КОНЕЧНЫЕ АВТОМАТЫ

Конечный автомат. Способы задания

В комбинационных схемах выходные переменные определяются только комбинацией значений переменных на входах в данный момент времени. Поэтому их называют комбинационными схемами. В более общем случае выходные переменные могут зависеть от значений входных переменных не только в данный момент времени, но и от их предыдущих значений. Иначе говоря, значения выходных переменных определяются последовательностью значений входных переменных, в связи с чем схемы с такими свойствами называют последовательными. Если входные и выходные переменные принимают значения из конечных алфавитов, то оба типа схем объединяются под названием конечные автоматы. Особого внимания заслуживают конечные автоматы с двухзначным структурным алфавитом, зависимости между входными и выходными переменными которых выражаются булевыми функциями. Их значение обусловлено тем, что любая информация может быть представлена в двоичных кодах (двоично-десятичные коды чисел, телетайпный код в технике связи и т. п.). В тоже время при технической реализации автоматов используются преимущественно двоичные элементы и двузначная логика. Как и в комбинационных схемах, сигналы подаются на входы и снимаются с выходов в тактовые или дискретные моменты времени $0, T, 2T, \ldots, kT, \ldots$

Кроме входных и выходных переменных можно выделить некоторую совокупность промежуточных переменных, которые связаны с внутренней структурой автомата. В комбинационных схемах промежуточные переменные непосредственно не участвуют в соотношениях вход-выход. Напротив, выходные функции последовательных схем в качестве своих аргументов, кроме входных переменных, обязательно содержат некоторую совокупность промежуточных переменных $a_1, a_2, ..., a_n$, характеризующих состояние схемы. Набор всех возможных состояний, которые присущи данной схеме, называется множеством состояний.

Строгое определение понятия состояния связывается с той ролью, которое оно играет при описании конечных автоматов. Во-первых, значения совокупности выходных переменных на k-том такте $y[kT]= y_1[kT],y_2[kT],...,y_r[kT]$ однозначно определяется значениями входных переменных $u[kT]= u_1[kT],u_2[kT],...,u_m[kT]$ и состоянием $a[kT]= a_1[kT],a_2[kT],...,a_n[kT])$ на том же такте, то есть $y[kT]= \varphi_в(u[kT],a[kT])$. Во-вторых, состояние $a[(k+1)T]$ в следующем (k+1)-м такте однозначно определяется входными переменными $u[kT]$ и состоянием $a[kT]$ в предыдущем такте, т.е. $a[(k+1)T]= \varphi_п(u[kT],a[kT])$.

Ясно, что последовательные схемы должны обладать способностью сохранять предыдущее состояние до следующего такта, в связи, с чем их называют также автоматами с памятью или последовательностными машинами. В качестве памяти могут использоваться элементы задержки, на выходах которых повторяются входные воздействия со сдвигом во времени на интервал между тактами Т. Широко применяются также различные запоминающие элементы, например, триггеры, способные сохранять состояния на выходах до тех пор, пока оно не изменяется в результате воздействия на их входы.

В технике с понятием автомата обычно связывается некоторое устройство, способное выполнять определенные функции без вмешательства человека или с его ограниченным участием. Однако такое понимание является слишком узким.

В широком смысле математическая модель конечного автомата отображает физические или абстрактные явления самой разнообразной природы. Такая модель успешно используется как в технике (проектирование цифровых вычислительных машин, систем управления и связи), так и в других областях – психологии и физиологии (исследование деятельности нервной системы человека и простейших видов поведения животных), лингвистике (анализ синтаксиса русского, английского или других языков, расшифровка древних рукописей), теории и практике административного управления и т.п. Универсальность теории автоматов позволяет рассматривать с единой точки зрения различные объекты, устанавливать связи и аналогии между ними, переносить результаты из общих областей в другую.

Чтобы определить (задать) работу конечного автомата нужно определить:

- конечное множество входных сигналов (конечный входной алфавит сигналов) $u = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$;

- конечное множество выходных сигналов (конечный выходной алфавит сигналов) $y = \{y_1, y_2, \ldots, y_r\}$;

-конечное множество состояний (конечный алфавит состояний) $a = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$;

- начальное состояние $a_0 \in$;

- функцию выходов, определяющую выходы в зависимости от входов и состояний в данный тактовый момент времени $y[kT] = f_в(u[kT], a[kT])$;

- функцию переходов, определяющую последующее состояние конечного автомата в момент (к+1)Т в зависимости от входов и состояний в данный тактовый момент времени $a[(k+\ )T] = f_n(u[kT],a[kT])$.

Функции выходов и переходов называются характеристическими функциями.

Общая блок схема конечного автомата (рис.8.3.1) может быть представлена в виде комбинационной схемы, реализующей характеристические функции $f_в$, f_n и памяти, сохраняющей на один такт предыдущего состояния автомата.

Рис. 8.3.1

В определении конечного автомата участвует три конечных множества u, y, a и две функции f_n и $f_в$, задающие некоторые отношения между элементами этих множеств. Следовательно, конечный автомат можно определить как пятикомпонентный кортеж

$$M = \ u, y, a, f_n, f_в).$$

Характеристические функции f_n и $f_в$ можно рассматривать как некоторые отображения множества UxA или его подмножества D⊂UxA соответственно на множество a и y, то есть

$$f_n : u\times \;\rightarrow \quad f_в : u\times \;\rightarrow$$

Приведенное ниже определение связывают обычно с автоматами первого рода, называемыми также автоматом Мили. Если выходные переменные являются функцией только состояния, то имеем автомат второго рода или автомат Мура, для нее

$$y[kT] = f_{в1}(a[kT]).$$

Для комбинационных схем функция перехода не имеет смысла, а функция выходов вырождается к виду $y[kT] = f_в(u[kT])$. Их называют автоматами без памяти или тривиальными автоматами.

Автомат может быть задан различными способами:

- словесное описание его функционирования или перечисление элементов множеств $u, a, y,$ с указанием отношений между ними;

- таблицы;

- графы;

- матрицы.

Рассмотрим эти способы задания на примере.

Элементы множеств u, a, y удобно пронумеровать порядковыми числами, начиная с нуля, например u ={0,1,2,3}, a ={0,1,2,3}, y ={0,1}, то есть рассматривает случай m=n=4,r=2.

