ЛОГИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И АЛГЕБРА ЛОГИКИ

Булевы функции. Функции одной и двух переменных

Функция $f(x_1, x_2, .. x_n)$, принимающая два значения 0 и 1 и зависящая от переменных, каждая из которых может принимать два значения 0 и 1, называется булевой, логической или переключательной.

Как следует из определения, областью определения булевой функции служит совокупность n-мерных наборов 0 и 1, а для ее задания достаточно указать, какое значение функции соответствует каждому из этих наборов, то есть булева функция может быть задана таблицей.

Таблица 8.1.1

x_1	x_2	x_3	...	x_{n-}	x_n	$f(x_1, x_2, .. x_n)$
0	0	0	...	0	0	f(0,0,...,0,0)
0	0	0	…	0	1	f(0,0,...,0,1)
0	0	0	…	1	0	f(0,0,...,1,0)
0	0	0	…	1	1	f(0,0,...,1,1)
...	...	...	…	...	...	...
1	1	1	…	1	0	f(1,1,...,1,0)
1	1	1	…	1	1	f(1,1,...,1,1)

Эта таблица называется таблицей соответствия (истинностной таблицей).

Перечень всех символов, соответствующих области значений, называют алфавитом (в данном случае двоичным алфавитом), а сами символы – буквами этого алфавита.

Наборы в таблице расположены в стандартном порядке, который обычно называют естественным.

Естественный порядок вводят следующим образом. Каждому набору $(x_1, x_2, ..., x_n)$, где $x_i\ (i = \overline{\ , n})$ есть 0 или 1, ставится в соответствие число

$$N = {}_1 2^{n-} + {}_2 2^{n-} + .+ {}_{n-} 2 + {}_n .$$

Наборам (0,0,...,0,0),(0,0,...,0,1),...,(1,1,...,1,1) соответствуют числа 0,1,...,2^{n-1}.

Естественным порядком будет расположение наборов в порядке возрастания соответствующих им чисел. Легко видеть, что число n-мерных наборов из 0 и 1 равно 2^n. Различные таблицы отличаются значениями правого столбца, поэтому верно следующее утверждение: число булевых функций от n – переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ равно 2^{2^n}. Поэтому прямое изучение этих функций с помощью таблиц возможно лишь до n=3.

Для описания логических функций от большого числа переменных используют принцип суперпозиции, который состоит в подстановке в функцию новых функций вместо аргументов.

Например, функция от трех переменных $f(a,b,c)$ может быть преобразована в две функции от двух переменных $f[g(a,b),c]$ и $g(a,b)\cdot$

Поэтому в алгебре логики важную роль играют логические функции одной и двух переменных, используя принцип суперпозиции можно, с их помощью, построить функции от любого числа переменных. Функции одной и двух переменных называются элементарными.

Булевы функции одной переменной $f(x)$

Их число 2^{2^1}=4. Они могут быть заданы таблично следующим образом

Таблица 8.1.2

x	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

f_0 =0 - константа нуля, $f_1 =$ -повторение,

$f_2 =$ - инверсия (отрицание), f_3 = 1 - константа единицы.

Булевы функции двух переменных $f(x_1, x_2)$

Их число $2^{2^2} = 6$. Таблично задаются следующим образом

Таблица 8.1.3

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

x_1	x_2	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

f_0 – константа нуля; f_{15} – константа единицы;

f_{10}, f_{12} – повторение, т.е. $f_{12} = x_1, f_{10} = x_2$;

f_3, f_5 – инверсия (отрицание), т.е. $f_3 = \bar{x}_1, f_5 = \bar{x}_2$;

f_8 – конъюнкция (логическое умножение), функция И, т. е.

$f_8 = x_1 \wedge x_2 = x_1 \& x_2 = x_1 x_2$;

f_{14} – дизъюнкция или логическое сложение, функция ИЛИ, т. е.

$f_{14} = x_1 \vee x_2 = x_1 + x_2$;

f_7 – штрих Шеффера, функция И-НЕ, т. е.

$f_8 = x_1 / x_2 = \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 = \overline{x_1 x_2}$;

f_{14} – стрелка Пирса, функция ИЛИ-НЕ, т. е.

$f_{14} = x_1 \downarrow x_2 = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$;

f_9 – эквивалентность, $f_{14} = x_1 \leftrightarrow x_2 = x_1 \propto x_2$;

f_{11}, f_{13} – импликация или следствие, $f_{11} = x_1 \rightarrow x_2, f_{13} = x_2 \rightarrow x_1$

f_6 – сумма по модулю два, $f_6 = x_1 \oplus x_2$

f_4, f_2 – функция запрета; $f_4 = \overline{x_1 \to x_2}$; $f_2 = \overline{x_2 \to x_1}$.

Булевы функции многих переменных

Как указывалось выше с помощью суперпозиции функций, то есть подстановки в логические формулы вместо переменных некоторых булевых функций, можно получить более сложные функции от любого числа переменных.

Например, подставляя в выражение ab формулы $a = x_1 \vee x_2$ и $b = x_2 \to c$, а также $c = \overline{x_3}$, получаем $(x_1 \vee x_2)(x_2 \to \overline{x_3})$. Таблица соответствия для сложных формул записывается на основании общей таблицы для элементарных функций.

Таблица 8.1.4

x_1	x_2	x_3	$x_1 \vee x_2$	$\overline{x_3}$	$x_2 \to \overline{x_3}$	$(x_1 \vee x_2)(x_2 \to \overline{x_3})$
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0

Геометрическое представление булевых функций

Область определения булевых функций от n переменных $y=f(x_1,x_2,..x_n)$ можно рассматривать как совокупность n-мерных векторов, компонентами которых являются 0 или 1. При n=3 каждый вектор представляется вершиной единичного куба в трехмерном пространстве (рис.8.1.1.)

