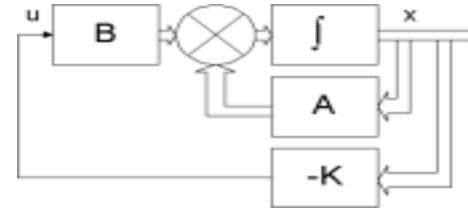


# Control Automático

Control por realimentación de estado

# Contenido



## ■ Controlabilidad

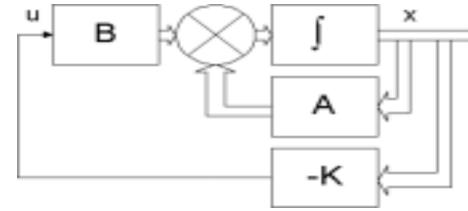
- De estado
- De salida
- En tiempo discreto

## ■ Realimentación de estado

- Cálculo por sustitución directa
- Cálculo por transformación FCC
- Cálculo por la fórmula de Ackerman

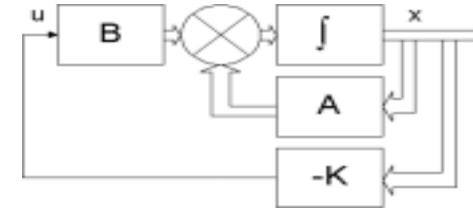
## ■ Ejemplos y ejercicios

# Controlabilidad



- La controlabilidad trata de la existencia de un vector de control que puede causar que el estado del sistema llegue a algún estado arbitrario en un tiempo finito.
- El concepto de controlabilidad es la base para solucionar el problema de la ubicación de polos
- Si el sistema es de estado completamente controlable, entonces es posible seleccionar los polos en lazo cerrado deseados (o las raíces de la ecuación característica)

# Controlabilidad de estado



---

Partimos del sistema

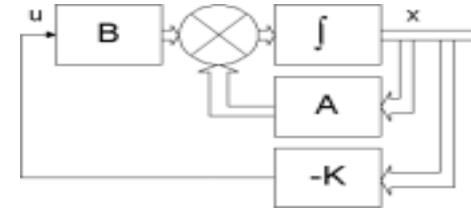
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

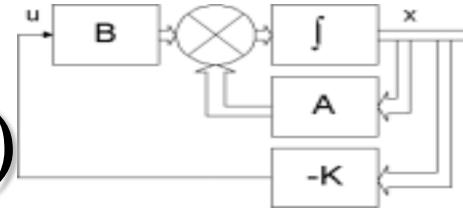
Para que este sistema sea de **estado completamente controlable**, es necesario y suficiente que la matriz de controlabilidad  $\mathbf{M}$  de  $n \times nr$  tenga rango  $n$

$$\mathbf{M} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \cdots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

# Pruebas para la controlabilidad de estado



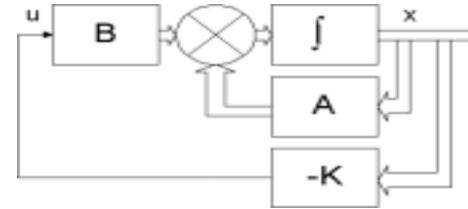
- Si  $\mathbf{M}$  no es cuadrada, se puede formar la matriz  $\mathbf{MM}'$ , que es de  $n \times n$ ; entonces si  $\mathbf{MM}'$  es no singular  $\mathbf{M}$  tiene rango n.
- El par  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$  es completamente controlable si  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  están en la Forma Canónica Controlable o FCC, o son transformables a la Forma Canónica Controlable



# Pruebas para la controlabilidad de estado (2)

- Si los valores propios de  $\mathbf{A}$  son diferentes y  $\mathbf{A}$  está en la Forma Canónica Diagonal el par  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$  es completamente controlable si todos los elementos de  $\mathbf{B}$  no son cero
- Si  $\mathbf{A}$  está en la Forma Canónica de Jordan, el par  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$  es completamente controlable si NO todos los elementos en los renglones de  $\mathbf{B}$  que corresponden al último renglón de cada bloque de Jordan son cero

# Ejemplo 1: Controlabilidad



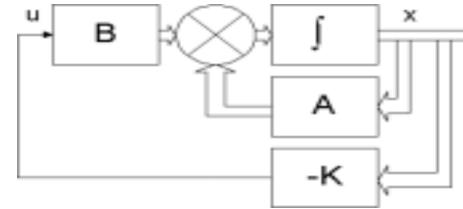
- Sea el sistema descrito por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- La matriz de controlabilidad es

$$\mathbf{M} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Que es singular y por lo tanto el sistema es no controlable.



# Controlabilidad de salida

Sea el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

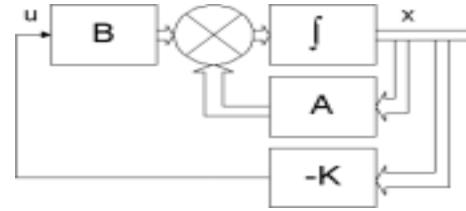
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

El sistema posee controlabilidad de salida completa sí y sólo sí, la matriz de  $m \times (n + 1)r$  posee rango m

$$[\mathbf{D} \quad \mathbf{CB} \quad \mathbf{CAB} \quad \mathbf{CA}^2\mathbf{B} \cdots \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B}]$$

Así, la presencia del término  $\mathbf{Du}(t)$  ayuda a establecer la controlabilidad de la salida.

# Controlabilidad de estado en tiempo discreto



Partimos del sistema

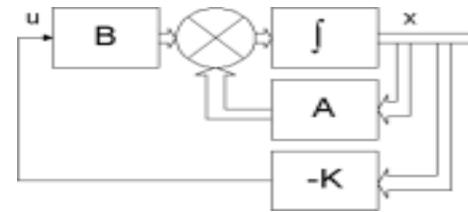
$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}_d \mathbf{u}(kT)$$

$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{D}\mathbf{u}(kT)$$

Para que este sistema sea de **estado completamente controlable**, es necesario y suficiente que la matriz de controlabilidad  $\mathbf{M}$  de  $n \times nr$  tenga rango  $n$

$$\mathbf{M} = [\mathbf{B}_d \quad \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d \quad \mathbf{A}_d^2 \mathbf{B}_d \quad \cdots \quad \mathbf{A}_d^{n-1} \mathbf{B}_d]$$

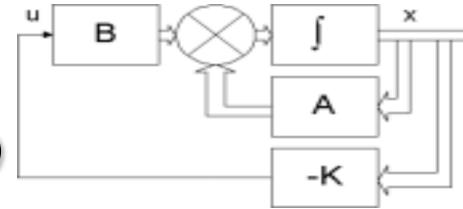
# Ejemplo 2: Controlabilidad en tiempo discreto



