1 Curvas Parametrizadas

De modo geral, podemos descrever uma curva plana por uma parametrização:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) \qquad \text{onde } x(t) \text{ e } y(t) \text{ são funções da variável } t.$$

Exemplo:

$y = 2x \quad \rightarrow \quad \vec{r}(t) = (t, 2t)$

1.1 Vetor Tangente

O vetor tangente à curva $\vec{r}(t) = (x(t),\, y(t))$ em um ponto $(x(t_\lambda),\, y(t_\lambda))$ é:

$$\vec{v}(t_\lambda) = \vec{x}\,'(t_\lambda)\vec{i} \,+\, \vec{y}\,'(t_\lambda)\vec{j}$$

Denota-se $\vec{r}\,'(t_\lambda)$.

Exemplo:

Vetor tangente à curva $\vec{r}(t) = (t,\, 2t)$ no ponto $(3, 6)$:

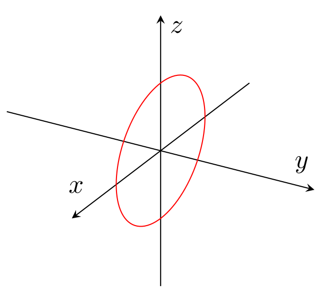
$$(3, 6) \;\Rightarrow\; t_\lambda = 3$$

$$\vec{x}\,'(t) = 1$$
$$\vec{y}\,'(t) = 2$$
$$\therefore$$
$$\vec{v}\,'(3) = \vec{i} + 2\vec{j}$$

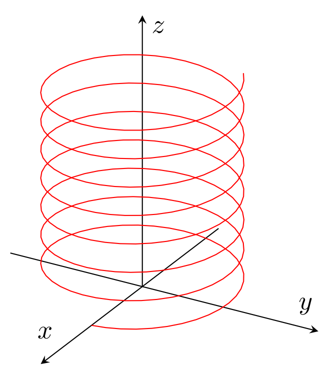
O respectivo vale para curvas no espaço.

1.2 Gráficos

$\vec{r}(t) = (\cos t, 0, \sin t)$



$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$



1.3 Comprimento de Curvas

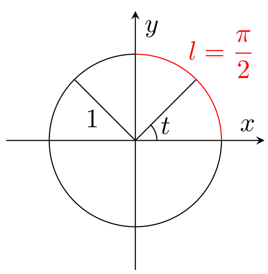
O comprimento de uma curva $\boldsymbol{\gamma}(t)$ no plano é dado por

$$\begin{aligned} l(\boldsymbol{\gamma}(t)) &= \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i \sqrt{\left(\frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{\Delta t}\right)^2} \cdot \Delta t \\ &= \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \cdot dt \end{aligned}$$

Para uma curva $\boldsymbol{\gamma}(t)$ no espaço, analogamente:

$$l(\boldsymbol{\gamma}(t)) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} \cdot dt$$

Exemplo:



$\boldsymbol{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t)$

Obtemos o arco acima variando t entre $a = 0$ e $b = \frac{\pi}{2}$.

Logo

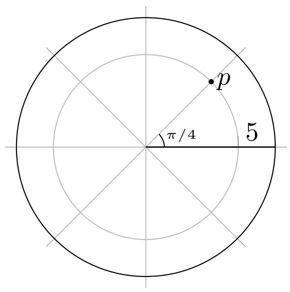
$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} \cdot dt \\ &= \int_0^{\pi/2} 1 \cdot dt \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

2 Coordenadas Polares

Um ponto em coordenadas polares é definido por um raio e um ângulo:

$$p = (r, \theta)_{polar}$$

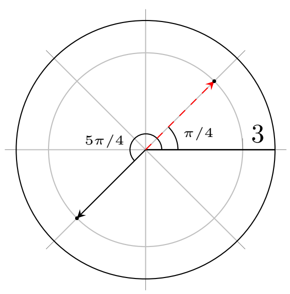
Exemplo: Se $p = \left(5, \frac{\pi}{4}\right)_{polar}$



<u>Convenções:</u>

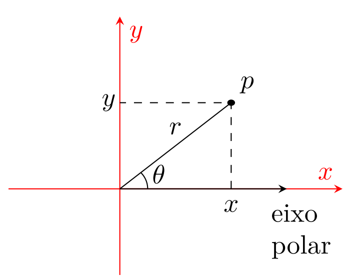
- $\theta > 0$ se medido, a partir do eixo polar, no sentido anti-horário.
- $\theta < 0$ se medido, a partir do eixo polar, no sentido horário.
- $(-r, \theta)_{polar} = (r, \theta + \pi)_{polar}$

