$\underline{F}(x,y,z)$ SI DICE ARMONICO SE É CONTEMPORANEAMENTE CONSERVATIVO (LAMELLARE) E SOLENOIDALE. Cioé:

$$\begin{cases} \underline{F} = \nabla U \\ \nabla \circ \underline{F} = 0 \end{cases} \Rightarrow \nabla \circ (\nabla U) = 0$$

Somma delle derivate pure parziali

$$\nabla \circ (\nabla U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \nabla^2 U$$

LAPLACIANO DI U

$$\begin{cases} \underline{F} = \nabla U \\ \nabla \circ \underline{F} = 0 \end{cases} \Rightarrow \nabla \circ (\nabla U) = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \nabla^2 U$$

LAPLACIANO DI U

$\nabla^2 U = 0$ SE IL CAMPO $\underline{F}(x,y,z)$ É ARMONICO

Il Laplaciano è zero

ESEMPIO:

$\underline{F} = (a y^m , b x^n)$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$

$m, n \in \mathbb{N}$ dunque DOMINIO SEMPLICEMENTE CONNESSO

DETERMINARE I VALORI DI a, b, m, n CHE RENDONO $\underline{F}$ CONSERVATIVO $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$F_1 = a y^m \qquad F_2 = b x^n$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = n \cdot b \cdot x^{(n-1)} \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y} = m \cdot a \cdot y^{(m-1)}$$

Si devono eguagliare SEMPRE (poiché mi interessa la conservatività)

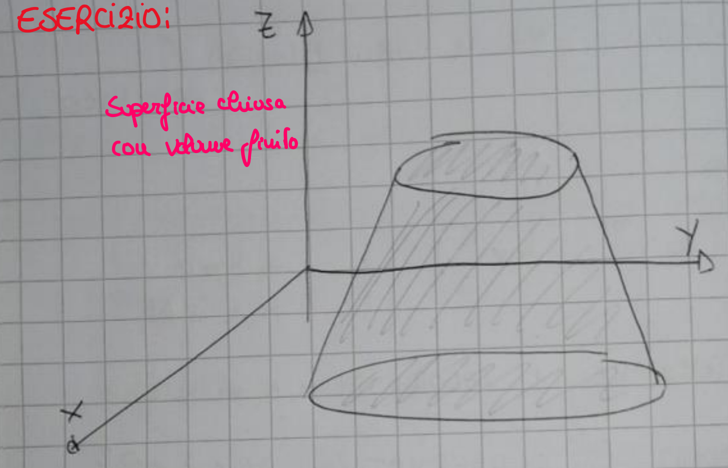
$$n \cdot b \cdot x^{(n-1)} = m \cdot a \cdot y^{(m-1)}$$

devono essere termini noti e lo sono se $m-1=0$ ed $n-1=0$

dunque: $n = m = 1 \Rightarrow b = a$

ESERCIZIO:

Superficie chiusa con volume finito



$$\underline{F} = \left(e^{z} + \cos y,\ x^3 - 7\sqrt{z^2+1},\ xy + \mathrm{sen}(x^2+1)\right)$$

CALCOLARE $\oiint \underline{F} \circ \hat{n}\, dS$

il flusso in uscita

Applico il teorema della divergenza:

$$\oiint \underline{F} \circ \hat{n}\, dS = \iiint_V \nabla \circ \underline{F}\, dx\, dy\, dz = \dots$$

$$\underline{F} = \left(e^{z} + \cos y,\ x^3 - 7\sqrt{z^2+1},\ xy + \mathrm{sen}(x^2+1)\right)$$

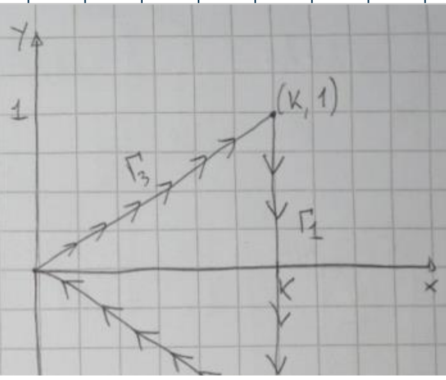
CALCOLARE $\oiint \underline{F} \circ \hat{n}\, dS$

La divergenza fa zero poiché le derivate parziali sono tutte nulle

ESERCIZIO!

$\underline{F} = (y^2+1,\ xy+3)$

DETERMINARE IL VALORE DI $K>0$ AFFINCHÉ

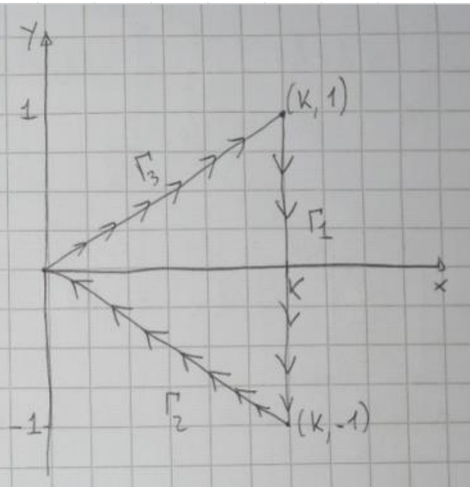


ESERCIZIO:

$\underline{F} = (y^2+1,\ xy+3)$

DETERMINARE IL VALORE DI $K>0$ AFFINCHÉ

$$\oint \underline{F} \cdot d\underline{r} = 1$$



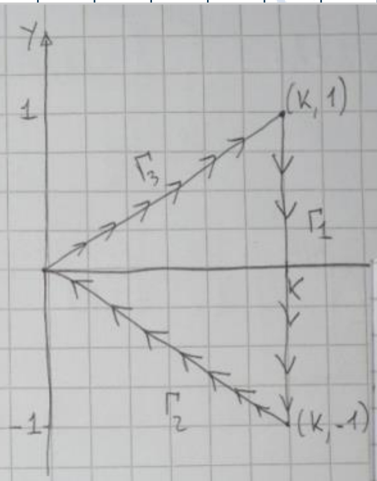
METODI:

1) Parametrizzazione delle tre superfici e sommatoria del lavoro che deve essere pari a 1
2) Poiché il percorso è chiuso, si può legare l'integrale di linea ad uno di superficie tramite Gauss-Green (devo verificare che il campo sia irrotazionale)

$\underline{F} = (y^2+1,\ xy+3)$

DETERMINARE IL VALORE DI $K>0$ AFFINCHÉ

$$\oint \underline{F} \cdot d\underline{r} = 1$$



METODO 2:

GAUSS-GREEN: $\frac{\partial F_2}{\partial x} = y \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y$

$$\iint_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy$$

SE $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ É ORIENTATA POSITIVAMENTE

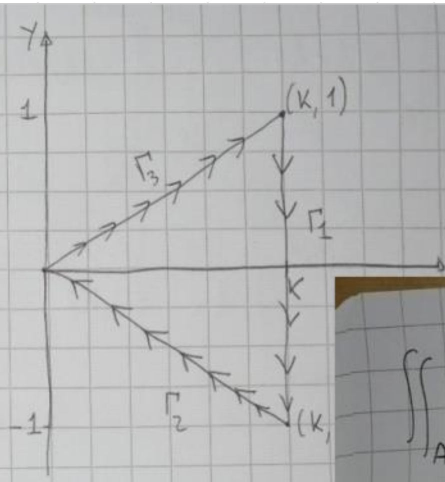
IN QUESTO CASO $\displaystyle\iint_A \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x}\right) dx\,dy$

$$A: \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le K \ \wedge\ -\frac{x}{K} \le y \le \frac{x}{K}\right\}$$

$\underline{F} = (y^2+1,\ xy+3)$

DETERMINARE IL VALORE DI $K>0$ AFFINCHÉ

$\oint \underline{F} \cdot d\underline{r} = 1$



$$\iint_A y\,dx\,dy = \int_0^K \left[\int_{-\frac{x}{K}}^{x/K} y\,dy \right] dx =$$

$$= \int_0^K \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-x/K}^{x/K} \cdot dx = 0$$

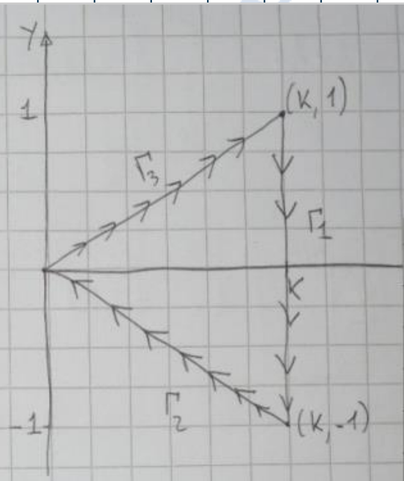
dunque!

$\nexists K \in \mathbb{R} : \oint \underline{F} \cdot d\underline{r} = 1$

$\underline{F} = (y^2+1,\ xy+3)$

DETERMINARE IL VALORE DI $K>0$ AFFINCHÉ

$\oint \underline{F} \cdot d\underline{r} = 1$



METODO 1:

VERIFICA CON INTEGRALI CURVILINEI

$$\Gamma_1 : \begin{cases} x = K \\ y = t \end{cases} \quad t \in [-1, 1] \xrightarrow{\text{differenziali}} \begin{matrix} dx = 0 \\ dy = dt \end{matrix}$$

$$\int F_2\,dy = \int_1^{-1} (Kt+3)\,dt = \left. \frac{Kt^2}{2} + 3t \right|_1^{-1} =$$

$$= \frac{K}{2} - 3 - \frac{K}{2} - 3 = -6$$

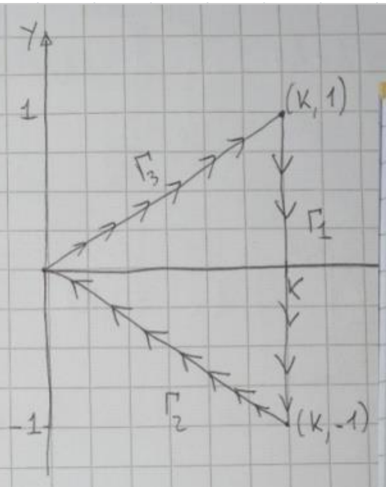
$\underline{F} = (y^2+1,\ xy+3)$

DETERMINARE

IL VALORE DI $K>0$

AFFINCHÉ

$\oint \underline{F} \cdot d\underline{r} = 1$



$\Gamma_2: \begin{cases} x = t \\ y = -\dfrac{t}{K} \end{cases} \quad t \in [0, K] \qquad dx = dt \quad dy = -\dfrac{1}{K}\,dt$

$$\int_K^0 \left(\frac{t^2}{K^2}+1\right) dt + \int_K^0 \left(-\frac{t^2}{K}+3\right)\cdot\left(-\frac{1}{K}\right)\cdot dt =$$

$$= \int_K^0 \left(\frac{t^2}{K^2} + 1 + \frac{t^2}{K^2} - \frac{3}{K}\right) dt = \frac{2}{K^2}\int_K^0 t^2\,dt + \left(1-\frac{3}{K}\right)\int_K^0 dt =$$

$$= \frac{2}{K^2}\cdot\left(\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_K^0 + \left(1-\frac{3}{K}\right)\cdot t\Bigg|_K^0 = -\frac{2}{3}K - K + 3$$

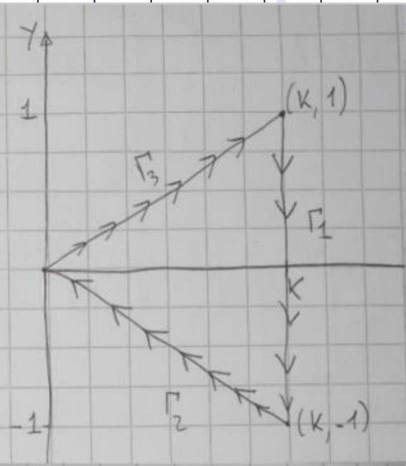
$\underline{F} = (y^2+1,\ xy+3)$

DETERMINARE

IL VALORE DI $K>0$

AFFINCHÉ

$\oint \underline{F} \cdot d\underline{r} = 1$



$\Gamma_3: \begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{t}{K} \end{cases} \quad t \in [0, K] \qquad dx = dt \quad dy = \dfrac{1}{K}\,dt$

$$\int_0^K \left(\frac{t^2}{K^2}+1\right) dt + \int_0^K \left(\frac{t^2}{K}+3\right)\cdot\frac{1}{K}\cdot dt =$$

$$= \int_0^K \left(\frac{t^2}{K^2} + 1 + \frac{t^2}{K^2} + \frac{3}{K}\right) dt =$$

$$= \frac{2}{K^2}\int_0^K t^2\,dt + \left(1+\frac{3}{K}\right)\int_0^K dt =$$

$$= \frac{2}{3}K + K + 3$$

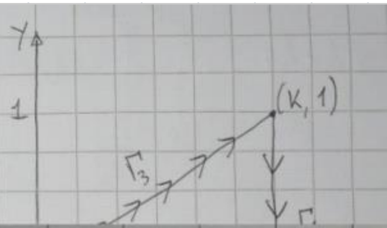
$$\oint \underline{F}\cdot d\underline{r} = -6 - \frac{2}{3}K - K + 3 + \frac{2}{3}K + K + 3 = 0$$

PER CASA: TESTARE $\underline{F} = (y^3+1,\ xy+3)$

LUNGO LO STESSO PERCORSO

$\underline{F} = (y^2+1,\ xy+3)$

DETERMINARE



$\Gamma_3: \begin{cases} x = t \\ y = \frac{t}{k} \end{cases}$ $t \in [0, k]$ $dx = dt$ $dy = \frac{1}{k}\,dt$

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$$

$f(x,y) = y$ FUNZIONE DISPARI

A SIMMETRICO RISPETTO AD ASSE x $(y=0)$

LUNGO LO STESSO PERCORSO

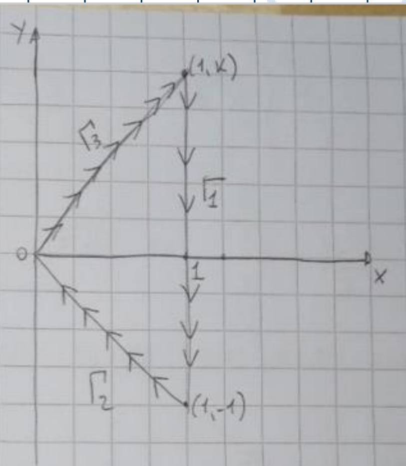
$= \frac{2}{3}k + k + 3$

ESERCIZIO!

$\underline{F} = (y^2+1,\ xy+3)$

DETERMINARE IL VALORE DI K AFFINCHÉ

$\oint \underline{F} \cdot d\underline{r} = 1$



$$\iint_A \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x}\right) dx\,dy$$

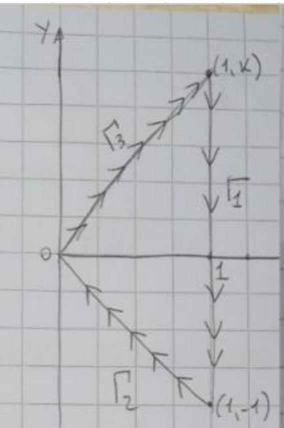
GAUSS-GREEN PER CIRCUITI ORIENTATI NEGATIVAMENTE

$A: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \ \wedge\ -x \le y \le kx\}$

$\underline{F} = (y^2+1, xy+3)$

DETERMINARE IL VALORE DI K AFFINCHÉ

$\oint \underline{F} \cdot d\underline{r} = 1$



$\iint_A \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x} \right) dx\,dy$ GAUSS-GR CIRCUITI NEGATIV

$A: \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \ \wedge\ -x \le y \le kx \}$

$$\int_0^1 \left[\int_{-x}^{kx} y\,dy \right] dx = \int_0^1 \left. \frac{y^2}{2} \right|_{-x}^{kx} dx = \int_0^1 \left(\frac{k^2x^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right) dx =$$

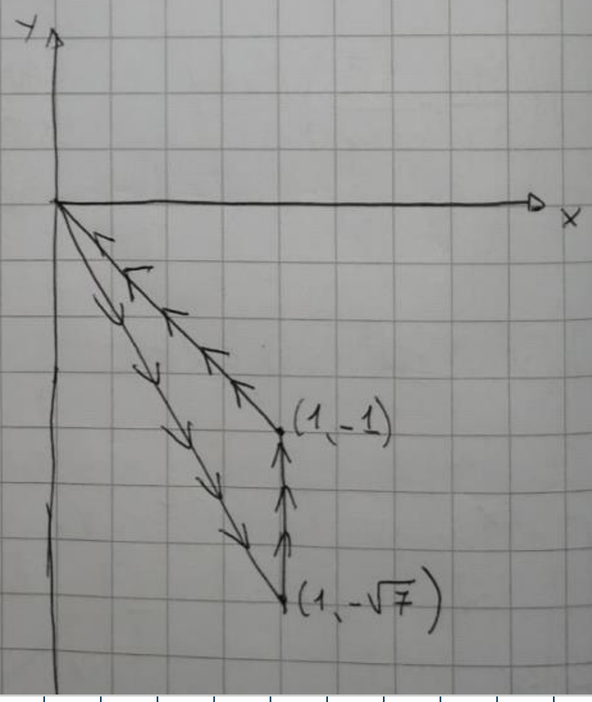
$$= \frac{(k^2-1)}{2} \int_0^1 x^2\,dx = \frac{k^2-1}{6}$$

$$\frac{k^2-1}{6} = 1 \Rightarrow k^2 = 7 \Rightarrow k = \pm\sqrt{7}$$

DAL DISEGNO, PRENDO $K>0$, OVVERO $K=\sqrt{7}$

PER $K = -\sqrt{7}$

IL CIRCUITO SAREBBE STATO ORIENTATO POSITIVAMENTE



$kx \; dx = \int_0^1 \left(\frac{k^2x^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right) dx =$

$-x$

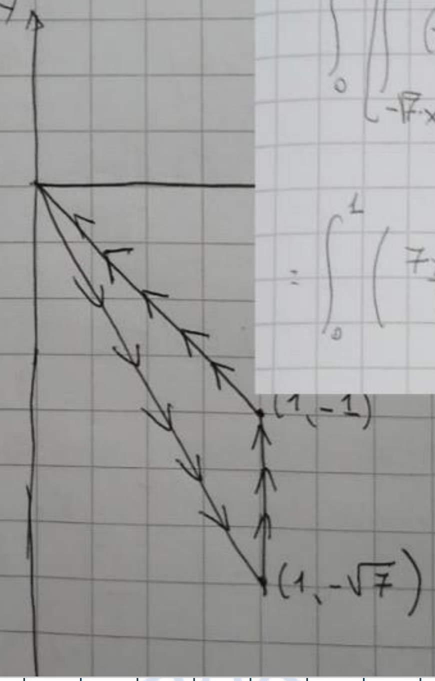
$\frac{k^2-1}{6}$

$7 \Rightarrow k = \pm\sqrt{7}$

$K>0$, OVVERO $K=\sqrt{7}$

PER $K = -\sqrt{7}$

IL CIRCUITO SAREBBE STATO ORIENTATO POSITIVAMENTE



USANDO GAUSS GREEN

$$\int_0^1 \left[\int_{-\sqrt{7}x}^{-x} (-y)\,dy\right] dx = \int_0^1 \left[\int_{-x}^{-\sqrt{7}x} y\,dy\right] dx =$$

