



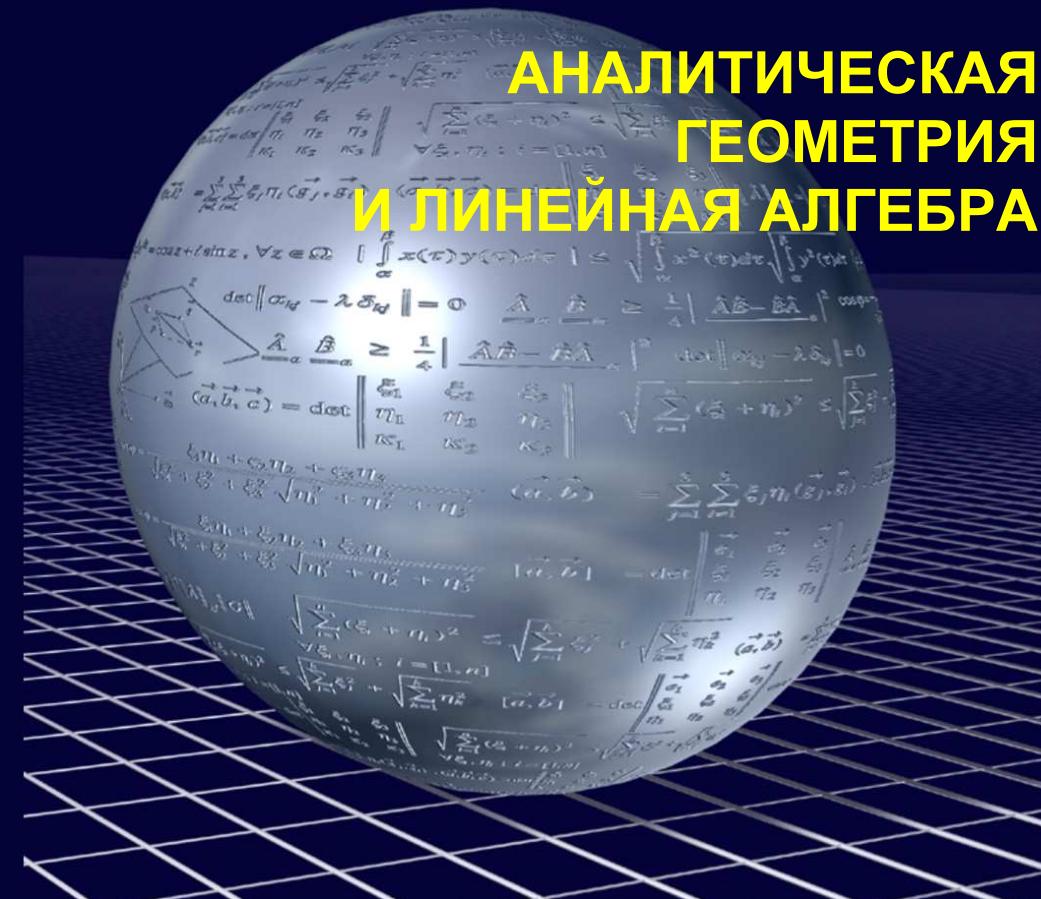
Умнов Александр Евгеньевич, д.т.н.,  
профессор кафедры высшей математики  
Московского физико-технического института,  
автор более ста научных и учебных трудов,  
опубликованных как в нашей стране, так и  
за рубежом.

Умнов А. Е.

## АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

А. Е. Умнов

ISBN 5-7417-0378-X  
  
9 785741 703786



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

**А. Е. Умнов**

# **АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА**

3-е издание, исправленное и дополненное

*Рекомендовано  
Учебно-методическим объединением  
высших учебных заведений Российской Федерации  
по образованию в области прикладных математики и физики  
в качестве учебного пособия для студентов вузов  
по направлению «Прикладные математика и физика»*

МОСКВА  
МФТИ  
2011

УДК 514.12(075)  
ББК 22.151.59я73  
У54

**Рецензенты:**

Кафедра кибернетики Московского государственного института  
электроники и математики (технического университета)  
(зав. каф. доктор технических наук, профессор *В. Н. Афанасьев*)  
Доктор физико-математических наук, профессор *В. В. Дикусар*

**Умнов, А. Е.**

У54      Аналитическая геометрия и линейная алгебра :  
учеб. пособие / А. Е. Умнов. – 3-е изд., испр. и доп. –  
М. : МФТИ, 2011. – 544 с.  
ISBN 978-5-7417-0378-6

Пособие написано на основе лекций, читающихся автором студентам Московского физико-технического института (государственного университета), и является введением в теорию линейных пространств, состав и упорядочение материала которого определены ориентацией на прикладной характер спецификации читателя.

Предназначено для студентов физических и технических специальностей университетов и вузов.

**УДК 514.12(075)**  
**ББК 22.151.59я73**

**ISBN 978-5-7417-0378-6**

© Умнов А. Е., 2011

© Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего  
профессионального образования  
«Московский физико-технический институт  
(государственный университет)», 2011

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение .....</b>	<b>8</b>
<b>От автора .....</b>	<b>10</b>
<b>Глава 1. Векторы и линейные операции с ними .....</b>	<b>12</b>
§ 1.1. Матричные объекты .....	12
§ 1.2. Направленные отрезки .....	21
§ 1.3. Определение множества векторов .....	24
§ 1.4. Линейная зависимость векторов .....	28
§ 1.5. Базис. Координаты вектора в базисе .....	34
§ 1.6. Действия с векторами в координатном представлении .....	38
§ 1.7. Декартова система координат .....	44
§ 1.8. Изменение координат при замене базиса и начала координат .....	47
<b>Глава 2. Произведения векторов .....</b>	<b>54</b>
§ 2.1. Ортогональное проектирование .....	54
§ 2.2. Скалярное произведение векторов и его свойства .....	57
§ 2.3. Выражение скалярного произведения в координатах .....	59
§ 2.4. Векторное произведение векторов и его свойства .....	61
§ 2.5. Выражение векторного произведения в координатах .....	65
§ 2.6. Смешанное произведение .....	68
§ 2.7. Выражение смешанного произведения в координатах .....	70
§ 2.8. Двойное векторное произведение .....	72
§ 2.9. Замечания об инвариантности произведений векторов .....	75

---

<b>Глава 3. Прямая и плоскость .....</b>	<b>79</b>
§ 3.1. Прямая на плоскости .....	79
§ 3.2. Способы задания прямой на плоскости .....	84
§ 3.3. Плоскость в пространстве .....	93
§ 3.4. Способы задания прямой в пространстве .....	103
§ 3.5. Решение геометрических задач методами векторной алгебры .....	107
<b>Глава 4. Нелинейные объекты на плоскости и в пространстве .....</b>	<b>119</b>
§ 4.1. Линии на плоскости и в пространстве .....	119
§ 4.2. Поверхности в пространстве .....	124
§ 4.3. Цилиндрические и конические поверхности .....	127
§ 4.4. Линии второго порядка на плоскости .....	130
§ 4.5. Поверхности второго порядка в пространстве ....	138
§ 4.6. Альтернативные системы координат .....	141
<b>Глава 5. Преобразования плоскости .....</b>	<b>147</b>
§ 5.1. Умножение матриц .....	147
§ 5.2. Операторы и функционалы. Отображения и преобразования плоскости .....	158
§ 5.3. Линейные операторы на плоскости .....	161
§ 5.4. Аффинные преобразования и их свойства .....	169
§ 5.5. Ортогональные преобразования плоскости .....	184
§ 5.6. Понятие группы .....	189
<b>Глава 6. Системы линейных уравнений .....</b>	<b>191</b>
§ 6.1 Определители .....	191
§ 6.2 Свойства определителей .....	192
§ 6.3. Разложение определителей .....	199
§ 6.4. Правило Крамера .....	205
§ 6.5. Ранг матрицы .....	208
§ 6.6. Системы $m$ линейных уравнений с $n$ неизвестными .....	213
§ 6.7. Фундаментальная система решений .....	216
§ 6.8. Элементарные преобразования. Метод Гаусса ...	227

<b>Глава 7. Линейное пространство .....</b>	<b>235</b>
§ 7.1. Определение линейного пространства .....	235
§ 7.2. Линейная зависимость, размерность и базис в линейном пространстве .....	239
§ 7.3. Подмножества линейного пространства .....	244
§ 7.4. Операции с элементами линейного пространства в координатном представлении .....	251
§ 7.5. Изоморфизм линейных пространств .....	254
<b>Глава 8 Линейные зависимости в линейном пространстве .....</b>	<b>267</b>
§ 8.1. Линейные операторы .....	267
§ 8.2. Действия с линейными операторами .....	269
§ 8.3. Координатное представление линейных операторов .....	275
§ 8.4. Область значений и ядро линейного оператора ..	283
§ 8.5. Инвариантные подпространства и собственные векторы .....	296
§ 8.6. Свойства собственных векторов и собственных значений .....	303
§ 8.7. Линейные функционалы .....	317
<b>Глава 9. Нелинейные зависимости в линейном пространстве .....</b>	<b>325</b>
§ 9.1. Билинейные функционалы .....	325
§ 9.2. Квадратичные функционалы .....	329
§ 9.3. Исследование знака квадратичного функционала .....	339
§ 9.4. Инварианты линий второго порядка на плоскости .....	348
§ 9.5. Экстремальные свойства квадратичных функционалов .....	353
§ 9.6. Полилинейные функционалы .....	354
<b>Глава 10. Евклидово пространство .....</b>	<b>356</b>
§ 10.1. Определение и основные свойства .....	356
§ 10.2. Ортонормированный базис. Ортогонализация базиса .....	360

§ 10.3.	Координатное представление скалярного произведения .....	362
§ 10.4.	Ортогональные матрицы в евклидовом пространстве .....	368
§ 10.5.	Ортогональные дополнения и ортогональные проекции в евклидовом пространстве .....	372
§ 10.6.	Сопряженные операторы в евклидовом пространстве .....	378
§ 10.7.	Самосопряженные операторы .....	383
§ 10.8.	Ортогональные операторы .....	391
<b>Глава 11. Унитарное пространство .....</b>		<b>400</b>
§ 11.1.	Определение унитарного пространства .....	400
§ 11.2.	Линейные операторы в унитарном пространстве .....	403
§ 11.3.	Эрмитовы операторы .....	405
§ 11.4.	Эрмитовы функционалы. Среднее значение и дисперсия эрмитова оператора .....	410
§ 11.5.	Соотношение неопределенностей .....	413
<b>Глава 12. Прикладные задачи линейной алгебры .....</b>		<b>415</b>
§ 12.1.	Приведение квадратичных функционалов к диагональному виду .....	415
§ 12.2.	Классификация поверхностей второго порядка .....	431
§ 12.3.	Аппроксимация функций многочленами .....	435
<b>Приложение 1. Свойства линий второго порядка на плоскости .....</b>		<b>443</b>
Прил. 1.1	Вырожденные линии второго порядка ....	443
Прил. 1.2	Эллипс и его свойства .....	445
Прил. 1.3.	Гипербола и ее свойства .....	452
Прил. 1.4.	Парабола и ее свойства .....	459
<b>Приложение 2. Свойства поверхностей второго порядка .....</b>		<b>465</b>
Прил. 2.1.	Вырожденные поверхности второго порядка .....	465
Прил. 2.2.	Эллипсоид .....	466
Прил. 2.3.	Эллиптический параболоид .....	467

Прил. 2.4.	Гиперболический параболоид .....	469
Прил. 2.5.	Однополостный гиперболоид .....	472
Прил. 2.6.	Двуполостный гиперболоид .....	474
Прил. 2.7.	Поверхности вращения .....	475
<b>Приложение 3.</b>	<b>Комплексные числа .....</b>	<b>478</b>
<b>Приложение 4.</b>	<b>Элементы тензорного исчисления .....</b>	<b>488</b>
Прил. 4.1.	Замечания об определении объектов в линейном пространстве .....	488
Прил. 4.2.	Определение и обозначение тензоров .....	496
Прил. 4.3.	Операции с тензорами .....	504
Прил. 4.4.	Тензоры в евклидовом пространстве .....	515
Прил. 4.5.	Тензоры в ортонормированном базисе.....	520
<b>Литература .....</b>		<b>528</b>
<b>Предметный указатель .....</b>		<b>529</b>

## **ВВЕДЕНИЕ**

Отличительной чертой подготовки специалистов в Московском физико-техническом институте – системы "Физтеха", является сочетание интенсивности обучения с высоким уровнем детализации и глубины изучаемых предметов, в первую очередь естественных наук. Кафедра высшей математики МФТИ как важный элемент этой системы с момента образования института продолжает вносить существенный вклад в ее формирование и совершенствование.

В активе кафедры колossalный опыт в виде учебных курсов, оригинальных лекций по многим разделам современной математики, системы заданий, методических разработок, приемов, внутрикафедральных материалов, наконец, педагогического фольклора. На кафедре сформировался коллектив преподавателей, педагогически одаренных и обладающих педагогическим мастерством. Поэтому вполне естественно стремление сделать этот опыт всеобщим достоянием.

Многое уже отражено в известных учебниках, задачниках, созданных выдающимися математиками и педагогами, среди которых В. С. Владимиров, С. М. Никольский, Л. Д. Кудрявцев, М. В. Федорюк и многие другие. Без сомнения, эти ставшие уже классическими учебные пособия оказали и оказывают существенное влияние на математическое образование как в России, так и за ее пределами.

Вместе с тем есть еще немало того, что, несомненно, будет существенно полезным для улучшения подготовки специалистов. Естественным путем для выявления этого опыта, как нам представляется, могла бы быть серия "*Лекции кафедры высшей математики МФТИ*", и мы будем благодарны всем, кто окажет поддержку и посильную помощь в осуществлении данного проекта.

В настоящем издании читателю предлагается одна из книг задуманной серии – расширенный курс лекций, который профессор А. Е. Умнов ряд лет читает студентам первого курса Московского физико-технического института. Подготовка первого издания осуществлена при поддержке ООО "Промфинэнерго".

По содержанию и стилю изложения материала данная книга рассчитана на студентов физико-математических и технических специальностей высших учебных заведений с углубленной подготовкой по математике. В ней представлены как традиционные разделы аналитической геометрии, теории матриц, теории линейных систем и конечномерных векторных пространств, так и некоторые дополнительные разделы линейной алгебры, важные для студентов физических специальностей.

На кафедре высшей математики МФТИ лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре в разное время читали многие выдающиеся ученые и педагоги, такие, как Ф. Р. Гантмахер, В. Б. Лидский, А. А. Абрамов, Д. В. Беклемишев, В. А. Треногин и другие. Сам автор, будучи последовательно студентом, аспирантом, преподавателем и профессором этой кафедры, не мог не испытать влияния своих учителей. Структура и дух его лекций вполне традиционны для кафедры высшей математики МФТИ. В изложении материала автор успешно сочетает, не злоупотребляя абстраクциями, достаточно высокий уровень строгости с простотой и ясностью.

Предлагаемый читателям курс лекций А. Е. Умнова "Аналитическая геометрия и линейная алгебра" рекомендован кафедрой высшей математики Московского физико-технического института в качестве учебного пособия для студентов МФТИ. Эта книга также может быть использована в качестве учебного пособия и в других учебных заведениях с расширенной подготовкой по высшей математике.

Г. Н. Яковлев  
Член-корреспондент РАО,  
профессор.  
Август, 1997 год

## **От автора**

Данное пособие предназначено для студентов физических и технических специальностей высших учебных заведений с расширенной подготовкой по высшей математике. Его основной целью является введение в теорию линейных пространств – математический аппарат, используемый в разнообразных прикладных дисциплинах: от квантовой механики до методов оптимального управления. Имея в виду особыю терминологическую специфику этой теории, ее описание предваряется изложением основ евклидовой геометрии, выполненным при помощи понятий, характерных для теории линейных пространств.

Включенный в пособие материал в основном соответствует программе курса “Аналитическая геометрия и линейная алгебра”, читаемого для студентов первого курса Московского физико-технического института. Также рассматриваются некоторые дополнительные вопросы, облегчающие изучение студентами математического аппарата теоретической физики и в первую очередь квантовой механики. Задачи, небольшое число которых включено в состав пособия, по мнению автора, существенны для понимания курса в целом.

Предполагается, что читатель владеет основными понятиями курса элементарной геометрии, а также знаком в минимальном объеме с дифференциальным и интегральным исчислением.

Используемая система обозначений единообразна для всех разделов пособия, что привело к небольшим различиям от традиционной системы обозначений, в частности:

- действительные числа, как правило, обозначаются строчными греческими буквами (исключение сделано лишь для декартовых координат  $x$ ,  $y$  и  $z$ , целочисленных индексов и некоторых других стандартных обозначений);
- строчные латинские буквы в основном использованы для обозначения более сложных, чем действительные числа, объектов: векторов, комплексных чисел, элементов линейных пространств, функций, функционалов, операторов, а также различных геометрических объектов;

- матрицы обозначаются прописными латинскими буквами с двойными вертикальными ограничителями: например,  $\|A\|$ ;
- во избежание конфликтов, для обозначений длин, абсолютных величин, модулей и норм используются одинарные вертикальные ограничители: например,  $\left| \stackrel{\rightarrow}{a} \right|$ , в то время как для обозначения определителей матриц этот вид ограничителей не применяется, а используется обозначение функционального вида: например,  $\det \| A \|$ .

Автор выражает глубокую признательность преподавателям и сотрудникам кафедры высшей математики МФТИ, советы и замечания которых в большой степени способствовали улучшению пособия, и в первую очередь И. А. Чубарову, В. И. Чехлову, С. В. Ивановой и В. Б. Трушину.

## Предисловие ко второму изданию

Со времени выхода в свет в 1997 году первого издания были учтены многочисленные рекомендации, позволившие улучшить структуризацию материала, включенного в пособие, исправлены замеченные опечатки и неточности.

Автор особо благодарен посетителям интернет-сайта [www.umnov.ru](http://www.umnov.ru) за доброжелательную критику и конструктивные замечания по версии текста, доступной на этом сайте.

# Глава 1

## ВЕКТОРЫ

# И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ С НИМИ

### § 1.1. Матричные объекты

Аналитическое описание геометрических фигур и тел, равно как и операций с ними, может быть в большом числе случаев упрощено за счет использования специального математического объекта, называемого *матрицей*.

**Определение 1.1.1.** Матрицей размера  $m \times n$  называется упорядоченная прямоугольная таблица (или массив) чисел, содержащая  $m$  строк и  $n$  столбцов.

Числа, входящие в описание матрицы, называемые ее элементами (или компонентами), характеризуются как своим значением, так и номерами строк и столбцов, в которых они расположены. Условимся обозначать элемент матрицы, расположенный в  $i$ -й строке и  $j$ -м столбце, как  $\alpha_{ij}^1$ .

**Определение 1.1.2.** Числа  $m$ ,  $n$  и  $m \times n$  называются размерами матрицы.

Матрицы обозначаются и записываются перечислением их элементов. Например, матрица с элементами

$$\alpha_{ij}; i = [1, m]; j = [1, n]$$

или же в развернутой форме:

---

<sup>1</sup> Следует читать “альфа  $i - j$ “.

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix};$$

$$\left\| \begin{array}{cccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \dots & \alpha_{mn} \end{array} \right\|,$$

из которых будем использовать последнюю. Если же потребуется не-развернутое представление матрицы, то мы запишем ее в виде  $\|\alpha_{ij}\|$  или просто  $\|A\|$ .

Матрицы принято классифицировать по количеству их строк и столбцов.

**Определение 1.1.3.** Если  $m = n$ , то матрица называется *квадратной*, *порядка  $n$* .

Матрица размера  $m \times 1$  называется  *$m$ -мерным* (или  *$m$ -компонентным*) *столбцом*. Матрица размера  $1 \times n$  называется  *$n$ -мерной* (или  *$n$ -компонентной*) *строкой*.

Отметим, что, хотя формально для обозначения строк или столбцов следует использовать двухиндексные записи  $\|\alpha_{1j}\|$  или  $\|\beta_{il}\|$ , неменяющиеся индексы принято опускать, в результате чего обозначения строк или столбцов имеют вид  $\|\alpha_j\|$  или соответственно  $\|\beta_i\|$ .

В этих случаях, разумеется, необходимо явно указывать, о чём идет речь: о строке или о столбце.

Некоторые часто используемые матрицы с особыми значениями элементов имеют специальные названия и обозначения.

**Определение** Квадратная матрица, для которой

1.1.4.

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \quad \forall i, j = [1, n],$$

называется *симметрической*.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*. Нулевую матрицу обозначают как  $\|O\|$ .

Квадратная матрица порядка  $n$  вида

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

называется *единичной*. Единичную матрицу принято обозначать  $\|E\|$ .

## Операции с матрицами

**Определение** Две матрицы  $\|A\|$  и  $\|B\|$  называются *равными* 1.1.5. (обозначается:  $\|A\| = \|B\|$ ), если они одинаковых размеров и если их соответствующие компоненты равны, то есть

$$\alpha_{ij} = \beta_{ij} \quad \forall i = [1, m] \text{ и } \forall j = [1, n].$$

**Определение 1.1.6.** Матрица  $\|C\|$  называется *суммой* матриц  $\|A\|$  и  $\|B\|$  (обозначается:  $\|C\| = \|A\| + \|B\|$ ), если матрицы  $\|A\|$ ,  $\|B\|$ ,  $\|C\|$  одинаковых размеров и

$$\gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij} \quad \forall i = [1, m], \forall j = [1, n],$$

где числа  $\gamma_{ij}$   $\forall i = [1, m]$ ,  $\forall j = [1, n]$  являются соответствующими компонентами матрицы  $\|C\|$ .

**Определение 1.1.7.** Матрица  $\|C\|$  называется *произведением* числа  $\lambda$  на матрицу  $\|A\|$  (обозначается:  $\|C\| = \lambda \|A\|$ ), если матрицы  $\|A\|$  и  $\|C\|$  одинаковых размеров и

$$\gamma_{ij} = \lambda \alpha_{ij} \quad \forall i = [1, m], \forall j = [1, n].$$

Отметим, что умножать на число можно матрицу любого размера.

**Замечание:** в качестве всех (или некоторых) элементов матрицы возможно использование не только чисел, но и других математических объектов, для которых подходящим образом определены операции сравнения, сложения и умножения на число, например, векторов, функций или тех же матриц.

**Определение 1.1.8.** *Транспонированием* матрицы называется операция, в результате которой образуется новая матрица, где строками служат столбцы исходной, записанные с сохранением порядка их следования (рис. 1.1.1).

Матрица, получающаяся в результате транспонирования матрицы  $\|A\|$ , обозначается  $\|A\|^T$ .

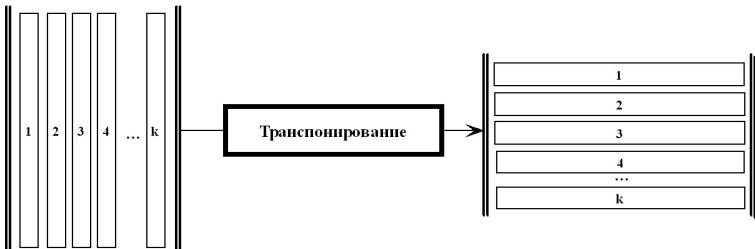


Рис. 1.1.1

При транспонировании

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \dots & \alpha_{mn} \end{vmatrix}^T = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{m1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{m2} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{m3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{mn} \end{vmatrix},$$

то есть для элементов транспонированной матрицы  $\|A\|^T$  верно равенство  $\alpha_{ij}^T = \alpha_{ji} \quad \forall i = [1, m], \forall j = [1, n]$ .

Операция транспонирования, например, не изменяет симметрическую матрицу, но переводит строку размера  $1 \times m$  в столбец размера  $m \times 1$  и наоборот.

**Детерминанты (определители) квадратных матриц 2-го и 3-го порядков**

Для квадратных матриц существует специальная числовая характеристика, называемая детерминантом (или определителем) и обозна-

чаемая как  $\det \|A\|^2$ . Описание свойств определителей квадратных матриц  $n$ -го порядка будет приведено в главе 6, здесь же мы ограничимся рассмотрением случаев  $n = 2$  и  $n = 3$ .

**Определение 1.1.9.** Детерминантом (определенителем) квадратной матрицы 2-го порядка  $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$  называется число

$$\det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}.$$

**Определение 1.1.10.** Детерминантом (определенителем) квадратной матрицы 3-го порядка  $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$  называется число

ло

$$\det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32}.$$

Для определителей квадратных матриц справедливы следующие теоремы:

**Теорема 1.1.1.** Определитель матрицы 3-го порядка может быть выражен через определители 2-го порядка формулой следующего вида:

<sup>2</sup> Детерминант квадратной матрицы также часто обозначают при помощи одинарных вертикальных ограничителей  $| \dots |$ . Мы не будем использовать эту форму, чтобы избежать конфликта с представлением абсолютных величин, модулей, длин и норм.

$$\begin{aligned} \det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} &= \\ &= \alpha_{11} \det \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{12} \det \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \\ &\quad + \alpha_{13} \det \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

называемой **разложением определителя по первой строке.**

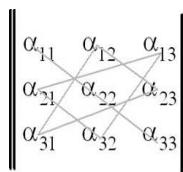
**Доказательство.**

Данная формула проверяется непосредственно при помощи определений 1.1.9 и 1.1.10.

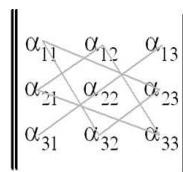
**Замечания.**

1°.

Формулы, аналогичные приведенной в формулировке теоремы 1.1.1, могут быть получены как для каждой из остальных строк матрицы, так и для любого из ее столбцов.



Со знаком "плюс"



Со знаком "минус"

Рис. 1.1.2

2°.

Иногда подсчет значения определителя матрицы 3-го порядка удобнее выполнить по следующему правилу:

каждое слагаемое в определении 1.1.10 есть произведение некоторой тройки элементов матрицы, причем элементы, входящие в произведения, берущиеся со знаком «плюс», соединены в левой части рис. 1.1.2 сплошными линиями, а элементы, входящие в произведения, которые берутся со знаком «минус», – в правой.

Непосредственная проверка показывает, что из определений 1.1.9 и 1.1.10 вытекает

**Следствие 1.1.1.** **При транспонировании квадратных матриц 2-го или 3-го порядков их определители не меняются.**

В терминах определителей матриц второго порядка достаточно удобно формулируется условие однозначной разрешимости системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

**Теорема 1.1.2** **Для того чтобы система линейных уравнений (Крамера).**

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 = \beta_1, \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 = \beta_2 \end{cases}$$

**имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы**

$$\det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

**Доказательство.**

Докажем необходимость. Пусть данная система линейных уравнений имеет единственное решение – упорядоченную пару чисел  $\{\xi_1, \xi_2\}$ , тогда должны быть справедливыми следующие из ее уравнений соотношения

$$\xi_1(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}) = (\beta_1\alpha_{22} - \beta_2\alpha_{12});$$

$$\xi_2(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}) = (\beta_2\alpha_{11} - \beta_1\alpha_{21})$$

или

$$\xi_1\Delta = \Delta_1; \quad \xi_2\Delta = \Delta_2,$$

$$\text{где } \Delta = \det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \det \begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_{12} \\ \beta_2 & \alpha_{22} \end{vmatrix}$$

$$\text{и } \Delta_2 = \det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

Равенства  $\xi_1\Delta = \Delta_1$ ;  $\xi_2\Delta = \Delta_2$  не верны при  $\begin{cases} \Delta = 0, \\ \Delta_1 \neq 0 \end{cases}$

или при  $\begin{cases} \Delta = 0, \\ \Delta_2 \neq 0. \end{cases}$

В то же время (проверьте это самостоятельно) при  $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$  коэффициенты уравнений исходной системы обязаны быть пропорциональными, и тогда у нее имеется бесчисленное множество решений – пар чисел  $\{\xi_1, \xi_2\}$ , таких, что  $\alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 = \beta_1$ . Поэтому из условия существования и единственности решения следует, что  $\Delta \neq 0$ .

Докажем достаточность. Если  $\Delta \neq 0$ , то исходная система линейных уравнений имеет решение  $\{\xi_1, \xi_2\}$ , однозначно определяется значениями параметров  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \beta_1, \beta_2$  и

формулами  $\xi_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$  и  $\xi_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$ .

Теорема доказана.

## § 1.2. Направленные отрезки

**Определение  
1.2.1.**

Отрезок прямой, концами которого служат точки  $A$  и  $B$ , называется *направленным отрезком*, если указано, какая из этих двух точек является началом и какая – концом отрезка.

Направленный отрезок, начало и конец которого совпадают, называется *нулевым направленным отрезком*.

Будем обозначать направленный отрезок в виде  $\overrightarrow{AB}$ , полагая, что точка  $A$  является началом отрезка, а точка  $B$  – его концом. Иногда направленный отрезок представляется просто как  $\bar{a}$ . Длина отрезка обозначается как  $|\overrightarrow{AB}|$  или  $|\bar{a}|$  соответственно.

### Действия с направленными отрезками

**Определение  
1.2.2.**

Два ненулевых направленных отрезка  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  называются *равными*, если их начала и их концы могут быть совмещены параллельным переносом одного из этих отрезков.

Заметим, что в силу определения 1.2.2 параллельный перенос направленных отрезков не меняет.

Пусть даны два направленных отрезка  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ .

**Определение  
1.2.3.**

Совместим начало отрезка  $\bar{b}$  с концом  $\bar{a}$  (то есть построим направленный отрезок  $\bar{b}'$ , равный  $\bar{b}$ , начало которого совпадает с концом отрезка  $\bar{a}$ ), тогда

направленный отрезок  $\bar{c}$ , начало которого совпадает с началом  $\bar{a}$  и конец с концом  $\bar{b}'$ , называется суммой направленных отрезков  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ <sup>3</sup>.

Это определение иногда называют *правилом треугольника* (рис. 1.2.1).

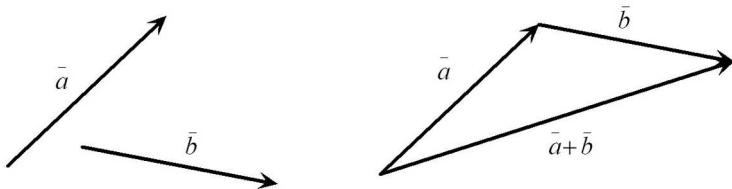


Рис. 1.2.1

Отметим, что для операции сложения направленных отрезков:

- 1) обобщение правила треугольника на любое число слагаемых носит название *правила замыкающей*, смысл которого ясен из рис. 1.2.2;
- 2) операция сложения направленных отрезков может быть выполнена по правилу параллелограмма, равносильному определению 1.2.3 (см. рис. 1.2.3);
- 3) разностью  $\bar{a} - \bar{b}$  направленных отрезков  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  называется направленный отрезок  $\bar{c}$ , удовлетворяющий равенству
 
$$\bar{a} = \bar{b} + \bar{c};$$
- 4) любой направленный отрезок при сложении с нулевым не изменяется.

---

<sup>3</sup> Для операции замены направленного отрезка на равный, но не совпадающий с ним направленный отрезок будем употреблять термин *параллельный перенос направленного отрезка*.

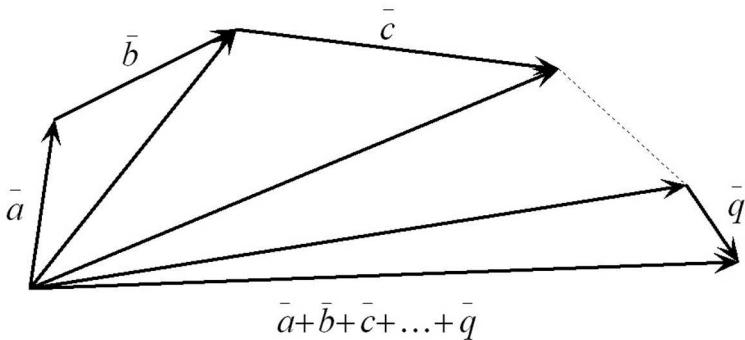


Рис. 1.2.2

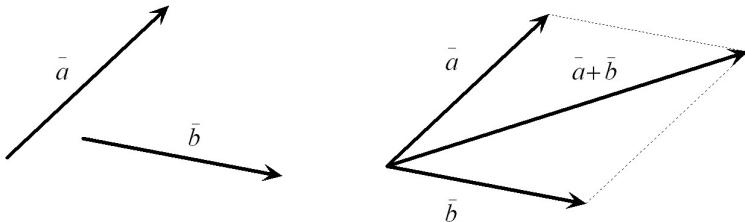


Рис. 1.2.3

**Определение 1.2.4.** Под произведением  $\lambda \bar{a}$  направленного отрезка  $\bar{a}$  на число  $\lambda$  понимают:

при  $\lambda = 0$  нулевой направленный отрезок,

при  $\lambda \neq 0$  направленный отрезок, для которого

длина равна  $|\lambda| |\vec{a}|$ ;

направление совпадает с направлением  $\vec{a}$ , если  $\lambda > 0$ ,

направление противоположно направлению  $\vec{a}$ , если  $\lambda < 0$ .

### § 1.3. Определение множества векторов

**Определение  
1.3.1.**

Совокупность всех направленных отрезков, для которых введены описанные в § 1.2 операции:

- сравнения (опр. 1.2.2);
- сложения (опр. 1.2.3);
- умножения на вещественное число (опр. 1.2.4), называется *множеством векторов*.

Конкретный элемент этого множества будем называть *вектором* и обозначать символом с верхней стрелкой, например,  $\overset{\rightarrow}{a}$ .

Нулевой вектор обозначается символом  $\overset{\rightarrow}{o}$ .

**Теорема  
1.3.1.** **Операции сложения и умножения на вещественное число на множестве векторов обладают свойствами:**

**1º. Коммутативности**  $\overset{\rightarrow}{a} + \overset{\rightarrow}{b} = \overset{\rightarrow}{b} + \overset{\rightarrow}{a}$ .

## 2º. Ассоциативности

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c};$$

$$\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}.$$

## 3º. Дистрибутивности

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b};$$

$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$$

для любых векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  и любых вещественных чисел  $\lambda$  и  $\mu$ .

Данные свойства следуют из определения множества векторов и нуждаются в доказательстве. В качестве примера приведем

Доказательство свойства коммутативности.

Пусть даны два вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Совместим начала этих векторов и построим на них параллелограмм  $ABCD$  (рис. 1.3.1).

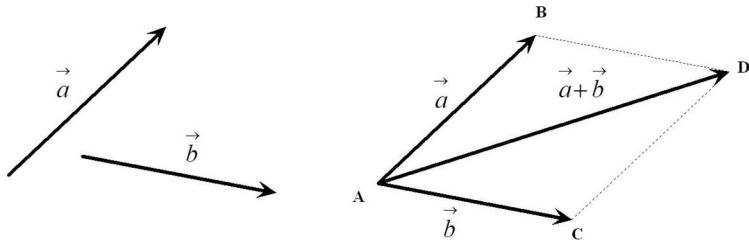


Рис. 1.3.1

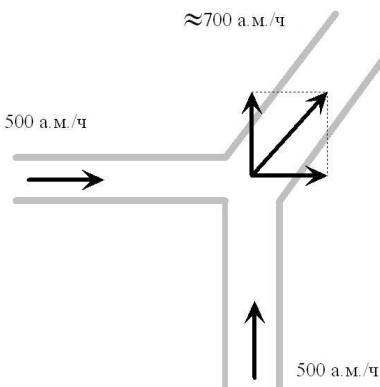
Поскольку у параллелограмма противолежащие стороны параллельны и имеют равные длины, то  $\vec{CD} = \vec{a}$ ;  $\vec{BD} = \vec{b}$ , но тогда, по правилу треугольника, из треугольников  $ACD$  и  $ABD$  следует, что  $\vec{AD} = \vec{b} + \vec{CD}$ ;  $\vec{AD} = \vec{a} + \vec{BD}$ , то есть

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

Теорема доказана.

### Замечания об определении векторов

- 1°. Иногда вектор определяют просто как объект, характеризуемый числовой величиной и направлением. Хотя формально такой подход и допустим, он может оказаться причиной некоторых проблем, суть которых иллюстрируется следующим примером.



Поток автомобилей (то есть количество автомобилей, проезжающих мимо наблюдателя за единицу времени) на конкретной дороге является объектом, для характеристики которого нужно указать как его величину (число проходящих за единицу времени автомобилей), так и его направление.

Рис. 1.3.2

Предположим, что этот объект векторный (в смысле определения 1.3.1), и рассмотрим перекресток трех дорог, показанный на рис. 1.3.2, на котором сливаются два потока автомобилей по 500 машин в час каждый.

Если суммировать потоки как векторы, то вместо очевидного результата 1000 а-м/ч мы получим (по правилу параллелограмма) заведомо бессмысленное значение  $500\sqrt{2} \approx 700$  а-м/ч. Отсюда следует, что хотя поток автомашин характеризуется числовым значением и направлением, но тем не менее вектором (в смысле определения 1.3.1) не является.

2°. С другой стороны, необходимо иметь в виду, что определение множества векторов 1.3.1 допускает их дальнейшую, более тонкую дифференциацию. Например, в некоторых физических и технических приложениях различают векторы полярные и аксиальные. К первым относятся, например, векторы скорости, силы, напряженности электрического поля; ко вторым – векторы момента силы, напряженности магнитного поля. Кроме того, в механике векторы подразделяются на свободные, скользящие и закрепленные, в зависимости от той роли, которую играет точка их приложения.

3°. К заключению о векторной природе тех или иных физических характеристик можно прийти путем рассуждений, основанных на определении 1.3.1 и экспериментальных данных.

Например, пусть некоторая материальная точка  $A$ , имеющая электрический заряд, перемещается в пространстве под действием электрического поля. Положение этой точки в пространстве в момент времени  $\tau_0$  можно задать исходящим из точки наблюдения и направленным в  $A$  вектором  $\vec{r}(\tau_0)$ , а в момент времени  $\tau$  – вектором  $\vec{r}(\tau)$ .

Поскольку перемещение  $\vec{r}(\tau) - \vec{r}(\tau_0)$  (как разность двух векторов) является вектором, то и скорость движения материальной точки будет вектором в силу определения 1.3.1. Рассуждая аналогично, можно прийти к заключению, что вектором является также и ускорение. С другой стороны, согласно второму закону Ньютона, ускорение материальной точки пропорционально действующей на нее силе, и, следовательно, сила тоже есть вектор.

Наконец, принимая во внимание пропорциональность силы, действующей на заряженное тело, и напряженности электрического поля, заключаем, что последняя характеристика также векторная.

## § 1.4. Линейная зависимость векторов

Вначале введем часто используемые в приложениях понятия коллинеарности и компланарности векторов.

Определение 1.4.1.	Два вектора, параллельные одной и той же прямой, называются <i>коллинеарными</i> .  Три вектора, параллельные одной и той же плоскости, называются <i>компланарными</i> .
-----------------------	---

Нулевой вектор считается коллинеарным любому другому вектору. Нулевой вектор считается компланарным любой паре векторов.

Определение 1.4.2.	Выражение вида $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$ , где $\lambda_i; i = [1, n]$ – некоторые числа, называется <i>линейной комбинацией</i> векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ .
-----------------------	--

Если все числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  равны нулю одновременно (что равносильно условию  $|\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_n| = 0$ ), то такая линейная комбинация называется *тривиальной*.

Если хотя бы одно из чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  отлично от нуля (то есть  $|\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_n| > 0$ ), то данная линейная комбинация называется *нетривиальной*.

### Соглашение о суммировании

В тех случаях, когда явная запись суммы некоторого числа слагаемых нецелесообразна или невозможна, но известно, как зависит значение каждого из слагаемых от его номера, то допускается использование специальной формы записи операции суммирования:

$$F(k) + F(k+1) + \dots + F(n) = \sum_{i=k}^n F(i),$$

(читается: сумма  $F(i)$  по  $i$  от  $k$  до  $n$ ), где  $i$  – индекс суммирования,  $k$  – минимальное значение индекса суммирования,  $n$  – максимальное значение индекса суммирования и, наконец,  $F(i)$  – общий вид слагаемого.

**Пример 1.4.1.** По соглашению о суммировании будут справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 &= \sum_{i=1}^n i^2 = \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \end{aligned}$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3 = \sum_{i=1}^n i^3 =$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left(\sum_{i=1}^n i\right)^2,$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{i-1}{i}.$$

Используя данное соглашение о суммировании, линейную комбинацию  $\overset{\rightarrow}{\lambda_1} \overset{\rightarrow}{a_1} + \overset{\rightarrow}{\lambda_2} \overset{\rightarrow}{a_2} + \dots + \overset{\rightarrow}{\lambda_n} \overset{\rightarrow}{a_n}$  можно записать в виде  $\sum_{i=1}^n \overset{\rightarrow}{\lambda_i} \overset{\rightarrow}{a_i}$ .

Приведем теперь определение важного понятия линейной зависимости системы векторов.

**Определение 1.4.3.** Векторы  $\overset{\rightarrow}{a_1}, \overset{\rightarrow}{a_2}, \dots, \overset{\rightarrow}{a_n}$  называются *линейно зависимыми*, если существует их нетривиальная линейная комбинация  $\sum_{i=1}^n \overset{\rightarrow}{\lambda_i} \overset{\rightarrow}{a_i}$ , такая, что  $\sum_{i=1}^n \overset{\rightarrow}{\lambda_i} \overset{\rightarrow}{a_i} = \overset{\rightarrow}{o}$ .

**Определение 1.4.4.** Векторы  $\overset{\rightarrow}{a_1}, \overset{\rightarrow}{a_2}, \dots, \overset{\rightarrow}{a_n}$  называются *линейно независимыми*, если из условия  $\sum_{i=1}^n \overset{\rightarrow}{\lambda_i} \overset{\rightarrow}{a_i} = \overset{\rightarrow}{o}$  следует *тривиальность* линейной комбинации  $\sum_{i=1}^n \overset{\rightarrow}{\lambda_i} \overset{\rightarrow}{a_i}$ , то есть что  $\overset{\rightarrow}{\lambda_1} = \overset{\rightarrow}{\lambda_2} = \dots = \overset{\rightarrow}{\lambda_n} = \overset{\rightarrow}{0}$ .

Иначе говоря, если векторы  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  линейно независимы, то для любого набора чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , не равных нулю одновременно, линейная комбинация  $\sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{a}_k$  не нулевой вектор.

**Лемма 1.4.1.** Для линейной зависимости векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  необходимо и достаточно, чтобы один из них был линейной комбинацией остальных.

Доказательство.

Докажем необходимость. Пусть векторы  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  линейно зависимы, тогда существуют числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , одновременно не равные нулю, такие, что  $\sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{a}_k = \vec{o}$ . Для определенности можно считать, что  $\lambda_1 \neq 0$ , но тогда

$$\vec{a}_1 = \sum_{k=2}^n \left( -\frac{\lambda_k}{\lambda_1} \right) \vec{a}_k,$$

что и доказывает необходимость.

Докажем теперь достаточность. Пусть для определенности  $\vec{a}_1 = \sum_{k=2}^n \lambda_k \vec{a}_k$ , тогда  $(-1)\vec{a}_1 + \sum_{k=2}^n \lambda_k \vec{a}_k = \vec{o}$ , причем  $|-1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_n| > 0$ .

То есть линейная комбинация векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ , равная нулевому вектору, нетривиальная.

Лемма доказана.

Справедливы следующие утверждения.

**Теорема** **Один вектор линейно зависим тогда и только тогда, когда он нулевой.**

**Теорема** **Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.**

**Теорема** **Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.**

Теоремы 1.4.1 и 1.4.2 предлагаются для самостоятельного доказательства. Здесь же мы рассмотрим подробно теорему 1.4.3.

**Доказательство.**

Докажем необходимость. Пусть три вектора  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  линейно зависимы, то есть существуют три, одновременно не равных нулю, числа  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , таких, что

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \vec{o}.$$

Тогда по лемме 1.4.1 один из векторов есть линейная комбинация двух остальных, и, значит, данные три вектора компланарны.

Докажем достаточность в предположении, что векторы  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$  неколлинеарны. Пусть даны три компланарных вектора  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ . Перенесем эти векторы таким образом, чтобы их начала попали в одну точку.

Через конец вектора  $\vec{a}_3$  проведем прямые, параллельные векторам  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$ . При этом получим пару векторов  $\vec{b}_1$  и  $\vec{b}_2$ , таких, что  $\vec{a}_3 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$  (рис. 1.4.1).

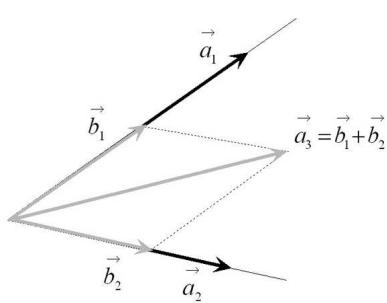


Рис. 1.4.1

Поскольку вектор  $\vec{b}_1$  коллинеарен вектору  $\vec{a}_1$ , а вектор  $\vec{b}_2$  коллинеарен вектору  $\vec{a}_2$ , по лемме 1.4.1 и теореме 1.4.2 получаем, что

$$\vec{b}_1 = \lambda_1 \vec{a}_1; \vec{b}_2 = \lambda_2 \vec{a}_2,$$

но тогда

$$\vec{a}_3 = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2,$$

и векторы  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  по лемме 1.4.1 линейно зависимы. Случай коллинеарных  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$  рассмотрите самостоятельно.

Теорема доказана.

## Свойства линейно независимых векторов

- 1°. Один вектор линейно независим тогда и только тогда, когда он ненулевой.
- 2°. Два вектора линейно независимы тогда и только тогда, когда они неколлинеарны.
- 3°. Три вектора линейно независимы тогда и только тогда, когда они некомпланарны.

**Теорема 1.4.4.** **Если среди векторов  $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$  имеется подмножество линейно зависимых, то и все векторы  $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$  линейно зависимы.**

Доказательство.

Без ограничения общности можно считать, что линейно зависимы первые  $k < n$  векторов (иначе просто перенумеруем эти векторы), то есть существуют не равные нулю одновременно числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , такие, что

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{a}_i = \vec{o}.$$

Построим нетривиальную линейную комбинацию векторов  $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ , взяв в качестве первых  $k$  коэффициентов числа  $\lambda_i$ ,  $i = [1, k]$  и нули в качестве остальных. Тогда получим, что

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{a}_i + \sum_{i=k+1}^n 0 \cdot \vec{a}_i = \vec{o}.$$

Теорема доказана.

**Следствие 1.4.1.** Если среди векторов  $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$  имеется хотя бы один нулевой, то векторы  $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$  линейно зависимы.

## § 1.5. Базис. Координаты вектора в базисе

Определение 1.5.1.

*Базисом на прямой* называется любой ненулевой вектор, принадлежащий этой прямой.

*Базисом на плоскости* называется любая упорядоченная пара линейно независимых векторов, принадлежащих этой плоскости.

*Базисом в пространстве* называется любая упорядоченная тройка линейно независимых векторов.

**Определение 1.5.2.** Базис называется *ортогональным*, если образующие его векторы попарно ортогональны (взаимно перпендикулярны).

**Определение 1.5.3.** Ортогональный базис называется *ортонормированным*, если образующие его векторы имеют единичную длину.

Пространственный базис, составленный из линейно независимых векторов  $\overset{\rightarrow}{g_1}, \overset{\rightarrow}{g_2}, \overset{\rightarrow}{g_3}$ , будем обозначать  $\{\overset{\rightarrow}{g_1}, \overset{\rightarrow}{g_2}, \overset{\rightarrow}{g_3}\}$ . Ортогональный или ортонормированный базис условимся обозначать как  $\{\overset{\rightarrow}{e_1}, \overset{\rightarrow}{e_2}, \overset{\rightarrow}{e_3}\}$ .

**Теорема 1.5.1.** Пусть дан базис  $\{\overset{\rightarrow}{g_1}, \overset{\rightarrow}{g_2}, \overset{\rightarrow}{g_3}\}$ , тогда любой вектор  $\overset{\rightarrow}{x}$  в пространстве может быть представлен и притом единственным образом в виде

$$\overset{\rightarrow}{x} = \xi_1 \overset{\rightarrow}{g_1} + \xi_2 \overset{\rightarrow}{g_2} + \xi_3 \overset{\rightarrow}{g_3},$$

где  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  – некоторые числа.

**Доказательство.**

1°. Докажем вначале существование таких чисел.

Совместим начала всех векторов  $\overset{\rightarrow}{g_1}, \overset{\rightarrow}{g_2}, \overset{\rightarrow}{g_3}$  и  $\overset{\rightarrow}{x}$  в точке  $O$  и проведем через конец вектора  $\overset{\rightarrow}{x}$  плоскость, параллельную плоскости  $O, \overset{\rightarrow}{g_1}, \overset{\rightarrow}{g_2}$  (рис. 1.5.1).

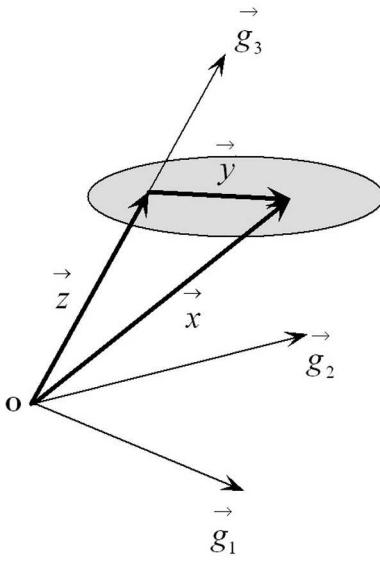


Рис. 1.5.1

Построим новые векторы  $\vec{y}$  и  $\vec{z}$  так, чтобы  $\vec{x} = \vec{z} + \vec{y}$ , а  $\vec{z}$  и  $\vec{g}_3$  были коллинеарны, тогда в силу коллинеарности векторов  $\vec{z}$  и  $\vec{g}_3$  имеем

$$\vec{z} = \xi_3 \vec{g}_3.$$

Перенеся затем начало вектора  $\vec{y}$  в точку  $O$  и рассуждая как при доказательстве теоремы 1.4.3, получим

$$\vec{y} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2$$

и, следовательно,

$$\vec{x} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3,$$

что доказывает существование разложения.

2°. Докажем единственность разложения по базису. Пусть мы имеем  $\vec{x} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3$  и допустим, что существует другая тройка чисел  $\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3$ , таких, что

$$\vec{x} = \xi'_1 \vec{g}_1 + \xi'_2 \vec{g}_2 + \xi'_3 \vec{g}_3.$$

Вычитая почленно эти равенства, получаем

$$(\xi_1 - \xi'_1) \vec{g}_1 + (\xi_2 - \xi'_2) \vec{g}_2 + (\xi_3 - \xi'_3) \vec{g}_3 = \vec{0},$$

где в силу сделанного предположения о неединственности разложения

$$|\xi_1 - \xi'_1| + |\xi_2 - \xi'_2| + |\xi_3 - \xi'_3| > 0.$$

Но полученное неравенство означает, что линейная комбинация

$$(\xi_1 - \xi'_1) \overset{\rightarrow}{g}_1 + (\xi_2 - \xi'_2) \overset{\rightarrow}{g}_2 + (\xi_3 - \xi'_3) \overset{\rightarrow}{g}_3$$

нетривиальна, векторы  $\{\overset{\rightarrow}{g}_1, \overset{\rightarrow}{g}_2, \overset{\rightarrow}{g}_3\}$  линейно зависимы и, следовательно, не могут быть базисом в силу определения 1.5.1. Полученное противоречие доказывает единственность разложения.

Теорема доказана.

**Определение 1.5.4.** Числа  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  – коэффициенты в разложении вектора  $\overset{\rightarrow}{x} = \xi_1 \overset{\rightarrow}{g}_1 + \xi_2 \overset{\rightarrow}{g}_2 + \xi_3 \overset{\rightarrow}{g}_3$  – называются координатами (или компонентами) вектора  $\overset{\rightarrow}{x}$  в базисе  $\{\overset{\rightarrow}{g}_1, \overset{\rightarrow}{g}_2, \overset{\rightarrow}{g}_3\}$ .

Для сокращенной записи координатного разложения вектора  $\overset{\rightarrow}{x} = \xi_1 \overset{\rightarrow}{g}_1 + \xi_2 \overset{\rightarrow}{g}_2 + \xi_3 \overset{\rightarrow}{g}_3$  используются формы:

$$1^{\circ}. \overset{\rightarrow}{x}(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad 2^{\circ}. (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad 3^{\circ}. \left\| \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{array} \right\|,$$

$$4^{\circ}. \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}, \quad 5^{\circ}. \left\| \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{array} \right\|,$$

из которых в дальнейшем мы будем использовать последнюю. В общем случае утверждение «вектор  $\vec{x}$  в базисе  $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$  имеет

координатное представление  $\begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix}$ » записывается как  $\begin{vmatrix} \vec{x} \\ \vec{g} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix}$ ,

но иногда, если это не приводит к неоднозначности толкования, будем

использовать и сокращенную запись вида  $\vec{x} = \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix}$ .

Наконец, если вектор  $\vec{x}$  в базисе  $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$  на плоскости может быть представлен как  $\vec{x} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2$ , то его координатная запись имеет вид  $\begin{vmatrix} \vec{x} \\ \vec{g} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{vmatrix}$ .

## § 1.6. Действия с векторами в координатном представлении

Поскольку в конкретном базисе  $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$  каждый вектор полностью и однозначно описывается упорядоченной тройкой чисел  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  – своим координатным представлением, то естественно возникает вопрос о том, как выполняются операции с векторами в координатном представлении.

Оказывается, что возможно не только записывать векторы при помощи матриц (столбцов), но и оперировать с ними в матричной форме, поскольку правила действий с векторами в координатной форме совпадают с правилами соответствующих операций с матрицами.

Имеет место

**Теорема** В координатном представлении операции с векторами выполняются следующим образом:

**1°. Сравнение векторов**

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3 \\ \text{и } \vec{y} &= \eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3 \end{aligned}$$

равны тогда и только тогда, когда равны их координатные представления:

$$\left\| \vec{x} \right\|_g = \left\| \vec{y} \right\|_g \text{ или } \begin{cases} \xi_1 = \eta_1 \\ \xi_2 = \eta_2 \\ \xi_3 = \eta_3 \end{cases}$$

**2°. Сложение векторов** Координатное представление суммы двух векторов

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3 \\ \text{и } \vec{y} &= \eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3 \end{aligned}$$

равно сумме координатных представлений слагаемых

$$\left\| \vec{x} + \vec{y} \right\|_g = \left\| \vec{x} \right\|_g + \left\| \vec{y} \right\|_g.$$

**3°. Умножение векторов на число** Координатное представление произведения числа  $\lambda$  на вектор

$$\vec{x} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3$$

равно произведению числа  $\lambda$  на координатное представление вектора  $\vec{x}$ :

$$\left\| \lambda \vec{x} \right\|_g = \lambda \left\| \vec{x} \right\|_g.$$

Доказательство.

Поскольку рассуждения для всех трех пунктов аналогичны, рассмотрим лишь правило сложения векторов в координатной форме.

По свойствам операций сложения и умножения на вещественное число векторов (теорема 1.3.1) имеем

$$\begin{aligned} \left\| \vec{x} + \vec{y} \right\|_g &= \left\| (\xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3) + (\eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3) \right\|_g = \\ &= \left\| (\xi_1 + \eta_1) \vec{g}_1 + (\xi_2 + \eta_2) \vec{g}_2 + (\xi_3 + \eta_3) \vec{g}_3 \right\|_g = \\ &= \left\| \begin{matrix} \xi_1 + \eta_1 \\ \xi_2 + \eta_2 \\ \xi_3 + \eta_3 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{matrix} \right\| = \left\| \vec{x} \right\|_g + \left\| \vec{y} \right\|_g. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следствие Координатное представление линейной комбинации

1.6.1.  $\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}$  является той же линейной комбинацией координатных представлений векторов  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$ :

$$\begin{vmatrix} \lambda \xi_1 + \mu \eta_1 \\ \lambda \xi_2 + \mu \eta_2 \\ \lambda \xi_3 + \mu \eta_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим теперь вопрос о том, как в координатном представлении записываются условия линейной зависимости и независимости векторов.

**Теорема 1.6.2.** Для того чтобы два вектора  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  на плоскости были линейно зависимы, необходимо и достаточно,

чтобы их координатные представления  $\begin{vmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{vmatrix}_g = \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{vmatrix}$

и  $\begin{vmatrix} \vec{y} \\ \vec{y} \end{vmatrix}_g = \begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{vmatrix}$  удовлетворяли условию

$$\det \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

**Доказательство.**

Докажем необходимость.

Пусть векторы  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  линейно зависимы, тогда в силу леммы 1.4.1 имеет место равенство  $\vec{x} = \lambda \vec{y}$  или в координатной

форме  $\begin{cases} \xi_1 = \lambda \eta_1, \\ \xi_2 = \lambda \eta_2. \end{cases}$  Исключив  $\lambda$  из этих двух скалярных со-

отношений, получим  $\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 = 0$ , но это и означает,

что  $\det \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix} = 0.$

Докажем достаточность. Пусть  $\det \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix} = 0$ , тогда

имеем, что  $\frac{\xi_1}{\eta_1} = \frac{\xi_2}{\eta_2}$  при  $\eta_1 \neq 0$ ;  $\eta_2 \neq 0$ , то есть соответствующие координаты векторов  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  пропорциональны, что и доказывает линейную зависимость этих векторов.

Случай  $\eta_1 \eta_2 = 0$  предлагается рассмотреть самостоятельно.

Теорема доказана.

**Теорема** Для того чтобы три вектора в пространстве  $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$  с координатными представлениями

$$\left\| \vec{x} \right\|_g = \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix}, \quad \left\| \vec{y} \right\|_g = \begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{vmatrix} \text{ и } \left\| \vec{z} \right\|_g = \begin{vmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{vmatrix}$$

были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы их координаты удовлетворяли условию

$$\det \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \kappa_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \kappa_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \kappa_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство.

Пусть линейная комбинация векторов  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  равна нулевому вектору, то есть  $\lambda_1 \vec{x} + \lambda_2 \vec{y} + \lambda_3 \vec{z} = \vec{o}$ , или в координатном представлении

$$\lambda_1 \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix} + \lambda_2 \begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{vmatrix} + \lambda_3 \begin{vmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Это матричное равенство, очевидно, равносильно системе линейных уравнений

$$\begin{cases} \lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \eta_1 + \lambda_3 \kappa_1 = 0, \\ \lambda_1 \xi_2 + \lambda_2 \eta_2 + \lambda_3 \kappa_2 = 0, \\ \lambda_1 \xi_3 + \lambda_2 \eta_3 + \lambda_3 \kappa_3 = 0, \end{cases}$$

которая (согласно теореме Крамера, теорема 6.4.1) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда определитель ее основной матрицы отличен от нуля.

Но, с другой стороны, очевидно, что данная система всегда имеет нулевое (тривиальное) решение. Значит, условие

$$\det \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \kappa_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \kappa_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \kappa_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

равносильно системе равенств  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ , что и доказывает утверждение теоремы.

Заметим, что альтернативная версия доказательства приводится в параграфе «Смешанное произведение векторов» (§ 2.6).

Теорема доказана.

## § 1.7. Декартова система координат

**Определение 1.7.1.** Совокупность базиса  $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$  и точки  $O$ , в которую помещены начала всех базисных векторов, называется *общей декартовой системой координат* (ДСК) и обозначается  $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ .

**Определение 1.7.2.** Система координат  $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ , порождаемая ортонормированным базисом, называется *нормальной прямоугольной* (или *ортонормированной*) системой координат.

Если задана система координат  $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ , то произвольной точке  $M$  в пространстве можно поставить во взаимно однозначное соответствие вектор  $\vec{r}$ , начало которого находится в точке  $O$ , а конец – в точке  $M$ .

**Определение 1.7.3.** Вектор  $\vec{r} = \vec{OM}$  называется *радиусом-вектором* точки  $M$  в системе координат  $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ .

**Определение 1.7.4.** Координаты радиуса-вектора точки  $M$  называются *координатами* точки  $M$  в системе координат  $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ .

Проиллюстрируем особенности использования векторно-координатного описания геометрических объектов на примере решения следующих задач.

**Задача 1.7.1.** В некоторой общей декартовой системе координат заданы координаты радиусов-векторов точек  $M$  и  $N$ , которые являются началом и концом вектора  $\vec{MN}$ . Требуется найти координаты вектора  $\vec{MN}$ .

**Решение.**

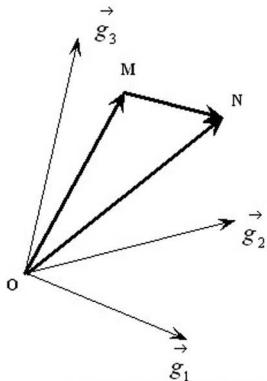


Рис. 1.7.1

Решение очевидно из рис. 1.7.1 и свойств координат векторов.

$$\text{Пусть } \vec{OM} = \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix} \text{ и } \vec{ON} = \begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{vmatrix}.$$

Тогда имеем  $\vec{OM} + \vec{MN} = \vec{ON}$  и  
 $\vec{MN} = \vec{ON} - \vec{OM}$ . Окончательно

$$\vec{MN} = \begin{vmatrix} \eta_1 - \xi_1 \\ \eta_2 - \xi_2 \\ \eta_3 - \xi_3 \end{vmatrix}.$$

**Задача 1.7.2.** В некоторой общей декартовой системе координат заданы координаты несовпадающих точек  $M_1$  и  $M_2$ , для которых соответственно

$$\vec{OM}_1 = \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix} \text{ и } \vec{OM}_2 = \begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{vmatrix}. \text{ Требуется найти точку}$$

$M$ , такую, что  $\vec{M}_1M = \lambda \vec{MM}_2$ .

**Решение.** Заметим, что  $\lambda$  может принимать любое значение, кроме  $-1$ , при котором точка  $M$  уходит в бесконечность (рис. 1.7.2). Найдем радиус-вектор точки  $M$ . Из соотношений в треугольниках  $OM_1M$  и  $OMM_2$  получаем

$$\vec{OM}_1 + \vec{M}_1M = \vec{OM}; \vec{OM} + \vec{MM}_2 = \vec{OM}_2,$$

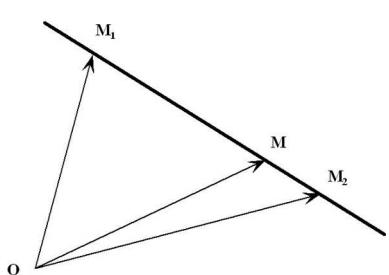


Рис. 1.7.2

но так как  $\vec{M}_1M = \lambda \vec{MM}_2$ , то

$$\vec{OM} - \vec{OM}_1 = \lambda(\vec{OM}_2 - \vec{OM})$$

и окончательно

$$\begin{aligned}\vec{OM} &= \\ &= \frac{1}{1+\lambda} \vec{OM}_1 + \frac{\lambda}{1+\lambda} \vec{OM}_2.\end{aligned}$$

Откуда радиус-вектор точки  $M$  равен

$$\vec{OM} = \left\| \begin{array}{c} \xi_1 + \lambda \eta_1 \\ 1 + \lambda \\ \xi_2 + \lambda \eta_2 \\ 1 + \lambda \\ \xi_3 + \lambda \eta_3 \\ 1 + \lambda \end{array} \right\|.$$

**Замечание:** к задаче 1.7.2 сводится задача отыскания центра масс системы материальных точек.

## § 1.8. Изменение координат при замене базиса и начала координат

Поскольку выбор системы координат может быть сделан различными способами, вопрос об изменении координат при переходе от одного базиса к другому и замене начала координат представляет значительный практический интерес. Найдем правила, выражающие зависимость координат произвольной точки пространства, заданных в одной системе координат, от координат этой же точки в другой ДСК.

Пусть даны две декартовы системы координат: “старая”  $\{\vec{O}, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$  и “новая”  $\{\vec{O}', \vec{g}'_1, \vec{g}'_2, \vec{g}'_3\}$  (рис. 1.8.1). Выразим векторы “нового” базиса, а также вектор  $\vec{OO'}$  через векторы “старого” базиса. В силу теоремы 1.5.1 это можно сделать всегда и притом единственным образом:

$$\begin{aligned}\vec{g}'_1 &= \sigma_{11} \vec{g}_1 + \sigma_{21} \vec{g}_2 + \sigma_{31} \vec{g}_3, \\ \vec{g}'_2 &= \sigma_{12} \vec{g}_1 + \sigma_{22} \vec{g}_2 + \sigma_{32} \vec{g}_3, \\ \vec{g}'_3 &= \sigma_{13} \vec{g}_1 + \sigma_{23} \vec{g}_2 + \sigma_{33} \vec{g}_3, \\ \vec{OO'} &= \beta_1 \vec{g}_1 + \beta_2 \vec{g}_2 + \beta_3 \vec{g}_3.\end{aligned}\tag{1.8.1}$$

Тогда справедлива

**Теорема 1.8.1.** Координаты произвольной точки в “старой” системе координат связаны с ее координатами в “новой” соотношениями

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \sigma_{11} \xi'_1 + \sigma_{12} \xi'_2 + \sigma_{13} \xi'_3 + \beta_1, \\ \xi_2 &= \sigma_{21} \xi'_1 + \sigma_{22} \xi'_2 + \sigma_{23} \xi'_3 + \beta_2, \\ \xi_3 &= \sigma_{31} \xi'_1 + \sigma_{32} \xi'_2 + \sigma_{33} \xi'_3 + \beta_3.\end{aligned}\tag{1.8.2}$$

Доказательство.

Пусть некоторая точка  $M$  в “старой” системе

$\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$  имеет координаты  $\begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix}$ , а в “новой” системе

$$\{O', \vec{g}'_1, \vec{g}'_2, \vec{g}'_3\} - \begin{vmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \xi'_3 \end{vmatrix}.$$

Получим связь между “старыми” и “новыми” координатами точки  $M$ . Имеют место соотношения

$$\vec{OM} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3 \text{ и}$$

$$\begin{aligned} \vec{O'M} &= \xi'_1 \vec{g}'_1 + \xi'_2 \vec{g}'_2 + \xi'_3 \vec{g}'_3 = \\ &= \xi'_1 (\sigma_{11} \vec{g}_1 + \sigma_{21} \vec{g}_2 + \sigma_{31} \vec{g}_3) + \\ &+ \xi'_2 (\sigma_{12} \vec{g}_1 + \sigma_{22} \vec{g}_2 + \sigma_{32} \vec{g}_3) + \\ &+ \xi'_3 (\sigma_{13} \vec{g}_1 + \sigma_{23} \vec{g}_2 + \sigma_{33} \vec{g}_3). \end{aligned}$$

Подставив выражения для векторов  $\vec{OM}$ ,  $\vec{O'M}$  и  $\vec{OO'}$  в равенство

$$\vec{OM} = \vec{O'M} + \vec{OO'}$$

и перегруппировав слагаемые, получим соотношение вида

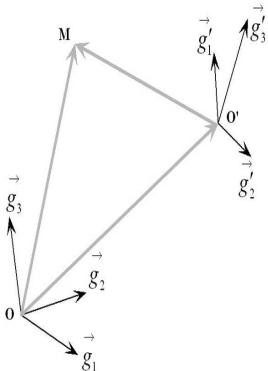


Рис. 1.8.1

$$\lambda_1 \overset{\rightarrow}{g_1} + \lambda_2 \overset{\rightarrow}{g_2} + \lambda_3 \overset{\rightarrow}{g_3} = \overset{\rightarrow}{o},$$

где

$$\lambda_1 = -\xi_1 + \sigma_{11}\xi'_1 + \sigma_{12}\xi'_2 + \sigma_{13}\xi'_3 + \beta_1,$$

$$\lambda_2 = -\xi_2 + \sigma_{21}\xi'_1 + \sigma_{22}\xi'_2 + \sigma_{23}\xi'_3 + \beta_2,$$

$$\lambda_3 = -\xi_3 + \sigma_{31}\xi'_1 + \sigma_{32}\xi'_2 + \sigma_{33}\xi'_3 + \beta_3.$$

Поскольку векторы  $\{\overset{\rightarrow}{g_1}, \overset{\rightarrow}{g_2}, \overset{\rightarrow}{g_3}\}$  линейно независимые, то их линейная комбинация, равная  $\overset{\rightarrow}{o}$ , обязана быть тривиальной, и потому  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$  или окончательно

$$\xi_1 = \sigma_{11}\xi'_1 + \sigma_{12}\xi'_2 + \sigma_{13}\xi'_3 + \beta_1,$$

$$\xi_2 = \sigma_{21}\xi'_1 + \sigma_{22}\xi'_2 + \sigma_{23}\xi'_3 + \beta_2,$$

$$\xi_3 = \sigma_{31}\xi'_1 + \sigma_{32}\xi'_2 + \sigma_{33}\xi'_3 + \beta_3.$$

Теорема доказана.

#### Определение

1.8.1.

Формулы (1.8.2) называются *формулами перехода*

от системы координат  $\{O, \overset{\rightarrow}{g_1}, \overset{\rightarrow}{g_2}, \overset{\rightarrow}{g_3}\}$  к системе координат  $\{O', \overset{\rightarrow}{g'_1}, \overset{\rightarrow}{g'_2}, \overset{\rightarrow}{g'_3}\}$ .

При использовании формул перехода следует обратить внимание на то, что «штрихованные» переменные в (1.8.1) и (1.8.2) находятся в *разных* частях этих равенств.

Заметим также, что коэффициенты уравнений в формулах (1.8.2), выражают «старые» координаты через «новые», образуют матрицу  $\|S\|$ , столбцы которой есть координаты «новых» базисных векторов

в “старом” базисе, а столбец  $\begin{vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{vmatrix}$  содержит координаты “нового” начала координат в “старом” базисе.

**Определение 1.8.2.** Матрица  $\| S \| = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$  называется *матрицей перехода* от базиса  $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$  к базису  $\{\vec{g}'_1, \vec{g}'_2, \vec{g}'_3\}$ .

### Теорема Для матрицы перехода

1.8.2.

$$\det \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Доказательство.

Столбцы матрицы  $\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$  образованы коэф-

фициентами разложения линейно независимых векторов базиса  $\{\vec{g}'_1, \vec{g}'_2, \vec{g}'_3\}$  по векторам базиса  $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ . Тогда из теоремы 1.6.3 следует доказываемое утверждение.

Теорема доказана.

**Задача** На параллелограмме построены две системы координат:

1.8.1. “старая”  $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$  и “новая”  $\{O', \vec{g}'_1, \vec{g}'_2\}$  (рис. 1.8.2).

Найти формулы перехода, выражающие “новые” координаты через “старые”, если

$$\vec{g}'_1 = O' \vec{O} \quad \text{и} \quad \vec{g}'_2 = -\frac{1}{2} \vec{g}_1.$$

**Решение.**

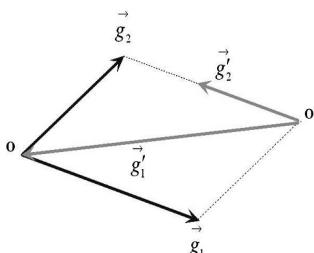


Рис. 1.8.2

Из свойств параллелограмма находим соотношения, выражающие векторы “старого” базиса через “новые”:

$$\begin{aligned}\vec{g}_1 &= -2 \vec{g}'_2, \\ \vec{g}_2 &= -\vec{g}'_1 + 2 \vec{g}'_2.\end{aligned}$$

Тогда матрица перехода

$$\|S\| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}, \text{ а } \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, выражения “новых” координат через “старые” имеют

вид  $\begin{cases} \xi'_1 = -\xi_2 + 1, \\ \xi'_2 = -2\xi_1 + 2\xi_2. \end{cases}$

**Формулы перехода между ортонормированными системами координат на плоскости**

Рассмотрим две ортонормированные системы координат  $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  и  $\{O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$ . Получим формулы перехода для случая, показанного на рис. 1.8.3.

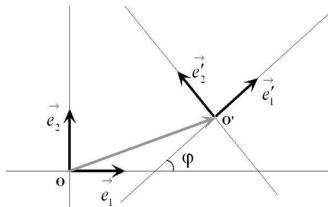
Из геометрически очевидных соотношений

$$\vec{e}'_1 = \vec{e}_1 \cos \varphi + \vec{e}_2 \sin \varphi \quad \text{и} \quad \vec{e}'_2 = -\vec{e}_1 \sin \varphi + \vec{e}_2 \cos \varphi$$

получаем матрицу перехода:

$$\|S\| = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}, \text{ и если } \vec{OO'} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix},$$

то “старые” координаты будут связаны с “новыми” как



$$\begin{cases} \xi_1 = \xi'_1 \cos \varphi - \xi'_2 \sin \varphi + \beta_1, \\ \xi_2 = \xi'_1 \sin \varphi + \xi'_2 \cos \varphi + \beta_2. \end{cases}$$

Рис. 1.8.3

В рассмотренном случае обе системы координат удается совместить последовательным выполнением параллельного переноса “старой” системы на вектор  $\vec{OO'}$  и поворота на угол  $\varphi$  вокруг точки  $O'$ .

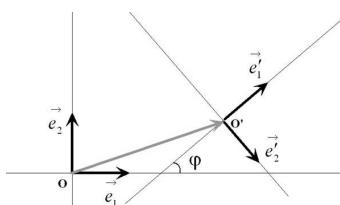


Рис. 1.8.4

Однако добиться такого совмещения, используя только параллельный перенос и поворот, вообще говоря, нельзя. Соответствующий случай показан на рис. 1.8.4.

Здесь, после совмещения векторов  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}'_1$ , еще потребуется отражение вектора  $\vec{e}_2$  симметрично относительно

прямой, проходящей через совмещенные векторы. Формулы перехода будут в этом случае иметь вид

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi'_1 \cos \varphi + \xi'_2 \sin \varphi + \beta_1, \\ \xi_2 = \xi'_1 \sin \varphi - \xi'_2 \cos \varphi + \beta_2. \end{cases}$$

Формально случаи, показанные на рис. 1.8.3 и рис. 1.8.4, можно различать, используя

**Определение 1.8.3.**

Упорядоченная пара неколлинеарных векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  на плоскости с совмещенными началами называется *правоориентированной*, если кратчайший по-  
ворот от вектора  $\vec{a}$  к вектору  $\vec{b}$  при совмещении их начал виден выполняющимся против часовой стрелки.  
В противном случае эта пара векторов называется *левоориентированной*.

Отметим, что для матрицы перехода  $\|S\|$ , связывающей два ортонормированных базиса,  $\det \|S\| = \pm 1$ , причем  $\det \|S\| = 1$ , если ориентация обеих пар базисных векторов одинаковая (то есть если отражения не требуется), и  $\det \|S\| = -1$  для случая базисных пар различной ориентации.

## Глава 2

# ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

### § 2.1. Ортогональное проектирование

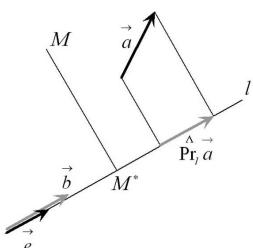


Рис. 2.1.1

**Определение 2.1.1.**

Прямую  $l$  с расположенным на ней ненулевым вектором  $\vec{b}$  будем называть *осью*.

Вектор  $\vec{b}$  называется *направляющим вектором оси*  $l$ .

**Определение 2.1.2.**

Пусть дана точка  $M$ , не лежащая на оси  $l$ , тогда основание перпендикуляра, опущенного из  $M$  на ось  $l$  – точку  $M^*$ , будем называть *ортогональной проекцией* точки  $M$  на ось.

Примером оси может служить *ось координат* – прямая, проходящая через начало координат, направляющим вектором которой служит один из базисных векторов.

**Определение 2.1.3.**

Ортогональной проекцией вектора  $\vec{a}$  на ось  $l$  называется *вектор*  $\Pr_l \vec{a}$ , лежащий на оси  $l$ , начало которого есть ортогональная проекция начала вектора

$\stackrel{\rightarrow}{a}$  на ось  $l$ , а конец – ортогональная проекция конца вектора  $\stackrel{\rightarrow}{a}$ .

Выполним нормировку направляющего вектора  $\stackrel{\rightarrow}{b}$ , то есть заменим его на вектор  $\stackrel{\rightarrow}{e} = \frac{\stackrel{\rightarrow}{b}}{|\stackrel{\rightarrow}{b}|}$  и рассмотрим нормированный базис  $\{\stackrel{\rightarrow}{e}\}$  на оси  $l$  (рис. 2.1.1).

**Определение 2.1.4.**

Численным значением ортогональной проекции вектора  $\stackrel{\rightarrow}{a}$  на ось  $l$  называется координата вектора  $\stackrel{\Lambda}{\Pr}_l \stackrel{\rightarrow}{a}$  в базисе  $\{\stackrel{\rightarrow}{e}\}$ <sup>4</sup>.

**Определение 2.1.5.**

Углом между ненулевыми векторами  $\stackrel{\rightarrow}{a}$  и  $\stackrel{\rightarrow}{b}$  называется величина наименьшего из двух углов, образуемых этими векторами при совмещении их начал.

Численное значение ортогональной проекции вектора  $\stackrel{\rightarrow}{a}$  на ось  $l$  обозначим как  $\Pr_l \stackrel{\rightarrow}{a}$ . Из рис. 2.1.2 очевидно, что

$$\Pr_l \stackrel{\rightarrow}{a} = |\stackrel{\rightarrow}{a}| \cos \varphi, \text{ где } \varphi \text{ есть угол между } \stackrel{\rightarrow}{a} \text{ и } \stackrel{\rightarrow}{e}.$$

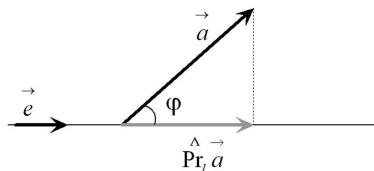


Рис. 2.1.2

<sup>4</sup> Верхний символ « $\Lambda$ » будет использоваться для обозначения различного рода операций, например: проектирования, поворота, отражения, дифференцирования и т.д.

## Свойства ортогональных проекций

1.1°. Проекция суммы двух векторов равна сумме проекций этих векторов:

$$\Pr_l^{\Lambda}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \Pr_l^{\Lambda} \vec{a}_1 + \Pr_l^{\Lambda} \vec{a}_2.$$

Данное свойство иллюстрирует рис. 2.1.3.

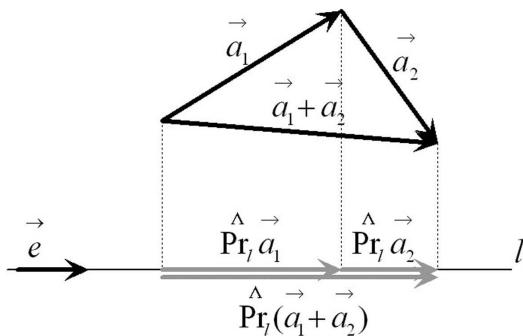


Рис. 2.1.3

1.2°. Если вектор умножить на вещественное число, то его проекция также умножится на это число:

$$\Pr_l^{\Lambda}(\lambda \vec{a}) = \lambda \Pr_l^{\Lambda} \vec{a}.$$

Заметим, что свойства 1.1° и 1.2° можно объединить в следующее утверждение:

*Проекция линейной комбинации векторов равна той же линейной комбинации проекций:*

$$\Pr_l^{\Lambda}(\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2) = \lambda_1 \Pr_l^{\Lambda} \vec{a}_1 + \lambda_2 \Pr_l^{\Lambda} \vec{a}_2.$$

Справедливость свойств 1.1° и 1.2° вытекает из определения операции ортогонального проектирования и правил действия с векторами.

## Свойства численных значений ортогональных проекций

$$2.1^\circ. \Pr_l(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \Pr_l \vec{a}_1 + \Pr_l \vec{a}_2;$$

$$2.2^\circ. \Pr_l \lambda \vec{a} = \lambda \Pr_l \vec{a}.$$

Или, объединяя 2.1° и 2.2°,

$$\Pr_l(\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2) = \lambda_1 \Pr_l \vec{a}_1 + \lambda_2 \Pr_l \vec{a}_2.$$

Отметим, что эти равенства следуют из свойств ортогональных проекций и свойств координат векторов.

## § 2.2. Скалярное произведение векторов и его свойства

**Определение 2.2.1.**

Скалярным произведением ненулевых векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

В случае, когда хотя бы один из сомножителей есть нулевой вектор, скалярное произведение считается равным нулю.

Скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  обозначается как  $(\vec{a}, \vec{b})$ . Таким образом, для ненулевых векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ :

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi,$$

где  $\varphi$  – угол между векторами-сомножителями. При этом согласно определению 2.1.5,  $0 \leq \varphi \leq \pi$ .

Заметим также, что если  $\vec{b} \neq \vec{o}$ , то справедливо равенство

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{b}| \Pr_{\vec{b}} \vec{a}.$$

## Свойства скалярного произведения

1°.  $\vec{(a, b)} = 0$  при  $\vec{a} \neq \vec{o}$  и  $\vec{b} \neq \vec{o}$  тогда и только тогда, когда

$\vec{a}$  и  $\vec{b}$  взаимно ортогональны.

2°.  $\vec{(a, b)} = \vec{(b, a)}$  следует из определения скалярного произведения и свойств косинуса (коммутативность).

3°.  $\vec{(a_1 + a_2, b)} = \vec{(a_1, b)} + \vec{(a_2, b)}$  (дистрибутивность).

Доказательство.

Если  $\vec{b} = \vec{o}$ , то 3° очевидно. Пусть  $\vec{b} \neq \vec{o}$ , тогда

$$\begin{aligned}\vec{(a_1 + a_2, b)} &= |\vec{b}| \operatorname{Пр}_{\vec{b}}(\vec{a_1 + a_2}) = \\ &= |\vec{b}| \operatorname{Пр}_{\vec{b}} \vec{a_1} + |\vec{b}| \operatorname{Пр}_{\vec{b}} \vec{a_2} = \vec{(a_1, b)} + \vec{(a_2, b)}.\end{aligned}$$

Свойство доказано.

4°.  $\vec{(\lambda a, b)} = \lambda \vec{(a, b)}.$

5°.  $\vec{(a, a)} = |\vec{a}|^2 \geq 0 \quad \forall \vec{a}; \quad |\vec{a}| = \sqrt{\vec{(a, a)}}$

(заметим также, что условия  $\vec{(a, a)} = 0$  и  $\vec{a} = \vec{o}$  равносильны).

6°. При  $\vec{a} \neq \vec{o}$  и  $\vec{b} \neq \vec{o}$   $\cos \phi = \frac{\vec{(a, b)}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$ , где  $\phi$  – угол между

векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

### § 2.3. Выражение скалярного произведения в координатах

Пусть задан базис  $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$  и два вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , координатные разложения которых в этом базисе имеют вид

$$\vec{a} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3 \quad \text{и} \quad \vec{b} = \eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3.$$

По свойствам  $3^\circ$  и  $4^\circ$  скалярного произведения

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}) &= (\xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3, \eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3) = \\ &= \xi_1 \eta_1 (\vec{g}_1, \vec{g}_1) + \xi_1 \eta_2 (\vec{g}_1, \vec{g}_2) + \xi_1 \eta_3 (\vec{g}_1, \vec{g}_3) + \\ &\quad + \xi_2 \eta_1 (\vec{g}_2, \vec{g}_1) + \xi_2 \eta_2 (\vec{g}_2, \vec{g}_2) + \xi_2 \eta_3 (\vec{g}_2, \vec{g}_3) + \\ &\quad + \xi_3 \eta_1 (\vec{g}_3, \vec{g}_1) + \xi_3 \eta_2 (\vec{g}_3, \vec{g}_2) + \xi_3 \eta_3 (\vec{g}_3, \vec{g}_3) = \\ &= \sum_{j=1}^3 (\xi_j \eta_1 (\vec{g}_j, \vec{g}_1) + \xi_j \eta_2 (\vec{g}_j, \vec{g}_2) + \xi_j \eta_3 (\vec{g}_j, \vec{g}_3)) = \\ &= \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \xi_j \eta_i (\vec{g}_j, \vec{g}_i). \end{aligned}$$

В случае ортонормированного базиса  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  эта формула упрощается, поскольку для попарных скалярных произведений базисных векторов справедливо равенство

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

где  $\delta_{ij}$  – так называемый *символ Кронекера*. Откуда для скалярного произведения векторов в ортонормированном базисе получаем формулу

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3,$$

из которой следуют полезные соотношения:

$$\left| \vec{a} \right| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$$

и для  $\vec{a} \neq \vec{o}$  и  $\vec{b} \neq \vec{o}$

$$\cos \varphi = \frac{\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2}}.$$

Отметим, что последнее равенство в сочетании с условием  $|\cos \varphi| \leq 1$  приводит к неравенству Коши—Буняковского:

$$\forall \xi_i; \eta_i, i = [1, 3]$$

$$\left| \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3 \right| \leq \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2}.$$

**Задача 2.3.1.** Найти расстояние между двумя точками в ортонормированной системе координат, если известны радиусы-векторы этих точек.

**Решение.** Пусть задана ортонормированная система координат

$$\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \text{ и радиусы-векторы точек } \vec{OM}_2 = \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{и } \vec{OM}_1 = \begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{vmatrix} \text{ в ней. Тогда, используя решение задачи}$$

1.7.1, из равенства

$$\vec{M}_1 \vec{M}_2 = (\xi_1 - \eta_1) \vec{e}_1 + (\xi_2 - \eta_2) \vec{e}_2 + (\xi_3 - \eta_3) \vec{e}_3$$

и свойств скалярного произведения получаем

$$| \vec{M}_1 \vec{M}_2 | = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2 + (\xi_3 - \eta_3)^2}.$$

## § 2.4. Векторное произведение векторов и его свойства

**Определение 2.4.1.**

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  называется *правой*, если (после совмещения их начал) кратчайший поворот от вектора  $\vec{a}$  к вектору  $\vec{b}$  виден из конца вектора  $\vec{c}$  совершающимся против часовой стрелки. В противном случае упорядоченная тройка некомпланарных векторов  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  называется *левой*.

**Определение 2.4.2.**

*Векторным произведением* неколлинеарных векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{c}$ , такой, что

- 1)  $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \phi$ , где  $\phi$  – угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ;
- 2) вектор  $\vec{c}$  ортогонален вектору  $\vec{a}$  и вектору  $\vec{b}$ ;
- 3) тройка векторов  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  правая.

В случае, когда сомножители коллинеарны (в том числе, когда хотя бы один из сомножителей есть нулевой вектор), векторное произведение считается равным нулевому вектору.

Векторное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  обозначается как  $[\vec{a}, \vec{b}]$ . Из определения 2.4.2 следует, что

- 1)  $\left| \begin{array}{c} \rightarrow \\ [a, b] \end{array} \right|$  есть площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ;
- 2) для коллинеарности ненулевых векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение было равно нулевому вектору.

### Свойства векторного произведения

- 1°.  $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$  (антикоммутативность, следует из определения 2.4.2 и нечетности функции  $\sin \phi$ ).
- 2°.  $[\lambda \vec{a}, \vec{b}] = \lambda [\vec{a}, \vec{b}]$  (следует из определения векторного произведения и того факта, что векторы  $[\lambda \vec{a}, \vec{b}]$  и  $[\vec{a}, \vec{b}]$  ортогональны одной и той же плоскости при неколлинеарных  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  и  $\lambda \neq 0$ ).
- 3°.  $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$  (дистрибутивность).

Для доказательства дистрибутивности векторного произведения воспользуемся следующими вспомогательными утверждениями.

**Лемма 2.4.1.** Пусть даны два вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , начала которых находятся в общей точке на оси с базисом  $\vec{l}$ . Тогда результат поворота суммы векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  на угол  $\Phi$  вокруг оси  $\vec{l}$  равен сумме результатов поворота каждого из этих векторов вокруг оси  $\vec{l}$  на угол  $\Phi$ .

Утверждение леммы 2.4.1 будем обозначать как

$$\overset{\Lambda}{\text{Пов}}_{\varphi, \vec{l}}(\vec{a} + \vec{b}) = \overset{\Lambda}{\text{Пов}}_{\varphi, \vec{l}}(\vec{a}) + \overset{\Lambda}{\text{Пов}}_{\varphi, \vec{l}}(\vec{b}).$$

Справедливость этого утверждения ясна из рис. 2.4.1.

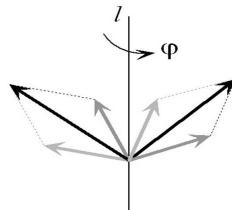


Рис. 2.4.1

**Лемма 2.4.2.** Если  $\left| \vec{e} \right| = 1$  и  $\vec{p} \neq \vec{o}$ , то вектор  $[\vec{p}, \vec{e}]$  равен результату поворота проекции вектора  $\vec{p}$  на плоскость, перпендикулярную вектору  $\vec{e}$ , вокруг вектора  $\vec{e}$  на угол  $\frac{\pi}{2}$  по часовой стрелке.

**Доказательство.**

Проведем две плоскости, одна из которых проходит через точку  $O$  – общее начало векторов  $\vec{p}$  и  $\vec{e}$ , перпендикулярно  $\vec{e}$ , а вторая проходит через векторы  $\vec{p}$  и  $\vec{e}$ .

Ортогональная проекция вектора  $\vec{p}$  на плоскость, перпендикулярную  $\vec{e}$ , будет лежать на линии пересечения построенных плоскостей, и тогда из определения векторного произведения следует (рис. 2.4.2):

$$\left| \overrightarrow{[p, e]} \right| = \left| \overrightarrow{p} \right| \left| \overrightarrow{e} \right| \sin \alpha = \left| \overrightarrow{p} \right| \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right),$$

поскольку  $\left| \overrightarrow{e} \right| = 1$ . Следовательно, в рассматриваемом случае

$\overrightarrow{[p, e]} = \text{Пов}_{\frac{\pi}{2}, \overrightarrow{e}}^{\Lambda} (\Pr_{\perp \overrightarrow{e}} \overrightarrow{p})$ , где  $\Pr_{\perp \overrightarrow{e}}^{\Lambda}(\overrightarrow{p})$  обозначает ортого-

нальное проектирование вектора  $\overrightarrow{p}$  на плоскость, перпендику-  
лярную вектору  $\overrightarrow{e}$ .

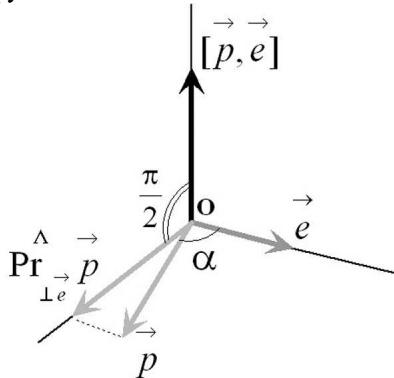


Рис. 2.4.2

Лемма доказана.

Докажем теперь дистрибутивность векторного произведения.

Доказательство свойства 3°.

Если  $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{o}$ , то свойство 3° очевидно. Пусть  $\overrightarrow{c} \neq \overrightarrow{o}$ , тогда в силу утверждений лемм 2.4.1, 2.4.2 и свойства 1.1° из § 2.1 сле-  
дует

$$\begin{aligned}
 [\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] &= |\vec{c}| [\vec{a} + \vec{b}, \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}] = |\vec{c}| \text{Пов}_{\frac{\pi}{2}, \vec{c}}^{\Lambda} \left( \text{Пр}_{\perp \vec{c}}^{\Lambda} (\vec{a} + \vec{b}) \right) = \\
 &= |\vec{c}| \text{Пов}_{\frac{\pi}{2}, \vec{c}}^{\Lambda} \left( \text{Пр}_{\perp \vec{c}}^{\Lambda} \vec{a} + \text{Пр}_{\perp \vec{c}}^{\Lambda} \vec{b} \right) = \\
 &= |\vec{c}| \left( \text{Пов}_{\frac{\pi}{2}, \vec{c}}^{\Lambda} (\text{Пр}_{\perp \vec{c}}^{\Lambda} \vec{a}) + \text{Пов}_{\frac{\pi}{2}, \vec{c}}^{\Lambda} (\text{Пр}_{\perp \vec{c}}^{\Lambda} \vec{b}) \right) = \\
 &= |\vec{c}| \left( [\vec{a}, \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}] + [\vec{b}, \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}] \right) = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}].
 \end{aligned}$$

Свойство доказано.

## § 2.5. Выражение векторного произведения в координатах

Пусть задан *правый* базис  $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$  (то есть такой, что векторы  $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$  образуют *правую тройку*) и пусть в этом базисе векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  имеют координатные разложения

$$\vec{a} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3 \quad \text{и} \quad \vec{b} = \eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3.$$

По свойствам 2° и 3° векторного произведения

$$\begin{aligned}
 [\vec{a}, \vec{b}] &= [\xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3, \eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3] = \\
 &= \xi_1 \eta_1 [\vec{g}_1, \vec{g}_1] + \xi_1 \eta_2 [\vec{g}_1, \vec{g}_2] + \xi_1 \eta_3 [\vec{g}_1, \vec{g}_3] + \\
 &\quad + \xi_2 \eta_1 [\vec{g}_2, \vec{g}_1] + \xi_2 \eta_2 [\vec{g}_2, \vec{g}_2] + \xi_2 \eta_3 [\vec{g}_2, \vec{g}_3] +
 \end{aligned}$$

$$+\xi_3\eta_1[\vec{g}_3, \vec{g}_1] + \xi_3\eta_2[\vec{g}_3, \vec{g}_2] + \xi_3\eta_3[\vec{g}_3, \vec{g}_3] = \\ = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \xi_j \eta_i [\vec{g}_j, \vec{g}_i].$$

Обозначим через  $\vec{f}_1$ ,  $\vec{f}_2$  и  $\vec{f}_3$  попарные векторные произведения базисных векторов  $[\vec{g}_i, \vec{g}_j]$  следующим образом:

$$\vec{f}_1 = [\vec{g}_2, \vec{g}_3]; \vec{f}_2 = [\vec{g}_3, \vec{g}_1]; \vec{f}_3 = [\vec{g}_1, \vec{g}_2].$$

Подставив эти обозначения в выражение для  $[\vec{a}, \vec{b}]$  и использовав формулу, связывающую определители квадратных матриц 2-го и 3-го порядков (см. теорему 1.1.1), получим

$$[\vec{a}, \vec{b}] = (\xi_2 \eta_3 - \xi_3 \eta_2) \vec{f}_1 - (\xi_1 \eta_3 - \xi_3 \eta_1) \vec{f}_2 + (\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1) \vec{f}_3 = \\ = \det \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix} \vec{f}_1 - \det \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_3 \end{vmatrix} \vec{f}_2 + \det \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix} \vec{f}_3 = \\ = \det \begin{vmatrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \vec{f}_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix}.$$

### Случай ортонормированного базиса

Пусть исходный базис  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  ортонормированный, образующий правую тройку векторов, тогда по определению 2.4.2

$$\vec{f}_1 = \vec{e}_1, \quad \vec{f}_2 = \vec{e}_2, \quad \vec{f}_3 = \vec{e}_3.$$

Тогда формула для векторного произведения векторов в правом ортонормированном базисе упростится:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \det \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix}.$$

Из вышеприведенных формул вытекают полезные следствия.

**Следствие 2.5.1.** Для того чтобы векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы в любом базисе

$$\det \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_3 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{или же } \frac{\xi_1}{\eta_1} = \frac{\xi_2}{\eta_2} = \frac{\xi_3}{\eta_3}.$$

**Следствие 2.5.2.** В ортонормированном базисе площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , вычисляется по формуле

$$S = \sqrt{\det^2 \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix} + \det^2 \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_3 \end{vmatrix} + \det^2 \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix}},$$

причем для случая базиса на плоскости

$$S = \left| \det \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix} \right|.$$

## § 2.6. Смешанное произведение

**Определение 2.6.1.**

*Смешанным* (или *векторно-скалярным*) произведением векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ , обозначаемым как

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}), \text{ называется число } ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}).$$

**Теорема 2.6.1.**

**Абсолютная величина смешанного произведения векторов  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  равна объему параллелепипеда, построенного на векторах  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ .** При этом если тройка векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  некомпланарная и правая, то их смешанное произведение положительно, а если тройка левая, то – отрицательно.

Доказательство.

Если  $\vec{a} \rightarrow$  коллинеарен  $\vec{b}$ , то утверждение теоремы очевидно.

Пусть  $\vec{a} \rightarrow$  неколлинеарен  $\vec{b}$ , тогда по определению скалярного произведения

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = |[\vec{a}, \vec{b}]| \Pr_{[\vec{a}, \vec{b}]} \vec{c},$$

где  $S = |\vec{a}, \vec{b}|$  есть площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , а

$$|\Pr_{[\vec{a}, \vec{b}]} \vec{c}| = |\vec{c}| |\cos \alpha|$$

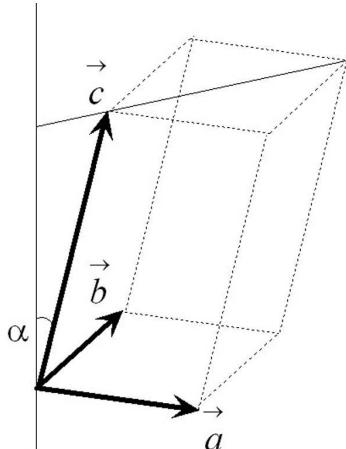


Рис. 2.6.1

Теорема доказана.

– высота параллелепипеда с основанием  $S$ , откуда (см. рис. 2.6.1)

$$V = \left| (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \right|.$$

Наконец,

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= \\ &= |[\vec{a}, \vec{b}]| |\vec{c}| \cos \alpha, \end{aligned}$$

что и позволяет сделать заключение о знаке смешанного произведения.

### Свойства смешанного произведения

Для смешанного произведения справедливы тождества:

$$\begin{aligned} 1^\circ. \quad (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = \\ &= -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}); \end{aligned}$$

$$2^\circ. \quad (\lambda \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c});$$

$$3^\circ. \quad (\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}),$$

справедливость которых следует из определения смешанного произведения и теоремы 2.6.1.

Отметим, наконец, что смешанное произведение равно нулю, если среди сомножителей имеется хотя бы одна пара коллинеарных векторов.

### § 2.7. Выражение смешанного произведения в координатах

Пусть задан правый базис  $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$  и три вектора  $\vec{a}, \vec{b}$  и  $\vec{c}$ , координатные разложения которых в этом базисе имеют вид  $\vec{a} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3$ ,  $\vec{b} = \eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3$  и соответственно  $\vec{c} = \kappa_1 \vec{g}_1 + \kappa_2 \vec{g}_2 + \kappa_3 \vec{g}_3$ .

По свойствам векторного произведения имеем

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \det \begin{vmatrix} \vec{\xi}_2 & \vec{\xi}_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix} \vec{f}_1 - \det \begin{vmatrix} \vec{\xi}_1 & \vec{\xi}_3 \\ \eta_1 & \eta_3 \end{vmatrix} \vec{f}_2 + \det \begin{vmatrix} \vec{\xi}_1 & \vec{\xi}_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix} \vec{f}_3,$$

где векторы  $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$  были определены в § 2.5.

