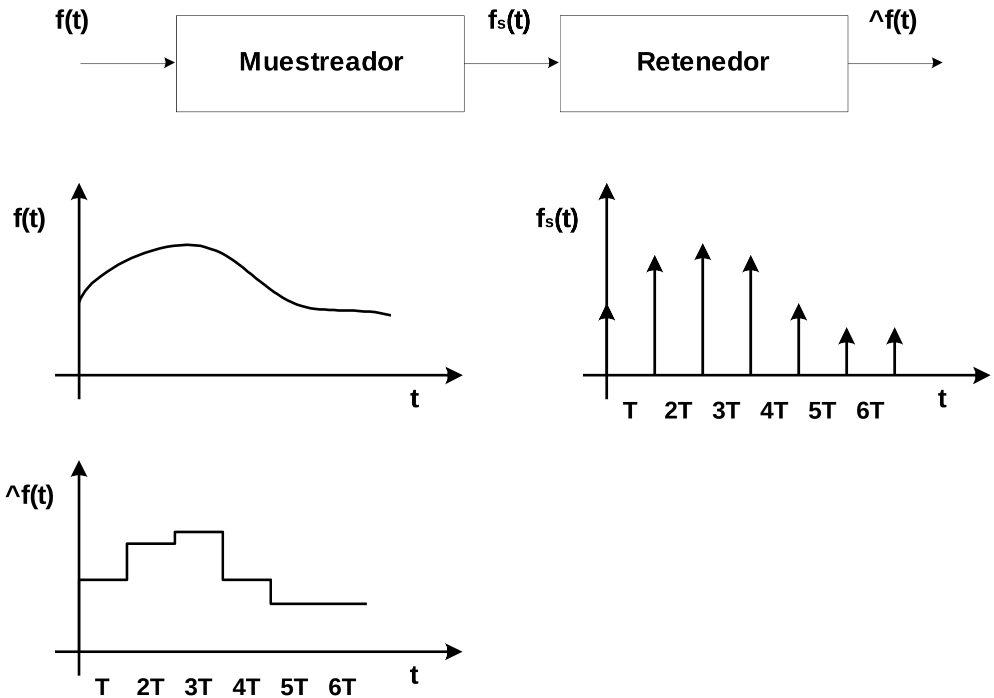
Sistemas en tiempo discreto

Introducción







Proceso de la señal de tiempo continuo a tiempo discreto

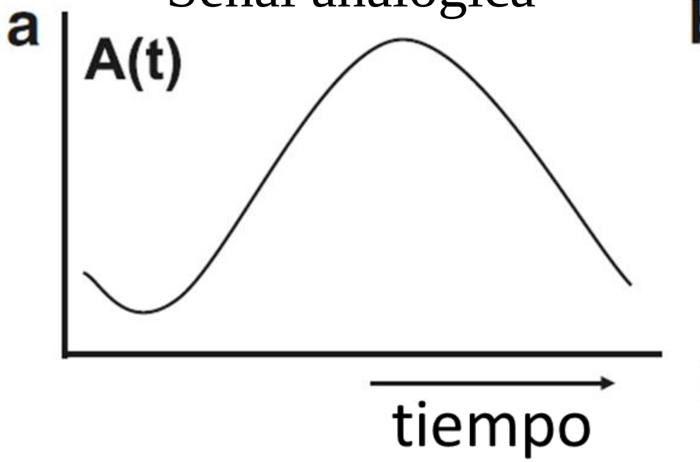
$$f_S(t) = f(t) \cdot \delta_T(t)$$

$$f_S(t) = f(t) \sum_{K=0}^{\infty} \delta(t - kT)$$

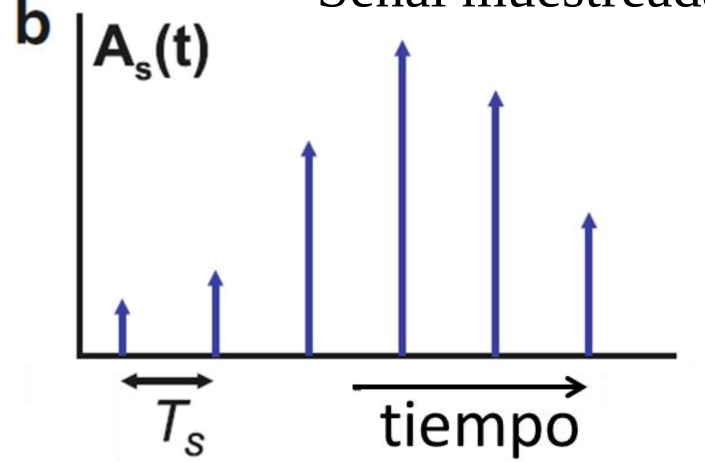
$$\hat{f}(t) = f(kT) \qquad ; kT \le t \le (k+1)T$$

