Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Л.Ф. Вахлаева, Т.В. Молоденкова

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

Учебное пособие для студентов дневного и заочного отделения
специальности «Прикладная математика и информатика»
механико-математического факультета и факультета
компьютерных наук и информационных технологий

ИЗДАТЕЛЬСТВО САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

2003

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Численное решение дифференциальных уравнений математической физики методом конечных разностей проводится в два этапа:

1) разностная аппроксимация дифференциального уравнения на сетке - написание разностной схемы;
2) решение на ЭВМ разностных уравнений, представляющих собой системы линейных алгебраических уравнений высокого порядка специального вида (плохая обусловленность, ленточная структура матрицы системы).

Применение общих методов линейной алгебры для таких систем далеко не всегда целесообразно как из-за необходимости хранения большого объема информации, так из-за большого объема вычислительной работы, требуемой этими методами. Для решений разностных уравнений давно разрабатываются специальные методы, которые учитывают специфику задачи и позволяют найти решение с затратой меньшего числа действий по сравнению с общими методами линейной алгебры.

В пособии излагаются итерационные методы решения сеточных эллиптических уравнений такие, как метод простой итерации; «треугольные методы» - метод Зейделя, метод верхней релаксации; попеременно- треугольный метод. Для решения многомерных нестационарных уравнений математической физики описываются метод переменных направлений (продольно - поперечная схема), метод суммарной аппроксимации, сводящий многомерную задачу к цепочке одномерных задач, в которых используется алгоритм одномерной прогонки.

I. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

При помощи метода конечных разностей краевые задачи для уравнения Пуассона $\Delta U = -f$ и эллиптических уравнений общего вида сведены к системе линейных алгебраических уравнений. Порядок системы равен числу внутренних узлов сетки и возрастает с уменьшением шага сетки. В случае двух и трех измерений число уравнений может быть очень большим $N \approx 10^4 - 10^6$ (например, при $h = 0.01$). Кроме того, матрица системы имеет много нулевых элементов, специфическую (ленточную) структуру и, наконец, является плохо обусловленной матрицей, т.е. отношение наибольшего собственного значения матрицы к ее наименьшему собственному значению очень велико (~ $10^3 - 10^4$) и является величиной $O(h^2)$.

Эти особенности эллиптических сеточных уравнений требуют разработки специальных экономичных алгоритмов для их численного решения. Прямые экономичные методы применяются, как правило, для решения узкого класса сеточных уравнений. В настоящее время существуют два экономичных прямых метода для решения разностных краевых задач в случае уравнения Пуассона. Один из них - метод декомпозиции является модификацией метода исключений Гаусса. Другой метод - метод разделения переменных основан на использовании алгоритма быстрого преобразования Фурье. Для обоих методов справедлива следующая оценка числа арифметических действий Q, требуемых для нахождения решений в случае двумерной задачи,

$Q = O(N^2 \log_2 N)$, где N - число узлов по одному направлению. Есть еще один прямой метод - метод матричной прогонки. Он пригоден для решения разностных эллиптических уравнений в областях сложной формы. Однако матричная прогонка требует $Q = O(N^4)$ арифметических действий и большую память для хранения промежуточных результатов.

Итерационные методы последовательных приближений применимы для более общих задач в случае произвольной области, уравнения общего вида с переменными коэффициентами.

1.1. Двухслойные итерационные схемы

Постановка задачи. Пусть требуется решить уравнение

$$AU = f \tag{1}$$

где $A: H \to H$ - линейный оператор в конечномерном (размерности N) вещественном пространстве H со скалярным произведением (,) и нормой $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$.

Будем предполагать, что $A = A^* > 0$, $f \in H$ - любой вектор. Итерационный метод позволяет, отправляясь от некоторого начального приближения $y_0 \in H$, последовательно находить приближенные решения уравнения (1): $y_1, y_2, \ldots, y_k, y_{k+1}, \ldots$, называемые итерациями; здесь k- номер итерации. Значение y_{k+1} выражается через известные предыдущие итерации $y_k, y_{k-1}, \ldots$. Если при вычислении y_{k+1} используется только предыдущая итерация y_k, то говорят, что итерационный метод (схема) является одношаговым или двухслойной схемой, а если используются две предыдущие итерации, то метод итераций называют двухшаговым или трехслойной схемой. Одношаговый итерационный метод по форме совпадает с двухслойной схемой.

Любой линейный одношаговый итерационный метод для нахождения приближенного решения уравнения (1) может быть записан в виде

$$B_k y_{k+1} = C_k y_k + F_k, \quad k = 0,1,2, \ldots, \tag{2}$$

где B_k, C_k - линейные операторы из H в H, зависящие, вообще говоря, от номера итерации k, $F_k \in H$ - заданная функция, y_k - k-я итерация, причем существует B_k^{-1}.

Естественно требовать, чтобы не зависящее от k точное решение U уравнения (1) тождественно удовлетворяло уравнению (2).

$$(B_k - C_k)U = F_k.$$

Это возможно только при условии

$$(B_k - C_k)A^{-1} f = F_k.$$

Отсюда следует, что

1) существует обратный оператор $(B_k - C_k)^{-1}$,

2) $f = A(B_k - C_k)^{-1} F_k$.

Всегда можно положить

$$\tau_{k+1}^{-1}(B_k - C_k) = A, \quad F_k = f\tau_{k+1}, \quad k = 0,1,2 \ldots,$$

где $\tau_{k+1} > 0$ - числовой параметр.

В результате получим каноническую форму двухслойной итерационной схемы

$$B_k \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = f, \quad k = 0,1,2, \ldots. \tag{3}$$

При k=0 задается произвольное начальное приближение $y_0 \in H$. Так как существует обратный оператор B_k^{-1}, то из (3) следует

$$y_{k+1} = y_k - \tau_{k+1} B_k^{-1}(Ay_k - f) \tag{4}$$

или $y_{k+1} = y_k - \tau_{k+1} B_k^{-1} R_k = y_k - \tau_{k+1} w_k$,

где $R_k = Ay_k - f$ - невязка, $w_k = B_k^{-1} R_k$ - поправка.

Если итерация y_k известна, то y_{k+1} находится из уравнения (4). Зная y_0, последовательно определим $y_1, y_2, \ldots$. Очевидно, что итерационный метод имеет смысл, если он сходится, т.е.

$$\|y_k - U\| \to 0 \text{ при } k \to \infty. \tag{5}$$

Обычно задают некоторую погрешность $\varepsilon > 0$ (относительную погрешность $\|y_k - U\| / \|y_0 - U\|$), с которой надо найти приближенное решение задачи (1). Вычисления прекращают, если выполнено условие

$$\|y_k - U\| \le \varepsilon \|y_0 - U\|. \tag{6}$$

Это условие неудобно для практической проверки, так как U- неизвестный вектор, и может быть заменено требованием

$$\|Ay_k - f\| \le \varepsilon \|Ay_0 - f\| \tag{7}$$

для невязки $R_k = Ay_k - f = Ay_k - AU$, которая может быть вычислена непосредственно.

В общем случае вместо (6) пишут неравенство

$$\|y_k - U\|_D \le \varepsilon \|y_0 - U\|_D, \tag{8}$$

где $D = D^* > 0$ - некоторый оператор.

Полагая, например, $D = A^2$, получим из (8) неравенство (7). Напишем уравнение для погрешности $z_k = y_k - U$. Так как $AU = f$, то

$$B_k \frac{z_{k+1} - z_k}{\tau_{k+1}} + Az_k = 0, \quad k = 0,1,2,\ldots, \tag{9}$$

задано $z_0 \in H$.

Если $B_k = B$ не зависит от k, то поправка $w_k = B_k^{-1} R_k$ также удовлетворяет однородному уравнению

$$B_k \frac{w_{k+1} - w_k}{\tau_{k+1}} + Aw_k = 0, \quad k = 0,1,2,\ldots. \tag{10}$$

В самом деле, из (4) следует $y_{k+1} - y_k = -\tau_{k+1} B^{-1} R_k = -\tau_{k+1} w_k$.

Действуя на обе части этого равенства оператором A и учитывая, что

$$Ay_{k+1} - Ay_k = (Ay_{k+1} - f) - (Ay_k - f) = R_{k+1} - R_k,$$

$$R_{k+1} - R_k = B(B^{-1} R_{k+1} - B^{-1} R_k) = B(w_{k+1} - w_k),$$

получаем уравнение (10).

Из (9) видно, что $z_{k+1} - z_k = -\tau_{k+1} B_k^{-1} A z_k$, т.е.

$$z_{k+1} = S_{k+1} z_k, \; S_{k+1} = E - \tau_{k+1} B_k^{-1} A, \tag{11}$$

где S_{k+1} - оператор перехода со слоя *k* на слой *k*+1.

Исключая $z_k, z_{k-1}, \ldots, z_1$ имеем при $k = n-1$

$$z_n = T_n z_0, \quad T_n = S_n S_{n-1} \ldots S_2 S_1, \tag{12}$$

где T_n - разрешающий оператор схемы (9). Из (12) находим

$$\begin{gathered} \|z_n\|_D = \|T_n z_0\|_D \le \|T_n\|_D \|z_0\|_D \\ \text{или } \|z_n\|_D \le q_n \|z_0\|_D, \quad q_n = \|T_n\|_D. \end{gathered} \tag{13}$$

Условие окончания итераций выполнено, если $q_n \le \varepsilon$. Таким образом, для выяснения вопроса о сходимости итераций надо оценить норму разрешающего оператора T_k.

Схема (11) имеет точную аппроксимацию на решении *U* уравнении $AU = f$ при любых операторах $\{B_k\}$ и любых параметрах $\{\tau_{k+1}\}$. Однако величина q_n зависит от $\{B_k\}$ и $\{\tau_{k+1}\}$. Поэтому B_k и τ_{k+1} следует выбирать так, чтобы минимизировать норму $\|T_n\|_D = q_n$ разрешающего оператора T_n схемы (11). Кроме того, при выборе B_k естественно стремиться к минимуму арифметических действий, нужных для определения y_{k+1} при заданном y_k из уравнения

$$B_k y_{k+1} = F_k, \quad F_k = B_k y_k - \tau_{k+1}(A y_k - f).$$

В этом и состоит основная задача теории итерационных методов.

Из предыдущего ясно, что любой итерационный процесс (3) можно формально трактовать как двухслойную схему для решения нестационарной задачи

$$B \frac{dU}{dt} + AU = f,$$

причем параметр τ_{k+1} можно рассматривать как шаг по фиктивному времени $t_{k+1} = \sum_{m=1}^{k+1} \tau_m$.

Различие между итерационными схемами и схемами для нестационарных задач состоит в следующем:

а) итерационная схема (3) точно аппроксимирует уравнение (1), так как решение *U* уравнения (1) при любых B_k и τ_{k+1} удовлетворяет уравнению (3),

б) выбор параметра τ_{k+1} и операторов B_k следует подчинить лишь требованиям сходимости итераций и минимума арифметических действий (экономичности) для получения решения исходной задачи с заданной точностью (в случае нестационарных задач выбор шага подчинен прежде всего требованиям аппроксимации).

Пусть $Q(\varepsilon)$ - общее число арифметических действий, которые надо выполнить, чтобы получить при помощи метода (3) решение уравнения (1) с заданной точностью $\varepsilon > 0$ при любом выборе начального приближения. Схему надо выбрать так, чтобы $Q(\varepsilon)$ было минимальным. Если $n = n(\varepsilon)$- минимальное число итераций, при котором достигается точность ε, то $Q(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n(\varepsilon)} Q_k = \bar{Q}_n n,$ где Q_k - число действий для нахождения k-й итерации. Задача о минимуме $Q(\varepsilon)$ сводится к задаче о минимуме числа итераций $n(\varepsilon)$ и числа Q_k, которое зависит от B_k.

Если $B_k = E$ - единичный оператор, то (3) называется явной итерационной схемой

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = f, \quad k = 0,1,2,\ldots, \tag{14}$$

задано любое $y_0 \in H$.

Если $B_k \neq E$, то схема (3) неявная.

1.2. Явная схема с оптимальным чебышевским набором параметров

Рассмотрим явную схему (14) с параметрами $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n,$ которые выберем так, чтобы число итераций $n = n(\varepsilon)$ было минимальным.

При этом предполагается, что A - самосопряженный положительный оператор, и известны границы его спектра, т.е. наименьшее ($\gamma_1 > 0$) и наибольшее (γ_2) собственные значения:

$$A = A^* > 0, \quad \gamma_1 E \le A \le \gamma_2 E, \ \gamma_1 > 0. \tag{15}$$

Последнее условие означает, что $\gamma_1 \|x\|^2 \le (Ax, x) \le \gamma_2 \|x\|^2$ для любого $x \in H$. Если параметр $\tau = const$ не зависит от k ($\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_n = \tau$), то (14) называют схемой простой итерации

$$y_{k+1} = y_k - \tau(Ay_k - f). \tag{16}$$

Для невязки $R_k = Ay_k - f$ выполняется однородное уравнение

$$\frac{R_{k+1} - R_k}{\tau_{k+1}} + AR_k = 0, \ k = 0,1,2,\ldots, \ R_0 = Ay_0 - f \in H \tag{17}$$

или $R_{k+1} = S_{k+1}R_k$, $S_{k+1} = E - \tau_{k+1}A.$ Отсюда выразим R_n через R_0:

$$R_n = T_n R_0, \ T_n = S_1 S_2 \ldots S_n, \tag{18}$$

(19)

где T_n - разрешающий оператор, являющийся полиномом n - й степени относительно оператора A:

$$T_n = P_n(A) = (E - \tau_1 A)(E - \tau_2 A)\ldots(E - \tau_n A),$$

так что $R_n = P_n(A)R_0$.

Для R_n получаем оценку

$$\|R_n\| \le \|P_n(A)\|\|R_0\| = q_n\|R_0\|. \tag{20}$$

Наша задача состоит в оценке $\|P_n(A)\|$ через γ_1 и γ_2, в отыскании таких параметров $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$, при которых достигается минимум величины $q_n = \|P_n(A)\|$.

Операторный полином $P_n(A) = \prod\limits_{m=1}^{n}(E - \tau_m A) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_k A^k,\ C_0 = 1,\ P_n(0) = 1$ является самосопряженным оператором, так как любая степень оператора A есть самосопряженный оператор $A^m = \left(A^m\right)^*$.

Пусть $\{\lambda_s, \xi_s\}$ - собственные значения и ортонормированные собственные функции оператора A:

$$A\xi_s = \lambda_s \xi_s,\ s = 1, 2, \ldots, N,\ 0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_N,$$

где N - размерность H, причем $\lambda_1 = \min\limits_s \lambda_s = \gamma_1,\ \lambda_N = \max\limits_s \lambda_s = \gamma_2$.

Учитывая, что $A^k \xi_s = \lambda_s A^{k-1}\xi_s = \lambda_s^k \xi_s$, т.е. λ_s^k есть собственное значение оператора A^k, получаем $P_n(A)\xi_s = \sum\limits_{k=0}^{n} C_k A^k \xi_s = \left(\sum\limits_{k=0}^{n} C_k \lambda_s^k\right)\xi_s = P_n(\lambda_s)\xi_s$, или $\lambda\big(P_n(A)\big) = P_n\big(\lambda(A)\big)$.

