Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Саратовский государственный технический университет
имени Гагарина Ю.А.»

Кафедра «Радиоэлектроника и телекоммуникации»

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДАМИ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине
«Б.1.2.9 Основы кибернетики»
направления подготовки
«01.03.02 "Прикладная математика и информатика"»
квалификация (степень) «бакалавр»»
Профиль «Математическое моделирование и вычислительная математика»

Одобрено
редакционно-издательским советом
Саратовского государственного
технического университета

Саратов 2015

ВВЕДЕНИЕ

В исследовании многомерных управляемых систем широкое использование получил метод пространства состояний. Пространство состояний - это метрическое пространство, каждый элемент которого полностью определяет состояние рассматриваемой системы (процесса).

Состояние динамической системы описывается совокупностью физических переменных, характеризующих поведение системы в будущем, при условии, если известно состояние в исходный момент времени и известно приложенное к системе воздействие.

Практические занятия имеют своей целью систематизацию, закрепление и расширение теоретических знаний, получение практических навыков при решении конкретных технических задач; развитие навыков самостоятельной работы с технической литературой в ходе расчета.

Задачи, рассматриваемые в методических указаниях, соответствуют рекомендациям программы изучения дисциплины, призваны способствовать лучшему усвоению теоретического материала, изучаемого в соответствующем разделе.

Вначале рассматриваются решенные задачи, а затем приводятся задачи для самостоятельной работы.

1. СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРОВ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Формулировка задачи Лагранжа как задачи об оптимальном управлении и метод ее решения

Постановка задачи

Объект управления описывается векторно-матричным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(y)];\quad x \in R^n, u \in R^m.$$

Начальное положение объекта

$$x(t_0) = x_0.$$

Конечное положение объекта

$$x(t_1) = x_1.$$

Критерий оптимальности, который является числовым показателем качества системы, задается в виде функционала

$$J = J[x(t), u(t)] = \int_{t_0}^{t_1} F[x(t), u(t)]\,dt.$$

Определить уравнение $u^0(t)$, называемое оптимальным, и оптимальную траекторию $x^0(t)$, на которых функционал принимает экстремальное значение.

Алгоритм решения задачи

1. Составим функцию Лагранжа

$$L = F + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)[\dot{x}_i - f_i],$$

где $\lambda_i(t)$ – неопределенные множители Лагранжа.

2. Запишем уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0,\ i = \overline{1,n}; \\ \dfrac{\partial L}{\partial u_k} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{u}_k} = 0,\ k = \overline{1,m} \end{array}\right\}.$$

3. Из системы уравнений Эйлера-Лагранжа и уравнений объекта находим

$u_k^0(t)$, $x_i^0(t)$, $\lambda_i(t)$; $k=\overline{1,m}$; $i=\overline{1,n}$.

Пример 1. Оптимальное управление двигателем постоянного тока при минимизации энергии потерь (управление в виде обратной связи)

Электрический привод с двигателем постоянного тока независимого возбуждения (рис. 1) нагружен моментом вязкого трения $M_H = k_1\Omega$ большой величины и работает в режиме, при котором падение напряжения $u_1 = i(r_\partial + r_Я)$ на сопротивлении $r = r_\partial + r_Я$ значительно больше обратной электродвижущей силы $e = c_e\Omega$.

Определить закон управления электродвигателем, при котором суммарная энергия потерь, затрачиваемых на преодоление момента вязкого трения и на нагрев, будет минимальной. Влиянием индуктивности в цепи якоря пренебречь.

