

# 1 Curvas Parametrizadas

De modo geral, podemos descrever uma curva plana por uma parametrização:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) \quad \text{onde } x(t) \text{ e } y(t) \text{ são funções da variável } t.$$

Exemplo:

$$y = 2x \quad \rightarrow \quad \vec{r}(t) = (t, 2t)$$

## 1.1 Vetor Tangente

O vetor tangente à curva  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$  em um ponto  $(x(t_\lambda), y(t_\lambda))$  é:

$$\vec{v}(t_\lambda) = \vec{x}'(t_\lambda)\vec{i} + \vec{y}'(t_\lambda)\vec{j}$$

Denota-se  $\vec{r}'(t_\lambda)$ .

Exemplo:

Vetor tangente à curva  $\vec{r}(t) = (t, 2t)$  no ponto  $(3, 6)$ :

$$(3, 6) \Rightarrow t_\lambda = 3$$

$$\vec{x}'(t) = 1$$

$$\vec{y}'(t) = 2$$

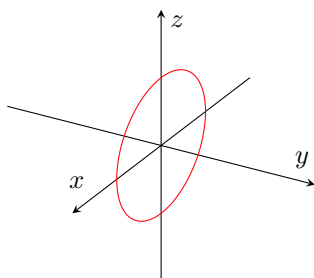
$$\therefore$$

$$\vec{v}'(3) = \vec{i} + 2\vec{j}$$

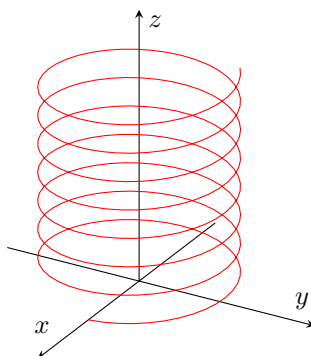
O respectivo vale para curvas no espaço.

## 1.2 Gráficos

$$\vec{r}(t) = (\cos t, 0, \sin t)$$



$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$$



### 1.3 Comprimento de Curvas

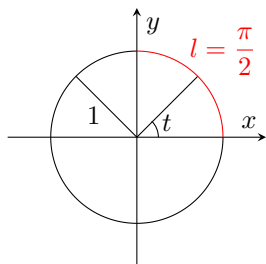
O comprimento de uma curva  $\gamma(t)$  no plano é dado por

$$\begin{aligned}l(\gamma(t)) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_i \sqrt{\left(\frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{\Delta t}\right)^2} \cdot \Delta t \\&= \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \cdot dt\end{aligned}$$

Para uma curva  $\gamma(t)$  no espaço, analogamente:

$$l(\gamma(t)) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} \cdot dt$$

Exemplo:



$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

Obtemos o arco acima variando  $t$  entre  $a = 0$  e  $b = \frac{\pi}{2}$ .

Logo

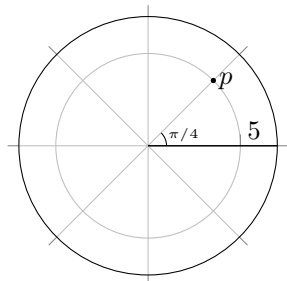
$$\begin{aligned}l &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} \cdot dt \\&= \int_0^{\pi/2} 1 \cdot dt \\&= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

## 2 Coordenadas Polares

Um ponto em coordenadas polares é definido por um raio e um ângulo:

$$p = (r, \theta)_{polar}$$

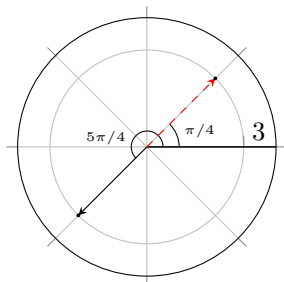
Exemplo: Se  $p = (5, \frac{\pi}{4})_{polar}$



Convenções:

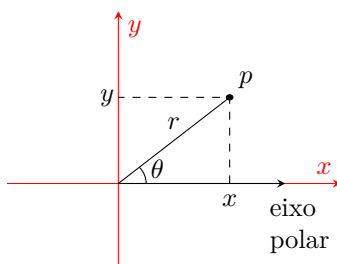
- $\theta > 0$  se medido, a partir do eixo polar, no sentido anti-horário.
- $\theta < 0$  se medido, a partir do eixo polar, no sentido horário.
- $(-r, \theta)_{polar} = (r, \theta - \pi)_{polar}$

