Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный технический университет
имени Гагарина Ю.А.»

Физико-технический факультет

Кафедра
«Математика и моделирование»

Расчетно-графическая работа

По дисциплине: Алгебора и геометрия

Работу выполнил:
студент 1 курса, гр. бПМИН-11
Самарский Игорь Александрович

Саратов 2016

Задача 1 Линейные операторы

Пусть $x=(x_1, x_2, x_3)$. Являются ли линейными следующие преобразования.

$Ax=(x_3; 2x_1+3x_2+4x_3; 5x_1+6x_2+7x_3)$,

$Bx=(x_3; 2x_1+3x_2+4; 5x_1+6x_2+7)$,

$Cx=(x_3; 0,5x^4+6x_2+7x_3)$

Ax - линейное т.к можно представить в виде матрицы $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ и столбец вектора

$\bar{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$Ak\bar{x}=kAx \quad A(\bar{x}+\bar{y})=A\bar{x}+Ay$

$B\bar{x}$ - не линейное

$Bk\bar{x}=(kx_3; 2kx_1+3kx_2+4; 5kx_1+6kx_2+7)$,

$kB\bar{x}=(kx_3; 2kx_1+3kx_2+4k; 5kx_1+6kx_2+7k)$

$Bk\bar{x}\neq kB\bar{x}$

Cx - не линейное

$Ck\bar{x}=(kx_3; 0; 5k^4x_1^4+6kx_2+7kx_3)$

$kC\bar{x}=(kx_3; 0; 5kx_1^4+6kx_2+7kx_3)$

$Ck\bar{x}\neq kC\bar{x}$

Задача 2 Действия с операторами и их матрицами.

Пусть $x=\{x_1, x_2, x_3\}$ $\quad Ax=\{x_2-x_3, x_1, x_1+x_3\}$

$B(2A-B)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)=$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}=S$

$B(2A-B)x=\{2x_1-2x_3; 2x+4x_3; x_2-2x_3\}$

Задача 3 Преобразование матрицы оператора

Найти матрицу в базисе $(e_1'; e_2'; e_3')$, где $e_1' = e_1 - e_2 + e_3$, $e_2' = -e_1 + e_2 - 2e_3$, $e_3' = -e_1 + 2e_2 + e_3$, если она задана в базисе (e_1, e_2, e_3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad |T| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -8 & -3 \\ 4 & -5 & -4 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

То есть матрица A в базисе (e_1', e_2', e_3') имеет вид

$$\begin{pmatrix} 6 & -8 & -3 \\ 4 & -5 & -4 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 4 Матрица, образ, ядро оператора

Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора

Зеркальное отражение относительно плоскости $x + z = 0$

Выводим общую формулу при симметричном отображении (x, y, z) относительно плоскости $ax + by + cz + d = 0$

$$\left(x - \frac{2a(ax + by + cz + d)}{a^2 + b^2 + c^2};\ y - \frac{2b(ax + by + cz + d)}{a^2 + b^2 + c^2};\right.$$

$$z; \frac{2c(ax+by+cz+d}{a^2+b^2+c^2}) \quad a=1,\ b=0;\ c=1\ \ d=0$$

Получаем образ точки $(-z; y; -x)$

Матрица будет $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Так как

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ y \\ -x \end{pmatrix}$$

$$\ker f = (0; 0; 0)$$

Задача 5 Собственные значения и собственные векторы оператора

Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix} = (-1)(\lambda-3)(\lambda-5)(\lambda-7)$$

$\lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = 5 \qquad \lambda_3 = 7$

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_2 = -x_3 \\ x_1 = x_3 \end{cases}$

$x_3 = c_1$

$$X = \begin{pmatrix} c_1 \\ -c_1 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = x_3 \\ x_1 = x_3 \end{cases}$

$x_3 = C_1$

$X = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_1 \\ C_1 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -x_3 \\ x_1 = -x_3 \end{cases}$

$x_3 = C_1$

$X = \begin{pmatrix} -C_1 \\ -C_1 \\ C \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Задача 6 Жордановый базис

Найти жорданову форму матрицы и жорданов базис.

