2. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ, МЕТОД ВАРИАЦИЙ В ЗАДАЧАХ С НЕПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

2.1. Основные понятия вариационного исчисления

Функционал, предварительные понятия

Первичным понятием вариационного исчисления является понятие функционала. Важность его заключается в том, что важнейшие критерии качества динамических управляемых систем – быстродействие, расход энергии или топлива, точность, стоимость, надежность являются функционалами.

Если каждой функции $x(t) \in M$ (M - некоторый класс функций) по определенному закону поставлено в соответствии определенное число J, то говорят, что в классе M определен функционал J и пишут: $J=J[x(t)]$. M - область задания функционала.

Пример 2.1. Пусть M =[0,1] – совокупность всех непрерывных функций $x(t)$, заданных на отрезке [0,1], и пусть

$$J[x(t)] = \int_0^1 x(t)dt \tag{2.1}$$

Тогда $J[x(t)]$ есть функционал от $x(t)$: каждой функции $x(t) \in [0,1]$ отвечает определенное значение $J[x]$. Подставляя в выражение (2.1) вместо $x(t)$ некоторые функции, будем получать соответствующие значения $J[x]$.

Если $x(t) = e^t$, то $J[e^t] = \int_0^1 e^t dt = e - 1$;

если $x(t) = \cos \pi t$, то $J[\cos \pi t] = \int_0^1 \cos \pi t dt = 0$;

если $x(t) = t$, то $J[t] = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$ и т.д.

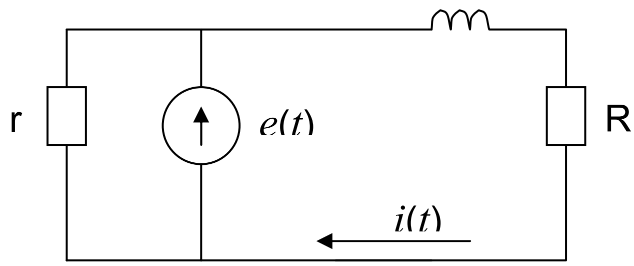
Пример 2.2. Пусть $M = C_1[t_0, t_1]$ - класс функций *x(t),* имеющих непрерывную производную $\dot{x}(t)$ на отрезке $[t_0, t_1]$. Тогда

$$J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)} dt \qquad (2.2)$$

будет функционалом, определенном на этом классе функций.

Функционал (2.2) геометрически выражает длину дуги кривой *x=x(t).*

Пример 2.3. Рассмотрим электрическую схему



Пусть требуется изменить режим работы схемы следующим образом, изменить ток $i(t)$ от начального значения $i(t_0)$ до конечного значения $i(t_1)$ так, чтобы энергия активных потерь на сопротивлениях R и r была бы минимальной.

Энергия может быть выражена как:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} [Ri^2(t) + \frac{e^2(t)}{r}] dt \qquad (2.3)$$

Выражение (2.3) является функционалом. Требуется определить такие $i^0(t), e^0(t)$, называемые оптимальными, которые делают выражение (2.3) минимальным.

Встречаются и неинтегральные функционалы.

Вариационное исчисление занимается отысканием экстремумов (Маx или min) функционалов, выраженных, как правило, в виде определенных интегралов, а также определением функций, доставляющих этот экстремум.

Функционал, вариация и их основные свойства

Методы решения вариационных задач, в которых функционалы исследуются на максимум или минимум, сходны с методами исследования на экстремум функций. Поэтому кратко остановимся на основных положениях теории максимума и минимума функций и параллельно введем аналогичные понятия для функционалов.

1. Переменная величина y называется функцией переменной величины t (обозначается $y=y(t)$), если каждому значению t из области изменения t соответствует значение y, то есть имеет место соответствие: числу t соответствует число y. Аналогично определяется и функция нескольких переменных.

Переменная величина J называется функционалом, зависящим от функции $x(t)$, (обозначается $J=J[\mathrm{x(t)}]$), если каждой функции $x(t)$ из некоторого класса функций соответствует значение J , то есть имеет место соответствие: функции $x(t)$ соответствует число J.