Откуда вытекает, что  $(\vec{g}_k, \vec{f}_j) = \begin{cases} (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3), k = j, \\ 0, \quad k \neq j, \end{cases}$  и для

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  получаем

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = \left( \kappa_1 \det \begin{vmatrix} \vec{\xi}_2 & \vec{\xi}_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix} - \kappa_2 \det \begin{vmatrix} \vec{\xi}_1 & \vec{\xi}_3 \\ \eta_1 & \eta_3 \end{vmatrix} + \right. \\ &\quad \left. + \kappa_3 \det \begin{vmatrix} \vec{\xi}_1 & \vec{\xi}_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix} \right) (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3) = \det \begin{vmatrix} \vec{\xi}_1 & \vec{\xi}_2 & \vec{\xi}_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \end{vmatrix} (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3), \end{aligned}$$

поскольку выражение, стоящее в больших круглых скобках, является разложением определителя 3-го порядка по последней строке. (См. теорему 1.1.1.)

**Замечания.** 1°. Из последней формулы и теоремы 2.6.1 следует справедливость теоремы 1.6.3.

2°. В случае ортонормированного правого базиса  
 $\rightarrow \rightarrow \rightarrow$   
 $(e_1, e_2, e_3) = 1$ , поэтому в таком базисе

$$\rightarrow \rightarrow \rightarrow (a, b, c) = \det \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \end{vmatrix}.$$

3°. Для введенных в § 2.5 векторов  $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$  справедлива

**Теорема 2.7.1.** Тройка векторов  $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$  образует базис (называемый *взаимным базисом*  $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ ).

**Доказательство.**

Для доказательства достаточно показать, что векторы  $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$  линейно независимы.

Пусть существуют числа  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , такие, что

$$\lambda_1 \vec{f}_1 + \lambda_2 \vec{f}_2 + \lambda_3 \vec{f}_3 = \vec{o}.$$

Умножив последовательно обе части этого равенства скалярно на  $\vec{g}_j$ ,  $j = [1, 3]$ , получим

$$\lambda_1 (\vec{f}_1, \vec{g}_j) + \lambda_2 (\vec{f}_2, \vec{g}_j) + \lambda_3 (\vec{f}_3, \vec{g}_j) = 0, \quad j = [1, 3]. \quad (2.7.1)$$

Для девяти выражений  $(\vec{f}_i, \vec{g}_j)$ ,  $i = [1, 3]$ ,  $j = [1, 3]$  имеем

$$(\vec{f}_i, \vec{g}_j) = \begin{cases} \alpha, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \text{ где } \alpha \neq 0.$$

Действительно, выраже-

ния  $(\vec{f}_i, \vec{g}_i)$ ,  $i = [1, 3]$  суть смешанные произведения некомпланарных векторов  $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$  и потому отличны от нуля. Остальные шесть выражений  $(\vec{f}_i, \vec{g}_j)$ ,  $i \neq j$  будут равны нулю как смешанные произведения векторов, среди которых имеется пара равных.

Подставляя значения выражений в систему равенств (2.7.1), получим, что все  $\lambda_i = 0$ ,  $i = [1, 3]$ , что доказывает линейную

зависимость векторов  $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ .

Теорема доказана.

## § 2.8. Двойное векторное произведение

**Определение  
2.8.1.**

*Двойным векторным произведением* векторов  $\vec{a}, \vec{b}$  и  $\vec{c}$  называется вектор  $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$ .

Для решения ряда задач оказывается полезной

**Теорема  
2.8.1.**

**Имеет место равенство**

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}) \quad \forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}.$$

Доказательство.

Заметим, что если векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  попарно ортогональны, то доказываемое равенство очевидно, поэтому далее будем предполагать, что числа  $(\vec{a}, \vec{b})$  и  $(\vec{a}, \vec{c})$  не равны нулю одновременно.

Обозначим  $\vec{x} = [\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$ . По определению векторного произведения вектор  $\vec{x}$  ортогонален как вектору  $[\vec{b}, \vec{c}]$ , так и  $\vec{a}$ .

1°. По свойствам смешанного произведения условие  $(\vec{x}, [\vec{b}, \vec{c}]) = (\vec{x}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$  означает, что тройка векторов  $\{\vec{x}, \vec{b}, \vec{c}\}$  компланарная и в силу леммы 1.4.1

$$\vec{x} = \lambda \vec{b} + \mu \vec{c},$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  – некоторые числа.

2°. Из условия  $(\vec{x}, \vec{a}) = 0$  следует, что

$$(\lambda \vec{b} + \mu \vec{c}, \vec{a}) = 0 \text{ или } \lambda (\vec{b}, \vec{a}) + \mu (\vec{c}, \vec{a}) = 0.$$

3°. Рассмотрим теперь вектор  $\vec{r}$ , удовлетворяющий следующему набору условий:

a)  $\vec{r}$  (так же как и вектор  $\vec{x}$ ) принадлежит плоскости,

проходящей через векторы  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ ;

б)  $(\vec{r}, \vec{b}) = 0$  и  $(\vec{r}, \vec{c}) > 0$ . (См. рис. 2.8.1.)

Найдем теперь выражение для смешанного произведения вида  $(\vec{a}, \vec{r}, [\vec{b}, \vec{c}]) = (\vec{a}, [\vec{r}, [\vec{b}, \vec{c}]])$ . С одной стороны, по свойствам

смешанного произведения и в силу  $(\vec{r}, \vec{b}) = 0$  имеем

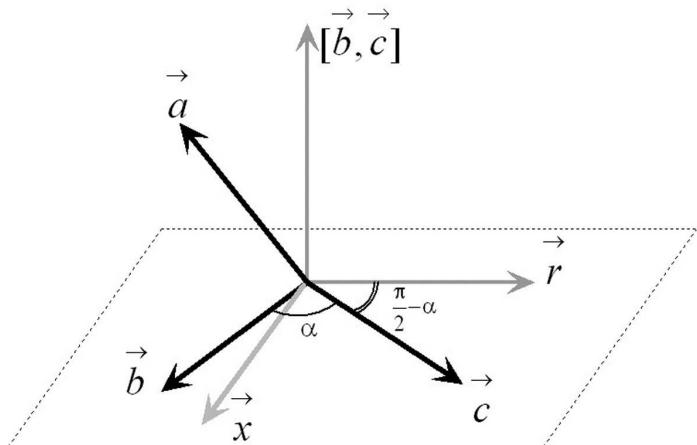


Рис. 2.8.1

$$\begin{aligned}
 (\vec{a}, \vec{r}, [\vec{b}, \vec{c}]) &= -(\vec{r}, \vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = -(\vec{r}, [\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]) = -(\vec{r}, \vec{x}) = \\
 &= -(\vec{r}, \lambda \vec{b} + \mu \vec{c}) = -\lambda(\vec{r}, \vec{b}) - \mu(\vec{r}, \vec{c}) = -\mu(\vec{r}, \vec{c}).
 \end{aligned}$$

С другой стороны, вектор  $[\vec{r}, [\vec{b}, \vec{c}]]$  сонаправлен с  $\vec{b}$ , то есть  $\exists \kappa > 0$  такое, что  $[\vec{r}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \kappa \vec{b}$ . Поэтому

$$(\vec{a}, \vec{r}, [\vec{b}, \vec{c}]) = \kappa(\vec{a}, \vec{b}).$$

Значение  $\kappa$  найдем из соотношений

$$\begin{aligned}
 \kappa |\vec{b}| &= |[\vec{r}, [\vec{b}, \vec{c}]]| = |\vec{r}| |\vec{b}| |\vec{c}| \sin \alpha \sin(\angle \{ \vec{r}; [\vec{b}, \vec{c}] \}) = \\
 &= |\vec{r}| |\vec{b}| |\vec{c}| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = (\vec{r}, \vec{c}) |\vec{b}| \Rightarrow \kappa = (\vec{r}, \vec{c}),
 \end{aligned}$$

поскольку угол между  $\vec{r}$  и  $[\vec{b}, \vec{c}]$  прямой. Значит,

$$(\vec{a}, \vec{r}, [\vec{b}, \vec{c}]) = (\vec{a}, \vec{b}) \cdot (\vec{r}, \vec{c}).$$

Приравнивая выражения для  $(\vec{a}, \vec{r}, [\vec{b}, \vec{c}])$ , получаем

$$-\mu(\vec{r}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) \cdot (\vec{r}, \vec{c}) \text{ или } \mu = -(\vec{a}, \vec{b}).$$

Наконец, из соотношения, полученного в п. 2°, находим, что

$$\lambda = (\vec{a}, \vec{c}).$$

Теорема доказана.

Альтернативное доказательство этой теоремы приводится в Приложении 4 (см. Прил. 4.5).

## § 2.9. Замечания об инвариантности произведений векторов

Операции векторных произведений были введены независимо от координатного представления сомножителей и, значит, независимо и от используемого базиса. С другой стороны, естественным представляется вопрос о возможности (и соответственно целесообразности) дать определения операций произведения векторов непосредственно в координатной форме.

В общем случае каждой упорядоченной паре векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , имеющих в базисе  $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$  координатные представления  $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$  и

$\begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{vmatrix}$ , естественно поставить в соответствие девятку попарных произведений  $\xi_k \eta_i$ ;  $k, i = 1, 2, 3$ , которую можно записать в виде матрицы

$$\begin{vmatrix} \xi_1 \eta_1 & \xi_1 \eta_2 & \xi_1 \eta_3 \\ \xi_2 \eta_1 & \xi_2 \eta_2 & \xi_2 \eta_3 \\ \xi_3 \eta_1 & \xi_3 \eta_2 & \xi_3 \eta_3 \end{vmatrix}. \quad (2.9.1)$$

На первый взгляд, зависимость компонент этой матрицы от выбора базиса делает координатный способ введения произведений векторов малоцелесообразным, ибо придется давать их определение для каждого из возможных базисов.

Однако было замечено, что существуют некоторые линейные комбинации чисел  $\xi_k \eta_i$ ;  $k, i = 1, 2, 3$ , инвариантные (то есть не изменяющиеся) при замене базиса, которые можно принять за определение произведений векторов в координатном представлении.

Покажем в качестве примера, что сумма элементов матрицы 2.9.1, стоящих на ее главной диагонали, не меняется при переходе от одного ортонормированного базиса к другому.

Рассмотрим два ортонормированных базиса  $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$  и  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  с матрицей перехода  $\|S\| = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$ .

Согласно § 1.8, в этом случае для базисных векторов имеют место соотношения  $\vec{e}'_t = \sum_{p=1}^3 \sigma_{pt} \vec{e}_p$ ;  $t = 1, 2, 3$ , а для координат соответ-

твенно

$$\xi_s = \sum_{i=1}^3 \sigma_{si} \xi'_i; \quad s = 1, 2, 3; \quad \eta_s = \sum_{t=1}^3 \sigma_{st} \eta'_t; \quad s = 1, 2, 3.$$

Пусть  $\delta_{it}$  – символ Кронекера (см. § 2.3), тогда из условия ортонормированности базисов  $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$  и  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  имеем

$$\begin{aligned} (\vec{e}'_i, \vec{e}'_t) &= \delta_{it} = \left( \sum_{s=1}^3 \sigma_{si} \vec{e}_s, \sum_{p=1}^3 \sigma_{pt} \vec{e}_p \right) = \sum_{s=1}^3 \sum_{p=1}^3 \sigma_{si} \sigma_{pt} (\vec{e}_s, \vec{e}_p) = \\ &= \sum_{s=1}^3 \sum_{p=1}^3 \sigma_{si} \sigma_{pt} \delta_{sp} = \sum_{s=1}^3 \sigma_{si} \sigma_{st}; \quad t = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Отметим, что соотношения  $\sum_{s=1}^3 \sigma_{si} \sigma_{st} = \delta_{it}$ ,  $i, t = 1, 2, 3$ , являются свойством матрицы перехода  $\|S\|$  от одного ортонормированного базиса к другому.

Найдем теперь выражение для линейной комбинации  $\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3$  в базисе  $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ , используя зависимости между компонентами матрицы перехода и определение символа Кронекера:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \xi_i \eta_i &= \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{s=1}^3 \sigma_{si} \xi'_s \right) \left( \sum_{t=1}^3 \sigma_{st} \eta'_t \right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{t=1}^3 \xi'_i \eta'_t \sum_{s=1}^3 \sigma_{si} \sigma_{st} = \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{t=1}^3 \xi'_i \eta'_t \delta_{it} = \sum_{t=1}^3 \xi'_t \eta'_t. \end{aligned}$$

Полученное равенство доказывает инвариантность суммы  $\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3$  при замене одного ортонормированного базиса

другим, которая может быть принята в этих базисах за определение скалярного произведения векторов.

Покажите самостоятельно, что при переходе от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису инвариантными также оказываются и линейные комбинации вида

$$\xi_2 \eta_3 - \xi_3 \eta_2 ,$$

$$\xi_3 \eta_1 - \xi_1 \eta_3 ,$$

$$\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 .$$

Выясните, каков геометрический смысл этой инвариантности.

## Глава 3 ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

Как было показано, использование системы координат устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством точек пространства и множеством их радиусов-векторов. Это в свою очередь позволяет свести исследование свойств линий, поверхностей или тел к изучению множеств радиусов-векторов, соответствующих точкам, образующим исследуемые геометрические объекты.

Глава 3 посвящена методам описания и исследования свойств простейших геометрических объектов – прямой и плоскости – средствами векторной алгебры. В главах 3, 4 и 5 настоящего пособия будут использоваться обозначения координаты по оси *абсцисс* через  $x$ , координаты по оси *ординат* через  $y$  и координаты по оси *аппликат* через  $z$ , равно как и стандартные формы записи уравнений.

### § 3.1. Прямая на плоскости

Пусть дана система координат  $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$  на плоскости и прямая  $L$ , проходящая через точку  $\vec{r}_0$ , с лежащим на ней *ненулевым* вектором  $\vec{a}$ .

**Определение 3.1.1.** Вектор  $\vec{a}$  называется *направляющим вектором* прямой  $L$ .

**Теорема** Множество радиусов-векторов точек прямой  $L$  пред-  
 3.1.1. ставимо в виде  $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$ , где  $\tau$  – произвольный  
 вещественный параметр.

Доказательство.

Пусть  $\vec{r}$  – некоторая точка на прямой  $L$ . Ненулевой вектор  $\vec{a}$  образует базис на прямой  $L$ , поэтому лежащий на этой прямой вектор  $\vec{r} - \vec{r}_0$  (рис. 3.1.1) может быть для каждого  $\vec{r}$  представлен единственным образом в виде  $\vec{r} - \vec{r}_0 = \tau \vec{a}$ . Тогда

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a} \quad \forall \tau \in (-\infty, +\infty).$$

Теорема доказана.

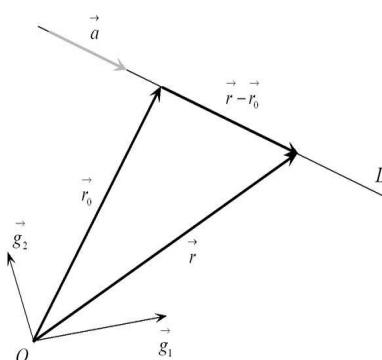


Рис. 3.1.1

Найдем теперь координатное представление множества радиусов-векторов всех точек прямой  $L$ . Пусть  $\left\| \vec{r} \right\|_g = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $\left\| \vec{r}_0 \right\|_g = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  и  $\left\| \vec{a} \right\|_g = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ , тогда справедливы следующие теоремы.

**Теорема 3.1.2.** Всякая прямая в любой декартовой системе координат может быть задана уравнением вида

$$Ax + By + C = 0, \quad |A| + |B| > 0.$$

**Доказательство.**

Условие коллинеарности ненулевых векторов  $\vec{r} - \vec{r}_0$  и  $\vec{a}$  в координатной форме имеет вид

$$\det \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ a_x & a_y \end{vmatrix} = 0.$$

Откуда  $a_y(x - x_0) - a_x(y - y_0) = 0$ , или же

$$Ax + By + C = 0, \quad |A| + |B| > 0,$$

где  $A = a_y$ ;  $B = -a_x$ ,  $C = -a_y x_0 - a_x y_0$ , и мы получили, что уравнение прямой есть алгебраическое уравнение первой степени. Заметим, что справедливость неравенства

$$\left| A \right| + \left| B \right| > 0$$

$\rightarrow \quad \rightarrow$

следует из условия  $a \neq 0$ .

**Теорема доказана.**

**Теорема 3.1.3.** Всякое уравнение вида

$$Ax + By + C = 0, \quad |A| + |B| > 0,$$

в любой декартовой системе координат есть уравнение некоторой прямой.

**Доказательство.**

Пусть дано уравнение первой степени

$$Ax + By + C = 0, \quad |A| + |B| > 0.$$

Подберем числа  $x_0$  и  $y_0$  так, чтобы  $Ax_0 + By_0 + C = 0$ .

Вычитая почленно два эти равенства, получим

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Возьмем точку  $\left\| \begin{array}{c} \rightarrow \\ r_0 \end{array} \right\|_g = \left\| \begin{array}{c} x_0 \\ y_0 \end{array} \right\|$  и вектор  $\left\| \begin{array}{c} \rightarrow \\ a \end{array} \right\|_g = \left\| \begin{array}{c} -B \\ A \end{array} \right\|$ . По теореме 3.1.2 имеем, что прямая, проходящая через точку  $r_0$  в направлении вектора  $a$ , имеет уравнение вида

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Следовательно, исходное уравнение есть уравнение прямой.

Теорема доказана.

**Замечание:** из теорем 3.1.1–3.1.3 следует, что каждое линейное уравнение в декартовой системе координат на плоскости задает некоторую конкретную прямую, но, с другой стороны, конкретная прямая на плоскости может быть задана бесчисальным множеством линейных уравнений и естественно возникает вопрос: при каких условиях два разных линейных уравнения задают одну и ту же прямую?

#### Теорема Для того чтобы уравнения

3.1.4.

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad |A_1| + |B_1| > 0 \text{ и}$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0, \quad |A_2| + |B_2| > 0$$

были уравнениями одной и той же прямой, необходимо и достаточно, чтобы существовало число  $\lambda \neq 0$ , такое, что

$$A_1 = \lambda A_2; B_1 = \lambda B_2; C_1 = \lambda C_2.$$

Доказательство достаточности.

Пусть коэффициенты уравнений пропорциональны и имеет место равенство  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} A_2x + B_2y + C_2 &= \frac{1}{\lambda}A_1x + \frac{1}{\lambda}B_1y + \frac{1}{\lambda}C_1 = \\ &= \frac{1}{\lambda}(A_1x + B_1y + C_1) = 0, \end{aligned}$$

но поскольку  $\lambda \neq 0$ , то  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ .

Аналогично из равенства  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  следует, что и  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ .

Доказательство необходимости.

Пусть уравнения

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

суть уравнения одной и той же прямой в некоторой декартовой системе координат. Тогда их направляющие векторы коллинеарны и существует (по теореме 3.1.2)  $\lambda \neq 0$ , такое, что

$$A_1 = \lambda A_2; \quad B_1 = \lambda B_2.$$

С другой стороны, из равносильности уравнений

$$\lambda A_2x + \lambda B_2y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

следует, также, что и  $C_1 = \lambda C_2$ .

Теорема доказана.

**Замечание:** уравнение прямой не в любой системе координат является алгебраическим уравнением первой степени. Например, в полярной системе координат (см. § 4.6) оно может иметь вид

$$\rho = P \sec(\phi + \phi_0).$$

### § 3.2. Способы задания прямой на плоскости

В произвольной декартовой системе координат  $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$  существуют различные формы задания прямой на плоскости. Рассмотрим основные из них.

1°. Уравнение прямой, проходящей через две несовпадающие точки

$$\vec{r}_1 = \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix}$$

и

$$\vec{r}_2 = \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix}$$

Поскольку направляющий вектор данной прямой  $\vec{a} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{vmatrix}$ , то ее уравнение в векторной форме будет иметь вид  $\vec{r} = \vec{r}_1 + \tau(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$  или

$$\vec{r} = (1 - \tau)\vec{r}_1 + \tau\vec{r}_2.$$

Соответственно в координатах, исключив параметр  $\tau$ , получим одну из следующих формул:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}; (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \neq 0;$$

$$y = y_1 \quad \forall x, \text{ если } y_2 = y_1;$$

$$x = x_1 \quad \forall y, \text{ если } x_2 = x_1.$$

Заметим, что эти три случая могут быть описаны условием

$$\det \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Следствие 3.2.1.

Для того чтобы три точки  $\vec{r}_1 = \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix}, \vec{r}_2 = \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix}$  и

$\vec{r}_3 = \begin{vmatrix} x_3 \\ y_3 \end{vmatrix}$  лежали на одной прямой, необходимо и

достаточно, чтобы их координаты удовлетворяли уравнению

$$\det \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2°. Векторное уравнение прямой (уравнение прямой, проходящей через данную точку)

$$\vec{r}_0 = \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix},$$

перпендикулярно заданному ненулевому вектору

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} n_x \\ n_y \end{vmatrix}$$

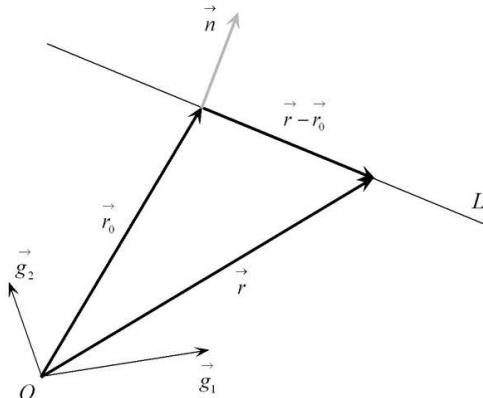


Рис. 3.2.1

Возьмем в качестве направляющего вектора данной

$$\vec{a} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \begin{vmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{vmatrix}, \quad \text{где вектор}$$

$\vec{r} = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$  есть радиус-вектор некоторой точки на прямой (рис. 3.2.1). Тогда из условия ортогональности векторов  $\vec{n}$  и  $\vec{r} - \vec{r}_0$  получим

$$(\vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0,$$

$$\text{или же } (\vec{n}, \vec{r}) = \vec{d}, \text{ где } \vec{d} = (\vec{n}, \vec{r}_0).$$

При обратном переходе от записи уравнения прямой в виде  $\vec{n} \cdot \vec{r} = d$  к  $(\vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0$  в качестве вектора  $\vec{r}_0$  можно взять, например,  $\vec{r}_0 = \frac{\vec{d}}{\vec{n} \cdot \vec{n}} \vec{n}$ .

В ортонормированной системе координат  $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  векторное уравнение прямой приобретает вид

$$n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) = 0,$$

или же

$$n_x x + n_y y = d, \text{ где } d = n_x x_0 + n_y y_0.$$

Сравнивая последнюю запись с общим видом уравнения прямой  $Ax + By + C = 0$ , приходим к заключению, что в ортонормированной системе координат вектор  $\vec{n}$ , для которого  $\left\| \vec{n} \right\|_g = \begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix}$ , будет ортогонален этой прямой.

### Определение 3.2.1.

Вектор  $\vec{n}$  называется *нормальным вектором* прямой  $L$ .

### 3°. Нормальное уравнение прямой

Рассмотрим скалярное уравнение прямой в ортонормированной системе координат  $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$

$$Ax + By + C = 0, |A| + |B| > 0$$

и преобразуем его, разделив обе части на  $\sqrt{A^2 + B^2}$ . Подставляя обозначения

$$\cos \varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \sin \varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \rho = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

получим так называемую *нормальную* форму записи уравнения

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi + \rho = 0.$$

Геометрический смысл параметров  $\rho$  и  $\varphi$  ясен из рис. 3.2.2.

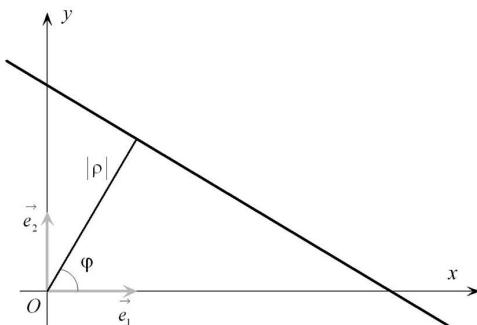


Рис. 3.2.2

### Замечание о линейных неравенствах

Аналогично тому, как линейное уравнение задает на плоскости прямую, линейное неравенство

$$Ax + By + C > 0, |A| + |B| > 0$$

определяет часть плоскости (множество точек, координаты которых  $x$  и  $y$  удовлетворяют данному неравенству), ограниченную прямой

$$Ax + By + C = 0, |A| + |B| > 0.$$

Покажем справедливость данного утверждения для случая, когда прямая  $L$ :  $\stackrel{\rightarrow}{(n, r)} = d$  делит плоскость  $P$  на две части, обозначаемые  $P_+$  и  $P_-$  (см. рис. 3.2.3).

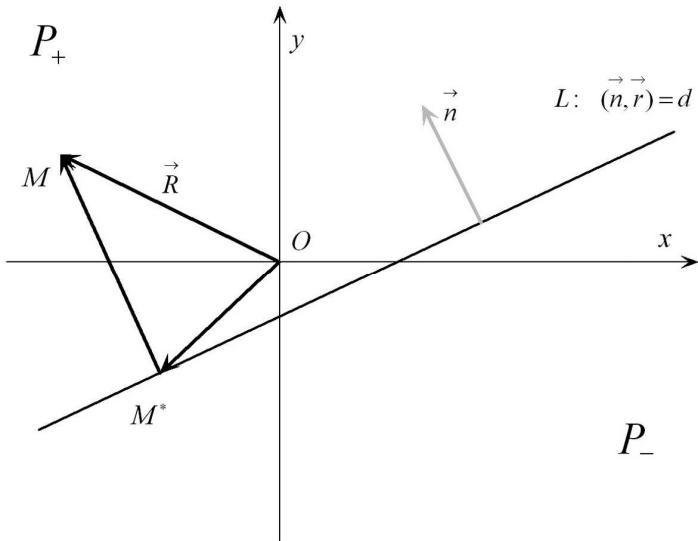


Рис. 3.2.3

\

**Определение 3.2.2.**

Будем говорить, что точка  $M$  с радиусом-вектором  $\vec{R}$  принадлежит  $P_+$  (или соответственно  $P_-$ ), если существует  $\lambda > 0$  (соответственно  $\lambda < 0$ ), такое, что  $\vec{M^*M} = \lambda \vec{n}$ , где точка  $M^*$  есть ортогональная проекция  $M$  на прямую  $L$ .

Тогда справедлива

**Теорема 3.2.1.** Для того чтобы  $M \in P_+$ , необходимо и достаточно выполнения неравенства  $(\vec{n}, \vec{R}) > d$ .

Доказательство необходимости.

Пусть  $M \in P_+$ , то есть существует  $\lambda > 0$  такое, что

$\vec{M}^* \vec{M} = \lambda \vec{n}$ . Оценим величину  $(\vec{n}, \vec{R})$ . Поскольку  $\vec{M}^* \in L$ ,

то  $(\vec{n}, \vec{O}\vec{M}^*) = d$ , и тогда

$$(\vec{n}, \vec{R}) = (\vec{n}, \vec{O}\vec{M}^* + \vec{M}^* \vec{M}) = (\vec{n}, \vec{O}\vec{M}^*) + (\vec{n}, \vec{M}^* \vec{M}) =$$

$$= d + \lambda(\vec{n}, \vec{n}) > d$$

в силу положительности  $\lambda$ .

Доказательство достаточности.

Пусть  $(\vec{n}, \vec{R}) > d$  и  $\vec{M}^* \vec{M} = \lambda \vec{n}$ , тогда из  $(\vec{n}, \vec{O}\vec{M}^*) = d$  получаем

$$(\vec{n}, \vec{R}) = (\vec{n}, \vec{O}\vec{M}^* + \vec{M}^* \vec{M}) =$$

$$= (\vec{n}, \vec{O}\vec{M}^*) + (\vec{n}, \vec{M}^* \vec{M}) = d + \lambda(\vec{n}, \vec{n}) > d.$$

А в силу  $\vec{n} \neq \vec{o}$  следует, что  $\lambda > 0$  и, значит,  $M \in P_+$ .

Теорема доказана.

Задача 3.2.1. Дано система координат  $\{O, g_1, g_2\}$  на плоскости и

прямая  $L$  с уравнением  $(\vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0$ . Найти расстояние до этой прямой от точки, радиус-вектор которой

$$\vec{r}_1 = \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix}.$$

**Решение**      1°. Пусть  $\vec{MK} = \lambda \vec{n}$ , тогда  $\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda \vec{n}$  (рис. 3.2.4).

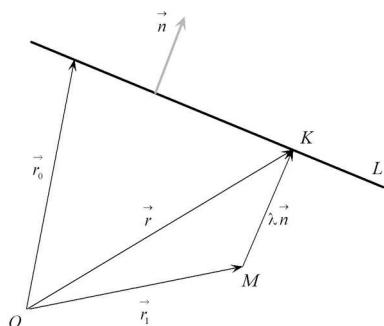


Рис. 3.2.4

2°. Точка  $K$  принадлежит данной прямой, поэтому имеет место соотношение  $(\vec{n}, \vec{r}_1 + \lambda \vec{n} - \vec{r}_0) = 0$ . Откуда

$$\lambda = -\frac{(\vec{n}, \vec{r}_1 - \vec{r}_0)}{|\vec{n}|^2}.$$

3°. Подставив  $\lambda$  в выражение для  $\vec{MK}$ , получим

$$|\vec{MK}| = \left| \left( \vec{r}_1 - \vec{r}_0, \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \right) \right|.$$

4°. Пусть система координат *ортонормированная*. Для уравнения  $Ax + By + C = 0$ ,  $|A| + |B| > 0$ , как было показано, вектор  $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$  перпендикулярен прямой. Поэтому

$$|\vec{MK}| = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Принимая во внимание, что точка  $\vec{r}_0$  лежит на прямой  $L$  и, следовательно,  $Ax_0 + By_0 + C = 0$ , можно записать окончательный ответ в виде

$$|\vec{MK}| = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

**Определение 3.2.3.** Пучком прямых на плоскости называется совокупность всех прямых, проходящих через некоторую заданную точку, именуемую *вершиной пучка*.

**Теорема 3.2.2.** Пусть точка, общая для всех прямых пучка, является точкой пересечения непараллельных прямых

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Тогда

1) для любой прямой пучка найдется пара не равных нулю одновременно чисел  $\alpha$  и  $\beta$ , таких, что

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \quad \text{есть уравнение данной прямой,}$$

2) при любых, не равных нулю одновременно  $\alpha$  и  $\beta$ , уравнение

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \quad \text{есть уравнение некоторой прямой данного пучка.}$$

Доказательство.

1°. Возьмем некоторую точку  $r^* = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$ , не совпадающую с

вершиной пучка, и примем в качестве параметров

$$\alpha = A_2x^* + B_2y^* + C_2, \quad \text{и} \quad \beta = -(A_1x^* + B_1y^* + C_1).$$

Заметим при этом, что  $|\alpha| + |\beta| > 0$ , поскольку точка  $r^*$  не принадлежит данным прямым одновременно. Кроме того, прямая

$$(A_2x^* + B_2y^* + C_2)(A_1x + B_1y + C_1) - (A_1x^* + B_1y^* + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

проходит как через точку  $r^*$ , так и через вершину пучка и, следовательно, принадлежит пучку.

2°. Пусть  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  – пара пересекающихся прямых из рассматриваемого пучка, тогда очевидно, что

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

При этом уравнение

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)x + (\alpha B_1 + \beta B_2)y + (\alpha C_1 + \beta C_2) = 0$$

является уравнением прямой, поскольку из

$$|A_1| + |B_1| > 0, \quad |A_2| + |B_2| > 0 \text{ и } |\alpha| + |\beta| > 0$$

следует, что  $|\alpha A_1 + \beta A_2| + |\alpha B_1 + \beta B_2| > 0$ .

Действительно, допустим противное:

$$\begin{cases} A_1\alpha + A_2\beta = 0, \\ B_1\alpha + B_2\beta = 0. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Прямые  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  по построению имеют, по крайней мере, одну общую точку. Поэтому они либо совпадают, либо пересекаются. По теореме 3.1.4 они совпадают тогда и только тогда, когда существует  $\lambda \neq 0$ , для которого  $A_1 = \lambda A_2$  и  $B_1 = \lambda B_2$ . А последние два равенства

по теореме 1.6.2 равносильны условию  $\det \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} = 0$ .

В рассматриваемом случае прямые пересекаются, поэтому

$$\det \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

и в силу теоремы 1.1.2 система линейных уравнений 3.2.1 может иметь лишь единственное решение. С другой стороны, очевидно, что эта система имеет тривиальное решение  $\alpha = \beta = 0$ , что в совокупности противоречит неравенству

$$|\alpha| + |\beta| > 0.$$

Следовательно,

$$|\alpha A_1 + \beta A_2| + |\alpha B_1 + \beta B_2| > 0.$$

Теорема доказана.

**Определение 3.2.4.** Уравнение

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

с неравными одновременно нулю параметрами  $\alpha$  и  $\beta$  называется уравнением *пучка прямых* на плоскости.

### § 3.3. Плоскость в пространстве

Пусть даны система координат  $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$  в пространстве и плоскость  $S$ , проходящая через точку с радиусом-вектором  $\vec{r}_0$  и лежащими на  $S$  неколлинеарными векторами  $\vec{p}$  и  $\vec{q}$ .

**Определение 3.3.1.** Векторы  $\vec{p}$  и  $\vec{q}$  называются *направляющими векторами* плоскости  $S$ .

**Теорема 3.3.1.** **Множество радиусов-векторов точек плоскости  $S$**  представимо в виде  $\vec{r} = \vec{r}_0 + \Phi \vec{p} + \Theta \vec{q}$ , где  $\Phi$  и  $\Theta$  – произвольные вещественные параметры.

Доказательство.

Пусть  $\vec{r}$  – некоторая точка плоскости  $S$ . Векторы  $\vec{p}, \vec{q}$  образуют базис на  $S$ , и лежащий на этой плоскости (рис. 3.3.1) вектор  $\vec{r} - \vec{r}_0$  может быть единственным образом представлен

как линейная комбина-

$\rightarrow \quad \rightarrow$   
ция векторов  $p$  и  $q$

$$\rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow \\ r - r_0 = \varphi p + \theta q,$$

и, следовательно, уравнение плоскости будет иметь вид

$$\rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow \\ r = r_0 + \varphi p + \theta q,$$

где  $\varphi \in (-\infty, +\infty)$  и  
 $\theta \in (-\infty, +\infty)$ .

Теорема доказана.

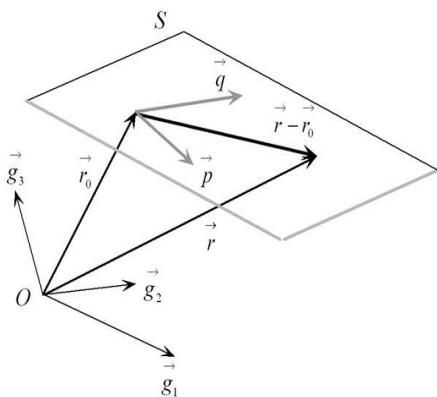


Рис. 3.3.1

Найдем теперь координатное представление множества радиусов-векторов всех точек плоскости  $S$ . Пусть  $\left\| \begin{array}{c} \rightarrow \\ r \end{array} \right\|_g = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$ ,  $\left\| \begin{array}{c} \rightarrow \\ p \end{array} \right\|_g = \begin{vmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{vmatrix}$

и  $\left\| \begin{array}{c} \rightarrow \\ q \end{array} \right\|_g = \begin{vmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{vmatrix}$ , тогда будут справедливы следующие теоремы.

**Теорема 3.3.2.** **Всякая плоскость в любой декартовой системе координат может быть задана уравнением вида**

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad |A| + |B| + |C| > 0.$$

Доказательство.

Условие компланарности векторов  $\rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow$   $r - r_0$ ,  $p$  и  $q$  в координатной форме имеет в силу теоремы 1.6.3 вид

$$\det \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \end{vmatrix} = 0.$$

Откуда  $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ , или окончательно  $Ax + By + Cz + D = 0$ , где числа  $A$ ,  $B$  и  $C$  находятся по теореме 1.1.1 и равны соответственно

$$A = \det \begin{vmatrix} p_y & p_z \\ q_y & q_z \end{vmatrix}; B = -\det \begin{vmatrix} p_x & p_z \\ q_x & q_z \end{vmatrix};$$

$$C = \det \begin{vmatrix} p_x & p_y \\ q_x & q_y \end{vmatrix},$$

а  $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ , и, таким образом, мы получили, что уравнение плоскости есть уравнение первой степени. Условие невозможности одновременного равенства нулю чисел  $A$ ,  $B$  и  $\overset{\rightarrow}{C}$  вытекает из неколлинеарности векторов  $\overset{\rightarrow}{p}$  и  $\overset{\rightarrow}{q}$  и следствия 2.5.1.

Теорема доказана.

**Теорема 3.3.3.** **Всякое уравнение вида  $Ax + By + Cz + D = 0$ , в любой декартовой системе координат есть уравнение некоторой плоскости.**

Доказательство.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad |A| + |B| + |C| > 0$$

при  $C \neq 0$  может быть записано как

$$\det \begin{vmatrix} x + \frac{DA}{A^2 + B^2 + C^2} & y + \frac{DB}{A^2 + B^2 + C^2} & z + \frac{DC}{A^2 + B^2 + C^2} \\ 0 & -C & B \\ C & 0 & -A \end{vmatrix} = 0,$$

а при  $C = 0$  в виде

$$\det \begin{vmatrix} x + \frac{DA}{A^2 + B^2} & y + \frac{DB}{A^2 + B^2} & z + 0 \\ -B & A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ибо в любой ДСК в качестве векторов  $\vec{p}$  и  $\vec{q}$  можно выбрать

$$\left\| \begin{array}{c} \vec{p} \\ \vec{q} \end{array} \right\|_g = \begin{vmatrix} 0 \\ -C \\ B \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \left\| \begin{array}{c} \vec{p} \\ \vec{q} \end{array} \right\|_g = \begin{vmatrix} C \\ 0 \\ -A \end{vmatrix} \quad \text{при } C \neq 0, \text{ и, если } C = 0,$$

то

$$\left\| \begin{array}{c} \vec{p} \\ \vec{q} \end{array} \right\|_g = \begin{vmatrix} -B \\ A \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \left\| \begin{array}{c} \vec{p} \\ \vec{q} \end{array} \right\|_g = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что оба эти уравнения определяют плоскость, проходящую через некоторую заданную точку параллельно двум неколлинеарным векторам.

Теорема доказана.

**Задача 3.3.1.** В системе координат  $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$  составить уравнение плоскости, проходящей через три заданные, попарно несовпадающие и не лежащие на одной прямой точки:

$$\vec{r}_1 = \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix}; \vec{r}_2 = \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{vmatrix}; \vec{r}_3 = \begin{vmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{vmatrix}.$$

**Решение.** Из условия задачи следует, что неколлинеарные векторы  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$  и  $\vec{r}_3 - \vec{r}_1$  параллельны искомой плоскости. Кроме того, для радиуса-вектора любой принадлежащей этой плоскости точки  $\vec{r}$  вектор  $\vec{r} - \vec{r}_1$  также будет ей параллелен.

Из условия компланарности тройки векторов

$$\{\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1\}$$

получаем уравнение искомой плоскости, которое будет иметь вид

$$(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0,$$

или в координатной форме (согласно § 2.7)

$$\det \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

**Задача 3.3.2.** В системе координат  $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$  составить уравнение плоскости, проходящей через заданную точку  $\vec{r}_0 = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \end{vmatrix}^T$  перпендикулярно ненулевому вектору  $\vec{n} = \begin{vmatrix} n_x & n_y & n_z \end{vmatrix}^T$ .

**Решение.** По условию задачи для радиуса-вектора  $\vec{r}$  любой точки, принадлежащей этой плоскости, векторы  $\vec{r} - \vec{r}_0$  и  $\vec{n}$  будут ортогональны, т.е.  $(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = 0$ .

В *ортонормированной* системе координат  $\{\vec{O}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  это условие принимает вид

$$n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) + n_z(z - z_0) = 0$$

или, обозначив  $A = n_x; B = n_y; C = n_z$  и соответственно  $D = -n_x x_0 - n_y y_0 - n_z z_0$ , получим

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Следствие  
3.3.1.

**Если плоскость задана в ортонормированной системе координат  $\{\vec{O}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  уравнением**

$$Ax + By + Cz + D = 0, \text{ где } |A| + |B| + |C| > 0,$$

то вектор  $\vec{n} = \begin{vmatrix} A \\ B \\ C \end{vmatrix}$  ортогонален этой плоскости.

Определение  
3.3.2.

Вектор  $\vec{n}$  называется *нормальным вектором* плоскости  $(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = 0$ .

Определение  
3.3.3.

Вектор  $\begin{vmatrix} A & B & C \end{vmatrix}^T$  называется *главным вектором* плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0, |A| + |B| + |C| > 0.$$

В ортонормированной системе координат главный вектор плоскости является и нормальным ее вектором.

**Задача 3.3.3.** В ортонормированной системе координат найти расстояние от точки  $M$  с радиус-вектором  $\vec{r}^*$  до плоскости  $(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = 0$ .

$$\vec{r}^* = \begin{vmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{vmatrix}$$

**Решение.** 1°. Пусть  $K$  есть ортогональная проекция точки  $M$  на данную плоскость, тогда  $\vec{MK} = \lambda \vec{n}$  и  $\vec{r} = \vec{r}^* + \lambda \vec{n}$ . (рис. 3.3.2.)

2°. Точка  $K$  принадлежит данной плоскости, поэтому имеет место соотношение  $(\vec{n}, \vec{r}^* + \lambda \vec{n} - \vec{r}_0) = 0$ , и, следовательно,

$$\lambda = -\frac{(\vec{n}, \vec{r}^* - \vec{r}_0)}{|\vec{n}|^2},$$

тогда для искомого расстояния получим

$$\begin{aligned} |\vec{MK}| &= \\ &= \left| (\vec{r}^* - \vec{r}_0, \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}) \right|. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь ортонормированную систему координат.

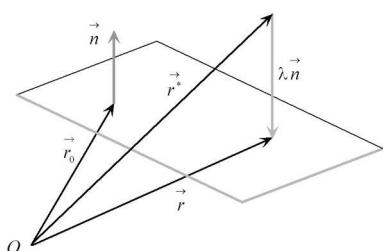


Рис. 3.3.2

В этом случае вектор  $\vec{n} = \begin{vmatrix} A & B & C \end{vmatrix}^T$  будет нормальным вектором плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$ . Поэтому

$$|\vec{MK}| = \frac{|A(x^* - x_0) + B(y^* - y_0) + C(z^* - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

Точка  $r_0^*$  принадлежит данной плоскости, значит

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0,$$

а, поскольку  $|A| + |B| + |C| > 0$ , то ответ задачи можно записать в виде

$$|\vec{MK}| = \frac{|Ax^* + By^* + Cz^* + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

**Теорема 3.3.4.** Пусть  $|A_1| + |B_1| + |C_1| > 0$  и  $|A_2| + |B_2| + |C_2| > 0$ , в этом случае плоскости

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

будут параллельны тогда и только тогда, когда их главные векторы коллинеарны.

Доказательство.

Докажем достаточность. Если главные векторы коллинеарны, то существует такое число  $\lambda \neq 0$ , что

$$A_1 = \lambda A_2; B_1 = \lambda B_2; C_1 = \lambda C_2,$$

и система уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

может быть переписана в виде

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_1x + B_1y + C_1z + \lambda D_2 = 0. \end{cases}$$

При  $D_1 \neq \lambda D_2$  на этих плоскостях нет общих точек, а при  $D_1 = \lambda D_2$  – все точки общие, что означает параллельность плоскостей.

Докажем необходимость. Пусть плоскости

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{и}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

параллельны. Тогда они должны пересекать одни и те же координатные плоскости по параллельным прямым.

Пусть для определенности этими координатными плоскостями являются плоскости, для которых  $x = 0$  и  $z = 0$ . Линии пересечения, соответствующие первой из координатных плоскостей, будут определяться системами уравнений

$$\begin{cases} x = 0, \\ B_1y + C_1z + D_1 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 0, \\ B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Параллельность этих прямых означает существование  $\lambda \neq 0$  такого, что  $B_1 = \lambda B_2$ ;  $C_1 = \lambda C_2$ .

Рассматривая случай  $z = 0$ , получаем аналогичную систему соотношений

$$\begin{cases} z = 0, \\ A_1x + B_1y + D_1 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} z = 0, \\ A_2x + B_2y + D_2 = 0, \end{cases}$$

но из условия  $B_1 = \lambda B_2$  и параллельности этой пары прямых вытекает, что  $A_1 = \lambda A_2$ .

Теорема доказана.

Следствие  
3.3.2.

**Для того чтобы уравнения**

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, |A_1| + |B_1| + |C_1| > 0 \text{ и}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, |A_2| + |B_2| + |C_2| > 0$$

**были уравнениями одной и той же плоскости, необходимо и достаточно, чтобы существовало число  $\lambda \neq 0$ , такое, что**

$$A_1 = \lambda A_2; B_1 = \lambda B_2; C_1 = \lambda C_2; D_1 = \lambda D_2.$$

Определение  
3.3.4.

*Пучком плоскостей* в пространстве называется совокупность всех плоскостей, проходящих через данную прямую.

Определение  
3.3.5.

*Уравнением пучка плоскостей*, проходящих через прямую, определяемую пересечением пары непараллельных плоскостей

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$|A_1| + |B_1| + |C_1| > 0$$

и

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

$$|A_2| + |B_2| + |C_2| > 0,$$

называется уравнение вида

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) +$$

$$+ \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

$$|\alpha| + |\beta| > 0.$$

Определение  
3.3.6.

*Связкой плоскостей* в пространстве называется совокупность всех плоскостей, проходящих через данную точку.

**Определение 3.3.7.** Если точка  $P$ , принадлежащая одновременно трем плоскостям

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$|A_1| + |B_1| + |C_1| > 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

$$|A_2| + |B_2| + |C_2| > 0 \quad \text{и}$$

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0,$$

$$|A_3| + |B_3| + |C_3| > 0,$$

единственная, то уравнение вида

$$\begin{aligned} \alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \\ + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) + \\ + \gamma(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0, \\ |\alpha| + |\beta| + |\gamma| > 0 \end{aligned}$$

называется *уравнением связки плоскостей*, проходящих через точку  $P$ .

Для пучка и связки плоскостей в пространстве справедливы теоремы, аналогичные теореме 3.2.1 для пучка прямых на плоскости.

### § 3.4. Способы задания прямой в пространстве

Существуют различные способы задания прямой в пространстве в декартовой системе координат  $\{\vec{O}, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ .

1°. Уравнение прямой в параметрической форме

Пусть точка с радиусом-вектором

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^T$$

лежит на прямой в пространстве, имеющей ненулевой направляющий вектор

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{vmatrix} \text{ и проходящей через точку } \vec{r}_0 = \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix}, \text{ то-}$$

где из коллинеарности векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{r} - \vec{r}_0$  следует, что уравнение прямой в пространстве должно иметь вид  $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$ .

2°. Уравнение прямой в канонической форме

Если исключить параметр  $\tau$  из скалярной записи уравнения  $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$

$$\begin{cases} x = x_0 + \tau a_x, \\ y = y_0 + \tau a_y, \\ z = z_0 + \tau a_z, \end{cases}$$

то получается так называемое *каноническое уравнение прямой*

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z},$$

хотя здесь правильнее говорить о системе уравнений.

Случай  $a_x a_y a_z = 0$  рассматривается аналогично случаю, рассмотренному в § 3.2 (1°).

3°. Уравнение прямой, проходящей через две

Поскольку направляющий вектор данной прямой  $\vec{a}$  коллинеарен вектору

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{vmatrix},$$

две несовпадающие точки то уравнение прямой в векторной форме можно представить в виде

$$\vec{r}_1 = \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \vec{r} = \vec{r}_1 + \tau(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad \forall \tau$$

$$\vec{r}_2 = \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad \vec{r} = (1 - \tau)\vec{r}_1 + \tau\vec{r}_2 \quad \forall \tau.$$

Соответственно в координатах после исключения параметра  $\tau$  получаем соотношения

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

если только

$$(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)(z_2 - z_1) \neq 0.$$

#### 4°. Уравнение прямой в 1-й векторной форме

Прямая в пространстве может быть задана как линия пересечения двух плоскостей

$$(\vec{n}_1, \vec{r}) = d_1 \quad \text{и} \quad (\vec{n}_2, \vec{r}) = d_2,$$

где  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$  – неколлинеарные, нормальные векторы этих плоскостей, а  $d_1$  и  $d_2$  – некоторые числа.

Или же, если известна точка  $\vec{r}_0$ , через которую проходит данная прямая, то радиус-вектор любой точки этой прямой удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} (\vec{n}_1, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0, \\ (\vec{n}_2, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0. \end{cases}$$

Или в координатной форме

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

5°. Уравнение Прямая в пространстве может быть задана при помощи прямой во  
2-й вектор-ши иного условия коллинеарности векторов  $\vec{a}$  и  
ной форме  $\vec{r} - \vec{r}_0$ , в виде уравнения

$$[\vec{a}, \vec{r} - \vec{r}_0] = \vec{o}$$

или же

$$[\vec{a}, \vec{r}] = \vec{b}, \text{ где } \vec{b} = [\vec{a}, \vec{r}_0].$$

Наконец, в ортонормированной системе координат  $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  данное уравнение прямой в пространстве принимает вид

$$\det \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_x & a_y & a_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{b} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a_y z - a_z y = b_x, \\ a_z x - a_x z = b_y, \\ a_x y - a_y x = b_z. \end{cases}$$

Отметим, что в последней системе скалярных условий только два уравнения из трех независимые, то есть любое из этих уравнений является следствием двух других.

Действительно, умножив первое уравнение на  $a_x$ , второе на  $a_y$  и третье на  $a_z$  и сложив затем полученные равенства почленно, приходим к тождеству вида  $0 = 0$ , поскольку числа  $a_x$ ,  $a_y$  и  $a_z$  не равны нулю одновременно, а

$$\begin{cases} b_x = a_y z_0 - a_z y_0, \\ b_y = a_z x_0 - a_x z_0, \\ b_z = a_x y_0 - a_y x_0. \end{cases}$$

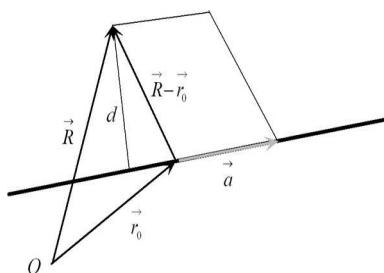


Рис. 3.4.1

Наконец, расстояние  $d$  в пространстве от некоторой точки с радиусом-вектором  $\vec{R}$  до прямой  $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$  можно найти, воспользовавшись свойством, что  $S$  – площадь параллелограмма, построенного на паре векторов, равна длине векторного произведения этих векторов. Из рис. 3.4.1 получаем

$$d = \frac{S}{\left| \vec{a} \right|} = \frac{\left| [\vec{R} - \vec{r}_0, \vec{a}] \right|}{\left| \vec{a} \right|}.$$

### § 3.5. Решение геометрических задач методами векторной алгебры

Эффективность использования методов векторной алгебры при решении геометрических задач во многом зависит от правильного выбора представления геометрических условий в векторной форме. Например, если ввести определения, равносильные используемым в элементарной геометрии, то вычисление углов, определяющих взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, может быть сведено к нахождению скалярных и/или векторных произведений соответствующих нормальных и направляющих векторов.

**Определение 3.5.1.**

Углом между плоскостями  $(\vec{r} - \vec{r}_{01}, \vec{n}_1) = 0$  и  $(\vec{r} - \vec{r}_{02}, \vec{n}_2) = 0$  называется угол между их нормальными векторами  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$ .

**Определение 3.5.2.**

Углом между плоскостью  $(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = 0$  и прямой  $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$  называется угол  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ , где  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{n}$  и  $\vec{a}$ .

В таблицах 3.5.1–3.5.3 приведены некоторые из часто употребляемых форм выражения геометрических условий при помощи векторных операций.

Таблица 3.5.1  
Относительная ориентация прямых в пространстве

Геометрическое условие	Возможная векторная форма представления
Коллинеарность прямых $\vec{r} = \vec{r}_{01} + \tau \vec{a}_1$ и $\vec{r} = \vec{r}_{02} + \tau \vec{a}_2$ .	1°. Существует $\lambda \neq 0$ , такое, что $\vec{a}_1 = \lambda \vec{a}_2$ . 2°. $[\vec{a}_1, \vec{a}_2] = \vec{o}$ .
Ортогональность прямых $\vec{r} = \vec{r}_{01} + \tau \vec{a}_1$ и $\vec{r} = \vec{r}_{02} + \tau \vec{a}_2$ .	$(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = 0$ .
Коллинеарность прямых $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$ и $\begin{cases} (\vec{n}_1, \vec{r}) = d_1, \\ (\vec{n}_2, \vec{r}) = d_2. \end{cases}$	1°. Существует $\lambda \neq 0$ , такое, что $\vec{a} = \lambda [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$ . 2°. $[\vec{a}, [\vec{n}_1, \vec{n}_2]] = \vec{o}$ .

<p>Ортогональность прямых</p> $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a} \text{ и}$ $\begin{cases} (\vec{n}_1, \vec{r}) = d_1, \\ (\vec{n}_2, \vec{r}) = d_2. \end{cases}$	$(\vec{a}, \vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0.$
<p>Совпадение прямых</p> $\vec{r} = \vec{r}_{01} + \tau \vec{a}_1 \text{ и}$ $\vec{r} = \vec{r}_{02} + \tau \vec{a}_2.$	<p>1°. Существуют <math>\lambda \neq 0</math> и <math>\mu \neq 0</math>, такие, что <math>\vec{a}_1 = \lambda \vec{a}_2</math> и</p> $\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02} = \mu \vec{a}_1.$ <p>2°. <math>[\vec{a}_1, \vec{a}_2] = \vec{o}</math> и</p> $[\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02}, \vec{a}_1] = \vec{o}.$
<p>Пересечение прямых</p> $\vec{r} = \vec{r}_{01} + \tau \vec{a}_1 \text{ и}$ $\vec{r} = \vec{r}_{02} + \tau \vec{a}_2.$	$[\vec{a}_1, \vec{a}_2] \neq \vec{o} \text{ и}$ $(\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02}, \vec{a}_1, \vec{a}_2) = 0.$
<p>Условие скрещивания прямых</p> $\vec{r} = \vec{r}_{01} + \tau \vec{a}_1 \text{ и}$ $\vec{r} = \vec{r}_{02} + \tau \vec{a}_2.$	$[\vec{a}_1, \vec{a}_2] \neq \vec{o} \text{ и}$ $(\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02}, \vec{a}_1, \vec{a}_2) \neq 0.$

Таблица 3.5.2

## Относительная ориентация плоскостей в пространстве

Геометрическое условие	Возможная векторная форма представления
Параллельность плоскостей $\vec{r} = \vec{r}_{01} + \varphi \vec{p}_1 + \theta \vec{q}_1$ и $\vec{r} = \vec{r}_{02} + \varphi \vec{p}_2 + \theta \vec{q}_2$ .	<p>1°. Существует <math>\lambda \neq 0</math>, такое, что</p> $[\vec{p}_1, \vec{q}_1] = \lambda [\vec{p}_2, \vec{q}_2] \text{ и}$ $(\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02}, \vec{p}_1, \vec{q}_1) \neq 0.$ <p>2°. <math>[[\vec{p}_1, \vec{q}_1], [\vec{p}_2, \vec{q}_2]] = \vec{o}</math> и</p> $(\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02}, \vec{p}_1, \vec{q}_1) \neq 0.$
Совпадение плоскостей $\vec{r} = \vec{r}_{01} + \varphi \vec{p}_1 + \theta \vec{q}_1$ и $\vec{r} = \vec{r}_{02} + \varphi \vec{p}_2 + \theta \vec{q}_2$ .	<p>1°. Существует <math>\lambda \neq 0</math>, такое, что</p> $[\vec{p}_1, \vec{q}_1] = \lambda [\vec{p}_2, \vec{q}_2] \text{ и}$ $(\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02}, \vec{p}_1, \vec{q}_1) = 0.$ <p>2°. <math>[[\vec{p}_1, \vec{q}_1], [\vec{p}_2, \vec{q}_2]] = \vec{o}</math> и</p> $(\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02}, \vec{p}_1, \vec{q}_1) = 0.$
Совпадение плоскостей $\vec{r} = \vec{r}_{01} + \varphi \vec{p}_1 + \theta \vec{q}_1$ и $\vec{r} = \vec{r}_{02} + \varphi \vec{p}_2 + \theta \vec{q}_2$ .	

<p>Параллельность плоскостей <math>\vec{r} = \vec{r}_0 + \varphi \vec{p} + \theta \vec{q}</math> и  <math>\vec{(n, r)} = d</math>.</p>	$\begin{cases} \vec{(p, n)} = 0 \\ \vec{(q, n)} = 0 \end{cases}$ при условии $\vec{(n, r_0)} \neq d$ .
<p>Совпадение плоскостей <math>\vec{r} = \vec{r}_0 + \varphi \vec{p} + \theta \vec{q}</math> и  <math>\vec{(n, r)} = d</math>.</p>	$\begin{cases} \vec{(p, n)} = 0 \\ \vec{(q, n)} = 0 \end{cases}$ при условии $\vec{(n, r_0)} = d$ .
<p>Ортогональность плоскостей <math>\vec{r} = \vec{r}_0 + \varphi \vec{p} + \theta \vec{q}</math> и  <math>\vec{(n, r)} = d</math>.</p>	<p>1°. Существует <math>\lambda \neq 0</math>, такое, что  <math>\vec{[p, q]} = \lambda \vec{n}</math>.</p> <p>2°. <math>\vec{[[p, q], n]} = o</math>.</p>

Таблица 3.5.3

**Относительная ориентация прямой и плоскости  
в пространстве**

Геометрическое условие	Возможная векторная форма представления
<p>Параллельность прямой <math>\vec{r} = \vec{r}_{01} + \tau \vec{a}</math> плоскости <math>\vec{r} = \vec{r}_{02} + \varphi \vec{p} + \theta \vec{q}</math>.</p>	<p>1°. Существуют <math>\lambda; \mu;  \lambda  +  \mu  &gt; 0</math>, такие, что <math>\vec{a} = \lambda \vec{p} + \mu \vec{q}</math> и <math>(\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02}, \vec{p}, \vec{q}) \neq 0</math>.</p>

	<p>2°.</p> $\begin{cases} \stackrel{\rightarrow}{(a, p, q)} = 0, \\ \stackrel{\rightarrow}{(r_{01} - r_{02}, p, q)} = 0. \end{cases}$
Ортогональность прямой $\vec{r} = \vec{r}_{01} + \tau \vec{a}$ плоскости $\vec{r} = \vec{r}_{02} + \varphi \vec{p} + \theta \vec{q}.$	<p>1°. Существует <math>\lambda \neq 0</math>, такое, что  <math>\vec{a} = \lambda [\vec{p}, \vec{q}]</math>.</p> <p>2°. <math>[\vec{a}, [\vec{p}, \vec{q}]] = \vec{o}</math>.</p>
Параллельность прямой $\vec{r} = \vec{r}_{01} + \tau \vec{a}$ плоскости $(\vec{n}, \vec{r}) = d.$	$\begin{cases} \stackrel{\rightarrow}{(\vec{a}, \vec{n})} = 0 \text{ при условии} \\ \stackrel{\rightarrow}{(\vec{n}, \vec{r}_0)} \neq d. \end{cases}$
Принадлежность прямой $\vec{r} = \vec{r}_{01} + \tau \vec{a}$ плоскости $(\vec{n}, \vec{r}) = d.$	$\begin{cases} \stackrel{\rightarrow}{(\vec{a}, \vec{n})} = 0, \\ \stackrel{\rightarrow}{(\vec{r}_0, \vec{n})} = d. \end{cases}$
Ортогональность прямой $\vec{r} = \vec{r}_{01} + \tau \vec{a}$ плоскости $(\vec{n}, \vec{r}) = d.$	<p>1°. Существует <math>\lambda \neq 0</math>, такое, что  <math>\vec{a} = \lambda \vec{n}.</math></p> <p>2°. <math>[\vec{a}, \vec{n}] = \vec{o}.</math></p>
Ортогональность прямой $(\vec{n}_1, \vec{r}) = d_1,$ $(\vec{n}_2, \vec{r}) = d_2$ и плоскости $(\vec{n}, \vec{r}) = d.$	<p>1°. Существуют <math>\lambda; \mu;  \lambda  +  \mu  &gt; 0</math>, такие,  что <math>\vec{n} = \lambda \vec{n}_1 + \mu \vec{n}_2.</math></p> <p>2°. <math>[\vec{n}, [\vec{n}_1, \vec{n}_2]] = \vec{o}.</math></p>

Отметим, что в таблицах 3.5.1–3.5.3 сохранены введенные ранее обозначения и ограничения.

При решении геометрических задач методами векторной алгебры также важно уметь переводить эти представления из одной эквивалентной формы в другую<sup>5</sup>. Найдем, например, для прямой, заданной в пространстве пересечением двух непараллельных плоскостей

$$\begin{cases} \vec{(n_1, r)} = d_1, \\ \vec{(n_2, r)} = d_2, \end{cases}$$

уравнение в параметрическом виде  $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$ .

Нетрудно убедиться, что в качестве направляющего вектора данной прямой можно взять  $\vec{a} = [\vec{n_1}, \vec{n_2}]$ , а радиус-вектор точки  $\vec{r}_0$  выражается как некоторая линейная комбинация векторов  $\vec{n_1}$  и  $\vec{n_2}$ .

Действительно, пусть  $\vec{r}_0 = \xi \vec{n_1} + \eta \vec{n_2}$ , тогда из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \vec{(n_1, r_0)} = d_1, \\ \vec{(n_2, r_0)} = d_2 \end{cases} \text{находим } \xi = \frac{\Delta_\xi}{\Delta} \text{ и } \eta = \frac{\Delta_\eta}{\Delta},$$

$$\text{где } \Delta = \det \begin{vmatrix} \vec{(n_1, n_1)} & \vec{(n_1, n_2)} \\ \vec{(n_2, n_1)} & \vec{(n_2, n_2)} \end{vmatrix}, \quad \Delta_\xi = \det \begin{vmatrix} d_1 & \vec{(n_1, n_2)} \\ d_2 & \vec{(n_2, n_2)} \end{vmatrix}$$

---

<sup>5</sup> Следует иметь в виду, что использование различных векторных представлений одного и то же геометрического условия может приводить к различным, но, естественно, эквивалентным формам записи решения. (См., например, задачу 3.5.2.)

$$\text{и } \Delta_{\eta} = \det \begin{vmatrix} \overset{\rightarrow}{(n_1, n_1)} & \overset{\rightarrow}{d_1} \\ \overset{\rightarrow}{(n_2, n_1)} & \overset{\rightarrow}{d_2} \end{vmatrix} \text{ (см. теорему 1.1.2).}$$

Покажите самостоятельно, что условие неколлинеарности нормальных векторов  $\overset{\rightarrow}{n_1}$  и  $\overset{\rightarrow}{n_2}$  равносильно условию  $\Delta \neq 0$ .

Аналогично может быть выполнен и обратный переход. Пусть уравнение прямой в пространстве имеет вид  $\overset{\rightarrow}{r} = \overset{\rightarrow}{r_0} + \tau \overset{\rightarrow}{a}$ , причем

предположим, что  $\overset{\rightarrow}{r_0}$  и  $\overset{\rightarrow}{a}$  неколлинеарны. Тогда в качестве нормальных векторов плоскостей, которые пересекаются по данной прямой, можно взять  $\overset{\rightarrow}{n_1} = [\overset{\rightarrow}{a}, \overset{\rightarrow}{r_0}]$  и  $\overset{\rightarrow}{n_2} = [\overset{\rightarrow}{a}, \overset{\rightarrow}{n_1}]$ . Из второго равенства, используя формулу для двойного векторного произведения (см. § 2.8), получаем

$$\overset{\rightarrow}{n_2} = [\overset{\rightarrow}{a}, \overset{\rightarrow}{n_1}] = [\overset{\rightarrow}{a}, [\overset{\rightarrow}{a}, \overset{\rightarrow}{r_0}]] = (\overset{\rightarrow}{a}, \overset{\rightarrow}{r_0}) \overset{\rightarrow}{a} - (\overset{\rightarrow}{a}, \overset{\rightarrow}{a}) \overset{\rightarrow}{r_0} = (\overset{\rightarrow}{a}, \overset{\rightarrow}{r_0}) \overset{\rightarrow}{a} - \left| \overset{\rightarrow}{a} \right|^2 \overset{\rightarrow}{r_0}.$$

В качестве  $d_1$  и  $d_2$ , очевидно, можно принять  $\overset{\rightarrow}{d_1} = (\overset{\rightarrow}{n_1}, \overset{\rightarrow}{r_0})$  и  $\overset{\rightarrow}{d_2} = (\overset{\rightarrow}{n_2}, \overset{\rightarrow}{r_0})$ . Случай коллинеарных векторов  $\overset{\rightarrow}{r_0}$  и  $\overset{\rightarrow}{a}$  рассмотрите самостоятельно.

В заключение приведем в качестве примеров решения некоторых стереометрических задач методами векторной алгебры.

Задача  
3.5.1.

*Даны плоскость  $(\overset{\rightarrow}{n}, \overset{\rightarrow}{r}) = d_0$  и пересекающая ее прямая  $\overset{\rightarrow}{r} = \overset{\rightarrow}{r_0} + \tau \overset{\rightarrow}{a}$ . Найти радиус-вектор точки пересечения этой прямой и плоскости.*

**Решение.** 1°. Заметим, что если  $(\vec{n}, \vec{a}) = 0$ , то либо решений нет, либо вся прямая лежит на данной плоскости. Поэтому будем далее полагать, что  $(\vec{n}, \vec{a}) \neq 0$ .

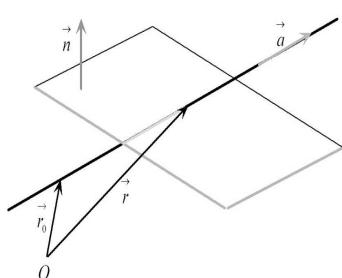


Рис. 3.5.1

2°. Имеем  $\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{n}$ , где  $\vec{r}$  – искомый радиус-вектор точки пересечения прямой и плоскости, а  $\lambda$  – соответствующее этой точке значение параметра  $\tau$  (рис. 3.5.1).

Поскольку точка пересечения принадлежит данной плоскости, то имеет место соотношение

$$(\vec{n}, \vec{r}_0 + \lambda \vec{a}) = d_0.$$

Откуда  $\lambda = \frac{d - (\vec{n}, \vec{r}_0)}{(\vec{n}, \vec{a})}$  и, наконец,  $\vec{r} = \vec{r}_0 + \frac{d - (\vec{n}, \vec{r}_0)}{(\vec{n}, \vec{a})} \vec{a}$ .

**Задача  
3.5.2.**

*Даны точка с радиусом-вектором  $\vec{R}$  и прямая  $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$ . Найти расстояние от этой точки до данной прямой, не используя операцию векторного произведения.*

**Решение.** 1°. Проведем через данную точку с радиусом-вектором  $\vec{R}$  плоскость, перпендикулярную прямой (рис. 3.5.2). Обозначим через  $\vec{r}_x$  радиус-вектор точки пересечения прямой и плоскости. Тогда искомое расстояние будет равно

$$\rho = |\vec{R} - \vec{r}_x|.$$

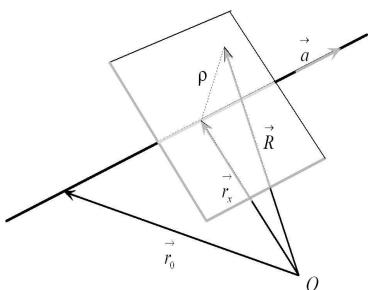


Рис. 3.5.2

2°. Точка  $\vec{r}_x$  будет удовлетворять одновременно соотношениям

$$(\vec{a}, \vec{R} - \vec{r}_x) = 0$$

и  $\vec{r}_x = \vec{r}_0 + \lambda \vec{a}$ , но тогда, исключая параметр  $\lambda$ , находим, что

$$\vec{r}_x = \vec{r}_0 + \frac{(\vec{R} - \vec{r}_0, \vec{a})}{|\vec{a}|^2} \vec{a}$$

$$\text{и } \rho = \sqrt{\left( \vec{R} - \vec{r}_0 - \frac{(\vec{R} - \vec{r}_0, \vec{a})}{|\vec{a}|^2} \vec{a}, \vec{R} - \vec{r}_0 - \frac{(\vec{R} - \vec{r}_0, \vec{a})}{|\vec{a}|^2} \vec{a} \right)} = \\ = \sqrt{|\vec{R} - \vec{r}_0|^2 - \frac{(\vec{R} - \vec{r}_0, \vec{a})^2}{|\vec{a}|^2}}.$$

Заметим, что в силу легко проверяемого тождества  $\left| \vec{p} \right|^2 \left| \vec{q} \right|^2 = (\vec{p}, \vec{q})^2 + \left| [\vec{p}, \vec{q}] \right|^2$  данное решение совпадает с полученным в § 3.4 значением  $\rho = \frac{\left| [\vec{R} - \vec{r}_0, \vec{a}] \right|}{|\vec{a}|}$ .

**Задача 3.5.3.** Найти расстояние между прямыми  $\vec{r} = \vec{r}_{01} + \tau \vec{a}_1$  и  $\vec{r} = \vec{r}_{02} + \tau \vec{a}_2$ .

**Решение.** 1°. Если векторы  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$  коллинеарны, тогда решение аналогично приведенному на рис. 3.4.1 и дается формулой

$$\rho = \frac{S}{|\vec{a}_1|} = \frac{|[\vec{r}_{02} - \vec{r}_{01}, \vec{a}_1]|}{|\vec{a}_1|}.$$

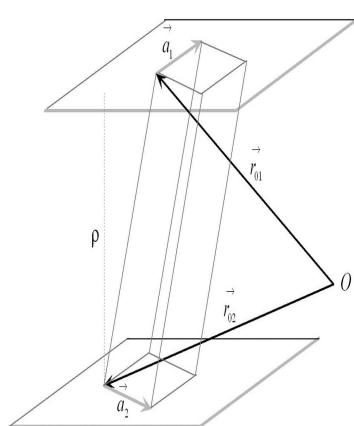


Рис. 3.5.3

2°. Пусть векторы  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$  неколлинеарны, тогда построим пару плоскостей, параллельных этим векторам, одна из которых содержит точку  $\vec{r}_{01}$ , а другая точку  $\vec{r}_{02}$  (рис. 3.5.3).

Объем параллелепипеда, построенного на векторах  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$  и  $\vec{r}_{02} - \vec{r}_{01}$ , равен, с одной стороны, произведению площади параллелограмма, находящегося в основании, на искомую вели-

чину  $\rho$  и  $|(\vec{r}_{02} - \vec{r}_{01}, \vec{a}_1, \vec{a}_2)|$  –

с другой. Откуда находим, что

$$\rho = \frac{|(\vec{r}_{02} - \vec{r}_{01}, \vec{a}_1, \vec{a}_2)|}{|[\vec{a}_1, \vec{a}_2]|}.$$

**Задача 3.5.4.** Даны плоскость  $\vec{n}, \vec{r} = \delta$  и прямая  $\vec{[p, r]} = \vec{q}$ . Найти радиус-вектор точки их пересечения.

**Решение.** Умножив обе части уравнения прямой векторно слева на  $\vec{n}$ , получим  $\vec{[n, [p, r]]} = \vec{[n, q]}$ . Подставляя в это соотношение искомый вектор  $\vec{R}$  и применяя формулу § 2.8, приходим к равенству

$$\vec{p}(\vec{n}, \vec{R}) - \vec{R}(\vec{n}, \vec{p}) = \vec{[n, q]}.$$

Поскольку  $\vec{R}$  принадлежит данной плоскости, то  $\vec{p}(\vec{n}, \vec{R}) = \delta$ , и тогда при естественном ограничении  $\vec{p}(\vec{n}, \vec{p}) \neq 0$  получаем

$$\vec{R} = \frac{\delta \vec{p} - \vec{[n, q]}}{\vec{p}(\vec{n}, \vec{p})}.$$

**Глава 4****НЕЛИНЕЙНЫЕ ОБЪЕКТЫ  
НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ****§ 4.1. Линии на плоскости и в пространстве**

Пусть дана система координат  $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$  на плоскости и числовое множество  $\Omega$ , являющееся промежутком (возможно, бесконечным).

**Определение 4.1.1.** Будем говорить, что линия  $L$  на плоскости задана *paramетрически*

вектор-функцией  $\vec{r} = \vec{F}(\tau)$  (или в координатной форме

$$\left\| \begin{array}{c} \rightarrow \\ \vec{r} \end{array} \right\|_g = \left\| \begin{array}{c} F_x(\tau) \\ F_y(\tau) \end{array} \right\|,$$

где  $F_x(\tau), F_y(\tau)$  – непрерывные, скалярные функции аргумента  $\tau$ , определенные для  $\tau \in \Omega$ ), если

1) для любого  $\tau \in \Omega$  точка  $\vec{r} = \vec{F}(\tau)$  лежит на  $L$ ;

2) для любой точки  $\vec{r}_0$ , лежащей на  $L$ , существует  $\tau_0 \in \Omega$ , такое, что выполнено равенство  $\vec{r}_0 = \vec{F}(\tau_0)$ .

Иногда линия на плоскости задается в виде уравнения  $G(x, y) = 0$ , которое получается исключением параметра  $\tau$  из системы уравнений

$$\begin{cases} x = F_x(\tau) \\ y = F_y(\tau) \end{cases}, \quad \tau \in \Omega.$$

**Пример 4.1.1.** 1°. Прямая линия задается вектор-функцией  $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$ , где  $\vec{a}$  – направляющий вектор, а  $\vec{r}_0$  – одна из точек данной прямой. Скалярная форма задания прямой в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} x = x_0 + \tau a_x, \\ y = y_0 + \tau a_y, \end{cases} \quad \tau \in (-\infty, +\infty),$$

то есть  $\begin{cases} F_x(\tau) = x_0 + \tau a_x, \\ F_y(\tau) = y_0 + \tau a_y, \end{cases} \quad \tau \in (-\infty, +\infty),$

или  $Ax + By + C = 0$ ,  $|A| + |B| > 0$ , где  
 $G(x, y) = Ax + By + C$ .

2°. В декартовой ортонормированной системе координат окружность радиуса  $R$  с центром в точке  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  в параметрическом виде может быть задана как

$$\begin{cases} x = x_0 + R \cos \tau, \\ y = y_0 + R \sin \tau, \end{cases} \quad \tau \in [0, 2\pi), \text{ то есть}$$

$$\begin{cases} F_x(\tau) = x_0 + R \cos \tau, \\ F_y(\tau) = y_0 + R \sin \tau, \end{cases} \quad \tau \in [0, 2\pi),$$

или же уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

где  $G(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2$ .

## Глава 4. Нелинейные объекты на плоскости и в пространстве 121

**Определение 4.1.2.** Линия называется *алгебраической*, если ее уравнение в декартовой системе координат имеет вид

$$\sum_{k=0}^m \alpha_k x^{p_k} y^{q_k} = 0, \text{ где } p_k \text{ и } q_k - \text{целые неотрица-}$$

тельные числа, а числа  $\alpha_k$  не равны нулю одновременно.

**Определение 4.1.3.** Число  $N = \max_{k=[0,m]} \{p_k + q_k\}$  называется *порядком алгебраического уравнения*, указанного в определении 4.1.2, где максимум находится по всем  $k$ , для которых  $\alpha_k \neq 0$ . Наименьший из порядков алгебраических уравнений, задающих данную алгебраическую линию, называется *порядком алгебраической линии*.

**Пример 4.1.2** (алгебраические линии). *Прямая*  $x + 3y + 2 = 0$  ( $N = 1$ )

*Квадратная пара-  
бola*  $y - x^2 = 0$  ( $N = 2$ )

*Гипербола*  $xy - 1 = 0$  ( $N = 2$ )

“Декартов лист”  $x^3 + y^3 - xy = 0$  ( $N = 3$ )

**Теорема 4.1.1.** **Порядок алгебраической линии не зависит от выбора системы координат.**

Доказательство.

Пусть алгебраическая линия  $L$  имеет в системе координат  $\{\vec{O}, \vec{g_1}, \vec{g_2}\}$  уравнение  $G(x, y) = 0$  и порядок  $N$ . Перейдем к системе координат  $\{\vec{O}, \vec{g'_1}, \vec{g'_2}\}$ . Формулы перехода, согласно соотношениям (1.8.2), имеют вид

$$\begin{cases} x = \sigma_{11}x' + \sigma_{12}y' + \beta_1, \\ y = \sigma_{21}x' + \sigma_{22}y' + \beta_2, \end{cases}$$

поэтому уравнение линии  $L$  в “новой” системе координат будет

$$G(\sigma_{11}x' + \sigma_{12}y' + \beta_1, \sigma_{21}x' + \sigma_{22}y' + \beta_2) = 0.$$

Отсюда следует в силу определения 4.1.2, что  $N \geq N'$ , то есть при переходе к “новой” системе координат порядок алгебраической кривой не может повыситься. Применяя аналогичные рассуждения для обратного перехода от системы координат  $\{\vec{O}, \vec{g}_1', \vec{g}_2'\}$  к системе  $\{\vec{O}, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ , получим  $N \leq N'$  и окончательно  $N = N'$ .

Теорема доказана.

**Замечание:** фигуры на плоскости можно задавать, используя ограничения типа неравенств.

**Пример 4.1.4.** 1°. В ортонормированной системе координат набор ус-

ловий  $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + y - 3 \leq 0 \end{cases}$  задает прямоугольный рав-

нобедренный треугольник, катеты которого лежат на осях координат и имеют длины 3.

2°. В ортонормированной системе координат неравенство вида  $x^2 + y^2 - 4 \leq 0$  определяет круг радиуса 2 с центром в начале координат.

Рассмотрим теперь случай линии в пространстве. Пусть дана пространственная система координат  $\{\vec{O}, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ .

**Определение 4.1.4.** Будем говорить, что линия  $L$  в пространстве задана параметрически вектор-функцией  $\vec{r} = \vec{F}(\tau)$  (или в координатной форме

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_x(\tau) \\ F_y(\tau) \\ F_z(\tau) \end{vmatrix},$$

где  $F_x(\tau), F_y(\tau), F_z(\tau)$  – непрерывные, скалярные функции от  $\tau$ , определенные для  $\tau \in \Omega$ ), если

- 1) для любого  $\tau \in \Omega$  точка  $\vec{r} = \vec{F}(\tau)$  лежит на  $L$ ,
- 2) для любой точки  $\vec{r}_0$ , лежащей на  $L$ , существует  $\tau_0 \in \Omega$ , такое, что выполнено равенство  $\vec{r}_0 = \vec{F}(\tau_0)$ .

Иногда линия в пространстве задается системой уравнений

$$\begin{cases} G(x, y, z) = 0, \\ H(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

которая получается исключением параметра  $\tau$  из соотношений

$$\begin{cases} x = F_x(\tau), \\ y = F_y(\tau), \\ z = F_z(\tau), \end{cases} \quad \tau \in \Omega,$$

или же равносильным уравнением, например, вида

$$G^2(x, y, z) + H^2(x, y, z) = 0.$$

**Пример 4.1.3.** 1°. В декартовой системе координат алгебраическая линия второго порядка  $x^2 + y^2 = 0 \quad \forall z$  является прямой.

2°. В ортонормированной системе координат *винтовая линия радиуса R с шагом 2πa* может быть задана в следующем параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = R \cos \tau, \\ y = R \sin \tau, \quad \tau \in (-\infty, +\infty), \\ z = a\tau \end{cases}$$

или же

$$\begin{cases} x = R \cos \frac{z}{a}, \\ y = R \sin \frac{z}{a}. \end{cases}$$

## § 4.2. Поверхности в пространстве

Пусть имеется пространственная система координат  $\{\vec{O}, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$  и  $\Omega$  – множество упорядоченных пар чисел  $(\varphi, \theta)$ , заданное условиями:  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ ,  $\gamma \leq \theta \leq \delta$ .

**Определение 4.2.1.** Будем говорить, что в пространстве поверхность  $S$  задана *параметрически* вектор-функцией

$$\vec{r} = \vec{F}(\varphi, \theta) \text{ (или в координатной форме)}$$

$$\left\| \vec{r} \right\|_g = \begin{vmatrix} F_x(\varphi, \theta) \\ F_y(\varphi, \theta) \\ F_z(\varphi, \theta) \end{vmatrix},$$

где  $F_x(\varphi, \theta)$ ,  $F_y(\varphi, \theta)$ ,  $F_z(\varphi, \theta)$  – непрерывные скалярные функции двух аргументов  $\varphi, \theta$ , определенные для  $\varphi, \theta \in \Omega$ ), если

- 1) для любой упорядоченной пары чисел  $\varphi, \theta \in \Omega$  точка  $\vec{r} = \vec{F}(\varphi, \theta)$  лежит на  $S$ ,
- 2) для любой точки  $\vec{r}_0$ , лежащей на  $S$ , существует упорядоченная пара чисел  $\varphi_0, \theta_0 \in \Omega$ , таких, что выполнено равенство  $\vec{r}_0 = \vec{F}(\varphi_0, \theta_0)$ .

Иногда поверхность в пространстве задается в виде уравнения  $G(x, y, z) = 0$ , которое получается исключением  $\Phi$  и  $\Theta$  из системы уравнений

$$\begin{cases} x = F_x(\varphi, \theta), \\ y = F_y(\varphi, \theta), \quad \varphi, \theta \in \Omega. \\ z = F_z(\varphi, \theta). \end{cases}$$

**Пример 4.2.1.** В ортонормированной системе координат *сфера* радиуса

$R$  с центром в точке  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$  может быть параметрически задана в виде

$$\begin{cases} x = x_0 + R \cos \varphi \sin \theta, & 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ y = y_0 + R \sin \varphi \sin \theta, & 0 \leq \theta \leq \pi, \\ z = z_0 + R \cos \theta, \end{cases}$$

а ее уравнение в координатах

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

**Определение 4.2.2.** Поверхность называется *алгебраической*, если ее уравнение в декартовой системе координат имеет вид

$$\sum_{k=0}^m \alpha_k x^{p_k} y^{q_k} z^{r_k} = 0, \text{ где } p_k, q_k \text{ и } r_k - \text{ целые}$$

неотрицательные числа, а числа  $\alpha_k$  не равны нулю одновременно.

**Определение 4.2.3.** Число  $N = \max_{k=[0,m]} \{p_k + q_k + r_k\}$  называется *порядком алгебраического уравнения*, (указанного в определении 4.2.2), где максимум находится по всем  $k$ ,

для которых  $\alpha_k \neq 0$ . Наименьший из порядков алгебраических уравнений, задающих данную алгебраическую поверхность, называется *порядком алгебраической поверхности*.

<b>Пример 4.2.2 (алгебраические поверхности).</b>	Прямой круговой цилиндр $x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (N = 2)$
	Сфера $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \quad (N = 2)$

**Теорема 4.2.1.** Порядок алгебраической поверхности не зависит от выбора системы координат.

**Доказательство.**

Аналогично доказательству теоремы 4.1.1.

**Замечание:** тела в пространстве можно задавать, используя ограничения типа неравенств.

### § 4.3. Цилиндрические и конические поверхности

Пусть в пространстве заданы система координат  $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$

и некоторая линия  $\vec{r} = \vec{F}(\phi)$ ,  $\phi \in \Omega$ , которую будем называть *направляющей*. Проведем через каждую точку направляющей линии прямую, называемую *образующей*, параллельно некоторому ненулевому вектору  $\vec{a}$ .

**Определение 4.3.1.**

Совокупность всех точек пространства, лежащих на образующих данного вида, называется *цилиндрической поверхностью*.

Составим уравнение цилиндрической поверхности в общем виде.

Во введенных обозначениях  $\vec{r} = \vec{F}(\phi) + \vec{KM}$  (см. рис. 4.3.1), но по определению цилиндрической поверхности

$$\vec{KM} = \theta \vec{a},$$

и, следовательно, уравнение цилиндрической поверхности в векторной форме имеет вид

$$\vec{r}(\phi, \theta) = \vec{F}(\phi) + \theta \vec{a}, \quad \phi \in \Omega, \theta \in (-\infty, +\infty).$$

Пусть в координатной форме

$$\left\| \vec{F}(\phi) \right\|_g = \begin{vmatrix} F_x(\phi) \\ F_y(\phi) \\ F_z(\phi) \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \left\| \vec{a} \right\|_g = \begin{vmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{vmatrix},$$

тогда после исключения  $\theta$  получаем

$$\frac{x - F_x(\phi)}{a_x} = \frac{y - F_y(\phi)}{a_y} = \frac{z - F_z(\phi)}{a_z}.$$

**Пример 4.3.1.** Прямая круговая цилиндрическая поверхность, для которой в ортонормированной системе координат

- направляющей служит окружность радиуса 3, лежащая в плоскости, перпендикулярной оси аппликат, с центром в начале координат,
- а образующими являются прямые, перпендикулярные этой плоскости, задается системой условий

$$\begin{cases} x = 3 \cos \varphi, \\ y = 3 \sin \varphi, \text{ поскольку } \vec{F}(\varphi) = \begin{vmatrix} 3 \cos \varphi \\ 3 \sin \varphi \\ 0 \end{vmatrix}; \\ z = \theta, \end{cases} \quad \vec{a} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что если из полученных соотношений также исключить и параметр  $\Phi$ , то получится уравнение вида  $x^2 + y^2 = 9$  для любого  $z$ , откуда следует, что порядок данной алгебраической поверхности  $N = 2$ .

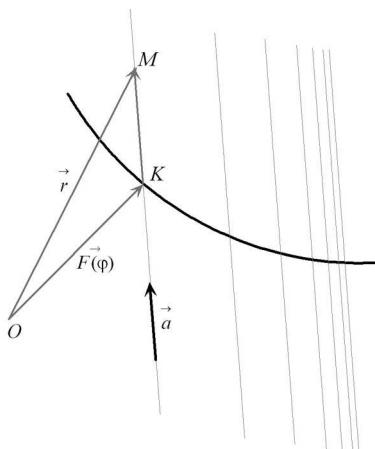


Рис. 4.3.1

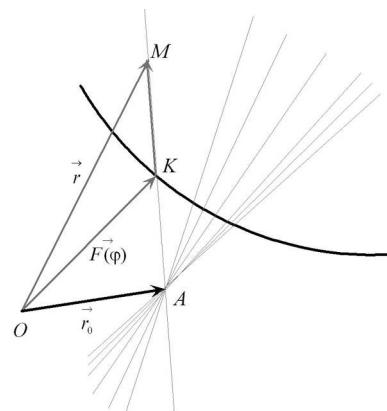


Рис. 4.3.2

Проведем через каждую точку направляющей линии прямую (называемую *образующей*), проходящую через некоторую фиксированную, не принадлежащую направляющей, точку  $A$  (называемую *вершиной*) с радиусом-вектором  $\overset{\rightarrow}{r_0}$ .

**Определение 4.3.2.**

Совокупность всех точек пространства, лежащих на образующих данного вида, называется *конической поверхностью*.

Составим уравнение конической поверхности в общем виде.

Аналогично рассмотренному выше случаю  $\overset{\rightarrow}{r} = \overset{\rightarrow}{F}(\varphi) + \overset{\rightarrow}{KM}$ , но по определению конической поверхности (см. рис. 4.3.2)

$$\overset{\rightarrow}{KM} = \theta(\overset{\rightarrow}{r_0} - \overset{\rightarrow}{F}(\varphi)),$$

и, следовательно, уравнение конической поверхности в векторной форме имеет вид

$$\overset{\rightarrow}{r}(\varphi, \theta) = (1 - \theta)\overset{\rightarrow}{F}(\varphi) + \theta\overset{\rightarrow}{r_0}, \quad \varphi \in \Omega, \quad \theta \in (-\infty, +\infty).$$

Пусть в координатах  $\left\| \overset{\rightarrow}{r}_0 \right\|_g = \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix}$ , тогда после исключения па-

раметра  $\theta$  получаем

$$\frac{x - F_x(\varphi)}{x_0 - F_x(\varphi)} = \frac{y - F_y(\varphi)}{y_0 - F_y(\varphi)} = \frac{z - F_z(\varphi)}{z_0 - F_z(\varphi)}.$$

**Пример 4.3.2.** Прямая круговая коническая поверхность, для которой в ортонормированной системе координат

- направляющей служит окружность радиуса 3, лежащая в плоскости, перпендикулярной оси аппликат, с центром в начале координат,

- и образующими, проходящими через точку  
 $\overset{\rightarrow}{r_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$ ,

задается системой условий (см. пример 4.3.1):

$$\frac{x - 3\cos\varphi}{-3\cos\varphi} = \frac{y - 3\sin\varphi}{-3\sin\varphi} = \frac{z}{-1}, \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Заметим, что если из полученных соотношений исключить также и параметр  $\varphi$ , то получится уравнение вида  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} - (z+1)^2 = 0$ ,  
 то есть  $N = 2$ .

#### § 4.4. Линии второго порядка на плоскости

Пусть на плоскости дана ортонормированная система координат  $\overset{\rightarrow}{e_1}, \overset{\rightarrow}{e_2}$  и некоторая линия  $L$ .

**Определение 4.4.1.**

В соответствии с определениями 4.1.2 и 4.1.3 будем говорить, что линия  $L$  является *алгебраической линией второго порядка*, если ее уравнение в данной системе координат может иметь вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (4.4.1)$$

где числа  $A$ ,  $B$  и  $C$  не равны нулю одновременно, а  $x$  и  $y$  суть координаты радиуса-вектора точки, принадлежащей  $L$ .

Поскольку коэффициенты уравнения 4.4.1 зависят от выбора системы координат, при исследовании свойств линий второго порядка целесообразно предварительно перейти к другой ортонормированной

системе координат  $\{O', \vec{e'_1}, \vec{e'_2}\}$ , в которой запись уравнения линии оказывается наиболее простой.

Теорема  
4.4.1.

Для любой линии второго порядка существует ортонормированная система координат, в которой уравнение этой линии имеет (при  $a \geq b > 0, p > 0$ ) один из следующих девяти (называемых каноническими) видов:

Таблица 4.4.1

<i>Тип линии</i>	Эллиптический	Гиперболический	Параболический
<i>Вид линии</i>	$\Delta > 0$	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$
<i>Пустые множества</i>	$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = -1$		$y'^2 = -a^2$ $\forall x'$
<i>Изолированные точки</i>	$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 0$		
<i>Совпадающие прямые</i>			$y'^2 = 0$ $\forall x'$
<i>Несовпадающие прямые</i>		$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 0$	$y'^2 = a^2$ $\forall x'$
<i>Кривые</i>	Эллипс $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$	Гипербола $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$	Парабола $y'^2 = 2px'$

$$\text{где } \Delta = \det \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Доказательство.

1°. Предварительно заметим, что без ограничения общности можно считать выполнеными условия:  $B \geq 0$  и  $A \geq C$ .

Действительно, если  $B < 0$ , то можно изменить знаки всех коэффициентов в уравнении 4.4.1. Если же  $A < C$ , то, перейдя к новой ортонормированной системе координат, для которой  $\vec{e}'_1 = \vec{e}_2 ; \vec{e}'_2 = \vec{e}_1 ; \vec{O}\vec{O}' = \vec{o}$ , мы получим желаемое соотношение, поскольку при таком переходе имеют место равенства  $x = y'$ ;  $y = x'$  в силу утверждений § 1.8. Заметим также, что при этой замене  $\Delta$  не меняется, поскольку

$$\det \begin{vmatrix} C & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \Delta.$$

2°. Если  $B = 0$ , то переходим к пункту 4° на с. 135. Если же  $B > 0$ , то выбираем новую ортонормированную систему координат  $\{\vec{O}', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$ , получаемую из исходной поворотом против часовой стрелки вокруг точки  $O$  на угол  $0 < \alpha \leq \pi/4$ , такой, чтобы коэффициент при произведении  $x'y'$  оказался равным нулю. Выведем правило выбора этого угла. Рассмотрим поворот (см. § 1.8):

$$\begin{cases} \vec{e}'_1 = \vec{e}_1 \cos \alpha + \vec{e}_2 \sin \alpha, \\ \vec{e}'_2 = -\vec{e}_1 \sin \alpha + \vec{e}_2 \cos \alpha, \\ \vec{O}\vec{O}' = \vec{o}, \end{cases}$$

тогда формулы перехода от  $\{\vec{O}, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  к  $\{\vec{O}', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$  будут иметь вид

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{cases}$$

Подставляя выражения “старых” координат через “новые”, получаем уравнение 4.4.1 в виде

$$\begin{aligned} & A(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)^2 + \\ & + 2B(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + \\ & + C(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha)^2 + 2D(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha) + \\ & + 2E(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + F = 0, \end{aligned}$$

или же

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0.$$

Откуда находим, что

$$A' = A \cos^2 \alpha + 2B \cos \alpha \sin \alpha + C \sin^2 \alpha,$$

$$\begin{aligned} 2B' = & -2A \sin \alpha \cos \alpha + 2B \cos^2 \alpha - \\ & - 2B \sin^2 \alpha + 2C \sin \alpha \cos \alpha, \end{aligned}$$

$$C' = A \sin^2 \alpha - 2B \sin \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha.$$

Из условия  $B' = 0$  следует, что

$$2B \cos 2\alpha - (A - C) \sin 2\alpha = 0,$$

и окончательно

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C}; \quad \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2B}{A - C}, \text{ при } A > C,$$

или же  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  при  $A = C$ , то есть искомый угол найден. Заметим, что угол  $\alpha$  также может быть найден из равносильного уравнения

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{A - C}{B} \operatorname{tg} \alpha - 1 = 0, \quad B \neq 0,$$

ибо если  $B = 0$ , то поворота не требуется.

3°. Проверим, что при такой замене координат величины  $\Delta$  и  $A + C$  не изменятся. Действительно, из соотношений

$$1 + \operatorname{ctg}^2 2\alpha = 1 + \left(\frac{A - C}{2B}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 2\alpha}$$

и неравенства  $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{4}$  получаем

$$\sin 2\alpha = \frac{2B}{\sqrt{4B^2 + (A - C)^2}} ; \quad \cos 2\alpha = \frac{A - C}{\sqrt{4B^2 + (A - C)^2}}.$$

Из предыдущих соотношений для значений  $A'$  и  $C'$  имеем

$$\begin{aligned} A' &= A \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + B \sin 2\alpha + C \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \\ &= \frac{A + C}{2} + \frac{A - C}{2} \cos 2\alpha + B \sin 2\alpha = \frac{A + C}{2} + \\ &+ \frac{A - C}{2} \frac{A - C}{\sqrt{4B^2 + (A - C)^2}} + B \frac{2B}{\sqrt{4B^2 + (A - C)^2}} = \\ &= \frac{A + C}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{4B^2 + (A - C)^2}. \end{aligned}$$

Аналогично получаем, что

$$C' = \frac{A + C}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{4B^2 + (A - C)^2}.$$

Теперь находим

$$\begin{aligned} \Delta' &= \det \begin{vmatrix} A' & 0 \\ 0 & C' \end{vmatrix} = \\ &= A'C' = \left(\frac{A + C}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(4B^2 + (A - C)^2) = \\ &= AC - B^2 = \det \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \Delta, \end{aligned}$$

то есть величина  $\Delta$  не меняется при выполняемой замене системы координат. Также очевидно, что при этом и

$$A' + C' = A + C.$$

4°. В дальнейших рассуждениях будем полагать, что  $B = 0$ , и рассмотрим отдельно случаи  $\Delta \neq 0$  и  $\Delta = 0$  для уравнения вида  $Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ .

Пусть  $\Delta \neq 0$ . Это означает, что  $A \neq 0$  и  $C \neq 0$  и уравнение линии может быть переписано в виде

$$A\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{C}\right)^2 = \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} - F.$$

Обозначим  $P = \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} - F$ , тогда, перейдя к новой ортонормированной системе координат

$$\begin{cases} \overset{\rightarrow}{e'_1} = \overset{\rightarrow}{e_1}, \\ \overset{\rightarrow}{e'_2} = \overset{\rightarrow}{e_2}, \\ \overset{\rightarrow}{OO'} = -\frac{D}{A}\overset{\rightarrow}{e_1} - \frac{E}{C}\overset{\rightarrow}{e_2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = x' - \frac{D}{A}, \\ y = y' - \frac{E}{C}, \end{cases}$$

получим  $A{x'}^2 + C{y'}^2 = P$ , и откуда следует, что

$$\pm \frac{{x'}^2}{\left(\sqrt{\left|\frac{P}{A}\right|}\right)^2} \pm \frac{{y'}^2}{\left(\sqrt{\left|\frac{P}{C}\right|}\right)^2} = \pm 1; \quad P \neq 0,$$

$$\pm \frac{{x'}^2}{\sqrt{|C|^2}} \pm \frac{{y'}^2}{\sqrt{|A|^2}} = 0; \quad P = 0,$$

и мы приходим, таким образом, к одному из шести следующих уравнений:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 0; \quad \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1; \quad \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = -1 \text{ для } \Delta > 0,$$

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 0; \quad \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1; \quad \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = -1 \text{ для } \Delta < 0.$$

Первые пять из этих случаев содержатся в формулировке теоремы (табл. 4.4.1), а шестой сводится к пятому умножением обеих частей уравнения на  $-1$  с последующим взаимным переобозначением переменных  $x'$  и  $y'$ .

5°. Пусть  $\Delta = 0$ . Это означает, что  $AC = 0$ , то есть либо  $A = 0$ , либо  $C = 0$  (но не вместе!). Пусть  $A = 0$  (если это не так, то взаимно переобозначим переменные  $x'$  и  $y'$ ), тогда уравнение линии  $Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$  может быть записано в виде

$$C\left(y + \frac{E}{C}\right)^2 = \frac{E^2}{C} - F - 2Dx, \quad C \neq 0.$$

При  $D = 0$  получаем

$$C\left(y + \frac{E}{C}\right)^2 = \frac{E^2}{C} - F,$$

то есть одно из трех уравнений

$$y'^2 = a^2; \quad y'^2 = 0; \quad y'^2 = -a^2.$$

Если же  $D \neq 0$ , то уравнение можно привести к виду

$$\left(y + \frac{E}{C}\right)^2 = -\frac{2D}{C}\left(x - \frac{1}{2D}\left(\frac{E^2}{C} - F\right)\right),$$

и, таким образом, либо  $y'^2 = 2px'$ , либо  $y'^2 = -2px'$ , где  $p > 0$ .

Первый из этих случаев указан в формулировке теоремы (табл. 4.4.1), а второй сводится к первому заменой координат:

$$\begin{cases} \vec{e}'_1 = -\vec{e}_1, \\ \vec{e}'_2 = \vec{e}_2, \\ \vec{OO'} = \vec{o}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -x', \\ y = y'. \end{cases}$$

Теорема доказана.

