1 Probabilidade

A probabilidade é o estudo das experiências aleatórias.

Conceitos fundamentais

Experimento aleatório	Experimento cujo resultado não pode ser previsto com exatidão.
Espaço amostral (Ω)	O conjunto de todos os resultados possíveis em uma experiência.
Evento	Um subconjunto de Ω.

1.1 Função Probabilidade

Uma função probabilidade é uma função do tipo $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$.

Propriedades de uma função probabilidade:

- $P(\Omega) = 1,\ P(\varnothing) = 0$
- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $\forall\, A_1, A_2, \ldots, A_n$ disjuntos : $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

1.2 Probabilidade Clássica

A função de probabilidade clássica para espaços equiprováveis é

$$P(A) = \frac{\mid A \mid}{\mid \Omega \mid}$$

1.3 Probabilidade Condicional

A probabilidade de um evento B acontecer dado um evento A é

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Teorema de Bayes:

$$P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)} \cdot P(A|B)$$

1.4 Probabilidade Total

1.4.1 Partição

O conjunto de eventos $\{A_1, \ldots, A_n\}$ forma uma partição de Ω se e somente se

- $\forall\, i \neq j : A_i \cap A_j = \varnothing$ (Os eventos são disjuntos entre si)
- $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

Teorema da probabilidade total: Dada uma partição $\{A_1, \ldots, A_n\}$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

1.4.2 Independência

Dois eventos A e B são independentes se e somente se

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Portanto, elementos disjuntos não são independentes, pois não podem ocorrer simultaneamente.

Corolário: Se A e B são independentes, então $P(A|B) = P(A)$.

Propriedade: Se A e B são independentes, então os seguintes conjuntos são independentes entre si:

- A e B^c
- A^c e B
- A^c e B^c

1.5 Famílias de Eventos

Uma família de eventos é um conjunto de eventos.
A maior família de eventos é o conjunto potência de Ω, denotado $\mathcal{P}(\Omega)$.

Propriedades das famílias de eventos:

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$
- $A, B \in \mathcal{F} \implies (A \cup B) \in \mathcal{F}$

1.6 Espaço de Probabilidade

Um espaço de probabilidade é uma tripla da forma $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
O espaço é associado à uma experiência aleatória.

1.6.1 Espaços Equiprováveis

Um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ é equiprovável quando

$$\forall\, a, b \in \Omega : \; P(a) = P(b) = \frac{1}{|\,\Omega\,|}$$

1.7 Variáveis Aleatórias

Uma variável aleatória é uma função que associa alguma propriedade de dado resultado à um número real.

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

A probabilidade de uma variável aleatória assumir um valor $c \in \mathbb{R}$ é

$$P(X = c)$$

Se a imagem de X é um conjunto enumerável, dizemos que esta variável é discreta.

Se a imagem de X é um conjunto não enumerável, dizemos que esta variável é contínua.

1.7.1 Distruibuição

A distribuição de uma variável aleatória é definida por

$$P(X = x_k) \mid k \in \mathbb{N}^*$$

Propriedades:

- $0 \leq P(X = x_k) \leq 1$
- $\sum\limits_k P(X = x_k) = 1$

.

1.8 Densidade

A probabilidade de uma variável contínua estar em um invervalo $[a, b]$ é

$$P(a \leq X \leq b) = \int_b^a f(x)dx, \qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$

onde f é a função de densidade de probabilidade associada a X.

Uma função de densidade de probabilidade satisfaz as propriedades:

- $\forall\, x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0.$
- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

Teorema: Para qualquer distribuição, a probabilidade de uma variável aleatória estar em um intervalo é

$$P(m \leq x \leq n) = f(n) - f(m)$$

1.8.1 Distribuição Uniforme

A função densidade para uma ditribuição uniforme é

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\omega} & 0 \leq x \leq \omega \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Já para uma distribuição uniforme reduzida a um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

1.9 Esperança Matemática

Dada uma variável aleatória X, a esperança matemática de X é

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot P(X = x_k) \qquad X \text{ discreto.}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx \qquad X \text{ contínuo.}$$

Propriedades:

- $\forall\, a \in \mathbb{R} : E(a) = a$
- $\forall\, a \in \mathbb{R} : E(aX) = a \cdot E(X)$
- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(X^2) \geq E(X)^2$

1.10 Variância

A variância de uma variável aleatória X é

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(X) &= E(X - E(X))^2 \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$$

A covariância de duas variáveis aleatórias X e Y é

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$$

Propriedades:

- $\forall\, a \in \mathbb{R} : \operatorname{var}(a) = 0$
- $\forall\, a \in \mathbb{R} : \operatorname{var}(aX) = a^2 \cdot \operatorname{var}(X)$
- $\operatorname{var}(X+Y) = \operatorname{var}(X) + \operatorname{var}(Y) + 2 \cdot \operatorname{cov}(X,Y)$
- X e Y independentes $\implies \operatorname{cov}(X,Y) = 0 \implies \operatorname{var}(X+Y) = \operatorname{var}(X) + \operatorname{var}(Y)$

1.11 Desvio Padrão

O desvio padrão de uma variável aleatória X é

$$\begin{aligned} \operatorname{dp}(X) &= \sqrt{\operatorname{var}(X)} \\ &= \sqrt{E(X - E(X))^2} \end{aligned}$$

1.12 Densidade Normal Geral

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}\right)$$