1 Curvas Parametrizadas

De modo geral, podemos descrever uma curva plana por uma parametrização:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) \qquad \text{onde } x(t) \text{ e } y(t) \text{ são funções da variável } t.$$

Exemplo:

$y = 2x \quad \rightarrow \quad \vec{r}(t) = (t, 2t)$

1.1 Vetor Tangente

O vetor tangente à curva $\vec{r}(t) = (x(t),\, y(t))$ em um ponto $(x(t_\lambda),\, y(t_\lambda))$ é:

$$\vec{v}(t_\lambda) = \vec{x}\,'(t_\lambda)\vec{i} \,+\, \vec{y}\,'(t_\lambda)\vec{j}$$

Denota-se $\vec{r}\,'(t_\lambda)$.

Exemplo:

Vetor tangente à curva $\vec{r}(t) = (t,\, 2t)$ no ponto $(3, 6)$:

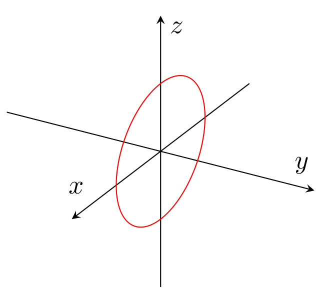
$$(3, 6) \;\Rightarrow\; t_\lambda = 3$$

$$\vec{x}\,'(t) = 1$$
$$\vec{y}\,'(t) = 2$$
$$\therefore$$
$$\vec{v}\,'(3) = \vec{i} + 2\vec{j}$$

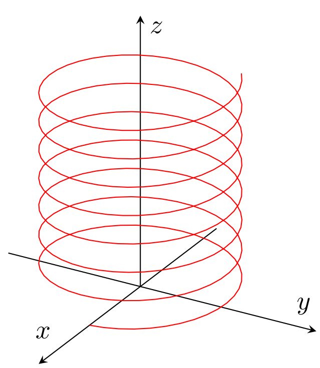
O respectivo vale para curvas no espaço.

1.2 Gráficos

$\vec{r}(t) = (\cos t, 0, \sin t)$



$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$



1.3 Comprimento de Curvas

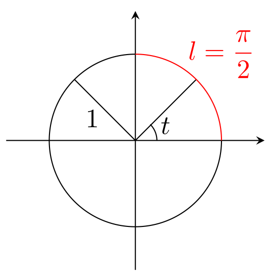
O comprimento de uma curva $\boldsymbol{\gamma}(t)$ no plano é dado por

$$\begin{aligned} l(\boldsymbol{\gamma}(t)) &= \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i \sqrt{\left(\frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{\Delta t}\right)^2} \cdot \Delta t \\ &= \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \cdot dt \end{aligned}$$

Para uma curva $\boldsymbol{\gamma}(t)$ no espaço, analogamente:

$$l(\boldsymbol{\gamma}(t)) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} \cdot dt$$

Exemplo:



$\boldsymbol{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t)$

Obtemos o arco acima variando t entre $a = 0$ e $b = \frac{\pi}{2}$.

Logo

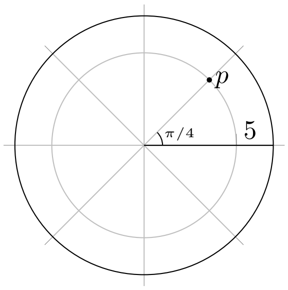
$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} \cdot dt \\ &= \int_0^{\pi/2} 1 \cdot dt \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

2 Coordenadas Polares

Um ponto em coordenadas polares é definido por um raio e um ângulo:

$$p = (r, \theta)_{polar}$$

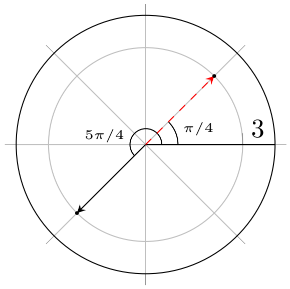
Exemplo: Se $p = \left(5, \frac{\pi}{4}\right)_{polar}$



<u>Convenções</u>:

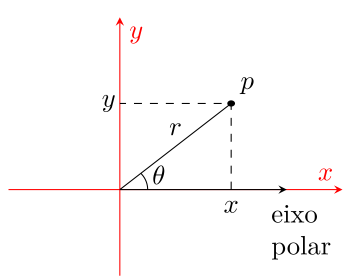
- $\theta > 0$ se medido, a partir do eixo polar, no sentido anti-horário.
- $\theta < 0$ se medido, a partir do eixo polar, no sentido horário.
- $(-r, \theta)_{polar} = (r, \theta - \pi)_{polar}$

  Exemplo: $(-3, \dfrac{\pi}{4}) = (3, \dfrac{5\pi}{4})$



- $\forall \theta : (0, \theta)_{polar} = 0$

2.1 Relação Entre Sistemas de Coordenadas



$$p = (r, \theta)_{polar} = (x, y)_{ret}$$

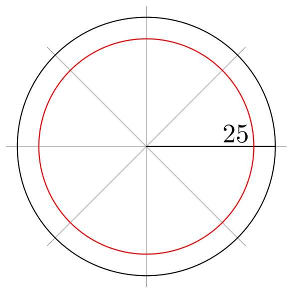
$$\begin{aligned} \forall r, \theta \ &: (r, \theta)_{polar} = (r \cdot \cos\theta,\ r \cdot \sin\theta)_{ret} \\ \forall x, y &: (x, y)_{ret} \quad = \left(\sqrt{x^2 + y^2},\ \arctan\frac{y}{x}\right)_{ret} \end{aligned}$$