- Замечания.**
- 1°. В теореме 4.1.1 было показано, что порядок алгебраической линии, в том числе и для рассматриваемых в теореме 4.4.1 случаев, не меняется при замене системы координат.
  - 2°. Из доказательства теоремы также следует, что поворот и параллельный перенос ортонормированной системы координат не допускают перемещения уравнения линии второго порядка из одной строки таблицы, приведенной в формулировке теоремы 4.4.1, в другую. Более того, в дальнейшем будет показано (см. § 5.4), что никакой заменой *общей декартовой системы координат* нельзя переместить линию второго порядка, находящуюся в одной из клеток таблицы в условии теоремы 4.4.1, в другую клетку.
  - 3°. Пустое множество эллиптического типа иногда называют *мнимым эллипсом*, а пустое множество параболического типа – *парой мнимых параллельных прямых*.
  - 4°. Алгоритм доказательства теоремы 4.4.1 можно использовать как для нахождения канонического вида уравнения линии второго порядка, так и для построения *канонической системы координат*, то есть системы координат, в которой данная линия второго порядка имеет канонический вид.

Исследование конкретных свойств различных типов линий второго порядка приводится в Приложении 1.

### § 4.5. Поверхности второго порядка в пространстве

Пусть в пространстве дана *ортонормированная* система координат  $\{O, \overset{\rightarrow}{e_1}, \overset{\rightarrow}{e_2}, \overset{\rightarrow}{e_3}\}$ .

**Определение 4.5.1.** В соответствии с определениями 4.2.2 и 4.2.3 будем говорить, что поверхность  $S$  является *алгебраической поверхностью второго порядка*, если ее уравнение в данной системе координат имеет вид

$$\begin{aligned} & A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + \\ & + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz + 2A_{23}yz + \quad (4.5.1) \\ & + 2A_{14}x + 2A_{24}y + 2A_{34}z + A_{44} = 0, \end{aligned}$$

где числа  $A_{11}; A_{22}; A_{33}; A_{12}; A_{13}; A_{23}$  не равны нулю одновременно, а  $x, y$  и  $z$  суть координаты радиус-вектора точки, принадлежащей  $S$ .

Как и в плоском случае, коэффициенты уравнения (4.5.1) зависят от выбора системы координат, поэтому при исследовании свойств поверхностей второго порядка целесообразно предварительно перейти в ту систему координат, для которой уравнение поверхности оказывается наиболее простым.

**Теорема 4.5.1.**

Для каждой поверхности второго порядка существует ортонормированная система координат  $\{O', \overset{\rightarrow}{e'_1}, \overset{\rightarrow}{e'_2}, \overset{\rightarrow}{e'_3}\}$ , в которой уравнение этой поверхности имеет один из следующих семнадцати канонических видов:

<i>Пустые множества</i>	<i>Точки, прямые и плоскости</i>	<i>Цилиндры и конусы</i>
$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{b^2} = -1$ $\forall z'$	<i>Изолированная точка</i> $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{b^2} = 0$ $\forall z'$	<i>Эллиптический цилиндр</i> $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ $\forall z'$
$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = -1$ $\forall z'$	<i>Прямая</i> $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 0$ $\forall z'$	<i>Гиперболический цилиндр</i> $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$ $\forall z'$
$x'^2 = -a^2$ $\forall y', z'$	<i>Пара пересекающихся плоскостей</i> $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 0$ $\forall z'$	<i>Параболический цилиндр</i> $y'^2 = 2px'$ $\forall z'$
	<i>Пара параллельных или совпадающих плоскостей</i> $x'^2 = a^2 \quad \forall y', z'$ $x'^2 = 0 \quad \forall y', z'$	<i>Конус</i> $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 0$

***Невырожденные  
поверхности***

Эллипсоиды

Параболоиды

Гиперболоиды

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1$$

Эллиптический параболоид

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 2z'$$

Гиперболический параболоид

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 2z'$$

Однополостный гиперболоид

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1$$

Двуполостный гиперболоид

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1$$

причем  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$ ,  $p > 0$ .

Доказательство.

Хотя возможно доказать существование ортонормированной системы координат с требуемыми свойствами, применив подход, аналогичный использованному при доказательстве теоремы 4.4.1, представляется целесообразным рассмотреть этот вопрос в рамках теории евклидовых пространств, где утверждение теоремы 4.5.1 непосредственно вытекает из более общего случая, рассмотренного в § 12.2.

Исследование свойств конкретных типов поверхностей второго порядка приводится в Приложении 2.

## § 4.6. Альтернативные системы координат

В ряде практических приложений оказывается целесообразным использование систем координат, отличных от декартовой.

### Полярная система координат

Примером альтернативной системы координат на плоскости является *полярная система координат*.

Положение точки на плоскости в этой системе координат задается парой упорядоченных чисел  $\{\rho, \varphi\}$ , где

$$\rho = \left| \vec{OM} \right|, \quad \varphi = \angle(\vec{OM}, \vec{OP}),$$

удовлетворяющих ограничениям

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Точка  $O$  называется *полюсом*, а луч  $OP$  – *полярной осью*.

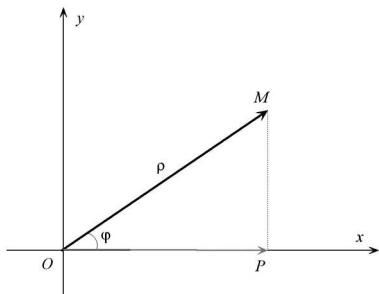


Рис. 4.6.1

Угол  $\varphi$  отсчитывается против часовой стрелки (рис. 4.6.1). Для полюса этот угол не определяется.

Формулы перехода от ортонормированной декартовой системы координат к полярной и обратно имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases}$$

Использование полярной системы координат позволяет упростить описание объектов, обладающих точечной симметрией.

Например, окружность единичного радиуса с центром в начале координат, имеющая в ортонормированной декартовой системе координат уравнение  $x^2 + y^2 = 1$ , в полярной системе координат задается условием  $\rho = 1$ .

Более того, в Приложении 1 показано, что в полярной системе координат три различных типа линий второго порядка – эллипс, гипербола и парабола – задаются одним и тем же уравнением  $\rho(1 - \varepsilon \cos \phi) - p = 0$ , где  $\varepsilon > 0$  и  $p > 0$  – некоторые константы, называемые *эксцентриситетом* и *фокальным параметром* соответственно, и что для различных значений эксцентриситета при фиксированном  $p$  получаются различные типы кривых: эллипсы при  $0 < \varepsilon < 1$ , параболы при  $\varepsilon = 1$  и гиперболы при  $\varepsilon > 1$ . Соответствующие случаи показаны на рисунке 4.6.2.

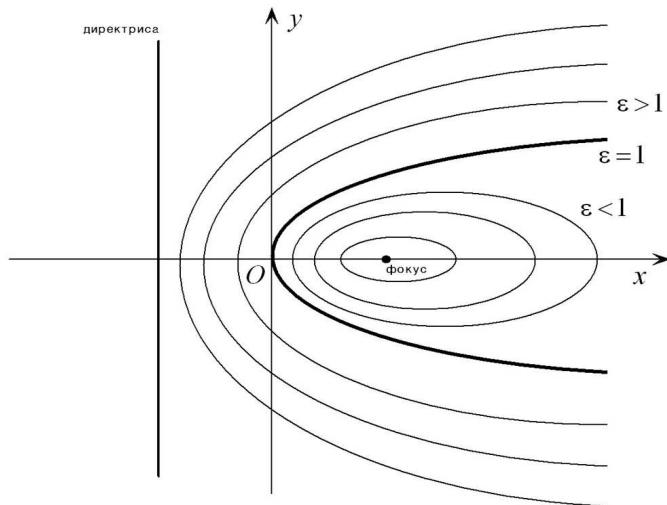


Рис. 4.6.2. Зависимость типа конического сечения от величины эксцентриситета

Проверим справедливость этого утверждения, выполнив в уравнении  $\rho(1 - \varepsilon \cos \phi) - p = 0$  переход от полярной к ортонормированной декартовой системе координат. Действительно, поскольку

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ и } \cos \phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

то данное уравнение преобразуется к виду

$$\sqrt{x^2 + y^2} \left(1 - \varepsilon \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) - p = 0,$$

которое в свою очередь равносильно при соблюдении условий  $\varepsilon > 0$  и  $p > 0$  уравнению  $(1 - \varepsilon^2)x^2 + y^2 = 2\varepsilon px + p^2$ .

Если  $\varepsilon = 1$ , то мы получаем уравнение параболы. Если же  $\varepsilon \neq 1$ , то исходное уравнение можно записать так:

$$(x - \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon^2})^2 + \frac{1}{1 - \varepsilon^2} y^2 = \frac{p^2}{(1 - \varepsilon^2)^2}.$$

Рассуждая далее, как в пункте 4° доказательства теоремы 4.4.1, можно прийти к заключению, что условие  $0 < \varepsilon < 1$  приводит к эллиптическому случаю линии второго порядка, а условие  $\varepsilon > 1$  – к гиперболическому типу.

Если ослабить ограничения на параметры уравнения  $\rho(1 - \varepsilon \cos \phi) - p = 0$ , разрешив им принимать (в смысле предельного перехода) как нулевые, так и бесконечно большие положительные значения, то можно получить и другие виды линий второго порядка, указанные в формулировке теоремы 4.4.1.

Например, при  $\varepsilon = 0$  и  $p \neq 0$  мы имеем окружность, при  $\varepsilon = 0$  и  $p = 0$  – изолированную точку, а при  $p = 0$  и  $\varepsilon \cos \phi = 1$  – пару пересекающихся прямых.

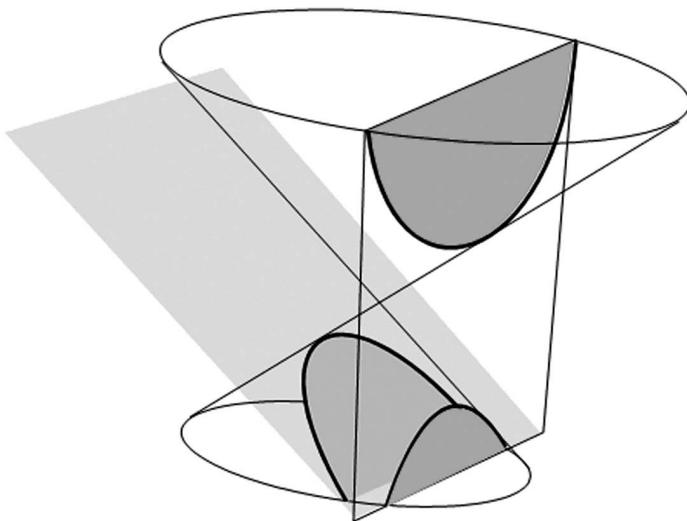


Рис. 4.6.3. Построение конических сечений

**Определение  
4.6.1.**

Линия, уравнение которой в полярной системе координат имеет вид

$$\rho(1 - \varepsilon \cos \phi) - p = 0 \quad \forall p \geq 0, \quad \forall \varepsilon \geq 0,$$

называется **коническим сечением**.

Действительно, различные виды линий второго порядка, включая и вырожденные случаи, могут быть получены сечением круговой конической поверхности плоскостью, что иллюстрирует рисунок 4.6.3.

### Сферическая система координат

В ряде практических приложений, требующих аналитического исследования пространственных объектов, используется так называемая *сферическая система координат*.

Положение точки в пространстве в этой системе однозначно задается при помощи упорядоченной тройки чисел  $\{\rho, \varphi, \theta\}$  (рис. 4.6.4), где

$$\rho = \left| \vec{OM} \right|, \quad \varphi = \angle(\vec{Ox}, \vec{OP}), \quad \theta = \angle(\vec{OM}, \vec{Oz}),$$

которые удовлетворяют ограничениям

$$\rho \geq 0; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Использование сферической системы координат иногда позволяет получить более простое аналитическое описание геометрических объектов, обладающих *точечной симметрией*. Например, уравнение сферы единичного радиуса с центром в начале координат в сферической системе будет иметь вид  $\rho = 1$ .

Формулы перехода между ортонормированной декартовой системой координат и сферической имеют следующий вид:

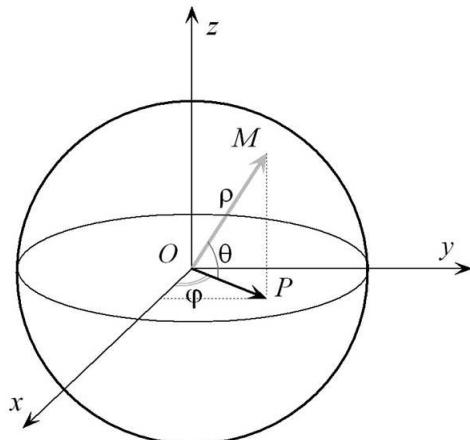


Рис. 4.6.4

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \sin \theta, \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \\ z = \rho \cos \theta, \end{cases}$$

а для обратного перехода соответственно

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \\ \cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \end{array} \right.$$

### Цилиндрическая система координат

В тех случаях, когда исследуемый пространственный объект обладает осевой симметрией, может оказаться удобным применение цилиндрической системы координат.

Положение точки в пространстве в этой системе однозначно задается при помощи упорядоченной тройки чисел  $\{\rho, \varphi, h\}$  (рис. 4.6.5), где

$$\rho = \left| \vec{OM} \right|, \varphi = \angle(\vec{Ox}, \vec{OP}),$$

удовлетворяющие ограничениям

$$\rho \geq 0; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi; \quad h \in (-\infty, +\infty).$$

Формулы перехода от ортонормированной декартовой системы координат к цилиндрической и обратно имеют следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = h, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \\ h = z. \end{array} \right.$$

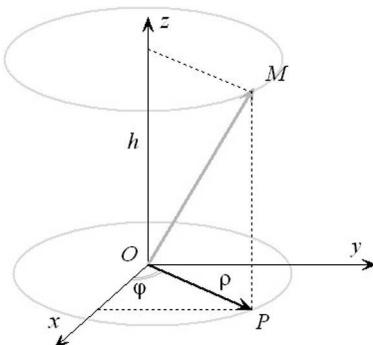


Рис. 4.6.5

## Глава 5

# ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ

### § 5.1. Произведение матриц

**Определение 5.1.1.** Матрица  $\|C\|$  размера  $m \times n$  с элементами

$$\gamma_{ji} \quad \forall i = [1, n], \forall j = [1, m]$$

называется *произведением* матрицы  $\|A\|$  размера  $m \times l$  с элементами

$$\alpha_{jk} \quad \forall j = [1, m], \forall k = [1, l]$$

на матрицу  $\|B\|$  размера  $l \times n$  с элементами  
 $\beta_{ki} \quad \forall k = [1, l], \forall i = [1, n]$ , где

$$\gamma_{ji} = \sum_{k=1}^l \alpha_{jk} \beta_{ki} \quad \forall i = [1, n], \forall j = [1, m].$$

Результат умножения матриц – матрица  $\|C\|$  – есть матрица размера  $m \times n$  при любом натуральном  $l$ , которая обозначается как  $\|C\| = \|A\| \|B\|$ . Правило нахождения компонентов произведения по компонентам сомножителей матричного произведения иллюстрирует рис. 5.1.1.

**Пример 5.1.1.** Приведем результаты умножения матриц, имеющих не более чем пару строк или столбцов.

1°. Пусть размер  $\|A\|$  есть  $2 \times 2$ , а размер  $\|B\|$  –  $2 \times 1$ , тогда размер  $\|C\|$  будет  $2 \times 1$ .

$$\| C \| = \| A \| \| B \| = \\ = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} \\ \alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{1l} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{2l} \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \alpha_{ml} & \alpha_{m2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{ml} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1i} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2i} & \cdots & \beta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{l1} & \beta_{l2} & \cdots & \beta_{li} & \cdots & \beta_{ln} \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1i} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2i} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{ml} & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{mi} & \cdots & \gamma_{mn} \end{vmatrix}$$

$\gamma_{ji} = \sum_{k=1}^l \alpha_{jk} \beta_{ki}$

Рис. 5.1.1

2°. Если размер  $\| A \|$  есть  $2 \times 2$ , а размер  $\| B \| - 1 \times 2$ , то размер  $\| C \|$  будет  $1 \times 2$ .

$$\| C \| = \| B \| \| A \| = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \\ = \| \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{12} \quad \alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{12} \|.$$

3°. Наконец, пусть размер  $\|A\|$  и  $\|B\|$  есть  $2 \times 2$ , тогда матрица  $\|C\|$  будет иметь размер  $2 \times 2$ .

### Замечания об умножении матриц

Из определения произведения матриц непосредственно следует, что для матриц подходящих размеров:

1) умножение матриц *некоммутативно*, то есть в общем случае  $\|A\|\|B\| \neq \|B\|\|A\|$ ,

2) умножение матриц *ассоциативно*

$$\|A\|(\|B\|\|C\|) = (\|A\|\|B\|)\|C\|,$$

3) умножение матриц обладает свойством *дистрибутивности*  $\|A\|(\|B\| + \|C\|) = \|A\|\|B\| + \|A\|\|C\|$ .

Отметим еще раз, что произведение двух матриц существует только тогда, когда *число столбцов первого сомножителя равно числу строк второго*.

Легко убедиться, что умножение (как справа, так и слева) любой матрицы  $\|A\|$  на подходящего размера единичную матрицу  $\|E\|$  (см. § 1.1) дает в результате ту же самую матрицу  $\|A\|$ .

**Определение** Матрица  $\|A\|^{-1}$  называется *обратной квадратной* 5.1.2.

матрице  $\|A\|$ , если выполнены равенства

$$\|A\|^{-1}\|A\| = \|A\|\|A\|^{-1} = \|E\|.$$

Обратная матрица существует не для произвольной квадратной матрицы. Для существования матрицы, обратной к  $\|A\|$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие  $\det \|A\| \neq 0$ <sup>6</sup>.

**Определение** Матрица  $\|A\|$ , для которой  $\det \|A\| = 0$ , называется 5.1.3.

вырожденной, а матрица, для которой  $\det \|A\| \neq 0$ ,  
– невырожденной.

**Лемма 5.1.1.** Если обратная матрица существует, то она единственна.

Доказательство.

Предположим, что невырожденная матрица  $\|A\|$  имеет две обратные:  $\|A\|_1^{-1}$  и  $\|A\|_2^{-1}$ . Тогда из равенств

$$\|A\| \|A\|_1^{-1} = \|E\| \quad \text{и} \quad \|A\| \|A\|_2^{-1} = \|E\|$$

следует, что

$$\|A\| \|A\|_1^{-1} - \|A\| \|A\|_2^{-1} = \|E\| - \|E\| = \|O\|.$$

Умножая слева обе части данного равенства на  $\|A\|_1^{-1}$ , получаем

$$\|A\|_1^{-1} \|A\| (\|A\|_1^{-1} - \|A\|_2^{-1}) = \|A\|_1^{-1} \|O\| = \|O\|$$

и, учитя, что  $\|A\|_1^{-1} \|A\| = \|E\|$ , приходим к равенству

$$\|A\|_1^{-1} - \|A\|_2^{-1} = \|O\|.$$

Лемма доказана.

<sup>6</sup> Правило нахождения определителя квадратной матрицы порядка  $n$  приводится в главе 6.

В частном случае, когда  $\|A\| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$  и если  $\det \|A\| \neq 0$ , матрица  $\|A\|^{-1}$  имеет вид

$$\|A\|^{-1} = \frac{1}{\det \|A\|} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_{22} & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{11} \end{vmatrix}. \quad (5.1.1)$$

Для квадратных матриц порядка  $n$  справедливы<sup>7</sup> следующие равенства:

$$\det(\|A\|\|B\|) = \det(\|A\|)\det(\|B\|);$$

$$\det\|A\|^{-1} = \frac{1}{\det\|A\|}, \text{ если } \det\|A\| \neq 0.$$

**Пример 5.1.2.** Используя матричные операции, систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 = \beta_1, \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 = \beta_2 \end{cases}$$

можно записать в виде  $\|A\|\|x\| = \|b\|$ , где

$$\|x\| = \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{vmatrix}; \quad \|b\| = \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{vmatrix}; \quad \|A\| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix},$$

а ее решение (если существует  $\|A\|^{-1}$ ) – в виде  $\|x\| = \|A\|^{-1}\|b\|$ .

**Пример 5.1.3.** Формулы перехода от одной декартовой системы координат к другой (1.8.2) с помощью матричных операций могут быть записаны в виде

<sup>7</sup> Для  $n = 2$  эти соотношения проверяются непосредственно по определению 1.1.9, случай произвольного  $n$  рассматривается в главе 6.

$$\begin{array}{l} \left\| \begin{array}{c} \vec{g}_1' \\ \vec{g}_2' \\ \vec{g}_3' \end{array} \right\| = \| S \|^\text{T} \left\| \begin{array}{c} \vec{g}_1 \\ \vec{g}_2 \\ \vec{g}_3 \end{array} \right\| ; \quad \left\| \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{array} \right\| = \| S \| \left\| \begin{array}{c} \xi_1' \\ \xi_2' \\ \xi_3' \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{c} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{array} \right\| , \end{array}$$

где  $\| S \|$  – матрица перехода.

**Теорема Имеет место соотношение**

5.1.1.

$$(\| A \| \| B \|)^\text{T} = \| B \|^\text{T} \| A \|^\text{T}.$$

**Доказательство.**

Будем предполагать, что размеры матриц  $\| A \|$  и  $\| B \|$  таковы, что произведения матриц, указанные в формулировке теоремы, существуют.

Пусть числа  $\alpha_{ik}$ ,  $\beta_{kj}$ ,  $\gamma_{ij}$  суть элементы матриц  $\| A \|$ ,  $\| B \|$  и  $\| C \| = \| A \| \| B \|$  соответственно. Тогда, согласно определению 5.1.1,

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^l \alpha_{ik} \beta_{kj} .$$

Но, с другой стороны, по определению 1.1.8 операции транспонирования

$$\gamma_{ij}^\text{T} = \gamma_{ji} = \sum_{k=1}^l \alpha_{jk} \beta_{ki} = \sum_{k=1}^l \alpha_{kj}^\text{T} \beta_{ik}^\text{T} = \sum_{k=1}^l \beta_{ik}^\text{T} \alpha_{kj}^\text{T} ,$$

откуда, учитывая определение 5.1.1, делаем заключение о справедливости утверждения теоремы.

**Теорема доказана.**

Заметим, что согласно правилу транспонирования произведения

$$\text{матриц равенство } \begin{vmatrix} \overset{\rightarrow}{g'_1} \\ \overset{\rightarrow}{g'_2} \\ \overset{\rightarrow}{g'_3} \end{vmatrix} = \left\| S \right\|^T \begin{vmatrix} \overset{\rightarrow}{g_1} \\ \overset{\rightarrow}{g_2} \\ \overset{\rightarrow}{g_3} \end{vmatrix} \text{ может быть записано в виде}$$

$$\begin{vmatrix} \overset{\rightarrow}{g'_1} & \overset{\rightarrow}{g'_2} & \overset{\rightarrow}{g'_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overset{\rightarrow}{g_1} & \overset{\rightarrow}{g_2} & \overset{\rightarrow}{g_3} \end{vmatrix} \left\| S \right\|.$$

Для дальнейших рассуждений нам будет полезно следующее вспомогательное утверждение.

**Лемма 5.1.2.** Пусть произведение квадратной матрицы  $\|Q\|$  на произвольный  $n$ -компонентный столбец  $\|x\|$  есть нулевой  $n$ -компонентный столбец, тогда матрица  $\|Q\|$  нулевая.

Доказательство.

Пусть  $\|Q\| = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \dots & \omega_{1n} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \dots & \omega_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{n1} & \omega_{n2} & \dots & \omega_{nn} \end{vmatrix}$ . Выберем в качестве  $\|x\|$  столбец вида  $\begin{vmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{vmatrix}$ , где единица стоит в строке с номером  $i$ .

Тогда  $\|Q\| = \begin{vmatrix} 0 & \omega_{1i} & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \omega_{ii} & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \omega_{ni} & 0 \end{vmatrix}$  и в силу произвольности  $i$  приходим к заключению о справедливости утверждения леммы.

Лемма доказана.

**Теорема 5.1.2.** Для невырожденных одинакового размера квадратных матриц  $\|A\|$  и  $\|B\|$  справедливо соотношение

$$(\|A\|\|B\|)^{-1} = \|B\|^{-1}\|A\|^{-1}.$$

Доказательство.

1°. Пусть произведение матрицы  $(\|A\|\|B\|)^{-1}$  на некоторый  $n$ -компонентный столбец  $\|x\|$  есть столбец  $\|c\|$ . Тогда  $(\|A\|\|B\|)^{-1}\|x\| = \|c\|$  или, что то же самое,  $\|x\| = \|A\|\|B\|\|c\|$  (см. определения 5.1.1 и 5.1.2).

2°. С другой стороны, из последнего равенства получаем, что

$$\|A\|^{-1}\|x\| = \|B\|\|c\|$$

и аналогично  $\|B\|^{-1}\|A\|^{-1}\|x\| = \|c\|$ .

3°. Вычитая почленно равенства

$$(\|A\|\|B\|)^{-1}\|x\| = \|c\| \text{ и } \|B\|^{-1}\|A\|^{-1}\|x\| = \|c\|,$$

в силу дистрибутивности матричного произведения приходим к соотношению

$$((\|A\|\|B\|)^{-1} - \|B\|^{-1}\|A\|^{-1})\|x\| = \|o\|,$$

которое по лемме 5.1.2 ввиду произвольности столбца  $\|x\|$  означает, что матрица

$$(\|A\|\|B\|)^{-1} - \|B\|^{-1}\|A\|^{-1}$$

нулевая.

Теорема доказана.

**Задача** Проверить тождество  $(\|A\|^{-1})^T = (\|A\|^T)^{-1}$ .  
5.1.1.

**Определение** Невырожденная квадратная матрица  $\|Q\|$ , для которой  $\|Q\|^{-1} = \|Q\|^T$ , называется *ортогональной*.  
5.1.4.

Свойства ортогональных матриц, играющих важную роль во многих приложениях, можно сформулировать в виде следующих теорем.

**Теорема** Для ортогональной матрицы  $\|Q\|$  справедливо равенство  $\det\|Q\| = \pm 1$ .  
5.1.3.

Доказательство.

Умножая равенство  $\|Q\|^{-1} = \|Q\|^T$  последовательно справа и слева на  $\|Q\|$ , в силу определения 5.1.2 приходим к соотношению  $\|Q\|^T\|Q\| = \|Q\|\|Q\|^T = \|E\|$ . Откуда находим, что  $\det^2\|Q\| = 1$ , поскольку

- определитель произведения квадратных матриц одинакового размера равен произведению определителей сомножителей;
- определитель матрицы не меняется при ее транспонировании;
- $\det \|E\| = 1$ .

Теорема доказана.

**Теорема Каждая ортогональная матрица второго порядка  $\|Q\|$ ,**  
5.1.4.

для которой  $\det \|Q\| = 1$ , может быть представлена в виде  $\begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}$ , где  $\varphi$  – некоторое число, а каждая ортогональная матрица с  $\det \|Q\| = -1$  – в виде  $\begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{vmatrix}$ .

Доказательство.

Пусть матрица  $\|Q\| = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{vmatrix}$  ортогональная, тогда должны быть справедливы равенства

$$\|Q\| \|Q\|^T = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{21} \\ \omega_{12} & \omega_{22} \end{vmatrix} = \|E\|$$

и, следовательно,

$$\begin{vmatrix} \omega_{11}^2 + \omega_{12}^2 & \omega_{11}\omega_{21} + \omega_{12}\omega_{22} \\ \omega_{11}\omega_{21} + \omega_{12}\omega_{22} & \omega_{21}^2 + \omega_{22}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Последнее матричное равенство может быть записано в виде системы скалярных условий

$$\begin{cases} \omega_{11}^2 + \omega_{12}^2 = 1, \\ \omega_{11}\omega_{21} + \omega_{12}\omega_{22} = 0, \\ \omega_{21}^2 + \omega_{22}^2 = 1, \end{cases}$$

причем из этих равенств, как было показано при доказательстве теоремы 5.1.3, следует, что  $\det\|Q\| = \pm 1$ . Рассмотрим вначале случай  $\det\|Q\| = 1$ .

Если из суммы первого и третьего уравнений системы вычесть удвоенное равенство  $\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21} = 1$ , то мы получим

$$(\omega_{11}^2 + \omega_{12}^2) + (\omega_{21}^2 + \omega_{22}^2) - 2(\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}) = 0$$

или  $(\omega_{11} - \omega_{22})^2 + (\omega_{12} + \omega_{21})^2 = 0$ , откуда следует, что

$$\begin{cases} \omega_{11} = \omega_{22}, \\ \omega_{12} = -\omega_{21}. \end{cases}$$

Наконец, из условий  $\omega_{11}^2 + \omega_{12}^2 = 1$ ;  $\omega_{21}^2 + \omega_{22}^2 = 1$  имеем оценки  $0 \leq \omega_{11}^2 \leq 1$ ;  $0 \leq \omega_{21}^2 \leq 1$ , которые позволяют ввести

обозначения  $\begin{cases} \omega_{11} = \cos \varphi \\ \omega_{21} = \sin \varphi \end{cases}$ , приводящие к требуемому виду

матрицы  $\|Q\|$ , поскольку из полученных соотношений также следует, что  $\omega_{11}^2 + \omega_{21}^2 = 1$ .

Случай  $\det\|Q\| = -1$  рассматривается аналогично.

Теорема доказана.

**Следствие 5.1.1.** Матрица перехода от одного ортонормированного базиса на плоскости к другому ортогональная.

Доказательство.

В § 1.8 было показано, что  $\|S\|$  – матрица перехода от одной ортонормированной системы координат на плоскости к другой – может иметь один из двух следующих видов:

$$\begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} \text{ или } \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{vmatrix},$$

где  $\varphi$  – угол между первыми базисными векторами. Но тогда матрица перехода  $\|S\|$  ортогональная в силу теоремы 5.1.4.

Следствие доказано.

## § 5.2. Операторы и функционалы. Отображения и преобразования плоскости

Вводимое в курсе математического анализа понятие функции (как правила, устанавливающего однозначное соответствие между числом, принадлежащим области определения, и числом, принадлежащим множеству значений) может быть естественным образом обобщено на случай, когда область определения и область значений не являются числовыми множествами.

**Определение 5.2.1.** Будем говорить, что задан *оператор*  $\hat{A}$ , действующий на множестве  $\Omega$  со значениями в множестве  $\Theta$ , если указано правило, по которому каждому элементу множества  $\Omega$  поставлен в соответствие единственный элемент из множества  $\Theta$ .

Символически результат действия оператора  $\hat{A}$  обозначается так:  $y = \hat{A}x$ ,  $x \in \Omega$ ,  $y \in \Theta$ . Элемент  $y$  в этом случае называется образом элемента  $x$ , элемент  $x$  – прообразом элемента  $y$ .

**Определение 5.2.2.** Если  $\Theta$  – область значений некоторого оператора – является числовым множеством, то говорят, что на множестве  $\Omega$  задан функционал.

Функционалы обычно обозначаются так же, как и функции: например,  $y = \Phi(x)$ ,  $x \in \Omega$ .

**Пример 5.2.1.** 1°. Если каждому вектору  $\overset{\rightarrow}{x}$  в пространстве поставлен в соответствие вектор  $\overset{\rightarrow}{y}$ , являющийся ортогональной проекцией вектора  $\overset{\rightarrow}{x}$  на некоторую ось  $\overset{\rightarrow}{l}$ , то говорят, что в пространстве задан оператор  $\overset{\rightarrow}{y} = \Pr_l \overset{\rightarrow}{x}$  ортогонального проектирования векторов на ось  $\overset{\rightarrow}{l}$ . В этом случае символически можно записать, что  $\overset{\Lambda}{\hat{A}} = \Pr_l$ .

2°. Каждой дифференцируемой на  $[\alpha, \beta]$  функции  $f(\tau)$  можно поставить в однозначное соответствие  $f'(\tau)$  – ее производную функцию, поэтому можно говорить об операторе дифференцирования  $f'(\tau) = \frac{d}{d\tau} f(\tau)$ , символически обозначаемом как  $\hat{A} = \frac{d}{d\tau}$ .

- 3°. Каждому вектору  $\overset{\rightarrow}{x}$  в пространстве можно поставить в однозначное соответствие число  $\left| \overset{\rightarrow}{x} \right|$  – его длину. Очевидно, что данная зависимость является функционалом, заданным на множестве векторов.
- 4°. Для каждой непрерывной на  $[\alpha, \beta]$  функции  $f(\tau)$  существует интеграл  $\int_{\alpha}^{\beta} f(\tau) d\tau$ , который можно рассматривать как функционал  $\Phi(f) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\tau) d\tau$  на множестве функций, непрерывных на  $[\alpha, \beta]$ .

**Определение 5.2.3.**

*Оператором  $\hat{A}$ , отображающим плоскость (или просто отображением плоскости)  $P$  на плоскость  $Q$ , называется правило, по которому каждой точке плоскости  $P$  поставлена в соответствие единственная точка плоскости  $Q$ .*

Отображение плоскости принято обозначать следующим образом:  $\hat{A}: P \rightarrow Q$ . Если точка  $M$  плоскости  $P$  отображается в точку  $M^*$  плоскости  $Q$ , то это представляется как  $M^* = \hat{A}M$  (что иногда записывают в виде  $M^* = \hat{A}(M)$ ), при этом точка  $M^*$  является *образом* точки  $M$ , а точка  $M$  – *прообразом* точки  $M^*$ .

**Определение 5.2.4.**

Отображение  $\hat{A}: P \rightarrow Q$  называется *взаимно однозначным*, если каждая точка плоскости  $Q$  имеет прообраз и притом единственный.

**Определение 5.2.5.** Отображение  $\hat{A}$  плоскости  $P$  в саму себя называется *преобразованием* плоскости  $P$ .

**Определение 5.2.6.** Последовательное выполнение преобразований

$$M^* = \hat{A}M \quad \text{и} \quad M^{**} = \hat{B}M^*$$

называется *произведением* (или *композицией*) этих преобразований.

Произведение операторов записывается в виде  $M^{**} = \hat{B}\hat{A}M$ .

Заметим, что в общем случае это произведение не коммутативно, но ассоциативно.

**Определение 5.2.7.** Преобразованием, *обратным* взаимно однозначному преобразованию  $\hat{A}: P \rightarrow P$ , называется оператор  $\hat{A}^{-1}: P \rightarrow P$ , такой, что для каждой точки  $M$  плоскости  $P$  имеет место

$$\hat{A}^{-1}(\hat{A}M) = M.$$

**Определение 5.2.8.** Точка плоскости  $P$ , переводимая преобразованием  $\hat{A}$  сама в себя, называется *неподвижной точкой* для  $\hat{A}$ . Множество на  $P$ , состоящее из неподвижных точек для  $\hat{A}$ , называется *неподвижным для  $\hat{A}$* .

Множество точек  $P$ , переходящее при  $\hat{A}$  само в себя, называется *инвариантным множеством преобразования  $\hat{A}$* .

### § 5.3. Линейные операторы на плоскости

Пусть на плоскости с декартовой системой координат  $\{\vec{O}, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$  каждой ее точке  $M$  поставлена в однозначное соответствие точка  $M^*$ , то есть согласно определению 5.2.6

задано преобразование этой плоскости  $M^* = \hat{A}M$ . Пусть координатные представления радиусов-векторов этих точек суть

$$\left\| \vec{r}_M \right\|_g = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \text{ и } \left\| \vec{r}_{M^*} \right\|_g = \begin{vmatrix} x^* \\ y^* \end{vmatrix}, \text{ тогда координаты } x^* \text{ и } y^* \text{ будут}$$

некоторыми функциями от  $x$  и  $y$   $\begin{cases} x^* = F_x(x, y) \\ y^* = F_y(x, y) \end{cases}$ , и потому равен-

ство  $\begin{vmatrix} x^* \\ y^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_x(x, y) \\ F_y(x, y) \end{vmatrix}$  можно рассматривать как представление

оператора  $\vec{r}_{M^*} = \hat{A} \vec{r}_M$  в системе координат  $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ .

Далее мы будем рассматривать частные, но важные для приложений виды функций  $F_x(x, y)$  и  $F_y(x, y)$ .

**Определение** Оператор  $\vec{r}_{M^*} = \hat{A} \vec{r}_M$  называется *линейным оператором*, если в каждой декартовой системе координат

$\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$  он задается формулами

$$\begin{cases} x^* = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \beta_1, \\ y^* = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \beta_2. \end{cases}$$

При помощи операций с матрицами линейный оператор может быть записан в виде  $\begin{vmatrix} x^* \\ y^* \end{vmatrix} = \left\| \hat{A} \right\|_g \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{vmatrix}$ , где матрица

$$\left\| \hat{A} \right\|_g = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$$

называется *матрицей линейного оператора*  $\hat{A}$  (*координатным представлением*  $\hat{A}$ ) в  $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ .

**Определение 5.3.2.** Оператор  $\vec{r}_{M^*} = \hat{A} \vec{r}_M$  называется *линейным однородным оператором*, если он удовлетворяет определению 5.3.1 и, кроме того,  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ .

Если же  $|\beta_1| + |\beta_2| > 0$ , то оператор  $\hat{A}$  называется *неоднородным*.

**Пример 5.3.1.** К линейным однородным операторам относятся:

- оператор  $\hat{A}$ , действие которого сводится к умножению координат радиуса-вектора прообраза на фиксированные положительные числа, называемый “*оператором сжатия к осям*”, или просто “*сжатием к осям*”, имеющий матрицу  $\left\| \hat{A} \right\|_g = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}$ , где числа  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  – коэффициенты сжатия;
- оператор *ортогонального проектирования* радиусов-векторов точек плоскости на некоторую заданную ось, проходящую через начало координат;
- *гомотетия* с коэффициентом  $\kappa$  и с центром в начале координат.

**Теорема 5.3.1.** Для линейного однородного оператора  $\hat{A}$  справедливы соотношения:

$$1^\circ. \hat{A}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) = \hat{A}\vec{r}_1 + \hat{A}\vec{r}_2 \quad \forall \vec{r}_1, \vec{r}_2.$$

$$2^\circ. \hat{A}(\lambda \vec{r}) = \lambda \hat{A} \vec{r} \quad \forall \vec{r}, \lambda.$$

Доказательство.

В справедливости утверждения теоремы убедимся непосредственной проверкой, используя правила действия с матрицами. Например, для 1° имеем

$$\begin{aligned} \hat{A}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) &= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \left( \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix} \right) = \\ &= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix} = \hat{A}\vec{r}_1 + \hat{A}\vec{r}_2. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

**Теорема 5.3.2.** Если для некоторого оператора  $\hat{A}$  справедливы соотношения

$$1^\circ. \hat{A}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) = \hat{A}\vec{r}_1 + \hat{A}\vec{r}_2 \quad \forall \vec{r}_1, \vec{r}_2,$$

$$2^\circ. \hat{A}(\lambda \vec{r}) = \lambda \hat{A} \vec{r} \quad \forall \vec{r}, \lambda,$$

то этот оператор линейный и однородный.

Доказательство.

Пусть  $\vec{r} = x \vec{g}_1 + y \vec{g}_2$  и  $\hat{A} \vec{r} = x^* \vec{g}_1 + y^* \vec{g}_2$  – соответственно координатные разложения для прообраза и образа, тогда  $x^* \vec{g}_1 + y^* \vec{g}_2 = \hat{A}(x \vec{g}_1 + y \vec{g}_2) = x \hat{A} \vec{g}_1 + y \hat{A} \vec{g}_2$ .

По теореме 1.5.1 существуют числа  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}$  такие, что

$$\hat{A} \vec{g}_1 = \alpha_{11} \vec{g}_1 + \alpha_{21} \vec{g}_2 \text{ и } \hat{A} \vec{g}_2 = \alpha_{12} \vec{g}_1 + \alpha_{22} \vec{g}_2.$$

Тогда получаем

$$\begin{aligned} x^* \overset{\rightarrow}{g_1} + y^* \overset{\rightarrow}{g_2} &= x \hat{A} \overset{\rightarrow}{g_1} + y \hat{A} \overset{\rightarrow}{g_2} = \\ &= (\alpha_{11}x + \alpha_{12}y) \overset{\rightarrow}{g_1} + (\alpha_{21}x + \alpha_{22}y) \overset{\rightarrow}{g_2}. \end{aligned}$$

А в силу линейной независимости векторов  $\overset{\rightarrow}{g_1}$  и  $\overset{\rightarrow}{g_2}$

$$\begin{cases} x^* = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y, \\ y^* = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y \end{cases} \text{ или } \begin{vmatrix} x^* \\ y^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Теорема доказана.

Отметим также, что для вектора  $\overset{\rightarrow}{a}$ , имеющего  $\overset{\rightarrow}{\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}}_g$  в базисе  $\{\overset{\rightarrow}{g_1}, \overset{\rightarrow}{g_2}\}$ , при любом линейном преобразовании образом  $\hat{A} \overset{\rightarrow}{a}$  является вектор с координатным представлением

$$\left\| \hat{A} \overset{\rightarrow}{a} \right\|_g = \begin{vmatrix} a_x^* \\ a_y^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}.$$

Из теорем 5.3.1 и 5.3.2 вытекают важные следствия.

**Следствие 5.3.1.** Столбцами матрицы линейного однородного оператора  $\hat{A}$  в базисе  $\{\overset{\rightarrow}{g_1}, \overset{\rightarrow}{g_2}\}$  являются координатные представления векторов  $\hat{A} \overset{\rightarrow}{g_1}$  и  $\hat{A} \overset{\rightarrow}{g_2}$ .

**Следствие 5.3.2.** Каждому линейному однородному оператору преобразования плоскости в конкретном базисе соответствует однозначно определяемая квадратная матрица второго порядка, а каждая квадратная матрица второго порядка задает в этом базисе некоторый линейный однородный оператор.

**Задача  
5.3.1.**

*Исходя из правил действия с матрицами, показать, что для линейных однородных операторов на плоскости справедливы утверждения:*

1°. *Матрица произведения линейных однородных операторов равна произведению матриц операторов-сомножителей:  $\|\hat{A}\hat{B}\|_g = \|\hat{A}\|_g \|\hat{B}\|_g$ .*

2°. *Если  $\hat{A}^{-1}$  есть оператор, обратный линейному однородному оператору  $\hat{A}$ , то*

$$\|\hat{A}^{-1}\|_g = \|\hat{A}\|_g^{-1}.$$

Выясним теперь, как изменится матрица линейного однородного оператора при замене базиса. Имеет место

**Теорема  
5.3.3.** Пусть в системе координат  $\{\vec{O}, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$  некоторый однородный линейный оператор имеет матрицу  $\|\hat{A}\|_g$ . Тогда в системе координат  $\{\vec{O}, \vec{g}'_1, \vec{g}'_2\}$  этот оператор будет иметь матрицу

$$\|\hat{A}\|_{g'} = \|S\|^{-1} \|\hat{A}\|_g \|S\|,$$

где  $\|S\|$  – матрица перехода.

Доказательство.

Пусть в исходной системе координат действие линейного оператора  $\hat{A}$  задается формулой  $\|\vec{r}^*\|_g = \|\hat{A}\|_g \|\vec{r}\|_g$ , а в новой сис-

теме координат –  $\|\vec{r}^*\|_{g'} = \|\hat{A}\|_{g'} \|\vec{r}\|_{g'}$ , и пусть  $\|S\|$  – матрица

перехода от ДСК  $\{\vec{O}, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$  к ДСК  $\{\vec{O}, \vec{g}'_1, \vec{g}'_2\}$ , такая, что

$$\left\| \overset{\rightarrow}{r} \right\|_g = \| S \| \left\| \overset{\rightarrow}{r} \right\|_{g'} \text{ и } \left\| \overset{\rightarrow}{r^*} \right\|_g = \| S \| \left\| \overset{\rightarrow}{r^*} \right\|_{g'}.$$

Подставляя два последних соотношения в первое и принимая во внимание утверждение теоремы 1.8.2 о невырожденности матрицы перехода  $\| S \|$  (то есть существование матрицы  $\| S \|^{-1}$ ), получаем, что

$$\| S \| \left\| \overset{\rightarrow}{r^*} \right\|_{g'} = \| \hat{A} \|_g \| S \| \left\| \overset{\rightarrow}{r} \right\|_{g'} \text{ или } \left\| \overset{\rightarrow}{r^*} \right\|_{g'} = \| S \|^{-1} \| \hat{A} \|_g \| S \| \left\| \overset{\rightarrow}{r} \right\|_{g'}.$$

Наконец, вычитая последнее равенство почленно из равенства

$$\left\| \overset{\rightarrow}{r^*} \right\|_{g'} = \| \hat{A} \|_{g'} \left\| \overset{\rightarrow}{r} \right\|_{g'}, \text{ в силу произвольности } \left\| \overset{\rightarrow}{r} \right\|_{g'} \text{ (согласно}$$

лемме 5.1.2) приходим к соотношению

$$\| \hat{A} \|_{g'} = \| S \|^{-1} \| \hat{A} \|_g \| S \|.$$

Теорема доказана.

**Следствие    Величина  $\det \| \hat{A} \|_g$  не зависит от выбора базиса.**  
5.3.3.

**Доказательство.**

Поскольку определитель произведения матриц равен произведению определителей сомножителей, то в силу теоремы 5.3.3 и невырожденности матрицы перехода  $\| S \|$  имеем

$$\begin{aligned} \det \| \hat{A} \|_{g'} &= \det (\| S \|^{-1} \| \hat{A} \|_g \| S \|) = \\ &= \det \| S \|^{-1} \det \| \hat{A} \|_g \det \| S \| = \\ &= \frac{1}{\det \| S \|} \det \| \hat{A} \|_g \det \| S \| = \det \| \hat{A} \|_g. \end{aligned}$$

Следствие доказано.

**Задача  
5.3.2.**

В ортонормированной системе координат найти матрицу оператора, ортогонально проектирующего радиус-векторы точек координатной плоскости на прямую  $x + 3y - 2 = 0$ .

**Решение.** Пусть точка-прообраз  $M$  имеет радиус-

$$\text{вектор } \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \text{ а}$$

точка  $M^*$  – образ точки  $M$  – соответственно ее радиус-

$$\text{вектор } \vec{r}_0^* = \begin{pmatrix} x_0^* \\ y_0^* \end{pmatrix}.$$

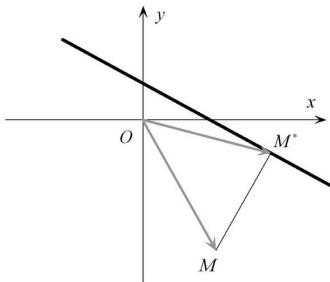


Рис. 5.3.1

Из рис. 5.3.1 следует, что  $M^*$  есть точка пересечения прямой  $x + 3y - 2 = 0$  и перпендикуляра к ней, проходящего через  $M$ .

Поскольку нормальный вектор прямой  $x + 3y - 2 = 0$  является направляющим вектором этого перпендикуляра, то уравнение последнего будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Откуда следует, что координаты радиуса-вектора точки  $M^*$  будут удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} x_0^* = x_0 + \tau, \\ y_0^* = y_0 + 3\tau, \\ x_0^* + 3y_0^* - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_0^* = \frac{9}{10}x_0 - \frac{3}{10}y_0 + \frac{1}{5}, \\ y_0^* = -\frac{3}{10}x_0 + \frac{1}{10}y_0 + \frac{3}{5}. \end{cases}$$

Используя правила операций с матрицами, получаем окончательно, что

$$\begin{vmatrix} x_0^* \\ y_0^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{9}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \end{vmatrix},$$

то есть

$$\left\| \hat{A} \right\|_e = \begin{vmatrix} \frac{9}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{vmatrix}.$$

#### § 5.4. Аффинные преобразования и их свойства

*Линейные* операторы, преобразующие плоскость саму в себя (то есть линейные операторы вида  $\hat{A}: P \rightarrow P$ ) и имеющие обратный оператор, играют важную с практической точки зрения роль и потому выделяются в специальный класс.

**Определение** Линейный оператор  $\begin{vmatrix} x^* \\ y^* \end{vmatrix} = \left\| \hat{A} \right\|_g \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{vmatrix}$ , ото-  
5.4.1.

бражающий плоскость  $P$  саму на себя, с матрицей

$$\left\| \hat{A} \right\|_g = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \text{ для которой в любом базисе}$$

$\det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ , называется *аффинным преоб-  
разованием плоскости*.

Теорема

5.4.1

(признак аффинности).

**Если для линейного преобразования плоскости**  
 $\det \|\hat{A}\|_g \neq 0$  **в некоторой декартовой системе координат, то это условие будет выполнено и в любой другой декартовой системе координат.**

**Доказательство.**

По следствию 5.3.3 определитель матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса, поэтому для аффинности линейного преобразования достаточно, чтобы  $\det \|\hat{A}\|_g \neq 0$  **ходя бы в одном базисе.**

**Теорема доказана.**

Теорема

5.4.2. **Каждое аффинное преобразование имеет единственное обратное, которое также является аффинным.**

**Доказательство.**

Поскольку  $\det \|\hat{A}\|_g \neq 0$ , то матрица  $\|\hat{A}\|_g^{-1}$  существует, единственна и невырожденная (см. § 5.1), а в силу теоремы 1.1.2 система линейных уравнений

$$\|\hat{A}\|_g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

всегда имеет единственное решение  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  для любого вектора

$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$ . Но это означает, что между образами и прообразами

аффинного преобразования существует взаимно однозначное соответствие, то есть для  $\hat{A}$  существует единственное обратное аффинное преобразование, задаваемое формулами

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{A} \end{vmatrix}_g^{-1} \begin{vmatrix} x^* \\ y^* \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1^* \\ \beta_2^* \end{vmatrix}, \text{ где } \begin{vmatrix} \beta_1^* \\ \beta_2^* \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \hat{A} \end{vmatrix}_g^{-1} \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{vmatrix}.$$

Теорема доказана.

**Задача 5.4.1.** *Определитель матрицы, полученной при решении задачи 5.3.2, оказался равным нулю. Сохранится ли верным это равенство, если произвольным образом изменить коэффициенты уравнения прямой, на которую выполняется ортогональное проектирование?*

**Теорема 5.4.3.** *При аффинном преобразовании всякий базис переходит в базис, а для любых двух базисов существует единственное аффинное преобразование, переводящее первый базис во второй.*

Доказательство.

Пусть аффинное преобразование задано формулами

$$\begin{cases} x^* = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \beta_1, \\ y^* = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \beta_2, \end{cases}$$

тогда образами первой пары базисных векторов будут векторы

$$\vec{g}_1^* = \alpha_{11} \vec{g}_1 + \alpha_{21} \vec{g}_2; \quad \vec{g}_2^* = \alpha_{12} \vec{g}_1 + \alpha_{22} \vec{g}_2. \text{ А поскольку}$$

$$\det \begin{vmatrix} \hat{A} \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то векторы  $\overset{\rightarrow}{g_1^*}$  и  $\overset{\rightarrow}{g_2^*}$  линейно независимы (теорема 1.6.2) и из них можно образовать базис.

Сопоставляя определение 1.8.2 и следствие 5.3.1, замечаем, что в том случае, когда базис  $\{\overset{\rightarrow}{g_1^*}, \overset{\rightarrow}{g_2^*}\}$  является образом базиса  $\{\overset{\rightarrow}{g_1}, \overset{\rightarrow}{g_2}\}$  при аффинном преобразовании  $\hat{A}$ , матрица перехода от базиса  $\{\overset{\rightarrow}{g_1}, \overset{\rightarrow}{g_2}\}$  к базису  $\{\overset{\rightarrow}{g_1^*}, \overset{\rightarrow}{g_2^*}\}$

$$\|S\| = \|\hat{A}\|_g.$$

Но поскольку для любой пары базисов матрица перехода существует, единственна и невырождена, то и преобразование, переводящее первый базис во второй, существует, аффинное и единственное.

**Теорема доказана.**

Рассмотрим теперь вопрос о том, что происходит с различными геометрическими объектами на плоскости при ее аффинном преобразовании.

**Теорема 5.4.4. При аффинном преобразовании образом прямой линии является прямая.**

**Доказательство.**

Пусть дана прямая  $\begin{cases} x = x_0 + \tau p \\ y = y_0 + \tau q \end{cases}$ , где  $p$  и  $q$  – не равные нулю

одновременно координаты направляющего вектора прямой, и аффинное преобразование  $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \|\hat{A}\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ .

Тогда образом прямой будет множество точек плоскости с координатами

$$\begin{cases} x^* = (\alpha_{11}x_0 + \alpha_{12}y_0 + \beta_1) + (\alpha_{11}p + \alpha_{12}q)\tau, \\ y^* = (\alpha_{21}x_0 + \alpha_{22}y_0 + \beta_2) + (\alpha_{21}p + \alpha_{22}q)\tau. \end{cases}$$

Заметим, что если  $|\alpha_{11}p + \alpha_{12}q| + |\alpha_{21}p + \alpha_{22}q| > 0$ , то мы имеем прямую. Предположим противное, пусть

$$\begin{cases} \alpha_{11}p + \alpha_{12}q = 0, \\ \alpha_{21}p + \alpha_{22}q = 0, \end{cases}$$

тогда в силу аффинности преобразования  $\det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \neq 0$

и по теореме 1.1.2 (Крамера)  $p = q = 0$  есть единственное решение этой системы уравнений, что противоречит условию.

Теорема доказана.

**Теорема 5.4.5.** При аффинном преобразовании образом параллельных прямых являются параллельные прямые, общая точка пересекающихся прямых-прообразов переходит в точку пересечения их образов.

Доказательство.

Предположим, что пара параллельных прямых переведена аффинным преобразованием в пересекающиеся или совпадающие прямые.

Рассмотрим одну из точек, общих для образов прямых. Поскольку аффинное преобразование взаимно однозначно, то прообраз общей точки единственный и должен принадлежать одновременно каждой из прямых-прообразов. Однако таких точек нет, ибо прямые-прообразы параллельны. Следовательно, образы параллельных прямых также параллельны.

Если же прямые-прообразы пересекаются, то в силу взаимной однозначности аффинного преобразования образом их точки пересечения может быть только точка пересечения образов этих прямых.

Теорема доказана.

**Теорема 5.4.6.** **При аффинном преобразовании сохраняется деление отрезка в данном отношении.**

Доказательство.

Пусть точки  $M_i^*$ ,  $i = 1, 2, 3$ , с координатами  $\begin{vmatrix} x_i^* \\ y_i^* \end{vmatrix}$  являются

образами (рис. 5.4.1) точек  $M_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  соответственно

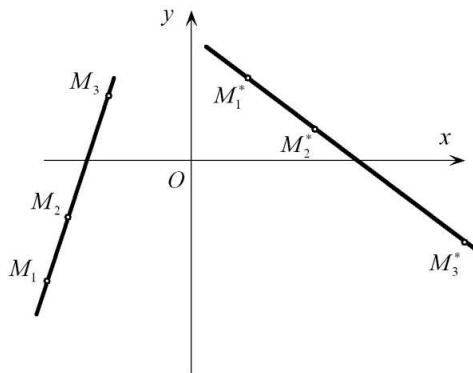


Рис. 5.4.1

с координатами  $\begin{vmatrix} x_i \\ y_i \end{vmatrix}$ . И пусть дано, что  $\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \lambda$  и  $\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2} = \lambda$ , где  $\lambda \neq -1$ , нужно показать, что

$$\frac{x_2^* - x_1^*}{x_3^* - x_2^*} = \lambda \text{ и } \frac{y_2^* - y_1^*}{y_3^* - y_2^*} = \lambda.$$

Если аффинное преобразование задано в виде

$$\begin{cases} x^* = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \beta_1, \\ y^* = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \beta_2, \end{cases}$$

то

$$\begin{aligned} \frac{x_2^* - x_1^*}{x_3^* - x_2^*} &= \frac{\alpha_{11}(x_2 - x_1) + \alpha_{12}(y_2 - y_1)}{\alpha_{11}(x_3 - x_2) + \alpha_{12}(y_3 - y_2)} = \\ &= \frac{\alpha_{11}\lambda(x_3 - x_2) + \alpha_{12}\lambda(y_3 - y_2)}{\alpha_{11}(x_3 - x_2) + \alpha_{12}(y_3 - y_2)} = \lambda. \end{aligned}$$

Аналогично показывается, что  $\frac{y_2^* - y_1^*}{y_3^* - y_2^*} = \lambda$ .

Заметим, что из полученных соотношений следует равенство отношения длин образов и отношения длин прообразов отрезков, лежащих на одной прямой. Проверим справедливость этих утверждений для случая ортонормированной системы координат:

$$\begin{aligned} \frac{\left| \vec{M_1 M_2^*} \right|}{\left| \vec{M_3 M_2^*} \right|} &= \frac{\sqrt{(x_2^* - x_1^*)^2 + (y_2^* - y_1^*)^2}}{\sqrt{(x_3^* - x_2^*)^2 + (y_3^* - y_2^*)^2}} = \\ &= \frac{|\lambda| \sqrt{(x_3^* - x_2^*)^2 + (y_3^* - y_2^*)^2}}{\sqrt{(x_3^* - x_2^*)^2 + (y_3^* - y_2^*)^2}} = |\lambda| = \frac{|\lambda| \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}} = \frac{\left| \vec{M_1 M_2} \right|}{\left| \vec{M_2 M_3} \right|}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Отметим также, что из теоремы 5.4.6 непосредственно вытекает, что при аффинном преобразовании отрезок прямой переходит в отрезок.

**Теорема 5.4.7.** **При аффинном преобразовании отношение длин образов двух отрезков, лежащих на параллельных прямых, равно отношению длин их прообразов.**

Доказательство.

Пусть дано, что  $\frac{|\vec{M_1 M_2}|}{|\vec{M_3 M_4}|} = \lambda$ . Проведем прямую  $M_3 M'_3$ , параллельную  $M_4 M_2$ . Поскольку при аффинном преобразовании образы параллельных прямых параллельны, то в силу теоремы 5.4.6  $M_4 M_2 M'_3 M_3$  и  $M_4^* M_2^* M'^*_3 M_3^*$  – параллелограммы (рис. 5.4.2). Следовательно,

$$\left| \vec{M_2^* M_4^*} \right| = \left| \vec{M_3^* M'^*_3} \right|.$$

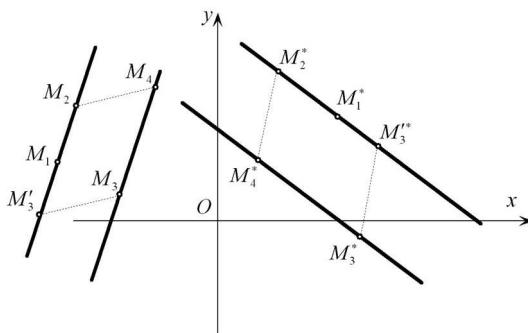


Рис. 5.4.2

Наконец, по теореме 5.4.7 получаем

$$\frac{\left| \vec{M_1^* M_2^*} \right|}{\left| \vec{M_3^* M_4^*} \right|} = \frac{\left| \vec{M_1^* M_2^*} \right|}{\left| \vec{M_3'^* M_2^*} \right|} = \frac{\left| \vec{M_1 M_2} \right|}{\left| \vec{M_3' M_2} \right|} = \frac{\left| \vec{M_1 M_2} \right|}{\left| \vec{M_3 M_4} \right|} = |\lambda|.$$

Теорема доказана.

**Теорема 5.4.8.** При аффинном преобразовании всякая декартова система координат переходит в декартову систему координат, причем координаты образа каждой точки плоскости в новой системе координат будут совпадать с координатами прообраза в исходной.

Доказательство.

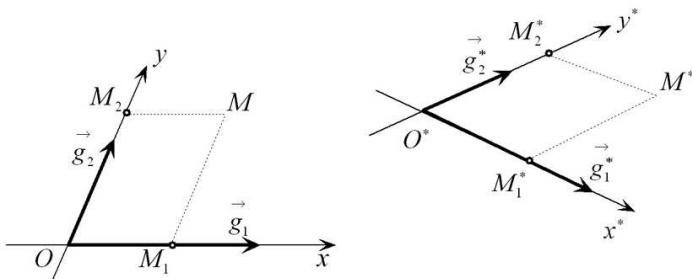


Рис. 5.4.3

Пусть исходная система координат образована базисом  $\{g_1, g_2\}$  и началом координат  $O$ . Согласно теореме 5.4.3 при аффинном преобразовании базис переходит в базис. Дополняя преобразованный базис образом начала координат  $O^*$ , мы получаем преобразованную систему координат  $\{O^*, g_1^*, g_2^*\}$ .

Пусть в исходной системе координаты точки-прообраза  $M$  суть  $x$  и  $y$ , а в преобразованной системе координаты точки-образа  $M^*$  суть  $x^*$  и  $y^*$  (рис. 5.4.3), тогда в силу теоремы 5.4.6 будут справедливы соотношения

$$|x| = \frac{|\vec{OM}_1|}{\left| \begin{array}{c} \rightarrow \\ g_1 \end{array} \right|} = \frac{\left| \begin{array}{c} \rightarrow \\ O^*M_1^* \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{c} \rightarrow \\ g_1^* \end{array} \right|} = |x^*|;$$

$$|y| = \frac{|\vec{OM}_2|}{\left| \begin{array}{c} \rightarrow \\ g_2 \end{array} \right|} = \frac{\left| \begin{array}{c} \rightarrow \\ O^*M_2^* \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{c} \rightarrow \\ g_2^* \end{array} \right|} = |y^*|.$$

После естественного обобщения на случай координат различных знаков получаем доказываемое свойство.

**Теорема доказана.**

Для выяснения геометрического смысла числовых характеристик матрицы аффинного преобразования переформулируем определение 1.8.3 *ориентации пары неколлинеарных векторов* на плоскости, используя операцию векторного произведения.

**Определение 5.4.2.** Пусть  $n$  есть некоторый нормальный вектор плоскости  $P$ , направленный в сторону наблюдателя. Тогда пару неколлинеарных векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  назовем *правоориентированной*, если существует  $\lambda > 0$  (и соответственно *левоориентированной*, если существует  $\lambda < 0$ ) такое, что  $[\vec{a}, \vec{b}] = \lambda n$ .

Тогда будет справедлива

**Теорема 1°.** При аффинном преобразовании величины  $S^*$  – 5.4.9. площади образа параллелограмма и  $S$  – площади прообраза параллелограмма связаны соотношением

$$S^* = \left| \det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \right| \cdot S.$$

**2°.** При аффинном преобразовании ориентация образов пары неколлинеарных векторов совпадает с ориентацией прообразов, если

$$\det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

и меняется на противоположную, если

$$\det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} < 0.$$

**Доказательство.**

При аффинном преобразовании параллелограмм переходит в параллелограмм. Рассмотрим некоторый базис, образованный векторами  $\vec{g}_1$  и  $\vec{g}_2$ , образы которых при аффинном преобразовании  $\hat{A}$  есть соответственно

$$\vec{g}_1^* = \hat{A} \vec{g}_1 = \alpha_{11} \vec{g}_1 + \alpha_{21} \vec{g}_2 \quad \text{и} \quad \vec{g}_2^* = \hat{A} \vec{g}_2 = \alpha_{12} \vec{g}_1 + \alpha_{22} \vec{g}_2,$$

где, согласно следствию 5.3.2, коэффициенты  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}$  и  $\alpha_{22}$  являются элементами матрицы линейного оператора  $\hat{A}$ , то есть

$$\|\hat{A}\|_g = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}.$$

По свойству векторного произведения (см. § 2.4) площадь параллелограмма, построенного на базисных векторах  $\vec{g}_1$  и  $\vec{g}_2$ , равна  $S = \left| [\vec{g}_1, \vec{g}_2] \right|$ , а площадь параллелограмма, построенного на образах базисных векторов, —  $S^* = \left| [\vec{g}_1^*, \vec{g}_2^*] \right|$ . Но

$$\begin{aligned} [\vec{g}_1^*, \vec{g}_2^*] &= [\alpha_{11} \vec{g}_1 + \alpha_{21} \vec{g}_2, \alpha_{12} \vec{g}_1 + \alpha_{22} \vec{g}_2] = \\ &= (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})[\vec{g}_1, \vec{g}_2] = \det \left\| \hat{A} \right\|_g [\vec{g}_1, \vec{g}_2], \end{aligned}$$

поэтому  $S^* = \left| \det \left\| \hat{A} \right\|_g \right| S$ , а (согласно определению 5.4.2) ориентация пары векторов  $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$  не меняется при  $\det \left\| \hat{A} \right\|_g > 0$  и меняется на противоположную при  $\det \left\| \hat{A} \right\|_g < 0$ .

Наконец, отметим, что полученные соотношения будут выполнены для любого базиса, а значит, и для любого параллелограмма.

Теорема доказана.

**Теорема 5.4.10.** Для любой линии второго порядка, указанной в формулировке теоремы 4.4.1:

- при аффинном преобразовании ее тип не может измениться;
- найдется аффинное преобразование, переводящее ее в любую другую линию второго порядка этого же типа.

Доказательство.

Рассмотрим первое утверждение теоремы.

- 1°. В силу теорем 5.4.6 и 5.4.8 параллелограмм вместе со своей внутренней частью переходит в параллелограмм, и, значит, ограниченная линия перейдет в ограниченную. Отсюда следует, что эллипсы и точки могут переходить только в эллипсы и точки. С другой стороны, точка не может переходить в эллипс и наоборот, поскольку это противоречит свойству взаимной однозначности аффинного преобразования.
- 2°. Среди линий второго порядка только гиперболы и параллельные прямые имеют несвязанные ветви, то есть существует прямая, не пересекающая линию второго порядка, такая, что ветви этой линии расположены по разные стороны от прямой. Сохранение данного свойства при аффинном преобразовании очевидно. Параллельные же прямые не могут перейти в ветви гиперболы в силу теоремы 5.4.5.
- 3°. Среди непрямых линий второго порядка только парабола является неограниченной связной кривой. Следовательно, при аффинном преобразовании парабола может перейти только в параболу.
- 4°. Если линия второго порядка есть точка, прямая или же пара параллельных или пересекающихся прямых, то из утверждения теорем 5.4.4 и 5.4.5 вытекает, что их тип не может измениться.

Рассмотрим второе утверждение теоремы.

Из теорем 4.4.1 и 5.4.1 следует, что для каждой линии второго порядка может быть построено аффинное преобразование, приводящее уравнение линии к одному из следующих девяти видов:

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 &= \pm 1; \quad x'^2 - y'^2 = 1; \\ x'^2 \pm y'^2 &= 0; \quad y'^2 \pm 1 = 0; \quad y'^2 - 2x' = 0; \quad y'^2 = 0. \end{aligned} \tag{5.4.1}$$

Но поскольку уравнения любой пары линий, принадлежащих к одному и тому же типу, приводятся двумя различными аффинными преобразованиями к одному и тому же виду из списка (5.4.1), то в силу взаимной однозначности аффинного преобразования и очевидной аффинности произведения аффинных преобразований следует справедливость второго утверждения теоремы.

**Теорема доказана.**

**Замечание:** изменение при аффинном преобразовании типа линии второго порядка оказывается также невозможным и для случая "пустых множеств". Справедливость этого утверждения будет показана в § 9.4 (теорема 9.4.1).

**Теорема 5.4.11.** Для всякого аффинного преобразования существует пара взаимно ортогональных направлений, которые переводятся данным аффинным преобразованием во взаимно ортогональные.

**Доказательство.**

Рассмотрим ортонормированную систему координат. Пусть пара исходных взаимно ортогональных направлений задается в ней  $\overset{\rightarrow}{p}$  и  $\overset{\rightarrow}{q}$  ненулевыми векторами с координатными представлениями

$$\left\| \overset{\rightarrow}{p} \right\|_e = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \left\| \overset{\rightarrow}{q} \right\|_e = \begin{pmatrix} \eta \\ -\xi \end{pmatrix}.$$

Потребуем, чтобы их образы (ненулевые в силу аффинности)

$$\left\| \overset{\rightarrow}{p}^* \right\|_e = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\xi + \alpha_{12}\eta \\ \alpha_{21}\xi + \alpha_{22}\eta \end{pmatrix},$$

$$\left\| \overset{\rightarrow}{q}^* \right\|_e = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \left\| \begin{matrix} \eta \\ -\xi \end{matrix} \right\| = \begin{vmatrix} \alpha_{11}\eta - \alpha_{12}\xi \\ \alpha_{21}\eta - \alpha_{22}\xi \end{vmatrix}$$

были также взаимно ортогональны.

Условие ортогональности векторов  $\overset{\rightarrow}{p}^*$  и  $\overset{\rightarrow}{q}^*$  в базисе  $\{\overset{\rightarrow}{e}_1, \overset{\rightarrow}{e}_2\}$  имеет вид

$$\begin{aligned} & (\alpha_{11}\xi + \alpha_{12}\eta)(\alpha_{11}\eta - \alpha_{12}\xi) + \\ & + (\alpha_{21}\xi + \alpha_{22}\eta)(\alpha_{21}\eta - \alpha_{22}\xi) = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & -(\alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22})\xi^2 + (\alpha_{11}^2 - \alpha_{12}^2 + \alpha_{21}^2 - \alpha_{22}^2)\xi\eta + \\ & + (\alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22})\eta^2 = 0, \end{aligned}$$

а после переобозначения коэффициентов

$$-U\xi^2 + 2V\xi\eta + U\eta^2 = 0.$$

Рассмотрим следующие случаи:

- 1) Если  $U = V = 0$ , то любая пара взаимно ортогональных векторов данным преобразованием переводится во взаимно ортогональную пару векторов.
- 2) Если  $U = 0$  и  $V \neq 0$ , то  $\xi\eta = 0$ , то есть искомая пара векторов базисная.

- 3) Наконец, если  $U \neq 0$ , то отношение координат векторов

$\overset{\rightarrow}{p}$  и  $\overset{\rightarrow}{q}$  находится из квадратного уравнения

$$\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^2 - \frac{2V}{U}\left(\frac{\xi}{\eta}\right) - 1 = 0, \text{ имеющего действительные}$$

решения  $\left(\frac{\xi}{\eta}\right)_{1,2} = \frac{V}{U} \pm \sqrt{\frac{V^2}{U^2} + 1}$  при любом ненулевом  $U$ .

Теорема доказана.

## § 5.5. Ортогональные преобразования плоскости

**Определение 5.5.1.** *Ортогональным преобразованием* плоскости  $P$  называется линейный оператор  $\hat{Q}$  вида

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \left\| \hat{Q} \right\|_e \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \text{ матрица которого}$$

$$\left\| \hat{Q} \right\|_e = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{pmatrix}$$

ортогональная в любой *ортонормированной* системе координат.

Заметим, что ортогональное преобразование является частным случаем аффинного преобразования, поскольку в силу теоремы 5.1.3 имеет место либо  $\det \left\| \hat{Q} \right\|_e = 1$ , либо  $\det \left\| \hat{Q} \right\|_e = -1$ . Помимо приведенных в § 5.4 аффинных свойств, ортогональные преобразования обладают своими специфическими особенностями. Рассмотрим основные из них.

Признак того, что некоторый линейный оператор является ортогональным, может быть сформулирован как

**Теорема 5.5.1.** *Линейный оператор на плоскости является ортогональным, если его матрица ортогональная хотя бы в одной ортонормированной системе координат.*

**Доказательство.**

Пусть на плоскости  $P$  имеются два ортонормированных базиса  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  и  $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$  с матрицей перехода  $\|S\|$ . Согласно следствию 5.1.1, эта матрица также ортогональная и для нее справедливо равенство  $\|S\|^{-1} = \|S\|^T$ , и пусть матрица оператора  $\hat{Q}$  ортогональна в  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ , то есть для нее  $\|\hat{Q}\|^{-1} = \|\hat{Q}\|^T$ .

Перейдем к базису  $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$ , в котором матрица линейного оператора  $\hat{Q}$ , согласно теореме 5.3.3, будет иметь вид  $\|\hat{Q}\|_{e'} = \|S\|^{-1} \|\hat{Q}\|_e \|S\|$ . Найдем в новом базисе матрицу  $\|\hat{Q}\|_{e'}^{-1}$ . Используя теоремы 5.1.1 и 5.1.2, а также ортогональность матриц  $\|S\|$  и  $\|\hat{Q}\|_e$ , получим

$$\begin{aligned}\|\hat{Q}\|_{e'}^{-1} &= (\|S\|^{-1} \|\hat{Q}\|_e \|S\|)^{-1} = \|S\|^{-1} \|\hat{Q}\|_e^{-1} (\|S\|^{-1})^{-1} = \\ &= \|S\|^{-1} \|\hat{Q}\|_e^{-1} \|S\| = \|S\|^T \|\hat{Q}\|_e^T (\|S\|^T)^T = \\ &= (\|S\|^T \|\hat{Q}\|_e \|S\|)^T = (\|S\|^{-1} \|\hat{Q}\|_e \|S\|)^T = \|\hat{Q}\|_{e'}^T.\end{aligned}$$

Но равенство  $\|\hat{Q}\|_{e'}^{-1} = \|\hat{Q}\|_{e'}^T$  означает, что матрица линейного оператора  $\hat{Q}$  ортогональная и в базисе  $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$ .

Теорема доказана.

**Теорема 5.5.2.** **В ортонормированной системе координат ортогональное преобразование плоскости сохраняет:**

- 1) скалярное произведение векторов;
- 2) длины векторов и расстояния между точками плоскости;
- 3) углы между прямыми.

Доказательство.

1°. Пусть дано ортогональное преобразование плоскости  $\hat{Q}$  с матрицей  $\|\hat{Q}\|_e$  в ортонормированной системе координат

$\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ . Тогда, как было показано в § 2.3, скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  с координатными представлениями  $\left\| \begin{array}{c} \vec{a} \\ e \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \end{array} \right\|$  и  $\left\| \begin{array}{c} \vec{b} \\ e \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \eta_1 \\ \eta_2 \end{array} \right\|$  в ОНБ выражается в следующем виде:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 = \left\| \begin{array}{cc} \xi_1 & \xi_2 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \eta_1 \\ \eta_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \vec{a} \\ e \end{array} \right\|^T \left\| \begin{array}{c} \vec{b} \\ e \end{array} \right\|.$$

Тогда для скалярного произведения образов векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , принимая во внимание ортогональность матрицы  $\left\| \hat{Q} \right\|$ , получаем

$$\begin{aligned} (\hat{Q} \vec{a}, \hat{Q} \vec{b}) &= \left\| \begin{array}{c} \hat{Q} \vec{a} \\ e \end{array} \right\|^T \left\| \begin{array}{c} \hat{Q} \vec{b} \\ e \end{array} \right\| = \\ &= \left( \left\| \hat{Q} \right\|_e \left\| \begin{array}{c} \vec{a} \\ e \end{array} \right\|_e \right)^T \left\| \hat{Q} \right\|_e \left\| \begin{array}{c} \vec{b} \\ e \end{array} \right\|_e = \\ &= \left\| \begin{array}{c} \vec{a} \\ e \end{array} \right\|^T \left\| \hat{Q} \right\|_e^T \left\| \hat{Q} \right\|_e \left\| \begin{array}{c} \vec{b} \\ e \end{array} \right\|_e = \\ &= \left\| \begin{array}{c} \vec{a} \\ e \end{array} \right\|^T \left\| \hat{Q} \right\|_e^{-1} \left\| \hat{Q} \right\|_e \left\| \begin{array}{c} \vec{b} \\ e \end{array} \right\|_e = \\ &= \left\| \begin{array}{c} \vec{a} \\ e \end{array} \right\|^T \|E\| \left\| \begin{array}{c} \vec{b} \\ e \end{array} \right\|_e = \left\| \begin{array}{c} \vec{a} \\ e \end{array} \right\|^T \left\| \begin{array}{c} \vec{b} \\ e \end{array} \right\|_e = (\vec{a}, \vec{b}). \end{aligned}$$

Равенство  $(\hat{Q} \vec{a}, \hat{Q} \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{b}) \quad \forall \vec{a}, \vec{b}$  и означает, что при ортогональном преобразовании плоскости скалярное преобразование сохраняется в любом ортонормированном базисе.

- 2°. Из сохранения при ортогональном преобразовании скалярного произведения для любой пары векторов следует сохранение длин векторов, поскольку

$$\left| \vec{Q} \vec{a} \right| = \sqrt{(\vec{Q} \vec{a}, \vec{Q} \vec{a})} = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} = \left| \vec{a} \right| \quad \forall \vec{a}.$$

- 3°. Тогда в силу 2° при ортогональном преобразовании равные треугольники переходят в равные, и величины углов между векторами на плоскости будут сохраняться.

Теорема доказана.

Используя свойства ортогональных преобразований, можно показать, что для аффинных преобразований справедлива следующая важная теорема.

**Теорема 5.5.3.** **Каждое аффинное преобразование может быть представлено в виде произведения ортогонального преобразования и двух сжатий по взаимно ортогональным направлениям.**

Доказательство.

- 1°. В силу следствия 5.3.2, а также справедливости утверждений задачи 5.3.1 и примера 5.3.1 нам достаточно убедиться, что матрица каждого аффинного преобразования в любом ортонормированном базисе  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  может быть представлена в виде произведения ортогональной матрицы и диагональной матрицы с положительными значениями диагональных элементов.
- 2°. По теореме 5.4.11 существует ортогональный (но, вообще говоря, не нормированный) базис  $\{\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2\}$ , в который данное

аффинное преобразование  $\hat{A}$  переведет исходный ортонормированный базис  $\{\overset{\rightarrow}{e}_1, \overset{\rightarrow}{e}_2\}$ . При этом существуют положительные нормирующие множители  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$ , такие, что

$$\overset{\rightarrow}{e}'_1 = \frac{\overset{\rightarrow}{\varepsilon}_1}{\kappa_1}; \quad \overset{\rightarrow}{e}'_2 = \frac{\overset{\rightarrow}{\varepsilon}_2}{\kappa_2}; \quad \kappa_1 = \left| \overset{\rightarrow}{\varepsilon}_1 \right|; \quad \kappa_2 = \left| \overset{\rightarrow}{\varepsilon}_2 \right|,$$

то есть  $\{\overset{\rightarrow}{e}'_1, \overset{\rightarrow}{e}'_2\}$  – ортонормированный базис.

3°. С другой стороны, линейное преобразование  $\hat{Q}$ , переводящее ортонормированный базис  $\{\overset{\rightarrow}{e}_1, \overset{\rightarrow}{e}_2\}$  в ортонормированный базис  $\{\overset{\rightarrow}{e}'_1, \overset{\rightarrow}{e}'_2\}$ , очевидно, ортогональное и имеет в исходном базисе ортогональную матрицу  $\|\hat{Q}\|_e$ . Тогда будут справедливы соотношения

$$\begin{vmatrix} \overset{\rightarrow}{\varepsilon}_1 \\ \overset{\rightarrow}{\varepsilon}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overset{\rightarrow}{e}'_1 \\ \overset{\rightarrow}{e}'_2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \overset{\rightarrow}{e}'_1 \\ \overset{\rightarrow}{e}'_2 \end{vmatrix} = \|\hat{Q}\|_e^T \begin{vmatrix} \overset{\rightarrow}{e}_1 \\ \overset{\rightarrow}{e}_2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \overset{\rightarrow}{\varepsilon}_1 \\ \overset{\rightarrow}{\varepsilon}_2 \end{vmatrix} = \|\hat{A}\|_e^T \begin{vmatrix} \overset{\rightarrow}{e}_1 \\ \overset{\rightarrow}{e}_2 \end{vmatrix},$$

из которых следует равенство

$$\left( \|\hat{A}\|_e^T - \begin{vmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{vmatrix} \|\hat{Q}\|_e^T \right) \begin{vmatrix} \overset{\rightarrow}{e}_1 \\ \overset{\rightarrow}{e}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overset{\rightarrow}{o} \\ \overset{\rightarrow}{o} \end{vmatrix}.$$

Тогда в силу линейной независимости базисных векторов  $\{\overset{\rightarrow}{e}_1, \overset{\rightarrow}{e}_2\}$  мы имеем  $\|\hat{A}\|_e^T = \begin{vmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{vmatrix} \|\hat{Q}\|_e^T$  или после транспонирования обеих частей этого равенства

$$\left\| \hat{A} \right\|_e = \left\| \hat{Q} \right\|_e \begin{vmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, аффинное преобразование представимо в виде произведения ортогонального преобразования и оператора "сжатия к осям" (см. пример 5.3.1).

Теорема доказана.

## § 5.6. Понятие группы

**Определение 5.6.1.** Множество  $G$  называется *группой по отношению к заданной операции*, если любым двум его элементам  $x$  и  $y$  поставлен в соответствие третий элемент этого же множества, называемый *произведением* и обозначаемый  $xy$ , и если выполняются следующие условия:

- 1)  $x(yz) = (xy)z$ ;
- 2) существует элемент  $e$ , такой, что  
 $\forall x \in G \quad xe = ex = x$ ;
- 3) для каждого  $x$  существует элемент  $x^{-1}$ , такой, что

$$x^{-1}x = e.$$

Если, кроме того,  $xy = yx \quad \forall x, y \in G$ , то группа называется *коммутативной*, или *абелевой*.

**Пример 5.6.1.** К группам относятся, например:

- 1) множество вещественных чисел относительно операции сложения образует группу, где  $e$  – число  $0$ ;

- 
- 2) множество положительных вещественных чисел относительно операции умножения, где  $e$  – число 1;
  - 3) множество поворотов плоскости вокруг фиксированной точки относительно операции композиции;
  - 4) множество аффинных преобразований плоскости относительно операции композиции.

## Глава 6

# СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

### § 6.1. Определители

Рассмотрим множество, состоящее из натуральных чисел  $1, 2, 3, \dots, n$ . Будем обозначать *перестановки* этих чисел (то есть последовательную их запись в некотором порядке без повторений) как  $\{k_1, k_2, k_3, \dots, k_n\}$ . Напомним, что полное число таких различных перестановок равно  $n!$ .

**Определение** Будем говорить, что числа  $k_i$  и  $k_j$  образуют в перестановке *беспорядок* (*нарушение порядка*, или *инверсию*), если при  $i < j$  имеет место  $k_i > k_j$ .

Полное число беспорядков в перестановке  $\{k_1, k_2, k_3, \dots, k_n\}$  будем обозначать  $B(k_1, k_2, \dots, k_n)$ . Например,  $B(3, 1, 4, 2) = 3$ .

Пусть дана квадратная матрица

$$\|A\| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \|\alpha_{ij}\|; i, j = [1, n].$$

**Определение 6.1.2.** Детерминантом (или определителем) квадратной матрицы  $\|A\|$  размера  $n \times n$  называется число  $\det \|A\|$ , получаемое по формуле

$$\det \|A\| = \sum_{\{k_1, k_2, k_3, \dots, k_n\}} (-1)^{\text{Б}(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n)} \alpha_{1k_1} \alpha_{2k_2} \dots \alpha_{nk_n},$$

где  $\{k_1, k_2, k_3, \dots, k_n\}$  – всевозможные различные перестановки, образованные из номеров столбцов матрицы  $\|A\|$ .

Поскольку в данном определении указано, что сумма берется по всем возможным различным перестановкам, то число слагаемых равно  $n!$ .

Из определения 6.1.2 также вытекает, что каждое слагаемое содержит в качестве сомножителя по одному элементу матрицы из каждого столбца и каждой строки.

**Задача 6.1.1.** Проверить совпадение определения 6.1.2 и определения детерминантов матриц второго и третьего порядков 1.1.9 и 1.1.10.

## § 6.2. Свойства определителей

**Теорема 6.2.1.** При транспонировании матрицы ее определитель не меняется.

Доказательство.

Общий вид слагаемого в формуле определителя транспонированной матрицы  $\|B\| = \|A\|^T$  имеет вид

$$(-1)^{\text{Б}(m_1, m_2, \dots, m_n)} \beta_{1m_1} \beta_{2m_2} \dots \beta_{nm_n},$$

но, учитывая, что  $\beta_{k m_k} = \alpha_{m_k k}$ , получим

$$\det \| A \|^\mathrm{T} = \sum_{\{m_1, m_2, \dots, m_n\}} (-1)^{\mathrm{B}(m_1, m_2, \dots, m_n)} \alpha_{m_1 1} \alpha_{m_2 2} \dots \alpha_{m_n n}.$$

Упорядочим сомножители каждого слагаемого по номерам строк, то есть приведем их к виду  $(-1)^{\mathrm{B}(m_1, m_2, \dots, m_n)} \alpha_{1k_1} \alpha_{2k_2} \dots \alpha_{nk_n}$ , где  $1, 2, 3, \dots, n$  – номера строк, а  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$  – номера соответствующих столбцов. Отметим, что для введенных обозначений имеет место очевидное равенство:  $k_{m_i} = i \quad \forall i$  и при выполненном изменении порядка сомножителей для каждого слагаемого в формуле определителя имеет место равенство

$$\mathrm{B}(m_1, m_2, \dots, m_n) = \mathrm{B}(k_1, k_2, \dots, k_n).$$

Действительно, пусть  $m_i$  и  $m_j$  дают беспорядок, то есть

$$m_i > m_j \text{ при } i < j,$$

тогда дают беспорядок и числа  $k_{m_i}$  и  $k_{m_j}$ , поскольку

$$\forall i: k_{m_i} = i,$$

и, значит, будет справедливо неравенство  $k_{m_i} = i < j = k_{m_j}$  при  $m_i > m_j$ . Заметим, что верно и обратное утверждение.

Окончательно получаем

$$\det \| A \|^\mathrm{T} = \sum_{\{k_1, k_2, \dots, k_n\}} (-1)^{\mathrm{B}(k_1, k_2, \dots, k_n)} \alpha_{1k_1} \alpha_{2k_2} \dots \alpha_{nk_n} = \det \| A \|.$$

**Теорема доказана.**

**Замечание 6.2.1.** Утверждение теоремы 6.2.1 допускает следующую наглядную интерпретацию.

Выделим в матрице  $\| A \|$  элементы, входящие в некоторое слагаемое определения 6.1.2, и соединим их от-

резками прямых, как показано на рис. 6.2.1.

Заметим, что пара элементов  $\alpha_{ik_i}$  и  $\alpha_{jk_j}$  дает беспорядок, если соединяющий их отрезок имеет “положительный” наклон, то есть правый конец отрезка расположен выше левого.

Очевидно, что при транспонировании квадратной матрицы число отрезков с “положительным” наклоном не меняется, поэтому не меняется и знак каждого слагаемого в формуле 6.1.2, и, следовательно, значение определителя сохраняется.

**Следствие  
6.2.1.**

**Всякое свойство определителя матрицы, сформулированное для ее столбцов, справедливо для ее строк, и наоборот.**

**Теорема  
6.2.2.**

**При перестановке двух столбцов матрицы знак ее определителя меняется на противоположный.**

**Доказательство.**

Рассмотрим вначале случай, когда переставляются *соседние* столбцы. Поскольку общий вид слагаемых в выражении для определителя дается формулой

$$\sum_{\{k_1, k_2, \dots, k_n\}} (-1)^{\text{Б}(k_1, k_2, \dots, k_n)} \alpha_{1k_1} \alpha_{2k_2} \dots \alpha_{nk_n},$$

то достаточно показать, что число беспорядков изменится при перестановке соседних столбцов на единицу.

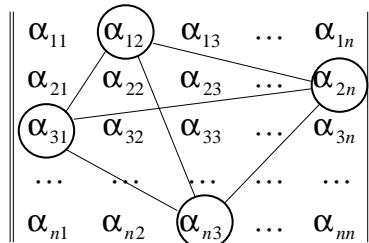


Рис. 6.2.1

Рассмотрим перестановку чисел

$$\{k_1, k_2, \dots, k_i, k_{i+1}, k_{i+2}, \dots, k_n\}.$$

Если в ней поменять местами числа  $k_i$  и  $k_{i+1}$ , то число беспорядков, образуемых числами  $\{k_1, k_2, \dots, k_{i-1}, k_{i+2}, \dots, k_n\}$ , останется прежним, а за счет изменения порядка следования чисел  $k_i$  и  $k_{i+1}$  общее число беспорядков изменится на единицу. Это означает, что знак каждого слагаемого в формуле определителя изменится на противоположный и, следовательно, изменит знак и весь определитель.

Наконец, если требуется поменять местами столбцы, между которыми находится  $l$  столбцов, то для этого потребуется  $l + l + 1 = 2l + 1$  перестановок соседних столбцов, но поскольку  $(-1)^{2l+1} = -1$ , то знак определителя изменится на противоположный.

Теорема доказана.

**Следствие 6.2.2. Определитель матрицы, содержащей два одинаковых столбца, равен нулю.**

Доказательство.

При перестановке одинаковых столбцов значение определителя, с одной стороны, не меняется, но, с другой стороны, это значение должно изменить знак. Поэтому данный определитель может равняться только нулю.

Следствие доказано.

**Теорема 6.2.3 (линейное свойство определителя).**

**Если  $k$ -й столбец матрицы задан в виде линейной комбинации некоторых "новых" столбцов, то ее определитель представим в виде той же линейной комбинации определителей матриц,  $k$ -ми столбцами которых являются соответствующие "новые" столбцы из исходной линейной комбинации.**

Доказательство.

Пусть в матрице  $\|A\|_\alpha$   $k$ -й столбец состоит из элементов  $\alpha_{ik} = \lambda\beta_{ik} + \mu\gamma_{ik}$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ . Тогда справедливы равенства

$$\begin{aligned} & (-1)^{B(k_1, k_2, \dots, k_n)} \alpha_{1k_1} \alpha_{2k_2} \dots \alpha_{ik} \dots \alpha_{nk_n} = \\ & = (-1)^{B(k_1, k_2, \dots, k_n)} \alpha_{1k_1} \alpha_{2k_2} \dots (\lambda\beta_{ik} + \mu\gamma_{ik}) \dots \alpha_{nk_n} = \\ & = (-1)^{B(k_1, k_2, \dots, k_n)} \alpha_{1k_1} \alpha_{2k_2} \dots \lambda\beta_{ik} \dots \alpha_{nk_n} + \\ & + (-1)^{B(k_1, k_2, \dots, k_n)} \alpha_{1k_1} \alpha_{2k_2} \dots \mu\gamma_{ik} \dots \alpha_{nk_n}. \end{aligned}$$

А поскольку каждое из  $n!$  слагаемых в формуле для  $\det \|A\|_\alpha$  содержит точно по одному элементу из  $k$ -го столбца, то  $\det \|A\|_\alpha = \lambda \cdot \det \|A\|_\beta + \mu \cdot \det \|A\|_\gamma$ , где  $k$ -ые столбцы матриц  $\|A\|_\beta$  и  $\|A\|_\gamma$  соответственно состоят из элементов  $\beta_{ik}$  и  $\gamma_{ik}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Теорема доказана.

**Следствие 6.2.3.** При вычислении определителя из столбца матрицы можно выносить общий множитель.

**Следствие 6.2.4.** Если к некоторому столбцу матрицы прибавить линейную комбинацию остальных ее столбцов, то определитель не изменится.

Доказательство.

Действительно, определитель, получившийся в результате данной операции с матрицей, можно (по теореме 6.2.3) представить в виде линейной комбинации исходного определителя и линейной комбинации определителей матриц, имеющих одинаковые столбцы. Последние равны нулю по следствию 6.2.2.

Следствие доказано.

**Теорема 6.2.4.** Определитель произведения матриц размера  $n \times n$  равен произведению их определителей, то есть

$$\det(\|A\| \|B\|) = \det\|A\| \cdot \det\|B\|.$$

Доказательство.

1°. Обозначим  $\|C\| = \|A\| \|B\|$ . Пусть матрицы  $\|A\|$ ,  $\|B\|$  и  $\|C\|$  имеют соответственно элементы  $\alpha_{ij}$ ,  $\beta_{kl}$  и  $\gamma_{pq}$ . Тогда

по определению 5.1.1  $\gamma_{pq} = \sum_{j=1}^n \alpha_{pj} \beta_{jq}$ , и потому

$$\det\|C\| =$$

$$= \det \begin{vmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} + \dots + \alpha_{1n}\beta_{n1} & \dots & \alpha_{11}\beta_{1n} + \dots + \alpha_{1n}\beta_{nn} \\ \alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} + \dots + \alpha_{2n}\beta_{n1} & \dots & \alpha_{21}\beta_{1n} + \dots + \alpha_{2n}\beta_{nn} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1}\beta_{11} + \alpha_{n2}\beta_{21} + \dots + \alpha_{nn}\beta_{n1} & \dots & \alpha_{n1}\beta_{1n} + \dots + \alpha_{nn}\beta_{nn} \end{vmatrix}.$$

Введем в рассмотрение специальный тип перестановок натуральных чисел  $1, 2, 3, \dots, n$ , в которых допускаются повторения одинаковых чисел. Такие перестановки условимся обозначать как  $[i_1, i_2, i_3, \dots, i_n]$ .

По линейному свойству определителя (теорема 6.2.3)

$$\det\|C\| =$$

$$= \sum_{[i_1, i_2, \dots, i_n]} \beta_{i_1} \beta_{i_2} \dots \beta_{i_n} \det \begin{vmatrix} \alpha_{1i_1} & \alpha_{1i_2} & \dots & \alpha_{1i_n} \\ \alpha_{2i_1} & \alpha_{2i_2} & \dots & \alpha_{2i_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{ni_1} & \alpha_{ni_2} & \dots & \alpha_{ni_n} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{[i_1, i_2, \dots, i_n]} \beta_{i_1} \beta_{i_2} \dots \beta_{i_n} \det\|A^*\|_{[i_1, i_2, \dots, i_n]}.$$

Поскольку перестановки  $[i_1, i_2, i_3, \dots, i_n]$  (в отличие от  $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ ) могут содержать одинаковые числа, то общее число слагаемых в полученной сумме равно  $n^n$ , но ненулевых среди этих слагаемых в силу следствия 6.2.2 только  $n!$ .

2°. Заметим, что поскольку матрицы  $\| A^* \|_{\{i_1, i_2, \dots, i_n\}}$  составлены из тех же столбцов, что и  $\| A \|$ , но записанных в разном порядке, то их определители могут отличаться в силу теоремы 6.2.2 только знаком.

Перестроим каждую из матриц  $\| A^* \|_{\{i_1, i_2, \dots, i_n\}}$ , переставив ее столбцы так, чтобы каждый столбец с индексом  $i_k ; k = [1, n]$  был расположен слева от столбцов с большими индексами. В итоге этой операции столбцы будут полностью упорядочены, для чего потребуется число перестановок столбцов, равное числу беспорядков в перестановке  $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ , и, следовательно, для каждой матрицы  $\| A^* \|_{\{i_1, i_2, \dots, i_n\}}$  будет справедливо соотношение

$$\det \| A^* \|_{\{i_1, i_2, \dots, i_n\}} = (-1)^{\text{Б}(i_1, i_2, \dots, i_n)} \det \| A \|.$$

3°. Подставляя это соотношение в выражение для  $\det \| C \|$ , получаем

$$\begin{aligned} \det \| C \| &= \det \| A \| \sum_{\{i_1, i_2, \dots, i_n\}} (-1)^{\text{Б}(i_1, i_2, \dots, i_n)} \beta_{i_1 1} \beta_{i_2 2} \dots \beta_{i_n n} = \\ &= \det \| A \| \cdot \det \| B \|^\text{T}, \end{aligned}$$

что в силу теоремы 6.2.1 означает

$$\det(\|A\| \|B\|) = \det\|A\| \cdot \det\|B\|.$$

Теорема доказана.

### § 6.3. Разложение определителей

Выберем в квадратной матрице  $n$ -го порядка  $\|A\|$  строки с номерами  $i_1, i_2, \dots, i_k$  и столбцы с номерами  $j_1, j_2, \dots, j_k$ , где  $1 \leq k \leq n$ .

**Определение 6.3.1.** Детерминант квадратной матрицы порядка  $k$ , образованной элементами, стоящими на пересечении строк  $i_1, i_2, \dots, i_k$  и столбцов  $j_1, j_2, \dots, j_k$ , называется *минором  $k$ -го порядка* и обозначается  $M_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{j_1, j_2, \dots, j_k}$ .

**Определение 6.3.2.** Детерминант квадратной матрицы порядка  $n-k$ , образованной элементами, остающимися после вычеркивания строк  $i_1, i_2, \dots, i_k$  и столбцов  $j_1, j_2, \dots, j_k$ , называется *минором, дополнительным к минору  $M_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{j_1, j_2, \dots, j_k}$* , и обозначается  $\overline{M}_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{j_1, j_2, \dots, j_k}$ .

Выберем в матрице  $\|A\|$   $i$ -ю строку и  $j$ -й столбец, на пересечении которых расположен элемент  $\alpha_{ij}$ . Удалим из  $\|A\|$  выбранные строку и столбец, рассмотрим квадратную матрицу  $\|A^+\|$  размера  $(n-1) \times (n-1)$ .

**Определение** Детерминант матрицы  $\| A^+ \|$  называется *дополнительным минором*  $\overline{M}_i^j$  элемента  $\alpha_{ij}$ .

Сгруппируем в определении 6.1.2 – детерминанта матрицы  $\| A \|$  – все  $(n-1)!$  слагаемых, содержащих элемент  $\alpha_{ij}$ , и вынесем его за скобки. Получим выражение вида

$$\det \| A \| = \alpha_{ij} D_{ij} + \dots$$

**Определение** Число  $D_{ij}$  называется *алгебраическим дополнением* 6.3.4. элемента  $\alpha_{ij}$ .

Заметим, что по определению 6.1.2 имеют место равенства

$$\det \| A \| = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} D_{ij} = \sum_{k=1}^n \alpha_{kj} D_{kj} \quad \forall j = [1, n], \forall i = [1, n], \quad (6.3.1)$$

которые можно использовать для вычисления определителей квадратных матриц, находя значения алгебраических дополнений при помощи соотношений, которые устанавливает

**Теорема Справедливы равенства**  $D_{ij} = (-1)^{i+j} \overline{M}_i^j$ .

6.3.1.

**Доказательство.**

1°. По определению детерминанта 6.1.2

$$\det \| A \| = \alpha_{11} \sum_{\{1, k_2, k_3, \dots, k_n\}} (-1)^{\text{Б}(1, k_2, k_3, \dots, k_n)} \alpha_{2k_2} \dots \alpha_{nk_n} + \dots ,$$

$$\text{то есть } D_{11} = \sum_{\{k_2, \dots, k_n\}} (-1)^{\text{Б}(k_2, \dots, k_n)} \alpha_{2k_2} \alpha_{3k_3} \dots \alpha_{nk_n} , \text{ поскольку}$$

$$\text{очевидно, что } \text{Б}(1, k_2, k_3, \dots, k_n) = \text{Б}(k_2, k_3, \dots, k_n) ,$$

но тогда выражение для  $D_{11}$  совпадает с формулой определителя матрицы порядка  $n-1$ , получаемой из  $\|A\|$  вычеркиванием первого столбца и первой строки. Следовательно,  $D_{11} = \overline{M}_1^1$ .

2°. Построим новую матрицу  $\|A'\|$ , переместив элемент  $\alpha_{ij}$  матрицы  $\|A\|$  в ее левый верхний угол, переставив  $i$ -ю строку на первое место, для чего потребуется  $i-1$  перестановок, и переставим на первое место  $j$ -й столбец, что потребует  $j-1$  перестановок. Тогда определитель перестроенной матрицы  $\|A'\|$  равен

$$\det \|A'\| = (-1)^{i-1+j-1} \det \|A\| = (-1)^{i+j} \det \|A\|.$$

Согласно линейному свойству определителя (теорема 6.2.3) данное соотношение будет также выполняться и для каждого из его слагаемых, а значит, в силу формул (6.3.1) и для каждого алгебраического дополнения  $D_{ij}$ . Поэтому справедливо равенство  $D_{ij} = (-1)^{i+j} D'_{11}$ .

