

Министерство образования и науки Российской Федерации
Московский государственный институт электронной техники
(технический университет)

В.А. Бархоткин, М.П. Кочетков

Системы автоматического управления

Учебное пособие

Часть 1

Допущено учебно-методическим объединением вузов
по университетскому политехническому образованию
в качестве учебного пособия по специальности 230101 (220100)

Москва 2004

ББК 32.965я73
Б24
УДК 681.5(075.8)

Рецензенты: докт. техн. наук, проф. *О.М. Брехов*;
доц. *Г.А. Шахназаров*; *А.В. Щагин*

Бархоткин В.А., Кочетков М.П.

Б24 Системы автоматического управления: Учебное пособие. Часть 1. - М.:
МИЭТ, 2004. - 172 с.
ISBN 5-7256-0373-3

В первой части учебного пособия в краткой и доступной форме даны основные понятия и определения теории автоматического управления. Рассмотрены принципы построения систем автоматического управления. Приведены модели типовых звеньев, структурные схемы систем автоматического управления. Изложены правила преобразования структурных схем. Исследованы вопросы устойчивости линейных динамических систем.

Предназначено для студентов, обучающихся по специальности "ЭВМ, комплексы, системы и сети", а также студентов родственных направлений, специализирующихся в области разработки систем управления, действующих в реальном масштабе времени.

ISBN 5-7256-0373-3

О МИЭТ, 2004

Учебное пособие

Бархоткин Вячеслав Александрович

Кочетков Михаил Петрович

Системы автоматического управления. Часть 1.

Редактор *Е.Г. Кузнецова*. Технический редактор *Е.Н. Романова*. Корректор
Л.Г. Лосякова. Компьютерная верстка *М.В. Гергель*

Подписано в печать с оригинал-макета 10.12.04. Формат 60х84 1/16. Печать
офсетная. Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. л. 9,98.

Уч.-изд. л. 8,6. Тираж 200 экз. Заказ 352.

Отпечатано в типографии ИПК МИЭТ.

124498, Москва, Зеленоград, проезд 4806, д. 5, МИЭТ.

Введение

Теория автоматического управления (ТАУ) входит в число важнейших научных дисциплин, в совокупности составляющих науку об управлении. Развитие ТАУ в современный период объясняется объективной необходимостью разработки новых и совершенствования существующих автоматических систем, выполняющих те или иные функции управления самыми различными по физической природе процессами во всех областях техники без непосредственного участия человека.

Достижения в ТАУ позволили создать автоматическое конвейерное производство, мобильные робототехнические комплексы, автопилоты, высокоточные системы вооружений и т.д.

Основными причинами, обуславливающими необходимость комплексной автоматизации процессов и внедрения автоматики в сферу управления и контроля, являются:

- стремление к дальнейшему освобождению человека от трудоемких работ, повышению производительности труда и технико-экономических показателей производства;
- непрерывное усложнение характера производственных процессов, а следовательно, функций управления ими;
- ограниченность физиологических возможностей человека, устанавливающая предел его способности быстро и точно управлять техническими средствами;
- вредность или невозможность управления некоторыми процессами непосредственно человеком.

История развития систем автоматического управления (САУ) неразрывно связана с историей создания различных высокоточных механизмов, из которых наиболее известными являются водяные часы. Самое раннее упоминание о подобных устройствах относится к III веку до н.э. В Древней Греции Ксентибиос создал поплавковый регулятор уровня воды для водяных часов. В I столетии н.э. Херон из Александрии написал книгу "Пневматика", в которой привел несколько чертежей регуляторов такого типа.

Первой системой с обратной связью, изобретенной в средневековой Европе, был регулятор температуры голландского механика Корнелиуса Дреббеля (1572 - 1633), который больше известен как создатель одной из первых подводных лодок. Другой голландский ученый Христиан Гюйгенс (1629 - 1695) изобрел в 1657 г. маятниковый регулятор хода часов, представил их теорию, установил законы колебаний физического маятника.

Первый регулятор давления для паровых котлов предложил в 1681 г. француз Дени Папен (1647 - 1712). В 1765 г. талантливый русский механик И.И. Ползунов (1728 - 1766) изобрел поплавковый регулятор, поддерживающий постоянный уровень воды в котле паровой машины. В этом регуляторе нашла применение идея регулирования по отклонению, которая легла в основу принципа построения современных автоматических систем.

В 1784 г. известный английский механик Дж. Уатт (1736 - 1819) получил патент на центробежный регулятор скорости вращения вала для паровой машины. Это изобретение сыграло важную роль в развитии промышленных систем регулирования.

В 1808 г. Ж. Жаккар построил первое программное устройство управления ткацким станком от перфокарты для воспроизведения узоров на коврах. Это изобретение явилось прообразом современных устройств программного управления.

В основе систем автоматического управления, появившихся в период до второй половины XIX века, лежали главным образом интуиция и изобретательство. Попытки увеличить точность управления приводили к медленному затуханию колебаний во

время переходных процессов и даже к потере устойчивости систем. Именно тогда и возникла необходимость создания основ теории автоматического управления.

Первыми фундаментальными работами, положившими начало ТАУ, считают труд Дж. Максвелла (1831 - 1879) "О регуляторах" (1868) и труды И.А. Вышнеградского (1832 - 1895) "Об общей теории регуляторов (1876) и "О регуляторах прямого действия" (1877).

Дж. Максвелл в работе "О регуляторах", используя дифференциальное уравнение как модель регулятора, заложил математические основы теории управления. Его работа была посвящена исследованию влияния изменения параметров системы на ее поведение. Однако явно полезных практических выводов данная работа не содержала. Ее роль была оценена значительно позже, когда ТАУ сформировалась в самостоятельную научную дисциплину.

Особое значение имеют работы русского ученого-математика профессора Петербургского технологического института И.А. Вышнеградского, которого современники по праву считали основоположником теории автоматического регулирования (раздела ТАУ). Его работы отличались инженерным подходом, имели практические рекомендации, содержали истоки многих современных методов исследования качества регулирования.

В целом заслуга Дж. Максвелла и И.А. Вышнеградского состоит в том, что они впервые рассмотрели регулятор и объект регулирования как единую динамическую систему на основе линеаризации дифференциальных уравнений. Их работами было положено начало так называемой классической ТАУ.

В конце XIX века появились регуляторы для паровых турбин и гидротурбин, электрические регуляторы напряжения генераторов и регуляторы скорости для двигателей постоянного тока. Однако во многих случаях регуляторы вместо того, чтобы поддерживать постоянное значение выходной величины, позволяли ей совершать колебания относительно заданного значения.

Важную роль для решения подобных проблем имели труды академика А.М. Ляпунова (1857 - 1918). В работе "Общая задача об устойчивости движения" (1892) им были изложены основы общей теории устойчивости динамических систем.

В первые десятилетия XX века ТАУ вышла далеко за рамки прикладной механики и сформировалась как общетехническая дисциплина. В этот период появляется целый ряд фундаментальных работ, посвященных различным разделам ТАУ.

Большие успехи были достигнуты русскими учеными в разработке теории нелинейных систем. Следует отметить основополагающие работы А.А. Андропова, А.А. Витта и С.Э. Хайкина "Теория колебаний", Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова "Введение в нелинейную механику", вышедшие в 1937 г. Эти труды вместе с классической работой А.М. Ляпунова являются основой для решения задач теории нелинейных автоматических систем.

Мощный толчок развитию теории и практики САУ дала вторая мировая война, когда возникла потребность в создании автопилотов, систем орудийной наводки, радиолокационных станций сопровождения целей и других устройств военного назначения, работающих на основе принципа обратной связи. Сложность подобных систем и ожидаемый эффект от их применения побудили ученых расширить круг используемых технических средств, повысили их интерес к принципам построения систем управления и разработке новых методов их синтеза и анализа.

В послевоенные годы широкое применение в технике находят импульсные устройства. Ведущая роль в разработке основ теории дискретных систем управления принадлежит русским ученым Я.З. Цыпкину, В.В. Перову, Л.Т. Кузину, а также зарубежным ученым Э. Джури, Л.А. Заде, Дж. Рагаццини и др.

Запуск первого искусственного спутника Земли и начало космической эры дали новый толчок развитию техники управления. Возникла необходимость создания сложных высокоточных систем управления для ракет и космических аппаратов. Возросшие требования к точности этих систем и желание минимизировать их массу обусловили повышенный интерес к теории оптимального управления. Именно поэтому в последние годы стали популярными методы анализа и синтеза, предложенные А.М. Ляпуновым, А.А. Красовским, Л.С. Понтрягиным, А.А. Фельдбаумом в России и Р. Беллманом в США.

Мировое признание получили фундаментальные труды по математической теории оптимальных процессов, созданные Л.С. Понтрягиным и его учениками в 50 - 60-е годы XX века.

Поскольку невозможно назвать всех выдающихся изобретателей, инженеров, математиков, внесших вклад в развитие ТАУ, так же как и перечислить все достижения в этой важной науке, приведем лишь краткие сведения о том, какие идеи и в какое время разрабатывали перечисленные выше ученые.

Приблизительно до 60-х годов XX века ТАУ имела ярковыраженную инженерную направленность и базировалась преимущественно на рассмотрении процессов в системе "регулятор - объект управления".

Как системная наука ТАУ объединила многие методы инженерных направлений из области электро-, радиотехники, связи и энергетики, существенно развив их. Прикладную или инженерную ТАУ сейчас называют "классической", подчеркивая определенную завершенность ее как науки об управлении. Особенностью классической ТАУ является то, что она решает задачи оптимизации и адаптации "в малом", т.е. при малых отклонениях относительно заданного режима работы.

В 80-х годах XX века широкое распространение получило применение ЭВМ в контуре систем управления, благодаря чему появилась возможность одновременного измерения и управления многими параметрами с использованием сложных алгоритмов обработки информации. В настоящее время в США в системах цифрового управления функционирует более 400000 компьютеров.

Сейчас ТАУ продолжает интенсивно развиваться. Появление микропроцессоров высокой производительности, микросхем памяти большой емкости, возможность организации мультитранспьютерных сетей для реализации параллельных вычислений, с одной стороны, и необходимость обработки значительных массивов информации, применения базы знаний для формирования целенаправленной деятельности - с другой, привели к созданию интеллектуальных систем управления.

Основы ТАУ, которая названа "современной", заложены классической ТАУ и неразрывно связаны с ней. Современная ТАУ преследует цель оптимизации "в целом" применительно к сложным объектам управления. Она представляет собой совокупность методов и средств, обеспечивающих интеллектуальное управление. Характерной особенностью такого управления является эффективное использование всех ресурсов системы при многокритериальной оптимизации процессов в условиях высокой степени неопределенности информации о свойствах объекта управления и среде его функционирования.

Результаты, полученные современной ТАУ, вышли за рамки технических систем. ТАУ имеет много практических приложений в биологии, биомедицине и протезировании. В организме человека иерархия систем управления простирается от клеточного уровня до центральной нервной системы и включает в себя регуляцию температуры, сердечно-сосудистой деятельности и ритма дыхания. Таким образом, моделирование биологических процессов приводит к построению систем управления высоких порядков и достаточно сложной структуры. В США устройства протезирования, построенные на базе последних достижений ТАУ, помогают миллионам инвалидов преодолеть их физические недостатки.

Наконец, большой интерес представляют попытки построения моделей процессов с обратной связью в социальной, экономической и политической сферах. Хотя эти модели разработаны еще недостаточно полно, они, скорее всего, будут востребованы уже в ближайшие годы.

Основной проблемой ТАУ является разработка методов анализа и синтеза автоматических систем, а именно:

- 1) разработка принципов построения автоматических систем;
- 2) математическое описание (алгоритмизация) процессов автоматического управления;
- 3) исследование структуры автоматических систем;
- 4) анализ устойчивости автоматических систем;
- 5) анализ качества процессов автоматического управления (точность работы, быстродействие, помехоустойчивость);
- 6) синтез автоматических систем - определение рациональной структуры и оптимальных параметров в соответствии с технико-экономическими требованиями к автоматизируемому процессу;
- 7) разработка экспериментальных методов исследования автоматических систем.

В настоящее время созданы и формируются новые разделы ТАУ, которые включают широкие классы сложных автоматических систем, в том числе интеллектуальных.

В учебном пособии кратко изложены основные положения классической ТАУ, необходимые для последующего освоения ее новейших разделов.

Глава 1. Принципы построения, классификация и математическое описание процессов в автоматических системах

1.1. Теория управления. Основные понятия и термины

Кибернетика - это наука об общих закономерностях процессов управления в различных системах (механических, электрических, биологических, административных, социальных и т.д.). Технической кибернетикой называется наука об управлении техническими устройствами. Важным разделом технической кибернетики, ее базовой основой является ТАУ.

ТАУ - это наука о принципах построения автоматических систем и закономерностях протекающих в них процессов. ТАУ абстрагируется от физической природы и конструктивных особенностей систем. Задача ТАУ заключается в построении оптимальных или близких к ним работоспособных автоматических систем, выполняющих поставленные перед ними цели без участия человека.

Чтобы понять смысл и содержание ТАУ, необходимо усвоить ее основные понятия и термины.

Управление каким-либо объектом - это процесс воздействия на него с целью обеспечения требуемого течения процессов в объекте или требуемого изменения его состояния. Основой управления является переработка информации о состоянии объекта в соответствии с целью управления.

Совокупность устройств, обеспечивающих управление каким-либо объектом, называют системой управления. Если функции всех элементов системы управления выполняются различными устройствами без непосредственного участия человека, то система управления является автоматической.

САУ может быть представлена двумя основными частями (рис.1.1): объектом управления (управляемая система) и устройством управления (управляющая система).

В качестве объекта управления может рассматриваться как управляемое техническое устройство (станок, паровая турбина, самолет и т.д.) или их совокупность, так и более простая система управления. В последнем случае речь идет о некоторой иерархической системе управления, в которой более сложная система управления включает в себя более простую как подсистему.

Для автоматического управления большое значение имеет внешняя среда, под которой будем понимать все то, что не входит в рассматриваемую систему.

Внешним или возмущающим воздействием $f(t)$ называется воздействие со стороны среды на любой элемент (подсистему) системы управления, включая объект управления, затрудняющее достижение цели.

Управляющее воздействие $u(t)$ - воздействие со стороны управляющей системы на объект управления, предназначенное для достижения цели управления.

Управление всегда имеет определенную цель. Цель управления - это то, что надо осуществить. Обычно она формулируется как ограничение на множество возможных состояний системы или как какой-либо показатель системы, который нужно поддерживать в заданных пределах либо максимизировать. Например, целью управления может быть поддержание на выходе схемы стабилизатора напряжения, равного 220 В, или перемещение мобильного робота по заданному дорожному полотну.

Задающее воздействие $g(t)$ - воздействие на устройство управления (управляющую систему), предназначенное для достижения цели управления. Задающее воздействие $g(t)$ определяет требуемый закон управления.

Состояние объекта управления определяют конкретными значениями управляемых величин. Управляемая величина $x(t)$ - координата объекта управления, значение которой зависит от управляющего воздействия $u(t)$ и показывает степень достижения цели управления. Координата объекта управления может быть представлена следующими параметрами: напряжением источника питания, температурой раствора, давлением воздуха, азимутом самолета в пространстве и т.д. С точки зрения математического описания состояние объекта управления удобно представлять точкой, координатами которой являются значения параметров.

Под автоматическим управлением понимается автоматическое (без участия человека) осуществление совокупности воздействий, выбранных из множества возможных на основании определенной информации и направленных на поддержание или улучшение функционирования управляемого объекта в соответствии с целью управления.

С формальной точки зрения основная задача автоматического управления заключается в том, чтобы выработать управляющее воздействие $u(t)$ таким образом, чтобы управляемая величина $x(t)$ изменялась по заданному закону с определенной точностью независимо от действия на автоматическую систему внешних возмущений $f(t)$.

В основу ТАУ положена теория автоматического регулирования. Регулирование представляет собой простейшую разновидность управления. Автоматическим регулированием называется поддержание постоянной некоторой заданной величины, характеризующей процесс, или изменение ее по заданному закону.

1.2. Принципы автоматического управления

Принцип автоматического управления (регулирования) определяет алгоритм формирования управляющего воздействия в автоматической системе. Выбор того или иного принципа построения системы зависит от ее назначения, условий работы, возможностей получения необходимой рабочей информации, стабильности характеристик отдельных элементов и т.п. Одним из основных признаков, характеризующих принцип управления, является требуемая для выработки управляющего воздействия информация.

Информацию обычно подразделяют на начальную (априорную) и рабочую (текущую). Априорная информация может быть получена в результате предварительного теоретического или экспериментального исследования системы управления. Текущая информация получается в результате наблюдения за ходом процесса управления.

Известны три фундаментальных принципа автоматического управления: принцип разомкнутого управления, принцип управления по возмущению и принцип обратной связи. Кроме того, разработан принцип комбинированного управления, сочетающий достоинства второго и третьего принципов. Таким образом, несмотря на многообразие автоматических систем, основополагающие принципы их построения немногочисленны.

Принцип разомкнутого управления состоит в следующем (см. рис.1.1). Пусть заранее известно, что параметры объекта управления и воздействие внешней среды $f(t)$ остаются постоянными или изменяются по определенному закону. Тогда по заданной функции $x(t)$ можно однозначно определить соответствующее изменение во времени управляющего воздействия $u(t)$. В этом случае управление является

полностью априорным, т.е. осуществляется управляющим устройством при заведомо абсолютно точном знании всех внешних и внутренних условий работы.

Примером реализации этого принципа служит автоматическое управление токарным станком, изготавливающим детали одного определенного образца. При этом положение резца задают как определенную функцию времени и осуществляют автоматическое перемещение его по этому закону.

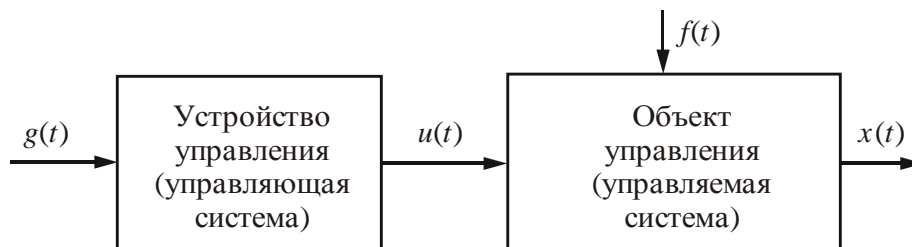


Рис.1.1. Система автоматического управления

Принцип разомкнутого управления отличается простотой технической реализации, но оказывается малоэффективным при недостаточной априорной информации относительно характера внешних воздействий.

Принцип управления по возмущению заключается в том, что управляющее воздействие вырабатывается в зависимости от результатов измерения возмущения, действующего на объект. Системы, построенные на основе этого принципа, также работают по разомкнутой цепи, т.е. не имеют обратной связи.

Структурная схема автоматической системы, использующей принцип управления по возмущению, изображена на рис.1.2. На устройство управления воздействует возмущение $f(t)$. Недостаточный объем априорной информации относительно $f(t)$ восполняется текущей информацией о его изменении, поступающей в устройство управления. При этом управляющее воздействие $u(t)$ формируется в функции возмущающего воздействия $f(t)$:

$$u(t) = U[f(t)]$$

Величина и направление управляющего воздействия на объект должны быть такими, чтобы полностью или в значительной степени компенсировать влияние возмущающего воздействия.

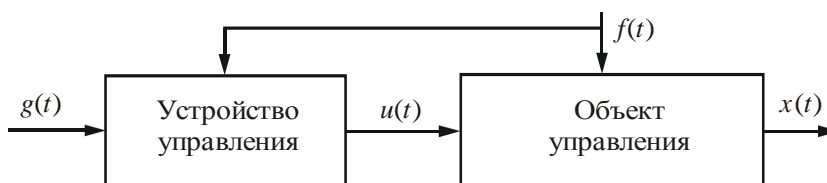


Рис.1.2. Система, реализующая принцип управления по возмущению

Основное достоинство принципа управления по возмущению - высокое быстродействие, поскольку в этом случае система реагирует непосредственно на причину, вызывающую изменение управляемой величины. Однако этот принцип предполагает наличие полной априорной или текущей информации о внутренних и внешних условиях работы системы, что обычно не выполнимо. Как правило, учитывается действие одного или нескольких наиболее существенных возмущений, которые измеряются соответствующими датчиками.

Подобный принцип управления может быть реализован в системе стабилизации напряжения в синхронном генераторе при переменной электрической нагрузке на его

выходе. При изменении нагрузки (возмущающего воздействия) чувствительное устройство вырабатывает сигнал в виде напряжения постоянного тока. Это напряжение пропорционально току генератора, который в свою очередь зависит от нагрузки. Выработанный сигнал поступает в цепь возбуждения генератора и изменяет величину тока (управляющее воздействие) в ней таким образом, чтобы вернуть напряжение генератора (выходную величину) к исходному значению.

Неполное знание свойств объекта управления, изменение его параметров вследствие старения элементов и действия неконтролируемых возмущений, а также ряд других факторов затрудняют реализацию систем управления на базе этого принципа.

В разомкнутых системах управляющее воздействие на объект управления задается без учета действительного положения управляемой величины $x(t)$, а только на основании цели управления, характеристик объекта и известных априори либо измеряемых в процессе управления внешних воздействий. Поэтому такое управление является жестким.

Систему управления можно построить таким образом, чтобы точность выполнения алгоритма функционирования обеспечивалась и без измерения возмущений.

Принцип обратной связи (управления по отклонению) заключается в сравнении действительного значения управляемой величины с требуемым (предписанным) ее значением и в управлении объектом в зависимости от результатов этого сравнения. Применение этого принципа приводит к построению автоматических систем с замкнутой цепью воздействий, или систем с отрицательной обратной связью (рис.1.3).

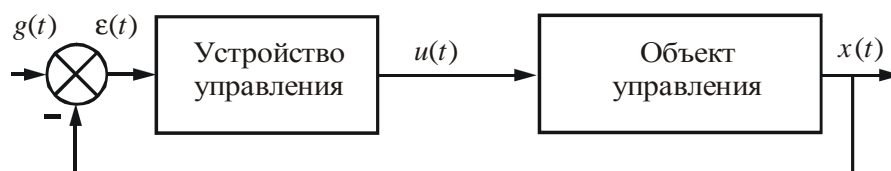


Рис.1.3. Система, реализующая принцип обратной связи

В замкнутой системе управляющие воздействия формируются на основе информации о состоянии объекта, в частности, по отклонению управляемой $x(t)$ величины от заданной $g(t)$ величины. Таким образом, отклонение (рассогласование) $\epsilon(t) = g(t) - x(t)$ используется для формирования воздействия на объект, которое продолжается до тех пор, пока это рассогласование не станет достаточно малым.

Следовательно, обратная связь, по которой поступает в устройство управления текущая информация о состоянии объекта управления или его выходных переменных, - это средство управления при неполной информации, обеспечивающее системе свойство адаптивности (приспособляемости) к изменениям внутренних и внешних условий ее работы.

Принцип обратной связи используется в электронных стабилизаторах напряжений, системах регулирования скорости вращения двигателей, системах автоматической подстройки частоты генератора, системах автоматического измерения угловых координат и т.д.

Достоинства принципа управления по отклонению:

- высокая точность управления и более низкая требовательность к точности изготовления элементов системы (по сравнению с принципом управления по возмущению);
- успешное достижение цели управления при действии многочисленных возмущающих факторов (в том числе и неконтролируемых).

Однако быстродействие замкнутых систем сравнительно низкое, поскольку они реагируют не на причину, а на следствие (т.е. на отклонение управляемой величины от заданного значения), а следовательно, имеют некоторое запаздывание и определенное допустимое отклонение управляемой величины. Автоматические системы, построенные на основе принципа замкнутого управления, получили название систем автоматического регулирования (САР).

Современные автоматические системы высокой точности обычно строятся на основе *принципа комбинированного управления*, сочетающего достоинства принципа управления по отклонению и принципа управления по возмущению. При этом в комбинированной системе (рис.1.4) наряду с замкнутым контуром, образуемым отрицательной обратной связью, имеется цепь компенсации возмущающего воздействия, поддающегося измерению.

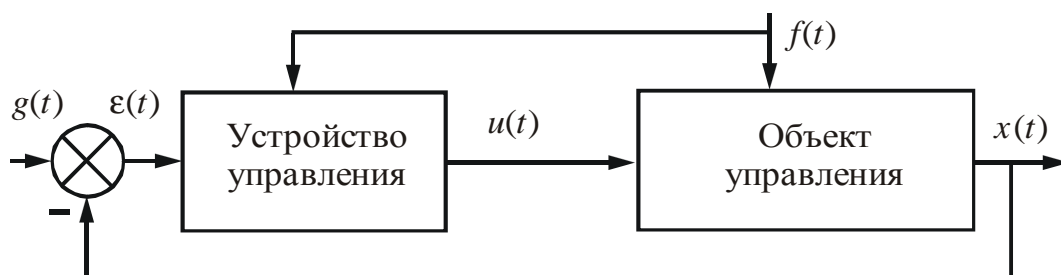


Рис.1.4. Система, действующая на основе принципа комбинированного управления

1.3. Классификация математических моделей динамических систем

При анализе и синтезе систем управления возникает необходимость выбора с определенной степенью приближения адекватных математических моделей, которые позволяли бы определить изменение во времени переменных состояния системы. Остановимся на их классификации по различным признакам.

Методы ТАУ разработаны применительно к различным типовым математическим моделям реальных систем. Математическая модель - это формальное описание системы с помощью математических средств: дифференциальных, интегральных, разностных, алгебраических уравнений и т.д.

По характеру входящих в САУ звеньев системы делятся на линейные и нелинейные. В *линейных* системах между выходной и входной величинами существует линейная функциональная зависимость в статических и динамических режимах работы.

Процессы, происходящие в этих системах, описываются линейными операторными уравнениями (например, линейными дифференциальными уравнениями). Одно из основных свойств всякой линейной системы заключается в том, что если на нее одновременно воздействуют несколько возмущений, то их совместный эффект равен сумме эффектов, вызываемых каждым из возмущений в отдельности. Данный принцип сложения отдельных эффектов называется *принципом суперпозиции*. Системы, для которых не выполняется принцип суперпозиции, относятся к *нелинейным*.

Линейные и нелинейные системы подразделяются на следующие три класса: непрерывные, дискретные и дискретно-непрерывные системы. *Непрерывные* системы описываются дифференциальными уравнениями, *дискретные* - дифференциально-разностными уравнениями, а *дискретно-непрерывные* - обоими видами уравнений.

Как линейные, так и нелинейные динамические системы могут быть стационарными или нестационарными. *Стационарные системы* представляются уравнениями, коэффициенты которых не зависят от времени. Это означает, что свойства системы со временем не изменяются. В *нестационарных системах* хотя бы один параметр зависит от времени.

В свою очередь стационарные и нестационарные системы подразделяются на системы с сосредоточенными и распределенными параметрами. В системах с *сосредоточенными параметрами* каждый параметр сосредоточен в одной точке. Поэтому динамику системы можно описать с помощью дифференциального уравнения в полных производных, т.е. переменные величины будут зависеть только от времени. В системах с *распределенными параметрами* хотя бы один параметр распределен в пространстве (по одной или нескольким пространственным координатам), т.е. изменяется не только во времени, но и в пространстве.

Кроме того, системы каждого из класса или подкласса могут быть подразделены на детерминированные и стохастические. Систему называют *детерминированной*, если приложенные к ней воздействия и параметры модели являются постоянными или детерминированными функциями переменных состояния и времени. Система является *стохастической*, если приложенные к ней воздействия и параметры модели являются случайными функциями или случайными величинами.

Реальные системы могут входить сразу в несколько классов. Приведем примеры моделей систем.

Пример 1. Колебательный контур (рис.1.5) может рассматриваться как линейная непрерывная стационарная детерминированная система с сосредоточенными параметрами:

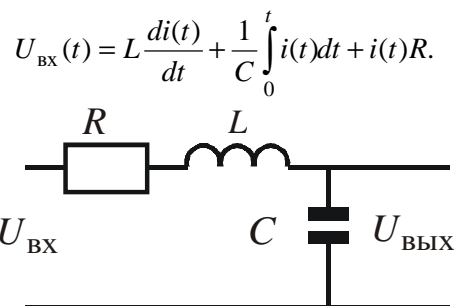


Рис.1.5. Колебательный контур

Пример 2. Канал передачи данных между двумя территориально удаленными ЭВМ представляет длинную линию, которая является линейной непрерывной стационарной детерминированной системой с распределенными параметрами (рис.1.6).

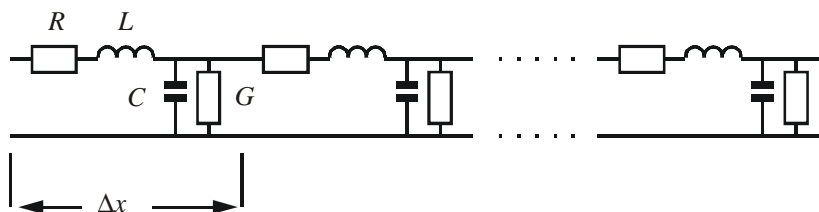


Рис.1.6. Длинная линия - пара длинных проводов

В однородной длинной линии ее параметры распределены вдоль нее равномерно. Разделим длинную линию на малые отрезки длиной Δx , в пределах которых параметры можно считать сосредоточенными в одной точке. Пусть погонные сопротивление, индуктивность, емкость и проводимость имеют значения R, L, C, G (см.

рис.1.6). В каждом сечении линии напряжение $u = u(t, x)$ и ток $i = i(t, x)$ являются функциями времени t и координаты x (удаления конкретного элемента Δx от ее начала):

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} &= -i(t, x)R - L \frac{\partial i(t, x)}{\partial t}; \\ \frac{\partial i(t, x)}{\partial x} &= -Gu(t, x) - C \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}.\end{aligned}$$

Пример 3. Математический маятник (рис.1.7) является нелинейной непрерывной стационарной детерминированной системой с сосредоточенными параметрами.

На рис.1.7 обозначены: m_M , l_M - масса и длина подвеса маятника; $\theta(t)$ - угол отклонения маятника в момент времени t .

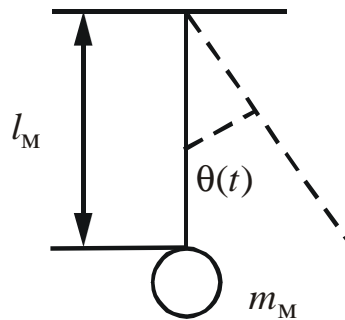


Рис.1.7. Математический маятник

Уравнение движения маятника имеет вид:

$$l_M \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + g \sin \theta(t) = 0,$$

где g - ускорение свободного падения.

Данное уравнение является нелинейным, так как выходная величина $\theta(t)$ находится под знаком синуса. Его решение представляет большие трудности. Однако если предположить, что координата θ в процессе движения мало отклоняется от нуля, то приближенно можно заменить $\sin \theta(t)$ на $\theta(t)$. Получим линейное уравнение маятника:

$$l_M \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + g \theta(t) = 0$$

Механический маятник при малых колебаниях представляет линейную систему.

Следует отметить, что почти все САУ являются нелинейными системами, содержащими как переменные, так и распределенные параметры, причем значения переменных в данный момент могут зависеть не только от текущих, но и от предыдущих значений этих переменных. Однако при выполнении определенных условий многие нелинейные модели можно в первом приближении рассматривать как линейные.

1.4. Типовые входные воздействия, их представление

во временной и комплексной областях, практическое применение

В процессе функционирования на САУ оказывают влияние задающее и возмущающее воздействия. Чтобы охарактеризовать динамические свойства системы, необходимо знать ее реакцию на приложенные воздействия. Во многих случаях внешние воздействия изменяются во времени по сложным и часто заранее неизвестным законам. Определение реакции системы на такие воздействия представляет сложную

задачу. Поэтому первоначально при анализе динамических свойств САУ исследуют типовые воздействия.

В качестве типовых воздействий выбираются такие, реакции на которые достаточно полно характеризуют динамические свойства исследуемой системы. Типовые воздействия должны быть близкими к реальным, при этом реакция на них должна определяться достаточно просто. Рассмотрим типовые входные воздействия более подробно.

В качестве типового воздействия при анализе динамики САУ часто выбирают единичный скачок по амплитуде (координате). Этому воздействию соответствует единичная ступенчатая функция, которая представляет собой мгновенное изменение воздействия от нуля до постоянной величины, равной единице:

$$1(t) = 1 \text{ при } t \geq 0;$$

$$1(t) = 0 \text{ при } t < 0.$$

Изображение по Лапласу этого сигнала имеет вид:

$$Z(s) = L[1(t)] = \frac{1}{s}.$$

Если скачок не единичный, а его амплитуда равна G , то

$$Z(s) = \frac{G}{s}.$$

На рис.1.8 представлены графики входного воздействия типа "скачок по положению" и варианты выходных сигналов для различных систем. В данном случае $x(t)$ является реакцией на "скачок по положению". В силу большой значимости этой функции она получила специальное название "переходная функция" и обозначение

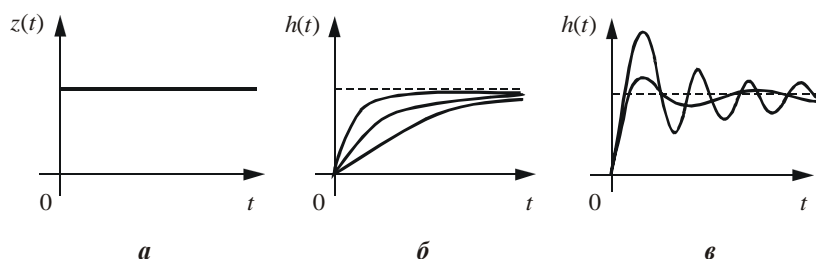


Рис.1.8. Реакция системы на единичную ступенчатую функцию: *а* - реакция входного воздействия типа "скачок по положению"; *б* и *в* - переходные функции соответственно апериодических и колебательных звеньев

Определение. Переходная функция $h(t)$ - это реакция системы на единичную ступенчатую функцию при нулевых начальных условиях.

Если система хорошо обрабатывает единичные ступенчатые воздействия, то она будет хорошо обрабатывать и более сложные сигналы, составленные из ступенчатых воздействий (рис.1.9).

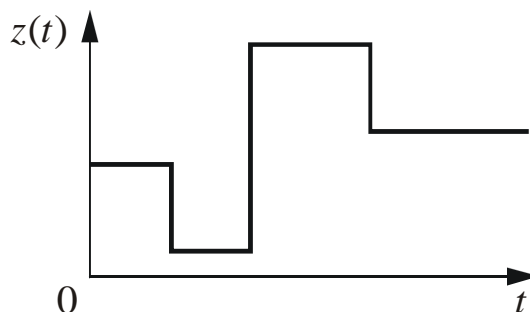


Рис.1.9. Сигнал, составленный из ступенчатых воздействий

Ступенчатыми воздействиями являются изменение нагрузки в электрической цепи при отключении электроприборов, внезапное изменение положения задающей оси в следящих системах, сброс ускорителей или отключение маршевого двигателя ракеты.

По аналогии с сигналом "скачок по положению" можно рассмотреть воздействия "скачок по скорости" и "скачок по ускорению".

Единичный "скачок по скорости": $v(t) = 1$ при $t \geq 0$ и $v(t) = 0$ при $t < 0$ (рис.1.10).

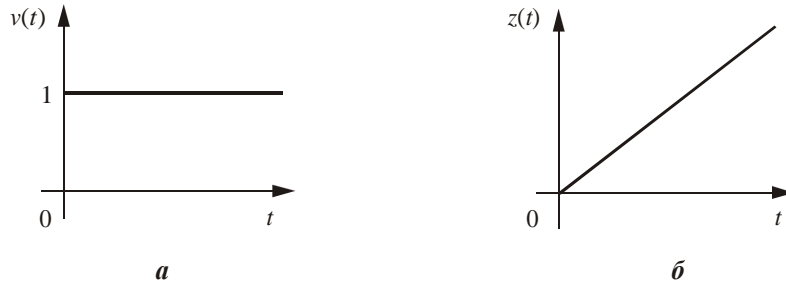


Рис.1.10. Единичный "скачок по скорости" (а); изменение координаты входного сигнала (б)

Изображения по Лапласу единичного и неединичного ($v = \text{const}$) "скачков по скорости" имеют соответственно вид: $Z(s) = \frac{1}{s^2}$ и $Z(s) = \frac{v}{s^2}$. Изменение координаты входного сигнала представляется зависимостью: $z(t) = vt$.

Аналогично вводится единичный "скачок по ускорению". Соответствующие графики представлены на рис.1.11.

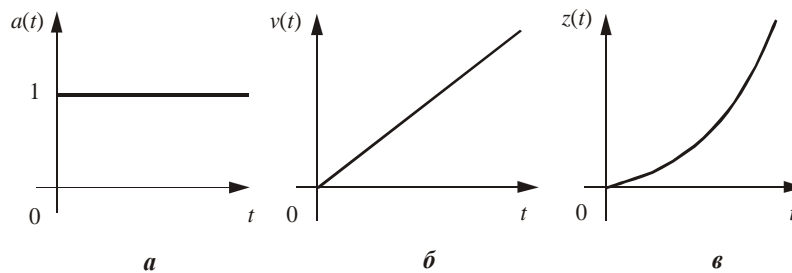


Рис.1.11. Единичный "скачок по ускорению" (а); изменение скорости (б) и координаты (в) входного сигнала

Изображения по Лапласу единичного и неединичного ($a = \text{const}$) "скачков по ускорению" равны: $Z(s) = \frac{1}{s^3}$ и $Z(s) = \frac{a}{s^3}$. При этом изменения скорости и координаты входного сигнала принимают вид: $v(t) = at$ и $z(t) = at^2/2$.

Типовое воздействие может иметь форму δ -функции, т.е. прямоугольного импульса большой амплитуды и весьма малой продолжительности по сравнению с ожидаемым временем переходного процесса. В реальных условиях такое воздействие имеет место, например, при внезапном появлении импульсной помехи на входе приемника телекодировой связи, кратковременном изменении напряжения в сети или попадании летательного аппарата в струю воздуха, движущуюся перпендикулярно траектории его движения.

δ -функцию также называют единичной импульсной функцией, ее математическое представление:

$$\delta(t) = 0 \text{ при } t \neq 0, \\ \delta(t) \rightarrow \infty \text{ при } t \rightarrow 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

причем площадь $\delta(t)$.

Графически точно δ -функцию изобразить невозможно. Условно ее представляют в виде прямоугольного импульса длительностью a и высотой $1/a$ при $a \rightarrow 0$ (рис.1.12). Изображение по Лапласу $\delta(t)$ равно единице.

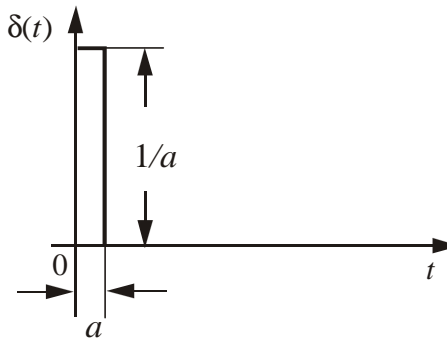


Рис.1.12. Условное представление δ -функции

Реальный сигнал, как правило, имеет значительно более сложную форму. В некоторых случаях его можно представить в виде ряда Фурье

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t)]$$

(где ω_1 - круговая частота первой гармоники) и проанализировать, как обрабатывает система основные гармоники. Тогда в качестве типового сигнала рассматривается гармоническое колебание. Такие сигналы широко применяются при частотных методах исследования САУ.

Однако синусоидальные воздействия различных частот можно подавать не на все объекты. Иногда удобно использовать колебания "прямоугольной формы" (включено - выключено), "треугольной формы" (равномерное открытие и закрытие регулирующего элемента).

Существуют и другие типовые сигналы для систем определенных классов, например, при исследовании систем сопровождения объекта в качестве типового воздействия используют функцию арктангенса (рис.1.13,а):

$$z(t) = \arctg\left(\frac{v}{p} t\right),$$

где v - скорость сопровождаемого объекта; p - курсовой параметр (перпендикуляр на траекторию движения). В случае прямолинейного равномерного движения объекта (рис.1.13,б) $z(t)$ представляет закон изменения угла между направлением на объект и некоторым фиксированным направлением (например, на север).

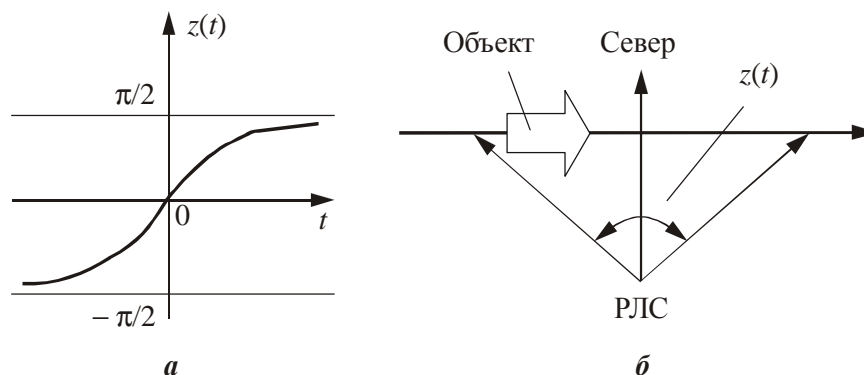


Рис.1.13. Типовой сигнал для систем сопровождения объекта

В отдельных случаях типовые воздействия могут иметь сложную форму, которая определяется экспериментальным путем. Иногда заказчик САУ требует проверки ее работы на специальный заданный входной сигнал, например, представленный на рис.1.14.

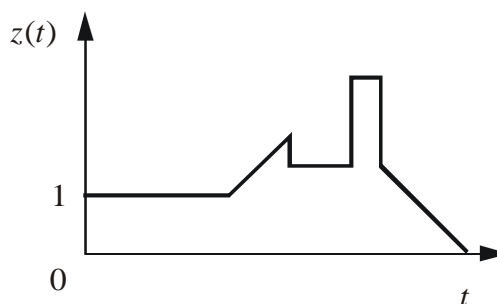


Рис.1.14. Сложное управляющее воздействие

1.5. Линеаризация динамических систем.

Уравнения динамики и статики САУ. Пример линеаризации системы управления

Для анализа САУ необходимо располагать ее математическим описанием (моделью), например, дифференциальным или интегродифференциальным уравнением.

Существует два подхода к решению задачи математического моделирования динамических систем: теоретический и эмпирический. В первом случае математическая модель строится на основании общих законов той дисциплины, с которой связана природа изучаемой задачи. Например, в механике это могут быть законы Ньютона, в теории электрических цепей - законы Кирхгофа и т.д. Во втором случае неизвестны законы, позволяющие составить дифференциальные уравнения. Поэтому принимаются различные предположения (гипотезы) относительно протекающих процессов при малых изменениях параметров - переменных, а дифференциальные уравнения получаются путем предельного перехода. При этом согласование результатов исследования полученного дифференциального уравнения с экспериментальными данными означает, что принятая гипотеза правильно отражает истинное положение вещей. В рассматриваемом случае необязательно знать природу процессов, протекающих в системе; достаточно иметь сведения об их внешних проявлениях.

Обычно САУ представляются нелинейными дифференциальными уравнениями. Причинами нелинейностей являются насыщения, зазоры, ограничения и т.д. Анализ нелинейных систем, как правило, достаточно сложен. Теория нелинейных дифференциальных уравнений, по существу, отсутствует. В аналитической форме можно решать только нелинейные дифференциальные уравнения частных видов невысокого порядка. Напротив, теория линейных дифференциальных уравнений разработана в самом общем виде для уравнений любого порядка. Поэтому для решения математических вопросов, возникающих в приложениях, обращаются в первую очередь к линейным методам. При этом даже нелинейные системы стремятся приближенно рассматривать как линейные.

Существует достаточно большой класс нелинейных систем, которые можно при определенных условиях линеаризовать, т.е. сделать линейными в математическом смысле.

Необходимыми условиями для проведения линеаризации обычно являются:

- отсутствие разрывных неоднозначных или резко изменяющихся характеристик;
- справедливость установленного дифференциального (алгебраического) уравнения, связывающего входные и выходные величины в течение всего времени управления.

Таким образом, сложную задачу интегрирования нелинейных уравнений можно свести к более простой задаче - решению линейных дифференциальных уравнений. В настоящее время известны различные методы линеаризации нелинейных систем, т.е. приближенного представления нелинейных систем практически равноценными линейными.

Широкое распространение получил метод Ляпунова, или метод малых отклонений. Согласно этому методу нелинейная функция раскладывается в ряд Тейлора в окрестности рабочей точки, соответствующей установившемуся процессу, и отбрасываются члены ряда, порядок которых выше первого.

Например, если нелинейная зависимость $y(t) = F[x(t)]$ непрерывна и дифференцируема в некоторой окрестности точки установившегося процесса $x = x_0$, то линеаризация этой зависимости может осуществляться путем ее разложения в ряд Тейлора в этой точке с учетом лишь линейного члена разложения:

$$y(t) = y_0 + \left. \frac{dy}{dx} \right|_0 [x(t) - x_0],$$

где $y_0 = F[x_0]$; $\left. \frac{dy}{dx} \right|_0$ - значение производной $\frac{dy}{dx}$ в точке x_0 .

