Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Саратовский государственный технический университет
имени Гагарина Ю.А.»

Кафедра «Радиоэлектроника и телекоммуникации»

МОДЕЛИ ЛИНЕЙНЫХ ОДНОМЕРНЫХ И МНОГОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине
«Б.1.2.9 Основы кибернетики»
направления подготовки
«01.03.02 "Прикладная математика и информатика"»
квалификация (степень) «бакалавр»»
Профиль «Математическое моделирование и вычислительная математика»

Одобрено
редакционно-издательским советом
Саратовского государственного
технического университета

Саратов 2015

ВВЕДЕНИЕ

В управляемых системах используют различные формы представления математических моделей непрерывных динамических систем как одномерных, так и многомерных. Это представление моделей в виде передаточных функций и матриц, в виде дифференциальных уравнений, в форме Коши. Рассматриваются способы перехода от одной формы представления модели к другой.

Практические занятия имеют своей целью систематизацию, закрепление, расширение теоретических знаний и получение практических навыков при решении конкретных технических задач: развитие навыков самостоятельной работы с технической литературой в ходе расчета.

Задачи, рассматриваемые в методических указаниях, соответствуют рекомендациям программы изучения дисциплины, призваны способствовать лучшему усвоению теоретического материала, изучаемого в соответствующем разделе.

1. СКАЛЯРНЫЕ ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ОДНОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Основные формы представления математических моделей одномерных систем: дифференциальное уравнение, передаточная функция, форма Коши.

Математическая модель в форме дифференциального уравнения имеет вид:

$$\begin{aligned} &a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}\dot{y}(t) + a_n y(t) = \\ &= b_0 u^{(m)}(t) + b_1 u^{(m-1)}(t) + \ldots + b_{m-1}\dot{u}(t) + b_m u(t) \end{aligned}, \qquad (1)$$

где $y^{(i)}(t), u^{(j)}(t)$ – i-я и j-я производные по времени от $y(t)$ и $u(t)$ соответственно.

Операторная (символическая) форма записи дифференциального уравнения:

$$\begin{aligned} &(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n)y(t) = \\ &= (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_{m-1} p + b_m)u(t) \end{aligned},$$

где $p = \dfrac{d}{dt}$ – оператор дифференцирования.

Математическая модель в форме передаточной функции:

$$W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_{m-1}s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n}, \qquad (2)$$

где $y(s) = L\{y(t)\}$, $u(s) = L\{u(t)\}$, L – оператор Лапласа, $s = c + j\omega$ – комплексная переменная.

Математическая модель в форме Коши:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= AX(t) + Bu(t), \\ y(t) &= CX(t) + Du(t), \end{aligned} \qquad (3)$$

где $X(t)$ – n-мерный вектор состояний; $y(t)$ – выходная переменная; $u(t)$ – входная переменная (управление); A, B, C – матрицы чисел размерами $n \times n$, $n \times 1$, $1 \times n$ соответственно; D – число.

2. ВЕКТОРНО-МАТРИЧНЫЕ ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ОДНОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Формы представления математических моделей многомерных систем: форма Коши, форма «вход-выход», передаточная матрица.

Модель многомерной системы в форме Коши имеет вид:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{4}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \tag{5}$$

где $x(t) \in R^n$ – n-мерный вектор состояний; $y(t) \in R^r$ – r-мерный вектор выходных переменных; $u(t) \in R^m$ – m-мерный вектор входных переменных (управлений); A, B, C, D – матрицы размеров $n \times n,\ n \times m,\ r \times n,\ r \times m$ соответственно.

Векторно-матричное дифференциальное уравнение (4) называется уравнением состояний, а векторно-матричное алгебраическое уравнение (5) – уравнением выходов.

Математическая модель в виде передаточной матрицы.

Передаточная матрица связывает изображение Лапласа вектора выходных переменных $y(s)$ с изображением Лапласа вектора входных переменных $u(s)$ и имеет вид:

$$W(s) = C(Es - A)^{-1} B + D. \tag{6}$$

Уравнение в форме «вход-выход»:

$$T_1(s) y = T_2(s) u, \tag{7}$$

где T_1, T_2 – полиномиальные матрицы.

