1 Sequências

Sequências são listas ordenadas inifinitas de números.
Denota-se:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots = \left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

1.1 Limite de Sequências

Teorema: Sequências que convergem possuem um limite.

Para $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ denota-se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Exemplos: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+3}{n} = 1$

O limite de uma sequência constante é o termo constante.

1.1.1 Propriedades do Limite

Sejam $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ convergentes, então:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \quad \text{se } f(x) \text{ é contínua.}$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to\infty} f(x) \quad \text{se } a_n = f(n) \text{ e } \lim_{n\to\infty} f(n) \text{ existe.}$$

2 Séries

Uma série é denotada por $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$

A m-ésima soma parcial de uma série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ é definida por:

$$S_m = a_0 + a_1 + \ldots + a_m = \sum_{n=0}^{m} a_n$$

Teorema: Se a sequência das somas parciais de uma série converge, então a série converge equivalendo ao limite da sequência. Caso contrário, a série diverge.

3 Série Geométrica

Uma série geométrica é uma série formada por uma progressão geométrica de razão $\underline{r}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots$$

3.1 Soma da Série Geométrica

A soma parcial de uma série geométrica é:

Para $r = 1$:

$$\sum_{n=0}^{m} 1^n = \sum_{n=0}^{m} 1 = m$$

Para $r \neq 1$:

$$\begin{aligned} S_m &= 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^m \\ r \cdot S_m &= 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^m + r^{m+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_m - r \cdot S_m &= 1 - r^{m+1} \\ S_m \cdot (1 - r) &= 1 - r^{m+1} \\ &\therefore \\ S_m &= \frac{1 - r^{m+1}}{1 - r} \end{aligned}$$

Portanto, o limite da sequência das somas parcias é:

$$\begin{aligned}
&\text{Para } r = 1 \quad : \lim_{m \to \infty} m = \infty \\
&\text{Para } r = -1 : \lim_{m \to \infty} \frac{1 - (-1)^{m+1}}{1 - (-1)} \therefore \text{divergente} \\
&\text{Para } |r| < 1 \ : \lim_{m \to \infty} \frac{1 - r^{m+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r} \\
&\text{Para } r > 1 \quad : \lim_{m \to \infty} \frac{1 - r^{m+1}}{1 - r} = \frac{1 - \infty}{1 - r} = \infty \\
&\text{Para } r < -1 : \lim_{m \to \infty} \frac{1 - r^{m+1}}{1 - r} \therefore \text{divergente}
\end{aligned}$$

Resultando em:

$$\begin{aligned}
&\text{Para } r = 1 \quad : \infty \\
&\text{Para } r = -1 : \text{divergente} \\
&\text{Para } |r| < 1 \ : \frac{1}{1 - r} \\
&\text{Para } r > 1 \quad : \infty \\
&\text{Para } r < -1 : \text{divergente}
\end{aligned}$$

4 Convergência e Divergência

Teorema: Seja uma série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$

Se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, a série diverge.

Se a série converge, então $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \quad$ {o oposto não vale}

4.1 Teste da Integral

Teorema: Seja uma série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}$ com todos termos positivos, e uma função $f(x)$ que interpola os termos desta série

Se $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx = \infty$, então a série diverge para ∞.

Se $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx < \infty$, então a série converge.

Exemplo: Denomina-se série-P a seguinte série: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ onde $p > 0$

Para $p = 1$, obtemos a série harmônica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, que diverge.

Para $p \neq 1$, seja $f(x) = \frac{1}{x^p}$ a função que interpola os termos da série:

$$\lambda = \int\limits_1^{\infty} x^{-p}\,dx = \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^{\infty}$$

$$\lambda = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1^{-p+1}}{-p+1}$$

$$\lambda = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{-p+1}-1}{-p+1}$$

Para $p < 1$, $(1-p) > 0$:

$$\lambda = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{-p+1}-1}{-p+1}$$

$$= \frac{\infty - 1}{-p+1} = \infty$$

Portanto, a série diverge.

