8. ПОНЯТИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОГРАММНОГО И ОПТИМАЛЬНОГО СТАБИЛИЗИРУЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЙ

Пусть математическая модель объекта управления описывается уравнениями

$$\dot{X} = f(X,U,t), X(t) \in R^n, U(t) \in R^m.$$

Заданы начальное

$$X(t_0) = X_0$$

и конечное

$$X(t_1) = X_1$$

положение объекта, где t_0 - время начала, а t_1 - время окончания функционирования объекта.

Эффективность управления оценивается с помощью интеграла (функционала)

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(X,U,t)dt,$$

где $F(X,U,t)$ - заданная непрерывная функция своих аргументов.

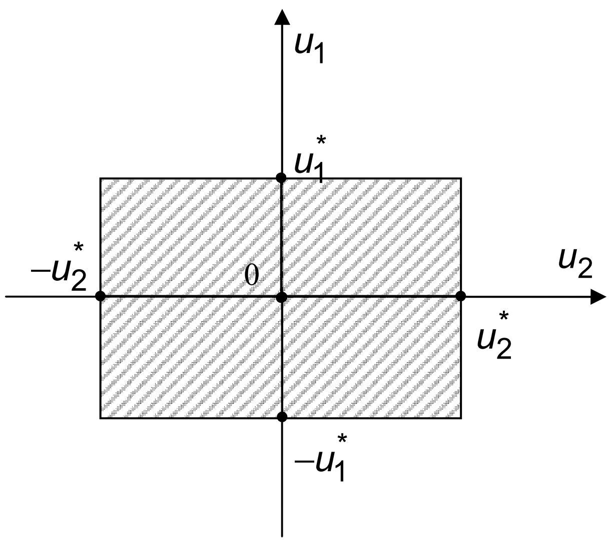
На управление и переменные состояния накладываются ограничения, выражающие ограниченные ресурсы управления и допустимые пределы изменения переменных состояния.

Часто ограничения на управления имеют вид

$$|u_k(t)| \le u_k^*, k = \overline{1,m},$$

а u_k^* - заданные числа.

При $m = 2$ точки вектора $U = (u_1, u_2)$ заполняют заштрихованный прямоугольник



В общем случае будем считать, что в соответствии с конструкцией объекта и условиями его эксплуатации задано замкнутое множество U в пространстве переменных $u_1, u_2, ..., u_m$, и управления могут принимать значения лишь из этого множества. Замкнутость множества U означает, что управления могут находиться не только внутри, но и на его границе (например $u_1(t) = u_1^*$). Таким образом, $u(t) = U$.

Ранее была поставлена задача об оптимальном управлении и решена методами вариационного исчисления (но без учета ограничений на управления). То есть мы получили так называемое оптимальное программное управление как функцию времени.

Пусть оптимальное программное управление $U^0(t)$ найдено. Подставив его в уравнение (6.1), получим оптимальную программную траекторию $U^0(t)$.

Реальное (истинное) движение системы всегда отличается от программного, так как:

- неточная реализация начальных условий (неточная установка ракеты в точке старта, неточная выставка нулевого положения при повороте вала двигателя и так далее);
- неполная информация о внешних возмущениях, действующих на систему;
- неточная реализация программного управления, все технические устройства работают с определенной погрешностью.

Поэтому реальное движение описывается функциями

$$X(t) = X^0(t) + \Delta X(t),$$

$$U(t) = U^0(t) + \Delta U(t),$$

где $\Delta X(t)$ - отклонение (возмущение) фактического движения от программного, $\Delta U(t)$ - отклонение реального управления от программного. Числа $\Delta x_i(t_0), i = \overline{1,n}$ достаточно малые, но неизвестные числа, являющиеся случайными погрешностями при реализации заданных начальных условий. Об этих погрешностях обычно известно лишь, что они удовлетворяют неравенству

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2(t_0) \le \varepsilon^2,$$

где ε - неизвестное число.

Получим уравнения возмущенного движения, описывающие отклонения фактического движения от программного (которое называется невозмущенным).

Из выражения (6.1) следует

$$\dot{X}^0(t)+\Delta\dot{X}(t)=F(X^0(t)+\Delta X(t),U^0(t)+\Delta U(t),t).$$

Для этого вычтем из последнего уравнения программное (оптимальное)

$$\dot{X}^0(t)+\Delta\dot{X}(t)-\dot{X}(t)=F(X^0(t)+\Delta X(t),U^0(t)+\Delta U(t),t)-F(X^0(t),U^0(t),t)$$

$$\to \Delta\dot{X}(t)=F(X^0(t)+\Delta X(t),U^0(t)+\Delta U(t),t)-F(X^0(t),U^0(t),t).$$

Уравнение - уравнение возмущенного движения.