Тогда характеристические функции $f_п$ и $f_в$ можно представить двумя таблицами, строки которых соответствуют состояниям, а столбцы – входам, (Первая таблица, называемая таблицей переходов, соответствует функция $a[(k+\ )T]=f_п(u[kT],a[kT]))$, и ее клетки заполняются номерами состояний $a[(k+\ )T]$, в которые переходит аппарат при воздействии $u[kT]$ и состоянии $a[kT]$ в данный тактовый момент.

Вторая таблица, называемая таблицей выходов, соответствует функции $y[kT]=f_в(u[kT],a[kT])$, и ее клетки заполняются номерами выходов $y[kT]$ в данный тактовый момент, которые соответствуют воздействию $u[kT]$ и состоянию $a[kT]$ в тот же момент.

Например, для заданных множеств u, a, y такие таблицы могут иметь вид:

$a[(k+\ )T]=f_п(u[kT],a[kT])$ Таблица 8.3.1

$a[kT]\backslash u[kT]$	0	1	2	3
0	3	2	1	3
1	3	2	1	3
2	3	2	2	3
3	3	0	0	1

$y[kT]=f_в(u[kT],a[kT])$ Таблица 8.3.2

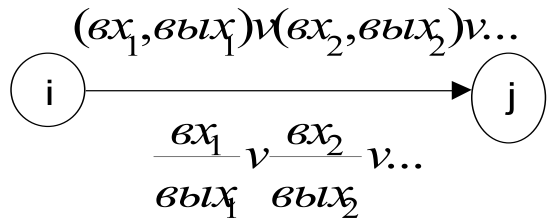
$a[kT]\backslash u[kT]$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	0	1
2	1	0	1	1
3	0	0	1	1

Обе таблицы можно объединить в общую таблицу переходов, если условно записывать в клетках пары чисел (номер следующего состояния в числителе и номер выхода в знаменателе), т.е.

Таблица 8.3.2.

$a[kT]\backslash u[kT]$	0	1	2	3
0	3/0	2/0	1/0	3/0
1	3/1	2/0	1/0	3/1
2	3/1	2/0	2/1	3/1
3	3/0	0/0	0/1	1/1

Граф конечного автомата строится таким образом, что его вершины соответствуют состояниям, а дуги, направленные из i-той вершины в j-тую, обозначаются дизъюнкциями дробей вход-выход (либо дизъюнкцией пар вход-выход). Вход-выходной сигнал, под воздействием которого осуществляется переход из состояния i в состояние j. Выход – сигнал на выходе автомата при этом переходе



На рис.8.3.2. показан граф, построенный в соответствии с приведенной выше общей таблицей переходов. Так из состояния 0 автомат переходит в состояния 1,2 и 3, то из вершины 0 графа исходят дуги в вершины 1,2 и 3. При этом переход в состояние 1 совершается под воздействием 2 и ему соответствует выход 0, поэтому дуга из вершины 0 и 1 помечается как ${}^{2}\!/_{0}$. Переход в состояние 2 совершается под воздействием 1 и ему соответствует выход 0, поэтому дуга из вершины 0 в 2 помечается как ${}^{1}\!/_{0}$. Переход в состояние 3 совершается под воздействиями 0 и 3 и им обоим соответствует выход 0, поэтому дуга из вершины 0 в 3 помечается как дизъюнкция ${}^{0}\!/_{0} \cup {}^{}\!/_{0}$ логично определяются и другие дуги графа. Петли соответствуют переходам, при которых состояния изменяются.

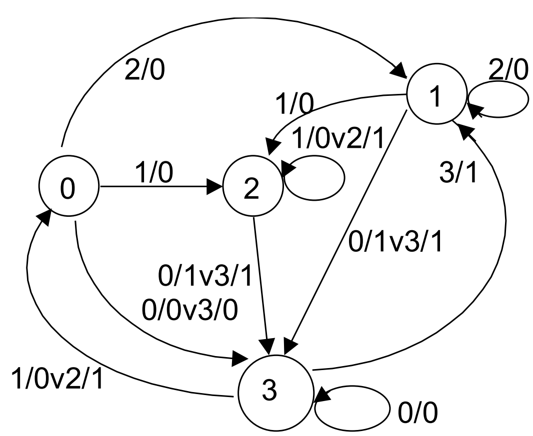


Рис. 8.3.2

Матрица соединения автомата М (или матрица переходов) представляет собой квадратную таблицу, в которой номера строк и столбцов соответствуют номерам состояний. Клетка матрицы на пересечении i-й строки и j-го столбца заполняется дизъюнкцией пар “вход – выход”, которая приписана дуге графа, исходящей из i-й в j-ю вершину. При отсутствии такой ветви клетка заполняется нулем или остается свободной. Так для рассматриваемого примера имеем:

$M =$

0	1	2	3	
	$2/0$	$1/0$	$0/0 \vee 3/0$	0
	$2/0$	$1/0$	$0/1 \vee 3/1$	1
		$1/0 \vee 2/1$	$0/1 \vee 3/1$	2
$1/0 \vee 2/1$	$3/1$		$0/0$	3

8.3.2. Анализ конечных автоматов

Полное описание поведения автомата заключается в определении последовательности выходных сигналов при возбуждении его в тактовые моменты времени некоторой последовательностью входных сигналов. Входная и выходная последовательности представляются наборами символов (или их номеров) из алфавитов u и y одинаковой длины l. Для такого описания, кроме характеристических функций, необходимо определить или задать начальное состояние автомата.

Наиболее удобно проводить анализ (определять реакцию автомата на входную последовательность) по его графу. Для этого достаточно проследить путь в графе, начиная от вершины начального состояния, по направлению дуг, которые отмечены очередными номерами из входной последовательности. Выходная последовательность определяется номерами, которыми отмечены дуги в порядке их следования по пройденному пути, а последовательность состояний автомата – номерами вершин, через которые проходит этот путь.

Так из графа рис. 8.3.2 для выходной последовательности (2,0,1,1,2,3) и начального состояния 0 имеем выходную последовательность (0,1,0,0,1,1) и смену состояний автомата (1,3,0,2,2,3). При начальном состоянии 2 и той же входной последовательности получаем соответственно (1,1,0,0,1,1) и (2,3,0,2,2,3).

