5. ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Рассмотрим вариационную задачу о нахождении экстремума функционала

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(x, \dot{x}, t)dt, \tag{5.1}$$

зависящего от скалярной функции $x(t)$, на которую не накладываются краевые условия. Определим необходимые условия экстремума функционала (5.1) в данной задаче с подвижными границами.

При этом в данном случае, при включении всех близких к экстремали кривых в однопараметрическое семейство

$$\tilde{x}(t, \alpha) = x(t) + \alpha\eta(t),$$

функционал будет зависеть не только от параметра α, но и от изменения краевых значений $t_0 + \delta t_0$ и $t_1 + \delta t_1$. Поэтому условия $\delta J = \left.\frac{dJ}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$ здесь недостаточно. Необходимо использовать более общие условия экстремума, которые выражаются в том, что если функционал достигает экстремума, то обращается в ноль первая вариация функционала δJ.

Вычислим вначале приращение ΔJ, которое получает функционал при условии, что функция $x(t)$ получает приращение $h(t)$, абсцисса левой граничной т очки t_0 получает приращение δt_0 и абсцисса правой граничной точки t_1 получает приращение δt_1 (рис. 5.1).

В этих условиях

$$\Delta J = \int_{t_0+\delta t_0}^{t_1+\delta t_1} F(x+h, \dot{x}+\dot{h}, t)dt - \int_{t_0}^{t_1} F(x, \dot{x}, t)dt.$$

Обозначим $F(x+h, \dot{x}+\dot{h}, t) = \tilde{F}$.

Разбивая весь интервал интегрирования на части, получим

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{F} - F)dt + \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} \tilde{F}dt - \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} \tilde{F}dt. \tag{5.2}$$

В этом выражении в виду малости δt_0 и δt_1 можно принять

$$\int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} \tilde{F}dt = F\Big|_{t=t_0} \delta t_0 + O(\delta t_0^2), \quad \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} \tilde{F}dt = F\Big|_{t=t_1} \delta t_1 + O(\delta t_1^2). \tag{5.3}$$

где $O(\delta t_0^2)$, $O(\delta t_1^2)$ - малые более высоких порядков малости, чем δt_0 и δt_1.