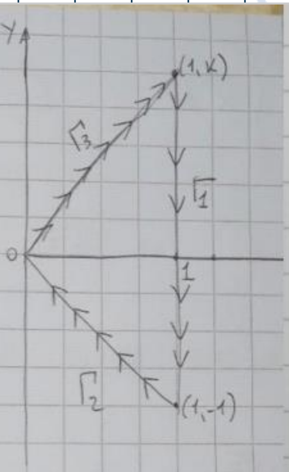
$$= \int_0^1 \left(\frac{7x^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right) dx = 3\int_0^1 x^2\,dx = 1$$

$K>0$, OVVERO $K=\sqrt{7}$

$\underline{F} = (y^2+1, xy+3)$

DETERMINARE IL VALORE DI K AFFINCHÉ

$$\oint \underline{F}\circ d\underline{r} = 1$$



$$\iint_A \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x}\right) dx\,dy$$

GAUSS-GREEN CIRCUITI OR NEGATIVAM

$A: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \ \wedge \ -x \le y <$

INTEGRALI DI LINEA NEL CASO $K>0$

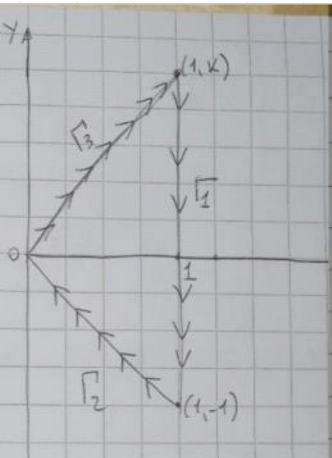
$$\Gamma_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases} \quad t \in [-1, K] \qquad \begin{matrix} dx = 0 \\ dy = dt \end{matrix}$$

$$\int_K^{-1} (t+3)\,dt = \frac{t^2}{2} + 3t \Big|_K^{-1} = \frac{1}{2} - 3 - \frac{K^2}{2} - 3K =$$

$$= -\left(\frac{K^2}{2} + 3K + \frac{5}{2}\right)$$

$$= \int_{\Gamma_1} \underline{F}\circ d\underline{r}$$

$\underline{F} = (y^2+1,\ xy+3)$



DETERMINARE IL VALORE DI K AFFINCHÉ

$$\oint \underline{F} \circ d\underline{r} = 1$$

$$\iint_A \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x}\right) dx\,dy$$

GAUSS-GREEN PE
CIRCUITI ORIEN
NEGATIVAMENT

$A: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 1 \ \wedge\ -x \le y < Kx$

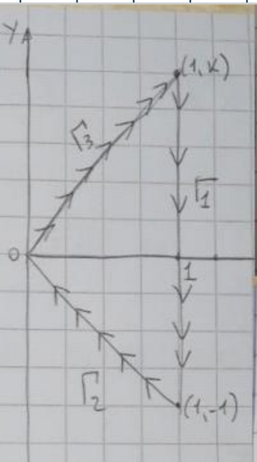
$$\Gamma_2 : \begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases} \qquad t \in [0,1] \qquad \begin{aligned} dx &= dt \\ dy &= -dt \end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_2} \underline{F} \circ d\underline{r} = \int_1^0 (t^2+1)\,dt + (-t^2+3)\cdot(-1)\cdot dt =$$

$$= \int_1^0 (t^2+1+t^2-3)\,dt = 2\int_1^0 t^2\,dt - 2\int_1^0 dt =$$

$$= -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}$$

$\underline{F} = (y^2+1,\ xy+3)$



DETERMINARE IL VALORE DI K AFFINCHÉ

$$\oint \underline{F} \circ d\underline{r} = 1$$

$$\iint_A \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x}\right) dx\,dy$$

GAUSS-GRE
CIRCUITI
NEGATIV

$A: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 1 \ \wedge\ -x \le y$

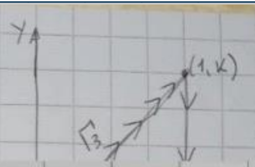
$$\Gamma_3 : \begin{cases} x = t \\ y = Kt \end{cases} \qquad t \in [0,1] \qquad \begin{aligned} dx &= dt \\ dy &= K\,dt \end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_3} \underline{F} \circ d\underline{r} = \int_0^1 (K^2t^2+1)\,dt + (Kt^2+3)\cdot K\,dt =$$

$$= \int_0^1 (K^2t^2+1+K^2t^2+3K)\,dt = 2K^2\int_0^1 t^2\,dt + (1+3K)\int_0^1 dt =$$

$$= \frac{2}{3}K^2 + 1 + 3K$$

$\underline{F} = (y^2+1, xy+3)$



$\Gamma_3: \begin{cases} x = t \end{cases} \quad t \in [0,1] \qquad dx = dt$

$$\oint_{\Gamma} \underline{F} \circ d\underline{r} = -\frac{k^2}{2} - 3k - \frac{5}{2} + \frac{4}{3} + \frac{2}{3}k^2 + 1 + 3k =$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)k^2 + \left(1 + \frac{4}{3} - \frac{5}{2}\right) = \frac{k^2}{6} + \frac{6+8-15}{6} =$$

$$= \frac{k^2-1}{6}$$

ODE

sabato 14 novembre 2020 13:36

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

$\boxed{\text{O.D.E.}}$ (ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS)

$\boxed{\text{P.D.E.}}$ (PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS)

Non si deve trovare un valore di x ma una equazione che rispetta tale relazione↓

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', y^{(n-1)})$$

Forma esplicita

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

Forma implicita

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

O.D.E. (ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS)

P.D.E. (PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS)

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$$

ARGOMENTI

$$F: A \subseteq \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

O.D.E. (ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS)

P.D.E. (PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS)

ESEMPI:

$$y^{(n)} := y^{(n)}(x)$$

derivata ordinaria di ordine n

Devo trovare le funzioni y^n tali che:

① $y' = 6xy + \cos x$

② $y'' = 7y' - 3y\sqrt{x} + e^{x^2}$

Dato un campo scalare trovo la relazione fra essa e le derivate parziali

$$\frac{\partial U(x,y,t)}{\partial t} = 3\frac{\partial^2 U(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial U(x,y,t)}{\partial y}$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Esempio:

$y' = 5x + 6 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 5x + 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow dy = (5x+6)dx$

$\int dy = \int (5x+6)dx \Rightarrow$

$y + k_1 = \frac{5}{2}x^2 + 6x + k_2$

$y = \frac{5}{2}x^2 + 6x + (k_2 - k_1)$

$\boxed{y = \frac{5}{2}x^2 + 6x + C}$

soluzione integrale generale

STUDIEREMO SOLO LE ODE

1) CLASSIFICAZIONE: QUANTI TIPI DI ODE?

2) CONDIZIONI DI ESISTENZA: QUANDO ESISTE ALMENO UNA SOLUZIONE?

3) CONDIZIONI DI UNICITÀ: QUANDO LA SOLUZIONE, OLTRE AD ESISTERE, È ANCHE UNICA?

4) TECNICHE DI RISOLUZIONE

TIPI DI SOLUZIONE (INTEGRALE SOLUZIONE)

- $\boxed{\text{SOLUZIONE O INTEGRALE GENERALE:}}$
  LA SOLUZIONE É UNA FAMIGLIA DI SOLUZIONI (COMPAIONO UNA O PIÚ COSTANTI c_i)

- $\boxed{\text{SOLUZIONE O INTEGRALE PARTICOLARE:}}$
  SI ASSEGNANO DEI VALORI SPECIFICI ALLE COSTANTI c_i (PROBLEMI DI CAUCHY E PROBLEMI AI LIMITI)

- $\boxed{\text{SOLUZIONE O INTEGRALE SINGOLARE:}}$ LA SOLUZIONE NON PUÓ ESSERE RICAVATA PER NESSUN VALORE DI c_i, MA BISOGNA FARE DEI RAGIONAMENTI SPECIFICI

CLASSIFICAZIONE ODE

	ORDINE	GRADO
a) $y' = x(y-2)$	1	1
b) $y'' - 5y' + 6y = 2x^2$	2	1
c) $(y')^2 + xy' - y = 0$	1	2
d) $(y''')^2 + y'' - y' = \operatorname{sen} x$	3	2
e) $y''' + y'' - (y')^3 = \operatorname{sen} x$	3	1

ORDINE: É IL MASSIMO ORDINE DI DERIVAZIONE NELL' ODE

GRADO: ESPONENTE DI ELEVAMENTO A POTENZA AVENTE COME BASE LA DERIVATA DI ORDINE MASSIMO

$y' = f(x,y) = f(x, y(x))$ un campo scalare

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Devo trovare una curva di Analisi 1 tale che:

$y: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ \forall x \in I$ SI HA $y' = f(x, y(x))$

INOLTRE, $\forall x \in I$ RISULTA $(x, y(x)) \in A$

Equazioni differenziali a variabili separabili

$y' = 5y \qquad y'(x) = 5y(x)$

$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 5y \Rightarrow \frac{dy}{y} = 5dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 5dx \Rightarrow \ln|y| + K_1 = 5x + K_2$$

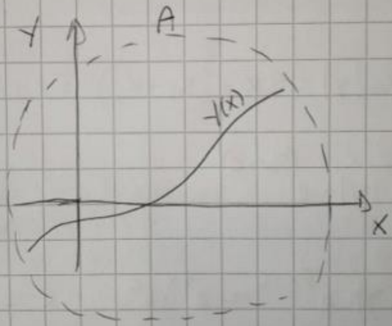
$y' = f(x,y) = f(x, y(x))$ un campo scalare

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Devo trovare una curva di Analisi $\exists$ tale che:

$y: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; \forall x \in I$ SI HA $y' = f(x, y(x))$

INOLTRE, $\forall x \in I$ RISULTA $(x, y(x)) \in A$



LA SOLUZIONE $y(x)$ É UN SOTTOINSIEME DI A

Equazioni differenziali a variabili separabili

$y' = 5y \qquad y'(x) = 5y(x)$

$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 5y \Rightarrow \frac{dy}{y} = 5dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 5dx \Rightarrow \ln|y| + K_1 = 5x + K_2$$

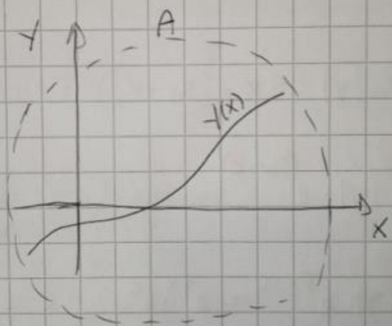
$$\Rightarrow \ln|y| = 5x + (K_2 - K_1) = 5x + C$$

$y' = f(x,y) = f(x, y(x))$

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$y: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; \forall x \in I$ SI HA $y' = f(x, y(x))$

INOLTRE, $\forall x \in I$ RISULTA $(x, y(x)) \in A$



LA SOLUZIONE $y(x)$ É UN SOTTOINSIEME DI A

$y' = 5y \qquad y'(x) = 5y(x)$

$$|y| = e^{(5x+c)}$$

$$|y| = e^{5x+C} = e^{5x} \cdot e^{C} \qquad C := e^{C}$$

$$y = C e^{5x} \qquad C \geq 0$$

SOLUZIONE GENERALE O INTEGRALE

ESEMPIO DI COSTRUZIONE DI UNA ODE

$$y(x) = y = ax^2 + bx \Rightarrow ax^2 + bx - y = 0$$

$$y' = 2ax + b \qquad y'' = 2a$$

$$a = \frac{y''}{2} \qquad b = y' - 2ax = y' - y'' \cdot x$$

$$\frac{y''}{2} \cdot x + (y' - y''x) \cdot x - y = 0$$

$y = ax^2 + bx$ É SOLUZIONE GENERALE

COME STIMARE a E b?

ESEMPIO DI COSTRUZIONE DI UNA ODE

Vincoli

↓

informazioni aggiuntive per stimare il coefficiente

In base all'ordine ho bisogno di più vincoli

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases} \quad \text{OPPURE} \quad \begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_A) = y_A \\ y(x_B) = y_B \end{cases}$$

CONDIZIONI INIZIALI (PROBLEMA DI CAUCHY)

CONDIZIONI AL CONTORNO

PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

PARTIAMO DAL CASO SEMPLICE DI ODE DEL I ORDINE

CAPIREMO TRA POCO COME CONVERTIRE UN'ODE DI ORDINE GENERICO n AD UN SISTEMA DI n ODE DEL I ORDINE

PER UN ASSEGNATO x_0, SI IMPONE UN NUMERO DI VINCOLI PARI ALL'ORDINE DELL'ODE

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0'(x_0) \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} y''' = f(x, y, y', y'') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \\ y''(x_0) = y_0'' \end{cases}$$

PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

PARTIAMO DAL CASO SEMPLICE DI ODE DEL I ORDINE

CAPIREMO TRA POCO COME CONVERTIRE UN'ODE DI ORDINE GENERICO n AD UN SISTEMA DI n ODE DEL I ORDINE

ESEMPIO

$$\begin{cases} y' = 5y \\ y(0) = 3 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} y = Ce^{5x} & \text{SOLUZIONE GENERALE} \\ y(0) = 3 \Rightarrow 3 = C \cdot e^{5 \cdot 0} \Rightarrow C = 3 \end{cases}$$

$y = 3e^{5x}$ SOLUZIONE PARTICOLARE

UN PROBLEMA DI CAUCHY (P.C.) PUÒ ESSERE

- BEN POSTO: SI RIESCE A TROVARE UN INTEGRALE PARTICOLARE DAL VINCOLO IMPOSTO

- MAL POSTO: NON SI RIESCE A TROVARE UN INTEGRALE PARTICOLARE DAL VINCOLO IMPOSTO

ESEMPIO → Ben posto

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} y = ce^{x} \\ 1 = c \cdot e^{0} = c \end{matrix} \Rightarrow y = e^{x}$$

P.C. BEN POSTO

ESEMPIO → mal posto

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{y} \\ y(2) = -3 \end{cases} \Rightarrow$$

DALLA PRIMA RIGA:

$$y' = f(x,y) = 2\sqrt{y}$$

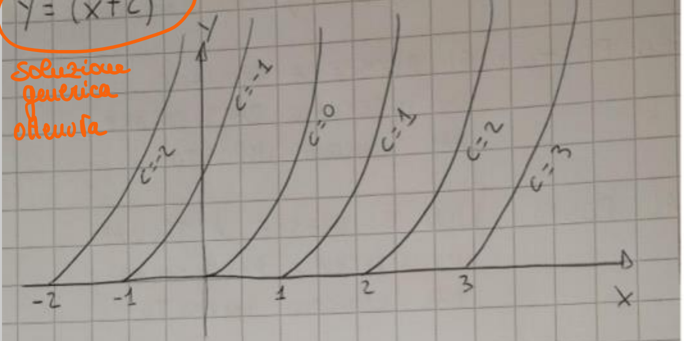
$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y} \; ; \; \frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx$$

$$\int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int dx = \sqrt{y} + k_1 = x + k_2 \Rightarrow \sqrt{y} = x + c$$

$$\sqrt{y} = x + c \quad \wedge \quad x + c \geq 0$$

$y=(x+c)^2$ $\quad x \geq -c$

soluzione generica ottenuta

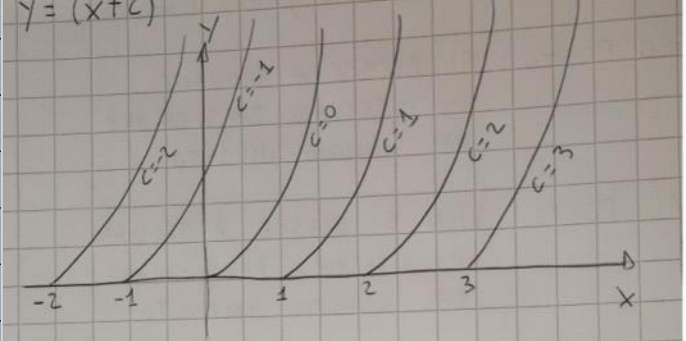


$y \geq 0 \Rightarrow y(2)=-3$ É IMPOSSIBILE IN QUESTO CASO

PROBLEMA DI CAUCHY MAL POSTO

$y=(x+c)^2 \wedge x \geq -c$ SOLUZIONE GENERALE

$y=(x+c)^2$ $\quad x \geq -c$



$y \geq 0 \Rightarrow y(2)=-3$ É IMPOSSIBILE IN QUESTO CASO

PROBLEMA DI CAUCHY MAL POSTO

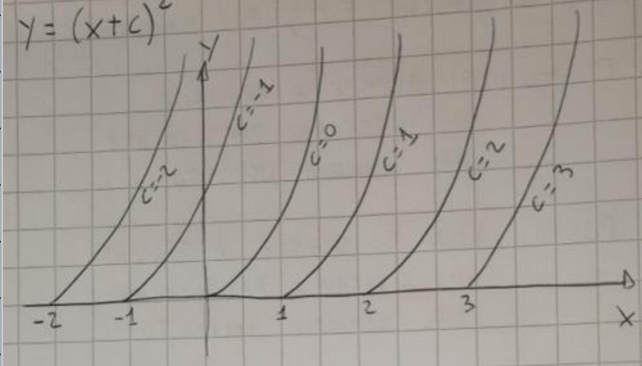
$y=(x+c)^2 \wedge x \geq -c$ SOLUZIONE GENERALE

$y=0$ É COMUNQUE SOLUZIONE DI $y'=f(x,y)=2\sqrt{y}$ MA NON É OTTENIBILE PER NESSUN VALORE DELLA COSTANTE C → la soluzione è un punto

$y=0$ É SOLUZIONE O INTEGRALE SINGOLARE PER $y'=f(x,y)=2\sqrt{y}$

SU ALCUNI TESTI L'INTEGRALE SINGOLARE VIENE ANCHE INDICATO COME INTEGRALE DI FRONTIERA

$y=(x+c)^2$ $\quad x \geq -c$



$y \geq 0 \implies y(2)=-3$ É IMPOSSIBILE IN QUESTO CASO

PROBLEMA DI CAUCHY MAL POSTO

$y=(x+c)^2 \wedge x \geq -c$ SOLUZIONE GENERALE

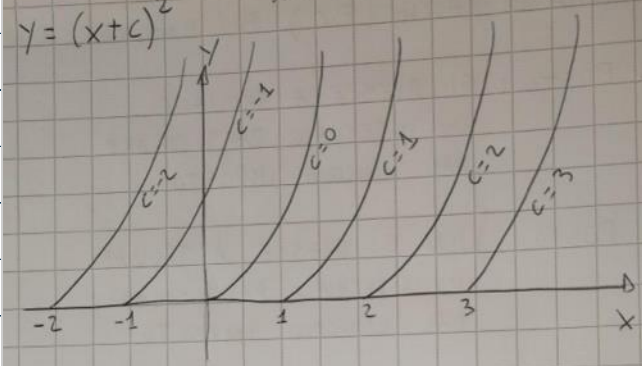
$y' = f(x,y) = 2\sqrt{y}$

DOMINIO $f(x,y) = 2\sqrt{y}$ É $y \geq 0$

$y=0$ É LA FRONTIERA (COMPRESA NEL DOMINIO IN QUESTO CASO)

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \dfrac{1}{\sqrt{y}} \implies y=0$ NON APPARTIENE AL DOMINIO DI $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$