3°. Наконец, очевидно, что значение дополнительного к  $\alpha_{ij}$  минара не зависит от положения  $\alpha_{ij}$  в матрице  $\|A'\|$ , и потому  $\overline{M}_i^j = \overline{M}'_1^1$ .

4°. Учитывая полученные соотношения

$$\overline{M}_i^j = \overline{M}'_1^1 = D'_{11} = (-1)^{i+j} D_{ij},$$

приходим к равенству  $D_{ij} = (-1)^{i+j} \overline{M}_i^j$ .

Теорема доказана.

**Следствие 6.3.1.** Разложение определителя по  $i$ -му столбцу имеет вид

$$\det \| A \| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} \alpha_{ki} \bar{M}_k^i$$

или

$$\det \| A \| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} M_k^i \bar{M}_k^i.$$

Для практических приложений особо полезной является

**Теорема 6.3.2.** Для любой квадратной матрицы  $\| A \|$  имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} D_{is} = \delta_{js} \cdot \Delta,$$

где  $\Delta = \det \| A \|$  и  $\delta_{js} = \begin{cases} 1, & j = s, \\ 0, & j \neq s \end{cases}$  – символ Кронекера (см. § 2.2).

**Доказательство.**

По определению 6.3.4 алгебраического дополнения имеем  $\det \| A \| = \alpha_{1j} D_{1j} + \alpha_{2j} D_{2j} + \dots + \alpha_{nj} D_{nj}$ , то есть утверждение теоремы для случая  $j = s$  справедливо.

Пусть теперь  $j \neq s$ . Тогда выражение

$$\alpha_{1j} D_{1s} + \alpha_{2j} D_{2s} + \dots + \alpha_{nj} D_{ns}$$

можно рассматривать как разложение по  $s$ -му столбцу определителя матрицы, у которой  $s$ -й столбец совпадает с  $j$ -м столбцом. Но такой определитель равен нулю по следствию 6.2.2.

**Теорема доказана.**

**Следствие 6.3.2.** Если квадратная матрица  $\|A\|$  невырождена, то

элементами ее обратной матрицы  $\|A\|^{-1}$  являются

$$\text{числа } \beta_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \bar{M}_j^i}{\Delta}; i, j = [1, n].$$

Доказательство.

Найдем произведение матриц  $\|A\|$  и  $\|B\|$ , элементы которых  $\alpha_{ij}$  и  $\beta_{ij}$ ;  $i, j = [1, n]$ . Пусть  $\gamma_{pq}$  – элемент произведения  $\|A\|$  и  $\|B\|$ , тогда, согласно определению 5.1.1 и теореме 6.3.2,

$$\begin{aligned} \gamma_{pq} &= \sum_{j=1}^n \alpha_{pj} \beta_{jq} = \sum_{j=1}^n \alpha_{pj} \frac{(-1)^{j+q} \bar{M}_q^j}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^n \alpha_{pj} D_{qj} = \\ &= \frac{1}{\Delta} \cdot \Delta \cdot \delta_{pq} = \delta_{pq}; \quad i, j = [1, n]. \end{aligned}$$

Аналогичное соотношение получается и для произведения  $\|B\| \|A\|$  и по определению 1.1.4

$$\|A\| \|B\| = \|B\| \|A\| = \|E\|,$$

но тогда, согласно определению 5.1.2 и лемме 5.1.1,

$$\|B\| = \|A\|^{-1}.$$

Следствие доказано.

Проверьте самостоятельно справедливость формулы (5.1.1).

Обозначим  $I = i_1 + i_2 + \dots + i_k$  и  $J = j_1 + j_2 + \dots + j_k$ , тогда оказывается справедливой обобщающая следствие 6.3.1

Теорема  
6.3.3  
(Лапласа).

Для фиксированного набора столбцов  $j_1, j_2, \dots, j_k$   
имеет место равенство

$$\det \| A \| = \sum_{\{i_1, i_2, \dots, i_k\}} (-1)^{I+J} M_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{j_1, j_2, \dots, j_k} \overline{M}_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{j_1, j_2, \dots, j_k}.$$

Отметим, что суммирование выполняется по всем возможным перестановкам номеров строк  $i_1, i_2, \dots, i_k$ .

Задача      Найти определитель матрицы  $n$ -го порядка:  
6.3.1.

$$\Delta_n = \det \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix}.$$

Решение. 1°. Заметим, что сумма элементов каждого столбца матрицы одинакова и равна  $x + a(n - 1)$ . Поэтому, прибавив к первой строке сумму остальных строк и вынося общий множитель из первой строки, мы получим матрицу с тем же определителем (см. следствия 6.2.4 и 6.2.3):

$$\Delta_n = (x + a(n - 1)) \cdot \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix}.$$

2°. Вычитая из каждой строки, начиная со второй, первую строку, умноженную на  $a$ , получим

$$\Delta_n = (x + a(n-1)) \cdot \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x-a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-a \end{vmatrix}.$$

3°. Последовательно применив  $n-1$  раз следствие 6.3.1 для разложения определителя по первому столбцу, приходим к выражению

$$\Delta_n = (x + a(n-1))(x - a)^{n-1}.$$

#### § 6.4. Правило Крамера

Будем рассматривать систему  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \dots + \alpha_{1n}\xi_n = \beta_1, \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \dots + \alpha_{2n}\xi_n = \beta_2, \\ \dots \\ \alpha_{n1}\xi_1 + \alpha_{n2}\xi_2 + \dots + \alpha_{nn}\xi_n = \beta_n \end{array} \right. \quad (6.4.1)$$

в неразвернутом виде  $\sum_{i=1}^n \alpha_{ji}\xi_i = \beta_j$ ;  $j = [1, n]$  или же в матричной форме  $\|A\|\|x\| = \|b\|$ , где квадратная матрица  $\|A\|$  имеет компоненты  $\alpha_{ji}$ , а столбцы  $\|x\|$  и  $\|b\|$  – соответственно  $\xi_i$  и  $\beta_j$ .

**Определение 6.4.1.** Упорядоченный набор чисел  $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$  будем называть *решением системы линейных уравнений*, если при подстановке этих чисел в каждое из уравнений системы мы получаем тождество.

Имеет место

**Теорема 6.4.1 (правило Крамера).** Для того чтобы система линейных уравнений (6.4.1) имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы  $\Delta = \det \|A\| \neq 0$ , и в этом случае решение данной системы будет иметь вид

$$\xi_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} ; i = 1, 2, \dots, n,$$

где  $\Delta_i$  – определитель матрицы, получаемой из матрицы  $\|A\|$  заменой ее  $i$ -го столбца на столбец свободных членов  $\|b\|$ :

$$\Delta_i = \det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \beta_1 & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \beta_2 & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \beta_n & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}.$$

$\uparrow$   
 $i$ -й столбец

Доказательство.

1°. Получим вначале утверждение теоремы в предположении, что

система (6.4.1) имеет решение  $\|x\| = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ , то есть когда выполняются равенства

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{ji} \xi_i = \beta_j ; j = [1, n].$$

Умножив последовательно для всех  $j = [1, n]$  обе части этих равенств на алгебраическое дополнение  $D_{jk}$  и просуммировав результаты умножения по  $j$ , получим

$$\sum_{j=1}^n D_{jk} \left( \sum_{i=1}^n \alpha_{ji} \xi_i \right) = \sum_{j=1}^n \beta_j D_{jk} \quad \forall k = [1, n].$$

Изменим порядок суммирования (то есть выполним перегруппировку слагаемых) в левой части этого равенства:

$$\sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \alpha_{ji} D_{jk} \right) \xi_i = \sum_{j=1}^n \beta_j D_{jk}.$$

Но выражение в круглых скобках равно  $\Delta \cdot \delta_{ik}$  (по теореме 6.3.2), поэтому, учитывая, что

$$\sum_{j=1}^n \beta_j D_{jk} = \Delta_k \quad \text{и} \quad \Delta \sum_{i=1}^n \delta_{ik} \xi_i = \xi_k \Delta_k,$$

получаем  $\xi_k \Delta = \Delta_k$ ,  $k = [1, n]$ . Или окончательно

$$\xi_k = \frac{\Delta_k}{\Delta} \quad \forall k = [1, n]. \quad (6.4.2)$$

Наконец, заметим, что из соотношений

$$\xi_k \Delta = \Delta_k, \quad k = [1, n]$$

в предположении  $\Delta \neq 0$  следует, что решение, определяемое формулами (6.4.2), существует и единственno.

2°. Докажем теперь, что в условиях теоремы набор чисел

$$\{ \xi_i = \frac{\Delta_k}{\Delta}, i = [1, n] \}$$

есть решение данной системы линейных уравнений. Убедимся в этом, подставив значения  $\xi_i$  в левые части исходной системы линейных уравнений (6.4.1):

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{ji} \frac{\Delta_i}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^n \alpha_{ji} \left( \sum_{k=1}^n \beta_k D_{ki} \right) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n \beta_k \left( \sum_{i=1}^n \alpha_{ji} D_{ki} \right) = \\ = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n \beta_k \delta_{kj} \Delta = \beta_j, \quad j = [1, n].$$

Для получения последнего равенства мы снова изменили порядок суммирования и воспользовались теоремой 6.3.2.

Теорема доказана.

## § 6.5. Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу  $\| A \|$  размера  $m \times n$ . Пусть  
 $1 \leq k \leq \min\{m, n\}$ .

Выберем в  $\| A \|$   $k$  фиксированных столбцов и строк, на пересечении которых стоит матрица минора порядка  $k$ .

Пусть при данном  $k$  все миноры  $k$ -го порядка равны нулю, тогда будут равны нулю и все миноры порядка выше, чем  $k$ , поскольку каждый минор  $(k+1)$ -го порядка представим в виде линейной комбинации миноров порядка  $k$  (см. следствие 6.3.1).

**Определение 6.5.1.** Наивысший из порядков, отличных от нуля миноров матрицы  $\| A \|$ , называется *рангом* матрицы и обозначается  $\text{rg} \| A \|$ .

**Определение 6.5.2.** Любой ненулевой минор матрицы, порядок которого равен ее рангу, называется *базисным минором*.

**Определение 6.5.3.** Столбцы (строки) матрицы, входящие в матрицу базисного минора, называются *базисными*.

Далее рассмотрим  $n$   $m$ -компонентных столбцов вида

$$\|a_1\| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \dots \\ \alpha_{m1} \end{vmatrix}; \quad \|a_2\| = \begin{vmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \dots \\ \alpha_{m2} \end{vmatrix}; \dots; \quad \|a_n\| = \begin{vmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \dots \\ \alpha_{mn} \end{vmatrix}$$

$$\text{и столбцы } \|b\| = \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_m \end{vmatrix}; \quad \|o\| = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Поскольку для столбцов (как частного случая матриц) определены операции сравнения, сложения и умножения на число, то будем говорить, что столбец  $\|b\|$  есть **линейная комбинация** столбцов  $\|a_1\|, \|a_2\|, \dots, \|a_n\|$ , если существуют числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , такие, что  $\|b\| = \sum_{i=1}^n \lambda_i \|a_i\|$ .

**Теорема**  
6.5.1  
(о базисном  
миноре).

**Всякий столбец (строка) матрицы есть линейная комбинация базисных столбцов (строк) этой матрицы.**

Доказательство.

1°. Пусть ранг матрицы равен  $r$ . Без ограничения общности можно считать, что матрица базисного минора расположена в левом верхнем углу матрицы  $\|A\|$ .

Окаймим матрицу базисного минора фрагментами  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца и рассмотрим определитель построенной матрицы.

$$\Delta = \det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1r} & | & \alpha_{1j} \\ \dots & \dots & \dots & | & \dots \\ \alpha_{r1} & \dots & \alpha_{rr} & | & \alpha_{rj} \\ \hline \alpha_{i1} & \dots & \alpha_{ir} & | & \alpha_{ij} \end{vmatrix},$$

который равен нулю как минор порядка  $r+1$  в матрице ранга  $r$ .

2°. Разложив определитель  $\Delta$  по последней строке, получим

$$\alpha_{i1}D_1 + \alpha_{i2}D_2 + \dots + \alpha_{ir}D_r + \alpha_{ij}M = 0,$$

где  $M \neq 0$  – базисный минор, а  $D_1, \dots, D_r$  – некоторые алгебраические дополнения, не зависящие от  $i$ . Следовательно,  $\alpha_{ij} = \lambda_1\alpha_{i1} + \lambda_2\alpha_{i2} + \dots + \lambda_r\alpha_{ir}$ , где

$$\lambda_s = -\frac{D_s}{M}, \quad s = [1, r] \text{ и } \forall i.$$

Теорема доказана.

**Определение 6.5.4.** Столбцы  $\|a_1\|, \|a_2\|, \dots, \|a_n\|$  будем называть **линейно зависимыми**, если существуют не равные нулю одновременно числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , такие, что

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \|a_i\| = \|o\|, \quad \left( \sum_{i=1}^n |\lambda_i| > 0 \right).$$

**Лемма 6.5.1.** Для того чтобы столбцы (строки) матрицы были линейно зависимыми, необходимо и достаточно, чтобы один из них был линейной комбинацией остальных.

**Доказательство.** Совпадает с доказательством леммы 1.4.1.

**Лемма 6.5.2.** Если среди столбцов матрицы есть линейно зависимое подмножество, то множество всех столбцов этой матрицы также линейно зависимое.

Доказательство.

Допустим, что линейно зависимыми являются первые  $k$  столбцов, то есть для них существует нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому столбцу:

$$\lambda_1 \begin{vmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \dots \\ \alpha_{m1} \end{vmatrix} + \lambda_2 \begin{vmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \dots \\ \alpha_{m2} \end{vmatrix} + \dots + \lambda_k \begin{vmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ \dots \\ \alpha_{mk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Тогда очевидно, что нетривиальная линейная комбинация *всех* столбцов этой матрицы вида

$$\lambda_1 \begin{vmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \dots \\ \alpha_{m1} \end{vmatrix} + \dots + \lambda_k \begin{vmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ \dots \\ \alpha_{mk} \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} \alpha_{1,k+1} \\ \alpha_{2,k+1} \\ \dots \\ \alpha_{m,k+1} \end{vmatrix} + \dots + 0 \begin{vmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \dots \\ \alpha_{mn} \end{vmatrix}$$

будет также равна нулевому столбцу.

Лемма доказана.

**Теорема 6.5.2.** Для того чтобы определитель был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы его столбцы (строки) были линейно зависимыми.

Доказательство необходимости.

Пусть определитель равен нулю, тогда ранг его матрицы меньше  $n$ . По теореме о базисном миноре всякий столбец есть линейная комбинация базисных столбцов и тогда по лемме 6.5.2 столбцы матрицы линейно зависимы.

Доказательство достаточности.

Пусть столбцы матрицы линейно зависимы. По лемме 6.5.1 один из столбцов есть линейная комбинация остальных.

Пусть этот столбец последний, то есть  $\|a_n\| = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \|a_i\|$ . Ум-

ножим последовательно (для  $i = 1, 2, \dots, n-1$ )  $i$ -й столбец на число  $\lambda_i$  и сложим все их. Вычитание этой суммы из столбца  $\|a_n\|$  не изменит величины определителя, но поскольку при этом мы получим нулевой столбец, то определитель равен нулю.

Теорема доказана.

**Теорема 6.5.3** **Максимальное число линейно независимых столбцов матрицы равно максимальному числу линейно независимых строк и равно рангу этой матрицы.**

Доказательство.

1°. Если ранг матрицы нулевой, то все ее элементы нулевые и среди них нет линейно независимых.

Пусть ранг матрицы равен  $r > 0$ . Рассмотрим матрицу, составленную из  $r$  базисных столбцов матрицы. Она имеет ненулевой минор  $r$ -го порядка и, следовательно, ее столбцы линейно независимы.

2°. Выберем  $k > r$  столбцов матрицы и покажем, что эти столбцы линейно зависимы. Построим из выбранных столбцов матрицу  $\|A^*\|$ . Ее ранг  $R \leq r$ , поскольку  $\|A^*\|$  является частью матрицы  $\|A\|$ .

Следовательно,  $R \leq r < k$  и в матрице  $\|A^*\|$  есть, по крайней мере, один небазисный столбец, и тогда столбцы матрицы  $\|A\|$  линейно зависимы по лемме 6.5.2.

Теорема доказана.

## § 6.6. Системы $m$ линейных уравнений с $n$ неизвестными

Рассмотрим систему  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными вида

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \dots + \alpha_{1n}\xi_n = \beta_1, \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \dots + \alpha_{2n}\xi_n = \beta_2, \\ \dots \\ \alpha_{m1}\xi_1 + \alpha_{m2}\xi_2 + \dots + \alpha_{mn}\xi_n = \beta_m, \end{array} \right. \quad (6.6.1)$$

которая в неразвернутой форме записывается как

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{ji} \xi_i = \beta_j , \quad j = [1, m] ,$$

или же в матричной форме  $\| A \| \| x \| = \| b \|$ , где матрица  $\| A \|$  размера  $m \times n$  имеет компоненты  $\alpha_{ji}$ , а столбцы  $\| x \|$  и  $\| b \|$  соответственно компоненты  $\xi_i$ ,  $i = [1, n]$ , и  $\beta_j$ ,  $j = [1, m]$ .

**Определение 6.6.1.** Упорядоченный набор чисел  $\{\xi_1^0, \xi_2^0, \dots, \xi_n^0\}$  будем называть *частным решением* системы линейных уравнений (6.6.1), если при подстановке этих чисел в систему мы получаем верные равенства.

Частное решение системы линейных уравнений также может быть записано в виде столбца

$$\|x^0\| = \begin{vmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{vmatrix}. \text{ Совокупность всех частных решений}$$

системы линейных уравнений (6.6.1) назовем *общим решением* системы (6.6.1).

**Определение 6.6.2.**

Если система (6.6.1) имеет хотя бы одно частное решение, то она называется *совместной*, в противном случае – *несовместной* системой уравнений.

**Определение 6.6.3.**

Матрица  $\|A\| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{vmatrix}$  называется

основной матрицей системы (6.6.1), а матрица

$$\|A | b\| = \left[ \begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} & \beta_m \end{array} \right]$$

– расширенной матрицей этой системы.

**Определение 6.6.4.**

Система (6.6.1) называется *однородной*, если

$$\beta_j = 0 \quad \forall j = [1, m],$$

в противном случае – *неоднородной* системой уравнений.

**Теорема 6.6.1** Для того чтобы система (6.6.1) была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее основной матрицы был равен рангу расширенной.

(Кронекера–Капелли).

Доказательство необходимости.

Пусть существует решение системы (6.6.1)  $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ , тогда эту систему можно представить в виде следующего равенства:

$$\xi_1 \|a_1\| + \xi_2 \|a_2\| + \dots + \xi_n \|a_n\| = \|b\|,$$

$$\text{где } \|a_i\| = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} & \alpha_{2i} & \cdots & \alpha_{mi} \end{pmatrix}^T, i = [1, n].$$

Поскольку в этом случае столбец свободных членов есть линейная комбинация столбцов, образующих основную матрицу, то число линейно независимых столбцов основной и расширенной матриц будет одинаковым. Следовательно, по теореме 6.5.3 (*о ранге матрицы*)  $\operatorname{rg}\|A\| = \operatorname{rg}\|A|b\|$ .

Доказательство достаточности.

Пусть ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы и равен  $r$ . Без ограничения общности предположим, что базисный минор расположен в левом верхнем углу расширенной матрицы, но тогда по теореме 6.5.1 (*о базисном*

*миноре*) имеет место равенство  $\|b\| = \sum_{i=1}^r \lambda_i \|a_i\|$ , которое

можно переписать в виде

$$\|b\| = \sum_{i=1}^r \lambda_i \|a_i\| + \sum_{i=r+1}^n 0 \|a_i\|.$$

Однако последнее означает, что система (6.6.1) имеет решение  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0\}$ , то есть она совместна.

Теорема доказана.

**Задача** Докажите справедливость следующего утверждения.

6.6.1.

Для того чтобы прямые

$$A_i x + B_i y + C_i = 0, \quad i = [1, n]$$

пересекались в одной и той же точке плоскости, необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{rg} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \\ \dots & \dots \\ A_n & B_n \end{vmatrix} = \operatorname{rg} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ A_n & B_n & C_n \end{vmatrix}.$$

## § 6.7. Фундаментальная система решений

В § 6.6 было показано, что факт совместности или несовместности системы (6.6.1) можно установить, сравнив ранги ее основной и расширенной матриц. Рассмотрим теперь случай, когда система (6.6.1) совместна и найдем все ее решения.

При построении общего решения системы (6.6.1) воспользуемся следующими вспомогательными утверждениями.

**Лемма** Любая линейная комбинация частных решений однородной системы (6.6.1) также является ее частным решением.

Доказательство.

Пусть  $\|x^i\| = \begin{vmatrix} \xi_1^i \\ \xi_2^i \\ \dots \\ \xi_n^i \end{vmatrix}$ ,  $i = [1, k]$  – частные решения однородной системы, то есть  $\|A\| \|x^i\| = \|o\| \quad \forall i = [1, k]$ .

Рассмотрим столбец  $\|y\| = \sum_{i=1}^k \lambda_i \|x^i\|$ . По правилам действий

с матрицами для него справедливы равенства

$$\|A\| \|y\| = \|A\| \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \|x^i\| \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (\|A\| \|x^i\|) = \|o\|.$$

Лемма доказана.

**Лемма 6.7.2.** **Сумма некоторого частного решения однородной системы (6.6.1) и некоторого частного решения неоднородной системы является частным решением неоднородной системы (6.6.1).**

Доказательство.

Пусть  $\|x\|$  – частное решение однородной системы, а  $\|y\|$  – некоторое частное решение неоднородной, то есть

$$\|A\| \|x\| = \|o\|, \quad \|A\| \|y\| = \|b\|.$$

Тогда по правилам действий с матрицами справедливы равенства

$$\|A\| (\|x\| + \|y\|) = \|A\| \|x\| + \|A\| \|y\| = \|o\| + \|b\| = \|b\|.$$

Лемма доказана.

**Лемма 6.7.3.** **Разность двух некоторых частных решений неоднородной системы (6.6.1) является частным решением однородной системы (6.6.1).**

Доказательство.

Пусть  $\|x\|$  и  $\|y\|$  – частные решения неоднородной системы, то есть  $\|A\| \|x\| = \|b\|$ ,  $\|A\| \|y\| = \|b\|$ . Тогда по правилам действий с матрицами справедливы равенства

$$\|A\| (\|x\| - \|y\|) = \|A\| \|x\| - \|A\| \|y\| = \|b\| - \|b\| = \|o\|.$$

Лемма доказана.

Замечания 1°. Из лемм 6.7.1–6.7.3. следует, что

**общее решение неоднородной системы уравнений есть общее решение однородной плюс некоторое частное решение неоднородной,**

и поэтому целесообразно вначале изучить вопрос о нахождении общего решения однородной системы линейных уравнений.

- 2°. Однородная система линейных уравнений всегда совместна, поскольку у нее есть, по крайней мере, одно частное, называемое *тривиальным*, решение, для которого все неизвестные имеют *нулевое значение*.
- 3°. Поскольку частные решения системы линейных уравнений представимы в виде столбцов, то, используя операции сравнения, сложения и умножения на число для столбцов, а также лемму 6.7.1, можно ввести понятие линейной зависимости решений *однородной* системы линейных уравнений аналогично определению 6.5.4.

**Теорема 6.7.1.** Однородная система (6.6.1) имеет  $n - \operatorname{rg} \| A \|$  линейно независимых частных решений.

Доказательство.

1°. Рассмотрим вначале совместную неоднородную систему (6.6.1)

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \dots + \alpha_{1n}\xi_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \dots + \alpha_{2n}\xi_n = \beta_2 \\ \dots \\ \alpha_{m1}\xi_1 + \alpha_{m2}\xi_2 + \dots + \alpha_{mn}\xi_n = \beta_m \end{array} \right.$$

и предположим, что матрица базисного минора расширенной матрицы  $\| A | b \|$ , ранга  $r \leq \min\{m, n+1\}$ , расположена в левом верхнем углу последней.

По теореме 6.5.1 (*о базисном миноре*) последние  $m - r$  уравнений являются линейными комбинациями первых  $r$  уравнений, и, следовательно, их можно отбросить, поскольку они будут тождественно удовлетворяться решениями первых  $r$  уравнений.

В оставшихся уравнениях перенесем в правые части слагаемые, содержащие неизвестные  $\xi_{r+1}, \xi_{r+2}, \dots, \xi_n$ .

Неизвестные  $\xi_1, \dots, \xi_r$  называются *основными (главными, зависимыми, базисными)*, а неизвестные  $\xi_{r+1}, \dots, \xi_n$  – *свободными (параметрическими, независимыми, небазисными)*.

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \dots + \alpha_{1r}\xi_r = \beta_1 - \alpha_{1r+1}\xi_{r+1} - \dots - \alpha_{1n}\xi_n, \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \dots + \alpha_{2r}\xi_r = \beta_2 - \alpha_{2r+1}\xi_{r+1} - \dots - \alpha_{2n}\xi_n, \\ \dots \\ \alpha_{r1}\xi_1 + \alpha_{r2}\xi_2 + \dots + \alpha_{rr}\xi_r = \beta_r - \alpha_{r,r+1}\xi_{r+1} - \dots - \alpha_{r,n}\xi_n. \end{cases}$$

Присвоим свободным неизвестным некоторые конкретные значения  $\xi_{r+1} = \mu_1, \dots, \xi_n = \mu_{n-r}$  и рассчитаем по правилу Крамера (теорема 6.4.1) соответствующие им значения основных неизвестных:

$$\xi_j = \frac{1}{M} \det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \beta_1 - \sum_{k=1}^{n-r} \alpha_{1,r+k} \mu_k & \dots & \alpha_{1r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{r1} & \dots & \beta_r - \sum_{k=1}^{n-r} \alpha_{r,r+k} \mu_k & \dots & \alpha_{rr} \end{vmatrix}, \quad (6.7.1)$$

где  $j = [1, r]$ , а  $M$  – базисный минор.

2°. Заметим, что из соотношений (6.7.1), положив

$$\mu_k = 0; k = [1, n-r],$$

можно найти частное решение неоднородной системы (6.6.1).

Теперь рассмотрим однородную систему. По линейному свойству определителей (теорема 6.2.3) получаем выражения для значений неизвестных:

$$\begin{aligned}\xi_j &= \sum_{k=1}^{n-r} \kappa_{jk} \mu_k, \quad j = [1, r]; \\ \xi_{r+i} &= \mu_i, \quad i = [1, n-r],\end{aligned}\tag{6.7.2}$$

где

$$\kappa_{jk} = \frac{1}{M} \det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & -\alpha_{1,r+k} & \dots & \alpha_{1r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{r1} & \dots & -\alpha_{r,r+k} & \dots & \alpha_{rr} \end{vmatrix},$$

$$j = [1, r], \quad k = [1, n-r].$$

$\uparrow$   
 $j$ -й столбец

Наконец, в матричной форме соотношения (6.7.2) могут быть записаны в виде

$$\begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \dots & \kappa_{1,n-r} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \dots & \kappa_{2,n-r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \kappa_{r1} & \kappa_{r2} & \dots & \kappa_{r,n-r} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_{r+1} \\ \xi_{r+2} \\ \dots \\ \xi_n \end{vmatrix}\tag{6.7.3}$$

$$\text{или } \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_r \\ \xi_{r+1} \\ \xi_{r+2} \\ \dots \\ \xi_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \dots & \kappa_{1,n-r} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \dots & \kappa_{2,n-r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \kappa_{r1} & \kappa_{r2} & \dots & \kappa_{r,n-r} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_{n-r} \end{vmatrix}.$$

3°. Полагая  $\mu_1 = 1, \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_{n-r} = 0$ , получим решение

$$\{\xi_1^1, \xi_2^1, \dots, \xi_r^1, 1, 0, \dots, 0\}.$$

Аналогично при  $\mu_1 = 0, \mu_2 = 1, \mu_3 = \dots = \mu_{n-r} = 0$  найдем решение  $\{\xi_1^2, \xi_2^2, \dots, \xi_r^2, 0, 1, \dots, 0\}$ . И, продолжая этот процесс, получим на последнем шаге при

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_{n-r-1} = 0, \mu_{n-r} = 1$$

$$\text{решение } \{\xi_1^{n-r}, \xi_2^{n-r}, \dots, \xi_r^{n-r}, 0, 0, \dots, 1\}.$$

Полученные решения будем называть *нормальными фундаментальными решениями*.

4°. Покажем теперь, что построенные  $n - r$  частных решений однородной системы уравнений (6.6.1) являются линейно независимыми. Действительно, записав эти решения как строки, получим матрицу вида

$$\begin{vmatrix} \xi_1^1 & \xi_2^1 & \dots & \xi_r^1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_r^2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ \xi_1^{n-r} & \xi_2^{n-r} & \dots & \xi_r^{n-r} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}. \quad (6.7.4)$$

Заметим, что ее ранг, с одной стороны, не меньше, чем  $n - r$ , поскольку содержит ненулевой минор этого порядка, но, с другой стороны, не больше, чем число строк в этой матрице, равное  $n - r$ , и потому ранг в точности равен  $n - r$ , что доказывает линейную независимость построенных частных решений.

Теорема доказана.

**Определение 6.7.1.** *Фундаментальной системой решений* для системы линейных уравнений (6.6.1) называется совокупность

любых  $n - \text{rg} \|A\|$  частных, линейно независимых решений однородной системы (6.6.1), где  $n$  – число неизвестных в системе (6.6.1), а  $\|A\|$  – ее основная матрица. Матрица (6.7.4) называется *фундаментальной*.

**Теорема 6.7.2.** *Каждое частное решение однородной системы (6.6.1) может быть представлено в виде линейной комбинации частных решений, образующих нормальную фундаментальную систему решений.*

Доказательство.

Пусть дано решение  $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$  однородной системы (6.6.1). Рассмотрим матрицу размера  $(n - r + 1) \times n$

$$\left( \begin{array}{ccccccc} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_r & \xi_{r+1} & \xi_{r+2} & \dots & \xi_n \\ \xi_1^1 & \xi_2^1 & \dots & \xi_r^1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_r^2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ \xi_1^{n-r} & \xi_2^{n-r} & \dots & \xi_r^{n-r} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right), \quad (6.7.5)$$

ранг которой, с одной стороны, очевидно, не меньше, чем  $n - r$ . С другой стороны, первые  $r$  столбцов этой матрицы являются линейными комбинациями (заданными соотношениями (6.7.3)) последних  $n - r$  столбцов. Действительно, эти соотношения, связывающие значения свободных и основных переменных, одни и те же для всех строк матрицы (6.7.5), и потому в этой матрице каждый из первых  $r$  столбцов есть линейная комбинация последних  $n - r$ . Значит, ранг матрицы не превосходит  $n - r$ , и, следовательно, равен в точности  $n - r$ .

Наконец, по теореме 6.5.1 – о базисном миноре, который располагается в последних  $r$  строках, первая строка матрицы (6.7.5) должна быть некоторой линейной комбинацией остальных, и, следовательно, общее решение однородной системы (6.6.1) может быть записано в виде

$$\left| \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_r \\ \xi_{r+1} \\ \xi_{r+2} \\ \dots \\ \xi_n \end{array} \right| = \lambda_1 \left| \begin{array}{c} \xi_1^1 \\ \xi_2^1 \\ \dots \\ \xi_r^1 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{array} \right| + \lambda_2 \left| \begin{array}{c} \xi_1^2 \\ \xi_2^2 \\ \dots \\ \xi_r^2 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{array} \right| + \dots + \lambda_{n-r} \left| \begin{array}{c} \xi_1^{n-r} \\ \xi_2^{n-r} \\ \dots \\ \xi_r^{n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{array} \right|,$$

где  $\lambda_i \forall i = [1, n - r]$  – произвольные константы.

Теорема доказана.

**Следствие 6.7.1. Общее решение неоднородной системы (6.6.1) может быть дано формулой**

$$\left\| \begin{array}{c} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_r \\ \xi_{r+1} \\ \xi_{r+2} \\ \dots \\ \xi_n \end{array} \right\| = \lambda_1 \left\| \begin{array}{c} \xi_1^1 \\ \xi_2^1 \\ \dots \\ \xi_r^1 \\ 1 \end{array} \right\| + \lambda_2 \left\| \begin{array}{c} \xi_1^2 \\ \xi_2^2 \\ \dots \\ \xi_r^2 \\ 0 \end{array} \right\| + \dots + \lambda_{n-r} \left\| \begin{array}{c} \xi_1^{n-r} \\ \xi_2^{n-r} \\ \dots \\ \xi_r^{n-r} \\ 0 \end{array} \right\| + \dots + \left\| \begin{array}{c} \xi_1^0 \\ \xi_2^0 \\ \dots \\ \xi_{r+1}^0 \\ \xi_{r+2}^0 \\ \dots \\ \xi_n^0 \end{array} \right\|,$$

где  $\left\| \begin{array}{c} \xi_1^0 \\ \xi_2^0 \\ \dots \\ \xi_r^0 \\ \xi_{r+1}^0 \\ \xi_{r+2}^0 \\ \dots \\ \xi_n^0 \end{array} \right\|$

**является некоторым частным решением неоднородной системы (6.6.1), а числа  $\lambda_i \forall i = [1, n - r]$  – произвольные константы.**

Доказательство.

Пусть  $\|x^0\|$  – некоторое (найденное, например, подбором) частное решение неоднородной системы (6.6.1), а  $\|x\|$  – ее произвольное решение. Тогда по лемме 6.6.3 произвольное решение однородной системы (6.6.1)  $\|y\|$  представимо в виде  $\|y\| = \|x\| - \|x^0\|$ . Откуда получаем  $\|x\| = \|y\| + \|x^0\|$ .

Следствие доказано.

Из теорем 6.7.1 и 6.7.2 непосредственно вытекает

**Следствие 6.7.2.** Для того чтобы однородная система (6.6.1) с  $n < m$  имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее основной матрицы удовлетворял условию  $\text{rg} \| A \| < n$ .

В случае, когда основная матрица однородной системы (6.6.1) квадратная, условие существования нетривиального решения равносильно равенству  $\det \| A \| = 0$ .

Иное полезное для приложений условие совместности системы линейных уравнений дает

**Теорема 6.7.3 (Фредгольма).** Для того чтобы система (6.6.1) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы каждое решение  $\| y \| = \| \eta_1 \quad \eta_2 \quad \dots \quad \eta_m \|^\top$  сопряженной системы

$$\begin{cases} \alpha_{11}\eta_1 + \alpha_{21}\eta_2 + \dots + \alpha_{m1}\eta_m = 0, \\ \alpha_{12}\eta_1 + \alpha_{22}\eta_2 + \dots + \alpha_{m2}\eta_m = 0, \\ \dots \\ \alpha_{1n}\eta_1 + \alpha_{2n}\eta_2 + \dots + \alpha_{mn}\eta_m = 0 \end{cases}$$

(или в матричном виде  $\| A \|^\top \| y \| = \| o \|$ ) удовлетворяло условию  $\sum_{i=1}^m \beta_i \eta_i = 0$  (или в матричном виде  $\| b \|^\top \| y \| = 0$ ).

Доказательство необходимости.

Пусть система уравнений (6.6.1) совместна, то есть для каждого ее решения  $\| x \|$  справедливо равенство  $\| b \| = \| A \| \| x \|$ .

Найдем произведение  $\| b^T \| y \|$  в предположении, что  $\| A^T \| y \| = \| o \|$ . Имеем

$$\| b^T \| y \| = (\| A \| \| x \|)^T \| y \| = \| x \| ^T \| A \| ^T \| y \| = \| x \| ^T \| o \| = 0.$$

Доказательство достаточности.

Пусть  $\| b^T \| y \| = 0$  для любого решения системы линейных уравнений  $\| A^T \| y \| = \| o \|$ . Тогда общие решения систем линейных уравнений  $\| A^T \| y \| = \| o \|$  и

$$\begin{cases} \| A^T \| y \| = \| o \|, \\ \| b^T \| y \| = 0 \end{cases}$$

совпадают, и для этих систем максимальное число линейно независимых решений одинаково. Поэтому, согласно теоремам 6.7.1 и 6.7.2,

$$m - \operatorname{rg} \| A \| ^T = m - \operatorname{rg} \left\| \frac{A}{b} \right\|^T \quad \text{или} \quad \operatorname{rg} \| A \| ^T = \operatorname{rg} \left\| \frac{A}{b} \right\|^T,$$

но поскольку ранг матрицы не меняется при ее транспонировании, то имеет место равенство  $\operatorname{rg} \| A \| = \operatorname{rg} \| A | b \|$ , означающее в силу теоремы 6.6.1 совместность системы линейных уравнений  $\| A \| \| x \| = \| b \|$ .

Теорема доказана.

Альтернативное доказательство теоремы Фредгольма приведено в главе 10 (см. теоремы 10.6.4 и 10.6.5).

## § 6.8. Элементарные преобразования. Метод Гаусса

Практическое применение теорем 6.7.3 и 6.7.4 затрудняется тем, что заранее, как правило, неизвестно, совместна ли решаемая система. Определение же рангов основной и расширенной матриц независимо от поиска решений оказывается весьма нерациональной (с точки зрения расходования вычислительных ресурсов) процедурой.

Более эффективным вычислительным алгоритмом, позволяющим либо находить общее решение системы (6.6.1), либо устанавливать факт ее несовместности, является *метод Гаусса*.

Суть этого метода заключается в приведении расширенной матрицы системы линейных уравнений к *наиболее простому виду* последовательностью так называемых *элементарных* преобразований, каждое из которых не меняет общего решения системы уравнений.

Под “наиболее простым” видом расширенной матрицы мы будем понимать *верхнюю треугольную форму* (т.е. случай, когда  $a_{ij} = 0$  при  $i > j$ ), для которой возможно рекуррентное нахождение неизвестных путем лишь решения на каждом шаге процедуры линейного уравнения с одним неизвестным. Ниже приведен пример матрицы размера  $m \times n$  ( $n > m$ ), имеющей верхнюю треугольную форму

$$\left( \begin{array}{ccccccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,m-2} & a_{1,m-1} & a_{1,m} & a_{1,m+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,m-2} & a_{2,m-1} & a_{2,m} & a_{2,m+1} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3,m-2} & a_{3,m-1} & a_{3,m} & a_{3,m+1} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{m-1,m-1} & a_{m-1,m} & a_{m-1,m+1} & \dots & a_{m-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{mm} & a_{m,m+1} & \dots & a_{mn} \end{array} \right).$$

К элементарным преобразованиям матрицы относятся:

- перестановка строк (перенумерация уравнений);
- перестановка столбцов основной матрицы (перенумерация неизвестных);

- удаление нулевой строки (исключение уравнений, тождественно удовлетворяющихся любыми значениями неизвестных);
- умножение строки на ненулевое число (нормирование уравнений);
- сложение строки с линейной комбинацией остальных строк с записью результата на место исходной строки (замена одного из уравнений системы следствием ее уравнений, получаемым при помощи линейных операций).

Решение неоднородной системы уравнений (равно как и ранг ее матрицы) не изменится также и при использовании любой комбинации элементарных операций.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что элементарные преобразования любой матрицы могут быть выполнены при помощи умножения ее на матрицы следующего специального вида. Например:

- перестановка *столбцов* с номерами  $i$  и  $j$  матрицы  $\| A \|$  размера  $m \times n$  осуществляется путем ее умножения *справа* на матрицу  $\| S \|_1$  размера  $n \times n$ , которая в свою очередь получается из единичной матрицы  $n$ -го порядка  $\| E \|$  путем перестановки в последней  $i$ -го и  $j$ -го столбцов;
- умножение  $i$ -й *строки* матрицы  $\| A \|$  на некоторое число  $\lambda \neq 0$  осуществляется путем умножения  $\| A \|$  слева на матрицу  $\| S \|_2$ , которая получается из единичной размера  $m \times m$  матрицы  $\| E \|$  путем замены в последней  $i$ -го диагонального элемента (равного единице) на  $\lambda$ ;

- сложение строк с номерами  $i$  и  $j$  матрицы  $\|A\|$  осуществляется путем ее умножения слева на матрицу  $\|S\|_3$  размера  $m \times n$ , которая получается из единичной матрицы порядка  $m$   $\|E\|$  путем замены в последней нулевого элемента, стоящего в  $i$ -й строке и  $j$ -м столбце, на единицу (при этом результат суммирования окажется на месте  $i$ -й строки исходной матрицы  $\|A\|$ ).

В дальнейшем (см. теорему 8.4.3) будет показано, что если матрица  $\|S\|$  квадратная и невырожденная и возможно умножение матрицы  $\|S\|$  на матрицу  $\|A\|$ , то справедливо равенство

$$\operatorname{rg}(\|S\|\|A\|) = \operatorname{rg}\|A\|.$$

Поскольку  $\det\|S\|_1 = -1$ ,  $\det\|S\|_2 = \lambda \neq 0$  и  $\det\|S\|_3 = 1$ , то ранг  $\|A\|$  при рассмотренных выше преобразованиях не меняется.

Проверьте самостоятельно, что будут также справедливы следующие теоремы.

**Теорема 6.8.1.** **Последовательное применение нескольких элементарных преобразований есть новое преобразование, которое имеет матрицу, являющуюся произведением матриц данных элементарных преобразований.**

**Теорема 6.8.2.** **Если умножение матрицы  $\|A\|$  слева на квадратную матрицу  $\|S\|$  реализует некоторое преобразование над строками  $\|A\|$ , то умножение  $\|A\|$  справа на  $\|S\|^T$  реализует то же самое преобразование матрицы  $\|A\|$ , но выполненное над ее столбцами.**

Отмеченные свойства элементарных преобразований позволяют в ряде случаев упрощать вычислительные процедуры с матричными выражениями. Пусть, например,  $\|S\|^*$  есть матрица преобразования, переводящего невырожденную матрицу  $\|A\|$  в единичную. Тогда преобразование с матрицей  $\|S\|^*$  переведет единичную матрицу  $\|E\|$  в матрицу  $\|A\|^{-1}$ , поскольку в силу  $\|E\| = \|S\|^* \|A\|$  и невырожденности  $\|A\|$  справедливы равенства

$$\|E\| \|A\|^{-1} = \|S\|^* \|A\| \|A\|^{-1} \text{ или } \|A\|^{-1} = \|S\|^* \|E\|.$$

Из этих соотношений следует, что вычисление произведения квадратных матриц  $\|A\|^{-1} \|B\|$  может быть сведено к последовательности элементарных преобразований матрицы  $\|A|B\|$  (то есть матрицы, образованной добавлением столбцов матрицы  $\|B\|$  к матрице  $\|A\|$ ), приводящих подматрицу  $\|A\|$  к единичной. В результате искомое произведение оказывается на месте подматрицы  $\|B\|$ .

Проиллюстрируем применение метода Гаусса на примере решения следующей системы линейных уравнений.

**Задача** Решить систему уравнений:

6.8.1.

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5 = 7, \\ 3\xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 + \xi_4 - 3\xi_5 = -2, \\ \xi_2 + 2\xi_3 + 2\xi_4 + 6\xi_5 = 23, \\ 5\xi_1 + 4\xi_2 + 3\xi_3 + 3\xi_4 - \xi_5 = 12. \end{cases}$$

Решение.

1°. Составляем расширенную матрицу системы

$$\left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 \end{array} \right|.$$

2°. Приводим ее к верхнему треугольному виду. Для этого

- a) преобразуем в нули все элементы первого столбца, кроме элемента, стоящего в первой строке. Например, для зануления элемента, стоящего во второй строке первого столбца, заменим вторую строку матрицы строкой, которая является суммой первой строки, умноженной на  $(-3)$ , и второй строки. Аналогично поступаем с четвертой строкой: ее заменяем линейной комбинацией первой и четвертой строк с коэффициентами  $(-5)$  и  $1$  соответственно. Третью, естественно, не меняем: там уже имеется необходимый для треугольного вида ноль. В итоге матрица приобретает вид

$$\left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \end{array} \right|;$$

- б) выполняем теперь операцию зануления элементов второго столбца, стоящих в его третьей и четвертой строках. Для этого третью строку матрицы заменяем суммой второй и третьей, а четвертую – разностью второй и четвертой. Получаем

$$\left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right|;$$

- в) поскольку в данном конкретном случае элемент, расположенный в четвертой строке третьего столбца, оказался равным нулю, то приведение расширенной матрицы к верхнему треугольному виду завершено.
- 3°. Полученная матрица является расширенной матрицей системы линейных уравнений, равносильной исходной системе. Ранг этой матрицы совпадает с рангом исходной. Потому заключаем, что
- а) система совместна, поскольку ранг основной матрицы равен рангу расширенной и равен 2 (по теореме 6.6.1 Кронекера–Капелли);
  - б) однородная система уравнений будет иметь по теореме 6.7.1  $n - \text{rg} \| A \| = 5 - 2 = 3$  линейно независимых решения.
- 4°. Поскольку общее решение неоднородной системы есть общее решение однородной плюс частное решение неоднородной, то нам достаточно найти три любых линейно независимых решения однородной системы и какое-нибудь одно решение неоднородной.

Перепишем исходную систему в преобразованном виде, приняв первое и второе неизвестные за основные, а третье, четвертое и пятое – за свободные:

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = 7 - \xi_3 - \xi_4 - \xi_5, \\ \xi_2 = 23 - 2\xi_3 - 2\xi_4 - 6\xi_5. \end{cases} \quad (6.8.1)$$

Второе уравнение для удобства вычислений умножим на  $(-1)$ , а третье и четвертое уравнения отбросим как удовлетворяющие тождественно.

Положив в системе (6.8.1) свободные неизвестные равными ну-

лю, находим частное решение неоднородной системы

$$\begin{vmatrix} -16 \\ 23 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Значения основных неизвестных определяются из легко решаемой системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = 7, \\ \xi_2 = 23. \end{cases}$$

Для однородной системы

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = 0 & - \xi_3 - \xi_4 - \xi_5, \\ \xi_2 = 0 & - 2\xi_3 - 2\xi_4 - 6\xi_5 \end{cases}$$

строим нормальную фундаментальную систему решений по схеме, использованной при доказательстве теоремы 6.7.1. Первое

независимое решение

$$\begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

находится из системы

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = -1, \\ \xi_2 = -2. \end{cases}$$

Аналогично получаются  $\begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$  и  $\begin{vmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$  – второе и третье решения.

Окончательно общее решение исходной неоднородной системы в матричном виде может быть записано как:

$$\begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \end{vmatrix} = \lambda_1 \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \lambda_2 \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + \lambda_3 \begin{vmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad \forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3.$$

**Замечание:** поскольку существует свобода выбора как частного решения неоднородной системы, так и линейно независимых решений однородной, то общее решение неоднородной системы может быть записано в различных, но, естественно, равносильных формах.

## Глава 7 ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО

### § 7.1. Определение линейного пространства

**Определение 7.1.1.** Множество  $\Lambda$ , состоящее из элементов  $x, y, z, \dots$ , для которых определена операция сравнения<sup>8</sup>, называется *линейным пространством*, если

1°. Каждой паре элементов  $x, y$  этого множества поставлен в соответствие третий элемент этого же множества, называемый их *суммой* и обозначаемый  $x + y$ , таким образом, что выполнены аксиомы

- a)  $x + y = y + x$ ;
- б)  $x + (y + z) = (x + y) + z$ ;
- в) существует *нулевой элемент*  $o$ , такой, что для любого  $x \in \Lambda$  имеет место  $x + o = x$ ;
- г) для каждого  $x$  существует *противоположный элемент*  $(-x)$ , такой, что  $x + (-x) = o$ .

<sup>8</sup> Эта операция дает возможность устанавливать факты «равенства  $x$  и  $y$ » ( $x = y$ ) или «неравенства  $x$  и  $y$ » ( $x \neq y$ ) для любой пары двух элементов принадлежащих множеству  $\Lambda$ .

- 2°. Для любого элемента  $x$  и любого числа  $\lambda$  существует такой принадлежащий  $\Lambda$  элемент, обозначаемый  $\lambda x$  и называемый *произведением числа на элемент*, что выполнены аксиомы:
- $1x = x$ ;
  - $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ .
- 3°. Для операций сложения элементов и умножения элемента на число выполнены аксиомы дистрибутивности:
- $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ ;
  - $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y \quad \forall x, y \in \Lambda$ ; и  
для любых чисел  $\lambda, \mu$ .

- Замечания.**
- 1°. Под “числами” в аксиомах второй и третьей групп подразумеваются действительные или комплексные числа.
  - 2°. Первая группа аксиом равносильна требованию, чтобы  $\Lambda$  являлось абелевой группой относительно операции сложения (см. § 5.6).

**Пример** Линейным пространством является <sup>9</sup>:

#### 7.1.1.

- 1°. Множество всех векторов на плоскости.
- 2°. Множество всех векторов в пространстве.
- 3°. Множество всех  $n$ -компонентных столбцов.
- 4°. Множество всех многочленов степени не выше, чем  $n$ .
- 5°. Множество всех матриц размера  $m \times n$ .

---

<sup>9</sup> Предполагается, что операции сложения и умножения на число выполняются в соответствии с ранее данными определениями.

6°.  $C[\alpha, \beta]$  – множество всех функций, непрерывных на  $[\alpha, \beta]$ .

7°. Множество всех решений однородной системы  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными.

**Задача 7.1.1.** Показать, что в общем случае множество радиусов-векторов точек, принадлежащих плоскости  $\stackrel{\rightarrow}{(n, r)} = \delta$ , не является линейным пространством. Выяснить, при каких значениях параметра  $\delta$  данное множество будет линейным пространством.

**Задача 7.1.2.** Показать, что множество, состоящее из одного нулевого элемента, является линейным пространством.

**Задача 7.1.3.** Будет ли линейным пространством множество всех положительных чисел  $R^+$ ?

**Решение.** Ответ зависит от способа введения операций сложения и умножения на число элементов рассматриваемого множества.

1°. Пусть операции вводятся “естественным” образом. В этом случае множество положительных чисел не образует линейного пространства, поскольку в нем отсутствует нулевой элемент.

2°. Если операцию “сложения” определить как обычное произведение двух чисел, а “умножение на число  $\lambda$ ” определить как возведение положительного числа в степень  $\lambda$ , то множество положительных чисел будет являться линейным пространством, в котором роль нулевого элемента играет число “1”.

**Теорема 7.1.1.** **Линейное пространство имеет единственный нулевой элемент.**

Доказательство.

Пусть существуют два различных нулевых элемента  $o_1$  и  $o_2$ .

Тогда, согласно аксиоме 1°(в) из определения 7.1.1 линейного пространства, будут справедливы равенства

$$o_1 + o_2 = o_1 \text{ и } o_2 + o_1 = o_2.$$

Откуда в силу коммутативности операции сложения получаем  

$$o_1 = o_2.$$

Теорема доказана.

**Теорема 7.1.2.** **Для каждого элемента  $x$  линейного пространства имеет место равенство  $0x = o$ .**

Доказательство.

Из аксиоматики линейного пространства имеем

$$x = 1x = (0 + 1)x = 0x + 1x = 0x + x.$$

Прибавляя к обеим частям равенства  $x = 0x + x$  элемент  $y$ , противоположный элементу  $x$ , получаем, что  $0x = o$ .

Теорема доказана.

**Теорема 7.1.3.** **Для каждого элемента линейного пространства существует единственный противоположный элемент.**

Доказательство.

Пусть для элемента  $x$  существуют два различных противоположных элемента  $y_1$  и  $y_2$ . Тогда, согласно аксиоме 1°(г) линейного пространства, будут справедливы равенства  $x + y_1 = o$  и  $x + y_2 = o$ . Прибавим к обеим частям первого равенства элемент  $y_2$ , получим

$$y_2 + (x + y_1) = y_2$$

в силу ассоциативности операции сложения и второго равенства. Но, с другой стороны,

$$y_2 + (x + y_1) = (y_2 + x) + y_1 = o + y_1 = y_1,$$

то есть  $y_2 = y_1$ .

Теорема доказана.

**Теорема 7.1.4.** Для каждого  $x \in \Lambda$  противоположным элементом служит элемент  $(-1)x$ .

Доказательство.

Из аксиоматики линейного пространства и в силу теорем 7.1.2–7.1.3 имеем

$$o = 0x = (1 - 1)x = 1x + (-1)x = x + (-1)x.$$

Это равенство означает, что противоположный к  $x$  элемент имеет вид  $(-1)x$ .

Теорема доказана.

## § 7.2 Линейная зависимость, размерность и базис в линейном пространстве

**Определение 7.2.1.** 1°. Выражение  $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$  называется *линейной комбинацией* элементов  $x_1, x_2, \dots, x_n$  линейного пространства  $\Lambda$ .

2°. Элементы  $x_1, x_2, \dots, x_n$  линейного пространства  $\Lambda$  называются *линейно зависимыми*, если существуют числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , не равные нулю одновременно, такие, что  $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = o$ .

3°. Элементы  $x_1, x_2, \dots, x_n$  линейного пространства  $\Lambda$  называются *линейно независимыми*, если из равенства  $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = o$  следует, что  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ .

**Лемма 7.2.1.** Для того чтобы некоторое множество элементов линейного пространства было линейно зависимым, необходимо и достаточно, чтобы один из этих элементов являлся линейной комбинацией остальных.

Доказательство.

Доказательство совпадает с доказательством леммы 1.4.1, в котором слово “вектор” заменено словом “элемент”.

**Лемма 7.2.2.** Если некоторое подмножество элементов  $x_1, x_2, \dots, x_n$  линейно зависимо, то линейно зависимы и сами элементы  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Доказательство.

Без ограничения общности можно предположить, что линейно зависимое подмножество состоит из первых  $k < n$  элементов множества  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Тогда существуют не равные нулю одновременно числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , такие, что

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = o.$$

Но это равенство можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i + \sum_{i=k+1}^n 0x_i = o,$$

что и доказывает линейную зависимость элементов

$$x_1, x_2, \dots, x_n.$$

Лемма доказана.

**Определение 7.2.2.** *Базисом в линейном пространстве  $\Lambda$  называется любой упорядоченный набор его  $n$  элементов, если*

- 1) эти элементы линейно независимые;
- 2) любое подмножество в  $\Lambda$ , содержащее  $n+1$  элемент, включая эти  $n$  элементов, линейно зависимое.

**Определение 7.2.3.** *Линейное пространство  $\Lambda$  называется  $n$ -мерным и обозначается  $\Lambda^n$ , если в нем существует базис, состоящий из  $n$  элементов. Число  $n$  называется раз мерностью линейного пространства  $\Lambda^n$  и обозначается  $\dim(\Lambda^n)$ .*

**Теорема 7.2.1.** *Для каждого элемента линейного пространства  $\Lambda^n$  существует единственное представление в виде линейной комбинации базисных элементов.*

Доказательство.

Пусть в линейном пространстве  $\Lambda^n$  заданы базис  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  и произвольный элемент  $x$ . Тогда по определению базиса система элементов  $\{g_1, g_2, \dots, g_n, x\}$  линейно зависима и по лемме 7.2.1 элемент  $x$  является линейной комбинацией элементов  $g_1, g_2, \dots, g_n$ . Существование разложения, таким образом, доказано.

Покажем теперь единственность разложения. Допустим, что существуют две различные линейные комбинации

$$x = \sum_{i=1}^n \xi_i g_i \quad \text{и} \quad x = \sum_{i=1}^n \eta_i g_i .$$

Тогда получаем, что

$$\sum_{i=1}^n (\xi_i - \eta_i) g_i = o ,$$

но это означает, что при данном допущении система элементов  $g_1, g_2, \dots, g_n$  линейно зависима. Полученное противоречие доказывает единственность.

Теорема доказана.

В общем случае линейное пространство может не иметь базиса. Таким свойством обладает, например, линейное пространство, состоящее из одного нулевого элемента. В таблице 7.2.1 приведены примеры базисов в линейных пространствах.

Таблица 7.2.1  
Примеры базисов в линейных пространствах

Линейное про- странство	Размер- ность	Пример базиса
<i>Множество всех радиусов-векторов на плоскости</i>	2	Упорядоченная пара неколлинеарных векторов на плоскости.
<i>Множество всех векторов в пространстве</i>	3	Упорядоченная тройка нормированных, попарно ортогональных векторов.
<i>Множество всех <math>n</math>-компонентных столбцов</i>	$n$	$n$ столбцов вида $\begin{array}{ c  c  c  c  c } \hline 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \hline \end{array}$

<i>Множество всех алгебраических многочленов степени не выше, чем <math>n</math></i>	$n + 1$	$n + 1$ одночлен вида $P_1(\tau) = 1; P_2(\tau) = \tau;$ $P_3(\tau) = \tau^2; P_4(\tau) = \tau^3;$ $\dots;$ $P_n(\tau) = \tau^{n-1}; P_{n+1}(\tau) = \tau^n.$
<i>Множество всех матриц размера <math>m \times n</math></i>	$n \cdot m$	$n \cdot m$ всевозможных различных матриц размера $m \times n$ , все элементы которых равны нулю, кроме одного, равного 1.
<i>Множество всех функций, непрерывных на <math>[\alpha, \beta]</math></i>	$\infty$	Базис не существует <sup>10</sup> .
<i>Множество решений однородной системы <math>m</math> линейных уравнений с <math>n</math> неизвестными и рангом основной матрицы, равным <math>r</math></i>	$n - r$	Нормальная фундаментальная система решений.

<sup>10</sup> В этом линейном пространстве (вопреки определению 7.2.2) для любого натурального  $n$  можно построить линейно независимый набор, состоящий из  $n + 1$  элемента. Например, множество функций вида

$$\{1, \tau, \tau^2, \dots, \tau^n\}.$$

### § 7.3. Подмножества линейного пространства

#### Подпространство

**Определение 7.3.1.** Непустое множество  $\Omega$ , образованное из элементов линейного пространства  $\Lambda$ , называется *подпространством* этого линейного пространства, если для любых  $x, y \in \Omega$  и любого числа  $\lambda$

- 1)  $x + y \in \Omega$ ,
- 2)  $\lambda x \in \Omega$ .

**Замечание:** из определения 7.3.1 следует, что множество  $\Omega$  само является линейным пространством, поскольку для него, очевидно, выполняются все аксиомы операций в линейном пространстве.

- Пример 7.3.1.**
- 1°. Множество радиусов-векторов всех точек, лежащих на некоторой плоскости, проходящей через начало координат, является подпространством во множестве радиусов-векторов всех точек трехмерного геометрического пространства.
  - 2°. Множество всех многочленов степени не выше, чем  $n$ , есть подпространство в линейном пространстве непрерывных функций  $C[\alpha, \beta]$ .
  - 3°. В пространстве  $n$ -мерных столбцов совокупность решений однородной системы линейных уравнений с  $n$  неизвестными и с основной матрицей ранга  $r$  образует подпространство размерности  $n - r$ .
  - 4°. Подпространством любого линейного пространства будет:
    - а) само линейное пространство;
    - б) множество, состоящее из одного нулевого элемента.

**Определение 7.3.2.** Пусть даны два подпространства  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  линейного пространства  $\Lambda$ . Тогда

- 1°. *Объединением* подпространств  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  называется множество элементов  $x \in \Lambda$ , таких, что  $x \in \Omega_1$  либо  $x \in \Omega_2$ . Объединение подпространств  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  обозначается  $\Omega_1 \cup \Omega_2$ .
- 2°. *Пересечением* подпространств  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  называется множество элементов  $x \in \Lambda$ , принадлежащих  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  одновременно. Пересечение подпространств  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  обозначается  $\Omega_1 \cap \Omega_2$ .
- 3°. *Суммой* подпространств  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  называется совокупность всех элементов  $x_1 + x_2 \in \Lambda$  при условии, что  $x_1 \in \Omega_1$  и  $x_2 \in \Omega_2$ . Сумма подпространств  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  обозначается  $\Omega_1 + \Omega_2$ .
- 4°. *Прямой суммой* подпространств  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  называется совокупность всех элементов  $x_1 + x_2 \in \Lambda$  при условии, что  $x_1 \in \Omega_1$  и  $x_2 \in \Omega_2$  и  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \{o\}$ . Прямая сумма обозначается  $\Omega_1 \oplus \Omega_2$ .

Покажите самостоятельно, что справедлива

**Теорема 7.3.1.** **Как сумма, так и пересечение подпространств  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  в  $\Lambda$  суть также подпространства в  $\Lambda$ .**

**Теорема 7.3.2.** **Размерность суммы подпространств  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  равна**

$$\begin{aligned}\dim(\Omega_1 + \Omega_2) &= \\ &= \dim(\Omega_1) + \dim(\Omega_2) - \dim(\Omega_1 \cap \Omega_2).\end{aligned}$$

Доказательство.

1°. Пусть подпространство  $\Omega_1 \cap \Omega_2$  имеет базис  $\{g_1, g_2, \dots, g_k\}$  и соответственно размерность  $k$ . Дополним этот базис элементами  $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_l\}$  до базиса в  $\Omega_1$  и элементами  $\{g''_1, g''_2, \dots, g''_m\}$  до базиса в  $\Omega_2$ . В этом случае каждый элемент  $x \in \Omega_1 + \Omega_2$  может быть разложен по системе элементов

$$\{g_1, g_2, \dots, g_k, g'_1, g'_2, \dots, g'_l, g''_1, g''_2, \dots, g''_m\}.$$

2°. Покажем теперь, что набор элементов  $\{g_1, g_2, \dots, g_k, g'_1, g'_2, \dots, g'_l, g''_1, g''_2, \dots, g''_m\}$  линейно независим в  $\Lambda$ .

Рассмотрим некоторую, равную нулевому элементу, линейную комбинацию этих элементов:

$$\tilde{x} = \sum_{i=1}^l \lambda'_i g'_i + \sum_{j=1}^k \lambda_j g_j + \sum_{p=1}^m \lambda''_p g''_p = o. \quad (7.3.1)$$

Заметим, что по построению  $\sum_{p=1}^m \lambda''_p g''_p \in \Omega_2$ ,

но, с другой стороны, этот же элемент

$$\sum_{p=1}^m \lambda_p'' g_p'' = -\left( \sum_{i=1}^l \lambda_i' g_i' + \sum_{j=1}^k \lambda_j g_j \right) \in \Omega_1.$$

Это означает, что  $\tilde{x} \in \Omega_1 \cap \Omega_2$  и, следовательно, в равенстве (7.3.1) все

$$\lambda_i' = 0, i = [1, l]; \quad \lambda_p'' = 0, p = [1, m].$$

А поскольку  $\{g_1, g_2, \dots, g_k\}$  – базис в  $\Omega_1 \cap \Omega_2$ , то и все  $\lambda_j = 0, j = [1, k]$ , и линейная комбинация, стоящая в левой части равенства (7.3.1), тривиальная. Следовательно,  $\{g_1, g_2, \dots, g_k, g_1', g_2', \dots, g_l', g_1'', g_2'', \dots, g_m''\}$  – линейно независимая система элементов.

3°. Из пункта 2° следует, что набор элементов

$$\{g_1, g_2, \dots, g_k, g_1', g_2', \dots, g_l', g_1'', g_2'', \dots, g_m''\}$$

является базисом в  $\Omega_1 + \Omega_2$ . Размерность подпространства  $\Omega_1 + \Omega_2$  при этом равна

$$\begin{aligned} \dim(\Omega_1 + \Omega_2) &= l + k + m = (k + l) + (k + m) - k = \\ &= \dim(\Omega_1) + \dim(\Omega_2) - \dim(\Omega_1 \cap \Omega_2). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следствие В случае прямой суммы подпространств

7.3.1.

$$\dim(\Omega_1 \oplus \Omega_2) = \dim(\Omega_1) + \dim(\Omega_2)$$

и каждый элемент  $x \in (\Omega_1 \oplus \Omega_2)$  представим в виде

$x_1 + x_2$  так, что  $x_1 \in \Omega_1$  и  $x_2 \in \Omega_2$ , единственным образом, поскольку набор элементов

$$\{g_1', g_2', \dots, g_l', g_1'', g_2'', \dots, g_m''\}$$

является базисом в  $\Omega_1 \oplus \Omega_2$ .

## Линейная оболочка системы элементов

**Определение 7.3.3.** Совокупность всевозможных линейных комбинаций некоторого множества элементов  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  линейного пространства  $\Lambda$  называется *линейной оболочкой* этого множества и обозначается  $L\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ .

**Пример 7.3.2.** Множество многочленов степени не выше, чем  $n$ , является линейной оболочкой набора одночленов  $\{1, \tau, \tau^2, \dots, \tau^n\}$  в линейном пространстве непрерывных функций  $C[\alpha, \beta]$ .

Пусть задан набор элементов  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \in \Lambda$ , порождающих линейную оболочку  $L\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ , тогда любой элемент этой линейной оболочки имеет вид  $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$  и справедлива

**Теорема 7.3.3.** **Множество всех элементов, принадлежащих линейной оболочке  $L\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ , является в  $\Lambda$  подпространством размерности  $m$ ,** где  $m$  – максимальное число линейно независимых элементов во множестве  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ .

Доказательство.

1°. Непосредственной проверкой убеждаемся, что для совокупности элементов вида  $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$  (в предположении, что  $\lambda_i$  – произвольные числа) справедливы все аксиомы из

определения 7.1.1, то есть рассматриваемая линейная оболочка является линейным пространством.

- 2°. Пусть максимальное число линейно независимых элементов в наборе  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  равно  $m \leq k$ . Без ограничения общности можно считать, что эти элементы суть  $x_1, x_2, \dots, x_m$ . В этом случае

$$x_j = \sum_{i=1}^m \alpha_{ji} x_i ; \quad j = [m+1, k]$$

и любой элемент линейной оболочки может быть представлен в виде линейной комбинации элементов  $x_1, x_2, \dots, x_m$ .

- 3°. Покажем теперь, что любой набор из  $l$  ( $l > m$ ) элементов данной линейной оболочки будет линейно зависимым. Для этого выберем  $l$  элементов  $y_1, y_2, \dots, y_l$ , принадлежащих линейной оболочке, и выразим их через элементы  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , получим

$$y_j = \sum_{i=1}^m \beta_{ji} x_i ; \quad j = [1, l].$$

Приравняем нулевому элементу произвольную линейную комбинацию выбранного набора  $y_1, y_2, \dots, y_l$ :

$$\sum_{j=1}^l \mu_j y_j = \sum_{j=1}^l \mu_j \sum_{i=1}^m \beta_{ji} x_i = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^l \beta_{ji} \mu_j \right) x_i = o.$$

Поскольку элементы  $x_1, x_2, \dots, x_m$  линейно независимы, то коэффициенты  $\mu_i$  должны удовлетворять следующей однородной системе линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^l \beta_{ji} \mu_j = 0 , \quad i = [1, m].$$

Пусть ранг ее основной матрицы равен  $r$ .

Эта система имеет (по теореме 6.7.1)

$$l - r \geq l - m > 0$$

линейно независимых, и следовательно, *ненулевых* решений, поскольку  $r \leq m$ . Принимая во внимание, что  $l$  и  $m$  – не равные друг другу натуральные числа, получаем

$$l - m \geq 1,$$

то есть существует нетривиальная линейная комбинация элементов  $y_1, y_2, \dots, y_l$ , равная  $o$ .

Теорема доказана.

### Гиперплоскость

**Определение 7.3.4.** Множество  $\Gamma$ , образованное из элементов вида  $x + x_0$ , где  $x_0$  есть произвольный фиксированный элемент линейного пространства  $\Lambda$ , а  $x$  – любой элемент некоторого подпространства  $\Omega \subset \Lambda$ , называется *гиперплоскостью* (или *линейным многообразием*) в линейном пространстве  $\Lambda$ .

**Замечания.** 1°. В общем случае гиперплоскость не является подпространством.

2°. Если  $\dim(\Omega) = k$ , то говорят о  $k$ -мерной гиперплоскости.

**Задача 7.3.1.** Показать, что если элементы  $x$  и  $y$  принадлежат некоторой гиперплоскости  $\Gamma$ , то ей будет принадлежать и элемент

$$z = \alpha x + (1 - \alpha)y,$$

где  $\alpha$  – любое число.

## § 7.4. Операции с элементами линейного пространства в координатном представлении

**Определение** Коэффициенты  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  разложения по базису 7.4.1.

$$x = \sum_{i=1}^n \xi_i g_i$$

называются *координатами* (или *компонентами*) элемента  $x$  линейного пространства  $\Lambda^n$  в базисе  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ .

Заметим, что в силу теоремы 7.2.1 элемент  $x$  линейного пространства  $\Lambda^n$  в базисе  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  однозначно представляется  $n$ -компонентным столбцом, называемым *координатным представлением элемента  $x$  в базисе  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$* :

$$\|x\|_g = \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{vmatrix}.$$

В  $\Lambda^n$  базис может быть выбран не единственным способом и потому необходимо установить правило изменения координат элемента линейного пространства  $\Lambda^n$  при переходе от одного базиса к другому.

Пусть в  $\Lambda^n$  даны два базиса: “старый”  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  и “новый”  $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$  с соответствующими координатными разложениями

элемента  $x$ :  $x = \sum_{i=1}^n \xi_i g_i$  и  $x = \sum_{i=1}^n \xi'_i g'_i$ .

Пусть, кроме того, известны разложения элементов “нового” базиса по элементам “старого”:

$$g'_j = \sum_{i=1}^n \sigma_{ij} g_i; \quad j = [1, n]. \quad (7.4.1)$$

**Определение 7.4.2.** Матрица  $\|S\|$ ,  $j$ -й ( $\forall j = [1, n]$ ) столбец которой состоит из коэффициентов  $\sigma_{ij}$  координатных разложений элементов “нового” базиса по элементам “старого”, называется *матрицей перехода* от базиса  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  к базису  $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$ .

Отметим, что это определение является обобщением определения 1.8.2 и что справедлива

**Теорема 7.4.1.** Координаты  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  и  $\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n$  связаны со-

отношениями  $\xi_i = \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} \xi'_j \quad \forall i = [1, n]$ , называе-  
мymi *формулами перехода*, где коэффициенты  $\sigma_{ij}$  –  
элементы матрицы перехода  $\|S\|$ .

Доказательство.

В силу соотношений (7.4.1) будут справедливы равенства

$$\sum_{i=1}^n \xi_i g_i = x = \sum_{j=1}^n \xi'_j g'_j = \sum_{j=1}^n \xi'_j \sum_{i=1}^n \sigma_{ij} g_i = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} \xi'_j \right) g_i$$

$$\text{или } \sum_{i=1}^n (\xi_i - \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} \xi'_j) g_i = o.$$

Но если линейная комбинация линейно независимых (в данном случае базисных) элементов равна нулевому элементу, то она тривиальная. Откуда получаем, что

$$\xi_i = \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} \xi'_j \quad \forall i = [1, n].$$

Теорема доказана.

Заметим, что если столбец элементов “нового” базиса выражается через столбец элементов “старого” при помощи умножения слева на транспонированную матрицу перехода  $\| S \|^\text{T}$ , то координатный столбец в “старом” базисе равен произведению матрицы перехода на координатный столбец в “новом” базисе.

Действительно, рассматривая столбцы  $\| x \|_g$  и  $\| x \|_{g'}$  в формулах перехода как *двухиндексные* матрицы, получаем

$$\xi_{i1} = \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} \xi'_{j1} \quad \forall i = [1, n],$$

что равносильно равенству  $\| x \|_g = \| S \| \| x \|_{g'}$  (см. § 5.1).

Используя аналогичный прием, также и соотношения (7.4.1) можно записать в матричном виде

$$\begin{vmatrix} g'_1 \\ g'_2 \\ \dots \\ g'_n \end{vmatrix} = \| S \|^\text{T} \begin{vmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ g_n \end{vmatrix}$$

или  $\| g'_1 \ g'_2 \ \dots \ g'_n \| = \| g_1 \ g_2 \ \dots \ g_n \| \| S \|$ .

В заключение выясним, как операции с элементами линейного пространства выполняются в координатной форме.

Пусть в конкретном базисе  $x = \sum_{i=1}^n \xi_i g_i$  и  $y = \sum_{i=1}^n \eta_i g_i$ , тогда в силу определения базиса и аксиом линейного пространства будут справедливы следующие соотношения:

1°. Для операции сравнения: два элемента в  $\Lambda^n$  равны тогда и только

$$\text{тогда, когда } \sum_{i=1}^n \xi_i g_i = x = y = \sum_{i=1}^n \eta_i g_i,$$

$$\text{или в координатной форме } x = y \Leftrightarrow \|x\|_g = \|y\|_g.$$

2°. Для операции сложения:  $x + y = \sum_{i=1}^n (\xi_i + \eta_i) g_i$ ,

$$\text{или в координатной форме } \|x + y\|_g = \|x\|_g + \|y\|_g.$$

3°. Для операции умножения на число:

$$\lambda x = \lambda \sum_{i=1}^n \xi_i g_i = \sum_{i=1}^n (\lambda \xi_i) g_i,$$

$$\text{или в координатной форме } \|\lambda x\|_g = \lambda \|x\|_g.$$

Откуда следует, что элементы конечномерного линейного пространства не только могут представляться матрицами (столбцами), но и правила выполнения операций с этими элементами совпадают с определением соответствующих матричных операций.

## § 7.5. Изоморфизм линейных пространств

Рассмотрим два линейных пространства: множество многочленов  $P_2(\tau)$  степени не выше, чем 2, и множество векторов трехмерного геометрического пространства.

Операции сложения многочленов и их умножения на число выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} & (\xi_1 + \eta_1\tau + \kappa_1\tau^2) + (\xi_2 + \eta_2\tau + \kappa_2\tau^2) = \\ & = (\xi_1 + \xi_2) + (\eta_1 + \eta_2)\tau + (\kappa_1 + \kappa_2)\tau^2, \\ & \lambda(\xi + \eta\tau + \kappa\tau^2) = (\lambda\xi) + (\lambda\eta)\tau + (\lambda\kappa)\tau^2. \end{aligned}$$

Те же операции с трехмерными векторами в координатной форме в свою очередь записываются так:

$$\begin{array}{lcl} \left\| \begin{array}{c} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \kappa_1 \end{array} \right\| + \left\| \begin{array}{c} \xi_2 \\ \eta_2 \\ \kappa_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \xi_1 + \xi_2 \\ \eta_1 + \eta_2 \\ \kappa_1 + \kappa_2 \end{array} \right\|; & \lambda \left\| \begin{array}{c} \xi \\ \eta \\ \kappa \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \lambda\xi \\ \lambda\eta \\ \lambda\kappa \end{array} \right\|. \end{array}$$

Сопоставляя эти записи, можно заключить, что природа данных множеств не играет роли, когда исследуются их характеристики, связанные только с операциями сравнения, сложения и умножения на число.

Отмеченное свойство линейных пространств носит название *изоморфизма*. Более точно его описывает

**Определение 7.5.1.** Два линейных пространства  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение  $\hat{F}: \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2$ , такое, что для  $\forall \lambda$  и  $\forall x, y \in \Lambda_1$ ,

$$1^\circ. \quad \hat{F}(x + y) = \hat{F}x + \hat{F}y;$$

$$2^\circ. \quad \hat{F}(\lambda x) = \lambda \hat{F}x.$$

Отображение  $\hat{F}$  называется *изоморфизмом* линейных пространств  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$ .

Напомним, что отображение  $\hat{F}$  является *взаимно однозначным* (*биективным*), если

- a) разные элементы из  $\Lambda_1$  имеют в  $\Lambda_2$  разные образы ( $\hat{F}$  *инъективно*);
- б) каждый элемент из  $\Lambda_2$  является образом некоторого элемента из  $\Lambda_1$  ( $\hat{F}$  *суръективно*).

**Теорема 7.5.1**  
(об изомор-  
физме).

**Два линейных конечномерных пространства  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности равны.**

Доказательство.

Пусть  $\dim(\Lambda_1) = \dim(\Lambda_2)$ . Принимая правило отображения, при котором каждому элементу  $x \in \Lambda_1$  ставится в соответствие элемент из  $\Lambda_2$ , имеющий те же самые координаты, а также используя правила действий с элементами в координатном представлении, приходим к изоморфизму  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$ .

Допустим, что  $n = \dim(\Lambda_1) > \dim(\Lambda_2) = m$ , где  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  изоморфны. Тогда некоторый набор  $n$  линейно независимых элементов из  $\Lambda_1$  отображается в  $n$  элементов в  $\Lambda_2$ , которые обязаны быть линейно зависимыми. Поскольку при изоморфизме нулевой элемент переходит в нулевой элемент, то мы приходим к противоречию с предположением о линейной независимости выбранных  $n$  элементов из  $\Lambda_1$ .

В случае  $n < m$  аналогичные рассуждения также приводят к противоречию, и, следовательно,  $n = m$ .

Теорема доказана.

**Пример 7.1.2.** Изоморфизм одномерных пространств вещественных чисел  $R$  и всех положительных чисел  $R^+$  (с операциями, определенными в условии задачи 7.1.3) задается при помощи функций

$$x = \ln(y) \quad u \quad y = e^x; \quad x \in R; \quad y \in R^+.$$

Очевидным следствием теоремы 7.5.1 является изоморфизм любого линейного  $n$ -мерного пространства  $\Lambda^n$  и линейного пространства  $n$ -компонентных столбцов, позволяющий убедиться в справедливости свойств столбцов, установленных в §§ 6.5–6.7 для каждого  $\Lambda^n$ .

Действительно, имеет место

**Теорема 7.5.2.** **Максимальное число линейно независимых элементов в любом конечном наборе элементов из  $\Lambda^n$  равно рангу матрицы, столбцы которой содержат координаты элементов данного набора в некотором базисе.**

Доказательство.

Следует из изоморфности линейного пространства  $\Lambda^n$  и линейного пространства всех  $n$ -компонентных столбцов, а также из теоремы 6.5.3 (*о ранге матрицы*).

**Следствие 7.5.1.**  **$k$  элементов в  $\Lambda^n$  линейно зависимы тогда и только тогда, когда ранг матрицы, столбцы которой содержат координаты этих элементов в некотором базисе, меньше, чем  $\min\{n, k\}$ .**

**Следствие 7.5.2.** **Матрица перехода невырожденная, то есть**

$$\det \| S \| \neq 0.$$

Доказательство.

Предположим противное,  $\det \| S \| = 0$ , тогда  $\operatorname{rg} \| S \| < n$  и столбцы матрицы перехода линейно зависимые.

Но тогда будут зависимыми и элементы  $g'_1, g'_2, \dots, g'_n$ , что противоречит условию о том, что  $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$  – базис.

Следствие доказано.

Отметим также, что факт равенства или неравенства двух элементов в координатной форме можно проверять в любом базисе, поскольку в силу невырожденности матрицы  $\|S\|$  оказываются справедливыми соотношения

$$\|x\|_g = \|y\|_g \Leftrightarrow \|S\| \|x\|_{g'} = \|S\| \|y\|_{g'} \Leftrightarrow \|x\|_{g'} = \|x\|_{g'}.$$

**Следствие 7.5.3.** Существует матрица  $\|T\| = \|S\|^{-1}$ , обратная матрице перехода  $\|S\|$ , называемая обратной матрицей перехода.

Для обратной матрицы перехода справедливы соотношения

$$\begin{vmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ g_n \end{vmatrix} = \|T\|^T \begin{vmatrix} g'_1 \\ g'_2 \\ \dots \\ g'_n \end{vmatrix} \text{ и } \|x\|_{g'} = \|T\| \|x\|_g, \text{ следующие из равенств} \\ \|g'_1 \quad g'_2 \quad \dots \quad g'_n\| = \|g_1 \quad g_2 \quad \dots \quad g_n\| \|S\|, \|x\|_{g'} = \|S\| \|x\|_g,$$

и теоремы 7.4.1.

Пусть в  $\Lambda^n$  задан базис  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ , в котором координатное представление элементов представляется в виде  $x = \sum_{i=1}^n \xi_i g_i$ . Тогда имеет место

**Следствие 7.5.4.** *Каждая однородная линейная система  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными*

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{ji} \xi_i = 0, \quad j = [1, m]$$

*определяет некоторое подпространство  $\Omega$  в  $\Lambda^n$ .*

Доказательство.

Следует из того факта, что данное подпространство  $\Omega$  в силу теоремы 6.7.2 является линейной оболочкой нормальной фундаментальной системы решений системы линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{ji} \xi_i = 0, \quad j = [1, m], \text{ а } \Lambda^n \text{ изоморфно линейному про-$$

странству  $n$ -компонентных столбцов

$$\begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n \end{bmatrix}^T.$$

Таким образом, каждое подпространство в  $\Lambda^n$  может быть задано либо однородной системой линейных уравнений, либо как линейная оболочка базиса подпространства – фундаментальной системы ее решений.

Также справедливо

**Следствие 7.5.5.** *Каждая совместная неоднородная линейная система  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными*

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{ji} \xi_i = \beta_j, \quad j = [1, m]$$

*определяет некоторую гиперплоскость  $\Gamma$  в  $\Lambda^n$ .*

Доказательство.

Аналогично рассуждениям, приведенным для следствия 7.5.4.

**Задача 7.5.1.** Проверить, что элементы  $g_1, g_2, g_3$  образуют базис в

$\Lambda^3$  и найти координатное представление элемента  $x$  в этом базисе, если в некотором исходном базисе:

$$\|x\| = \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{vmatrix}, \|g_1\| = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \|g_2\| = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ и } \|g_3\| = \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

**Решение.** 1°. Для того чтобы из элементов  $g_1, g_2, g_3$  можно было образовать в  $\Lambda^3$  базис, необходимо и достаточно (определение 7.2.2), чтобы эти элементы были линейно независимыми. По следствию 7.5.1 данное условие в  $\Lambda^3$  равносильно неравенству

$$\operatorname{rg} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \geq 3,$$

которое выполняется, поскольку

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

2°. Обозначим искомые координаты элемента  $x$  через  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ . Тогда  $x = \xi_1 g_1 + \xi_2 g_2 + \xi_3 g_3$ , или в координатной форме

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{vmatrix} = \xi_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} + \xi_2 \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + \xi_3 \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

3°. Используя условие равенства двух элементов в координатной форме, получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3 = 1, \\ \xi_1 + \xi_2 = 3, \\ \xi_1 + \xi_3 = 1, \end{cases}$$

решив которую (например, по *правилу Крамера* – теорема 6.4.1 или методом Гаусса – § 6.8), получим  $\xi_1 = 2$ ,  $\xi_2 = 1$ ,  $\xi_3 = -1$ . Откуда следует, что элемент  $x$  в базисе  $\{g_1, g_2, g_3\}$ , имеет координатное представление

$$\|x\|_g = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}.$$

**Задача 7.5.2.** Найти матрицу перехода от базиса в  $\Lambda^3$ , образованного элементами  $\{g'_1, g'_2, g'_3\}$ , к базису  $\{g''_1, g''_2, g''_3\}$ , если в некотором исходном базисе:

$$\begin{aligned} \|g'_1\| &= \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \|g'_2\| = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \|g'_3\| = \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \|g''_1\| = \begin{vmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \end{vmatrix}, \\ \|g''_2\| &= \begin{vmatrix} 16 \\ 5 \\ 9 \end{vmatrix} \text{ и } \|g''_3\| = \begin{vmatrix} 22 \\ 7 \\ 8 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

**Решение.** 1°. Пусть  $\|x\|$ ,  $\|x'\|$  и  $\|x''\|$  обозначают координатные столбцы элемента  $x$  в трех базисах: исходном,  $\{g'_1, g'_2, g'_3\}$  и  $\{g''_1, g''_2, g''_3\}$  соответственно. Тогда (по определению 7.4.2 и в силу теоремы 7.4.1) имеют место равенства

$$\|x\| = \|G\| \|x'\| \quad \text{и} \quad \|x\| = \|F\| \|x''\|,$$

где матрицы  $\|G\|$  и  $\|F\|$  составлены из координатных столбцов базисных элементов  $g'_1, g'_2, g'_3$  и  $g''_1, g''_2, g''_3$ , то есть

$$\|G\| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \|F\| = \begin{vmatrix} 7 & 16 & 22 \\ 3 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 8 \end{vmatrix}.$$

Обозначим через  $\|S\|$  матрицу перехода от базиса  $\{g'_1, g'_2, g'_3\}$  к базису  $\{g''_1, g''_2, g''_3\}$ , для которой  $\|x'\| = \|S\| \|x''\|$ . Но из условий  $\|x\| = \|G\| \|x'\|$  и  $\|x\| = \|F\| \|x''\|$  следует, что

$$\|x'\| = \|G\|^{-1} \|F\| \|x''\|,$$

поскольку матрица  $\|G\|$ , очевидно, невырожденная.

Тогда  $\|S\| \|x''\| = \|G\|^{-1} \|F\| \|x''\|$  для любого элемента  $\|x''\|$ , а это в силу леммы 5.1.2 означает, что искомая матрица перехода

$$\|S\| = \|G\|^{-1} \|F\|.$$

2°. Подсчитав произведение

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right\|^{-1} \left\| \begin{array}{ccc} 7 & 16 & 22 \\ 3 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 8 \end{array} \right\|,$$

используя, например, схему, описанную в § 6.8, для выражений вида  $\|G\|^{-1}\|F\|$ , получаем

$$\|S\| = \left\| \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{array} \right\|.$$

**Задача  
7.5.3.**

*В линейном пространстве многочленов степени не выше, чем 3, найти базис и размерность пересечения двух линейных оболочек элементов:*

$$x_1(\tau) = 1 + 2\tau + \tau^2 + 3\tau^3,$$

$$x_2(\tau) = -1 + 8\tau - 6\tau^2 + 5\tau^3,$$

$$x_3(\tau) = 10\tau - 5\tau^2 + 8\tau^3$$

$$y_1(\tau) = 1 + 4\tau - \tau^2 + 5\tau^3,$$

$$u \quad y_2(\tau) = 3 - 2\tau + 6\tau^2 + 3\tau^3,$$

$$y_3(\tau) = 4 + 2\tau + 5\tau^2 + 8\tau^3.$$

**Решение.** 1°. По теореме 7.4.1 каждая из линейных оболочек является подпространством. Первое из них  $\Pi_1$  образовано элементами вида

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3,$$

а второе  $\Pi_2$  – соответственно элементами

$$y = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \mu_3 y_3.$$

Составим однородные системы линейных уравнений, задающих эти подпространства (см. следствие 7.5.4).

Пусть каждое из уравнений этих систем имеет вид

$$\left\| \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \right\| \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Тогда, воспользовавшись изоморфизмом между  $\Pi_1$  и пространством четырехкомпонентных столбцов вида

$$\begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{vmatrix} = \lambda_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{vmatrix} + \lambda_2 \begin{vmatrix} -1 \\ 8 \\ -6 \\ 5 \end{vmatrix} + \lambda_3 \begin{vmatrix} 0 \\ 10 \\ -5 \\ 8 \end{vmatrix},$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  – произвольные числа, приходим к условию

$$\begin{aligned} & \left\| \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \right\| \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{vmatrix} = \\ & = \left\| \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \right\| (\lambda_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{vmatrix} + \lambda_2 \begin{vmatrix} -1 \\ 8 \\ -6 \\ 5 \end{vmatrix} + \lambda_3 \begin{vmatrix} 0 \\ 10 \\ -5 \\ 8 \end{vmatrix}) = 0, \end{aligned}$$

которое будет выполняться при любых  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ,

если числа  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  образуют решение следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_4 = 0, \\ -\alpha_1 + 8\alpha_2 - 6\alpha_3 + 5\alpha_4 = 0, \\ 10\alpha_2 - 5\alpha_3 + 8\alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, например, по схеме, описанной в § 6.8, получим общее решение в виде

$$\left| \begin{array}{c|c|c|c} \alpha_1 & -4 & -7 \\ \alpha_2 & 1 & -4 \\ \alpha_3 & 2 & 0 \\ \alpha_4 & 0 & 5 \end{array} \right| + \kappa_2 \left| \begin{array}{c|c|c|c} 1 & -4 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \end{array} \right| \quad \forall \kappa_1, \kappa_2$$

откуда заключаем, что существует два независимых набора искомых чисел  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ , и, следовательно, однородная система линейных уравнений, задающая подпространство  $\Pi_1$  имеет вид

$$\begin{cases} -4\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 = 0, \\ -7\xi_1 - 4\xi_2 + 5\xi_4 = 0. \end{cases}$$

Аналогично строим однородную систему линейных уравнений, задающую  $\Pi_2$ :

$$\begin{cases} -22\xi_1 + 9\xi_2 + 14\xi_3 = 0, \\ -11\xi_1 - 6\xi_2 + 7\xi_4 = 0. \end{cases}$$

Наконец, подпространство  $\Pi_1 \cap \Pi_2$  будет задаваться системой

$$\begin{cases} -4\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 = 0, \\ -7\xi_1 - 4\xi_2 + 5\xi_4 = 0, \\ -22\xi_1 + 9\xi_2 + 14\xi_3 = 0, \\ -11\xi_1 - 6\xi_2 + 7\xi_4 = 0, \end{cases}$$

общее решение которой есть

$$\begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{vmatrix} = \sigma_1 \begin{vmatrix} 2 \\ -6 \\ 7 \\ -2 \end{vmatrix},$$

и, следовательно, для  $\Pi_1 \cap \Pi_2$  имеем  
 $\dim(\Pi_1 \cap \Pi_2) = 1$  и базис, состоящий из одного

элемента  $\begin{vmatrix} 2 \\ -6 \\ 7 \\ -2 \end{vmatrix}.$

## Глава 8

# ЛИНЕЙНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ В ЛИНЕЙНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

### § 8.1. Линейные операторы

**Определение 8.1.1.** Пусть каждому элементу  $x$  линейного пространства

$\Lambda$  поставлен в соответствие единственный элемент  $y$  линейного пространства  $\Lambda^*$ . Тогда говорят, что в  $\Lambda$  задан *оператор*, действующий в  $\Lambda$  и имеющий значения в  $\Lambda^*$ , действие которого обозначается как  $y = \hat{A}x$ .

При этом элемент  $y$  называется *образом элемента*  $x$ , а элемент  $x$  – *прообразом элемента*  $y$ .

Как и в § 5.2, операторы подразделяются на *отображения*, если  $\Lambda^* \not\subseteq \Lambda$ , и *преобразования*, если  $\Lambda^* \subseteq \Lambda$ . В дальнейшем, за исключением особо оговоренных случаев, будет предполагаться, что  $\Lambda^* \subseteq \Lambda$ , то есть мы будем рассматривать преобразования, действующие в  $\Lambda$ .

**Определение 8.1.2.** Оператор  $y = \hat{A}x$  называется *линейным*, если для

любых  $x, x_1, x_2 \in \Lambda$  и любого числа  $\lambda$  имеют место равенства

$$1^\circ. \quad \hat{A}(x_1 + x_2) = \hat{A}x_1 + \hat{A}x_2 \text{ и}$$

$$2^\circ. \quad \hat{A}(\lambda x) = \lambda \hat{A}x.$$

**Пример 8.1.1.** 1°. В пространстве 2-мерных векторов линейным оператором является правило

$$\begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{vmatrix},$$

связывающее вектор-прообраз  $x = \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{vmatrix}$  с вектором-

$$\text{образом } y = \begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{vmatrix}.$$

2°. В пространстве бесконечно дифференцируемых функций линейным оператором является операция дифференцирования, ставящая в соответствие каждому элементу этого пространства его производную функцию.

3°. В пространстве многочленов  $P_n(\tau)$  линейным оператором является операция умножения многочлена на независимую переменную  $\tau$ .

**Задача 8.1.1.** *Доказать, что операторы в примерах 1°, 2° и 3° являются линейными.*

**Задача 8.1.2.** *Является ли линейным оператор  $\hat{A}$ , ставящий каждому элементу  $x \in \Lambda$  в соответствие фиксированный элемент  $a \in \Lambda$ ?*

**Решение.** Если элемент  $a = o$ , то  $\hat{A}$  – линейный оператор, действующий в  $\Lambda$ .

## § 8.2. Действия с линейными операторами

**Определение 8.2.1.** Линейные операторы  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  называются *равными*, если  $\forall x \in \Lambda : \hat{A}x = \hat{B}x$ . Равенство операторов обозначается как  $\hat{A} = \hat{B}$ .

*Суммой* линейных операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  называется оператор  $\hat{C}$ , обозначаемый  $\hat{A} + \hat{B}$ , ставящий каждому элементу  $x$  линейного пространства  $\Lambda$  в соответствие элемент  $\hat{A}x + \hat{B}x$ .

**Лемма 8.2.1.** **Сумма двух линейных операторов является линейным оператором.**

Доказательство.

Пусть  $x, y \in \Lambda$  и  $\lambda, \mu$  – числа, а  $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$ , тогда

$$\begin{aligned}\hat{C}(\lambda x + \mu y) &= A(\lambda x + \mu y) + \hat{B}(\lambda x + \mu y) = \\ &= \lambda \hat{A}x + \mu \hat{A}y + \lambda \hat{B}x + \mu \hat{B}y = \\ &= \lambda(\hat{A}x + \hat{B}x) + \mu(\hat{A}y + \hat{B}y) = \\ &= \lambda(\hat{A} + \hat{B})x + \mu(\hat{A} + \hat{B})y = \lambda \hat{C}x + \mu \hat{C}y.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

**Определение 8.2.2.** *Нулевым* оператором  $\hat{O}$  называется оператор, ставящий каждому элементу  $x$  линейного пространства  $\Lambda$  в соответствие нулевой элемент этого линейного пространства.

**Определение 8.2.3.** Оператором, противоположным оператору  $\hat{A}$ , называется оператор, обозначаемый  $-\hat{A}$ , ставящий каждому  $x$  элементу линейного пространства  $\Lambda$  в соответствие элемент  $-(\hat{A}x)$ .

Заметим, что нулевой и противоположный операторы являются линейными.

Легко проверяются следующие равенства для линейных операторов:

$$\begin{aligned}\hat{A} + \hat{B} &= \hat{B} + \hat{A}; \\ (\hat{A} + \hat{B}) + \hat{C} &= \hat{A} + (\hat{B} + \hat{C}); \\ \hat{A} + \hat{O} &= \hat{A}; \quad \hat{A} + (-\hat{A}) = \hat{O}.\end{aligned}$$

**Определение 8.2.4.** Произведением числа  $\lambda$  на линейный оператор  $\hat{A}$  называется оператор, обозначаемый  $\lambda\hat{A}$ , ставящий каждому элементу  $x$  линейного пространства  $\Lambda$  в соответствие элемент  $\lambda(\hat{A}x)$ .

**Лемма 8.2.2.** Произведение линейного оператора на число является линейным оператором, для которого выполняются соотношения

$$\begin{aligned}\alpha(\beta\hat{A}) &= (\alpha\beta)\hat{A}; \quad 1\hat{A} = \hat{A}; \\ (\alpha + \beta)\hat{A} &= \alpha\hat{A} + \beta\hat{A}; \\ \alpha(\hat{A} + \hat{B}) &= \alpha\hat{A} + \alpha\hat{B}.\end{aligned}$$

Доказательство.

Утверждение леммы проверяется непосредственно. Например, для третьего равенства имеем

$$\begin{aligned}\forall x \in \Lambda: (\alpha + \beta)\hat{A}x &= \\ &= \hat{A}((\alpha + \beta)x) = \hat{A}(\alpha x + \beta x) = \alpha\hat{A}x + \beta\hat{A}x.\end{aligned}$$

**Теорема 8.2.1.** **Множество всех линейных операторов, действующих в линейном пространстве  $\Lambda$ , является линейным пространством.**

**Доказательство.**

Следует из определений 7.1.1, 8.2.1–8.2.4 и лемм 8.2.1, 8.2.2.

**Определение 8.2.5.** *Произведением линейных операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  называется оператор, обозначаемый  $\hat{A}\hat{B}$ , ставящий каждому элементу  $x$  линейного пространства  $\Lambda$  в соответствие элемент  $\hat{A}(\hat{B}x)$ .*

**Теорема 8.2.2.** **Произведение линейных операторов является линейным оператором, для которого справедливы соотношения**

$$\begin{aligned}\hat{A}(\hat{B}\hat{C}) &= (\hat{A}\hat{B})\hat{C}; \quad \hat{A}(\hat{B} + \hat{C}) = \hat{A}\hat{B} + \hat{A}\hat{C}; \\ (\hat{A} + \hat{B})\hat{C} &= \hat{A}\hat{C} + \hat{B}\hat{C}.\end{aligned}$$

**Доказательство.**

Докажем вначале линейность произведения линейных операторов. Действительно,  $\forall x, y \in \Lambda$  и любых чисел  $\alpha, \beta$

$$\begin{aligned}\hat{A}\hat{B}(\alpha x + \beta y) &= \hat{A}(\alpha \hat{B}x + \beta \hat{B}y) = \\ &= \alpha \hat{A}(\hat{B}x) + \beta \hat{A}(\hat{B}y) = \alpha(\hat{A}\hat{B})x + \beta(\hat{A}\hat{B})y.\end{aligned}$$

Проверим теперь сочетательный закон для произведения линейных операторов. Имеем

$$(\hat{A}(\hat{B}\hat{C}))x = \hat{A}(\hat{B}\hat{C}x) = \hat{A}(\hat{B}(\hat{C}x)),$$

но, с другой стороны,

$$((\hat{A}\hat{B})\hat{C})x = \hat{A}\hat{B}(\hat{C}x) = \hat{A}(\hat{B}(\hat{C}x)),$$

что и требовалось показать. Остальные утверждения теоремы проверяются аналогично.

**Теорема доказана.**

**Замечание:** в общем случае произведение линейных операторов не обладает *перестановочным свойством* (или, иначе говоря, *операторы не коммутируют*), то есть  $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$ .

**Определение** Оператор  $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$  называется *коммутатором* 8.2.6. операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$ .

Коммутатор коммутирующих операторов есть *нулевой* оператор.

**Задача 8.2.1.** В линейном пространстве алгебраических многочленов

$P_n(\tau) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \tau^k$  найти коммутатор для операторов:

$\hat{A}$ , ставящего в соответствие многочлену его производную функцию, и  $\hat{B}$  – оператора умножения многочлена на независимую переменную.

**Решение.** Построим оператор  $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ . Для любого  $P_n(\tau)$  имеем

$$\hat{A}P_n(\tau) = \frac{d}{d\tau} P_n(\tau) = \frac{d}{d\tau} \left( \sum_{k=0}^n \alpha_k \tau^k \right) = \sum_{k=1}^n k \alpha_k \tau^{k-1},$$

$$\hat{B}P_n(\tau) = \tau \left( \sum_{k=0}^n \alpha_k \tau^k \right) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \tau^{k+1}.$$

Откуда получаем

$$\hat{B}(\hat{A}P_n(\tau)) = \tau \left( \sum_{k=1}^n k \alpha_k \tau^{k-1} \right) = \sum_{k=1}^n k \alpha_k \tau^k = \sum_{k=0}^n k \alpha_k \tau^k$$

$$A(\hat{B}P_n(\tau)) = \frac{d}{d\tau} \left( \sum_{k=0}^n \alpha_k \tau^{k+1} \right) = \sum_{k=0}^n (k+1) \alpha_k \tau^k,$$

$$\begin{aligned}
 (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})P_n(\tau) &= \left( \sum_{k=0}^n (k+1)\alpha_k \tau^k \right) - \left( \sum_{k=0}^n k\alpha_k \tau^k \right) = \\
 &= \sum_{k=0}^n \alpha_k \tau^k = P_n(\tau).
 \end{aligned}$$

Следовательно, данные линейные операторы не коммутируют.