С помощью графа автомата легко выделить следующие типы его состояний:

1) преходящее состояние, из которого можно перейти, по крайней мере, в одно другое состояние, но после этого уже нельзя возвратиться в него ни при каком воздействии (соответствующая вершина не имеет заходящих дуг, но имеет хотя бы одну исходящую дугу);

2) тупиковое состояние, в которое можно перейти, по крайней мере, из одного другого состояния, но после этого уже нельзя выйти из него ни при каком воздействии (соответствующая вершина не имеет исходящих дуг в другие вершины, но имеет хотя бы одну входящую дугу из другой вершины);

3) изолированное состояние, из которого нельзя перейти ни в какое другое состояние и в него нельзя попасть ни из какого другого состояния (соответствующая вершина содержит только петлю).

Аналогичные определения можно дать для некоторых совокупностей состояний, рассматриваемых как подавтоматы. Если начальное состояние автомата M принадлежит непустому множеству a_i состояний, которое составляет тупиковый или изолированный подавтомат, то M можно упростить исключением всех состояний, которые не принадлежат множеству a_i, и всех дуг, начинающихся в этих состояниях.

Пусть M_1, M_2 и M_3 - соответственно преходящий, тупиковый и изолированные подавтоматы автомата M, которые характеризуются множествами состояний a_1, a_2, a_3. Очевидно, выделение таких подавтоматов соответствует разбиению множества a состояний автомата M на непересекающиеся подмножества a_1, a_2, a_3.

$$(a_1 \cup a_2 \cup a_3 = a) \text{ и } a_1 \cap a_2 \cap a_3 = \varnothing$$

Как следует из обобщенного графа (рис. 8.3.3), матрица соединения автомата может быть представлена в виде:

$$M = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & 0 \\ 0 & \mu_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{bmatrix},$$

где $\mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{13}$ - матрицы подавтоматов M_1, M_2, M_3; μ_{12} - матрица, характеризующая переходы от состояний преходящего автомата M_1 к состояниям тупикового автомата M_2. Отсюда следует, что разбиение автомата M на подавтоматы M_1, M_2, M_3 можно осуществить преобразованием его матрицы соединений к стандартному виду путем перестановки соответствующих строк и столбцов.

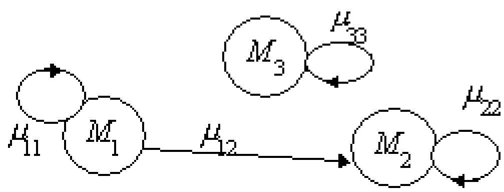


Рис.8.3.3.

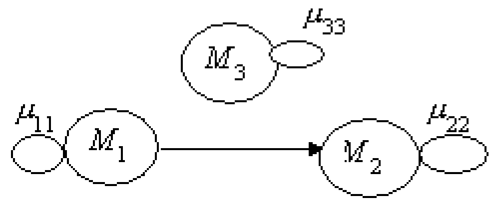
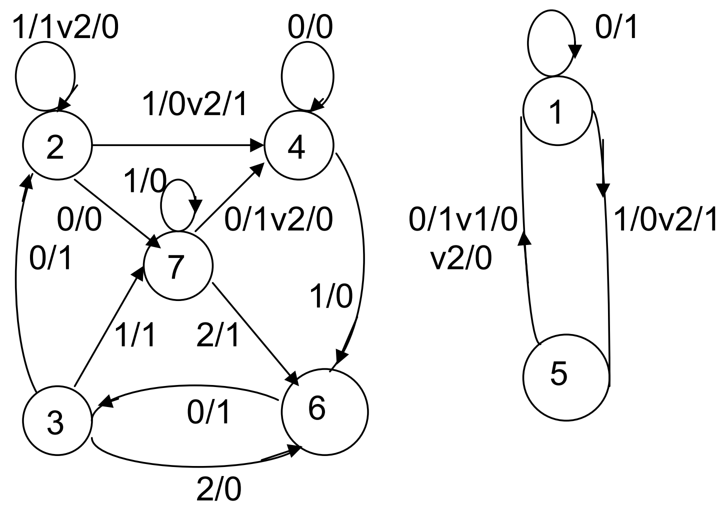


Рис 8.3.4

Рассмотрим, например, автомат, граф которого изображен на рис.8.3.4.



Матрица графа

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 3 & 6 & 2 & 4 & 7 & 1 & 5 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc:ccc:cc} 0 & 2/0 & 0/1 & 0 & 1/1 & 0 & 0 \\ 1/0 & 0 & 0 & 1/0 & 2/1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1/1 \vee 2/0 & 0 & 0/0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/0 \vee 2/1 & 0/0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0/1 \vee 2/0 & 1/0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0/1 & 1/0 \vee 2/1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0/1 \vee 1/0 \vee 2/0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ 3 \\ 6 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \\ 1 \\ 5 \end{array}$$

Отсюда следует, что $a_1 = \{3,6\}$ составляет преходящий подавтомат, $a_2 = \{2,4,7\}$ - тупиковый подавтомат и $a_3 = \{1,5\}$ - изолированный подавтомат. Если начальное состояние принадлежит множеству a_2, то можно упростить автомат, исключив состояния $a_1 \cup a_3 = \{3,6,1,5\}$, а в случае принадлежности начального состояния множеству a_3 автомат упрощается исключением состояний $a_1 \cup a_2 = \{3,6,2,4,7\}$.

8.3.3. Синтез конечных автоматов

Конечный автомат задан общей таблицей переходов:

Таблица 8.3.3

$a[kT]/u[kT]$	0	1	2	3
0	3/0	2/0	1/0	3/0
1	3/1	2/0	1/0	3/1
2	3/1	2/0	2/1	3/1
3	3/0	0/0	0/1	1/1

u ={0,1,2,3} - входной алфавит сигналов (множество значений входной переменной);

X ={0,1} - выходной алфавит сигналов (множество значений выходной переменной);

A ={0,1,2,3} - алфавит состояний (множество состояний конечного автомата);

$X[kT] = {}^{c}_{\%o}(u[kT], A[kT])$ - функция выходов;

$A[(k+\quad)T] = {}^{c}_{n}(u[kT], A[kT])$ - функция переходов.

Построить граф конечного автомата и матрицу соединения автомата (матрицу переходов). Провести анализ работы автомата при действии на него входной последовательности (2,0,1,1,2,3) и начальных состояний $a_0 =$ и $a_0 =$ Записать аналитические выражения для функций выходов и переходов.

