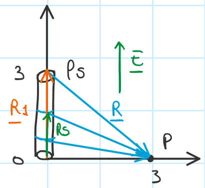
ed $\underline{E} = \hat{z} \cdot \frac{\rho_S}{2\varepsilon}\left(1 - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

Esercizio

Data $\rho_e = 10 \cdot 10^{-9}$ C e $P_S(0,3,0)$ calcolare il campo in $P(3,0,0)$



L'elemento infinitesimo di campo elettrico è $d\underline{E} = \hat{i}_R \frac{dq}{4\pi\varepsilon R^2}$

Sapendo che $\rho_e = \frac{dq}{dl} \Rightarrow dq = \rho_e dl = \rho_e dy$

Si pone $\underline{R} = \underline{R_1} - \underline{R_S}$ e sapendo che $\underline{R_1} = 3\hat{x}$ e $\underline{R_S} = y\hat{y}$ allora

$\underline{R} = 3\hat{x} - y\hat{y}$ e $\hat{i}_R = \frac{\underline{R}}{|\underline{R}|} = \frac{3\hat{x} - y\hat{y}}{\sqrt{9+y^2}}$

Ne deriva che $\underline{E} = \int_0^3 \frac{(3\hat{x} - y\hat{y})}{\sqrt{9+y^2}} \frac{\rho_e\, dy}{4\pi\varepsilon(\sqrt{9+y^2})^2} = \frac{\rho_e}{4\pi\varepsilon}\int_0^3 \frac{(3\hat{x} - y\hat{y})}{(9+y^2)^{3/2}}dy =$

$$= \frac{\rho_e}{4\pi\varepsilon}\left[\int_0^3 \frac{3\hat{x}}{(9+y^2)^{3/2}}dy - \boxed{\int_0^3 \frac{y\hat{y}}{(9+y^2)^{3/2}}dy}\right] = \frac{\rho_e}{4\pi\varepsilon}\left[\left(3\hat{x}\frac{y}{9\sqrt{9+y^2}}\Big|_0^3\right) - \hat{y}\left(-\frac{1}{\sqrt{y^2+a}}\Big|_0^3\right)\right] =$$

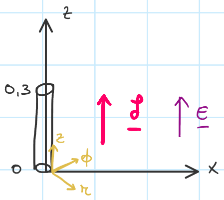
integrale notevole

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$= \frac{\rho_e}{4\pi\varepsilon}\left[3\hat{x}\frac{3}{9\sqrt{9+3}} - \hat{y}\left(-\frac{1}{\sqrt{18}} + \frac{1}{3}\right)\right] = \frac{\rho_e}{4\pi\varepsilon}\left[0{,}23\,\hat{x} - 0{,}09\,\hat{y}\right]\left[\frac{V}{m}\right]$$

Esercizio

Dato un filo conduttore di lunghezza pari a 30 cm di conducibilità $\sigma = 3 \cdot 10^6$ e densità $\underline{J} = \hat{z}\,30$ calcolare il campo $\underline{E}$, la tensione ai capi e la potenza dissipata



Per la legge di OHM si ha che $\underline{J} = \sigma \cdot \underline{E} \Rightarrow \underline{E} = \frac{\underline{J}}{\sigma} = \hat{z} \cdot \frac{30}{3 \cdot 10^6} = \hat{z} \cdot 10^{-5} \left[\frac{V}{m}\right]$

$V = -\int_{x_2}^{x_1} \underline{E} \cdot d\underline{l} = -\int_{0,3}^{0} \hat{z}\, 10^{-5} \cdot \hat{z}\, dz = -10^{-5}\int_{0,3}^{0} dz = -10^{-5}\, z\Big|_{0,3}^{0} = 3 \cdot 10^{-6}\,[V]$

Per calcolare la potenza dissipata si calcola $P = \iiint_V \sigma \cdot |\underline{E}|^2 dV = \underbrace{\iint_A \sigma E_x\, ds}_{I} \underbrace{\int_l E_x\, dl}_{V} = I \cdot V = I^2 R$

APPELLO 22 GIU 2017

22 Giu 2017

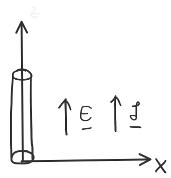
Esercizio

Un cilindro di materiale avente conducibilitá $\sigma = 10^{-3}$ S/m presenta un diametro $D = 10$ cm. Sapendo che il campo elettrico é dato dall'espressione:

$$\underline{E} = \hat{z}\, 12\rho$$

dove ρ é misurato in cm, calcolare:

- la densitá di corrente $\underline{J}$;
- la potenza dissipata su una lunghezza del cilindro pari ad 1 m.



1) $\underline{J} = \sigma \cdot \underline{E} = 10^{-3} \cdot \hat{z}\, 12\rho \cdot 10^{-2} = \hat{z}\, 12\rho \cdot 10^{-5} \left[\frac{A}{m^2}\right]$

2) $R = \frac{L}{\sigma A}$ dove $A = \pi r^2 = 0{,}05^2 \pi = 0{,}0079$

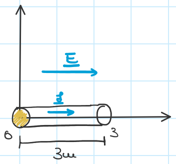
dunque $R = \frac{1}{10^{-3} \cdot 0{,}0079} = 1{,}26 \cdot 10^5\ [\Omega]$

3) $I = \iint_S \underline{J} \circ \hat{u}\, dS$ ma anche $I = \int_0^{2\pi}\int_0^{0{,}05} \hat{z}\, 12\rho \cdot 10^{-5} \circ \hat{z}\, \rho\, d\rho\, d\phi =$

$= (12 \cdot 10^{-5}) \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{0{,}05} \rho^2 d\rho = (12 \cdot 10^{-5} \cdot 2\pi)\ \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{0{,}05} = 3{,}14 \cdot 10^{-8}\ [A]$

4) $P = I^2 \cdot R = I \cdot V = (3{,}14 \cdot 10^{-8})^2 \cdot 1{,}26 \cdot 10^5 = 1{,}24 \cdot 10^{-10}\ [W]$

Su un conduttore cilindrico è applicato un campo elettrico $\underline{E} = \hat{x}\, 3\,[kV/m]$. Il conduttore ha conducibilità pari a $\sigma = 3 \cdot 10^7\ [S/m]$. Il raggio è di 5 cm e la lunghezza è di 3m.
Calcolare la differenza di potenziale V, la densità di corrente $\underline{J}$, l'intensità di corrente I, la resistenza R e la potenza dissipata P.



1) La differenza di potenziale è

$$V = -\int_0^3 \underline{E} \cdot d\underline{l} = -\int_0^3 \hat{x} \cdot 3 \cdot 10^3 \hat{x}\, dx =$$

$$= -\int_0^3 3 \cdot 10^3\, dx = -3 \cdot 10^3 x \Big|_0^3 = -9 \cdot 10^3\ [V]$$

2) La densità di corrente $\underline{J}$ è:

$$\underline{J} = \sigma \cdot \underline{E} = (3 \cdot 10^7)(\hat{x} \cdot 3 \cdot 10^3) = \hat{x}\, 9 \cdot 10^{10}\ [A/m^2]$$

3) L'intensità di corrente I è:

coordinate cilindriche

$$I = \iint_S \underline{J} \cdot \hat{n}\, ds \quad \text{dove} \quad ds = r\,dr\,d\phi \quad \text{dunque}$$

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{0,05} \underline{J} \cdot \hat{x}\, r\, dr\, d\phi = 9 \cdot 10^{10} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{0,05} r\, dr =$$

$$= 9 \cdot 10^{10}\, 2\pi\, \frac{r^2}{2}\Big|_0^{0,05} = 7,06 \cdot 10^8\ [A]$$

4) La resistenza è data da

$$R = \frac{L}{\sigma A} \quad \text{con} \quad A = \left(\frac{\pi \cdot d^2}{4}\right) = \frac{\pi\,(0,1)^2}{4} = 0,0079$$

per cui $R = \dfrac{3}{3 \cdot 10^7 \cdot 0,0079} = 1,26 \cdot 10^{-5}\ [\Omega]$

ma potevo anche usare la formula $V = R \cdot I$ per cui $R = \dfrac{V}{I}$

5) La potenza dissipata è

$$P = \iiint_V \sigma\, |\underline{E}|^2\, dV = \underbrace{\iint_A \underbrace{\sigma\, E_x}_{J}\, ds}_{I} \cdot \underbrace{\int_l E_x\, dl}_{V} = I \cdot V$$

dunque $P = I^2 \cdot V = \iiint_V \sigma\, |\underline{E}|^2\, dV$.

Calcolo la potenza dissipata nel secondo modo:

$$P = I^2 R = (7{,}06 \cdot 10^8)^2 \, (1{,}26 \cdot 10^5) = 6{,}3 \cdot 10^{12} \, [W]$$

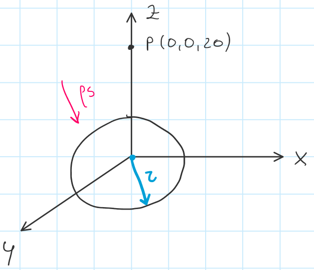
Calcolo la potenza dissipata nel primo modo: $\quad dV = r \cdot dr \, d\phi \, dz$

$$P = \iiint_V \sigma \cdot \underline{|E|^2} \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{0{,}05} \int_0^{3} 3 \cdot 10^7 \, (3 \cdot 10^3)^2 \, r \, dr \, d\phi \, dz =$$

$$= 3 \cdot 10^7 \, (3 \cdot 10^3)^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^3 dz \int_0^{0{,}05} r \, dr = (3 \cdot 10^7)(3 \cdot 10^3)^2 \cdot 2\pi \cdot 3 \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{0{,}05} = 6{,}6 \cdot 10^{12} \, [W]$$

CAMPO ELETTRICO DI UN DISCO IN UN PUNTO

Si consideri un disco carico circolare di raggio $a = 5cm$ giacente nel piano (x, y). Supponendo che il disco sia caratterizzato da una densità di carica superficiale $\rho_s = 12 r \left[\frac{nC}{m^2} \right]$, calcolare il campo elettrico nel punto $P(0,0,20)$ cm



Portiamo in m i dati:

$P(0, 0, 0{,}2) \qquad \rho_s = 12 r \cdot 10^{-9} \, [C/m^2]$

Sapendo che $d\underline{E} = \hat{z} \, \dfrac{h \cdot \rho_s \cdot r}{2\varepsilon (r^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \, dr$ ricordando che $dq = \rho_s ds = 2\pi r \rho_s ds$

$$\Rightarrow \underline{E} = \int_0^a \hat{z} \, \frac{h \, \rho_s \cdot r}{2\varepsilon (r^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \, dr = \hat{z} \, \frac{0{,}2 \cdot 12 \cdot 10^{-9}}{2\varepsilon} \int_0^a \frac{r^2}{(r^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \, dr = \hat{z} \, 0{,}66 \, [V/m]$$

APPELLO 5 SET 2017

Appello di FONDAMENTI DI ELETTROMAGNETISMO
del 5 settembre 2017

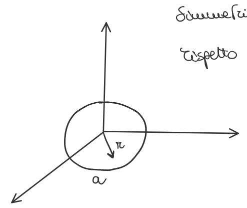
Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Informatica

Cognome e Nome: ______________ **Matricola:** ______

Quesito
Ricavare l'espressione della legge di Joule.

