Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Саратовский государственный технический университет
имени Гагарина Ю.А.»

Кафедра «Радиоэлектроника и телекоммуникации»

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ В КИБЕРНЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине
«Б.1.2.9 Основы кибернетики»
направления подготовки
«01.03.02 "Прикладная математика и информатика"»
квалификация (степень) «бакалавр»»
Профиль «Математическое моделирование и вычислительная математика»

Одобрено
редакционно-издательским советом
Саратовского государственного
технического университета

Саратов 2017

Цель работы: Освоение методов аналитического представления и исследования сигналов.

1. Норма, энергия и метрика сигнала

Под сигналом понимают величину, отражающую каким-либо образом состояние физической системы. В этом смысле естественно рассматривать сигналы как результат некоторых измерений, проводимых над физической системой в процессе ее наблюдения (исследования).

Норма сигнала может быть определена различными способами. Часто норму сигнала $S(t)$ определяют следующим образом

$$\|S(t)\| = \left|\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} S^2(t)dt}\right|. \qquad (1)$$

Квадратный корень нормы носит название энергии сигнала и определяется выражением

$$E = \|S(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t)dt. \qquad (2)$$

Метрику часто определяют как норму разности двух сигналов:

$$\rho(u, v) = \|u(t) - v(t)\| \cdot \qquad (3)$$

Норма в свою очередь может пониматься как расстояние (метрику) между выбранным элементом и нулевым элементом пространства сигналов

$$\|u(t)\| = \rho(u, 0) \cdot \qquad (4)$$

Метрика позволяет судить, например, насколько один из сигналов аппроксимирует другой.

Введем понятие спектральной функции (характеристики) сигнала, под которой будем понимать преобразование Фурье (если оно существует) от сигнала $S(t)$

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t)e^{-j\omega t}dt \cdot \qquad (5)$$

В общем случае это комплексная характеристика.

С другой стороны, если известна спектральная функция сигнала, то сигнал можно получить как обратное преобразование Фурье от спектральной функции

$$S(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)e^{j\omega t}d\omega. \qquad (6)$$

Связь между энергией сигнала E и его спектральной функцией $S(j\omega)$:

$$E = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)S(-j\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega. \qquad (7)$$

Квадрат модуля является четной функцией переменной ω, следовательно (7) можно переписать в виде

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega. \qquad (8)$$

Соотношение (8) носит название теоремы Парсеваля.

Следующие два соотношения носят название пары преобразований Гильберта

$$\sigma(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(\tau)}{t-\tau} d\tau, \qquad (9)$$

$$S(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(\tau)}{t-\tau} d\tau, \qquad (10)$$

где $\sigma(t)$ – сопряженный сигнал.

Комплексным сигналом, соответствующим данному физическому сигналу, называют комплексную функцию вида

$$\psi(t) = S(t) + j\sigma(t). \qquad (11)$$

Пример 1. [1, с.27]. Вычислить энергию и норму сигнала $S(t)$ (Рис. 1), представляющего собой импульс напряжения; форма импульса треугольная с высотой U и длительностью τ_u.

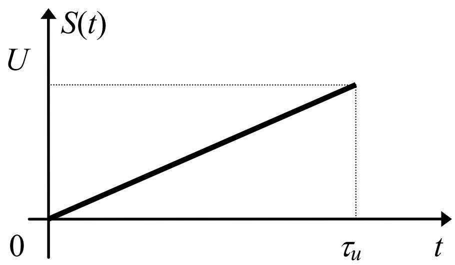

Рис. 1.

На интервале времени $[0,\ \tau_u]$ сигнал описывается функцией:

$$S(t) = \frac{U}{\tau_u} t.$$

Энергия сигнала: $E = \dfrac{U^2}{\tau_u^2}\displaystyle\int_0^{\tau_u} t^2 dt = U^2 \dfrac{\tau_u}{3}.$

Норма сигнала: $\|S\| = \sqrt{E} = U\sqrt{\tau_u/3}.$

Пример 2. [1, с.28]. Сигнал $S(t)$ (Рис. 2) представляет собой отрезок синусоиды, обращающейся в ноль на интервале $[-\infty,\ 0]$ и $[T,\ \infty]$. Высота импульса U известна. Выбрать амплитуду импульса $V(t) = const = A$ той же длительности, чтобы обеспечить минимальное расстояние между этими двумя сигналами.