2.2 Curvas Polares

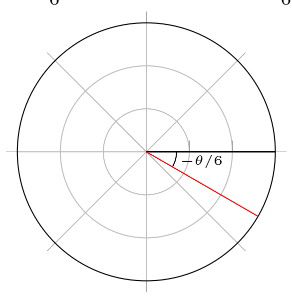
Uma curva polar é definida por uma equação entre as coordenadas polares dos pontos da curva (equação polar).

Exemplos: $r^2 + e^{r\theta} = 0$

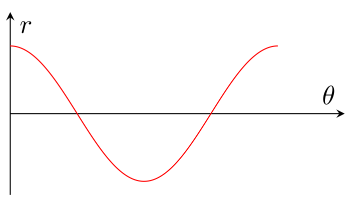
$0 \cdot \theta + r - 25 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 25$

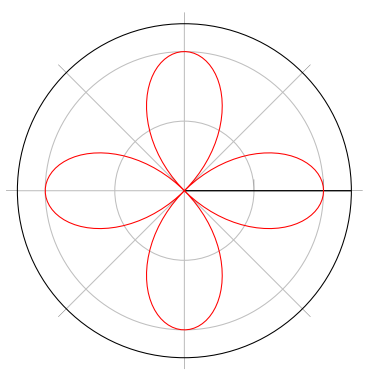


$\theta + \frac{\pi}{6} = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = -\frac{\pi}{6}$



$r = \cos(2\theta)$





3 Superfícies

Qual é o conjunto solução da equação $x^2 + y^2 + z^2 = 4$?

Resposta: uma esfera de raio 2 centrada na origem.

—Uncomment here—

3.1 Estratégias de esboço de superfícies no espaço

Identificar sua interseção com planos (cortes) que cobrem todo o espaço.

Exemplo: $S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 \right\}$

Cortes horizontais:

$$\begin{aligned} C_h &= S \cap \Pi_h \{\text{Plano horizontal de altura } h\} \\ &= S \cap \Pi_h \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = h \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} + \frac{h^2}{9} = 1 \right\} \end{aligned}$$

Para

$$\begin{aligned} h > 3 \quad &: \quad S \cap \Pi_h = \varnothing \\ h = 3 \quad &: \quad S \cap \Pi_3 = \{(0, 0, 3)\} \\ h < -3 \quad &: \quad S \cap \Pi_h - \varnothing \\ h = -3 \quad &: \quad S \cap \Pi_{-3} = \{(0, 0, -3)\} \\ |h| < 3 \quad &: \quad S \cap \Pi_h \\ &: \quad \text{Plano xz} \to S \cap \{y = 0\} \Rightarrow \left\{ (x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1 \right\} \therefore \text{Elipse} \\ &: \quad \text{Plano yz} \to S \cap \{x = 0\} \Rightarrow \left\{ (0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 \right\} \therefore \text{Elipse} \end{aligned}$$

Portanto, a superfície é um elipsóide de altura 6 e diâmetros 10 e 4.

3.2 Cilindros

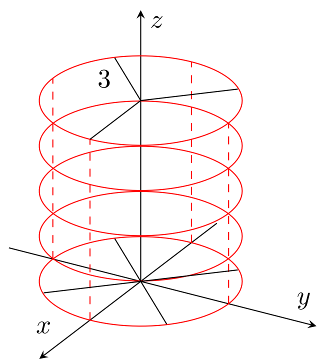
Um cilindro é um objeto construido através de uma curva $\boldsymbol{\gamma}$ no plano e um ângulo α.

O cilindro é o conjunto de todas as retas que possuem interseção com $\boldsymbol{\gamma}$, formando um ângulo equivalente à α com o plano de $\boldsymbol{\gamma}$.

Qual é a superfície descrita pela equação $x^2 + y^2 = 9$?

Qual é o objeto geométrico $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 9\}$?

Resposta: Cilindro. O conjunto é formado por todos os pontos do espaço cuja distância ao eixo z é 3.



3.3 Quádricas

As superfícies quádricas são soluções de equações da forma

$$ax^2 + by^2 + cz^2 \; + \; dxy + eyz + fxz \; + \; gx + hy + iz \; + \; j = 0$$

4 Funções de duas ou mais variáveis

Uma função de 2 variáveis é uma função do tipo

$$f : D \to \mathbb{R} \qquad \text{onde } D \subseteq \mathbb{R}^2$$

4.1 Gráficos

O gráfico de uma função $f : D \to \mathbb{R}$ de duas variáveis é o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ formado pelos pontos

$$(x,\, y,\, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \qquad \text{onde } (x,\, y) \in D$$

4.2 Curvas e Superfícies de Nível

Uma curva de nível de altura h de uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é o conjunto de pontos (x, y) do plano tais que

$$f(x, y) = h$$