

# 1 Curvas Parametrizadas

De modo geral, podemos descrever uma curva plana por uma parametrização:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) \quad \text{onde } x(t) \text{ e } y(t) \text{ são funções da variável } t.$$

Exemplo:

$$y = 2x \quad \rightarrow \quad \vec{r}(t) = (t, 2t)$$

## 1.1 Vetor Tangente

O vetor tangente à curva  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$  em um ponto  $(x(t_\lambda), y(t_\lambda))$  é:

$$\vec{v}(t_\lambda) = \vec{x}'(t_\lambda)\vec{i} + \vec{y}'(t_\lambda)\vec{j}$$

Denota-se  $\vec{r}'(t_\lambda)$ .

Exemplo:

Vetor tangente à curva  $\vec{r}(t) = (t, 2t)$  no ponto  $(3, 6)$ :

$$(3, 6) \Rightarrow t_\lambda = 3$$

$$\vec{x}'(t) = 1$$

$$\vec{y}'(t) = 2$$

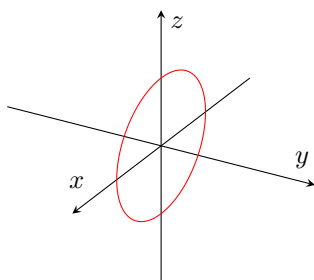
$$\therefore$$

$$\vec{v}'(3) = \vec{i} + 2\vec{j}$$

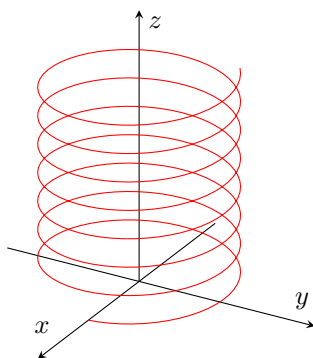
O respectivo vale para curvas no espaço.

## 1.2 Gráficos

$$\vec{r}(t) = (\cos t, 0, \sin t)$$



$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$$



### 1.3 Comprimento de Curvas

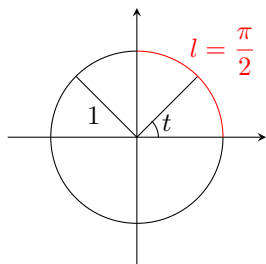
O comprimento de uma curva  $\gamma(t)$  no plano é dado por

$$\begin{aligned}l(\gamma(t)) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_i \sqrt{\left(\frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{\Delta t}\right)^2} \cdot \Delta t \\&= \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \cdot dt\end{aligned}$$

Para uma curva  $\gamma(t)$  no espaço, analogamente:

$$l(\gamma(t)) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} \cdot dt$$

Exemplo:



$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

Obtemos o arco acima variando  $t$  entre  $a = 0$  e  $b = \frac{\pi}{2}$ .

Logo

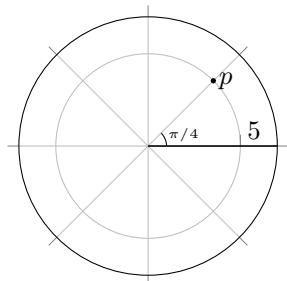
$$\begin{aligned}l &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} \cdot dt \\&= \int_0^{\pi/2} 1 \cdot dt \\&= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

## 2 Coordenadas Polares

Um ponto em coordenadas polares é definido por um raio e um ângulo:

$$p = (r, \theta)_{polar}$$

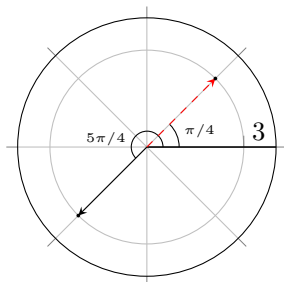
Exemplo: Se  $p = (5, \frac{\pi}{4})_{polar}$



Convenções:

