Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Саратовский государственный технический университет
имени Гагарина Ю.А.»

Кафедра «Радиоэлектроника и телекоммуникации»

ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ МНОГОМЕРНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине
«Б.1.2.9 Основы кибернетики»
направления подготовки
«01.03.02 "Прикладная математика и информатика"»
квалификация (степень) «бакалавр»»
Профиль «Математическое моделирование и вычислительная математика»

Одобрено
редакционно-издательским советом
Саратовского государственного
технического университета

Саратов 2015

ВВЕДЕНИЕ

В исследовании многомерных управляемых систем широкое использование получил метод пространства состояний. Пространство состояний - это метрическое пространство, каждый элемент которого полностью определяет состояние рассматриваемой системы (процесса).

Состояние динамической системы описывается совокупностью физических переменных, характеризующих поведение системы в будущем, при условии, если известно состояние в исходный момент времени и известно приложенное к системе воздействие.

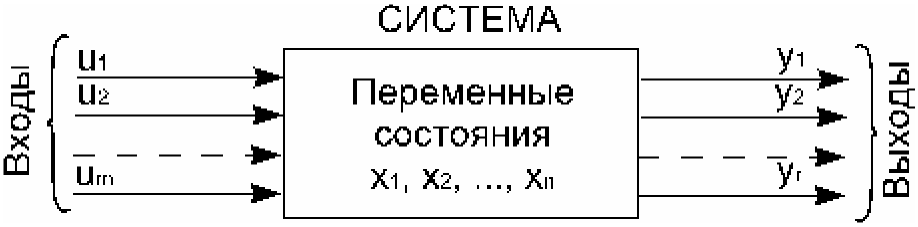
Практические занятия имеют своей целью систематизацию, закрепление и расширение теоретических знаний, получение практических навыков при решении конкретных технических задач; развитие навыков самостоятельной работы с технической литературой в ходе расчета.

Задачи, рассматриваемые в методических указаниях, соответствуют рекомендациям программы изучения дисциплины, призваны способствовать лучшему усвоению теоретического материала, изучаемого в соответствующем разделе.

Вначале рассматриваются решенные задачи, а затем приводятся задачи для самостоятельной работы.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Задача анализа заключается в определении закона изменения выходных величин $y_j(t)$, $j=\overline{1,r}$ и переменных состояния системы $x_i(t)$, $i=\overline{1,n}$ при подаче на вход системы (математическая модель которой известна) заданных входных воздействий $u_k(t)$, $k=\overline{1,m}$.



Анализ системы сводится, как правило, к решению дифференциальных уравнений, являющихся математической моделью системы.

При использовании метода пространства состояний математическая модель системы задается (приводится) в форме Коши

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t), \tag{1}$$

$$Y(t) = CX(t) + DU(t), \tag{2}$$

где X - n-мерный вектор состояния, Y - r-мерный вектор выходных переменных, U - m-мерный вектор входных переменных (управлений); A, B, C, D - матрицы чисел размерами $n\times n$, $n\times m$, $r\times n$, $r\times m$ соответственно. (1) - уравнение состояний, (2) - уравнение выходов.

Если математическая модель задана в виде (1), (2), то в соответствии с формулой Коши [1], [2], [3]

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}X(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}BU(\tau)d\tau, \tag{3}$$

$$Y(t) = Ce^{A(t-t_0)}X(t_0) + C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}BU(\tau)d\tau + DU(t). \tag{4}$$

Составляющая

$$X_{св}(t) = e^{A(t-t_0)}X(t_0) \quad \text{или} \quad Y_{св}(t) = Ce^{A(t-t_0)}X(t_0)$$

называется свободной составляющей, она характеризует изменение процессов в системе (движение системы) за счет ненулевого начального состояния $X(t_0)$ при отсутствии внешних (управляющих) воздействий.

Составляющая

$$X_{вын}(t)=\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}BU(\tau)d\tau \text{ или } Y_{вын}(t)=C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}BU(\tau)d\tau + DU(t)$$

называется вынужденной составляющей, она характеризует изменение процессов в системе (движение системы) за счет внешнего (управляющего) воздействия при нулевом начальном состоянии.

В случае $r=m=1$ (система с одним входом и одним выходом) при входном воздействии в виде единичной ступенчатой функции $u(t)=1(t)$ и $t_0=0$

$$x(t)=e^{At}x(0)+\left(e^{At}-E\right)A^{-1}B=e^{At}x(0)+A^{-1}\left(e^{At}-E\right)B. \tag{5}$$

В случае $r=m=1$ при входном воздействии в виде дельта-импульса $u(t)=\delta(t)$ и $t_0=0$

$$x(t)=e^{At}x(0)+e^{At}B. \tag{6}$$

Если начальные условия нулевые $x(0)=0$, то (5) и (6) принимают вид

$$x(t)=\left(e^{At}-E\right)A^{-1}B=A^{-1}\left(e^{At}-E\right)B, \tag{7}$$

$$x(t)=e^{At}B \tag{8}$$

В последнем случае выходная переменная $y(t)$, определенная с учетом (7), носит название переходной функции и обозначается $h(t)$, а выходная переменная $y(t)$, определенная с учетом (8), носит название импульсной переходной функции или функции веса и обозначается $w(t)$.

