

1 Derivada Direcional e Vetor Gradiente

Seja: $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$P = (a, b)$ um ponto no domínio de f .

$\vec{v} = (v_x, v_y)$ um vetor unitário.

A derivada de f no ponto P na direção de \vec{v} é

$$f_{\vec{v}}(a, b) = f_x(a, b) \cdot v_x + f_y(a, b) \cdot v_y$$

O vetor gradiente de f no ponto P é

$$\nabla f(a, b) = f_x(a, b) \cdot \vec{i} + f_y(a, b) \cdot \vec{j}$$

Portanto, vale que $f_{\vec{v}}(a, b) = \langle \nabla f(a, b), \vec{v} \rangle$. Notando que \vec{v} é unitário, então

$$\langle \nabla f(a, b), \vec{v} \rangle = \|\nabla f(a, b)\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta = \|\nabla f(a, b)\| \cdot \cos \theta$$

Quando $\theta = 0$, a derivada direcional é a maior possível, e quando $\theta = \pi$, a derivada direcional é a menor possível.

Teorema: A direção em que f tem a maior taxa de variação é a do vetor gradiente.

2 Pontos Críticos e Pontos Extremais Locais

Dizemos que $P = (a, b)$ é um ponto máximo ou mínimo (extremal) local se existir um disco ao redor de P tal que para todo ponto (x, y) no disco, vale

$$f(x, y) \leq f(a, b) \quad (\text{máximo})$$

$$f(x, y) \geq f(a, b) \quad (\text{mínimo})$$

Se P é extremal, então $\nabla f(a, b) = \vec{0}$, e portanto $f_{\vec{v}}(a, b) = 0$.

Dizemos que P é um ponto crítico de f se $\nabla f(a, b) = \vec{0}$.

Obs.: Um ponto crítico pode não ser extremal.

2.1 Hessiana e discriminante

A matriz hessiana de uma função f em um ponto (a, b) é

$$H_f(a, b) = \begin{bmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{xy}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{bmatrix}$$

Se (a, b) é um ponto crítico de f , então o discriminante de f no ponto (a, b) é

$$D_f(a, b) = |H_f(a, b)|$$

Teorema: Se $D(a, b) > 0$, então (a, b) é um ponto extremal.

Se $D(a, b) < 0$, então (a, b) é um ponto de sela.

Teorema: Se (a, b) é um ponto extremal

- Se $f_{xx}(a, b) > 0$, então (a, b) é um ponto mínimo local.
- Se $f_{xx}(a, b) < 0$, então (a, b) é um ponto máximo local.

2.2 Máximos e mínimos em conjuntos compactos

Um conjunto C é compacto se

- C é limitado: o conjunto pode ser inteiramente contido em um disco.

$$\exists m : \forall (x, y) \in C : \sqrt{x^2 + y^2} < m$$

- C é fechado: toda sequência **convergente** $(y_n, x_n) \in C$ possui limite pertencente a C . (Borda)

$$\forall (x_n, y_n) \in C : \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) \in C$$

Teorema: Se f é uma função contínua e C é um conjunto compacto, então f tem extremais globais em C .