Conceitos fundamentais

A probabilidade é o estudo das experiências aleatórias.

Experimento aleatório	Experimento cujo resultado não pode ser previsto com exatidão.
Espaço amostral (Ω)	O conjunto de todos os resultados possíveis em uma experiência.
Evento	Um subconjunto de Ω.

1 Função Probabilidade

Uma função probabilidade é uma função do tipo $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$.

Propriedades de uma função probabilidade:

- $P(\Omega) = 1,\ P(\varnothing) = 0$
- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $\forall\, A_1, A_2, \ldots, A_n$ disjuntos : $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

1.1 Probabilidade Clássica

A função de probabilidade clássica para espaços equiprováveis é

$$P(A) = \frac{|\ A\ |}{|\ \Omega\ |}$$

1.2 Probabilidade Condicional

A probabilidade de um evento B acontecer dado um evento A é

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

O conjunto de eventos $\{A_1, \ldots, A_n\}$ forma uma partição de Ω se e somente se

- $\forall\, i \neq j : A_i \cap A_j = \varnothing$ (Os eventos são disjuntos entre si)
- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

Teorema da probabilidade total: Dada uma partição $\{A_1, \ldots, A_n\}$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

Teorema de Bayes: Dada uma partição $\{A_1, \ldots, A_n\}$

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j) \cdot P(A_j)}$$

1.3 Independência

Dois eventos A e B são independentes se e somente se

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Corolário: Se A e B são independentes, então $P(A|B) = P(A)$.

Isto significa que a ocorrência de um evento não afeta a probabilidade do outro numa mesma amostra. Portanto, eventos disjuntos não são independentes, pois não podem ocorrer simultaneamente.

Propriedade: Se A e B são independentes, então os seguintes conjuntos são independentes entre si:

- A e B^c
- A^c e B
- A^c e B^c

2 Variáveis Aleatórias

Uma variável aleatória é uma função que associa alguma propriedade de um resultado de um experimento aleatório à um número real.

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

A imagem de uma variável aleatória X é denotada por R_X.

Se R_X é um conjunto enumerável, dizemos que esta variável é discreta.
Se R_X é um conjunto não enumerável, dizemos que esta variável é contínua.

A função de probabilidade de uma variável aleatória assumir um valor $c \in \mathbb{R}$ é

$$P(X = c)$$

Propriedades:

Se X for uma varíavel aleatória discreta:

- $\forall\, x_i :\ 0 \leq P(X = x_i) \leq 1$
- $\sum\limits_i P(X = x_i) = 1$

Se X for uma variável aleatória contínua:

- $\forall\, a, b :\ 0 \leq P(X \in [a, b]) \leq 1$
- $\int P(X = x)\, dx = 1$
- $P(X = a) = 0$
- $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$

2.1 Densidade

Uma variável aleatória X é contínua se existe uma função associada $f(x)$ tal que

$$\forall\, x : f(x) \geq 0$$
$$\int f(x)\, dx = 1$$

Tal função é chamada função de densidade da variável aleatória X.

A função de probabilidade para uma variável aleatória contínua X é

$$P\big(X \in [a, b]\big) = \int\limits_a^b f(x)\, dx$$

2.2 Distruibuição

A distribuição de uma variável aleatória é definida por

$$\Big\{ \big(x \, , \; P(X = x) \big) \;\Big|\; x \in R_X \Big\}$$

A distribuição portanto define um gráfico em $\mathbb{R}^2$ das probabilidades associadas aos valores que X assume.

A função de distribuição de uma variável aleatória X é

$$F(a) = P(X \leq a)$$

$$F(a) = \sum_{x \in R_X}^{a} P(X = x) \qquad\qquad X \text{ discreta.}$$

$$F(a) = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\, dx \qquad\qquad X \text{ contínua.}$$

2.3 Esperança

A esperança é uma função que dá o valor esperado de uma variável aleatória.