Таким образом, из (4), (7) и (8) следует

$$h(t)=C\left(e^{At}-E\right)A^{-1}B+D\,1(t)=CA^{-1}\left(e^{At}-E\right)B+D\,1(t), \tag{9}$$

$$w(t)=Ce^{At}B+D\,\delta(t). \tag{10}$$

Выражения (3) - (10), позволяющие получить аналитическое решение уравнений (1), (2), используются для анализа систем при невысоком порядке $n \le 4$. При больших n можно получить лишь численное решение (1), (2) с использованием ЦВМ.

Замечание. Выражения (5), (7), (9) справедливы только в случае, если A - неособенная (невырожденная) матрица, то есть $\det A \ne 0$.

Пример 1. Математическая модель системы имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + u \end{cases}.$$

Начальное состояние

$$t_0 = 0,\ X(0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}.$$

Входное воздействие $u = 1(t)$.

Определить переменные состояния $x_1(t)$, $x_2(t)$.

1 способ.

В соответствии с формулой Коши (3) при $t_0 = 0$ имеем

$$X(t) = e^{At}X(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}BU(\tau)d\tau.$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Определим e^{At}. Воспользуемся формулой Сильвестра (Лагранжа-Сильвестра), которая для $n = 2$ имеет вид

$$e^{At} = \frac{(A - \lambda_2 E)}{(\lambda_1 - \lambda_2)}e^{\lambda_1 t} + \frac{(A - \lambda_1 E)}{(\lambda_2 - \lambda_1)}e^{\lambda_2 t},$$

$$A - \lambda E = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -3-\lambda \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0.$$

Собственные числа $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$.

$$\frac{(A-\lambda_2 E)}{\lambda_1 - \lambda_2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix},\ \frac{(A-\lambda_1 E)}{\lambda_2 - \lambda_1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} e^{-2t} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$e^{A(t-\tau)} \cdot B = \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix};$$

$$\int_0^t \left(e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}\right) d\tau = e^{-t}\int_0^t e^{\tau} d\tau - e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau} d\tau =$$

$$= e^{-t} e^{\tau} \Big|_0^t - e^{-2t} \cdot \frac{1}{2} e^{2\tau} \Big|_0^t = e^{-t}\left(e^{t} - e^{0}\right) - \frac{1}{2} e^{-2t}\left(e^{2t} - e^{0}\right) =$$

$$= 1 - e^{-t} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2t} = -e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} + \frac{1}{2}.$$

Аналогично

$$\int_0^t \left(-e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)}\right) d\tau = e^{-t} - e^{-2t}.$$

Окончательно имеем

$$\begin{cases} x_1(t) = \left(2e^{-t} - e^{-2t}\right) x_{10} + \left(e^{-t} - e^{-2t}\right) x_{20} - e^{-t} + \dfrac{1}{2} e^{-2t} + \dfrac{1}{2} \\ x_2(t) = \left(-2e^{-t} + 2e^{-2t}\right) x_{10} + \left(2e^{-2t} - e^{-t}\right) x_{20} + e^{-t} - e^{-2t} \end{cases}.$$

2 способ. Воспользуемся выражением (5).

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},\ A^{-1}B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\left(e^{At} - E\right) A^{-1} B = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} - 1 & e^{-t} + e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & 2e^{-2t} - e^{-t} - 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$=\begin{bmatrix} -e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2} \\ e^{-t}-e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$\begin{cases} x_1(t)=\left(2e^{-t}-e^{-2t}\right)x_{10}+\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)x_{20}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{1}{2} \\ x_2(t)=\left(-2e^{-t}+2e^{-2t}\right)x_{10}+\left(2e^{-2t}-e^{-t}\right)x_{20}+e^{-t}-e^{-2t} \end{cases}.$$

Таким образом, оба способа дали одинаковый результат.

Пример 2 [1, с.376]. Математическая модель системы имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1=-2x_2 \\ \dot{x}_2=x_1-3x_2+u \end{cases},$$

$$y=x_1.$$

Входное воздействие - единичная ступенчатая функция, действующая в момент $t_0=0$. Определить выход $y(t)$.

В данном примере

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C=[1\,,0],\ D=0;$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & 2\left(e^{-2t}-e^{-t}\right) \\ e^{-t}-e^{-2t} & 2e^{-2t}-e^{-t} \end{bmatrix}.$$

В соответствии с выражением (4)

$$Y(t)=Ce^{At}X(0)+\int_0^t Ce^{A(t-\tau)}BU(\tau)d\tau=$$

$$=[1\,,0]\cdot\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & 2\left(e^{-2t}-e^{-t}\right) \\ e^{-t}-e^{-2t} & 2e^{-2t}-e^{-t} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}+$$

$$+\int_0^t [1\,,0]\cdot\begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)} & 2\left(e^{-2(t-\tau)}-e^{-(t-\tau)}\right) \\ e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)} & 2e^{-2(t-\tau)}-e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}d\tau=$$

$$=\left(2e^{-t}-e^{-2t}\right)x_1(0)+2\left(e^{-2t}-e^{-t}\right)x_2(0)+\int_0^t 2\left(e^{-2(t-\tau)}-e^{-(t-\tau)}\right)d\tau=$$

$$=\left(2e^{-t}-e^{-2t}\right)x_1(0)+2\left(e^{-2t}-e^{-t}\right)x_2(0)+2e^{-t}-e^{-2t}-1;\ t\geq 0.$$

Пример 3 [3, с.260]. Математическая модель системы имеет вид:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-2x_2+3t\\ \dot{x}_2=2x_1+4\end{cases},\ X(0)=\begin{bmatrix}x_{10}\\ x_{20}\end{bmatrix}.$$

Определить $x_1(t)$, $x_2(t)$.

