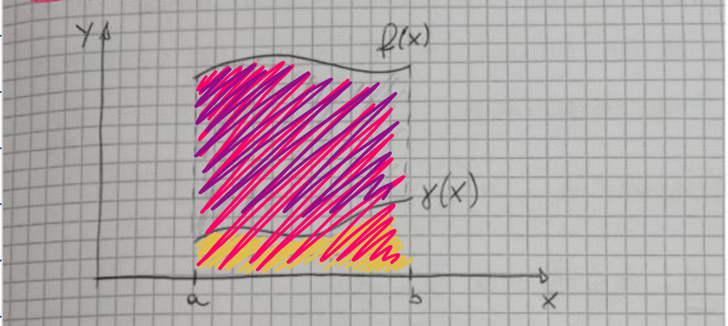
Integrali Curvilinei

mercoledì 4 novembre 2020 11:20

INTEGRALI CURVILINEI



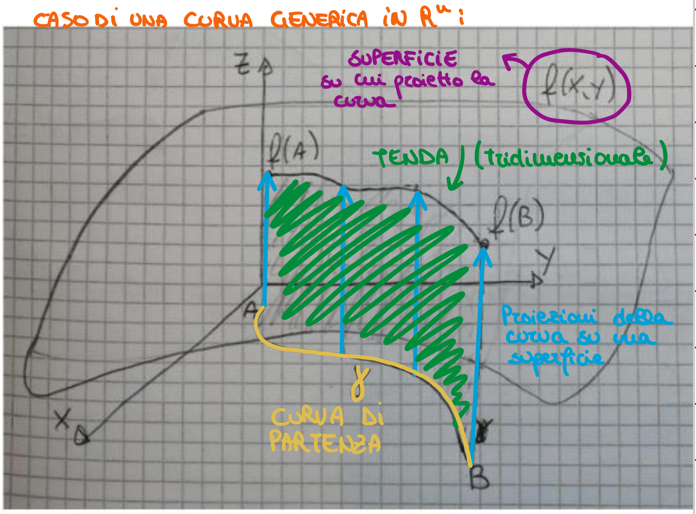
$$S = \int_{\gamma(x)} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b \gamma(x)\,dx$$

Anzichè fare la sottrazione a destra opero il calcolo a sinistra usando come base dell'integrale la curva $\gamma(x)$

Esempio di esercizio!

Data una curva in (x, y, z) e una funzione che sta sopra (e disposta lungo una superficie), calcola l'area della tenda dove per tenda si intende la traccia lasciata nella proiezione di tutti i punti sulla superficie $f(x, y)$

CASO DI UNA CURVA GENERICA IN R^n:



CALCOLO DI INTEGRALI CON BASE UNA CURVA GENERICA E NON UN SEGMENTO ORIZZONTALE

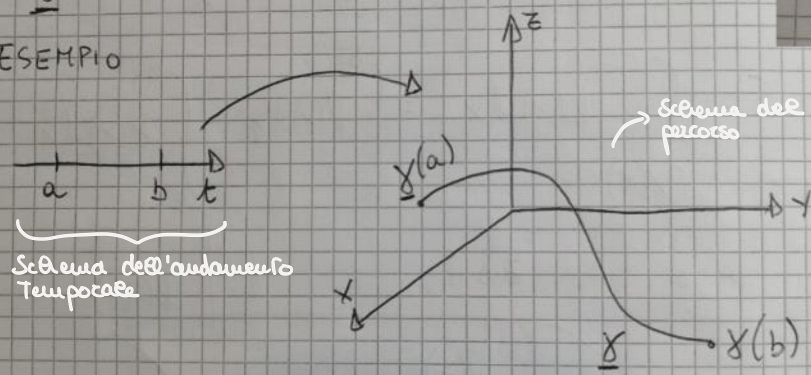
CONCETTO DI CURVA

$\underline{\gamma}: A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}^n$ L'immagine può essere non rappresentabile graficamente

$\underline{\gamma}: [a, b] \to B \subseteq \mathbb{R}^3$

$\underline{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$

ESEMPIO



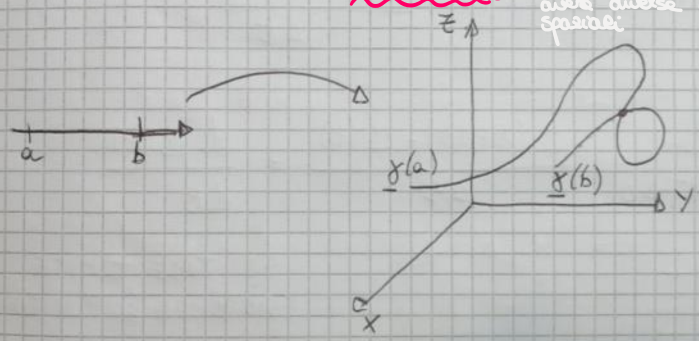
DEFINIZIONI

CURVA SEMPLICE

Il dominio della funzione è MONODIMENSIONALE (es. tempo → funzioni di fisica)

$\underline{\gamma}: A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}^n$ É UNA CURVA SEMPLICE SE É INIETTIVA

Valori diversi di dominio temporale devono avere diverse immagini spaziali

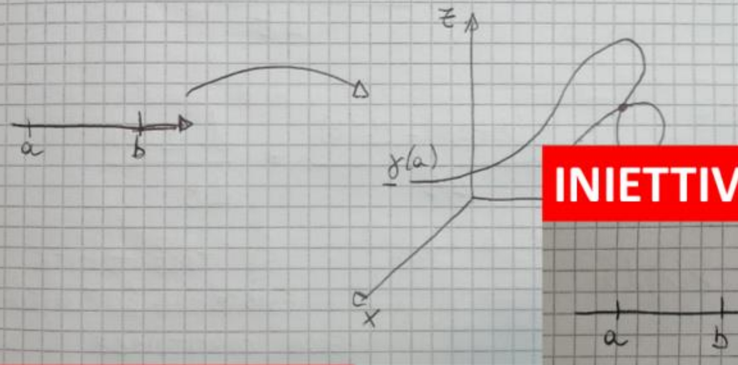


NON INIETTIVA

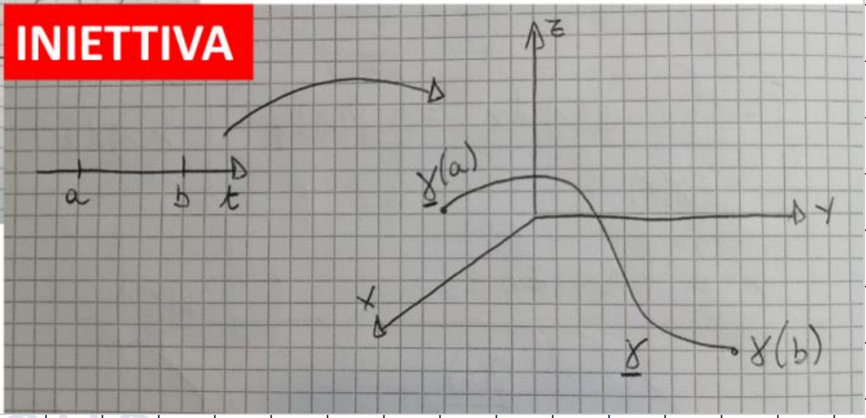
DEFINIZIONI

CURVA SEMPLICE

$\underline{\gamma}: A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}^m$ É UNA CURVA SEMPLICE SE É INIETTIVA



NON INIETTIVA

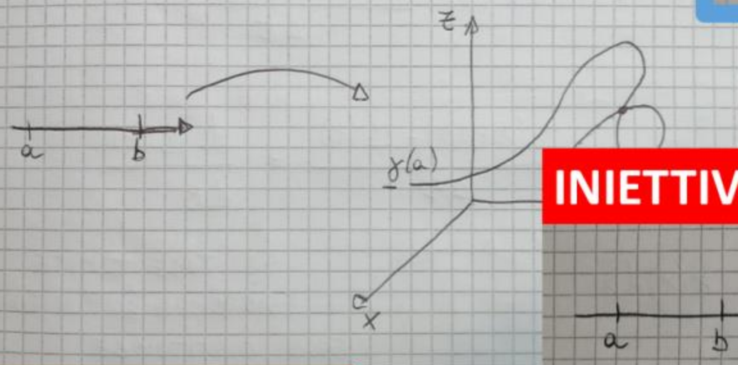


INIETTIVA

DEFINIZIONI

CURVA SEMPLICE

$\underline{\gamma}: A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}^m$ É UNA CURVA SEMPLICE SE É INIETTIVA



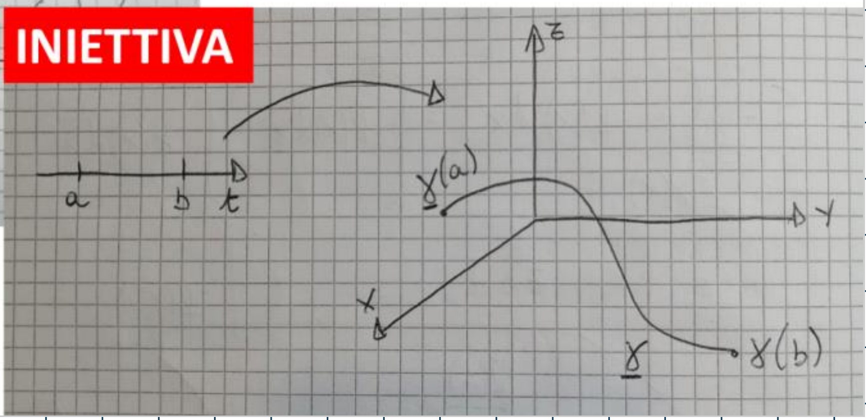
NON INIETTIVA

L'IMMAGINE DI A, OVVERO $\gamma(A)$ SI DEFINISCE SOSTEGNO DELLA CURVA

UNA CURVA $\underline{\gamma} \in C^k(A) \iff \gamma_i \in C^k(A)$

$i = 1, 2, \dots, m$

Se ogni coordinata di γ è di classe C^k, anche tutta la funzione lo è e viceversa



INIETTIVA

CALCOLO DIFFERENZIALE PER UNA CURVA

ESEMPIO

$$\underline{\gamma}: t \longrightarrow \underline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$$

posso generalizzare per qualsiasi n per cui $\mathbb{R}^n$

Considero un intervallo di ampiezza Δt:

$$[t, t+\Delta t] \Rightarrow \underbrace{\frac{\underline{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t)}{\Delta t}}$$

Lo scrivo come un rapporto incrementale

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\underline{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\,\underline{r}(t)}{dt}$$

calcolandone il limite sto considerando un intervallo piccolissimo per cui calcolo la velocità istantanea

SE TALE LIMITE ESISTE ED È FINITO ESSO COSTITUISCE LA VELOCITÀ ISTANTANEA $\underline{v}(t)$

CALCOLO DIFFERENZIALE PER UNA CURVA

ESEMPIO

$$\underline{\gamma}: t \longrightarrow \underline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$$

$$[t, t+\Delta t] \Rightarrow \frac{\underline{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\underline{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t)}{\Delta t}$$

SI DIMOSTRA CHE

$$\frac{d\,\underline{r}(t)}{dt} = \underline{v}(t) = \frac{d\,x(t)}{dt} \cdot \hat{i} + \frac{d\,y(t)}{dt} \cdot \hat{j} + \frac{d\,z(t)}{dt} \cdot \hat{k}$$

UNA CURVA SI DERIVA (E SI INTEGRA) DERIVANDO (ED INTEGRANDO) LE SINGOLE COMPONENTI

MODULO DELLA VELOCITÀ

$$|\underline{v}(t)| = |(v_x(t), v_y(t), v_z(t))| = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)}$$

SE LE COMPONENTI DI $\underline{v}(t)$ SONO DERIVABILI $\Rightarrow$ È POSSIBILE CALCOLARE L'ACCELERAZIONE

$$\underline{a}(t) = a_x(t)\cdot\hat{i} + a_y(t)\cdot\hat{j} + a_z(t)\cdot\hat{k} = \frac{d v_x(t)}{dt}\cdot\hat{i} + \frac{d v_y(t)}{dt}\cdot\hat{j} + \frac{d v_z(t)}{dt}\cdot\hat{k} = \frac{d^2 x(t)}{dt^2}\cdot\hat{i} + \frac{d^2 y(t)}{dt^2}\cdot\hat{j} + \frac{d^2 z(t)}{dt^2}\cdot\hat{k}$$

IN GENERALE

$$\underline{\gamma}: t \to \mathbb{R}^n$$

$$\underline{\gamma}' = (\gamma_1', \ldots, \gamma_n')$$

$$\underline{\gamma}'' = (\gamma_1'', \ldots, \gamma_n'')$$

DEFINIZIONI

$\underline{\gamma}: [a, b] \to \mathbb{R}^n$ È FUNZIONE REGOLARE SE È

1) DERIVABILE E

2) $\underline{\gamma}'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \ldots, \gamma_n'(t)) \neq \underline{0} \quad \forall t \in (a, b)$

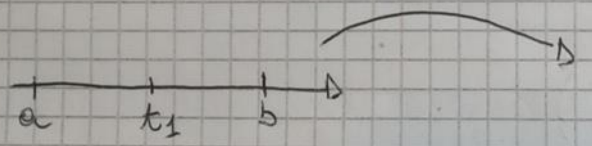
Se la velocità istantanea si annulla vuol dire che la particella si ferma in un punto ed in questo caso la curva è definita come <u>non</u> regolare

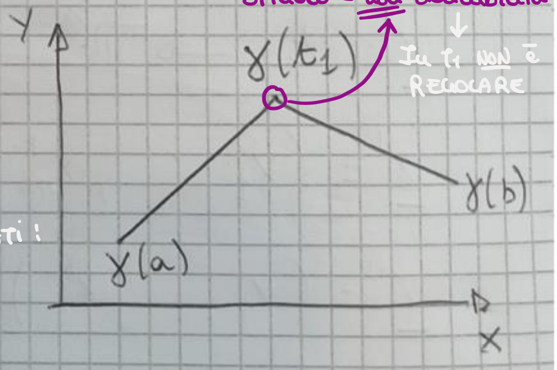
$\underline{\gamma}'(t) = \underline{0} \Rightarrow$ VELOCITÀ ISTANTANEA NULLA

FISICAMENTE, LA PARTICELLA SI FERMA

DEFINIZIONI

CURVA REGOLARE A TRATTI





Spigolo = non derivabilità

↓

In t_1 NON è REGOLARE

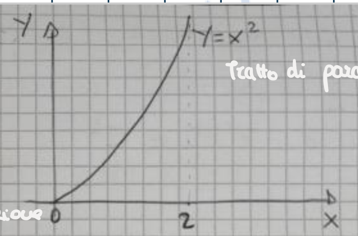
Una curva può essere regolare in tratti SEPARATI!

$\underline{\gamma}$ REGOLARE IN (a, t_1)

$\underline{\gamma}$ REGOLARE IN (t_1, b)

ESEMPIO

$y = x^2$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



POSSO ESPRIMERE f COME UNA CURVA? (in funzione di t)

DOMINIO TEMPORALE

$\underline{\gamma}: [a, b] \to (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\underline{\gamma}(t) = \begin{cases} x = t \\ y = f(x(t)) = f(t) = t^2 \end{cases}$$

$\underline{\gamma}: [0, 2] \to [t, t^2]$

VELOCITÀ

$\boxed{\underline{\gamma}'(t)} = \underline{v}(t) = (1, 2t) = \hat{i} + 2t \cdot \hat{j}$

ACCELERAZIONE

$\boxed{\underline{\gamma}''(t)} = \underline{a}(t) = (0, 2) = 2 \cdot \hat{j}$

OGNI $y = f(x)$ DI ANALISI 1 PUÒ ESSERE ESPRESSA COME

cioè una funzione in base al Tempo

$\underline{\gamma}: [a, b] \to (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\underline{\gamma}(t) = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(x(t)) = f(t) \end{cases}$$

DEFINIZIONI

CURVA LISCIA (O RETTIFICABILE) $\Rightarrow$ è facilmente misurabile la lunghezza del percorso cioè con tutte le proprietà di una retta regolare

$\underline{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ É LISCIA SE É REGOLARE

E $\gamma(t) \in C^1$ (regolare e di classe C^1)

cioè continua

REGOLE DI DERIVAZIONE DI FUNZIONI VETTORIALI

$\boxed{\underline{}}$ → VETTORE

1) $\displaystyle \frac{d}{dt}\left(\underline{r}(t) + \underline{s}(t)\right) = \frac{d\,\underline{r}(t)}{dt} + \frac{d\,\underline{s}(t)}{dt}$

2) $\displaystyle \frac{d}{dt}\left(\lambda(t) \cdot \underline{r}(t)\right) = \frac{d\,\lambda(t)}{dt} \cdot \underline{r}(t) + \lambda(t) \cdot \frac{d\,\underline{r}(t)}{dt}$

3) $\displaystyle \frac{d}{dt}\left(\underline{r}(t) \circ \underline{s}(t)\right) = \frac{d\,\underline{r}(t)}{dt} \circ \underline{s}(t) + \underline{r}(t) \circ \frac{d\,\underline{s}(t)}{dt}$

4) $\displaystyle \frac{d}{dt}\left(\underline{r}(t) \times \underline{s}(t)\right) = \frac{d\,\underline{r}(t)}{dt} \times \underline{s}(t) + \underline{r}(t) \times \frac{d\,\underline{s}(t)}{dt}$

TO BE CONTINUED...

ESERCIZIO DI FISICA

DIMOSTRARE CHE

perpendicolare

$$|\underline{v}(t)| = \text{COST} \Leftrightarrow \underline{a}(t) \perp \underline{v}(t)$$

$$|\underline{v}(t)| = \sqrt{\underline{v}(t) \circ \underline{v}(t)}$$

equivale al modulo euclideo

$$\underline{a}(t) = \frac{d\,\underline{v}(t)}{dt}$$

$$\underline{a}(t) \circ \underline{v}(t) =$$

$$= \frac{d(\underline{v}(t))}{dt} \circ \underline{v}(t) =$$

Prodotto scalare di due vettori paralleli

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\underline{v}(t) \circ \underline{v}(t)\right) =$$

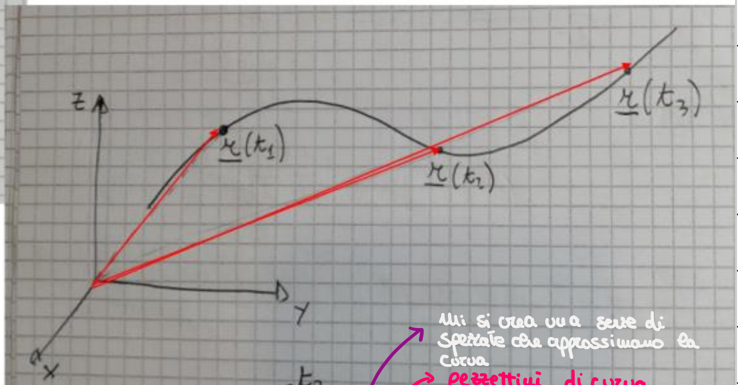
$$= 0 \quad \text{SE} \quad |\underline{v}(t)| = \text{COST}$$

LUNGHEZZA DI UN TRATTO DI CURVA LISCIA

INIZIAMO CON

$$\underline{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$$

$$\underline{r}(t) = x(t)\cdot\hat{i} + y(t)\cdot\hat{j} + z(t)\cdot\hat{k}$$



Mi si crea una serie di spezzate che approssimano la curva

pezzettini di curva

$$L_{t_1,t_2} = \int_{t_1}^{t_2} |d\underline{r}(t)| \rightarrow \text{DIFFERENZIALE } d\underline{r}(t)$$

lunghezza infinitesi dello spostamento al variare del tempo

$$d\underline{r}(t) = \frac{d(\underline{r}(t))}{dt}\cdot dt$$

$$d\underline{r}(t) = (dx(t), dy(t), dz(t)) =$$

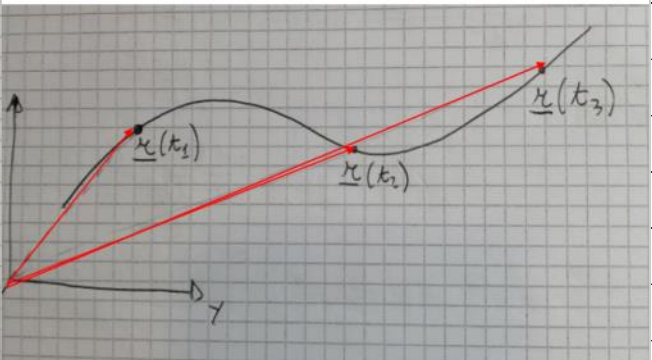
$$= \left(\frac{dx(t)}{dt} \cdot dt, \frac{dy(t)}{dt} \cdot dt, \frac{dz(t)}{dt} dt\right) =$$

$$= \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt}\right) \cdot dt =$$

$$= \frac{d\underline{r}(t)}{dt} \cdot dt$$

$$|d\underline{r}(t)| = \left|\frac{d\underline{r}(t)}{dt}\right| \cdot dt$$

$$L_{t_1,t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \left|\frac{d\underline{r}(t)}{dt}\right| \cdot dt$$



$$L_{t_1,t_2} = \int_{t_1}^{t_2} |d\underline{r}(t)|$$

$$d\underline{r}(t) = \frac{d(\underline{r}(t))}{dt} \cdot dt$$

ASCISSA CURVILINEA

$s(t)$ → percorso compiuto da $t=0$

$$s(t) = \int_0^t \left|\frac{d\underline{r}(t)}{dt}\right| dt$$

$$\boxed{\underline{r}(t) = \underline{r}(t(s)) = \underline{r}(s)}$$

Se la curva è LISCIA allora il vettore posizione (percorso in funzione del Tempo) posso darlo in funzione di questo spostamento scalare poichè il tempo stesso può essere espresso in sua funzione

ESEMPIO ELICA CIRCOLARE

circonferenza di cui aumenta la z (dall'alto sembrano solo tante circonferenze, la z aumenta se vista in prospettiva)

$$\underline{r}(t) = a\cos t \cdot \hat{i} + a \operatorname{sen} t \cdot \hat{j} + b \cdot t \cdot \hat{k}$$

aiutano ad individuare circonferenze

$$a, b \in \mathbb{R}^+ \quad , \quad t \in [0, +\infty)$$

$$\frac{d\underline{r}(t)}{dt} = -a \operatorname{sen} t \cdot \hat{i} + a\cos t \cdot \hat{j} + b \cdot \hat{k}$$

$$\left|\frac{d\underline{r}(t)}{dt}\right| = \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\boxed{s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2+b^2} \cdot dt = \sqrt{a^2+b^2} \cdot t}$$

$$t = t(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\underline{r}(s) = a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \cdot \hat{i} + a \operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \cdot \hat{j} + \frac{b \cdot s}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \hat{k}$$

$$s \in [0, +\infty)$$

IN $\mathbb{R}^2$

$$y = f(x) \implies \underline{r}(t) = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases}$$

$$s(t) = \int_0^t \underbrace{\sqrt{(\overset{t'}{1}) + (\overset{f'(t)}{f'(t)})^2}}_{\text{MODULO DI } |ab|} \, dt$$

$\sqrt{a^2+b^2}$

$$L_{t_1, t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + (f'(t))^2} \, dt$$

ESERCIZIO

LUNGHEZZA DI UNA CIRCONFERENZA

$$\underline{\gamma}: [0, 2\pi] \longrightarrow (R\cos\vartheta, R \operatorname{sen}\vartheta)$$

$$\underline{\gamma}'(t) = \underline{\gamma}'(\vartheta) = (-R \operatorname{sen}\vartheta, R\cos\vartheta)$$

$$L_{0,2\pi} = \int_0^{2\pi} \sqrt{(R^2 \operatorname{sen}^2\vartheta + R^2\cos^2\vartheta)} \, d\vartheta = \int_0^{2\pi} R \, d\vartheta = 2\pi R$$

$$L_{\vartheta_1, \vartheta_2} = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} R \, d\vartheta = (\vartheta_2 - \vartheta_1) \cdot R$$

$$s(\vartheta) = \int_0^{\vartheta} R \, d\vartheta = \vartheta R$$

IN GENERALE

$$\underline{\gamma}: \underbrace{[a, b]}_{\text{dominio monodimensionale}} \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad t_1, t_2 \in [a, b]$$

$$L_{t_1, t_2} = \int_{t_1}^{t_2} |\underline{\gamma}'(t)| \cdot dt$$

IN GENERALE

$\underline{\gamma} : \underbrace{[a, b]}_{\text{dominio monodimensionale}} \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad t_1, t_2 \in [a, b]$

$$L_{t_1, t_2} = \int_{t_1}^{t_2} |\underline{\gamma}'(t)| \cdot dt$$

$$s(t) = \int_0^t |\underline{\gamma}'(t)| \cdot dt$$

$$ds(t) = |d\underline{\gamma}(t)| = \underbrace{|\underline{\gamma}'(t)|}_{\text{vettore spostamento / velocità istantanea}} \cdot dt$$

$$s(t) = \int_0^t ds(t)$$

INTEGRALE CURVILINEO

$\underline{\gamma} : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}^n$

$ds(t)$ MODULO DELLO SPOSTAMENTO INFINITESIMO LUNGO LA CURVA (QUANTITÀ SCALARE)

$d\underline{r}(t)$ VARIAZIONE INFINITESIMA DEL VETTORE POSIZIONE (QUANTITÀ VETTORIALE)

$$ds(t) = |d\underline{r}(t)|$$

SIA $f : B \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow C \subseteq \mathbb{R}$

$$f(x_1(t), x_2(t), \dots x_n(t)) = f(\underline{r}(t))$$

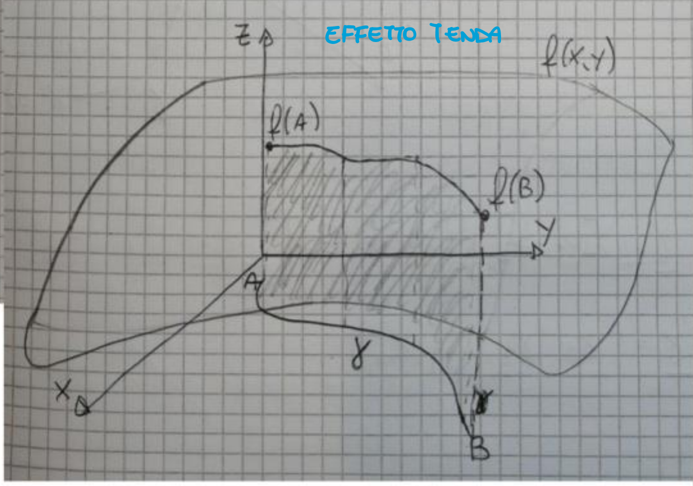
$$I_1 = \int_\gamma f(\underline{r}(t)) \cdot ds(t) = \int_\gamma f(\underline{r}(t)) \cdot \left| \frac{d\underline{r}(t)}{dt} \right| dt$$

INTEGRALE CURVILINEO DI CAMPI SCALARI

INTEGRALE CURVILINEO

Campi scalari!

$\underline{\gamma}: A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}^n$



$ds(t) = |d\underline{r}(t)|$

SIA $f: B \subseteq \mathbb{R}^n \to C \subseteq \mathbb{R}$

$$f(x_1(t), x_2(t), \dots x_n(t)) = f(\underline{r}(t))$$

$$I_1 = \int_\gamma f(\underline{r}(t)) \cdot ds(t) = \int_\gamma f(\underline{r}(t)) \cdot \left| \frac{d\underline{r}(t)}{dt} \right| dt$$

INTEGRALE CURVILINEO DI CAMPI SCALARI

Campi vettoriali!

SIA $\underline{F}: B \subseteq \mathbb{R}^n \to C \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\underline{F} = (F_1, F_2, \dots F_n)$$

$$\underline{F}(\underline{r}(t)) = (F_1(\underline{r}(t)), F_2(\underline{r}(t)), \dots F_n(\underline{r}(t)))$$

$$I_2 = \int_\gamma \underline{F}(\underline{r}(t)) \circ d\underline{r}(t)$$

INTEGRALE CURVILINEO DI UN CAMPO VETTORIALE

↓

!!! DA UN PUNTO DI VISTA FISICO, É IL CALCOLO DI UN LAVORO

$$\underline{F}(\underline{r}(t)) = (F_1(x_1(t), x_2(t), \dots x_n(t)), \dots, F_n(x_1(t), \dots x_n(t)))$$

$$d\underline{r}(t) = (dx_1(t), dx_2(t), \dots dx_n(t))$$

$$F_i(x_1(t), \dots x_n(t)) := F_i \qquad i = 1, 2, \dots n$$

$$dx_i(t) := dx_i$$

$$\underline{F}(\underline{r}(t)) \circ d\underline{r}(t) = F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + \dots F_n dx_n$$

FISICAMENTE, É UN LAVORO INFINITESIMO

FORMA DIFFERENZIALE => in Fisica: Lavoro Infinitesimo

IN $\mathbb{R}^3$

$$\underline{r}:[a,b]\to(x,y,z)$$

$$\underline{F}:(x,y,z)\to\left(F_1(x,y,z),\ F_2(x,y,z),\ F_3(x,y,z)\right)$$

$$\underline{r}:[t_1,t_2]\to\left(x(t),\ y(t),\ z(t)\right)$$

$$\underline{F}:\left(x(t),y(t),z(t)\right)\to\Big(F_1(x(t),y(t),z(t)),\ F_2(x(t),y(t),z(t)),\ F_3(x(t),y(t),z(t))\Big)$$

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\underline{F}(\underline{r}(t))\circ d\underline{r}(t)=$$

COMPONENTI DEL VETTORE SPOSTAMENTO

$$=\int_{t_1}^{t_2}F_1(x(t),y(t),z(t))\cdot dx(t)+\int_{t_1}^{t_2}F_2(x(t),y(t),z(t))\cdot dy(t)$$

COMPONENTI DEL VETTORE FORZA

$$+\int_{t_1}^{t_2}F_3(x(t),y(t),z(t))\cdot dz(t)=$$

$$=\boxed{\begin{matrix}\frac{dx(t)}{dt}\,dt\\ \frac{dy(t)}{dt}\,dt\\ \frac{dz(t)}{dz}\,dt\end{matrix}}$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}F_1(\underline{r}(t))\cdot\frac{dx(t)}{dt}\,dt+\int_{t_1}^{t_2}F_2(\underline{r}(t))\cdot\frac{dy(t)}{dt}\,dt+$$

$$\int_{t_1}^{t_2}F_3(\underline{r}(t))\cdot\frac{dz(t)}{dt}\,dt$$

IN $\mathbb{R}^3$

$$\underline{r}:[a,b]\to(x,y,z)$$

$$\underline{F}:(x,y,z)\to\left(F_1(x,y,z),\ F_2(x,y,z),\ F_3(x,y,z)\right)$$

$$\underline{r}:[t_1,t_2]\to\left(x(t),\ y(t),\ z(t)\right)$$

$$\underline{F}:\left(x(t),y(t),z(t)\right)\to\Big(F_1(x(t),y(t),z(t)),\ F_2(x(t),y(t),z(t)),\ F_3(x(t),y(t),z(t))\Big)$$

$$\oint\underline{F}(\underline{r}(t))\circ d\underline{r}(t)$$

LAVORO CALCOLATO SU UN PERCORSO CHIUSO:

!!! CIRCUITAZIONE

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\underline{F}(\underline{r}(t))\circ d\underline{r}(t)=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}F_1(x(t),y(t),z(t))\cdot dx(t)+\int_{t_1}^{t_2}F_2(x(t),y(t),z(t))\cdot dy(t)$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}F_3(x(t),y(t),z(t))\cdot dz(t)=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}F_1(\underline{r}(t))\cdot\frac{dx(t)}{dt}\,dt+\int_{t_1}^{t_2}F_2(\underline{r}(t))\cdot\frac{dy(t)}{dt}\,dt+$$

$$\int_{t_1}^{t_2}F_3(\underline{r}(t))\cdot\frac{dz(t)}{dt}\,dt$$

ESERCIZI

CAMPO SCALARE

↓

Tenda

1. $\displaystyle\int_\Gamma (x+y^3)\,ds \qquad \Gamma: \begin{cases} x=t \\ y=t \end{cases} \qquad t\in[0,1]$