## Sistemas completamente controlables

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \\ x_5(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}$$



# Controlabilidad de salida en tiempo discreto

Sea el sistema

$$\mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{A}_d \mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}_d \mathbf{u}(kT)$$

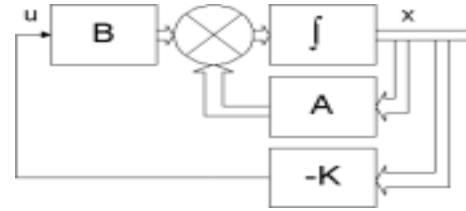
$$\mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{D}\mathbf{u}(kT)$$

El sistema posee controlabilidad de salida completa sí y sólo sí, la matriz de  $m \times (n + 1)^r$  posee rango m

$$[\mathbf{D} \quad \mathbf{CB}_d \quad \mathbf{CA}_d\mathbf{B}_d \cdots \mathbf{CA}_d^{n-1}\mathbf{B}_d]$$

Así, la presencia de la matriz **D** en la ecuación de salida siempre ayuda a establecer la controlabilidad de la salida.

# Controlabilidad de estado completo a partir de $G(s)$ o $G(z)$

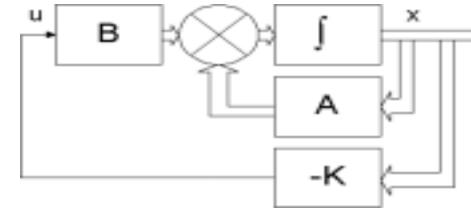


- La condición de controlabilidad necesaria es que no haya cancelación polo-cero en la función de transferencia o matrices de transferencia; ya que si se produce cancelación el sistema no se podrá controlar en la dirección del modo cancelado.

$$G(z) = \frac{(z + 0.5)}{(z + 0.5)(z + 0.8)}$$

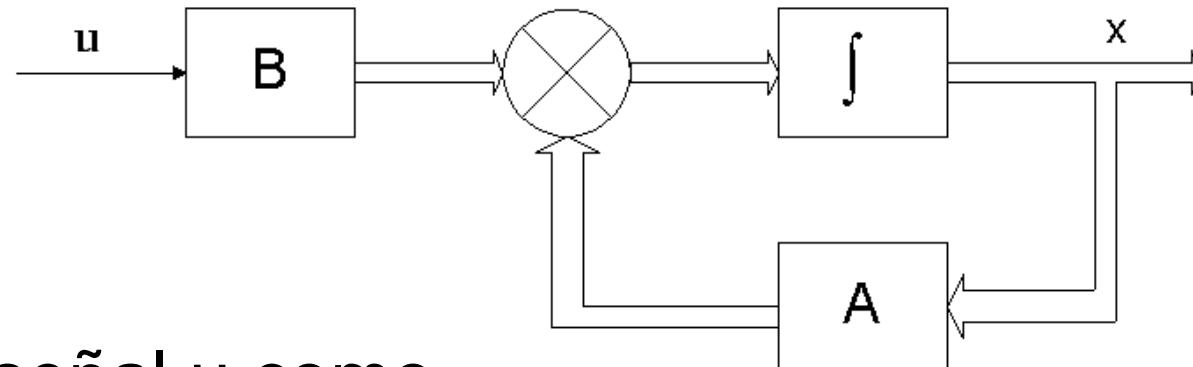
- Debido a la cancelación del polo  $(z+0.5)$ , el sistema no es de estado completamente controlable.

# Realimentación de estado



Tenemos un sistema descrito por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$



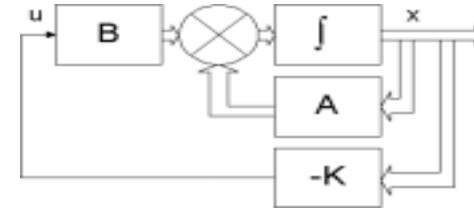
Hacemos la señal  $\mathbf{u}$  como

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$$

Sustituyendo obtenemos

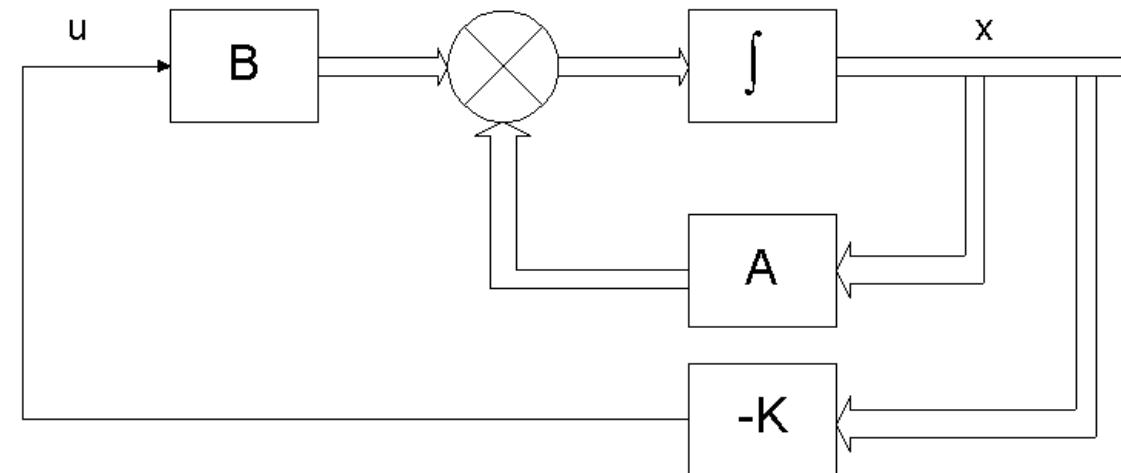
$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t)$$

# Realimentación de estado



Puede observarse que el nuevo sistema posee una nueva matriz

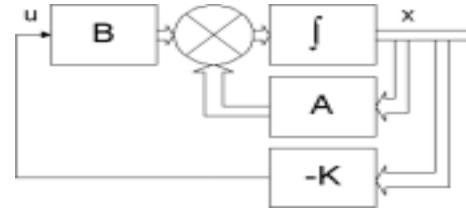
$$\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})$$



Que posee nuevos valores propios  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$

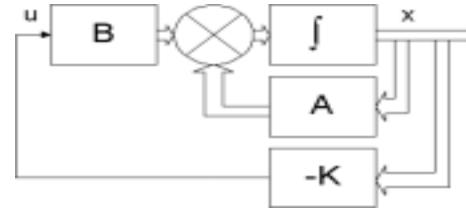
$$\det(\lambda\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})) = 0$$

