

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Томский государственный архитектурно-строительный университет»

**В.Н. Барашков, И.Ю. Смолина,  
Л.Е. Путеева, Д.Н. Песцов**

# **ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением вузов РФ  
по образованию в области строительства  
в качестве учебного пособия для студентов,  
обучающихся по специальности (направлению)  
271101 «Строительство уникальных зданий и сооружений»*

Томск  
Издательство ТГАСУ  
2012

УДК 539.31(075.8)  
ББК 38.112я7

**Основы теории упругости** [Текст] : учебное пособие /  
О-75 В.Н. Барашков, И.Ю. Смолина, Л.Е. Путеева, Д.Н. Песцов. –  
Томск : Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2012. – 184 с.  
ISBN 978-5-93057-469-2

В учебном пособии изложены основы курса теории упругости, приведены примеры решения задач и представлены варианты расчётно-графических работ. Рассмотрены основные уравнения пространственной теории упругости и способы их решения, плоская задача теории упругости, а также задача изгиба тонких жёстких пластин.

Пособие рекомендовано Учебно-методическим объединением вузов РФ по образованию в области строительства в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по специальности (направлению) 271101 «Строительство уникальных зданий и сооружений».

Предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 271101 «Строительство уникальных зданий и сооружений» (специализация «Строительство высотных и большепролетных зданий и сооружений»), 270102 «Промышленное и гражданское строительство» и 270205 «Автомобильные дороги и аэродромы».

**УДК 539.31(075.8)**  
**ББК 38.112я7**

**Рецензенты:**

**Н.Н. Белов**, докт. физ.-мат. наук, профессор ТГАСУ;

**Б.А. Люкшин**, докт. техн. наук, профессор, зав. кафедрой механики, графики и управления качеством ТУСУРа;

**О.Ю. Малёткин**, канд. техн. наук, доцент, главный инженер проекта ОАО «ТДСК».

ISBN 978-5-93057-469-2

© Томский государственный  
архитектурно-строительный  
университет, 2012

© В.Н. Барашков, И.Ю. Смолина,  
Л.Е. Путеева, Д.Н. Песцов, 2012

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие</b> .....	5
<b>Введение</b> .....	6
<b>1. Пространственная задача теории упругости</b> .....	12
1.1. Теория напряжений .....	12
1.1.1. Силы и напряжения. Тензор напряжений.....	12
1.1.2. Дифференциальные уравнения равновесия (уравнения Навье).....	16
1.1.3. Напряжения на наклонных площадках. Условия на поверхности .....	19
1.1.4. Главные напряжения. Инварианты тензора напряжений. Шаровой тензор и девиатор напряжений.....	21
1.2. Геометрическая теория деформации.....	25
1.2.1. Перемещения и деформации в точке тела. Тензор деформаций. Связь между перемещениями и деформациями (формулы Коши).....	25
1.2.2. Уравнения неразрывности деформаций (уравнения Сен-Венана) .....	30
1.3. Обобщённый закон Гука .....	32
1.3.1. Зависимости между компонентами тензоров деформаций и напряжений.....	34
1.3.2. Потенциальная энергия деформации. Полная потенциальная энергия системы .....	36
1.4. О решении задачи теории упругости .....	38
1.4.1. Основные уравнения теории упругости и способы их решения.....	38
1.4.2. Решение задачи теории упругости в перемещениях .....	40
1.4.3. Решение задачи теории упругости в напряжениях.....	43
1.4.4. Теорема единственности. Методы решения задачи теории упругости.....	44
1.5. Пример расчёта пространственной конструкции .....	46
1.5.1. Постановка задачи. Схема решения задачи теории упругости обратным методом .....	46
1.5.2. Определение компонент тензоров деформаций и напряжений.....	48
1.5.3. Определение компонент объёмной и поверхностной нагрузки .....	49

1.5.4. Определение деформаций и напряжений в заданной точке тела. Тензор напряжений, шаровой тензор и девиатор напряжений в этой точке .....	52
1.5.5. Определение инвариантов тензора напряжений, главных напряжений и наибольшего касательного напряжения в заданной точке .....	54
Вопросы для самопроверки .....	57
<b>2. Плоская задача теории упругости .....</b>	<b>59</b>
2.1. Плоская деформация .....	59
2.2. Плоское напряжённое состояние .....	62
2.3. Решение плоской задачи в напряжениях .....	65
2.3.1. Уравнение Мориса Леви. Функция напряжений Эри. Бигармоническое уравнение плоской задачи .....	65
2.3.2. Методы решения плоской задачи для прямоугольных областей .....	69
2.4. Решение плоской задачи при помощи конечных разностей .....	73
2.4.1. Получение конечно-разностного аналога бигармонического уравнения плоской задачи теории упругости .....	74
2.4.2. Получение системы линейных алгебраических уравнений .....	81
2.5. Пример расчёта балки-стенки .....	94
Вопросы для самопроверки .....	108
<b>3. Изгиб тонких пластин .....</b>	<b>109</b>
3.1. Основные понятия и допущения теории изгиба пластин .....	109
3.2. Перемещения, деформации и напряжения в пластине .....	112
3.3. Внутренние усилия в изгибаемой пластине .....	118
3.4. Уравнения равновесия изогнутой срединной поверхности пластины .....	122
3.5. Граничные условия на контуре пластины. Геометрические граничные условия .....	126
3.6. Решение задачи изгиба пластины методом Бубнова – Галёркина .....	129
3.7. Пример расчёта прямоугольной пластины .....	134
Вопросы для самопроверки .....	147
<b>Заключение .....</b>	<b>148</b>
<b>Библиографический список .....</b>	<b>149</b>
<b>Приложение 1 .....</b>	<b>151</b>
<b>Приложение 2 .....</b>	<b>154</b>
<b>Приложение 3 .....</b>	<b>160</b>
<b>Приложение 4 .....</b>	<b>167</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В учебном пособии достаточно кратко изложены основные положения теории упругости, традиционно входящие в аналогичные курсы этой дисциплины. Теоретический материал по мере его изложения иллюстрируется примерами решения задач. Рассмотрена пространственная и плоская задача, а также задача об изгибе тонкой жёсткой пластины. Реализация задач проведена с помощью аналитических и численных методов. Анализ примеров даст студентам общее представление о методах решения задач теории упругости, а также поможет выработать у них практические навыки решения задач, встречающихся в инженерной практике и практике проектирования подобных конструкций.

Учебное пособие написано на основе опыта преподавания курса теории упругости на кафедре строительной механики Томского архитектурно-строительного университета.

## ВВЕДЕНИЕ

Теория упругости – раздел механики деформируемого твёрдого тела (МДТТ), рассматривающий деформацию упругих тел под действием внешних сил, изменения температуры и других причин. Теория упругости является научной основой для расчётов на прочность и устойчивость частей машин и сооружений. Методы теории упругости используются в машиностроении, строительстве, авиа- и ракетостроении, других отраслях науки и техники для вычисления деформаций и напряжений. В механику деформируемого твёрдого тела входят также следующие дисциплины: сопротивление материалов, строительная механика, теория пластичности, теория ползучести и др.

Методы сопротивления материалов базируются на допущениях, которые позволяют с достаточной для практики точностью решать широкий круг инженерных задач. Но среди элементов несущих конструкций, являющихся предметом исследований сопротивления материалов и строительной механики, встречаются тела более сложной формы, чем стержни и конструкции. Эти тела составлены из стержней (многопролётные балки, фермы, рамы), которые представляют собой пластины и плиты, оболочки, массивы деформированного основания под сооружениями и т. д. При расчёте таких тел методы и простые формулы сопротивления материалов, как правило, неприменимы. Следует отметить, что в некоторых случаях, даже при расчёте стержней, теория сопротивления материалов не даёт надёжного способа исследования напряжений и деформаций с достаточной точностью, например:

- вокруг отверстия под болт или заклёпку при растяжении-сжатии;
- при кручении стержня прямоугольного сечения;
- в местах резкого изменения поперечного сечения балок или валов.

Поэтому во всех перечисленных случаях для определения деформаций и напряжений в твёрдых телах приходится обра-

щаться к более совершенным методам и соотношениям классической теории упругости. Теория упругости базируется на более полной и точной физической и математической постановке задач, основанной на дифференциальных уравнениях в частных производных, описывающих деформацию упругого тела под нагрузкой.

Созданию теории упругости как самостоятельного раздела МДГТ предшествовали работы Галилея (1564–1642), Мариотта (1620–1684), Гука (1635–1703), Якоба (1654–1705) и Иоганна Бернулли (1667–1748), Лейбница (1646–1716), Кулона (1736–1806), Эйлера (1707–1783), Лагранжа (1736–1813) и др. учёных.

Теория упругости сформировалась в первой половине XIX в., что было обусловлено огромными успехами математического анализа. Приоритет в создании основ математической теории упругости принадлежит выпускникам и профессорам созданной в 1795 г. Парижской политехнической школы – математикам и механикам – Пуассону (1781–1840), Коши (1789–1857), Навье (1785–1836), Ламе (1795–1870) и Сен-Венану (1797–1896), получившим основные дифференциальные уравнения этой теории.

Однако уравнения и общие решения задач теории упругости из-за сложности не могли служить непосредственно рабочим инструментом инженера того времени и представляли собой в большинстве случаев решение определённых научных вопросов, достаточно далёких от практических задач. Этого нельзя сказать о методах и соотношениях сопротивления материалов и строительной механики, с помощью которых в XVIII–XIX вв. проводились расчёты на прочность при строительстве мостов и железных дорог. Широкое применение достижений теории упругости в инженерных расчётах стало возможным только с появлением электронно-вычислительных машин в конце 40-х – начале 50-х гг. XX в. и с дальнейшим развитием приближённых численных методов решения дифференциальных уравнений.

Сформулируем постановку задачи теории упругости, а также основные положения и допущения, на которых она базируется.

Рассмотрим тело заданной формы, материал которого имеет известные физико-механические характеристики. На тело действуют заданные внешние нагрузки и наложены связи, т. е. на поверхности заданы геометрические граничные условия. Требуется определить перемещения, деформации и напряжения, возникающие в упругом теле. Эти величины, характеризующие напряжённо-деформированное состояние (НДС) тела в каждой его точке, называются *параметрами НДС*, и являются основными неизвестными при решении задачи теории упругости.

На данном этапе развития науки невозможно создать общие (универсальные) методы расчёта, которые бы учитывали все особенности внутреннего строения реальных тел. Поэтому при их изучении приходится прибегать к идеализированным моделям. Классическая теория упругости основывается на идеально-упругой модели деформируемого твёрдого тела. Такое тело наделяется наиболее простой линейной зависимостью между напряжением и деформацией. Диаграмма растяжения для такого материала представляет собой прямую линию  $OA$ , проходящую через начало координат (рис. 1.1).

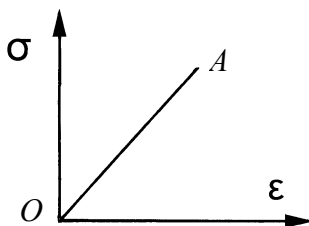


Рис. 1.1. Диаграмма растяжения упругого материала:  
 $\varepsilon$  – деформация;  $\sigma$  – напряжение

Эта модель тела наделяется следующими свойствами:

1. Материал тела считается *идеально упругим*, т. е. тело способно возвращаться к первоначальной форме и объёму после удаления нагрузки, вызвавшей деформацию.



2. Материал тела представляет собой *сплошную среду*, т. е. сплошным образом, непрерывно, заполняет объём тела без пустот, пор и трещин. По этому допущению тело, непрерывное до деформации, остаётся непрерывным и после деформации. Таким образом, в теории упругости не учитывается кристаллическая, дискретная, т. е. атомистическая, структура вещества.

3. Материал тела считается *однородным*, т. е. во всём объёме тела свойства материала одинаковы.

4. Материал тела считается *изотропным*, т. е. все упругие свойства тела одинаковы по всем направлениям. В противном случае материал называется анизотропным (дерево, фанера, композиционные материалы и пр.).

С учётом этих свойств, под классической теорией упругости понимается только линейная теория упругости однородного изотропного тела.

Благодаря перечисленным свойствам при проведении прочностного расчёта металлической конструкции используются взятые из справочников значения физико-механических характеристик её материала, полученные ранее из опытов на стандартных образцах, изготовленных из стали этой же марки, что и рассчитываемая конструкция.

Из допущений сплошности и однородности следует, что параметры НДС в теле, нагруженном внешними силами, представляются непрерывно распределёнными по объёму тела. Другими словами, искомые перемещения, деформации и напряжения считаются непрерывными функциями координат точки тела. Поэтому при решении задачи теории упругости для описания параметров НДС тела можно использовать аппарат математического анализа и теории дифференциальных уравнений, которые оперируют с функциями.

В классической теории упругости принимаются следующие условия:

– перемещения тела малы по сравнению с его линейными размерами;

– деформации (линейные и угловые) тела малы по сравнению с единицей.

Малость деформаций и линейная зависимость между напряжениями и деформациями позволяет при расчёте НДС применять *принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции)*. При действии на тело нескольких внешних сил этот принцип даёт возможность подсчитать воздействие каждой силы в отдельности, с последующим сложением полученных результатов.

В теории упругости принимается гипотеза о естественном ненапряжённом состоянии тела. Согласно ей, существующие в теле до приложения внешних нагрузок начальные напряжения, характер и величина которых зависит от истории возникновения тела, полагаются равными нулю. Поэтому определяемые в теории упругости напряжения не являются фактическими напряжениями в теле, а составляют лишь прирост напряжений в рассматриваемых точках над начальными (неизвестными) напряжениями в тех же точках.

Следует отметить, что начальные напряжения могут возникать при изготовлении тела, например вследствие прокатки профиля на металлургическом заводе, поверхностной и температурной обработки, сварки и т. д. В качестве примера можно рассмотреть металлическое кольцо. Если его разрезать в двух местах, убрать этот участок и снова соединить, то в нём появятся напряжения, величина которых будет зависеть от размера убранного участка. Другой пример – стержень, предварительно сжатый между жесткими стенками.

В теории упругости принимается *принцип локальности эффекта самоуравновешенных внешних нагрузок*, или *принцип Сен-Венана*. Согласно этому принципу, если к малой части тела приложена система взаимно уравновешенных нагрузок, то она вызывает лишь местные напряжения, которые быстро убывают по мере удаления от места приложения нагрузки. Этот принцип можно выразить иначе: в точках твёрдого тела, доста-

точно удалённых от места приложения внешних нагрузок, напряжения весьма мало зависят от детального способа осуществления этих нагрузок. Так, на основании принципа Сен-Венана, нагрузку, распределённую на небольшой части поверхности тела, можно заменять равной по величине сосредоточенной силой и наоборот.

# 1. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В главе представлены соотношения и уравнения теории упругости для пространственного, трёхмерного тела, все три размера которого сопоставимы между собой. При изложении материала в учебном пособии используется прямоугольная (декартова) система координат  $x, y, z$ .

## 1.1. Теория напряжений

### 1.1.1. Силы и напряжения. Тензор напряжений

Внешние силы, которые действуют на твёрдое тело, можно разделить на две группы: поверхностные и массовые.

*Поверхностные силы* являются результатом взаимодействия двух тел. Примером поверхностных сил являются давление одного тела на другое при соприкосновении, давление здания на грунт, давление газа или жидкости на стенки сосуда и т. д.

Поверхностные силы характеризуются *интенсивностью*  $q_v$ , т. е. величиной силы, приходящейся на единицу площади поверхности, на которой распределена эта сила. Интенсивность поверхностной силы также называется *давлением*. Размерность давления выражается в  $\text{Н/м}^2$  (или Па). Проекции (компоненты) давления  $q_v$  на оси координат  $x, y, z$  обозначаются  $X_v, Y_v, Z_v$ , соответственно. Здесь  $v$  – внешняя нормаль к поверхности тела, к которой приложена эта сила.

*Массовые силы* распределены по всей массе тела. Примером массовых сил являются сила тяжести, магнитные силы, силы инерции для тела, находящегося в движении, и т. д. Массовые силы, отнесённые к единице объёма (т. е. интенсивности массовых сил, называемые *объёмными силами*), также раскладывают на три проекции:  $X, Y, Z$ . Их размерность –  $\text{Н/м}^3$ . Дейст-

вие температуры при неравномерном нагреве тела с использованием метода устранения деформации при решении задачи также сводится к поверхностным и массовым силам.

Проекция интенсивности внешней нагрузки считается положительной, если её направление совпадает с направлением соответствующей координатной оси. Поверхностные и массовые силы, так же как и параметры НДС, являются функциями координат точки.

В твёрдом теле всегда имеют место внутренние силы, которые выражают взаимодействие молекул между собой и обеспечивают существование твёрдого тела, его прочность. При действии на тело внешних сил оно деформируется. Вследствие этого возникают дополнительные внутренние силы.

Для исследования возникающих в теле внутренних сил воспользуемся методом сечений, который применим к находящемуся в равновесии телу, нагруженному внешними силами (рис. 1.2).

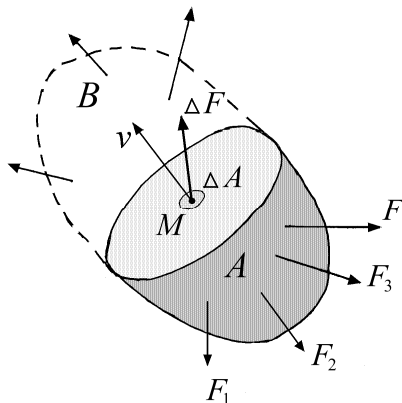


Рис. 1.2. К определению понятия «метод сечений»

Мысленно разрежем тело произвольной плоскостью на две части  $A$  и  $B$  и отбросим часть  $B$ . Оставшаяся часть  $A$  также находится в равновесии под воздействием приложенных внеш-

них сил  $F_1, F_2, F_3, \dots$  и системы внутренних сил, распределённых по сечению и представляющих собой действие удалённой части  $B$  на часть  $A$ .

Выделим в плоскости сечения вокруг точки  $M$  элементарную площадку  $\Delta A$ , весьма малую, по сравнению с размерами сечения, но довольно большую, по сравнению с расстояниями между отдельными молекулами тела.

Обозначим через  $\Delta F$  главный вектор внутренних сил, пересекающих площадку  $\Delta A$ . Тогда *напряжением внутренних сил*, или *полным напряжением*,  $p_v$  в точке  $M$  тела на лежащей в плоскости сечения площадке  $\Delta A$  с нормалью  $v$  называется предел отношения

$$p_v = \lim \frac{\Delta F}{\Delta A}.$$

Аналогично можно определить полные напряжения в остальных точках этого и других сечений, проведённых через тело.

Полное напряжение является вектором: оно характеризуется величиной и направлением. В общем случае вектор полного напряжения наклонён к площадке  $\Delta A$ , на которой он действует, и не совпадает с направлением нормали  $v$  к площадке. Поэтому вместо полного напряжения  $p_v$  удобнее рассматривать его составляющие в сечениях, параллельных координатным плоскостям.

Для этого в окрестности точки  $O$  тела, нагруженного внешними силами, вырежем элементарный параллелепипед (рис. 1.3), рёбра  $dx, dy, dz$  которого параллельны координатным осям  $x, y, z$ , а грани — параллельны координатным плоскостям  $xOy, xOz, yOz$ . На гранях этого параллелепипеда действуют полные напряжения, которые можно разложить на нормальную (нормальное напряжение) и касательную (касательное напряжение) составляющие к грани. В свою очередь, касательное напряжение можно разложить на две составляющие, параллельные координатным осям. В результате на каждой грани паралле-

пипеда действует по три напряжения – одно нормальное и два касательных. Напряжения обозначаются греческими буквами:  $\sigma$  (читается «сигма») – нормальные напряжения,  $\tau$  (читается «тау») – касательные напряжения.

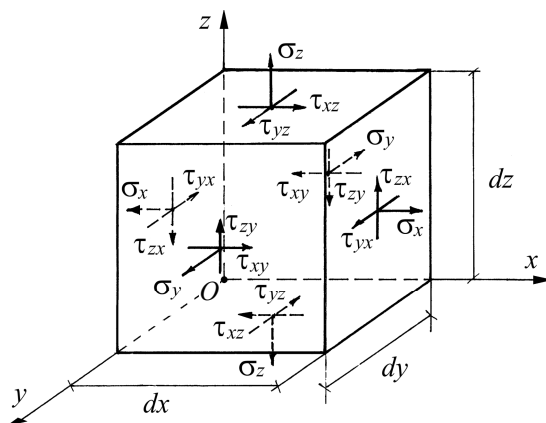


Рис. 1.3. Напряжения на гранях элементарного параллелепипеда

Первый индекс в обозначении напряжений указывает ось, параллельно которой направлено напряжение, а второй индекс – ось, параллельно которой направлена внешняя нормаль к грани параллелепипеда, на которой действует напряжение. Если сказать короче, то первый индекс указывает направление напряжения, а второй – площадку, на которой оно действует.

Примем следующее *правило знаков для напряжений*: если внешняя нормаль к площадке имеет положительное (отрицательное) направление, то напряжение положительно. В случае, если его направление совпадает с положительным (отрицательным) направлением соответствующей координатной оси. В соответствии с приведённым правилом знаков положительные нормальные напряжения являются растягивающими, а отрицательные – сжимающими. На рис. 1.3 показаны положительные

направления напряжений. Напряжения, так же как и интенсивность поверхностной нагрузки, выражаются в  $\text{Н/м}^2$  (Па).

Совокупность напряжений, действующих на трёх взаимно перпендикулярных гранях параллелепипеда, – три нормальных напряжения  $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  и шесть касательных напряжений  $(\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{yx}, \tau_{zx}, \tau_{zy})$  – образует так называемый *тензор напряжений*

$$T_H = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

который характеризует напряжённое состояние в рассматриваемой точке  $O$  твёрдого тела.

### 1.1.2. Дифференциальные уравнения равновесия (уравнения Навье)

Выясним, каким условиям должны быть подчинены напряжения на гранях элементарного параллелепипеда, чтобы каждый элемент тела в своём взаимодействии с соседними элементами был в равновесии, а следовательно было в равновесии и всё тело.

Ввиду бесконечной малости параллелепипеда на рис. 1.3, принято, что напряжения во всём его объёме остаются неизменяемыми (однородное напряжённое состояние). В действительности компоненты тензора напряжений на параллельных гранях, отстоящих друг от друга на бесконечно малом расстоянии, отличаются одно от другого на бесконечно малую величину. Таким образом, как бы ни были близки грани элементарного объёма, имеет место приращение напряжений, пропорциональное расстоянию между гранями и равное частному дифференциалу этого напряжения. Поэтому на рис. 1.4 изображено уточнённое распределение напряжений на гранях параллелепипеда.





Для тела, находящегося в равновесии, должны удовлетворяться шесть уравнений статики: три уравнения проекций сил на оси координат и три уравнения моментов этих сил относительно координатных осей.

При выводе уравнений равновесия проекций сил элементарные силы на поверхностях граней параллелепипеда получаем перемножением напряжений на площади граней. В итоге, после приведения подобных членов и деления на объём  $dV = dx dy dz$ , получаем три дифференциальных уравнения равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Полученные три дифференциальных уравнения равновесия называются *уравнениями Навье*.

Если для параллелепипеда аналогично расписать три уравнения статики для моментов, то получим соотношения *закона парности касательных напряжений*:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}. \quad (1.3)$$

Согласно этому закону по двум взаимно перпендикулярным площадкам составляющие касательных напряжений, перпендикулярные линиям пересечения этих площадок, равны между собой. Следует отметить, что следствием закона является симметрия тензора напряжений (1.1) относительно главной диагонали.

Таким образом, вследствие парности касательных напряжений, вместо девяти неизвестных компонент тензора напряжений, которые характеризуют напряжённое состояние в точке тела и являются функциями координат этой точки, остаётся только шесть:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x(x, y, z), \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y, z), \quad \sigma_z = \sigma_z(x, y, z), \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}(x, y, z), \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y, z), \quad \tau_{zx} = \tau_{zx}(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Для отыскания шести неизвестных функций напряжений (1.4) имеются только три дифференциальных уравнения равновесия (1.2). Отсюда следует важный вывод: так как число неизвестных напряжений превышает число уравнений равновесия Навье, то задача теории упругости оказывается статически неопределимой. Недостающие уравнения можно получить, лишь изучая деформации и учитывая физические свойства тела.

### 1.1.3. Напряжения на наклонных площадках.

#### Условия на поверхности

Для исследования напряжённого состояния во всех точках тела необходимо уметь находить напряжения на площадке, наклонённой к осям координат.

Внутри нагруженного тела выделим в виде тетраэдра  $Oabc$  элементарный объём бесконечно малых размеров (рис. 1.5).

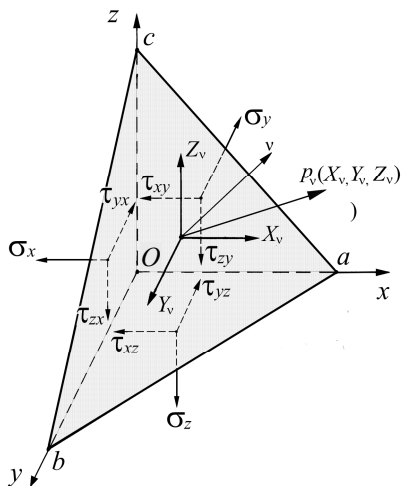


Рис. 1.5. Наклонная площадка  $abc$

Три взаимно перпендикулярные грани  $Oab$ ,  $Obc$ ,  $Oca$  тетраэдра параллельны координатным плоскостям, а четвёртая грань  $abc$  представляет собой наклонную площадку.

Предположим, что на трёх координатных гранях тетраэдра известны все компоненты тензора напряжений. Необходимо найти компоненты  $X_v, Y_v, Z_v$  полного напряжения  $p_v$  на любой наклонной площадке с нормалью  $v$ , направляющие косинусы которой равны:

$$l = \cos(v, x); \quad m = \cos(v, y); \quad n = \cos(v, z). \quad (1.5)$$

Обозначим площадь грани  $abc$  через  $\Delta A$ , тогда площади остальных граней тетраэдра определяются как проекции площади грани  $abc$  на соответствующие координатные плоскости:

$$\text{пл. } Obc = \Delta A \cdot l; \quad \text{пл. } Oca = \Delta A \cdot m; \quad \text{пл. } Oab = \Delta A \cdot n.$$

На рассматриваемый тетраэдр действуют следующие нагрузки:

– на координатных площадках – шесть компонент напряжения:  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ ;

– на площадке  $abc$  – три компоненты полного напряжения:  $X_v, Y_v, Z_v$ . Действие объёмных сил не учитывается.

Составим уравнения статики для тетраэдра  $Oabc$ . Проецируя все силы на оси координат, получаем три уравнения равновесия элементарного тетраэдра:

$$\left. \begin{aligned} X_v &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n, \\ Y_v &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n, \\ Z_v &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n. \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Уравнения (1.6) позволяют определить компоненты полного напряжения  $p_v$  на любой наклонной площадке с нормалью  $v$  с помощью шести компонент тензора напряжений на площадках, параллельных координатным плоскостям.

Если наклонная площадка  $abc$  совпадает с поверхностью тела, то компоненты  $X_v, Y_v, Z_v$  полного напряжения  $p_v$  являются компонентами давления  $q_v$  от внешних сил, действующих на поверхности тела. Тогда уравнения (1.6) называются *условиями на поверхности тела*, так как в этом случае они связывают внешние силы с внутренними напряжениями.

Таким образом, при решении задачи теории упругости для равновесия тела под действием заданных внешних сил необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке компоненты (1.4) тензора напряжений  $T_n$  одновременно удовлетворяли дифференциальным уравнениям равновесия (1.2) внутри тела и условиям на его поверхности (1.6).

#### **1.1.4. Главные напряжения.**

##### **Инварианты тензора напряжений.**

##### **Шаровой тензор и девиатор напряжений**

Воспользуемся уравнениями (1.6) для вычисления напряжений на любой наклонной площадке в любой точке внутри тела, если известны шесть компонент (1.4) тензора напряжений на площадках, параллельных координатным плоскостям.

*Полное напряжение на наклонной площадке* определяется как геометрическая сумма компонент этого напряжения:

$$p_v = \sqrt{X_v^2 + Y_v^2 + Z_v^2}. \quad (1.7)$$

Разложим полное напряжение  $p_v$  на составляющую  $\sigma_v$  по нормали к наклонной площадке (нормальное напряжение) и составляющую  $\tau_v$  в плоскости наклонной площадки (касательное напряжение).

Нормальное напряжение  $\sigma_v$  равно сумме проекций компонент полного напряжения  $X_v, Y_v, Z_v$  на направление нормали  $v$  к наклонной площадке (рис. 1.5):

$$\sigma_v = X_v l + Y_v m + Z_v n.$$

Подставляя значения компонент  $X_v, Y_v, Z_v$  из (1.6), получаем:

$$\sigma_v = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl. \quad (1.8)$$

Формула (1.8) позволяет определять нормальное напряжение на любой наклонной площадке с помощью шести компонент тензора напряжений на трёх площадках, параллельных координатным плоскостям.

Касательное напряжение на наклонной площадке определяется как геометрическая разность полного и нормального напряжений:

$$\tau_v^2 = p_v^2 - \sigma_v^2.$$

Известно, что в каждой точке нагруженного тела существуют три взаимно перпендикулярные площадки, на которых касательные напряжения  $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  равны нулю. Эти площадки называются *главными*, а направления нормалей к этим площадкам называются *главными направлениями* (или главными осями) *тензора напряжений*.

На главных площадках действуют главные нормальные напряжения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Если главные напряжения различны, то имеется только три главных направления. Если два главных напряжения равны (например,  $\sigma_2 = \sigma_3$ ), напряжённое состояние характеризуется осевой симметрией. Любая площадка, содержащая ось 1, – главная. Если все главные напряжения равны ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ), напряжённое состояние характеризуется центральной симметрией. Любая площадка в данной точке является главной (случай гидростатического напряжённого состояния).

Из условия  $\tau_v = 0$ , с учётом (1.6), опуская промежуточные выкладки, приходим к кубическому уравнению относительно искомого главного напряжения  $\sigma$ :

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0. \quad (1.9)$$

Решение этого уравнения в рассматриваемом случае даёт три вещественных корня (три главных напряжения):  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Наибольший по абсолютной величине корень обозначается через  $\sigma_1$ , а наименьший – через  $\sigma_3$ . Поэтому  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

Величины главных напряжений не зависят от положения координатных осей  $x, y, z$ , т. е. от выбора системы координат. Поэтому коэффициенты уравнения (1.9)

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\ I_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2, \\ I_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

должны сохранять постоянные значения при преобразовании осей координат, т. е. они являются *инвариантами*. Коэффициенты  $I_1, I_2, I_3$  называются, соответственно, *первым, вторым и третьим инвариантом тензора напряжений*.

Таким образом, инварианты тензора напряжений (1.10) – это характеристики напряжённого состояния, не зависящие от выбора системы координат.

Величина

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \quad (1.11)$$

называется *средним нормальным напряжением*.

Инварианты тензора напряжений можно выразить через главные напряжения, для чего в формулах (1.10) касательные напряжения следует положить равными нулю, а нормальным напряжениям дать индексы 1, 2 и 3 главных напряжений. Тогда получим:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ I_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1, \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

Поэтому контролем правильности решения кубического уравнения (1.9) может служить равенство значений инвариантов  $I_1, I_2, I_3$ , полученных по формулам (1.10) и (1.12).

В теории напряжений инварианты следует рассматривать как основные характеристики напряжённого состояния в точке. Компоненты же напряжений, как связанные с осями координат, являются вспомогательными характеристиками напряжённого состояния.

В сечении, делящем пополам углы между главными площадками, действуют *главные касательные напряжения*  $\tau_1, \tau_2$  и  $\tau_3$  :

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

*Максимальным касательным напряжением* называют величину

$$\tau_{\max} = \max\{|\tau_1|, |\tau_2|, |\tau_3|\}.$$

Для принятой выше нумерации осей наибольшее касательное напряжение равно полуразности наибольшего и наименьшего главного напряжения:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (1.13)$$

Это напряжение действует на площадке, которая делит пополам угол между площадками с наибольшим и наименьшим главными напряжениями.

Так как тело по-разному сопротивляется равномерному всестороннему давлению и касательным напряжениям, то удобно представить тензор напряжений в виде суммы



$$T_H = T_{\text{ш}} + D_H, \quad (1.14)$$

где  $T_{\text{ш}} = \begin{vmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{vmatrix}$  – шаровой тензор напряжений, соответ-

ствующий среднему давлению в точке, а

$D_H = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_0 \end{vmatrix}$  – тензор, характеризующий на-

пряжения сдвига в данной точке и называемый *девиатором напряжений*.

В заключение сформулируем следующее определение: *напряжённым состоянием в точке* называют совокупность напряжений, действующих по всевозможным площадкам, проведённым через эту точку.

## 1.2. Геометрическая теория деформации

### 1.2.1. Перемещения и деформации в точке тела.

**Тензор деформаций. Связь между перемещениями и деформациями (формулы Коши)**

Если упругое тело закрепить так, чтобы оно не могло перемещаться как абсолютно твёрдое тело, и приложить внешние нагрузки, то перемещения любой его точки будут вызываться только деформациями этого тела.

Рассмотрим точку  $M(x, y, z)$ . После деформации тела (рис. 1.6) точка  $M$  переместится в новое положение  $M'(x', y', z')$ . Обозначим три компоненты (проекции) вектора перемещения  $\overline{MM'}$  на оси координат  $x, y, z$  через  $u, v, w$ , соответственно.

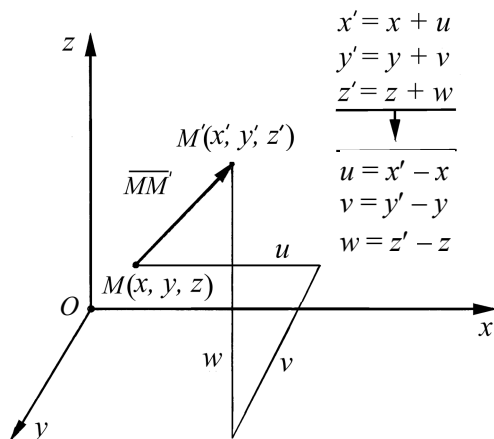


Рис. 1.6. К определению понятия «перемещение»

Будем считать, что перемещения тела, по сравнению с его линейными размерами, являются весьма малыми величинами, и, в силу сплошности тела, непрерывно изменяющимися по его объёму. Таким образом, компоненты вектора перемещения являются функциями координат точки:

$$\left. \begin{aligned} u &= u(x, y, z), \\ v &= v(x, y, z), \\ w &= w(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Разница в перемещениях в различных точках тела вызывает его деформацию. Деформации обозначаются греческими буквами  $\varepsilon$  (читается «эпсилон») и  $\gamma$  (читается «гамма»).

Рассмотрим элементарный параллелепипед с рёбрами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , вырезанный в окрестности точки  $P$  упругого тела до его деформации (рис. 1.7).

Если тело подвергается деформации и величины  $u, v, w$  являются компонентами вектора перемещения точки  $P$ , то пере-

мещение в направлении оси  $x$  соседней точки  $A$ , расположенной на оси  $x$ , равно  $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ , ввиду возрастания функции перемещения  $u$  на величину  $\frac{\partial u}{\partial x} dx$ , с увеличением координаты  $x$  на расстояние  $dx$ . Увеличение длины ребра  $PA$ , т. е. его абсолютное удлинение, вызванное деформацией, равно  $\frac{\partial u}{\partial x} dx$ .

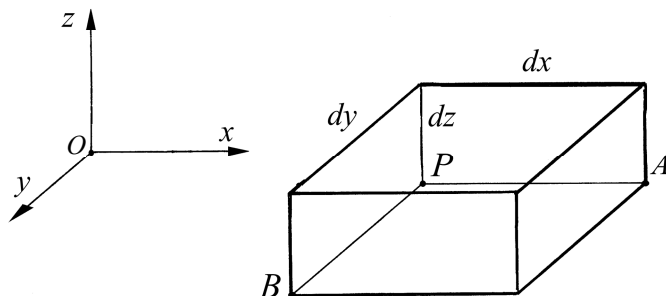


Рис. 1.7. Элементарный параллелепипед

Тогда *линейная деформация (относительное удлинение)* в точке  $P$  в направлении  $x$  представляет собой отношение абсолютного удлинения ребра  $PA$  к его исходной длине  $dx$ :

$$\epsilon_x = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Таким же путём можно показать, что относительные удлинения в точке  $P$  в направлениях  $y$  и  $z$  определяются производными  $\partial v / \partial y$ ,  $\partial w / \partial z$ .

Рассмотрим изменение угла между элементами  $PA$  и  $PB$  при деформации параллелепипеда (рис. 1.8).

Пусть точка  $P$  получила перемещения  $u$  и  $v$  в направлении осей  $x$  и  $y$ , соответственно. Тогда положение этой точки будет  $P'$ .

Перемещение точки  $A$  в направлении  $y$  будет  $v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$ , а перемещение точки  $B$  в направлении  $x$  —  $u + \frac{\partial u}{\partial y} dy$ . В итоге новое направление  $P'A'$  ребра  $PA$  образует с начальным направлением малый угол  $\alpha$  (читается «альфа»). Определим его.

