6. ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ РЕШЕТЧАТЫХ ФУНКЦИЙ

6.1. Вариационная задача на безусловный экстремум для решетчатых функций

Постановка задачи

Заданы:

Функционал – в виде конечной суммы

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} F(x[kT], x[(k+1)T], kT) \qquad (6.1)$$

или

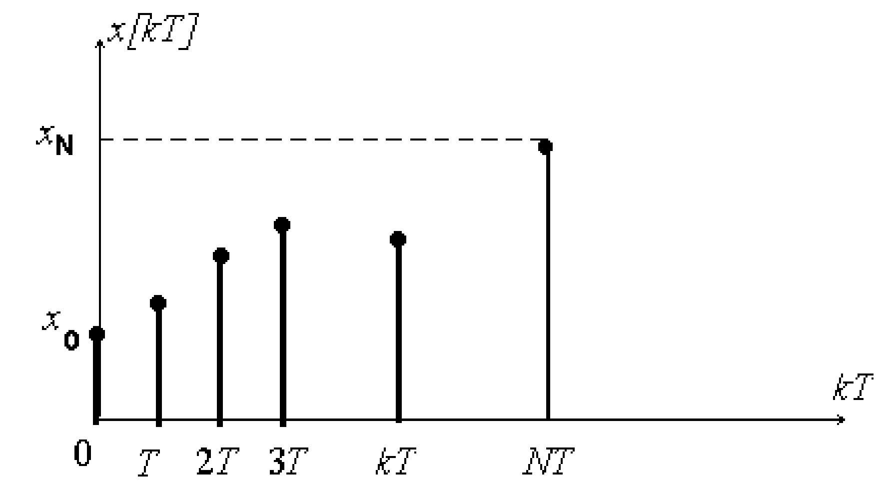
$$J = \sum_{k=0}^{N-1} F(x[k], x[k+1], k),$$

зависящий от выбора скалярной решетчатой функции $x[kT]$.

Краевые (граничные) условия $x[0] = x_0,\ x[NT] = x_N$. (6.2)

Требуется определить $x[kT]$, удовлетворяющую граничным условиям (6.2), так чтобы функционал (6.1) достигал экстремума.

Рис. 6.1



Решение задачи

Пусть $x[kT]$ - искомая функция (то есть решение поставленной задачи) найдена (рис. 6.1). Рассмотрим однопараметрическое семейство, в состав которого входит $x[kT]$

$$\tilde{x}[kT, a] = x[kT] + \alpha\eta[kT], \qquad (6.3)$$

где α - некоторый параметр, $\eta[kT]$ - вариация функции относительно экстремали $x[kT]$.

При этом $\eta[0] = \eta[NT] = 0$. (6.4)

Подставим выражение (6.3) в функционал

$$J(\tilde{x}[kT,\alpha]) = \sum_{k=0}^{N-1} F(\tilde{x}[kT], \tilde{x}[(k+1)T], kT)$$

или

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} F(x[kT] + \alpha\eta[kT], x[(k+1)T] + \alpha\eta[(k+1)T], kT) = J(\alpha). \quad (6.5)$$

Очевидно, что функционал стал функцией параметра α и необходимое условие экстремума запишется в виде

$$\left.\frac{dJ(\alpha)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0. \quad (6.6)$$

Вычисляя производную по α от (6.5), получим

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{\partial F[kT]}{\partial\tilde{x}[kT]}\frac{d\tilde{x}[kT]}{d\alpha} + \frac{\partial F[kT]}{\partial\tilde{x}[(k+1)T]}\frac{d\tilde{x}[(k+1)T]}{d\alpha}\right).$$

Из выражения (6.3) следует, что

$$\tilde{x}[(k+1)T] = x[(k+1)T] + \alpha\eta[(k+1)T].$$

Тогда имеем

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{\partial F[kT]}{\partial\tilde{x}[kT]}\eta[kT] + \frac{\partial F[kT]}{\partial\tilde{x}[(k+1)T]}\eta[(k+1)T]\right).$$

При $\alpha = 0$, $\tilde{x}[kT] = x[kT]$, поэтому

$$\left.\frac{dJ}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{\partial F[kT]}{\partial x[kT]}\eta[kT] + \frac{\partial F[kT]}{\partial x[(k+1)T]}\eta[(k+1)T]\right) = 0,$$

где $F[kT] = F(x[kT], x[(k+1)T], kT)$.

