Control automático

LQR y LQG

Agenda

- Control óptimo
- Realimentación de estados óptima LQ
- Selección de Q y R
- Ejemplo de diseño LQR: Heli2DoF
- Ejemplo de diseño: Rechazo de perturbaciones con LQR
- Estimación de estado óptima LQE
- Control lineal cuadrático gaussiano LQG

Optimización de parámetros del regulador (1)

- Si las exigencias al lazo regulado son especificadas a través de una función de calidad; entonces, puede formularse el problema de regulación como un problema de optimización.
- Así, es deseable, por ejemplo, que el error promedio en el tiempo sea muy pequeño; por lo que las desviaciones grandes serán penalizadas más fuertemente que las desviaciones pequeñas.

$$I = \int_0^{\infty} \left| e^2(t) \right| dt$$

- Al valor de **I** se le conoce como **Área cuadrática de regulación**
- Depende, dada una planta y elegida la estructura del regulador, de los parámetros utilizados para el regulador.
- El objetivo del procedimiento de diseño es hacer lo más pequeño posible el valor del criterio de calidad.

Control óptimo

El método de diseño por realimentación de estados y observador, es una herramienta fundamental en el control de sistemas en el espacio de estados. No obstante, no siempre es útil debido a que:

- El traslado de las especificaciones de diseño no siempre es directo, particularmente para sistemas complejos. Podemos traducir esto en la pregunta: ¿Cuál es la mejor configuración de los polos para las especificaciones dadas?

- En sistemas MIMO las ganancias de realimentación de estados que logran una configuración de polos dada no es única. Entonces, ¿Cuál es la mejor K para una configuración de polos dada?

- Los valores propios del observador deberían escogerse de 3 a 5 veces más rápidos que los del sistema de lazo cerrado. ¿Hay algún otro criterio disponible para ayudar a decidirse por una configuración o por otra?

Control óptimo

¿Qué significa óptimo?

- Realizar un trabajo o tarea en la mejor forma posible

Antes de iniciar con una búsqueda de la solución óptima:

- Debe definirse el trabajo o tarea.
- Debe establecerse una escala matemática para cuantificar lo que catalogamos como mejor.
- Descartar las otras alternativas posibles.

Es importante que los cuantificadores sean claros y consistentes, de otra manera, aplicar el concepto de control óptimo a un sistema no tiene sentido real.

Control óptimo

- El sistema dinámico a ser controlado se describe en la forma de variables de estado, en tiempo continuo por,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

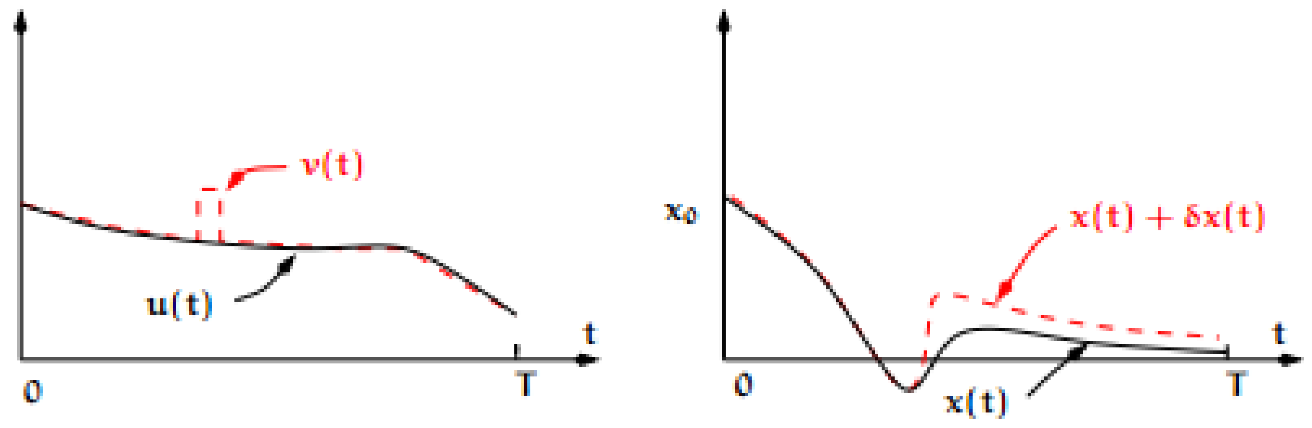
- O en tiempo discreto por,

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A_d}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B_d}u(k) \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}_d\mathbf{x}(k)$$

- Supondremos que todos los estados están disponibles para medidas, o que el sistema es observable.

