

1 Sequências

Sequências são listas ordenadas infinitas de números.

Denota-se:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots = \left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

1.1 Limite de Sequências

Teorema: Sequências que convergem possuem um limite.

Para $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ denota-se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

Exemplos: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n} = 1$$

O limite de uma sequência constante é o termo constante.

1.1.1 Propriedades do Limite

Sejam $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ convergentes, então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) \quad \text{se } f(x) \text{ é contínua.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad \text{se } a_n = f(n) \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) \text{ existe.}$$

2 Séries

Uma série é denotada por $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$

A m-ésima soma parcial de uma série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é definida por:

$$S_m = a_0 + a_1 + \dots + a_m = \sum_{n=0}^m a_n$$

Teorema: Se a sequência das somas parciais de uma série converge, então a série converge equivalendo ao limite da sequência. Caso contrário, a série diverge.

3 Série Geométrica

Uma série geométrica é uma série formada por uma progressão geométrica de razão \underline{r} .

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots$$

3.1 Soma da Série Geométrica

A soma parcial de uma série geométrica é:

Para $r = 1$:

$$\sum_{n=0}^m 1^n = \sum_{n=0}^m 1 = m$$

Para $r \neq 1$:

$$\begin{aligned} S_m &= 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^m \\ r \cdot S_m &= 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^m + r^{m+1} \end{aligned}$$

$$S_m - r \cdot S_m = 1 - r^{m+1}$$

$$S_m \cdot (1 - r) = 1 - r^{m+1}$$

\therefore

$$S_m = \frac{1 - r^{m+1}}{1 - r}$$

Portanto, o limite da sequência das somas parciais é:

$$\text{Para } r = 1 : \lim_{m \rightarrow \infty} m = \infty$$

$$\text{Para } r = -1 : \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1 - (-1)^{m+1}}{1 - (-1)} \therefore \text{divergente}$$

$$\text{Para } |r| < 1 : \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1 - r^{m+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r}$$

$$\text{Para } r > 1 : \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1 - r^{m+1}}{1 - r} = \frac{1 - \infty}{1 - r} = \infty$$

$$\text{Para } r < -1 : \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1 - r^{m+1}}{1 - r} \therefore \text{divergente}$$

Resultando em:

$$\text{Para } r = 1 : \infty$$

$$\text{Para } r = -1 : \text{divergente}$$

$$\text{Para } |r| < 1 : \frac{1}{1 - r}$$

$$\text{Para } r > 1 : \infty$$

$$\text{Para } r < -1 : \text{divergente}$$

4 Convergência e Divergência

Teorema: Seja uma série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, a série diverge.

Se a série converge, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ {o oposto não vale}

4.1 Teste da Integral

Teorema: Seja uma série $\sum_{n=0}^{\infty}$ com todos termos positivos, e uma função $f(x)$ que interpola os termos desta série

Se $\int_1^{\infty} f(x) dx = \infty$, então a série diverge para ∞ .

Se $\int_1^{\infty} f(x) dx < \infty$, então a série converge.

Exemplo: Denomina-se série-P a seguinte série: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ onde $p > 0$

Para $p = 1$, obtemos a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, que diverge.

Para $p \neq 1$, seja $f(x) = \frac{1}{x^p}$ a função que interpola os termos da série:

$$\begin{aligned}\lambda &= \int_1^{\infty} x^{-p} dx = \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^{\infty} \\ \lambda &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1^{-p+1}}{-p+1} \\ \lambda &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-p+1} - 1}{-p+1}\end{aligned}$$

Para $p < 1$, $(1-p) > 0$:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-p+1} - 1}{-p+1} \\ &= \frac{\infty - 1}{-p+1} = \infty\end{aligned}$$

Portanto, a série diverge.

