4. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДАМИ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

4.1. Оптимальное управление линейным многомерным объектом при квадратичном функционале

Объект управления описывается системой линейных дифференциальных уравнений, векторно-матричный вид которых

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t), \tag{4.1}$$

$X \in R^n$, $U \in R^m$, A, B - матрицы чисел, размерами $n \times n$ и $n \times m$ соответственно.

Критерий оптимальности – квадратичный функционал

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (X^T QX + X^T NU + U^T MU)dt, \tag{4.2}$$

где Q - симметричная, неотрицательно-определенная матрица чисел, размерами $n \times n$; M - симметричная, положительно-определенная матрица чисел, размерами $n \times m$.

Замечание. Квадратная матрица N называется положительно (неотрицательно) определенной, если скалярная величина $X^T NX$ положительна (неотрицательна) для всех значений вектора x_i, отличных от нуля.

Начальное положение (состояние) объекта: $X(t_0) = X_0$. (4.3)

Конечное положение (состояние) объекта: $X(t_1) = X_1$. (4.4)

Постановка задачи. Определить оптимальное управление $U^0(t)$, переводящее объект (4.1) из начального положения (4.3) в конечное положение (4.4), так, чтобы функционал (4.2) принимал экстремальное значение. Определить также оптимальную траекторию $X^0(t)$, соответствующую оптимальному управлению.

Предварительные замечания. Справедливы следующие правила векторного дифференцирования:

$$\frac{\partial}{\partial X}\left(X^T QX\right) = 2X^T Q \;;$$

$$\frac{\partial}{\partial X}\left(X^T NU\right) = \frac{\partial}{\partial X}\left(U^T N^T X\right) = U^T N^T;$$

$$\frac{\partial}{\partial U}\left(X^T NU\right) = X^T N \,.$$

Решение задачи.

Составляется функция Лагранжа

$$L = X^T Q X + U^T M U + X^T N U + \Lambda^T (\dot{X} - AX - BU). \quad (4.5)$$

Записываются уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial X} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = 0; \\ &\frac{\partial L}{\partial U} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{U}} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (4.6)$$

Вычисляются составляющие соотношений (4.6)

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 2X^T Q + U^T N^T - \Lambda^T A \ ; \ \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = \Lambda^T \to \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = \dot{\Lambda}^T \ ;$$

$$\frac{\partial L}{\partial U} = 2U^T M + X^T N - \Lambda^T B \ ; \ \frac{\partial L}{\partial \dot{U}} = 0 \to \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{U}} = 0 .$$

Тогда уравнения Эйлера-Лагранжа (4.6) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} &2X^T Q + U^T N^T - \Lambda^T A - \dot{\Lambda}^T = 0; \\ &2U^T M + X^T N - \Lambda^T B = 0. \end{aligned}\right\} \quad (4.7)$$

К последним уравнениям добавляются уравнение связи (уравнение объекта) (4.1), получается следующая система уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\dot{X} = AX + BU; \\ &\dot{\Lambda}^T = 2X^T Q + U^T N^T - \Lambda^T A; \\ &2U^T M + X^T N - \Lambda^T B = 0. \end{aligned}\right\} \quad (4.8)$$

Транспонируя последние два уравнения (4.8), с учетом того, что $(P + R)^T = P^T + R^T$, $(PR)^T = R^T P^T$, получим

$$\left.\begin{aligned} &\dot{X} = AX + BU; \\ &\dot{\Lambda} = 2Q^T X + NU - A^T \Lambda; \\ &2M^T U + N^T X - B^T \Lambda = 0. \end{aligned}\right\} \quad (4.9)$$

Соотношение (4.9) – это система $2n + m$ уравнений для определения $2n + m$ неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n, u_1, u_2, ..., u_m, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.

