Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Саратовский государственный технический университет
имени Гагарина Ю.А.»

Кафедра «Радиоэлектроника и телекоммуникации»

РЕШЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРИНЦИПА ЛАГРАНЖА

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине
«Б.1.2.9 Основы кибернетики»
направления подготовки
«01.03.02 "Прикладная математика и информатика"»
квалификация (степень) «бакалавр»»
Профиль «Математическое моделирование и вычислительная математика»

Одобрено
редакционно-издательским советом
Саратовского государственного
технического университета

Саратов 2015

ВВЕДЕНИЕ

Задачи управления часто могут быть представлены в виде экстремальных задач. Для их решения могут быть использованы классические методы, основанные на принципе Лагранжа.

Рассматриваются способы решения экстремальных задач в том числе с использованием средства автоматизации расчетов, в качестве которого рассматривается пакет Матлаб.

Задачи, рассматриваемые в методических указаниях, соответствуют рекомендациям программы изучения дисциплины, призваны способствовать лучшему усвоению теоретического материала, изучаемого в соответствующем разделе.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1.1. Основные понятия, связанные с экстремальными задачами

Рассмотрим следующие задачи.

Задача 1. Найти на заданной прямой такую точку, чтобы сумма расстояний от нее до двух заданных точек была минимальна (рис 1.1).

Задача 2. Вписать в круг прямоугольник наибольшей площади (рис 1.2).

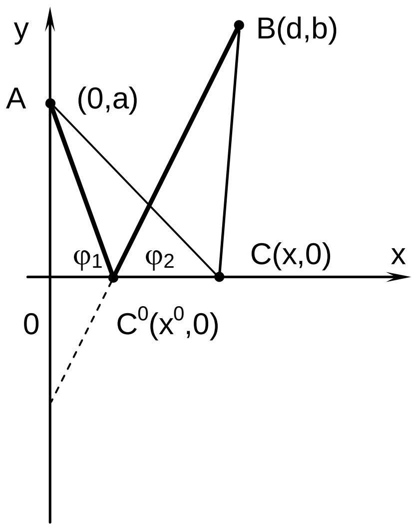

Рис. 1

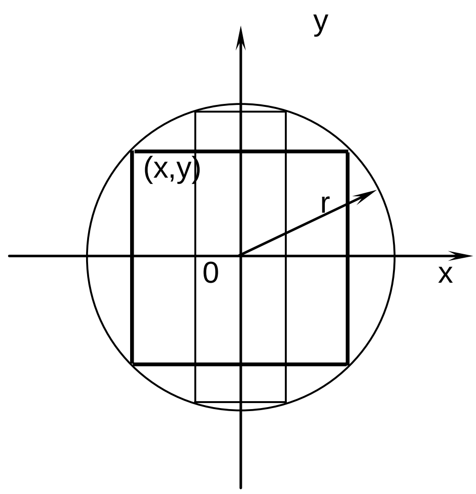

Рис. 2

Первая задача – это задача на минимум, вторая – на максимум. Слово ***maximum*** по латыни означает ”наибольшее”, слово ***minimum*** – ”наименьшее”. Оба эти понятия – максимум и минимум, наибольшее и наименьшее – объединяются единым термином «экстремум» от латинского ”***extremum***”, что означает «крайнее». Часто употребляют слово «оптимальный», от латинского “optimus”, что означает наилучший, совершенный. Таким образом, задачи 1 и 2 – это экстремальные задачи, или задачи оптимизации. Теорию задач на отыскание наибольших и наименьших величин называют теорией экстремальных задач, или теорией оптимизации, или теорией оптимального управления. При употреблении последнего термина обычно предполагается связь задач с практическими приложениями.

Задачи 1 и 2 сформулированы словесно, без формул. Чтобы можно было воспользоваться теорией, необходим перевод задач на математический язык. Этот перевод называется формализацией. Осуществим формализацию задач 1 и 2.

Формализация задачи 1

Направим ось ОХ по заданной прямой, а ось ОУ проведем через точку А (рис.1). Пусть координаты точек А и В таковы: А = (0,α) и В = (d,b); координаты точки С = (x,0). Тогда приходим к следующей задаче: найти минимум функции

$$f(x)=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(d-x)^2}$$

по всем $x \in R$ (R- множество действительных чисел).