Esercizio
Un disco circolare di raggio r é caratterizzato da una densitá di carica superficiale avente simmetria azimutale, crescente linearmente con r da 0 (al centro) fino a $10[C/m^2]$ in corrispondenza di $r = 2cm$.
Calcolare la carica totale presente sul disco.

Simmetria azimutale
⇓
rispetto a $\hat{z}$



1

Sapendo che
$$Q = \int_S \rho_s \, ds$$

ho che $\rho_s = \dfrac{10 r}{2 \cdot 10^{-2}} = 5 \cdot 10^2 r$

e che $ds = r \cdot d\phi \cdot dr$

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{0{,}02} 5 \cdot 10^2 r \cdot r \, d\phi \, dr =$$

$$= 5 \cdot 10^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{0{,}02} r^2 \, dr =$$

$$= 5 \cdot 10^2 \, 2\pi \, \frac{r^3}{3} \Big|_0^{0{,}02} = 8{,}3 \cdot 10^{-3} \, [C]$$

RESISTENZA E POTENZA DISSIPATA IN UN FILO

Un filo di rame lungo 50m ha una sezione circolare di raggio r

RESISTENZA E POTENZA DISSIPATA IN UN FILO

Un filo di rame lungo 50m ha un sezione circolare di raggio r pari a 2cm e una conducibilità pari a $5,8 \cdot 10^7$ [S/m].
Calcolare la resistenza R e la potenza dissipata nel filo se la tensione applicata ai suoi capi è 1,5 mV

1) La resistenza, data la sezione uniforme circolare, è:

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (4 \cdot 10^{-2})^2}{4} = 1,256 \cdot 10^{-3}\ m^2$$

$$R = \frac{\ell}{\sigma A} = \frac{50}{5,8 \cdot 10^7 \cdot 1,256 \cdot 10^{-3}} = 6,6 \cdot 10^{-4}\ [\Omega]$$

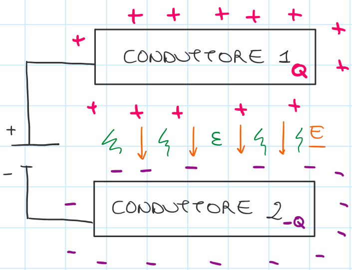
2) Data la resistenza, possiamo calcolare che

se $V = I \cdot R$, allora $I = \frac{V}{R}$ e dunque $P = I^2 \cdot R$.

Dunque $I = \frac{1,5 \cdot 10^{-3}}{6,6 \cdot 10^{-4}} = 2,27\ A$ e perciò

$$P = I^2 \cdot R = 2,27^2 \cdot 6,6 \cdot 10^{-4} = 3,4 \cdot 10^{-3}\ [W]$$

CAPACITÀ DI UN CONDENSATORE



Ne deriva che la capacità

$C = \frac{Q}{V}$ [F] $\left[\frac{C}{V}\right]$

L'induzione elettrica è $\underline{D} = \varepsilon \cdot \underline{E}$

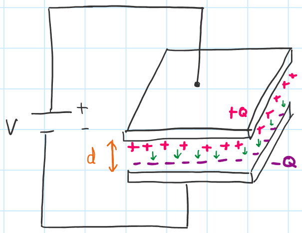
La carica per la legge di Gauss è

$$Q = \oiint_S \underline{D} \circ \hat{u}\, dS = \oiint_S \varepsilon \cdot \underline{E} \circ \hat{u}\, dS$$

La Tensione è $V = V_1 - V_2 = \int_2^1 -\underline{E} \circ d\underline{l}$

Di conseguenza ne deriva che $C = \frac{\oiint_S \varepsilon \cdot \underline{E} \circ \hat{u}\, dS}{-\int_2^1 \underline{E} \circ d\underline{l}}$ } ne deriva che la capacità di un condensatore non dipende dal campo ma solo dalle caratteristiche geometriche del condensatore

Scenario:



Si avrà che $\underline{E} = -\hat{z} E_z$ e che

$$V = \int_2^1 -\underline{E} \circ d\underline{l} = \int_0^d (\hat{z} E_z) \circ (\hat{z}\, dz) =$$

$$= \int_0^d E_z\, dz = E_z \circ d$$

Di conseguenza $Q = \oiint_S \underline{D} \circ \hat{u}\, dS = \iint_A \underbrace{\varepsilon(-\hat{z} E_z)}_{D} \underbrace{\circ}_{\circ} \underbrace{(-\hat{z})}_{\hat{u}} dS =$

$$= \iint_A \varepsilon \cdot E_z\, dS = \varepsilon E_z A$$

Il generatore collegato a due armature consuma energia per caricare il condensatore. Se il dielettrico e le armature sono ideali e non vi è dispersione di energia vi è un accumulo di energia detta **ENERGIA POTENZIALE ELETTROSTATICA**

Sapendo che $dw_e = dq \cdot V$ e che $V = \frac{Q}{C}$ allora

$$W_e = \int_0^Q \frac{q}{C}\, dq = \frac{1}{C} \int_0^Q q\, dq = \frac{1}{C} \frac{q^2}{2} \Big|_0^Q = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{C^{\cancel{2}} V^2}{\cancel{C}} = \frac{1}{2} C V^2$$

Esercizio

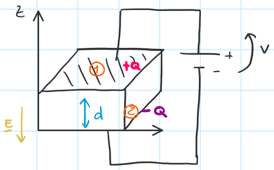
Dato un condensatore fatto da piatti rettangolari di dimensioni $a = 3$ cm e $b = 10$ cm distanti 3 mm. Il dielettrico ha permittività $\varepsilon_r = 2$ e conducibilità $\sigma = 3 \cdot 10^{-3} \left[\frac{S}{m}\right]$.

Calcolare la capacità

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon \cdot A}{d} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot A}{d} = \frac{8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 10^{-2} \cdot 10 \cdot 10^{-2}}{3 \cdot 10^{-3}} = 1{,}77 \cdot 10^{-11} [F] = 17{,}7 [pF]$$

Esercizio

È dato un condensatore con le armature quadrate di lato 30 cm poste a distanza $d = 10\,cm$.
Il dielettrico ha $\varepsilon_r = 5$ ed è immerso in un campo $\underline{E} = -\hat{z}\,(3\cdot 10^2)\left[\frac{V}{m}\right]$
Calcolare la tensione e la capacità



$$V = V_1 - V_2 = \int_2^1 -\underline{E}\circ d\underline{\ell} = \int_0^d -(-\hat{z}\cdot 3\cdot 10^2)\circ \hat{z}\,dz =$$

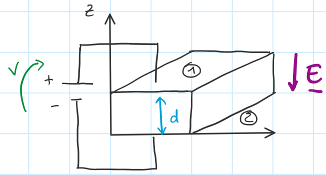
$d\underline{\ell} = \hat{z}\,dz$

$$= \int_0^d 3\cdot 10^2\,dz = 3\cdot 10^2\, z\Big|_0^{10\cdot 10^{-2}} = 30\,[V]$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon\cdot A}{d} = \frac{\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot A}{d} = \frac{5\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\cdot 30\cdot 10^{-2}\cdot 30\cdot 10^{-2}}{10\cdot 10^{-2}} = 3{,}98\cdot 10^{-11}[F] = 39{,}8\,[pF]$$

Esercizio

È dato un condensatore a piatti distanti 7 mm con un dielettrico $\varepsilon_r = 3{,}5$. È presente un campo elettrico $\underline{E} = -\hat{z}\,2{,}4\cdot 10^3\left[\frac{V}{m}\right]$. Calcolare la tensione e l'energia potenziale elettrica



1) $V = V_1 - V_2 = -\int_0^d \underline{E}\circ d\underline{\ell} = \int_0^d \hat{z}\,2{,}4\cdot 10^3\circ\hat{z}\,dz =$

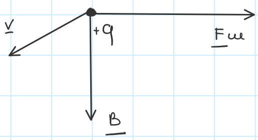
$$= 2{,}4\cdot 10^3\int_0^d dz = 2{,}4\cdot 10^3\, z\Big|_0^{7\cdot 10^{-3}} = 16{,}8\,[V]$$

2) $W_e = \frac{1}{2}CV^2$ dove $C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon\cdot A}{d} = \frac{\varepsilon_r\cdot\varepsilon_0\cdot A}{d} = \frac{3{,}5\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\cdot 5\cdot 10^{-2}}{7\cdot 10^{-3}} = 22{,}1\,[pF]$

dunque $W_e = \frac{1}{2}C\cdot V^2 = \frac{1}{2}\cdot 22{,}10\cdot 10^{-12}\cdot 16{,}8^2 = 3{,}11\cdot 10^{-9}\,[J]$

MAGNETOSTATICA

Rispetto all'elettrostatica, la carica si muove di velocità $\underline{v}$. Se è presente un campo elettrico allora una particella q subisce una forza elettrica $\underline{F_e} = q\,\underline{E}$ mentre se è presente una induzione magnetica $\underline{B}$ allora essa è soggetta una forza magnetica $\underline{F_m} = q\,\underline{v}\times\underline{B}$.
Inoltre, data la permeabilità magnetica μ e un campo magnetico $\underline{H}$, l'induzione magnetica (duale di quella elettrica) è data da $\underline{B} = \mu\,\underline{H}$

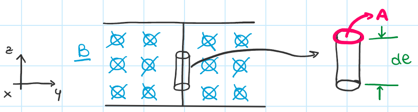


Differenze fra forza elettrica e magnetica!

1) $\underline{F_e}$ è // $\underline{E}$ mentre $\underline{F_m}$ è $\perp$ a $\underline{B}$
2) $\underline{F_e}$ agisce su cariche stazionarie o in moto mentre $\underline{F_m}$ solo su cariche in moto
3) $\underline{F_e}$ dissipa energia mentre la forza magnetica non compie lavoro infatti $dW = \underline{F_m}\circ d\underline{\ell} = \underline{F_m}\circ\underline{v}\,dt$ poiché $\underline{v} = \frac{d\underline{\ell}}{dt}$ ma

poiché $\underline{F_m}\perp\underline{v}$ allora $\underline{F_m}\circ\underline{v} = 0$ e dunque $dW = 0$

Si considera



dove $\rho_{ve} = -N_e\cdot e$ e dunque $dQ = \rho_{ve}\cdot dV = -N_e\cdot e\cdot A\cdot d\ell$
invece $d\underline{F_m} = dQ\cdot\underline{v}\times\underline{B} = -N_e\cdot e\cdot A\,d\underline{\ell}\;\underline{v}\times\underline{B}$
ponendo poi $d\ell\,\underline{v} = -d\underline{\ell}\cdot v$ da cui
$d\underline{F_m} = \underbrace{N_e\,e\,A\,v}_{I}\,d\underline{\ell}\times\underline{B} = I\cdot d\underline{\ell}\times\underline{B}$ e di conseguenza

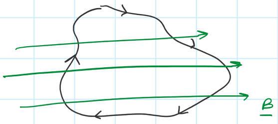
$$\underline{F_m} = \int_C I\,d\underline{\ell}\times\underline{B} = I\int_C d\underline{\ell}\times\underline{B}$$