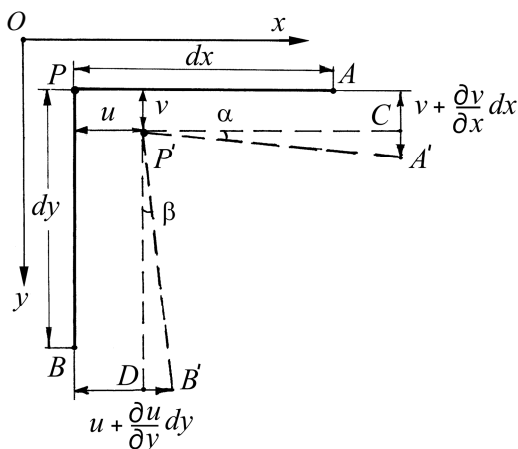


Рис. 1.8. К определению угловых деформаций

Расстояние  $A'C = v + \frac{\partial v}{\partial x} dx - v = \frac{\partial v}{\partial x} dx$ . Из треугольника

$\triangle P'CA'$  находим  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{A'C}{P'C} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x}$ . Ограничиваясь рассмотрением малых деформаций, можно полагать, что  $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha = \frac{\partial v}{\partial x}$ . Точно так же направление  $P'B'$  повернуто к направлению  $PB$  на малый угол  $\beta$  (читается «бета»). Аналогично рассуждая, получаем  $\beta = \frac{\partial u}{\partial y}$ .

Отсюда видно, что первоначальный прямой угол  $APB$  между двумя рёбрами  $PA$  и  $PB$  уменьшился на величину  $\alpha + \beta$ . Эта величина представляет собой *угловую деформацию (относительный сдвиг)* между направлениями  $x, y$ :

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Таким же способом можно получить угловые деформации в плоскостях  $y, z$  и  $x, z$ . В пределе, когда рёбра параллелепипеда стремятся к нулю, получаем формулы для шести функций деформаций в следующих точках:

– трёх линейных деформаций:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad (1.16)$$

– трёх угловых деформаций:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (1.17)$$

Полученные уравнения (1.16) и (1.17) устанавливают связь между функциями перемещений и деформаций. Они называются *формулами Коши*.

Сформулируем определение понятия «деформированное состояние в точке» как совокупность линейных и угловых деформаций для всевозможных направлений осей, проведённых через данную точку. Тогда *тензор деформаций* – это совокупность компонент деформации бесконечно малого объёма (в форме параллелепипеда) в окрестности заданной точки:

$$T_d = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Тензор напряжения описывает деформированное состояние в данной точке твёрдого тела.

Относительные удлинения характеризуют изменение длины рёбер параллелепипеда, вырезанного из тела вокруг точки. Индексы указывают направления деформации. Относительные сдвиги характеризуют изменение формы параллелепипеда за счёт искажения его прямых углов. Индексы указывают, в какой координатной плоскости появляется угловая деформация параллелепипеда.

Относительно знаков деформаций существует следующее правило: положительным линейным деформациям  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  соответствуют удлинения вдоль осей координат, отрицательным – укорочения; положительным угловым деформациям  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  соответствуют уменьшения углов между положительными направлениями осей; отрицательным – увеличения тех же углов.

### **1.2.2. Уравнения неразрывности деформаций (уравнения Сен-Венана)**

Формулы Коши (1.16), (1.17) связывают шесть компонент тензора деформаций  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  и три компоненты вектора перемещения –  $u, v, w$ . Если заданы три функции перемещения, то шесть компонент тензора деформаций определяются из формул Коши однозначно. Сложнее обстоит дело с обратной постановкой задачи. Если заданы шесть функций деформаций, то для определения трёх функций перемещений необходимо проинтегрировать шесть дифференциальных уравнений (1.16), (1.17) в частных производных, что не всегда можно сделать однозначно. Поэтому между шестью компонентами тензора деформаций должны существовать определённые зависимости.

Для получения этих зависимостей, которые делятся на две группы, необходимо исключить перемещения  $u, v, w$  из формул Коши.

Продифференцируем дважды первые два уравнения (1.16) по  $y$  и по  $x$ , соответственно. Складывая их почленно, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y}.$$

В теории упругости при проведении выкладок часто пользуются круговой подстановкой букв  $x, y, z$  и  $u, v, w$  (рис. 1.9).

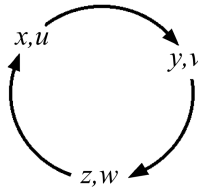


Рис. 1.9. К определению способа круговой подстановки обозначения функций

Сделаем такую подстановку в последнем уравнении, и получим два других равенства. Это приводит к первой группе, состоящей из трёх уравнений (1.19):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; & \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

Уравнения (1.17) дифференцируем следующим образом: первое уравнение – по  $z$ , второе – по  $x$ , а третье – по  $y$ . Затем сменим знак последнего уравнения на противоположный, сложим почленно все уравнения и получим уравнение

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Дифференцируя его по  $z$ , получим окончательный вариант первого уравнения. Делая в нём подстановку букв, получим два других равенства. В итоге приходим ко второй группе, состоящей из трёх уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

Полученные дифференциальные уравнения (1.19), (1.20) называются *уравнениями неразрывности деформаций*, или *уравнениями Сен-Венана*. Убедиться в верности этих уравнений можно просто: достаточно подставить в них формулы Коши (1.16), (1.17).

Геометрическая интерпретация этих соотношений состоит в следующем. Представим себе упругое тело разрезанным на малые параллелепипеды и дадим каждому из них деформацию, определяемую шестью компонентами. Если эти деформации не связаны между собою определёнными зависимостями, то из отдельных деформированных параллелепипедов не удастся вновь сложить непрерывное, но уже деформированное, твёрдое тело: в некоторых точках окажутся бесконечно малые разрывы. Уравнения (1.19) и (1.20) дают такие зависимости между компонентами деформации, при выполнении которых тело после деформации получается сплошным, или непрерывным.

### 1.3. Обобщённый закон Гука

Выше были рассмотрены теории напряжений и деформаций, освещающие статическую сторону задачи и описывающие её



с геометрической точки зрения. Эти две теории сами по себе не могут служить для решения физических задач теории упругости о деформациях до тех пор, пока между функциями напряжений и деформаций не будет установлена физическая зависимость.

Английский естествоиспытатель Роберт Гук в 1660 г. открыл закон, названный его именем. Этот закон устанавливает линейную зависимость между упругой деформацией твёрдого тела и приложенным напряжением от внешней нагрузки.

Различают закон Гука при растяжении-сжатии и при сдвиге. При растяжении-сжатии нормальное напряжение пропорционально относительному удлинению, т. е.

$$\sigma = E \varepsilon,$$

где  $E$  – коэффициент пропорциональности, называемый *модулем упругости при растяжении*, или *модулем Юнга* (Юнг (1773–1829)).

При сдвиге касательное напряжение пропорционально угловой деформации:

$$\tau = G \gamma,$$

где  $G$  – *модуль упругости при сдвиге*.

Модули упругости  $E$  и  $G$ , которые определяются из опытов на стандартных образцах, характеризуют меру жёсткости материала и имеют размерность напряжения.

Из опытов по одноосному растяжению стержня установлен закон, связывающий относительные удлинения (укорочения) в продольном и поперечном направлениях:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x.$$

Коэффициент пропорциональности  $\nu$  (читается «ню») называется *коэффициентом поперечной деформации* (*коэффициентом Пуассона*) и представляет собой постоянную величину для каждого материала. Для различных материалов значения ко-

коэффициентов Пуассона находятся в пределах:  $0 \leq \nu \leq 0,5$ . Для большинства металлов  $0,25 \leq \nu \leq 0,35$ .

Между тремя упругими постоянными  $E$ ,  $G$ ,  $\nu$  существует зависимость, следующая из закона Гука:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (1.21)$$

Поэтому лишь две из этих трёх постоянных являются независимыми и должны быть найдены из опыта, третья постоянная определяется из формулы (1.21).

### **1.3.1. Зависимость между компонентами тензоров деформаций и напряжений**

Чтобы установить зависимость между компонентами тензоров деформаций и напряжений при объёмном напряжённом состоянии, выделим из тела элементарный параллелепипед и рассмотрим действие только нормальных напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ .

Примем без доказательства положение о том, что в упругом однородном изотропном теле нормальные напряжения не вызывают сдвигов, касательные напряжения не вызывают удлинений по направлению действия этих напряжений. На этом основании можем рассматривать отдельно действие нормальных и касательных напряжений.

Связь между относительными деформациями сдвига и касательными напряжениями, согласно закону Гука при сдвиге, можно представить независимо для каждой из трёх плоскостей параллелепипеда, параллельных координатным плоскостям.

На основании принципа независимости действия сил найдём полные относительные удлинения рёбер параллелепипеда по направлениям трёх координатных осей как сумму относительных удлинений этих рёбер от действия каждого нормально-го напряжения.

Тогда обобщённый закон Гука для упругого, однородного и изотропного твёрдого тела записывается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \right], & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_y - \nu (\sigma_z + \sigma_x) \right], & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[ \sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \right], & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

При решении задачи теории упругости часто бывает необходимо иметь выражения компонент тензора напряжений через компоненты тензора деформаций. Разрешая формулы (1.22) относительно напряжений, получим один из вариантов записи этих выражений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_x, & \tau_{xy} &= \mu \gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_y, & \tau_{yz} &= \mu \gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_z, & \tau_{zx} &= \mu \gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

Здесь введены следующие обозначения:  $\theta$  (читается «тета») – относительная объёмная деформация

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \quad (1.24)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{ (читается «ламбда»), } \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \text{ (читается «мю») –}$$

*коэффициент Ламе.*

Коэффициенты  $\lambda$  и  $\mu$ , как и модули упругости  $E$  и  $G$ , характеризуют упругие свойства материала. Коэффициент  $\mu = G$  (см. формулу (1.21)). Формулы (1.23) называют *обратной формой закона Гука*.

Таким образом, мы получили соотношения, которые выражают физические зависимости между компонентами тензора деформаций и тензора напряжений.

Представим выражение относительной объёмной деформации (1.24) через нормальные напряжения с помощью формул (1.22):

$$\theta = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

В случае всестороннего гидростатического сжатия материала, когда напряжения  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -\sigma$ , имеем:

$$\theta = -3(1-2\nu)\frac{\sigma}{E}.$$

Из полученной формулы следует, что коэффициент Пуассона  $\nu$  не может быть больше 0,5. В противном случае происходит увеличение объёма тела при его сжатии.

### 1.3.2. Потенциальная энергия деформации.

#### Полная потенциальная энергия системы

Под действием внешних сил упругое тело испытывает деформацию, при которой эти силы совершают работу. На основании закона сохранения энергии эта работа превращается в потенциальную энергию, которая в последующем при удалении внешних сил расходуется на восстановление первоначальной (т. е. недеформированной) формы тела.

Энергию, накапливаемую при деформации упругого тела в единичном объёме материала, выделенном около данной точки, называют *удельной потенциальной энергией деформации (упругим потенциалом)* в окрестности рассматриваемой точки.

Для подсчёта удельной потенциальной энергии необходимо составить сумму произведений соответствующих компонент тензоров напряжений и деформаций. Половинное значение этой суммы и составит искомую удельную энергию деформации

$$W = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}). \quad (1.25)$$

Это выражение носит название *формулы Клапейрона*. Половинное значение берётся потому, что напряжения, вследствие зависимости от деформаций, возникают не внезапно, а растут по мере их увеличения. Это положение характерно для статического процесса нагружения.

Удельная энергия деформации упругого изотропного тела также определяется по формулам только через компоненты тензоров:

напряжений

$$W = \frac{1}{2E} \times$$

$$\times \left[ \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + 2(1+\nu)(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right]$$

или деформаций

$$W = \frac{1}{2} \left[ \lambda \theta^2 + 2\mu(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \mu(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right].$$

Потенциальная энергия деформации  $U$ , накапливаемая во всём упругом теле в процессе его деформирования, подсчитывается суммированием удельной потенциальной энергии деформации по всему объёму тела, т. е. интегрированием по объёму  $V$ :

$$\begin{aligned} U &= \iiint_V W dV = \iiint_V W dx dy dz = \\ &= \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dx dy dz. \end{aligned}$$

Внешние массовые и поверхностные силы, соответственно, совершают работу на вызванных ими перемещениях:

$$A_1 = \iiint_V (X u + Y v + Z w) dV;$$

$$A_2 = \iint_{S_\sigma} (X_v u + Y_v v + Z_v w) dS,$$

где  $S_\sigma$  – площадь поверхности тела, на которой задана поверхностная нагрузка.

Введем понятие, имеющее важное значение в механике деформируемого твёрдого тела, – функционал полной потенциальной энергии  $\mathcal{E}$  деформированного тела и действующей на него нагрузки. Выражение полной потенциальной энергии записывается следующим образом:

$$\mathcal{E} = U - A_1 - A_2. \quad (1.26)$$

Это выражение широко используется при решении задач теории упругости, пластичности и ползучести вариационными методами.

## 1.4. Решение задачи теории упругости

### 1.4.1. Основные уравнения теории упругости и способы их решения

Выше были получены три группы формул, которые образуют основные уравнения пространственной теории упругости. Запишем их все вместе.

1. Статические уравнения.

Дифференциальные уравнения равновесия (уравнения Навье) (1.2). Условия на поверхности (1.6).

2. Геометрические уравнения.

Связь между функциями перемещений и деформаций – формулы Коши (1.16), (1.17). Уравнения неразрывности деформаций (уравнения Сен-Венана) (1.19), (1.20).

3. Физические уравнения.

Обобщённый закон Гука в прямой форме (1.22). Обобщенный закон Гука в обратной форме уравнения (1.23).

Основные уравнения содержат 15 неизвестных функций:

- три компоненты вектора перемещения:  $u, v, w$ ;
- шесть компонент тензора напряжений:  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ ;
- шесть компонент тензора деформаций:  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ .

Все искомые неизвестные являются функциями координат  $x, y, z$  точки тела. Таким образом, в каждой точке нагруженного тела нас могут интересовать 15 параметров напряжённо-деформированного состояния.

Для отыскания этих функций мы имеем 15 уравнений:

- три дифференциальных уравнения равновесия (1.2);
- шесть формул Коши (1.16), (1.17);
- шесть формул закона Гука (1.22), или (1.23).

Таким образом, с точки зрения математики, задача может быть решена. Это решение сводится к интегрированию перечисленных 15 уравнений при удовлетворении условий на поверхности (1.6) и уравнений неразрывности деформаций (1.19), (1.20).

Имея эти уравнения, можно приступить непосредственно к решению задачи теории упругости о напряжениях, деформациях и перемещениях, возникающих в упругом изотропном теле под действием внешних нагрузок. Приступая к решению задачи, следует выбрать функции, которые принимаются за основные неизвестные, подлежащие определению в первую очередь, и с помощью которых далее можно определить все остальные функции, характеризующие НДС нагруженного тела.

Решение указанных уравнений можно вести тремя способами:

1. Решение *в перемещениях*, когда за основные неизвестные принимаются три компоненты вектора перемещения:  $u, v, w$ .

2. Решение *в напряжениях*, когда за основные неизвестные принимаются шесть компонент тензора напряжений:  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z,$

$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ .

3. Решение в смешанной форме, когда за основные неизвестные принимаются некоторые функции перемещений и напряжений.

Следует отметить, что первые два способа решения основных уравнений теории упругости более распространены, поэтому рассмотрим их подробнее.

#### 1.4.2. Решение задачи теории упругости в перемещениях

При решении задачи теории упругости в перемещениях за основные неизвестные принимаются три компоненты вектора перемещения (1.15).

Для их отыскания преобразуем дифференциальные уравнения равновесия Навье (1.2).

Рассмотрим первое уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0.$$

Подставим выражения компонент тензора напряжений через компоненты тензора деформаций, используя соотношения закона Гука в форме (1.23):

$$\sigma_x = \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_x, \quad \tau_{xy} = \mu \gamma_{xy}, \quad \tau_{xz} = \mu \gamma_{xz}.$$

Уравнение равновесия примет вид

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + \mu \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial z} + X = 0.$$

Затем в уравнении представим деформации через компоненты вектора перемещения (1.15) с помощью формул Коши (1.16), (1.17):

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + X = 0.$$



Преобразуем это уравнение к виду:

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + X = 0.$$

Выражение во вторых круглых скобках представляет собой относительную объёмную деформацию  $\theta$ . Поэтому

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial \theta}{\partial x} + X = 0.$$

Введём дифференциальный оператор Лапласа второго порядка. Этот оператор для некоторой функции  $f$  записывается следующим образом:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

и читается «набла два эф».

Тогда окончательно запишем

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + X = 0.$$

В итоге приходим к уравнениям равновесия (1.27):

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + X &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + Y &= 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

В таком варианте они называются *уравнениями Ламе*.

Полученные уравнения дают систему учений о напряжениях и деформациях, так как содержат:

- 1) условия равновесия каждого элемента тела;
- 2) геометрические характеристики деформации:  $u, v, w, \theta$ ;
- 3) физические характеристики материала:  $\lambda$  и  $\mu$ .

Аналогичным способом преобразуются условия на поверхности (1.6), которые содержат внешнюю нагрузку  $X_v, Y_v, Z_v$ . В этом случае при проведении выкладок используются представления производных по направлению нормали к поверхности  $v$  от компонент вектора перемещения  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$ ,  $w(x, y, z)$ , которые расписываются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial v} &= \frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n, \\ \frac{\partial v}{\partial v} &= \frac{\partial v}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial v}{\partial z} n, \\ \frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{\partial w}{\partial x} l + \frac{\partial w}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial z} n. \end{aligned} \right\}$$

В итоге приходим к трём условиям на поверхности, записанным через функции перемещений:

$$\left. \begin{aligned} \lambda \theta l + \mu \frac{\partial u}{\partial v} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial w}{\partial x} n \right) &= X_v, \\ \lambda \theta m + \mu \frac{\partial v}{\partial v} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial y} n \right) &= Y_v, \\ \lambda \theta n + \mu \frac{\partial w}{\partial v} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} l + \frac{\partial v}{\partial z} m + \frac{\partial w}{\partial z} n \right) &= Z_v. \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

Таким образом, для каждого элемента имеем три дифференциальные уравнения равновесия относительно компонент вектора перемещения внутри тела (1.27) и три условия на его поверхности (1.28). Поэтому для отыскания трёх функций перемещений  $u, v, w$  необходимо проинтегрировать три уравнения

Ламе и при этом удовлетворить условиям на поверхности. По найденным функциям перемещений из формул Коши (1.16), (1.17) вычисляют компоненты тензора деформаций, а затем по формулам (1.23) закона Гука – компоненты тензора напряжений, т. е. напряжённо-деформированное состояние тела определено в каждой его точке.

### 1.4.3. Решение задачи теории упругости в напряжениях

При решении задачи теории упругости в напряжениях за основные неизвестные принимаются шесть компонент тензора напряжений (1.4).

Для определения шести функций напряжений трёх дифференциальных уравнений равновесия (1.2) недостаточно. Поэтому для решения задачи привлекаются шесть уравнений неразрывности деформаций (1.19), (1.20). Эти уравнения с помощью формул закона Гука (1.22) и математических преобразований, которые здесь опускаются, приводятся к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} (1+\nu)\nabla^2\sigma_x + \frac{\partial^2 I_1}{\partial x^2} &= 0, & (1+\nu)\nabla^2\tau_{xy} + \frac{\partial^2 I_1}{\partial x\partial y} &= 0, \\ (1+\nu)\nabla^2\sigma_y + \frac{\partial^2 I_1}{\partial y^2} &= 0, & (1+\nu)\nabla^2\tau_{yz} + \frac{\partial^2 I_1}{\partial y\partial z} &= 0, \\ (1+\nu)\nabla^2\sigma_z + \frac{\partial^2 I_1}{\partial z^2} &= 0, & (1+\nu)\nabla^2\tau_{zx} + \frac{\partial^2 I_1}{\partial z\partial x} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.29)$$

где  $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$  – первый инвариант тензора напряжений (1.10). Уравнения (1.29) называются *уравнениями Бельтрами – Мичелла*.

Таким образом, для решения задачи теории упругости в напряжениях необходимо проинтегрировать девять уравнений (1.2) и (1.29). Наличие трёх «лишних» уравнений (лишние – потому, что неизвестных функций напряжений всего шесть) необ-

ходимо для получения однозначного решения. Шесть компонент тензора напряжений, полученные после интегрирования, должны удовлетворять условиям на поверхности (1.6). Затем по формулам закона Гука (1.22) определяются компоненты тензора деформаций, а из формул Коши (1.16), (1.17) путём интегрирования – компоненты вектора перемещения, т. е. напряжённо-деформированное состояние тела определено в каждой его точке.

Уравнения Бельтрами – Мичелла (1.29) завершают полную систему уравнений теории упругости, которая позволяет решать необходимые задачи в перемещениях или напряжениях.

Анализируя полученные результаты по методам решения задачи теории упругости, можно сделать следующий вывод: первый способ (решение задачи в перемещениях) с математической стороны проще второго способа (решение задачи в напряжениях). При решении задачи в перемещениях необходимо из трёх уравнений равновесия (1.27) определить только три функции перемещений. При этом условия неразрывности деформаций (1.19), (1.20) будут удовлетворены автоматически, так как они получены из уравнений Коши и являются их следствием. При решении задачи в напряжениях следует подобрать шесть функций напряжений, удовлетворяющих девяти уравнениям.

#### **1.4.4. Теорема единственности. Методы решения задачи теории упругости**

При решении задачи теории упругости могут возникнуть следующие вопросы:

1. Является ли полученное решение единственным?
2. Могут ли приложенным объёмным силам и заданным на поверхности нагрузкам и/или перемещениям соответствовать не одна, а несколько различных систем напряжений, деформаций и перемещений внутри тела и на его поверхности?

В теории упругости доказана теорема единственности решения задачи теории упругости, вывод которой мы опускаем. Эта

теорема верна при выполнении гипотезы о естественном ненапряжённом состоянии тела и закона независимости действия сил, о которых было сказано во введении. Из теоремы следует: так как решение задачи теории упругости единственно, то безразлично, каким математическим методом это решение получено.

Таким образом, для выбора основных неизвестных в задаче теории упругости в дифференциальной постановке имеются три метода, два из которых рассмотрены выше достаточно подробно. Для их математической реализации можно указать также несколько методов. Кратко опишем эти методы.

1. *Прямой метод* (прямая задача) заключается в непосредственном интегрировании дифференциальных уравнений равновесия совместно с заданными условиями на поверхности. При этом, если решение задачи теории упругости проводится в перемещениях, то используются уравнения Ламе (1.27) с условиями на поверхности (1.28). В случае решения задачи в напряжениях, рассматриваются уравнения равновесия (1.2) и уравнения неразрывности деформаций в форме уравнений Бельтрами – Мичелла с условиями на поверхности (1.6).

2. *Обратный метод*. Непосредственное интегрирование указанных уравнений при заданных граничных условиях на поверхности представляет трудно разрешимую задачу, поэтому в некоторых случаях применяется обратный метод решения задачи теории упругости (обратная задача). При решении обратным методом задаются функциями перемещений или напряжений, удовлетворяющими дифференциальным уравнениям Сен-Венана (1.19), (1.20) в первом случае и уравнениям Бельтрами – Мичелла (1.29) – во втором. Далее с помощью уравнений равновесия и условий на поверхности определяют, каким внешним нагрузкам соответствует рассматриваемая система перемещений или напряжений. При использовании этого метода решение задачи теории упругости является сравнительно простым, так как связано лишь с дифференцированием функций.

3. *Полуобратный метод Сен-Венана*. При решении задачи этим методом задаются только частью напряжений или переме-

щений, т. е. делаются допущения о виде этих функций. При этом дифференциальные уравнения настолько упрощаются, что решение их не представляет особых трудностей.

## 1.5. Пример расчёта пространственной конструкции

### 1.5.1. Постановка задачи. Схема решения задачи теории упругости обратным методом

Для тела, изображенного на рис. 1.10, известны три компоненты вектора перемещения как функции координат  $x, y, z$ :

$$\left. \begin{aligned} u &= a \cdot (x^2 + \alpha \cdot y), \\ v &= b \cdot (\alpha \cdot x + y^2 + z^2), \\ w &= c \cdot (\alpha \cdot y + z^2). \end{aligned} \right\} \quad (1.30)$$

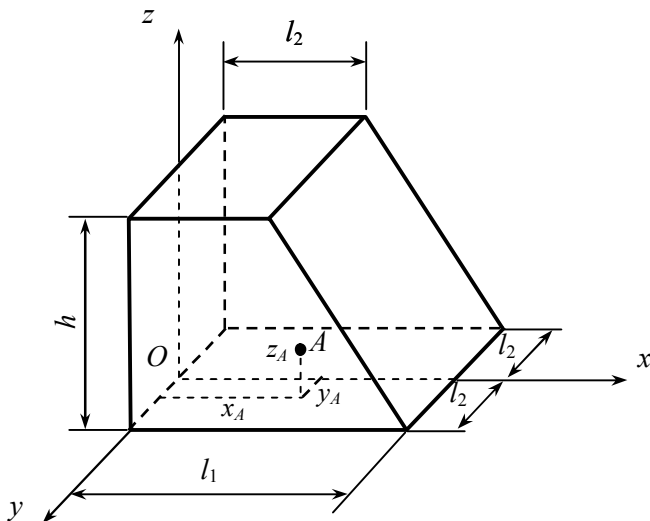


Рис. 1.10. Расчётная схема пространственного тела

Числовые данные:  $a = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$ ;  $b = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$ ;  $c = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$ ;  $\alpha = 0,5 \text{ м}$ ;  $E = 1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ;  $\nu = 0,25$ ;  $l_1 = 0,4 \text{ м}$ ;  $l_2 = 0,2 \text{ м}$ ;  $h = 0,3 \text{ м}$ ;  $x_A = 0,1 \text{ м}$ ;  $y_A = -0,1 \text{ м}$ ;  $z_A = 0,2 \text{ м}$ .

Требуется:

1. Определить компоненты тензора деформаций и тензора напряжений в произвольной точке тела.
2. Определить компоненты объёмной нагрузки  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  и поверхностной нагрузки  $X_v$ ,  $Y_v$ ,  $Z_v$  на наклонной грани тела.
3. Записать тензор напряжений  $T_H$ , шаровой тензор  $T_{ш}$  и девиатор напряжений  $D_H$ , а также определить инварианты тензора напряжений  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  в точке  $A$ .
4. Определить величины главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  и наибольшего касательного напряжения  $\tau_{\max}$  в точке  $A$ .
5. Определить погрешность вычисления инвариантов тензора напряжений в точке  $A$ .

Из постановки задачи следует, что для её решения необходимо воспользоваться обратным методом, схематично представленным в п. 1.4.3. В этом случае отпадает самая трудная часть реализации задачи теории упругости – решение системы дифференциальных уравнений равновесия в частных производных при заданных граничных условиях. После определения функций деформаций, а затем и напряжений, с помощью уравнений равновесия и условий на поверхности определяются компоненты объёмной и поверхностной нагрузки. Найденные нагрузки сравниваются с заданными нагрузками. При их несовпадении производится корректировка исходных функций перемещений, а также вновь вычисляются компоненты объёмной и поверхностной нагрузки. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнуто приемлемое совпадение заданной и определяемой нагрузок. Таким образом, предлагаемую для решения задачу можно рассматривать как один шаг итерационного процесса реализации пространственной задачи теории упругости в перемещениях с помощью обратного метода.

### 1.5.2. Определение компонент тензоров деформаций и напряжений

По уравнениям Коши (1.16), (1.17) определяем компоненты тензора деформаций в произвольной точке тела с координатами  $x, y, z$  :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 2 \cdot a \cdot x = 4 \cdot 10^{-3} \cdot x; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 2 \cdot b \cdot y = 4 \cdot 10^{-3} \cdot y;$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 2 \cdot c \cdot z = 2 \cdot 10^{-3} \cdot z;$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = a \cdot \alpha + b \cdot \alpha = 2 \cdot 10^{-3}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0;$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 2 \cdot b \cdot z + c \cdot \alpha = (4 \cdot z + 0,5) 10^{-3}.$$

Убедимся в том, что заданные выражения функций перемещений удовлетворяют дифференциальным уравнениям Сен-Венана (1.19), (1.20). Для этого необходимо определить вторые производные от полученных выражений для функций деформаций, входящих в уравнения (1.19), (1.20). В итоге приходим к выводу, что уравнения Сен-Венана удовлетворяются тождественно. Таким образом, заданные функции напряжений являются решением некоторой задачи теории упругости.

Определяем относительную объемную деформацию (1.24) в произвольной точке тела:

$$\begin{aligned} \theta &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 4 \cdot 10^{-3} \cdot x + 4 \cdot 10^{-3} \cdot y + 2 \cdot 10^{-3} \cdot z = \\ &= (2x + 2y + z) 2 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

Для определения компонент тензора напряжений вычисляем упругие постоянные материала



$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{1 \cdot 10^5 \cdot 0,25}{(1+0,25)(1-2 \cdot 0,25)} = 0,4 \cdot 10^5 \text{ МПа};$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{1 \cdot 10^5}{2(1+0,25)} = 0,4 \cdot 10^5 \text{ МПа}.$$

По выражениям (1.23) находим шесть функций напряжений в произвольной точке тела с координатами  $x, y, z$ :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x = 0,8 \cdot 10^2 (2x + 2y + z) + 3,2 \cdot 10^2 x = \\ &= (4,8x + 1,6y + 0,8z)10^2 \text{ МПа};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y = 0,8 \cdot 10^2 (2x + 2y + z) + 3,2 \cdot 10^2 y = \\ &= (1,6x + 4,8y + 0,8z)10^2 \text{ МПа};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z = 0,8 \cdot 10^2 (2x + 2y + z) + 1,6 \cdot 10^2 z = \\ &= (1,6x + 1,6y + 2,4z)10^2 \text{ МПа};\end{aligned}$$

$$\tau_{xy} = \mu\gamma_{xy} = 0,8 \cdot 10^2 \text{ МПа};$$

$$\tau_{yz} = \mu\gamma_{yz} = (1,6z + 0,2)10^2 \text{ МПа};$$

$$\tau_{zx} = \mu\gamma_{zx} = 0.$$

Согласно закону парности касательных напряжений (1.3):

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}; \quad \tau_{zy} = \tau_{yz}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}.$$

### 1.5.3. Определение компонент объёмной и поверхностной нагрузки

Находим значения первых производных от функций напряжений:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 4,8 \cdot 10^2 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{-1}; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 4,8 \cdot 10^2 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{-1};$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 2,4 \cdot 10^2 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{-1}; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 1,6 \cdot 10^2 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{-1}.$$

Запишем уравнения равновесия Навье (1.2):

$$\left. \begin{aligned} 4,8 \cdot 10^2 + 0 + 0 + X &= 0, \\ 0 + 4,8 \cdot 10^2 + 1,6 \cdot 10^2 + Y &= 0, \\ 0 + 0 + 2,4 \cdot 10^2 + Z &= 0, \end{aligned} \right\}$$

из решения которых определяем компоненты объёмных сил:

$$X = -480 \text{ МН/м}^3; \quad Y = -640 \text{ МН/м}^3; \quad Z = -240 \text{ МН/м}^3.$$

Далее подставляем найденные функции напряжений в условия на поверхности (1.6) и получаем выражения для определения компонент поверхностной нагрузки  $X_v$ ,  $Y_v$ ,  $Z_v$ :

$$X_v = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = (480x + 160y + 80z)l + 80m + 0;$$

$$Y_v = \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n = 80l + (160x + 480y + 80z)m + (160z + 20)n;$$

$$Z_v = \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n = 0 + (160z + 20)m + (160x + 160y + 240z)n.$$

Определим направляющие косинусы  $l$ ,  $m$ ,  $n$  нормали  $v$  к наклонной грани тела. Для определения величин  $l$  и  $n$  найдем отрезки  $A$  и  $C$ , отсекаемые плоскостью грани на координатных осях  $x$  и  $z$ , соответственно. Так как плоскость грани параллельна оси  $y$ , то, как известно из аналитической геометрии, её уравнение в отрезках запишется следующим образом:

$$\frac{x}{A} + \frac{z}{C} = 1.$$

Рассмотрим проекцию тела на координатную плоскость  $xOz$  (рис. 1.11). Очевидно, что расстояние  $A$  равно размеру  $l_1$ , т. е.  $A = l_1 = 0,4$  м. Расстояние  $C$  определяется из подобия треугольников:

$$\frac{C}{C-h} = \frac{l_1}{l_2}.$$

Отсюда находим:  $C = \frac{l_1 \cdot h}{l_1 - l_2} = \frac{0,4 \cdot 0,3}{0,4 - 0,2} = 0,6$  м.

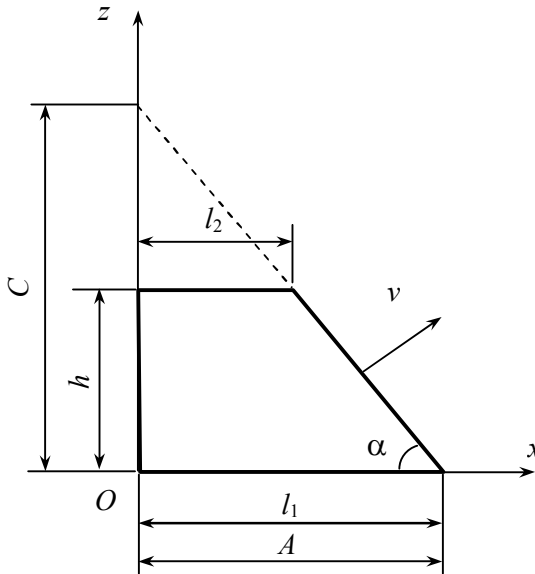


Рис. 1.11. К определению направляющих косинусов нормали  $\nu$

Согласно формулам (1.5) и рис. 1.11, находим значения направляющих косинусов:

$$l = \cos(v, x) = \frac{\frac{1}{0,4}}{\sqrt{\left(\frac{1}{0,4}\right)^2 + \left(\frac{1}{0,6}\right)^2}} = 0,832;$$

$$m = \cos(v, y) = \cos 90^\circ = 0;$$

$$n = \cos(v, z) = \frac{\frac{1}{0,6}}{\sqrt{\left(\frac{1}{0,4}\right)^2 + \left(\frac{1}{0,6}\right)^2}} = 0,555.$$

Вследствие того, что плоскость наклонной грани тела параллельна оси  $y$ , угол между нормалью  $v$  и осью  $y$  равен  $90^\circ$ .

Подставляем значения направляющих косинусов  $l, m, n$  в полученные выше выражения для компонент поверхностной нагрузки:

$$X_v = (480x + 160y + 80z)0,832 = 399,36x + 133,12y + 66,56z;$$

$$Y_v = 80 \cdot 0,832 + (160z + 20)0,555 = 77,66 + 88,8z;$$

$$Z_v = (160x + 160y + 240z)0,555 = 88,8x + 88,8y + 133,27z.$$

#### **1.5.4. Определение деформаций и напряжений в заданной точке тела. Тензор напряжений, шаровой тензор и девиатор напряжений в этой точке**

Заданные координаты  $x_A, y_A, z_A$  точки  $A$  подставляем в выражения для компонент тензоров деформаций и напряжений, полученные в п. 1.5.2, и вычисляем эти функции:

$$\varepsilon_x(A) = 4 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1 = 0,4 \cdot 10^{-3};$$

$$\varepsilon_y(A) = 4 \cdot 10^{-3} \cdot (-0,1) = -0,4 \cdot 10^{-3};$$

$$\varepsilon_z(A) = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 0,2 = 0,4 \cdot 10^{-3};$$

$$\sigma_x(A) = (4,8 \cdot 0,1 + 1,6(-0,1) + 0,8 \cdot 0,2)10^2 = 48 \text{ МПа};$$

$$\sigma_y(A) = (1,6 \cdot 0,1 + 4,8(-0,1) + 0,8 \cdot 0,2)10^2 = -16 \text{ МПа};$$

$$\sigma_z(A) = (1,6 \cdot 0,1 + 1,6(-0,1) + 2,4 \cdot 0,2)10^2 = 48 \text{ МПа};$$

$$\tau_{xy}(A) = 0,8 \cdot 10^2 = 80 \text{ МПа};$$

$$\tau_{yz}(A) = (1,6 \cdot 0,2 + 0,2)10^2 = 52 \text{ МПа};$$

$$\tau_{zx}(A) = 0.$$

По формулам (1.11) и (1.24) находим среднее нормальное напряжение  $\sigma_0$  и относительную объёмную деформацию  $\theta$  в точке  $A$ :

$$\sigma_0(A) = \frac{\sigma_x(A) + \sigma_y(A) + \sigma_z(A)}{3} = \frac{1}{3}(48 - 16 + 48) = \frac{80}{3} = 26,67 \text{ МПа};$$

$$\theta(A) = \varepsilon_x(A) + \varepsilon_y(A) + \varepsilon_z(A) =$$

$$= 0,4 \cdot 10^{-3} - 0,4 \cdot 10^{-3} + 0,4 \cdot 10^{-3} = 0,4 \cdot 10^{-3}.$$

По формулам (1.1) и (1.14) записываем тензор напряжений, шаровой тензор напряжений и девиатор напряжений в точке  $A$ , соответственно:

$$T_H(A) = \begin{vmatrix} 48 & 80 & 0 \\ 80 & -16 & 52 \\ 0 & 52 & 48 \end{vmatrix} \text{ (МПа)};$$

$$T_{\text{ш}}(A) = \begin{vmatrix} 26,67 & 0 & 0 \\ 0 & 26,67 & 0 \\ 0 & 0 & 26,67 \end{vmatrix} \quad (\text{МПа});$$

$$D_{\text{н}}(A) = \begin{vmatrix} 21,33 & 80 & 0 \\ 80 & -42,67 & 52 \\ 0 & 52 & 21,33 \end{vmatrix} \quad (\text{МПа}).$$

### 1.5.5. Определение инвариантов тензора напряжений, главных напряжений и наибольшего касательного напряжения в заданной точке

Величины напряжений в точке  $A$ , найденные выше, подставляем в формулы (1.10) и находим три инварианта тензора напряжений в точке  $A$ :

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 48 - 16 + 48 = 80 \text{ МПа};$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \\ &= 48(-16) + (-16)48 + 48 \cdot 48 - 80^2 - 50^2 = -8336 \text{ МПа}^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = \\ &= 48(-16)48 - 48 \cdot 52^2 - 48 \cdot 80^2 = -473 \, 856 \text{ МПа}^3. \end{aligned}$$

Для определения трёх главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  в точке  $A$  записываем кубическое уравнение (1.9):

$$\sigma^3 - 80 \cdot \sigma^2 - 8336 \cdot \sigma + 473856 = 0. \quad (1.31)$$

Решение кубического уравнения проводим в тригонометрической форме. Для этого воспользуемся подстановкой:

$$\bar{\sigma} = \sigma - \frac{I_1}{3} = \sigma - \frac{80}{3} = \sigma - 26,67. \quad (1.32)$$

Приводим уравнение (1.31) к «неполному» виду:

$$\bar{\sigma}^3 + 3 \cdot p \cdot \bar{\sigma} + 2 \cdot q = 0, \quad (1.33)$$

где  $3 \cdot p = I_2 - \frac{I_1^2}{3} = -8336 - \frac{80^2}{3} = -10\,469,3 \text{ МПа}^2;$

$$\begin{aligned} 2 \cdot q &= -\frac{2}{27} \cdot I_1^3 + \frac{1}{3} \cdot I_1 \cdot I_2 - I_3 = \\ &= -\frac{2}{27} 80^3 + \frac{1}{3} 80(-8336) + 473\,856 = 213\,636,74 \text{ МПа}^3. \end{aligned}$$

Если  $p < 0$  и дискриминант уравнения  $D = q^2 + p^3 \leq 0$ , то корни кубического уравнения (1.33) будут действительными. Проверим выполнение указанных неравенств, вычислив  $q$ ,  $p$ ,  $D$ :

$$q = 106818,37 \text{ МПа}^3;$$

$$p = -3489,76 \text{ МПа}^2 < 0;$$

$$D = -3,11 \cdot 10^{10} < 0.$$

Таким образом, корни кубического уравнения (1.33) являются действительными, что подтверждает высказанное в п. 1.1.4 утверждение о трёх вещественных корнях этого уравнения.