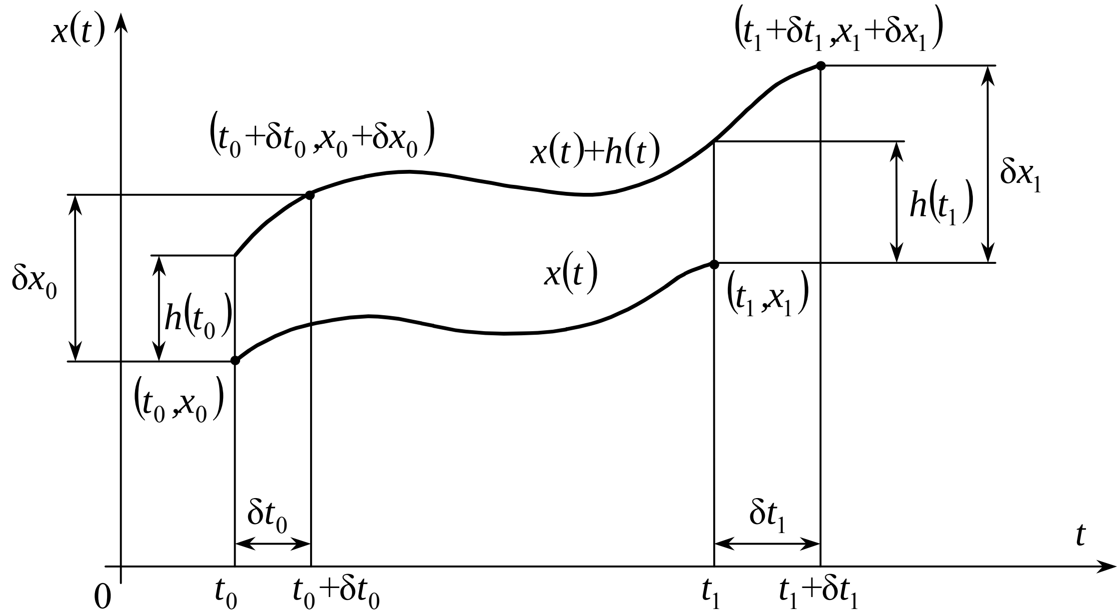

Рис. 5.1

Замечание. $\Delta J = J[\tilde{x}(t)] - J[x(t)]$. Так, если приращение функционала обусловлено только вариацией функции $x(t)$ в семействе $\tilde{x}(t,\alpha)$, то

$$\Delta J(\alpha) = \left.\frac{dJ}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} \alpha + \left.\frac{d^2 J}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=0} \frac{\alpha^2}{2!} + \ldots$$

и тогда первая вариация функционала есть $\delta J = \left.\frac{dJ}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} \alpha$.

Откуда и следовало необходимое условие экстремума в задаче с закрепленными концами в виде $\left.\frac{dJ}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0$.

Таким образом, для определения необходимых условий экстремума в данной задаче необходимо определить выражение для полной вариации функционала (5.1), вызванное не только вариацией функции $x(t)$, но и вариацией концов траектории.

Разложим функцию $\tilde{F}$ в первом слагаемом в ряд Тейлора в окрестности экстремали.

Тогда будем иметь

$$\tilde{F} = F + \frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{h} + O(h^2), \tag{5.4}$$

где $O(h^2)$ члены разложения более высоких порядков малости, чем $h(t)$.

Итак, с учетом выражений (5.3) и (5.4), линейная часть разложения функции ΔJ, то есть первая вариация функционала будет иметь вид $\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \dot{h} \right) dt - F\big|_{t=t_0} \delta t_0 + F\big|_{t=t_1} \delta t_1$ (5.5)

Интегрируя второе слагаемое в скобках по частям, находим

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h dt + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} h \Big|_{t_0}^{t_1} + F\big|_{t_1} \delta t_1 - F\big|_{t_0} \delta t_0 .$$

С точностью до бесконечно малых высшего порядка можно принять $h(t_0) = \delta x_0 - \dot{x} \delta t_0$, $h(t_1) = \delta x_1 - \dot{x} \delta t_1$.

Пояснение следует из рис.5.2.