Рассмотрим второе слагаемое в этой сумме, которое можно записать следующим образом. Положим $k+1 = m$ или $m-1 = k$. Поэтому

$$\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\partial F[kT]}{\partial x[(k+1)T]}\eta[(k+1)T] = \sum_{m=1}^{N-1}\frac{\partial F[(m-1)T]}{\partial x[mT]}\eta[mT] =$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1}\frac{\partial F[(m-1)T]}{\partial x[mT]}\eta[mT] + \frac{\partial F[(m-1)T]}{\partial x[mT]}\eta[mT]\Big|_{m=N} -$$

$$- \frac{\partial F[(m-1)T]}{\partial x[mT]}\eta[mT]\Big|_{m=0} = \sum_{k=0}^{N-1}\frac{\partial F[(k-1)T]}{\partial x[kT]}\eta[kT],$$

так как в силу условия (6.4) $\eta(0) = \eta(NT) = 0$.

Необходимое условие экстремума принимает вид

$$\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{\partial F[kT]}{\partial x[kT]}+\frac{\partial F[(k-1)T]}{\partial x[xT]}\right)\eta[kT]=0\,. \qquad (6.7)$$

Учитывая, что вариация $\eta[kT]$ есть произвольная функция, удовлетворяющая условию (6.4), окончательно получим:

$$\frac{\partial F[kT]}{\partial x[kT]}+\frac{\partial F[(k-1)T]}{\partial x[kT]}=0\,. \qquad (6.8)$$

Это уравнение Эйлера для решетчатых функций. В этом уравнении

$$F[(k-1)T]=F(x[(k-1)T],x[kT],(k-1)T)\,. \qquad (6.9)$$

После вычисления частных производных (6.8) превращается в разностное уравнение второго порядка, решение которого зависит от двух произвольных постоянных. Эти постоянные находятся из краевых (граничных) условий.

Пример 6.1. Функционал имеет вид

$$J=\sum_{k=0}^{2}(x^2[(k+1)T]-2x[kT]x[(k+1)T]-x^2[kT]).$$

Граничные условия $x[0]=0, x[3]=1$.

В данном случае

$$F[kT]=x^2[(k+1)T]-2x[kT]x[(k+1)T]-x^2[kT],$$
$$F[(k-1)T]=x^2[kT]-2x[(k-1)T]x[kT]-x^2[(k-1)T].$$

Тогда

$$\frac{\partial F[kT]}{\partial x[kT]}=-2x[(k+1)T]-2x[kT],$$

$$\frac{\partial F[(k-1)T]}{\partial x[kT]}=2x[kT]-2x[(k-1)T].$$

Уравнение Эйлера (6.8) примет вид

$$-x[(k+1)T]-x[kT]+x[kT]-x[(k-1)T]=0$$

или

$$x[(k+1)T]+x[(k-1)T]=0.$$

Переобозначая $k-1=m$, получим

$$x[(m+2)T]+x[mT]=0.$$

Общее решение этого уравнения есть

$$x[mT]=c_1\lambda_1^m+c_2\lambda_2^m,$$

где λ_1,λ_2 - корни характеристического уравнения $\lambda^2+1=0$. Откуда $\lambda_1=j,\lambda_2=-j$.

Поэтому

$$x[mT]=c_1e^{j\frac{\pi}{2}m}+c_2e^{-j\frac{\pi}{2}m},$$

так как $j=e^{j\frac{\pi}{2}}$, $-j=e^{-j\frac{\pi}{2}}$.