В рассмотренной выше задаче 8.2.1 оказалось, что действие оператора  $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$  на любой элемент линейного пространства многочленов не приводит к изменению этого элемента. Введем для такого оператора специальное наименование.

**Определение 8.2.7.** Оператор  $\hat{E}$  называется *единичным* (или  *тождественным*) оператором, если каждому элементу  $x$  линейного пространства  $\Lambda$  он ставит в соответствие тот же самый элемент, то есть

$$\hat{E}x = x \quad \forall x \in \Lambda.$$

Докажите самостоятельно справедливость соотношений:  
 $\hat{A}\hat{E} = \hat{E}\hat{A} = \hat{A} \quad \forall \hat{A}$ , а также линейность и единственность  $\hat{E}$ .

**Определение 8.2.8.** Оператор  $\hat{B}$  называется *обратным* оператору  $\hat{A}$  и обозначается  $\hat{A}^{-1}$ , если  $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A} = \hat{E}$ .

**Пример 8.2.1.** В линейном пространстве функций  $f(\tau)$ , имеющих на  $[\alpha, \beta]$  производную любого порядка и удовлетворяющих условиям  $f^{(k)}(\alpha) = 0$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots$ , оператор дифференцирования  $\hat{A}f = \frac{df}{d\tau}$  и  $\hat{B}f = \int_{\alpha}^{\tau} f(\sigma) d\sigma$  – оператор

интегрирования с переменным верхним пределом являются взаимно обратными.

Действительно,

$$\hat{A}\hat{B}f = \frac{d}{d\tau} \int_{\alpha}^{\tau} f(\sigma) d\sigma = f(\tau) = \hat{E}f \quad \text{и}$$

$$\hat{B}\hat{A}f = \int_{\alpha}^{\tau} \frac{df}{d\sigma} d\sigma = f(\tau) - f(a) = f(\tau) = \hat{E}f .$$

**Замечания.** 1°. Не для всякого линейного оператора существует обратный оператор. Например, нулевой оператор  $\hat{O}$  не имеет обратного. Действительно, пусть  $\hat{O}x = o$  при всех  $\forall x \in \Lambda$ , тогда для любого  $\hat{B}$  имеет место

$$(\hat{B}\hat{O})x = \hat{B}(\hat{O}x) = o \quad \forall x \in \Lambda ,$$

и, следовательно, равенство  $\hat{B}\hat{O} = \hat{E}$  не выполняется ни при каком  $\hat{B}$ .

2°. Обратный оператор, если существует, то только единственный. (Покажите это самостоятельно, используя как аналог доказательство леммы 5.1.1.)

3°. В случае бесконечномерного линейного пространства из справедливости условия  $\hat{A}\hat{B} = \hat{E}$  может не следовать выполнение условия  $\hat{B}\hat{A} = \hat{E}$ , что имеет место, например, в пространстве многочленов

$$P_n(\tau) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \tau^k$$

для пары операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$ , где  $\hat{B}$  есть оператор умножения многочлена на независимую пере-

менную, а оператор  $\hat{A}$  многочлену  $\sum_{k=0}^n \alpha_k \tau^k$  ставит в

соответствие многочлен  $\sum_{k=1}^n \alpha_k \tau^{k-1}$ .

### § 8.3. Координатное представление линейных операторов

Пусть в  $\Lambda^n$  заданы базис  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  и линейный оператор  $\hat{A}$  являющийся отображением в  $\Lambda^m$  с базисом  $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ .

В § 7.2 показано, что  $\forall x \in \Lambda^n$  существует единственное разложение

$$x = \sum_{i=1}^n \xi_i g_i, \text{ то есть } \|x\|_g = \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{vmatrix}, \text{ Аналогично в } \Lambda^m \text{ существует}$$

единственное разложение для  $y = \hat{A}x$ , для которого в силу линейности  $\hat{A}$  справедливо представление вида

$$y = \hat{A}x = \hat{A}\left(\sum_{i=1}^n \xi_i g_i\right) = \sum_{i=1}^n \xi_i \hat{A}g_i.$$

Приняв во внимание возможность и единственность в  $\Lambda^m$  разложения  $\hat{A}g_i = \sum_{k=1}^m \alpha_{ki} f_k \quad \forall i = [1, n]$ , с одной стороны, получаем, что

$$y = \sum_{k=1}^m \left( \sum_{i=1}^n \alpha_{ki} \xi_i \right) f_k.$$

С другой стороны, если  $\|y\|_f = \begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_m \end{vmatrix}$  – координатное представление,

то имеет место равенство  $y = \sum_{k=1}^m \eta_k f_k$ . Наконец, в силу единственности разложения элемента конечномерного пространства по базису получаем

$$\eta_k = \sum_{i=1}^n \alpha_{ki} \xi_i ; k = [1, m].$$

Данные соотношения позволяют находить координатное представление образов элементов линейного пространства по координатному представлению прообраза. При этом отметим, что каждый линейный оператор вида  $\hat{A} : \Lambda^n \rightarrow \Lambda^m$  в паре конкретных базисов полностью и однозначно описывается матрицей размера  $m \times n$  с элементами  $\alpha_{ki}$ .

**Определение 8.3.1.** Матрица размера  $m \times n$ , столбцы которой образованы компонентами элементов  $\hat{A}g_i$ :

$$\|\hat{A}\|_{fg} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{vmatrix},$$

называется *матрицей линейного оператора*  $\hat{A}$  в базисах

$$\{g_1, g_2, \dots, g_n\} \in \Lambda^n \text{ и } \{f_1, f_2, \dots, f_m\} \in \Lambda^m.$$

В матричной форме соотношения  $\eta_k = \sum_{i=1}^n \alpha_{ki} \xi_i ; k = [1, m]$  имеют вид

$$\|y\|_f = \|\hat{A}\|_{fg} \|x\|_g, \quad (8.3.1)$$

в чем легко убедиться, воспользовавшись их двухиндексной формой записи:

$$\eta_{k1} = \sum_{i=1}^n \alpha_{ki} \xi_{i1} ; k = [1, m].$$

Полученный результат формулируется как

**Теорема 8.3.1.** **Между множеством всех линейных операторов вида  $\hat{A} : \Lambda^n \rightarrow \Lambda^m$  и множеством всех матриц размера  $m \times n$  имеется взаимно однозначное соответствие.**

Доказательство.

Выше было показано, что каждому линейному оператору для конкретной пары базисов  $\hat{A} : \Lambda^n \rightarrow \Lambda^m$  можно сопоставить по определению 8.3.1 матрицу размера  $m \times n$ .

С другой стороны, соотношение

$$\begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{vmatrix}$$

может быть принято за определение некоторого оператора вида  $\hat{A} : \Lambda^n \rightarrow \Lambda^m$ , линейность которого следует из правил операций с матрицами.

Теорема доказана.

Пример 8.3.1. 1°. В трехмерном векторном пространстве с ортонормированным базисом рассмотрим линейный оператор, ортогонально проектирующий радиусы-векторы на плоскость  $Oxy$ . Поскольку в данном случае

$$\begin{aligned}\hat{A} \vec{g}_1 &= 1 \vec{g}_1 + 0 \vec{g}_2 + 0 \vec{g}_3 \\ \hat{A} \vec{g}_2 &= 0 \vec{g}_1 + 1 \vec{g}_2 + 0 \vec{g}_3, \text{ то } \|\hat{A}\|_g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \\ \hat{A} \vec{g}_3 &= 0 \vec{g}_1 + 0 \vec{g}_2 + 0 \vec{g}_3\end{aligned}$$

### Действия с линейными операторами в матричной форме

Будем рассматривать далее операторы вида  $\hat{A}: \Lambda^n \rightarrow \Lambda^n$ , то есть линейные преобразования, действующие в  $\Lambda^n$  с базисом  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ , матрица которых квадратная, порядка  $n$ . Введенные в § 1.1 и § 5.1 операции с матрицами позволяют описать в конкретном базисе действия с линейными операторами в следующей форме.

$$1^\circ. \text{ Сравнение операторов: } \hat{A} = \hat{B} \Leftrightarrow \|\hat{A}\|_g = \|\hat{B}\|_g$$

Согласно определению 8.2.1 условие  $\hat{A} = \hat{B}$  означает, что  $\forall x \in \Lambda^n: \hat{A}x = \hat{B}x$ , или в координатной форме

$$\|\hat{A}\|_g \|x\|_g = \|\hat{B}\|_g \|x\|_g \quad \forall x \in \Lambda^n.$$

Но тогда по лемме 5.1.2 матрица  $\|\hat{A}\|_g - \|\hat{B}\|_g$  нулевая и,

следовательно, условие  $\hat{A} = \hat{B}$  равносильно

$$\|\hat{A}\|_g = \|\hat{B}\|_g.$$

2°. Сложение операторов:  $\|\hat{A} + \hat{B}\|_g = \|\hat{A}\|_g + \|\hat{B}\|_g$ .

Действительно, из  $\hat{A}g_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} g_k$  и  $\hat{B}g_i = \sum_{k=1}^n \beta_{ki} g_k$

следует, что

$$\begin{aligned} (\hat{A} + \hat{B})g_i &= \hat{A}g_i + \hat{B}g_i = \\ &= \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} g_k + \sum_{k=1}^n \beta_{ki} g_k = \sum_{k=1}^n (\alpha_{ki} + \beta_{ki}) g_k. \end{aligned}$$

3°. Умножение оператора на число:  $\|\lambda \hat{A}\|_g = |\lambda| \|\hat{A}\|_g$ .

Из  $\hat{A}g_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} g_k$  для любого числа  $\lambda$  находим, что

$$(\lambda \hat{A})g_i = \hat{A}(\lambda g_i) = \sum_{k=1}^n (\lambda \alpha_{ki}) g_k.$$

4°. Произведение операторов:  $\|\hat{A}\hat{B}\|_g = \|\hat{A}\|_g \|\hat{B}\|_g$ .

По определению матрицы линейного оператора имеем

$$\begin{aligned} (\hat{A}\hat{B})g_i &= \hat{A}(\hat{B}g_i) = \hat{A}(\sum_{k=1}^n \beta_{ki} g_k) = \\ &= \sum_{k=1}^n \beta_{ki} \hat{A}g_k = \sum_{k=1}^n \beta_{ki} \sum_{j=1}^n \alpha_{jk} g_j = \sum_{j=1}^n \kappa_{ji} g_j, \end{aligned}$$

где  $\kappa_{ji} = \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} \beta_{ki}$ , что совпадает с определением произведения матриц 5.1.1.

**5°. Обращение операторов:**  $\|\hat{A}^{-1}\|_g = \|\hat{A}\|_g^{-1}$ .

Будем предполагать, что обратный оператор существует. Поскольку из определения 8.2.8 следует, что

$\hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{E}$ , принимая во внимание результат пункта 3°, получаем, что искомое матричное представление  $\|\hat{A}^{-1}\|_g$  оператора  $\hat{A}^{-1}$  должно удовлетворять соотношениям  $\|\hat{A}^{-1}\|_g \|\hat{A}\|_g = \|\hat{A}\|_g \|\hat{A}^{-1}\|_g = \|\hat{E}\|_g$ , то есть являться обратной матрицей к матрице  $\|\hat{A}\|_g$ .

**Следствие** **Размерность линейного пространства линейных отображений вида  $\Lambda^n \rightarrow \Lambda^m$  равна  $m \times n$ .**

Доказательство.

Из теоремы 8.3.1 и правил действий с линейными операторами в матричной форме следует изоморфизм линейного пространства линейных операторов  $\Lambda^n \rightarrow \Lambda^m$  и линейного пространства всех матриц размера  $m \times n$ . Но тогда по теореме 7.5.1 (*об изоморфизме*) их размерности равны.

Следствие доказано.

**Изменение матрицы линейного оператора при замене базиса**

Выясним, как меняется  $\|\hat{A}\|_{fg}$  – матрица линейного отображения  $\hat{A} : \Lambda^n \rightarrow \Lambda^m$  при замене базисов. Пусть в  $\Lambda^n$  даны два базиса  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  и  $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$ ,

связанные матрицей перехода  $\|G\|$ , а в  $\Lambda^m$  – два базиса

$$\{f_1, f_2, \dots, f_m\} \text{ и } \{f'_1, f'_2, \dots, f'_m\}$$

с матрицей перехода  $\|F\|$ . Найдем соотношение, связывающее  $\|\hat{A}\|_{fg}$  и  $\|\hat{A}\|_{f'g'}$ .

В этом случае справедлива

Теорема 8.3.2. **Матрица линейного оператора  $\|\hat{A}\|_{f'g'}$  в базисах**

$\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$  и  $\{f'_1, f'_2, \dots, f'_m\}$  связана с матрицей

этого же оператора  $\|\hat{A}\|_{fg}$  в базисах  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  и

$\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$  соотношением

$$\|\hat{A}\|_{f'g'} = \|F\|^{-1} \|\hat{A}\|_{fg} \|G\|.$$

Доказательство.

По теореме 7.3.1 при переходе от базиса  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  к базису  $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$  компоненты элементов  $x$  – прообраза, и  $y$  – образа при действии оператора  $\hat{A}$ , в этих базисах связаны равенствами  $\|x\|_g = \|G\| \|x\|_{g'}$  и  $\|y\|_f = \|F\| \|y\|_{f'}$ , где

$$\|x\|_g = \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{vmatrix}; \quad \|x'\|_{g'} = \begin{vmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \dots \\ \xi'_n \end{vmatrix},$$

$$\text{а } \left\| y \right\|_f = \begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_m \end{vmatrix}; \quad \left\| y \right\|_{f'} = \begin{vmatrix} \eta'_1 \\ \eta'_2 \\ \dots \\ \eta'_m \end{vmatrix}.$$

При этом в рассматриваемых базисах образы и прообразы элементов связаны соотношениями

$$\left\| y \right\|_f = \left\| \hat{A} \right\|_{fg} \left\| x \right\|_g \quad \text{и} \quad \left\| y \right\|_{f'} = \left\| \hat{A} \right\|_{f'g'} \left\| x \right\|_{g'},$$

но поскольку матрица перехода имеет обратную, то из выписанных соотношений последовательно получаем

$$\begin{aligned} \left\| y \right\|_{f'} &= \left\| F \right\|^{-1} \left\| y \right\|_f = \left\| F \right\|^{-1} \left\| \hat{A} \right\|_{fg} \left\| x \right\|_g = \\ &= \left\| F \right\|^{-1} \left\| \hat{A} \right\|_{fg} \left\| G \right\| \left\| x \right\|_{g'}. \end{aligned}$$

Наконец, приходим к равенству

$$\left( \left\| \hat{A} \right\|_{f'g'} - \left\| F \right\|^{-1} \left\| \hat{A} \right\|_{fg} \left\| G \right\| \right) \left\| x \right\|_{g'} = \left\| o \right\|,$$

из которого в силу произвольности столбца  $\left\| x \right\|_{g'}$  и леммы 5.1.2 следует утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Следствие  
8.3.2.

**Матрица линейного преобразования при переходе от базиса  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  к базису  $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$  в  $\Lambda^n$  изменяется по правилу**

$$\left\| \hat{A} \right\|_{g'} = \left\| S \right\|^{-1} \left\| \hat{A} \right\|_g \left\| S \right\|.$$

Следствие 8.3.3. **Определитель матрицы линейного преобразования не зависит от выбора базиса в  $\Lambda^n$ .**

Доказательство.

Из утверждения теоремы 8.3.2 следует

$$\det \|\hat{A}\|_{g'} = \det (\|S\|^{-1} \|\hat{A}\|_g \|S\|),$$

но поскольку

$$\det (\|S\|^{-1} \|\hat{A}\|_g \|S\|) = (\det \|S\|^{-1})(\det \|\hat{A}\|_g)(\det \|S\|)$$

$$\text{и } \det \|S\|^{-1} = \frac{1}{\det \|S\|},$$

а  $\det \|S\| \neq 0$ , то окончательно получаем, что

$$\det \|\hat{A}\|_{g'} = \det \|\hat{A}\|_g.$$

Следствие доказано.

Отметим, наконец, что в силу теоремы 8.3.2 в любом базисе нулевой оператор будет иметь нулевую матрицу, а единичный оператор – единичную.

## § 8.4. Область значений и ядро линейного оператора

Трактуя линейный оператор, действующий в линейном пространстве как некоторое обобщение понятия функции, естественно рассмотреть вопрос об области определения и области значений линейных операторов.

Под *областью значений линейного оператора  $\hat{A}$*  будем понимать множество образов всех элементов  $x \in \Lambda$ , то есть элементов вида  $\hat{A}x$ . В этом случае очевидно, что для любого линейного оператора его область определения совпадает с  $\Lambda$ .

Ответ на вопрос: “Что представляет собой область значений линейного оператора?” дает

Теорема  
8.4.1.

Пусть  $\hat{A}$  – линейный оператор, действующий в линейном пространстве  $\Lambda$ . Тогда

**1°.** Множество элементов  $\hat{A}x \forall x \in \Lambda$  есть подпространство в  $\Lambda$ .

**2°.** Если, кроме того,  $\Lambda = \Lambda^n$  с базисом  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ ,

то размерность этого подпространства равна

$$\operatorname{rg} \|\hat{A}\|_g.$$

Доказательство.

Пусть  $\Lambda^*$  есть множество элементов вида  $\hat{A}x$  и пусть  $y_1, y_2 \in \Lambda^*$ . Тогда существуют  $x_1 \in \Lambda$  и  $x_2 \in \Lambda$ , такие, что  $\hat{A}x_1 = y_1$  и  $\hat{A}x_2 = y_2$ . По свойству линейности оператора  $\hat{A}$  имеем

$$y_1 + y_2 = \hat{A}x_1 + \hat{A}x_2 = \hat{A}(x_1 + x_2) \in \Lambda^*.$$

Аналогично  $\lambda y = \lambda \hat{A}x = \hat{A}(\lambda x) \in \Lambda^*$  и потому  $\Lambda^*$  есть подпространство  $\Lambda$ .

Пусть теперь  $\Lambda = \Lambda^n$  с базисом  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ . Поскольку каждый элемент  $x \in \Lambda$  есть линейная комбинация базисных элементов, то соответственно в силу линейности каждый элемент из области значений  $\hat{A}$  есть *та же* линейная комбинация элементов  $\hat{A}g_1, \hat{A}g_2, \dots, \hat{A}g_n$ , то есть  $\Lambda^*$  – линейная оболочка множества  $\{\hat{A}g_1, \hat{A}g_2, \dots, \hat{A}g_n\}$ .

Выделим из множества  $\{\hat{A}g_1, \hat{A}g_2, \dots, \hat{A}g_n\}$  максимальное подмножество линейно независимых элементов, и пусть число их оказалось равным  $k$ .

Тогда, применяя теорему 7.4.1, приходим к заключению, что размерность  $\Lambda^*$  есть  $k$ , а из теоремы 7.5.2 следует, что и

$$\operatorname{rg} \|\hat{A}\|_g = k.$$

Теорема доказана.

**Определение 8.4.1.** Рангом линейного оператора  $\hat{A}$  в  $\Lambda^n$  называется размерность его области значений.

Ранг линейного оператора  $\hat{A}$  обозначается как  $\operatorname{rg} \hat{A}$ .

**Следствие 8.4.1.**  $\operatorname{rg} \hat{A} = \operatorname{rg} \|\hat{A}\|_g \leq n$  и не зависит от выбора базиса.

**Следствие 8.4.2.** Размерность области значений линейного оператора  $\hat{A}$ , действующего на некотором подпространстве линейного пространства  $\Lambda^* \subseteq \Lambda$ , не превосходит  $\dim(\Lambda^*)$ .

Доказательство.

Поскольку подпространство  $\Lambda^*$  является линейным пространством, то к нему применима теорема 8.4.1.

Следствие доказано.

**Теорема 8.4.2.** Ранг произведения линейных операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  не превосходит ранга каждого из этих операторов.

Доказательство.

Рассмотрим область значений линейного оператора  $\hat{A}\hat{B}$ . По следствию 8.4.2 это подпространство имеет размерность не большую, чем размерность области значений оператора  $\hat{B}$ .

С другой стороны, область значений оператора  $\hat{A}\hat{B}$  содержиться в области значений оператора  $\hat{A}$ , и, следовательно, размерность области значений  $\hat{A}\hat{B}$  не превосходит размерности области значений  $\hat{A}$ .

Теорема доказана.

**Теорема** Если квадратная матрица  $\| A \|$  невырожденная, то для 8.4.3.

любой квадратной матрицы  $\| B \|$  того же размера

$$\operatorname{rg}(\| A \| \| B \|) = \operatorname{rg}(\| B \| \| A \|) = \operatorname{rg} \| B \|.$$

Доказательство.

Будем рассматривать матрицы  $\| A \|$  и  $\| B \|$  как координатные представления линейных операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  в некотором базисе.

Если  $\det \| A \| \neq 0$ , то существует  $\| A \|^{-1}$  и в силу теоремы 8.4.2 имеем, с одной стороны,  $\operatorname{rg}(\| A \| \| B \|) \leq \operatorname{rg} \| B \|$ , но с другой –  $\operatorname{rg} \| B \| = \operatorname{rg}(\| A \|^{-1} \| A \| \| B \|) \leq \operatorname{rg}(\| A \| \| B \|)$ .

Поэтому  $\operatorname{rg}(\| A \| \| B \|) = \operatorname{rg}(\| B \| \| A \|) = \operatorname{rg} \| B \|$ .

Теорема доказана.

Замечания. 1°. Если матрица  $\|B\|$  не квадратная, но существует одно из произведений  $\|A\|\|B\|$  или  $\|B\|\|A\|$ , то при  $\det\|A\| \neq 0$  также верны равенства  $\operatorname{rg}(\|A\|\|B\|) = \operatorname{rg}\|B\|$  или соответственно  $\operatorname{rg}(\|B\|\|A\|) = \operatorname{rg}\|B\|$ .

В этом можно убедиться, заменив матрицу  $\|B\|$  матрицей  $\|B\|^*$ , являющейся дополнением нулевыми столбцами или нулевыми строками  $\|B\|$  до квадратной так, чтобы существовали  $\|A\|\|B\|^*$  или  $\|B\|^*\|A\|$ , ибо очевидно, что

$$\operatorname{rg}\|B\|^* = \operatorname{rg}\|B\|.$$

2°. Ранг произведения матриц может быть меньше рангов каждого из сомножителей. Например:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Другой важной характеристикой линейного оператора является совокупность элементов линейного пространства  $\Lambda$ , называемая *ядром* линейного оператора и обозначаемая  $\ker \hat{A}$ .

Определение  
8.4.2.

**Ядро** линейного оператора  $\hat{A}$  состоит из элементов  $x \in \Lambda$ , таких, что  $\hat{A}x = o$ .

**Теорема 8.4.4.** Если  $\Lambda = \Lambda^n$  и  $\operatorname{rg} \hat{A} = r$ , то  $\ker \hat{A}$  есть подпространство и  $\dim(\ker \hat{A}) = n - r$ .

Доказательство.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что для  $\ker \hat{A}$  выполняются условия определения 7.4.1.

Пусть в базисе  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  оператор  $\hat{A}$  имеет матрицу  $\|\hat{A}\|_g = \|\alpha_{ij}\|$ . По следствию 8.4.1  $\operatorname{rg} \|\hat{A}\|_g = r$  для любого базиса. Тогда в координатной форме условие принадлежности

некоторого элемента  $x \in \Lambda^n$  с  $\|x\|_g = \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{vmatrix}$  ядру оператора

$\hat{A}$  имеет вид  $\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_j = 0 ; i = [1, n]$ .

С другой стороны, поскольку каждое решение однородной системы линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_j = 0 ; i = [1, n]$$

является элементом ядра оператора  $\hat{A}$ , то размерность ядра есть максимальное число линейно независимых решений этой системы уравнений, которое, согласно теореме 6.7.1, равно  $n - \operatorname{rg} \|\hat{A}\|_g = n - r$ .

Теорема доказана.

## Типы линейных отображений

Как было отмечено в § 8.1, в тех случаях, когда область значений оператора не принадлежит области определения, следует говорить об отображении.

В § 7.5 было использовано понятие взаимно однозначного отображения, называемого иногда *биекцией*. Для отображений также выделяются специальные случаи так называемых *инъективных* и *сюръективных* отображений. Рассмотрим эти случаи подробнее.

**Определение 8.4.3.**

Отображение  $y = \hat{A}x$ ,  $x \in \Omega$ ,  $y \in \Theta$  множества  $\Omega$  в множество  $\Theta$  называется *инъективным* (или *инъекцией*), если из условия  $\hat{A}x_1 = \hat{A}x_2$  вытекает  $x_1 = x_2$ ,  $x_1, x_2 \in \Omega$ .

В случае инъекции множество всех значений оператора  $y = \hat{A}x$ ,  $x \in \Omega$ ,  $y \in \Theta$  может не совпадать с  $\Theta$ .

**Определение 8.4.4.**

Отображение  $y = \hat{A}x$ ,  $x \in \Omega$ ,  $y \in \Theta$  множества  $\Omega$  на множество  $\Theta$  называется *сюръективным* (или *сюръекцией*), если каждый элемент из  $\Theta$  имеет прообраз в  $\Omega$ .

В случае сюръекции прообраз любого элемента из  $\Theta$  всегда существует в  $\Omega$ , но, вообще говоря, он не единственен. В таблице 8.4.1 для сравнения приведены примеры отображений различных типов.

Заметим, что в частном случае, когда линейный оператор  $\hat{A}$  отображает элементы  $\Lambda^n$  в элементы  $\Lambda^n$  с базисом  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ , то есть является преобразованием в  $\Lambda^n$ , оказывается возможным следующее дополнение к определению 8.3.1.

Таблица 8.4.1

## Примеры отображений различных типов

Тип отображения	Инъективное	Неинъективное
Сюръективное		
Несюръективное		

Определение 8.4.5. Квадратная матрица  $\|\hat{A}\|_g$  порядка  $n$ , столбцы которой есть координатные представления элементов

$$\hat{A}g_1, \hat{A}g_2, \dots, \hat{A}g_n$$

в базисе  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ , называется *матрицей линейного преобразования*  $\hat{A}$  в базисе  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ .

Отметим также, что в конечномерном случае сюръективность отображения  $\hat{A}: \Lambda^n \rightarrow \Lambda^m$  означает выполнение условия  $\Theta = \Lambda^m$ , а инъективность – условия  $\ker \hat{A} = \{o\}$ . Откуда следует, что справедлива

**Теорема 8.4.5.** Ранг матрицы линейного оператора, являющегося сюръективным отображением, равен числу ее строк, а ранг матрицы инъективного отображения равен числу ее столбцов.

Доказательство.

1°. Пусть в базисах  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  и  $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$  отображение  $\hat{A} : \Lambda^n \rightarrow \Lambda^m$  имеет матрицу  $\|\hat{A}\|_{fg}$ , причем  $\text{rg } \|\hat{A}\|_{fg} = m$ . Тогда система линейных уравнений вида  $\|\hat{A}\|_{fg} \|x\|_g = \|y\|_f$  по теореме 6.6.1 (Кронекера–Капелли) имеет решение  $\forall \|y\|_f \in \Lambda^m$ , поскольку для ее расширенной матрицы  $\text{rg } \|\hat{A}\|_y = m$ . Значит, для  $\hat{A}$  каждый образ имеет хотя бы один прообраз и  $\hat{A}$  – сюръективно.

2°. Пусть  $\text{rg } \|\hat{A}\|_{fg} = n$ . Тогда, по теореме 6.4.1 (Крамера), система линейных уравнений вида  $\|\hat{A}\|_{fg} \|x\|_g = \|o\|_f$  имеет единственное решение, которое очевидно тривиальное. Поэтому  $\hat{A}$  – инъективно.

Теорема доказана.

Наконец, отображение, являющееся одновременно и инъективным и сюръективным, будет взаимно однозначным, или биекцией (см. определение 5.2.4).

В общем случае, исследование свойств оператора, у которого область значений не содержится в области его определения, может оказаться достаточно сложной задачей. Если же область значений принадлежит конечномерному линейному пространству, то пользуясь

теоремой 7.5.1 (*об изоморфизме*), можно попытаться свести исследование отображения к исследованию преобразования, установив изоморфизм между областью значений отображения и некоторым подпространством области его определения.

**Пример 8.4.1.** Оператор  $\overset{\Lambda}{\text{Pr}}$ , ставящий в соответствие каждой точке трехмерного геометрического пространства ее ортогональную проекцию на некоторую фиксированную прямую, проходящую через начало координат, очевидно, есть отображение  $\Lambda^3 \rightarrow \Lambda^1$ , которое, однако, можно рассматривать и как преобразование трехмерного пространства в одномерное подпространство.

Отметим, что, хотя в данном случае и отображение и преобразование реализуют геометрически одну и ту же функцию, вид задающих их матриц может быть различным.

Например, пусть в ортонормированной системе координат  $\{O, \overset{\rightarrow}{e}_1, \overset{\rightarrow}{e}_2, \overset{\rightarrow}{e}_3\}$  прямая, на которую выполняется ортогональное проектирование, задана направляю-

щим вектором  $\left\| \overset{\rightarrow}{e}_1^* \right\| = \left\| 1 \ 1 \ 1 \right\|^T$ .

Несложно убедиться, что радиус-вектор  $\overset{\rightarrow}{r}^*$  ортого-

нальной проекции точки с  $\left\| \overset{\rightarrow}{r} \right\|_e = \left\| \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right\|$  равен

$$\overset{\rightarrow}{r}^* = \frac{(\overset{\rightarrow}{r}, \overset{\rightarrow}{e}^*)}{\left\| \overset{\rightarrow}{e}^* \right\|^2} \overset{\rightarrow}{e}^*,$$

или  $\begin{vmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x+y+z}{3} \\ \frac{x+y+z}{3} \\ \frac{x+y+z}{3} \end{vmatrix}$ , то есть матрица преобразования

$$\overset{\Lambda}{\Pr} \text{ имеет вид } \left\| \overset{\Lambda}{\Pr} \right\|_e = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Но, с другой стороны, приняв вектор  $e_1^*$  за базисный в  $\Lambda^1$ , получим, согласно определению 8.4.5, матрицу отображения  $\overset{\Lambda}{\Pr}$  в виде

$$\left\| \overset{\Lambda}{\Pr} \right\|_{e^* e} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

2°. Пусть линейный оператор  $\hat{A}$  ставит в соответствие

каждой матрице второго порядка  $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$  дву-

мерный столбец вида  $\begin{vmatrix} \alpha_{11} + \alpha_{12} \\ \alpha_{21} + \alpha_{22} \end{vmatrix}$ .

Исследование свойств данного отображения можно свести к исследованию свойств преобразования, ставящего в соответствие квадратным матрицам квадратные матрицы вида

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} + \alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{21} + \alpha_{22} & 0 \end{vmatrix}.$$

**Задача 8.4.1.** Линейное отображение  $\hat{A}: \Lambda^3 \rightarrow \Lambda^3$  в некотором базисе

задано матрицей  $\|\hat{A}\| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ . Найти его ядро и

множество значений. Выяснить, является ли данное отображение инъективным или сюръективным.

**Решение.** 1°. Пусть  $\|x\| = \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix}$  и  $\|y\| = \begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{vmatrix}$  – координатные пред-

ставления соответственно прообраза и образа оператора  $y = \hat{A}x$ . Тогда ядро – множество элементов  $x$ , таких, что  $\hat{A}x = o$ , задается в координатном представлении системой линейных уравнений

$$\|\hat{A}\| \|x\| = \|o\| \quad \text{или} \quad \begin{cases} \xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3 = 0, \\ 2\xi_1 + 3\xi_2 + 4\xi_3 = 0, \\ 3\xi_1 + 5\xi_2 + 7\xi_3 = 0, \end{cases}$$

общее решение которой есть

$$\begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Отсюда заключаем, что ядро линейного отображения  $\hat{A}$

есть линейная оболочка элемента  $\begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix}$ , и поскольку

оно не состоит только из нулевого элемента, то данное отображение *неинъективное*.

К этому же заключению можно прийти, приняв во внимание, что

$$\operatorname{rg} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \operatorname{rg} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 < 3$$

– числа столбцов матрицы отображения.

- 2°. Область значений линейного отображения  $\hat{A}$  состоит из элементов  $y \in \Theta$ , таких, что  $y = \hat{A}x \forall x \in \Omega$ . В координатной форме принадлежность элемента  $y$  ко множеству значений означает совместность системы линейных уравнений

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{vmatrix},$$

следовательно, нам необходимо выяснить, при каких значениях  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  данная система линейных уравнений совместна. Это можно сделать, например, при помощи теоремы 6.6.1 (Кронекера–Капелли), сравнив ранги основной и расширенной матриц данной системы. Затем из условия

$$\begin{aligned} \operatorname{rg} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} &= \\ &= \operatorname{rg} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \eta_1 \\ 0 & 1 & 2 & 2\eta_1 - \eta_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\eta_1 - \eta_2 + \eta_3 \end{vmatrix} = \operatorname{rg} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 2 \end{aligned}$$

найдем, что для совместности необходимо и достаточно, чтобы  $\eta_1 + \eta_2 - \eta_3 = 0$ , что, в свою очередь, означает, что множество значений отображения  $\hat{A}$  состоит из элементов вида

$$\begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{vmatrix} = \lambda_1 \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + \lambda_2 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad \forall \lambda_1, \lambda_2,$$

являющихся решениями уравнения  $\eta_1 + \eta_2 - \eta_3 = 0$ .

Заметим, наконец, что поскольку не каждый элемент  $y \in \Theta = \Lambda^3$  имеет прообраз в  $\Omega = \Lambda^3$ , то данное отображение не является и *сюръективным*.

## § 8.5. Инвариантные подпространства и собственные векторы

**Определение**  
8.5.1.

Подпространство  $\Lambda^*$  линейного пространства  $\Lambda$  называется *инвариантным подпространством линейного оператора  $\hat{A}$* , если

$$\forall x \in \Lambda^* : \hat{A}x \in \Lambda^*.$$

**Пример**  
8.5.1.

1°. Множество радиус-векторов точек некоторой прямой на плоскости  $Oxy$ , проходящей через начало координат, является инвариантным подпространством оператора

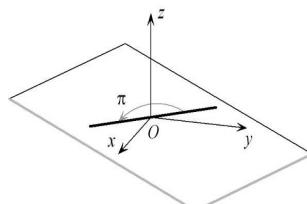


Рис. 8.5.1

поворота на угол  $\pi$  этих радиусов-векторов вокруг оси  $Oz$  (см. рис. 8.5.1).

$2^\circ$ . Для оператора дифференцирования в линейном пространстве функций  $f(\tau)$ , имеющих на  $(\alpha, \beta)$  производную любого порядка,  $n$ -мерным инвариантным подпространством является линейная оболочка совокупности элементов вида

$$\{e^{\lambda_1 \tau}, e^{\lambda_2 \tau}, \dots, e^{\lambda_n \tau}\},$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  – некоторые, попарно различные константы.

Теорема  
8.5.1.

**Матрица линейного оператора  $\hat{A}$ , заданного в линейном пространстве  $\Lambda^n$  с базисом  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ , тогда и только тогда имеет вид**

$$\left( \begin{array}{cccc|cc} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1r} & \alpha_{1,r+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{r1} & \dots & \alpha_{rr} & \alpha_{r,r+1} & \dots & \alpha_{rn} \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{r+1,r+1} & \dots & \alpha_{r+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{n,r+1} & \dots & \alpha_{nn} \end{array} \right),$$

**когда линейная оболочка подмножества базисных элементов  $\{g_1, g_2, \dots, g_r\}$  есть инвариантное подпространство оператора  $\hat{A}$ .**

Доказательство.

Докажем достаточность. Пусть матрица оператора  $\hat{A}$  имеет указанный в формулировке теоремы вид. Тогда образ любой линейной комбинации элементов  $\{g_1, g_2, \dots, g_r\}$  будет принадлежать их линейной оболочке, поскольку в силу определения 8.3.1 каждый столбец матрицы линейного оператора составлен из компонентов образа соответствующего базисного элемента.

Иначе говоря, если  $\sum_{k=1}^r \lambda_k g_k \in \Lambda^*$ , то и

$$\begin{aligned}\hat{A}\left(\sum_{k=1}^r \lambda_k g_k\right) &= \\ &= \sum_{k=1}^r \lambda_k (\hat{A}g_k) = \sum_{k=1}^r \lambda_k \sum_{i=1}^r \alpha_{ik} g_i = \\ &= \sum_{i=1}^r \left( \sum_{k=1}^r \alpha_{ik} \lambda_k \right) g_i = \sum_{i=1}^r \beta_i g_i \in \Lambda^*.\end{aligned}$$

Из теоремы 7.4.1 следует, что  $\Lambda^*$  – подпространство. Достаточность доказана.

Докажем необходимость. Пусть  $\Lambda^*$  есть инвариантное подпространство линейного оператора  $\hat{A}$ , являющееся линейной оболочкой подмножества базисных векторов  $\{g_1, g_2, \dots, g_r\}$ . Тогда образ любого, в том числе и базисного, элемента, принадлежащего  $\Lambda^*$ , также будет принадлежать  $\Lambda^*$ . Это в свою очередь означает, что

$$\hat{A}g_k = \sum_{i=1}^r \alpha_{ik} g_i + \sum_{i=r+1}^n 0g_i ; \quad k = [1, r]$$

и в сочетании с определением 8.4.5 доказывает необходимость.

Теорема доказана.

**Задача 8.5.1.** Показать, что всякое инвариантное подпространство невырожденного линейного оператора  $\hat{A}$  является также инвариантным подпространством оператора  $\hat{A}^{-1}$ .

**Решение.** Пусть  $x \in \Lambda^*$ , где  $\Lambda^*$  инвариантное подпространство оператора  $\hat{A}$ , тогда по условию задачи  $y = \hat{A}x \in \Lambda^*$ .

Если оператор  $\hat{A}$  невырожденный, то для него существует обратный  $\hat{A}^{-1}$  и связь элементов  $x, y \in \Lambda^*$  можно записать в виде  $x = \hat{A}^{-1}y$ , что и означает инвариантность подпространства  $\Lambda^*$  относительно оператора  $\hat{A}^{-1}$ .

В приложениях важную роль играют так называемые задачи "поиска собственных вектором и собственных значений", основой которых служит понятие одномерного инвариантного подпространства.

**Определение 8.5.2.** Ненулевой элемент  $f \in \Lambda$  называется *собственным вектором* линейного оператора  $\hat{A}$ , если существует число  $\lambda$ , такое, что  $\hat{A}f = \lambda f$ . Число  $\lambda$  называется *собственным значением* оператора  $\hat{A}$ , соответствующим собственному вектору  $f$ .

Заметим, что, согласно данному определению,  $f$  является ненулевым элементом ядра линейного оператора  $\hat{A} - \lambda \hat{E}$ , то есть  $f \in \ker(\hat{A} - \lambda \hat{E})$ .

## Замечание о важности собственных векторов

Допустим, что для некоторого линейного оператора  $\hat{A}$ , заданного в  $\Lambda^n$ , удалось найти  $n$  линейно независимых собственных векторов  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ , для которых выполнены равенства

$$\hat{A}g_1 = \lambda_1 g_1; \quad \hat{A}g_2 = \lambda_2 g_2; \dots; \quad \hat{A}g_n = \lambda_n g_n.$$

Приняв набор этих элементов за базис, данные соотношения можно рассматривать как координатные разложения по базису образов базисных элементов:

$$\hat{A}g_k = 0 \cdot g_1 + 0 \cdot g_2 + \dots + \lambda_k g_k + \dots + 0 \cdot g_n; \quad \forall k = [1, n].$$

Поскольку, согласно теореме 7.2.1, эти разложения *единственны*, то, исходя из определения 8.3.1, можно утверждать, что матрица линейного оператора  $\hat{A}$  в этом базисе будет иметь диагональный вид:

$$\left\| \hat{A} \right\|_f = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix},$$

для которого исследование свойств этого оператора существенно упрощается.

**Задача  
8.5.2.**

Показать, что если линейный оператор  $\hat{A}$  имеет собственный вектор  $f$  с соответствующим ему собственным значением  $\lambda$ , то элемент  $f$  будет также являться собственным вектором линейного оператора

$$\hat{A}^2 = \hat{A}\hat{A}$$

с собственным значением  $\lambda^2$ .

**Решение.** По условию  $\hat{A}f = \lambda f$ , но тогда в силу линейности оператора  $\hat{A}$

$$\hat{A}^2 f = \hat{A}(\hat{A}f) = \hat{A}(\lambda f) = \lambda^2 f.$$

### Вычисление собственных векторов

и собственных значений линейного оператора в  $\Lambda^n$

Выберем в  $\Lambda^n$  некоторый базис  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ , в котором разложение элемента  $f \in \Lambda^n$  будет  $f = \sum_{i=1}^n \xi_i g_i$ , а линейный оператор  $\hat{A}$  имеет в этом базисе матрицу  $\|\hat{A}\|_g = \|\alpha_{kj}\|$ .

Равенство  $\hat{A}f = \lambda f$  в координатной форме в  $\Lambda^n$  имеет вид  $\|\hat{A}\|_g \|f\|_g = \lambda \|f\|_g$ , то есть

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \dots + \alpha_{1n}\xi_n = \lambda\xi_1, \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \dots + \alpha_{2n}\xi_n = \lambda\xi_2, \\ \dots \\ \alpha_{n1}\xi_1 + \alpha_{n2}\xi_2 + \dots + \alpha_{nn}\xi_n = \lambda\xi_n, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (\alpha_{11} - \lambda)\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \dots + \alpha_{1n}\xi_n = 0, \\ \alpha_{21}\xi_1 + (\alpha_{22} - \lambda)\xi_2 + \dots + \alpha_{2n}\xi_n = 0, \\ \dots \\ \alpha_{n1}\xi_1 + \alpha_{n2}\xi_2 + \dots + (\alpha_{nn} - \lambda)\xi_n = 0. \end{cases} \quad (8.5.1)$$

Поскольку собственный вектор должен быть ненулевым по определению, то нас интересуют только *нетривиальные* решения системы (8.5.1), необходимым условием существования которых, согласно следствию 6.7.2, является *равенство нулю определителя основной матрицы системы* (8.5.1). Таким образом, мы приходим к условию, которому должны удовлетворять собственные значения  $\lambda$  данного линейного оператора:  $\det \left| \alpha_{kj} - \lambda \delta_{kj} \right| = 0$

$$\text{или же } \det \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (8.5.2)$$

**Определение 8.5.3.** Уравнение  $\det \left\| \hat{A} - \lambda \hat{E} \right\|_g = 0$  называется *характеристическим уравнением*, а определитель  $\det \left\| \hat{A} - \lambda \hat{E} \right\|_g$  – *характеристическим многочленом* оператора  $\hat{A}$ , действующего в  $\Lambda^n$ .

**Теорема 8.5.2.** **Характеристический многочлен линейного оператора не зависит от выбора базиса в  $\Lambda^n$ .**

Доказательство.

Заметим, что оператор  $\hat{A} - \lambda \hat{E}$ , очевидно, линейный в силу линейности операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{E}$ . Тогда, согласно следствию 8.3.3, определитель его матрицы не меняется при замене базиса. Поэтому при переходе от базиса  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  к базису  $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$  имеем:

$$\det \left\| \hat{A} - \lambda \hat{E} \right\|_{g'} = \det \left\| \hat{A} - \lambda \hat{E} \right\|_g.$$

Теорема доказана.

Характеристическое уравнение является алгебраическим уравнением  $n$ -й степени относительно  $\lambda$ , что следует из определения детерминанта 6.1.2 и формулы (8.5.2).

Таким образом, мы получаем универсальный для  $\Lambda^n$  алгоритм вычисления собственных значений и соответствующих им собственных векторов:

*Решив характеристическое уравнение (8.5.2), из однородной системы уравнений (8.5.1) можно найти собственные векторы, соответствующие последовательно подставляемым в основную матрицу этой системы, найденным собственным значениям.*

Примеры использования данного алгоритма в  $\Lambda^n$  иллюстрируют решения задач 8.6.1 и 8.6.2. В случае же линейных пространств, не имеющих базиса, задача отыскания собственных значений и построения собственных векторов может оказаться значительно сложнее. Например, в линейном пространстве функций, имеющих на некотором интервале производную любого порядка, линейный оператор дифференцирования имеет бесконечно много собственных векторов вида  $f(\tau) = \alpha e^{\lambda\tau}$  (где  $\alpha$  – произвольная ненулевая константа) и соответствующих им собственных значений  $\lambda$ , находимых из дифференциального уравнения  $\frac{df}{d\tau} = \lambda f$ .

## § 8.6. Свойства собственных векторов и собственных значений

Теорема 8.6.1. **В комплексном линейном пространстве  $\Lambda^n$  всякий линейный оператор имеет хотя бы один собственный вектор.**

**Доказательство.**

Поскольку характеристическое уравнение является алгебраическим уравнением  $n$ -й степени относительно  $\lambda$ , то к нему применима *основная теорема высшей алгебры*<sup>11</sup>, утверждающая, что такое уравнение имеет хотя бы один комплексный корень.

**Теорема доказана.**

В случае вещественного линейного пространства теорема 8.6.1 неверна. Например, линейный оператор поворота плоскости  $Oxy$  вокруг начала координат на угол  $\Phi \neq k\pi$  не имеет ни одного собственного вектора. Действительно, характеристическое уравнение для этого оператора имеет вид (см. § 5.5):

$$\det \begin{vmatrix} \cos \varphi - \lambda & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi + 1 = 0,$$

то есть  $\lambda = \cos \varphi \pm i \sin \varphi$ . Откуда следует, что при  $\Phi \neq k\pi$  вещественных решений данное характеристическое уравнение не имеет.

**Теорема 8.6.2.** **В вещественном линейном пространстве  $\Lambda^n$  всякий линейный оператор имеет либо хотя бы один собственный вектор, либо двумерное инвариантное подпространство.**

**Доказательство.**

Если характеристическое уравнение имеет вещественный корень, то из системы (8.5.1) находим собственный вектор.

Пусть характеристическое уравнение имеет комплексный корень  $\lambda = \alpha + \beta i$ , тогда, решив систему (8.5.1), получим соответствующий ему комплекснозначный собственный вектор  $f = u + wi$ , где  $u$  и  $w$  – элементы  $\Lambda^n$ , представляемые вещественными  $n$ -компонентными столбцами.

---

<sup>11</sup> Доказывается, например, в курсе ТФКП.

Покажем,  $u$  и  $w$  линейно независимые. Допустим противное:  $u = \kappa w$ . Тогда из соотношения  $\hat{A}f = \lambda f$  имеем, что  $\hat{A}((\kappa + i)w) = \lambda(\kappa + i)w$ , или  $\hat{A}w = \lambda w$ , то есть  $\lambda$  – вещественное, что противоречит предположению о невещественности собственного значения.

Подставим выражения для собственного значения и собственного вектора в их определение:  $\hat{A}f = \lambda f$ . Получаем

$$\hat{A}(u + wi) = (\alpha + \beta i)(u + wi),$$

или в силу линейности  $\hat{A}$

$$(\hat{A}u) + (\hat{A}w)i = (\alpha u - \beta w) + (\beta u + \alpha w)i,$$

и из равенства действительных и мнимых частей находим, что

$$\begin{cases} \hat{A}u = \alpha u - \beta w, \\ \hat{A}w = \beta u + \alpha w. \end{cases}$$

Но это и означает, что оператор  $\hat{A}$  имеет двумерное инвариантное подпространство, совпадающее с двумерной линейной оболочкой элементов  $u$  и  $w$ , поскольку

$$\begin{aligned} \hat{A}(\xi u + \eta w) &= \xi \hat{A}u + \eta \hat{A}w = \xi(\alpha u - \beta w) + \eta(\beta u + \alpha w) = \\ &= (\xi\alpha + \eta\beta)u + (\eta\alpha - \xi\beta)w. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

**Задача 8.6.1.** Найти собственные значения и собственные векторы оператора  $\hat{A}$ , действующего в пространстве трехмерных столбцов и заданного матрицей

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение:

1°. Рассмотрим сначала случай, когда оператор  $\hat{A}$  действует в комплексном линейном пространстве. Будем искать собственные значения по формулам (8.5.1) – (8.5.2). Воспользовавшись правилом разложения определителя по первой строке (см. теорему 1.1.1), получим

$$\det \begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ -3 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -(1+\lambda)(\lambda-1)^2 + 2(2\lambda-6+6) + 2(4-3-3\lambda) =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 = -(\lambda^2 + 1)(\lambda - 1).$$

Откуда следует, что из трех собственных значений одно  $\lambda_1 = 1$  – вещественное и два  $\lambda_2 = i$  и  $\lambda_3 = -i$  – комплексно сопряженные<sup>12</sup>.

2°. Найдем теперь собственные векторы. Пусть  $\lambda = \lambda_1 = 1$ , тогда, по формулам (8.5.2) имеем

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Преобразовав матрицу построенной системы линейных уравнений, получим компоненты собственных векторов  $\xi_1, \xi_2$  и  $\xi_3$  из

условий  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

<sup>12</sup> См. приложение 3.

Следовательно, собственный вектор  $f_1$ , отвечающий собственному значению  $\lambda_1 = 1$ , имеет вид

$$\begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix} = \mu \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \quad \forall \mu \neq 0.$$

3°. Пусть теперь  $\lambda = \lambda_2 = i$ , тогда систему линейных уравнений (8.5.1)

$$\begin{vmatrix} -1-i & -2 & 2 \\ -2 & -1-i & 2 \\ -3 & -2 & 3-i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

можно упростить, разделив<sup>13</sup> обе части первого уравнения на  $1+i$ . Заметим, что в полученной таким образом системе

$$\begin{vmatrix} -1 & -1+i & 1-i \\ -2 & -1-i & 2 \\ -3 & -2 & 3-i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

третье уравнение оказывается суммой первых двух и его можно отбросить как линейно зависимое.

Заменив затем второе уравнение разностью удвоенного первого и второго, получим

$$\begin{vmatrix} -1 & -1+i & 1-i \\ 0 & -1+3i & 2i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

---

<sup>13</sup> Правило деления комплексных чисел приведено в приложении 3.

И наконец, после умножения обеих частей второго уравнения на  $(-i)$  приходим к

$$\begin{vmatrix} -1 & -1+i & 1-i \\ 0 & 3+i & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Полагая значение свободного неизвестного  $\xi_3 = 3 + i$ , находим второй собственный вектор:

$$f_2 = \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix} = \mu \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ 3+i \end{vmatrix} \quad \forall \mu \neq 0.$$

4°. Проведя аналогичные вычисления, найдем, что собственный вектор, отвечающий собственному значению  $\lambda_3 = -i$ , имеет вид

$$f_3 = \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix} = \mu \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ 3-i \end{vmatrix} \quad \forall \mu \neq 0.$$

(Покажите самостоятельно, что комплексная сопряженность  $f_2$  и  $f_3$  не случайна, то есть если  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  комплексно сопряжены, то будут комплексно сопряжены и собственные векторы  $f_2$  и  $f_3$ .)

5°. Если оператор  $\hat{A}$  действует в вещественном линейном пространстве, то согласно теореме 8.6.2  $\hat{A}$  имеет собственный вектор

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \text{ отвечающий собственному значению } \lambda_1 = 1,$$

и инвариантное подпространство, являющееся линейной оболоч-

кой элементов  $u = \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}$  и  $w = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ , то есть которое будет со-

стоять из элементов вида

$$\begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix} = \mu_1 \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix} + \mu_2 \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}; \forall \mu_1, \mu_2.$$

Заметим, что при необходимости искомое инвариантное подпространство может быть задано и в виде

$$\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3 = 0$$

(см., например, решение задачи 8.4.1).

**Теорема 8.6.3.** Совокупность собственных векторов, отвечающих некоторому собственному значению линейного оператора  $\hat{A}$ , дополненная нулевым элементом линейного пространства  $\Lambda$ , является инвариантным подпространством оператора  $\hat{A}$ .

Доказательство.

Пусть  $\hat{A}f_1 = \lambda f_1$  и  $\hat{A}f_2 = \lambda f_2$ . Тогда для любых, не равных нулю одновременно чисел  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\begin{aligned} \hat{A}(\alpha f_1 + \beta f_2) &= \\ &= \alpha \hat{A}f_1 + \beta \hat{A}f_2 = \alpha \lambda f_1 + \beta \lambda f_2 = \lambda(\alpha f_1 + \beta f_2), \end{aligned}$$

что и показывает справедливость утверждения теоремы.

Теорема доказана.

**Определение 8.6.1.** Подпространство, состоящее из собственных векторов, отвечающих некоторому собственному значению, дополненных нулевым элементом, называется *инвариантным собственным* (или просто *собственным*) подпространством линейного оператора  $\hat{A}$ .

**Теорема 8.6.4.** Всякое инвариантное собственное подпространство линейного оператора  $\hat{A}$  является также инвариантным подпространством линейного оператора  $\hat{B}$ , если операторы  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  коммутируют.

Доказательство.

Пусть  $\Lambda^*$  – инвариантное собственное подпространство оператора  $\hat{A}$ , то есть  $\hat{A}f = \lambda f \quad \forall f \in \Lambda^*$ .

Но тогда справедливо равенство  $\hat{B}\hat{A}f = \hat{B}(\lambda f)$ , а в силу коммутируемости и линейности операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  будет верно и  $\hat{A}(\hat{B}f) = \lambda(\hat{B}f)$  при  $\forall f \in \Lambda^*$ .

Последнее условие означает, что  $\hat{B}f \in \Lambda^*$  при  $\forall f \in \Lambda^*$ , то есть  $\Lambda^*$  – инвариантное подпространство оператора  $\hat{B}$ .

Теорема доказана.

**Теорема 8.6.5.** Собственные векторы линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.

Доказательство.

Один собственный вектор линейно независим как ненулевой.

Пусть имеются  $m$  линейно независимых собственных векторов  $f_1, f_2, \dots, f_m$  оператора  $\hat{A}$ , отвечающих различным собственным значениям.

Покажем, что в этом случае будут линейно независимы и  $m+1$  собственных векторов  $f_1, f_2, \dots, f_m, f_{m+1}$ , если они также отвечают различным собственным значениям.

Предположим противное: существует нетривиальная и равная нулевому элементу линейная комбинация собственных векторов  $f_1, f_2, \dots, f_m, f_{m+1}$ :

$$\kappa_1 f_1 + \kappa_2 f_2 + \dots + \kappa_m f_m + \kappa_{m+1} f_{m+1} = o, \quad (8.6.1)$$

причем без ограничения общности можно считать, что число  $\kappa_{m+1} \neq 0$ .

Подействуем  $\hat{A}$  на обе части равенства (8.6.1):

$$\begin{aligned} \hat{A}(\kappa_1 f_1 + \kappa_2 f_2 + \dots + \kappa_m f_m + \kappa_{m+1} f_{m+1}) &= \\ = \kappa_1 \lambda_1 f_1 + \kappa_2 \lambda_2 f_2 + \dots + \kappa_m \lambda_m f_m + \kappa_{m+1} \lambda_{m+1} f_{m+1} &= o. \end{aligned} \quad (8.6.2)$$

С другой стороны, умножая обе части равенства (8.6.1) на  $\lambda_{m+1}$  и вычитая почленно результат этого умножения из равенства (8.6.2), получим

$$\begin{aligned} \kappa_1 (\lambda_1 - \lambda_{m+1}) f_1 + \kappa_2 (\lambda_2 - \lambda_{m+1}) f_2 + \dots \\ \dots + \kappa_m (\lambda_m - \lambda_{m+1}) f_m = o. \end{aligned}$$

Поскольку все собственные значения разные, а векторы  $f_1, f_2, \dots, f_m$  линейно независимые, то

$$\kappa_1 = \kappa_2 = \dots = \kappa_m = 0.$$

Но тогда из (8.6.1) следует  $\kappa_{m+1} = 0$ , что противоречит сделанному выше предположению, и по принципу математической индукции из линейной независимости элементов  $f_1, f_2, \dots, f_m$  следует линейная независимость элементов  $f_1, f_2, \dots, f_m, f_{m+1}$ .

Теорема доказана.

**Следствие 8.6.1.** Линейный оператор  $\hat{A}$  в  $\Lambda^n$  может иметь (с точностью до произвольного ненулевого множителя) не более чем  $n$  собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям.

**Теорема 8.6.6.** Если линейный оператор  $\hat{A}$ , действующий в  $\Lambda^n$ , имеет  $n$  различных собственных значений, то существует базис, образованный собственными векторами  $\hat{A}$ , в котором матрица данного линейного оператора имеет диагональный вид, причем на ее диагонали расположены собственные числа оператора  $\hat{A}$ .

Доказательство.

Следует из теоремы 8.6.5 и замечания о важности собственных векторов § 8.5.

**Теорема 8.6.7.** Пусть  $\Lambda^*$  – инвариантное собственное подпространство линейного оператора  $\hat{A}$ , отвечающее некоторому собственному значению  $\lambda_0$  кратности  $k$ . Тогда имеет место соотношение

$$1 \leq \dim(\Lambda^*) \leq k.$$

Доказательство.

Выберем в  $\Lambda^n$  базис  $\{g_1, g_2, \dots, g_m, g_{m+1}, \dots, g_n\}$  так, чтобы его первые  $m = \dim(\Lambda^*)$  элементов принадлежали  $\Lambda^*$ .

В силу условия кратности собственного значения

$$\hat{A}g_i = \lambda_0 g_i ; i = [1, m],$$

поэтому матрица  $\|\hat{A} - \lambda \hat{E}\|_g$  в этом базисе, согласно замечанию о важности собственных векторов (см. § 8.5), будет иметь вид

$$\|\hat{A} - \lambda \hat{E}\|_g =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda_0 - \lambda & 0 & \dots & 0 & \alpha_{1,m+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \lambda_0 - \lambda & \dots & 0 & \alpha_{2,m+1} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_0 - \lambda & \alpha_{m,m+1} & \dots & \alpha_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{n,m+1} & \dots & \alpha_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Откуда следует, что

$$\det \|\hat{A} - \lambda \hat{E}\|_g = (\lambda_0 - \lambda)^m P_{n-m}(\lambda).$$

Поскольку множители вида  $(\lambda_0 - \lambda)$  могут содержаться также и в многочлене  $P_{n-m}(\lambda)$ , то  $m \leq k$ , где  $k$  – кратность корня  $\lambda_0$  характеристического многочлена  $\det \|\hat{A} - \lambda \hat{E}\|_g$ .

Условие  $1 \leq m$  очевидно, поскольку подпространство  $\Lambda^*$  не-нулевое (содержит собственные векторы).

Теорема доказана.

Таким образом, размерность инвариантного собственного подпространства  $\Lambda^*$ , отвечающего собственному значению  $\lambda_0$  кратности  $k$ , может оказаться меньше  $k$ , что иллюстрирует

**Задача 8.6.2.** Найти собственные значения и собственные векторы оператора, действующего в пространстве двумерных

столбцов и заданного матрицей  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ .

**Решение.** Находим собственные значения:

$$\det \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0,$$

то есть  $\lambda_{1,2} = 1$  и кратность собственного значения  $k = 2$ . Найдем теперь собственные векторы:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \forall \mu \neq 0.$$

Таким образом, получаем, что данный линейный оператор имеет одномерное инвариантное собственное подпространство ( $m = \dim(\Lambda^*) = 1$ ), соответствующее собственному значению  $\lambda = 1$  кратности 2.

На основании теорем 8.6.2, 8.6.5 и 8.6.6 приходим к выводу, что базис в конечномерном вещественном линейном пространстве, образованный из собственных векторов действующего в нем линейного оператора, может не существовать из-за *невещественности* или *кратности* его собственных значений.

**Теорема 8.6.8.** **Линейный оператор  $\hat{A}$  в  $\Lambda^n$  имеет нулевое собственное значение тогда и только тогда, когда оператор  $\hat{A}$  не является взаимно однозначным.**

**Доказательство.**

Линейный оператор  $\hat{A}$  имеет в  $\Lambda^n$  собственное значение, равное нулю, тогда и только тогда, когда его матрица вырожденная, то есть в любом базисе  $\det \|\hat{A}\| = 0$ .

Пусть в  $\Lambda^n$  координатный столбец образа связан с координатным столбцом прообраза

$$\begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{vmatrix}.$$

Из теоремы 6.4.1 (*Крамера*) следует, что для заданного координатного столбца элемента-образа эта система линейных уравнений, у которой неизвестными являются компоненты столбца элемента-прообраза, либо будет несовместной (элемент-прообраз не существует), либо будет иметь согласно следствию 6.7.1 неединственное решение (элемент-прообраз определяется неоднозначно).

Теорема доказана.

**Определение 8.6.2.** Степенью квадратной матрицы  $\|Q\|$  с натуральным показателем  $k \geq 2$  называется произведение  $k$  сомножителей вида  $\|Q\|$ . Будем также считать, что  $\|Q\|^1 = \|Q\|$  и  $\|Q\|^0 = \|E\|$ .

**Теорема 8.6.9**  
(Гамильтона–Кэли).

**Матрица линейного оператора  $\hat{A}$  в  $\Lambda^n$  удовлетворяет его характеристическому уравнению.**

Доказательство.

Докажем данную теорему в предположении, что собственные векторы оператора  $\hat{A}$  образуют в  $\Lambda^n$  базис  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ .

Пусть данный линейный оператор  $\hat{A}$  в этом базисе имеет матрицу  $\|\hat{A}\|_f$  и характеристическое уравнение  $\sum_{k=0}^n \alpha_k \lambda^k = 0$ .

Тогда в силу линейности  $\hat{A}$  для собственного вектора  $f$ , соответствующего собственному значению  $\lambda$ , имеем (см. задачу 8.5.2)

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k=0}^n \alpha_k \|\hat{A}\|_f^k \right) \|f\| &= \sum_{k=0}^n \alpha_k (\|\hat{A}\|_f^k \|f\|) = \\ &= \sum_{k=0}^n \alpha_k (\|\hat{A}\|_f (\|\hat{A}\|_f \dots (\|\hat{A}\|_f \|f\|) \dots)) = \\ &= \sum_{k=0}^n \alpha_k (\lambda^k \|f\|) = \left( \sum_{k=0}^n \alpha_k \lambda^k \right) \|f\| = 0 \|f\| = \|o\|. \end{aligned}$$

Но поскольку это соотношение верно для всех базисных векторов, то оно будет верно и для каждого элемента  $x \in \Lambda^n$ . Тогда из леммы 5.1.2 следует, что

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \|\hat{A}\|_f^k = \|\hat{O}\|_f.$$

Наконец, выполнив переход к произвольному базису  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ , получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \alpha_k \|\hat{A}\|_g^k &= \sum_{k=0}^n \alpha_k (\|S\|^{-1} \|\hat{A}\|_f \|S\|)^k = \\ &= \sum_{k=0}^n \alpha_k (\|S\|^{-1} \|\hat{A}\|_f \|S\| \|S\|^{-1} \|\hat{A}\|_f \|S\| \dots \|S\|^{-1} \|\hat{A}\|_f \|S\|) = \\ &= \sum_{k=0}^n \alpha_k (\|S\|^{-1} \|\hat{A}\|_f^k \|S\|) = \|S\|^{-1} \left( \sum_{k=0}^n \alpha_k \|\hat{A}\|_f^k \right) \|S\| = \\ &= \|S\|^{-1} \|\hat{O}\|_f \|S\| = \|\hat{O}\|_g. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

**Замечание:** теорема Гамильтона–Кэли также верна и для линейных операторов, из собственных векторов которых базис образовать не удается.

## § 8.7. Линейные функционалы

Рассмотрим специальный случай линейного оператора, когда его область значений содержится в одномерном линейном пространстве, изоморфном множеству вещественных чисел. Такого рода зависимости, следуя классификации, введенной в § 5.2, следует относить к функционалам. Напомним данное ранее

**Определение 8.7.1.** Пусть каждому элементу  $x$  линейного пространства  $\Lambda$  поставлено в соответствие однозначно определяемое число, обозначаемое  $f(x)$ . Тогда говорят, что в  $\Lambda$  задан функционал  $f(x)$ .

**Пример 8.7.1.** 1°. В пространстве  $n$ -компонентных столбцов можно

задать функционал, поставив столбцу

$$\begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{vmatrix}$$

в соот-

ветствие число  $\sum_{i=1}^n \phi_i \xi_i$ , где  $\phi_i, i = [1, n]$  – неко-

торые фиксированные константы.

2°. В векторном геометрическом пространстве функционалом является длина вектора, то есть

$$f(x) = |\vec{x}|.$$

3°. В пространстве функций  $x(\tau)$ , определенных на  $[-1, 1]$ , функционалом является  $f(x) = x(0)$  –

”дельта-функция”, обозначаемая как  $\delta(x)$ , ставящая в соответствие каждой функции  $x(\tau)$  ее значение в нуле.

4°. В пространстве функций  $x(\tau)$ , непрерывных на  $[\alpha, \beta]$ , функционалом является определенный интеграл, то есть  $f(x) = \int_{\alpha}^{\beta} p(\tau)x(\tau)d\tau$ , где  $p(\tau)$  – не-

которая заданная на  $[\alpha, \beta]$  непрерывная функция.

5°. В линейном пространстве квадратных матриц вида

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$$

функционалом является определитель

$$\det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}.$$

Определение  
8.7.2.

Функционал  $f(x)$  называется линейным функционалом (или линейной формой), если для любых  $x, y \in \Lambda$  и любого числа  $\lambda$ :

$$1^\circ. f(x+y) = f(x) + f(y).$$

$$2^\circ. f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Задача  
8.7.1.

Доказать, что функционалы в примерах 1°, 3° и 4° являются линейными, а функционалы в примерах 2° и 5° – нет.

### Представление линейного функционала в $\Lambda^n$

Пусть в  $\Lambda^n$  дан базис  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  и пусть координатное представление элемента линейного пространства имеет вид  $x = \sum_{i=1}^n \xi_i g_i$ .

Тогда в силу линейности функционала справедливы соотношения

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n \xi_i g_i\right) = \sum_{i=1}^n \xi_i f(g_i) = \sum_{i=1}^n \phi_i \xi_i,$$

где  $\phi_i = f(g_i)$ ,  $i = [1, n]$  – числа, называемые *компонентами линейного функционала в данном базисе*.

Из последних равенств следует легко проверяемая

Теорема  
8.7.1.

**Каждый линейный функционал  $f(x)$  в  $\Lambda^n$  в конкретном базисе  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  имеет однозначно определяемую строку компонентов**

$$\|f\|_g = \|\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_n\|, \text{ а каждая строка компонентов } \|\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_n\| \text{ в конкретном базисе в } \Lambda^n \text{ определяет некоторый линейный функционал по формуле } f(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i \xi_i \text{ или в матричном виде } f(x) = \|f\|_g \|x\|_g.$$

Запись координатного представления линейного функционала в  $\Lambda^n$  в виде *строки* (а не столбца!) следует из необходимости обеспечить соответствие этого представления определению 8.4.5, поскольку линейный функционал в  $\Lambda^n$  можно рассматривать как линейное отображение  $\Lambda^n \rightarrow \Lambda^1$ .

Получим теперь правило изменения компонент линейного функционала в  $\Lambda^n$  при переходе от одного базиса к другому. Пусть в  $\Lambda^n$  даны два базиса  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  и  $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$ , связанные матри-

цей перехода  $\|S\| = \|\sigma_{ij}\|$ , где  $g'_j = \sum_{i=1}^n \sigma_{ij} g_i \quad \forall j = [1, n]$ .

Координатные представления некоторого элемента  $x$  будут иметь в рассматриваемых базисах вид  $x = \sum_{i=1}^n \xi_i g_i = \sum_{i=1}^n \xi'_i g'_i$ , а координатные представления линейного функционала  $f(x)$  – соответственно

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i \xi_i = \sum_{i=1}^n \phi'_i \xi'_i.$$

Найдем выражения для величин  $\phi'_i$  через  $\phi_i$ . Используя введенные обозначения, получаем

$$\phi'_i = f(g'_i) = f\left(\sum_{k=1}^n \sigma_{ki} g_k\right) = \sum_{k=1}^n \sigma_{ki} f(g_k) = \sum_{k=1}^n \phi_k \sigma_{ki},$$

что доказывает следующее утверждение.

**Теорема 8.7.2.** В  $\Lambda^n$  в базисах  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  и  $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$  компоненты координатных представлений линейного функционала  $\|f\|_g = \|\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\|$  и  $\|f\|_{g'} = \|\phi'_1, \phi'_2, \dots, \phi'_n\|$  связаны соотношением  $\phi'_k = \sum_{i=1}^n \phi_i \sigma_{ik}$ ;  $k = [1, n]$ , где коэффициенты  $\sigma_{ik}$  – коэффициенты  $\|S\|$  – матрицы перехода от первого базиса ко второму.

В матричной форме это утверждение имеет вид  $\|f\|_{g'} = \|f\|_g \|S\|$ , что означает, что компоненты линейного функционала в  $\Lambda^n$  преобразуются при замене базиса так же, как преобразуются столбцы базисных элементов (см. § 7.3).

## Двойственное (сопряженное) пространство. Взаимный (биортогональный) базис

Поскольку линейные функционалы в  $\Lambda$  являются частным случаем линейных операторов, то для них можно ввести операции сравнения, сложения и умножения на число.

**Задача 8.7.2.** Показать, что в  $\Lambda^n$  с базисом  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  операции сложения и умножения на число для линейных функционалов  $p(x)$  и  $q(x)$  в координатном представлении имеют вид

$$\begin{aligned}\|p+q\|_g &= \|\phi_1 + \Psi_1 \quad \phi_2 + \Psi_2 \quad \dots \quad \phi_n + \Psi_n\| \quad \text{и} \\ \|\lambda p\|_g &= \|\lambda\phi_1 \quad \lambda\phi_2 \quad \dots \quad \lambda\phi_n\|,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\|p\|_g &= \| \dots \phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_n \| \quad \text{и} \\ \|q\|_g &= \| \Psi_1 \quad \Psi_2 \quad \dots \quad \Psi_n \|.\end{aligned}$$

Очевидно, что при этом будут справедливы все утверждения § 8.2, в том числе и

**Теорема 8.7.3.** **Множество всех линейных функционалов, заданных в линейном пространстве  $\Lambda$ , является линейным пространством.**

**Определение 8.7.3.** Линейное пространство линейных функционалов, заданных в  $\Lambda$ , называется *двойственным* (или *сопряженным*) пространству  $\Lambda$  и обозначается  $\Lambda^+$ .

Теорема 8.7.1 устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами линейных функционалов и  $n$ -компонентных строк, последнее из которых является линейным  $n$ -мерным простран-

ством. Принимая во внимание, что операции с линейными функционалами в координатном представлении в  $\Lambda^n$  совпадают с аналогичными операциями для  $n$ -компонентных строк, можно прийти к заключению об изоморфности линейных пространств  $\Lambda^n$  и  $\Lambda^{n^+}$ . Поэтому будет справедлива

**Теорема      Размерность пространства  $\Lambda^{n^+}$ , двойственного  $\Lambda^n$ ,  
8.7.4.                равна  $n$ .**

Как и во всяком  $n$ -мерном линейном пространстве, в  $\Lambda^{n^+}$  должен существовать базис. Пусть он состоит из элементов  $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}; r_i \in \Lambda^{n^+} \forall i = [1, n]$ . Тогда каждый элемент  $f \in \Lambda^{n^+}$  может быть однозначно представлен в виде линейной комбинации базисных элементов, то есть  $f = \sum_{i=1}^n p_i r_i$ , а стандартное для  $\Lambda^n$  столбцовое координатное представление элемента  $f$ , будет иметь вид

$$\|f\|_r = \begin{vmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_n \end{vmatrix}.$$

Связь между координатными представлениями линейного функционала  $f$  в базисах  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\} \subset \Lambda^n$  и  $\{r_1, r_2, \dots, r_n\} \subset \Lambda^{n^+}$  задается квадратной, порядка  $n$ , матрицей  $\|\Gamma\|_{rg}$ , элементами которой являются числа  $\gamma_{ij} = r_i(g_j); i, j = [1, n]$  – значения функционала  $r_i$  на элементах  $g_j$ .

**Задача 8.7.3.** Доказать, что если  $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$  – базис в  $\Lambda^{n^+}$ , а  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  – базис в  $\Lambda^n$ , то

$$\|f\|_r = (\|\Gamma\|_{rg}^T)^{-1} \|f\|_g^T \text{ или } \|f\|_g = \|f\|_r^T \|\Gamma\|_{rg}.$$

**Определение 8.7.4.** Если матрица  $\|\Gamma\|_{rg} = \|E\|$ , то есть

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad \forall i, j \in [1, n],$$

то базисы  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  и  $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$  называются взаимными (биортогональными).

Отметим, что если базис  $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$  в  $\Lambda^{n^+}$  является взаимным для базиса  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  в  $\Lambda^n$ , то для любого линейного функционала  $f(x)$  его координатные представления в  $\Lambda^n$  и в  $\Lambda^{n^+}$  связаны очевидным соотношением  $\|f\|_r = \|f\|_g^T$ .

### Вторичное двойственное (вторичное сопряженное) пространство

Поскольку  $\Lambda^{n^+}$  является  $n$ -мерным линейным пространством, то в нем так же, как и в  $\Lambda^n$ , возможно определять линейные функционалы и рассматривать их множество как новое линейное пространство  $\Lambda^{n++}$ , двойственное к  $\Lambda^{n^+}$ . Будем называть пространство  $\Lambda^{n++}$  вторичным двойственным для линейного пространства  $\Lambda^n$ .

Вполне очевидно, что линейные пространства  $\Lambda^n$ ,  $\Lambda^{n^+}$  и  $\Lambda^{n++}$   $n$ -мерные и, следовательно, изоморфны друг другу. Однако для пространств  $\Lambda^n$  и  $\Lambda^{n++}$  существует особый изоморфизм, позволяющий не делать различия между ними и который может быть построен следующим образом.

Пусть  $x$  – некоторый элемент из  $\Lambda^n$ , а  $X(f)$  – действующий в  $\Lambda^{n^+}$  функционал, такой, что  $X(f) = f(x) \quad \forall f \in \Lambda^{n^+}$ . Убедимся вначале, что  $X(f)$  линейный на  $\Lambda^{n^+}$ , то есть он будет некоторым элементом в  $\Lambda^{n++}$ . Действительно,

$$\begin{aligned} X(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) &= \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = \\ &= \lambda_1 X(f_1) + \lambda_2 X(f_2) \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathfrak{R}; \quad f_1, f_2 \in \Lambda^{n^+}. \end{aligned}$$

Это означает, что  $X(f) \in \Omega \quad \forall f \in \Lambda^{n^+}$ , где, согласно теореме 8.4.1,  $\Omega$  – подпространство линейного пространства  $\Lambda^{n++}$ .

Теперь рассмотрим отображение  $X(x) : \Lambda^n \rightarrow \Omega$ , которое можно записать и как  $y = X(f(x)) \quad \forall x \in \Lambda^n; y \in \Omega$ . Оно будет *линейным*, как произведение (композиция) линейных отображений  $X(f)$  и  $f(x)$ , и, кроме того, очевидно, *взаимно однозначным*. Следовательно,  $y = X(f(x))$  – отображение, устанавливающее изоморфизм линейного пространства  $\Lambda^n$  и множества  $\Omega$ , а тогда в силу теоремы 7.5.1  $\dim(\Omega) = \dim(\Lambda^n) = n$ .

Наконец, отметим, что сочетание условий

$$\dim(\Lambda^{n++}) = n = \dim(\Omega) \text{ и } \Omega \subset \Lambda^{n++}$$

означает совпадение множества  $\Omega$  и линейного пространства  $\Lambda^{n++}$ .

Таким образом, мы приходим к заключению, что отображение  $y = X(f(x)) \quad \forall x \in \Lambda^n; y \in \Lambda^{n++}$  устанавливает тождественное взаимно однозначное соответствие между элементами линейных пространств  $\Lambda^n$  и  $\Lambda^{n++}$ , позволяющее считать их *одним и тем же* пространством  $\Lambda^n$  и записывать связь между значениями линейных функционалов, действующих в  $\Lambda^n$  и  $\Lambda^{n^+}$ , в симметричной форме вида

$$x(f) = f(x); \quad \forall x \in \Lambda^n; \quad \forall f \in \Lambda^{n^+}.$$

**Глава 9****НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ  
В ЛИНЕЙНОМ ПРОСТРАНСТВЕ****§ 9.1. Билинейные функционалы**

**Определение 9.1.1.**

Пусть в линейном пространстве  $\Lambda$  каждой упорядоченной паре элементов  $x$  и  $y$  поставлено в соответствие число  $B(x, y)$  так, что

$$1) \quad B(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha B(x_1, y) + \beta B(x_2, y)$$

$\forall x_1, x_2, y \in \Lambda ; \forall \alpha, \beta,$

$$2) \quad B(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha B(x, y_1) + \beta B(x, y_2)$$

$\forall x, y_1, y_2 \in \Lambda ; \forall \alpha, \beta,$

тогда говорят, что в  $\Lambda$  задан *билинейный функционал* (или *билинейная форма*).

**Пример 9.1.1.**

1°. Произведение двух линейных функционалов  $F(x)$  и  $G(y)$ , определенных в  $\Lambda$ ,

$$B(x, y) = F(x)G(y)$$

есть билинейный функционал.

2°. Двойной интеграл

$$B(x, y) = \iint_{\Omega} K(\tau, \sigma) x(\tau) y(\sigma) d\sigma d\tau =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} x(\tau) \left( \int_{\alpha}^{\beta} K(\tau, \sigma) y(\sigma) d\sigma \right) d\tau,$$

где функция двух переменных  $K(\tau, \sigma)$  непрерывна

на множестве  $\Omega : \begin{cases} \alpha \leq \tau \leq \beta \\ \alpha \leq \sigma \leq \beta \end{cases}$ , есть билинейный функционал в линейном пространстве непрерывных на  $[\alpha, \beta]$  функций.

- 3°. Билинейным функционалом является скалярное произведение векторов на плоскости или в пространстве.

### Билинейные функционалы в $\Lambda^n$ .

Пусть в  $\Lambda^n$  заданы базис  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  и билинейный функционал  $B(x, y)$ . Найдем формулу для выражения его значения через координаты аргументов.

Предположим, что в рассматриваемом базисе  $x = \sum_{i=1}^n \xi_i g_i$  и  $y = \sum_{j=1}^n \eta_j g_j$ , тогда, согласно определению 9.1.1, справедливы равенства

$$\begin{aligned} B(x, y) &= B\left(\sum_{i=1}^n \xi_i g_i, \sum_{j=1}^n \eta_j g_j\right) = \sum_{i=1}^n \xi_i B(g_i, \sum_{j=1}^n \eta_j g_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \eta_j B(g_i, g_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \xi_i \eta_j. \end{aligned}$$

**Определение 9.1.2.** Числа  $\beta_{ij} = B(g_i, g_j)$  называются компонентами билинейного функционала  $B(x, y)$  в базисе  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ , а матрица  $\|B\|_g = \|\beta_{ij}\|$  — матрицей билинейного функционала в этом базисе.

В  $\Lambda^n$  с базисом  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  билинейный функционал может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \beta_{ki} \xi_k \eta_i = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \xi_{ki} \beta_{ki} \eta_{il} = \sum_{k=1}^n \xi_{1k}^T \sum_{i=1}^n \beta_{ki} \eta_{il} = \\ &= \left\| \begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{matrix} \right\| = \\ &= \|x\|_g^T \|B\|_g \|y\|_g, \end{aligned}$$

где столбцы  $\|x\|_g$  и  $\|y\|_g$  – координатные представления элементов  $x$  и  $y$  в данном базисе.

Матрица билинейного функционала зависит от выбора базиса. Правило изменения матрицы билинейного функционала при замене базиса дает

**Теорема** Пусть  $\|S\|$  – матрица перехода от базиса 9.1.1.  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  к базису  $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$ , тогда

$$\|B\|_{g'} = \|S\|^T \|B\|_g \|S\|.$$

Доказательство.

По определению матрицы перехода от одного базиса к другому в  $\Lambda^n$  (см. § 7.3) имеют место соотношения

$$g'_k = \sum_{i=1}^n \sigma_{ik} g_i, \quad k = [1, n],$$

но тогда

$$\begin{aligned}\beta'_{kl} &= B(g'_k, g'_l) = B\left(\sum_{i=1}^n \sigma_{ik} g_i, \sum_{j=1}^n \sigma_{jl} g_j\right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ik} \sigma_{jl} B(g_i, g_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ik} \sigma_{jl} \beta_{ij} = \sum_{i=1}^n \sigma_{ki}^T \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \sigma_{jl}\end{aligned}$$

для всех  $k, l \in [1, n]$ .

Теорема доказана.

**Следствие 9.1.1.**  $\det \|B\|_{g'} = \det \|B\|_g \det^2 \|S\|$ .

Доказательство.

Следует из теоремы 9.1.1, а также свойств детерминанта (теоремы 6.2.1 и 6.2.4).

Отметим, что в силу невырожденности матрицы перехода знак определителя матрицы билинейного функционала не зависит от выбора базиса.

**Следствие 9.1.2.** Ранг матрицы билинейного функционала не зависит от выбора базиса.

Доказательство.

Следует из теоремы 8.4.3 и невырожденности матрицы перехода  $\|S\|$ .

**Определение 9.1.3.** Билинейный функционал  $B(x, y)$  называется *симметричным*, если для любой упорядоченной пары элементов  $x$  и  $y$  линейного пространства  $\Lambda$  имеет место равенство  $B(x, y) = B(y, x)$ .

**Теорема 9.1.2.** Для симметричности билинейного функционала в  $\Lambda^n$  необходимо и достаточно, чтобы его матрица была симметрической.

Доказательство.

Необходимость следует из соотношений

$$\beta_{ij} = B(g_i, g_j) = B(g_j, g_i) = \beta_{ji} \\ \forall i, j = [1, n].$$

Докажем достаточность. Действительно, если

$$\beta_{ij} = \beta_{ji} \quad \forall i, j = [1, n], \text{ то}$$

$$B(y, x) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \beta_{ji} \eta_j \xi_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \beta_{ji} \xi_i \eta_j = \\ = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \xi_i \eta_j = B(x, y).$$

Теорема доказана.

## § 9.2. Квадратичные функционалы

**Определение 9.2.1.**

Пусть в линейном пространстве  $\Lambda$  каждому элементу  $x$  поставлено в соответствие число  $\Phi(x) = B(x, x)$ , где  $B(x, y)$  – некоторый билинейный функционал в  $\Lambda$ , тогда говорят, что в  $\Lambda$  задан квадратичный функционал (или квадратичная форма).

В общем случае в вещественном линейном пространстве по заданному квадратичному функционалу нельзя восстановить порождающий его билинейный функционал, однако это можно сделать в случае симметричного билинейного функционала.

Действительно, пусть квадратичный функционал  $\Phi(x)$  порожден симметричным билинейным функционалом  $B(x, y)$ , тогда для любых  $x$  и  $y$  имеет место равенство

$$\begin{aligned}\Phi(x+y) &= B(x+y, x+y) = \\ &= B(x, x) + B(x, y) + B(y, x) + B(y, y) = \\ &= \Phi(x) + 2B(x, y) + \Phi(y),\end{aligned}$$

откуда  $B(x, y) = \frac{\Phi(x+y) - \Phi(x) - \Phi(y)}{2}$

**Определение 9.2.2.** В  $\Lambda^n$  симметрическая матрица билинейного функционала  $\frac{1}{2}(\Phi(x+y) - \Phi(x) - \Phi(y))$  называется *матрицей квадратичного функционала*  $\Phi(x)$ .

Если в  $\Lambda^n$  задан базис  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ , то квадратичный функционал может быть представлен в виде

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \varphi_{ki} \xi_k \xi_i = \\ &= \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \dots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{vmatrix} = \\ &= \|x\|_g^\top \Phi \|x\|_g,\end{aligned}$$

где  $\|x\|_g$  – координатный столбец элемента  $x = \sum_{i=1}^n \xi_i g_i$  в данном базисе. Замена базиса, естественно, приводит к изменению матрицы квадратичного функционала по формуле  $\|\Phi\|_{g'} = \|S\|^\top \|\Phi\|_g \|S\|$ , определяемой теоремой 9.1.1.

Отметим, что иногда целесообразно строить квадратичный функционал  $\Phi(x)$  по порождающему билинейному функционалу, просимметрировав предварительно последний. Действительно, для любого  $B(x, y)$  можно указать симметричный билинейный функционал

вида  $\frac{1}{2}(B(x, y) + B(y, x))$ , который будет порождать *тот же самий* квадратичный функционал  $\Phi(x)$ , что и  $B(x, y)$ . В этом случае очевидно, что

$$\varphi_{ij} = \frac{\beta_{ij} + \beta_{ji}}{2} = \frac{\beta_{ji} + \beta_{ij}}{2} = \varphi_{ji} \quad \forall i, j = [1, n],$$

– элементы симметрической матрицы.

**Пример** Пусть в  $\Lambda^3$  задан билинейный функционал 9.2.1.

$$\begin{aligned} B_1(x, y) &= \xi_1 \eta_1 + 3\xi_2 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 - \\ &\quad - 3\xi_1 \eta_2 + 2\xi_3 \eta_1 - \xi_2 \eta_3 - \xi_3 \eta_2 = \\ &= \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

имеющий матрицу  $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$  и в силу теоремы

9.1.2 не являющийся симметрическим. Порождаемый им в  $\Lambda^3$  квадратичный функционал будет иметь вид

$$\Phi_1(x) = \xi_1^2 + 3\xi_2^2 - 4\xi_1 \xi_2 + 2\xi_1 \xi_3 - 2\xi_2 \xi_3.$$

В то же время симметричный билинейный функционал

$$\begin{aligned}
 B_2(x, y) &= \xi_1 \eta_1 + 3\xi_2 \eta_2 - 2\xi_1 \eta_2 - 2\xi_2 \eta_1 + \\
 &\quad + \xi_1 \eta_3 + \xi_3 \eta_1 - \xi_2 \eta_3 - \xi_3 \eta_2 = \\
 &= \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

имеющий матрицу  $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ , будет порождать в  $\Lambda^3$  квадратичный функционал вида

$$\Phi_2(x) = \xi_1^2 + 3\xi_2^2 - 4\xi_1\xi_2 + 2\xi_1\xi_3 - 2\xi_2\xi_3,$$

который совпадает с  $\Phi_1(x)$  и имеет матрицу

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

В ряде важных прикладных задач оказывается необходимым отыскание базисов, в которых квадратичный функционал имеет наиболее простой и удобный для исследования вид.

Определение  
9.2.3.

Квадратичный функционал  $\Phi(x)$  имеет **диагональный вид** в базисе  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\} \subset \Lambda^n$ , если он в этом базисе представим как

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i^2,$$

где  $\lambda_i \forall i = [1, n]$  – некоторые числа.

Если, кроме того, числа  $\lambda_i, i = [1, n]$  принимают лишь значения 0 или  $\pm 1$ , то говорят, что квадратичный функционал в данном базисе имеет **канонический вид**.

**Теорема**  
9.2.1  
(Метод  
Лагранжа).

**Для каждого квадратичного функционала в  $\Lambda^n$  существует базис, в котором функционал имеет канонический вид.**

Доказательство.

Воспользуемся методом математической индукции.

1°. При  $n = 1$  в любом базисе  $\Phi(x) = \varphi_{11} \xi_1^2$ . Если  $\varphi_{11} = 0$ , то мы уже имеем канонический вид, если же  $\varphi_{11} \neq 0$ , то, выполняя невырожденную замену переменных  $\xi'_1 = \sqrt{|\varphi_{11}|} \xi_1$ , приходим к каноническому виду.

2°. Предположим, что утверждение теоремы верно для квадратичных функционалов, зависящих от  $n - 1$  переменной, и рассмотрим случай  $n$  переменных.

Будем считать, что  $\varphi_{11} \neq 0$ . Этого можно добиться изменением нумерации переменных в случае, когда хотя бы одно из чисел  $\varphi_{ii}, i = [2, n]$  не равно нулю. Если же все  $\varphi_{ii}, i = [1, n]$  равны нулю одновременно, то без ограничения общности можно считать, что  $\varphi_{12} \neq 0$ . Тогда, выполняя невырожденную замену переменных

$$\xi_1 = \xi'_1 + \xi'_2, \quad \xi_2 = \xi'_1 - \xi'_2, \quad \xi_3 = \xi'_3, \dots, \xi_n = \xi'_n,$$

получаем запись квадратичного функционала с ненулевым диагональным элементом

$$\Phi(x) = 2\varphi_{12}\xi_1'^2 - 2\varphi_{21}\xi_2'^2 + F(\xi_1', \xi_2', \xi_3', \dots, \xi_n'),$$

где  $F(\xi_1', \xi_2', \xi_3', \dots, \xi_n')$  не содержит квадратов от  $\xi_1'$  и  $\xi_2'$ .

3°. В записи квадратичного функционала сгруппируем слагаемые, содержащие переменную  $\xi_1$ :

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \varphi_{ik} \xi_i \xi_k = \\ &= \varphi_{11} (\xi_1^2 + 2 \sum_{i=2}^n \frac{\varphi_{1i}}{\varphi_{11}} \xi_1 \xi_i) + \sum_{i=2}^n \sum_{k=2}^n \varphi_{ik} \xi_i \xi_k, \end{aligned}$$

и выделим полный квадрат, воспользовавшись соотношениями

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \alpha_k \alpha_i &= (\sum_{k=1}^n \alpha_k)(\sum_{i=1}^n \alpha_i) = (\sum_{k=1}^n \alpha_k)^2 = \\ &= (\alpha_1 + \sum_{k=2}^n \alpha_k)^2 = \alpha_1^2 + 2 \sum_{k=2}^n \alpha_1 \alpha_k + (\sum_{k=2}^n \alpha_k)^2 = \\ &= \alpha_1^2 + 2 \sum_{k=2}^n \alpha_1 \alpha_k + \sum_{k=2}^n \sum_{i=2}^n \alpha_k \alpha_i. \end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \varphi_{11} (\xi_1^2 + 2 \sum_{i=2}^n \frac{\varphi_{1i}}{\varphi_{11}} \xi_1 \xi_i + \sum_{i=2}^n \sum_{k=2}^n \frac{\varphi_{1i} \varphi_{1k}}{\varphi_{11}^2} \xi_i \xi_k) + \\ &\quad + \sum_{i=2}^n \sum_{k=2}^n (\varphi_{ik} - \frac{\varphi_{1i} \varphi_{1k}}{\varphi_{11}}) \xi_i \xi_k \end{aligned}$$

и окончательно

$$\Phi(x) = \varphi_{11} (\xi_1 + \sum_{i=2}^n \frac{\varphi_{1i}}{\varphi_{11}} \xi_i)^2 + \sum_{i=2}^n \sum_{k=2}^n (\varphi_{ik} - \frac{\varphi_{1i} \varphi_{1k}}{\varphi_{11}}) \xi_i \xi_k.$$

В последней формуле первое слагаемое есть полный квадрат, а второе – квадратичный функционал, не зависящий от  $\xi_1$  и при-водящийся, согласно предположению индукции, к канониче-скому виду некоторой невырожденной заменой переменных

$$\xi'_k = \sum_{i=2}^n \tau_{ki} \xi_i, \quad k = [2, n].$$

4°. Выполним замену переменных квадратичного функционала  $\Phi(x)$  по формулам

$$\begin{cases} \xi'_1 = \sqrt{|\Phi_{11}|} (\xi_1 + \sum_{i=2}^n \frac{\Phi_{1i}}{\Phi_{11}} \xi_i), \\ \xi'_k = \sum_{i=2}^n \tau_{ki} \xi_i; \quad k = [2, n], \end{cases} \quad (9.2.1)$$

которая приведет к представлению его в каноническом виде. Поскольку в силу  $\Phi_{11} \neq 0$  матрица выполненной замены пе-ременных

$$\| T \| = \begin{vmatrix} \sqrt{|\Phi_{11}|} & \sqrt{|\Phi_{11}|} \frac{\Phi_{12}}{\Phi_{11}} & \dots & \sqrt{|\Phi_{11}|} \frac{\Phi_{1n}}{\Phi_{11}} \\ 0 & \tau_{22} & \dots & \tau_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{vmatrix}$$

имеет определитель, не равный нулю, то замена (9.2.1) – невы-рожденная. Но тогда матрица  $\| T \|$  имеет обратную:

$\| S \| = \| T \|^{-1}$  (см. следствие 7.5.3), которая в свою очередь яв-ляется матрицей перехода к искомому базису.

Теорема доказана.

**Замечание:** базис, в котором квадратичный функционал имеет диагональный или канонический вид, не единственный, равно как не является единственным сам канонический или диагональный вид квадратичного функционала в  $\Lambda^n$ .

Метод Лагранжа не всегда оказывается наиболее простой (с точки зрения затрат вычислительных усилий) процедурой. Иногда приведение матрицы квадратичного функционала к диагональному (или каноническому) виду можно выполнить более эффективно путем использования некоторого набора элементарных преобразований.

Действительно, при переходе от исходного базиса  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  к новому  $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$  с матрицей перехода  $\|S\|$  матрица квадратичного функционала меняется по правилу  $\|\Phi\|_{g'} = \|S\|^T \|\Phi\|_g \|S\|$ . Будем теперь рассматривать матрицу  $\|S\|$  как матрицу некоторого элементарного преобразования матрицы  $\|\Phi\|_g$  (см. § 6.8).

Пусть матрица  $\|S\|$  такова, что умножение на нее справа  $\|\Phi\|_g$  приводит последнюю к нижнему треугольному виду, тогда в силу теоремы 6.8.2 матрица  $\|\Phi\|_{g'}$  оказывается диагональной. С другой стороны, матрица  $\|S\|$  представима как произведение матриц элементарных преобразований, последовательно примененных к столбцам единичной матрицы. Поэтому, выполнив диагонализацию  $\|\Phi\|_g$  некоторым набором элементарных преобразований, применяемых на каждом шаге процедуры как к ее строкам, так и к ее столбцам, и применив тот же самый набор элементарных преобразований к столбцам единичной матрицы, мы получим как диагональный вид матрицы

квадратичного функционала  $\|\Phi\|_{g'}$ , так и  $\|x\|_g = \|S\| \|x\|_{g'}$  – формулы перехода от исходного базиса  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  к базису  $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$ , в котором матрица квадратичного функционала оказывается диагональной. Применение данного алгоритм иллюстрирует следующий пример.

**Задача 9.2.1.** Привести в  $\Lambda^3$  к диагональному виду квадратичный функционал

$$\Phi(x) = -2\xi_1^2 - \xi_2^2 - 4\xi_3^2 - 8\xi_1\xi_2 + 2\xi_1\xi_3 - 8\xi_2\xi_3.$$

**Решение.** В исходном базисе функционал  $\Phi(x)$  имеет матрицу

$$\begin{vmatrix} -2 & -4 & 1 \\ -4 & -1 & -4 \\ 1 & -4 & -4 \end{vmatrix}.$$

1°. На первом шаге процедуры выполним следующие элементарные операции:

- заменим вторую строку исходной матрицы разностью второй и третьей ее строк;

- в полученной матрице заменим второй столбец разностью второго и третьего столбца,

в результате чего получаем матрицу вида

$$\begin{vmatrix} -2 & -5 & 1 \\ -5 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix}.$$

Кроме того, заменив в единичной матрице

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

второй столбец разностью второго и

третьего, получим  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ .

2º. На втором шаге заменяем вначале первую строку утюренной первой, сложенную со второй, взятой с коэффициентом 5. Соответственно такое же преобразование выполняется со столбцами. Получаем следующие две матрицы:

$$\begin{vmatrix} -93 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

3º. На третьем шаге заменяем третью строку первой, сложенную с третьей, взятой с коэффициентом 31. Выполнив такие же преобразования со столбцами, соответственно получаем матрицы

$$\begin{vmatrix} -93 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3751 \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 5 \\ -5 & -1 & 26 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, перейдя к базису

$$\begin{vmatrix} 3 \\ 5 \\ -5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \\ 26 \end{vmatrix}$$

и выполнив замену координат по формулам перехода

$$\begin{cases} \xi_1 = 3\xi'_1 + 3\xi'_3, \\ \xi_2 = 5\xi'_1 + \xi'_2 + 5\xi'_3, \\ \xi_3 = -5\xi'_1 - \xi'_2 + 26\xi'_3, \end{cases}$$

мы получим следующий диагональный вид исходного квадратичного функционала:

$$\Phi(x) = -93\xi'^2_1 + 3\xi'^2_2 - 3751\xi'^2_3.$$

### § 9.3. Исследование знака квадратичного функционала

Несмотря на неединственность диагонального или канонического представления, квадратичные функционалы обладают рядом важных свойств, *инвариантных* относительно (то есть не зависящих от) выбора базиса в  $\Lambda^n$ . Одной из таких характеристик является *ранг квадратичного функционала*.

**Определение 9.3.1.** Максимальное число не равных нулю коэффициентов канонического вида квадратичного функционала  $\Phi(x)$  называется его *рангом* и обозначается  $\text{rg } \Phi$ .

**Теорема 9.3.1.** **Ранг квадратичного функционала в  $\Lambda^n$  не зависит от выбора базиса.**

Доказательство.

По следствию 9.1.2 ранг матрицы билинейного функционала не зависит от выбора базиса. Поэтому не будет зависеть от выбора базиса и ранг матрицы порождаемого им квадратичного функционала.

С другой стороны, в силу теорем 8.4.3 и 9.1.1 ранг матрицы квадратичного функционала равен числу ненулевых коэффициентов в его каноническом виде.

Теорема доказана.

При исследовании знака значений квадратичного функционала оказывается полезным использование следующих его характеристик.

- Определение 1°.** Максимальное число положительных коэффициентов диагонального (канонического) вида квадратичного функционала  $\Phi(x)$  в  $\Lambda^n$  называется его *положительным индексом инерции* и обозначается  $rg_+ \Phi$ .
- 2°.** Максимальное число отрицательных коэффициентов диагонального (канонического) вида квадратичного функционала  $\Phi(x)$  в  $\Lambda^n$  называется его *отрицательным индексом инерции* и обозначается  $rg_- \Phi$ .
- 3°.** Разность между положительным и отрицательным индексами инерции называется *сигнатурой* квадратичного функционала  $\Phi(x)$  в  $\Lambda^n$  и обозначается
- $$\operatorname{sgn}\Phi = rg_+ \Phi - rg_- \Phi.$$

**Теорема  
9.3.2  
(инерции  
квадратичных  
функционалов).**

**Значения положительного и отрицательного индексов инерции, а также сигнатуры квадратичного функционала  $\Phi(x)$  в  $\Lambda^n$  не зависят от выбора базиса, в котором этот функционал имеет диагональный (канонический) вид.**

Доказательство.