Пример 1. Для электрической схемы (рис.1) составить математическую модель: а) в виде дифференциального уравнения; б) в виде передаточной функции; в) в виде уравнений в форме Коши.

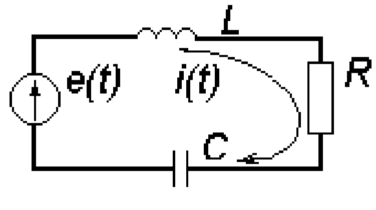

Рис.1

Замечание. В качестве входного (управляющего) воздействия принять $e(t)$, в качестве выходного – $i(t)$.

Решение.

а) Из закона Кирхгофа $e(t)-u_L(t)-u_R(t)-u_C(t)=0$

и выражений $u_R(t)=Ri(t),\quad u_L(t)=L\frac{di(t)}{dt},\quad u_C=\frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt$

получаем математическую модель в виде дифференциального уравнения:

$$L\frac{d^2i(t)}{dt^2}+R\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}i(t)=\frac{de(t)}{dt}. \qquad (8)$$

Операторный вид уравнения (8)

$$(Lp^2+Rp+\frac{1}{C})i(t)=pe(t).$$

б) Математическая модель в виде передаточной функции получается путем применения оператора Лапласа к обеим частям дифференциального уравнения (8) при нулевых начальных значениях функций и их производных:

$$W(s)=\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{i(s)}{e(s)}=\frac{s}{Ls^2+Rs+\frac{1}{C}},$$

где $e(s)=L\{e(t)\},\quad i(s)=L\{i(t)\}$.

в) Введем обозначения:

$$\begin{cases} x_1=L\frac{di}{dt}+Ri-e, \\ x_2=Li. \end{cases} \qquad (9)$$

Продифференцируем (9) по времени:

$$\begin{cases} \dot{x}_1=L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}-\frac{de}{dt}, \\ \dot{x}_2=L\frac{di}{dt}. \end{cases} \qquad (10)$$

Из первого уравнения (10) и выражения (8) следует, что $\dot{x}_1=(-1/C)\cdot i$.

Из второго уравнения (10) и первого уравнения (9) получаем:

$$\dot{x}_2=x_1-Ri+e.$$

Выразим i из второго уравнения (9): $i=\frac{1}{L}x_2, \qquad (11)$

и подставим в выражения для $\dot{x}_1$ и $\dot{x}_2$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{1}{LC} x_2 , \\ \dot{x}_2 = x_1 - \dfrac{R}{L} x_2 + e. \end{cases} \tag{12}$$

Уравнения (11), (12) в векторно-матричной форме имеют вид (3):

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t),$$

$$y(t) = CX(t) + Du(t),$$

где $X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$, $u(t) = e(t)$, $y(t) = i(t)$, а матрицы *A, B, C, D* имеют вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{LC} \\ 1 & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{L} \end{bmatrix}, \quad D = 0 \cdot$$

Пример 2. Для электрической схемы (рис. 2): а) построить математическую модель в форме Коши; б) получить передаточную матрицу, связывающую изображения входных переменных $e_1(s), e_2(s)$ ($e_1(t), e_2(t)$ – напряжения источников) и изображения выходных переменных $v_1(s), v_2(s)$ ($v_1(t), v_2(t)$ – напряжения на сопротивлениях R_1 и R_2).

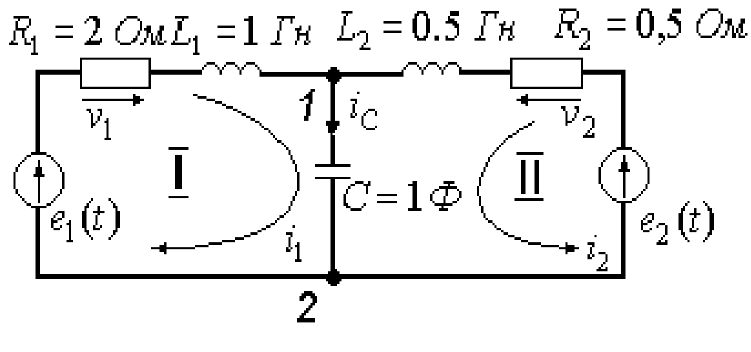

Рис. 2

Решение.