Вводим вспомогательную величину

$$r = \pm \sqrt{|p|} = 59,07,$$

знак которой должен совпадать со знаком числа  $q$ . Так как в рассматриваемом случае величина  $q > 0$ , то и  $r > 0$ .

Вводим еще одну вспомогательную величину  $\varphi$ , определяемую из равенства:

$$\cos \varphi = \frac{q}{r^3} = \frac{106\,818,37}{59,07^3} = 0,518.$$

Определяем величину угла  $\varphi$  :

$$\varphi = \arccos 0,518 = 58,78^\circ.$$

Три корня  $\bar{\sigma}', \bar{\sigma}'', \bar{\sigma}'''$  кубического уравнения (1.33) находим по формулам:

$$\bar{\sigma}' = -2 \cdot r \cdot \cos \frac{\varphi}{3} = -2 \cdot 59,07 \cdot \cos \frac{58,78^\circ}{3} = -111,3 \text{ МПа};$$

$$\bar{\sigma}'' = 2 \cdot r \cdot \cos \left( 60^\circ - \frac{\varphi}{3} \right) = 2 \cdot 59,07 \cdot \cos \left( 60^\circ - \frac{58,78^\circ}{3} \right) = 89,96 \text{ МПа};$$

$$\bar{\sigma}''' = 2 \cdot r \cdot \cos \left( 60^\circ + \frac{\varphi}{3} \right) = 2 \cdot 59,07 \cdot \cos \left( 60^\circ + \frac{58,78^\circ}{3} \right) = 21,34 \text{ МПа}.$$

Отсюда, используя обратную подстановку (1.32), находим корни исходного кубического уравнения (1.31):

$$\sigma' = \bar{\sigma}' + \frac{I_1}{3} = -111,3 + 26,67 = -84,63 \text{ МПа};$$

$$\sigma'' = \bar{\sigma}'' + \frac{I_1}{3} = 89,96 + 26,67 = 116,63 \text{ МПа};$$

$$\sigma''' = \bar{\sigma}''' + \frac{I_1}{3} = 21,34 + 26,67 = 48,01 \text{ МПа}.$$

Учитывая, что между величинами главных напряжений существует соотношение

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3,$$

по полученным корням кубического уравнения устанавливаем:

$$\sigma_1 = 116,63 \text{ МПа}; \sigma_2 = 48,01 \text{ МПа}; \sigma_3 = -84,63 \text{ МПа}.$$

Контролем правильности решения кубического уравнения служат соотношения (1.12), вытекающие из инвариантности коэффициентов уравнения (1.33):



$$I_1' = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 116,63 + 48,0 - 84,63 = 80,01 \text{ МПа};$$

$$I_2' = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 =$$

$$= 116,63 \cdot 48,01 + 48,01(-84,63) + (-84,63)116,63 = -8334,08 \text{ МПа}^2;$$

$$I_3' = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 116,63 \cdot 48,01(-84,63) = -473\,877,75 \text{ МПа}^3.$$

Определим погрешности вычисления инвариантов тензора напряжений в точке  $A$  через главные напряжения:

$$\delta_1 = \frac{|I_1' - I_1|}{|I_1|} 100 \% = \frac{|80,01 - 80|}{80} 100 \% = 0,012 \% < 1 \%;$$

$$\delta_2 = \frac{|I_2' - I_2|}{|I_2|} 100 \% = \frac{|-8334,08 + 8336|}{8336} 100 \% = 0,023 \% < 1 \%;$$

$$\delta_3 = \frac{|I_3' - I_3|}{|I_3|} 100 \% = \frac{|-473\,877,75 + 473\,856|}{473\,856} 100 \% = 0,0046 \% < 1 \%.$$

Ошибки вычисления, как видим, составляют меньше одного процента. По величинам главных напряжений, найденным по формуле (1.13), определяется наибольшее касательное напряжение:

$$\tau_{\max} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} = \frac{|116,63 + 84,63|}{2} = 100,63 \text{ МПа}.$$

### Вопросы для самопроверки

1. Что изучает теория упругости?
2. Свойства идеально-упругой модели тела.
3. Основные допущения и принципы классической теории упругости.

4. Перечислите внешние силы, действующие на твёрдое тело.
5. Дайте определение понятия «полное напряжение». Какие типы напряжений Вы знаете?
6. Дайте определение понятия «напряжённое состояние».
7. Дайте определение понятия «тензор напряжений».
8. Дайте определение понятия «главные напряжения».
9. Дайте определение понятия «инварианты тензора напряжений».
10. Дайте определение понятия «перемещение».
11. Какие типы деформаций Вы знаете?
12. Дайте определение понятия «деформированное состояние».
13. Дайте определение понятия «тензор деформаций».
14. Правило знаков для напряжений и деформаций.
15. Сколько независимых констант имеет упругий изотропный материал? Какое соотношение связывает эти постоянные?
16. Напишите выражение функционала полной потенциальной энергии системы «тело–нагрузка».
17. Перечислите три группы основных уравнений теории упругости.
18. Поясните смысл уравнений, называемых «условиями на поверхности».
19. Поясните геометрический смысл уравнений неразрывности деформаций.
20. Дайте определение понятия «прямой и обратный метод решения задачи теории упругости».
21. Перечислите основные способы решения задачи теории упругости.

## 2. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В теории упругости имеется большой класс задач, важных в смысле практических приложений и вместе с тем допускающих значительные упрощения математической стороны решения. Упрощение заключается в том, что в этих задачах одну из координатных осей тела, например ось  $z$ , можно отбросить и все явления рассматривать происходящими в одной координатной плоскости  $xOy$  нагруженного тела. В этом случае напряжения, деформации и перемещения будут являться функциями двух координат —  $x$  и  $y$ . Такие задачи носят название *плоской задачи* теории упругости.

Под термином «плоская задача теории упругости» объединяют две физически разные задачи, приводящие к весьма сходным математическим зависимостям:

1) задачу о *плоском деформированном состоянии* (*плоская деформация*);

2) задачу о *плоском напряжённом состоянии*.

Для этих задач чаще всего характерно значительное отличие одного геометрического размера от двух других размеров рассматриваемых тел: большая длина в первом случае и малая толщина во втором случае.

### 2.1. Плоская деформация

Деформация называется *плоской*, если перемещения всех точек тела могут происходить только в двух направлениях в одной плоскости и не зависят от координаты, нормальной к этой плоскости, т. е.

$$u = u(x, y); \quad v = v(x, y); \quad w = 0. \quad (2.1)$$

Плоская деформация возникает в длинных призматических или цилиндрических телах с осью, параллельной оси  $z$ , вдоль

которой по боковой поверхности действует нагрузка, перпендикулярная этой оси и не меняющаяся по величине вдоль неё. Примером плоской деформации может служить напряжённо-деформированное состояние, возникающее в длинной прямой плотине и длинном своде подземного тоннеля (рис. 2.1).

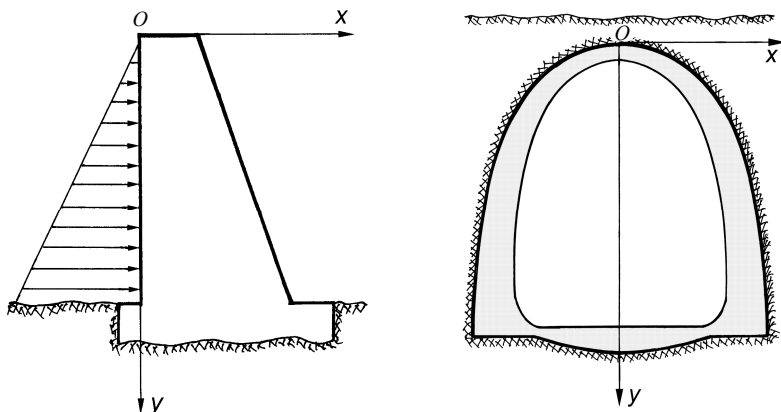


Рис. 2.1. Плоская деформация возникает в теле плотины и своде подземного тоннеля

Подставляя компоненты вектора перемещения (2.1) в формулы Коши (1.16), (1.17), получим:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x(x, y), & \varepsilon_z &= 0, \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y(x, y), & \gamma_{yz} &= 0, \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}(x, y), & \gamma_{zx} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Отсутствие линейных деформаций в направлении оси  $z$  ведёт к появлению нормальных напряжений  $\sigma_z$ . Действительно, из формулы закона Гука (1.22) для деформации  $\varepsilon_z$  следует, что

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0,$$

откуда получается выражение для напряжения  $\sigma_z$ :

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y). \quad (2.3)$$

Подставляя это соотношение в две первые формулы закона Гука, находим:

$$\varepsilon_x = \frac{1-\nu^2}{E} \left( \sigma_x - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_y \right); \quad \varepsilon_y = \frac{1-\nu^2}{E} \left( \sigma_y - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_x \right). \quad (2.4)$$

Из анализа формул (2.2) – (2.4) и (1.22) также следует, что

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x(x, y), & \sigma_z &= \sigma_z(x, y), \\ \sigma_y &= \sigma_y(x, y), & \tau_{yz} &= 0, \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}(x, y), & \tau_{zx} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Таким образом, основные уравнения трёхмерной теории упругости в случае плоской деформации значительно упрощаются.

Из трёх дифференциальных уравнений равновесия Навье (1.2) остаются только два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

а третье обращается в тождество.

Так как на боковой поверхности везде направляющий косинус  $n = \cos(\nu, z) = \cos 90^\circ = 0$ , а  $Z_\nu = 0$ , то из трёх условий на поверхности (1.6) остаются только два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x l + \tau_{xy} m &= X_\nu, \\ \tau_{yx} l + \sigma_y m &= Y_\nu, \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

где  $l, m$  – направляющие косинусы (1.5) внешней нормали  $\nu$  к поверхности контура;  $X, Y, X_\nu, Y_\nu$  – компоненты объёмных сил и интенсивности внешних поверхностных нагрузок на оси  $x$  и  $y$ , соответственно.

Шесть уравнений Коши (1.16), (1.17) сводятся к трём:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.7)$$

Из шести уравнений неразрывности деформаций Сен-Венана (1.19), (1.20) остаётся одно уравнение:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad (2.8)$$

а остальные обращаются в тождества.

Из шести формул закона Гука (1.22), с учётом (2.2), (2.4), остаются три формулы:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_1}(\sigma_x - \nu_1 \sigma_y); \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E_1}(\sigma_y - \nu_1 \sigma_x); \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1 + \nu_1)}{E_1} \tau_{xy}. \quad (2.9)$$

В этих соотношениях для традиционного в теории упругости вида записи введены новые упругие постоянные:

$$E_1 = \frac{E}{1 - \nu^2}; \quad \nu_1 = \frac{\nu}{1 - \nu}.$$

## 2.2. Плоское напряжённое состояние

*Плоское напряжённое состояние* возникает в том случае, когда длина того же призматического тела мала, по сравнению с двумя другими, размерами. В этом случае она называется *толщиной*. Напряжения в теле действуют только в двух направлениях в координатной плоскости  $xOy$  и не зависят от координаты  $z$ .

ты  $z$ . Примером такого тела может служить тонкая пластина толщиной  $h$ , нагруженная по боковой поверхности (ребру) силами, параллельными плоскости пластины и равномерно распределёнными по её толщине (рис. 2.2).

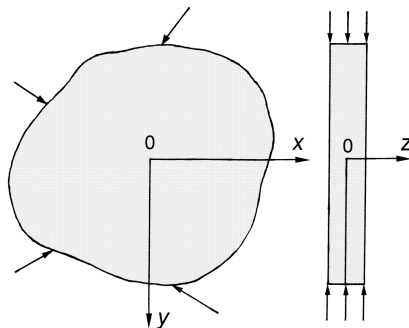


Рис. 2.2. Тонкая пластинка и приложенные к ней нагрузки

В этом случае также возможны упрощения, аналогичные упрощениям в задаче о плоской деформации. Компоненты тензора напряжений  $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  на обеих плоскостях пластины равны нулю. Так как пластина тонкая, то можно считать, что они равны нулю и внутри пластины. Тогда напряжённое состояние будет определяться только компонентами  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ , которые не зависят от координаты  $z$ , т. е. не меняются по толщине пластины, а являются функциями только  $x$  и  $y$ .

Таким образом, в тонкой пластине возникает следующее напряжённое состояние:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x(x, y), & \sigma_z &= 0, \\ \sigma_y &= \sigma_y(x, y), & \tau_{yz} &= 0, \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}(x, y), & \tau_{zx} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

В отношении напряжений плоское напряжённое состояние отличается от плоской деформации условием

$$\sigma_z = 0. \quad (2.10)$$

Кроме того, из формулы закона Гука (1.22), с учётом (2.10), для линейной деформации  $\varepsilon_z$  получаем, что она не равна нулю:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \neq 0.$$

Следовательно, основания пластины будут искривляться, так как появятся перемещения  $w = \varepsilon_z \cdot z = -\frac{\nu \cdot z}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$  по оси  $z$ .

При этих предположениях *основные уравнения плоской деформации*: дифференциальные уравнения равновесия (2.5), условия на поверхности (2.6), уравнения Коши (2.7) и уравнения неразрывности деформаций (2.8) сохраняют такой же вид в задаче о плоском напряжённом состоянии.

Формулы закона Гука примут следующий вид:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y); \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x); \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}. \quad (2.11)$$

Формулы (2.11) отличаются от формул (2.9) закона Гука для плоской деформации только значениями упругих постоянных:  $E$  и  $E_1$ ,  $\nu$  и  $\nu_1$ .

В обратной форме закон Гука запишется так:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x), \\ \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Таким образом, при решении этих двух задач (плоская деформация и плоское напряжённое состояние) можно пользо-



ваться одними и теми же уравнениями и объединять задачи в одну плоскую задачу теории упругости.

В плоской задаче теории упругости восемь неизвестных:

- две компоненты вектора перемещений  $u$  и  $v$ ;
- три компоненты тензора напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ;
- три компоненты тензора деформаций  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ .

Для решения задачи используют восемь уравнений:

- два дифференциальных уравнения равновесия (2.5);
- три уравнения Коши (2.7);
- три формулы закона Гука (2.9), или (2.11).

Кроме того, полученные деформации должны подчиняться уравнению неразрывности деформаций (2.8), а на поверхности тела должны выполняться условия равновесия (2.6) между внутренними напряжениями и интенсивностями внешней поверхностной нагрузки  $X_v, Y_v$ .

## 2.3. Решение плоской задачи в напряжениях

Ранее мы выяснили, что решение задачи теории упругости, которая описывается дифференциальными уравнениями в частных производных, можно проводить тремя способами: в перемещениях, в напряжениях и в смешанной форме.

### 2.3.1. Уравнение Мориса Леви. Функция напряжений Эри. Бигармоническое уравнение плоской задачи

Решение плоской задачи, которое будем проводить в напряжениях, сводится к отысканию трёх неизвестных функций:  $\sigma_x = \sigma_x(x, y)$ ;  $\sigma_y = \sigma_y(x, y)$ ;  $\tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y)$ . Для этого воспользуемся двумя дифференциальными уравнениями равновесия (2.5) и уравнением неразрывности деформаций (2.8).

Преобразуем уравнение неразрывности деформаций (2.8). Считаем, что объёмные силы  $X$  и  $Y$  постоянны по всему объёму твёрдого тела, т. е. не зависят от координат  $x$  и  $y$ .

Подставляя в уравнение (2.8) выражения деформаций из закона Гука (2.11) для плоского напряжённого состояния, получаем:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \nu \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \nu \sigma_x) = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y},$$

или, раскрывая скобки,

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (2.13)$$

С помощью уравнений равновесия (2.5) исключим из уравнения неразрывности деформаций (2.13) касательное напряжение  $\tau_{xy}$ . Для этого, дифференцируя первое из уравнений (2.5) по  $x$ , а второе – по  $y$ , и затем, складывая их, получаем:

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}.$$

Подставляя выражение для смешанной производной от касательного напряжения  $\tau_{xy}$  в уравнение (2.13), получаем условие неразрывности деформаций, записанное через нормальные напряжения:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = 0.$$

Группируя полученное выражение, сводим его к виду

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0,$$

или

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (2.14)$$

Уравнение (2.14) получено для плоского напряжённого состояния и носит название *уравнения Мориса Леви*. Уравнения равновесия (2.5) вместе с граничными условиями (2.6) и уравнением неразрывности (2.14) дают систему уравнений, которых достаточно для полного определения напряжений в двумерной задаче.

Важно отметить, что в случае постоянства объёмных сил уравнения, определяющие распределение напряжений в теле, не содержат упругих констант материала  $E$ ,  $\nu$ . Поэтому уравнение (2.14) имеет такой же вид и для случая плоской деформации. Вследствие этого можно также сделать вывод о том, что для одинаковых внешних нагрузок и одинаковых граничных условий *распределение напряжений будет одним и тем же для всех изотропных материалов*. Этот вывод имеет большую практическую ценность: полученные с помощью оптических методов результаты определения напряжений в прозрачных материалах можно непосредственно применять к любым материалам, например к стали.

Для упрощения решения плоской задачи введём некоторую функцию  $\varphi = \varphi(x, y)$ , связанную с компонентами тензора напряжений следующими зависимостями:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (2.15)$$

Функция  $\varphi$  называется *функцией напряжений Эри*. Соотношения (2.15) в 1862 г. предложил Эри, имя которого носит эта функция. Следовательно, вместо определения трёх функций  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  найдем одну функцию  $\varphi$ .

Выражения напряжений (2.15) подобраны так, что их подстановка в уравнения равновесия (2.5) даёт тождества. Так, для первого уравнения имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right) = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} = 0.$$

Таким образом, принятая в виде (2.15) функция напряжений  $\varphi(x, y)$  является решением системы двух уравнений равновесия (2.5). Поэтому нет необходимости их решать.

Подстановка выражений (2.15) в уравнение неразрывности деформаций (2.14) приводит к уравнению

$$\nabla^2 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = 0.$$

Поскольку выражение в скобках представляет собой гармонический оператор Лапласа  $\nabla^2$  над функцией  $\varphi$ , полученное равенство можно представить как дважды применённый оператор  $\nabla^2$ :

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0,$$

или

$$\nabla^4 \varphi = 0. \quad (2.16)$$

Левая часть полученного уравнения читается «набла четыре фи» и называется *двойным оператором Лапласа* над функцией  $\varphi$ . Функция, подчиняющаяся оператору Лапласа, называется *гармонической функцией*, т. е. это действительная функция, которая имеет непрерывные вторые производные.

Расписывая дифференциальный оператор в (2.16), получим:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (2.17)$$

Уравнение (2.16), или (2.17), называется *бигармоническим уравнением* плоской задачи теории упругости, а всякая функция, удовлетворяющая этому уравнению, — *бигармонической функцией*.

Условия на поверхности (2.6) для плоской задачи также выразим через функцию напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} l - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} m &= X_v, \\ -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} l + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} m &= Y_v. \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Таким образом, решение плоской задачи теории упругости сводится к решению преобразованного уравнения неразрывности деформаций (2.17). При этом искомая функция напряжений  $\varphi(x, y)$  должна удовлетворять заданным граничным условиям на контуре (2.18).

### 2.3.2. Методы решения плоской задачи для прямоугольных областей

На примере уравнений (2.17) и (2.18) имеем так называемую *краевую задачу теории упругости*. Решение в аналитической форме подобных задач возможно лишь в некоторых частных случаях нагружения тел простой геометрической формы и условий их закрепления. Поэтому для реализации прикладных инженерных задач применяются другие приближённые методы.

Рассмотрим наиболее часто употребляемые методы решения плоской задачи теории упругости:

- 1) решение в полиномах;
- 2) решение в тригонометрических рядах;
- 3) решение при помощи конечных разностей.

Как было показано, необходимо подбирать функцию напряжений  $\varphi(x, y)$ , которая удовлетворяла бы уравнению неразрывности деформаций (2.17) и заданным граничным условиям на контуре (2.18). Обычно это бывает затруднительно, а иногда и вообще не удаётся сделать. Поэтому решение задачи можно осуществить обратным методом. Задаются видом функции  $\varphi$

и исследуют, какому случаю напряжённого состояния она соответствует. С помощью такого подхода проводится решение плоской задачи теории упругости первыми двумя упомянутыми методами: в полиномах и в тригонометрических рядах. Кратко опишем эти методы.

Задаваясь функцией напряжений  $\varphi$  в виде полинома (многочлена), например, такого вида:

$$\varphi(x, y) = (a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2) + (a_3x^3 + b_3x^2y + c_3xy^2 + d_3y^3) + \\ + (a_4x^4 + b_4x^3y + \dots + e_4y^4) + \dots,$$

можно получить целый ряд решений.

Членов с координатами  $x$  и  $y$  в первой степени учитывать не нужно, так как, переходя к определению напряжений по формулам (2.15), мы увидим, что линейная по отношению к координатам  $x$  и  $y$  часть полинома выпадает из выражения напряжений. Коэффициенты полинома подбираются так, чтобы были удовлетворены условия на поверхности (2.18) и основное уравнение (2.17).

С помощью алгебраических полиномов можно решить ряд простых и сложных задач: чистый изгиб балки, изгиб балки на двух опорах, изгиб консоли, изгиб прямоугольной полосы, задача о треугольной подпорной стенке и т. д.

В качестве функции напряжений  $\varphi$  для плоской задачи, например расчёта пластины, можно применять тригонометрические ряды. Уравнение неразрывности деформаций (2.17) удовлетворится, если принять

$$\varphi(x, y) = \sin \frac{n\pi x}{l} F(y),$$

где  $n$  – любое целое число;  $l$  – длина пластины в направлении оси  $x$ ;  $F(y)$  – некоторая функция, зависящая от координаты  $y$ .

Функцию  $F(y)$  найдём, если подставим функцию напряжений  $\varphi$  в уравнение неразрывности (2.17).

Введём обозначение:

$$\alpha = \frac{n\pi}{l}.$$

Следовательно,

$$\varphi(x, y) = \sin(\alpha x) \cdot F(y).$$

Производные от функции напряжений будут:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = \alpha^4 \cdot \sin(\alpha x) F(y);$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = -\alpha^2 \cdot \sin(\alpha x) F''(y);$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = \sin(\alpha x) F^{IV}(y).$$

Подставляя производные в уравнение неразрывности деформаций (2.17) и сокращая на  $\sin(\alpha x)$ , получаем:

$$\alpha^4 \cdot F(y) - 2\alpha^2 \cdot F''(y) + F^{IV}(y) = 0.$$

Решение этого уравнения выражается через гиперболическую функцию

$$F(y) = C_1 \cdot \text{sh}(\alpha x) + C_2 \cdot \text{ch}(\alpha x) + C_3 \cdot y \cdot \text{sh}(\alpha x) + C_4 \cdot y \cdot \text{ch}(\alpha x).$$

Таким образом, функция напряжений, удовлетворяющая уравнению неразрывности деформаций, имеет вид:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = \sin(\alpha x) [ & C_1 \cdot \text{sh}(\alpha x) + C_2 \cdot \text{ch}(\alpha x) + \\ & + C_3 \cdot y \cdot \text{sh}(\alpha x) + C_4 \cdot y \cdot \text{ch}(\alpha x) ]. \end{aligned}$$

Точно так же нетрудно убедиться, что уравнению неразрывности деформаций удовлетворяет и функция

$$\varphi(x, y) = \cos(\alpha x) [C_5 \cdot \operatorname{sh}(\alpha x) + C_6 \cdot \operatorname{ch}(\alpha x) + \\ + C_7 \cdot y \cdot \operatorname{sh}(\alpha x) + C_8 \cdot y \cdot \operatorname{ch}(\alpha x)],$$

где  $C_1 - C_8$  – постоянные коэффициенты;  $\operatorname{sh} x$ ,  $\operatorname{ch} x$  – гиперболические синус и косинус, соответственно, которые определяются через показательные функции по формулам:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Так как  $n$  – произвольное целое число, то, давая ему различные значения, получим бесчисленное множество частных решений. Общее решение уравнения неразрывности деформаций (2.17) представится таким бесконечным рядом:

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sin(\alpha x) [C_1 \cdot \operatorname{sh}(\alpha x) + C_2 \cdot \operatorname{ch}(\alpha x) + \right. \\ \left. + C_3 \cdot y \cdot \operatorname{sh}(\alpha x) + C_4 \cdot y \cdot \operatorname{ch}(\alpha x)] + \cos(\alpha x) [C_5 \cdot \operatorname{sh}(\alpha x) + C_6 \cdot \operatorname{ch}(\alpha x) + \right. \\ \left. + C_7 \cdot y \cdot \operatorname{sh}(\alpha x) + C_8 \cdot y \cdot \operatorname{ch}(\alpha x)] \right\}.$$

Коэффициенты  $C_1 - C_8$  в вышеприведенной формуле теперь уже зависят от порядкового номера членов бесконечного ряда, так как по существу в эту формулу входит бесконечное число коэффициентов, но они связаны между собой определёнными соотношениями. Эти коэффициенты следует находить из граничных условий на контуре пластины.

Для возможности решения задачи внешняя нагрузка на контуре тела также должна быть разложена в бесконечный тригонометрический ряд по синусам и косинусам. С помощью представленной функции напряжений, добавляя в случае необходимости степенные полиномы, можно получить решения для более широкого круга задач, чем с помощью только степенных



полиномов. Среди них можно назвать задачу об изгибе балки-стенки, задачу о действии на пластину нагрузок, распределённых вдоль контура по любому закону, в том числе сосредоточенной силы.

## **2.4. Решение плоской задачи при помощи конечных разностей**

Точное решение преобразованного уравнения неразрывности деформаций (2.17), совместно с заданными условиями на контуре (2.18), во многих случаях оказывается очень сложным. Для решения этой задачи можно применить приближённый метод – *метод конечных разностей*. Рассмотрим этот метод подробнее, ибо с его помощью удаётся решать различные прикладные задачи механики деформируемого твёрдого тела. Теоретические положения метода применяются и при численной реализации вариационных методов решения задач теории упругости.

На основе этого метода, применяя теорию конечных разностей, в дифференциальном уравнении заменяют производные их приближёнными выражениями. В результате вместо одного дифференциального уравнения получают и решают систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Метод конечных разностей (МКР) решения краевых задач для дифференциальных уравнений называют также *методом сеток*. Он состоит в следующем. Вся область рассматриваемого тела – площадь пластины, поверхность оболочки, объём пространственного тела и т. д. – покрывается плоской или пространственной сеткой линий, точки пересечения которых называются *узлами*. Значения искомых функций в этих узлах принимаются за неизвестные. Для этого записываются приближённые формулы для производных от этих функций – *конечно-разностные операторы*, выраженные через значения функций в узлах сетки. Эти операторы подставляют в исходное дифференциальное уравнение

и требуют, чтобы это уравнение выполнялось в каждом узле сетки. Такой приём в математике называют *коллокацией*. В итоге это приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений искомых функций в узлах сетки, решение которых и даёт числовое поле определяемых в теле функций. Граничные условия данной краевой задачи формулируются с помощью конечно-разностных операторов.

Описанная процедура сведения задачи нахождения значений непрерывных функций к задаче нахождения их значений в узлах сеточной области называется *дискретизацией задачи*.

### **2.4.1. Получение конечно-разностного аналога бигармонического уравнения плоской задачи теории упругости**

Прежде чем излагать приёмы расчёта, выведем формулы конечно-разностных операторов производных. Принцип построения этих операторов основан на использовании формулы, определяющей понятие «производная». Рассмотрим построение операторов на примере функции одной переменной.

Сформулируем понятие «производная функции одной переменной». Производной функции  $y = f(x)$  называется предел, к которому стремится отношение бесконечно малого приращения функции  $\Delta y$  к соответствующему бесконечно малому приращению аргумента  $\Delta x$ , при стремлении  $\Delta x$  к нулю:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Рассмотрим график функции  $y = f(x)$ , представленный на рис. 2.3. Получим приближённое выражение первой производной  $\left(\frac{dy}{dx}\right)_o$  функции  $y = f(x)$  в точке  $o$  для значения аргумента  $x = x_o$ .

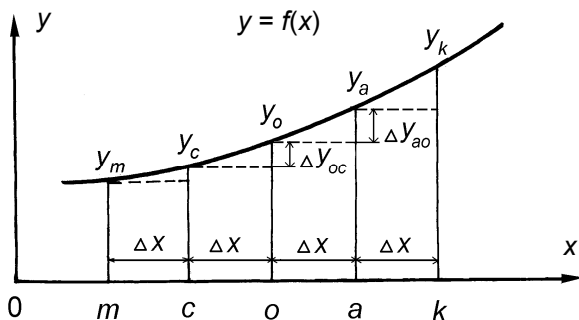


Рис. 2.3. График функции  $y = f(x)$

Приращение функции  $\Delta y$  в точке  $o$  при приращении аргумента  $\Delta x$  можно выразить через разность значений функции  $y$  в двух соседних точках:

$$\Delta y_{oc} = y_o - y_c \text{ или } \Delta y_{ao} = y_a - y_o,$$

т. е. через левую и правую конечные разности, соответственно. Разделив эти разности на длину промежутка  $\Delta x$  между точками  $a, o, c$ , получаем приближённые значения первой производной функции  $y(x)$  в точке  $o$ :

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_o = \frac{y_o - y_c}{\Delta x} \text{ или } \left( \frac{dy}{dx} \right)_o = \frac{y_a - y_o}{\Delta x}.$$

Более точно первую производную в точке  $o$  для значения аргумента  $x = x_o$  можно представить через так называемые *центральные разности*:

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_o = \frac{y_a - y_c}{2(\Delta x)}.$$

По аналогии с выражением первой производной строится выражение второй производной в точке  $o$ :

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_o = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx}\right)_o = \frac{d}{dx} \left(\frac{y_a - y_c}{2(\Delta x)}\right)_o = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)_a - \left(\frac{dy}{dx}\right)_c}{2(\Delta x)}.$$

Подставляя выражения для первых производных в точках  $a$  и  $c$ , получим:

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_o = \frac{\frac{y_k - y_o}{2(\Delta x)} - \frac{y_o - y_m}{2(\Delta x)}}{2(\Delta x)} = \frac{y_k - 2y_o + y_m}{4(\Delta x)^2}.$$

Полученная формула вычисления второй производной неудобна, так как неявно приходится учитывать пять точек вместо трёх. Выражение для этой производной упростится, если уменьшить шаг сетки  $\Delta x$  в два раза.

Тогда получится:

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_o = \frac{y_a - 2y_o + y_c}{(\Delta x)^2}.$$

Для третьей производной можно получить следующее выражение:

$$\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right)_o = \frac{y_k - 2y_a + 2y_c - y_m}{2(\Delta x)^3}.$$

Четвёртую производную можно выразить, используя формулу второй производной:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^4 y}{dx^4}\right)_o &= \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_o = \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{y_a - 2y_o + y_c}{(\Delta x)^2}\right)_o = \\ &= \frac{\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_a - 2\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_o + \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_c}{\Delta x^2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{y_k - 2y_a + y_o}{(\Delta x)^2} - 2 \left( \frac{y_a - 2y_o + y_c}{(\Delta x)^2} \right) + \frac{y_o - 2y_c + y_m}{(\Delta x)^2}}{(\Delta x)^2}.$$

После приведения подобных членов будем иметь следующее выражение четвёртой производной через значения функции в пяти точках сетки:

$$\left( \frac{d^4 y}{dx^4} \right)_o = \frac{y_k - 4y_a + 6y_o - 4y_c + y_m}{(\Delta x)^4}.$$

В случае плоской задачи функция напряжений  $\varphi$  является функцией двух координат  $x$  и  $y$ . Поэтому через конечные разности необходимо выражать частные производные. Для этого воспользуемся полученными выше конечно-разностными операторами производных функции одной переменной  $y = f(x)$ .

Нанесём на плоскость пластины *двумерную сетку линий* с шагом  $\Delta x$  по горизонтальной и шагом  $\Delta y$  по вертикальной осям, соответственно. За неизвестные принимаются значения функции напряжений  $\varphi$  в узлах сетки. Введём так называемый *шаблон*, состоящий из 13 узлов (рис. 2.4).

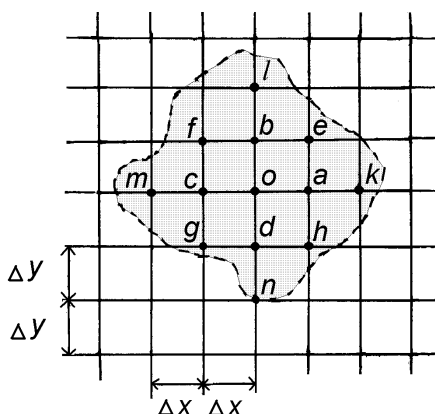


Рис. 2.4. Обозначение узлов двумерной сетки. Шаблон для составления алгебраических уравнений неразрывности деформаций

Тогда вторые и четвёртые частные производные функции Эри на двумерной сетке в узле  $o$  запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_o &= \frac{\varphi_a - 2\varphi_o + \varphi_c}{(\Delta x)^2}, \quad \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)_o = \frac{\varphi_b - 2\varphi_o + \varphi_d}{(\Delta y)^2}, \\
 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)_o &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_o = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\varphi_a - \varphi_c}{2(\Delta x)} \right) = \frac{\left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_a - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_c}{2(\Delta x)} = \\
 &= \frac{\frac{\varphi_e - \varphi_h}{2(\Delta y)(\Delta y)} - \frac{\varphi_f - \varphi_q}{2(\Delta y)}}{2(\Delta x)} = \frac{\varphi_e - \varphi_f + \varphi_q - \varphi_h}{4(\Delta x)(\Delta y)}; \quad (2.19) \\
 \left( \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \right)_o &= \frac{\varphi_k - 4\varphi_a + 6\varphi_o - 4\varphi_c + \varphi_m}{(\Delta x)^4}, \\
 \left( \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} \right)_o &= \frac{\varphi_l - 4\varphi_b + 6\varphi_o - 4\varphi_d + \varphi_n}{(\Delta y)^4}, \\
 \left( \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_o &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_o = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\varphi_a - 2\varphi_o + \varphi_c}{(\Delta x)^2} \right) = \\
 &= \frac{\left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)_a - 2 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)_o + \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)_c}{(\Delta x)^2} = \\
 &= \frac{\frac{\varphi_e - 2\varphi_a + \varphi_h}{(\Delta y)^2} - 2 \frac{\varphi_b - 2\varphi_o + \varphi_d}{(\Delta y)^2} + \frac{\varphi_f - 2\varphi_c + \varphi_q}{(\Delta y)^2}}{(\Delta x)^2}.
 \end{aligned}$$

Окончательно для четвёртой смешанной производной получим:

$$\left( \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_o = \frac{4\varphi_o - 2(\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c + \varphi_d) + \varphi_e + \varphi_f + \varphi_q + \varphi_h}{(\Delta x)^2 (\Delta y)^2}.$$

Полученные выражения четвёртых производных от функции напряжений подставим в уравнение неразрывности деформаций (2.17):

$$\begin{aligned} & \frac{\varphi_k - 4\varphi_a + 6\varphi_o - 4\varphi_c + \varphi_m}{(\Delta x)^4} + \\ & + \frac{8\varphi_o - 4(\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c + \varphi_d) + 2(\varphi_e + \varphi_f + \varphi_q + \varphi_h)}{(\Delta x)^2 (\Delta y)^2} + \\ & + \frac{\varphi_l - 4\varphi_b + 6\varphi_o - 4\varphi_d + \varphi_n}{(\Delta y)^4} = 0. \end{aligned}$$

Обозначим через  $\alpha$  соотношение между квадратами шагов сетки  $\alpha = \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}$ . Тогда последнее уравнение преобразуем к следующему виду:

$$\begin{aligned} & \varphi_o (6\alpha^2 + 8\alpha + 6) - 4(\alpha\varphi_a + \varphi_b + \alpha\varphi_c + \varphi_d)(\alpha + 1) + \\ & + 2(\varphi_e + \varphi_f + \varphi_q + \varphi_h) + (\varphi_l + \alpha^2\varphi_k + \varphi_n + \alpha^2\varphi_m) = 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Выражение полученного *разностного аналога* (2.20) би-гармонического уравнения плоской задачи теории упругости (2.17) упрощается в зависимости от значений параметра  $\alpha$ . Так, для квадратной сетки параметр  $\alpha = 1$  и уравнение неразрывности деформаций примет вид:

$$\begin{aligned} & 20\varphi_o - 8(\varphi_a + \varphi_b + \varphi_c + \varphi_d) + \\ & + 2(\varphi_e + \varphi_f + \varphi_q + \varphi_h) + \varphi_l + \varphi_k + \varphi_n + \varphi_m = 0. \end{aligned} \quad (2.21a)$$

Для соотношения между шагами сетки  $\Delta x = 2 \cdot \Delta y$  параметр  $\alpha = 0,25$  и уравнение (2.20) записывается следующим образом:

$$33,5\varphi_o - 5(\varphi_a + 4\varphi_b + \varphi_c + 4\varphi_d) + \\ + 2(\varphi_e + \varphi_f + \varphi_q + \varphi_h) + 4\varphi_l + 0,25\varphi_k + 4\varphi_n + 0,25\varphi_m = 0. \quad (2.21б)$$

Итак, дифференциальное уравнение неразрывности деформаций (2.17) с помощью метода конечных разностей преобразовано в *линейное алгебраическое уравнение* (2.20) относительно искомых неизвестных значений функции напряжений, записанное в узле  $o$  сетки (рис. 2.4).