$y=(x+c)^2$ $\quad x \geq -c$



$y \geq 0 \implies y(2)=-3$ É IMPOSSIBILE IN QUESTO CASO

PROBLEMA DI CAUCHY MAL POSTO

$y=(x+c)^2 \wedge x \geq -c$ SOLUZIONE GENERALE

PROCEDURA **INTEGRALE SINGOLARE**

$y' = f(x,y)$

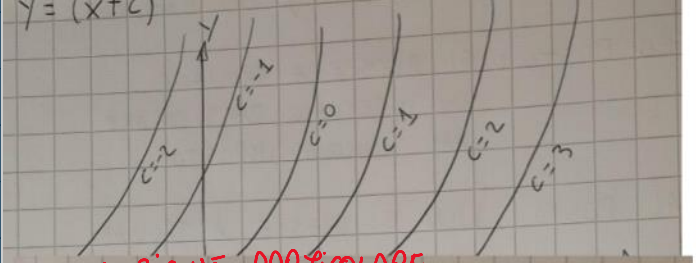
SIA $y(x)$ UNA SOLUZIONE PER

$y' = f(x,y) \qquad f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

SE $y(x)$ APPARTIENE AL CAMPO DI ESISTENZA DI $f(x,y)$ MA NON APPARTIENE AL CAMPO DI ESISTENZA DI $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, ALLORA

$y(x)$ É INTEGRALE SINGOLARE PER $y' = f(x,y)$

$y = (x+c)^2$ $\quad x \geq -c$



SOLUZIONE PARTICOLARE

SE, INVECE, $y(x)$ APPARTIENE ANCHE AL DOMINIO DI $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ ALLORA

$y(x)$ É UNA SOLUZIONE PARTICOLARE, ASSEGNANDO UN PARTICOLARE VALORE ALLA COSTANTE c NELL'ESPRESSIONE DELL'INTEGRALE GENERALE

PROCEDURA

$y' = f(x,y)$

SIA $y(x)$ UNA SOLUZIONE PER

$y' = f(x,y) \qquad f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

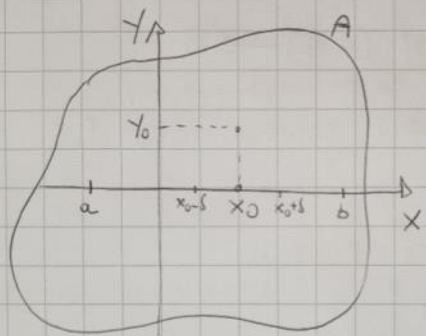
SE $y(x)$ APPARTIENE AL CAMPO DI ESISTENZA DI $f(x,y)$ MA NON APPARTIENE AL CAMPO DI ESISTENZA DI $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, ALLORA

$y(x)$ É INTEGRALE SINGOLARE PER $y' = f(x,y)$

$\boxed{\text{SCHEMA}}$

PROBLEMA DI CAUCHY

- BEN POSTO
  - IN PICCOLO
  - IN GRANDE
- MAL POSTO



$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

P.C. IN PICCOLO: UNA VOLTA IMPOSTA LA CONDIZIONE DI PASSAGGIO PER IL PUNTO (x_0,y_0), SI FOCALIZZA L'ATTENZIONE SOLO SU UN INTORNO DI x_0, E SI STUDIA SE E QUANTE FUNZIONI SOLUZIONE PASSANTI PER (x_0,y_0) CI SONO

$y: [x_0-\delta;\ x_0+\delta] \longrightarrow \mathbb{R}$

P.C. IN GRANDE: SI FISSA A PRIORI UN INTERVALLO $[a,b]$, CON $x_0 \in [a,b]$, E SI STUDIA SE E QUANTE FUNZIONI

$y: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

SONO SOLUZIONI DEL P. C.

PROBLEMA DI CAUCHY

P.C. IN PICCOLO: UNA VOLTA IMPOSTA LA CONDIZIONE ... IL PUNTO (x_0, y_0), ...TENZIONE SOLO SU ... E SI STUDIA ... UNZIONI SOLUZIONE ... (x_0, y_0) CI SONO ... $\to \mathbb{R}$

... PRIORI UN ... $[a, b]$, CON ...], E SI STUDIA ... FUNZIONI ... $\mathbb{R}$ ... DEL P. C.

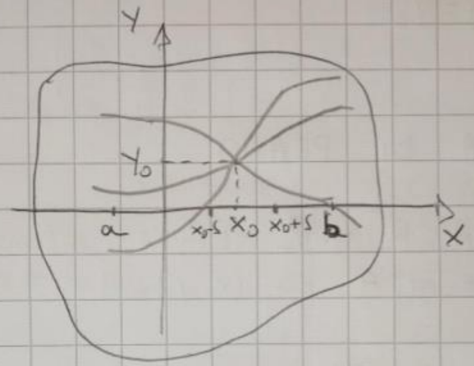
SE E QUANTE FUNZIONI

$\Downarrow$

CONDIZIONI DI ESISTENZA
UNICITÀ
DELLA SOLUZIONE

CONDIZIONI DI ESISTENZA

ESISTE ALMENO UNA SOLUZIONE?



CONDIZIONE DI UNICITÀ

LA SOLUZIONE É UNICA?

P.C. IN PICCOLO

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

TEOREMA DI PEANO

SE $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ É UNA FUNZIONE CONTINUA IN A ED $(x_0, y_0) \in A$, A APERTO

ALLORA ESISTE ALMENO UNA FUNZIONE

$$y: [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbb{R}$$

CHE É SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY

P.C. IN PICCOLO

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

TEOREMA DI PEANO

SE $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ É U

CONTINUA IN A ED $(x_0, y_0$

ALLORA ESISTE ALMENO

$y: [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to$

CHE É SOLUZIONE DEL

Esempio

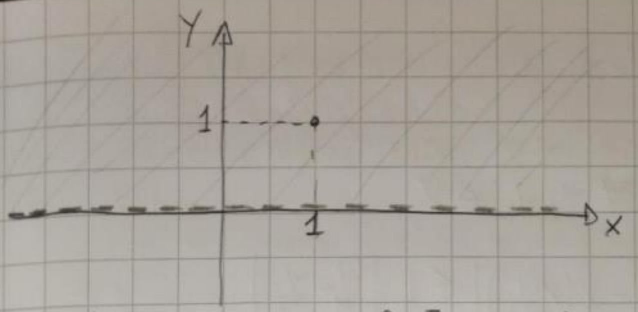
$$\begin{cases} y' = e^x \ln y \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

applico peano

$f(x,y) = e^x \ln y$

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Dominio: $A: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$

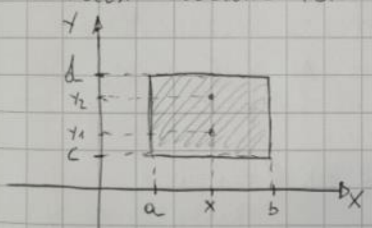


$(1,1) \in A$ $\quad \exists f: [1-\delta, 1+\delta] \to \mathbb{R}$

SOLUZIONE DEL P.C. ASSEGNATO

DEFINIZIONE DI FUNZIONE LIPSCHITZIANA

(UTILE PER LA CONDIZIONE DI UNICITA' DELLA SOLUZIONE PER UN PROBLEMA DI CAUCHY)



SIANO $I = [a, b]$

$K = [c, d]$

$R = I \times K$

R RETTANGOLO

$\exists L > 0$:

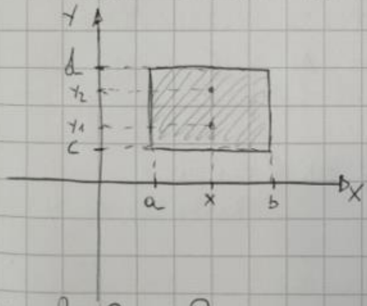
$\forall x \in I$ E $\forall y_1, y_2 \in K$,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

OVVERO

DEFINIZIONE DI FUNZIONE LIPSCHITZIANA

(UTILE PER LA CONDIZIONE DI UNICITÀ DELLA SOLUZIONE PER UN PROBLEMA DI CAUCHY)



SIANO $I = [a, b]$

$K = [c, d]$

$R = I \times K$

R RETTANGOLO

SIA $f : R \to \mathbb{R}$

f É LIPSCHITZIANA IN y UNIFORMEMENTE RISPETTO AD x SE

$\exists L > 0 :$

$\forall x \in I$ E $\forall y_1, y_2 \in K$,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L \, |y_1 - y_2|$$

OVVERO

$$\frac{|f(x, y_1) - f(x, y_2)|}{|y_1 - y_2|} \leq L$$

OSSERVAZIONE: IL RAPPORTO INCREMENTALE RISPETTO AD y É LIMITATO

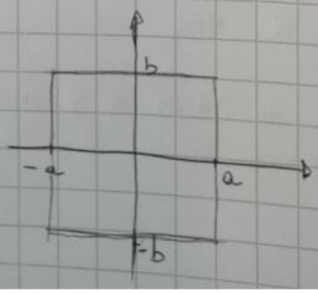
f LIP RISPETTO AD $y \Rightarrow f$ CONTINUA RISPETTO AD y

ESEMPIO

$f(x, y) = \sqrt{|y|}$

$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$A = \mathbb{R}^2$



$R = [-a, a] \times [-b, b]$

VERIFICARE SE f É LIP

$\forall x \in [-a, a] \wedge \forall y_1, y_2 \in [-b, b]$

Basta trovare un punto in cui non è LIP per dire che non lo è mai

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L \, |y_1 - y_2|$$

$$\left| \sqrt{|y_1|} - \sqrt{|y_2|} \right| \leq L \, |y_1 - y_2|$$

SCELGO $x = 0$ E $y_1 = 0$, E y_2 GENERICO

$$\left| \sqrt{|y_2|} \right| \leq L \, |y_2| \Rightarrow \frac{\sqrt{|y_2|}}{|y_2|} \leq L$$

SCELGO PER COMODITÀ $y_2 > 0$

$$\frac{\sqrt{y_2}}{y_2} \leq L \qquad \lim_{y_2 \to 0} \frac{\sqrt{y_2}}{y_2} = +\infty$$

$f(x, y) = \sqrt{|y|}$ NON É LIPSCHITZIANA

QUANDO $f(x,y)$ É SICURAMENTE LIP ?

Hyp: $\cdot f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN A APERTO

$\cdot \forall (x,y) \in A \quad \exists \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ CONTINUA E LIMITATA IN A

OVVERO

$$\exists M>0 : \forall (x,y) \in A, \left| \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right| \leq M$$

TESI:

$\forall R = (I \times K) \subseteq A$, $f(x,y)$ É LIP

DIM.

TEOREMA DI LAGRANGE

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b-a)$$

$$|f(b) - f(a)| = |f'(c)| \cdot |(b-a)|$$

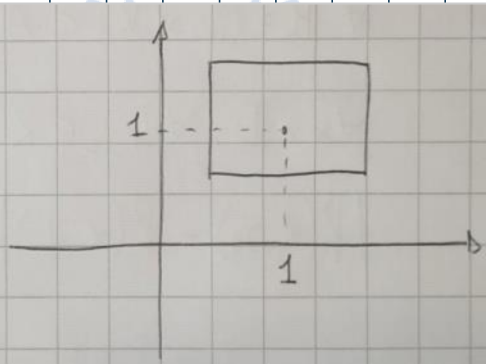
$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = \left| \frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y} \right| \cdot |y_1 - y_2|$$

$\bar{y} \in (y_1, y_2)$

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq M \cdot |y_1 - y_2|$$

ESEMPIO

$f(x,y) = e^x \ln y$



$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{e^x}{y}$

R É UN COMPATTO

$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_R$ AMMETTE MASSIMO E MINIMO ASSOLUTI

$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_R$ É LIMITATA $\Rightarrow f$ É LIP

TEOREMA DI ESISTENZA ED UNICITÀ LOCALE DELLA SOLUZIONE PER UN PROBLEMA DI CAUCHY IN PICCOLO

Hyp:
- A APERTO DI $\mathbb{R}^2$
- $f: A \to \mathbb{R}$ CONTINUA

condizioni del teorema di PEANO

$\Downarrow$

dunque è LIP

- f LIP $\forall$ R CHIUSO $\subset A$
  e limitato

OVVERO

$\forall R = (I \times K) \subset A$, $\exists L_R > 0$ /

$\forall x \in I$, $\forall y_1, y_2 \in K$,

$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L_R |y_1 - y_2|$

TESI:

$\forall (x_0, y_0) \in A$, $\exists!$ $y: [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbb{R}$

SOLUZIONE DEL P.C. $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

N.B.: LA SOLUZIONE $y(x)$ È DI CLASSE C^1

ESEMPIO

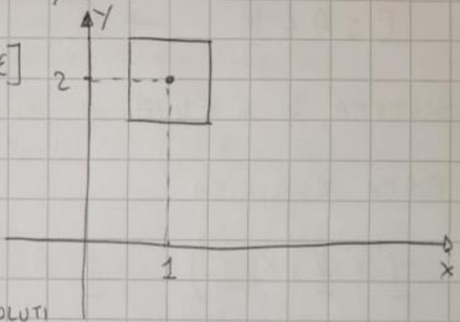
equazione differenziale del primo ordine

$\begin{cases} y' = y^3 \cdot \operatorname{sen}(xy) \\ y(1) = 2 \end{cases}$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ CONTINUA

$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cos(xy) \cdot y^3 + 3y^2 \operatorname{sen}(xy)$

$R = [1-\delta, 1+\delta] \times [2-\varepsilon, 2+\varepsilon]$



R È UN COMPATTO

$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_R$ AMMETTE MASSIMO E MINIMO ASSOLUTI

IN QUANTO $\frac{\partial f}{\partial y}$ È CONTINUA IN $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq L$

$\exists!$ $y: [1-\delta, 1+\delta] \to \mathbb{R}$ SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY ASSEGNATO

SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL I ORDINE

$\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$\underline{F}(x, \underline{y}, \underline{y}') = \underline{0}$ $\qquad \underline{y}' = (y_1', y_2', \dots, y_n')$

FORMA IMPLICITA

$\underline{F} : A \subseteq \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}^n$

SISTEMA DI n EQUAZIONI IN n INCOGNITE

FORMA ESPLICITA

$\underline{y}' = \underline{f}(x, \underline{y}) \qquad \underline{f} : A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$

OBIETTIVO:

TROVARE $y_i : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$

DERIVABILI IN I, TALI CHE

$\underline{F}(x, \underline{y}, \underline{y}') = \underline{0}$

OPPURE

$\underline{y}' = \underline{f}(x, \underline{y})$

$$\underline{y}' = \underline{f}(x, \underline{y}) \Rightarrow \begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots y_n) \end{cases}$$

ESEMPIO

$$\begin{cases} y_1' = e^x \cdot y_1 + y_2 \cdot \operatorname{sen} x = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = y_1 \cdot \cos x + y_2 \cdot e^{-x} = f_2(x, y_1, y_2) \end{cases}$$

$\underline{f} = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$\underline{y} = (y_1, y_2) : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$y_1 : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$y_2 : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} \underline{y}' = \underline{f}(x, \underline{y}) \\ \underline{y}(x_0) = \underline{y}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_i = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i=1,2,\dots n) \\ y_i(x_0) = y_{0,i} \end{cases}$$

OGNI EQUAZIONE DIFFERENZIALE DI ORDINE n PUÓ ESSERE RISCRITTA COME UN SISTEMA DI n ODE DEL I ORDINE

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

$$y = y_1$$

$$y' = y_1' = y_2$$

$$y'' = y_1'' = y_2' = y_3$$

$$y''' = y_1''' = y_2'' = y_3' = y_4$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)} = \dots = y_n$$

PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} \underline{y}' = \underline{f}(x, \underline{y}) \\ \underline{y}(x_0) = \underline{y}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_i = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i=1,2,\dots n) \\ y_i(x_0) = y_{0,i} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, y_3, \dots y_n) \end{cases}$$

OGNI EQUAZIONE DIFFERENZIALE DI ORDINE n PUÓ ESSERE RISCRITTA COME UN SISTEMA DI n ODE DEL I ORDINE

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

$$y = y_1$$

$$y' = y_1' = y_2$$

$$y'' = y_1'' = y_2' = y_3$$

$$y''' = y_1''' = y_2'' = y_3' = y_4$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)} = \dots = y_n$$

$$y''' + 3y'' - 6x \cdot y' + y = \cos x$$

$$y''' = -3y'' + 6x\, y' - y + \cos x$$

$y = y_1$

$y' = y_1' = y_2$

$y'' = y_1'' = y_2' = y_3$

$y''' = y_3'$

$$\begin{cases} y_1' = y_2 = f_1(x, y_1, y_2, y_3) \\ y_2' = y_3 = f_2(x, y_1, y_2, y_3) \\ y_3' = -3y_3 + 6x\, y_2 - y_1 + \cos x = f_3(x, y_1, y_2, y_3) \end{cases}$$

$f_i : A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$

$R = I \times K$

$K =$ IPERCUBO IN $\mathbb{R}^n$

RETTANGOLO IN $\mathbb{R}^n$

$K = [c_1, d_1] \times [c_2, d_2] \times \dots$

$\dots \times [c_n, d_n]$

f_i É CONTINUA E $\dfrac{\partial f}{\partial y_i}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ CONTINUE

E LIMITATE IN $A \Rightarrow f_i$ LIP IN $\forall R \subset A$

$$\underline{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n) \ \text{LIP}$$

$$\Updownarrow$$

$$f_i \ \text{LIP} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

TEOREMA DI ESISTENZA ED UNICITÀ DELLA SOLUZIONE PER P.C. IN PICCOLO RIGUARDANTI SISTEMI DI ODE DEL I ORDINE

$$\begin{cases} \underline{y}' = \underline{f}(x, \underline{y}) \\ \underline{y}(x_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

Hp: A APERTO IN $\mathbb{R}^{n+1}$

$\underline{f} : A \to \mathbb{R}^n$ CONTINUA

$\underline{f}$ LIP $\forall R \subset A$

TESI:

$\forall (x_0, \underline{y}_0) \in A \quad \exists! \ \underline{y} : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbb{R}^n$ SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY IN PICCOLO

ESEMPIO

$$\begin{cases} y_1' = \operatorname{sen} x \cdot y_1 - e^x \cdot y_2 = f_1(x, y_1, y_2) = f_1(x, \underline{y}) \\ y_2' = y_2 \cdot (\ln x + \cos^2 x) = f_2(x, y_1, y_2) = f_2(x, \underline{y}) \\ y_1(1) = 2 = y_{0,1} \\ y_2(1) = 3 = y_{0,2} \end{cases}$$

$\underline{f} = (f_1, f_2) : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

DOMINIO

$A : \{ (x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3 : x > 0 \}$

DOMINIO

$$A : \{ (x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3 : x > 0 \}$$

$$(x_0, y_{0,1}, y_{0,2}) = (1, 2, 3) \in A$$

ESISTE ALMENO UNA SOLUZIONE

$$\underline{y} : [1-\delta, 1+\delta] \to \mathbb{R}^2$$

PER UNICITÀ DELLA SOLUZIONE VALUTO LA LIP IN UN GENERICO COMPATTO $R \subset A$ } PEANO GENERALIZZATO

$$\begin{cases} y_1' = \operatorname{sen} x \cdot y_1 - e^x \cdot y_2 = f_1(x, y_1, y_2) = f_1(x, \underline{y}) \\ y_2' = y_2 \cdot (\ln x + \cos^2 x) = f_2(x, y_1, y_2) = f_2(x, \underline{y}) \\ y_1(1) = 2 = y_{0,1} \\ y_2(1) = 3 = y_{0,2} \end{cases}$$

$$\underline{f} = (f_1, f_2) : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$A : \{ (x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3 : x > 0 \}$$

$$(x_0, y_{0,1}, y_{0,2}) = (1, 2, 3) \in A$$

ESISTE ALMENO UNA SOLUZIONE

$$\underline{y} : [1-\delta, 1+\delta] \to \mathbb{R}^2$$

PER UNICITÀ DELLA SOLUZIONE VALUTO LA LIP IN UN GENERICO COMPATTO $R \subset A$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = \operatorname{sen} x \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y_2} = -e^x$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y_1} = 0 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = \ln x + \cos^2 x$$