- 1°.** Пусть квадратичный функционал  $\Phi(x)$  имеет в некотором базисе  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  представление

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \Phi_{ij} \xi_i \xi_j$$

и пусть существуют два различных базиса  $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$  и  $\{g''_1, g''_2, \dots, g''_n\}$ , в которых  $\Phi(x)$  имеет следующий вид:

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \eta_i^2 - \sum_{i=k+1}^m \lambda_i \eta_i^2; m \leq n, \lambda_i > 0 \quad \forall i = [1, m]$$

и соответственно

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^p \mu_i \kappa_i^2 - \sum_{i=p+1}^q \mu_i \kappa_i^2; q \leq n, \mu_i > 0 \quad \forall i = [1, q].$$

В силу сделанных предположений должны существовать невырожденные матрицы замены переменных  $\|\omega_{ij}\|$  и  $\|\theta_{ij}\|$  при переходах от базиса  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  к базисам

$$\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\} \text{ и } \{g''_1, g''_2, \dots, g''_n\}$$

такие, что

$$\eta_s = \sum_{j=1}^n \omega_{sj} \xi_j; s = [1, n] \text{ и } \kappa_s = \sum_{j=1}^n \theta_{sj} \xi_j; s = [1, n]. \quad (9.3.1)$$

2°. Приравняем значения функционала  $\Phi(x)$  в базисах

$$\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\} \text{ и } \{g''_1, g''_2, \dots, g''_n\}$$

для некоторого элемента

$$x = \sum_{k=1}^n \xi_k g_k = \sum_{i=1}^n \eta_i g'_i = \sum_{j=1}^n \kappa_j g''_j,$$

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \eta_i^2 - \sum_{i=k+1}^m \lambda_i \eta_i^2 = \sum_{i=1}^p \mu_i \kappa_i^2 - \sum_{i=p+1}^q \mu_i \kappa_i^2$$

и преобразуем полученное равенство к виду

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \eta_i^2 + \sum_{i=p+1}^q \mu_i \kappa_i^2 = \sum_{i=1}^p \mu_i \kappa_i^2 + \sum_{i=k+1}^m \lambda_i \eta_i^2. \quad (9.3.2)$$

- 3°. Исследуем полученное соотношение. Допустим, что  $k < p$  и предположим, что элемент  $x$  имеет в рассматриваемых базисах компоненты

$$\eta_i = 0 \quad \forall i = [1, k] ; \quad \kappa_i = 0 \quad \forall i = [p + 1, n].$$

Этих условий меньше, чем  $n$ , поскольку  $k < p$ . Если их подставить в равенства (9.3.1), то мы получим однородную систему линейных уравнений относительно неизвестных

$$\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}.$$

Поскольку число таких уравнений меньше числа неизвестных, то можно утверждать, что она в силу теоремы 6.7.1 имеет нетривиальные решения, и, следовательно, элемент  $x$  может быть ненулевым.

С другой стороны, из равенства (9.3.2), положительности чисел  $\lambda_i ; i = [1, m]$  и  $\mu_i ; i = [1, q]$ , а также условий

$$\eta_i = 0 \quad \forall i = [1, k] ; \quad \kappa_i = 0 \quad \forall i = [p + 1, n]$$

следует, что и  $\kappa_i = 0 ; i = [1, p]$ .

Тогда в силу (9.3.1) мы получаем однородную систему  $n$  линейных уравнений  $\kappa_s = \sum_{j=1}^n \theta_{sj} \xi_j ; s = [1, n]$  с  $n$  неизвест-

ными и невырожденной основной матрицей, имеющую только тривиальное решение, то есть элемент  $x$  обязан быть нулевым. Полученное противоречие показывает ошибочность предположения о том, что  $k < p$ .

- 4°. Аналогичными рассуждениями показываем, что невозможно и соотношение  $k > p$ . Поэтому приходим к заключению, что  $k = p$ .
- 5°. По теореме 9.3.1  $m = q$ , и потому  $k - m = p - q$ .

Теорема доказана.

Для исследования знака значений квадратичного функционала введем в рассмотрение понятие его *знаковой определенности*.

**Определение** 1°. Квадратичный функционал  $\Phi(x)$  называется *положительно определенным на подпространстве*

$\Omega^+ \subset \Lambda$ , если  $\Phi(x) > 0$  для любого ненулевого  $x \in \Omega^+$ .

2°. Квадратичный функционал  $\Phi(x)$  называется *отрицательно определенным на подпространстве*  $\Omega^- \subset \Lambda$ , если  $\Phi(x) < 0$  для любого ненулевого  $x \in \Omega^-$ .

3°. Если же  $\Omega^+$  (или  $\Omega^-$ ) совпадает с  $\Lambda$ , то говорят, что квадратичный функционал  $\Phi(x)$  является *положительно (отрицательно) определенным*.

4°. Если же  $\Phi(x) \geq 0$  ( $\Phi(x) \leq 0$ ) для всех  $x \in \Lambda$ , то говорят, что квадратичный функционал является *положительно (отрицательно) полуопределенным*.

**Теорема**  
9.3.3.

**Максимальная размерность подпространства** в  $\Lambda^n$ , на котором квадратичный функционал *положительно (отрицательно) определен, равняется положительному (отрицательному) индексу инерции этого функционала.*

**Доказательство.**

Следует из теоремы 9.3.2 и очевидного равенства числа положительных (отрицательных) элементов матрицы квадратичного функционала в диагональном представлении размерности подпространства  $\Omega^+$  ( $\Omega^-$ ).

В ряде прикладных задач оказывается необходимым проведение исследования знаковой определенности квадратичного функционала без приведения его к диагональному виду. Удобное необходимое и достаточное условие положительной определенности квадратичного функционала дает

Теорема  
9.3.4  
(Критерий  
Сильвестра).

**Для положительной определенности квадратичного функционала в  $\Lambda^n$  необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры его матрицы, имеющие вид**

$$\det \begin{vmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \dots & \Phi_{1k} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \dots & \Phi_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_{k1} & \Phi_{k2} & \dots & \Phi_{kk} \end{vmatrix}; \quad k = [1, n],$$

**были положительными.**

Доказательство достаточности.

1°. Воспользуемся методом математической индукции.

Для  $k = 1$  достаточность очевидна. Допустим, что из положительности главных миноров матрицы квадратичного функционала порядка до  $k = n - 1$  включительно следует возможность приведения квадратичного функционала от  $n - 1$  переменных к виду

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2.$$

2°. Покажем, что в этом случае достаточность будет иметь место и для квадратичных функционалов, зависящих от  $n$  переменных. В выражении для квадратичного функционала, зависящего от  $n$  переменных, выделим слагаемые, содержащие  $\xi_n$ :

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_{ki} \xi_k \xi_i + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_{kn} \xi_k \xi_n + \varphi_{nn} \xi_n^2.$$

Двойная сумма в правой части этого равенства есть квадратичный функционал  $\Phi^*(x)$ , зависящий от  $n-1$  переменной, причем его главные миноры совпадают с главными минорами  $\Phi(x)$  до порядка  $n-1$  включительно, которые, по предположению индукции, положительны. Отсюда следует, что квадратичный функционал  $\Phi^*(x)$  положительно определенный, и для него существует невырожденная замена переменных

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_{ki} \eta_i ; \quad k = [1, n-1],$$

$$\text{приводящая его к каноническому виду } \Phi^*(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i^2 .$$

Выпишем представление квадратичного функционала  $\Phi(x)$  в новых переменных:

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \varphi'_{in} \eta_i \xi_n + \varphi_{nn} \xi_n^2$$

и выделим в нем полные квадраты:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \sum_{i=1}^{n-1} (\eta_i^2 + 2\varphi'_{in} \eta_i \xi_n + \varphi'^2_{in} \xi_n^2) + \\ &+ (\varphi_{nn} - \sum_{i=1}^{n-1} \varphi'^2_{in}) \xi_n^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \zeta_i^2 + \varphi''_{nn} \xi_n^2 , \end{aligned}$$

где

$$\varphi''_{nn} = \varphi_{nn} - \sum_{i=1}^{n-1} \varphi'^2_{in} ; \quad \zeta_i = \eta_i + \varphi'_{in} \xi_n ; \quad i = [1, n-1].$$

В матричном виде эту замену переменных можно записать как

$$\begin{vmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \cdots \\ \zeta_{n-1} \\ \xi_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \varphi'_{1,n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \varphi'_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \varphi'_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \cdots \\ \eta_{n-1} \\ \xi_n \end{vmatrix},$$

и поскольку определитель ее матрицы отличен от нуля, то эта замена невырожденная.

- 3°. Наконец, в силу следствия 9.1.1 определитель матрицы квадратичного функционала сохраняет знак при замене базиса. Знак определителя матрицы квадратичного функционала в исходном базисе положительный, поскольку этот определитель имеет вид

$$\det \begin{vmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \cdots & \Phi_{1n} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \cdots & \Phi_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Phi_{n1} & \Phi_{n2} & \cdots & \Phi_{nn} \end{vmatrix}$$

и является главным минором порядка  $n$ . Но тогда из выражения для  $\Phi(x)$  в конечном базисе мы получаем, что определитель матрицы квадратичного функционала  $\Phi(x)$  равен  $\varphi''_{nn}$ . Поэтому  $\varphi''_{nn} > 0$  и можно сделать замену переменных  $\zeta_n = \xi_n \sqrt{\varphi''_{nn}}$ , приводящую к каноническому виду функцио-

нал  $\Phi(x) = \sum_{i=1}^n \zeta_i^2$ .

Следовательно, квадратичный функционал  $\Phi(x)$  положительно определен для числа переменных  $n$ , а значит, в силу математической индукции, для любого числа переменных.

Достаточность доказана.

Доказательство необходимости критерия Сильвестра положительной определенности квадратичного функционала приводится в разделе “Евклидово пространство” § 10.3.

Исходя из критерия Сильвестра для положительной определенности квадратичного функционала, можно получить аналогичный критерий отрицательной определенности квадратичного функционала.

**Следствие 9.3.1.** Для отрицательной определенности квадратичного функционала в  $\Lambda^n$  необходимо и достаточно, чтобы главные миноры четного порядка матрицы функционала были положительны, а нечетного порядка – отрицательны.

Доказательство.

Пусть квадратичный функционал  $\Phi(x)$  отрицательно определенный, тогда функционал  $-\Phi(x)$  будет, очевидно, положительно определенным. Применяя к нему критерий Сильвестра положительной определенности, получим для главного минора  $k$ -го порядка, использовав линейное свойство определителя, условие

$$\det \begin{vmatrix} -\Phi_{11} & -\Phi_{12} & \dots & -\Phi_{1k} \\ -\Phi_{21} & -\Phi_{22} & \dots & -\Phi_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\Phi_{k1} & -\Phi_{k2} & \dots & -\Phi_{kk} \end{vmatrix} = \\ = (-1)^k \det \begin{vmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \dots & \Phi_{1k} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \dots & \Phi_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_{k1} & \Phi_{k2} & \dots & \Phi_{kk} \end{vmatrix} > 0 \quad \forall k = [1, n].$$

Откуда и следует доказываемое утверждение.

Следствие доказано.

## § 9.4. Инварианты линий второго порядка на плоскости

Независимость значений ранга и сигнатуры квадратичного функционала от выбора базиса позволяет выполнить классификацию линий второго порядка на плоскости способом, отличным от приведенного в теореме 4.4.1.

Рассмотрим линию второго порядка на плоскости  $Oxy$  в базисе  $\{g_1, g_2\}$  и с началом координат в точке  $O$ . Эта линия в общем случае задается согласно определению 4.4.1 уравнением вида  $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ , где числа  $A, B, C, D, E$  и  $F$  произвольны с одним лишь ограничением, что  $A, B$  и  $C$  не равны нулю одновременно ( $|A| + |B| + |C| > 0$ ).

Нетрудно проверить, что при замене начала координат коэффициенты  $A, B$  и  $C$  не меняются, а при смене базиса преобразуются как коэффициенты квадратичного функционала (см. теорему 9.1.1). Поэтому можно считать, что многочлен  $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$  задает квадратичный функционал

$$\Phi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

с матрицей  $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$  в исходном базисе  $\{g_1, g_2\}$ .

На основании теорем 9.2.2 и 9.3.1 заключаем, что  $\operatorname{rg} \Phi$  – ранг и  $\operatorname{sgn} \Phi$  – сигнатаура квадратичного функционала  $\Phi(x, y)$  не зависят от выбора системы координат и, следовательно,  $\operatorname{rg} \Phi$  и  $|\operatorname{sgn} \Phi|$  являются инвариантами линии второго порядка на плоскости. Использование модуля сигнатуры необходимо, поскольку одновременное изменение знаков всех коэффициентов уравнения линии второго порядка изменит, естественно, само уравнение, хотя линия при этом останется той же.

Поскольку в запись уравнения линии второго порядка на плоскости входят также и коэффициенты  $D, F$  и  $E$ , то следует выяснить, не существуют ли дополнительные инварианты, образованные из всей совокупности коэффициентов  $A, B, C, D, F$  и  $E$ . Для этого рассмотрим вспомогательный квадратичный функционал в  $\Lambda^3$  вида

$$\Psi(x, y, z) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2$$

с матрицей  $\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$  в базисе  $\{g_1, g_2, g_3\}$ .

Заметим, что совокупность всех точек в  $\Lambda^3$ , для которых  $\Psi(x, y, 1) = 0$ , есть рассматриваемая нами линия второго порядка, расположенная в пространстве на плоскости  $z = 1$ . Пусть в  $\Lambda^3$  выполняется замена базиса, при которой плоскость  $z = 1$  переходит сама в себя. Найдем для этой замены базиса правило изменения коэффициентов квадратичного функционала  $\Psi(x, y, z)$ .

**Лемма 9.4.1.** **Матрица  $\|S\|$  перехода от базиса  $\{g_1, g_2, g_3\}$  к базису  $\{g'_1, g'_2, g'_3\}$ , для которой плоскость  $z = 1$  переходит сама в себя, имеет вид**

$$\|S\| = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

**Доказательство.**

Замена координат в плоскости  $Oxy$  выполняется по формулам

$$\begin{cases} x = \sigma_{11}x' + \sigma_{12}y' + \sigma_{13}, \\ y = \sigma_{21}x' + \sigma_{22}y' + \sigma_{23}, \end{cases}$$

но поскольку при этом  $z = 1$  и  $z' = 1$ , то

$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Невырожденность матрицы  $\|S\|$  следует из очевидного усло-

$$\text{вия } \det \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Лемма доказана.

Поскольку ранг и сигнатура квадратичного функционала не меняются при любых заменах базиса, то это будет верным и для замен, переводящих плоскость  $z = 1$  саму в себя. Поэтому  $\operatorname{rg} \Psi$  и  $\operatorname{sgn} \Psi$  сохраняются при таких заменах, а числа  $\operatorname{rg} \Psi$  и  $|\operatorname{sgn} \Psi|$  являются инвариантами уравнения линии второго порядка. Таким образом, доказана

**Теорема 9.4.1.** **При любых заменах декартовой системы координат на плоскости  $Oxy$  числа  $\operatorname{rg} \Phi$ ,  $\operatorname{rg} \Psi$ ,  $|\operatorname{sgn} \Phi|$  и  $|\operatorname{sgn} \Psi|$  являются инвариантами линии второго порядка.**

Подсчитаем значения чисел  $\operatorname{rg} \Phi$ ,  $\operatorname{rg} \Psi$ ,  $|\operatorname{sgn} \Phi|$  и  $|\operatorname{sgn} \Psi|$  для девяти видов линий второго порядка на плоскости, приведенных в формулировке теоремы 4.4.1, результаты поместим в таблицу 9.4.1 из которой следует, что каждый вид линии второго порядка на плоскости имеет свой, уникальный набор значений инвариантов, который может быть принят за признак принадлежности некоторой линии второго порядка к конкретному виду.

Таблица 9.4.1

	Вид линии	Каноническое уравнение	$\operatorname{rg} \Psi$	$ \operatorname{sgn} \Psi $	$\operatorname{rg} \Phi$	$ \operatorname{sgn} \Phi $
1	Эллипс	$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$	3	1	2	2
2	Мнимый эллипс	$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = -1$	3	3	2	2
3	Точка	$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 0$	2	2	2	2
4	Гипербола	$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$	3	1	2	0
5	Пересек. прямые	$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 0$	2	0	2	0
6	Парабола	$y'^2 = 2px'$	3	1	1	1
7	Параллельные прямые	$y'^2 = a^2$	2	0	1	1
8	Пара мнимых прямых	$y'^2 = -a^2$	2	2	1	1
9	Совпадающие прямые	$y'^2 = 0$	1	1	1	1

В заключение отметим, что

1°. Подсчет значений рангов и модулей сигнатур выполняется путем приведения квадратичного функционала к диагонально-

му виду. Однако для параболы приведение функционала  $\Psi(x, y, z)$  к диагональному виду матрицей перехода, переводящей плоскость  $z = 1$  саму в себя, вообще говоря, невоз-

можно, поскольку его матрица имеет вид  $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -\kappa \\ 0 & 1 & 0 \\ -\kappa & 0 & 0 \end{vmatrix}$ .

В этом случае для подсчета ранга и сигнатуры можно исполь-

зовать матрицу перехода  $\|S\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ , которая, хо-

тя и не обеспечивает выполнение условия перехода плоскости  $z = 1$  самой в себя, но, как всякая линейная замена координат, сохраняет ранг и сигнатуру. Действительно,

$$\begin{aligned} \|\Psi\|_{g'} &= \|S\|^T \|\Psi\|_g \|S\| = \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\kappa \\ 0 & 1 & 0 \\ -\kappa & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 2\kappa & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2\kappa \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

- 2°. Для линий второго порядка на плоскости существуют и другие ортогональные инварианты, например, инвариантами являются числа  $I_1 = A + C$  и  $I_2 = \det \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$ . Справедливость этого утверждения показана в § 4.4.

3°. Схема классификации, аналогичная рассмотренной, может быть построена и для поверхностей второго порядка в пространстве.

### § 9.5. Экстремальные свойства квадратичных функционалов

Из теоремы 9.2.1 следует существование в  $\Lambda^n$  базиса, в котором квадратичный функционал  $\Phi(x)$  имеет диагональный вид. Допустим, что этот базис  $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$  построен так, что

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi'_i{}^2 \quad \text{и} \quad \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda_n.$$

Тогда справедлива

**Теорема 9.5.1.** Для квадратичного функционала  $\Phi(x)$  в  $\Lambda^n$  справедливы соотношения  $\lambda_1 = \min_{x \in \Lambda^n} \Phi(x)$  и

$\lambda_n = \max_{x \in \Lambda^n} \Phi(x)$  при условии, что компоненты  $x$

удовлетворяют условию  $\sum_{i=1}^n \xi'_i{}^2 = 1$ .

Доказательство.

Если в рассматриваемом базисе  $\Phi(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi'_i{}^2$ , то в силу соотношений  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda_n$  будут иметь место неравенства

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \xi'_i{}^2 \leq \lambda_n \sum_{i=1}^n \xi'_i{}^2 \quad \text{и} \quad \lambda_1 \sum_{i=1}^n \xi'_i{}^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi'_i{}^2.$$

Но поскольку  $\sum_{i=1}^n \xi_i'^2 = 1$ , то будут также справедливы и оценки

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i'^2 \leq \lambda_n \text{ и } \lambda_1 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i'^2.$$

То есть при  $x = \|0, 0, \dots, 1\|^\top$  достигается максимум, а при  $x = \|1, 0, \dots, 0\|^\top$  – минимум значений функционала.

Теорема доказана.

## § 9.6. Полилинейные функционалы

По аналогии с билинейными функционалами, зависящими от пары элементов линейного пространства, можно определить нелинейные функционалы, обладающие аналогичными свойствами, но зависящие от большего числа аргументов.

**Определение 9.6.1.** Пусть в линейном пространстве  $\Lambda$  каждому упорядоченному набору из  $k$  элементов  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  поставлено в соответствие число  $Q(x_1, x_2, \dots, x_k)$  так, что для любого  $j = [1, k]$

$$\begin{aligned} Q(x_1, \dots, \alpha x_j' + \beta x_j'', \dots, x_k) &= \\ &= \alpha Q(x_1, \dots, x_j', \dots, x_k) + \beta Q(x_1, \dots, x_j'', \dots, x_k) \\ \forall x', x'' \in \Lambda \quad \forall \alpha, \beta, \end{aligned}$$

тогда говорят, что в  $\Lambda$  задан *полилинейный функционал*, а именно,  $k$ -линейный функционал.

Пример 9.6.1. 1°. Произведение определенных в  $\Lambda$   $k$  линейных функционалов  $F_1(x), F_2(x), \dots, F_k(x)$ , то есть

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_k) = F_1(x_1)F_2(x_2)\dots F_k(x_k),$$

является  $k$ -линейным функционалом в  $\Lambda$ .

2°. Смешанное произведение трех векторов в трехмерном геометрическом пространстве является *трилинейным* функционалом.

3°. Определитель  $n$ -го порядка есть полилинейный функционал от  $n$  элементов в  $\Lambda^n$  в случае, когда координатные представления этих элементов являются столбцами данного определителя.

## Глава 10

# ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

### § 10.1. Определение и основные свойства

В произвольном линейном пространстве отсутствуют понятия “длины”, “расстояния”, “величины угла” и других метрических характеристик. Однако их использование становится возможным, если в линейном пространстве дополнительно ввести специальную, определяемую ниже операцию.

**Определение 10.1.1.** Пусть в вещественном линейном пространстве каждой упорядоченной паре элементов  $x$  и  $y$  поставлено в соответствие вещественное число  $(x, y)$ , называемое *скалярным произведением*, так, что выполнены аксиомы:

- 1)  $(x, y) = (y, x);$
- 2)  $(\lambda x, y) = \lambda(x, y);$
- 3)  $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y);$
- 4)  $(x, x) \geq 0$ , причем  

$$(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = o,$$

тогда говорят, что задано *евклидово пространство*  $E$ .

**Замечание:** аксиомы 1–4 в совокупности означают, что скалярное произведение есть *билинейный* (что следует из аксиом 2 и 3) и *симметричный* (следует из аксиомы 1) функционал, который, кроме того, порождает *положительно определенный квадратичный* (следует из аксиомы 4) функционал. Любой билинейный функционал, обладающий данными свойствами, может использоваться в качестве скалярного произведения.

**Пример 10.1.1.** 1°. Трехмерное геометрическое пространство со скалярным произведением, введенным по правилам § 2.2, является евклидовым.

2°. Пространство  $n$ -мерных столбцов

$$x = \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{vmatrix}; \quad y = \begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{vmatrix}$$

со скалярным произведением, определяемым по формуле  $(x, y) = \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i$ , есть евклидово пространство.

3°. Евклидовым будет пространство непрерывных на  $[\alpha, \beta]$  функций со скалярным произведением

$$(x, y) = \int_{\alpha}^{\beta} x(\tau) y(\tau) d\tau.$$

**Задача 10.1.1.** Можно ли в трехмерном пространстве скалярное произведение определить как произведение длин векторов на куб косинуса угла между ними?

**Решение.** Нет, нельзя, так как не будет выполняться аксиома 3 определения 10.1.1.

**Определение 10.1.2.**

В евклидовом пространстве  $E$  назовем

- 1) нормой (или длиной) элемента  $x$  число  $|x| = \sqrt{(x, x)}$ ;
- 2) расстоянием между элементами  $x$  и  $y$  число  $|x - y|$ .

**Замечание:** использование для обозначения нормы элемента ограничителей вида  $| \dots |$  не приводит к каким-либо конфликтам с введенными ранее обозначениями, поскольку для линейного пространства вещественных чисел норма числа, очевидно, совпадает с его абсолютной величиной, для комплексного числа норма совпадает с его модулем, а для линейного пространства геометрических векторов – с длиной вектора.

**Теорема** Для любых  $x, y \in E$  имеет место неравенство

10.1.1  
(неравенство  
Коши–  
Буняковского).

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

Доказательство.

Для  $\forall x, y \in E$  и вещественного числа  $\tau$  элемент  $x - \tau y \in E$ .

Согласно аксиоме 4 из определения 10.1.1

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x - \tau y, x - \tau y) = (x, x) - 2(x, y)\tau + (y, y)\tau^2 = \\ &= \|x\|^2 - 2(x, y)\tau + \|y\|^2\tau^2 \quad \forall \tau. \end{aligned}$$

Полученный квадратный трехчлен неотрицателен для любого  $\tau$  тогда и только тогда, когда его дискриминант неположителен, то есть  $(x, y)^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$ .

Теорема доказана.

**Задача** Показать, что неравенство Коши–Буняковского пре-  
10.1.2. вращается в равенство тогда и только тогда, когда  
элементы  $x$  и  $y$  линейно зависимы.

**Следствие** Для любых  $x, y \in E$  имеет место неравенство

10.1.1  
(неравенство  
треугольника).

$$|x + y| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Доказательство.

Из аксиом евклидова пространства и неравенства Коши–Буняковского имеем

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leq \\ &\leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2, \end{aligned}$$

откуда в силу неотрицательности чисел  $|x + y|$  и  $|x| + |y|$  получаем неравенство треугольника.

Следствие доказано.

Отметим, что неравенства Коши–Буняковского и треугольника для евклидова пространства из примера 10.1.1 ( $2^\circ$ ) имеют вид

$$\left| \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i \right| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n \xi_j^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n \eta_k^2} \quad \forall \xi_i, \eta_i, \quad i = [1, n];$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (\xi_i + \eta_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n \xi_j^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^n \eta_k^2} \quad \forall \xi_i, \eta_i, \quad i = [1, n],$$

в то время как для евклидова пространства из примера 10.1.1 ( $3^\circ$ ) соответственно:

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} x(\tau) y(\tau) d\tau \right| \leq \sqrt{\int_{\alpha}^{\beta} x^2(\tau) d\tau} \sqrt{\int_{\alpha}^{\beta} y^2(\tau) d\tau};$$

$$\sqrt{\int_{\alpha}^{\beta} (x(\tau) + y(\tau))^2 d\tau} \leq \sqrt{\int_{\alpha}^{\beta} x^2(\tau) d\tau} + \sqrt{\int_{\alpha}^{\beta} y^2(\tau) d\tau}.$$

**Определение 10.1.3.** В евклидовом пространстве  $E$  величиной угла между ненулевыми элементами  $x$  и  $y$  назовем число  $\alpha \in [0, \pi]$ , удовлетворяющее соотношению

$$\cos \alpha = \frac{(x, y)}{|x| |y|}.$$

Из неравенства Коши–Буняковского (теорема 10.1.1) следует, что величина угла существует для любой пары ненулевых элементов в  $E$ .

**Определение 10.1.4.** В евклидовом пространстве  $E$  элементы  $x$  и  $y$  называются *ортогональными*, если  $(x, y) = 0$ .

Откуда следует, что нулевой элемент евклидова пространства ортогонален любому другому элементу.

## § 10.2. Ортонормированный базис. Ортогонализация базиса

**Определение 10.2.1.** В конечномерном евклидовом пространстве  $E^n$  базис  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  называется *ортонормированным*, если  $(e_i, e_j) = \delta_{ij} \forall i, j = [1, n]$ .

**Теорема 10.2.1** Во всяком евклидовом пространстве  $E^n$  существует ортонормированный базис.  
(Грамма–Шмидта).

Доказательство.

1°. Пусть в  $E^n$  дан некоторый, вообще говоря, неортогональный базис  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ . Построим вначале базис  $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$  из попарно ортогональных элементов. Последовательное построение этих элементов будем называть *процессом ортогонализации базиса*.

Возьмем  $e'_1 = g_1$ . Элемент  $e'_2$  будем искать в виде  $e'_2 = g_2 + \alpha_{21}e'_1$ , где  $\alpha_{21}$  – некоторая константа. Подберем  $\alpha_{21}$  так, чтобы  $(e'_1, e'_2) = 0$ , для этого достаточно, чтобы

$$\begin{aligned}(e'_1, e'_2) &= (e'_1, g_2 + \alpha_{21}e'_1) = \\ &= (e'_1, g_2) + \alpha_{21}(e'_1, e'_1) = 0; \quad \alpha_{21} = -\frac{(e'_1, g_2)}{(e'_1, e'_1)}.\end{aligned}$$

Заметим, что  $e'_2 \neq o$ . Действительно, из

$$o = e'_2 = g_2 + \alpha_{21}e'_1 = g_2 + \alpha_{21}g_1$$

следует линейная зависимость  $g_1$  и  $g_2$ , что противоречит условию принадлежности этих элементов базису (см. лемму 7.2.2).

2°. Допустим теперь, что нам удалось ортогоанализовать  $k-1$  элемент, и примем в качестве  $e'_k$  элемент

$$e'_k = g_k + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{kj} e'_j.$$

Потребуем, чтобы  $(e'_k, e'_i) = 0 \quad \forall i = [1, k-1]$ , но тогда в силу

$$(e'_j, e'_i) = 0; \quad j = [1, k-1] \text{ имеем}$$

$$(e'_i, e'_k) = (e'_i, g_k + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{kj} e'_j) = (e'_i, g_k) + \alpha_{ki} (e'_i, e'_i) = 0;$$

$$\alpha_{ki} = -\frac{(e'_i, g_k)}{(e'_i, e'_i)}; \quad i = [1, k-1].$$

Покажем теперь, что в этом случае  $e'_k \neq o$ . Допустим противное:  $e'_k = g_k + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{kj} e'_j = o$ . Однако поскольку все эле-

менты  $e'_i, i = [1, k - 1]$  по построению есть некоторые линейные комбинации элементов  $g_i; i = [1, k - 1]$ , мы приходим к линейной зависимости  $g_i; i = [1, k]$ , что противоречит условию теоремы. Следовательно,  $e'_k \neq o$ .

- 3°. Процесс ортогонализации продолжается до исчерпания множества элементов  $g_i; i = [1, n]$ , после чего достаточно *пронормировать* полученные элементы  $e'_i; i = [1, n]$ , чтобы получить искомый ортонормированный базис  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ,

$$\text{где } e_k = \frac{e'_k}{|e'_k|}; k = [1, n].$$

Теорема доказана.

Процесс ортогонализации Грама–Шмидта может быть применен к любой, в том числе и к линейно зависимой, системе элементов евклидова пространства. Если ортогонализуемая система линейно зависима, то на некотором шаге мы получим нулевой элемент, после отбрасывания которого можно продолжить процесс ортогонализации.

### § 10.3. Координатное представление скалярного произведения

Полезным инструментом исследования свойств некоторого набора элементов  $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$  в евклидовом пространстве является матрица Грама.

**Определение 10.3.1.** В евклидовом пространстве  $E$  матрицей Грама системы элементов  $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$  называется симметрическая матрица вида

$$\|\Gamma\|_f = \begin{vmatrix} (f_1, f_1) & (f_1, f_2) & \cdots & (f_1, f_k) \\ (f_2, f_1) & (f_2, f_2) & \cdots & (f_2, f_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (f_k, f_1) & (f_k, f_2) & \cdots & (f_k, f_k) \end{vmatrix}.$$

Пусть в  $E^n$  дан базис  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ . Скалярное произведение элементов  $x = \sum_{i=1}^n \xi_i g_i$  и  $y = \sum_{j=1}^n \eta_j g_j$ , согласно определению 10.1.1, представляется в виде

$$(x, y) = (\sum_{i=1}^n \xi_i g_i, \sum_{j=1}^n \eta_j g_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \eta_j (g_i, g_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} \xi_i \eta_j,$$

где  $\gamma_{ij} = (g_i, g_j)$   $\forall i, j = [1, n]$  – компоненты матрицы  $\|\Gamma\|_g$ , называемой *базисной матрицей Грама*.

Заметим, что эта матрица симметрическая, в силу коммутативности скалярного произведения (см. аксиому 1 в опр. 10.1.1), является матрицей симметричного билинейного функционала, задающего скалярное произведение. Тогда (принимая во внимание опр. 9.1.2) координатное представление скалярного произведения может быть записано так:

$$(x, y) = \|x\|_g^T \|\Gamma\|_g \|y\|_g = \\ = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (g_1, g_1) & (g_1, g_2) & \dots & (g_1, g_n) \\ (g_2, g_1) & (g_2, g_2) & \dots & (g_2, g_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (g_n, g_1) & (g_n, g_2) & \dots & (g_n, g_n) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \cdots \\ \eta_n \end{vmatrix},$$

где  $\|x\|_g$  и  $\|y\|_g$  – координатные представления (столбцы) элементов  $x$  и  $y$  в базисе  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ . Очевидно, что эта формула согласуется с § 2.3 и § 9.2.

Заметим, наконец, что в ортонормированном базисе  $\|\Gamma\|_e = \|E\|$ , и, следовательно, формула для скалярного произведения принимает вид  $(x, y) = \|x\|_g^T \|y\|_g = \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i$ .

**Теорема** Для базисной матрицы Грама  $\|\Gamma\|_g$  в любом базисе 10.3.1.

$$\det \|\Gamma\|_g > 0.$$

Доказательство.

Из определения 10.1.1 следует, что скалярное произведение есть билинейный, симметричный функционал, поэтому при переходе от базиса  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  к базису  $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$  (с матрицей перехода  $\|S\|$ ) по теореме 9.1.1 для матрицы Грама имеют место равенства

$$\|\Gamma\|_{g'} = \|S\|^T \|\Gamma\|_g \|S\|; \quad \det \|\Gamma\|_{g'} = \det \|\Gamma\|_g (\det \|S\|)^2,$$

где  $\det \|S\| \neq 0$ .

Откуда следует, что значение  $\operatorname{sgn}(\det \|\Gamma\|_g)$  инвариантно, то есть не изменяется при замене базиса. А, приняв во внимание, что в ортонормированном базисе  $\det \|\Gamma\|_e = 1$ , приходим к заключению, что в любом базисе  $\det \|\Gamma\|_g > 0$ .

Теорема доказана.

**Следствие Система элементов  $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$  в  $E^n$  линейно независима тогда и только тогда, когда определитель матрицы Грама этой системы положителен.**

Доказательство.

Если элементы  $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$  линейно зависимы, то определитель их матрицы Грама равен нулю. Действительно, пусть существуют не равные нулю одновременно числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , такие, что

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_k f_k = o.$$

Умножив это равенство скалярно слева на  $f_i \quad \forall i = [1, k]$ , получим

$$\lambda_1 (f_i, f_1) + \lambda_2 (f_i, f_2) + \dots + \lambda_k (f_i, f_k) = 0 \quad \forall i = [1, k].$$

Тогда, согласно правилам действий с матрицами (см. § 1.1), следует, что нетривиальная линейная комбинация столбцов матрицы Грама, имеющая коэффициентами числа

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k,$$

будет равна нулевому столбцу и, следовательно, будет равен нулю определитель матрицы Грама (см. лемму 6.5.2 и теорему 6.5.2).

С другой стороны, если элементы  $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$  линейно независимы, то они образуют базис в своей линейной оболочке и к ним применим результат теоремы 10.3.1.

Следствие доказано.

Теперь можно доказать необходимость в теореме 9.3.4.

Теорема  
9.3.4

Для положительной определенности квадратичного функционала в  $\Lambda^n$  необходимо и достаточно,

(Критерий Сильвестра). чтобы все главные миноры его матрицы, имеющие вид

$$\det \begin{vmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & \dots & \Phi_{1k} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \dots & \Phi_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_{k1} & \Phi_{k2} & \dots & \Phi_{kk} \end{vmatrix}; k = [1, n],$$

**были положительными.**

Доказательство необходимости.

- 1°. В § 10.1 было отмечено, что введение скалярного произведения в линейном пространстве равносильно заданию некоторого симметричного билинейного функционала, порождающего положительно определенный квадратичный функционал. Обратно, по положительно определенному квадратичному функционалу, однозначно восстанавливается породивший его симметричный билинейный функционал, который можно принять за скалярное произведение.
- 2°. Покажем, что у положительно определенного квадратичного функционала все (указанного в условии теоремы вида) главные миноры его матрицы положительны. Действительно, если ввести в  $\Lambda^n$  скалярное произведение при помощи его порождающего билинейного функционала, то матрица этого квадратичного функционала в базисе  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  есть матрица Грама этого базиса.

Рассмотрим последовательно линейные оболочки систем элементов вида  $\{g_1, g_2, \dots, g_k\}; k = [1, n]$ . Все эти системы линейно независимые (как подмножества базиса), и по теореме 10.3.1 соответствующие им матрицы Грама имеют положительные определители, поэтому

$$\begin{aligned} \det & \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1k} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{k1} & \beta_{k2} & \dots & \beta_{kk} \end{vmatrix} = \\ & = \det \begin{vmatrix} (g_1, g_1) & (g_1, g_2) & \dots & (g_1, g_k) \\ (g_2, g_1) & (g_2, g_2) & \dots & (g_2, g_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (g_k, g_1) & (g_k, g_2) & \dots & (g_k, g_k) \end{vmatrix} > 0; \\ k & = [1, n]. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

**Теорема 10.3.2.** Координатный столбец любого элемента  $x$  евклидова пространства  $E^n$  в базисе  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  может быть представлен в виде

$$\|x\|_g = \|\Gamma\|_g^{-1} \|b\|_g,$$

где  $\|\Gamma\|_g$  – матрица Грама, а  $\|b\|_g = \begin{vmatrix} (x, g_1) \\ (x, g_2) \\ \dots \\ (x, g_n) \end{vmatrix}$ .

Доказательство.

Умножим обе части равенства  $x = \sum_{i=1}^n \xi_i g_i$  скалярно на  $g_k$ ,

$k = [1, n]$ . Тогда получим систему уравнений

$$\sum_{i=1}^n \xi_i (g_i, g_k) = (x, g_k), \quad k = [1, n],$$

основная матрица которой есть базисная матрица Грама. Поскольку в силу теоремы 10.3.1 эта матрица невырожденная, приходим к формуле  $\|x\|_g = \|\Gamma\|_g^{-1} \|b\|_g$ .

Теорема доказана.

**Следствие В ортонормированном базисе  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  евклидова пространства  $E^n$  для любого элемента**

$$x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \in E^n$$

имеют место равенства  $\xi_i = (x, e_i)$ ,  $i = [1, n]$ .

**Замечание:** формула  $\xi_i = (x, e_i)$ ,  $i = [1, n]$  малополезна для конечномерных евклидовых пространств, поскольку элемент  $x$  в этом случае однозначно и полностью описывается своими координатами. Однако данная формула может быть использована для обобщения понятия координатного представления на случай евклидовых пространств с неограниченным числом линейно независимых элементов (см. § 12.3).

#### § 10.4. Ортогональные матрицы в евклидовом пространстве

Согласно определению 5.1.4 матрица  $\|Q\|$ , удовлетворяющая соотношению  $\|Q\|^T = \|Q\|^{-1}$ , называется ортогональной, причём для любой ортогональной матрицы справедливы равенства

$$\|Q\|^T \|Q\| = \|Q\| \|Q\|^T = \|E\| \text{ и } \det \|Q\| = \pm 1.$$

Кроме того, в евклидовом пространстве будут справедливы следующие теоремы.

**Теорема 10.4.1.** Ортогональные матрицы (и только они) в  $E^n$  могут служить матрицами перехода от одного ортонормированного базиса к другому.

Доказательство.

Рассмотрим два различных ортонормированных базиса  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  и  $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$  в  $E^n$  с матрицей перехода  $\|S\|$  от первого базиса ко второму. Поскольку в этих базисах матрица Грама единичная, то из соотношения  $\|\Gamma\|_{e'} = \|S\|^T \|\Gamma\|_e S \|$  следует равенство

$$\|E\| = \|S\|^T \|E\| S \|, \text{ или } \|E\| = \|S\|^T \|S\|.$$

Поскольку матрица перехода  $\|S\|$  невырожденная, то окончательно имеем  $\|S\|^{-1} = \|S\|^T$ .

Теорема доказана.

В развернутой форме равенство  $\|E\| = \|S\|^T \|S\|$  принимает вид  $\delta_{kl} = \sum_{i=1}^n \sigma_{ki}^T \sigma_{il} ; \quad k, l = [1, n]$ , частный случай которого для  $n = 3$  был получен в § 2.9.

**Теорема 10.4.2.** Собственные значения линейного оператора, имеющего в  $E^n$  ортогональную матрицу, равны по модулю единице.

Доказательство.

Из равенства  $\|\hat{A}\|_g \|f\|_g = \lambda \|f\|_g$  следует, что

$$\|f\|_g^T \|\hat{A}\|_g^T = \lambda \|f\|_g^T.$$

Перемножив почленно эти равенства, получим соотношение

$$\|f\|_g^T \|\hat{A}\|_g^T \|\hat{A}\|_g \|f\|_g = \lambda^2 \|f\|_g^T \|f\|_g.$$

В силу ортогональности  $\|\hat{A}\|_g$  имеем  $\|\hat{A}\|_g^T \|\hat{A}\|_g = \|\hat{E}\|$ , а потому  $\|f\|_g^T \|f\|_g = \lambda^2 \|f\|_g^T \|f\|_g$ , и, наконец,  $\lambda^2 = 1$ , поскольку собственные векторы  $f$  ненулевые.

Теорема доказана.

Ортогональные матрицы также играют важную роль в вычислительных методах алгебры, что, например, иллюстрирует

**Теорема 10.4.3.** Если матрица  $\|A\|$  невырожденная, то ее разложение вида  $\|A\| = \|Q\| \|R\|$ , где  $\|Q\|$  – ортогональная матрица, а  $\|R\|$  – верхняя треугольная матрица с положительными диагональными элементами, существует и единствено.

Доказательство.

Предположим, что имеется<sup>14</sup> два разложения

$$\|A\| = \|Q_1\| \|R_1\| = \|Q_2\| \|R_2\|.$$

Из невырожденности  $\|A\|$  следует невырожденность  $\|R_1\|$  и  $\|R_2\|$ , поскольку  $\|Q_1\|$  и  $\|Q_2\|$  ортогональные и, очевидно, невырожденные. Тогда последнее равенство можно переписать

---

<sup>14</sup> Обоснование существования такого разложения выходит за рамки данного курса. Здесь мы ограничимся рассмотрением лишь вопроса о его единственности.

в виде

$$\|Q_2\|^T \|Q_1\| = \|R_2\| \|R_1\|^{-1},$$

где  $\|R_1\|^{-1}$  – также верхняя треугольная матрица.

Заметим, что  $\|R_2\| \|R_1\|^{-1}$  есть диагональная матрица. Действительно, с одной стороны, она верхняя треугольная матрица как произведение верхних треугольных. С другой стороны,  $\|R_2\| \|R_1\|^{-1}$  должна быть и нижней треугольной, поскольку она ортогональная (как произведение двух ортогональных матриц  $\|Q_2\|^T \|Q_1\|^{-1}$ ) и ее обратная матрица совпадает с транспонированной.

Очевидно, что диагональная ортогональная матрица может иметь на диагонали лишь элементы, равные по модулю единице. Но диагональные элементы  $\|R_1\|$  и  $\|R_2\|$  положительны по условию, поэтому остается возможным лишь случай  $\|R_2\| \|R_1\|^{-1} = \|E\|$ , откуда и следует единственность разложения.

Теорема доказана.

Отметим, что в силу теоремы 10.4.3 решение неоднородной системы линейных уравнений  $\|A\| \|x\| = \|b\|$  может быть сведено к разложению невырожденной матрицы  $\|A\|$  – на произведение верхней треугольной  $\|R\|$  и ортогональной  $\|Q\|$ , поскольку в этом случае система преобразуется к легко решаемому виду

$$\|R\| \|x\| = \|Q\|^T \|b\|.$$

## § 10.5. Ортогональные дополнения и ортогональные проекции в евклидовом пространстве

Пусть в  $E$  задано подпространство  $E_1$ . Рассмотрим множество  $E_2 \subset E$  элементов  $x$ , ортогональных всем элементам из  $E_1$ .

**Определение 10.5.1.** В евклидовом пространстве  $E$  совокупность элементов  $x$ , таких, что  $(x, y) = 0 \quad \forall y \in E_1 \subset E$  называется *ортогональным дополнением* множества  $E_1$ .

**Теорема 10.5.1.** **Ортогональное дополнение  $k$ -мерного подпространства  $E_1 \subset E^n$  является подпространством размерности  $n - k$ .**

Доказательство.

Пусть в  $E_1 \subset E^n$  со стандартным скалярным произведением дан ортонормированный базис и пусть  $E_2$  – ортогональное дополнение к  $E_1$ .

Выберем некоторый базис в  $E_1$   $\{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ . Тогда из условия ортогональности произвольного элемента  $x \in E_2$  каждому элементу  $E_1$ , следует (см. теорему 7.4.1), что

$$(x, g_i) = 0; \quad i = [1, n]$$

или же в координатной форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11}\xi_1 + \varepsilon_{21}\xi_2 + \dots + \varepsilon_{n1}\xi_n = 0, \\ \varepsilon_{12}\xi_1 + \varepsilon_{22}\xi_2 + \dots + \varepsilon_{n2}\xi_n = 0, \\ \dots \\ \varepsilon_{1k}\xi_1 + \varepsilon_{2k}\xi_2 + \dots + \varepsilon_{nk}\xi_n = 0, \end{array} \right.$$

$$\text{где } \|g_i\|_e = \begin{vmatrix} \varepsilon_{1i} \\ \varepsilon_{2i} \\ \dots \\ \varepsilon_{ni} \end{vmatrix}; i = [1, k] \text{ и } \|x\|_e = \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{vmatrix}.$$

Эта однородная система линейных уравнений (неизвестными в которой являются компоненты элемента  $x$ ), определяющая ортогональное дополнение  $E_2$ , имеет ранг  $k$  в силу линейной независимости элементов  $\{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ . Тогда по теореме 6.7.1 у нее есть  $n - k$  линейно независимых решений, образующих базис подпространства  $E_2$ .

Теорема доказана.

Убедимся теперь в справедливости следующего утверждения.

**Теорема 10.5.2.** **Если  $E_2$  – ортогональное дополнение подпространства  $E_1 \subset E$ , то  $E_1$  является ортогональным дополнением  $E_2$ .**

Доказательство.

Для каждого элемента  $x \in E_2$  по условию следствия имеет место равенство  $(y, x) = 0; \forall y \in E_1$ . Но это означает, что для каждого  $y \in E_1$  справедливо  $(x, y) = 0; \forall x \in E_2$ , то есть  $E_1$  является ортогональным дополнением к  $E_2$  в  $E$ .

Теорема доказана.

**Определение 10.5.2.** В евклидовом пространстве  $E$  элемент  $y$  называется *ортогональной проекцией* элемента  $x$  на подпространство  $E^*$ , если

$$1^\circ. y \in E^*;$$

$$2^\circ. (x - y, z) = 0 \quad \forall z \in E^*.$$

**Теорема 10.5.3.** Если  $E^* \subset E$  является  $k$ -мерным подпространством, то элемент  $y$  – ортогональная проекция  $x \in E$  на  $E^*$  – существует и единственен.

Доказательство.

Если в  $E^*$  существует базис  $\{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ , то элемент  $y \in E^*$  может быть представлен в виде  $y = \sum_{i=1}^k \xi_i g_i$ .

Условие  $(x - y, z) = 0 \forall z \in E^*$  равносильно ортогональности  $x - y$  каждому из базисных элементов подпространства  $E^*$ , то есть  $(x - y, g_j) = 0 \forall j = [1, k]$ , и, следовательно, числа  $\xi_i, i = [1, k]$  могут быть найдены из системы линейных уравнений

$$(x - \sum_{i=1}^k \xi_i g_i, g_j) = 0 \quad \forall j = [1, k]$$

или

$$\sum_{i=1}^k (g_i, g_j) \xi_i = (x, g_j) \quad \forall j = [1, k].$$

Поскольку основная матрица этой системы (как матрица Грама набора линейно независимых элементов  $g_1, g_2, \dots, g_k$ , см. следствие 10.3.1) невырожденная, то по теореме 6.4.1 (*Крамера*) решение данной системы существует и единственno.

Теорема доказана.

Отметим, что если базис  $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  в подпространстве  $E^*$  ортонормированный, то ортогональная проекция элемента  $x$  на  $E^*$  есть элемент вида  $y = \sum_{i=1}^k (x, e_i) e_i$ .

**Задача 10.5.1.** В евклидовом пространстве  $E^4$  со стандартным скалярным произведением в некотором ортонормированном базисе система линейных уравнений

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - \xi_4 = 0, \\ 2\xi_1 + \xi_2 = 0 \end{cases}$$

задает подпространство  $E^*$ . Найти в этом базисе матрицу оператора ортогонального проектирования элементов  $E^4$  на  $E^*$ .

**Решение.**

1°. За базис подпространства  $E^*$  можно принять пару элементов  $g_1$  и  $g_2$ , координатные представления которых в исходном базисе  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  являются линейно независимыми решениями однородной системы линейных уравнений, задающей  $E^*$ , например,

$$\|g_1\|_e = \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}; \quad \|g_2\|_e = \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

2°. Поскольку  $\dim E^* = 2$ , то размерность ортогонального дополнения к  $E^*$  согласно теореме 10.5.1 также равна 2. За базис в этом ортогональном дополнении удобно принять элементы  $g_3$  и  $g_4$ , такие, что

$$\|g_3\|_e = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{vmatrix}; \quad \|g_4\|_e = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},$$

поскольку они линейно независимы и ортогональны каждому элементу из подпространства  $E^*$ , как образованные из коэффициентов заданной в условии задачи системы линейных уравнений.

- 3°. Элементы  $g_1, g_2, g_3$  и  $g_4$  линейно независимые по построению и образуют базис в  $E^4$ , и каждый элемент из  $E^4$  может быть представлен и притом единственным образом как линейная комбинация элементов этого базиса  $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ .

Искомый оператор  $\hat{A}$  ортогонального проектирования элементов  $E^4$  на  $E^*$  должен, очевидно, удовлетворять соотношениям

$$\hat{A}g_1 = g_1; \quad \hat{A}g_2 = g_2; \quad \hat{A}g_3 = o; \quad \hat{A}g_4 = o,$$

в силу которых его матрица в базисе  $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$  будет иметь следующий вид:

$$\|\hat{A}\|_g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

- 4°. С другой стороны, матрица перехода от базиса  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  к базису  $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$

$$\|S\| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix},$$

но поскольку  $\|\hat{A}\|_g = \|S\|^{-1} \|\hat{A}\|_e \|S\|$  и, следовательно,

$\|\hat{A}\|_e = \|S\| \|\hat{A}\|_g \|S\|^{-1}$ , то, воспользовавшись § 5.1 и

§ 6.8, найдем, что

$$\begin{aligned} \|\hat{A}\|_e &= \\ &= \left\| \begin{array}{cccc} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cccc} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right\|^{-1} = \\ &= \frac{1}{11} \left\| \begin{array}{cccc} 2 & -4 & -1 & -1 \\ -4 & 8 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 6 & -5 \\ -1 & 2 & -5 & 6 \end{array} \right\|. \end{aligned}$$

Замечание: геометрическая интерпретация ортогонального проектирования вполне очевидна, однако эта операция используется и в других приложениях. Например, если  $E$  есть евклидово пространство непрерывных на  $[\alpha, \beta]$  функций со скалярным произведением

$$(x, y) = \int_{\alpha}^{\beta} x(\tau) y(\tau) d\tau,$$

а  $E^*$  – подпространство алгебраических многочленов

$$P_n(\tau) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \tau^k \text{ степени не выше, чем } n, \text{ то ортого-}$$

нальная проекция  $x(\tau)$  – элемента  $E$  – на  $E^*$  может рассматриваться как наилучшее на  $[\alpha, \beta]$  приближение  $x(\tau)$  линейной комбинацией степенных многочленов. Подробно эта задача рассмотрена в § 12.3.

## § 10.6. Сопряженные операторы в евклидовом пространстве

Поскольку евклидово пространство является частным случаем линейного пространства, то все изложенные в главе 8 утверждения справедливы и для линейных операторов, действующих в евклидовом пространстве. Однако операция скалярного произведения позволяет выделять в евклидовых пространствах специфические классы линейных операторов, обладающих рядом полезных свойств.

**Определение 10.6.1.** Линейный оператор  $\hat{A}^+$ , заданный в евклидовом пространстве  $E$ , называется *сопряженным линейному оператору  $\hat{A}$* , если  $\forall x, y \in E$  имеет место равенство  $(\hat{A}x, y) = (x, \hat{A}^+y)$ .

**Пример 10.6.1.** В евклидовом пространстве, образованном бесконечно дифференцируемыми функциями, равными нулю вне некоторого конечного интервала, со скалярным произведе-

нием  $(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(\tau)d\tau$  для линейного оператора

$\hat{A} = \frac{d}{d\tau}$  (дифференцирования) сопряженным будет опе-

ратор  $\hat{A}^+ = -\frac{d}{d\tau}$ .

Действительно, согласно правилу интегрирования несобственных интегралов по частям имеют место равенства

$$\begin{aligned} (\hat{A}x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx(\tau)}{d\tau} y(\tau)d\tau = \\ &= x(\tau)y(\tau) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \frac{dy(\tau)}{d\tau} d\tau = \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left( -\frac{dy(\tau)}{d\tau} \right) d\tau = (x, \hat{A}^+ y).$$

Рассмотрим теперь конечномерное евклидово пространство  $E^n$  с базисом  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  и выясним связь матриц линейных операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{A}^+$  в этом базисе, предположив, что сопряженный оператор существует. Пусть матрицы операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{A}^+$  имеют соответственно вид  $\|\hat{A}\|_g$  и  $\|\hat{A}^+\|_g$ , а координатные представления элементов  $x$  и  $y$  в базисе  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  –

$$\|x\|_g = \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \|y\|_g = \begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{vmatrix},$$

тогда равенство  $(\hat{A}x, y) = (x, \hat{A}^+ y)$  можно записать как

$$(\|\hat{A}\|_g \|x\|_g)^T \|\Gamma\|_g \|y\|_g = \|x\|_g^T \|\Gamma\|_g \|\hat{A}^+\|_g \|y\|_g, \quad (10.6.1)$$

где  $\|\Gamma\|_g$  – матрица Грама выбранного в  $E^n$  базиса.

В силу соотношения  $(\|A\|B)^T = B^T A^T$  последнее равенство можно преобразовать к виду

$$\|x\|_g^T (\|\hat{A}\|_g^T \|\Gamma\|_g - \|\Gamma\|_g \|\hat{A}^+\|_g) \|y\|_g = 0,$$

а поскольку это равенство справедливо при любых  $x$  и  $y$ , то, приняв во внимание невырожденность матрицы Грама и проведя рассуждения, аналогичные использованным при доказательстве леммы 5.1.2, заключаем, что матрица, стоящая в круглых скобках, – нулевая, а из соотношения

$\left\| \hat{A} \right\|_g^T \Gamma \left\|_g - \left\| \Gamma \right\|_g \left\| \hat{A}^+ \right\|_g = \left\| O \right\|$  следует  $\left\| \hat{A}^+ \right\|_g = \left\| \Gamma \right\|_g^{-1} \left\| \hat{A} \right\|_g^T \Gamma \left\|_g$ ,  
которое, в частности, для ортонормированного базиса  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$   
имеет вид  $\left\| \hat{A}^+ \right\|_e = \left\| \hat{A} \right\|_e^T$ .

**Лемма**     **Если**  $(x, \hat{A}y) = 0 \quad \forall x, y \in E$ , **то оператор**  $\hat{A}$  **нулевой.**  
10.6.1.

**Доказательство.**

Пусть  $\forall x, y \in E$  справедливо равенство  $(x, \hat{A}y) = 0$ . Тогда  
оно будет верным и для  $x = \hat{A}y$ . Но из равенства  
 $(\hat{A}y, \hat{A}y) = 0$  согласно определению 10.1.1 следует, что  
 $\hat{A}y = o$ . Наконец, в силу произвольности элемента  $y$  и опре-  
деления 8.2.2 приходим к заключению, что  $\hat{A} = \hat{O}$ .

**Лемма доказана.**

**Теорема**     **Каждый линейный оператор в евклидовом простран-  
стве  $E^n$  имеет единственный сопряженный оператор.**  
10.6.1.

**Доказательство.**

Существование в  $E^n$  оператора  $\hat{A}^+$ , сопряженного оператору  
 $\hat{A}$ , следует из возможности построения матрицы вида  
 $\left\| \Gamma \right\|_g^{-1} \left\| \hat{A} \right\|_g^T \left\| \Gamma \right\|_g$  для любого линейного оператора  $\hat{A}$ .

Покажем теперь единственность  $\hat{A}^+$ . Предположим, что  $\hat{A}$   
имеет два сопряженных оператора  $\hat{A}^+$  и  $\hat{A}^\times$ . Это означает,  
что  $\forall x, y \in E$  одновременно выполнены равенства

$$(\hat{A}x, y) = (x, \hat{A}^+y) \quad \text{и} \quad (\hat{A}x, y) = (x, \hat{A}^\times y).$$

Вычитая их почленно, получим  $(x, (\hat{A}^+ - \hat{A}^\times)y) = 0$ , но тогда по лемме 10.6.1  $\hat{A}^+ - \hat{A}^\times = \hat{O}$ .

Теорема доказана.

**Теорема 10.6.2.** Для любых линейных операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$ , действующих в  $E$ , имеет место равенство

$$(\hat{A}\hat{B})^+ = \hat{B}^+\hat{A}^+.$$

Доказательство.

Имеет место  $\forall x, y \in E$

$$((\hat{A}\hat{B})^+ x, y) = (x, \hat{A}\hat{B}y) = (\hat{A}^+x, \hat{B}y) = (\hat{B}^+\hat{A}^+x, y).$$

Это означает, что  $((\hat{A}\hat{B})^+ - \hat{B}^+\hat{A}^+)x, y) = 0 \quad \forall x, y \in E$  и в силу леммы 10.6.1  $(\hat{A}\hat{B})^+ - \hat{B}^+\hat{A}^+ = \hat{O}$ .

Теорема доказана.

**Теорема 10.6.3.** Имеет место равенство  $(\hat{A}^+)^+ = \hat{A}$ .

Доказательство.

$\forall x, y \in E$  справедливы равенства

$$((\hat{A}^+)^+ x, y) = (x, \hat{A}^+y) = (\hat{A}x, y).$$

Откуда следует, что  $((\hat{A} - (\hat{A}^+)^+)x, y) = 0 \quad \forall x, y \in E$  и тогда по лемме 10.6.1  $\hat{A} - (\hat{A}^+)^+ = \hat{O}$ .

Теорема доказана.

**Теорема 10.6.4.** **Ортогональное дополнение области значений оператора  $\hat{A}$  в  $E^n$  является ядром оператора  $\hat{A}^+$ .**

Доказательство.

1°. Покажем вначале, что ядро оператора  $\hat{A}^+$ , обозначаемое через  $\ker \hat{A}^+$ , содержится во множестве  $\Pi$  – ортогональном дополнении области значений оператора  $\hat{A}$ .

Действительно, любой элемент  $y \in \ker \hat{A}^+$ , то есть такой, что  $\hat{A}^+ y = o$ , ортогонален элементу  $b = \hat{A}x$ ,  $x \in E^n$ , поскольку

$$(b, y) = (\hat{A}x, y) = (x, \hat{A}^+ y) = 0.$$

2°. Теперь сравним размерности  $\ker \hat{A}^+$  и  $\Pi$ . С одной стороны, в силу невырожденности базисной матрицы Грама и теоремы 8.4.3

$$\begin{aligned} \dim(\ker \hat{A}^+) &= n - \operatorname{rg} \|\hat{A}^+\| = \\ &= n - \operatorname{rg} (\|\Gamma\|^{-1} \|\hat{A}\|^T \|\Gamma\|) = n - \operatorname{rg} \|\hat{A}\|^T = n - \operatorname{rg} \|\hat{A}\|. \end{aligned}$$

Но, с другой стороны, по теореме 8.4.1 размерность области значений  $\hat{A}$  равна  $\operatorname{rg} \|\hat{A}\|$ , поэтому  $\dim(\Pi) = n - \operatorname{rg} \|\hat{A}\|$  по теореме 10.5.1.

Наконец, из соотношений  $\dim(\ker \hat{A}^+) = \dim(\Pi)$  и  $\ker \hat{A}^+ \subset \Pi$  следует совпадение множеств  $\ker \hat{A}^+$  и  $\Pi$ .

Теорема доказана.

- Замечания:
- 1) в использованных обозначениях теорема 10.6.4 допускает формулировку, совпадающую с формулировкой теоремы 6.7.3 (Фредгольма), поскольку равенство  $\hat{A}x = b$  означает, что элемент  $b$  принадлежит области значений линейного оператора  $\hat{A}$ .
  - 2) в предположении, что столбцы  $\|y\|$  и  $\|b\|$  суть координатные представления элементов  $E^m$  в ортонормированном базисе, также и нижеследующую формулировку:

Теорема  
10.6.5  
(Фред-  
гольма).

**Система линейных уравнений**  $\|A\| \|x\| = \|b\|$  совместна тогда и только тогда, когда каждое решение однородной сопряженной системы  $\|A^\top\| \|y\| = \|o\|$  ортогонально столбцу свободных членов  $\|b\|$ .

## § 10.7. Самосопряженные операторы

**Определение** Линейный оператор  $\hat{R}$ , действующий в евклидовом пространстве  $E$ , называется *самосопряженным*, если  $\forall x, y \in E$  имеет место равенство

$$(\hat{R}x, y) = (x, \hat{R}y).$$

**Пример** В евклидовом пространстве операторы вида  $\hat{A} + \hat{A}^+$ ,  $\hat{A}\hat{A}^+$  и  $\hat{A}^+\hat{A}$  будут самосопряженными для любого линейного оператора  $\hat{A}$ .

Действительно, для оператора  $\hat{A}^+\hat{A}$ , например, имеем, что  $\forall x, y \in E$ .

$(\hat{A}^+ \hat{A}x, y) = (\hat{A}x, \hat{A}y) = (x, \hat{A}^+ \hat{A}y),$   
откуда и следует его самосопряженность.

Свойства самосопряженных операторов сформулируем в виде следующих утверждений.

**Лемма 10.7.1.** **Линейный оператор  $\hat{R}$  в  $E^n$  является самосопряженным тогда и только тогда, когда его матрица в каждом ортонормированном базисе симметрическая.**

Доказательство.

Из определения 10.7.1 и формулы  $\|\hat{R}^+\|_g = \|\Gamma\|_g^{-1} \|\hat{R}\|_g^T \|\Gamma\|_g$  для некоторого ортонормированного базиса  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  в силу самосопряженности оператора  $\hat{R}$  имеем  $\|\hat{R}\|_e = \|\hat{R}\|_e^T$ . Перейдем теперь к другому ортонормированному базису  $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ . Матрица перехода  $\|S\|$ , как было показано в § 10.4, ортогональная, то есть для нее  $\|S\|^{-1} = \|S\|^T$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \|\hat{R}\|_{e'}^T &= (\|S\|^{-1} \|\hat{R}\|_e \|S\|)^T = (\|S\|^T \|\hat{R}\|_e \|S\|)^T = \\ &= \|S\|^T \|\hat{R}\|_e^T (\|S\|^T)^T = \|S\|^T \|\hat{R}\|_e^T \|S\| = \\ &= \|S\|^T \|\hat{R}\|_e \|S\| = \|S\|^{-1} \|\hat{R}\|_e \|S\| = \|\hat{R}\|_{e'}. \end{aligned}$$

Верно и обратное: если  $\|\hat{R}\|_e = \|\hat{R}\|_{e'}$ , то  $\forall x, y \in E^n$

$$\begin{aligned} (\hat{R}x, y) &= \|\hat{R}x\|_e^T \|y\|_e = (\|\hat{R}\|_e \|x\|_e)^T \|y\|_e = \\ &= \|x\|_e^T \|\hat{R}^+\|_e^T \|y\|_e = \|x\|_e^T \|\hat{R}\|_e \|y\|_e = \|x\|_e^T \|\hat{R}y\|_e = (x, \hat{R}y). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Признак самосопряженности может быть сформулирован как

**Следствие 10.7.1** Если линейный оператор в  $E^n$  имеет симметрическую матрицу в некотором ортонормированном базисе, то он самосопряженый.

**Лемма 10.7.2.** Все собственные значения самосопряженного оператора  $\hat{R}$  в  $E^n$  вещественные числа.

Доказательство.

Допустим противное: пусть характеристическое уравнение самосопряженного оператора  $\hat{R}$  имеет комплексный корень  $\lambda = \alpha + \beta i$ , где  $\beta \neq 0$ .

По теореме 8.6.2 оператор  $\hat{R}$  в этом случае имеет двумерное инвариантное подпространство. То есть существует пара линейно независимых элементов  $x$  и  $y$  таких, что

$$\begin{cases} \hat{R}x = \alpha x - \beta y, \\ \hat{R}y = \alpha y + \beta x. \end{cases}$$

Умножая эти равенства скалярно: первое – справа на  $y$ , второе – слева на  $x$ , получим

$$\begin{cases} (\hat{R}x, y) = \alpha(x, y) - \beta(y, y), \\ (x, \hat{R}y) = \alpha(x, y) + \beta(x, x). \end{cases}$$

Вычитая почленно второе равенство из первого и принимая во внимание самосопряженность  $\hat{R}$ , приходим к заключению, что  $\beta(|x|^2 + |y|^2) = 0$ . Однако это противоречит предположению о том, что  $\beta \neq 0$ .

Лемма доказана.

**Лемма 10.7.3.** Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям, попарно ортогональны.

Доказательство.

Пусть для самосопряженного оператора  $\hat{R}$  имеют место равенства  $\hat{R}f_1 = \lambda_1 f_1$  и  $\hat{R}f_2 = \lambda_2 f_2$ , где ненулевые элементы  $f_1$  и  $f_2$  – собственные векторы оператора  $\hat{A}$  и  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  – соответствующие им собственные значения. Умножив эти равенства соответственно: первое – скалярно справа на  $f_2$ , второе – скалярно слева на  $f_1$ , получим

$$\begin{cases} (\hat{R}f_1, f_2) = (\lambda_1 f_1, f_2), \\ (f_1, \hat{R}f_2) = (f_1, \lambda_2 f_2) \end{cases} \text{или} \quad \begin{cases} (\hat{R}f_1, f_2) = \lambda_1 (f_1, f_2), \\ (f_1, \hat{R}f_2) = \lambda_2 (f_1, f_2). \end{cases}$$

Вычитая эти равенства почленно и учитывая, что  $\hat{R}$  – самосопряженный оператор, приходим к равенству

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(f_1, f_2) = 0,$$

откуда  $(f_1, f_2) = 0$ .

Лемма доказана.

**Лемма 10.7.4.** Пусть  $E'$  – инвариантное подпространство самосопряженного оператора  $\hat{R}$ , действующего в  $E$ , и пусть  $E''$  – ортогональное дополнение к  $E'$  в  $E$ . Тогда  $E''$  – также инвариантное подпространство оператора  $\hat{R}$ .

Доказательство.

$E'$  инвариантно для оператора  $\hat{R}$ , то есть  $\forall x \in E': \hat{R}x \in E'$ . Если  $E''$  – ортогональное дополнение  $E'$ , то для любых  $x' \in E'$  и  $x'' \in E'': (x', x'') = 0$ .

Поскольку  $E'$  – инвариантное подпространство  $\hat{R}$ , то будет также иметь место  $(\hat{R}x', x'') = 0$ . Но в силу самосопряженности  $\hat{R}$  и  $(x', \hat{R}x'') = 0$ . Последнее равенство означает, что

$$\hat{R}x'' \in E'' \quad \forall x'' \in E'',$$

то есть и подпространство  $E''$  будет инвариантным для оператора  $\hat{R}$ .

Лемма доказана.

**Теорема 10.7.1.** Для любого самосопряженного оператора  $\hat{R}$  в  $E^n$  существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов  $\hat{R}$ .

Доказательство.

Для самосопряженного оператора  $\hat{R}$  в  $E^n$  существует, по крайней мере, одно собственное значение  $\lambda_1$ . По лемме 10.7.2 это собственное значение вещественно. Из системы уравнений (8.5.1) можно найти отвечающий  $\lambda_1$  собственный вектор  $e_1$ .

Без ограничения общности можно считать, что  $|e_1| = 1$ . Если  $n = 1$ , то доказательство завершено.

Рассмотрим  $E^1$  – линейную оболочку элемента  $e_1$ , являющуюся одномерным инвариантным собственным подпространством  $\hat{R}$ . Пусть  $E^{n-1}$  – ортогональное дополнение к  $E^1$ . Тогда по лемме 10.7.4  $E^{n-1}$  – также инвариантное подпространство оператора  $\hat{R}$ .

Рассмотрим теперь оператор  $\hat{R}$  как действующий только в  $E^{n-1}$ . Тогда очевидно, что  $\hat{R}$  – самосопряженный оператор,

заданный в  $E^{n-1}$ , поскольку  $E^{n-1}$  инвариантно относительно  $\hat{R}$  по лемме 10.7.4 и, кроме того,

$$\forall x, y \in E^n : (\hat{R}x, y) = (x, \hat{R}y),$$

в том числе и  $\forall x, y \in E^{n-1}$ .

Применяя изложенные выше рассуждения, найдем новое собственное значение  $\lambda_2$  и соответствующий ему собственный вектор  $e_2$ . Без ограничения общности можно считать, что  $|e_2| = 1$ . При этом  $\lambda_2$  может случайно совпасть с  $\lambda_1$ , однако из построения ясно, что  $(e_1, e_2) = 0$ .

Если  $n = 2$ , то построение базиса завершено. Иначе рассмотрим  $E^2$  – линейную оболочку  $\{e_1, e_2\}$  и ее ортогональное дополнение  $E^{n-2}$ , найдем новое собственное значение  $\lambda_3$  и соответствующий ему собственный вектор  $e_3$  и т.д.

Аналогичные рассуждения проводим до исчерпания  $E^n$ .

Теорема доказана.

**Следствие 10.7.2.** В базисе, построенном в теореме 10.7.1, самосопряженный оператор  $\hat{R}$  имеет диагональную матрицу в  $E^n$ .

Доказательство.

Вытекает из замечания о важности собственных векторов в § 8.5.

**Следствие 10.7.3.** Размерность собственного инвариантного подпространства, отвечающего некоторому собственному значению самосопряженного оператора, равна кратности этого собственного значения.

Доказательство.

Следует из доказательства теоремы 10.7.1.

**Следствие 10.7.4.** **Если линейный оператор  $\hat{R}$  в  $E^n$  имеет  $n$  попарно ортогональных собственных векторов, то он самосопряженный.**

Доказательство.

Пронормируем собственные векторы оператора  $\hat{R}$  и примем их за ортонормированный базис, в котором матрица этого линейного оператора  $\|\hat{R}\|_e$  диагональная и, следовательно, симметрическая. Тогда в силу леммы 10.7.1 линейный оператор  $\hat{R}$  самосопряженный.

Следствие доказано.

**Следствие 10.7.5.** **Если  $\|R\|$  симметрическая матрица, то существует ортогональная матрица  $\|Q\|$  такая, что матрица**

$$\|D\| = \|Q\|^{-1} \|R\| \|Q\| = \|Q\|^T \|R\| \|Q\| \text{ диагональная.}$$

Доказательство.

В ортонормированном базисе симметрическая матрица  $\|R\|$  определяет самосопряженный оператор в  $E^n$ , поэтому в качестве искомой матрицы  $\|Q\|$  можно выбрать матрицу перехода от данного ортонормированного базиса к ортонормированному базису, образованному собственными векторами этого оператора по схеме, использованной в доказательстве теоремы 10.7.1.

Следствие доказано.

**Теорема 10.7.2.** Два самосопряженных оператора  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  имеют общую систему собственных векторов в  $E^n$  тогда и только тогда, когда  $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$ .

Доказательство.

Докажем необходимость.

Пусть  $\hat{A}a = \lambda a$  и  $\hat{B}a = \mu a$ , тогда

$$\hat{B}\hat{A}a = \lambda\hat{B}a = \lambda\mu a; \quad \hat{A}\hat{B}a = \mu\hat{A}a = \mu\lambda a,$$

и, вычитая почленно, получим, что  $(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})a = o$ . Поскольку  $a$  – произвольный собственный вектор, то данное соотношение верно и для всей совокупности собственных векторов, а значит, и для любого элемента в  $E^n$ , так как из собственных векторов можно образовать базис. Поэтому  $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = \hat{O}$ .

Докажем достаточность.

Пусть самосопряженные операторы  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  коммутируют и пусть, кроме того,  $\hat{A}a = \lambda a$ . Рассмотрим здесь лишь случай, когда все собственные значения оператора  $\hat{A}$  различны.

Покажем, что элемент евклидова пространства  $b = \hat{B}a$  является собственным вектором оператора  $\hat{A}$ . Действительно, в силу  $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$  имеем

$$\hat{A}b = \hat{A}\hat{B}a = \hat{B}\hat{A}a = \hat{B}\lambda a = \lambda\hat{B}a = \lambda b.$$

Поскольку все собственные значения  $\hat{A}$  кратности единицы, то  $\lambda$  есть его собственное значение, отвечающее  $a$  и  $b$  одновременно. Поэтому  $b = \kappa a$  и, поскольку  $b = \hat{B}a$ , также  $\hat{B}a = \kappa a$ . Значит,  $a$  – собственный вектор оператора  $\hat{B}$ .

Теорема доказана.

## § 10.8. Ортогональные операторы

**Определение 10.8.1.** Линейный оператор  $\hat{Q}$ , действующий в евклидовом пространстве  $E$ , называется *ортогональным* (или *изометрическим*), если  $\forall x, y \in E$  имеет место равенство  $(\hat{Q}x, \hat{Q}y) = (x, y)$ .

Из определения 10.8.1 следует, что ортогональный оператор сохраняет нормы элементов и величины углов между ними.

Действительно,

$$|\hat{Q}x| = \sqrt{(\hat{Q}x, \hat{Q}x)} = \sqrt{(x, x)} = |x|;$$

$$\cos \psi = \frac{(\hat{Q}x, \hat{Q}y)}{|\hat{Q}x| |\hat{Q}y|} = \frac{(x, y)}{|x| |y|} = \cos \varphi; \quad x, y \in E,$$

где  $\varphi$  – величина угла между элементами  $x$  и  $y$ , а  $\psi$  – величина угла между элементами  $\hat{Q}x$  и  $\hat{Q}y$ .

**Теорема 10.8.1.** Если ортогональный оператор  $\hat{Q}$  имеет сопряженный оператор, то он имеет и обратный оператор, причем  $\hat{Q}^{-1} = \hat{Q}^+$ .

Доказательство.

По определению 10.8.1  $\forall x, y \in E$   $(\hat{Q}x, \hat{Q}y) = (x, y)$ , откуда следует, что

$$(x, \hat{Q}^+ \hat{Q}y) = (x, y) \quad \text{или} \quad (x, (\hat{Q}^+ \hat{Q} - \hat{E})y) = 0.$$

Последнее равенство в силу леммы 10.6.1 означает, что

$$\hat{Q}^+ \hat{Q} - \hat{E} = \hat{O}.$$

Из равенства  $\hat{Q}^+ \hat{Q} - \hat{E} = \hat{O}$  вытекает, что  $\hat{Q}^+ \hat{Q} = \hat{E}$ . Тогда  $\hat{Q}^+ \hat{Q} \hat{Q}^+ = \hat{E} \hat{Q}^+$ , а в силу того, что единичный оператор коммутирует с любым другим, получаем  $\hat{Q}^+ \hat{Q} \hat{Q}^+ = \hat{Q}^+ \hat{E}$  или  $\hat{Q} \hat{Q}^+ = \hat{E}$ . Наконец, по определению 8.2.8 приходим к

$$\hat{Q}^{-1} = \hat{Q}^+.$$

Теорема доказана.

**Следствие 10.8.1.** **Операторы  $\hat{Q}^+$  и  $\hat{Q}^{-1}$  также ортогональные.**

**Теорема 10.8.2.** **Матрица ортогонального оператора в  $E^n$  в каждом ортонормированном базисе ортогональная.**

Доказательство.

Пусть оператор  $\hat{Q}$  ортогональный. Тогда из соотношения  $\hat{Q}^{-1} = \hat{Q}^+$  по теореме 10.8.1 и в силу § 8.3 (4°) в ортонормированном базисе справедливы равенства

$$\|\hat{Q}\|_e^{-1} = \|\hat{Q}^{-1}\|_e = \|\hat{Q}^+\|_e = \|\hat{Q}\|_e^T.$$

Но тогда  $\|\hat{Q}\|_e^{-1} = \|\hat{Q}\|_e^T$ , что и означает, согласно определению 5.1.4, ортогональность матрицы  $\|\hat{Q}\|_e$ .

Теорема доказана.

Признак ортогональности линейного оператора в  $E^n$  дает

**Теорема 10.8.3.** Для того чтобы линейный оператор в  $E^n$  был ортогональным, достаточно, чтобы его матрица была ортогональной в некотором ортонормированном базисе.

Доказательство.

1°. Пусть у линейного оператора  $\hat{Q}$  в некотором ортонормиро-

ванном базисе  $\|\hat{Q}\|_e^{-1} = \|\hat{Q}\|_e^T$ . Тогда  $\forall x, y \in E^n$

$$\begin{aligned} (\hat{Q}x, \hat{Q}y) &= \|\hat{Q}x\|_e^T \|\hat{Q}y\|_e = (\|\hat{Q}\|_e \|x\|_e)^T \|\hat{Q}\|_e \|y\|_e = \\ &= \|x\|_e^T \|\hat{Q}\|_e^T \|\hat{Q}\|_e \|y\|_e = \|x\|_e^T \|\hat{Q}\|_e^{-1} \|\hat{Q}\|_e \|y\|_e = \|x\|_e^T \|y\|_e = (x, y). \end{aligned}$$

То есть условие ортогональности выполнено в

$$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}.$$

2°. Перейдем теперь к  $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$  – некоторому другому ортонормированному базису и убедимся, что условие ортогональности при этом переходе не нарушится. Действительно, в силу ортогональности матрицы перехода  $\|S\|$ , связывающей два ортонормированных базиса, имеем

$$\begin{aligned} \|\hat{Q}\|_{e'}^{-1} &= (\|S\|^{-1} \|\hat{Q}\|_e \|S\|)^{-1} = \|S\|^{-1} \|\hat{Q}\|_e^{-1} \|S\| = \|S\|^{-1} \|\hat{Q}\|_e^T \|S\| = \\ &= \|S\|^T \|\hat{Q}\|_e^T \|S\| = \|S\|^T \|\hat{Q}\|_e^T (\|S\|^T)^T = (\|S\|^T \|\hat{Q}\|_e \|S\|)^T = \\ &= (\|S\|^{-1} \|\hat{Q}\|_e \|S\|)^T = \|\hat{Q}\|_{e'}^T. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

В ряде приложений оказывается полезной

Теорема  
10.8.4  
(о полярном  
разложении).

Любой линейный оператор  $\hat{A}$  в  $E^n$  с  $\det \|\hat{A}\| \neq 0$   
может быть единственным образом представлен в  
виде  $\hat{A} = \hat{Q}\hat{R}$ , где оператор  $\hat{Q}$  ортогональный, а  
оператор  $\hat{R}$  – самосопряженный и имеющий по-  
ложительные собственные значения.

Доказательство.

1°. Покажем вначале, что самосопряженный оператор  $\hat{A}^+ \hat{A}$  (см. пример 10.7.1) имеет только положительные собственные значения. Действительно, пусть  $\hat{A}^+ \hat{A}f = \lambda f$ , тогда, с одной стороны,  $(\hat{A}^+ \hat{A}f, f) = (\hat{A}f, \hat{A}f) > 0$  при  $f \neq 0$ , а с другой –  $(\hat{A}^+ \hat{A}f, f) = (\lambda f, f) = \lambda(f, f)$ , то есть  $(\hat{A}f, \hat{A}f) = \lambda(f, f)$ . Но тогда все  $\lambda > 0$  в силу определения скалярного произведения, поскольку из допущения  $\hat{A}f = 0$  при  $f \neq 0$  следует, что

$$\hat{A}f = 0 \Leftrightarrow \det \|\hat{A}\| = 0.$$

2°. Пусть  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  – ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора  $\hat{A}^+ \hat{A}$ . Рассмотрим множество элементов  $\hat{A}e_i ; i = [1, n]$ , для которых

$$(\hat{A}e_i, \hat{A}e_j) = (\hat{A}^+ \hat{A}e_i, e_j) = \lambda_i (e_i, e_j) = \lambda_i \delta_{ij}; j = [1, n].$$

Но это означает, что  $\left\{ e'_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \hat{A}e_i ; i = [1, n] \right\}$  – также ба-

зис и притом ортонормированный.

3°. Примем за искомый ортогональный оператор  $\hat{Q}$  оператор, переводящий ортонормированный базис  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  в ортонормированный базис  $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ , и убедимся, что в качестве  $\hat{R}$  можно взять оператор  $\hat{Q}^{-1} \hat{A}$ .

Действительно, во-первых, имеет место равенство  $\hat{A} = \hat{Q} \hat{R}$ . Во-вторых, из соотношений

$$\hat{R}e_i = \hat{Q}^{-1} \hat{A}e_i = \hat{Q}^{-1} \sqrt{\lambda_i} e'_i = \sqrt{\lambda_i} e_i; i = [1, n]$$

следует, что базисные элементы  $e_i, i = [1, n]$  суть собственные векторы оператора  $\hat{R}$ , отвечающие положительным собственным значениям  $\sqrt{\lambda_i}$ , а значит, матрица  $\|\hat{R}\|_e$  в базисе  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  диагональная и потому симметрическая. Тогда в силу леммы 10.7.1 оператор  $\hat{R}$  самосопряженный.

4°. Покажем, наконец, единственность разложения. Во введенных обозначениях справедливо равенство  $\hat{A}^+ \hat{A} = \hat{R}^2$ , поскольку из  $\hat{A} = \hat{Q}\hat{R}$  и  $\hat{A}^+ = \hat{R}^+ \hat{Q}^+$  следует, что

$$\hat{A}^+ \hat{A} = \hat{R}^+ \hat{Q}^+ \hat{Q}\hat{R} = \hat{R}^+ \hat{Q}^{-1} \hat{Q}\hat{R} = \hat{R}^+ \hat{R},$$

то в силу самосопряженности  $\hat{R}$   $\hat{A}^+ \hat{A} = \hat{R}^2$ .

Предположим, что существуют два различных самосопряженных оператора  $\hat{R}_1$  и  $\hat{R}_2$  с положительными собственными значениями, такие, что  $\hat{A}^+ \hat{A} = \hat{R}_1^2$ ;  $\hat{A}^+ \hat{A} = \hat{R}_2^2$  и  $\hat{R}_1^2 - \hat{R}_2^2 = \hat{O}$ .

Заметим, что  $\hat{R}_1$  и  $\hat{R}_2$  по построению (см. 2°) имеют общую систему собственных векторов, а потому они коммутируют. Но тогда, согласно § 8.2, справедливы равенства

$$\begin{aligned} \hat{R}_1^2 - \hat{R}_2^2 &= \hat{R}_1^2 - \hat{R}_1 \hat{R}_2 + \hat{R}_2 \hat{R}_1 - \hat{R}_2^2 = \\ &= (\hat{R}_1 - \hat{R}_2)(\hat{R}_1 + \hat{R}_2) = \hat{O}. \end{aligned}$$

Из невырожденности и линейности  $\hat{R}_1$  и  $\hat{R}_2$  в силу теоремы 8.6.8 оператор  $\hat{R}_1 + \hat{R}_2$  также невырожденный и поэтому из равенства  $(\hat{R}_1 - \hat{R}_2)(\hat{R}_1 + \hat{R}_2) = \hat{O}$  следует  $\hat{R}_1 - \hat{R}_2 = \hat{O}$ .

Таким образом,  $\hat{R}$  – самосопряженный оператор, определяемый по  $\hat{A}$  однозначно. Но  $\hat{Q} = \hat{A}\hat{R}^{-1}$  и, значит, также определяется однозначно по  $\hat{A}$ .

Теорема доказана.

Замечания.

1°. Теорема о полярном разложении является обобщением теоремы 5.5.2 о возможности представления аффинного преобразования плоскости в виде произведения двух операторов, первый из которых ортогональный, а второй – сжатие по двум взаимно перпендикулярным направлениям, матрица которого диагональная.

2°. В случае вырожденного оператора  $\hat{A}$  разложение, аналогичное указанному в теореме 10.8.2, с неотрицательными собственными значениями самосопряженного оператора  $\hat{R}$  существует, но не единственно.

**Задача** В некотором ортонормированном базисе в  $E^2$  линейный

10.8.1.

оператор  $\hat{A}$  имеет матрицу  $\left\| \hat{A} \right\|_{e^0} = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix}$ . Найти

его полярное разложение.

**Решение.**

1°. Выполним искомое разложение по схеме, использованной в доказательстве теоремы 10.8.2. Матрица оператора  $\hat{A}^+ \hat{A}$  в исходном (стандартном) ортонормированном базисе  $\{e_1^0, e_2^0\}$  имеет вид

$$\begin{aligned} \left\| \hat{A}^+ \hat{A} \right\|_{e^0} &= \left\| \hat{A}^+ \right\|_{e^0} \left\| \hat{A} \right\|_{e^0} = \left\| \hat{A} \right\|_{e^0}^T \left\| \hat{A} \right\|_{e^0} = \\ &= \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ -1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Собственные значения и собственные векторы этого оператора равны соответственно

$$\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 4; \|f_1\|_{e^0} = \begin{vmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{vmatrix}; \|f_2\|_{e^0} = \begin{vmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{vmatrix},$$

поэтому (сохраняя обозначения, использованные в доказательстве теоремы 10.8.2) получим координатные представления в  $\{e_1^0, e_2^0\}$  для элементов, образующих ортонормированные базисы  $\{e_1, e_2\}$ :

$$\|e_1\| = \frac{\|f_1\|}{\|f_1\|} = \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}; \|e_2\| = \frac{\|f_2\|}{\|f_2\|} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{vmatrix},$$

и  $\{e'_1, e'_2\}$ :

$$\begin{aligned} \|e'_1\| &= \left\| \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \hat{A} e_1 \right\| = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{vmatrix}; \|e'_2\| &= \left\| \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \hat{A} e_2 \right\| = \\ &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

2°. Обозначив через

$$\|G\| = \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{vmatrix} \text{ и } \|F\| = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}$$

соответственно матрицы перехода от исходного (стандартного) базиса  $\{e_1^0, e_2^0\}$  к базисам  $\{e_1, e_2\}$  и  $\{e'_1, e'_2\}$  и рассуждая так же, как при решении задачи 7.5.2, получим для матрицы ортогонального оператора  $\hat{Q}$  выражение

$$\|\hat{Q}\|_{e^0} = \|F\| \|G\|^{-1}.$$

Действительно, в рассматриваемом случае преобразование

$$\begin{matrix} \hat{Q} \\ \{e_1, e_2\} \end{matrix} \rightarrow \{e'_1, e'_2\}$$

может быть представлено как произведение (последовательное выполнение) преобразований

$$\begin{matrix} \hat{G}^{-1} \\ \{e_1, e_2\} \end{matrix} \rightarrow \{e_1^0, e_2^0\} \quad \text{и} \quad \begin{matrix} \hat{F} \\ \{e_1^0, e_2^0\} \end{matrix} \rightarrow \{e'_1, e'_2\}.$$

Следовательно,  $\|\hat{Q}\|_{e^0} = \|\hat{F}\|_{e^0} \|\hat{G}^{-1}\|_{e^0}$ .

Наконец, в силу определений (8.3.1) и (7.4.2), а также равенства  $\|\hat{G}^{-1}\|_{e^0} = \|\hat{G}\|_{e^0}^{-1}$  получаем, что  $\|\hat{Q}\|_{e^0} = \|F\| \|G\|^{-1}$ .

Учитывая, что матрица  $\|G\|$  ортогональная (как матрица перехода, связывающая два ортонормированных базиса), находим матрицу

$$\|\hat{Q}\|_{e^0} = \|F\| \|G\|^{-1} = \|F\| \|G\|^T =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{vmatrix},$$

которая в исходном ортонормированном базисе ортогональная.

3°. Поскольку  $\hat{R} = \hat{Q}^{-1}\hat{A}$ , то

$$\|\hat{R}\|_{e^0} = \|\hat{Q}^{-1}\|_{e^0} \|\hat{A}\|_{e^0} = \|\hat{Q}\|_{e^0}^{-1} \|\hat{A}\|_{e^0} = \|\hat{Q}\|_{e^0}^T \|\hat{A}\|_{e^0} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{5}{3} \end{vmatrix},$$

и, следовательно, искомое полярное разложение имеет вид

$$\|\hat{A}\|_{e^0} = \|\hat{Q}\|_{e^0} \|\hat{R}\|_{e^0} = \begin{vmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{5}{3} \end{vmatrix}.$$

## Глава 11

# УНИТАРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

### § 11.1. Определение унитарного пространства

**Определение  
11.1.1.**

Пусть в комплексном линейном пространстве  $U$  каждой упорядоченной паре элементов  $a$  и  $b$  поставлено в соответствие комплексное<sup>15</sup> число  $\langle a|b \rangle$ , называемое их *скалярным произведением*, так, что выполнены аксиомы:

- 1°.  $\langle a|b \rangle = \overline{\langle b|a \rangle};$
- 2°.  $\langle \lambda a|b \rangle = \bar{\lambda} \langle a|b \rangle;$
- 3°.  $\langle a_1 + a_2|b \rangle = \langle a_1|b \rangle + \langle a_2|b \rangle;$
- 4°.  $\langle a|a \rangle$  – вещественное неотрицательное число, причем  
 $\langle a|a \rangle = 0 \Leftrightarrow a = o,$

тогда говорят, что задано *унитарное пространство*.

Для обозначения скалярного произведения в унитарном пространстве используются не круглые скобки, принятые в евклидовом пространстве, а скобки типа “брэкет”.

**Замечание:** вид аксиомы 1° позволяет избежать проблемы, которая возникает в случае использования евклидовского правила коммутативности скалярного произведения для комплексных линейных пространств.

---

<sup>15</sup> Определение и основные свойства комплексных чисел приводятся в приложении 3.

Действительно, если принять, что  $\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle$ , то  $\langle a|\lambda b\rangle = \bar{\lambda} \langle a|b\rangle$ , и очевидно, что при некотором ненулевом  $a$  и  $\lambda = i$ :

$\langle ia|ia\rangle = (\bar{i})(\bar{i})\langle a|a\rangle = (-i)^2 \langle a|a\rangle = i^2 \langle a|a\rangle = -\langle a|a\rangle$ , но тогда либо  $\langle ia|ia\rangle$ , либо  $\langle a|a\rangle$  не положительно и аксиома 4° не будет справедливой.

В случае же равенства  $\langle a|b\rangle = \overline{\langle b|a\rangle}$  вынос  $\lambda$  из второго сомножителя скалярного произведения выполняется иначе:

$$\langle a|\lambda b\rangle = \overline{\langle \lambda b|a\rangle} = \overline{\lambda} \overline{\langle b|a\rangle} = \lambda \overline{\langle b|a\rangle} = \lambda \langle a|b\rangle,$$

поскольку  $\overline{\lambda} = \bar{\lambda}$ , что в рассматриваемом примере приводит к равенству

$$\langle ia|ia\rangle = \bar{i}i \langle a|a\rangle = \langle a|a\rangle,$$

которое согласуется с аксиомой 4°.

Пример 1°. Пространство  $n$ -мерных столбцов

11.1.1.

$$a = \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{vmatrix}; \quad b = \begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{vmatrix}, \text{ где } \xi_i, \eta_i; \quad i = [1, n]$$

– комплексные числа, со скалярным произведением, определяемым по формуле  $\langle a|b\rangle = \sum_{i=1}^n \bar{\xi}_i \eta_i$ , является унитарным.

2°. Унитарным будет пространство непрерывных на  $[\alpha, \beta]$  комплекснозначных функций вещественного аргумента со скалярным произведением

$$\langle a|b\rangle = \int_{\alpha}^{\beta} \overline{a(\tau)} b(\tau) d\tau .$$

В унитарных пространствах, как правило, существуют аналоги определений и теорем, справедливых для евклидова пространства. Например, неравенство Коши–Буняковского имеет вид

$$\langle a|a\rangle \langle b|b\rangle \geq \langle a|b\rangle \langle b|a\rangle .$$

Действительно,

$$\langle a|a\rangle \langle b|b\rangle \geq |\langle a|b\rangle|^2 = \langle a|b\rangle \langle \overline{a}|\overline{b}\rangle = \langle a|b\rangle \langle b|a\rangle \quad \forall a, b \in U .$$

В конечномерном унитарном пространстве  $U^n$  базис  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  при необходимости может быть ортогоанализирован по схеме Грама–Шмидта. Выражение для скалярного произведения в координатах аналогично соответствующей формуле в евклидовом пространстве:

$$\langle a|b\rangle = \left\| \begin{matrix} \overline{\xi_1} & \overline{\xi_2} & \dots & \overline{\xi_n} \end{matrix} \right\| \Gamma_g \left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \overline{\xi_1} & \overline{\xi_2} & \dots & \overline{\xi_n} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \langle g_1|g_1\rangle & \langle g_1|g_2\rangle & \dots & \langle g_1|g_n\rangle \\ \langle g_2|g_1\rangle & \langle g_2|g_2\rangle & \dots & \langle g_2|g_n\rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle g_n|g_1\rangle & \langle g_n|g_2\rangle & \dots & \langle g_n|g_n\rangle \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{matrix} \right\| ,$$

где  $\|\Gamma\|_g$  – базисная матрица Грама в унитарном пространстве  $U^n$ .

Заметим, что поскольку  $\langle g_i | g_j \rangle = \overline{\langle g_j | g_i \rangle}$ , то имеет место равенство  $\|\Gamma\|_g^T = \overline{\|\Gamma\|}_g$ .

**Определение** Матрица  $\|A\|$ , удовлетворяющая соотношению 11.1.2.

$\|A\|^T = \overline{\|A\|}$ , называется *эрмитовой*.

Матрица  $\|A\|$ , удовлетворяющая соотношениям  $\|A\|^T \overline{\|A\|} = \|E\|$  и  $\overline{\|A\|} A^T = \|E\|$ , называется *унитарной*.

Определитель унитарной матрицы есть комплексное число, модуль которого равен единице. Действительно,

$$\begin{aligned} \det(\|A\|^T \overline{\|A\|}) &= \det \|A\|^T \det \overline{\|A\|} = \det \|A\| \overline{\det \|A\|} = \\ &= |\det \|A\||^2 = \det \|E\| = 1. \end{aligned}$$

## § 11.2. Линейные операторы в унитарном пространстве

Для унитарного пространства справедливы определения, введенные для линейных операторов в главе 10.

В данном параграфе будут рассмотрены лишь специфические особенности линейных операторов, действующих в унитарном пространстве.

**Определение 11.2.1.** Линейный оператор  $\hat{A}$ , действующий в унитарном пространстве  $U$ , называется *унитарным* (или *изометрическим*), если  $\forall a, b \in U$  имеет место равенство

$$\langle \hat{A}a | \hat{A}b \rangle = \langle a | b \rangle.$$

**Замечание:** унитарный линейный оператор, действующий в конечномерном унитарном пространстве  $U^n$ , в ортонормированном базисе имеет унитарную матрицу.

**Определение 11.2.2.** Линейный оператор  $\hat{A}^+$ , действующий в унитарном пространстве  $U$ , называется *эрмитово сопряженным* линейному оператору  $\hat{A}$ , если  $\forall a, b \in U$  имеет место равенство

$$\langle \hat{A}a | b \rangle = \langle a | \hat{A}^+ b \rangle.$$

**Теорема 11.2.1.** Для линейных операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$ , действующих в унитарном пространстве  $U$ , справедливы соотношения:  $(\hat{A}\hat{B})^+ = \hat{B}^+\hat{A}^+$  и  $(\lambda\hat{A})^+ = \bar{\lambda}\hat{A}^+$ .

Доказательство.

Докажем первое соотношение. Имеем

$$\langle (\hat{A}\hat{B})a | b \rangle = \langle \hat{B}a | \hat{A}^+ b \rangle = \langle a | \hat{B}^+\hat{A}^+ b \rangle \quad \forall a, b \in U.$$

Откуда получаем по определению 11.2.2, что

$$(\hat{A}\hat{B})^+ = \hat{B}^+\hat{A}^+.$$

Аналогично

$$\langle (\lambda\hat{A})a | b \rangle = \bar{\lambda} \langle \hat{A}a | b \rangle = \bar{\lambda} \langle a | \hat{A}^+ b \rangle = \langle a | \bar{\lambda}\hat{A}^+ b \rangle \quad \forall a, b \in U$$

для любого комплексного числа  $\lambda$ .

Теорема доказана.

Для эрмитовски сопряженных операторов, действующих в конечномерном пространстве  $U^n$ , имеет место

**Теорема Матрица оператора  $\hat{A}^+$ , эрмитово сопряженного оператору  $\hat{A}$  в  $U^n$ , в базисе  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  определяется соотношением**

$$\left\| \hat{A}^+ \right\|_g = \left\| \Gamma \right\|^{-1} \left\| \overline{\hat{A}} \right\|_g^T \Gamma,$$

доказательство которой аналогично выводу формулы (10.6.1) для евклидова пространства.

### § 11.3. Эрмитовы операторы

**Определение 11.3.1.** Линейный оператор  $\hat{A}$ , действующий в унитарном пространстве, называется *эрмитово самосопряженным* (или просто *эрмитовым*), если  $\hat{A} = \hat{A}^+$ .

**Замечание:** эрмитов оператор, действующий в конечномерном унитарном пространстве  $U^n$ , обладает свойствами, аналогичными свойствам самосопряженного оператора в евклидовом пространстве  $E^n$ . В частности:

- 1°. Собственные значения эрмитова оператора вещественны.
- 2°. Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям эрмитова оператора, ортогональны.
- 3°. Для каждого эрмитова оператора существует ортонормированный базис, состоящий из его собственных векторов.

4°. В любом ортонормированном базисе унитарного пространства  $U^n$  эрмитов оператор имеет эрмитову матрицу.

**Определение 11.3.2.** Собственное значение  $\lambda$  линейного оператора  $\hat{A}$  называется *вырожденным*, если отвечающее ему инвариантное собственное подпространство имеет размерность больше единицы.

Приведем формулировки и обоснование наиболее важных свойств эрмитовых операторов.

**Теорема 11.3.1.** Два эрмитовых оператора  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  имеют общую систему собственных векторов тогда и только тогда, когда  $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$ , то есть когда эти операторы коммутируют.

Доказательство.

Докажем необходимость. Пусть  $\hat{A}a = \lambda a$  и  $\hat{B}a = \mu a$ , тогда

$$\hat{B}\hat{A}a = \lambda\hat{B}a = \lambda\mu a,$$

$$\hat{A}\hat{B}a = \mu\hat{A}a = \lambda\mu a,$$

и, вычитая почленно, получим, что  $(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})a = o$ . Поскольку  $a$  – произвольный собственный вектор, то данное соотношение верно и для всей совокупности собственных векторов, а значит, и для любого элемента унитарного пространства, так как из собственных векторов можно образовать базис. Поэтому  $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = \hat{O}$ .

Докажем достаточность. Пусть эрмитовы операторы  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  коммутируют и пусть, кроме того,  $\hat{A}a = \lambda a$ . Рассмотрим случай лишь невырожденных собственных значений, то есть случай, когда все собственные значения различны.

