Análisis de una fundición

Se desea analizar la producción de hierro de una fundición. El esquema de funcionamiento se muestra en la figura 1.

La fundición tiene como características:

- El proceso tiene un rendimiento del 80%.
- Los residuos son tratados para convertirse en materia prima.
- Cada día se tratan los residuos del día anterior.
- Existe un suministro diario de materia prima (hierro).
- Cada día se deteriora un 25% de la materia prima por corrosión.

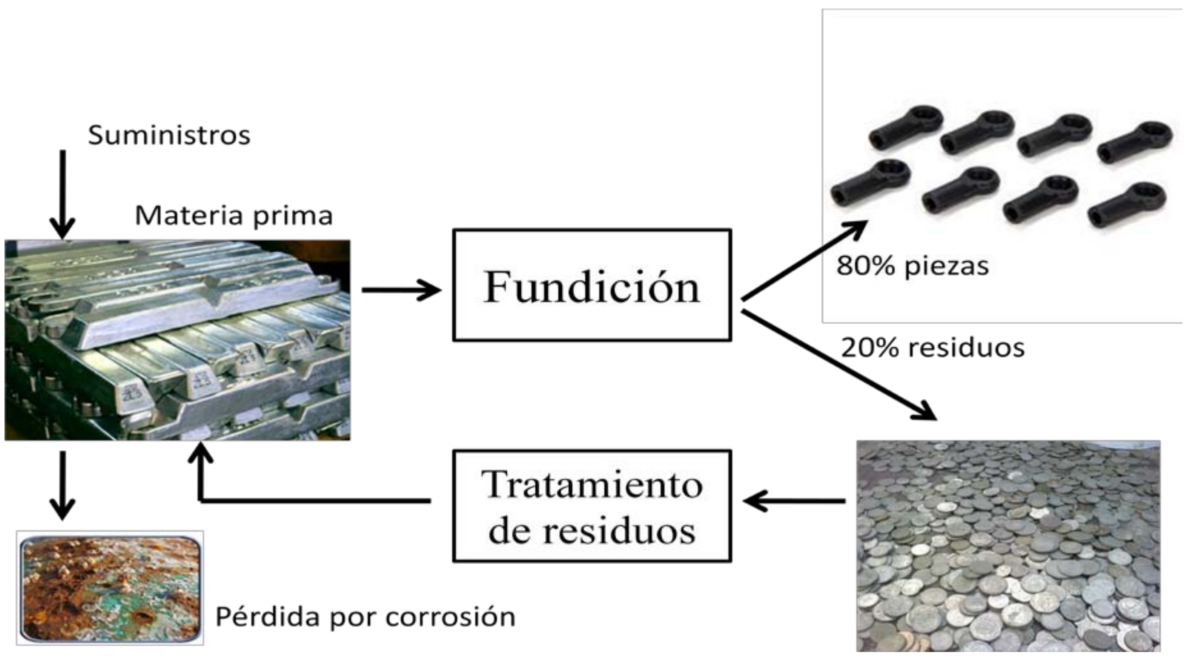

Figura 1: Proceso de la fundición

Considerando las siguientes variables:

f_k: Hierro fundido el día k (en kg.)

p_k: Piezas fabricadas el día k (en kg.)

r_k: Residuos tratados el día k (producidos el día k-1)

h_k: Materia prima (*stock* de hierro) al final del día k (en kg.)

s_k: Suministro de hierro el día k (en kg.)

Se pide:

1. Hallar las ecuaciones de diferencias que describen la producción de hierro de la fundición
2. Linealizar, en caso de ser necesario, dichas ecuaciones en torno a un punto de equilibrio dado por un suministro de 500kg y una fabricación de 300kg. de piezas al día.
3. Representar el diagrama de bloques teniendo como entradas el suministro de material, s_k, y la demanda, p_k, de piezas fabricadas y como salida la materia en *stock*.
4. Calcular la función de transferencia entre el *stock* de hierro y el suministro diario de material en torno al punto de equilibrio.
5. Calcular el valor que tomará en régimen permanente el nivel de hierro en *stock*, si el suministro diario aumenta en 20kg en torno al punto de equilibrio.
6. Calcular la secuencia de valores que tomará el nivel de hierro en stock durante los cinco primeros días después de que el suministro de hierro se reduzca en 10kg en torno al punto de equilibrio.