TUTTE LE $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ $(i = 1,2 \text{ E } j = 1,2)$

SONO FUNZIONI CONTINUE

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_j} : A \to \mathbb{R}$$

$$M_R = \max \{ M_{i,j,R} \}$$

E DUNQUE SONO CONTINUE IN $\forall R$ (COMPATTO) $\subset A$

$$\Rightarrow \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right| < M_{i,j,R} \Rightarrow \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right| < M_R$$

$$\begin{cases} y_1' = \text{sen}\,x \cdot y_1 - e^x \cdot y_2 = f_1(x, y_1, y_2) = f_1(x, \underline{y}) \\ y_2' = y_2 \cdot (\ln x + \cos^2 x) = f_2(x, y_1, y_2) = f_2(x, \underline{y}) \\ y_1(1) = 2 = y_{0,1} \\ y_2(1) = 3 = y_{0,2} \end{cases}$$

$\underline{f} = (f_1, f_2) : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$A : \{(x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$

$(x_0, y_{0,1}, y_{0,2}) = (1, 2, 3) \in A$

ESISTE ALMENO UNA SOLUZIONE

$\underline{y} : [1-\delta, 1+\delta] \to \mathbb{R}^2$

PER UNICITÀ DELLA SOLUZIONE VALUTO LA LIP IN UN GENERICO COMPATTO $R \subset A$

$\dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} = \text{sen}\,x \qquad \dfrac{\partial f_1}{\partial y_2} = -e^x$

$\dfrac{\partial f_2}{\partial y_1} = 0 \qquad \dfrac{\partial f_2}{\partial y_2} = \ln x + \cos^2 x$

TUTTE LE $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}$ ($i = 1,2$ E $j = 1,2$)

SONO FUNZIONI CONTINUE

$\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j} : A \to \mathbb{R}$

E DUNQUE SONO CONTINUE IN $\forall\, R$ (COMPATTO) $\subset A$

$\Rightarrow \left| \dfrac{\partial f_i}{\partial y_j} \right| < M_R \Rightarrow \underline{f}$ LIP

$$\begin{cases} y_1' = \text{sen}\,x \cdot y_1 - e^x \cdot y_2 = f_1(x, y_1, y_2) = f_1(x, \underline{y}) \\ y_2' = y_2 \cdot (\ln x + \cos^2 x) = f_2(x, y_1, y_2) = f_2(x, \underline{y}) \\ y_1(1) = 2 = y_{0,1} \\ y_2(1) = 3 = y_{0,2} \end{cases}$$

$\underline{f} = (f_1, f_2) : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$A : \{(x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$

$(x_0, y_{0,1}, y_{0,2}) = (1, 2, 3) \in A$

ESISTE ALMENO UNA SOLUZIONE

$\underline{y} : [1-\delta, 1+\delta] \to \mathbb{R}^2$

PER UNICITÀ DELLA SOLUZIONE VALUTO LA LIP IN UN GENERICO COMPATTO $R \subset A$

$\exists!\ \underline{y} : [1-\delta, 1+\delta] \to \mathbb{R}^2$ SOLUZIONE

$\exists!\ y_1 : [1-\delta, 1+\delta] \to \mathbb{R}$

$\exists!\ y_2 : [1-\delta, 1+\delta] \to \mathbb{R}$

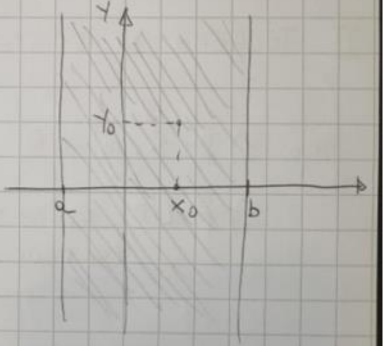
TEOREMA DI ESISTENZA ED UNICITÀ IN GRANDE (GLOBALE) PER ODE DEL I ORDINE

SI FISSA A PRIORI L'INTERVALLO SU CUI VALUTARE ESISTENZA ED UNICITÀ DELLA SOLUZIONE

SI CONSIDERA UNA STRISCIA

$S = [a, b] \times \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$



Hyp:

1) $f : S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

CONTINUA IN S

2) f LIMITATA IN S $\Leftrightarrow \exists M > 0 /$

$\forall (x, y) \in S, \ |f(x, y)| \leq M$

3) f LIP $\forall$ R CHIUSO E LIMITATO $\subset S$

$\forall R = [I \times K] \subset S$

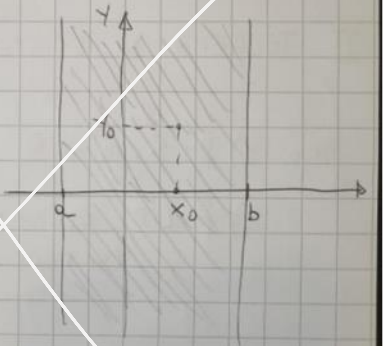
TEOREMA DI ESISTENZA ED UNICITÀ IN GRANDE (GLOBALE) PER ODE DEL I ORDINE

SI FISSA A PRIORI L'INTERVALLO SU CUI VALUTARE ESISTENZA ED UNICITÀ DELLA SOLUZIONE

SI CONSIDERA UNA STRISCIA

$S = [a, b] \times \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$



Hyp:

1) $f : S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

CONTINUA IN S

2) f LIMITATA IN S $\Leftrightarrow \exists M > 0 /$

$\forall (x, y) \in S, \ |f(x, y)| \leq M$

3) f LIP $\forall$ R CHIUSO E LIMITATO $\subset S$

$\forall R = [I \times K] \subset S$

TESI

$\forall (x_0, y_0) \in S \ \exists! \ y : [a, b] \to \mathbb{R}$

SOLUZIONE DEL P.C. IN GRANDE

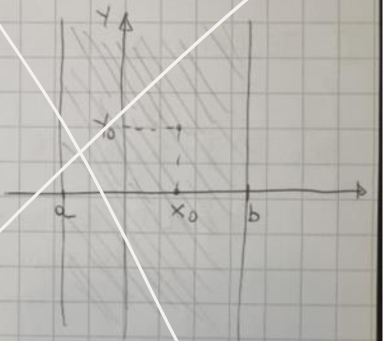
N.B. = UN RETTANGOLO SOLO CHIUSO (E NON ANCHE LIMITATO) POTREBBE ESSERE TUTTA LA STRISCIA

TEOREMA DI ESISTENZA ED UNICITÀ IN GRANDE (GLOBALE) PER ODE DEL I ORDINE

SI FISSA A PRIORI L'INTERVALLO SU CUI VALUTARE ESISTENZA ED UNICITÀ DELLA SOLUZIONE

SI CONSIDERA UNA STRISCIA

$S = [a, b] \times \mathbb{R}$



$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Hyp:

1) $f : S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

CONTINUA IN S

2) f LIMITATA IN S $\Leftrightarrow \exists M > 0 /$

$\forall (x, y) \in S, \ |f(x, y)| \leq M$

3) f LIP $\forall R$ CHIUSO E LIMITATO $\subset S$

$\forall R = [I \times K]$ $\subset S$

II TEOREMA DI ESISTENZA ED UNICITÀ GLOBALE

Hyp: 1) $f : S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN S

2) f LIP GLOBALMENTE IN S

(SI CONSIDERA TUTTA LA STRISCIA IN BLOCCO)

TESI:

$\forall (x_0, y_0) \in S \ \exists! \ y : [a, b] \to \mathbb{R}$

SOLUZIONE DEL P.C. IN GRANDE

• f LIP $\forall R$ CHIUSO $\subset A$

OVVERO

$\forall R = (I \times K) \subset A, \ \exists L_R > 0 /$

$\forall x \in I, \ \forall y_1, y_2 \in K,$

$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L_R |y_1 - y_2|$

f LIP GLOBALMENTE IN $S = [a, b] \times \mathbb{R}$

(SI CONSIDERA TUTTA LA STRISCIA IN BLOCCO)

OVVERO

$\exists L > 0 /$

$\forall x \in I, \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$

I TEOREMA DI ESISTENZA ED UNICITÀ GLOBALE DELLA SOLUZIONE PER SISTEMI DI ODE DEL I ORDINE

SI CONSIDERA $S = [a, b] \times \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \underline{y}' = \underline{f}(x, \underline{y}) \\ \underline{y}(x_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

$\underline{f} : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$f_i : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$i = 1, \dots, n$

Hyp: 1) f_i CONTINUE IN S $(i = 1, 2, \dots, n)$

2) f_i LIMITATE IN S $(i = 1, 2, \dots, n)$

3) f_i LIP $\forall$ R CHIUSO E LIMITATO $\subset S$ $(i = 1, 2, \dots, n)$

II TEOREMA

Hyp: 1) $\underline{f} : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN $S = [a, b] \times \mathbb{R}^n$

2) $\underline{f}$ LIP GLOBALMENTE IN S

TESI: $\forall (x_0, \underline{y}_0) \in S$ $\exists! \ \underline{y} : [a, b] \to \mathbb{R}$ SOLUZIONE DEL P.C. IN GRANDE

$\exists! \ y_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$

$$\begin{cases} y_1' = \cos x \cdot y_1 + x^3 \cdot y_2 = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = -y_1 + e^{-3x} \cdot y_2 + \ln(x^2+1) = f_2(x, y_1, y_2) \\ y_1(1) = 2 \\ y_2(1) = -1 \end{cases}$$

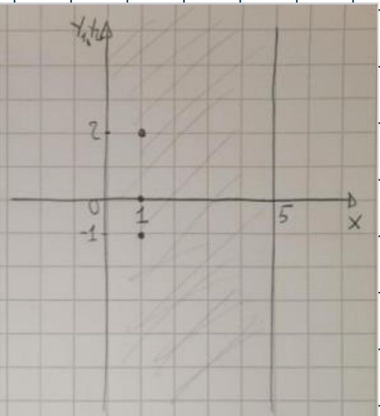
$S = [0, 5] \times \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} y_1' = \cos x \cdot y_1 + x^3 \cdot y_2 = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = -y_1 + e^{-3x} \cdot y_2 + \ln(x^2+1) = f_2(x, y_1, y_2) \\ y_1(1) = 2 \\ y_2(1) = -1 \end{cases}$$

$S = [0, 5] \times \mathbb{R}^2$

$\underline{f} = (f_1, f_2)$

É CONTINUA IN S



VERIFICA DELLA LIP

$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = \cos x$

$\frac{\partial f_1}{\partial y_2} = x^3$ $\quad \frac{\partial f_2}{\partial y_1} = -1$ $\quad \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = e^{-3x}$

$\left|\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\right| \leq 1$ $\quad \left|\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\right| \leq 125$

$\left|\frac{\partial f_2}{\partial y_1}\right| \leq 1$ $\quad \left|\frac{\partial f_2}{\partial y_2}\right| \leq 1$

Seconda Parte

- Esistenza ed unicità in grande
- ODE Lineari (ODEL)
- ODE Lineari Omogenee (ODELO)
- ODELO a coefficienti costanti

$y' = f(x, y)$ due punti della stessa y $\qquad f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\forall R = (I \times K) \subset A, \exists L_R > 0 \,/$

$\forall x \in I, \forall y_1, y_2 \in K,$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L_R |y_1 - y_2|$$

$$\underline{y}' = \underline{f}(x, \underline{y}) \Rightarrow \begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

$f_i : A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$

$R = \underline{I} \times K$ due vettori

$I = [a, b] \qquad K = [c_1, d_1] \times [c_2, d_2] \times \dots \times [c_n, d_n]$

$\forall x \in I, \forall \underline{y}_A, \underline{y}_B \in K, \exists L_R > 0 \,/$

$$|f_i(x, \underline{y}_A) - f_i(x, \underline{y}_B)| \le L_R \cdot \sum_{j=1}^{n} |y_{j,A} - y_{j,B}|$$

SE f_i É CONTINUA E $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ $(j = 1, 2, \dots n)$ SONO CONTINUE E LIMITATE IN $A \Rightarrow f_i$ É LIP

$y' = f(x,y) \qquad f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\forall R = (I \times K) \subset A, \exists L_R > 0 /$

$\forall x \in I, \forall y_1, y_2 \in K,$

$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L_R |y_1 - y_2|$

$\underline{y}' = \underline{f}(x,\underline{y}) \Rightarrow \begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$

$f_i : A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$

$R = \underline{I} \times K$

DIM:

$$|f_i(x,\underline{y}_A) - f_i(x,\underline{y}_B)| = \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_1}(y_{1,A} - y_{1,B}) + \frac{\partial f_i}{\partial y_2}(y_{2,A} - y_{2,B}) + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial y_n}(y_{n,A} - y_{n,B}) \right| \leq \left|\frac{\partial f_i}{\partial y_1}\right| |y_{1,A} - y_{1,B}| + \dots + \left|\frac{\partial f_i}{\partial y_n}\right| |y_{n,A} - y_{n,B}|$$

SE PER HYP $\left|\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right| \leq L_R \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$

$$\Rightarrow |f_i(x,\underline{y}_A) - f_i(x,\underline{y}_B)| \leq L_R \cdot \sum_{j=1}^{n} |y_{j,A} - y_{j,B}|$$

OVVIAMENTE:

1) $\underline{f} : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ CONTINUA
2) $\underline{f}$ GLOBALMENTE LIP

$\Rightarrow \exists! \ \underline{y}$ UNICA SOLUZIONE

potrebbe non essere unica

SE $\underline{f}$ NON È LIP $\not\Rightarrow$ $\underline{y}$ NON SIA UNICA

ESEMPIO

$y' = xy^2 = f(x,y)$

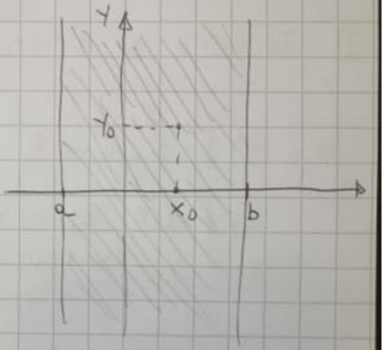
$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy \qquad S: [a,b] \times \mathbb{R}$

TEOREMA DI ESISTENZA ED UNICITÀ IN GRANDE (GLOBALE) PER ODE DEL I ORDINE

SI FISSA A PRIORI L'INTERVALLO SU CUI VALUTARE ESISTENZA ED UNICITÀ DELLA SOLUZIONE

SI CONSIDERA UNA STRISCIA

$S = [a, b] \times \mathbb{R}$



$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Hyp:

1) $f : S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN S

2) f LIMITATA IN S $\Leftrightarrow \exists M > 0 /$ $\forall (x, y) \in S, |f(x, y)| \leq M$

3) f LIP $\forall$ R CHIUSO E LIMITATO $\subset S$
$\forall R = [I \times K] \subset S$

TESI

$\forall (x_0, y_0) \in S \quad \exists! \; y : [a, b] \to \mathbb{R}$

SOLUZIONE DEL P.C. IN GRANDE

N.B. = UN RETTANGOLO SOLO CHIUSO (E NON ANCHE LIMITATO) POTREBBE ESSERE TUTTA LA STRISCIA

~~TEOREMA DI ESISTENZA ED UNICITÀ IN GRANDE (GLOBALE) PER ODE DEL I ORDINE~~

~~SI FISSA A PRIORI L'INTERVALLO SU CUI VALUTARE ESISTENZA ED UNICITÀ DELLA SOLUZIONE~~

~~SI CONSIDERA UNA STRISCIA~~

$S = [a, b] \times \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

~~Hyp:~~

~~1)~~ $f : S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ~~CONTINUA IN S~~

~~2)~~ f ~~LIMITATA IN S~~ $\Leftrightarrow \exists M > 0 /$ $\forall (x, y) \in S, |f(x, y)| \leq M$

~~3)~~ f ~~LIP~~ $\forall$ ~~R CHIUSO E LIMITATO~~ $\subset S$
$\forall R = [I \times K] \subset S$

II TEOREMA DI ESISTENZA ED UNICITÀ GLOBALE

Hyp:

1) $f : S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN S

2) f LIP GLOBALMENTE IN S (SI CONSIDERA TUTTA LA STRISCIA IN BLOCCO)

TESI:

$\forall (x_0, y_0) \in S \quad \exists! \; y : [a, b] \to \mathbb{R}$

SOLUZIONE DEL P.C. IN GRANDE

- $\underline{f}$ LIP $\forall$ R CHIUSO $\subset A$

OVVERO

$\forall R = (I \times K) \subset A,\ \exists L_R > 0 \ /$

$\forall x \in I,\ \forall y_1, y_2 \in K,$

$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L_R |y_1 - y_2|$

$\underline{f}$ LIP GLOBALMENTE IN $S = [a,b] \times \mathbb{R}$

(SI CONSIDERA TUTTA LA STRISCIA IN BLOCCO)

OVVERO

$\exists L > 0 \ /$

$\forall x \in I,\ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$

I TEOREMA DI ESISTENZA ED UNICITÀ GLOBALE DELLA SOLUZIONE PER SISTEMI DI ODE DEL I ORDINE

SI CONSIDERA $S = [a,b] \times \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \underline{y}' = \underline{f}(x, \underline{y}) \\ \underline{y}(x_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

Tutti i componenti

$\underline{f} : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

singola componente

$f_i : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$i = 1, \dots, n$

Hyp: 1) f_i CONTINUE IN S $(i = 1, 2, \dots, n)$

2) f_i LIMITATE IN S $(i = 1, 2, \dots, n)$

3) f_i LIP $\forall$ R CHIUSO E LIMITATO $\subset S$ $(i = 1, 2, \dots, n)$

II TEOREMA

Hyp: 1) $\underline{f} : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN $S = [a,b] \times \mathbb{R}^n$

2) $\underline{f}$ LIP GLOBALMENTE IN S

TESI:

$\forall (x_0, \underline{y}_0) \in S \quad \exists! \ \underline{y} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

SOLUZIONE DEL P.C. IN GRANDE

$\exists! \ y_i : [a,b] \to \mathbb{R}$

$(i = 1, 2, \dots, n)$

$$\begin{cases} y_1' = \cos x \cdot y_1 + x^3 \cdot y_2 = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = -y_1 + e^{-3x} \cdot y_2 + \ln(x^2+1) = f_2(x, y_1, y_2) \\ y_1(1) = 2 \\ y_2(1) = -1 \end{cases}$$

Intervallo fissato a priori

$S = [0, 5] \times \mathbb{R}^2$

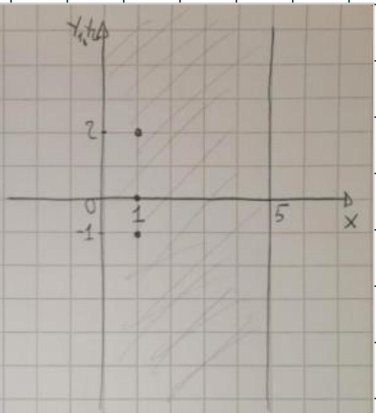
$$\begin{cases} y_1' = \cos x \cdot y_1 + x^3 \cdot y_2 = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = -y_1 + e^{-3x} \cdot y_2 + \ln(x^2+1) = f_2(x, y_1, y_2) \\ y_1(1) = 2 \\ y_2(1) = -1 \end{cases}$$

$S = [0, 5] \times \mathbb{R}^2$

Verifico che sia LIP

$f = (f_1, f_2)$

É CONTINUA IN S



VERIFICA DELLA LIP

$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = \cos x$

$\frac{\partial f_1}{\partial y_2} = x^3$ $\qquad \frac{\partial f_2}{\partial y_1} = -1$ $\qquad \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = e^{-3x}$

$\left|\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\right| \leq 1$ $\qquad \left|\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\right| \leq 125$

$\left|\frac{\partial f_2}{\partial y_1}\right| \leq 1$ $\qquad \left|\frac{\partial f_2}{\partial y_2}\right| \leq 1$

IMPORTANZA DEI TEOREMI APPENA STUDIATI

ESISTE UNA CLASSE DI ODE IN CUI LA SOLUZIONE ESISTE ED É UNICA IN UNA STRISCIA ASSEGNATA?