Формализация задачи 2

Пусть окружность описывается уравнением

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Направим оси ОХ и ОУ параллельно сторонам прямоугольника и обозначим через (x, y) координаты вершины прямоугольника, лежащей в первом квадранте (рис.2). Тогда площадь прямоугольника равна $4xy$.

Получаем такую задачу: найти максимум функции

$$f_0(x,y) = 4xy$$

при условиях

$$f_1(x,y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0,$$
$$f_2(x,y) = x \geq 0,$$
$$f_3(x,y) = y \geq 0.$$

Нетрудно убедиться, что условия $x \geq 0, y \geq 0$ излишни, и задача найти максимум 4xy при условии $x^2 + y^2 = r^2$ эквивалентна задаче с неравенствами.

Любая формализация задачи устроена аналогично. Она включает в себя следующие элементы: функционал и ограничение.

Для формализации задачи употребляется запись:

$$f(x) \to \inf(\sup). \qquad (1)$$

Задачу на максимум всегда можно свести к задаче на минимум, заменив задачу $f(x) \to \sup$ задачей $\widetilde{f}(x) \to \inf$, где $\widetilde{f}(x) = f(x)$.

И, наоборот: задачу на минимум можно аналогичным образом свести на максимум.

Если необходимо исследовать обе задачи, то будем писать $f(x) \to \text{extr}$.

Приведем формализованные записи задач 1 и 2.

Задача 1:

$$f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d-x)^2} \to \inf. \qquad (2)$$

Задача 2:

$$4xy \to \sup;\ x^2 + y^2 = r^2. \qquad (3)$$

Задача 1 – задача без ограничений, задача 2 – с ограничением $x^2 + y^2 = r^2$.

Точка x^0 называется ***абсолютным (глобальным) минимумом (максимумом)*** в задаче 1.1, если $f(x) \geq f(x^0)$ для любого x (соответственно $f(x) \leq f(x^0)$).

При этом пишем

$$x^0 \in abs\min(abs\max).$$

Величина $f(x^0)$ - численное значение задачи.

В задаче 1 абсолютный минимум x^0, определяющий искомую точку $C^0(x^0,0)$, характеризуется, как известно из геометрии, тем, что острые углы, образованные отрезками AC^0 и CB^0 с осью OX, равны (угол падения равен углу отражения).

В задаче 2 искомым прямоугольником является квадрат: это соответствует

$$x^0 = r/\sqrt{2},\ y^0 = r/\sqrt{2},\ S_{\max} = 2r^2.$$

S_{max} или S_{min} численное значение экстремума.

Кроме глобальных экстремумов будем рассматривать ***локальные экстремумы*** (***locmin*** и ***locmax***).

Теория экстремальных задач дает правила нахождения решений экстремальных задач. В большинстве своем эти правила выделяют некоторые подмножества точек, среди которых должно содержаться решение задачи. Это множество точек называется критическим. После нахождения критических точек надо выделить из них решения.

Задача 3. Найти критические точки, локальные и абсолютные экстремумы в следующей задаче:

$$f(x) = x^3(x^2 - 1) \to extr, -1 \le x \le 2$$

Абсолютный экстремум в задаче может достигаться на концах отрезка или во внутренней точке.

Если экстремум достигается во внутренней точке, то в этой точке производная должна равняться нулю, то есть

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 0 \leftrightarrow 5x^4 - 3x^2 = 0 \leftrightarrow x \in \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{5}, 0, \frac{\sqrt{3}}{5} \right\}.$$

Таким образом, имеем 5 критических точек:

$$x_1 = -1, x_2 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, x_3 = 0, x_4 = \sqrt{\frac{3}{5}}, x_5 = 2,$$

из которых точки x_2, x_3, x_4 являются стационарными (в них df/dx=0).

