ESERCIZIO:

$$\underline{F} = \left(Hxy^2,\ Hx^2y,\ (x^2+y^2)\cdot z^2\right)$$

CALCOLARE IL FLUSSO USCENTE DALLA SUPERFICIE CILINDRICA DELL' ESERCIZIO PRECEDENTE

Senza parametrizzare applico il teorema della divergenza

$$\iint_S \underline{F} \circ \hat{n}\, dS = \iiint_V \nabla \circ \underline{F}\, dV =$$

$$\iiint_V \Big(\underbrace{Hy^2}_{\frac{d\,1^a}{dx}} + \underbrace{Hx^2}_{\frac{d\,2^a}{dy}} + \underbrace{2z(x^2+y^2)}_{\frac{d\,3^a}{dz}}\Big)\, dV =$$

$$= \iiint_V \left[H(x^2+y^2) + 2z(x^2+y^2)\right] dx\, dy\, dz$$

Passo alle coordinate cilindriche in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \le \rho \le R \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le z \le H \end{matrix} \qquad |J_{(\rho,\theta,z)}| = \rho$$

$$\iiint_V (H\rho^2 + 2z\rho^2)\cdot \rho\, d\rho\, d\theta\, dz$$

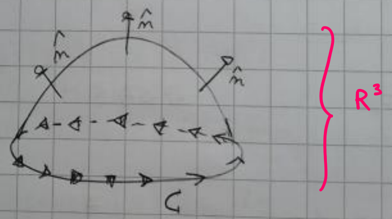
INTEGRALE TRIPLO CON DOMINIO CUBICO

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^R \left[\int_0^H (H\rho^2 + 2z\rho^2)\rho\, dz\right] d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^R (H^2\rho^3 + H^2\rho^3)\, d\rho = 4\pi H^2 \cdot \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^R = \pi H^2 R^4$$

TEOREMA DI STOKES → Serve a risolvere problemi legati al lavoro → Lega integrale curvilineo a integrale di superficie

SIA S UNA SUPERFICIE LISCIA E ORIENTATA NON CHIUSA, IL CUI CONTORNO SIA UNA CURVA CHIUSA C ORIENTATA POSITIVAMENTE



$$\oint_C \underline{F} \cdot d\underline{r} = \iint_S (\nabla \times \underline{F}) \cdot \hat{n} \, dS$$

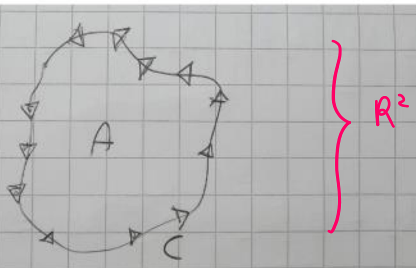
La circuitazione lungo il percorso C è un integrale di superficie di campo vettoriale che non è F ma il suo ROTORE

IN $\mathbb{R}^2$ STOKES DIVENTA IL TEOREMA DI GAUSS-GREEN

IN $\mathbb{R}^2$ $\underbrace{\nabla \times \underline{F}}_{\text{Rotore}} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \hat{k}$

$$\hat{n} \, dS = \hat{k} \cdot dA$$

$$\oint_C \underline{F} \cdot d\underline{r} = \iint_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA$$

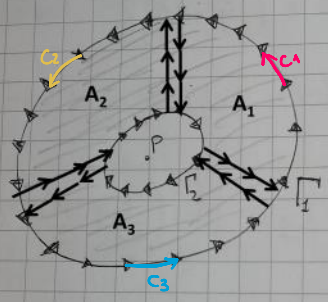


OSSERVAZIONE: $\underline{F} \in C^1(A)$

MA SE $\underline{F}$ NON É DEFINITA IN QUALCHE PUNTO DEL DOMINIO A???

IL TEOREMA PUÓ ESSERE APPLICATO ANCHE PER DOMINI NON SEMPLICEMENTE CONNESSI

IL TEOREMA PUÒ ESSERE APPLICATO ANCHE PER DOMINI NON SEMPLICEMENTE CONNESSI



$$\iint_{A_1}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dA_1+\iint_{A_2}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dA_2+\iint_{A_3}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dA_3$$

$$=\oint_{C_1}\underline{F}\cdot d\underline{r}+\oint_{C_2}\underline{F}\cdot d\underline{r}+\oint_{C_3}\underline{F}\cdot d\underline{r}=$$

$$=\oint_{\Gamma_1}\underline{F}\cdot d\underline{r}+\oint_{\Gamma_2}\underline{F}\cdot d\underline{r}$$

opposti

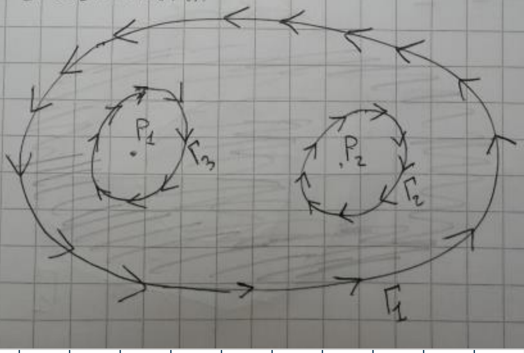
$$\iint_{A=A_1\cup A_2\cup A_3}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dA=\oint_{\Gamma_1}\underline{F}\cdot d\underline{r}+\oint_{\Gamma_2}\underline{F}\cdot d\underline{r}$$

IN GENERALE

$$\iint\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dA=\sum_{i=1}^{m}\oint_{\Gamma_i}\underline{F}\,d\underline{r}$$

Sommatoria di tutte le circuitazioni

Γ_i : i-ESIMA CURVA ORIENTATA POSITIVAMENTE E COINCIDENTE O CON IL BORDO PIÙ ESTERNO O CON UN PERCORSO INTORNO AD UN PUNTO DI DISCONTINUITÀ



INOLTRE, SE $\underbrace{\nabla \times \underline{F} = \underline{0}}_{\text{IRROTAZIONALE}}$, OVVERO

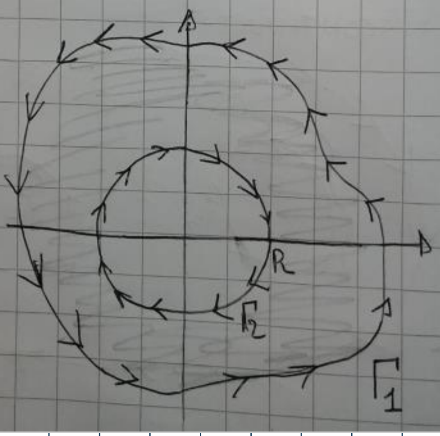
$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

ALLORA $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \oint_{\Gamma_i} \underline{F} \circ d\underline{r} = 0$

$$\underline{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

DEFINITO IN $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$\nabla \times \underline{F} = \underline{0}$



$$\oint_{\Gamma_1} \underline{F} \circ d\underline{r} + \oint_{\Gamma_2} \underline{F} \circ d\underline{r} = 0$$

$$\Gamma_2 : \begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \,\mathrm{sen}\, t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$dx = -R \,\mathrm{sen}\, t \, dt \qquad dy = R \cos t \, dt$

$$\oint_{\Gamma_2} \underline{F}\circ d\underline{r} = \int_{2\pi}^{0}\left(-\frac{R\sin t}{R^2}\cdot(-R\sin t)+\frac{R\cos t}{R^2}\cdot R\cos t\right)dt =$$

$$= \int_{2\pi}^{0}(\sin^2 t+\cos^2 t)\,dt = \int_{2\pi}^{0} dt = -2\pi$$

RISULTATO INDIPENDENTE DAL RAGGIO R

$$\oint_{\Gamma_1} \underline{F}\circ d\underline{r} = 2\pi$$

$$\iint_S (\nabla\times\underline{F})\circ\hat{n}\,dS = \oint_C \underline{F}\circ d\underline{r}$$

$$\nabla\times\underline{F}=\underline{0} \Rightarrow \oint_C \underline{F}\circ d\underline{r} = 0$$

$$\underline{F} = \nabla U \Rightarrow \oint_C \underline{F}\circ d\underline{r} = 0$$

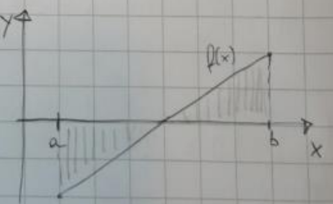
$$\oint_C \underline{F}\circ d\underline{r} = 0 \Rightarrow \nabla\times\underline{F}=\underline{0} \quad ?$$

$$\Rightarrow \underline{F} = \nabla U \quad ?$$

lo si aspetta anche quando non è IRROTAZIONALE

$$\iint_S \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dA = \oint_C \underline{F}\circ d\underline{r}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

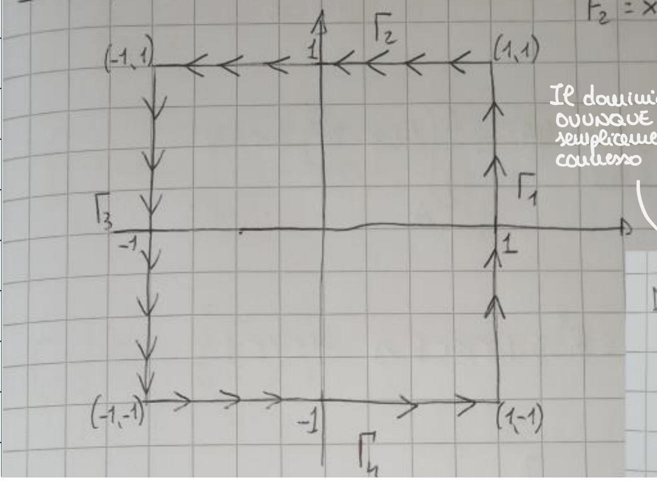


ESEMPIO

$\underline{F} = (y^2, x^2)$

$F_1 = y^2$

$F_2 = x^2$



Il dominio è OVUNQUE semplicemente connesso

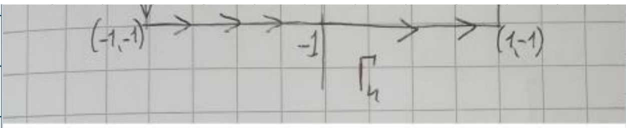
però

F1: 4y-2xy+3x

F2: 3xy-y

DOMINIO SEMPLICEMENTE CONNESSO

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y$$



$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y$$

IL CAMPO $\underline{F}$ É ROTAZIONALE

$$\nabla \times \underline{F} \neq \underline{0} \Rightarrow \underline{F} \neq \nabla U$$

CAMPO ROTAZIONALE $\Rightarrow$ NON CONSERVATIVITÁ

Sarà un caso di campo NON conservativo ma di lavoro NULLO

Ci si aspetta dunque che $\oint_\Gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} = 0$, ma:

CALCOLO $\oint_\Gamma \underline{F} \circ d\underline{r}$ CON GAUSS-GREEN

posso perché ho un percorso chiuso

$$\iint_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA = \iint_A (2x - 2y)\, dx\, dy$$

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1 \wedge -1 \le y \le 1\right\}$$

$$\int_{-1}^{1} \left[\int_{-1}^{1} (2x-2y)\, dy\right] dx$$

$$\int_{-1}^{1} (2x-2y)\, dy = \left(2xy - y^2\right)\Big|_{-1}^{1} = 2x - 1 - (-2x - 1) = 4x$$

$$\int_{-1}^{1} 4x\, dx = 2x^2\Big|_{-1}^{1} = 0$$

VERIFICO tramite gli integrali di linea:

$$\Gamma_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases} \quad t \in [-1, 1] \qquad dx = 0 \quad dy = dt$$

$$\int_{\Gamma_1} \underline{F} \circ d\underline{r} = \int_{\Gamma_1} F_1\, dx + F_2\, dy = \int_{\Gamma_1} F_2\, dy = \int_{-1}^{1} dt = 2$$

$$\Gamma_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases} \quad t \in [-1, 1] \qquad dx = dt \quad dy = 0$$

$$\int_{\Gamma_2} \underline{F} \circ d\underline{r} = \int_{\Gamma_2} F_1\, dx + F_2\, dy = \int_{\Gamma_2} F_1\, dx = \int_{1}^{-1} dt = -2$$

$$\Gamma_3 : \begin{cases} x = -1 \\ y = t \end{cases} \quad t \in [-1, 1] \qquad dx = 0 \quad dy = dt$$

$$\int_{\Gamma_3} \underline{F} \circ d\underline{r} = \int_{\Gamma_3} F_1\, dx + F_2\, dy = \int_{\Gamma_3} F_2\, dy = \int_{+1}^{-1} dt = -2$$

$$\Gamma_4 : \begin{cases} x = t \\ y = -1 \end{cases} \quad t \in [-1, 1] \qquad dx = dt \quad dy = 0$$

$$\int_{\Gamma_4} \underline{F} \circ d\underline{r} = \int_{\Gamma_4} F_1\, dx + F_2\, dy = \int_{\Gamma_4} F_1\, dx = \int_{-1}^{1} dt = 2$$

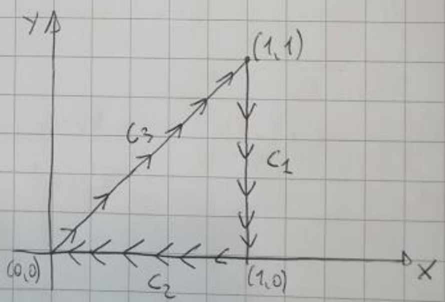
$$\oint_\Gamma \underline{F} \circ d\underline{r} = 2 - 2 - 2 + 2 = 0$$

ESEMPIO

$\underline{F} = (y^2, x^2)$

$F_1 = y^2$

$F_2 = x^2$



$\nabla \times \underline{F} \neq \underline{0}$

IL VERSO DI PERCORRENZA DEL BORDO É NEGATIVO

$$\iint_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA = \oint_C \underline{F} \cdot d\underline{r}$$

VALE PER C ORIENTATA POSITIVAMENTE

SE C É PERCORSA NEGATIVAMENTE, DEVO CAMBIARE SEGNO ALL' INTEGRALE

$$\iint_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA \Rightarrow \iint_A \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x}\right) dA$$

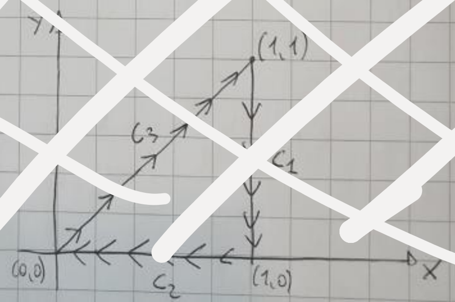
$$\iint_A (2y-2x)\, dA$$

$A : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \ \wedge \ 0 \leq y \leq x\}$

~~$\underline{F} = (y^2, \ldots)$~~

~~$F_1 = y^2$~~

~~$F_2 = x^2$~~



~~$$\iint_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA = \oint \underline{F} \cdot d\underline{r}$$~~

~~VALE PER C ORIENTATA POSITIVAMENTE~~

~~SE C È PERCORSO NEGATIVAMENTE, ... CAMBIARE SEGNO ALL' INTEGRALE~~

~~$$\iint_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA \Rightarrow \iint_A \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x}\right) dA$$~~

$$\int_0^1 \left[\int_0^x (2y-2x)\,dy\right] dx = \int_0^1 \left[\left(y^2-2xy\right)\Big|_0^x\right] dx =$$

$$\int_0^1 (x^2-2x^2)\,dx = -\int_0^1 x^2\,dx = -\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = -\frac{1}{3}$$

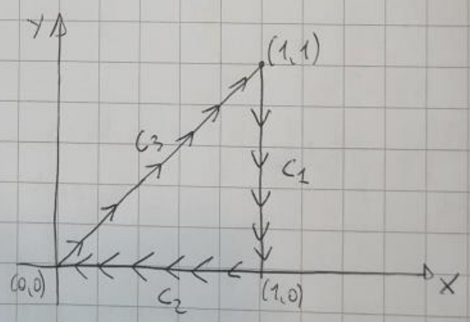
$$\iint_A (2y-2x)\,dA$$

$$A: \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \;\wedge\; 0 \le y \le x\right\}$$

$\underline{F} = (y^2, x^2)$

$F_1 = y^2$

$F_2 = x^2$



$\nabla \times \underline{F} \neq \underline{0}$

IL VERSO DI PERCORRENZA DEL BORDO É NEGATIVO

$C_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases} \quad t \in [0,1] \qquad dx = 0, \quad dy = dt$

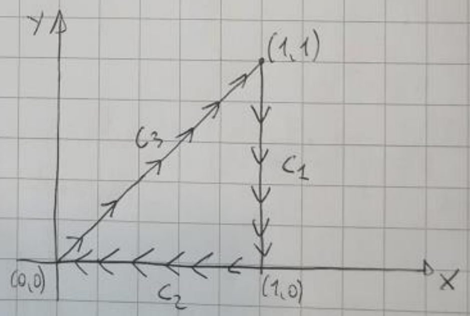
$$\int_{C_1} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_{C_1} F_2\,dy = \int_1^0 dt = -1$$

$C_2: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad t \in [0,1] \qquad dx = dt, \quad dy = 0$

$\underline{F} = (y^2, x^2)$

$F_1 = y^2$

$F_2 = x^2$



$\nabla \times \underline{F} \neq \underline{0}$

IL VERSO DI PERCORRENZA DEL BORDO É NEGATIVO

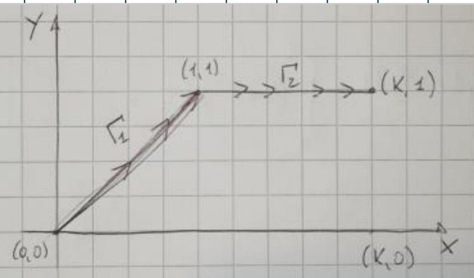
$C_3: \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad t \in [0,1] \qquad dx = dt \quad dy = dt$

$$\int_{C_3} \underline{F} \circ d\underline{r} = \int_{C_3} F_1 dx + F_2 dx = \int_0^1 (t^2 + t^2) dt =$$

$$= \int_0^1 2t^2 dt = \frac{2}{3} t^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\oint_{C \text{ (ORIENTATA NEGATIVAMENTE)}} \underline{F} \circ d\underline{r} = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} = -1 + 0 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

$\underline{F} = (x, x^2)$



DETERMINARE IL VALORE DI K>1 TALE CHE

$$\int_{\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2} \underline{F} \circ d\underline{r} = 3$$

$F_1 = x \qquad F_2 = x^2$

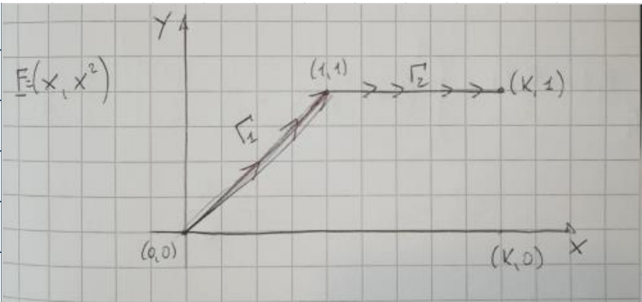
$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$

$\nabla \times \underline{F} \neq \underline{0} \implies \underline{F} \neq \nabla U$

$\Gamma_1: \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad t \in [0,1] \qquad dx = dt \quad dy = dt$

$$\int_{\Gamma_1} F_1 dx + F_2 dt = \int_0^1 (t + t^2) dt = \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{5}{6}$$



DETERMINARE IL VALORE DI $K>1$ TALE CHE

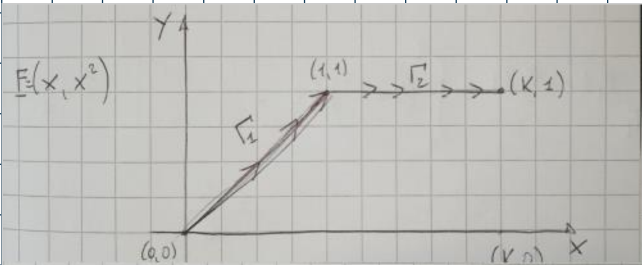
$$\int_{\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2} \underline{F}\circ d\underline{r} = 3$$

$$\Gamma_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases} \quad t\in[1, K] \qquad dx = dt \quad dy = 0$$

$$\int_{\Gamma_2} F_1 dx + F_2 dy = \int_1^K t \cdot dt = \frac{t^2}{2}\Big|_1^K = \frac{K^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\int_{\Gamma} \underline{F}\circ d\underline{r} = 3 \quad \text{(DATO DI INPUT)}$$

$$3 = \frac{5}{6} + \frac{K^2}{2} - \frac{1}{2}$$



$$K^2 = 2\cdot\left(3 - \frac{5}{6} + \frac{1}{2}\right) = 2\cdot\left(\frac{18-5+3}{6}\right) = \frac{16}{3}$$

$$K = \pm\frac{4}{\sqrt{3}} = \pm\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$K = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$ ($K>1$ PER RICHIESTA ESERCIZIO)

$$\Gamma_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases} \quad t\in[1, K] \qquad dx = dt \quad dy = 0$$

$$\int_{\Gamma_2} F_1 dx + F_2 dy = \int_1^K t \cdot dt = \frac{t^2}{2}\Big|_1^K = \frac{K^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\int_{\Gamma} \underline{F}\circ d\underline{r} = 3 \quad \text{(DATO DI INPUT)}$$

$$3 = \frac{5}{6} + \frac{K^2}{2} - \frac{1}{2}$$

Complementi sui campi vettoriali ed esercizi

sabato 14 novembre 2020 13:34

Significato fisico del rotore (Tratto dal testo *A. Bacciotti, CALCOLO DIFFERENZIALE E INTEGRALE II. Seconda parte: Vettori, funzioni reali di più variabili reali, serie, Celid*).

