7. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ ДЛЯ ОБРАБОТКИ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

7.1. Постановка задачи. Предварительные сведения

Рассмотрим одномерную (один вход и один выход) стационарную линейную динамическую систему. Задана модель этой системы, то есть известна, в частности, ее передаточная функция и импульсная переходная функция W(t) (рис.7.1).

На вход этой системы поступает стационарный эргодический процесс (сигнал) u(t), имеющий математическое ожидание m_u, корреляционную функцию $R_u(\tau)$ и спектральную плотность $S_u(\omega)$.

Можно показать, что если система линейная, стационарная и устойчивая, то установившийся выходной сигнал y(t) также будет стационарным, эргодическим процессом, но его статистические характеристики будут отличаться от статистических характеристик входного сигнала, обозначим их m_x, $R_x(\tau)$, $S_x(\omega)$.

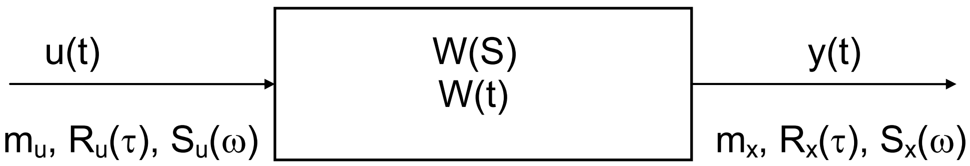


Рис. 7.1

Задача состоит в установлении связи между статистическими характеристиками выходного и входного случайных процессов (предполагается знание модели исследуемой системы).

Предварительные сведения.

Связь между реализациями y(t) случайного процесса Y(t) на выходе системы и соответствующими реализациями u(t) случайного процесса U(t) на основании формулы свертки выражается через импульсную переходную функцию системы $\omega(t)$ следующим образом:

$$y(t) = \int_0^t \omega(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t \omega(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_0^t \omega(\lambda)u(t-\lambda)d\lambda . \qquad (7.1)$$

Изображение Фурье импульсной переходной функции есть частотная передаточная функция:

$$W(j\omega) = F\{\omega(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t)e^{-j\omega\eta}d\eta . \qquad (7.2)$$

Величина комплексного сопряжения для $W(j\omega)$ имеет вид:

$$W(-j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t)e^{j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t)e^{j\omega\lambda}d\lambda . \qquad (7.3)$$

В выражениях (7.1), (7.2), (7.3) подчеркнут тот факт, что выражение не меняется, если заменить обозначение независимой переменной интегрирования (ее можно обозначить t, η, λ и т.д.).

7.7. Связь между корреляционными функциями на входе и выходе линейной системы

Запишем выражение (7.1) для момента времени t+τ:

$$y(t+\tau)=\int_0^t u(t+\tau-\eta)\omega(\eta)d\eta\,, \tag{7.4}$$

где η - новое обозначение независимой переменной интегрирования.

Корреляционная функция $R_y(\tau)$ стационарного случайного процесса Y(t) на основании (1.29) равна:

$$R_y(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} y(t)y(t+\tau)dt\,. \tag{7.5}$$

Подставив в (7.5) значения y(t) и y(t+τ) из (7.1) и (7.4) и, изменяя последовательность интегрирования, получим:

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left[\int_0^t u(t-\lambda)\omega(\lambda)\int_0^t u(t+\tau-\eta)\omega(\eta)d\eta\right]dt = \\ &= \int_0^t \omega(\lambda)d\lambda\int_0^t \omega(\eta)\left[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(t-\lambda)u(t+\tau-\eta)dt\right]d\eta \end{aligned} \tag{7.6}$$

Выражение в квадратных скобках в (7.6) по форме является корреляционной функцией выходного сигнала (см. (1.29) или (7.5)). Она зависит от разности аргументов (t+τ-η)-(t-τ)=τ+λ-η. Таким образом:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(t-\lambda)u(t+\tau-\eta)dt = R_u(\tau+\lambda-\eta)\,. \tag{7.7}$$

С учетом (7.7) выражение (7.6) принимает вид:

$$R_y(\tau)=\int_0^t \omega(\lambda)d\lambda\int_0^t \omega(\eta)R_u(\tau+\lambda-\eta)d\eta\,. \tag{7.8}$$

Следует отметить, что случайный процесс на выходе линейной системы некоторое время, после подачи на вход случайного процесса, будет устанавливаться и не будет стационарным. Поэтому (7.8) в эти моменты времени будет весьма приближенным (в общем случае будет зависеть от t_1 и t_2, а не только от τ=t_2- t_1). Однако при $t\to\infty$, то есть в устанвившемся состоянии (7.8) справедливо.

С другой стороны, импульсная переходная функция ω(t)($\omega(\lambda)$, $\omega(\eta)$) равна нулю при отрицательных значениях аргумента, поэтому выражение (7.8) остается справедливым, если предел положить равным -∞.