Аналогично определяются функционалы, зависящие от нескольких функций или от функции нескольких независимых переменных.

2. Приращением Δt аргумента t функции $y(t)$ называется разность между двумя значениями этой переменной $\Delta t = t_1 - t_2$.

Приращением или вариацией δx аргумента $x(t)$ функционала $J[\mathrm{x(t)}]$ называется разность между двумя функциями $\delta x = x_1(t) - x_2(t)$.

3. Функция $y(t)$ называется непрерывной, если малому изменению t соответствует малое изменение функции $y(t)$.

Функционал $J[x(t)]$ называется непрерывным, если малому изменению $x(t)$ соответствует малое изменение функционала.

Последнее определение нуждается в уточнении, так как возникает вопрос, какие изменения функции $x(t)$ считаются малыми или, что то же самое, какие кривые $x_1(t)$ и $x_2(t)$ считаются близкими?

Вводятся следующие определения близости этих кривых.

Кривые $x_1(t)$ и $x_2(t)$ близки в смысле близости нулевого порядка, если модуль разности $x_1(t)-x_2(t)$ мал.

Кривые $x_1(t)$ и $x_2(t)$ близки в смысле близости первого порядка, если модули разности $x_1(t)-x_2(t)$ и $\dot{x}_1(t)-\dot{x}_2(t)$ малы. Кривые $x_1(t)$ и $x_2(t)$ близки в смысле близости к-го порядка, если модули разностей $x_1(t)-x_2(t)$, $\dot{x}_1(t)-\dot{x}_2(t)$, ..., $x_1^{(k)}(t)-x_2^{(k)}(t)$ малы.

На рис. 2.1 изображены кривые, близкие в смысле близости нулевого порядка, так как ординаты у них близки, а направления касательных не близки. На рис. 2.2 изображены кривые, близкие в смысле близости первого порядка.

Из этих определений следует, что если кривые близки в смысле близости n-го порядка, то они тем более близки в смысле близости любого меньшего порядка.

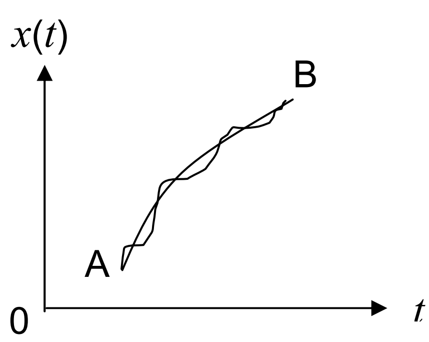


Рис. 2.1

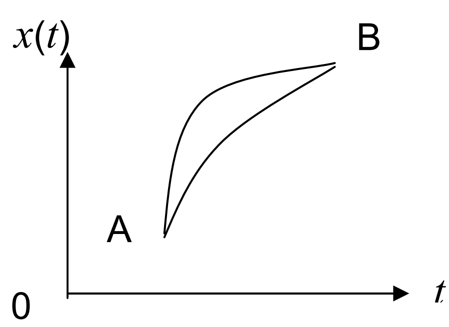


Рис. 2.2

Теперь можно уточнить понятие непрерывности функционала.

Функция $y(t)$ непрерывна при $t = t_0$, если для любого положительного ε можно подобрать $\delta > 0$ такое, что

$$| y(t) - y(t_0) | < \varepsilon, \text{ при } \ | t - t_0 | < \delta.$$

Математически строго это может быть записано следующим образом

$$\underset{\varepsilon>0\,\delta>0}{\forall\exists} | y(t) - y(t_0) | < \varepsilon, \text{ при } \ | t - t_0 | < \delta.$$