Il termine *rotore* rimanda inevitabilmente alla rotazione. In effetti, dato il campo vettoriale F di $\mathbb{R}^3$, si osserva che il vettore rot$F$ è in qualche modo legato alla rotazione. Per renderci conto di ciò, consideriamo un caso molto semplice di un corpo rigido. Ogni movimento del corpo rigido si può immaginare come una combinazione di un moto traslatorio e di un moto rotatorio intorno al baricentro. Supponiamo per semplicità che in ogni punto $P(x, y, z)$ del corpo rigido la velocità $\vec{v}(P)$ dipenda solo dalla posizione del punto P e che la velocità angolare $\vec{\omega}$ sia costante. Allora

$$\vec{v}(P) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{PO} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \wedge (x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= (\omega_2 z - \omega_3 y)\vec{i} + (\omega_3 x - \omega_1 z)\vec{j} + (\omega_1 y - \omega_2 x)\vec{k}.$$

Ne segue che

$$\operatorname{rot} \vec{v}(P) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_2 z - \omega_3 y & \omega_3 x - \omega_1 z & \omega_1 y - \omega_2 x \end{vmatrix} = (2\omega_1, 2\omega_2, 2\omega_3) = 2\vec{\omega}.$$

Quindi il rotore del campo di velocità è multiplo del vettore velocità angolare, che è chiaramente legato alla rotazione. In particolare in questo semplice esempio si ha che

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{\omega} = \vec{0}.$$

Per questo motivo si dice che un campo è *irrotazionale* quando il suo rotore è nullo. Questa terminologia si utilizza anche nei casi più generali. Quando si considera ad esempio il moto di un fluido, $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$ indica assenza di vorticosità.

TEORÍA DELLA DIVERGENZA:

$$\oiint \underline{F} \circ \hat{n} \, dS = \iiint_V \underbrace{\nabla \circ \underline{F}}_{\text{divergenza del campo vettoriale}} \, dx\,dy\,dz$$

Se F = 0 allora
1) Flusso entrante uguale a flusso uscente
o
2) nessun flusso attraversa la superficie

Se va a 0 indica la capacitá di un flusso a non uscire dalla superficie

POTENZIALE VETTORE

1) $\underline{F}(x,y,z)$ SI DICE SOLENOIDALE IN UN DOMINIO $D \subseteq \mathbb{R}^3$ SE

$$\underbrace{\nabla \circ \underline{F}}_{\text{DIVERGENZA}} = 0 \quad \forall (x,y,z) \in D$$

2) SE $\underline{F}(x,y,z)$ É UN CAMPO VETTORIALE LISCIO SOLENOIDALE, DEFINITO IN $D \in \mathbb{R}^3$ SEMPLICEMENTE CONNESSO

$\Rightarrow$ ALLORA ESISTE UN CAMPO VETTORIALE $\underline{G}(x,y,z)$: $\underline{F} = \nabla \times \underline{G}$

F = rotore di G

dove $\underline{G}(x,y,z)$ SI DEFINISCE POTENZIALE VETTORE

Inoltre,

$$\nabla \circ \underline{F} = \nabla \circ \underbrace{(\nabla \times \underline{G})}_{=0\,?}$$

Dimostrazione:

$$\nabla \times \underline{G} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} =$$

Inoltre,

$$\nabla \circ \underline{F} = \nabla \circ \underbrace{(\nabla \times \underline{G})}_{=0\,?}$$ Dimostrazione:

$$\nabla \times \underline{G} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{i}\left(\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right)$$

$$\nabla \circ (\nabla \times \underline{G}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 G_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 G_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 G_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 G_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 G_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 G_1}{\partial z \partial y} = 0$$

CAMPO VETTORIALE ARMONICO:

$\underline{F}(x, y, z)$ SI DICE ARMONICO SE È CONTEMPORANEAMENTE CONSERVATIVO (LAMELLARE) E SOLENOIDALE. Cioè:

conservativo = lamellare

$$\begin{cases} \underline{F} = \nabla U \\ \nabla \circ \underline{F} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\nabla \circ (\nabla U)} = 0$$

divergenza di un gradiente

pari a 0 per la solenoidità

$$\nabla \circ (\nabla U) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \circ \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) =$$

$\underline{F}(x,y,z)$ SI DICE ARMONICO SE É CONTEMPORANEAMENTE CONSERVATIVO (LAMELLARE) E SOLENOIDALE. Cioè:

$$\begin{cases} \underline{F} = \nabla U \\ \nabla \circ \underline{F} = 0 \end{cases} \Rightarrow \nabla \circ (\nabla U) = 0$$

Somma delle derivate pure parziali

$$\nabla \circ (\nabla U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \nabla^2 U$$

LAPLACIANO DI U

$$\begin{cases} \underline{F} = \nabla U \\ \nabla \circ \underline{F} = 0 \end{cases} \Rightarrow \nabla \circ (\nabla U) = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \nabla^2 U$$

LAPLACIANO DI U

$\nabla^2 U = 0$ SE IL CAMPO $\underline{F}(x,y,z)$ É ARMONICO

Il Laplaciano è zero

ESEMPIO:

$\underline{F} = (a y^{m}, b x^{n})$ $\qquad a, b \in \mathbb{R}$

$m, n \in \mathbb{N}$ dunque DOMINIO SEMPLICEMENTE CONNESSO

DETERMINARE I VALORI DI a, b, m, n CHE RENDONO $\underline{F}$ CONSERVATIVO $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$F_1 = a y^{m}$ $\qquad F_2 = b x^{n}$

$\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = n \cdot b \cdot x^{(n-1)}$ $\qquad \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = m \cdot a \cdot y^{(m-1)}$

Si devono eguagliare SEMPRE (poiché mi interessa la conservatività)

$n \cdot b \cdot x^{(n-1)} = m \cdot a \cdot y^{(m-1)}$

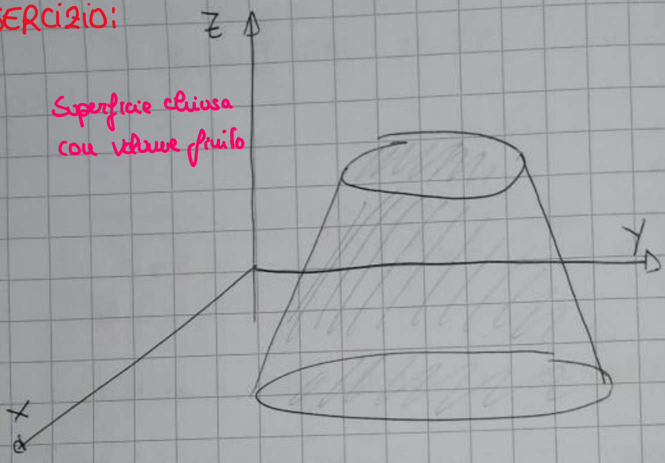
devono essere termini noti e lo sono se $n-1=0$ ed $m-1=0$

$n = m = 1 \implies b = a$

dunque:

ESERCIZIO:

Superficie chiusa con volume finito



$$\underline{F} = \left(e^{z} + \cos y,\ x^{3} - 7\sqrt{z^{2}+1},\ xy + \operatorname{sen}(x^{2}+1)\right)$$

CALCOLARE $\oiint \underline{F} \circ \hat{n}\, dS$

il flusso in uscita

Applico il teorema della divergenza:

$$\oiint \underline{F} \circ \hat{n}\, dS = \iiint_V \nabla \circ \underline{F}\, dx\, dy\, dz = \ldots$$

La divergenza fa zero poiché le derivate parziali sono tutte nulle

$$\underline{F} = \left(e^{z} + \cos y,\ x^{3} - 7\sqrt{z^{2}+1},\ xy + \operatorname{sen}(x^{2}+1)\right)$$

CALCOLARE $\oiint \underline{F} \circ \hat{n}\, dS$

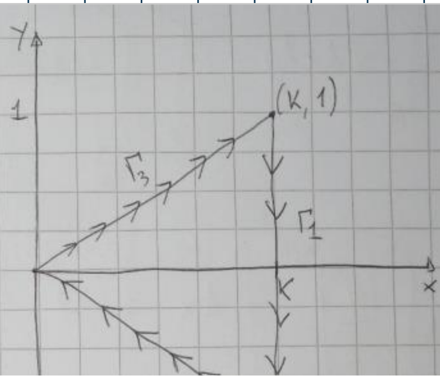
ESERCIZIO!

$\underline{F} = (y^2+1,\ xy+3)$

DETERMINARE

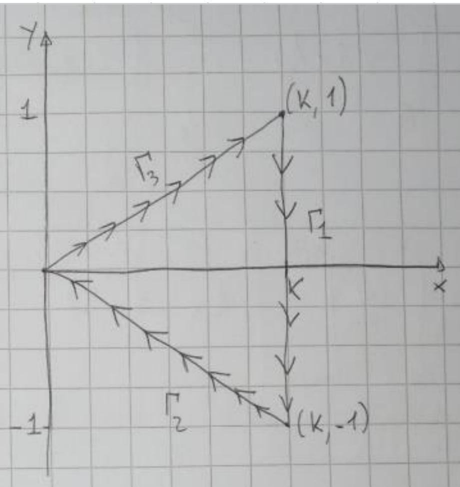
IL VALORE DI $K>0$

AFFINCHÉ



ESERCIZIO:

$\underline{F} = (y^2+1,\ xy+3)$



DETERMINARE IL VALORE DI $K>0$ AFFINCHÉ

$$\oint \underline{F} \cdot d\underline{r} = 1$$

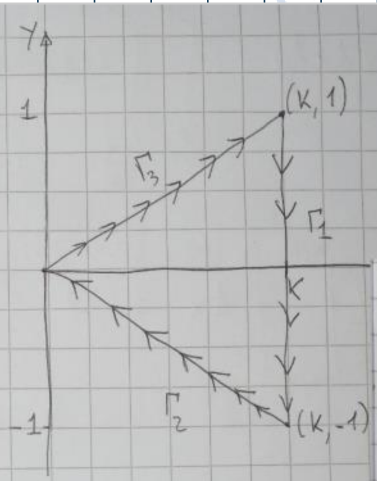
METODI:

1) Parametrizzazione delle tre superfici e sommatoria del lavoro che deve essere pari a 1
2) Poiché il percorso è chiuso, si può legare l'integrale di linea ad uno di superficie tramite gauss-green (devo verificare che il campo sia irrotazionale)

$\underline{F} = (y^2+1,\ xy+3)$

DETERMINARE IL VALORE DI $K>0$ AFFINCHÉ

$$\oint \underline{F} \cdot d\underline{r} = 1$$



METODO ②:

GAUSS-GREEN: $\frac{\partial F_2}{\partial x} = y \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y$

$$\iint_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy$$

SE $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ É ORIENTATA POSITIVAMENTE

IN QUESTO CASO $\displaystyle\iint_A \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x}\right) dx\,dy$

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le k \ \wedge\ -\frac{x}{k} \le y \le \frac{x}{k}\right\}$$

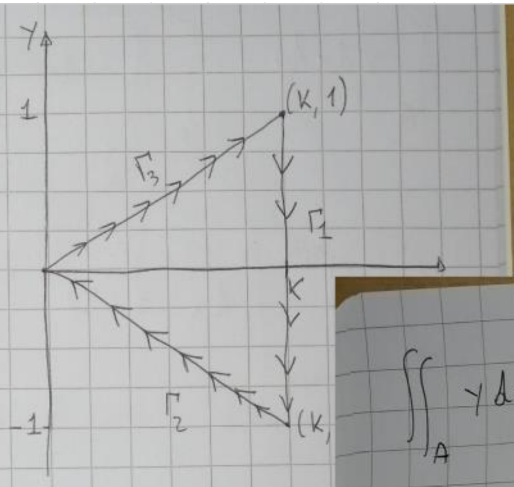
$\underline{F} = (y^2+1,\ xy+3)$

DETERMINARE

IL VALORE DI $K>0$

AFFINCHÉ

$\oint \underline{F} \cdot d\underline{r} = 1$



$$\iint_A y\, dx\, dy = \int_0^K \left[\int_{-\frac{x}{K}}^{x/K} y\, dy \right] dx =$$

$$= \int_0^K \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-x/K}^{x/K} dx = 0$$

dunque!

$\nexists K \in \mathbb{R} : \oint \underline{F} \cdot d\underline{r} = 1$

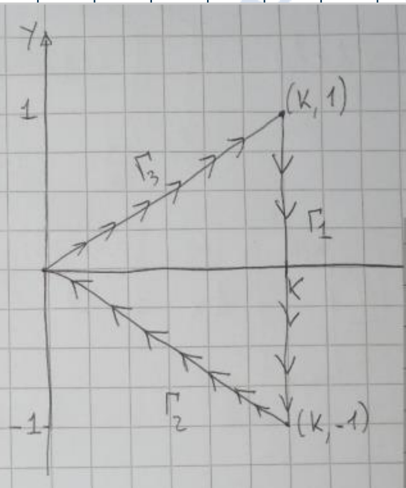
$\underline{F} = (y^2+1,\ xy+3)$

DETERMINARE

IL VALORE DI $K>0$

AFFINCHÉ

$\oint \underline{F} \cdot d\underline{r} = 1$



METODO 1:

VERIFICA CON INTEGRALI CURVILINEI

$$\Gamma_1 : \begin{cases} x = K \\ y = t \end{cases} \quad t \in [-1, 1] \xrightarrow{\text{differenziali}} \begin{matrix} dx = 0 \\ dy = dt \end{matrix}$$

$$\int F_2\, dy = \int_1^{-1} (Kt+3)\, dt = \left. \frac{Kt^2}{2} + 3t \right|_1^{-1} =$$

$$= \frac{K}{2} - 3 - \frac{K}{2} - 3 = -6$$

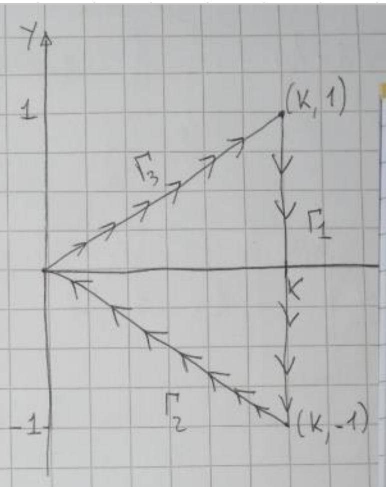
$\underline{F} = (y^2+1,\ xy+3)$

DETERMINARE

IL VALORE DI $K>0$

AFFINCHÉ

$\oint \underline{F} \cdot d\underline{r} = 1$



$\Gamma_2: \begin{cases} x = t \\ y = -\dfrac{t}{K} \end{cases} \quad t \in [0, K] \qquad dx = dt \quad dy = -\dfrac{1}{K}\,dt$

$$\int_K^0 \left(\frac{t^2}{K^2}+1\right)dt + \int_K^0 \left(-\frac{t^2}{K}+3\right)\cdot\left(-\frac{1}{K}\right)\cdot dt =$$

$$= \int_K^0 \left(\frac{t^2}{K^2} + 1 + \frac{t^2}{K^2} - \frac{3}{K}\right)dt = \frac{2}{K^2}\int_K^0 t^2\,dt + \left(1-\frac{3}{K}\right)\int_K^0 dt =$$

$$= \frac{2}{K^2}\cdot\left(\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_K^0 + \left(1-\frac{3}{K}\right)\cdot t\Big|_K^0 = -\frac{2}{3}K - K + 3$$

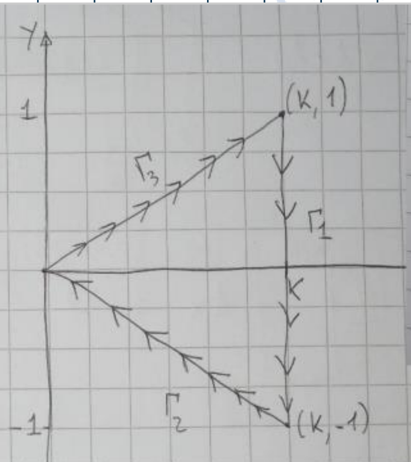
$\underline{F} = (y^2+1,\ xy+3)$

DETERMINARE

IL VALORE DI $K>0$

AFFINCHÉ

$\oint \underline{F} \cdot d\underline{r} = 1$



$\Gamma_3: \begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{t}{K} \end{cases} \quad t \in [0, K] \qquad dx = dt \quad dy = \dfrac{1}{K}\,dt$

$$\int_0^K \left(\frac{t^2}{K^2}+1\right)dt + \int_0^K \left(\frac{t^2}{K}+3\right)\cdot\frac{1}{K}\cdot dt =$$

$$= \int_0^K \left(\frac{t^2}{K^2} + 1 + \frac{t^2}{K^2} + \frac{3}{K}\right)dt =$$

$$= \frac{2}{K^2}\int_0^K t^2\,dt + \left(1+\frac{3}{K}\right)\int_0^K dt =$$

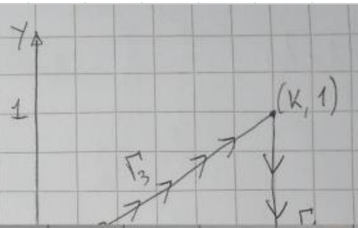
$$= \frac{2}{3}K + K + 3$$

$$\oint \underline{F} \cdot d\underline{r} : -6 - \frac{2}{3}K - K + 3 + \frac{2}{3}K + K + 3 = 0$$

PER CASA: TESTARE $\underline{F} = (y^3+1,\ xy+3)$

LUNGO LO STESSO PERCORSO

$\underline{F} = (y^2+1,\ xy+3)$



DETERMINARE

$\Gamma_3: \begin{cases} x = t \\ y = \frac{t}{K} \end{cases}$ $t \in [0, K]$

$dx = dt$

$dy = \frac{1}{K}\, dt$

$$\iint_A f(x,y)\, dx\, dy$$

$f(x,y) = y$ FUNZIONE DISPARI

A SIMMETRICO RISPETTO AD ASSE x $(y=0)$

LUNGO LO STESSO PERCORSO

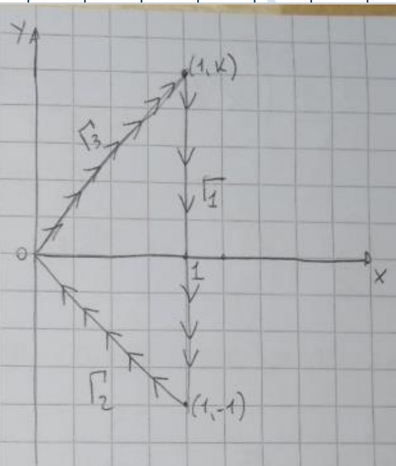
$= \frac{2}{3}K + K + 3$

ESERCIZIO!

