Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Саратовский государственный технический университет
имени Гагарина Ю.А.»

Кафедра «Радиоэлектроника и телекоммуникации»

# СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине
«Б.1.2.9 Основы кибернетики»
направления подготовки
«01.03.02 "Прикладная математика и информатика"»
квалификация (степень) «бакалавр»»
Профиль «Математическое моделирование и вычислительная математика»

Одобрено
редакционно-издательским советом
Саратовского государственного
технического университета

Саратов 2015

## ВВЕДЕНИЕ

В исследовании многомерных управляемых систем широкое использование получил метод пространства состояний. Пространство состояний - это метрическое пространство, каждый элемент которого полностью определяет состояние рассматриваемой системы (процесса).

Состояние динамической системы описывается совокупностью физических переменных, характеризующих поведение системы в будущем, при условии, если известно состояние в исходный момент времени и известно приложенное к системе воздействие.

Практические занятия имеют своей целью систематизацию, закрепление и расширение теоретических знаний, получение практических навыков при решении конкретных технических задач; развитие навыков самостоятельной работы с технической литературой в ходе расчета.

Задачи, рассматриваемые в методических указаниях, соответствуют рекомендациям программы изучения дисциплины, призваны способствовать лучшему усвоению теоретического материала, изучаемого в соответствующем разделе.

В начале рассматриваются решенные задачи, а затем приводятся задачи для самостоятельной работы.

После 2 мировой войны наряду с задачами оптимального управления в технике возникли задачи об оптимальном управлении в экономике, управлении войсками и так далее (задачи об управлении запасами, ресурсами, составление расписаний, организация тыла) они не допускали эффективного численного решения на основе существующих методов. Это привлекло математиков к этим задачам. При этом обнаружилось, что процесс решения многих из них может быть представлен как некоторый многоплановый процесс принятия решений. Эта концепция получила название метода динамического программирования, что означает принятие решений во времени. Метод динамического программирования был разработан коллективом американских ученых во главе с Р. Беллманом. Основу метода составляет принцип оптимальности.

# 1. СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРОВ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

## Функциональное уравнение метода динамического программирования

Синтез регуляторов на основе метода динамического программирования основан на функциональном уравнении метода динамического программирования, являющимся следствием принципа оптимальности Р.Беллмана.

Рассмотрим задачу об оптимальном стабилизирующем управлении.

Пусть задан объект управления, описываемый уравнениями

$$\dot{X} = f(X,U,t), X \in R^n, Y \in R^m. \tag{1}$$

Требуется найти закон управления

$$U = r(X,t), \tag{2}$$

чтобы на движениях системы (1), (2) возбуждаемых произвольными начальными отклонениями, минимизировался функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F_0(X,U,t)dt, \tag{3}$$

Функциональное уравнение метода динамического программирования Р.Беллмана имеет вид

$$-\frac{\partial s(X,t)}{\partial t} = \min_{u \in U}\left\{F_0(X,U,t) + \frac{\partial s(X,t)}{\partial X}F(X,U,t)\right\}, \tag{4}$$

где через $s$ обозначено значение функционала на оптимальных траекториях.

Напомним, что, по определению, производная от скалярной функции по векторному аргументу есть вектор-строка

$$\frac{\partial s}{\partial X} = \left(\frac{\partial s}{\partial x_1}, \frac{\partial s}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial s}{\partial x_n}\right).$$

Уравнение Беллмана (4) представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных относительно скалярной функции $s(X,t)$, которая называется функцией Беллмана. Но это уравнение не является линейным из-за наличия в выражении (4) справа операции взятия минимума.

*Замечание 1.* Если ограничения на управления отсутствуют или минимум в правой части достигается во внутренней точке множества $U$, то уравнение Беллмана можно представить в виде

$$-\frac{\partial s(X,t)}{\partial t} = F_0(X,U,t) + \frac{\partial s(X,t)}{\partial X}F(X,U,t), \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial U}\left\{F_0(X,U,t) + \frac{\partial s(X,t)}{\partial X}F(X,U,t)\right\} = 0. \tag{6}$$

Уравнение (6) выражает необходимое условие минимума правой части (4) и заменяет опущенную в (5) операцию минимизации по управлению.