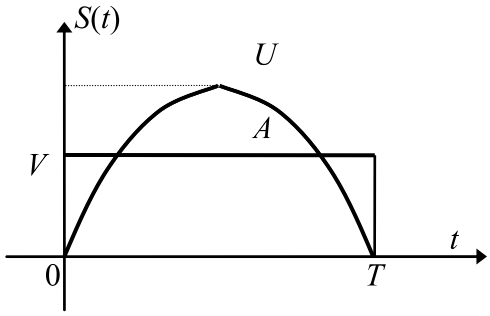

Рис. 2.

Сигнал $S(t)$ представляется формулой:

$$S(t) = U\sin\omega t = u\sin\frac{\pi}{T}t,\ 0 \le t \le T.$$

Квадрат расстояния между сигналами:

$$\rho^2(S,V) = \int_0^T (u\sin\frac{\pi}{T}t - A)^2\,dt = \frac{U^2T}{2} - \frac{4AUT}{\pi} + A^2T.$$

Исследование этого выражения на экстремум показывает, что минимальное расстояние будет достигаться, если

$$A = 2U/\pi \approx 0{,}637U.$$

При этом $\rho_{\min}^2 = U^2T(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi}) \approx 0{,}095U^2T,\ \rho_{\min} = 0{,}308U\sqrt{T}$.

Энергия синусоидального импульса $E = U^2\int_0^T \sin^2\frac{\pi t}{T}dt = \frac{U^2T}{2}$, его норма $\|S\| \approx 0{,}707U\sqrt{T}$.

Минимальное допустимое расстояние между рассматриваемыми сигналами составляет 44% от нормы синусоидального импульса.

2. Разложение сигналов по системам ортонормированных функций

Произвольный сигнал $S(t)$ может быть представлен в виде суммы элементарных функций, путем подбора коэффициентов a_i и функции $\varphi_i(t)$ так, чтобы

$$S(t) \approx \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i(t). \qquad (12)$$

Представление (12) может быть осуществлено либо простым подбором $\varphi_i(t)$ и a_i, либо путем разложения сигнала $S(t)$ по упорядоченной системе, в частности по системе ортонормированных (ортогональных) функций.

Если система функций

$$\psi_1(t),\ \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t) \qquad (13)$$

удовлетворяет на некотором отрезке времени $[t_1,\ t_2]$ условиям

$$\int_{t_1}^{t_2} \psi_i(t)\psi_k(t)dt = \overline{\psi_i(t)\psi_k(t)} = 0, \tag{14}$$

где $i = \overline{1,n}$; $k = \overline{1,n}$ и $i \neq k$, то ее называют системой ортогональных функций на отрезке $[t_1,\ t_2]$.

Если при этом также

$$\overline{\psi_k^2(t)} = \int_{t_1}^{t_2} \psi_k^2(t)dt = 1, \tag{15}$$

то систему (13) называют ортонормированной.

Если для заданной системы (13) $\overline{\psi_i^2(t)} = \alpha \neq 0$, то ее можно нормировать, умножив $\psi_i(t)$ на величину $1/\sqrt{\alpha}$. Таким образом, ортонормированной будет система

$$\psi_i^*(t) = \frac{\psi_i}{\sqrt{\alpha}},\ i = \overline{1,n}. \tag{16}$$

Простейшим примером ортогональных функций являются $\sin i\frac{2\pi}{T}t$ и $\cos k\frac{2\pi}{T}t$.