$\underline{F} = (y^2+1,\ xy+3)$

DETERMINARE IL VALORE DI K AFFINCHÉ

$\oint \underline{F} \cdot d\underline{r} = 1$



$$\iint_A \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x} \right) dx\, dy$$

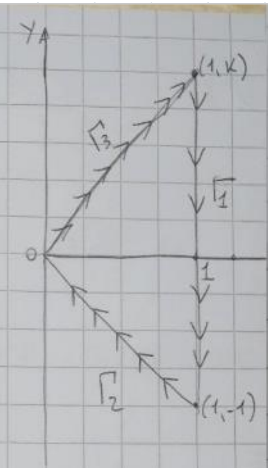
GAUSS-GREEN PER CIRCUITI ORIENTATI NEGATIVAMENTE

$A: \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \ \wedge\ -x \le y \le Kx \right\}$

$\underline{F} = (y^2+1, xy+3)$

DETERMINARE IL VALORE DI K AFFINCHÉ

$\oint \underline{F} \cdot d\underline{r} = 1$



$$\iint_A \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x} \right) dx\,dy$$

GAUSS-GR CIRCUITI NEGATIV

$A: \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 1 \ \wedge \ -x \le y \le Kx \right\}$

$$\int_0^1 \left[\int_{-x}^{Kx} y\,dy \right] dx = \int_0^1 \frac{y^2}{2} \Big|_{-x}^{Kx} dx = \int_0^1 \left(\frac{K^2x^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right) dx =$$

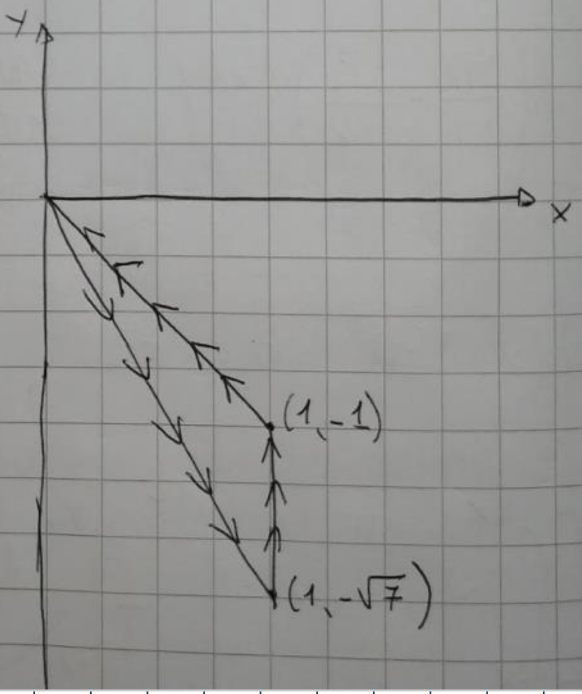
$$= \frac{(K^2-1)}{2} \int_0^1 x^2\,dx = \frac{K^2-1}{6}$$

$$\frac{K^2-1}{6} = 1 \implies K^2 = 7 \implies K = \pm\sqrt{7}$$

DAL DISEGNO, PRENDO $K > 0$, OVVERO $K = \sqrt{7}$

PER $K = -\sqrt{7}$

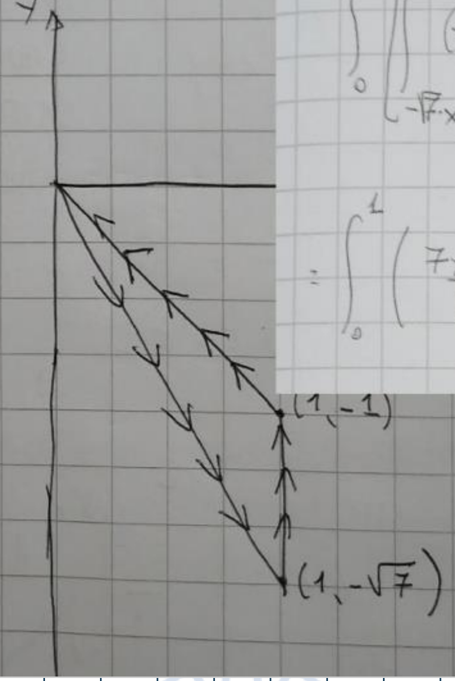
IL CIRCUITO SAREBBE STATO ORIENTATO POSITIVAMENTE



Kx $dx = \int_0^1 \left(\frac{K^2x^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right) dx =$
$-x$
$\frac{K^2-1}{6}$
$7 \implies K = \pm\sqrt{7}$
$K > 0$, OVVERO $K = \sqrt{7}$

PER $K = -\sqrt{7}$

IL CIRCUITO SAREBBE STATO ORIENTATO POSITIVAMENTE



USANDO GAUSS GREEN

$$\int_0^1 \left[\int_{-\sqrt{7}x}^{-x} (-y)\,dy\right] dx = \int_0^1 \left[\int_{-x}^{-\sqrt{7}x} y\,dy\right] dx =$$

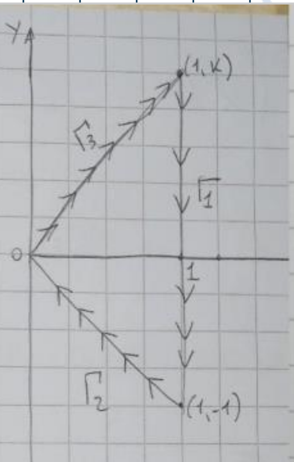
$$= \int_0^1 \left(\frac{7x^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right) dx = 3\int_0^1 x^2\,dx = 1$$

$K>0$, OVVERO $K=\sqrt{7}$

$\underline{F} = (y^2+1,\ xy+3)$

DETERMINARE IL VALORE DI K AFFINCHÉ

$$\oint \underline{F} \circ d\underline{r} = 1$$



$$\iint_A \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x}\right) dx\,dy$$

GAUSS-GREEN CIRCUITI OR
NEGATIVAM

$A: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 1 \ \wedge\ -x \le y \le$

INTEGRALI DI LINEA NEL CASO $K>0$

$$\Gamma_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases} \quad t \in [-1, K] \qquad \begin{matrix} dx = 0 \\ dy = dt \end{matrix}$$

$$\int_K^{-1} (t+3)\,dt = \left.\frac{t^2}{2} + 3t\right|_K^{-1} = \frac{1}{2} - 3 - \frac{K^2}{2} - 3K =$$

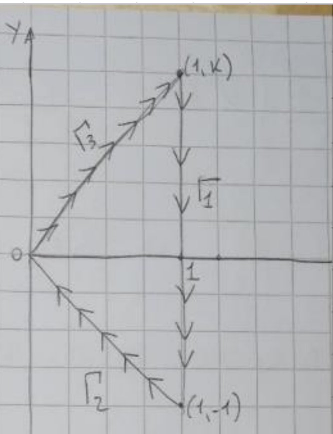
$$= -\left(\frac{K^2}{2} + 3K + \frac{5}{2}\right)$$

$$= \int_{\Gamma_1} \underline{F} \circ d\underline{r}$$

$\underline{F} = (y^2+1,\ xy+3)$

DETERMINARE IL VALORE DI K AFFINCHÉ

$\oint \underline{F} \circ d\underline{r} = 1$



$$\iint_A \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x}\right) dx\,dy$$

GAUSS-GREEN PE CIRCUITI ORIEN NEGATIVAMENT

$A: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 1 \ \wedge\ -x \le y < Kx$

$$\Gamma_2: \begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases} \quad t \in [0,1] \qquad dx = dt \quad dy = -dt$$

$$\int_{\Gamma_2} \underline{F} \circ d\underline{r} = \int_1^0 (t^2+1)\,dt + (-t^2+3)\cdot(-1)\cdot dt =$$

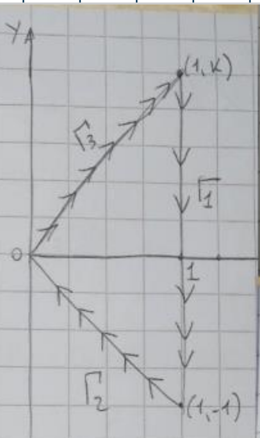
$$= \int_1^0 (t^2+1+t^2-3)\,dt = 2\int_1^0 t^2\,dt - 2\int_1^0 dt =$$

$$= -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}$$

$\underline{F} = (y^2+1,\ xy+3)$

DETERMINARE IL VALORE DI K AFFINCHÉ

$\oint \underline{F} \circ d\underline{r} = 1$



$$\iint_A \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x}\right) dx\,dy$$

GAUSS-GRE CIRCUITI NEGATIV

$A: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 1 \ \wedge\ -x \le y$

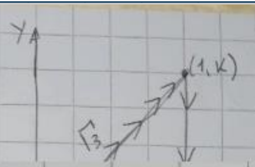
$$\Gamma_3: \begin{cases} x = t \\ y = Kt \end{cases} \quad t \in [0,1] \qquad dx = dt \quad dy = K\,dt$$

$$\int_{\Gamma_3} \underline{F} \circ d\underline{r} = \int_0^1 (K^2t^2+1)\,dt + (Kt^2+3)\cdot K\,dt =$$

$$= \int_0^1 (K^2t^2+1+K^2t^2+3K)\,dt = 2K^2\int_0^1 t^2\,dt + (1+3K)\int_0^1 dt =$$

$$= \frac{2}{3}K^2 + 1 + 3K$$

$\underline{F} = (y^2+1, xy+3)$



$$\Gamma_3 : \begin{cases} x = t \end{cases} \qquad t \in [0,1] \qquad dx = dt$$

$$\oint_{\Gamma} \underline{F} \circ d\underline{r} = -\frac{K^2}{2} - 3K - \frac{5}{2} + \frac{4}{3} + \frac{2}{3}K^2 + 1 + 3K =$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)K^2 + \left(1 + \frac{4}{3} - \frac{5}{2}\right) = \frac{K^2}{6} + \frac{6+8-15}{6} =$$

$$= \frac{K^2-1}{6}$$

ODE

sabato 14 novembre 2020 13:36

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

$\boxed{\text{O.D.E.}}$ (ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS)

$\boxed{\text{P.D.E.}}$ (PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS)

Non si deve trovare un valore di x ma una equazione che rispetta tale relazione↓

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', y^{(n-1)})$$

Forma esplicita

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

Forma implicita

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

O.D.E. (ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS)

P.D.E. (PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS)

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$$

ARGOMENTI

$$F: A \subseteq \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

O.D.E. (ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS)

P.D.E. (PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS)

ESEMPI:

$$y^{(n)} := y^{(n)}(x)$$

derivata ordinaria di ordine n

Devo trovare le funzioni y^n tali che:

① $y' = 6xy + \cos x$

② $y'' = 7y' - 3y\sqrt{x} + e^{x^2}$

Dato un campo scalare trovo la relazione fra essa e le derivate parziali

$$\frac{\partial U(x,y,t)}{\partial t} = 3\frac{\partial^2 U(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial U(x,y,t)}{\partial y}$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Esempio:

$$y = 5x + 6 \Rightarrow \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'=} = 5x + 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dy = (5x+6)dx$$

$$\int dy = \int (5x+6)dx \Rightarrow$$

$$y + k_1 = \frac{5}{2}x^2 + 6x + k_2$$

$$y = \frac{5}{2}x^2 + 6x + (k_2 - k_1)$$

$$\boxed{y = \frac{5}{2}x^2 + 6x + C}$$

soluzione integrale generale

STUDIEREMO SOLO LE ODE

1) CLASSIFICAZIONE: QUANTI TIPI DI ODE?

2) CONDIZIONI DI ESISTENZA: QUANDO ESISTE ALMENO UNA SOLUZIONE?

3) CONDIZIONI DI UNICITÀ: QUANDO LA SOLUZIONE, OLTRE AD ESISTERE, È ANCHE UNICA?

4) TECNICHE DI RISOLUZIONE

TIPI DI SOLUZIONE (INTEGRALE SOLUZIONE)

- **SOLUZIONE O INTEGRALE GENERALE:**
  LA SOLUZIONE É UNA FAMIGLIA DI SOLUZIONI (COMPAIONO UNA O PIÚ COSTANTI c_i)

- **SOLUZIONE O INTEGRALE PARTICOLARE:**
  SI ASSEGNANO DEI VALORI SPECIFICI ALLE COSTANTI c_i (PROBLEMI DI CAUCHY E PROBLEMI AI LIMITI)

- **SOLUZIONE O INTEGRALE SINGOLARE:** LA SOLUZIONE NON PUÒ ESSERE RICAVATA PER NESSUN VALORE DI c_i, MA BISOGNA FARE DEI RAGIONAMENTI SPECIFICI

CLASSIFICAZIONE ODE

	ORDINE	GRADO
a) $y' = x(y-2)$	1	1
b) $y'' - 5y' + 6y = 2x^2$	2	1
c) $(y')^2 + xy' - y = 0$	1	2
d) $(y''')^2 + y'' - y' = \sin x$	3	2
e) $y''' + y'' - (y')^3 = \sin x$	3	1

ORDINE: É IL MASSIMO ORDINE DI DERIVAZIONE NELL' ODE

GRADO: ESPONENTE DI ELEVAMENTO A POTENZA AVENTE COME BASE LA DERIVATA DI ORDINE MASSIMO

$y' = f(x,y) = f(x, y(x))$ un campo scalare

$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Devo trovare una curva di Analisi 1 tale che:

$y : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; \forall x \in I$ SI HA $y' = f(x, y(x))$

INOLTRE, $\forall x \in I$ RISULTA $(x, y(x)) \in A$

Equazioni differenziali a variabili separabili

$y' = 5y \qquad y'(x) = 5y(x)$

$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 5y \Rightarrow \frac{dy}{y} = 5dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 5dx \Rightarrow \ln|y| + K_1 = 5x + K_2$$

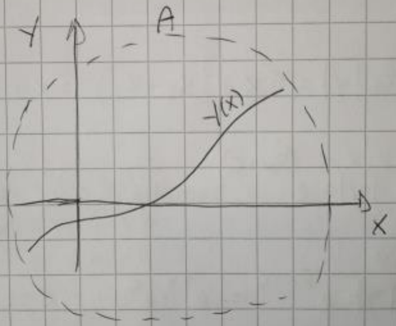
$y' = f(x,y) = f(x, y(x))$ un campo scalare

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Devo trovare una curva di Analisi $\exists$ tale che:

$y: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \in I$ SI HA $y' = f(x, y(x))$

INOLTRE, $\forall x \in I$ RISULTA $(x, y(x)) \in A$



LA SOLUZIONE $y(x)$ É UN SOTTOINSIEME DI A

Equazioni differenziali a variabili separabili

$y' = 5y \qquad y'(x) = 5y(x)$

$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 5y \Rightarrow \frac{dy}{y} = 5dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 5dx \Rightarrow \ln|y| + K_1 = 5x + K_2$$

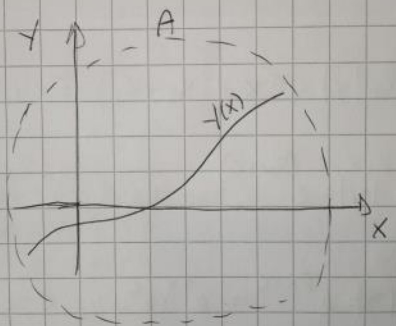
$$\Rightarrow \ln|y| = 5x + (K_2 - K_1) = 5x + C$$

$y' = f(x,y) = f(x, y(x))$

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$y: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \in I$ SI HA $y' = f(x, y(x))$

INOLTRE, $\forall x \in I$ RISULTA $(x, y(x)) \in A$



LA SOLUZIONE $y(x)$ É UN SOTTOINSIEME DI A

$y' = 5y \qquad y'(x) = 5y(x)$

$$|y| = e^{(5x+c)}$$

$$|y| = e^{5x+c} = e^{5x} \cdot e^{c} \qquad C := e^{c}$$

$$y = Ce^{5x} \qquad C \geq 0$$

SOLUZIONE o INTEGRALE GENERALE

ESEMPIO DI COSTRUZIONE DI UNA ODE

$y(x) = y = ax^2 + bx \Rightarrow ax^2 + bx - y = 0$

$y' = 2ax + b \qquad y'' = 2a$

$a = \frac{y''}{2} \qquad b = y' - 2ax = y' - y'' \cdot x$

$$\frac{y''}{2} \cdot x + (y' - y''x) \cdot x - y = 0$$

$y = ax^2 + bx$ É SOLUZIONE GENERALE

COME STIMARE a E b ?

ESEMPIO DI COSTRUZIONE DI UNA ODE

Vincoli

informazioni aggiuntive per stimare il coefficiente

In base all'ordine ho bisogno di più vincoli

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases} \quad \text{OPPURE} \quad \begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_A) = y_A \\ y(x_B) = y_B \end{cases}$$

CONDIZIONI INIZIALI (PROBLEMA DI CAUCHY) — CONDIZIONI AL CONTORNO

PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

PARTIAMO DAL CASO SEMPLICE DI ODE DEL I ORDINE
CAPIREMO TRA POCO COME CONVERTIRE UN'ODE DI ORDINE GENERICO n AD UN SISTEMA DI n ODE DEL I ORDINE

PER UN ASSEGNATO x_0, SI IMPONE UN NUMERO DI VINCOLI PARI ALL'ORDINE DELL'ODE

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0'(x_0) \end{cases} ; \quad \begin{cases} y''' = f(x, y, y', y'') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \\ y''(x_0) = y_0'' \end{cases}$$

PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

PARTIAMO DAL CASO SEMPLICE DI ODE DEL I ORDINE
CAPIREMO TRA POCO COME CONVERTIRE UN'ODE DI ORDINE GENERICO n AD UN SISTEMA DI n ODE DEL I ORDINE

ESEMPIO

$$\begin{cases} y' = 5y \\ y(0) = 3 \end{cases} ; \quad \begin{cases} y = Ce^{5x} \quad \text{SOLUZIONE GENERALE} \\ y(0) = 3 \Rightarrow 3 = C \cdot e^{5 \cdot 0} \Rightarrow C = 3 \end{cases}$$

$y = 3e^{5x}$ SOLUZIONE PARTICOLARE

UN PROBLEMA DI CAUCHY (P.C.) PUÒ ESSERE

- BEN POSTO: SI RIESCE A TROVARE UN INTEGRALE PARTICOLARE DAL VINCOLO IMPOSTO
- MAL POSTO: NON SI RIESCE A TROVARE UN INTEGRALE PARTICOLARE DAL VINCOLO IMPOSTO

ESEMPIO → ben posto

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} y = ce^x \\ 1 = c \cdot e^0 = c \end{matrix} \qquad \Rightarrow y = e^x$$

P.C. BEN POSTO

ESEMPIO → mal posto

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{y} \\ y(2) = -3 \end{cases} \Rightarrow$$

DALLA PRIMA RIGA:

$$y' = f(x,y) = 2\sqrt{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y} \ ; \ \frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx$$

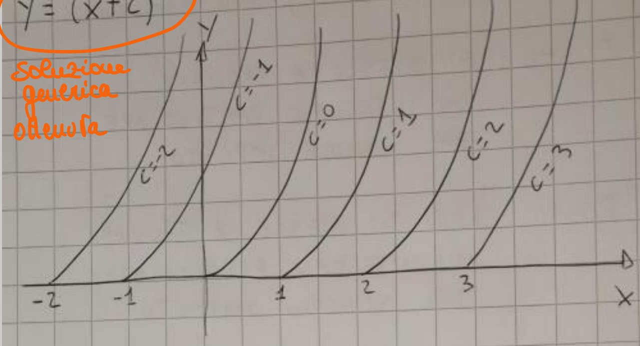
$$\int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int dx = \sqrt{y} + k_1 = x + k_2 \Rightarrow \sqrt{y} = x + c$$

$$\sqrt{y} = x + c \quad \wedge \quad x + c \geq 0$$

$x \geq -c$

$y = (x+c)^2$

Soluzione generica ottenuta



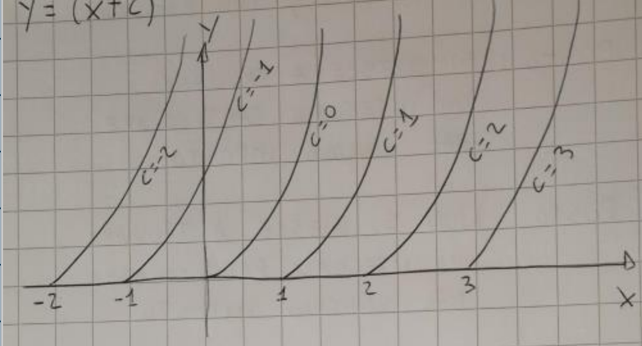
$y \geq 0 \Rightarrow y(2) = -3$ É IMPOSSIBILE IN QUESTO CASO

PROBLEMA DI CAUCHY MAL POSTO

$y = (x+c)^2 \wedge x \geq -c$ SOLUZIONE GENERALE

$x \geq -c$

$y = (x+c)^2$



$y \geq 0 \Rightarrow y(2) = -3$ É IMPOSSIBILE IN QUESTO CASO

PROBLEMA DI CAUCHY MAL POSTO

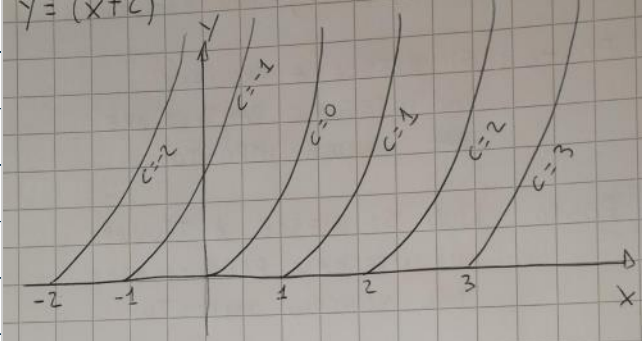
$y = (x+c)^2 \wedge x \geq -c$ SOLUZIONE GENERALE

$y = 0$ É COMUNQUE SOLUZIONE DI $y' = f(x,y) = 2\sqrt{y}$ MA NON É OTTENIBILE PER NESSUN VALORE DELLA COSTANTE C → la soluzione è un punto

$y=0$ É SOLUZIONE O INTEGRALE SINGOLARE PER $y' = f(x,y) = 2\sqrt{y}$

SU ALCUNI TESTI L'INTEGRALE SINGOLARE VIENE ANCHE INDICATO COME INTEGRALE DI FRONTIERA

$y=(x+c)^2$ $\quad x \geq -c$



$y \geq 0 \Rightarrow y(2)=-3$ É IMPOSSIBILE IN QUESTO CASO

PROBLEMA DI CAUCHY MAL POSTO

$y=(x+c)^2 \ \wedge \ x \geq -c$ SOLUZIONE GENERALE

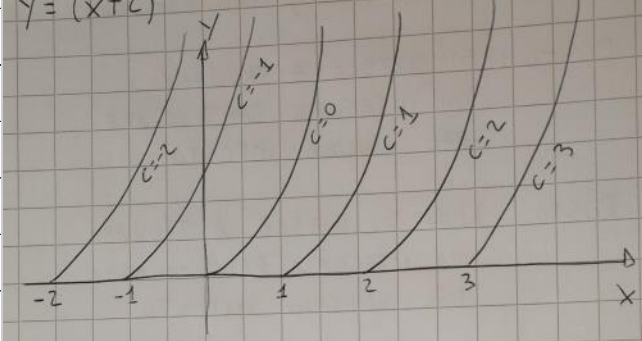
$y' = f(x,y) = 2\sqrt{y}$

DOMINIO $f(x,y)=2\sqrt{y}$ É $y \geq 0$

$y=0$ É LA FRONTIERA (COMPRESA NEL DOMINIO IN QUESTO CASO)