а) По закону Кирхгофа для узла 1 имеем:

$$i_C = i_1 + i_2 \text{ или } C\frac{dU_C}{dt} = i_1 + i_2 . \tag{13}$$

Рассмотрим контуры I и II. По закону Кирхгофа для напряжений получаем:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + U_C = e_1, \tag{14}$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + U_C = e_2. \quad (15)$$

Введем обозначения: $x_1 = i_1, x_2 = i_2, x_3 = U_C$.

Тогда выражения (13), (14), (15) можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R_1}{L_1} x_1 - \frac{1}{L_1} x_3 + \frac{1}{L_1} e_1, \\ \dot{x}_2 = -\frac{R_2}{L_2} x_2 - \frac{1}{L_2} x_3 + \frac{1}{L_2} e_2, \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{C} x_1 + \frac{1}{C} x_2. \end{cases} \quad (16)$$

Уравнения для выходных переменных:

$$v_1 = R_1 i_1 = R_1 x_1, v_2 = R_2 i_2 = R_2 x_2. \quad (17)$$

Объединив уравнения (16), (17), получаем математическую модель электрической схемы в форме Коши (выражения (4), (5)):

где $X = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$,

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & -\frac{R_2}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Подставив числовые значения параметров (рис. 2), получим:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{bmatrix}.$$

б) Так как $D = 0$, то $W(s) = C(Es - A)^{-1} B$.

$$Es - A = \begin{bmatrix} s+2 & 0 & 1 \\ 0 & s+1 & 2 \\ -1 & -1 & s \end{bmatrix},$$

$$det(Es - A) = s(s+1)(s+2) + s + 1 + 2(s+2) = s^3 + 3s^2 + 5s + 5.$$

Тогда

$$(Es-A)^{-1}=\frac{1}{det}\begin{bmatrix} s(s+1)+2 & -1 & -(s+1) \\ -2 & s(s+2)+1 & -2(s+2) \\ s+1 & s+2 & (s+1)(s+2) \end{bmatrix}.$$

Окончательно выражение для математической модели в виде передаточной матрицы будет иметь следующий вид:

$$W(s)=C(Es-A)^{-1}B=\frac{1}{det}\begin{bmatrix} 2s(s+1)+4 & -4 \\ -1 & s(s+2)+1 \end{bmatrix}.$$

Зная передаточную матрицу, можно записать дифференциальные уравнения, связывающие выходные и входные переменные. Из выражения для $W(s)$ следует:

$$\begin{cases} y_1(s)=\dfrac{2s(s+1)+4}{s^3+3s^2+5s+5}u_1(s)-\dfrac{4}{s^3+3s^2+5s+5}u_2(s), \\ y_2(s)=\dfrac{-1}{s^3+3s^2+5s+5}u_1(s)+\dfrac{s(s+1)+1}{s^3+3s^2+5s+5}u_2(s). \end{cases}$$

Переходя к оригиналам, получим:

$$\begin{cases} \dddot{y}_1+3\ddot{y}_1+5\dot{y}_1+5y_1=2\ddot{u}_1+2\dot{u}_1+4u_1-4u_2, \\ \dddot{y}_2+3\ddot{y}_2+5\dot{y}_2+5y_2=-u_1+\ddot{u}_2+\dot{u}_2+u_2. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dddot{v}_1+3\ddot{v}_1+5\dot{v}_1+5v_1=2\ddot{e}_1+2\dot{e}_1+4e_1-4e_2, \\ \dddot{v}_2+3\ddot{v}_2+5\dot{v}_2+5v_2=-e_1+\ddot{e}_2+\dot{e}_2+e_2. \end{cases}$$

Пример 3. Дана математическая модель системы в виде дифференциального уравнения 3-го порядка:

$$a_0\dddot{y}(t)+a_1\ddot{y}(t)+a_2\dot{y}(t)+a_3y(t)=b_0\ddot{u}(t)+b_1\dot{u}(t)+b_2u(t). \quad (18)$$

Получить математическую модель системы в форме Коши двумя способами (в формах Крылова – Люенбергера и Фробениуса).

Решение.