$\to y=x$ BISETTRICE 1° e 3° quadrante

$$(x'(t), y'(t)) = \frac{dr(t)}{dt} = (1,1)$$

$$\int_a^b f(r(t))\,|r'(t)|$$

$$ds = \underbrace{\left|\frac{dr(t)}{dt}\right|}_{=\sqrt{1^2+1^2}} \cdot dt = \sqrt{2}\cdot dt$$

$$\int_\Gamma (t+t^3)\cdot\sqrt{2}\cdot dt = \int_0^1 \sqrt{2}\,(t+t^3)\,dt =$$

$$= \sqrt{2}\cdot\left(\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

ESERCIZI

2. $\displaystyle\int_\Gamma x^2 y\,ds \qquad \Gamma: \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\,\text{sen}\,t \end{cases} \qquad t\in[0, \pi/2]$

$$ds = \left|\frac{dr(t)}{dt}\right| = |(x'(t), y'(t))| = |(-2\,\text{sen}\,t,\ 2\cos t)|$$

$$ds = \sqrt{(-2\,\text{sen}\,t)^2 + (2\cos t)^2}\cdot dt = 2\,dt$$

$$\int_\Gamma (2\cos t)^2\cdot(2\,\text{sen}\,t)\cdot 2\,dt = 16\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\cdot \text{sen}\,t\,dt =$$

$$= -16\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\cdot(-\text{sen}\,t)\,dt = -16\cdot\frac{\cos^3(t)}{3}\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{16}{3}$$

ESERCIZI

3. $$\int_\Gamma \sqrt{x^2+y^2}\,ds \qquad \Gamma: \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$\frac{d\underline{r}(t)}{dt} = (x'(t), y'(t)) = (e^t\cos t - e^t \operatorname{sen} t, \; e^t \operatorname{sen} t + e^t \cos t)$$

$$ds = \sqrt{e^{2t}(\cos^2 t - 2\cos t \cdot \operatorname{sen} t + \operatorname{sen}^2 t) + e^{2t}(\operatorname{sen}^2 t + 2\operatorname{sen} t \cos t + \cos^2 t)} \cdot dt$$

ESERCIZI

$$= \sqrt{e^{2t}(1 - 2\operatorname{sen} t \cos t) + e^{2t}(1 + 2\operatorname{sen} t \cos t)}\, dt =$$

$$= \sqrt{2e^{2t}}\,dt = \sqrt{2}\cdot e^t\, dt \qquad |r'(t)|$$

$$\int_\Gamma \sqrt{e^{2t}\cos^2 t + e^{2t}\operatorname{sen}^2 t} \cdot \sqrt{2}e^t \cdot dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, e^{2t}\, dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{2\pi} e^{2t}\cdot 2\,dt =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[e^{2t}\right]_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(e^{4\pi} - 1\right)$$

ESERCIZI

4. $\int_\Gamma z\,ds$ CAMPO SCALARE $\Gamma: \begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\,\text{sen}\,t \\ z = 4t \end{cases}$ $t \in [0, \pi]$

$\begin{cases} x'(t) = -3\,\text{sen}\,t \\ y'(t) = 3\cos t \\ z'(t) = 4 \end{cases}$ $ds = \sqrt{9\,\text{sen}^2 t + 9\cos^2 t + 16}\,dt =$

$= \sqrt{9+16}\,dt = 5\,dt$

$\int_0^\pi 4t \cdot 5\,dt = 20\int_0^\pi t\,dt = 20\frac{t^2}{2}\Big|_0^\pi = 10\pi^2$

ESERCIZI

5. $\int_\Gamma \left(\frac{2}{3}x + 4z\right) ds$ CAMPO SCALARE $\Gamma: \begin{cases} x = 3t \\ y = \frac{3}{2}t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$ $t \in [0, 1]$

$\begin{cases} x'(t) = 3 \\ y'(t) = 3t \\ z'(t) = 3t^2 \end{cases}$ $ds = \sqrt{9 + 9t^2 + 9t^4}\,dt = 3\sqrt{1+t^2+t^4}\,dt$ $\left\{ |\gamma'(t)| \right.$

$3\int_0^1 (2t + 4t^3)\sqrt{1+t^2+t^4}\,dt =$

$3 \cdot \frac{2}{3}(1+t^2+t^4)^{3/2}\Big|_0^1 = 2\left(\sqrt{3^3} - 1\right) = 2\left(\sqrt{27} - 1\right)$

SIA $\underline{F}: B \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow C \subseteq \mathbb{R}^n$

$\underline{F} = (F_1, F_2, \dots F_n)$

$\underline{F}(\underline{r}(t)) = (F_1(\underline{r}(t)), F_2(\underline{r}(t)), \dots F_n(\underline{r}(t)))$

$$I_2 = \int_\gamma \underline{F}(\underline{r}(t)) \circ d\underline{r}(t)$$

INTEGRALE CURVILINEO DI UN CAMPO VETTORIALE

DA UN PUNTO DI VISTA FISICO, É IL CALCOLO DI UN LAVORO

FISICAMENTE, É UN LAVORO INFINITESIMO

$\underline{F}(\underline{r}(t)) = (F_1(x_1(t), x_2(t), \dots x_n(t)), \dots, F_n(x_1(t), \dots x_n(t)))$

$d\underline{r}(t) = (dx_1(t), dx_2(t), \dots dx_n(t))$

$F_i(x_1(t), \dots x_n(t)) := F_i \qquad i = 1, 2, \dots n$

$dx_i(t) := dx_i$

$\underline{F}(\underline{r}(t)) \circ d\underline{r}(t) = F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + \dots F_n dx_n$

FORMA DIFFERENZIALE

IN $\mathbb{R}^3$

$\underline{r}: [a, b] \longrightarrow (x, y, z)$

$\underline{F}: (x, y, z) \longrightarrow (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$

$\underline{r}: [t_1, t_2] \longrightarrow (x(t), y(t), z(t))$

$\underline{F}: (x(t), y(t), z(t)) \longrightarrow (F_1(x(t), y(t), z(t)), F_2(x(t), y(t), z(t)), F_3(x(t), y(t), z(t)))$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \underline{F}(\underline{r}(t)) \circ d\underline{r}(t) =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} F_1(x(t), y(t), z(t)) \cdot dx(t) + \int_{t_1}^{t_2} F_2(x(t), y(t), z(t)) \cdot dy(t)$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} F_3(x(t), y(t), z(t)) \cdot dz(t) =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} F_1(\underline{r}(t)) \cdot \frac{dx(t)}{dt} dt + \int_{t_1}^{t_2} F_2(\underline{r}(t)) \cdot \frac{dy(t)}{dt} dt +$$

$$\int_{t_1}^{t_2} F_3(\underline{r}(t)) \cdot \frac{dz(t)}{dt} dt$$

t definisce il dominio della funzione

IN $\mathbb{R}^3$

$\underline{r} : [a, b] \to (x, y, z)$

$\underline{F} : (x, y, z) \to (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$

$\underline{r} : [t_1, t_2] \to (x(t), y(t), z(t))$

$\underline{F} : (x(t), y(t), z(t)) \to \big(F_1(x(t), y(t), z(t)),$
$F_2(x(t), y(t), z(t)),$
$F_3(x(t), y(t), z(t))\big)$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \underline{F}(\underline{r}(t)) \circ d\underline{r}(t) =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} F_1(x(t), y(t), z(t)) \cdot dx(t) + \int_{t_1}^{t_2} F_2(x(t), y(t), z(t)) \cdot dy(t)$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} F_3(x(t), y(t), z(t)) \cdot dz(t) =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} F_1(\underline{r}(t)) \cdot \frac{dx(t)}{dt}\, dt + \int_{t_1}^{t_2} F_2(\underline{r}(t)) \cdot \frac{dy(t)}{dt}\, dt +$$

$$\int_{t_1}^{t_2} F_3(\underline{r}(t)) \cdot \frac{dz(t)}{dt}\, dt$$

$$\oint \underline{F}(\underline{r}(t)) \circ d\underline{r}(t)$$

LAVORO CALCOLATO SU UN PERCORSO CHIUSO:

CIRCUITAZIONE

ESERCIZI

1.

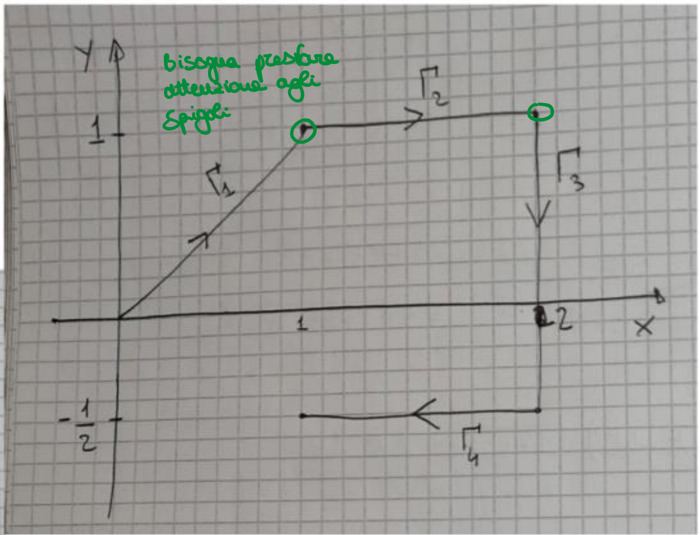
$\underline{F} = (x, x^2)$ CAMPO DI FORZE

CALCOLARE IL LAVORO LUNGO IL PERCORSO

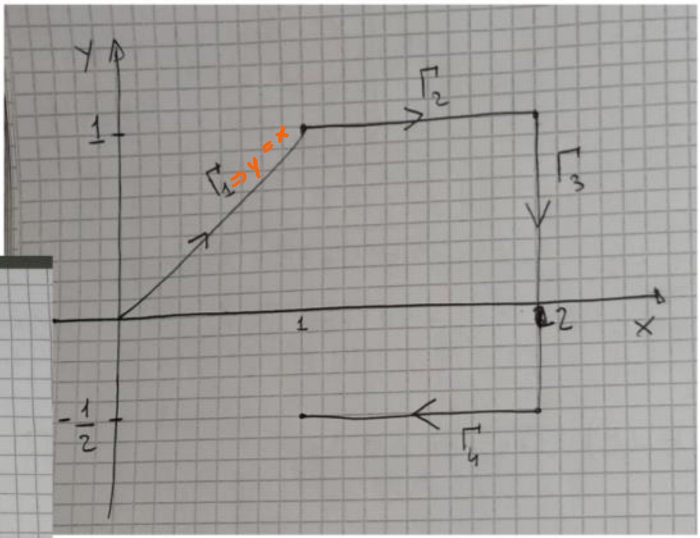
$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$

ADDITIVO

$L_\Gamma = L_{\Gamma_1} + L_{\Gamma_2} + L_{\Gamma_3} + L_{\Gamma_4}$



ESERCIZI



CALCOLO L_{Γ_1}

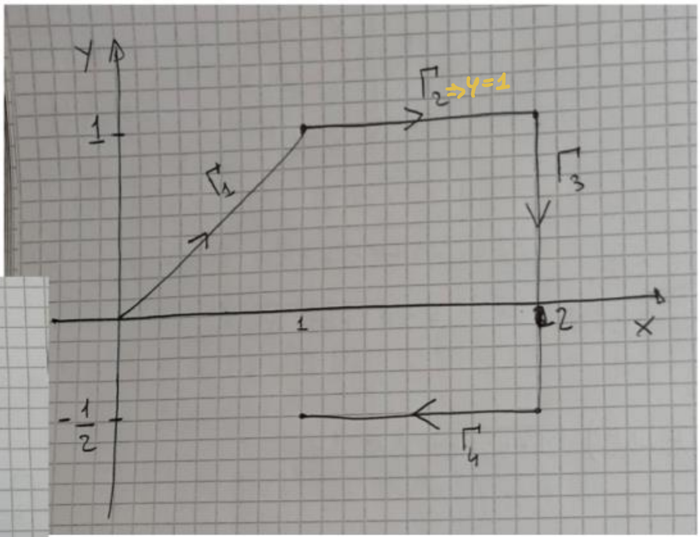
$$\Gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad \text{Retta } y = x \quad t \in [0,1] \xrightarrow{\text{derivata}} \begin{cases} dx = dt \\ dy = dt \end{cases}$$

$$L_{\Gamma_1} = \overset{1^a \text{ comp.}}{\int F_1\,dx} + \overset{2^a \text{ comp.}}{\int F_2\,dy} = \int_0^1 t\,dt + \int_0^1 t^2\,dt =$$

$$= \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Bisogna verificare che il campo sia completamente regolare o, nel caso in cui non lo sia e presenti degli spigoli, va spezzata

ESERCIZI



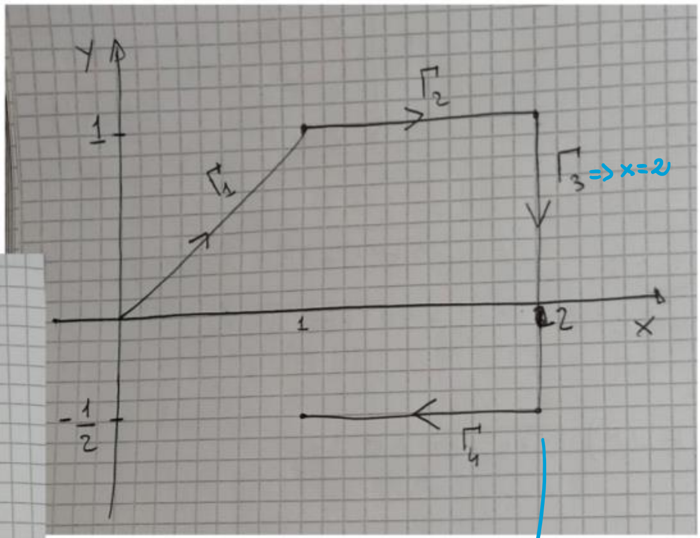
CALCOLO L_{Γ_2}

$$\Gamma_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{RETTA } y = 1 \quad t \in [1,2] \xrightarrow{\text{derivata}} \begin{cases} dx = dt \\ dy = 0 \end{cases}$$

$$L_{\Gamma_2} = \int F_1\,dx + \int F_2\,dy = \int_1^2 t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_1^2 =$$

$$= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

ESERCIZI



In questo caso, per l'integrale si segue il verso del percorso

CALCOLO L_{Γ_3}

RETTA $x=2$

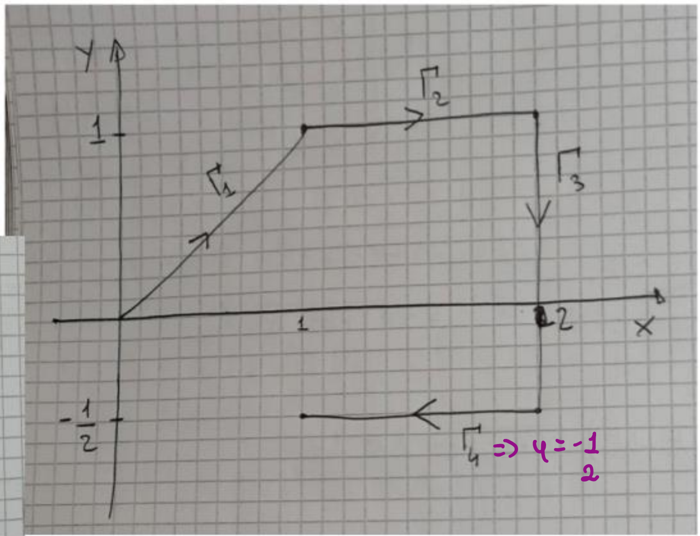
$$\Gamma_3: \begin{cases} x = 2 \\ y = t \end{cases} \quad t \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right] \xrightarrow{\text{derivata}} \begin{cases} dx = 0 \\ dy = dt \end{cases}$$

$F_2 = y = x^2 = 4$

$$L_{\Gamma_3} = \int F_1\,dx + \int F_2\,dy = \int_1^{-1/2} 4\,dt = 4t \Big|_1^{-1/2} =$$

$$= 4\left(-\frac{1}{2} - 1\right) = 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -6$$

ESERCIZI



CALCOLO L_{Γ_4}

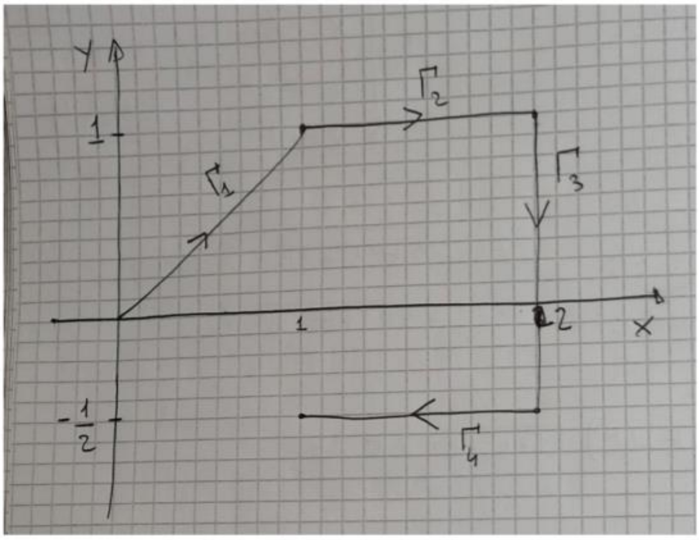
RETTA $y = -\frac{1}{2}$

$$\Gamma_4: \begin{cases} x = t \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad t \in [1, 2] \xrightarrow{\text{derivata}} \begin{cases} dx = dt \\ dy = 0 \end{cases}$$

$$L_{\Gamma_4} = \int F_1\,dx + \int F_2\,dx = \int_2^1 t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_2^1 =$$

$$= \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

ESERCIZI



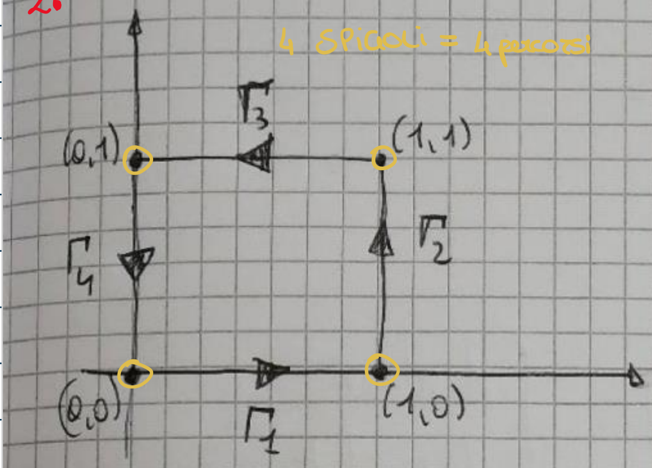
SOMMA FINALE!

$$L_\Gamma = \frac{5}{6} + \frac{3}{2} - 6 - \frac{3}{2} = \frac{5}{6} - 6 = \frac{5-36}{6} = -\frac{31}{6}$$

ESERCIZI

2. CIRCUITAZIONE

4 SPIGOLI = 4 percorsi



$$\underline{F} = (x^2, xy^2) = (F_1, F_2)$$

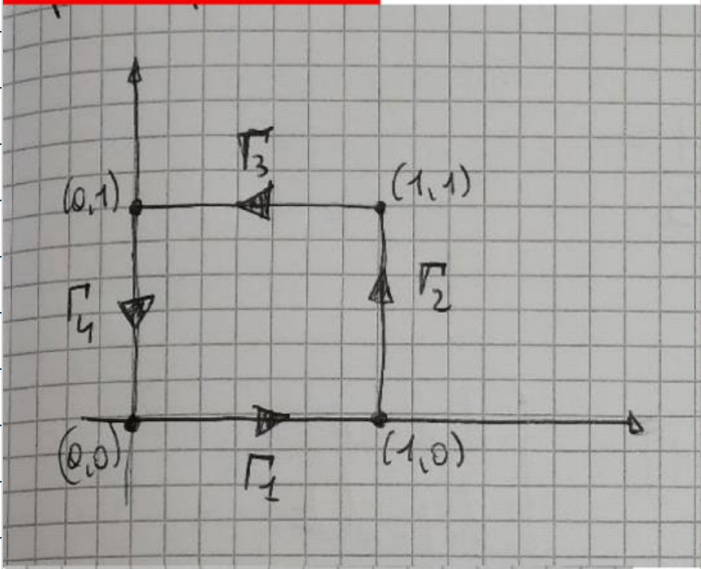
$$\Gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad t \in [0,1] \qquad \begin{cases} dx = dt \\ dy = 0 \end{cases}$$

$$L_{\Gamma_1} = \int_0^1 t^2 \, dt = \left. \frac{t^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\Gamma_2 : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases} \quad t \in [0,1] \qquad \begin{cases} dx = 0 \\ dy = dt \end{cases}$$

$$L_{\Gamma_2} = \int_0^1 t^2 \, dt = \frac{1}{3}$$

ESERCIZI



$$\underline{F} = (x^2, \ xy^2) = (F_1, F_2)$$

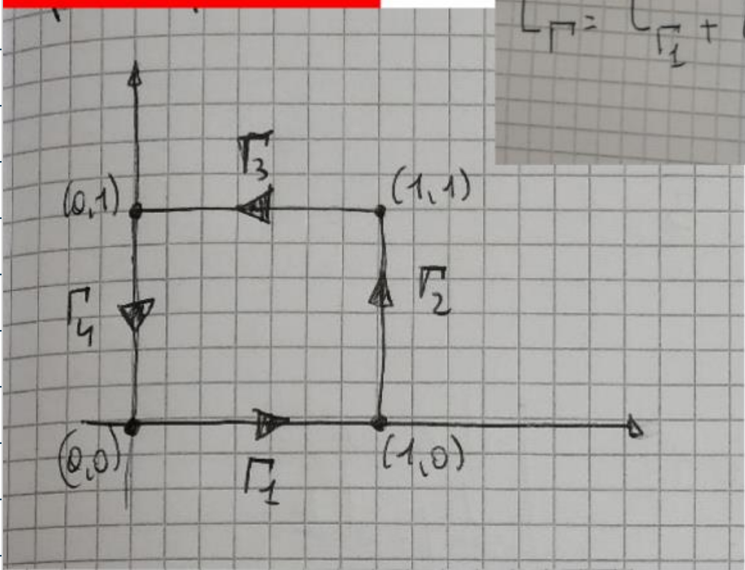
$$\Gamma_3 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases} \quad t \in [0,1] \quad \begin{cases} dx = dt \\ dy = 0 \end{cases}$$

$$L_{\Gamma_3} = \int_1^0 t^2 \, dt = -\frac{1}{3}$$

$$\Gamma_4 : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \quad t \in [0,1] \ : \begin{cases} dx = 0 \\ dy = dt \end{cases}$$

$$L_{\Gamma_4} = \int_1^0 0 \cdot t^2 \cdot dt = 0$$

ESERCIZI



$$\underline{F} = (x^2, \ xy^2) = (F_1, F_2)$$

$$L_\Gamma = L_{\Gamma_1} + L_{\Gamma_2} + L_{\Gamma_3} + L_{\Gamma_4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$$

ESERCIZI

2.

$$\underline{F} = (x - z,\ 1 - xy,\ y)$$

$$\Gamma: \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases} \quad t \in [0, 1] \xrightarrow{\text{derivata}} \begin{cases} dx = dt \\ dy = 2t\,dt \\ dz = 3t^2\,dt \end{cases}$$

$$L_\Gamma = \int F_1\,dx + \int F_2\,dy + \int F_3\,dz =$$

ESERCIZI

$$\underline{F} = (x - z,\ 1 - xy,\ y)$$

$$\Gamma: \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

$$L_\Gamma = \int F_1\,dx + \int F_2\,dy + \int F_3\,dz =$$

$$= \int_0^1 (t - t^3)\,dt + \int_0^1 (1 - t^3)\cdot 2t\,dt + \int_0^1 t^2 \cdot 3t^2\,dt =$$

$$= \int_0^1 (t - t^3 + 2t - 2t^4 + 3t^4)\,dt =$$

$$= \int_0^1 (t + 2t - t^3 + t^4)\,dt = \int_0^1 (t^4 - t^3 + 3t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{4 - 5 + 30}{20} = \frac{29}{20}$$

ANCORA SUI CAMPI VETTORIALI

$\underline{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}^n$

⇓ DOMINIO E CODOMINIO HANNO LO STESSO CAMPO $\mathbb{R}^n$

ESEMPIO IN $\mathbb{R}^3$

$\underline{F} : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to B \subseteq \mathbb{R}^3$

$$\underline{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\cdot\hat{i} + F_2(x,y,z)\cdot\hat{j} + F_3(x,y,z)\cdot\hat{k}$$

NON METTO $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ MA SOLO x, y, z PER NON APPESANTIRE LA NOTAZIONE, MA È OVVIO CHE TALE DIPENDENZA DAL TEMPO t POSSA ESSERCI

SIA $U(x,y,z)$ UN CAMPO SCALARE, OVVERO $U : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\nabla U(x,y,z) = \left(\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}\right)$$

$\nabla U(x,y,z)$ È OVVIAMENTE UN CAMPO VETTORIALE

$\underline{F}(x,y,z)$ È UN CAMPO VETTORIALE CONSERVATIVO SE (è il gradiente del campo scalare) ESISTE UN CAMPO SCALARE $U(x,y,z)$ [DEFINITO POTENZIALE SCALARE O FUNZIONE POTENZIALE SCALARE] TALE CHE:

$$\nabla U(x,y,z) = \underline{F}(x,y,z)$$

OVVERO:

derivata parziale del campo scalare

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_1 \; ; \; \frac{\partial U}{\partial y} = F_2 \; ; \; \frac{\partial U}{\partial z} = F_3$$

OVVIAMENTE, TALE DEFINIZIONE SI PUÒ GENERALIZZARE IN $\mathbb{R}^n$

un campo di forze è conservativo → cioè gradiente di un campo scalare

SE $\underline{F}(x,y,z) = \nabla U(x,y,z)$ ALLORA

$$\int_\gamma \underline{F} \circ d\underline{r} = \underbrace{U(B) - U(A)}_{\text{differenza di potenziale}}$$

INDIPENDENTEMENTE DAL PERCORSO γ CHE CONGIUNGE IL PUNTO INIZIALE A

DIM:

un campo di forze è conservativo → cioè gradiente di un campo scalare

SE $\underline{F}(x,y,z) = \nabla U(x,y,z)$ ALLORA

$$\int_\gamma \underline{F} \circ d\underline{r} = \underbrace{U(B) - U(A)}_{\text{differenza di potenziale}}$$

INDIPENDENTEMENTE DAL PERCORSO γ CHE CONGIUNGE IL PUNTO INIZIALE A E IL PUNTO FINALE B

DIM:

IPOTESI $\underline{F} = \nabla U \Rightarrow \underline{F} \circ d\underline{r} =$

$$= F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz =$$

$$= \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz =$$

$$= dU$$

$$\int_\gamma dU = U(B) - U(A)$$

CONSEGUENZA

$$\oint \underline{F} \circ d\underline{r} = 0 \quad \text{SE } \underline{F} = \nabla U$$

$$\oint dU = U(A) - U(A) = 0$$

IN $\mathbb{R}^3$, $\underline{F} = \nabla U \Rightarrow \nabla \times \underline{F} = \underline{0}$

OVVERO, SE $\underline{F}$ É CONSERVATIVO ALLORA $\underline{F}$ É IRROTAZIONALE

DIM:

$$\nabla \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{i}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

UTILIZZANDO L'IPOTESI $\underline{F} = \nabla U$

$$F_1 = \frac{\partial U}{\partial x} \quad F_2 = \frac{\partial U}{\partial y} \quad F_3 = \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) =$$

derivata parziale seconda MISTA ⇓ Applico Shwartz

$$= \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0$$

IN GENERALE $\nabla \times \underline{F} = \underline{0} \iff \begin{cases} \dfrac{\partial F_3}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial z} = \dfrac{\partial F_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y} \end{cases}$

Ogni campo bidimensionale può essere visto come un campo tridimensionale con terza componente nulla e prima e seconda non legate alla terza

$\underline{F} : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to B \subseteq \mathbb{R}^2$

$\underline{F} = (F_1, F_2) = (F_1, F_2, 0)$

- LA COMPONENTE F_3 É NULLA
- F_1 ED F_2 NON DIPENDONO DA z

IN GENERALE $\nabla \times \underline{F} = \underline{0} \iff$

$\underline{F} : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to B \subseteq \mathbb{R}^2$

$\underline{F} = (F_1, F_2) = (F_1, F_2, 0)$

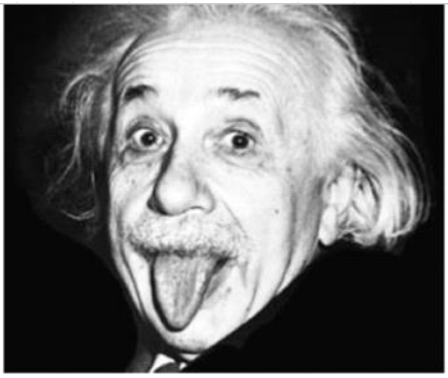
- LA COMPONENTE F_3 É NULLA
- F_1 ED F_2 NON DIPENDONO

$$\nabla \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{i}\left(\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial 0}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

$$= \hat{k}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

SE $\underline{F}$ É 2D $\Rightarrow$ LA CONDIZIONE DI IRROTAZIONALITÁ É: $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y}$



Forma differenziale

Lavoro infinitesimo

Forma differenziale esatta

$\underline{F}$ conservativo

Forma differenziale chiusa

$\underline{F}$ irrotazionale

$$\underline{F} = \nabla U \Rightarrow \nabla \times \underline{F} = \underline{0}$$

$$\nabla \times \underline{F} = \underline{0} \Rightarrow \underline{F} = \nabla U \ ?$$

BASTA FARE UN ESEMPIO DI CAMPO VETTORIALE IRROTAZIONALE CHE NON É CONSERVATIVO (OVVERO UN CAMPO IRROTAZIONALE CHE COMPIE UN LAVORO NON NULLO LUNGO UN PERCORSO CHIUSO)

$$\oint_C \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)\circ(dx, dy) =$$

$$= \oint_C -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

$F_1 = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$ $\qquad$ $F_2 = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

DOMINIO DI $\underline{F} = (F_1, F_2) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\oint_C \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)\circ(dx, dy) =$$

$$= \oint_C -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

$F_1 = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$ $\qquad$ $F_2 = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

DOMINIO DI $\underline{F} = (F_1, F_2) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

CHECK SU IRROTAZIONALITÀ

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\nabla \times \underline{F} = \underline{0}$$

$$C: \begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R \,\text{sen}\, t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$dx = -R \,\text{sen}\, t \, dt \qquad dy = R \cos t \, dt$$

$$\int_0^{2\pi} \left(-\frac{R \,\text{sen}\, t}{R^2} \cdot (-R \,\text{sen}\, t) + \frac{R\cos t}{R^2} \cdot R\cos t \right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\text{sen}^2 t + \cos^2 t)\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Ancora sui Campi Conservativi

lunedì 2 novembre 2020 10:37

ANCORA SUI CAMPI VETTORIALI

$\underline{F} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}^n$

ESEMPIO IN $\mathbb{R}^3$

$\underline{F} : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to B \subseteq \mathbb{R}^3$

$$\underline{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z) \cdot \hat{i} + F_2(x,y,z) \cdot \hat{j} + F_3(x,y,z) \cdot \hat{k}$$

NON METTO $x(t), y(t), z(t)$ MA SOLO x, y, z PER NON APPESANTIRE LA NOTAZIONE, MA È OVVIO CHE TALE DIPENDENZA DAL TEMPO t POSSA ESSERCI

Il gradiente di un campo scalare è anch'esso un campo vettoriale

SIA $U(x,y,z)$ UN CAMPO SCALARE, OVVERO

$$U : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$\nabla U(x,y,z) = \left(\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z} \right)$$

$\nabla U(x,y,z)$ È OVVIAMENTE UN CAMPO VETTORIALE

$\underline{F}(x,y,z)$ É UN CAMPO VETTORIALE CONSERVATIVO SE ESISTE UN CAMPO SCALARE $U(x,y,z)$ [DEFINITO POTENZIALE SCALARE O FUNZIONE POTENZIALE SCALARE] TALE CHE:

$$\nabla U(x,y,z) = \underline{F}(x,y,z)$$

OVVERO: $\frac{\partial U}{\partial x} = F_1$; $\frac{\partial U}{\partial y} = F_2$; $\frac{\partial U}{\partial z} = F_3$

OVVIAMENTE, TALE DEFINIZIONE SI PUÓ GENERALIZZARE IN $\mathbb{R}^n$

Un campo vettoriale è **CONSERVATIVO** se si può scrivere come gradiente di un campo scalare

Il campo scalare di cui F è gradiente è detta funzione potenziale scalare

SE $\underline{F}(x,y,z) = \nabla U(x,y,z)$ ALLORA

$$\int_\gamma \underline{F} \circ d\underline{r} = U(B) - U(A)$$

funzione potenziale valutata in B

funzione potenziale valutata in A

indipendentemente dal percorso

INDIPENDENTEMENTE DAL PERCORSO γ CHE CONGIUNGE IL PUNTO INIZIALE A E IL PUNTO FINALE B

DIM:

IPOTESI $\underline{F} = \nabla U \Rightarrow \underline{F} \circ d\underline{r} =$

$$= F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz =$$

$$= \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz =$$

$$= dU$$

$$\int_\gamma dU = U(B) - U(A)$$

CONSEGUENZA: il lavoro di un percorso chiuso è

$$\oint \underline{F} \circ d\underline{r} = 0 \quad \text{SE } \underline{F} = \nabla U$$

$$\oint dU = U(A) - U(A) = 0$$

IN $\mathbb{R}^3$, $\underline{F} = \nabla U \Rightarrow \nabla \times \underline{F} = \underline{0}$

OVVERO, SE $\underline{F}$ É CONSERVATIVO ALLORA $\underline{F}$ É IRROTAZIONALE

Il viceversa NON è sempre vero

operazione matematica fino alla 3ª dim.