Из графика функции (рис. 3) видно, что $x_1, x_4 \in loc\min; x_2; x_5 \in loc\max; x_4 \in abs\min;\ x_5 \in abs\max$,

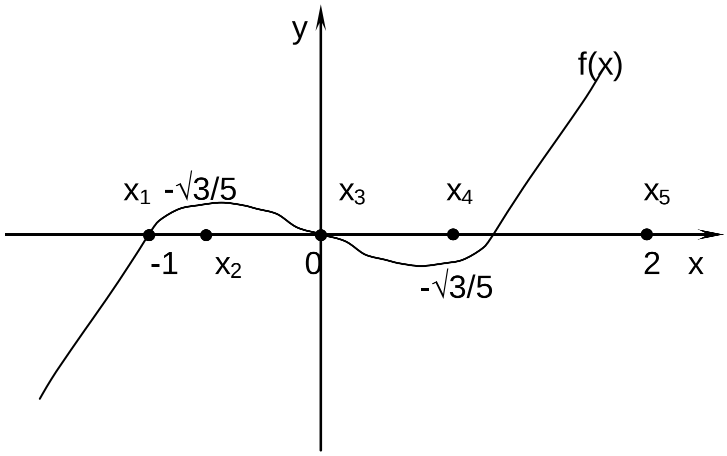

Рис. 3

1.2. Принцип Лагранжа исследования задач с ограничениями

Сущность принципа Лагранжа состоит в переходе от задач с ограничениями к задачам без ограничений.

Прежде, чем переходить к описанию этого принципа, покажем на примере задачи 1, как следует поступать с задачами без ограничений.

Из курса дифференциального исчисления известна теорема Ферма, согласно которой, если точка x_0 доставляет локальный экстремум функции f, то выполняется соотношение:

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x^0} = 0 \leftrightarrow f'(x^0) = 0.$$

Имеем

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d - x}{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}.$$

Уравнение $f'(x) = 0$ имеет единственное решение x^0, при котором как раз и выполнено соотношение ”*угол падения равен углу отражения*” (рис.1).

$$\frac{x^0}{\sqrt{a^2 + (x^0)^2}} - \frac{d - x^0}{\sqrt{b^2 + (d - x^0)^2}} \leftrightarrow \cos\varphi_1 = \cos\varphi_2 \leftrightarrow \varphi_1 = \varphi_2.$$

Таким образом, имеем план решения задачи без ограничений:

1) формализовать задачу;
2) выписать необходимые условия экстремума;
3) найти все экстремальные точки;
4) отыскать решения среди критических точек или показать, что решения нет.

Перейдем теперь к принципу Лагранжа.

Принцип Лагранжа – это правило исследования задач с ограничениями путем сведения первоначальной задачи к отысканию и исследованию критических точек некоторой задачи без ограничений.

Покажем, в чем состоит принцип Лагранжа на примере задачи с ограничениями типа равенств.

Рассмотрим задачу:

$$f_0(x) \to extr;\ f_1(x) = 0,\ f_2(x) = 0, \ldots,\ f_m(x) = 0, \qquad (4)$$

где

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Здесь ограничение задает система неравенств:

$$f_i(x) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Посмотрим, как предлагает решать эту задачу сам Лагранж.

Он пишет: ”*Можно высказать следующий общий принцип. Если ищется минимум или максимум некоторой функции многих переменных при условии, что между этими переменными имеется связь, задаваемая одной или несколькими функциями, то нужно прибавить к функции, экстремум, экстремум которой пишется, функции, задающие уравнения связи, умноженные на неопределенные множители, и искать затем минимум или максимум построенной суммы, как если бы переменные были зависимы. Полученные уравнения, присоединенные к уравнениям связи, послужат для определения всех неизвестных*”.

Воспользуемся правилом Лагранжа.

Составим функцию:

$$L = L(x,\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i f_i(x),\ \lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_m), \qquad (5)$$

которую будем называть функцией Лагранжа. Числа λ_i называются множителями Лагранжа.

Замечание. В задаче на минимум следует брать $\lambda_0 \geq 0$, а в задаче на максимум брать $\lambda_0 \leq 0$.

По правилу Лагранжа, надо рассматривать задачу

$$L(x,\lambda) \to extr(\text{по } x). \qquad (6)$$

Формула (6) проще, чем исходная (4), так как здесь ограничений нет. Условия минимума или максимума выражаются той же самой теоремой Ферма. Согласно этой теореме должны удовлетворяться уравнения

$$L_x(x,\lambda) = 0 \leftrightarrow \frac{\partial L}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n, \lambda_0, \ldots, \lambda_m),\ i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (7)$$

Полученные n уравнений, дополненные m уравнениями связи, служат для определения неизвестных $x_1, \ldots, x_n, \lambda_0, \ldots, \lambda_m$.