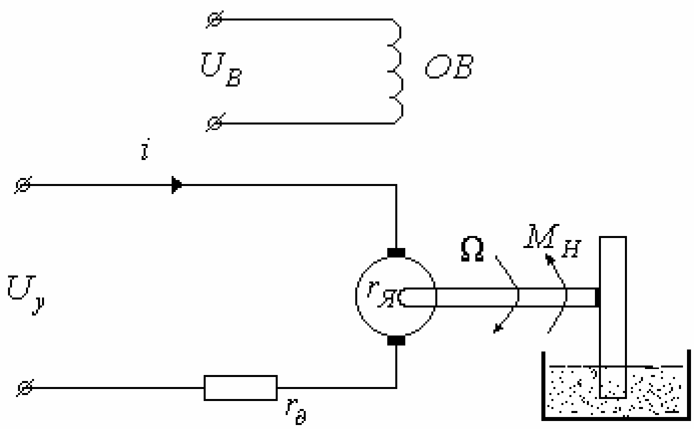

Рис. 1. Схема электрического привода с двигателем постоянного тока, нагруженного моментом вязкого трения

Момент инерции якоря с объектом $G = 1{,}96\cdot 10^{-5}\ Н\cdot м\cdot c^2$;

коэффициенты пропорциональности по ЭДС $c_e = 0.096\ B\cdot c$

и по моменту $c_M = 2{,}94\cdot 10^{-3}\ Н\cdot м\cdot A^{-1}$; $k_1 = 0{,}981\cdot 10^{-3}\ Н\cdot м\cdot c$; $r_\partial + r_Я = 5\ Ом$.

Решение.

Уравнение момента двигателя имеет вид

$$G\frac{d\Omega}{dt}+k_1\Omega=c_M i. \qquad (1)$$

По условию задачи индуктивность цепи якоря мала. Поэтому в соответствии с законом Кирхгофа

$$ir+c_e\Omega=u_y, \qquad (2)$$

откуда следует

$$i=\frac{u_y}{r}-\frac{c_e}{r}\Omega.$$

Подставляя последнее выражение в (1), найдём

$$G\frac{d\Omega}{dt}=\frac{c_M}{r}u_y-\left(\frac{c_e c_M}{r}+k_1\right)\Omega.$$

Поскольку $\frac{c_e c_M}{r}<<k_1$, пренебрегаем первым слагаемым в скобках, поэтому приближённо уравнение динамики примет вид

$$G\frac{d\Omega}{dt}=-k_1\Omega+\frac{c_M}{r}u_y \qquad (*)$$

Подставив численные значения и произведя упрощения, получим

$$\frac{d\Omega}{dt}=a\Omega+bu_y \qquad (3)$$

где $a=-50\,c^{-1}, b=30\,B^{-1}\cdot c^{-2}$.

По условиям задачи двигатель работает в режиме, при котором $c_e\Omega<<ir$. Следовательно, приближённо

$$i\approx\frac{u_y}{r} \qquad (4)$$

Мощность электрических потерь вычисляется по формуле

$$P_Э=iu_y=\frac{u_y^2}{r} \qquad (5)$$

Мощность потерь на вязкое трение составляет величину

$$P_M=M_H\Omega=k_1\Omega^2.$$

Таким образом, оптимизируемый функционал, представляющий суммарную энергию потерь, имеет вид

$$J=\int_0^\infty\left(k_1\Omega^2+\frac{1}{r}u_y^2\right)dt \qquad (6)$$

С учётом числовых значений получим

$$J=\int_0^\infty(q\Omega^2+mu_y^2)dt \qquad (7)$$

где $q = 0{,}981 \cdot 10^{-3}$ $Дж \cdot с$, $m = 0{,}2$ $Вт \cdot В^{-2}$ - весовые коэффициенты функционала оптимизации J.

Составим функцию Лагранжа

$$L = q\Omega^2 + mu^2 + \lambda(\dot{\Omega} - a\Omega - bu)$$

(индекс y для простоты опускаем).