DIM:

$$\nabla \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{\imath}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) + \hat{\jmath}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

UTILIZZANDO L'IPOTESI $\underline{F} = \nabla U$

$F_1 = \frac{\partial U}{\partial x}$ $\quad F_2 = \frac{\partial U}{\partial y}$ $\quad F_3 = \frac{\partial U}{\partial z}$

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0$$

IN GENERALE $\nabla \times \underline{F} = \underline{0} \iff \begin{cases} \dfrac{\partial F_3}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial z} = \dfrac{\partial F_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y} \end{cases}$

$\underline{F} : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to B \subseteq \mathbb{R}^2$

$\underline{F} = (F_1, F_2) = (F_1, F_2, 0)$

[redacted]

- LA COMPONENTE F_3 É NULLA [redacted]
- F_1 ED F_2 NON DIPENDONO DA z

IN GENERALE $\nabla \times \underline{F} = \underline{0} \iff$

$\underline{F} : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to B \subseteq \mathbb{R}^2$

$\underline{F} = (F_1, F_2) = (F_1, F_2, 0)$

[redacted]

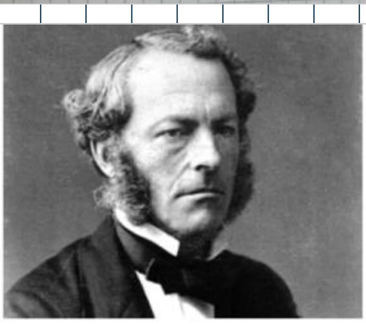
- LA COMPONENTE F_3 É NULLA
- F_1 ED F_2 NON DIPENDONO

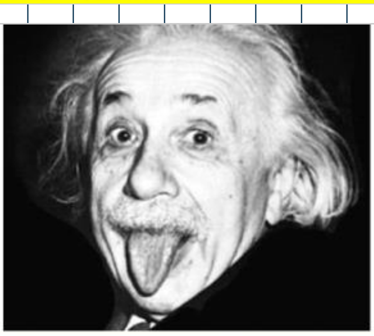
$$\nabla \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{i}\left(\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial 0}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

$$= \hat{k}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

SE $\underline{F}$ É 2D $\Rightarrow$ LA CONDIZIONE DI IRROTAZIONALITÀ É: $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y}$





Forma differenziale $\longleftrightarrow$ **Lavoro infinitesimo**

$\omega = F_1 dx + F_2 dy + F_3\, dz$ — $dL = F_1 dx + F_2 dy + F_3\, dz$

ω Forma differenziale esatta $\longleftrightarrow$ **$\underline{F}$ conservativo**

ω Forma differenziale chiusa $\longleftrightarrow$ **$\underline{F}$ irrotazionale**

$$\underline{F} = \nabla U \implies \nabla \times \underline{F} = \underline{0}$$

conservatività $\Rightarrow$ irrotazionalità
$\not\Leftarrow$

$$\nabla \times \underline{F} = \underline{0} \implies \underline{F} = \nabla U \ ?$$

BASTA FARE UN ESEMPIO DI CAMPO VETTORIALE IRROTAZIONALE CHE NON È CONSERVATIVO (OVVERO UN CAMPO IRROTAZIONALE CHE COMPIE UN LAVORO NON NULLO LUNGO UN PERCORSO CHIUSO)

$$\oint_C \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right) \circ (dx, dy) =$$

$$= \oint_C -\frac{y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy$$

$$F_1 = -\frac{y}{x^2+y^2} \qquad F_2 = \frac{x}{x^2+y^2}$$

DOMINIO DI $\underline{F} = (F_1, F_2) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\oint_C \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right) \circ (dx, dy) =$$

CHECK SU IRROTAZIONALITÀ

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2) + 2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{x^2+y^2 - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \oint_C -\frac{y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy$$

$$F_1 = -\frac{y}{x^2+y^2} \qquad F_2 = \frac{x}{x^2+y^2}$$

DOMINIO DI $\underline{F} = (F_1, F_2) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$\nabla \times \underline{F} = \underline{0}$

$$C: \begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R \,\text{sen}\, t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$dx = -R\,\text{sen}\,t \, dt \qquad dy = R\cos t \, dt$

$$\int_0^{2\pi} \left(-\frac{R\,\text{sen}\,t}{R^2} \cdot (-R\,\text{sen}\,t) + \frac{R\cos t}{R^2} \cdot R\cos t \right) dt =$$

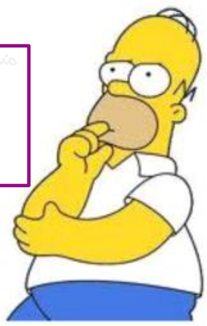
$$= \int_0^{2\pi} (\text{sen}^2 t + \cos^2 t)\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

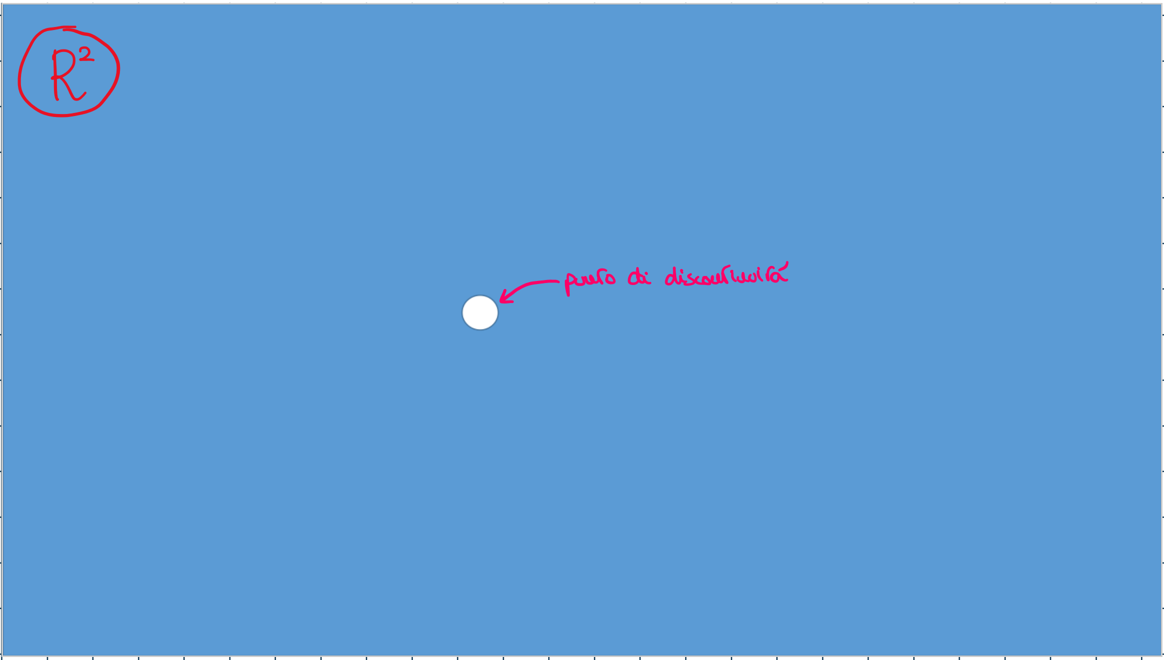
DOMINIO SEMPLICEMENTE CONNESSO

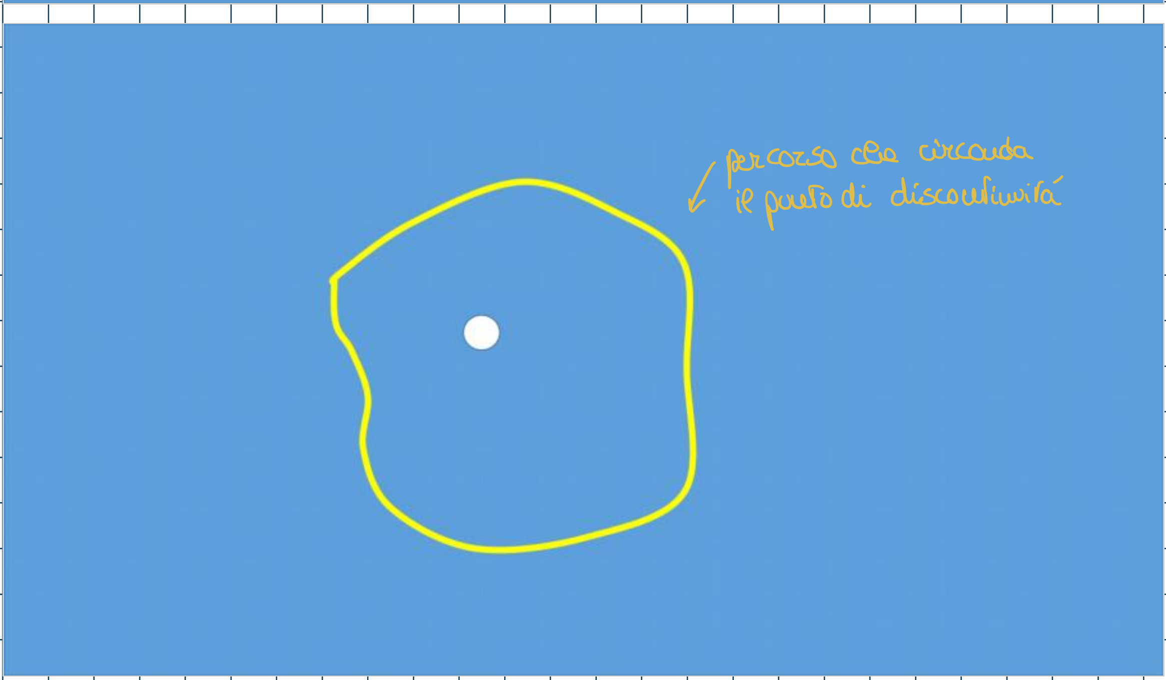
Dominio <u>connesso</u> e, inoltre, soddisfa la seguente condizione: qualsiasi curva semplice e chiusa al suo interno può essere ridotta (mediante una deformazione) ad un unico punto senza mai uscire dal dominio stesso

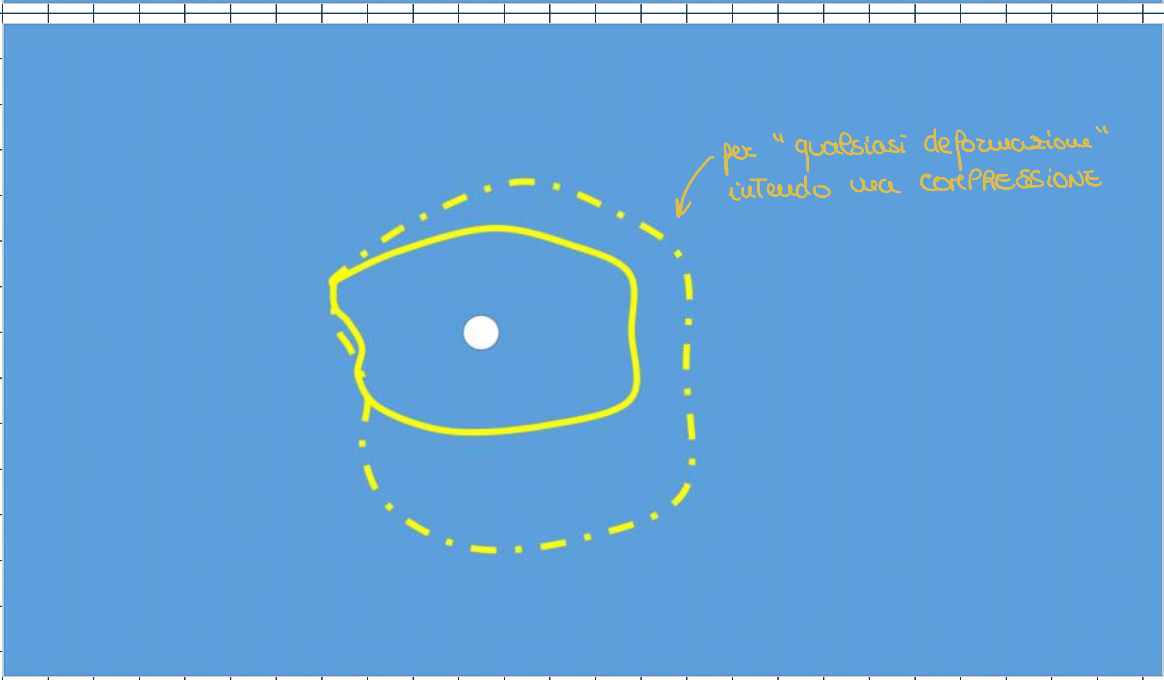
Semplicemente connesso:

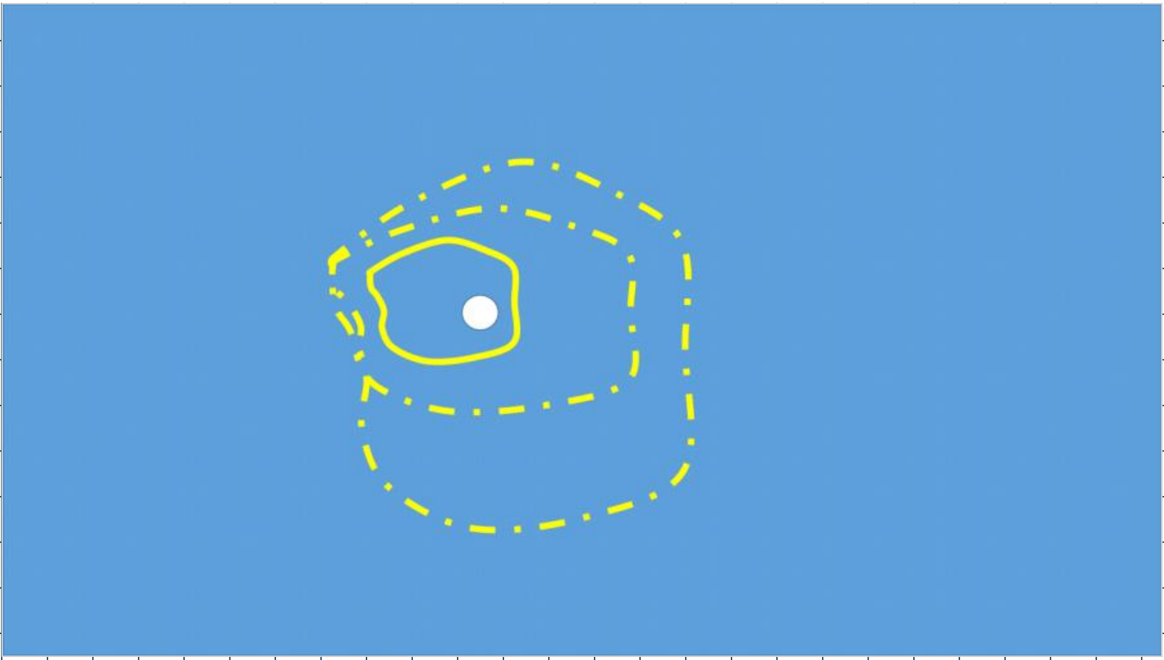
Dati due punti appartenenti al dominio esiste almeno una poligonale che li unisce <u>senza</u> uscire dal dominio



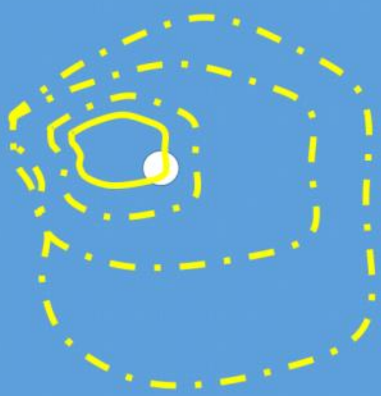

R^2
punto di discontinuità


percorso che circonda
il punto di discontinuità


per "qualsiasi deformazione"
intendo una COMPRESSIONE



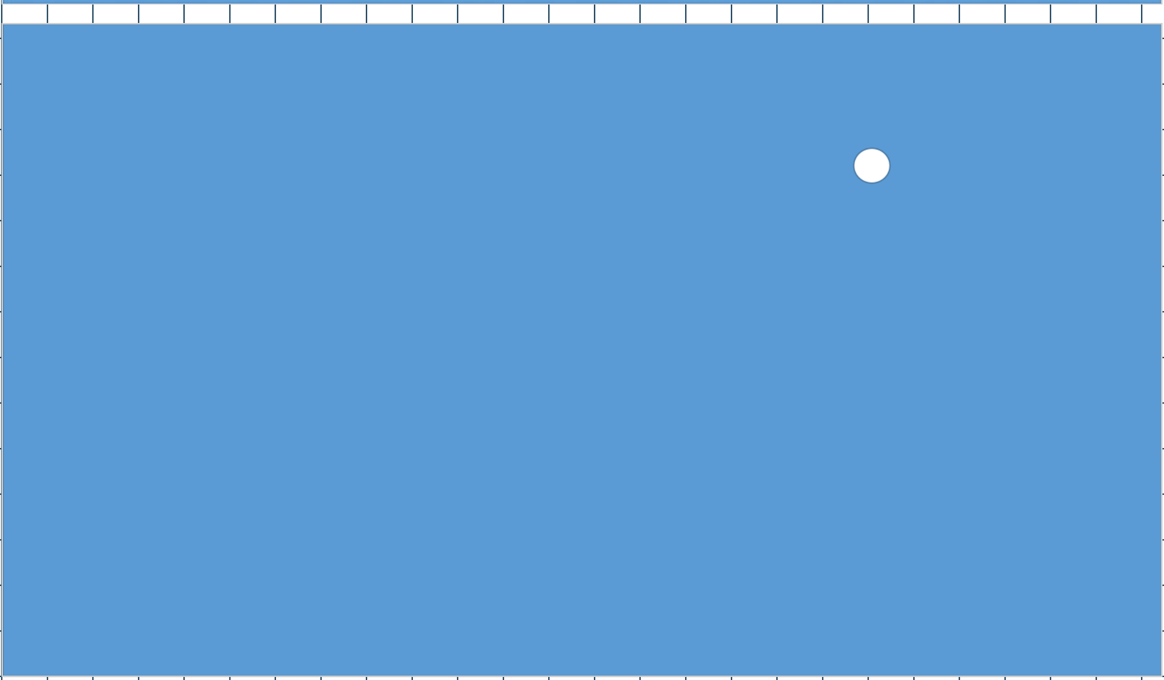
DOMINIO NON SEMPLICEMENTE CONNESSO:

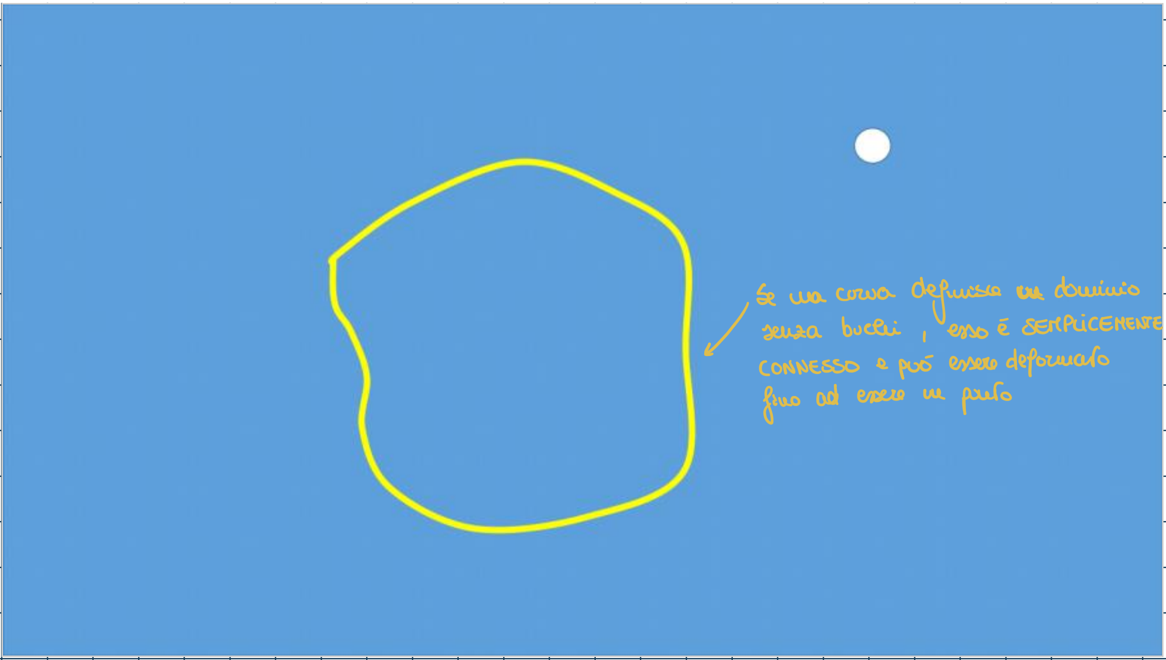


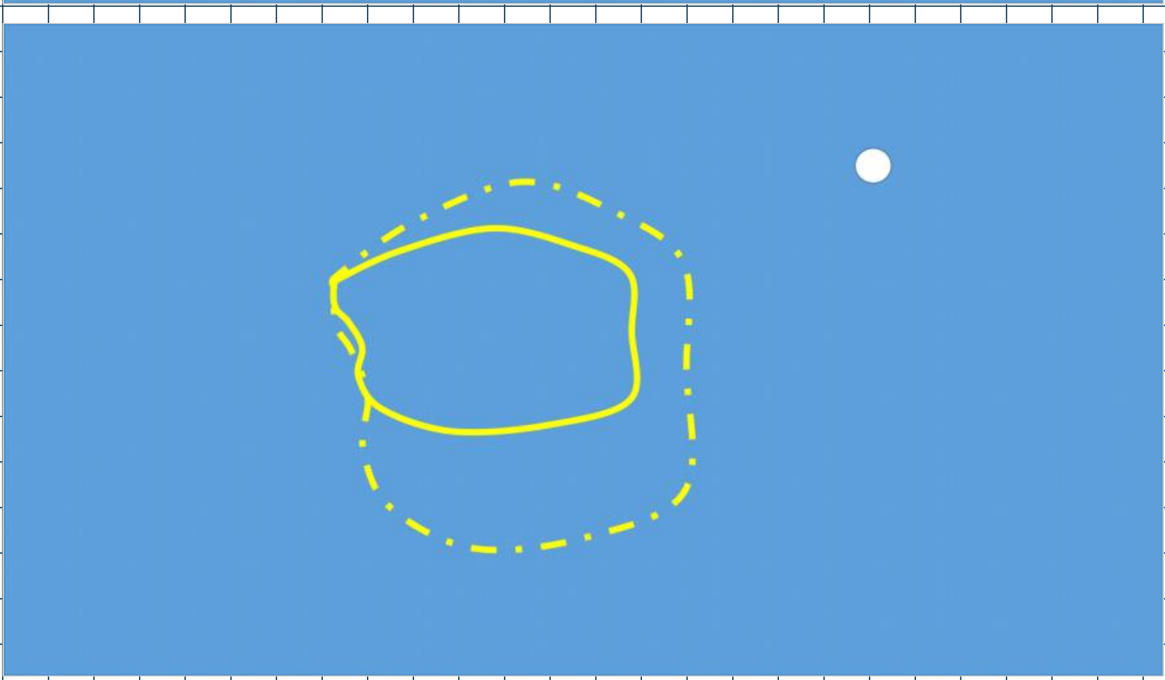
Le curve tratteggiate sono curve chiuse che definiscono domini che comprendono il punto di discontinuità

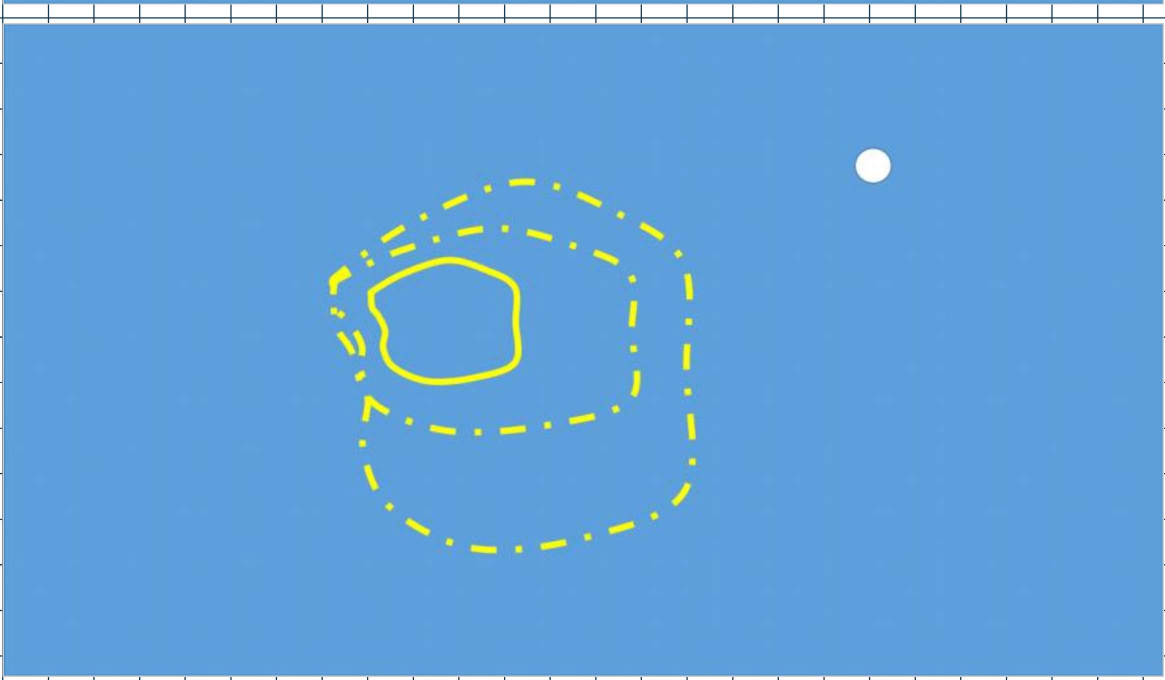
In R^2:

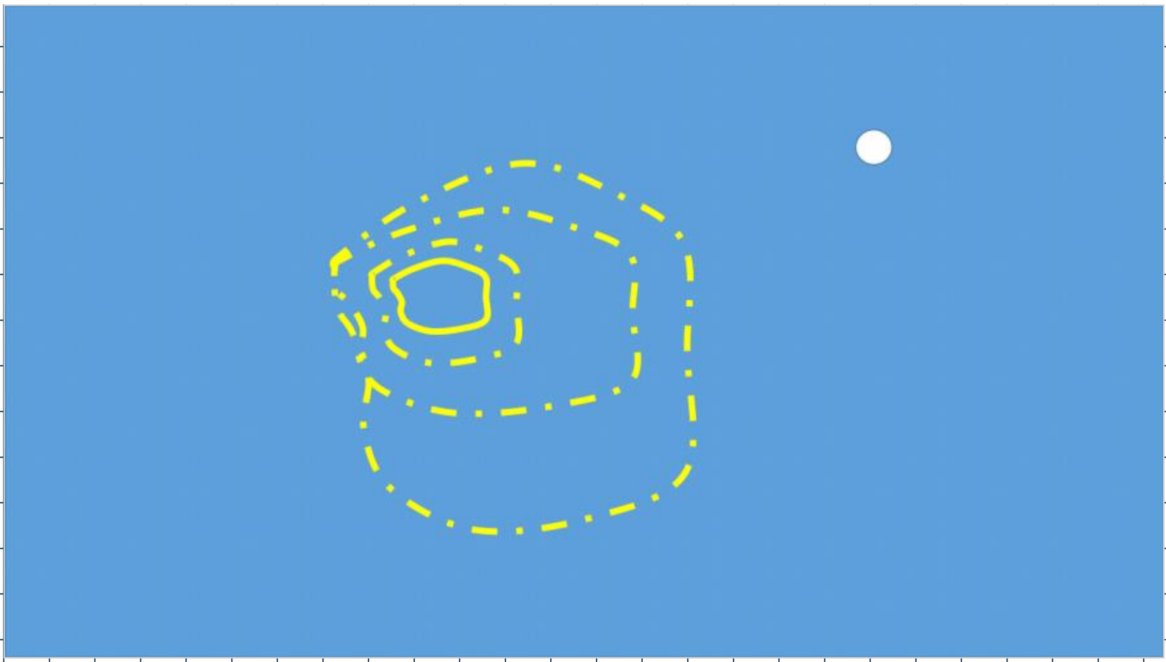
tutti gli intorni che circondano un punto di discontinuità non sono domini semplicemente connessi poiché possono essere DEFORMATI e dunque passare per il punto



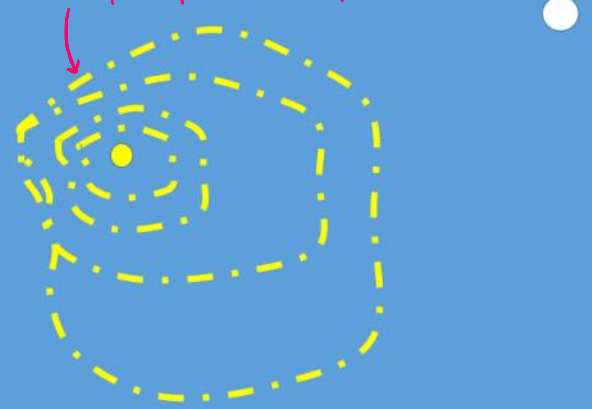

Se una curva definisce un dominio senza buchi, esso è SEMPLICEMENTE CONNESSO e può essere deformato fino ad essere un punto



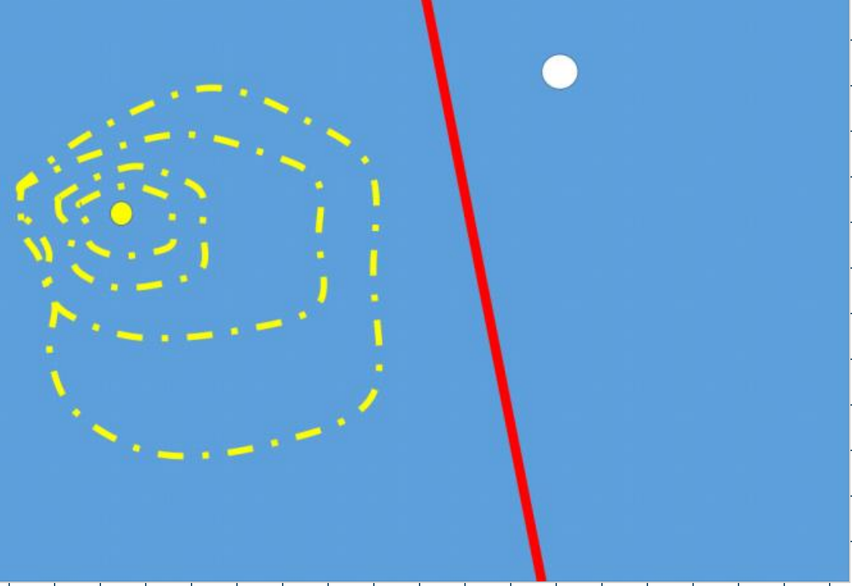




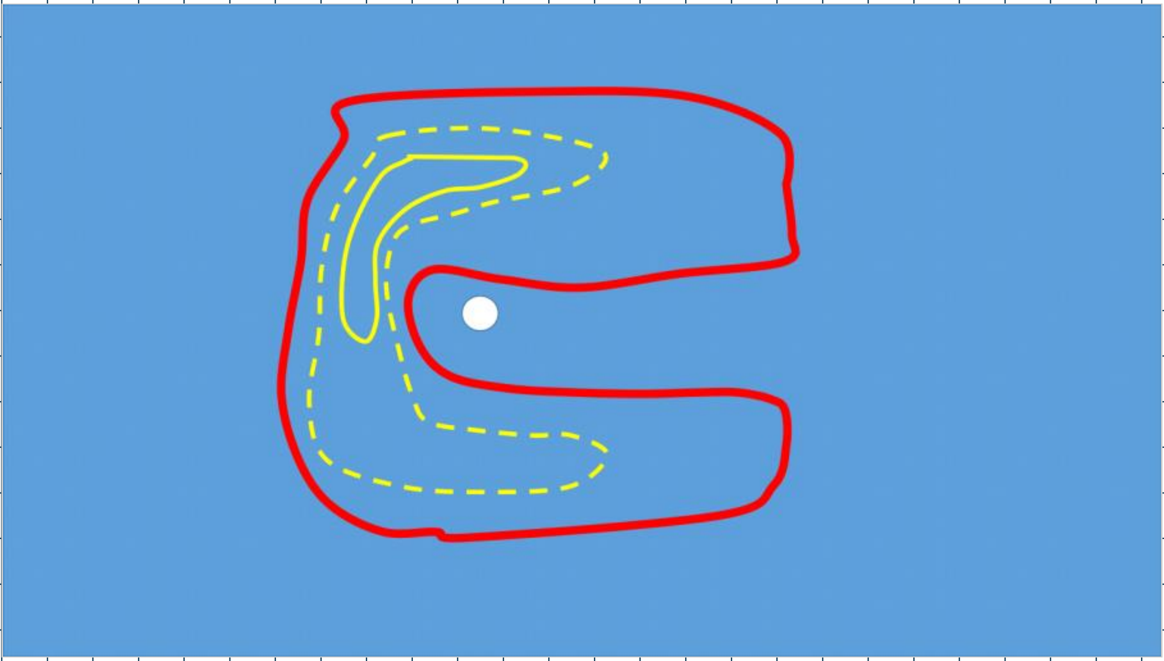
poiché il punto di discontinuità non è interno alla curva allora posso farla degenerare in un punto senza farla passare per un punto di discontinuità