Muestreo: En tiempo y frecuencia

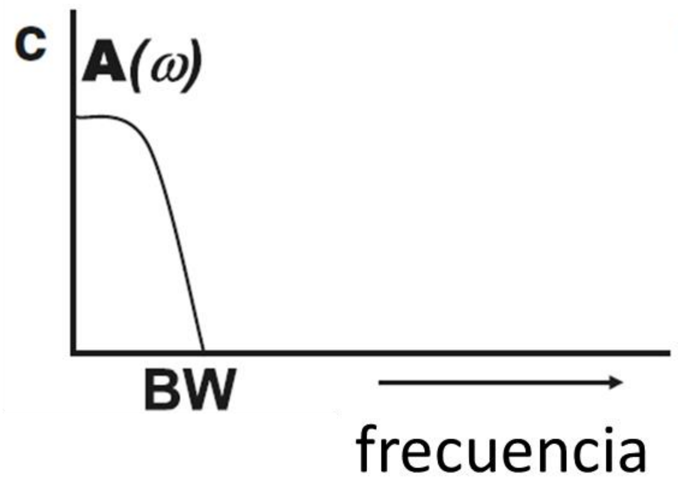
Señal analógica



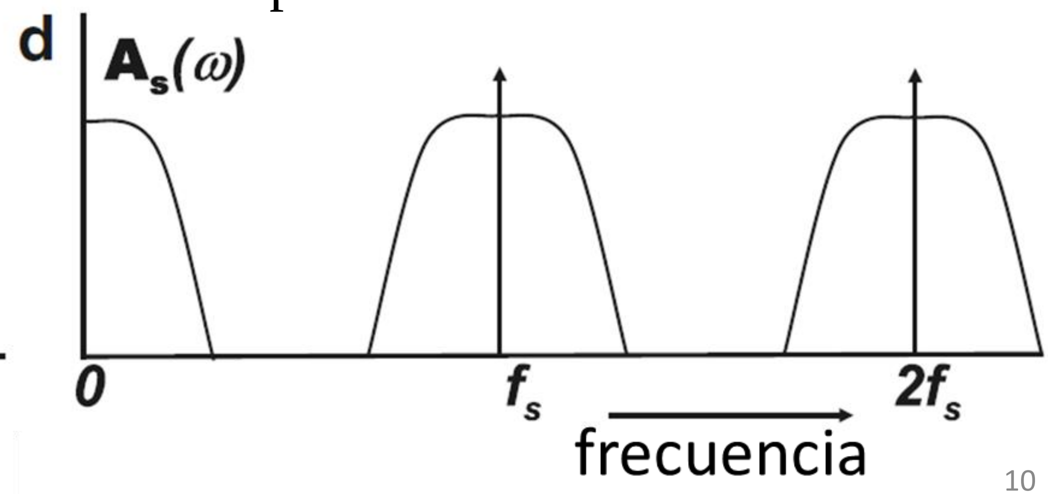
Señal muestreada



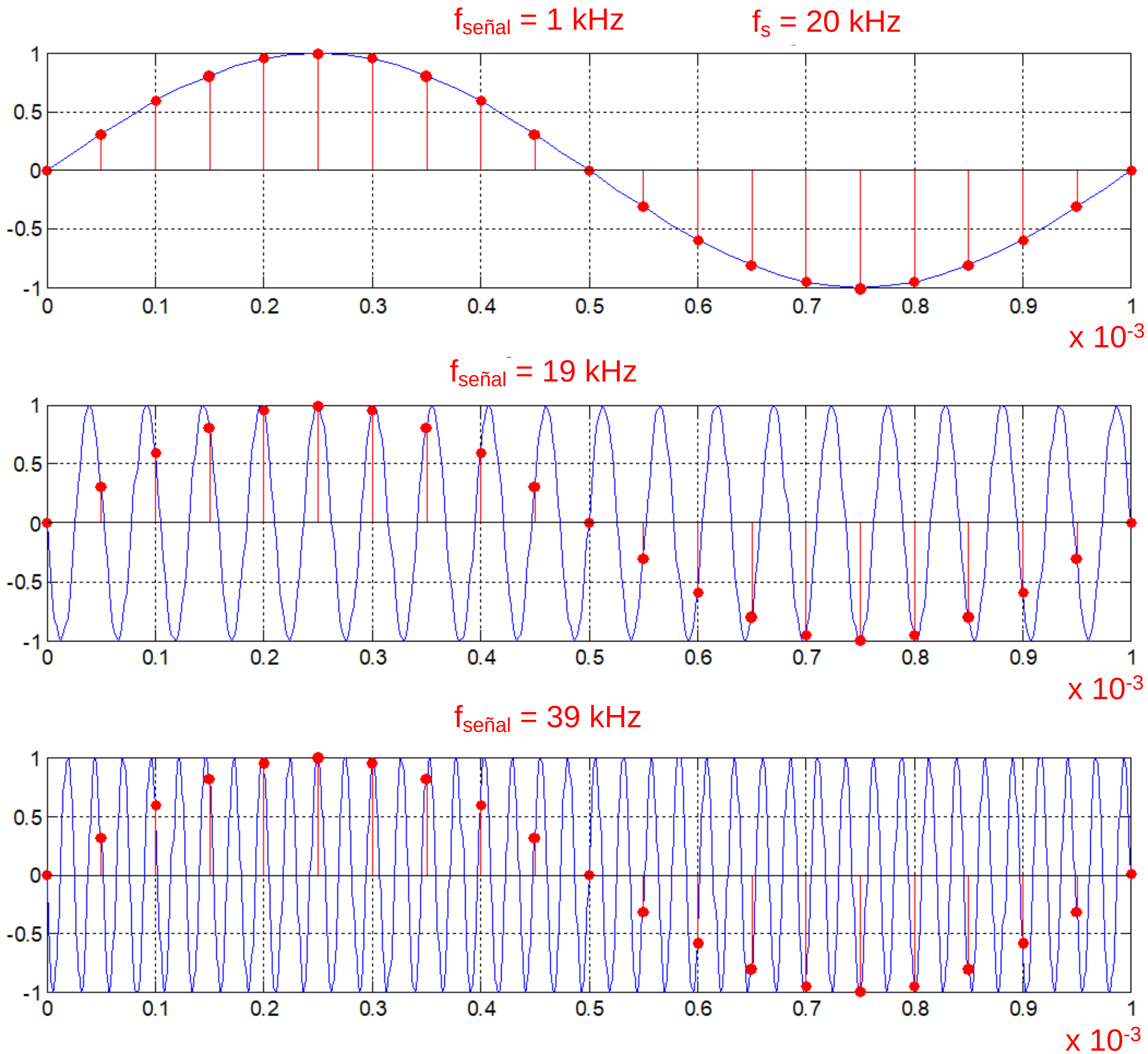
Espectro de la señal analógica



Espectro de la señal muestreada

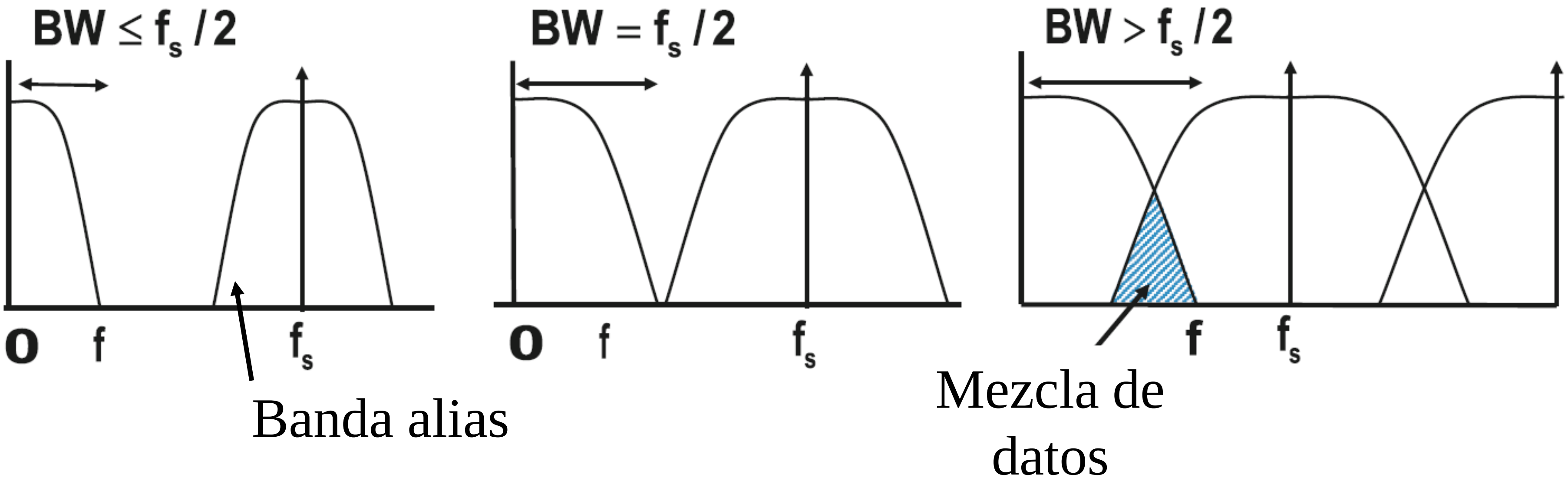


Aliasing: En el dominio del tiempo



Aliasing: En el dominio de la frecuencia

Solapamiento de los espectros al aumentar BW



El solapamiento (*aliasing*) aparece cuando el ancho de banda es mayor que la mitad de la frecuencia de muestreo

Características del control en t. discr.