В соответствии с выражением (3)

$$X(t)=e^{At}X(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}f(\tau)d\tau,\ f(\tau)=\begin{bmatrix}3\tau\\ 4\end{bmatrix}.$$

Матричная экспоненциальная функция e^{At} имеет вид

$$e^{At}=\begin{bmatrix}\cos 2t & -\sin 2t\\ \sin 2t & \cos 2t\end{bmatrix}.$$

Вычислим интеграл

$$\int_0^t e^{A(t-\tau)}f(\tau)d\tau=e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}f(\tau)d\tau=$$

$$=\begin{bmatrix}\cos 2t & -\sin 2t\\ \sin 2t & \cos 2t\end{bmatrix}\cdot\int_0^t\begin{bmatrix}\cos 2\tau & \sin 2\tau\\ -\sin 2\tau & \cos 2\tau\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3\tau\\ 4\end{bmatrix}d\tau=$$

$$=\begin{bmatrix}\cos 2t & -\sin 2t\\ \sin 2t & \cos 2t\end{bmatrix}\cdot\int_0^t\begin{bmatrix}3\tau\cos 2\tau+4\sin 2\tau\\ -3\tau\sin 2\tau+4\cos 2\tau\end{bmatrix}d\tau=$$

$$=\begin{bmatrix}\cos 2t & -\sin 2t\\ \sin 2t & \cos 2t\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-\frac{5}{4}\cos 2t+\frac{3}{2}t\sin 2t+\frac{5}{4}\\ \frac{5}{4}\sin 2t+\frac{3}{2}t\cos 2t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{4}\cos 2t-\frac{5}{4}\\ \frac{5}{4}\sin 2t+\frac{3}{2}t\end{bmatrix}.$$

Таким образом,

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5}{4}\cos 2t - \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4}\sin 2t + \frac{3}{2}t \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \left(x_{10} + \frac{5}{4} \right)\cos 2t - x_{20}\sin 2t - \frac{5}{4} \\ \left(x_{10} + \frac{5}{4} \right)\sin 2t + x_{20}\cos 2t + \frac{3}{2}t \end{bmatrix}.$$

Окончательно

$$\begin{cases} x_1(t) = \left(x_{10} + \frac{5}{4} \right)\cos 2t - x_{20}\sin 2t - \frac{5}{4} \\ x_2(t) = \left(x_{10} + \frac{5}{4} \right)\sin 2t + x_{20}\cos 2t + \frac{3}{2}t \end{cases}.$$

Проверка правильности решения.

Находим производные $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$:

$$\dot{x}_1(t) = -2\left(x_{10} + \frac{5}{4} \right)\sin 2t - 2x_{20}\cos 2t,$$

$$\dot{x}_2(t) = -2\left(x_{10} + \frac{5}{4} \right)\cos 2t - 2x_{20}\sin 2t + \frac{3}{2}$$

и подставляем их в исходные уравнения (модель системы):

$$-2x_2(t) + 3t = \underbrace{-2\left(x_{10} + \frac{5}{4} \right)\sin 2t - 2x_{20}\cos 2t - 3t}_{-2x_2(t)} +$$

$$+ 3t = -2\left(x_{10} + \frac{5}{4} \right)\sin 2t - 2x_{20}\cos 2t = \dot{x}_1(t);$$

$$2x_1(t) + 4 = \underbrace{2\left(x_{10} + \frac{5}{4} \right)\cos 2t - 2x_{20}\sin 2t - \frac{5}{2}}_{2x_1(t)} +$$

$$+ 4 = 2\left(x_{10} + \frac{5}{4} \right)\cos 2t - 2x_{20}\sin 2t + \frac{3}{2} = \dot{x}_2(t).$$

Полученные тождества доказывают правильность определения $x_1(t)$, $x_2(t)$.

Пример 4. Электрическая схема, приведенная на рис.1, имеет следующие параметры $L = 1$г, $C = 0.5$ф, $R = 3$ Ом. Входное воздействие $e(t) = 1(t)$ - единичная ступенчатая функция. Определить закон изменения тока $i(t)$ и напряжения на емкости $u_c(t)$.

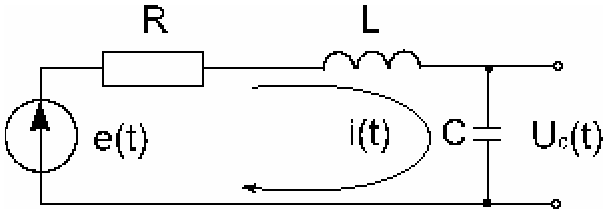


Рис. 1

Математическая модель электрической схемы имеет вид

$$\begin{cases} Ri + L\dfrac{di}{dt} + u_c = e \\ i = C\dfrac{du_c}{dt} \end{cases}.$$

Преобразовав к нормальной форме Коши и подставив значения параметров, получим

$$\begin{bmatrix} \dfrac{di(t)}{dt} \\ \dfrac{du_c(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i(t) \\ u_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e(t).$$