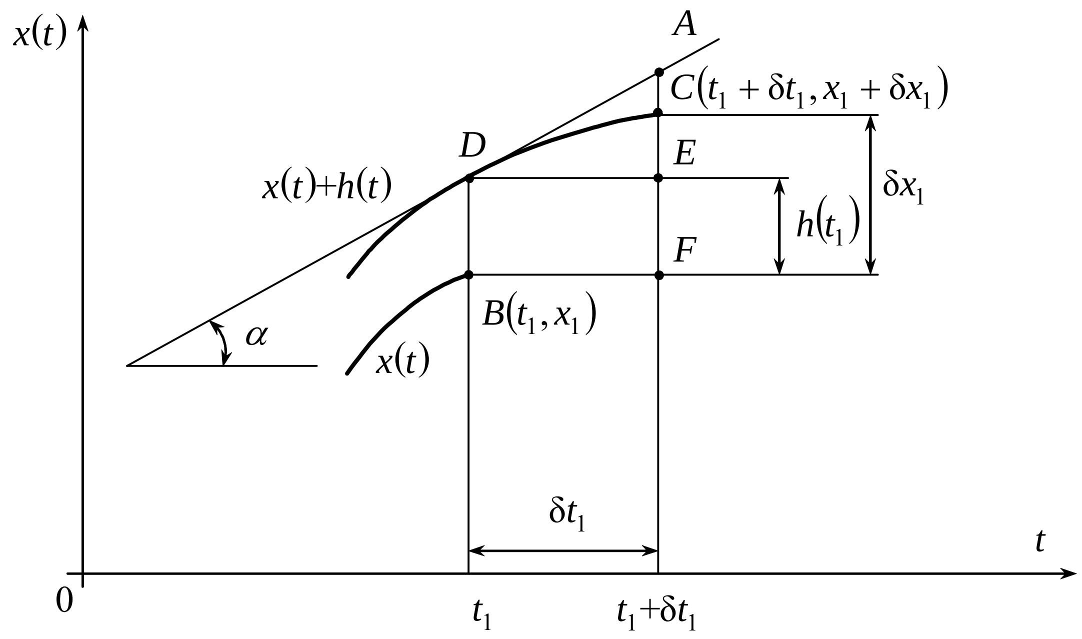

Рис.5.2

Из рис. 5.2 видно, что

$$FC = \delta x_1,\ BD = h(t_1),\ tg\alpha = \dot{x} = \frac{AE}{\delta t_1} \to AE = \dot{x} \delta t_1,$$

$$BD = FC - EC \approx FC - AE \quad \text{или} \quad h(t_1) \approx \delta x_1 - AE = \delta x_1 - \dot{x} \delta t_1 .$$

Аналогично получается выражение для $h(t_0)$.

Тогда окончательно можно записать следующее выражение для первой вариации функционала

$$\delta J = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) h(t)dt + \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right|_{t=t_1} \delta x_1 - \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right|_{t=t_0} \delta x_0 +$$
$$+ \left.\left(F - \dot{x}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)\right|_{t=t_1} \delta t_1 - \left.\left(F - \dot{x}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)\right|_{t=t_0} \delta t_0. \quad (5.6)$$

Если выбор граничных точек не стеснен никакими дополнительными условиями, то вариации координат этих точек $\delta t_0, \delta x_0, \delta t_1, \delta x_1$ независимы и тогда из необходимого условия экстремума $\delta J = 0$ вытекают следующие соотношения:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0; \quad (5.7)$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right|_{t=t_1} = 0; \quad \left.\left(F - \dot{x}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)\right|_{t=t_1} = 0; \quad (5.8)$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right|_{t=t_0} = 0; \quad \left.\left(F - \dot{x}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right)\right|_{t=t_0} = 0. \quad (5.9)$$

Первое уравнение представляет собой уравнение Эйлера для экстремалей. Решение его зависит от двух постоянных интегрирования, которые в задаче с закрепленными концами выбирались из граничных условий.

В данной задаче граничные условия отсутствуют и выбор граничных точек необходимо производить на основании соотношений (5.8), (5.9). Причем (5.8) определяют условия на правом конце, а (5.9) – на левом.

Рассмотрим один частный случай, когда граничные точки должны лежать на некоторых кривых $\varphi_0(t)$ и $\varphi_1(t)$

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_0 = \varphi_0(t). \quad (5.10)$$

В этом случае вариации δt и δx оказываются связанными между собой. С точностью до малых высшего порядка можно принять

$$\delta x_1 = \dot{\varphi}_1 \delta t_1; \; \delta x_0 = \dot{\varphi}_0 \delta t_0;$$

Если считать δt_0 и δt_1 произвольными, то на основе выражения (5.6) получим

$$\left[F-\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(\dot{x}-\dot{\varphi}_1)\right]\Bigg|_{t=t_1}=0; \qquad (5.11)$$

$$\left[F-\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(\dot{x}-\dot{\varphi}_0)\right]\Bigg|_{t=t_0}=0. \qquad (5.12)$$

Соотношения (5.11), (5.12) называются условиями трансверсальности. Они устанавливают связь между угловыми коэффициентами $\dot{\varphi}$ и $\dot{x}$ кривых φ_0, φ_1, x в граничных точках. Совместно с уравнениями заданных кривых (5.10) эти условия определяют постоянные интегрирования в уравнении Эйлера и дают возможность найти положение концов экстремали и их наклон по отношению к заданным кривым.

Если свободна одна граничная точка, например правая, то координаты $\delta t_0, \delta x_0$ не варьируются и $\delta x_0=\delta t_0=0$. Для определения постоянных интегрирования используются граничные условия, а левой точке и условия трансверсальности для правой точки.