Таким образом, собственные значения операторного полинома $P_n(A)$ равны полиному $P_n(\lambda)$ от собственных значений $\lambda = \lambda(A)$ оператора A. Так как $\big(P_n(A)\big)^* = P_n(A)$, то

$$\|P_n(A)\| \le \max_{\gamma_1 \le x \le \gamma_2} \|P_n(x)\|. \tag{21}$$

Наша задача - отыскание $\min\limits_{\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_n} \|P_n(A)\|$ сводится к задаче о минимаксе полинома $P_n(x)$.

Проведем замену переменных, полагая

$$x = 0.5\left[(\gamma_2 - \gamma_1)t + \gamma_2 + \gamma_1\right]. \tag{22}$$

При этом отрезок $[\gamma_1, \gamma_2]$ отображается на отрезок [-1, 1] и, следовательно, $P_n(x) = \bar{P}_n(t),\ t \in [-1, 1]$, причем $P_n(0) = 1$.

Надо найти полином, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке [-1, 1], для которого $\max\limits_{-1\le t\le 1}\left|\mathcal{P}_n(t)\right|$ минимален при дополнительном условии нормировки $\mathcal{P}_n(t_0)=1,$ где t_0 соответствует $x=0.$ Из (22) при x=0 находим

$$t_0=-\frac{\gamma_2+\gamma_1}{\gamma_2-\gamma_1}. \tag{23}$$

Таким полиномом является полином Чебышева $\mathcal{P}_n(t)=\dfrac{T_n(t)}{T_n(t_0)},$

где $T_n(t)=\cos(n\arccos t)$ при $|t|\le 1.$ (24)

При $|t|>1$ полином $T_n(t)$ определяется по формуле

$$T_n(t)=0.5\left[\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)^n+\left(t-\sqrt{t^2-1}\right)^n\right],\ |t|>1. \tag{25}$$

Так как $\max\limits_{|t|\le 1}\left|T_n(t)\right|=1$, то

$$\min_{\{\tau_k\}}\max_{\gamma_1\le x\le\gamma_2}\left|P_n(x)\right|=\min_{\{\tau_k\}}\max_{-1\le t\le 1}\left|\mathcal{P}_n(t)\right|=\frac{1}{\left|T_n(t_0)\right|}=q_n. \tag{26}$$

Чтобы найти $\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n,$ потребуем совпадения нулей полинома $\mathcal{P}_n(t)$ с нулями полинома Чебышева, которые известны

$$t_k=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi,\ k=1,2,\ldots,n. \tag{27}$$

Полином $P_n(x)=(1-\tau_1x)(1-\tau_2x)\ldots(1-\tau_nx)$ имеет нули при $x_k=1/\tau_k,\ k=1,2,\ldots n$. Учитывая связь (22) между x и t, получаем

$$2=\left[(\gamma_1+\gamma_2)+(\gamma_2-\gamma_1)t_k\right]\tau_k,$$

откуда следует $\tau_k=2/\left((\gamma_2+\gamma_1)+(\gamma_2-\gamma_1)t_k\right),\ k=1,2,\ldots n.$

В дальнейшем будем пользоваться обозначениями

$$\xi=\frac{\gamma_1}{\gamma_2},\ \rho_0=\frac{1-\xi}{1+\xi},\ \rho_1=\frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}},\ \tau_0=\frac{2}{\gamma_1+\gamma_2}\ . \tag{28}$$

Параметр τ_k запишем в виде

$$\tau_k=\frac{\tau_0}{1+\rho_0t_k},\ k=1,2,\ldots,n. \tag{29}$$

Итак, параметры $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ определены. Найдем выражение для $q_n = 1/|T_n(t_0)|$, $t_0 = -1/\rho_0$. Так как $|t_0| > 1$, то, используя для $T_n(t_0)$ формулу (25), получим $|T_n(t_0)| = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{\rho_0} + \sqrt{\frac{1}{\rho_0^2} - 1}\right)^n + \left(\frac{1}{\rho_0} - \sqrt{\frac{1}{\rho_0^2} - 1}\right)^n\right]$.

Преобразуем выражение в скобках

$$\frac{1}{\rho_0} + \sqrt{\frac{1}{\rho_0^2} - 1} = \frac{1 + \sqrt{1 - \rho_0^2}}{\rho_0} = \frac{1}{\rho_0}\left[1 + \sqrt{\frac{4\xi}{(1+\xi)^2}}\right] = \frac{1 + \xi + 2\sqrt{\xi}}{1 - \xi} = \frac{1 + \sqrt{\xi}}{1 - \sqrt{\xi}} = \frac{1}{\rho_1},$$

$$\frac{1}{\rho_0} - \sqrt{\frac{1}{\rho_0^2} - 1} = \frac{1 + \xi - 2\sqrt{\xi}}{1 - \xi} = \frac{1 - \sqrt{\xi}}{1 + \sqrt{\xi}} = \rho_1,$$

и, следовательно,

$$q_n = \frac{2\rho_1^n}{1 + \rho_1^{2n}}. \qquad (30)$$

Таким образом, для явной схемы (14) с оптимальным набором параметров $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$, определяемых по формуле (29), имеет место оценка

$$\|Ay_n - f\| \le q_n \|Ay_0 - f\|, \qquad (31)$$

где q_n определяется по формуле (30).

Определим $n = n(\varepsilon)$ так, чтобы $q_n = \frac{2\rho_1^n}{1 + \rho_1^{2n}} \le \varepsilon$. Для этого достаточно, чтобы $\rho_1^n \le \frac{\varepsilon}{2}$ или

$$n \ge \frac{\ln(2/\varepsilon)}{\ln(1/\rho_1)}. \qquad (32)$$

Из разложения функции $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{(1+\bar{x})^3} + \frac{1}{(1-\bar{x})^3}\right)$, $0 < x < 1$, где $0 < \bar{x} < x$, видно, что $\ln\frac{1+x}{1-x} \ge 2x$, $\ln\frac{1}{p_1} = \ln\frac{1+\sqrt{\xi}}{1-\sqrt{\xi}} > 2\sqrt{\xi}$, и, следовательно, неравенство (32) выполнено при

$$n \ge n_0(\varepsilon), \; n_0(\varepsilon) = \frac{\ln(2/\varepsilon)}{2\sqrt{\xi}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}}\ln\frac{2}{\varepsilon}. \qquad (33)$$

Эта оценка для числа итераций более удобна, чем (32).

1.3. Схема простой итерации

Формально полагая в (29) n=1, мы получаем метод простой итерации

$$\frac{y_{k+1}-y_k}{\tau_0}+Ay_k=f, \tag{34}$$

с параметром

$$\tau_0=\frac{2}{\gamma_1+\gamma_2}, \tag{34'}$$

т.к. $t_1=\cos\frac{\pi}{2}=0,\ \tau_1=\tau_0.$ При этом

$$q_1=\frac{2\rho_1^n}{1+\rho_1^2}=\rho_0. \tag{35}$$

Для невязки $R_k=Ay_k-f$ имеем уравнение

$$y_{k+1}=Sy_k,\ \ S=E-\tau_0 A.$$

Так как $T_1=S$, то из (20) и (35) следует оценка для нормы оператора перехода $\|S\|=\rho_0=\dfrac{1-\xi}{1+\xi}.$

Вычисляя n итераций по методу простой итерации, мы найдем

$$R_n=S^n R_0,\ \ \|R_n\|\le\rho_0^n\|R_0\|.$$

Условие $\rho_0^n\le\varepsilon$ выполнено, если $n\ge\ln(1/\varepsilon)/\ln(1/\rho_0)$, что имеет место при

$$n\ge n_0(\varepsilon),\ \ n_0(\varepsilon)=\ln(1/\varepsilon)/2\xi. \tag{36}$$

1.4. Модельная задача

Для сравнения различных итерационных методов используем разностную задачу Дирихле для уравнения Пуассона в квадрате $\{0\le x_1\le 1,\ 0\le x_2\le 1\}$ с $l_1=l_2=1$, предполагая, что сетка ω_h- квадратная, т.е. $h_1=h_2=h$. Сеточные уравнения имеют вид

$$\Lambda y=\Lambda_1 y+\Lambda_2 y=-f(x),\ x\in\omega_h,\ y|_{\gamma_h}=0, \tag{37}$$

где $\Lambda_\alpha y=y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}=\dfrac{y^{(+1\alpha)}-2y+y^{(-1\alpha)}}{h^2},\ \alpha=1,2.$

Систему уравнений (37) можно записать в операторном виде $Ay=f$, где $Ay=-\Lambda y$ в пространстве $H=\overset{o}{\Omega}$ сеточных функций, заданных на $\bar{\omega}_h$ и обращающихся в нуль на границе γ_h сетки. В H вводится скалярное произведение $(y,v)=\sum\limits_{x\in\omega_h}y(x)v(x)h^2$ и норма $\|y\|=\sqrt{(y,y)}$. Оператор A подробно изучен. Он является самосопряженным, положительным и имеет собственные значения

$$\lambda_{k_1k_2} = \frac{4}{h^2}\left(\sin^2\frac{\pi k_1 h}{2} + \sin^2\frac{\pi k_2 h}{2}\right),\ k_\alpha = 1,2,\ldots,N-1,\ \alpha = 1,2,\ \text{так что}$$

$$\gamma_1 = \min\lambda_{k_1k_2} = \frac{8}{h^2}\sin^2\frac{\pi h}{2},\ \ \gamma_2 = \max\lambda_{k_1k_2} = \frac{8}{h^2}\cos^2\frac{\pi h}{2}. \qquad (38)$$

Задачу (37) мы в дальнейшем будем называть модельной и использовать в качестве эталона при сравнении методов. Сравним по числу итераций метод простой итерации (34), (34') и метод с чебышевским набором параметров (14), (29).

Для задачи (37) схема простой итерации записывается так (здесь и в дальнейшем при рассмотрении итерационных процессов для конкретных разностных уравнений, номер итерации k будем писать сверху):

$$y^{k+1} = y^k + \tau_0(\Lambda y^k + f), \qquad (39)$$

где $\tau_0 = \dfrac{2}{\gamma_1+\gamma_2} = \dfrac{h^2}{4}$.

Подставляя в (39) значение τ_0, получаем формулу

$$y_{i_1i_2}^{k+1} = \frac{y_{i_1-1,i_2}^k + y_{i_1+1,i_2}^k + y_{i_1,i_2-1}^k + y_{i_1,i_2+1}^k}{4} + \frac{h^2}{4}f_{i_1i_2}, \qquad (40)$$

по которой находится $(k+1)$ -я итерация.

Для явной схемы (14) с чебышевским набором параметров вычисления ведутся по формуле

$$y_{i_1i_2}^{k+1} = y_{i_1i_2}^k + \frac{\tau_{k+1}}{h^2}\left(y_{i_1-1,i_2}^k + y_{i_1+1,i_2}^k + y_{i_1,i_2-1}^k + y_{i_1,i_2+1}^k - 4y_{i_1i_2}^k\right) + \tau_{k+1}f_{i_1i_2},$$

где $\tau_{k+1} = \dfrac{\tau_0}{1+\rho_0 t_k} = \dfrac{h^2}{4}\cdot\dfrac{1}{1+\rho_0 t_k}$.

По количеству действий для нахождения y^{k+1} оба метода отличаются мало. Поэтому их сравнивать надо по числу итераций. Пользуясь формулами (39), найдем $\xi = \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2} = tg^2\dfrac{\pi h}{2} \approx \dfrac{\pi^2h^2}{4}$ при $h \ll 1$. Задавая затем точность, например, $\varepsilon = 2e^{-10} \approx 10^{-4}$, получаем $n_0(\varepsilon) \approx \dfrac{3.2}{h}$ для схемы с чебышевским набором параметров (ЧНП), $n_0(\varepsilon) \approx \dfrac{2}{h^2}$ для схемы простой итерации (СПИ).

Составим таблицу для числа итераций:

h	СПИ	ЧНП
0.1	200	32
0.02	5000	160
0.01	20000	320

Отсюда видно, что метод простой итерации требует значительно больше итераций, чем метод с ЧНП. Следует иметь в виду, что оценки для числа итераций получены для любого начального приближения (любого элемента y_0), т.е. худшей сходимости быть не может; число итераций может лишь уменьшиться, если хорошо выбрать начальное приближение.

1.5. Неявные итерационные методы.

Если в канонической форме двухслойной итерационной схемы (3) $B_k \neq E$, то схема называется неявной.

Ранее мы исследовали сходимость явной итерационной схемы

$$\frac{y_{k+1}-y_k}{\tau_0}+Ay_k=f, \quad k=0,1,2,\ldots$$

задано любое $y_0 \in H$, где y_{k+1} непосредственно вычислялось по формуле $y_{k+1}=y_k-\tau_0(Ay_k-f)$.

При использовании неявного метода для определения новой итерации y_{k+1} надо решить уравнение

$$By_{k+1}=F_k, \quad F_k=By_k-\tau_{k+1}(Ay_k-f)$$

с известной правой частью F_k. Неявные схемы более устойчивы по сравнению с явными. Простейшей неявной итерационной схемой является метод Зейделя. В случае метода Зейделя B - треугольная матрица, поэтому определение y_{k+1} требует минимального числа действий, а для модельной задачи - число действий, затрачиваемых для определения y_{k+1}, пропорционально числу узлов сетки.

Требования, которыми надо руководствоваться при выборе оператора B: минимум числа итераций, экономичность оператора B. Для разностных эллиптических уравнений второго порядка - это значит, что решение уравнения $By_{k+1}=F_k$ при заданной правой части должно быть найдено с затратой числа действий, пропорционального числу узлов сетки.

Оптимальный выбор параметров $\{\tau_k\}$ для явных схем может быть перенесен на неявные схемы с $B \neq E$:

$$B\frac{y_{k+1}-y_k}{\tau_{k+1}}+Ay_k=f, \quad k=0,1,2,\ldots,n-1, \tag{41}$$

$y_0 \in H$ задано.

Будем предполагать, что

$$B = B^* > 0,\ \ A = A^* > 0,\ \ \gamma_1 B \le A \le \gamma_2 B,\ \gamma_1 > 0. \tag{42}$$

Эти условия определяют исходное семейство итерационных методов (6).

Для невязки $R_k = Ay_k - f$ имеем однородное уравнение

$$B\frac{R_{k+1} - R_k}{\tau_{k+1}} + AR_k = 0, \quad k = 0,1,2,\ldots,n-1, \tag{43}$$

$R_0 = Ay_0 - f \in H$ задано.

Эта схема эквивалентна явной схеме

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\tau_{k+1}} + Cx_k = 0, \quad k = 0,1,2,\ldots,n-1, \tag{44}$$

$x_0 \in H$ задано, где $x_k = B^{1/2}R_k$, $C = B^{-1/2}AB^{-1/2}$.

В самом деле, т.к. *B* самосопряженный положительный оператор, то существует оператор $B^{1/2}$- корень из оператора *B*, причем $\left(B^{1/2}\right)^* = B^{1/2} > 0$. Действуя на уравнение (43) оператором $B^{-1/2}$ и заменяя $R_k = B^{-1/2}x_k$, получаем (44). Обратный ход рассуждений очевиден.