Чтобы пояснить методику линеаризации реальной физической системы, рассмотрим практический пример. Необходимо получить модель (дифференциальное уравнение) электродвигателя постоянного тока и провести линеаризацию полученной зависимости.

В соответствии со вторым законом Ньютона для вращательного движения уравнение моментов на валу двигателя имеет вид:

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_d - M_c, \quad (1.1)$$

где J - момент инерции подвижной части двигателя - якоря; ω - угловая скорость якоря двигателя; M_d - движущий (крутящий) момент якоря двигателя; M_c - момент сопротивления или момент нагрузки на валу двигателя.

Из курса электротехники для двигателя постоянного тока известно, что $M_c = M_c(\omega)$ - нелинейная функция одной переменной ω ; $M_d = M_d(\omega, I)$ - нелинейная

функция двух переменных: ω и l , где l - управляющее воздействие. Управляющим воздействием для двигателя является изменение напряжения в цепи якоря или в цепи обмотки возбуждения. Причем первый вариант имеет большее распространение из-за лучших статических и динамических характеристик по сравнению со вторым.

Обычно нелинейные зависимости $M_c = M_c(\omega)$ и $M_d = M_d(\omega, l)$ задаются аналитически или в виде графиков, они определяются типом двигателя, характером нагрузки и т.д.

Установившийся режим работы двигателя (его рабочая точка) характеризуется двумя постоянными величинами: номинальным управляющим воздействием l_o и установившейся угловой скоростью ω_o , соответствующей заданному значению l_o .

Для наглядного отображения функциональной зависимости $M_d = M_d(\omega, l)$ требуется два графика: первый график отображает зависимость $M_d = M_d(l)$ при различных фиксированных значениях ω_i , $i = 1 \dots n$, а второй - $M_d = M_d(\omega)$ при различных фиксированных значениях l_i , $i = 1 \dots m$.

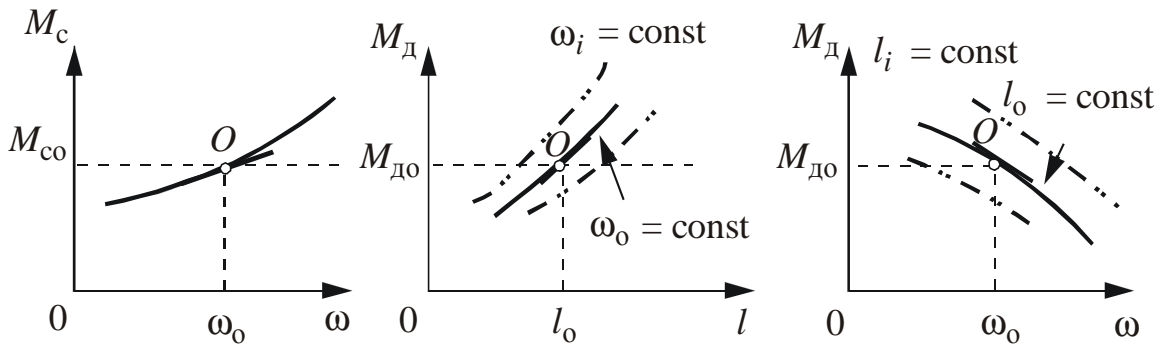


Рис.1.15. Типичные нелинейные механические характеристики двигателя постоянного тока

Нелинейные зависимости $M_c = M_c(\omega)$ и $M_d = M_d(\omega, l)$ представлены на рис.1.15.

Для линеаризации воспользуемся первым методом малых отклонений Ляпунова.

В основу метода положено разложение нелинейных функций M_c и M_d в ряд Тейлора в окрестностях рабочей точки O с координатами ω_o и l_o (см. рис.1.15).

$$M_{c|o} = M_{co} + \left(\frac{\partial M_c}{\partial \omega} \right)_0 \Delta\omega + \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{\partial^2 M_c}{\partial \omega^2} \right)_0 \Delta\omega^2 + \frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{\partial^3 M_c}{\partial \omega^3} \right)_0 \Delta\omega^3 + \dots,$$

где M_{co} - момент нагрузки на валу двигателя на частоте ω_o .

$$M_{d|o} = M_{do} + \left(\frac{\partial M_d}{\partial \omega} \right)_0 \Delta\omega + \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{\partial^2 M_d}{\partial \omega^2} \right)_0 \Delta\omega^2 + \frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{\partial^3 M_d}{\partial \omega^3} \right)_0 \Delta\omega^3 + \dots + \left(\frac{\partial M_d}{\partial l} \right)_0 \cdot \Delta l + \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{\partial^2 M_d}{\partial l^2} \right)_0 \cdot \Delta l^2 + \dots, \quad (1.3)$$

где $M_{до}$ - крутящий момент двигателя на частоте ω_0 при управляющем напряжении l_0 .

Значения всех производных вычисляются в рабочей точке (ω_0, l_0) и, следовательно, являются константами. В соответствии с первым методом малых отклонений Ляпунова при малых значениях приращений $\Delta\omega, \Delta l$ можно пренебречь членами ряда Тейлора с порядком выше первого.

После подстановки линеаризованных зависимостей (1.2) и (1.3) в исходное уравнение (1.1) получим:

$$j \frac{d\omega}{dt} = M_{до} + \left(\frac{\partial M_{д}}{\partial \omega} \right)_0 \Delta\omega - \left(\frac{\partial M_{д}}{\partial l} \right)_0 \Delta l - M_{со} - \left(\frac{\partial M_{с}}{\partial \omega} \right)_0 \Delta\omega. \quad (1.4)$$

Уравнение статики $M_{до} = M_{со}$ описывает поведение двигателя в установившемся режиме. Оно следует из уравнения динамики (1.1), если приравнять нулю производную $\frac{d\omega}{dt}$.

С учетом того, что $M_{до} = M_{со}$, проведем сокращения в уравнении (1.4) и сгруппируем в его левой части члены с $\Delta\omega$:

$$j \frac{d\omega}{dt} + \left[\left(\frac{\partial M_{с}}{\partial \omega} \right)_0 - \left(\frac{\partial M_{д}}{\partial \omega} \right)_0 \right] \Delta\omega = \left(\frac{\partial M_{д}}{\partial l} \right)_0 \Delta l \quad (1.5)$$

В результате имеем линеаризованное уравнение двигателя в абсолютных приращениях (или отклонениях).

Упростим уравнение (1.5). После деления его правой и левой частей на выражение, стоящее в квадратных скобках, получим:

$$\frac{j \frac{d\omega}{dt} + \Delta\omega}{\left[\left(\frac{\partial M_{с}}{\partial \omega} \right)_0 - \left(\frac{\partial M_{д}}{\partial \omega} \right)_0 \right]} = \frac{\left(\frac{\partial M_{д}}{\partial l} \right)_0 \Delta l}{\left[\left(\frac{\partial M_{с}}{\partial \omega} \right)_0 - \left(\frac{\partial M_{д}}{\partial \omega} \right)_0 \right]}. \quad (1.6)$$

Каждый член уравнения имеет определенную размерность. Однако для исследования системы желательно получить уравнение:

- в относительных (нормированных) единицах;
- с безразмерными коэффициентами или с коэффициентами, имеющими размерность времени в степени, равной порядку производной, при которой стоит данный коэффициент.

Введем относительные изменения для входной (управляющей) и выходной (управляемой) величин:

$$\frac{\Delta l}{l_0} = z(t); \quad \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = x(t), \quad \text{причем } \Delta\omega = \Delta\omega(t).$$

Для ω при $\omega_0 = \text{const}$ имеем:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega_0 + \Delta\omega) = \frac{d(\Delta\omega)}{dt}.$$

Для перехода в уравнении (1.6) к величинам $z(t)$ и $x(t)$ выполним следующие действия:

1) пронормируем приращение угловой скорости $\Delta\omega$ величиной ω_0 , для чего разделим правую и левую части уравнения на ω_0 ;

2) пронормируем Δl величиной l_0 , для чего умножим и разделим правую часть уравнения на l_0 . Путем соответствующего группирования членов перейдем к относительным управляющим воздействиям:

$$\frac{j}{\left[\left(\frac{\partial M_c}{\partial \omega}\right)_0 - \left(\frac{\partial M_d}{\partial \omega}\right)_0\right]} \frac{d\left(\frac{\Delta \omega}{\omega_0}\right)}{dt} + \frac{\Delta \omega}{\omega_0} = \frac{\left(\frac{\partial M_d}{\partial l}\right)_0 \frac{l_0}{\omega_0}}{\left[\left(\frac{\partial M_c}{\partial \omega}\right)_0 - \left(\frac{\partial M_d}{\partial \omega}\right)_0\right] \frac{l_0}} \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (1.7)$$

Введем обозначения:

$$x(t) = \frac{\Delta \omega}{\omega_0}; \quad T = \frac{j}{\left[\left(\frac{\partial M_c}{\partial \omega}\right)_0 - \left(\frac{\partial M_d}{\partial \omega}\right)_0\right]};$$

$$k = \frac{\left(\frac{\partial M_d}{\partial l}\right)_0 \frac{l_0}{\omega_0}}{\left[\left(\frac{\partial M_c}{\partial \omega}\right)_0 - \left(\frac{\partial M_d}{\partial \omega}\right)_0\right] \frac{l_0}} \frac{\Delta l}{l_0}; \quad z(t) = \frac{\Delta l}{l_0}.$$

Вычислим производную $x'(t)$:

$$x'(t) = \frac{d[x(t)]}{dt} = \frac{d\left(\frac{\Delta \omega}{\omega_0}\right)}{dt}. \quad (1.9)$$

Подставив (1.8) и (1.9) в (1.7), получим дифференциальное линейаризованное уравнение в относительных величинах, связывающее относительные угловую скорость двигателя $x(t)$ и изменение управляющего воздействия $z(t)$:

$$Tx'(t) + x(t) = kz(t). \quad (1.10)$$

Коэффициент T называется постоянной времени двигателя (объекта регулирования) и имеет размерность времени (с). Он определяет быстродействие двигателя, т.е. как быстро устанавливается заданная угловая скорость при изменении управляющего воздействия.

Коэффициент k носит название передаточного коэффициента и является безразмерной величиной. Он характеризует зависимость между изменением выходной величины $x(t)$ и управляющим воздействием $z(t)$ в установившемся режиме.

Следует подчеркнуть, что дифференциальное уравнение (1.10) описывает динамику линейаризованной системы управления двигателем в окрестности рабочей точки (ω_0, l_0) . Если в исходной нелинейной системе (1.1) изменится рабочая точка, то это вызовет изменение коэффициентов T и k .

Рассмотрим геометрический смысл линейаризации (рис.1.16). Линейаризация нелинейной зависимости двух переменных означает:

- замену исходной кривой AB отрезком ее касательной $A'B'$ в точке O' , соответствующей установившемуся режиму;
- параллельный перенос начала координат в точку O' .

1.6. Частотные характеристики линейных динамических систем

В дальнейшем будем рассматривать стационарные линейные динамические системы (ЛДС), т.е. системы, которые представляются следующим дифференциальным уравнением:

$$\begin{aligned} a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = \\ = b_m z^{(m)}(t) + b_{m-1} z^{(m-1)}(t) + \dots + b_2 \ddot{z}(t) + b_1 \dot{z}(t) + b_0 z(t), \end{aligned} \quad (1.11)$$

где $x(t)$ и $z(t)$ - соответственно выходной и входной сигналы, причем выполняется условие физической реализуемости $n \geq m$.

В операторной форме дифференциальное уравнение (1.11) имеет вид:

$$A(p)x(t) = B(p)z(t),$$

где $A(p)$, $B(p)$ - дифференциальные операторы левой и правой частей уравнения;

$$A(p) = a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0; \quad B(p) = b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0;$$

$$p = \frac{d}{dt} - \text{оператор дифференцирования.}$$

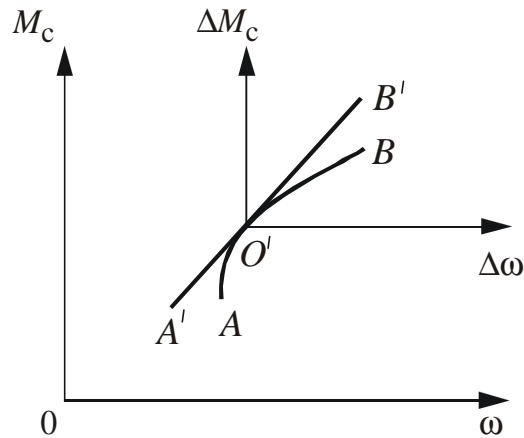


Рис.1.16. Графическая интерпретация процесса линеаризации динамической системы

Для математического описания ЛДС широко используются частотные характеристики, позволяющие судить о реакции системы на входные гармонические воздействия различных частот.

Пусть на вход ЛДС поступает гармоническое воздействие в виде бесконечной косинусоиды: $z(t) = Z \cos(\omega t)$. Определим $x(t)$ - реакцию системы на этот сигнал.

Известно, что согласно формуле Эйлера $e^{+j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$, поэтому $\cos \omega t = \frac{e^{+j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$ и входное воздействие можно записать в следующем виде:

$$z(t) = Z \cos \omega t = \frac{Z}{2} e^{+j\omega t} + \frac{Z}{2} e^{-j\omega t} = z_1(t) + z_2(t)$$

Для всех ЛДС справедлив принцип суперпозиции: реакция системы на несколько одновременных входных воздействий равна сумме реакций на каждое воздействие (рис.1.17).

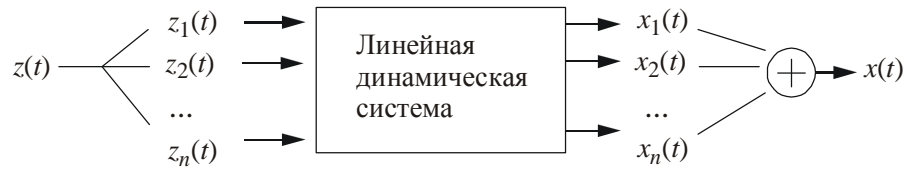


Рис.1.17. К пояснению принципа суперпозиции

Отсюда следует практический вывод: если на вход ЛДС поступает сложный сигнал, который можно представить в виде совокупности нескольких простых сигналов $z_i(t)$, то результирующим сигналом на выходе системы будет сумма реакций этой системы на каждую составляющую $x_i(t)$.

$$z(t) = \sum_{i=1}^N z_i(t)$$

Другими словами, если на вход ЛДС подается сигнал

$$x(t) = \sum_{i=1}^N x_i(t)$$

выходе будет сигнал, где N - количество компонентов, на которые раскладывается входной сигнал $z(t)$. Для частного случая, когда входной сигнал имеет вид $z(t) = z_1(t) + z_2(t)$, выходной сигнал вычисляется по формуле: $x_i(t) = x_1(t) + x_2(t)$. Определим эффекты, создаваемые каждым из двух экспоненциальных воздействий, на которые разложен исходный входной сигнал.

Для ЛДС справедливо следующее правило: реакцию системы на входное воздействие можно вычислить путем умножения этого сигнала на функцию параметров системы:

$$x_1(t) = z_1(t)W,$$

где W - некоторая функция параметров системы. Например, для радиоэлектронной системы функция W зависит от номиналов резисторов, конденсаторов, индуктивностей, составляющих данную систему. При этом для стационарной системы W не является функцией времени ($W \neq W(t)$).

Продифференцируем m раз входной сигнал $z_1(t) = \frac{Z}{2} e^{+j\omega t}$ и n раз выходной

сигнал $x_1(t) = \frac{Z}{2} e^{+j\omega t} W$, в результате получим:

$$\frac{d}{dt} z_1(t) = \frac{Z}{2} (j\omega) e^{+j\omega t}; \quad \frac{d}{dt} x_1(t) = \frac{Z}{2} (j\omega) e^{+j\omega t} W;$$

$$\frac{d^2}{dt^2} z_1(t) = \frac{Z}{2} (j\omega)^2 e^{+j\omega t}; \quad \frac{d^2}{dt^2} x_1(t) = \frac{Z}{2} (j\omega)^2 e^{+j\omega t} W;$$

....

....

$$z_1^{(m)}(t) = \frac{Z}{2} (j\omega)^m e^{+j\omega t}; \quad x_1^{(n)}(t) = \frac{Z}{2} (j\omega)^n e^{+j\omega t} W.$$

После подстановки выражений для входного и выходного сигналов и их производных в дифференциальное уравнение (1.11) получим:

$$\begin{aligned} & \left[a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_2 (j\omega)^2 + a_1 (j\omega) + a_0 \right] \frac{Z}{2} e^{+j\omega t} \cdot W = \\ & = \left[b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_2 (j\omega)^2 + b_1 (j\omega) + b_0 \right] \frac{Z}{2} e^{+j\omega t}. \end{aligned}$$

Откуда

$$W = W(j\omega) = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_2 (j\omega)^2 + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_2 (j\omega)^2 + a_1 (j\omega) + a_0},$$

причем для реальных динамических систем $m \leq n$.

Если в числителе и знаменателе раскрыть скобки, то получим:

$$W(j\omega) = \frac{A(\omega) + jB(\omega)}{C(\omega) + jD(\omega)},$$

$$\text{где } A(\omega) = b_0 - b_2\omega^2 + b_4\omega^4 - b_6\omega^6 + \dots, B(\omega) = b_1\omega - b_3\omega^3 + b_5\omega^5 \dots;$$

$$C(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - a_6\omega^6 + \dots, D(\omega) = a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 \dots,$$

причем $A(\omega)$ и $C(\omega)$ - четные функции; $B(\omega)$ и $D(\omega)$ - нечетные.

$W(j\omega)$ носит название амплитудно-фазовой частотной характеристики или просто амплитудно-фазовой характеристики (АФХ), иногда ее называют комплексной частотной характеристикой (КЧХ). Неправильно называть $W(j\omega)$ передаточной функцией, так как данный термин закреплен в ТАУ за другим важным понятием.

С целью упрощения записи формул введем обозначения: $A = A(\omega)$; $B = B(\omega)$; $C = C(\omega)$; $D = D(\omega)$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{A + jB}{C + jD} = \frac{(A + jB)(C - jD)}{(C + jD)(C - jD)} = \\ &= \frac{AC + BD}{C^2 + D^2} + j \frac{BC - AD}{C^2 + D^2} = U(\omega) + jV(\omega) = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \end{aligned}$$

где $U(\omega) = \operatorname{Re}[W(j\omega)]$ - вещественная частотная характеристика ЛДС;
 $V(\omega) = \operatorname{Im}[W(j\omega)]$ - мнимая частотная характеристика.

Функция $U(\omega)$ является четной в силу того, что

$$U(-\omega) = \operatorname{Re}[W(-j\omega)] = \operatorname{Re}[W(j\omega)] = U(\omega).$$

Здесь используются следующие соотношения:

- произведение двух четных функций является четной функцией;
- произведение двух нечетных функций является четной функцией;
- произведение нечетной и четной функции дает нечетную функцию.

Функция $V(\omega)$ - нечетная, так как

$$V(-\omega) = \operatorname{Im}[W(-j\omega)] = -\operatorname{Im}[W(j\omega)] = -V(\omega).$$

В полярных координатах на комплексной плоскости АФХ имеет:

$$W(j\omega) = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}.$$

Величина $H(\omega)$ называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) и определяется по формуле: $H(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$. Так как $H(\omega) = H(-\omega)$, то АЧХ является четной.

Функция $\varphi(\omega)$ называется фазово-частотной характеристикой (ФЧХ)

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)},$$

если $U(\omega) > 0$ (первый и четвертый квадранты). Формулы для вычисления $\varphi(\omega)$ для различных квадрантов представлены на рис.1.18.

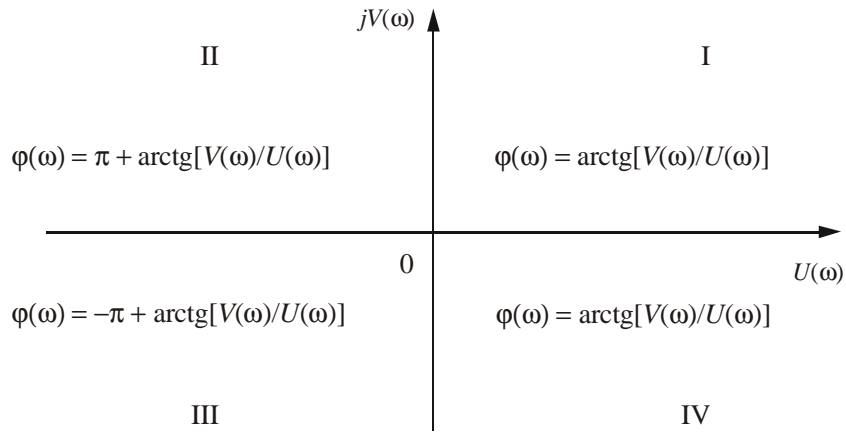


Рис.1.18. К определению ФЧХ в зависимости от номера квадранта

Функция $\varphi(\omega)$ является нечетной, так как $\varphi(\omega) = -\varphi(-\omega)$.

На комплексной плоскости АФХ определяет вектор, модуль которого равен $H(\omega)$, а аргумент $\varphi(\omega)$ - угол, образованный этим вектором с действительной положительной полуосью.

Кривая, которую прочерчивает конец вектора $W(j\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ (иногда от $-\infty$ до $+\infty$), называется годографом, или АФХ системы (рис.1.19).

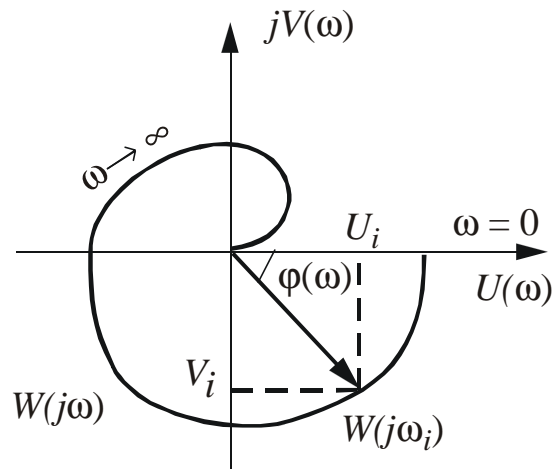


Рис.1.19. Годограф динамической системы

Ранее было показано, что вещественная частотная характеристика является четной функцией, а мнимая частотная характеристика - нечетной функцией частоты. В силу этого

годограф, построенный для положительных значений ω , является зеркальным отображением годографа, построенного для отрицательных значений ω .

Таким образом, ЛДС могут представлять пять частотных характеристик, между которыми существуют следующие очевидные зависимости:

- 1) АФХ или КЧХ

$$W(j\omega) = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = U(\omega) + jV(\omega);$$

- 2) вещественная частотная характеристика

$$U(\omega) = H(\omega)\cos\varphi(\omega);$$

- 3) мнимая частотная характеристика

$$V(\omega) = H(\omega) \sin \varphi(\omega);$$

4) АЧХ

$$H(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)};$$

5) ФЧХ

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \arg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} \text{ при } U(\omega) > 0.$$

Частотные свойства ЛДС будут полностью определены, если известна функция $W(j\omega)$ или соответствующие пары характеристик: $U(\omega)$, $V(\omega)$ или $H(\omega)$, $\varphi(\omega)$.

Наиболее часто используются АФХ, а также АЧХ и ФЧХ, так как эти характеристики имеют ярковыраженный физический смысл.

Еще раз подчеркнем, что введенные частотные характеристики относятся к стационарной ЛДС и не зависят от времени.

Зная, что $W = W(j\omega) = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$, определим реакцию ЛДС на сигнал

$z(t) = Z \cos \omega t$. Ранее было показано, что $z(t) = z_1(t) + z_2(t)$, причем $z_1(t) = \frac{Z}{2} e^{j\omega t}$ и

$z_2(t) = \frac{Z}{2} e^{-j\omega t}$. Вычислим соответствующие составляющие выходного сигнала $x_1(t)$ и $x_2(t)$ линейной динамической системы:

$$x_1(t) = z_1(t)W = \frac{Z}{2} e^{j\omega t} H(\omega) e^{j\varphi(\omega)};$$

$$x_2(t) = z_2(t)W = \frac{Z}{2} e^{-j\omega t} H(-\omega) e^{j\varphi(-\omega)} = \frac{Z}{2} e^{-j\omega t} H(\omega) e^{-j\varphi(\omega)},$$

здесь учитывается, что $H(-\omega) = H(\omega)$, $\varphi(-\omega) = -\varphi(\omega)$.

Применив принцип суперпозиции, получим общий (суммарный) выходной сигнал линейной динамической системы:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) = ZH(\omega) \frac{e^{j\omega t} e^{j\varphi(\omega)} + e^{-j\omega t} e^{-j\varphi(\omega)}}{2} = \\ &= ZH(\omega) \frac{e^{j[\omega t + \varphi(\omega)]} + e^{-j[\omega t + \varphi(\omega)]}}{2} = ZH(\omega) \cos[\omega t + \varphi(t)]. \end{aligned}$$

Можно сделать следующий вывод: если на вход ЛДС подать гармонический сигнал определенной частоты и определенной амплитуды, то на выходе также получим гармонический сигнал той же частоты, но его амплитуда изменится в $H(\omega)$ раз и выходной сигнал сдвинется по фазе на угол $\varphi(\omega)$.

Графики входного $z(t)$ и выходного $x(t)$ сигналов представлены на рис.1.20.

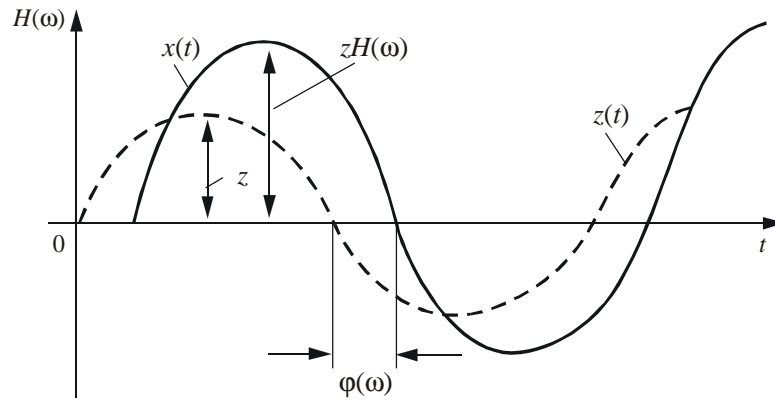


Рис.1.20. Изменение амплитуды и фазы выходного сигнала относительно входного сигнала при прохождении через линейную динамическую систему

1.7. Экспериментальное определение частотных характеристик линейной динамической системы

Амплитудная и фазовая частотные характеристики ЛДС могут быть построены на основании экспериментальных данных. Если система устойчивая, то переходные процессы с течением времени затухают. Поэтому возможна постановка эксперимента по определению амплитуды и фазы колебаний в установившемся режиме на выходе системы в зависимости от частоты входных сигналов.

Для этого на вход исследуемой системы подают гармонический сигнал с постоянной амплитудой, фиксированными фазой и частотой, которую при проведении эксперимента можно изменять:

$$z_i(t) = A \sin[\omega_i t + \varphi], \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Использование входных сигналов одной амплитуды снижает трудоемкость эксперимента и облегчает интерпретацию полученных результатов. Для упрощения последующего изложения примем фазу φ входных колебаний равной нулю.

При постоянной амплитуде и нулевой фазе входных сигналов амплитуда и фаза установившихся колебаний на выходе линейной системы зависят только от частоты входных колебаний:

$$x_i(t) = A_i(\omega_i) \sin[\omega_i t + \varphi_i(\omega_i)], \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Будем последовательно увеличивать частоту входного сигнала ω_i , начиная с нуля. Для каждого значения входной частоты ω_i можно наблюдать амплитуду A_i и фазовый сдвиг φ_i выходного сигнала.

$$H(\omega_i) = \frac{A_i}{A}, \quad \text{а}$$

Найдем отношение амплитуд выходного и входного сигналов также сдвиг фазы выходного сигнала φ_i относительно входного в зависимости от частоты ω_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Результаты расчетов $\frac{A_i}{A}$ и φ_i для каждой фиксированной частоты ω_i представим в виде табл.1.1.

Таблица 1.1

Обработанные результаты эксперимента

$A = \text{const}$	ω_1	ω_2	\dots	ω_n
A_i	A_1	A_2	\dots	A_n
$H(\omega_i) = \frac{A_i}{A}$	H_1	H_2	\dots	H_n
$\varphi(\omega_i)$	φ_1	φ_2	\dots	φ_n

Табличные данные изобразим в виде графиков. Отношение амплитуды выходного сигнала к амплитуде входного и сдвиг фаз между ними в зависимости от частоты представляют собой соответственно АЧХ и ФЧХ системы.

Сначала по данным, зафиксированным в таблице, нанесем отдельные точки графиков. Затем точки соединим ломаными линиями. После чего осуществим аппроксимацию этих линий плавными кривыми. Для этого используем один из известных методов сглаживания, например метод наименьших квадратов, сплайны и т.д. Полученные графики АЧХ и ФЧХ могут иметь вид, представленный на рис.1.21.

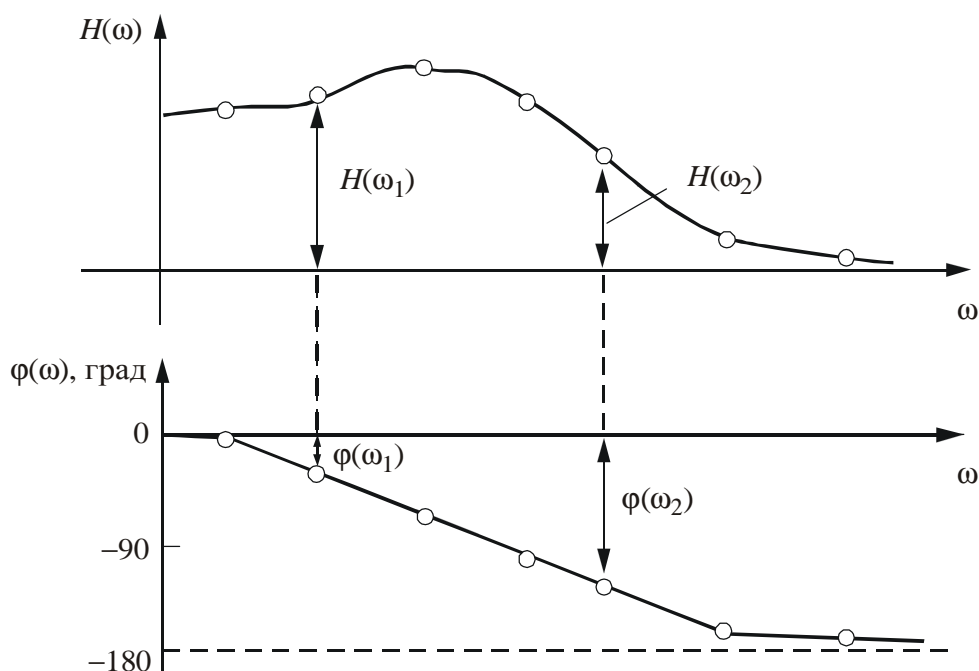


Рис.1.21. Графическое представление результатов эксперимента

График АФХ (годограф) можно строить двумя способами (в прямоугольной или полярной системе координат), используя для этого соответственно пары частотных характеристик: $H(\omega)$, $\varphi(\omega)$ либо $U(\omega)$, $V(\omega)$. В нашем случае удобнее воспользоваться $H(\omega)$, $\varphi(\omega)$. График АФХ системы показан на рис.1.22, причем угол $\varphi(\omega_i)$ показан отрицательным, так как в реальных системах вынужденные колебания имеют отставание по фазе относительно задающих воздействий.

1.8. Передаточная функция линейной динамической системы и ее свойства

Поведение линейной динамической системы можно описать следующим дифференциальным уравнением:

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \dots + a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = \\ = b_m z^{(m)}(t) + b_{m-1} z^{(m-1)}(t) + \dots + b_2 \ddot{z}(t) + b_1 \dot{z}(t) + b_0 z(t).$$

Найдем преобразование Лапласа для обеих частей уравнения при нулевых начальных условиях:

$$[a_n s^n + a_{n-1} s^{(n-1)} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0] X(s) = \\ = [b_m s^m + b_{m-1} s^{(m-1)} + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0] Z(s),$$

где $X(s)$ - преобразование Лапласа выходного сигнала системы; $Z(s)$ - преобразование Лапласа входного сигнала.

$$W(s) = \frac{X(s)}{Z(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{(m-1)} + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{(n-1)} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}.$$

Определение. Передаточной функцией ЛДС называется отношение преобразования Лапласа выходной величины системы к преобразованию Лапласа входной величины при нулевых начальных условиях.

Следует отметить, что при ненулевых начальных условиях передаточная функция не является исчерпывающей характеристикой ЛДС. В этом случае по ней нельзя восстановить дифференциальное уравнение системы и получить описание протекающих в ней процессов при произвольных начальных значениях.

Рассмотрим основные свойства передаточной функции ЛДС.

1. Передаточная функция ЛДС представляет собой дробно-рациональную функцию, причем в реальной системе порядок числителя не превышает порядок знаменателя, т.е. $m \leq n$. Это условие называется условием физической реализуемости системы. Оно означает, что нельзя создать систему, передаточная функция которой не удовлетворяла бы этому условию. Таким образом, степень полинома знаменателя передаточной функции определяет порядок системы.

2. В реальной ЛДС коэффициенты передаточной функции a_i и b_i отражают свойства ее параметров и поэтому являются вещественными величинами.

3. Корни полинома числителя передаточной функции называются нулями, а корни полинома знаменателя - полюсами. Если передаточная функция имеет комплексные нули или полюсы, то они являются комплексно-сопряженными.

Действительно, так как коэффициенты a_i и b_i передаточной функции вещественные числа, то невещественные нули и полюсы могут быть только комплексно-сопряженными величинами.

4. При анализе динамических систем нули и полюсы (их называют особенностями передаточной функции) удобно изображать точками на комплексной плоскости s (рис.1.23).

Если полюсы передаточной функции расположены в левой части комплексной плоскости (как показано на рис.1.23), то это свидетельствует об *устойчивости* системы.

Если передаточная функция системы не содержит особенностей (нулей и полюсов) в правой части комплексной плоскости, то систему называют *минимально-фазовой*, в противном случае ее считают *неминимально-фазовой*.

Рассмотрим связь передаточной функции линейной динамической системы с ее АФХ. Для формального перехода от передаточной функции $W(s)$ к АФХ производят замену s на $j\omega$, соответствующая замена справедлива и для обратного перехода.

$$W(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{Z(j\omega)} = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{(m-1)} + \dots + b_2 (j\omega)^2 + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{(n-1)} + \dots + a_2 (j\omega)^2 + a_1 (j\omega) + a_0},$$

причем $m \leq n$.

Можно дать трактовку $W(j\omega)$, отличную от приведенной выше. Представим передаточную функцию в виде отношения двух преобразований Лапласа:

$$W(s) = \frac{x(s)}{z(s)} = \frac{\int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt}{\int_0^{\infty} z(t)e^{-st} dt}.$$

Произведем замену $s = j\omega$, в результате получим:

$$W(j\omega) = \frac{x(j\omega)}{z(j\omega)} = \frac{\int_0^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt}{\int_0^{\infty} z(t)e^{-j\omega t} dt}.$$

Интегралы в числителе и знаменателе последней формулы представляют односторонние изображения по Фурье выходного и входного сигналов, которые являются частным случаем преобразования Лапласа при $s = j\omega$. Таким образом, АФХ - это отношение изображений выходного и входного сигналов по Фурье. Подчеркнем, что в отличие от АФХ передаточная функция существует и для неустойчивых систем. Действительно, переходной процесс в неустойчивых звеньях представляется функцией вида e^{at} при $a > 1$, для которой не выполняется условие абсолютной интегрируемости и, следовательно, не применимо преобразование Фурье.

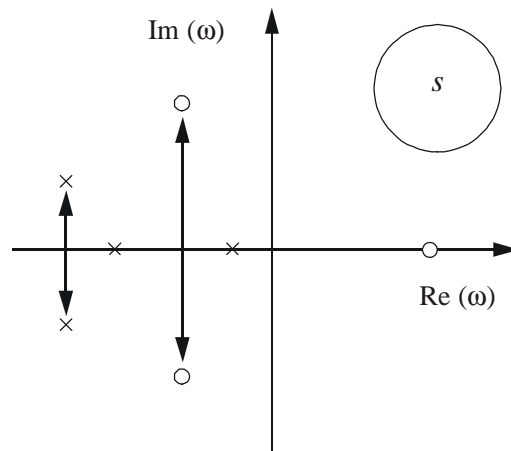


Рис.1.23. Графическое представление корней передаточной функции на комплексной плоскости: × - полюсы; o - нули

Глава 2. Математические модели типовых звеньев автоматических систем

2.1. Общая характеристика типовых звеньев и их классификация

Динамическая система состоит из динамических элементов. Динамический элемент - это устройство любого физического вида (механического, электрического, электромеханического и т.д.) и конструктивного оформления (блок, модуль, плата и т.д.), описываемое определенным дифференциальным уравнением.

Динамические элементы, встречающиеся на практике, чрезвычайно многообразны, а структуры, построенные на их основе, сложны. Это вынуждает при исследовании разделять систему на отдельные звенья и в дальнейшем изучать свойства системы по совокупности свойств звеньев. Так как ТАУ изучает динамические свойства систем, то декомпозицию систем на звенья следует проводить по их динамическим признакам, т.е. по виду дифференциальных уравнений.

Часть САУ, которая обладает определенными динамическими свойствами, называется *звеном*. Любая часть САУ может быть рассмотрена как некоторое звено, преобразующее входной сигнал в выходной. Например, если в качестве звена рассматривается объект регулирования, то входными сигналами являются управляющие воздействия и внешние возмущения, а выходными - регулируемые величины. Звено принято изображать в виде прямоугольника, внутри которого записывается его передаточная функция (рис.2.1).

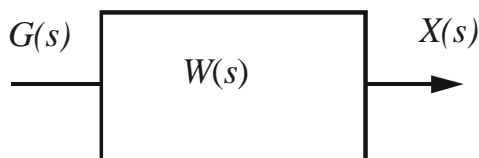


Рис.2.1. Звено САУ с передаточной функцией $W(s)$

Звенья, у которых сигналы (воздействия) передаются только в одном направлении - со входа на выход, - называются звеньями направленного действия.

Звенья, у которых сигналы передаются в обоих направлениях, называются звеньями ненаправленного действия. Примером звеньев ненаправленного действия может служить длинная линия, в которой, как известно из курса физики, наблюдается отражение входных сигналов.

Направление передачи сигнала в звене обычно указывается стрелками у входных и выходных величин или соответствующим знаком внутри прямоугольника (рис.2.2).

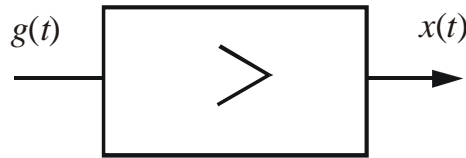


Рис.2.2. Звено направленного действия

Отличительная особенность звеньев направленного действия заключается в том, что при соединении они не оказывают влияния друг на друга, сохраняя свои прежние свойства.

Реальные динамические системы состоят из многих устройств, причем передаточная функция каждого из них может иметь высокий порядок. Следовательно, передаточная функция всей системы будет иметь еще более высокий порядок. Расчет таких систем с помощью обычных методов теории дифференциальных уравнений весьма сложен. Поэтому передаточную функцию сложной динамической системы желательно представить в виде произведения передаточных функций типовых звеньев, характеристики которых не только весьма просты, но и хорошо исследованы.

Под типовым звеном в ТАУ понимают элемент (или искусственно выделяемую часть автоматической системы), динамические процессы в котором представляются дифференциальным уравнением не выше второго порядка.

Рассмотрим передаточную функцию стационарной линейной системы, выраженной как отношение полиномов с действительными коэффициентами:

$$W(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{(m-1)} + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{(n-1)} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}, \quad m \leq n. \quad (2.1)$$

Найдем корни числителя и знаменателя и представим $W(s)$ в виде

$$W(s) = \frac{b_m (s - d_1)(s - d_2) \dots (s - d_m)}{a_n (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_m)}. \quad (2.2)$$

Корни могут быть нулевыми, вещественными и комплексными попарно-сопряженными. Для удобства дальнейшего использования сведения о количестве корней различного вида $W(s)$ представим в виде табл.2.1.

Таблица 2.1

Корни передаточной функции $W(s)$				
Передаточная функция $W(s)$	Количество корней			Общее количество корней
	"нулевых"	вещественных	комплексных	
Числитель	q	r	g	m
Знаменатель	l	k	u	n

Приведем передаточную функцию $W(s)$ к стандартной форме записи, для чего предварительно рассмотрим форму записи множителей, соответствующих различным типам корней.

Каждый нулевой корень дает дополнительный множитель s в числителе и знаменателе $W(s)$. Применительно к табл.2.1 имеем множитель

$$\frac{s^q}{s^l} = \frac{1}{s^v}.$$

В реальных системах $l \geq g$, поэтому $v = l - q \geq 0$, где v - порядок астатизма, как правило, $v \leq 3$. Приняты следующие названия систем в зависимости от значения v : при $v = 0$ система статическая; при $v = 1$ система астатическая первого порядка; при $v = 2$ система астатическая второго порядка и т.д.

Вещественному корню α_i (обоих знаков) в числителе передаточной функции соответствует запись:

$$(s - d_i) = (s \pm \alpha_i) = \alpha_i \left(\frac{1}{\alpha_i} s \pm 1 \right) = \frac{1}{T_i} (T_i s \pm 1),$$

где $T_i = 1/\alpha_i$ - постоянная времени. Таким образом, каждый действительный корень дает линейный двучлен относительно переменной s . Аналогичное утверждение имеет место для вещественных корней λ_i в знаменателе передаточной функции:

$$(s - \lambda_i) = \frac{1}{T_i^*} (T_i^* s \pm 1).$$

Рассмотрим пару комплексно-сопряженных корней числителя. Каждая пара комплексно-сопряженных корней образует квадратный трехчлен с действительными коэффициентами относительно s :

$$\begin{aligned} (s - d_i)(s - d_{i+1}) &= [s \pm (\alpha_i + j\beta_i)][s \pm (\alpha_i - j\beta_i)] = \\ &= s^2 \pm 2\alpha_i s + (\alpha_i^2 + \beta_i^2) = \\ &= (\alpha_i^2 + \beta_i^2) \left[\frac{1}{\alpha_i^2 + \beta_i^2} s^2 \pm \frac{2\alpha_i}{\alpha_i^2 + \beta_i^2} s + 1 \right] = \frac{1}{\tau_i^2} (\tau_i^2 s^2 \pm 2\xi_i \tau_i s + 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_i &= \frac{\alpha_i}{\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}} \\ \text{где } \tau_i &= \frac{1}{\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}} \end{aligned}$$

- декремент затухания (иногда его называют относительный декремент затухания); τ_i - постоянная времени.

Аналогичные выкладки можно воспроизвести и для пары комплексно-сопряженных корней знаменателя.

Окончательно передаточная функция $W(s)$ (с учетом количества корней разного типа в числителе и знаменателе) примет следующий вид:

$$W(s) = \frac{\prod_{i=1}^c k_i \cdot \prod_{i=1}^r (T_i s \pm 1) \cdot \prod_{i=1}^{g/2} (\tau_i^2 s^2 + 2\xi_i \tau_i s + 1)}{S^v \cdot \prod_{i=1}^k (T_i^* s \pm 1) \cdot \prod_{i=1}^{u/2} (\tau_i^{*2} s^2 + 2\xi_i^* \tau_i^* s + 1)}.$$

При этом общее количество постоянных коэффициентов определяется общим количеством вещественных корней и пар комплексно-сопряженных корней числителя и знаменателя $W(s)$ и составляет: $c = 2 + r + k + g/2 + u/2$. Первое слагаемое, равное двум, соответствует коэффициентам a_n и b_m из выражения (2.2).

Из анализа $W(s)$ следует, что в зависимости от значения (наличия или отсутствия) тех или иных коэффициентов a_i или b_i в выражении передаточной функции $W(s)$ существует 11 типов звеньев.

Рассмотрим их передаточные функции более подробно.

1. $W(s) = k$ - безынерционное (усилительное, пропорциональное) звено.
2. $W(s) = ks$ - идеальное дифференцирующее звено (не существует, так как порядок полинома числителя передаточной функции больше порядка полинома ее знаменателя).
3. $W(s) = k/s$ - идеальное интегрирующее звено.
4. $W(s) = k(Ts + 1)$ - дифференцирующее звено первого порядка (форсирующее звено), самостоятельно не существует.
5. $W(s) = \frac{k}{Ts + 1}$ - апериодическое (инерционное) звено.
6. $W(s) = k(T^2s^2 + 2\xi Ts + 1)$ - дифференцирующее звено второго порядка (не существует, так как порядок полинома числителя передаточной функции больше порядка полинома ее знаменателя).
7. $W(s) = \frac{k}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1}$ - колебательное звено.

Эти семь передаточных функций на практике встречаются наиболее часто. Они относятся к минимально-фазовым звеньям.

Определение. Звено называют *минимально-фазовым*, если все нули и полюсы его передаточной функции имеют отрицательные или равные нулю вещественные части.

Минимально-фазовые звенья отличаются минимальным отставанием по фазе при любом значении частоты относительно других звеньев, обладающих той же АЧХ.