Граф конечного автомата строится в соответствии с общей таблицей переходов. Граф строится таким образом, что его вершины соответствуют состояниям, а направленные дуги обозначаются либо как дизъюнкции пар (‘вход’, ’выход’), либо как дизъюнкции тех же пар, записанные в виде дроби (‘вход’/ ‘выход’). В качестве первого элемента пары (числителя) принимается входное воздействие (‘вход’), под действием которого завершается переход из одного состояния в другое по направлению дуги. В качестве второго элемента пары (знаменателя) принимается значение выходной переменной (‘выход’), соответствующей этому переходу. Так из состояния 0 автомат может перейти в состояния 1,2 и 3. При этом переход в состояние 1 совершается под воздействием 2 и ему соответствует выход 0, поэтому дуга из вершины 0 и 1 помечается как 2/0. Переход в состояние 2 совершается под воздействием 1 и ему соответствует выход 0, поэтому дуга из вершины 0 в 2 помечается как 1/0. Переход в состояние 3 совершается под воздействием 0 и 3 и им обоим соответствует выход 0, поэтому дуга из вершины 0 в 3 помечается как дизъюнкция $0/0\vee\ /0$. Аналогично определяются и другие дуги графа. Петли соответствуют переходам, при которых состояния не изменяются.

Матрица соединения автомата M (или матрица переходов) представляет собой квадратную таблицу, в которой номера строк и столбцов соответствуют номерам состояний. Клетка матрицы на пересечении i-ой строки и j-го столбца заполняется дизъюнкцией пар ‘вход-выход’, которая приписана дуге графа, исходящей из i-ой в j-ю вершину. При отсутствии такой ветви клетка заполняется нулем или остается свободной. Так для рассматриваемого примера имеем:

$$M = \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 3 & \\ \hline & 2/0 & 1/0 & 0/0\vee 3/0 & 0 \\ & 2/0 & 1/0 & 0/1\vee 3/1 & 1 \\ & & 1/0\vee 2/1 & 0/1\vee 3/1 & 2 \\ 1/0\vee 2/1 & 3/1 & & 0/0 & 3 \end{array}$$

Наиболее удобно определять реакцию автомата на входную последовательность по его графу. Для этого достаточно проследить путь в графе, начиная от вершины начального состояния, по направлению дуг, которые отмечены очередными номерами из входной последовательности. Так для рассматриваемого автомата для заданной входной последовательности и $a_0 =$ имеем выходную последовательность (0,1,0,0,1,1) и смену состояний автомата (1,3,0,2,2,3). При $a_0 =$ соответственно (1,1,0,0,1,1) и 2(2,3,0,2,2,3).

Для записей аналитических выражений функций выходов и переходов поступают следующим образом. Преобразуем таблицу переходов к виду:

$u[kT]$	0000	1111	2222	3333
$a[kT]$	0123	0123	0123	0123
$a[(k+\ )T]$	3333	2220	1120	3331
$x[kT]$	0110	0000	0011	0111

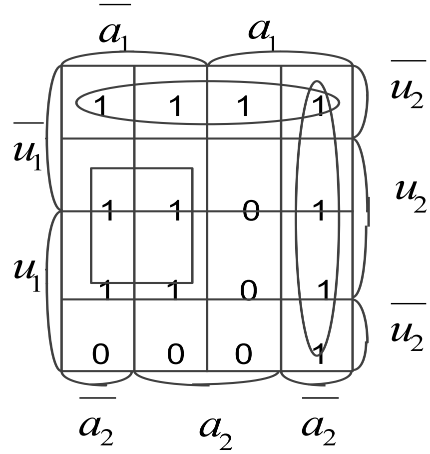
Заменим десятичные числа их двоичными эквивалентами, читаемыми сверху вниз, получим таблицу соответствия, в которой значения функций $u[kT], a[kT], x[kT], a[(k+\ )T]$ представлены двоичными кодами:

$u[kT]$	$_1[kT]$	0000	0000	1111	1111
	$_2[kT]$	0000	1111	0000	1111
$a[kT]$	$_1[kT]$	0011	0011	0011	0011
	$_2[kT]$	0101	0101	0101	0101
$a[(k+\ )T]$	$_1[(k+\ )T]$	1111	1110	0010	1110
	$\iota_2[(k+\ )]$	1111	0000	1100	1111
$x[kT]$		0110	0000	0011	0111

Теперь можно записать выражения для функций выходов и переходов либо в СКНФ, либо в СДНФ (см. пример 2). Используя карты Карно можно записать упрощенные (минимальные значения) функций. Запишем, например, выражение для $a_1[(k+\ )T]$. Карта Карно имеет вид:

		a_1,a_2			
		00	01	11	10
	00	1	1	1	1
u_1,u_2	01	1	1	0	1
	11	1	1	0	1
	10	0	0	0	1

или



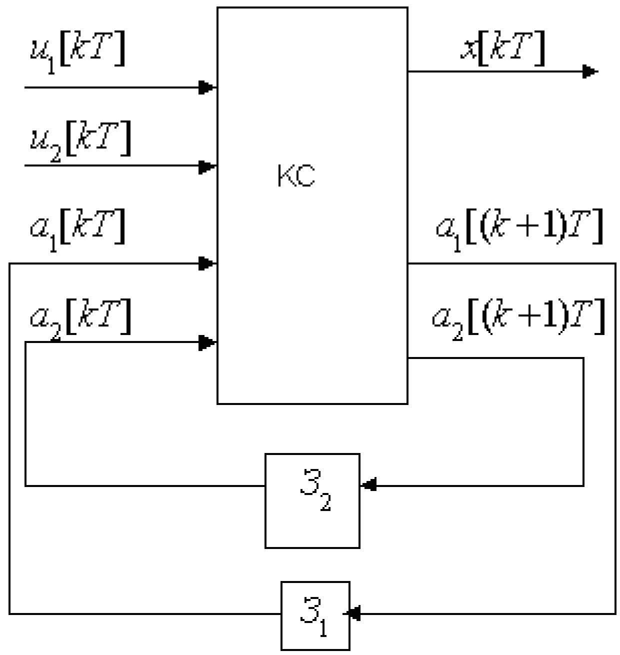
Откуда:

$$a_1[(k+1)T] = a_1[kT]\overline{a_2}[kT] + \overline{u_1}[kT]\overline{u_2}[kT] +$$
$$+ u_2[kT]\overline{a_1}[kT].$$

Аналогично можно записать выражения и для других функций.