ODE LINEARI

SONO EQUAZIONI IN CUI TUTTE LE DERIVATE HANNO UN ESPONENTE MASSIMO DI ELEVAMENTO A POTENZA PARI A 1

$$y'' + 5x\,y' + 16x^7 y = 18\,\mathrm{sen}(e^x)$$

SI RICORDA CHE $y = y^{(0)}$

ODE LINEARI DEL PRIMO ORDINE

$$a(x)\cdot y' = b(x)\cdot y + c(x) \qquad S = I \times \mathbb{R}$$

$$a(x), b(x), c(x) : I \to \mathbb{R} \qquad S = [a,b] \times \mathbb{R}$$

SUPPONENDO $a(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$

$$y' = \frac{b(x)}{a(x)} \cdot y + \frac{c(x)}{a(x)} \Rightarrow y' = p(x)y + q(x)$$

$$\begin{cases} y' = p(x)\cdot y + q(x) = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$ CONTINUA IN S

$p(x), q(x) : I \to \mathbb{R}$

CONTINUE IN I CHIUSO E LIMITATO

$\Rightarrow |p(x)| \leq M_p, \ |q(x)| \leq M_q$ IN I

VERIFICA LIP GLOBALE IN S

$\forall x \in I, \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}, \ \exists L \geq 0 \ |$

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|$$

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |p(x)\cdot y_1 + q(x) - p(x)\cdot y_2 - q(x)| =$$

$$= |p(x)\cdot y_1 - p(x)\cdot y_2| \leq |p(x)|\cdot|y_1 - y_2| \leq M_p \cdot |y_1 - y_2|$$

$$\begin{cases} y' = P(x)\cdot y + q(x) = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$ CONTINUA IN S

$P(x), q(x) : I \to \mathbb{R}$

CONTINUE IN I CHIUSO E LIMITATO

$\Rightarrow |P(x)| \leq M_p, \ |q(x)| \leq M_q$ IN I

VERIFICA LIP GLOBALE IN S

$\forall x \in I, \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}, \ \exists L>0 \ |$

$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$

$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |P(x)\cdot y_1 + q(x) - P(x)\cdot y_2 - q(x)| =$

$= |P(x)\cdot y_1 - P(x)\cdot y_2| \leq |P(x)|\cdot|y_1 - y_2| \leq M_p \cdot |y_1 - y_2|$

ESEMPIO

$$\begin{cases} y' = (\cos x)\cdot y + \operatorname{sen} x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$ $S = [-10, 50] \times \mathbb{R}$

ANALOGAMENTE PER SISTEMI DI ODE LINEARI DEL PRIMO ORDINE

$$\begin{cases} y_i' = a_{i,1}(x)\, y_1 + a_{i,2}(x)\cdot y_2 + \ldots + a_{i,n}(x)\, y_n + b(x) \\ i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

$a_{i,j}(x), \ b_i(x) : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUE

E OVVIAMENTE LIMITATE ESSENDO I UN COMPATTO

ODE LINEARI DI ORDINE n

$$a_0(x)\cdot y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\cdot y' + a_n(x)\, y = b(x)$$

SE IL TERMINE NOTO $b(x) = 0 \Rightarrow$ ODE LINEARE OMOGENEA

Data una equazione differenziale di ordine n la si può convertire in un sistema di n equazioni del primo ordine

PROPRIETÀ DI UNA ODE LINEARE OMOGENEA

1. SE $y_1(x)$ É SOLUZIONE PARTICOLARE, ALLORA ANCHE $c\,y_1(x)$ (CON c COSTANTE ARBITRARIA) É SOLUZIONE

banalmente: se y1 è soluzione, la somma dà zero. Se invece considero C·y1, nella derivata avrò come coefficiente c da mettere a raccoglimento dunque anche c è soluzione

$$a_0(x)\, y_1^{(n)} + a_1(x)\, y_1^{(n-1)} + \ldots \ a_{n-1}(x)\cdot y_1' + a_n(x)\, y_1 = 0$$

$$a_0(x)\cdot[c\, y_1^{(n)}] + a_1(x)\cdot[c\, y_1^{(n-1)}] + \ldots \ a_n(x)\,[c\, y_1] =$$

$$= c\left[a_0(x)\cdot y_1^{(n)} + a_1(x)\, y_1^{(n-1)} + \ldots \ a_{n-1}(x)\cdot y_1' + a_n(x)\, y_1\right] = 0$$

ODE LINEARI DI ORDINE n

$$a_0(x)\cdot y^{n} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)\cdot y' + a_n(x)\, y = b(x)$$

SE IL TERMINE NOTO $b(x)=0 \Rightarrow$ ODE LINEARE OMOGENEA

PROPRIETÀ DI UNA ODE LINEARE OMOGENEA

2 SE $y_1(x)$ E $y_2(x)$ SONO 2 SOLUZIONI DELL' ODE LINEARE OMOGENEA DI ORDINE n, ALLORA ANCHE UNA LORO COMBINAZIONE LINEARE $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ É SOLUZIONE

richiama il principio di sovrapposizione della fisica

↓

Quando il problema è lineare, una soluzione è anche la combinazione lineare di soluzioni semplici (che siano due o n)

ODE LINEARI DI ORDINE n

$$a_0(x)\cdot y^{n} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)\cdot y' + a_n(x)\, y = b(x)$$

SE IL TERMINE NOTO $b(x)=0 \Rightarrow$ ODE LINEARE OMOGENEA

PROPRIETÀ DI UNA ODE LINEARE OMOGENEA

3 PIÚ IN GENERALE, PER UNA ODE LINEARE E OMOGENEA, SE $y_1(x), y_2(x), \dots y_n(x)$ DI ORDINE n SONO n SOLUZIONI, ALLORA ANCHE

$$y(x) = c_1\cdot y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots c_n y(x)$$

É SOLUZIONE

DATO CHE $n =$ ORDINE DI ODE
$n =$ NUMERO DI COSTANTI ARBITRARIE

$y(x)$ PUÓ CONSIDERARSI INTEGRALE GENERALE???

ODE LINEARI DI ORDINE n

$$a_0(x)\cdot y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)\cdot y' + a_n(x)\, y = b(x)$$

SE IL TERMINE NOTO $b(x)=0 \Rightarrow$ ODE LINEARE OMOGENEA

PROPRIETÀ DI UNA ODE LINEARE OMOGENEA

SI, SE $y_1(x), y_2(x), \dots y_n(x)$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0$$

SOLO SE $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$

3) PIÙ IN GENERALE, PER UNA ODE LINEARE E OMOGENEA, SE $y_1(x), y_2(x), \dots y_n(x)$ DI ORDINE n

SONO n SOLUZIONI, ALLORA ANCHE

$$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots c_n y(x)$$

È SOLUZIONE

DATO CHE $n =$ ORDINE DI ODE
$n =$ NUMERO DI COSTANTI ARBITRARIE

$y(x)$ PUÒ CONSIDERARSI INTEGRALE GENERALE???

COME VERIFICARE, IN GENERALE, SE $y_1(x) \dots y_n(x)$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI?

!!! Dei vettori linearmente indipendenti individuano la base di uno spazio vettoriale

$y_i := y_i(x)$

$$\left.\begin{cases} c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots c_n y_n = 0 \\ c_1 y_1' + c_2 y_2' + \dots c_n y_n' = 0 \\ \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)} + c_2 y_2^{(n-1)} + \dots c_n y_n^{(n-1)} = 0 \end{cases}\right\}$$

COMBINAZIONI LINEARI
↓
ottengo n equazioni in n incognite

$$\underline{\underline{W}}(x) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

MATRICE WRONSKIANA

cioè di RANGO PIENO

Sono l.i. se $\boxed{\det(\underline{\underline{W}}(x)) \neq 0} \quad \forall x \in I$

ESEMPIO

DIRE SE SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

a) x, x^2, x^3

b) $e^x, 2e^x, e^{2x}$

c) $e^x, xe^x, x^2 e^x$

c) e^x, xe^x, x^2e^x

a) $\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 2x & 3x^2 \\ 2 & 6x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2 & 6x \end{vmatrix} =$

$= x(12x^2 - 6x^2) - (6x^3 - 2x^3) = 2x^3$

$2x^3 \neq 0 \iff x \neq 0$ → Striscia che non comprendono $x = 0$

DIRE SE SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

a) x, x^2, x^3

b) $e^x, 2e^x, e^{2x}$

c) e^x, xe^x, x^2e^x

b) $\begin{array}{ccc} 1^a & 2^a & \\ \end{array}$

$\begin{vmatrix} e^x & 2e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^x & 2e^{2x} \\ e^x & 2e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} = 0$

I e II COLONNA SONO PROPORZIONALI

DIRE SE SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

a) x, x^2, x^3

b) $e^x, 2e^x, e^{2x}$

c) e^x, xe^x, x^2e^x

DA FARE *

VERIFICARE PER CASA:

d) $e^x \cos x$, $e^x \operatorname{sen} x$

e) e^{3x}, e^{-2x}, e^{5x}

c) $\begin{vmatrix} e^x & xe^x & x^2e^x \\ e^x & e^x + xe^x & 2xe^x + x^2e^x \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 2e^{3x} \neq 0$

mai una esponenziale è pari a 0

$$\begin{vmatrix} e^x & e^x + xe^x & 2xe^x + x^2e^x \\ e^x & 2e^x + xe^x & 2e^x + 4xe^x + x^2e^x \end{vmatrix} = 2e^{3x} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ODE LINEARI, OMOGENEE E A COEFFICIENTI COSTANTI

Semplificazione:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

ESEMPI:

$n=1$ $\quad y' = Ky \quad y = ce^{Kx}$ SOLUZIONE GENERALE

$\quad y' = 5y \quad y = ce^{5x}$

$\quad y = e^{Kx}$ SOLUZIONE PARTICOLARE

$y = e^{\lambda x}$ È SOLUZIONE DI UNA ODE LINEARE OMOGENEA, A COEFFICIENTI COSTANTI, DI ORDINE n?

$y = e^{\lambda x} \quad y' = \lambda e^{\lambda x} \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$y^{(n)} = \lambda^n \cdot e^{\lambda x}$

$$a_0 [\lambda^n e^{\lambda x}] + a_1 [\lambda^{n-1} \cdot e^{\lambda x}] + \dots + a_{n-1} [\lambda e^{\lambda x}] + a_n \cdot e^{\lambda x} = 0$$

$$= e^{\lambda x} [a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n] = 0$$

LE n SOLUZIONI λ_i $(i = 1, 2, \dots, n)$

DELL' EQUAZIONE ALGEBRICA ASSOCIATA

$\Rightarrow y = e^{\lambda_i x}$ SOLUZIONE DELL' ODE

$y = e^{\lambda x}$ È SOLUZIONE DI UNA ODE LINEARE OMOGENEA, A COEFFICIENTI COSTANTI, DI ORDINE n?

$y = e^{\lambda x}$ $\quad y' = \lambda e^{\lambda x}$ $\quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$y^{(n)} = \lambda^n \cdot e^{\lambda x}$

$$a_0 [\lambda^n e^{\lambda x}] + a_1 [\lambda^{n-1} \cdot e^{\lambda x}] + \dots + a_{n-1} [\lambda e^{\lambda x}] + a_n \cdot e^{\lambda x} = 0$$

$$= e^{\lambda x} [a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n] = 0$$

LE n SOLUZIONI λ_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ DELL' EQUAZIONE ALGEBRICA ASSOCIATA

$\Rightarrow y = e^{\lambda_i x}$ SOLUZIONE DELL' ODE

$n=2$

$$a y'' + b y' + c y = 0 \Rightarrow e^{\lambda x} (a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0$$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Downarrow$

1) $\Delta > 0 \Rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

2) $\Delta = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 \cdot x \cdot e^{\lambda_1 x}$

3) $\Delta < 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

soluzioni complesse e coniugate

$y(x) = e^{\alpha x} \cdot (c_1 \cos\beta x + c_2 \operatorname{sen}\beta x)$

ESEMPI

1) $y'' - 5y' + 6y = 0$ $\qquad e^{\lambda x}(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

2) $y'' - 2y' + y = 0$ $\qquad e^{\lambda x}(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0$

$$y = c_1 e^x + c_2 \cdot x \cdot e^x$$

3) $y'' - 2y' + 2y = 0$ $\qquad e^{\lambda x}(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0$ $\qquad \lambda_{1,2} = 1 \pm i$

$$y = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \operatorname{sen} x$$

$n > 2$ } di ordine superiore al 2°

ESEMPI

$n=5$ $\quad \lambda_1 = 3 \quad m=3$ SOL. TRIPLA

$\lambda_2 = 2 \quad m=1$ SOL. SINGOLA

$\lambda_3 = -1 \quad m=1$ SOL. SINGOLA

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x \cdot e^{3x} + C_3 x^2 e^{3x} + C_4 e^{2x} + C_5 e^{-x}$$

Se il grado di una equazione è dispari, almeno una soluzione è reale, le soluzioni complesse e coniugate sono sempre a coppie

$n=5$ $\quad \lambda_1 = 3 \quad m=1$ SOL. SINGOLA

Soluzioni complesse e coniugate $\begin{cases} \lambda_2 = 4+5i \quad m=2 \text{ SOL. DOPPIA} \\ \lambda_3 = 4-5i \quad m=2 \text{ SOL. DOPPIA} \end{cases}$

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} \cos 5x + C_3 x \cdot e^{4x} \cdot \cos 5x + C_4 e^{4x} \operatorname{sen} 5x + C_5 x \cdot e^{4x} \cdot \operatorname{sen} 5x$$

ESEMPIO

$$\begin{cases} y'' - 12y' + 35y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \text{CONDIZIONI AL CONTORNO} \; ; \quad \begin{cases} y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{7x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

$$y(0) = C_1 + C_2 = 1$$

$$y' = 5C_1 e^{5x} + 7C_2 e^{7x} \qquad y'(0) = 5C_1 + 7C_2 = 2$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 5C_1 + 7C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad C_1 = \frac{5}{2} \quad C_2 = -\frac{3}{2}$$

$$y = \frac{5}{2} e^{5x} - \frac{3}{2} e^{7x}$$

ODE non omogenee

sabato 14 novembre 2020 13:37

Terza Parte

- ODE Lineari non omogenee
- Metodo della variazione delle costanti
- Altri schemi di ODE
- Risoluzione numerica di ODE
- Applicazioni in Fisica

ODE LINEARI NON OMOGENEE

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \dots \quad a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = b(x)$$

$$y(x) = y_{OMO}(x) + y_p(x)$$

y_{OMO} ↓ SOLUZIONE GENERALE DELL'ODE OMOGENEA ASSOCIATA

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

Quando un problema è lineare, vige il principio di sovrapposizione degli effetti: se y_0 e y_1 sono due soluzioni, anche la combinazione lineare y_0+y_1 è soluzione

DIM:

$$a_0(x)\left[y_{OMO}^{(n)} + y_p^{(n)}\right] + a_1(x)\left[y_{OMO}^{(n-1)} + y_p^{(n-1)}\right] + \dots$$

$$\dots + a_{n-1}(x)\left[y'_{OMO} + y'_p\right] + a_n(x)\cdot\left[y_{OMO} + y_p\right] = b(x)$$

$$a_0(x)\, y_p^{(n)} + a_1(x)\, y_p^{(n-1)} + \dots \; a_n(x)\cdot y_p = b(x)$$

COME CALCOLARE $y_p(x)$?

METODO DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI (METODO DI LAGRANGE)

METODO DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI (METODO DI LAGRANGE)

CASO $n=2$ ESTENDIBILE AD n GENERICO

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x)$$

SIANO y_1 e y_2 LE SOLUZIONI DELL'OMOGENEA ASSOCIATA

allora pongo la relazione:

$$y_p = \underbrace{C_1(x)}_{}y_1 + \underbrace{C_2(x)}_{}y_2$$

NON costanti ma FUNZIONI

INFATTI: se y_1 e y_2 sono soluzioni, anche la loro combinazione lineare è soluzione

$$y_p' = C_1'(x)\cdot y_1 + C_1(x)\cdot y_1' + C_2'(x)y_2 + C_2(x)y_2' =$$
$$= \left(C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2\right) + C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2'$$

IMPONGO $C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0$ → Pongo cioè che $C_1(x)$ e $C_2(x)$ siano delle COSTANTI o che comunque $C_1'(x)y_1$ e $C_2'(x)y_2$ siano opposte

$$\Rightarrow y_p' = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2'$$
$$y_p'' = C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2''$$

Le due espressioni vanno ora sostituite nella equazione di partenza

ADESSO

$$y_p'' + a_1(x)y_p' + a_2(x)y_p = b(x)$$

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2'' + a_1(x)\left[C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2'\right]$$
$$+ a_2(x)\left[C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2\right] = b(x)$$

ADESSO

$$y_p'' + a_1(x)y_p' + a_2(x)y_p = b(x)$$

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2'' + a_1(x)\left[C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2'\right]$$
$$+ a_2(x)\left[C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2\right] = b(x)$$

Raccolgo a fattor comune

$$C_1(x)\underbrace{\left[y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1\right]}_{=0 \text{ poiché soluzione dell'omo associata}} + C_2(x)\cdot\underbrace{\left[y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2\right]}_{=0 \text{ poiché soluzione dell'omo associata}}$$
$$\underbrace{+ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = b(x)}_{\text{Equazione rimanente}}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot y_1 + C_2'(x)\cdot y_2 = 0 \\ C_1'(x)\cdot y_1' + C_2'(x)\cdot y_2' = b(x) \end{cases}$$

→ ord = 0 per le primitive

→ ord = 1 per le primitive derivate

MATRICE DEI TERMINI NOTI = MATRICE WRONSKIANA

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

Posso risolvere con i determinanti o con altri metodi di risoluzione dei sistemi

$$C_1(x) = \int C_1'(x) = \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ b(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\det(\underline{\underline{W}}(x))} \qquad C_2(x) = \int C_2'(x) = \int \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & b(x) \end{vmatrix}}{\det(\underline{\underline{W}}(x))}$$

$C_1(x)$ e $C_2(x)$ ottenuti, saranno i pesi da sostituire in $y_p = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$