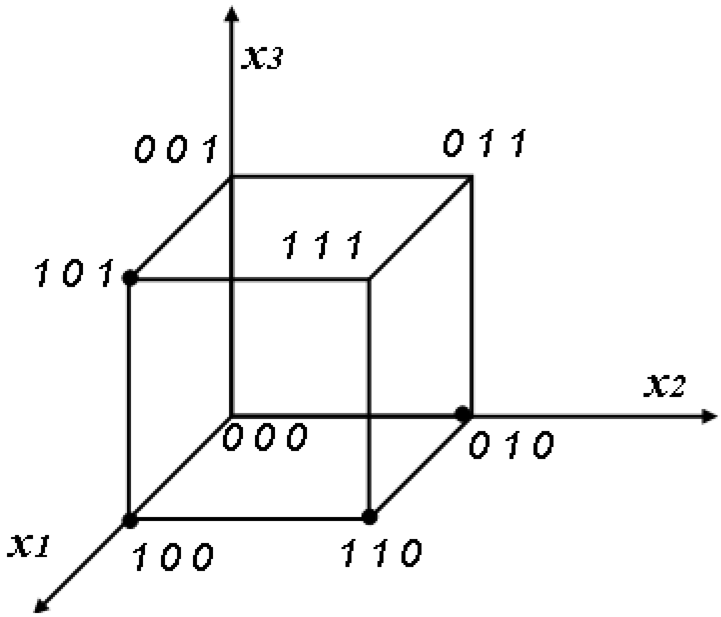


Рис. 8.1.1 Отображение булевой функции

$y=(x_1 \vee x_2)(x_2 \to \bar{x}_3)$ на трехмерном кубе.

В общем случае совокупность векторов $(x_1,x_2,...x_n)$ отображается на множество вершин n-мерного куба. Все такие вершины образуют логическое пространство.

Булева функция отображается на n-мерном кубе путем выделения вершин, соответствующих векторам $(x_1,x_2,..x_n)$, на котором булева функция $y=f(x_1,x_2,..x_n)$ принимает значение 1. Обычно также вершины отмечают жирными точками.

Некоторые свойства элементарных функций

Функции конъюнкция и дизъюнкция обладают свойствами ассоциативности и можно употреблять, поэтому обозначения:

1. $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} x_i = x_1x_2...x_n$ и $\bigvee\limits_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + ... + x_n$;
2. $\overline{\overline{x}} = x$, $\overline{x_1x_2} = \overline{x}_1 + \overline{x}_2$, $\overline{x_1 + x_2} = \overline{x}_1\overline{x}_2$;
3. $xx = x, x + x = x, x\overline{x} = 0, x + \overline{x} = 1, x \cdot 0 = 0, x \cdot 1 = x,$
   $x + 0 = x, x + 1 = 1$.

Все эти свойства можно проверить из определения булевых функций.

Функциональная полнота

Система функций, суперпозицией которых может быть представлена из некоторого множества булевых функций, называется полной (функционально полной). Если в такой системе допускаются константы 0 и 1, то ее называют ослаблено функционально полной.

Говорят, что функционально полная система функций образует базис в логическом пространстве.

Система функций называется минимально полным базисом, если удаление из нее любой функции превращает эту систему в неполную.

Примеры полных булевых функций

Пример 8.1.1 Система булевых функций $x_1x_2, x_1 + x_2, \overline{x}$ является полной (условно эту систему можно обозначить {·,+,-} или {∧, ∨, -}).

Это утверждение можно обосновать, выразив все остальные булевы функции через конъюнкцию, дизъюнкцию и инверсию (логическое умножение, логическое сложение, инверсию). Эти соотношения выглядят следующим образом

$$x_1 \leftrightarrow x_2 = x_1 x_2 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}, \quad x_1 \to x_2 = \overline{x_1} + x_2,$$

$$\overline{x_1 \to x_2} = x_1 \overline{x_2}, x_1 \oplus x_2 = \overline{x_1} x_2 + x_1 \overline{x_2}, x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 + x_2},$$

$$x_1 / x_2 = \overline{x_1 x_2},$$

и так далее.

Все эти равенства можно проверить при помощи таблиц соответствия. Составляем таблицы соответствия для левой и правой части равенства $x_1 \leftrightarrow x_2 = x_1 x_2 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}$.

Таблица соответствия для левой части формулы имеет вид

x_1	x_2	$x_1 \leftrightarrow x_2$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Таблица соответствия для правой части имеет вид

x_1	x_2	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	x_1x_2	$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$x_1x_2+\bar{x}_1\bar{x}_2$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1

Таблицы соответствия левой и правой частей формулы совпадают, следовательно, формула верна.

Пример 8.1.2 Система булевых функций $x_1x_2,\bar{x}$ полна, так как полна система $x_1x_2, x_1+x_2, \bar{x}$ и $x_1+x_2=\overline{\bar{x}_1\cdot\bar{x}_2}$.

Пример 8.1.3 Системе булевых функций $x_1+x_2,\bar{x}$ полна, так как полна система $x_1x_2, x_1+x_2, \bar{x}$ и $x_1x_2=\overline{\bar{x}_1+\bar{x}_2}$.

Пример 8.1.4 Штрих Шеффера x_1/x_2 в единственном числе представляет собой функционально полную систему. В этом можно убедиться, представив в виде этой операции конъюнкцию, дизъюнкцию и инверсию.

$$\bar{x}=\overline{xx}=x/x;$$
$$x_1x_2=\overline{\overline{x_1x_2}}=\overline{x_1/x_2}=(x_1/x_2)/(x_1/x_2);$$
$$x_1+x_2=\overline{\bar{x}_1\bar{x}_2}=\bar{x}_1/\bar{x}_2=(x_1/x_1)/(x_2/x_2).$$

Пример 8.1.5 Стрелка Пирса $x_1\downarrow x_2$ является функционально полной системой. Обоснование аналогично примеру 8.1.4.

Существуют и другие функционально полные системы функций. Это иллюстрируется следующей таблицей.

