1 Derivada Direcional e Vetor Gradiente

Seja: $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$P = (a, b)$ um ponto no domínio de f.

$\vec{v} = (v_x, v_y)$ um vetor <u>unitário</u>.

A derivada de f no ponto P na direção de $\vec{v}$ é

$$f_{\vec{v}}(a, b) = f_x(a, b) \cdot v_x + f_y(a, b) \cdot v_y$$

O vetor gradiente de f no ponto P é

$$\nabla f(a, b) = f_x(a, b) \cdot \vec{i} + f_y(a, b) \cdot \vec{j}$$

Portanto, vale que $f_{\vec{v}}(a, b) = \langle \nabla f(a, b),\ \ \vec{v} \rangle$. Notando que $\vec{v}$ é unitário, então

$$\langle \nabla f(a, b),\ \ \vec{v} \rangle \quad = \quad ||\nabla f(a, b)|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos\theta \quad = \quad ||\nabla f(a, b)|| \cdot \cos\theta$$

Então, quando $\theta = 0$, a derivada direcional é a maior possível, e quando $\theta = \pi$ a derivada direcional é a menor possível.

<u>Teorema</u>: A direção em que f tem a maior taxa de variação é a do vetor gradiente.

2 Pontos Críticos e Pontos Extremais Locais

Dizemos que $P = (a, b)$ é um ponto máximo ou mínimo (extremal) <u>local</u> se existir um disco ao redor de P tal que para todo ponto (x, y) no disco, vale

$$\begin{aligned} f(x, y) \leq f(a, b) \qquad & \text{(máximo)} \\ f(x, y) \geq f(a, b) \qquad & \text{(mínimo)} \end{aligned}$$

Se P é extremal, então $\nabla f(a, b) = \vec{0}$, e portanto $f_{\vec{v}}(a, b) = 0$.

Dizemos que P é um ponto crítico de f se $\nabla f(a, b) = \vec{0}$.

Obs.: Um ponto crítico pode <u>não</u> ser extremal.

2.1 Discriminante

Se P é um ponto crítico de f, então o discriminante de f no ponto P é

$$D(a, b) = \left| \begin{bmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{xy}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{bmatrix} \right|$$

<u>Teorema</u>: Se $D(a, b) > 0$, então (a, b) é um ponto extremal.

Se $D(a, b) < 0$, então (a, b) é um ponto de sela.

<u>Teorema</u>: Se (a, b) é um ponto extremal

- Se $f_{xx}(a, b) > 0$, então (a, b) é um ponto mínimo local.
- Se $f_{xx}(a, b) < 0$, então (a, b) é um ponto máximo local.