Способ 1. Введем переменные x_1, x_2, x_3 следующим образом:

$$\begin{cases} x_1=a_0\ddot{y}+a_1\dot{y}+a_2y-b_0\dot{u}-b_1u, \\ x_2=a_0\dot{y}+a_1y-b_0u, \\ x_3=a_0y. \end{cases} \quad (19)$$

Продифференцируем систему уравнений (19) по времени:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_0\dddot{y} + a_1\ddot{y} + a_2\dot{y} - b_0\ddot{u} - b_1\dot{u}, \\ \dot{x}_2 = a_0\ddot{y} + a_1\dot{y} - b_0\dot{u}\ , \\ \dot{x}_3 = a_0\dot{y}\ . \end{cases} \tag{20}$$

Сопоставляя первое уравнение (20) с выражением (18), второе уравнение (20) с первым уравнением (19), третье уравнение (20) со вторым уравнением (19), получим:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_3 y + b_2 u, \\ \dot{x}_2 = x_1 - a_2 y + b_1 u, \\ \dot{x}_3 = x_2 - a_1 y + b_0 u. \end{cases} \tag{21}$$

Из третьего уравнения (19) выразим: $y(t) = \frac{1}{a_0} x_3,$ (22)

и подставим в (21):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{a_3}{a_0} x_3 + b_2 u, \\ \dot{x}_2 = x_1 - \frac{a_2}{a_0} x_3 + b_1 u, \\ \dot{x}_3 = x_2 - \frac{a_1}{a_0} x_3 + b_0 u. \end{cases} \tag{23}$$

Введем в (22), (23) обозначения:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{a_3}{a_0} \\ 1 & 0 & -\frac{a_2}{a_0} \\ 0 & 1 & -\frac{a_1}{a_0} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{a_0} \end{bmatrix}, D = 0 \cdot$$

Совокупность уравнений (22), (23) и есть математическая модель системы в форме Коши (3) (форма Крылова–Люенбергера).

Способ 2. Запишем уравнение (18) в операторном виде:

$$(a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3) y(t) = (b_0 p^2 + b_1 p + b_2) u(t). \quad 24)$$

Выражение (24) можно переписать следующим образом:

$$(b_0p^2+b_1p+b_2)^{-1}y=(a_0p^3+a_1p^2+a_2p+a_3)^{-1}u=x_1, \tag{25}$$

откуда
$$y=(b_0p^2+b_1p+b_2)x_1, \tag{26}$$

$$u=(a_0p^3+a_1p^2+a_2p+a_3)x_1. \tag{27}$$

Введем обозначения:
$$x_2=\dot{x}_1,\ x_3=\dot{x}_2=\ddot{x}_1. \tag{28}$$

С учетом (28) соотношение (27) можно переписать в виде:

$$u=a_0\dddot{x}_1+a_1\ddot{x}_1+a_2\dot{x}_1+a_3x_1,$$

или
$$u=a_0\dddot{x}_1+a_1x_3+a_2x_2+a_3x_1. \tag{29}$$

Так как $\dot{x}_3=\dddot{x}_1$, то из (29) следует, что

$$\dot{x}_3=-\frac{a_1}{a_0}x_3-\frac{a_2}{a_0}x_2-\frac{a_3}{a_0}x_1+\frac{1}{a_0}u. \tag{30}$$

Окончательно получим, объединив (26), (28), (30):

$$\begin{cases} \dot{x}_1=x_2\ , \\ \dot{x}_2=x_3\ , \\ \dot{x}_3=-\dfrac{a_3}{a_0}x_1-\dfrac{a_2}{a_0}x_2-\dfrac{a_1}{a_0}x_3+\dfrac{1}{a_0}u\ , \\ y=b_0\ddot{x}_1+b_1\dot{x}_1+b_2x_1=b_2x_1+b_1x_2+b_0x_3. \end{cases} \tag{31}$$

Вводя обозначения

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{a_3}{a_0} & -\dfrac{a_2}{a_0} & -\dfrac{a_1}{a_0} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{a_0} \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} b_2 & b_1 & b_0 \end{bmatrix}, D=0$$

получаем математическую модель системы в форме Коши (3) (форма Фробениуса) .

Замечание. Приведенные алгоритмы перехода к форме Коши можно распространить на модели систем в виде дифференциальных уравнений произвольного порядка.

Пример 4. Задана математическая модель системы в виде дифференциального уравнения без производных в правой части:

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-2}\ddot{y}+a_{n-1}\dot{y}+a_ny=bu. \tag{32}$$

Получить математическую модель системы в форме Коши.