# Condición necesaria y suficiente para la ubicación arbitraria de polos



- La ubicación arbitraria de los polos para un determinado sistema, es posible si y solo si, el sistema tiene estado completo controlable, es decir, la matriz  $\mathbf{M}$  tiene rango n (tiene inversa en un sistema SISO).
- Los valores propios de la matriz  $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$  (que se designan  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ ) son los polos de lazo cerrado deseados

# Ejemplo 3: Ubicación de polos por tres métodos



Considere el sistema continuo

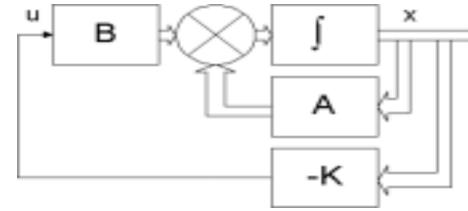
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = [1 \ 0] \mathbf{x}$$

**Requisitos:** se desea colocar arbitrariamente los polos de lazo cerrado en  $\lambda = -1.8 \pm j 2.4$  es decir, los valores propios de la matriz  $(A - BK)$  deben ser:

$$\mu_1 = -1.8 + j 2.4$$

$$\mu_2 = -1.8 - j 2.4$$

# Ejemplo 3: Prueba de aptitud, controlabilidad



Verificamos la que la matriz controlabilidad  $\mathbf{M}$  tiene rango 2; por lo que es controlable

$$\mathbf{M} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

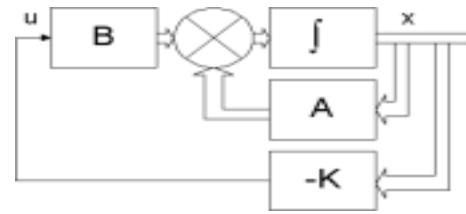
La ecuación característica del sistema es

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -20.6 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 20.6 = 0$$

Y las raíces características son  $\lambda = \pm 4.539$ .

El sistema es inestable !

# Ejemplo 3.1: Solución 1 por sustitución directa de K

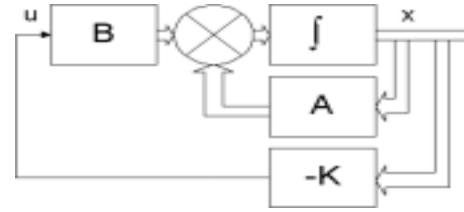


Por sustitución directa de  $K = [k_1, k_2]$  en el polinomio característico deseado

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{vmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -20.6 + k_1 & \lambda + k_2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + k_2\lambda + (k_1 - 20.6)$$

Comparando con  $(\lambda - \mu_1)(\lambda - \mu_2) = \lambda^2 + 3.6\lambda + 9$

$$\mathbf{K} = [ 29.6 \quad 3.6 ]$$



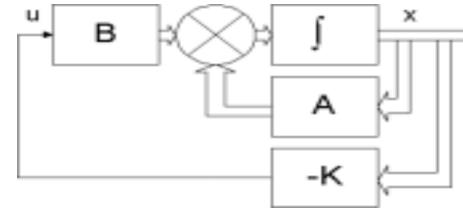
# Transformación a FCC

- Se define  $\hat{\mathbf{x}}$  como un nuevo vector de estado

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}$$

- Si el sistema tiene estado completo controlable, es transformable a la forma FCC y entonces la matriz  $\mathbf{T}$  tiene inversa.
- Utilizando la matriz  $\mathbf{T}$  se puede transformar el sistema a la forma ***canónica controlable***:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}$$



# Cálculo de la matriz T

Sea  $\mathbf{T}$  la matriz de transformación, con  $\mathbf{M}$  la matriz de controlabilidad

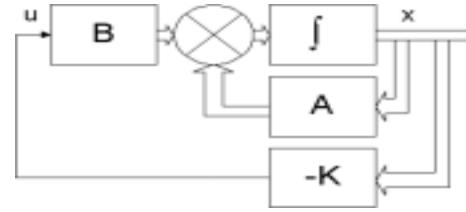
$$\mathbf{T} = \mathbf{MW}$$

Y con

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \bullet & \bullet & \bullet & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \bullet & \bullet & \bullet & 1 & 0 \\ \bullet & \bullet & & & & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & & & & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & & & & \bullet & \bullet \\ a_{n-1} & 1 & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde los  $a_i$  son los coeficientes del polinomio característico

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$



# Ecuación característica

La ecuación característica del sistema realimentado se encuentra como

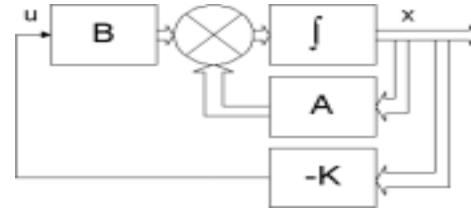
$$|\lambda I - (A - BK)| = |T^{-1}(\lambda I - (A - BK))T| = |\lambda I - T^{-1}AT + T^{-1}BKT| = 0$$

Donde **KT** se define como la matriz de coeficientes

$$KT = [\delta_0 \quad \delta_1 \quad \cdots \quad \delta_{n-1}]$$

Sustituyendo **T<sup>-1</sup>AT**, **T<sup>-1</sup>B** y **KT** en

$$|\lambda I - T^{-1}AT + T^{-1}BKT| = 0$$

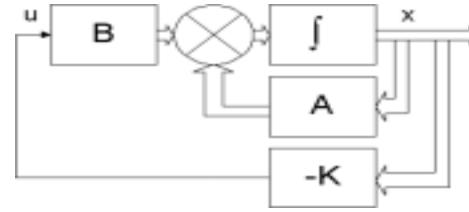


# Ecuación característica (2)

Obtenemos

$$\begin{aligned}
 & \left| \lambda \mathbf{I} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\delta_0 \quad \delta_1 \quad \cdots \quad \delta_{n-1}] \right| = \\
 & = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \lambda & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ (a_0 + \delta_0) & (a_1 + \delta_1) & (a_2 + \delta_2) & \cdots & \lambda + (a_{n-1} + \delta_{n-1}) \end{vmatrix} =
 \end{aligned}$$

$$= \lambda^n + (a_{n-1} + \delta_{n-1})\lambda^{n-1} + \cdots + (a_1 + \delta_1)\lambda + (a_0 + \delta_0) = 0$$