Para $p > 1$, $(1-p) < 0$:

$$\lambda = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{|-p+1|}\cdot(-p+1)} - \frac{1^{-p+1}}{-p+1}$$

$$= \frac{1}{\infty\cdot(-p+1)} - \frac{1}{-p+1}$$

$$= \frac{1}{-\infty} - \frac{1}{-p+1}$$

$$= \frac{1}{-p+1}$$

Como $\frac{1}{-p+1} < \infty$, a série converge.

5 Estimativas de Somas

O erro contido em uma estimativa de soma S_m é:

$$R_m = S - S_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_m$$

Portanto:

$$\int_{m+1}^{\infty} f(x)\,dx \leq R_m \leq \int_{m}^{\infty} f(x)\,dx \qquad \text{onde } f(x) \text{ interpola os pontos da série.}$$

Exemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

A série é convergente como demonstrado pelo teste da integral: ($\frac{1}{3} < \infty$)

$$\begin{aligned}\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^4}\,dx &= \int_{1}^{\infty} x^{-4}\,dx \\ &= \left.\frac{-1}{3x^3}\right|_{1}^{\infty} \\ &= 0 - \frac{-1}{3} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Estimativa do resto usando o teste da integral:

$$\begin{aligned}R_m \leq \int_{m}^{\infty} \frac{1}{x^4}\,dx &= \left.\frac{-1}{3x^3}\right|_{m}^{\infty} \\ &= \frac{1}{3m^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_1 : |S - S_1| = |S - 1| \quad &\leq \quad \frac{1}{3 \cdot 1^3} = \frac{1}{3} \\ R_2 : |S - S_2| = |S - (1 + \frac{1}{16})| & \\ = |S - \frac{17}{16}| \quad &\leq \quad \frac{1}{3 \cdot 2^3} = \frac{1}{24}\end{aligned}$$

Calculo de m que satisfaça $R_m < \frac{1}{10000}$:

$$\frac{1}{3m^3} < \frac{1}{10000}$$

$$m^3 > \frac{10000}{3}$$

$$m > \sqrt[3]{\frac{10000}{3}}$$

6 Teste da Comparação

Teorema: Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tal que $\forall n : b_n \geq a_n > 0$, então:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$$

Exemplos:

Seja $a_n = \frac{1}{n^4+3n^3+5n^2+n+5}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge pois $\forall n : a_n < \frac{1}{n^4}$, e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ converge pelo teste da integral.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ diverge, pois $\forall n \geq 3 : \frac{1}{n} < \frac{\ln n}{n}$, e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

6.1 Teste da Comparação no Limite

Teorema: Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tal que $\forall n : a_n > 0 \land b_n > 0$, então:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} > 0 \Rightarrow \text{ambas convergem ou ambas divergem.}$$

7 Teorema das Sequências Monótonas

7.1 Sequências Monótonas

Uma sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ é monótona se:

$$\begin{aligned} &\forall n : a_n \geq a_{n+1} \qquad \{\text{crescente}\} \\ &\text{ou} \\ &\forall n : a_n \leq a_{n+1} \qquad \{\text{decrescente}\} \end{aligned}$$

7.2 Sequências Limitadas

Uma sequência é limitada se:

$$\forall n : \exists M > 0 : |a_n| < M$$
$$\text{ou seja:}$$
$$\forall n : -M < a_n < M$$

Exemplo: $a_n = \frac{\sin n}{n}$ é limitada pois $\forall x \in \mathbb{N} : |\sin x| \leq 1$, portanto $-1 \leq a_n \leq 1$.

7.3 Teorema

Se uma sequência é monótona e limitada, então ela é convergente.

8 Séries Alternadas

Uma série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é alternada se:

$$\forall n : a_n \cdot a_{n+1} < 0$$

Teorema: Se uma série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é alternada, $|a_n|$ é uma sequência monótona <u>decrescente</u> e $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, então a série converge.

Exemplo: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ é alternada

$|\frac{(-1)^n}{n}| = \frac{1}{n} \Rightarrow$ monótona decrescente

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Portanto, a série converge.

9 Convergência Absoluta

Dizemos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolutamente se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge.