- La planta es continua pero el regulador trabaja en tiempo discreto.

- La estabilidad del sistema en tiempo discreto y la aproximación del sistema de tiempo continuo a tiempo discreto dependen del periodo de muestreo T.

Casos típicos de control en tiempo discreto:

- Emulación analógica

- Diseño digital directo

Emulación analógica

Primero se realiza el análisis y la síntesis del regulador en tiempo continuo y luego se usa un proceso de discretización usando el periodo de muestreo T.

- La planta se modela en tiempo continuo
- El regulador se diseña en tiempo continuo usando los métodos conocidos.
- El regulador obtenido del proceso anterior se discretiza usando un período de muestreo T y empleando alguna de las aproximaciones conocidas

Aproximaciones para la discretización de reguladores

- Respuesta invariante (al escalón o al impulso)
- Transformación bilineal o de Tustin
- Mapeo de polos y ceros
- Retenedor de orden cero

Diseño digital directo

La planta en tiempo continuo es discretizada, generalmente por el método del retenedor de orden cero, obteniéndose así una aproximación digital y luego se calcula o sintetiza un compensador digital.

- La planta se modela en tiempo continuo
- La planta es discretizada usando el periodo de muestreo T y un método de aproximación de los antes enumerados.
- El regulador se calcula o sintetiza directamente en tiempo discreto usando cualquiera de los métodos siguientes:

Métodos de diseño digital directo

- El lugar de las raíces
- Realimentación de estado
- Respuesta de frecuencia o gráficas de Bode (a través de una transformación bilineal al plano W)
- Respuesta de orden n con cancelación de polos
- Dead-Beat

Discretización de sistemas descritos por ecuaciones diferenciales

Discretización de la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dt} + ay(t) = bu(t) \quad ; a, b = cte$$

Se sustituye en la ecuación anterior $t = kT$ para k = 0, 1, 2 ...

y se despeja $\frac{dy}{dt}$ para obtener:

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=kT} = \left.\left(-ay(t)+bu(t)\right)\right|_{t=kT}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=kT} = -ay(kT)+bu(kT)$$

Se aproxima la derivada $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=KT}$ por el método de Euler para una función *y(t)* continua.

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=KT} = \frac{y((k+1)T)-y(kT)}{T}$$

La cual es una buena aproximación si el periodo *T* es pequeño.

$$\frac{y((k+1)T) - y(kT)}{T} = -ay(kT) + bu(kT)$$

Se multiplica a ambos lados por *T* y se simplifica el resultado escribiendo únicamente *k* en lugar de *kT*:

$$y(kT) = y(k) \text{ y } u(kT) = u(k)$$

y se obtiene:

$$y(k+1) = -aT \cdot y(k) + bT \cdot u(k) + y(k)$$

Sustituyendo una vez más $k-1 \rightarrow k$:

$$y(k) = (1-aT)y(k-1) + bT \cdot u(k-1)$$

Ecuación de diferencias correspondiente a la ecuación diferencial de primer orden.

Comportamiento de un sistema discreto de primer orden.

Los valores discretos y(k) = y(kT) de la solución de y(t) pueden ser calculados resolviendo la ecuación de diferencias.

Primero se calcula la solución homogénea: $u(k) = 0 \quad \forall k$ por recursión:

$$k = 1 \qquad y(1) = (1 - aT)\,y(0)$$

$$k = 2 \qquad y(2) = (1 - aT)\,y(1) = (1 - aT)\left[(1 - aT)\,y(0)\right]$$

$$y(2) = (1 - aT)^2\,y(0)$$

$$k = 3 \qquad y(3) = (1 - aT)\,y(2) = (1 - aT)^3\,y(0)$$

$$y(k) = (1 - aT)^K\,y(0)\,; \quad k = 0,\ 1,\ 2\ \ldots$$

Comparación de nuestra aprox. con la solución continua

$$y(t) = e^{-at} y(0) \; ; \quad t \geq 0$$

Sustituyendo $t = kT$:

$$y(kT) = e^{-akT} y(0) \qquad k = 0,\ 1,\ 2\ \ldots$$

$$y(k) = \left(e^{-aT}\right)^{k} y(0) \qquad k = 0,\ 1,\ 2\ \ldots$$

Desarrollando e^{-aT} por una serie:

$$e^{-aT} = 1 - \frac{aT}{1!} + \frac{a^2T^2}{2!} - \frac{a^3T^3}{3!} + \ldots$$

La solución exacta

Sustituyendo obtenemos

$$y(k) = \left[1 - aT + \frac{a^2T^2}{2!} - \frac{a^3T^3}{3!} + \ldots\right]^K y(0)\ ; \qquad k = 0,\ 1,\ 2\ \ldots$$

Si $|aT| << 1$ entonces, las potencias de *aT* serán mucho menores que *(1-aT)* y por lo tanto se puede aproximar la solución a:

$$y(k) = (1 - aT)^K y(0)$$

La cual es una buena aproximación a la solución exacta si $|aT| << 1$, y coincide con la solución encontrada antes.

Satisfacción de las condiciones

Para cumplir la condición $|aT| << 1$ hacemos que $T << \left|\frac{1}{a}\right|$ con lo que se puede escoger el periodo de muestreo como:

$$T \leq \frac{1}{10} \cdot \left|\frac{1}{a}\right|$$

Donde ***a*** representa el polo de lazo cerrado

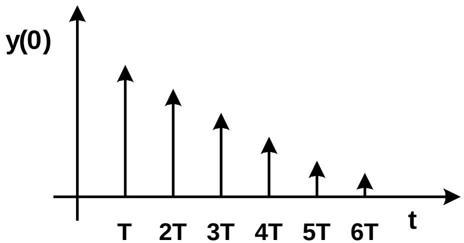
Se puede también utilizar la siguiente recomendación:

$$f_s = \frac{1}{T} \geq 20 \cdot BW$$

Donde BW es el ancho de banda de lazo cerrado del sistema

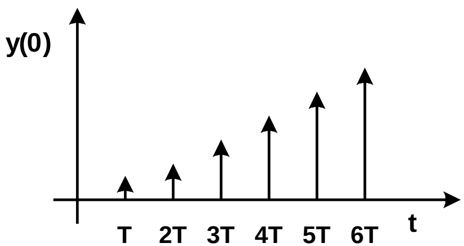
La solución completa obtenida por recursión, es:

$$y(k) = (1 - aT)^k y(0) + \sum_{i=1}^{k} \left[(1 - aT)^{k-i} bT \cdot u(i-1) \right]$$



$$0 < (1 - aT) < 1$$

Sucesión de valores de salida *y(kT)* con 0 < (1-*aT*) < 1



$$(1 - aT) > 1$$

Sucesión de valores de salida *y(kT)* con (1-*aT*) > 1

Resultados

Se observa que la respuesta natural de *y(kT)* se amortigua al aumentar el valor de *k* cuando $0 < (1\text{-}aT) < 1$ y vemos que la salida crece sin límite al aumentar el valor de *k* cuando $(1\text{-}aT) > 1$.

De la ecuación de diferencias se puede concluir que el valor $(1\text{-}aT)$ es la raíz de la ecuación de diferencias de primer orden. También se puede observar que el valor de esta raíz depende no sólo del coeficiente ***a*** de la ecuación diferencial; sino además del periodo de muestreo *T*.

¿Cómo es la forma de la salida cuando $(1-aT)$ es negativo para los casos en que su magnitud es menor que uno o mayor que uno?

En conclusión, si las magnitudes de las raíces de la ecuación de diferencias son todas menores que 1 el sistema discreto es estable y la estabilidad se ve afectada por el valor escogido para el periodo de muestreo *T*.

Sistemas de orden superior en el dominio del tiempo discreto

Sistema en tiempo continuo

Sea la ecuación diferencial

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_q \frac{d^q u}{dt^q} + b_{q-1} \frac{d^{q-1} u}{dt^{q-1}} + \cdots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u$$

A la cual le corresponde el siguiente modelo SISO en variables de estado:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot u \\ y &= \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{x} + d \cdot u \end{aligned}$$

Sistema en tiempo discreto

Sea la ecuación de diferencias

$$a_n y(k-n) + \cdots + a_1 y(k-1) + a_0 y(k) = b_q u(k-q) + \cdots + b_1 (k-1) + b_0 u(k)$$

A la cual corresponde el modelo SISO en variables de estado

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A_d} \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{B_d} \cdot u(k)$$
$$y(k) = \mathbf{c}_d^T \cdot \mathbf{x}(k) + d_{\mathbf{d}} \cdot u(k)$$

Note que de nuevo se ha omitido el periodo T ya que es el mismo para todos los términos.