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}} \Rightarrow$$ $y=0$ NON APPARTIENE AL DOMINIO DI $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$

$y=(x+c)^2$ $\quad x \geq -c$



$y \geq 0 \Rightarrow y(2)=-3$ É IMPOSSIBILE IN QUESTO CASO

PROBLEMA DI CAUCHY MAL POSTO

$y=(x+c)^2 \ \wedge \ x \geq -c$ SOLUZIONE GENERALE

PROCEDURA **INTEGRALE SINGOLARE**

$y' = f(x,y)$

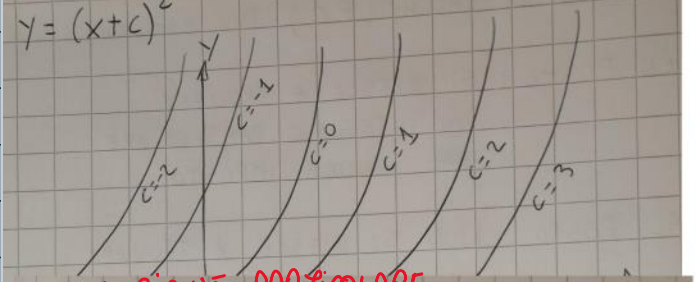
SIA $y(x)$ UNA SOLUZIONE PER

$y' = f(x,y) \qquad f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

SE $y(x)$ APPARTIENE AL CAMPO DI ESISTENZA DI $f(x,y)$ MA NON APPARTIENE AL CAMPO DI ESISTENZA DI $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, ALLORA

$y(x)$ É INTEGRALE SINGOLARE PER $y' = f(x,y)$

$y = (x+c)^2 \qquad x \geq -c$



SOLUZIONE PARTICOLARE

SE, INVECE, $y(x)$ APPARTIENE ANCHE AL DOMINIO DI $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ ALLORA $y(x)$ É UNA SOLUZIONE PARTICOLARE, ASSEGNANDO UN PARTICOLARE VALORE ALLA COSTANTE C NELL'ESPRESSIONE DELL'INTEGRALE GENERALE

PROCEDURA

$y' = f(x,y)$

SIA $y(x)$ UNA SOLUZIONE PER

$y' = f(x,y) \qquad f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

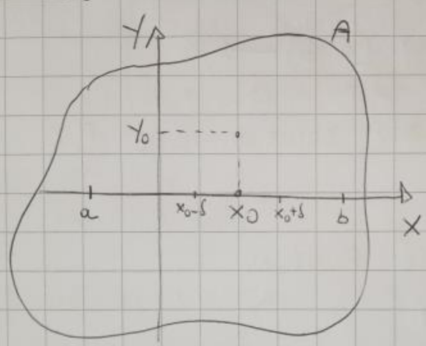
SE $y(x)$ APPARTIENE AL CAMPO DI ESISTENZA DI $f(x,y)$ MA NON APPARTIENE AL CAMPO DI ESISTENZA DI $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, ALLORA

$y(x)$ É INTEGRALE SINGOLARE PER $y' = f(x,y)$

SCHEMA

PROBLEMA DI CAUCHY

- BEN POSTO
  - IN PICCOLO
  - IN GRANDE
- MAL POSTO



$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

P.C. IN PICCOLO: UNA VOLTA IMPOSTA LA CONDIZIONE DI PASSAGGIO PER IL PUNTO (x_0, y_0), SI FOCALIZZA L'ATTENZIONE SOLO SU UN INTORNO DI x_0, E SI STUDIA SE E QUANTE FUNZIONI SOLUZIONE PASSANTI PER (x_0, y_0) CI SONO

$y: [x_0 - \delta; x_0 + \delta] \to \mathbb{R}$

P.C. IN GRANDE: SI FISSA A PRIORI UN INTERVALLO $[a,b]$, CON $x_0 \in [a,b]$, E SI STUDIA SE E QUANTE FUNZIONI

$y: [a,b] \to \mathbb{R}$

SONO SOLUZIONI DEL P. C.

PROBLEMA DI CAUCHY

P.C. IN PICCOLO: UNA VOLTA IMPOSTA LA CONDIZIONE

IL PUNTO (x_0, y_0),

TENZIONE SOLO SU

$_0$, E SI STUDIA

UNZIONI SOLUZIONE

$x_0, y_0)$ CI SONO

$\rightarrow \mathbb{R}$

SE E QUANTE FUNZIONI

$\Downarrow$

CONDIZIONI DI ESISTENZA

UNICITÁ

DELLA SOLUZIONE

PRIORI UN

$[a, b]$, CON

], E SI STUDIA

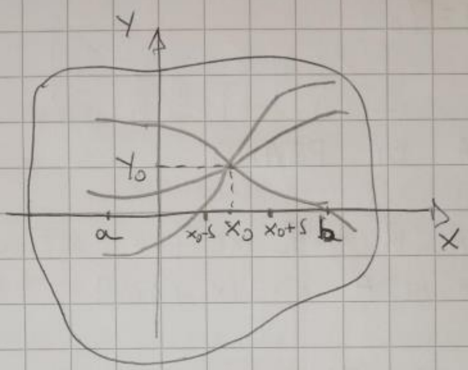
FUNZIONI

$\mathbb{R}$

DEL P.C.

CONDIZIONI DI ESISTENZA

ESISTE ALMENO UNA SOLUZIONE?



CONDIZIONE DI UNICITÁ

LA SOLUZIONE É UNICA?

P.C. IN PICCOLO

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

TEOREMA DI PEANO

SE $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ É UNA FUNZIONE CONTINUA IN A ED $(x_0, y_0) \in A$, A APERTO

ALLORA ESISTE ALMENO UNA FUNZIONE

$$y: [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbb{R}$$

CHE É SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY

P.C. IN PICCOLO

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

TEOREMA DI PEANO

SE $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ É U

CONTINUA IN A ED $(x_0, y_0$

ALLORA ESISTE ALMENO

$y: [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to$

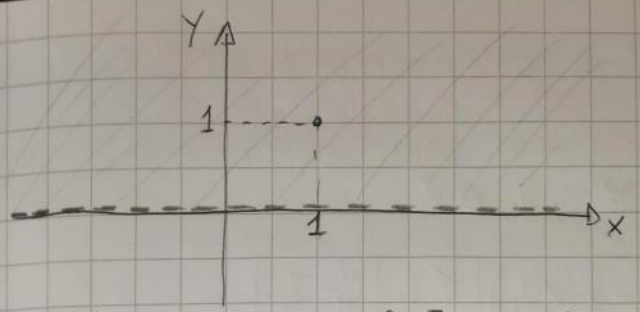
CHE É SOLUZIONE DEL

Esempio

$$\begin{cases} y' = e^x \ln y \\ y(1) = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{applico peano}} \quad f(x,y) = e^x \ln y$$

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

Dominio: $A: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$

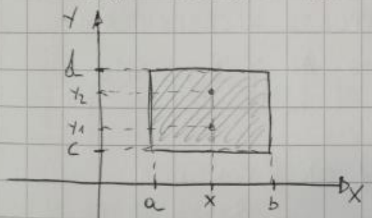


$(1,1) \in A$ $\quad \exists f: [1-\delta, 1+\delta] \to \mathbb{R}$

SOLUZIONE DEL P.C. ASSEGNATO

DEFINIZIONE DI FUNZIONE LIPSCHITZIANA

(UTILE PER LA CONDIZIONE DI UNICITÁ DELLA SOLUZIONE PER UN PROBLEMA DI CAUCHY)



SIANO $I = [a, b]$

$K = [c, d]$

$R = I \times K$

R RETTANGOLO

$\exists L > 0$:

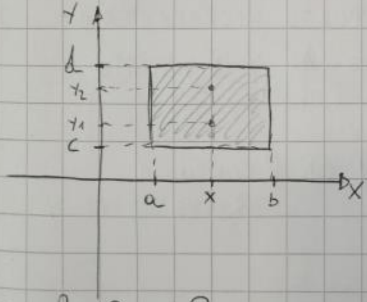
$\forall x \in I$ E $\forall y_1, y_2 \in K$,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L |y_1 - y_2|$$

OVVERO

DEFINIZIONE DI FUNZIONE LIPSCHITZIANA

(UTILE PER LA CONDIZIONE DI UNICITÀ DELLA SOLUZIONE PER UN PROBLEMA DI CAUCHY)



SIANO $I = [a, b]$

$K = [c, d]$

$R = I \times K$

R RETTANGOLO

SIA $f: R \to \mathbb{R}$

f È LIPSCHITZIANA IN y UNIFORMEMENTE RISPETTO AD x SE

$\exists L > 0$:

$\forall x \in I$ E $\forall y_1, y_2 \in K$,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

OVVERO

$$\frac{|f(x, y_1) - f(x, y_2)|}{|y_1 - y_2|} \leq L$$

OSSERVAZIONE: IL RAPPORTO INCREMENTALE RISPETTO AD y È LIMITATO

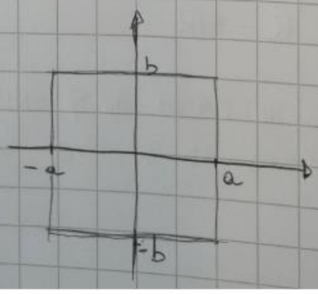
f LIP RISPETTO AD $y \Rightarrow f$ CONTINUA RISPETTO AD y

ESEMPIO

$f(x, y) = \sqrt{|y|}$

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$A = \mathbb{R}^2$



$R = [-a, a] \times [-b, b]$

VERIFICARE SE f È LIP

$\forall x \in [-a, a] \wedge \forall y_1, y_2 \in [-b, b]$

Basta trovare un punto in cui non è Lip per dire che non lo è mai

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

$$\left|\sqrt{|y_1|} - \sqrt{|y_2|}\right| \leq L |y_1 - y_2|$$

SCELGO $x = 0$ E $y_1 = 0$, E y_2 GENERICO

$$\left|\sqrt{|y_2|}\right| \leq L |y_2| \Rightarrow \frac{\sqrt{|y_2|}}{|y_2|} \leq L$$

SCELGO PER COMODITÀ $y_2 > 0$

$$\frac{\sqrt{y_2}}{y_2} \leq L \qquad \lim_{y_2 \to 0} \frac{\sqrt{y_2}}{y_2} = +\infty$$

$f(x, y) = \sqrt{|y|}$ NON È LIPSCHITZIANA

QUANDO $f(x,y)$ É SICURAMENTE LIP ?

Hyp: • $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN A APERTO

• $\forall (x,y) \in A \quad \exists \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ CONTINUA E LIMITATA IN A

OVVERO

$$\exists M>0 : \forall (x,y) \in A, \left| \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right| \leq M$$

TESI:

$$\forall R = (I \times K) \subseteq A, \ f(x,y) \text{ É LIP}$$

DIM.

TEOREMA DI LAGRANGE

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b-a)$$

$$|f(b) - f(a)| = |f'(c)| \cdot |(b-a)|$$

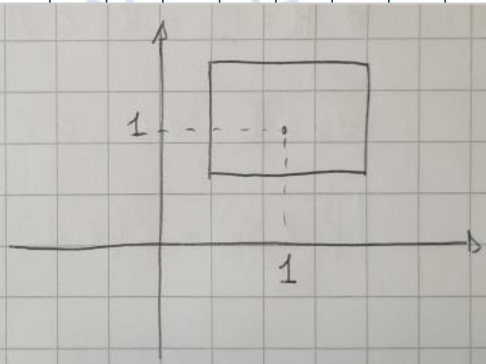
$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = \left| \frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y} \right| \cdot |y_1 - y_2|$$

$$\bar{y} \in (y_1, y_2)$$

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq M \cdot |y_1 - y_2|$$

ESEMPIO

$$f(x,y) = e^x \ln y$$



$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{e^x}{y}$$

R É UN COMPATTO

$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_R$ AMMETTE MASSIMO E MINIMO ASSOLUTI

$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_R$ É LIMITATA $\Rightarrow f$ É LIP

TEOREMA DI ESISTENZA ED UNICITÀ LOCALE DELLA SOLUZIONE PER UN PROBLEMA DI CAUCHY IN PICCOLO

Hyp:
- A APERTO DI $\mathbb{R}^2$
- $f: A \to \mathbb{R}$ CONTINUA

condizioni del teorema di PEANO

$\Downarrow$

dunque è LIP

- f LIP $\forall R$ CHIUSO $\subset A$ e limitato

OVVERO

$$\forall R = (I \times K) \subset A, \ \exists L_R > 0 \ /$$

$$\forall x \in I, \ \forall y_1, y_2 \in K,$$

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L_R |y_1 - y_2|$$

TESI:

$\forall (x_0, y_0) \in A, \ \exists! \ y: [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbb{R}$

SOLUZIONE DEL P.C. $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

N.B.: LA SOLUZIONE $y(x)$ È DI CLASSE C^1

ESEMPIO

equazione differenziale del primo ordine

$$\begin{cases} y' = y^3 \cdot \operatorname{sen}(xy) \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

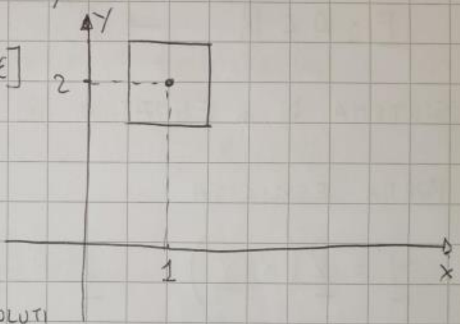
$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ CONTINUA

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cos(xy) \cdot y^3 + 3y^2 \operatorname{sen}(xy)$$

$R = [1-\delta, 1+\delta] \times [2-\varepsilon, 2+\varepsilon]$

R È UN COMPATTO

$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_R$ AMMETTE MASSIMO E MINIMO ASSOLUTI



IN QUANTO $\frac{\partial f}{\partial y}$ È CONTINUA IN R

$$\Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq L$$

$\exists! \ y: [1-\delta, 1+\delta] \to \mathbb{R}$ SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY ASSEGNATO

SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL I ORDINE

$$\underline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\underline{F}(x, \underline{y}, \underline{y}') = \underline{0} \qquad \underline{y}' = (y_1', y_2', \dots, y_n')$$

FORMA IMPLICITA

$$\underline{F} : A \subseteq \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}^n$$

SISTEMA DI n EQUAZIONI IN n INCOGNITE

FORMA ESPLICITA

$$\underline{y}' = \underline{f}(x, \underline{y}) \qquad \underline{f} : A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$$

OBIETTIVO:

TROVARE $y_i : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$

DERIVABILI IN I, TALI CHE

$$\underline{F}(x, \underline{y}, \underline{y}') = \underline{0}$$

OPPURE

$$\underline{y}' = \underline{f}(x, \underline{y})$$

$$\underline{y}' = \underline{f}(x, \underline{y}) \implies \begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots y_n) \end{cases}$$

ESEMPIO

$$\begin{cases} y_1' = e^x \cdot y_1 + y_2 \cdot \sin x = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = y_1 \cdot \cos x + y_2 \cdot e^{-x} = f_2(x, y_1, y_2) \end{cases}$$

$$\underline{f} = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$\underline{y} = (y_1, y_2) : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

$$y_1 : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$y_2 : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} \underline{y}' = \underline{f}(x, \underline{y}) \\ \underline{y}(x_0) = \underline{y}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_i = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots n) \\ y_i(x_0) = y_{0,i} \end{cases}$$

OGNI EQUAZIONE DIFFERENZIALE DI ORDINE n PUÓ ESSERE RISCRITTA COME UN SISTEMA DI n ODE DEL I ORDINE

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

$$y = y_1$$

$$y' = y_1' = y_2$$

$$y'' = y_1'' = y_2' = y_3$$

$$y''' = y_1''' = y_2'' = y_3' = y_4$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)} = \dots = y_n$$

PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} \underline{y}' = \underline{f}(x, \underline{y}) \\ \underline{y}(x_0) = \underline{y}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_i = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots n) \\ y_i(x_0) = y_{0,i} \end{cases}$$

OGNI EQUAZIONE DIFFERENZIALE DI ORDINE n PUÓ ESSERE RISCRITTA COME UN SISTEMA DI n ODE DEL I ORDINE

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

$$y = y_1$$

$$y' = y_1' = y_2$$

$$y'' = y_1'' = y_2' = y_3$$

$$y''' = y_1''' = y_2'' = y_3' = y_4$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)} = \dots = y_n$$

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \end{cases}$$

$$y''' + 3y'' - 6x \cdot y' + y = \cos x$$

$$y''' = -3y'' + 6x\,y' - y + \cos x$$

$y = y_1$

$y' = y_1' = y_2$

$y'' = y_1'' = y_2' = y_3$

$y''' = y_3'$

$$\begin{cases} y_1' = y_2 = f_1(x, y_1, y_2, y_3) \\ y_2' = y_3 = f_2(x, y_1, y_2, y_3) \\ y_3' = -3y_3 + 6x\,y_2 - y_1 + \cos x = f_3(x, y_1, y_2, y_3) \end{cases}$$

$f_i : A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$

$R = I \times K$

K = IPERCUBO IN $\mathbb{R}^n$

RETTANGOLO IN $\mathbb{R}^n$

$K = [c_1, d_1] \times [c_2, d_2] \times \dots$

$\dots \times [c_n, d_n]$

f_i É CONTINUA E $\dfrac{\partial f}{\partial y_i}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ CONTINUE

E LIMITATE IN $A \Rightarrow f_i$ LIP IN $\forall R \subset A$

$$\underline{f} = (f_1, f_2, \dots f_n) \quad \text{LIP}$$

$$\Updownarrow$$

$$f_i \quad \text{LIP} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

TEOREMA DI ESISTENZA ED UNICITÀ DELLA SOLUZIONE PER P.C. IN PICCOLO RIGUARDANTI SISTEMI DI ODE DEL I ORDINE

$$\begin{cases} \underline{y}' = \underline{f}(x, \underline{y}) \\ \underline{y}(x_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

Hyp: A APERTO IN $\mathbb{R}^{n+1}$

$\underline{f} : A \to \mathbb{R}^n$ CONTINUA

$\underline{f}$ LIP $\forall\, R \subset A$

TESI:

$\forall\, (x_0, \underline{y}_0) \in A \quad \exists!\ \underline{y} : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbb{R}^n$ SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY IN PICCOLO

ESEMPIO

$$\begin{cases} y_1' = \operatorname{sen} x \cdot y_1 - e^x \cdot y_2 = f_1(x, y_1, y_2) = f_1(x, \underline{y}) \\ y_2' = y_2 \cdot (\ln x + \cos^2 x) = f_2(x, y_1, y_2) = f_2(x, \underline{y}) \\ y_1(1) = 2 = y_{0,1} \\ y_2(1) = 3 = y_{0,2} \end{cases}$$

$\underline{f} = (f_1, f_2) : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

DOMINIO

$A : \{ (x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3 : x > 0 \}$

DOMINIO

$$A : \{(x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$$

$$(x_0, y_{0,1}, y_{0,2}) = (1, 2, 3) \in A$$

ESISTE ALMENO UNA SOLUZIONE

$$\underline{y} : [1-\delta, 1+\delta] \to \mathbb{R}^2$$

PER UNICITÀ DELLA SOLUZIONE VALUTO LA LIP IN UN GENERICO COMPATTO $R \subset A$ } PEANO GENERALIZZATO

$$\begin{cases} y_1' = \operatorname{sen} x \cdot y_1 - e^x \cdot y_2 = f_1(x, y_1, y_2) = f_1(x, \underline{y}) \\ y_2' = y_2 \cdot (\ln x + \cos^2 x) = f_2(x, y_1, y_2) = f_2(x, \underline{y}) \\ y_1(1) = 2 = y_{0,1} \\ y_2(1) = 3 = y_{0,2} \end{cases}$$

$$\underline{f} = (f_1, f_2) : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$A : \{(x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$$

$$(x_0, y_{0,1}, y_{0,2}) = (1, 2, 3) \in A$$

ESISTE ALMENO UNA SOLUZIONE

$$\underline{y} : [1-\delta, 1+\delta] \to \mathbb{R}^2$$

PER UNICITÀ DELLA SOLUZIONE VALUTO LA LIP IN UN GENERICO COMPATTO $R \subset A$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = \operatorname{sen} x \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y_2} = -e^x$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y_1} = 0 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = \ln x + \cos^2 x$$

TUTTE LE $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ ($i = 1,2$ E $j = 1,2$)