В самом деле, хотя неизвестных на одно больше, чем количество уравнений, надо учесть то обстоятельство, что множители Лагранжа можно умножать на любое число, отличное от нуля, и именно в силу этого число уравнений равно числу неизвестных.

Наибольший интерес имеют те случаи, когда $\lambda_0 \neq 0$.

Таким образом, имеем следующий план решения задачи с ограничениями (4).

1. Составить функцию Лагранжа:

$$L(x,\lambda)=\sum_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{m}}\lambda_i f_i(x).$$

2. Выписать необходимые условия экстремума:

$$L(x,\lambda)=0\leftrightarrow\sum_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{m}}\lambda_i\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}=0,\ j=1,2,\ldots,n.$$

3. Найти стационарные точки, то есть допустимые точки, являющиеся решениями уравнений п.2. При этом в задаче на минимум можно, как правило, положить $\lambda_0=1$ или другой положительной константе, а в задаче на максимум $\lambda_0=-1$ или другой любой отрицательной константе.

4. Отыскать решения среди всех стационарных точек или доказать, что решений нет.

Описанная *процедура* и называется ***принципом Лагранжа***.

Этот принцип применим к очень широкому кругу экстремальных задач.

Решим теперь с помощью принципа Лагранжа задачу 2 п.1.

Рассмотрим более простую формализацию задачи (где множитель 4 при функционале отброшен):

$$xy\to SUP;\ x^2+y^2-r^2=0.$$

1. Составим функцию Лагранжа:

$$L=\lambda_0 xy+\lambda_1(x^2+y^2-r^2).$$

2. Выпишем необходимые условия:

$$\frac{\partial L}{\partial x}=0,\frac{\partial L}{\partial y}=0\leftrightarrow\begin{cases}\lambda_0 y+2\lambda_1 x=0,\\ \lambda_0 x+2\lambda_1 y=0.\end{cases}$$

3. Найдем стационарные точки.

Положим $\lambda_0=-1$, так как решаем задачу на максимум. Необходимые условия примут вид:

$$y=2\lambda_1 x,\ x=2\lambda_1 y.$$

Из этих уравнений (к ним надо добавить условие $x^2+y^2-r^2=0$) определяются 4 стационарные точки:

$$(r/\sqrt{2},\ r/\sqrt{2}),(r/\sqrt{2},-r/\sqrt{2}),(-r/\sqrt{2},r/\sqrt{2}),(-r/\sqrt{2},-r/\sqrt{2}).$$

Максимальное значение доставляют точки $(r/\sqrt{2},\ r/\sqrt{2})$ и $(-r/\sqrt{2},-r/\sqrt{2})$. Соответствующие прямоугольники являются квадратами.

Ответ. Решением задачи является квадрат.

1.3. Примеры решения экстремальных задач

Пример 1. [1, с.45].

$$f(x) = ax^2 + bx + c \to extr(a \neq 0).$$

Решение.

1. Необходимое условие – теорема Ферма:

$$f'(x) = 0 \leftrightarrow 2ax + b = 0.$$

2. $x^0 = -b/(2a)$ - стационарная точка.

3. Если $a > 0$, то $\left\{ \begin{array}{c} при\ |x| \to \infty \\ f(x) \to \infty,\ x^0 \in abs\min; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} S_{\min} = C - \dfrac{b^2}{4a}, \\ S_{\max} = +\infty. \end{array} \right.$

Если $a < 0, x^0 = -b/(2a) \in abs\max; \left\{ \begin{array}{l} S_{\max} = C - \dfrac{b^2}{4a}. \\ S_{\min} = -\infty. \end{array} \right.$

Пример 2. [1, с.45].

$$x_1^2 + x_2^2 \to extr;\ x_1^4 + x_2^4 = 1.$$

Решение.

1. Функция Лагранжа:

$$L = \lambda_0(x_1^2 + x_2^2) + \lambda_1(x_1^4 + x_2^4 - 1).$$

2. Необходимое условие:

$$\left. \begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 0. \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_0 x_1 + 2\lambda_1 x_1^3 = 0, \\ \lambda_0 x_2 + 2\lambda_1 x_2^3 = 0. \end{array} \right.$$

3. Положим $\lambda_0 = 1$.

