# 1 Probabilidade

A probabilidade é o estudo das experiências aleatórias.

**Conceitos fundamentais**

| | |
|---|---|
| Experimento aleatório | Experimento cujo resultado não pode ser previsto com exatidão. |
| Espaço amostral ($\Omega$) | O conjunto de todos os resultados possíveis em uma experiência. |
| Evento | Um subconjunto de $\Omega$. |

## 1.1 Função Probabilidade

Uma função probabilidade é uma função do tipo $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$.

Propriedades de uma função probabilidade:

- $P(\Omega) = 1,\ P(\varnothing) = 0$
- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $\forall\, A_1, A_2, \ldots, A_n$ disjuntos : $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

## 1.2 Probabilidade Clássica

A função de probabilidade clássica para espaços equiprováveis é

$$P(A) = \frac{|\, A \,|}{|\, \Omega \,|}$$

## 1.3 Probabilidade Condicional

A probabilidade de um evento $B$ acontecer dado um evento $A$ é

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

O conjunto de eventos $\{A_1, \ldots, A_n\}$ forma uma partição de $\Omega$ se e somente se

- $\forall\, i \neq j : A_i \cap A_j = \varnothing$ (Os eventos são disjuntos entre si)
- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

Teorema da probabilidade total: Dada uma partição $\{A_1, \ldots, A_n\}$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

Teorema de Bayes: Dada uma partição $\{A_1, \ldots, A_n\}$

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j) \cdot P(A_j)}$$

## 1.4 Independência

Dois eventos $A$ e $B$ são independentes se e somente se

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Corolário: Se $A$ e $B$ são independentes, então $P(A|B) = P(A)$.

Isto significa que a ocorrência de um evento não afeta a probabilidade do outro numa mesma amostra.
Portanto, eventos disjuntos não são independentes, pois não podem ocorrer simultaneamente.

Propriedade: Se $A$ e $B$ são independentes, então os seguintes conjuntos são independentes entre si:

- $A$ e $B^c$
- $A^c$ e $B$
- $A^c$ e $B^c$

---

## 1.5 Famílias de Eventos

Uma família de eventos é um conjunto de eventos.
A maior família de eventos é o conjunto potência de $\Omega$, denotado $\mathcal{P}(\Omega)$.

Propriedades das famílias de eventos:

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$
- $A, B \in \mathcal{F} \implies (A \cup B) \in \mathcal{F}$

## 1.6 Espaço de Probabilidade

Um espaço de probabilidade é uma tripla da forma $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
O espaço é associado à uma experiência aleatória.

### 1.6.1 Espaços Equiprováveis

Um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é equiprovável quando

$$\forall\, a, b \in \Omega : \; P(a) = P(b) = \frac{1}{|\,\Omega\,|}$$

## 1.7 Variáveis Aleatórias

Uma variável aleatória é uma função que associa alguma propriedade de dado resultado à um número real.

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

A probabilidade de uma variável aleatória assumir um valor $c \in \mathbb{R}$ é

$$P(X = c)$$

Se a imagem de $X$ é um conjunto enumerável, dizemos que esta variável é discreta.

Se a imagem de $X$ é um conjunto não enumerável, dizemos que esta variável é contínua.

### 1.7.1 Distruibuição

A distribuição de uma variável aleatória é definida por

$$P(X = x_k) \;\big|\; k \in \mathbb{N}^*$$

Propriedades:

- $0 \leq P(X = x_k) \leq 1$
- $\sum\limits_{k} P(X = x_k) = 1$

.

## 1.8 Densidade

A probabilidade de uma variável <u>contínua</u> estar em um invervalo $[a, b]$ é

$$P(a \leq X \leq b) = \int_b^a f(x)dx, \qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

onde $f$ é a função de densidade de probabilidade associada a $X$.

Uma função de densidade de probabilidade satisfaz as propriedades:

- $\forall\, x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0.$
- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

<u>Teorema</u>: Para qualquer distribuição, a probabilidade de uma variável aleatória estar em um intervalo é

$$P(m \leq x \leq n) = f(n) - f(m)$$

### 1.8.1 Distribuição Uniforme

A função densidade para uma ditribuição uniforme é

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega} & 0 \leq x \leq \omega \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Já para uma distribuição uniforme reduzida a um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

## 1.9 Esperança Matemática

Dada uma variável aleatória $X$, a esperança matemática de $X$ é

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot P(X = x_k) \qquad X \text{ discreto.}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx \qquad X \text{ contínuo.}$$

Propriedades:

- $\forall\, a \in \mathbb{R} : E(a) = a$
- $\forall\, a \in \mathbb{R} : E(aX) = a \cdot E(X)$
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(X^2) \geq E(X)^2$

## 1.10 Variância

A variância de uma variável aleatória $X$ é

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(X) &= E(X - E(X))^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$$

A covariância de duas variáveis aleatórias $X$ e $Y$ é

$$\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$$

Propriedades:

- $\forall\, a \in \mathbb{R} : \operatorname{var}(a) = 0$
- $\forall\, a \in \mathbb{R} : \operatorname{var}(aX) = a^2 \cdot \operatorname{var}(X)$
- $\operatorname{var}(X + Y) = \operatorname{var}(X) + \operatorname{var}(Y) + 2 \cdot \operatorname{cov}(X, Y)$
- $X$ e $Y$ independentes $\implies \operatorname{cov}(X, Y) = 0 \implies \operatorname{var}(X + Y) = \operatorname{var}(X) + \operatorname{var}(Y)$

## 1.11 Desvio Padrão

O desvio padrão de uma variável aleatória $X$ é

$$\begin{aligned} \operatorname{dp}(X) &= \sqrt{\operatorname{var}(X)} \\ &= \sqrt{E(X - E(X))^2} \end{aligned}$$

### 1.12 Densidade Normal Geral

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}\right)$$