

1 Derivada Direcional e Vetor Gradiente

Seja: $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$P = (a, b)$ um ponto no domínio de f .

$\vec{v} = (v_x, v_y)$ um vetor unitário.

A derivada de f no ponto P na direção de \vec{v} é

$$f_{\vec{v}}(a, b) = f_x(a, b) \cdot v_x + f_y(a, b) \cdot v_y$$

O vetor gradiente de f no ponto P é

$$\nabla f(a, b) = f_x(a, b) \cdot \vec{i} + f_y(a, b) \cdot \vec{j}$$

Portanto, vale que $f_{\vec{v}}(a, b) = \langle \nabla f(a, b), \vec{v} \rangle$. Notando que \vec{v} é unitário, então

$$\langle \nabla f(a, b), \vec{v} \rangle = \|\nabla f(a, b)\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta = \|\nabla f(a, b)\| \cdot \cos \theta$$

Então, quando $\theta = 0$, a derivada direcional é a maior possível, e quando $\theta = \pi$ a derivada direcional é a menor possível.

Teorema: A direção em que f tem a maior taxa de variação é a do vetor gradiente.

2 Pontos Críticos e Pontos Extremais Locais

Dizemos que $P = (a, b)$ é um ponto máximo ou mínimo (extremal) local se existir um disco ao redor de P tal que para todo ponto (x, y) no disco, vale

$$f(x, y) \leq f(a, b) \quad (\text{máximo})$$

$$f(x, y) \geq f(a, b) \quad (\text{mínimo})$$

Se P é extremal, então $\nabla f(a, b) = \vec{0}$, e portanto $f_{\vec{v}}(a, b) = 0$.

Dizemos que P é um ponto crítico de f se $\nabla f(a, b) = \vec{0}$.

Obs.: Um ponto crítico pode não ser extremal.