Supponendo un integrale lungo un contorno c (una **CIRCUITAZIONE**) allora

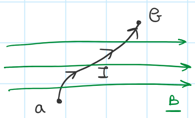
$$\underline{F}_m = \oint_c I\, d\underline{l} \times \underline{B} = I \oint_c d\underline{l} \times \underline{B} \quad \text{e se } \underline{B} \text{ è costante allora } \underline{F}_m = I \underbrace{\boxed{\oint_c d\underline{l}}}_{=0} \times \underline{B} = 0$$

se B costante

Si conclude che se si va ad immergere un circuito chiuso attraversato da corrente in un campo con induzione magnetica $\underline{B}$, la forza magnetica totale è zero. Tale circuito si chiama **SPIRA**

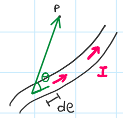


Nel caso di un filo attraversato da una corrente e immerso in un campo di induzione magnetica $\underline{B}$ allora $\underline{F}_m = I \int_a^b d\underline{l} \times \underline{B} = I \cdot \underline{l} \times \underline{B}$



$\underline{F}_m$ non dipende dal percorso ma solo dalla lunghezza

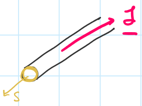
LEGGE DI BIOT-SAVART



Il campo magnetico generato in un punto è

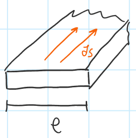
$$d\underline{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{d\underline{l} \times \hat{\imath}_R}{R^2}$$

da cui $\underline{H} = \dfrac{I}{4\pi} \displaystyle\int_l \frac{d\underline{l} \times \hat{\imath}_R}{R^2}$



Nel caso in cui sia data la densità di corrente allora

$$\underline{H} = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\underline{J} \times \hat{\imath}_R}{R^2}\, dV$$

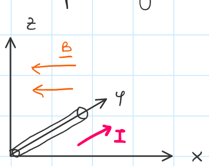


Nel caso di una lamina si ha che

$$\underline{H} = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\underline{J}_S \times \hat{\imath}_R}{R^2}\, dS$$

Esercizio

Calcolare la forza magnetica agente su un conduttore lungo 50 cm percorso da una corrente costante $I = 3{,}5\,A$ in direzione y positiva. È immerso in un campo magnetico uniforme di induzione magnetica $\underline{B} = -\hat{x}\, 7{,}5\ [T]$



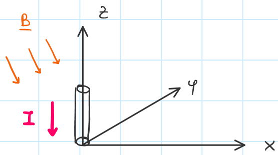
l è un vettore

$\hat{y} \times (-\hat{x}) = \hat{z}$

$$\underline{F}_m = I\,(\underline{l} \times \underline{B}) = 3{,}5\left[0{,}5\,\hat{y} \times (-\hat{x}\ 7{,}5)\right] = \hat{z}\ 13{,}12\ [N]$$

Esercizio

Simile al precedente ma $l = 0{,}3\,m$, $\underline{I} = 5A\,(-\hat{z})$, $\underline{B} = 3{,}5 \cdot 10^{-3}\,\hat{x} - 3{,}5 \cdot 10^{-3}\,\hat{y}\ [T]$



meno perché $I \downarrow$

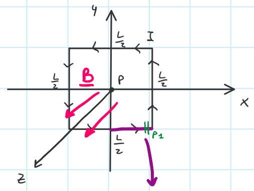
$$\underline{F}_m = I\,(\underline{l} \times \underline{B}) = 5\left[0{,}3(-\hat{z}) \times (3{,}5 \cdot 10^{-3}\,\hat{x} - 3{,}5 \cdot 10^{-3}\,\hat{y})\right] =$$

$$= 5\left[0{,}3 \cdot 3{,}5 \cdot 10^{-3}\,(-\hat{y}) - 0{,}3 \cdot 3{,}5 \cdot 10^{-3}\,\hat{x}\right] =$$

$$= 5{,}25 \cdot 10^{-3}\,(\hat{x} - \hat{y})\ [N]$$

Esercizio

Calcolare il campo magnetico dato una spira quadrata nel punto $P(0,0,0)$ percorso da corrente elettrica I



Dalla definizione si ha che

$$d\underline{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{d\underline{\ell} \times \hat{i}_R}{R^2}$$

Il campo generato dalla spira è uguale alla somma dei campi generati dai singoli segmenti

Pongo $P_1\left(x, -\frac{L}{2}, 0\right)$ e costruisco i vettori

- $\underline{R}_0 = \emptyset$
- $\underline{R}_1 = x\hat{x} - \frac{L}{2}\hat{y}$

da cui:

- $R = \underline{R}_0 - \underline{R}_1 = -\underline{R}_1 = \frac{L}{2}\hat{y} - x\hat{x}$ e $\hat{i}_R = \frac{\underline{R}}{|\underline{R}|} = \frac{\left(-x\hat{x} + \frac{L}{2}\hat{y}\right)}{x^2 + \frac{L^2}{4}}$

Inoltre $d\underline{\ell} = \hat{x}\, dx$ verso concorde alla corrente e $\hat{x}$ poiché si sposta lungo $\hat{x}$

Di conseguenza alle considerazioni precedenti:

$$d\underline{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{\hat{x}\, dx \overset{\text{Prodotto vettoriale}}{\times} \left(-x\hat{x} + \frac{L}{2}\hat{y}\right)}{\left(\sqrt{x^2 + \frac{L^2}{4}}\right)^{2} \left(x^2 + \frac{L^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{I}{4\pi} \frac{\hat{x}\, dx \times \left(-x\hat{x} + \frac{L}{2}\hat{y}\right)}{\left[x^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2\right]^{3/2}} =$$

$$= \frac{I}{4\pi} \frac{\hat{z}\, \frac{L}{2}\, dx}{\left(x^2 + \frac{L^2}{4}\right)^{3/2}}$$

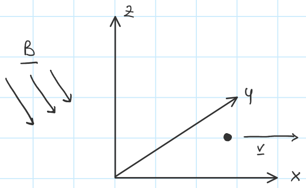
Il campo del segmentino sarà $\underline{H}_A = \int_0^{L/2} \frac{I}{4\pi} \frac{\hat{z}\,(L/2)\, dx}{\left(x^2 + \frac{L^2}{4}\right)^{3/2}}$

Il campo totale sarà $\underline{H}_{TOT} = 8 \cdot \underline{H}_A = 8 \int_0^{L/2} \frac{I}{4\pi} \frac{\hat{z}\,(L/2)\, dx}{\left(x^2 + \frac{L^2}{4}\right)^{3/2}} =$

$$= \frac{8\, I\, \hat{z}\,(L/2)}{4\pi} \int_0^{L/2} \frac{dx}{\left[x^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2\right]^{3/2}} = \hat{z}\, \frac{2\sqrt{2}\, I}{\pi L} \quad [A/m]$$

Esercizio

Un elettrone con velocità $\underline{v} = 8 \cdot 10^6\, \hat{x}$ m/s. L'elettrone è in un mezzo di $\underline{B} = (\hat{x}\,4 - \hat{z}\,3)$ [T]. Calcolare la forza magnetica agente ($q = -1,6 \cdot 10^{-19}$ [C])



$$\underline{F}_m = q\left(\underline{v} \times \underline{B}\right) = -1,6 \cdot 10^{-19} \left[8 \cdot 10^{-6}\hat{x} \times (\hat{x}\,4 - \hat{z}\,3)\right] =$$

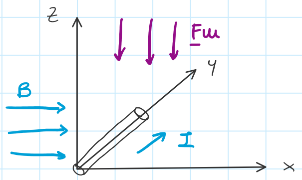
$$= -1,6 \cdot 10^{-19} \left(\hat{y}\; 8 \cdot 10^{-6} \cdot 3\right) = -\hat{y}\; 3,84 \cdot 10^{-12}\ [N]$$

Esercitazione Forza e campo magnetici

lunedì 18 gennaio 2021 18:34

FORZA MAGNETICA SU UN CONDUTTORE

Vi è un conduttore lungo $\ell = 4$ m che si trova disposto lungo l'asse x. Tale conduttore è percorso da una corrente costante I pari a 10 A che scorre in direzione delle x positive. Calcolare la forza magnetica che agisce sul conduttore sapendo che il conduttore stesso è immerso in un campo magnetico caratterizzato da un'induzione magnetica B pari a $\hat{x}\, 0{,}05$ T



DIFFERENZE FORZA MAGNETICA E FORZA ELETTRICA

1) La forza magnetica non compie lavoro mentre la forza elettrica sì
2) La forza elettrica agisce su cariche stazionarie o in moto, mentre la forza magnetica solo su cariche in moto
3) La forza elettrica è parallela al campo elettrico mentre la forza magnetica è perpendicolare al campo magnetico

La forza magnetica che agisce sul conduttore è $\underline{F}_m = I(\underline{\ell} \times \underline{B}) =$

perché è lungo y

$$= 10\,(\underbrace{4\,\hat{y} \times 0{,}05\,\hat{x}}) = -\hat{z}\cdot 2\,[N]$$

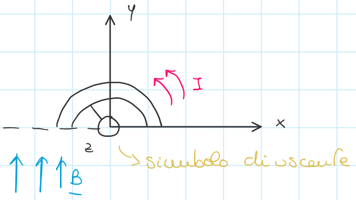
$\hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z}$

↳ il risultato di un prodotto vettoriale è un vettore. Inoltre $\underline{A} \times \underline{B} = \hat{u}\,|\underline{A}|\,|\underline{B}|\,\mathrm{sen}\,\phi$

si calcola con la regola della mano destra

FORZA MAGNETICA SU UN CONDUTTORE SEMICIRCOLARE

Si consideri un conduttore semicircolare giacente nel piano (x, y) e percorso da una corrente I pari a 5 A. Il conduttore è immerso in un campo magnetico uniforme la cui induzione magnetica è pari a $\hat{y}\,3$ [T]. Si determini la forza magnetica agente sul filo



Sapendo che $F_m = I(\ell \times B)$ bisogna applicare una modifica in modo da tenere in considerazione il fatto che in questo caso nel prodotto $\underline{\ell} \times \underline{B}$ l'angolo varia e dunque ciò si traduce nella definizione di $\underline{\ell} = \int_a^b d\underline{\ell}$ e dunque è meglio utilizzare la formula

ricordando che $d\underline{\ell} \times \underline{B} = \hat{u}\,|\ell|\,|\underline{B}|\,\mathrm{sen}\,\phi$ e che varia l'angolo e non il raggio

$dF_m = I\, d\underline{\ell} \times \underline{B}$ con $d\ell = r \cdot d\phi$ (senza verso)

e $d\underline{\ell} = -\hat{x}\, r d\phi$ (con verso)

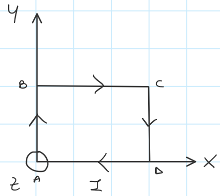
Dunque:

$$d\underline{F}_m = I \cdot d\underline{\ell} \times \underline{B} = I\,(-\hat{x} \times \hat{y})\, r\, d\phi\, 3 \sin\phi = -\hat{z}\, I\, r\, d\phi\, 3 \sin\phi$$

e dunque $\underline{F}_m = -\hat{z}\, I\, r\, 3 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi\, d\phi = -\hat{z}\, 3 \cdot 5 \cdot 0{,}5\, [-\cos\pi + \cos 0] = -\hat{z} \cdot 15\ [N]$