Покажем теперь, что элемент унитарного пространства  $b = \hat{B}a$  является собственным вектором оператора  $\hat{A}$ . Действительно, в силу  $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$

$$\hat{A}b = \hat{A}\hat{B}a = \hat{B}\hat{A}a = \hat{B}\lambda a = \lambda\hat{B}a = \lambda b.$$

Поскольку все собственные значения  $\hat{A}$  кратности единицы, то  $\lambda$  есть его собственное значение, отвечающее  $a$  и  $b$  одновременно. Поэтому  $b = \kappa a$  и в силу  $b = \hat{B}a$   $\hat{B}a = \kappa a$ . То есть  $a$  – собственный вектор оператора  $\hat{B}$ .

Теорема доказана.

**Теорема 11.3.2** Если эрмитов оператор  $\hat{A}$  коммутирует с каждым из двух некоммутирующих между собой эрмитовых (о вырождении). операторов  $\hat{B}$  и  $\hat{C}$ , то все собственные значения оператора  $\hat{A}$  вырожденные.

Доказательство.

Пусть  $\Lambda^*$  – линейная оболочка элемента  $f$  – является одномерным инвариантным собственным подпространством оператора  $\hat{A}$ , отвечающим его собственному значению  $\lambda$  кратности единицы. То есть предположим, что  $\dim \Lambda^* = 1$ .

Из коммутируемости операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  (по теореме 11.3.1) имеем, что  $\hat{B}f = \mu f$ , а из коммутируемости  $\hat{A}$  и  $\hat{C}$  следует, что  $\hat{C}f = \kappa f$ . Но тогда в силу  $\hat{A}f = \lambda f$  справедливы равенства

$$\hat{A}\hat{B}f = \hat{B}\hat{A}f = \lambda\mu f, \quad \hat{C}\hat{B}\hat{A}f = \lambda\mu\kappa f,$$

$$\hat{A}\hat{C}f = \hat{C}\hat{A}f = \lambda\kappa f, \quad \hat{B}\hat{C}\hat{A}f = \lambda\mu\kappa f,$$

$$\hat{C}\hat{B}(\lambda f) = \mu\kappa(\lambda f) \text{ и } \hat{B}\hat{C}(\lambda f) = \mu\kappa(\lambda f).$$

Вычитая эти равенства почленно, получаем, что

$$(\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{B})(\lambda f) = o \quad \forall f \in \Lambda^*,$$

то есть  $\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{B} = \hat{O}$  и операторы  $\hat{B}$  и  $\hat{C}$  коммутируют. Но последнее утверждение противоречит условию теоремы, и, следовательно, необходимо допустить существование более чем одного линейно независимого элемента в  $\Lambda^*$ .

Теорема доказана.

Таблица 11.3.1

Евклидово пространство	Унитарное пространство
Правило выноса константы из первого сомножителя в скалярном произведении: $(\lambda a, b) = \lambda(a, b)$	Правило выноса константы из первого сомножителя в скалярном произведении: $\langle \lambda a   b \rangle = \bar{\lambda} \langle a   b \rangle$
Ортогональный оператор $\hat{A}$ : $(\hat{A}a, \hat{A}b) = (a, b) \quad \forall a, b \in E$	Унитарный оператор $\hat{A}$ : $\langle \hat{A}a   \hat{A}b \rangle = \langle a   b \rangle \quad \forall a, b \in U$
Ортогональная матрица: $\  A \ ^\text{T} \  A \  = \  E \ $	Унитарная матрица: $\  A \ ^\text{T} \overline{\  A \ } = \  E \ $
В ортонормированном базисе в $E^n$ ортогональный оператор имеет ортогональную матрицу	В ортонормированном базисе в $U^n$ унитарный оператор имеет унитарную матрицу

<p>Сопряженный оператор <math>\hat{A}^+</math>:</p> $(\hat{A}a, b) = (a, \hat{A}^+b) \quad \forall a, b \in E$	<p>Эрмитово сопряженный оператор <math>\hat{A}^+</math>:</p> $\langle \hat{A}a   b \rangle = \langle a   \hat{A}^+b \rangle \quad \forall a, b \in U.$
<p>В <math>E^n</math> сопряженный оператор имеет матрицу</p> $\  \hat{A}^+ \ _g = \  \Gamma \ ^{-1} \  \hat{A} \ _g^T \  \Gamma \ $	<p>В <math>U^n</math> эрмитово сопряженный оператор имеет матрицу</p> $\  \hat{A}^+ \ _g = \  \Gamma \ ^{-1} \  \hat{A} \ _g^T \  \Gamma \ $
<p>Самосопряженный оператор:</p> $(\hat{A}a, b) = (a, \hat{A}b) \quad \forall a, b \in E$	<p>Эрмитово самосопряженный (эрмитов) оператор:</p> $\langle \hat{A}a   b \rangle = \langle a   \hat{A}b \rangle \quad \forall a, b \in U$
<p>Симметрическая матрица:</p> $\  A \ ^\text{T} = \  A \ $	<p>Эрмитова матрица:</p> $\  A \ ^\text{T} = \  \overline{A} \ $
<p>В ортонормированном базисе в <math>E^n</math> самосопряженный оператор имеет симметрическую матрицу</p>	<p>В ортонормированном базисе в <math>U^n</math> эрмитов оператор имеет эрмитову матрицу</p>
<p>Из собственных векторов самосопряженного оператора в <math>E^n</math> можно образовать ортонормированный базис</p>	<p>Из собственных векторов эрмитова оператора в <math>U^n</math> можно образовать ортонормированный базис</p>

В таблице 11.3.1 приведены некоторые понятия и свойства евклидова и унитарного пространств таким образом, чтобы облегчить их сравнительное сопоставление.

## § 11.4. Эрмитовы функционалы. Среднее значение и дисперсия эрмитова оператора

Как и в любом линейном пространстве, в унитарном пространстве можно ввести билинейные и квадратичные функционалы. Например, в унитарном пространстве непрерывных комплекснозначных на  $[\alpha, \beta]$  функций  $\psi(\tau)$  билинейным по  $\overline{\phi(\tau)}$  и  $\psi(\tau)$  функционалом является выражение

$$B(\overline{\phi(\tau)}, \psi(\tau)) = \iint_{\Omega} \overline{\phi(\sigma)} K(\sigma, \tau) \psi(\tau) d\sigma d\tau.$$

**Определение 11.4.1.** Квадратичный функционал вида  $\Phi(x) = \langle x | \hat{A}x \rangle$ , где

$x \in U$ , а линейный оператор  $\hat{A}$  – эрмитов, называется *эрмитовым функционалом* (или *эрмитовой формой*) в унитарном пространстве  $U$ .

**Определение 11.4.2.** Число  $\hat{A}_a = \langle a | \hat{A}a \rangle$  называется *средним значением*

*эрмитова оператора*  $\hat{A}$  по  $a$  – нормированному элементу из унитарного пространства.

**Замечания.** 1°. Если  $a$  – нормированный (то есть с  $|a| = \sqrt{\langle a | a \rangle} = 1$ ) собственный вектор эрмитова оператора  $\hat{A}$  с соответствующим собственным значением  $\lambda$ , то  $\hat{A}_a = \lambda$ , поскольку в этом случае

$$\hat{A}_a = \langle a | \hat{A}a \rangle = \langle a | \lambda a \rangle = \lambda \langle a | a \rangle = \lambda.$$

2°. Среднее значение эрмитова оператора, заданного в унитарном пространстве, вещественно. Пусть  $\hat{A}^+ = \hat{A}$ , тогда

$$\langle \hat{A}a | a \rangle = \langle a | \hat{A}^+ a \rangle = \langle a | \hat{A}a \rangle = \overline{\langle \hat{A}a | a \rangle},$$

но если некоторое число равно своему комплексному сопряжению, то оно вещественно.

3°. Если принять, что оператор умножения на константу  $\kappa$  есть  $\hat{\kappa} = \kappa \hat{E}$ , где  $\hat{E}$  – единичный оператор, то имеет место соотношение  $\underline{\hat{A}} - \underline{\hat{A}_a}_a = 0$ . Действительно,

$$\begin{aligned}\underline{\hat{A}} - \underline{\hat{A}_a}_a &= \langle a | (\hat{A} - \hat{A}_a) a \rangle = \langle a | \hat{A}a \rangle - \langle a | \hat{A}_a a \rangle = \\ &= (\hat{A}_a - \hat{A}_a) \langle a | a \rangle = 0.\end{aligned}$$

**Определение** Число  $\underline{\hat{A}} = \underline{(\hat{A} - \hat{A}_a)}_a^2$  называется *дисперсией*

11.4.3. *эрмитова оператора*  $\hat{A}$  по нормированному элементу унитарного пространства  $a$ .

Отметим следующие свойства дисперсии.

**Теорема** **Дисперсия**  $\underline{\hat{A}} = \underline{(\hat{A} - \hat{A}_a)}_a^2$  *эрмитова оператора*  $\hat{A}$ , *действующего в унитарном пространстве, есть вещественное неотрицательное число, для которого справедливо равенство*  $\underline{\hat{A}} = \underline{(\hat{A})}_a^2 - \underline{(\hat{A}_a)}_a^2$ .

Доказательство.

Покажем вначале, что число  $\underline{\hat{A}} = \underline{(\hat{A} - \hat{A}_a)}_a^2$  вещественное и неотрицательное. Оператор  $\hat{A} - \underline{\hat{A}_a}_a$ , очевидно, эрмитов, поскольку эрмитовыми являются операторы  $\hat{A}$  (по условию теоремы) и  $\underline{\hat{A}_a}_a$  (как оператор умножения на константу).

Тогда

$$\begin{aligned}\hat{A}_{\underline{a}} &= \left\langle a \middle| (\hat{A} - \underline{\hat{A}}_a)^2 a \right\rangle = \left\langle a \middle| (\hat{A} - \underline{\hat{A}}_a)(\hat{A} - \underline{\hat{A}}_a)a \right\rangle = \\ &= \left\langle (\hat{A} - \underline{\hat{A}}_a)^+ a \middle| (\hat{A} - \underline{\hat{A}}_a)a \right\rangle = \\ &= \left\langle (\hat{A} - \underline{\hat{A}}_a)a \middle| (\hat{A} - \underline{\hat{A}}_a)a \right\rangle \geq 0.\end{aligned}$$

С другой стороны, исходя из определения 11.4.2, получим

$$\begin{aligned}\hat{A}_{\underline{a}} &= \frac{(\hat{A} - \underline{\hat{A}}_a)^2}{a} = \left\langle a \middle| (\hat{A} - \underline{\hat{A}}_a)^2 a \right\rangle = \\ &= \left\langle a \middle| ((\hat{A})^2 - 2\hat{A}\underline{\hat{A}}_a + (\underline{\hat{A}}_a)^2)a \right\rangle = \\ &= \left\langle a \middle| (\hat{A})^2 a \right\rangle - 2\underline{\hat{A}}_a \left\langle a \middle| \hat{A}a \right\rangle + (\underline{\hat{A}}_a)^2 \left\langle a \middle| a \right\rangle = \\ &= \underline{(\hat{A})^2}_a - 2\underline{\hat{A}}_a \underline{\hat{A}}_a + (\underline{\hat{A}}_a)^2 = \underline{(\hat{A})^2}_a - (\underline{\hat{A}}_a)^2.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

**Теорема 11.4.2.** Для эрмитова оператора  $\hat{A}$ , действующего в унитарном пространстве, дисперсия, взятая по его нормированному собственному вектору, равняется нулю.

Доказательство.

Пусть  $\hat{A}a = \lambda a$ , тогда

$$\begin{aligned}\hat{A}_{\underline{a}} &= \underline{(\hat{A})^2}_a - (\underline{\hat{A}}_a)^2 = \left\langle a \middle| (\hat{A})^2 a \right\rangle - \left\langle a \middle| \hat{A}a \right\rangle^2 = \\ &= \left\langle a \middle| \hat{A}(\hat{A}a) \right\rangle - \left\langle a \middle| \hat{A}a \right\rangle^2 = \\ &= \left\langle a \middle| \hat{A}(\lambda a) \right\rangle - \left\langle a \middle| \lambda a \right\rangle^2 = \left\langle a \middle| \lambda \hat{A}a \right\rangle - \left\langle a \middle| \lambda a \right\rangle^2 =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lambda \langle a | \lambda a \rangle - \lambda^2 \langle a | a \rangle^2 = \lambda^2 \langle a | a \rangle - \lambda^2 \langle a | a \rangle^2 = \\
 &= \lambda^2 - \lambda^2 = 0, \\
 \text{поскольку } &\langle a | a \rangle = 1.
 \end{aligned}$$

Теорема доказана.

### § 11.5. Соотношение неопределенностей

Для эрмитовых операторов, действующих в унитарном пространстве, справедлива

Теорема  
11.5.1  
(соотношение  
неопределен-  
ностей).

Для двух эрмитовых операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$ , заданных в унитарном пространстве, имеет место соотношение

$$\hat{A} \underline{\underline{a}} \hat{B} \underline{\underline{a}} \geq \frac{1}{4} \left| \underline{\underline{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}} \underline{\underline{a}} \right|^2.$$

Доказательство.

1°. Рассмотрим оператор  $\hat{Q} = (\hat{A} - \underline{\underline{A}}_a) + \tau(\hat{B} - \underline{\underline{B}}_a)i$  (где  $\tau$  – некоторый вещественный параметр), для которого эрмитово сопряженным будет оператор вида

$$\hat{Q}^+ = (\hat{A} - \underline{\underline{A}}_a) - \tau(\hat{B} - \underline{\underline{B}}_a)i,$$

ибо эрмитовыми являются следующие четыре оператора:  $\hat{A}$ ,  $\underline{\underline{A}}_a$ ,  $\hat{B}$ ,  $\underline{\underline{B}}_a$ . Заметим также, что оператор  $\hat{Q}^+ \hat{Q}$  – эрмитов и что  $\langle a | \hat{Q}^+ \hat{Q} a \rangle = \langle \hat{Q} a | \hat{Q} a \rangle \geq 0 \quad \forall \hat{Q}$ . (См. доказательство теоремы 10.8.2, пункт 1°.)

2°. Выразим оператор  $\hat{Q}^+ \hat{Q}$  через операторы  $\hat{A}, \underline{\hat{A}}_a, \hat{B}, \underline{\hat{B}}_a$ , получим

$$\begin{aligned}\hat{Q}^+ \hat{Q} &= ((\hat{A} - \underline{\hat{A}}_a) - \tau(\hat{B} - \underline{\hat{B}}_a)i)((\hat{A} - \underline{\hat{A}}_a) + \\ &\quad + \tau(\hat{B} - \underline{\hat{B}}_a)i) = \\ &= (\hat{A} - \underline{\hat{A}}_a)^2 + \tau^2(\hat{B} - \underline{\hat{B}}_a)^2 + \\ &\quad + \tau((\hat{A} - \underline{\hat{A}}_a)(\hat{B} - \underline{\hat{B}}_a) - (\hat{B} - \underline{\hat{B}}_a)(\hat{A} - \underline{\hat{A}}_a))i = \\ &= (\hat{A} - \underline{\hat{A}}_a)^2 + \tau^2(\hat{B} - \underline{\hat{B}}_a)^2 + \tau(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})i.\end{aligned}$$

3°. Обозначим  $\hat{C} = -(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})i$ , причем отметим, что из предыдущего равенства следует эрмитовость оператора  $\hat{C}$  как линейной комбинации эрмитовых операторов. Подсчитаем теперь среднее значение эрмитова оператора  $\hat{Q}^+ \hat{Q}$ :

$$\begin{aligned}\underline{\hat{Q}^+ \hat{Q}}_a &= \underline{\hat{A}}_a + \tau^2 \underline{\hat{B}}_a + \left\langle a \middle| \tau(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})ia \right\rangle = \\ &= \tau^2 \underline{\hat{B}}_a - \tau \underline{\hat{C}}_a + \underline{\hat{A}}_a.\end{aligned}$$

Полученное значение  $\underline{\hat{Q}^+ \hat{Q}}_a$  есть вещественный квадратный трехчлен относительно  $\tau$ , который должен быть неотрицательным при любом  $\tau$ . Отсюда следует, что его дискrimинант не положителен, то есть

$$(\underline{\hat{C}}_a)^2 - 4 \underline{\hat{A}}_a \underline{\hat{B}}_a \leq 0,$$

или окончательно

$$\underline{\hat{A}}_a \underline{\hat{B}}_a \geq \frac{1}{4} \left| \underline{\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}}_a \right|^2.$$

Теорема доказана.

## Глава 12

# ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

В данной главе рассматриваются некоторые классы задач, имеющие важное значение в прикладных разделах математики, таких, как математическая физика, теория оптимального управления, математическая экономика, вычислительная математика и т.д., причем общим для этих задач является использование в процессе их решения понятий и методов различных разделов линейной алгебры.

### § 12.1. Приведение квадратичных функционалов к диагональному виду

Задача отыскания базиса, в котором квадратичный функционал имеет диагональный или канонический вид, достаточно часто встречается в различных приложениях механики, физики, теории оптимального управления.

#### Приведение к диагональному виду квадратичного функционала, заданного в ортонормированном базисе

Пусть в ортонормированном базисе  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  евклидова пространства  $E^n$  задан некоторый квадратичный функционал  $\Phi(x)$ . Рассмотрим задачу отыскания в  $E^n$  ортонормированного базиса  $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ , в котором функционал  $\Phi(x)$  имеет диагональный вид.

Принципиальная разрешимость подобной задачи для неортонормированного базиса следует из теоремы 9.2.1. Очевидно, что такой базис не единственный, и потому представляется интересным исследование возможности построения в  $E^n$  ортонормированного базиса, в котором данный квадратичный функционал  $\Phi(x)$  имеет диагональный вид.

Напомним предварительно (см. § 9.2), что квадратичный функционал в  $\Lambda^n$  может быть задан формулой

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \varphi_{ki} \xi_k \xi_i = \|x\|_g^T \Phi \|x\|_g,$$

в которой симметрическая матрица  $\|\Phi\|_g$  преобразуется при переходе от базиса  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  к базису  $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$  по правилу

$$\|\Phi\|_{g'} = \|S\|^T \|\Phi\|_g \|S\|.$$

При доказательстве теоремы 9.2.1 использовалась математическая индукция в сочетании с методом *выделения полных квадратов* (называемым иногда методом *Лагранжа*), применение которого на практике может потребовать значительных затрат вычислительных ресурсов. Существенно более эффективным оказывается алгоритм, основой которого является

**Теорема** Для всякого квадратичного функционала, заданного в 12.1.1. ортонормированном базисе, существует ортонормированный базис, в котором этот функционал имеет диагональный вид<sup>16</sup>.

---

<sup>16</sup> Иногда задачу отыскания ортонормированного базиса, в котором квадратичный функционал имеет диагональный вид, называют “приведением квадратичного функционала к диагональному виду при помощи ортогональной матрицы перехода”.

Доказательство.

- 1°. Как было показано в § 9.2, матрица квадратичного функционала  $\Phi(x)$  изменяется по правилу

$$\|\Phi\|_{e'} = \|S\|^T \|\Phi\|_e \|S\|,$$

где  $\|S\| = \|\sigma_{ij}\|$  – матрица перехода от базиса  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  к базису  $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ , то есть

$$e'_k = \sum_{s=1}^n \sigma_{sk} e_s, \quad k = [1, n],$$

$\|\Phi\|_e$  – симметрическая матрица билинейного функционала, порождающего квадратичный функционал  $\Phi(x)$ .

- 2°. Поскольку матрица перехода  $\|S\|$  от одного ортонормированного базиса к другому ортогональная (§ 10.4), то для нее справедливо равенство  $\|S\|^{-1} = \|S\|^T$ . Откуда вытекает, что в рассматриваемом нами случае

$$\|\Phi\|_{e'} = \|S\|^{-1} \|\Phi\|_e \|S\|.$$

- 3°. Формально симметрическая матрица  $\|\Phi\|_e$  в ортонормированном базисе  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  определяет самосопряженный оператор (лемма 10.7.1)  $\hat{\Phi}$ , матрица которого в базисе  $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$  находится по формуле (теорема 8.3.2)

$$\|\Phi\|_{e'} = \|S\|^{-1} \|\Phi\|_e \|S\|.$$

- 4°. Совпадение формул изменения матриц квадратичного функционала и самосопряженного оператора при переходе от одного ортонормированного базиса к другому позволяет использовать в качестве базиса  $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$  – ортонормированный базис из собственных векторов оператора  $\hat{\Phi}$ .

Этот базис существует (см. теорему 10.7.1) и в нем матрица оператора  $\hat{\Phi}$  (а значит, и матрица квадратичного функционала  $\Phi(x)$ ) имеет диагональный вид, причем на главной диагонали расположены собственные значения самосопряженного оператора  $\hat{\Phi}$ .

Теорема доказана.

Заметим, что утверждение теоремы 12.1.1 согласуется с утверждением следствия 10.7.4.

**Определение 12.1.1.** Линейный самосопряженный оператор  $\hat{\Phi}$  называется присоединенным к квадратичному функционалу  $\Phi(x)$  в  $E^n$ .

При этом очевидно выполнение равенства

$$\Phi(x) = (x, \hat{\Phi}x); \forall x \in E^n.$$

**Определение 12.1.2.** Функционал  $\rho(x) = \frac{(x, \hat{A}x)}{(x, x)}$ , заданный в  $E^n$  для некоторого самосопряженного оператора  $\hat{A}$ , называется *отношением Релея*.

Используя теорему 12.1.1, можно упростить процедуру оценки экстремальных значений квадратичного функционала. В качестве примера рассмотрим задачу нахождения максимума и минимума  $\rho(x)$ .

**Следствие 12.1.1.** В ортонормированном базисе максимальное (минимальное) значение  $\rho(x)$  равно максимальному (минимальному) собственному значению оператора  $\hat{A}$ , и это значение достигается на соответствующем собственном векторе этого оператора.

Доказательство.

Поскольку при переходе к ортонормированному базису, образованному из собственных векторов самосопряженного оператора  $\hat{A}$  (в силу теоремы 12.1.1), справедливы соотношения

$$\rho(x) = \frac{(x, \hat{A}x)}{(x, x)} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \xi_i \xi_j}{\sum_{i=1}^n \xi_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i'^2}{\sum_{i=1}^n \xi_i'^2},$$

то, проводя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 9.5.1, получаем, что  $\lambda_{\min} \leq \rho(x) \leq \lambda_{\max}$ .

Следствие доказано.

Проиллюстрируем применение теоремы 12.1.1 на примере решения следующей задачи.

**Задача 12.1.1.** *При помощи ортогонального оператора привести к диагональному виду в  $E^3$  квадратичный функционал*

$$\Phi(x) = 2\xi_1 \xi_2 + 2\xi_1 \xi_3 - 2\xi_2 \xi_3.$$

**Решение.**

1°. Пусть исходный ортонормированный базис состоит из элементов

$$\{e_1, e_2, e_3\} \text{ c } \|e_1\| = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \|e_2\| = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \|e_3\| = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}. \text{ Восстановим по квадратичному функционалу}$$

$$\Phi(x) = 2\xi_1 \xi_2 + 2\xi_1 \xi_3 - 2\xi_2 \xi_3$$

порождающий его симметричный билинейный функционал  $B(x, y)$ , используя формулу

$$B(x, y) = \frac{1}{2}(\Phi(x+y) - \Phi(x) - \Phi(y)) \quad (\text{см. § 9.2}).$$

В данном случае  $\Phi(y) = 2\eta_1\eta_2 + 2\eta_1\eta_3 - 2\eta_2\eta_3$ , а

$$\begin{aligned}\Phi(x+y) &= 2(\xi_1 + \eta_1)(\xi_2 + \eta_2) + \\ &+ 2(\xi_1 + \eta_1)(\xi_3 + \eta_3) - 2(\xi_2 + \eta_2)(\xi_3 + \eta_3),\end{aligned}$$

и потому

$$B(x, y) = \xi_1\eta_2 + \xi_1\eta_3 - \xi_2\eta_3 + \eta_1\xi_2 + \eta_1\xi_3 - \eta_2\xi_3,$$

$$\text{где } \|x\|_e = \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix} \text{ и } \|y\|_e = \begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, матрица функционала  $\Phi(x)$  имеет вид

$$\|\Phi\|_e = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

2°. Рассмотрим построенную симметрическую матрицу как задающую самосопряженный оператор  $\hat{\Phi}$  в  $E^3$  и найдем для него собственные значения. Составляем характеристическое уравнение 8.5.2:

$$\det \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Оно имеет корни:  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_{2,3} = 1$ , которые и являются собственными значениями. Заметим, что если нас интересует только *диагональный вид* квадратичного функционала, то его можно написать, основываясь на следствии 10.7.1:

$$\Phi(x) = -2\xi_1'^2 + \xi_2'^2 + \xi_3'^2$$

и на этом закончить решение задачи.

- 3°. В случае, когда требуется найти также и матрицу  $\| S \|$  – матрицу перехода от исходного ортонормированного базиса к искомому, необходимо определить собственные векторы оператора  $\hat{\Phi}$ . Для этого будем последовательно подставлять найденные собственные значения в систему (8.4.1) и строить ее общие решения. Для  $\lambda = -2$  имеем

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что ранг основной матрицы этой системы равен 2, поскольку третье уравнение есть разность первых двух. Далее, действуя по схеме, описанной в § 6.8 (*метод Гаусса*), получаем для компонентов собственного вектора систему условий

$$\begin{cases} 2\xi_1 + \xi_2 = -\xi_3, \\ \xi_1 + 2\xi_2 = \xi_3. \end{cases}$$

Принимая  $\xi_3$  за свободное неизвестное, получим собственный

$$\text{вектор } f_1 = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Кратность собственного значения  $\lambda = 1$  равна 2, и в силу следствия 10.7.2 ему должны отвечать два линейно независимых (но не обязательно ортогональных) собственных вектора. Конкретно, компоненты собственного вектора должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},$$

из которых независимое только одно  $\xi_1 = \xi_2 + \xi_3$ . Общее решение этой системы будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad \forall \alpha, \beta.$$

Каждый столбец такого вида ортогонален  $f_1$ , но выбранные конкретные фундаментальные решения не ортогональны друг другу. Поэтому пару ортогональных собственных векторов, отвечающих  $\lambda = 1$ , сформируем из первого фундаментального решения и ортогональной ему линейной комбинации первого и

второго. Условие ортогональности столбцов

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha \\ \beta \end{vmatrix},$$

очевидно, есть  $2\alpha + \beta = 0$ . Откуда, например, выбрав  $\alpha = 1$  и

$$\beta = -2, \text{ получим } f_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ и } f_3 = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix}.$$

- 4°. Набор элементов  $\{f_1, f_2, f_3\}$  является в  $E^3$  ортогональным, но ненормированным базисом. Чтобы построить ортонормированный базис, выполним нормировку каждого из элементов базиса  $\{f_1, f_2, f_3\}$ . В результате получим

$$e'_1 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}, \quad e'_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{vmatrix} \text{ и } e'_3 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{vmatrix}.$$

Матрица

$$\| S \| = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{vmatrix}$$

(перехода от “старого” базиса  $\{e_1, e_2, e_3\}$  к “новому” базису  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ ), столбцами которой являются координатные представления элементов базиса  $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$  по базису  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , ортогональная, то есть удовлетворяет соотношению

$$\| S \|^{-1} = \| S \|^\top,$$

что позволяет легко получить формулы, выражающие “новые” координаты через “старые”.

Действительно (§ 7.4), из соотношения  $\begin{vmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \xi'_3 \end{vmatrix} = \| S \| \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix}$  следует

$$\begin{vmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \xi'_3 \end{vmatrix} = \| S \|^{-1} \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix}, \text{ или окончательно}$$

$$\begin{vmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \xi'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix}.$$

Приведение одним линейным оператором пары квадратичных функционалов, первый из которых знаковоопределенный, соответственно к каноническому и диагональному виду

Пусть в некотором базисе  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  линейного пространства  $\Lambda^n$  задана пара квадратичных функционалов  $\Phi(x)$  и  $\Psi(x)$ , первый из которых знаковоопределенный (например, положительно). Рассмотрим задачу отыскания базиса  $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$ , в котором функционал  $\Phi(x)$  имеет канонический, а функционал  $\Psi(x)$  – диагональный вид.

Отметим, что условие знаковой определенности одного из приводимых квадратичных функционалов существенно, поскольку в общем случае два различных квадратичных функционала одним линейным преобразованием к диагональному виду не приводятся.<sup>17</sup> Например, квадратичный функционал

$$\Phi(x) = A\xi_1^2 + 2B\xi_1\xi_2 + C\xi_2^2$$

в  $\Lambda^2$  можно привести к диагональному виду при помощи линейного оператора, сводящегося к повороту плоскости радиусов-векторов на угол  $\alpha$ .

<sup>17</sup> Как и ранее, под “приведением квадратичного функционала к диагональному виду” понимается задача отыскания базиса (или построения матрицы перехода к базису), в котором матрица квадратичного функционала диагональная.

При этом необходимо (см. доказательство теоремы 4.4.1), чтобы  $\alpha$  удовлетворяло уравнению  $(A - C) \sin 2\alpha = 2B \cos 2\alpha$ .

Однако для пары квадратичных функционалов

$$\Phi_1(x) = \xi_1^2 - \xi_2^2 \quad \text{и} \quad \Phi_2(x) = \xi_1 \xi_2$$

угла  $\alpha$ , удовлетворяющего системе условий

$$\begin{cases} 2 \sin 2\alpha = 0, \\ 0 = \cos 2\alpha, \end{cases}$$

очевидно, не существует.

Опишем теперь алгоритм приведения в  $\Lambda^n$  пары квадратичных функционалов  $\Phi(x)$  и  $\Psi(x)$ , заданных в некотором исходном базисе  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ , первый из которых положительно определенный, соответственно к каноническому и диагональному виду.

1°. Поскольку квадратичный функционал  $\Phi(x)$  положительно определенный, то для него в  $\Lambda^n$  найдется другой базис  $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$ , в котором он имеет канонический вид, причем все его коэффициенты равны единице (см. теорему 9.2.1). Приведем этот функционал к данному виду каким-либо методом, например, выделив полные квадраты с последующей нормировкой элементов его матрицы. Одновременно *тем же самым* методом преобразуем также и квадратичный функционал  $\Psi(x)$ .

2°. Введем в  $\Lambda^n$  скалярное произведение по формуле

$$(x, y) = \sum_{k=1}^n \xi'_k \eta'_k,$$

превратив тем самым данное линейное пространство в евклидово  $E^n$ . Отметим, что в этом случае базис

$$\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\} = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\},$$

в котором  $\Phi(x)$  имеет канонический вид, ортонормированный.

- 3°. Построим теперь третий, также ортонормированный базис  $\{e''_1, e''_2, \dots, e''_n\}$ , переход к которому выполняется при помощи матрицы  $\|S\|$ , приведя квадратичный функционал  $\Psi(x)$  к диагональному виду по схеме, описанной в § 12.1.1. При этом переходе квадратичный функционал  $\Phi(x)$  не потеряет канонического вида, поскольку из условия  $\|\Phi\|_e = \|E\|$  и ортогональности  $\|S\|$  следует, что

$$\begin{aligned}\|\Phi\|_{e'} &= \|S\|^T \|\Phi\|_e \|S\| = \|S\|^T \|E\| \|S\| = \\ &= \|S\|^T \|S\| = \|S\|^{-1} \|S\| = \|E\|.\end{aligned}$$

Таким образом, построен базис, в котором квадратичный функционал  $\Phi(x)$  имеет канонический вид, а функционал  $\Psi(x)$  – диагональный.

В заключение отметим, что матрица перехода к искомому ортонормированному базису есть произведение матрицы перехода, при котором знакоопределенный квадратичный функционал приводится к каноническому виду, и ортогональной матрицы  $\|S\|$ .

**Задача** Найти замену переменных, приводящую квадратичные 12.1.2. функционалы

$$\Phi(x) = \xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + 3\xi_2^2 \text{ и}$$

$$\Psi(x) = 4\xi_1^2 + 16\xi_1\xi_2 + 6\xi_2^2$$

соответственно к каноническому и диагональному виду.

Решение.

- 1°. Исследуем квадратичные функционалы  $\Phi(x)$  и  $\Psi(x)$  на знаковую определенность. Из критерия Сильвестра (теорема 9.3.2) и неравенств

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 > 0 ; \quad \det \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = -40 < 0$$

заключаем, что  $\Phi(x)$  – положительно определенный квадратичный функционал, в то время как функционал  $\Psi(x)$  не является знакоопределенным.

- 2°. Приведем положительно определенный квадратичный функционал  $\Phi(x)$  к каноническому виду методом Лагранжа. Поскольку

$$\Phi(x) = \xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + 3\xi_2^2 = (\xi_1 + \xi_2)^2 + 2\xi_2^2,$$

то, выполнив замену переменных  $\begin{cases} \xi'_1 = \xi_1 + \xi_2 \\ \xi'_2 = \sqrt{2}\xi_2 \end{cases}$  или

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi'_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\xi'_2 \\ \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\xi'_2 \end{cases},$$

получим  $\Phi(x) = \xi'^2_1 + \xi'^2_2$  и соответственно

$$\Psi(x) = 4\xi'^2_1 + 4\sqrt{2}\xi'_1\xi'_2 - 3\xi'^2_2.$$

- 3°. Введение в  $\Lambda^2$  скалярного произведения с единичной матрицей Грама означает, что координаты  $\{\xi'_1; \xi'_2\}$  есть координаты евклидова пространства  $E^2$  с базисом  $\{e'_1, e'_2\}$ , где

$$\left\| e'_1 \right\|_{e'} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} ; \quad \left\| e'_2 \right\|_{e'} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Матрица квадратичного функционала  $\Psi(x)$  в этом базисе

$$\left\| \Psi \right\|_{e'} = \begin{vmatrix} 4 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -3 \end{vmatrix}. \text{ Она задает присоединенный самосо-}$$

пряженный оператор, имеющий собственные значения  $\lambda_1 = 5$  и  $\lambda_2 = -4$ , а также ортонормированные собственные векторы

$$\left\| f_1 \right\|_{e'} = \begin{vmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{1}{3} \end{vmatrix} \text{ и } \left\| f_2 \right\|_{e'} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{vmatrix}, \text{ которые примем за}$$

новый базис  $\{e''_1, e''_2\}$ .

- 4°. Матрица перехода от ортонормированного базиса  $\{e'_1, e'_2\}$  к ортонормированному базису  $\{e''_1, e''_2\}$ , в котором

$$\Phi(x) = \xi_1''^2 + \xi_2''^2 \text{ и } \Psi(x) = 5\xi_1''^2 - 4\xi_2''^2,$$

ортогональная и имеет вид

$$\left\| S \right\| = \begin{vmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{vmatrix}.$$

Откуда окончательно получаем, что

$$\begin{cases} \xi_1'' = \frac{2\sqrt{2}}{3}\xi_1' + \frac{1}{3}\xi_2' \\ \xi_2'' = -\frac{1}{3}\xi_1' + \frac{2\sqrt{2}}{3}\xi_2' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1'' = \frac{2\sqrt{2}}{3}\xi_1 + \sqrt{2}\xi_2, \\ \xi_2'' = -\frac{1}{3}\xi_1 + \xi_2. \end{cases}$$

Если в задаче одновременного приведения пары квадратичных функционалов, один из которых положительно определенный, соответственно к каноническому и диагональному виду, требуется найти лишь этот вид (а не формулы замены переменных), то можно воспользоваться более простой схемой расчетов.

Допустим, что положительно определенный квадратичный функционал  $\Phi(x)$  приведен при помощи матрицы перехода  $\|S\|$  к каноническому виду, то есть  $\|S\|^T \|\Phi\| S = \|E\|$ . После того же преобразования матрица квадратичного функционала  $\Psi(x)$  будет иметь вид  $\|\Psi^*\| = \|S\|^T \|\Psi\| S$ .

Согласно теореме 12.1.1 в ортонормированном базисе для построения диагонального вида квадратичного функционала  $\Psi(x)$  достаточно найти собственные числа самосопряженного оператора, матрица которого есть  $\|\Psi^*\|$ . Найдем выражение для этой матрицы, учитываяющее связь между матрицами  $\|\Phi\|$  и  $\|S\|$ .

Из равенства

$$\|S\|^T \|\Phi\| S = \|E\|$$

следует, что  $\|S\| = (\|S\|^T \|\Phi\|)^{-1}$ . Тогда, используя правила обращения и транспонирования произведения матриц, перестановочность обращения и транспонирования, а также симметричность и невырожденность матрицы  $\|\Phi\|$ , имеем

$$\begin{aligned}\|\Psi^*\| &= \|S\|^T \|\Psi\| \|S\| = ((\|S\|^T \|\Phi\|)^{-1})^T \|\Psi\| \|S\| = \\ &= ((\|\Phi\|)^{-1} (\|S\|^T)^{-1})^T \|\Psi\| \|S\| = \\ &= \|S\|^{-1} (\|\Phi\|^T)^{-1} \|\Psi\| \|S\| = \|S\|^{-1} (\|\Phi\|^{-1} \|\Psi\|) \|S\|.\end{aligned}$$

Полученное равенство означает, что матрица  $\|\Psi^*\|$  может рассматриваться как результат преобразования матрицы линейного оператора  $\|\Phi\|^{-1} \|\Psi\|$  при замене базиса с матрицей перехода  $\|S\|$ . Поскольку собственные значения линейного оператора не зависят от выбора базиса, то решение задачи может быть сведено к определению собственных значений оператора, имеющего матрицу  $\|\Phi\|^{-1} \|\Psi\|$ .

Собственные векторы и собственные значения этого оператора находятся согласно § 8.5 из системы линейных уравнений

$$(\|\Phi\|^{-1} \|\Psi\|) \|f\| = \lambda \|f\|,$$

которую можно преобразовать к виду

$$(\|\Psi\| - \lambda \|\Phi\|) \|f\| = \|o\|.$$

Условие существования ненулевых столбцов  $\|f\|$ :

$$\det \left\| \hat{\Psi} - \lambda \hat{\Phi} \right\|_g = 0$$

– алгебраическое уравнение относительно  $\lambda$ , корни которого и являются искомыми коэффициентами диагонального представления квадратичного функционала  $\Psi(x)$ .

Проиллюстрируем применение данного метода для нахождения диагонального вида квадратичных форм в задаче 12.1.2. В этом случае

$$\|\Phi\| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \text{ и } \|\Psi\| = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}, \text{ то есть для определения коэф-}$$

фициентов диагонального представления квадратичного функционала  $\Psi(x)$  необходимо решить уравнение

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 8-\lambda \\ 8-\lambda & 3-3\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Поскольку данное уравнение имеет корни  $\lambda_1 = 5$  и  $\lambda_2 = -4$ , то искомый диагональный вид для  $\Psi(x)$  будет  $\Psi(x) = 5\xi_1'^2 - 4\xi_2'^2$ , в то время как очевидно, что  $\Phi(x) = \xi_1'^2 + \xi_2'^2$ .

## § 12.2. Классификация поверхностей второго порядка

Пусть в евклидовом пространстве  $E^3$  с базисом  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , где

$$\|e_1\| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \|e_2\| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \|e_3\| = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

дано уравнение поверхности

$$\alpha_{11}\xi_1^2 + 2\alpha_{12}\xi_1\xi_2 + \alpha_{22}\xi_2^2 + 2\alpha_{13}\xi_1\xi_3 + \alpha_{33}\xi_3^2 + 2\alpha_{23}\xi_2\xi_3 + 2\alpha_{14}\xi_1 + 2\alpha_{24}\xi_2 + 2\alpha_{34}\xi_3 + \alpha_{44} = 0$$

второго порядка ( $\sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^k |\alpha_{ik}| > 0$ ).

Квадратичную часть данного уравнения можно рассматривать как квадратичный функционал в  $E^3$ . Приведем его к диагональному виду ортогональным оператором по схеме, изложенной в § 12.1. Получим уравнение

$$\lambda_1\xi_1'^2 + \lambda_2\xi_2'^2 + \lambda_3\xi_3'^2 + 2\alpha'_{14}\xi_1' + 2\alpha'_{24}\xi_2' + 2\alpha'_{34}\xi_3' + \alpha'_{44} = 0,$$

$$|\lambda_1| + |\lambda_2| + |\lambda_3| > 0,$$

для которого рассмотрим три следующих случая.

I. Центральный случай:  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0$  или, что в силу теоремы 8.6.8 то же самое,

$$\det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

После переноса начала координат, устранившего линейные слагаемые, получаем уравнение

$$\lambda_1 \xi_1''^2 + \lambda_2 \xi_2''^2 + \lambda_3 \xi_3''^2 + \alpha_{44}'' = 0,$$

для которого можно выделить следующие варианты:

если  $\alpha_{44}'' \neq 0$

1) *мнимый эллипсоид*

$$\text{при } \operatorname{sgn}(\lambda_i) = \operatorname{sgn}(\alpha_{44}'') , \quad i = 1, 2, 3;$$

2) *эллипсоид*

$$\text{при } \operatorname{sgn}(\lambda_i) = -\operatorname{sgn}(\alpha_{44}'') , \quad i = 1, 2, 3;$$

3) *однополостный гиперболоид*

$$\begin{aligned} \text{при } \operatorname{sgn}(\lambda_1) &= \operatorname{sgn}(\lambda_2) = \\ &= -\operatorname{sgn}(\lambda_3) = -\operatorname{sgn}(\alpha_{44}''); \end{aligned}$$

4) *двуполостный гиперболоид*

$$\begin{aligned} \text{при } \operatorname{sgn}(\lambda_1) &= -\operatorname{sgn}(\lambda_2) = \\ &= -\operatorname{sgn}(\lambda_3) = -\operatorname{sgn}(\alpha_{44}''); \end{aligned}$$

если  $\alpha_{44}'' = 0$

5) *мнимый конус*

$$\text{при } \operatorname{sgn}(\lambda_1) = \operatorname{sgn}(\lambda_2) = \operatorname{sgn}(\lambda_3);$$

6) *конус*

$$\text{при } \operatorname{sgn}(\lambda_1) = \operatorname{sgn}(\lambda_2) = -\operatorname{sgn}(\lambda_3).$$

II. **Первый нецентральный случай:**  $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 = 0$ .

После переноса начала координат приходим к уравнению  $\lambda_1 \xi_1''^2 + \lambda_2 \xi_2''^2 + 2\alpha_{34}'' \xi_3'' + \alpha_{44}'' = 0$ , для которого выделяем варианты:

если  $\alpha_{34}'' \neq 0$ , то уравнение приводится к

$$\lambda_1 \xi_1''^2 + \lambda_2 \xi_2''^2 + 2\alpha_{34}''' \xi_3''' = 0,$$

и тогда имеем:

7) *эллиптический параболоид*

при  $\operatorname{sgn}(\lambda_1) = \operatorname{sgn}(\lambda_2)$ ;

8) *гиперболический параболоид*

при  $\operatorname{sgn}(\lambda_1) = -\operatorname{sgn}(\lambda_2)$ ;

если  $\alpha_{34}'' = 0, \alpha_{44}'' \neq 0$ , то имеем:

9) *мнимый эллиптический цилиндр*

при  $\operatorname{sgn}(\lambda_i) = \operatorname{sgn}(\alpha_{44}'')$ ,  $i = 1, 2$ ;

10) *эллиптический цилиндр*

при  $\operatorname{sgn}(\lambda_i) = -\operatorname{sgn}(\alpha_{44}'')$ ,  $i = 1, 2$ ;

11) *гиперболический цилиндр*

при  $\operatorname{sgn}(\lambda_1) = -\operatorname{sgn}(\lambda_2)$ ;

если же  $\alpha_{34}'' = 0, \alpha_{44}'' = 0$ , то имеем:

12) *пару мнимых пересекающихся плоскостей*

при  $\operatorname{sgn}(\lambda_i) = \operatorname{sgn}(\lambda_2)$ ;

13) *пару пересекающихся плоскостей*

при  $\operatorname{sgn}(\lambda_i) = -\operatorname{sgn}(\lambda_2)$ .

III. Второй нецентральный случай:  $\lambda_1 \neq 0$  и  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ .

После переноса начала координат приходим к уравнению

$$\lambda_1 \xi''^2 + 2\alpha''_{24} \xi''_2 + 2\alpha''_{34} \xi''_3 + \alpha''_{44} = 0,$$

для анализа которого целесообразно перейти к новому ортонормированному базису по формулам

$$\xi'''_1 = \xi'' ; \quad \xi'''_2 = \frac{\alpha''_{24} \xi''_2 + \alpha''_{34} \xi''_3}{\sqrt{\alpha''_{24}^2 + \alpha''_{34}^2}} ; \quad \xi'''_3 = \frac{\alpha''_{34} \xi''_2 - \alpha''_{24} \xi''_3}{\sqrt{\alpha''_{24}^2 + \alpha''_{34}^2}}$$

(что, очевидно, является поворотом в плоскости  $O\xi_2 \xi_3$ ).

В итоге получаем уравнение

$$\lambda_1 \xi'''^2 + 2(\sqrt{\alpha''_{24}^2 + \alpha''_{34}^2}) \xi'''_2 + \alpha''_{44} = 0$$

и соответствующие ему варианты:

если  $\alpha''_{24} \neq 0$  или  $\alpha''_{34} \neq 0$ , то после переноса начала координат имеем:

14) параболический цилиндр;

если  $\alpha''_{24} = \alpha''_{34} = 0$ , то имеем:

15) пару мнимых параллельных плоскостей

при  $\operatorname{sgn}(\lambda_1) = \operatorname{sgn}(\alpha''_{44})$ ;

16) пару параллельных плоскостей

при  $\operatorname{sgn}(\lambda_1) = -\operatorname{sgn}(\alpha''_{44})$ ;

если  $\alpha''_{24} = \alpha''_{34} = \alpha''_{44} = 0$ , то имеем:

17) пару совпадающих плоскостей.

- Замечания.
- 1°. Для классификации конкретной поверхности второго порядка необходимо сделать преобразование квадратной части уравнения к диагональному виду и выполнить переносы начала координат.
  - 2°. Схема исследования кривых второго порядка на плоскости аналогична случаю, рассмотренному для поверхностей второго порядка.

### § 12.3. Аппроксимация функций многочленами

Задача построения наилучшего (в некотором смысле) приближения заданной на  $[a,b]$  функции  $f(\tau)$  линейной комбинацией некоторых других функций

$$g_0(\tau), g_1(\tau), g_2(\tau), \dots, g_n(\tau), \dots,$$

определенных и обладающих более привлекательными (с точки зрения удобства их исследования по сравнению с  $f(\tau)$ ) свойствами на  $\tau \in [a,b]$ , достаточно часто встречается в различных приложениях.

Ввиду большого разнообразия постановок задач этого класса мы ограничимся рассмотрением лишь двух из них, имея целью только проиллюстрировать на примере их решения, использование методов линейной алгебры.

Рассмотрим в качестве объекта аппроксимации непрерывную на  $[-1,1]$  функцию  $f(\tau)$ , а в качестве аппроксимирующих функций выберем одночлены вида  $\{g_k(\tau) = \tau^k, k = [0, n]\}$ .

Задача состоит в отыскании алгебраического многочлена, степени не выше  $n$ ,  $P_n(\tau) = \sum_{k=0}^n \xi_k \tau^k$ , который наилучшим образом приближает функцию  $f(\tau)$ .

Предварительно заметим, что множество непрерывных на  $[-1,1]$  функций образует линейное пространство  $\Lambda$ , элементами которого

являются и функции  $g_k(\tau)$ , причем  $\Lambda^*$  – линейная оболочка совокупности элементов  $\{g_k(\tau) = \tau^k, k = [0, n]\}$  есть  $(n+1)$ -мерное подпространство пространства  $\Lambda$ , в качестве базиса которой можно взять набор элементов

$$\{g_k = g_k(\tau), k = [0, n]\}.$$

Для количественной оценки качества аппроксимации одной функции другой введем в  $\Lambda$  скалярное произведение по формуле

$$(x, y) = \int_{-1}^1 x(\tau) y(\tau) d\tau$$

и превратим его тем самым в евклидово пространство  $E$ . Тогда мера близости элементов  $x(\tau)$  и  $y(\tau)$  может быть оценена величиной

$$\rho = |x - y| = \sqrt{(x - y, x - y)} = \sqrt{\int_{-1}^1 (x(\tau) - y(\tau))^2 d\tau}$$

(называемой обычно *расстоянием между*  $x(\tau)$  и  $y(\tau)$  в  $E$ ), которая в силу свойств определенных интегралов равна нулю только в случае  $x(\tau) = y(\tau) \quad \forall \tau \in [-1, 1]$ .

Далее для краткости будем опускать аргументы элементов в  $E$ , то есть будем обозначать функцию  $f(\tau)$  как  $f \in E$ . Квадрат расстояния между элементами  $f$  и  $\sum_{k=0}^n \xi_k g_k$  в  $E$  равен

$$\rho^2 = (f - \sum_{k=0}^n \xi_k g_k, f - \sum_{k=0}^n \xi_k g_k).$$

Подберем значения коэффициентов  $\xi_k, k = [0, n]$  так, чтобы величина  $\rho^2$  оказалась минимальной. В силу билинейности скалярного произведения получаем

$$\begin{aligned}\rho^2 &= (f - \sum_{k=0}^n \xi_k g_k, f - \sum_{k=0}^n \xi_k g_k) = \\ &= (f, f) - 2 \sum_{k=0}^n \xi_k (f, g_k) + \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^n \xi_k \xi_i (g_k, g_i),\end{aligned}$$

а из условий равенства нулю частных производных от  $\rho^2$  по всем  $\xi_k$ ,  $k = [0, n]$ , то есть из системы линейных уравнений

$$\sum_{i=0}^n \xi_i^* (g_k, g_i) = (f, g_k), \quad k = [0, n], \quad (12.3.1)$$

находятся оптимальные значения коэффициентов  $\xi_k^*$ ,  $k = [0, n]$ , при которых  $\rho^2$  минимально. Заметим, что данная система уравнений имеет единственное решение, поскольку ее основная матрица невырожденная, как матрица Грама базисных векторов.

Отметим формальное совпадение полученной формулы с утверждением теоремы 10.3.2, которое позволяет заключить, что оптимальные значения коэффициентов  $\xi_k^*$ ;  $k = [0, n]$  суть координаты элемента  $f$  в базисе  $\{g_k = g_k(\tau), k = [0, n]\}$  в том случае, когда  $f$  принадлежит линейной оболочке  $\Lambda^*$ .

Найдем минимальное значение  $\rho^2$ :

$$\begin{aligned}\rho^2 &= (f, f) - \sum_{k=0}^n \xi_k^* (f, g_k) + \sum_{k=0}^n \xi_k^* \left( -(f, g_k) + \sum_{i=0}^n \xi_i^* (g_k, g_i) \right) = \\ &= (f, f) - \sum_{k=0}^n \xi_k^* (f, g_k) = (f, f - \sum_{k=0}^n \xi_k^* g_k).\end{aligned}$$

Иначе говоря, полученное выражение равно нулю для

$$f = \sum_{k=0}^n \xi_k^* g_k,$$

что означает равенство нулю погрешности аппроксимации лишь в случае, когда элемент  $f$  принадлежит подпространству  $\Lambda^*$ .

Более содержательная оценка величины погрешности аппроксимации  $\rho^2$  получается при подстановке в правую часть равенства

$$\rho^2 = (f, f - \sum_{k=0}^n \xi_k^* g_k) \text{ оптимальных значений } \xi_k^*, k = [0, n],$$

найденных при решении системы линейных уравнений 12.3.1. Заметим, что это сделать гораздо удобнее в случае ортонормированного базиса подпространства  $\Lambda^*$ .

Можно показать, что применение к неортогональному базису

$$\{g_k = g_k(\tau) = \tau^k, k = [0, n]\}$$

процедуры ортогонализации Грама–Шмидта, использованной при доказательстве теоремы 10.2.1, дает ненормированную систему ортогональных многочленов вида

$$e'_0(\tau) = 1; \quad e'_1(\tau) = \tau; \quad e'_2(\tau) = \tau^2 - \frac{1}{3};$$

$$e'_3(\tau) = \tau^3 - \frac{3}{5}\tau; \quad \dots; \quad e'_n(\tau) = \frac{d^n}{d\tau^n}(\tau^2 - 1)^n,$$

называемых *полиномами Лежандра*.

Поскольку все предыдущие вычисления делались для базиса  $\{g_k = \tau^k, k = [0, n]\}$ , но без учета его конкретного вида, то они будут и справедливы для ортогонального (но, вообще говоря, ненормированного) базиса

$$\{e'_k(\tau) = \frac{d^k}{d\tau^k}(\tau^2 - 1)^k, k = [0, n]\}.$$

Для ортогонального базиса матрица Грама диагональная и, следовательно, система уравнений 12.3.1

$$\sum_{i=0}^n \xi_i(e'_k, e'_i) = (f, e'_k), \quad k = [0, n]$$

будет иметь решения вида:  $\xi_k^* = \frac{(f, e'_k)}{(e'_k, e'_k)}$ ;  $k = [0, n]$ , а величина  $\rho^2$ :

$$\rho^2 = (f, f - \sum_{k=0}^n \xi_k^* e'_k) = (f, f) - \sum_{k=0}^n \frac{(f, e'_k)^2}{(e'_k, e'_k)}.$$

Если же, кроме того, базис  $\{e_k, k = [0, n]\}$  ортонормированный, то есть  $(e_k, e_i) = \delta_{ki}; \forall k, i = [0, n]$ , тогда

$$\xi_k^* = (f, e_k); \quad k = [0, n] \text{ и } \rho^2 = |f|^2 - \sum_{k=0}^n \xi_k^{*2}.$$

Отметим, что значения  $\xi_k^*, k = [0, n]$  – оптимальных коэффициентов аппроксимирующего многочлена формально совпадают:

- 1) с решением задачи о нахождении ортогональной проекции элемента  $f$  евклидова пространства на подпространство  $\Lambda^*$ ;
- 2) со значениями компонент разложения элемента, принадлежащего  $\Lambda^*$ , по ортонормированному базису  $\{e_k, k = [0, n]\}$   
(см. следствие 10.3.2).

Таким образом, ортогональность системы элементов, используемых для аппроксимации, существенно упрощает вычисления. Вместе с тем ортогонализация по методу Грама–Шмидта в случае бесконечномерного евклидова пространства может оказаться достаточно сложной процедурой.

Возможной альтернативой в процессе построения ортонормированной системы аппроксимирующих элементов является лемма 10.7.3, утверждающая, что собственные векторы *самосопряженного* оператора, отвечающие различным собственным значениям, попарно ортогональны.

Рассмотрим линейный оператор  $\hat{R}$  в евклидовом пространстве бесконечно дифференцируемых на  $[-1, 1]$  функций, ставящий каждой такой функции в соответствие<sup>18</sup> ее вторую производную, взятую с обратным знаком, и выясним, при каких условиях этот оператор будет самосопряженным. Интегрируя по частям, получим

$$(\hat{R}x, y) = - \int_{-1}^1 \frac{d^2 x}{d\tau^2} y(\tau) d\tau = - \frac{dx}{d\tau} y(\tau) \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{dx}{d\tau} \frac{dy}{d\tau} d\tau.$$

Но, с другой стороны,

$$(x, \hat{R}y) = - \int_{-1}^1 x(\tau) \frac{d^2 y}{d\tau^2} d\tau = -x(\tau) \frac{dy}{d\tau} \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{dx}{d\tau} \frac{dy}{d\tau} d\tau.$$

Поэтому для самосопряженности оператора  $\hat{R}$  достаточно, чтобы  $\frac{dx}{d\tau} y(\tau) \Big|_{-1}^1 = x(\tau) \frac{dy}{d\tau} \Big|_{-1}^1$ . Это условие выполняется, например, для

функций, которые (так же, как и их производные) имеют равные значения на концах отрезка  $[-1, 1]$ .

<sup>18</sup> В примере 10.7.1 было показано, что оператор вида  $\hat{A}^+ \hat{A}$  есть самосопряженный и имеет неотрицательные собственные значения. Если  $\hat{A} = \frac{d}{d\tau}$  и

$\hat{A}^+ = -\frac{d}{d\tau}$  (при выполнении соответствующих граничных условий), то

$\hat{R} = \hat{A}^+ \hat{A} = -\frac{d^2}{d\tau^2}$ .

Найдем теперь собственные векторы линейного оператора  $\hat{R}$ . Условие  $\hat{R}x = \lambda x$  в данном случае сводится к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -\lambda x, \quad \lambda \geq 0,$$

решение которого дается формулой  $x(\tau) = \alpha e^{\tau\sqrt{-\lambda}} + \beta e^{-\tau\sqrt{-\lambda}}$ , где  $\alpha$  и  $\beta$  – произвольные, не равные нулю одновременно константы.

Из условий  $x(-1) = x(1)$  и  $\left.\frac{dx}{d\tau}\right|_{-1} = \left.\frac{dx}{d\tau}\right|_1$  получаем по формуле

Эйлера (см. приложение 3):

$$e^{\sqrt{-\lambda}} - e^{-\sqrt{-\lambda}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin \sqrt{\lambda} = 0.$$

Следовательно собственные значения будут

$$\lambda_k = \pi^2 k^2 \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots,$$

а отвечающие им собственные векторы –

$$x_k(\tau) = \xi_k \cos \pi k \tau + \eta_k \sin \pi k \tau.$$

Числа  $\xi_k$  и  $\eta_k$  здесь произвольные, но не равные нулю одновременно для каждого  $k$ .

Таким образом, мы получили систему попарно ортогональных элементов, линейная оболочка которых является подпространством евклидова пространства непрерывных на  $[-1, 1]$  функций. Эта система (так же, как система полиномов Лежандра) может быть использована для построения аппроксимирующих многочленов, однако в данном случае эти многочлены будут тригонометрическими.

**Замечание:** полученные результаты приводят к естественному вопросу: можно ли уменьшить погрешность аппроксимации за счет увеличения  $n$ ? Или, иначе говоря, справедливо ли равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (|f|^2 - \sum_{k=0}^n \xi_k^{*2}) = 0 ?$$

Ответ на этот вопрос в общем случае отрицательный. Рассмотрим, например, некоторое подпространство  $E^*$  евклидова пространства  $E$ , не имеющее базиса (то есть  $E^*$  бесконечномерное), и пусть существует ненулевой элемент  $f \in E$ , но  $f \notin E^*$ , такой, что

$$(f, g_k) = 0 \quad \forall k$$

(где все  $g_k \in E^*$ , а их любое конечное подмножество линейно независимо). В этом случае все аппроксимирующие коэффициенты равны нулю и данное предельное равенство, очевидно, не выполняется<sup>19</sup>.

---

<sup>19</sup> Условия возможности построения линейной комбинации из элементов множества  $\{g_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ , аппроксимирующей  $\forall f \in E$  с любой наперед заданной точностью, выходят за рамки предмета линейной алгебры и изучаются в курсе математического анализа.

**Приложение 1****СВОЙСТВА ЛИНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА  
НА ПЛОСКОСТИ**

В § 4.4 были перечислены конкретные типы линий второго порядка, различие между которыми сохраняется при переходе из одной декартовой системы координат в другую. В данном приложении будут рассмотрены характерные свойства этих линий.

**Приложение 1.1. Вырожденные линии  
второго порядка**

К вырожденным линиям второго порядка будем относить все типы, перечисленные в первых четырех столбцах таблицы теоремы 4.4.1. Кратко опишем их свойства.

**1°. Тип линии “Несовпадающие прямые”**

Уравнение  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$  определяет пару пересекающихся прямых в системе координат  $\{\vec{O}, \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ . В свою очередь уравнение  $y^2 = a^2$  при  $a \neq 0$  определяет пару параллельных прямых.

**Пример**      Пусть на плоскости  $\{\vec{O}, \vec{e_1}, \vec{e_2}\}$  задана линия второго порядка  $3x^2 + 4xy + y^2 = 0$ . Преобразовав ее уравнение к виду

$$(2x + y)^2 - x^2 = 0$$

(метод Лагранжа),  
получим две прямые  
 $y = -x$  и  $y = -3x$ .

(Рис. Прил. 1.1.1.)

В данном случае  
 $\Delta = -1 < 0$ , а угол  
поворота осей системы координат

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2.$$

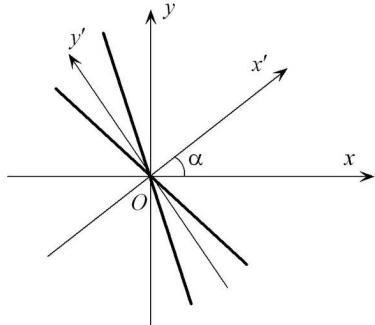


Рис. Прил. 1.1.1

## 2°. Тип линии “Совпадающие прямые”

Уравнение  $y^2 = 0$  определяет прямую  $y = 0$  в системе координат  $\{\overrightarrow{O}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ . Получается из типа линии 1° предельным переходом при  $b \rightarrow +0$ .

## 3°. Тип линии “Точки”

Уравнение  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$  определяет единственную точку – начало координат системы  $\{\overrightarrow{O}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ .

## 4°. Тип линии “Пустые множества”

На плоскости  $\{\overrightarrow{O}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$  не существует точек, координаты которых удовлетворяют уравнениям

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \text{ или } y^2 = -a^2.$$

Однако эти случаи иногда именуют “мнимыми линиями”.

## Приложение 1.2. Эллипс и его свойства

**Определение Прил. 1.2.1.** Линия, уравнение которой в некоторой ортонормированной системе координат имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; a \geq b > 0,$$

называется *эллипсом*.

**Определение Прил. 1.2.2.** Число  $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$  называется *эксцентричеситетом* эллипса.

Точки  $\begin{pmatrix} \pm \varepsilon a \\ 0 \end{pmatrix}$  называются *фокусами* эллипса.

Прямые  $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$  называются *директрисами* эллипса.

Число  $p = \frac{b^2}{a}$  называется *фокальным параметром* эллипса.

### Свойства эллипса

1. Эллипс – ограниченная линия:  $|x| \leq a$  и  $|y| \leq b$ , что следует из записи канонического уравнения в форме

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

2. Эллипс  $L$  обладает осевой симметрией относительно осей  $Ox$  и  $Oy$ , а также центральной симметрией относительно начала координат. Это вытекает из отношений

$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{c} -x \\ y \end{array} \right\| \in L &\Leftrightarrow \left\| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\| \in L \Leftrightarrow \left\| \begin{array}{c} x \\ -y \end{array} \right\| \in L, \\ &\Updownarrow \\ \left\| \begin{array}{c} -x \\ -y \end{array} \right\| \in L, \end{aligned}$$

очевидных для канонического уравнения эллипса.

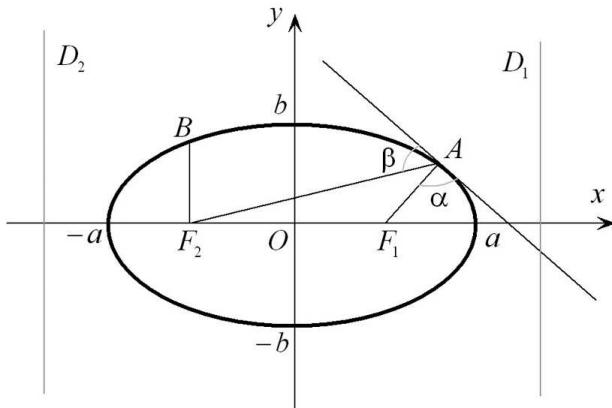


Рис. Прил. 1.2.1

Будем обозначать через  $\rho(P, Q)$  расстояние между геометрическими объектами  $P$  и  $Q$ , а через  $\alpha$  и  $\beta$  обозначим углы между касательной и фокальными радиусами – отрезками  $F_1A$  и  $F_2A$ .

Теорема Пусть  $A = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$  есть точка, принадлежащая эллипсу  $L$ , заданному каноническим уравнением, тогда Прил. 1.2.1.

имеют место следующие соотношения:

$$1) \quad r_1 = |\vec{F_1 A}| = a - \varepsilon x; \quad r_2 = |\vec{F_2 A}| = a + \varepsilon x;$$

$$2) \quad |\vec{F_1 A}| + |\vec{F_2 A}| = 2a;$$

$$3) \quad \frac{\rho(A, F_1)}{\rho(A, D_1)} = \frac{\rho(A, F_2)}{\rho(A, D_2)} = \varepsilon;$$

$$4) \quad \frac{\rho(M, F_1)}{\rho(M, D_1)} = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \forall M \in L;$$

$$5) \quad |\vec{F_2 B}| = p, \text{ где } \vec{F_2 B} \text{ ортогонален оси } Ox;$$

$$6) \quad \angle \alpha = \angle \beta.$$

Доказательство.

1°. Имеем (см. рис. Прил. 1.2.1)

$$r_1 = \sqrt{(x - a\varepsilon)^2 + y^2}; \quad r_2 = \sqrt{(x + a\varepsilon)^2 + y^2}.$$

Тогда, учитывая каноническое уравнение и определение эксцентриситета, получаем для  $i = 1, 2$ :

$$\begin{aligned} r_i &= \sqrt{(x \pm a\varepsilon)^2 + y^2} = \sqrt{(x \pm a\varepsilon)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)} = \\ &= \sqrt{(x \pm a\varepsilon)^2 + (1 - \varepsilon^2)(a^2 - x^2)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{x^2 \pm 2xa\varepsilon + a^2\varepsilon^2 + a^2 - a^2\varepsilon^2 - x^2 + x^2\varepsilon^2} = \\
 &= \sqrt{a^2 \pm 2xa\varepsilon + x^2\varepsilon^2} = |a \pm \varepsilon x|.
 \end{aligned}$$

Но поскольку  $|x| \leq a$  и  $0 \leq \varepsilon < 1$ , то  $a \pm \varepsilon x \geq 0$  и, следовательно,

$$r_1 = |\vec{F}_1 A| = a - \varepsilon x; r_2 = |\vec{F}_2 A| = a + \varepsilon x.$$

2°. Утверждение 2° очевидно в силу 1°.

3°. Далее

$$\frac{\rho(A, F_1)}{\rho(A, D_1)} = \frac{a - x\varepsilon}{\frac{a}{\varepsilon} - x} = \varepsilon; \quad \frac{\rho(A, F_2)}{\rho(A, D_2)} = \frac{a + x\varepsilon}{\frac{a}{\varepsilon} + x} = \varepsilon.$$

4°. Справедливость 4° докажите самостоятельно.

5°. Наконец,

$$|\vec{F}_2 B| = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - a^2\varepsilon^2} = \frac{b}{a} a \sqrt{1 - \varepsilon^2} = b \frac{b}{a} = p.$$

6°. Доказательство приводится после доказательства теоремы Прил. 1.2.2.

Теорема доказана.

### Проведение касательных к эллипсу

Теорема  
Прил. 1.2.2.

Пусть  $A = \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$  есть точка, принадлежащая эллипсу, заданному каноническим уравнением,

тогда уравнение касательной к этому эллипсу, проходящей через точку  $A$ , имеет вид

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1.$$

Доказательство.

Уравнение касательной в точке  $A$  имеет вид

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0).$$

Для эллипса из канонического уравнения получаем

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0,$$

то есть

$$y'(x_0) = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_0}{y_0}.$$

Но тогда  $y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$ , и, принимая во внимание, что

$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ , окончательно получим

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1.$$

Наконец, непосредственно проверяем утверждение теоремы для точек  $y_0 = 0$ , где уравнения касательных имеют вид  $x = \pm a$ .

Теорема доказана.

Доказательство свойства 6° теоремы Прил. 1.2.1.

Пусть касательная к эллипсу проведена через точку касания  $A$ ,

имеющую координаты  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ . Тогда расстояние  $d_2$  от фокуса

$F_2$  с координатами  $\begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}$  до касательной равно (см. задачу

3.2.1):

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{1}{\Delta} \left| \frac{x_0(-c)}{a^2} + \frac{y_0(0)}{b^2} - 1 \right| = \frac{1}{\Delta} \left| \frac{x_0 c}{a^2} + 1 \right| = \\ &= \frac{1}{\Delta a} |x_0 \epsilon + a| = \frac{r_2}{\Delta a}, \quad \text{где } \Delta = \sqrt{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}. \end{aligned}$$

Аналогично находим расстояние  $d_1$  от фокуса  $F_1$  с координатами  $\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$  до касательной:

$$d_1 = \frac{1}{\Delta} \left| \frac{x_0 c}{a^2} - 1 \right| = \frac{1}{\Delta a} |x_0 \epsilon - a| = \frac{r_1}{\Delta a}.$$

Поскольку углы  $\alpha$  и  $\beta$  острые, то из равенств

$$\sin \alpha = \frac{d_1}{r_1} = \frac{1}{\Delta a} \quad \text{и} \quad \sin \beta = \frac{d_2}{r_2} = \frac{1}{\Delta a}$$

следует  $\angle \alpha = \angle \beta$ .

Свойство 6° теоремы Прил. 1.2.1 доказано.

Из теорем Прил. 1.2.1 и Прил. 1.2.2 следует возможность альтернативных формулировок свойств эллипса.

*Фокальное свойство эллипса:* эллипс есть геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух фокусов постоянна и равна  $2a$ .

*Директоориальное свойство эллипса:* эллипс (исключая случай окружности) есть геометрическое место точек, отношение расстояния от которых до данной точки (фокуса) к расстоянию до данной прямой (директрисы) постоянно и меньше единицы.

*Оптическое свойство эллипса:* касательная в любой точке эллипса образует с фокальными радиусами точки касания равные острые углы. (Любой луч света, исходящий из одного фокуса, после отражения в эллипсе проходит через другой фокус.)

### Уравнение эллипса в полярной системе координат

Поместим полюс полярной системы координат в левый фокус эллипса, а полярную ось направим по линии, соединяющей его фокусы. Для произвольной точки  $A$ , лежащей на эллипсе (рис. Прил. 1.2.1.), имеем

$$\rho = r_2 = a + x\varepsilon = a + \varepsilon(\rho \cos \varphi - a\varepsilon) = a + \varepsilon\rho \cos \varphi - a\varepsilon^2.$$

Откуда

$$\begin{aligned}\rho(1 - \varepsilon \cos \varphi) &= \\ &= a(1 - \varepsilon^2)\end{aligned}$$

и окончательно

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}.$$

(Сравните эти формулы с выкладками в § 4.6.)

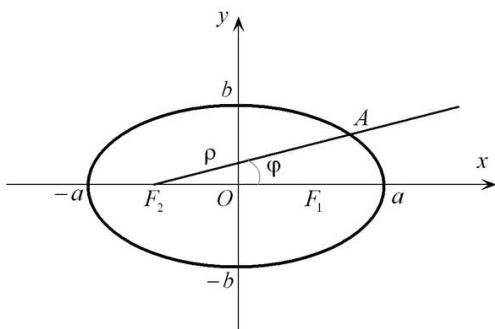


Рис. Прил. 1.2.2

### Приложение 1.3. Гипербола и ее свойства

**Определение Прил. 1.3.1.** Линия, уравнение которой в некоторой ортонормированной системе координат имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad a > 0, \quad b > 0,$$

называется *гиперболой*.

**Определение Прил. 1.3.2.** Число  $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$  называется *эксцентриситетом* гиперболы.

Точки  $\begin{pmatrix} \pm \varepsilon a \\ 0 \end{pmatrix}$  называются *фокусами* гиперболы.

Прямые  $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$  называются *директрисами* гиперболы.

Число  $p = \frac{b^2}{a}$  называется *фокальным параметром* гиперболы.

### Свойства гиперболы

1°. Гипербола – неограниченная кривая, существующая для  $|x| \geq a$ , что следует из записи канонического уравнения в форме  $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$ ;

2°. Гипербола  $L$  обладает осевой симметрией относительно осей  $Ox$  и  $Oy$ , а также центральной симметрией относительно начала координат. Это вытекает из отношений

$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{c} -x \\ y \end{array} \right\| \in L &\Leftrightarrow \left\| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\| \in L \Leftrightarrow \left\| \begin{array}{c} x \\ -y \end{array} \right\| \in L, \\ &\Updownarrow \\ \left\| \begin{array}{c} -x \\ -y \end{array} \right\| &\in L, \end{aligned}$$

очевидных для канонического уравнения гиперболы.

Через  $\alpha$  и  $\beta$  обозначим углы между касательной и фокальными радиусами (рис. Прил. 1.3.1).

**Определение** Прямая  $y = ux + v$  называется *асимптотой* для линии  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow \infty$ , если

$$u = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \text{ и } v = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ux).$$

3°. Гипербола обладает асимптотами вида  $y = \pm \frac{b}{a}x$ . Действительно,  $u = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{b}{ax} \sqrt{x^2 - a^2} = \pm \frac{b}{a}$  и, кроме того,

$$v = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \mp \frac{b}{a}x \right) = \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 - a^2} \mp x) =$$

$$= \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x^2 - a^2) - x^2}{\sqrt{x^2 - a^2} \pm x} = -ab \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2} \mp x} = 0.$$

Свойства гиперболы иллюстрирует рис. Прил. 1.3.1.

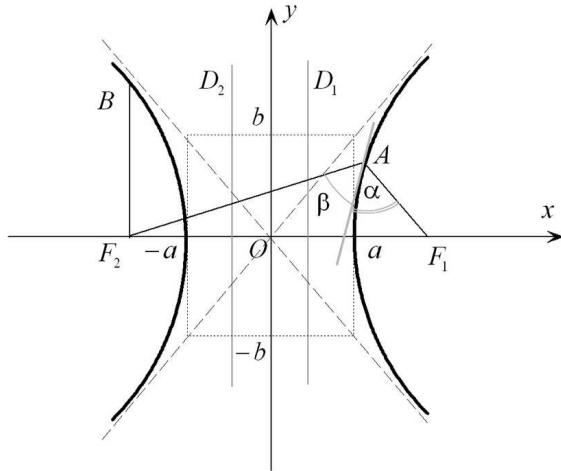


Рис. Прил. 1.3.1

Теорема  
Прил.1.3.1

Пусть  $A = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  есть точка, принадлежащая гиперболе  $L$ , заданной каноническим уравнением, тогда имеют место следующие соотношения:

**1°. Для правой ветви**

$$\vec{r}_1 = |\vec{F_1 A}| = -a + \varepsilon x ;$$

$$\vec{r}_2 = |\vec{F_2 A}| = a + \varepsilon x \quad (x > a) .$$

**Для левой ветви**

$$\vec{r}_1 = |\vec{F_1 A}| = a - \varepsilon x ;$$

$$\vec{r}_2 = |\vec{F_2 A}| = -a - \varepsilon x \quad (x < -a) ;$$

**2°.**  $|r_1 - r_2| = 2a ;$

$$3^\circ. \quad \frac{\rho(A, F_1)}{\rho(A, D_1)} = \frac{\rho(AF_2)}{\rho(AD_2)} = \varepsilon;$$

$$4^\circ. \quad \frac{\rho(M, F_1)}{\rho(M, D_1)} = \varepsilon \Rightarrow \forall M, M \in L;$$

$$5^\circ. \quad |\overset{\rightarrow}{F_2B}| = p;$$

$$6^\circ. \quad \angle\alpha = \angle\beta.$$

Доказательство.

1°. Доказательство аналогично доказательству теоремы Прил. 1.2.1, поэтому ограничимся здесь лишь нахождением величин

$$r_1 = \sqrt{(x - a\varepsilon)^2 + y^2}; \quad r_2 = \sqrt{(x + a\varepsilon)^2 + y^2},$$

используя каноническое уравнение и определение эксцентрикитета. Для  $i = 1, 2$  получаем

$$\begin{aligned} r_i &= \sqrt{(x \pm a\varepsilon)^2 + y^2} = \sqrt{(x \pm a\varepsilon)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)} = \\ &= \sqrt{(x \pm a\varepsilon)^2 + (1 - \varepsilon^2)(a^2 - x^2)} = \\ &= \sqrt{x^2 \pm 2xa\varepsilon + a^2\varepsilon^2 + a^2 - a^2\varepsilon^2 - x^2 + x^2\varepsilon^2} = \\ &= \sqrt{a^2 \pm 2xa\varepsilon + x^2\varepsilon^2} = |a \pm \varepsilon x|. \end{aligned}$$

Но поскольку для гиперболы  $|x| \geq a$  и  $\varepsilon > 1$ , то для правой ветви

$$r_1 = |\overset{\rightarrow}{F_1A}| = -a + \varepsilon x; \quad r_2 = |\overset{\rightarrow}{F_2A}| = a + \varepsilon x,$$

а для левой соответственно

$$r_1 = |\vec{F_1 A}| = a - \varepsilon x; \quad r_2 = |\vec{F_2 A}| = -a - \varepsilon x.$$

Откуда и следует  $2^\circ$  и  $3^\circ$ .

Справедливость  $4^\circ$  докажите самостоятельно.

$5^\circ$ . Наконец,

$$|\vec{F_2 B}| = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 \varepsilon^2 - a^2} = \frac{b}{a} a \sqrt{\varepsilon^2 - 1} = b \frac{b}{a} = p.$$

$6^\circ$ . Докажите это утверждение самостоятельно по аналогии с доказательством свойства  $6^\circ$  теоремы Прил. 1.2.1, используя также теорему Прил. 1.3.1.

Теорема доказана.

### Замечание о свойствах гиперболы

Каноническое уравнение изучаемой в курсе элементарной математики гиперболы  $y = \frac{a}{x}$  получается путем следующей замены координат:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} x' - \frac{1}{\sqrt{2}} y', \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y'. \end{cases}$$

Из теорем Прил. 1.3.1 и Прил. 1.2.2 следует возможность альтернативных формулировок свойств гиперболы.

*Фокальное свойство гиперболы:* гипербола есть геометрическое место точек, абсолютная величина разности расстояний от которых до двух фокусов постоянна и равна  $2a$ .

*Директоиальное свойство гиперболы:* гипербола есть геометрическое место точек, отношение расстояния от которых до данной точки (фокуса) к расстоянию до данной прямой (директрисы) постоянно и больше единицы.

*Оптическое свойство гиперболы:* касательная в любой точке гиперболы образует с фокальными радиусами точки касания равные углы. (Изображение точечного источника света, расположенного в одном из фокусов, есть мнимое и находится в другом фокусе гиперболы.)

### Проведение касательных к гиперболе

Теорема Прил. 1.3.2. Пусть  $A = \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$  есть точка, принадлежащая гиперболе, заданной каноническим уравнением, тогда уравнение касательной к этой гиперболе, проходящей через точку  $A$ , имеет вид

$$\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1.$$

#### Доказательство.

Уравнение касательной в точке  $A$  имеет вид

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0).$$

Для гиперболы из канонического уравнения получаем

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2yy'}{b^2} = 0,$$

то есть  $y'(x_0) = \frac{b^2}{a^2} \frac{x_0}{y_0}$ . Но тогда  $y - y_0 = \frac{b^2}{a^2} \frac{x_0}{y_0} (x - x_0)$ ,

и, принимая во внимание, что

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1, \text{ окончательно получим}$$

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Наконец, непосредственно проверяем утверждение теоремы для точек  $y_0 = 0$ , где уравнения касательных имеют вид  $x = \pm a$ .

Теорема доказана.

### Уравнение гиперболы в полярной системе координат

Поместим полюс полярной системы координат в правый фокус гиперболы, а полярную ось направим по положительной полусоси  $Ox$  (рис. Прил. 1.3.2).

Тогда для произвольной точки  $A$ , лежащей на правой ветви гиперболы,

$$\begin{aligned}\rho &= r_1 = -a + x\varepsilon = \\ &= -a + \varepsilon(\rho \cos \varphi + a\varepsilon) = \\ &= -a + \varepsilon\rho \cos \varphi + a\varepsilon^2.\end{aligned}$$

Откуда  $\rho(1 - \varepsilon \cos \varphi) = a(\varepsilon^2 - 1)$  и окончательно

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}.$$

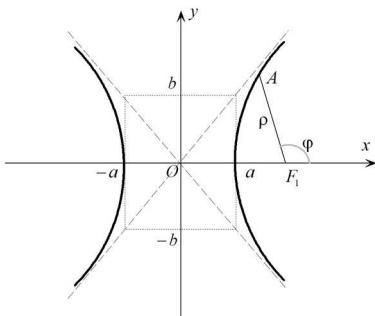


Рис. Прил. 1.3.2

(Сравните эти формулы с выкладками в § 4.6.)

## Приложение 1.4. Парабола и ее свойства

**Определение Прил. 1.4.1.** Линия, уравнение которой в некоторой ортонормированной системе координат имеет вид

$$y^2 = 2px; \quad p > 0,$$

называется *параболой*.

**Определение Прил. 1.4.2.** Точка  $\left\| \begin{array}{c} p \\ 2 \\ 0 \end{array} \right\|$  называется *фокусом параболы*.

Прямая  $x = -\frac{p}{2}$  называется *директрисой* параболы.

Число  $p$  называется *фокальным параметром* параболы.

Свойства параболы иллюстрирует рис. Прил. 1.4.1, на котором через  $\alpha$  обозначим угол между касательной и фокальным радиусом, а через  $\beta$  – угол между касательной и положительным направлением оси абсцисс.

### Свойства параболы

1°. Парабола – неограниченная кривая, существующая  $\forall x \geq 0$ ;

2°. Парабола  $L$  обладает осевой симметрией относительно оси  $Ox$ , что вытекает из отношения

$$\left\| \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right\| \in L \Leftrightarrow \left\| \begin{array}{c} x \\ -y \end{array} \right\| \in L,$$

очевидного для канонического уравнения параболы.

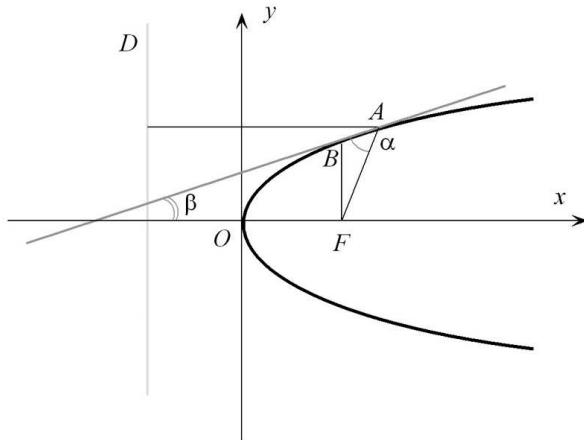


Рис. Прил. 1.4.1

3°. Для параболы имеет место монотонное возрастание абсолютной величины ординаты при возрастании абсциссы, причем в нуле касательная к параболе вертикальна.

Теорема  
Прил. 1.4.1.

Пусть  $A = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$  есть точка, принадлежащая па-

боле  $L$ , заданной каноническим уравнением, тогда имеют место следующие соотношения:

$$1^\circ. r = x + \frac{p}{2};$$

$$2^\circ. \frac{\rho(A, F)}{\rho(A, D)} = 1;$$

$$3^\circ. \frac{\rho(M, F)}{\rho(M, D)} = 1 \Rightarrow \forall M, M \in L;$$

$$4^\circ. |\vec{FB}| = p;$$

$$5^\circ. \angle \alpha = \angle \beta.$$

Доказательство.

1°. Имеем  $r = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}$ , используя каноническое уравнение, получаем

$$r = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px} = |x + \frac{p}{2}|,$$

но поскольку  $x \geq -\frac{p}{2}$ , приходим сразу к справедливости утверждений 1° и 2°.

Справедливость 3° докажите самостоятельно.

4°. Наконец,  $|\vec{FB}| = \sqrt{2p \frac{p}{2}} = p$ .

5°. Доказательство приводится после доказательства теоремы Прил. 1.4.2.

Теорема доказана.

### Замечания о свойствах параболы

Каноническое уравнение параболы вида  $y = ax^2$ , изучаемой в курсе элементарной математики, получается путем взаимного переименования координатных переменных.

Из теоремы Прил. 1.4.1 следует возможность альтернативных формулировок свойств параболы.

*Директрическое свойство параболы:* парабола есть геометрическое место точек, отношение расстояния от которых до данной точки (фокуса) к расстоянию до данной прямой (директрисы) постоянно и равно единице.

*Оптическое свойство параболы:* касательная в любой точке гиперболы образует равные углы с фокальным радиусом точки касания и положительным направлением оси абсцисс. (Каждый луч света, выходящий из фокуса параболы, после отражения от параболы распространяется параллельно ее оси.)

### Проведение касательных к параболе

Теорема Прил.1.4.2 Пусть  $A = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  есть точка, принадлежащая параболе, заданной каноническим уравнением, тогда уравнение касательной к этой параболе, проходящей через точку  $A$ , имеет вид

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

Доказательство.

Уравнение касательной в точке  $A$  имеет вид

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0).$$

Для параболы из канонического уравнения получаем

$$2yy' = 2p, \text{ то есть } y'(x_0) = \frac{p}{y_0}, \quad y_0 \neq 0.$$

Но тогда  $y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0)$ , и принимая во внимание,

что  $y_0^2 = 2px_0$ , окончательно получим

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

Наконец, непосредственно проверяем утверждение теоремы для точки  $y_0 = 0$ , где уравнение касательной  $x = 0$ .

Теорема доказана.

Доказательство свойства 5° теоремы Прил.1.4.1.

Направляющий вектор касательной к параболе в точке  $A$  есть

$\left\| \begin{matrix} y_0 \\ p \end{matrix} \right\|$ , а вектор фокального радиуса —  $\left\| \begin{matrix} x_0 - \frac{p}{2} \\ y_0 \end{matrix} \right\|$ . Поэтому

$$\cos \alpha = \frac{y_0(x_0 - \frac{p}{2}) + py_0}{\sqrt{y_0^2 + p^2} \sqrt{(x_0 - \frac{p}{2})^2 + y_0^2}} = \frac{y_0}{\sqrt{y_0^2 + p^2}}.$$

Но, с другой стороны, косинус угла  $\beta$  между векторами  $\left\| \begin{matrix} y_0 \\ p \end{matrix} \right\|$  и

$\left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\|$  выражается той же формулой. Поскольку углы  $\alpha$  и  $\beta$

острые, то они равны.

Теорема доказана.

### Уравнение параболы в полярной системе координат

Поместим полюс полярной системы координат в фокус параболы, а полярную ось направим по линии, перпендикулярной директрисе и проходящей через ее фокус (рис. Прил. 1.4.2). Для произвольной точки  $A$ , лежащей на параболе,

$$\rho = x + \frac{p}{2} =$$

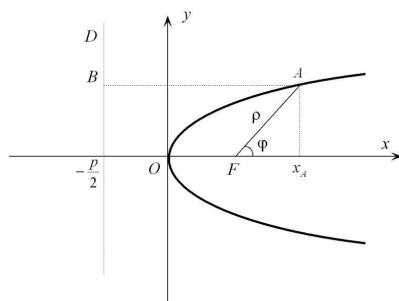


Рис. Прил.1.4.2

$$= \frac{p}{2} + \rho \cos \alpha + \frac{p}{2} = p + \rho \cos \phi.$$

Откуда  $\rho(1 - \cos \phi) = p$  и окончательно

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos \phi}.$$

(Сравните эти формулы с выкладками в § 4.6.)

## Приложение 2 СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В теореме 4.5.1 были перечислены конкретные типы поверхностей второго порядка, различие между которыми сохраняется при переходе из одной декартовой системы координат в другую. В данном приложении будут рассмотрены основные свойства поверхностей этих типов.

### Приложение 2.1. Вырожденные поверхности второго порядка

К вырожденным поверхностям второго порядка относятся типы, указанные в первой части таблицы формулировки теоремы 4.5.1.

В первых двух столбцах этой таблицы перечислены типы пустых множеств, а также объекты точечно-линейного типа, исследование которых полностью аналогично случаям, рассмотренным в приложении 1, в ортонормированной, канонической системе координат  $\overset{\rightarrow}{\{O, e_1, e_2, e_3\}}$ .

Первые три типа поверхностей, содержащиеся в третьей колонке таблицы, являются частными случаями цилиндрической поверхности, образующая которых параллельна прямой  $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$  а направляющими служат плоские кривые – эллипс, гипербола и парабола, соответственно расположенные в плоскости  $Oxy$ .

Описание свойств невырожденных поверхностей второго порядка будет также выполнено в ортонормированной системе координат

$$\{\overset{\rightarrow}{O}, \overset{\rightarrow}{e_1}, \overset{\rightarrow}{e_2}, \overset{\rightarrow}{e_3}\}.$$

В общем случае можно показать, что в сечении поверхности второго порядка плоскостью получается кривая второго порядка. Однако для описания основных свойств невырожденных поверхностей второго порядка достаточно рассмотреть сечения, параллельные координатным плоскостям.

## Приложение 2.2. Эллипсоид

**Определение** Поверхность, задаваемая в некоторой ортонормированной системе координат уравнением вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0,$$

называется *эллипсоидом*.

### Свойства эллипсоида

- 1°. Эллипсоид – ограниченная поверхность, поскольку из его канонического уравнения следует, что  $|x| \leq a$ ;  $|y| \leq b$ ;  $|z| \leq c$ .
- 2°. Эллипсоид обладает:
  - центральной симметрией относительно начала координат;
  - осевой симметрией относительно координатных осей;
  - плоскостной симметрией относительно координатных плоскостей.
- 3°. В сечении эллипса плоскостью, ортогональной любой из осей координат, получается эллипс. Например, рассматривая секущую

плоскость  $z = z_0$ , где  $|z_0| < c$ , получаем следующее уравнение линии сечения:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{(a\sqrt{1-\frac{z_0^2}{c^2}})^2} + \frac{y^2}{(b\sqrt{1-\frac{z_0^2}{c^2}})^2} = 1, \\ z = z_0, \end{cases}$$

являющейся эллипсом. (Рис. Прил. 2.2.1.)

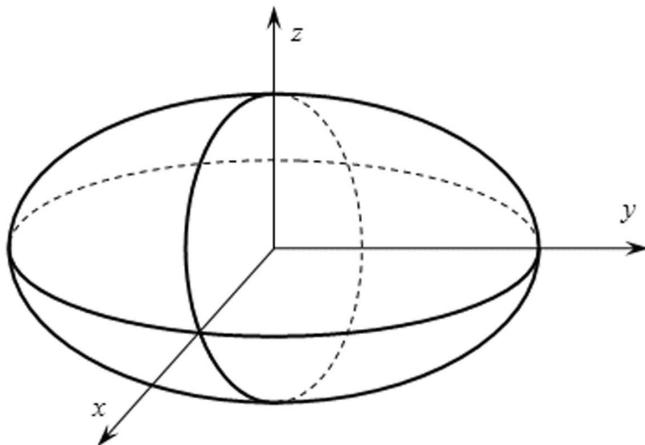


Рис. Прил. 2.2.1

### Приложение 2.3. Эллиптический параболоид

**Определение** Поверхность, задаваемая в некоторой ортонормированной системе координат уравнением вида

Прил. 2.3.1.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z, \quad a > 0, b > 0,$$

называется *эллиптическим параболоидом*.

### Свойства эллиптического параболоида

- 1°. Эллиптический параболоид – неограниченная поверхность, поскольку из его канонического уравнения следует, что  $z \geq 0$  и принимает сколь угодно большие значения.

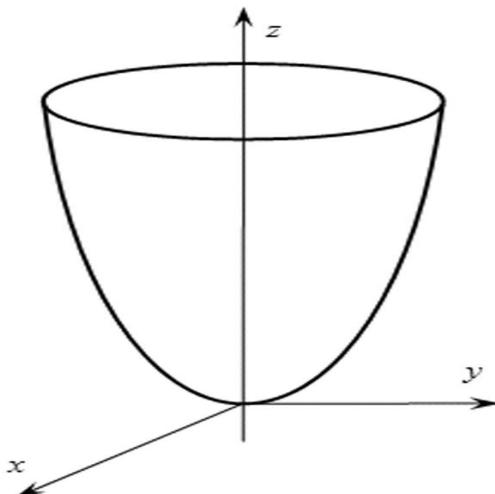


Рис. Прил. 2.3.1

- 2°. Эллиптический параболоид обладает

- осевой симметрией относительно оси  $Oz$ ;
- плоскостной симметрией относительно координатных плоскостей  $Oxz$  и  $Oyz$ .

3°. В сечении эллиптического параболоида плоскостью, ортогональной оси  $Oz$ , получается эллипс, а плоскостями, ортогональными осям  $Ox$  или  $Oy$  – парабола. Например, рассматривая секущую плоскость  $z = z_0 > 0$ , получаем следующее уравнение плоской линии:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{(a\sqrt{2z_0})^2} + \frac{y^2}{(b\sqrt{2z_0})^2} = 1, \\ z = z_0, \end{cases}$$

являющейся эллипсом. (Рис. Прил. 2.3.1.) С другой стороны, сечение плоскостью  $y = y_0$  приводит к уравнению линии

$$\begin{cases} x^2 = 2a^2 \left( z - \frac{y_0^2}{2b^2} \right), \\ y = y_0, \end{cases}$$

являющейся параболой. Для случая сечения плоскостью  $x = x_0$  уравнение сечения имеет аналогичный вид:

$$\begin{cases} y^2 = 2b^2 \left( z - \frac{x_0^2}{2a^2} \right), \\ x = x_0. \end{cases}$$

## Приложение 2.4. Гиперболический параболоид

**Определение** Поверхность, задаваемая в некоторой ортонормированной системе координат уравнением вида

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, \quad a > 0, b > 0,$$

называется *гиперболическим параболоидом*.

### Свойства гиперболического параболоида

1°. Гиперболический параболоид – неограниченная поверхность, поскольку из его канонического уравнения следует, что  $z$  – любое.

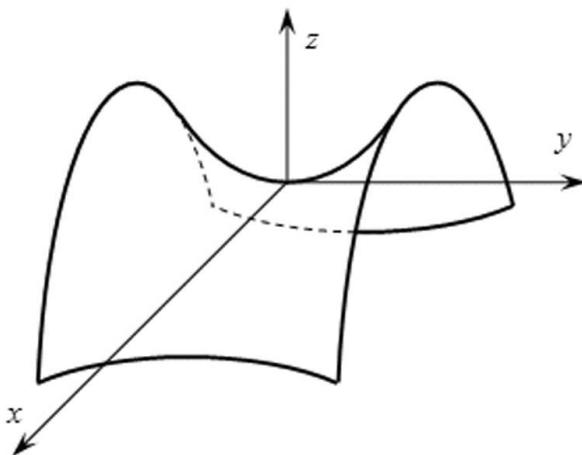


Рис. Прил. 2.4.1

2°. Гиперболический параболоид обладает

- осевой симметрией относительно оси  $Oz$ ;
- плоскостной симметрией относительно координатных плоскостей  $Oxz$  и  $Oyz$ .

3°. В сечении гиперболического параболоида плоскостью, ортогональной оси координат  $Oz$ , получается гипербола, а плоскостями, ортогональными осям  $Ox$  или  $Oy$ , – парабола. (Рис. Прил.2.4.1.)

Например, рассматривая секущую плоскость  $z = z_0 > 0$ , получаем следующее уравнение линии сечения:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{(a\sqrt{2z_0})^2} - \frac{y^2}{(b\sqrt{2z_0})^2} = 1, \\ z = z_0, \end{cases}$$

являющейся гиперболой. При  $z_0 < 0$  уравнение гиперболы будет иметь вид

$$\begin{cases} \frac{x^2}{(a\sqrt{-2z_0})^2} - \frac{y^2}{(b\sqrt{-2z_0})^2} = -1, \\ z = z_0. \end{cases}$$

С другой стороны, при сечении гиперболического параболоида плоскостью  $x = x_0$  получаем плоскую кривую:

$$\begin{cases} y^2 = -2b^2 \left( z - \frac{x_0^2}{2a^2} \right), \\ x = x_0 \end{cases}$$

являющуюся параболой.

Для случая сечения плоскостью  $y = y_0$  уравнение аналогично и имеет вид

$$\begin{cases} x^2 = 2a^2 \left( z + \frac{y_0^2}{2b^2} \right), \\ y = y_0. \end{cases}$$

Из полученных уравнений следует, что гиперболический параболоид может быть получен поступательным перемещением в пространстве параболы так, что ее вершина перемещается вдоль другой параболы, ось которой параллельна оси первой параболы, а ветви направлены противоположно, причем их плоскости взаимно перпендикулярны.

- 4°. Гиперболический параболоид имеет два семейства *прямолинейных образующих*.

Если записать уравнение данной поверхности в виде

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 2z,$$

то можно прийти к заключению, что при любых значениях параметра  $\alpha$  точки, лежащие на прямых

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2\alpha, \\ \alpha\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = z \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2\alpha, \\ \alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = z, \end{cases}$$

также принадлежат и гиперболическому параболоиду, поскольку почленное перемножение уравнений плоскостей, задающих эти прямые, дает уравнение гиперболического параболоида.

Заметим, что для каждой точки гиперболического параболоида, существует *пара прямых*, проходящих через эту точку и целиком лежащих на гиперболическом параболоиде. Уравнения этих прямых могут быть получены (с точностью до некоторого общего ненулевого множителя) путем подбора конкретных значений параметра  $\alpha$ .

## Приложение 2.5. Однополостный гиперболоид

**Определение** Поверхность, задаваемая в некоторой ортонормированной системе координат уравнением вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0,$$

называется *однополостным гиперболоидом*.

### Свойства однополостного гиперболоида

1°. Однополостный гиперболоид – неограниченная поверхность, поскольку из его канонического уравнения следует,

что  $z \in (-\infty, +\infty)$ .

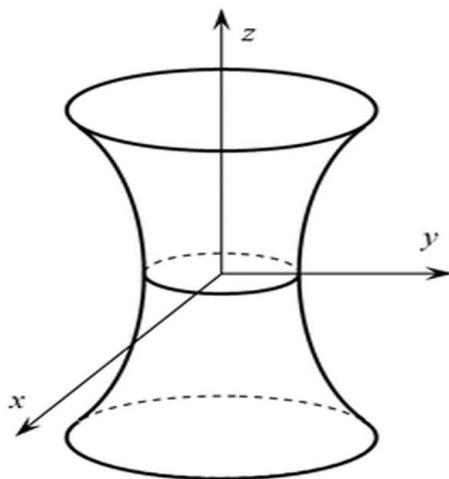


Рис. Прил. 2.5.1

2°. Однополостный гиперболоид обладает (рис. Прил. 2.5.1)

- центральной симметрией относительно начала координат;
- осевой симметрией относительно всех координатных осей;
- плоскостной симметрией относительно всех координатных плоскостей.

3°. В сечении однополостного гиперболоида плоскостью, ортогональной оси координат  $Oz$ , получается эллипс, а плоскостями, ортогональными осям  $Ox$  или  $Oy$  – гипербола. Вывод уравнений для линий сечения аналогичен рассмотренным ранее случаям.

4°. Однополостный гиперболоид имеет два семейства прямолинейных образующих. Записав уравнение данной поверхности в виде

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{y^2}{b^2},$$

можно прийти к заключению, что при любых не равных нулю одновременно  $\alpha$  и  $\beta$ , точки, лежащие на прямых

$$\begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \beta\left(1 - \frac{y}{b}\right), \\ \beta\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \alpha\left(1 + \frac{y}{b}\right) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \beta\left(1 + \frac{y}{b}\right), \\ \beta\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \alpha\left(1 - \frac{y}{b}\right), \end{cases}$$

будут принадлежать и однополостному гиперболоиду, поскольку почленное перемножение уравнений плоскостей, задающих эти прямые, дает уравнение однополостного гиперболоида. То есть для каждой точки однополостного гиперболоида существует *пара прямых*, проходящих через эту точку и целиком лежащих на однополостном гиперболоиде. Уравнения этих прямых могут быть получены путем подбора конкретных значений  $\alpha$  и  $\beta$ .