# La matriz K

Igualando los coeficientes del polinomio característico de  $(A-BK)$  con los coeficientes de potencias iguales de  $\lambda$  obtenidos de los polos deseados

$$(\lambda - \mu_1)(\lambda - \mu_2) \cdots (\lambda - \mu_n) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0$$

$$\lambda^n + (a_{n-1} + \delta_{n-1})\lambda^{n-1} + \cdots + (a_1 + \delta_1)\lambda + (a_0 + \delta_0) = 0$$

$$a_0 + \delta_0 = \alpha_0 \Rightarrow \delta_0 = \alpha_0 - a_0$$

$$a_1 + \delta_1 = \alpha_1 \Rightarrow \delta_1 = \alpha_1 - a_1$$

$\vdots$

$$a_{n-1} + \delta_{n-1} = \alpha_{n-1} \Rightarrow \delta_{n-1} = \alpha_{n-1} - a_{n-1}$$

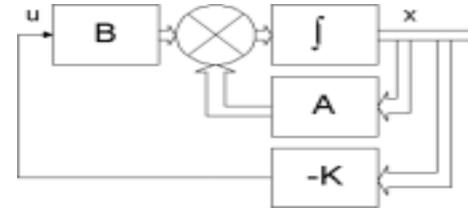
$$\mathbf{KT} = [\delta_0 \quad \delta_1 \quad \cdots \quad \delta_{n-1}]$$

$$\mathbf{K} = [\delta_0 \quad \delta_1 \quad \cdots \quad \delta_{n-1}] \mathbf{T}^{-1}$$

Finalmente:

$$\mathbf{K} = [(\alpha_0 - a_0) \quad (\alpha_1 - a_1) \quad \cdots \quad (\alpha_{n-1} - a_{n-1})] \mathbf{T}^{-1}$$

# Pasos para el diseño por ubicación de polos por FCC



1. Verifique la condición de controlabilidad del sistema con **M**.
2. A partir del polinomio característico de la matriz **A**,

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

determine los valores de  $a_i$

3. Determine la matriz de transformación **T** que transforma la ecuación de estado del sistema a la forma canónica controlable (si ya está en forma FCC, entonces **T** = **I**).
4. Utilizando los valores propios  $\mu_i$  deseados, halle el polinomio característico correspondiente

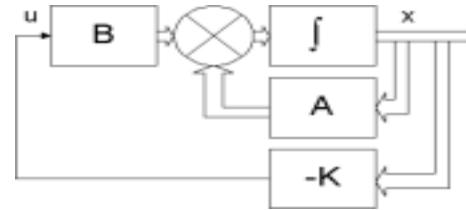
$$(\lambda - \mu_1)(\lambda - \mu_2) \cdots (\lambda - \mu_n) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

determine los valores de  $\alpha_i$

5. Determine la matriz **K** de ganancia de realimentación de estado

$$\mathbf{K} = [(\alpha_0 - a_0) \ (\alpha_1 - a_1) \ \cdots \ (\alpha_{n-1} - a_{n-1})] \mathbf{T}^{-1}$$

## Ejemplo 3.2: Solución 2 por transformación a FCC



Ya que el sistema esta en forma FCC,  $T = I$

Se tiene de la ecuación característica que

$$a_1 = 0, \quad a_0 = -20.6$$

De los valores de  $\mu_i$  deseados

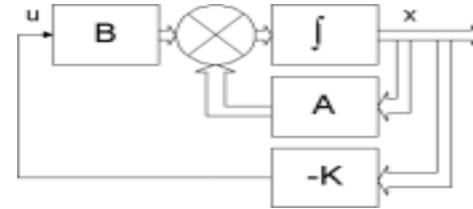
$$(\lambda - \mu_1)(\lambda - \mu_2) = (\lambda + 1.8 - j2.4)(\lambda + 1.8 + j2.4) =$$

$$\lambda^2 + 3.6\lambda + 9$$

$$\alpha_1 = 3.6, \quad \alpha_0 = 9$$



# Ejemplo 3: Solución por transformación a FCC (cont.)

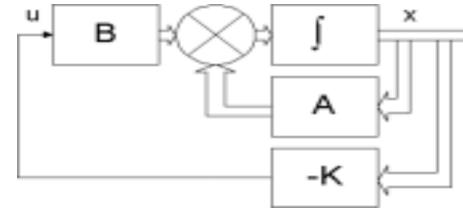


Por lo tanto

$$\mathbf{K} = [ (\alpha_0 - a_0) \quad (\alpha_1 - a_1) ] \mathbf{T}^{-1}$$

$$\mathbf{K} = [ (9 + 20.6) \quad (3.6 - 0) ] \mathbf{I}^{-1}$$

$$\mathbf{K} = [ 29.6 \quad 3.6 ]$$



# Fórmula de Ackerman

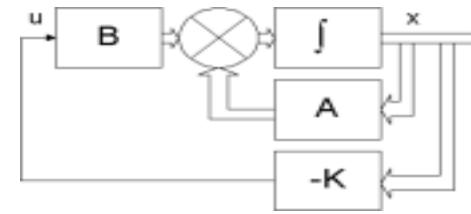
- Para sistemas **SISO**, existe una forma sistemática de calcular la matriz **K**

$$\mathbf{K} = [0 \ 0 \ \dots \ 1] \cdot \mathbf{M}^{-1} \varphi(\mathbf{A})$$

$$\mathbf{K} = [0 \ 0 \ \dots \ 1] \cdot [\mathbf{B} \ \ \mathbf{AB} \ \ \dots \ \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]^{-1} \varphi(\mathbf{A})$$

- $\varphi(\mathbf{A})$**  es el polinomio característico del sistema realimentado, evaluado en la matriz **A** del sistema original.
- Si el sistema es completamente controlable, la matriz de controlabilidad **M** tiene rango **n** y es no singular.

# Ejemplo 3.3: Solución 3 usando la fórmula de Ackerman



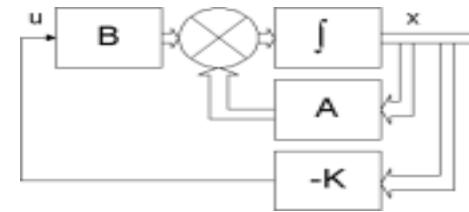
Considere el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20.6 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = [1 \ 0] \mathbf{x}$$