Para $p > 1$, $(1-p) < 0$:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{|-p+1|} \cdot (-p+1)} - \frac{1^{-p+1}}{-p+1} \\ &= \frac{1}{\infty \cdot (-p+1)} - \frac{1}{-p+1} \\ &= \frac{1}{-\infty} - \frac{1}{-p+1} \\ &= \frac{1}{-p+1}\end{aligned}$$

Como $\frac{1}{-p+1} < \infty$, a série converge.

5 Estimativas de Somas

O erro contido em uma estimativa de soma S_m é:

$$R_m = S - S_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$$

Portanto:

$$\int_{m+1}^{\infty} f(x) dx \leq R_m \leq \int_m^{\infty} f(x) dx \quad \text{onde } f(x) \text{ interpola os pontos da série.}$$

Exemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

A série é convergente como demonstrado pelo teste da integral: $(\frac{1}{3} < \infty)$

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^4} dx &= \int_1^{\infty} x^{-4} dx \\ &= \left. \frac{-1}{3x^3} \right|_1^{\infty} \\ &= 0 - \frac{-1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Estimativa do resto usando o teste da integral:

$$\begin{aligned} R_m &\leq \int_m^{\infty} \frac{1}{x^4} dx = \left. \frac{-1}{3x^3} \right|_m^{\infty} \\ &= \frac{1}{3m^3} \end{aligned}$$

$$R_1 : |S - S_1| = |S - 1| \leq \frac{1}{3 \cdot 1^3} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} R_2 : |S - S_2| &= |S - (1 + \frac{1}{16})| \\ &= |S - \frac{17}{16}| \leq \frac{1}{3 \cdot 2^3} = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

Cálculo de m que satisfaça $R_m < \frac{1}{10000}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3m^3} &< \frac{1}{10000} \\ m^3 &> \frac{10000}{3} \\ m &> \sqrt[3]{\frac{10000}{3}} \end{aligned}$$

6 Teste da Comparação

Teorema: Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tal que $\forall n : b_n \geq a_n > 0$, então:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty\end{aligned}$$

Exemplos:

Seja $a_n = \frac{1}{n^4 + 3n^3 + 5n^2 + n + 5}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge pois $\forall n : a_n < \frac{1}{n^4}$, e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ converge pelo teste da integral.
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ diverge, pois $\forall n \geq 3 : \frac{1}{n} < \frac{\ln n}{n}$, e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

6.1 Teste da Comparação no Limite

Teorema: Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tal que $\forall n : a_n > 0 \wedge b_n > 0$, então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} > 0 \Rightarrow \text{ambas convergem ou ambas divergem.}$$

7 Teorema das Sequências Monótonas

7.1 Sequências Monótonas

Uma sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ é monótona se:

$$\begin{aligned}\forall n : a_n &\geq a_{n+1} && \{\text{crescente}\} \\ \text{ou} & & & \\ \forall n : a_n &\leq a_{n+1} && \{\text{decrecente}\}\end{aligned}$$

7.2 Sequências Limitadas

Uma sequência é limitada se:

$$\begin{aligned}\forall n : \exists M > 0 : |a_n| &< M \\ \text{ou seja:} & \\ \forall n : -M < a_n &< M\end{aligned}$$

Exemplo: $a_n = \frac{\sin n}{n}$ é limitada pois $\forall x \in \mathbb{N} : |\sin x| \leq 1$, portanto $-1 \leq a_n \leq 1$.

7.3 Teorema

Se uma sequência é monótona e limitada, então ela é convergente.

8 Séries Alternadas

Uma série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é alternada se:

$$\forall n : a_n \cdot a_{n+1} < 0$$

Teorema: Se uma série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é alternada, $|a_n|$ é uma sequência monótona decrecente e $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$, então a série converge.

Exemplo: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ é alternada

$$\left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n} \Rightarrow \text{monótona decrescente}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Portanto, a série converge.

9 Convergência Absoluta

Dizemos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolutamente se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge.

Exemplos: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ é absolutamente convergente pois $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

$\sum_{n=0}^{\infty} \sin n$ não é absolutamente convergente pois $\sum_{n=0}^{\infty} |\sin n|$ diverge.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ não é absolutamente convergente pois $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Teorema: Se uma série é absolutamente convergente, então ela é convergente.