Решение.

Введём переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ следующим образом:

$$x_1 = y,\ x_2 = \dot{y},\ x_3 = \ddot{y},\ ...,\ x_n = y^{(n-1)}. \tag{33}$$

Из выражений (32), (33) следует:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2\ , \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3\ , \\ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ . \\ \dot{x}_n = y^{(n)} = -\dfrac{a_n}{a_0}y - \dfrac{a_{n-1}}{a_0}\dot{y} - ... - \dfrac{a_1}{a_0}y^{(n-1)} + \dfrac{b}{a_0}u. \end{cases} \tag{34}$$

С учетом (33) выражения (34) примут вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2\ , \\ \dot{x}_2 = x_3\ , \\ \dot{x}_3 = x_4\ , \\ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ . \\ \dot{x}_n = -\dfrac{a_n}{a_0}x_1 - \dfrac{a_{n-1}}{a_0}x_2 - ... - \dfrac{a_1}{a_0}x_n + \dfrac{b}{a_0}u\ . \end{cases} \tag{35}$$

Добавив к (35) уравнение выхода $\qquad y = x_1, \qquad\qquad$ (36)

получим математическую модель в форме Коши, то есть в виде (3), где обозначено

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\dfrac{a_n}{a_0} & -\dfrac{a_{n-1}}{a_0} & \dots & \dots & -\dfrac{a_1}{a_0} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \dfrac{b}{a_0} \end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, D=0.$$

Пример 5. Для электрической схемы (рис. 3):

а) составить математическую модель в форме Коши;

б) построить выражение для математической модели в виде передаточной матрицы, связывающей изображения входных переменных $I(s), e(s)$ и выходных переменных $i_G, u_R(s)$;

в) определить матрицу $W(t)$, элементами которой являются импульсные переходные характеристики $w_{ij}(t)$ для i-го выхода относительно j-го входа (при нулевых состояниях на всех остальных входах).

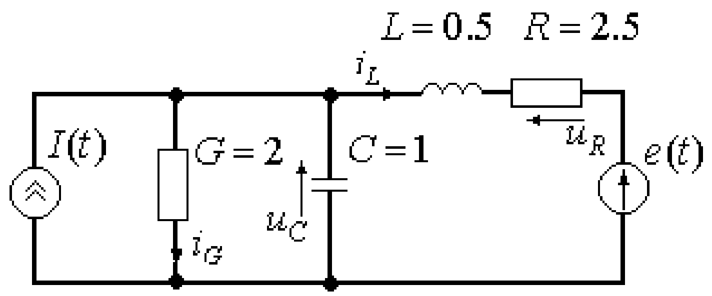

Рис. 3

Решение.

а) По аналогии с примером 2 уравнения электрической схемы можно получить в виде:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{du_C(t)}{dt} \\ \dfrac{di_L(t)}{dt} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\dfrac{G}{C} & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} u_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \dfrac{1}{C} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{L} \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} I(t) \\ e(t) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} i_G(t) \\ u_R(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} u_C(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}.$$

Эти уравнения записаны в форме Коши (4), (5).

При $C=1$ Ф, $L=0{,}5$ Гн, $G=2$ [1/Ом], $R=2{,}5$ Ом соответствующие матрицы получают следующие численные значения:

$$A=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 2 & -5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2{,}5\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

б) Аналогично примеру 2 находим:

$$(Es-A)^{-1}=\begin{bmatrix}s+2 & 1\\ -2 & s+5\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{det(Es-A)}\begin{bmatrix}s+5 & -1\\ 2 & s+2\end{bmatrix},$$

$$det(Es-A)=s^2+7s+12=(s+3)(s+4).$$

Тогда выражение для математической модели в виде передаточной матрицы принимает вид:

$$W(s)=C(Es-A)^{-1}B=\frac{1}{det(Es-A)}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2.5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}s+5 & -1\\ 2 & s+2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix},$$

или $W(s)=\dfrac{1}{(s+3)(s+4)}\begin{bmatrix}2s+10 & 4\\ 5 & -5s+10\end{bmatrix}.$