Для рассматриваемой системы

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix},$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} -e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + e^{-2t} \\ 2e^{-t} - 2e^{-2t} & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\int_0^t e^{A(t-\tau)} BU(\tau) d\tau = \left(e^{At} - E\right) A^{-1} B =$$

$$=\begin{bmatrix} -e^{-t}+2e^{-2t}-1 & -e^{-t}+e^{-2t} \\ 2e^{-t}-2e^{-2t} & 2e^{-t}-e^{-2t}-1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$=\begin{bmatrix} -e^{-t}+2e^{-2t}-1 & -e^{-t}+e^{-2t} \\ 2e^{-t}-2e^{-2t} & 2e^{-t}-e^{-2t}-1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}-e^{-2t} \\ 1+e^{-2t}-2e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$\begin{bmatrix} i(t) \\ u_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+e^{-2t} \\ 2e^{-t}-2e^{-2t} & 2e^{-t}-e^{-2t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i(0) \\ u_c(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-t}-e^{-2t} \\ 1+e^{-2t}-2e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Окончательно имеем

$$\begin{cases} i(t) = \left(2e^{-2t}-e^{-t}\right)i(0) + \left(e^{-2t}-e^{-t}\right)u_c(0) + e^{-t} - e^{-2t} \\ u_c(t) = 2\left(e^{-t}-e^{-2t}\right)i(0) + \left(2e^{-t}-e^{-2t}\right)u_c(0) + 1 - 2e^{-t} + e^{-2t} \end{cases}.$$

Пример 5 [2, с.86]. Математическая модель системы имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_2(t) + u(t) \end{cases};$$

$$y(t) = x_1(t) + 2x_2(t).$$

Начальные условия $x_1(0) = -1,\ x_2(0) = 0$.

Входное воздействие $u(t) = 1(t)$.

Определить переменные состояния $x_1(t)$, $x_2(t)$ и выходную переменную $y(t)$.

Воспользуемся формулой Коши (выражения (3), (4)).

Определение свободной составляющей.

$$x_{св}(t) = e^{At}x(0),$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},\ A - \lambda E = \begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 0 & -2-\lambda \end{bmatrix}.$$

Собственные числа $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2$.

$$\frac{A-\lambda_2 E}{\lambda_1-\lambda_2}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \frac{A-\lambda_1 E}{\lambda_2-\lambda_1}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}e^{-t}+\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}e^{-2t}=\begin{bmatrix}e^{-t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}.$$

$$X_{св}(t)=\begin{bmatrix}x_{1\,св}(t)\\ x_{2\,св}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{-t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ 0 & e^{-2t}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-e^{-t}\\ 0\end{bmatrix}.$$

$$y_{св}(t)=-e^{-t}.$$

$$X_{вын}(t)=\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t}\end{bmatrix}.$$

$$y_{вын}(t)=\frac{3}{2}-e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t}.$$

Окончательно

$$X(t)=X_{св}(t)+X_{вын}(t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}-2e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t}\end{bmatrix}.$$

$$y(t)=y_{св}(t)+y_{вын}(t)=\frac{3}{2}-2e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-2t}.$$

Пример 6 [4, с.88]. Математическая модель системы имеет вид

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-6x_1+5x_2+u\\ \dot{x}_2=-x_1\end{cases}.$$

Начальные условия нулевые. Входное воздействие $u(t)=e^{-\alpha t}$. Определить переменные состояния $x_1(t)$, $x_2(t)$.

Характеристическое уравнение $\lambda^2+6\lambda+5=0$.

Собственные числа $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-5$.

$$e^{At}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-e^{-t}+5e^{-5t} & 5e^{-t}-5e^{-5t}\\ -e^{-t}+e^{-5t} & 5e^{-t}-e^{-5t}\end{bmatrix}.$$

Для нахождения вектора состояний $X(t)$ воспользуемся формулой (3).

$$X(t)=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\int_0^t\begin{bmatrix}-e^{-(t-\tau)}+5e^{-5(t-\tau)} & 5e^{-(t-\tau)}-5e^{-5(t-\tau)}\\-e^{-(t-\tau)}+e^{-5(t-\tau)} & 5e^{-(t-\tau)}-e^{-5(t-\tau)}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}e^{-\alpha t}d\tau .$$

Выполняя умножение матриц, будем иметь:

$$x_1(t)=\frac{1}{4}\int_0^t\left[-e^{-(t-\tau)}+5e^{-5(t-\tau)}\right]e^{-\alpha t}d\tau ,$$

$$x_2(t)=\frac{1}{4}\int_0^t\left[-e^{-(t-\tau)}+e^{-5(t-\tau)}\right]e^{-\alpha t}d\tau .$$

Выполняя интегрирование, получим искомый вектор состояния

$$X(t)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{4(\alpha-1)}\left(e^{-\alpha t}-e^{-t}\right)-\dfrac{1}{4(\alpha-5)}\left(e^{-\alpha t}-e^{-5t}\right)\\ \dfrac{1}{4(\alpha-1)}\left(e^{-\alpha t}-e^{-t}\right)-\dfrac{1}{4(\alpha-5)}\left(e^{-\alpha t}-e^{-5t}\right)\end{bmatrix}.$$

Пример 7. Математическая модель системы имеет вид

$$4\ddot{y}(t)+2\dot{y}(t)+y(t)=10\,\dot{u}(t)+10\,u(t).$$

Определить переходную функцию $h(t)$ и импульсную переходную функцию $w(t)$.

Замечание. Если функция $u(t)$ в правой части дифференциального уравнения (содержащие производные в правой части) является разрывной, то при ее дифференцировании появляются дельта-функции и их производные. Особое внимание при решении дифференциальных уравнений, в правой части которых есть дельта-функции и их производные, следует обращать на определение начальных условий, так как в этом случае правые и левые начальные условия могут не совпадать. Для пересчета начальных условий существуют специальные соотношения [5].