Se desea colocar arbitrariamente los polos de lazo cerrado en la ubicación  $\lambda = -1.8 \pm j 2.4$  es decir, los valores propios de la matriz  $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})$  deben ser:

$$\mu_1 = -1.8 + j 2.4$$
$$\mu_2 = -1.8 - j 2.4$$

## Ejemplo 3.3: Cálculo de M y prueba de controlabilidad



El sistema es controlable; pues M tiene rango 2

$$M = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

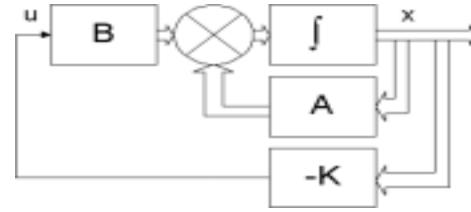
Tiene el polinomio característico

$$|\lambda I - A| = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -20.6 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 20.6$$

con polos en  $\lambda = \pm 4.538$

El polinomio característico deseado es:

$$\phi(\lambda) = \lambda^2 + 3.6\lambda + 9$$



# Ejemplo 3.3: cálculo de $\varphi(\mathbf{A})$

Calculamos  $\varphi(\mathbf{A})$  con  $\phi(\lambda) = \lambda^2 + 3.6\lambda + 9$

$$\varphi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 + 3.6\mathbf{A} + 9\mathbf{I}$$

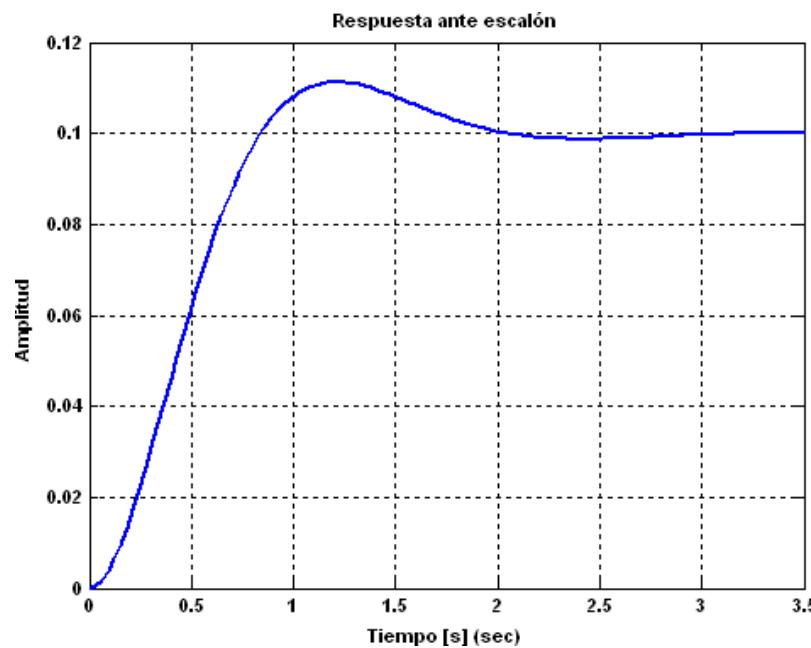
$$\varphi(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 20.6 & 0 \\ 0 & 20.6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3.6 \\ 74.16 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 29.6 & 3.6 \\ 74.16 & 29.6 \end{bmatrix}$$

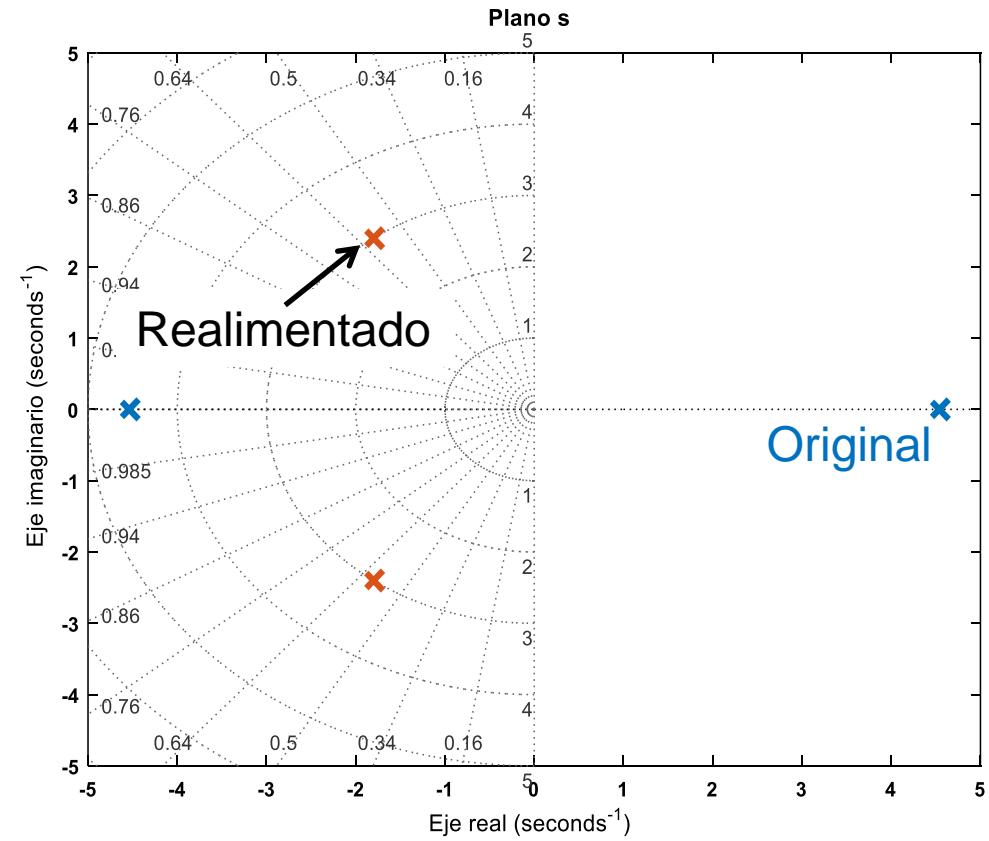
Finalmente

$$\mathbf{K} = [0 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 29.6 & 3.6 \\ 74.16 & 29.6 \end{bmatrix} = [29.6 \ 3.6]$$

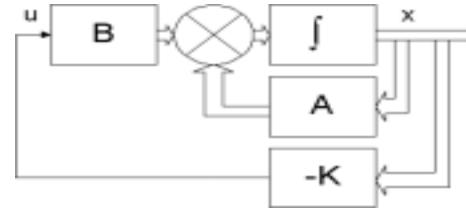
# Ejemplo 3: Resultados



Respuesta realimentada  
con  $u = -Kx$

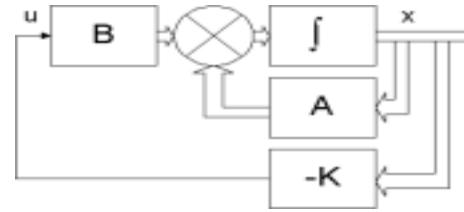


# Ejemplo 3: Análisis de resultados



- Se puede apreciar que la matriz  $K$  puede obtenerse por varios métodos y que el resultado esperado para los valores de los polos de lazo cerrado se cumple en todos los casos
- También se puede observar que la realimentación de estado, de la forma planteada, no corrige el error de estado estacionario