Расписывая полученное уравнение неразрывности деформаций в конечных разностях (2.20) в узлах сетки, нанесённой на исследуемое тело, приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений функции напряжений в узлах сетки, для реализации которой существуют вычислительные алгоритмы и достаточно надежный математический аппарат линейной алгебры. Следует отметить, что значения функции напряжений  $\varphi$ , найденные из решения СЛАУ, должны удовлетворять граничным условиям (2.18) краевой задачи, которые формулируются с помощью конечно-разностных операторов.

Напряжения в узле  $o$  шаблона, представленного на рис. 2.4, определяются через значения функций Эри с помощью формул (2.15) и формул (2.19), полученных для вторых производных от функции напряжений  $\varphi$ :

$$(\sigma_x)_o = \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)_o = \frac{\varphi_b - 2\varphi_o + \varphi_d}{(\Delta y)^2};$$

$$(\sigma_y)_o = \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_o = \frac{\varphi_a - 2\varphi_o + \varphi_c}{(\Delta x)^2};$$

$$(\tau_{xy})_o = \left( -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)_o = \frac{\varphi_f - \varphi_e + \varphi_h - \varphi_q}{4 \cdot (\Delta x)(\Delta y)}. \quad (2.22)$$



## 2.4.2. Получение системы линейных алгебраических уравнений

В пластине, в зависимости от места положения узлов сетки относительно её контура, различают три их типа:

- *внутренние узлы*, находящиеся внутри расчётной области;
- *контурные узлы*, находящиеся на контуре расчётной области;
- *законтурные узлы*, находящиеся на расстоянии  $\Delta x$  и  $\Delta y$  вне контура расчётной области.

Уравнения неразрывности деформаций (2.21a), (2.21б) можно составить для каждого внутреннего узла сетки. Но в часть этих уравнений войдут значения функции напряжений  $\varphi$  в контурных и законтурных узлах. Эти значения находятся непосредственно, исходя из граничных условий на контуре (2.18).

Таким образом, неизвестных значений функции  $\varphi$  окажется столько, сколько узлов внутри контура, но столько же можно составить уравнений неразрывности деформаций вида (2.21a), (2.21б). Получается система  $n$  линейных алгебраических уравнений, из решения которой определяются  $n$  значений функции  $\varphi$  в каждом внутреннем узле. Точность полученного решения зависит от количества узлов, т. е. чем больше узлов сетки, тем точнее определяются значения искомой функции напряжений  $\varphi$ . На рис. 2.5 представлена пластина, у которой горизонтальный участок контура загружен нормально приложенной и равномерно распределенной нагрузкой с интенсивностью  $q$ .

Такая конструкция носит название «балка-стенка». Высота балки-стенки больше  $1/3 - 1/2$  её пролёта. Конструкция получила своё название потому, что она как балка опирается краями на опоры (пилоны), несёт поперечную нагрузку и работает на изгиб. В то же время она является стенкой здания. Для горизонтального участка контура пластины направляющие косинусы принимают значения:

$$l=0, \quad m=1.$$

Тогда граничные условия (2.18) на этом участке контура запишутся так:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = Y_v, \quad \text{или} \quad \tau_{xy} = 0; \quad \sigma_y = q. \quad (2.23)$$

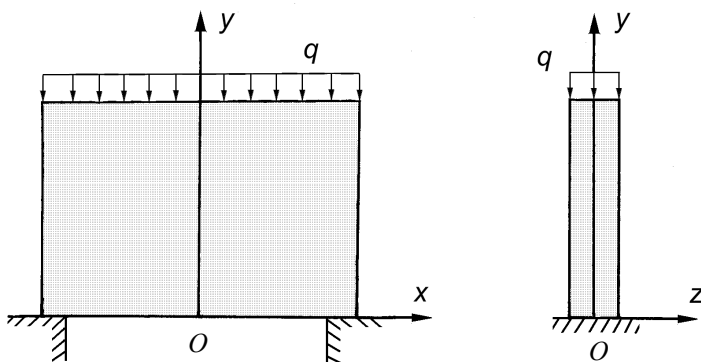


Рис. 2.5. Расчётная схема балки-стенки

Выражение (2.23) можно использовать для определения функции  $\varphi$  в контурных узлах с помощью непосредственного интегрирования:

$$\varphi = \int \left( \int Y_v \cdot dx \right) dx + C_1 \cdot x + C_2 = \int \left( \int q \cdot dx \right) dx + C_1 \cdot x + C_2.$$

Для определения значений функции напряжений на контуре и вне его воспользуемся другим подходом.

Рассмотрим контур пластины произвольной формы, представляющий собой односвязную область (рис. 2.6).

Считаем, что в каждой точке контура пластины заданы интенсивности поверхностной нагрузки по нормали  $q_v$  и по касательной  $q_s$  к контуру. Положительное направление обхода контура, соответствующее координате  $s$ , принято по часовой стрелке.

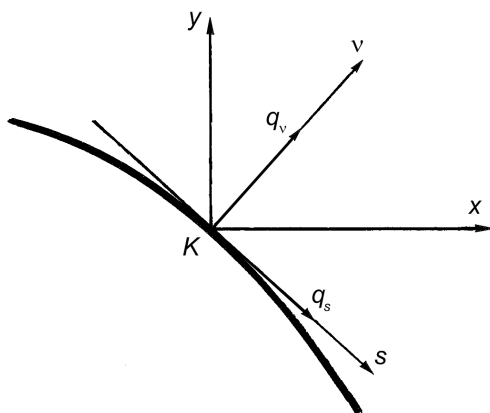


Рис. 2.6. Контур пластины

Используя выражение для второй производной по направлению  $s$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \sin^2 \alpha + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cos^2 \alpha - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \sin 2\alpha ,$$

выражения для компонент тензора напряжений (2.15) и известную из курса сопротивления материалов формулу для напряжения на наклонной площадке внутри области, получим равенство

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} = \sigma_y \sin^2 \alpha + \sigma_x \cos^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha = \sigma_\alpha = \sigma_v ,$$

где  $\alpha$  – угол между осью  $x$  и нормалью  $v$  к наклонной площадке, определяющей положение этой площадки.

Подобным образом можно получить выражения для второй производной от функции напряжений по нормали  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}$  и для смешанной производной  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial v}$ . И тогда в любой точке пластины для любых двух взаимно перпендикулярных направлений  $v, s$

справедливы выражения для напряжений по этим направлениям через функцию напряжений, аналогичные соотношениям (2.15):

$$\sigma_v = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}; \quad \sigma_s = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}; \quad \tau_{vs} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial v}.$$

Поэтому с учётом полученных выражений граничные условия для точки  $K$  записываются следующим образом:

$$\sigma_v = q_v; \quad \tau_{vs} = q_s,$$

или

$$\frac{\partial^2 \varphi_K}{\partial s^2} = q_v; \quad -\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)_K = q_s. \quad (2.24a)$$

Индекс  $K$  подчёркивает, что функция напряжений  $\varphi$  и производная по нормали  $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$  берутся в конкретной точке контура.

Переход от заданных напряжений на контуре пластины к функции напряжений эффективно осуществляется с помощью так называемой *рамной аналогии*. В 1934 г., почти одновременно, П.Л. Пастернак и А.П. Сеницын предложили при расчёте балок-стенок заменять нахождение функции напряжений на контуре пластины построением эпюр изгибающих моментов в раме, по очертанию совпадающей с контуром балки-стенки и нагруженной той же нагрузкой, что и балка-стенка.

Из рассмотрения равновесия элемента  $ds$  контура такой рамы получают следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial s^2} = q_v; \quad -\frac{\partial N}{\partial s} = q_s, \quad (2.24б)$$

где  $N$  – продольная сила в стержнях рамы.

Сравнивая соотношения (2.24a) и (2.24б), приходим к выводу, что граничные условия на контуре балки-стенки (2.24a) будут удовлетворены, если в качестве функции напряжений  $\varphi$  и производной по нормали  $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$  на её контуре принять, соответ-

венно, выражения изгибающих моментов  $M$  и продольных сил  $N$  на участках рамы, т. е.

$$\varphi_K = M_K; \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)_K = N_K. \quad (2.25)$$

Для балки-стенки, представленной на рис. 2.5, по аналогии нагрузка  $Y_v$  в граничных условиях (2.23) на верхней грани заменяется погонной нагрузкой  $q$  той же величины:

$$Y_v = q.$$

Таким образом, без согласования размерностей принимается, что функцию напряжений  $\varphi$  можно определять как изгибающий момент  $M$  в раме от заданной на балке-стенке нагрузки  $Y_v$ , принимаемой в качестве интенсивности распределённой нагрузки  $q$ .

Для определения функций  $\varphi$  в контурных узлах для выбранной стержневой системы строим эпюры изгибающих моментов  $M$ . При этом для внутренних сил примем правило знаков, которое обычно принимают в строительной механике при расчёте рам: изгибающие моменты, отложенные на эпюре с растянутой стороны стержня внутрь контура рамы, считаются положительными, а продольные силы считаются положительными, если они растягивающие. Тогда эпюра моментов  $M$ , построенная внутри области, соответствует положительной функции напряжения  $\varphi$ , а растягивающая продольная сила  $N$  соответствует положительному значению нормальной производной  $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ .

Если нагрузка действует только на горизонтальные участки контура, то раму можно заменить системой балок (рис. 2.14). Такая замена упрощает расчёт. Получим аналитические выражения для определения значений функции напряжений  $\varphi$  в контурных и законтурных узлах сетки, используя нумерацию узлов сетки на рис. 2.11.

Построим эпюру изгибающих моментов  $M$  на верхнем участке контура (рис. 2.7).

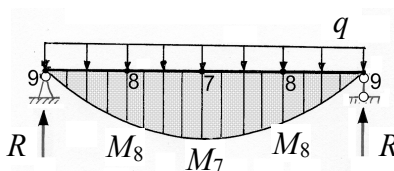


Рис. 2.7. Эпюра изгибающих моментов на верхнем участке контура

С помощью эпюры получаем значения функции напряжений в узлах верхнего участка контура:

$$\varphi_9 = M_9 = 0; \quad \varphi_8 = M_8; \quad \varphi_7 = M_7. \quad (2.26)$$

Построим эпюру изгибающих моментов  $M$  на нижнем участке контура (рис. 2.8).

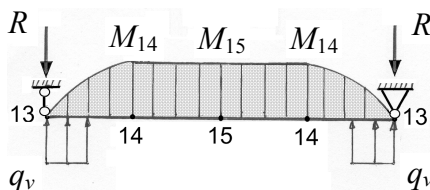


Рис. 2.8. Эпюра изгибающих моментов на нижнем участке контура:

$R$  – реакция опор горизонтальных балок;  $q_v$  – интенсивность распределённой нагрузки от реакции опоры балки-стенки

Для согласования знаков моментов на нижнем контуре для рамы и балки, следуя принятому правилу, меняем знак момента на противоположный. С помощью эпюры получаем:

$$\varphi_{13} = M_{13} = 0; \quad \varphi_{14} = -M_{14}; \quad \varphi_{15} = -M_{15}. \quad (2.27)$$

Если на контуре не приложена внешняя нагрузка, то изгибающие моменты  $M$ , а следовательно, и значения функции  $\varphi$

равны нулю. Это замечание относится к вертикальным участкам контура балки-стенки.

Каковы значения продольных сил  $N$  в каждой балке? В контурных узлах вертикальных балок действуют одинаковые по величине сжимающие продольные силы  $N = -R$ . В контурных узлах горизонтальных балок эти силы отсутствуют:  $N = 0$ .

Для определения функций  $\varphi$  в законтурных узлах воспользуемся вторым условием (2.25), которое позволяет выразить законтурные значения функции Эри через её значения во внутренних узлах сетки. Распишем выражение частной производной функции  $\varphi(x, y)$  по нормали  $v$ :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(x, v) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos(y, v) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} l + \frac{\partial \varphi}{\partial y} m = N.$$

Рассмотрим горизонтальный участок контура (рис. 2.9).

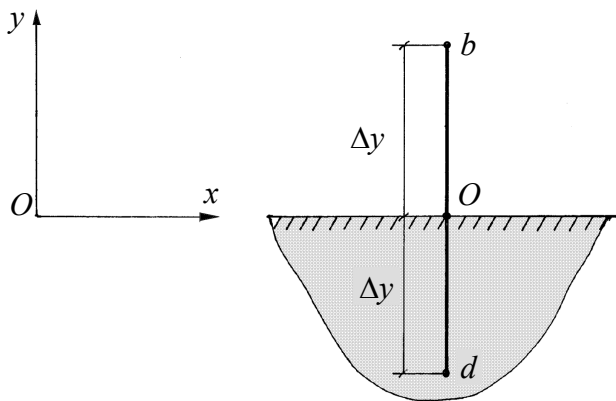


Рис. 2.9. К вычислению функции  $\varphi$  в законтурном узле

Для горизонтального участка контура пластины направляющие косинусы принимают значения:  $l = 0$ ;  $m = 1$ . Вычислим производную по нормали от функции  $\varphi$  в узле  $o$ :

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right)_o = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_o = N_o; \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_o = 0.$$

Запишем выражение для производной  $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_o$  через центральную конечную разность:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_o = \frac{\varphi_b - \varphi_d}{2 \cdot \Delta y}.$$

Тогда значение функции  $\varphi$  в законтурном узле  $b$  определяется по следующей формуле:

$$\varphi_b = \varphi_d + 2 \cdot \Delta y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_o = \varphi_d. \quad (2.28)$$

Таким образом, значения функции  $\varphi$  в законтурных узлах для горизонтального контура определяются через значения этих функций во внутренних узлах сетки.

Рассмотрим вертикальный участок контура (рис. 2.10).

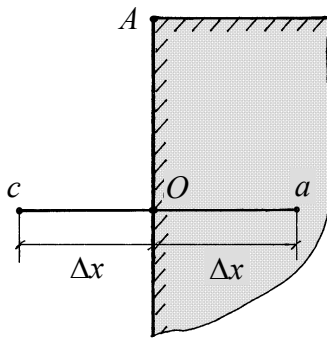


Рис. 2.10. Вертикальный участок контура

Для данного вертикального участка контура пластины направляющие косинусы принимают значения:  $l = -1$ ;  $m = 0$ . Определим производную по нормали от функции  $\varphi$  в узле  $o$ :



$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)_o = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_o = N_o.$$

Запишем выражение для производной функция  $\varphi$  по координате  $x$  в узле  $o$ :

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_o = \frac{\varphi_a - \varphi_c}{2 \cdot \Delta x}.$$

Тогда функция

$$\varphi_c = \varphi_a - 2 \cdot \Delta x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_o = \varphi_a + 2 \cdot \Delta x \cdot N_o,$$

и окончательно получаем:

$$\varphi_c = \varphi_a - 2 \cdot \Delta x \cdot R. \quad (2.29)$$

Таким образом, получены выражения (2.26), (2.27) для определения значений функции  $\varphi$  в контурных узлах через внешние нагрузки, а также (2.28), (2.29) – для вычисления значений функции  $\varphi$  в законтурных узлах через значения этих функций во внутренних узлах и реакцию опоры  $R$ , определяемую через внешние нагрузки.

Обратимся к определению функции напряжений  $\varphi$  во внутренних узлах сетки. Для этого нанесём на балку-стенку сетку размером  $(4 \times 4)$  ячейки с нумерацией узлов (рис. 2.11). Рассмотрим вариант сетки с соотношением шагов  $\Delta x = \Delta y$ . Сетка построена с учётом симметрии геометрии балки-стенки, условий её закрепления и внешней нагрузки относительно оси  $y$ .

Составим уравнения неразрывности деформаций в конечных разностях для внутренних узлов  $I-6$ , последовательно применяя к уравнению (2.21а) шаблон, представленный на рис. 2.4. Для этого поочерёдно мысленно накладываем центральный узел  $o$  шаблона на каждый внутренний узел сетки, совмещая при этом соответствующие узлы шаблона и сетки. Затем присваиваем функциям напряжений  $\varphi$  вместо буквенных обозначений индек-

сов соответствующие цифровые обозначения. Приводя подобные члены, получаем систему линейных алгебраических уравнений неразрывности деформаций для шести внутренних узлов сетки:

$$\left. \begin{aligned}
 &20 \cdot \varphi_1 - 8 \cdot \varphi_2 + \varphi_3 - 16 \cdot \varphi_4 + 4 \cdot \varphi_5 - \underline{8 \cdot \varphi_7 + 4 \cdot \varphi_8 + 2 \cdot \varphi_{10} + \varphi_{16}} = 0, \\
 &-8 \cdot \varphi_1 + 20 \cdot \varphi_2 - 8 \cdot \varphi_3 + 4 \cdot \varphi_4 - 16 \cdot \varphi_5 + 4 \cdot \varphi_6 + \underline{\varphi_7 + 2 \cdot \varphi_{11} + \varphi_{15}} = 0, \\
 &\varphi_1 - 8 \cdot \varphi_2 + 20 \cdot \varphi_3 + 4 \cdot \varphi_5 - 16 \cdot \varphi_6 + \underline{2 \cdot \varphi_{12} + 4 \cdot \varphi_{14} - 8 \cdot \varphi_{15} + \varphi_{22}} = 0, \\
 &-8 \cdot \varphi_1 + 2 \cdot \varphi_2 + 21 \cdot \varphi_4 - 8 \cdot \varphi_5 + \varphi_6 + \\
 &+ \underline{2 \cdot \varphi_7 - 8 \cdot \varphi_8 + 2 \cdot \varphi_9 - 8 \cdot \varphi_{10} + 2 \cdot \varphi_{11} + \varphi_{17} + \varphi_{18}} = 0, \\
 &2 \cdot \varphi_1 - 8 \cdot \varphi_2 + \varphi_3 - 8 \cdot \varphi_4 + 21 \cdot \varphi_5 - 8 \cdot \varphi_6 + \\
 &+ \underline{\varphi_8 + 2 \cdot \varphi_{10} - 8 \cdot \varphi_{11} + 2 \cdot \varphi_{12} + \varphi_{14} + \varphi_{19}} = 0, \\
 &2 \cdot \varphi_2 - 8 \cdot \varphi_3 + \varphi_4 - 8 \cdot \varphi_5 + 21 \cdot \varphi_6 + \\
 &+ \underline{2 \cdot \varphi_{11} - 8 \cdot \varphi_{12} + 2 \cdot \varphi_{13} - 8 \cdot \varphi_{14} + 2 \cdot \varphi_{15} + \varphi_{20} + \varphi_{21}} = 0.
 \end{aligned} \right\} (2.30)$$

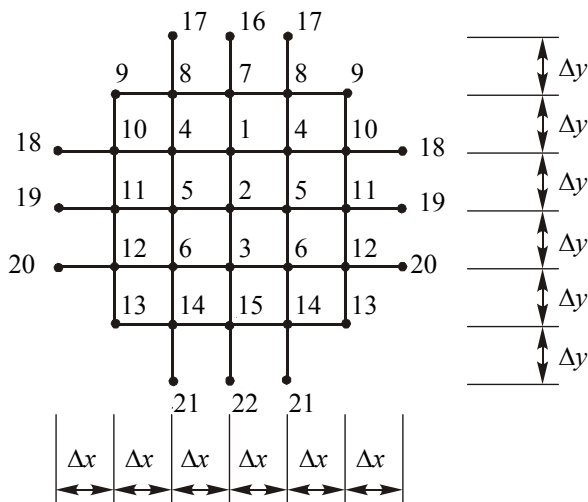


Рис. 2.11. Нумерация узлов сетки. Классификация узлов:

1-6 – внутренние узлы; 7-15 – контурные узлы; 16-22 – законтурные узлы

В эти уравнения входят значения функции напряжений  $\varphi_7 - \varphi_{22}$  в контурных и законтурных узлах (они подчеркнуты). Исключим их из СЛАУ (2.30) с помощью соотношений (2.26) – (2.29), полученных для определения функции напряжений в узлах подобного типа.

В процессе исключения значения функции напряжений в контурных узлах сетки переносятся в правые части уравнений (2.30). А соотношения (2.28), (2.29) для законтурных узлов преобразуются следующим образом: одни слагаемые переходят в правые части уравнений, другие – остаются в левой части в качестве искоемых значений функции  $\varphi$  во внутренних узлах сетки.

В качестве примера рассмотрим четвертое уравнение СЛАУ, исключив из него значения функции напряжений  $\varphi$  в контурных и законтурных узлах:

– величины  $\varphi_7 = M_7$ ,  $\varphi_8 = M_8$  представляют собой числа и берутся из эпюры изгибающих моментов;

– величины  $\varphi_9 = \varphi_{10} = \varphi_{11} = 0$ , так как в узлах вертикального участка контура, который не нагружен, изгибающие моменты  $M$  равны нулю;

– согласно (2.28)  $\varphi_{17} = \varphi_4$ ;

– согласно (2.29)  $\varphi_{18} = \varphi_4 - 2 \cdot \Delta x \cdot R$ .

Таким образом, преобразованное уравнение неразрывности деформаций содержит только искомые функции напряжений  $\varphi_1 - \varphi_6$ :

$$-8 \cdot \varphi_1 + 2 \cdot \varphi_2 + 23 \cdot \varphi_4 - 8 \cdot \varphi_5 + 1 \cdot \varphi_6 = b_4,$$

где  $b_4 = 8 \cdot \varphi_8 - 2(\varphi_7 - \Delta x \cdot R)$  – свободный член уравнения.

Аналогично преобразуются остальные уравнения. В итоге имеем систему из шести линейных алгебраических уравнений относительно шести неизвестных значений  $\varphi_1 - \varphi_6$  функции напряжений:

$$\left. \begin{aligned} 21 \cdot \varphi_1 - 8 \cdot \varphi_2 + 1 \cdot \varphi_3 - 16 \cdot \varphi_4 + 4 \cdot \varphi_5 + 0 \cdot \varphi_6 &= b_1, \\ -8 \cdot \varphi_1 + 20 \cdot \varphi_2 - 8 \cdot \varphi_3 + 4 \cdot \varphi_4 - 16 \cdot \varphi_5 + 4 \cdot \varphi_6 &= b_2, \\ 1 \cdot \varphi_1 - 8 \cdot \varphi_2 + 21 \cdot \varphi_3 + 0 \cdot \varphi_4 + 4 \cdot \varphi_5 - 16 \cdot \varphi_6 &= b_3, \\ -8 \cdot \varphi_1 + 2 \cdot \varphi_2 + 0 \cdot \varphi_3 + 23 \cdot \varphi_4 - 8 \cdot \varphi_5 + 1 \cdot \varphi_6 &= b_4, \\ 2 \cdot \varphi_1 - 8 \cdot \varphi_2 + 2 \cdot \varphi_3 - 8 \cdot \varphi_4 + 22 \cdot \varphi_5 - 8 \cdot \varphi_6 &= b_5, \\ 0 \cdot \varphi_1 + 2 \cdot \varphi_2 - 8 \cdot \varphi_3 + 1 \cdot \varphi_4 - 8 \cdot \varphi_5 + 23 \cdot \varphi_6 &= b_6. \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

Свободные члены СЛАУ определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= 8 \cdot \varphi_7 - 4 \cdot \varphi_8, & b_4 &= 8 \cdot \varphi_8 - 2(\varphi_7 - \Delta x \cdot R), \\ b_2 &= -(\varphi_7 + \varphi_{15}), & b_5 &= -(\varphi_8 + \varphi_{14} - 2 \cdot \Delta x \cdot R), \\ b_3 &= 8 \cdot \varphi_{15} - 4 \cdot \varphi_{14}, & b_6 &= 8 \cdot \varphi_{14} - 2(\varphi_{15} - \Delta x \cdot R). \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

Для конечно-разностного аналога (2.21б), полученного для случая  $\Delta x = 2 \cdot \Delta u$ , имеем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 37,5 \cdot \varphi_1 - 20 \cdot \varphi_2 + 4 \cdot \varphi_3 - 10 \cdot \varphi_4 + 4 \cdot \varphi_5 + 0 \cdot \varphi_6 &= b_1, \\ -20 \cdot \varphi_1 + 33,5 \cdot \varphi_2 - 20 \cdot \varphi_3 + 4 \cdot \varphi_4 - 10 \cdot \varphi_5 + 4 \cdot \varphi_6 &= b_2, \\ 4 \cdot \varphi_1 - 20 \cdot \varphi_2 + 37,5 \cdot \varphi_3 + 0 \cdot \varphi_4 + 4 \cdot \varphi_5 - 10 \cdot \varphi_6 &= b_3, \\ -5 \cdot \varphi_1 + 2 \cdot \varphi_2 + 0 \cdot \varphi_3 + 38 \cdot \varphi_4 - 20 \cdot \varphi_5 + 4 \cdot \varphi_6 &= b_4, \\ 2 \cdot \varphi_1 - 5 \cdot \varphi_2 + 2 \cdot \varphi_3 - 20 \cdot \varphi_4 + 34 \cdot \varphi_5 - 20 \cdot \varphi_6 &= b_5, \\ 0 \cdot \varphi_1 + 2 \cdot \varphi_2 - 5 \cdot \varphi_3 + 4 \cdot \varphi_4 - 20 \cdot \varphi_5 + 38 \cdot \varphi_6 &= b_6, \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

свободные члены  $b_1 - b_6$  которой определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= 20 \cdot \varphi_7 - 4 \varphi_8, & b_4 &= 20 \cdot \varphi_8 - 2(\varphi_7 - 0,25 \cdot \Delta x \cdot R), \\ b_2 &= -4(\varphi_7 + \varphi_{15}), & b_5 &= -4(\varphi_8 + \varphi_{14} - 0,125 \cdot \Delta x \cdot R), \\ b_3 &= 20 \cdot \varphi_{15} - 4 \cdot \varphi_{14}, & b_6 &= 20 \cdot \varphi_{14} - 2(\varphi_{15} - 0,25 \cdot \Delta x \cdot R). \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

В матричной форме СЛАУ (2.31) и (2.33) можно записать следующим образом:

$$A\bar{\phi} = \bar{b}, \quad (2.35)$$

где  $\bar{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_6 \end{pmatrix}$ ;  $\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_6 \end{pmatrix}$ ;  $A$  – матрица коэффициентов СЛАУ;  $\bar{\varphi}$  –

матрица-столбец неизвестных значений функции напряжений во внутренних узлах;  $\bar{b}$  – матрица-столбец свободных членов СЛАУ.

Полученную СЛАУ (2.35) можно решать различными способами. Выбор метода зависит от её порядка, т. е. от количества неизвестных.

Решим систему уравнений с помощью обратной матрицы коэффициентов. Тогда решение запишется в виде

$$\bar{\varphi} = A^{-1} \cdot \bar{b}, \quad (2.36)$$

где  $A^{-1}$  – обратная матрица коэффициентов СЛАУ:

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} A_{11}^{-1} & A_{12}^{-1} & \dots & A_{16}^{-1} \\ A_{21}^{-1} & A_{22}^{-1} & \dots & A_{26}^{-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{61}^{-1} & A_{62}^{-1} & \dots & A_{66}^{-1} \end{vmatrix}.$$

Искомые значения функции напряжений  $\varphi_1 - \varphi_6$  определяются, согласно (2.36), по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= A_{11}^{-1} \cdot b_1 + A_{12}^{-1} \cdot b_2 + A_{13}^{-1} \cdot b_3 + \dots + A_{16}^{-1} \cdot b_6, \\ \varphi_2 &= A_{21}^{-1} \cdot b_1 + A_{22}^{-1} \cdot b_2 + A_{23}^{-1} \cdot b_3 + \dots + A_{26}^{-1} \cdot b_6, \\ &\vdots \\ \varphi_6 &= A_{61}^{-1} \cdot b_1 + A_{62}^{-1} \cdot b_2 + A_{63}^{-1} \cdot b_3 + \dots + A_{66}^{-1} \cdot b_6. \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

Напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  во внутренних узлах сетки вычисляются по формулам (2.22).

Следует отметить, что коэффициенты СЛАУ (2.31), (2.33) и элементы их обратных матриц  $A^{-1}$  не зависят от вида внешних нагрузок, а определяются соотношением шагов  $\Delta x$  и  $\Delta y$  сетки.

## 2.5. Пример расчёта балки-стенки

Требуется рассчитать балку-стенку (рис. 2.12), опирающуюся на пилоны и нагруженную распределённой нагрузкой интенсивностью  $q$  и сосредоточенными силами  $F$ . Собственный вес конструкции не учитывается.

Размеры балки-стенки:  $a = b = 8,0$  м; толщина  $h = 0,5$  м; нагрузки:  $q = 200$  кПа,  $F = 400$  кН.

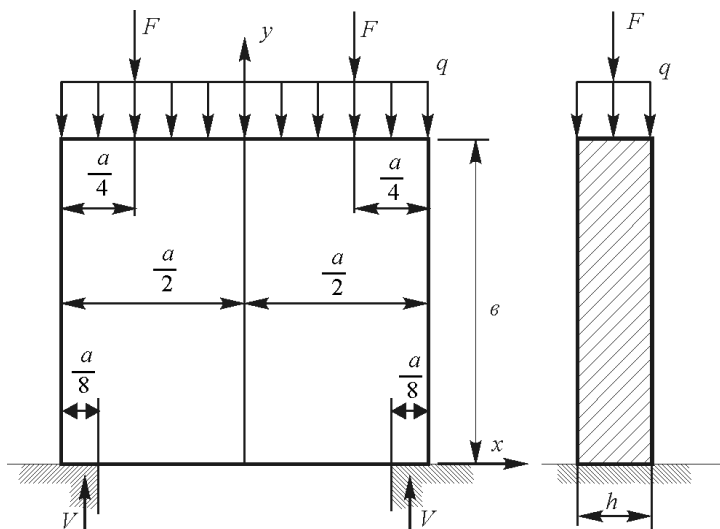


Рис. 2.12. Балка-стенка

Из условия равновесия балки-стенки находим реакции опоры  $V$  балки-стенки:

$$\sum F_y = 0; \quad 2 \cdot V - 2 \cdot F - q \cdot a \cdot h = 0;$$

$$V = F + q \frac{a \cdot h}{2} = 400 + 2000 \frac{8 \cdot 0,5}{2} = 4400 \text{ кН.}$$

Так как условия на поверхности (2.6), или (2.18), записаны в напряжениях, сосредоточенные силы  $F$  и  $V$  необходимо представить в виде распределённых нагрузок  $q_1$  и  $q_2$ , соответственно. При этом, если сила приложена к краю конструкции  $x = a/2$ , то она распределяется по площади  $h \cdot l/2$ . В случае приложения сосредоточенной силы вне края балки-стенки, площадь равна  $h \cdot l$ . Здесь  $l$  – размер участка по оси  $x$ , на котором действует заменяющая сосредоточенную силу равномерно распределённая нагрузка (величину  $l$  рекомендуется брать равной толщине  $h$ ).

Таким образом, получим нагрузки  $q_1$  и  $q_2$ :

$$q_1 = \frac{F}{l \cdot h} = \frac{400}{0,5 \cdot 0,5} = 1600 \text{ кПа}; \quad q_2 = \frac{V}{\frac{a}{h}} = \frac{4400}{1,0 \cdot 0,5} = 8800 \text{ кПа.}$$

Эти нагрузки представлены на рис. 2.13.

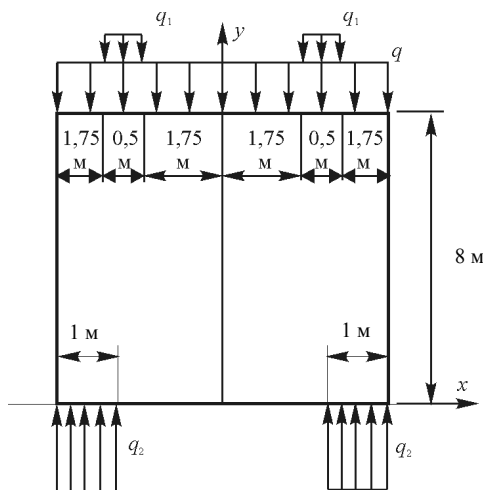


Рис. 2.13. Окончательный вариант расчётной схемы балки-стенки

Расчёт балки-стенки сводится к решению плоской задачи теории упругости – задачи о плоском напряжённом состоянии. Для реализации задачи воспользуемся описанной выше процедурой метода конечных разностей для решения дифференциального уравнения неразрывности деформаций (2.17).

Нанесём на плоскость балки-стенки сетку размером  $4 \times 4$  ячейки с шагами по осям координат:  $\Delta x = a/4 = 2$  м,  $\Delta y = b/4 = 2$  м. Пронумеруем её узлы (рис. 2.11). Таким образом, имеем вариант сетки, для которой  $\Delta x = \Delta y$ .

Решение задачи о балке-стенке сводится к реализации системы шести линейных алгебраических уравнений (2.31) относительно шести неизвестных значений функции напряжений  $\varphi_1$ – $\varphi_6$  с помощью обратной матрицы и формул (2.37). Для этого, учитывая полученные выше результаты, необходимо определить с помощью формул (2.32) свободные члены  $b_1$ – $b_6$ .

Учитывая вышесказанное при описании рамной аналогии, контур балки-стенки заменяем балками (рис. 2.14).

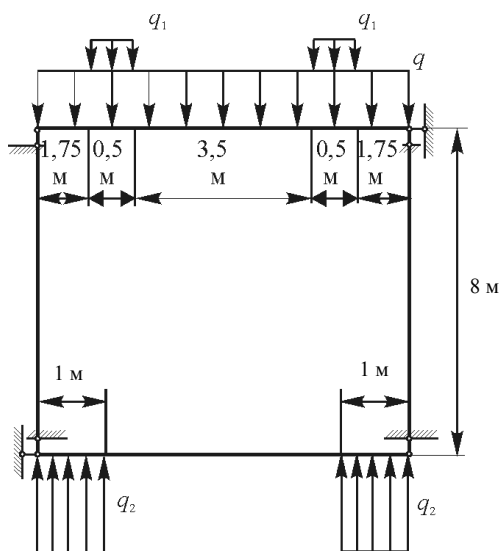


Рис. 2.14. Стержневая система, нагруженная как заданная балка-стенка



Для балок, заменяющих контур пластины, строим эпюры изгибающих моментов  $M$  и продольных сил  $N$  (рис. 2.15, а, б).

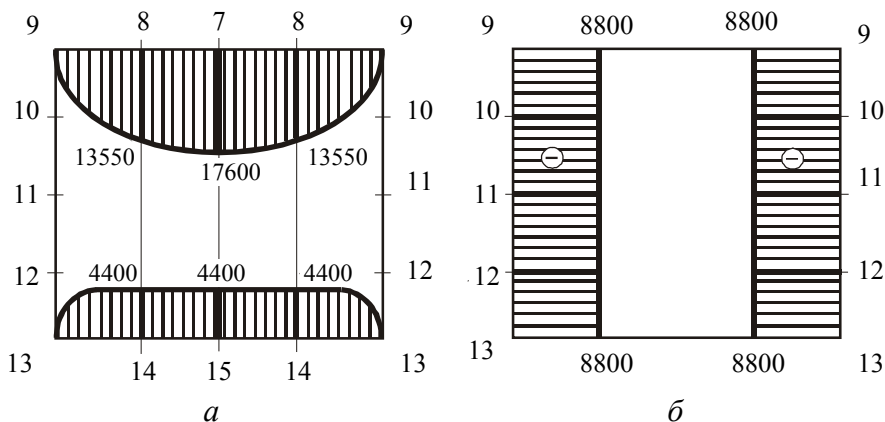


Рис. 2.15. Эпюры изгибающих моментов  $M$  (а) и эпюры продольных сил  $N$  (б)

Тогда, согласно (2.26), (2.27) и правилу знаков для моментов, запишем значения функции напряжений  $\varphi$  в контурных узлах сетки:

$$\begin{aligned}\varphi_9 &= \varphi_{10} = \varphi_{11} = \varphi_{12} = \varphi_{13} = 0; \\ \varphi_8 &= M_8 = 13550, \quad \varphi_7 = M_7 = 17600; \\ \varphi_{14} &= -M_{14} = 4400, \quad \varphi_{15} = -M_{15} = 4400.\end{aligned}\quad (2.38)$$

Абсолютная величина опорной реакции горизонтальных балок  $R = 8800$ , продольная сила  $N = -8800$ .