Exemplo:  $(-3, \frac{\pi}{4}) = (3, \frac{5\pi}{4})$



- $\forall \theta : (0, \theta)_{polar} = 0$

### 2.1 Relação Entre Sistemas de Coordenadas



$$p = (r, \theta)_{polar} = (x, y)_{ret}$$

$$\forall r, \theta : (r, \theta)_{polar} = (r \cdot \cos \theta, r \cdot \sin \theta)_{ret}$$

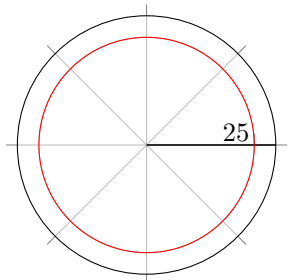
$$\forall x, y : (x, y)_{ret} = \left( \sqrt{x^2 + y^2}, \arctan \frac{y}{x} \right)_{ret}$$

## 2.2 Curvas Polares

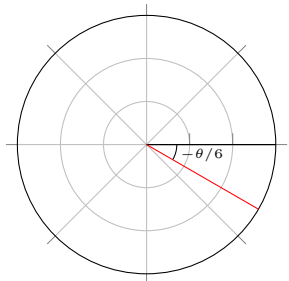
Uma curva polar é definida por uma equação entre as coordenadas polares dos pontos da curva (equação polar).

Exemplos:  $r^2 + e^{r\theta} = 0$

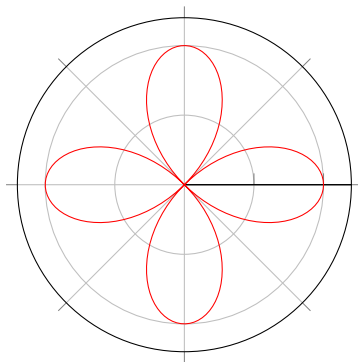
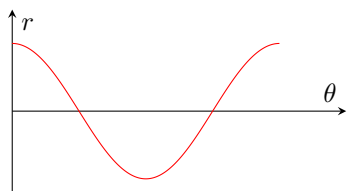
$$0 \cdot \theta + r - 25 = 0 \Rightarrow r = 25$$



$$\theta + \frac{\pi}{6} = 0 \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}$$



$$r = \cos(2\theta)$$



### 3 Superfícies

Qual é o conjunto solução da equação  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ?

Resposta: uma esfera de raio 2 centrada na origem.

[Uncomment here]

#### 3.1 Estratégias de esboço de superfícies no espaço

Identificar sua interseção com planos (cortes) que cobrem todo o espaço.

Exemplo:  $S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 \right\}$

Cortes horizontais:

$$\begin{aligned} C_h &= S \cap \Pi_h \{\text{Plano horizontal de altura } h\} \\ &= S \cap \Pi_h \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = h\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} + \frac{h^2}{9} = 1 \right\} \end{aligned}$$

Para

$$h > 3 \quad : \quad S \cap \Pi_h = \emptyset$$

$$h = 3 \quad : \quad S \cap \Pi_3 = \{(0, 0, 3)\}$$

$$h < -3 \quad : \quad S \cap \Pi_h = \emptyset$$

$$h = -3 \quad : \quad S \cap \Pi_{-3} = \{(0, 0, -3)\}$$

$$\begin{aligned} |h| < 3 \quad : \quad S \cap \Pi_h \\ &: \text{Plano } xz \rightarrow S \cap \{y = 0\} \Rightarrow \left\{ (x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1 \right\} \therefore \text{Elipse} \\ &: \text{Plano } yz \rightarrow S \cap \{x = 0\} \Rightarrow \left\{ (0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 \right\} \therefore \text{Elipse} \end{aligned}$$

Portanto, a superfície é um elipsóide de altura 6 e diâmetros 10 e 4.