Таблица 8.1.5

Число функций в системе	*Полные системы элементарных Функций*
Одна	$\{\downarrow$ $\{/\}$
Две	$\{0,\rightarrow$ $\;-\leftarrow$ $\;-\cdot\;,\{-\rightarrow$ $\;-+\;,$ $\{\leftarrow\leftrightarrow$ $\;\leftarrow\rightarrow$ $\;\leftarrow$ $\;,\{\oplus\rightarrow$
Три	$\{0,\cdot\leftrightarrow$ $\;0,+\leftrightarrow$ $\;\oplus\cdot\leftrightarrow$ $\;\oplus+\leftrightarrow$ $\{\oplus\cdot\;\},\{\oplus+\;\}$

8.1.3. Нормальные формы

Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) - это дизъюнкция конечного числа различных выражений, каждое из которых представляет собой конъюнкцию отдельных переменных или их инверсий, входящих в каждое выражение не более одного раза.

Пример ДНФ. $x_1\overline{x_2}x_3 + {}_1x_2 + {}_1x_2\overline{x_3}$.

Конъюнктивная нормальная форма (КНФ) - конъюнкция конечного числа различных выражений, каждое из которых представляет собой дизъюнкцию отдельных переменных или их инверсий, входящих в каждое выражение не более одного раза.

Пример КНФ

$$(x_1 + \overline{\ }_2 + {}_3)(x_1 + {}_2)(x_1 + {}_2 + \overline{\ }_3).$$

Данная формула приводится к нормальному виду следующим путем:

- все функции выражаются через конъюнкцию (логическое умножение), дизъюнкцию (логическое сложение) и инверсию;

- с помощью законов де Моргана

$$\overline{ab}=\bar{a}+\bar{b},\quad \overline{a+b}=\bar{a}\bar{b}$$

формула преобразуется к такому виду, чтобы знаки отрицания относились только к отдельным переменным;

- на основе дистрибутивных законов

$$(a+b)c=ac+bc,\quad a+bc=(a+b)(a+c)$$

формула сводится к дизъюнкции конъюнкций или к конъюнкции дизъюнкций;

- полученные выражения упрощаются в соответствии с тождествами

$$xx=x,\ x\bar{x}=0,\ x+x=x,\ x+\bar{x}=1.$$

Пример.

$$(x_1x_2+\bar{x}_2x_3)\overline{\bar{x}_1x_4}=(x_1x_2+\bar{x}_2x_3)(x_1+\ldots$$
$$+\bar{x}_2x_3)x_1+(x_1x_2+\bar{x}_2x_3)\bar{x}_4=x_1x_2x_1+\ldots$$
$$+\bar{x}_2x_3\bar{x}_4=x_1x_2+x_1\bar{x}_2x_3+x_1x_2\bar{x}_4+\ldots$$

- ДНФ.

$$(x_1x_2+\bar{x}_2x_3)\overline{\bar{x}_1x_4}=(x_1x_2+\bar{x}_2x_3)\ldots$$
$$=(x_1+\bar{x}_2x_3)(x_2+\bar{x}_2x_3)(x_1+\bar{x}_4)\ldots$$
$$x(x_2+\bar{x}_2)(x_2+x_3)(x_1+\bar{x}_4)=x_1\ldots$$
$$+x_3)(x_1+\bar{x}_4)$$

- КНФ.

Члены дизъюнктивной (конъюнктивной) нормальной формы, представляющие собой элементарные конъюнкции (дизъюнкции) К-букв, называются минитермами (макстермами) к-го ранга. Так в приведенных выше формах $x_1 x_2$ - минитерм второго ранга, $x_1 \overline{x_2} x_3$ - минитерм третьего ранга, $x_1 + \overline{x_2}$ - макстерм второго ранга.

Если в каждом члене нормальной формы представлены все переменные (либо в прямом, либо в инверсном виде), то она называется совершенной нормальной формой (СДНФ, СКНФ).

Можно показать, что любая булева функция, не являющаяся тождественным нулем (единицей), имеет одну и только одну дизъюнктивную (конъюнктивную) нормальную форму.

Пример приведения формулы к нормальному виду

$$x_1 \overline{x_2} x_3 + x_1 \overline{x_3} = x_1 \overline{x_2} x_3 + x_1 \overline{x_3}(x_2 + \overline{x_2}) =$$
$$= x_1 \overline{x_2} x_3 + x_1 x_2 \overline{x_3} + x_1 \overline{x_2}\, \overline{x_3}.$$

КОМБИНАЦИОННЫЕ СХЕМЫ

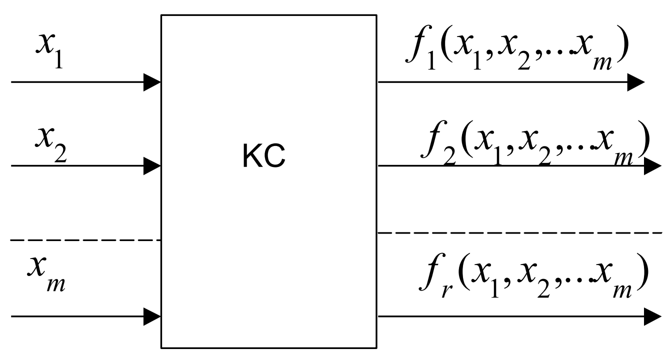
Комбинационная схема. Способы задания, этапы проектирования

Комбинационной схемой называется техническое устройство, служащее для преобразования дискретной информации и имеющее m-входов и r- выходов.

Сигналы, подаваемые на входы и снимаемые с выходов, могут принимать только значения 1 и 0. Такими сигналами, например, могут быть высокий и низкий уровни напряжения, наличие или отсутствие тока или напряжения.

Таким образом, комбинационная схема преобразует некоторые m-буквенное входное слово в двоичном алфавите в r-буквенное слово в том же алфавите.

Условно комбинационную схему (КС) можно изобразить следующим образом:



Сигналы подаются на входы и снимаются с выходов в, так называемые, тактовые или дискретные моменты времени 0,T,2T,...,kT,...