Из последнего уравнения (4.9) выразим U

$$U = \frac{1}{2}\left(M^T\right)^{-1}\left(B^T \Lambda - N^T X\right) \quad (4.10)$$

и подставим в первые два уравнения (4.9). После преобразований, получим

$$\dot{X}(t)=\left[A-\frac{1}{2}B(M^T)^{-1}N^T\right]X(t)+\frac{1}{2}B(M^T)^{-1}B^T\Lambda(t);$$
$$\dot{\Lambda}(t)=\left[2Q^T-\frac{1}{2}N(M^T)^{-1}N^T\right]X(t)+\left[\frac{1}{2}N(M^T)^{-1}B^T-A^T\right]\Lambda(t). \qquad (4.11)$$

Введем вектор $Z(t)=\begin{bmatrix} x(t) \\ \Lambda(t) \end{bmatrix}$. Это вектор, размерами $2n\times 1$.

Тогда систему (4.11) можно переписать в виде

$$\dot{Z}(t)=PZ(t), \qquad (4.12)$$

где P - блочная матрица, имеющая вид

$$P=\begin{bmatrix} A-\frac{1}{2}B(M^T)^{-1}N^T & \frac{1}{2}B(M^T)^{-1}B^T \\ 2Q^T-\frac{1}{2}N(M^T)^{-1}N^T & \frac{1}{2}N(M^T)^{-1}B^T-A^T \end{bmatrix}. \qquad (4.13)$$

Решение уравнения (4.12) в соответствии с формулой Коши

$$\begin{bmatrix} X(t) \\ \Lambda(t) \end{bmatrix}=Z(t)=e^{P(t-t_0)}Z(t_0)=e^{P(t-t_0)}\begin{bmatrix} X(t_0) \\ \Lambda(t_0) \end{bmatrix}. \qquad (4.14)$$

Вычислив $e^{P(t-t_0)}$, ее можно представить следующим образом

$$e^{P(t-t_0)}=\begin{bmatrix} e_{11}(t) & e_{12}(t) \\ e_{21}(t) & e_{22}(t) \end{bmatrix}, \qquad (4.15)$$

где $e_{11}(t), e_{12}(t), e_{21}(t), e_{22}(t)$ функциональные матрицы размерами $n\times n$ (сама матричная экспоненциальная функция $e^{P(t-t_0)}$ имеет размер $2n\times 2n$).

Тогда из выражений (4.14), (4.15)

$$\left.\begin{aligned} X(t)&=e_{11}(t)X(t_0)+e_{12}(t)\Lambda(t_0); \\ \Lambda(t)&=e_{21}(t)x(t_0)+e_{22}(t)\Lambda(t_0). \end{aligned}\right\} \qquad (4.16)$$

Из системы (4.16) следует, что для нахождения $X(t)$ и $\Lambda(t)$ необходимо знать начальные значения $X(t_0)$ и $\Lambda(t_0)$.

$X(t_0)$ (начальное положение объекта) задано (4.3), $\Lambda(t_0)$ неизвестно. Таким образом, как и в п. 2.2 возникает “проблема начального значения множителей Лагранжа”. В данном частном случае эту “проблему” можно разрешить следующим образом. Запишем соотношения (4.16) для $t=t_1$

$$\left.\begin{aligned} X(t_1) &= e_{11}(t_1)X(t_0) + e_{12}(t_1)\Lambda(t_0); \\ \Lambda(t_1) &= e_{21}(t_1)X(t_0) + e_{22}(t_1)\Lambda(t_0). \end{aligned}\right\} \tag{4.17}$$

$e_{11}(t_1), e_{12}(t_1), e_{21}(t_1), e_{22}(t_1)$ становятся известными числовыми матрицами. Поэтому из первого уравнения (4.17), при $\det e_{12}(t_1) \neq 0$, можно определить начальные условия множителей Лагранжа

$$\Lambda(t_0) = e_{12}^{-1}(t_1)\left[X(t_1) - e_{11}(t_1)X(t_0)\right]. \tag{4.18}$$

Таким образом, $\Lambda(t_0)$ определяется из знания начального и конечного положения объекта.

Теперь можно записать из сотношений (4.16)

$$\left.\begin{aligned} X^0(t) &= e_{11}(t)X(t_0) + e_{12}(t)\Lambda(t_0); \\ \Lambda^0(t) &= e_{21}(t)X(t_0) + e_{22}(t)\Lambda(t_0). \end{aligned}\right\} \tag{4.19}$$

$X^0(t)$ - оптимальная траектория.