### 3.2 Cilindros

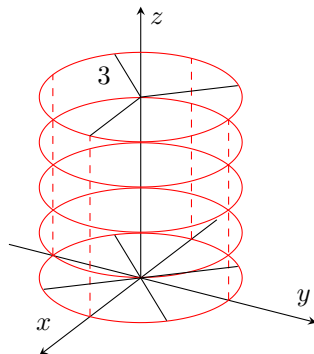
Um cilindro é um objeto construído através de uma curva  $\gamma$  no plano e um ângulo  $\alpha$ .

O cilindro é o conjunto de todas as retas que possuem interseção com  $\gamma$ , formando um ângulo equivalente à  $\alpha$  com o plano de  $\gamma$ .

Qual é a superfície descrita pela equação  $x^2 + y^2 = 9$ ?

Qual é o objeto geométrico  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 9\}$ ?

Resposta: Cilindro. O conjunto é formado por todos os pontos do espaço cuja distância ao eixo  $z$  é 3.



### 3.3 Quádricas

As superfícies quádricas são soluções de equações da forma

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fzx + gx + hy + iz + j = 0$$

## 4 Funções de duas ou mais variáveis

Uma função de 2 variáveis é uma função do tipo

$$f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{onde } D \subseteq \mathbb{R}^2$$

### 4.1 Gráficos

O gráfico de uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  de duas variáveis é o subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  formado pelos pontos

$$(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{onde } (x, y) \in D$$

### 4.2 Curvas e Superfícies de Nível

Uma curva de nível de altura  $h$  de uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  é o conjunto de pontos  $(x, y)$  do plano tais que

$$f(x, y) = h$$

## 4.3 Limite e Continuidade

### 4.3.1 Limite

Seja uma função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , então define-se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$$

Dizemos que  $f$  tende a  $L$  quando  $(x,y)$  tende a  $(a,b)$ , se  $\forall \epsilon > 0$  arbitrário

$$\exists \delta : 0 < \delta < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \\ |f(x,y) - L| < \epsilon$$

As seguintes propriedades valem:

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (f(x,y) + g(x,y)) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) + \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y)$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (f(x,y) - g(x,y)) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) - \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y)$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (f(x,y) \cdot g(x,y)) = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y)$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \left( \frac{f(x,y)}{g(x,y)} \right) = \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)}{\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y)}$

Seja  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  qualquer curva parametrizada com

$$\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t) = (\lim_{t \rightarrow 0} x(t), \lim_{t \rightarrow 0} y(t)) = (a, b)$$

Se  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$ , então para toda curva  $\gamma$  vale:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(x(t), y(t)) = L$$

Seja uma função  $f$  e duas curvas  $\gamma$  e  $\tilde{\gamma}$  quaisquer no domínio de  $f$  tais que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \tilde{\gamma}(t) = (a, b)$$

Se  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$  existe, então pra toda  $\gamma$  e  $\tilde{\gamma}$ :

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(x(t), y(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} f(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$$

Exemplos:  $f(x, y) = 6 \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (3,-1)} f(x, y) = 5$

$f(x, y) = x \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (8,-6)} f(x, y) = 8$

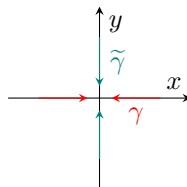
$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad (D : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}) \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  pois:

Seja  $\gamma(t) = (t, 0)$  a reta sobre o eixo  $x$ , e  $\tilde{\gamma}(t) = (0, t)$  a reta sobre o eixo  $y$ .

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(x(t), y(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 - 0^2}{t^2 + 0^2} = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} f(0, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0^2 - t^2}{0^2 + t^2} = -1$$

$$1 \neq -1$$



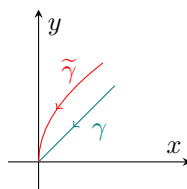
$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \quad (D : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}) \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  pois:

Seja  $\gamma(t) = (t, \alpha t)$ , e  $\tilde{\gamma}(t) = (t^2, t)$ .