Вычислим свободные члены СЛАУ по формулам (2.32):

$$\begin{aligned}b_1 &= 8 \cdot \varphi_7 - 4 \cdot \varphi_8 = 8 \cdot 17\,600 - 4 \cdot 13\,550 = 86\,600; \\ b_2 &= -(\varphi_7 + \varphi_{15}) = -(17\,600 + 4400) = -22\,000; \\ b_3 &= 8 \cdot \varphi_{15} - 4 \cdot \varphi_{14} = 8 \cdot 4400 - 4 \cdot 4400 = 17\,600;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_4 &= 8 \cdot \varphi_8 - 2(\varphi_7 - \Delta x \cdot R) = \\
&= 8 \cdot 13\,550 - 2(17\,600 - 2 \cdot 8800) = 108\,400; \\
b_5 &= -(\varphi_8 + \varphi_{14} - 2 \cdot \Delta x \cdot R) = \\
&= -(13\,550 + 4400 - 2 \cdot 2 \cdot 8800) = 17\,250; \\
b_6 &= 8 \cdot \varphi_{14} - 2(\varphi_{15} - \Delta x \cdot R) = \\
&= 8 \cdot 4400 - 2(4400 - 2 \cdot 8800) = 61\,600.
\end{aligned}$$

С помощью элементов обратной матрицы  $A^{-1}$ , которые представлены в прил. 3, по формулам (2.37) вычисляем искомые значения функции напряжений во внутренних узлах. Так, функция

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= A_{11}^{-1} \cdot b_1 + A_{12}^{-1} \cdot b_2 + A_{13}^{-1} \cdot b_3 + A_{14}^{-1} \cdot b_4 + A_{15}^{-1} \cdot b_5 + A_{16}^{-1} \cdot b_6 = \\
&= 10^{-3}(89,876 \cdot 86\,600 - 56,18 \cdot 22\,000 + 19,363 \cdot 17\,600 + \\
&+ 70,585 \cdot 108\,400 + 53,683 \cdot 17\,250 + 19,303 \cdot 61\,600) = 16\,654,599.
\end{aligned}$$

В результате вычислений получим:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= 16\,655; \quad \varphi_2 = 14\,022,55 = 14\,023; \\
\varphi_3 &= 9389,206 = 9389; \quad \varphi_4 = 12\,793,614 = 12\,794; \\
\varphi_5 &= 11\,085,707 = 11\,086; \quad \varphi_6 = 8024,3646 = 8024. \quad (2.39)
\end{aligned}$$

После определения значений функции напряжений необходимо сделать проверку правильности решения СЛАУ (2.35). Проверим, например, шестое уравнение:

$$0 \cdot \varphi_1 + 2 \cdot \varphi_2 - 8 \cdot \varphi_3 + 1 \cdot \varphi_4 - 8 \cdot \varphi_5 + 23 \cdot \varphi_6 = b_6; \quad b_6 = 61\,600,$$

подставив в него значения  $\varphi_1 - \varphi_6$ :

$$2 \cdot 14\,023 - 8 \cdot 9389 + 1 \cdot 12\,794 - 8 \cdot 11\,086 + 23 \cdot 8024 = 61\,592.$$

Определим погрешность вычислений:

$$\Delta = \frac{61\,600 - 61\,592}{61\,600} 100\% = 0,013\%.$$

Таким образом, конечно-разностный аналог (2.21a) уравнения неразрывности деформаций (2.17), записанный для внутреннего узла *b*, реализован с минимальной погрешностью.

Используя формулу (2.29), определим значения функции напряжений в законтурных узлах вертикальных участков контура балки-стенки:

$$\varphi_{18} = \varphi_4 - 2 \cdot \Delta x \cdot R = 12\,794 - 2 \cdot 2 \cdot 8800 = -22\,406;$$

$$\varphi_{19} = \varphi_5 - 2 \cdot \Delta x \cdot R = 11\,086 - 2 \cdot 2 \cdot 8800 = -24\,114;$$

$$\varphi_{20} = \varphi_6 - 2 \cdot \Delta x \cdot R = 8024 - 2 \cdot 2 \cdot 8800 = -27\,176. \quad (2.40)$$

Результаты решения (2.39) СЛАУ (2.31), совместно с результатами (2.38) и (2.40), представлены на рис. 2.16 в виде числового поля значений функции напряжений  $\varphi$  для внутренних, контурных и законтурных узлов сетки, нанесённой на плоскость балки-стенки.

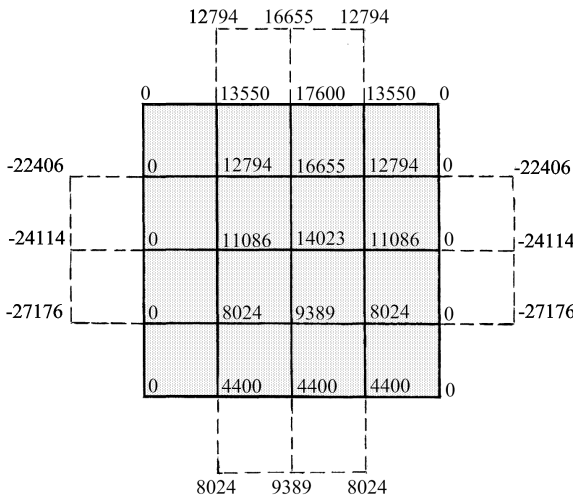


Рис. 2.16. Числовое поле значений функции напряжений  $\varphi$

Зная значения функции напряжений  $\varphi$  в узлах сетки внутри контура, на контуре и за контуром, определяем компоненты тензора напряжений по формулам (2.22). Соответствующие им операторы можно представить в виде следующих формул, включающих в себя алгоритм вычисления производных (2.41) – (2.43).

$$(\sigma_x)_K = \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \boxed{-2} \\ | \\ \textcircled{1} \end{array} \cdot \frac{1}{(\Delta y)^2}; \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \uparrow \Delta y \\ \text{---} \\ \downarrow \Delta y \\ \text{---} \end{array} \quad (2.41)$$

$$(\sigma_y)_K = \begin{array}{c} \textcircled{1} \quad \boxed{-2} \quad \textcircled{1} \\ \leftarrow \Delta x \quad \rightarrow \Delta x \end{array} \cdot \frac{1}{(\Delta x)^2}; \quad (2.42)$$

$$(\tau_{xy})_K = \begin{array}{c} \textcircled{1} \quad \quad \textcircled{-1} \\ | \quad \quad | \\ \boxed{0} \\ | \quad \quad | \\ \textcircled{-1} \quad \quad \textcircled{1} \\ \leftarrow \Delta x \quad \rightarrow \Delta x \end{array} \cdot \frac{1}{4(\Delta y)(\Delta x)}. \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \uparrow \Delta y \\ \text{---} \\ \downarrow \Delta y \\ \text{---} \end{array} \quad (2.43)$$

Для примера покажем, как вычисляются напряжения в некоторых узлах:

$$(\sigma_x)_4 = \frac{\varphi_8 - 2\varphi_4 + \varphi_5}{(\Delta y)^2} = \frac{13\,550 - 2 \cdot 12\,794 + 11\,086}{2^2} = -238 \text{ кПа};$$

$$(\sigma_x)_1 = \frac{\varphi_7 - 2\varphi_1 + \varphi_2}{(\Delta y)^2} = \frac{17\,600 - 2 \cdot 16\,665 + 14\,023}{2^2} = -421,75 \text{ кПа};$$

$$(\sigma_y)_4 = \frac{\varphi_{10} - 2\varphi_4 + \varphi_1}{(\Delta x)^2} = \frac{0 - 2 \cdot 12\,794 + 16\,655}{2^2} = -2233,25 \text{ кПа};$$

$$(\sigma_y)_1 = \frac{\varphi_4 - 2\varphi_1 + \varphi_4}{(\Delta x)^2} = \frac{2(12\,794 - 16\,655)}{2^2} = -1930,5 \text{ кПа};$$

$$(\tau_{xy})_4^{\text{слева}} = \frac{\varphi_9 + \varphi_2 - \varphi_{11} - \varphi_7}{4(\Delta x)(\Delta y)} = \frac{0 + 14\,023 - 0 - 17\,600}{4 \cdot 2 \cdot 2} = -223,56 \text{ кПа};$$

$$(\tau_{xy})_4^{\text{справа}} = \frac{\varphi_7 + \varphi_{11} - \varphi_9 - \varphi_2}{4(\Delta x)(\Delta y)} = -(\tau_{xy})_4^{\text{слева}} = 223,56 \text{ кПа}.$$

При вычислении касательных напряжений следует помнить, что на внешнем контуре касательная нагрузка отсутствует. Поэтому касательные напряжения в узлах участков верхнего и нижнего контуров равны нулю. По результатам вычислений строим эпюры напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  (рис. 2.17–2.19).

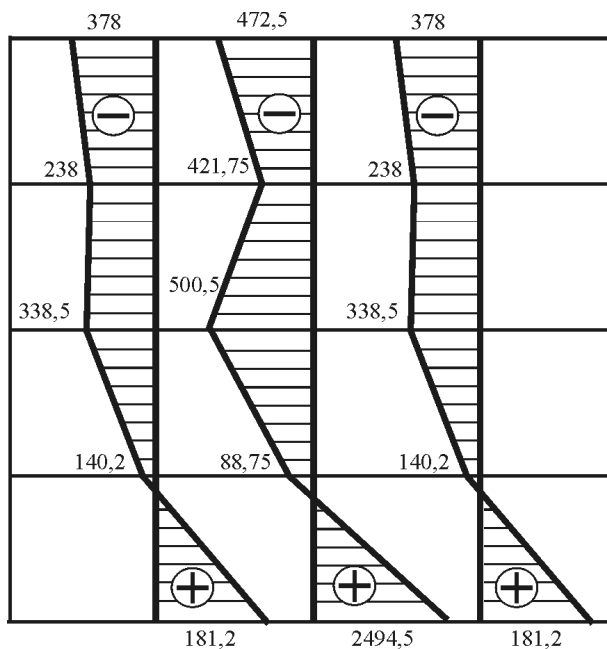


Рис. 2.17. Эпюры нормальных напряжений  $\sigma_x$

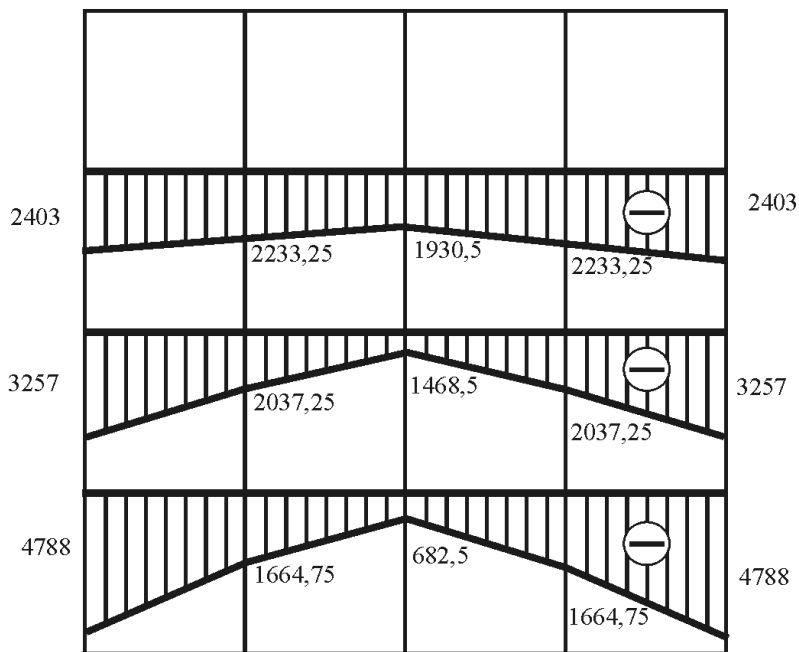


Рис. 2.18. Эпюры нормальных напряжений  $\sigma_y$

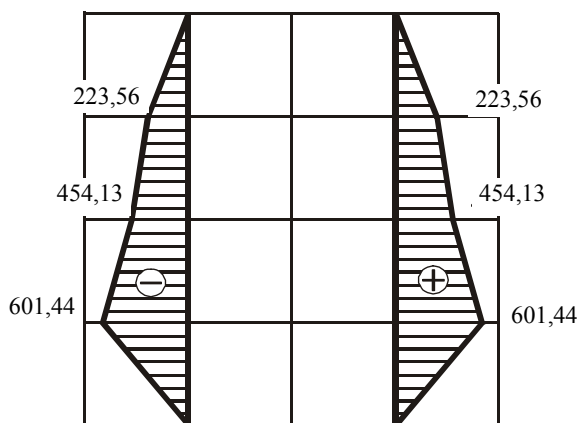


Рис. 2.19. Эпюры касательных напряжений  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

Сделаем в сечении 7–15 проверку правильности определения нормальных напряжений  $\sigma_x$  и построения их эпюры (рис. 2.17). Так как балка-стенка находится в состоянии равновесия, то согласно уравнению статики сумма проекций продольных сил на ось  $x$ , например, левой части балки-стенки, должна быть равна нулю, т. е.  $\sum F_x = 0$ . На конструкцию не действует внешняя горизонтальная нагрузка, поэтому для любого вертикального сечения балки-стенки можно записать:

$$h \int_0^b \sigma_x dy = h \cdot A_{(\sigma_x)} = 0,$$

где  $A_{(\sigma_x)}$  – площадь эпюры напряжений  $\sigma_x$ .

Отсюда следует:  $A_{(\sigma_x)} = 0$ .

Площадь эпюры равна сумме площадей четырёх трапеций, которые можно представить следующим образом:

$$A_{(\sigma_x)} = \frac{1}{2}[(\sigma_x)_7 + (\sigma_x)_{11}](\Delta y) + \frac{1}{2}[(\sigma_x)_{11} + (\sigma_x)_{15}](\Delta y) + \\ + \frac{1}{2}[(\sigma_x)_{15} + (\sigma_x)_{19}](\Delta y) + \frac{1}{2}[(\sigma_x)_{19} + (\sigma_x)_{23}](\Delta y) = 0,$$

или  $A_{(\sigma_x)} = (\sigma_x)_7 + 2[(\sigma_x)_{11} + (\sigma_x)_{15} + (\sigma_x)_{19}] + (\sigma_x)_{23} = 0;$

$$-472,5 + 2(-421,75 - 500,5 - 88,75) + 2494,5 = 0;$$

$$-2494,5 + 2494,5 = 0; \quad 0 = 0.$$

Таким образом, уравнение статики выполняется. Проверка напряжений  $\sigma_y$  проводится с помощью уравнения статики  $\sum F_y = 0$ , записанного для нижней половины балки-стенки в сечении 11–11:

$$h \cdot A_{(\sigma_y)} + 2 \cdot h \cdot R = 0.$$

В этом уравнении опорная реакция горизонтальных балок  $R$  является эквивалентом внешней нагрузки: интенсивностей  $q$ ,  $q_1$  или  $q_2$ . Распишем последнее соотношение:

$$2 \left[ (\sigma_y)_{11} + 2(\sigma_y)_5 + (\sigma_y)_2 \right] \frac{\Delta x}{2} + 2 \cdot R = 0;$$

$$\left[ (\sigma_y)_{11} + 2(\sigma_y)_5 + (\sigma_y)_2 \right] + \frac{2 \cdot R}{\Delta x} = 0;$$

$$(-3257 - 2 \cdot 2037,25 - 1468,5) + \frac{2 \cdot 8800}{2} = 0;$$

$$-8800 + 8800 = 0; \quad 0 = 0.$$

Таким образом, эпюра напряжений  $\sigma_y$  построена правильно. Для сечения 8–14 проверяем правильность построения эпюры касательных напряжений  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ . Из условия равновесия сил, например, левой части балки-стенки сумма проекций всех сил на ось  $y$  равна:

$$\begin{aligned} \sum F_y &= h \left( q_2 \frac{\Delta x}{2} - q \cdot \Delta x - q_1 \frac{h}{2} + A_{(\tau)} \right) = \\ &= h \left[ q_2 \frac{\Delta x}{2} - q \cdot \Delta x - q_1 \frac{h}{2} + \Delta y \left( \frac{\tau_4}{2} + \frac{\tau_4 + \tau_5}{2} + \frac{\tau_5 + \tau_6}{2} + \frac{\tau_6}{2} \right) \right] = \\ &= 0,5 [8800 \cdot 1 - 2000 \cdot 2 - 1600 \cdot 0,25 + \\ &\quad + 2(-223,56 - 454,13 - 601,44)] = \\ &= 0,5(4400 - 2558,26) = 920,87 \neq 0, \end{aligned}$$

где  $A_{(\tau)}$  – площадь эпюры касательных напряжений.



Такая большая ошибка в вычислении напряжений  $\tau_{xy}$  объясняется, во-первых, слишком малым числом узлов сетки и, во-вторых, отсутствием  $\tau_{xy}$  в исходном уравнении неразрывности деформаций (2.17). Оператор для вычисления  $\tau_{xy}$  (2.43) даёт это напряжение в узле сетки. Если в операторе вместо шага  $\Delta x$  и  $\Delta y$  принять шаг  $\Delta x/2$  и  $\Delta y/2$ , то при наложении на ячейку сетки он даёт напряжение  $\tau_{xy}$  в средней точке этой ячейки, которое может рассматриваться как среднее касательное напряжение ячейки.

Определим, например, напряжение  $\tau_{xy}$  в точке  $\alpha$ :

$$(\tau_{xy})_{\alpha} = \frac{\varphi_8 + \varphi_1 - \varphi_7 - \varphi_4}{(\Delta x)(\Delta y)} = \frac{13\,550 + 16\,655 - 17\,600 - 12\,794}{2 \cdot 2} = -47,25 \text{ кПа.}$$

Аналогично вычисляем напряжения  $\tau_{xy}$  в точках  $\beta, \gamma, \delta$ . По результатам вычислений строим эпюру  $\tau_{xy}$  (рис. 2.20).

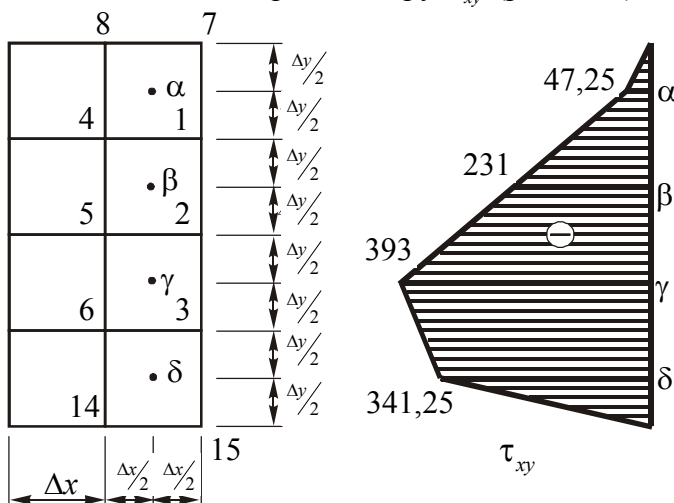


Рис. 2.20. Эпюра касательных напряжений  $\tau_{xy}$

Проверим выполнение условия равновесия:

$$\begin{aligned}
 \sum F_y &= h \left( q_2 \frac{\Delta x}{2} - q \cdot 1,5 \cdot \Delta x - q_1 \cdot h + A_{(\tau)} \right) = \\
 &= h \left[ q_2 \frac{\Delta x}{2} - q \cdot 1,5 \cdot \Delta x - q_1 \cdot h + \right. \\
 &+ \left. \left( \frac{1}{2} \tau_\alpha \frac{\Delta y}{2} + \frac{\tau_\alpha + \tau_\beta}{2} \Delta y + \frac{\tau_\beta + \tau_\gamma}{2} \Delta y + \frac{\tau_\gamma + \tau_\delta}{2} \Delta y + \frac{1}{2} \tau_\delta \frac{\Delta y}{2} \right) \right] = \\
 &= 0,5 [8800 \cdot 1 - 2000 \cdot 3 - 1600 \cdot 0,5 + \\
 &+ \left( -\frac{1}{2} 47,25 \frac{2}{2} - \frac{47,25 + 231}{2} 2 - \frac{231 + 393}{2} 2 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{393 + 341,25}{2} 2 - \frac{1}{2} 341,25 \frac{2}{2} \right)] = \\
 &= 0,5(2000 - 1830,75) = 0,5 \cdot 169,25 = 84,625.
 \end{aligned}$$

Таким образом, уменьшение шага сетки привело к значительному уменьшению ошибки при проверке уравнения равновесия. Однако, проверка напряжений по условиям равновесия лишь необходимое, но не достаточное условие их правильности. Как мы знаем, произвольная функция  $\varphi$  даёт при применении формул (2.15) равновесное поле напряжений. Поэтому эти условия не могут проверить истинность найденных  $\varphi$ . Достаточной проверкой может служить лишь проверка неразрывности деформаций в форме уравнения неразрывности деформаций плоской задачи (уравнения Мориса Леви), записанного в напряжениях (2.14).

Осуществим проверку выполнения уравнения (2.14) для 5-го узла с помощью операторов для вторых производных (2.41), (2.42):

$$\begin{aligned}
\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) &= \left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) = \\
&= \frac{(\sigma_x)_4 - 2(\sigma_x)_5 + (\sigma_x)_6}{(\Delta y)^2} + \frac{(\sigma_x)_{11} - 2(\sigma_x)_5 + (\sigma_x)_6}{(\Delta x)^2} + \\
&+ \frac{(\sigma_y)_4 - 2(\sigma_y)_5 + (\sigma_y)_6}{(\Delta y)^2} + \frac{(\sigma_y)_{11} - 2(\sigma_y)_5 + (\sigma_y)_2}{(\Delta x)^2} = \\
&= \frac{-238 - 2(-338,5) - 140,2}{2^2} + \frac{0 - 2(-338,5) + (-500,5)}{2^2} + \\
&+ \frac{-2233,25 - 2(-2037,25) + (-1664,75)}{2^2} + \\
&+ \frac{-3257 - 2(-2037,25) + (-1468,5)}{2^2} = 0,2.
\end{aligned}$$

Таким образом, абсолютная ошибка выполнения упомянутого уравнения составляет 0,2 кН/м<sup>4</sup>. Итак, мы нашли значения напряжений в узлах сетки, нанесённой на плоскость балки-стенки. Полученные результаты применимы для конструкции, выполненной из любого материала, так как при решении задачи механические характеристики материала не использовались. Поэтому напряжения будут одинаковы как для бетонной, так и для любой другой балки-стенки. Но уже при определении деформаций с помощью соотношений закона Гука механические характеристики будут выбираться для соответствующего материала, и деформации будут различными.

Заканчивая главу, посвящённую решению плоской задачи теории упругости, отметим следующее. Вообще говоря, возможность решения пространственной задачи теории упругости определения напряжённо-деформированного состояния подобных конструкций в двумерной, плоской постановке следует рассматривать в каждом случае отдельно. Плоская постановка за-

дачи, связанная с пренебрежением напряжениями  $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ , может привести к существенной погрешности при определении параметров НДС в балке-стенке.

### **Вопросы для самопроверки**

1. Какая задача называется плоской задачей теории упругости?
2. Дайте определение понятий: «плоская деформация», «плоское напряжённое состояние».
3. Каким требованиям должна удовлетворять функция напряжений (функция Эри)?
4. В чём особенность уравнения Мориса Леви? Что из этого следует в отношении распределения напряжений в изотропном теле в случае одинаковых внешних нагрузок и одинаковых граничных условий?
5. Какие Вы знаете методы решения плоской задачи для прямоугольных областей?
6. Дайте определение понятия «дискретизация задачи».
7. Дайте определение понятия «конечно-разностный оператор».
8. Идея метода конечных разностей. К чему приводит решение дифференциального уравнения методом конечных разностей?
9. Назовите типы узлов сетки, которая наносится на исследуемое тело при использовании метода конечных разностей.
10. В чём заключается так называемая рамная аналогия при решении задачи о деформировании балки-стенки?
11. В чём разница между эпюрами нормального напряжения  $\sigma_x$  при деформировании балки-стенки и прямом изгибе балки? Почему существует такая разница?

### 3. ИЗГИБ ТОНКИХ ПЛАСТИН

Пластины достаточно широко применяются в различных областях техники: авиа-, ракетостроении, судостроении и машиностроении. Это объясняется тем, что присущая тонкостенным конструкциям лёгкость сочетается с их высокой несущей способностью и технологичностью. В строительстве пластины – это настилы и панели, бетонные и железобетонные плиты перекрытия, монолитные плиты для фундаментов массивных зданий и т. д.

#### 3.1. Основные понятия и допущения теории изгиба пластин

*Пластиной* называется тело призматической или цилиндрической формы, у которого высота мала, по сравнению с его размерами в плане (рис. 3.1). Высота такого тела называется *толщиной пластины* и обозначается буквой  $h$ .

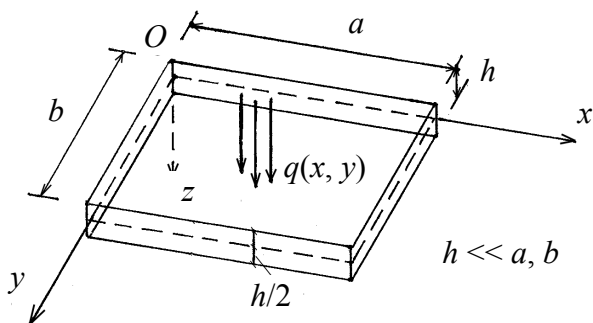


Рис. 3.1. Расчётная схема пластины

Плоскость, делящая пластину пополам по толщине, называется *срединной плоскостью пластины*. В теории пластин срединная плоскость играет такую же важную роль, как в сопротивлении материалов нейтральный слой при изгибе балок.

Оси  $x$  и  $y$  прямоугольной системы координат располагаются в срединной плоскости, а ось  $z$  направлена вниз по направлению внешней поперечной нагрузки интенсивностью  $q(x, y)$ , которая перпендикулярна срединной плоскости пластины. Таким образом, для точек срединной плоскости координата  $z = 0$ . Перемещения, которые под действием нагрузки получают точки срединной плоскости в направлении оси  $z$ , называют *прогибами*. Пластина изгибается, и срединная плоскость превращается в слегка искривлённую срединную поверхность изогнутой пластины.

Следует отметить, что прогиб  $w$  представляет собой основную компоненту вектора перемещения точек пластины. Так как рассматривается только упругая работа материала, величина прогибов мала по сравнению с толщиной пластины, т. е.  $w \ll h$ .

Линия пересечения боковой поверхности пластины со срединной плоскостью называется *контуром пластины*.

Расчётной схемой плит, применяемых в строительных конструкциях, является тонкая жёсткая пластина, которая работает на изгиб. *Тонкими* называются пластины, для которых имеет место следующее отношение толщины к наименьшему характерному размеру в плане:

$$\frac{1}{5} \geq \frac{h}{b} \geq \frac{1}{80}.$$

Пластина считается *жёсткой*, если при её деформации под действием поперечной нагрузки можно пренебречь напряжениями растяжения или сжатия в срединной плоскости. Для жёсткой пластины величина отношения максимального прогиба к её толщине удовлетворяет условию:

$$\frac{w_{\max}}{h} \leq \frac{1}{5} \div \frac{1}{2}.$$

Тонкие жёсткие пластины можно рассчитывать по приближённой теории – *технической теории изгиба пластин*, основанной на допущениях, предложенных Кирхгофом:

1. *Допущение прямых нормалей* – любой линейный элемент  $mn$ , нормальный к срединной плоскости до деформации:

а) остаётся прямолинейным и нормальным к срединной поверхности после деформации;

б) длина его не изменяется (рис. 3.2).

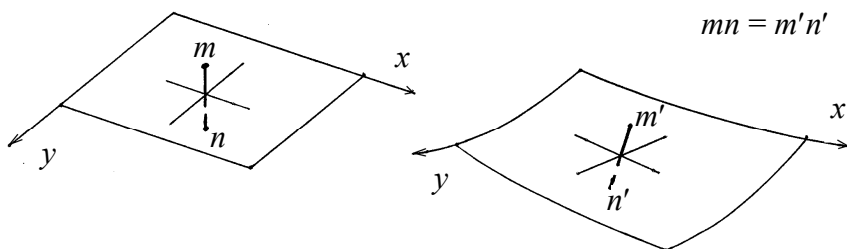


Рис. 3.2. К гипотезе прямых нормалей

Это допущение аналогично допущению плоских сечений Я. Бернулли при изгибе балок.

Из допущения прямых нормалей следуют такие выводы:

а) так как прямые углы между элементом  $m'n'$  и осями  $x$  и  $y$  остаются прямыми, то угловые деформации в указанных плоскостях отсутствуют, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{yz} &= 0, \\ \gamma_{zx} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

б) так как длина элемента не меняется, то деформация вдоль оси  $z$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Таким образом, прогибы  $w$  пластины не зависят от координаты  $z$ , т. е.

$$w = w(x, y).$$

Это означает, что все точки пластины, лежащие на одной вертикали, получают одинаковые прогибы. Следовательно, достаточно определить прогибы срединной плоскости, чтобы знать прогибы во всех точках пластины.

2. *Допущение о нерастяжимости срединной плоскости:* в срединной плоскости отсутствуют деформации растяжения, сжатия и сдвига. Поэтому срединная плоскость является нейтральной. Следовательно, в срединной плоскости перемещения

$$u_0 = 0; \quad v_0 = 0. \quad (3.2)$$

3. *Допущение об отсутствии давления между слоями пластины.* Ввиду малости прогибов, давление между слоями пластины, параллельными срединной плоскости, мало, и напряжением  $\sigma_z$ , по сравнению с напряжениями  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ , действующими в плоскости слоёв, можно пренебречь, т. е.

$$\sigma_z = 0.$$

Решение задачи определения напряжённо-деформированного состояния пластины удобнее проводить в перемещениях. Поэтому за основную неизвестную функцию примем функцию прогибов  $w = w(x, y)$  срединной плоскости, а все остальные неизвестные величины выразим через прогиб  $w$ .

### 3.2. Перемещения, деформации и напряжения в пластине

Исследуем деформированное состояние пластины, точки которой под действием поперечной нагрузки получают перемещения. С помощью формул Коши (1.17) для угловых деформаций  $\gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  и положений первого и второго допущения Кирхгофа можно получить выражения для перемещений пластины  $u$  и  $v$  вдоль осей  $x$  и  $y$ , соответственно.



Согласно первому допущению Кирхгофа,

$$\gamma_{yz} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y};$$

$$\gamma_{zx} = 0 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Интегрируя полученные соотношения по  $z$ , получаем:

$$u = -\int \frac{\partial w}{\partial x} dz + f_1(x, y) \Rightarrow u = -z \frac{\partial w}{\partial x} + f_1(x, y);$$

$$v = -\int \frac{\partial w}{\partial y} dz + f_2(x, y) \Rightarrow v = -z \frac{\partial w}{\partial y} + f_2(x, y).$$

Определим функции  $f_1(x, y)$  и  $f_2(x, y)$ , появившиеся при интегрировании уравнений в частных производных. Согласно второму допущению (3.2), перемещения  $u_0$  и  $v_0$  точек срединной плоскости, которой соответствует значение координаты  $z = 0$ , равны нулю. Подставляя это условие в последние формулы, получаем:

$$u_0 = f_1(x, y) = 0; \quad v_0 = f_2(x, y) = 0.$$

Окончательно можно записать:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}; \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (3.3)$$

Таким образом, компоненты вектора перемещения точек пластины в направлениях осей  $x$  и  $y$  определяются через функцию прогибов срединной плоскости пластины. Для срединной поверхности, согласно второму допущению, получаем  $u = v = 0$ .

Далее, по формулам Коши (1.16), можно определить деформации в плоскости слоя:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Полученные компоненты тензора деформаций выражены через функцию прогибов точек срединной плоскости пластины. Получим выражения для компонент тензора напряжений, которые появляются в пластине при её деформировании.

Запишем, с учётом третьего допущения Кирхгофа, соотношения обобщённого закона Гука (1.22) для компонент тензора деформаций  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu \sigma_y); \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu \sigma_x); \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G},$$

обращая которые, приходим к выражениям соответствующих напряжений:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y); \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x); \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}.$$

Далее, используя полученные соотношения для деформаций (3.4), записываем формулы для компонент тензора напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  в пластине через функцию прогиба  $w$  срединной плоскости:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad \sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\
\tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Из полученных выражений для компонент перемещений, деформаций и напряжений (3.3) – (3.5) произвольного горизонтального слоя пластины следует, что перечисленные параметры НДС меняются по толщине пластины по *линейному закону*. Эти величины, согласно второму допущению Кирхгофа (3.2), равны нулю в точках срединной плоскости и достигают максимальных, одинаковых по абсолютной величине, но противоположных по знаку значений на нижней и верхней поверхностях пластины  $z = \pm h/2$ .

Касательные напряжения  $\tau_{yz}$  и  $\tau_{zx}$ , действующие в двух других координатных плоскостях  $yOz$  и  $zOx$  пластины, после подстановки угловых деформаций из формул (3.1) в соотношения закона Гука (1.23) обращаются в нуль:

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{yz} = 0; \quad \tau_{zx} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{zx} = 0.$$

Если теперь полученные напряжения подставить в первые два уравнения равновесия (1.2), записанные без учёта объёмных сил,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \tag{3.6}$$

то они не будут удовлетворяться, т. е. не будут равняться нулю. Такой результат является следствием принятых допущений. В действительности касательные напряжения  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zx}$  не равны нулю. Чтобы уравнения (3.6) выполнялись, необходимо напряжения  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zx}$  определить из этих уравнений равновесия путём их интегрирования. Перепишем первое уравнение следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= -\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\right) = \\ &= \frac{Ez}{1-\nu^2} \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + (1-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] = \frac{Ez}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right).\end{aligned}$$

Интегрируя уравнение по координате  $z$ , получим:

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int z \, dz + f(x, y) = \\ &= \frac{Ez^2}{2(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + f(x, y).\end{aligned}$$

Функция  $f(x, y)$  определяется в соответствии с граничными условиями для касательных напряжений. Внешних касательных нагрузок, приводящих к появлению на поверхностях пластины касательных компонент тензора напряжений  $\tau_{zx}$ , нет, что математически можно представить так:

$$\tau_{zx} \Big|_{z=\pm \frac{h}{2}} = 0. \quad (3.7)$$

Тогда условие (3.7) можно записать так:

$$\frac{Eh^2}{8(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + f(x, y) = 0,$$

и получить для функции  $f(x, y)$  следующее соотношение:

$$f(x, y) = -\frac{Eh^2}{8(1-\nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right).$$

Окончательные выражения для напряжений  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zx}$  запишутся следующим образом (напряжение  $\tau_{yz}$  определяется из второго уравнения равновесия (3.6) аналогичным способом):

$$\begin{aligned}\tau_{zx} &= -\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right); \\ \tau_{yz} &= -\frac{E}{2(1-\nu^2)}\left(\frac{h^2}{4}-z^2\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right).\end{aligned}\quad (3.8)$$

Из соотношений (3.8) следует, что зависимость напряжений  $\tau_{yz}, \tau_{zx}$  от координаты  $z$  имеет квадратичный, параболический характер. В точках срединной плоскости ( $z=0$ ) напряжения принимают максимальные значения. На поверхностях пластины  $z=\pm h/2$ , согласно граничным условиям (3.7), касательные напряжения равны нулю.

Распределение компонент тензора напряжений по толщине пластины показано на рис. 3.3.

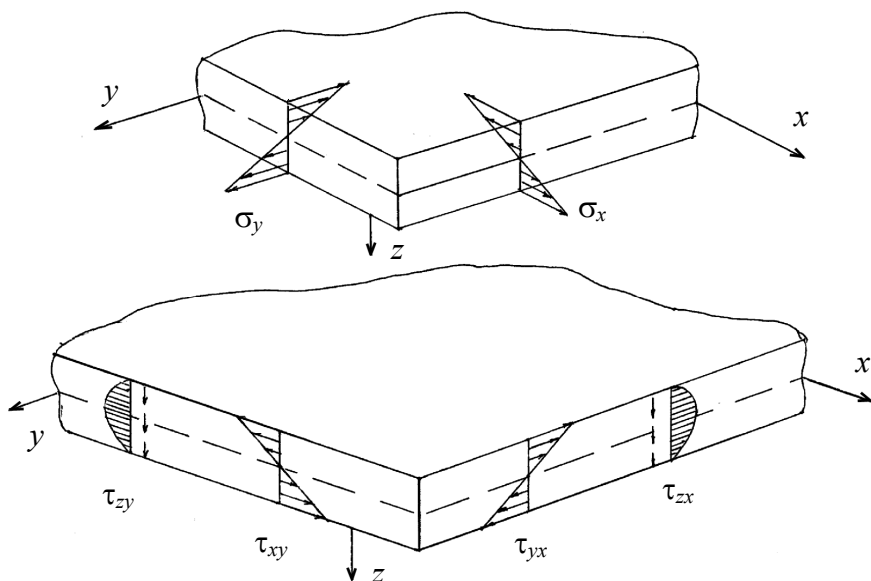


Рис. 3.3. Напряжения в пластине

### 3.3. Внутренние усилия в изгибаемой пластине

Полученные выражения для напряжений (3.5) и (3.8) неудобны для дальнейших выкладок, ибо они явно зависят от координаты  $z$ , а искомая функция прогибов  $w$ , через которую необходимо выразить другие параметры НДС, зависит от координат  $x$  и  $y$ . Избавиться от координаты  $z$  можно путём интегрирования напряжений по толщине пластины.