Функционал J[x(t)] непрерывен при $x = x_0(t)$ в смысле близости k-го порядка, если для любого положительного ε можно подобрать $\delta > 0$ такое, что

$$| J[x(t)] - J[x_0(t)] | < \varepsilon$$

при

$$| x(t) - x_0(t) | < \delta,$$

$$| \dot{x}(t) - \dot{x}_0(t) | < \delta,$$

- - - - - -

$$| x^{(k)}(t) - x_0^{(k)}(t) | < \delta.$$

Математически строго это можно записать так

$$\underset{\varepsilon>0\,\delta>0}{\forall\exists} | J[x(t)] - J[x_0(t)] | < \varepsilon, \text{при} | x^{(i)}(t) - x_0^{(i)}(t) | < \delta, i = 0,1,2,\dots,k).$$

4. Линейной функцией называется функция $y(t)$, удовлетворяющая условиям: $y(ct) = cy(t), y(t_1 + t_2) = y(t_1) + y(t_2)$,

где c – произвольная постоянная.

Линейная функция одной переменной имеет вид $y(t) = kt, k = const$.

Линейным функционалом называется функционал J[x(t)], удовлетворяющий условиям

$$J[cx(t)] = cJ[x(t)],$$

$$J[x_1(t) + x_2(t)] = J[x_1(t)] + J[x_2(t)], c = const.$$

Примером линейного функционала является

$$J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} [p(t)x + q(t)\dot{x}]dt.$$

5. Если приращение функции $\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$,может быть представлено в виде: $\Delta y = A(t)\Delta t + \beta(t, \Delta t)\Delta t$, где А($t$) – не зависит от Δt, а $\beta(t, \Delta t) \to 0$ при $\Delta t \to 0$, то функция называется дифференцируемой, а линейная по отношению к Δt часть приращения $A(t)\Delta t$ называется дифференциалом функции и обозначается dy. Разделив Δy на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим, что $A(t) = \dfrac{dy(t)}{dt}$, и, следовательно, $dy = \dfrac{dy}{dt}\Delta t$.

Если приращение функционала $\Delta J = J[x(t) + \delta(x)]$ - J[x(t)] можно представить в виде

$$\Delta J = J[x(t), \delta x] + \beta[x(t), \delta(x)]p(x + \delta x, x),$$

где $J[x(t), \delta x]$ - линейный по отношению к δx функционал, и $\beta[x(t), \delta x] \to 0$ при $\rho(x + \delta x, x) \to 0$, то линейная по отношению к δx часть приращения функционала, то есть $J[x(t), \delta x]$, называется вариацией функционала и обозначается δJ.

Итак, вариация функционала – это главная линейная по отношению к δx часть приращения функционала.

При исследовании функционалов вариация играет такую же роль, какую играет дифференциал при исследовании функций.

Можно дать и другое эквивалентное определение дифференциала функции и вариации функционала. Рассмотрим $y(t + \alpha\Delta t)$при фиксированных t и Δt и изменяющихся значениях параметра α. При $\alpha = 1$ получим приращенное значение функции $y(t + \Delta t)$, при $\alpha = 0$ получим исходные значения функции $y(t)$. Не трудно проверить, что производная от

$y(t+\alpha\Delta t)$ по α при $\alpha = 0$ равна дифференциалу функции $y(t)$ в точке t. Действительно, по правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} y(t+\alpha\Delta t)\,|_{\alpha=0} = y'(t+\alpha\Delta t)\,\Big|_{\alpha=0} \Delta t = y'(t)\Delta t = dy(t).$$

Точно так же для функционалов J[x(t)] можно определить вариацию как производную от $J[x(t)+\alpha\delta x]$ по α при $\alpha = 0$. Величина ΔJ является функцией параметра α и может быть разложена в ряд Тейлора в окрестности $\alpha = 0$

$$\Delta J = \alpha\frac{dJ}{d\alpha} + \frac{\alpha^2}{2}\frac{d^2J}{d\alpha^2} + \frac{\alpha^3}{3!}\frac{d^3}{d\alpha^3} + \ldots$$

Выражение $\alpha\dfrac{dJ}{d\alpha}$, где производная вычисляется при $\alpha = 0$, обозначается δJ и называется первой вариацией функционала

$$\delta J = \alpha\frac{dJ(\alpha)}{d\alpha}\,|_{\alpha=0}.$$

Аналогично, вторая вариация

$$\delta^2 J = \frac{\alpha^2}{2}\frac{d^2J(\alpha)}{d\alpha^2}\,|_{\alpha=0}.$$

Определение. Функционал J[x(t)] достигает на кривой $x = x_0(t)$ максимума, если значение функционала J[x(t)] на любой, достаточно близкой к $x = x_0(t)$ кривой не больше, чем $J[x_0(t)]$, то есть $\Delta J = J[x(t)] - J[x_0(t)] \le 0$.