Лемма1. Пусть даны операторы $B = B^* > 0,\ \ A = A^* > 0,$ $C = B^{-1/2}AB^{-1/2}$. Тогда операторные неравенства

$$\gamma_1 B \le A \le \gamma_2 B, \quad \gamma_1 > 0, \ \ \gamma_1 E \le C \le \gamma_2 E \tag{45}$$

эквивалентны.

Доказательство: Рассмотрим функционал

$$I = ((A - \gamma B)y,\ y) = (Ay,\ y) - \gamma(By,\ y) = (AB^{-1/2}(B^{1/2}y),\ B^{-1/2}(B^{1/2}y)) -$$

$$-\gamma(B^{1/2}y,\ B^{1/2}y) = (Cx,\ x) - \gamma(x,x) = ((C - \gamma E)x,x), \ \text{ где } x = B^{1/2}y.$$

Так как y (и, следовательно x) - произвольный вектор из *H*, то из равенства

$$I = ((A - \gamma B)y,\ y) = ((C - \gamma E)x,x) \tag{46}$$

следует, что операторы $A - \gamma B$ и $C - \gamma E$ имеют одинаковые знаки.

Пусть например $A - \gamma_1 B \ge 0$. Полагая в (46) $\gamma = \gamma_1$ получаем $I = ((C - \gamma E)x,x) \ge 0,$ т.е. $C \ge \gamma_1 E$ и т. д.. Лемма доказана.

Итог этих рассуждений таков: применение неявной схемы (41) для решения уравнения $AU = f$ эквивалентно решению уравнения $Cw = \varphi$ по явной схеме:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\tau_{k+1}} + Cx_k = \varphi, \quad k = 0,1,2,\ldots,n, \tag{47}$$

задано любое $x_0 \in H$, если $\varphi = B^{-1/2}f$, $C = B^{-1/2}AB^{-1/2}$.

Поэтому мы можем перенести на случай неявной схемы все результаты полученные для явной схемы. Справедлива

Теорема 1. Пусть выполнены условия $B = B^* > 0,\ A = A^* > 0,$ $\gamma_1 B \le A \le \gamma_2 B,\ \gamma_1 > 0$. Тогда существует оптимальный набор параметров $\{\tau_k\}$, определяемых по формулам (27) - (29) для явной схемы, а именно,

$$t_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi,\ \ k = 1,2,\ldots,n,$$

$$\xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2},\ \rho_0 = \frac{1-\xi}{1+\xi},\ \rho_1 = \frac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}},\ \tau_0 = \frac{2}{\gamma_1+\gamma_2}$$

$$\tau_k = \frac{\tau_0}{1+\rho_0 t_k},\ k = 1,2,\ldots,n,$$

для решения задачи (41), причем справедлива оценка

$$\|Ay_n - f\|_{B^{-1}} \le q_n \|Ay_0 - f\|_{B^{-1}}, \tag{48}$$

где $\xi = \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2},\ \rho_1 = \dfrac{1-\sqrt{\xi}}{1+\sqrt{\xi}},\ q_n = \dfrac{2\rho_1^n}{1+\rho_1^{2n}}.$ (49)

Теорема 1 была доказана ранее для явной схемы, где $B = E$. Сведем (41) к явной схеме (47). Поскольку для этой схемы справедливы, в силу леммы 1, операторные неравенства $\gamma_1 E \le C \le \gamma_2 E$, то из оценки для явной схемы:($\|Ay_n - f\| \le q_n \|Ay_0 - f\|$) следует

$$\|Cx_n - \varphi\| \le q_n \|Cx_0 - \varphi\|. \tag{50}$$

Вспомним, что $\varphi = B^{-1/2} f,\ B^{-1/2}x_n = y_n,\ C = B^{-1/2}AB^{-1/2}$, и проведем преобразование

$$\|Cx_n - \varphi\|^2 = (Cx_n - \varphi, Cx_n - \varphi) = (B^{-1/2}(AB^{-1/2}x_n - f),\ B^{-1/2}(AB^{-1/2}x_n - f)) =$$
$$= (B^{-1}(Ay_n - f),\ Ay_n - f) = \|Ay_n - f\|^2_{B^{-1}}$$

Подставляя $\|Ay_n - f\|_{B^{-1}}$ в (50) вместо $\|Cx_n - \varphi\|$ получаем неравенство (48). Теорема 1 доказана.

1.6. Метод Зейделя

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$AU = f,\ \text{ или } \sum_{j=1}^{N} a_{ij}u_j = f_i,\quad i = 1,2,\ldots,N.$$

Предполагая, что диагональные элементы матрицы $A = (a_{ij})$ отличны от нуля, $a_{ii} \ne 0$, напишем следующий итерационный метод (метод Зейделя):

$$\sum_{j=1}^{i} a_{ij} y_j^{k+1} + \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij} y_j^{k} = f_i, \quad a_{ii} \neq 0, \tag{51}$$

где y_j^k - итерация номера *k*. Определение (*k*+1)-й итерации начинаем с *i*=1:

$$a_{11} y_1^{k+1} + \sum_{j=2}^{N} a_{1j} y_j^{k} = f_1, \quad a_{11} \neq 0$$

Отсюда найдем y_1^{k+1}. Для *i*=2 имеем

$$a_{21} y_1^{k+1} + a_{22} y_2^{k+1} + \sum_{j=3}^{N} a_{2j} y_j^{k} = f_2, \quad a_{22} \neq 0$$

Так как значение y_1^{k+1} уже известно и $a_{22} \neq 0$, то находим y_2^{k+1} и т. д. Представим матрицу *A* в виде суммы

$$A = A^- + A^+ + D, \tag{52}$$

где $A^- = (a_{ij}^-),\ a_{ij}^- = a_{ij}$ при $j < i,\ a_{ij}^- = 0$ при $j \geq i$ - нижняя треугольная матрица с нулями на главной диагонали, $A^+ = (a_{ij}^+),\ a_{ij}^+ = a_{ij}$ при $j > i,$ $a_{ij}^+ = 0$ при $j \leq i$ - верхняя треугольная матрица с нулями на главной диагонали, $D = (a_{ii}\delta_{ij}),\ \delta_{ij} = 1$ при $j = i,\ \delta_{ij} = 0$ при $j \neq i$ - диагональная матрица.

Пользуясь этими обозначениями запишем метод Зейделя в виде

$$(A^- + D) y^{k+1} + A^+ y^k = f, \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_N). \tag{53}$$

Приведем эту двухслойную схему к каноническому виду

$$(A^- + D)(y^{k+1} - y^k) + (A^- + D + A^+) y^k = f$$

$$\text{или } (A^- + D)(y^{k+1} - y^k) + A\ y^k = f. \tag{54}$$

Сравнив ее с канонической формой

$$B \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + A y_k = f, \quad k = 0,1,2,\ldots,n-1 \tag{55}$$

задано любое $y_0 \in H$, находим $B = A^- + D,\ \tau_k = 1.$

Схема неявная, матрица *B*- треугольная и, следовательно, несимметричная (оператор $B \neq B^*$- несамосопряженный).

Для модельной задачи $\Lambda y = -\varphi,\ x \in \omega_h,\ y|_{\gamma_n} = 0$ метод Зейделя имеет вид

$$y_{i_1-1}^{k+1} + y_{i_2-1}^{k+1} - 4y^{k+1} + y_{i_1+1}^{k} + y_{i_2+1}^{k} = -h^2\varphi,$$

$$\text{так что } y^{k+1} = \left(y_{i_1-1}^{k+1} + y_{i_2-1}^{k+1} + y_{i_1+1}^{k} + y_{i_2+1}^{k} + h^2\varphi \right) \Big/ 4. \tag{56}$$

Вычисления начинаются с узла $i_1 = 1, i_2 = 1$. Так как узлы (0, 1) и (1, 0) лежат на границе, то значения $y_{i_1-1}^{k+1}$ и $y_{i_2-1}^{k+1}$ известны вся правая часть в (56) известна. Значение y^{k+1} найдено в узле $i_1 = 1, i_2 = 1$. Полагая затем $i_2 = 2,3,\ldots$ при $i_1 = 1$, находим y^{k+1} на нижней строке, после чего переходим к строкам $i_1 = 2,3,\ldots$. В результате y^{k+1} определяется во всех узлах сетки.

Известно, что метод Зейделя сходится, если оператор $A = A^* > 0$ - самосопряжен и положителен (и, следовательно, положительно определен, так как $A \geq \gamma_1 E,\ \gamma_1 = \min \lambda_k(A) > 0$). Итерации сходятся, хотя и быстрее метода простой итерации, но с тем же асимптотическим порядком в случае модельной задачи

$$n_0(\varepsilon) = O\left(\frac{1}{h^2}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Чтобы оценить скорость сходимости метода Зейделя используют различного рода предположения. Например, если

$$\sum_{j \neq i} \left|a_{ij}\right| \leq q\left|a_{ii}\right|,\ i = 1,2,\ldots,N, \tag{57}$$

то при q<1 метод Зейделя сходится со скоростью геометрической прогрессии. В самом деле, из формулы

$$a_{ii}z_i^{k+1} = -\sum_{j<i} a_{ij}z_j^{k+1} - \sum_{j>i} a_{ij}z_j^k$$

для погрешности $z^{k+1} = y^{k+1} - U$ следует

$$\left|a_{ii}\right|\left|z_i^{k+1}\right| \leq \sum_{j<i}\left|a_{ij}\right|\left|z_j^{k+1}\right| + \sum_{j>i}\left|a_{ij}\right|\left\|z^k\right\|_c$$

где $\left\|z\right\|_c = \max\limits_{1 \leq i \leq N}\left|z_i\right|$.

Пусть $\max\left|z_i\right|$ достигается при некотором $i = i_0$, так что $\left\|z^{k+1}\right\|_c = \left|z_{i_0}^{k+1}\right|$ и

$$\left\|z^{k+1}\right\|_c \leq \left[\sum_{j>i_0}\left|a_{i_0 j}\right| \Big/ \left(\left|a_{i_0 i_0}\right| - \sum_{j<l_0}\left|a_{i_0 j}\right|\right)\right]\left\|z^k\right\|_c.$$

В силу условия (57) $\sum\limits_{j>i_0}\left|a_{i_0 j}\right| \leq q\left|a_{i_0 i_0}\right| - \sum\limits_{j<i_0}\left|a_{i_0 j}\right| < q\left(\left|a_{i_0 i_0}\right| - \sum\limits_{j<i_0}\left|a_{i_0 j}\right|\right)$ и, следовательно, $\left\|z^{k+1}\right\|_c \leq q\left\|z^k\right\|_c \leq q^{k+1}\left\|z^0\right\|_c$, что и требовалось доказать.

Условие (57) означает, что (a_{ij}) является матрицей с диагональным преобладанием. Это условие не выполняется, например, для разностного оператора Лапласа, однако сходимость метода Зейделя в этом случае следует из самосопряженности и положительности оператора *A*.

1.7. Метод верхней релаксации

Чтобы ускорить итерационный процесс, видоизменяют метод Зейделя, вводя в (54) итерационный параметр ω так, что

$$(A^- + \frac{1}{\omega}D)(y^{k+1} - y^k) + A\ y^k = f. \quad (58)$$

Этот метод называют методом релаксации. Методу Зейделя соответствует значение ω=1. Если параметр ω>1, то итерационный процесс (58) называют методом верхней релаксации.

Сравнивая (58) с (55) видим, что

$$B = A^- + \frac{1}{\omega}D,\ \tau_k = 1 \ \text{или}\ \ B = \omega A^- + D,\ \ \tau_k = \omega.$$

Оператор *B* - несамосопряженный. Алгоритм вычисления y^{k+1} также сводится к обращению нижней треугольной матрицы.

Если метод Зейделя применим всегда для $A = A^* > 0$, то для сходимости метода релаксации нужно дополнительно потребовать, чтобы 0<ω<2.

Скорость сходимости зависит от параметра ω. Существуют теоретические оценки для ω и скорости сходимости, однако их применение требует знания спектра оператора $D^{-1}(A^- + A^+)$, который не всегда легко найти. Поэтому на практике параметр ω подбирают так, чтобы минимизировать число итераций. Это особенно удобно, если решается класс однотипных задач. Для модельной задачи можно показать, что метод верхней релаксации оказывается весьма эффективным и сравним по числу итераций с явным чебышевским методом, так что

$$n \ge n_0(\varepsilon),\ \ n_0(\varepsilon) = O\left(\frac{1}{h^2}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Для сравнения методов Зейделя, верхней релаксации и метода простой итерации приведем точное значение числа итераций *n* для модельной задачи в зависимости от числа узлов *N* по одному направлению для $\varepsilon = 10^{-4}$:

N	метод Зейделя	верхняя релаксация	простая итерация
32	170	47	1909
64	275	94	7642

128	518	187	30577

Из таблицы видно, что метод верхней релаксации сходится в три раза быстрее метода Зейделя, а по сравнению с методом простой итерации в 40 -160 раз быстрее. Очень сильная зависимость числа итераций от числа узлов сетки N в методе простой итерации является причиной того, что в настоящее время этот метод почти не используется для решения сеточных эллиптических уравнений.

1.8. Попеременно-треугольный метод

Перейдем теперь к вопросу о выборе оператора B. Если оператор B есть произведение конечного числа экономичных операторов, то он также экономичен. Так, например, экономичным является оператор $B = B_1 B_2$, равный произведению «треугольных», т.е. имеющих треугольные матрицы, операторов B_1 и B_2.

Рассмотрим оператор $R = R^* > 0$ и представим его в виде суммы треугольных операторов R_1 и R_2:

$$R_1 + R_2 = R, \quad R = R^* > 0, \quad R_1^* = R_2. \qquad (59)$$

Оператору R соответствует матрица $\Re = (r_{ij})$; она симметрична, т.е. $r_{ij} = r_{ji}$. Соответствующие операторам R_1 и R_2 матрицы $\Re_1$ и $\Re_2$, очевидно, равны следующим:

$$\Re_1 = (r_{ij}^-), \quad r_{ij}^- = \begin{cases} r_{ij}, & \text{при}\, j < i, \\ 0, & \text{при}\, j > i, \end{cases}$$

$$\Re_2 = (r_{ij}^+), \quad r_{ij}^+ = \begin{cases} 0, & \text{при}\, j < i, \\ r_{ij}, & \text{при}\, j > i, \end{cases}$$

$$r_{ii}^- = r_{ii}^+ = 0.5 r_{ii}.$$

Отсюда и из условия $r_{ij} = r_{ji}$ видно, что $\Re_1^* = \Re_2$.