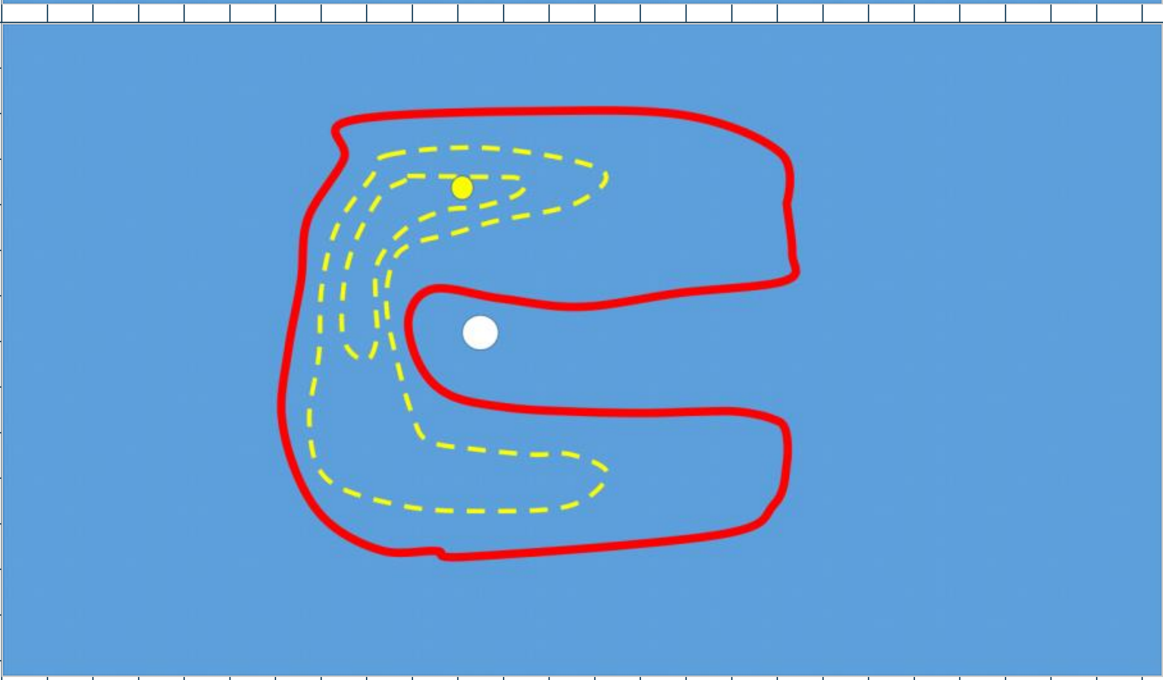


DOMINIO SEMPLICEMENTE CONNESSO:



DOMINIO SEMPLICEMENTE CONNESSO:





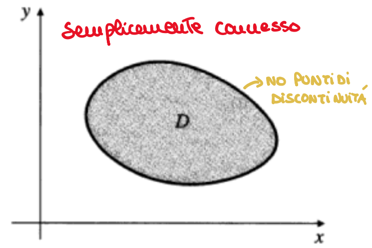


Figure 15.11 A simply connected domain

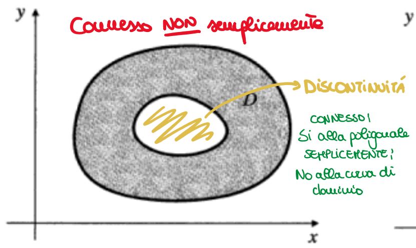


Figure 15.12 A connected domain that is not simply connected

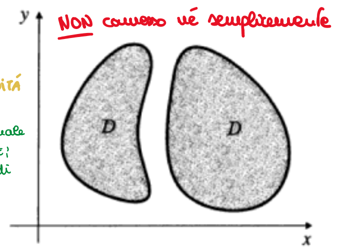
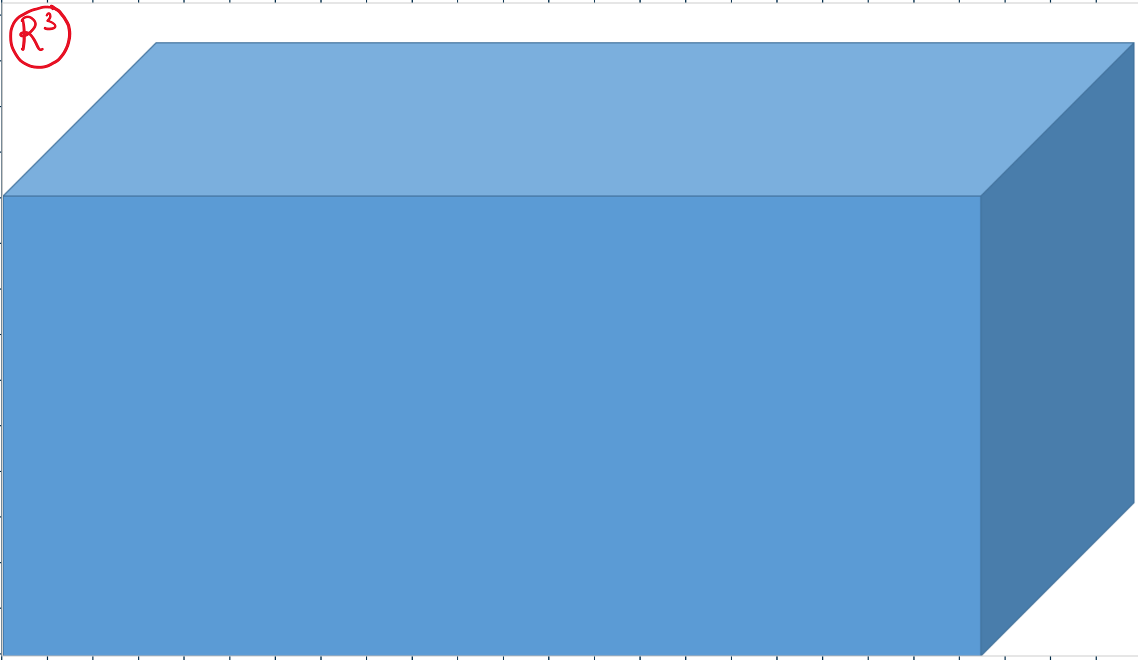


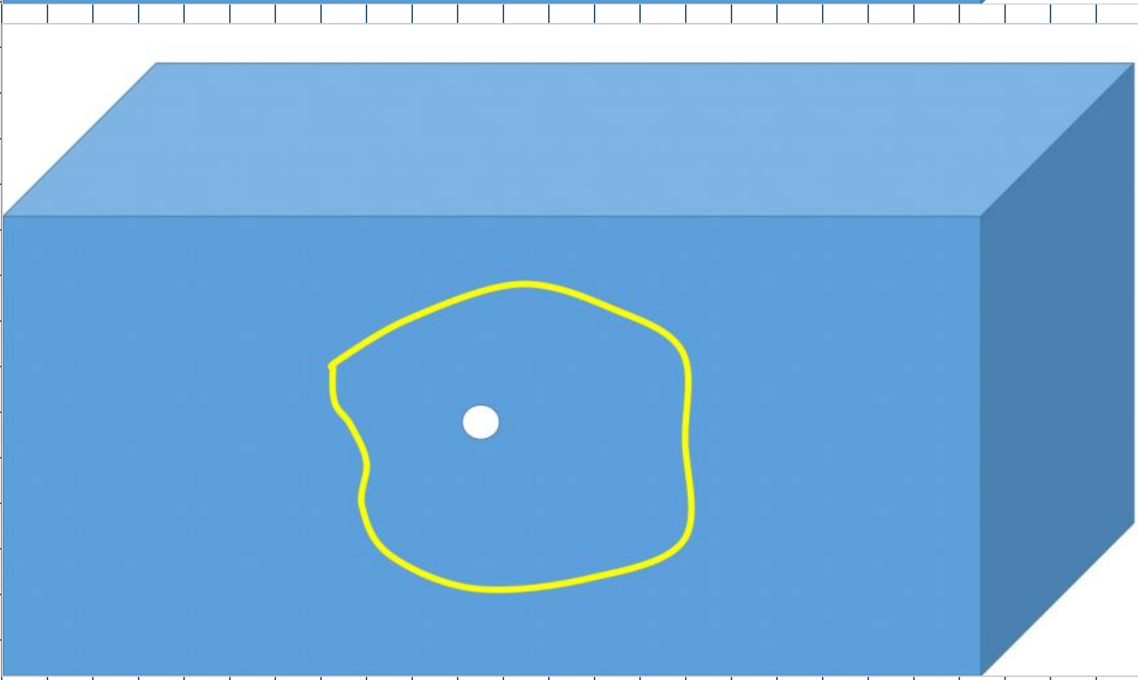
Figure 15.13 A domain that is not connected

In the plane, a simply connected domain D can have no holes, not even a hole consisting of a single point. The interior of every non-self-intersecting closed curve in such a domain D lies in D. For instance, the domain of the function $1/(x^2 + y^2)$ is not simply connected because the origin does not belong to it. (The origin is a "hole" in that domain.) In 3-space, a simply connected domain can have holes. The set of all points in $\mathbb{R}^3$ different from the origin is simply connected, as is the exterior of a ball. But the set of all points in $\mathbb{R}^3$ satisfying $x^2 + y^2 > 0$ is not simply connected. Neither is the interior of a doughnut (a *torus*). In general, each of the following conditions characterizes simply connected domains D:

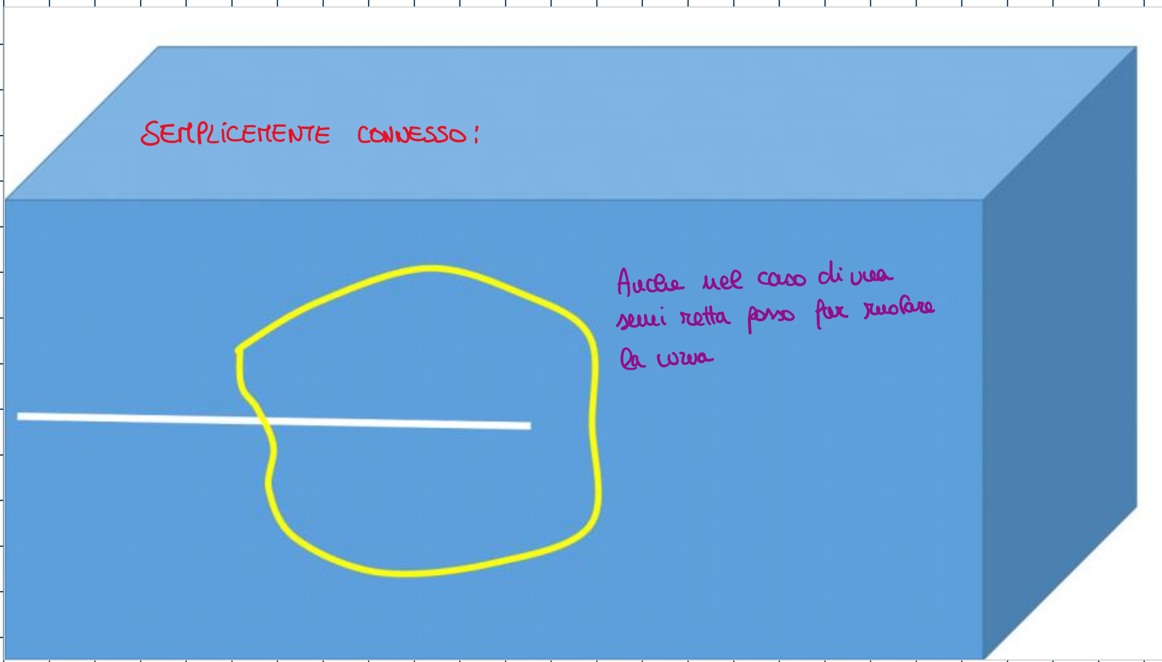
(i) Any simple closed curve in D is the boundary of a "surface" lying in D.

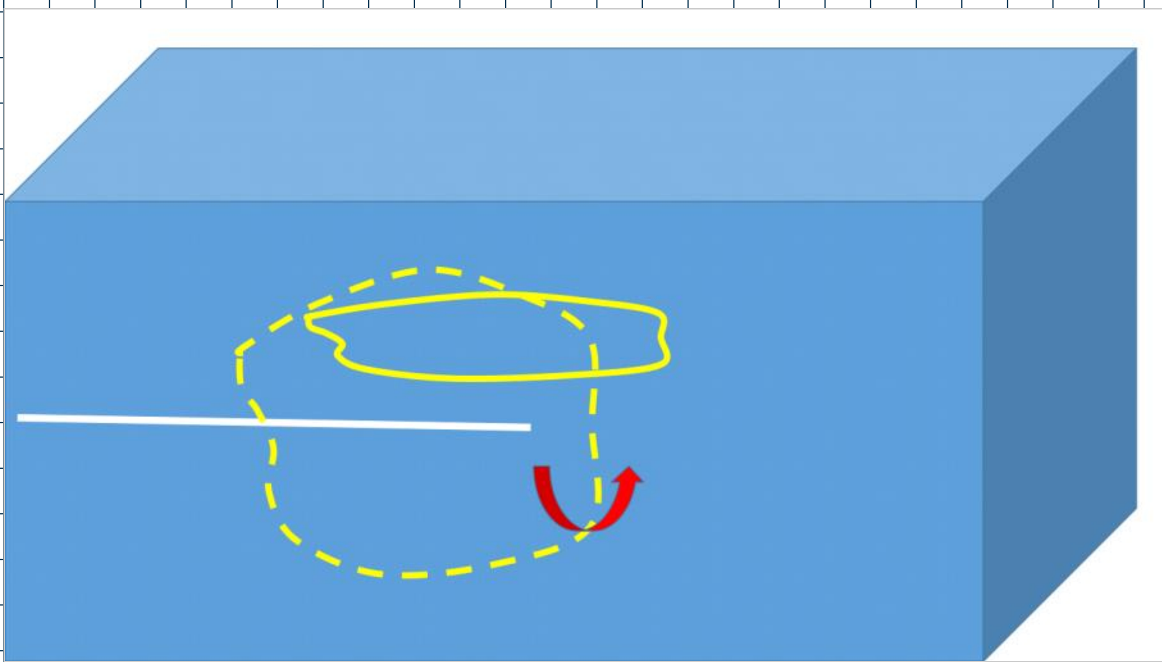
(ii) If $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$ are two curves in D having the same endpoints, then $\mathcal{C}_1$

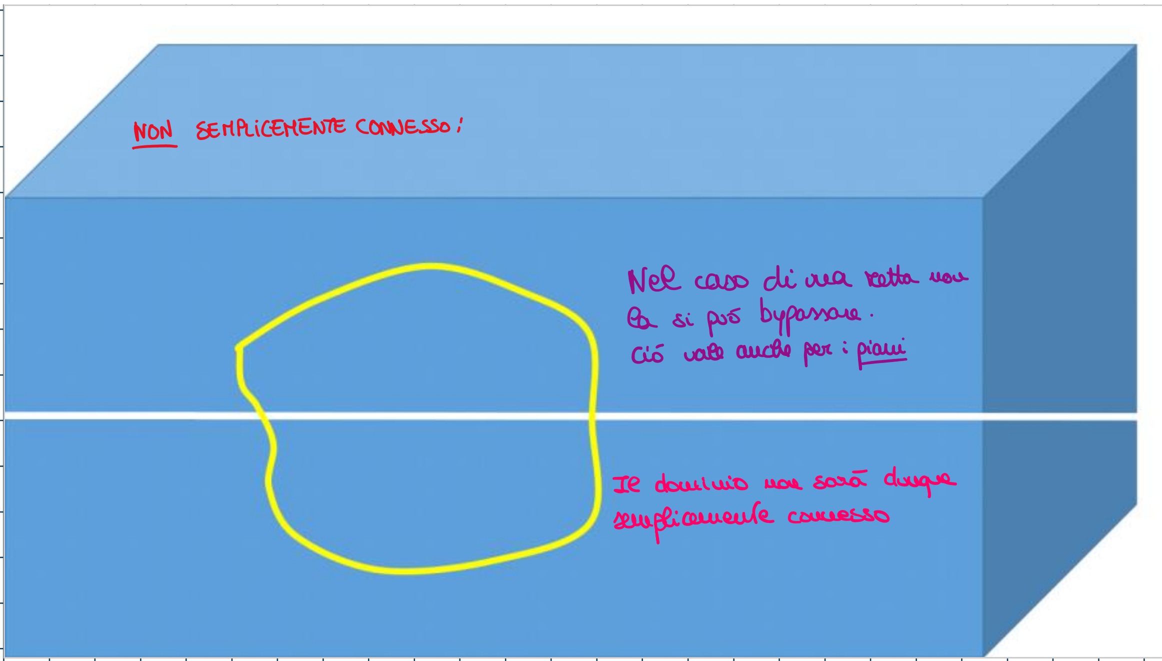


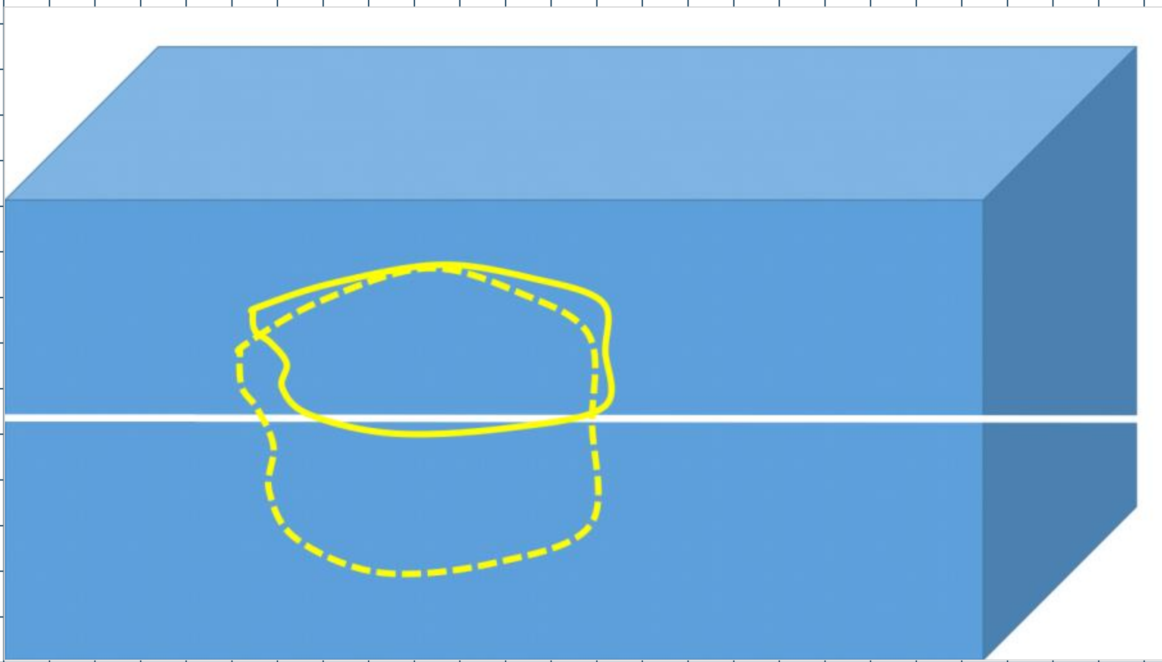


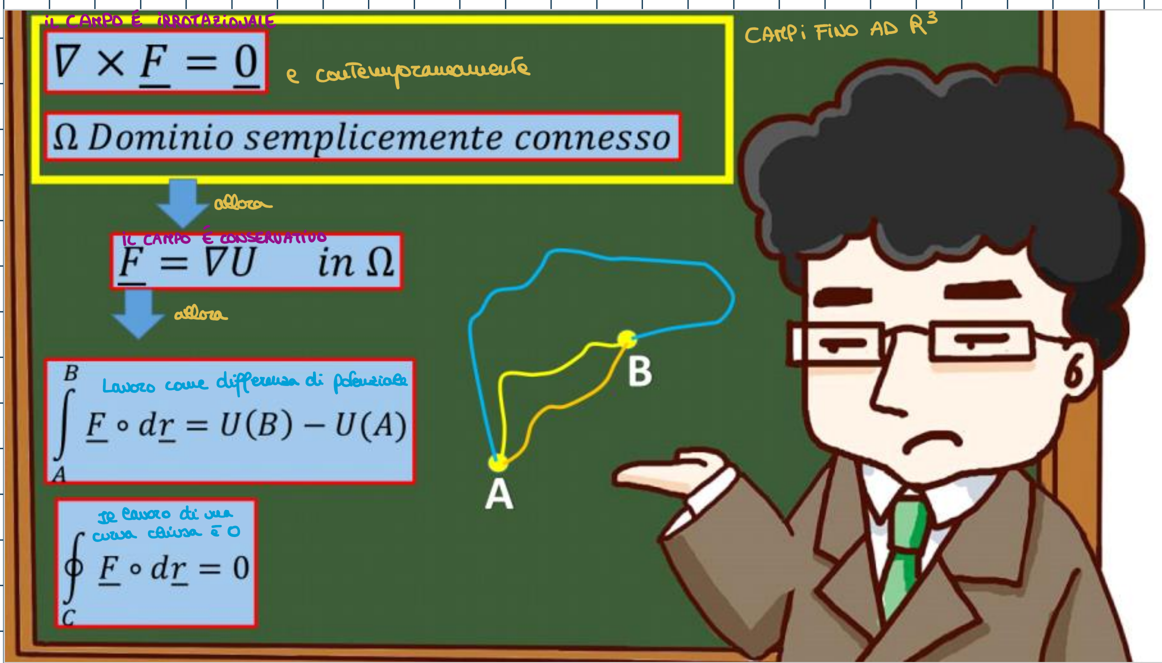

SEMPLICENTE CONNESSO:
Nel Tridimensionale si può far ruotare la curva ed aggirare il punto
Dunque la deformazione può essere compiuta anche tramite ROTAZIONE

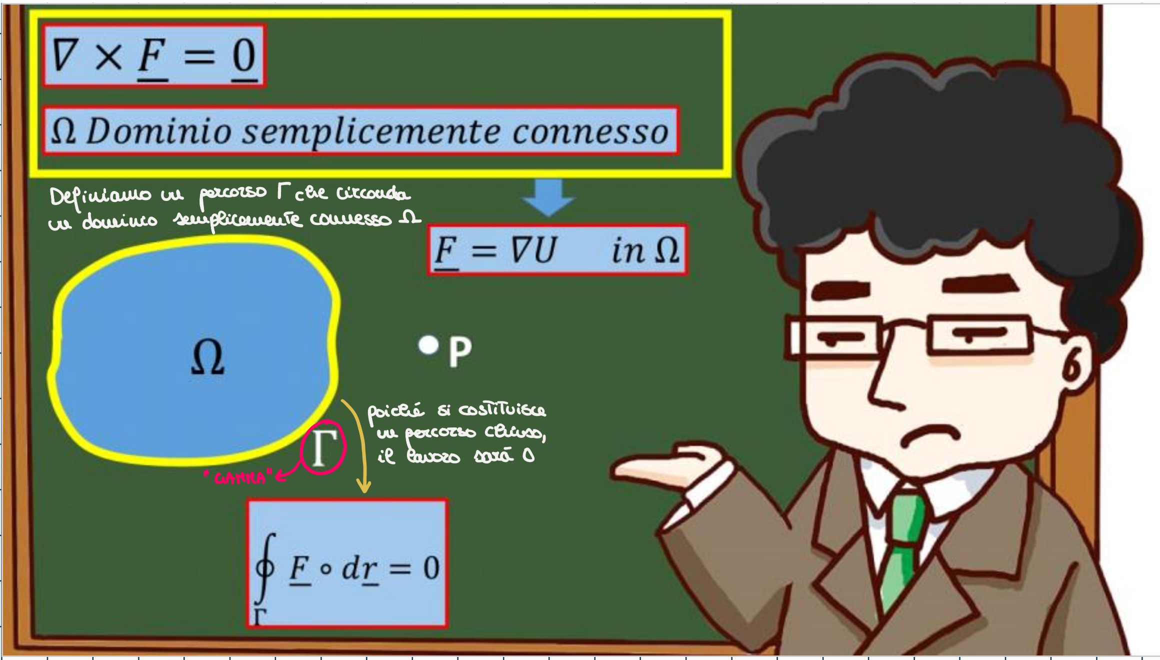

SEMPLICEMENTE CONNESSO:
Anche nel caso di una semi retta posso far ruotare la curva

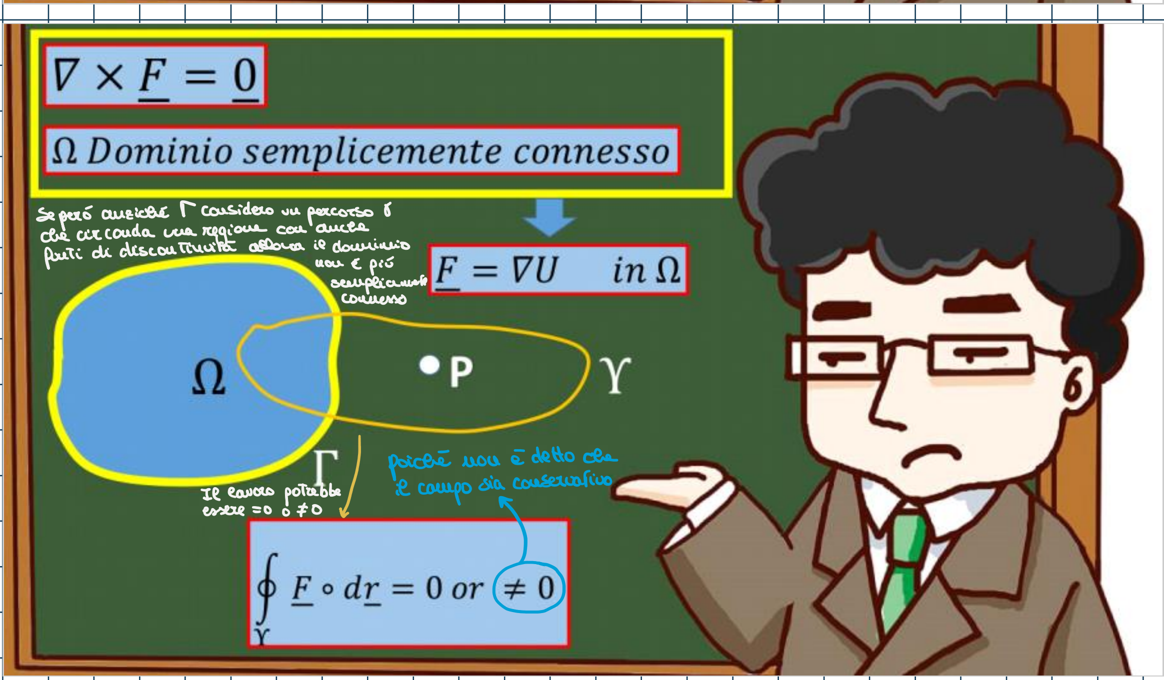



NON SEMPLICEMENTE CONNESSO:
Nel caso di una retta non la si può bypassare.
ciò vale anche per i piani
Il dominio non sarà dunque semplicemente connesso




il CAMPO È IRROTAZIONALE
$\nabla \times \underline{F} = \underline{0}$
e contemporaneamente
Ω Dominio semplicemente connesso
CAMPi FINO AD R^3
allora
IL CAMPO È CONSERVATIVO
$\underline{F} = \nabla U \quad in\ \Omega$
allora
Lavoro come differenza di potenziale
$\int_A^B \underline{F} \circ d\underline{r} = U(B) - U(A)$
il lavoro di una curva chiusa è 0
$\oint_C \underline{F} \circ d\underline{r} = 0$
B
A





Algoritmo complessivo per risolvere Integrali curvilinei di II specie

CAMPO IRROTAZIONALE

$\nabla \times \underline{F} = \underline{0} \wedge Dominio\ semplicemente\ connesso$

conservativo ⇒ irrotazionale

non irrotazionale ⇒ non conservativo

SI

Il campo è conservativo

$\underline{F} = \nabla U$ ⇒ Determinazione di U

$$\int_A^B \underline{F} \circ d\underline{r} = U(B) - U(A)$$

$$\oint_C \underline{F} \circ d\underline{r} = 0$$

NO

$\underline{F} \neq \nabla U$

$$\int_A^B \underline{F} \circ d\underline{r}$$

- Parametrizzare curva/tratti di curva
- Esprimere F e dr in funzione di t
- Impostare il verso di percorrenza con gli estremi di integrazione

$\int_b^a \quad b \longrightarrow a$

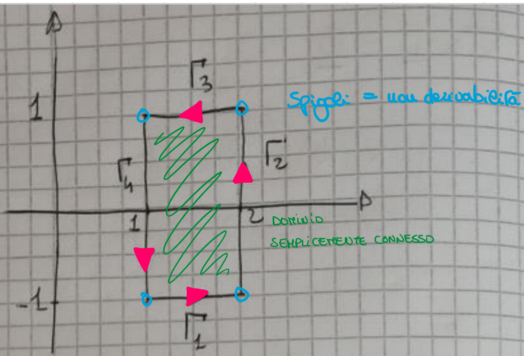
$\int_a^b \quad a \longrightarrow b$

PARAMETRIZZAZIONE :

1ª comp. 2ª comp.

$$\oint_{\Gamma} \left(\underbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}}_{\text{Non si annulla mai quindi è un dominio semplicemente connesso}}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \circ (dx, dy)$$

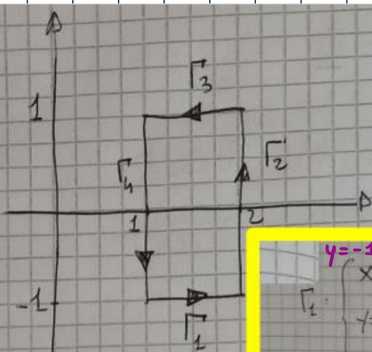
$\circ$ prodotto scalare



$$\oint_{\Gamma} \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \circ (dx, dy) = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} + \int_{\Gamma_4} = 0$$

poiché:
IRROTAZIONALITÀ
+
DOMINIO SEMPLICEMENTE CONNESSO
$\Downarrow$
LAVORO = 0

$$\oint_{\Gamma} \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \circ (dx, dy)$$



$$\oint_{\Gamma} \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \circ (dx, dy) = \int$$

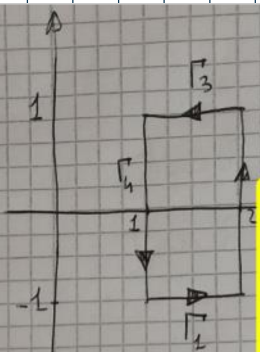
$y = -1 \quad 1 \le x \le 2$

$\Gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = -1 \end{cases} \quad t \in [1, 2] \qquad dx = dt \quad dy = 0$

$$\int_{\Gamma_1} \frac{1}{x^2+1} dx = \int_1^2 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_1^2 = \operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{4}$$

$$\int_{\Gamma_1} \frac{1}{1+t^2} dt = \int_1^2 \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t \Big|_1^2 = \operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{4}$$

$$\oint_{\Gamma} \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \circ (dx, dy)$$



$$\oint_{\Gamma} \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \circ (dx, dy) = \int_{\Gamma_1}$$