Оптимальное управление определяется из выражения (4.10)

$$U^0(t) = \frac{1}{2}(M^T)^{-1}\left[B^T\Lambda^0(t) - N^T X^0(t)\right]. \tag{4.20}$$

4.2. Оптимальное управление двигателем постоянного тока при минимуме энергии управления

(решение при помощи функции Лагранжа)

Требуется провернуть вал двигателя за время t_1 из нулевого начального положения $\varphi(0) = 0$ в заданное конечное положение $\varphi(t_1) = \varphi^*$. Скорость вращения вала равна нулю, в начальный момент $\omega(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$ и, во избежание перехода через заданное состояние по инерции, должна быть также равной нулю и в момент окончания управления $\omega(t_1) = \dot{\varphi}(t_1) = 0$. При этом расход энергии должен быть минимальным.

Уравнение двигателя постоянного тока

$$G\ddot{\varphi} = M - M_C, \tag{4.21}$$

где G – момент инерции вращающейся части двигателя; φ – угол поворота вала двигателя; $M = i_Я K_Ф Ф$ – вращающий момент; $i_Я$ – ток в якорной цепи; $K_Ф$ – конструктивная составляющая; $Ф$ – магнитный поток; M_C – момент сопротивления.

Уравнение (11.7) можно записать в виде:

$$\ddot{\varphi} = \frac{K_{\Phi}\Phi}{G} i_{Я} - \frac{M_C}{G}. \qquad (4.22)$$

Примем за управление ток в якорной цепи, то есть $u = i_{Я}$ и введём обозначения $b = \frac{K_{\Phi}\Phi}{G}, u_C = \frac{M_C}{G}$.

Тогда уравнение двигателя примет вид $\ddot{\varphi} = bu - u_C$. (4.23)

Путём введения переменных $x_1 = \varphi, x_2 = \dot{\varphi}$ уравнение двигателя можно привести к нормальной форме Коши

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = bu - u_C. \end{cases} \qquad (4.24)$$

Энергия пропорциональна интегралу от квадрата управления (силы тока). Так как постоянный множитель перед функционалом не влияет на решение вариационной задачи, за критерий оптимальности принимается интеграл

$$J = \int_0^{t_1} u^2 dt, \qquad (4.25)$$

где t_1 – задано.

Ограничение на управление не учитывается.

Таким образом, поставленная задача сводится к задаче Лагранжа (4.1) – (4.4) с функционалом (4.25).

Уравнения объекта
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = bu - u_c. \end{cases} \qquad (4.26)$$

Граничные условия $x_1(0) = x_2(0) = 0$, (4.27)

$$x_1(t_1) = x_1^* = \varphi^*, \ x_2(t_1) = 0. \qquad (4.28)$$

Рассмотрим вначале случай, когда $u_C = 0, b = 1$.

Решение.

Составим функцию Лагранжа (11.5)

$$L = u^2 + \lambda_1(\dot{x}_1 - x_2) + \lambda_2(\dot{x}_2 - u). \qquad (4.29)$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа имеют вид ($n = 2$, $m = 1$)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial u} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{u}} = 0. \end{cases} \qquad (4.30)$$

Вычислим производные в уравнениях (4.30)

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \lambda_1; \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = -\lambda_1; \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = \lambda_2; \quad \frac{\partial L}{\partial u} = 2u - \lambda_2;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = 0; \ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \dot{\lambda}_1; \ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = \dot{\lambda}_2; \ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = 0.$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа (4.30) примут вид

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = 0; \\ \dot{\lambda}_2 + \lambda_1 = 0; \\ 2u - \lambda_2 = 0. \end{cases} \qquad (4.31)$$

Добавив к ним уравнения объекта, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = 0; \\ \dot{\lambda}_2 + \lambda_1 = 0; \\ 2u - \lambda_2 = 0; \\ \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = u. \end{cases} \qquad (4.32)$$

Из первого уравнения (4.32) $\lambda_1 = c_1 = const$.