Obs: Quando uma série converge, mas sem ser absolutamente convergente, dizemos que a série é condicionalmente convergente.

9.1 Testes da Razão e da Raiz

Suponha que uma série satisfaça $|a_n| \approx R^n$

- Se $R < 1$, esperamos que a série seja absolutamente convergente.
- Se $R > 1$, esperamos que a série diverja.

9.1.1 Teste da Razão

Teorema: Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$, então:

- Se $L < 1$, a série é absolutamente convergente.
- Se $L > 1$, a série é divergente.
- Se $L = 1$, o teste é inconclusivo.

9.1.2 Teste da Raiz

Teorema: Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$, então:

- Se $L < 1$, a série é absolutamente convergente.
- Se $L > 1$, a série é divergente.
- Se $L = 1$, o teste é inconclusivo.

10 Séries de Potências

Uma expressão da seguinte forma é denominada série de potências:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - a)^n = c_0 + c_1 \cdot (x - a) + c_2 \cdot (x - a)^2 + \dots$$

c_n : coeficiente

x : variável

a : centro

Exemplo: Para $c_n = \frac{1}{n+1}$ e $a = -3$, a série de potências é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot (x+2)^n$$

Teorema: O conjunto de valores de x onde uma série de potências converge é um dos seguintes:

- \mathbb{R}
- $\{a\}$
- $(a - \alpha, a + \alpha)$, $\alpha > 0$ onde α é o raio de convergência.

Teorema: Se $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - a)^n$ tem raio de convergência maior que zero, e seja

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - a)^n$$

para x no intervalo de convergência da série, então:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n \cdot (x - a)^{n-1} \quad \text{para } x \text{ no interior do intervalo de convergência.}$$

$$\int_c^d f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n \cdot \int_c^d (x - a)^n dx) \quad \text{se } c \text{ e } d \text{ estão no interior do intervalo de convergência.}$$

11 Séries de Taylor

A série de Taylor, com centro a , de $f(x)$ é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{[n]}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n \quad \text{onde } [n] \text{ indica a } n\text{-ésima derivada de } f.$$

Quando $a = 0$, a série denomina-se série de *Maclaurin*.

Exemplo:

Se $f(x) = \sin x$, sua série de Maclaurin é:

n	$f^{[n]}(x)$	$f^{[n]}(0)$
0	$\sin x$	0
1	$\cos x$	1
2	$-\sin x$	0
3	$-\cos x$	-1
4	$\sin x$	0
\vdots	\vdots	\vdots

$$0 + 1x + \frac{0}{2!} \cdot x^2 + \frac{-1}{3!} \cdot x^3 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \cdot x^{2m+1}$$

11.1 Polinômio de Taylor

O polinômio de Taylor centrado em a , de grau N , de $f(x)$ é:

$$\sum_{n=0}^N \frac{f^{[n]}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f''(a) \cdot (x-a)^2}{2!} + \dots$$

Denota-se $P_{N,a}(x)$.

Exemplo:

Para $f(x) = \sin x$:

$$P_{1,0}(x) = x$$

$$P_{2,0}(x) = x + \frac{0}{2!} \cdot x^2 = x$$

$$P_{3,0}(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

11.2 Resto de Taylor

Considerando $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{[n]}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{N,a}$, definimos o resto de Taylor:

$$R_{N,a}(x) = f(x) - P_{N,a}(x)$$

Teorema: Se $\lim_{N \rightarrow \infty} R_{N,a} = 0$, a série de Taylor de $f(x)$ converge para $f(x)$.

11.3 Desigualdade de Taylor

Teorema: Seja $M_n > 0$, $d > 0$, $x \in (a-d, a+d)$.

Se $|f^{[N+1]}(x)| \leq M_n$, então:

$$|R_{N,a}(x)| \leq \frac{M_n \cdot |x-a|^{N+1}}{(N+1)!}$$