Propriedades:

- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

2.3.1 Variável Aleatória Discreta

Seja X uma variável aleatória com $R_X = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
A esperança matemática de X é a média dos valores de R_X ponderada pelas suas probabilidades.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$$

Propriedades:

- Se $X = c$, então $E(X) = c \cdot P(X = c) = c$
- Se $Y = f(X)$, então $E(Y) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot P(X = x_i)$

2.3.2 Variável Aleatória Contínua

Seja X uma variável aleatória com função de densidade $f(x)$.
A esperança de X é dada por

$$E(X) = \int x \cdot f(x) \; dx$$

2.4 Variância

A variância de uma variável aleatória X é

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(X) &= E[(X - E(X))^2] && \text{definição clássica de variância} \\ &= E(X^2) - E(X)^2 && \text{fórmula reduzida} \end{aligned}$$

2.4.1 Variável Aleatória Discreta

Seja X uma variável aleatória discreta.

Propriedades:

- Se $X = c$, então $\mathrm{var}(X) = 0$
- Se $Y = a \cdot X + b$, então $\mathrm{var}(Y) = a^2 \cdot \mathrm{var}(X)$

2.4.2 Variável Aleatória Contínua

Seja X uma variável aleatória com função de densidade $f(x)$.

$$E(X^2) = \int x^2 \cdot f(x)\ dx$$

2.5 Desvio Padrão

O desvio padrão de uma variável aleatória X é

$$\mathrm{dp}(X) = \sqrt{\mathrm{var}(X)}$$

3 Modelos Discretos

3.1 Modelo Uniforme

Seja X uma variável aleatória com $R_X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Dizemos que X segue o modelo uniforme discreto se

$$\forall\, x \in R_X :\ P(X = x) = \frac{1}{n}$$

Denota-se $X \sim \mathrm{U}\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Propriedades:

- $E(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$
- $\mathrm{var}(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \right)^2$

3.2 Modelo de Bernoulli

Seja X uma variável aleatória com $R_X = \{x_1, x_2\}$, sendo x_1 o sucesso do experimento, e x_2 o fracasso.
Dizemos que X segue o modelo discreto de Bernoulli com parâmetro p se

$$0 < p < 1$$

$$P(X = x_1) = p$$
$$P(X = x_2) = 1 - p$$

Denota-se $X \sim \mathrm{Ber}(p)$.

Propriedades:

- $E(X) = p$
- $\mathrm{var}(X) = p$

3.3 Modelo Binomial

Seja X uma variável aleatória que conta os sucessos em n experimentos de Bernoulli(p).
A probabilidade de k sucessos é

$$P(X = k) \;=\; \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{(n-k)}$$

Denota-se $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$.

Propriedades:

- $E(X) = np$
- $\mathrm{var}(X) = np \cdot (1 - p)$

3.4 Modelo Geométrico

Seja X uma variável aleatória que conta as amostras até o primeiro sucesso em experimentos de Bernoulli(p).
A probabilidade de k amostras até o sucesso é

$$P(X = k) \;=\; p \cdot (1 - p)^{(k-1)}$$

Denota-se $X \sim \mathrm{Geo}(p)$.

Propriedades:

- $E(X) = \dfrac{1}{p}$
- $\mathrm{var}(X) = \dfrac{1 - p}{p^2}$

3.5 Modelo Binomial Negativo

Seja X uma variável aleatória que conta os sucessos em experimentos de Bernoulli(p).
A probabilidade de k amostras até se obter r sucessos é

$$P(X = k) \;=\; \binom{k-1}{r-1} \cdot p^r \cdot (1-p)^{(k-r)}$$

Denota-se $X \sim \mathrm{BN}(r, p)$.

