3. ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ НА УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

3.1. Задача Лагранжа

На практике встречаются задачи на отыскание экстремума функционала при дополнительных условиях, наложенных на функции, в классе которых ищется экстремум.

Примером может служить задача о нахождении кратчайшего расстояния между двумя точками при условии, что кривая, соединяющая эти две точки, лежит на некоторой поверхности, например, на сфере.

Решение задачи сводится к определению минимума функционала (длина кривой)

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt \qquad (3.1)$$

при граничных условиях (координаты точек)

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0; \\ y(t_0) = y_0; \end{cases} \begin{cases} x(t_1) = x_1; \\ y(t_1) = y_1 \end{cases} \qquad (3.2)$$

и при условии, что эта кривая лежит на поверхности сферы (то есть удовлетворяет уравнению сферы) $t^2 + x^2 + y^2 - R^2 = 0$. (3.3)

Можно в уравнении (3.3) выразить y через x, подставить в интеграл (3.1) и искать минимум обычным путем. Но такая процедура приводит часто к сложным выражениям. Лагранжем был предложен другой метод – метод неопределенных множителей Лагранжа. Рассмотрим его на примере функций двух переменных.

Постановка задачи

Задан функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F[x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), t]\,dt, \qquad (3.4)$$

граничные (краевые) условия

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0; \\ y(t_0) = y_0; \end{cases} \quad \begin{cases} x(t_1) = x_1; \\ y(t_1) = y_1 \end{cases} \qquad (3.5)$$

и дополнительные условия (называемые уравнениями связи), которые накладываются на функции $x(t)$, $y(t)$

$$\varphi[x(t), y(t), t] = 0. \qquad (3.6)$$

Определить функции $x(t)$, $y(t)$, удовлетворяющие граничным условиям (3.5), дополнительным условиям (3.6) и доставляющие экстремум функционалу (3.4).

Алгоритм решения задачи

1. Вводится вспомогательная функция (функция Лагранжа)

$$L = F + \lambda(t)\varphi[x(t), y(t), t], \tag{3.7}$$

где $\lambda(t)$ - пока неизвестная функция, называемая неопределенным множителем Лагранжа.

3. Записываются уравнения Эйлера для функции L (они называются уравнениями Эйлера – Лагранжа)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = L_x - \dfrac{d}{dt}L_{\dot{x}} + \varphi_x \lambda(t) = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}} = L_y - \dfrac{d}{dt}L_{\dot{y}} + \varphi_y \lambda(t) = 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

3**.** Решаются совместно уравнения Эйлера – Лагранжа (3.8) и уравнение связи (3.6). Это система трех уравнений для определения трех неизвестных $x(t)$, $y(t)$, $\lambda(t)$.

Рассматриваемая задача называется задачей Лагранжа.

Задача Лагранжа в многомерном случае

Задан функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_q, \dot{x}_1, \dot{x}_2, ..., \dot{x}_q, t)dt, \tag{3.9}$$

краевые условия

$$x_i(t_0) = x_{i0},\ x_i(t_1) = x_{i1},\ i=1,2,3,\dots,q, \tag{3.10}$$

система дифференциальных уравнений – ограничения на переменные x_i (уравнения связи)

$$\dot{x}_j = f_j(x_1, x_2, ..., x_q, t),\ j=1,2,3,\dots,n. \tag{3.11}$$

Определить функции времени $x_1(t), x_2(t), ..., x_q(t)$, доставляющие экстремум функционалу (3.9), проходящие через начальную и конечную точки (3.10) и удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений (3.11).

Алгоритм решения задачи

1. Вводится вспомогательная функция (функция Лагранжа)

$$L = F + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t)[\dot{x}_j - f_j(x_1, x_2, ..., x_q, t)], \qquad (3.12)$$

$\lambda_j(t)$, j=1,2,3…n - неопределенные множители Лагранжа (переменные Лагранжа).

3. Записываются уравнения Эйлера – Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0, \; i=1,2,3,\dots,q. \qquad (3.13)$$

3. Решаются совместно уравнения (3.13), (3.11). Это система q+n уравнений, из которой определяются q+n неизвестных $x_1, x_2, ..., x_q, \lambda_1, \lambda_n$.

3.3. Задача Лагранжа как задача оптимального управления

Часть переменных q-n=m штук обозначаются $u_1, u_2, ..., u_m$ и называются управлениями $x_{n+1} = u_1$, $x_{n+2} = u_2, x_{n+m} = u_m$.

Тогда задачу Лагранжа можно сформулировать следующим образом.