Из граничных условий, получим

$$\left.\begin{aligned}&x[0]=0\rightarrow 0=c_1+c_2;\\&x[3]=1\rightarrow 1=c_1e^{j\frac{\pi}{2}3}+c_2e^{-j\frac{\pi}{2}3}.\end{aligned}\right\}$$

Из первого уравнения $c_2=-c_1$. Тогда из второго уравнения, применив формулу Эйлера, получим

$$c_1 2j\sin\frac{3}{2}\pi=1 \quad \text{или} \quad c_1=\frac{1}{2}j.$$

Таким образом, экстремалью будет следующая решетчатая функция

$$x[mT]=\frac{1}{2}je^{j\frac{\pi}{2}m}-\frac{1}{2}je^{-j\frac{\pi}{2}m}.$$

После очевидных преобразований, окончательно имеем

$$x[kT]=-\sin\frac{\pi}{2}k.$$

Замечание. Если концы экстремали $x[kT]$ не закреплены, то постоянные интегрирования в дискретном уравнении Эйлера определяются не из краевых условий, а из некоторых других, вытекающих из условия экстремума функционала.

Рассмотрим, например, частный случай, когда верхний и нижний пределы в функционале фиксированы $k_0 = 0, k_N = N$, а значения $x[0]$ и $x[N]$ не фиксированы.

Это равносильно условию, что экстремаль $x[kT]$ своими концами может скользить по вертикальным прямым $k = 0, k = N$.

В этом случае условие (6.4) $\eta[0] = \eta[NT] = 0$ уже не выполняется, и тогда в дополнение к уравнению Эйлера (6.8) получим следующие условия

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial F[(k-1)T]}{\partial x[kT]}\right|_{k=0} = 0; \\ \left.\dfrac{\partial F[(k-1)T]}{\partial x[kT]}\right|_{k=N} = 0. \end{cases} \tag{6.10}$$

Эти условия известны как условия трансверсальности для данного случая незакрепленных концов. Если свободен только один конец, а второй закреплен, то из соотношений (6.10) используется только одно условие, а второе условие определяется заданным краевым в закрепленном конце.

6.2. Дискретная вариационная задача на условный экстремум

Пусть в функционале (6.1) варьируемая функция есть q – мерный вектор

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} F(X[kT], X[(k+1)T], kT), X \in R^q \tag{6.11}$$

и пусть компоненты этого вектора $x_1[kT], x_2[kT], ..., x_q[kT]$, кроме возможных краевых условий, удовлетворяют уравнениям связей.

Рассмотрим случай, когда уравнения связей являются разностными

$$x_j[(k+1)T] = f_j(x_1[kT], x_2[kT], ..., x_q[kT], kT), \; j = 1,2,.., n < q. \tag{6.12}$$

По аналогии с непрерывным случаем, будем называть такую задачу на условный экстремум, дискретной задачей Лагранжа.

Решение этой задачи проводится по тому же алгоритму, что и в непрерывном случае.

Составляется вспомогательная функция

$$L[kT] = F(X[kT], X[(k+1)T], kT) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j[(k+1)T](x_j[(k+1)T] - \qquad (6.13)$$

$$- f_j(x_1[kT], ..., x_q[kT], kT)),$$

где $\lambda_1[kT], \lambda_2[kT], ..., \lambda_n[kT]$ – вспомогательные решетчатые функции (множители Лагранжа).