Определение. Звено называют *неминимально-фазовым*, если хотя бы один нуль или полюс его передаточной функции имеет положительную вещественную часть.

Формальным признаком неминимально-фазового звена является появление знака "-" в записи его передаточной функции. Если знак "-" стоит и в знаменателе $W(s)$, то звено является также неустойчивым.

8. $W(s) = k(Ts - 1)$ - неминимально-фазовое дифференцирующее звено первого порядка.

9. $W(s) = \frac{k}{Ts - 1}$ - неминимально-фазовое неустойчивое апериодическое звено.

10. $W(s) = k(T^2s^2 - 2\xi Ts + 1)$ - неминимально-фазовое дифференцирующее звено второго порядка.

11. $W(s) = \frac{k}{T^2s^2 - 2\xi Ts + 1}$ - неминимально-фазовое неустойчивое колебательное звено.

Типовое звено однозначно находится по его дифференциальному уравнению или по передаточной функции и является звеном направленного действия. Свойства звеньев в статике определяются статическими, а в динамике - временными и частотными характеристиками.

Образно говоря, звенья - это "кирпичики", из которых состоят автоматические системы. Поэтому одной из задач ТАУ является изучение свойств и возможностей типовых звеньев.

Если имеется сложная САУ, включающая несколько типовых звеньев с известными передаточными функциями, и необходимо найти ее $H(\omega)$ и $\varphi(\omega)$, то можно

воспользоваться следующим приемом. Представим $W(s)$ в виде совокупности передаточных функций типовых звеньев:

$$W(s) = \frac{\prod_{i=1}^m W_i(s)}{\prod_{k=1}^n W_k^*(s)}.$$

Перейдем от передаточной функции системы к ее АФХ путем замены $s = j\omega$:

$$W(j\omega) = \frac{\prod_{i=1}^m W_i(j\omega)}{\prod_{k=1}^n W_k^*(j\omega)}.$$

Представим АФХ сложной системы и ее отдельных звеньев в полярной системе координат:

$$H(\omega) \exp[i\varphi(\omega)] = \frac{\prod_{i=1}^m H_i(\omega) \cdot \exp[i\varphi_i(\omega)]}{\prod_{k=1}^n H_k^*(\omega) \cdot \exp[i\varphi_k^*(\omega)]}.$$

Отсюда легко получить формулы для представления АЧХ и ФЧХ сложной системы через АЧХ и ФЧХ типовых звеньев, ее составляющих:

$$H(\omega) = \frac{\prod_{i=1}^m H_i(\omega)}{\prod_{k=1}^n H_k^*(\omega)}; \quad (2.3)$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^m \varphi_i(\omega) - \sum_{k=1}^n \varphi_k^*(\omega). \quad (2.4)$$

Пример. Найти АЧХ и ФЧХ системы с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{k}{Ts + 1}.$$

Передаточную функцию данной системы можно представить в виде дроби, в числителе которой записана передаточная функция усилительного звена $W_1(s) = k$, а в знаменателе - передаточная функция дифференцирующего звена первого порядка $W_2(s) = Ts + 1$. Перейдем от передаточной функции системы к АФХ:

$$W(j\omega) = \frac{k}{jT\omega + 1}.$$

Воспользовавшись общими формулами (2.3) и (2.4) для вычисления АЧХ и ФЧХ системы, соответственно получим:

$$H(\omega) = \frac{H_1(\omega)}{H_2(\omega)}; \quad H(\omega) = \frac{\sqrt{k^2 + 0^2}}{\sqrt{1^2 + (\omega T)^2}} = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}};$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega); \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{0}{k} - \arctg \frac{T\omega}{1} = -\arctg \omega T.$$

2.2. Аперидическое звено

В динамике аперидическое звено описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$a_1 \ddot{x}(t) + a_0 \dot{x}(t) = b_0 z(t), \quad (2.5)$$

где a_1 , a_0 , b_0 - константы. Покажем, что это дифференциальное уравнение соответствует передаточной функции апериодического звена, приведенной в § 2.1. Для этого разделим обе части уравнения на коэффициент a_0 и введем обозначения:

$$T = \frac{a_1}{a_0}; k = \frac{b_0}{a_0}.$$

В результате получим:

$$TsX(s) + X(s) = kZ(s). \quad (2.6)$$

Пусть на вход апериодического звена подается входное воздействие, имеющее форму "ступеньки":

$$z(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Тогда решение дифференциального уравнения (2.5) имеет следующий вид:

$$x(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}}).$$

График функции $x(t)$ показан на рис.2.3.

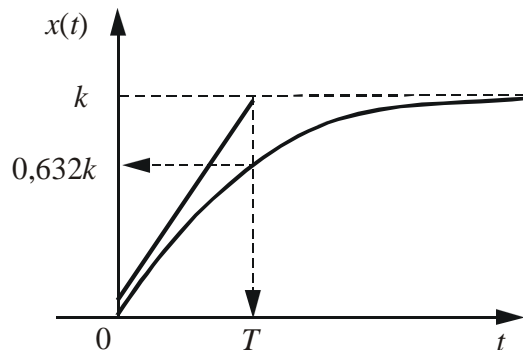


Рис.2.3. Реакция апериодического звена на единичное ступенчатое воздействие

Постоянной времени T можно дать различное толкование:

- T равна времени, за которое выходная функция достигнет 0,632 от своего установившегося значения;
- T - это время, за которое выходная функция достигла бы установившегося значения, если бы изменялась с постоянной скоростью, равной скорости процесса в начальный момент времени. Поэтому T определяется отрезком времени, отсекаемым на линии установившегося значения, касательной к графику $x(t)$ при $t = 0$.
-

В общем случае, чем больше постоянная времени T , тем длиннее переходной процесс. Теоретически время переходного процесса (время нарастания экспоненты) равно бесконечности. Практически за длительность переходного процесса t_n принимают время от начала процесса до момента, когда выходная величина достигнет 0,95 установившегося значения. В случае экспоненты $t_n \approx 3T$.

Преобразуем по Лапласу обе части дифференциального уравнения (2.6) при нулевых начальных условиях:

$$TsX(s) + X(s) = kZ(s);$$

$$W(s) = \frac{X(s)}{Z(s)} = \frac{k}{Ts + 1}.$$

Вывод: апериодическое звено имеет передаточную функцию $W(s) = \frac{k}{Ts + 1}$. Такое звено физически осуществимо, так как степень полинома числителя ($m=0$) меньше степени полинома знаменателя ($n=1$).

Апериодическим звеном может быть представлен двигатель постоянного тока после линеаризации его дифференциального уравнения (см. § 1.5). Приведем другие примеры технических устройств, передаточные функции которых являются апериодическими звеньями.

Пример 1. RC-цепочка (рис.2.4):

$$U_{\text{ВЫХ}}(s) = \frac{U_{\text{ВХ}}(s)}{R + \frac{1}{Cs}} \cdot \frac{1}{Cs} \quad W(s) = \frac{U_{\text{ВЫХ}}(s)}{U_{\text{ВХ}}(s)} = \frac{1}{RCs + 1}.$$

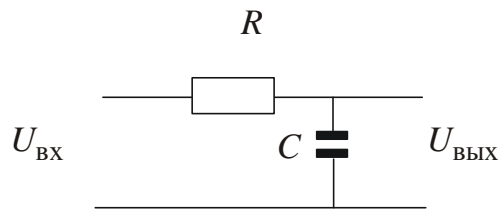


Рис.2.4. RC-цепочка

Если сравнить полученное выражение с общей формулой передаточной функции апериодического звена, то получим $k=1$, $T=RC$.

Пример 2. Гидротехническое устройство (рис.2.5). Изменение давления жидкости в магистрали через поршень изменяет давление в резервуаре.

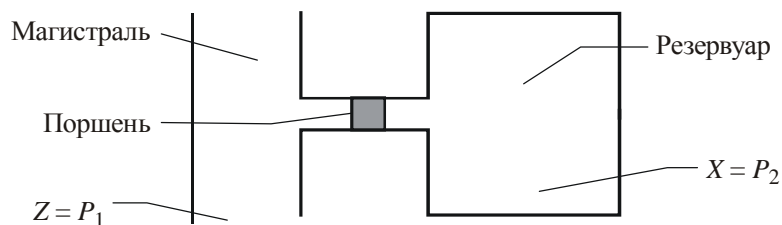


Рис.2.5. Пример апериодического звена в гидротехнике

Пример 3. Тело, погруженное в сосуд с жидкостью (рис.2.6). Температура жидкости влияет на температуру тела.

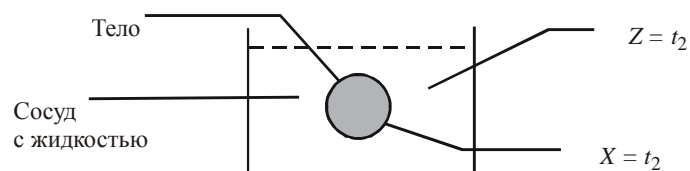


Рис.2.6. Пример апериодического звена в теплотехнике

Перейдем к рассмотрению основных частотных характеристик апериодического звена. Заменив s на $j\omega$, получим АФХ апериодического звена:

$$W(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{Z(j\omega)} = \frac{k}{jT\omega + 1}.$$

Выделим вещественную и мнимую части АФХ, для чего предварительно избавимся от мнимой части в знаменателе:

$$\frac{k}{j\omega T + 1} = \frac{k(1 - j\omega T)}{(1 + j\omega T)(1 - j\omega T)} = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{k\omega T}{1 + \omega^2 T^2};$$

$$U(\omega) = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2}; \quad V(\omega) = \frac{-k\omega T}{1 + \omega^2 T^2}.$$

Графики полученных функций показаны на рис.2.7.

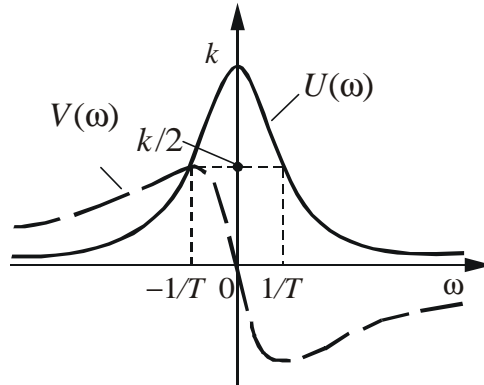


Рис.2.7. Графики функций $U(\omega)$ и $V(\omega)$ апериодического звена

Представленные графики отличаются наглядностью, их сложно интерпретировать. Более ясный физический смысл апериодического звена отражают его АЧХ и ФЧХ:

$$H(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}; \quad H(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}};$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)}; \quad \varphi(\omega) = -\arctg(\omega T).$$

Построим график функции $H(\omega)$ (рис.2.8). Из АЧХ апериодического звена видно, что:

- колебания низких частот $|\omega| \ll 1/T$ пропускаются хорошо;
- колебания высоких частот $|\omega| \gg 1/T$ пропускаются с сильным ослаблением амплитуды, причем с увеличением модуля частоты усиление амплитуды падает.

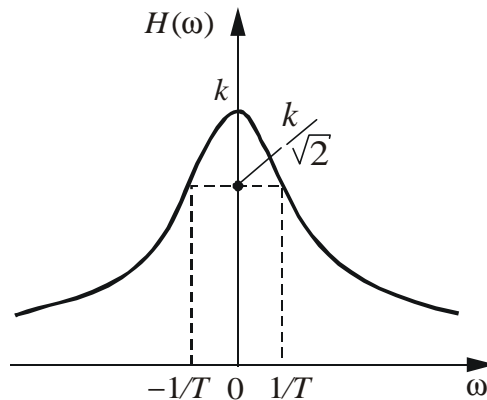


Рис.2.8. График АЧХ апериодического звена

Можно сделать вывод, что апериодическое звено - это фильтр низких частот. Оно хорошо пропускает низкие частоты и плохо - высокие. Коэффициент усиления апериодического звена в динамике всегда меньше статического коэффициента k .

Следует иметь в виду, что каждое динамическое звено характеризуется определенной полосой пропускания частот. Как известно из курса радиотехники, ширина полосы пропускания обратно пропорциональна T . Для апериодического звена

полоса пропускания отсчитывается по уровню $\frac{k}{\sqrt{2}}$ и вычисляется по формуле $\omega_n = 1/T$ (см. рис.2.8).

Существует общее правило для звеньев и систем: *чем шире на АЧХ полоса пропускания, тем быстрее затухает переходный процесс.*

Построим график ФЧХ апериодического звена $\varphi = \varphi(\omega) = -\arctg \omega T$ при $-\infty < \omega < +\infty$ (рис.2.9).

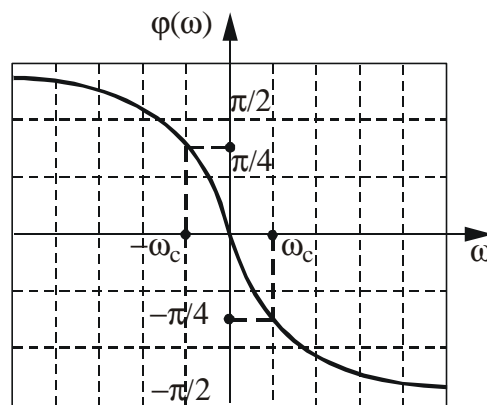


Рис.2.9. График ФЧХ апериодического звена при $-\infty < \omega < +\infty$

ФЧХ показывает, что апериодическое звено обладает инерционностью, его выходной сигнал отстает по фазе от входного сигнала, причем это отставание возрастает с увеличением частоты ω .

Часто на практике передаточная функция или дифференциальное уравнение звена неизвестны, однако можно экспериментально определить их АЧХ и ФЧХ. Тогда, если последние будут похожи на типовые характеристики апериодического звена, рассмотренные выше, то можно утверждать, что исследуемое звено также является апериодическим. При этом по характерным точкам снятых АЧХ и ФЧХ можно определить коэффициенты k и T (см. рис.2.7 и 2.8) и по ним построить передаточную функцию или записать дифференциальное уравнение звена.

Анализ АЧХ и ФЧХ двух апериодических звеньев с различными постоянными времени (рис.2.10 и 2.11) приводит к следующему выводу: апериодическое звено с большей постоянной времени ($T_2 > T_1$) сильнее ослабляет амплитуду входного сигнала, а его ФЧХ асимптотически ближе на высоких частотах к -90° , чем звено с меньшей постоянной времени.

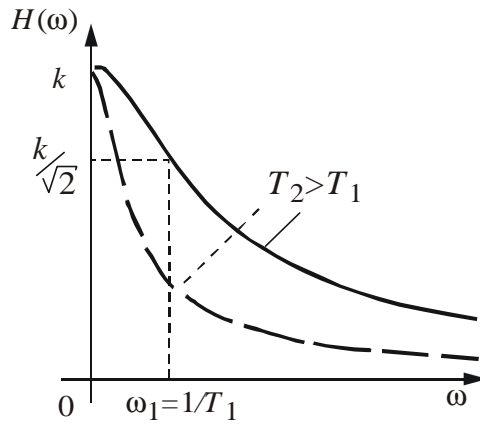


Рис.2.10. Зависимость амплитуды сигнала аperiodического звена от частоты для различных значений постоянных времени

Следует заметить, что, определив по графику АЧХ постоянную времени T , можно судить о длительности переходного процесса $T_{\text{п}}$. Ранее было показано, что $T_{\text{п}} \approx 3T$.

Построим график АФХ аperiodического звена. Это можно сделать по точкам, однако для аperiodического звена легко получить уравнение АФХ.

Легко убедиться в том, что выражения

$$U(\omega) = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2}; \quad V(\omega) = \frac{-k\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$$

удовлетворяют уравнению окружности

$$[U(\omega) - k/2]^2 + [V(\omega)]^2 = (k/2)^2,$$

причем центр окружности находится в точке $(k/2; 0)$.

Действительно, возведем в квадрат $U(\omega)$ и $V(\omega)$ и сложим полученные выражения:

$$[U(\omega)]^2 + [V(\omega)]^2 = \frac{k^2 + (-k\omega T)^2}{(1 + \omega^2 T^2)^2} = \frac{k^2}{1 + \omega^2 T^2} = k \frac{k}{1 + \omega^2 T^2} = kU(\omega).$$

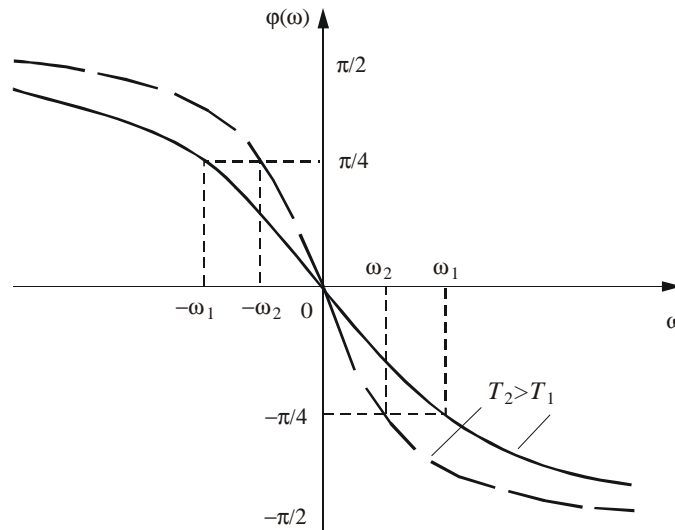


Рис.2.11. Зависимость фазы сигнала аperiodического звена от частоты для различных значений постоянных времени T

Перенесем $kU(\omega)$ в левую часть равенства. Добавим $(k/2)^2$ в левую и правую части полученного соотношения. Выполним соответствующие преобразования:

$$[(U(\omega))^2 - 2 \cdot k/2 \cdot U(\omega) + (k/2)^2] + [V(\omega)]^2 = (k/2)^2.$$

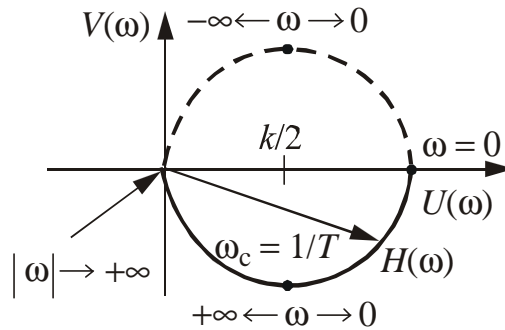


Рис.2.12. Годограф апериодического звена

Окончательно получим: $[U(\omega) - (k/2)]^2 + [V(\omega)]^2 = [k/2]^2$, т.е. АФХ апериодического звена при изменении частоты $+\infty > \omega > -\infty$ представляет окружность радиуса $k/2$ с центром в точке $(k/2, 0)$.

При изменении частоты ω от 0 до ∞ ($V(\omega) < 0$) годографом является полуокружность, расположенная в четвертом квадранте, причем $U(\omega = \frac{1}{T}) = k/2$, $V(\omega = \frac{1}{T}) = -k/2$.

Годограф для положительных частот может быть дополнен своим зеркальным отражением для отрицательных частот. В результате полная АФХ будет иметь вид окружности (рис.2.12). Вид АФХ апериодического звена не зависит от постоянной времени T .

При $k = \text{const}$ и различных значениях T годограф представляет собой одну и ту же окружность, каждой точке которой (кроме $\omega = 0$ и $\omega \rightarrow \infty$) соответствуют различные значения частот в зависимости от величины времени T . Указанная особенность вызывает сложности при практическом использовании АФХ.

Пусть апериодическое звено имеет параметры $k = k_1$ $T = T_1$ и некоторой точке A его годографа соответствует определенная частота ω_1 (рис.2.13). Допустим, что изменился только один параметр системы - постоянная времени ($T_2 > T_1$). При этом годограф сохраняет свою форму, так как $k = \text{const}$. Спрашивается, как найти на годографе новую точку B , которая соответствует прежней частоте ω_1 .

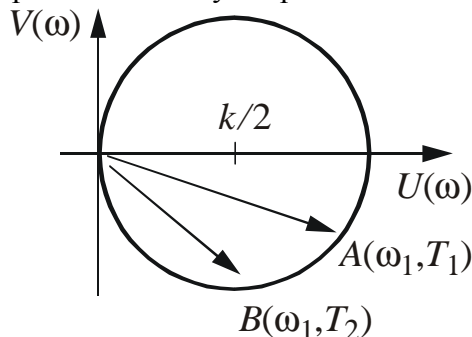


Рис.2.13. К вопросу определения на годографе новой точки B , которая соответствует прежней частоте ω_1

Нахождение новой точки годографа, соответствующей прежней частоте ω_1 , затруднено. Требуется провести дополнительные вычисления.

Таким образом, использование АФХ при анализе и синтезе систем во многих случаях вызывает определенные сложности.

2.3. Логарифмические частотные характеристики. Методика построения асимптотических ЛЧХ на примере апериодического звена

При исследовании САУ амплитудную и фазовую частотные характеристики удобно строить в логарифмических координатах.

Во-первых, в логарифмическом масштабе на бланке определенного размера можно рассмотреть больший диапазон частот, при этом участок малых частот растягивается, а участок больших частот сужается, что позволяет более наглядно изучать частотные свойства САУ.

Во-вторых, АЧХ в обычном масштабе являются кривыми линиями, а соответствующие логарифмические АЧХ можно приближенно заменить ломаными линиями (асимптотами), в результате упрощается их построение.

В-третьих, упрощается построение логарифмических АЧХ цепочки последовательно соединенных звеньев. АЧХ системы, включающей цепочку звеньев, равно произведению АЧХ составляющих ее звеньев:

$$H = \frac{A_n}{A_1} \quad \text{или} \quad H = \frac{A_2}{A_1} \frac{A_3}{A_2} \dots \frac{A_n}{A_{n-1}} = \prod_{i=1}^n H_i,$$

где A_i ($1 \leq i < n$) - амплитуда колебаний на входе i -го звена системы; $H_i = \frac{A_{i+1}}{A_i}$.
Для практических целей удобнее пользоваться десятичными логарифмами.

$$H = \prod_{i=1}^n H_i$$

Если прологарифмировать обе части равенства, то получим

$\lg H = \sum_{i=1}^n \lg H_i$. Следовательно, в логарифмическом масштабе АЧХ цепочки звеньев равна сумме АЧХ отдельных звеньев.

Логарифмической амплитудно-частотной характеристикой (ЛАЧХ) разомкнутой системы называют кривую, соответствующую 20 десятичным логарифмам модуля передаточной функции разомкнутой системы, построенной в логарифмическом масштабе частот.

Величина $20 \lg H$ обозначается $L_m(\omega)$ или просто L_m . Окончательно в развернутой форме имеем: $L_m = L_m(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)| = 20 \lg H(\omega)$.

ЛАЧХ строится в логарифмических координатах в виде зависимости $20 \lg H$ от $\lg(\omega)$.

Логарифмической фазово-частотной характеристикой (ЛФЧХ) разомкнутой системы называют фазово-частотную характеристику $\Phi(\omega)$, построенную в логарифмическом масштабе частот, т.е. в виде зависимости $\Phi = \Phi[\lg(\omega)]$.

ЛФЧХ строится в полулогарифмических координатах, т.е. в виде зависимости Φ от $\lg(\omega)$, чтобы обе характеристики (амплитудная и фазовая) были связаны одним масштабом на оси абсцисс. Использование логарифмического масштаба на оси ординат фазовой характеристики не имеет смысла, поскольку фазовый сдвиг цепочки звеньев и так получается в виде суммы фазовых сдвигов отдельных ее звеньев.

Рассмотрим координатные оси, в которых изображается ЛАЧХ (рис.2.14). По оси ординат ЛАЧХ откладываются значения логарифма модуля передаточной функции $H(\omega) = |W(j\omega)|$, выраженные в децибелах.

Бел (Б) - это единица измерения десятичного логарифма коэффициента усиления мощности сигнала, т.е. 1 Б соответствует усилению мощности в 10 раз, 2 Б - в 100 раз, 3 Б - в 1000 раз и т.д.

Так как мощность сигнала пропорциональна квадрату амплитуды, а $\lg H^2 = 2\lg H$, то усиление в белах, выраженное через отношение амплитуд H , равно $2\lg H$. Соответственно, в децибелах оно равно $20\lg H$. Таким образом, для измерения величины $20\lg H$ используется децибел, равный одной десятой бела.

Поясним введенные понятия на примере из электротехники. Усиление или затухание сигнала, выраженное в белах, рассчитывается по формуле $\lg \frac{P_2}{P_1} = 2\lg \frac{U_2}{U_1}$, так

как $P_i = \frac{U_i^2}{R_i}$, где P_1, P_2 и U_1, U_2 - значения мощности и напряжения соответственно номинального и реального сигналов. Если усиление или затухание определяется числом k , то это соответствует $2\lg k$ белах или $20\lg k$ децибелам.

Если отношение двух величин равно единице, то усиление (в дБ) равно нулю, так как $\lg(1) = 0$. Это означает, что амплитуда выходных колебаний равна амплитуде входных колебаний. В случае, когда отношение двух величин меньше единицы, усиление в логарифмическом масштабе будет отрицательным. Отрицательное усиление означает ослабление сигнала или уменьшение амплитуды выходных колебаний по сравнению с амплитудой колебаний на входе.

Существуют следующие соотношения между значениями $H(\omega)$ и L_m :

$H(\omega)$,01	,1	,32	,89		,12	,16	0	00
$L_m = 20\lg H(\omega)$, дБ	40	20	10	1			0	0	0

Очевидно, что изменение отношения двух величин в 10 раз соответствует изменению усиления (ослабления) на 20 дБ.

Осью частот является ось абсцисс. На оси абсцисс непосредственно указываются значения $\lg \omega$. Нередко на практике по оси абсцисс откладывают значения $\lg(\omega_i / \omega_0)$, где ω_0 - базовая частота, которую всегда можно принять равной единице. Иногда за ω_0 принимают частоту среза. Шкала оси $\lg(\omega_i / \omega_0)$ является равномерной. Для удобства использования на практике разметка оси абсцисс также производится и в значениях самой частоты ω (см. рис.2.14).

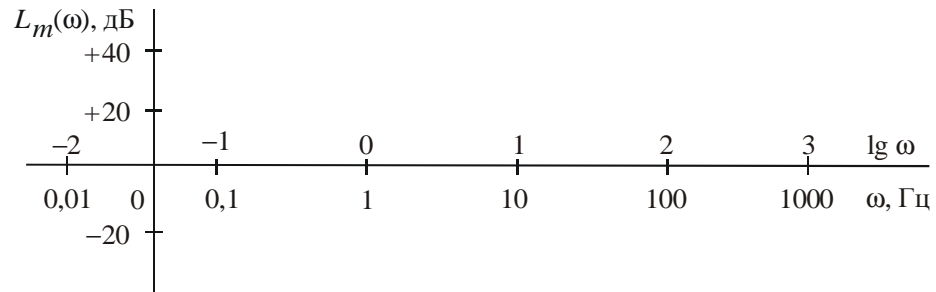


Рис.2.14. Разметка осей ЛАЧХ

Заметим, что при использовании логарифмического масштаба точка, соответствующая $\omega = 0$, находится слева в бесконечности, так как $\lg(0) \rightarrow -\infty$. Поэтому логарифмические характеристики строятся не от нулевой частоты, а от любого значения ω , принятого за начальное, которое и откладывается в точке пересечения координатных осей.

Если на оси абсцисс непосредственно указываются значения $\lg \omega$, то единицей приращения $\lg \omega$ является декада (дек), соответствующая изменению частоты в 10 раз. Декада - отрезок по оси абсцисс между точками, соответствующими произвольному значению частоты ω и ее удесятеренному значению. Все декады одинаковые.

Разметку по оси абсцисс надо выполнять так, чтобы разместить на графике тот диапазон частот, в котором существенно изменяются частотные свойства системы.

Обычно оба графика (ЛАЧХ и ЛФЧХ) строят в системе координат, на которой ось абсцисс имеет логарифмический масштаб, а оси ординат для $20\lg H(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ - линейный.

Построим ЛАЧХ апериодического звена. Чтобы наглядно представить себе вид этой характеристики, найдем ее асимптоты, т.е. прямые, к которым она стремится при $\omega \rightarrow \infty$ и при $\omega \rightarrow 0$.

Сначала определим логарифм модуля передаточной функции:

$$L_m(\omega) = 20\lg H(\omega) = 20\lg \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} = 20\lg k - 20\lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2}.$$

Если $k = 1$, то $L_m(\omega) = -20\lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$.

Рассмотрим два крайних случая:

1) для малых значений частот $\lim_{\omega \rightarrow 0} [-20\lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2}] = 0$, т.е. низкочастотная асимптота совпадает с осью абсцисс;

2) для больших значений частот ($\omega \rightarrow \infty$) можно считать, что

$$-20\lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \approx -20\lg \omega T.$$

Определим наклон высокочастотной асимптоты. Для этого рассмотрим две частоты $\omega = \omega_1$ и $\omega = 10\omega_1$. Для данных частот имеем:

$$L_m(\omega_1) = -20\lg \omega_1 T;$$

$$L_m(10\omega_1) = -20\lg(10\omega_1 T) = -20\lg \omega_1 T - 20;$$

$$\Delta L_m = L_m(10\omega_1) - L_m(\omega_1) = -20.$$

Таким образом, если частота увеличивается в 10 раз, то значение $L_m(\omega)$ уменьшается на 20 дБ. Следовательно, изменение усиления, приходящееся на одну декаду, будет равно

$$\frac{\Delta L_m}{1 \text{ дек}} = \frac{L_m(10\omega_1) - L_m(\omega_1)}{1 \text{ дек}} = \frac{-20 \text{ дБ}}{1 \text{ дек}} = -20 \text{ дБ/дек.}$$

Высокочастотная асимптота апериодического звена представляет собой прямую линию с наклоном -20 дБ/дек.

Определим ω_c - частоту перегиба ЛАЧХ, называемую сопрягающей частотой.

Для этого найдем точку пересечения двух асимптот: графика $L_m(\omega) = -20 \lg \omega T$
 $L_m(\omega) = 0$. Решив уравнение $-20 \lg \omega T = 0$,
 получим $\omega_c = 1/T$.

ЛАЧХ, составленную из отрезков аппроксимирующих прямых, будем называть асимптотической характеристикой. Для построения асимптотической ЛАЧХ апериодического звена следует:

- 1) определить сопрягающую частоту $\omega_c = 1/T$ и нанести точку, соответствующую этой частоте, на ось абсцисс;
- 2) по оси частот до ω_c провести низкочастотную асимптоту;
- 3) через точку ω_c провести прямую линию под наклоном -20 дБ/дек (высокочастотную асимптоту);
- 4) при необходимости уточнить асимптотическую ЛАЧХ, используя шаблоны поправок для апериодического звена.

Разность координат точной и асимптотической ЛАЧХ называется погрешностью аппроксимации. Оценим ее величину для апериодического звена. Максимальное отклонение реальной ЛАЧХ от асимптотической наблюдается в точке $\omega_c = 1/T$. Его величина может быть вычислена следующим образом:

$$L_m(\omega_c) = -20 \lg \sqrt{1 + \frac{1}{T^2} \cdot T^2} = -20 \lg \sqrt{2} = -10 \lg 2 \approx -3 \text{ дБ.}$$

Следовательно, если в инженерных расчетах точную ЛАЧХ заменяют приближенной (асимптотической), то максимальное отклонение не превышает -3 дБ .

Отклонение Δl асимптотических ЛАЧХ от реальных уменьшается по мере удаления частоты ω от ω_c (уменьшения отношения ω/ω_c) следующим образом:

$ \omega / \omega_c $	1	0,8	0,6	0,4	0,2	0,1
Δl	-3,010	-2,148	-1,335	-0,645	-0,170	-0,043

Используя приведенные данные, можно изготовить шаблон поправок (рис.2.15) для уточнения асимптотических ЛАЧХ.

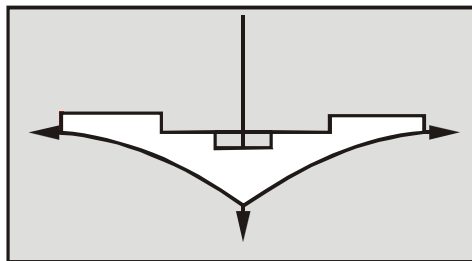


Рис.2.15. Шаблон поправок для асимптотических ЛАЧХ апериодического звена

Шаблон вырезается из плексигласа (картона) и позиционируется на графике асимптотической ЛАЧХ посредством дополнительных вырезов.

С целью сокращения трудозатрат при выполнении графических работ и их упрощения используется один и тот же масштаб как для построения ЛАЧХ апериодического звена, так и для поправок к нему.

Пример 1. Построим ЛАЧХ для двух апериодических звеньев:

а) $T_1 = 10$ с; б) $T_2 = 100$ с, причем в обоих случаях $k = 1$. Графики ЛАЧХ представлены на рис.2.16. Реальная ЛАЧХ получена путем сложения асимптотической ЛАЧХ с графиком поправок, построенным с помощью шаблона.

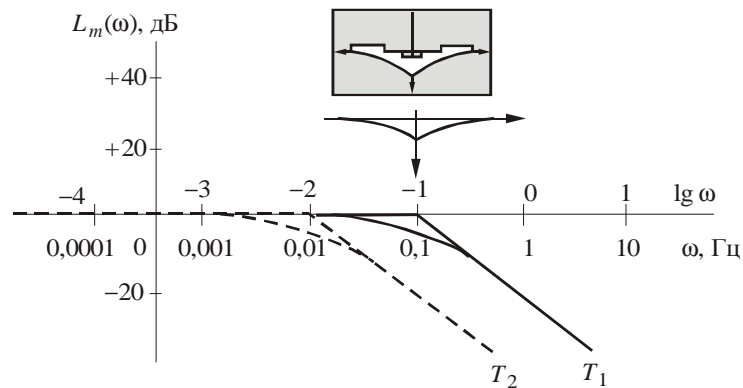


Рис.2.16. Графики ЛАЧХ апериодических звеньев с различными значениями T ($T_2 > T_1$)

При увеличении частоты значение амплитуды выходного сигнала падает тем сильнее, чем больше значение постоянной времени T , характеризующей инерционность звена.

Пусть на входе апериодического звена действуют помехи, и они не попадают в полосу пропускания, т.е. $\omega_n > \omega_c = 1/T$. Тогда, чем выше частота помехи, тем сильнее она ослабляется. Причем вредные воздействия на конкретной частоте ω_i будут ослабляться сильнее тем звеном, постоянная времени которого больше; в данном случае звеном с постоянной времени T_2 .

Если $k \neq 1$, то ЛАЧХ перемещается параллельно самой себе вверх ($k > 1$) или вниз ($k < 1$) на величину $20 \lg k$ (рис.2.17). При этом говорят, что апериодическое звено имеет при $k = 1$ "нулевое" усиление, $k > 1$ - усиление, $k < 1$ - ослабление входного сигнала.

Пример 2. Построим ЛФЧХ апериодического звена (рис.2.18).

Характерные особенности ЛФЧХ апериодического звена:

- 1) $\lim_{\omega \rightarrow 0} [-\arctg(\omega T)] = 0$, $\lim_{\omega \rightarrow \infty} [-\arctg(\omega T)] = -\pi/2$;
- 2) на сопрягающей частоте $\omega_c = 1/T$ сдвиг по фазе $\varphi = -45^\circ$, так как $\varphi(\omega_c) = -\arctg(\omega T) = -\arctg 1 = -45^\circ$;
- 3) симметрична относительно точки $(\omega_c, -\pi/4)$.

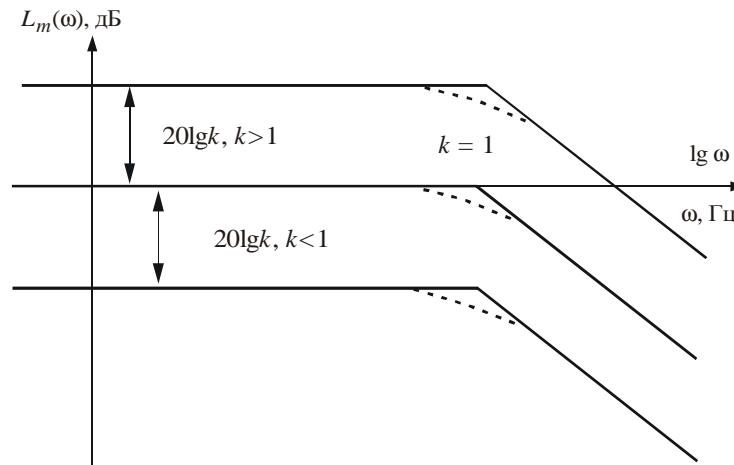


Рис.2.17. Графики ЛАЧХ аperiodических звеньев с различными значениями коэффициента усиления k

Сопоставив рис.2.17 и 2.18 можно утверждать, что для низкочастотных сигналов в первую очередь следует учитывать фазовые искажения, которые проявляются значительно раньше, чем амплитудные.

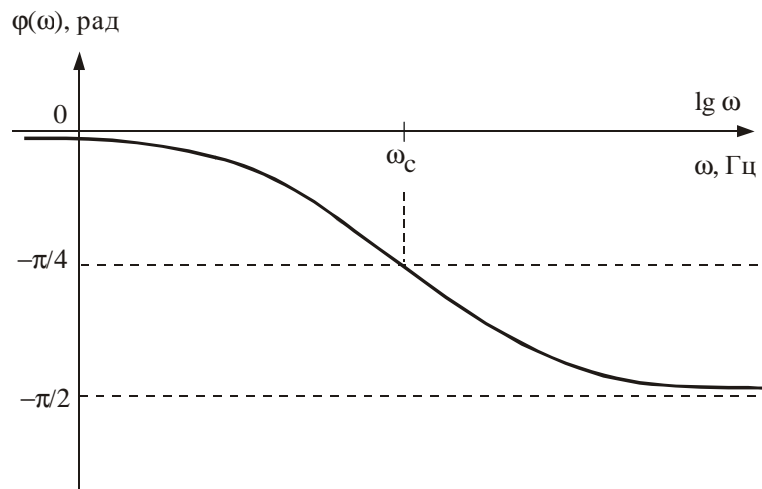


Рис.2.18. График ЛФЧХ аperiodического звена

2.4. Дифференцирующее звено первого порядка

Операцию дифференцирования при помощи технических средств идеально осуществить невозможно, ее выполняют с той или иной степенью приближения, обусловленной инерционностью технических средств.

Дифференцирующее звено первого порядка описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$a_0 x(t) = b_1 z'(t) + b_0 z(t)$$

Определим выходной сигнал:

$$x(t) = \frac{b_0}{a_0} \left[\frac{b_1}{b_0} z'(t) + z(t) \right]$$

Приведем выражение для выходного сигнала $x(t)$ к стандартной форме. Введем обозначения: $k = b_0 / a_0$ - коэффициент передачи; $\tau = b_1 / b_0$ - постоянная времени звена. В результате получим:

$$x(t) = k(\tau z'(t) + z(t)). \quad (2.7)$$

Выходная величина дифференцирующего звена первого порядка имеет две составляющие: первая пропорциональна производной от входной величины; вторая пропорциональна самой входной величине. Благодаря этому дифференцирующее звено первого порядка хорошо передает быстрые изменения входного сигнала. Такое звено часто включают в автоматическую систему в качестве корректирующего устройства для улучшения процесса регулирования.

Преобразуем по Лапласу обе части дифференциального уравнения (2.7) при нулевых начальных условиях:

$$X(s) = k(\tau s Z(s) + Z(s)).$$

Найдем передаточную функцию дифференцирующего звена первого порядка:

$$W(s) = \frac{X(s)}{Z(s)}, \quad W(s) = k(\tau s + 1).$$

$$s = -\frac{1}{\tau}.$$

Она имеет один нуль в точке

Перейдем к изучению частотных характеристик. АФХ дифференцирующего звена первого порядка имеет вид:

$$W(j\omega) = k(\tau j\omega + 1).$$

Вещественная и мнимая составляющие $W(j\omega)$ равны

$$U(\omega) = k; \quad V(\omega) = k\tau\omega.$$

Действительная часть АФХ не зависит от частоты, а мнимая часть зависит от частоты по линейному закону. Их графики для положительных значений частот представлены на рис.2.19.

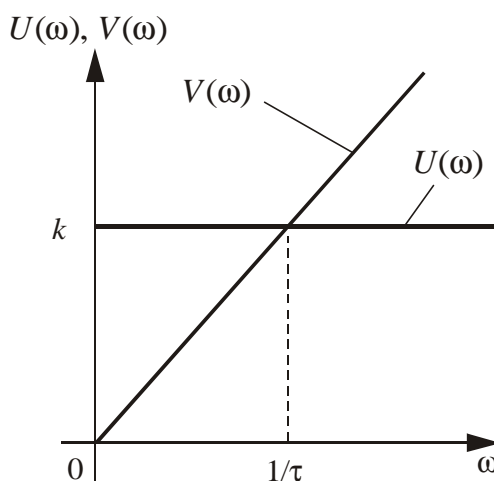


Рис.2.19. Графики функций $U(\omega)$ и $V(\omega)$ дифференцирующего звена первого порядка ($\omega \geq 0$)

Построим годограф дифференцирующего звена первого порядка для положительных частот. Если взять несколько различных значений частоты ω_i , то всем им будет соответствовать одно и то же значение k на действительной оси и различные значения $k\tau\omega_i$ на мнимой оси. Поэтому годограф представляет вертикальную линию, проходящую через точку с координатами $(k, 0)$ (рис.2.20).

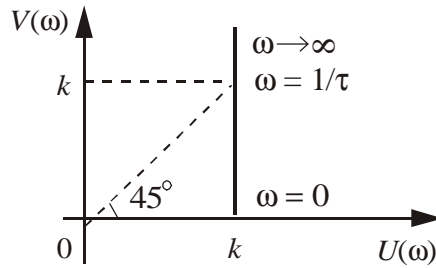


Рис.2.20. Годограф дифференцирующего звена первого порядка

Определим АЧХ и ФЧХ. Представим дифференцирующее звено первого порядка в виде последовательного соединения двух звеньев (усилительного звена $W_1(s) = k$ и звена с передаточной функцией $W_2(s) = \tau s + 1$). По общему правилу (см. § 2.1) получим:

$$H(\omega) = k\sqrt{1 + \tau^2\omega^2};$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{0}{k} + \arctg \frac{\tau\omega}{1} = \arctg(\omega\tau).$$

Графики соответствующих зависимостей приведены на рис.2.21 и 2.22.

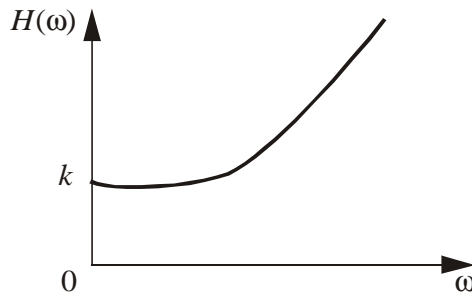


Рис.2.21. График АЧХ дифференцирующего звена первого порядка

Возрастающий характер АЧХ указывает на чувствительность дифференцирующего звена первого порядка к помехам (так же, как и идеального дифференцирующего звена).

Из графика ФЧХ следует, что звено создает опережение по фазе, изменяющееся в пределах от $\varphi = 0$ при $\omega = 0$ до $\varphi = \pi / 2$ при $\omega \rightarrow \infty$. При $\omega = 1 / \tau$ имеем $\varphi = \pi / 4$.

Построим ЛЧХ дифференцирующего звена первого порядка (рис.2.23 и 2.24):

$$L_m(\omega) = 20\lg k + 20\lg \sqrt{1 + \omega^2\tau^2}.$$

Если $k = 1$, то $L_m(\omega) = +20\lg \sqrt{1 + \omega^2\tau^2}$.

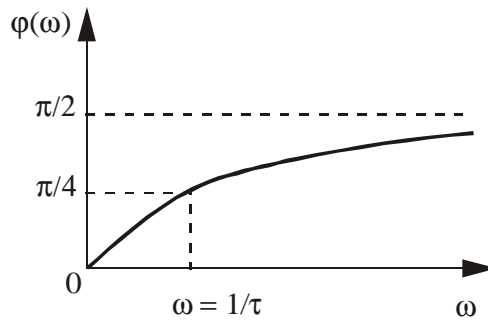


Рис.2.22. График ФЧХ дифференцирующего звена первого порядка

Найдем низкочастотную и высокочастотную асимптоты:

$$1) \lim_{\omega \rightarrow 0} \left[20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \right] = 0;$$

$$2) \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[-20 \lg \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \right] = 20 \lg \omega T.$$

$$\omega_c = \frac{1}{\tau}$$

Причем частота среза $\omega_c = \frac{1}{\tau}$. На частоте ω_c наблюдается наибольшая погрешность аппроксимации, равная 3 дБ.

Характерные особенности ЛФЧХ дифференцирующего звена первого порядка:

$$1) \lim_{\omega \rightarrow 0} [\arctg(\omega T)] = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} [\arctg(\omega T)] = \pi / 2;$$

2) на сопрягающей частоте $\omega_c = 1/T$ сдвиг по фазе составляет 45° .