Если левая кривая задана уравнением $\omega_0(x,t)=0$, а правая – уравнением $\omega_1(x,t)=0$, то условия трансверсальности принимают вид:

$$\frac{F-\dot{x}F_{\dot{x}}}{\omega_{0t}}=\frac{F_{\dot{x}}}{\omega_{0x}} \text{ (на левом конце экстремали);} \quad (5.13)$$

$$\frac{F-\dot{x}F_{\dot{x}}}{\omega_{1t}}=\frac{F_{\dot{x}}}{\omega_{1x}} \text{ (на правом конце экстремали),} \quad (5.14)$$

где $\omega_{it}=\dfrac{\partial \omega_i(x,t)}{\partial t}, \quad \omega_{ix}=\dfrac{\partial \omega_i(x,t)}{\partial x}, \quad i=0,1.$

Если перемещение концов экстремали не обусловлено какими – либо ограничениями, то на концах экстремали выполняются условия

$$F=0,\ \ F_{\dot{x}}=0. \qquad (5.15)$$

Из условий трансверсальности и определяются две произвольные постоянные c_1, c_2, входящие в уравнение Эйлера.

Пример 5.1. Найти условия трансверсальности в точках t_0, t_1 для функционала вида $\qquad J=\int\limits_{t_0}^{t_1} A(t,x)\sqrt{1+\dot{x}^2}dt.$

Условие трансверсальности (5.12)

$$[F + F_{\dot{x}}(\dot{\varphi}_0 - \dot{x})]\Big|_{t = t_0} = 0$$

имеет в данном случае вид

$$\left[A(t,x)\sqrt{1+\dot{x}^2} + \frac{A(t,x)\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}(\dot{\varphi}_0 - \dot{x}) \right]\Bigg|_{t = t_0} = 0$$

или

$$\left[\frac{A(t,x)(1+\dot{\varphi}_0\dot{x})}{\sqrt{1+\dot{x}^2}} \right]\Bigg|_{t = t_0} = 0.$$

Предполагая, что $A(t,x) \neq 0$ в граничной точке, получим

$$[1+\dot{\varphi}_0\dot{x}]\Big|_{t = t_0} = 0 \text{ или } \dot{x}(t_0) = -\frac{1}{\dot{\varphi}_0(t_0)}. \qquad (5.16)$$

Аналогично на втором конце $\dot{x}(t_1) = -\dfrac{1}{\dot{\varphi}_1(t_1)}$. (5.17)

Условия (5.16), (5.17) означают, что экстремаль ортогональна к кривым $\varphi_0(t), \varphi_1(t)$, то есть пересекает их под прямым углом.

Пример 5.2. Исследовать на экстремум функционал

$$J = \int_0^{t_1} \frac{\sqrt{1+\dot{x}^2}}{t} dt,$$

причём $x(0) = 0$, а $x_1 = t - 10$.

Функция F зависит лишь от $\dot{x}$ и t: $F = F(t, \dot{x})$.

В этом случае уравнение Эйлера приобретает вид $\dfrac{d}{dt} F_{\dot{x}}(t,\dot{x}) = 0$ и, следовательно, имеет первый интеграл $F_{\dot{x}}(t,\dot{x}) = c_1$.

В рассматриваемом случае получим

$$\frac{\dot{x}}{t\sqrt{1+\dot{x}^2}} = c_1. \qquad (5.18)$$

Это уравнение проще всего интегрируется, если ввести параметр, полагая $\dot{x} = tg\, u$,

тогда

$$t = \frac{\dot{x}}{c_1\sqrt{1+\dot{x}^2}} = \frac{1}{c_1}\frac{tg\, u}{\sqrt{1+tg^2\, u}} = \frac{1}{c_1}\sin u$$

или

$$t = \bar{c}_1 \sin u, \qquad (5.19)$$

где $\bar{c}_1 = \dfrac{1}{c_1}$.