# Ejemplo 4: Usando la fórmula de Ackerman



El sistema discreto

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1.65 & -0.675 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 \quad 0.825] \mathbf{x}(k) \quad T = 0.01s$$

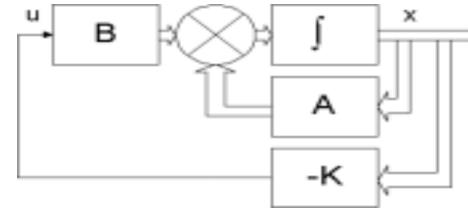
Tiene el polinomio característico (en  $z$ )

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{bmatrix} z-1.65 & 0.675 \\ -1 & z \end{bmatrix} = z^2 - 1.65z + 0.675$$

con polos en  $z = 0.9$  y  $z = 0.75$  y

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1.65 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Ejemplo 4: continuación



- Los polos de lazo cerrado deben estar en

$$\mu_{1,2} = 0.25 \pm j0.25$$

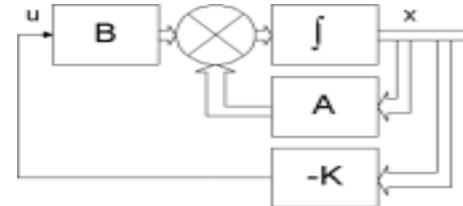
- Y el error de estado estacionario debe ser cero ante una entrada escalón normalizada

El polinomio característico deseado es

$$\phi(z) = (z - \mu_1)(z - \mu_2) = z^2 - 0.5z + 0.125$$

Después de **comprobar** la controlabilidad

$$\mathbf{K} = [0 \quad 1] \cdot [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}]^{-1} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{A})$$



# Ejemplo 4: cálculo de $\varphi(A)$

Calculamos  $\varphi(A)$

$$\varphi(A) = A^2 - 0.5A + 0.125I$$

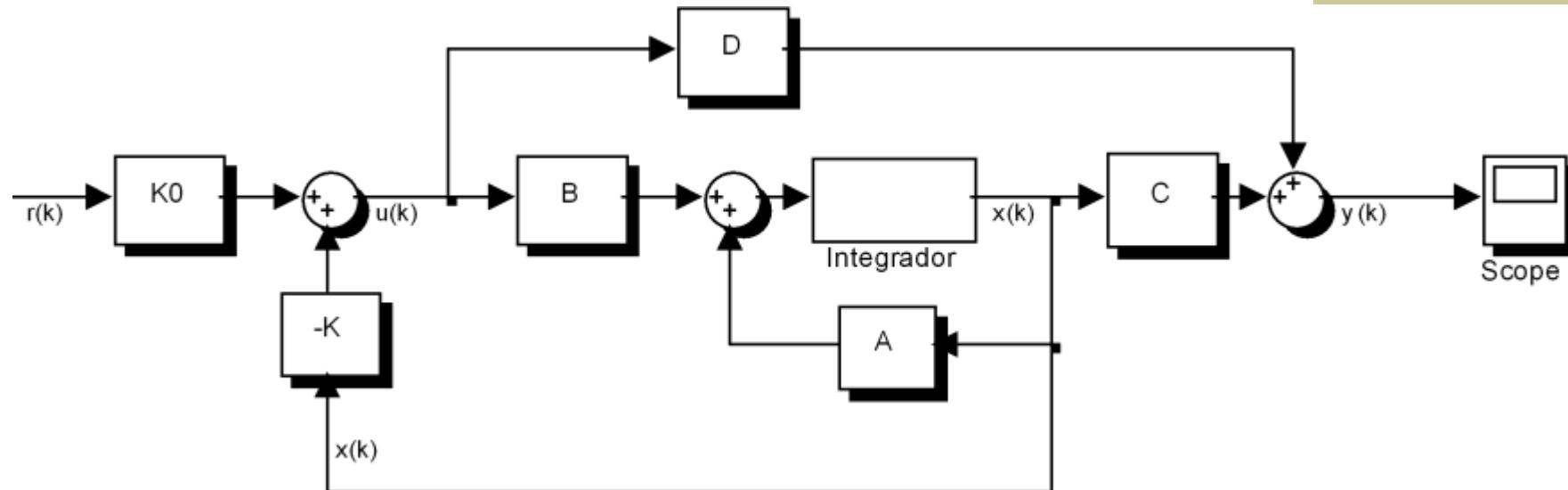
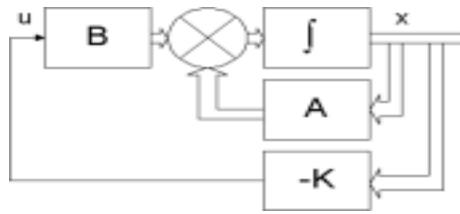
$$\varphi(A) = \begin{bmatrix} 2.0475 & -1.1138 \\ 1.65 & -0.675 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.825 & -0.3375 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.125 & 0 \\ 0 & 0.125 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(A) = \begin{bmatrix} 1.34 & -0.77625 \\ 1.15 & -0.55 \end{bmatrix}$$

Finalmente

$$K = [0 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1.65 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1.34 & -0.77625 \\ 1.15 & -0.55 \end{bmatrix} = [1.15 \ -0.55]$$

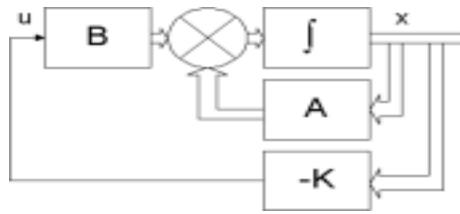
# Ejemplo 5: El sistema realimentado no homogéneo



Con  $T = 0.01$ , donde  $r(k)$  es una entrada forzada y  $K_0$  es una ganancia que se calcula para que el error de estado estacionario sea cero con

$$u(k) = K_0 r(k) - Kx(k)$$

# Ejemplo 5: El sistema realimentado no homogéneo (2)



## Las matrices $\tilde{\mathbf{A}}$ y $\tilde{\mathbf{B}}$

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{Ax}(k) + \mathbf{Bu}(k) = \mathbf{Ax}(k) + \mathbf{B}(K_0 r(k) - \mathbf{Kx}(k))$$

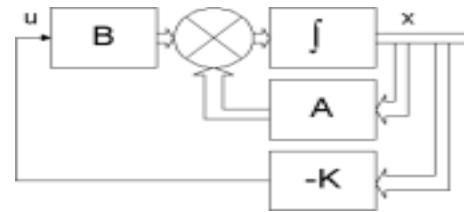
$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x}(k) + \mathbf{BK}_0 r(k)$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}(k) + \tilde{\mathbf{B}}r(k)$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 1.65 & -0.675 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [1.15 \quad -0.55] = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.125 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{BK}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^* K_0 = \begin{bmatrix} K_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Ejemplo 5: Haciendo cero el error de estado estacionario