Тогда

$$L[(k-1)T] = F(X[(k-1)T], X[kT], (k-1)T) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j[kT]\Big(x_j[kT] - f_j(x_1[(k-1)T], ..., x_q[(k-1)T], (k-1)T)\Big).$$

Необходимые условия экстремума при этом выражаются уравнениями Эйлера-Лагранжа, которые имеют вид

$$\frac{\partial L[kT]}{\partial x_i[kT]} + \frac{\partial L[(k-1)T]}{\partial x_i[kT]} = 0, \quad i = 1,2,3,...,q. \qquad (6.14)$$

К ним добавляются уравнения (6.12). Получается система $q+n$ уравнений (6.12),(6.14) для определения $q+n$ неизвестных

$$x_i[kT], \lambda_j[kT], \; i = 1,2,3,...,q, \; j = 1,2,3,...,n.$$

Вычислим частные производные:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L[kT]}{\partial x_i[kT]} = \dfrac{\partial F[kT]}{\partial x_i[kT]} - \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j[(k+1)T] \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i[kT]}, i = 1,2,3...q; \\ \begin{cases} \dfrac{\partial L[(k-1)T]}{\partial x_i[kT]} = \dfrac{\partial F[(k-1)T]}{\partial x_i[kT]} + \lambda_i[kT], i = 1,2,3...n; \\ \dfrac{\partial L[(k-1)T]}{\partial x_i[kT]} = \dfrac{\partial F[(k-1)T]}{\partial x_i[kT]}, i = n+1, n+2,...q. \end{cases} \end{cases}$$

В результате уравнения Эйлера-Лагранжа примут вид:

$$\begin{cases} \lambda_i[kT] + \dfrac{\partial F[kT]}{\partial x_i[kT]} - \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j[(k+1)T] \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i[kT]} + \dfrac{\partial F[(k-1)T]}{\partial x_i[kT]} = 0, i = 1,2,3,...,n; \\ \\ \dfrac{\partial F[kT]}{\partial x_i[kT]} - \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j[(k+1)T] \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i[kT]} + \dfrac{\partial F[(k-1)T]}{\partial x_i[kT]} = 0, i = n+1, n+2,...,q. \end{cases}$$

К ним добавляются уравнения (6.12)

$$x_j[(k+1)T] = f_j(X[kT], kT), j = 1,2,3,...,n.$$

В итоге имеем системy $q+n$ уравнений для определения $q+n$ неизвестных:

$$x_1[kT],...,x_q[kT],\lambda_1[kT],...,\lambda_n[kT].$$

Замечание. Если концы экстремалей не закреплены, то для случая фиксированных $k_0=0, k_N=N$ справедливы следующие условия трансверсальности

$$\left.\frac{\partial L[(k-1)T]}{\partial x_j[kT]}\right|_{k=0}=0, \left.\frac{\partial L[(k-1)T]}{\partial x_j[kT]}\right|_{k=N}=0.$$

По аналогии с непрерывным случаем, можно сформулировать задачу об отыскании оптимального уравнения $U^0[kT]$ и оптимальной траектории $X^0[kT]$, $\mathrm{U}\in R^m$, $\mathrm{X}\in R^n$:

$$J=\sum_{k=0}^{N-1}F(X[kT],U[kT])\to extr;$$

$$X[0]=X_0,\ X[NT]=X_N;$$

$$x_j[(k+1)T]=f_j(x_1[kT],...,x_n[kT],u_1[kT],...,u_m[kT]).$$

Тогда уравнения Эйлера-Лагранжа (6.14) примут вид:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L[kT]}{\partial x_i[kT]}+\dfrac{\partial L[(k-1)T]}{\partial x_i[kT]}=0, i=1,2,3,\ldots,n;\\ \dfrac{\partial L[kT]}{\partial u_\mu[kT]}+\dfrac{\partial L[(k-1)T]}{\partial u_\mu[kT]}=0, \mu=1,2,3,\ldots,m.\end{cases}$$

К ним добавляют уравнения связей, и, решая, полученную систему, получают оптимальные траектории и управления:

$$\begin{cases}x_1^0[kT],x_2^0[kT],...,x_n^0[kT];\\ u_1^0[kT],u_2^0[kT],...,u_m^0[kT].\end{cases}$$

Пример 6.2. Найти экстремали функционала

$$J=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{10}\left(x^2[kT]+2u^2[kT]\right)$$

при условии, что функции $x[kT], u[kT]$ связаны следующим разностным уравнением

$$x[(k+1)T]=x[kT]+2u[kT].$$

При этом будем считать, что левый конец экстремали $x[kT]$ закреплен $x[0]=x_0=1$, а правый свободен, то есть $x[11]$ - не закреплен.
Краевые условия на функцию $u[kT]$ - не накладываются.

