

Conceitos fundamentais

A probabilidade é o estudo das experiências aleatórias.

Experimento aleatório Experimento cujo resultado não pode ser previsto com exatidão.

Espaço amostral (Ω) O conjunto de todos os resultados possíveis em uma experiência.

Evento Um subconjunto de Ω .

1 Função Probabilidade

Uma função probabilidade é uma função do tipo $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$.

Propriedades de uma função probabilidade:

- $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$
- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $\forall A_1, A_2, \dots, A_n$ disjuntos : $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

1.1 Probabilidade Clássica

A função de probabilidade clássica para espaços equiprováveis é

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

1.2 Probabilidade Condicional

A probabilidade de um evento B acontecer dado um evento A é

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

O conjunto de eventos $\{A_1, \dots, A_n\}$ forma uma partição de Ω se e somente se

- $\forall i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset$ (Os eventos são disjuntos entre si)
- $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$

Teorema da probabilidade total: Dada uma partição $\{A_1, \dots, A_n\}$

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

Teorema de Bayes: Dada uma partição $\{A_1, \dots, A_n\}$

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^n P(B|A_j) \cdot P(A_j)}$$

1.3 Independência

Dois eventos A e B são independentes se e somente se

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Corolário: Se A e B são independentes, então $P(A|B) = P(A)$.

Isto significa que a ocorrência de um evento não afeta a probabilidade do outro numa mesma amostra. Portanto, eventos disjuntos não são independentes, pois não podem ocorrer simultaneamente.

Propriedade: Se A e B são independentes, então os seguintes conjuntos são independentes entre si:

- A e B^c
- A^c e B
- A^c e B^c

2 Variáveis Aleatórias

Uma variável aleatória é uma função que associa alguma propriedade de um resultado de um experimento aleatório a um número real.

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

A imagem de uma variável aleatória X é denotada por R_X .

Se R_X é um conjunto enumerável, dizemos que esta variável é discreta.

Se R_X é um conjunto não enumerável, dizemos que esta variável é contínua.

A função de probabilidade de uma variável aleatória assumir um valor $c \in \mathbb{R}$ é

$$P(X = c)$$

Propriedades:

Se X for uma variável aleatória discreta:

- $\forall x_i : 0 \leq P(X = x_i) \leq 1$
- $\sum_i P(X = x_i) = 1$

Se X for uma variável aleatória contínua:

- $\forall a, b : 0 \leq P(X \in [a, b]) \leq 1$
- $\int P(X = x) dx = 1$
- $P(X = a) = 0$
- $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$

2.1 Densidade

Uma variável aleatória X é contínua se existe uma função associada $f(x)$ tal que

$$\begin{aligned} \forall x : f(x) &\geq 0 \\ \int f(x) dx &= 1 \end{aligned}$$

Tal função é chamada função de densidade da variável aleatória X .

A função de probabilidade para uma variável aleatória contínua X é

$$P(X \in [a, b]) = \int_a^b f(x) dx$$

2.2 Distribuição

A distribuição de uma variável aleatória é definida por

$$\left\{ (x, P(X = x)) \mid x \in R_X \right\}$$

A distribuição portanto define um gráfico em \mathbb{R}^2 das probabilidades associadas aos valores que X assume.

A função de distribuição de uma variável aleatória X é

$$F(a) = P(X \leq a)$$

$$F(a) = \sum_{x \in R_X}^a P(X = x) \quad X \text{ discreta.}$$

$$F(a) = \int_{-\infty}^a f(x) dx \quad X \text{ contínua.}$$

2.3 Esperança

A esperança é uma função que dá o valor esperado de uma variável aleatória.

Propriedades:

- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

2.3.1 Variável Aleatória Discreta

Seja X uma variável aleatória com $R_X = \{x_1, \dots, x_n\}$.

A esperança matemática de X é a média dos valores de R_X ponderada pelas suas probabilidades.

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i)$$

Propriedades:

- Se $X = c$, então $E(X) = c \cdot P(X = c) = c$

- Se $Y = f(X)$, então $E(Y) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot P(X = x_i)$

2.3.2 Variável Aleatória Contínua

Seja X uma variável aleatória com função de densidade $f(x)$.

A esperança de X é dada por

$$E(X) = \int x \cdot f(x) dx$$

2.4 Variância

A variância de uma variável aleatória X é

$$\begin{aligned}\text{var}(X) &= E[(X - E(X))^2] && \text{definição clássica de variância} \\ &= E(X^2) - E(X)^2 && \text{fórmula reduzida}\end{aligned}$$

2.4.1 Variável Aleatória Discreta

Seja X uma variável aleatória discreta.