$x = 2 \quad -1 \le y \le 1$

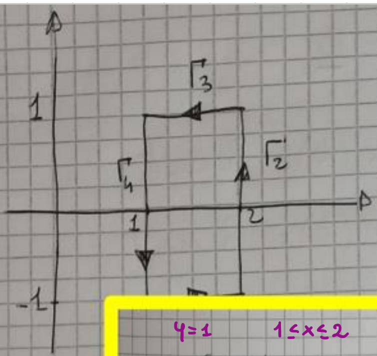
$\Gamma_2 : \begin{cases} x = 2 \\ y = t \end{cases} \quad t \in [-1, 1] \qquad dx = 0 \quad dy = dt$

$$\int_{-1}^{1} \frac{2}{4+t^2} dt = \int_{-1}^{1} \frac{2dt}{4\left(1+\left(\frac{t}{2}\right)^2\right)} =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{2} dt = \operatorname{arctg} \frac{t}{2} \Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$$

$$\oint_\Gamma \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)\circ(dx,dy)$$



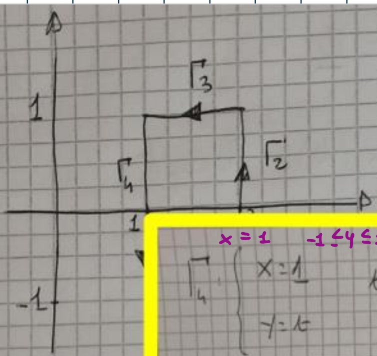
$$\oint_\Gamma \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)\circ(dx,$$

$y=1 \qquad 1\le x\le 2$

$\Gamma_3: \begin{cases} x=t \\ y=1 \end{cases} \quad t\in[1,2] \qquad dx=dt \quad dy=0$

$$\int_{\Gamma_3} = \int_2^1 \frac{-1}{1+t^2}\,dt = \int_1^2 \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{4}$$

$$\oint_\Gamma \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)\circ(dx,dy)$$



$$\oint_\Gamma \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)\circ(dx,d$$

$x=1 \qquad -1\le y\le 1$

$\Gamma_4: \begin{cases} x=1 \\ y=t \end{cases} \quad t\in[-1,1] \qquad dx=0 \quad dy=dt$

$$\int_{\Gamma_4} = \int_1^{-1} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \operatorname{arctg}(-1) - \operatorname{arctg}(1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\oint_\Gamma = 2\operatorname{arctg} 2 + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \pi = 0$$

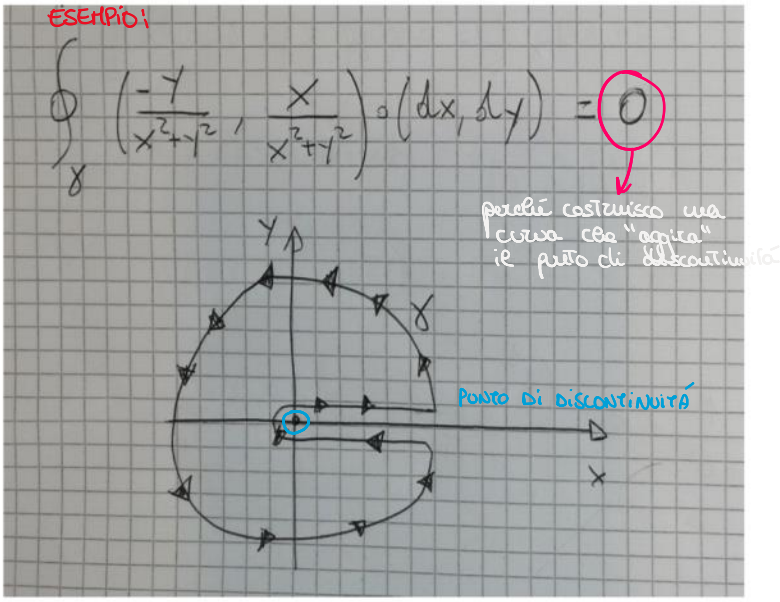
$\operatorname{tg}\alpha = a = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \qquad a>0$

$\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{a} = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} \Rightarrow \begin{array}{l}\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\alpha = \cos\beta\end{array}$

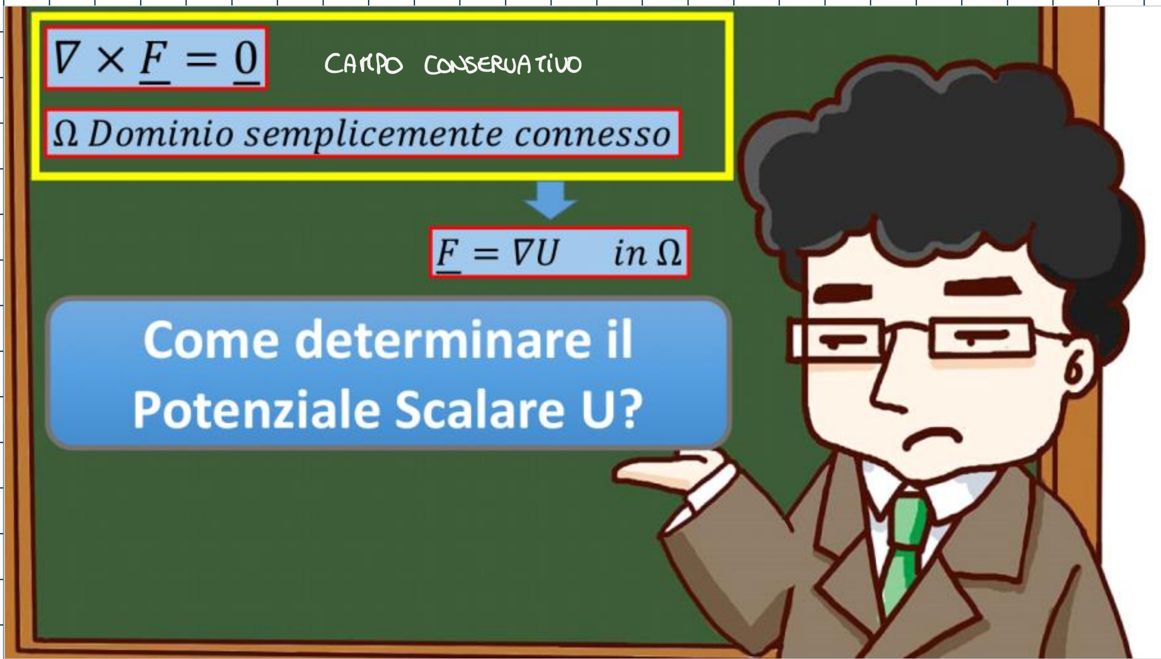
$\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha \qquad$ se $\alpha+\beta = \dfrac{\pi}{2}$

$\begin{array}{l} dx=0 \\ dy=dt \end{array}$ … $\operatorname{arctg}(-1) - \operatorname{arctg}(1) = -\frac{\pi}{2}$

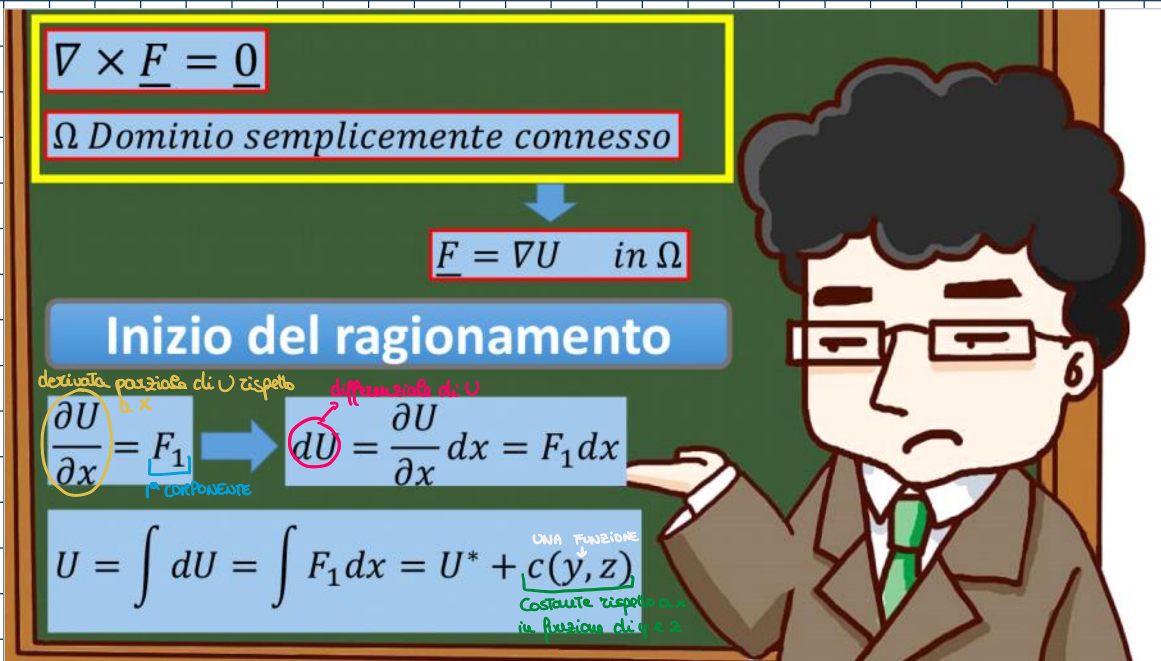
$\oint_\Gamma = 2\operatorname{arctg} 2 + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \pi = 0$



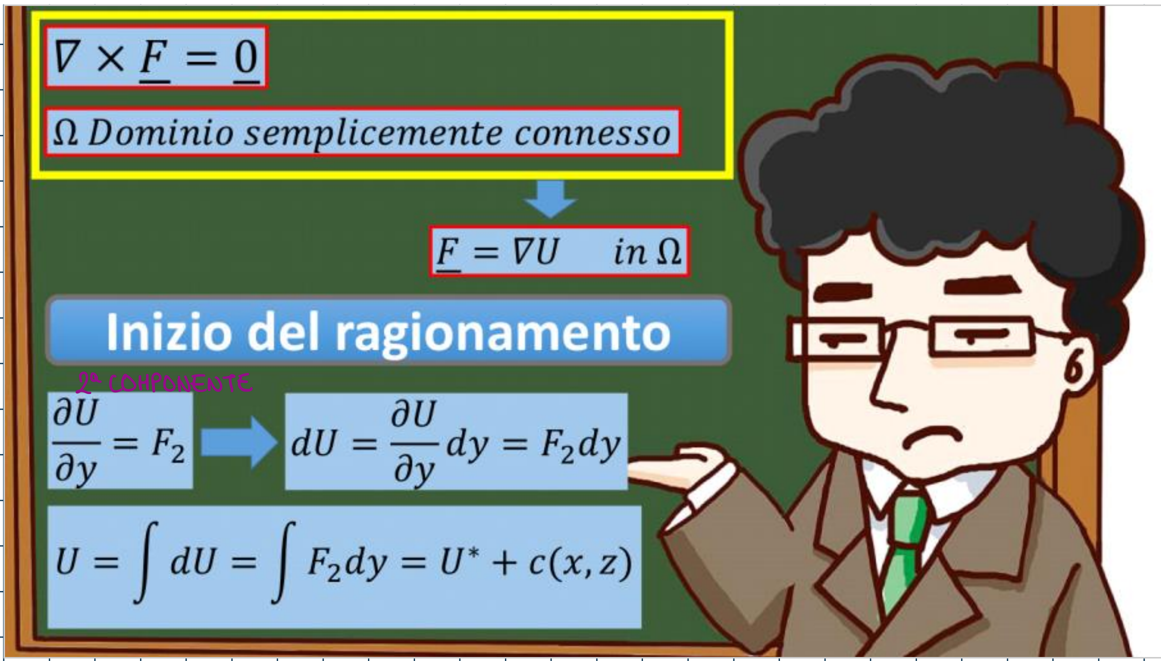
ESEMPIO:
$\oint_\gamma \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \circ (dx, dy) = 0$
perché costruisco una curva che "aggira" il punto di discontinuità
PUNTO DI DISCONTINUITÁ
γ
y
x

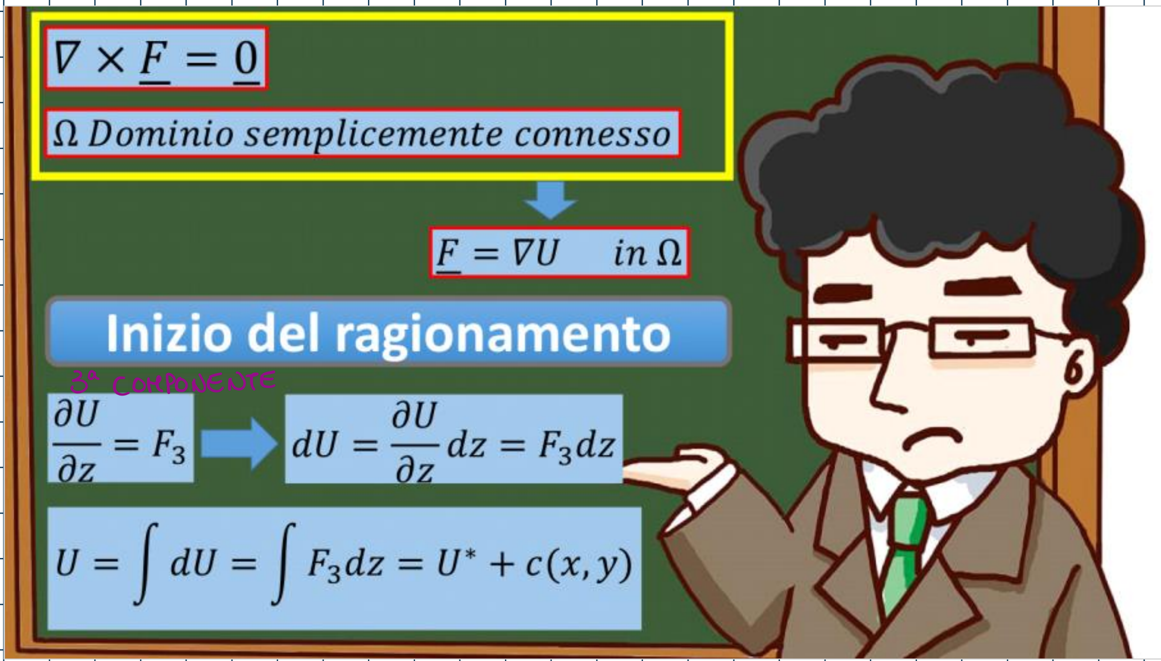


$\nabla \times \underline{F} = \underline{0}$
CAMPO CONSERVATIVO
Ω Dominio semplicemente connesso
$\underline{F} = \nabla U \quad in\ \Omega$
Come determinare il Potenziale Scalare U?



$\nabla \times \underline{F} = \underline{0}$
Ω Dominio semplicemente connesso
$\underline{F} = \nabla U \quad in\ \Omega$
Inizio del ragionamento
derivata parziale di U rispetto a x
$\frac{\partial U}{\partial x} = F_1$
1^a COMPONENTE
differenziale di U
$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx = F_1 dx$
$U = \int dU = \int F_1 dx = U^* + c(y, z)$
UNA FUNZIONE
Costante rispetto a x in funzione di y e z





ESEMPIO:

$\underline{F}(x,y,z) = (e^x \cos y + yz,\ xz - e^x \operatorname{sen} y,\ xy)$

campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$

non ci sono
- denominatori
- radici
- ⋮
- logaritmi

NON ci sono punti di discontinuità

$\underline{F}(x,y,z)$ DEFINITA $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

DUNQUE

DOMINIO SEMPLICEMENTE CONNESSO

è SEMPLICEMENTE CONNESSO

Domanda: Il campo è IRROTAZIONALE?

$\nabla \times \underline{F} = \underline{0}$?

Confronto le derivate parziali:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x \\ y = y \\ -e^x \operatorname{sen} y + z = z - e^x \operatorname{sen} y \end{cases}$$

$$\underline{F}(x,y,z) = \left(e^x \cos y + yz,\ xz - e^x \sin y,\ xy\right)$$

$\underline{F}(x,y,z)$ DEFINITA $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

DOMINIO SEMPLICEMENTE CONNESSO

dunque:

$\underline{F}(x,y,z)$ É UN CAMPO CONSERVATIVO

e perciò:

$$\omega(x,y,z) = F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz =$$

$$= \left(e^x \cos y + yz\right)dx + \left(xz - e^x \sin y\right)dy + xy\,dz$$

perciò:

É UNA FORMA DIFFERENZIALE ESATTA

(É ANCHE CHIUSA poiché F é IRROTAZIONALE)

DETERMINAZIONE DI $U(x,y,z)$

* potrei partire da z e derivo poi per x e y o potrei partire da y e poi derivo per z e x

1° STEP: integrazione rispetto a x

$$U(x,y,z) = \int \left(e^x \cos y + yz\right)dx =$$

espressione temporanea di U

$$= e^x \cos y + xyz + c_1(y,z)$$

É costante di integrale indefinito ma in funzione di y e z

2° STEP: $\frac{dU}{dy} = F_2$

$$\frac{\partial\left(e^x \cos y + xyz + c_1(y,z)\right)}{\partial y} = F_2 = xz - e^x \sin y$$

$$\Downarrow$$

$$-e^x \sin y + xz + \frac{\partial c_1(y,z)}{\partial y} = -e^x \sin y + xz$$

$$\frac{\partial}{\partial y} c_1(y,z) = 0 \Rightarrow c_1(y,z) = c_2(z)$$

Costante rispetto alla variabile d'integrazione y ma in funzione della variabile rimasta z

L'espressione temporanea è diventata:

$$U(x,y,z) = e^x \cos y + xyz + c_2(z)$$

3° STEP: $\frac{dU}{dz} = F_3$

$$\frac{\partial\left(e^x \cos y + xyz + c_2(z)\right)}{\partial z} = F_3 = xy$$

$$xy + \frac{d\,c_2(z)}{dz} = xy$$

$$\frac{d\,c_2(z)}{dz} = 0 \Rightarrow c_2(z) = K$$

Diventa una costante

L'espressione temporanea è diventata:

$$U(x,y,z) = e^x \cos y + xyz + K$$

si annulla poi nei calcoli

VERIFICA DEI CALCOLI

Cosa deve risultare:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = e^x \cos y + yz = F_1 \quad \text{OK}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -e^x \sin y + xz = F_2 \quad \text{OK}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = xy = F_3 \quad \text{OK}$$

DUNQUE:

SIANO $A \equiv (0,0,0)$ E $B \equiv (1,1,1)$

$$L_{AB} = \int_A^B \underline{F} \circ d\underline{r} = U(B) - U(A) =$$

$$= e\cos(1) + 1 + K - (1 + K) = e\cos(1)$$

ESEMPIO: F_1 F_2

ESEMPIO:

$\underline{F}(x,y) = (\overbrace{2x+5y^3}^{F_1})\hat{i} + (\overbrace{15xy^2+2y}^{F_2})\hat{j}$

campo bidimensionale

$F_1 = 2x+5y^3 \qquad F_2 = 15xy^2+2y$

1) DOMINIO: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

DOMINIO SEMPLICEMENTE CONNESSO

2) CHECK SU IRROTAZIONALITÁ

$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 15y^2$ } deve essere uguale a { $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 15y^2$

$\underline{F}(x,y)$ È UN CAMPO CONSERVATIVO

$\omega(x,y) = (2x+5y^3)dx + (15xy^2+2y)dy$

È UNA FORMA DIFFERENZIALE ESATTA

3) DETERMINAZIONE DI $U(x,y)$

INTEGRO RISPETTO A x

1 $U(x,y) = \int F_1\,dx = \int (2x+5y^3)dx =$

$= \boxed{x^2+5xy^3+c(y)}$ Espressione Temporanea

DERIVO RISPETTO A Y

2 $\frac{\partial(x^2+5xy^3+c(y))}{\partial y} = 15xy^2+2y$

$15xy^2 + \frac{dc(y)}{dy} = 15xy^2 + 2y$

$\frac{dc(y)}{dy} = 2y \Rightarrow c(y) = y^2 + K$

$\boxed{U(x,y) = x^2+5xy^3+y^2+K}$

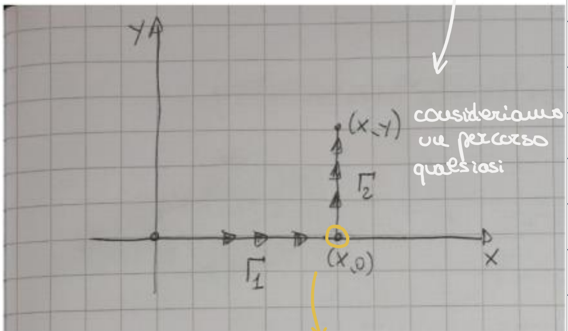
!! METODO ALTERNATIVO DI CALCOLO PER $U(x,y)$

$$\int_\Gamma \underline{F} \circ d\underline{r} = U(x,y) - U(0,0)$$

sapendo che sia conservativo

METODO ALTERNATIVO DI CALCOLO PER $U(x,y)$

$$\int_\Gamma \underline{F} \circ d\underline{r} = U(x,y) - U(0,0)$$



percorso regolare a tratti

a Tratti

È UNA FORMA DIFFERENZIALE ESATTA

$\underline{F}(x,y) = (2x+5y^3)\,\hat{i} + (15xy^2+2y)\,\hat{j}$

$\Gamma_1: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad t \in [0,x] \qquad \begin{matrix} dx = dt \\ dy = 0 \end{matrix}$

$$\int_{\Gamma_1} \underline{F} \circ d\underline{r} = \int_0^x 2t\,dt = x^2$$

$\Gamma_2: \begin{cases} x = x \text{ (COSTANTE)} \\ y = t \end{cases} \quad t \in [0,y] \qquad \begin{matrix} dx = 0 \\ dy = dt \end{matrix}$ NON $dx = dt$

$$\int_{\Gamma_2} (15xt^2+2t)\,dt = \int_0^y (15xt^2+2t)\,dt = 5xy^3 + y^2$$

$\Gamma_1 + \Gamma_2$

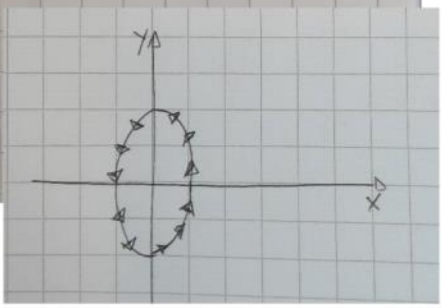
$U(x,y) - U(0,0) = x^2 + 5xy^3 + y^2$

ESERCIZIO:

$$\oint_\gamma (e^x \operatorname{sen} y + 3y)\,dx + (e^x \cos y + 2x - 2y)\,dy$$

INTEGRALE DI FORMA DIFFERENZIALE

$\gamma: \; x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$



DOMINIO SEMPLICEMENTE CONNESSO

$$\oint_\gamma (e^x \operatorname{sen} y + 3y)\,dx + (e^x \cos y + 2x - 2y)\,dy$$

1) CHECK SU IRROTAZIONALITÁ

derivata della prima componente rispetto a y

$$\frac{\partial (e^x \operatorname{sen} y + 3y)}{\partial y} = e^x \cos y + 3$$

lo scrivo come $2y + y$

derivata della seconda componente rispetto a x

$$\frac{\partial (e^x \cos y + 2x - 2y)}{\partial x} = e^x \cos y + 2$$

È ROTAZIONALE !!!

$$\nabla \times \underline{F} \neq \underline{0}$$

Se i due termini noti fossero stati uguali sarebbe stato irrotazionale

$$\oint_\gamma (e^x \operatorname{sen} y + 3y)\,dx + (e^x \cos y + 2x - 2y)\,dy$$

ogni campo è dato da parte conservativa e parte non conservativa

$$\underline{F}(x,y) = \underline{F}_C(x,y) + \underline{F}_{NC}(x,y)$$

$$\underline{F}_C(x,y) = (e^x \operatorname{sen} y + 2y,\ e^x \cos y + 2x - 2y)$$

quello che manca a Fc è una y dunque lo aggiungo tramite Fnc

$$\underline{F}_{NC} = (y, 0)$$

DUNQUE:

PERCORSO CHIUSO

$$\oint_\gamma \underline{F}\, d\underline{r} = \underbrace{\int_\gamma \underline{F}_C \circ d\underline{r}}_{=0} + \int_\gamma \underline{F}_{NC} \circ d\underline{r} = \int_\gamma \underline{F}_{NC} \circ d\underline{r}$$

CALCOLO DI $\int_\gamma \underline{F}_{NC} \circ d\underline{r} = \int_\gamma y\,dx$

$F_{NC} = (y, 0)$

Coordinate ellittiche

$$\gamma: \begin{cases} x = \cos t \\ y = 2 \operatorname{sen} t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \quad \begin{aligned} dx &= -\operatorname{sen} t\, dt \\ dy &= 2\cos t\, dt \end{aligned}$$

$\int_\gamma y\,dx$

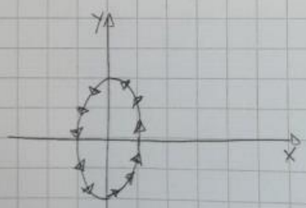
$$\int_0^{2\pi} (-2 \operatorname{sen}^2 t)\,dt =$$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2 \alpha$

$-2\operatorname{sen}^2 \alpha = \cos 2\alpha - 1$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos 2t - 1)\,dt = \left[\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t - t\right]_0^{2\pi} =$$

$$= -2\pi$$



6.26 Dimostrare che le seguenti forme differenziali sono esatte nel loro insieme di definizione e determinare una loro primitiva f.

(a) $\omega = (\cos y - y^3 \operatorname{sen} x)\,dx + (3y^2 \cos x - x \operatorname{sen} y)\,dy$

(b) $\omega = y(y + 3x^2)\,dx + x(2y + x^2)\,dy$

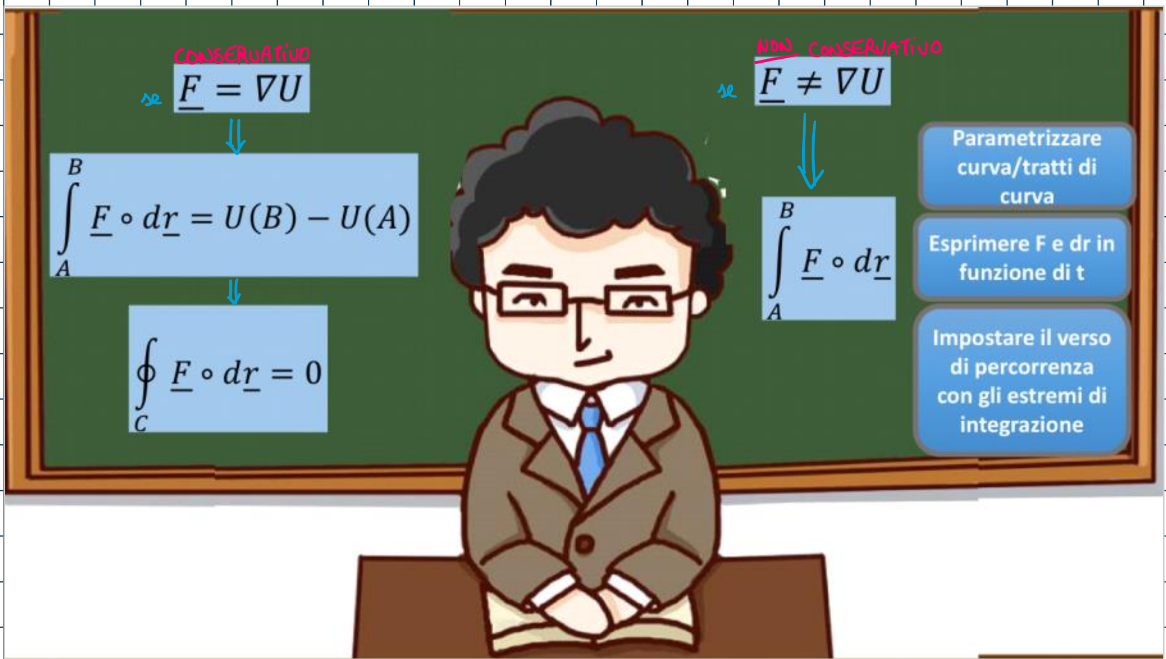
(c) $\omega = (1 + \cos x \cos y - y^2 \operatorname{sen} x)\,dx + (2y \cos x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y)\,dy$

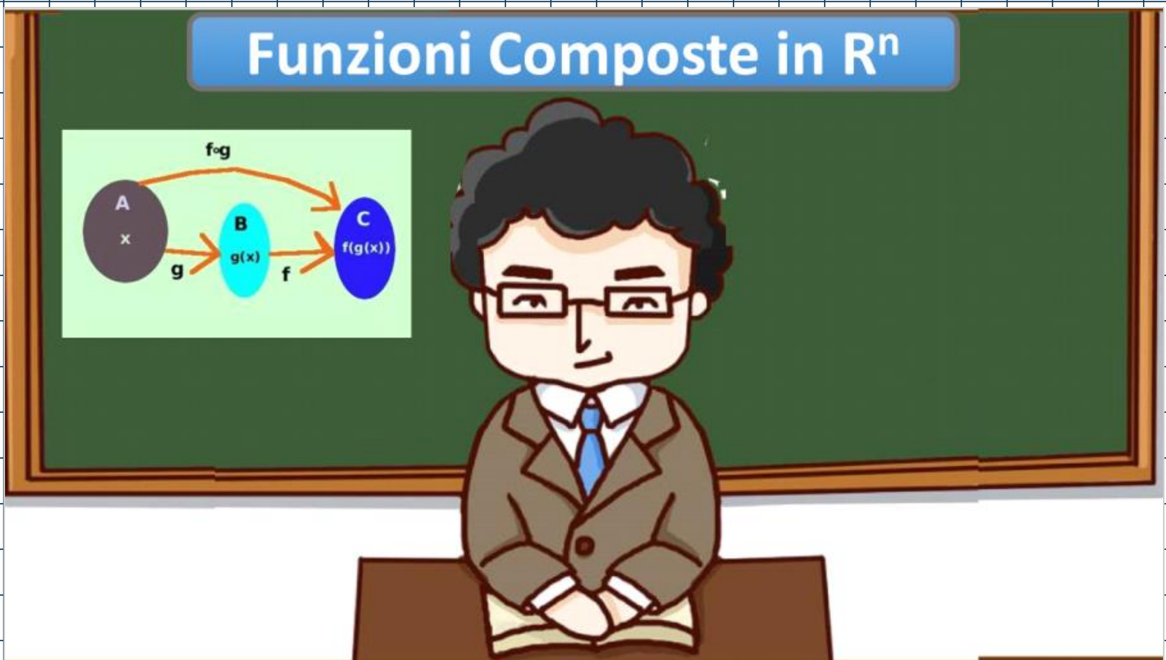
(d) $\omega = (\operatorname{sen} y - y \cos x)\,dx + (x \cos y - \operatorname{sen} x)\,dy$

(e) $\omega = (\log y + \cos x)\,dx + (x/y)\,dy$

(f) $\omega = (y^2 - 3y \cos x)\,dx + (2xy - 3 \operatorname{sen} x)\,dy + 4z^3\,dz$

(g) $\omega = [y \cos(x+z) - \operatorname{sen}(x+y)]\,dx + [\operatorname{sen}(x+z) - \operatorname{sen}(x+y)]\,dy + y \cos(x+z)\,dz$





FUNZIONI COMPOSTE

IN ANALISI 1

$$A \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{f} B \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{g} C \subseteq \mathbb{R}$$

$$h = g \circ f = g(f(x))$$

$$h(x) = g(f(x))$$

$$\frac{d\,h(x)}{dx} = \frac{d\,g(f(x))}{d\,f(x)} \cdot \frac{d\,f(x)}{dx}$$

Inoltre:

$$h(x) = e^{\operatorname{sen} x} \longrightarrow \begin{cases} g = e^{(\ )} \\ f = \operatorname{sen} x \end{cases}$$

$$h'(x) = e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x$$

IN ANALISI 2

L'immagine di f è dominio di g (come dimensione)

$$A \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} B \subseteq \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} C \subseteq \mathbb{R}^k$$

$$\underline{h} = \underline{g} \circ \underline{f} \qquad \underline{h} = (h_1, h_2, \dots h_k)$$

$$\underline{f} = (f_1, f_2, \dots f_m) \qquad \underline{g} = (g_1, g_2, \dots g_k)$$

$$\underline{\underline{J}}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & & \\ & & \ddots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad m \times n$$

$$\underline{\underline{J}}g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial f_1} & \frac{\partial g_1}{\partial f_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial f_m} \\ \vdots & \frac{\partial g_2}{\partial f_2} & & \\ & & \ddots & \\ \frac{\partial g_k}{\partial f_1} & \cdots & & \frac{\partial g_k}{\partial f_m} \end{pmatrix} \quad k \times m$$