Из второго уравнения (4.32) $\dot{\lambda}_2 = -c_1 \to \lambda_2 = -c_1 t + c_2$.

Из третьего уравнения (4.32) $u = \dfrac{1}{2}\lambda_2 = \dfrac{1}{2}(-c_1 t + c_2)$.

Из четвёртого уравнения (4.32)

$$\dot{x}_1 = x_2 \to x_1 = -\frac{c_1}{12}t^3 + \frac{c_2}{4}t^2 + c_3 t + c_4,$$

так как из пятого уравнения (4.32)

$$\dot{x}_2 = u \to \dot{x}_2 = \frac{1}{2}(-c_1 t + c_2) \to x_2 = \frac{1}{2}(-\frac{c_1}{2}t^2 + c_2 t) + c_3.$$

Постоянные c_1, c_2, c_3, c_4 определяются из граничных условий (4.27), (4.28). Из условий (4.27) с учётом выражений для x_1, x_2 имеем $c_3 = c_4 = 0$, а из условий (4.28)
$$\begin{cases} x_1^* = -\dfrac{c_1 t_1^3}{12} + \dfrac{c_2 t_1^2}{4}; \\ 0 = -\dfrac{1}{4}c_1 t_1^2 + \dfrac{1}{2}c_2 t_1. \end{cases}$$

Откуда $c_1 = \dfrac{24 x_1^*}{t_1^3}$, $c_2 = \dfrac{12 x_1^*}{t_1^2}$.

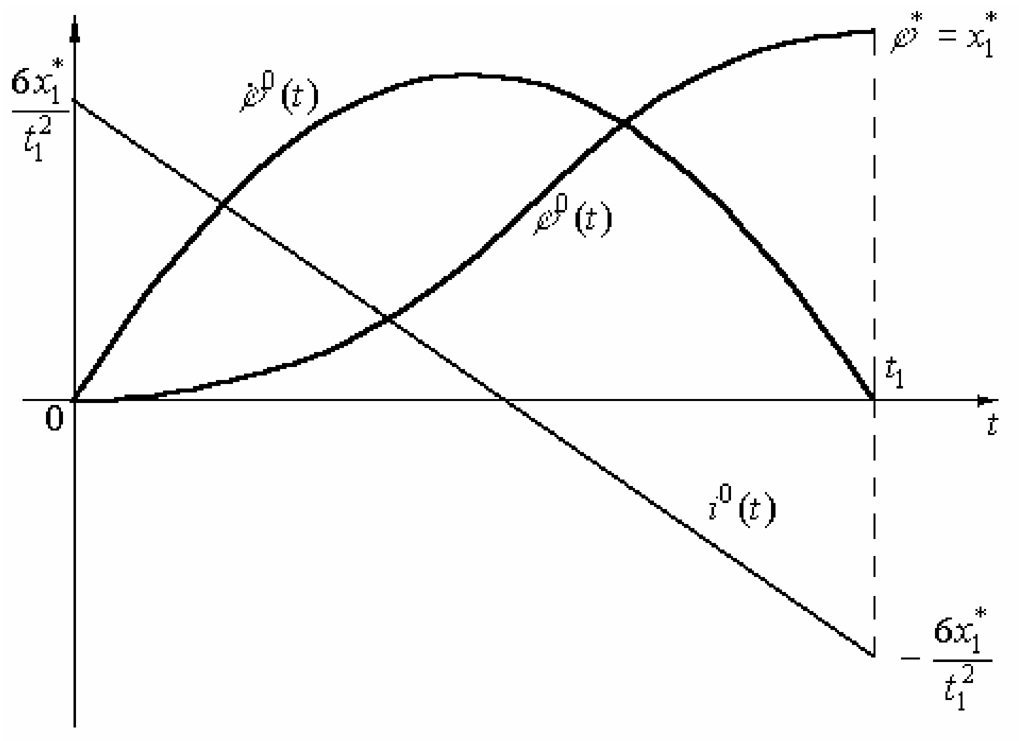
Подставляя значения c_1, c_2, c_3, c_4 и выражения для $u(t), x_1(t), x_2(t)$, получим оптимальное уравнение и оптимальные траектории