Постановка задачи. Объект управления (система управления) описывается дифференциальными уравнениями

$$\dot{x}_j = f_j(x_1, x_2, ..., x_n, u_1, u_2, ..., u_m), \text{ j=1,2,3,…,n.} \qquad (3.14)$$

Начальное положение объекта

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \text{ i=1,2,3,…,n.} \qquad (3.15)$$

Конечное положение объекта

$$x_i(t_1) = x_{i1}, \text{ i=1,2,3,…,n.} \qquad (3.16)$$

Критерий оптимальности, который является числовым показателем качества объекта (системы), задается в виде функционала

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(x_1, x_2, ..., x_n, u_1, u_2, ..., u_m) dt. \qquad (3.17)$$

Определить управления $u_1^0(t), u_2^0(t), ..., u_m^0(t)$, называемые оптимальными, переводящие объект управления (3.14) из начального положения (3.15) в конечное положение (3.16) так, чтобы функционал (3.17) принимал экстремальное значение.

Определить соответствующие этим уравнениям оптимальные траектории $x_1^0(t), x_2^0(t), ..., x_n^0(t)$.

Решение поставленной задачи проводится в соответствии с алгоритмом п. 3.1.

Вводится вспомогательная функция (функция Лагранжа)

$$L = F(x_1, x_2, ..., x_n, u_1, u_2, ..., u_m) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t)[\dot{x}_j - f_j]. \qquad (3.18)$$

Составляются уравнения Эйлера – Лагранжа

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0, i = 1,2,3,...,n; \\ \dfrac{\partial L}{\partial u_k} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{u}_k} = 0, k = 1,2,3,...,m. \end{cases} \qquad (3.19)$$

Решаются совместно уравнения (3.19) и (3.14). Это 2n+m уравнений, из которых определяются 2n+m неизвестных

$$x_1^0(t), x_2^0(t), ..., x_n^0(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), ..., \lambda_n(t), u_1^0(t), u_2^0(t), ..., u_m^0(t).$$

Распишем выражения (3.19) более подробно:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \lambda_i \to \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \dot{\lambda}_i;$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} = \frac{\partial F}{\partial u_k} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_k} = 0 \to \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_k} = 0.$$

Тогда система уравнений (3.14), (3.19) примет вид:

$$\dot{x}_j = f_j(x_1, x_2, ..., x_n, u_1, u_2, ..., u_m), j = 1,2,3,...,n, \qquad (3.20)$$

$$\dot{\lambda}_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, i = 1,2,3,...,n, \qquad (3.21)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_k} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_k} = 0, k = 1,2,3,..., m. \qquad (3.22)$$

Если из выражения (3.22) можно выразить управления $u_1, u_2, ..., u_m$ через переменные $x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ и подставить их в выражения (3.20), (3.21), то останется 2n дифференциальных уравнений относительно переменных $x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$:

$$\begin{cases} \dot{x}_j = \varphi_j(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n), j = 1,2,3,...,n; \\ \dot{\lambda}_i = \varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n), i = 1,2,3,...,n. \end{cases} \qquad (3.23)$$

Для решения этих уравнений нужно иметь 2n начальных условий (n штук для переменных x и n штук для переменных λ):

$$x_1(t_0), x_2(t_0), ..., \ x_n(t_0), \lambda_1(t_0), \lambda_2(t_0), ..., \ \lambda_n(t_0).$$

Имеется лишь n начальных (3.15) и n конечных (3.16) условий для $x_1, x_2, ..., x_n$. Начальных условий для переменных λ нет.

Метод решения такой задачи следующий:

1. Задают произвольные начальные условия по λ_i, i=1,2,…,n.
3. Решают систему дифференциальных уравнений (3.23). Определяют x_j, λ_i, u_k.
3. Проверяют выполнение конечных условий по x_j. Они обычно не выполняются (т.к. $\lambda_i(t_0)$ выбраны произвольно).
4. Изменяют начальные условия по λ_i и снова выполняют п. 2 и 3 до тех пор, пока не выполняются конечные условия по x_j, с заданной точностью.

Существуют специальные вычислительные методы, позволяющие решить эту задачу (с заданной точностью) за конечное число циклов – методы целенаправленного перебора.

Как будет показано ниже, в случае, если объект линейный, а функционал квадратичный, задача решается точно, без целенаправленного перебора.

3.3. Задачи Майера и Больца

Эти вариационные задачи отличаются от задачи Лагранжа (3.14) – (3.17) только функционалом.

В задаче Майера функционал имеет вид

$$J = G(x_1, x_2, ..., x_n, u_1, u_2, ..., u_m, t)\Big|_{t_0}^{t_1}, \qquad (3.24)$$

причем t_1 - не задано.

Особый случай задачи Майера, когда функционал имеет вид

$$J = G(t)\Big|_{t_0}^{t_1} = t_1 - t_0, \to \min.$$

Эта задача максимального быстродействия.

В задаче Больца функционал имеет вид

$$J = G(x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_m)\Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} F(x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_m)dt. \qquad (3.25)$$

Задачи Майера и Больца можно свести к задаче Лагранжа, и наоборот. Например, задача Майера сводится к задаче Лагранжа, если функционал (3.24) записать в виде $J = \int\limits_{t_0}^{t_1} \dot{G} dt$.

Таким образом, все три задачи: Лагранжа, Майера и Больца обладают равной степенью общности.