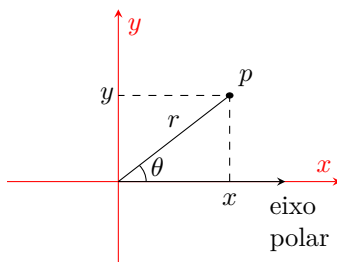
- $\theta > 0$  se medido, a partir do eixo polar, no sentido anti-horário.
- $\theta < 0$  se medido, a partir do eixo polar, no sentido horário.
- $(-r, \theta)_{polar} = (r, \theta - \pi)_{polar}$

Exemplo:  $(-3, \frac{\pi}{4}) = (3, \frac{5\pi}{4})$



- $\forall \theta : (0, \theta)_{polar} = 0$

### 2.1 Relação Entre Sistemas de Coordenadas



$$p = (r, \theta)_{polar} = (x, y)_{ret}$$

$$\forall r, \theta : (r, \theta)_{polar} = (r \cdot \cos \theta, r \cdot \sin \theta)_{ret}$$

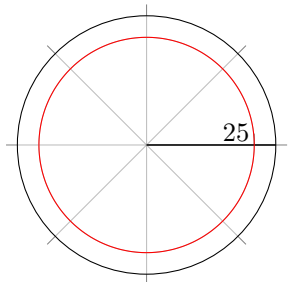
$$\forall x, y : (x, y)_{ret} = \left( \sqrt{x^2 + y^2}, \arctan \frac{y}{x} \right)_{ret}$$

## 2.2 Curvas Polares

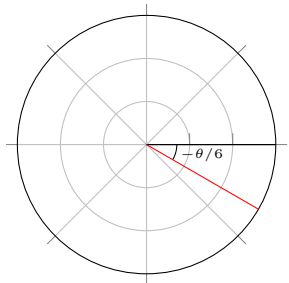
Uma curva polar é definida por uma equação entre as coordenadas polares dos pontos da curva (equação polar).

Exemplos:  $r^2 + e^{r\theta} = 0$

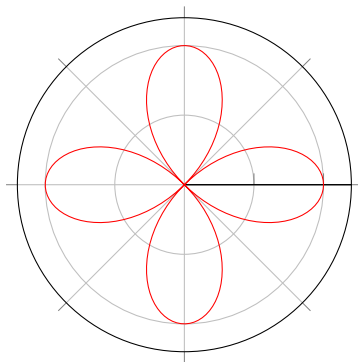
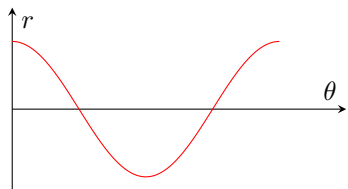
$$0 \cdot \theta + r - 25 = 0 \Rightarrow r = 25$$



$$\theta + \frac{\pi}{6} = 0 \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}$$



$$r = \cos(2\theta)$$



### 3 Superfícies

Qual é o conjunto solução da equação  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ?

Resposta: uma esfera de raio 2 centrada na origem.

—sphere graph here—

#### 3.1 Estratégias de esboço de superfícies no espaço

Identificar sua interseção com planos (cortes) que cobrem todo o espaço.

Exemplo: Considere  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1\}$

Cortes horizontais:

$$\begin{aligned} C_h &= S \cap \Pi_h \{\text{Plano horizontal de altura } h\} \\ &= S \cap \Pi_h \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = h\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} + \frac{h^2}{9} = 1 \right\} \end{aligned}$$

—Intersection graph here—

#### 3.2 Cilindros

Um cilindro é um objeto construído através de uma curva  $\gamma$  no plano e um ângulo  $\alpha$ .

O cilindro é o conjunto de todas as retas que possuem interseção com  $\gamma$ , formando um ângulo equivalente à  $\alpha$  com o plano de  $\gamma$ .

Qual é a superfície descrita pela equação  $x^2 + y^2 = 9$ ?

Qual é o objeto geométrico  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 9\}$ ?

Resposta: Cilindro. O conjunto é formado por todos os pontos do espaço cuja distância ao eixo  $z$  é 3.

—Cylinder graph here—

#### 3.3 Quádricas

As superfícies quádricas são soluções de equações da forma

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fxz + gx + hy + iz + j = 0$$