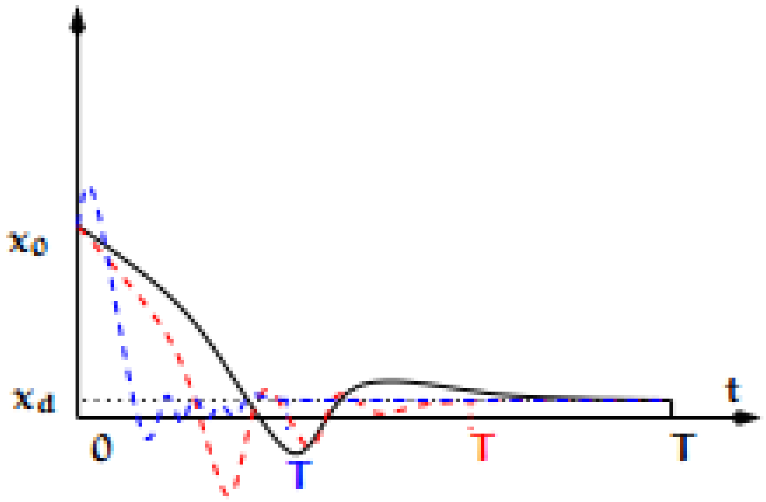
Control óptimo

- El criterio de desempeño, denominado J, es una medida de calidad del desempeño del sistema. Depende de la aplicación, intentaremos minimizar o maximizar el criterio de desempeño seleccionando la entrada de control.
- Para cada u(t) posible (capaz de realizar la tarea deseada satisfaciendo las restricciones del sistema) se le asocia una posible trayectoria del sistema x(t).



Control óptimo: Criterio 1

- Un criterio de diseño común es el tiempo mínimo, con el cual buscamos que el sistema de control u(t) produzca la trayectoria más rápida para obtener el estado final deseado.

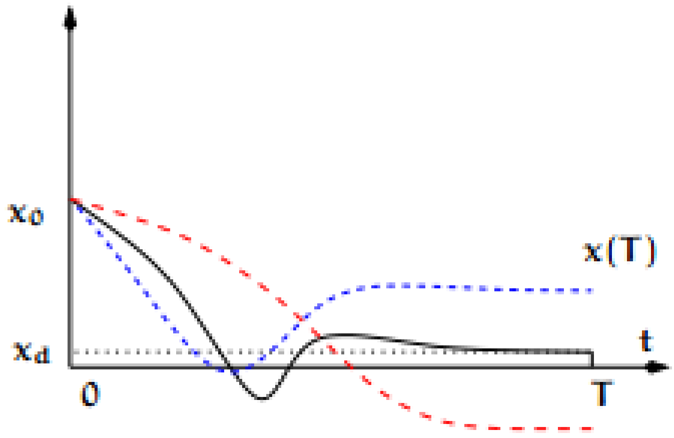


- En este caso el criterio de desempeño corresponde a $J = T$

Control óptimo: Criterio 2

- Otro criterio de desempeño podría ser el error final al obtener el estado final deseado en un tiempo T,

$$J = ||x(T)||^2$$



https://youtu.be/E_RDCFOlJx4

Realimentación de estados óptima LQ (LQR)

- Considere el sistema de espacio de estados

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t); \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n; \ \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^p$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

- Y el criterio de desempeño

$$J = \int_0^\infty [\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)]dt$$

- Donde Q es no definida negativa y R es definida positiva. Entonces el control óptimo que minimiza (J) está dado por la ley lineal de realimentación de estado

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t); \quad \mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}$$

- Y donde P es la única solución positiva de la matriz definida por las ecuaciones de Riccati (EAR),

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0$$

Selección de las matrices Q y R

1) La forma más simple: **Matrices identidad**

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I};\ \mathbf{R} = \rho\mathbf{I}$$

Varíe $\boldsymbol{\rho}$ para obtener una buena respuesta. Al aumentar un elemento diagonal de **R** se penaliza el actuador correspondiente.

2) Peso a la salida: Suponga que $z = \mathbf{C}\mathbf{x}$ es la salida que se desea mantener pequeña, suponga que el par (**A**, **C**) es observable, entonces utilice:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{C}^T\mathbf{C}; \quad \mathbf{R} = \rho\mathbf{I}$$

3) **Prueba y error** (con los pesos): Al aumentar un elemento diagonal de **Q** se penaliza ese estado. Al aumentar un elemento diagonal de **R** se penaliza el actuador correspondiente.