Отсюда видно, что комбинационная схема должна иметь четыре входа, соответствующих входным переменным $u_1[kT]$, $u_2[kT]$ и переменным состояния $a_1[kT]$ и $a_2[kT]$, а также три выхода, соответствующих переменным состояния $a_1[(k+1)T]$ и $a_2[(k+1)T]$

и выходной переменной $x[kT]$. Синтезировав комбинационную схему, соответствующую полученной таблице и введя два элемента задержки $З_1$ и $З_2$, получим структурную схему автомата.



Структурная схема конечного автомата.

8.4 Примеры синтеза логических устройств

Пример 8.4.1

Для повышения достоверности информации о поступлении сигнала используют три однотипных канала связи, на выходе каждого из которых сигнал принимает значение ‘1’ в случае приема сообщения и значение ‘0’, если сообщения нет. Однако из-за наличия помех, например шумов, действующих в каждом канале связи независимо, значения ‘1’ и ‘0’ соответствуют наличию или отсутствию сигнала только с какой-то вероятностью. Повысить достоверность информации о сигнале можно путем сравнения информации, вырабатываемой соседними каналами. Эту операцию выполняет логическое устройство (ЛУ), которое работает по следующему принципу: сигнал на выходе равен ‘1’, если, по крайней мере, на выходе двух каналов имеются единичные уровни. Требуется спроектировать такое ЛУ и реализовать его на элементах: а) И.ИЛИ,НЕ; б) И-НЕ; в) ИЛИ-НЕ.

Таблица соответствия (истинности), составленная в соответствии со словесным описанием работы ЛУ, имеет вид:

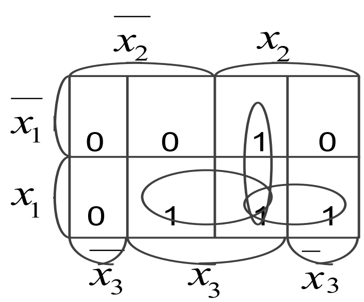
Таблица 8.4.1

x_1	0	0	0	0	1	1	1	1
x_2	0	0	1	1	0	0	1	1
x_3	0	1	0	1	0	1	0	1
y	0	0	0	1	0	1	1	1

Здесь x_1, x_2, x_3 - входные сигналы ЛУ, y - выходной сигнал ЛУ.

Упрощенное (минимальное) значение функции запишем, используя карту Карно (диаграмму Вейча):

x_1 \ x_2, x_3	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1



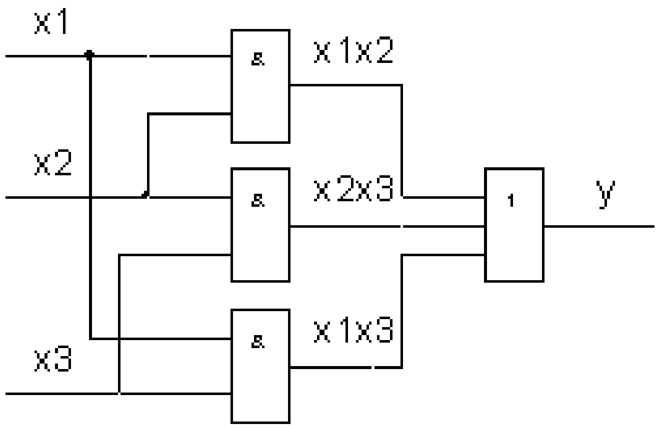
или

$$y = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \overline{\overline{x_1x_2} + \overline{x_2x_3} + \overline{x_1x_3}} =$$
$$= \overline{(\overline{x_1x_2}) \cdot (\overline{x_2x_3}) \cdot (\overline{x_1x_3})}.$$

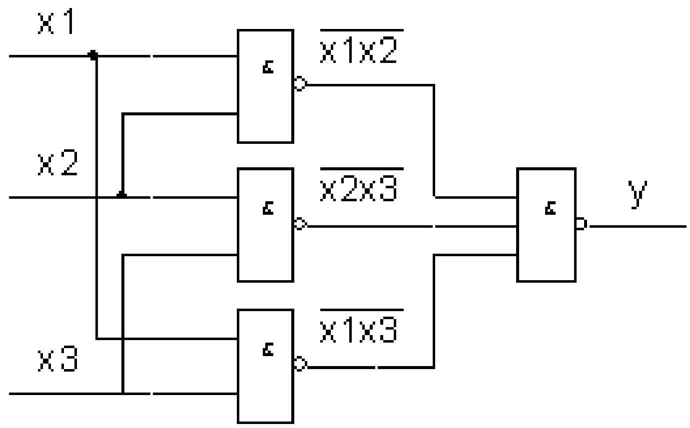
Для реализации логической функции на элементах ИЛИ-НЕ полученную формулу необходимо представить как отрицание дизъюнкций. Используя правила де Моргана, получим:

$$y = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \overline{(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)} + \overline{(\bar{x}_2 + \bar{x}_3)} +$$
$$+ \overline{(\bar{x}_1 + \bar{x}_3)} = \overline{\overline{\overline{(\bar{x}_1 + \bar{x}_2)} + \overline{(\bar{x}_2 + \bar{x}_3)} + \overline{(\bar{x}_1 + \bar{x}_3)}}}.$$

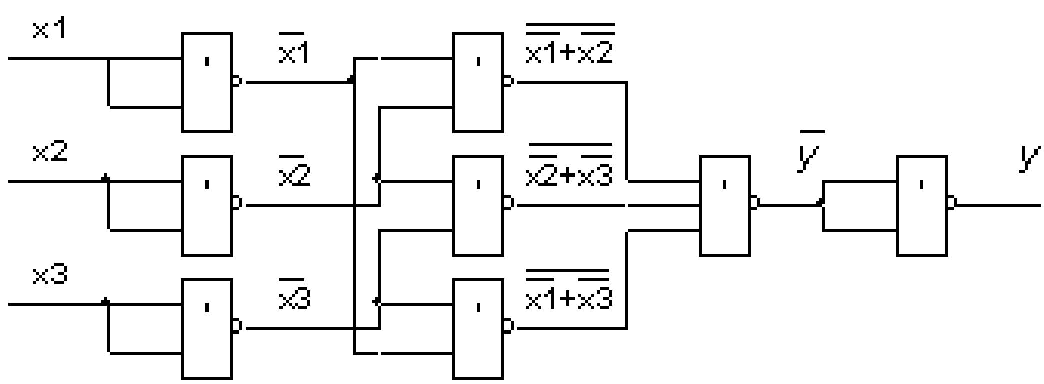
а)



б)



в)



Пример 8.4.2

В 4-х точках конструкции установлены термодатчики. Деформация конструкции может наступить при одновременном перегреве в точках 4 и 3.