Применим разложение в ряд Тейлора в окрестности оптимального (программного) движения

$$\Delta\dot{X}(t)=\cancel{F(X^0(t),U^0(t),t)}+\left.\frac{\partial F}{\partial X}\right|_{\substack{X=X^0\\U=U^0}}\Delta X+\left.\frac{\partial F}{\partial U}\right|_{\substack{X=X^0\\U=U^0}}\Delta U+$$

$$\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}\right|_{\substack{X=X^0\\U=U^0}}(\Delta X)^2+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 F}{\partial U^2}\right|_{\substack{X=X^0\\U=U^0}}(\Delta U)^2+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 F}{\partial X\partial U}\right|_{0}\Delta X\Delta U+\ldots-$$

$$-\cancel{F(X^0(t),U^0(t),t)}.$$

Отбрасывая члены разложения второго и более порядка малости, имеем

$$\Delta\dot{X}(t)=\left.\frac{\partial F}{\partial X}\right|_{0}\Delta X+\left.\frac{\partial F}{\partial U}\right|_{0}\Delta U\,.$$

Вводя обозначения

$$A(t)=\left.\frac{\partial F}{\partial X}\right|_{0},B(t)=\left.\frac{\partial F}{\partial U}\right|_{0},$$

получим

$$\Delta\dot{X}(t)=A(t)\Delta X(t)+B(t)\Delta U(t)\,.$$

Уравнение (6.8) - уравнение первого приближения (уравнение в отклонениях). В стационарном случае оно имеет вид

$$\Delta\dot{X}(t)=A\Delta X(t)+B\Delta U(t)\,,$$

где A,B - числовые матрицы.

Решение уравнений при начальных условиях из множества ε^2 описывает отклонение реального движения от программного (оптимального) в каждый момент времени.

Для качественной характеристики этих отклонений часто используют значение интеграла

$$J=\int_{t_0}^{t_1}(\Delta X^T Q\Delta X)dt \leftrightarrow \int_{t_0}^{t_1}(\sum_{i=1}^{n}q_{ii}\Delta x_i^2)dt,$$

в котором $q_{ii}, i=\overline{1,n}$ - положительные числа.

Интегралы типа представляют собой взвешенную с помощью коэффициентов q_{ii} сумму площадей, ограниченных квадратом отклонений истинного движения от программного по каждой переменной состояния. Он характеризует "расстояние" реального движения и программного и является "мерой" близости этих движений. Для сближения этих движений используется $\Delta u_k(t), k=\overline{1,m}$ - стабилизирующие управления.

Таким образом результирующее управление будет равным

$$U(t)=U^0(t)+\Delta U(t),$$

то есть состоит из программного и стабилизирующего управлений.

Обычно $|U^0(t)|>|\Delta U(t)|$. Это объясняется тем, что программное управление обеспечивает основное (программное) движение системы, а стабилизирующее управление лишь "парирует" малые отклонения от программного движения и обеспечивает требуемую точность осуществления программного движения.

Часто вместо ограничений

$$\left|\Delta u_k(t)\right| \le \Delta u_k^*$$

где Δu_k^* - заданное число, определяющих допустимый "расход" стабилизирующего управления в каждый момент времени, накладывают на стабилизирующие управления интегральные ограничения (ограничения на "энергию")

$$\int_{t_0}^{t_1} \Delta u_k^2(t)dt \le J_k^*, k=\overline{1,m}.$$

В итоге в качестве критерия стабилизации рассматривается функционал

$$J=\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{i=1}^{n} q_{ii}\Delta x_i^2+\sum_{k=1}^{m}\gamma_{kk}\Delta u_k^2\right)dt.$$

Если обеспечивать стабилизирующее управление как явную функцию времени (по аналогии с программным управлением), то для каждого начального условия из множества

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2(t_0)\le \varepsilon^2,$$

получим управления

$$\Delta u_k(t,\Delta x_1(t_0),\ldots,\Delta x_n(t_0)), k=\overline{1,m}$$

для реализации которых необходимо измерять переменные состояния в момент времени $t=t_0$, так как числа $\Delta x_i(t_0), i=\overline{1,m}$ неизвестны. Кроме того, функции $\Delta u_k(t, \Delta x_1(t_0), ..., \Delta x_n(t_0))$ будут различными для каждого набора $\Delta x_i\,(t_0), i = \overline{1,n}$ из множества (6.13).