Учитывая эти замечания, (7.8) можно записать в виде:

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\lambda)d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\eta) R_u(\tau+\lambda-\eta)d\eta. \qquad (7.9)$$

Выражения (7.8), (7.9) являются основными интегральными соотношениями, позволяющими по известной корреляционной функции $R_u(\tau)$ случайного процесса на входе системы и известной импульсной переходной функции $\omega(t)$ системы найти корреляционную функцию $R_y(\tau)$ случайного процесса на выходе системы.

Рассмотрим примеры практического применения (7.8), (7.9).

Пример 7.3.1. На вход линейной стационарной непрерывной системы с импульсной переходной функцией

$$\omega(t)=\begin{cases} \frac{1}{T} e^{-t/T}, t \ge 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

поступает белый шум с корреляционной функцией $N\delta(\tau)$. Определить корреляционную функцию случайного процесса на выходе системы.

Так как $\omega(\lambda) = \frac{1}{T} e^{-\lambda/T}, \omega(\eta) = \frac{1}{T} e^{-\eta/T}$, то по (7.9)

$$R_x(\tau) = \frac{N}{T^2} \int_0^{\infty} e^{-\lambda/T} d\lambda \int_0^{\infty} e^{-\eta/T} \delta(\tau+\lambda-\eta)d\eta.$$

Нижний предел равен 0, так как $\omega(t)$ при отрицательных значениях аргумента равна нулю по условию задачи.

Используя основное свойство δ-функции: $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$,

получаем:

$$R_x(\tau) = \frac{N}{T^2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\lambda}{T}} e^{-\frac{\tau+\lambda}{T}} d\lambda = \frac{N}{T^2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2\lambda+\tau}{T}} d\lambda = \frac{N}{T^2} e^{-\frac{\tau}{T}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{2\lambda}{T}} d\lambda = \frac{N}{2T} e^{-\frac{\tau}{T}}.$$

Вычисления приведены для $\tau>0$. В общем случае (в силу четности корреляционной функции):

$$R_x(\tau) = \frac{N}{2T} e^{-\frac{|\tau|}{T}}.$$

Пример 7.3.2. На вход линейной стационарной непрерывной системы с импульсной переходной функцией вида:

$$\omega(t)=\begin{cases} \alpha e^{-\alpha t}, t \ge 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

поступает стационарный эргодический случайный сигнал с корреляционной функцией:

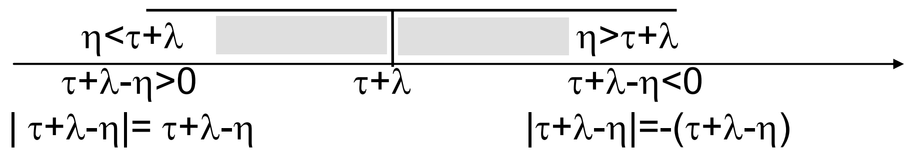
$$R_u(\tau) = De^{-\beta|\tau|}.$$

Определить корреляционную функцию случайного процесса на выходе системы.

Для решения задачи используем выражение (7.9):

$$R_x(\tau) = \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha\lambda} d\lambda \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha\eta} De^{-\beta|\tau+\lambda-\eta|} d\eta.$$

Чтобы освободиться от модуля, разбиваем область интегрирования по переменной η на две области в соответствии со следующим рисунком:



Тогда:

$$\int_0^\infty f(\eta) e^{-\beta|\tau+\lambda-\eta|} d\eta = \int_0^{\tau+\lambda} f(\eta) e^{-\beta(\tau+\lambda-\eta)} d\eta + \int_{\tau+\lambda}^\infty f(\eta) e^{\beta(\tau+\lambda-\eta)} d\eta,$$

где $f(\eta) = \alpha De^{-\alpha\eta}$. Следовательно:

$$R_x(\tau) = \alpha^2 D \int_0^\infty e^{-\alpha\lambda} d\lambda \int_0^{\tau+\lambda} e^{-\alpha\eta} e^{\beta\eta} e^{-\beta\tau} e^{-\beta\lambda} d\eta +$$

$$+\alpha^2 D \int_0^\infty e^{-\alpha\lambda} d\lambda \int_{\tau+\lambda}^\infty e^{-\alpha\eta} e^{-\beta\eta} e^{\beta\tau} e^{\beta\lambda} d\eta =$$

$$= \alpha^2 De^{-\beta\tau} \int_0^\infty e^{-(\alpha+\beta)\lambda} d\lambda \int_0^{\tau+\lambda} e^{-(\alpha-\beta)\eta} d\eta +$$

$$+\alpha^2 De^{-\beta\tau} \int_0^\infty e^{-(\alpha-\beta)\lambda} d\lambda \int_{\tau+\lambda}^\infty e^{-(\alpha+\beta)\eta} d\eta$$