Исследование моделей указанного вида можно проводить либо пересчитывая начальные условия, либо переходя от модели в виде дифференциального уравнения к модели в форме Коши, где производных в правой части нет.

Воспользуемся при решении поставленной задачи переходом к форме Коши.

Математическая модель системы в форме Коши имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\dfrac{1}{4}x_2(t) + 10\ u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) - \dfrac{1}{2}x_2(t) + 10\ u(t) \end{cases},$$

$$y(t) = \frac{1}{4}x_2(t).$$

или в векторно-матричной форме

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t),$$

$$Y(t) = CX(t) + DU(t),$$

где

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{4} \\ 1 & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0, \dfrac{1}{4} \end{bmatrix},\ D = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$4\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

Собственные числа матрицы A

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{3}}{4} j.$$

e^{At} вычислим, используя теорему Лагранжа-Сильвестра, которая для данного случая имеет вид (при $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$)

$$e^{At} = e^{\alpha t}\left[\frac{(A - \alpha E)}{\beta}\sin\beta t + E\cos\beta t\right].$$

$$(A - \alpha E) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{4} \\ 1 & -\dfrac{1}{4} \end{bmatrix},$$

$$e^{At}=e^{-\frac{1}{4}t}\left\{\frac{\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ 1 & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}\sin\frac{\sqrt{3}}{4}t}{\frac{\sqrt{3}}{4}}+\begin{bmatrix}\cos\frac{\sqrt{3}}{4}t & 0\\ 0 & \cos\frac{\sqrt{3}}{4}t\end{bmatrix}\right\},$$

$$e^{At}=\begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{4}t}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{4}t+\cos\frac{\sqrt{3}}{4}t\right) & -\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{4}t\\ \frac{4}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{4}t & e^{-\frac{1}{4}t}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{4}t-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{4}t\right)\end{bmatrix}.$$

Переходная и импульсная переходная функции определяются на основе формулы Коши

$$X(t)=e^{At}X(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}BU(\tau)d\tau$$

и уравнения выхода

$$Y(t)=CX(t)+DU(t).$$

По условию $X(0)=\varnothing=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ таким образом $x_1(0)=x_2(0)=0$.

Определение переходной функции $h(t)$.

$h(t)$ совпадает с $y(t)$ при $u(t)=1(t)$.

При $u(t)=1(t)$ формула Коши имеет вид (7).

$$X(t)=\left(e^{At}-E\right)A^{-1}B;\ A^{-1}B=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -4 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10\\-40\end{bmatrix}.$$

$$X(t)=\begin{bmatrix} -10\left[e^{-\frac{1}{4}t}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{4}t+\cos\frac{\sqrt{3}}{4}t\right)-1\right]+\frac{40}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{4}t \\ -\frac{40}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{4}t-40\left[e^{-\frac{1}{4}t}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{4}t+\cos\frac{\sqrt{3}}{4}t\right)-1\right] \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{30}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{4}t-10e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{4}t+10 \\ -40e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{4}t+40 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

$$h(t)=\frac{x_2(t)}{4}=10\left(1-e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{4}t\right);\ h(0)=0,\ h(\infty)=10.$$

Определение импульсной переходной функции.

$w(t)$ совпадает с $y(t)$ при $u(t)=\delta(t)$.

При $u(t)=\delta(t)$ формула Коши принимает вид (8).

$X(t)=e^{At}B$.

$$e^{At}B=\begin{bmatrix} -10e^{-\frac{1}{4}t}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{4}t+\cos\frac{\sqrt{3}}{4}t\right)-\frac{10}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{4}t \\ \frac{40}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{4}t+10e^{-\frac{1}{4}t}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{4}t+\cos\frac{\sqrt{3}}{4}t\right) \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -10e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{4}t \\ e^{-\frac{1}{4}t}\left(\frac{30}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{4}t+10\cos\frac{\sqrt{3}}{4}t\right) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix};$$

$$w(t)=\frac{x_2(t)}{4}=\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}t}\left(\frac{30}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{4}t+10\cos\frac{\sqrt{3}}{4}t\right).$$

Откуда

$$w(t)=2.5e^{-\frac{1}{4}t}\left(\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{4}t+\cos\frac{\sqrt{3}}{4}t\right);$$

$$w(0)=2.5;\ w(\infty)\to 0.$$

Проверка правильности определения $h(t)$ и $w(t)$ может быть осуществлена в соответствии с выражением $\dot{h}(t) = w(t)$. В данном случае

$$\dot{h}(t) = \frac{dh(t)}{dt} = 10\frac{d}{dt}\left[-e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{4}t\right] =$$

$$= 10\left(\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{4}t + e^{-\frac{1}{4}t}\frac{\sqrt{3}}{4}\sin\frac{\sqrt{3}}{4}t\right) =$$