Заданный (аналитически или графически) сигнал можно разложить по системе ортонормированных (ортогональных) функций, если можно записать

$$S(t) \approx \sum_i a_i\psi_i(t) \tag{17}$$

и при конечном числе N членов в ряде разница между $S(t)$ и $\sum_i a_i\psi_i(t)$ будет достаточно мала. Одним из важных критериев величины этой разности является интеграл от квадрата разности сигнала и его разложения

$$\Delta = \int_{t_1}^{t_2} [S(t) - \sum_i a_i\psi_i(t)]^2 dt. \tag{18}$$

при этом говорят о среднеквадратической сходимости ряда $\sum_i a_i\psi_i(t)$ к сигналу (функции) $S(t)$.

В этом случае коэффициенты ряды определяются выражением

$$a_k = \int_{t_1}^{t_2} S(t)n_k(t)dt. \tag{19}$$

Замечание. Обобщая определения (14), (15), можно ввести понятие ортонормированных (ортогональных) функций с весом. Система функций (13) называется ортонормированной с весом $\omega(t)$, если выполняется условие

$$\int_{t_1}^{t_2} \psi_i(t)\psi_k(t)\omega(t)dt = \begin{cases} 0, i \neq k, \\ 1, i = k. \end{cases} \qquad (20)$$

Тогда коэффициенты a_k определяются из выражения

$$a_k = \int_{t_1}^{t_2} S(t)\psi_k(t)\omega(t)dt. \qquad (21)$$

Пример 3. Записать выражение для первых семи полиномов Лежандра первого рода. Показать, что они ортогональны на отрезке $[-1, 1]$. Определить выражения для ортогональных функций, полученных на основе полиномов Лежандра.

Полиномы Лежандра первого рода можно получить по формуле

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n}(t^2 - 1)^n$$

или по рекуррентному соотношению

$$nP_n(t) = (2n-1)tP_{n-1}(t) - (n-1)P_{n-2}(t).$$

Выражения для первых семи полиномов имеют вид

$$P_0(t) = 1,\ P_1(t) = t,\ P_2(t) = 1/2(3t^2 - 1),\ P_3(t) = 1/2(5t^3 - 3t),$$

$$P_4(t) = 1/8(35t^4 - 30t^2 + 3),\ P_5(t) = 1/8(63t^5 - 70t^3 + 15t),$$

$$P_6(t) = 1/16(231t^6 - 315t^4 + 105t^2 - 5).$$

Непосредственным интегрированием убеждаемся, что

$$\int_{-1}^{1} P_n(t)P_m(t)dt = 0,\ \text{при } n \neq m;\ \int_{-1}^{1} P_n^2(t)dt = \frac{2}{2n+1}.$$

Следовательно, полиномы Лежандра первого рода ортогональны на отрезке [-1, 1]. Ортонормированными будут функции вида

$$\widetilde{P}_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(t).$$

Пример 4.[2, с.38]. Представить в комплексной форме сигнал $S(t) = \dfrac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t}$.

Определим сопряженный сигнал в соответствии с (9)

$$\sigma(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_0 \tau}{\omega_0 \tau (t - \tau)} d\tau = -\frac{1}{\pi \omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_0 \tau}{\tau^2 - t\tau} d\tau.$$

С помощью таблицы интегралов определим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_0 \tau}{\tau^2 - t\tau} d\tau = \pi \frac{\cos \omega_0 t - 1}{t}.$$

Таким образом,

$$\sigma(t)=\frac{1-\cos\omega_0 t}{\omega_0 t}=-\frac{\sin^2\frac{\omega_0 t}{2}}{\omega_0 t/2}.$$

В соответствии с (11) комплексная форма сигнала

$$\psi(t)=\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0 t}-j\frac{\sin^2\frac{\omega_0 t}{2}}{\omega_0 t/2}.$$

Пример 5. [2, с.25]. Вычислить энергию сигнала $S(t)=Ae^{-\alpha t}$ в соответствии с определением и по теореме Парсеваля.

По определению энергии сигнала

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}S^2(t)dt=\int_{0}^{\infty}[Ae^{-\alpha t}]^2\,dt=\frac{A^2}{2\alpha}.$$

По теореме Парсеваля

$$E=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}S^2(\omega)d\omega,$$

где $S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}S(t)e^{-j\omega t}dt$ – спектральная плотность.