Тогда

$x_1^0 = 0, x_2^0 = \pm 1$

или

$x_2^0 = 0, x_1^0 = \pm 1$

или

$x_2^0 \neq 0, x_1^0 \neq 0$.

Следовательно, $(x_1^0)^2 = (x_2^0)^2 = -1/(2\lambda_1)$, т.е. $|x_1^0| = |x_2^0| = 2^{-1/4}$.

4. Рассмотрим значения функционала в стационарных точках, получаем:

$$S_{\min} = 1, \left\{ (\pm 1, 0), (0, \pm 1) \right\} \in abs\min;$$

$$S_{\max} = \sqrt{2}, \left\{ (\pm 2^{-1/4}, \pm 2^{-1/4}), (\pm 2^{-1/4}, \mp 2^{-1/4}) \right\} \in abs\max.$$

2. МЕТОДИКА РАБОТЫ

Для заданного индивидуального варианта задания выполнить:

1. Найти аналитическое решение экстремальной задачи с использованием принципа Лагранжа.

2. Используя средства автоматизации решения задач (пакет Matlab) найти численное решение задачи.

3. Построить графики, иллюстрирующие полученное решение.

4. Проанализировать полученные решения и сделать выводы.

5. Подготовить отчет о проделанной работе, содержащий следующие разделы: цель работы, постановка задачи, ход выполнения работы, полученные результаты, выводы, приложение (текст программы решения задачи).

3. ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

1. $x^2 - xy + y^2 - 2x + y \to extr.$
2. $xy + 50/x + 20/y \to extr.$
3. $x^2 - y^2 - 4x + 6y \to extr.$
4. $5x^2 + 4xy + y^2 - 16x - 12y \to extr.$
5. $3x^2 + 4xy + y^2 - 8x - 12y \to extr.$
6. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 + x_1 - 2x_3 \to extr.$
7. $3x_1x_2 - x_1^2x_2 - x_1x_2^2 \to extr.$
8. $4x + 3y \to extr;\ x^2 + y^2 = 1.$
9. $x^2 + y^2 \to extr;\ 3x + 4y = 1.$
10. $e^{xy} \to extr;\ x + y = 1.$
11. $5x^2 + 4xy + y^2 \to extr;\ x + y = 1.$
12. $3x^2 + 4xy + y^2 \to extr;\ x + y = 1.$
13. $xy^2z^3 \to extr;\ x + y + z = 1.$
14. $xyz \to extr;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 0.$
15. $x^2 - xy + y^2 + x - 2y \to extr.$
16. $xy + 20/x + 50/y \to extr.$

17. $-x^2+y^2+6x-4y \to extr.$

18. $x^2+4xy+5y^2-12x-16y \to extr.$

19. $x^2+3xy+3y^2-12x-8y \to extr.$

20. $x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_2x_3+x_2-2x_1 \to extr.$

21. $5x_1x_2-2x_1^2x_2-2x_1x_2^2 \to extr.$

22. $6x+8y \to extr;\ x^2+y^2=2.$

23. $x^2+y^2 \to extr;\ 8x+6y=2.$

24. $e^{xy/4} \to extr;\ x+y=2.$

25. $x^2+5xy+3y^2 \to extr;\ x+y=12.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев В.М., Галлеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. – М.: Наука, 1984. – 288 с.

РЕШЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРИНЦИПА ЛАГРАНЖА

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине
«Б.1.2.9 Основы кибернетики»
направления подготовки
«01.03.02 "Прикладная математика и информатика"»
квалификация (степень) «бакалавр»»
Профиль «Математическое моделирование и вычислительная математика»

Составили: СТЕПАНОВ Михаил Федорович

Рецензент В.А. Коваль

Подписано в печать 20.12.2015 Формат 60x84 1/16
Бум. тип. Усл. печ.л. 1,16 (1,25) Уч.-изд.л. 1,1
Тираж 100 экз. Заказ Бесплатно
Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.
410054, Саратов, Политехническая ул. 77
Отпечатано в РИЦ СГТУ. 410054, Саратов, Политехническая ул. 77