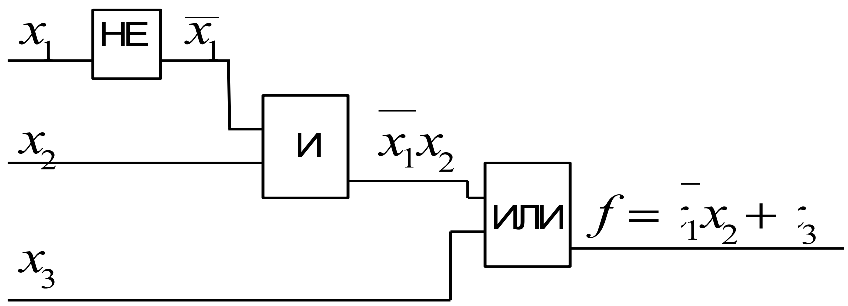
Процесс функционирования комбинационной схемы можно определить (описав ее работу) следующим образом:

-таблицей соответствия;

-логической формулой;

-логической схемой.

Так логической формуле вида $f = \bar{x}_1 x_2 + x_3$ будет соответствовать логическая схема



и таблица соответствия

Таблица 8.2.1

x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_1 x_2$	$f = \bar{x}_1 x_2 + x_3$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1

Релейно-контактные схемы исторически были первыми техническими средствами реализации комбинационных схем и первыми объектами применения алгебры логики для решения технических задач. Любую булеву (логическую) функцию можно реализовать схемой, состоящей из последовательно и параллельно соединенных ключей. Каждый такой ключ может находиться в двух состояниях - разомкнут (0) и замкнут (1), а переход из одного состояния в другое осуществляется каким-либо управляющим органом.

В электрических цепях роль ключей играют многочисленные устройства, предназначенные для коммутации (замыкания и размыкания): выключатели, электромагнитные реле, телеграфные ключи, электронные ключевые схемы и т.п.

В рамках общей теории целесообразно отвлечься от конструктивных и специфических особенностей ключевых объектов и интерпретировать ключ как отрезок проводника с контактом, который может быть разомкнут и замкнут. Разомкнутое состояние контакта отождествляется с нулем, а замкнутое - с единицей.

Обозначим 1-замкнутую, 0-разомкнутую цепи. Для управления состоянием цепи введем в нее контакты, состояние которых определяется значением входных переменных x_1, x_2, x_3. Замыкающие (нормально-разомкнутые) контакты обозначаются x_i, размыкающие (нормально-замкнутые) контакты - через $\overline{x_i}$. При управляющем воздействии контакт меняет свое состояние: нормально разомкнутый контакт замыкается, а нормально замкнутый - размыкается.

Замкнутая цепь 1

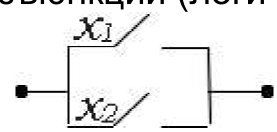
Разомкнутая цепь 0

Замыкающий контакт

Последовательное соединение контактов соответствует конъюнкции (логическому умножению)

$x_1 x_2$

Параллельное соединение контактов соответствует дизъюнкции (логическому сложению)



$x_1 + x_2$

В последующем получили распространение бесконтактные способы реализации комбинационных схем, осуществляемые с помощью полупроводниковых и магнитных элементов, объединенных в интегральные схемы (микросхемы).

Этапы синтеза (проектирования) комбинационных схем.

Условно процесс проектирования комбинационных схем можно разделить на следующие этапы:

- словесное описание работы комбинационной схемы и составление таблицы соответствия;
- запись логической (булевой) формулы по таблице соответствия;
- упрощение (минимизация) формулы;
- представление формулы в выбранном базисе;
- составление логической схемы;
- техническая реализация комбинационной схемы.

В дальнейшем будут рассмотрены все эти этапы синтеза, за исключением последнего, являющимся предметом изучения таких дисциплин как электроника, электронные системы и др.

8.2.2 Составление логической формулы по заданным таблицам

При проектировании комбинационных схем редко удается выразить решаемые такой схемой задачи непосредственно в виде логической формулы. Особенно на первом этапе используется словесное описание решаемых схемой задач, на основании которого удается составить таблицу, связывающую численные значения входных и выходных логических переменных.

Переход от таблицы к логической схеме является вторым этапом синтеза комбинационной схемы.

Будем называть таблицу простейшей, если она соответствует либо операции логического умножения (в выходном столбце одна единица, остальные - нули), либо операции логического сложения (в выходном столбце один ноль, остальные - единицы).

Способ задания логической формулы для простейшей таблицы поясняются следующими примерами.

$f = \bar{x}_1 + x_2$ Таблица 8.2.2

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	1
1	0	0

$f = x_1\bar{x}_2$ Таблица8.2.3

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	0
1	0	1

0	1	1
1	1	1

0	1	0
1	1	0

В таблице 8.2.2 ноль стоит только во второй строке столбца f, что соответствует операции логического сложения. Т.к. в этой строке $\overline{x_1}=$ и $x_2=0$, то $f=\bar{x}_1+x_2$.

В таблице 8.2.3 единица стоит только во второй строке столбца f, что соответствует операции логического умножения. Т.к. в этой строке $x_1=$ и $\overline{x_2}=$, то $f=x_1\overline{x_2}$.

Если таблица не является простейшей, то написать для нее логическую формулу можно любым из двух стандартных способов.

1 Способ:

- в выходном столбце все единицы, кроме одной, поочередно заменяются нулями, получаются простейшие таблицы, соответствующие операции логического умножения;

- записываются формулы для полученных простейших таблиц;

- берется логическая сумма полученных выражений.

Способ иллюстрируется следующей таблицей

Таблица 8.2.4

x_1	x_2	f	f_1	f_2	$f=f_1+f_2$
0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1

1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0

$$f_1 = \bar{x}_1 x_2, f_2 = x_1 \overline{x_2}.$$

Следовательно: $f = f_1 + f_2 = \bar{x}_1 x_2 + x_1 \overline{x_2}.$

2 Способ:

-в выходном столбце все нули, кроме одного, поочередно заменяются единицами. Получаются простейшие таблицы, соответствующие операциям логического сложения;

-записываются формулы для полученных простейших таблиц;

- берется логическое умножение полученных выражений.