Selección de las matrices Q y R

4) Pesos diagonales

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 & & \\ & \ddots & \\ & & q_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R} = \rho \begin{bmatrix} r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & r_p \end{bmatrix}$$

Se escoge $\mathbf{q}_i$ para dar el mismo esfuerzo por la misma "maldad“. Por ejemplo si x_1 es la distancia en metros y x_3 es un ángulo en radianes:

- Si 1 cm de error es aceptable → $q_1 = \left(\frac{1}{0.01}\right)^2$; esto es $q_1 x_1^2 = 1$ cuando $\mathrm{x}_1 = 0.01\, m$
- Si $\frac{1}{60}\, rad$ de error es aceptable → $q_3 = (60)^2$; esto es $q_3 x_3^2 = 1$ cuando $\mathrm{x}_3 = \frac{1}{60} rad$

Proceda de forma similar para $\mathbf{r}_i$. Use ρ para ajustar el balance entre entrada/salida.

Ejemplo de diseño RE LQR: Heli2DoF

Calcule la matriz **K** de realimentación de estado por el método LQR, para un helicóptero 2DoF cuyas matrices para el modelo MIMO en variables de estado se muestran:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -9.2751 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.4955 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2.3667 & 0.0790 \\ 0.2410 & 0.7913 \end{bmatrix}$$

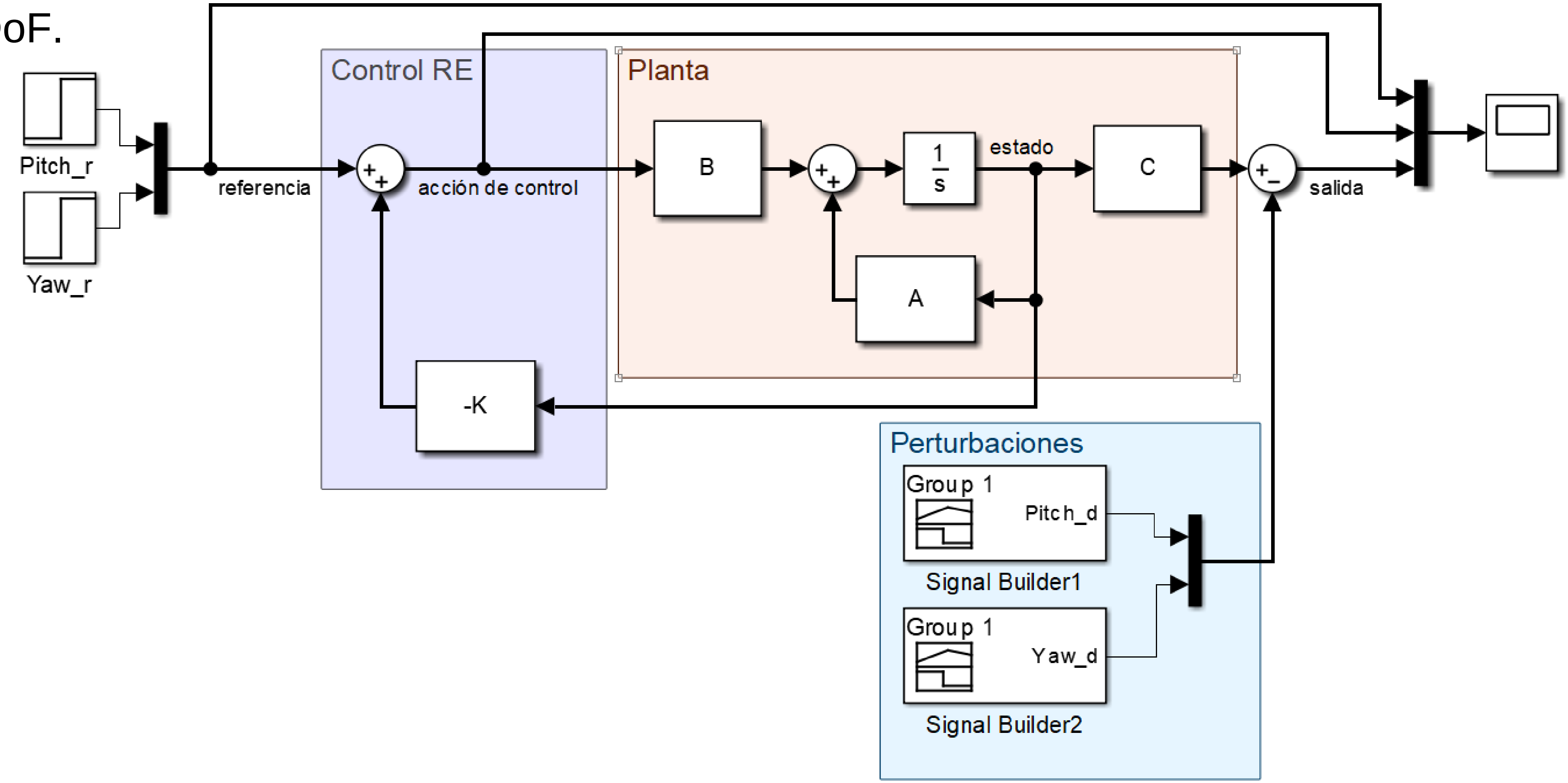
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El orden de las variables de estado para realimentación de estado es:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \text{Posición angular de elevación } (pitch) \\ \text{Posición angular de giro } (yaw) \\ \text{Velocidad angular de elevación } (\omega\_pitch) \\ \text{Velocidad de giro } (\omega\_yaw) \end{bmatrix}$$