Encontramos la función de transferencia

$$G(z) = C(z\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}})^{-1}\tilde{\mathbf{B}} = [1 \quad 0.825] \begin{bmatrix} z-0.5 & 0.125 \\ -1 & z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} K_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

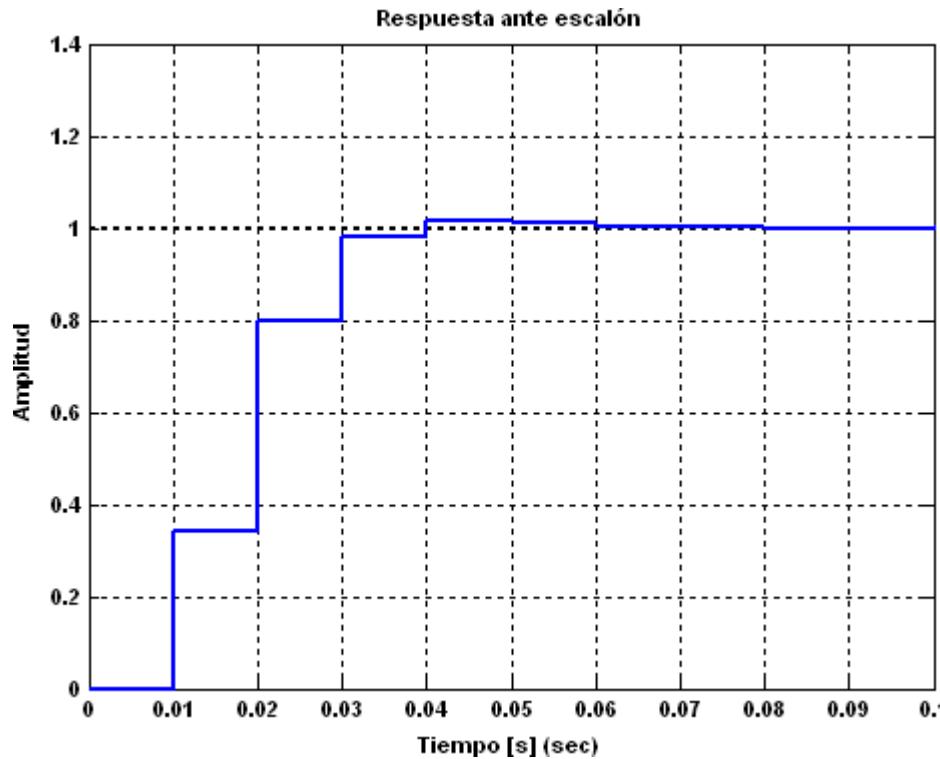
$$G(z) = K_0 \cdot \frac{(z + 0.825)}{z^2 - 0.5z + 0.125}$$

G(z) representa  
al sistema  
(estable) de lazo  
cerrado

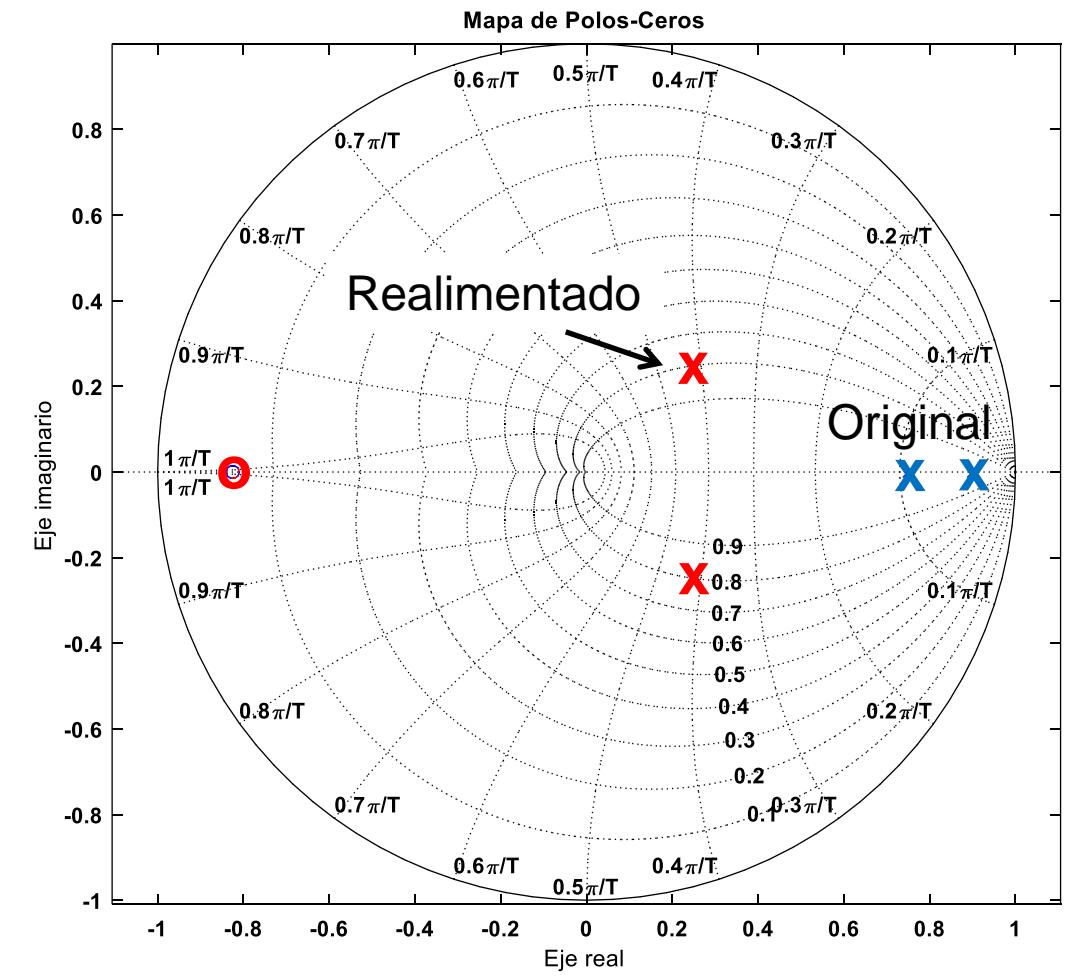
Para una entrada escalón normalizada, con el teorema del valor final, ( $z \rightarrow 1$ ), calculamos  $K_0$