Derivación del modelo en tiempo discreto a partir del modelo en tiempo continuo

Con la condición de que la entrada se mantenga constante durante la totalidad del tiempo T:

$$u(t) = u(kT)\,; \quad \text{para } kT \leq t < (k+1)T \quad \forall\ k \in N$$

Se desea encontrar las matrices y vectores $\mathbf{A}_d$, $\mathbf{B}_d$, $\mathbf{c}_d$ y d_d ($\mathbf{C}_d$ y $\mathbf{D}_d$ para MIMO)

Se parte de la ecuación de movimiento para el sistema en variables de estado, el cual es evaluado en $t = kT$.

$$\mathbf{x}(t) = \left[e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\cdot u(\tau)d\tau \right]\Bigg|_{t=kT}$$

$$\mathbf{x}(kT) = e^{\mathbf{A}kT}\mathbf{x}(0) + \int_0^{kT} e^{\mathbf{A}(kT-\tau)}\mathbf{B}\cdot u(\tau)d\tau$$

para el tiempo *(k+1)T* se tiene:

$$\mathbf{x}((k+1)T) = e^{\mathbf{A}(k+1)T}\mathbf{x}(0) + \int_0^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}((k+1)T-\tau)}\mathbf{B}\cdot u(\tau)d\tau$$

si se descompone la parte correspondiente a *kT* y a *T*

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}T}\mathbf{e}^{\mathbf{A}kT}\mathbf{x}(0) + \int_0^{kT}\mathbf{e}^{\mathbf{A}((k+1)T-\tau)}\mathbf{B}\cdot u(\tau)d\tau +$$

$$+\int_{kT}^{(k+1)T}\mathbf{e}^{\mathbf{A}((k+1)T-\tau)}\mathbf{B}\cdot u(\tau)d\tau$$

Se observa que la parte en paréntesis rectangulares corresponde a *x(kT)*.

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}T}\left\lfloor \mathbf{e}^{\mathbf{A}kT}\mathbf{x}(0) + \int_0^{kT} e^{\mathbf{A}(kT-\tau)}\mathbf{B}\cdot u(\tau)d\tau \right\rfloor + \int_{kT}^{(k+1)T}\mathbf{e}^{\mathbf{A}((k+1)T-\tau)}\mathbf{B}\cdot u(\tau)d\tau$$

Si se aplica la condición de que *u(t)* es constante durante el intervalo *T* segundos $kT \le t < (k+1)T$, esto es *u(t)* = *u(kT)*, entonces se puede sacar a *u(t)* de la integral.

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}T} x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} \mathbf{e}^{\mathbf{A}((k+1)T-\tau)} \mathbf{B} \cdot d\tau \cdot u(kT)$$

Realizando una sustitución de variable en la integral, *(k+1)T - τ = p*, con *dτ = -dp* y cambiando los límites de integración se tiene:

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(kT) - \int_{T}^{0} \mathbf{e}^{\mathbf{A}p} \mathbf{B} \cdot dp \cdot u(kT)$$

Si además se aplica el signo a la integral invirtiendo los límites de integración se obtiene:

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(kT) + \int_{0}^{T} \mathbf{e}^{\mathbf{A}p} \cdot \mathbf{B} \cdot dp \cdot u(kT)$$

simplificando la escritura haciendo $kT = k$ y sustituyendo la variable p de nuevo por τ tenemos (escrito para un sistema MIMO):

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(k) + \int_0^T \mathbf{e}^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\cdot d\tau \cdot \mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\cdot \mathbf{u}(k)$$

donde

$$\mathbf{A}_d = \mathbf{e}^{\mathbf{A}T}$$

$$\mathbf{B}_d = \int_0^T \mathbf{e}^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\cdot d\tau = \mathbf{A}^{-1}\cdot\left[\mathbf{A}_d - \mathbf{I}\right]\cdot \mathbf{B}$$; si **A** es NO singular

$$\mathbf{C}_d = \mathbf{C} \qquad \mathbf{c}_d = \mathbf{c}^T \qquad \mathbf{D}_d = \mathbf{D} \qquad d_d = d$$

Ejemplo: Convertir a tiempo discreto el siguiente modelo (SISO) de segundo orden

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{k_f}{M} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}(t)$$