Propriedades:

- $E(X) = \dfrac{r}{p}$
- $\mathrm{var}(X) = \dfrac{r \cdot (1-p)}{p^2}$

3.6 Modelo Hipergeométrico

Considere N objetos, dos quais K são do tipo Γ e os demais de outro tipo.
Seja X uma variável aleatória que conta o número de objetos do tipo Γ em uma amostra de n objetos.
A probabilidade de haver k objetos deste tipo na amostra é

$$P(X = k) \;=\; \frac{\dbinom{K}{k} \cdot \dbinom{N-K}{n-k}}{\dbinom{N}{n}}$$

Denota-se $X \sim \mathrm{HG}(K, N, n)$.

Propriedades:

- $E(X) = \dfrac{nK}{N}$
- $\mathrm{var}(X) = \dfrac{nK}{N} \cdot \left(1 - \dfrac{nK}{N}\right) \cdot \dfrac{N-n}{N-1}$

3.7 Modelo de Poisson

Seja X uma variável aleatória tendo como imagem o conjunto $\mathbb{N}$.
Dizemos que X segue o modelo de Poisson com parâmetro λ se

$$\lambda > 0$$

$$P(X = k) \;=\; \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$$

Denota-se $X \sim \mathrm{P}(\lambda)$.

Propriedades:

- $E(X) = \lambda$
- $\mathrm{var}(X) = \lambda$

4 Modelos Contínuos

4.1 Modelo Uniforme

Seja X uma variável aleatória com função de densidade $f(x)$.
Dizemos que X segue o modelo uniforme no intervalo $[a, b]$ se sua função de densidade é

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Denota-se $X \sim \mathrm{U}(a, b)$.

Propriedades:

- $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$
- $\mathrm{var}(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

4.2 Modelo Exponencial

Seja X uma variável aleatória com função de densidade $f(x)$.
Dizemos que X segue o modelo exponencial com parâmetro λ se

$$\lambda > 0$$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{(-\lambda \cdot x)} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Denota-se $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

Propriedades:

- $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$
- $\mathrm{var}(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$
- $P\left(X > (s+t) \,\middle|\, X > s\right) = P(X > t)$

4.3 Modelo Normal

Seja X uma variável aleatória com função de densidade $f(x)$.
Dizemos que X segue o modelo normal com parâmetros μ e σ^2 se

$$\sigma^2 > 0$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Denota-se $X \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$.

Propriedades:

- $E(X) = \mu$
- $\mathrm{var}(X) = \sigma^2$

4.3.1 Normal Padrão

Dizemos que X segue o modelo normal padrão se $X \sim \mathrm{N}(0, 1)$.

Teorema: Se $X \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$, então

$$\left(Z = \frac{X - \mu}{\sigma}\right) \sim \mathrm{N}(0, 1)$$

---

5 Famílias de Eventos

Uma família de eventos é um conjunto de eventos.
A maior família de eventos é o conjunto potência de Ω, denotado $\mathcal{P}(\Omega)$.

Propriedades das famílias de eventos:

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$
- $A, B \in \mathcal{F} \implies (A \cup B) \in \mathcal{F}$

6 Espaço de Probabilidade

Um espaço de probabilidade é uma tripla da forma $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
O espaço é associado à uma experiência aleatória.

6.1 Espaços Equiprováveis

Um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é equiprovável quando

$$\forall\, a, b \in \Omega: \; P(a) = P(b) = \frac{1}{|\,\Omega\,|}$$

7 Densidade

A probabilidade de uma variável contínua estar em um invervalo $[a, b]$ é

$$P(a \leq X \leq b) = \int_b^a f(x)dx, \qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

onde f é a função de densidade de probabilidade associada a X.

Uma função de densidade de probabilidade satisfaz as propriedades:

- $\forall\, x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0$.
- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Teorema: Para qualquer distribuição, a probabilidade de uma variável aleatória estar em um intervalo é

$$P(m \leq x \leq n) = f(n) - f(m)$$

7.1 Distribuição Uniforme

A função densidade para uma ditribuição uniforme é

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega} & 0 \leq x \leq \omega \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Já para uma distribuição uniforme reduzida a um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

8 Densidade Normal Geral

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}\right)$$