Оператор B схемы (41) представим в виде произведения треугольных операторов

$$B = \left(E + \omega R_1\right)\left(E + \omega R_2\right), \qquad (60)$$

где $\omega > 0$ - параметр. Покажем, что B - самосопряженный и положительный оператор $B = B^* > 0$, т.е. схема (41) с оператором (60) принадлежит исходному семейству схем (42), т.е. $B = B^* > 0,\ A = A^* > 0,$ $\gamma_1 B \le A \le \gamma_2 B,\ \gamma_1 > 0.$

В самом деле, операторы $B_1 = E + \omega R_1$ и $B_2 = E + \omega R_2$ являются сопряженными и положительными $B_1^* = \left(E + \omega R_1\right)^* = E + \omega R_2 = B_2$ $B_1 > E,\ B_2 > E$ при $\omega > 0$ т.к. $R_1 > 0,\ R_2 > 0$:

$$\left(Ry, y\right) = \left(R_1 y, y\right) + \left(R_2 y, y\right) = 2\left(R_1 y, y\right) = 2\left(R_2 y, y\right) > 0.$$

Поэтому $\left(By, w\right) = \left(B_1 B_2 y, w\right) = \left(y, B_2^* B_1^* w\right) = \left(y, B_1 B_2 w\right)$, т.е. $B = B^*$; далее имеем $\left(By, y\right) = \left(B_1 B_2 y, y\right) = \left(B_2 y,\ B_2 y\right) = \left\|B_2 y\right\|^2 > 0.$

Из уравнения

$$\left(E + \omega R_1\right)\left(E + \omega R_2\right)\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + A y_k = f,\ k = 0,1,2,\ldots,n, \tag{61}$$

видно, что для определения y_{k+1} надо решить уравнение $\left(E + \omega R_1\right)\left(E + \omega R_2\right) y_{k+1} = F_k$, где $F_k = B y_k - \tau_{k+1}\left(A y_k - f\right)$. Это сводится к последовательному решению двух уравнений

$$\left(E + \omega R_1\right)\bar{y} = F_k,\ \ \left(E + \omega R_2\right) y_{k+1} = \bar{y} \tag{62}$$

с нижней и верхней треугольными матрицами. Отсюда и следует название метода (61) с оператором (60): попеременно-треугольный метод (ПТМ).

Что можно ожидать от этого метода? Чтобы воспользоваться теоремой 1, надо получить параметры γ_1 и γ_2.

Лемма 2.

Пусть заданы оператор $R = R_1 + R_2,\ R_2^* = R_1$ и оператор B, определенный по формуле $B = \left(E + \omega R_1\right)\left(E + \omega R_2\right)$, и выполнены условия

$$R = R^*,\ R \ge \delta E,\ \delta > 0, \tag{63}$$

$$R_1 R_2 \le \frac{\Delta}{4} R,\ \Delta > 0. \tag{64}$$

Тогда справедлива оценка

$$\dot{\gamma}_1 B \le R \le \dot{\gamma}_2 B, \tag{65}$$

$$\text{где } \dot{\gamma}_1 = \frac{\delta}{1 + \omega\delta + \frac{1}{4}\omega^2 \delta\Delta},\ \ \dot{\gamma}_2 = \frac{1}{2\omega}. \tag{66}$$

Отношение $\dot{\xi} = \dfrac{\dot{\gamma}_1(\omega)}{\dot{\gamma}_2(\omega)}$ имеет наибольшее значение при

$$\omega = \omega_0 = \frac{2}{\sqrt{\delta\Delta}}, \tag{67}$$

при этом $\dot{\xi} = \dfrac{2\sqrt{\eta}}{1 + \eta},\ \eta = \dfrac{\delta}{\Delta},\ \dot{\gamma}_1 = \dfrac{\delta}{2\left(1 + \sqrt{\eta}\right)},\ \dot{\gamma}_2 = \dfrac{\delta}{4\sqrt{\eta}}.$ (68)

Доказательство: Неравенства (63) и (64) означают, что

$$\left(Ry,y\right)\ge\delta\left(y,y\right),\ \left(R_1R_2y,y\right)=\left(R_2y,R_1^*y\right)=\left\|R_2y\right\|^2\le\frac{\Delta}{4}\left(Ry,y\right).$$

Отсюда нетрудно показать, что $\delta\le\Delta,\ \eta\le 1$. Запишем оператор B в виде

$$B=E+\omega(R_1+R_2)+\omega^2R_1R_2=E+\omega R+\omega^2R_1R_2. \tag{69}$$

Учитывая, что $R\ge\delta E$ или $E\le\frac{1}{\delta}R$, получаем для B оценку сверху:

$$B\le\frac{1}{\delta}R+\omega R+\frac{\omega^2\Delta}{4}R=\left(\frac{1}{\delta}+\omega+\frac{1}{4}\omega^2\Delta\right)R=\frac{1}{\dot\gamma_1}R,\ \text{т.е. } R\ge\dot\gamma_1B.$$

Преобразуем теперь формулу (69):

$$B=E-\omega(R_1+R_2)+\omega^2R_1R_2+2\omega\left(R_1+R_2\right)=\left(E-\omega R_1\right)\left(E-\omega R_2\right)+2\omega R.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\left(By,y\right)&=\left(\left(E-\omega R_1\right)\left(E-\omega R_2\right)y,y\right)+2\omega\left(Ry,y\right)=\\&=\left(\left(E-\omega R_2\right)y,\left(E-\omega R_1^*\right)y\right)+2\omega\left(Ry,y\right)=\\&=\left\|\left(E-\omega R_2\right)y\right\|^2+2\omega\left(Ry,y\right)\ge2\omega\left(Ry,y\right)=\frac{1}{\dot\gamma_2}\left(Ry,y\right),\end{aligned}$$

т.е. $\left(Ry,y\right)\le\dot\gamma_2\left(By,y\right)$.

Рассмотрим теперь отношение

$$\dot\xi(\omega)=\frac{\dot\gamma_1}{\dot\gamma_2}=\frac{2\omega\delta}{1+\omega\delta+\frac{1}{4}\omega^2\delta\Delta}$$

и найдем его максимум. Вычислим производную

$$\frac{d\dot\xi}{d\omega}=2\delta\frac{1-\omega^2\delta\Delta/4}{\left(1+\omega\delta+\omega^2\delta\Delta/4\right)^2}$$

и приравняем ее нулю. Отсюда видно, что максимум $\dot\xi(\omega)$ достигается при $\omega=\omega_0=\frac{2}{\sqrt{\delta\Delta}}$, так как $\dot\xi''(\omega)<0$ при $\omega=\omega_0$. Подставляя $\omega_0=2\sqrt{\eta}/\delta$ в (66), получаем формулы (68).

Теорема 2. Пусть даны операторы $A=A^*>0,\ R=R^*>0$ и выполнены условия леммы 2, а также неравенства

$$C_1R\le A\le C_2R,\ C_1>0. \tag{70}$$

Тогда для ПТМ (61) с чебышевским набором параметров

$$\tau_k^*=\frac{\tau_0}{1+\rho_0\sigma_k^*},\ \tau_0=\frac{2}{\gamma_1+\gamma_2},\ \rho_0=\frac{1-\xi}{1+\xi},\ \xi=\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \tag{71}$$

где $\gamma_1 = C_1\dot{\gamma}_1,\ \gamma_2 = C_2\dot{\gamma}_2,\ \dot{\gamma}_1 = \dfrac{\delta}{2\left(1+\sqrt{\eta}\right)},\ \dot{\gamma}_2 = \dfrac{\delta}{4\sqrt{\eta}},\ \eta = \dfrac{\delta^*}{\Delta_n}$, справедлива оценка (48) и для выполнения неравенства

$\|Ay_n - f\|_{B^{-1}} \le q_n \|Ay_0 - f\|_{B^{-1}}$ достаточно *n* итераций, где $n \ge n_0(\varepsilon)$,

$$n_0(\varepsilon) = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}\,\frac{\ln\left(2/\varepsilon\right)}{2\sqrt{2}\sqrt{\eta}}. \qquad (72)$$

<u>Доказательство:</u> Чтобы воспользоваться предыдущей теоремой, надо найти коэффициенты γ_1 и γ_2 в операторных неравенствах

$$\gamma_1 B \le A \le \gamma_2 B.$$

Из (65) и (70) следует, что $A \ge C_1 R \ge C_1\dot{\gamma}_1 B = \gamma_1 B$, т.е. $\gamma_1 = C_1\dot{\gamma}_1$,

$A \le C_2 R \le C_2\dot{\gamma}_2 B = \gamma_2 B$, т.е. $\gamma_2 = C_2\dot{\gamma}_2$.

Параметр обусловленности при $\omega = \omega_0$

$$\xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{C_1}{C_2}\dot{\xi} = \frac{C_1}{C_2}\cdot\frac{2\sqrt{\eta}}{1+\sqrt{\eta}}.$$

Теперь применим теорему 1 и воспользуемся результатами для явной схемы с ЧНП. Условие $q_n \le \varepsilon$ выполнено при $n \ge \ln\dfrac{2}{\varepsilon}\Big/\left(2\sqrt{\xi}\right)$. Подставляя сюда выражение для $\xi = \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}$ и учитывая, что $\xi < \dfrac{C_1}{C_2}2\sqrt{\eta}$, получаем достаточное условие (72). Оно удобно для проверки.

В частном случае $A = R = R_1 + R_2,\ R_2^* = R_1,\ C_1 = C_2 = 1$ для числа итераций имеем оценку

$$n \ge n_0(\varepsilon),\ \ n_0(\varepsilon) = \frac{\ln\left(2/\varepsilon\right)}{2\sqrt{2}\sqrt[4]{\eta}}.$$

<u>1.9. ПТМ для разностной задачи Дирихле уравнения Пуассона</u>

Проиллюстрируем ПТМ на примере разностной задачи Дирихле уравнения Пуассона в прямоугольнике $\bar{G} = \left\{0 \le x_\alpha \le l_\alpha\right\}$

$$\Lambda y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} = -f(x),\ \ y \in \omega_h,\ y\big|_{\gamma_h} = \mu(x) \qquad (73)$$

на сетке

$\bar{\omega}_h = \left\{x_i = \left(i_1 h_1, i_2 h_2\right),\ i_\alpha = 0,1,\ldots,N_\alpha,\ N_\alpha h_\alpha = l_\alpha\right\}\ \alpha = 1,2\ \ \bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$ где γ_h - граница сетки.

В этом случае $Ay = -\Lambda y,\ \ y \in H = \overset{\circ}{\Omega}$,

$R = A,\ R_1 y = y_{\bar{x}_1}/h_1 + y_{\bar{x}_2}/h_2,\ \ R_2 y = -y_{x_1}/h_1 - y_{x_2}/h_2$.

Вместо (73) получаем

$$Ay = \varphi, \quad y \in \Omega, \tag{74}$$

где φ отличается от f только в приграничных узлах.

Вычислим коэффициенты δ и Δ:

$$R \ge \delta E,\ \delta = 4\left(\frac{1}{h_1^2}\sin^2\frac{\pi h_1}{2l_1} + \frac{1}{h_2^2}\sin^2\frac{\pi h_2}{2l_2}\right) \tag{75}$$

$$\left(R_1R_2y, y\right) = \|R_2y\|^2 = \left\|\frac{y_{x_1}}{h_1} + \frac{y_{x_2}}{h_2}\right\|^2 = \left(\left(\frac{y_{x_1}}{h_1} + \frac{y_{x_2}}{h_2}\right)^2, 1\right) \le$$

$$\le \left(\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right)\left(y_{x_1}^2 + y_{x_2}^2\right), 1\right) \le \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right)(Ry, y), \text{ т.е.}$$

$$\Delta = \frac{4}{h_1^2} + \frac{4}{h_2^2}. \tag{76}$$

При этом мы учли, что $\left(a_1b_1 + a_2b_2\right)^2 \le \left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right)$ и

$\left(Ry, y\right) = \left(y_{\bar{x}_1}, y_{\bar{x}_1}\right]_1 + \left(y_{\bar{x}_2}, y_{\bar{x}_2}\right]_2 \ge \left\|y_{\bar{x}_1}\right\|^2 + \left\|y_{\bar{x}_2}\right\|^2$, где

$\left(u, w\right]_1 = \sum\limits_{i_1=1}^{N_1}\sum\limits_{i_2=1}^{N_2-1} u_{i_1i_2}w_{i_1i_2}h_1h_2$, аналогично определяется $\left(u, w\right]_2$.

Зная δ и Δ, находим η, γ_1, γ_2 и ξ, после чего оцениваем число итераций.

Сравнение методов мы проводим для модельной задачи (73) на квадратной сетке $h_1 = h_2 = h$ в квадратной области $G\left(l_1 = l_2 = 1\right)$.

В этом случае

$$\eta = \frac{\delta}{\Delta} = \sin^2\frac{\pi h}{2},\ \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{2\sqrt{\eta}}{1+\sqrt{\eta}} \approx 2\sqrt{\eta} = 2\sin\frac{\pi h}{2},$$

При малых $\frac{\pi h}{2} << 1$ имеем $\sqrt{2}\sqrt[4]{\eta} \approx \sqrt{\pi h} \approx 1.77\sqrt{h}$

$$n_0(\varepsilon) = \frac{0.29}{\sqrt{h}}\ln\left(2/\varepsilon\right) = \frac{2.9}{\sqrt{h}} \text{ при } \varepsilon = 2e^{-10} \approx 10^{-4}..$$

Сравним ПТМ по числу итераций со схемой простой итерации (СПИ), и явной чебышевской схемой (ЧНП):

h	СПИ	ЧНП	ПТМ
0.1	200	32	9
0.02	5000	160	21
0.01	20000	320	29

Остановимся на описании алгоритма вычисления (k+1)-й итерации из уравнения

$$By^{k+1} = \left(E + \omega_0 R_1\right)\left(E + \omega_0 R_2\right)y^{k+1} = F^k, \tag{77}$$

$F^k = By^k - \tau_{k+1}\left(Ay^k - \varphi\right) = By^k + \tau_{k+1}\left(\Lambda w^k + f\right)$, где $y^{k+1} = y^k = 0$ на границе γ_h, $w^k = y^k$ при $x \in \omega_h$, $w^k = \mu$ при $x \in \gamma_h$.

Решением задачи (77) является функция w^{k+1}, определенная на $\bar{\omega}_h$: $w^{k+1} = y^{k+1}$ на ω_h, $w^{k+1} = \mu$ на γ_h.

Чтобы найти y^{k+1} последовательно решаем задачи

$$\left(E + \omega_0 R_1\right)\bar{y} = F^k,\ \left(E + \omega_0 R_2\right)y^{k+1} = \bar{y},\ x \in \omega_h, \tag{78}$$

где $$R_1 y = \frac{y - y_{i_1 - 1}}{h_1^2} + \frac{y - y_{i_2 - 1}}{h_2^2} = \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right)y - \left(\frac{1}{h_1^2}y_{i_1 - 1} + \frac{1}{h_2^2}y_{i_2 - 1}\right), \tag{79}$$

$$R_2 y = -\frac{y_{i_1 + 1} - y}{h_1^2} - \frac{y_{i_2 + 1} - y}{h_2^2} = \left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right)y - \left(\frac{1}{h_1^2}y_{i_1 + 1} + \frac{1}{h_2^2}y_{i_2 + 1}\right). \tag{80}$$

Здесь $y = y\left(i_1 h_1, i_2 h_2\right)$, $y_{i_1 \pm 1} = y\left(\left(i_1 \pm 1\right)h_1, i_2 h_2\right)$, $y_{i_2 \pm 1} = y\left(i_1 h_1, \left(i_2 \pm 1\right)h_2\right)$.