GENERALIZZAZIONE PER $n > 2$

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots \dots a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x)$$

$$y = y_{OMO} + y_P$$

$y_1, y_2, \dots y_n$ SOLUZIONI DELL'OMOGENEA ASSOCIATA

$$y_P = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \dots + C_n(x)y_n$$

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \dots + C_n'(x)y_n = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \dots + C_n'(x)y_n' = 0 \\ \vdots \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \dots C_n'(x)y_n^{(n-1)} = b(x) \end{cases}$$

solo all'ultimo

CASO $n = 1$

ODE del 1° ordine

OMOGENEA ASSOCIATA

$$y' + a_1(x) \cdot y = 0$$

$$y' = -a_1(x)y$$

$$\frac{dy}{y} = -a_1(x)\,dx$$

$$y' + a_1(x)y = b(x)$$

$$\ln|y| = -A_1(x) + c \qquad A_1(x) = \int a(x)\,dx$$

$$y_{omo} = c\,e^{-A_1(x)}$$

SOL. OMOGENEA ASSOCIATA

$$y_P = C_1(x) \cdot e^{-A_1(x)}$$

SOL. PARTICOLARE DELLA ODE LINEARE DEL 1° ORDINE

Questa volta ho solo una equazione

$$C_1'(x) \cdot e^{-A_1(x)} = b(x) \implies C_1'(x) = e^{A_1(x)} \cdot b(x)$$

$$C_1(x) = \int e^{A_1(x)} \cdot b(x)\,dx$$

$$y_P = e^{-A_1(x)} \cdot \int e^{A_1(x)} \cdot b(x)\,dx$$

$$y = y_{OMO} + y_P = e^{-A_1(x)} \cdot \left[\int e^{A_1(x)} \cdot b(x)\,dx + c\right] =$$

$$= e^{-A_1(x)} \cdot \left[G(x) + k + c\right] \qquad k + c := c$$

$$= e^{-A_1(x)} \cdot \left[G(x) + k + c\right] \qquad k + c := c$$

$$y = e^{-A_1(x)} \cdot \left[G(x) + c\right]$$

MA IN ALCUNI TESTI

FORMULA FINALE / COMPLETA

TROVATE LA FORMA

$$y = e^{-A_1(x)} \cdot \int e^{A_1(x)} \cdot b(x)\,dx$$

CHE COMPRENDE ANCHE y_{OMO}

ESERCIZI:

1) $y' - 2xy = e^{x^2}$ $\qquad$ $y' = 2xy$ OMOGENEA ASSOCIATA

ODEL NON OMOGENEA DEL 1° ORDINE DI 1° GRADO

SOL. OMO:

1) $-a_1(x) = 2x$ $\qquad$ $-A_1(x) = x^2$

$$\ln|y| = x^2 + c \qquad y_{omo} = c \cdot e^{x^2}$$

$$y_p = e^{x^2} \cdot \left[\int e^{-x^2} \cdot e^{x^2} dx\right] = e^{x^2} \cdot \left[\int dx\right] =$$

$$= e^{x^2}(x + c) \Rightarrow y = e^{x^2}(x + c)$$

2) $y'' + y = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

D: $\sin x \neq 0$ $\Downarrow$ $x \neq k\pi$

ha una discontinuità

ODEL del 2° ordine

$y'' + y = 0$ OMOGENEA ASSOCIATA

la risolvo con l'eq. algebrica associata

$\lambda^2 + 1 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm i$

$y_{omo} = c_1 \cdot \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$

$y_1 = \cos x \qquad y_2 = \operatorname{sen} x$

METODO DI LAGRANGE

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\operatorname{sen} x = 0 \\ -c_1'(x)\operatorname{sen} x + c_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{W}}(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix} \Rightarrow \det \underline{\underline{W}}(x) = 1$$

$$c_1'(x) = \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ \frac{1}{\operatorname{sen} x} & \cos x \end{vmatrix} = -1 \qquad c_2'(x) = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & \frac{1}{\operatorname{sen} x} \end{vmatrix} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

integro

$$c_1(x) = -x \qquad c_2(x) = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx = \ln|\operatorname{sen} x|$$

$$y_p = c_1(x)\cos x + c_2(x)\operatorname{sen} x =$$

$$= -x\cos x + \operatorname{sen} x \cdot \ln|\operatorname{sen} x|$$

$$y = y_{omo} + y_p = \cos x(-x + c_1) + \operatorname{sen} x\left[\ln|\operatorname{sen} x| + c_2\right]$$

$y' = f(x,y) = a(x) \cdot b(y)$ $\qquad$ A VARIABILI SEPARABILI

$$\frac{dy}{b(y)} = \frac{dx}{a(x)}$$

SOLUZIONI COSTANTI: Se $\exists\, b(y) = 0$, questa è soluzione particolare poiché risolta $y' = 0$ e dunque y costante

(ODE GENERALMENTE NON LINEARE) $\downarrow$ È LINEARE SE $b(y) = y$

SI TESTANO ANCHE LE $y : b(y) = 0$

ESEMPIO

Problema di Cauchy

1) $\begin{cases} y' = y^2 = f(x,y) = a(x) \cdot b(y) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\qquad$ $a(x) = 1$, $b(y) = y^2$

$f(x,y) = y^2 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$ NON RISPETTA IL VINCOLO

1° STEP:

Cerco le soluzioni costanti e, se non soddisfano il vincolo, le escludo

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \qquad \frac{dy}{y^2} = dx$$

$$-\frac{1}{y} + K_1 = x + K_2 \qquad -\frac{1}{y} = x + (K_2 - K_1) = x + c$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{x+c}}$$ INTEGRALE GENERALE

PROBLEMA "IN PICCOLO" ⟶ y' è continua e y(0)=1 ∈ al suo dominio

$(0,1) \in$ Dominio di $f(x,y) \Rightarrow \exists\ y:[-\delta,\delta] \to \mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_R \text{ LIMITATA}$$

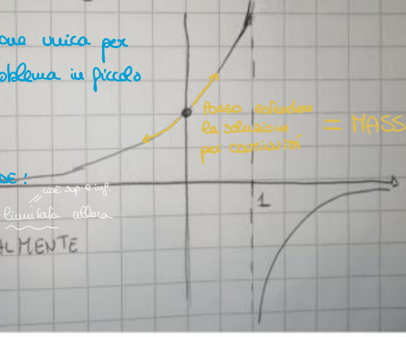
$$\exists!\ y:[-\delta,\delta] \to \mathbb{R}$$

Poiché y' continua, allora la soluzione è unica e si calcola imponendo il vincolo nell'integrale generale

$$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = -\frac{1}{c} \Rightarrow c = -1$$

$$y = \frac{1}{1-x}$$

soluzione unica per il problema in piccolo



PROBLEMA DI CAUCHY IN GRANDE:

Poiché la derivata prima non è limitata (cioè sup. e inf.) allora

$f(x,y)$ NON È GLOBALMENTE LIP

(2)
$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$y=0$ È SOLUZIONE COSTANTE

INT. GENERALE $\boxed{y = -\frac{1}{x+c}}$ $\qquad 0 = -\frac{1}{c}$

Nessuna soluzione con c finito rispetta il vincolo perciò solo y(0)=0 è soluzione

(3)
$$\begin{cases} y' = (y-1)^2 \\ y(3) = 1 \end{cases}$$

$(y-1)^2 = 0 \Rightarrow y = 1$

$y=1$ È SOLUZIONE costante DEL P.C

$A \Rightarrow B$

$\neg A \vee B$

$\neg B \Rightarrow \neg$

$$\frac{dy}{(y-1)^2} = dx \qquad -\frac{1}{y-1} = x + c$$

$$\frac{dy}{(y-1)^2} = dx \qquad -\frac{1}{y-1} = x + c$$

INTEGRALE GENERALE

$$1 - y = \frac{1}{x+c} \Rightarrow \boxed{y = 1 - \frac{1}{x+c} = \frac{x+c-1}{x+c}}$$

$$1 = \frac{2+c}{3+c} \qquad c \neq -3 \qquad 3+c = 2+c \qquad \nexists\, c \in \mathbb{R}$$

Dunque l'unica soluzione è quella costante

RISOLUZIONE NUMERICA DI ODE

FUNZIONE LIPSCHITZIANA

- **LOCALMENTE:** se f è eventualmente illimitata e continua e la sua derivata prima è anche continua, allora è localmente lipschitziana
- **GLOBALMENTE:** se f è eventualmente illimitata e continua e la sua derivata prima f' è limitata, allora è globalmente lipschitziana ⇒ La funzione è limitata, calcolando le derivate parziali, esse sono limitate

Inoltre, se una funzione è lineare e la striscia presa in considerazione è tale che la funzione è continua in essa

SOL. UNICA PROBLEMA DI CAUCHY IN PICCOLO
↓
condizione SUFFICIENTE

Se una funzione è continua e localmente lipschitziana (cioè anche la derivata prima f' è continua) allora esiste una sola soluzione locale (in un piccolo intervallo)
↓
Se non è lipschitziana, la soluzione potrebbe non essere unica
↓
perché è cond. sufficiente ma non necessaria
↓
Tuttavia, per il TEOREMA DI PEANO sappiamo che esiste almeno una soluzione se f è continua

SOL. UNICA PROBLEMA DI CAUCHY IN GRANDE
↓
Se una funzione è continua e globalmente lipschitziana (cioè anche la derivata prima f' è continua) allora esiste una sola soluzione globale

PASSAGGI
↓
Dato un problema di Cauchy, se f è continua allora per il teorema di Peano so che esiste almeno una soluzione.
È unica?

RISOLUZIONE NUMERICA DI ODE

ODE 1° ORDINE

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \Rightarrow dy = f(x,y)\,dx$$

$$\underbrace{y_1 - y_0}_{dy} = f(x_0,y_0)\cdot \underbrace{(x_1 - x_0)}_{dx}$$

dove $x_1 = x_0 + h$

h: passo di integrazione, valore scelto dal programmatore

$$\cancel{\frac{dy}{dx} = f(x,y) \Rightarrow dy = f(x,y)dx}$$

$$\cancel{y_1 - y_0 = f(x_0,y_0)\cdot(x_1 - x_0) \quad x_1 = x_0 + h}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= y_0 + f(x_0,y_0)\cdot h \\ y_2 &= y_1 + f(x_1,y_1)\cdot h \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1} + f(x_{n-1},y_{n-1})\cdot h \end{aligned}}$$

con $\boxed{x_n = x_{n-1} + h}$

SCHEMA DI EULERO

ESEMPIO

ODEL non omogenea

$$\begin{cases} y' = 2xy + e^{x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

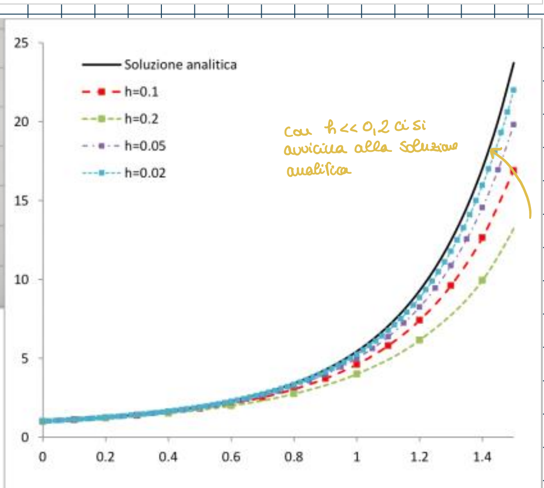
$$y = e^{x^2}(x + c)$$

$$1 = 1\cdot(0 + c) \qquad c = 1$$

$$y = e^{x^2}(x+1)$$

ESEMPIO

$$\begin{cases} y' = 2xy + e^{x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$



allora per il teorema di Peano so che esiste almeno una soluzione.

È unica?

↓

Il problema si basa sul teorema di esistenza ed unicità locale, dunque devo verificare che sia continua e lipschitziana nel vincolo cioè devo verificare che la derivata parziale rispetto al vincolo sia CONTINUA o che comunque il vincolo appartenga al dominio della derivata prima (che se è continua sarà così)

APPLICAZIONI IN FISICA

$$\begin{cases} y'' = -g \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = v_0 \end{cases}$$

$y'' = -g$

$y' = -\int g\, dt = -gt + c_1$

$y = \int (-gt + c_1)\, dt =$

$= -g\frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2$

$y_0 = -g \cdot \frac{0^2}{2} + c_1 \cdot 0 + c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = y_0$

$y'(0) = v_0 = -g \cdot 0 + c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = v_0$

$$y(t) = -g\frac{t^2}{2} + v_0 t + y_0$$

MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

Oscillazioni libere di un corpo pesante

27. Colleghiamo una sfera di massa m all'estremo P di una molla, sospesa nell'altro estremo ad un centro fisso e disposta verticalmente.
Assumiamo come sistema di riferimento l'asse verticale y, rivolto verso il basso e con l'origine nel punto O, corrispondente alla posizione d'equilibrio dell'estremo P della molla (fig. 3). All'istante $t = 0$ la sfera viene collegata alla molla: si ha quindi $y = 0$ e $v = 0$ per $t = 0$ (condizioni iniziali).
Sulla sfera agisce la forza peso $F_p = mg$ e la forza di richiamo della molla $F_m = -ky$, dove $k > 0$ indica la costante elastica della molla. La risultante delle forze che agiscono sulla pallina è quindi

$$F = mg - ky. \tag{1}$$

Ricordando che, per il secondo principio della dinamica, è $F = ma$ e che è inoltre

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = y'',$$

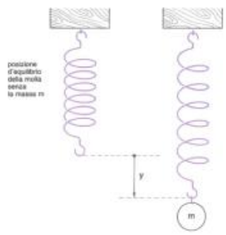


Fig. 3

la (1) diventa

$$my'' = mg - ky \longrightarrow my'' + ky = mg$$

ossia

$$y'' + \frac{k}{m}y = g. \tag{2}$$

La (2) è un equazione differenziale lineare *non omogenea* del secondo ordine. Per risolverla occorre quindi determinare dapprima l'integrale generale dell'equazione omogenea associata:

$$y'' + \frac{k}{m}y = 0. \tag{3}$$

La (3) è formalmente identica all'equazione differenziale risolta al numero precedente. Il suo integrale generale è perciò

$$y = c_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{\frac{k}{m}}\,t. \tag{4}$$

Per risolvere la (2) occorre poi determinarne un integrale particolare. È facile verificare che la funzione costante

$$y = \frac{mg}{k}$$

$y'' + \frac{k}{m}y = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot i$

y_p:

$$\begin{cases} c_1'(t) \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) + c_2'(t) \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) = 0 \\ -c_1'(t)\left[\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)\right] \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} + c_2'(t) \cdot \left[\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)\right] \sqrt{\frac{k}{m}} = g \end{cases}$$

$y'' + \frac{k}{m}y = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot i$

$$\underline{\underline{W}}(t) = \begin{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) & \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) \\ -\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) & \sqrt{\frac{k}{m}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) \end{pmatrix}$$

$\det \underline{\underline{W}}(t) = \sqrt{\frac{k}{m}}$

y_p:

$$\begin{cases} c_1'(t) \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) + c_2'(t) \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) = 0 \\ -c_1'(t)\left[\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)\right] \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} + c_2'(t) \cdot \left[\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)\right] \sqrt{\frac{k}{m}} = g \end{cases}$$

$$c_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & sen\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right) \\ g & \sqrt{\frac{K}{m}}\cdot cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right) \end{vmatrix}}{\sqrt{K/m}} = -g\cdot sen\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right)\cdot\sqrt{\frac{m}{K}}$$

$$c_1(t) = -g\sqrt{\frac{m}{K}}\cdot\int sen\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right)dt =$$

$$= -g\cdot\sqrt{\frac{m}{K}}\cdot\sqrt{\frac{m}{K}}\cdot\int sen\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right)\cdot\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot dt =$$

$$= -g\frac{m}{K}\cdot\left(-cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right)\right) = \frac{mg}{K}\cdot cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right)$$

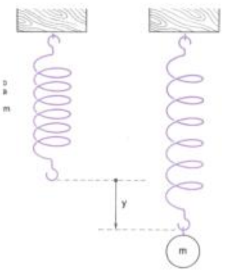
$$c_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right) & 0 \\ -\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot sen\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right) & g \end{vmatrix}}{\sqrt{K/m}} = g\cdot\sqrt{\frac{m}{K}}\cdot cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right)$$

$$c_2(t) = g\cdot\sqrt{\frac{m}{K}}\cdot\sqrt{\frac{m}{K}}\cdot\int\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right)dt =$$

$$= g\cdot\frac{m}{K}\cdot sen\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right)$$

$$y_p = \frac{mg}{K}\cdot cos^2\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right) + \frac{mg}{K}\cdot sen^2\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right) = \frac{mg}{K}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = y'',$$



soddisfa la (2), il cui integrale generale è perciò dato dalla somma dell'integrale generale (4) dell'equazione omogenea associata con la soluzione particolare ora trovata:

$$y = c_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + c_2\,sen\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \frac{mg}{k}. \quad (5)$$

Derivando la (5) si ottiene

$$y' = v = -c_1\sqrt{\frac{k}{m}}\,sen\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + c_2\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t. \quad (6)$$

Possiamo ora determinare le costanti c_1 e c_2 in modo che siano verificate le condizioni iniziali. Sostituendo $t = 0$ e $y = 0$ nella (5) otteniamo

$$0 = c_1 + \frac{mg}{k} \longrightarrow c_1 = -\frac{mg}{k}.$$

Sostituendo $t = 0$ e $v = 0$ nella (6), si ha:

$$0 = c_2\sqrt{\frac{k}{m}} \longrightarrow c_2 = 0.$$

L'equazione del moto esaminato è pertanto:

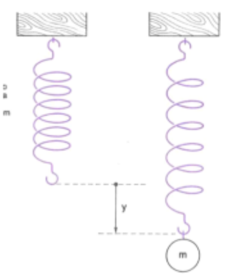
$$y = -\frac{mg}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \frac{mg}{k}$$

ossia

$$y = \frac{mg}{k}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right).$$

5

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = y'',$$



Dal grafico della legge oraria in figura 4, si può osservare che il moto della sfera è un moto armonico, il cui periodo, detto *periodo proprio del sistema*, è $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Tale periodo dipende dalla massa m della sfera e dalla costante elastica k della molla. Le oscillazioni avvengono attorno al *punto di equilibrio* $y = \frac{mg}{k}$, così chiamato perché in tale punto la forza peso e la forza di richiamo della molla si equilibrano, essendo eguali in modulo ed opposte in verso.