При этом уравнения (2.5) и (2.6) нужно решать при краевых условиях

$$s(X(t_1), t_1) = 0. \tag{7}$$

*Замечание 2*. В общем случае решение уравнения Беллмана – очень сложная задача. Однако для линейно-квадратичной задачи оптимизации (линейный объект, квадратичный функционал) уравнение Беллмана допускает аналитическое решение.

## Алгоритм нахождения оптимального управления методом динамического программирования

1. Из уравнения (6) определяется управление как функция от $s$, то есть $u = u(s)$.

2. $u(s)$ подставляется в уравнение (5), которое решается затем при краевом условии $s(X(t_1), t_1) = 0$ и находится функция Беллмана.

3. Найденная в пункте 2 функция Беллмана подставляется в выражение $u = u(s)$ и находится оптимальное управление как функция переменной $x$, то есть $u(x)$. Таким образом, получается управление в виде обратной связи.

## Методика решения задачи оптимального управления методом динамического программирования

Изложение методики осуществим на примере решения задачи.

Рассмотрим одномерный случай.

Объект управления описывается уравнением

$$\dot{x} = ax + bu,$$

где $x \in R^1$ - переменная состояния, $u \in R^1$ - управление, a, b, q– числа.

Функционал имеет вид

$$J = \int_0^\infty (qx^2 + u^2)dt$$

*Задача*: Решить задачу оптимального управления.

Уравнения (4), (6) метода динамического программирования запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial s}{\partial t} &= qx^2 + u^2 + \frac{\partial s}{\partial x}(ax + bu), \\ 2u + \frac{\partial s}{\partial x}b &= 0 \to u = -\frac{1}{2}\frac{\partial s}{\partial x}b. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Краевое условие (7)

$$s(x(t_1)) = 0, t_1 \to \infty.$$

Условие $2u + \frac{\partial s}{\partial x} b = 0$ выражает необходимое условие минимума правой части первого соотношения (8) (что и должно быть в теории).

Проверим, что при этом управлении действительно будет минимум правой части.

Действительно

$$\frac{\partial^2 \left[ qx^2 + u^2 + \frac{\partial s}{\partial x}(ax + bu) \right]}{\partial u^2} = 2 > 0.$$

(Вторая производная больше 0 следовательно в этой точке достигается минимум функции).

Исключим $u$ из первого уравнения (8), учитывая, что $2u + \frac{\partial s}{\partial x} b = 0$,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial s}{\partial t} &= qx^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial s}{\partial x} b\right)^2 + \frac{\partial s}{\partial x} ax - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 b^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{\partial s}{\partial t} &= \frac{\partial s}{\partial x} ax + qx^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial s}{\partial x} b\right)^2 \end{aligned} . \quad (9)$$

Решение уравнения (9) при краевом условии будем искать в виде

$$s = px^2, p = const.$$

Подставив это в выражение (9), получим

$$\frac{\partial s}{\partial t} = 0, \frac{\partial s}{\partial x} = 2px,$$

откуда

$$0 = 2pax^2 - \frac{1}{4}(2pxb)^2 + qx^2 \Rightarrow 2pax^2 - p^2b^2x^2 + qx^2 = 0.$$

Отсюда следует алгебраическое уравнение для определения неизвестного коэффициента $p$

$$-b^2p^2 + 2ap + q = 0 \rightarrow b^2p^2 - 2ap - q = 0,$$

$$p_{1,2} = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 + 4qb^2}}{2b^2} = \frac{a}{b^2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{b^4} + \frac{q}{b^2}},$$

$$p_1 = \frac{a}{b^2} + \sqrt{\frac{a^2}{b^4} + \frac{q}{b^2}}, p_2 = \frac{a}{b^2} - \sqrt{\frac{a^2}{b^4} + \frac{q}{b^2}}.$$

Из этих решений выбираем первое из условия положительности функции $s$, что обеспечивает асимптотическую устойчивость, а следовательно и выполнение краевого условия $s(x(\infty)) = 0$.

Обоснуем это. Из второго уравнения (8) следует, что

$$u = -\frac{1}{2}(2px)b \rightarrow u = -pbx.$$

Подставим $u$ в уравнение объекта и найдем $x(t)$

$$\dot{x} = ax + b(-pb)x \rightarrow \dot{x} = (a - pb^2)x \rightarrow x(t) = e^{(a-pb^2)t}x(t_0).$$

Для выполнения краевого условия $s(x(\infty)) = 0$, необходимо чтобы

$$a - pb^2 < 0.$$

Из этого условия выберем $p_1$ или $p_2$.