  Exemplo: $(-3, \dfrac{\pi}{4}) = (3, \dfrac{5\pi}{4})$

- $\forall \theta : (0, \theta)_{polar} = 0$

2.1 Relação Entre Sistemas de Coordenadas



$$p = (r, \theta)_{polar} = (x, y)_{ret}$$

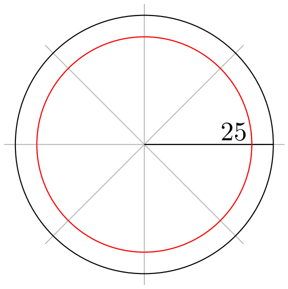
$$\begin{aligned}
\forall r, \theta\ : (r, \theta)_{polar} &= (r \cdot \cos\theta,\ r \cdot \sin\theta)_{ret} \\
\forall x, y : (x, y)_{ret} &= \left(\sqrt{x^2 + y^2},\ \arctan\frac{y}{x}\right)_{polar}
\end{aligned}$$

2.2 Curvas Polares

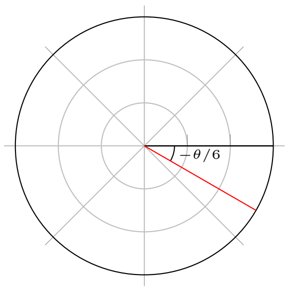
Uma curva polar é definida por uma equação entre as coordenadas polares dos pontos da curva (equação polar).

Exemplos: $r^2 + e^{r\theta} = 0$

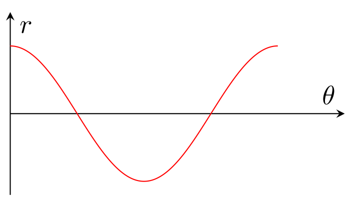
$0 \cdot \theta + r - 25 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 25$

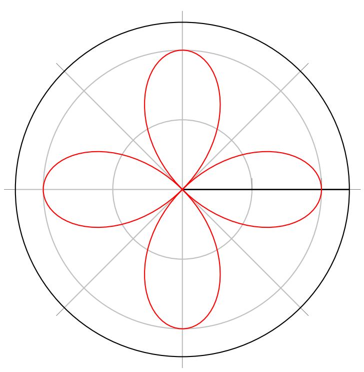


$\theta + \frac{\pi}{6} = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = -\frac{\pi}{6}$



$r = \cos(2\theta)$

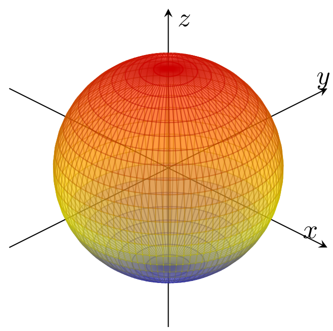




3 Superfícies

Qual é o conjunto solução da equação $x^2 + y^2 + z^2 = 4$?

Resposta: uma esfera de raio 2 centrada na origem.



3.1 Estratégias de esboço de superfícies no espaço

Identificar sua interseção com planos (cortes) que cobrem todo o espaço.

Exemplo: $S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} = 1 \right\}$

Cortes horizontais:

$$\begin{aligned} C_h &= S \cap \Pi_h \{\text{Plano horizontal de altura } h\} \\ &= S \cap \Pi_h \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = h \right\} \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} + \frac{h^2}{9} = 1 \right\} \end{aligned}$$

Para

$$\begin{aligned} h > 3 \quad &: \quad S \cap \Pi_h = \varnothing \\ h = 3 \quad &: \quad S \cap \Pi_3 = \{(0,0,3)\} \\ h < -3 \quad &: \quad S \cap \Pi_h = \varnothing \\ h = -3 \quad &: \quad S \cap \Pi_{-3} = \{(0,0,-3)\} \\ |h| < 3 \quad &: \quad S \cap \Pi_h \\ &: \quad \text{Plano xz} \to S \cap \{y = 0\} \Rightarrow \left\{ (x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1 \right\} \therefore \text{Elipse} \\ &: \quad \text{Plano yz} \to S \cap \{x = 0\} \Rightarrow \left\{ (0,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 \right\} \therefore \text{Elipse} \end{aligned}$$

Portanto, a superfície é um elipsóide de altura 6 e diâmetros 10 e 4.