Donde x_1 es la posición, x_2 es la velocidad y *u(t)* es la fuerza de manejo o de frenado aplicada a un carro. Calculamos las matrices discretizadas $\mathbf{A}_d$ y $\mathbf{B}_d$ para este sistema; para lo cual es necesario primero calcular la matriz de transición de estados $\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$ para la matriz **A** dada; para ello usamos la definición $\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} = L^{-1}\{\Phi(s)\}$

$$\mathbf{\Phi}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s + \dfrac{k_f}{M} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s\left(s + \dfrac{k_f}{M}\right)} \begin{bmatrix} s + \dfrac{k_f}{M} & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

Así

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{M}{k_f}\left[1 - e^{\left(-\frac{k_f t}{M}\right)}\right] \\ 0 & e^{\left(-\frac{k_f t}{M}\right)} \end{bmatrix}$$

Entonces, sustituyendo $t = T$

$$\mathbf{A}_d = \mathbf{e}^{\mathbf{A}T} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{M}{k_f}\left[1 - e^{\left(-\frac{k_f T}{M}\right)}\right] \\ 0 & e^{\left(-\frac{k_f T}{M}\right)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_d = \int_0^T \mathbf{e}^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\cdot d\tau = \begin{bmatrix} \displaystyle\int_0^T \frac{1}{k_f}\left[1 - e^{\left(-\frac{k_f}{M}\tau\right)}\right] d\tau \\ \displaystyle\int_0^T \frac{1}{M} e^{\left(-\frac{k_f}{M}\tau\right)} d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{T}{k_f} - \dfrac{M}{k_f{}^2}\left[1 - e^{\left(-\frac{k_f}{M}T\right)}\right] \\ \dfrac{1}{k_f}\left[1 - e^{\left(-\frac{k_f}{M}T\right)}\right] \end{bmatrix}$$

Nótese que ya que la matriz **A** original en tiempo continuo es singular, y se ha realizado el proceso de encontrar la matriz $\mathbf{B}_d$ resolviendo directamente la integral.

Solución numérica

Si M = 1, k_f = 0.1 y T = 0.1 entonces las matrices en tiempo discreto son:

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 1 & 0.0995 \\ 0 & 0.9900 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 0.0050 \\ 0.0995 \end{bmatrix}$$

El modelo en variables de estado para el sistema en tiempo discreto es:

$$\begin{bmatrix} x_1(0.1(k+1)) \\ x_2(0.1(k+1)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.0995 \\ 0 & 0.9900 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0.1k) \\ x_2(0.1k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0050 \\ 0.0995 \end{bmatrix} \cdot u(0.1k)$$

$$y(0.1k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(0.1k) \\ x_2(0.1k) \end{bmatrix}$$

El comportamiento de los sistemas de orden superior en tiempo discreto

Sea el sistema SISO en variables de estado en tiempo discreto con $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d \cdot u(k)$$
$$y(k) = \mathbf{C}_d \cdot x(k) + \mathbf{D}_d \cdot u(k)$$

Se evalúa para valores de k desde 0 en adelante

$$k=0 \quad \mathbf{x}(1) = \mathbf{A}_d \cdot \mathbf{x}(0) + \mathbf{B}_d \cdot u(0)$$
$$k=1 \quad \mathbf{x}(2) = \mathbf{A}_d \cdot \mathbf{x}(1) + \mathbf{B}_d \cdot u(1) = \mathbf{A}_d{}^2 \cdot \mathbf{x}(0) + \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d \cdot u(0) + \mathbf{B}_d \cdot u(1)$$
$$k=2 \quad \mathbf{x}(3) = \mathbf{A}_d \cdot \mathbf{x}(2) + \mathbf{B}_d \cdot u(2) = \mathbf{A}_d{}^3 \cdot \mathbf{x}(0) + \mathbf{A}_d{}^2 \mathbf{B}_d \cdot u(0) + \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d \cdot u(1) + \mathbf{B}_d \cdot u(2)$$
$$\vdots$$

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}_d{}^k \cdot \mathbf{x}(0) + \mathbf{A}_d{}^{k-1}\mathbf{B}_d \cdot u(0) + \cdots + \mathbf{A}_d\mathbf{B}_d \cdot u(k-2) + \mathbf{B}_d \cdot u(k-1)$$

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}_d{}^k \cdot \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{A}_d{}^{k-j-1}\mathbf{B}_d \cdot u(j)$$

donde

$\mathbf{\Phi}(k) = \mathbf{A}_d{}^k$: Matriz de transición de estados discreta

por lo que

$$y(k) = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{\Phi}(k) \cdot \mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} c^T \cdot \mathbf{\Phi}(k-j-1) \cdot \mathbf{B}_d \cdot u(j) + d \cdot u(k)$$

Conclusión

Tenemos que la respuesta total está formada por la respuesta homogénea y la respuesta forzada.