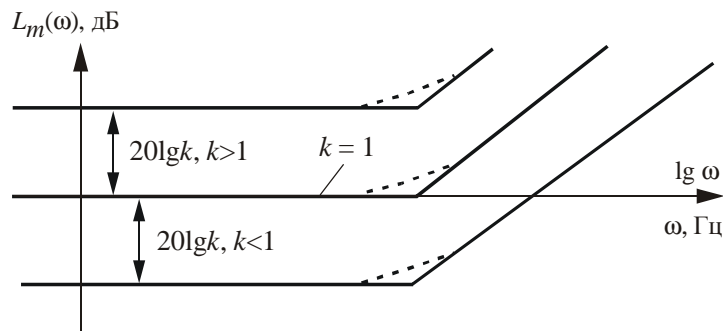


Рис.2.23. Графики ЛАЧХ дифференцирующих звеньев первого порядка с различными значениями коэффициента усиления k

Из графиков, приведенных на рис.2.23 и 2.24, следует, что после частоты среза ω_c дифференцирующее звено первого порядка усиливает входной сигнал. Выходной сигнал на всех частотах опережает по фазе входной сигнал.

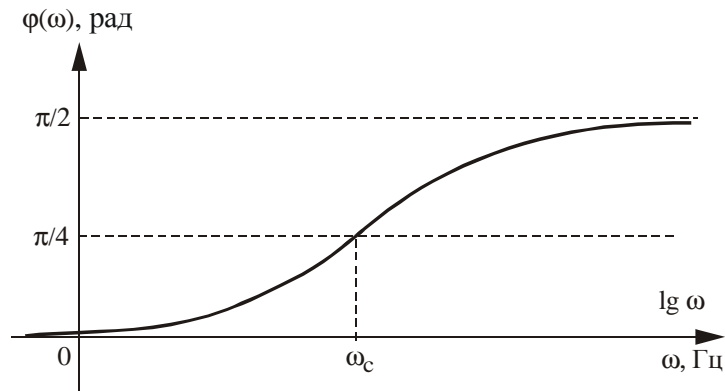


Рис.2.24. График ЛФЧХ дифференцирующего звена первого порядка

Данное звено физически не реализуемо, так как степень полинома числителя ($m = 1$) передаточной функции $W(s)$ больше степени полинома ее знаменателя ($n = 0$). В качестве дифференцирующего звена первого порядка на практике применяется RC -цепочка, изображенная на рис.2.25. Определим ее передаточную функцию и выясним условия, при которых она представляет дифференцирующее звено первого порядка.

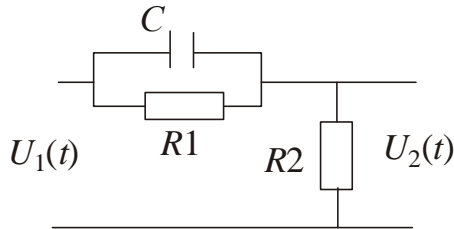


Рис.2.25. RC -цепочка - пример реализации дифференцирующего звена первого порядка

Передаточная функция RC -цепочки:

$$W(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{R_2}{R_1 + \frac{1}{sC}} = \frac{R_2(R_1Cs + 1)}{R_1R_2Cs + R_1 + R_2} =$$

$$= \frac{R_2}{(R_1 + R_2)} \cdot \frac{R_1Cs + 1}{\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}Cs + 1}.$$

Введем обозначения:

$$k = \frac{R_2}{R_1 + R_2}; \quad T_1 = R_1C; \quad T_2 = \frac{R_1R_2C}{R_1 + R_2} \quad \text{или} \quad T_2 = kT_1.$$

В результате получим:

$$W(s) = k \frac{T_1s + 1}{T_2s + 1}.$$

Звено с данной передаточной функцией называют реальным дифференцирующим звеном первого порядка.

Если $T_2 \ll 1$, то справедливо соотношение $W(s) = k(T_1s + 1)$ и реальное дифференцирующее звено может рассматриваться как дифференцирующее звено первого порядка.

Определим соотношение параметров цепочки для выполнения условия $T_2 \ll 1$. При фиксированных значениях C и R_1 имеем $T_1 = R_1C = \text{const}$.

Так как $T_2 = kT_1$, то неравенство $T_2 \ll 1$ справедливо, если $k \ll 1$ ($\frac{R_2}{R_1 + R_2} \ll 1$), т.е. при $R_2 \ll R_1$.

Как известно, переходная функция звена определяется как его реакция на единичную ступенчатую функцию. Переходную функцию $h(t)$ реального дифференцирующего звена первого порядка найдем на основании обратного преобразования Лапласа:

$$h(t) = L^{-1} \left[\frac{1}{s} W(s) \right] = L^{-1} \left[\frac{1}{s} k \frac{T_1s + 1}{T_2s + 1} \right].$$

Представим последнее выражение в квадратных скобках в виде двух дробей:

$$\frac{1}{s} k \frac{T_1s + 1}{T_2s + 1} = k \left[\frac{A}{s} + \frac{B}{T_2s + 1} \right].$$

Сопоставив коэффициенты при одинаковых степенях s в равенстве $T_1s + 1 = A(T_2s + 1) + Bs$, получим:

$$A = 1; \quad B = T_1 - T_2.$$

$$h(t) = L^{-1} k \left[\frac{1}{s} + \frac{T_1 - T_2}{T_2s + 1} \right] = k \left(1 + \frac{T_1 - T_2}{T_2} \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) \right).$$

Таким образом,

При $t = 0$ $h(t) = 1$. Действительно,

$$h(0) = k \left(1 + \frac{T_1 - T_2}{T_2} \right) = k \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \frac{R_1C}{(R_1R_2C/R_1 + R_2)} = 1.$$

При $t \rightarrow \infty$ $h(t) = k = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$. График $h(t)$ показан на рис.2.26.

Так как $k \ll 1$, то данная RC-цепочка ослабляет входной сигнал, и после нее необходимо включать усилитель.

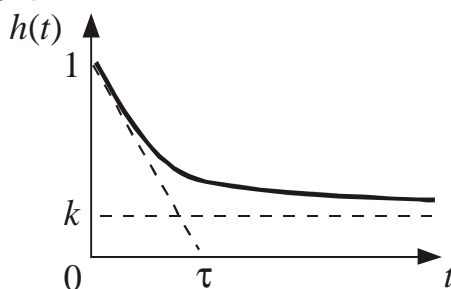


Рис.2.26. График переходной функции RC-цепочки

2.5. Безынерционное звено

Безынерционное звено воспроизводит входной сигнал без задержки и изменения формы (возможно только изменение масштаба, т.е. усиление или ослабление входного сигнала). Другими словами, если выходной сигнал пропорционален входному, то звено

является безынерционным. В литературе его называют также пропорциональным или усилительным.

Уравнение безынерционного звена:

$$a_0 x(t) = b_0 z(t).$$

Введем $k = b_0/a_0$ - коэффициент передачи звена, тогда $x(t) = kz(t)$.

Преобразуем уравнение по Лапласу при нулевых начальных условиях:

$$X(s) = kZ(s).$$

Передаточная функция звена:

$$W(s) = \frac{X(s)}{Z(s)} = k.$$

АЧХ получим из передаточной функции, заменив s на $j\omega$:

$$W(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{Z(j\omega)} = k.$$

Следовательно, $U(\omega) = k$ и $V(\omega) = 0$ (рис.2.27).

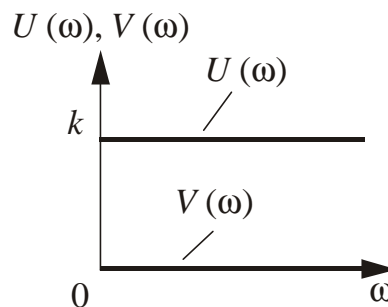


Рис.2.27. Графики функций $U(\omega)$ и $V(\omega)$ безынерционного звена

Годограф безынерционного звена представляет собой точку на оси абсцисс с абсциссой k , положение которой не изменяется при изменении частоты ω (рис.2.28).

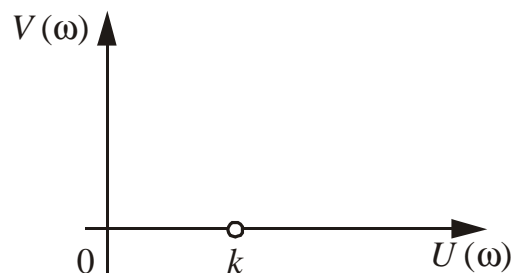


Рис.2.28. Годограф безынерционного звена

Зная $U(\omega) = k$, $V(\omega) = 0$, можно определить, что $H(\omega) = k$, $\varphi(\omega) = 0$; соответствующие графики показаны на рис.2.29 и 2.30.

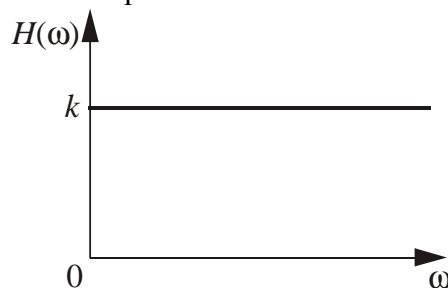


Рис.2.29. График АЧХ безынерционного звена

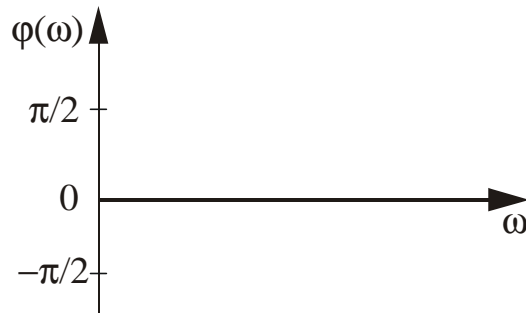


Рис.2.30. График ФЧХ
безынерционного звена

Постоянные значения АЧХ $H(\omega) = k$ и ФЧХ $\varphi(\omega) = 0$ означают, что на всех частотах выходной сигнал всегда находится в фазе со входным, а амплитуда выходного сигнала k раз отличается от амплитуды входного.

Логарифмические частотные характеристики безынерционного звена определяются выражениями

$$L_m(\omega) = 20 \lg k, \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = \arctg \frac{0}{k} = \arctg 0 = 0.$$

Графики ЛАЧХ безынерционных звеньев с различными значениями k приведены на рис.2.31. График ЛФЧХ аналогичен графику, представленному на рис.2.30.

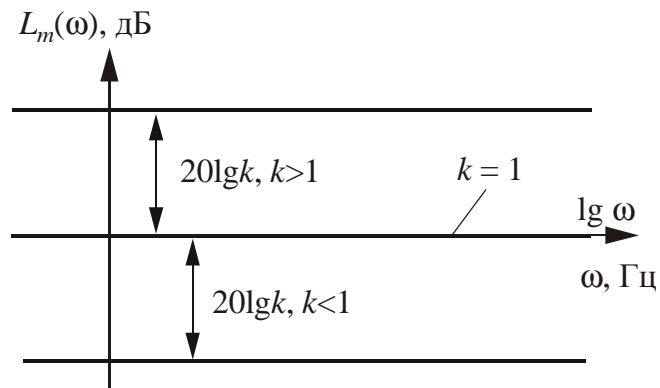


Рис.2.31. Графики ЛАЧХ безынерционных звеньев
с различными значениями коэффициента усиления k

Примерами безынерционных звеньев могут служить ненагруженный линейный потенциометр, электронный усилитель в определенном диапазоне частот, механический редуктор (рис.2.32).

Реальные устройства обладают инерционными свойствами: электронный усилитель - запаздыванием, редукторы - люфтом (скручиванием валов), поэтому их можно считать безынерционными устройствами только в том случае, если можно пренебречь указанными факторами.

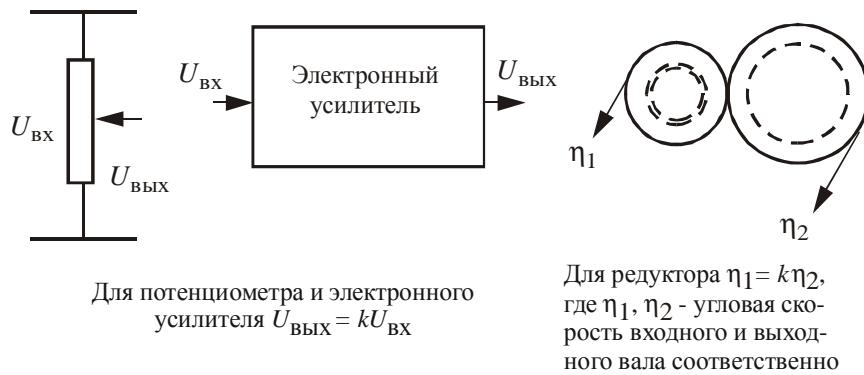


Рис.2.32. Примеры реализации безынерционных звеньев

К безынерционному звену сводятся все звенья первого порядка, если можно пренебречь инерционностью, т.е. принять $T = 0$. Это звено является идеализацией реальных звеньев, так как в действительности ни одно звено не в состоянии равномерно пропускать все частоты от 0 до ∞ .

Реальные устройства характеризуются определенной полосой пропускания, в пределах которой они могут рассматриваться как безынерционные, например, АЧХ реального электронного усилителя показана на рис.2.33.

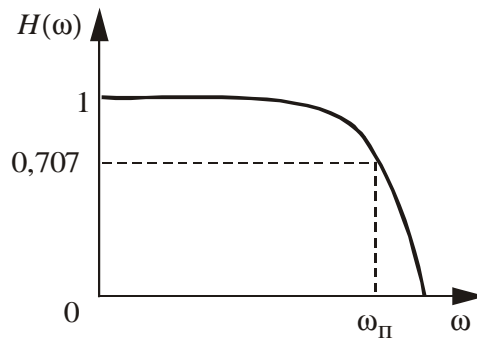


Рис.2.33. График АЧХ реального электронного усилителя

2.6. Интегрирующее звено

Интегрирующим называется звено, выходная величина которого пропорциональна интегралу от входного воздействия. Дифференциальное уравнение интегрирующего звена имеет вид:

$$\begin{aligned} a_1 \dot{x}(t) &= b_0 z(t); \\ \dot{x}(t) &= k z(t), \end{aligned}$$

где $k = \frac{b_0}{a_1}$ - коэффициент передачи звена.

В стандартной форме уравнение интегрирующего звена записывается следующим образом:

$$x(t) = k \int_0^t z(t) dt.$$

Определим передаточную функцию интегрирующего звена:

$$sX(s) = kZ(s);$$

$$X(s) = k \frac{Z(s)}{s};$$

$$W(s) = \frac{X(s)}{Z(s)} = \frac{k}{s}.$$

Запишем выражение для АФХ:

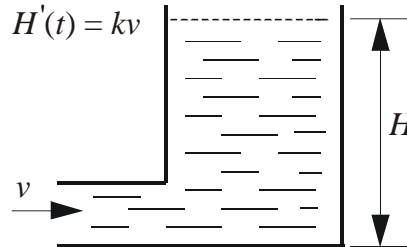


Рис.2.39. Резервуар - пример реализации интегрирующего звена в гидродинамике

$$W(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{Z(j\omega)} = \frac{k}{j\omega} = -j \frac{k}{\omega}.$$

Вещественная и мнимая части $U(\omega) = 0$, $V(\omega) = -\frac{k}{\omega}$, их графики показаны на рис.2.34.

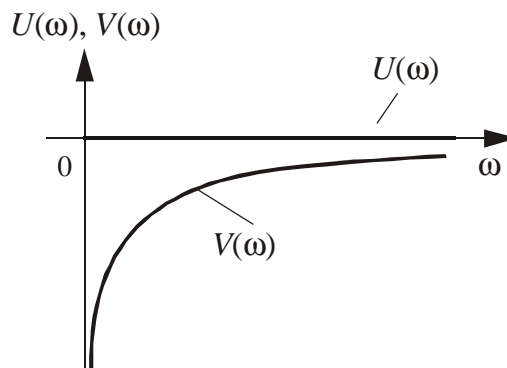


Рис.2.34. Графики функций $U(\omega)$ и $V(\omega)$ интегрирующего звена

Годограф интегрирующего звена расположен на отрицательной части мнимой оси (рис.2.35),

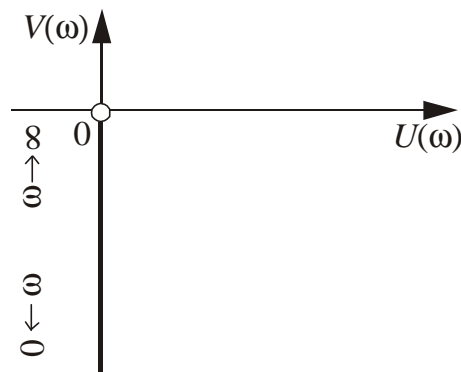


Рис.2.35. Годограф интегрирующего звена

причем

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} W(j\omega) = 0; \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} W(j\omega) = -\infty.$$

Частотные характеристики интегрирующего звена:

$$H(\omega) = \frac{k}{\omega};$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = \arctg(-\infty), \quad \varphi(\omega) = -90^\circ.$$

АЧХ с ростом частоты убывает. Фаза выходного сигнала отстает от фазы входного сигнала на всех частотах на величину 90° (рис.2.36 и 2.37).

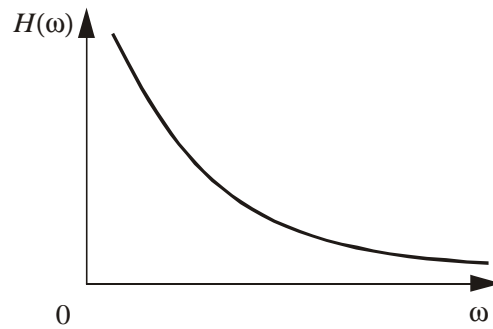


Рис.2.36. График АЧХ интегрирующего звена

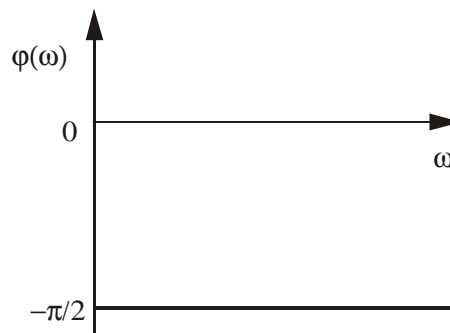


Рис.2.37. График ФЧХ интегрирующего звена

ЛАЧХ интегрирующего звена имеет вид

$$L_m(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega$$

и представлена на рис.2.38. Характерные точки: при $\omega=1$ $L_m(1) = 20 \lg k$, при $\omega=k$ $L_m(k) = 0$.

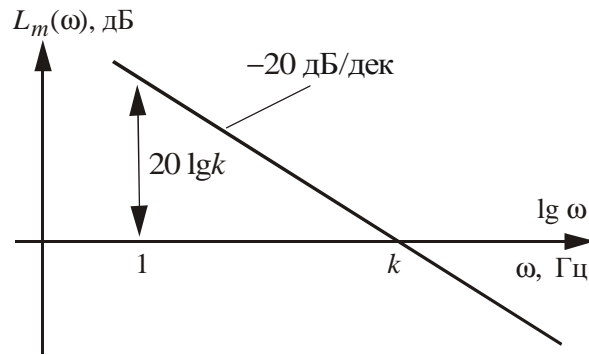


Рис.2.38. График ЛАЧХ интегрирующего звена

График ЛФЧХ аналогичен ФЧХ (см. рис.2.37).

Приведем примеры реализации интегрирующих звеньев.

Пример 1. В резервуар поступает поток жидкости со скоростью v (рис.2.39).

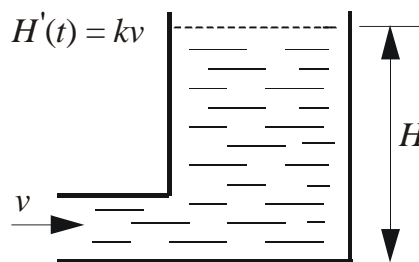


Рис.2.39. Резервуар - пример реализации интегрирующего звена в гидродинамике

Выходной величиной H является уровень жидкости в резервуаре. Скорость $H'(t)$ изменения уровня H (выходного сигнала) пропорциональна величине входного сигнала, т.е. v .

Пример 2. Интегрирующим звеном является устройство "золотник-гидроцилиндр" (гидравлический интегратор), приведенное на рис.2.40. Это устройство входит в состав автопилота, служащего для поддержания заданного режима полета летательного аппарата.

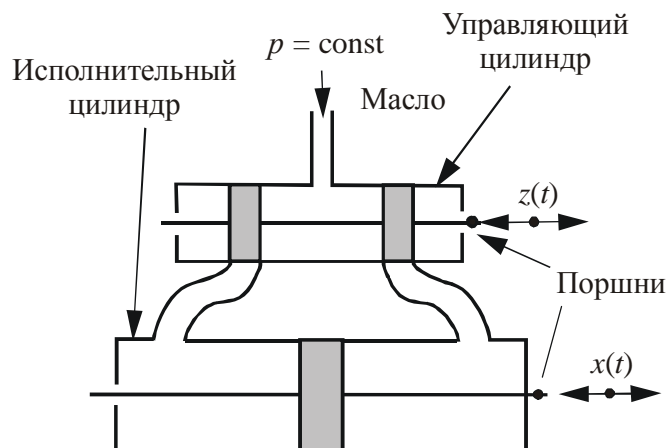


Рис.2.40. Гидравлический интегратор - пример реализации интегрирующего звена

Входной величиной является смещение $z(t)$ поршня гидравлического клапана (золотника) относительно нейтрального положения, а выходной - смещение $x(t)$ поршня исполнительного цилиндра.

Сигнал $z(t)$ вызывает смещение поршня гидравлического клапана и, следовательно, возникает перепад давления масла в левой и правой частях гидроцилиндра и соответственно движение поршня $x(t)$.

Так как $p = \text{const}$, то скорость перемещения поршня гидравлического цилиндра пропорциональна степени открытия клапанов, т.е. $\dot{x}(t) = kz(t)$ или $x(t) = k \int_0^t z(t) dt$.

2.7. Идеальное дифференцирующее звено

Выходной сигнал дифференцирующего звена пропорционален производной от входного сигнала. Дифференциальное уравнение дифференцирующего звена:

$$a_0 \dot{x}(t) = b_1 z(t);$$

$$\dot{x}(t) = k z(t),$$

где $k = b_1 / a_0$.

Возьмем преобразование Лапласа от обеих частей дифференциального уравнения при нулевых начальных условиях и определим передаточную функцию:

$$X(s) = ksZ(s);$$

$$W(s) = \frac{X(s)}{Z(s)} = ks.$$

Заменяя в передаточной функции s на $j\omega$, получим АФХ:

$$W(j\omega) = kj\omega;$$

$$U(\omega) = 0;$$

$$V(\omega) = jk\omega.$$

Найдем частотные характеристики дифференцирующего звена:

$$H(\omega) = k\omega;$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = \operatorname{arctg}(+\infty) = +\pi/2.$$

Графики соответствующих функций показаны на рис.2.41 и 2.42.

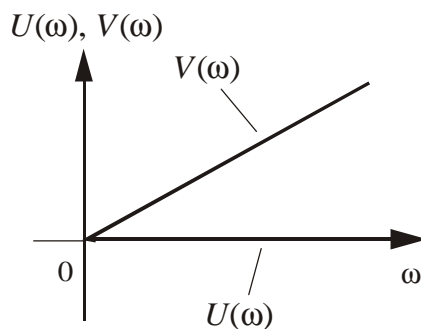


Рис.2.41. Вещественная и мнимая части АФХ идеального дифференцирующего звена для ω

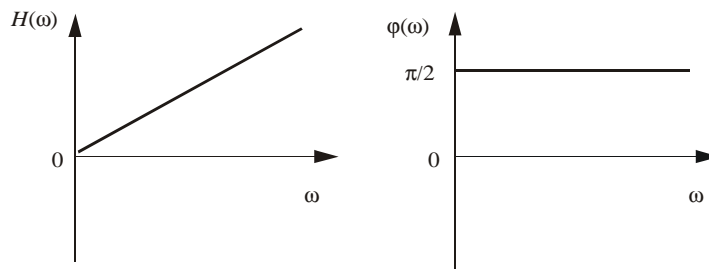


Рис.2.42. Графики АЧХ и ФЧХ идеального дифференцирующего звена для $\omega \geq 0$

Годограф АФХ расположен на мнимой оси (рис.2.43). Для положительных частот годограф совпадает с положительной частью мнимой полуоси: $\lim_{\omega \rightarrow \infty} W(j\omega) = \infty$;

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} W(j\omega) = 0.$$

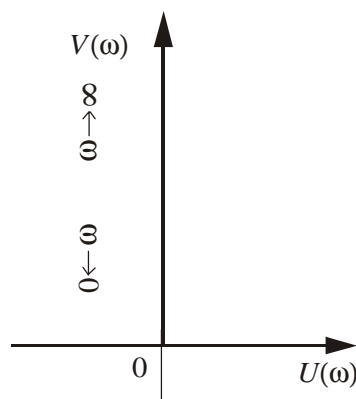


Рис.2.43. Годограф идеального дифференцирующего звена

ЛАЧХ дифференцирующего звена:

$$L_m(\omega) = 20 \lg k \omega = 20 \lg k + 20 \lg \omega.$$

Таким образом, ЛАЧХ соответствует прямая линия с наклоном +20 дБ/дек.

Определим характерные точки ЛАЧХ. При $k = 1$ $L_m(\omega) = +20 \lg \omega$. Точка пересечения ЛАЧХ с осью частот находится из уравнения $L_m(\omega) = 0$, $20 \lg \omega = 0$, откуда $\omega_c = 1$.

Если $k \neq 1$, то из уравнения $L_m(\omega) = 0$ следует, что $20 \lg(k\omega) = 0$ и $\omega_c = 1/k$ (рис.2.44).

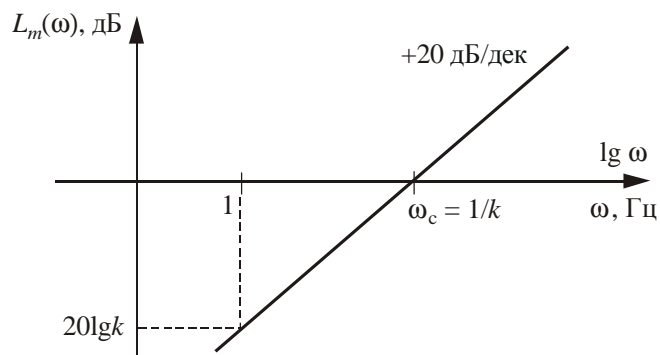


Рис.2.44. График ЛАЧХ идеального дифференцирующего звена

ЛФЧХ подобна ФЧХ и представляет собой прямую линию, проведенную на уровне $+\pi/2$.

Идеальное дифференцирующее звено хорошо пропускает высокочастотные сигналы и плохо - низкочастотные, т.е. является фильтром высоких частот.

В реальных условиях на вход дифференцирующего звена одновременно с полезным сигналом поступает помеха, которая, как правило, является высокочастотной. График ЛАЧХ имеет возрастающий характер, поэтому на выходе звена удельный вес помехи больше, чем полезного сигнала, что является недостатком применения этого звена в данной ситуации.

Приведем примеры реализации дифференцирующего звена.

Пример 1. RC-цепочка (рис.2.45)

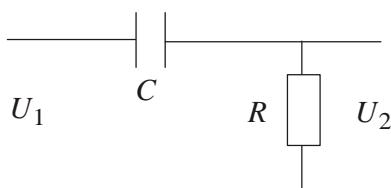


Рис.2.45. RC-цепочка - пример реализации дифференцирующего звена

$$W(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{RCs}{RCs + 1} = \frac{Ts}{Ts + 1}, \quad T = RC.$$

Этой передаточной функции соответствует дифференциальное уравнение

$$TU'_2(t) + U_2(t) = TU'_1(t).$$

Очевидно, что RC-цепочка не является идеальным дифференцирующим звеном, однако при условии, что $TU'_2(t) \ll U_2(t)$, можно считать, что $U_2(t) = TU'_1(t)$.

Пример 2. В качестве дифференцирующего элемента в САУ наряду с электронными дифференциаторами часто используют тахогенераторы (тахометры) постоянного тока. Они представляют собой малогабаритные электрические генераторы постоянного тока, применяемые для измерения угловой скорости вращения валов различных машин и механизмов (рис.2.46).

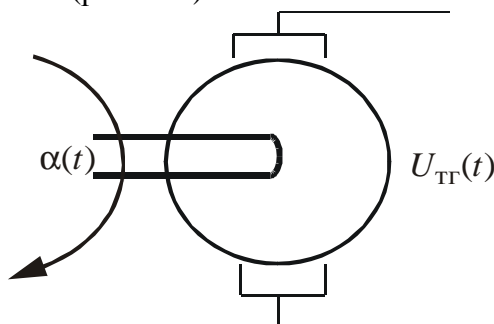


Рис.2.46. Тахогенератор - пример реализации дифференцирующего звена

Входной величиной тахогенератора является угол поворота якоря $\alpha(t)$. Выходная величина - напряжение $U_{ТГ}(t)$. Это напряжение линейно зависит от угловой скорости вала $\Omega(t)$.

Так как $\Omega(t) = \frac{da(t)}{dt}$, то $U_{\pi}(t) = k\Omega(t)$, или $U_{\pi}(t) = k \frac{da(t)}{dt}$.

Взяв преобразование Лапласа от обеих частей последнего равенства при нулевых начальных условиях, получим:

$$U_{\pi}(s) = ksa(s);$$

$$W(s) = \frac{U_{\pi}(s)}{a(s)} = ks.$$

2.8. Колебательное звено

Колебательное звено является частным случаем звена второго порядка, динамика которого описывается дифференциальным уравнением

$$a_2 \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 z(t).$$

Возьмем преобразование Лапласа от обеих частей дифференциального уравнения при нулевых начальных условиях:

$$a_2 X(s) \cdot s^2 + a_1 s X(s) + a_0 X(s) = b_0 Z(s);$$

$$X(s) \cdot (a_2 s^2 + a_1 s + a_0) = b_0 z(s).$$

Следовательно, передаточная функция колебательного звена имеет вид:

$$W(s) = \frac{X(s)}{Z(s)} = \frac{b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}.$$

Во многих случаях (радиоэлектроника, электротехника, механика) бывает удобно использовать дифференциальное уравнение колебательного звена в несколько ином виде:

$$T^2 \ddot{x}(t) + 2T\xi \dot{x}(t) + x(t) = kz(t).$$

Между двумя формами записи дифференциального уравнения существует однозначное соответствие:

$$T = \sqrt{\frac{a_2}{a_0}}, \quad T - \text{постоянная времени};$$

$$\xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}}, \quad \xi - \text{относительный коэффициент затухания (коэффициент}$$

демпфирования). В колебательном звене $0 < \xi < 1$;

$$k = \frac{b_0}{a_0} - \text{коэффициент передачи}.$$

Второй форме записи дифференциального уравнения колебательного звена соответствует следующая передаточная функция:

$$W(s) = \frac{X(s)}{Z(s)} = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1}. \quad (2.8)$$

Полюсами $W(j\omega)$ или корнями характеристического уравнения

$$T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1 = 0$$

при $0 < \xi < 1$ будут два комплексных числа:

$$s_{1,2} = \frac{-2\xi T \pm \sqrt{4\xi^2 T^2 - 4T^2}}{2T^2} = \frac{-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}}{T} = -\beta \pm j\omega, \quad (2.9)$$

где β - коэффициент, характеризующий скорость затухания колебаний звена,

$\beta = \frac{\xi}{T} = \omega_0 \xi$; $\omega_0 = \frac{1}{T}$; $\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T}$ - собственная частота колебаний звена.

Переходная функция звена (реакция системы на единичную ступенчатую функцию):

$$h(t) = L^{-1} \left[W(s) \frac{1}{s} \right];$$

$$h(t) = L^{-1} \left[\frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1} \frac{1}{s} \right].$$

С учетом введенных обозначений

$$h(t) = k(t) \left[1 - e^{-\beta t} \left(\cos \omega_1 t + \frac{\beta}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) \right].$$

Вид функции $h(t)$ показан на рис.2.47.

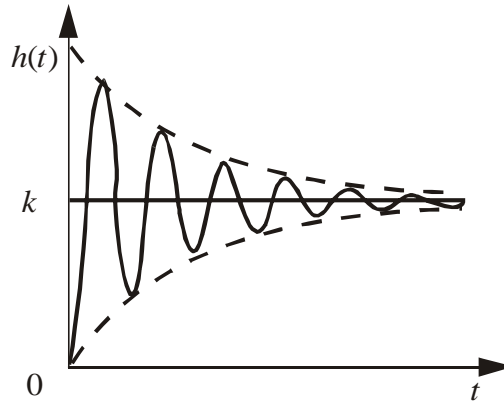


Рис.2.47. Переходная функция колебательного звена

Рассмотрим частотные характеристики колебательного звена.

АФХ колебательного звена:

$$W(j\omega) = \frac{k}{-T^2 \omega^2 + 2\xi T j\omega + 1} = \frac{k}{(1 - T^2 \omega^2) + 2j\xi T \omega};$$

$$U(\omega) = \frac{k(1 - \omega^2 T^2)}{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\xi T \omega)^2};$$

$$V(\omega) = \frac{-2k\xi T \omega}{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\xi T \omega)^2}.$$

Графики вещественной и мнимой частей АФХ колебательных звеньев с различным соотношением относительных коэффициентов затухания ξ показаны на рис.2.48.

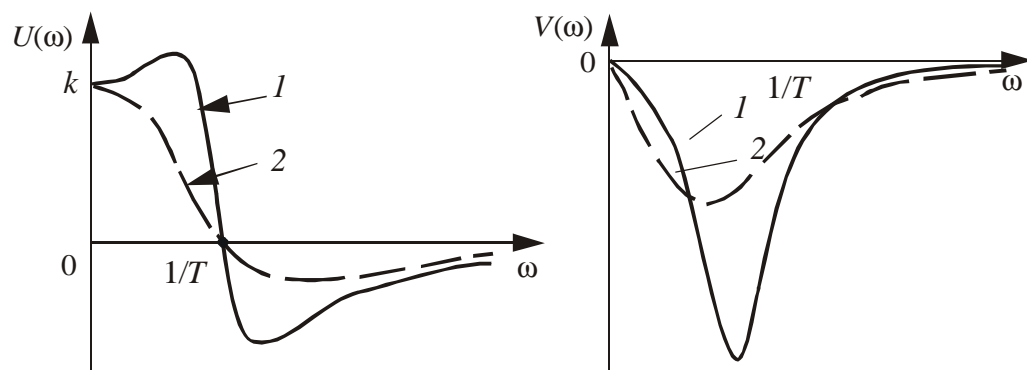


Рис.2.48. Вещественная и мнимая части АФХ колебательных звеньев: 1 - звено с относительным коэффициентом затухания ξ_1 ; 2 - звено с относительным коэффициентом затухания ξ_2 ($\xi_1 < \xi_2$)

На рис.2.49 представлено семейство кривых годографа АФХ колебательных звеньев при различных значениях ξ . Годограф при $\omega = 0$ начинается на вещественной оси, так как $W(0) = k$, и с ростом частоты от $\omega = 0$ до $\omega = \infty$ последовательно проходит четвертый и третий квадранты. С уменьшением ξ годограф расширяется ("разбухает").

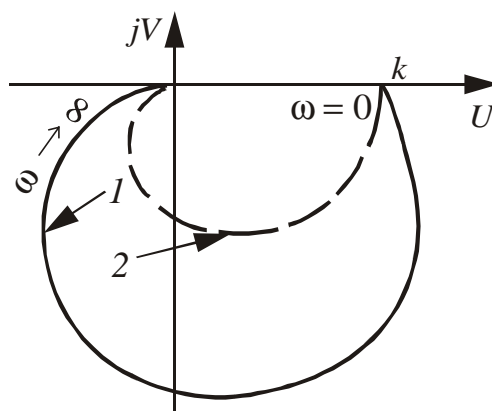


Рис.2.49. Годографы колебательных звеньев при различных значениях относительного коэффициента затухания ξ : 1 - звено с ξ_1 ; 2 - звено с ξ_2 ($\xi_1 < \xi_2$)

АЧХ колебательного звена можно получить обычным образом, но проще это сделать, рассматривая его передаточную функцию в виде дроби (см. § 2.1), в числителе которой записана передаточная функция усилительного звена ($W_1(s) = k$), а в знаменателе - передаточная функция дифференцирующего звена второго порядка ($W_2(s) = T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1$):

$$H(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}}.$$

На частоте $\omega_0 = 1/T$ при $\xi = 0$ колебания не затухают (рис.2.50). Колебательное звено, для которого $\xi = 0$, называют консервативным звеном.

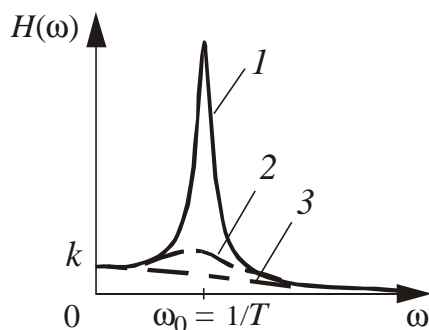


Рис.2.50. График АЧХ колебательного звена при различных значениях относительного коэффициента затухания: 1 - $\xi = 0,05$; 2 - $\xi = 0,5$; 3 - $\xi = 0,7$

ФЧХ колебательного звена найдем путем вычитания из ФЧХ усилительного звена ($\varphi_1(\omega) = 0$) ФЧХ дифференцирующего звена второго порядка. В результате получим следующие формулы:

$$\begin{aligned}\varphi(\omega) &= -\arctg \frac{2\xi T\omega}{1-\omega^2 T^2} \text{ при } \omega < \frac{1}{T}; \\ \varphi(\omega) &= -\pi - \arctg \frac{2\xi T\omega}{1-\omega^2 T^2} \text{ при } \omega > \frac{1}{T}; \\ \varphi(\omega) &= -\pi/2 \text{ при } \omega = \frac{1}{T}.\end{aligned}$$

Колебательное звено вносит отрицательный сдвиг фаз между входным и выходным сигналами в пределах от $\varphi = 0$ при $\omega = 0$ до $\varphi = -\pi$ при $\omega \rightarrow \infty$. При $\omega = \omega_0 = 1/T$ независимо от ξ $\varphi(\omega_0) = -\pi/2$.

ЛАЧХ колебательного звена:

$$\begin{aligned}L_m(\omega) &= 20\lg H(\omega); \\ L_m(\omega) &= 20\lg \frac{k}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}}; \\ L_m(\omega) &= 20\lg k - 20\lg \sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}.\end{aligned}$$

При $k = 1$ имеем $L_m(\omega) = -20\lg \sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2}$.

Определим низкочастотную и высокочастотную асимптоты ЛАЧХ.

При малых значениях ω ($\omega \rightarrow 0$) имеем:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \left[-20\lg \sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2} \right] = -20\lg 1 = 0.$$

Следовательно, низкочастотная асимптота ЛАЧХ приближается к оси абсцисс.

При больших значениях ω ($\omega \rightarrow \infty$) имеем:

$$\begin{aligned}L_m(\omega) &= -20\lg \sqrt{(1-T^2\omega^2)^2 + (2\xi T\omega)^2} \approx -20\lg \sqrt{(1-T^2\omega^2)^2} = \\ &= -20\lg T^2\omega^2 = -40\lg T\omega.\end{aligned}$$

Поступив по аналогии с определением наклона ЛАЧХ апериодического звена (см. § 2.2), найдем, что наклон высокочастотной асимптоты ЛАЧХ колебательного звена составляет -40 дБ/дек. Точка пересечения низкочастотной и высокочастотной асимптот соответствует частоте $\omega_c = 1/T$. На этой частоте имеет место максимальное отклонение асимптотических ЛАЧХ от реальных. Его величина определяется по формуле

$$\Delta L_m(\omega) = -20 \lg \sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\xi T \omega)^2} \text{ для } \xi = 1.$$

При $\omega = \frac{1}{T}$ имеем: $L_m(\omega) = -20 \lg \sqrt{0^2 + (2 \cdot 1 \cdot 1)^2} = -20 \lg 2 \approx -6 \text{ дБ}$.

В интервале частот вблизи $\omega_c = 1/T$ ЛАЧХ колебательного звена не могут быть заменены прямолинейными асимптотами. Для уточнения асимптотических ЛАЧХ в окрестности частот, близких к частоте $\omega_c = 1/T$, необходимо ввести поправки ΔL в зависимости от величины ξ . Поправки для некоторых значений ξ приведены в табл.2.2 и на рис.2.51.

Таблица 2.2

Таблица поправок ΔL к асимптотическим ЛАЧХ колебательного звена

ξ	ω/ω_0				
	0,1	0,3	0,6	0,8	1,0
0,1	0,086	0,800	3,726	8,091	13,979
0,3	0,071	0,653	2,683	4,437	4,437
0,6	0,024	0,188	0,325	-0,217	-1,584
0,8	-0,025	-0,247	-1,242	-2,475	-4,082
1	-0,086	-0,749	-2,671	-4,297	-6,021

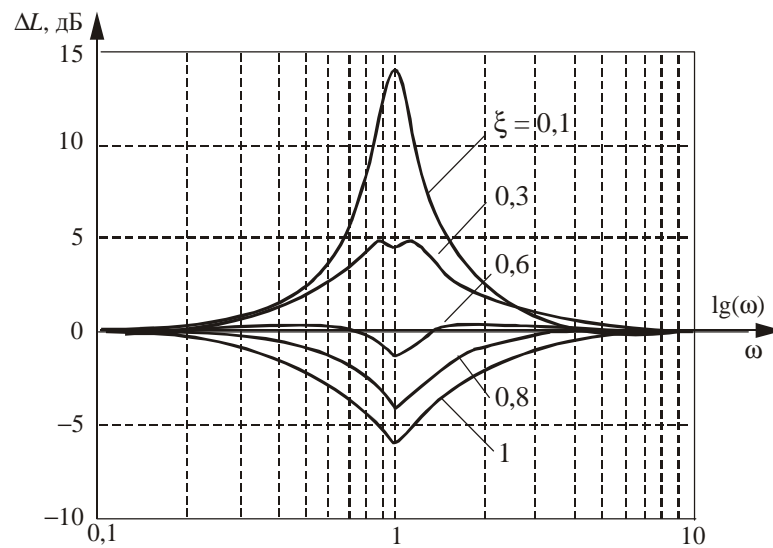


Рис.2.51. Графики поправок к асимптотическим ЛАЧХ колебательного звена

Из графиков поправок видно, что скачок может быть вверх или вниз в зависимости от величины ξ . Поэтому для уточнения асимптотических ЛАЧХ удобно применять комплект шаблонов, каждый из которых изготовлен для постоянного значения ξ .

ЛФЧХ колебательного звена подобна ее ФЧХ в обычном масштабе, но деформирована по оси частот. На частоте $\omega_c = \frac{1}{T}$ при $\xi = 0$ ЛФЧХ получает скачкообразное изменение фазы от 0 до 180° . Графики ЛАЧХ и ЛФЧХ показаны на рис.2.52.

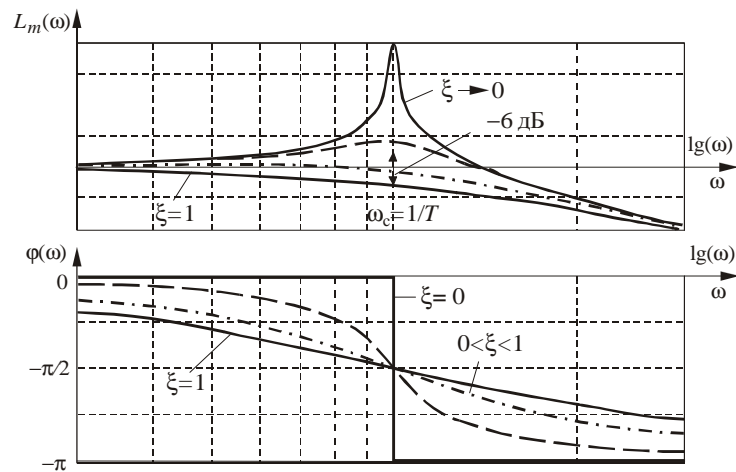


Рис.2.52. Графики ЛАЧХ и ЛФЧХ колебательного звена при различных значениях относительного коэффициента затухания ξ

Колебательные звенья способны накапливать два вида энергии: кинетическую и потенциальную. Процесс колебаний сопровождается переходом одной энергии в другую, и наоборот.

Примерами колебательного звена могут служить:

- металлический демпфер;
- акселерометр (измеритель ускорения);
- RLC -контур в радиотехнике (рис.2.53).

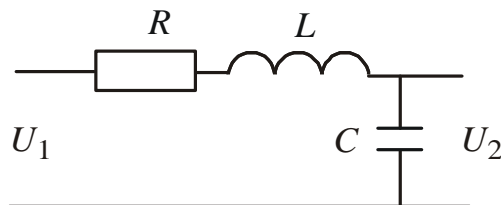


Рис.2.53. RLC -контур - пример реализации колебательного звена

Входным сигналом RLC -контура является напряжение U_1 , выходной величиной - напряжение на конденсаторе U_2 . Если цепь не нагружена и ток в цепи $i(t) = C \frac{du_2}{dt}$, то в соответствии с законом Кирхгофа уравнение динамики контура:

$$U_1 = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + U_2.$$

После несложных преобразований с учетом того, что $i(t) = C \frac{du_2}{dt}$, получим:

$$R \left[C \frac{du_2}{dt} \right] + L \frac{d}{dt} \left[C \frac{du_2}{dt} \right] + U_2 = U_1;$$

$$LC \frac{d^2 u}{dt^2} + RC \frac{du}{dt} + U_2 = U_1.$$

Последнее уравнение после введения обозначений $T = \sqrt{LC}$; $\xi = 0,5R\sqrt{C/L}$ приводится к стандартному виду:

$$T^2 \frac{d^2 u}{dt^2} + 2\xi T \frac{du}{dt} + U_2 = U_1.$$

Этому дифференциальному уравнению соответствует передаточная функция (2.8):

$$W(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}.$$

Ранее указывалось, что для колебательного звена должно выполняться соотношение $0 < \xi < 1$. Исследуем поведение звена с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1} \text{ вне указанного диапазона значений } \xi.$$

Первый случай: $\xi = 1$.

