

# 1 Probabilidade

A probabilidade é o estudo das experiências aleatórias.

Espaço amostral: denotado por  $\Omega$ , é o conjunto de todos os resultados possíveis em uma experiência.

Evento: é um subconjunto de  $\Omega$  ao qual é associado uma probabilidade em uma amostragem aleatória.

## 1.1 Famílias de Eventos

Uma família de eventos é um conjunto de eventos.

A maior família de eventos é o conjunto potência de  $\Omega$ , denotado  $\mathcal{P}(\Omega)$ .

Propriedades das famílias de eventos:

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F} \implies A^c \in \mathcal{F}$
- $A, B \in \mathcal{F} \implies (A \cup B) \in \mathcal{F}$

## 1.2 Função Probabilidade

Uma função probabilidade é uma função do tipo  $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ .

Propriedades de uma função probabilidade:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$

## 1.3 Espaço de Probabilidade

Um espaço de probabilidade é uma tripla da forma  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

O espaço é associado à uma experiência aleatória.

### 1.3.1 Espaços Equiprováveis

Um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  é equiprovável quando

$$\forall a, b \in \Omega : P(a) = P(b) = \frac{1}{|\Omega|}$$

## 1.4 Probabilidade Clássica

A função de probabilidade clássica para espaços equiprováveis é

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

## 1.5 Probabilidade Condicional

A probabilidade de um evento  $B$  acontecer dado um evento  $A$  é

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Teorema de Bayes:

$$P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)} \cdot P(A|B)$$

## 1.6 Probabilidade Total

### 1.6.1 Partição

Sejam os eventos  $A_1, \dots, A_n$ . O conjunto  $\{A_1, A_n\}$  forma uma partição de  $\Omega$  se e somente se

- Os eventos são disjuntos entre si:  $\forall i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset$
- $A_1 \cup \dots \cup A_n = \Omega$

Teorema:

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(A_k) \cdot P(B|A_k)$$

### 1.6.2 Independência

Dois eventos  $A$  e  $B$  são independentes se e somente se

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Portanto, elementos disjuntos não são independentes, pois não podem ocorrer simultaneamente.

Corolário: Se  $A$  e  $B$  são independentes, então  $P(A|B) = P(A)$ .

Propriedade: Se  $A$  e  $B$  são independentes, então os seguintes conjuntos são independentes entre si:

- $A$  e  $B^c$
- $A^c$  e  $B$
- $A^c$  e  $B^c$

## 1.7 Variáveis Aleatórias

Uma variável aleatória é uma função que associa alguma propriedade de dado resultado à um número real.

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

A probabilidade de uma variável aleatória assumir um valor  $c \in \mathbb{R}$  é

$$P(X = c)$$

Se a imagem de  $X$  é um conjunto enumerável, dizemos que esta variável é discreta.

Se a imagem de  $X$  é um conjunto não enumerável, dizemos que esta variável é contínua.

### 1.7.1 Distribuição

A distribuição de uma variável aleatória é definida por

$$P(X = x_k) \mid k \in \mathbb{N}^*$$

Propriedades:

- $0 \leq P(X = x_k) \leq 1$
- $\sum_k P(X = x_k) = 1$

## 1.8 Densidade

A probabilidade de uma variável contínua estar em um intervalo  $[a, b]$  é

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx, \quad f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

onde  $f$  é a função de densidade de probabilidade associada a  $X$ .

Uma função de densidade de probabilidade satisfaz as propriedades:

- $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0$ .
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ .

### 1.8.1 Distribuição Uniforme

A função densidade para uma distribuição uniforme é

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\omega} & 0 \leq x \leq \omega \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Já para uma distribuição uniforme reduzida a um intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$P(m \leq x \leq n) = f(n) - f(m)$$