FORZA MAGNETICA SU UNA SPIRA

Una spira rettangolare di lati a e b giacente sul piano x, y è percorsa da una corrente I pari a 5 A. Questa spira è immersa in un campo magnetico uniforme la cui induzione magnetica è $\hat{z}\,5\ [T]$. Calcolare la forza magnetica agente sulla spira se $a = 1\,m$, $b = 2\,m$



Si calcolano le forze agenti sui singoli pezzi

$$\underline{F}_{AB} = I\,(\underline{\ell} \times \underline{B}) = 5\,(\hat{y}\, 1 \times \hat{z}\, 5) = \hat{x}\, 25\ [N]$$

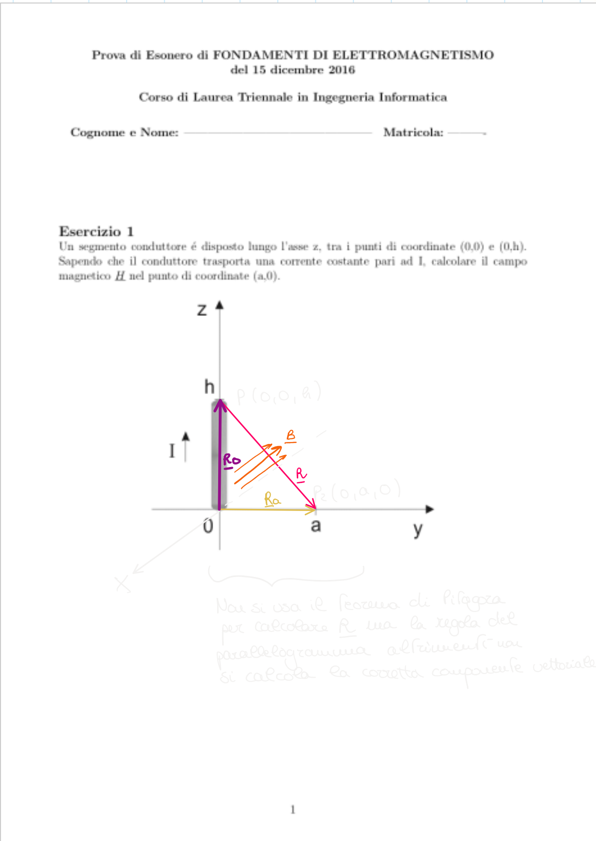
$$\underline{F}_{BC} = I\,(\underline{\ell} \times \underline{B}) = 5\,(2\hat{x} \times \hat{z}\, 5) = -\hat{y}\, 50\ [N]$$

$$\underline{F}_{CD} = I\,(\underline{\ell} \times \underline{B}) = 5\,(-\hat{y} \times \hat{z}\, 5) = -\hat{x}\, 25\ [N]$$

$$\underline{F}_{DA} = I\,(\underline{\ell} \times \underline{B}) = 5\,(-2\hat{x} \times \hat{z}\, 5) = \hat{y}\, 50\ [N]$$

Dunque $\underline{F}_m = \underline{F}_{AB} + \underline{F}_{BC} + \underline{F}_{CD} + \underline{F}_{DA} = 0$

APPELLO 15 DIC 2016 - LEGGE DI BIOT SAVART



Prova di Esonero di FONDAMENTI DI ELETTROMAGNETISMO
del 15 dicembre 2016

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Informatica

Cognome e Nome: ______ Matricola: ______

Esercizio 1
Un segmento conduttore é disposto lungo l'asse z, tra i punti di coordinate (0,0) e (0,h). Sapendo che il conduttore trasporta una corrente costante pari ad I, calcolare il campo magnetico $\underline{H}$ nel punto di coordinate (a,0).

1

Avendo la corrente e volendo calcolare il campo magnetico, si usa la legge di Biot-Savart

$$d\underline{H} = \frac{I}{4\pi}\, \frac{d\underline{\ell} \times \hat{i}_R}{R^2} \quad [A/m]$$

ogni sezione del conduttore $d\underline{\ell}$ genera un infinitesimo del campo magnetico $d\underline{H}$

Si costruiscono due vettori $\underline{R}_a$ che congiunge l'origine al punto P_2 e $\underline{R}_0$ che è il vettore posizione del punto del conduttore in cui ci si trova, tale punto è variabile e quindi è $z\hat{z}$.

Di conseguenza il vettore $\underline{R}$ sarà la differenza $\underline{R}_a - \underline{R}_0$ e cioè $a\hat{y} - z\hat{z}$ per cui il versore

$$\hat{i}_R = \frac{\underline{R}}{|\underline{R}|} = \frac{a\hat{y} - z\hat{z}}{\sqrt{a^2+z^2}}$$

Per quanto riguardo $d\underline{\ell} = \hat{z}\, dz$ cioè un pezzo infinitesimo di conduttore lungo $\hat{z}$

Sostituisco tutto quello che ho ricavato:

$$d\underline{H} = \frac{I}{4\pi}\, \frac{\hat{z}\, dz \times (a\hat{y} - z\hat{z})}{(\sqrt{a^2+z^2})^{2}\, \sqrt{a^2+z^2}} = \frac{I}{4\pi}\, \frac{-\hat{x}\, dz\, a}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

di conseguenza $\underline{H} = \int_0^h \frac{I}{4\pi}\, \frac{-\hat{x}\, a}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\, dz = \frac{I\, a}{4\pi}\,(-\hat{x}) \boxed{\int_0^h \frac{1}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\, dz} = -\hat{x}\, \frac{I}{4\pi}\, \frac{h}{a^2\sqrt{a^2+h^2}} \quad [A/m]$

$$\ldots \int_0 \frac{\ldots}{4\pi}\frac{\ldots}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,dz = \frac{\ldots}{4\pi}(\ldots)\boxed{\int_0 \frac{\ldots}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}} \ldots = \frac{\ldots}{4\pi}\frac{\ldots}{a^2\sqrt{a^2+l^2}} \; [\ldots]$$

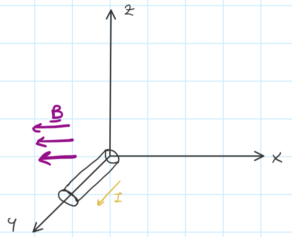
INT. NOTEVOLE

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x^2}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$$

Si può verificare il verso del campo attorno con la regola della mano destra ponendo il pollice lungo la direzione della corrente e facendo ruotare le dita fino a "toccare" il punto di applicazione del campo e così la direzione delle dita corrisponde al versore del campo.

FORZA MAGNETICA IN UN CONDUTTORE

Trovare la forza magnetica che agisce su un conduttore lungo $l = 50$ cm percorso da una corrente $I = 3,5$ A in direzione y positiva. Il conduttore è immerso in un campo magnetico uniforme pari a $-\hat{x}\,7,5$ [T]. Calcolare la forza magnetica che agisce nel conduttore.

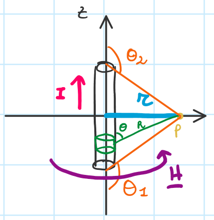


Sapendo che $\underline{F}_m = I(\underline{l} \times \underline{B}) = 3,5\,(0,5\,\hat{y} \times -\hat{x}\,7,5) =$
$= 3,5\,(0,5 \cdot 7,5\,\hat{z}) = 13,12\,\hat{z}$ [N]

Legge di Biot-Savart e legge di Ampere

mercoledì 3 febbraio 2021 17:30

LEGGE DI AMPERE



È dato un conduttore cilindrico lungo l'asse z di lunghezza ℓ e diametro trascurabile. Si considera un punto P posto a distanza r sull'asse x e si vuole calcolare il campo nel punto P.

Considerando un tratto $d\underline{\ell} = \hat{z}\, dz$ e conoscendo la legge di Biot-Savart per cui $\underline{H} = \frac{I}{4\pi}\int_\ell \frac{d\underline{\ell} \times \hat{i}_r}{R^2}$ posso innanzitutto scrivere il prodotto vettoriale $d\underline{\ell} \times \hat{i}_r = (\hat{z} \times \hat{i}_r)\, dz = \hat{\phi} \sin\theta\, dz$ per cui ottengo che

$$\underline{H} = \frac{I}{4\pi}\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \hat{\phi}\frac{\sin\theta}{R^2}\, dz = \hat{\phi}\frac{I}{4\pi}\int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{\sin\theta}{R^2}\, dz$$

Esprimo tutto in funzione di θ:

Per considerazioni geometriche $r = R\sin\theta$ e dunque $R = \frac{r}{\sin\theta}$. Inoltre $r = -z\tan\theta$ per cui $z = -\frac{r}{\tan\theta}$ da cui $dz = \frac{r}{\sin^2\theta}\, d\theta$

Si può dunque scrivere che $\underline{H} = \hat{\phi}\frac{I}{4\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\sin\theta}{r^{\cancel{2}}}\, \cancel{\sin^2\theta}\, \frac{\cancel{r}}{\cancel{\sin^2\theta}}\, d\theta =$

$$= \hat{\phi}\frac{I}{4\pi r}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta\, d\theta = \hat{\phi}\frac{I}{4\pi r}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

Si può inoltre dire che $\cos\theta_1 = \frac{\ell/2}{\sqrt{(\frac{\ell}{2})^2 + r^2}}$ mentre $\cos\theta_2 = -\cos\theta_1 = \frac{-\ell/2}{\sqrt{(\frac{\ell}{2})^2 + r^2}}$ da cui $\underline{H} = \hat{\phi}\frac{I}{4\pi r}\frac{\ell}{\sqrt{(\frac{\ell}{2})^2 + r^2}} = \hat{\phi}\frac{I\ell}{2\pi r}\frac{1}{\sqrt{\ell^2 + 4r^2}}$

e perciò, sapendo che $\underline{B} = \mu\underline{H} = \hat{\phi}\,\mu\frac{I\ell}{2\pi r}\frac{1}{\sqrt{\ell^2 + 4r^2}}$

Se si ipotizza $\ell >> r$ allora $\underline{B} = \hat{\phi}\frac{\mu I \cancel{\ell}}{2\pi r}\frac{1}{\cancel{\ell}} = \hat{\phi}\frac{\mu I}{2\pi r}$

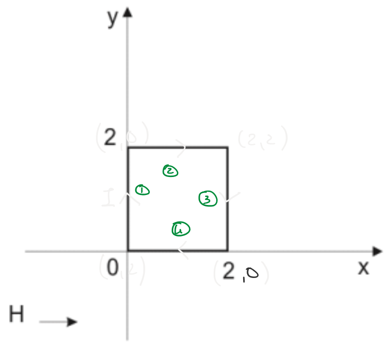
e dunque $\underline{H} = \hat{\phi}\frac{I}{2\pi r}$

Poiché dunque $|\underline{H}| = \frac{I}{2\pi r}$ e $I = |\underline{H}| \cdot 2\pi r$ allora si ricava che $I = \oint_c \underline{H}\, d\underline{\ell}$

Esercizio

Esercizio 2

Assegnato il campo magnetico $\underline{H} = \hat{x}3y^2$, calcolare la corrente che attraversa la spira quadrata di figura.



$$I = \oint_C \underline{H}\, d\underline{\ell} = \int_0^2 \cancel{\underline{H}|_{x=0}\, \hat{y}\, dy}^{\,0} + \int_0^2 \underline{H}|_{y=2}\, \hat{x}\, dx + \int_0^2 \cancel{\underline{H}|_{x=2}\, (-\hat{y})\, dy}^{\,0} +$$

$$+ \int_0^2 \underline{H}|_{y=0}\, (-\hat{x})\, dx = \int_0^2 3y^2|_{y=2}\, dx - \int_0^2 3y^2|_{y=0}\, dx =$$