Отметим, что вторые производные в формулах (3.5) для нормальных напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

приближённо выражают кривизны кривых, получаемых при сечении срединной поверхности пластины плоскостями  $x = \text{const}$  и  $y = \text{const}$ , проведёнными через данную точку.

Эти кривизны характеризуют явление изгиба пластины и показывают, что напряжения  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  возникают вследствие изгиба. При изгибе пластины в каждой точке существуют два изгибающих момента в сечениях, нормальных к осям  $x$  и  $y$ . Для их определения выделим из пластины четырьмя вертикальными плоскостями элемент размерами  $dx, dy, h$  (рис. 3.4).

По элементарным полоскам шириной  $dz$  на гранях элемента приложены силы  $\sigma_x dy dz$  и  $\sigma_y dx dz$ .

Изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$ , действующие в точках на гранях элемента в сечениях с нормалью  $x$  и  $y$ , соответственно, подсчитаем как моменты этих сил относительно осей  $y$  и  $x$ , суммируя моменты по толщине пластины:

$$M_x dy = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x z dy dz = dy \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x z dz; \quad M_y dx = dx \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_y z dz.$$

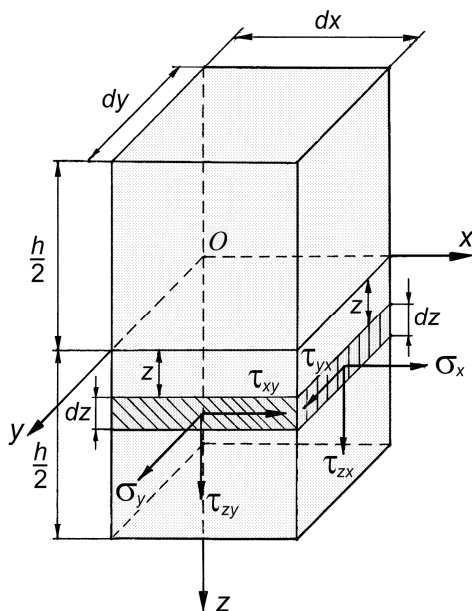


Рис. 3.4. К определению внутренних усилий в пластине

Сокращая эти равенства, соответственно, на  $dy$  и  $dx$ , получим изгибающие моменты в пластине, рассчитанные на единицу длины поперечного сечения, т. е. так называемые *погонные моменты*:

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x z dz; \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_y z dz.$$

Преобразуем выражение для момента  $M_x$ , подставив формулу для напряжения  $\sigma_x$  из (3.5):

$$M_x = -\frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz.$$

Отметим, что интеграл в записанном выражении представляет собой осевой момент инерции прямоугольного сечения шириной, равной единице:

$$I = \frac{1 \cdot h^3}{12}. \quad (3.9)$$

Таким образом,

$$M_x = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right).$$

Введём обозначение:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Это так называемая *цилиндрическая жёсткость*, отличающаяся от обычной жёсткости  $EI = Eh^3/12$ , принимаемой при расчёте на изгиб балок прямоугольного сечения, знаменателем  $(1-\nu^2)$ . Так как  $(1-\nu^2) < 1$ , то величина  $D > EI$ . Поэтому пластина всегда имеет бóльшую жёсткость, чем соответствующее количество расположенных рядом балок. Таким образом, цилиндрическая жёсткость является важной физической и геометрической характеристикой пластины при изгибе. Её размерность  $[D] = [E] \cdot [h^3] = \text{Па} \cdot \text{м}^3 = (\text{Н} / \text{м}^2) \cdot \text{м}^3 = \text{Н} \cdot \text{м}$ .

Окончательно получаем выражения для погонных изгибающих моментов:

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \quad (3.10)$$

Проделаем аналогичные преобразования для касательного напряжения  $\tau_{xy}$ , которое образует *погонный крутящий момент*:

$$H = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (3.11)$$



Если приравнять отношения левых и правых частей соответствующих соотношений (3.5) для напряжений и формулы (3.10), (3.11) для моментов, то можно получить выражения напряжений через моменты по обычным формулам:

$$\sigma_x = \frac{12M_x}{h^3} z; \quad \sigma_y = \frac{12M_y}{h^3} z; \quad \tau_{xy} = \frac{12H}{h^3} z. \quad (3.12)$$

Полученные соотношения соответствуют формулам для определения нормальных напряжений при изгибе балки прямоугольного сечения. Тогда с учётом (3.9) формулы для нормальных напряжений из (3.12) принимают вид, известный из курса сопротивления материалов:

$$\sigma_x = \frac{M_x}{I} z; \quad \sigma_y = \frac{M_y}{I} z.$$

Максимальные по толщине напряжения будут на нижней и верхней поверхностях пластины для значений  $z = \pm h/2$ , соответственно:

$$\sigma_{x \frac{\max}{\min}} = \pm \frac{6M_x}{h^2}; \quad \sigma_{y \frac{\max}{\min}} = \pm \frac{6M_y}{h^2}; \quad \tau_{xy \frac{\max}{\min}} = \pm \frac{6H}{h^2}. \quad (3.13)$$

Кроме моментов в сечениях пластины с нормальными  $x$  и  $y$  присутствуют погонные поперечные силы:

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz; \quad Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz,$$

являющиеся результатом действия касательных напряжений  $\tau_{yz}, \tau_{zx}$ . После подстановки в интегралы формул (3.8) для этих напряжений, поперечные силы записываются следующим образом:

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (3.14)$$

Размерности внутренних усилий следующие: моментов –  $[M, H] = \text{Н}$ ; поперечных сил –  $[Q] = \text{Н/м}$ .

Направления действия полученных внутренних усилий показаны на рис. 3.5.

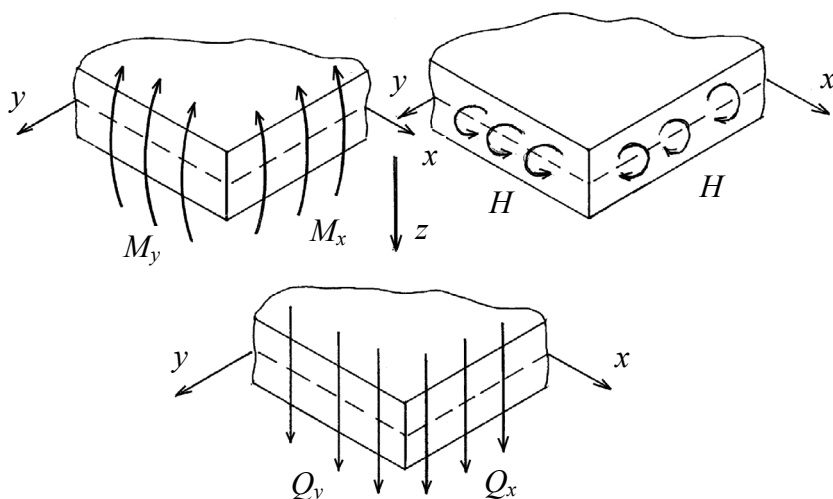


Рис. 3.5. К определению внутренних усилий в пластине

### 3.4. Уравнения равновесия изогнутой срединной поверхности пластины

Итак, выше получены выражения перемещений, деформаций, напряжений и внутренних усилий через функцию прогиба  $w = w(x, y)$  срединной плоскости пластины. Поэтому для определения перечисленных величин необходимо знать прогибы  $w$ , т. е. уметь их вычислять.

Вырежем из срединной плоскости пластины бесконечно малый элемент, имеющий в плане размеры  $dx$  и  $dy$  (рис. 3.6). На этот элемент действуют внутренние усилия и внешняя поперечная поперечная нагрузка интенсивностью  $q$ .

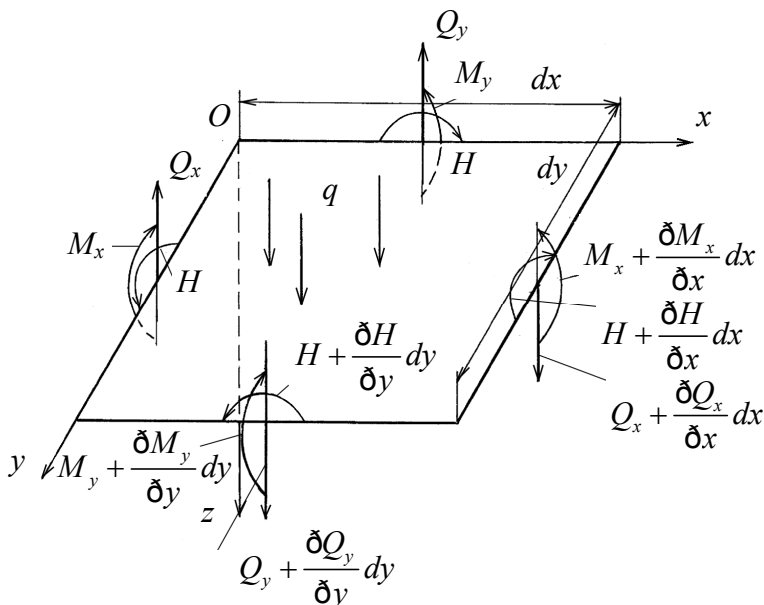


Рис. 3.6. Внутренние усилия в пластине

Элемент  $dx dy$  находится в равновесии, следовательно должны выполняться шесть уравнений статики: три уравнения проекций сил на координатные оси и три уравнения моментов относительно этих осей.

Составим уравнение статики  $\sum F_z = 0$ , для чего спроецируем все силы, изображённые на рис. 3.6, на ось  $z$ :

$$-Q_x dy + \left( Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy - Q_y dx + \left( Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx + q dx dy = 0.$$

Приводя подобные члены, получим уравнение равновесия элемента пластины:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q. \quad (3.15)$$

Уравнение статики для моментов  $\Sigma m_y = 0$ :

$$\begin{aligned} -M_x dy + \left( M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) dy - H dx + \left( H + \frac{\partial H}{\partial y} dy \right) dx + Q_y dx \frac{dx}{2} - \\ - \left( Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx \frac{dx}{2} - \left( Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy dx - q dx dy \frac{dx}{2} = 0 \end{aligned}$$

в итоге сводится к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial H}{\partial y} dy dx - \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \frac{dx^2}{2} - Q_x dx dy - \\ - \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx^2 dy - q \frac{dx^2}{2} dy = 0. \end{aligned}$$

Отбросив в уравнении бесконечно малые величины высшего порядка (они подчеркнуты) и разделив на  $dx dy$ , получаем второе уравнение равновесия:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = Q_x. \quad (3.16)$$

Аналогичное уравнение получим для уравнения статики  $\Sigma m_x = 0$ :

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} = Q_y. \quad (3.17)$$

Исключим поперечные силы  $Q_x, Q_y$  в уравнении (3.15) с помощью подстановки в него уравнений равновесия для моментов (3.16) и (3.17). В результате получим:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q.$$

Подставим в это уравнение записанные через функцию прогибов  $w$  соотношения для моментов (3.10), (3.11):

$$-D \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2(1-\nu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \nu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right] = -q.$$

После приведения подобных получим:

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - q = 0,$$

или

$$D \nabla^4 w - q = 0. \quad (3.18)$$

Полученное уравнение (3.18) имеет сходство с уравнением неразрывности деформаций (2.17) плоской задачи теории упругости. Однако, в уравнение (3.18) вместо функции напряжений Эри  $\varphi$  входит функция прогибов  $w$ .

Таким образом, задача об изгибе тонкой жёсткой пластины приводится к решению неоднородного дифференциального уравнения относительно прогибов  $w = w(x, y)$  срединной плоскости. Уравнение (3.18) иногда называют *уравнением Софи Жермен*, которая впервые получила его в окончательной форме в 1815 г. Это уравнение играет фундаментальную роль в теории изгиба пластин.

При интегрировании уравнения (3.18) появляются произвольные постоянные, которые могут быть определены из условий на контуре пластины, или так называемых *граничных условий*. Полученные функции прогибов  $w(x, y)$  должны удовлетворять условиям на контуре пластины.

### 3.5. Граничные условия на контуре пластины. Геометрические граничные условия

На контуре пластины, в зависимости от способа закрепления её краёв и способа приложения внешней нагрузки, могут быть заданы прогибы, углы поворота срединной плоскости и/или изменения её кривизны, поперечные силы, изгибающие и крутящие моменты и т. д.

Поэтому на контуре пластины различают статические и геометрические граничные условия. Условия, при которых на контуре пластины задаются усилия, т. е. изгибающие или крутящие моменты и поперечные силы, называются *статическими*. *Геометрическими* называются граничные условия, при которых на контуре задаются прогибы или их производные. Причём эти параметры известны без расчёта из физических, механических или других соображений. Если же на контуре заданы одновременно и перемещения и усилия, условия называются *смешанными*.

Геометрические граничные условия зависят от способа закрепления контура пластины. В каждой точке контура необходимо задавать по два граничных условия – по числу переменных, от которых зависит искомая функция прогибов  $w(x, y)$ .

Сформулируем граничные условия для различных закреплений краёв прямоугольной пластины. Шарнирное опирание краёв показано на рис. 3.7.

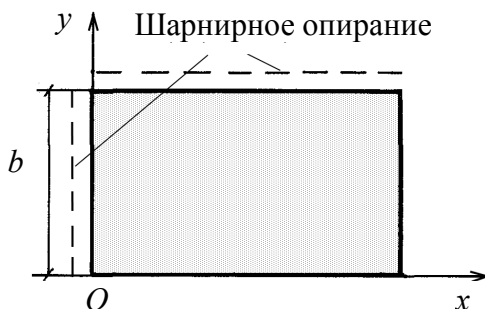


Рис. 3.7. Шарнирное опирание частей  $x = 0$  и  $y = b$  контура пластины

На шарнирно опёртых краях прогибы и изгибающие моменты равны нулю. Поэтому для всех точек части  $x = 0$  контура пластины должны выполняться следующие условия:

$$w|_{x=0} = 0; \quad M_x|_{x=0} = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0,$$

поскольку свободный поворот сечения  $x = 0$  в опоре означает отсутствие в нём изгибающего момента  $M_x$ . При этом эпюра прогиба  $w$  у опоры имеет следующий вид (рис. 3.8).

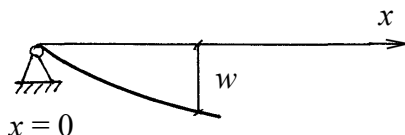


Рис. 3.8. Эпюра прогиба  $w$  точек части  $x = 0$  контура пластины при шарнирном опирании краёв

Так как шарнирные опоры предполагаются жёсткими, т. е. их прогиб  $w = 0$  и линия  $x = 0$  остаётся неизогнутой. Поэтому производные  $\frac{\partial w}{\partial y}$  и  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ , которые представляют собой угол поворота нормали и кривизну элемента срединной поверхности относительно оси  $y$ , соответственно, равны нулю, и тогда условия шарнирного опирания можно записать следующим образом:

$$w|_{x=0} = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0.$$

Какую бы координату ( $x$  или  $y$ ) не имел шарнирно опёртый контур, всегда на контуре прогиб и вторая производная от прогиба по этой координате равны нулю. Пусть край  $y = b$  шарнирно опёрт (рис. 3.7), тогда граничные условия на этом крае можно записать так:

$$w|_{y=b} = 0; \quad M_y|_{y=b} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \bigg|_{y=b} = 0. \quad (3.19)$$

Жёсткая заделка краёв (защемлённый край) показана на рис. 3.9.

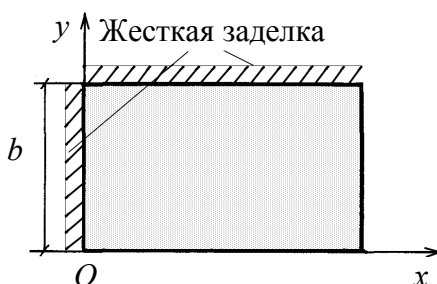


Рис. 3.9. Жёсткая заделка частей  $x = 0$  и  $y = b$  контура пластины

На жёстко заделанных краях отсутствуют прогибы и невозможен поворот краевого сечения относительно координатной оси, перпендикулярной защемлённому краю. Поэтому для всех точек контура  $x = 0$  должны выполняться следующие условия:

$$w|_{x=0} = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} \bigg|_{x=0} = 0. \quad (3.20)$$

В этом случае эпюра прогиба  $w$  у опоры имеет вид (рис. 3.10), соответствующий отсутствию поворота сечения  $x = 0$ .

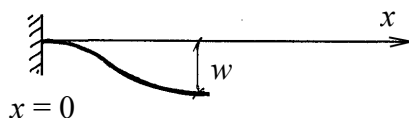


Рис. 3.10. Эпюра прогиба  $w$  точек части  $x = 0$  контура пластины при жёсткой заделке краёв



Какую бы координату ( $x$  или  $y$ ) не имел жёстко заделанный край, всегда прогиб и первая производная от прогиба по этой координате на этом краю равны нулю. Пусть жёстко заделана часть  $y = b$  контура пластины (рис. 3.9). Тогда граничные условия на этом краю можно записать так:

$$w|_{y=b} = 0; \quad \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{y=b} = 0.$$

Итак, получены выраженные через функцию прогибов  $w$  срединной плоскости математические формулировки граничных условий для контура пластины, используя которые можно приступать к решению уравнения Софи Жермен (3.18), описывающему изгиб тонкой жёсткой пластины.

### 3.6. Решение задачи изгиба пластины методом Бубнова – Галёркина

Решение представленных выше задач теории упругости сводится к интегрированию дифференциальных уравнений в частных производных с заданными граничными условиями. Точное решение многих важных практических задач до сих пор не получено, так как решение упомянутых дифференциальных уравнений представляет собой большие математические трудности.

Поэтому большое значение приобрели так называемые вариационные методы решения задач, основанные на вариационных принципах теории упругости. *Вариационными принципами теории упругости* называются некоторые основные теоремы, выраженные в форме интегральных равенств, которые связывают между собой перемещения, деформации и напряжения во всём объёме тела, и основанные на свойствах работы упругих сил. Вариационные принципы представляют практический интерес в том смысле, что на них основаны вариационные методы, позволяющие находить приближённые эффективные решения

задач в тех случаях, когда классический путь интегрирования основных уравнений теории упругости невозможен или затруднителен на данном временном этапе. Таким образом, сущность вариационных методов заключается в сведении решения одного или нескольких дифференциальных уравнений в частных производных к реализации системы линейных алгебраических уравнений или обыкновенного дифференциального уравнения.

Многие из этих методов основаны на вариационных принципах: принципе минимума энергии и принципе возможных перемещений. Оба этих принципа устанавливают необходимые условия, при которых система «тело–нагрузка» находится в равновесии. Согласно первому принципу полная потенциальная энергия системы, находящейся в состоянии устойчивого равновесия, минимальна. Второй из упомянутых вариационных принципов, т. е. принцип возможных перемещений, утверждает, что если система находится в равновесии, то сумма работ всех сил на возможных перемещениях равна нулю. Под возможным перемещением (виртуальным перемещением) понимается сколь угодно малое отклонение системы от заданного положения, допускаемое наложенными связями.

Одним из методов приближённого решения дифференциальных уравнений является метод Бубнова – Галёркина. Метод Бубнова – Галёркина основан на свойстве *ортogonalных функций*. Но этому методу можно дать и другое толкование, основанное на вариационном принципе возможных перемещений. Применим этот метод к решению уравнения Софи Жермен (3.18).

Искомая функция прогиба  $w(x, y)$  должна удовлетворять этому уравнению, а также граничным условиям на краях пластины. Согласно этому методу, функция прогибов  $w(x, y)$  заменяется её приближённым значением в виде двойного ряда:

$$w_{mn}(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \varphi_{ij}(x, y), \quad (3.21)$$

или

$$w_{mn}(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} X_i(x) Y_j(y), \quad (3.22)$$

где  $c_{ij}$  – постоянные параметры, подлежащие определению;  $\varphi(x, y)$ ,  $X_i(x)$ ,  $Y_j(y)$  – функции, которые выбираются так, чтобы удовлетворять геометрическим и статическим граничным условиям задачи. Они называются *базисными* или *координатными функциями*. Кроме того, для этих функций должны существовать производные порядка, не меньше, чем порядок реализуемого дифференциального уравнения. Например, функция  $X_i(x)$  не может быть равной  $x^3$ , так как в этом случае для неё не существует четвёртой производной, не равной нулю.

При подстановке выражения (3.22) в дифференциальное уравнение (3.18) левая часть уравнения не обращается в нуль, а превращается в некоторую функцию от  $x, y, c_{11}, c_{12}, c_{21}, \dots$

$$F_z(x, y, c_{11}, c_{12}, c_{21}, \dots) = D \nabla^4 w_{mn} - q \neq 0. \quad (3.23)$$

Эту функцию-ошибку можно представить как некоторую неуравновешенную проекцию  $F_z$  на ось  $z$  всех внешних и внутренних сил, действующих на бесконечно малый элемент пластины.

Для того, чтобы выбранная функция  $w_{mn}$  мало отличалась от искомой функции прогибов  $w$ , необходимо подобрать параметры  $c_{11}, c_{12}, c_{21}, \dots$  так, чтобы сила  $F_z$  как можно меньше отличалась от нуля. Для этого, согласно вариационному принципу возможных перемещений, необходимо, чтобы работа силы  $F_z$  (3.23) на возможных перемещениях срединной плоскости равнялась нулю. В нашем случае аналогами возможных перемещений по направлению оси  $z$  являются перемещения, определяемые базисными функциями  $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \dots$

Таким образом, чтобы пластина находилась в равновесии, следует в каждой точке пластины потребовать равенства нулю суммы элементарных работ всех приложенных к ней сил на возможных перемещениях, т. е. приравнять нулю следующий интеграл по площади  $S$  пластины:

$$\iint_S F_z X_i(x) Y_j(y) dx dy = 0.$$

Подставляя в интеграл выражение (3.23) для неуравновешенной силы  $F_z$ , получаем интегральное выражение, согласно которому дискретная система точек пластины будет находиться в равновесии:

$$\iint_S (D \nabla^4 w_{mn} - q) X_i(x) Y_j(y) dx dy = 0, \quad (3.24)$$

или

$$\iint_S \left[ D \left( \frac{\partial^4 w_{mn}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_{mn}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_{mn}}{\partial y^4} \right) - q \right] X_i(x) Y_j(y) dx dy = 0, \quad (3.25)$$

где  $i = 1, 2, 3, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Уравнения (3.24), (3.25) называются *уравнением Бубнова – Галёркина*.

Полученное интегральное уравнение представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных параметров  $c_{ij}$ . Так, для значений  $m = n = 2$  получим систему четырёх линейных алгебраических уравнений относительно четырёх постоянных  $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$ :

$$\iint_S \left[ D \nabla^4 (c_{11} X_1 Y_1 + c_{12} X_1 Y_2 + c_{21} X_2 Y_1 + c_{22} X_2 Y_2) - q \right] X_1 Y_1 dx dy = 0;$$

$$\iint_S \left[ D \nabla^4 (c_{11} X_1 Y_1 + c_{12} X_1 Y_2 + c_{21} X_2 Y_1 + c_{22} X_2 Y_2) - q \right] X_1 Y_2 dx dy = 0;$$

$$\iint_S \left[ D \nabla^4 (c_{11} X_1 Y_1 + c_{12} X_1 Y_2 + c_{21} X_2 Y_1 + c_{22} X_2 Y_2) - q \right] X_2 Y_1 dx dy = 0;$$

$$\iint_S \left[ D \nabla^4 (c_{11} X_1 Y_1 + c_{12} X_1 Y_2 + c_{21} X_2 Y_1 + c_{22} X_2 Y_2) - q \right] X_2 Y_2 dx dy = 0.$$

Решение СЛАУ приводит к определению величин параметров  $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$  и получению окончательного выражения для вычисления функции  $w_{mn}$ . Чем больше коэффициентов  $c_{ij}$  будет учтено в выражении (3.22), тем точнее функция  $w_{mn}$  аппроксимирует искомую функцию прогибов  $w(x, y)$ .

Если в (3.22) учитывать только один член ряда, то вместо системы уравнений будет одно уравнение:

$$\begin{aligned} cD \iint_S (X^{IV} Y + 2X'' Y'' + X Y^{IV}) X Y dx dy = \\ = q \iint_S X Y dx dy + \sum_{k=1}^K F_k X(x_{F_k}) Y(y_{F_k}), \end{aligned} \quad (3.26)$$

где  $x_{F_k}, y_{F_k}$  – координаты точки приложения сосредоточенных нормальных сил  $F_k$ , действующих на пластину.

Таким образом, метод Бубнова – Галёркина позволяет учесть действие сосредоточенных сил  $F_k$ , что невозможно при работе с дифференциальным уравнением.

Перепишем уравнение (3.26) в более удобном для вычислений виде:

$$\begin{aligned} cD \left( \int_0^a X^{IV} X dx \int_0^b Y Y dy + 2 \int_0^a X'' X dx \int_0^b Y'' Y dy + \int_0^a X X dx \int_0^b Y^{IV} Y dy \right) = \\ = q \int_0^a X dx \int_0^b Y dy + \sum_{k=1}^K F_k X(x_{F_k}) Y(y_{F_k}), \end{aligned}$$

где  $a, b$  – размеры пластины по осям координат  $x$  и  $y$ , соответственно.

Из этого уравнения определяется параметр  $c$  по формуле:

$$c = \frac{\Delta}{\delta}, \quad (3.27)$$

где 
$$\Delta = \frac{q}{D} \int_0^a X dx \int_0^b Y dy + \frac{1}{D} \sum_{k=1}^K F_k X(x_{F_k}) Y(y_{F_k}); \quad (3.28)$$

$$\delta = \left( \int_0^a X^{IV} X dx \int_0^b Y Y dy + 2 \int_0^a X'' X dx \int_0^b Y'' Y dy + \int_0^a X X dx \int_0^b Y^{IV} Y dy \right). \quad (3.29)$$

Затем по формуле (3.22) определяются искомые прогибы  $w_{mn}(x, y)$  срединной плоскости, а далее, по полученным ранее формулам, – все параметры НДС пластины (перемещения, деформации, напряжения) и внутренние усилия (моменты, поперечные силы).

### 3.7. Пример расчёта прямоугольной пластины

Рассмотрим пример расчета прямоугольной пластины, нагруженной собственным весом и сосредоточенной нормальной силой  $F$ . На рис. 3.11 представлена расчётная схема пластины. Крестиками на рисунке показаны точки приложения силы  $F$ . Координаты  $(x, y)$  этих точек равны:  $(a/3, b/2)$  и  $(2a/3, b/2)$ .

Числовые данные для расчета пластины следующие:  $a = 4$  м;  $b = 4$  м;  $h = 0,2$  м;  $F = 10$  кН;  $E = 1 \cdot 10^5$  МПа;  $\nu = 0,25$ ;  $\gamma = 70$  кН/м<sup>3</sup> – объёмный вес.

Воспользуемся упрощенной постановкой задачи, когда в приближённом выражении для прогиба  $w_{mn}(x, y)$  (3.21) учитывается лишь один член ряда, т. е.  $m = n = 1$ .

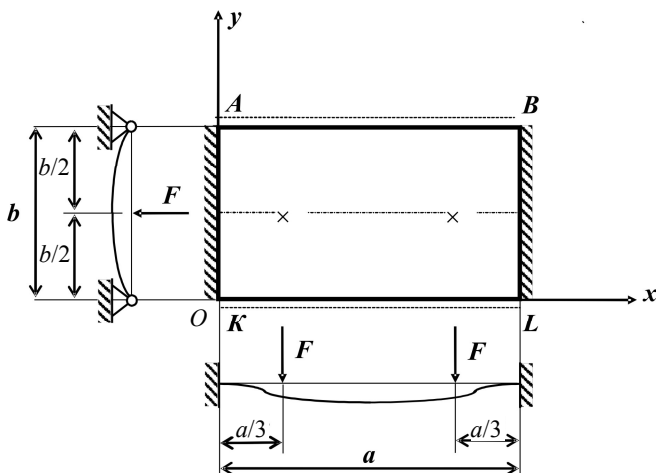


Рис. 3.11. Расчётная схема пластины

Функция прогибов задана в виде

$$w(x, y) = c\varphi(x, y) = c \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (3.30)$$

Запишем граничные условия на контуре пластины. Согласно условным обозначениям на расчётной схеме, грани  $AK$  и  $BL$  пластины защемлены, а грани  $AB$  и  $KL$  – шарнирно опёрты. Тогда, воспользовавшись полученными в п. 3.5 выражениями граничных условий (3.20) и (3.19), соответственно, можно записать:

1) при  $x=0$  (грань  $AK$ ) – защемление:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0;$$

2) при  $x=a$  (грань  $BL$ ) – защемление:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0;$$

3) при  $y=0$  (грань  $KL$ ) – шарнирное опирание:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0;$$

4) при  $y = b$  (грань  $AB$ ) – шарнирное опирание:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (3.31)$$

Проведём проверку выполнения восьми записанных граничных условий (3.31) для заданной функции прогибов  $w(x, y)$ .

Подставляя уравнения граней пластины в заданную функцию прогибов (3.30), убедимся, что для всех граней  $w(x, y) = 0$ :

для грани  $AB$  ( $y = b$ ):

$$w(x, y) \Big|_{AB} = c \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \sin \frac{\pi b}{b} = c \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \sin \pi = 0;$$

для грани  $BL$  ( $x = a$ ):

$$w(x, y) \Big|_{BL} = c \left( 1 - \cos \frac{2\pi a}{a} \right) \sin \frac{\pi y}{b} = c(1 - 1) \sin \frac{\pi y}{b} = 0;$$

для грани  $KL$  ( $y = 0$ ):

$$w(x, y) \Big|_{KL} = c \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \sin \frac{\pi \cdot 0}{b} = 0;$$

для грани  $AK$  ( $x = 0$ ):

$$w(x, y) \Big|_{AK} = c \left( 1 - \cos \frac{2\pi \cdot 0}{a} \right) \sin \frac{\pi y}{b} = c(1 - 1) \sin \frac{\pi y}{b} = 0.$$

Проведём проверку выполнения записанных граничных условий для производных от заданной функции прогибов



$w(x, y)$ . Первые производные от базисной функции  $\varphi(x, y)$  имеют вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{2\pi}{a} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b};$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\pi}{b} \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \cos \frac{\pi y}{b}.$$

Тогда для  $x=0$  (грань  $AK$ )

$$\frac{\partial w}{\partial x} = c \frac{2\pi}{a} \sin \frac{2\pi \cdot 0}{a} \sin \frac{\pi y}{b} = 0,$$

а для  $x=a$  (грань  $BL$ )

$$\frac{\partial w}{\partial x} = c \frac{2\pi}{a} \sin \frac{2\pi \cdot a}{a} \sin \frac{\pi y}{b} = 0.$$

Вторые производные по переменной  $x$  и  $y$  от заданной базисной функции записываются следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \left( \frac{2\pi}{a} \right)^2 \cos \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b};$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = - \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Тогда для  $y=0$  (грань  $KL$ )

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -c \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \sin \frac{\pi \cdot 0}{b} = 0,$$

а для  $y=b$  (грань  $AB$ )

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -c \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \sin \frac{\pi \cdot b}{b} = 0.$$

Таким образом, заданная функция  $w(x, y)$  прогибов (3.30) удовлетворяет всем граничным условиям на контуре пластины: защемлению граней  $AK$  и  $BL$  и шарнирному опиранию граней  $AB$  и  $KL$ .

Определим собственный вес пластины, приходящийся на  $1 \text{ м}^2$  её поверхности:

$$q = \gamma \cdot h = 70 \cdot 0,2 = 14 \text{ кПа}.$$

Вычислим величину цилиндрической жёсткости пластины:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{1 \cdot 10^8 (0,2)^3}{12(1-0,25^2)} = 0,711 \cdot 10^5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Определим величину  $\Delta$  по формуле, аналогичной формуле (3.28):

$$\Delta = \frac{q}{D} \iint_S \varphi dx dy + \frac{1}{D} \sum_{k=1}^K F_k \varphi(x_{F_k}, y_{F_k}).$$

Рассмотрим первое слагаемое этого выражения:

$$\begin{aligned} \iint_S \varphi dx dy &= \int_0^b \int_0^a \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = \\ &= \int_0^a \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) dx \int_0^b \sin \frac{\pi y}{b} dy. \end{aligned}$$

По таблице интегралов находим:

$$\int_0^a \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) dx = \left( x - \frac{a}{2\pi} \sin \frac{2\pi x}{a} \right) \Big|_0^a = a;$$

$$\int_0^b \sin \frac{\pi y}{b} dy = -\frac{b}{\pi} \cos \frac{\pi y}{b} \Big|_0^b = \frac{2b}{\pi}.$$

Распишем второе слагаемое в выражении для  $\Delta$ , которое представляет собой сумму ряда, состоящего из двух слагаемых:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{D} \sum_{k=1}^2 F_k \varphi(x_{F_k}, y_{F_k}) &= \frac{F}{D} \left( \varphi\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{2}\right) + \varphi\left(\frac{2a}{3}, \frac{b}{2}\right) \right) = \\
 &= \frac{F}{D} \left( \left(1 - \cos \frac{2\pi a}{a \cdot 3}\right) \sin \frac{\pi \cdot b}{b \cdot 2} + \left(1 - \cos \frac{2\pi \cdot 2a}{a \cdot 3}\right) \sin \frac{\pi \cdot b}{b \cdot 2} \right) = \\
 &= \frac{F}{D} \left( \left(1 - \cos \frac{2\pi}{3}\right) \sin \frac{\pi}{2} + \left(1 - \cos \frac{4\pi}{3}\right) \sin \frac{\pi}{2} \right) = \\
 &= \frac{F}{D} \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{3} + 1 - \cos \frac{4\pi}{3} \right) = \frac{F}{D} \left( 2 - \cos \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right) - \cos \left( \pi + \frac{\pi}{3} \right) \right) = \\
 &= \frac{F}{D} \left( 2 + 2 \cos \frac{\pi}{3} \right) = \frac{F}{D} \left( 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{3F}{D}.
 \end{aligned}$$

Для принятых значений  $a$  и  $b$  получаем:

$$\Delta = \frac{q}{D} a \frac{2b}{\pi} + \frac{3F}{D} = \frac{14}{0,711 \cdot 10^5} \cdot 4 \cdot \frac{2 \cdot 4}{3,14} + \frac{3 \cdot 10}{0,711 \cdot 10^5} = 2,43 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}.$$

Определим величину параметра  $\delta$  по формуле, аналогичной формуле (3.29):

$$\delta = \iint_S \left( \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \varphi + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} \varphi + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} \varphi \right) dx dy.$$

Запишем выражения четвертых производных от базисной функции  $\varphi(x, y)$ :

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = - \left( \frac{2\pi}{a} \right)^4 \cos \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b};$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = \left(\frac{\pi}{b}\right)^4 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \sin \frac{\pi y}{b};$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial x^2} = -\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\pi}{b}\right)^4 \cos \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$

и подставим их в выражения для параметра  $\delta$ :

$$\begin{aligned} \delta = & \int_0^b \int_0^a \left[ -\left(\frac{2\pi}{a}\right)^4 \cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \sin^2 \frac{\pi y}{b} + \right. \\ & + 2(-1) \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \cos \frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) \sin^2 \frac{\pi y}{b} + \\ & \left. + \left(\frac{\pi}{b}\right)^4 \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right)^2 \sin^2 \frac{\pi y}{b} \right] dx dy. \end{aligned} \quad (3.32)$$

В полученном выражении для  $\delta$  после приведения подобных членов имеем три типа интегралов. По таблице интегралов находим:

$$\begin{aligned} \int_0^b \sin^2 \frac{\pi y}{b} dy &= \frac{b}{\pi} \left[ \frac{\pi y}{2b} - \frac{1}{4} \sin \frac{2\pi y}{b} \right] \Big|_0^b = \frac{b}{2}; \\ \int_0^a \cos \frac{2\pi x}{a} dx &= \frac{a}{2\pi} \sin \frac{2\pi x}{a} \Big|_0^a = 0; \\ \int_0^a \cos^2 \frac{2\pi x}{a} dx &= \frac{a}{2\pi} \left[ \frac{2\pi x}{2a} + \frac{1}{4} \sin \frac{4\pi x}{a} \right] \Big|_0^a = \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

Подставим значения интегралов в выражение для  $\delta$  (3.32), и после приведения подобных членов получим:

$$\begin{aligned}\delta &= \left(\frac{2\pi}{a}\right)^4 \frac{a}{2} \frac{b}{2} + 2 \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \frac{a}{2} \frac{b}{2} + \left(\frac{\pi}{b}\right)^4 \left(a + \frac{a}{2}\right) \frac{b}{2} = \\ &= \frac{\pi^4 ab}{4} \left( \left(\frac{2}{a}\right)^4 + 2 \left(\frac{2}{a}\right)^2 \left(\frac{1}{b}\right)^2 + 3 \left(\frac{1}{b}\right)^4 \right).\end{aligned}$$

Для значений  $a$  и  $b$  параметр  $\delta$  равен:

$$\delta = 4\pi^4 \left( \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 3 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \right) = 41,094 \text{ м}^{-2}.$$

Находим значение параметра  $c$  (3.27):

$$c = \frac{\Delta}{\delta} = \frac{2,43 \cdot 10^{-3}}{41,094} = 0,059 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Таким образом, функция прогибов срединной плоскости пластины имеет вид:

$$w(x, y) = 0,059 \cdot 10^{-3} \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Запишем выражения для внутренних усилий. Изгибающий момент в сечении, перпендикулярном оси  $x$ :

$$\begin{aligned}M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -cD \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = \\ &= -cD \left( \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 \cos \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} - \nu \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \sin \frac{\pi y}{b} \right) = \\ &= -11,011 \cos \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + 0,648 \sin \frac{\pi y}{b}.\end{aligned}$$

Изгибающий момент в сечении, перпендикулярном оси  $y$  :

$$\begin{aligned}
 M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -cD \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = \\
 &= -cD \left( - \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \sin \frac{\pi y}{b} + \nu \left( \frac{2\pi}{a} \right)^2 \cos \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \right) = \\
 &= 2,591 \sin \frac{\pi y}{b} - 5,182 \cos \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.
 \end{aligned}$$

Крутящий момент

$$\begin{aligned}
 H &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -cD(1-\nu) \frac{2\pi}{a} \frac{\pi}{b} \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} = \\
 &= -3,886 \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}.
 \end{aligned}$$

Поперечная сила в сечении, перпендикулярном оси  $x$  :

$$\begin{aligned}
 Q_x &= -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = -cD \left( - \left( \frac{2\pi}{a} \right)^3 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} - \right. \\
 &\quad \left. - \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 \frac{2\pi}{a} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \right) = 20,348 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.
 \end{aligned}$$

Поперечная сила в сечении, перпендикулярном оси  $y$  :

$$\begin{aligned}
 Q_y &= -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) = -cD \left( \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} \right) = -cD \left( - \left( \frac{\pi}{b} \right)^3 \times \right. \\
 &\quad \times \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \cos \frac{\pi y}{b} + \left( \frac{2\pi}{a} \right)^2 \left( \frac{\pi}{b} \right) \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \Big) =
 \end{aligned}$$

$$= -10,174 \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} + 2,035 \cos \frac{\pi y}{b}.$$

Для проверки правильности полученных выражений для внутренних усилий используем дифференциальные уравнения равновесия (3.16) и (3.17):

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}; \quad (3.16)$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (3.17)$$

В нашем случае

$$Q_x = 20,348 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b};$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = 11,011 \frac{2\pi}{a} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} = 17,296 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b};$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = 3,886 \frac{\pi}{b} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} = 3,052 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Тогда сумма производных

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = 20,348 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} = Q_x.$$

Следовательно, соотношение (3.16) выполняется тождественно.

$$Q_y = -10,174 \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} + 2,035 \cos \frac{\pi y}{b};$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} = 2,591 \frac{\pi}{b} \cos \frac{\pi y}{b} - 5,182 \frac{\pi}{b} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} =$$

$$= 2,035 \cos \frac{\pi y}{b} - 4,070 \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b};$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -3,886 \frac{2\pi}{a} \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} = -6,104 \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}.$$

Составим сумму производных

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} = -10,174 \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} + 2,035 \cos \frac{\pi y}{b} = Q_y.$$

Итак, соотношение (3.17) выполняется тождественно, а, следовательно, формулы для внутренних усилий верны.