Оператор $E + \omega_0 R_1$ определен на трехточечном шаблоне $\left(i_1 h_1, i_2 h_2\right)$, $\left(\left(i_1 - 1\right)h_1, i_2 h_2\right)$, $\left(i_1 h_1, \left(i_2 - 1\right)h_2\right)$, а оператор $E + \omega_0 R_2$ на трехточечном шаблоне $\left(i_1 h_1, i_2 h_2\right)$, $\left(\left(i_1 + 1\right)h_1, i_2 h_2\right)$, $\left(i_1 h_1, \left(i_2 + 1\right)h_2\right)$. Подставляя выражения для $R_1 y$ и $R_2 y$ в (78), получим для определения значений $\bar{y}$ и y^{k+1} в центре шаблона $\left(i_1 h_1, i_2 h_2\right)$ рекуррентные формулы:

$$\bar{y} = \frac{\chi_1 \bar{y}_{i_1 - 1} + \chi_2 \bar{y}_{i_2 - 1} + F^k}{1 + \chi_1 + \chi_2},\quad \bar{y}\big|_{\gamma_h} = 0 \tag{81}$$

$$y^{k+1} = \frac{\chi_1 y_{i_1 + 1}^{k+1} + \chi_2 y_{i_2 + 1}^{k+1} + \bar{y}}{1 + \chi_1 + \chi_2},\quad y^{k+1}\big|_{\gamma_h} = 0 \tag{82}$$

$$\chi_1 = \frac{\omega_0}{h_1^2},\ \chi_2 = \frac{\omega_0}{h_2^2}.$$

Чтобы определить $\bar{y}$ на сетке ω_h, выбираем левый нижний угол области и берем приграничный узел $i_1 = 1$ и $i_2 = 1$ так, что другие два узла $\left(\left(i_1 - 1\right)h_1, i_2 h_2\right)$ и $\left(i_1 h_1, \left(i_2 - 1\right)h_2\right)$ лежат на границе и, следовательно, $\bar{y}_{i_1 - 1}$ и $\bar{y}_{i_2 - 1}$ известны. По формуле (81) определяем значение $\bar{y}$ и дальше движемся либо по строкам, либо по столбцам.

Счет по строкам ведется слева направо: фиксируем $i_2 = 1$ и меняем $i_1 = 1, 2, \ldots, N_1 - 1$, затем полагаем $i_2 = 2$ и последовательно берем $i_1 = 1, 2, \ldots, N_1 - 1$ и т.д. Счет по столбцам ведется снизу вверх.

Значение y^{k+1} выражается через $y^{k+1}_{i_1+1}$ и $y^{k+1}_{i_2+1}$, поэтому счет надо начинать с правого верхнего угла, полагая $i_1 = N_1 - 1$, $i_2 = N_2 - 1$. Тогда соседние узлы шаблона лежат на границе и $y^{k+1}_{i_1+1}$ и $y^{k+1}_{i_2+1}$ известны. Дальнейший счет ведется либо по строкам (справа налево), либо по столбцам (сверху вниз).

Все вычисления ведутся по рекуррентным формулам; счет, очевидно, устойчив. Такой алгоритм счета обычно называют алгоритмом бегущего счета. Для вычисления y^{k+1} при заданном F^k требуется четыре операции сложения и шесть операций умножения (коэффициенты χ_1, χ_2 и $1/(1 + \chi_1 + \chi_2)$ постоянны) на один узел сетки. Для определения F^k надо затратить десять операций сложения и десять операций умножения, итого требуется для вычисления y^{k+1} по заданному y^k 14 операций сложения и 16 операций умножения. Можно уменьшить эти числа, если хранить не одну последовательность y^k, а две последовательности. Для этого воспользуемся алгоритмом

$$\begin{aligned} &(E + \omega_0 R_1)\bar{w} = \Phi_k, \quad \bar{w}\big|_{\gamma_h} = 0, \\ &(E + \omega_0 R_1) w^{k+1} = \bar{w}, \quad w^{k+1}\big|_{\gamma_h} = 0, \\ &y^{k+1} = y^k + \tau_{k+1} w^{k+1}, \end{aligned} \tag{83}$$

где $\Phi_k = \Lambda y^k + f$, $y^k\big|_{\gamma_h} = \mu$. Для определения y^{k+1} в этом случае требуется 10 операций сложения и 10 операций умножения на один узел, однако при переходе от k-й к (k+1)-й итерации надо помнить не только $y^k(i_1 h_1, i_2 h_2)$, но и $w^{k+1}(i_1 h_1, i_2 h_2)$.

1.10. ПТМ для схемы повышенного порядка точности уравнения Пуассона в прямоугольнике

Для задачи Дирихле уравнения Пуассона

$$\Delta U = -f(x), \;\; x \in G, \; U = \mu(x), \;\; x \in \Gamma, \tag{84}$$

можно получить схему четвертого порядка точности

$$\Lambda' y = -\varphi(x), \;\; x \in \omega_h, \;\; y = \mu(x), \;\; x \in \gamma_h, \tag{85}$$

где

$$\Lambda' y = \Lambda y + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 y,$$

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2, \;\; \Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \;\; \alpha = 1{,}2$$

$$\varphi = f + \frac{h_1^2}{12} \Lambda_1 f + \frac{h_2^2}{12} \Lambda_2 f.$$

Пусть $H = \Omega$ - пространство сеточных функций, заданных на $\bar{\omega}_h$ и равных нулю на γ_h. Введем операторы $Ay = -\Lambda' y,\ Ry = -\Lambda y$ для любого $y \in H$ и вместо (85) получим $Ay = \bar{\varphi}$, где $\bar{\varphi} \neq \varphi$ только в приграничных узлах. Воспользуемся оценками для A

$$\frac{2}{3} R \le A \le R, \text{ т.е. } C_1 = \frac{2}{3}, \;\; C_2 = 1.$$

Оператор R представим в виде суммы R_1 и R_2:

$$R = R_1 + R_2, \;\; R_1 y = \frac{y_{\bar{x}_1}}{h_1} + \frac{y_{\bar{x}_2}}{h_2}, \;\; R_2 y = -\frac{y_{x_1}}{h_1} - \frac{y_{x_2}}{h_2}.$$

Величины δ, Δ, ω_0 те же, что в предыдущей задаче, $\gamma_1 = \frac{2}{3}\dot{\gamma}_1, \gamma_2 = \dot{\gamma}_2$, где $\dot{\gamma}_1 = \frac{\delta}{2(1+\sqrt{\eta})}, \dot{\gamma}_2 = \frac{\delta}{4\sqrt{\eta}}$. Остается найти итерационные параметры $\left\{\tau_k^*\right\}$, используя γ_1 и γ_2. Формулы (81) и (82) остаются в силе, меняется лишь F:

$$F^k = F^k_{(77)} + \Phi^k, \;\; \Phi^k = -\tau_{k+1} \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 y^k, \tag{86}$$

где $F^k_{(77)}$ - выражение, определяемое по формуле (77).

Число итераций, очевидно, $n \ge n_0(\varepsilon),\ n_0(\varepsilon) = \sqrt{\frac{3}{2}} n_0^*(\varepsilon)$, где $n_0^*(\varepsilon)$ - число итераций в случае задачи Дирихле для уравнения Пуассона (73). Таким образом, для схемы повышенного порядка число итераций по ПТМ увеличивается в $\sqrt{1.55} \approx 1.22$ раза по сравнению со схемой второго порядка точности.

Для двумерного случая более экономичным является метод переменных направлений. Однако, для многомерной задачи Дирихле повышенной точности $O\left(\left|h^4\right|\right)$ наиболее экономичным является ПТМ.

В этом случае оператор Λ' строится так:

$$\Lambda' y = \sum_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha \prod_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^{p} \left(E + \chi_\beta \Lambda_\beta\right), \;\; \chi_\beta = \frac{h_\beta^2}{12}, \;\; \Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}. \tag{87}$$

Тогда справедливы операторные неравенства

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{p-1} R \le A \le R, \qquad (88)$$

где $Ay = -\Lambda' y,\ Ry = -\Lambda y = -\sum\limits_{\alpha=1}^{p} \Lambda_\alpha y,\ y \in H$, и $n_0(\varepsilon) = \left(\frac{3}{2}\right)^{(p-1)/2} n_0^*(\varepsilon)$,

$n_0^*(\varepsilon)$- число итераций для решения уравнения $Ry = f$, оно практически не зависит от числа измерений *p*.

2. РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В этой главе рассмотрены разностные схемы для решения уравнения теплопроводности. Детально исследовано одномерное уравнение с постоянными коэффициентами. Приведены разностные схемы для многомерного уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами.

2.1 Уравнение теплопроводности с постоянными коэффициентами

Исходная задача. Процесс распространения тепла в одномерном стержне $0 < x < l$ описывается уравнением теплопроводности

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right) + f_0(x,t), \qquad (1)$$

где $u = u(x,t)$ - температура в точке *x* стержня в момент *t*, *c* - теплоемкость единицы массы, ρ- плотность, $c\rho$ - теплоемкость единицы длины, k - коэффициент теплопроводности, f_0 - плотность тепловых источников. В общем случае k, c, ρ, f_0 могут зависеть не только от *x* и *t*, но и от температуры $u = u(x,t)$ (квазилинейное уравнение теплопроводности) и даже от $\partial u/\partial x$ (нелинейное уравнение). Если k, c, ρ постоянны, то ( ) можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \quad f = \frac{f_0}{c\rho}, \qquad (2)$$

где $a^2 = k/(c\rho)$ - коэффициент температуропроводности. Без ограничения общности можно считать $a = 1,\ l = 1$. В самом деле, вводя переменные $x_1 = \frac{x}{l},\ t_1 = \frac{a^2 t}{l^2},\ f_1 = \frac{l^2}{a^2} f$, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + f_1,\ \ 0 < x_1 < 1.$$

Мы будем рассматривать первую краевую задачу (иногда говорят: начально-краевую задачу) в области $\overline{D} = \{0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T\}$.

Требуется найти непрерывное в $\overline{D}$ решение $u = u(x,t)$ задачи

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),\ \ 0 < x_1 < 1,\ \ 0 < t < T, \\ u(x,0) = u_0(x),\ \ 0 \le x \le 1,\ \ u(0,t) = u_1(t), \\ u(1,t) = u_2(t),\ \ 0 \le t \le T. \end{gathered} \tag{3}$$

Разностные схемы. В области $\overline{D}$ введем сетку $\overline{\omega}_{h\tau} = \left\{ (x_i t_j): x_i = ih,\ t_j = j\tau,\ i = 0,1,\dots,N,\ h = 1/N,\ j = 0,1,\dots,L,\ \tau = T/L \right\}$ с шагами : h по x и τ по t. Заменяя производную по x разностным выражением

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i \sim \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = u_{\bar{x}x,i} = \Lambda u_i,$$

вместо (3) получим систему дифференциально-разностных уравнений (метод прямых)

$$\frac{dv_i}{dt} = \Lambda v_i + f_i,\ \ i = 1,2,\dots,$$

с краевыми и начальными условиями

$$v_0(t) = u_1(t),\ v_N(t) = u_2(t),\ v_i(0) = u_0(x_i).$$

Для численного решения этой задачи заменим производную по t разностным отношением

$$\frac{dv_i}{dt} \sim \frac{v_i(t_{j+1}) - v_i(t_j)}{\tau} = \frac{v_i^{j+1} - v_i^j}{\tau} = (v_t)_i^j,$$

правую часть возьмем в виде линейной комбинации значений при $t = t_j$ (на j-м слое) и $t = t_{j+1}$ (на (j+1)-м слое):

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \sigma \Lambda y_i^{j+1} + (1-\sigma)\Lambda y_i^j + \varphi_i^j, \tag{4}$$

где σ - параметр, а φ_i^j- некоторая правая часть, например, $\varphi_i^j = f_i^j$, $\varphi_i^j = f_i^{j+1/2}$ и т.д. Сюда надо присоединить дополнительные условия

$$y_0^j = u_1(t_j),\ y_N^j = u_2(t_j),\ y_i^0 = u_0(x_i), \qquad (5)$$
$$j = 0,1,2,\ldots,\ 0 \le i \le N.$$

Схема (4) определена на 6-ти точечном шаблоне.

Рассмотрим явную схему (σ=0) на 4-точечном шаблоне:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2} + \varphi_i^j. \qquad (6)$$

Значения на (j+1)-м слое находятся по явной формуле

$$y_i^{j+1} = \left(1 - \frac{2\tau}{h^2}\right) y_i^j + \frac{\tau}{h^2}\left(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j\right) + \tau\varphi_i^j.$$

В случае σ=1 получаем полностью неявную схему с опережением на шаблоне $\begin{matrix} \times & \times & \times \\ & \times & \end{matrix}$:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{y_{i-1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i+1}^{j+1}}{h^2} + \varphi_i^j. \qquad (7)$$

Для определения y_i^{j+1} из (7) получаем краевую задачу

$$\frac{\tau}{h^2} y_{i-1}^{j+1} - \left(1 + \frac{2\tau}{h^2}\right) y_i^{j+1} + \frac{\tau}{h^2} y_{i+1}^{j+1} = -F_i^j,\ \ 0 < i < N,$$

$$F_i^j = y_i^j + \tau\varphi_i^j,\ \ y_0^{j+1} = u_1(t_{j+1}),\ \ y_N^{j+1} = u_2(t_{j+1}),$$

которая решается методом прогонки.

Часто используется симметричная неявная схема (иногда ее называют *схемой Кранка-Николсона*) с $\sigma = 1/2$ и шаблоном $\begin{matrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{matrix}$:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{2}\left(\frac{y_{i-1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i+1}^{j+1}}{h^2} + \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2}\right) + \varphi_i^j. \qquad (8)$$

Значения y_i^{j+1} на новом слое в этом случае находятся методом прогонки для краевой задачи:

$$\frac{\tau}{2h^2} y_{i-1}^{j+1} - \left(1 + \frac{\tau}{h^2}\right) y_i^{j+1} + \frac{\tau}{2h^2} y_{i+1}^{j+1} = -F_i^j,\ \ 0 < i < N,$$

$$y_0^{j+1} = u_1(t_{j+1}),\ \ y_N^{j+1} = u_2(t_{j+1}), \qquad (9)$$

$$F_i^j = \left(1 - \frac{\tau}{h^2}\right) y_i^j + \frac{\tau}{2h^2}\left(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j\right) + \tau\varphi_i^j.$$

В общем случае (при любом σ) схема (4) называется *схемой с весами*. При $\sigma \neq 0$ она неявная и y_i^{j+1} определяется методом прогонки как решение задачи

$$\begin{gathered}\sigma\tau\Lambda y_i^{j+1} - y_i^{j+1} = -F_i^j,\ 0 < i < N,\\ y_0^{j+1} = u_1(t_{j+1}),\ y_N^{j+1} = u_2(t_{j+1}),\ j = 0,1,\ldots\end{gathered} \tag{10}$$

Перейдем к изучению свойств схемы (4) с любым σ.