SONO FUNZIONI CONTINUE

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_j} : A \to \mathbb{R}$$

$$M_R = \max\{M_{i,j,R}\}$$

E DUNQUE SONO CONTINUE IN $\forall$ R (COMPATTO) $\subset A$

$$\Rightarrow \left|\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right| < M_{i,j,R} \Rightarrow \left|\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right| < M_R$$

$$\begin{cases} y_1' = \operatorname{sen} x \cdot y_1 - e^x \cdot y_2 = f_1(x, y_1, y_2) = f_1(x, \underline{y}) \\ y_2' = y_2 \cdot (\ln x + \cos^2 x) = f_2(x, y_1, y_2) = f_2(x, \underline{y}) \\ y_1(1) = 2 = y_{0,1} \\ y_2(1) = 3 = y_{0,2} \end{cases}$$

$\underline{f} = (f_1, f_2) : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$A : \{(x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$

$(x_0, y_{0,1}, y_{0,2}) = (1, 2, 3) \in A$

ESISTE ALMENO UNA SOLUZIONE

$\underline{y} : [1-\delta, 1+\delta] \to \mathbb{R}^2$

PER UNICITÀ DELLA SOLUZIONE VALUTO LA LIP IN UN GENERICO COMPATTO $R \subset A$

$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = \operatorname{sen} x \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y_2} = -e^x$

$\frac{\partial f_2}{\partial y_1} = 0 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = \ln x + \cos^2 x$

TUTTE LE $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ $(i = 1, 2$ E $j = 1, 2)$

SONO FUNZIONI CONTINUE

$\frac{\partial f_i}{\partial y_j} : A \to \mathbb{R}$

E DUNQUE SONO CONTINUE IN $\forall R$ (COMPATTO) $\subset A$

$\Rightarrow \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right| < M_R \Rightarrow \underline{f}$ LIP

$$\begin{cases} y_1' = \operatorname{sen} x \cdot y_1 - e^x \cdot y_2 = f_1(x, y_1, y_2) = f_1(x, \underline{y}) \\ y_2' = y_2 \cdot (\ln x + \cos^2 x) = f_2(x, y_1, y_2) = f_2(x, \underline{y}) \\ y_1(1) = 2 = y_{0,1} \\ y_2(1) = 3 = y_{0,2} \end{cases}$$

$\underline{f} = (f_1, f_2) : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$A : \{(x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$

$(x_0, y_{0,1}, y_{0,2}) = (1, 2, 3) \in A$

ESISTE ALMENO UNA SOLUZIONE

$\underline{y} : [1-\delta, 1+\delta] \to \mathbb{R}^2$

PER UNICITÀ DELLA SOLUZIONE VALUTO LA LIP IN UN GENERICO COMPATTO $R \subset A$

$\exists! \ \underline{y} : [1-\delta, 1+\delta] \to \mathbb{R}^2$ SOLUZIONE

$\exists! \ y_1 : [1-\delta, 1+\delta] \to \mathbb{R}$

$\exists! \ y_2 : [1-\delta, 1+\delta] \to \mathbb{R}$

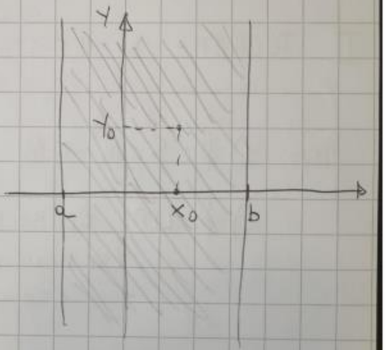
TEOREMA DI ESISTENZA ED UNICITÀ IN GRANDE (GLOBALE) PER ODE DEL I ORDINE

SI FISSA A PRIORI L'INTERVALLO SU CUI VALUTARE ESISTENZA ED UNICITÀ DELLA SOLUZIONE

SI CONSIDERA UNA STRISCIA

$S=[a,b]\times\mathbb{R}$

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$



Hyp:

1) $f: S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

CONTINUA IN S

2) f LIMITATA IN S $\Leftrightarrow \exists M>0 /$

$\forall (x,y)\in S, \ |f(x,y)|\leq M$

3) f LIP $\forall$ R CHIUSO E LIMITATO $\subset S$

$\forall R = [I \times K]$ $\subset S$

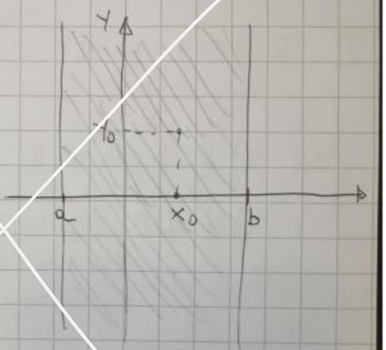
TEOREMA DI ESISTENZA ED UNICITÀ IN GRANDE (GLOBALE) PER ODE DEL I ORDINE

SI FISSA A PRIORI L'INTERVALLO SU CUI VALUTARE ESISTENZA ED UNICITÀ DELLA SOLUZIONE

SI CONSIDERA UNA STRISCIA

$S=[a,b]\times\mathbb{R}$

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$



Hyp:

1) $f: S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

CONTINUA IN S

2) f LIMITATA IN S $\Leftrightarrow \exists M>0 /$

$\forall (x,y)\in S, \ |f(x,y)|\leq M$

3) f LIP $\forall$ R CHIUSO E LIMITATO $\subset S$

$\forall R = [I \times K]$ $\subset S$

TESI

$\forall (x_0,y_0)\in S \quad \exists! \ y:[a,b]\to\mathbb{R}$

SOLUZIONE DEL P.C. IN GRANDE

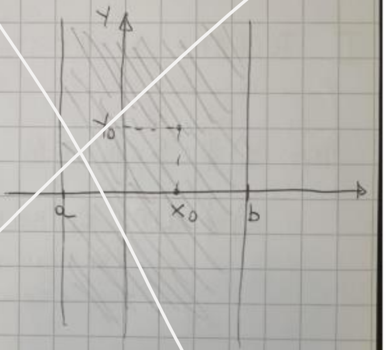
N.B. = UN RETTANGOLO SOLO CHIUSO (E NON ANCHE LIMITATO) POTREBBE ESSERE TUTTA LA STRISCIA

TEOREMA DI ESISTENZA ED UNICITÀ IN GRANDE (GLOBALE) PER ODE DEL I ORDINE

SI FISSA A PRIORI L'INTERVALLO SU CUI VALUTARE ESISTENZA ED UNICITÀ DELLA SOLUZIONE

SI CONSIDERA UNA STRISCIA

$S = [a, b] \times \mathbb{R}$



$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Hyp:

1) $f: S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN S

2) f LIMITATA IN S $\Leftrightarrow \exists M > 0 /$ $\forall (x, y) \in S, |f(x, y)| \leq M$

3) f LIP $\forall$ R CHIUSO E LIMITATO $\subset S$ $\forall R = (I \times K) \subset S$

II TEOREMA DI ESISTENZA ED UNICITÀ GLOBALE

Hyp: 1) $f: S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN S

2) f LIP GLOBALMENTE IN S (SI CONSIDERA TUTTA LA STRISCIA IN BLOCCO)

TESI:

$\forall (x_0, y_0) \in S \ \exists! \ y: [a, b] \to \mathbb{R}$ SOLUZIONE DEL P.C. IN GRANDE

· f LIP $\forall$ R CHIUSO $\subset A$

OVVERO

$\forall R = (I \times K) \subset A, \exists L_R > 0 /$

$\forall x \in I, \forall y_1, y_2 \in K,$

$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L_R |y_1 - y_2|$

f LIP GLOBALMENTE IN $S = [a, b] \times \mathbb{R}$ (SI CONSIDERA TUTTA LA STRISCIA IN BLOCCO)

OVVERO

$\exists L > 0 /$

$\forall x \in I, \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$

I TEOREMA DI ESISTENZA ED UNICITÀ GLOBALE DELLA SOLUZIONE PER SISTEMI DI ODE DEL I ORDINE

SI CONSIDERA $S=[a,b]\times\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \underline{y}'=\underline{f}(x,\underline{y}) \\ \underline{y}(x_0)=\underline{y}_0 \end{cases}$$

$\underline{f}:[a,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$

$f_i:[a,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

$i=1,\dots,n$

HYP: 1) f_i CONTINUE IN S $(i=1,2,\dots,n)$

2) f_i LIMITATE IN S $(i=1,2,\dots,n)$

3) f_i LIP $\forall$ R CHIUSO E LIMITATO $\subset S$ $(i=1,2,\dots,n)$

II TEOREMA

HYP: 1) $\underline{f}:[a,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ CONTINUA IN $S=[a,b]\times\mathbb{R}^n$

2) $\underline{f}$ LIP GLOBALMENTE IN S

TESI:

$\forall(x_0,\underline{y}_0)\in S$ $\exists!\ \underline{y}:[a,b]\to\mathbb{R}$ SOLUZIONE DEL P.C. IN GRANDE

$\exists!\ y_i:[a,b]\to\mathbb{R}$ $(i=1,2,\dots,n)$

$$\begin{cases} y_1' = \cos x \cdot y_1 + x^3 \cdot y_2 = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = -y_1 + e^{-3x} \cdot y_2 + \ln(x^2+1) = f_2(x, y_1, y_2) \\ y_1(1) = 2 \\ y_2(1) = -1 \end{cases}$$

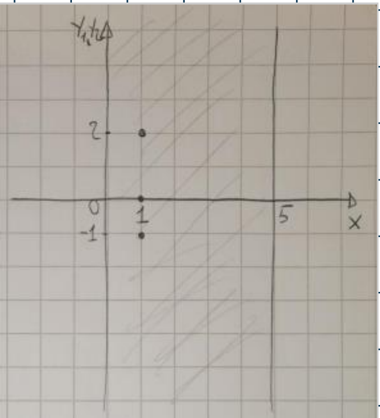
$S = [0, 5] \times \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} y_1' = \cos x \cdot y_1 + x^3 \cdot y_2 = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = -y_1 + e^{-3x} \cdot y_2 + \ln(x^2+1) = f_2(x, y_1, y_2) \\ y_1(1) = 2 \\ y_2(1) = -1 \end{cases}$$

$S = [0, 5] \times \mathbb{R}^2$

$\underline{f} = (f_1, f_2)$

É CONTINUA IN S



VERIFICA DELLA LIP

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = \cos x$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_2} = x^3 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y_1} = -1 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = e^{-3x}$$

$$\left|\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\right| \leq 1 \qquad \left|\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\right| \leq 125$$

$$\left|\frac{\partial f_2}{\partial y_1}\right| \leq 1 \qquad \left|\frac{\partial f_2}{\partial y_2}\right| \leq 1$$

ODEL e ODELO

giovedì 19 novembre 2020 20:49

Seconda Parte

- Esistenza ed unicità in grande
- ODE Lineari (ODEL)
- ODE Lineari Omogenee (ODELO)
- ODELO a coefficienti costanti

$y' = f(x, y)$ due punti della stessa y $\quad f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\forall R = (I \times K) \subset A, \ \exists L_R > 0 \ /$

$\forall x \in I, \ \forall y_1, y_2 \in K,$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L_R |y_1 - y_2|$$

$$\underline{y}' = \underline{f}(x, \underline{y}) \Rightarrow \begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

$f_i: A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$

$R = I \times K$ due vettori

$I = [a, b] \quad K = [c_1, d_1] \times [c_2, d_2] \times \dots \times [c_n, d_n]$

$\forall x \in I, \ \forall \underline{y}_A, \underline{y}_B \in K, \ \exists L_R > 0 \ /$

$$|f_i(x, \underline{y}_A) - f_i(x, \underline{y}_B)| \le L_R \cdot \sum_{j=1}^{n} |y_{j,A} - y_{j,B}|$$

SE f_i È CONTINUA E $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ $(j = 1, 2, \dots n)$ SONO CONTINUE E LIMITATE IN A $\Rightarrow$ f_i È LIP

$y' = f(x, y) \qquad f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\forall R = (I \times K) \subset A, \ \exists L_R > 0 \ /$

$\forall x \in I, \ \forall y_1, y_2 \in K,$

$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L_R |y_1 - y_2|$

$$\underline{y}' = \underline{f}(x, \underline{y}) \Rightarrow \begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

$f_i : A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$

$R = I \times K$

DIM:

$$|f_i(x, \underline{y}_A) - f_i(x, \underline{y}_B)| = \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_1}(y_{1,A} - y_{1,B}) + \frac{\partial f_i}{\partial y_2}(y_{2,A} - y_{2,B}) + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial y_n}(y_{n,A} - y_{n,B}) \right| \le \left|\frac{\partial f_i}{\partial y_1}\right| |y_{1,A} - y_{1,B}| + \dots + \left|\frac{\partial f_i}{\partial y_n}\right| |y_{n,A} - y_{n,B}|$$

SE PER HYP $\left|\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right| \le L_R \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$

$$\Rightarrow |f_i(x, \underline{y}_A) - f_i(x, \underline{y}_B)| \le L_R \cdot \sum_{j=1}^{n} |y_{j,A} - y_{j,B}|$$

OVVIAMENTE:

1) $\underline{f} : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ CONTINUA

2) $\underline{f}$ GLOBALMENTE LIP

$\Rightarrow \exists \, \underline{y}$ UNICA SOLUZIONE

potrebbe non essere unica

SE $\underline{f}$ NON È LIP $\not\Rightarrow$ $\underline{y}$ NON SIA UNICA

ESEMPIO

$y' = x y^2 = f(x, y)$

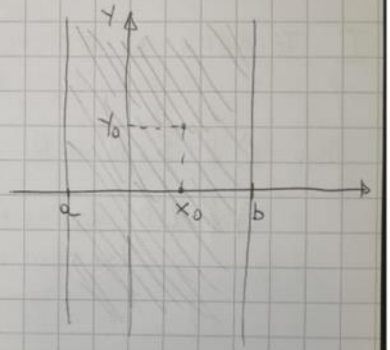
$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy \qquad S: [a, b] \times \mathbb{R}$

TEOREMA DI ESISTENZA ED UNICITÁ IN GRANDE (GLOBALE) PER ODE DEL I ORDINE

SI FISSA A PRIORI L'INTERVALLO SU CUI VALUTARE ESISTENZA ED UNICITÁ DELLA SOLUZIONE

SI CONSIDERA UNA STRISCIA

$S = [a, b] \times \mathbb{R}$



$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Hyp:

1) $f: S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

CONTINUA IN S

2) f LIMITATA IN S $\Leftrightarrow \exists M > 0 /$

$\forall (x, y) \in S, \ |f(x, y)| \leq M$

3) f LIP $\forall$ R CHIUSO E LIMITATO $\subset S$

$\forall R = [I \times K] \quad \subset S$

TESI

$\forall (x_0, y_0) \in S \quad \exists! \ y: [a, b] \to \mathbb{R}$

SOLUZIONE DEL P.C. IN GRANDE

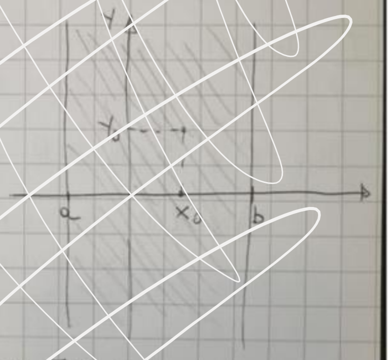
N.B. = UN RETTANGOLO SOLO CHIUSO (E NON ANCHE LIMITATO) POTREBBE ESSERE TUTTA LA STRISCIA

TEOREMA DI ESISTENZA ED UNICITÁ IN GRANDE (GLOBALE) PER ODE DEL I ORDINE

SI FISSA A PRIORI L'INTERVALLO SU CUI VALUTARE ESISTENZA ED UNICITÁ DELLA SOLUZIONE

SI CONSIDERA UNA STRISCIA

$S = [a, b] \times \mathbb{R}$



$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Hyp:

1) $f: S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

CONTINUA IN S

2) f LIMITATA IN S $\Leftrightarrow \exists M > 0 /$

$\forall (x, y) \in S, \ |f(x, y)| \leq M$

3) f LIP $\forall$ R CHIUSO E LIMITATO $\subset S$

$\forall R = [I \times K] \quad \subset S$

II TEOREMA DI ESISTENZA ED UNICITÁ GLOBALE

Hyp: 1) $f: S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN S

2) f LIP GLOBALMENTE IN S (SI CONSIDERA TUTTA LA STRISCIA IN BLOCCO)

TESI:

$\forall (x_0, y_0) \in S \quad \exists! \ y: [a, b] \to \mathbb{R}$

SOLUZIONE DEL P.C. IN GRANDE

• f LIP $\forall$ R CHIUSO $\subset A$

OVVERO

$\forall R = (I \times K) \subset A$, $\exists L_R > 0$ /

$\forall x \in I$, $\forall y_1, y_2 \in K$,

$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L_R |y_1 - y_2|$

f LIP GLOBALMENTE IN $S = [a, b] \times \mathbb{R}$

(SI CONSIDERA TUTTA LA STRISCIA IN BLOCCO)

OVVERO

$\exists L > 0$ /

$\forall x \in I$, $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$

I TEOREMA DI ESISTENZA ED UNICITÀ GLOBALE DELLA SOLUZIONE PER SISTEMI DI ODE DEL I ORDINE

SI CONSIDERA $S = [a, b] \times \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \underline{y}' = \underline{f}(x, \underline{y}) \\ \underline{y}(x_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

tutti i componenti

$\underline{f} : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

singola componente

$f_i : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$i = 1, \dots, n$

Hyp: 1) f_i CONTINUE IN S $(i = 1, 2, \dots, n)$

2) f_i LIMITATE IN S $(i = 1, 2, \dots, n)$

3) f_i LIP $\forall$ R CHIUSO E LIMITATO $\subset S$ $(i = 1, 2, \dots, n)$

II TEOREMA

Hyp: 1) $\underline{f} : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

CONTINUA IN $S = [a, b] \times \mathbb{R}^n$

2) $\underline{f}$ LIP GLOBALMENTE IN S

TESI:

$\forall (x_0, \underline{y}_0) \in S$ $\exists! \ \underline{y} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$

SOLUZIONE DEL P.C. IN GRANDE

$\exists! \ y_i : [a, b] \to \mathbb{R}$

$(i = 1, 2, \dots, n)$

$$\begin{cases} y_1' = \cos x \cdot y_1 + x^3 \cdot y_2 = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = -y_1 + e^{-3x} \cdot y_2 + \ln(x^2+1) = f_2(x, y_1, y_2) \\ y_1(1) = 2 \\ y_2(1) = -1 \end{cases}$$

Intervallo fissato a priori

$S = [0, 5] \times \mathbb{R}^2$

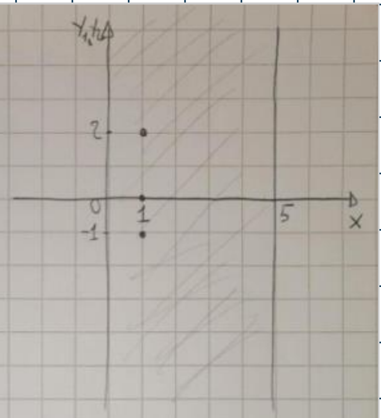
$$\begin{cases} y_1' = \cos x \cdot y_1 + x^3 \cdot y_2 = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = -y_1 + e^{-3x} \cdot y_2 + \ln(x^2+1) = f_2(x, y_1, y_2) \\ y_1(1) = 2 \\ y_2(1) = -1 \end{cases}$$

$S = [0, 5] \times \mathbb{R}^2$

Verifico che sia LIP

$\underline{f} = (f_1, f_2)$

É CONTINUA IN S



VERIFICA DELLA LIP

$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = \cos x$

$\frac{\partial f_1}{\partial y_2} = x^3$ $\quad \frac{\partial f_2}{\partial y_1} = -1$ $\quad \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = e^{-3x}$

$\left|\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\right| \leq 1$ $\quad \left|\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\right| \leq 125$

$\left|\frac{\partial f_2}{\partial y_1}\right| \leq 1$ $\quad \left|\frac{\partial f_2}{\partial y_2}\right| \leq 1$

IMPORTANZA DEI TEOREMI APPENA STUDIATI

ESISTE UNA CLASSE DI ODE IN CUI LA SOLUZIONE ESISTE ED É UNICA IN UNA STRISCIA ASSEGNATA?

