9. ПОСТРОЕНИЕ РЕГУЛЯТОРА ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О ВЕКТОРЕ СОСТОЯНИЯ

Постановка задачи восстановления (наблюдения)

Рассмотрим объект управления, возмущённое движение которого описывается уравнением

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t), X(t_0) = X_0,$$

где $X \in R^n$ - вектор состояний, $U \in R^m$ - вектор управлений, A, B,– числовые матрицы соответствующих размеров.

Пусть в результате синтеза получено оптимальное управление

$$U(t) = FX(t).$$

Реализация этого управления часто затруднена тем обстоятельством, что не все переменные состояния доступны непосредственному измерению, а можно измерить лишь компоненты r – мерного вектора Y(t), связанные с переменными состояния соотношением

$$Y(t) = CX(t).$$

Осуществить управление (11.2) в этом случае невозможно (вектор $X(t)$ неизвестен). В связи с этим возникает задача восстановления (наблюдения, оценки) вектора $X(t)$ по результатам измерения $Y(t)$ на интервале $[t_0, t]$. После того как вектор состояния восстановлен, можно реализовать управление (11.2), заменив в нём действительное состояние восстановленным вектором состояния

$$U(t) = F\hat{X}(t),$$

где $\hat{X}(t)$ - оценка вектора $X(t)$.

Устройство, решающее задачу восстановления (наблюдения), называется наблюдателем.

Наблюдатель полного порядка

Существуют различные виды наблюдателей: наблюдатель полного порядка, наблюдатель пониженного порядка, наблюдатель Люенбергера, наблюдатель, построенный на основе модального управления, оптимальный наблюдатель (оптимальный фильтр Калмана-Бьюси).

Рассмотрим вначале простейшее устройство восстановления, которое описывается уравнением

$$\dot{\hat{X}} = A\hat{X} + BU, \hat{X}(t_0) = \hat{X}_0.$$

Очевидно, что если $\hat{X}_0 = X_0$, то решение уравнения (11.4) точно совпадает с решением уравнения (11.1).

Если $\hat{X}_0 \neq X_0$, то возникает ошибка восстановления

$$e(t) = X(t) - \hat{X}(t).$$

Она удовлетворяет уравнению

$$\dot{e}(t) = Ae(t), e(t_0) = X_0 - \hat{X}_0.$$

Если объект управления асимптотически устойчив, т. е. собственные числа матрицы А имеют отрицательные действительные части ($\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$), то ошибка восстановления будет с течением времени уменьшаться ($\lim\limits_{t\to\infty} e(t) = 0$).

Это ограничение свойств объекта можно избежать, если обратить внимание на то, что в устройстве восстановления (11.4) не используются измеряемые переменные $Y(t)$. Сравниваются измеренные значения вектора $Y(t)$ с восстановленными $C\hat{X}(t)$, построим наблюдатель с коррекцией по ошибке восстановления. Он описывается уравнением

$$\dot{\hat{X}}(t) = A\hat{X}(t) + K\left[Y(t) - C\hat{X}(t)\right] + BU(t), \hat{X}(t_0) = \hat{X}_0 ,$$

где K – некоторая матрица размеров $n \times r$, называемая матрицей коэффициентов усиления наблюдателя.

Теперь ошибка восстановления удовлетворяет уравнению

$$\dot{e}(t) = [A - KC]e(t), e(t_0) = X_0 - \hat{X}_0.$$

Если существует матрица K такая, что наблюдатель (11.6) асимптотически устойчив, то в соответствии с (11.7) ошибка восстановления $e(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Поскольку размерность вектора состояния наблюдателя (11.6) равна размерности вектора состояния объекта управления, то такие наблюдатели называются наблюдателями полного порядка.

Оптимальный наблюдатель (оптимальный фильтр Калмана-Бьюси)

В соответствии с этим методом матрица K уравнения наблюдателя определяется как

$$K = P_e C^T,$$

где P_e – матрица чисел (размеров n×n) есть решение алгебраического уравнения

$$AP_e + P_e A^T - P_e C^T C P_e + Q_H = 0.$$

Замечание 1. Слово «оптимальный» объясняется тем обстоятельством, что построенный наблюдатель является оптимальным в смысле функционала

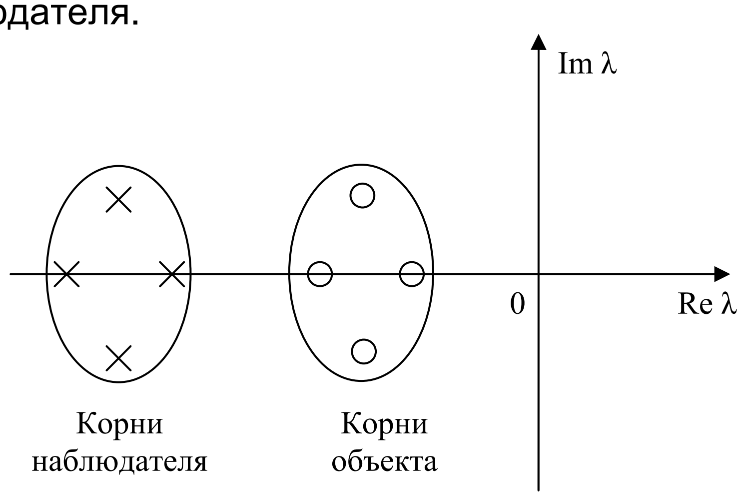
$$J = \lim_{t\to\infty} M\left[e^T(t)\Lambda e(t)\right],$$

где M – символ математического ожидания, Λ - заданная положительно определенная матрица, $e(t) = X(t) - \hat{X}(t)$ - ошибка восстановления (наблюдения, фильтрации).