Так как $\dfrac{dx}{dt} = tg\ u$, то $\qquad dx = tg\ u \cdot dt$. $\qquad$ (5.20)

Из равенства (5.19) следует, что $dt = \bar{c}_1 \cos u\, du$. Подставим это выражение в (5.20)

$$dx = tgu \cdot \underbrace{\bar{c}_1 \cdot \cos u du}_{dt} = \bar{c}_1 \cdot \sin u du.$$

Интегрируя, получаем $x = -\bar{c}_1 \cos u + c_2$. Итак,

$$t = \bar{c}_1 \sin u,\ x - c_2 = -\bar{c}_1 \cos u. \qquad (5.21)$$

Исключим u, возведя обе части соотношений (5.21) в квадрат и складывая их: $\qquad t^2 + (x - c_2)^2 = \bar{c}_1^2$. $\qquad$ (5.22)

Итак, интегральными кривыми уравнения Эйлера являются окружности $\quad t^2 + (x - c_2)^2 = \bar{c}_1^2$.

Определим c_1, c_2. Первое ограничение $x(0) = 0$ даёт $c_1 = c_2$ (впредь вместо $\bar{c}_1$ будем писать c_1).

Так как условие трансверсальности для данного функционала сводится к условию ортогональности (см. пример 5.1), то прямая $x_1 = t - 10$ должна быть диаметром окружности и, следовательно, центр искомой окружности находится в точке пересечения этой прямой с осью абсцисс. Следовательно, $\quad (t-10)^2 + x^2 = 100$ или $x = \pm\sqrt{20t - t^2}$.

Итак, экстремум может достигаться лишь на дугах окружности

$$x = \sqrt{20t - t^2} \text{ и } x = -\sqrt{20t - t^2}.$$

Пример 5.3. Пусть задан функционал

$$J = \int_0^t (x^2 + \dot{x}^2) dt \qquad (5.23)$$

(определённый интеграл с переменным верхним пределом).

Нужно определить экстремали этого функционала, удовлетворяющие начальному условию (неподвижная граница на левом конце)

$$x(0) = 0 \qquad (5.24)$$

и подвижной границе на правом конце $\qquad \varphi_1(t) = t^2$. $\qquad$ (5.25)

Решение уравнения Эйлера, составленного для функционала (5.23), имеет вид $\qquad x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t$. $\qquad$ (5.26)

Условие (5.24) позволяет найти связь между произвольными постоянными в выражении (5.26) из равенства $x(0)=c_1+c_2=0$, откуда следует

$$c_2=-c_1. \tag{5.27}$$

Для отыскания аналитического представления для произвольных постоянных следует использовать условие трансверсальности. Поскольку подвижная граница на правом конце является функцией времени и не зависит от x, условие трансверсальности (5.11) в рассматриваемом случае имеет вид:

$$x^2+\dot{x}^2+(2t-\dot{x})\cdot 2\dot{x}=0 \tag{5.28}$$

На основании соотношений (5.26) и (5.27) представим выражение (5.28) в виде

$$-4c_1[c_1+t(e^{-t}+e^{t})]=0. \tag{5.29}$$

Исключая тривиальное решение $c_1=0$, получим

$$c_1=-c_2=-t(e^{-t}+e^{t}). \tag{5.30}$$

Окончательно экстремали функционала (5.23), удовлетворяющие условиям на концах (5.24), (5.25), можно записать в виде

$$x=-t(e^{-2t}+1)+t(e^{2t}+1). \tag{5.31}$$

Пример 5.4. Решить задачу примера 5.3 при условии, что подвижная граница на правом конце определяется уравнением

$$\omega_1=x-t^2=0, \tag{5.32}$$

то есть, вместо условия (5.25) имеем условие (5.32).