ODE LINEARI

SONO EQUAZIONI IN CUI TUTTE LE DERIVATE HANNO UN ESPONENTE MASSIMO DI ELEVAMENTO A POTENZA PARI A 1

$$y'' + 5x y' + 16x^7 y = 18 \operatorname{sen}(e^x)$$

SI RICORDA CHE $y = y^{(0)}$

ODE LINEARI DEL PRIMO ORDINE

$$a(x)\cdot y' = b(x)\cdot y + c(x) \qquad S = I \times \mathbb{R}$$

$$a(x), b(x), c(x) : I \to \mathbb{R} \qquad S = [a,b] \times \mathbb{R}$$

SUPPONENDO $a(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$

$$y' = \frac{b(x)}{a(x)}\cdot y + \frac{c(x)}{a(x)} \Rightarrow y' = P(x)y + q(x)$$

$$\begin{cases} y' = P(x)\cdot y + q(x) = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$ CONTINUA IN S

$P(x), q(x) : I \to \mathbb{R}$

CONTINUE IN I CHIUSO E LIMITATO

$\Rightarrow |P(x)| \leq M_P, \ |q(x)| \leq M_q$ IN I

VERIFICA LIP GLOBALE IN S

$\forall x \in I, \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}, \ \exists L \geq 0 \ |$

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |P(x)\cdot y_1 + q(x) - P(x)\cdot y_2 - q(x)| =$$

$$= |P(x)\cdot y_1 - P(x)\cdot y_2| \leq |P(x)|\cdot|y_1 - y_2| \leq M_P\cdot|y_1 - y_2|$$

$$\begin{cases} y' = P(x)\cdot y + q(x) = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$ CONTINUA IN S

$P(x), q(x) : I \to \mathbb{R}$

CONTINUE IN I CHIUSO E LIMITATO

$\Rightarrow |P(x)| \leq M_p , \ |q(x)| \leq M_q$ IN I

VERIFICA LIP GLOBALE IN S

$\forall x \in I , \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R} , \exists L > 0 \ |$

$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |P(x)\cdot y_1 + q(x) - P(x)\cdot y_2 - q(x)| =$$

$$= |P(x)\cdot y_1 - P(x)\cdot y_2| \leq |P(x)| \cdot |y_1 - y_2| \leq M_p \cdot |y_1 - y_2|$$

ESEMPIO

$$\begin{cases} y' = (\cos x)\cdot y + \operatorname{sen} x \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad S = [-10, 50] \times \mathbb{R}$$

ANALOGAMENTE PER SISTEMI DI ODE LINEARI DEL PRIMO ORDINE

$$\begin{cases} y_i' = a_{i,1}(x)\, y_1 + a_{i,2}(x)\cdot y_2 + \ldots + a_{i,n}(x)\, y_n + b(x) \\ i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

$a_{i,j}(x) , b_i(x) : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUE

E OVVIAMENTE LIMITATE ESSENDO I UN COMPATTO

ODE LINEARI DI ORDINE n

$$a_0(x)\cdot y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\cdot y' + a_n(x)\, y = b(x)$$

SE IL TERMINE NOTO $b(x) = 0 \Rightarrow$ ODE LINEARE OMOGENEA

Data una equazione differenziale di ordine n la si può convertire in un sistema di n equazioni del primo ordine

PROPRIETÀ DI UNA ODE LINEARE OMOGENEA

1. SE $y_1(x)$ É SOLUZIONE PARTICOLARE , ALLORA ANCHE $c\, y_1(x)$ (CON c COSTANTE ARBITRARIA) É SOLUZIONE

banalmente: se y_1 è soluzione, la somma dà zero. Se invece considero $c \cdot y_1$, nella derivata avrò come coefficiente c da mettere a raccoglimento dunque anche c è soluzione

$$a_0(x)\, y_1^{(n)} + a_1(x)\, y_1^{(n-1)} + \ldots \ a_{n-1}(x)\cdot y_1' + a_n(x)\, y_1 = 0$$

$$a_0(x)\cdot [c\, y_1^{(n)}] + a_1(x)\cdot [c\, y_1^{(n-1)}] + \ldots \ a_n(x) [c\, y_1] =$$

$$= c \left[a_0(x)\cdot y_1^{(n)} + a_1(x)\, y_1^{(n-1)} + \ldots \ a_{n-1}(x)\cdot y_1' + a_n(x)\, y_1 \right] = 0$$

ODE LINEARI DI ORDINE n

$$a_0(x) \cdot y^{n} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) y = b(x)$$

SE IL TERMINE NOTO $b(x) = 0 \Rightarrow$ ODE LINEARE OMOGENEA

PROPRIETÀ DI UNA ODE LINEARE OMOGENEA

2 SE $y_1(x)$ E $y_2(x)$ SONO 2 SOLUZIONI DELL'ODE LINEARE OMOGENEA DI ORDINE n, ALLORA ANCHE UNA LORO COMBINAZIONE LINEARE $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ É SOLUZIONE

richiama il principio di sovrapposizione della fisica

Quando il problema è lineare, una soluzione è anche la combinazione lineare di soluzioni semplici (che siano due o n)

ODE LINEARI DI ORDINE n

$$a_0(x) \cdot y^{n} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) y = b(x)$$

SE IL TERMINE NOTO $b(x) = 0 \Rightarrow$ ODE LINEARE OMOGENEA

PROPRIETÀ DI UNA ODE LINEARE OMOGENEA

3 PIÚ IN GENERALE, PER UNA ODE LINEARE E OMOGENEA, SE $y_1(x), y_2(x), \dots y_n(x)$ DI ORDINE n

SONO n SOLUZIONI, ALLORA ANCHE

$$y(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots C_n y(x)$$

É SOLUZIONE

DATO CHE n = ORDINE DI ODE
n = NUMERO DI COSTANTI ARBITRARIE

$y(x)$ PUÓ CONSIDERARSI INTEGRALE GENERALE???

ODE LINEARI DI ORDINE n

$$a_0(x)\cdot y^{n} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\cdot y' + a_n(x)\, y = b(x)$$

SE IL TERMINE NOTO $b(x)=0 \Rightarrow$ ODE LINEARE OMOGENEA

PROPRIETÀ DI UNA ODE LINEARE OMOGENEA

SI, SE $y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x)$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x) = 0$$

SOLO SE $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$

3) PIÙ IN GENERALE, PER UNA ODE LINEARE E OMOGENEA, SE $y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x)$ DI ORDINE n SONO n SOLUZIONI, ALLORA ANCHE

$$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots\ c_n y(x)$$

È SOLUZIONE

DATO CHE n = ORDINE DI ODE
n = NUMERO DI COSTANTI ARBITRARIE

$y(x)$ PUÒ CONSIDERARSI INTEGRALE GENERALE???

COME VERIFICARE, IN GENERALE, SE $y_1(x) \ldots y_n(x)$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI?

$y_i := y_i(x)$

$$\left.\begin{cases} c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots\ c_n y_n = 0 \\ c_1 y_1' + c_2 y_2' + \ldots\ c_n y_n' = 0 \\ \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)} + c_2 y_2^{(n-1)} + \ldots\ c_n y_n^{(n-1)} = 0 \end{cases}\right\}$$

COMBINAZIONI LINEARI
↓
ottengo n equazioni in n incognite

!!! Dei vettori linearmente indipendenti individuano la base di uno spazio vettoriale

$$\underline{\underline{W}}(x) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

MATRICE WRONSKIANA

cioè di RANGO PIENO

Sono l.i. se $\boxed{\det(\underline{\underline{W}}(x)) \neq 0} \quad \forall x \in I$

ESEMPIO

DIRE SE SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

a) x, x^2, x^3

b) $e^x, 2e^x, e^{2x}$

c) e^x, xe^x, x^2e^x

c) e^x, xe^x, x^2e^x

a) $\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 2x & 3x^2 \\ 2 & 6x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2 & 6x \end{vmatrix} =$

f'

f''

$= x(12x^2 - 6x^2) - (6x^3 - 2x^3) = 2x^3$

$2x^3 \neq 0 \iff x \neq 0$ → Striscia che non comprendono $x=0$

DIRE SE SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

a) x, x^2, x^3

b) e^x, $2e^x$, e^{2x}

c) e^x, xe^x, x^2e^x

$$\begin{array}{lccc} & 1^a & 2^a & \\ \text{b)} & \left|\begin{matrix} e^x \\ e^x \\ e^x \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 2e^x \\ 2e^x \\ 2e^x \end{matrix} & \left.\begin{matrix} e^{2x} \\ 2e^{2x} \\ 4e^{2x} \end{matrix}\right| = 0 \end{array}$$

f'

f''

I e II COLONNA SONO PROPORZIONALI

DIRE SE SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

a) x, x^2, x^3

b) e^x, $2e^x$, e^{2x}

c) e^x, xe^x, x^2e^x

DA FARE

VERIFICARE PER CASA:

d) $e^x \cos x$, $e^x \operatorname{sen} x$

e) e^{3x}, e^{-2x}, e^{5x}

c) $\begin{vmatrix} e^x & xe^x & x^2e^x \\ e^x & e^x + xe^x & 2xe^x + x^2e^x \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 2e^{3x} \neq 0$

mai un'esponenziale è pari a 0

$$\begin{vmatrix} e^x & e^x + xe^x & 2xe^x + x^2e^x \\ e^x & 2e^x + xe^x & 2e^x + 4xe^x + x^2e^x \end{vmatrix} = 2e^{3x} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ODE LINEARI, OMOGENEE E A COEFFICIENTI COSTANTI

Semplificazione:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

ESEMPI:

$n = 1$ $\quad y' = ky \qquad y = ce^{kx}$ SOLUZIONE GENERALE

$y' = 5y \qquad y = ce^{5x}$

$y = e^{kx}$ SOLUZIONE PARTICOLARE

$y = e^{\lambda x}$ È SOLUZIONE DI UNA ODE LINEARE OMOGENEA, A COEFFICIENTI COSTANTI, DI ORDINE n?

$y = e^{\lambda x} \qquad y' = \lambda e^{\lambda x} \qquad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$y^{(n)} = \lambda^n \cdot e^{\lambda x}$

$$a_0 [\lambda^n e^{\lambda x}] + a_1 [\lambda^{n-1} \cdot e^{\lambda x}] + \dots + a_{n-1} [\lambda e^{\lambda x}] + a_n \cdot e^{\lambda x} = 0$$

$$= e^{\lambda x} [a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n] = 0$$

LE n SOLUZIONI λ_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ DELL' EQUAZIONE ALGEBRICA ASSOCIATA

$\Rightarrow y = e^{\lambda_i x}$ SOLUZIONE DELL' ODE

$y = e^{\lambda x}$ È SOLUZIONE DI UNA ODE LINEARE OMOGENEA, A COEFFICIENTI COSTANTI, DI ORDINE n?

$y = e^{\lambda x}$ $\quad y' = \lambda e^{\lambda x}$ $\quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$y^{(n)} = \lambda^n \cdot e^{\lambda x}$

$$a_0 \left[\lambda^n e^{\lambda x}\right] + a_1 \left[\lambda^{n-1} \cdot e^{\lambda x}\right] + \ldots + a_{n-1}\left[\lambda e^{\lambda x}\right] + a_n \cdot e^{\lambda x} = 0$$

$$= e^{\lambda x}\left[a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n\right] = 0$$

LE n SOLUZIONI λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ DELL' EQUAZIONE ALGEBRICA ASSOCIATA

$\Rightarrow$ $y = e^{\lambda_i x}$ SOLUZIONE DELL' ODE

$n = 2$

$a y'' + b y' + c y = 0 \quad \Rightarrow e^{\lambda x}\left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right) = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Downarrow$

1) $\Delta > 0 \Rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

2) $\Delta = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 \cdot x \cdot e^{\lambda_1 x}$

3) $\Delta < 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

soluzioni complesse e coniugate

$y(x) = e^{\alpha x} \cdot \left(c_1 \cos\beta x + c_2 \operatorname{sen}\beta x\right)$

ESEMPI

1) $y'' - 5y' + 6y = 0 \qquad e^{\lambda x}\left(\lambda^2 - 5\lambda + 6\right) = 0$

$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$

2) $y'' - 2y' + y = 0 \qquad e^{\lambda x}\left(\lambda^2 - 2\lambda + 1\right) = 0$

$y = c_1 e^{x} + c_2 \cdot x \cdot e^{x}$

3) $y'' - 2y' + 2y = 0 \qquad e^{\lambda x}\left(\lambda^2 - 2\lambda + 2\right) = 0 \qquad \lambda_{1,2} = 1 \pm i$

$y = c_1 e^{x} \cos x + c_2 e^{x} \operatorname{sen} x$

$n > 2$ } di ordine superiore al 2°

ESEMPI

$n=5$ $\quad \lambda_1 = 3 \quad m=3$ SOL. TRIPLA

$\lambda_2 = 2 \quad m=1$ SOL. SINGOLA

$\lambda_3 = -1 \quad m=1$ SOL. SINGOLA

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x \cdot e^{3x} + C_3 x^2 e^{3x} + C_4 e^{2x} + C_5 e^{-x}$$

Se il grado di una equazione è dispari, almeno una soluzione è reale, le soluzioni complesse e coniugate sono sempre a coppie

$n=5$ $\quad \lambda_1 = 3 \quad m=1$ SOL. SINGOLA

Soluzioni complesse e coniugate $\begin{cases} \lambda_2 = 4+5i \quad m=2 & \text{SOL. DOPPIA} \\ \lambda_3 = 4-5i \quad m=2 & \text{SOL. DOPPIA} \end{cases}$

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} \cos 5x + C_3 x \cdot e^{4x} \cdot \cos 5x + C_4 e^{4x} \operatorname{sen} 5x + C_5 x \cdot e^{4x} \cdot \operatorname{sen} 5x$$

ESEMPIO

$$\begin{cases} y'' - 12y' + 35y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \text{ condizioni al contorno} \quad ; \quad \begin{cases} y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{7x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

$$y(0) = C_1 + C_2 = 1$$

$$y' = 5C_1 e^{5x} + 7C_2 e^{7x} \qquad y'(0) = 5C_1 + 7C_2 = 2$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 5C_1 + 7C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad C_1 = \frac{5}{2} \quad C_2 = -\frac{3}{2}$$

$$y = \frac{5}{2} e^{5x} - \frac{3}{2} e^{7x}$$

Terza Parte

- ODE Lineari non omogenee
- Metodo della variazione delle costanti
- Altri schemi di ODE
- Risoluzione numerica di ODE
- Applicazioni in Fisica

ODE LINEARI NON OMOGENEE

$$a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \dots\ a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = b(x)$$

$$y(x) = y_{omo}(x) + y_p(x)$$

y_{omo}: SOLUZIONE GENERALE DELL'ODE OMOGENEA ASSOCIATA

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

Quando un problema è lineare, vige il principio di sovrapposizione degli effetti: se y_0 e y_1 sono due soluzioni, anche la combinazione lineare y_0+y_1 è soluzione

DIM:

$$a_0(x)\left[y_{omo}^{(n)} + y_p^{(n)}\right] + a_1(x)\left[y_{omo}^{(n-1)} + y_p^{(n-1)}\right] + \dots$$
$$\dots + a_{n-1}(x)\left[y_{omo}' + y_p'\right] + a_n(x)\cdot\left[y_{omo} + y_p\right] = b(x)$$

$$a_0(x)\,y_p^{(n)} + a_1(x)\,y_p^{(n-1)} + \dots\ a_n(x)\cdot y_p = b(x)$$

COME CALCOLARE $y_p(x)$?

METODO DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI (METODO DI LAGRANGE)

METODO DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI (METODO DI LAGRANGE)

CASO $n=2$ ESTENDIBILE AD n GENERICO

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x)$$

SIANO y_1 e y_2 LE SOLUZIONI DELL'OMOGENEA ASSOCIATA

allora pongo la relazione:

$$y_P = \underbrace{C_1(x)}\, y_1 + \underbrace{C_2(x)}\, y_2$$

NON COSTANTI MA FUNZIONI

INFATTI: se y_1 e y_2 sono soluzioni, anche la loro combinazione lineare è soluzione

$$y_P' = C_1'(x)\cdot y_1 + C_1(x)\cdot y_1' + C_2'(x)y_2 + C_2(x)y_2' =$$

$$= \left(C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2\right) + C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2'$$

IMPONGO $C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0$ → Pongo cioè che $C_1(x)$ e $C_2(x)$ siano delle COSTANTI o che comunque $C_1'(x)y_1$ e $C_2'(x)y_2$ siano opposte

$$\Rightarrow y_P' = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2'$$

$$y_P'' = C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2''$$

Le due espressioni vanno ora sostituite nella equazione di partenza

ADESSO

$$y_P'' + a_1(x)y_P' + a_2(x)y_P = b(x)$$

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2'' + a_1(x)\left[C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2'\right]$$

$$+ a_2(x)\left[C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2\right] = b(x)$$

ADESSO

$$y_P'' + a_1(x)y_P' + a_2(x)y_P = b(x)$$

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2'' + a_1(x)\left[C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2'\right]$$

$$+ a_2(x)\left[C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2\right] = b(x)$$

Raccolgo a fattor comune

$$C_1(x)\underbrace{\left[y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1\right]}_{=0 \text{ poiché soluzione dell'omo associata}} + C_2(x)\cdot\underbrace{\left[y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2\right]}_{=0 \text{ poiché soluzione dell'omo associata}}$$

$$\underbrace{+\, C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = b(x)}_{\text{Equazione rimanente}}$$

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot y_1 + C_2'(x)\cdot y_2 = 0 & \to \text{ord} = 0 \text{ per le primitive} \\ C_1'(x)\cdot y_1' + C_2'(x)\cdot y_2' = b(x) & \to \text{ord} = 1 \text{ per le primitive derivate} \end{cases}$$

MATRICE DEI TERMINI NOTI = MATRICE WRONSKIANA

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

Posso risolvere con i determinanti o con altri metodi di risoluzione dei sistemi

$$C_1(x) = \int C_1'(x) = \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ b(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\det(\underline{\underline{W}}(x))} \qquad C_2(x) = \int C_2'(x) = \int \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & b(x) \end{vmatrix}}{\det(\underline{\underline{W}}(x))}$$

$C_1(x)$ e $C_2(x)$ ottenuti, saranno i pesi da sostituire in $y_P = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$

GENERALIZZAZIONE PER $n > 2$

$$y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \dots\dots\; a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = b(x)$$

$$y = y_{omo} + y_p$$

$y_1, y_2, \dots\; y_n$ SOLUZIONI DELL'OMOGENEA ASSOCIATA

$$y_p = C_1(x)\,y_1 + C_2(x)\,y_2 + \dots + C_n(x)\,y_n$$

$$\begin{cases} C_1'(x)\,y_1 + C_2'(x)\,y_2 + \dots + C_n'(x)\,y_n = 0 \\ C_1'(x)\,y_1' + C_2'(x)\,y_2' + \dots + C_n'(x)\,y_n' = 0 \\ \vdots \\ C_1'(x)\,y_1^{(n-1)} + C_2'(x)\,y_2^{(n-1)} + \dots\; C_n'(x)\,y_n^{(n-1)} = b(x) \end{cases}$$

solo all'ultimo

CASO $n = 1$ ODE del 1° ordine

$$y' + a_1(x)\,y = b(x)$$

OMOGENEA ASSOCIATA

$$y' + a_1(x)\cdot y = 0$$

$$y' = -a_1(x)\,y$$

$$\frac{dy}{y} = -a_1(x)\,dx$$

$$A_1(x) = \int a(x)\,dx$$

$$\ln|y| = -A_1(x) + c$$

$$y_{omo} = c\,e^{-A_1(x)}$$ SOL. OMOGENEA ASSOCIATA

$$y_p = C_1(x)\cdot e^{-A_1(x)}$$ SOL. PARTICOLARE DELLA ODE LINEARE DEL 1° ORDINE

Questa volta ho solo una equazione

$$C_1'(x)\cdot e^{-A_1(x)} = b(x) \implies C_1'(x) = e^{A_1(x)}\cdot b(x)$$

$$C_1(x) = \int e^{A_1(x)}\cdot b(x)\,dx$$

$$y_p = e^{-A_1(x)}\cdot \int e^{A_1(x)}\cdot b(x)\,dx$$

$$y = y_{omo} + y_p = e^{-A_1(x)}\cdot\left[\int e^{A_1(x)}\cdot b(x)\,dx + c\right] =$$

$$= e^{-A_1(x)}\cdot\left[G(x) + k + c\right] \qquad k + c := c$$

$$= e^{-A_1(x)}\cdot\left[G(x) + k + c\right] \qquad k + c := c$$

$$y = e^{-A_1(x)}\cdot\left[G(x) + c\right]$$ MA IN ALCUNI TESTI

FORMULA FINALE / COMPLETA

TROVATE LA FORMA

$$y = e^{-A_1(x)}\cdot\int e^{A_1(x)}\cdot b(x)\,dx$$ CHE

COMPRENDE ANCHE y_{omo}

ESERCIZI:

1) $y' - 2xy = e^{x^2}$ ODEL NON OMOGENEA DEL 1° ORDINE DI 1° GRADO

$y' = 2xy$ OMOGENEA ASSOCIATA

SOL. OMO:

1) $-a_1(x) = 2x$ $\quad -A_1(x) = x^2$

$\ln|y| = x^2 + c$ $\quad y_{omo} = c \cdot e^{x^2}$

$$y_p = e^{x^2} \cdot \left[\int e^{-x^2} \cdot e^{x^2} dx\right] = e^{x^2} \cdot \left[\int dx\right] =$$

$$= e^{x^2}(x + c) \Rightarrow y = e^{x^2}(x + c)$$

2) $y'' + y = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ ODEL del 2° ordine

D: $\operatorname{sen} x \neq 0$ $\Downarrow$ $x \neq k\pi$

ha una discontinuità

$y'' + y = 0$ OMOGENEA ASSOCIATA

la risolvo con l'eq. algebrica associata

$\lambda^2 + 1 = 0$ $\quad \lambda_{1,2} = \pm i$

$y_{omo} = c_1 \cdot \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$

$y_1 = \cos x$ $\quad y_2 = \operatorname{sen} x$

METODO DI LAGRANGE

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\operatorname{sen} x = 0 \\ -c_1'(x)\operatorname{sen} x + c_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{W}}(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix} \Rightarrow \det \underline{\underline{W}}(x) = 1$$

$$c_1'(x) = \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ \frac{1}{\operatorname{sen} x} & \cos x \end{vmatrix} = -1 \qquad c_2'(x) = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & \frac{1}{\operatorname{sen} x} \end{vmatrix} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

integro

$$c_1(x) = -x \qquad c_2(x) = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx = \ln|\operatorname{sen} x|$$

$$y_p = c_1(x)\cos x + c_2(x)\operatorname{sen} x =$$

$$= -x\cos x + \operatorname{sen} x \cdot \ln|\operatorname{sen} x|$$

$$y = y_{omo} + y_p = \cos x(-x + c_1) + \operatorname{sen} x\left[\ln|\operatorname{sen} x| + c_2\right]$$