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(x(t), y(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t, \alpha t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot (\alpha t)^2}{t^2 + (\alpha t)^4} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t^2, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \cdot (t)^2}{(t^2)^2 + t^4} = \frac{1}{2}$$

$$0 \neq \frac{1}{2}$$



### 4.3.2 Continuidade

Dizemos que  $f$  é contínua em  $(a, b)$  se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

Dizemos que  $f$  é contínua se é contínua em todos os pontos de seu domínio.

Propriedades: A composição de duas funções contínuas é contínua.

$f(x, y) = c$  é contínua.

$f(x, y) = x$  é contínua.

$f(x, y) = y$  é contínua.



## 4.4 Derivadas Parciais

A derivada parcial de uma função de  $n$  variáveis  $f(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  com relação a uma variável  $\lambda_\alpha$ , no ponto  $(a_1, \dots, a_n)$  é:

$$\lim_{\Delta\lambda_\alpha \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_\alpha + \Delta\lambda_\alpha, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{\Delta\lambda_\alpha}$$

Para uma função de 2 variáveis  $f(x, y)$  no ponto  $(a, b)$ , por exemplo:

$$\text{Em relação a } x : \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x, b) - f(a, b)}{\Delta x}$$

$$\text{Em relação a } y : \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(a, b + \Delta y) - f(a, b)}{\Delta y}$$

Há três nomenclaturas convencionais, para a variável  $x$  por exemplo:

- $\frac{\delta f}{\delta x}(a, b)$  Fração indicando a variável sobre qual foi a derivada parcial.
- $f_x(a, b)$  Em ordem  $\leftarrow$ , subscrito em  $f$  a variável sobre qual foi a derivada parcial.
- $D_1 f(a, b)$  Em ordem  $\rightarrow$ , subscrito em  $D$  o índice da variável sobre qual foi a derivada parcial.

### 4.4.1 Cálculo operacional da derivada parcial

Para derivar parcialmente com relação a uma variável, basta considerar as demais como constantes e derivar normalmente.

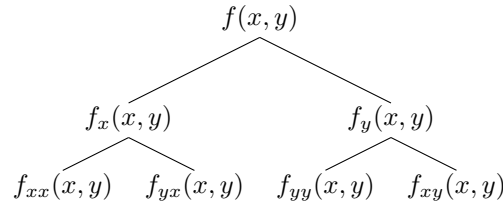
Exemplo:  $f(x, y) = x^2 y + e^{xy}$

$$\Rightarrow f_x(x, y) = (2x)y + e^{xy} \cdot y = 2xy + y e^{xy}$$

$$\Rightarrow f_y(x, y) = x^2 \cdot 1 + e^{xy} \cdot x = x^2 + x e^{xy}$$

### 4.4.2 Derivadas de ordem superior

Derivando-se parcialmente duas ou mais vezes, se obtém uma derivada de ordem superior:



Exemplo:  $f(x, y) = x^2 y + e^{xy}$

$$f_{yx}(x, y) = \frac{\delta}{\delta y} f_x(x, y)$$

$$= \frac{\delta}{\delta y} (2xy + y e^{xy})$$

$$= 2x + 1 \cdot e^{xy} + y \cdot e^{xy} \cdot x$$

$$= 2x + e^{xy}(xy + 1)$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\delta}{\delta x} f_y(x, y)$$

$$= \frac{\delta}{\delta x} (x^2 + x e^{xy})$$

$$= 2x + 1 \cdot e^{xy} + x \cdot e^{xy} \cdot y$$

$$= 2x + e^{xy}(xy + 1)$$

Teorema de Clairaut-Schwarz: Se  $f_{xy}(x, y)$  e  $f_{yx}(x, y)$  são funções contínuas, então

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

## 4.5 Plano tangente

As aproximação linear de uma função corresponde a seguinte tabela:

$f$	1 variável	2 variáveis
tangente	reta	plano
aproximação	$f \approx ax + b$	$f \approx ax + by + c$

O plano tangente a um ponto  $p = (a, b, f(a, b))$  do gráfico de  $f$  deve conter todas as retas tangentes ao gráfico de  $f$  em  $p$ .