Поскольку подвижная граница на правом конце является функцией x,t, то условие трансверсальности (5.14) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{x^2+\dot{x}^2-\dot{x}2\dot{x}}{-2t}=\frac{2\dot{x}}{1}, \tag{5.33}$$

так как $F_{\dot{x}}=2\dot{x},\ \omega_{1t}=\dfrac{\partial\omega_1}{\partial t}=-2t,\ \omega_{1x}=\dfrac{\partial\omega_1}{\partial x}=1.$

Откуда следует

$$-c_1[c_1+t(e^{-t}+e^{t})]=0. \tag{5.34}$$

Исключая тривиальное решение (5.34) $c_1=0$, получим

$$c_1=-c_2=-t(e^{t}+e^{-t}).$$

Таким образом, экстремаль функционала (5.23), удовлетворяющая условиям на концах (5.24), (5.32), имеет вид

$$x = -t(e^{-2t} + 1) + t(e^{2t} + 1). \qquad (5.35)$$

Пример 5.5. Найти экстремали функционала

$$J = \int_0^t (x_1^2 + \dot{x}_1^2 + x_2^2 + \dot{x}_2^2)dt, X \in R^2, \qquad (5.36)$$

удовлетворяющие неподвижным границам на левом конце

$$x_1(0) = x_2(0) = 0 \qquad (5.37)$$

и подвижным границам на правом конце

$$\varphi_{11}(t) = t^2, \varphi_{21}(t) = t^3. \qquad (5.38)$$

Экстремаль $x_1(t)$, являющаяся компонентой вектора

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},$$

получена при решении примера 5.3 в виде (5.31).

Выполняя выкладки, аналогичные проделанным при решении примера 5.3, получим экстремаль $x_2(t)$, определяемую следующим выражением

$$x_2(t) = 1.5[-t^2(e^{-2t} + 1) + t^2(e^{2t} + 1)]. \qquad (5.39)$$

Соотношения (5.31), (5.39) и решают поставленную задачу.

Пример 5.6. Найти экстремаль функционала

$$J = \int_0^T (\dot{x}^2 - x + 1)dt \qquad (5.40)$$

при условии $x(0) = 0$. (5.41)

В данном случае перемещение правой границы экстремали не обусловлено какими-либо ограничениями, поэтому на правом конце выполняются условия:

$$F(T) = 0, \; F_{\dot{x}}(T) = 0. \qquad (5.42)$$

Уравнение Эйлера в данном случае имеет вид $2\ddot{x} + 1 = 0$ или

$$\ddot{x} = -\frac{1}{2}. \qquad (5.43)$$

Общее решение этого дифференциального уравнения

$$x(t) = -\frac{t^2}{4} + c_1 t + c_2 . \qquad (5.44)$$

Из условия на левом конце (5.41) $x(0) = 0$ получаем, что $c_2 = 0$.

Для определения неизвестных c_1 и T имеем два условия (5.42).

Первое соотношение (5.42) даёт

$$\dot{x}^2(T) - x(T) + 1 = 0 . \qquad (5.45)$$

Второе условие (5.42) даёт $\qquad 2\dot{x}(T) = 0 \to \dot{x}(T) = 0 . \qquad (5.46)$

Так как $\dot{x} = -\frac{1}{2}t + c_1$, то $\dot{x}^2 = \left(-\frac{1}{2}t + c_1\right)^2$ и выражение (5.45) принимает вид

$$\left(-\frac{1}{2}T + c_1\right)^2 - \left(-\frac{T^2}{4} + c_1 T + c_2\right) + 1 = 0 . \qquad (5.47)$$

Из выражения (5.47) получаем $\quad -\frac{1}{2}T + c_1 = 0 . \qquad (5.48)$

Решая совместно уравнения (5.47), (5.48), получим $c_1 = 1, T = 2$.

Таким образом, в задаче имеется единственная экстремаль

$$x(t) = -\frac{t^2}{4} + t , \qquad (5.49)$$

рассматриваемая на отрезке времени $[0,2]$.

Значение функционала на этой экстремали

$$J = \int_0^T (\dot{x}^2 - x + 1)dt = \int_0^2 \left[\left(1 - \frac{t}{2}\right)^2 - \left(t - \frac{t^2}{4}\right) + 1\right] dt = \frac{(T-2)^3}{6} + \frac{4}{3} . \quad (5.50)$$

Пример 5.7. Рассмотрим корабль, терпящий аварию; ему важно в кратчайший срок достичь берега, любой точки береговой черты. Здесь положение второго конца экстремали, точки встречи корабля с берегом, заранее неизвестно и должно быть определено в ходе решения.