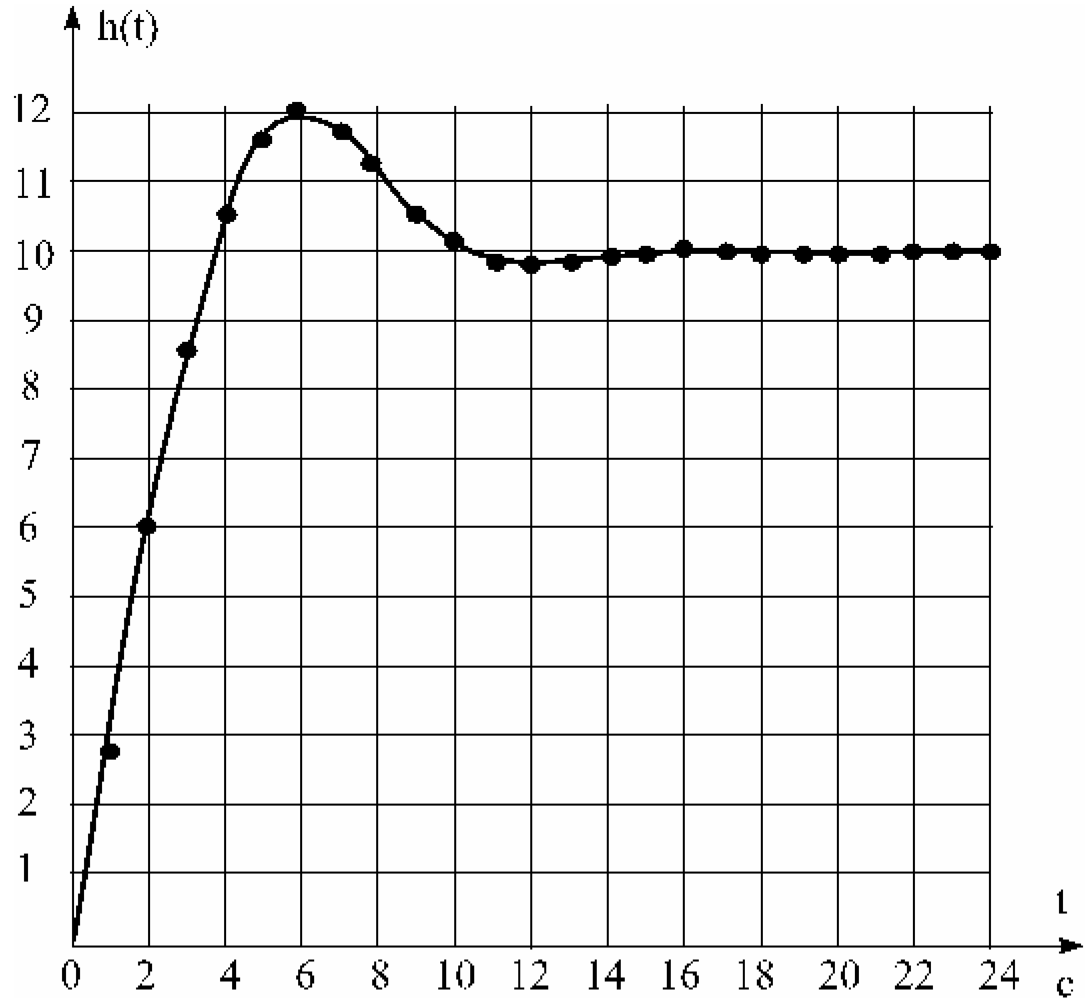
$$= 2.5e^{-\frac{1}{4}t}\left(\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{4}t + \cos\frac{\sqrt{3}}{4}t\right) = w(t).$$

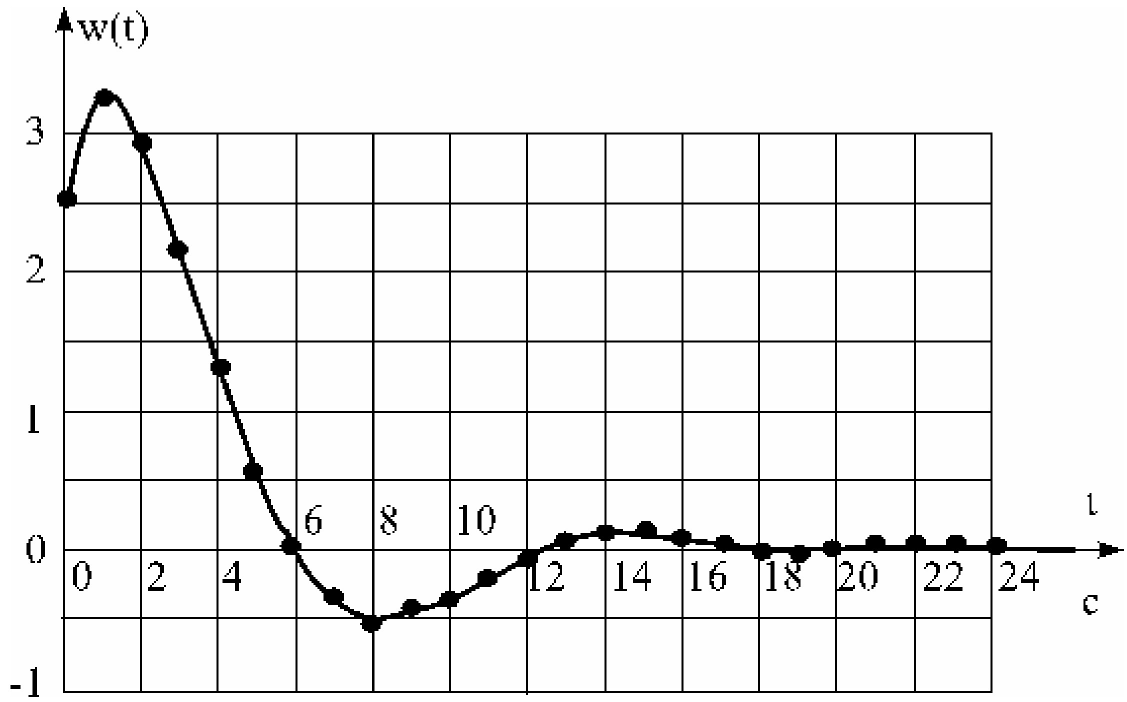
По полученным выражениям для $h(t)$ и $w(t)$ строим графики.