Вычислим производные

$$\frac{\partial L}{\partial \Omega} = 2q\Omega - \lambda a;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\Omega}} = \lambda;$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\Omega}} = \dot{\lambda};$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 2mu - \lambda b;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = 0;$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = 0.$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial \Omega} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\Omega}} = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = 0$$

в данном случае принимают вид

$$\begin{cases} 2q\Omega - \lambda a - \dot{\lambda} = 0; \\ 2mu - \lambda b = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = 2q\Omega - a\lambda; \\ b\lambda = 2mu. \end{cases}.$$

Добавим к этим уравнениям уравнения объекта

$$\dot{\Omega} = a\Omega + bu.$$

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{\Omega} = a\Omega + bu; \\ \dot{\lambda} = 2q\Omega - a\lambda; \\ b\lambda = 2mu. \end{cases} \qquad (8)$$

Из последнего уравнения (8) определим

$$u = \frac{b}{2m}\lambda . \qquad (9)$$

Подставив выражение (9) в уравнения (8), получим систему

$$\begin{cases} \dot{\Omega} = a\Omega + \dfrac{b^2}{2m}\lambda; \\ \dot{\lambda} = 2q\Omega - a\lambda. \end{cases} \qquad (10)$$

Определим собственные числа системы (10) из выражения

$$\Delta(\mu) = \begin{vmatrix} a-\mu & \dfrac{b^2}{2m} \\ 2q & -a-\mu \end{vmatrix} = \mu^2 - (a^2 + \frac{qb^2}{m}) = 0 .$$

Откуда собственные числа

$$\mu_1 = \sqrt{a^2 + \frac{qb^2}{m}}; \quad \mu_2 = -\sqrt{a^2 + \frac{qb^2}{m}} .$$

Условиям устойчивости удовлетворяет отрицательный корень μ_2, поэтому решения уравнений (10) имеют вид

$$\Omega = c_1 e^{\mu_2 t}; \; \lambda = c_2 e^{\mu_2 t} \qquad (11)$$

где c_1, c_2 – постоянные интегрирования

$$c_1 = \Omega(0), c_2 = \lambda(0) .$$

Значение c_1 известно, так как $\Omega(0)$ всегда задано, а значение c_2 в данном (простейшем) случае можно определить из соотношений (10) и (11).

Подставим (11) в (10)

$$\mu_2 c_1 e^{\mu_2 t} = a c_1 e^{\mu_2 t} + \frac{b^2}{2m} c_2 e^{\mu_2 t} .$$

После сокращений и преобразований получим

$$c_2 = \frac{2(\mu_2 - a)m}{b^2} c_1 .$$

Следовательно, искомое оптимальное управление

$$u^0(t) = \frac{b}{2m}\lambda = \frac{\mu_2 - a}{b} c_1 e^{\mu_2 t} \qquad (12)$$

Оптимальное управление (12) зависит от постоянной c_1, которая определяется заданным начальным значением $\Omega(0)$ и имеет такой же закон изменения, как и выходная координата $\Omega(t)$. Поэтому с учётом выражений (11) вместо соотношения (12) запишем

$$u^0(\Omega) = \frac{\mu_2 - a}{b}\Omega = K_{O.C.}\Omega \qquad (13)$$

где

$$K_{O.C.} = \frac{\mu_2 - a}{b} = \frac{-\sqrt{a^2 + \frac{qb^2}{m}} - a}{b} = -\frac{a}{b} - \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{q}{m}}. \qquad (14)$$

После подстановки численных значений находим

$K_{O.C.} = 0{,}87 \cdot 10^{-1}\ B \cdot c$.

Замечание. В данном примере оптимальное управление получено в зависимости от скорости $u^0(\Omega) = K_{O.C.}\Omega$, то есть в виде обратной связи. При помощи вариационного исчисления это можно сделать только в самых простейших случаях.

2. ЗАДАНИЕ

1. Синтезировать по методике п.1 закон оптимального управления двигателем постоянного тока при минимизации энергии потерь в соответствии с индивидуальным вариантом (таблица 1) с учетом упрощений (*), принятых в п.1.
2. Выполнить анализ системы управления в пространстве состояний.
3. Построить графики переходных процессов по переменным состояния и по управлению с использованием пакета Matlab.
4. Синтезировать по методике п.1 закон оптимального управления двигателем постоянного тока при минимизации энергии потерь в соответствии с индивидуальным вариантом (таблица 1) без учета упрощений (*), принятых в п.1.
5. Выполнить анализ системы управления в пространстве состояний.
6. Построить графики переходных процессов по переменным состояния и по управлению с использованием пакета Matlab.
7. Оформить отчет.

3. ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Таблица 1.

№ варианта	G $[Н \cdot м \cdot c^2]$	c_e $[В \cdot c]$	$c_М$ $[Н \cdot м \cdot А^{-1}]$	k_1 $[Н \cdot м \cdot c]$	$r_д$ $[Ом]$	$r_Я$ $[Ом]$
1	$1{,}99 \cdot 10^{-5}$	0,099	$2{,}99 \cdot 10^{-3}$	$0{,}99 \cdot 10^{-3}$	3	3
2	$2{,}10 \cdot 10^{-5}$	0,110	$3{,}1 \cdot 10^{-3}$	$1{,}10 \cdot 10^{-3}$	3,1	3,2
3	$2{,}20 \cdot 10^{-5}$	0,120	$3{,}2 \cdot 10^{-3}$	$1{,}20 \cdot 10^{-3}$	2,9	3,3
4	$2{,}30 \cdot 10^{-5}$	0,130	$3{,}3 \cdot 10^{-3}$	$1{,}30 \cdot 10^{-3}$	2,8	3,2
5	$2{,}40 \cdot 10^{-5}$	0,140	$3{,}4 \cdot 10^{-3}$	$1{,}40 \cdot 10^{-3}$	2,9	3,1
6	$2{,}50 \cdot 10^{-5}$	0,150	$3{,}5 \cdot 10^{-3}$	$1{,}50 \cdot 10^{-3}$	2,7	3,0
7	$2{,}60 \cdot 10^{-5}$	0,160	$3{,}6 \cdot 10^{-3}$	$1{,}60 \cdot 10^{-3}$	2,8	2,9
8	$2{,}70 \cdot 10^{-5}$	0,170	$3{,}7 \cdot 10^{-3}$	$1{,}70 \cdot 10^{-3}$	2,7	2,8
9	$2{,}80 \cdot 10^{-5}$	0,180	$3{,}8 \cdot 10^{-3}$	$1{,}80 \cdot 10^{-3}$	2,8	2,7
10	$2{,}90 \cdot 10^{-5}$	0,190	$3{,}9 \cdot 10^{-3}$	$1{,}90 \cdot 10^{-3}$	2,7	2,9
11	$2{,}90 \cdot 10^{-5}$	0,190	$3{,}9 \cdot 10^{-3}$	$1{,}90 \cdot 10^{-3}$	2,7	2,6
12	$3{,}00 \cdot 10^{-5}$	0,200	$4{,}0 \cdot 10^{-3}$	$2{,}00 \cdot 10^{-3}$	2,7	2,6
13	$3{,}10 \cdot 10^{-5}$	0,210	$4{,}1 \cdot 10^{-3}$	$2{,}10 \cdot 10^{-3}$	2,6	2,6
14	$3{,}20 \cdot 10^{-5}$	0,220	$4{,}2 \cdot 10^{-3}$	$2{,}20 \cdot 10^{-3}$	2,5	2,6
15	$3{,}30 \cdot 10^{-5}$	0,230	$4{,}3 \cdot 10^{-3}$	$2{,}30 \cdot 10^{-3}$	2,5	2,5
16	$3{,}40 \cdot 10^{-5}$	0,240	$4{,}4 \cdot 10^{-3}$	$2{,}40 \cdot 10^{-3}$	2,4	2,5
17	$3{,}50 \cdot 10^{-5}$	0,250	$4{,}5 \cdot 10^{-3}$	$2{,}50 \cdot 10^{-3}$	2,4	2,4
18	$3{,}60 \cdot 10^{-5}$	0,260	$4{,}6 \cdot 10^{-3}$	$2{,}60 \cdot 10^{-3}$	2,3	2,4
19	$3{,}70 \cdot 10^{-5}$	0,270	$4{,}7 \cdot 10^{-3}$	$2{,}70 \cdot 10^{-3}$	2,3	2,3
20	$3{,}80 \cdot 10^{-5}$	0,280	$4{,}8 \cdot 10^{-3}$	$2{,}80 \cdot 10^{-3}$	2,2	2,3
21	$3{,}90 \cdot 10^{-5}$	0,290	$4{,}9 \cdot 10^{-3}$	$2{,}90 \cdot 10^{-3}$	2,2	2,2
22	$4{,}00 \cdot 10^{-5}$	0,300	$5{,}0 \cdot 10^{-3}$	$3{,}00 \cdot 10^{-3}$	2,1	2,2
23	$4{,}10 \cdot 10^{-5}$	0,310	$5{,}1 \cdot 10^{-3}$	$3{,}10 \cdot 10^{-3}$	2,1	2,1
24	$4{,}20 \cdot 10^{-5}$	0,320	$5{,}2 \cdot 10^{-3}$	$3{,}20 \cdot 10^{-3}$	2,0	2,1
25	$4{,}30 \cdot 10^{-5}$	0,330	$5{,}3 \cdot 10^{-3}$	$3{,}30 \cdot 10^{-3}$	2,0	2,0