Ejemplo de diseño RE LQR: Heli2DoF (2)

Calcule la matriz **K** de realimentación de estado por el método LQR, para un helicóptero 2DoF.



Ejemplo de diseño RE LQR: Heli2DoF (3)

Calcule la matriz **K** de realimentación de estado por el método LQR, utilizando las matrices **Q** y **R** dadas a continuación:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \end{bmatrix}$$

Ejemplo de diseño RE LQR: Heli2DoF (4)

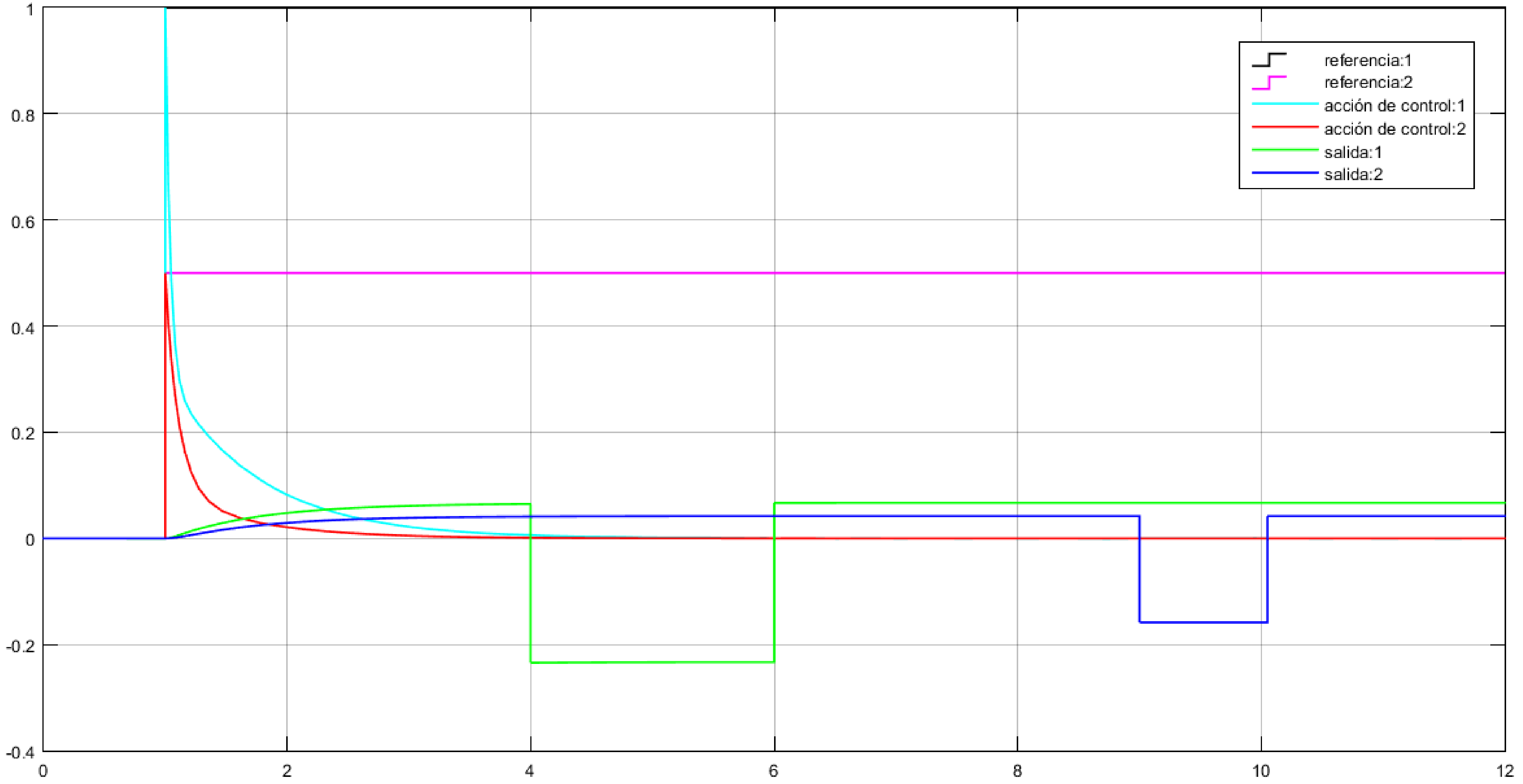
Se calcula la matriz **K** de realimentación de estado por el método LQR, utilizando la función ***lqr*** de Matlab