Данные расчета сведены в табл. 1.

Таблица 1

t, c	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	5
$h(t)$	0	1.38	2.931	4.527	6.071	7.489	8.732	9.77	10.59	11.6
$w(t)$	2.5	2.976	3.182	3.168	2.983	2.675	2.287	1.86	1.425	0.63
t, c	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$h(t)$	11.91	11.73	11.28	10.77	10.31	9.968	9.768	9.692	9.705	9.77
$w(t)$	0.022	-0.349	-0.507	-0.505	-0.406	-0.268	-0.133	-0.002	0.05	0.08
t, c	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$h(t)$	9.854	9.933	9.993	10.03	10.05	10.05	10.04	10.03	10.01	10
$w(t)$	0.084	0.071	0.05	0.027	0.008	-0.005	-0.012	-0.014	-0.01	-0.01


h(t)
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
t
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
c


w(t)
3
2
1
0
-1
6
8
10
t
0
2
4
12
14
16
18
20
22
24
c

ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЙ

1. Заданы математическая модель системы и ее начальное состояние x_{10}, x_{20} (табл. 2), $t_0 = 0$. Входное воздействие $u(t) = 1(t)$ - единичная ступенчатая функция. Определить переменные состояния $x_1(t)$, $x_2(t)$. Результат проверить подстановкой.

2. Задана математическая модель системы (табл. 3). Определить переходную функцию $h(t)$ и импульсную переходную функцию $w(t)$. Правильность их определения проверить на соответствие соотношению $\dot{h}(t) = w(t)$.

3. Для электрической схемы, рис. 1, и заданных значений L, R, C (табл. 4) определить закон изменения тока $i(t)$ и закон изменения напряжения $u_c(t)$. Входное воздействие $e(t) = 1(t)$. Начальное состояние $[i(0), u_c(0)]$.

Таблица 2

Вариант	Математическая модель системы	$X_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$
1	$\dot{x}_1 = -x_1 - x_2 + 2u$ $\dot{x}_2 = x_1 - x_2 + u$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
2	$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - u$ $\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + 2u$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
3	$\dot{x}_1 = -2x_2 - u$ $\dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 + u$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
4	$\dot{x}_1 = 2x_2 + u$ $\dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 + u$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$
5	$\dot{x}_1 = -2x_1 - 2x_2 - 2u$ $\dot{x}_2 = x_1 + u$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$
6	$\dot{x}_1 = -2x_1 + 2x_2 + u$ $\dot{x}_2 = -x_1 - u$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
7	$\dot{x}_1 = x_2 - u$ $\dot{x}_2 = -2x_1 - 2x_2 + 2u$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
8	$\dot{x}_1 = -x_1 - 2x_2 + u$ $\dot{x}_2 = 2x_1 - x_2 + u$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
9	$\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2 - 3u$ $\dot{x}_2 = -2x_1 - x_2 - u$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
10	$\dot{x}_1 = -x_1 - 4x_2 + u$ $\dot{x}_2 = x_1 - x_2 + 3u$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$
11	$\dot{x}_1 = -x_1 + 4x_2 - 2u$ $\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - u$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$
12	$\dot{x}_1 = -x_1 - x_2 + u$ $\dot{x}_2 = 4x_1 - x_2 - 3u$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Продолжение табл. 2

13	$\dot{x}_1 = -2x_1 - x_2 + u$ $\dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 - u$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
14`	$\dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 + 2u$ $\dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 - u$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
15	$\dot{x}_1 = -5x_2 + u$ $\dot{x}_2 = x_1 - 4x_2 - 2u$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
16	$\dot{x}_1 = -4x_1 + x_2 + u$ $\dot{x}_2 = -5x_1 - 3u$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
17	$\dot{x}_1 = x_2 - 2u$ $\dot{x}_2 = -5x_1 - 4x_2 - 2u$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
18	$\dot{x}_1 = -2x_1 - 2x_2 - u$ $\dot{x}_2 = 2x_1 - 2x_2 - 2u$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$
19	$\dot{x}_1 = -2x_1 + 2x_2 + u$ $\dot{x}_2 = -2x_1 - 2x_2 + 2u$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$
20	$\dot{x}_1 = 2x_2 - 3u$ $\dot{x}_2 = -4x_1 - 4x_2 - u$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
21	$\dot{x}_1 = -2x_2 - u$ $\dot{x}_2 = 4x_1 - 4x_2 - 2u$	$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$
22	$\dot{x}_1 = -4x_1 + 2x_2 + u$ $\dot{x}_2 = -4x_1 - 3u$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
23	$\dot{x}_1 = -2x_2 - u$ $\dot{x}_2 = 4x_1 - 4x_2 - 2u$	$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$
24	$\dot{x}_1 = -3x_1 - u$ $\dot{x}_2 = 4x_1 - 4x_2 - 4u$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Таблица 3