$$u^0(t) = \frac{1}{2}\left(-\frac{24 x_1^*}{t_1^3}t + \frac{12 x_1^*}{t_1^2}\right) = \frac{6 x_1^*}{t_1^2}\left(1 - \frac{2t}{t_1}\right); \tag{4.33}$$

$$\varphi^0(t) = x_1^0(t) = \frac{x_1^*}{t_1^2}\left(3 - \frac{2t}{t_1}\right)t^2; \tag{4.34}$$

$$\dot{\varphi}^0(t) = x_2^0(t) = \frac{6 x_1^*}{t_1}\left(1 - \frac{t}{t_1}\right)\frac{t}{t_1}. \tag{4.35}$$

Графики изменения $\varphi^0(t) = x_1^0(t)$, $\dot{\varphi}^0(t) = x_2^0(t)$, $u^0(t) = i_Я^0(t)$ имеют вид



Рассмотрим теперь случай $u_C \neq 0$.

Решение.

В этом случае функция Лагранжа имеет вид

$$L = u^2 + \lambda_1(\dot{x}_1 - x_2) + \lambda_2(\dot{x}_2 - u + u_C).$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа совпадают с уравнениями (4.31), а вместо уравнений (4.32) теперь будем иметь уравнения (4.36):

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = 0; \\ \dot{\lambda}_2 + \lambda_1 = 0; \\ 2u - \lambda_2 = 0; \\ \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = u - u_c. \end{cases} \tag{4.36}$$

Откуда, как и ранее, находим

$$\lambda_1 = c_1 = const; \lambda_2 = -c_1 t + c_2; \quad u = \frac{1}{2}(-c_1 t + c_2);$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(-\frac{c_1}{2}t^2 + c_2 t) - u_C t + c_3; \quad x_1 = -\frac{c_1}{12}t^3 + (\frac{c_2}{2} - u_C)\frac{t^2}{2} + c_3 t + c_4.$$

Используя краевые условия, для постоянных интегрирования получаем следующие выражения:

$$c_3 = c_4 = 0;\ c_1 = \frac{24x_1^*}{t_1^3};\ c_2 = \frac{12x_1^*}{t_1^2} + 2u_C.$$

Подставим их в решения и получим оптимальное управление и оптимальные траектории:

$$u^0(t) = \frac{6x_1^*}{t_1^2}\left(1 - \frac{2t}{t_1}\right) + u_C; \tag{4.37}$$

$$\varphi^0(t) = x_1^0(t) = \frac{x_1^*}{t_1^2}\left(3 - \frac{2t}{t_1}\right)t^2; \tag{4.38}$$

$$\dot{\varphi}^0(t) = x_2^0(t) = \frac{6x_1^*}{t_1}\left(1 - \frac{t}{t_1}\right)\frac{t}{t_1}. \tag{4.39}$$

4.4. Оптимальное управление двигателем постоянного тока при минимуме энергии управления

(решение с помощью Гамильтониана)

Решить задачу оптимального управления двигателем, поставленную в п. 4.2, используя уравнения Гамильтона.

Решение.

Составим Гамильтониан $H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u - u^2$.

Тогда

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0; \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = \psi_1; \frac{\partial H}{\partial u} = \psi_2 - 2u = 0.$$

Уравнения Эйлера в форме Гамильтона примут вид

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0; \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1; \\ u = \dfrac{1}{2}\psi_2; \\ \dot{x}_2 = u; \\ \dot{x}_1 = x_2. \end{cases} \tag{4.40}$$

Уравнения (4.40) аналогичны уравнениям (4.32). Решив эти уравнения, получим результат п. 4.2, что и следовало ожидать, так как результат решения задачи не должен зависеть от способов её решения (то есть, в данном случае, от формы записи уравнений Эйлера).

4.4. Оптимальное, по быстродействию, управление двигателем постоянного тока при ограничении на энергию управления

Повернуть вал двигателя из нулевого начального положения в заданное конечное положение за минимальное время при ограниченной энергии управления. Скорость вала двигателя в начальный и конечный моменты равна нулю.