Вычислим I_1.

$$\int_0^{\tau+\lambda} e^{-(\alpha-\beta)\eta} d\eta = \frac{1}{-(\alpha-\beta)} e^{-(\alpha-\beta)\eta} \Big|_0^{\tau+\lambda} = \frac{1}{-(\alpha-\beta)} [e^{-(\alpha-\beta)(\tau+\lambda)} - 1].$$

Тогда:

$$\int_0^\infty e^{-(\alpha+\beta)\lambda}\left\{\frac{1}{-(\alpha-\beta)}[e^{-(\alpha-\beta)(\tau+\lambda)}-1]\right\}d\lambda =$$

$$=\frac{1}{-(\alpha-\beta)}\left\{\int_0^\infty e^{-(\alpha+\beta)\lambda}e^{-(\alpha-\beta)(\tau+\lambda)}d\lambda-\int_0^\infty e^{-(\alpha+\beta)\lambda}d\lambda\right\}=$$

$$=\frac{1}{-(\alpha-\beta)}\left\{e^{-(\alpha-\beta)\tau}\int_0^\infty e^{-(\alpha+\beta)\lambda}e^{-(\alpha-\beta)(\tau+\lambda)}d\lambda-\int_0^\infty e^{-(\alpha+\beta)\lambda}d\lambda\right\}=$$

$$=\frac{1}{-(\alpha-\beta)}\left\{e^{-(\alpha-\beta)\tau}\int_0^\infty e^{-2\alpha\lambda}d\lambda-\int_0^\infty e^{-(\alpha+\beta)\lambda}d\lambda\right\}=$$

$$=\frac{1}{-(\alpha-\beta)}\left\{e^{-(\alpha-\beta)\tau}\frac{1}{-2\alpha}(0-1)-\frac{1}{-(\alpha+\beta)}(0-1)\right\}=$$

$$=\frac{1}{-2\alpha(\alpha-\beta)}e^{-(\alpha-\beta)\tau}+\frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}.$$

Поэтому:

$$I_1=\frac{\alpha^2De^{-\beta\tau}e^{-(\alpha-\beta)\tau}}{-2\alpha(\alpha-\beta)}+\frac{\alpha^2D}{(\alpha^2-\beta^2)}e^{-\beta\tau}=$$

$$=\frac{\alpha^2D}{-2\alpha(\alpha-\beta)}e^{-\alpha\tau}+\frac{\alpha^2D}{(\alpha^2-\beta^2)}e^{-\beta\tau}=\frac{\alpha D}{-2(\alpha-\beta)}e^{-\alpha\tau}+\frac{\alpha^2D}{(\alpha^2-\beta^2)}e^{-\beta\tau}$$

Вычислим I_2:

$$\int_{\tau+\lambda}^\infty e^{-(\alpha+\beta)\eta}d\eta=\frac{1}{-(\alpha+\beta)}\left[e^{-(\alpha+\beta)\eta}\Big|_{\tau+\lambda}^{\infty}\right]=\frac{1}{-(\alpha+\beta)}\left[0-e^{-(\alpha+\beta)(\tau+\lambda)}\right]=$$

$$=\frac{1}{-(\alpha+\beta)}e^{-(\alpha+\beta)(\tau+\lambda)}.$$

Откуда:

$$\int_0^\infty e^{-(\alpha-\beta)\lambda}\frac{1}{\alpha+\beta}e^{-(\alpha+\beta)(\tau+\lambda)}d\lambda=\frac{1}{\alpha+\beta}e^{-(\alpha+\beta)\tau}\int_0^\infty e^{-2\alpha\lambda}d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\alpha+\beta}e^{-(\alpha+\beta)\tau}\frac{1}{-2\alpha}(0-1)=\frac{1}{2\alpha(\alpha+\beta)}e^{-(\alpha+\beta)\tau}.$$

Поэтому:

$$I_2=\frac{\alpha^2D}{2\alpha(\alpha+\beta)}e^{\beta\tau}e^{-(\alpha+\beta)\tau}=\frac{\alpha^2D}{2\alpha(\alpha+\beta)}e^{-\alpha\tau}=\frac{\alpha D}{2(\alpha+\beta)}e^{-\alpha\tau}.$$

Окончательно:

$$R_x(\tau) = I_1 + I_2 = \frac{\alpha D}{-2(\alpha-\beta)} e^{-\alpha\tau} + \frac{\alpha^2 D}{(\alpha^2-\beta^2)} e^{-\beta\tau} + \frac{\alpha D}{2(\alpha+\beta)} e^{-\alpha\tau} =$$

$$= \frac{\alpha^2 D}{(\alpha^2-\beta^2)} e^{-\beta\tau} - \frac{\alpha\beta D}{(\alpha^2-\beta^2)} e^{-\alpha\tau} = \frac{\alpha^2 D}{(\alpha^2-\beta^2)}\left[e^{-\beta\tau} - \frac{\beta}{\alpha} e^{-\alpha\tau}\right]$$