$\begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5-\lambda & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2(2+\lambda)^2 = 0$

$A_k = 2$ $\Gamma_k = 3$

$\lambda = -1$

$B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0,75 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

x_1, x_2, x_3 – базис x_4 – свобод C_1

$x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0$

$x_2 + 1,5C_1 - 2C_1 = 0$

$x_2 = 2C_1 - 1,5C_1$

$x_3 + 0,75C_1 = 0$

$x_3 = -0,75C_1$

$x_1 - x_3 - x_4 = 0$

$x_1 + 0,75C_1 - C_1 = 0$

$x_1 = C_1 - 0,75C_1$

$X = \begin{pmatrix} C_1 - 0,75C_1 \\ 2C_1 - 1,5C_1 \\ -0,75C_1 \\ C_1 \end{pmatrix}$ $N_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,5 \\ -0,75 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$z_1 = \frac{2c(ax+by+cz+d)}{a^2+b^2+c^2}$) $a=1$, $b=0$; $c=1$ $d=0$

Получаем образ точки $(-z; y; -x)$

Матрица будет $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ так как

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -z \\ y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ y \\ -x \end{pmatrix} \quad r$$

$\ker f = (0; 0; 0)$

Задача 5 Собственные значения и собственные векторы оператора

Найти собственные значения и собственны векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix} = (-1)(\lambda-3)(\lambda-5)(\lambda-7)$$

$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 5 \quad \lambda_3 = 7$

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -x_3 \\ x_1 = x_3 \end{cases}$

$x_3 = c_1$

$$X = \begin{pmatrix} c_1 \\ -c_1 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B^2 f = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 7 Привести квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \frac{4}{3} x_1 x_2 - \frac{8\sqrt{2}}{3} x_2 x_3$$

$$\begin{vmatrix} 1-x & -\frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1-x & -\frac{1}{3}(4\sqrt{2}) \\ 0 & -\frac{1}{3}(4\sqrt{2}) & 1-x \end{vmatrix} = -(x-3)(x-1)(x+1) = 0$$

$x = 3 \quad x = 1 \quad x = -1$

$$3x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$$

Задача 8 Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду.

Исследовать кривую второго порядка и построить ее.

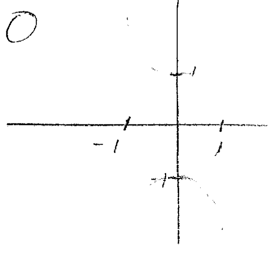
$$x^2 + y^2 + 2xy - 8x - 8y + 1 = 0$$

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$$

$$(x'\cos\alpha - y\sin\alpha)^2 + (x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 + 2(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) - 8(x' - \cos\alpha - y'\sin\alpha) - 8(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + 1 = 0$$

$$(1 + 4\cos\alpha\sin\alpha)x'^2 + (1 - 4\cos\alpha\sin\alpha)y'^2 + 2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)x'y' - (8\cos\alpha - 8\sin\alpha)x' + (8\sin\alpha - 8\cos\alpha)y' + 1 = 0$$

$\alpha = \frac{\pi}{4} \qquad 3x'^2 - y'^2 + 1 = 0 \qquad \frac{x'^2}{1} - \frac{y'^2}{3} = -\frac{1}{3}$



$Ak = 2 \quad Jk = 2$

$$B^2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

x_1, x_2 - базис $\quad x_3 = C_1$

x_3, x_4 - свобод $\quad x_4 = C_2$

$x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0 \qquad x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 0$

$x_1 + \frac{2}{3}C_1 - 3C_1 - 2C_2 = 0 \qquad x_2 + \frac{2}{3}C_1 = 0$

$x_1 = 3C_1 + 2C_2 - \frac{2}{3}C_1 \qquad x_2 = -\frac{2}{3}C_1$

$C_1 = 0 \quad C_2 = 1$

$C_1 = 1 \quad C_2 = 0$

$$X = \begin{pmatrix} 3C_1 + 2C_2 - \frac{2}{3}C_1 \\ -\frac{2}{3}C_1 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \qquad N_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} Ak = 2 \\ Jk = 2 \end{matrix}$$

$\lambda_2 = -2$

$$B = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} Ak = 2 \\ Jk = 2 \end{matrix} \sim \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

x_3, x_4 - базис $\quad x_1 = C_1 \qquad x_3 + x_4 = 0 \qquad x_4 = 0$

x_1, x_2 - свобод $\quad x_2 = C_2 \qquad x_3 = 0$

$$X = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad N_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 12 & 7 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} Ak = 2 \\ Jk = 2 \end{matrix}$$

$f\,(0, 0, 0, 1)$

$$Bf = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$