La matrice che mette insieme le derivate parziali è detta **MATRICE JACOBIANA** ed è detta anche **MATRICE DEI GRADIENTI** dove ogni riga è associata al gradiente della generica componente rispetto a tutte le variabili indipendenti

$$\underline{\underline{J}}h = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial h_k}{\partial x_1} & \cdots & & \frac{\partial h_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad k \times n$$

$$\boxed{\underset{(k \times n)}{\underline{\underline{J}}h} = \underset{(k\times m)\times(m \times n)}{\underline{\underline{J}}g \circ \underline{\underline{J}}f}}$$

PROPRIETÀ DELL'ALGEBRA

$$\frac{\partial h_1}{\partial x_1} = \frac{\partial g_1}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_1}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \dots \frac{\partial g_1}{\partial f_m} \cdot \frac{\partial f_m}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j} = \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial f_s} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial x_j}$$

diventa una sommatoria

ESEMPIO

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$f(x,y) = (\underbrace{e^{xy}}_{f_1}, \underbrace{\operatorname{sen}(xy)}_{f_2}, \underbrace{x+y}_{f_3})$$

$$g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$g(u,v,w) = (\underbrace{\overset{f_1\ f_2\ f_3}{u\,v\,w}}_{g_1}, \underbrace{\overset{f_1+f_2+f_3}{u+v+w}}_{g_2})$$

$$u = f_1 \qquad v = f_2 \qquad w = f_3$$

$$h = g \circ f = (\underbrace{e^{xy} \cdot \operatorname{sen}(xy) \cdot (x+y)}_{h_1}, \underbrace{e^{xy} + \operatorname{sen}(xy) + x + y}_{h_2})$$

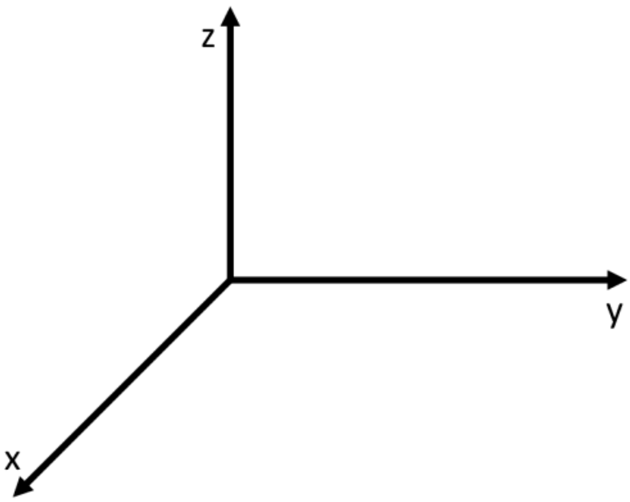
$$\frac{\partial h_1}{\partial x_1} = \frac{\partial g_1}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_1}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial g_1}{\partial f_3} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial x_1} =$$

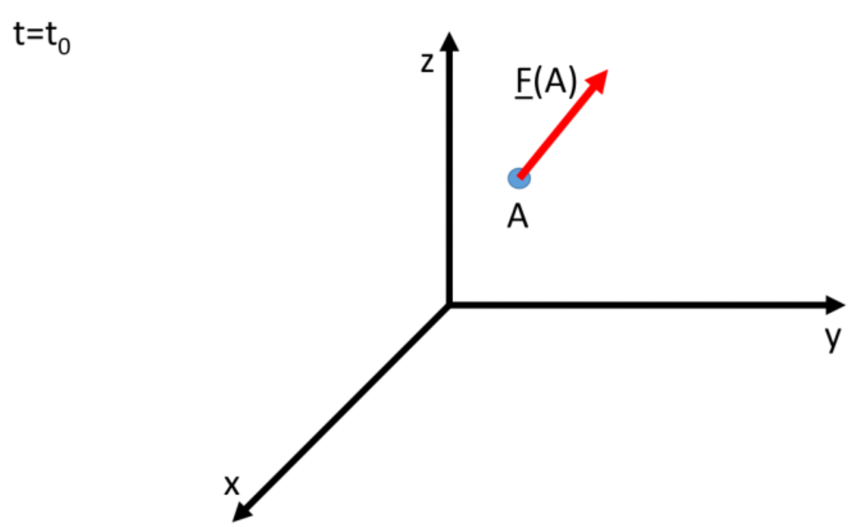
$$= vw \cdot y e^{xy} + uw \cdot y\cos(x-y) + uv \cdot 1 =$$

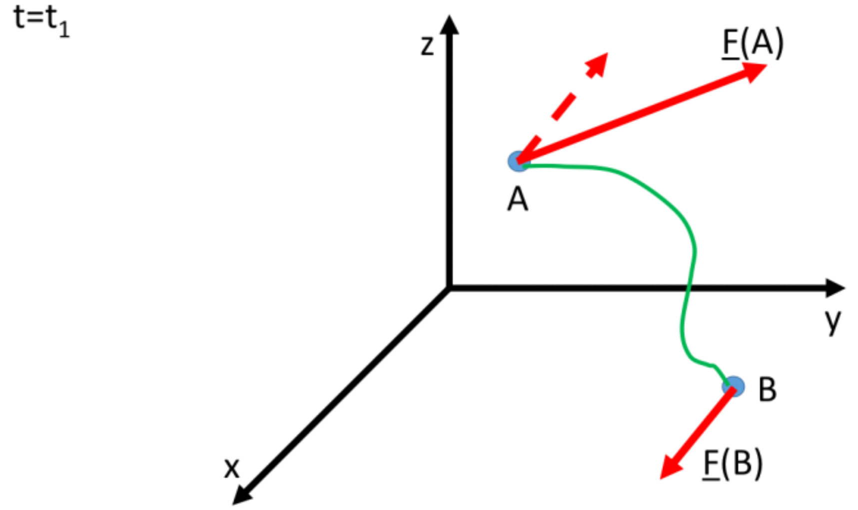
$$= y e^{xy} \cdot \operatorname{sen}(x-y) \cdot [x+y] + e^{xy} \cdot (x+y) \cdot y\cos(x-y) +$$

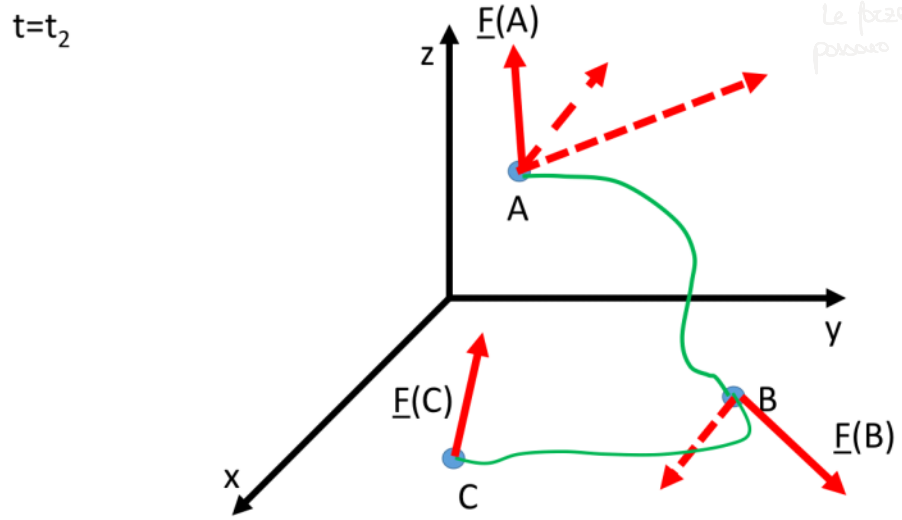
$$+ e^{xy} \cdot \operatorname{sen}(x-y)$$

CONTINUARE DA SOLI ....

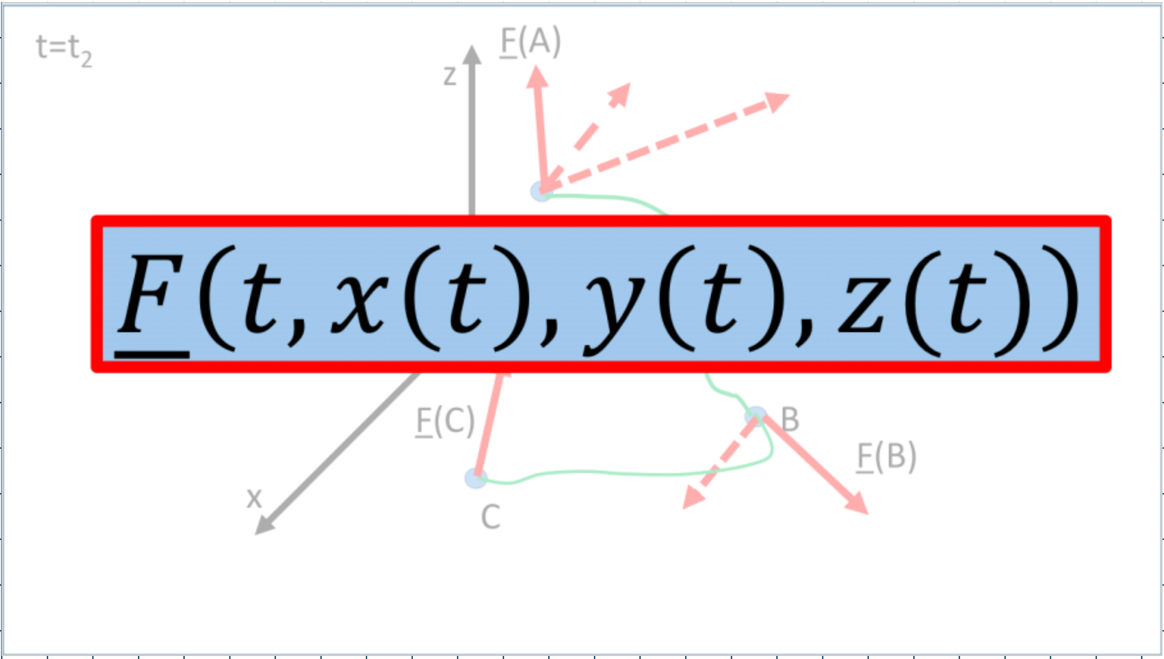








Le forze di campi in un punto possono variare



$$\underline{F}(t, x(t), y(t), z(t))$$

Si considera una variabile indipendente tempo t, che definisce un percorso (traiettoria, o curva) in R4, ovvero una funzione $t \to (t, x(t), y(t), z(t))$ e successivamente un campo vettoriale associato a tale percorso. In dettaglio:

$$t \to (t, x(t), y(t), z(t)) \to \vec{F}(t, x(t), y(t), z(t)) = \big(F_1(t, x(t), y(t), z(t)), F_2(t, x(t), y(t), z(t)), F_3(t, x(t), y(t), z(t))\big)$$

$$\frac{d\vec{F}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dF_1}{dt} \\ \frac{dF_2}{dt} \\ \frac{dF_3}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial t} & \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial t} & \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial t} & \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{dz}{dt} \\ \frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{\partial F_2}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{dz}{dt} \\ \frac{\partial F_3}{\partial t} + \frac{\partial F_3}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F_3}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\frac{dz}{dt} \end{pmatrix}$$

focalizzando l'attenzione ad esempio, su F1 (analogamente, possiamo analizzare F2 ed F3):

$$\frac{dF_1}{dt} = \frac{\partial F_1}{\partial t} + \boxed{\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{dz}{dt}}$$

Derivata totale della grandezza scalare F1 rispetto al tempo t: indica la variazione **complessiva** di F1 nel tempo, e tiene conto di tue aspetti: 1) F1 può variare (in modulo, direzione e verso) focalizzando l'attenzione su un punto preciso dello spazio e osservando cosa succede nel tempo t (**approccio euleriano**); 2) F1 può variare seguendo il singolo percorso di una particella (**approccio lagrangiano**)

$$\frac{d\underline{F}}{dt} = \frac{\partial \underline{F}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{F}}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \underline{F}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \underline{F}}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

Esempio pratico:

1. se io focalizzo l'attenzione sulla porta dell'aula (ovvero mi concentro su un punto specifico dello spazio) e annoto sul quaderno quanti studenti entrano alle 8:30, quanti ne entrano alle 8:35, quanti ne entrano alle 8:40, ecc... sto applicando un approccio di tipo EULERIANO;
2. se, invece, seguo nel tempo gli spostamenti di uno specifico studente all'interno dell'aula, allora sto applicando un approccio di tipo LAGRANGIANO.

Casi particolari:

$\frac{\partial F_1}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dF_1}{dt} = \frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{dz}{dt}$ e il campo si definisce <u>**stazionario**</u>, nel senso che, da un punto di vista euleriano, in un generico punto (x0, y0, z0) la grandezza F1 non cambia le sue proprietà nel tempo, ma può assumere valori diversi in punti diversi dello spazio.

Ovvero:

F1(x0, y0, z0) ≠ F1(x1, y1, z1)

Ciò vuol dire, riprendendo l'esempio pratico di prima, che dalla porta dell'aula entra sempre lo stesso numero di studenti nell'unità di tempo, indipendentemente dall'orario, ma il numero (costante) di studenti nell'unità di tempo che entra dalla porta laterale in alto alla gradinata può essere diverso.

Inoltre, quando $\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}, \frac{\partial F_1}{\partial y}, \frac{\partial F_1}{\partial z}\right) = (0,0,0)$,

oltre a $\frac{\partial F_1}{\partial t} = 0$, *allora* $\frac{dF_1}{dt} = 0$

e il campo si dice **COSTANTE** (caso particolare di campo stazionario), ovvero non ho dipendenza né dal tempo e né dallo spazio.

ANALISI 2 – MODULO 1

$f: A \subseteq \mathbf{R}^n \to B \subseteq \mathbf{R}^m$

LIMIT[redacted] FATTO

Metodo d[redacted]**ette, delle coordi**[redacted]**olari e sferiche,** [redacted]**aggiorazione**

INTEGR[redacted]**ONE**

Int[redacted] FATTO FATTO

Integrali [redacted] **(Calcolo di un Lavoro)**

Integrali di Superficie (Calcolo di un Flusso)

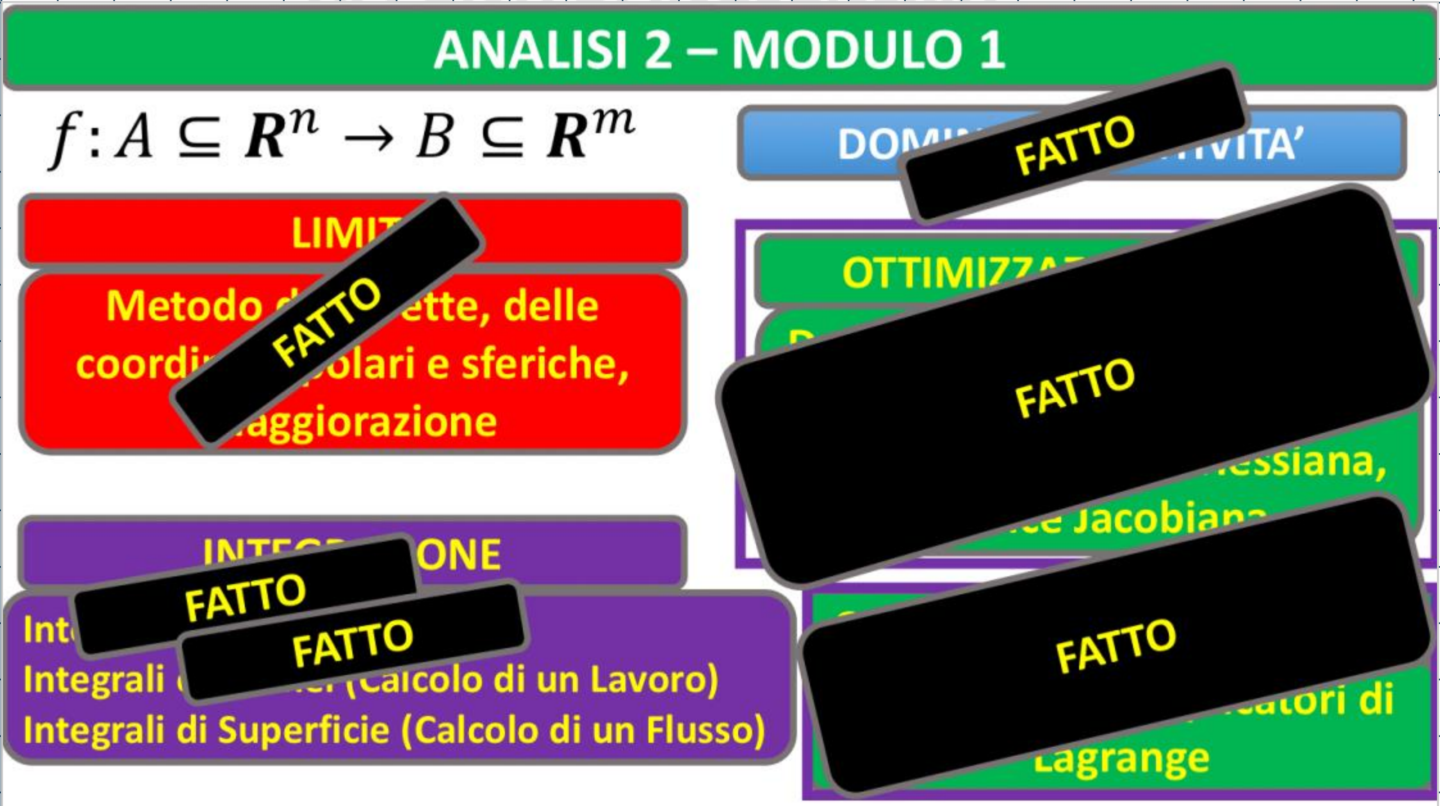
DOM[redacted] FATTO [redacted]**IVITA'**

OTTIMIZZA[redacted] FATTO [redacted]**essiana,** [redacted]**Jacobian**[redacted]

[redacted] FATTO [redacted]**atori di Lagrange**

Superficie ed integrali di superficie

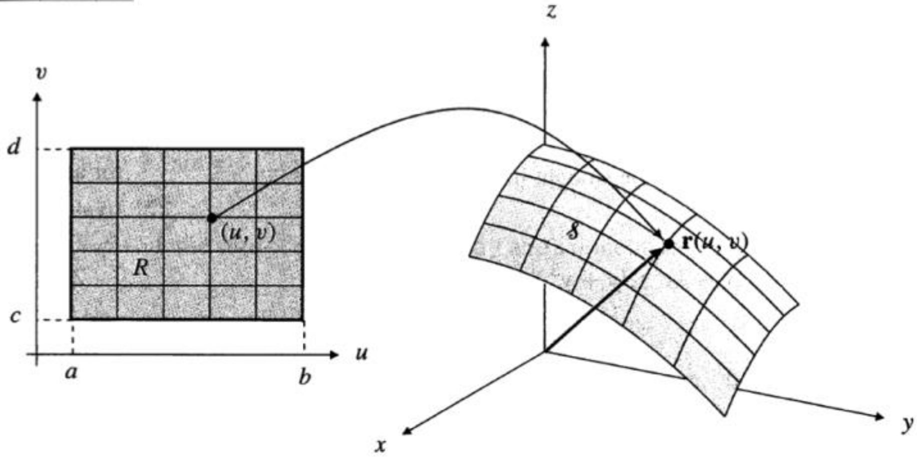
giovedì 12 novembre 2020 13:15



SUPERFICIE REGOLARE o superficie liscia

$\underline{\sigma}: K \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ → non per forza un volume ma una superficie piegata

$\underline{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$



PROPRIETÀ

1) $\underline{\sigma} \in C^1(\mathring{K})$, OVVERO σ_i $(i = 1, 2, 3)$ DEVONO ESSERE DI $C^1(\mathring{K})$ → le tre componenti

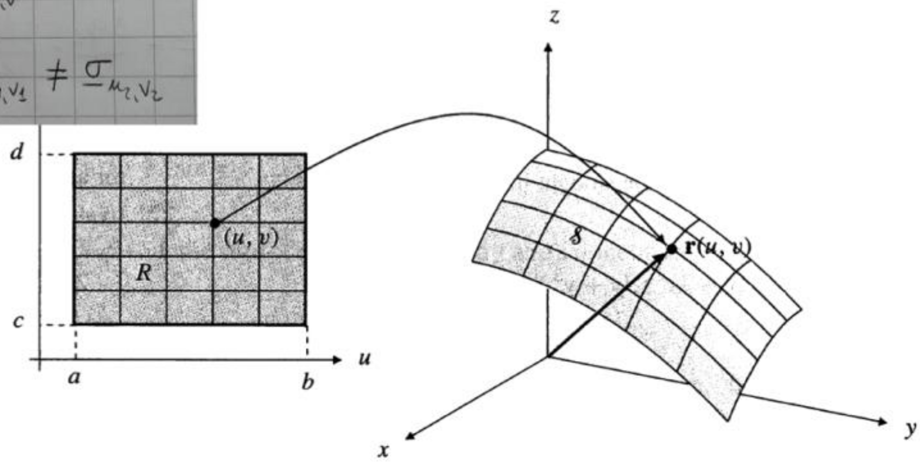
↓ applicazione lineari

2) $\underline{\sigma}$ INIETTIVA — presi due punti diversi del dominio, ad essi corrispondono due punti di immagine diversa

$(u, v) \longrightarrow (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \underline{\sigma}_{u,v}$

$(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2) \Rightarrow \underline{\sigma}_{u_1, v_1} \neq \underline{\sigma}_{u_2, v_2}$

3)
$$\underline{\underline{J}}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_1(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial \sigma_2(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_2(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial \sigma_3(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_3(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix}$$



La matrice Jacobiana $\underline{\underline{J}}(u,v)$ DEVE AVERE RANGO 2 → RANGO MASSIMO $\forall (u,v) \in \mathring{K}$

OVVERO LE DUE COLONNE DI $\underline{\underline{J}}(u,v)$ DEVONO ESSERE LINEARMENTE INDIPENDENTI

3)
$$\underline{\underline{J}}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_1(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial \sigma_2(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_2(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial \sigma_3(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_3(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix}$$

TRA POCO CAPIREMO IL SIGNIFICATO GEOMETRICO

z

La matrice Jacobiana

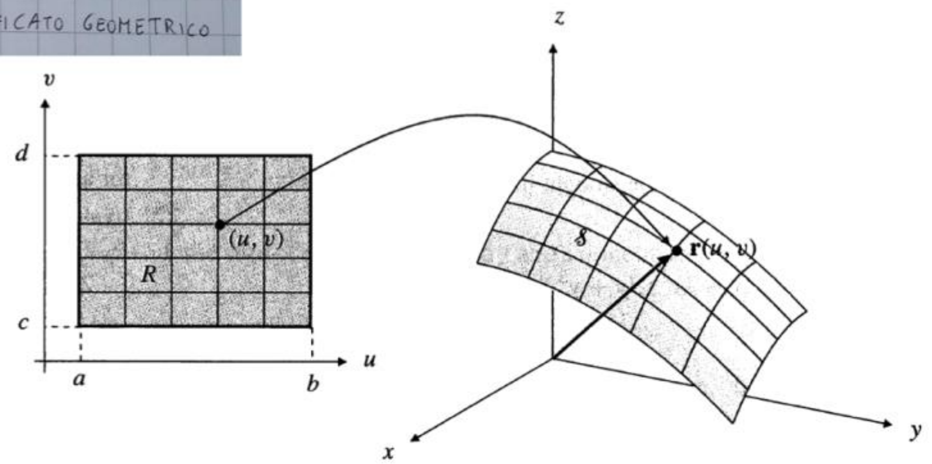
$\underline{\underline{J}}(u,v)$ DEVE AVERE RANGO 2 $\longrightarrow$ RANGO MASSIMO

$\forall (u,v) \in \mathring{K}$

OVVERO LE DUE COLONNE DI $\underline{\underline{J}}(u,v)$ DEVONO ESSERE LINEARMENTE INDIPENDENTI

3)
$$\underline{\underline{J}}(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \sigma_1(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial \sigma_1(u,v)}{\partial v} \\[2mm] \dfrac{\partial \sigma_2(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial \sigma_2(u,v)}{\partial v} \\[2mm] \dfrac{\partial \sigma_3(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial \sigma_3(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix}$$

TRA POCO CAPIREMO IL SIGNIFICATO GEOMETRICO



INTANTO:

è applicazione (u,v) che restituisce tre componenti

$$\underline{\sigma} : (u,v) \longrightarrow \left(\sigma_1(u,v), \sigma_2(u,v), \sigma_3(u,v)\right)$$

COORDINATE DI CIASCUN PUNTO

equivale a $\downarrow$

$$\underline{\sigma} : (u,v) \longrightarrow \left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right)$$

ANCHE UN CAMPO SCALARE

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}$$

È UNA SUPERFICIE 3-D

anche se non per forza ha un volume

COME PARAMETRIZZARE UN CAMPO SCALARE PER OTTENERE UNA RAPPRESENTAZIONE EQUIVALENTE IN TERMINI DI $\underline{\sigma}(u,v)$?

$$\underline{\sigma}(u,v): \begin{cases} \sigma_1(u,v) = x(u,v) = u \\ \sigma_2(u,v) = y(u,v) = v \\ \sigma_3(u,v) = z(u,v) = f(x,y) = f(u,v) \end{cases}$$

Posso trasformare una superficie in da R^2 a R^3

ESEMPIO

$$z = f(x,y) = x^2 + y^2$$

riparametrizzo

$$\underline{\sigma}(u,v): \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v^2 \end{cases}$$

$$z = x^3 - y + xy^2$$

riparametrizzo

$$\underline{\sigma}(u,v): \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^3 - v + uv^2 \end{cases}$$

$$\underline{\sigma}(u,v) \in C^1(\mathring{K}) \Rightarrow \begin{cases} x(u,v) \in C^1(\mathring{K}) \\ y(u,v) \in C^1(\mathring{K}) \\ z(u,v) \in C^1(\mathring{K}) \end{cases}$$

L'applicazione deve essere di classe C^1

superficie = campo scalare $f(x,y)$

* OVVERO $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ SONO CAMPI SCALARI DIFFERENZIABILI (IN BASE AL TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE), OVVERO LA SUPERFICIE $\underline{\sigma}(u,v)$ É DIFFERENZIABILE, E QUINDI IN UN INTORNO PICCOLO DI UN SUO PUNTO (x,y,z) LA SUPERFICIE É APPROSSIMABILE AL SUO PIANO TANGENTE

Equazione di un piano tangente:

$$(z - z_0) = a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

$$dz = a\,dx + b\,dy$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$d\underline{r}$ = Spostamento infinitesimo percorrendo lo spazio Tridimensionale

$$= (dx, dy, dz) = \left(dx, dy, \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) =$$

spezzo nei componenti

$$= dx\left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}\right) + dy\left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Se lo spostamento è infinitesimo, grazie al differenziale, è lo stesso se mi muovo sulla superficie o al suo piano tangente

$d\underline{r}$ = Spostamento infinitesimo percorrendo lo spazio Tridimensionale

$$= (dx, dy, dz) = \left(dx, dy, \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) =$$

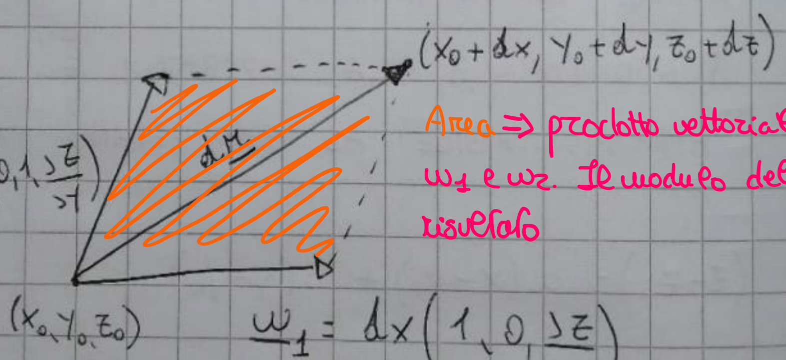
spezzo nei componenti

$$= dx\left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}\right) + dy\left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$= \underline{w}_1 + \underline{w}_2$$

Se lo spostamento è infinitesimo, grazie al differenziale, è lo stesso se mi muovo sulla superficie o sul suo piano tangente

$\underline{w}_2 = dy\left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$



Area ⇒ prodotto vettoriale w_1 e w_2. Il modulo del risultato

$\underline{w}_1 = dx\left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}\right)$

$\underline{W}_1$ E $\underline{W}_2$ DEVONO ESSERE LINEARMENTE INDIPENDENTI PER OTTENERE GRAFICAMENTE UNA SUPERFICIE, LA CUI AREA CORRISPONDE AL MODULO DEL PRODOTTO VETTORIALE TRA I DUE VETTORI:

$$dS = |\underline{w}_1 \times \underline{w}_2|$$

NON deve essere nulla dunque $\sin\theta \neq 0$ e dunque $\theta \neq 180°$ (cioè w_1 e w_2 non devono essere paralleli e linearmente dipendenti)

ORA, PARTENDO DALLA PARAMETRIZZAZIONE DI UN CAMPO SCALARE $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to B \subseteq \mathbb{R}$

$$\underline{\sigma}(u,v): \begin{cases} \sigma_1(u,v) = x(u,v) = u \\ \sigma_2(u,v) = y(u,v) = v \\ \sigma_3(u,v) = z(u,v) = z(x,y) \end{cases} \qquad \begin{aligned} dx &= du \\ dy &= dv \\ dz &= \frac{\partial \sigma_3}{\partial u} du + \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} dv \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial u} = 1 \qquad \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} = 1 \qquad \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} = 0 \qquad \frac{\partial \sigma_2}{\partial u} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{w}_1 &= du \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u}, \frac{\partial \sigma_2}{\partial u}, \frac{\partial \sigma_3}{\partial u} \right) \\ \underline{w}_2 &= dv \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial v}, \frac{\partial \sigma_2}{\partial v}, \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} \right) \end{aligned}\right\}$$

i due vettori, devono continuare ad essere linearmente indipendenti anche in questa forma

$$dS = \left\| \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} du & \frac{\partial \sigma_2}{\partial u} du & \frac{\partial \sigma_3}{\partial u} du \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} dv & \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} dv & \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} dv \end{vmatrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_3}{\partial u} \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} & \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} \end{vmatrix} \right\| \cdot du\, dv$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_3}{\partial u} \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} & \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} \end{pmatrix}$$

É LA MATRICE TRASPOSTA DI $\underline{\underline{J}}(u,v)$

matrice Jacobiana

Se una matrice ha rango n, anche la sua trasposta ha rango n

$$\underline{w}_1 = du \cdot \underline{T}_u \qquad \underline{T}_u = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u}, \frac{\partial \sigma_2}{\partial u}, \frac{\partial \sigma_3}{\partial u} \right)$$

VETTORI

$$\underline{w}_2 = dv \cdot \underline{T}_v \qquad \underline{T}_v = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial v}, \frac{\partial \sigma_2}{\partial v}, \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} \right)$$

$$dS = |\underline{w}_1 \times \underline{w}_2| = |\underline{T}_u \times \underline{T}_v| \, du \, dv$$

AREA DI S

$$\iint_S dS = \iint_D |\underline{T}_u \times \underline{T}_v| \, du \, dv$$

da CAMPO SCALARE a SUPERFICIE

$$\underline{\sigma}(u,v) = u\cdot\hat{i} + v\cdot\hat{j} + z(u,v)\cdot\hat{k}$$

$$= x\cdot\hat{i} + y\cdot\hat{j} + z(x,y)\cdot\hat{k}$$

$$\underline{T}_u = \left(1,\ 0,\ \frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$\underline{T}_v = \left(0,\ 1,\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$\underline{T}_u \times \underline{T}_v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial z}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\hat{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\hat{j} + \hat{k}$$

$$ds = |\underline{T}_u \times \underline{T}_v|\cdot du\,dv =$$

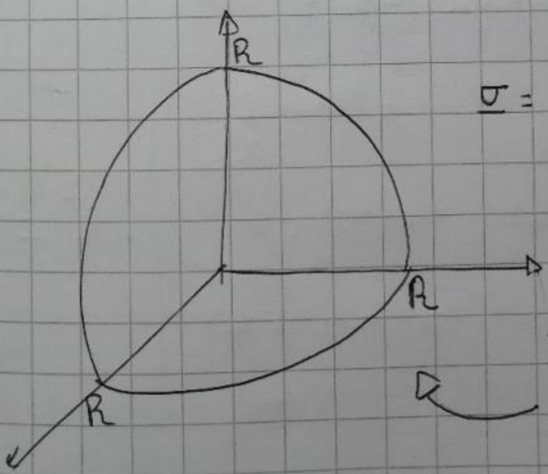
$$= \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\cdot dx\,dy =$$

$$= \sqrt{|\nabla f|^2 + 1}\cdot dx\,dy \qquad f(x,y) = z(x,y)$$

gradiente

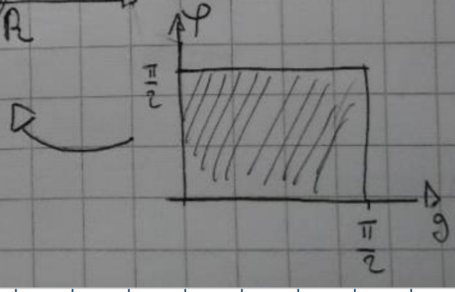
SFERA

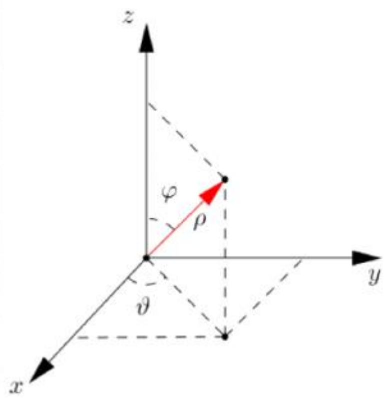
CALCOLO DELL'AREA DI UNA PORZIONE $\left(= \frac{1}{8}\right)$ DI SUPERFICIE SFERICA DI RAGGIO R E CENTRO $C = (0,0,0)$