Таким образом,

$$\begin{bmatrix}i_G(s)\\ u_R(s)\end{bmatrix}=\frac{1}{(s+3)(s+4)}\begin{bmatrix}2s+10 & 4\\ 5 & -5s-10\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}I(s)\\ e(s)\end{bmatrix}.$$

в) Так как изображение i-й выходной переменной

$$y_i(s)=\sum_j^m w_{ij}(s)u_j(s), i=\overline{1,r},$$

то элементы $w_{ij}(s)$ матрицы $W(s)$ можно рассматривать как скалярные передаточные функции от j-го входа к i-му выходу, причем

$$w_{ij}(s)=\frac{y_i(s)}{u_j(s)} \text{ при } u_K(s)=0, k\neq j.$$

Зная $w_{ij}(s)$, можно получить импульсные переходные характеристики $w_{ij}(t)$. Переходя в выражении $W(s)$ к оригиналам, получим:

$$W(t)=\begin{bmatrix}4e^{-3t}-2e^{-4t} & 4e^{-3t}-4e^{-4t}\\ 5e^{-3t}-5e^{-4t} & 5e^{-3t}-10e^{-4t}\end{bmatrix}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЙ

Задача 1. Задана математическая модель системы в виде дифференциального уравнения (табл. 1). Требуется:

а) записать математическую модель системы в форме Коши двумя способами (в формах Фробениуса и Крылова–Люенбергера);

б) записать математическую модель системы в виде передаточной функции;

в) с помощью функций tf и ss системы МАТЛАБ получить модель в переменных состояния (форма Коши).

Таблица 1

Номер варианта	Дифференциальное уравнение
1	$\dddot{y} - \ddot{y} + 2\dot{y} - 3y = 2\dddot{u} - 4\ddot{u} + 3\dot{u} - 5u$
2	$2\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y} - 3y = 2\dddot{u} - 4\ddot{u} + 3\dot{u} - 5u$
3	$\dddot{y} - \ddot{y} + 2\dot{y} - 3y = 2\dddot{u} - 4\ddot{u} + 3\dot{u} - 5u$
4	$-2\dddot{y} + 5\ddot{y} - 4\dot{y} + y = 3\dddot{u} - 2\ddot{u} - \dot{u} + 4u$
5	$3\dddot{y} - 2\ddot{y} + 6\dot{y} - y = -2\dddot{u} + 3\ddot{u} - 4\dot{u} + u$
6	$-\dddot{y} + 4\ddot{y} - 3\dot{y} + 5y = -3\dddot{u} + 2\ddot{u} - 4\dot{u} + 2u$
7	$4\dddot{y} - 2\ddot{y} + 3\dot{y} - 4y = 2\dddot{u} - 3\ddot{u} + \dot{u} - 2u$
8	$-4\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y} + y = -\dddot{u} + 4\ddot{u} - 3\dot{u} + 3u$
9	$5\dddot{y} + 4\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = -4\dddot{u} + 3\ddot{u} - 2\dot{u} + u$
10	$6\dddot{y} - \ddot{y} + 3\dot{y} - 4y = -3\dddot{u} + 4\ddot{u} - 2\dot{u} + 3u$
11	$\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y} - 4y = \dddot{u} - 2\ddot{u} - 2\dot{u} + 4u$
12	$2\dddot{y} - 3\ddot{y} - \dot{y} + 5y = -\dddot{u} + \ddot{u} - 3\dot{u} + 5u$
13	$-3\dddot{y} - 3\ddot{y} + 6\dot{y} - 4y = -3\dddot{u} + 5\ddot{u} - 6\dot{u} + 4u$
14	$-2\dddot{y} - 2\ddot{y} + 3\dot{y} - 4y = 2\dddot{u} - 3\ddot{u} + 4\dot{u} + u$
15	$-\dddot{y} + 3\ddot{y} - 5\dot{y} - 4y = 2\dddot{u} + 5\ddot{u} + 36\dot{u} + 4u$
16	$5\dddot{y} - 4\ddot{y} + 5\dot{y} - 2y = -\dddot{u} + 3\ddot{u} - 2\dot{u} + 4u$
17	$2\dddot{y} - \ddot{y} + 5\dot{y} - 4y = 3\dddot{u} - \ddot{u} - 2\dot{u} + u$
18	$\dddot{y} - 4\ddot{y} - 2\dot{y} + 3y = -2\dddot{u} + 3\ddot{u} - 4\dot{u} + u$
19	$-3\dddot{y} - 3\ddot{y} + 6\dot{y} - 4y = -3\dddot{u} + 5\ddot{u} - 6\dot{u} + 4u$
20	$-\dddot{y} + 3\ddot{y} - 4\dot{y} - 2y = 4\dddot{u} - 2\ddot{u} + 4\dot{u} + 3u$

