1 Linguagens formais

1.1 Alfabetos

Um alfabeto é denotado por Σ. Exemplos:

$$\Sigma = \{\, 0, 1 \,\}$$
$$\Sigma = \{\, \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{e} \,\}$$
$$\Sigma = \{\, \triangle, \mathrm{O}, \square, \mathrm{X} \,\}$$

1.2 Palavras

Uma palavra (ou cadeia) é uma sequência de zero ou mais símbolos do alfabeto.

Notação:

$$\lambda = \varnothing$$
$$0^4 = 0000$$
$$\Sigma^3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$$
$$\Sigma^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma^i \quad \text{conjunto de todas as possíveis palavras deste alfabeto.}$$

Concatenação:

$$x = 00$$
$$y = 11$$
$$xy = 0011$$

Reverso:

$$(xy)^{\mathrm{R}} = 1100$$

Observação: uma palavra w é um palíndromo se, e somente se $w^{\mathrm{R}} = w$.

1.3 Linguagens

Uma linguagem é um conjunto de palavras $L \subseteq \Sigma^*$.

Operações:

$$L_1 L_2 = \{\, xy \mid x \in L_1,\, y \in L_2 \,\}$$

$$L^0 = \{\, \lambda \,\}$$
$$L^1 = L$$
$$L^2 = LL$$
$$L^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L^i \quad \text{Fecho de Kleene}$$
$$L^+ = \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} L^i$$
$$\varnothing^* = \{\, \lambda \,\}$$
$$\varnothing^+ = \varnothing$$

2 Autômatos

2.1 Determinísticos

Um autômato finito determinístico é definido por:

Q	Um conjunto finito de estados.
Σ	Um alfabeto finito.
$\delta : Q \times \Sigma \to Q$	Uma função de transição.
$q_o \in Q$	Um estado inicial.
$F \subseteq Q$	Um conjunto de estados finais.

Notação:

$L(M) = A$ A linguagem reconhecida pelo autômato M.

$L(M : F = \varnothing) = \varnothing$

$\hat{\delta}(e, w)$: aplicação sucessiva de δ aos símbolos de w.

2.1.1 Computação

Seja $M = (Q,\, \Sigma,\, \delta,\, q_0,\, F)$ um autômato finito determinístico, e $w \in \Sigma^*$.
Dizemos que M aceita w se existe uma **sequência** de estados $r_1, \ldots, r_n \in Q$ satisfazendo:

1. $r_0 = q_0$
2. $\forall\, i \in [0, n) : \delta(r_i,\, w_{i+1}) = r_{i+1}$
3. $r_n \in F$

Um autômato M reconhece uma linguagem L se $\forall\, w \in L : M$ aceita w.
Uma linguagem é regular se existe um autômato finito que a reconhece.

2.1.2 Minimização de estados

Dois estados e e e' são **equivalentes** se

$$\hat{\delta}(e, w) \in F \iff \hat{\delta}(e', w) \in F$$

O algoritmo de minimização, então, é:

1. Produza uma partição $P_0 = \{F,\, Q - F\}$ do conjunto de estados Q, em que os estados finais estão separados dos não finais.
2. Para cada bloco de estados B na partição $+latex_header : [margin = 2cm]geometry P_i$, cada símbolo s do alfabeto Σ, e cada par de estados $(e,\, e')$ contidos no bloco B:
   (a) Sejam $d = \delta(e, s)$ e $d' = \delta(e', s)$ os estados para os quais o AFD transita quando lê o sımbolo s a partir dos estados e e e', respectivamente.
   (b) Se d e d' pertencem a blocos diferentes na partiçãoo P_i, então os estados e e e' não são equivalentes, e devem ser separados na partição P_{i+1}.
3. Se a partição P_{i+1} for diferente da partiçãoo P_i, repita o passo 2.
4. O autômato mínimo é construído de tal forma que seus estados são os blocos da última partição P produzida.

2.2 Não determinísticos

Um autômato finito determinístico é definido por:

Q	Um conjunto finito de estados.
Σ	Um alfabeto finito.
$\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$	Uma função de transição.
$I \subseteq Q$	Um conjunto de estados iniciais.
$F \subseteq Q$	Um conjunto de estados finais.

Ainda, no AFN existe um estado especial, denonimado $\emptyset$, para o qual não se transita.
Sendo $a \in \Sigma$ um símbolo, e $w \in \Sigma^*$ uma palavra, define-se a função de transição estendida:

$$\hat{\delta}(\emptyset,\, w) = \{\emptyset\}$$

$$\hat{\delta}(X,\, \lambda) = X$$

$$\hat{\delta}(X,\, aw) = \hat{\delta}\left(\bigcup_{l \in X} \delta(l,\, a),\, w\right)$$

Teorema: Todo AFN possui um AFD equivalente.
Por construção:

$$Q = \mathcal{P}(Q_{\text{afn}})$$
$$\Sigma = \Sigma_{\text{afn}}$$
$$\delta(X, a) = \bigcup_{l \in X} \delta_{\text{afn}}(l,\, a)$$
$$q_o = I_{\text{afn}}$$
$$F = \{X \subseteq Q_{\text{afn}} \mid X \cap F \neq \varnothing\}$$

2.2.1 Transições λ

Um autômato finito não determinístico com transições λ introduz a possibilidade de transições sem a consumação de símbolos.