

# 1 Probabilidade

A probabilidade é o estudo das experiências aleatórias.

## Conceitos fundamentais

---

Experimento aleatório	Experimento cujo resultado não pode ser previsto com exatidão.
Espaço amostral ( $\Omega$ )	O conjunto de <u>todos</u> os resultados possíveis em uma experiência.
Evento	Um subconjunto de $\Omega$ .

## 1.1 Função Probabilidade

Uma função probabilidade é uma função do tipo  $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ .

Propriedades de uma função probabilidade:

- $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$
- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $\forall A_1, A_2, \dots, A_n$  disjuntos :  $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

## 1.2 Probabilidade Clássica

A função de probabilidade clássica para espaços equiprováveis é

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

## 1.3 Probabilidade Condicional

A probabilidade de um evento  $B$  acontecer dado um evento  $A$  é

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

O conjunto de eventos  $\{A_1, \dots, A_n\}$  forma uma partição de  $\Omega$  se e somente se

- $\forall i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset$  (Os eventos são disjuntos entre si)
- $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$

Teorema da probabilidade total: Dada uma partição  $\{A_1, \dots, A_n\}$

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

Teorema de Bayes: Dada uma partição  $\{A_1, \dots, A_n\}$

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B|A_j) \cdot P(A_j)}$$

## 1.4 Independência

Dois eventos  $A$  e  $B$  são independentes se e somente se

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Corolário: Se  $A$  e  $B$  são independentes, então  $P(A|B) = P(A)$ .

Isto significa que a ocorrência de um evento não afeta a probabilidade do outro numa mesma amostra. Portanto, eventos disjuntos não são independentes, pois não podem ocorrer simultaneamente.

Propriedade: Se  $A$  e  $B$  são independentes, então os seguintes conjuntos são independentes entre si:

- $A$  e  $B^c$
- $A^c$  e  $B$
- $A^c$  e  $B^c$

## 1.5 Variáveis Aleatórias

Uma variável aleatória é uma função que associa alguma propriedade de um resultado de um experimento aleatório a um número real.

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

A imagem de uma variável aleatória  $X$  é denotada por  $R_X$ .

Se  $R_X$  é um conjunto enumerável, dizemos que esta variável é discreta.

Se  $R_X$  é um conjunto não enumerável, dizemos que esta variável é contínua.

A função de probabilidade de uma variável aleatória assumir um valor  $c \in \mathbb{R}$  é

$$P(X = c)$$

Propriedades:

- $\forall x_i : 0 \leq P(X = x_i) \leq 1$
- $\sum_i P(X = x_i) = 1$

### 1.5.1 Distribuição

A distribuição de uma variável aleatória é definida por

$$\left\{ (x_i, P(X = x_i)) \mid i \in \mathbb{N}^* \right\}$$

A distribuição portanto define um gráfico em  $\mathbb{R}^2$  das probabilidades associadas aos valores que  $X$  assume.

A função de distribuição de uma variável aleatória  $X$  é

$$F(a) = P(X \leq a)$$

### 1.5.2 Esperança

Seja  $X$  uma variável aleatória com  $R_X = \{x_1, \dots, x_n\}$ .

A esperança matemática de  $X$  é a média dos valores de  $R_X$  ponderada pelas suas probabilidades.

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i)$$

Propriedades:

- Se  $X = c$ , então  $E(X) = c \cdot P(X = c) = c$
- Se  $Y = f(X)$ , então  $E(Y) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot P(X = x_i)$
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

### 1.5.3 Variância

A variância de uma variável aleatória  $X$  é

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= E[(X - E(X))^2] && \text{definição clássica de variancia} \\ &= E(X^2) - E(X)^2 && \text{fórmula reduzida} \end{aligned}$$

Propriedades:

- Se  $X = c$ , então  $\text{var}(X) = 0$
- Se  $Y = a \cdot X + b$ , então  $\text{var}(Y) = a^2 \cdot \text{var}(X)$

### 1.5.4 Desvio Padrão

O desvio padrão de uma variável aleatória  $X$  é

$$\text{dp}(X) = \sqrt{\text{var}(X)}$$

## 1.6 Modelos Discretos

### 1.6.1 Modelo Uniforme

Seja  $X$  uma variável aleatória com  $R_X = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Dizemos que  $X$  segue o modelo uniforme discreto se

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : P(X = x_i) = \frac{1}{n}$$

Denota-se  $X \sim U\{x_1, \dots, x_n\}$ .

Propriedades:

- $\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n P(X = x_i) = 1$
- $\text{var}(X) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \left( \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2$

## 1.7 Famílias de Eventos

Uma família de eventos é um conjunto de eventos.

A maior família de eventos é o conjunto potência de  $\Omega$ , denotado  $\mathcal{P}(\Omega)$ .

Propriedades das famílias de eventos:

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$
- $A, B \in \mathcal{F} \implies (A \cup B) \in \mathcal{F}$

## 1.8 Espaço de Probabilidade

Um espaço de probabilidade é uma tripla da forma  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

O espaço é associado à uma experiência aleatória.

### 1.8.1 Espaços Equiprováveis

Um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  é equiprovável quando

$$\forall a, b \in \Omega : P(a) = P(b) = \frac{1}{|\Omega|}$$

## 1.9 Densidade

A probabilidade de uma variável contínua estar em um intervalo  $[a, b]$  é

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx, \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

onde  $f$  é a função de densidade de probabilidade associada a  $X$ .

Uma função de densidade de probabilidade satisfaz as propriedades:

- $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0$ .
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ .

Teorema: Para qualquer distribuição, a probabilidade de uma variável aleatória estar em um intervalo é

$$P(m \leq x \leq n) = F(n) - F(m)$$

### 1.9.1 Distribuição Uniforme

A função densidade para uma distribuição uniforme é

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\omega} & 0 \leq x \leq \omega \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Já para uma distribuição uniforme reduzida a um intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

## 1.10 Densidade Normal Geral

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}\right)$$