Способ иллюстрируется следующей таблицей

Таблица 8.2.5

x_1	x_2	f	f_3	f_4	$f = f_3 f_4$
0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0

$$f_3 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2; f_4 = x_1 + x_2.$$

Следовательно $f = f_3 f_4 = (x_1 + x_2)(\overline{x_1} + \bar{x}_2)\cdot$

Оба способа дают тождественные результаты. Убедимся в этом, преобразовав одну из формул

$$(x_1 + x_2)(\overline{x_1} + \overline{x_2}) = x_1\overline{x_1} + x_1\overline{x_2} + x_2\overline{x_1} + x_2\overline{x_2} =$$
$$= x_1\overline{x_2} + x_2\overline{x_1},$$

так как $x\overline{x} = 0$.

Аналогично можно записать формулы и для функций трех, четырех и большего числа переменных.

Рассмотренные способы записи формул по таблице являются универсальными, то есть позволяют записать логическую формулу для любой таблицы, а в соответствии с ней построить логическую схему для любой таблицы.

Однако они приводят, как правило, к сложным формулам, для реализации которых требуется большое число различных элементов. При этом под сложностью формулы понимается количество входящих в нее операций, так что сложностью формулы $\overline{x}$ будет 1, а сложностью формулы

$(\overline{x_1} + x_2)(\overline{x_2} + x_3)$ будет 5 (две инверсии, два логических сложения и одно логическое умножение).

В качестве примера составим логическую формулу для функции, заданной таблицей 8.2.1.

Первый способ записи формулы дает

$$f = \overline{x_1}\overline{x_2}x_3 + \overline{x_1}x_2\overline{x_3} + \overline{x_1}x_2x_3 + x_1\overline{x_2}x_3 + x_1x_2x_3.$$

Сложность формулы равна 9 (3НЕ+5И+1ИЛИ=9).

Второй способ задания формулы дает

$$f = (x_1 + x_2 + x_3)(\overline{x_1} + x_2 + x_3)(\overline{x_1} + \overline{x_2} + x_3).$$

Сложность формулы равна 6 (2НЕ+3ИЛИ+1И=6).

Сложность же ее в соответствии с таблицей 8.2.1 равна 3 (1НЕ+1И+1ИЛИ=3).

Таким образом, важной задачей синтеза комбинационных схем является задача упрощения или минимизация булевых (логических) формул.

8.2.3. Упрощение (минимизация) булевых формул. Карты Карно

Для упрощения булевых формул используются основные законы алгебры логики:

1. Закон нулевого множества $0 \cdot a \cdot b \cdot c \cdot \ldots \cdot w = 0$.
2. Закон универсального множества

   $1 + a + b + c + \ldots + w = 1$.
3. Коммутативные (переместительные) законы

   $abcd = bacd = dabc = \ldots; \quad a + b + c + d + \ldots = b + a + c + d + \ldots$.
4. Ассоциативные (сочетательные) законы

   $a(bc) = (ab)c = abc; \quad a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$.
5. Дистрибутивные (распределительные) законы

   $a \cdot (b + c) = ab + ac; \quad a + bc = (a + b)(a + c)$.
6. Законы повторения (тавтологии)

   $a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a = a; \quad a + a + a + \ldots + a = a$.
7. Закон двойной инверсии $\overline{\overline{a}} = a$.
8. Законы дополнительности

   а) логическое противоречие $\overline{a}a = 0$,

   б) исключение третьего $a + \overline{a} = 1$.

9. Законы поглощения

$$a+\ b+\ c+...+\ w=\ ;\quad a(a+\ )(a+\ )...(a+\ w)=\ .$$

10. Законы склеивания

$$ab+\ \bar{b}=\ ;(a+\ )(a+\ )=\ .$$

11. Закон Деморгана

$$\bar{a}+\ +\ +...+\omega\quad \bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\cdot...\cdot\bar{w};\quad \overline{abc...w}=\ +\ +\ +...+\ w.$$

12. $a+\ b=\ +\ .$

Упростим для примера полученное ранее выражение

$$\begin{aligned} f &= \bar{x}_1\bar{x}_2x_3+\bar{x}_1x_2\bar{x}_3+\bar{x}_1x_2x_3+x_1\bar{x}_2x_3+x_1x_2x_3= \\ &= \bar{x}_1\bar{x}_2x_3+\bar{x}_1x_2+x_1x_3=\bar{x}_1(x_2+\bar{x}_2x_3)+x_1x_3= \\ &= \bar{x}_1(x_2+x_3)+x_1x_3=\bar{x}_1x_2+\bar{x}_1x_3+x_1x_3=\bar{x}_1x_2+x_3 \end{aligned}$$

Для случая, когда число переменных не больше четырех, нахождение простейших видов булевых формул удобно проводить используя специальные таблицы, известные под названием карт Карно или диаграмм Вейча.

Карты Карно - специально организованные таблицы соответствия. Столбцы и строки таблицы соответствуют всевозможным наборам значений не более двух переменных, причем эти наборы расположены в таком порядке, что каждый последующий отличается от предыдущего значением только одной из переменных. Благодаря этому и соседние клетки таблицы по горизонтали и вертикали отличаются значением только одной переменной. Клетки, расположенные по краям таблицы, также считаются соседними и обладают этим свойством.

Карты Карно для двух, трех и четырех переменных имеют вид:

для двух переменных

(x_1, x_2)

00	01	11	10

для трех переменных

x_1	(x_2, x_3)			
	00	01	11	10
0				
1				

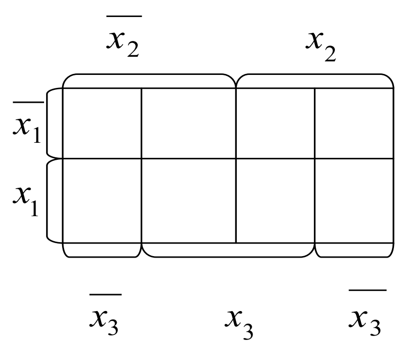
для 4 переменных

(x_1, x_2)	(x_3, x_4)			
	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

В каждую клетку карты Карно записывается соответствующее значение логической функции из таблицы соответствия. Например, для функции трех переменных $f = \ x_1, x_2, x_3)$ это выглядит следующим образом

x_1	x_2, x_3 00	01	11	10
0	$f(0,0,0)$	$f(0,0,1)$	$f(0,1,1)$	$f(0,1,0)$
1	$f(1,0,0)$	$f(1,0,1)$	$f(1,1,1)$	$f(1,1,0)$

Для удобства считывания на карте Карно выделяются области, соответствующие единичным значениям переменных $x_i(i = \overline{\ ,n})$ и их инверсий $\overline{x_i}(i = \overline{\ ,n})$. Так для n=3 это выглядит следующим образом



Рассмотрим на примере функции трех переменных $f(x_1, x_2, x_3)$ правила считывания функции с карты Карно.