Оценка погрешности аппроксимации. Чтобы оценить порядок точности схемы с весами (4), надо сначала оценить погрешность аппроксимации (невязку) и найти априорные оценки, выражающие устойчивость схемы по правой части. Разностная схема (4), (5) учитывает начальные и граничные данные точно. Перепишем схему ( ) в безындексной форме. Вводя обозначения

$$y = y_i^j,\ \hat{y} = y_i^{j+1},\ \Lambda y = y_{\bar{x}x} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2},$$

$$y_t = \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau},\ y^{(\sigma)} = \sigma y_i^{j+1} + (1-\sigma) y_i^j,$$

получаем

$$\begin{gathered}y_t = \Lambda y^{(\sigma)} + \varphi \quad (x_i, t_j) \in \omega_{h\tau},\ y(x,0) = u_0(x),\\ y_0 = u_1(t),\ y_N = u_2(t),\ (t = t_j = j\tau,\ j = 0,1,\ldots).\end{gathered} \tag{11}$$

Пусть $u = u(x_i, t_j)$ - точное решение задачи (3), y - решение разностной задачи (11). Подставляя в (11) $y = z + u$, получим для погрешности $z = y - u$ следующие условия:

$$\begin{gathered}z_t = \Lambda z^{(\sigma)} + \psi,\ (x,t) \in \omega_{h\tau},\\ z(x,0) = 0,\ z(0,t) = z(1,t) = 0,\end{gathered} \tag{12}$$

где

$$\psi = \Lambda u^{(\sigma)} + \varphi - u_t \tag{13}$$

есть погрешность аппроксимации схемы (11) на решении $u = u(x,t)$ задачи (3) (невязка схемы).

Найдем разложение ψ по степени h и τ в окрестности точки $\left(x_i, \bar{t} = t_j + \frac{1}{2}\tau\right)$. Учитывая, что

$$u^{(\sigma)}=\sigma\hat{u}+(1-\sigma)u=\frac{u+\hat{u}}{2}+\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\tau u_t,$$

$$\hat{v}=\bar{v}+\frac{1}{2}\tau\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}+\frac{\tau^2}{8}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial t^2}+\frac{\tau^3}{48}\frac{\partial^3\bar{v}}{\partial t^3}+O\left(\tau^4\right),$$

$$\bar{v}=v\left(x,t_j+\frac{1}{2}\tau\right),$$

$$v=\bar{v}-\frac{1}{2}\tau\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}+\frac{\tau^2}{8}\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial t^2}+\frac{\tau^3}{48}\frac{\partial^3\bar{v}}{\partial t^3}+O\left(\tau^4\right),$$

$$\Lambda u=u_{\bar{x}x}=Lu+\frac{h^2}{12}u^{\mathrm{IV}}+O\left(h^4\right),\ Lu=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

получаем

$$\psi=\left(L\bar{u}+\bar{f}-\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\right)+\varphi-\bar{f}+\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\tau L\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+\frac{h^2}{12}L^2\bar{u}+O\left(\tau^2+h^4\right).$$

Так в силу уравнения (3) имеем $L\bar{u}+\bar{f}-\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}=0,$ то $L\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}=L^2\bar{u}+L\bar{f}$ и

$$\psi=\left(\varphi-\bar{f}+\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\tau L\bar{f}\right)+\left(\frac{h^2}{12}+\left(\sigma-\frac{1}{2}\right)\tau\right)L^2\bar{u}+O\left(\tau^2+h^4\right).$$

Отсюда видно, что $\psi=O\left(\tau+h^2\right)$ при $\varphi=\bar{f}$ и $\sigma\neq\frac{1}{2}$,

$$\psi=O\left(\tau^2+h^2\right)\text{ при }\varphi=\bar{f}\text{ и }\sigma=\frac{1}{2}.$$

Если выбрать σ так, чтобы коэффициент при $L^2\bar{u}$ был равен нулю:

$$\sigma=\sigma_*=\frac{1}{2}-\frac{h^2}{12\tau},\tag{14}$$

а φ положить равным

$$\varphi=\bar{f}+\frac{h^2}{12}L\bar{f}\quad\text{или}\quad\varphi=\bar{f}+\frac{h^2}{12}\Lambda\bar{f}\tag{15}$$

(оба выражения отличаются на величину $O\left(h^4\right)$, т. к. $\Lambda\bar{f}-L\bar{f}=O\left(h^2\right)$), то мы получим схему повышенного (по x) порядка аппроксимации: $\psi=O\left(h^4+\tau^2\right)$ при $\sigma=\sigma_*$. Эта схема также неявная, и поэтому y_i^{j+1} находится из уравнения $\sigma_*\tau\Lambda\hat{y}-\hat{y}=-F$ методом прогонки.

Устойчивость и сходимость схемы. Обратимся к изучению устойчивости схемы (11). Рассмотрим сначала явную схему (σ=0) и чисто неявную схему (σ=1). Уравнение (11) для явной схемы запишем в виде

$$y_i^{j+1} = \left(1 - \frac{2\tau}{h^2}\right) y_i^j + \frac{\tau}{h^2}\left(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j\right) + \tau\varphi_i^j, \ \ 0 < i < N,$$
$$y_0^{j+1} = 0, \ y_N^{j+1} = 0, \ y_i^0 = u_0(x_i), \ 0 \le i \le N. \tag{16}$$

Если коэффициент при y_i^j неотрицателен, т.е.

$$\tau \le h^2/2, \tag{17}$$

то из (16) следует, что

$$\left\|y^{j+1}\right\|_c \le \left\|y^j\right\|_c + \tau\left\|\varphi^j\right\|_c, \tag{18}$$

где $\|y\|_c = \max\limits_{0 \le i \le N} |y_i|$. Суммирование по k от 0 до j-1 дает

$$\left\|y^j\right\|_c \le \left\|y^0\right\|_c + \sum_{k=0}^{j-1} \tau \left\|\varphi^k\right\|_c. \tag{19}$$

Это неравенство и выражает устойчивость в сеточной норме C явной схемы по начальным данным и по правой части при условии (17) (явная схема условно устойчива).

Неявную схему (11) при σ=1 перепишем в виде

$$\tau\Lambda y_i^{j+1} - y_i^{j+1} = -F_i, \ F_i = y_i^j + \tau\varphi_i^j$$

или

$$\frac{\tau}{h^2} y_{i-1}^{j+1} - \left(1 + \frac{2\tau}{h^2}\right) y_i^{j+1} + \frac{\tau}{h^2} y_{i+1}^{j+1} = -F_i^j, \ \ 0 < i < N, \ \ y_0^{j+1} = y_N^{j+1} = 0.$$

Воспользуемся теоремой 3 из [1]. Для решения задачи

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + A_{i+1} y_{i+1} = -F_i,$$
$$C_i = A_i + A_{i+1} + D_i, \ 0 < i < N, \ y_0 = y_N = 0$$

верна оценка $\|y\|_c \le \left\|\frac{F}{D}\right\|_c$. В нашем случае $A_i = A_{i+1} = \tau/h^2$, $D_i = 1$,

$$\left\|y^{k+1}\right\|_c \le \left\|F^k\right\|_c \le \left\|y^k\right\|_c + \tau\left\|\varphi^k\right\|_c. \tag{20}$$

Отсюда суммируем по k =0,1,...,j-1, получаем оценку (19). Таким образом, чисто неявная схема безусловно устойчива, т.е. устойчива при любых τ и h. В случае произвольного σ разностное уравнение имеет вид

$$\frac{\sigma\tau}{h^2} y_{i-1}^{j+1} - \left(1 + \frac{2\sigma\tau}{h^2}\right) y_i^{j+1} + \frac{\sigma\tau}{2h^2} y_{i+1}^{j+1} = -F_i^j,$$

$$0 < i < N, \ \ y_0^{j+1} = y_N^{j+1} = 0,$$

$$F_i^j = \left(1 - \frac{2(1-\sigma)\tau}{h^2}\right) y_i^j + \frac{(1-\sigma)\tau}{h^2}\left(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j\right) + \tau\varphi_i^j.$$

Отсюда видно, что коэффициент при y_i^j неотрицателен, если

$$\tau \le \frac{h^2}{2(1-\sigma)} \quad \text{или} \quad \sigma \ge 1 - \frac{h^2}{2\tau}. \tag{21}$$

Можно показать, что в другой норме условие устойчивости схемы с весами имеет вид

$$\sigma \ge \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau}, \tag{22}$$

так что схема $\sigma \ge 1/2$ безусловно устойчива, а при σ<1/2 вместо (21) ставится условие устойчивости

$$\tau \le \frac{h^2}{4(1/2-\sigma)}. \tag{23}$$

Указанный результат (23) получается на основе общей теории устойчивости.

В частности при $\sigma = \sigma_*$ имеем $4(1/2 - \sigma_*)\tau = h^2/3 < h^2$, т.е. схема повышенного порядка аппроксимации безусловно устойчива.

Схема с весами сходится в сеточной норме *C* со скоростью $\left\|y^j - u^j\right\|_c = \left\|z^j\right\|_c = O\left(h^2 + \tau\right)$ при $\sigma \ne 1/2,\ \sigma \ge \sigma_0,\ \left\|z^j\right\|_c = O\left(h^2 + \tau^2\right),\ \sigma = 1/2.$
Если $\sigma_* \ge 0$, т.е. $\tau \ge h^2/6$, то для схемы $\sigma = \sigma_*$ верна оценка

$$\left\|z^j\right\|_c = O\left(h^4 + \tau^2\right).$$

2.2. Многомерные задачи теплопроводности

Разностные схемы с весами. На плоскости $x = (x_1, x_2)$ рассмотрим область *G* с границей *Г*. Будем искать решение задачи теплопроводности в области $\bar{G} = G + \Gamma$ для всех $0 \le t \le T$. Требуется найти функцию $u(x,t)$, определенную в цилиндре $\bar{Q}_T = \bar{G} \times [0,T] = \{(x,t)\colon x \in \bar{G},\ 0 \le t \le T\}$, удовлетворяющую в $Q_T = G \times [0,T] = \{(x,t)\colon x \in G,\ 0 < t \le T\}$ уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t), \quad Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \tag{24}$$

краевым условиям первого рода на границе *Г* области *G*

$$u = \mu(x,t),\ x \in T,\ 0 \le t \le T, \tag{25}$$

и начальному условию при *t*=0:

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \bar{G}. \tag{26}$$

Предположим, что G - прямоугольник:

$$G=\left\{x=(x_1,x_2):\ 0\le x_1\le l_1,\ 0\le x_2\le l_2\right\}.$$

Введем в G прямоугольную сетку

$$\bar{\omega}_h=\left\{x_1=\left(x_1^{(i_1)},x_2^{(i_2)}\right):\ x_\alpha^{(i_\alpha)}=i_\alpha h_\alpha,\ i_\alpha=0,1,\ldots,N_\alpha,\ h_\alpha=l_\alpha/N_\alpha,\ \alpha=1,2\right\}$$

с границей

$$\gamma_h=\left\{x_i=(i_1h_1,i_2h_2):i_1=0,N_1,\ 0<i_2<N_2;\ i_2=0,N_2,\ 0<i_1<N_1\right\}.$$

Аппроксимируем оператор Лапласа $Lu=\Delta u$ разностным оператором на пятиточечном шаблоне $Lu\sim\Lambda u=u_{\bar{x}_1x_1}+u_{\bar{x}_2x_2}$. Введем на отрезке $0\le t\le T$ сетку $\bar{\omega}_\tau=\left\{t_j=j\tau:\ 0\le t_j\le T\right\}$ с шагом τ. Напишем схему с весами

$$\frac{y^{j+1}-y^j}{\tau}=\Lambda\left(\sigma y^{j+1}+(1-\sigma)y^j\right)+\varphi^j,\quad j=0,1,\ldots, \tag{27}$$

где $y^j=y\left(x_i,t_j\right)=y\left(i_1h_1,\ i_2h_2;\ t_j\right),\ x=\left(i_1h_1,\ i_2h_2\right)\in\omega_h.$

Присоединим к уравнениям (27)

$$\begin{aligned}&y(x,0)=u_0(x),\ x=\left(i_1h_1,\ i_2h_2\right)\in\bar{\omega}_h,\\&y(x_i,t)=\mu_i(t),\ x\in\gamma_h,\ t=j\tau\in\omega_h.\end{aligned} \tag{27'}$$

Отсюда видно, что для определения $\hat{y}=y^{j+1}$ на новом слое $t=t_{j+1}$ надо решить разностное уравнение

$$\begin{aligned}&\hat{y}-\sigma\tau\Lambda\hat{y}=F,\quad F=y+(1-\sigma)\tau\Lambda y+\tau\varphi,\ x\in\omega_h,\\&\hat{y}=\mu,\ x\in\gamma_h.\end{aligned} \tag{28}$$

Устойчивость и сходимость. Пользуясь оператором A:

$$Ay=-\Lambda\dot{y}=-\dot{y}_{\bar{x}_1x_1}-\dot{y}_{\bar{x}_2x_2},\ \dot{y}\in\overset{\circ}{\Omega},\ y\in\Omega=H,$$

запишем схему (27) в канонической форме:

$$\begin{aligned}&B\frac{y^{j+1}-y^j}{\tau}+Ay^j=\varphi^j,\ j=0,1,\ldots,\ y^0=u_0,\ y\in H,\\&B=E+\sigma\tau A.\end{aligned} \tag{29}$$

Оператор A является самосопряженным и положительно определенным в пространстве $H=\Omega$ размерности

$$(N_1-1)(N_2-1),\ A=A^*,\ \delta_0E\le A\le\Delta_0E,$$

где

(30)

$$\delta_0 = \frac{4}{h_1^2}\sin^2\frac{\pi h_1}{2l_1} + \frac{4}{h_1^2}\sin^2\frac{\pi h_2}{2l_2};$$

$$\Delta_0 = \frac{4}{h_1^2}\cos^2\frac{\pi h_1}{2l_1} + \frac{4}{h_1^2}\cos^2\frac{\pi h_2}{2l_2},\ \Delta_0 = \|A\|.$$

В силу общей теории схема (29) устойчива в H_A при

$$\sigma \geq \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\|A\|}. \tag{31}$$

В частности для явной схемы имеем условие

$$\tau \leq \frac{2}{\Delta_0},\ \text{или}\ \ \tau < \left(\frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2}\right)^{-1}. \tag{32}$$

На квадратной сетке ($h_1 = h_2 = h$) условие устойчивости явной схемы имеет вид $\tau < h^2/4$. Из (31) видно, что схемы с $\sigma \geq 1/2$ в том числе чисто неявная (σ=1) и симметричная (σ=1/2), безусловно устойчивы. Явную схему (σ=0) можно записать в виде

$$\begin{aligned} y_{i_1 i_2}^{j+1} &= \left(1 - 2(\gamma_1 + \gamma_2)\right) y_{i_1 i_2}^{j} + \gamma_1\left(y_{i_1-1,i_2}^{j} + y_{i_1+1,i_2}^{j}\right) \\ &+ \gamma_2\left(y_{i_1,i_2-1}^{j} + y_{i_1,i_2+1}^{j}\right) + \tau\varphi_{i_1 i_2}^{j}. \end{aligned} \tag{33}$$

Сумма коэффициентов при y в правой части (33) равна единице. Если все коэффициенты неотрицательны, т.е. выполнено условие $\gamma_1 + \gamma_2 \leq 1/2,\ \gamma_1 = \tau/h_1^2,\ \gamma_2 = \tau/h_2^2$, эквивалентное условию устойчивости (32), то из (33) следует неравенство $\left\|y^{j+1}\right\|_c \leq \left\|y^j\right\|_c + \tau\left\|\varphi^j\right\|_c$. Суммируя по k=0,1,...,j-1, получаем оценку

$$\left\|y^j\right\|_c \leq \left\|y^0\right\|_c + \sum_{k=0}^{j-1}\tau\left\|\varphi^k\right\|_c, \tag{34}$$

которая сохраняет силу при любых шагах сетки для чисто неявной схемы (σ=1). Во всех других случаях оценка (34) имеет место при $\sigma \geq 1 - 1/\tau\Delta_0$. Для доказательства сходимости надо, как обычно, исследовать невязку $\psi = \Lambda\left(\sigma\hat{u} + (1-\sigma)u\right) + \varphi - u_t$.