Таким образом, метод Бубнова – Галёркина, в отличие от метода конечных разностей, позволяет получать не численное, а приближённое аналитическое решение краевой задачи для дифференциального уравнения. Имея выражение для прогиба, можно вычислить параметры НДС пластины в любой её точке.

Для сечений пластины, проходящих через её центр параллельно осям  $x$  и  $y$ , вычислим выражения для прогибов и внутренних усилий.

$$\text{При } y = \frac{b}{2}:$$

$$H = 0; Q_y = 0; w = 0,059 \cdot 10^{-3} \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right); M_y = 2,591 - 5,182 \cos \frac{2\pi x}{a}.$$

$$\text{При } x = \frac{a}{2}:$$

$$H = 0; Q_x = 0; w = 0,118 \cdot 10^{-3} \sin \frac{\pi y}{b}; M_x = 11,659 \sin \frac{\pi y}{b}.$$

С помощью полученных выражений строим эпюры прогибов и моментов (рис. 3.12).



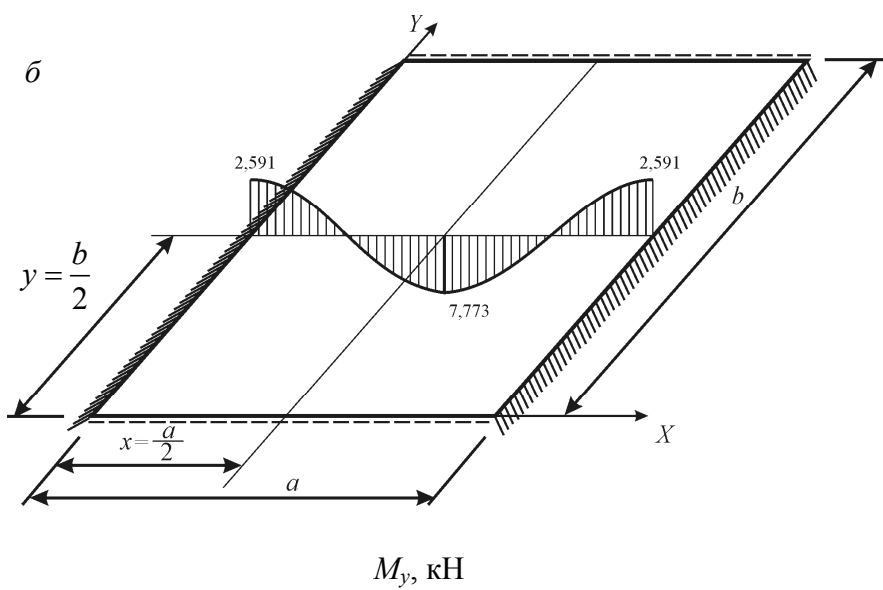
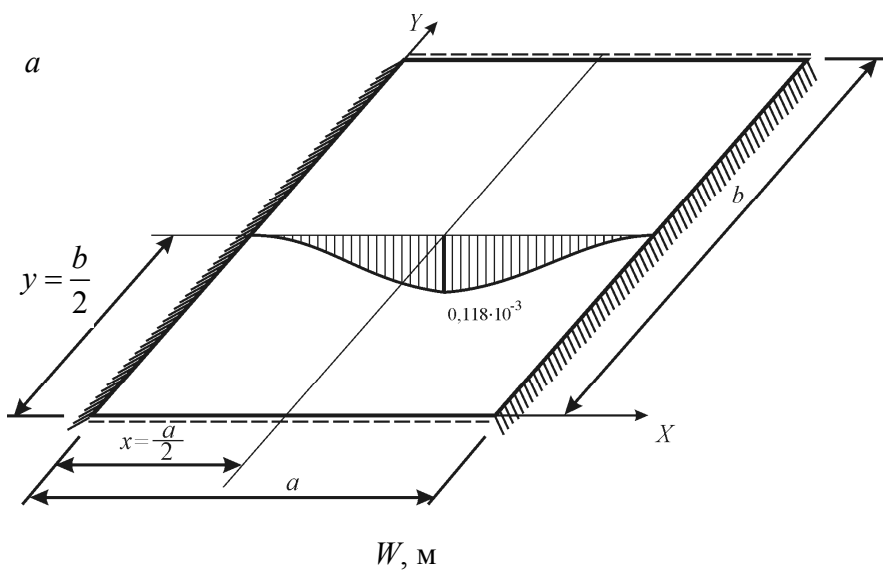


Рис. 3.12. Эпюры прогибов и моментов в пластине (окончание см. на с. 144)

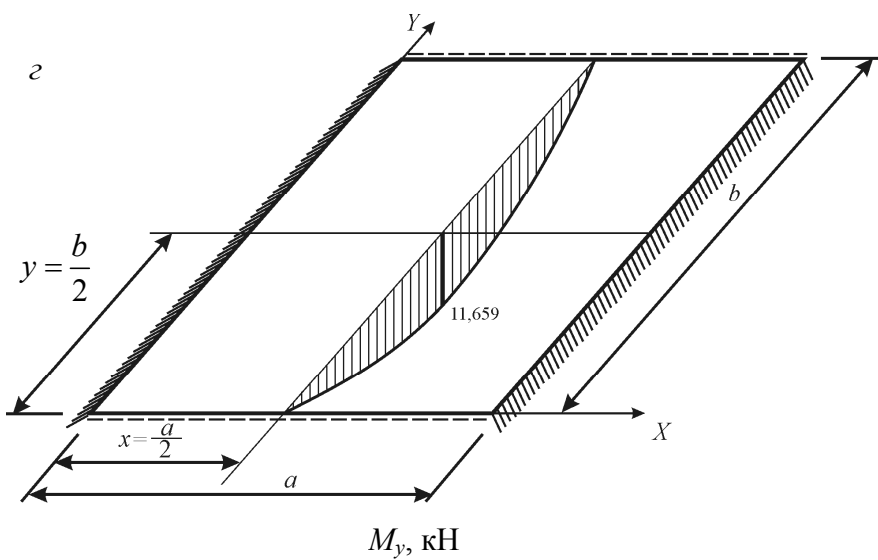
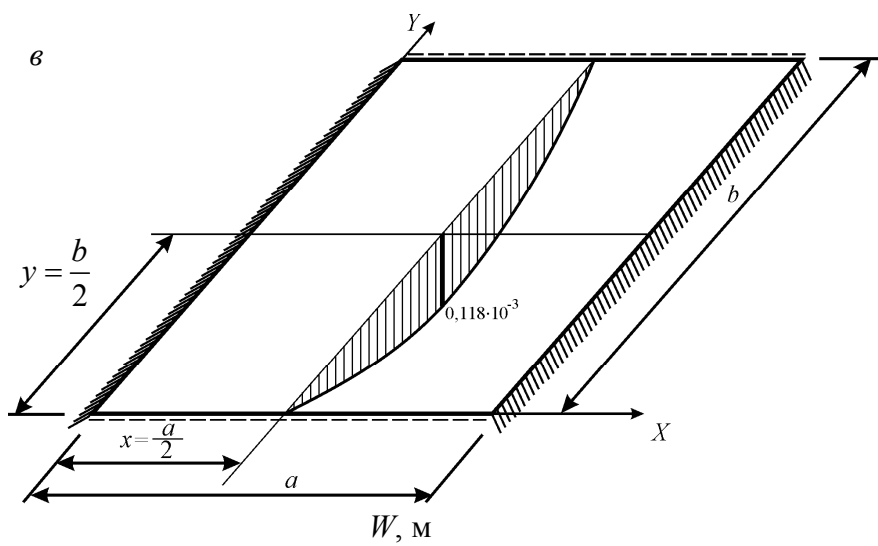


Рис. 3.12. Окончание (начало см. на с. 143)

Из представленных эпюр устанавливаем, что опасной является точка в центре пластины. Нормальные напряжения в центре пластины для значений координаты  $z = \pm h/2$  будут равны:

$$\max |\sigma_y| = \frac{6|M_y^{\max}|}{h^2} = \frac{6 \cdot 7,773}{(0,2)^2} = 1,166 \text{ МПа};$$

$$\max |\sigma_x| = \frac{6|M_x^{\max}|}{h^2} = \frac{6 \cdot 11,659}{(0,2)^2} = 1,749 \text{ МПа}.$$

### Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение понятия «пластина».
2. Дайте определение понятия «срединная плоскость».
3. Дайте определение понятия «прогиб» срединной плоскости пластины.
4. Перечислите допущения (гипотезы) Кирхгофа.
5. Что дают введение срединной плоскости и использование допущений Кирхгофа с точки зрения размерности задачи об изгибе пластины?
6. Перечислите внутренние усилия, возникающие в пластине при изгибе.
7. Какое дифференциальное уравнение описывает изгиб тонкой жёсткой пластины? Дайте ему характеристику.
8. Перечислите типы граничных геометрических условий на контуре пластины.
9. Метод Бубнова – Галёркина – метод решения дифференциального уравнения изгиба пластины. На каком вариационном принципе основан этот метод?
10. Дайте определение понятия «базисные функции». Какие требования предъявляются к этим функциям?
11. Какой из способов решения прямой задачи теории упругости используется при рассмотрении изгиба пластины?
12. В чём принципиальное отличие полученных решений при реализации дифференциальных уравнений методом конечных разностей и методом Бубнова – Галёркина?

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Пособие представляет собой краткое изложение курса основ теории упругости, что объясняется количеством часов, предусмотренных образовательным стандартом на изучение этого курса студентами строительных специальностей.

Теоретические положения, изложенные в пособии, подкреплены примерами решения задач для строительных конструкций, которые реализовывались аналитическим и численным методами. Можно отметить вопросы, не вошедшие в учебное пособие. Например, это изложение соотношений теории упругости в криволинейных координатах; интегральная формулировка задач; задачи о кручении валов; соотношения анизотропной теории упругости и т. д.

Сведения, приведенные в пособии, помогут читателю при самостоятельном освоении как вышеперечисленных, так и иных вопросов теории упругости. Этому способствует наличие достаточно большого числа учебников и учебных пособий разной степени сложности. К сожалению, они имеют, как правило, довольно большой объем.

Для углубленного изучения теории упругости можно рекомендовать издания, перечисленные в списке литературы.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

### Основная литература

1. *Александров, А.В.* Сопротивление материалов. Основы теории упругости и пластичности / А.В. Александров, В.Д. Потапов. – М. : Высшая школа, 2007. – 400 с.
2. *Икрин, В.А.* Сопротивление материалов с элементами теории упругости и пластичности: учебник для вузов / В.А. Икрин. – М. : Изд-во АСВ, 2005. – 424 с.
3. *Кац, А.М.* Теория упругости : учебник для вузов / А.М. Кац. – СПб. : Лань, 2002. – 207 с.
4. *Саргсян, А.Е.* Сопротивление материалов, теория упругости и пластичности : учебник / А.Е. Саргсян. – М. : Высшая школа, 2002. – 285 с.

### Дополнительная литература

1. *Самуль, В.И.* Основы теории упругости и пластичности / В.И. Самуль. – М. : Высшая школа, 1982. – 264 с.
2. *Победря, Б.Е.* Лекции по теории упругости / Б.Е. Победря, Д.М. Георгиевский. – М. : Эдиториал УРСС, 1999. – 208 с.
3. *Тимошенко, С.П.* Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М. : Наука, 1975. – 576 с.
4. *Филоненко-Бородич, М.М.* Теория упругости / М.М. Филоненко-Бородич. – М. : Изд-во физ.-мат. лит-ры, 1959. – 364 с.
5. *Безухов, Н.И.* Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач : учеб. пособие для втузов / Н.И. Безухов, О.В. Лужин. – М. : Высшая школа, 1974. – 200 с.
6. *Прочность, устойчивость, колебания* : справочник : в 3 т. / под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. – М. : Машиностроение, 1968. – Т. 1. – 831 с.
7. *Жемочкин, Б.Н.* Теория упругости / Б.Н. Жемочкин. – М. : Изд-во лит-ры по строительству и архитектуре, 1957. – 257 с.

8. *Корн, Г.* Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1978. – 832 с.

9. *Бронштейн, И.Н.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М. : Наука, 1986. – 544 с.

10. *Коваленко, О.Ф.* Обратный метод решения пространственной задачи теории упругости / О.Ф. Коваленко, И.Ю. Смолина, Л.Е. Путеева. – Томск : Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2001. – 16 с.

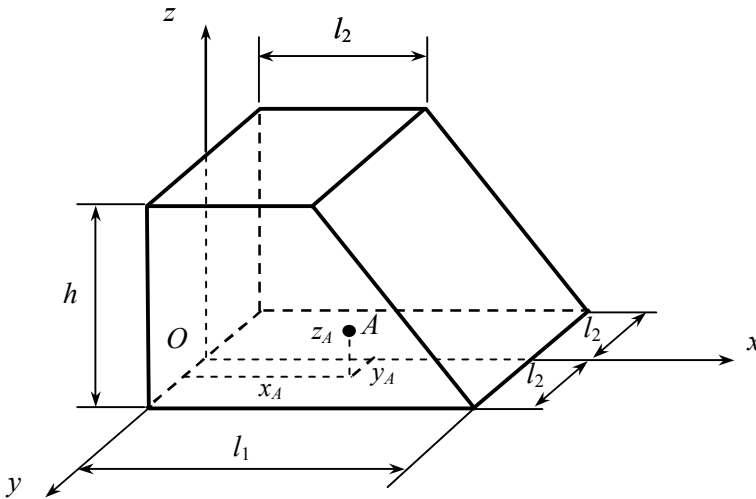
11. *Смолина, И.Ю.* Расчёт балки-стенки методом конечных разностей: варианты заданий и методические указания / И.Ю. Смолина. – Томск : Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2002. – 32 с.

12. *Смолина, И.Ю.* Расчёт пластинки на изгиб методом Бубнова – Галеркина : методические указания / И.Ю. Смолина, Л.Е. Путеева, С.М. Шильников. – Томск : Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2007. – 34 с.

13. *Барашков, В.Н.* Моделирование пространственного напряжённо-деформированного состояния балки-стенки / В.Н. Барашков, А.А. Матвеев // Вестник ТГАСУ. – 2010. – № 3. – С. 92–104.

**Контрольная работа № 1**  
**для студентов заочной формы обучения**  
**«Обратный метод решения пространственной задачи**  
**теории упругости»**

Для трёхмерного тела, изображенного на рисунке, заданы три компоненты вектора перемещения  $u, v, w$  как функции декартовых координат  $x, y, z$ .



Требуется:

1. Определить компоненты тензора деформаций и тензора напряжений в произвольной точке тела.
2. Определить компоненты объёмной нагрузки  $X, Y, Z$  и поверхностной нагрузки  $X_v, Y_v, Z_v$  на наклонной грани тела.
3. Найти величину относительной объёмной деформации  $\theta_0$  и среднего нормального напряжения  $\sigma_0$  в точке  $A$  с заданными координатами  $x_A, y_A, z_A$ . Записать тензор напряжений  $T_n$ , шаровой тензор  $T_{ш}$  и девиатор напряжений  $D_n$  в этой точке.

4. Определить инварианты тензора напряжений  $I_1, I_2, I_3$  в точке  $A$ , а также величины главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  и наибольшего касательного напряжения  $\tau_{\max}$  в этой точке.

5. Определить погрешность вычисления инвариантов тензора напряжений в точке  $A$ .

Исходные данные для решения задачи принимаются студентом из табл. П.1.1 (в соответствии с предпоследней цифрой шифра) и из табл. П.1.2 (в соответствии с последней цифрой шифра).

### Варианты заданий к контрольной работе № 1

Таблица П.1.1

#### Числовые данные для решения задач

Предпоследняя цифра шифра	$a, \text{ м}^{-1}$	$b, \text{ м}^{-1}$	$c, \text{ м}^{-1}$	$\alpha, \text{ м}$	$l_1, \text{ м}$	$l_2, \text{ м}$	$h, \text{ м}$	$x_A, \text{ м}$	$y_A, \text{ м}$	$z_A, \text{ м}$
	$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \quad \nu = 0,25$									
1	$1 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$	0,5	0,5	0,3	0,3	0,1	0,1	0,2
2	$2 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$	0,6	0,5	0,4	0,4	0,2	0,2	0,3
3	$3 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	0,4	0,3	0,2	0,3	0,1	-0,1	0,2
4	$4 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	0,3	0,4	0,3	0,4	0,2	-0,1	0,3
5	$5 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	0,5	0,3	0,2	0,3	0,1	0,1	0,1
	$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \quad \nu = 0,3$									
6	$1 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	0,2	0,3	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1
7	$2 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	0,3	0,5	0,4	0,2	0,3	-0,2	0,1
8	$1 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$	0,5	0,5	0,4	0,4	0,2	0,2	0,3
9	$2 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$	0,6	0,3	0,2	0,3	0,1	-0,1	0,2
0	$3 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	0,4	0,4	0,3	0,4	0,2	-0,1	0,3



## Функции перемещений

№ варианта	$u, v, w$	№ варианта	$u, v, w$
1	$u = a(x^2 + \alpha y)$ $v = b \cdot \alpha (x + y + z)$ $w = c(\alpha y + z^2)$	2	$u = a \cdot \alpha (y + z)$ $v = b(x^2 + y^2)$ $w = c(\alpha x + z^2)$
3	$u = a(\alpha x + y^2)$ $v = b(\alpha x + \alpha y + z^2)$ $w = c(y^2 + \alpha z)$	4	$u = a(\alpha x^2 + \alpha y)$ $v = b(x^2 + y^2)$ $w = c(\alpha x + z^2)$
5	$u = a(x^2 + y^2)$ $v = b(\alpha x + z^2)$ $w = c(y^2 + z^2)$	6	$u = a(x^2 + y^2)$ $v = b(x^2 + y^2)$ $w = \alpha \cdot c(x + y + z)$
7	$u = a \cdot \alpha (x + y + z)$ $v = b(x^2 + y^2)$ $w = c(\alpha y + z^2)$	8	$u = a(\alpha x + y^2 + \alpha z)$ $v = b(x^2 + y^2)$ $w = c(\alpha x + z^2)$
9	$u = \alpha \cdot a(x + y + z)$ $v = b(\alpha x + y^2)$ $w = c(x^2 + \alpha z)$	0	$u = a \cdot \alpha (x + y^2)$ $v = b(x + y + z)$ $w = c(x^2 + y^2 + z^2)$

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### Контрольная работа № 2 для студентов заочной формы обучения «Расчёт пластины на изгиб методом Бубнова – Галёркина»

Расчётная схема пластины принимается из представленных ниже десяти вариантов расчётных схем в соответствии с предпоследней цифрой шифра. Исходные данные для решения задачи принимаются студентом из таблицы в соответствии с предпоследней цифрой шифра.

Требуется:

1. Проверить выполнение показанных на схеме геометрических граничных условий при заданной аппроксимирующей функции прогибов  $w(x, y)$ .

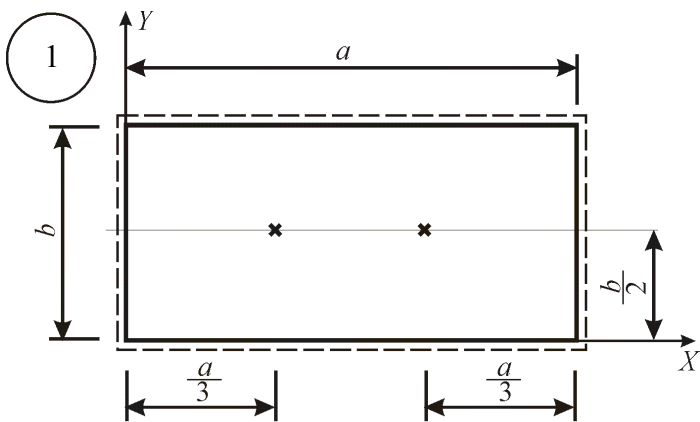
2. Методом Бубнова – Галёркина определить величину параметра «С» при действии на пластину сосредоточенных нагрузок (по схеме) и равномерно распределенной нагрузки от собственного веса.

3. Определить функции внутренних усилий  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $H$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$ . Построить эпюры прогибов и внутренних усилий по характерным сечениям, параллельным сторонам пластины.

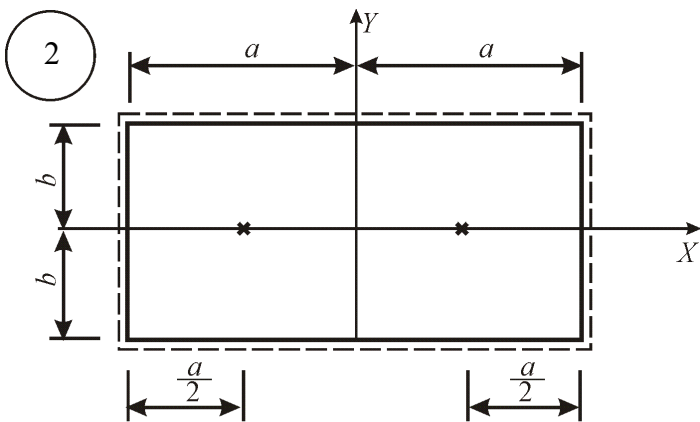
4. Для опасных точек определить нормальные и касательные напряжения. Построить эпюры напряжений по толщине пластины.

Предпоследняя цифра шифра	$h$ , м	$a$ , м	$b$ , м	$F$ , кН
$E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0,16$ ; $\gamma = 20$ кН/м <sup>3</sup>				
1	0,10	2	2	6
2	0,12	1,3	1,3	7
3	0,14	1,5	1,5	8
4	0,16	1,8	1,8	9
5	0,18	2,2	2,2	10
$E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0,18$ ; $\gamma = 30$ кН/м <sup>3</sup>				
6	0,20	2,1	2,1	12
7	0,22	1,4	1,4	14
8	0,24	1,6	1,6	16
9	0,11	1,7	1,7	11
0	0,13	1,5	1,5	13

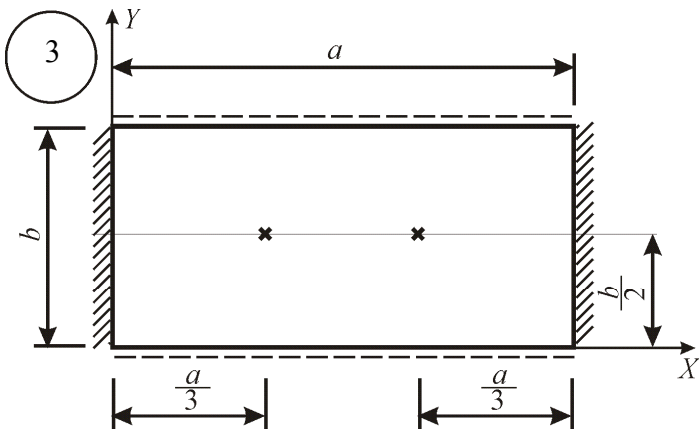
Варианты расчётных схем пластин к контрольной работе № 2



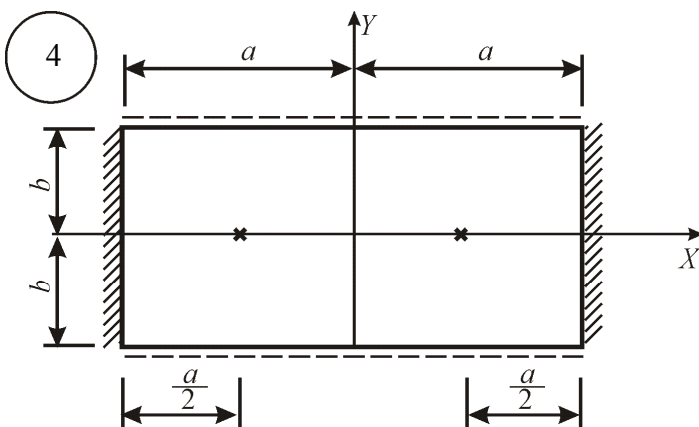
$$w = C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$



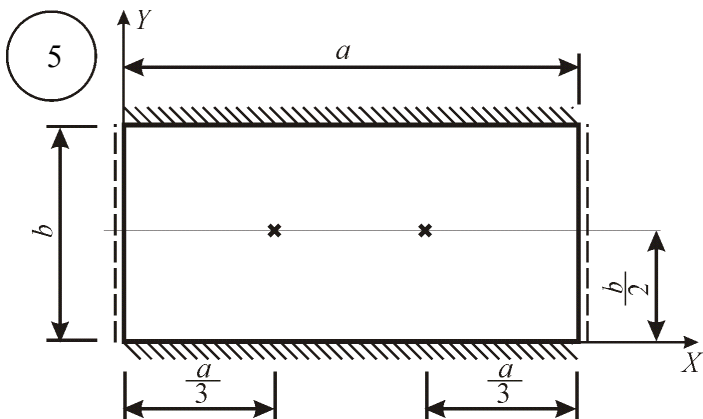
$$w = C \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}$$



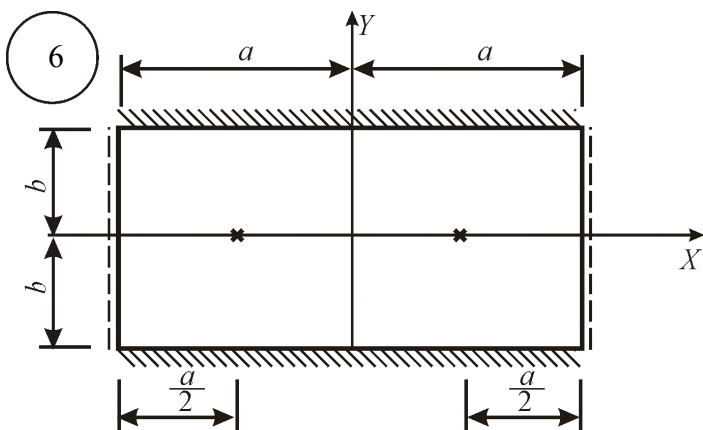
$$w = C \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \sin \frac{\pi y}{b}$$



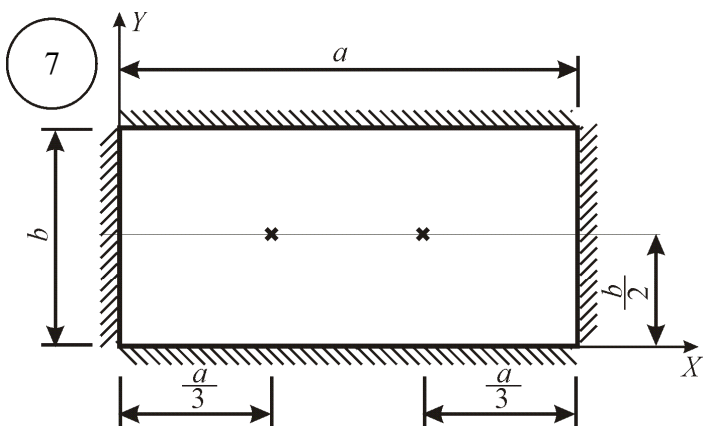
$$w = C \cos^2 \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{b}$$



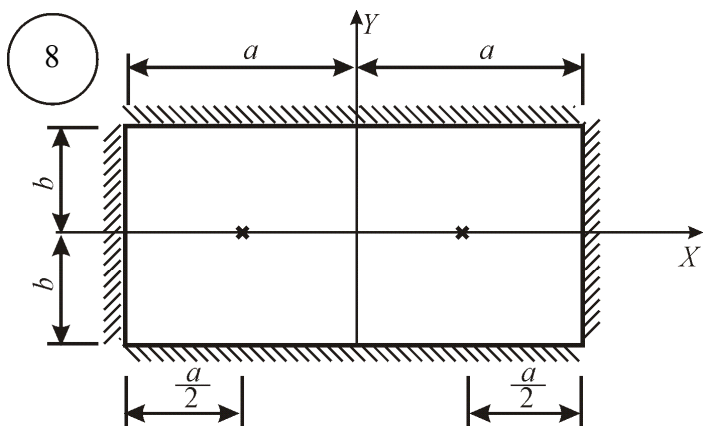
$$w = C \sin \frac{\pi x}{a} \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right)$$



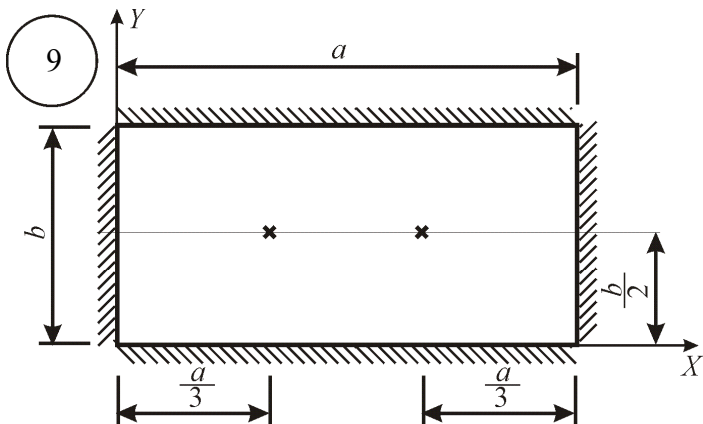
$$w = C \cos \frac{\pi x}{2a} \cos^2 \frac{\pi y}{2b}$$



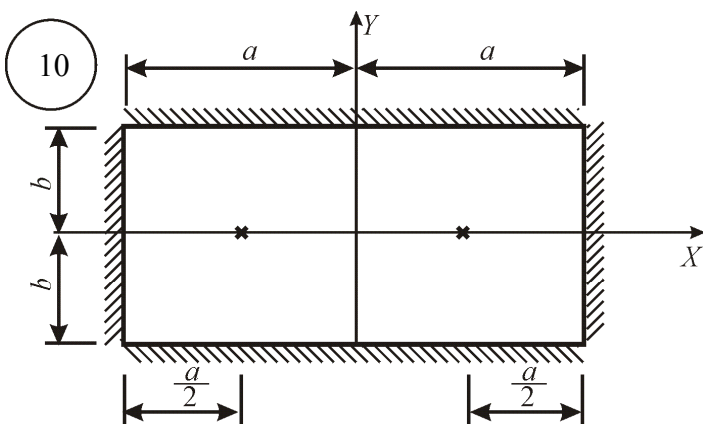
$$w = C \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right)$$



$$w = C (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2$$



$$w = Cx^2y^2(x-a)^2(y-b)^2$$



$$w = C \cos^2 \frac{\pi x}{2a} \cos^2 \frac{\pi y}{2b}$$

**Контрольная работа № 1**  
**для студентов дневной формы обучения**  
**«Расчёт балки-стенки методом конечных разностей»**

Для балки-стенки требуется:

1. Определить опорные реакции  $V$ , значения функции напряжений  $\varphi(x, y)$  в контурных узлах сетки.
2. Определить свободные члены  $b_1$ – $b_6$  системы линейных алгебраических уравнений для внутренних узлов сетки.
3. Определить значения функции напряжений  $\varphi_1$ – $\varphi_6$  во внутренних узлах сетки с помощью обратной матрицы системы линейных алгебраических уравнений. Провести проверку полученных величин функции напряжений  $\varphi(x, y)$ .
4. Определить напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  во всех узлах сетки и построить эпюры этих напряжений по сечениям, совпадающим с линиями сетки.

Вариант задания выдаётся преподавателем в соответствии с номером потока и группы.