Замечание 2. Выражение (11.9) по форме совпадает с уравнением Риккати, если в нём заменить A на A^T, B на C^T, Q_n положительно определённая матрица чисел, размеров $n \times n$. Матрица P_e аналог матрица P уравнения Риккати.

Замечание 3. В отличие от уравнения Риккати нет рекомендаций по выбору Q_n.

Замечание 4. Наблюдатель является линейной динамической системой, которая имеет свои установившиеся ошибки $\hat{X}_{уст}$. В настоящее время не установлено как эти ошибки влияют на установившиеся ошибки исходной системы, а также на её динамику. Естественно добиваться лишь того, чтобы собственные числа наблюдателя лежали левее собственных чисел объекта управления. В этом случае наблюдатель будет оказывать меньшее влияние на динамику объекта. Динамика объекта без наблюдателя будет мало отличаться от динамики объекта с наблюдателем.
Этого можно добиться выбором Q_n, от которой в итоге зависит матрица K наблюдателя.



Структура оптимальной системы с наблюдателем

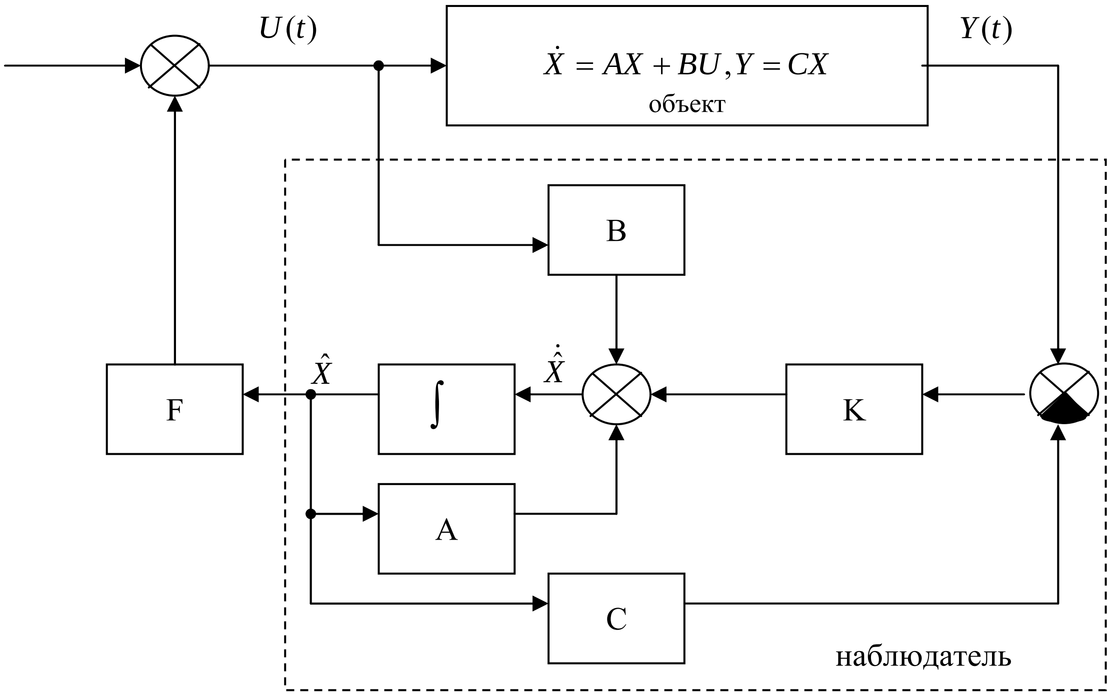
Система управления с наблюдателем описывается уравнением

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t),\ Y(t) = CX(t),$$

$$\dot{\hat{X}}(t) = [A - KC]\hat{X}(t) + KY(t) + BU(t),$$

$$U(t) = F\hat{X}(t).$$

Приведём структурную схему системы с наблюдателем



Осуществим эквивалентное преобразование системы. Вычтем из первого уравнения (11.11) уравнение (11.12) и заменяя в (11.13) $\hat{X} = X - e$, получим

$$\underbrace{\dot{X} - \dot{\hat{X}}}_{\dot{e}} = AX - A\hat{X} + KC\hat{X} - KY + BU - BU .$$

Тогда

$$\dot{e} = A\underbrace{\left(X - \hat{X}\right)}_{e} + KC\hat{X} - K\underbrace{CX}_{Y} \text{ или } \dot{e} = Ae - KC\underbrace{\left(X - \hat{X}\right)}_{e}.$$

Откуда

$$\dot{e}(t) = [A - KC]e(t) .$$

Поэтому

$$\dot{X} = AX + BU, U = F\hat{X} \rightarrow \dot{X} = AX + BF\hat{X} \xrightarrow{\hat{x}=x-e}$$

$$\dot{X} = AX + BF\left(X - e\right) \rightarrow$$

$$\dot{X}(t) = \left[A + BF\right]X(t) - BFe(t).$$

Найдём характеристический полином системы (11.14), (11.15)

$$\begin{bmatrix} A - KC & 0 \\ -BF & A + BF \end{bmatrix} = A_1$$

$$\det\left(A_1 - \lambda E_{2n}\right) = \det\begin{bmatrix} A - KC - \lambda E_n & 0 \\ -BF & A + BF - \lambda E_n \end{bmatrix} =$$

$$= \det\left(A - KC - \lambda E_n\right)\det\left(A + BF - \lambda E_n\right).$$

Из этого выражения следует, что корни характеристического полинома оптимальной системы с наблюдателем состоит из корней характеристического полинома оптимальной системы

$$\det\left(A + BF - \lambda E_n\right)$$

и корней характеристического полинома наблюдателя.

$$\det\left(A - KC - \lambda E_n\right)$$

Таким образом, можно проводить раздельные построения закона управления и наблюдателя.