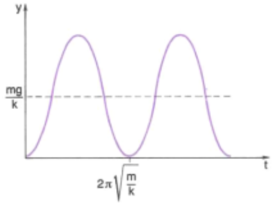


Fig. 4

Esercitazione finale parte 1

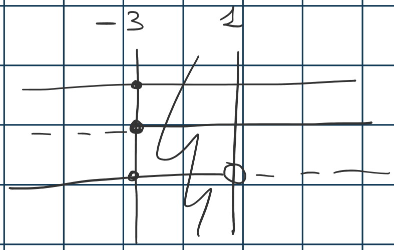
domenica 13 dicembre 2020 15:27

1. Dove possiamo definire una striscia che rispetti la lipschitzianità globale

$$\begin{cases} y_1' = [\ln(x^2+3)\, y_2 - \cos(\sqrt{x+3}) = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = y_1 + y_2 \sin x + \ln \frac{1}{1-x} = f_2(x, y_1, y_2) \end{cases}$$

Dominio: $A \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x^2+3>0 \\ x+3 \geq 0 \\ \frac{1}{1-x} > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 > -3 \quad \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ x \geq -3 \\ x < 1 \end{cases}$$



$A : \{ (x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3 \mid -3 \leq x < 1 \}$

Cerchiamo dunque una striscia tale che $S : [a, b] \times \mathbb{R}^2$ dove è soddisfatto un problema di Cauchy in grande

Ad esempio possiamo scegliere $S : [-2, 0] \times \mathbb{R}^2$ poiché

1) È continua
2) Per Peano, poiché è continua presenta almeno una soluzione
3) Poiché le equazioni sono lineari e dunque esiste una sola soluzione globale

oppure risolvo un sistema dove pongo due passaggi:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2) \\ y_1(-1) = 2 \\ y_2(-1) = 1 \end{cases}$$

Verifico le derivate parziali:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = 0 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y_2} = \ln(x^2+3) \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y_1} = 1 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = \sin x$$

Sono funzioni solo in x e sono limitate. Possono essere maggiorate da una unica L di Lipschitz e quindi la funzione vettoriale f di componenti f_1 e f_2 è GLOBALMENTE LIPSCHITZIANE

f di componenti f_1 e f_2 è GLOBALMENTE LIEPSCHITZIANE

② Trovare se quali a del sis. la striscia $S: [1,2]\times\mathbb{R}^2$ soddisfa un problema di Cauchy in grande

$$\begin{cases} \sqrt{a^2-x^2}\cdot y_1' = e^{\cos x}\cdot y_2 \\ y_2' = \frac{1}{e^x}(y_1+y_2) \end{cases} \xrightarrow[\text{ESPLICITA}]{\text{FORMA}} \begin{cases} y_1' = \frac{e^{\cos x}}{\sqrt{a^2-x^2}}\,y_2 \\ y_2' = \frac{1}{e^x}(y_1+y_2) \end{cases}$$

Prob. parametrico

Le derivate devono stare sulla SINISTRA

DOMINIO : $A\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} a^2-x^2>0 \Rightarrow a^2>x^2 \Rightarrow -a<x<a \\ e^x\neq 0 \Rightarrow \forall x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

$A: \{(x,y_1,y_2)\in\mathbb{R}^3 \mid -a<x<a\} = (-a,a)\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

$a>2$ poiché altrimenti non ingloberebbe la striscia $[1,2)$

Verifico che sia Lipschitziana ponendo $a=3$

$\frac{\partial f_1}{\partial y_1}=0 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y_2}=\frac{e^{\cos x}}{\sqrt{9-x^2}}$

$\frac{\partial f_2}{\partial y_1}=\frac{1}{e^x} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y_2}=\frac{1}{e^x}$

Sono funzioni solo di x. Dunque sono continue in $[1,2]$ e perciò limitate secondo Weierstrass. Perciò sono Leipschitziane

③ Determinare per quali $x\in\mathbb{R}$ e $a\in\mathbb{R}$ per cui è Lip. globalmente

$$\begin{cases} y_1' = \ln(1-x)\,y_1 + e^x y_2 - \cos 7x \\ y_2' = \sqrt{a^2-1}\cdot y_2 \end{cases}$$

DOMINIO : $A\subset\mathbb{R}^3\to{}^2$

$$\begin{cases} 1-x>0 \\ a^2-1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1 \\ a\leq -1 \;\vee\; a\geq 1 \end{cases}$$

Dunque $x<1 \wedge (a\leq -1 \vee a\geq 1)$ e $A: \{(x,y_1,y_2)\in\mathbb{R}^3 \mid x<1\}$

Dunque devo trovare una striscia tale che $[\alpha,\beta]\in(-\infty,1)$
e $a\leq -1 \vee a\geq 1$

Scelgo dunque $a=2$ e $S: [-2,0]$ e verifico la LIP GLOB.

$$\frac{df_1}{dy_1} = \ln(1-x) \qquad \frac{df_1}{dy_2} = e^x$$

$$\frac{df_2}{dy_1} = 0 \qquad \frac{df_2}{dy_2} = \sqrt{3}$$

Tutte le derivate parziali sono continue nel compatto e dunque, per Weierstrass anche limitate. Perciò è verificata la LIP. GLOBALE

Poiché sono anche MONOTONE, posso calcolare la costante L di Lipschitz

Valuto la funzione in corrispondenza degli estremi:

$$\frac{df_1}{dy_1} \Rightarrow \begin{array}{l} x=-2 \Rightarrow \ln(3)>1 \\ x=0 \Rightarrow \ln(1)=0 \end{array} \Rightarrow \left|\frac{df_1}{dy_1}\right| \leq \underline{\ln 3}$$ MAGGIORA la funzione

$$\frac{df_1}{df_2} \Rightarrow \begin{array}{l} x=-2 \Rightarrow e^{-2}<1 \\ x=0 \Rightarrow e^0=1 \end{array} \Rightarrow \left|\frac{df_1}{df_2}\right| \leq 1$$

$$\frac{df_2}{dy_1} = 0 \quad \forall x\in I \Rightarrow \left|\frac{df_2}{dy_1}\right| \leq 0$$

$$\frac{df_2}{dy_2} = \sqrt{3} \quad \forall x\in I \Rightarrow \left|\frac{df_2}{dy_2}\right| \leq \sqrt{3}$$

Alla fine scelgo la costante maggiorante più grande pari a $\sqrt{3}$

4 Verificare la LIP globale in $S: [a,b] \times \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} y_1' = 6y_1 + 2x \\ y_2' = 7(y_1 - x) + 8y_2 - y_3 \\ y_3' = 7x \end{cases}$$

D: tutto $\mathbb{R}^4$, dunque posso scegliere a e b senza vincoli
Guardando le y primitive e derivate, sono tutte e tre lineari.
Dunque, per teoria la Lip. è sempre verificata
Per trovare una x ho bisogno di tre punti

Se però non volessi applicare la linearità, devo verificare le derivate parziali

$$\frac{df_1}{dy_1} = 6 \qquad \frac{df_1}{dy_2} = 0 \qquad \frac{df_1}{dy_3} = 0$$

$$\frac{df_2}{dy_1} = 7 \qquad \frac{df_2}{dy_2} = 8 \qquad \frac{df_2}{dy_3} = -1$$

$$\frac{df_3}{dy_1} = 0 \qquad \frac{df_3}{dy_2} = 0 \qquad \frac{df_3}{dy_3} = 0$$

Dunque $\exists L$ ed è pari a 8. Perciò sono limitate

5 PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 3e^{6x} \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

① risolvo l'omo associata:

$y'' - 3y' + 2y = 0$

Questo tipo trae soluzione da $e^{\lambda x}$ $(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$ dove $\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$

perciò una soluzione sarà $y_1 = e^x$ e una $y_2 = e^{2x}$

Dunque $y_{omo} = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{2x}$ mentre $y = y_{omo} + y_p$

perciò una soluzione sarà $y_1 = e^x$ e una $y_2 = e^{2x}$

Dunque $y_{omo} = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{2x}$ mentre $y = y_{omo} + y_p$

Determino la soluzione particolare col metodo di Lagrange:

Scrivo $y_p = c_1(x) e^x + c_2(x) \cdot e^{2x}$. Calcolo la derivata prima:

$$y'_p = \underline{c_1'(x) e^x} + c_1(x) e^x + \underline{c_2'(x) \cdot e^{2x}} + 2 c_2(x) e^{2x}$$ Pongo che

$$c_1'(x) e^x + c_2'(x) \cdot e^{2x} = 0$$ cioè opposti / $c_1(x)$ e $c_2(x)$ costanti

Calcolo la derivata seconda:

$$y''_p = c_1'(x) e^x + c_1(x) e^x + 2 c_2'(x) e^{2x} + 4 c_2(x) e^{2x}$$

Sostituisco nell'equazione di partenza:

$$y'' - 3y' + 2y = 3 e^{6x}$$

$$\Downarrow$$

$$c_1'(x) e^x + \cancel{c_1(x) e^x} + 2 c_2'(x) e^{2x} + \cancel{4 c_2(x) e^{2x}} - \cancel{3 c_1(x) e^x} - \cancel{6 c_2(x) e^{2x}} + \cancel{2 c_1(x) e^x} + \cancel{2 c_2(x) e^{2x}} = 3 e^{6x}$$

$$\begin{cases} c_1'(x) e^x + c_2'(x) e^{2x} = 0 \\ c_1'(x) e^x + 2 c_2'(x) e^{2x} = 3 e^{6x} \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = -e^x \cdot e^{2x} + 2e^x e^{2x} = -e^{3x} + 2e^{3x} = e^{3x}$$

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ 3e^{6x} & 2e^{2x} \end{vmatrix}}{\det W} = \frac{0 - 3e^{2x} e^{6x}}{e^{3x}} = \frac{-3e^{8x}}{e^{3x}} = -3e^{5x}$$

dunque

$$\int f'(x) \cdot e^{f(x)} = e^{f(x)}$$

$$c_1(x) = \int c_1'(x) = \int -3e^{5x}\,dx = -\frac{3}{5}\int 5e^{5x}\,dx = -\frac{3}{5} e^{5x}$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & 3e^{6x} \end{vmatrix}}{W} = \frac{3e^{6x} \cdot e^x - 0}{e^{3x}} = \frac{3e^{7x}}{e^{3x}} = 3e^{4x}$$

$$c_2(x) = \int c_2'(x) = \frac{3}{4}\int 4e^{4x}\,dx = \frac{3}{4} e^{4x}$$

Dunque sostituisco i valori di $c_2(x)$ e $c_1(x)$ in y_p:

$y_p = C_1(x)\, e^{x} + C_2(x)\, e^{2x} = -\frac{3}{5} e^{5x} \cdot e^{x} + \frac{3}{4} e^{4x} e^{2x} = \frac{3}{20} e^{6x}$

Verifica: in $y''_p - 3y'_p + 2y_p = 3e^{6x}$ sostituisco il valore di y_p trovato

Soluzione finale:

$y = y_{omo} + y_p = c_1 \cdot e^{x} + c_2 \cdot e^{2x} + \frac{3}{20} e^{6x}$

Devo poi trovare c_1 e c_2 affinché siano validi i vincoli imposti:

(1) $y(1) = 2$ e (2) $y'(1) = 0$

(1) se $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + \frac{3}{20} e^{6x}$ allora $2 = c_1 \cdot e + c_2 \cdot e^{2}$

(2) " allora $y' = c_1 \cdot e^{x} + 2c_2 e^{2x} + \frac{9}{10} e^{5x}$ allora $0 = c_1 \cdot e + 2c_2 \cdot e^{2} + \frac{9}{10} e^{5}$

Dunque basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} c_1 e + c_2 e^2 = 2 - \frac{3}{20} e^6 \\ c_1 e + 2e^2 c_2 = -\frac{9}{10} e^6 \end{cases}$$

sia con le matrici che con altri metodi e ottengo

$c_1 = \frac{4}{e} + \frac{3}{5} e^{5}$ e $c_2 = -\frac{3}{4} e^{4} - \frac{2}{e^2}$ per cui ottengo che

$$y = \left(\frac{4}{e} + \frac{3}{5} e^5\right) e^{x} + \left(-\frac{3}{4} e^4 - \frac{2}{e^2}\right) e^{2x} + \frac{3}{20} e^{6x}$$ è SOLUZIONE

EX SUI CAMPI

(1) Dati $\underline{F_1} = (2, x+y)$ e $\underline{F_2} = (k(x+y), 3)$

- Calcolare i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che

a) $\underline{J_1} = \underline{F_1} + \underline{F_2}$ è conservativo

b) $\underline{J_2} = \underline{F_1} - \underline{F_2}$ è conservativo

a) Calcolo $\underline{J_1} = \underline{F_1} + \underline{F_2} = (\underbrace{2 + k(x+y)}_{F_\alpha}, \underbrace{3 + (x+y)}_{F_\beta})$

Dominio: tutto $\mathbb{R}^2$ quindi il dominio è semplicemente connesso

Perciò, mi basta che il campo sia irrotazionale affinché sia CONSERVATIVO

Verifico l'irrotazionale:

$\frac{\partial F_\beta}{\partial x} \overset{\text{devo}}{=} \frac{\partial F_\alpha}{\partial y}$ e lo è se $k = 1$

Dunque

$\underline{f}_1$ conservativo se pari a $(2+x+y,\ 3+x+y)$

b) Calcolo $\underline{f}_2 = \underline{F}_1 - \underline{F}_2 = (2-k(x+y),\ x+y-3)$

Ripeto il procedimento sopra per cui ottengo $k=-1$

e perciò $\underline{f}_2$ conservativo se $\underline{f}_2 = (2+x+y,\ x+y-3)$

– Calcolare il lavoro del campo

$\underline{G} = \underline{f}_1 + \underline{f}_2$ lungo il percorso chiuso $x^2+y^2=4$

Verifico che G sia conservativo:

$$\underline{G} = \underline{f}_1 + \underline{f}_2 = (\underbrace{4+2x+2y}_{G_1},\ \underbrace{2x+2y}_{G_2})$$

Poiché $\dfrac{dG_2}{dx} = \dfrac{dG_1}{dy}$ allora $\underline{G}$ è conservativo

Dunque, $\oint \underline{G} \circ d\underline{r} = 0$ però se voglio posso determinare il

POTENZIALE $\rightarrow$ funzione scalare di cui $\underline{G}$ è gradiente. Per

Determino dunque $U(x,y) \mid \underline{G}(x,y) = \nabla U(x,y)$!

Calcolo la der. parziale $\dfrac{dU}{dx}$ che deve essere pari alla prima componente G_1:

$$\frac{dU}{dx} = G_1 \Rightarrow U = 4x + x^2 + 2xy + c(y)$$ **ESP. PROVVISORIA**

Derivo parzialmente la prima espr. provvisoria che deve essere uguale a G_2

$$\frac{dU}{dy} = \frac{d(4x+x^2+2xy+c(y))}{dy} = 2x+2y$$

Ottengo $\cancel{2x} + c'(y) = \cancel{2x} + 2y \Rightarrow \int c'(y) = \int 2y \Rightarrow c(y) = y^2 + k$

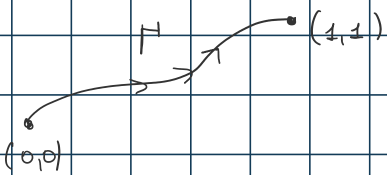
Perciò $\boxed{U(x,y) = 4x + x^2 + 2xy + y^2 + k}$

Di conseguenza, dato un percorso qualsiasi, poiché il campo è conservativo allora $L_\Gamma = \int_\Gamma \underline{G} \circ d\underline{r} = U(1,1) - U(0,0) = 8$

se H è tale che!

conservativo allora $L_\Gamma = \int_\Gamma \underline{G} \circ d\underline{z} = U(1,1) - U(0,0) = 8$

se Γ è tale che:



② Dato $f(x,y) = 6x + 7y^2 + e^{x^2+y}$

a) verificare che $f(x,y)$ è differenziabile → applicare il Teor. del diff. totale

b) calcolare l'equazione del piano tangente nel punto $p=(0,0)$

c) calcolare $\nabla \circ (\nabla \times \nabla f)$ divergenza del rotore del gradiente

a) Per il teorema del diff totale $f(x,y)$ è quindi differenziabile

Equazione del differenziale: $df(x,y) = \nabla f(x,y) \circ (dx, dy) = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy =$

indica l'incremento delle ordinate

$= (6 + 2x e^{x^2+y}) dx + (14y + e^{x^2 y}) dy$

b) Calcolo $f(0,0) = 6 \cdot 0 + 7 \cdot 0^2 + e^{0^2+0} = 1$ che chiamo z_0

Calcolo il differenziale:

$d f(x,y) = \nabla f(x,y) \circ (dx, dy) = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy = (6 + 2x e^{x^2+y}) dx + (14y + e^{x^2+y}) dy$

così considero tutto un piano

Pongo $dx = x - x_0$, $df = z - z_0$, $dy = y - y_0$ per cui l'eq. del differenziale diventa

$z - z_0 = \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ Poiché sto considerando il punto $p = (0,0)$

allora $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 1$ e dunque $z - 1 = 6x + y \Rightarrow z = 6x + y + 1$ che è il piano tangente in $p = (0,0)$

c) Calcolare la divergenza del rotore del gradiente $\nabla \circ (\nabla \times \nabla f)$

① Io posso considerare $f(x,y) = f(x,y,0)$ dunque con $z=0$ e $\forall (x,y) \in D$

② $\nabla f(x,y) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right) \to \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, 0\right) \to \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right)$

Poiché so che il rotore del gradiente di un campo scalare è sempre pari al vettore nullo

quindi $\nabla \times \nabla f(x,y,z) = 0$ Perciò $\nabla \circ (\nabla \times \nabla f(x,y,z)) = \nabla \circ \underline{0} = 0$

Ripetizione sulle serie

lunedì 16 novembre 2020 10:37

SERIE A TERMINI NON NEGATIVI

Data una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0, +\infty)$ $(a_n \geq 0)$ posso definire

una nuova successione con segno

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_n \vdots =$$

$\{S_n\}$ è detta successione delle somme parziali. La sommatoria S_n è detta somma parziale ennesima $\quad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

e viene detta serie numerica di termini generali a_n.

Notiamo che $\{S_n\}$ è una successione NON DECRESCENTE $(S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n)$

Allora $\lim_{n\to+\infty} S_n \begin{cases} S < +\infty \\ +\infty \end{cases}$

Il limite $\lim_{n\to+\infty} S_n =: S$ viene indicato con $S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$

e viene detta serie numerica di termini generali a_n.

Diremo che la serie è CONVERGENTE se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$

Invece è DIVERGENTE se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$

ESEMPIO

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 1 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} 1 = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

$$\boxed{\sum_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{x} = +\infty}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} < +\infty$$

$\Rightarrow$ $\{S_n\}$ converge $\Rightarrow$ S_n è una successione di Cauchy

$\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : n, m > \bar{n}$ allora $|S_n - S_m| < \varepsilon$

Fissiamo allora $\varepsilon < 1/2$ e scegliamo un $\bar{n}$ in modo che soddisfi $|S_n - S_m| < \varepsilon$

Da $m > \bar{n} \Rightarrow 2m > \bar{n}$ ho che poiché $|S_{2m} - S_m| = S_{2m} - S_m = \underbrace{\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{2m}}_{m \text{ termini}} \geq m \cdot \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}$

per la decrescenza

ma ciò implica che $|S_{2n} - S_n| \geq \varepsilon \Rightarrow \{S_n\}$ non è di Cauchy $\Rightarrow \{S_n\}$ non converge

PROPOSIZIONE: CONDIZIONE NECESSARIA affinché la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$ è che $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

Infatti, se così non fosse, esisterebbero infiniti termini $\{a_{n_k}\}$ di $\{a_n\}$ tali che $a_{n_k} \geq \varepsilon_0 > 0$.

Pertanto $\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \geq \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n_k} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_0 = \varepsilon_0 \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \pm\infty}_{\text{criterio del confronto}}$ dunque sotto queste condizioni è impossibile per a_n convergere

PROPOSIZIONE: Se noi conosciamo il comportamento di una serie numerica e posso rapportarlo ad un'altra serie, allora posso conoscere anche il comportamento di quest'altra serie

Siano $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ due serie numeriche a termini non negativi. Allora ho che se $a_n \leq b_n$

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$

2) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty$

Dim. Se $a_n \leq b_n \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$

Allora $S_n \leq t_n$, pertanto se $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} t_n = +\infty$

Viceversa se $\lim_{n \to +\infty} t_n < +\infty$ allora $\lim_{n \to +\infty} S_n < +\infty$

ESEMPIO: 1) Se $0 < \alpha < 1$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$. Infatti, $\frac{1}{n^\alpha} = \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha \geq \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$

essendo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

2) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5 + \cos n}{2^n}$ è CONVERGENTE (supponendo che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} < +\infty$)

Infatti ho che $5 + \cos n \leq 6$ poiché $-1 \leq \cos n \leq 1$. Ho dunque che

$0 \leq \frac{5 + \cos n}{2^n} \leq 6 \frac{1}{2^n}$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} 6 \frac{1}{2^n} < +\infty$ poiché prima supponevamo che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} < +\infty$

PROPOSIZIONE: Criterio del confronto asintotico

Ricordiamo che se $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \in (0, +\infty)$ si dice che a_n e b_n sono ASINTOTICAMENTE EQUIVALENTI e si indicano con $\boxed{a_n \sim b_n}$

Se $a_n \sim b_n$ allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ hanno lo stesso comportamento.