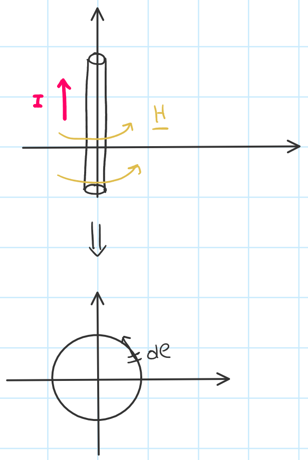
$$= \int_0^2 12\, dx - \int_0^2 0\, dx = 12x\Big|_0^2 = 24\, [A]$$

2

Esercizio

Un conduttore cilindrico di $r = 10^{-2}$ m è sottoposto ad un campo magnetico

$$\underline{H} = (4{,}77 \cdot 10^4)\left(\frac{r}{2} - \frac{r^2}{3 \cdot 10^{-2}}\right)\hat{\phi}\ \left[\frac{A}{m}\right]$$



Si pone $d\underline{\ell} = r\, d\phi\, \hat{\phi}$

$$I = \oint_C \underline{H}\, d\underline{\ell} = \int_0^{2\pi} (4{,}77 \cdot 10^4)\left(\frac{r}{2} - \frac{r^2}{3 \cdot 10^{-2}}\right)\hat{\phi} \cdot \hat{\phi}\, r\, d\phi =$$

$$= 4{,}77 \cdot 10^4 \left(\frac{r}{2} - \frac{r^2}{3 \cdot 10^{-2}}\right) r \int_0^{2\pi} d\phi = 4{,}77 \cdot 10^4 \left(\frac{10^{-2}}{2} - \frac{\cancel{10^{-2}}^{\,2}}{3 \cdot \cancel{10^{-2}}}\right) \cdot 10^{-2}\, \phi\Big|_0^{2\pi} =$$

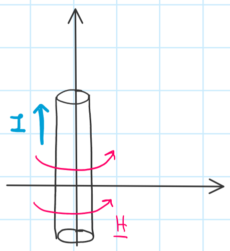
$$= 4{,}92\, [A]$$

CORRENTE DI UN CONDUTTORE CON CAMPO MAGNETICO INTERNO

Un conduttore cilindrico $r = 1\,cm$ presenta un campo magnetico interno $\underline{H} = \frac{10^4}{r_0}\left(\frac{1}{a^2}\sin(a r_0) - \frac{r}{a}\cos\left(\frac{a}{r_0}\right)\right)\hat{\phi}\ \left[\frac{A}{m}\right]$. Si ha che $a = \frac{\pi}{2 r_0}$. Calcolare la corrente I.

La legge di Ampere è $I = \oint_c \underline{H} \cdot d\underline{l}$ ed è utile per calcolare la corrente dato il campo magnetico

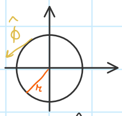
La legge di Biot-Savart è duale per cui si ricava il campo dalla corrente elettrica



In questo caso conviene usare la legge di Ampere:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{10^4}{r_0}\left(\frac{\sin(a r_0)}{a^2} - \frac{r}{a}\cos(a r_0)\right)\underbrace{\hat{\phi}\cdot\hat{\phi}}_{1}\, r\, d\phi =$$

SEZIONE:



$d\underline{l} = r\,\hat{\phi}\,d\phi$

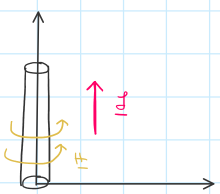
$$= \frac{10^4}{r_0}\left(\frac{\sin(a r_0)}{a^2} - \frac{r}{a}\cos(a r_0)\right) r \int_0^{2\pi} d\phi =$$

$$= 2\pi\frac{10^4}{r_0}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi^2}{4 r_0^2}} - \cancel{\frac{2 r r_0}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right) r =$$

$$= 2\cancel{\pi} r \frac{10^4}{\cancel{r_0}}\frac{4 r_0^{\cancel{2}}}{\pi^{\cancel{2}}} = \frac{8\cdot 10^4 r\cdot r_0}{\pi} = \frac{8\cdot 10^4 r_0}{\pi}\ [A]$$

CAMPO MAGNETICO DI UN CONDUTTORE NOTA LA DENSITÀ DI CORRENTE

Nella regione $0 < r < 0{,}5$ di un conduttore cilindrico la densità di corrente è pari a $\hat{z}\, 4{,}5 \cdot e^{-2r}\ [A/m^2]$ e in qualsiasi altro punto $\underline{J} = 0$. Trovare il campo magnetico $\underline{H}$ applicando la legge di Ampere



Solo all'interno del conduttore è presente una densità di carica mentre fuori no

Per la legge di Ampere $I = \oint_c \underline{H} \cdot d\underline{l}$ [A]

mentre per trovare la corrente I si applica la relazione corrente - intensità di corrente

Il campo magnetico, poiché si avvolge intorno a $\hat{z}$ e dipende dall'angolo allora è definita da una intensità H_ϕ e un versore e il versore è proprio $\hat{\phi}$

Ricordando che $d\underline{l} = \hat{\phi}\, r\, d\phi$ poiché la sezione è una CIRCONFERENZA posso riscrivere l'integrale della legge di Ampere come

$$I = \oint_0^{2\pi} \hat{\phi} H_\phi \cdot r \hat{\phi} d\phi = \int_0^{2\pi} H_\phi r d\phi = H_\phi r \int_0^{2\pi} d\phi = H_\phi \cdot r \cdot 2\pi \quad \text{dunque}$$

$$\boxed{H_\phi = \frac{I}{2\pi r}}$$

MODULO DI UN CAMPO MAGNETICO (nota l'intensità)

Dunque, si può banalmente calcolare il modulo di $\underline{H}$ e moltiplicarlo per il versore in modo da ottenere il vettore

Come si diceva sopra, si può calcolare la corrente I nota la densità secondo la formula

$$I = \iint_S \underline{J} \cdot \hat{u} \, dS \qquad \text{In questo caso} \quad dS = r dr d\phi$$

Dunque $I = \int_0^{2\pi} \int_0^{0,5} \hat{z} \, 4,5 \cdot e^{-2r} \cdot \hat{z} \cdot r \, dr \, d\phi =$

integrale notevole

$$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{0,5} 4,5 \, e^{-2r} r dr = 4,5 \cdot 2\pi \boxed{\int_0^{0,5} e^{-2r} r \, dr} = 0,594\pi \, [A]$$

L'integrale di corrente è un integrale doppio di superficie e nel caso di un conduttore circolare la superficie infinitesima in coordinate cilindriche è $r \cdot dr d\phi$

Avendo la corrente, si può calcolare il campo:

$$\underline{H} = \hat{\phi} \frac{I}{2\pi r} = \hat{\phi} \frac{0,594 \cancel{\pi}}{2\cancel{\pi} r} = \frac{0,297}{r} \hat{\phi}$$

Il campo magnetico dipende dal punto in cui si trova in una sezione

Elettrodinamica

mercoledì 3 febbraio 2021 19:01

Contesti statici $\begin{cases} \text{Elettrostatica} \\ \text{Magnetostatica} \end{cases}$ $\dfrac{d}{dt} = 0$ in quanto le grandezze non variano col tempo

Contesti dinamici { Sono gestite dalle eq. di Maxwell tratte da esperimenti empirici }

EQ. DI MAXWELL
↓
Superano i concetti di campi elettrici e campi magnetici per introdurre il campo ELETTROMAGNETICO

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{e} = -\dfrac{d\underline{b}}{dt} \\ \nabla \times \underline{h} = \dfrac{d\underline{d}}{dt} + \underline{J} \\ \nabla \cdot \underline{d} = \rho \\ \nabla \cdot \underline{b} = 0 \end{cases}$$

FORMA DIFFERENZIALE (nel dominio del tempo)

OPERATORE NABLA

$$\boxed{\nabla \triangleq \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)}$$

derivate parziali rispetto alle coordinate spaziali

Caratteristiche

1) Sono equazioni che tengono in considerazione sia le variazioni spaziali che temporali ad esempio il campo $\underline{e}\,(\underbrace{x, y, z}_{\text{spaziale}}, \underbrace{t}_{\text{temporale}})$ dipende da quattro variabili

2) Le grandezze coinvolte sono di tre "gruppi"

$\underline{J}$ densità di corrente, ρ densità di carica → **SORGENTI** → termini noti

$\underline{e}$ campo elettrico, $\underline{h}$ campo magnetico → **CAMPI** → **CAMPO ELETTROMAGNETICO**

$\underline{b}$ induzione magnetica, $\underline{d}$ induzione elettrica → **INDUZIONI** → identificano il mezzo

$\nabla \times \underline{J} = 0$ significa che non vi è variazione spaziale

Nel caso della staticità ovvero con $\dfrac{d}{dt} = 0$ allora le equazioni diventano

$\nabla \times \underline{e} = 0$ → non c'è variazione spaziale di campo elettrico allora non c'è campo elettrico

$\nabla \times \underline{h} = \underline{J}$ → posso avere un campo magnetico in condizioni statiche solo se c'è corrente. In assenza di corrente posso avere un campo magnetico variabile se sono in condizioni dinamica

Ne deriva che in condizioni dinamiche se si ha un campo magnetico allora si ha un campo elettrico e viceversa.

NABLA:

$\nabla \cdot \underline{A}$ ⇒ permette di valutare quanto diverge in una zona. Un valore alto indica divergenza brusca mentre un valore basso indica un parallelismo fra le linee di flusso

$\nabla \times \underline{A}$ ⇒ permette di valutare quanto è intenso un campo magnetico in quanto ad una certa distanza le onde

$\nabla \times \underline{A}$ => permette di valutare quanto è intenso un campo magnetico in quanto ad una certa distanza le onde di un campo tendono ad appiattirsi

TEOREMA DI GAUSS (teorema della divergenza)

Dato un volume V delimitato dalla superficie S e normale $\hat{u}$

$$\iiint_V \nabla \cdot \underline{A} \, dV = \oint_S \underline{A} \circ \hat{u} \, dS$$

da ciò si dimostra che la terza legge di Maxwell sarà

$$\iiint_V \nabla \circ \underline{d} \, dV = \iiint_V \rho \, dV$$

dove 1) $\iiint_V \rho \, dV = Q$ 2) $\iiint_V \nabla \circ \underline{d} \, dV = \oint_S \underline{d} \circ \hat{u} \, dS$

dunque $Q = \oint_S \underline{d} \circ \hat{u} \, dS$ che è la LEGGE DI GAUSS

Inoltre $\iiint_V \nabla \circ \underline{b} \, dV = 0$ che significa che $\oint_S \underline{b} \circ \hat{u} \, dS = 0$

dunque in natura non esistono cariche isolate ma dipoli magnetici

e poiché $\nabla \circ \underline{b} = 0$ allora $\underline{b}$ è SOLENOIDALE

per passare da eq. differenziali a integrali

TEOREMA DI STOKES

Data una superficie aperta S con contorno C

$$\iint_S (\nabla \times \underline{A}) \circ \hat{u} \, dS = \oint_C \underline{A} \circ d\underline{\ell}$$