Карты Карно для различных простейших функций трех

переменных имеют вид

$f(x_1,x_2,x_3) = \ {}_1$ $f(x_1,x_2,x_3) = \ {}_2$ $f(x_1,x_2,x_3) = \ {}_3$

1	1	1	1

		1	1
		1	1

	1	1	
	1	1	

$f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1$ $\quad f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_2$ $\quad f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_3$

1	1	1	1

1	1		
1	1		

1			1
1			1

Можно сделать следующий вывод: четыре рядом расположенные единицы на карте Карно соответствуют одной переменной или ее инверсии. При этом эти единицы расположены в областях единичных значений.

Карты Карно для произведений двух переменных имеют вид

$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2$ $\quad f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_3$ $\quad f(x_1,x_2,x_3)=x_2x_3$

		1	1

	1	1	

		1	
		1	

$f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1x_2$ $\quad f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\bar{x}_2$

		1	1

1	1		

$f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1x_3$ $\quad f(x_1,x_2,x_3)=x_1\bar{x}_3$

	1	1	

1			1

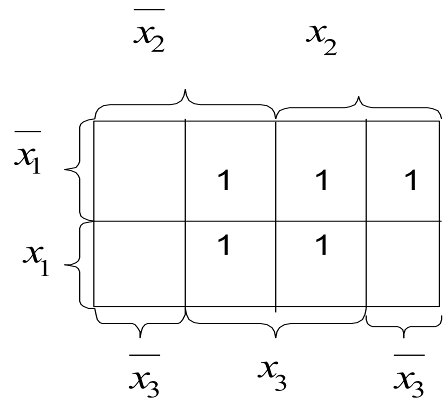
и т. д.

Можно сделать следующий вывод.

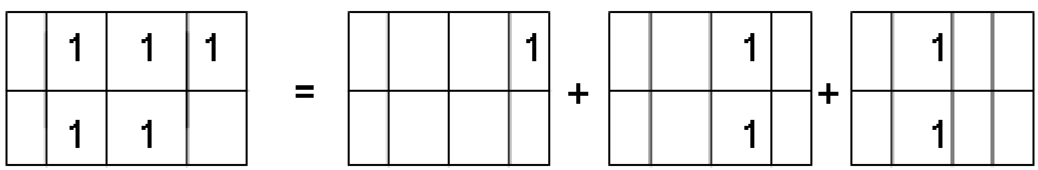
Две рядом расположенные единицы на карте Карно (левый и правый края карты считаются соприкасающимися) соответствуют произведению двух переменных или их инверсий. При этом единицы расположены в области, принадлежащей одновременно единичным значениям соответствующих областей.

Аналогично, рассмотрев карты Карно для произведения трех переменных, можно сделать следующий вывод: одна единица соответствует произведению трех переменных или их инверсий. При этом единица расположена на пересечении единичных областей соответствующих переменных.

Практическое применение карт Карно состоит в наборе таких произведений переменных, которые бы содержали наименьшее число сомножителей и покрывали бы все единицы заданной функции. Рассмотрим данное утверждение на примере. Карта Карно для функции заданной таблицей соответствия 2.1 имеет вид



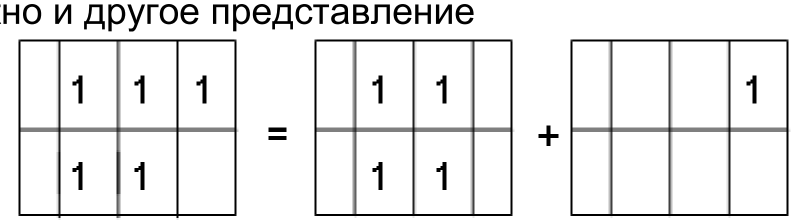
Ее можно представить как результат наложения нескольких карт друг на друга, учитывая, что это соответствует операции логического сложения, например,



Это соответствует следующей формуле

$$f = \overline{x}_1 x_2 \overline{x_3} + x_2 x_3 + \overline{x}_2 x_3.$$

Возможно и другое представление



Это соответствует формуле

$$f = x_3 + x_1 \overline{x_2} x_3.$$

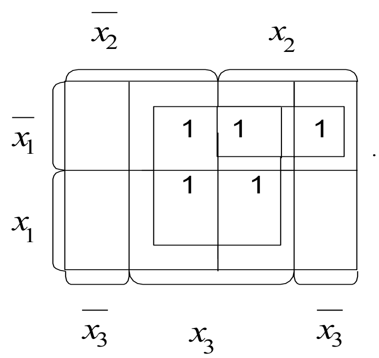
Очевидно, что формула, имеющая минимальную мощность, имеет вид

$$f = x_3 + \bar{x}_1 x_2$$

и соответствует следующему представлению:

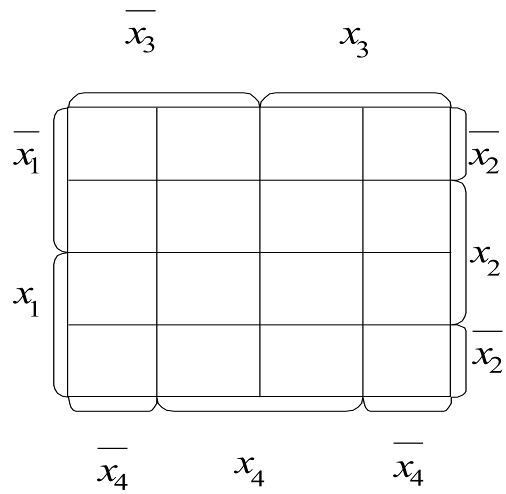
$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & 1 & 1 & \\ \hline & 1 & 1 & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & 1 & 1 \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}$$