Таким образом должно быть $a < pb^2$.

Проанализируем выражения для $p_1$ и $p_2$.

$$\left.\begin{aligned} p_1 b^2 &= a + \sqrt{a^2 + q}, \\ p_2 b^2 &= a - \sqrt{a^2 + q}. \end{aligned}\right\}$$

По условию

$$q > 0 \rightarrow a^2 + q > a^2 \rightarrow \left|\sqrt{a^2 + qb^2}\right| > p_1 b^2 > a.$$

Поэтому выбираем $p_1$.

Окончательно

$$u(t) = -p_1 b x(t).$$

Подставим полученное управление в уравнение объекта.

Тогда решение можно записать в виде

$$x(t) = e^{(a - p_1 b^2)t}x(t_0),$$

где

$$a - p_1 b^2 = a - a - \sqrt{a^2 + qb^2} = -\sqrt{a^2 + qb^2}.$$

Поэтому

$$x(t) = e^{-\sqrt{a^2 + qb^2}}x(t_0)$$

Графики изменения $x(t)$ при различных $q$ приведены на рисунке.

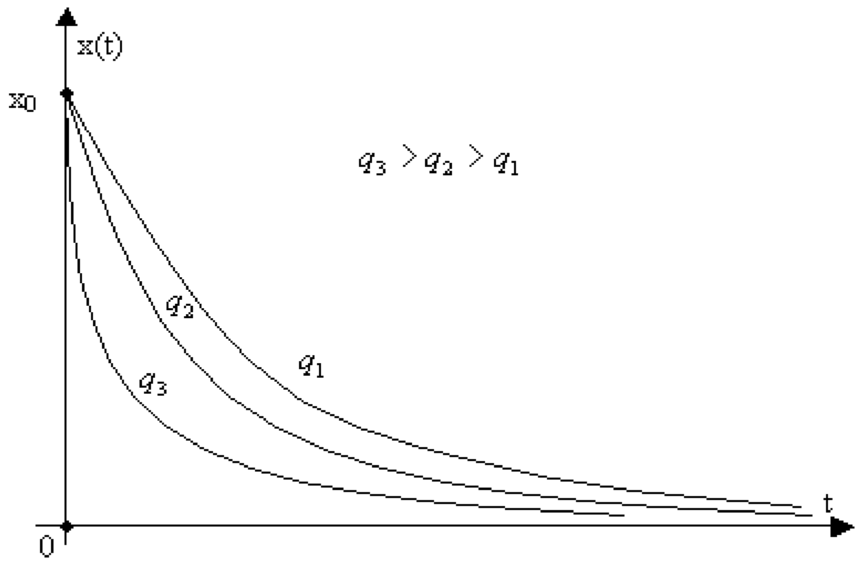


Рисунок 1.

В зависимости от величины $q$ меняется $\sqrt{a^2 + q}$, при увеличении $q$ значение $x(t)$ убывает быстрее, а при уменьшении $q$ экспонента убывает медленнее. Таким образом, величина коэффициента $q$ функционала влияет на время “затухания” переходного процесса. То есть выбор параметра функционала оптимизации влияет на скорость перехода к невозмущенному режиму (режиму оптимального программного управления).

При увеличении величины $\boldsymbol{q}$ увеличивается величина $\boldsymbol{p}$ и, следовательно, увеличивается коэффициент усиления. Таким образом, увеличение $k_{OC} = -p_1 b$ уменьшает ошибку.

## 2. ЗАДАНИЕ

1. Синтезировать по методике п.1 закон оптимального управления двигателем постоянного тока при минимизации энергии потерь в соответствии с индивидуальным вариантом (п. 3 и таблица 1).

2. Выполнить анализ системы управления в пространстве состояний.

3. Построить графики переходных процессов по переменным состояния и по управлению с использованием пакета Matlab.

4. Оформить отчет.

# 3. ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задача построения закона управления двигателем постоянного тока методом динамического программирования.

Электрический привод с двигателем постоянного тока независимого возбуждения (рис. 2) нагружен моментом вязкого трения $M_H = k_1\Omega$ большой величины и работает в режиме, при котором падение напряжения $u_1 = i(r_\partial + r_Я)$ на сопротивлении $r = r_\partial + r_Я$ значительно больше обратной электродвижущей силы $e = c_e\Omega$.