Длина кривой между точками a и b определяется функционалом

$$J = \int_a^b \sqrt{1 + \dot{x}^2}\, dt . \qquad (5.51)$$

Данный функционал относится к типу функционалов, рассмотренных в примере 5.1 и, следовательно, к решению данного примера применимы результаты примера 5.1, а именно экстремаль (путь движения) ортогональна кривой на конце интервала (линия берега).

Таким образом, для достижения берега в кратчайший срок корабль должен двигаться по прямой, перпендикулярной к береговой черте.

Пример 5.8. Рассмотрим задачу поворота вала двигателя на заданный угол при минимальном расходе энергии:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = u; \end{cases}$$

$$J = \int_0^1 u^2 dt \to \min;$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0;\ x_1(1) = 1.$$

Задача относится к типу задач, рассмотренных в п. 3.2 и отличается только тем, что правый конец не закреплён: координата $x_2(1)$ не фиксирована (скорость в конечный момент не фиксирована).

Уравнения Эйлера-Лагранжа и их решения получаются такими же, что и в п. 3.2.

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1 = c_1; \\ &\lambda_2 = -c_1 t + c_2; \\ &u = \frac{1}{2}(-c_1 t + c_2); \\ &x_2 = \frac{1}{2}(-c_1 \frac{t^2}{2} + c_2 t) + c_3; \\ &x_1 = -\frac{c_1}{12} t^3 + \frac{c_2}{4} t^2 + c_3 t + c_4. \end{aligned}\right\} \quad (5.52)$$

В данном случае нужно использовать второе условие для переменной x_2

$$F_{\dot{x}}\Big|_{t=1}=0$$

(первое условие $F=0$ не используется, в отличие от примера 5.6, так как в данном случае верхний предел в функционале задан).

Функция F в данном примере имеет вид (функция Лагранжа)

$$F=u^2+\lambda_1(\dot{x}_1-x_2)+\lambda_2(\dot{x}_2-u).$$

Откуда

$$F_{\dot{x}_2}=\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2}=\lambda_2(t).$$

Поэтому условие трансверсальности $F_{\dot{x}_2}\Big|_{t=1}=0$ принимает вид

$$\lambda_2(1)=0. \tag{5.53}$$

В этом случае из второго уравнения (5.52) следует ($t=1$):

$$\lambda_2(1)=-c_1\cdot 1+c_2\overset{(4.53)}{=}0. \tag{5.54}$$

Откуда

$$c_1=c_2. \tag{5.55}$$

С учётом выражения (5.55) имеем из системы уравнений (5.52):

$$\left.\begin{aligned}&\lambda_2=c_1(1-t);u=\frac{1}{2}c_1(1-t);x_2=\frac{1}{2}c_1(t-\frac{t^2}{2})+c_3;\\&x_1=\frac{1}{4}c_1(t^2-\frac{t^3}{3})+c_3t+c_4.\end{aligned}\right\} \tag{5.56}$$

Из последних двух выражений для x_1 и x_2, используя начальное условие $x_1(0)=x_2(0)=0$, получим что $c_3=c_4=0$, поэтому

$$x_1=\frac{c_1}{4}\left(t^2-\frac{t^3}{3}\right);x_2=\frac{c_1}{2}\left(t-\frac{t^2}{2}\right).$$

Используя граничное условие для x_1: $x_1(1)=1$, имеем

$$1 = \frac{c_1}{4}\left(1 - \frac{1}{3}\right) \text{ или } c_1 = 6.$$

Окончательно, с учётом $c_1 = c_2 = 6, c_3 = c_4 = 0$, оптимальное управление и оптимальные траектории имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &u^0(t) = 3(1-t); \\ &x_1^0(t) = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t^2; \\ &x_2^0(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 3t. \end{aligned}\right\}$$