$y' = f(x,y) = a(x) \cdot b(y)$ A VARIABILI SEPARABILI

$$\frac{dy}{b(y)} = \frac{dx}{a(x)}$$

SOLUZIONI COSTANTI: Se $\exists\, b(y) = 0$, questa è soluzione particolare poiché risolve $y' = 0$ e dunque y costante

(ODE GENERALMENTE NON LINEARE)

È LINEARE SE $b(y) = y$

SI TESTANO ANCHE LE $y : b(y) = 0$

ESEMPIO

Problema di Cauchy

1) $\begin{cases} y' = y^2 = f(x,y) = a(x) \cdot b(y) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\quad a(x) = 1$, $b(y) = y^2$

$f(x,y) = y^2$ $\quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$ NON RISPETTA IL VINCOLO

1° STEP: Cerco le soluzioni costanti e, se non soddisfano il vincolo, le escludo

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \qquad \frac{dy}{y^2} = dx$$

$$-\frac{1}{y} + k_1 = x + k_2 \qquad -\frac{1}{y} = x + (k_2 - k_1) = x + c$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{x+c}}$$ INTEGRALE GENERALE

PROBLEMA "IN PICCOLO" ⟶ y' è continua e y(0)=1 ∈ al suo dominio

$(0,1) \in$ Dominio di $f(x,y) \Rightarrow \exists\ y : [-\delta, \delta] \to \mathbb{R}$

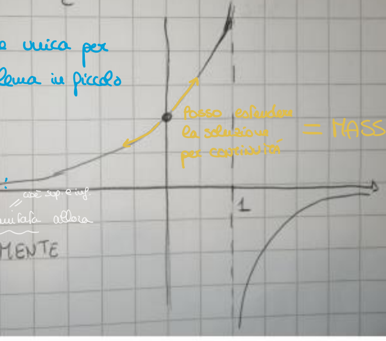
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_R \text{ LIMITATA}$$

$$\exists!\ y : [-\delta, \delta] \to \mathbb{R}$$

Poiché y' continua, allora la soluzione è unica e si calcola imponendo il vincolo nell'integrale generale

$$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = -\frac{1}{c} \Rightarrow c = -1$$

$$y = \frac{1}{1-x}$$ soluzione unica per il problema in piccolo



Posso estendere la soluzione per continuità = MASSIMALI

PROBLEMA DI CAUCHY IN GRANDE:

Poiché la derivata prima non è limitata (cioè sup. e inf.) allora

$f(x,y)$ NON È GLOBALMENTE LIP

② $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $\qquad y = 0$ È SOLUZIONE COSTANTE

INT. GENERALE $\boxed{y = -\frac{1}{x+c}}$ $\qquad 0 = -\frac{1}{c}$

Nessuna soluzione con c finito rispetta il vincolo perciò solo y(0)=0 è soluzione

③ $\begin{cases} y' = (y-1)^2 \\ y(3) = 1 \end{cases}$ $\qquad (y-1)^2 = 0 \Rightarrow y = 1$

y=1 È SOLUZIONE costante DEL P.C

A ⟹ B

¬A ∨ B

¬B ⟹ ¬

$$\frac{dy}{(y-1)^2} = dx \qquad -\frac{1}{y-1} = x + c$$

$$\frac{dy}{(y-1)^2} = dx \qquad -\frac{1}{y-1} = x + c$$

INTEGRALE GENERALE

$$1 - y = \frac{1}{x+c} \Rightarrow \boxed{y = 1 - \frac{1}{x+c} = \frac{x+c-1}{x+c}}$$

$$1 = \frac{2+c}{3+c} \qquad c \neq -3 \qquad 3+c = 2+c \qquad \nexists\, c \in \mathbb{R}$$

Dunque l'unica soluzione è quella costante

RISOLUZIONE NUMERICA DI ODE

FUNZIONE LIPSCHITZIANA
↓

- **LOCALMENTE:**
  Se f è eventualmente illimitata e continua e la sua derivata prima è anche continua, allora è localmente lipschitziana
- **GLOBALMENTE:**
  Se f è eventualmente illimitata e continua e la sua derivata prima f' è limitata, allora è globalmente lipschitziana ⟹ La funzione è limitata se, calcolando le derivate parziali, esse sono limitate

Inoltre, se una funzione è lineare e la striscia presa in considerazione è tale che la funzione è continua in essa

SOL. UNICA PROBLEMA DI CAUCHY IN PICCOLO
↓ condizione SUFFICIENTE

Se una funzione è continua e localmente lipschitziana (cioè anche la derivata prima f' è continua) allora esiste una sola soluzione locale (in un piccolo intervallo)

↓

Se non è lipschitziana, la soluzione potrebbe non essere unica

↓ perché è cond. sufficiente ma non necessaria

↓

Tuttavia, per il TEOREMA DI PEANO sappiamo che esiste almeno una soluzione se f è continua

SOL. UNICA PROBLEMA DI CAUCHY IN GRANDE
↓

Se una funzione è continua e globalmente lipschitziana (cioè anche la derivata prima f' è continua) allora esiste una sola soluzione globale

PASSAGGI
↓

Dato un problema di Cauchy, se f è continua allora per il teorema di Peano so che esiste almeno una soluzione.

È unica?

RISOLUZIONE NUMERICA DI ODE

ODE 1° ORDINE

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \Rightarrow dy = f(x,y)\,dx$$

$$\underbrace{y_1 - y_0}_{dy} = f(x_0, y_0) \cdot \underbrace{(x_1 - x_0)}_{dx}$$ dove $x_1 = x_0 + h$

h: passo di integrazione, valore scelto dal programmatore

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= y_0 + f(x_0, y_0) \cdot h \\ y_2 &= y_1 + f(x_1, y_1) \cdot h \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1}) \cdot h \end{aligned}}$$

con $\boxed{x_n = x_{n-1} + h}$

SCHEMA DI EULERO

ESEMPIO

ODEL non omogenea

$$\begin{cases} y' = 2xy + e^{x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

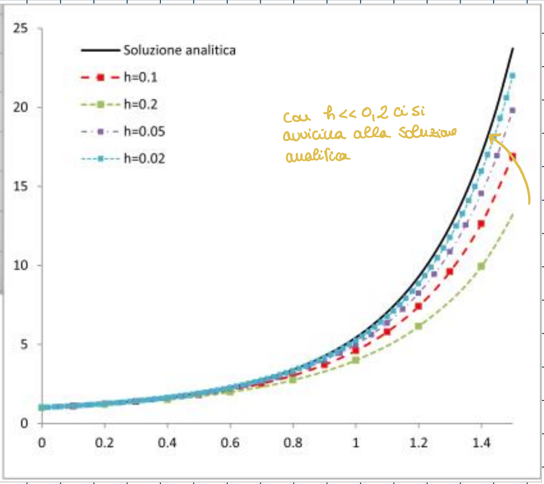
$$y = e^{x^2}(x + c)$$

$$1 = 1 \cdot (0 + c) \qquad c = 1$$

$$y = e^{x^2}(x+1)$$

ESEMPIO

$$\begin{cases} y' = 2xy + e^{x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$



allora per il teorema di Peano so che esiste almeno una soluzione.

È unica?

Il problema si basa sul teorema di esistenza ed unicità locale, dunque devo verificare che sia continua e lipschitziana nel vincolo cioè devo verificare che la derivata parziale rispetto al vincolo sia CONTINUA e che comunque il vincolo appartenga al dominio della derivata prima (che se è continua sarà così)

APPLICAZIONI IN FISICA

$$\begin{cases} y'' = -g \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = v_0 \end{cases} \qquad y'' = -g$$

$$y' = -\int g\,dt = -gt + c_1$$

$$y = \int (-gt + c_1)\,dt = -g\frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2$$

$$y_0 = -g\cdot\frac{0^2}{2} + c_1\cdot 0 + c_2 \implies c_2 = y_0$$

$$y'(0) = v_0 = -g\cdot 0 + c_1 \implies c_1 = v_0$$

$$y(t) = -g\frac{t^2}{2} + v_0 t + y_0$$

MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

Oscillazioni libere di un corpo pesante

27. Colleghiamo una sfera di massa m all'estremo P di una molla, sospesa nell'altro estremo ad un centro fisso e disposta verticalmente.
Assumiamo come sistema di riferimento l'asse verticale y, rivolto verso il basso e con l'origine nel punto O, corrispondente alla posizione d'equilibrio dell'estremo P della molla (fig. 3). All'istante $t = 0$ la sfera viene collegata alla molla: si ha quindi $y = 0$ e $v = 0$ per $t = 0$ (condizioni iniziali).
Sulla sfera agisce la forza peso $F_p = mg$ e la forza di richiamo della molla $F_m = -ky$, dove $k > 0$ indica la costante elastica della molla. La risultante delle forze che agiscono sulla pallina è quindi

$$F = mg - ky. \tag{1}$$

Ricordando che, per il secondo principio della dinamica, è $F = ma$ e che è inoltre

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = y'',$$

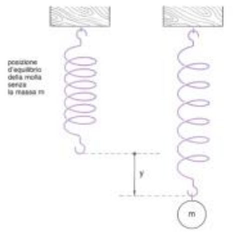


Fig. 3

la (1) diventa

$$my'' = mg - ky \longrightarrow my'' + ky = mg$$

ossia

$$y'' + \frac{k}{m}y = g. \tag{2}$$

La (2) è un equazione differenziale lineare *non omogenea* del secondo ordine. Per risolverla occorre quindi determinare dapprima l'integrale generale dell'equazione omogenea associata:

$$y'' + \frac{k}{m}y = 0. \tag{3}$$

La (3) è formalmente identica all'equazione differenziale risolta al numero precedente. Il suo integrale generale è perciò

$$y = c_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{\frac{k}{m}}\,t. \tag{4}$$

Per risolvere la (2) occorre poi determinarne un integrale particolare. È facile verificare che la funzione costante

$$y = \frac{mg}{k}$$

$$y'' + \frac{k}{m}y = 0 \implies \lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot i$$

y_p:

$$\begin{cases} c_1'(t)\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right) + c_2'(t)\cdot\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right) = 0 \\ -c_1'(t)\left[\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right)\right]\cdot\sqrt{\frac{k}{m}} + c_2'(t)\cdot\left[\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right)\right]\sqrt{\frac{k}{m}} = g \end{cases}$$

$$y'' + \frac{k}{m}y = 0 \implies \lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot i$$

y_p:

$$\underline{\underline{W}}(t) = \begin{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right) & \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right) \\ -\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right) & \sqrt{\frac{k}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right) \end{pmatrix}$$

$$\det \underline{\underline{W}}(t) = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\begin{cases} c_1'(t)\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right) + c_2'(t)\cdot\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right) = 0 \\ -c_1'(t)\left[\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right)\right]\cdot\sqrt{\frac{k}{m}} + c_2'(t)\cdot\left[\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t\right)\right]\sqrt{\frac{k}{m}} = g \end{cases}$$

$$c_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & sen\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right) \\ g & \sqrt{\frac{K}{m}}\cdot cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right) \end{vmatrix}}{\sqrt{K/m}} = -g\cdot sen\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right)\cdot\sqrt{\frac{m}{K}}$$

$$c_1(t) = -g\sqrt{\frac{m}{K}}\cdot\int sen\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right)dt =$$

$$= -g\cdot\sqrt{\frac{m}{K}}\cdot\sqrt{\frac{m}{K}}\cdot\int sen\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right)\cdot\sqrt{\frac{K}{m}}\,dt =$$

$$= -g\frac{m}{K}\cdot\left(-cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right)\right) = \frac{mg}{K}\cdot cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right)$$

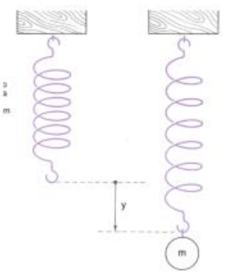
$$c_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right) & 0 \\ \sqrt{\frac{K}{m}}\cdot sen\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right) & g \end{vmatrix}}{\sqrt{K/m}} = g\cdot\sqrt{\frac{m}{K}}\cdot cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right)$$

$$c_2(t) = g\cdot\sqrt{\frac{m}{K}}\cdot\sqrt{\frac{m}{K}}\cdot\int\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right)dt =$$

$$= g\cdot\frac{m}{K}\cdot sen\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right)$$

$$Y_p = \frac{mg}{K}\cdot cos^2\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right) + \frac{mg}{K}\cdot sen^2\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right) = \frac{mg}{K}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = y'',$$



soddisfa la (2), il cui integrale generale è perciò dato dalla somma dell'integrale generale (4) dell'equazione omogenea associata con la soluzione particolare ora trovata:

$$y = c_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + c_2\,sen\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \frac{mg}{k}. \qquad (5)$$

Derivando la (5) si ottiene

$$y' = v = -c_1\sqrt{\frac{k}{m}}\,sen\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + c_2\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t. \qquad (6)$$

Possiamo ora determinare le costanti c_1 e c_2 in modo che siano verificate le condizioni iniziali. Sostituendo $t = 0$ e $y = 0$ nella (5) otteniamo

$$0 = c_1 + \frac{mg}{k} \longrightarrow c_1 = -\frac{mg}{k}.$$

Sostituendo $t = 0$ e $v = 0$ nella (6), si ha:

$$0 = c_2\sqrt{\frac{k}{m}} \longrightarrow c_2 = 0.$$

L'equazione del moto esaminato è pertanto:

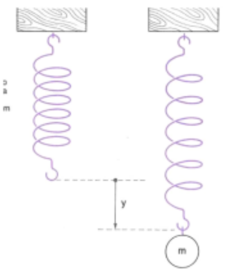
$$y = -\frac{mg}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \frac{mg}{k}$$

ossia

$$y = \frac{mg}{k}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right).$$

5

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = y'',$$



Dal grafico della legge oraria in figura 4, si può osservare che il moto della sfera è un moto armonico, il cui periodo, detto *periodo proprio del sistema*, è $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Tale periodo dipende dalla massa m della sfera e dalla costante elastica k della molla. Le oscillazioni avvengono attorno al *punto di equilibrio* $y = \frac{mg}{k}$, così chiamato perché in tale punto la forza peso e la forza di richiamo della molla si equilibrano, essendo eguali in modulo ed opposte in verso.

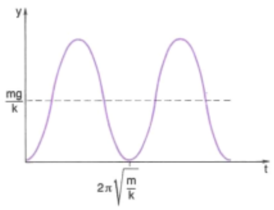


Fig. 4

Esercitazione finale parte 1

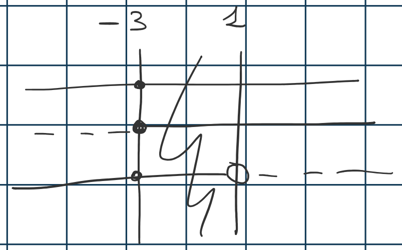
domenica 13 dicembre 2020 15:27

1 Dove possiamo definire una striscia che rispetti la lipschitzianità globale

$$\begin{cases} y_1' = [\ln(x^2+3)\,y_2 - \cos(\sqrt{x+3}) = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = y_1 + y_2 \sin x + \ln \frac{1}{1-x} = f_2(x, y_1, y_2) \end{cases}$$

Dominio: $A \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x^2+3>0 \\ x+3 \geq 0 \\ \frac{1}{1-x} > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 > -3 \quad \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ x \geq -3 \\ x < 1 \end{cases}$$



$A: \{(x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3 \mid -3 \leq x < 1\}$

Cerchiamo dunque una striscia tale che $S: [a, b] \times \mathbb{R}^2$ dove è soddisfatto un problema di Cauchy in grande

Ad esempio possiamo scegliere $S: [-2, 0] \times \mathbb{R}^2$ poiché

1) È continua
2) Per Peano, poiché è continua presenta almeno una soluzione
3) Poiché le equazioni sono lineari e dunque esiste una sola soluzione globale

oppure risolvo un sistema dove pongo due passaggi:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2) \\ y_1(-1) = 2 \\ y_2(-1) = 1 \end{cases}$$

Verifico le derivate parziali:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = 0 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y_2} = \ln(x^2+3) \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y_1} = 1 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = \sin x$$

Sono funzioni solo in x e sono limitate. Possono essere maggiorate da una unica L di Lipschitz e quindi la funzione vettoriale f di componenti f_1 e f_2 è GLOBALMENTE LIPSCHITZIANE

f di componenti f_1 e f_2 è GLOBALMENTE LIPSCHITZIANE

② Trovare se quali a del sis. la striscia $S: [1,2] \times \mathbb{R}^2$ soddisfa un problema di Cauchy in grande

$$\begin{cases} \sqrt{a^2-x^2} \cdot y_1' = e^{\cos x} \cdot y_2 \\ y_2' = \frac{1}{e^x}(y_1+y_2) \end{cases} \xrightarrow[\text{ESPLICITA}]{\text{FORMA}} \begin{cases} y_1' = \frac{e^{\cos x}}{\sqrt{a^2-x^2}} y_2 \\ y_2' = \frac{1}{e^x}(y_1+y_2) \end{cases}$$

Prob. parametrico

Le derivate devono stare sulla SINISTRA

DOMINIO: $A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} a^2-x^2>0 \Rightarrow a^2>x^2 \Rightarrow -a<x<a \\ e^x \neq 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$A: \{(x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3 \mid -a<x<a\} = (-a,a) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$a>2$ poiché altrimenti non inglobarebbe la striscia $[1,2)$

Verifico che sia Lipschitziana ponendo $a=3$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = 0 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y_2} = \frac{e^{\cos x}}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y_1} = \frac{1}{e^x} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = \frac{1}{e^x}$$

Sono funzioni solo di x. Dunque sono continue in $[1,2]$ e perciò limitate secondo Weistrass. Perciò sono lipschitziane

③ Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ per cui è Lip. globalmente

$$\begin{cases} y_1' = \ln(1-x)\, y_1 + e^x y_2 - \cos 7x \\ y_2' = \sqrt{a^2-1} \cdot y_2 \end{cases}$$

DOMINIO: $A \subset \mathbb{R}^3 \to {}^2$

$$\begin{cases} 1-x>0 \\ a^2-1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1 \\ a\leq -1 \quad \vee \quad a\geq 1 \end{cases}$$

Dunque $x<1 \wedge (a\leq -1 \vee a\geq 1)$ e $A: \{(x,y_1,y_2)\in\mathbb{R}^3 \mid x<1\}$

Dunque devo trovare una striscia tale che $[\alpha,\beta]\in(-\infty,1)$
e $a\leq -1 \vee a\geq 1$

Scelgo dunque $a=2$ e $S:[-2,0]$ e verifico la LIP GLOB.

$$\frac{df_1}{dy_1}=\ln(1-x) \qquad \frac{df_1}{dy_2}=e^x$$

$$\frac{df_2}{dy_1}=0 \qquad \frac{df_2}{dy_2}=\sqrt{3}$$

Tutte le derivate parziali sono continue nel compatto e dunque, per Weierstrass anche limitate. Perciò è verificata la LIP. GLOBALE

Poiché sono anche MONOTONE, posso calcolare la costante L di Lipschitz

Valuto la funzione in corrispondenza degli estremi:

$$\frac{df_1}{dy_1} \Rightarrow \begin{matrix} x=-2 \Rightarrow \ln(3)>1 \\ x=0 \Rightarrow \ln(1)=0 \end{matrix} \Rightarrow \left|\frac{df_1}{dy_1}\right|\leq \ln 3$$ MAGGIORA la funzione

$$\frac{df_1}{df_2} \Rightarrow \begin{matrix} x=-2 \Rightarrow e^{-2}<1 \\ x=0 \Rightarrow e^0=1 \end{matrix} \Rightarrow \left|\frac{df_1}{df_2}\right|\leq 1$$

$$\frac{df_2}{dy_1}=0 \quad \forall x\in I \Rightarrow \left|\frac{df_2}{dy_1}\right|\leq 0$$

$$\frac{df_2}{dy_2}=\sqrt{3} \quad \forall x\in I \Rightarrow \left|\frac{df_2}{dy_2}\right|\leq \sqrt{3}$$

Alla fine scelgo la costante maggiorante più grande pari a $\sqrt{3}$

④ Verificare la LIP globale in $S: [a,b] \times R^3$

$$\begin{cases} y_1' = 6y_1 + 2x \\ y_2' = 7(y_1 - x) + 8y_2 - y_3 \\ y_3' = 7x \end{cases}$$

D: tutto R^4, dunque posso scegliere a e b senza vincoli
Guardando le y primitive e derivate, sono tutte e tre lineari.
Dunque, per teoria la LIP. è sempre verificata
Per trovare una x ho bisogno di tre punti