Di conseguenza si può riscrivere la seconda legge di Maxwell come

$$\iint_S (\nabla \times \underline{h}) \circ \hat{u} \, dS = \iint_S \frac{\partial \underline{d}}{\partial t} \circ \hat{u} \, dS + \iint_S \underline{J} \circ \hat{u} \, dS$$

$\oint_C \underline{h} \circ d\underline{\ell}$

corrente di spostamento in condizioni dinamiche

0 in condizione statica

I corrente di conduzione

Ottengo dunque che la 2ª legge equivale alla legge di Ampere tale che

$$\oint_C \underline{h} \circ d\underline{\ell} = \underbrace{\frac{d}{dt} \iint_S \underline{d} \circ \hat{u} \, dS}_{=0 \text{ in condizioni statiche}} + I$$

Applicando il teorema alla prima legge ho che

$$\iint_S (\nabla \times \underline{e}) \circ \hat{u} \, dS = \iint_S -\frac{d\underline{b}}{dt} \, \hat{u} \, dS$$ da cui poiché

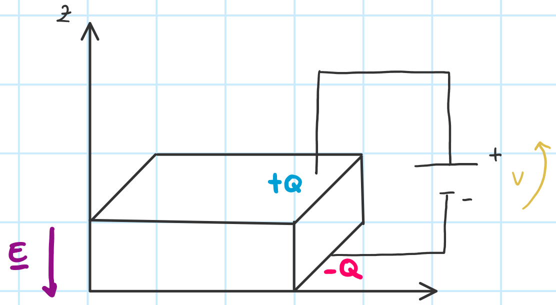
$$\iint_S (\nabla \times \underline{e}) \circ \hat{u} \, dS = \oint_C \underline{e} \circ d\underline{\ell}$$ allora

$$\underbrace{\oint_C \underline{e} \circ d\underline{\ell}}_{\text{Fem}} = -\frac{d}{dt} \underbrace{\iint_S \underline{b} \circ \hat{u} \, dS}_{\phi_b}$$

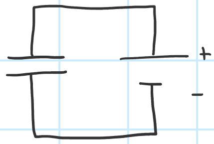
dove $fem = -\frac{d}{dt} \phi_b$ è la LEGGE DI FARADAY

Condensatori multistrato

giovedì 4 febbraio 2021 16:15

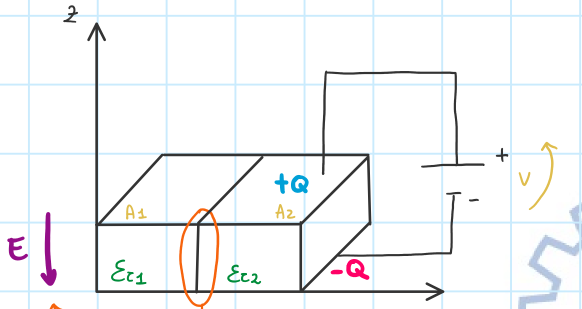


Condensatore con un solo dielettrico

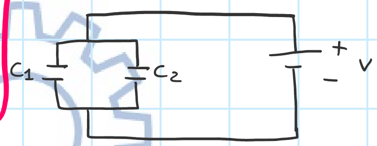


$$C = \frac{\varepsilon \cdot A}{d}$$

CONDENSATORI IN PARALLELO



Condensatore con due dielettrici



$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r1} \cdot A_1}{d}$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{r2} \cdot A_2}{d}$$

$$\Downarrow$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

parallela al campo elettrico

INTERFACCIA
↓
Linea di separazione fra i due dielettrici

La Tensione viene applicata allo stesso modo ad entrambi i condensatori

Esercizio

È dato un condensatore con piastre distanti $d = 10^{-3}$ m e i dielettrici hanno $\varepsilon_{r1} = 1{,}5$ e $\varepsilon_{r2} = 3{,}5$. L'area è di $2\,m^2$ e ogni dielettrico occupa metà volume. Calcolare la capacità equivalente

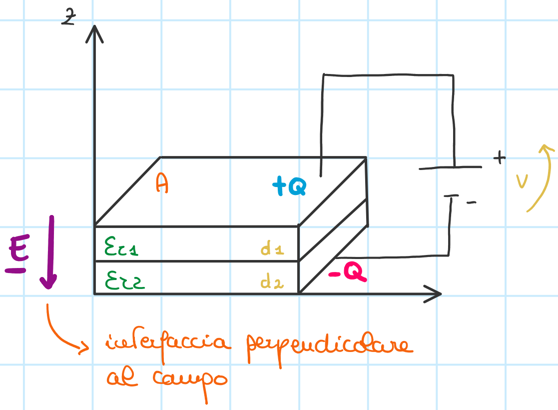
$$C_1 = \frac{\varepsilon_{r1} \cdot \varepsilon_0 \cdot A}{2 \cdot d} = \frac{1{,}5 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 2}{2 \cdot 10^{-3}} = 13{,}9 \cdot 10^{-9}\,[F]$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_{r2} \cdot \varepsilon_0 \cdot A}{2d} = \frac{3{,}5 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 2}{2 \cdot 10^{-3}} = 30{,}98 \cdot 10^{-9}\,[F]$$

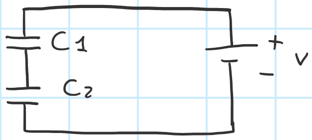
$$C_{eq} = C_1 + C_2 = (13{,}9 + 30{,}98) \cdot 10^{-9} = 44{,}26 \cdot 10^{-9}\,[F]$$

CONDENSATORI IN SERIE

CONDENSATORI IN SERIE



Condensatore con due dielettrici



$$C_1 = \frac{\varepsilon_{r1} \cdot \varepsilon_0 \cdot A}{d_1}$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_{r2} \cdot \varepsilon_0 \cdot A}{d_2}$$

$$C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

Esercizio

È dato un condensatore con piastre distanti $d = 10^{-3}$ m e i dielettrici hanno $\varepsilon_{r1} = 1,5$ e $\varepsilon_{r2} = 3,5$. L'area è di $2\,m^2$ e ogni dielettrico occupa metà volume lungo la distanza d

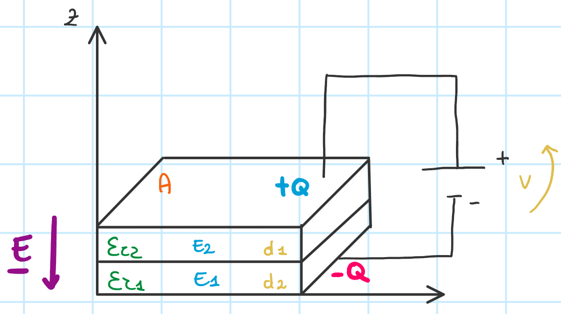
ovvero $d_1 = d_2 = \frac{d}{2}$

$$C_1 = \frac{\varepsilon_{r1} \cdot \varepsilon_0 \cdot A}{d_1} = \frac{1,5 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 2}{5 \cdot 10^{-4}} = 53,12 \cdot 10^{-9} \text{ [F]}$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_{r2} \cdot \varepsilon_0 \cdot A}{d_2} = \frac{3,5 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \cdot 2}{5 \cdot 10^{-4}} = 123,96 \cdot 10^{-9} \text{ [F]}$$

$$C_{eq} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{53,12 \cdot 123,96 \cdot 10^{-9} \cdot 10^{-9}}{10^{-9}\,(53,12 + 123,96)} = 37,18 \cdot 10^{-9} \text{ [F]}$$

Esercizio



Trovare la differenza di potenziale per ciascun dielettrico sapendo che $V = 200$ [V], $d_1 = 10^{-3}$ m, $d_2 = 3 \cdot 10^{-3}$ m, $\varepsilon_{r1} = 5$, $\varepsilon_{r2} = 1$ e $A = 1\,m^2$

$\varepsilon_{r1} = 5$, $\varepsilon_{r2} = 1$ e $A = 1\,m^2$

Sapendo che $dV = -\int_0^{\ell} \underline{E} \circ d\underline{\ell}$ e che, per la legge di Gauss, $D = \frac{Q}{A}$ e che $C = \frac{Q}{V}$ allora $D = \frac{C \cdot V}{A}$ e, in questo caso, $D = \frac{C_{eq} \cdot V}{A}$

Calcolo C_{eq}:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_{r1} \cdot \varepsilon_0 \cdot A}{d_1} = \frac{5 \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 1}{1 \cdot 10^{-3}} = 5000\, \varepsilon_0 \; [F]$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_{r2} \cdot \varepsilon_0 \cdot A}{d_2} = \frac{1 \cdot \varepsilon_0 \cdot 1}{3 \cdot 10^{-3}} = 333{,}3\, \varepsilon_0 \; [F]$$

$$C_{eq} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = 2{,}76 \cdot 10^{-9} \; [F]$$

Posso dunque calcolare $D = \frac{C_{eq} \cdot V}{A} = \frac{2{,}76 \cdot 10^{-9} \cdot 200}{1} = 5{,}53 \cdot 10^{-7} \left[\frac{C}{m^2}\right]$

Sapendo che $\underline{D} = \varepsilon \cdot \underline{E}$ allora $E_1 = \frac{D}{\varepsilon_{r1} \cdot \varepsilon_0} = 1{,}25 \cdot 10^{-4} \left[\frac{V}{m}\right]$

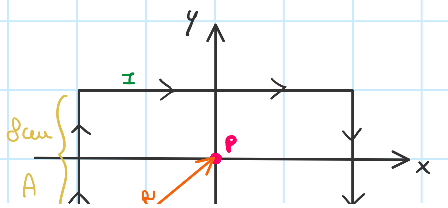
mentre $E_2 = \frac{D}{\varepsilon_{r2} \cdot \varepsilon_0} = 6{,}25 \cdot 10^{4} \left[\frac{V}{m}\right]$

Perciò $V_1 = E_1 \cdot \overset{=\ell}{d_1} = 1{,}25 \cdot 10^{4} \cdot 10^{-3} \cdot 1 = 12{,}5 \; [V]$

$V_2 = E_2 \cdot d_2 = 6{,}25 \cdot 10^{4} \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 187{,}5 \; [V]$

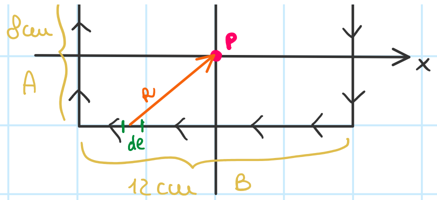
Esercizio

Data una spira rettangolare percorsa da una corrente $I = 25\,A$ calcolare il campo magnetico e l'induzione $\underline{B}$ in $P(0,0,0)$ sapendo che $\mu_r = 1$



In questo caso bisogna usare la legge di Biot-Savart

$$d\underline{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{d\underline{\ell} \times \hat{i}_R}{R^2}$$



$$d\underline{H} = \frac{I}{4\pi}\,\frac{d\underline{\ell} \times \hat{i}_R}{R^2}$$

$\underline{R}_0 = 0 \qquad P_0(0,0,0)$

$\underline{R}_A = -\left(\frac{B}{2}\right)\hat{y} + x\hat{x} \qquad \underline{R} = \underline{R}_0 - \underline{R}_A = -\underline{R}_A = -x\hat{x} + \left(\frac{B}{2}\right)\hat{y}$

$$\hat{i}_R = \frac{\underline{R}}{|\underline{R}|} = \frac{-x\hat{x} + \left(\frac{B}{2}\right)\hat{y}}{\sqrt{x^2 + \frac{B^2}{4}}}$$