Вари-ант	Математическая модель
1	$\ddot{y}(t)+2\dot{y}(t)+2y(t)=2\dot{u}(t)+u(t)$
2	$\ddot{y}(t)+2\dot{y}(t)+5y(t)=\dot{u}(t)+2u(t)$
3	$\ddot{y}(t)+2\dot{y}(t)+10y(t)=-\dot{u}(t)+2u(t)$
4	$\ddot{y}(t)+4\dot{y}(t)+5y(t)=-\dot{u}(t)-u(t)$
5	$\ddot{y}(t)+4\dot{y}(t)+8y(t)=-2\dot{u}(t)+u(t)$
6	$\ddot{y}(t)+4\dot{y}(t)+13y(t)=\dot{u}(t)-u(t)$
7	$\ddot{y}(t)+6\dot{y}(t)+10y(t)=\dot{u}(t)-2u(t)$
8	$\ddot{y}(t)+6\dot{y}(t)+13y(t)=2\dot{u}(t)-u(t)$
9	$\ddot{y}(t)+6\dot{y}(t)+18y(t)=\dot{u}(t)-u(t)$
10	$2\ddot{y}(t)+4\dot{y}(t)+4y(t)=\dot{u}(t)+2u(t)$
11	$2\ddot{y}(t)+4\dot{y}(t)+10y(t)=2\dot{u}(t)+u(t)$
12	$2\ddot{y}(t)+4\dot{y}(t)+20y(t)=\dot{u}(t)-2u(t)$
13	$2\ddot{y}(t)+8\dot{y}(t)+10y(t)=\dot{u}(t)-u(t)$
14	$2\ddot{y}(t)+8\dot{y}(t)+16y(t)=\dot{u}(t)+u(t)$
15	$2\ddot{y}(t)+8\dot{y}(t)+26y(t)=\dot{u}(t)+2u(t)$
16	$2\ddot{y}(t)+12\dot{y}(t)+20y(t)=-\dot{u}(t)+u(t)$
17	$2\ddot{y}(t)+12\dot{y}(t)+26y(t)=\dot{u}(t)+u(t)$
18	$2\ddot{y}(t)+12\dot{y}(t)+36y(t)=\dot{u}(t)+2u(t)$
19	$\ddot{y}(t)+2\dot{y}(t)+2y(t)=\dot{u}(t)+2u(t)$
20	$\ddot{y}(t)+2\dot{y}(t)+5y(t)=2\dot{u}(t)+u(t)$
21	$\ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+7y(t)=3\dot{u}(t)-4u(t)$
22	$2\ddot{y}(t)+4\dot{y}(t)+6y(t)=4\dot{u}(t)-3u(t)$
23	$3\ddot{y}(t)+9\dot{y}(t)+8y(t)=-2\dot{u}(t)+5u(t)$
24	$4\ddot{y}(t)+12\dot{y}(t)+3y(t)=4\dot{u}(t)-9u(t)$

Таблица 4

Вариант	L, [Г]	R, [Ом]	C, [Ф]	$[i(0),\ u_c(0)]$
1	1	2	0.5	$[0, 1]$
2	1	2	0.2	$[1, 0]$
3	1	2	0.1	$[0, 1]$
4	1	4	0.2	$[1, 0]$
5	1	4	1/8	$[0, 1]$
6	1	4	1/13	$[1, 0]$
7	1	6	0.1	$[0, 1]$
8	1	6	1/13	$[1, 0]$
9	1	6	1/18	$[0, 1]$
10	1	3	0.5	$[1, 1]$
11	1	4	1/3	$[1, 1]$
12	1	5	1/6	$[1, 1]$
13	1	5	0.25	$[1, 1]$
14	1	6	0.2	$[1, 1]$
15	1	6	1/8	$[0, 1]$
16	2	4	0.25	$[1, 0]$
17	2	4	0.1	$[1, 1]$
18	2	4	0.05	$[0, 1]$
19	2	8	0.1	$[1, 0]$
20	2	12	0.05	$[1, 1]$
21	3	6	0.1	[1, 0]
22	4	8	0.05	[1, 0]
23	5	12	0.1	[1; 1]
24	6	24	0.05	[0, 1]

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч. Пространство состояний в теории управления. - М.: Наука,1970.

2. Директор Р., Рорер С. Введение в теорию систем. - М.: Высшая школа, 1971.

3. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. - Киев: Техника, 1977.

4. Солодов А.В. Методы теории систем в задаче непрерывной линейной фильтрации. - М.: Наука, 1975.

5. Теория автоматического управления /Под ред. А.А. Воронова, М.: Высшая школа, 1986. Ч. 1.

Дополнительная

6. Бессонов А.А. Линейные электрические цепи. - М.: Высшая школа, 1983.

7. Солодовников В.В., Плотников В.Н., Яковлев А.В. Основы теории и элементы систем автоматического регулирования. - М.: Машиностроение, 1985.

8. Ту Ю. Современная теория управления. - М.: Машиностроение, 1971.

ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
ЛИНЕЙНЫХ МНОГОМЕРНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

Методические указания к практическим занятиям по дисциплине
«Б.1.2.9 Основы кибернетики»
направления подготовки
«01.03.02 "Прикладная математика и информатика"»
квалификация (степень) «бакалавр»»
Профиль «Математическое моделирование и вычислительная математика»

Составили: СТЕПАНОВ Михаил Федорович

Рецензент В.А. Коваль

Редактор

Подписано в печать Формат 60x84 1/16

Бум. тип. Усл. печ.л. 1,16 (1,25) Уч.-изд.л. 1,1

Тираж 100 экз. Заказ Бесплатно

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.
410054, Саратов, Политехническая ул. 77

Отпечатано в РИЦ СГТУ имени Гагарина Ю.А. 410054, Саратов, Политехническая ул. 77