Вычислив $S(\omega)$, получим $S(\omega)=\dfrac{A}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}$. Тогда

$$E=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{A}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}\right)^2 d\omega=\frac{A^2}{\pi\alpha}\int_0^{\infty}\frac{1}{1+(\omega/\alpha)^2}d(\frac{\omega}{\alpha})=\frac{A^2}{2\alpha}.$$

3. Задачи для упражнений

1. Вычислить энергию и норму сигнала с прямоугольной формой огибающей. Сигнал существует на отрезке времени [0, τ] и описывается функцией $S(t)=U_0\cos(\omega_0 t+\varphi_0)$.

2. Вычислить энергию и норму сигнала косинусоидальной формы

$$S(t)=\begin{cases}0,\omega_0 t<-\pi/2,\\ U_0\cos\omega_0 t,-\pi/2\le\omega_0 t\le\pi/2,\\ 0,\omega_0 t>\pi/2.\end{cases}$$

3. Обобщите понятия энергии и нормы на векторные сигналы с произвольной размерностью N.

4. Сигнал $S(t)$ представляет собой треугольный симметричный импульс, сигнал $V(t)$ – вписанный в него импульс прямоугольной формы (Рис. 3).

Определить амплитуду прямоугольного импульса таким образом, чтобы минимизировать расстояние между этими двумя импульсами

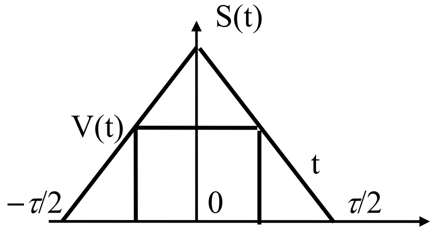

Рис. 3.

5. Покажите, что представление пилообразного сигнала (Рис. 4) рядом Фурье имеет вид $S(t)=\frac{A}{2}-\frac{A}{\pi}[\sin\omega_1 t+\frac{1}{2}\sin 2\omega_1 t+\frac{1}{3}\sin 3\omega_1 t+...]$.

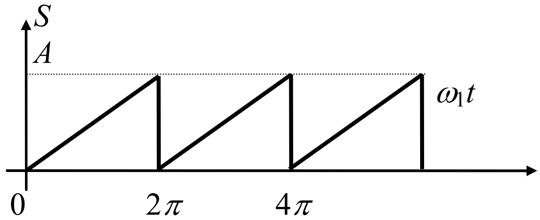

Рис. 4.

6. Вычислите спектральную плотность сигнала (Рис. 5)

$$S(t)=\begin{cases}0,\ t<t_1,\ t>t_2,\\ A\cos\omega_0 t,\ t_1\le t\le t_2.\end{cases}$$

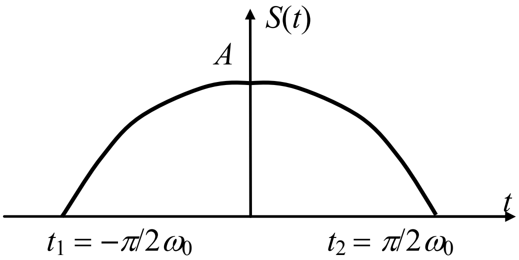

Рис. 5.

7. Запишите выражение для первых шести полиномов Чебышёва. Проверьте, что полиномы Чебышёва ортогональны с весом $P(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ на отрезке [-1, 1], то есть

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}T_n(t)T_m(t)dt=\begin{cases}0, n\ne m,\\ \pi/2, m=n\ne 0,\\ \pi, m=n=0.\end{cases}$$

Запишите выражение для полной ортонормированной системы функций, основанной на полиномах Чебышёва.

Указание. Полиномы Чебышёва определяются в соответствии с выражением

$$T_n(t) = \frac{(-2)^n n!}{(2n)!}\sqrt{1-t^2}\,\frac{d^{(n)}}{dt^n}(\sqrt{1-t^2})^{2n-1}.$$

При этом справедливо рекуррентное соотношение $T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t)$.