ESEMPIO: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = ? \Rightarrow$ Sappiamo che $a_n = \frac{1}{n^2} \sim b_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Lavoro su b_n!

ESEMPIO: $\sum_{n=1} \frac{1}{n^2}$ - ? $\Rightarrow$ sappiamo che $a_n = \frac{1}{n^2} \sim b_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Lavoro su b_n:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \cancel{\tfrac{1}{2}} + \cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}} + \cancel{\tfrac{1}{3}} \cdots = 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1 \text{ Dunque converge}$$

NOTA! Se $a_n \sim b_n \Rightarrow \sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso comportamento.
Ciò non significa che $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Infatti nell'esempio precedente il fatto che $\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)} \Rightarrow \sum \frac{1}{n^2} < +\infty$
NON significa che $\sum \frac{1}{n^2} = \sum \frac{1}{n(n+1)}$.
Infatti $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ mentre $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

PROPOSIZIONE: Criterio del confronto

Sia $S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a termini NON NEGATIVI. Allora se esiste $l = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$
(o equivalentemente $l = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$)

e
$$\begin{cases} l < 1 \Rightarrow S \text{ CONVERGE} \\ l = 1 \Rightarrow \text{non si può concludere nulla} \\ l > 1 \Rightarrow S \text{ DIVERGE} \end{cases}$$

ESEMPI di applicazione

1. $\sum_{n=0}^{n} q^k$, $q > 0$
Allora notiamo che $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{q^n} = q$

Dunque se
$$\begin{cases} 0 < q < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} q^n < +\infty & \text{CONVERGENTE} \\ 1 < q \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = +\infty & \\ q = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 = +\infty & \end{cases} \Bigg\} \text{ DIVERGENTE}$$

2. $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} < +\infty$ $(0! = 1)$. Si ha che $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} = l$

Dunque $\lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{a^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{a^k}{k!}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k!}{(k+1)!} \cdot \frac{a^{k+1}}{a^k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k+1} \cdot a = 0 < 1$

perciò è convergente

PROPOSIZIONE: Criterio di condensazione

La serie a termini non negativi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se e solo se converge
la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$

ESEMPIO 1. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^3(\log n)^2} = ?$

$\Downarrow$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} 2^n \left[\frac{1}{(2^n)^3(\log 2^n)^2}\right] = \sum_{n=2}^{+\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^{3n}} \cdot \frac{1}{(n\log 2)^2} =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{(\log 2)^2} \quad \text{e ho anche che}$$

$$0 \leq \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{(\log 2)^2} \leq \frac{1}{2^{2n}} = \left(\frac{1}{4}\right)^n \text{ e } \sum \frac{1}{4^n} < +\infty$$

dunque $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^3(\log n)^2} < +\infty$

2. $$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,\log n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \frac{1}{\sqrt{(2^n)}\,\log 2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{2^{n/2}} \cdot \frac{1}{n\log 2} =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n/2} \cdot \frac{1}{n\log 2} = +\infty$$

Esempi vari:

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!\,n^3}{n^n}$ 2. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n\log n}$ 3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^5\,2^{2n}}{5^n}$ 4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log\left(\frac{n}{n+1}\right)\log\left(\frac{n}{n+1}\right)}{n}$

1. criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!\,(n+1)^3}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!\cdot n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{(n+1)}\,\cancel{n!}\,(n+1)^3}{\cancel{(n+1)}(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}\,n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^3}{(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{n^3} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$ con $\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \to 1$. Inoltre: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$ per cui $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{e}$ con $e \in (0,1)$

2.

Ho che $$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n\log n} = \frac{\sqrt{n}\left[\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right]}{n\log n} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}{\sqrt{n}\,\log n} \sim \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}\log n} =$$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{3/2}}\cdot\frac{1}{\log n}$ e che $(1+t)^{1/2}-1 \sim \frac{1}{2}t$ per cui

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2}\,\frac{1}{n^{3/2}}\cdot\frac{1}{\log n} \leq \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{3/2}}$$

3. criterio della radice

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^5\cdot 2^{2n}}{5^n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^5 \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5} < 1$$ con $\sqrt[n]{n} \to 1$

4.

$\log(t+1) \sim t+1$ Dunque

$$\log\left(\frac{n}{n+1}\right) = -\log\left(\frac{n}{n+1}\right) = -\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{n}$$

$$\log\left(\frac{n}{\ }\right) \sim \log\frac{1}{\ } = -\log n$$

$$\log\left(\frac{n}{n+1}\right) = -\log\left(\frac{n}{n+1}\right) = -\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{n}$$

$$\log\left(\frac{n}{n^2+1}\right) \sim \log\frac{1}{n} = -\log n$$

Inoltre $0 \leq \frac{\log n}{n^2} \leq \frac{\overset{\to 0}{\log n}}{n^{1/2}} \cdot \frac{1}{n^{3/2}} \leq \frac{1}{n^{3/2}} \Rightarrow \sum \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$

Dunque $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log\left(\frac{n}{n+1}\right)\log\left(\frac{n}{n^2+1}\right)}{n} < +\infty$

SERIE DI SEGNO QUALSIASI:

Sia ora $\{a_n\}$ una successione a termini di segno qualsiasi. La serie di termini generale a_n

$S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è detta serie a termini di segno variabile e non possiamo dire nulla sua esistenza.

Diremo che esso è CONVERGENTE se $\exists \lim_{n\to+\infty} S_n = S$ con $S \in (-\infty, +\infty)$

Diremo che invece S è ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE se $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty$

TEOREMA: Ogni serie assolutamente convergente è anche convergente semplicemente

ESEMPIO: $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ è una serie assolutamente convergente

Nota: Se S_n è assolutamente convergente, non è detto che non sia semplicemente convergente

ESEMPIO: $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k}$ converge SEMPLICEMENTE ma NON ASSOLUTAMENTE

La sua convergenza semplice è data dal criterio di Leibniz

PROPOSIZIONE: Criterio di Leibniz

Sia data $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$.

Se
1. $\{a_n\}$ è decrescente
2. $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$

Allora la serie $S = \lim_{n\to+\infty} n$ è CONVERGENTE.

Inoltre, la successione $\{S_{2n}\}$ approssima S per eccesso e la successione $\{S_{2n+1}\}$ approssima S per difetto

ESEMPIO: Sia dato $a<0$ allora $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} = a^k$ converge

$S = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{|a|^k}{k!}$. Notiamo che $\frac{|a|^k}{k!} \longrightarrow 0$. Infatti,

$S = \sum_{k=0} (-1) \frac{|a|}{k!}$. Notiamo che $\frac{|a|}{k!} \to 0$. Infatti,

$$\frac{|a|^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{|a|^k}{k!} \frac{|a|}{k+1} \leq \frac{|a|^k}{k!} \cdot 1 = a_k$$

Inoltre, $a_{k+1} \leq a_k$, $\ell = \lim_{k\to+\infty} a_k$, $\lim_{k\to+\infty} a_{k+1} \leq \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2} \frac{|a|^k}{k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2} a_k = \frac{\ell}{2} \Rightarrow \ell = 0$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} = S = e^a \qquad \begin{cases} a<0 \\ a>0 \end{cases}$$

Campo complesso

lunedì 16 novembre 2020 13:02

CAMPO COMPLESSO

$\mathbb{R}^2 \ni (a,b)$ $\begin{cases} \lambda(a,b) = (\lambda a, \lambda b) \\ (a,b)+(c,d) = (a+c, b+d) \end{cases}$

Prodotto: $(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$

Ho che $(0,1) = i$ con la condizione che $i^2 = 1 = (1,0)$

NUMERO COMPLESSO: $z = (a,b) = a(1,0) + b(0,1) = a+ib$

dove $\begin{cases} a = \text{parte reale} = Re(z) \\ b = \text{parte immaginaria} = Im(z) \end{cases}$

Proprietà: $a+ib + c+id = (a+c) + i(bd)$

$\lambda(a+ib) = \lambda a + i\lambda b$

$(a+ib)\cdot(c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc)$

CAMPO: $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è il campo complesso. Più semplicemente $\mathbb{C}$ è l'insieme delle coppie (a,b) denotate formalmente con $a+ib$ e dotato delle operazioni sopra.

Proprietà:

L'**elemento neutro** rispetto alla moltiplicazione è $1 = 1 + i\cdot 0$

L'**elemento opposto** rispetto alla moltiplicazione è costruito come segue:

Dato $z = a+ib$, $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$. Infatti ho che:

$$z\cdot\frac{1}{z} = (a+ib)\left(\frac{a}{a^2+b^2} + i\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)\right) = \left(a\cdot\frac{a}{a^2+b^2} - b\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)\right) + i\left(\frac{-ab}{a^2+b^2} + \frac{b\cdot a}{a^2+b^2}\right)$$

L'elemento detto **complesso coniugato** di $z = a+ib$ è detto $\bar{z} = a - ib$. Perciò ho che

$\frac{z+\bar{z}}{2} = Re(z)$ e $\frac{z-\bar{z}}{2} = Im(z)$

L'elemento detto **modulo** è $|z| = (z \cdot \bar{z})^{1/2} = \sqrt{a^2+b^2}$ per cui ho che $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Valgono anche:

$$\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$

per il modulo:

$|z| \geq 0$ e $z = 0 \iff |z| = 0$

$|z| = |\bar{z}|$

$|Re(z)|, |Im(z)| \leq |z|$ e $|z| \leq |Re(z)| + |Im(z)|$

$|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

$|z_1 - z_2| \geq \left| |z_1| - |z_2| \right|$

ESERCIZIO

Semplificare e trovare le soluzioni di $z^2 + i(Im\, z) + 2\bar{z} = 0$

Pongo $z = a+ib$ per cui ottengo $(a+ib)^2 + i(b) + 2\overline{(a+ib)} = 0$

da cui: $a^2 - b^2 + i2ab + 2a + ib + i2b = 0$

$$\downarrow$$

$$(a^2 - b^2 + 2a) + i(2ab - b) = 0 + i \cdot 0$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + 2a = 0 \\ 2ab - b = 0 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + 2a = 0 \\ b(2a-1) = 0 \end{cases}$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + 2a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 - b^2 + 2a = 0 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\begin{cases} a^2 + 2a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{4} - b^2 + 1 = 0 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

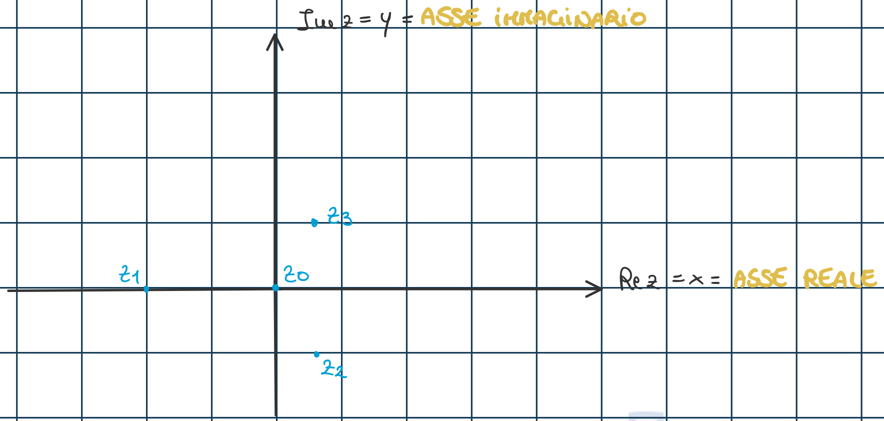
$$\begin{cases} a(a+2) = 0 \\ b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b^2 = \frac{5}{4} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\begin{cases} a=0 \ \vee \ a=-2 \\ b=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b=-\frac{\sqrt{5}}{2} \ \vee \ b=\frac{\sqrt{5}}{2} \\ a=\frac{1}{2} \end{cases}$$

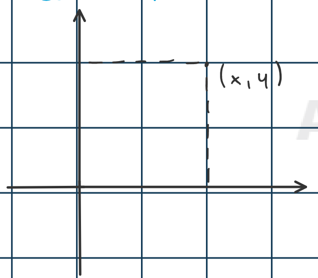
soluzioni: $z_0 = 0$, $z_1 = -2$ soluzioni: $z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{5}}{2}$, $z_3 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{5}}{2}$

Rappresentazione grafica:

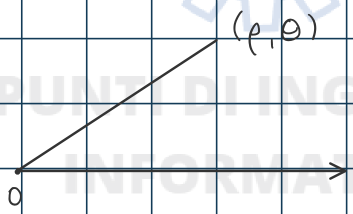


RAPPRESENTAZIONE POLARE

coordinate cartesiane



coordinate polari:



$\rho \in (0, +\infty)$
$\theta \in [0, 2\pi]$

Passaggio: $(x,y) \longrightarrow (\rho, \theta)$ $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \end{cases}$

$(\rho,\theta) \longrightarrow (x,y)$ $\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$

da cui $\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$

Posso rappresentare un numero complesso come

$z = x + iy = \rho\cos\theta + i\rho \operatorname{sen}\theta = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

→ FORMA TRIGONOMETRICA

Ottengo che $\rho = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$ mentre, a meno di angoli giro, $\theta = \arg(z)$ ARGOMENTO

FORMULE DI DE MOIVRE

Sia $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

FORMULE DI DE MOIVRE

Sia $z_1 = \rho_1 (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$, $z_2 = \rho_2 (\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$

allora $z_1 \cdot z_2 = \begin{cases} \rho = |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = \rho_1 \rho_2 \\ \theta = \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = \theta_1 + \theta_2 \end{cases}$

analogamente $\dfrac{z_1}{z_2} = \begin{cases} \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} \\ \arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \end{cases}$

Come conseguenza ricaviamo

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ volte}} = \rho^n \left[\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)\right]$$

ESEMPIO: Calcolare ① $(i+1)^8$ e ② $(i+1)^5$

① $(1+i)^8 = (\sqrt{2})^8 \left[\cos\left(8 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(8 \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right] = 2^4 [1 + i \cdot 0] = 16$

$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\arg(1+i) = \theta$: $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Big\} \frac{\pi}{4}$

Analogamente:

② $(1+i)^5 = (\sqrt{2})^5 \left[\cos 5 \cdot \frac{\pi}{4} + i \sin 5 \cdot \frac{\pi}{4}\right] =$

$= 4\sqrt{2} \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = -4 - 4i$

TEOREMA

Sia data la seguente equazione nel campo complesso

$$z^n = w_0 \quad , w_0 \in \mathbb{C} - \{0\} \; , \; w_0 = \rho_0 (\cos\theta_0 + i \sin\theta_0)$$

Allora tale equazione ha esattamente n radici che hanno espressione in forma trigonometrica

$$z_k = \rho_k (\cos\theta_k + i \sin\theta_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

dove $\rho_k = \sqrt[n]{\rho_0}$ e $\theta_k = \dfrac{\theta_0 + 2k\pi}{n}$ con $k = 0, 1, \ldots n-1$

ESEMPIO: Risolvere $z^3 = 1$ => che scrivo come $z^3 = 1 = 1 \cdot (\cos\theta + i \sin\theta)$

Se fossimo in $\mathbb{R}$ l'equazione $x^3 = 1$ avrebbe unica soluzione $x = 1$.

Invece, l'equazione $z^3 = 1$ ha esattamente 3 soluzioni nel campo complesso:

nel campo complesso:

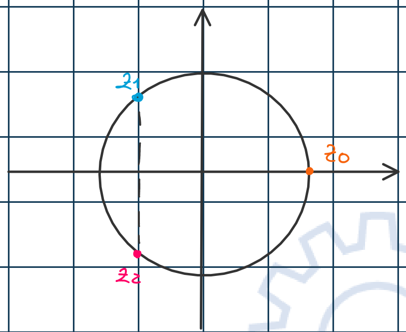
$$z_0 = \sqrt[n]{1}\left(\cos\left[\frac{0}{3}\right] + i\sin\left[\frac{0}{3}\right]\right) = 1$$

$$z_1 = \cos\left(\frac{0+2\cdot 1\cdot\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

DUNQUE:

SOL $z_0 = 1$, $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$



TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA:

Ogni polinomio di grado n su K complesso ha esattamente n radici complesse contate con le loro molteplicità.

In altre parole, dato un polinomio del tipo

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = b_0 (z-z_0)^{r_1} + \dots + b_n (z-z_m)^{r_m}$$

Dove $z_0, \dots, z_m$ sono radici distinte di $p(z) = 0$ e

$$r_1 + \dots + r_m = n$$

NOZIONI SU $\mathbb{C}$ IN RELAZIONE A $\mathbb{R}^2$

Si dice che $\mathbb{C}$ eredita la topologia di $\mathbb{R}^2$

Definiamo la BOLLA APERTA di raggio $R>0$ e centro $z_0 \in \mathbb{C}$ e l'insieme

$$B_R(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid (z - z_0) < R\}$$

Definendo $z = x+iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, definisco

$$B_R(x_0 + iy_0) := \{x + iy \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < R\}$$

Un insieme $U \in \mathbb{C}$ si dirà aperto se esso è aperto visto come sottoinsieme di coppie in $\mathbb{R}^2$.

Analogamente per i concetti di intorno, insieme chiuso, bordo...

Così, ad esempio, diremo che una successione di numeri complessi $\{z_n\}$ converge a $\tilde{z} \in \mathbb{C}$ se

$$\lim_{n\to+\infty} Re(z_n) = Re(\tilde{z}) \quad e \quad \lim_{n\to+\infty} Im(z_n) = Im(\tilde{z})$$

analogamente se

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists_{\bar{n}\in\mathbb{N}} \text{ tale } \forall n \geq \bar{n} \quad |z_n - \tilde{z}| = \sqrt{(Re(z_n) - Re(\tilde{z}))^2 + (Im(z_n) - Im(\tilde{z}))^2} < \varepsilon$$

Una funzione $f: Dom(f) \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longrightarrow f(z)$ si dirà convergente per $z \longrightarrow z_0$ ad un elemento $\ell \in \mathbb{C}$ e si scriverà $\lim_{z\to z_0} f(z) = \ell$ se $\lim_{\substack{x\to Re(z_0)\\ y\to Im(z_0)}} Re(f(x+iy)) = Re(\ell)$ e contemporaneamente

$$\lim_{\substack{x\to Re(z_0)\\ y\to Im(z_0)}} Im(f(x+iy)) = Im(\ell)$$

O, in altre parole, se $\forall \varepsilon>0 \ \exists \ \delta>0 \ | \ \forall z \in Dom(f)$ con $0<|z-z_0|<\delta$ si ha $|f(z)-\ell|<\varepsilon$

f si dirà continua in $z_0 \in Dom(f)$ se

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$$

NOTAZIONE:

Spesso identificheremo $f(z) = f(x+iy) = Re\, f(x+iy) + i\, Im\, f(x+iy)$ con la funzione

$$(x,y) \longmapsto (u(x,y), v(x,y))$$
$$\mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$$

Noi possiamo sempre identificare un numero complesso attraverso una coppia di numeri reali

D'ora in poi andremo ad assumere che il dominio $Dom(f) = E \in \mathbb{C}$ e supporremo che sia E aperto e connesso per archi (a meno che non si dica il contrario)