Exemplos: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ é absolutamente convergente pois $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

$\sum_{n=0}^{\infty} \sin n$ não é absolutamente convergente pois $\sum_{n=0}^{\infty} |\sin n|$ diverge.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ não é absolutamente convergente pois $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Teorema: Se uma série é absolutamente convergente, então ela é convergente.

Obs: Quando uma série converge, mas sem ser absolutamente convergente, dizemos que a série é condicionalmente convergente.

9.1 Testes da Razão e da Raiz

Suponha que uma série satisfaça $|a_n| \approx R^n$

- Se $R < 1$, esperamos que a série seja absolutamente convergente.
- Se $R > 1$, esperamos que a série diverja.

9.1.1 Teste da Razão

Teorema: Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é tal que $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$, então:

- Se $L < 1$, a série é absolutamente convergente.
- Se $L > 1$, a série é divergente.
- Se $L = 1$, o teste é inconclusivo.

9.1.2 Teste da Raiz

Teorema: Se $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ é tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$, então:

- Se $L < 1$, a série é absolutamente convergente.
- Se $L > 1$, a série é divergente.
- Se $L = 1$, o teste é inconclusivo.

10 Séries de Potências

Uma expressão da seguinte forma é denominada série de potências:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-a)^n = c_0 + c_1 \cdot (x-a) + c_2 \cdot (x-a)^2 + \dots$$

c_n : coeficiente
x : variável
a : centro

Exemplo: Para $c_n = \frac{1}{n+1}$ e $a = -3$, a série de potências é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot (x+2)^n$$

Teorema: O conjunto de valores de x onde uma série de pontências converge é um dos seguintes:

- $\mathbb{R}$
- $\{a\}$
- $(a-\alpha, a+\alpha)$, $\alpha > 0$ onde α é o raio de convergência.

Teorema: Se $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-a)^n$ tem raio de convergência maior que zero, e seja

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-a)^n$$

para x no intervalo de convergência da série, então:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n \cdot (x-a)^{n-1}$$ para x no interior do invervalo de convergência.

$$\int_c^d f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n \cdot \int_c^d (x-a)^n\, dx)$$ se c e d estão no interior do intervalo de convergência.

11 Séries de Taylor

A série de Taylor, com centro a, de $f(x)$ é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{[n]}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n \qquad \text{onde } [n] \text{ indica a } n\text{-ésima derivada de } f.$$

Quando $a = 0$, a série denomina-se série de *Maclaurin*.

Exemplo:

Se $f(x) = \sin x$, sua série de Maclaurin é:

n	$f^{[n]}(x)$	$f^{[n]}(0)$
0	$\sin x$	0
1	$\cos x$	1
2	$-\sin x$	0
3	$-\cos x$	-1
4	$\sin x$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$0 + 1x + \frac{0}{2!} \cdot x^2 + \frac{-1}{3!} \cdot x^3 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \cdot x^{2m+}1$$

11.1 Polinômio de Taylor

O polinômio de Taylor centrado em a, de grau N, de $f(x)$ é:

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{f^{[n]}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n \quad = \quad f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f''(a) \cdot (x-a)^2}{2!} + \dots$$

Denota-se $P_{N,a}(x)$.

Exemplo:
Para $f(x) = \sin x$:

$$P_{1,0}(x) = x$$

$$P_{2,0}(x) = x + \frac{0}{2!} \cdot x^2 = x$$

$$P_{3,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

11.2 Resto de Taylor

Considerando $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{[n]}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n = \lim_{n\to\infty} P_{N,a}$, definimos o resto de Taylor:

$$R_{N,a}(x) = f(x) - P_{N,a}(x)$$

Teorema: Se $\lim_{N\to\infty} R_{N,a} = 0$, a série de Taylor de $f(x)$ converge para $f(x)$.

11.3 Desigualdade de Taylor

Teorema: Seja $M_n > 0$, $d > 0$, $x \in (a-d, a+d)$.

Se $|f^{[N+1]}(x)| \leq M_n$, então:

$$|R_{N,a}(x)| \leq \frac{M_n \cdot |x-a|^{N+1}}{(N+1)!}$$