Se però non volessi applicare la linearità, devo verificare le derivate parziali

$$\frac{df_1}{dy_1} = 6 \qquad \frac{df_1}{dy_2} = 0 \qquad \frac{df_1}{dy_3} = 0$$

$$\frac{df_2}{dy_1} = 7 \qquad \frac{df_2}{dy_2} = 8 \qquad \frac{df_2}{dy_3} = -1$$

$$\frac{df_3}{dy_1} = 0 \qquad \frac{df_3}{dy_2} = 0 \qquad \frac{df_3}{dy_3} = 0$$

Dunque $\exists L$ ed è pari a 8. Perciò sono limitate

⑤ PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 3e^{6x} \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

① risolvo l'omo associata:

$y'' - 3y' + 2y = 0$

Questo tipo trae soluzione da $e^{\lambda x}$ $(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$ dove $\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$

perciò una soluzione sarà $y_1 = e^x$ e una $y_2 = e^{2x}$

Dunque $y_{omo} = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{2x}$ mentre $y = y_{omo} + y_p$

perciò una soluzione sarà $y_1 = e^{x}$ e una $y_2 = e^{2x}$

Dunque $y_{omo} = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{2x}$ mentre $y = y_{omo} + y_p$

Determino la soluzione particolare col metodo di Lagrange:

Scrivo $y_p = C_1(x) e^x + C_2(x) \cdot e^{2x}$. Calcolo la derivata prima:

$$y'_p = \underline{C_1'(x) e^x} + C_1(x) e^x + \underline{C_2'(x) \cdot e^{2x}} + 2 C_2(x) e^{2x}$$ Pongo che

$C_1'(x) e^x + C_2'(x) \cdot e^{2x} = 0$ cioè opposti / $C_1(x)$ e $C_2(x)$ costanti

Calcolo la derivata seconda:

$$y''_p = C_1'(x) e^x + C_1(x) e^x + 2 C_2'(x) e^{2x} + 4 C_2(x) e^{2x}$$

Sostituisco nell'equazione di partenza:

$$y'' - 3y' + 2y = 3e^{6x}$$

$$\Downarrow$$

$$C_1'(x) e^x + \cancel{C_1(x) e^x} + 2 C_2'(x) e^{2x} + \cancel{4 C_2(x) e^{2x}} - \cancel{3 C_1(x) e^x} - \cancel{6 C_2(x) e^{2x}} + \cancel{2 C_1(x) e^x} + \cancel{2 C_2(x) e^x} = 3 e^{6x}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) e^x + C_2'(x) e^{2x} = 0 \\ C_1'(x) e^x + 2 C_2'(x) e^{2x} = 3 e^{6x} \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = -e^x \cdot e^{2x} + 2e^x e^{2x} = -e^{3x} + 2e^{3x} = e^{3x}$$

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ 3e^{6x} & 2e^{2x} \end{vmatrix}}{\det W} = \frac{0 - 3e^{2x} e^{6x}}{e^{3x}} = \frac{-3e^{8x}}{e^{3x}} = -3e^{5x}$$

dunque

$$\int f'(x) \cdot e^{f(x)} = e^{f(x)}$$

$$C_1(x) = \int C_1'(x) = \int -3e^{5x}\, dx = -\frac{3}{5} \int 5 e^{5x}\, dx = -\frac{3}{5} e^{5x}$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & 3e^{6x} \end{vmatrix}}{W} = \frac{3e^{6x} \cdot e^x - 0}{e^{3x}} = \frac{3e^{7x}}{e^{3x}} = 3e^{4x}$$

$$C_2(x) = \int C_2'(x) = \frac{3}{4} \int 4 e^{4x}\, dx = \frac{3}{4} e^{4x}$$

Dunque sostituisco i valori di $C_2(x)$ e $C_1(x)$ in y_p:

$y_p = C_1(x)\, e^x + C_2(x)\, e^{2x} = -\frac{3}{5} e^{5x} \cdot e^x + \frac{3}{4} e^{4x} e^{2x} = \frac{3}{20} e^{6x}$

Verifica: in $y''_p - 3y'_p + 2y_p = 3e^{6x}$ sostituisco il valore di y_p trovato

Soluzione finale:

$y = y_{omo} + y_p = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{2x} + \frac{3}{20} e^{6x}$

Devo poi trovare c_1 e c_2 affinché siano validi i vincoli imposti:

(1) $y(1) = 2$ e (2) $y'(1) = 0$

(1) se $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{3}{20} e^{6x}$ allora $2 = c_1 \cdot e + c_2 \cdot e^2$

(2) " allora $y' = c_1 \cdot e^x + 2c_2 e^{2x} + \frac{9}{10} e^{5x}$ allora $0 = c_1 \cdot e + 2c_2 \cdot e^2 + \frac{9}{10} e^5$

Dunque basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} c_1 e + c_2 e^2 = 2 - \frac{3}{20} e^6 \\ c_1 e + 2e^2 c_2 = -\frac{9}{10} e^6 \end{cases}$$

Sia con le matrici che con altri metodi e ottengo

$c_1 = \frac{4}{e} + \frac{3}{5} e^5$ e $c_2 = -\frac{3}{4} e^4 - \frac{2}{e^2}$ per cui ottengo che

$y = \left(\frac{4}{e} + \frac{3}{5} e^5\right) e^x + \left(-\frac{3}{4} e^4 - \frac{2}{e^2}\right) e^{2x} + \frac{3}{20} e^{6x}$ è SOLUZIONE

EX SUI CAMPI

(1) Dati $\underline{F_1} = (2, x+y)$ e $\underline{F_2} = (k(x+y), 3)$

- Calcolare i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che

a) $\underline{J_1} = \underline{F_1} + \underline{F_2}$ è conservativo

b) $\underline{J_2} = \underline{F_1} - \underline{F_2}$ è conservativo

a) Calcolo $\underline{J_1} = \underline{F_1} + \underline{F_2} = (\overset{F_\alpha}{2 + k(x+y)}, \overset{F_\beta}{3 + (x+y)})$

Dominio: tutto $\mathbb{R}^2$ quindi il dominio è semplicemente connesso

Perciò, mi basta che il campo sia irrotazionale affinché sia CONSERVATIVO

Verifico l'irrotazionale:

$\frac{dF_\beta}{dx} \overset{deve}{=} \frac{dF_\alpha}{dy}$ e lo è se $k = 1$

Dunque

$\underline{f}_1$ conservativo se pari a $(2+x+y,\ 3+x+y)$

b) Calcolo $\underline{f}_2 = \underline{F}_1 - \underline{F}_2 = (2-k(x+y),\ x+y-3)$.

Ripeto il procedimento sopra per cui ottengo $k=-1$

e perciò $\underline{f}_2$ conservativo se $\underline{f}_2 = (2+x+y,\ x+y-3)$

- Calcolare il lavoro del campo

$\underline{G} = \underline{f}_1 + \underline{f}_2$ lungo il percorso chiuso $x^2+y^2=4$

Verifico che G sia conservativo:

$$\underline{G} = \underline{f}_1 + \underline{f}_2 = (\underbrace{4+2x+2y}_{G_1},\ \underbrace{2x+2y}_{G_2})$$

Poiché $\dfrac{dG_2}{dx} = \dfrac{dG_1}{dy}$ allora $\underline{G}$ è conservativo.

Dunque, $\oint G \circ dr = 0$ però se voglio posso determinare il

POTENZIALE $\rightarrow$ funzione scalare di cui $\underline{G}$ è gradiente. Per

Determino dunque $U(x,y) \mid \underline{G}(x,y) = \nabla U(x,y)$!

Calcolo la der. parziale $\dfrac{dU}{dx}$ che deve essere pari alla prima componente G_1:

$$\frac{dU}{dx} = G_1 \Rightarrow U = 4x + x^2 + 2xy + c(y) \quad \text{ESP. PROVVISORIA}$$

Derivo parzialmente la prima espr. provvisoria che deve essere uguale a G_2

$$\frac{dU}{dy} = \frac{d\,(4x+x^2+2xy+c(y))}{dy} = 2x+2y$$

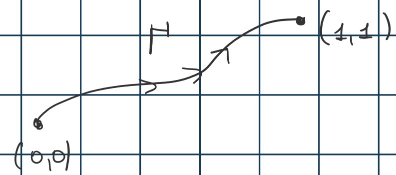
Ottengo $\cancel{2}x + c'(y) = \cancel{2}x + 2y \Rightarrow \int c'(y) = \int 2y \Rightarrow c(y) = y^2 + k$

Perciò $\boxed{U(x,y) = 4x + x^2 + 2xy + y^2 + k}$

Di conseguenza, dato un percorso qualsiasi, poiché il campo è conservativo allora $L_\Gamma = \int_\Gamma \underline{G} \circ d\underline{r} = U(1,1) - U(0,0) = 8$

conservativo allora $L_\Gamma = \int_\Gamma \underline{G} \circ d\underline{z} = U(1,1) - U(0,0) = 8$

se Γ è tale che:



② Dato $f(x,y) = 6x + 7y^2 + e^{x^2+y}$

a) verificare che $f(x,y)$ è differenziabile → applicare il Teor. del diff. totale

b) calcolare l'equazione del piano tangente nel punto $p=(0,0)$

c) calcolare $\nabla \circ (\nabla \times \nabla f)$ divergenza del rotore del gradiente

a) Per il teorema del diff totale $f(x,y)$ è quindi differenziabile

Equazione del differenziale: $df(x,y) = \nabla f(x,y) \circ (dx, dy) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy =$

indica l'incremento delle ordinate

$= (6 + 2x e^{x^2+y}) dx + (14y + e^{x^2 y}) dy$

b) Calcolo $f(0,0) = 6 \cdot 0 + 7 \cdot 0^2 + e^{0^2+0} = 1$ che chiamo z_0

Calcolo il differenziale:

$df(x,y) = \nabla f(x,y) \circ (dx, dy) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy = (6 + 2x e^{x^2+y}) dx + (14y + e^{x^2+y}) dy$

così considero tutto un piano

Pongo $dx = x - x_0$, $df = z - z_0$, $dy = y - y_0$ per cui l'eq. del differenziale diventa

$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ Poiché sto considerando il punto $p = (0,0)$

allora $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 1$ e dunque $z - 1 = 6x + y \Rightarrow z = 6x + y + 1$ che è il piano tangente in $p = (0,0)$

c) Calcolare la divergenza del rotore del gradiente $\nabla \circ (\nabla \times \nabla f)$

① Io posso considerare $f(x,y) = f(x,y,0)$ dunque con $z = 0$ e $\forall (x,y) \in D$

② $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, 0\right) \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$

Poiché so che il rotore del gradiente di un campo scalare è sempre pari al vettore nullo

quindi $\nabla \times \nabla f(x,y,z) = 0$ Perciò $\nabla \circ (\nabla \times \nabla f(x,y,z)) = \nabla \circ \underline{0} = 0$

Ripetizione sulle serie

lunedì 16 novembre 2020 10:37

SERIE A TERMINI NON NEGATIVI

Data una successione $\{a_n\}_{n\in N} \subset [0, +\infty)$ $(a_n \geq 0)$ posso definire

una nuova successione con segno

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$\vdots$$
$$S_n =$$

$\{S_n\}$ è detta successione delle somme parziali. La sommatoria S_n è detta somma parziale ennesima $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

e viene detta serie numerica di termini generali a_n.

Notiamo che $\{S_n\}$ è una successione NON DECRESCENTE $(S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n)$

Allora $\lim_{n\to+\infty} S_n \begin{cases} S < +\infty \\ +\infty \end{cases}$

Il limite $\lim_{n\to+\infty} S_n =: S$ viene indicato con $S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$

e viene detta serie numerica di termini generali a_n.

Diremo che la serie è CONVERGENTE se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$

Invece è DIVERGENTE se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$

ESEMPIO

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 1 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} 1 = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

$$\boxed{\sum_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{x} = +\infty}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} < +\infty$$

$\Rightarrow \{S_n\}$ converge $\Rightarrow S_n$ è una successione di Cauchy

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : n, m > \bar{n}$ allora $|S_n - S_m| < \varepsilon$

Fissiamo allora $\varepsilon < 1/2$ e scegliamo un $\bar{n}$ in modo che soddisfi $|S_n - S_m| < \varepsilon$

Da $m > \bar{n} \Rightarrow 2m > \bar{n}$ ho che poiché $|S_{2m} - S_m| = S_{2m} - S_m = \underbrace{\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{2m}}_{m \text{ termini}} \geq m \cdot \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}$

per la decrescenza

ma ciò implica che $|S_{2n} - S_n| \geq \varepsilon \Rightarrow \{S_n\}$ non è di Cauchy $\Rightarrow \{S_n\}$ non converge

PROPOSIZIONE: CONDIZIONE NECESSARIA affinché la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$ è che $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$

Infatti, se così non fosse, esisterebbero infiniti termini $\{a_{n_k}\}$ di $\{a_n\}$ tali che $a_{n_k} \geq \varepsilon_0 > 0$.

Pertanto $\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \geq \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n_k} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_0 = \varepsilon_0 \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \pm\infty}_{\text{criterio del confronto}}$ dunque sotto queste condizioni è impossibile per a_n convergere

PROPOSIZIONE! Se noi conosciamo il comportamento di una serie numerica e posso rapportarlo ad un'altra serie, allora posso conoscere anche il comportamento di quest'altra serie

Siano $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ due serie numeriche a termini non negativi. Allora ho che se $a_n \leq b_n$

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$

2) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty$

Dim. Se $a_n \leq b_n \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$

Allora $S_n \leq t_n$, pertanto se $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} t_n = +\infty$

Viceversa se $\lim_{n \to +\infty} t_n < +\infty$ allora $\lim_{n \to +\infty} S_n < +\infty$

ESEMPIO! 1) Se $0 < \alpha < 1$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$. Infatti, $\frac{1}{n^\alpha} = \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha \geq \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$

essendo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

2) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5 + \cos n}{2^n}$ è CONVERGENTE $\left(\text{supponendo che } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} < +\infty\right)$

Infatti ho che $5 + \cos n \leq 6$ poiché $-1 \leq \cos n \leq 1$. Ho dunque che

$0 \leq \frac{5 + \cos n}{2^n} \leq 6 \frac{1}{2^n}$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} 6 \frac{1}{2^n} < +\infty$ poiché prima supponevamo che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} < +\infty$

PROPOSIZIONE! Criterio del confronto asintotico

Ricordiamo che se $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \in (0, +\infty)$ si dice che a_n e b_n sono

ASINTOTICAMENTE EQUIVALENTI e si indicano con $\boxed{a_n \sim b_n}$

Se $a_n \sim b_n$ allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ hanno lo stesso comportamento.

ESEMPIO! $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = ? \Rightarrow$ Sappiamo che $a_n = \frac{1}{n^2} \sim b_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Lavoro su b_n!

ESEMPIO: $\sum_{n=1} \frac{1}{n^2}$? $\Rightarrow$ sappiamo che $a_n = \frac{1}{n^2} \sim b_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Lavoro su b_n:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} \dots = 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$ Dunque converge

NOTA! Se $a_n \sim b_n \Rightarrow \sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso comportamento.
Ciò non significa che $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Infatti nell'esempio precedente il fatto che $\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)} \Rightarrow \sum \frac{1}{n^2} < +\infty$
NON significa che $\sum \frac{1}{n^2} = \sum \frac{1}{n(n+1)}$.
Infatti $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ mentre $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

PROPOSIZIONE: Criterio del confronto

Sia $S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a termini NON NEGATIVI. Allora se esiste $l = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n}$
(o equivalentemente $l = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$)

e
$$\begin{cases} l < 1 \Rightarrow S \text{ CONVERGE} \\ l = 1 \Rightarrow \text{non si può concludere nulla} \\ l > 1 \Rightarrow S \text{ DIVERGE} \end{cases}$$

ESEMPI di applicazione

1. $\sum_{n=0}^{n} q^k$, $q > 0$
Allora notiamo che $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{q^n} = q$

Dunque se
$$\begin{cases} 0 < q < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} q^n < +\infty & \text{CONVERGENTE} \\ 1 < q \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = +\infty & \text{DIVERGENTE} \\ q = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 = +\infty & \end{cases}$$

2. $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} < +\infty$ $\quad (0! = 1)$. Si ha che $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} = e$

Dunque $$\lim_{k \to +\infty} \frac{\frac{a^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{a^k}{k!}} = \lim_{k \to +\infty} \frac{k!}{(k+1)!} \cdot \frac{a^{k+1}}{a^k} = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k+1} \cdot a = 0 < 1$$

perciò è convergente

PROPOSIZIONE: Criterio di condensazione

La serie a termini non negativi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se e solo se converge la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$

ESEMPIO 1. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^3 (\log n)^2} = ?$

$\Downarrow$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} 2^n \left[\frac{1}{(2^n)^3 (\log 2^n)^2}\right] = \sum_{n=2}^{+\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^{3n}} \cdot \frac{1}{(n \log 2)^2} =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{(\log 2)^2} \quad \text{e ho anche che}$$

$$0 < \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{(\log 2)^2} \le \frac{1}{2^{2n}} = \left(\frac{1}{4}\right)^n \text{ e } \sum \frac{1}{4^n} < +\infty$$

dunque $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^3 (\log n)^2} < +\infty$

2. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n} \log n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \frac{1}{\sqrt{(2^n)} \log 2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{2^{n/2}} \cdot \frac{1}{n \log 2} =$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n/2} \cdot \frac{1}{n \log 2} = +\infty$$

Esempi vari:

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!\, n^3}{n^n}$ 2. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n \log n}$ 3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^5\, 2^{2n}}{5^n}$ 4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log\left(\frac{n}{n+1}\right) \log\left(\frac{n}{n+1}\right)}{n}$

1. criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!\,(n+1)^3}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n! \cdot n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{(n+1)}\, \cancel{n!}\, (n+1)^3}{\cancel{(n+1)}(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}\, n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^3}{(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{n^3} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

Inoltre: $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$ per cui $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{e}$ con $e \in (0,1)$

2.

Ho che $\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n \log n} = \frac{\sqrt{n}\left[\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right]}{n \log n} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1}{\sqrt{n} \log n} \sim \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}} \log n} =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{3/2}} \cdot \frac{1}{\log n}$ e che $(1+t)^{1/2} - 1 \sim \frac{1}{2} t$ per cui

$$\sum_{n\ge1} \frac{1}{2} \frac{1}{n^{3/2}} \cdot \frac{1}{\log n} < \sum_{n\ge1} \frac{1}{n^{3/2}}$$

3. criterio della radice

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^5 \cdot 2^{2n}}{5^n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^5 \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5} < 1$$

4.

$\log(t+1) \sim t+1$ Dunque

$$\log\left(\frac{n}{n+1}\right) = -\log\left(\frac{n}{n+1}\right) = -\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{n}$$

$\log\left(\frac{n}{\;}\right) \sim \log 1 = -\log n$

$$\log\left(\frac{n}{n+1}\right) = -\log\left(\frac{n}{n+1}\right) = -\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{n}$$

$$\log\left(\frac{n}{n^2+1}\right) \sim \log\frac{1}{n} = -\log n$$

Inoltre $0 \leq \frac{\log n}{n^2} \leq \frac{\log n}{n^{1/2}} \cdot \frac{1}{n^{3/2}} \leq \frac{1}{n^{3/2}} \Rightarrow \sum \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$

Dunque $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log\left(\frac{n}{n+1}\right)\log\left(\frac{n}{n^2+1}\right)}{n} < +\infty$

SERIE DI SEGNO QUALSIASI:

Sia ora $\{a_n\}$ una successione a termini di segno qualsiasi. La serie di termini generale a_n

$S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è detta serie a termini di segno variabile e non possiamo dire nulla sua esistenza.

Diremo che esso è CONVERGENTE se $\exists \lim_{n\to+\infty} S_n = S$ con $S \in (-\infty, +\infty)$

Diremo che invece S è ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE se $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty$

TEOREMA: Ogni serie assolutamente convergente è anche convergente semplicemente

ESEMPIO: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ è una serie assolutamente convergente

Nota: Se S non è assolutamente convergente, non è detto che non sia semplicemente convergente

ESEMPIO: $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k}$ converge SEMPLICEMENTE ma NON ASSOLUTAMENTE

La sua convergenza semplice è data dal criterio di Leibniz

PROPOSIZIONE: Criterio di Leibniz

Sia data $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$.

Se ① $\{a_n\}$ è decrescente

② $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$

Allora la serie $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ è CONVERGENTE.

Inoltre, la successione $\{S_{2n}\}$ approssima S per eccesso e la successione $\{S_{2n+1}\}$ approssima S per difetto

ESEMPIO: Sia dato $a<0$ allora $S = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a$ converge

$S = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{|a|^k}{k!}$. Notiamo che $\frac{|a|^k}{k!} \to 0$. Infatti,

$S = \sum_{k=0} (-1) \frac{|a|}{k!}$. Notiamo che $\frac{|a|}{k!} \to 0$. Infatti,

$$\frac{|a|^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{|a|^k}{k!} \frac{|a|}{k+1} \leq \frac{|a|^k}{k!} \cdot 1 = a_k$$

Inoltre, $a_{k+1} \leq a_k$, $\ell = \lim_{k\to+\infty} a_k$, $\lim_{k\to+\infty} a_{k+1} \leq \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2} \frac{|a|^k}{k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{2} a_k = \frac{\ell}{2} \Rightarrow \ell = 0$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} = S = e^a \qquad \begin{cases} a<0 \\ a>0 \end{cases}$$