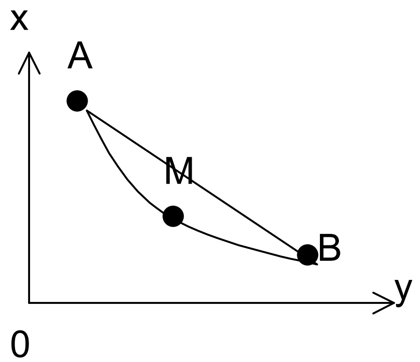
ВВЕДЕНИЕ

В 1696 году в журнале Acta Eruditorium появилась заметка известного физика И. Бернулли, озаглавленная “Новая задача, к решению которой приглашаются математики”. Эту дату обычно считают началом развития вариационного исчисления. В ней ставилась следующая задача. “В вертикальной плоскости заданы две точки А и В. Определить путь АМВ, опускаясь по которому под действием собственной тяжести, тело М, начав двигаться из точки А, дойдет до точки В за кратчайшее время”.



Решение этой задачи было получено самим И. Бернулли, а также Г. Лейбницем, Я. Бернулли и И. Ньютоном. Оказалось что линией наискорейшего спуска (брахистохроной) является циклоида. После этих работ стали появляться и решаться многие задачи того же типа. И. Бернулли поставил перед своим учеником Л. Эйлером проблему найти общий путь их решения.

Вариационное исчисление начало развиваться с 1696 года и оформилось в самостоятельную математическую дисциплину с собственными методами исследования после фундаментальных работ действительного члена Петербургской академии наук Л. Эйлера, которого с полным основанием считают создателем вариационного исчисления.

В 1744 г. вышел труд Эйлера “Метод нахождения кривых линий, обладающих свойством минимума и максимума или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле”, а в 1759 г. появилась работа Лагранжа и с ней новые методы исследования, которые составили новый раздел математики, названный Эйлером вариационным исчислением.

Методы вариационного исчисления условно можно разделить на классические и современные. К классическим методам относятся методы, основанные на уравнениях Эйлера, Лагранжа, Якоби, Вейерштрасса, а к современным – принцип максимума Понтрягина и метод динамического программирования Белмана. Современные методы, разработанные в последние десятилетия, своим возникновением обязаны задачам оптимального управления.

С наибольшей быстротой вариационные методы нашли применение в области реактивной и космической технике, где вопросы оптимизации стояли наиболее остро. Здесь использовались как классические, так и современные методы вариационного исчисления.

Вообще к вариационному исчислению принято относить все методы решения оптимизационных задач, основанные на анализе необходимых (и достаточных) условий оптимальности, вытекающих из анализа вариаций (малых смещений) минимизируемого функционала.

Формулировка задачи Лагранжа как задачи об оптимальном управлении и метод ее решения.

Постановка задачи.

Объект управления описывается векторно-матричным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(y)]; \quad x \in R^n, u \in R^m.$$

Начальное положение объекта

$$x(t_0) = x_0.$$

Конечное положение объекта

$$x(t_1) = x_1.$$

Критерий оптимальности, который является числовым показателем качества системы, задается в виде функционала

$$J = J[\,x(t), u(t)\,] = \int_{t_0}^{t_1} F[\,x(t), u(t)\,]\,dt\,.$$

Определить уравнение $u^0(t)$, называемое оптимальным, и оптимальную траекторию $x^0(t)$, на которых функционал принимает экстремальное значение.

Алгоритм решения задачи.

1. Составим функцию Лагранжа

$$L = F + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)[\,\dot{x}_i - f_i\,]\,,$$

где $\lambda_i(t)$ – неопределенные множители Лагранжа.

2. Запишем уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0,\ i = \overline{1,n};\\ &\frac{\partial L}{\partial u_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_k} = 0,\ k = \overline{1,m} \end{aligned}\right\}.$$

3. Из системы уравнений Эйлера-Лагранжа и уравнений объекта находим

$$u_k^0(t),\ x_i^0(t),\ \ \lambda_i(t);\ k = \overline{1,m};\ i = \overline{1,n}\,.$$

Пример 1.1. Оптимальное управление двигателем постоянного тока при минимизации энергии потерь **(**управление в виде обратной связи**)**

Электрический привод с двигателем постоянного тока независимого возбуждения (рис.1.1) нагружен моментом вязкого трения $M_H = k_1\Omega$ большой величины и работает в режиме, при котором падение напряжения $u_1 = i(r_\partial + r_Я)$ на сопротивлении $r = r_\partial + r_Я$ значительно больше обратной электродвижущей силы $e = c_e\Omega$.

