

L'elemento detto **modulo** \bar{z} $|z| = (z \cdot \bar{z})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ per cui ho che $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Valgono anche

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$

per il modulo:

$$|z| \geq 0 \text{ e } z=0 \Leftrightarrow |z|=0$$

$$|z| = |\bar{z}|$$

$$|\operatorname{Re}(z)|, |\operatorname{Im}(z)| \leq |z| \text{ e } |z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

ESERCIZIO

Semplificare e Trovare le soluzioni di $z^2 + i(\operatorname{Im} z) + z\bar{z} = 0$

Pongo $z = a + ib$ per cui ottengo $(a + ib)^2 + i(b) + 2(a + ib) = 0$

da cui:

$$a^2 - b^2 + 2a + i(2ab - b) = 0$$

$$\underbrace{(a^2 - b^2 + 2a)}_{\downarrow} + i \underbrace{(2ab - b)}_{\downarrow} = \underbrace{0}_{\downarrow} + i \underbrace{0}_{\downarrow}$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + 2a = 0 \\ 2ab - b = 0 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + 2a = 0 \\ b(2a - 1) = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} a^2 - b^2 + 2a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \downarrow$$

$$\begin{cases} a^2 + 2a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \downarrow$$

$$\begin{cases} a(a + 2) = 0 \\ b = 0 \end{cases} \downarrow$$



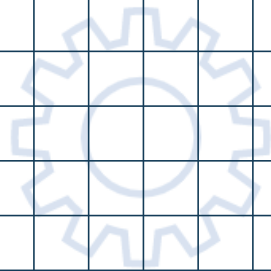
$$\begin{cases} a^2 - b^2 + 2a = 0 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \downarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4} - b^2 + 1 = 0 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \downarrow$$

$$\begin{cases} b^2 = \frac{5}{4} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \downarrow$$

ma poiché va bene in qualsiasi ϵ , ponendo $\epsilon \rightarrow 0$ perció

$$-2\pi i \oint_{\gamma} \frac{f(z_0) + \underbrace{f(w)}_{w=w_0}}{w - w_0} dw = 0 \Rightarrow f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - w_0} dw$$



APPUNTI DI INGEGNERIA INFORMATICA

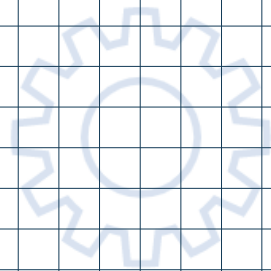
GAIA BERTOLINO

$$\frac{dy}{dy} = \beta = 6xy + 4x = 6xy + 4x + c'(y)$$

$$c'(y) = 0 \Rightarrow c(y) = C$$

Donque $v(x, y) = 3xy^2 + 4xy - x^3 + C$ parció contibuida si ottiene

$$p(z) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2 + i(3xy^2 + 4xy - x^3 + C)$$



APPUNTI DI INGEGNERIA INFORMATICA

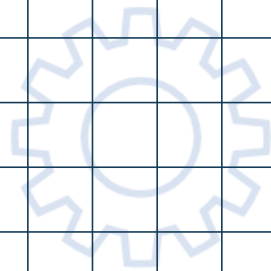
GAIA BERTOLINO

Dim: ① $k=0 \Rightarrow a_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \Big|_{z=0} = a_0$

$k!$ (infatti)

② $k \neq 0 \Rightarrow \frac{d^k}{dz^k} s = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \frac{d^k}{dz^k} z^n = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n k! z^{n-k} \Big|_{z=0} = a_k k!$

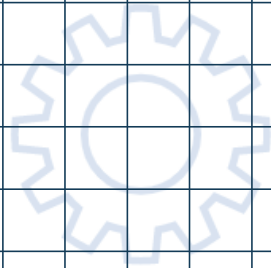
$$a_k = \frac{\frac{d^k}{dz^k} s(0)}{k!}$$



APPUNTI DI INGEGNERIA INFORMATICA

GAIA BERTOLINO

Daque azzo cto $\oint_{\gamma} = \oint_{\gamma_1} + \oint_{\gamma_2} = \frac{\pi i}{8} \left(e - \frac{5}{e^3} \right)$



APPUNTI DI INGEGNERIA INFORMATICA

GAIA BERTOLINO

dunque $\log z = \log|z| + i \arg(z)$ e il
logaritmo è una funzione multivalore. Tuttavia

si può operare una restrizione a $[0, 2\pi]$

ESEMPIO

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^2} dx = \lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \varepsilon \rightarrow 0^+}} \int_{\varepsilon}^R \frac{\log x}{1+x^2} dx \quad \text{piano reale}$$

oppure

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^2} dx \quad \text{nel piano complesso}$$

$$f(z) = \log|z| + i\theta \quad \text{con } \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$$

$$\int_{\varepsilon}^R \frac{\log x}{1+x^2} dx = \int_{[\varepsilon, R]} \frac{p(z)}{z^2+1} dz$$

da finire

② $z^u = w \Rightarrow$ l'operazione inversa è una radice
ma non è una funzione invertibile e
definita univocamente

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$$

$$= -i \oint_C \frac{dz}{z \left(\frac{z^2 + 1 + 4z}{z^2} \right)^2} = -4i \oint_C \frac{z dz}{(z^2 + 4z + 1)^2}$$

I punti di discontinuità sono $z^2 + 4z + 1 = 0$ $\begin{cases} z_1 = -2 + \sqrt{3} \text{ interno con mod. } 1 \\ z_2 = -2 - \sqrt{3} \text{ esterno con mod. } 1 \end{cases}$

Donque ottengo $-4i \oint_C = -4i \cdot 2\pi i \cdot \text{Res}(f, -2 + \sqrt{3})$

Calcolo il residuo $\text{Res}(f, -2 + \sqrt{3}) = \lim_{z \rightarrow -2 + \sqrt{3}} \frac{d}{dz} \left[\frac{(z + 2 - \sqrt{3})^2 \cdot z}{(z + 2 - \sqrt{3})^2 (z + 2 + \sqrt{3})^2} \right] =$

$$= \lim_{z \rightarrow -2 + \sqrt{3}} \frac{d}{dz} \left[\frac{z}{(z + 2 + \sqrt{3})^2} \right] = \lim_{z \rightarrow -2 + \sqrt{3}} \frac{(z + 2 + \sqrt{3})^2 - 2z(z + 2 + \sqrt{3})}{(z + 2 + \sqrt{3})^4} =$$

$$= \lim_{z \rightarrow -2 + \sqrt{3}} \frac{\cancel{(z + 2 + \sqrt{3})} (z + 2 + \sqrt{3} - 2z)}{(z + 2 + \sqrt{3})^3} = \frac{4}{(2\sqrt{3})^3} = \frac{4}{8 \cdot 3\sqrt{3}}$$

Donque ottengo che

$$-4i \oint_C = -4i \cdot 2\pi i \cdot \text{Res}(f, -2 + \sqrt{3}) = -4i \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{3 \cdot 8\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