Fissato

$$\underline{\sigma} = \begin{cases} x = R \operatorname{sen}\varphi \cos\vartheta \\ y = R \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\vartheta \\ z = R\cos\varphi \end{cases}$$





$$(\vartheta,\varphi) \rightarrow (R\,\text{sen}\,\varphi\cos\vartheta,\ R\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\vartheta,\ R\cos\varphi)$$

$$\underline{T}_\vartheta = \left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial\vartheta}, \frac{\partial\sigma_2}{\partial\vartheta}, \frac{\partial\sigma_3}{\partial\vartheta}\right) = \left(\frac{\partial x}{\partial\vartheta}, \frac{\partial y}{\partial\vartheta}, \frac{\partial z}{\partial\vartheta}\right) =$$

$$= R\left(-\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\vartheta,\ \text{sen}\,\varphi\cos\vartheta,\ 0\right)$$

$$\underline{T}_\varphi = \left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial\varphi}, \frac{\partial\sigma_2}{\partial\varphi}, \frac{\partial\sigma_3}{\partial\varphi}\right) = \left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}, \frac{\partial y}{\partial\varphi}, \frac{\partial z}{\partial\varphi}\right) =$$

$$= R\left(\cos\varphi\cos\vartheta,\ \cos\varphi\,\text{sen}\,\vartheta,\ -\text{sen}\,\varphi\right)$$

$$\underline{T}_\vartheta \times \underline{T}_\varphi = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\vartheta & \text{sen}\,\varphi\cos\vartheta & 0 \\ \cos\varphi\cos\vartheta & \cos\varphi\,\text{sen}\,\vartheta & -\text{sen}\,\varphi \end{vmatrix} \cdot R^2 =$$

$$= R^2\left[-\text{sen}^2\varphi\cdot\cos\vartheta\,\hat{i} - \text{sen}^2\varphi\,\text{sen}\,\vartheta\,\hat{j} - (\text{sen}^2\vartheta\cos\varphi\,\text{sen}\,\varphi + \cos^2\vartheta\cos\varphi\,\text{sen}\,\varphi)\cdot\hat{k}\right]$$

$$= R^2\left(-\text{sen}^2\varphi\cos\vartheta,\ -\text{sen}^2\varphi\,\text{sen}\,\vartheta,\ -\cos\varphi\,\text{sen}\,\varphi\right) =$$

$$= R^2\,\text{sen}\,\varphi\left(-\text{sen}\,\varphi\cos\vartheta,\ -\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\vartheta,\ -\cos\varphi\right)$$

$$(\vartheta,\varphi) \rightarrow (R\,\text{sen}\,\varphi\cos\vartheta,\ R\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\vartheta,\ R\cos\varphi)$$

$$\underline{T}_\vartheta = \left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial\vartheta}, \frac{\partial\sigma_2}{\partial\vartheta}, \frac{\partial\sigma_3}{\partial\vartheta}\right) = \left(\frac{\partial x}{\partial\vartheta}, \frac{\partial y}{\partial\vartheta}, \frac{\partial z}{\partial\vartheta}\right) =$$

$$= R\left(-\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\vartheta,\ \text{sen}\,\varphi\cos\vartheta,\ 0\right)$$

$$\underline{T}_\varphi = \left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial\varphi}, \frac{\partial\sigma_2}{\partial\varphi}, \frac{\partial\sigma_3}{\partial\varphi}\right) = \left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}, \frac{\partial y}{\partial\varphi}, \frac{\partial z}{\partial\varphi}\right) =$$

$$= R\left(\cos\varphi\cos\vartheta,\ \cos\varphi\,\text{sen}\,\vartheta,\ -\text{sen}\,\varphi\right)$$

$$\underline{T}_\vartheta \times \underline{T}_\varphi = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\vartheta & \text{sen}\,\varphi\cos\vartheta & 0 \\ \cos\varphi\cos\vartheta & \cos\varphi\,\text{sen}\,\vartheta & -\text{sen}\,\varphi \end{vmatrix} \cdot R^2 =$$

$$|\underline{T}_\vartheta \times \underline{T}_\varphi| = R^2\,\text{sen}\,\varphi\cdot\sqrt{\text{sen}^2\varphi\cos^2\vartheta + \text{sen}^2\varphi\,\text{sen}^2\vartheta + \cos^2\varphi} =$$

$$= R^2\,\text{sen}\,\varphi\cdot\sqrt{\text{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi} = R^2\,\text{sen}\,\varphi$$

$$S = \iint_D R^2\,\text{sen}\,\varphi\,d\varphi\,d\vartheta = R^2\int_0^{\pi/2}\text{sen}\,\varphi\,d\varphi\cdot\int_0^{\pi/2}d\vartheta =$$

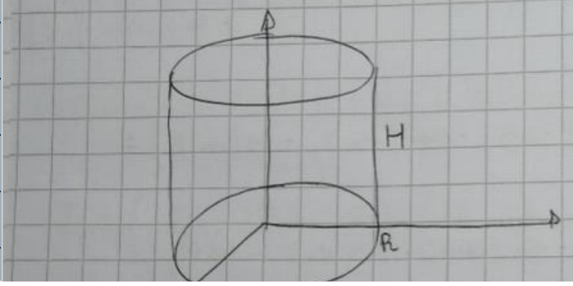
$$= R^2\cdot\frac{\pi}{2}$$

AREA DI TUTTA LA SUPERFICIE SFERICA

$$8\cdot R^2\cdot\frac{\pi}{2} = 4\pi R^2$$

CILINDRO:

CALCOLO DELLA SUPERFICIE DI UN CILINDRO



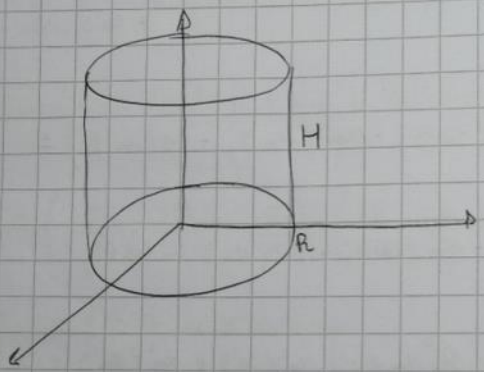
PARAMETRIZZAZIONE DI S1

$$S1 \Rightarrow \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\vartheta \\ z = 0 \end{cases} \qquad \rho\in[0,R] \quad \vartheta\in[0,2\pi]$$

$$\underline{T}_\rho = \left(\frac{\partial x}{\partial\rho}, \frac{\partial y}{\partial\rho}, \frac{\partial z}{\partial\rho}\right) = (\cos\vartheta,\ \text{sen}\,\vartheta,\ 0)$$

CILINDRO:

CALCOLO DELLA SUPERFICIE DI UN CILINDRO



SUPERFICIE REGOLARE A TRATTI

$S1 \to$ BASE CIRCOLARE INFERIORE

$S2 \to$ BASE CIRCOLARE SUPERIORE

$S3 \to$ SUPERFICIE LATERALE

PARAMETRIZZAZIONE DI $S1$

$$S1 \Rightarrow \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta \\ z = 0 \end{cases} \qquad \rho \in [0, R] \quad \vartheta \in [0, 2\pi]$$

$$\underline{T}_\rho = \left(\frac{\partial x}{\partial \rho}, \frac{\partial y}{\partial \rho}, \frac{\partial z}{\partial \rho}\right) = (\cos\vartheta, \mathrm{sen}\,\vartheta, 0)$$

$$\underline{T}_\vartheta = \left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta}, \frac{\partial y}{\partial \vartheta}, \frac{\partial z}{\partial \vartheta}\right) = (-\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta, \rho\cos\vartheta, 0)$$

$$\underline{T}_\rho \times \underline{T}_\vartheta = \begin{vmatrix} i & \hat{j} & k \\ \cos\vartheta & \mathrm{sen}\,\vartheta & 0 \\ -\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta & \rho\cos\vartheta & 0 \end{vmatrix} = \rho\hat{K}$$

$$dS_1 = |\underline{T}_\rho \times \underline{T}_\vartheta|\, d\rho\, d\vartheta = \rho\, d\rho\, d\vartheta$$

$$S_1 = \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho\, d\rho\, d\vartheta = \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta = \pi R^2$$

CALCOLO DI S2 É ANALOGO

$$S2 \Rightarrow \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta \\ z = H \end{cases}$$

. . .

CALCOLO DI S3

$$S3 \Rightarrow \begin{cases} x = R\cos\vartheta \\ y = R\,\mathrm{sen}\,\vartheta \\ z = z \end{cases} \qquad \vartheta \in [0, 2\pi] \quad z \in [0, H]$$

$$\underline{T}_\vartheta = \left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta}, \frac{\partial y}{\partial \vartheta}, \frac{\partial z}{\partial \vartheta}\right) = \left(-R\sin\vartheta, R\cos\vartheta, 0\right)$$

$$\underline{T}_z = \left(\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial z}{\partial z}\right) = \left(0, 0, 1\right)$$

$$\underline{T}_\vartheta \times \underline{T}_z = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -R\sin\vartheta & R\cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(R\cos\vartheta, R\sin\vartheta\right)$$

$$\left|\underline{T}_\vartheta \times \underline{T}_z\right| = R$$

$$\underline{T}_\vartheta = \left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta}, \frac{\partial y}{\partial \vartheta}, \frac{\partial z}{\partial \vartheta}\right) = \left(-R\sin\vartheta, R\cos\vartheta, 0\right)$$

$$\underline{T}_z = \left(\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial z}{\partial z}\right) = \left(0, 0, 1\right)$$

$$dS_3 = \left|\underline{T}_\vartheta \times \underline{T}_z\right| d\vartheta\, dz = R\, d\vartheta\, dz$$

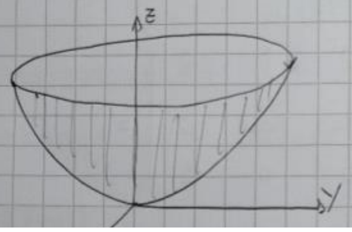
$$S_3 = \int_0^H \int_0^{2\pi} R\, dz\, d\vartheta = 2\pi R \cdot H$$

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot H$$

PARABOLOIDE i

CALCOLO DELL' AREA DEL PARABOLOIDE

$$f(x,y) = x^2 + y^2 = z(x,y)$$



$$(\rho, \vartheta) \rightarrow (\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta, \rho^2)$$

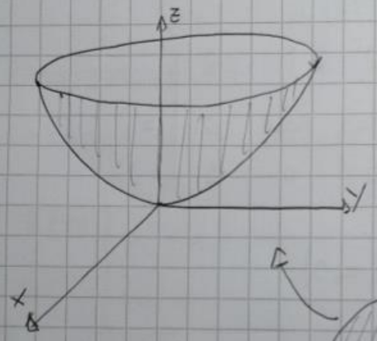
$$\underline{T}_\rho = \left(\frac{\partial x}{\partial \rho}, \frac{\partial y}{\partial \rho}, \frac{\partial z}{\partial \rho}\right) = \left(\cos\vartheta, \sin\vartheta, 2\rho\right)$$

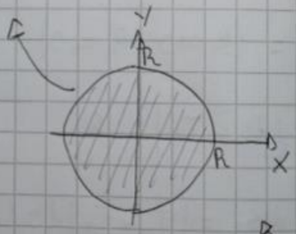
$$\underline{T}_\vartheta = \left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta}, \frac{\partial y}{\partial \vartheta}, \frac{\partial z}{\partial \vartheta}\right) = \left(-\rho\sin\vartheta, \rho\cos\vartheta, 0\right)$$

PARABOLOIDE 1

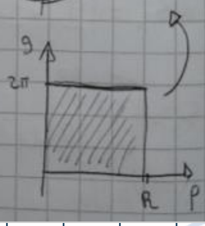
CALCOLO DELL' AREA DEL PARABOLOIDE

$$f(x,y) = x^2+y^2 = z(x,y)$$





$$\sigma: \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = \rho^2 \end{cases}$$



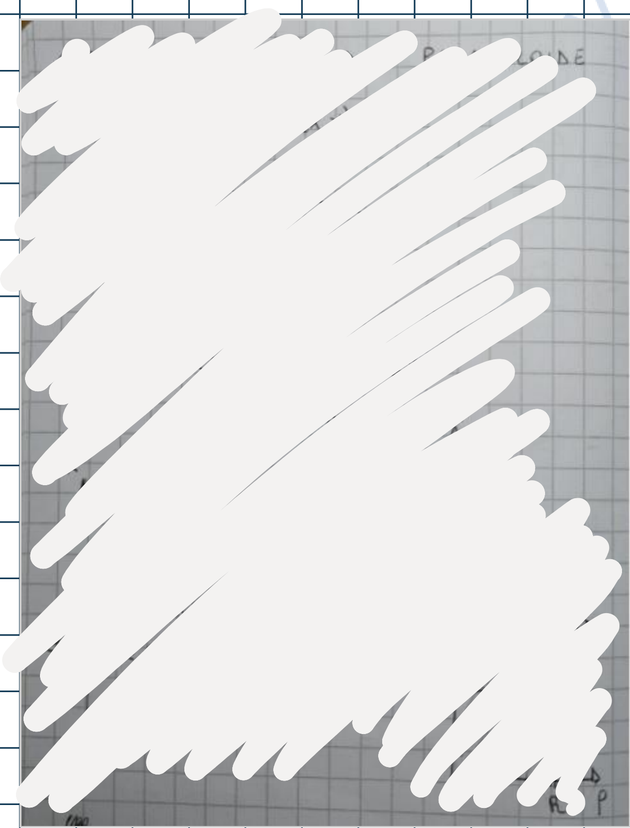
$$(\rho,\theta) \rightarrow (\rho\cos\theta,\ \rho\,\mathrm{sen}\,\theta,\ \rho^2)$$

$$T_\rho = \left(\frac{\partial x}{\partial \rho}, \frac{\partial y}{\partial \rho}, \frac{\partial z}{\partial \rho}\right) = (\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta, 2\rho)$$

$$T_\theta = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta}\right) = (-\rho\,\mathrm{sen}\,\theta, \rho\cos\theta, 0)$$

$$T_\rho \times T_\theta = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta & 2\rho \\ -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta & \rho\cos\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2\rho^2\cos\theta,\ +2\rho^2\,\mathrm{sen}\,\theta,\ \rho)$$



$$|T_\rho \times T_\theta| = \sqrt{4\rho^4\cos^2\theta + 4\rho^4\,\mathrm{sen}^2\theta + \rho^2} =$$

$$= \sqrt{4\rho^4+\rho^2} = \sqrt{\rho^2(4\rho^2+1)} = \rho\sqrt{4\rho^2+1}$$

$$dS = \rho\sqrt{4\rho^2+1}\cdot d\rho \cdot d\theta$$

$$S = \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho\sqrt{4\rho^2+1} \cdot d\rho\, d\theta =$$

$$= \int_0^R \rho\sqrt{4\rho^2+1}\, d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^R \rho\sqrt{4\rho^2+1}\, d\rho$$

$$2\pi \cdot \frac{1}{8} \int_0^R 8\rho \cdot \sqrt{4\rho^2+1} \cdot d\rho \qquad \left[\int \sqrt{x}\, dx = \dots \right]$$

RISOLUZIONE EQUIVALENTE

$$S = \iint_D \sqrt{1+|\nabla f(x,y)|^2}\, dx\, dy$$

$$f(x,y) = x^2+y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$|\nabla f|^2 = 4x^2+4y^2$$

$$\iint \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

PASSAGGIO A COORDINATE POLARI ....

$$\iint \sqrt{1+4\rho^2} \cdot \rho\, d\rho\, d\theta$$

$$(u,v) \xrightarrow{\Phi} (x,y,z) \xrightarrow{f} f(x,y,z)$$

$$\underbrace{\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3}\longrightarrow \mathbb{R}$$

$dS = |T_u \times T_v|\, du\, dv \Rightarrow$ ESPRESSIONE SUPERFICIE INFINITESIMA

Se voglio integrare un campo scalare con la stessa dimensione dell'immagine del campo di dominio

$$\iint_S f(x,y,z)\, dS$$

INTEGRALI SUPERFICIALI DI CAMPI SCALARI

posso esprimerlo anche in rapporto solo a u e v

$$\iint_S f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot |T_u \times T_v|\, du\, dv$$

Tutte le basi ds non giacciono sullo stesso piano

ESEMPIO

$$\iint_S x^3 e^z\, dS$$

$S = S3$ (SUPERFICIE LATERALE CILINDRICA DELL'ESERCIZIO PRECEDENTE, MA DELIMITATA CON $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$S \Rightarrow \begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{matrix} \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \\ z \in [0, H] \end{matrix}$$

$dS = |T_\theta \times T_z| = R\, d\theta\, dz$

$$\int_0^H \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \overbrace{\boxed{R^3 \cos^3\theta \cdot e^z}}^{x^3 e^z} \cdot \overbrace{\boxed{R \cdot d\theta \cdot dz}}^{ds} =$$

$$= R^4 \cdot \int_0^H e^z\, dz \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\theta\, d\theta =$$

$$= R^4 \cdot (e^H - 1) \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \overbrace{(1 - \sin^2\theta) \cdot \cos\theta}^{\cos^3\theta}\, d\theta =$$

$$\Big|_{-\pi/2}$$

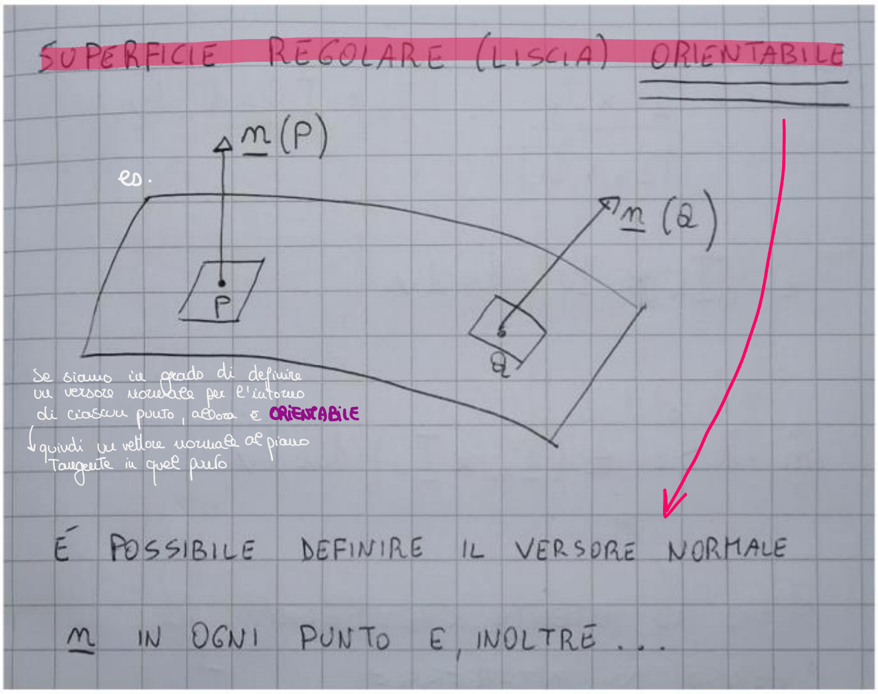
$$= R^4\left(e^H-1\right)\cdot\left(\operatorname{sen}\vartheta - \frac{\operatorname{sen}^3\vartheta}{3}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= R^4\left(e^H-1\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}R^4\left(e^H-1\right)$$

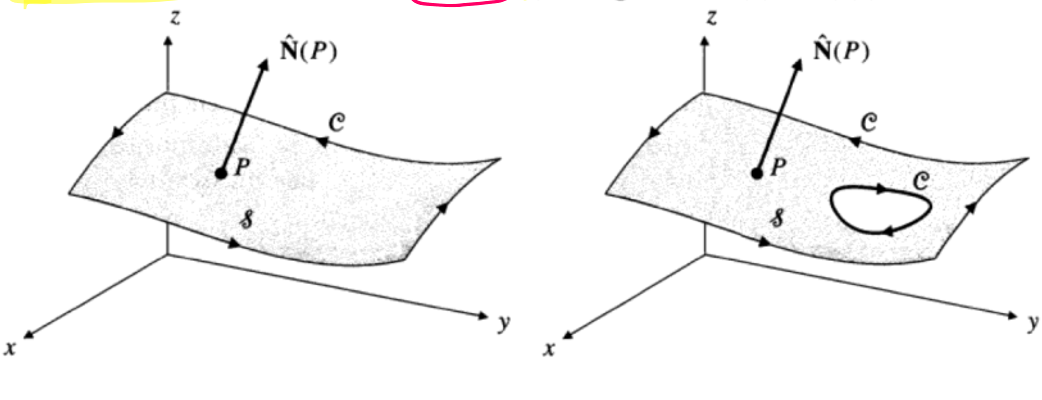
E SE AVESSIMO PRESO $\vartheta\in[0,\pi]$?

Teoremi di integrali superficiali di campi vettoriali

sabato 14 novembre 2020 11:07



An oriented surface $\mathcal{S}$ **induces an orientation** on any of its boundary curves $\mathcal{C}$; if we stand on the positive side of the surface $\mathcal{S}$ and walk around $\mathcal{C}$ in the direction of its orientation, then $\mathcal{S}$ will be on our left side. (See Figure 15.26(a) and (b).)

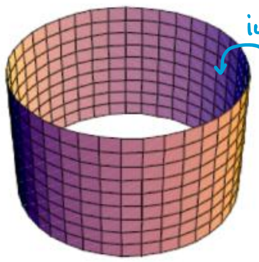


(a) (b)

A *piecewise smooth* surface is **orientable** if, whenever two smooth component surfaces join along a common boundary curve $\mathcal{C}$, they induce *opposite* orientations along $\mathcal{C}$. This forces the normals $\hat{\mathbf{N}}$ to be on the same side of adjacent components.

Una classe di enti geometrici di questo tipo è costituita dalle cosiddette *superfici non orientabili*, ovvero superfici che non possiedono un'orientazione naturale.

Per chiarire meglio quanto detto, partiamo da un esempio concreto di superficie che è parte dell'esperienza comune. Pensiamo alla superficie laterale di un cilindro: la possiamo ottenere facilmente incollando fra loro i lati opposti di un foglio di carta rettangolare. La seguente figura mostra una simile superficie cilindrica.



impossibile farlo senza attraversare il bordo
$\Downarrow$
ORIENTABILE

Fig.1. Superficie cilindrica, superficie orientabile.

Si potrebbe ingenuamente pensare che tutte le superfici debbano avere due facce: un "sopra" e un "sotto". L'esempio appena mostrato calza alla perfezione: se immaginiamo di camminare sulla superficie esterna del cilindro, non riusciremo mai ad arrivare a camminare sulla superficie interna senza attraversare il bordo.

Per convincersi, di ciò basta colorare la superficie cilindrica partendo da una delle due facce: se non si attraversa il bordo con il pennarello, si finisce inevitabilmente con il colorare solo una delle facce.

Le superfici di questo tipo si chiamano *orientabili*: hanno un sopra ed un sotto, hanno due facce, possono essere orientate.

Una classe di enti geometrici di questo tipo è costituita dalle cosiddette *superfici non orientabili*, ovvero superfici che non possiedono un'orientazione naturale.

Per chiarire meglio quanto detto, partiamo da un esempio concreto di superficie che è parte dell'esperienza comune. Pensiamo alla superficie laterale di un cilindro: la possiamo ottenere facilmente incollando fra loro i lati opposti di un foglio di carta rettangolare. La seguente figura mostra una simile superficie cilindrica.

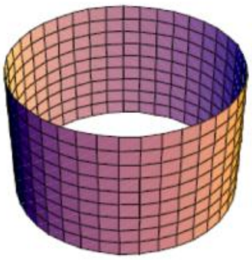
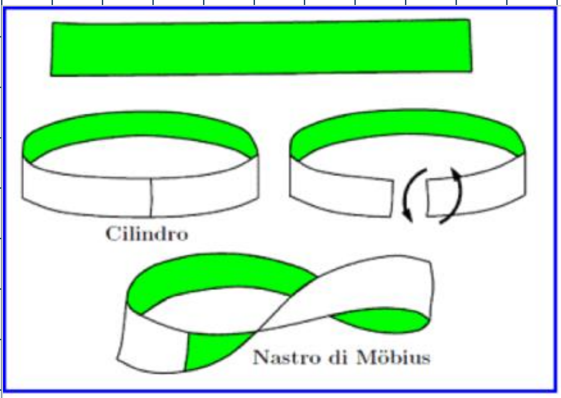


Fig.1. Superficie cilindrica, superficie orientabile.

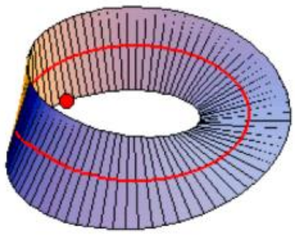
Ma ci sono superfici che hanno una sola faccia. Si può passare da "una faccia all'altra" (terminologia impropria, visto che abbiamo appena detto che la faccia è una sola) senza dover per questo attraversare il bordo, o bucare la superficie stessa.

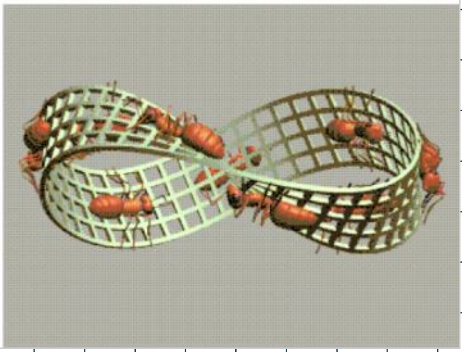
È molto semplice costruire una superficie di questo tipo: basta prendere la stessa striscia rettangolare di carta usata per costruire la superficie cilindrica: ora, però, prima di incollare due lati opposti del rettangolo, facciamo fare mezzo giro a un lato. Infine incolliamo i due lati, dei quali uno è stato ribaltato di mezzo giro, e otteniamo la superficie rappresentata in fig.2.

La superficie che abbiamo costruito si chiama *nastro di Moebius*, ed è una superficie *non orientabile*: infatti, se proviamo a colorare il nastro partendo da un suo punto qualsiasi, finiamo con il colorare tutto il nastro senza attraversare il bordo.



NASTRO DI MOEBIUS





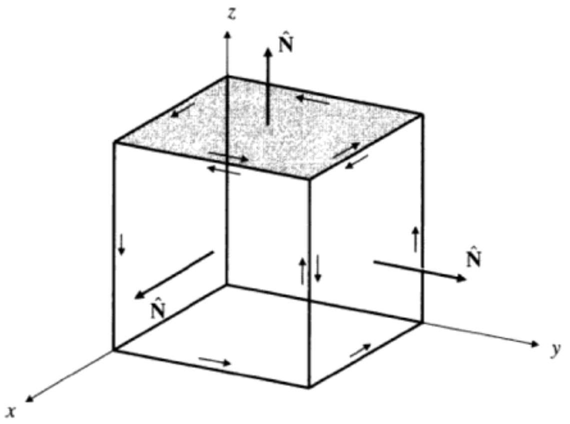


Figure 15.27 The surface of the cube is orientable; adjacent faces induce opposite orientations on their common edge

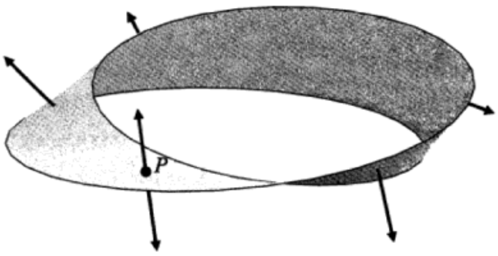


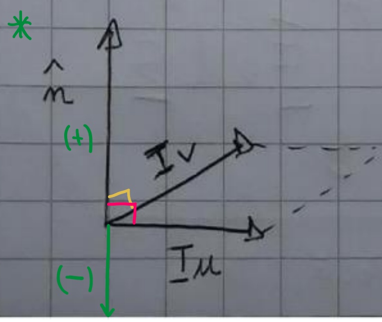
Figure 15.28 The Möbius band is not orientable; it has only one "side"

$\underline{n} \cdot dS$

SUPERFICIE ORIENTABILE INFINITESIMA

VERSORE

$$d\underline{S} = \underline{n} \cdot dS = \hat{n}\, dS$$



$$\hat{n} = \frac{\underline{T}_u \times \underline{T}_v}{|\underline{T}_u \times \underline{T}_v|}$$

$$\hat{n} \cdot ds = \frac{\underline{I}_u \times \underline{I}_v}{|\underline{I}_u \times \underline{I}_v|} \cdot |\underline{I}_u \times \underline{I}_v| \cdot du\, dv =$$

$$= (\underline{I}_u \times \underline{I}_v) \cdot du\, dv$$

$$\hat{n} \cdot dS = \pm (\underline{I}_u \times \underline{I}_v) \cdot du\, dv$$

SONO IO UTENTE CHE DECIDO IL VERSO DI INTERESSE

potrei volere $\hat{n}$ una verso sopra (+) o verso sotto (−)

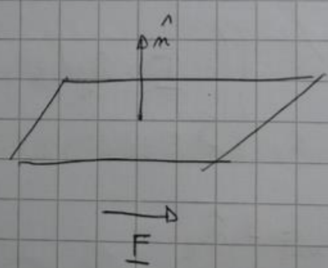
* Vedi foto a pag. prec.

FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE

$\underline{F}$ ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE $\underline{S}$

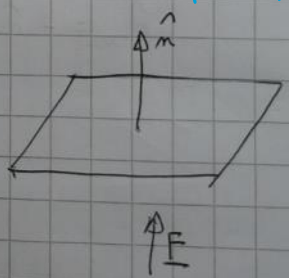
$$\iint_S \underline{F} \circ \hat{n}\, dS = \boxed{\iint_S \underline{F} \circ d\underline{S}} = \iint_S \underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t)\, dS$$

INTEGRALE SUPERFICIALE DI UN CAMPO VETTORIALE



Se $\hat{n} \perp \underline{F}$ se $\hat{n} \times \underline{F} = 0$ per cui $\underline{F}$ non attraversa la sup. e dunque $\underline{F} = 0$

Se $\hat{n} \parallel \underline{F}$ allora $\hat{n} \times \underline{F} \neq 0$



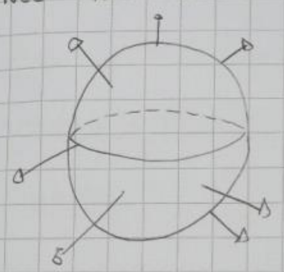
~~FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE~~

~~$\underline{F}$ ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE $\underline{S}$~~

~~$\iint_S \underline{F} \circ \hat{n}\, dS = \iint_S \underline{F} \circ d\underline{S}$~~

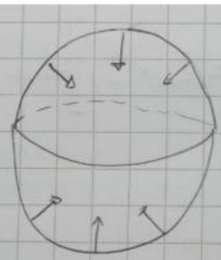
~~INTEGRALE SUPERFICIALE DI UN CAMPO VETTORIALE~~

NEL CASO DI SUPERFICIE CHIUSA



NORMALE USCENTE

$$\iint_S \underline{F} \circ \hat{n}_u \cdot dS$$



NORMALE ENTRANTE

$$\iint_S \underline{F} \circ \hat{n}_e \cdot ds$$

$$\hat{n}_u = -\hat{n}_e$$

Dunque

$$\underline{F}(x,y,z) = \underline{F}\big(x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v)\big)$$

$$\iint_S \underline{F} \circ \hat{n}\, dS =$$

$$= \iint \underline{F}\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) \circ \left[\pm\left(\underline{T}_u \times \underline{T}_v\right)\right] \cdot du\, dv$$

ESERCIZIO!