Respuesta homogénea: $\mathbf{c}^T \cdot \mathbf{\Phi}(k) \cdot \mathbf{x}(0)$

Respuesta forzada: $\sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{\Phi}(k-j-1) \cdot \mathbf{B}_d \cdot u(j) + d \cdot u(k)$

Representación de sistemas en t. discr. en el dominio de la frecuencia

Propiedades de la transformada Z

Linealidad

$$Z\{a \cdot u(k) + b \cdot v(k)\} = Z\{a \cdot u(k)\} + Z\{b \cdot v(k)\}$$

Si

$$U(z) = Z\{u(k)\} \text{ y } V(z) = Z\{v(k)\}$$

entonces:

$$Z\{a \cdot u(k) + b \cdot v(k)\} = a \cdot U(z) + b \cdot V(z)$$

Desplazamiento a la derecha en el tiempo

$$x(k) \leftrightarrow X(z)$$
$$x(k-1) \leftrightarrow z^{-1}X(z) + x(-1)$$
$$x(k-2) \leftrightarrow z^{-2}X(z) + x(-2) + z^{-1}x(-1)$$
$$\vdots$$
$$x(k-q) \leftrightarrow z^{-q}X(z) + x(-q) + z^{-1}x(-q+1) + z^{-2}x(-q+2) + \cdots + z^{-q}x(-1)$$

Si $x(k) = 0 \ \forall$ k = -1, -2 , -3, ... $-q$

entonces:

$$x(k-q) \leftrightarrow z^{-q}X(z)$$

Desplazamiento a la izquierda en el tiempo

$$x(k) \leftrightarrow X(z)$$

$$x(k+1) \leftrightarrow z \cdot X(z) - x(0) \cdot z$$

$$x(k+2) \leftrightarrow z^2 X(z) - x(0) \cdot z^2 - x(1) \cdot z$$

$$\vdots$$

$$x(k+q) \leftrightarrow z^q X(z) - x(0) z^q - x(1) \cdot z^{q-1} - \cdots - x(q-1) \cdot z$$

Teorema del valor inicial

$$x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)$$

$$x(1) = \lim_{z \to \infty} \left[z \cdot X(z) - z \cdot x(0) \right]$$

$$\vdots$$

$$x(q) = \lim_{z \to \infty} \left[z^q X(z) - z^q x(0) - z^{q-1} x(1) - \cdots - z \cdot x(q-1) \right]$$

Teorema del valor final

$$\lim_{k \to \infty} x(k) = \lim_{z \to 1} (z-1) X(z)$$

Relación entre la transformada Z y la transformada de Laplace

$$z = e^{sT}$$

Función tr. del modelo en variables de estado en tiempo discreto (MIMO)

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_d \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_d \cdot \mathbf{u}(k)$$
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}_d \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_d \cdot \mathbf{u}(k)$$

Transformando a Z con las condiciones iniciales iguales a cero, $\mathbf{x}(0) = 0$

$$z \cdot \mathbf{X}(z) = \mathbf{A}_d \cdot \mathbf{X}(z) + \mathbf{B}_d \cdot \mathrm{U}(z)$$

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}_d \cdot \mathbf{X}(z) + \mathbf{D}_d \cdot \mathrm{U}(z)$$

Agrupando

$$z \cdot \mathbf{X}(z) - \mathbf{A}_d \cdot \mathbf{X}(z) = \mathbf{B}_d \cdot \mathbf{U}(z)$$

$$\left(z \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}_d\right)\mathbf{X}(z) = \mathbf{B}_d \cdot \mathbf{U}(z)$$

Premultiplicando por $\left(z \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}_d\right)^{-1}$

$$\mathbf{X}(z) = \left(z \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}_d\right)^{-1}\mathbf{B}_d \cdot \mathbf{U}(z)$$

Sustituyendo $\mathbf{X}(z)$ en la ecuación para $\mathbf{Y}(z)$.

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}_d \cdot \left(z \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}_d\right)^{-1}\mathbf{B}_d \cdot \mathbf{U}(z) + \mathbf{D}_d \cdot \mathbf{U}(z)$$

Agrupando

$$\mathbf{Y}(z) = \left[\mathbf{C}_d \cdot \left(z \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}_d\right)^{-1} \mathbf{B}_d + \mathbf{D}_d\right] \cdot \mathbf{U}(z)$$

y finalmente se obtiene la función de transferencia **G***(z)*.

$$\mathbf{G}(z) = \frac{\mathbf{Y}(z)}{\mathbf{U}(z)} = \mathbf{C}_d \cdot \left(z \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}_d\right)^{-1} \mathbf{B}_d + \mathbf{D}_d$$