21	$-4\dddot{y} + 2\ddot{y} - 3\dot{y} - 5y = -2\dddot{u} + 7\ddot{u} - \dot{u} + 4u$
22	$\dddot{y} - 3\ddot{y} - 5\dot{y} + 2y = \dddot{u} + 2\ddot{u} - 2\dot{u} + 6u$
23	$-2\dddot{y} - 3\ddot{y} + \dot{y} - 3y = \dddot{u} - 3\ddot{u} + \dot{u} - 5u$
24	$-\dddot{y} - 4\ddot{y} - 3\dot{y} - 3y = 5\dddot{u} + 4\ddot{u} - 2\dot{u} + 5u$
25	$4\dddot{y} - 2\ddot{y} + \dot{y} - 3y = 5\dddot{u} - 3\ddot{u} + \dot{u} - 5u$

Задача 2. Выполнить задания примера 2 для числовых данных, заданных в табл. 2.

Таблица 2

Номер варианта	Значения параметров				
	R_1, Ом	R_2, Ом	L_1, Гн	L_2, Гн	C, Ф
1	1	2	1	1	0,2
2	1	1	0,5	0,5	0,2
3	2	1	0,5	0,5	0,5
4	1	1	0,5	1	0,5
5	1	2	1	0,5	0,5
6	1	2	0,5	0,4	0,5
7	2	1	0,4	0,5	0,2
8	0,5	1	0,5	0,5	0,25
9	1	0,5	1	0,5	0,25
10	3	2	3	2	0,2
11	2	3	2	3	0,5
12	4	3	2	1,5	1
13	3	4	1,5	2	0,4
14	5	4	5	4	0,5
15	4	5	4	5	0,1
16	6	2	2	2	0,02
17	6	1	1	2	0,02
18	8	4	4	1	0,04
19	8	6	2	2	0,04
20	10	8	5	2	0,05
21	10	10	2	4	0,05
22	12	8	6	4	0,1
23	12	8	2	4	0,1
24	14	4	7	2	0,2
25	14	2	2	1	0,5

Задача 3. Для числовых данных примера 2 (табл. 2) с помощью функций ss и tf системы МАТЛАБ получить модель в виде передаточной функции.

Задача 4. Выполнить задания примера 5 для числовых данных, заданных в табл. 3.

. Таблица 3

Номер варианта	Значения параметров			
	R, Ом	G, 1/Ом	L, Гн	C, Ф
1	1	2	1	0,2
2	1	1	0,5	0,2
3	2	1	0,5	0,5
4	1	1	0,5	0,5
5	1	2	1	0,5
6	1	2	0,5	0,5
7	2	1	0,4	0,2
8	0,5	1	0,5	0,25
9	1	0,5	1	0,25
10	3	2	3	0,2
11	2	3	2	0,5
12	4	3	2	1
13	3	4	1,5	0,4
14	5	4	5	0,5
15	4	5	4	0,1
16	8	6	4	0,2
17	10	6	5	0,2
18	12	6	2	0,3
19	12	6	2	0,3
20	8	5	2	0,2
21	14	5	2	0,5
22	14	4	2	0,1
23	16	4	4	0,2
24	16	2	4	0,1
25	18	2	2	0,5

Задача 5. Задана математическая модель системы в виде передаточной функции, где $u(t)$ – входная переменная, $y(t)$ – выходная переменная:

а) $W(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{8(s+5)}{s^3+12s^2+44s+48}$;

б) $W(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{s^2+7s+2}{s^3+9s^2+26s+24}$;

в) $W(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{8}{s^3+7s^2+14s+8}$;

г) $W(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{3s^2+10s+1}{s^2+8s+5}$;

д) $W(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{s+14}{s^3+3s^2+3s+1}$.

Записать модель системы в виде дифференциального уравнения.