CALCOLARE IL FLUSSO DI

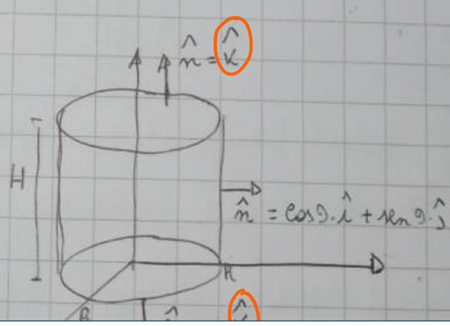
$$\underline{F}(x,y,z) = x\cdot\hat{i} + y\cdot\hat{j} + z\cdot\hat{k} = (x,y,z)$$

USCENTE DALLA SUPERFICIE CHIUSA DEL CILINDRO

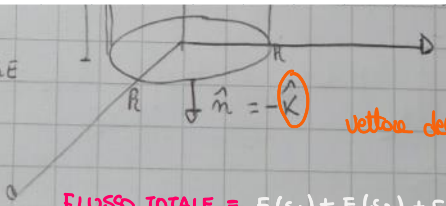
Poiché definita a Tratti la divido in:

S1: BASE CIRCOLARE INFERIORE

S2: BASE CIRCOLARE



S2: BASE CIRCOLARE SUPERIORE



$\hat{n} = -\hat{k}$ vettore delle z

S3: SUPERFICIE LATERALE

FLUSSO TOTALE = $F(S_1) + F(S_2) + F(S_3)$

additivo

$$S1: \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = 0 \end{cases} \qquad \hat{n} = -\hat{k} = (0,0,-1)$$

NOTAZIONE VETTORIALE

$\rho \in [0, R]$

$\theta \in [0, 2\pi]$

$$\underline{F} = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 0)$$

$$\iint_{S_1} F \cdot \hat{u} = 0$$

$$\iint_{S_1} (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 0) \circ (0,0,-1) \cdot dS_1 = 0$$

$$S_2: \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = H \end{cases} \qquad \hat{n} = \hat{k} = (0,0,1)$$

quota di S_2

$\rho \in [0, R] \quad \theta \in [0, 2\pi]$

$$\underline{F} = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, H)$$

$$\iint_{S_2} (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, H) \circ (0,0,1) \cdot dS_2 =$$

integrale di superficie di dS_2

$$= \iint_{S_2} H\, dS_2 = H \iint_{S_2} dS_2 = \pi R^2 \cdot H$$

$$S_3: \begin{cases} x = R\cos\vartheta \\ y = R\,\text{sen}\,\vartheta \\ z = z \end{cases} \qquad \hat{n} = (\cos\vartheta, \text{sen}\,\vartheta, 0)$$

$$\vartheta \in [0, 2\pi] \qquad z \in [0, H]$$

$$\iint_{S_3} (R\cos\vartheta, R\,\text{sen}\,\vartheta, z)\circ(\cos\vartheta, \text{sen}\,\vartheta, 0)\, dS_3 =$$

$$= \iint_{S_3} R \cdot dS_3 = R \iint_{S_3} dS_3 = R \cdot 2\pi R \cdot H =$$

$$= 2\pi R^2 \cdot H$$

FLUSSO TOTALE = $3\pi R^2 \cdot H$

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

SIA $\underline{V}$ UN DOMINIO IN $\mathbb{R}^3$ IL CUI BORDO SIA UNA SUPERFICIE CHIUSA ORIENTATA S

SE $\underline{F}(x,y,z)$ É UN CAMPO VETTORIALE LISCIO, OVVERO $\underline{F}(x,y,z) \in C^1$

Integrale doppio di sup. chiusa (che chiude un volume)

$$\oiint_S \underline{F}(x,y,z) \circ \hat{n}\, dS = \iiint_V \nabla \circ \underline{F}(x,y,z) \cdot dV$$

VALE PER CALCOLARE IL

$\boxed{\text{FLUSSO USCENTE DALLA SUPERFICIE CHIUSA } S}$

per calcolare quello entrante basta cambiargli il segno

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

$$\nabla \circ \underline{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \circ \left(F_1, F_2, F_3 \right) =$$

$$= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

ESERCIZIO PRECEDENTE

$\underline{F} = (x, y, z)$ $\qquad$ $\nabla \circ \underline{F} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$

$$\oiint_S \underline{F} \circ \hat{n} \, dS = \iiint_V \nabla \circ \underline{F} \, dx\,dy\,dz =$$

$$= 3 \iiint_V dV = 3 \cdot \pi R^2 \cdot H$$

ESERCIZIO:

$$\underline{F} = \left(Hxy^2,\ Hx^2y,\ (x^2+y^2)\cdot z^2\right)$$

CALCOLARE IL FLUSSO USCENTE DALLA SUPERFICIE CILINDRICA DELL' ESERCIZIO PRECEDENTE

Senza parametrizzare applico il teorema della divergenza

$$\iint_S \underline{F}\circ\hat{n}\, dS = \iiint_V \nabla\circ\underline{F}\, dV =$$

$$\iiint_V \Big(\underbrace{Hy^2}_{\frac{d\ 1^a}{dx}} + \underbrace{Hx^2}_{\frac{d\ 2^a}{dy}} + \underbrace{2z(x^2+y^2)}_{\frac{d\ 3^a}{dz}}\Big)\, dV =$$

$$= \iiint_V \left[H(x^2+y^2) + 2z(x^2+y^2)\right] dx\, dy\, dz$$

Passo alle coordinate cilindriche in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{aligned} &0 \le \rho \le R \\ &0 \le \vartheta \le 2\pi \\ &0 \le z \le H \end{aligned} \qquad \left|\underline{J}_{(\rho,\vartheta,z)}\right| = \rho$$

$$\iiint_V \left(H\rho^2 + 2z\rho^2\right)\cdot\rho\, d\rho\, d\vartheta\, dz$$

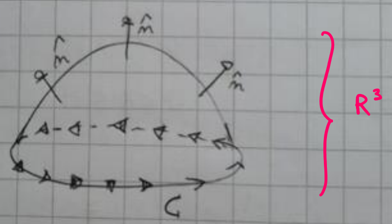
INTEGRALE TRIPLO CON DOMINIO CUBICO

$$= \int_0^{2\pi} d\vartheta \cdot \int_0^R \left[\int_0^H (H\rho^2 + 2z\rho^2)\rho\, dz\right] d\rho =$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^R \left(H^2\rho^3 + H^2\rho^3\right) d\rho = 4\pi H^2 \cdot \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^R = \pi H^2 R^4$$

TEOREMA DI STOKES → Serve a risolvere problemi legati al lavoro → Lega integrale curvilineo a integrale di superficie

SIA S UNA SUPERFICIE LISCIA E ORIENTATA NON CHIUSA, IL CUI CONTORNO SIA UNA CURVA CHIUSA C ORIENTATA POSITIVAMENTE



$$\oint_C \underline{F} \cdot d\underline{r} = \iint_S (\nabla \times \underline{F}) \cdot \hat{n} \, dS$$

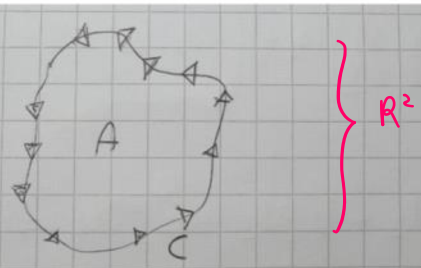
La circuitazione lungo il percorso C è un integrale di superficie di campo vettoriale che non è F ma il suo ROTORE

IN $\mathbb{R}^2$ STOKES DIVENTA IL **TEOREMA DI GAUSS-GREEN**

IN $\mathbb{R}^2$ $\underbrace{\nabla \times \underline{F}}_{\text{Rotore}} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\hat{k}$

$$\hat{n}\, dS = \hat{k} \cdot dA$$

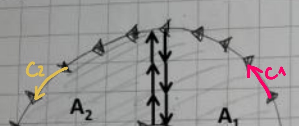
$$\oint_C \underline{F} \cdot d\underline{r} = \iint_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA$$



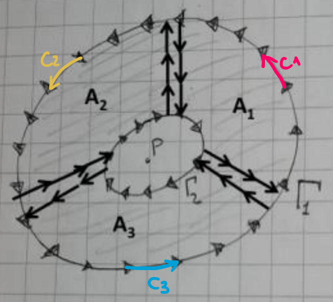
OSSERVAZIONE: $\underline{F} \in C^1(A)$

MA SE $\underline{F}$ NON È DEFINITA IN QUALCHE PUNTO DEL DOMINIO A???

IL TEOREMA PUÒ ESSERE APPLICATO ANCHE PER DOMINI NON SEMPLICEMENTE CONNESSI



IL TEOREMA PUÓ ESSERE APPLICATO ANCHE PER DOMINI NON SEMPLICEMENTE CONNESSI



$$\iint_{A_1}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dA_1+\iint_{A_2}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dA_2+\iint_{A_3}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dA_3$$

$$=\oint_{C_1}\underline{F}\cdot d\underline{r}+\oint_{C_2}\underline{F}\cdot d\underline{r}+\oint_{C_3}\underline{F}\cdot d\underline{r}=$$

$$=\oint_{\Gamma_1}\underline{F}\cdot d\underline{r}+\oint_{\Gamma_2}\underline{F}\cdot d\underline{r}$$

opposti

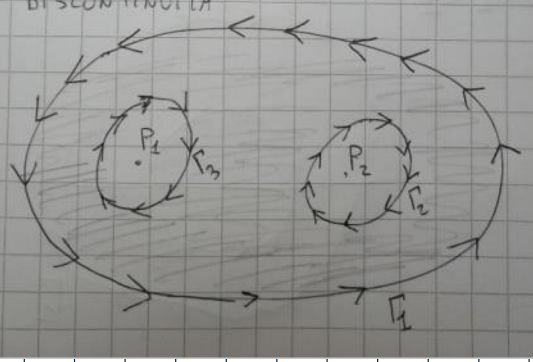
$$\iint_{A=A_1\cup A_2\cup A_3}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dA=\oint_{\Gamma_1}\underline{F}\cdot d\underline{r}+\oint_{\Gamma_2}\underline{F}\cdot d\underline{r}$$

IN GENERALE

$$\iint\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dA=\sum_{i=1}^{m}\oint_{\Gamma_i}\underline{F}\,d\underline{r}$$

Sommatoria di tutte le circuitazioni

Γ_i : i-ESIMA CURVA ORIENTATA POSITIVAMENTE E COINCIDENTE O CON IL BORDO PIÚ ESTERNO O CON UN PERCORSO INTORNO AD UN PUNTO DI DISCONTINUITÀ



INOLTRE, SE $\underbrace{\nabla \times \underline{F} = \underline{0}}_{\text{IRROTAZIONALE}}$, OVVERO

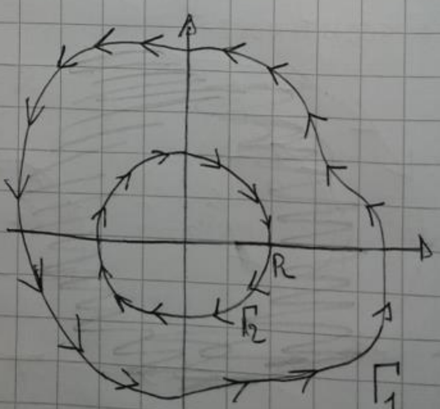
$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

ALLORA $$\sum_{i=1}^{n} \oint_{\Gamma_i} \underline{F} \circ d\underline{r} = 0$$

$$\underline{F} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

DEFINITO IN $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

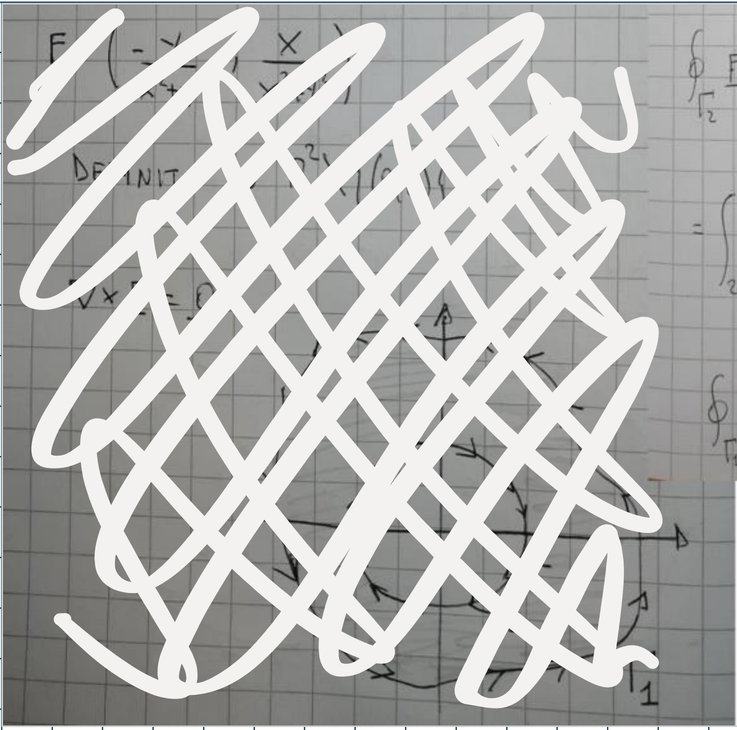
$\nabla \times \underline{F} = \underline{0}$



$$\oint_{\Gamma_1} \underline{F} \circ d\underline{r} + \oint_{\Gamma_2} \underline{F} \circ d\underline{r} = 0$$

$$\Gamma_2 : \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R \operatorname{sen} t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$dx = -R \operatorname{sen} t \, dt \qquad dy = R \cos t \, dt$



$$\oint_{\Gamma_2} \underline{F}\circ d\underline{r} = \int_{2\pi}^{0}\left(\frac{-R\,\text{sen}\,t}{R^2}\cdot(-R\,\text{sen}\,t) + \frac{R\cos t}{R^2}\cdot R\cos t\right)dt =$$

$$= \int_{2\pi}^{0} (\text{sen}^2 t + \cos^2 t)\,dt = \int_{2\pi}^{0} dt = -2\pi$$

RISULTATO INDIPENDENTE DAL RAGGIO R

$$\oint_{\Gamma_1} \underline{F}\circ d\underline{r} = 2\pi$$

$$\iint_S (\nabla\times\underline{F})\circ\hat{n}\,dS = \oint_C \underline{F}\circ d\underline{r}$$

$$\nabla\times\underline{F} = \underline{0} \Rightarrow \oint_C \underline{F}\circ d\underline{r} = 0$$

$$\underline{F} = \nabla U \Rightarrow \oint_C \underline{F}\circ d\underline{r} = 0$$

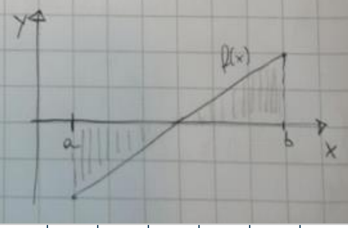
$$\oint_C \underline{F}\circ d\underline{r} = 0 \Rightarrow \nabla\times\underline{F} = \underline{0} \quad ?$$

$$\Rightarrow \underline{F} = \nabla U \quad ?$$

Lo si aspetta anche quando non è IRROTAZIONALE

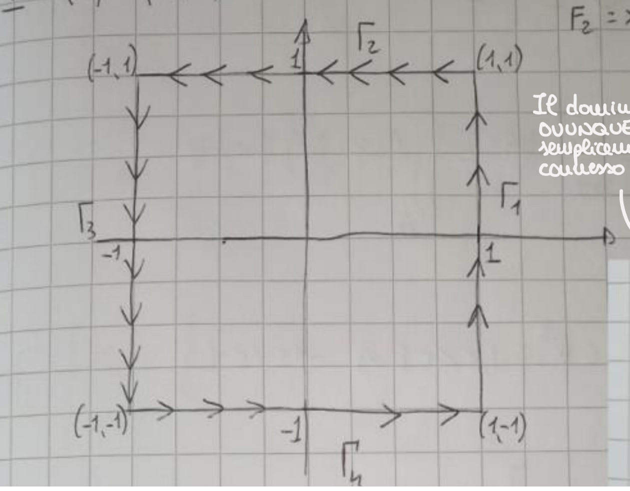
$$\iint_S \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA = \oint_C \underline{F}\circ d\underline{r}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx$$



ESEMPIO

$$\underline{F} = (y^2, x^2) \qquad F_1 = y^2 \qquad F_2 = x^2$$



Il dominio è OVUNQUE semplicemente connesso

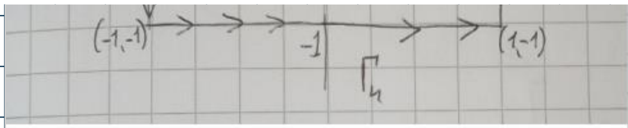
però

DOMINIO SEMPLICEMENTE CONNESSO

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y$$

$F_1: 4y - 2xy + 3x$

$F_2: 3xy - y$



Sarà un caso di campo NON conservativo ma di lavoro NULLO

Ci si aspetta dunque che $\oint_\Gamma \underline{F}\cdot d\underline{r} = 0$, ma:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y$$

IL CAMPO $\underline{F}$ È ROTAZIONALE

$$\nabla \times \underline{F} \neq \underline{0} \Rightarrow \underline{F} \neq \nabla U$$

CAMPO ROTAZIONALE $\Rightarrow$ NON CONSERVATIVITÀ

CALCOLO $\oint_\Gamma \underline{F}\cdot d\underline{r}$ CON $\underbrace{\text{GAUSS-GREEN}}$ posso perché ho un percorso chiuso

$$\iint_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA = \iint_A (2x-2y)\,dx\,dy$$

$$A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1\leq x\leq 1 \wedge -1\leq y\leq 1\right\}$$

$$\int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{1}(2x-2y)\,dy\right]dx$$

$$\int_{-1}^{1}(2x-2y)\,dy = \left(2xy - y^2\right)\Big|_{-1}^{1} = 2x-1-(-2x-1) = 4x$$

$$\int_{-1}^{1} 4x\,dx = 2x^2\Big|_{-1}^{1} = 0$$

VERIFICO tramite gli integrali di linea:

$$\Gamma_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases} \quad t\in[-1,1] \qquad \begin{matrix} dx = 0 \\ dy = dt \end{matrix}$$

$$\int_{\Gamma_1} \underline{F}\cdot d\underline{r} = \int_{\Gamma_1} F_1\,dx + F_2\,dy = \int_{\Gamma_1} F_2\,dy = \int_{-1}^{1} dt = 2$$

$$\Gamma_2: \begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases} \quad t\in[-1,1] \qquad \begin{matrix} dx = dt \\ dy = 0 \end{matrix}$$

$$\int_{\Gamma_2} \underline{F}\cdot d\underline{r} = \int_{\Gamma_2} F_1\,dx + F_2\,dy = \int_{\Gamma_2} F_1\,dx = \int_{1}^{-1} dt = -2$$

$$\Gamma_3: \begin{cases} x = -1 \\ y = t \end{cases} \quad t\in[-1,1] \qquad \begin{matrix} dx = 0 \\ dy = dt \end{matrix}$$

$$\int_{\Gamma_3} \underline{F}\cdot d\underline{r} = \int_{\Gamma_3} F_1\,dx + F_2\,dy = \int_{\Gamma_3} F_2\,dy = \int_{+1}^{-1} dt = -2$$

$$\Gamma_4: \begin{cases} x = t \\ y = -1 \end{cases} \quad t\in[-1,1] \qquad \begin{matrix} dx = dt \\ dy = 0 \end{matrix}$$

$$\int_{\Gamma_4} \underline{F}\cdot d\underline{r} = \int_{\Gamma_4} F_1\,dx + F_2\,dy = \int_{\Gamma_4} F_1\,dx = \int_{-1}^{1} dt = 2$$

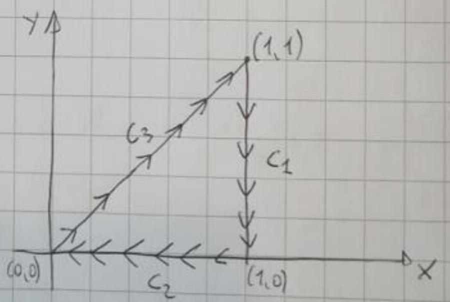
$$\oint_\Gamma \underline{F}\cdot d\underline{r} = 2-2-2+2 = 0$$

ESEMPIO

$\underline{F} = (y^2, x^2)$

$F_1 = y^2$

$F_2 = x^2$



$\nabla \times \underline{F} \neq \underline{0}$

IL VERSO DI PERCORRENZA DEL BORDO É NEGATIVO

$$\iint_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA = \oint_C \underline{F} \circ d\underline{r}$$

VALE PER C ORIENTATA POSITIVAMENTE

SE C É PERCORSA NEGATIVAMENTE, DEVO CAMBIARE SEGNO ALL' INTEGRALE

$$\iint_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA \Rightarrow \iint_A \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x}\right) dA$$

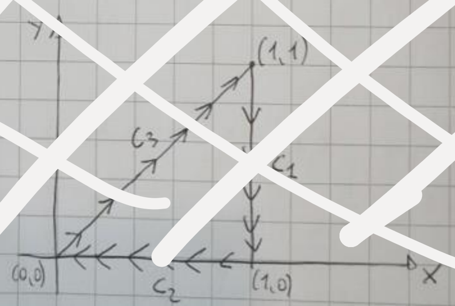
$$\iint_A (2y - 2x)\, dA$$

$A : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \ \wedge \ 0 \leq y \leq x\}$

~~$\underline{F} = \left(y^2, x^2\right)$~~

~~$F_1 = y^2$~~

~~$F_2 = x^2$~~



~~$$\iint_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA = \oint \underline{F} \cdot d\underline{r}$$~~

~~VALE PER C ORIENTATA POSITIVAMENTE~~

~~SE C È PERCORSA NEGATIVAMENTE, CAMBIARE SEGNO ALL'INTEGRALE~~

~~$$\iint_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA \Rightarrow \iint_A \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x}\right) dA$$~~

$$\int_0^1 \left[\int_0^x (2y-2x)\, dy\right] dx = \int_0^1 \left[\left(y^2-2xy\right)\Big|_0^x\right] dx =$$

$$\int_0^1 \left(x^2-2x^2\right) dx = -\int_0^1 x^2\, dx = -\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = -\frac{1}{3}$$

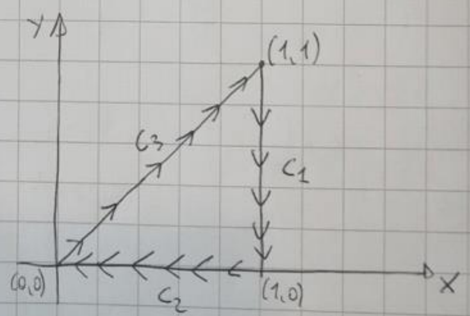
$$\iint_A (2y-2x)\, dA$$

$$A : \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \ \wedge \ 0 \le y \le x\right\}$$

$\underline{F} = \left(y^2, x^2\right)$

$F_1 = y^2$

$F_2 = x^2$



$\nabla \times \underline{F} \neq \underline{0}$

IL VERSO DI PERCORRENZA DEL BORDO É NEGATIVO

$$C_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases} \quad t \in [0,1] \quad \begin{matrix} dx = 0 \\ dy = dt \end{matrix}$$

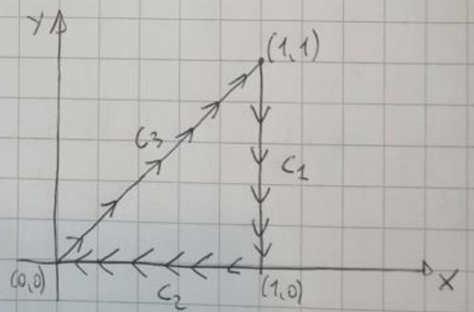
$$\int_{C_1} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_{C_1} F_2\, dy = \int_1^0 dt = -1$$

$$C_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad t \in [0,1] \quad \begin{matrix} dx = dt \\ dy = 0 \end{matrix}$$

$$\underline{F} = (y^2, x^2)$$

$F_1 = y^2$

$F_2 = x^2$



$\nabla \times \underline{F} \neq \underline{0}$

IL VERSO DI PERCORRENZA DEL BORDO É NEGATIVO

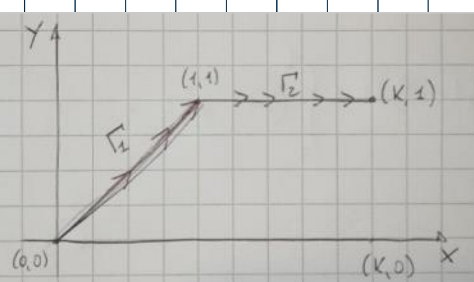
$$C_3 : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad t \in [0,1] \qquad dx = dt \quad dy = dt$$

$$\int_{C_3} \underline{F} \circ d\underline{r} = \int_{C_3} F_1 dx + F_2 dx = \int_0^1 (t^2 + t^2) dt =$$

$$= \int_0^1 2t^2 dt = \frac{2}{3} t^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\oint_{C \text{ (ORIENTATA NEGATIVAMENTE)}} \underline{F} \circ d\underline{r} = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} = -1 + 0 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

$\underline{F} = (x, x^2)$



DETERMINARE IL VALORE DI K>1 TALE CHE

$$\int_{\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2} \underline{F} \circ d\underline{r} = 3$$

$F_1 = x \qquad F_2 = x^2$

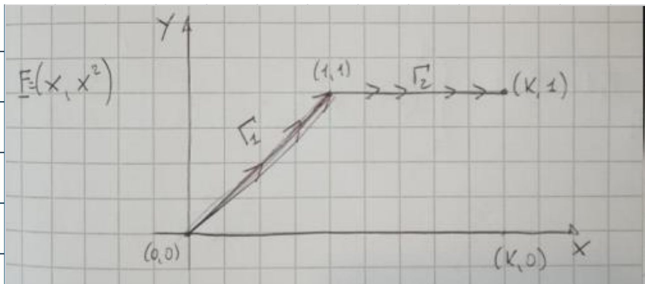
$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$$

$$\nabla \times \underline{F} \neq \underline{0} \implies \underline{F} \neq \nabla U$$

$$\Gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad t \in [0,1] \qquad dx = dt \quad dy = dt$$

$$\int_{\Gamma_1} F_1 dx + F_2 dt = \int_0^1 (t + t^2) dt = \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{5}{6}$$



DETERMINARE IL VALORE DI K>1 TALE CHE

$$\int_{\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2} \underline{F}\circ d\underline{r} = 3$$

$$\Gamma_2 : \begin{cases} x=t \\ y=1 \end{cases} \quad t\in[1,K] \qquad \begin{matrix} dx=dt \\ dy=0 \end{matrix}$$

$$\int_{\Gamma_2} F_1 dx + F_2 dy = \int_1^K t\cdot dt = \frac{t^2}{2}\Big|_1^K = \frac{K^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\int_{\Gamma} \underline{F}\circ d\underline{r} = 3 \quad \text{(DATO DI INPUT)}$$

$$3 = \frac{5}{6} + \frac{K^2}{2} - \frac{1}{2}$$

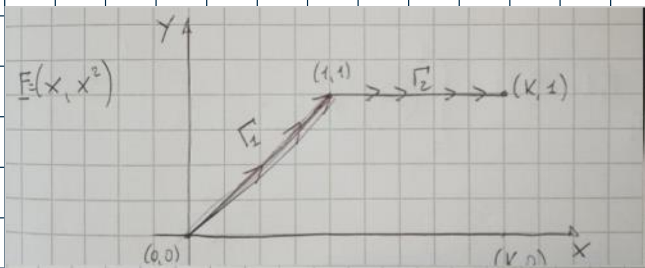
$\underline{F}=(x, x^2)$

$$\Gamma_2 : \begin{cases} x=t \\ y=1 \end{cases} \quad t\in[1,K] \qquad \begin{matrix} dx=dt \\ dy=0 \end{matrix}$$

$$\int_{\Gamma_2} F_1 dx + F_2 dy = \int_1^K t\cdot dt = \frac{t^2}{2}\Big|_1^K = \frac{K^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\int_{\Gamma} \underline{F}\circ d\underline{r} = 3 \quad \text{(DATO DI INPUT)}$$

$$3 = \frac{5}{6} + \frac{K^2}{2} - \frac{1}{2}$$



$$K^2 = 2\cdot\left(3 - \frac{5}{6} + \frac{1}{2}\right) = 2\cdot\left(\frac{18-5+3}{6}\right) =$$

$$= \frac{16}{3}$$

$$K = \pm\frac{4}{\sqrt{3}} = \pm\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$K = \frac{4\sqrt{3}}{3} \qquad \left(K>1 \text{ PER RICHIESTA ESERCIZIO}\right)$$

Complementi sui campi vettoriali ed esercizi

sabato 14 novembre 2020 13:34

Significato fisico del rotore (Tratto dal testo *A. Bacciotti, CALCOLO DIFFERENZIALE E INTEGRALE II. Seconda parte: Vettori, funzioni reali di più variabili reali, serie, Celid*).

Il termine *rotore* rimanda inevitabilmente alla rotazione. In effetti, dato il campo vettoriale F di $\mathbb{R}^3$, si osserva che il vettore $\mathrm{rot}F$ è in qualche modo legato alla rotazione. Per renderci conto di ciò, consideriamo un caso molto semplice di un corpo rigido. Ogni movimento del corpo rigido si può immaginare come una combinazione di un moto traslatorio e di un moto rotatorio intorno al baricentro. Supponiamo per semplicità che in ogni punto $P(x, y, z)$ del corpo rigido la velocità $\vec{v}(P)$ dipenda solo dalla posizione del punto P e che la velocità angolare $\vec{\omega}$ sia costante. Allora

$$\vec{v}(P) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{PO} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \wedge (x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= (\omega_2 z - \omega_3 y)\vec{i} + (\omega_3 x - \omega_1 z)\vec{j} + (\omega_1 y - \omega_2 x)\vec{k}.$$

Ne segue che

$$\operatorname{rot} \vec{v}(P) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_2 z - \omega_3 y & \omega_3 x - \omega_1 z & \omega_1 y - \omega_2 x \end{vmatrix} = (2\omega_1, 2\omega_2, 2\omega_3) = 2\vec{\omega}.$$

Quindi il rotore del campo di velocità è multiplo del vettore velocità angolare, che è chiaramente legato alla rotazione. In particolare in questo semplice esempio si ha che

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{\omega} = \vec{0}.$$

Per questo motivo si dice che un campo è *irrotazionale* quando il suo rotore è nullo. Questa terminologia si utilizza anche nei casi più generali. Quando si considera ad esempio il moto di un fluido, $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$ indica assenza di vorticosità.

TEORIA DELLA DIVERGENZA:

$$\oiint \underline{F} \circ \hat{n} \, dS = \iiint_V \underbrace{\nabla \circ \underline{F}}_{\text{divergenza del campo vettoriale}} \, dx\,dy\,dz$$

Se va a 0 indica la capacità di un flusso a non uscire dalla superficie

Se $F=0$ allora
1) Flusso entrante uguale a flusso uscente
o
2) nessun flusso attraversa la superficie

POTENZIALE VETTORE

1) $\underline{F}(x,y,z)$ SI DICE SOLENOIDALE IN UN DOMINIO $D \subseteq \mathbb{R}^3$ SE

$$\underbrace{\nabla \circ \underline{F}}_{\text{DIVERGENZA}} = 0 \quad \forall (x,y,z) \in D$$

2) SE $\underline{F}(x,y,z)$ È UN CAMPO VETTORIALE LISCIO SOLENOIDALE, DEFINITO IN $D \in \mathbb{R}^3$ SEMPLICEMENTE CONNESSO

$\Rightarrow$ ALLORA ESISTE UN CAMPO VETTORIALE

$$\underline{G}(x,y,z) : \underline{F} = \nabla \times \underline{G}$$

$F =$ rotore di G

dove $\underline{G}(x,y,z)$ SI DEFINISCE POTENZIALE VETTORE

Inoltre,

$$\nabla \circ \underline{F} = \nabla \circ (\underbrace{\nabla \times \underline{G}}_{=0\,?})$$

Dimostrazione:

$$\nabla \times \underline{G} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} =$$

Inoltre,

$$\nabla \circ \underline{F} = \nabla \circ (\underbrace{\nabla \times \underline{G}}_{=0\,?})$$

Dimostrazione:

$$\nabla \times \underline{G} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{i}\left(\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right)$$

$$\nabla \circ (\nabla \times \underline{G}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 G_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 G_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 G_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 G_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 G_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 G_1}{\partial z \partial y} = 0$$

CAMPO VETTORIALE ARMONICO:

$\underline{F}(x, y, z)$ SI DICE ARMONICO SE É CONTEMPORANEAMENTE CONSERVATIVO (LAMELLARE) E SOLENOIDALE. Cioé:

conservativo = lamellare

$$\begin{cases} \underline{F} = \nabla U \\ \nabla \circ \underline{F} = 0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\nabla \circ (\nabla U)}_{\text{divergenza di un gradiente}} = 0$$

pari a 0 per la solenoidità

$$\nabla \circ (\nabla U) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \circ \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) =$$