Если при этом $\Delta J = 0$ лишь при $x(t) = x_0(t)$, то говорят, что на кривой $x = x_0(t)$ достигается строгий максимум.

Аналогично определяется кривая, на которой реализуется минимум. В этом случае $\Delta J \ge 0$ для всех кривых, достаточно близких к $x_0(t)$.

6. Теорема. Если дифференцируемая функция $y(t)$ достигает экстремума (максимума или минимума) во внутренней точке $t = t_0$ области определения функции, то $dy=0$.

Теорема. Если функционал $J[x(t)]$, имеющий вариацию, достигает экстремума при $x = x_0(t)$, где $x_0(t)$ - внутренняя точка области определения функционала, то при $x = x_0(t)$ $\delta J = 0$.

Итак, необходимым условием максимума или минимума функционала является $\delta J = 0$.

Если функционал достигает экстремума по отношению к кривым, близким в смысле близости нулевого порядка, то он называется сильным экстремумом, если же имеет место близость первого порядка, то экстремум называется слабым.

Очевидно, что если на кривой $x = x_0(t)$ достигается сильный экстремум, то достигается и слабый, так как сильный экстремум – это экстремум по отношению к более широкому классу кривых.

2.2. Основная (простейшая) задача вариационного исчисления, уравнение Эйлера

Постановка задачи. Задан функционал функции одной переменной

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F[t, x(t), \dot{x}(t)]dt, \qquad (2.4)$$

где F – дважды непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов.

Заданы краевые (граничные) условия (условия прохождения через две заданные точки)

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1. \qquad (2.5)$$

Задача: Среди всевозможных функций $x(t)$, проходящих через фиксированные точки (t_0, x_0) и (t_1, x_1), то есть удовлетворяющие граничным условиям (2.5), требуется найти такую функцию, которая бы доставляла экстремум функционалу (2.4).

Решение задачи. Пусть $x(t)$ – функция, доставляющая экстремум функционалу, то есть решение поставленной задачи найдено. При этом $x(t)$ дважды дифференцируемая функция. Возьмем некоторую функцию $\tilde{x}(t)$, близкую к $x(t)$, пусть $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$ связаны соотношением

$$\tilde{x}(t,\alpha) = x(t) + \alpha\eta(t). \qquad (2.6)$$

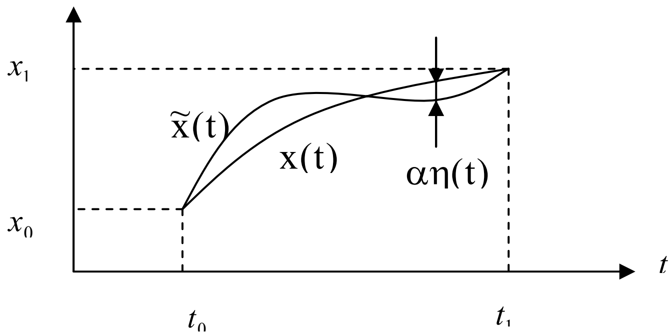


Рис. 2.3

В выражении (2.6) α - малый параметр, $\eta(t)$ - произвольная дифференцируемая функция, для которой

$$\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0. \qquad (2.7)$$

Условие (2.7) означает, что все функции $\tilde{x}$ удовлетворяют граничным условиям (2.5), то есть проходит через две заданные точки.