На практике при считывании функции с карт Карно очерчивают области, состоящие из рядом находящихся единиц, и записывают для них выражение минимальной сложности.



$$f = x_3 + \bar{x}_1 x_2 .$$

Аналогично можно получить и правила считывания функций с карт Карно для функций четырех переменных $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Карта Карно записывается в виде

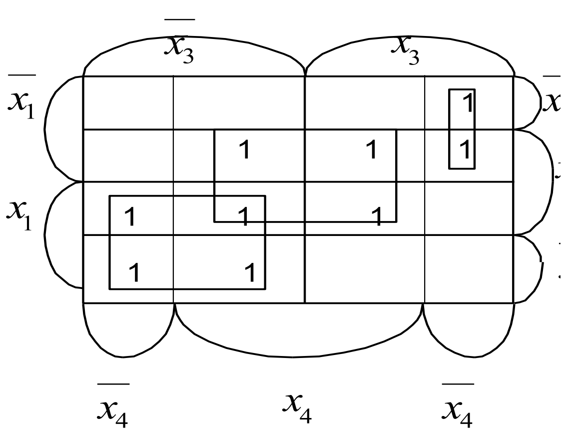


Правила считывания следующие:

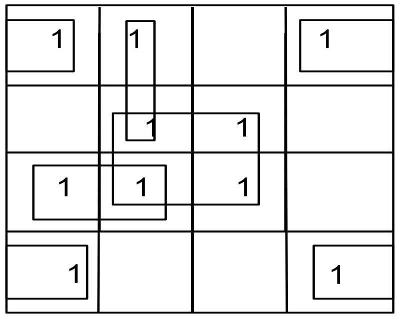
- восемь единиц, расположенных рядом, соответствуют одной переменной или ее инверсии;
- четыре единицы, расположенные рядом, соответствуют произведению двух переменных или их инверсий;
- две единицы, расположенные рядом, соответствуют произведению трех переменных или их инверсий;
- одна единица соответствует произведению четырех переменных или их инверсий.

Замечание: левый и правый, а также верхний и нижний края карты, считаются соприкасающимися.

Примеры считывания



$$f = x_1\overline{x_3} + x_2x_4 + \overline{x_1}x_3\overline{x_4}.$$



$$f = {}_{2}x_{4} + {}_{2}\overline{x}_{4} + {}_{1}x_{2}\overline{x_{3}} + {}_{1}\overline{x}_{3}$$

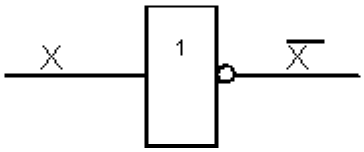
Для отображения функций пяти переменных используют две карты Карно на четыре переменные, а для функций шести переменных - четыре таких карты. При дальнейшем увеличении числа переменных карты Карно становятся практически непригодными.

Известные в литературе диаграммы (карты) Вейча отличаются только другим порядком следования наборов значений переменных и обладают теми же свойствами, что и карты Карно.

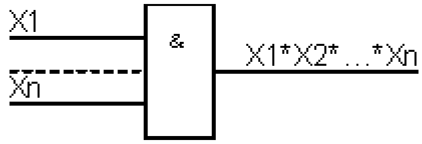
8.2.4 Построение логической схемы по заданной функции и реализация в различных базисах

Получив аналитическую запись логической функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, можно осуществить переход к тому цифровому логическому устройству, которое сможет осуществить обработку поступающих логических сигналов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ по заданным требованиям.

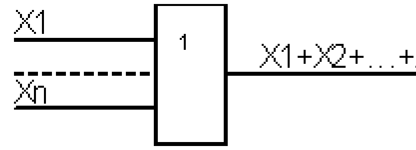
При этом при изображении схемы используются следующие обозначения:



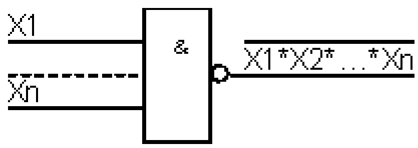
инвертор



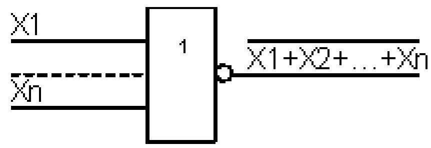
логическое умножение (И)



логическое сложение (ИЛИ)



штрих Шеффера (И-НЕ)



стрелка Пирса (ИЛИ-НЕ)

Считаем, что число входов не ограничено. При технической реализации комбинационной схемы на конкретных типах элементов необходимо учитывать действительное число входов.

Прежде чем реализовать логические функции их нужно представить в определенном базисе. В качестве базиса может быть принят любой набор элементов, реализующих функции, обладающие функциональной полнотой.

Реализуем, например, логическую функцию

$$f = x_1\overline{x_2} + \overline{x_1}x_3 + x_1\overline{x_2}x_3.$$

в следующих трех базисах:

- И, ИЛИ, НЕ;