Определить закон управления электродвигателем, при котором суммарная энергия потерь, затрачиваемых на преодоление момента вязкого трения и на нагрев, будет минимальной. Влиянием индуктивности в цепи якоря пренебречь.

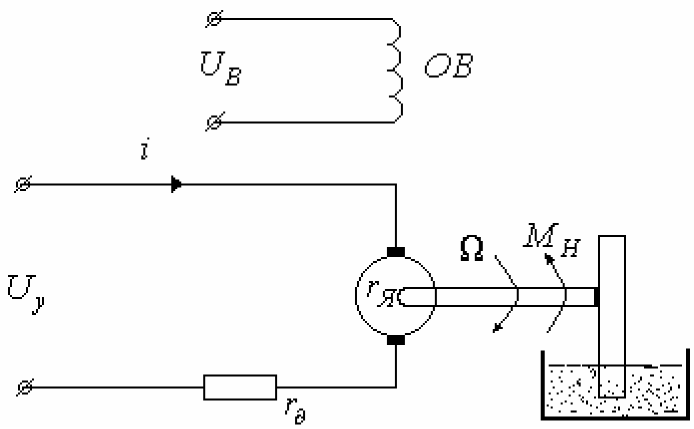


Рисунок 2. Схема электрического привода с двигателем постоянного тока, нагруженного моментом вязкого трения

Момент инерции якоря с объектом $G = 1{,}96 \cdot 10^{-5}\ H \cdot м \cdot с^2$; коэффициенты пропорциональности по ЭДС $c_e = 0.096\ B \cdot c$ и по моменту $c_M = 2{,}94 \cdot 10^{-3}\ H \cdot м \cdot A^{-1}$; $k_1 = 0{,}981 \cdot 10^{-3}\ H \cdot м \cdot c$; $r_\partial + r_Я = 5\ Ом$.

Уравнение момента двигателя имеет вид

$$G\frac{d\Omega}{dt} + k_1\Omega = c_M i. \qquad (10)$$

По условию задачи индуктивность цепи якоря мала. Поэтому в соответствии с законом Кирхгофа

$$ir + c_e\Omega = u_y, \qquad (11)$$

откуда следует

$$i = \frac{u_y}{r} - \frac{c_e}{r}\Omega.$$

Подставляя последнее выражение в (10), найдём

$$G\frac{d\Omega}{dt} = \frac{c_M}{r}u_y - \left(\frac{c_e c_M}{r} + k_1\right)\Omega.$$

Поскольку $\frac{c_e c_M}{r} << k_1$, пренебрегаем первым слагаемым в скобках, поэтому приближённо уравнение динамики примет вид

$$G\frac{d\Omega}{dt} = -k_1\Omega + \frac{c_M}{r}u_y .$$

Подставив численные значения и произведя упрощения, получим

$$\frac{d\Omega}{dt} = a\Omega + bu_y , \tag{12}$$

где $a = -50\ c^{-1}$, $b = 30\ B^{-1} \cdot c^{-2}$.

По условиям задачи двигатель работает в режиме, при котором $c_e\Omega << ir$ . Следовательно, приближённо

$$i \approx \frac{u_y}{r} . \tag{13}$$

Мощность электрических потерь вычисляется по формуле

$$P_Э = iu_y = \frac{u_y^2}{r} . \tag{14}$$

Мощность потерь на вязкое трение составляет величину

$$P_M = M_H\Omega = k_1\Omega^2 .$$

Таким образом, оптимизируемый функционал, представляющий суммарную энергию потерь, имеет вид

$$J = \int_0^\infty \left( k_1\Omega^2 + \frac{1}{r}u_y^2 \right) dt . \tag{15}$$

С учётом числовых значений получим

$$J = \int_0^\infty ( q\Omega^2 + mu_y^2 ) dt , \tag{16}$$

где $q = 0{,}981 \cdot 10^{-3}\ Дж \cdot c$, $m = 0{,}2\ Bm \cdot B^{-2}$.