Для $\tau>0$, производя аналогичное вычисление, получим, что выражение для $R_x(\tau)$ отличается только знаками в коэффициентах при τ. Таким образом, для $-\infty<\tau<\infty$ можно записать:

$$R_x(\tau) = \frac{\alpha^2 D}{(\alpha^2-\beta^2)}\left[e^{-\beta|\tau|} - \frac{\beta}{\alpha} e^{-\alpha|\tau|}\right].$$

При $\beta \to \infty$, то есть при стремлении $R(\tau)$ к δ-функции, получим

$$R_x(\tau) = \frac{\alpha D}{\beta} e^{-\alpha|\tau|},$$

что соответствует решению примера (7.1). Здесь α=1/T, D/β=N/7.

7.3. Связь между спектральными плотностями на входе и выходе линейной системы

В соответствии с (1.54) спектральная плотность случайного процесса на выходе системы:

$$S_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \tag{7.10}$$

Подставим в (7.10) значение $R_y(\tau)$ из (7.9):

$$S_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\omega(\lambda)d\lambda \int_{-\infty}^{\infty}\omega(\eta) R_u(\tau+\lambda-\eta) d\eta\right] e^{-j\omega\tau} d\tau. \tag{7.11}$$

Введем новую переменную $\tau_1=\tau+\lambda-\eta$, откуда $\tau=\tau_1+\lambda-\eta$. Тогда из (7.11) получим (после пересчета пределов интегрирования и учета $d\tau=d\tau_1$):

$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}\omega(\lambda)d\lambda \int_{-\infty}^{\infty}\omega(\eta)d\eta \int_{-\infty}^{\infty} R_u(\tau_1) e^{-j\omega(\tau_1-\lambda+\eta)} d\eta = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\omega(\lambda) e^{j\omega\lambda} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty}\omega(\eta) e^{-j\omega\eta} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} R_u(\tau_1) e^{-j\omega\tau_1} d\tau_1 \end{aligned} \tag{7.12}$$

Учитывая (7.2), (7.3) и (1.54) выражение (7.12) можно записать в виде:

$$S_y(\omega) = W(j\omega) W(-j\omega) S_u(\omega). \tag{7.13}$$

Принимая во внимание, что произведение сопряженных комплексных чисел равно квадрату модуля комплексного числа:

$$W(j\omega) W(-j\omega) = |W(j\omega)|^2, \tag{7.14}$$

выражение (7.13) перепишем в виде:

$$S_y(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_u(\omega). \quad (7.15)$$

Таким образом, спектральная плотность стационарного случайного процесса на выходе линейной динамической системы равна спектральной плотности случайного процесса на выходе системы, умноженной на квадрат модуля частотной передаточной функции этой системы.

Используя (7.15) и (1.57) можно найти формулу, связывающую корреляционную функцию $R_y(\tau)$ выходного сигнала и спектральную плотность $R_u(\omega)$ входного сигнала, то есть:

$$R_y(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 S_u(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (7.16)$$

Для нахождения среднего значения квадрата выходной переменной используется соотношение:

$$\overline{y^2} = R(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} S_y(\omega) d\omega. \quad (7.17)$$

Можно использовать также соотношение:

$$\overline{y^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 S_u(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} |W(j\omega)|^2 S_u(\omega) d\omega. \quad (7.18)$$

7.4. Связь между математическими ожиданиями на входе и выходе линейной системы

По аналогии с (7.3) преобразование Лапласа от импульсной переходной характеристики есть передаточная функция:

$$W(S) = L\{\omega(t)\} = \int_{0}^{\infty} \omega(t) e^{-\delta t} dt. \quad (7.19)$$

Откуда:

$$W(0) = W(S)\big|_{S=0} = \int_{0}^{\infty} \omega(t) dt. \quad (7.20)$$

С другой стороны (7.1) в установившемся состоянии ($t \to \infty$) имеет вид:

$$y(t) = \int_{0}^{\infty} \omega(\tau) u(t-\tau) d\tau. \quad (7.21)$$

Вычислим математическое ожидание от (7.21):

$$m_y = M\{y(t)\} = M\{\int_{0}^{\infty} \omega(\tau) u(t-\tau) d\tau\} = \int_{0}^{\infty} \omega(\tau) M\{u(t-\tau)\} d\tau = \int_{0}^{\infty} \omega(\tau) d\tau m_u. \quad (7.22)$$

Выражение (7.22) с учетом (7.20) можно записать в виде:

$$m_y = W(0) m_u. \quad (7.23)$$