Для геометрических параметров балки-стенки принимают следующие значения:

$$a = b; \quad l = \frac{a}{8}; \quad d = \frac{a}{4}.$$

**Числовые данные для решения задач**

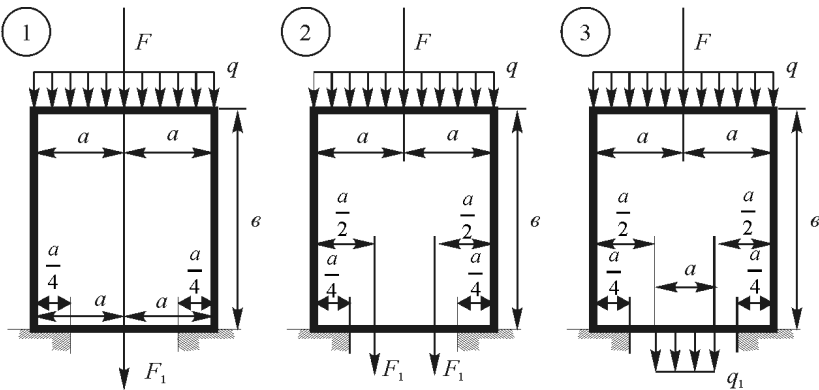
№ потока	№ группы	Толщина $h$ , м	$a$ , м	$F$ , кН	$F_1$ , кН	$q, \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}$	$q_1, \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}$
1	1	0,2	2	200	100	2000	1000
1	2	0,3	3	300	150	3000	2000
1	3	0,4	4	400	200	4000	3000
1	4	0,5	5	100	150	2500	1500

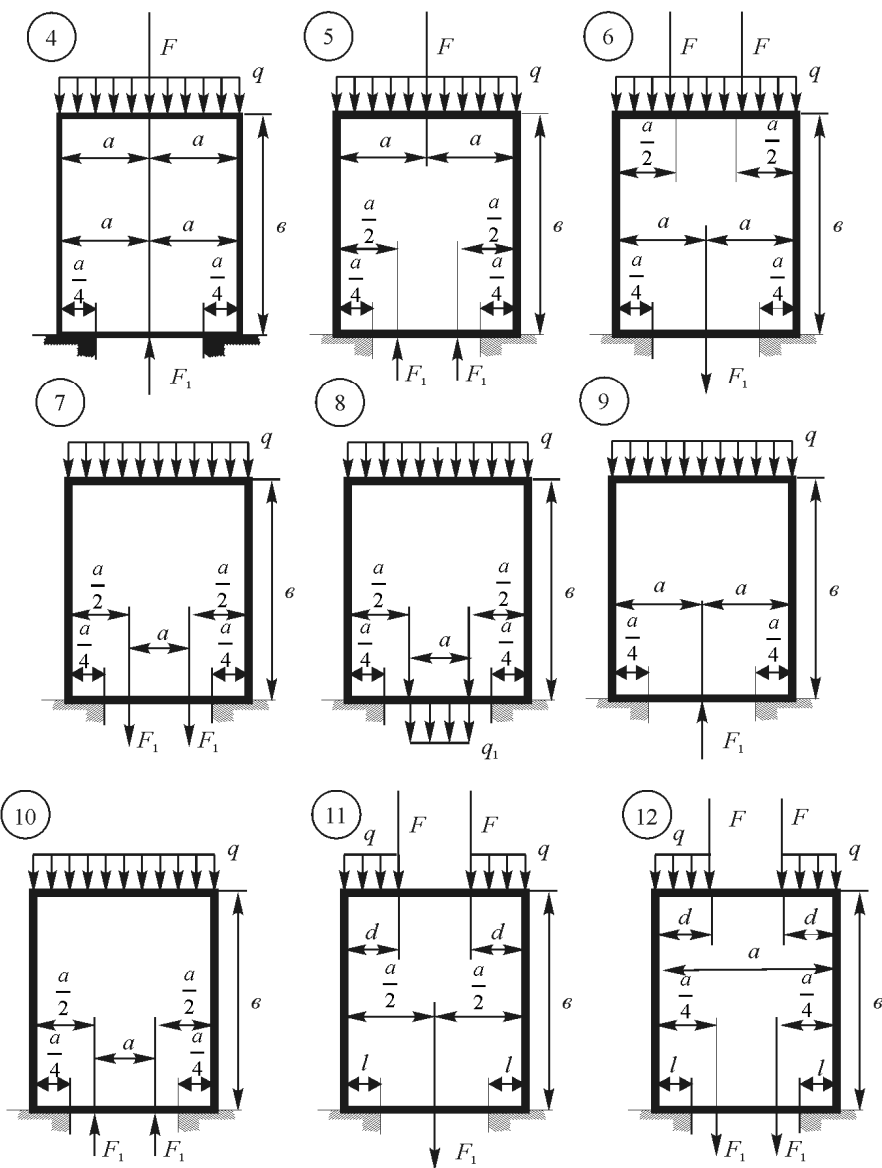


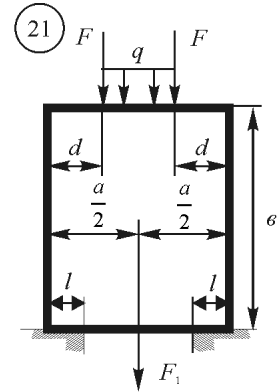
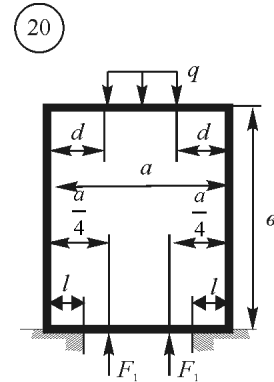
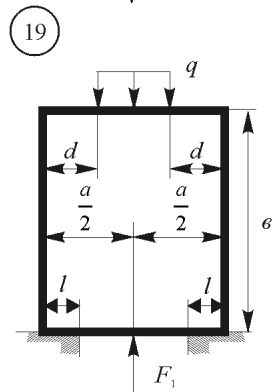
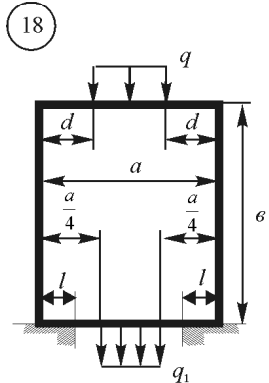
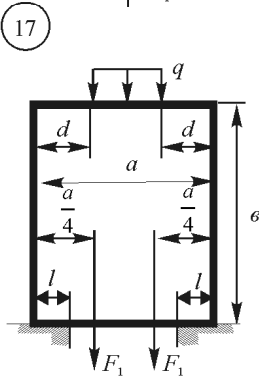
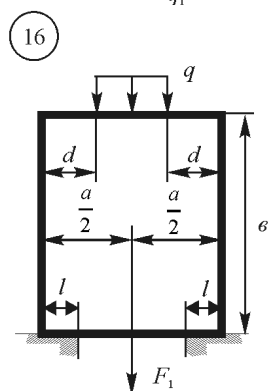
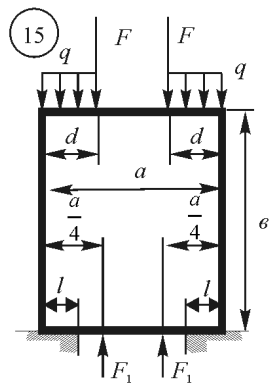
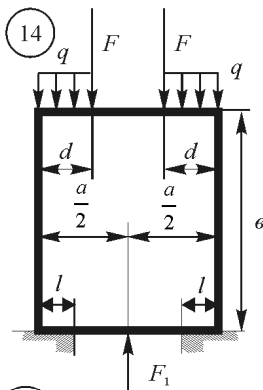
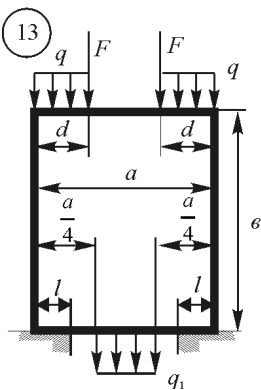
Окончание таблицы

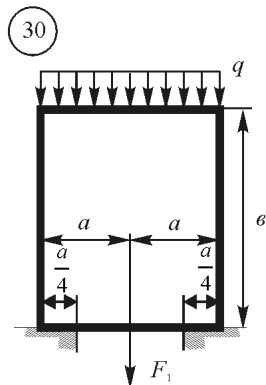
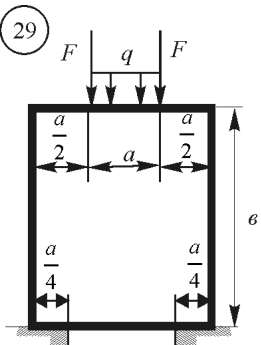
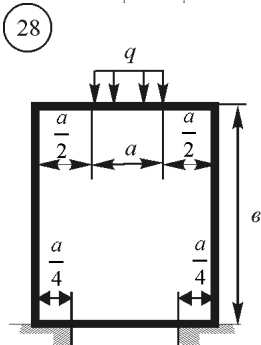
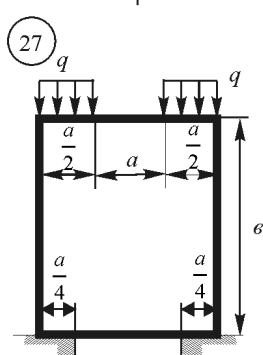
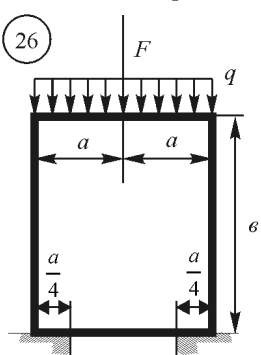
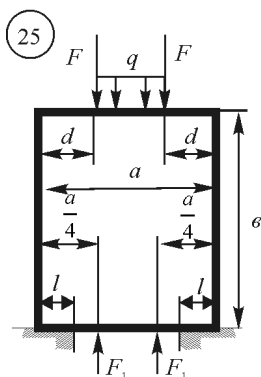
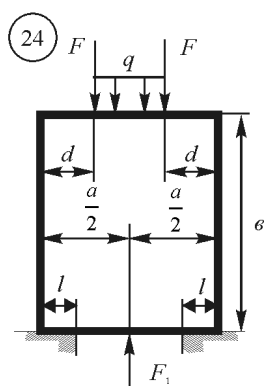
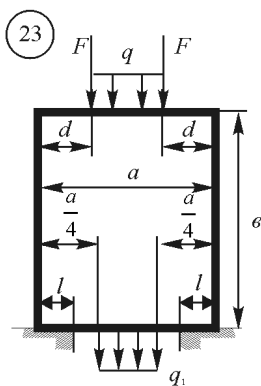
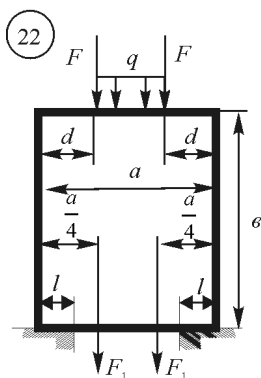
№ потока	№ группы	Толщина $h$ , м	$a$ , м	$F$ , кН	$F_1$ , кН	$q$ , $\frac{\text{кН}}{\text{м}^2}$	$q_1$ , $\frac{\text{кН}}{\text{м}^2}$
1	5	0,5	6	150	50	6000	4000
1	6	0,4	8	200	100	4000	2500
1	7	0,3	10	300	150	5000	3000
1	8	0,2	4	400	20	2000	1000
2	1	0,22	2	120	60	2400	1400
2	2	0,24	4	140	70	2600	1600
2	3	0,26	6	160	80	2800	1800
2	4	0,28	2	180	90	3200	2200
2	5	0,32	4	220	110	3400	2400
2	6	0,34	6	240	120	3600	2600
2	7	0,36	2	260	130	3800	2800
2	8	0,38	4	280	140	4200	3200

Варианты заданий к контрольной работе № 1









Матрица коэффициентов ( $A$ ) системы бигармонических уравнений в конечных разностях для балки-стенки с соотноше-  
164

нием сторон 1:1 ( $\Delta x = \Delta y$ ) и обратная к ней матрица ( $A^{-1}$ ) при любой симметричной внешней нагрузке записываются так:

$$A = \begin{bmatrix} 21 & -8 & 1 & -16 & 4 & 0 \\ -8 & 20 & -8 & 4 & -16 & 4 \\ 1 & -8 & 21 & 0 & 4 & -16 \\ -8 & 2 & 0 & 23 & -8 & 1 \\ 2 & -8 & 2 & -8 & 22 & -8 \\ 0 & 2 & -8 & 1 & -8 & 23 \end{bmatrix};$$

$$A^{-1} = 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 89,876 & 56,18 & 19,363 & 70,585 & 53,683 & 19,303 \\ 56,18 & 129,213 & 56,18 & 53,371 & 112,36 & 53,371 \\ 19,363 & 56,18 & 89,876 & 19,303 & 53,683 & 70,585 \\ 35,292 & 26,685 & 9,651 & 78,40 & 44,944 & 14,297 \\ 26,841 & 56,18 & 26,841 & 44,944 & 109,238 & 44,944 \\ 9,651 & 26,685 & 35,292 & 14,297 & 44,944 & 78,4 \end{bmatrix}.$$

Матрица коэффициентов ( $A$ ) системы бигармонических уравнений в конечных разностях для балки-стенки с соотношением сторон 1:2 ( $\Delta x = 2 \cdot \Delta y$ ) и обратная к ней матрица ( $A^{-1}$ ) при любой симметричной внешней нагрузке записываются так:

$$A = \begin{bmatrix} 37,50 & -20 & 4 & -10 & 4 & 0 \\ -20 & 33,5 & -20 & 4 & -10 & 4 \\ 4 & -20 & 37,5 & 0 & 4 & -10 \\ -5 & 2 & 0 & 38 & -20 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & -20 & 34 & -20 \\ 0 & 2 & -5 & 4 & -20 & 38 \end{bmatrix};$$

$$A^{-1} = 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 46,984 & 38,789 & 15,763 & 17,537 & 19,257 & 8,354 \\ 38,789 & 79,367 & 38,789 & 19,206 & 36,812 & 19,206 \\ 15,763 & 38,789 & 46,984 & 8,354 & 19,257 & 17,537 \\ 8,768 & 9,603 & 4,177 & 45,285 & 36,483 & 14,523 \\ 9,628 & 18,406 & 9,628 & 36,483 & 75,481 & 36,483 \\ 4,177 & 9,603 & 8,768 & 14,523 & 36,483 & 45,285 \end{bmatrix}.$$

**Контрольная работа № 2**  
**для студентов дневной формы обучения**  
**«Расчёт пластины на изгиб методом Бубнова – Галёркина»**

Вариант задания выдаётся преподавателем в соответствии с номером потока и группы.

Требуется:

1. Проверить выполнение показанных на схеме геометрических граничных условий при заданной аппроксимирующей функции прогибов  $w(x, y)$ .

2. Методом Бубнова – Галеркина определить величину параметра «С» при действии на пластину сосредоточенных нагрузок (по схеме) и равномерно распределенной нагрузки от собственного веса.

3. Определить функции  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $H$ ,  $Q_x$ ,  $Q_y$ . Построить эпюры прогибов и внутренних усилий по характерным сечениям, параллельным сторонам пластины.

4. Для опасных точек определить нормальные и касательные напряжения. Построить эпюры напряжений по толщине пластины.

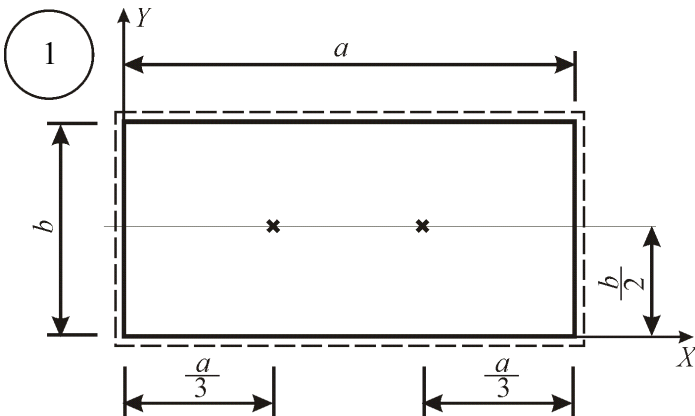
**Числовые данные для решения задач**

№ потока	№ группы	$h$ , м	$a$ , м	$b$ , м	$F$ , кН
$E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0,16$ ; $\gamma = 20$ кН/м <sup>3</sup>					
1	1	0,10	2	2	6
1	2	0,12	1,3	1,3	7
1	3	0,14	1,5	1,5	8
1	4	0,16	1,8	1,8	9
1	5	0,18	2,2	2,2	10
1	6	0,20	2,4	2,4	12
1	7	0,22	2,6	2,6	14

Окончание таблицы

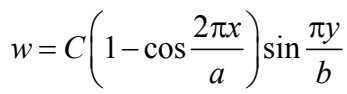
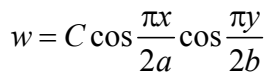
№ потока	№ группы	$h$ , м	$a$ , м	$b$ , м	$F$ , кН
1	8	0,24	2,8	2,8	16
$E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0,18$ ; $\gamma = 30$ кН/м <sup>3</sup>					
2	1	0,25	2,1	2,1	11
2	2	0,11	1,4	1,4	13
2	3	0,13	1,6	1,6	15
2	4	0,15	1,7	1,7	17
2	5	0,17	1,9	1,9	18
2	6	0,19	2,3	2,3	19
2	7	0,21	2,5	2,5	20
2	8	0,23	2,7	2,7	21

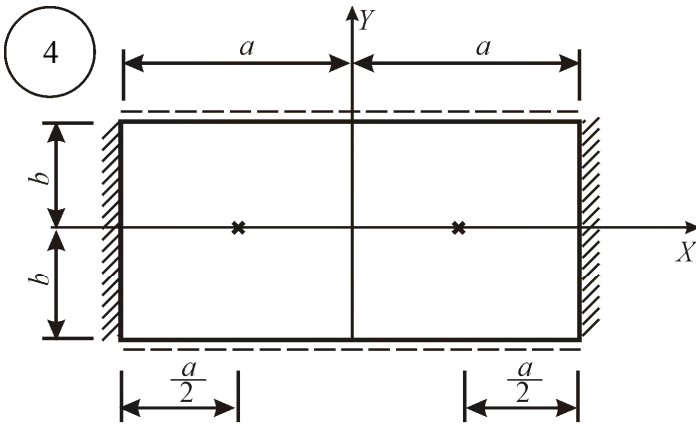
Варианты заданий к контрольной работе № 2



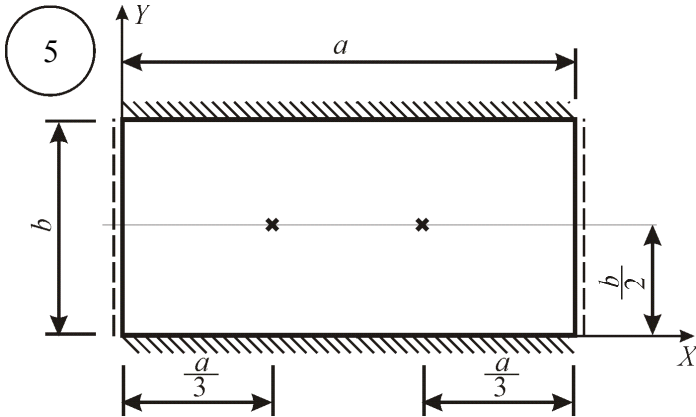
$$w = C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$



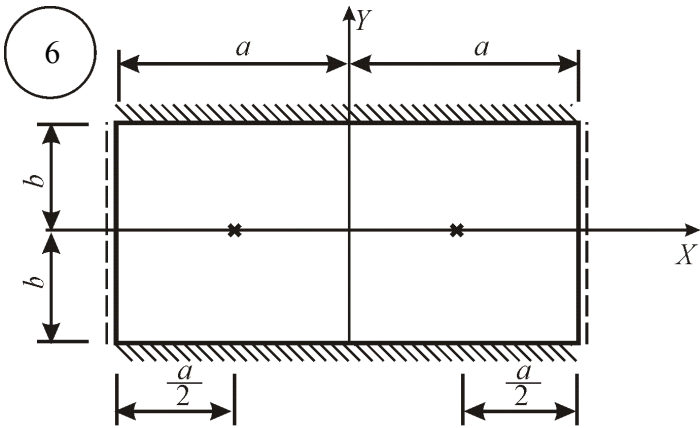




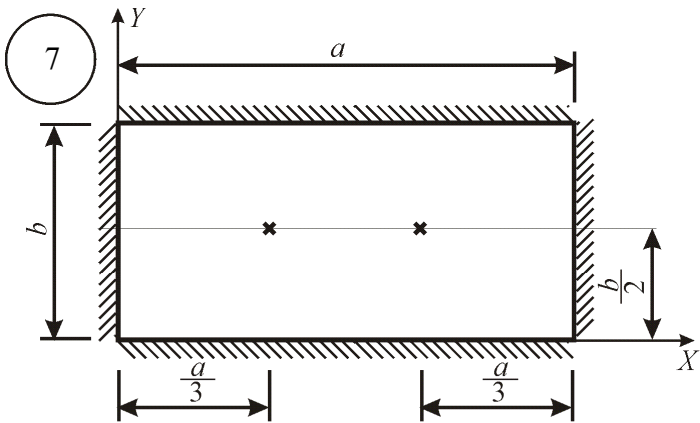
$$w = C \cos^2 \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}$$



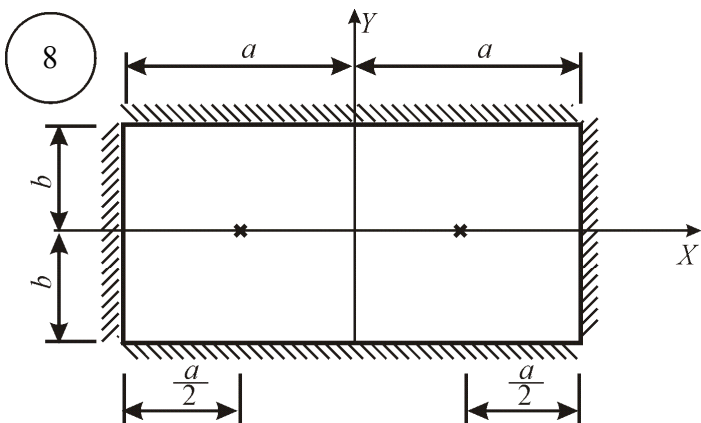
$$w = C \sin \frac{\pi x}{a} \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right)$$



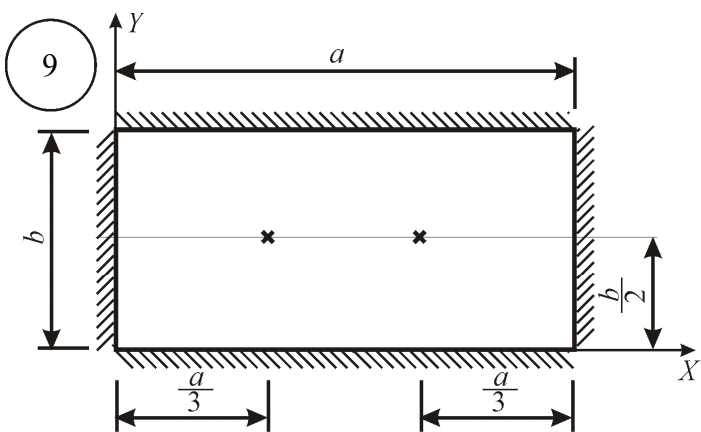
$$w = C \cos \frac{\pi x}{2a} \cos^2 \frac{\pi y}{2b}$$



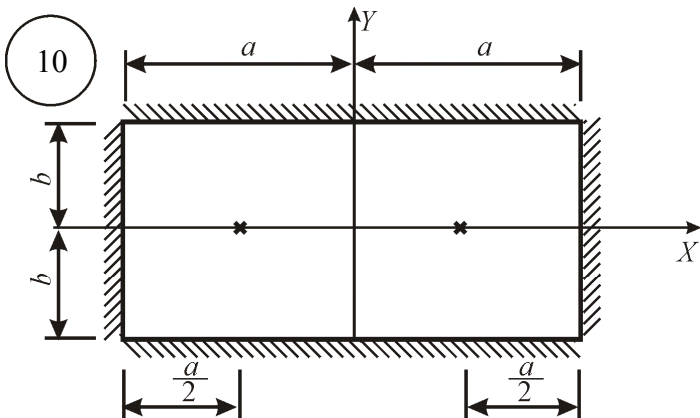
$$w = C \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right)$$



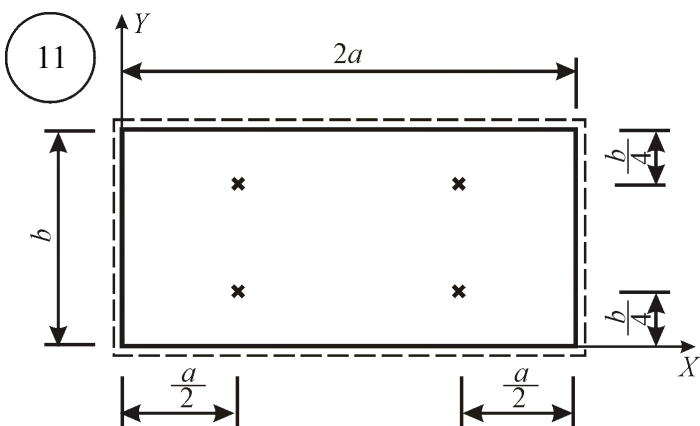
$$w = C(x^2 - a^2)^2(y^2 - b^2)^2$$



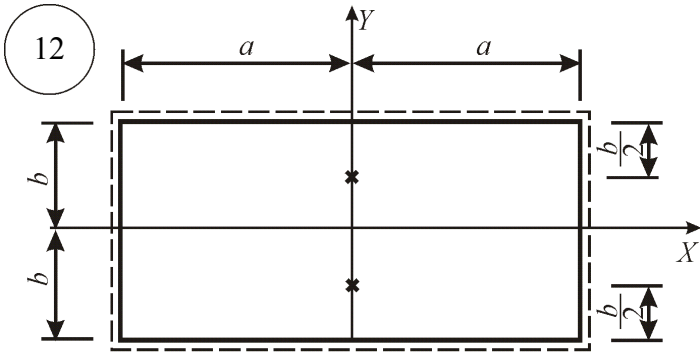
$$w = Cx^2y^2(x-a)^2(y-b)^2$$



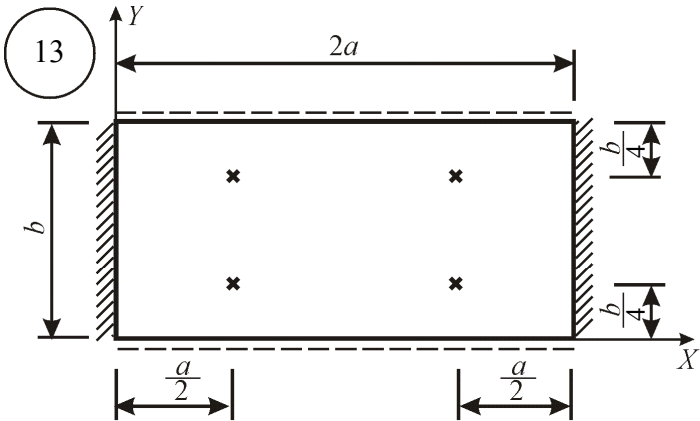
$$w = C \cos^2 \frac{\pi x}{2a} \cos^2 \frac{\pi y}{2b}$$



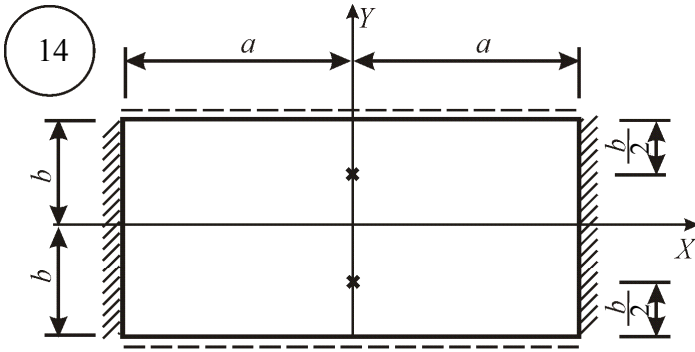
$$w = C \sin \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{\pi y}{b}$$



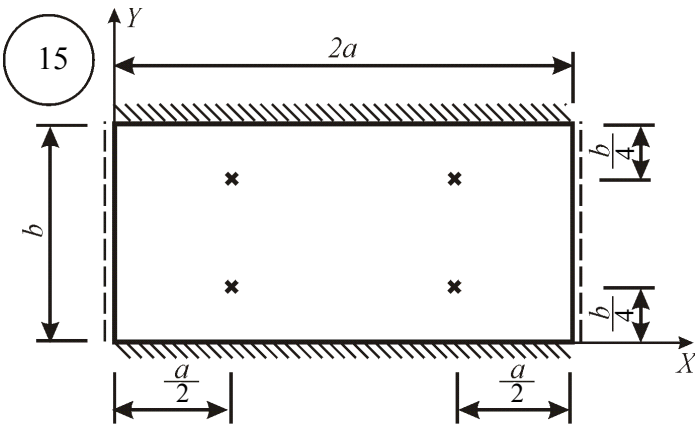
$$w = C \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}$$



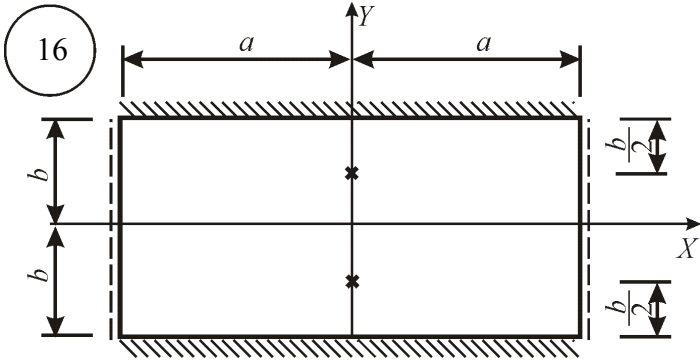
$$w = C \left( 1 - \cos \frac{\pi x}{a} \right) \sin \frac{\pi y}{b}$$



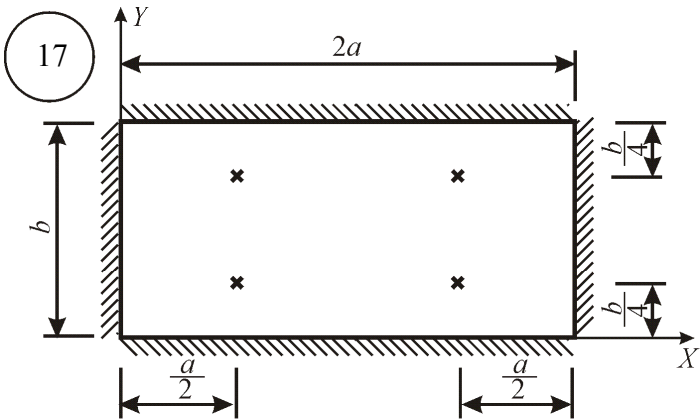
$$w = C \cos^2 \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}$$



$$w = C \sin \frac{\pi x}{2a} \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right)$$

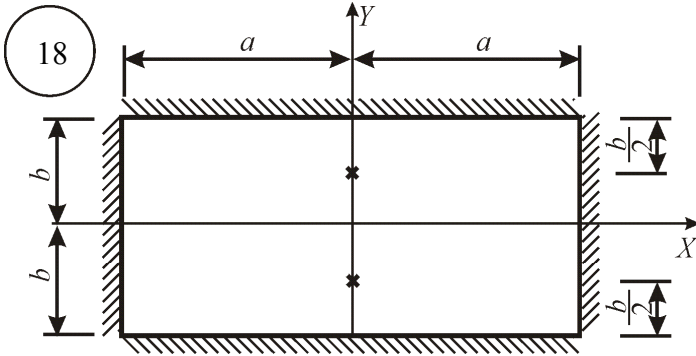


$$w = C \cos \frac{\pi x}{2a} \cos^2 \frac{\pi y}{2b}$$

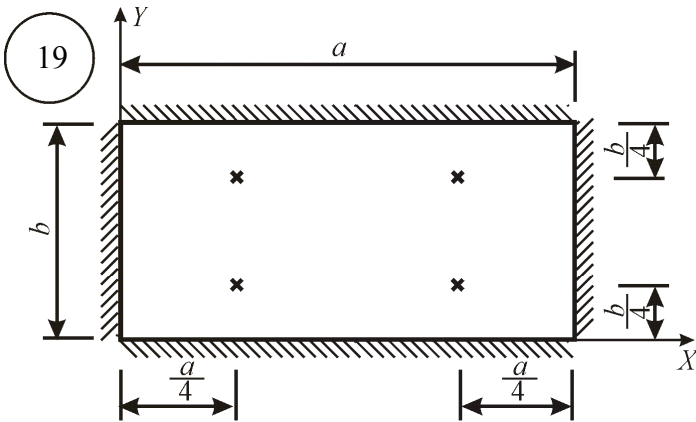


$$w = C \left( 1 - \cos \frac{\pi x}{a} \right) \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right)$$

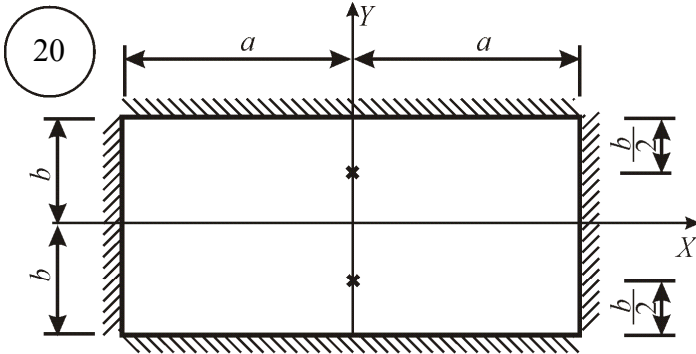




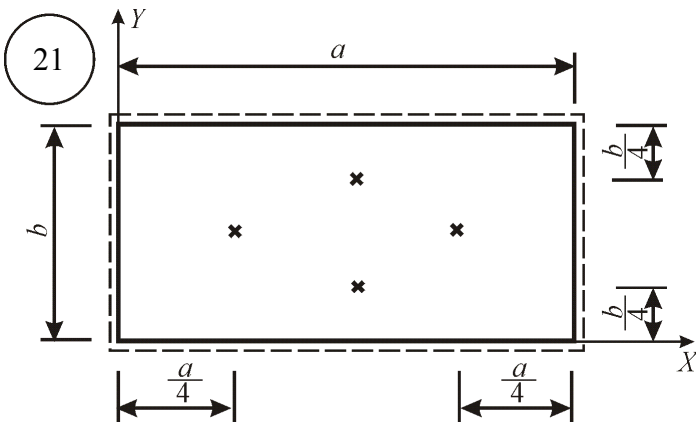
$$w = C(x^2 - a^2)^2(y^2 - b^2)^2$$



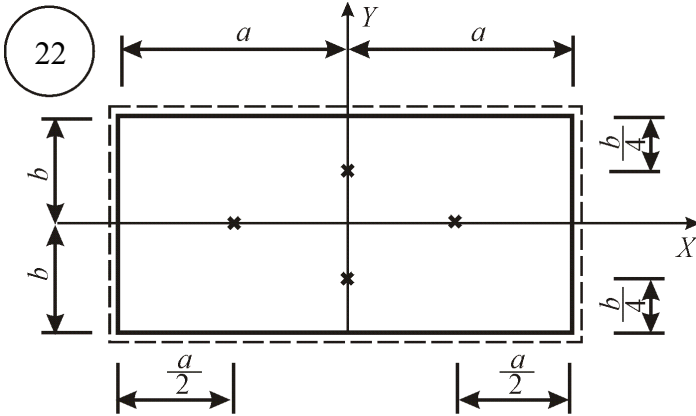
$$w = Cx^2y^2(x-a)^2(y-b)^2$$



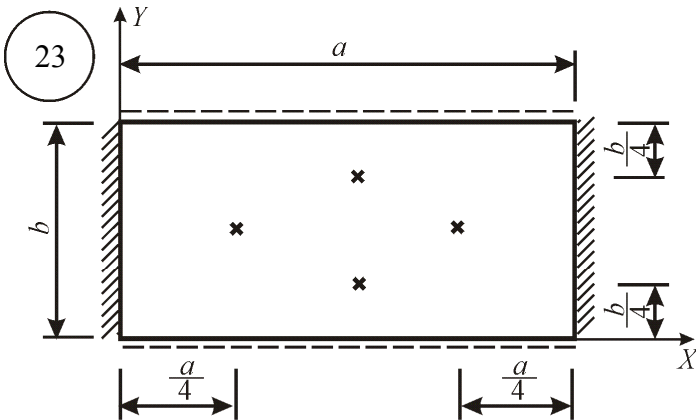
$$w = C \cos^2 \frac{\pi x}{2a} \cos^2 \frac{\pi y}{2b}$$



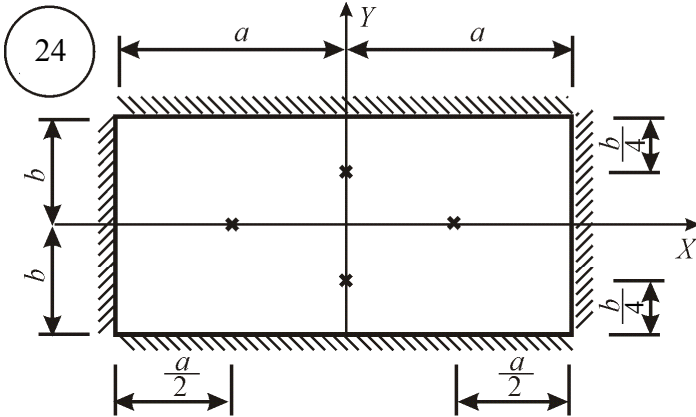
$$w = C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$



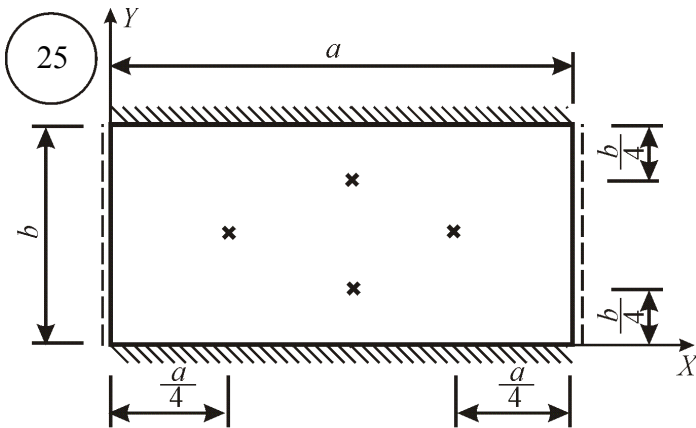
$$w = C \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}$$



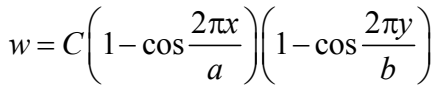
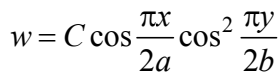
$$w = C \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \sin \frac{\pi y}{b}$$



$$w = C \cos^2 \frac{\pi x}{2a} \cos^2 \frac{\pi y}{2b}$$

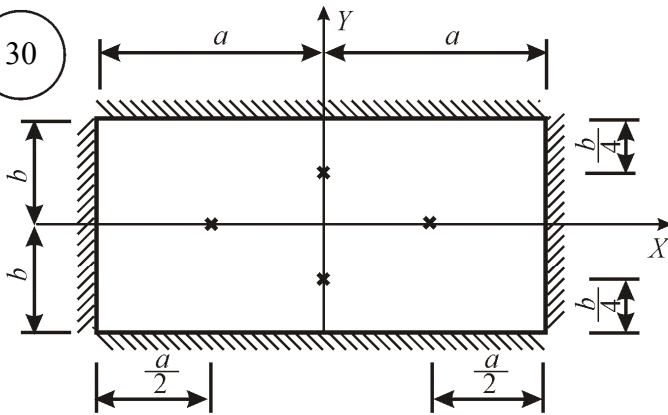


$$w = C \sin \frac{\pi x}{a} \left( 1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right)$$





30



$$w = C \cos^2 \frac{\pi x}{2a} \cos^2 \frac{\pi y}{2b}$$

*Учебное издание*

*Владимир Николаевич Барашков  
Ирина Юрьевна Смолина  
Лариса Евгеньевна Путеева  
Дмитрий Николаевич Песцов*

# **ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**

Учебное пособие

Редактор М.В. Пересторонина  
Технический редактор Н.В. Удлер

Подписано в печать 04.05.2012.  
Формат 60×84/16. Бумага офсет. Гарнитура Таймс.  
Усл. печ. л. 10,70. Уч.-изд. л. 9,68. Тираж 300 экз. Зак. № 192.

Изд-во ТГАСУ, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2.  
Отпечатано с оригинал-макета в ООП ТГАСУ.  
634003, г. Томск, ул. Партизанская, 15.