$$\mathbf{K} = lqr(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q}, \mathbf{R})$$

El resultado para la matriz K con las matrices Q y R dadas es:

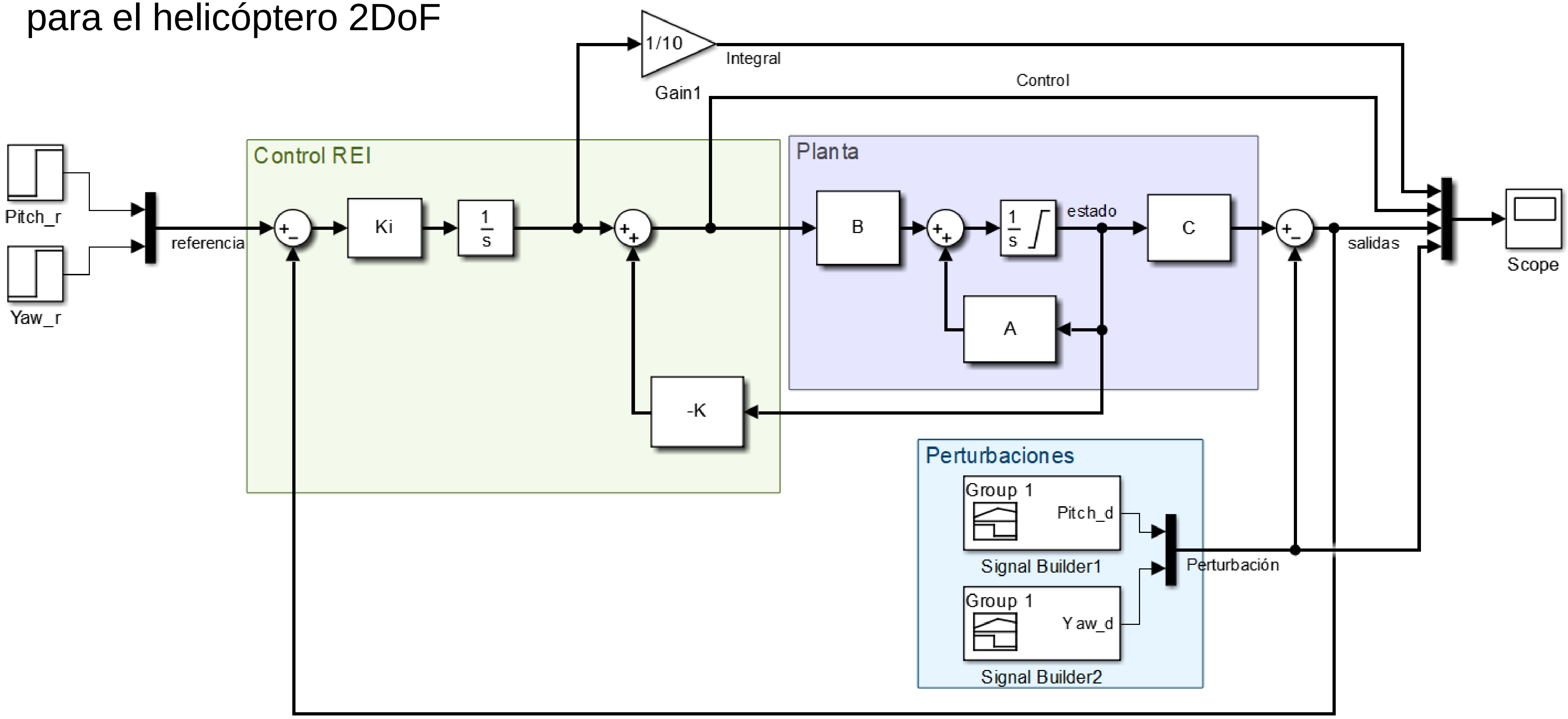
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 14.0795 & 1.3293 & 7.3254 & 0.9235 \\ -1.3293 & 14.0795 & -0.2609 & 7.9942 \end{bmatrix}$$