8. Запишите выражение для первых пяти полиномов Лагерра. Проверьте, что эти полиномы ортогональны на отрезке [0, ∞] с весом $P(t) = e^{-t}$, т.е.

$$\int_0^\infty L_n(t)L_m(t)e^{-t}dt = \begin{cases} 0, n \neq m, \\ (n!)^2, n = m. \end{cases}$$

Запишите выражение для ортонормированной системы на интервале [0, ∞], основанной на полиномах Лагерра.

Указание. Полиномы Лагерра определяются выражением

$$L_n(t) = (-1)^n e^t \frac{d^{(n)}}{dt^n}(t^n e^{-t}).$$

При этом $L_{n+1}(t) = (t - 2n - 1)L_n(t) - n^2 L_{n-1}(t)$.

9. Построить графики нескольких функций Хаара, определяемых выражением

$$X_n^k = \begin{cases} \sqrt{2^n}, \frac{2k-2}{2^{n+1}} \le t < \frac{2k-1}{2^{n+1}}, \\ -\sqrt{2^n}, \frac{2k-1}{2^{n+1}} \le t \le \frac{2k}{2^{n+1}} \end{cases}$$

и равных нулю при всех остальных t на отрезке [0, 1]. Проверить их ортогональность и ортонормированность.

10. Проверить, будет ли система тригонометрических функций кратных аргументов ортонормированной на отрезке [0, T].

$$n_0(t) = \frac{1}{\sqrt{T}},\ n_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\sin\frac{2\pi}{T}t,\ n_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\cos\frac{2\pi}{T}t,$$

$$n_3(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\sin 2\frac{2\pi}{T}t,\ n_4(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\cos 2\frac{2\pi}{T}t,\ ...$$

11. Вычислить коэффициенты a_k (19) ряда (17), если $\psi_k(t)$ – тригонометрические функции кратных аргументов, заданные на отрезке [0, T] или [$-T/2$, $T/2$].

12. Вычислить расстояние между двумя функциями:

а) полиномами Лагранжа;

б) полиномами Лагерра;

в) полиномами Чебышева;

г) функциями Хаара;

д) функциями Уолша.

13. Покажите, что функции Уолша образуют ортонормированную систему на отрезке [0, 1].

14. Приведите примеры видов квантования.

15. Что означает модуляция сигналов? Приведите пример.

16. Охарактеризуйте детерминированные и случайные сигналы, приведите примеры.

17. Сформулируйте теорему Котельникова. Каков ее физический смысл?

Литература

1. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высшая школа, 2000, 462 с.
2. Зиновьев А.Л., Филиппов Л.И. Введение в теорию сигналов и цепей. М.: Высшая школа, 1975. 261 с.
3. Иванов Б.А., Медведев В.С., Чемоданов Б.К., Ющенко А.С. Математические основы теории автоматического управления. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2008. Том 2. 616 с.
4. Кузин Л.Т. Теоретические основы кибернетики М.: Энергия, 1979. Т.2. 503 с.
5. Основы кибернетики / Под ред. К.А.Пупкова М.: Высшая школа. Ч.2. 1976.
6. Френкс Л. Теория сигналов. М.: Советское радио, 1974. 343 с.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ
В КИБЕРНЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине
«Б.1.2.9 Основы кибернетики»
направления подготовки
«01.03.02 "Прикладная математика и информатика"»
квалификация (степень) «бакалавр»»
Профиль «Математическое моделирование и вычислительная математика»

Составили: СТЕПАНОВ Михаил Федорович
Рецензент В.А. Коваль

Редактор

Подписано в печать		Формат 60x84 1/16
Бум. тип.	Усл. печ.л. 1,16 (1,25)	Уч.-изд.л. 1,1
Тираж 100 экз.	Заказ	Бесплатно

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.
410054, Саратов, Политехническая ул. 77
Отпечатано в РИЦ СГТУ имени Гагарина Ю.А. 410054, Саратов, Политехническая ул. 77