$d\underline{\ell} = -\hat{x}\,dx$

$$d\underline{H}_{\frac{A}{2}} = \frac{I}{4\pi}\,\frac{-\hat{x}\,dx \times \left(-x\hat{x} + \frac{B}{2}\hat{y}\right)}{\left[x^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{I}{4\pi}\,\frac{-\hat{z}\left(\frac{B}{2}\right)dx}{\left[x^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2\right]^{3/2}}$$

dunque $$H_{\frac{A}{2}} = \int_0^{A/2} \frac{I}{4\pi}\,\frac{-\hat{z}\left(\frac{B}{2}\right)dx}{\left[x^2 + \left(\frac{B}{2}\right)\right]^{3/2}} = \frac{I}{4\pi}\,(-\hat{z})\,\frac{B}{2}\int_0^{A/2} \frac{dx}{\left[x^2 + \frac{B^2}{2}\right]^{3/2}} =$$

$$= -\hat{z}\,\frac{I}{4\pi}\,\frac{B}{2}\left[\frac{x}{\left(\frac{B}{2}\right)^2\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2 + x^2}}\right]_0^{A/2} = -\hat{z}\,\frac{I}{4\pi}\left(\frac{B}{2}\right)\left[\frac{A/2}{\frac{B^2}{4}\sqrt{\frac{B^2}{4} + \frac{A^2}{4}}}\right] = -\hat{z}\,41\ [A/m]$$

E ne esce che $\underline{H}_A = 4\left(-\hat{z}\cdot 41\right) = -\hat{z}\ 164\ [A/m]$

Studio l'altro segmento:

$\underline{R}_0 = 0 \qquad \underline{R}_B = -\frac{A}{2}\hat{x} + y\hat{y} \qquad \underline{R}_2 = \underline{R}_0 - \underline{R}_B = -\underline{R}_B = \frac{A}{2}\hat{x} - y\hat{y}$

$d\underline{\ell}_2 = \hat{y}\,dy \qquad \hat{i}_{R_2} = \frac{\underline{R}_2}{|\underline{R}_2|} = \frac{\frac{A}{2}\hat{x} - y\hat{y}}{\sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 + y^2}}$

Dunque $$d\underline{H}_{\frac{B}{4}} = \frac{I}{4\pi}\,\frac{\hat{y}\,dy \times \left(A/2\,\hat{x} - y\hat{y}\right)}{\left[\left(\frac{A}{2}\right)^2 + y^2\right]^{3/2}} = \frac{I}{4\pi}\,\frac{-\hat{z}\left(\frac{A}{2}\right)dy}{\left[(A/2)^2 + y^2\right]^{3/2}}$$

Dunque $$\frac{d\underline{H}_B}{4} = \frac{I}{4\pi} \frac{\hat{y}\,dy \times \left(A/2\,\hat{x} - y\,\hat{y}\right)}{\left[\left(\frac{A}{2}\right)^2 + y^2\right]^{3/2}} = \frac{I}{4\pi} \frac{-\hat{z}\,(A/2)\,dy}{\left[(A/2)^2 + y^2\right]^{3/2}}$$

$$\frac{\underline{H}_B}{4} = \int_0^{B/2} \frac{I}{4\pi} \frac{-\hat{z}\;A\;dy}{2\left[A^2/4 + y^2\right]^{3/2}} = -\hat{z}\,\frac{I}{4\pi}\,\frac{A}{2}\int_0^{B/2} \frac{dy}{\left[A^2/4 + y^2\right]^{3/2}} = -\hat{z}\;18{,}40\;[A/m]$$

$$\underline{H}_B = 4\left(-\hat{z}\;18{,}4\right) = -\hat{z}\;73{,}60\;[A/m]$$

In fine $$\underline{H} = \underline{H}_A + \underline{H}_B = -\hat{z}\;237{,}6\;[A/m]$$

COSTANTE DIELETTRICA IN UN CONDENSATORE

Considerando un condensatore a piatti quadrati paralleli, calcolare la ε_r del mezzo tra i due piatti sapendo che $C = 13\ pF$, $A = 0{,}008\ m^2$, $d = 10\ mm = 10 \cdot 10^{-3}\ m$

La capacità di un condensatore diminuisce con l'aumentare della distanza fra le due piastre. Dunque la capacità dipende dalla geometria del condensatore ma anche dal mezzo che si trova fra le due piastre (caratterizzato da ε)

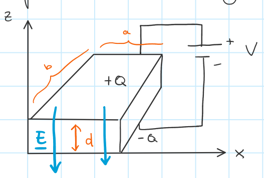
Infatti $C = \dfrac{\varepsilon \cdot A}{d} = \dfrac{\varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot A}{d} \Rightarrow \varepsilon_r = \dfrac{C \cdot d}{\varepsilon_0 \cdot A} = \dfrac{13 \cdot 10^{-12} \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}008} = 1{,}83$

Ricordando che ε_r deve essere maggiore o uguale di uno

CAMPO ELETTRICO, CARICA TOTALE ED ENERGIA POT. ELETTROSTATICA

Supponiamo di avere un condensatore a piastre parallele rettangolari di lato $a = 2\ cm$ e $b = 6\ cm$. La distanza tra le due armature (piastre) è $d = 7\ mm = 7 \cdot 10^{-3}\ m$. Ai capi del condensatore è applicato un potenziale $V = 90\ V$. Inoltre, tra i piatti è presente un mezzo con $\varepsilon_r = 3$.

Calcolare il campo elettrico all'interno del condensatore, la carica totale sulle piastre e l'energia potenziale elettrostatica W_e.



Il generatore carica positiva su una piastra e una carica negativa sull'altra. All'interno si genera un campo elettrico che è $-\hat{z}$ perché il verso della corrente è dalla piastra positiva a quella negativa

Si può dunque definire il campo come prodotto fra il suo versore e il suo modulo quindi $\underline{E} = -\hat{z} \cdot E_z$

Dalla formula del potenziale $V = -\int_{x_1}^{x_2} \underline{E} \cdot d\underline{\ell} = -\int_0^{0{,}007} -\hat{z}\, E_z \cdot \hat{z}\, dz =$

$= E_z \int_0^{7 \cdot 10^{-3}} dz = E_z\, d$ per cui $E_z = \dfrac{V}{d} = \dfrac{90}{0{,}007} = 12{,}8 \cdot 10^3 \left[\dfrac{V}{m}\right]$

Di conseguenza $\underline{E} = -\hat{z}\ 12{,}8 \cdot 10^3 \left[\dfrac{V}{m}\right]$

Per calcolare la carica totale si ricorre alla formula della capacità per cui $C = \dfrac{Q}{V}$.

* Si ha che $C = \dfrac{Q}{V} = \dfrac{\varepsilon \cdot A}{d}$ perché si applica la legge di Gauss

Dunque $Q = C \cdot V$ e $C = \dfrac{\varepsilon \cdot A}{d} = \dfrac{3 \cdot \varepsilon_0 \cdot a \cdot b}{d} = \dfrac{3 \cdot \varepsilon_0 \cdot 2 \cdot 10^{-2} \cdot 6 \cdot 10^{-2}}{0{,}007} = 4{,}55\ 10^{-12}$ [F]

Perciò $Q = 4{,}55 \cdot 10^{-12} \cdot 90 = 4{,}09 \cdot 10^{-10}\ C$

L'energia potenziale elettrostatica si può calcolare come $W_e = \dfrac{1}{2} C V^2 = \dfrac{90^2}{2} \cdot 4{,}55 \cdot 10^{-12} = 1{,}84 \cdot 10^{-8}$ [J]

ROTORE DI UN CAMPO

Ricavare il rotore del campo vettoriale A con

$$A = \hat{x}(5xy+3z) + \hat{y}\,3x^2 + \hat{z}\,7yz = (5xy+3z,\ 3x^2,\ 7yz)$$

$$\nabla \times A = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ 5xy+3z & 3x^2 & 7yz \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{x}\left(\frac{\partial(7yz)}{\partial y} - \frac{\partial(3x^2)}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial(5xy+3z)}{\partial z} - \frac{\partial(3x^2)}{\partial z}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial(3x^2)}{\partial x} - \frac{\partial(5xy+3z)}{\partial y}\right) =$$

$$= \hat{x}(7z-0) + \hat{y}(3-0) + \hat{z}(6x-5x) = 7z\hat{x} + 3\hat{y} + x\hat{z}$$

DIVERGENZA E ROTORE DI UN CAMPO

Calcolare la divergenza e il rotore di $A = \hat{x}\,2x^2 - \hat{y}\,3yz + \hat{z}\,xz^2 = (2x^2, -3yz, xz^2)$

$$\nabla \cdot A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 4x - 3z + 2xz$$

$$\nabla \times A = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ 2x^2 & -3yz & xz^2 \end{vmatrix} = \hat{x}\left(\frac{\partial(xz^2)}{\partial y} - \frac{\partial(-3yz)}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial(2x^2)}{\partial z} - \frac{\partial(xz^2)}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial(-3yz)}{\partial x} - \frac{\partial(2x^2)}{\partial y}\right) =$$

$$= \hat{x}(0+3y) + \hat{y}(0-z^2) + \hat{z}(0-0) = \hat{x}\,3y - \hat{y}\,z^2$$

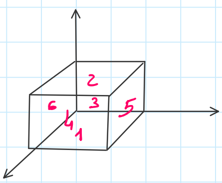
TEOREMA DELLA DIVERGENZA ⇒ avendo un campo e la sua divergenza, l'integrale di volume della divergenza è pari all'integrale di superficie (orientata) del campo, cioè

$$\iiint_V \nabla \cdot A\, dV = \oiint_S A \cdot \hat{u}\, dS$$

Il volume è racchiuso dalla superficie chiusa S

Dimostrare il teorema:

Fissiamo un volume, ad esempio un cubo di lato 2



$$\nabla \cdot A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = z - z^2$$

dunque

$$\iiint_V \nabla \cdot A\, dV = \int_0^2\int_0^2\int_0^2 (z-z^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^2 dx \int_0^2 dy \int_0^2 (z-z^2)\,dz =$$

$$= 2\cdot 2\cdot\left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3}\right)\Big|_0^2 = 4\left(\frac{4}{2} - \frac{8}{3}\right) = -\frac{8}{3}$$

Si calcola ora il secondo integrale è, per la legge di Gauss, uguale alla somma dei singoli flussi uscenti

Nei prodotti scalari,

uguale alla somma dei singoli flussi uscenti

$$\oiint_S \underline{A}\cdot\hat{u}\, dS = \underbrace{\int_0^2\int_0^2 \underline{A}\big|_{z=0}\cdot(-\hat{z})\,dx\,dy}_{1} + \underbrace{\int_0^2\int_0^2 \underline{A}\big|_{z=2}\cdot(\hat{z})\,dx\,dy}_{2} +$$