$\tilde{x}(t,\alpha)$ образует однопараметрическое семейство кривых, α - параметр семейства. Данное семейство содержит функцию $x(t)$ при $\alpha = 0$

$$x(t) = \tilde{x}(t,\alpha)\,|_{\alpha=0}. \qquad (2.8)$$

Рассмотрим функционал на кривых семейства (2.6)

$$J[\tilde{x}(t,\alpha)] = \int_{t_0}^{t_1} F[t,\tilde{x}(t,\alpha],\dot{\tilde{x}}(t,\alpha)]dt = J(\alpha). \qquad (2.9)$$

Нетрудно видеть, что после интегрирования и подстановки пределов, функционал (2.9) становится функцией α. Таким образом, на семействе кривых функционал превращается в функцию параметра α. $J(\alpha)$ как функция параметра α достигает своего экстремума при $\alpha = 0$, так как, $x(t) = \tilde{x}(t,0)$, а $x(t)$, по предположению, решает поставленную задачу, то есть $x(t)$ является функцией доставляющей экстремум функционалу.

Теперь можно использовать необходимое условие относительного экстремума функции одной переменной

$$\frac{dJ(\alpha)}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} = 0. \qquad (2.10)$$

$$\frac{dJ(\alpha)}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\int_{t_0}^{t_1} F[\dot{\tilde{x}}(t,\alpha), \tilde{x}(t,\alpha), t]dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{d\alpha} F[\dot{\tilde{x}}(t,\alpha), \tilde{x}(t,\alpha), t]dt.$$

Воспользуемся формулой

$$\frac{dF[x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha)]}{d\alpha} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{d\alpha}.$$

Тогда $$\frac{dJ(\alpha)}{d\alpha} = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{\tilde{x}}}\frac{d\dot{\tilde{x}}}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial \tilde{x}}\frac{d\tilde{x}}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial t}\frac{dt}{d\alpha}\right)dt.$$

Так как *t* не зависит от α, то $\dfrac{dt}{d\alpha} = 0$, а из (2.6) следует, что

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{d\alpha} = \eta(t), \ \frac{d\dot{\tilde{x}}(t)}{d\alpha} = \dot{\eta}(t),$$

поэтому

$$\frac{dJ(\alpha)}{d\alpha} = \int_{t_0}^{t_1} [\frac{\partial F}{\partial \dot{\tilde{x}}}\dot{\eta}(t) + \frac{\partial F}{\partial \tilde{x}}\eta(t)]dt. \qquad (2.11)$$

Условие (2.10) с учетом (2.11) примет вид

$$\int_{t_0}^{t_1} [\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{\eta}(t) + \frac{\partial F}{\partial x}\eta(t)]dt = 0. \qquad (2.12)$$

Вычислим

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{\eta}(t)dt,$$

воспользовавшись формулой интегрирования по частям

$$\int_{t_0}^{t_1} U dV = UV \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} V dU .$$

Тогда

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{\eta}(t) dt = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \eta(t) \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \eta(t) d\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = -\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{d\dot{x}}\right) \eta(t) dt , \qquad (2.13)$$

так как в силу (2.7) первое слагаемое обращается в ноль.

После подстановки (2.13) в (2.12) получим

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) \eta(t) dt = 0 . \qquad (2.14)$$

Так как $\eta(t)$ - произвольная функция, то из (2.14) следует

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 . \qquad (2.15)$$

Замечание. Более строго переход от (2.14) к (2.15) можно сделать, используя основную лемму вариационного исчисления.

Выражение (2.15) называется ***уравнением Эйлера***.

Всякое решение дифференциального уравнения Эйлера называется *экстремалью*.

Уравнение Эйлера является только необходимым, но не достаточным условием экстремума. Оно не дает гарантии того, что на экстремали действительно достигается экстремум (подобно тому, как в дифференциальном исчислении точки, где $\dot{x} = 0$, не обязательно доставляют экстремум функции $x(t)$).

Таким образом, если решение вариационной задачи существует, то оно может быть найдено из уравнения Эйлера, но не всякое решение уравнения Эйлера является решением поставленной вариационной задачи.