Ejemplo de diseño RE LQR: Heli2DoF (5)



Ejemplo de diseño: Rechazo de perturbaciones con LQR (REI_LQR)

Calcule las matrices **K** y **Ki** para realimentación de estado integral por el método LQR, para el helicóptero 2DoF



Ejemplo de diseño: Rechazo de perturbaciones con LQR (2)

Calcule las matrices **K** y **K**i para realimentación de estado integral por el método LQR, para el sistema aumentado en dos estados, las integrales de los errores de *pitch* y *yaw*; utilizando las matrices **Q** y **R** dadas a continuación:

$$\mathbf{Q}_s = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 150 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \end{bmatrix} \boldsymbol{y} \;\; \mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} K_{15} & K_{16} \\ K_{25} & K_{26} \end{bmatrix} \text{ con } \;\; \mathbf{x_i} = \begin{bmatrix} \text{Posición angular de elevación } (pitch) \\ \text{Posición angular de giro } (yaw) \\ \text{Velocidad angular de elevación } (\omega\_pitch) \\ \text{Velocidad de giro } (\omega\_yaw) \\ \text{Integral de error de } pitch \;\; \int (p_r - pitch) dt \\ \text{Integral del error de } yaw \;\; \int (y_r - yaw) dt \end{bmatrix}$$

Como el orden de las variables de estado para realimentación de estado integral.

Ejemplo de diseño: Rechazo de perturbaciones con LQR (3)

Se calculan las matrices aumentadas $\mathbf{A_s}$ y $\mathbf{B_s}$ y luego, con la función ***lqr*** de Matlab se calcula la matriz $\mathbf{K_s}$ que se descompone en las matrices **K** y $\mathbf{K_i}$:

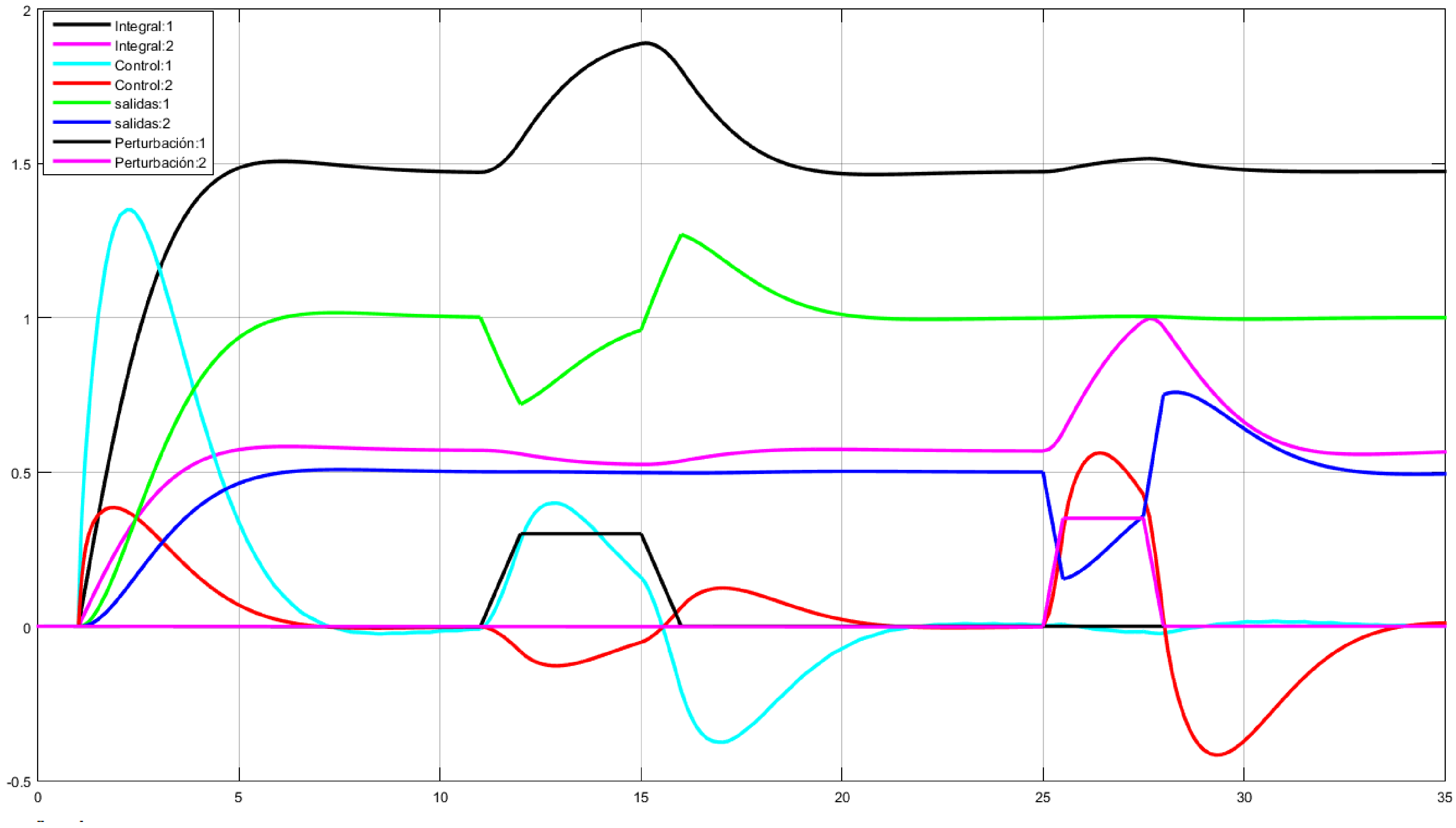
$$\mathbf{A_s} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9.2751 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.4955 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B_s} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2.3667 & 0.0790 \\ 0.2410 & 0.7913 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K_s} = lqr(\mathbf{A_s}, \mathbf{Bs}, \mathbf{Qs}, \mathbf{R})$$

$$\mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} 18.9366 & 1.9798 & 7.4920 & 1.5280 & -7.0291 & -0.7696 \\ -2.2223 & 19.4458 & -0.4503 & 11.8933 & 0.7696 & -7.0291 \end{bmatrix}$$

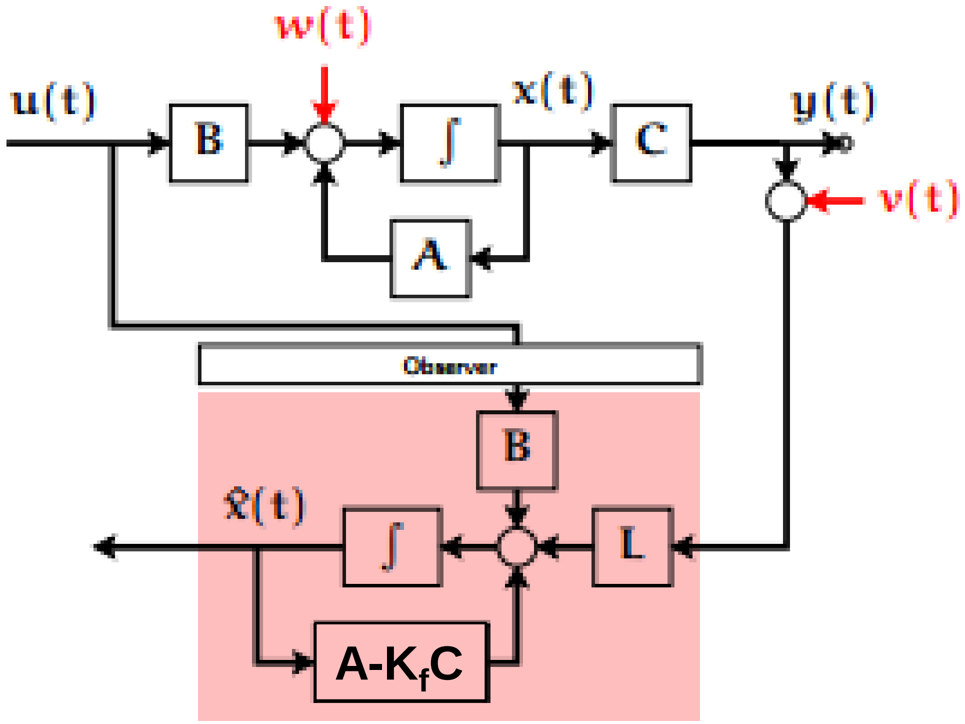
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 18.9366 & 1.9798 & 7.4920 & 1.5280 \\ -2.2223 & 19.4458 & -0.4503 & 11.8933 \end{bmatrix} \; y \; \mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} 7.0291 & 0.7696 \\ -0.7696 & 7.0291 \end{bmatrix}$$