Однако, если при этом возникает перегрев и в точке 2, то конструкция не деформируется, а при одновременном перегреве в точках 4,3,2,1 – опасность возникает вновь.

Кроме того, опасен перегрев в т. 2, если он не сочетается с перегревом в т.1, а одновременный перегрев в т.2,1,3 – вызывает деформацию.

По условию эксплуатации сочетания перегревов в других точках не возможны. При наступлении опасной ситуации должен быть подан сигнал тревоги.

Превышение допустимого уровня температуры в точках 4,3,2,1 обозначим соответственно $x_4 = \ , x_3 = \ , x_2 = \ , x_1 = \ ,$ а тот факт, что в указанных точках t^0 ниже допустимого уровня, обозначим как $x_4 = \ , x_3 = \ , x_2 = \ , x_1 = \ .$

Таблица 8.4.2

n	x_4	x_3	x_2	x_1	y
0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0
2	1	1	0	1	-
3	1	1	0	0	1
4	1	0	1	1	-
5	1	0	1	0	-
6	1	0	0	1	-

7	1	0	0	0	-
8	0	1	1	1	1
9	0	1	1	0	-
10	0	1	0	1	-
11	0	1	0	0	-
12	0	0	1	1	0
13	0	0	1	0	1
14	0	0	0	1	-
15	0	0	0	0	-

По условию задачи, опасными являются одновременные превышения температуры в точках 4,3,2,1; 4,3; 3,2,1; 2.

Поэтому против комбинаций:

$$x_4 = \ , x_3 = \ , x_2 = \ , x_1 =$$
$$x_4 = \ , x_3 = \ , x_2 = \ , x_1 =$$
$$x_4 = \ , x_3 = \ , x_2 = \ , x_1 =$$
$$x_4 = \ , x_3 = \ , x_2 = \ , x_1 =$$

в графе y поставлены единицы.

Комбинации
$$x_4 = \ , x_3 = \ , x_2 = \ , x_1 =$$
$$x_4 = \ , x_3 = \ , x_2 = \ , x_1 =$$

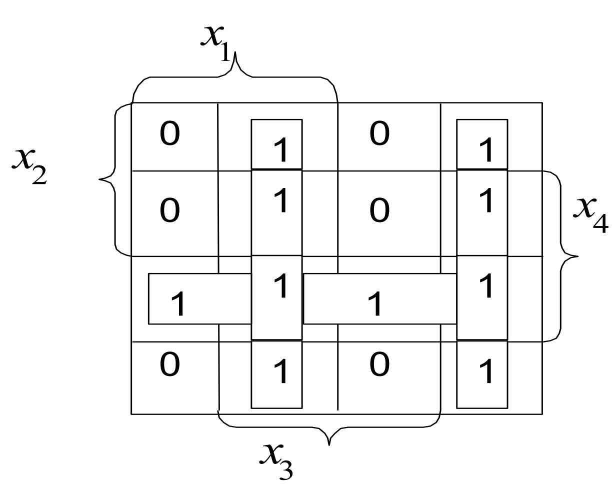
не являются опасными $(y = \ )$.

Прочерки в графе y сделаны против тех комбинаций, которые по условиям задачи не являются реальными, то есть по существу запрещены.

Составляем карту Карно

0	1	-	1
-	1	0	-
-	-	1	-
-	-	-	-

С целью минимизации выгодно доопределить функцию, положив ее равной 1 на наборах 5,7,15, 6,2,10 и равной 0 на наборах 4,14,11,9.



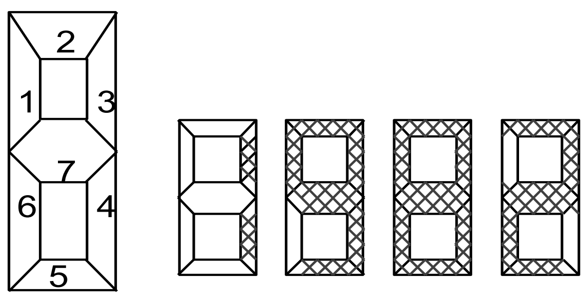
При этом минимальное значение функции

$$y = x_3 x_1 + x_4 \overline{x_2} + \overline{x_3}\,\overline{x_4}$$

Такую функцию должно реализовать устройство, включающее сигнал тревоги.

Пример 8.43.

Выполнить логический синтез схемы управления световым табло. На вход системы подается информация о цифрах каждого десятичного разряда, подлежащего высвечиванию, в виде четырехразрядного двоичного кода. При этом засвечиваются различные комбинации полосок, образующих цифры от 0 до 9.



Выполним синтез схемы для одного десятичного разряда, так как для остальных разрядов схемы синтез ничем не отличается.

Введем обозначения: $u_1, u_2, u_3, u_4 -$ входные сигналы, причем u_1 - старший разряд двоичного числа, u_4- младший; $x_1, x_2, \ldots x_7$-выходные сигналы, дающие команды на засвечивание 1-й, 2-й,...,7-й полосок. Тогда работу системы можно описать таблицей соответствия.

Замечание: Комбинации входных переменных, соответствующие десятичным числам от 10 до 15, на вход не поступают. Поэтому состояние выходных переменных для этих комбинаций являются неиспользованными и в таблице отмечены прочерками.

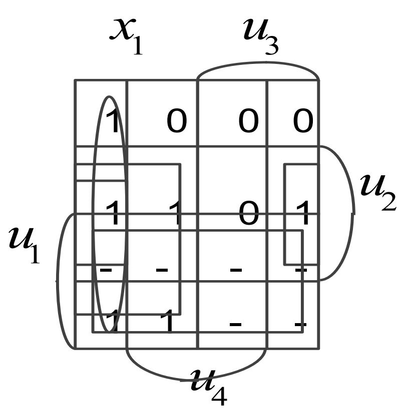
По таблице составляем карты Карно для выходных переменных $x_1, x_2, ..., x_7$ и определяем их алгебраические выражения. Для минимизации функций в контуры включены и клетки с неиспользованными состояниями (считаем, что значение функции в этих клетках равно 1).