Определить закон управления электродвигателем, при котором суммарная энергия потерь, затрачиваемых на преодоление момента вязкого трения и на нагрев, будет минимальной. Влиянием индуктивности в цепи якоря пренебречь.

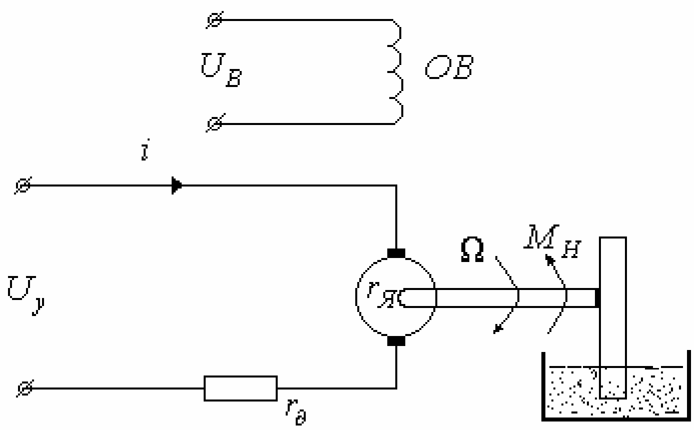


Рис. 1.1. Схема электрического привода с двигателем постоянного тока, нагруженного моментом вязкого трения

Момент инерции якоря с объектом $G = 1{,}96 \cdot 10^{-5}\ Н \cdot м \cdot с^2$;

коэффициенты пропорциональности по ЭДС $c_e = 0.096\ В \cdot с$

и по моменту $c_M = 2{,}94 \cdot 10^{-3}\ Н \cdot м \cdot А^{-1}$; $k_1 = 0{,}981 \cdot 10^{-3}\ Н \cdot м \cdot с$; $r_∂ + r_Я = 5\ Ом$.

Решение.

Уравнение момента двигателя имеет вид

$$G\frac{d\Omega}{dt} + k_1\Omega = c_M i. \qquad (1.1)$$

По условию задачи индуктивность цепи якоря мала. Поэтому в соответствии с законом Кирхгофа

$$ir + c_e\Omega = u_y, \qquad (1.2)$$

откуда следует $i = \dfrac{u_y}{r} - \dfrac{c_e}{r}\Omega$.

Подставляя последнее выражение в (1.1), найдём

$$G\frac{d\Omega}{dt}=\frac{c_M}{r}u_y-\left(\frac{c_e c_M}{r}+k_1\right)\Omega .$$

Поскольку $\frac{c_e c_M}{r} << k_1$, пренебрегаем первым слагаемым в скобках, поэтому приближённо уравнение динамики примет вид

$$G\frac{d\Omega}{dt}=-k_1\Omega+\frac{c_M}{r}u_y .$$

Подставив численные значения и произведя упрощения, получим

$$\frac{d\Omega}{dt}=a\Omega+bu_y, \tag{1.3}$$

где $a=-50\ c^{-1}, b=30\ B^{-1}\cdot c^{-2}$.

По условиям задачи двигатель работает в режиме, при котором $c_e\Omega << ir$. Следовательно, приближённо

$$i\approx\frac{u_y}{r}. \tag{1.4}$$

Мощность электрических потерь вычисляется по формуле

$$P_Э=iu_y=\frac{u_y^2}{r}. \tag{1.5}$$

Мощность потерь на вязкое трение составляет величину

$$P_M=M_H\Omega=k_1\Omega^2 .$$

Таким образом, оптимизируемый функционал, представляющий суммарную энергию потерь, имеет вид

$$J=\int_0^\infty\left(k_1\Omega^2+\frac{1}{r}u_y^2\right)dt. \tag{1.6}$$

С учётом числовых значений получим

$$J=\int_0^\infty(q\Omega^2+mu_y^2)dt, \tag{1.7}$$

где $q = 0{,}981 \cdot 10^{-3}$ $Дж \cdot с,$ $m = 0{,}2$ $Вт \cdot В^{-2}$.