$$K_0 = 0.625/1.825 = 0.3425$$

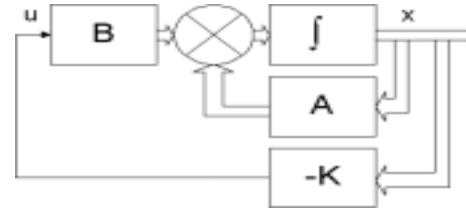
# Ejemplo 5: Resultados



Respuesta compensada  
con  $u = -Kx$  y  $K_0 = 0.3425$

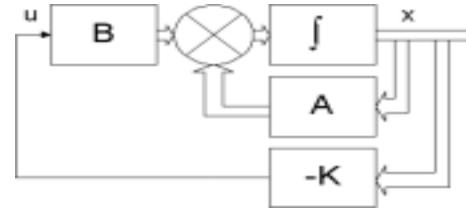


# Ejemplo 5: Análisis de resultados



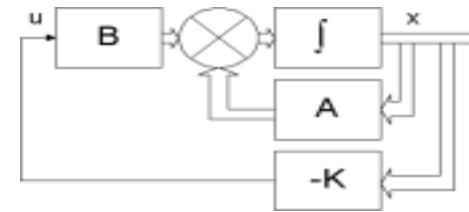
- Los polos de lazo cerrado se encuentran en el sitio deseado.
- El error de estado estacionario es cero; pero requiere conocer exactamente la planta, y ante cualquier cambio, debe reajustarse la constante  $K_0$ .
  - El método usado **no es recomendable para eliminar completamente el error de estado estacionario**, es mejor aplicar el método de la realimentación de estado integral.
- Para este ejemplo, el tiempo de muestreo parece muy grande para la ubicación deseada de los polos.
  - Se está exigiendo al sistema ser demasiado rápido.

# Resumen



- El proceso de diseño inicia con la selección de la ubicación deseada para los polos a partir de algún tipo de requisitos, típicamente de comportamiento en el dominio del tiempo.
- La controlabilidad es un requisito ***sine qua non*** para la ubicación de polos por realimentación de estado.
- Existen varios métodos de cálculo para la matriz ganancia constante **K**.
- La corrección del error de estado estacionario debe hacerse por aparte de la ubicación de polos.
- El método es aplicable a sistemas en tiempo continuo y tiempo discreto.

# Ejercicio 1: Resuelva usando la fórmula de Ackerman



Considere el sistema continuo

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -2 & 0.5 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [0 \ 0 \ 1] \mathbf{x}\end{aligned}$$

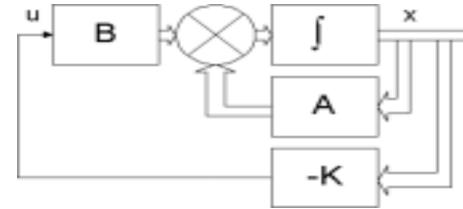
se desea colocar arbitrariamente los polos de lazo cerrado en:

$$\mu_1 = -1 + j$$

$$\mu_2 = -1 - j$$

$$\mu_3 = -5$$

Solución:  $\mathbf{K} = [10 \ 13 \ 12]$



# Ejercicio 1: Solución B (1)

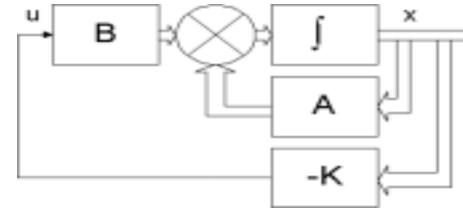
- El polinomio deseado es:

$$\varphi(s) = s^3 + 7s^2 + 12s + 10$$

- El polinomio deseado evaluado en A

$$\varphi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^3 + 7 * \mathbf{A}^2 + 12 * \mathbf{A} + 10 * \mathbf{I}$$

$$\varphi(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 11 & 6.5 & 3 \\ 6 & 17 & 10 \\ 10 & 13 & 12 \end{bmatrix}$$



# Ejercicio 1: Solución B (2)

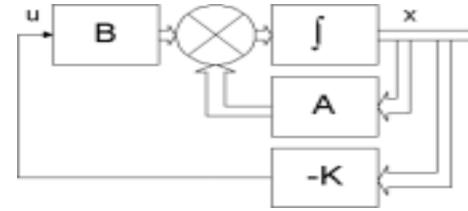
- La matriz de controlabilidad M es:

$$M = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 0.5 & -1 & 2.5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Finalmente la matriz de realimentación K:

$$K = [0 \quad 0 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 0.5 & -1 & 2.5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 11 & 6.5 & 3 \\ 6 & 17 & 10 \\ 10 & 13 & 12 \end{bmatrix} = [10 \quad 13 \quad 12]$$

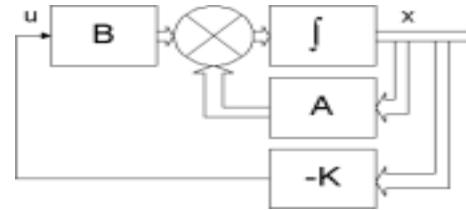
# Ejercicios



$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.9319 & -0.02414 \\ 0.03863 & 0.99951 \end{bmatrix} \cdot x(k) + \begin{bmatrix} 0.01931 \\ 0.0003908 \end{bmatrix} \cdot u$$
$$y(k) = [0 \quad 1.25] \cdot x(k)$$

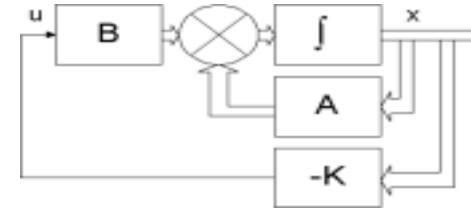
1. Encuentre si el sistema es completamente controlable,
2. Encuentre la matriz  $\mathbf{K}$  que ubica los polos de lazo cerrado en  $\mu = 0.6 +/- j0.25$
3. A) ¿Qué es respuesta **dead beat**?  
B) Encuentre la matriz  $\mathbf{K}$  si el sistema controlado debe tener respuesta **dead-beat**

# Tarea



- Investigue el método para calcular  $K$  para sistemas MIMO.  
¿Cuál función de Matlab realiza este cálculo?
- Investigue qué es la realimentación de estado integral
- Investigue que es un observador de estado

# Referencias



- 
- [1] Ogata, Katsuhiko. „**Ingeniería de Control Moderna**“, Pearson, Prentice Hall, 2003, 4<sup>a</sup> Ed., Madrid.
- [2] Ogata, Katsuhiko. „**Sistemas de Control en tiempo discreto**“, Prentice Hall, 1996, 2<sup>a</sup> Ed., México.