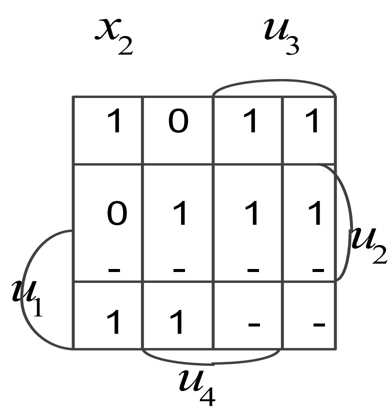
Таблица 8.4.3

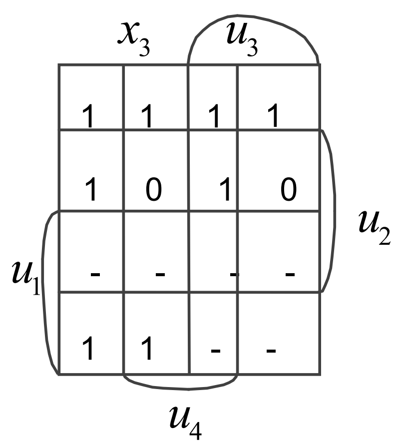
Десятичное **Число**	Входные переменные				Выходные переменные						
	u_1	u_2	u_3	u_4	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0
2	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1
3	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1
4	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1
6	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1
7	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0
8	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
9	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1
10	1	0	1	0	-	-	-	-	-	-	-
11	1	0	1	1	-	-	-	-	-	-	-
12	1	1	0	0	-	-	-	-	-	-	-

13	1	1	0	1	-	-	-	-	-	-	-
14	1	1	1	0	-	-	-	-	-	-	-
15	1	1	1	1	-	-	-	-	-	-	-

Карты Карно для x_1, x_2, x_3 имеют вид:







По этим картам получены следующие выражения

$$x_1 = u_1 + \bar{u}_3\bar{u}_4 + u_2\bar{u}_3 + u_2\bar{u}_4;\ x_2 = u_1 + u_3 + u_2u_4 + \bar{u}_2\bar{u}_4;$$

$$x_3 = \bar{u}_2 + \bar{u}_3\bar{u}_4 + u_3u_4.$$

Аналогично для всех остальных выходных переменных

$$x_4 = {}_1 + {}_2 + \overline{{}_3} + {}_4; \quad x_5 = {}_1 + \overline{{}_2}\,\overline{u_4} + \overline{{}_2}u_3 + {}_3\overline{u_4} + {}_2\overline{u_3}u_4;$$

$$x_6 = \overline{{}_2}\,\overline{u_4} + {}_3\overline{u_4}; \quad x_7 = {}_1 + {}_2\overline{u_3} + \overline{{}_2}u_3 + {}_3\overline{u_4}.$$

По полученным выражениям можно простроить логическую схему устройства управления.

Пример 8.4.4

На ленте конвейера движутся детали типа А и В в беспорядке. Спроектировать автомат, который бы комплектовал детали тройками в последовательности АВА, АВА,...

Для этого необходимо после первой пропущенной детали А остальные детали этого типа сбрасывать (снимать) с конвейера до тех пор, пока не подойдет деталь типа В. Затем автомат сбрасывает детали типа В до появления детали А и т.д. Проанализируем работу автомата. Автомат, пропустивший мимо себя деталь А, должен запомнить это. Запомнить следует и то, что уже есть пара АВ. Укомплектовав очередную тройку, автомат возвращается в исходное положение и вновь ожидает деталь А. Работа автомата протекает в несколько тактов - порциями. Появление в поле зрения автомата новой детали вызывает его действие. Автомат работает такт за тактом, осматривая деталь за деталью.

Зададим множество входных сигналов u, множество выходных сигналов x и множество состояний a.

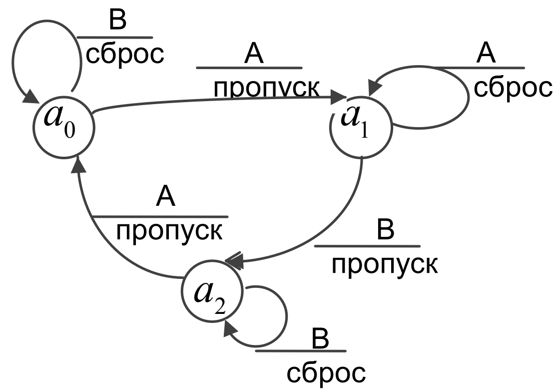
u={подходит деталь А, подходит деталь В};

x={пропустить деталь, сбросить (снять) деталь};

a={исходное состояние (отложена тройка деталей АВА),

отложена деталь А, отложена пара деталей АВ}.

Работу конечного автомата можно задать с помощью графа:



Граф построен, исходя из следующих соображений.

Начальное состояние 0: если приходит деталь типа А, то она пропускается и автомат переходит в состояние 1. То есть дуга помечается (‘вход’/’выход’)=(А/пропуск); если приходит деталь типа В, то она снимается и автомат остается в состоянии 0. Т.е. петля помечается (‘вход’/’выход’)=(В/сброс). Аналогично помечаются и остальные дуги графа.

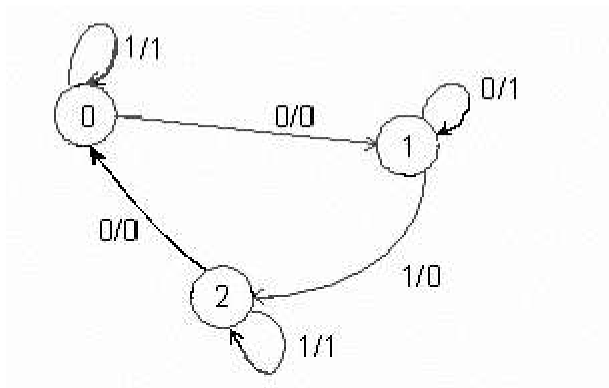
Пронумеруем элементы множеств u, x, a порядковыми числами, начиная с 0. Этим порядковым числам соответствуют двоичные эквиваленты этих чисел.

$u = \{0,1\}$; 0- подходит деталь А, 1 - подходит деталь В.

$x = \{0,1\}$; 0 - пропуск детали, 1 - снятие детали.