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Абдуллаев Н.Д. Теория и методы проектирования оптимальных регуляторов / Н.Д. Абдуллаев, Ю.П. Петров. – Л.: Энергоатомиздат, 1985.

2. Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы /А.Г. Александров. – М.: Высшая школа, 1989.

3. Воронов А.А. Основы автоматического регулирования и управления / А.А. Воронов, В.К. Титов, Б.Н. Новограмов. – М.: Высшая школа, 1977.

4. Гноенский Л.С. Математические основы теории управляемых систем / Л.С. Гноенский, Г.А. Каменский, Л.Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 1969.

5. Олейников В.А. Основы оптимального и экстремального управления / В.А. Олейников, Н.С. Зотов, А.М. Пришвин. – М.: Наука, 1969.

6. Сборник задач по теории автоматического регулирования / под ред. В.А. Бесекерского. – М.: Наука, 1970.

7. Справочник по теории автоматического управления / под ред. А.А. Красовского. – М.: Наука, 1987.

8. Тимофеев Ю.К. Вариационное исчисление в оптимальном управлении: учеб. пособие / Ю.К. Тимофеев. – Саратов: СГТУ, 2003.

9. Теория автоматического управления: в 2 ч. / под ред. А.А. Воронова. – М.: Высшая школа, 1986. – Ч.2.

10. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 1965.

Дополнительная

1. Алексеев В.М. Сборник задач по оптимизации / В.М. Алексеев, Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров. – М.: Наука, 1984.

2. Ванько В.И. Вариационное исчисление и оптимальное управление: учебник для вузов / В.И Ванько, О.В. Ермошина, Г.Н Кувыркин; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд–во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.

3. Дорф Р. Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.

4. Куропаткин П.В. Оптимальные и адаптивные системы / П.В. Куропаткин. – М.: Высшая школа, 1980.

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДАМИ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине
«Б.1.2.9 Основы кибернетики»
направления подготовки
«01.03.02 "Прикладная математика и информатика"»
квалификация (степень) «бакалавр»»
Профиль «Математическое моделирование и вычислительная математика»

Составили: СТЕПАНОВ Михаил Федорович

Рецензент В.А. Коваль

Редактор

Подписано в печать		Формат 60x84 1/16
Бум. тип.	Усл. печ.л. 1,16 (1,25)	Уч.-изд.л. 1,1
Тираж 100 экз.	Заказ	Бесплатно

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.
410054, Саратов, Политехническая ул. 77
Отпечатано в РИЦ СГТУ имени Гагарина Ю.А. 410054, Саратов, Политехническая ул. 77