Propriedades:

- Se $X = c$, então $\text{var}(X) = 0$
- Se $Y = a \cdot X + b$, então $\text{var}(Y) = a^2 \cdot \text{var}(X)$

2.4.2 Variável Aleatória Contínua

Seja X uma variável aleatória com função de densidade $f(x)$.

$$E(X^2) = \int x^2 \cdot f(x) \, dx$$

2.5 Desvio Padrão

O desvio padrão de uma variável aleatória X é

$$\text{dp}(X) = \sqrt{\text{var}(X)}$$

3 Modelos Discretos

3.1 Modelo Uniforme

Seja X uma variável aleatória com $R_X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Dizemos que X segue o modelo uniforme discreto se

$$\forall x \in R_X : P(X = x) = \frac{1}{n}$$

Denota-se $X \sim U\{x_1, \dots, x_n\}$.

Propriedades:

- $E(X) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}$
- $\text{var}(X) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2$

3.2 Modelo de Bernoulli

Seja X uma variável aleatória com $R_X = \{x_1, x_2\}$, sendo x_1 o sucesso do experimento, e x_2 o fracasso. Dizemos que X segue o modelo discreto de Bernoulli com parâmetro p se

$$0 < p < 1$$

$$P(X = x_1) = p$$

$$P(X = x_2) = 1 - p$$

Denota-se $X \sim \text{Ber}(p)$.

Propriedades:

- $E(X) = p$
- $\text{var}(X) = p$

3.3 Modelo Binomial

Seja X uma variável aleatória que conta os sucessos em n experimentos de Bernoulli(p).

A probabilidade de k sucessos é

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{(n-k)}$$

Denota-se $X \sim \text{Bin}(n, p)$.

Propriedades:

- $E(X) = np$
- $\text{var}(X) = np \cdot (1 - p)$

3.4 Modelo Geométrico

Seja X uma variável aleatória que conta as amostras até o primeiro sucesso em experimentos de Bernoulli(p).

A probabilidade de k amostras até o sucesso é

$$P(X = k) = p \cdot (1 - p)^{(k-1)}$$

Denota-se $X \sim \text{Geo}(p)$.

Propriedades:

- $E(X) = \frac{1}{p}$
- $\text{var}(X) = \frac{1 - p}{p^2}$

3.5 Modelo Binomial Negativo

Seja X uma variável aleatória que conta os sucessos em experimentos de Bernoulli(p). A probabilidade de k amostras até se obter r sucessos é

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} \cdot p^r \cdot (1-p)^{(k-r)}$$

Denota-se $X \sim \text{BN}(r, p)$.

Propriedades:

- $E(X) = \frac{r}{p}$
- $\text{var}(X) = \frac{r \cdot (1-p)}{p^2}$

3.6 Modelo Hipergeométrico

Considere N objetos, dos quais K são do tipo Γ e os demais de outro tipo.

Seja X uma variável aleatória que conta o número de objetos do tipo Γ em uma amostra de n objetos.

A probabilidade de haver k objetos deste tipo na amostra é

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Denota-se $X \sim \text{HG}(K, N, n)$.

Propriedades:

- $E(X) = \frac{nK}{N}$
- $\text{var}(X) = \frac{nK}{N} \cdot \left(1 - \frac{nK}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}$

3.7 Modelo de Poisson

Seja X uma variável aleatória tendo como imagem o conjunto \mathbb{N} .

Dizemos que X segue o modelo de Poisson com parâmetro λ se

$$\lambda > 0$$

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$$

Denota-se $X \sim P(\lambda)$.

Propriedades:

- $E(X) = \lambda$
- $\text{var}(X) = \lambda$

4 Modelos Contínuos

4.1 Modelo Uniforme

Seja X uma variável aleatória contínua com função de densidade $f(x)$.

Dizemos que X segue o modelo uniforme no intervalo $[a, b]$ se sua função de densidade é

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Denota-se $X \sim U(a, b)$.

Propriedades:

- $E(X) = \frac{a+b}{2}$
- $\text{var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

5 Famílias de Eventos

Uma família de eventos é um conjunto de eventos.

A maior família de eventos é o conjunto potência de Ω , denotado $\mathcal{P}(\Omega)$.

Propriedades das famílias de eventos:

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$
- $A, B \in \mathcal{F} \implies (A \cup B) \in \mathcal{F}$

6 Espaço de Probabilidade

Um espaço de probabilidade é uma tripla da forma (Ω, \mathcal{F}, P) .

O espaço é associado à uma experiência aleatória.

6.1 Espaços Equiprováveis

Um espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) é equiprovável quando

$$\forall a, b \in \Omega : P(a) = P(b) = \frac{1}{|\Omega|}$$

7 Densidade

A probabilidade de uma variável contínua estar em um intervalo $[a, b]$ é

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx, \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

onde f é a função de densidade de probabilidade associada a X .

Uma função de densidade de probabilidade satisfaz as propriedades:

- $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0.$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

Teorema: Para qualquer distribuição, a probabilidade de uma variável aleatória estar em um intervalo é

$$P(m \leq x \leq n) = f(n) - f(m)$$

7.1 Distribuição Uniforme

A função densidade para uma distribuição uniforme é

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\omega} & 0 \leq x \leq \omega \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Já para uma distribuição uniforme reduzida a um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

8 Densidade Normal Geral

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$