Решение.

Модель объекта управления получена в п. 4.2 (выражения (4.26) – (4.28)):

Ограничения на энергию управления задаются интегралом

$$\int_0^{t_1} u^2(t)dt = A = const\,. \tag{4.41}$$

Оптимизируемый функционал, определяющий время поворота, имеет вид

$$J = \int_0^{t_1} dt \to \min \quad (t_1 \to \min). \tag{4.42}$$

Уравнения объекта (4.26) определяют неголономные связи (в виде дифференциальных уравнений). Ограничение энергии управления (4.41) является изопериметрической связью. Поэтому функция Лагранжа имеет вид

$$L = 1 + \lambda_1(t)(\dot{x}_1 - x_2) + \lambda_2(t)(\dot{x}_2 - u) + \lambda_3 u^2\,, \tag{4.43}$$

где $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ – функции времени, λ_3 – постоянная величина.

При составлении функции Лагранжа множители Лагранжа λ_i постоянны при членах, определяющих голономные связи и изопериметрические связи и $\lambda_i(t)$ – являются функциями времени при членах, выражающих неголономные связи. Это и было учтено при составлении функции Лагранжа (4.43).

Вычислим производные

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0;\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \lambda_1(t);\ \ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = \dot{\lambda}_1(t);\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = -\lambda_1(t);\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = \lambda_2(t);$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = \dot{\lambda}_2(t);\ \frac{\partial L}{\partial u} = 2\lambda_3 u - \lambda_2(t);\ \ \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = 0;\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = 0.$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа примут вид

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1(t) = 0; \\ \dot{\lambda}_2(t) + \lambda_1(t) = 0; \\ 2\lambda_3 u - \lambda_2(t) = 0. \end{cases} \qquad (4.44)$$

Добавим к ним уравнения объекта

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_{2.} = u, \ \text{при} \ \mathrm{u_C} = 0. \end{cases}$$

Решаем систему полученных пяти уравнений. Из первого уравнения (4.44) $\lambda_1 = c_1 = const$.

Из второго уравнения (4.44) $\lambda_2 = -c_1 t + c_2$.

Из третьего уравнения (4.44)

$$u = \frac{1}{2\lambda_3}(-c_1 t + c_2) = \frac{1}{2}(-\frac{c_1}{\lambda_3}t + \frac{c_2}{\lambda_3}) = \frac{1}{2}(-\tilde{c}_1 t + \tilde{c}_2),$$

где введены следующие обозначения $\tilde{c}_1 = \dfrac{c_1}{\lambda_3}, \tilde{c}_2 = \dfrac{c_2}{\lambda_3}$.

Из уравнений объекта управления получаем

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{\tilde{c}_1}{2}t^2 + \tilde{c}_2 t\right) + c_3; \quad x_1 = -\frac{\tilde{c}_1}{12}t^3 + \frac{\tilde{c}_2}{4}t^2 + c_3 t + c_4.$$

Аналогично п. 4.2 из граничных (краевых) условий определим постоянные $\tilde{c}_1 = \dfrac{24}{t_1^3}x_1^*;\ \tilde{c}_2 = \dfrac{12}{t_1^2}x_1^*;\ c_3 = c_4 = 0$.

В итоге получаем, что оптимальное управление и оптимальные траектории имеют вид (4.33) – (4.35).

Однако в отличие от п. 4.2 t_1 пока неизвестно. Для его нахождения используется изопериметрическое ограничение (4.33). Подставив в выражение (4.41) u^0, получим:

$$\int_0^{t_1}\left[u^0(t)\right]^2 dt = A \rightarrow \int_0^{t_1}\left[\frac{6x_1^*}{t_1^2}\left(1 - \frac{2t}{t_1}\right)\right]^2 dt = A. \qquad (4.45)$$

Вычислив значение интеграла, получим $\dfrac{12(x_1^*)^2}{t_1^3} = A$, откуда находим минимальное время, за которое произойдёт поворот

$$t_1^0 = \sqrt[3]{\frac{12(x_1^*)^2}{A}}.$$