$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2Ts + 1} = \frac{k}{(Ts + 1)^2}.$$

Колебательное звено преобразуется в цепочку из двух одинаковых аperiodических звеньев; переходной процесс в такой системе имеет аperiodический характер.

Второй случай: $\xi > 1$. Колебательное звено преобразуется в произведение передаточных функций двух различных аperiodических звеньев. Действительно, при $\xi > 1$ корни s_1 и s_2 (2.9) являются отрицательными действительными числами $s_1 = -a_1$, $s_2 = -a_2$, поэтому

$$W(s) = \frac{k}{(s + a_1)(s + a_2)} = \frac{k}{a_1 a_2 \left(\frac{1}{a_1} s + 1\right) \left(\frac{1}{a_2} s + 1\right)} = \frac{k^*}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)},$$

$$\text{где } k^* = \frac{k}{a_1 a_2}; T_1 = \frac{1}{a_1}; T_2 = \frac{1}{a_2}.$$

В этом случае, как и в первом, колебания отсутствуют, процесс имеет аperiodический характер.

Третий случай: $\xi = 0$. Колебательное звено преобразуется в консервативное:

$$\lim_{\omega \rightarrow 1/T} \left[-20 \lg \sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\xi T \omega)^2} \right] = -20 \lg 0 = \infty.$$

АЧХ и ЛАЧХ этого звена имеют разрыв на сопрягающей частоте $\omega_c = \frac{1}{T}$.

В реальных системах амплитуда выходных колебаний вблизи сопрягающей частоты сильно возрастает по мере уменьшения коэффициента ξ .

2.9. Дифференцирующее звено второго порядка

Дифференциальное уравнение дифференцирующего звена второго порядка имеет вид:

$$x(t) = k(\tau^2 \ddot{z}^{(2)}(t) + 2\xi \tau \dot{z}^{(1)}(t) + z(t)), \quad (2.10)$$

где k , τ , ξ - соответственно коэффициент передачи, постоянная времени и коэффициент затухания звена.

При этом выходная величина $x(t)$ определяется не только входной величиной $z(t)$, но и первой и второй производными от нее. Предполагается, что выражение (2.10) нельзя разложить на два множителя первой степени, т.е. $0 \leq \xi \leq 1$. Это условие означает, что корни характеристического уравнения $\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1 = 0$ являются комплексными числами.

Если $\xi > 1$, то звено, описываемое дифференциальным уравнением (2.10), не является элементарным. Его можно представить в виде последовательного соединения двух дифференцирующих звеньев первого порядка.

Возьмем преобразование Лапласа от обеих частей дифференциального уравнения (2.10) при нулевых начальных условиях:

$$X(s) = k(\tau^2 s^2 Z(s) + 2\xi\tau s Z(s) + Z(s)).$$

Передаточная функция дифференцирующего звена второго порядка:

$$W(s) = \frac{X(s)}{Z(s)} = k(\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1).$$

После замены $s = j\omega$ получим АФХ:

$$W(j\omega) = k[(1 - \tau^2\omega^2) + j2\xi\tau\omega].$$

АФХ дифференцирующего звена второго порядка (рис.2.54) является параболой, которая начинается из точки $(k, 0)$.

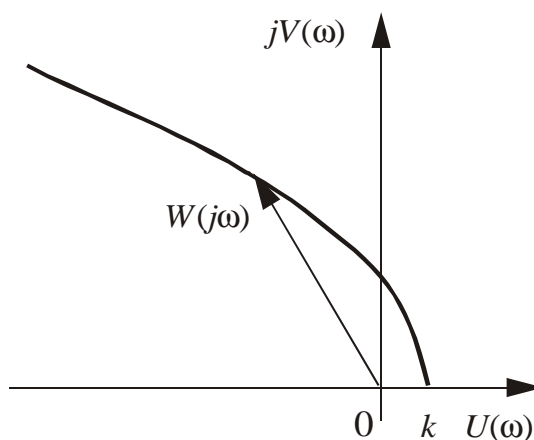


Рис.2.54. График АФХ дифференцирующего звена второго порядка

Исследуем поведение АЧХ и ФЧХ:

$$H(\omega) = k\sqrt{(1 - \tau^2\omega^2)^2 + 4\xi^2\tau^2\omega^2}.$$

При изменении частоты ω от 0 до ∞ величина $H(\omega)$ изменяется в диапазоне от k до ∞ .

$$\varphi(\omega) = \arg|W(j\omega)| = \arctg \frac{2\xi\tau\omega}{1 - \tau^2\omega^2} \text{ при } \omega < \frac{1}{\tau};$$

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} \text{ при } \omega = \frac{1}{\tau};$$

$$\varphi(\omega) = \pi + \arctg \frac{2\xi\tau\omega}{1 - \tau^2\omega^2} \text{ при } \omega > \frac{1}{\tau}.$$

Диапазон изменения фазы выходного сигнала при изменении частоты ω от 0 до ∞ определяется следующим образом:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(\omega) = \arctg 0 = 0;$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(\omega) = \pi - \lim_{\omega \rightarrow \infty} (\arctg \frac{2\xi\tau\omega}{\tau^2\omega^2 - 1}) = \pi - \arctg(0) = \pi.$$

Следовательно, дифференцирующее звено второго порядка создает опережение по фазе в пределах от $\varphi = 0$ при $\omega = 0$ до $\varphi = \pi$ при $\omega \rightarrow \infty$.

АЧХ и ФЧХ дифференцирующего звена второго порядка являются обратными (инверсными) соответствующим частотным характеристикам колебательного звена. Поэтому ЛЧХ дифференцирующего звена второго порядка представляют собой зеркальное отображение относительно оси частот ЛЧХ колебательного звена (рис.2.55).

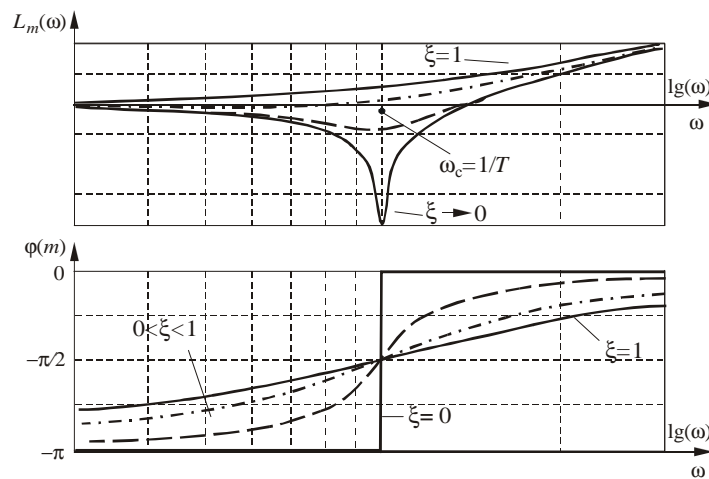


Рис.2.55. Графики ЛАЧХ и ЛФЧХ дифференцирующего звена второго порядка

На низких частотах дифференцирующее звено второго порядка дает усиление (при $k > 1$) или ослабление (при $k < 1$) входного сигнала. На высоких частотах это звено подобно двойному дифференцирующему звену. Его ЛАЧХ имеет наклон +40 дБ/дек.

При реализации дифференцирующего звена второго порядка в виде RC -цепочек его дифференциальное уравнение имеет вид:

$$a_2 x^{(2)}(t) + a_1 x^{(1)}(t) + a_0 x(t) = b_2 z^{(2)}(t) + b_1 z^{(1)}(t) + b_0 z(t),$$

которому соответствует передаточная функция

$$W(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}.$$

Подобное звено называется реальным дифференцирующим звеном второго порядка.

2.10. Запаздывающее звено

Запаздывающее звено передает входной сигнал без искажения по величине, однако при этом выходной сигнал запаздывает по отношению ко входному на определенную постоянную величину. Уравнение звена имеет вид:

$$x(t) = kz(t - \tau), \quad (2.11)$$

причем $x(t) = 0$ при $t < \tau$, τ - время запаздывания.

Согласно теореме запаздывания

$$L[z(t - \tau)] = e^{-s\tau} Z(s),$$

где $Z(s) = L[z(t)]$.

Взяв преобразование Лапласа от обеих частей дифференциального уравнения (2.11) при нулевых начальных условиях, найдем передаточную функцию

$$W(s) = \frac{X(s)}{Z(s)} = k \cdot e^{-\tau s}.$$

Запаздывающее звено относится к особым динамическим звеньям. Его передаточная функция не является алгебраическим выражением, а представляет собой трансцендентное выражение.

АФХ запаздывающего звена:

$$W(j\omega) = k e^{-j\omega\tau}.$$

Приняв во внимание, что

$$e^{-j\omega\tau} = \cos \omega\tau - j \sin \omega\tau,$$

получим:

$$W(j\omega) = k(\cos \omega\tau - j \sin \omega\tau).$$

Действительная и мнимая части АФХ равны

$$U(\omega) = k \cos(\omega\tau);$$

$$V(\omega) = -k \sin(\omega\tau).$$

С учетом того, что

$$U^2(\omega) + V^2(\omega) = k^2,$$

получим АФХ запаздывающего звена (рис.2.56).

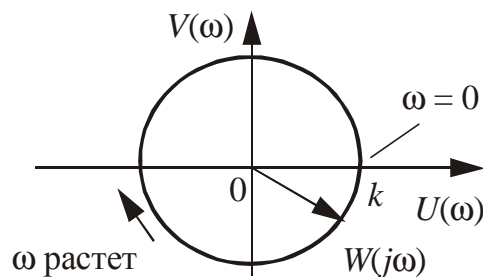


Рис.2.56. АФХ запаздывающего звена

АФХ звена чистого запаздывания представляет собой окружность с центром в начале координат и радиусом k . По этой окружности конец вектора $W(j\omega)$ многократно проходит по часовой стрелке при изменении частоты от нуля до бесконечности.

Годограф начинается на положительной полуоси действительной оси (при $\omega = 0$ $W(j\omega) = k$). Каждой точке АФХ соответствует бесчисленное множество значений частот входного сигнала, отличающихся на величину $2\pi k / \tau$, где k - целое число.

Действительно, возьмем, например, ряд частот

$$\omega = 0, 2\pi/\tau, 4\pi/\tau, \dots, 2\pi k/\tau,$$

для него имеем:

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= 0; \\ \varphi(2\pi/\tau) &= -2\pi; \\ \varphi(4\pi/\tau) &= -4\pi; \\ &\dots \\ \varphi(2\pi k/\tau) &= -2\pi k.\end{aligned}$$

Изменение частоты ω на величину $2\pi k/\tau$ вызывает поворот вектора $W(j\omega)$ на k оборотов по часовой стрелке. Всем этим частотам соответствует одна точка АФХ с координатами $(k, 0)$.

Можно показать, что передаточная функция запаздывающего звена имеет в правой полуплоскости бесчисленное множество нулей с модулем, стремящимся к бесконечности. Следовательно, запаздывающее звено является неминимально-фазовым (см. § 2.1).

АЧХ и ФЧХ запаздывающего звена:

$$H(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = k;$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = -\tau\omega;$$

их графики показаны на рис.2.57.

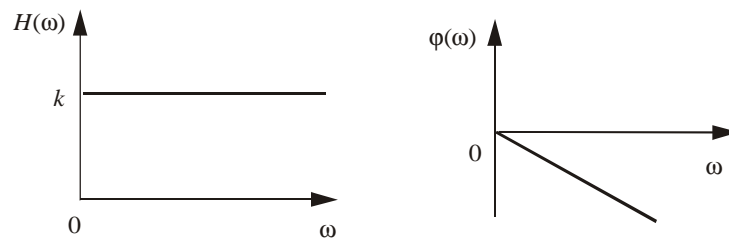


Рис.2.57. Частотные характеристики запаздывающего звена

АЧХ запаздывающего звена не зависит от частоты. Сдвиг фаз на ФЧХ линейно зависит от частоты: чем выше частота входного сигнала, тем больше фазовое запаздывание выходного сигнала.

ЛАЧХ (рис.2.58,а) звена чистого запаздывания совпадает с ЛАЧХ безынерционного звена с передаточной функцией $W(s) = k$ и представляет собой прямую линию, параллельную оси абсцисс и проведенную от нее на расстоянии $20\lg k$.

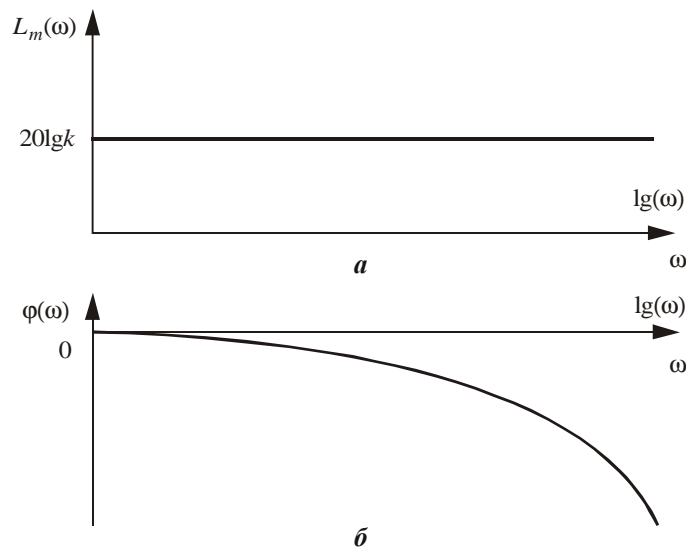


Рис.2.58. Графики ЛЧХ запаздывающего звена

Особенностью построения ЛФЧХ (рис.2.58,б) является то, что при переходе по оси частот к логарифмическому масштабу прямая линия $\varphi(\omega) = -\omega\tau$ деформируется в кривую. Эта кривая может быть аппроксимирована зависимостью $y = -10^x r$, где x - показатель степени, определяемый по формуле $x = \lg \omega$.

Примерами запаздывающего звена могут служить:

- система автоматического дозирования какого-либо вещества, перемещаемого с помощью ленточного транспортера (τ - время движения ленты на определенном участке);
- система регулирования толщины прокатываемого металла (τ - время движения металла от валков до измерителя толщины);
- акустическая линия связи (τ - время прохождения звука);
- вычислительная система (τ - время, требуемое на обработку входной информации).

2.11. Неминимально-фазовые и неустойчивые звенья.

Неустойчивое апериодическое звено

Определение неминимально-фазовых неустойчивых звеньев было дано в § 2.1. У минимально-фазовых звеньев существует однозначная связь между видом ЛАЧХ и видом ЛФЧХ, т.е. можно построить одну характеристику и по ней судить, как ведет себя другая. Например, при изменении ЛАЧХ типового звена на ± 20 дБ/дек ЛФЧХ стремится к $\pm 90^\circ$, а при изменении ЛАЧХ на ± 40 дБ/дек ЛФЧХ стремится к $\pm 180^\circ$. Для неминимально-фазовых звеньев обязательно построение двух характеристик: и ЛАЧХ, и ЛФЧХ.

Особенности неминимально-фазовых и неустойчивых звеньев продемонстрируем на примере неустойчивого апериодического звена.

Дифференциальное уравнение и передаточная функция неустойчивого апериодического звена имеют следующий вид:

$$Tx'(t) - x(t) = kz(t);$$

$$W(s) = \frac{k}{Ts - 1}.$$

Передаточная функция $W(s)$ имеет полюс в точке $s = \frac{1}{T}$.

Определим вещественную и мнимую части АФХ:

$$W(j\omega) = \frac{k}{jT\omega - 1};$$

$$W(j\omega) = \frac{K(-Tj\omega - 1)}{(Tj\omega - 1)(-Tj\omega - 1)} = -\frac{K}{1 + T^2\omega^2} - j\frac{KT\omega}{1 + T^2\omega^2};$$

$$U(\omega) = -\frac{K}{1 + T^2\omega^2}; V(\omega) = -\frac{KT\omega}{1 + T^2\omega^2}.$$

АФХ неустойчивого апериодического звена, как и устойчивого апериодического звена, имеет вид полуокружности (рис.2.59) и симметрична ей относительно оси координат.

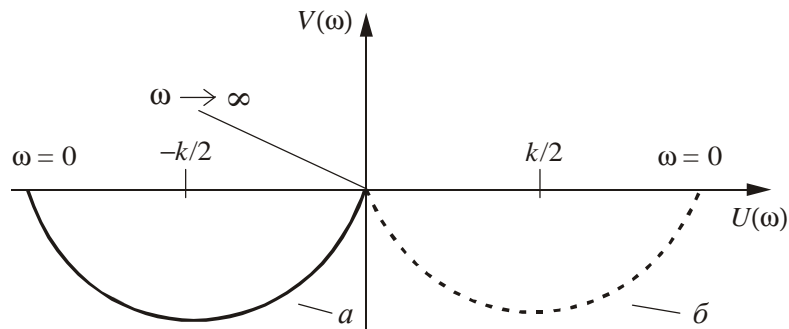


Рис.2.59. АФХ неустойчивого (а) и устойчивого (б) апериодических звеньев

АЧХ неустойчивого апериодического звена представляет следующую зависимость:

$$H(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}.$$

При выводе формулы ФЧХ следует учитывать, что $\text{Re}(\omega) < 0$ и $\text{Im}(\omega) < 0$ при $0 \leq \omega < \infty$. Поэтому угол φ лежит в третьем квадранте и изменяется в пределах от $\varphi = -180^\circ$ (при $\omega = 0$) до $\varphi = -90^\circ$ (при $\omega \rightarrow \infty$):

$$\varphi(\omega) = -\pi + \arctg \omega T.$$

Таким образом, ЛАЧХ устойчивого и неустойчивого апериодических звеньев имеют одинаковый вид, а их ЛФЧХ отличаются. Соответствующие зависимости приведены на рис.2.60.

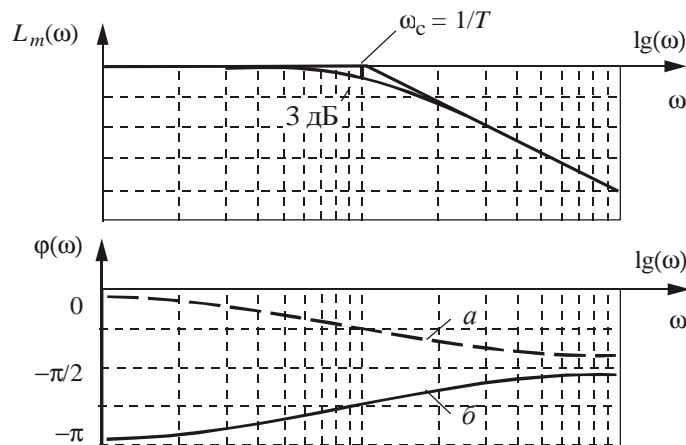


Рис.2.60. ЛАЧХ и ЛФЧХ устойчивого (а) и неустойчивого (б) апериодических звеньев

Рассмотрение ЛФЧХ показывает, что неустойчивое апериодическое звено создает по абсолютной величине больший сдвиг фаз, чем устойчивое апериодическое звено. Общий вывод заключается в том, что величина фазового запаздывания для устойчивых звеньев меньше, чем для соответствующих неустойчивых звеньев.

Определим переходную функцию неустойчивого апериодического звена как реакцию на единичную ступенчатую функцию:

$$X(s) = W(s) \frac{1}{s};$$

$$X(s) = \frac{k}{Ts - 1} \frac{1}{s} = \frac{kTs}{Ts - 1} - \frac{k}{s}.$$

Выполнив обратное преобразование, получим:

$$x(t) = k[e^{t/T} - 1].$$

Переходная функция неустойчивого апериодического звена представляет собой бесконечно возрастающую функцию. Она приведена на рис.2.61, там же для сравнения даны переходные функции устойчивого апериодического и интегрирующего звеньев.

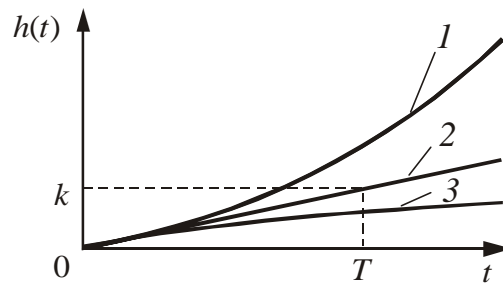


Рис.2.61. Графики переходных функций неустойчивого апериодического (1), интегрирующего (2) и устойчивого апериодического (3) звеньев

2.12. Методика построения ЛЧХ сложных САУ

Пусть имеется сложная САУ, состоящая из цепочки последовательно соединенных типовых звеньев. Тогда ее передаточная функция:

$$W(s) = \prod_{i=1}^N \prod_{k=1}^{L_i} W_{ik}(s),$$

где N - количество различных типов звеньев, входящих в состав сложной САУ; L_i - количество звеньев i -го типа; $W_{ik}(s)$ - передаточная функция k -го звена i -го типа.

Исследование сложной САУ можно проводить по ее годографу. Однако построение годографов сложных САУ представляет трудоемкую вычислительную процедуру:

$$A(\omega) = \prod_{i=1}^N \prod_{k=1}^{L_i} A_{ik}(\omega).$$

Задача исследования САУ значительно упрощается при переходе к логарифмическим характеристикам:

$$20\lg A(\omega) = 20\lg \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^L A_{ik}(\omega);$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{L_i} \varphi_{ik}(\omega).$$

В настоящее время имеется ряд математических пакетов, которые могут успешно использоваться для построения и дальнейшего исследования ЛЧХ сложных динамических систем. Однако в некоторых случаях, например на этапе предварительного качественного исследования САУ или при проверке адекватности разработанных программных моделей, возникает необходимость использования упрощенных асимптотических ЛЧХ. Кроме того, рассмотрение последних представляет самостоятельный интерес с точки зрения более глубокого понимания динамики функционирования САУ.

Можно выделить два вида ЛАЧХ типовых звеньев, имеющих вид:

- одной линии (например, ЛАЧХ безынерционных, интегрирующих и дифференцирующих звеньев);
- двух сопрягаемых линий (горизонтальной - низкочастотной асимптоты и наклонной - высокочастотной асимптоты) (например, ЛАЧХ апериодического звена, дифференцирующего звена первого порядка).

Процедуру сложения графиков ЛАЧХ можно упростить, если первым построить график ЛАЧХ безынерционного интегрирующего звена (или интегрирующих звеньев, если их несколько), а затем к нему последовательно пристраивать графики ЛАЧХ остальных звеньев. При этом очередность сложения графиков определяется постоянными времени имеющихся звеньев T_i . Графики упорядочиваются по убыванию T_i или, что то же самое, по возрастанию сопрягающих частот $\omega_{ci} = 1/T_i$.

Пример. Разомкнутая система состоит из четырех типовых звеньев, включенных последовательно, а именно, интегрирующего, дифференцирующего звена первого порядка и двух апериодических звеньев. Для простоты изложения примем, что коэффициенты усиления всех звеньев равны единице.

Передаточная функция системы:

$$W(s) = \frac{T_a s + 1}{s(T_b s + 1)(T_c s + 1)}.$$

Пусть $T_b > T_a > T_c$, тогда имеем ряд сопрягающих частот, которые для удобства дальнейшего использования обозначим следующим образом:

$$\omega_{c1} = \frac{1}{T_b}; \quad \omega_{c2} = \frac{1}{T_a}; \quad \omega_{c3} = \frac{1}{T_c},$$

причем $\omega_{c1} < \omega_{c2} < \omega_{c3}$.

На рис.2.62 показаны ЛАЧХ четырех звеньев, составляющих систему. Они приведены в порядке возрастания сопрягающих частот. Эти четыре графика легко сложить последовательно в порядке, приведенном на рисунке. Сначала ЛАЧХ интегрирующего звена складывается с ЛАЧХ первого апериодического звена, после чего к полученному результату добавляется ЛАЧХ дифференцирующего звена первого порядка и, наконец, прибавляется ЛАЧХ второго апериодического звена.

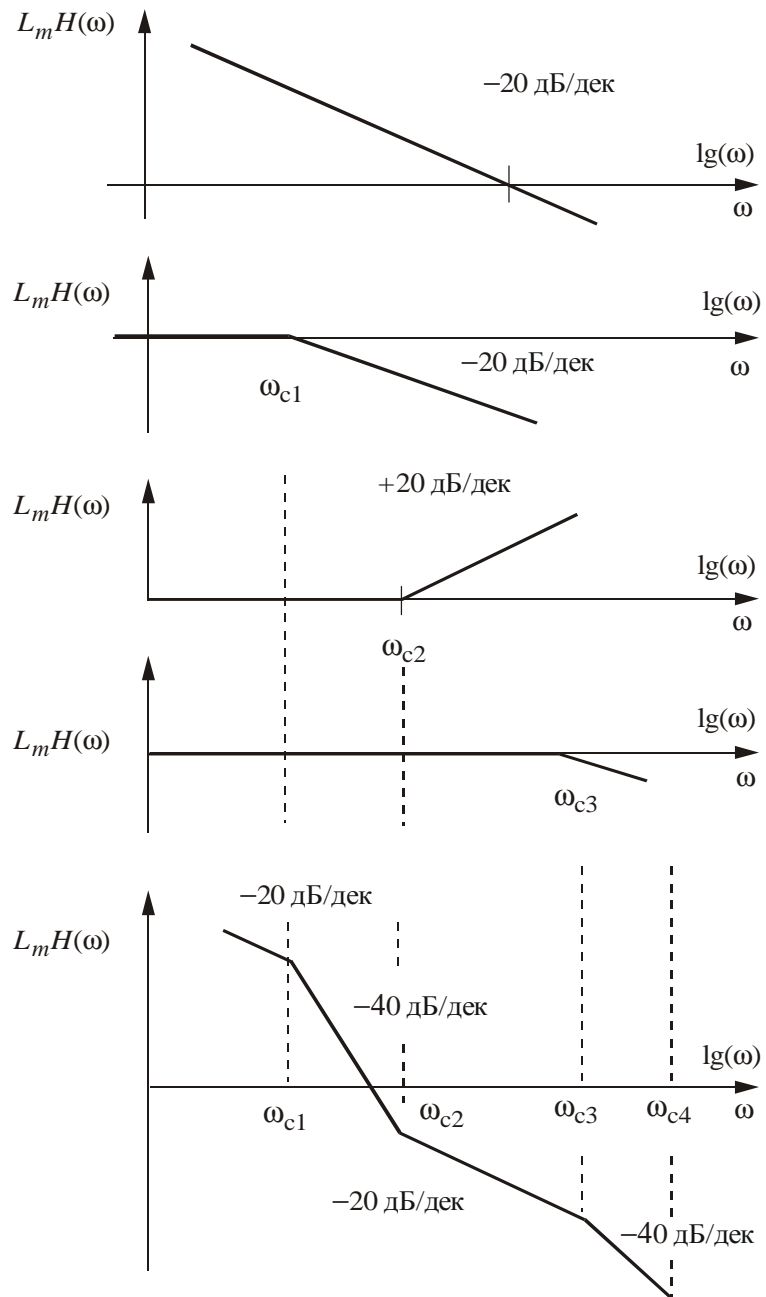


Рис.2.62. Графики ЛАЧХ отдельных звеньев, упорядоченных по возрастанию ω_{ci} , и график результирующей ЛАЧХ

Можно видеть, что до частоты ω_{c1} ЛАЧХ сложной системы, включающей четыре звена, определяется только ЛАЧХ интегрирующего звена, имеющей наклон -20 дБ/дек (ЛАЧХ всех остальных звеньев до частоты ω_{c1} имеют нулевые значения).

В диапазоне частот $\omega_{c1} - \omega_{c2}$ следует учитывать ненулевые значения только ЛАЧХ интегрирующего и апериодического звеньев. Результат их сложения в указанном диапазоне дает прямую линию с наклоном -40 дБ/дек.

В следующем диапазоне $\omega_{c2} - \omega_{c3}$ нужно добавить ЛАЧХ дифференцирующего звена первого порядка. Для чего необходимо сложить ранее полученный график с ЛАЧХ дифференцирующего звена первого порядка и т.д. В результате получается линия, имеющая наклон -40 дБ/дек $+ 20$ дБ/дек $= -20$ дБ/дек.

Наконец, в интервале $\omega_{c3} - \omega_{c4}$ наклон изменяется на величину -20 дБ/дек из-за появления высокочастотной асимптоты второго апериодического звена и составляет -40 дБ/дек.

Разумеется, вид ЛАЧХ сложной системы не зависит от последовательности сложения графиков. Однако добавление (пристраивание) графиков по мере возрастания сопрягающих частот $\omega_i = 1/T_i$ является удобным упрощением операции построения общей ЛАЧХ сложной САУ и позволяет оценить влияние соответствующих звеньев. На практике ЛАЧХ цепочки звеньев строится сразу без построения ЛАЧХ отдельных звеньев.

Опишем методику построения ЛАЧХ системы, включающей несколько звеньев.

1. Определяются сопрягающие частоты $\omega_i = 1/T_i$, где T_i - постоянные времени звеньев.
2. На ось абсцисс наносятся значения сопрягающих частот. Напомним, что для удобства дальнейших исследований целесообразно указывать наряду с $\lg \omega$ непосредственно значения ω .
3. Определяется исходная точка ЛАЧХ, относительно которой строится ЛАЧХ системы. Ее координаты: по оси абсцисс $\omega = 1$ ($\lg(1) = 0$), по оси ординат $20\lg k$, где k - коэффициент усиления системы.
4. Через найденную точку проводится первая асимптота с наклоном $-20(q - r)$ дБ/дек, где q - число интегрирующих; r - число идеальных дифференцирующих звеньев. Первая асимптота продолжается до наименьшей сопрягающей частоты.
5. После каждой из сопрягающих частот $\omega_i = 1/T_i$ изменяется наклон ЛАЧХ по сравнению с тем, который она имела до сопрягающей частоты:
 - на -20 или -40 дБ/дек соответственно для апериодического или колебательного звена;
 - на $+20$ или $+40$ дБ/дек соответственно для дифференцирующих звеньев первого и второго порядков.
6. При необходимости проводится уточнение ЛАЧХ путем введения поправок в построенные графики, что особенно важно для колебательных звеньев и дифференцирующих звеньев второго порядка вблизи частот $\omega_i = 1/T_i$.
7. По завершении построения ЛАЧХ системы выполняется проверка. Высокочастотная асимптота ЛАЧХ (участок ЛАЧХ на частотах выше наибольшей из сопрягающих частот) должна иметь наклон $-20(n - m)$ дБ/дек, где n - порядок полинома знаменателя передаточной функции $W(s)$; m - порядок полинома числителя.

ЛФЧХ сложной САУ может быть построена сложением ЛФЧХ ее отдельных звеньев. Однако, как и для ЛАЧХ, удобнее воспользоваться методом ускоренного построения ЛФЧХ. Суть метода состоит в том, что фазовая характеристика системы строится путем последовательного прибавления фазовых характеристик менее инерционных звеньев. При этом характеристика каждого последующего типового звена располагается не относительно оси абсцисс, а в полосе, ограниченной с одной стороны значением фазы, к которой стремится суммарная фазовая характеристика ранее построенной совокупности звеньев, а с другой стороны - значением фазы, к которой будет стремиться суммарная фазовая характеристика с учетом прибавляемого звена. При таком методе существенно облегчается построение суммарной фазовой характеристики, так как она на отдельных участках почти повторяет предыдущую и последующую фазовые характеристики.

Используем этот метод для построения ЛФЧХ системы вышеприведенного примера. Предварительно строим ЛФЧХ интегрирующего звена, для чего проводим горизонтальную линию на уровне $-\pi/2$ рад. Далее в полосе $(-\pi/2; -\pi)$ строим ЛФЧХ апериодического звена, имеющего сопрягающую частоту ω_{c1} (график 2 на рис.2.63).

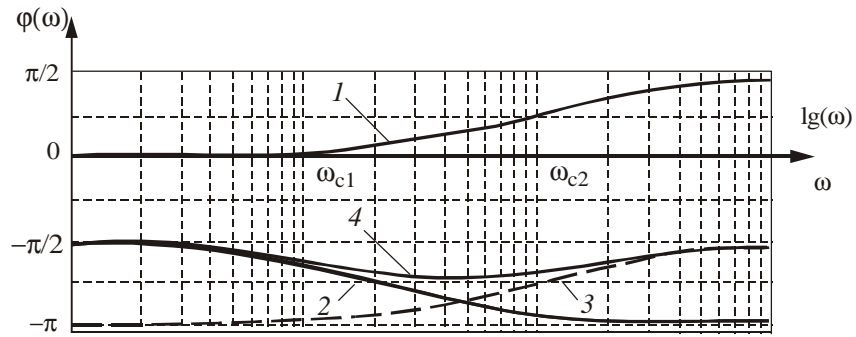


Рис.2.63. К пояснению метода ускоренного построения ЛФЧХ сложной системы: 1 - ЛФЧХ дифференцирующего звена первого порядка, построенная относительно уровня 0 рад; 2 - суммарная ЛФЧХ интегрирующего и апериодического звеньев; 3 - ЛФЧХ дифференцирующего звена первого порядка, перенесенная в полосу $(-\pi/2; -\pi)$; 4 - суммарная ЛФЧХ системы после добавления ЛФЧХ дифференцирующего звена первого порядка

Из графика видно, что на высоких частотах (при $\omega \rightarrow \infty$) интегрирующее и апериодическое звенья в совокупности дают фазовый сдвиг, равный $-\pi$ рад, а на низких частотах (при $\omega \rightarrow 0$) интегрирующее и апериодическое звенья в совокупности дают фазовый сдвиг, равный $-\pi/2$ рад; на высоких частотах (при $\omega \rightarrow \infty$) фазовый сдвиг составляет $-\pi$ рад.

Затем учитываем дифференцирующее звено первого порядка с сопрягающей частотой $\omega_{с2}$. ЛФЧХ этого звена будет лежать в следующих границах:

- $-\pi$ рад (предельное значение ЛФЧХ при $\omega \rightarrow \infty$ для ранее построенных звеньев);
- $-\pi/2$ (предельное значение, к которому стремится ЛФЧХ после добавления дифференцирующего звена первого порядка при $\omega \rightarrow \infty$).

ЛФЧХ системы, включающей интегрирующее, первое апериодическое и дифференцирующее звено первого порядка, дополняем ЛФЧХ второго апериодического звена: его график строим по аналогии в диапазоне $(-\pi/2; -\pi)$ рад и складываем с ранее построенной ЛФЧХ.

После построения ЛФЧХ всей системы рекомендуется выполнить проверку. Предельное значение $\phi(\omega)$ цепочки звеньев, получаемое при $\omega \rightarrow \infty$, должно равняться $-(\pi/2)(n - m)$, где n - порядок полинома знаменателя передаточной функции $W(s)$; m - порядок полинома ее числителя.

Глава 3. Структурные схемы и передаточные функции автоматических систем

3.1. Сложности реализации разомкнутых систем управления. Преимущество использования замкнутых систем управления

Разомкнутая система управления - это система, в которой управление осуществляется без обратной связи. Чтобы показать сложности реализации подобных систем, рассмотрим проблему передачи вращения от маломощного вала A на вал большой мощности B (рис.3.1).

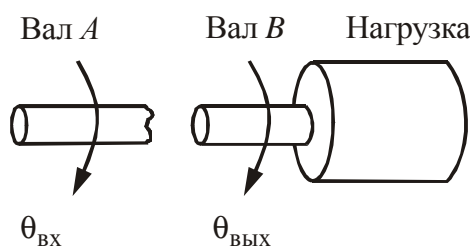


Рис.3.1. Постановка задачи: мощный вал должен вращаться со скоростью маломощного вала

При этом необходимо добиться, чтобы угловая скорость вращения выходного вала B

$$\Omega_B = \frac{d\theta_{\text{вых}}}{dt}$$

была равна угловой скорости вращения входного вала A

$$\Omega_A = \frac{d\theta_{\text{вх}}}{dt},$$

т.е. $\Omega_A = \Omega_B$,

где $\theta_{\text{вх}}$ и $\theta_{\text{вых}}$ - соответственно угол поворота вала A и B .

Сразу отметим, что самое простое решение проблемы, заключающееся в механическом соединении валов, неприемлемо. Оно приведет к разрушению маломощного вала, который не может поворачивать мощный вал, связанный с массивной нагрузкой. Следует использовать источник внешней энергии (рис.3.2).



Рис.3.2. Структурная схема разомкнутой системы передачи вращения вала

Чтобы ясней выразить суть решения проблемы рассмотрим ее упрощенно, не обращая внимания на динамику. Будем считать систему передачи вращения вала идеальной, т.е. полагать, что все ее устройства работают без запаздывания.

Дадим краткую характеристику используемых элементов. Тахогенератор измеряет скорость вращения вала A . Напряжение на его выходе:

$$U_{\text{тг}} = k_{\text{тг}} \cdot \frac{d\theta_{\text{вх}}}{dt} = k_{\text{тг}} \cdot \Omega_A, \quad (3.1)$$

где $k_{\text{тг}}$ - коэффициент передачи тахогенератора.

Выходной сигнал усилителя

$$U_y = k_y \cdot U_{\text{тг}} \quad (3.2)$$

(k_y - коэффициент усиления) поступает на вход двигателя. Двигатель вращает вал B со скоростью

$$\Omega_B = \frac{d\theta_{\text{вых}}}{dt} = k_{\text{дв}} \cdot U_y, \quad (3.3)$$

где $k_{\text{дв}}$ - коэффициент пропорциональности.

С учетом соотношений (3.1) - (3.3) получим выражение, связывающее входную и выходную угловые скорости:

$$\Omega_B = k_{\text{дв}} U_y = k_{\text{дв}} k_y U_{\text{тг}} = k_{\text{дв}} k_y k_{\text{тг}} \Omega_A.$$

Равенство $\Omega_A = \Omega_B$, например, можно обеспечить, если

$$k_{\text{дв}} = k_y = k_{\text{тг}} = 1.$$

Последнее условие выполнить сложно. Следует учитывать, что параметры элементов и устройств, входящих в систему, характеризуются определенным разбросом относительно их номинальных значений. Факторы внешней среды также не остаются постоянными. Поэтому при колебаниях температуры, давления, скорости ветра, механических вибрациях, пульсациях питающих напряжений каждый из параметров системы может изменяться в значительных пределах.

Введем обозначение $k_{\text{общ}} = k_{\text{дв}} k_y k_{\text{тг}}$ и построим график зависимости $\frac{\Omega_A}{\Omega_B} = \frac{1}{k_{\text{общ}}}$ (рис.3.3).

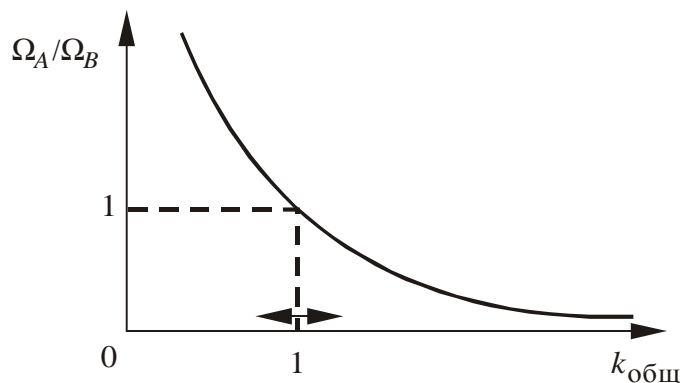


Рис.3.3. Зависимость отношения Ω_A / Ω_B от $k_{\text{общ}}$ при разомкнутом контуре управления

Из рассмотрения графика можно сделать вывод о том, что при отклонении значения $k_{\text{общ}}$ от 1 существенно изменяется точность отработки входного сигнала.

Поэтому необходимо иметь информацию об отклонении Ω_B от Ω_A и использовать ее для поддержания равенства угловых скоростей валов A и B .

Структурная схема замкнутой системы передачи вращения маломощного вала на вал большой мощности показана на рис.3.4.

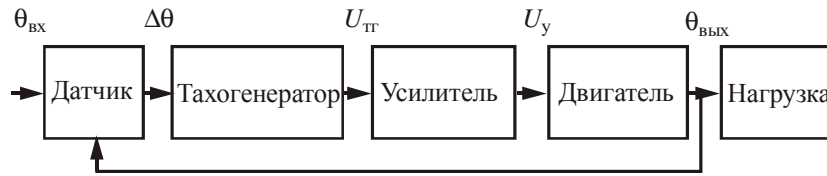


Рис.3.4. Структурная схема замкнутой системы передачи вращения маломощного вала на вал большой мощности

Датчик рассогласования определяет сигнал ошибки:

$$\Delta\theta = \theta_{\text{вх}} - \theta_{\text{вых}}. \quad (3.4)$$

Напряжение на выходе тахогенератора:

$$U_{\text{тг}} = k_{\text{тг}} \frac{d\Delta\theta}{dt} = k_{\text{тг}} \left(\frac{d\theta_{\text{вх}}}{dt} - \frac{d\theta_{\text{вых}}}{dt} \right) = k_{\text{тг}} (\Omega_A - \Omega_B).$$

Приняв во внимание, что $U_y = k_y U_{\text{тг}}$ и $\Omega_B = k_{\text{дв}} \cdot U_y$, можно записать выражение для угловой скорости вала B :

$$\Omega_B = k_{\text{дв}} k_y k_{\text{тг}} (\Omega_A - \Omega_B) = k_{\text{общ}} (\Omega_A - \Omega_B).$$

Выясним степень влияния коэффициента передачи замкнутой системы $k_{\text{общ}}$ на точность отработки входных сигналов.

Из уравнения (3.5) найдем отношение $\frac{\Omega_A}{\Omega_B}$. Для чего предварительно перепишем уравнение в виде

$$\Omega_B (1 + k_{\text{общ}}) = k_{\text{общ}} \Omega_A;$$

$$\frac{\Omega_A}{\Omega_B} = 1 + \frac{1}{k_{\text{общ}}}.$$

Построим график найденной зависимости (рис.3.5).

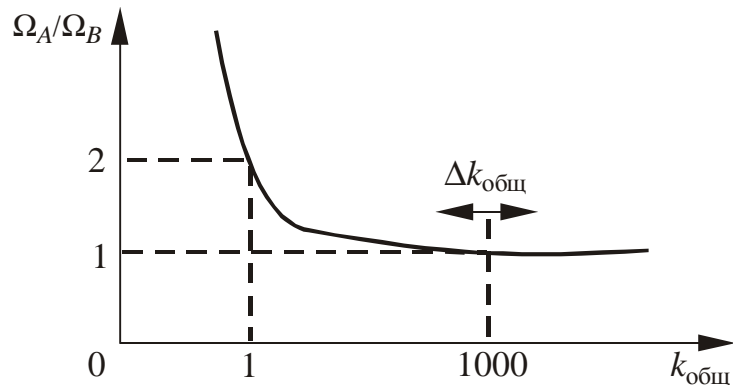


Рис.3.5. Зависимость отношения Ω_A / Ω_B от $k_{\text{общ}}$ при замкнутом контуре управления

Для хорошей работы системы коэффициент $k_{\text{общ}}$ должен иметь достаточно большое значение. Действительно, в этом случае изменение величины $k_{\text{общ}}$ мало

влияет на изменение отношения $\frac{\Omega_A}{\Omega_B}$.

Чрезмерно увеличивать $k_{\text{общ}}$ нельзя, так как возникает другая проблема - замкнутая система при больших коэффициентах передачи может стать неустойчивой.

Хотя сложности реализации разомкнутой системы и преимущество замкнутой системы управления показаны на примере передачи вращения маломощного вала на вал большой мощности, полученные выводы имеют общий характер и могут быть распространены на другие САУ.

3.2. Функциональная схема замкнутой САУ, назначение отдельных устройств и элементов. Классификация САУ

Независимо от назначения (управление мартеновской печью, ядерным реактором, установкой вакуумного напыления или наведением космического аппарата), а также независимо от физических принципов работы отдельных элементов, любая САУ может быть представлена функциональной схемой, отражающей ее динамические свойства.

Рассмотрим обобщенную функциональную схему САУ (рис.3.6).