Учитывая, что $\Lambda u = Lu + O\left(\left|h^2\right|\right),\ |h|^2 = h_1^2 + h_2^2$, по аналогии с одномерным случаем находим $\psi = O\left(\left|h^2\right| + \tau^2\right) + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)O(\tau)$.

Для погрешности $z = y - u$ имеем задачу

$$B\frac{z^{j+1} - z^j}{\tau} + Az^j = \psi^j,\ j = 0,1,\ldots,\ z^0 = z(0) = 0.$$

Отсюда и из априорных оценок следует сходимость в C схемы (27) со скоростью $O\left(\tau+|h|^2\right)$ при $\sigma \neq 1/2$, и $O\left(\tau^2+|h|^2\right)$ при $\sigma = 1/2$ (полная аналогия с одномерным случаем), если $\sigma \geq 1-\dfrac{1}{\tau\Delta_0}$.

Переменные коэффициенты. Рассмотрим задачу (24), предполагая, что L есть эллиптический оператор второго порядка с переменными коэффициентами и без смешанных производных:

$$Lu = L_1 u + L_2 u,\quad L_1 u = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right),$$

$$L_2 u = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right),$$

$$c_1 \leq k_\alpha(x,t) \leq c_2,\quad (x,t)\in Q_T = G\times(0,T].$$

Каждый из операторов L_1 и L_2 аппроксимируем разностным трехточечным оператором:

$$L_1 \sim \Lambda_1, \qquad L_2 \sim \Lambda_2,$$

$$\Lambda_1 v = \left(a_1 v_{\bar{x}_1}\right)_{x_1},\quad \Lambda_2 v = \left(a_2 v_{\bar{x}_2}\right)_{x_2},$$

где $a_1 = a_1(i_1 h_1, i_2 h_2, t)$, $a_2 = a_2(i_1 h_1, i_2 h_2, t)$ - некоторые функционалы от значений k_1 и k_2 соответственно; в простейшем случае $a_1 = k_1((i_1-1/2)h_1,\, i_2 h_2;,\, t)$, $a_2 = k_2(i_1 h_1,\, (i_2-1/2)h_2;,\, t)$, что обеспечивает второй порядок аппроксимации: $\Lambda_\alpha u - L_\alpha u = O\left(h_\alpha^2\right)$, $\alpha = 1,2$. Оператору L ставится в соответствие разностный оператор Λ:

$$\Lambda v = \Lambda_1 v + \Lambda_2 v = \left(a_1 v_{\bar{x}_1}\right)_{x_1} + \left(a_2 v_{\bar{x}_2}\right)_{x_2}. \tag{35}$$

Запишем $\Lambda_1 v$ и $\Lambda_2 v$ в индексной форме

$$\Lambda_1 v = \frac{1}{h_1}\left(a_1((i_1+1)h_1, i_2 h_2, t)\frac{v_{i_1+1,i_2}-v_{i_1 i_2}}{h_1} - a_1(i_1 h_1, i_2 h_2, t)\frac{v_{i_1,i_2}-v_{i_1-1,i_2}}{h_1}\right),$$

$$\Lambda_2 v = \frac{1}{h_2}\left(a_2(ih_1,(i_2+1)h_2, t)\frac{v_{i_1,i_2+1}-v_{i_1 i_2}}{h_2} - a_2(i_1 h_1, i_2 h_2, t)\frac{v_{i_1,i_2}-v_{i_1,i_2-1}}{h_2}\right).$$

Разностная схема с весами имеет тот же вид (27), что и в случае уравнения с постоянными коэффициентами.

2.3. Экономичные схемы

Метод переменных направлений. Сравним явные и неявные схемы (27) по двум характеристикам: объем вычислений для определения y^{j+1} и ограничение на шаг τ.

Явная схема: для определения y^{j+1} на сетке ω_h надо затратить число действий, пропорциональное числу узлов, т.е. число действий, приходящихся на один узел не зависит от сетки ω_h. Однако шаг τ жестко ограничен сверху условием $\tau \le \tau_0(h)$: $\tau \le h^2/4$ при $h_1 = h_2 = h$ для схемы (33).

Неявная схема ($\sigma \ge 1/2$): для определения y^{j+1} надо решить систему $(N_1 - 1)(N_2 - 1)$ пятиточечных разностных уравнений; для этого, по крайней мере в случае переменных коэффициентов, требуется число действий на один узел сетки ω_h, возрастающее при $|h| \to 0$.

Возникает задача - построить схемы, сочетающие лучшие качества явных и неявных схем: безусловно устойчивые с числом действий на каждом слое, пропорциональным числу узлов сетки ω_h. Такие схемы принято называть *экономичными*. Конечно, мы должны сделать оговорку: безусловно устойчивые в обычном смысле схемы должны быть асимптотически устойчивы, что приводит к ограничению на шаг, значительно более слабому (например, $\tau \le lh/(2\pi)$ при $\sigma = 1/2$, $h_1 = h_2 = h$, $l_1 = l_2 = l$), чем условие устойчивости ($\tau \le h^2/4$) для явной схемы. Кстати, условие $\tau = O(h)$ естественно для схемы $O\left(\tau^2 + |h|^2\right)$.

Первые экономичные схемы появились в 1955-1956 гг. и были названы *методами переменных направлений*. Основная алгоритмическая идея их экономичности состоит в том, что для перехода со слоя t на слой t_{j+1} надо решать методом прогонки трехточечные разностные уравнения сначала вдоль строк, а затем вдоль столбцов сетки ω_h.

Приведем формулы метода переменных направлений (продольно-поперечной *схемы Писмена - Рекфорда*) для задачи (24) с оператором $L: Lu = L_1 u + L_2 u$, где L_α - один из операторов:

$$L_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} \quad \text{или} \; L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right), \quad \alpha = 1,2.$$

Пусть Λ_1, Λ_2 - соответствующие трехточечные операторы и $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$. Вводя промежуточное значение $\bar{y} = y^{j+1/2}$, формулируем разностную схему переменных направлений:

$$\frac{y^{j+1/2} - y^j}{\tau/2} = \Lambda_1 y^{j+1/2} + \Lambda_2 y^j + \varphi^j, \;\; x \in \omega_h, \; y^{j+1/2} = \bar{\mu} \; \text{ при } i_1 = 0, N_1, \quad (36)$$

(37)

$$\frac{y^{j+1}-y^{j+1/2}}{\tau/2}=\Lambda_1 y^{j+1/2}+\Lambda_2 y^{j+1}+\varphi^j,\ \ x\in\omega_h,\ y^{j+1}=\mu^{j+1}$$

$$\text{при } i_2=0,N_2,\ \ y^0=u_0(x),\ x\in\overline{\omega}_h,$$

где $\overline{\mu}$ промежуточное значение функции $\mu(x,t)$ равное

$$\overline{\mu}=\frac{\mu^j+\mu^{j+1}}{2}-\frac{\tau}{4}\Lambda_2\left(\mu^{j+1}-\mu^j\right).$$

Для определения $\overline{y}=y^{j+1/2}$ и y^{j+1} имеем разностные краевые задачи

$$\begin{gathered}
1/2\,\tau\Lambda_1 y^{j+1/2}-y^{j+1/2}=-F^j,\\
F^j=y^j+1/2\,\tau\left(\Lambda_2 y^j+\varphi^j\right),\ x\in\omega_h,\\
y^{j+1/2}=\overline{\mu},\ i_1=0,N_1,\\
1/2\,\tau\Lambda_2 y^{j+1}-y^{j+1}=-F^{j+1/2},\\
F^{j+1/2}=y^{j+1/2}+1/2\,\tau\left(\Lambda_2 y^{j+1/2}+\varphi^j\right),\ x\in\omega_h,\\
y^{j+1}=\mu^{j+1},\ i_2=0,N_2.
\end{gathered}\qquad(38)$$

Первая задача решается прогонкой по строкам ($i_2=1,2,\ldots,N_2-1$), вторая - прогонкой по столбцам ($i_1=1,2,\ldots,N_1-1$). Число действий на один узел конечно и не зависит от сетки.

Схема (38) устойчива как по начальным данным, так и по правой части при любых τ и $|h|$ и имеет точность $O\left(\tau^2+|h|^2\right)$. В этом можно убедиться путем исключения $y^{j+1/2}$ и сведения схемы (36), (37) к эквивалентной двухслойной схеме с факторизованным оператором *B*:

$$B\frac{y^{j+!}-y^j}{\tau}+Ay^j=\Phi^j,\ \ j=0,1,\ldots,\ y^0=u_0\in H,\qquad(39)$$

$$B=\left(E+\frac{\tau}{2}A_1\right)\left(E+\frac{\tau}{2}A_2\right),\ \ A_\alpha y=-\Lambda_\alpha\dot{y}=-\dot{y}_{\overline{x}_\alpha x_\alpha},\ \ \alpha=1,2,$$

где $H=\Omega$- пространство сеточных функций, заданных во внутренних узлах сетки ω_h.

Очевидно, что $A_\alpha=A_\alpha^*>0,\ \alpha=1,2,\ A_1A_2=A_2A_1.$ Поэтому $B=E+\tau A/2+\tau^2A_1A_2/2\geq E+\tau A/2>\tau A/2$, и схема устойчива.

Метод суммарной аппроксимации. Чтобы получить экономичные схемы для широкого класса задач (уравнения с переменными коэффициентами, области сложной формы и т.д.), необходимо изменить понятие разностной схемы.

Мы отказываемся от обычного понятия аппроксимации, которое мы рассматривали выше, и заменяем его более слабым понятием *суммарной аппроксимации.* Поясним его. Пусть переход от слоя j к слою $j+1$ осуществляется в несколько этапов, на каждом из которых используется обычная двухслойная схема не аппроксимирующая исходное уравнение, однако сумма невязок для каждой промежуточной схемы

$$\psi = \sum_{\alpha=1}^{p} \psi_\alpha \qquad (40)$$

стремится к нулю при стремлении к нулю шага τ по переменному t.

Рассмотрим в качестве примера уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t),\ x = (x_1, x_2), \qquad (41)$$

$$Lu = \Delta u = L_1 u + L_2 u,\ l_\alpha u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2},\ \alpha = 1,2,$$

L_1 и L_2 - «одномерные» операторы. Решение уравнения

$$\frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial t} = L_\alpha v_{(\alpha)} + f_\alpha, \qquad (42)$$

очевидно, является более простой задачей, чем решение уравнения (41). Условия $L = L_1 + L_2,\ f = f_1 + f_2$ гарантируют суммарную аппроксимацию для схемы, получающейся при обычной аппроксимации, например, с помощью двухслойной схемы с весами каждого из уравнений системы

$$\frac{dv_{(1)}}{dt} = L_1 v_{(1)} + f_1,\ t_j \le t \le t_{j+1},\ v_{(1)}^j = v^j,$$

$$\frac{dv_{(2)}}{dt} = L_2 v_{(2)} + f_2,\ t_j \le t \le t_{j+1},\ v_{(2)}^j = v_{(1)}^{j+1},\ v^{j+1} = v_{(2)}^{j+1}.$$

В результате мы получим аддитивную схему, локально-одномерную схему или схему расщепления

$$\frac{y^{j+1/2} - y^j}{\tau} = \Lambda_1\left(\sigma_1 y^{j+1/2} + (1-\sigma) y^j\right) + \varphi_1^j,\ \ x \in \omega_h, \qquad (43)$$

$$\frac{y^{j+1} - y^{j+1/2}}{\tau} = \Lambda_2\left(\sigma_2 y^{j+1} + (1-\sigma_2) y^{j+1/2}\right) + \varphi_2^j\ \ x \in \omega_h,\ j = 0,1,\ldots,$$

$$y^0 = u_0(x),\ x \in \omega_h$$

$$y^{j+1/2}\Big|_{\gamma_h} = \mu^{j+1/2},\ \ y^{j+1}\Big|_{\gamma_h} = \mu^{j+1}.$$

Здесь $\Lambda_1 y = y_{x_1 x_1},\ \Lambda_2 y = y_{x_2 x_2}$. Параметры σ_1 и σ_2 определяются из условий устойчивости и аппроксимации. Например, при $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ получаем схему с опережением

$$\frac{y^{j+1/2}-y^j}{\tau}=\Lambda_1 y^{j+1/2}+\varphi_1^j,$$
$$\frac{y^{j+1}-y^{j+1/2}}{\tau}=\Lambda_2 y^{j+1}+\varphi_2^j,\ j=0,1,\ldots$$

Подставляя сюда $y^j=z^j+u^j,\ y^{j+1/2}=z^{j+1/2}+\left(u^j+u^{j+1}\right)/2,$ $y^{j+1}=z^{j+1}+u^{j+1}$, получим для погрешности z уравнения

$$\frac{z^{j+1/2}-z^j}{\tau}=\Lambda_1 z^{j+1/2}+\psi_1^j,$$
$$\frac{z^{j+1}-z^{j+1/2}}{\tau}=\Lambda_2 z^{j+1}+\psi_2^j,$$

где u - решение исходной задачи (41), ψ_1 и ψ_2 - невязки равные

$$\psi_1^j=\Lambda_1\frac{u+\hat{u}}{2}-\frac{1}{2}\frac{\hat{u}-u}{\tau}+\varphi_1,\ \psi_2^j=\Lambda_2\hat{u}-\frac{1}{2}\frac{\hat{u}-u}{\tau}+\varphi_2,$$
$$\hat{u}=u^{j+1},\ u=u^j.$$

Отсюда видно, что $\psi_1=O(1),\ \psi_2=O(1)$, т.е. каждое из уравнений (43) в отдельности не аппроксимирует уравнение (41). Возьмем сумму невязок

$$\psi=\psi_1+\psi_2=\Lambda_1\frac{u+\hat{u}}{2}+\Lambda_2\hat{u}-\frac{\hat{u}-u}{\tau}+\varphi_1+\varphi_2=$$
$$=\left(L_1+L_2\right)\bar{u}-\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+\varphi_1+\varphi_2+O\left(\tau+|h|^2\right),\ \text{где}\ \bar{u}=u^{j+1/2}$$

Учитывая уравнение (   ) при $t=t_{j+1/2}$, получим

$$\psi=\varphi_1+\varphi_2-f^{j+1/2}+O\left(\tau+|h|^2\right)=O\left(\tau+|h|^2\right),$$
$$|h|^2=h_1^2+h_2^2,\ \text{если}\ \varphi_1+\varphi_2=f^{j+1/2}+O\left(\tau^2\right).$$

Этого можно достигнуть, полагая, например,

$$\varphi_1=0,\ \varphi_2=f^{j+1/2}\ \text{или}\ \varphi_1=\varphi_2=f^{j+0.5}/2.$$

Можно показать, что схема (43) сходится равномерно со скоростью

$$O\left(\tau+|h|^2\right),\ \text{т.е.}\ \left\|y^{j+1}-u^{j+1}\right\|_c=O\left(\tau+|h|^2\right).$$

Из приведенных примеров видно, что метод суммарной аппроксимации позволяет проводить расщепление сложных задач на последовательность более простых и существенно упрощать решение многомерных задач математической физики.