Ejemplo de diseño: Rechazo de perturbaciones con LQR (4)



Estimación de estado óptima LQE

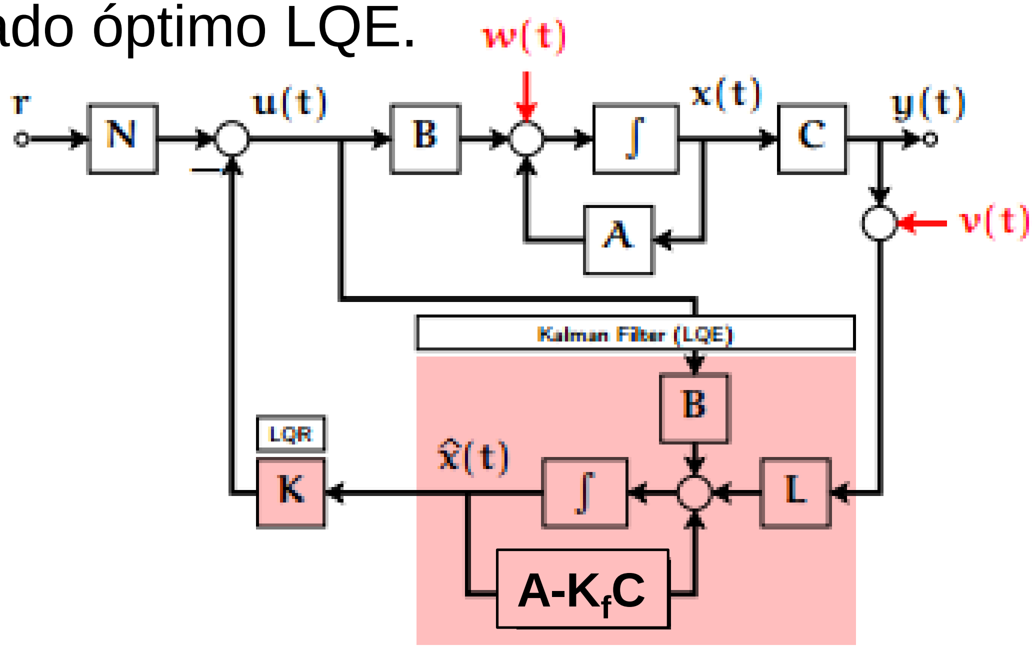
- El problema del observador óptimo LQ es dual al problema de realimentación de estado LQ. Sin embargo, los observadores óptimos LQ poseen una interpretación estocástica; dicho de otra forma, son óptimos estimando el estado en presencia de ruidos Gaussianos que corrompen las medidas de las salidas y el estado.



Un observador de estado óptimo LQ se conoce como filtro de **Kalman**

Control lineal cuadrático Gaussiano (LQG)

- El control LQG es el controlador óptimo obtenido como la combinación de una ganancia de realimentación desde los estados estimados a partir de un estimador de estado óptimo LQE.



- El principio de separación permite diseñar una ganancia de realimentación LQR y LQE independientemente.

Referencias

- http://www.ie.tec.ac.cr/einteriano/control/clase/08.ControlPorRealimentaciondeEstado.pdf
- http://www.ie.tec.ac.cr/einteriano/control/clase/10.RealimentaciondeEstadoIntegral.pdf
- http://www.ie.tec.ac.cr/einteriano/control/clase/11.ControlconFiltrodeKalman.pdf
- https://www.cds.caltech.edu/~murray/courses/cds110/wi06/lqr.pdf
- https://www.quanser.com/products/2-dof-helicopter/
- Ogata, Katsuhiko. „Ingeniería de Control Moderna“, Pearson, Prentice Hall, 2010, 5ª Ed., Madrid.
- Lewis, F.L. Linear Quadratic Regulator (LQR) State Feedback Design.
- https://youtu.be/E_RDCFOlJx4 The Mathworks LQR