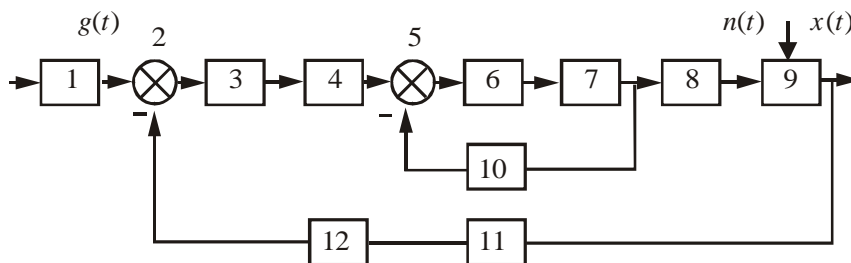


Рис.3.6. Функциональная схема САУ: 1 - задающее устройство; 2 и 5 - устройства сравнения; 3 - преобразующее устройство; 4 и 10 - корректирующие устройства (регуляторы); 6 - усилительное устройство; 7 - исполнительное устройство; 8 - орган управления; 9 - объект управления; 11 - измерительный элемент (датчик); 12 - элемент главной обратной связи

Задающее устройство преобразует входное воздействие в управляющий сигнал $g(t)$, который определяет закон изменения выходной (регулируемой) величины $x(t)$. Исторически первыми задающими устройствами были пружины (часовой механизм), уровни (поплавковый регулятор уровня жидкости), калиброванные сопротивления и т.п. В современных САУ выработка заданной функции управления может осуществляться специализированными вычислительными устройствами и универсальными ЭВМ, что позволяет изменять значение регулируемой величины $x(t)$ по сложному закону.

Устройства сравнения - это преобразователи с двумя входами, они предназначены для определения рассогласований, т.е. отклонения регулируемой величины от заданного значения, соответственно в контурах основной и местной обратной связи. Устройства сравнения также называют датчиками ошибки (отклонения).

В ряде систем устройство сравнения может представлять собой арифметическое устройство, которое осуществляет вычитание из измеренного датчиком значения регулируемой величины другой величины, принятой за опорную.

В большинстве случаев непосредственное использование выходного сигнала устройства сравнения для приведения в действие органа управления невозможно.

Возникает необходимость преобразования его из одной формы представления в другую и усиления его как по величине, так и по мощности.

Преобразующее устройство служит для преобразования одной физической величины в другую, более удобную для использования в процессе управления, но без выполнения функций измерения, усиления или коррекции. К преобразующим устройствам относятся датчики "угол - код", реле и др.

Корректирующие устройства предназначены для обеспечения заданных динамических свойств и повышения устойчивости замкнутой системы. С их помощью, например, обеспечивается высокая точность работы в установившемся режиме, демпфируются колебания для сильно колебательных объектов (таких как летательные аппараты, морские суда и т.д). Функции корректирующих устройств могут выполнять ЭВМ или аналоговые вычислительные устройства.

Усилительное устройство служит для усиления мощности сигналов. В хорошо спроектированной системе отклонение регулируемой величины от заданного значения $\epsilon(t)$ должно быть малым. Вместе с тем на объект управления должны поступать достаточно мощные воздействия. На практике широко используются электронные, магнитные, гидравлические, пневматические усилители.

Исполнительное устройство вырабатывает управляющее воздействие на орган управления объекта, например, руль летательного аппарата. В САУ в качестве исполнительных устройств используются следующие типы: пневматические, гидравлические и электрические.

Орган управления позволяет путем изменения его положения или состояния воздействовать на объект управления.

Для пояснения функций исполнительного устройства и органа управления приведем два примера.

В автопилоте рулевая машинка (исполнительное устройство) поворачивает на определенный угол рули (орган управления), что создает момент, вращающий летательный аппарат (объект управления) вокруг центра масс.

В системе регулирования уровня жидкости электродвигатель (исполнительное устройство) поднимает или опускает задвижку (орган управления) соответственно при недостатке или избытке жидкости.

Следует отметить, что орган управления иногда рассматривается как компонент объекта управления.

Объект управления - элемент, который подвергается управляющему воздействию. Как указывалось, объектом управления может быть мартеновская печь, ядерный реактор, космический аппарат и т.д.

Принципиальным отличием объекта управления от всех остальных элементов системы является то, что он обычно задан и при разработке САУ не может быть изменен, тогда как остальные элементы выбираются специально для решения конкретной задачи управления.

В связи с большим разнообразием объектов управления разными могут быть и управляемые переменные: напряжение, число оборотов, угловое положение, курс, мощность и т.д. Изучением конструкций объектов управления занимаются специальные дисциплины: электротехника, энергетика, аэродинамика и т.д.

Измерительный элемент предназначен для преобразования регулируемых величин или возмущающих воздействий в сигналы управления, удобные для дальнейшего использования. Чаще всего значения регулируемых величин преобразуются в пропорциональные электрические сигналы или механические перемещения.

Элемент главной обратной связи - вырабатывающий сигнал, который находится в определенной функциональной зависимости от регулируемой переменной.

Конкретные схемы САУ могут отличаться от типовой схемы. Часть рассмотренных устройств может отсутствовать или конструктивно объединяться в одном устройстве. Кроме того, САУ могут иметь другие элементы, не показанные на схеме (см. рис.3.6). Возможно наличие нескольких контуров местной обратной связи.

Классификация САУ проводится по различным признакам. В частности, в зависимости от того, используется или нет информация об управляемой величине для выработки управляющих воздействий, различают два основных типа САУ - замкнутые и разомкнутые (см. § 1.2).

Рассмотрим классификацию САУ по виду задающего сигнала. По этому признаку САУ подразделяются на системы стабилизации, программного управления и следящие.

Система стабилизации - система, управляющее (задающее) воздействие которой является постоянным ($g(t) = \text{const}$), а выходной параметр поддерживается на определенном постоянном уровне ($x(t) = \text{const}$). Примеры систем стабилизации: автоматический стабилизатор напряжения, система поддержания постоянной температуры в холодильнике и т.д.

Система программного управления - система, задающий сигнал $g(t)$ которой изменяется по определенной программе. В данном случае $g(t) = F(t)$, где $F(t)$ - функция, известная на всем интервале управления. Примерами систем программного управления могут служить программа выхода на режим технологического процесса и программа разгона двигателя самолета.

Следящая система - это система, у которой изменение задающего сигнала происходит по случайному закону ($g(t) = \text{var}$). Примерами следящих систем являются системы наведения ракет на цель по данным РЛС, системы управления автоматической стыковкой космических аппаратов.

3.3. Передаточная функция динамической системы в замкнутом и разомкнутом состояниях по различным видам воздействий

Типовое звено САУ характеризуется наличием одного входного и одного выходного сигналов. Поэтому его динамические свойства полностью определяются одним дифференциальным уравнением или одной эквивалентной ему передаточной функцией. Однако при исследовании сложных САУ возникает необходимость выделения нескольких входных и выходных сигналов. Такими сигналами могут быть полезные и вредные входные воздействия, сигнал рассогласования, выходной сигнал и другие. Поэтому динамические свойства САУ описываются несколькими дифференциальными уравнениями или передаточными функциями, устанавливающими связь между выбранными сигналами.

Рассмотрим обобщенную структурную схему САУ, включающую регулятор и объект управления (рис.3.7).

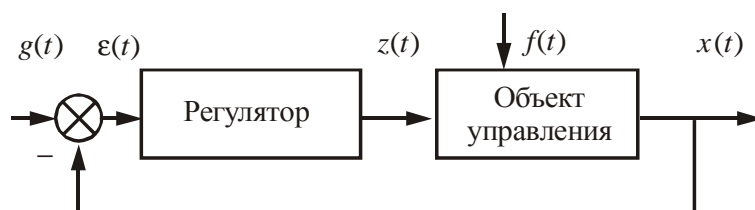


Рис.3.7. Обобщенная структурная схема САУ: $g(t)$ - задающее воздействие; $\varepsilon(t)$ - сигнал ошибки (рассогласования); $z(t)$ - управляющее воздействие; $f(t)$ - возмущающее воздействие; $x(t)$ - выходной сигнал

Для линейной динамической системы можно записать систему трех уравнений, представляющих следующие процессы:

- 1) формирование сигнала ошибки:

$$\varepsilon(t) = g(t) - x(t); \quad (3.6)$$

- 2) функционирование регулятора:

$$R(p) \cdot z(t) = L(p) \cdot \varepsilon(t); \quad (3.7)$$

- 3) функционирование объекта управления:

$$D(p) \cdot x(t) = M(p) \cdot z(t) + N(p) \cdot f(t), \quad (3.8)$$

где $R(p)$, $L(p)$, $D(p)$, $M(p)$, $N(p)$ - операторные полиномы, они определяются структурой исходных дифференциальных уравнений.

Для упрощения записи дифференциальных уравнений применяются символы дифференцирования:

$$p := \frac{d}{dt}; \quad p^i := \frac{d^i}{dt^i}.$$

Возьмем преобразования Лапласа от правых и левых частей уравнений (3.6) - (3.8) при нулевых начальных условиях:

$$E(s) = G(s) - X(s); \quad (3.9)$$

$$R(s) \cdot Z(s) = L(s) \cdot E(s); \quad (3.10)$$

$$D(s) \cdot X(s) = M(s) \cdot Z(s) + N(s) \cdot F(s). \quad (3.11)$$

Найдем передаточную функцию регулятора. Согласно рис.3.6 имеем:

$$W_p(s) = \frac{Z(s)}{E(s)}.$$

Так как из уравнения (3.10) следует, что

$$\frac{Z(s)}{E(s)} = \frac{L(s)}{R(s)},$$

то выражение для $W_p(s)$ можно представить в следующем виде:

$$W_p(s) = \frac{L(s)}{R(s)}. \quad (3.12)$$

САУ имеет несколько входов, каждый из которых оказывает влияние на выходной сигнал. Для определения передаточной функции по конкретному входу необходимо сигналы, поступающие на другие входы, приравнять нулю.

Найдем передаточную функцию объекта управления. По определению (см. рис.3.7)

$$W_o(s) = \frac{X(s)}{Z(s)}.$$

Примем, что возмущающее воздействие $f(t) = 0$, тогда $F(s) = 0$, и на основании (3.11) найдем:

$$W_o(s) = \frac{M(s)}{D(s)}. \quad (3.13)$$

В дальнейшем для упрощения промежуточных выкладок будем опускать в записи операторных полиномов обозначение переменной s , т.е. будем полагать, что $R = R(p)$, $L = L(p)$, $D = D(p)$, $M = M(p)$, $N = N(p)$.

С учетом сделанного замечания систему из трех уравнений (3.9) - (3.11) можно записать в виде

$$E = G - X; \quad (3.14)$$

$$R \cdot Z = L \cdot E; \quad (3.15)$$

$$D \cdot X = M \cdot Z + N \cdot F. \quad (3.16)$$

Выразим изображение выходного сигнала X через изображения управляющего G и возмущающего F воздействий.

На основании (3.16) имеем:

$$X = \frac{M}{D} Z + \frac{N}{D} F. \quad (3.17)$$

Из (3.15) с учетом (3.14) получим:

$$Z = \frac{L}{R} (G - X). \quad (3.18)$$

Подставив (3.18) в (3.17), найдем:

$$X = \frac{M}{D} \frac{L}{R} G - \frac{M}{D} \frac{L}{R} X + \frac{N}{D} F.$$

После несложных преобразований получим:

$$X = \frac{\frac{M}{D} \frac{L}{R}}{1 + \frac{M}{D} \frac{L}{R}} G + \frac{\frac{N}{D}}{1 + \frac{M}{D} \frac{L}{R}} F.$$

Введем обозначения:

$$W = \frac{M}{D} \frac{L}{R}; W_f = \frac{N}{D}.$$

Тогда

$$X = \frac{W}{1 + W} G + \frac{W_f}{1 + W} F. \quad (3.19)$$

Отметив важность последней формулы, представим ее в развернутом виде:

$$X(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)} G(s) + \frac{W_f(s)}{1 + W(s)} F(s). \quad (3.20)$$

Таким образом, выходной сигнал САУ при поступлении нескольких воздействий определяется на основании принципа суперпозиции, в нашем случае первое слагаемое характеризует эффект управляющего воздействия, второе - возмущающего. Применив соотношение (3.20), найдем передаточные функции замкнутой системы отдельно по управляющему и возмущающему воздействиям.

Передаточная функция замкнутой системы по управляющему воздействию

$$\Phi(s) = \frac{X(s)}{G(s)}$$

получается из (3.20) в предположении, что возмущающее воздействие отсутствует ($F(s) = 0$):

$$\Phi(s) = \frac{X(s)}{G(s)} = \frac{W(s)}{1 + W(s)}. \quad (3.21)$$

Аналогично определим передаточную функцию замкнутой системы по возмущающему воздействию:

$$\Phi_f(s) = \frac{X(s)}{F(s)}.$$

В этом случае $G(s) = 0$, и на основании (3.20)

$$\Phi_f(s) = \frac{W_f(s)}{1 + W(s)}. \quad (3.22)$$

Подставив (3.21) и (3.22) в (3.20), получим формулу для вычисления изображения выходного сигнала через изображения управляющего и возмущающего воздействий и соответствующие передаточные функции:

$$X(s) = \Phi(s)G(s) + \Phi_f(s)F(s). \quad (3.23)$$

Часто на практике рассматривают не реакцию системы, а величину ошибки, с которой система обрабатывает соответствующее входное воздействие.

Из (3.14) с учетом (3.19) получим:

$$E = G - X = G - \left(\frac{W}{1+W} G + \frac{W_f}{1+W} F \right) = \frac{1}{1+W} G - \frac{W_f}{1+W} F. \quad (3.24)$$

Найдем передаточную функцию замкнутой системы по ошибке от управляющего воздействия (см. рис.3.7):

$$\Phi_\epsilon(s) = \frac{E(s)}{G(s)}.$$

Предположив, что возмущающее воздействие отсутствует ($F(s) = 0$), из (3.24) получим:

$$\frac{E}{G} = \frac{1}{1+W}.$$

Следовательно, в развернутой записи:

$$\Phi_\epsilon(s) = \frac{1}{1+W(s)}. \quad (3.25)$$

Аналогично определим передаточную функцию замкнутой системы по ошибке от возмущающего воздействия (см. рис.3.7):

$$\Phi_{\epsilon f}(s) = \frac{E(s)}{F(s)}.$$

При $G(s) = 0$ из (3.24) имеем:

$$\frac{E}{F} = -\frac{W_f(s)}{1+W(s)}.$$

Таким образом,

$$\Phi_{\epsilon f}(s) = -\frac{W_f(s)}{1+W(s)}. \quad (3.26)$$

Применив зависимости, полученные для замкнутой системы, установим соответствующие зависимости для разомкнутой системы. При размыкании обратной связи исчезает сигнал ошибки. Система уравнений (3.14) - (3.16) принимает вид:

$$E = G; \quad (3.27)$$

$$R \cdot Z = L \cdot E = L \cdot G; \quad (3.28)$$

$$D \cdot X = M \cdot Z + N \cdot F. \quad (3.29)$$

Выразим выходной сигнал разомкнутой САУ через изображения управляющего и возмущающего воздействий. Из уравнения (3.29) найдем:

$$X = \frac{M}{D}Z + \frac{N}{D}F.$$

В правую часть последнего равенства подставим выражение, найденное из уравнения (3.28):

$$Z = \frac{L}{R}G.$$

В результате получим:

$$X = \frac{M}{D} \frac{L}{R} G + \frac{N}{D} F. \quad (3.30)$$

Приняв возмущающее воздействие равным нулю ($F = 0$), найдем передаточную функцию разомкнутой системы по управляющему воздействию

$$X = \frac{M}{D} \frac{L}{R} G,$$

откуда

$$\frac{X}{G} = \frac{ML}{DR} = W.$$

Последнее выражение перепишем в развернутой форме следующим образом:

$$W(s) = \frac{X(s)}{G(s)} = \frac{M(s)L(s)}{D(s)R(s)}.$$

Приняв во внимание (3.12) и (3.13), получим:

$$W(s) = W_p(s)W_o(s). \quad (3.31)$$

В заключение найдем передаточную функцию разомкнутой системы по возмущающему воздействию.

При отсутствии управляющего воздействия ($Z = 0$) из (3.29) имеем:

$$X = \frac{N}{D}F,$$

откуда следует, что

$$\frac{X}{F} = \frac{N}{D} = W_f,$$

или окончательно

$$W_f(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}.$$

3.4. Правила преобразования структурных схем

Структурные схемы САУ могут иметь различную сложность. С целью их упрощения и приведения к виду, более удобному для исследования, используют определенные правила. Эти правила базируются на принципе суперпозиции и однонаправленности звеньев и легко доказываются сопоставлением между собой исходных и эквивалентных схем.

Правило преобразования цепочки последовательно соединенных звеньев. Дана цепочка звеньев с известными передаточными функциями $W_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, n$ (рис.3.8).

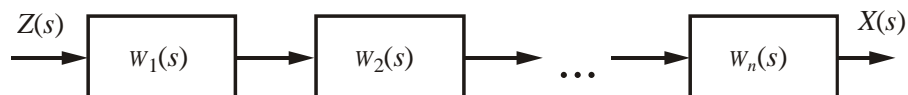


Рис.3.8. Схема цепочки последовательно соединенных звеньев

Несложно показать, что данную цепочку звеньев можно представить одним звеном (рис.3.9)

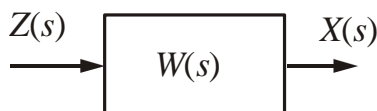


Рис.3.9. Эквивалентное представление цепочки последовательно соединенных звеньев

с эквивалентной передаточной функцией

$$W(s) = \prod_{i=1}^n W_i(s) \quad (3.32)$$

Передаточная функция цепочки n последовательно соединенных звеньев равна произведению передаточных функций этих n звеньев. Кроме того, из уравнения (3.32) следует, что результат последовательного соединения звеньев не зависит от порядка соединения звеньев.

Правило преобразования цепочки параллельно соединенных звеньев. Дана цепочка звеньев (рис.3.10).

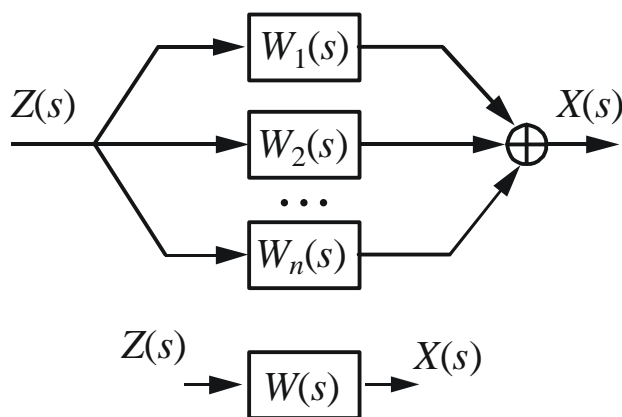


Рис.3.10. Преобразование цепочки параллельно соединенных звеньев

Звено, эквивалентное данной системе звеньев, имеет передаточную функцию

$$W(s) = \sum_{i=1}^n W_i(s). \quad (3.33)$$

Передаточная функция цепочки n параллельно соединенных звеньев равна сумме передаточных функций этих звеньев.

Правило определения передаточной функции замкнутой цепи с единичной отрицательной обратной связью. Если передаточная функция разомкнутой цепи равна $W(s)$ и используется единичная отрицательная обратная связь (рис.3.11),

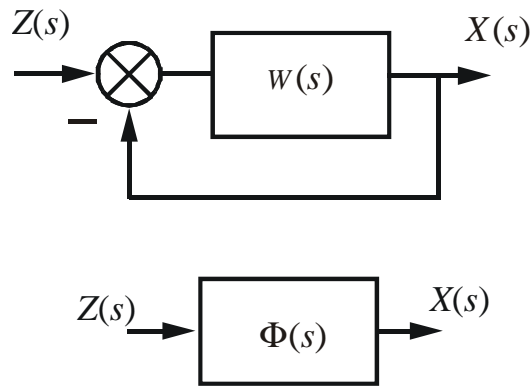


Рис.3.11. Преобразование замкнутой цепи с единичной отрицательной обратной связью

то передаточная функция замкнутой системы вычисляется по формуле

$$\Phi(s) = \frac{X(s)}{Z(s)} = \frac{W(s)}{1 + W(s)}. \quad (3.34)$$

Правило определения передаточной функции замкнутой цепи с неединичной отрицательной обратной связью. Пусть известны передаточные функции разомкнутой цепи $W(s)$ и цепи обратной связи $W_{oc}(s)$ (рис.3.12),

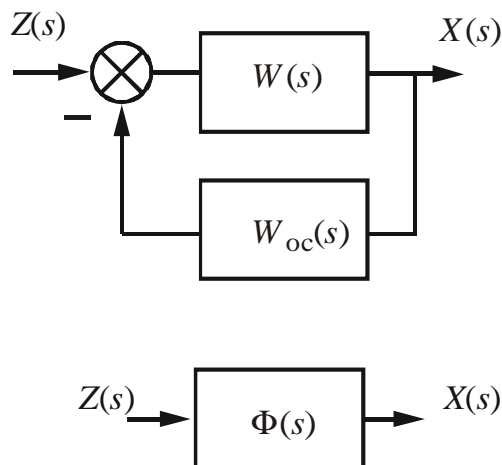


Рис.3.12. Преобразование замкнутой цепи с неединичной отрицательной обратной связью

тогда передаточная функция замкнутой системы определяется соотношением

$$\Phi(s) = \frac{X(s)}{Z(s)} = \frac{W(s)}{1 + W_{oc}(s) \cdot W(s)}. \quad (3.35)$$

Правило определения передаточной функции замкнутой цепи с неединичной положительной обратной связью. При использовании неединичной положительной обратной связи (в цепи обратной связи стоит звено с передаточной функцией $W_{oc}(s)$) передаточная функция замкнутой системы (рис.3.13)

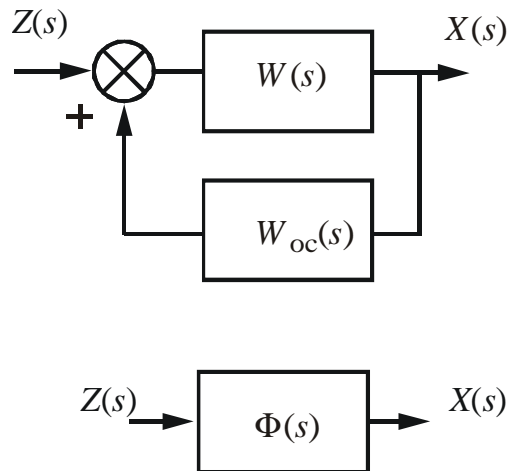


Рис.3.13. Преобразование замкнутой цепи с неединичной положительной обратной связью

рассчитывается следующим образом:

$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1 - W_{oc}(s) \cdot W(s)}.$$

Правило определения передаточной функции замкнутой цепи с единичной положительной обратной связью. Если положительная обратная связь является единичной ($W_{oc}(s) = 1$) (рис.3.14),

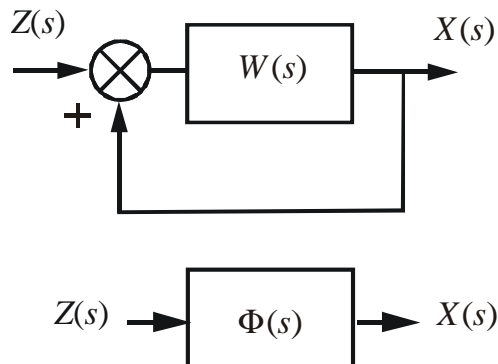


Рис.3.14. Преобразование замкнутой цепи с единичной положительной обратной связью

то передаточная функция системы определяется по формуле

$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1 - W(s)}.$$

Правило переноса узла. При преобразовании структурных схем часто возникает необходимость в переносе узла (точки разветвления сигнала) через звено, либо по направлению распространения сигнала, либо против направления передачи сигнала.

При переносе узла по направлению распространения сигнала через звено с передаточной функцией $W(s)$ (рис.3.15)

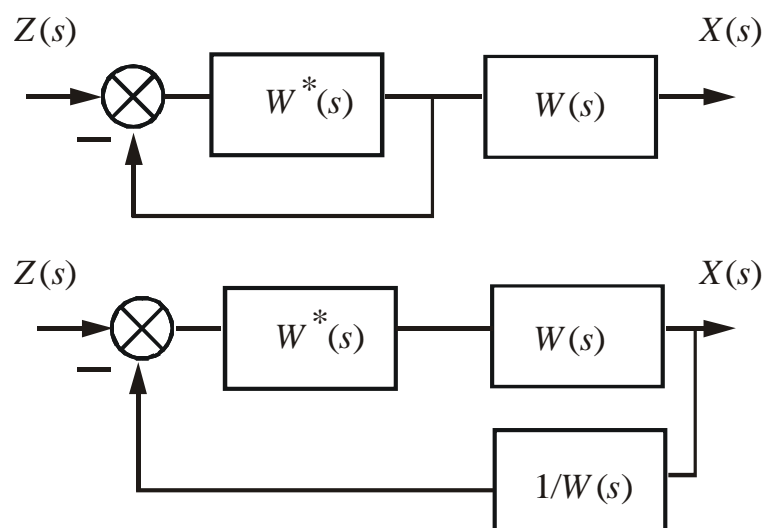


Рис.3.15. Перенос узла по направлению распространения сигнала

необходимо в новое ответвление включить элемент с передаточной функцией $1/W(s)$.

При переносе узла против направления распространения сигнала через звено с передаточной функцией $W(s)$ (рис.3.16) необходимо в новое ответвление включить звено с той же передаточной функцией $W(s)$.

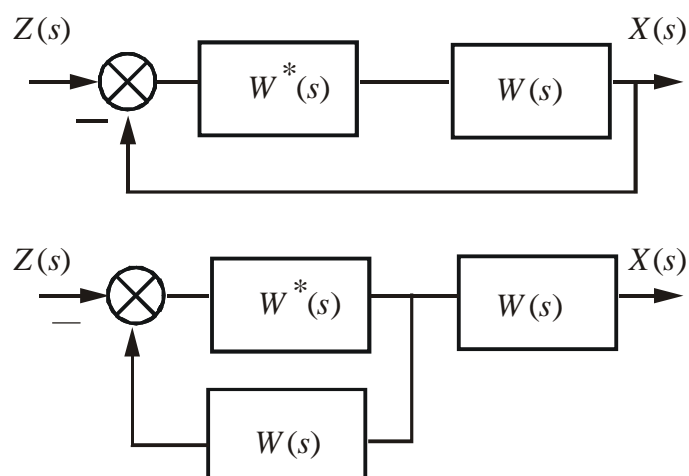


Рис.3.16. Перенос узла против направления распространения сигнала

Правило переноса узла удовлетворяет условию: в исходной и преобразованной эквивалентной схемах входной сигнал оказывает одинаковое влияние на формирование выходного сигнала.

Правило переноса сумматора. При переносе сумматора против направления распространения сигнала через звено с передаточной функцией $W(s)$ (рис.3.17) необходимо в линию связи по второму входу сумматора включить элемент с передаточной функцией $1/W(s)$.

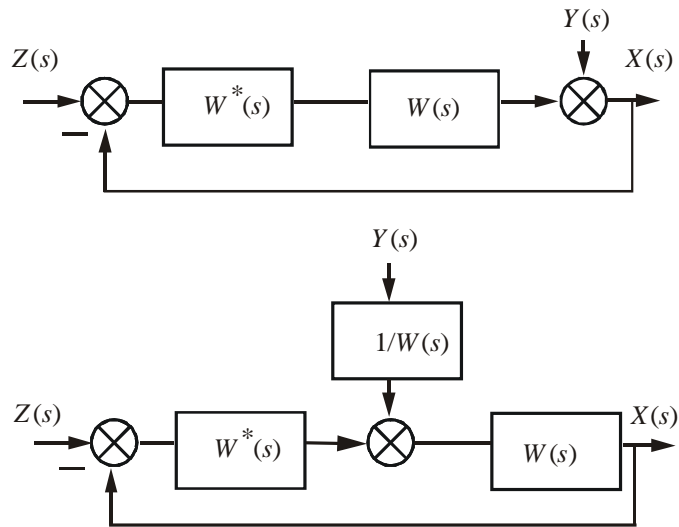


Рис.3.17. Перенос сумматора против направления распространения сигнала

При переносе сумматора по направлению распространения сигнала через звено с передаточной функцией $W(s)$ (рис.3.18) нужно в линию связи по второму входу сумматора включить элемент с передаточной функцией $W(s)$.

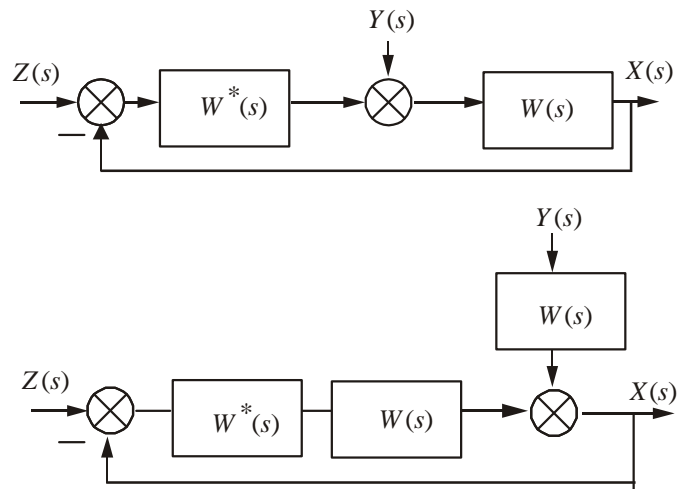


Рис.3.18. Перенос сумматора по направлению распространения сигнала

Приведенные правила переноса сумматора не оказывают влияние на формирование выходного сигнала под действием входных сигналов, следовательно, схемы являются эквивалентными.

Правило перестановки сумматоров. Элементы сравнения (рис.3.19) и сумматоры (рис.3.20), в которых осуществляется сложение либо вычитание сигналов можно менять местами.

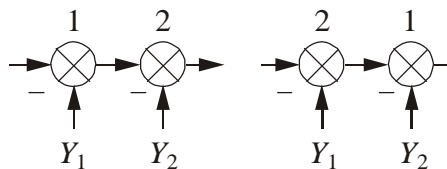


Рис.3.19. Правило перестановки элементов сравнения

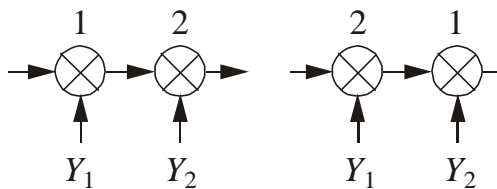


Рис.3.20. Правило перестановки сумматоров

Применение изложенных правил к преобразованию структурной схемы САУ позволяет получить несколько различных по виду эквивалентных структурных схем. Однако все они будут иметь передаточные функции, одинаковые с передаточной функцией исходной структурной схемы.

3.5. Примеры преобразования структурной схемы сложной динамической системы

Рассмотрим структурную схему сложной САУ, представленную на рис.3.21.

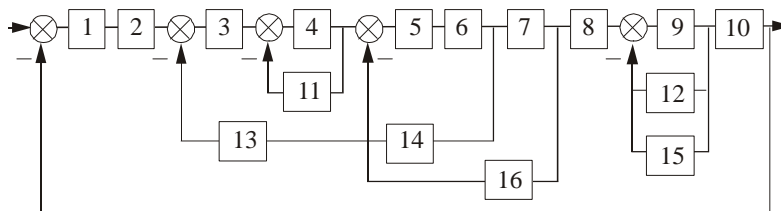


Рис.3.21. Структурная схема сложной системы

Необходимо упростить ее, используя правила преобразования структурных схем, изложенные в § 3.4.

Примечание. Цифра внутри прямоугольника указывает номер блока и соответствует индексу его передаточной функции. Например, пятый блок имеет передаточную функцию $W_5(s)$.

Решать поставленную задачу будем путем последовательных преобразований исходной схемы в более простые.

Сначала вычислим эквивалентную передаточную функцию для цепочек звеньев с нижеуказанными номерами, приняв во внимание, что:

- 1 и 2 - последовательное соединение звеньев;
- 4 и 11 - замкнутая цепь с неединичной отрицательной обратной связью;
- 5 и 6 - последовательное соединение звеньев;
- 12 и 15 - параллельное соединение звеньев;
- 13 и 14 - последовательное соединение звеньев.

По формулам преобразования структурных схем получим:

$$W_{17}(s) = W_1(s) \cdot W_2(s) ;$$

$$W_{18}(s) = \frac{W_4(s)}{1 + W_4(s) \cdot W_{11}(s)} ;$$

$$W_{19}(s) = W_5(s) \cdot W_6(s) ;$$

$$W_{20}(s) = W_{12}(s) + W_{15}(s) ;$$

$$W_{21}(s) = W_{13}(s) \cdot W_{14}(s) .$$

С учетом обозначений введенных передаточных функций структурная схема приобретает вид, показанный на рис.3.22.

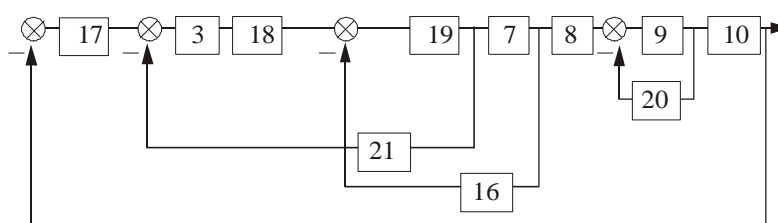


Рис.3.22. Структурная схема сложной системы после первого шага преобразования

Далее определим эквивалентные передаточные функции для пар звеньев: (3 и 18) и (9 и 20). При этом примем во внимание, что:

3 и 18 - последовательное соединение звеньев;

9 и 20 - замкнутая цепь с неединичной отрицательной обратной связью.

$$W_{22}(s) = W_3(s) \cdot W_{18}(s);$$

$$W_{23}(s) = \frac{W_9(s)}{1 + W_9(s) \cdot W_{20}(s)}.$$

После чего получим структурную схему рис.3.23.

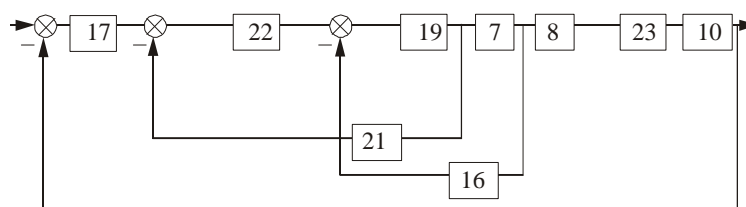


Рис.3.23. Структурная схема сложной системы после второго шага преобразования

Далее учтем, что звенья 8, 23 и 10, показанные на рис.3.23, соединены последовательно и поэтому могут быть заменены одним звеном с эквивалентной передаточной функцией.

$$W_{24}(s) = W_8(s) \cdot W_{23}(s) \cdot W_{10}(s).$$

После чего структурная схема примет вид рис.3.24.

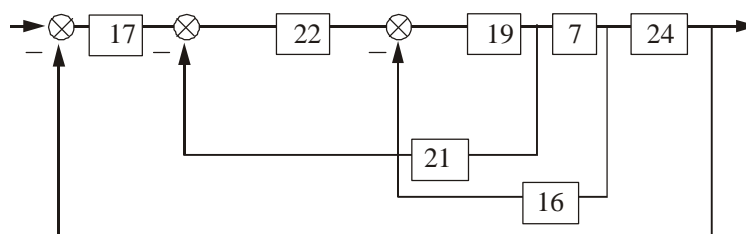


Рис.3.24. Структурная схема сложной системы после третьего шага преобразования

Полученную схему также можно упростить. Воспользуемся правилом переноса сумматора против направления распространения сигнала. Выход звена 16 перенесем и подключим к входу звена 22. Однако при этом необходимо ввести дополнительное

звено 25, передаточная функция которого является обратной по отношению к передаточной функции звена 22 (рис.3.25).

$$W_{25}(s) = 1/W_{22}(s).$$

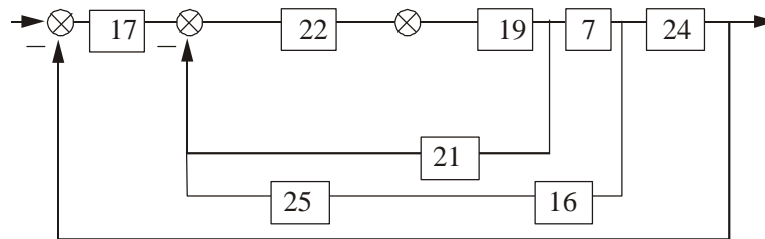


Рис.3.25. Структурная схема сложной системы после четвертого шага преобразования

Выполним последующие преобразования схемы. Легко видеть, что пары звеньев (22, 19) и (25, 16) соединены последовательно, а звено 21 стоит в цепи отрицательной обратной связи звена 26, поэтому

$$W_{26}(s) = W_{22}(s) \cdot W_{19}(s);$$

$$W_{27}(s) = \frac{W_{26}(s)}{1 + W_{26}(s) \cdot W_{21}(s)};$$

$$W_{28}(s) = W_{25}(s) \cdot W_{16}(s).$$

Таким образом получим структурную схему рис.3.26.

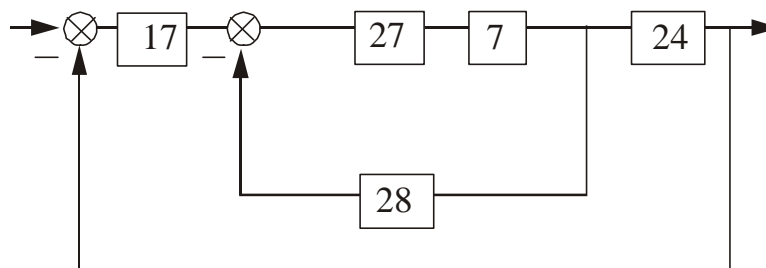


Рис.3.26. Структурная схема сложной системы после пятого шага преобразования

С учетом опыта предыдущих преобразований сразу запишем формулу для системы, включающей три звена: 7, 27, 28; согласно рис.3.26 получим:

$$W_{29}(s) = \frac{W_{27}(s) \cdot W_7(s)}{1 + W_{28}(s) \cdot W_{27}(s) \cdot W_7(s)}.$$

В результате имеем цепочку из трех последовательных звеньев, охваченную единичной отрицательной обратной связью (рис.3.27).

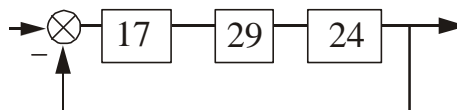


Рис.3.27. Структурная схема сложной системы после шестого шага преобразования

Ее передаточная функция имеет вид:

$$W_{29}(s) = \frac{W_{17}(s) \cdot W_{29}(s) \cdot W_{24}(s)}{1 + W_{17}(s) \cdot W_{29}(s) \cdot W_{24}(s)}.$$

Глава 4. Устойчивость систем автоматического управления

4.1. Понятие устойчивости. Устойчивость и корни характеристического уравнения

Любая САУ прежде всего должна быть работоспособной. Это значит, что она должна нормально функционировать и быть нечувствительной к возмущениям различного рода, которые могут возникнуть в процессе ее эксплуатации. Такое поведение возможно лишь в САУ, обладающих устойчивостью по отношению к этим воздействиям.

Вначале кратко остановимся на самом понятии устойчивости. Для этого напомним известный пример, иллюстрирующий устойчивость положения шара на поверхности (рис.4.1).

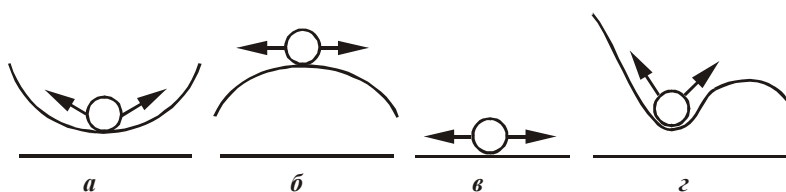


Рис.4.1. Система (шар) с различной устойчивостью: а - устойчивая "в большом" или просто устойчивая; б - неустойчивая; в - нейтрально-устойчивая; г - устойчивая "в малом", но неустойчивая "в большом"

Очевидно, что для определения характера равновесного состояния шара необходимо:

- 1) отклонить шар от исходного состояния;
- 2) убрать причину, вызвавшую это отклонение;
- 3) наблюдать, возвратится ли шар в исходное положение равновесия.

В простейшем случае устойчивость - это способность системы возвращаться (с определенной точностью) в состояние равновесия после прекращения действия внешнего возмущения (исчезновения внешних сил, которые вывели ее из этого состояния).

Неустойчивая система не возвращается в состояние равновесия, из которого ее вывели внешние воздействия. Она либо удаляется от него, либо совершает относительно него недопустимо большие колебания.

Однако даже в простейшем случае все не так просто. Это иллюстрирует рис.4.1,г. Состояние равновесия шара устойчиво лишь до тех пор, пока отклонение не вышло за некоторую границу. В этом случае говорят, что система устойчива "в малом" или "в ограниченной области", но неустойчива "в большом".

Отметим отличие устойчивости линейных и нелинейных систем. Устойчивость линейных систем не зависит от величины возмущения, и система, устойчивая при малых возмущениях, будет оставаться устойчивой и при больших возмущениях.

Иначе обстоит дело в нелинейных системах, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями. Нелинейные системы могут быть устойчивы при малых возмущениях и неустойчивы при больших возмущениях. Поэтому для нелинейных систем понятие устойчивости расширяется и рассматривается отдельно для случая больших и для случая малых возмущений.

В дальнейшем будем рассматривать вопросы устойчивости стационарных линейных динамических систем, поведение которых представляется линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \mathbf{K} + a_2 x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = \\ = b_m z^{(m)}(t) + b_{m-1} x^{(m-1)}(t) \mathbf{K} + b_1 z'(t) + b_0 z(t), \quad n \geq m. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Будем полагать, что система является устойчивой, если она, будучи выведенной из состояния равновесия, с течением времени возвратится в исходное состояние. Как применить это определение для выяснения вопроса устойчивости САУ?

Очевидно, что в первую очередь необходимо вывести систему из положения равновесия. Этого можно достигнуть или заданием ненулевых начальных условий, или кратковременным действием возмущающего воздействия. При этом важно подчеркнуть, что речь идет именно о кратковременном действии, так как в определении устойчивости указывается необходимость прекращения действия возмущения ($z(t) = 0$).

После того, как система выведена из состояния равновесия, необходимо знать, возвратится ли она в исходное состояние. Иначе говоря, необходимо наблюдать за собственным движением, которое определяется однородным дифференциальным уравнением замкнутой системы:

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \mathbf{K} + a_2 x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0. \quad (4.2)$$

Система будет устойчивой, если с течением времени (при $t \rightarrow \infty$) собственное движение, определяемое решением уравнения (4.1), будет затухающим:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \rightarrow 0. \quad (4.3)$$

Таким образом, устойчивость является асимптотической, так как характер движения системы к устойчивому положению не имеет значения, а важен предел $x(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

Известно, что общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид:

$$x_c(t) = C e^{st}. \quad (4.4)$$

Продифференцируем n раз (4.4) и подставим результаты дифференцирования в (4.2). После сокращения на общий множитель $C e^{st}$ получим следующее алгебраическое уравнение:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \mathbf{K} + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0. \quad (4.5)$$

Уравнение (4.5) называется *характеристическим уравнением*, корни которого $s_i = \alpha_i + j\beta_i$ определяют характер переходного процесса в системе.

Так как характеристическое уравнение имеет n корней, то его общее решение при отсутствии кратных корней может быть записано в виде

$$x(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{s_i t}, \quad (4.6)$$

где A_i - константы, значения которых определяются начальными условиями; $s_i, i = 1 \dots N$ - корни характеристического уравнения.

Чтобы узнать, устойчива или неустойчива система, нет необходимости решать характеристическое уравнение и находить его корни. Оказывается, по свойствам корней можно определить необходимые и достаточные условия устойчивости системы.

Рассмотрим влияние корней характеристического уравнения (4.5) на устойчивость системы. В общем случае корни характеристического уравнения являются комплексными. При этом они образуют пары сопряженных корней:

$$s_i = \alpha_i + j\beta_i; \quad s_{i+1} = \alpha_i - j\beta_i.$$

Каждая такая пара корней дает составляющую переходного процесса, равную

$$A_i e^{(\alpha_i + j\beta_i)t} + A_{i+1} e^{(\alpha_i - j\beta_i)t} = e^{\alpha_i t} (A_i e^{j\beta_i t} + A_{i+1} e^{-j\beta_i t}) = \\ = A_1^* e^{\alpha_i t} \sin(\beta_i t + \varphi_i),$$

(4.7)

где A_1^* , φ_i - новые постоянные интегрирования.

Можно доказать, что

$$A_1^* = \sqrt{A_i^2 + A_{i+1}^2}; \quad \varphi_i = \arctg \frac{A_i + A_{i+1}}{A_i - A_{i+1}}.$$

Составляющая (4.7) представляет собой синусоиду с амплитудой, изменяющейся во времени по экспоненте. Исследуем ее поведение при различных значениях α_i . Для первых трех случаев будем полагать, что $\beta_i \neq 0$, т.е. на выходе системы имеет место колебательный процесс.

Первый случай: $\alpha_i < 0$ - колебания с течением времени затухают (рис.4.2); устойчивая система возвращается в состояние покоя.

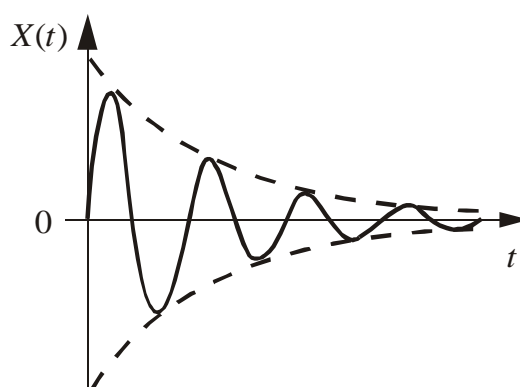


Рис.4.2. Затухающие колебания
($\alpha_i < 0$, $\beta_i \neq 0$)

Второй случай: $\alpha_i > 0$ - колебания расходящиеся (рис.4.3); система неустойчива.