$a = \{0,1,2\}$; 0 - исходное состояние (отложена тройка АВА, 1 - отложена деталь А, 2 - отложена пара АВ.

Граф приобретает следующий вид:



Этому графу соответствует следующая таблица выходов и переходов:

Таблица 8.4.4

$u[kT]$	$a_1[kT]$	$a_2[kT]$	$a_1[(k+\ )T]$	$a_2[(k+\ )T]$	$x[kT]$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	-	-	-
1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	-	-	-

Действие автомата при $u=\ ,a_1=a_2=$ и $u=\ ,a_1=a_2=$ не определено, так как такая ситуация невозможна, ввиду того, что автомат не может находиться в состоянии $a_1=a_2=$, т.е. в некотором состоянии 3.

Получим аналитические выражения для функций выходов и переходов путем применения карт Карно.

Карта Карно для $a_1[(k+\ )T]$:

a_1, a_2

u \ a_1, a_2	00	01	11	10
0	0	0	-	0
1	0	1	-	1

Доопределим значение $a_1[(k+\ )T]$ следующим образом: при 011 ставим 0, а при 111 ставим 1:

a_1

	0	0	0	0
u	0	1	1	1

a_2

Откуда $a_1[(k+\ )T]=\ a_2+\ a_1=\ (a_1+\ _2)$.

Карта Карно для $a_2[(k+\ )T]$:

u \ a_1, a_2	00	01	11	10
0	1	1	-	0
1	0	0	-	0

Доопределим значение $a_2(k+\ )$ следующим образом: при 011 и 111 ставим 0:

a_1

	1	1	0	0
u	0	0	0	0

a_2

Откуда $a_2[(k+\ )T]=\ \cdot a_1$

Карта Карно для $x[kT]$:

a_1,a_2

		00	01	11	10
u	0	0	1	-	0
	1	1	0	-	1

Доопределим значение $x[kT]$ следующим образом: при 011 ставим 1, а при 111 ставим 0:

a_1

	0	1	1	0
u	1	0	0	1

a_2

Откуда $x[kT]=\ \overline{a_2}+\ a_2.$

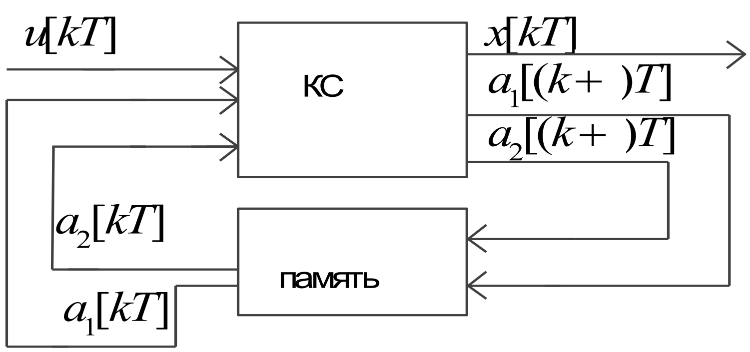
Таким образом, аналитические выражения для функций выходов и переходов имеют вид

$$x[kT]=\ [kT]\overline{a_2}[kT]+\ [kT]a_2[kT];$$
$$a_1[(k+1)T]=\ [kT]a_2[kT]+\ [kT]a_1[kT]=\ (a_1+\ _2);$$
$$a_2[(k+1)T]=\ [kT]\overline{a_1}[kT].$$

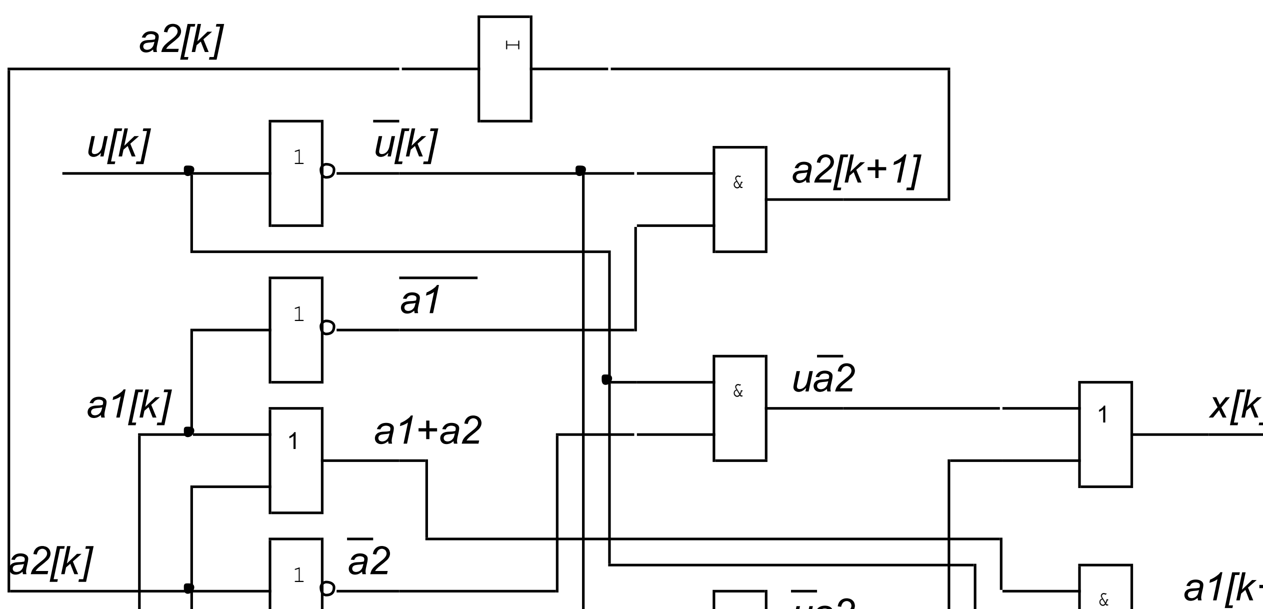
В состав конечного автомата входят:

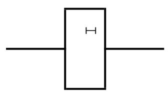
а) комбинационная схема с тремя входами $(u[kT],a_1[kT],a_2[kT])$ и тремя выходами $(x[kT],a_1[(k+\ )T],$ $a_2[(k+\ )T]);$

б) два элемента задержки (память).



Логическая схема конечного автомата имеет вид:



Где  – элемент задержки.