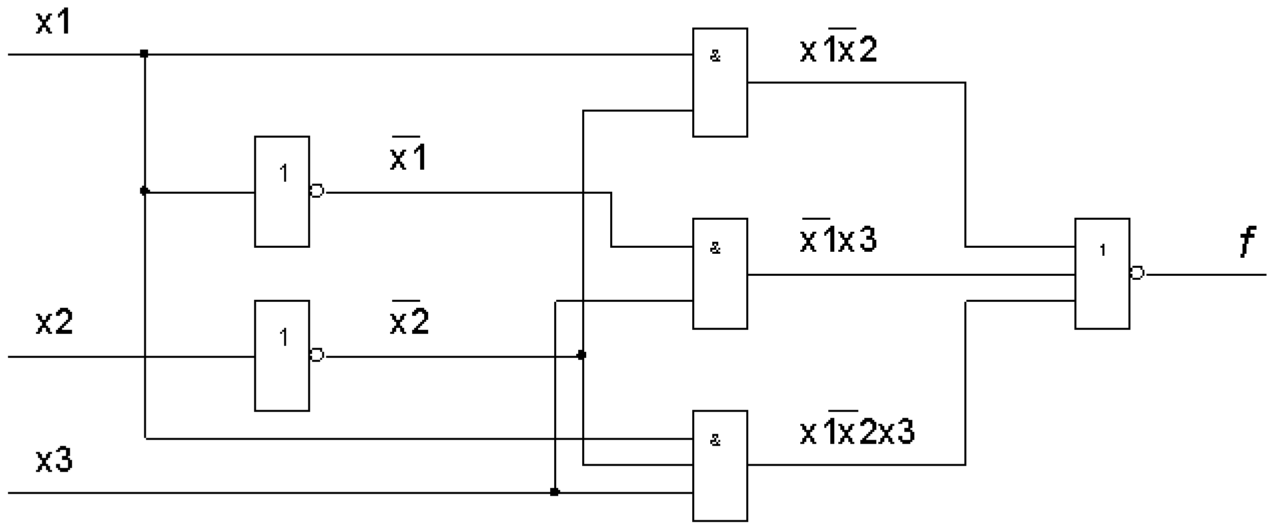
- И-НЕ;

- ИЛИ-НЕ.

Реализация на элементах И, ИЛИ, НЕ.

Для создания логического устройства, выполняющего логическую обработку сигналов x_1, x_2, x_3, в данном случае требуется:

два инвертора, три схемы И (две на два входа и одна на три входа), одна схема ИЛИ (на три входа).



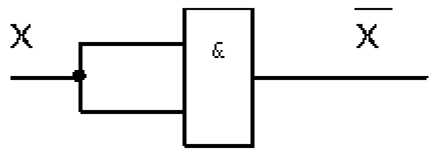
Реализация на элементах И-НЕ.

Преобразуем формулу следующим образом, используя законы де Моргана

$$f = x_1\overline{x_2} + \overline{x_1}x_3 + x_1\overline{x_2}x_3 = \overline{\overline{x_1\overline{x_2} + \overline{x_1}x_3 + x_1\overline{x_2}x_3}} =$$
$$= \overline{\overline{(x_1\overline{x_2})}\,\overline{(\overline{x_1}x_3)}\,\overline{(x_1\overline{x_2}x_3)}}.$$

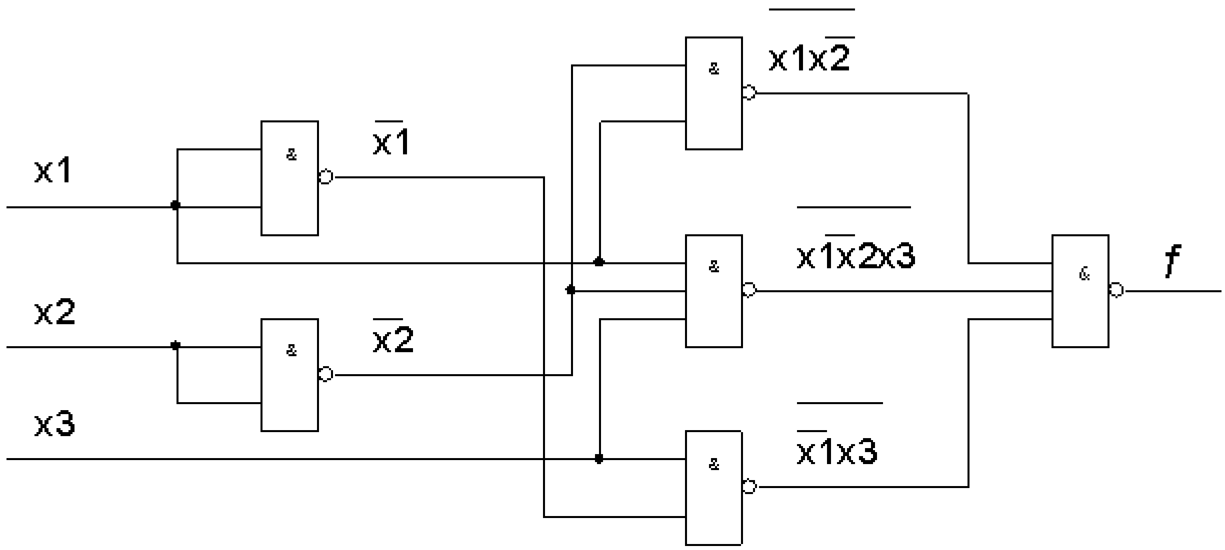
Теперь формула содержит только конструкции типа И-НЕ $(\overline{ab})$.

Инвертор реализуется на элементе И-НЕ путем подачи на оба входа одного и того же сигнала, в соответствии с выражением $x = xx$, следовательно $\overline{x} = \overline{xx}$.



Можно реализовать инвертор и подачей на другой вход (входы) единичного сигнала, в соответствии с выражением $x \cdot 1 =$;, следовательно $\overline{x} = x \cdot$.

Логическая схема на элементах И-НЕ выглядит следующим образом



Преобразуем формулу следующим образом, используя законы де Моргана

$$f = x_1\overline{x_2} + \overline{x_1}x_3 + x_1\overline{x_2}x_3 = \overline{(\overline{x_1}+x_2)} + \overline{(x_1+\overline{x_3})} + \\ + \overline{(\overline{x_1}+x_2+\overline{x_3})} = \overline{\overline{\overline{(\overline{x_1}+x_2)} + \overline{(x_1+\overline{x_3})} + \overline{(\overline{x_1}+x_2+\overline{x_3})}}}$$

Теперь формула содержит только конструкции типа ИЛИ-НЕ $(a+\ )$.

Инвертор реализуется на элементе ИЛИ-НЕ путем подачи на оба входа одного и того же сигнала, а в соответствии с выражением $x = \;+\;$, следовательно $\overline{x} = \;+\;$.

Можно реализовать инвертор и подачей на другой вход (входы) нулевого сигнала, в соответствии с выражением $x + \;=\;$, следовательно $\overline{x} = x + \;$.

Логическая схема на элементах ИЛИ-НЕ выглядит следующим образом