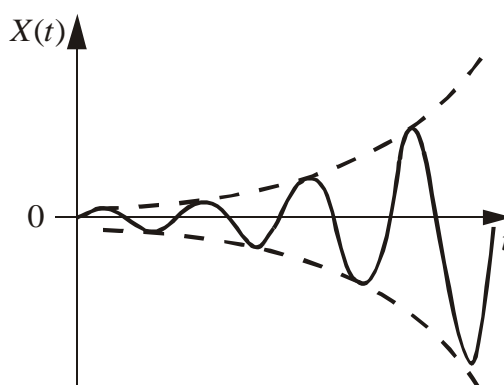


Рис.4.3. Расходящиеся колебания
($\alpha_i > 0$, $\beta_i \neq 0$)

Третий случай: $\alpha_i = 0$ (корни чисто мнимые) - колебания незатухающие с постоянной амплитудой (рис.4.4); состояние системы нейтральное, причем незначительное изменение параметров может привести систему к неустойчивости.

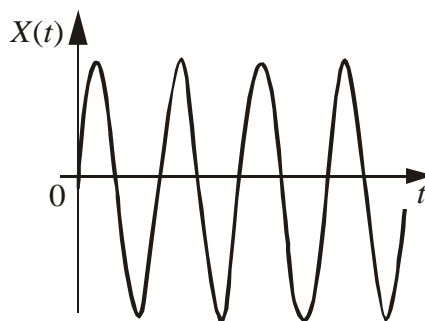


Рис.4.4. Незатухающие колебания
($\alpha_i = 0, \beta_i \neq 0$)

Четвертый случай: $\beta_i = 0$ (корни действительные) - соответствующая ему составляющая переходного процесса $A_i e^{\alpha_i t}$ представляет собой экспоненту, которая будет затухать или увеличиваться только в зависимости от знака α_i (рис.4.5).

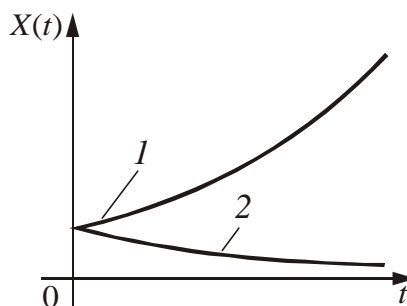


Рис.4.5. Аперiodический процесс: 1 -
расходящийся ($\alpha_1 > 0$); 2 - сходящийся ($\alpha_2 < 0$)

Итак, в общем случае переходной процесс состоит из колебательных и аперiodических составляющих. Каждая колебательная составляющая обязана своим появлением паре комплексно-сопряженных корней, а аперiodическая - действительному корню.

Следовательно, для затухания переходного процесса необходимо, чтобы вещественные части корней характеристического уравнения были отрицательными.

Только тогда каждое слагаемое будет стремиться к нулю и в целом $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \rightarrow 0$.

Таким образом, необходимым и достаточным условием устойчивости системы является отрицательность вещественных частей всех корней характеристического уравнения.

Корни характеристического уравнения - комплексные величины, состоящие в общем случае из вещественной и мнимой частей. Их можно представить на плоскости, которую называют комплексной плоскостью корней характеристического уравнения (рис.4.6).

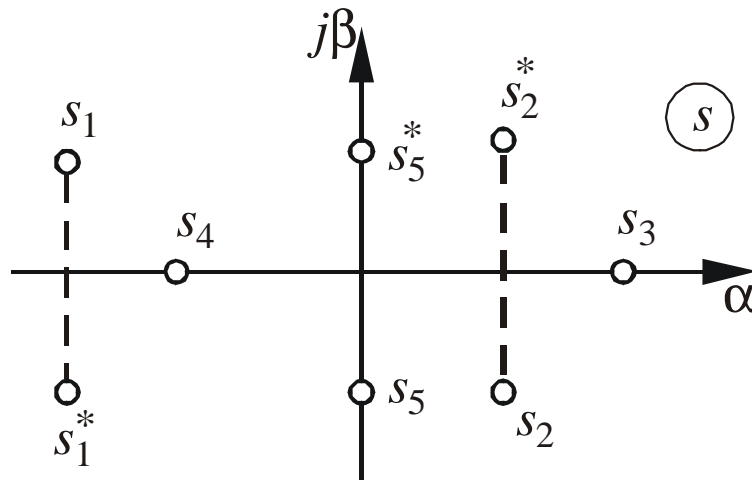


Рис.4.6. Комплексная плоскость корней характеристического уравнения с нанесенными корнями:

(s_1, s_1^*) - комплексно-сопряженные с отрицательной вещественной частью; (s_2, s_2^*) - комплексно-сопряженные с положительной вещественной частью; (s_3, s_4) - положительный и отрицательный вещественные; (s_5, s_5^*) - чисто мнимые

Из рисунка видно, что все корни, лежащие слева от мнимой оси, имеют отрицательные вещественные части. С учетом этой особенности расположения корней условие устойчивости системы можно сформулировать следующим образом: для устойчивой системы необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения находились в левой полуплоскости комплексной плоскости s .

Если хотя бы один из корней характеристического уравнения находится в правой полуплоскости, система неустойчивая.

Если хотя бы два корня расположены на мнимой оси, т.е. являются чисто мнимыми, система находится на границе устойчивости. В этом случае незначительными изменениями можно сделать систему или устойчивой, или неустойчивой.

Следовательно, для суждения об устойчивости линейной системы нет необходимости в определении точных значений корней ее характеристического уравнения, а достаточно знать, что эти корни располагаются левее мнимой оси.

Процессы в реальных САУ описываются, как правило, нелинейными дифференциальными уравнениями. Однако исследование устойчивости движения нелинейных систем "в малом" часто осуществляется по уравнениям первого приближения. Линеаризация проводится путем отбрасывания членов ряда Тейлора порядка выше первого. Возникает вопрос: как влияют принятые при линеаризации допущения на достоверность суждений относительно устойчивости исходной нелинейной системы?

А.М. Ляпунов впервые доказал допустимость суждения об устойчивости "в малом" нелинейной системы по устойчивости линейной системы, полученной путем линеаризации исходной системы.

Теорема 1. Нелинейная система устойчива "в малом", если все корни характеристического уравнения линеаризованной системы имеют отрицательные вещественные части.

Теорема 2. Нелинейная система неустойчива "в малом", если хотя бы один корень характеристического уравнения линеаризованной системы имеет положительную вещественную часть.

В тех случаях, когда характеристическое уравнение первого приближения имеет нулевые или чисто мнимые корни, а все другие его корни имеют отрицательную действительную часть, судить об устойчивости исходной системы по уравнениям первого приближения нельзя. Неучтенные нелинейности могут по-разному влиять на поведение системы. Для оценки устойчивости исходной системы необходимо учитывать отброшенные при линеаризации члены высшего порядка малости. Этот случай называется критическим.

Определение устойчивости системы по виду корней характеристического уравнения возможно лишь в наиболее простых случаях. Обычно устойчивость системы определяется косвенными методами с помощью так называемых критериев устойчивости.

4.2. Алгебраический критерий устойчивости Рауса – Гурвица

Алгебраическими называются такие критерии устойчивости, которые позволяют вынести суждение об устойчивости системы путем вычислений, производимых над коэффициентами ее характеристического уравнения. Из алгебраических критериев устойчивости наибольшее распространение получил критерий Рауса - Гурвица. В разной форме он был предложен сначала английским математиком Е. Раусом (Routh), а затем швейцарским математиком А. Гурвицем (Hurwitz) в конце XIX века.

Приведем формулировку критерия Рауса - Гурвица. Для того чтобы динамическая система была устойчива (т.е. чтобы все корни характеристического уравнения лежали в левой полуплоскости комплексной плоскости s), необходимо и достаточно, чтобы при $a_n > 0$ определитель Рауса - Гурвица и все его диагональные миноры были больше нуля.

Таким образом, критерий Рауса - Гурвица позволяет судить о положении корней характеристического уравнения на комплексной плоскости s , а следовательно, об устойчивости системы, не решая характеристического уравнения.

Правило составления главного определителя Рауса - Гурвица, имеющего n строк и n столбцов, где n - порядок характеристического уравнения, состоит в следующем:

1) сначала заполняется главная диагональ определителя, начиная с коэффициента a_{n-1} и заканчивая коэффициентом a_0 ;

2) затем заполняются остальные места в строках матрицы таким образом:

- индексы коэффициентов в строке определяются относительно индекса коэффициента, находящегося на главной диагонали. Индексы коэффициентов, стоящих слева от него, последовательно убывают, а стоящих справа, возрастают, причем также используется индекс n ;
- все недостающие коэффициенты, т.е. коэффициенты с индексами, большими n или меньшими нуля, заменяются нулями.

В соответствии с указанным правилом определитель Рауса - Гурвица имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix}.$$

Пример. Построить главный определитель Рауса - Гурвица для системы, которая характеризуется следующим характеристическим уравнением:

$$a_4 \cdot s^4 + a_3 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0 = 0.$$

Воспользовавшись правилом составления главного определителя Рауса - Гурвица, получим:

$$\begin{vmatrix} a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix}.$$

Необходимым (но не достаточным) условием устойчивости системы по данному критерию является положительность всех коэффициентов. Анализ устойчивости САУ следует начинать с этого простого, необходимого, но не достаточного условия устойчивости. При его невыполнении, естественно, отпадает надобность в составлении и проверке остальных неравенств.

Достоинствами критерия Рауса - Гурвица являются:

- 1) возможность простой аналитической проверки факта устойчивости (особенно для систем первого и второго порядков);
- 2) удобство использования на ЭВМ.

Рассмотрим методику исследования устойчивости системы по критерию Рауса - Гурвица на примере замкнутой САУ, включающей усилитель и двигатель (рис.4.7).

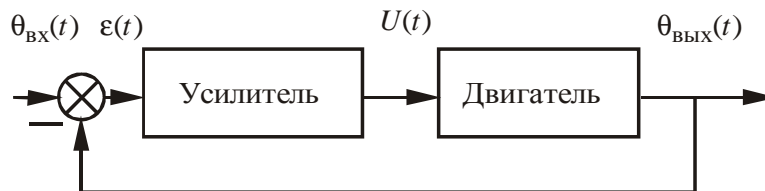


Рис.4.7. Структурная схема замкнутой САУ

Составим систему уравнений, описывающих поведение САУ, при этом будем учитывать не только коэффициенты передач отдельных устройств, но и их динамику (инерционность):

$$\epsilon = \theta_{вх} - \theta_{вых}; \quad (4.8)$$

$$T_y \cdot U'_y + U_y = k_y \cdot \epsilon; \quad (4.9)$$

$$T_{дв} \cdot \theta'_{вых} + \theta_{вых} = k_{дв} \cdot U_y. \quad (4.10)$$

Из системы трех уравнений (4.8) - (4.10) получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение, связывающее $\theta_{вых}$ и $\theta_{вх}$. Для чего выполним следующие действия.

Из дифференциального уравнения (4.10) найдем:

$$U_y = \frac{T_{дв} \cdot \theta''_{вых} + \theta'_{вых}}{k_{дв}}. \quad (4.11)$$

После дифференцирования (4.11) имеем:

$$U'_y = \frac{T_{дв} \cdot \theta'''_{вых} + \theta''_{вых}}{k_{дв}}. \quad (4.12)$$

Подставив (4.11) и (4.12) в (4.9), с учетом (4.8) получим:

$$\begin{aligned} \frac{T_y}{k_{дв}} \cdot (T_{дв} \cdot \theta'''_{вых} + \theta''_{вых}) + \frac{1}{k_{дв}} \cdot (T_{дв} \cdot \theta''_{вых} + \theta'_{вых}) = \\ = k_y \cdot (\theta_{вх} - \theta_{вых}). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Запишем уравнение вынужденных колебаний системы, для чего выходные величины и их производные переместим в левую часть уравнения (4.13):

$$\begin{aligned} \frac{T_y}{k_{дв} \cdot k_y} \cdot (T_{дв} \cdot \theta'''_{вых} + \theta''_{вых}) + \\ + \frac{1}{k_{дв} \cdot k_y} \cdot (T_{дв} \cdot \theta''_{вых} + \theta'_{вых}) + \theta_{вых} = \theta_{вх}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Устойчивость определим по свободным колебаниям (4.14), т.е. при $\theta_{вх} = 0$:

$$T_y \cdot T_{дв} \cdot \theta'''_{вых} + (T_y + T_{дв}) \cdot \theta''_{вых} + \theta'_{вых} + k_y \cdot k_{дв} \cdot \theta_{вых} = 0. \quad (4.15)$$

На основании (4.15) запишем характеристическое уравнение системы:

$$T_y \cdot T_{дв} \cdot s^3 + (T_y + T_{дв}) \cdot s^2 + s + k_y \cdot k_{дв} = 0. \quad (4.16)$$

Проанализируем функционирование системы при $T_y = 0,007 \text{ с}$; $T_{дв} = 0,2 \text{ с}$; $k_y \cdot k_{дв} = 300$. Применительно к (4.16) имеем:

$$0,0014 \cdot s^3 + 0,207 \cdot s^2 + s + 300 = 0. \quad (4.17)$$

Воспользуемся критерием Рауса - Гурвица: все коэффициенты уравнения (4.17) положительные. В соответствии с алгебраическим критерием для характеристического уравнения $a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$ имеем определитель

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix}.$$

Для рассматриваемой системы $a_3 = 0,0014 > 0$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0,207 & 0,0014 & 0 \\ 300 & 1 & 0,207 \\ 0 & 0 & 300 \end{vmatrix} = -63,9 < 0$$

Главный определитель Рауса - Гурвица отрицательный, поэтому система неустойчива.

Перечислим основные недостатки критерия Рауса - Гурвица:

- 1) громоздкий; условия устойчивости усложняются с ростом порядка характеристического уравнения или, что то же самое, с ростом порядка системы;
- 2) показывая степень устойчивости системы, не определяет влияние тех или иных параметров и структуры системы на ее устойчивость.

Эти недостатки привели к поискам других критериев, более удобных в инженерной практике.

В частности, в 1914 г. П. Лъенар и Р. Шипар на основе критерия Рауса - Гурвица разработали критерий, содержащий примерно вдвое меньше проверок и состоящий в следующем: чтобы корни характеристического уравнения имели отрицательные вещественные части, а следовательно, система была устойчивой, необходимо и

достаточно, чтобы все коэффициенты уравнения были положительными $a_0 > 0$, $a_1 > 0, \dots, a_n > 0$, а также, чтобы все диагональные миноры четного порядка $\Delta_2, \Delta_4, \Delta_6, \dots$ или все диагональные миноры нечетного порядка $\Delta_1, \Delta_3, \Delta_5$ главного определителя Рауса - Гурвица тоже были положительными.

4.3. Критерий устойчивости Михайлова

Частотные критерии позволяют вынести суждение об устойчивости САУ по виду их частотных характеристик. Эти критерии имеют простую интерпретацию и наглядность. Они дают возможность:

- не только выяснить вопрос об устойчивости систем высокого порядка, но также определить влияние отдельных звеньев и параметров на устойчивость и качество системы;
- опираться на экспериментальные данные и переходить непосредственно к синтезу САУ;
- широко использовать графические построения.

В основе частотных критериев устойчивости лежит следствие из принципа аргумента, изучаемого в теории функций комплексного переменного.

Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0,$$

где a_i - рациональные числа, $i = 1, 2 \dots n$.

Обозначим: $D(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$.

Если λ_i - корни алгебраического уравнения, то:

$$D(\lambda) = a_n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n). \quad (4.18)$$

Возьмем комплексную плоскость и отображение на ней векторов, соответствующих корням алгебраического уравнения (рис.4.8).

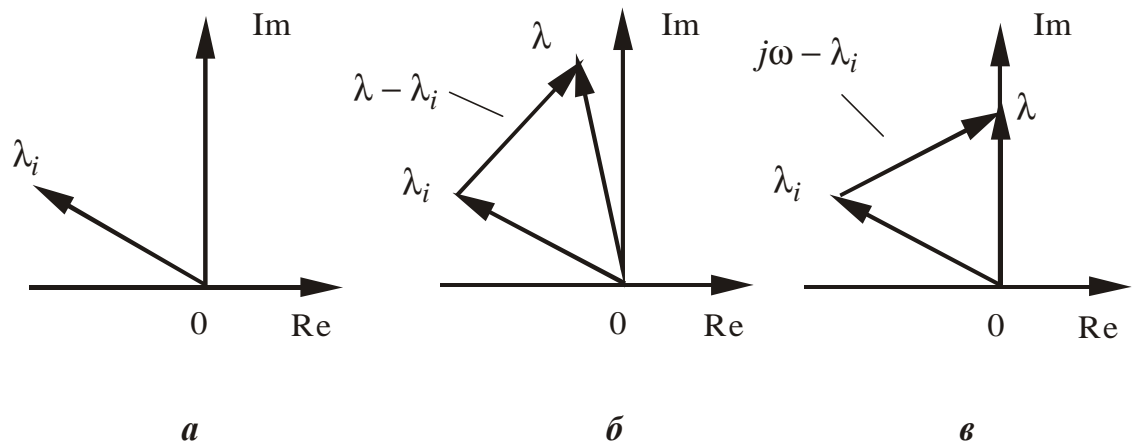


Рис.4.8. К пояснению принципа аргумента: а - представление корня уравнения в виде вектора; б - разность векторов, являющихся сомножителями для выражения (4.18); в - разность векторов при $\lambda = j\omega$

На комплексной плоскости каждый корень λ_i можно изобразить в виде вектора $\overrightarrow{\lambda_i}$, проведенного из начала координат к точке $\lambda_i = a_i + j\beta_i$. Разность двух векторов $\overrightarrow{\lambda} - \overrightarrow{\lambda_i}$ - это вектор, проведенный из точки λ_i к точке λ .

Пусть $\lambda = j\omega$. Модуль вектора $\overrightarrow{j\omega - \lambda_i}$ обозначим через $|\overrightarrow{j\omega - \lambda_i}|$, его аргумент или фазу - через $\arg|\overrightarrow{j\omega - \lambda_i}|$. Соответственно модуль и аргумент вектора $D(j\omega)$ определяются следующим образом:

$$|D(j\omega)| = a_n |j\omega - \lambda_1| \cdot |j\omega - \lambda_2| \dots |j\omega - \lambda_n|;$$

$$\arg(D(j\omega)) = \arg(j\omega - \lambda_1) + \arg(j\omega - \lambda_2) + \dots + \arg(j\omega - \lambda_n).$$

При изменении частоты ω от $-\infty$ до $+\infty$ каждый элементарный вектор $\overrightarrow{j\omega - \lambda_i}$, скользя вдоль мнимой оси Im (рис.4.9), повернется на угол:

- $+\pi$, если его начало (корень алгебраического уравнения) лежит в левой части комплексной плоскости;
- $-\pi$, если его начало находится в правой части комплексной плоскости.

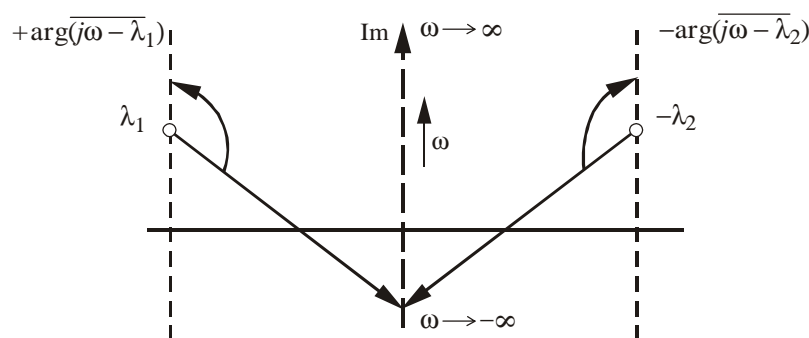


Рис.4.9. Поворот векторов при изменении частоты ω

Напомним, что за положительное направление принимается вращение вектора против часовой стрелки. Корень λ_i определяет точку на комплексной плоскости, относительно которой поворачивается вектор $\overrightarrow{j\omega - \lambda_i}$.

Предположим, что уравнение $D(\lambda) = 0$ имеет l корней в левой части комплексной плоскости и m корней в правой, причем $l + m = n$.

Тогда при изменении частоты ω от $-\infty$ до $+\infty$ угол поворота вектора $D(j\omega)$ будет равен сумме изменений аргументов элементарных векторов и составит величину

$$\arg[D(j\omega)] = \pi l - \pi m = \pi(l - m).$$

$$-\infty < \omega < +\infty \quad (4.19)$$

Приведем формулировку *принципа аргумента*: изменение аргумента вектора $D(j\omega)$ при изменении частоты ω от $-\infty$ до $+\infty$ равно разности $(l - m)$ корней уравнения $D(\lambda) = 0$, лежащих соответственно в левой и правой части комплексной плоскости, умноженной на число π .

По углу поворота вектора $D(j\omega)$ можно судить об устойчивости САУ.

Ниже будут рассмотрены основные частотные критерии устойчивости: критерий Михайлова, амплитудно-фазовый критерий Найквиста и его аналог - логарифмический критерий устойчивости.

Критерий Михайлова сформулирован русским ученым В.А. Михайловым в 1938 г. Критерий устойчивости Михайлова является геометрической интерпретацией принципа аргумента и позволяет судить об устойчивости системы на основании некоторой кривой.

Рассмотрим полином

$$M(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0,$$

образованный из характеристического уравнения замкнутой системы, если исследуется устойчивость замкнутой системы, или образованный из характеристического уравнения разомкнутой системы, если исследуется устойчивость разомкнутой системы.

Заменив оператор s на $j\omega$, получим комплексный полином $M(j\omega)$, который после выделения мнимой и вещественной частей имеет вид:

$$M(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega),$$

где $U(\omega)$ и $V(\omega)$ - вещественная и мнимая части.

При фиксированном значении ω комплексное выражение $M(j\omega)$ можно представить вектором на комплексной плоскости, который называют вектором Михайлова.

При изменении значения ω в интервале $-\infty \leq \omega \leq +\infty$ вектор Михайлова будет поворачиваться относительно начала координат и описывать траекторию на комплексной плоскости (U, jV) . Полученный график функции $M(j\omega)$ называется кривой Михайлова, или годографом Михайлова. По очертанию кривой Михайлова можно судить о знаках вещественной части корней многочлена $M(j\omega)$, т.е. об устойчивости САУ.

Критерий Михайлова: для того чтобы система была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы вектор Михайлова $M(j\omega)$ при изменении параметра ω от $-\infty$ до $+\infty$ повернулся, нигде не обращаясь в нуль, вокруг начала координат против часовой стрелки на угол $+\pi n$, где n - степень характеристического многочлена.

Годограф Михайлова достаточно строить для частоты ω , изменяющейся только в диапазоне от 0 до $+\infty$, так как годограф симметричен относительно вещественной оси. В этом случае (для положительных значений частот) вектор Михайлова устойчивой системы повернется на угол, в два раза меньший, т.е. равный $+\pi n/2$, последовательно проходя n квадратов комплексной плоскости.

На рис.4.10 приведены примеры годографов устойчивых систем первого, второго и пятого порядков. Для большей наглядности все годографы имеют одинаковое значение коэффициента a_0 .

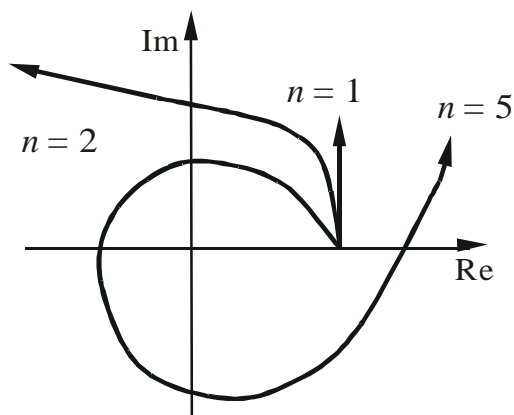


Рис.4.10. Примеры годографов устойчивых систем первого, второго и пятого порядков

Если вектор Михайлова повернется на угол, меньший $+n\pi/2$, то это значит, что характеристический полином $M(s)$ имеет корни с положительной вещественной частью, а следовательно, САУ является неустойчивой.

Примеры годографов неустойчивых систем приведены на рис.4.11:

а) при $\omega=0$ кривая Михайлова начинается на отрицательной оси. Это значит, что коэффициент $a_0 < 0$, следовательно, система неустойчивая;

б) количество квадрантов, пройденных кривой Михайлова, не соответствует порядку характеристического уравнения. Кривая Михайлова расположена в одном квадранте, для устойчивой системы пятого порядка она должна обойти пять квадрантов;

в) нарушена последовательность прохождения квадрантов кривой Михайлова. Она должна проходить квадранты в строгой последовательности (первый, второй и т.д.).

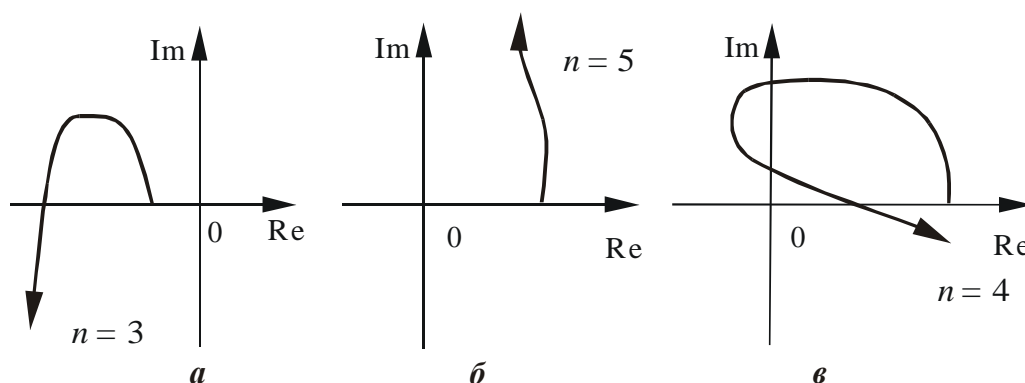


Рис.4.11. Примеры годографов неустойчивых систем третьего, четвертого и пятого порядков

Примеры годографов систем, находящихся на границе устойчивости, показаны на рис.4.12:

а) кривая Михайлова начинается в начале координат. Это значит, что характеристическое уравнение имеет нулевой корень;

б) кривая Михайлова проходит через начало координат, следовательно, характеристическое уравнение имеет чисто мнимый корень.

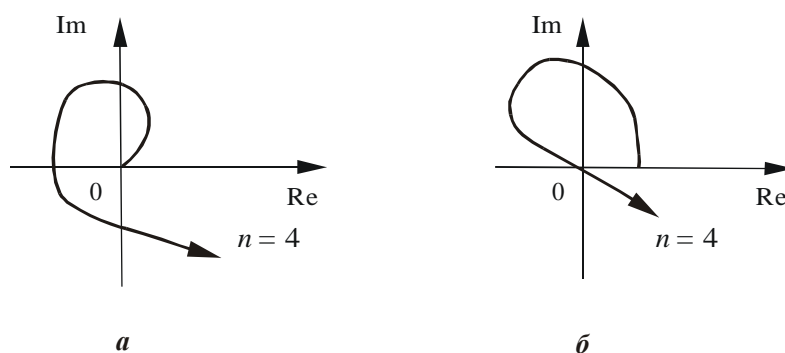


Рис.4.12. Примеры годографов систем, находящихся на границе устойчивости

Пример 1. Передаточная функция разомкнутой системы по управляющему воздействию имеет вид:

$$W(s) = \frac{k}{Ts - 1}$$

Применив критерий Михайлова, оценить устойчивость замкнутой системы. Находим передаточную функцию замкнутой системы:

$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)} = \frac{k}{Ts - 1 + k}$$

По знаменателю передаточной функции определяем уравнение кривой Михайлова:

$$M(j\omega) = k - 1 + j\omega T$$

Следовательно, $U(\omega) = k - 1$ и $V(\omega) = j\omega T$.

Строим годограф Михайлова (рис.4.13).

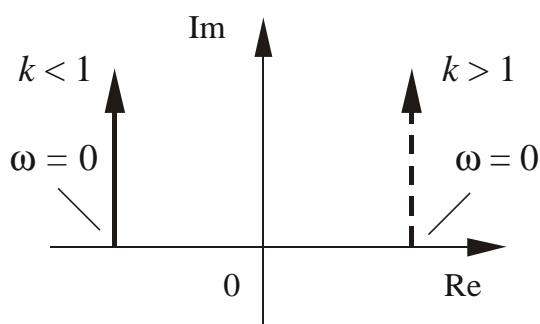


Рис.4.13. Система неустойчивая - $k < 1$

Годограф имеет вид прямой. При $k < 1$ он начинается на отрицательной действительной оси, поэтому условия критерия не выполняются, и замкнутая система является неустойчивой. При $k > 1$ годограф размещается в первом квадранте, условия критерия выполняются, и замкнутая система устойчива.

Пример 2. Передаточная функция разомкнутой системы по управляющему воздействию имеет вид:

$$W(s) = \frac{k}{s(Ts - 1)}$$

Применив критерий Михайлова, оценить устойчивость замкнутой системы. Передаточная функция замкнутой системы:

$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)} = \frac{k}{Ts^2 - s + k}.$$

По знаменателю $\Phi(s)$ определяем уравнение кривой Михайлова:

$$M(j\omega) = k - T\omega^2 - j\omega.$$

Следовательно, $U(\omega) = k - T\omega^2$ и $V(\omega) = -\omega$.

Строим годограф замкнутой системы (рис.4.14).

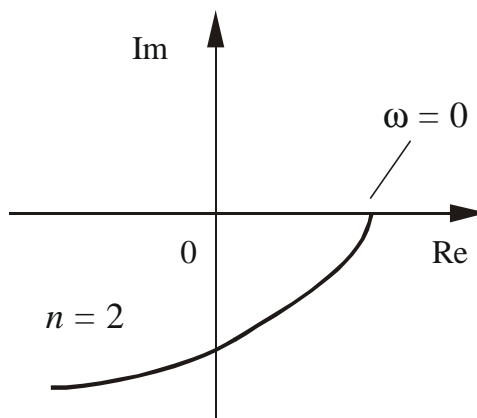


Рис.4.14. Система неустойчивая - нарушена очередность прохождения квадрантов

Годограф проходит сначала четвертый, а потом третий квадрант, что не соответствует условиям критерия Михайлова. Следовательно, система в замкнутом состоянии неустойчива.

Пример 3. Свободное движение системы описывается дифференциальным уравнением

$$(a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + 1 + k)x(t) = 0,$$

где P - оператор дифференцирования; $a_4 = 0,02$; $a_3 = 0,25$; $a_2 = 1$; $a_1 = 5$.

Определить значение коэффициента передачи k , соответствующее границе устойчивости.

Записываем характеристическое уравнение:

$$a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + 1 + k = 0.$$

После подстановки $s = j\omega$

$$U(\omega) = 1 + k - a_2 \omega^2 + a_4 \omega^4;$$

$$V(\omega) = a_1 \omega - a_3 \omega^3.$$

Значение коэффициента передачи, соответствующее границе устойчивости, можно определить, если решить систему уравнений, полученную приравнением действительной и мнимой частей к нулю:

$$1 + k - a_2 \omega^2 + a_4 \omega^4 = 0;$$

$$a_1 \omega - a_3 \omega^3 = 0.$$

Решая систему уравнений, получаем:

$$k = \frac{a_1 a_2}{a_3} - \frac{a_4 a_1^2}{a_3^2} - 1,$$

что с учетом значений коэффициентов, заданных по условию задачи, дает $k = 11$.

4.4. Следствия из критерия Михайлова

На практике не обязательно строить годограф Михайлова. Для исследования устойчивости системы достаточно воспользоваться следствиями из критерия Михайлова.

Критерий Михайлова может быть сформулирован в виде правила чередования (переменяемости) корней уравнений $U(\omega) = 0$ и $V(\omega) = 0$, при этом полином Михайлова $M(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$.

Известно, что при изменении частоты ω от 0 до ∞ вектор Михайлова устойчивой системы должен последовательно проходить квадранты комплексной плоскости. В этом случае он поочередно пересекает мнимую и вещественную оси. В точках пересечения вещественной оси обращается в нуль мнимая часть функции Михайлова ($V(\omega) = 0$), а в точках пересечения мнимой оси - действительная ее часть ($U(\omega) = 0$).

Пример. Рассмотрим годограф Михайлова для характеристического уравнения пятого порядка (рис.4.15).

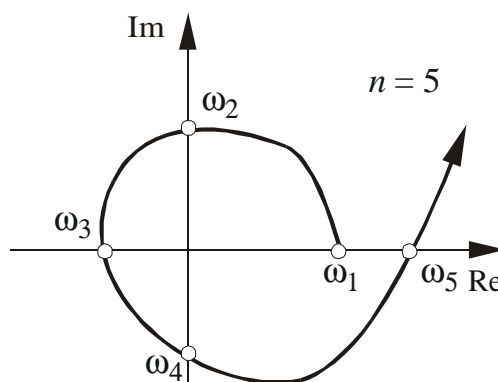


Рис.4.15. Годограф Михайлова для $n = 5$

Отметим точки пересечения координатных осей $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$.

Вещественную и мнимую части полинома Михайлова можно представить графически в виде кривых. Изобразим функции $U(\omega)$ и $V(\omega)$ на одном графике (рис.4.16).

Годограф поочередно пересекает мнимую и действительную оси, поэтому на совмещенном графике корни уравнений $U(\omega) = 0$ и $V(\omega) = 0$ чередуются.

Приведем три следствия из критерия Михайлова и проиллюстрируем их на примере рассмотренного годографа Михайлова.

Первое следствие. Суммарное число корней вещественной и мнимой частей годографа Михайлова должно равняться порядку характеристического уравнения системы.

В нашем примере уравнение $U(\omega) = 0$ имеет два корня: ω_2, ω_4 , уравнение $V(\omega) = 0$ имеет три корня: $\omega_1, \omega_3, \omega_5$. Суммарное число корней равно порядку характеристического уравнения.

Второе следствие. Корни вещественной и мнимой частей полинома Михайлова должны быть только действительными и чередоваться по оси частот между собой.

Из рис.4.16 видно, что это условие выполняется.

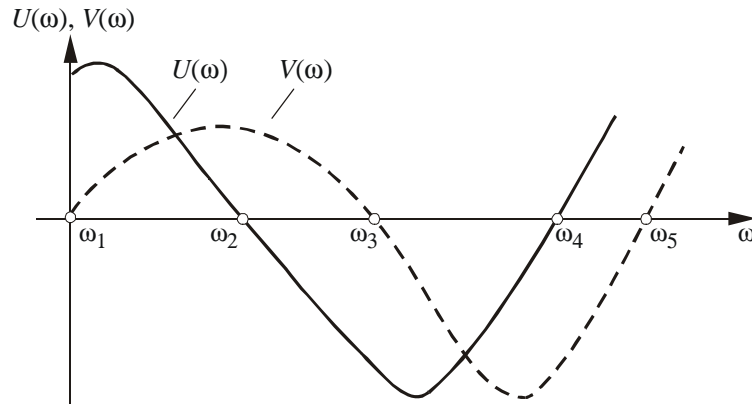


Рис.4.16. Чередование корней

Третье следствие. При $\omega = 0$ должно выполняться соотношение: $U(0) > 0$. Действительно, для устойчивой системы все коэффициенты характеристического уравнения, в том числе коэффициент a_0 , должны быть больше нуля ($U(0) = a_0 > 0$). Кроме того, первая производная функции $V(\omega)$ при $\omega = 0$ должна быть положительной, т.е. $V'(0) > 0$. Это необходимо, чтобы обеспечить поворот вектора $M(j\omega)$ из начальной точки против часовой стрелки при увеличении частоты.

Следствия из критерия Михайлова являются необходимым условием устойчивости. Выполнение одновременно трех следствий дает необходимое и достаточное условие устойчивости. Таким образом, система будет устойчива тогда и только тогда, когда вещественная и мнимая части полинома Михайлова имеют только действительные и чередующиеся на оси частот корни, суммарное число корней равно порядку характеристического уравнения и при $\omega = 0$ выполняются неравенства $U(0) > 0$ и $V'(0) > 0$.

Рассмотрим использование следствий из критерия Михайлова для устойчивости системы "усилитель - двигатель" (см. рис.4.7). Характеристическое уравнение (4.16) после подстановки $s = j\omega$ имеет вид:

$$-j\omega^3 T_y T_{дв} - \omega^2 (T_y + T_{дв}) + j\omega + k_y k_{дв} = 0.$$

Выделим действительную и мнимую части:

$$U(\omega) = -\omega^2 (T_y + T_{дв}) + k_y k_{дв};$$

$$V(\omega) = -\omega^3 T_y T_{дв} + \omega.$$

Подставив $T_y = 0,007 \text{ с}$; $T_{дв} = 0,2 \text{ с}$; $k_y \cdot k_{дв} = 300$, получим:

$$U(\omega) = -0,207\omega^2 + 300;$$

$$V(\omega) = -\omega^3 \cdot 0,0014 + \omega.$$

Определим корни годографа Михайлова:

- для вещественной части:

$-0,207\omega^2 + 300 = 0$, откуда $\omega_{1,2} = \pm\sqrt{1449,2} \approx \pm 38,1$ (отрицательные значения частот отбрасываются);

- для мнимой части:

$-\omega^3 \cdot 0,0014 + \omega = 0$, имеем три корня: $\omega_1 = 0$, $\omega_{2,3}^2 = \frac{1}{0,0014}$, $\omega_{2,3} = \pm 26,7$.

Проверим выполнение следствий из критерия Михайлова:

- 1) суммарное число корней равно порядку характеристического уравнения;

- 2) корни уравнений $U(\omega) = 0$ и $V(\omega) = 0$ являются действительными числами, однако не чередуются по оси частот (рис.4.17), следовательно, данная система неустойчива;
- 3) третье следствие выполняется, однако это уже не влияет на устойчивость системы.

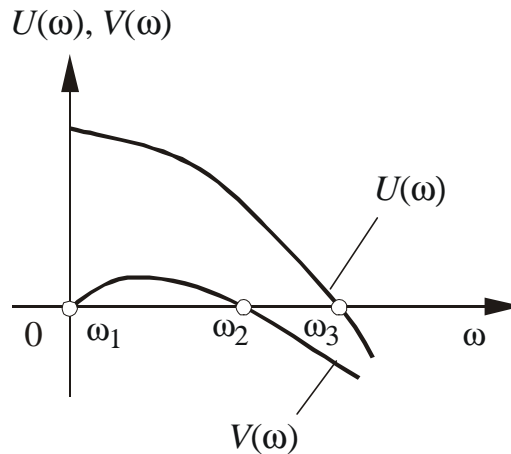


Рис.4.17. Графики функций $U(\omega)$ и $V(\omega)$ для системы "усилитель - двигатель"

Перечислим достоинства критерия Михайлова:

- 1) он проще, чем алгебраический критерий Гурвица;
- 2) позволяет определить при малых порядках характеристического уравнения, какая система более устойчива;
- 3) дает возможность установить в ряде случаев, что необходимо сделать, чтобы система стала более устойчивой.

Рассмотрим две устойчивые системы (рис.4.18). Более устойчивой является первая система, так как корни ее уравнений $U(\omega) = 0$ и $V(\omega) = 0$ больше "разнесены" по оси частот. Если бы кривые $U(\omega)$ и $V(\omega)$ пересекались на оси абсцисс, то кривая Михайлова проходила бы через начало координат и система находилась бы на границе устойчивости. Малейшее отклонение от этого состояния может перевести систему в неустойчивое состояние.

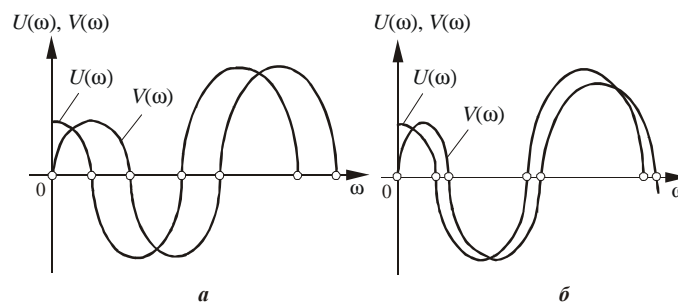


Рис.4.18. Исследование устойчивости системы по виду функций $U(\omega)$ и $V(\omega)$:
а - более устойчивая система; б - менее устойчивая система

4.5. Критерий устойчивости Найквиста

На практике при исследовании устойчивости САУ широкое распространение получил амплитудно-фазовый критерий Найквиста. Этот критерий был предложен американским ученым Г. Найквистом в 1932 г. В отличие от критерия Михайлова, в котором для исследования устойчивости замкнутой системы используется полином, полученный из характеристического уравнения также замкнутой системы, критерий Найквиста позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по амплитудно-фазовой характеристике системы в разомкнутом состоянии.

Передаточная функция разомкнутой системы (рис.4.19) имеет вид:

$$W(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = \frac{M(s)}{D(s)} \quad (4.20)$$

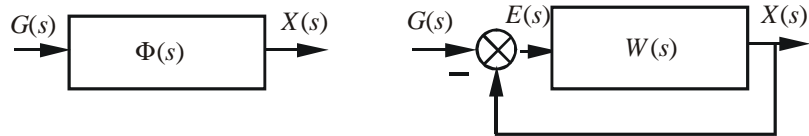


Рис.4.19. Исследование устойчивости замкнутой системы по поведению разомкнутой системы

Разомкнутая система может быть устойчивой или неустойчивой. Проблема заключается в том, чтобы в любом из двух случаев сделать замкнутую систему устойчивой. Для определения устойчивости замкнутой системы запишем формулу для ее передаточной функции (см. рис.4.18) с учетом соотношения (4.20):

$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)} = \frac{\frac{M(s)}{D(s)}}{1 + \frac{M(s)}{D(s)}} = \frac{M(s)}{D(s) + M(s)} \quad (4.21)$$

Устойчивость замкнутой системы определяется знаменателем (4.21), т.е. полиномом $D(s) + M(s)$. При обосновании амплитудно-фазового критерия устойчивости важную роль играет вспомогательная функция

$$\eta(s) = 1 + W(s) = 1 + \frac{M(s)}{D(s)} = \frac{D(s) + M(s)}{D(s)} \quad (4.22)$$

Заметим, что числитель функции представляет собой характеристический полином замкнутой системы, а знаменатель - характеристический полином той же системы, но разомкнутой.

Рассмотрим важное свойство аргумента функции $\eta(s)$, в теории функции комплексного переменного носящее название принципа аргумента. Пусть уравнение $D(s) + M(s) = 0$ имеет m_1 корней в правой полуплоскости комплексной плоскости (правых корней) и l_1 корней в ее левой полуплоскости (левых корней), а уравнение $D(s) = 0$ - соответственно m_2 и l_2 таких корней. Тогда при изменении частоты ω в диапазоне от $-\infty$ до $+\infty$ соответствующее изменение угла поворота вектора $\eta(j\omega) = 1 + W(j\omega)$ будет равно

$$\Delta \arg[\eta(j\omega)] = \Delta \arg[D(j\omega) + M(j\omega)] - \Delta \arg D(j\omega).$$

$$-\infty < \omega < +\infty$$

(4.3)

На основе принципа аргумента (см. § 4.3) соотношение (4.23) можно записать:

$$\Delta \arg[\eta(j\omega)] = \pi[(l_1 - m_1) - (l_2 - m_2)].$$

$$-\infty < \omega \leq +\infty$$

Для реальных систем степень многочлена $M(s)$ не превышает степени многочлена $D(s)$, т.е. $\deg M(s) \leq \deg D(s)$, откуда следует, что

$$\deg[M(s) + D(s)] = \deg D(s). \quad (4.25)$$

Таким образом, с учетом (4.25) имеем:

$$l_1 + m_1 = l_2 + m_2 = n, \quad (4.26)$$

где n - порядок характеристического уравнения разомкнутой системы или замкнутой системы (оба порядка имеют одинаковую величину).

Следовательно, приняв во внимание (4.26),

$$l_1 = n - m_1; \quad l_2 = n - m_2, \quad (4.27)$$

после подстановки (4.27) в (4.24) получим:

$$\begin{aligned} \Delta \arg[\eta(j\omega)] &= \pi[(n - m_1 - m_1) - (n - m_2 - m_2)] = 2\pi(m_2 - m_1). \\ -\infty < \omega < +\infty \end{aligned} \quad (4.28)$$

Часто рассматривают изменение частоты на интервале $0 \leq \omega < \infty$. В этом случае изменение угла будет в два раза меньше, поэтому

$$\begin{aligned} \Delta \arg[\eta(j\omega)] &= \pi(m_2 - m_1). \\ 0 \leq \omega < +\infty \end{aligned} \quad (4.29)$$

Последнее соотношение представляет собой аналитическую запись принципа аргумента.

Критерий устойчивости Найквиста подразделяется на два частных критерия, связанных с поведением разомкнутой системы, которая может быть устойчивой или неустойчивой.