## Приложение 2.6. Двуполостный гиперболоид

**Определение** Поверхность, задаваемая в некоторой ортонормированной системе координат уравнением вида

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0,$$

называется *двуполостным гиперболоидом*.

### Свойства двуполостного гиперболоида

1°. Двуполостный гиперболоид – неограниченная поверхность, поскольку из его канонического уравнения следует, что  $|x| \geq a$  и не ограничен сверху.

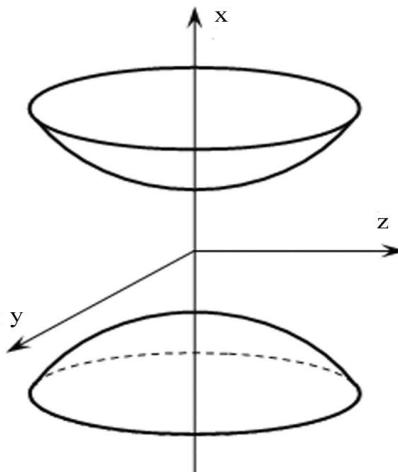


Рис. Прил. 2.6.1

2°. Двуполостный гиперболоид обладает

- центральной симметрией относительно начала координат;
- осевой симметрией относительно всех координатных осей;
- симметрией относительно всех координатных плоскостей.

3°. В сечении двуполостного гиперболоида плоскостью, ортогональной оси координат  $Ox$ , при  $|x| > a$  получается эллипс, а плоскостями, ортогональными осям  $Oy$  или  $Oz$ , – гипербола. (Рис. Прил. 2.6.1.)

## Приложение 2.7. Поверхности вращения

Пусть некоторая кривая, расположенная в плоскости  $Oxz$ , имеет уравнение  $F(x, z) = 0$ . Если вращать эту кривую вокруг оси  $Oz$ , то каждая ее точка будет описывать окружность.

**Определение** Совокупность точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0,$$

называется *поверхностью вращения*.

**Пример** К поверхностям вращения, например, относятся:  
Прил. 2.7.1.

1°. Эллипсоид вращения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

2°. Конус вращения  $k^2 z^2 = x^2 + y^2$ .

**Замечание:** поверхности вращения линии второго порядка не всегда задаются уравнениями второго порядка.

Например, если квадратную параболу  $z^2 = 2px$  вращать вокруг оси  $Ox$ , то получается эллиптический параболоид вращения, однако при вращении этой же кривой вокруг оси  $Oz$  получится поверхность, задаваемая уравнением вида

$$z^2 = \pm 2p\sqrt{x^2 + y^2} \text{ или } z^4 = 4p^2(x^2 + y^2).$$

**Задача** Составить уравнение поверхности вращения, получающейся при вращении линии  $z^2 = 2px$  вокруг оси  $Ox$ .  
Прил. 2.7.1.

**Решение.** Зафиксируем на вращаемой линии точку с координатами

$\begin{vmatrix} x_0 \\ 0 \\ z_0 \end{vmatrix}$ . Линия, получаемая при вращении этой точки вокруг оси  $Ox$  в плоскости  $x = x_0$ , есть окружность радиуса  $z_0$  с уравнением  $y^2 + z^2 = z_0^2$ .

круг оси  $Ox$  в плоскости  $x = x_0$ , есть окружность радиуса  $z_0$  с уравнением  $y^2 + z^2 = z_0^2$ .

С другой стороны,  $z_0^2 = 2px_0$ , поэтому

$$y^2 + z^2 = 2px_0.$$

Наконец, в силу произвольности точки  $\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ , выбранной

на линии вращения, получаем, что уравнение поверхности вращения – эллиптического параболоида – есть

$$y^2 + z^2 = 2px.$$

## Приложение 3

# КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Рассмотрим двумерное линейное пространство  $\Omega$ , изоморфное<sup>20</sup> линейному пространству радиусов-векторов на плоскости, с ортонормированной системой координат  $\{O, g_1, g_2\}$ .

Каждый элемент  $z$  пространства  $\Omega$  в некотором базисе однозначно задается двухкомпонентным столбцом  $\begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$ . Если базисные

элементы пространства  $\Omega$  суть  $g_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$  и  $g_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$ , то произ-

вольный элемент  $z = \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$  представляется в виде

$$z = \alpha \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \alpha g_1 + \beta g_2.$$

Введем новую операцию – операцию умножения элементов рассматриваемого линейного пространства.

**Определение** Результатом операции умножения элементов Прил. 3.1.

$$z_1 = \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad z_2 = \begin{vmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{vmatrix}$$

<sup>20</sup> Изоморфизм (см § 7.5) в данном случае означает, что операции сравнения, сложения и умножения на вещественное число выполняются в данном множестве так же, как и для векторов на плоскости.

пространства  $\Omega$  является элемент этого же пространства

$$z_1 z_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2 \\ \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 \end{vmatrix}.$$

**Определение**  
Прил. 3.2.

Двумерное линейное пространство  $\Omega$  с базисом

$$\left\{ g_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, g_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right\},$$

в котором введена операция умножения элементов согласно определению Прил. 3.1, называется множеством комплексных чисел, а каждый элемент  $z \in \Omega$  – комплексным числом.

**Замечания.** 1°. Операция умножения комплексных чисел коммутативна и обладает распределительным свойством относительно операции сложения, что следует непосредственно из ее определения.

2°. Операция умножения комплексных чисел позволяет ввести операцию *деления*: частным от деления комплексного числа  $z_1$  на ненулевое  $z_2$  называется комплексное число  $z^*$ , такое, что

$$z_1 = z_2 z^*.$$

3°. Нетрудно убедиться, что подмножество комплексных чисел вида  $\begin{vmatrix} \alpha \\ 0 \end{vmatrix}$ , где  $\alpha$  – произвольное вещественное число, в силу определения Прил. 3.2 обладает всеми свойствами вещественных чисел, и потому можно говорить, что вещественные числа есть подмножество комплексных чисел.

На практике более употребительна специальная, упрощенная форма записи комплексных чисел: в представлении

$$z = \alpha \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \alpha g_1 + \beta g_2$$

символ  $g_1$  опускается (заменяется не записываемым явно множителем “единица”), а символ  $g_2$  заменяется символом  $i$  (называемым иногда “мнимой единицей”). Тогда произвольное комплексное число  $z$  представимо как  $z = \alpha + \beta i$ , а записи операций с комплексными числами принимают следующий вид:

$$z_1 + z_2 = (\alpha_1 + \beta_1 i) + (\alpha_2 + \beta_2 i) = (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2) i ;$$

$$\lambda z = \lambda(\alpha + \beta i) = (\lambda\alpha) + (\lambda\beta)i ;$$

$$z_1 z_2 = (\alpha_1 + \beta_1 i)(\alpha_2 + \beta_2 i) = (\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2) + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) i .$$

Данная форма записи удобна тем, что с комплексными числами можно оперировать как с обычными алгебраическими двучленами, если принимать во внимание, что  $i^2 = -1$ , поскольку

$$i^2 = ii = (0 + 1i)(0 + 1i) = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix} = (-1) + 0i = -1 .$$

Тогда, перемножая комплексные числа как двучлены и заменяя повсюду  $i^2$  на число  $(-1)$ , мы формально приходим к соотношению

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (\alpha_1 + \beta_1 i)(\alpha_2 + \beta_2 i) = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \beta_2 i + \alpha_2 \beta_1 i + \beta_1 \beta_2 i^2 = \\ &= (\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2) + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) i , \end{aligned}$$

которое согласуется с введенным выше определением Прил. 3.1.

Достаточно просто может выполняться также и операция деления:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\alpha_1 + \beta_1 i}{\alpha_2 + \beta_2 i} = \frac{(\alpha_1 + \beta_1 i)(\alpha_2 - \beta_2 i)}{(\alpha_2 + \beta_2 i)(\alpha_2 - \beta_2 i)} = \\ &= \frac{(\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2) + (\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2)i}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} = \\ &= \frac{\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} + \frac{\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} i.\end{aligned}$$

**Определение** Для комплексного числа  $z = \alpha + \beta i$ :

Прил. 3.3.

1°. Вещественное число  $\alpha$  называется *вещественной частью*  $z$  и обозначается  $\operatorname{Re} z$ .

2°. Вещественное число  $\beta$  называется *мнимой частью*  $z$  и обозначается  $\operatorname{Im} z$ .

3°. Вещественное число  $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  называется *модулем*  $z$  и обозначается  $|z|$ .

4°. Вещественное число  $\Phi$ , такое, что

$$\cos \Phi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \text{ и}$$

$$\sin \Phi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},$$

называется *аргументом*  $z$  и обозначается  $\arg z$  при условии, что  $z \neq 0$ .

5°. Комплексное число  $\alpha - \beta i$  называется *комплексно-сопряженным* числу  $z$  и обозначается  $\bar{z}$ .

- Замечания:
- 1°. Определения, аналогичные пунктам 1°, 2° и 5°, могут быть сделаны и для матриц, элементами которых являются комплексные числа.
  - 2°. Поскольку существует взаимно однозначное соответствие множества радиусов-векторов на плоскости и множества комплексных чисел, то комплексные числа можно изображать точками на плоскости.

### Свойства комплексного сопряжения

Имеют место следующие, легко проверяемые свойства для любых  $z, z_1, z_2 \in \Omega$ :

$$1°. \quad \overline{(\bar{z})} = z.$$

2°. Число  $z$  будет вещественным тогда и только тогда, когда  $\bar{z} = z$ .

3°. Число  $z\bar{z} = \alpha^2 + \beta^2$  всегда вещественное и неотрицательное.

$$4°. \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2; \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2.$$

5°. Если  $P_n(z) = \sum_{k=0}^n \alpha_k z^k$  – многочлен с вещественными коэффициентами, имеющий корень  $\lambda$ , то этот многочлен также будет иметь и корень  $\bar{\lambda}$ .

Действительно, пусть  $\sum_{k=0}^n \alpha_k \lambda^k = 0$ , тогда

$$0 = \overline{0} = \overline{\sum_{k=0}^n \alpha_k \lambda^k} = \sum_{k=0}^n \alpha_k \overline{\lambda}^k.$$

**Замечание:** если алгебраическое уравнение с вещественными коэффициентами имеет комплексные корни, то они попарно сопряжены, а алгебраическое уравнение с вещественными коэффициентами нечетной степени имеет, по крайней мере, один вещественный корень.

**Задача**      *На множестве комплексных чисел решить уравнение*  
**Прил. 3.1.**

$$z^2 + 1 = 0.$$

**Решение.** Переписывая это уравнение, приняв, что

$$z = \alpha + \beta i = \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}, \text{ получаем } \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что здесь мы воспользовались развернутыми представлениями чисел

$$1 = 1 + 0i = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad 0 = 0 + 0i = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Выполнив умножение и сложение в правой части уравнения, приходим к равенству

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 - \beta^2 + 1 \\ 2\alpha\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Но поскольку два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда одновременно равны их вещественные и мнимые части, то мы получаем следующую систему нелинейных уравнений относительно вещественных неизвестных  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 + 1 = 0, \\ 2\alpha\beta = 0, \end{cases}$$

которая, как легко видеть, имеет два решения  $\begin{cases} \alpha = 0, \\ \beta = 1 \end{cases}$  и

$\begin{cases} \alpha = 0, \\ \beta = -1. \end{cases}$  Поэтому исходное уравнение также имеет два решения

$$z_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} = 0 + 1i = i \quad \text{и} \quad z_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \end{vmatrix} = 0 + (-1)i = -i.$$

### Тригонометрическая и экспоненциальная формы записи комплексных чисел

Используя определение Прил. 3.3, можно получить специальную форму записи ненулевых комплексных чисел, называемую *тригонометрической*:

$$\begin{aligned} z = \alpha + \beta i &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \left( \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} i \right) = \\ &= \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi). \end{aligned}$$

Тригонометрическая форма записи комплексных чисел аналогична описанию точки, изображающей комплексное число, в полярной системе координат.

Пусть направляющим элементом полярной оси служит элемент

$$g_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix},$$

а полюс совпадает с началом ортонормированной системы координат  $\{O, g_1, g_2\}$ .

Тогда

- значение модуля комплексного числа  $|z|$  равно  $\rho$  – расстоянию от начала координат до точки, изображающей данное число,
- значение аргумента  $\arg z$  совпадает с величиной полярного угла  $\Phi$ , отсчитываемого против часовой стрелки, поэтому, согласно определению Прил. 3.3, комплексное число  $z = \alpha + \beta i$  представимо в тригонометрической форме:

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

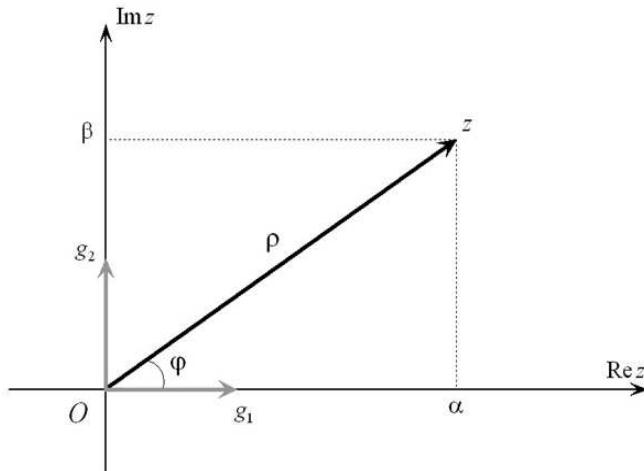


Рис. Прил.3.1

Другой часто используемой формой представления комплексных чисел является их *экспоненциальная форма*, которая получается преобразованием тригонометрической формы по *формуле Эйлера*:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad \forall z \in \Omega.$$

В этом случае из

$$z = \alpha + \beta i = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

следует, что  $z = \rho e^{i\varphi}$ .

Использование экспоненциальной формы записи комплексных чисел может упростить решение некоторых задач, поскольку при перемножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются<sup>21</sup>. Например,

$$z_1 z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

или, приняв во внимание, что

$$i = 0 + 1i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}},$$

получим

$$i^i = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^i = e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

**Задача**      *Найти какое-либо вещественное решение уравнения*  
**Прил. 3.2.**       $\cos \sqrt{x} = 5$ .

**Решение.** Из формулы Эйлера следует, что

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \forall z \in \Omega,$$

поэтому данное уравнение можно записать в виде

---

<sup>21</sup> Обоснование обобщения свойств экспоненциальной функции вещественного аргумента на комплексный случай приводится в курсе ТФКП.

$$\frac{e^{i\sqrt{x}} + e^{-i\sqrt{x}}}{2} = 5 \quad \text{или} \quad y + \frac{1}{y} - 10 = 0,$$

где  $y = e^{i\sqrt{x}}$ .

Откуда находим, что  $e^{i\sqrt{x}} = 5 \pm 2\sqrt{6}$ , то есть

$$i\sqrt{x} = \ln(5 \pm 2\sqrt{6}),$$

или окончательно  $x = -\ln^2(5 \pm 2\sqrt{6})$ .

## Приложение 4

# ЭЛЕМЕНТЫ ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

### Приложение 4.1. Замечания об определении объектов в линейном пространстве

В предыдущих разделах курса линейной алгебры исследовались наиболее часто встречающиеся в приложениях виды объектов в линейном пространстве, такие, как элемент линейного пространства, линейный функционал, линейный оператор, билинейный функционал и т.д., хотя вполне очевидно, что в линейном пространстве могут быть определены и иные, быть может, более сложные объекты, представляющие практический интерес.

Определение всех рассмотренных ранее объектов давалось вне зависимости от наличия или отсутствия базиса линейного пространства, причем в случае существования базиса для каждого из объектов приводился альтернативный, покомпонентный способ его описания. И поскольку замена базиса меняет, вообще говоря, данное описание, то специально исследовался вопрос о характере этого изменения.

Однако естественно допустить, что в линейном пространстве  $\Lambda^n$  существуют объекты, которые можно определить, используя лишь значения их компонентов в некотором базисе. Такой подход привлекателен тем, что, во-первых, в этом случае не требуется объяснять, что представляет собой данный объект безотносительно к базису, и, во-вторых, определения объектов разной природы могут быть выполнены единообразно.

С другой стороны, недостатком такой схемы является очевидная зависимость описания объекта от выбора базиса, то есть необходимость указывать (в самом определении объекта!), что происходит с его компонентами при переходе от одного базиса к другому.

Для оценки целесообразности использования определения объектов в  $\Lambda^n$  через их компоненты приведем в таблице Прил. 4.1.1 основные, рассмотренные нами ранее, типы объектов, формы их представления в базисе и правила изменения этого представления при переходе от базиса  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  к базису  $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$ .

Таблица Прил. 4.1.1

Тип объекта в $\Lambda^n$	Координатное представление в базисе $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$	Правило изменения координатного представления при переходе к базису $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$
Элемент $x$	Столбец $\ x\ _g = \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{vmatrix}$	$\ x\ _{g'} = \ S\ ^{-1} \ x\ _g$ или $\xi'_j = \sum_{i=1}^n \tau_{ji} \xi_i$
Линейный функционал $f(x)$	Строка $\ f\ _g = \begin{vmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \dots & \phi_n \end{vmatrix},$ где $\phi_i = f(g_i)$	$\ f\ _{g'} = \ f\ _g \ S\ $ или $\phi'_j = \sum_{i=1}^n \phi_i \sigma_{ij}$

<p>Линей- ный опе- ратор</p> $\hat{A}$	$\ \hat{A}\ _g =$ $= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix},$ <p style="text-align: center;">где</p> $\hat{A}g_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} g_i; \quad j = [1, n]$	$\ \hat{A}\ _{g'} =$ $= \ S\ ^{-1} \ \hat{A}\ _g \ S\ $ <p style="text-align: center;">или</p> $\alpha'_{ki} =$ $= \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n \tau_{kj} \sigma_{mi} \alpha_{jm}$
<p>Били- нейный функ- ционал</p> $B(x, y)$	$\ B\ _g =$ $= \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{vmatrix},$ <p style="text-align: center;">где</p> $\beta_{ij} = B(g_i, g_j); \quad i, j = [1, n]$	$\ B\ _{g'} =$ $= \ S\ ^T \ B\ _g \ S\ $ <p style="text-align: center;">или</p> $\beta'_{ki} =$ $= \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n \sigma_{jk} \sigma_{mi} \beta_{jm}$
<p>Квадра- тичный функ- ционал</p> $\Phi(x)$	$\ \Phi\ _g =$ $= \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \dots & \varphi_{nn} \end{vmatrix},$	$\ \Phi\ _{g'} =$ $= \ S\ ^T \ \Phi\ _g \ S\ $

	где $\varphi_{ij} = \frac{\beta_{ij} + \beta_{ji}}{2}; i, j = [1, n]$	или $\varphi'_{ki} =$ $= \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n \sigma_{jk} \sigma_{mi} \varphi_{jm}$
--	--	--

Как и ранее, будем предполагать, что матрица перехода  $\|S\|$  имеет компоненты  $\sigma_{ij}$ , где  $g'_j = \sum_{i=1}^n \sigma_{ij} g_i; j = [1, n]$ , а матрица обратного перехода  $\|T\| = \|S\|^{-1}$  имеет компоненты  $\tau_{ij}$ , то есть

$$g_j = \sum_{i=1}^n \tau_{ij} g'_i; j = [1, n].$$

Сопоставление формул третьей колонки таблицы позволяет заметить, что для данных объектов:

- 1° значения их компонентов в базисе  $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$  линейны по значениям компонентов в базисе  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ ;
- 2° коэффициентами в этих формулах служат либо компоненты матриц  $\|S\|$  или  $\|S\|^{-1}$ , либо и той и другой одновременно.

В курсе линейной алгебры нами были рассмотрены далеко не все виды объектов, которые обладают подобными трансформационными свойствами. Например, в  $\Lambda^n$  можно ввести *произведение элементов*  $x \otimes y$ , поставив в каждом базисе упорядоченной паре элементов

$$x = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n \end{bmatrix}^T \quad \text{и} \quad y = \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \dots & \eta_n \end{bmatrix}^T$$

в соответствие матрицу размера  $n \times n$ , имеющую вид

$$\begin{vmatrix} \xi_1 \eta_1 & \xi_1 \eta_2 & \dots & \xi_1 \eta_n \\ \xi_2 \eta_1 & \xi_2 \eta_2 & \dots & \xi_2 \eta_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_n \eta_1 & \xi_n \eta_2 & \dots & \xi_n \eta_n \end{vmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что объект  $x \otimes y$  при переходе от базиса  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  к базису  $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$  меняется в соответствии с правилами 1° и 2°. Действительно, из

$$\xi'_k = \sum_{i=1}^n \tau_{ki} \xi_i \quad \text{и} \quad \eta'_j = \sum_{m=1}^n \tau_{jm} \eta_m$$

следует, что  $\xi'_k \eta'_j = \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^n \tau_{ki} \tau_{jm} \xi_i \eta_m$ , или же, в матричном виде,

$$\|x \otimes y\|_{g'} = (\|S\|^{-1})^T \|x \otimes y\|_g \|S\|^{-1}.$$

Последнее равенство означает, что введенное нами произведение элементов обладает свойствами 1° и 2°.

Рассмотрим другой пример, демонстрирующий существование более сложных объектов, обладающих данными свойствами. Достаточно часто в физических приложениях используется метод, в котором линейный оператор описывает зависимость одного вектора, характеризующего некоторое свойство точки пространства, от другого вектора, являющегося другой физической характеристикой этой же точки.

Например, закон Гука связывает вектор силы  $\vec{F}$ , возникающей в результате упругой деформации, с вектором деформации  $\vec{\Delta r}$  соотношением

$$\begin{vmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \kappa_{xx} & \kappa_{xy} & \kappa_{xz} \\ \kappa_{yx} & \kappa_{yy} & \kappa_{yz} \\ \kappa_{zx} & \kappa_{zy} & \kappa_{zz} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{vmatrix},$$

или же индукция электрического поля  $\vec{D}$  выражается через напряженность электрического поля  $\vec{E}$  формулой

$$\begin{vmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \theta_{xx} & \theta_{xy} & \theta_{xz} \\ \theta_{yx} & \theta_{yy} & \theta_{yz} \\ \theta_{zx} & \theta_{zy} & \theta_{zz} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{vmatrix}.$$

Если среда однородная, то коэффициенты матриц этих операторов константы. Однако если исследуемые свойства среды меняются от точки к точке, то соответствующие операторы уже не будут линейными, и может возникнуть вопрос о характере их зависимости от координат.

В этом случае можно ввести в рассмотрение объект, компоненты которого являются частными производными компонентов матрицы оператора по переменным  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Для рассматриваемых примеров таких частных производных будет 27, и их удобно представить в виде трехмерной таблицы (или, как иногда говорят, “куб-матрицы”).

Например, для закона Гука этот объект состоит из трех матриц вида

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \kappa_{xx}}{\partial x} & \frac{\partial \kappa_{xy}}{\partial x} & \frac{\partial \kappa_{xz}}{\partial x} \\ \frac{\partial \kappa_{yx}}{\partial x} & \frac{\partial \kappa_{yy}}{\partial x} & \frac{\partial \kappa_{yz}}{\partial x} \\ \frac{\partial \kappa_{zx}}{\partial x} & \frac{\partial \kappa_{zy}}{\partial x} & \frac{\partial \kappa_{zz}}{\partial x} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial \kappa_{xx}}{\partial y} & \frac{\partial \kappa_{xy}}{\partial y} & \frac{\partial \kappa_{xz}}{\partial y} \\ \frac{\partial \kappa_{yx}}{\partial y} & \frac{\partial \kappa_{yy}}{\partial y} & \frac{\partial \kappa_{yz}}{\partial y} \\ \frac{\partial \kappa_{zx}}{\partial y} & \frac{\partial \kappa_{zy}}{\partial y} & \frac{\partial \kappa_{zz}}{\partial y} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial \kappa_{xx}}{\partial z} & \frac{\partial \kappa_{xy}}{\partial z} & \frac{\partial \kappa_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \kappa_{yx}}{\partial z} & \frac{\partial \kappa_{yy}}{\partial z} & \frac{\partial \kappa_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \kappa_{zx}}{\partial z} & \frac{\partial \kappa_{zy}}{\partial z} & \frac{\partial \kappa_{zz}}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

В общем случае  $n$ -мерного линейного пространства можно ввести объект, называемый *производной оператора*, обозначаемый

$$\left\| \frac{\partial \hat{A}}{\partial \vec{r}} \right\|_g$$

и задаваемый в конкретном базисе упорядоченным набором из  $n^n$  чисел.

Найдем закон преобразования компонентов этого объекта при переходе от базиса  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  к базису  $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$ . Поскольку правило изменения компонентов матрицы оператора  $\hat{A}$  в  $\Lambda^n$  имеет вид

$$\|\hat{A}\|_{g'} = \|S\|^{-1} \|\hat{A}\|_g \|S\| \quad (\text{или } \alpha'_{ki} = \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n \tau_{kj} \sigma_{mi} \alpha_{jm}),$$

то из правила дифференцирования сложной функции следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha'_{ki}}{\partial \xi'_l} &= \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n \tau_{kj} \sigma_{mi} \frac{\partial \alpha_{jm}}{\partial \xi'_l} = \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n \tau_{kj} \sigma_{mi} \sum_{p=1}^n \frac{\partial \alpha_{jm}}{\partial \xi_p} \frac{\partial \xi_p}{\partial \xi'_l} = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n \sum_{p=1}^n \tau_{kj} \sigma_{im}^T \frac{\partial \alpha_{jm}}{\partial \xi_p} \sigma_{pl}, \end{aligned}$$

или, в матричной форме,

$$\left\| \frac{\partial \hat{A}}{\partial \vec{r}} \right\|_{g'} = \|S\|^{-1} \|S\|^T \left\| \frac{\partial \hat{A}}{\partial \vec{r}} \right\|_g \|S\|.$$

Откуда делаем заключение, что введенный нами новый объект также обладает свойствами 1° и 2°.

С другой стороны, отметим, что не всякий однозначно определяемый своими компонентами объект будет обладать подобными трансформационными свойствами.

Например, рассмотрим однокомпонентный объект  $\omega$ , значение

$$\text{которого для каждого элемента } x = \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{vmatrix} \text{ пространства } \Lambda^n \text{ есть}$$

сумма компонентов  $x$ . Для него в базисе  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  имеем

$$\omega = \sum_{i=1}^n \xi_i ,$$

и, хотя значение  $\omega'$  и определяется однозначно в базисе  $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$ , оно не выражается линейно через  $\omega$ , так как

$$\omega' = \sum_{i=1}^n \xi'_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tau_{ij} \xi_j .$$

Таким образом, мы приходим к заключению, что в конечномерном линейном пространстве существует достаточно широкий класс объектов:

- задаваемых совокупностью значений своих компонентов в некотором базисе;
- обладающих свойствами вида  $1^\circ$  и  $2^\circ$ , характеризующими изменения этих компонентов при переходе от одного базиса к другому.

Объекты, обладающие перечисленными свойствами, называют *тензорами*, уточняя это название, в случае присутствия матриц  $\|S\|$  или  $\|S\|^T$  в формулах пересчета компонентов тензора при замене базиса, термином *ковариантный* (то есть *преобразующийся так же, как и базисные элементы*) или же в случае присутствия матриц  $\|S\|^{-1}$  или  $(\|S\|^{-1})^T$  – термином *контравариантный*.

## Приложение 4.2. Определение и обозначение тензоров

Определение тензора, исходя из вышеизложенных соображений, можно было бы дать, например, в такой форме:

Будем говорить, что в вещественном линейном пространстве  $\Lambda^n$  определен тензор *типа*  $(q, p)$   $q$  раз контравариантный и  $p$  раз ковариантный (или  $(p+q)$ -валентный), если в  $\Lambda^n$  задан объект, который в каждом базисе характеризуется упорядоченным набором  $n^{p+q}$  чисел  $\xi'_{j_1 j_2 \dots j_q i_1 i_2 \dots i_p}$  (где  $j_m = [1, n]$ ;  $m = [1, q]$  – контравариантные индексы и  $i_k = [1, n]$ ;  $k = [1, p]$  – ковариантные), преобразующихся при переходе от базиса  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  к базису  $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$  по закону

$$\xi'_{j'_1 j'_2 \dots j'_q i'_1 i'_2 \dots i'_p} = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_p=1}^n \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \dots \sum_{j_q=1}^n \sigma_{i_1 i'_1} \sigma_{i_2 i'_2} \dots \sigma_{i_p i'_p} \times$$

$$\times \tau_{j'_1 j_1} \tau_{j'_2 j_2} \dots \tau_{j'_q j_q} \xi_{j_1 j_2 \dots j_q i_1 i_2 \dots i_p},$$

где  $i'_k = [1, n]$ ;  $k = [1, p]$  и  $j'_k = [1, p]$ ;  $k = [1, m]$ , а  $\sigma_{ij}$  и  $\tau_{ij}$  суть соответственно компоненты матрицы перехода  $\|S\|$  и ее обратной  $\|T\| = \|S\|^{-1}$ .

Громоздкость записи и неудобочитаемость тензоров при использовании стандартной схемы обозначений очевидны уже на примере этого определения. Поэтому в тензорном исчислении используется специальная, более компактная форма описания тензорных объектов и операций с ними, основу которой составляют следующие правила.

## Запись тензоров

1°. Упорядоченный набор вещественных чисел, являющихся компонентами тензора, образует  $(q + p)$ -мерную таблицу (называемую также  $(q + p)$ -мерной матрицей, или  $(q + p)$ -мерным массивом), каждый элемент которой однозначно определен набором значений контравариантных индексов  $j_1, j_2, \dots, j_q$  и ковариантных индексов  $i_1, i_2, \dots, i_p$ .

Если какой-либо из индексов принимает значения от 1 до  $n$ , то в записи тензора *перечень значений индекса не указывается* и предполагается, что выписаны компоненты тензора для всех этих значений.

**Пример** Запись  $\xi_i = \eta_i$  означает, что

**Прил. 4.2.1.**  $\xi_i = \eta_i \quad \forall i = [1, n].$

2°. *Порядок следования индексов в записи тензоров существен.* Для того чтобы избежать возможной неоднозначности, применяется следующее правило: если необходимо выписать последовательно все компоненты тензора (например, в виде одной строки), то в первую очередь увеличиваются индексы, расположенные ближе к правому концу индексного списка.

**Пример** Тензор  $\xi_{ijk}$  в  $\Lambda^2$  имеет следующий порядок компонентов:  $\xi_{111}, \xi_{112}, \xi_{121}, \xi_{122}, \xi_{211}, \xi_{212}, \xi_{221}, \xi_{222}.$

3°. В тензорных записях для отличия контравариантных индексов от ковариантных принято первые обозначать *верхними индексами*, а вторые – *нижними*. При этом, чтобы сохранить общий порядок следования индексов в списке, в запись каждого индекса добавляется символ “точка” под каждым верхним индексом и над каждым нижним.

Пример       $\xi_{i..lm}^{.jk..}$   
 Прил. 4.2.3.

4°. Если точки не использованы в записи тензора, то предполагается, что нижние индексы следуют в списке после верхних.

Пример      Линейный оператор  $\hat{S}$ , переводящий базис  
 Прил. 4.2.4.

$$\{g_1, g_2, \dots, g_n\} \text{ в } \{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\},$$

является двухвалентным тензором типа  $(1,1)$   $\sigma_i^j$  (один раз контравариантным и один раз ковариантным), причем его компоненты совпадают с компонентами матрицы перехода  $\sigma_{ji}$  как следствие совпадения определения 7.3.2 и определения матрицы линейного оператора 8.3.1.

### Соглашение о суммировании

Пусть имеется выражение, являющееся произведением сомножителей, имеющих как верхние, так и нижние индексы, причем некоторый индекс встречается в записи выражения дважды: один раз как верхний, а второй раз как нижний. Тогда под таким выражением понимается *сумма членов данного вида, выписанных для всех значений повторяющегося индекса*.

В случае присутствия в выражении нескольких пар совпадающих индексов имеет место многократное суммирование.

Пример      1°. Квадратичный функционал записывается теперь  
 Прил. 4.2.5.      в виде  $\Phi(x) = \varphi_{ij} \xi^i \xi^j$ .

## 2°. Система линейных уравнений вида

$$\begin{cases} \alpha_1^1\xi^1 + \alpha_2^1\xi^2 + \dots + \alpha_n^1\xi^n = \beta^1 \\ \alpha_1^2\xi^1 + \alpha_2^2\xi^2 + \dots + \alpha_n^2\xi^n = \beta^2 \\ \dots \\ \alpha_1^n\xi^1 + \alpha_2^n\xi^2 + \dots + \alpha_n^n\xi^n = \beta^n \end{cases}$$

с учетом соглашений о тензорных обозначениях записывается просто как  $\alpha_i^k \xi^i = \beta^k$ .

Используя соглашения о тензорных обозначениях и принимая во внимание, что числа  $\sigma_{ij}$  и  $\tau_{ij}$  (компоненты матриц прямого и обратного перехода между базисами  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  и  $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$ ) являются также компонентами тензоров типа (1,1), сформулируем

Определение  
Прил. 4.2.1. Будем говорить, что в вещественном линейном пространстве  $\Lambda^n$  определен тензор типа  $(q, p)$ ,  $q$  раз контравариантный и  $p$  раз ковариантный, если в  $\Lambda^n$  задан объект, который в каждом базисе характеризуется упорядоченным набором  $n^{p+q}$  чисел  $\xi_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$  (где  $j_m; m = [1, q]$  – контравариантные индексы и  $i_k; k = [1, p]$  – ковариантные), изменяющимся при переходе от базиса  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  к базису  $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$  по закону

$$\xi'_{i_1'i_2'\dots i_p'} j'_1j'_2\dots j'_q = \sigma_{i_1'}^{i_1}\sigma_{i_2'}^{i_2}\dots\sigma_{i_p'}^{i_p} \tau_{j_1'}^{j'_1}\tau_{j_2'}^{j'_2}\dots\tau_{j_q'}^{j'_q} \xi_{i_1i_2\dots i_p} j_1j_2\dots j_q.$$

**Определение Прил. 4.2.2.** Число  $(q + p)$  называется *валентностью* (или *рангом*) тензора  $\zeta_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$ .

**Определение Прил. 4.2.3.** Два тензора называются *равными*, если они одного и того же типа и во всех базисах имеют равные компоненты.

- Замечания.**
- 1°. Для равенства тензоров одного типа достаточно, чтобы их компоненты были равны лишь в некотором базисе, так как из формул пересчета компонентов следует, что эти тензоры будут иметь равные компоненты и в любом другом базисе.
  - 2°. Если объект характеризуется одним числом, причем не зависящим от выбора базиса, то его можно считать тензором типа (0,0).

Таблица Прил. 4.2.1

Тип объекта в $\Lambda^n$	Тип тензора и его запись в базисе $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$	Изменение компонент тензора при переходе к базису $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$
Элемент $x$	Одновалентный (один раз контравариантный) тензор типа (1,0) $\xi^j$	$\xi'^j = \tau_i^j \xi^i$
Линейный функционал $f(x)$	Одновалентный (один раз ковариантный) тензор типа (0,1) $\phi_j$	$\phi'_j = \phi_i \sigma_j^i$

Линейный оператор $\hat{A}$	Двухвалентный (один раз контравариантный и один раз ковариантный) тензор типа (1,1) $\alpha_i^j$	$\alpha_k'^m = \tau_j^m \sigma_k^i \alpha_i^j$
Билинейный функционал $B(x, y)$	Двухвалентный (дважды ковариантный) тензор типа (0,2) $\beta_{ji}$	$\beta'_{km} = \sigma_k^j \sigma_m^i \beta_{ji}$
Квадратичный функционал $\Phi(x)$	Двухвалентный (дважды ковариантный) тензор типа (0,2) $\Phi_{ji}$	$\phi'_{km} = \sigma_k^j \sigma_m^i \Phi_{ji}$
Символ Кронекера $\delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$	Двухвалентный (один раз контравариантный и один раз ковариантный) тензор типа (1,1) $\delta_i^j$	$\delta_k'^m = \tau_j^m \sigma_k^i \delta_i^j$

Таблица Прил. 4.2.1 содержит описание основных тензорных объектов и правил пересчета их компонентов при замене базиса.

Отметим, что последний из приведенных в таблице Прил. 4.2.1 тензоров – символ Кронекера – во всех базисах имеет компоненты, совпадающие с компонентами единичной матрицы, если считать, что верхний индекс этого тензора есть номер строки, а нижний – столбца. Действительно, по определению Прил. 4.2.1 справедливы соотношения

$$\delta_k'^m = \tau_j^m \sigma_k^i \delta_i^j = \tau_j^m \sigma_k^j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Последнее равенство, очевидно, имеет место, поскольку выражение  $\tau_j^m \sigma_k^j$  есть результат произведения двух невырожденных, взаимно обратных матриц, компоненты которых совпадают с компонентами тензоров  $\tau_j^m$  и  $\sigma_k^j$ .

### Замечания о матричной записи тензоров

В ряде случаев тензоры удобно представлять в виде *блочных матриц*, то есть матриц, элементами которых являются обычные матрицы с числовыми элементами. При этом примем следующие соглашения:

- 1°. Тензор типа  $(1, 0)$  записывается матрицей-столбцом. Тензор типа  $(0, 1)$  записывается матрицей-строкой.
- 2°. Элементы матриц, используемых для записи тензоров, нумеруются нижними индексами, порядок следования индексов определен выше, в правиле 2° "Запись тензоров". Обратите внимание, что при этом запись тензоров валентности большей, чем 1, не будет отражать тип тензора.
- 3°. Первый индекс определяет номер строки в числовой матрице, второй индекс – номер столбца. Третий индекс определяет номер строки в блочной матрице, состоящей из числовых матриц, четвертый индекс соответственно – номер столбца в блочной матрице.

Приведем для иллюстрации общий вид матричной записи тензора четвертой валентности в двумерном пространстве:

$$\left( \begin{array}{cc|cc} \alpha_{1111} & \alpha_{1211} & \alpha_{1112} & \alpha_{1212} \\ \alpha_{2111} & \alpha_{2211} & \alpha_{2112} & \alpha_{2212} \\ \hline \alpha_{1121} & \alpha_{1221} & \alpha_{1122} & \alpha_{1222} \\ \alpha_{2121} & \alpha_{2221} & \alpha_{2122} & \alpha_{2222} \end{array} \right).$$

**Задача** Прил. 4.2.1. Каждой паре элементов  $x$  и  $y$  линейного пространства  $\Lambda^4$  сопоставляется число  $f(x, y)$ , определяемое через компоненты этих элементов

$$\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4 \text{ и } \eta^1, \eta^2, \eta^3, \eta^4$$

в стандартном базисе  $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$  по формуле

$$f(x, y) = \xi^1 \eta^3 + 3 \xi^2 \eta^4.$$

Показать, что данное сопоставление определяет тензор, найти его тип, выписать его компоненты в данном базисе.

**Решение.** 1°. Очевидно, что данное сопоставление линейно по каждому из аргументов. Найдем закон изменения его компонентов при замене базиса. Пусть

$$g'_i = \sum_{k=1}^4 \sigma_i^k g_k$$

при переходе от базиса  $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$  к базису  $\{g'_1, g'_2, g'_3, g'_4\}$ . Тогда в силу линейности сопоставления

$$\begin{aligned} f(g'_i, g'_j) &= f\left(\sum_{k=1}^4 \sigma_i^k g_k, \sum_{l=1}^4 \sigma_j^l g_l\right) = \\ &= \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 \sigma_i^k \sigma_j^l f(g_k, g_l). \end{aligned}$$

Поскольку компоненты исследуемого объекта в новом базисе выражаются линейно через компоненты в старом, а коэффициентами служат попарные произведения элементов матрицы перехода  $\|S\|$ , то по определению Прил. 4.2.1 этот объект является тензором типа  $(0, 2)$ .

2°. Найдем компоненты этого тензора  $f(g_k, g_l)$  в исходном базисе

$$\|g_1\|_g = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}; \|g_2\|_g = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}; \|g_3\|_g = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}; \|g_4\|_g = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

По условию задачи

$$f(g_1, g_3) = 1; f(g_2, g_4) = 3 \text{ и } f(g_k, g_l) = 0$$

в остальных случаях. Таким образом, искомая матрица тензора имеет вид

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

### Приложение 4.3. Операции с тензорами

Вводимые ниже операции с тензорами во всех случаях требуют обоснования того, что результатом каждой из них является также тензор. В рамках данного курса эти утверждения предлагаются в качестве упражнений.

#### Сложение тензоров

**Определение** Пусть даны два тензора типа  $(q, p)$   $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$  и  
Прил. 4.3.1.  $\beta_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$ . Тензор типа  $(q, p)$   $\gamma_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$  называется

суммой тензоров  $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$  и  $\beta_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$ , если в каждом базисе имеет место равенство

$$\gamma_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} = \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} + \beta_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}.$$

**Пример Прил. 4.3.1.** Сумма двух линейных операторов  $\alpha_i^j$  и  $\beta_i^j$ , являющихся тензором типа (1,1), есть также линейный оператор и, следовательно, тензор типа (1,1)  $\gamma_i^j$ , для компонентов которого справедливы соотношения

$$\gamma_i^j = \alpha_i^j + \beta_i^j.$$

### Умножение тензоров на число

**Определение Прил.4.3.2.** Пусть дан тензор типа  $(q, p)$   $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$  и число  $\lambda$ .

Тензор типа  $(q, p)$   $\gamma_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$  называется *произведением* тензора  $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$  на  $\lambda$ , если в каждом базисе имеет место равенство

$$\gamma_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} = \lambda \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}.$$

**Замечание:** нетрудно показать, что множество тензоров типа  $(q, p)$  с операциями сложения и умножения на число является линейным пространством размерности  $n^{q+p}$ .

### Тензорное произведение

**Определение Прил. 4.3.3.** Пусть даны два тензора типа  $(q, p)$   $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$  и типа

$(r,s) \quad \beta_{l_1 l_2 \dots l_s}^{k_1 k_2 \dots k_r}$ . Тензор типа  $(q+r, p+s)$

$\gamma_{i_1 i_2 \dots i_p l_1 l_2 \dots l_s}^{j_1 j_2 \dots j_q k_1 k_2 \dots k_r}$  называется *произведением* тензоров

$\alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$  и  $\beta_{l_1 l_2 \dots l_s}^{k_1 k_2 \dots k_r}$ , если в каждом базисе имеет место равенство

$$\gamma_{i_1 i_2 \dots i_p l_1 l_2 \dots l_s}^{j_1 j_2 \dots j_q k_1 k_2 \dots k_r} = \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} \beta_{l_1 l_2 \dots l_s}^{k_1 k_2 \dots k_r}.$$

Иногда тензорное произведение обозначают символом  $\otimes$ .

Пример  
Прил. 4.3.2.

Мы видели, что элементы линейного пространства  $\Lambda^n$  являются один раз контравариантными тензорами. Найдем их произведение по определению Прил. 4.3.3. Получаем, что  $x \otimes y = \xi^k \eta^i$  есть дважды контравариантный тензор.

Заметим,  $x \otimes y \neq y \otimes x$ . Дело в том, что хотя и  $\xi^k \eta^i = \eta^i \xi^k$ , но *упорядочивание* компонентов этих тензоров выполняется по-разному. Следовательно, тензорное произведение некоммутативно.

Задача  
Прил. 4.3.1.

Определить тип и матрицу тензора  $c = a \otimes b$ , если

и

$a$  – тензор типа  $(0,3)$  с матрицей

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline & 3 & 4 \\ & 5 & 6 \\ \hline & 7 & 8 \end{array} \quad u \quad b \quad -$$

тензор типа  $(0,1)$  с матрицей  $\begin{array}{c|cc} & 9 & 10 \end{array}$ .

**Решение.** По определению тензорного произведения  $c$  есть тензор типа  $(0,4)$  с матрицей, составленной (с учетом соглашения о порядке индексов) из поэлементных произведений вида  $\alpha_{ijk}\beta_l$ , где  $\alpha_{ijk}$  и  $\beta_l$  – компоненты тензоров  $a$  и  $b$  соответственно.

Таким образом, матрица тензора  $c$  имеет вид

$$\left\| \begin{array}{cc} 1 \cdot 9 & 2 \cdot 9 \\ 3 \cdot 9 & 4 \cdot 9 \\ \hline 5 \cdot 9 & 6 \cdot 9 \\ 7 \cdot 9 & 8 \cdot 9 \end{array} \middle| \begin{array}{cc} 1 \cdot 10 & 2 \cdot 10 \\ 3 \cdot 10 & 4 \cdot 10 \\ \hline 5 \cdot 10 & 6 \cdot 10 \\ 7 \cdot 10 & 8 \cdot 10 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 9 & 18 \\ 27 & 36 \\ \hline 45 & 54 \\ 63 & 72 \end{array} \middle| \begin{array}{cc} 10 & 20 \\ 30 & 40 \\ \hline 50 & 60 \\ 70 & 80 \end{array} \right\| .$$

## Свертывание тензоров

**Определение** Пусть дан тензор типа  $(q,p)$   $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$ , причем Прил. 4.3.4.  $q \geq 1$  и  $p \geq 1$ . Выберем один верхний (например,  $j_r$ ) и один нижний (например,  $i_s$ ) индексы и в записи тензора заменим их обозначения одним и тем же символом (например,  $m$ ). Тензор типа  $(q-1, p-1)$

$$\beta_{i_1 i_2 \dots i_{p-1}}^{j_1 j_2 \dots j_{q-1}}$$

называется *сверткой* тензора  $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_s \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_r \dots j_q}$  по индексам  $j_r$  и  $i_s$ , если в каждом базисе имеет место равенство

$$\beta_{i_1 i_2 \dots i_{p-1}}^{j_1 j_2 \dots j_{q-1}} = \alpha_{i_1 i_2 \dots m \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots m \dots j_q} .$$

Заметим, что в последнем равенстве правая часть – это сумма  $n$  слагаемых, где  $m$  – индекс, по которому выполняется суммирование, а само данное тензорное равенство равносильно  $(q-1)(p-1)$  скалярным равенствам.

**Пример**      Свертка тензора типа  $(1,1)$ , являющегося линейным  
**Прил. 4.3.3.**    оператором  $\alpha_i^j$ , есть тензор типа  $(0,0)$ , то есть инвариант относительно замены базиса, имеющий единственный компонент, равный

$$\alpha_m^m = \alpha_1^1 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^n.$$

Данное выражение есть сумма диагональных элементов матрицы линейного оператора, которая не меняется при замене базиса. Заметим, что данным свойством не обладает, например, матрица билинейного функционала.

Операция свертки часто комбинируется с операцией умножения тензоров. Например, результатом произведения один раз ковариантного тензора на один раз контравариантный с последующей сверткой является инвариант, представляющий значение линейного функционала в  $\Lambda^n$ . Действительно,  $f(x) = \phi_i \xi^i$ . В этом случае говорят, что тензор  $\phi_i$  свертывается с тензором  $\xi^k$ .

**Задача**      *Даны тензоры:*

**Прил. 4.3.2.**    *a – типа  $(1,1)$  с элементами  $\alpha_j^i$  и матрицей*

$$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array} \right\|;$$

$b$  – тензор  $(1, 0)$  с элементами  $\beta^j$  и матрицей

$$\begin{vmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{vmatrix};$$

$c$  – тензор  $(0, 1)$  с элементами  $\gamma_i$  и матрицей

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Найти свертки  $\alpha_j^i \beta^j$  и  $\alpha_j^i \gamma_i$ .

**Решение.** 1°. По определению операции свертывания,  $\alpha_j^i \beta^j$  – тензор типа  $(1, 0)$  с компонентами  $\delta^i = \sum_{j=1}^3 \alpha_j^i \beta^j$ .

Поэтому

$$\delta^1 = \alpha_1^1 \beta^1 + \alpha_2^1 \beta^2 + \alpha_3^1 \beta^3 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 = 8,$$

$$\delta^2 = \alpha_1^2 \beta^1 + \alpha_2^2 \beta^2 + \alpha_3^2 \beta^3 = 4 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) + 6 \cdot 4 = 17,$$

$$\delta^3 = \alpha_1^3 \beta^1 + \alpha_2^3 \beta^2 + \alpha_3^3 \beta^3 = 7 \cdot 2 + 8 \cdot (-3) + 9 \cdot 4 = 26.$$

2°. Аналогично,  $\alpha_j^i \gamma_i$  – тензор типа  $(0, 1)$  с компо-

$$\text{нентами } \Phi_j = \sum_{i=1}^3 \alpha_j^i \gamma_i. \text{ Тогда}$$

$$\Phi_1 = \alpha_1^1 \gamma_1 + \alpha_2^1 \gamma_2 + \alpha_3^1 \gamma_3 = 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) + 7 \cdot 4 = 18,$$

$$\Phi_2 = \alpha_1^2 \gamma_1 + \alpha_2^2 \gamma_2 + \alpha_3^2 \gamma_3 = 2 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) + 8 \cdot 4 = 21,$$

$$\Phi_3 = \alpha_1^3 \gamma_1 + \alpha_2^3 \gamma_2 + \alpha_3^3 \gamma_3 = 3 \cdot 2 + 6 \cdot (-3) + 9 \cdot 4 = 26.$$

## Транспонирование тензоров

Как уже отмечалось ранее, перестановка местами любой пары ко-вариантных (или пары контравариантных) индексов у тензора, то есть транспонирования тензора, вообще говоря, приводит к его изменению, поскольку в определении тензора говорится об упорядоченной системе индексов. При этом новый тензор будет того же типа, что и исходный.

В общем случае для группы, состоящей из  $N$  верхних (или нижних) индексов, существует  $N!$  различных способов перестановок. Это означает, что, переставляя данные индексы, можно построить  $N!$  новых тензоров.

**Задача**  
Прил. 4.3.3.

Тензор  $\alpha_k^{ij}$  задан матрицей

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline & 3 & 4 \\ & 5 & 6 \\ & 7 & 8 \end{array}.$$

Найти матрицу транспонированного тензора.

**Решение.**

Данный тензор можно транспонировать по паре контравариантных индексов  $i$  и  $j$ . После перестановки соответствующих элементов получаем тензор с матрицей

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & 3 \\ \hline & 2 & 4 \\ & 5 & 7 \\ & 6 & 8 \end{array}.$$

## Симметрирование и альтернирование тензоров

**Определение** Тензор называется *симметричным относительно группы (верхних или нижних) индексов*, если он не

Прил. 4.3.5.

меняется при перестановке любых двух индексов, принадлежащих данной группе.

**Определение  
Прил. 4.3.6.**

Тензор называется *антисимметричным* (или *косо-симметричным*) относительно группы индексов, если он меняет, в смысле указанного выше определения равенства тензоров, свой знак на противоположный при перестановке любых двух индексов, принадлежащих данной группе.

Выделим у тензора группу, состоящую из  $N$  индексов (либо верхних, либо нижних), построим путем перестановок индексов данной группы  $N!$  всевозможных новых тензоров и возьмем их среднее арифметическое. В результате мы получим тензор, симметричный по выбранной группе индексов.

Данная операция называется *симметрированием тензора по группе индексов*. Группа индексов, по которой выполняется симметрирование тензора, выделяется круглыми скобками.

**Пример  
Прил. 4.3.4.**  $N = 1 \quad \xi_{(i_1)} = \xi_{i_1},$

$$N = 2 \quad \xi_{(i_1, i_2)} = \frac{1}{2!} (\xi_{i_1, i_2} + \xi_{i_2, i_1}),$$

$$N = 3 \quad \xi_{(i_1, i_2, i_3)} = \frac{1}{3!} \{ \xi_{i_1, i_2, i_3} + \xi_{i_3, i_1, i_2} + \xi_{i_2, i_3, i_1} + \\ + \xi_{i_2, i_1, i_3} + \xi_{i_3, i_2, i_1} + \xi_{i_1, i_3, i_2} \}$$

...

...

Операция симметрирования часто комбинируется с умножением, причем имеет место следующий порядок действий: сначала умножение, а потом симметрирование.

Пример  $\xi^{(i} \eta^{j)}$ .  
Прил. 4.3.5.

Выделим у тензора группу, состоящую из  $N$  индексов (либо верхних, либо нижних), построим путем перестановок индексов данной группы  $N!$  всевозможных новых тензоров, приспав каждому из них знак  $(-1)^{B(k_1, k_2, \dots, k_N)}$ , где  $B(k_1, k_2, \dots, k_N)$  – число беспорядков в перестановке чисел  $\{1, 2, \dots, N\}$ , и возьмем их среднее арифметическое. В результате мы получим тензор, антисимметричный по выбранной группе индексов.

Данная операция называется *альтернированием тензора по группе индексов*. Группа индексов, по которой выполняется альтернирование тензора, выделяется квадратными скобками.

Пример  $N = 1$      $\xi_{[i_1]} = \xi_{i_1}$ ,  
Прил. 4.3.6.

$$N = 2 \quad \xi_{[i_1, i_2]} = \frac{1}{2!} \{ \xi_{i_1, i_2} - \xi_{i_2, i_1} \},$$

$$N = 3 \quad \xi_{[i_1, i_2, i_3]} = \frac{1}{3!} \{ \xi_{i_1, i_2, i_3} + \xi_{i_3, i_1, i_2} + \xi_{i_2, i_3, i_1} - \xi_{i_2, i_1, i_3} - \xi_{i_3, i_2, i_1} - \xi_{i_1, i_3, i_2} \}$$

...               ...

Операция альтернирования часто комбинируется с умножением, причем имеет место следующий порядок действий: сначала умножение, а потом альтернирование.

Пример  $\xi^{[i}\eta^{j]}.$   
Прил. 4.3.7.

Заметим, что как симметрирование кососимметричного тензора, так и альтернирование симметричного дает нулевой тензор.

Задача Тензор  $\alpha_{ijk}$  задан матрицей  
Прил. 4.3.4.

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline & 3 & 4 \\ & 5 & 6 \\ \hline & 7 & 8 \end{array}$$

матрицы тензоров  $\alpha_{(ij)k}$ ,  $\alpha_{i(jk)}$  и  $\alpha_{i[jk]}$ .

Решение. 1°. Тензор  $\beta_{ijk} = \alpha_{jik}$ , транспонированный к данному по паре индексов  $i$  и  $j$ , имеет матрицу

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & 3 \\ \hline & 2 & 4 \\ \hline & 5 & 7 \\ \hline & 6 & 8 \end{array} \quad (\text{см. задачу Прил. 4.3.3}).$$

Тензор  $\gamma_{ijk} = \alpha_{ikj}$ , транспонированный к данному по паре индексов  $j$  и  $k$ , будет иметь матрицу

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & 5 \\ \hline & 3 & 7 \\ \hline & 2 & 6 \\ \hline & 4 & 8 \end{array},$$

в которой элементы первых столбцов блочных матриц исходного тензора записаны в первой блочной строке.

2°. Тогда тензор  $\alpha_{(ij)k}$  имеет матрицу

$$\left\| \begin{array}{cc} \frac{1+1}{2} & \frac{2+3}{2} \\ \frac{3+2}{2} & \frac{4+4}{2} \\ \hline 2 & 2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \\ \hline \end{array} \right\|,$$

$$\left\| \begin{array}{cc} \frac{5+5}{2} & \frac{6+7}{2} \\ \frac{7+6}{2} & \frac{8+8}{2} \\ \hline 2 & 2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 5 & \frac{13}{2} \\ \frac{13}{2} & 8 \\ \hline \end{array} \right\|,$$

тензор  $\alpha_{i(jk)}$  — матрицу

$$\left\| \begin{array}{cc} \frac{1+1}{2} & \frac{2+5}{2} \\ \frac{3+3}{2} & \frac{4+7}{2} \\ \hline 2 & 2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 & \frac{7}{2} \\ 3 & \frac{11}{2} \\ \hline \end{array} \right\|,$$

$$\left\| \begin{array}{cc} \frac{5+2}{2} & \frac{6+6}{2} \\ \frac{7+4}{2} & \frac{8+8}{2} \\ \hline 2 & 2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{7}{2} & 6 \\ \frac{11}{2} & 8 \\ \hline \end{array} \right\|,$$

а тензор  $\alpha_{i[jk]}$  — матрицу

$$\left( \begin{array}{cc|c} \frac{1-1}{2} & \frac{2-5}{2} & 0 \\ \frac{3-3}{2} & \frac{4-7}{2} & 0 \\ \hline 2 & 2 & \hline \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|c} & & \frac{3}{2} \\ & & \frac{3}{2} \\ \hline & & \hline \frac{5-2}{2} & \frac{6-6}{2} & 0 \\ \frac{7-4}{2} & \frac{8-8}{2} & 0 \\ \hline 2 & 2 & \hline \end{array} \right).$$

#### Приложение 4.4. Тензоры в евклидовом пространстве

В случае евклидова пространства тензоры обладают дополнительными специфическими свойствами, обусловленными тем фактом, что скалярное произведение есть билинейный функционал, а потому является дважды ковариантным тензором, компоненты которого в любом базисе совпадают с компонентами матрицы Грама. Этот ковариантный тензор иногда называют *фундаментальным метрическим тензором*.

Поясним эти свойства следующим примером. Пусть дан базис  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  в  $E^n$  и его некоторый элемент  $x$ , являющийся одновалентным, один раз контравариантным тензором  $\xi^i$ . Свернем фундаментальный метрический тензор  $\gamma_{ij} = (g_i, g_j)$  с тензором  $\xi^i$ , получим

$$\xi_j = \gamma_{ij} \xi^i = (g_i, g_j) \xi^i = (g_i \xi^i, g_j) = (x, g_j).$$

Данное равенство означает, что элемент  $x$  однозначно характеризуется в каждом базисе  $E^n$  также и компонентами один раз ковариант-

тного тензора  $\xi_j$ . Числа  $\xi_j$  называются *ковариантными компонентами* элемента  $x$  в базисе  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ , и они однозначно определяются обычными контравариантными компонентами элемента  $x$  в силу невырожденности матрицы Грама из системы уравнений  $\xi_j = \gamma_{ij} \xi^i$ .

Таким образом, в евклидовом пространстве исчезает принципиальная разница между ковариантными и контравариантными индексами тензоров. Более того, в ортонормированном базисе ковариантные и контравариантные компоненты элемента  $x$  совпадают (см. теорему 10.3.2).

### Операция опускания индекса

**Определение** Пусть в  $E^n$  задан тензор типа  $(q, p)$   $\alpha^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}$ , где Прил. 4.4.1.

$q \geq 1$ . Тензор типа  $(q-1, p+1)$   $\beta^{\bullet j_2 \dots j_q}_{i_0 i_1 i_2 \dots i_p}$  называется *результатом операции опускания контравариантного индекса  $j_1$  у тензора  $\alpha^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}$* , если в каждом базисе имеет место равенство

$$\beta^{\bullet j_2 \dots j_q}_{i_0 i_1 i_2 \dots i_p} = \gamma_{i_0 j_1} \alpha^{j_1 j_2 \dots j_q}_{i_1 i_2 \dots i_p}.$$

Заметим, что использование точек для указания порядка следования индексов в этой операции оказывается необходимым, чтобы сделать ее однозначной. Иначе непонятно, куда следует опустить индекс.

### Операция поднятия индекса

**Определение** Дважды контравариантный тензор, компоненты которого в любом базисе евклидова пространства  $E^n$  сов-

падают с матрицей, обратной матрице Грама, называется *контравариантным метрическим тензором*.

Убедимся вначале, что матрица, обратная матрице Грама, задает в каждом базисе тензор типа  $(2,0)$ . Имеем  $\|\Gamma\|_{g'} = \|S\|^T \|\Gamma\|_g \|S\|$ . Исходя из этого соотношения, получаем следующее правило преобразования обратной матрицы Грама при замене базиса:

$$\begin{aligned}\|\Gamma\|_{g'}^{-1} &= (\|S\|^T \|\Gamma\|_g \|S\|)^{-1} = \|S\|^{-1} \|\Gamma\|_g (\|S\|^T)^{-1} = \\ &= \|S\|^{-1} \|\Gamma\|_g (\|S\|^{-1})^T,\end{aligned}$$

поскольку из  $\|E\| = \|E\|^T = (\|S\| \|S\|^{-1})^T = (\|S\|^{-1})^T \|S\|^T$  следует, что для невырожденной матрицы  $\|S\|$  справедливо равенство  $(\|S\|^{-1})^T = (\|S\|^T)^{-1}$ . А это и означает, что обратная матрица Грама определяет во всех базисах дважды контравариантный тензор  $\gamma^{ij}$ .

По аналогии с операцией опускания индекса дадим

**Определение** Пусть в  $E^n$  дан тензор типа  $(q,p)$   $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$ , где Прил. 4.4.3.

$p \geq 1$ . Тензор типа  $(q+1, p-1)$   $\beta_{\bullet i_2 \dots i_p}^{j_0 j_1 j_2 \dots j_q}$  называется *результатом поднятия ковариантного индекса*  $i_1$  у тензора  $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$ , если в каждом базисе имеет место равенство

$$\beta_{\bullet i_2 \dots i_p}^{j_0 j_1 j_2 \dots j_q} = \gamma^{i_1 j_0} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}.$$

Задача 4.4.1. В  $E^2$  с фундаментальным метрическим тензором

Прил.

$$\gamma_{ij} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \text{ тензор } \alpha_{\bullet jk}^i \text{ задан матрицей}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \\ \hline 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Найти матрицы тензоров  $\alpha_{ijk}$  и  $\alpha_k^{ij*}$ .

Решение. 1°. Для опускания первого индекса воспользуемся

$$\text{формулой } \alpha_{ijk} = \gamma_{im} \alpha_{\bullet jk}^m. \text{ Получаем}$$

$$\alpha_{111} = \gamma_{11} \alpha_{11}^1 + \gamma_{12} \alpha_{11}^2 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = 21,$$

$$\alpha_{112} = \gamma_{11} \alpha_{12}^1 + \gamma_{12} \alpha_{12}^2 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7,$$

$$\alpha_{121} = \gamma_{11} \alpha_{21}^1 + \gamma_{12} \alpha_{21}^2 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 = 29,$$

$$\alpha_{122} = \gamma_{11} \alpha_{22}^1 + \gamma_{12} \alpha_{22}^2 = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 = 19,$$

$$\alpha_{211} = \gamma_{21} \alpha_{11}^1 + \gamma_{22} \alpha_{11}^2 = 3 \cdot 3 + 5 \cdot 5 = 34,$$

$$\alpha_{212} = \gamma_{21} \alpha_{12}^1 + \gamma_{22} \alpha_{12}^2 = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 11,$$

$$\alpha_{221} = \gamma_{21} \alpha_{21}^1 + \gamma_{22} \alpha_{21}^2 = 3 \cdot 4 + 5 \cdot 7 = 47,$$

$$\alpha_{222} = \gamma_{21} \alpha_{22}^1 + \gamma_{22} \alpha_{22}^2 = 3 \cdot 5 + 5 \cdot 3 = 30.$$

Следовательно, матрица тензора  $\alpha_{ijk}$  имеет вид

$$\begin{vmatrix} 21 & 29 \\ 34 & 47 \\ \hline 7 & 19 \\ 11 & 30 \end{vmatrix}.$$

2°. Для поднятия второго индекса следует применить формулу  $\alpha_{..k}^{ij} = \alpha_{.mk}^i \gamma^{mj}$ , где  $\gamma^{ij}$  – контравариантный метрический тензор, матрица которого обратна матрице тензора  $\gamma_{ij}$  и имеет вид

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Поэтому

$$\alpha_{..1}^{11} = \alpha_{.11}^1 \gamma^{11} + \alpha_{.21}^1 \gamma^{21} = 3 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = 3,$$

$$\alpha_{..1}^{12} = \alpha_{.11}^1 \gamma^{12} + \alpha_{.21}^1 \gamma^{22} = -3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = -1,$$

$$\alpha_{..1}^{21} = \alpha_{.11}^2 \gamma^{11} + \alpha_{.21}^2 \gamma^{21} = 5 \cdot 5 - 7 \cdot 3 = 4,$$

$$\alpha_{..1}^{22} = \alpha_{.11}^2 \gamma^{12} + \alpha_{.21}^2 \gamma^{22} = 5 \cdot (-3) + 7 \cdot 2 = -1,$$

$$\alpha_{..2}^{11} = \alpha_{.12}^1 \gamma^{11} + \alpha_{.22}^1 \gamma^{21} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 5 = -5,$$

$$\alpha_{..2}^{12} = \alpha_{.12}^1 \gamma^{12} + \alpha_{.22}^1 \gamma^{22} = 2 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 = 4,$$

$$\alpha_{..2}^{21} = \alpha_{.12}^2 \gamma^{11} + \alpha_{.22}^2 \gamma^{21} = 1 \cdot 5 + 3 \cdot (-3) = -4,$$

$$\alpha_{..2}^{22} = \alpha_{.12}^2 \gamma^{12} + \alpha_{.22}^2 \gamma^{22} = 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 = 3.$$

Таким образом, тензор  $\alpha_k^{ij*}$  имеет матрицу

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \\ \hline -5 & 4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}.$$

В ортонормированном базисе очевидно, что  $\gamma_{ij} = \gamma^{ij} = \delta_j^i$ , то есть между ковариантными и контравариантными индексами нет

никакой разницы, что также следует из равенства  $\|S\|^{-1} = \|S\|^T$ , верного в ортонормированном базисе, и определения тензоров.

## Приложение 4.5. Тензоры в ортонормированном базисе

Совпадение ковариантных и контравариантных индексов в ортонормированных базисах евклидова пространства позволяет ввести в рассмотрение упрощенный класс тензоров, определенных только в таких базисах и называемых *евклидовыми тензорами*.

Два евклидовых тензора считаются одинаковыми, если один из них может быть преобразован во второй операциями опускания или поднятия индексов. Поэтому можно в дальнейшем рассматривать евклидовы тензоры как имеющие лишь нижние индексы. При этом, правда, придется допустить суммирование по паре совпадающих ковариантных индексов.

При помощи евклидовых тензоров удобно продемонстрировать связь методов тензорного исчисления и аппарата векторной алгебры в обычном трехмерном векторном пространстве  $E^3$ .

Введем предварительно в рассмотрение трехвалентный *дискриминантный* тензор  $\varepsilon_{ijk}$ , определяемый во всех ортонормированных базисах по правилу

$$\varepsilon_{ijk} = (-1)^{\text{Б}(i,j,k)}, \text{ если среди чисел } i, j, k \text{ нет равных,}$$

$$\varepsilon_{ijk} = 0 - \text{ в остальных случаях.}$$

Здесь  $\text{Б}(l, m, n)$ , как и раньше, обозначает число беспорядков в перестановке чисел  $\{l, m, n\}$  (см. § 6.1).

Всего у тензора  $\varepsilon_{ijk}$ , антисимметричного по любой паре индексов, 27 компонентов, из которых только шесть ненулевых: три равные 1 и три равные  $-1$ .

Убедимся вначале, что объект  $\epsilon'_{lmn}$  преобразуется при переходе от одного ортонормированного базиса в  $E^3$  к другому как трижды ковариантный тензор. Запишем выражения для компонентов в новом базисе в явном виде:

$$\begin{aligned}\epsilon'_{lmn} &= \sigma_{li}\sigma_{mj}\sigma_{nk}\epsilon_{ijk} = \sigma_{l1}\sigma_{m2}\sigma_{n3} + \sigma_{l2}\sigma_{m3}\sigma_{n1} + \sigma_{l3}\sigma_{m1}\sigma_{n2} - \\ &\quad - \sigma_{l1}\sigma_{m3}\sigma_{n2} - \sigma_{l2}\sigma_{m1}\sigma_{n3} - \sigma_{l3}\sigma_{m2}\sigma_{n1} = \\ &= \det \begin{vmatrix} \sigma_{l1} & \sigma_{l2} & \sigma_{l3} \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \sigma_{m3} \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \sigma_{n3} \end{vmatrix},\end{aligned}$$

что в свою очередь по свойствам определителя дает

$$\begin{aligned}\epsilon'_{lmn} &= (-1)^{\text{Б}(l,m,n)}, \text{ если среди чисел } l, m, n \text{ нет равных,} \\ \epsilon'_{lmn} &= 0 \text{ -- в остальных случаях,}\end{aligned}$$

поскольку матрица

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$$

ортогональная (как матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому) и ее определитель равен  $\pm 1$ .

Но если объект  $\epsilon_{ijk}$  в новом произвольном ортонормированном базисе имеет (при использованных правилах преобразования) те же компоненты, что и в исходном, то мы приходим к заключению, что это трехвалентный евклидов тензор.

## Тензоры и произведения векторов

Покажем теперь связь тензорного произведения элементов пространства  $E^3$  и произведений векторов, введенных в данном пособии (см. § 2.2 и § 2.4). Все базисы по-прежнему ортонормированные.

Рассмотрим два одновалентных ковариантных тензора  $\xi_i$  и  $\eta_k$ , которые в аналитической геометрии (что было показано ранее) интерпретируются как обычные геометрические векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Их тензорное произведение  $\xi_i \eta_k$  есть дважды ковариантный евклидов тензор, имеющий 9 компонентов, записываемых обычно в виде матрицы следующего вида:

$$\begin{vmatrix} \xi_1 \eta_1 & \xi_1 \eta_2 & \xi_1 \eta_3 \\ \xi_2 \eta_1 & \xi_2 \eta_2 & \xi_2 \eta_3 \\ \xi_3 \eta_1 & \xi_3 \eta_2 & \xi_3 \eta_3 \end{vmatrix}.$$

Согласно правилам сложения тензоров и умножения их на число, данный тензор можно представить как сумму симметричного и антисимметричного тензоров:

$$\xi_i \eta_k = \frac{1}{2}(\xi_i \eta_k + \xi_k \eta_i) + \frac{1}{2}(\xi_i \eta_k - \xi_k \eta_i),$$

или в матричном виде:

$$\begin{vmatrix} \xi_1 \eta_1 & \xi_1 \eta_2 & \xi_1 \eta_3 \\ \xi_2 \eta_1 & \xi_2 \eta_2 & \xi_2 \eta_3 \\ \xi_3 \eta_1 & \xi_3 \eta_2 & \xi_3 \eta_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \xi_1 \eta_1 + \xi_1 \eta_1 & \xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1 & \xi_1 \eta_3 + \xi_3 \eta_1 \\ \xi_2 \eta_1 + \xi_1 \eta_2 & \xi_2 \eta_2 + \xi_2 \eta_2 & \xi_2 \eta_3 + \xi_3 \eta_2 \\ \xi_3 \eta_1 + \xi_1 \eta_3 & \xi_3 \eta_2 + \xi_2 \eta_3 & \xi_3 \eta_3 + \xi_3 \eta_3 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 & \xi_1 \eta_3 - \xi_3 \eta_1 \\ \xi_2 \eta_1 - \xi_1 \eta_2 & 0 & \xi_2 \eta_3 - \xi_3 \eta_2 \\ \xi_3 \eta_1 - \xi_1 \eta_3 & \xi_3 \eta_2 - \xi_2 \eta_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим теперь каждое слагаемое по отдельности.

Во-первых, отметим, что из симметричности матричного представления для первого слагаемого следует существование ортонормированного базиса, в котором эта матрица диагональна.

Теперь покажем, что свертка этого слагаемого есть инвариант, то есть она не зависит от выбора базиса.

Действительно, учитывая, что  $\xi_i$  и  $\eta_k$  суть одновалентные ковариантные тензоры, и используя свойства матрицы перехода  $\|S\|$ , получим следующее правило преобразования их свертки:

$$\xi'_k \eta'_k = \sigma_{ki} \xi_i \sigma_{kj} \eta_j = \sigma^T_{ik} \sigma_{kj} \xi_i \eta_j = \delta_{ij} \xi_i \eta_j = \xi_i \eta_i,$$

что и означает инвариантность этой свертки относительно замены базиса.

Отсюда следует важный вывод: любой паре элементов (векторов)  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , имеющих соответственно компоненты  $\xi_i$  и  $\eta_k$  в  $E^3$ , можно поставить в соответствие не зависящее от выбора ортонормированного базиса число  $\xi_i \eta_i = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3$ . (См. также § 2.9.)

Выясним геометрический смысл этого инварианта, обозначаемого  $(\vec{a}, \vec{b}) = \delta_{ki} \xi_i \eta_k$ . Каковы бы ни были векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , всегда находится ортонормированный базис, в котором их координатные представления соответственно имеют вид

$$\left\| \begin{array}{c} \vec{a} \\ | \\ 0 \\ | \\ 0 \end{array} \right\| \text{ и } \left\| \begin{array}{c} \vec{b} \\ | \\ \vec{b} \\ | \\ 0 \end{array} \right\| \cos \varphi \quad \left\| \begin{array}{c} \vec{b} \\ | \\ \vec{b} \\ | \\ 0 \end{array} \right\| \sin \varphi, \quad ,$$

где  $\Phi$  – угол между  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Тогда значение инварианта равно  $(\vec{a}, \vec{b}) = \left| \vec{a} \right| \left| \vec{b} \right| \cos \Phi$ , и мы приходим к формуле *скалярного произведения векторов*, которая обычно принимается за его определение.

Рассмотрим теперь второе слагаемое. Как нетрудно видеть, матрица

$$\begin{vmatrix} 0 & \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 & \xi_1 \eta_3 - \xi_3 \eta_1 \\ \xi_2 \eta_1 - \xi_1 \eta_2 & 0 & \xi_2 \eta_3 - \xi_3 \eta_2 \\ \xi_3 \eta_1 - \xi_1 \eta_3 & \xi_3 \eta_2 - \xi_2 \eta_3 & 0 \end{vmatrix}$$

имеет только три независимых компонента, из чего следует, что паре векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  в  $E^3$  может быть поставлен в соответствие третий вектор, обозначаемый как  $[\vec{a}, \vec{b}]$ , с компонентами

$$\begin{vmatrix} \xi_2 \eta_3 - \xi_3 \eta_2 \\ \xi_3 \eta_1 - \xi_1 \eta_3 \\ \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 \end{vmatrix}.$$

Исследуем его свойства. Во-первых, заметим, что число независимых компонентов у кососимметричной части тензорного произведения элементов в случае размерности пространства  $n$  равно  $\frac{(n-1)n}{2}$ ,

поскольку это есть число компонентов, стоящих в матрице над ее главной диагональю. Отсюда следует, что *только в  $E^3$*  это число совпадает с размерностью пространства, и *только в  $E^3$*  произведению двух элементов можно подобным образом ставить в соответствие третий элемент.

Во-вторых, убедимся, что имеют место соотношения

$$[\vec{a}, \vec{b}]_i = \epsilon_{ijk} \xi_j \eta_k.$$

Действительно, например, для  $i = 1$ :

$$\begin{aligned} \epsilon_{1jk} \xi_j \eta_k &= \epsilon_{111} \xi_1 \eta_1 + \epsilon_{112} \xi_1 \eta_2 + \epsilon_{113} \xi_1 \eta_3 + \\ &+ \epsilon_{121} \xi_2 \eta_1 + \epsilon_{122} \xi_2 \eta_2 + \epsilon_{123} \xi_2 \eta_3 + \\ &+ \epsilon_{131} \xi_3 \eta_1 + \epsilon_{132} \xi_3 \eta_2 + \epsilon_{133} \xi_3 \eta_3 = \\ &= \xi_2 \eta_3 - \xi_3 \eta_2. \end{aligned}$$

В-третьих, покажем инвариантность тензора  $\kappa_i = \epsilon_{ijk} \xi_j \eta_k$  при переходе от одного ортонормированного базиса к другому в  $E^3$ .

Пусть это соотношение в новом ортонормированном базисе  $\kappa'_i = \epsilon'_{ijk} \xi'_j \eta'_k$ , тогда в исходном базисе будут справедливы равенства  $\sigma_{is} \kappa_s = \epsilon'_{ijk} \sigma_{jm} \sigma_{kl} \xi_m \eta_l$ . Умножив обе части последнего равенства на тензор  $\sigma_{qi}$  и свернув произведения по индексу  $i$ , получим

$$\sigma_{qi} \sigma_{is} \kappa_s = \sigma_{qi} \sigma_{jm} \sigma_{kl} \epsilon'_{ijk} \xi_m \eta_l,$$

но  $\sigma_{qi} \sigma_{is} \kappa_s = \delta_{qs} \kappa_s = \kappa_q$ , а  $\epsilon_{qml} = \sigma_{qi} \sigma_{jm} \sigma_{kl} \epsilon'_{ijk}$ , поскольку тензор  $\epsilon_{ijk}$  инвариантен при переходе от одного ортонормированного базиса к другому. Следовательно,  $\kappa_i = \epsilon_{iml} \xi_m \eta_l$ , что и означает инвариантность этого элемента относительно замены базиса.

Выясним, наконец, геометрический смысл вектора  $[\vec{a}, \vec{b}]$ . Заметим, что для любых векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  можно выбрать ортонормированный базис в  $E^3$ , в котором их координатные представления имеют вид соответственно

$$\left\| \begin{array}{c} 0 \\ \rightarrow \\ a \\ 0 \end{array} \right\| \text{ и } \left\| \begin{array}{c} 0 \\ \rightarrow \\ b \\ \rightarrow \\ b \end{array} \right\| \cos \varphi, \\ \left\| \begin{array}{c} 0 \\ \rightarrow \\ b \\ \rightarrow \\ b \end{array} \right\| \sin \varphi,$$

где  $\varphi$  – угол между  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

Тогда значение первого компонента  $[\vec{a}, \vec{b}]$  есть  $\left\| \vec{a} \right\| \left\| \vec{b} \right\| \sin \varphi$ , в

то время как остальные компоненты нулевые, и получилась формула *векторного произведения*, принимаемая обычно за его определение.

Таким образом, можно заключить, что введенные в курсе векторной алгебры операции скалярного и векторного произведений базируются не только на “их полезности для приложений”, но и отражают инвариантные свойства тензорного произведения элементов евклидова пространства при переходах между ортонормированными базисами.

В заключение покажем, что тензорная символика может быть эффективно использована и для более сложных конструкций векторной алгебры. Например:

1°. Смешанное произведение трех векторов (см. § 2.6) представимо в виде

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = \xi_i [\vec{b}, \vec{c}]_i = \xi_i \varepsilon_{ijk} \eta_j \kappa_k = \varepsilon_{ijk} \xi_i \eta_j \kappa_k.$$

2°. Выражение для двойного векторного произведения трех векторов (см. § 2.8) может быть получено следующим образом:

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]_i = \varepsilon_{ijk} \xi_j [\vec{b}, \vec{c}]_k = \varepsilon_{ijk} \xi_j \varepsilon_{klm} \eta_l \kappa_m = \\ = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \xi_j \eta_l \kappa_m.$$

Принимая во внимание достаточно легко проверяемую формулу  $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$ , приходим к равенству

$$\begin{aligned} \stackrel{\rightarrow}{[a,[b,c]]}_i &= \epsilon_{ijk}\xi_j\epsilon_{klm}\eta_l\kappa_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\xi_j\eta_l\kappa_m = \\ &= \eta_i\xi_m\kappa_m - \kappa_i\xi_j\eta_j = \eta_i(a,c) - \kappa_i(a,b), \end{aligned}$$

или, окончательно,

$$\stackrel{\rightarrow}{[a,[b,c]]} = \stackrel{\rightarrow}{b}(a,c) - \stackrel{\rightarrow}{c}(a,b).$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Беклемишиев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. 10-е изд., испр. М.: Физматлит, 2005.
2. *Чехлов В. И.* Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре. М.: МФТИ, 2005.
3. *Мальцев А. М.* Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1976.
4. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. М.: Наука, 1979.
5. *Беклемишиев Д. В.* Дополнительные главы линейной алгебры. М.: Наука, 1983.
6. *Шилов Г. Е.* Введение в теорию линейных пространств. М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1956.
7. *Волков Т. Ф.* Тензоры и векторы: учебное пособие. М.: МФТИ, 1976.
8. *Беклемишиева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. М.: Физматлит, 2001.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

### А

- Алгебраическая линия § 4.1.  
Алгебраическая поверхность § 4.2.  
Алгебраическое дополнение элемента матрицы § 6.3.  
Альтернирование тензоров Прил. 4.3.  
Аппроксимация функций многочленами § 12.3.  
Аффинное преобразование плоскости § 5.4.

### Б

- Базис § 1.5.  
Базис в пространстве § 1.5.  
Базис линейного пространства § 7.2.  
Базис на прямой § 1.5.  
Базис на плоскости § 1.5.  
Базисная строка матрицы § 6.5.  
Базисный минор § 6.5.  
Базисный столбец матрицы § 6.5.  
Билинейная форма § 9.1.  
Билинейный функционал § 9.1.  
Биортогональный базис § 8.7.

### В

- Вектор, множество векторов § 1.3.  
Векторное произведение векторов § 2.4, Прил. 4.5.  
Взаимно однозначное отображение § 5.2.

Взаимно однозначное соответствие (биекция) § 8.4.

Взаимный базис § 2.5, § 8.7.

Вторичное двойственное (вторичное сопряженное) пространство  
§ 8.7.

Выражение векторного произведения векторов в координатах  
§ 2.5.

Выражение векторного произведения векторов в ортонормированной системе координат § 2.5.

Выражение скалярного произведения векторов в координатах  
§ 2.3.

Выражение смешанного произведения векторов в координатах  
§ 2.7.

Выражение скалярного произведения векторов в ортонормированной системе координат § 2.3.

Выражение смешанного произведения векторов в ортонормированной системе координат § 2.7.

Вырожденная матрица § 5.1.

Вырожденные линии второго порядка Прил. 1.1.

Вырожденные поверхности второго порядка Прил. 2.1.

## Г

Геометрический смысл модуля определителя аффинного преобразования § 5.4.

Геометрический смысл знака определителя аффинного преобразования § 5.4.

Гипербола § 4.4.

Гиперболический параболоид § 4.5.

Гиперболический цилиндр § 4.5.

Гиперплоскость в линейном пространстве § 7.4.

Главный вектор плоскости § 3.3.

Группа § 5.6.

## Д

- Двойное векторное произведение § 2.8, Прил. 4.5.  
Двойственное линейное пространство § 8.7.  
Двуполостный гиперболоид § 4.5.  
Действия с линейными операторами § 8.2.  
Действия с линейными операторами  
    в матричной форме § 8.3.  
Детерминант матрицы 2-го и 3-го порядка § 1.1.  
Детерминант матрицы n-го порядка § 6.1.  
Диагональный вид квадратичного функционала § 9.2.  
Директориальное свойство гиперболы Прил. 1.3.  
Директориальное свойство параболы Прил. 1.4.  
Директориальное свойство эллипса Прил. 1.2.  
Дисперсия эрмитова оператора § 11.4.  
Дополнительный минор § 6.3.  
Дополнительный минор элемента матрицы § 6.3.

## Е

- Евклидово пространство § 10.1.  
Единичная матрица § 1.1.  
Единичный оператор § 8.2.

## З

- Запись тензоров Прил. 4.2.

## И

- Изменение компонентов билинейного функционала при смене ба-  
зиса § 9.1.

- Изменение компонентов квадратичного функционала при смене базиса § 9.2.
- Изменение компонентов линейного функционала при смене базиса § 8.7.
- Изменение координат точки при смене базиса § 1.8.
- Изменение координат элемента линейного пространства при смене базиса § 7.3.
- Изменение матрицы линейного оператора при смене базиса § 8.3.
- Изоморфизм § 7.5.
- Изоморфные линейные пространства § 7.5.
- Инвариантное подпространство линейного оператора § 8.5.
- Инвариантное собственное подпространство линейного оператора § 8.6.
- Инварианты линий второго порядка на плоскости § 9.4.
- Инъективное линейное отображение (инъекция) § 8.4.

## K

- Канонические уравнения линии второго порядка на плоскости § 4.4.
- Канонические уравнения поверхности второго порядка § 4.5.
- Канонический вид квадратичного функционала § 9.2.
- Квадратная матрица § 1.1.
- Квадратичная форма § 9.2.
- Квадратичный функционал § 9.2.
- Квадратная матрица порядка  $n$  § 1.1.
- Классификация поверхностей второго порядка § 12.2.
- Коллинеарность § 1.4.
- Коллинеарные векторы § 1.4.
- Коммутатор линейных операторов § 8.2.
- Компланарность § 1.4.
- Компланарные векторы § 1.4.
- Комплексные числа Прил. 3.0.
- Компоненты вектора § 1.5.
- Компоненты элемента линейного пространства § 7.3.

- Коническая поверхность § 4.3.  
Коническое сечение § 4.6.  
Конус § 4.5.  
Координатное представление билинейного функционала  
в базисе § 9.1.  
Координатное представление линейного оператора  
в базисе § 8.3.  
Координатное представление линейного функционала  
в базисе § 8.7.  
Координатное представление скалярного  
произведения § 10.3.  
Координаты вектора § 1.5.  
Координаты элемента линейного пространства § 7.3.  
Композиция операторов § 5.2.  
Компоненты вектора § 1.5.  
Координаты вектора § 1.5.  
Критерий Сильвестра § 9.3, § 10.3.

## Л

- Линейная зависимость векторов § 1.4.  
Линейная зависимость элементов линейного  
пространства § 7.2.  
Линейная комбинация векторов § 1.4.  
Линейная комбинация элементов линейного  
пространства § 7.2.  
Линейная независимость векторов § 1.4.  
Линейная независимость элементов линейного  
пространства § 7.2.  
Линейная оболочка элементов линейного пространства § 7.4.  
Линейное неравенство § 3.2.  
Линейное пространство § 7.1.  
Линейное пространство линейных операторов § 8.2.  
Линейное пространство линейных функционалов § 8.7.  
Линейный оператор § 8.1.  
Линейный оператор на плоскости § 5.3.

- Линейная форма § 8.7.
- Линейный функционал § 8.7.
- Линия в пространстве § 4.1.
- Линия второго порядка на плоскости § 4.4.
- Линия на плоскости § 4.1.

## **M**

- Матрица § 1.1.
- Матрица билинейного функционала § 9.1.
- Матрица Грама § 10.3.
- Матрица квадратичного функционала § 9.2.
- Матрица линейного оператора § 8.3.
- Матрица линейного отображения § 8.4.
- Матрица линейного оператора на плоскости § 5.3.
- Матрица перехода от одной системы координат  
к другой § 1.8.
- Матрица перехода от одного базиса к другому в линейном про-  
странстве § 7.3.
- Матрица элементарных преобразований § 6.8.
- Метод Гаусса § 6.8.
- Метод Лагранжа § 9.2.
- Минор  $k$ -го порядка § 6.3.

## **H**

- Направленный отрезок § 1.2.
- Направляющие векторы плоскости § 3.3.
- Направляющий вектор прямой на плоскости § 3.2.
- Невырожденная матрица § 7.5.
- Неоднородная система линейных уравнений § 6.6.
- Неоднородный линейный оператор на плоскости § 5.3.
- Неравенство Коши–Буняковского § 10.1.
- Неравенство треугольника § 10.1.

- Неразвернутое представление матрицы § 1.1.  
Нетривиальная линейная комбинация векторов § 1.4.  
Норма элемента в евклидовом пространстве § 10.1.  
Нормальная прямоугольная система координат § 1.7.  
Нормальное уравнение прямой на плоскости § 3.2.  
Нормальный вектор прямой на плоскости § 3.2.  
Нормальный вектор плоскости § 3.3.  
Нулевая матрица § 1.1.  
Нулевой вектор § 1.3.  
Нулевой направленный отрезок § 1.2.  
Нулевой оператор § 8.2.  
Нулевой функционал § 8.7.  
Нулевой элемент линейного пространства § 7.1.

## О

- Область значений линейного оператора § 8.4.  
Обратная матрица § 5.1.  
Обратная матрица перехода § 7.5.  
Обратное отображение § 5.2.  
Обратный оператор § 8.2.  
Обращение произведения матриц § 5.1.  
Обращение линейного оператора в матричной форме § 8.3.  
Общая декартова система координат § 1.7.  
Общее решение системы линейных уравнений § 6.6, § 6.7.  
Общее решение неоднородной системы линейных  
уравнений § 6.7.  
Общее решение системы однородной линейных  
уравнений § 6.7.  
Однополостный гиперболоид § 4.5.  
Однородная система линейных уравнений § 6.6.  
Однородный линейный оператор на плоскости § 5.3.  
Оператор § 5.2, § 8.1.  
Оператор сжатия к осям § 5.3.  
Операции с линейными функционалами § 8.7.  
Операции с тензорами Прил. 4.3.

- Операции с элементами линейного пространства в координатной форме § 7.3.
- Определитель матрицы 2-го порядка § 1.1.
- Определитель матрицы 3-го порядка § 1.1.
- Определитель матрицы  $n$ -го порядка § 6.1.
- Определитель произведения матриц § 6.2.
- Опускание индекса у тензора Прил. 4.4.
- Оптическое свойство гиперболы Прил. 1.3.
- Оптическое свойство параболы Прил. 1.4.
- Оптическое свойство эллипса Прил. 1.2.
- Ортогонализация базиса § 10.2.
- Ортогональная матрица § 5.1, § 10.4.
- Ортогональное проектирование § 2.1, § 10.5.
- Ортогональная проекция вектора на ось § 2.1.
- Ортогональная проекция точки на ось § 2.1.
- Ортогональное дополнение § 10.5.
- Ортогональное преобразование плоскости § 5.5.
- Ортогональные элементы в евклидовом пространстве § 10.1.
- Ортогональный базис § 1.5.
- Ортогональный оператор § 10.8.
- Ортонормированная система координат § 1.7.
- Ортонормированный базис § 1.5, § 10.2.
- Основная матрица системы линейных уравнений 6.6.
- Ось § 2.1.
- Отношение Релея § 12.1.
- Отображение плоскости § 5.2.
- Отрицательно определенный квадратичный функционал § 9.3.

## П

- Парабола § 4.4.
- Парabolический цилиндр § 4.5.
- Параметрическое представление плоскости § 3.3.
- Параметрическое представление прямой на плоскости § 3.1.
- Пересечение подпространств линейного пространства § 7.4.

- Переход от одной ортонормированной системы координат к другой § 1.8.
- Поверхности вращения Прил. 2.7.
- Поверхности второго порядка § 4.5.
- Поднятие индекса у тензора Прил. 4.4.
- Подпространство линейного пространства § 7.4.
- Полилинейный функционал § 9.6.
- Положительно определенный квадратичный функционал § 9.3.
- Полярная система координат § 4.6.
- Порядок алгебраической линии § 4.1.
- Порядок алгебраической поверхности § 4.2.
- Правило замыкающей § 1.2.
- Правило Крамера § 6.4.
- Правило треугольника § 1.2.
- Правило параллелограмма § 1.2.
- Преобразование плоскости § 5.2.
- Приведение квадратичного функционала к диагональному виду § 9.2, § 12.1.
- Приведение пары квадратичных функционалов к диагональному виду § 9.2, § 12.1.
- Приведение уравнения линии второго порядка на плоскости к каноническому виду § 4.4.
- Присоединенный оператор § 12.1
- Произведение матриц § 5.1.
- Произведение операторов § 5.2.
- Произведение линейных операторов § 8.2.
- Произведение линейных операторов в матричной форме § 8.3.
- Произведение числа и линейного оператора § 8.2.
- Произведение числа и линейного функционала § 8.7.
- Произведение числа и матрицы § 1.1.
- Произведение числа и направленного отрезка § 1.2.
- Противоположный оператор § 8.2.
- Противоположный функционал § 8.7.
- Противоположный элемент линейного пространства § 7.1.

Прямая сумма подпространств линейного пространства § 7.4.

Пучок плоскостей в пространстве § 3.3.

Пучок прямых на плоскости § 3.2.

## P

Равенство векторов в координатной форме § 1.6.

Радиус-вектор точки § 1.7.

Развернутое представление матрицы § 1.1.

Разложение определителей § 6.3.

Разложение определителя 3-го порядка по столбцу или строке § 1.1.

Размер матрицы § 1.1.

Размерность линейного пространства § 7.2.

Ранг линейного оператора § 8.4.

Разность направленных отрезков § 1.2.

Ранг матрицы § 6.5.

Расстояние между скрещивающимися прямыми § 3.4.

Расстояние между элементами в евклидовом пространстве § 10.1.

Расстояние от точки до прямой на плоскости § 3.2.

Расстояние от точки до прямой в пространстве § 3.4.

Расстояние от точки до плоскости § 3.3.

Расширенная матрица системы линейных уравнений § 6.6.

Решение системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными § 1.1.

## C

Самосопряженный оператор § 10.7.

Свертывание тензоров Прил. 4.3.

Свойства аффинного преобразования плоскости § 5.4.

Свойства векторного произведения векторов § 2.4.

Свойства гиперболического параболоида Прил. 2.4.

- Свойства гиперболы Прил. 1.3.  
Свойства двуполостного гиперболоида Прил. 2.6.  
Свойства однополостного гиперболоида Прил. 2.5.  
Свойства операций сложения векторов и умножения вектора на число § 1.3.  
Свойства определителя матрицы  $n$ -го порядка § 6.2.  
Свойства параболы Прил. 1.4.  
Свойства собственных значений линейного оператора § 8.6.  
Свойства собственных векторов линейного оператора § 8.6.  
Свойства скалярного произведения векторов § 2.2.  
Свойства смешанного произведения векторов § 2.6.  
Свойства эллипса Прил. 1.2.  
Свойства эллипсоида Прил. 2.2.  
Свойства эллиптического параболоида Прил. 2.3.  
Связка плоскостей в пространстве § 3.3.  
Сигнатура квадратичного функционала § 9.3.  
Символ Кронекера § 2.3.  
Симметрирование тензоров Прил. 4.3.  
Симметрическая матрица § 1.1.  
Симметричный билинейный функционал § 9.1.  
Система  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными § 6.4.  
Система  $m$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными § 6.6.  
Скалярное произведение векторов § 2.2, Прил. 4.5.  
Скалярное произведение элементов в евклидовом пространстве § 10.1.  
Сложение матриц § 1.1.  
Сложение векторов в координатной форме § 1.6.  
Сложение линейных операторов в матричной форме § 8.3.  
Сложение направленных отрезков § 1.2.  
Сложение тензоров Прил. 4.3.  
Смешанное произведение векторов § 2.6.  
Собственное значение (число) линейного оператора § 8.5.  
Собственный вектор линейного оператора § 8.5.  
Совместная система линейных уравнений § 6.6.  
Соглашение о суммировании § 1.4.  
Соотношение неопределенностей § 11.5.

Сопряженное линейное пространство § 8.7.

Сопряженный оператор § 10.6.

Сравнение матриц § 1.1.

Сравнение направленных отрезков § 1.2.

Среднее значение оператора § 11.4.

Столбец элементов матрицы § 1.1.

Строка элементов матрицы § 1.1.

Сумма линейных операторов § 8.2.

Сумма линейных функционалов § 8.7.

Сумма подпространств линейного пространства § 7.4.

Степень квадратной матрицы с целым неотрицательным показателем § 8.6.

Сферическая система координат § 4.6.

Сюръективное линейное отображение (сюръекция) § 8.4.

## Т

Тензоры Прил. 4.2.

Тензоры в евклидовом пространстве Прил. 4.4.

Тензоры в ортонормированном базисе Прил. 4.5.

Теорема Гамильтона–Кэли 8.6.

Теорема Грама–Шмидта § 10.3.

Теорема инерции квадратичных функционалов § 9.3.

Теорема Кронекера–Капелли § 6.6.

Теорема Лапласа § 6.3.

Теорема о базисном миноре § 6.5.

Теорема о полярном разложении § 10.8.

Теорема о ранге матрицы § 6.5.

Теорема об изоморфизме § 7.5.

Теорема Фредгольма § 6.7, § 10.6.

Тождественный оператор § 8.2.

Точка пересечения прямой и плоскости § 3.4.

Транспонирование матрицы § 1.1.

Транспонирование произведения матриц § 5.1.

Транспонирование тензоров Прил. 4.3.

Тривиальная линейная комбинация векторов § 1.4.

Тригонометрическая форма записи комплексных  
чисел Прил. 3.0.

## **Y**

Угол между векторами § 2.2.  
Угол между элементами в евклидовом пространстве § 10.1.  
Умножение матрицы на число § 1.1.  
Умножение направленного отрезка на число § 1.2.  
Умножение вектора на число в координатной форме § 1.6.  
Умножение линейного оператора на число  
в матричной форме § 8.3.  
Умножение тензоров Прил. 4.3.  
Умножение тензоров на число Прил. 4.3.  
Унитарное пространство § 11.1.  
Унитарный оператор § 11.2.  
Уравнение плоскости в декартовой системе координат § 3.3.  
Уравнение прямой на плоскости в декартовой системе  
координат § 3.1.  
Уравнение пучка прямых на плоскости § 3.2.  
Условие коллинеарности векторов в координатной  
форме § 1.6.  
Условие компланарности векторов в координатной  
форме § 1.6.  
Условие ортогональности прямых на плоскости § 3.5.  
Условие ортогональности прямых в пространстве § 3.5.  
Условие ортогональности прямой и плоскости § 3.5.  
Условие параллельности прямых на плоскости § 3.1.  
Условие параллельности прямых в пространстве § 3.1.  
Условие параллельности прямой и плоскости § 3.1.

## **Ф**

Фокальное свойство гиперболы Прил. 1.3.  
Фокальное свойство эллипса Прил. 1.2.

Формула Эйлера Прил. 3.0.

Формулы перехода от одной системы координат  
к другой § 1.8.

Формы задания плоскости в пространстве § 3.3.

Формы задания прямой на плоскости § 3.2.

Фундаментальная система решений системы линейных  
уравнений § 6.7.

Фундаментальная матрица § 6.7.

Функционал § 5.2.

## Х

Характеристический многочлен линейного оператора § 8.5.

Характеристическое уравнение линейного оператора § 8.5.

## Ц

Цилиндрическая поверхность § 4.3.

Цилиндрическая система координат § 4.6.

## Ч

Частное решение системы линейных уравнений § 6.6.

Численное значение ортогональной проекции на ось § 2.1.

## Э

Экспоненциальная форма записи комплексных  
чисел Прил. 3.0.

Экстремальные свойства квадратичных функционалов § 9.5.

Элемент матрицы § 1.1.

Элемент обратной матрицы § 6.3.

Элементарные операции преобразования матрицы системы линей-  
ных уравнений § 6.8.

- Эллипс § 4.4.
- Эллипсоид § 4.5.
- Эллиптический параболоид § 4.5.
- Эллиптический цилиндр § 4.5.
- Эрмитово сопряженный оператор § 11.2.
- Эрмитово самосопряженный оператор § 11.3.
- Эрмитов оператор § 11.3.
- Эрмитов функционал § 11.4.
- Эрмитова форма § 11.4.

## **Я**

- Ядро линейного оператора § 8.4.

Учебное издание

**Умнов Александр Евгеньевич**

**АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ  
И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА**

Научные редакторы *В. И. Чехлов, И. А. Чубаров*

Художник *Г. Ю. Капустин*

Редакторы *И. А. Волкова, О. П. Котова*

Корректор *И. А. Волкова*

Подписано в печать 06.10.2011. Формат 60 × 84  $\frac{1}{16}$ . Усл. печ. л. 34,0.

Уч.-изд. л. 33,5. Тираж 400 экз. Заказ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования «Московский физико-технический  
институт (государственный университет)»

141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9  
E-mail: [rio@mail.mipt.ru](mailto:rio@mail.mipt.ru)

---

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленных диапозитивов  
в ООО «Печатный салон ШАНС»  
125412, Москва, ул. Ижорская, д.13, стр. 2