В связи с этим естественно оценивать стабилизирующее управление не как явную функцию времени, а как функцию переменных состояния

$$\Delta u_k = r_k(t, \Delta x_1(t_0), ..., \Delta x_n(t)), k = \overline{1,m}$$

Можно показать, что вид этих функций не зависит от начальных условий из множества.

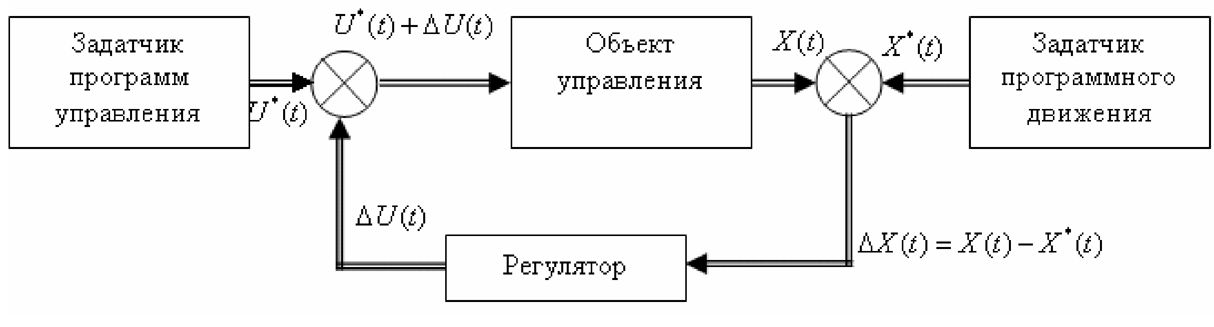
В общем случае оптимальное стабилизирующее управление можно определить как функцию переменных состояния и времени, при которых на движениях системы или, возбуждаемых произвольными начальными отклонениями из множества, показатель качества, например, принимает наименьшее значение.

Если в верхний предел t_1 не ограничен, то стабилизирующее управление должно также обеспечивать асимптотическую устойчивость системы.

Замечание. Стабилизирующее управление реализуется регулятором, который является сложным динамическим прибором, состоящим обычно из трех компонент: измерительных органов, устройства реализации алгоритма (корректирующих контуров), исполнительных органов.

Как правило, дифференциальные уравнения или уравнения физического объекта вместе с измерительными и исполнительными устройствами регулятора. Тогда $\Delta x_i\,(t), i = \overline{1,n}$ - выходы измерительных устройств, а $\Delta u_k(t), k = \overline{1,m}$ - входы исполнительных устройств.

Рассмотрим общую структурную схему, реализующую программное и стабилизирующее управления.



Объект описывается уравнением, а регулятор реализует стабилизирующее управление.

Объект вместе с задатчиками программного управления и движения образуют систему программного управления, а объект вместе с регулятором – систему стабилизации программного управления.

На схеме не показаны исполнительные и измерительные устройства, которые включены в модель объекта.

Различие способа функционирования системы программного управления и системы стабилизации состоит в следующем.

1. Для первой из этих систем начальные условия известны до начала проектирования, а для второй - начальные условия неизвестны, известно лишь, что они находятся в пределах

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i^2(t_0) \le \varepsilon^2,$$

2. В первом случае управления являются явными функциями времени, а во втором – функциями измеряемых переменных состояния (а в общем случае и времени). Таким образом, в первом случае управление осуществляется по разомкнутому циклу, а во втором – по принципу обратной связи.

3. Эффективность работы системы программного управления оценивается определенным интегралом

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F_0(X,U,t)dt,$$

в котором функция $F_0(X,U,t)$ определяется физической природой объекта управления.

В системе стабилизации критерий (показатель) качества

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{n} q_{ii} \Delta x_i^2 + \sum_{k=1}^{m} \gamma_{kk} \Delta u_k^2 \right) dt$$

часто не связан с физической природой объекта управления, а его коэффициенты $q_{i,i}, i = \overline{1,n}, \gamma_{kk} = \overline{1,m}$ определяются исходя из инженерных требований (времени переходного процесса от истинного движения к программному, перерегулирования при этом движении, установившейся ошибки в осуществлении программного движения и так далее).

4. При построении стабилизирующего управления обычно используются уравнения первого приближения. Линейный характер уравнений первого приближения существенно упрощает процедуры построения стабилизирующих управлений. Использование же уравнений первого приближения для построения программного управления, как правило, недопустимо.