3.2 Cilindros

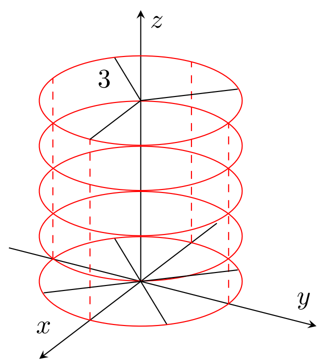
Um cilindro é um objeto construido através de uma curva $\boldsymbol{\gamma}$ no plano e um ângulo α.

O cilindro é o conjunto de todas as retas que possuem interseção com $\boldsymbol{\gamma}$, formando um ângulo equivalente à α com o plano de $\boldsymbol{\gamma}$.

Qual é a superfície descrita pela equação $x^2 + y^2 = 9$?

Qual é o objeto geométrico $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 9\}$?

Resposta: Cilindro. O conjunto é formado por todos os pontos do espaço cuja distância ao eixo z é 3.



3.3 Quádricas

As superfícies quádricas são soluções de equações da forma

$$ax^2 + by^2 + cz^2 \; + \; dxy + eyz + fxz \; + \; gx + hy + iz \; + \; j = 0$$

4 Funções de duas ou mais variáveis

Uma função de 2 variáveis é uma função do tipo

$$f : D \to \mathbb{R} \qquad \text{onde } D \subseteq \mathbb{R}^2$$

4.1 Gráficos

O gráfico de uma função $f : D \to \mathbb{R}$ de duas variáveis é o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ formado pelos pontos

$$(x,\, y,\, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \qquad \text{onde } (x,\, y) \in D$$

4.2 Curvas e Superfícies de Nível

Uma curva de nível de altura h de uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é o conjunto de pontos (x, y) do plano tais que

$$f(x, y) = h$$

4.3 Limite e Continuidade

4.3.1 Limite

Seja uma função $f : D \to \mathbb{R}$, então define-se

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

Dizemos que f tende a L quando (x,y) tende a (a,b), se $\forall\epsilon > 0$ arbitrário

$$\exists\delta\ : 0 < \delta < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$
$$|f(x,y) - L| < \epsilon$$

As seguintes propriedades valem:

- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f(x,y) + g(x,y)) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) + \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$
- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f(x,y) - g(x,y)) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) - \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$
- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} (f(x,y) \cdot g(x,y)) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)\ \cdot \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$
- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left(\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\right) = \frac{\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)}{\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)}$

Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ qualquer curva parametrizada com

$$\lim_{t\to 0} \gamma(t) = (\lim_{t\to 0} x(t), \lim_{t\to 0} y(t)) = (a,b)$$

Se $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$, então para toda curva γ vale:

$$\lim_{t\to 0} f(x(t), y(t)) = L$$

Seja uma função f e duas curvas γ e $\widetilde{\gamma}$ quaisquer no domínio de f tais que

$$\lim_{t\to 0} \gamma(t) = \lim_{t\to 0} \widetilde{\gamma}(t) = (a,b)$$

Se $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ existe, então pra toda γ e $\widetilde{\gamma}$:

$$\lim_{t\to 0} f(x(t), y(t))\ =\ \lim_{t\to 0} f(\widetilde{x}(t), \widetilde{y}(t))$$

Exemplos: $f(x,y) = 5 \quad \Rightarrow \quad \lim_{(x,y)\to(3,-1)} f(x,y) = 5$

$f(x,y) = x \quad \Rightarrow \quad \lim_{(x,y)\to(8,-6)} f(x,y) = 8$

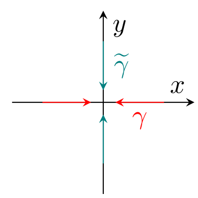
$f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \big(D : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}\big) \quad \Rightarrow \quad \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ pois:

Seja $\gamma(t) = (t, 0)$ a reta sobre o eixo x, e $\widetilde{\gamma}(t) = (0, t)$ a reta sobre o eixo y.