Получить математическую модель системы в виде формы Коши:

1) используя результаты примера 3 (формы Фробениуса и Крылова–Люенбергера);

2) при помощи функций tf и ss системы МАТЛАБ;

Сравнить результаты п.п. 1, 2 и прокомментировать их.

Задача 6. Задана математическая модель системы в виде уравнений состояний и выходов (форма Коши). Получить математическую модель системы в виде передаточной функции при помощи команд tf и ss системы МАТЛАБ:

а) $\dot{X}(t)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 10 \end{bmatrix}X(t)+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t)\ ,\ y(t)=[\,20, 30, 10\,]\,X(t)$;

б) $\dot{X}(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -5 \end{bmatrix}X(t)+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(t),\ y(t)=[\,1,0,0\,]\,X(t).$

Задача 7. С помощью функций ss и tf системы МАТЛАБ определить передаточные функции для систем, модели которых в переменных состояния представлены следующими матрицами:

а) $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix};$

б) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & 10 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$

в) $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}.$

Задача 8. Рассмотрите две математические модели системы в форме Коши:

а) $\dot{\mathrm{X}}_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -5 & -8 \end{bmatrix}\mathrm{X}_1+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}\mathrm{u},\ y=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}X_1$

и

б) $\dot{X}_2=\begin{bmatrix} 0{,}5000 & 0{,}5000 & 0{,}7071 \\ -0{,}5000 & -0{,}5000 & 0{,}7071 \\ -6{,}3640 & -0{,}7071 & -8{,}0000 \end{bmatrix}X_2+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}u,\ y=\begin{bmatrix} 0{,}7071 & -0{,}7071 & 0 \end{bmatrix}X_2.$

1) С помощью функций tf и ss системы МАТЛАБ определить математическую модель системы в форме передаточной функции $y(s)/u(s)$ для системы а).

2) С помощью функций tf и ss системы МАТЛАБ определить математическую модель системы в форме передаточной функции $y(s)/u(s)$ для системы б).

3) Для передаточных функций систем, полученных в п.п. 1, 2 с помощью функций tf и ss системы МАТЛАБ определить математические модели систем в форме Коши.

4) Сравнить результаты п.п. 1, 2, 3 и прокомментировать их.

ЛИТЕРАТУРА

ОСНОВНАЯ

1. Дерусоо Г. Пространство состояний в теории управления /

Г. Дерусоо, Р. Рой, Ч. Клоуз. – М.: Наука, 1970.
2. Директор Р. Введение в теорию систем / Р. Директор, С. Рорер. – М.: Высшая школа, 1971.
3. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера / В.П. Сигорский. – Киев: Техника, 1977.
4. Подчукаев В.А. Теория автоматического управления / В.А. Подчукаев. – М.: Физматлит, 2005.
5. Теория автоматического управления: в 2 ч. / под ред. А.А. Воронова. – М.: Высшая школа, 1986.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

1. Бесекерский В.А. Теория систем автоматического регулирования / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. – М.: Наука, 1975.
2. Дорф Р. Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.
3. Математические основы теории автоматического регулирования / под ред. В.К. Чемоданова. – М.: Высшая школа, 1977.
4. Теория автоматического управления: в 2 ч. / под ред. А.В. Нетушила. – М.: Высшая школа, 1976, 1983.
5. Ту Ю. Современная теория управления / Ю. Ту. – М.: Машиностроение, 1971.

МОДЕЛИ ЛИНЕЙНЫХ
ОДНОМЕРНЫХ И МНОГОМЕРНЫХ
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине
«Б.1.2.9 Основы кибернетики»
направления подготовки
«01.03.02 "Прикладная математика и информатика"»
квалификация (степень) «бакалавр»»
Профиль «Математическое моделирование и вычислительная математика»

Составил: Степанов Михаил Федорович

Рецензент Тимофеев Ю.К.

Редактор Шевченко З.И.

Подписано в печать 01.10.2015 Формат 60x84 1/16
Бум. тип. Усл. печ.л. 1,16 (1,25) Уч.-изд.л. 1,1
Тираж 100 экз. Заказ Бесплатно
Саратовский государственный технический университет
410054, Саратов, Политехническая ул. 77
Отпечатано в РИЦ СГТУ. 410054, Саратов, Политехническая ул. 77