Nei prodotti scalari, se devo fare $\hat{x}\cdot\hat{z}$ o altro, so già che sono 0

$$+ \underbrace{\int_0^2\int_0^2 \cancelto{0}{\underline{A}\big|_{x=0}\cdot(-\hat{x})}\,dy\,dz}_{3} + \underbrace{\int_0^2\int_0^2 \underline{A}\big|_{x=2}\cdot\hat{x}\,dy\,dz}_{4} + \underbrace{\int_0^2\int_0^2 \underline{A}\big|_{y=2}\cdot\hat{y}\,dx\,dz}_{5} +$$

$$+ \underbrace{\int_0^2\int_0^2 \cancelto{0}{\underline{A}\big|_{y=0}\cdot(-\hat{y})}\,dx\,dz}_{6} = \int_0^2\int_0^2 \cancelto{0}{xy\,dx\,dy} + \int_0^2\int_0^2 \cancelto{0}{-xy\,dx\,dy} +$$

$$+ \int_0^2\int_0^2 2z\,dy\,dz + \int_0^2\int_0^2 -2z^2\,dx\,dz = 2\int_0^2 dy\int_0^2 z\,dz - 2\int_0^2 dx\int_0^2 z^2\,dz =$$

$$= 2\,y\Big|_0^2\,\frac{z^2}{2}\Big|_0^2 - 2\,x\Big|_0^2\,\frac{z^3}{3}\Big|_0^2 = 2\cdot 2\cdot\frac{4}{2} - 2\cdot 2\cdot\frac{8}{3} = -\frac{8}{3}$$

TEOREMA DI STOKES → partendo da una superficie aperta chiusa da un contorno C, l'integrale di superficie del rotore del campo è uguale alla circuitazione del campo stesso, cioè

$$\iint_S (\nabla\times A)\cdot\hat{u}\,dS = \oint_C \underline{A}\cdot d\underline{l}$$

Se la divergenza è zero, il campo è SOLENOIDALE dove cioè le linee di campo si chiudono su loro stesse

Se il rotore è zero, il campo è IRROTAZIONALE

IRROTAZIONALITÀ

Dato il campo $A = \hat{x}(6xy-1) + \hat{y}\,3x^2 + \hat{z}\,4z$, verificare che sia irrotazionale!

$$\nabla\times A = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ d_x & d_y & d_z \\ 6xy-1 & 3x^2 & 4z \end{vmatrix} = \hat{x}\left(\frac{\partial(4z)}{\partial y} - \frac{\partial(3x^2)}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial(6xy-1)}{\partial z} + \frac{\partial(4z)}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial(3x^2)}{\partial x} - \frac{\partial(6xy-1)}{\partial y}\right) =$$

$$= \hat{x}(0-0) + \hat{y}(0-0) + \hat{z}(6x-6x) = 0$$

La legge di Faraday si ottiene dalla prima equazione di Maxwell tramite l'applicazione del teorema di Stokes:

$$\oint_C \underline{e}\cdot d\underline{l} = -\frac{d}{dt}\iint_S \underline{b}\cdot\hat{u}\,dS$$

FORZA ELETTROMOTRICE

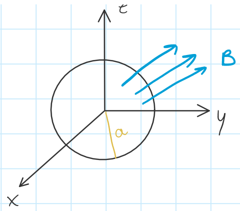
flusso dell'induzione (campo) magnetica variabile nel tempo,
↳ siamo infatti in elettrodinamica

⇒ LEGGE DI FARADAY $f_{em} = -\frac{d}{dt}\Phi_b$

FORZA ELETTROMOTRICE IN UNA SPIRA

Una spira è avvolta intorno ad un percorso circolare di raggio a e giace in (xy) centrata nell'origine. In presenza del campo magnetico $\underline{B} = B_0(\hat{y}\,z + \hat{z}\,3)\sin(\omega t)$ dove ω è la frequenza angolare, si determini la forza elettromotrice quando $B_0 = 0{,}2$ [T] $a = 10$ cm e $\omega = 10^3$ rad/s

$\uparrow z$



$\underline{B} = 0{,}2\,(\hat{y}z + \hat{z}3)\,\sin(10\,t)$

Sapendo che $fem = -\frac{d}{dt}\phi_B = -\frac{d}{dt}\iint_S \underline{B}\cdot\hat{u}\,ds$

Calcolo il flusso $\phi_B = \iint_S \underline{B}\cdot\hat{u}\,ds$ dove $\hat{u} = \hat{z}$ e $ds = r\,dr\,d\phi$

perciò $\phi_B = \int_0^{2\pi}\int_0^{0,1} 0{,}2\,(\hat{y}z + \hat{z}3)\sin(10^3t)\,\hat{z}\,r\,dr\,d\phi =$

$= 0{,}2\sin(10^3t)\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{0,1} (\hat{y}z + 3\hat{z})\,\hat{z}\,r\,dr =$

$= 0{,}2\sin(10^3t)\,2\pi\int_0^{0,1} 3r\,dr = 0{,}2\sin(10^3t)\,\cancel{2}\pi\,\frac{3r^2}{\cancel{2}}\Big|_0^{0,1}$

$= 0{,}6\sin(10^3t)\,\pi\cdot 0{,}01 = 18{,}84\cdot10^{-3}\sin(10^3t)$

dunque $fem = -\frac{d}{dt}\left[18{,}84\cdot10^{-3}\sin(10^3t)\right] = -18{,}84\cdot10^{-3}\,\frac{d\,(\sin(10^3t))}{dt} =$

$= -18{,}84\cdot\cancel{10^{-3}}\cdot\cancel{10^3}\cos(10^3t) = -18{,}84\cos(10^3t)\ [V]$

anche se è una forza, la forza elettromotrice è un rapporto fra lavoro e carica stessa [J/C] e può essere vista anche come potenziale

Prove di esame

giovedì 4 febbraio 2021 19:08

25 Feb 2019

Appello di FONDAMENTI DI ELETTROMAGNETISMO
del 25 febbraio 2019

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Informatica

Cognome e Nome: ______________________ **Matricola:** ________

Quesito

Ricavare e discutere la legge di Ampere.

Esercizio

Siano assegnate due cariche elettriche $Q_1 = 2nC$ e $Q_2 = 4nC$, posizionate nei punti $P_1(2,0,0)$ e $P_2(0,0,5)$, rispettivamente. Calcolare la forza elettrica esercitata su una terza carica $Q_3 = 1nC$, posta nel punto $P_3(1,1,3)$.
Nell'ipotesi che la carica Q_3 si muova con velocitá $\underline{v} = \hat{z}\ 3 \cdot 10^6 m/s$, calcolare la forza di Lorentz in presenza di un campo di induzione magnetica $\underline{B} = \hat{y} \cdot 4T$.

La forza di Lorentz è $\underline{F}_L = \underline{F}_e + \underline{F}_m$

Solo le cariche q_1 e q_2 sono sorgenti del campo.

$\underline{F}_e = q_3 \cdot \underline{E}$ con $\underline{E}$ campo generato da q_1 e q_2.

Poiché è additivo, scrivo $\underline{E} = \underline{E}_1 + \underline{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{q_1(\underline{R}-\underline{R}_1)}{|\underline{R}-\underline{R}_1|^3} + \frac{q_2(\underline{R}-\underline{R}_2)}{|\underline{R}-\underline{R}_2|^3}\right)$

Calcolo i vettori:

$\underline{R}_1 = 2\hat{x}$; $\underline{R}_2 = 5\hat{z}$; $\underline{R} = \hat{x} + \hat{y} + 3\hat{z}$

$\underline{R}-\underline{R}_1 = -\hat{x} + \hat{y} + 3\hat{z}$; $|\underline{R}-\underline{R}_1| = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}$

$\underline{R}-\underline{R}_2 = \hat{x} + \hat{y} - 2\hat{z}$; $|\underline{R}-\underline{R}_2| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$

Dunque $\underline{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\ \frac{2 \cdot 10^{-9}(-\hat{x}+\hat{y}+3\hat{z})}{36,48} + \frac{4 \cdot 10^{-9}(\hat{x}+\hat{y}-2\hat{z})}{14,69}$

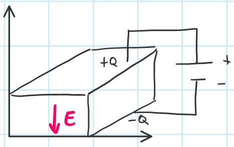
e $\underline{F}_e = q_3 \cdot \underline{E}$ [N]

Invece $\underline{F}_m = q_3(\underline{v} \times \underline{B}) = 10^{-9}(\hat{z}\, 3 \cdot 10^6 \times \hat{y}\, 4) = -\hat{x}\ 12 \cdot 10^{-3}$ [N]

Perciò $\underline{F}_L = \underline{F}_e + \underline{F}_m$

Esercizio

I piatti di un condensatore sono posti a distanza $0{,}2\,m$ e hanno lato $\ell = 10\,cm$. La diff. di potenziale applicata è pari a $100\,V$ e la conducibilità è $\sigma = 4 \cdot 10^{-5}\,[S/m]$



Il campo $\underline{E} = -\hat{z}\, E_z$. Sapendo che

$$V = -\int_0^d -\hat{z}\, E_z \circ \hat{z}\, dz = \int_0^d E_z\, dz =$$

$$= E_z \int_0^{0{,}2 \cdot 10^{-2}} dz = 0{,}2 \cdot 10^{-2} E_z$$

dunque $E_z = \frac{V}{d} = \frac{120}{0{,}2 \cdot 10^{-2}} = 60 \cdot 10^3\,[V/m]$

Applico poi la legge di Ohm per cui

se $\underline{J} = \sigma \cdot \underline{E} = 4 \cdot 10^{-5} \left(-\hat{z} \cdot 60 \cdot 10^3\right) = -\hat{z}\, 2{,}4\ [A/m^2]$

da cui $I = \iint_S \underline{J} \circ \hat{u}\, dS = \int_0^{0{,}1}\int_0^{0{,}1} -\hat{z}\, 2{,}4 \circ -\hat{z}\, dx\,dy = 24 \cdot 10^{-3}\,[A]$

Volendo calcolare la potenza dissipata si ha che $P = \int_V \sigma \cdot |\underline{E}|^2 dV = I^2 \cdot R =$

$$= \sigma \left(\sqrt{60 \cdot 10^3}\right)^2 \int_0^{0{,}1}\int_0^{0{,}1}\int_0^{0{,}2\cdot 10^{-2}} dx\,dy\,dz = 2{,}88\ [W]$$

Prova di Esonero di FONDAMENTI DI ELETTROMAGNETISMO
del 18 dicembre 2018

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Informatica

Cognome e Nome: ——————————— **Matricola:** ———

Esercizio 1

Calcolare la corrente che attraversa la porzione di piano definita da $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 6$, sapendo che la densitá di corrente vale:

$$\underline{J} = \hat{z} \cdot 15cos\,(2y)\,[A/m^2]$$

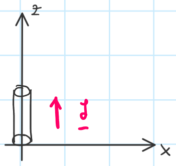
Esercizio 2

Si consideri un conduttore cilindrico di raggio $r = 0.2m$, sulla cui superficie é distribuita una densitá di corrente avente espressione:

$$\underline{J} = \hat{z} \cdot 2.8e^{-1.5r}[A/m^2]$$

Calcolare l'espressione del campo magnetico $\underline{H}$.

1



$I = \iint_S \underline{J} \circ \hat{u}\, dS$ e $\underline{H} = \hat{\phi}\, \frac{I}{2\pi r}$

Dunque $I = \iint_S \underline{J} \circ \hat{u}\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{r} \hat{z}\, 2{,}8\, e^{-1{,}5r} \circ \hat{z}\, r\, dr\, d\phi =$