$$\lim_{t\to0} f(x(t), y(t)) = \lim_{t\to0} f(t, 0) = \lim_{t\to0} \frac{t^2 - 0^2}{t^2 + 0^2} = 1$$

$$\lim_{t\to0} f(\widetilde{x}(t), \widetilde{y}(t)) = \lim_{t\to0} f(0, t) = \lim_{t\to0} \frac{0^2 - t^2}{0^2 + t^2} = -1$$

$$1 \neq -1$$



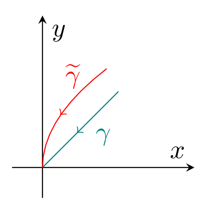
$f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4} \quad \big(D : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}\big) \quad \Rightarrow \quad \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ pois:

Seja $\gamma(t) = (t, \alpha t)$, e $\widetilde{\gamma}(t) = (t^2, t)$.

$$\lim_{t\to0} f(x(t), y(t)) = \lim_{t\to0} f(t, \alpha t) = \lim_{t\to0} \frac{t \cdot (\alpha t)^2}{t^2 + (\alpha t)^4} = 0$$

$$\lim_{t\to0} f(\widetilde{x}(t), \widetilde{y}(t)) = \lim_{t\to0} f(t^2, t) = \lim_{t\to0} \frac{t^2 \cdot (t)^2}{(t^2)^2 + t^4} = \frac{1}{2}$$

$$0 \neq \frac{1}{2}$$



4.3.2 Continuidade

Dizemos que f é contínua em (a, b) se

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

Dizemos que f é contínua se é contínua em todos os pontos de seu domínio.

Propriedades: A composição de duas funções contínuas é contínua.
$f(x,y) = c$ é contínua.
$f(x,y) = x$ é contínua.
$f(x,y) = y$ é contínua.

4.4 Derivadas Parciais

A derivada parcial de uma função de n variáveis $f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ com relação a uma variável λ_α, no ponto $(a_1, \ldots, a_n)$ é:

$$\lim_{\Delta\lambda_\alpha \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_\alpha + \Delta\lambda_\alpha, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{\Delta\lambda_\alpha}$$

Para uma função de 2 variáveis $f(x, y)$ no ponto (a, b), por exemplo:

$$\text{Em relação a } x: \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x, b) - f(a, b)}{\Delta x}$$

$$\text{Em relação a } y: \quad \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(a + \Delta y, b) - f(a, b)}{\Delta y}$$

Há três nomenclaturas convencionais, para a variável x por exemplo:

- $\dfrac{\delta f}{\delta x}(a, b)$ Fração indicando a variável sobre qual foi a derivada parcial.
- $f_x(a, b)$ Em ordem $\leftarrow$, subscrito em f a variável sobre qual foi a derivada parcial.
- $D_1 f(a, b)$ Em ordem $\rightarrow$, subscrito em D o índice da variável sobre qual foi a derivada parcial.

4.4.1 Cálculo operacional da dervivada parcial

Para derivar parcialmente com relação a uma variável, basta considerar as demais como constantes e derivar normalmente.

Exemplo: $f(x, y) = x^2 y + e^{xy}$

$$\Rightarrow f_x(x, y) = (2x)y + e^{xy} \cdot y = 2xy + ye^{xy}$$

$$\Rightarrow f_y(x, y) = x^2 \cdot 1 + e^{xy} \cdot x = x^2 + xe^{xy}$$

4.4.2 Derivadas de ordem superior

Derivando-se parcialmente duas ou mais vezes, se obtem uma derivida de ordem superior:

$$\begin{tikzcd}
 & & & f(x,y) \arrow[dll, dash] \arrow[drr, dash] & & & \\
 & f_x(x,y) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & & & f_y(x,y) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
f_{xx}(x,y) & & f_{yx}(x,y) & & f_{yy}(x,y) & & f_{xy}(x,y)
\end{tikzcd}$$

Exemplo: $f(x, y) = x^2 y + e^{xy}$

$$\begin{aligned}
f_{yx}(x, y) &= \frac{\delta}{\delta y} f_x(x, y) \\
&= \frac{\delta}{\delta y} \left(2xy + ye^{xy}\right) \\
&= 2x + 1 \cdot e^{xy} + y \cdot e^{xy} \cdot x \\
&= 2x + e^{xy}(xy + 1)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
f_{xy}(x, y) &= \frac{\delta}{\delta x} f_y(x, y) \\
&= \frac{\delta}{\delta x} \left(x^2 + xe^{xy}\right) \\
&= 2x + 1 \cdot e^{xy} + x \cdot e^{xy} \cdot y \\
&= 2x + e^{xy}(xy + 1)
\end{aligned}$$

Teorema de Clairaut-Schwarz: Se $f_{xy}(x, y)$ e $f_{yx}(x, y)$ são funções contínuas, então

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$$

4.5 Plano tangente

As aproximação linear de uma função corresponde a seguinte tabela:

f	1 variável	2 variáveis
tangente	reta	plano
aproximação	$f \approx ax + b$	$f \approx ax + by + c$

O plano tangente a um ponto $p = (a, b, f(a, b))$ do gráfico de f deve conter todas as retas tangentes ao gráfico de f em p.

