1 Derivada Direcional e Vetor Gradiente

Seja: $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$P = (a, b)$ um ponto no domínio de f.

$\vec{v} = (v_x, v_y)$ um vetor unitário.

$r(t) = (a + v_x \cdot t,\ \ b + v_y \cdot t)$ uma reta direcionada por $\vec{v}$ que passa pelo ponto P.

A derivada de f no ponto P na direção de $\vec{v}$ é

$$f_{\vec{v}}(a, b) = f_x(a, b) \cdot v_x + f_y(a, b) \cdot v_y$$

O vetor gradiente de f no ponto P é

$$\nabla f(a, b) = f_x(a, b) \cdot \vec{i} + f_y(a, b) \cdot \vec{j}$$

Portanto, vale que $f_{\vec{v}}(a, b) = \langle \nabla f(a, b),\ \ \vec{v}\, \rangle$.

Teorema: A direção em que f tem a maior taxa de variação é a do vetor gradiente.