Составим функцию Лагранжа

$$L = q\Omega^2 + mu^2 + \lambda(\dot{\Omega} - a\Omega - bu)$$

(индекс y для простоты опускаем).

Вычислим производные

$$\frac{\partial L}{\partial \Omega} = 2q\Omega - \lambda a; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\Omega}} = \lambda; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\Omega}} = \dot{\lambda};$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 2mu - \lambda b; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = 0; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = 0.$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial \Omega} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\Omega}} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = 0$$

в данном случае принимают вид

$$\begin{cases} 2q\Omega - \lambda a - \dot{\lambda} = 0; \\ 2mu - \lambda b = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = 2q\Omega - a\lambda; \\ b\lambda = 2mu. \end{cases}$$

Добавим к этим уравнениям уравнения объекта $\dot{\Omega} = a\Omega + bu$.

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{\Omega} = a\Omega + bu; \\ \dot{\lambda} = 2q\Omega - a\lambda; \\ b\lambda = 2mu. \end{cases} \qquad (1.8)$$

Из последнего уравнения (1.8) определим

$$u = \frac{b}{2m}\lambda. \qquad (1.9)$$

Подставив выражение (1.9) в уравнения (1.8), получим систему

$$\begin{cases} \dot{\Omega} = a\Omega + \dfrac{b^2}{2m}\lambda; \\ \dot{\lambda} = 2q\Omega - a\lambda. \end{cases} \qquad (1.10)$$

Определим собственные числа системы (1.10) из выражения

$$\Delta(\mu) = \begin{vmatrix} a-\mu & \dfrac{b^2}{2m} \\ 2q & -a-\mu \end{vmatrix} = \mu^2 - (a^2 + \frac{qb^2}{m}) = 0 .$$

Откуда собственные числа $\mu_1 = \sqrt{a^2 + \dfrac{qb^2}{m}}$; $\mu_2 = -\sqrt{a^2 + \dfrac{qb^2}{m}}$.

Условиям устойчивости удовлетворяет отрицательный корень μ_2, поэтому решения уравнений (1.10) имеют вид

$$\Omega = c_1 e^{\mu_2 t};\ \lambda = c_2 e^{\mu_2 t}, \qquad (1.11)$$

где c_1, c_2 – постоянные интегрирования $c_1 = \Omega(0), c_2 = \lambda(0)$.

Значение c_1 известно, так как $\Omega(0)$ всегда задано, а значение c_2 в данном (простейшем) случае можно определить из соотношений (1.10) и (1.11).

Подставим (1.11) в (1.10)

$$\mu_2 c_1 e^{\mu_2 t} = a c_1 e^{\mu_2 t} + \frac{b^2}{2m} c_2 e^{\mu_2 t} .$$

После сокращений и преобразований получим

$$c_2 = \frac{2(\mu_2 - a)m}{b^2} c_1 .$$

Следовательно, искомое оптимальное управление

$$u^0(t) = \frac{b}{2m}\lambda = \frac{\mu_2 - a}{b} c_1 e^{\mu_2 t} . \qquad (1.12)$$

Оптимальное управление (1.12) зависит от постоянной c_1, которая определяется заданным начальным значением $\Omega(0)$ и имеет такой же закон изменения, как и выходная координата $\Omega(t)$. Поэтому с учётом выражений (1.11) вместо соотношения (1.12) запишем

$$u^0(\Omega) = \frac{\mu_2 - a}{b}\Omega = K_{O.C.}\Omega\,, \tag{1.13}$$

где

$$K_{O.C.} = \frac{\mu_2 - a}{b} = \frac{-\sqrt{a^2 + \frac{qb^2}{m}} - a}{b} = -\frac{a}{b} - \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{q}{m}}\,. \tag{1.14}$$

После подстановки численных значений находим

$$K_{O.C.} = 0{,}87 \cdot 10^{-1}\ B \cdot c\,.$$

Замечание. В данном примере оптимальное управление получено в зависимости от скорости $u^0(\Omega) = K_{O.C.}\Omega$, то есть в виде обратной связи. При помощи вариационного исчисления это можно сделать только в самых простейших случаях.