Таким образом задача синтеза закона управления сводится к следующей задаче оптимизации

$$\begin{gathered} \dot{\Omega} = a\Omega + bu \\ J = \int_0^\infty \left( q\Omega^2 + mu^2 \right) dt \to min \end{gathered} \tag{17}$$

Таблица 1. Численные значения параметров модели объекта управления

| № варианта | $G$ $[Н \cdot м \cdot с^2]$ | $c_e$ $[В \cdot с]$ | $c_М$ $[Н \cdot м \cdot А^{-1}]$ | $k_1$ $[Н \cdot м \cdot с]$ | $r_д$ [Ом] | $r_Я$ [Ом] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $1{,}99 \cdot 10^{-5}$ | 0,099 | $2{,}99 \cdot 10^{-3}$ | $0{,}99 \cdot 10^{-3}$ | 3 | 3 |
| 2 | $2{,}10 \cdot 10^{-5}$ | 0,110 | $3{,}1 \cdot 10^{-3}$ | $1{,}10 \cdot 10^{-3}$ | 3,1 | 3,2 |
| 3 | $2{,}20 \cdot 10^{-5}$ | 0,120 | $3{,}2 \cdot 10^{-3}$ | $1{,}20 \cdot 10^{-3}$ | 2,9 | 3,3 |
| 4 | $2{,}30 \cdot 10^{-5}$ | 0,130 | $3{,}3 \cdot 10^{-3}$ | $1{,}30 \cdot 10^{-3}$ | 2,8 | 3,2 |
| 5 | $2{,}40 \cdot 10^{-5}$ | 0,140 | $3{,}4 \cdot 10^{-3}$ | $1{,}40 \cdot 10^{-3}$ | 2,9 | 3,1 |
| 6 | $2{,}50 \cdot 10^{-5}$ | 0,150 | $3{,}5 \cdot 10^{-3}$ | $1{,}50 \cdot 10^{-3}$ | 2,7 | 3,0 |
| 7 | $2{,}60 \cdot 10^{-5}$ | 0,160 | $3{,}6 \cdot 10^{-3}$ | $1{,}60 \cdot 10^{-3}$ | 2,8 | 2,9 |
| 8 | $2{,}70 \cdot 10^{-5}$ | 0,170 | $3{,}7 \cdot 10^{-3}$ | $1{,}70 \cdot 10^{-3}$ | 2,7 | 2,8 |
| 9 | $2{,}80 \cdot 10^{-5}$ | 0,180 | $3{,}8 \cdot 10^{-3}$ | $1{,}80 \cdot 10^{-3}$ | 2,8 | 2,7 |
| 10 | $2{,}90 \cdot 10^{-5}$ | 0,190 | $3{,}9 \cdot 10^{-3}$ | $1{,}90 \cdot 10^{-3}$ | 2,7 | 2,9 |
| 11 | $2{,}90 \cdot 10^{-5}$ | 0,190 | $3{,}9 \cdot 10^{-3}$ | $1{,}90 \cdot 10^{-3}$ | 2,7 | 2,6 |
| 12 | $3{,}00 \cdot 10^{-5}$ | 0,200 | $4{,}0 \cdot 10^{-3}$ | $2{,}00 \cdot 10^{-3}$ | 2,7 | 2,6 |
| 13 | $3{,}10 \cdot 10^{-5}$ | 0,210 | $4{,}1 \cdot 10^{-3}$ | $2{,}10 \cdot 10^{-3}$ | 2,6 | 2,6 |
| 14 | $3{,}20 \cdot 10^{-5}$ | 0,220 | $4{,}2 \cdot 10^{-3}$ | $2{,}20 \cdot 10^{-3}$ | 2,5 | 2,6 |
| 15 | $3{,}30 \cdot 10^{-5}$ | 0,230 | $4{,}3 \cdot 10^{-3}$ | $2{,}30 \cdot 10^{-3}$ | 2,5 | 2,5 |
| 16 | $3{,}40 \cdot 10^{-5}$ | 0,240 | $4{,}4 \cdot 10^{-3}$ | $2{,}40 \cdot 10^{-3}$ | 2,4 | 2,5 |
| 17 | $3{,}50 \cdot 10^{-5}$ | 0,250 | $4{,}5 \cdot 10^{-3}$ | $2{,}50 \cdot 10^{-3}$ | 2,4 | 2,4 |
| 18 | $3{,}60 \cdot 10^{-5}$ | 0,260 | $4{,}6 \cdot 10^{-3}$ | $2{,}60 \cdot 10^{-3}$ | 2,3 | 2,4 |
| 19 | $3{,}70 \cdot 10^{-5}$ | 0,270 | $4{,}7 \cdot 10^{-3}$ | $2{,}70 \cdot 10^{-3}$ | 2,3 | 2,3 |
| 20 | $3{,}80 \cdot 10^{-5}$ | 0,280 | $4{,}8 \cdot 10^{-3}$ | $2{,}80 \cdot 10^{-3}$ | 2,2 | 2,3 |
| 21 | $3{,}90 \cdot 10^{-5}$ | 0,290 | $4{,}9 \cdot 10^{-3}$ | $2{,}90 \cdot 10^{-3}$ | 2,2 | 2,2 |
| 22 | $4{,}00 \cdot 10^{-5}$ | 0,300 | $5{,}0 \cdot 10^{-3}$ | $3{,}00 \cdot 10^{-3}$ | 2,1 | 2,2 |
| 23 | $4{,}10 \cdot 10^{-5}$ | 0,310 | $5{,}1 \cdot 10^{-3}$ | $3{,}10 \cdot 10^{-3}$ | 2,1 | 2,1 |
| 24 | $4{,}20 \cdot 10^{-5}$ | 0,320 | $5{,}2 \cdot 10^{-3}$ | $3{,}20 \cdot 10^{-3}$ | 2,0 | 2,1 |
| 25 | $4{,}30 \cdot 10^{-5}$ | 0,330 | $5{,}3 \cdot 10^{-3}$ | $3{,}30 \cdot 10^{-3}$ | 2,0 | 2,0 |