EIS/eis
2011

Solución:

1. Las ecuaciones de diferencias que se deducen a partir de la descripción del problema son:

$$h_k = s_k + r_k + h_{k-1} - f_k - 0.25h_k$$

$$r_k = 0.2f_{k-1}$$

$$p_k = 0.8f_k$$

2. Calculamos el punto de equilibrio con $s_0 = 500kg$ y $p_0 = 300kg$. Bajo la condición de equilibrio o régimen estacionario, no hay cambios; por lo tanto los valores en el instante k serán los mismos que para el instante *k-1*.

$$h_k = h_{k-1} = h_0$$

$$r_0 = 0.2f_0$$

$$p_0 = 0.8f_0$$

Así en equilibrio se tiene:

$$h_0 = s_0 + r_0 + h_0 - f_0 - 0.25h_0$$

$$0.25h_0 = s_0 + 0.2f_0 - f_0 = s_0 - p_0$$

$$\boxed{\begin{gathered} h_0 = 4(500kg - 300kg) = 800kg \\ f_0 = 1.25p_0 = 375kg \\ r_0 = 0.2f_0 = 75kg \end{gathered}}$$

3. Puesto que las ecuaciones de diferencias son ya lineales, no fue necesario linealizarlas. La transformada Z de estas ecuaciones será:

$$H(z) = S(z) + R(z) + z^{-1}H(z) - F(z) - 0.25H(z)$$

$$(1.25 - z^{-1})H(z) = S(z) + R(z) - F(z)$$

$$H(z) = \frac{z}{(1.25z - 1)}(S(z) + R(z) - F(z))$$

$$R(z) = 0.2z^{-1}F(z)$$

$$P(z) = 0.8F(z)$$

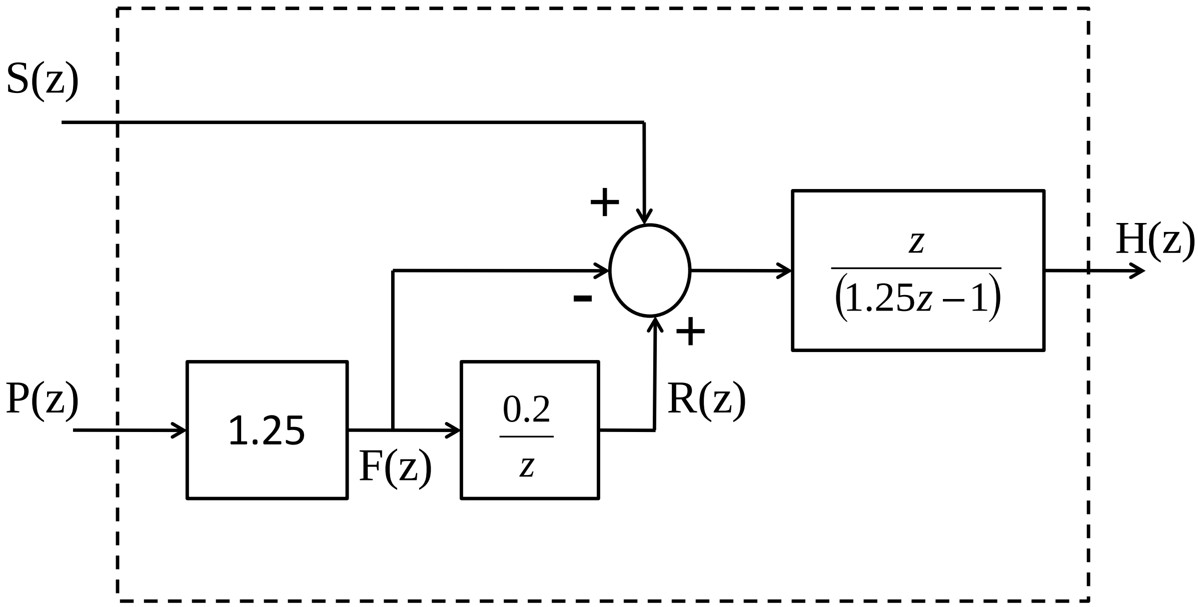

Figura 2: Diagrama de bloques de la fundición

4. Para el cálculo de la función de transferencia entre el *stock* de hierro y el suministro de material, $G(z) = \frac{H(z)}{S(z)}$, alrededor del punto de equilibrio aplicamos superposición y ya que las entradas son constantes, lo que calcularemos será el valor incremental:

$$G(z) = \frac{H(z)}{S(z)} = \frac{z}{(1.25z - 1)}$$

5. El valor del *stock* cambiará incrementalmente, respecto al valor de equilibrio, para un incremento en el suministro de 20kg en:

$$H(z) = G(z)S(z) = \frac{0.8z}{(z - 0.8)} S(z)$$

$$\lim_{k \to \infty} h_k = \lim_{z \to 1} \left[(z - 1) \frac{0.8z}{(z - 0.8)} \frac{20z}{(z - 1)} \right] = 80$$

Dado que es un incremento alrededor del punto de equilibrio encontrado en el punto 2, que es de 800kg, la cantidad de hierro en *stock* será:

$$h_\infty = h_0 + \Delta h = 800kg + 80kg = 880kg$$

6. En este caso el cambio en la entrada es de -10kg, correspondiente a un escalón de -10 unidades. Por lo tanto:

$$H(z) = \frac{z}{(1.25z - 1)} \frac{-10z}{(z - 1)}$$

Para obtener la secuencia de valores tenemos dos caminos: a) calculando la transformada Z inversa b) encontrando la ecuación de diferencias.

a) Calculando la transformada Z inversa por reducción a fracciones parciales simples:

$$h_k = Z^{-1}\left[\frac{z}{(1.25z-1)}\frac{-10z}{(z-1)}\right] = Z^{-1}\left[\frac{-8z^2}{(z-0.8)(z-1)}\right]$$

$$h_k = Z^{-1}\left[\frac{R_1 z}{(z-0.8)} + \frac{R_2 z}{(z-1)}\right] = Z^{-1}\left[\frac{32z}{(z-0.8)} - \frac{40z}{(z-1)}\right]$$

$$h_k = 32 * 0.8^k - 40$$

Tabla 1: *Stock* de hierro en los primeros 5 días después de una reducción de 10kg en el suministro

Día	h_k respecto al equilibrio	h_k total
0	-8.00	792.00
1	-14.40	785.60
2	-19.52	780.48
3	-23.62	776.38
4	-26.89	773.11
5	-29.51	770.49

b) Encontrando la ecuación de diferencias

$$H(z) = \frac{0.8}{(1-0.8z^{-1})}S(z)$$

$$H(z) = 0.8z^{-1}H(z) + 0.8S(z)$$

Transformamos al dominio del tiempo discreto

$$h_k = 0.8h_{k-1} + 0.8s_k$$

Tabla 2: Cambio en el *stock* de hierro en los primeros 5 días después de una reducción de 10kg en el suministro

Día	h_k	h_{k-1}	s_k	h_k total
0	-8.00	0	-10	792.00
1	-14.40	-8.00	-10	785.60
2	-19.52	-14.40	-10	780.48
3	-23.62	-19.52	-10	776.38
4	-26.89	-23.62	-10	773.11
5	-29.51	-26.89	-10	770.49

EIS/eis
2011