Составляем функцию Лагранжа

$$L[kT]=\frac{1}{2}\left(x^2[kT]+2u^2[kT]\right)+\lambda[(k+1)T]\cdot$$
$$\cdot\left(x[(k+1]T]-x[kT]-2u[kT]\right).$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L[kT]}{\partial x[kT]}+\dfrac{\partial L[(k-1)T]}{\partial x[kT]}=0;\\[2ex] \dfrac{\partial L[kT]}{\partial u[kT]}+\dfrac{\partial L[(k-1)T]}{\partial u[kT]}=0.\end{cases}$$

Вычислим

$$\frac{\partial L[kT]}{\partial x[kT]}=x[kT]-\lambda[(k+1)T];\quad \frac{\partial L[(k-1)T]}{\partial x[kT]}=\lambda[kT];$$
$$\frac{\partial L[kT]}{\partial u[kT]}=2u[kT]-2\lambda[(k+1)T];\quad \frac{\partial L[(k-1)T]}{\partial u[kT]}=0.$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа принимают вид (к ним добавляется уравнение связи):

$$\begin{cases}\lambda[(k+1)T]=x[kT]+\lambda[kT];\\ u[kT]=\lambda[(k+1)T];\\ x[(k+1)T]=x[kT]+2u[kT].\end{cases}$$

Преобразуем эти уравнения, исключив из них $u[kT]$. Подставляя средние выражения $u[kT]=\lambda[(k+1)T]$ в два других, после преобразований получим

$$\begin{cases}\lambda[(k+1)T]=x[kT]+\lambda[kT];\\ x[(k+1)T]=x[kT]+2\lambda[(k+1)T].\end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases}x[(k+1)T]=3x[kT]+2\lambda[kT];\\ \lambda[(k+1)T]=x[kT]+\lambda[kT].\end{cases}$$

Для решения этих уравнений необходимо иметь граничные условия. Одно граничное условие задано $x[0]=x_0=1$. Второе граничное условие необходимо определить из условия трансверсальности на правом конце, которое здесь имеет вид

$$\left.\frac{\partial L[(k-1)T]}{\partial x[kT]}\right|_{k=N}=\lambda[kT]\big|_{k=N}=\lambda[11]=0.$$

Найдем решение уравнений.

По формуле Коши для дискретных систем будем иметь

$$\begin{bmatrix}x[kT]\\ \lambda[kT]\end{bmatrix}=\Phi^k\begin{bmatrix}x[0]\\ \lambda[0]\end{bmatrix},$$

где Ф - матрица параметров системы

$$\Phi=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Φ^k - переходная матрица состояний линейной стационарной дискретной системы.

Для ее определения существуют различные методы: применение теоремы Лагранжа-Сильвестра; метод частотной области (применение Z - преобразования); метод, основанный на теореме Кели-Гамельтона; метод, основанный на переходе к новому базису.

Воспользуемся формулой Лагранжа-Сильвестра

$$\Phi^k=\sum_{i=1}^{n}\left[(\lambda_i)^k\prod_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{(\Phi-\lambda_j E)}{(\lambda_i-\lambda_j)}\right],$$

λ_i, $i=1,2,\dots,n$ - собственные числа матриц Ф, E - единичная матрица.