## ЛИТЕРАТУРА

### Основная

1. Абдуллаев Н.Д. Теория и методы проектирования оптимальных регуляторов / Н.Д. Абдуллаев, Ю.П. Петров. – Л.: Энергоатомиздат, 1985.

2. Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы /А.Г. Александров. – М.: Высшая школа, 1989.

3. Воронов А.А. Основы автоматического регулирования и управления / А.А. Воронов, В.К. Титов, Б.Н. Новограмов. – М.: Высшая школа, 1977.

4. Гноенский Л.С. Математические основы теории управляемых систем / Л.С. Гноенский, Г.А. Каменский, Л.Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 1969.

5. Олейников В.А. Основы оптимального и экстремального управления / В.А. Олейников, Н.С. Зотов, А.М. Пришвин. – М.: Наука, 1969.

6. Сборник задач по теории автоматического регулирования / под ред. В.А. Бесекерского. – М.: Наука, 1970.

7. Справочник по теории автоматического управления / под ред. А.А. Красовского. – М.: Наука, 1987.

8. Тимофеев Ю.К. Вариационное исчисление в оптимальном управлении: учеб. пособие / Ю.К. Тимофеев. – Саратов: СГТУ, 2003.

9. Теория автоматического управления: в 2 ч. / под ред. А.А. Воронова. – М.: Высшая школа, 1986. – Ч.2.

10. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 1965.

### Дополнительная

1. Алексеев В.М. Сборник задач по оптимизации / В.М. Алексеев, Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров. – М.: Наука, 1984.

2. Ванько В.И. Вариационное исчисление и оптимальное управление: учебник для вузов / В.И Ванько, О.В. Ермошина, Г.Н Кувыркин; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд–во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.

3. Дорф Р. Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.

4. Куропаткин П.В. Оптимальные и адаптивные системы / П.В. Куропаткин. – М.: Высшая школа, 1980.

# СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине
«Б.1.2.9 Основы кибернетики»
направления подготовки
«01.03.02 "Прикладная математика и информатика"»
квалификация (степень) «бакалавр»»
Профиль «Математическое моделирование и вычислительная математика»

Составил: СТЕПАНОВ Михаил Федорович
Рецензент Ю.К. Тимофеев
Редактор

| | | |
|---|---|---|
| Подписано в печать | | Формат 60x84 1/16 |
| Бум. тип. | Усл. печ.л. 1,16 (1,25) | Уч.-изд.л. 1,1 |
| Тираж 100 экз. | Заказ | Бесплатно |

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.
410054, Саратов, Политехническая ул. 77
Отпечатано в РИЦ СГТУ имени Гагарина Ю.А. 410054, Саратов, Политехническая ул. 77