### 4.5.1 Equação

Dado uma função  $f$  e um ponto  $(a, b, f(a, b))$ :

A reta tangente ao ponto em relação a  $x$  é:

$$\begin{cases} y = b \\ z - f(a, b) = f_x(a, b) \cdot (x - a) \end{cases}$$

A reta tangente ao ponto em relação a  $y$  é:

$$\begin{cases} x = a \\ z - f(a, b) = f_y(a, b) \cdot (y - b) \end{cases}$$

Portanto, o plano tangente ao ponto é o plano determinado pelas duas retas. Sua equação é:

$$z - f(a, b) = f_x(a, b) \cdot (x - a) + f_y(a, b) \cdot (y - b)$$

Exemplos: Se  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ , o plano  $\pi$  tangente no ponto  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  é:

$$f_x(x, y) = \frac{-2x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \Rightarrow f_x\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f_y(x, y) = \frac{-2y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \Rightarrow f_y\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\pi : z - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(y - \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Se } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(0, 0) = 0$$

$$\Rightarrow f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$$

$$\Rightarrow \pi : z - 0 = 0 \cdot (x - 0) + 0 \cdot (y - 0) = 0$$

$\pi = 0$  é o plano tangente de  $f$ ? Não, pois a  $f$  sequer é contínua no ponto  $(0, 0)$ :

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t^2 + t^2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

## 4.6 Diferenciabilidade

Dizemos que  $f(x, y)$  é diferenciável em  $(a, b)$  se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{|f(x, y) - [f(a, b) + f_x(a, b) \cdot (x - a) + f_y(a, b) \cdot (y - b)]|}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} = 0$$

Teorema: Se  $f_x$  e  $f_y$  são contínuas em  $(a, b)$  então  $f$  é diferenciável em  $(a, b)$ .

Quando  $f$  é diferenciável em  $(a, b)$ , dizemos que

$$L_{(a,b)}(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b) \cdot (x - a) + f_y(a, b) \cdot (y - b)$$

é a melhor aproximação linear de  $f$  ao redor de  $(a, b)$ .

Obs.: O gráfico de  $L_{(a,b)}$  é o plano tangente ao gráfico de  $f$  em  $(a, b, f(a, b))$ .

Exemplo: Se  $f(x, y) = x^2y + y^3$ , então

$$f_x(x, y) = 2xy$$

$$f_y(x, y) = x^2 + 3y^2$$

$$\begin{aligned} L_{(-2,1)}(x, y) &= f(-2, 1) + f_x(-2, 1) \cdot (x - (-2)) + f_y(-2, 1) \cdot (y - 1) \\ &= 5 + (-4) \cdot (x + 2) + 7(y - 1) = -4x + 7y - 10 \end{aligned}$$

## 4.7 Regra da cadeia

A regra da cadeia para funções de uma variável é  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ . Sua derivada é:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Para funções de duas variáveis, temos:

1º caso:  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Teorema: Se  $f$ ,  $g$  e  $h$  são funções diferenciáveis, então  $F(t) = f(g(t), h(t))$  é diferenciável e

$$F'(t) = f_x(g(t), h(t)) \cdot g'(t) + f_y(g(t), h(t)) \cdot h'(t)$$

2º caso:  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Teorema: Se  $f$ ,  $g$  e  $h$  são funções diferenciáveis, então  $F(x, y) = f(g(x, y), h(x, y))$  é diferenciável e

$$\begin{aligned} F_x(x, y) &= f_x(g(x, y), h(x, y)) \cdot g_x(x, y) \\ &\quad + f_y(g(x, y), h(x, y)) \cdot h_x(x, y) \\ F_y(x, y) &= f_x(g(x, y), h(x, y)) \cdot g_y(x, y) \\ &\quad + f_y(g(x, y), h(x, y)) \cdot h_y(x, y) \end{aligned}$$

Exemplo:  $f_x(x, y) = 3x^2y^2$   
 $f_y(x, y) = 2x^3y$   
 $g_x(x, y) = 2e^{xy}$   
 $h_x(x, y) = y$

$$F_x(x, y) = 3 \cdot (e^{2x} + y^3)^2 \cdot (xy + 4)^2 \cdot 2e^{2x} + 2 \cdot (e^{2x} + y^3)^3 \cdot (xy + 4) \cdot y$$