Для случая $n=2$ имеем

$$\Phi^k=\frac{(\Phi-\lambda_2 E)}{(\lambda_1-\lambda_2)}(\lambda_1)^k+\frac{(\Phi-\lambda_1 E)}{(\lambda_2-\lambda_1)}(\lambda_2)^k.$$

Характеристическое уравнение

$$\det(\Phi-\lambda E)=0 \to \lambda^2-4\lambda+1=0 .$$

Его корни $\lambda_{1,2}=2\pm\sqrt{3}$.

Тогда

$$\Phi^k=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\begin{bmatrix}1+\sqrt{3} & 2\\ 1 & -1+\sqrt{3}\end{bmatrix}(2+\sqrt{3})^k-\begin{bmatrix}1-\sqrt{3} & 2\\ 1 & -1-\sqrt{3}\end{bmatrix}(2-\sqrt{3})^k\right)$$

или

$$\Phi^k=\frac{1}{2\sqrt{3}}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^k-(1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^k & 2(2+\sqrt{3})^k-2(2-\sqrt{3})^k\\ (2+\sqrt{3})^k-(2-\sqrt{3})^k & (-1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^k+(1+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^k\end{bmatrix}.$$

Обозначим

$$\Phi^k=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{bmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{12}\\ \Phi_{21} & \Phi_{22}\end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{cases}x[kT]=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}(\Phi_{11}x[0]+\Phi_{12}\lambda[0]);\\ \lambda[kT]=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}(\Phi_{21}x[0]+\Phi_{22}\lambda[0]).\end{cases}$$

По условию $x[0]=1$, поэтому

$$\begin{cases}x[kT]=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}(\Phi_{11}+\Phi_{12}\lambda[0]);\\ \lambda[kT]=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}(\Phi_{21}+\Phi_{22}\lambda[0]).\end{cases}$$

С учетом

$$\left.\frac{\partial L[(k-1)T]}{\partial x[kT]}\right|_{k=N=11}=\lambda[11]=0$$

из второго уравнения имеем

$$0=\frac{1}{2\sqrt{3}}(\Phi_{21}+\Phi_{22}\lambda[0])\Big|_{k=11}$$

или

$$\left((2+\sqrt{3})^{11}-(2-\sqrt{3})^{11}+[(-1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^{11}+(1+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^{11}]\lambda[0]\right)=0.$$

Принимая во внимание, что

$$(2+\sqrt{3})^{11} = 1{,}9562\times 10^{6}, \quad (2-\sqrt{3})^{11} = 5{,}1118\times 10^{-7}$$

получим

$$(1+(-1+\sqrt{3})\lambda[0])(2+\sqrt{3})^{11} = 0\,.$$

Откуда

$$\lambda[0] = -\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)\,.$$

Запишем выражения для $x[kT], \lambda[kT], u[kT]$.

$$x[kT] = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\Phi_{11} - \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)\Phi_{12}\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\times$$

$$\times\Big([1+\sqrt{3}-(\sqrt{3}+1)](2+\sqrt{3})^{k} + [-(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})](2-\sqrt{3})^{k}\Big) = (2-\sqrt{3})^{k};$$

$$\lambda[kT] = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\Phi_{21} - \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)\Phi_{22}\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\times$$

$$\times([1-\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)](2+\sqrt{3})^{k} + [-1-\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)](2-\sqrt{3})^{k}) =$$

$$= -\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)(2-\sqrt{3})^{k}.$$

$$u[kT] = \lambda[(k+1)T] = -\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)(2-\sqrt{3})^{k+1} =$$

$$= -\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^{k} = -\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})^{k}.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\begin{cases} x[kT] = (2-\sqrt{3})^{k} \approx 0{,}2679^{k}; \\ \lambda[kT] = -\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}+1)(2-\sqrt{3})^{k} \approx -1{,}366\times 0{,}2679^{k}; \\ u[kT] = -\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}-1)(2-\sqrt{3})^{k} \approx -0{,}366\times 0{,}2679^{k}. \end{cases}$$