4.5.1 Equação

Dado uma função f e um ponto $(a, b, f(a, b))$:

A reta tangente ao ponto em relação a x é:

$$\begin{cases} y = b \\ z - f(a,b) = f_x(a,b) \cdot (x - a) \end{cases}$$

A reta tangente ao ponto em relação a y é:

$$\begin{cases} x = a \\ z - f(a,b) = f_y(a,b) \cdot (y - b) \end{cases}$$

Portanto, o plano tangente ao ponto é o plano determinado pelas duas retas. Sua equação é:

$$z - f(a,b) = f_x(a,b) \cdot (x - a) + f_y(a,b) \cdot (y - b)$$

Exemplos: Se $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, o plano π tangente no ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ é:

$$f_x(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \Rightarrow f_x\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f_y(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \Rightarrow f_y\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\pi : z - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(y - \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Se } f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(0,0) = 0$$

$$\Rightarrow f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$$

$$\Rightarrow \pi : z - 0 = 0 \cdot (x - 0) + 0 \cdot (y - 0) = 0$$

$\pi = 0$ é o plano tangente de f? Não, pois a f sequer é contínua no ponto (0,0):

$$\lim_{t \to 0} f(t,t) = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2 + t^2} = \frac{1}{2} \neq 0$$

4.6 Diferenciabilidade

Dizemos que $f(x,y)$ é diferenciável em (a,b) se

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\Big|f(x,y) - [f(a,b) + f_x(a,b)\cdot(x-a) + f_y(a,b)\cdot(y-b)]\Big|}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0$$

Teorema: Se f_x e f_y são contínuas em (a,b) então f é diferenciável em (a,b).

Quando f é diferenciável em (a,b), dizemos que

$$L_{(a,b)}(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)\cdot(x-a) + f_y(a,b)\cdot(y-b)$$

é a melhor aproximação linear de f ao redor de (a,b).

Obs.: O gráfico de $L_{(a,b)}$ é o plano tangente ao gráfico de f em $(a,b,f(a,b))$.

Exemplo: Se $f(x,y) = x^2y + y^3$, então

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2xy \\ f_y(x,y) &= x^2 + 3y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{(-2,1)}(x,y) &= f(-2,1) + f_x(-2,1)\cdot(x-(-2)) + f_y(-2,1)\cdot(y-1) \\ &= 5 + (-4)\cdot(x+2) + 7(y-1) = -4x + 7y - 10 \end{aligned}$$

4.7 Regra da cadeia

A regra da cadeia para funções de uma variável é $(f\circ g)(x) = f(g(x))$. Sua derivada é:

$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Para funções de duas variáveis, temos:

1º caso: $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Teorema: Se f, g e h são funções diferenciáveis, então $F(t) = f(g(t),h(t))$ é diferenciável e

$$F'(t) = f_x(g(t),h(t))\cdot g'(t) + f_y(g(t),h(t))\cdot h'(t)$$

2º caso: $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$g:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$h:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Teorema: Se f, g e h são funções diferenciáveis, então $F(x,y) = f(g(x,y),h(x,y))$ é diferenciável e

$$\begin{aligned} F_x(x,y) &= f_x(g(x,y),\ h(x,y))\cdot g_x(x,y) \\ &\quad + f_y(g(x,y),\ h(x,y))\cdot h_x(x,y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_y(x,y) &= f_x(g(x,y),\ h(x,y))\cdot g_y(x,y) \\ &\quad + f_y(g(x,y),\ h(x,y))\cdot h_y(x,y) \end{aligned}$$

Exemplo: $f_x(x,y) = 3x^2y^2$
$f_y(x,y) = 2x^3y$

$g_x(x,y) = 2e\ xy$

$h_x(x,y) = y$

$$F_x(x,y) = 3 \cdot (e^{2x} + y^3)^2 \cdot (xy+4)^2 \cdot 2e^{2x} + 2 \cdot (e^{2x} + y^3)^3 \cdot (xy+4) \cdot y$$