Формулировка критерия 1. Для того чтобы система, неустойчивая в разомкнутом состоянии и имеющая P правых корней, была устойчивой в замкнутом состоянии, необходимо и достаточно, чтобы при изменении частоты ω в диапазоне от 0 до ∞ годограф разомкнутой системы $W(j\omega)$ охватывал критическую точку $(-1, j0)$ в положительном направлении $P/2$ раз.

Этот критерий следует из свойства (4.29) функции $\eta(s)$. Характеристическое уравнение $D(s) + M(s) = 0$ устойчивой замкнутой системы не имеет правых корней, подставив $m_1 = 0$ в (4.29), получим:

$$\begin{aligned} \Delta \arg[\eta(j\omega)] &= 2\pi \frac{P}{2}. \\ 0 \leq \omega < +\infty \end{aligned} \quad (4.30)$$

Соотношение (4.30) эквивалентно тому, что годограф функции $\eta(j\omega)$ должен сделать $P/2$ оборотов вокруг начала координат.

Функция $\eta(j\omega) = 1 + W(j\omega)$ отличается от функции $W(j\omega)$ на единицу. Чтобы не строить годограф $\eta(j\omega)$ по выражению (4.22), можно построить годограф $W(j\omega)$ по более простому выражению (4.21) и в дальнейшем использовать его вместо годографа $\eta(j\omega)$ (рис.4.20).

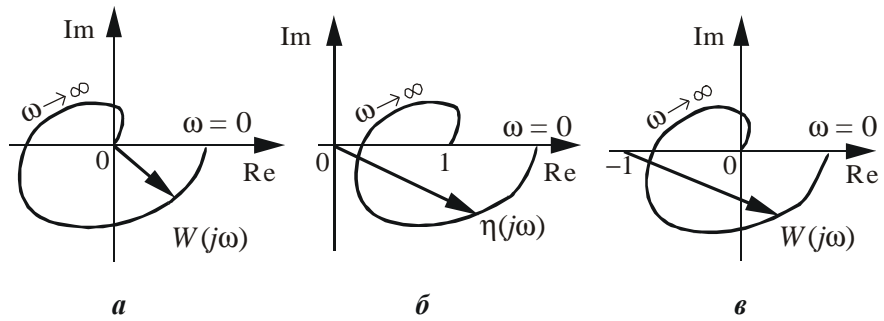


Рис.4.20. К пояснению формулировки критерия устойчивости Найквиста:

a - $W(j\omega)$ в системе координат $\text{Re}[W(j\omega)]$ и $\text{Im}[W(j\omega)]$; *б* - $\eta(j\omega)$ в системе координат $\text{Re}[W(j\omega) + 1]$ и $\text{Im}[W(j\omega) + 1]$, поворот вектора $\eta(j\omega)$ рассматривается относительно начала координат $(0, j0)$; *в* - $W(j\omega)$ используется вместо функции $\eta(j\omega)$ в системе координат $\text{Re}[W(j\omega)]$ и $\text{Im}[W(j\omega)]$, поворот вектора $W(j\omega)$ рассматривается относительно точки $(-1, j0)$

Годограф $W(j\omega)$ (рис.4.20,в) получается из годографа $\eta(j\omega) = 1 + W(j\omega)$ (рис.4.20,б), если вектор $1 + W(j\omega)$ сложить с -1 при $0 \leq \omega < \infty$. Поэтому точке $(0; j0)$ на плоскости $\eta(j\omega) = 1 + W(j\omega)$ соответствует точка $(-1; j0)$ на плоскости $W(j\omega)$.

Таким образом, для определения устойчивости системы годограф $W(j\omega)$ строится в системе координат $\text{Re}[W(j\omega)]$ $\text{Im}[W(j\omega)]$, однако его поворот рассматривается относительно точки $(-1; j0)$, а не $(0; j0)$.

Из рис.4.20 также следует, что число оборотов годографа $\eta(j\omega)$ вокруг начала координат равно числу оборотов годографа $W(j\omega)$ вокруг точки $(-1; j0)$.

Рассмотрим примеры систем, которые являются неустойчивыми в разомкнутом состоянии и устойчивыми в замкнутом.

Пусть характеристическое уравнение разомкнутой системы имеет два правых корня ($p = 2$) и ее годограф показан на рис.4.21.

Тогда замкнутая система будет устойчивой, так как годограф разомкнутой системы охватывает критическую точку $(-1; j0)$ в положительном направлении только один раз и $p/2 = 1$.

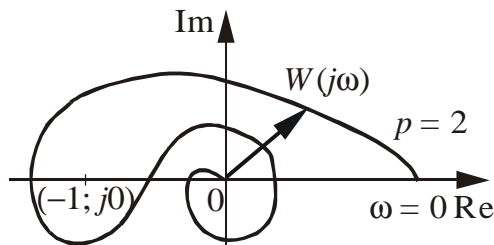


Рис.4.21. Годограф системы, неустойчивой в разомкнутом и устойчивой в замкнутом состояниях при $p = 2$

На рис.4.22 приведены еще два годографа устойчивых замкнутых систем, которые являются неустойчивыми в разомкнутом состоянии, так как имеют соответственно один и два правых корня.

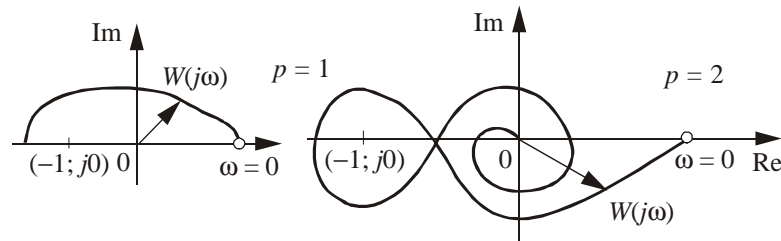


Рис.4.22. Годографы систем, неустойчивых в разомкнутом и устойчивых в замкнутом состояниях при различном числе правых корней p

Формулировка критерия 2. Для того чтобы система, устойчивая в разомкнутом состоянии, была также устойчивой в замкнутом состоянии, необходимо и достаточно, чтобы при изменении частоты ω от 0 до ∞ АФХ разомкнутой системы не охватывала критическую точку.

Этот критерий, как и критерий 1, следует из свойства (4.29) функции $\eta(s)$. Действительно, характеристические уравнения устойчивых замкнутой и разомкнутой систем не имеют правых корней, т.е. $m_1 = m_2 = 0$, следовательно,

$$\Delta \arg[\eta(j\omega)] = 2\pi m_2 = 0.$$

$$-\infty < \omega < +\infty$$

Данное условие будет выполняться, если годограф $\eta(j\omega) = 1 + W(j\omega)$ не охватывает начало координат, а значит, годограф $W(j\omega)$ не должен охватывать критическую точку $(-1; j0)$.

При сложной структурной схеме САУ форма АФХ бывает настолько усложнена, что по ней трудно судить о попадании точки $(-1; j0)$ в замкнутый контур. Для практического применения критерия устойчивости Найквиста удобнее использовать другую его формулировку, которая не требует вычисления изменения аргумента. В основе этой формулировки лежат два утверждения.

Утверждение 1. Изменение аргумента вектора $\eta(j\omega)$ при возрастании ω от 0 до $+\infty$ будет равно нулю, если числа переходов $W(j\omega)$ через отрезок действительной оси $(-\infty; -1)$ с верхней полуплоскости в нижнюю и с нижней полуплоскости в верхнюю равны между собой.

Утверждение 2. Указанное изменение аргумента вектора $\eta(j\omega)$ будет равно $\pm\pi p$, если разность между переходами равна $p/2$.

Назовем переход АФХ $W(j\omega)$ положительным, если при возрастании частоты ω годограф через отрезок действительной оси $(-\infty; -1)$ проходит с верхней полуплоскости в нижнюю, и отрицательным - в противоположном случае. Установленные ранее критерии устойчивости можно теперь сформулировать следующим образом.

Модификация формулировки критерия 1. Если разомкнутая система неустойчивая, то замкнутая система будет устойчивой, если разность между положительными и отрицательными переходами АФХ $W(j\omega)$ отрезка действительной оси $(-\infty; -1)$ равна $p/2$.

Модификация формулировки критерия 2. Если разомкнутая система устойчивая или нейтрально-устойчивая ($p=0$), то замкнутая система будет устойчивой, если разность между положительными и отрицательными переходами АФХ отрезка действительной оси $(-\infty; -1)$ равна нулю.

Применение критерия устойчивости Найквиста в таких формулировках крайне просто и сводится к выполнению следующей последовательности действий:

- 1) найти точки пересечения годографом отрезка действительной оси $(-\infty; -1)$;
- 2) в точках пересечения годографом оси $(-\infty; -1)$ проставить стрелки, направленные в сторону возрастания частоты ω ;
- 3) найти разность между числом стрелок, направленных вверх и вниз; сделать вывод об устойчивости системы.

При подсчете числа переходов надо учитывать следующее обстоятельство. Если $W(j\omega)$ при $\omega=0$ начинается на отрезке действительной оси $(-\infty; -1)$, то считается, что $W(j\omega)$ совершает половину перехода.

Пример. Пусть разомкнутая система неустойчива и $p=2$. Для амплитудно-фазовой характеристики, изображенной на рис.4.23, имеем разность положительных и отрицательных переходов: $2 - 1 = 1$, поэтому замкнутая система будет устойчивой, так как $p/2 = 2/2 = 1$.

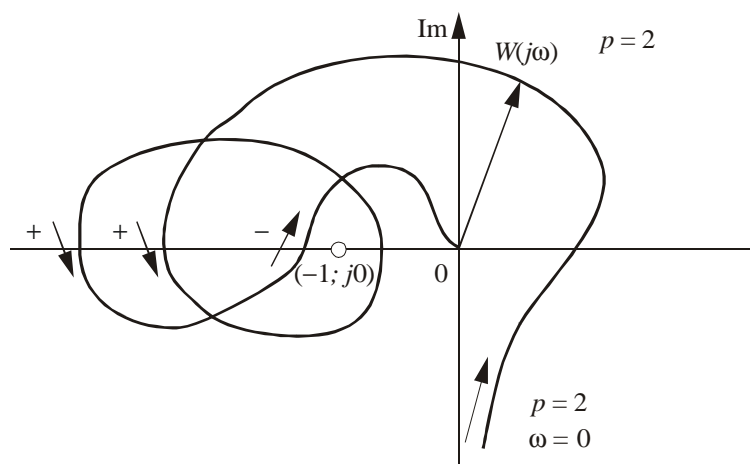


Рис.4.23. К пояснению формулировки критерия устойчивости Найквиста, не требующей вычисления изменения аргумента

Отметим следующие достоинства критерия устойчивости Найквиста:

- 1) исследует устойчивость замкнутых динамических систем по частотным характеристикам разомкнутых систем, которые строить значительно проще, поэтому его целесообразно использовать при исследовании сложных систем;
- 2) оказывается единственно применимым, когда некоторые или все характеристики отдельных элементов системы заданы экспериментально;
- 3) удобен при анализе систем, описываемых аналитическими функциями, отличными от дробно-рациональных (например, иррациональными, показательными, трансцендентными и др.), а также при анализе систем с запаздыванием;
- 4) имеет ясный физический смысл; позволяет наглядно проследить влияние параметров передаточной функции на устойчивость системы;

- 5) дает возможность использовать частотные характеристики разомкнутых систем, полученные при анализе устойчивости, и на других этапах исследования САУ (при анализе качества регулирования, для построения частотных характеристик замкнутых систем).

4.6. Применение критерия устойчивости Найквиста для астатических систем

АФХ статических систем при изменении частоты от 0 до $+\infty$ образуют замкнутый контур (рис.4.24). Для устойчивых систем он начинается на вещественной оси в точке $(k; 0)$. Сдвиг фаз изменяется в пределах от $\varphi=0$ при $\omega=0$ до $\varphi=-n\pi/2$, где n - порядок системы при $\omega \rightarrow \infty$.

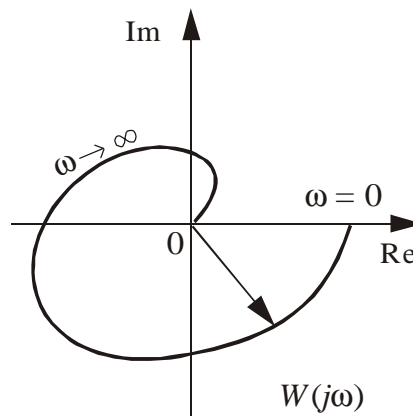


Рис.4.24. График АФХ статической системы третьего порядка

Астатические системы содержат интегрирующие звенья. Поэтому их передаточные функции имеют полюс $s=0$, находящийся на границе левой и правой полуплоскостей корней (т.е. разомкнутая система нейтрально-устойчивая).

АФХ разомкнутой астатической системы может быть представлена в следующем виде:

$$W(j\omega) = W(s)|_{s=j\omega} = \frac{R(s)}{Q(s)} \Big|_{s=j\omega} = \frac{kW_0(s)}{s^\gamma} \Big|_{s=j\omega} = \frac{kW_0(j\omega)}{(j\omega)^\gamma}, \quad (4.31)$$

где γ - порядок астатизма системы. Будем полагать, что $W_0(s)$ не имеет полюсов в правой полуплоскости комплексной плоскости s .

При $\omega \rightarrow 0$ АФХ разомкнутой системы стремится к бесконечности, а ее график претерпевает разрыв, т.е. не образует замкнутый контур.

График АФХ астатической системы с двумя интегрирующими звеньями ($\gamma = 2$) показан на рис.4.25.

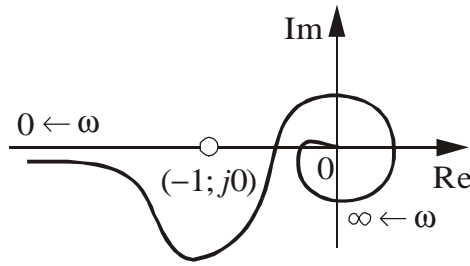


Рис.4.25. График АФХ астатической системы второго порядка, имеющий разрыв при $\omega \rightarrow 0$

Для астатических систем трудно решить вопрос об устойчивости замкнутой системы, так как неясно, охватывает график ее АФХ критическую точку $(-1; j0)$ или нет. Соответствующие доказательства показывают, что критерий устойчивости Найквиста для замкнутых астатических систем по отношению к ранее рассмотренным статическим системам не изменяется, но вносятся специфические изменения в вид АФХ.

Во-первых, будем, как и ранее, полагать $s = j\omega$, если ω изменяется в пределах $0 < \omega < \infty$. Во-вторых, при $\omega \rightarrow 0$ положим $s = \rho \exp(j\varphi)$, причем $\rho \rightarrow 0$, а φ изменяется в пределах $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Геометрически это означает, что на комплексной плоскости начало координат, в котором аргумент $\arg W(j\omega)$ не имеет определенного значения, обходится по дуге бесконечно малого радиуса (рис.4.26).

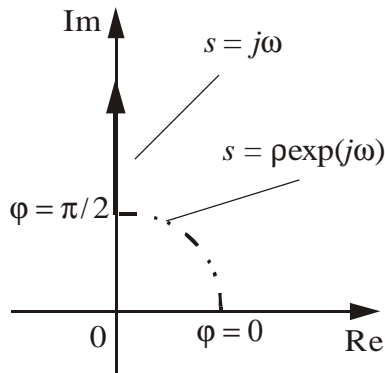


Рис.4.26. Устранение неопределенности аргумента в точке начала координат

При изменении s вдоль дуги бесконечно малого радиуса ρ , с учетом того, что $s = \rho \exp(j\varphi)$,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{R(s)}{Q(s)} = k,$$

получим:

$$\lim_{s \rightarrow 0} W(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R(s)}{(s)^\gamma Q(s)} \approx \frac{R(s)}{(\rho e^{j\varphi})^\gamma Q(s)} = \frac{k}{\rho^\gamma e^{j\varphi\gamma}} = \frac{k}{\rho^\gamma} e^{-j\varphi\gamma}. \quad (4.32)$$

Из соотношения (4.32) можно сделать следующий вывод: если точка s на комплексной плоскости корней обходит в положительном направлении (против часовой стрелки) дугу бесконечно малого радиуса, то соответствующая ей точка на плоскости $W(s)$ двигается в отрицательном направлении по дуге бесконечно большого радиуса

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{k}{\rho^\gamma} e^{-j\varphi\gamma} = \infty$$

при этом $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ и приращению аргумента $\Delta \arg(s) = \pi/2$ соответствует приращение аргумента $\Delta \arg W(s)$, вычисляемое по формуле

$$\Delta \arg W(s) = -\gamma\varphi,$$

т.е. равное

$$\Delta \arg W(s) = -\frac{\pi}{2}\gamma.$$

С помощью такого приема удастся устранить исходную неопределенность аргумента $\arg W(s)$ при $s = 0$. Напомним, что нуль является комплексным числом, не имеющим определенного значения аргумента.

Следовательно, чтобы судить об устойчивости САУ, имеющей интегрирующие звенья, необходимо график АФХ разомкнутой системы дополнить следующим построением. Точку АФХ, уходящую в бесконечность при $\omega \rightarrow 0$, соединить с положительной полуосью действительной оси дугой. Эта дуга проводится радиусом бесконечно большого модуля из начала координат по часовой стрелке (в

отрицательном направлении). Поворот вектора составляет угол $-\frac{\pi}{2}\gamma$. После указанного построения критерий устойчивости Найквиста к астатическим системам применяется обычным способом.

Пример использования полученного подхода иллюстрирует рис.4.27 применительно к астатической системе второго порядка. Данная система в замкнутом состоянии является устойчивой, так как график ее АФХ после проведенных дополнений не охватывает критическую точку $(-1; j0)$.

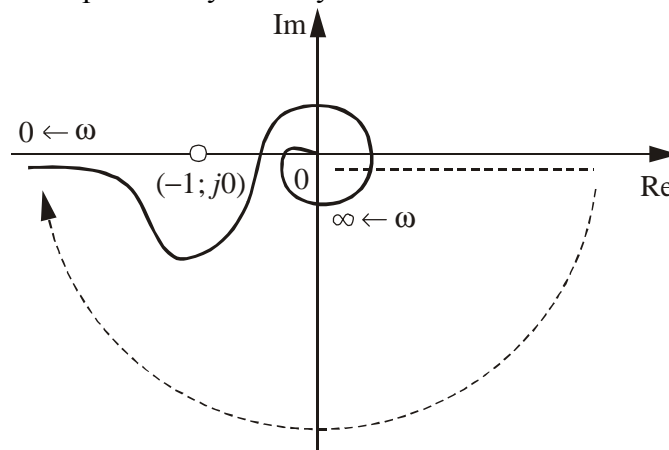


Рис.4.27. График АФХ астатической системы второго порядка после дополнительных построений

На рис.4.28 показаны графики АФХ еще двух систем с астатизмом второго порядка. Левый график относится к неустойчивой системе, критическая точка попадает в замкнутый контур, правый график - к устойчивой, критическая точка находится вне замкнутого контура.

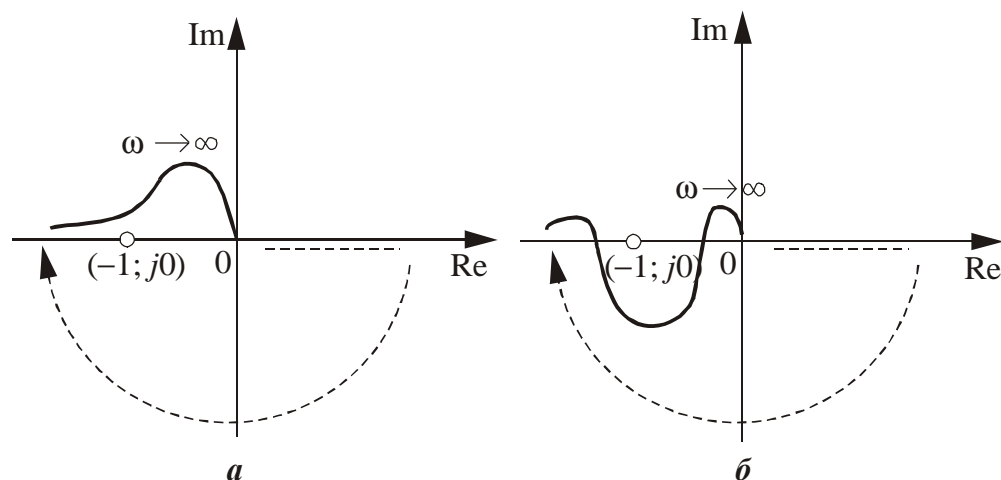


Рис.4.28. Графики АЧХ астатических систем второго порядка после дополнительных построений: *а* - неустойчивой в замкнутом состоянии; *б* - устойчивой замкнутом состоянии

Соответствующие примеры систем третьего порядка приведены на рис.4.29.

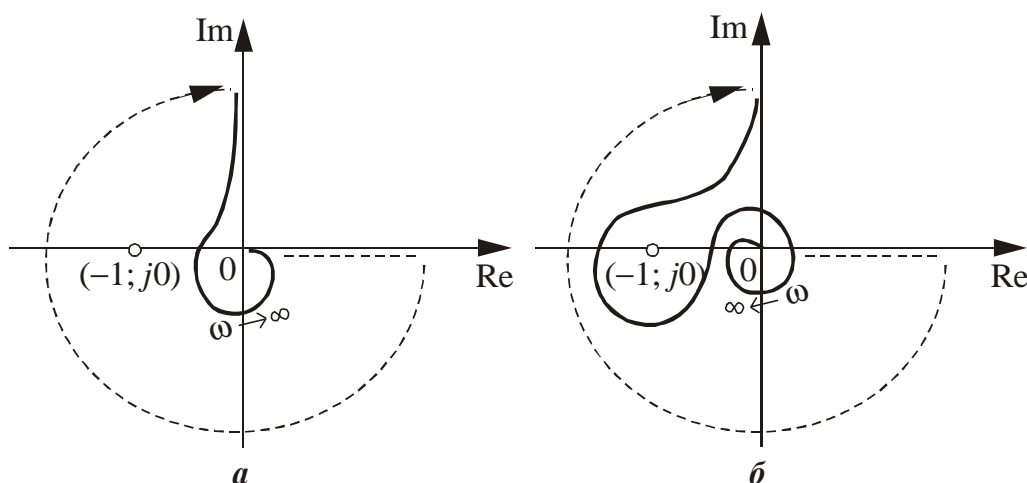


Рис.4.29. Графики АФХ астатических систем третьего порядка после дополнительных построений: *а* - неустойчивой в замкнутом состоянии; *б* - устойчивой замкнутом состоянии

При определении устойчивости замкнутой системы, неустойчивой в разомкнутом состоянии и содержащей интегрирующие звенья, критерий устойчивости Найквиста после дополнительных построений применяется обычным способом.

Для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы график АФХ разомкнутой системы после проведенных дополнений охватывал в положительном направлении точку $(-1; 0)$ $l/2$ раз, где l - число корней ее характеристического уравнения, лежащих в правой полуплоскости комплексной плоскости.

4.7. Логарифмический критерий устойчивости

Для определения устойчивости САУ по критерию Найквиста можно строить ЛЧХ, а не АФХ, что значительно упрощает применение критерия. Кроме того, построенные ЛЧХ могут быть использованы в дальнейшем при исследовании качества САУ и синтезе корректирующих устройств. При использовании ЛЧХ об устойчивости

замкнутой САУ судят по совместному поведению ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутой системы.

Ранее было показано, что устойчивость замкнутой системы связана с числом переходов АФХ разомкнутой системы через отрезок $(-\infty; -1)$. Рассмотрим, как, используя ЛЧХ разомкнутой системы, определить число пересечений отрезка $(-\infty; -1)$ АФХ разомкнутой системы.

В том случае, когда АФХ пересекает отрицательную вещественную ось, ЛФЧХ пересекает одну из линий: $\pm\pi; \pm3\pi; \pm5\pi, \dots$. Так как фазовая характеристика системы определяется с точностью до периода 2π , то чтобы сделать ее однозначной, условимся рассматривать значения фазы в интервале $(-2\pi; 0)$.

Тогда пересечению АФХ разомкнутой системы отрезка $(-\infty; -1)$ сверху вниз (положительный переход) будет соответствовать пересечение уровня $-\pi$ снизу вверх при положительной логарифмической амплитудной характеристике. Следовательно, пересечение ЛФЧХ уровня $-\pi$ снизу вверх при положительной ЛАЧХ следует считать за положительный переход, а пересечение уровня $-\pi$ сверху вниз при положительной ЛАЧХ - за отрицательный. Соответствие между переходами уровня $-\pi$ на АФХ и ЛФЧХ поясняется рис.4.30 и 4.31, где стрелками обозначены направления переходов и их знаки.

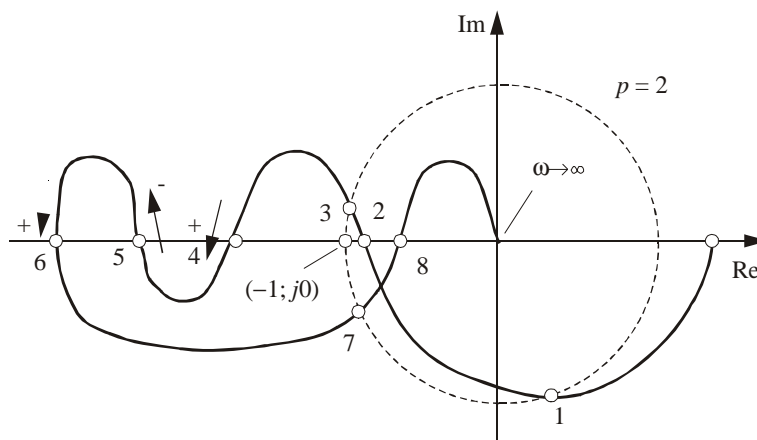


Рис.4.30. График АФХ неустойчивой разомкнутой системы ($p = 2$), устойчивой в замкнутом состоянии

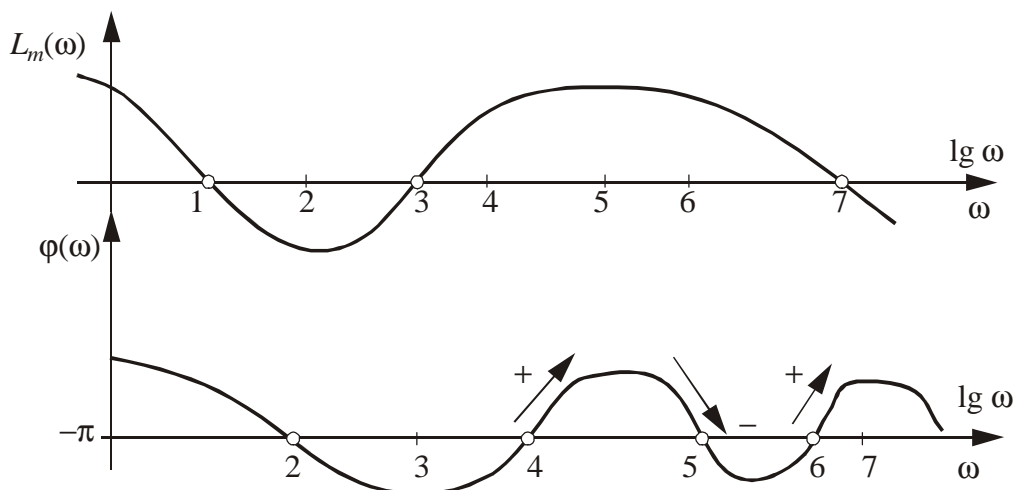


Рис.4.31. Графики ЛЧХ неустойчивой разомкнутой системы ($p = 2$), устойчивой в замкнутом состоянии

Формулировка логарифмического критерия. Для того чтобы система, неустойчивая в разомкнутом состоянии и имеющая p полюсов в правой полуплоскости комплексной плоскости s , была устойчива в замкнутом состоянии, необходимо и достаточно, чтобы на тех частотах, где ЛАЧХ положительна, ЛФЧХ пересекала

уровень $-\pi$ так, чтобы $n^+ - n^- = \frac{p}{2}$, где n^+ и n^- - соответственно количество положительных и отрицательных переходов.

Пример. Определить устойчивость замкнутой системы, которая в разомкнутом состоянии неустойчива (количество правых корней $p = 2$). АФХ системы приведена на рис.4.30. Из рассмотрения АФХ видно, что она один раз охватывает критическую точку в положительном направлении. Следовательно, замкнутая система устойчива. Тот же вывод относительно устойчивости замкнутой системы можно получить гораздо проще на основании ЛЧХ (см. рис.4.31) по логарифмическому критерию, подсчитав количество положительных (два) и отрицательных (один) переходов и найдя их разность (один).

Аналогичные соображения справедливы и для замкнутой системы, устойчивой в разомкнутом состоянии. Например, рассмотрим АФХ и ЛЧХ системы, показанные соответственно на рис.4.32 и 4.33.

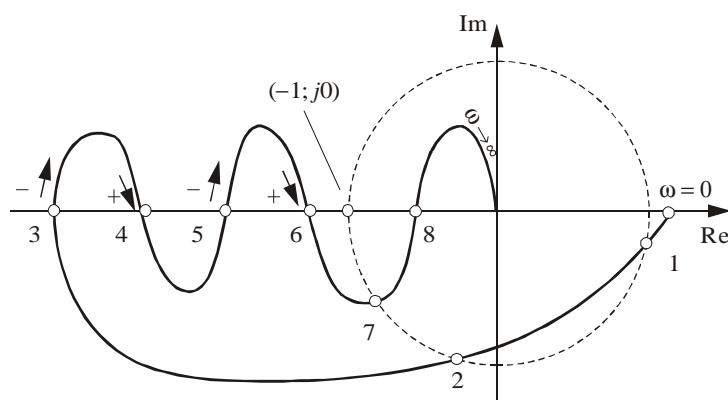


Рис.4.32. График АФХ устойчивой разомкнутой системы, имеющей по два положительных и отрицательных перехода

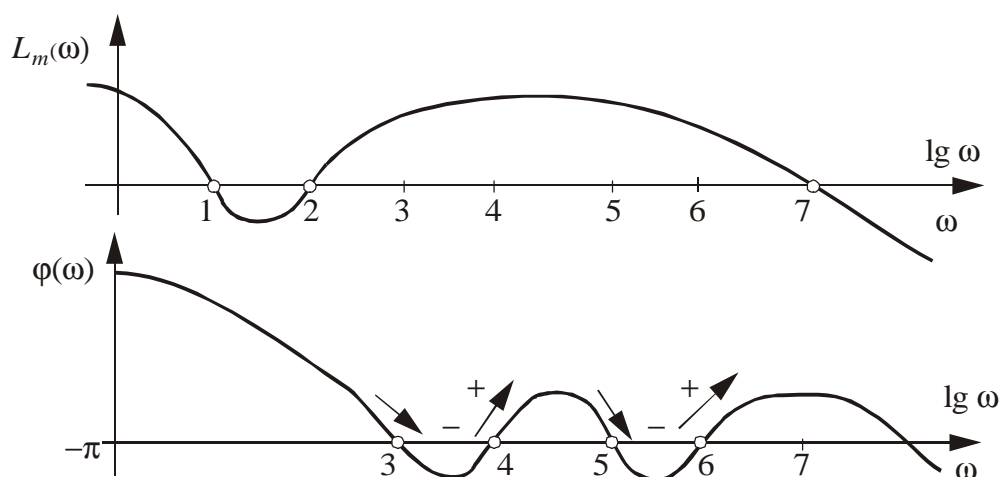


Рис.4.33. Графики ЛЧХ устойчивой разомкнутой системы, имеющей по два положительных и отрицательных перехода

Количество положительных и отрицательных переходов одинаковое, равное двум, следовательно, замкнутая система устойчивая, однако ЛЧХ анализировать проще.

Из формулировки логарифмического критерия можно сделать следующий важный вывод: для того чтобы система, устойчивая в разомкнутом состоянии, была устойчива в замкнутом состоянии, необходимо и достаточно, чтобы на частотах, где ЛАЧХ положительна ($L_m(\omega) > 0$), фазовая частотная характеристика:

- либо не пересекала линию, соответствующую значению фазы $\varphi = -\pi$ (рис.4.34);
- либо пересекала линию $\varphi = -\pi$ четное число раз, т.е. чтобы $n^+ = n^-$ (рис.4.35).

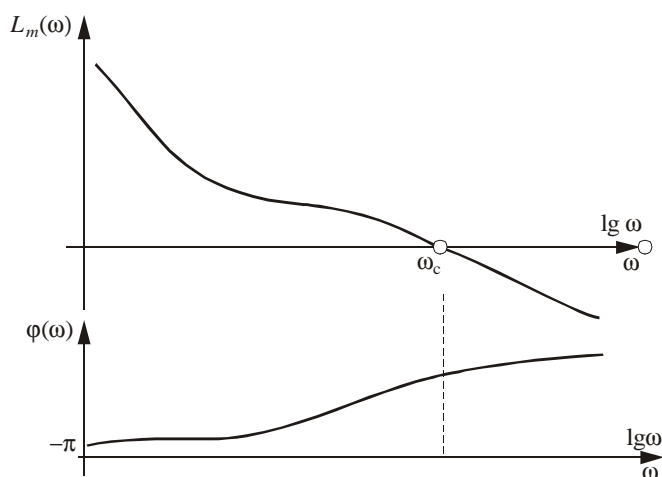


Рис.4.34. Графики ЛЧХ разомкнутой системы, устойчивой в разомкнутом состоянии. На частотах, где ЛАЧХ положительна, ЛФЧХ не пересекает линию $-\pi$

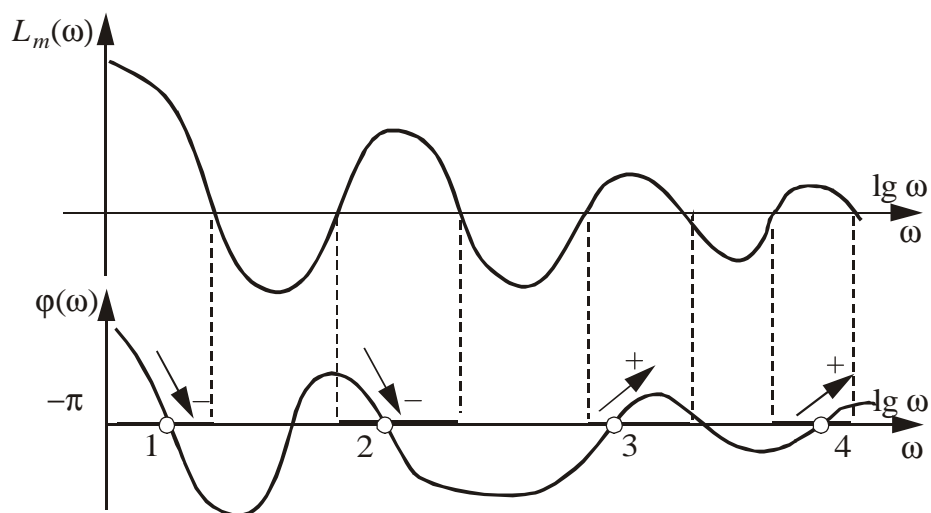


Рис.4.35. Графики ЛЧХ разомкнутой системы, устойчивой в разомкнутом состоянии. На частотах, где ЛАЧХ положительна, ЛФЧХ пересекает линию $-\pi$ по два раза в отрицательном и положительном направлениях

Аналогично исследованию устойчивости статических систем устанавливается устойчивость астатических систем. Однако следует помнить об особенностях дополнительного построения на графике АФХ. На рис.4.36 показана АФХ астатической системы, дополненная дугой бесконечно большого радиуса. Эта система является устойчивой в замкнутом состоянии, так как АФХ разомкнутой системы не охватывает критическую точку.

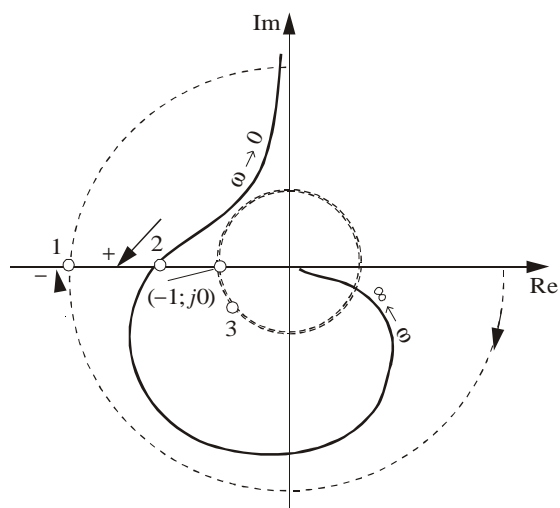


Рис.4.36. АФХ астатической устойчивой системы

Данной АФХ соответствуют ЛЧХ, представленные на рис.4.37. Точка 1 (рис.4.36) имеет значение фазы $-\pi$ рад, поэтому данную точку также необходимо нанести на график ЛФЧХ (рис.4.37).

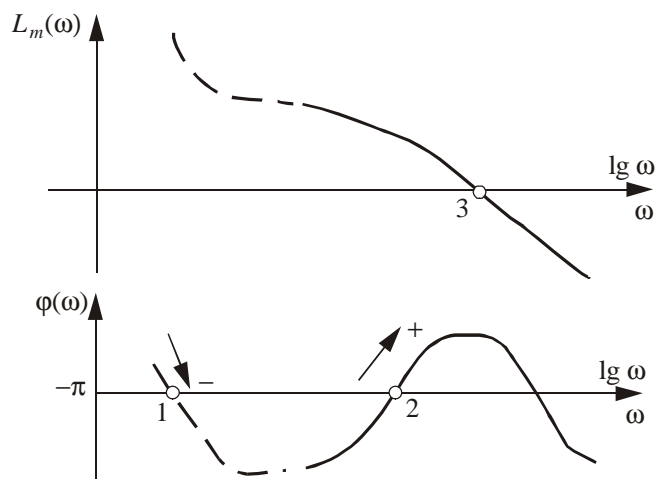


Рис.4.37. Дополнение ЛЧХ для астатических систем (пунктирная линия). Имеются один положительный и один отрицательный переходы

Из ЛЧХ разомкнутой системы следует, что на тех частотах, где ЛАЧХ разомкнутой системы положительна, количество отрицательных переходов равно количеству положительных ($n^+ = 1$, $n^- = 1$), поэтому система в замкнутом состоянии является устойчивой.

4.8. Запасы устойчивости по амплитуде и фазе

Часто система характеризуется формальным признаком устойчивости, однако это еще не является гарантией того, что реализованная система на практике окажется

устойчивой. Действительно, уравнения, описывающие поведение системы, лишь приближенно отражают реальную картину ее функционирования. Параметры системы, принятые при расчетах, лишь приблизительно соответствуют действительным параметрам, меняющимся в процессе эксплуатации. Например, происходит изменение номиналов резисторов при изменении температуры окружающей среды, не остаются постоянными коэффициенты усиления транзисторов при случайных флуктуациях напряжения, имеет место изменение сопротивления полупроводниковых выпрямителей с течением времени и т.д. Если по данным вычислений система близка к границе устойчивости, то на практике ввиду отличия реальных и расчетных параметров система может оказаться неустойчивой. Поскольку такое положение недопустимо, проектируемая система должна обладать некоторым запасом устойчивости, характеризующим удаленность системы от границы устойчивости и гарантирующим сохранение устойчивости при реальной эксплуатации.

Устойчивость системы можно количественно оценить запасом устойчивости по фазе и амплитуде (усилению). Предположим, что АФХ и ЛЧХ устойчивой системы в разомкнутом состоянии имеют вид, представленный на рис.4.38 и 4.39.

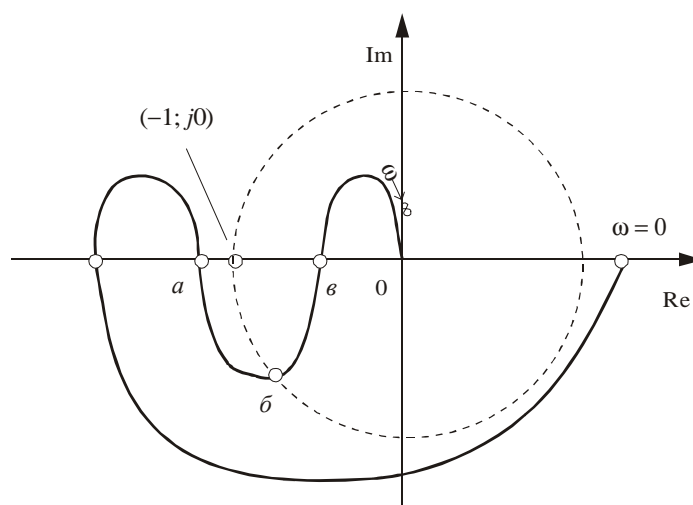


Рис.4.38. К пояснению запасов устойчивости по амплитуде и фазе на АФХ разомкнутой системы

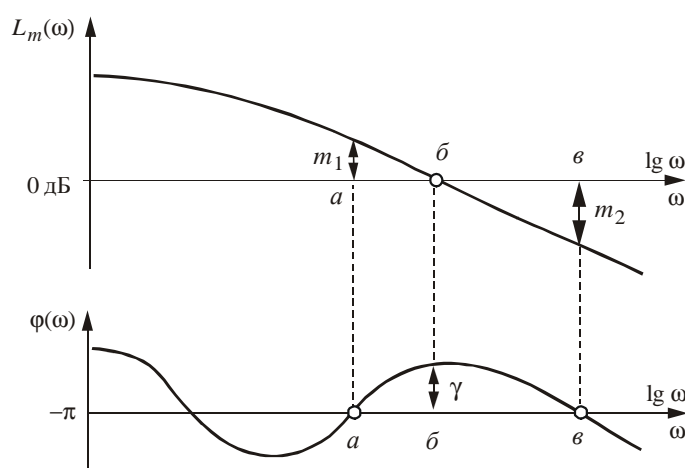


Рис.4.39. К пояснению запасов устойчивости по амплитуде и фазе на ЛЧХ разомкнутой системы (точка б соответствует частоте среза)

Поставим два эксперимента.

1. Будем уменьшать коэффициент передачи разомкнутой системы, тогда все векторы АФХ $W(j\omega)$ будут, не изменяя фазы, уменьшать свой модуль (рис.4.38). Таким образом, точка a АФХ начнет смещаться вправо по оси абсцисс и приближаться к критической точке $(-1; j0)$. Дальнейшее уменьшение коэффициента передачи сделает систему неустойчивой.

Из рис.4.39 следует, что для выхода на границу устойчивости нужно уменьшить $L_m(\omega)$ на величину $20\lg|W(j\omega)| = m_1$.

2. Из исходного положения будем увеличивать коэффициент передачи. Точка b (рис.4.38) начнет перемещаться по оси абсцисс влево и приближаться к критической точке $(-1; j0)$. Для выхода на границу устойчивости нужно увеличить $L_m(\omega)$ на величину $20\lg|W(j\omega)| = m_2$ (рис.4.39).

Величина, показывающая, во сколько раз нужно увеличить или уменьшить коэффициент передачи системы, чтобы она вышла на границу устойчивости, называется *запасом устойчивости по модулю*.

Запас по модулю должен быть не меньше 6 - 8 дБ, чтобы при изменении коэффициента передачи в 2 - 2,5 раза из-за изменения температуры, давления, старения механизмов и т.д. система не сделалась неустойчивой.

Запас устойчивости по фазе соответствует значению угла γ , представляющему превышение фазовой характеристики уровня $-\pi$ радиан на частоте среза, т.е частоте, на которой ЛАЧХ принимает значение, равное нулю (рис.4.39). Обычно в удовлетворительно работающей системе запас по фазе должен быть порядка 30 - 60°.

В заключение отметим, что существуют противоречивые требования относительно выбора величины коэффициента усиления. Повышение точности предполагает увеличение коэффициента усиления, а достижение необходимой устойчивости требует его уменьшения. Разрешение противоречия заключается в использовании корректирующих звеньев, позволяющих обеспечить устойчивость системы, не уменьшая значение коэффициента передачи.

Литература

1. **Бесекерский В.А., Попов Е.П.** Теория систем автоматического регулирования. - М.: Наука, 1975. - 768 с.
2. **Дорф Р., Бишон Р.** Современные системы управления. - М.: Лаборатория базовых знаний, 2000. - 832 с.
3. **Ерофеев А.А.** Теория автоматического управления. - СПб.: Политехника, 1998. - 295 с.
4. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учеб. в 3-х т. Т. 1. Анализ и статистическая динамика систем автоматического управления / **Под ред. Н.Д. Егунова.** - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. - 748 с.
5. **Солодовников В.В., Плотников В.Н., Яковлев А.В.** Основы теории и элементы систем автоматического регулирования. - М.: Машиностроение, 1985. - 536 с.
6. Теория автоматического управления: В 2-х ч. Ч. 1. Теория линейных систем автоматического управления / **Под ред. А.А. Воронова.** - М.: Высшая школа, 1986. - 367 с.
7. Теория автоматического управления: Ч.1 / **Под ред. А.В. Нетушила.** - М.: Высшая школа, 1967. - 424 с.
8. **Трофимов А.И., Егунов Н.Д., Дмитриев А.Н.** Методы теории автоматического управления, ориентированные на применение ЭВМ. Линейные стационарные и нестационарные модели. - М.: Энергоатомиздат, 1997. - 656 с.
9. Основы автоматического управления / **Под ред. В.С. Пугачева.** - М.: Наука, 1967. - 680 с.
10. **Юревич Е.И.** Теория автоматического управления. - М.: Энергия, 1969. - 375 с.