2.4. Разностные схемы для уравнения колебаний струны

Постановка разностной задачи и вычисление погрешности аппроксимации. Рассмотрим уравнение колебаний однородной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + f_1(x,t), \; 0 < x_1 < l, \; t_1 > 0.$$

Вводя безразмерные переменные $x = x_1/l, \; t = at_1/l,$ перепишем это уравнение в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_1(x,t), \; 0 < x < l, \; 0 < t \le T. \qquad (44)$$

В начальный момент заданы условия

$$u(x,0) = u_0(x), \; \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \bar{u}_0(x) \qquad (45)$$

(начальное отклонение $u_0(x)$ и начальная скорость $\bar{u}_0(x)$). Концы струны движутся по заданным законам

$$u(0,t) = \mu_1(t), \; u(1,t) = \mu_2(t). \qquad (46)$$

Введем в области $D = (0 \le x \le 1, \; 0 \le t \le T)$ прямоугольную сетку $\bar{\omega}_{h\tau}$. Так как уравнение (44) содержит вторую производную по *t*, то число слоев не может быть меньше трех. Воспользуемся обозначениями

$$y = y^j, \; \hat{y} = y^{j+1}, \; \breve{y} = y^{j-1}, \; y_t = \frac{\hat{y} - y}{\tau}, \; y_{\bar{t}} = \frac{y - \breve{y}}{\tau}, \; \Lambda y = y_{\bar{x}x},$$

$$y_{\bar{t}t} = \frac{y_t - y_{\bar{t}}}{\tau} = \frac{\hat{y} - 2y + \breve{y}}{\tau^2}, \; y_t = \frac{y_t + y_{\bar{t}}}{\tau} = \frac{\hat{y} - \breve{y}}{2\tau}.$$

Заменим производные, входящие в уравнение (44), по формулам

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \sim u_{\bar{t}t}, \; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \Lambda u = u_{\bar{x}x}, \; f \sim \varphi.$$

Рассмотрим семейство схем с весами

$$y_{\bar{t}t} = \Lambda\left(\sigma\hat{y} + (1 - 2\sigma)y + \sigma\breve{y}\right) + \varphi, \; \varphi = f(x, t_j),$$
$$y_0 = \mu_1(t), \; y_N = \mu_2(t), \; y(x,0) = u_0(x), \; y_t(x,0) = \tilde{u}_0(x), \qquad (47)$$

где $\tilde{u}_0(x)$ определим ниже.

Краевые условия и первое начальное условие $u(x,0) = u_0(x)$ на сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$ удовлетворяются точно. Выберем $\tilde{u}_0(x)$ так, чтобы погрешность аппроксимации $\tilde{u}(x) - \partial u(x,0)/\partial t = \tilde{u}(x) - \bar{u}_0(x)$ была величиной $O(\tau^2)$. Из формулы

$$u_t(x,0) = \dot{u}(x,0) + 0.5\tau\,\ddot{u}(x,0) + O(\tau^2) = \bar{u}_0(x) + 0.5\tau\left(u''(x,0) + f(x,0)\right) + O(\tau^2) =$$
$$= \bar{u}_0(x) + 0.5\tau\left(u_0''(x) + f(x,0)\right) + O(\tau^2)$$

видно, что $\bar{u}(x)-u_t(x,0)=O\left(\tau^2\right)$, если положить

$$\bar{u}_0(x)=\bar{u}_0+0.5\left(u_0''(x)+f(x,0)\right). \tag{48}$$

Таким образом, разностная задача (47) - (48) поставлена. Для определения $\hat{y}=y^{j+1}$ получаем из (47) краевую задачу

$$\sigma\gamma^2\left(y_{i+1}^{j+1}+y_{i-1}^{j+1}\right)-\left(1+2\sigma\gamma^2\right)y_i^{j+1}=-F_i,\ 0<i<N,\ y_0=\mu_1,\ y_N=\mu_2,$$

$$\gamma=\tau/h,\ F_i=\left(2y_i^j-y_i^{j-1}\right)+\tau^2(1-2\sigma)\Lambda y^j+\sigma\tau^2\Lambda y^{j-1}+\tau^2\varphi,$$

которая решается методом прогонки. Прогонка устойчива при $\sigma>0$.

Вычислим погрешность аппроксимации схемы (47) при $\varphi=f\left(x,t_j\right)$. Пусть y - решение задачи (47) - (48), $u=u(x,t)$ - решение задачи (44) - (45). Подставляя $y=z+u$ в (47), получим

$$\begin{gathered} z_{\bar{t}t}=\Lambda\left(\sigma\hat{z}+(1-2\sigma)z+\sigma\check{z}\right)+\psi, \\ z_0=z_N=0,\ z(x,0)=0,\ z_t(x,0)=\nu(x), \end{gathered} \tag{49}$$

где $\psi=\Lambda\left(\sigma\hat{u}+(1-2\sigma)u+\sigma\check{u}\right)+\varphi-u_{\bar{t}t}$ - погрешность аппроксимации для схемы ( ) на решении $u=u(x,t)$, $\nu=\bar{u}_0(x)-u_t(x,0)$ - погрешность аппроксимации для второго начального условия $y_t=\bar{u}_0(x)$. Из предыдущего ясно, что $\nu=O\left(\tau^2\right)$.

Учитывая, что $\hat{u}=u+\tau u_t$, $\check{u}=u-\tau u_{\bar{t}}$, имеем $\sigma\hat{u}+(1-2\sigma)u+\sigma\check{u}=u+\sigma\tau^2u_{\bar{t}t}$, т.е.

$$\psi=\Lambda u+\sigma\tau^2\Lambda u_{\bar{t}t}+\varphi-u_{\bar{t}t}=Lu+\sigma\tau^2L\ddot{u}+f-\ddot{u}+O\left(\tau^2+h^2\right), \tag{50}$$

$\psi=O\left(\tau^2+h^2\right)$ при любом значении постоянной σ (σ не зависит от τ и h).

Пусть $\sigma=\bar{\sigma}-h^2/\left(12\tau^2\right)$, где $\bar{\sigma}$ - постоянная, которая не зависит от τ и h и выбирается так, чтобы схема (47) была устойчивой (достаточно потребовать $\bar{\sigma}\geq 1/\left(4(1-\varepsilon)\right)$, так как схема устойчива при $\sigma\geq 1/\left(4(1-\varepsilon)\right)-1/\left(4\gamma^2\right)$, $\gamma=\tau/h$, $\varepsilon>0$). Тогда при

$$\varphi=f+\frac{h^2}{12}f'' \tag{51}$$

схема (47) имеет повышенный порядок аппроксимации $\psi=O\left(h^4+\tau^2\right)$.

Краевые условия третьего рода

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \beta_1 u(0,t) - \mu_1(t),$$

$$-\frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = \beta_2 u(1,t) - \mu_2(t)$$

аппроксимируются следующими разностными уравнениями:

$$\rho_1 y_{\bar{t}t} = \Lambda^-\left(\sigma\hat{y} + (1-2\sigma)y + \sigma\check{y}\right) + \varphi^-, \ i = 0,$$

$$\rho_2 y_{\bar{t}t} = \Lambda^+\left(\sigma\hat{y} + (1-2\sigma)y + \sigma\check{y}\right) + \varphi^+, \ i = N,$$

где $\Lambda^- y = \frac{y_x - \beta_1 y}{0.5h}$, $\Lambda^+ y = \frac{y_{\bar{x}} - \beta_2 y}{0.5h}$, $\varphi^- = \rho_1\varphi + \frac{\nu_1}{0.5h}$, $\varphi^+ = \rho_2\varphi + \frac{\nu_2}{0.5h}$.

При этом погрешность аппроксимации краевых условий есть величина $O\left(\tau^2 + h^2\right)$, если $\varphi = f(x,t)$, $\rho_1 = \rho_2 = 1$, $\nu_1 = \mu_1(t)$, $\nu_2 = \mu_2(t)$. Если же

$$\sigma = -\frac{h^2}{12\tau^2} + \bar{\sigma}, \ \bar{\sigma} = const, \ \rho_1 = 1 + \frac{h\beta_1}{3}, \ \rho_2 = 1 + \frac{h\beta_2}{3}, \ \varphi = f(x,t) + \frac{h^2}{12} f'',$$

$$\nu_1(t) = \mu_1(t) + \frac{h^2}{6}\left(\frac{\ddot{\mu}_1(t)}{2} + f'(0,t) - \beta_1 f(0,t)\right),$$

$$\nu_2(t) = \mu_2(t) + \frac{h^2}{6}\left(\frac{\ddot{\mu}_{21}(t)}{2} + f'(1,t) - \beta_2 f(1,t)\right),$$

то получим схему точности $O\left(h^4 + \tau^2\right)$. Эта схема аппроксимирует исходное уравнение в узлах x=0, x=1 с погрешностью $O\left(\frac{\tau^2 + h^4}{h}\right)$, краевые условия с погрешностью $O\left(\tau^2 + h^4\right)$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самарский А.А.* Введение в численные методы. М., 1982.
2. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.,1977
3. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. М., 1989.
4. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М., 1988.
5. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М., 1987.
6. *Волков Е.А.* Численные методы. М., 1987.
7. *Петров А.В. и др.* Вычислительная техника в инженерных и экономических расчетах. М., 1984.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Задание 1. Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона.

1. Постановка задачи

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -f(x),\ x = (x_1, x_2) \in D = \{0 < x_\alpha < 1,\ \alpha = 1,2\}$$

$$u|_\Gamma = \mu(x), \quad \bar{D} = D + \Gamma$$

2. Построить модельную задачу, исходя из точного решения (n - номер варианта):

   а) $u(x_1, x_2) = nx_1^3 + x_2^3 + nx_1 + x_2 + n$ для $n = 1 \div 6$,

   б) $u(x_1, x_2) = x_1^3 + nx_2^3 + x_1 + nx_2 + 0.1n$ для $n = 7 \div 13$.

3. На сетке $\bar{\omega}_h = \{(ih, jh), i = \overline{0,N},\ j = \overline{0,N},\ h = 1/N\}$ поставить в соответствии исходной задаче разностную задачу

$$\Lambda y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} = -f(x),\ \ x \in \omega_h$$

$$y|_{\gamma_h} = \mu(x),\ x \in \gamma_h.$$

4. Для решения полученной системы разностных уравнений применить итерационные методы Зейделя и верхней релаксации:

$$y_{ij}^{k+1} = \omega\left(y_{i-1,j}^{(k+1)} + y_{i,j-1}^{(k+1)} + y_{i+1,j}^{(k)} + y_{i,j+1}^{(k)} + h^2 f_{ij}\right)\Big/4 + (1-\omega)y_{ij}^{(k)},$$

$$i = \overline{1, N-1},\quad j = \overline{1, N-1}$$

$$y|_{\gamma_h} = \mu(x),\ k = 0,1,2,\ldots$$ - номер итерации.

5. Условие окончания счета

$$\max_{1 \le i,j \le N-1} \left| \frac{y_{ij}^{(k+1)} - y_{ij}^{(k)}}{y_{ij}^{(k+1)}} \right| < \varepsilon$$

6. Полученное приближенное решение сравнить с точным. Печатать

   1) $\|z\|_c = \|y - u\|_c = \max\limits_{i,j} |y_{ij} - u_{ij}|,\ i, j = \overline{1, N-1}$;

   2) k - количество итераций в зависимости от ε и итерационного параметра ω.

Задание 2. Решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности.

1. Постановка задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \; \overline{D} = \{0 \le x \le 1, \; 0 \le t \le T\}$$

$$u(x,0) = u_0(x)$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \; u(1,t) = \mu_2(t).$$

2. Построить модельную задачу, исходя из точного решения (n - номер варианта):

   а) $u(x,t) = x^2 t^2 + nx^t + x + n$ для $n = 1 \div 6$,

   б) $u(x,t) = nx^2 t^2 + xt + nx + 1$ для $n = 7 \div 13$.

3. На сетке $\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau = \{(ih, j\tau), i = \overline{0,N}, \; j = \overline{0,M}, \; h = 1/N, \; \tau = T/M\}$ поставить в соответствии исходной задаче разностную схему с весами

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \sigma \frac{y_{i-1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i+1}^{j+1}}{h^2} + (1-\sigma)\frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2} + \varphi_i^j,$$

$$i = \overline{1, N-1}, \; j = \overline{0, M-1},$$

$$\varphi_i^j = f(ih, \tau(j+0.5)),$$

$$y_i^0 = u_0(ih), \; y_0^j = \mu_1(j\tau), \; y_N^j = \mu_2(j\tau), \; j = \overline{0,M}.$$

4. Для решения полученной системы разностных уравнений (для σ=0.5, σ=1) на каждом временном слое $t_j = j\tau \;\; (j = \overline{1,M})$ применить метод прогонки

5. Полученное решение сравнить с точным. Печатать $\|z\|_c = \|y - u\|_c = \max\limits_{i,j}\left|y_i^j - u(ih, j\tau)\right|$. Убедиться в том, что при уменьшении h и τ норма погрешности решения уменьшается.

Задание 3. Решение начально-краевой задачи для уравнения колебаний струны

1. Постановка задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x)$$

$$u(0,t) = \mu_1(t),\ u(1,t) = \mu_2(t)$$

2. Построить модельную задачу, исходя из точного решения (n - номер варианта):

   а) $u(x,t) = x^3t^3 + nxt + x + n$ для $n = 1 \div 6$,

   б) $u(x,t) = nx^3t^3 + xt + nx + 1$ для $n = 7 \div 13$.

3. На сетке $\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau = \left\{(ih, j\tau), i = \overline{0,N},\ j = \overline{0,M},\ h = 1/N,\ \tau = T/M\right\}$ поставить в соответствии исходной задаче разностную схему с весами

$$\frac{y_i^{j-1} - 2y_i^j + y_i^{j+1}}{\tau^2} = \sigma \frac{y_{i-1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i+1}^{j+1}}{h^2} + (1 - 2\sigma)\frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2} +$$

$$+ \sigma \frac{y_{i-1}^{j-1} - 2y_i^{j-1} + y_{i+1}^{j-1}}{h^2} + \varphi_i^j,\quad i = \overline{1, N-1},\ j = \overline{0, M-1},\ \varphi_i^j = f(ih, j\tau),$$

$$y_0^j = \mu_1(j\tau),\ y_N^j = \mu_2(j\tau),\ j = \overline{0,M},$$

$$y_i^0 = u_0(ih),\ i = \overline{0,N},$$

$$\frac{y_i^1 - y_i^0}{\tau} = u_1(ih) + 0.5\tau\left(u_0''(ih) + f(ih,0)\right),\ i = \overline{1,N-1}.$$

4. Для решения полученной системы разностных уравнений (для σ>0) на каждом временном слое $t_j = j\tau$ $(j = \overline{2,M})$ применить метод прогонки

5. Полученное решение сравнить с точным. Печатать $\|z\|_c = \|y - u\|_c = \max\limits_{i,j}\left|y_i^j - u(ih, j\tau)\right|$. Убедиться в том, что при уменьшении h и τ норма погрешности решения уменьшается.