$$\begin{cases} 1-x>0 \\ a^2-1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<1 \\ a\leq -1 \quad \vee \quad a\geq 1 \end{cases}$$

Dunque $x<1 \wedge (a\leq -1 \ \vee \ a\geq 1)$ e $A: \{(x, y_1, y_2)\in\mathbb{R}^3 \mid x<1\}$

Dunque devo trovare una striscia tale che $[\alpha, \beta] \in (-\infty, 1)$
e $a\leq -1 \vee a\geq 1$
Scelgo dunque $a=2$ e $\delta: [-2, 0]$ e verifico la LIP GLOB.

$$\frac{df_1}{dy_1} = \ln(1-x) \qquad \frac{df_1}{dy_2} = e^x$$

$$\frac{df_2}{dy_1} = 0 \qquad \frac{df_2}{dy_2} = \sqrt{3}$$

Tutte le derivate parziali sono continue nel compatto e dunque, per Weierstrass anche limitate. Perciò è verificata la LIP. GLOBALE

Poiché sono anche MONOTONE, posso calcolare la costante L di Lipschitz

Valuto la funzione in corrispondenza degli estremi:

$$\frac{df_1}{dy_1} \Rightarrow \begin{matrix} x=-2 \Rightarrow \ln(3)>1 \\ x=0 \Rightarrow \ln(1)=0 \end{matrix} \Rightarrow \left|\frac{df_1}{dy_1}\right| \leq \underline{\ln 3}$$ MAGGIORA la funzione

$$\frac{df_1}{df_2} \Rightarrow \begin{matrix} x=-2 \Rightarrow e^{-2}<1 \\ x=0 \Rightarrow e^0=1 \end{matrix} \Rightarrow \left|\frac{df_1}{df_2}\right| \leq 1$$

$$\frac{df_2}{dy_1} = 0 \quad \forall x\in I \Rightarrow \left|\frac{df_2}{dy_1}\right| \leq 0$$

$$\frac{df_2}{dy_2} = \sqrt{3} \quad \forall x\in I \Rightarrow \left|\frac{df_2}{dy_2}\right| \leq \sqrt{3}$$

Alla fine scelgo la costante maggiorante più grande pari a $\sqrt{3}$

4 Verificare la LIP globale in $S: [a, b] \times R^3$

$$\begin{cases} y_1' = 6y_1 + 2x \\ y_2' = 7(y_1 - x) + 8y_2 - y_3 \\ y_3' = 7x \end{cases}$$

D: tutto R^4, dunque posso scegliere a e b senza vincoli
Guardando le y primitive e derivate, sono tutte e tre lineari.
Dunque, per teoria la LIP. è sempre verificata
Per trovare una x ho bisogno di tre punti

Se però non volessi applicare la linearità, devo verificare le derivate parziali

$$\frac{df_1}{dy_1} = 6 \qquad \frac{df_1}{dy_2} = 0 \qquad \frac{df_1}{dy_3} = 0$$

$$\frac{df_2}{dy_1} = 7 \qquad \frac{df_2}{dy_2} = 8 \qquad \frac{df_2}{dy_3} = -1$$

$$\frac{df_3}{dy_1} = 0 \qquad \frac{df_3}{dy_2} = 0 \qquad \frac{df_3}{dy_3} = 0$$

Dunque $\exists L$ ed è pari a 8. Perciò sono limitate

5 PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 3e^{6x} \\ y(1) = 2 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

① risolvo l'omo associata:

$y'' - 3y' + 2y = 0$

Questo tipo trae soluzione da $e^{\lambda x}$ $(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$ dove $\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$

perciò una soluzione sarà $y_1 = e^x$ e una $y_2 = e^{2x}$

Dunque $y_{omo} = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{2x}$ mentre $y = y_{omo} + y_p$

perciò una soluzione sarà $y_1 = e^x$ e una $y_2 = e^{2x}$

Dunque $y_{omo} = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{2x}$ mentre $y = y_{omo} + y_p$

Determino la soluzione particolare col metodo di Lagrange:

Scrivo $y_p = C_1(x) e^x + C_2(x) \cdot e^{2x}$. Calcolo la derivata prima:

$y'_p = \underline{C_1'(x) e^x} + C_1(x) e^x + \underline{C_2'(x) \cdot e^{2x}} + 2 C_2(x) e^{2x}$ Pongo che

$C_1'(x) e^x + C_2'(x) \cdot e^{2x} = 0$ cioè opposti / $C_1(x)$ e $C_2(x)$ costanti

Calcolo la derivata seconda:

$y''_p = C_1'(x) e^x + C_1(x) e^x + 2 C_2'(x) e^{2x} + 4 C_2(x) e^{2x}$

Sostituisco nell'equazione di partenza:

$y'' - 3y' + 2y = 3 e^{6x}$

$\Downarrow$

$$C_1'(x) e^x + \cancel{C_1(x) e^x} + 2 C_2'(x) e^{2x} + \cancel{4 C_2(x) e^{2x}} - \cancel{3 C_1(x) e^x} - \cancel{6 C_2(x) e^{2x}} + \cancel{2 C_1(x) e^x} + \cancel{2 C_2(x) e^x} = 3 e^{6x}$$

$$\begin{cases} C_1'(x) e^x + C_2'(x) e^{2x} = 0 \\ C_1'(x) e^x + 2 C_2'(x) e^{2x} = 3 e^{6x} \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = -e^x \cdot e^{2x} + 2 e^x e^{2x} = -e^{3x} + 2 e^{3x} = e^{3x}$$

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ 3e^{6x} & 2e^{2x} \end{vmatrix}}{\det W} = \frac{0 - 3e^{2x} e^{6x}}{e^{3x}} = \frac{-3 e^{8x}}{e^{3x}} = -3 e^{5x}$$

dunque

$$\int f'(x) \cdot e^{f(x)} = e^{f(x)}$$

$$C_1(x) = \int C_1'(x) = \int -3 e^{5x} \, dx = -\frac{3}{5} \int 5 e^{5x} \, dx = -\frac{3}{5} e^{5x}$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & 3e^{6x} \end{vmatrix}}{W} = \frac{3 e^{6x} \cdot e^x - 0}{e^{3x}} = \frac{3e^{7x}}{e^{3x}} = 3 e^{4x}$$

$$C_2(x) = \int C_2'(x) = \frac{3}{4} \int 4 e^{4x} \, dx = \frac{3}{4} e^{4x}$$

Dunque sostituisco i valori di $C_2(x)$ e $C_1(x)$ in y_p:

$y_p = C_1(x)\, e^{x} + C_2(x)\, e^{2x} = -\frac{3}{5} e^{5x} \cdot e^{x} + \frac{3}{4} e^{4x} e^{2x} = \frac{3}{20} e^{6x}$

Verifica: in $y''_p - 3y'_p + 2y_p = 3e^{6x}$ sostituisco il valore di y_p trovato

Soluzione finale:

$y = y_{omo} + y_p = c_1 \cdot e^{x} + c_2 \cdot e^{2x} + \frac{3}{20} e^{6x}$

Devo poi trovare c_1 e c_2 affinché siano validi i vincoli imposti:

① $y(1) = 2$ e ② $y'(1) = 0$

① se $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + \frac{3}{20} e^{6x}$ allora $2 = c_1 \cdot e + c_2 \cdot e^{2}$

② " allora $y' = c_1 \cdot e^{x} + 2c_2 e^{2x} + \frac{9}{10} e^{5x}$ allora $0 = c_1 \cdot e + 2c_2 \cdot e^{2} + \frac{9}{10} e^{5}$

Dunque basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} c_1 e + c_2 e^2 = 2 - \frac{3}{20} e^6 \\ c_1 e + 2e^2 c_2 = -\frac{9}{10} e^6 \end{cases}$$

sia con le matrici che con altri metodi e ottengo

$c_1 = \frac{4}{e} + \frac{3}{5} e^5$ e $c_2 = -\frac{3}{4} e^4 - \frac{2}{e^2}$ per cui ottengo che

$$y = \left(\frac{4}{e} + \frac{3}{5} e^5\right) e^{x} + \left(-\frac{3}{4} e^4 - \frac{2}{e^2}\right) e^{2x} + \frac{3}{20} e^{6x} \text{ è SOLUZIONE}$$

EX SUI CAMPI

① Dati $\underline{F_1} = (2, x+y)$ e $\underline{F_2} = (k(x+y), 3)$

- Calcolare i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che
  a) $\underline{J_1} = \underline{F_1} + \underline{F_2}$ è conservativo
  b) $\underline{J_2} = \underline{F_1} - \underline{F_2}$ è conservativo

a) Calcolo $\underline{J_1} = \underline{F_1} + \underline{F_2} = (\underbrace{2 + k(x+y)}_{F_\alpha}, \underbrace{3 + (x+y)}_{F_\beta})$

Dominio: tutto $\mathbb{R}^2$ quindi il dominio è semplicemente connesso

Perciò, mi basta che il campo sia irrotazionale affinché sia CONSERVATIVO

Verifico l'irrotazionale:

$\frac{\partial F_\beta}{\partial x} \overset{devo}{=} \frac{\partial F_\alpha}{\partial y}$ e lo è se $k=1$

Dunque

$\underline{f}_1$ conservativo se pari a $(2+x+y,\ 3+x+y)$

b) Calcolo $\underline{f}_2 = \underline{F}_1 - \underline{F}_2 = (2-k(x+y),\ x+y-3)$.

Ripeto il procedimento sopra per cui ottengo $k=-1$

e perciò $\underline{f}_2$ conservativo se $\underline{f}_2 = (2+x+y,\ x+y-3)$

- Calcolare il lavoro del campo

$\underline{G} = \underline{f}_1 + \underline{f}_2$ lungo il percorso chiuso $x^2+y^2=4$

Verifico che G sia conservativo:

$$\underline{G} = \underline{f}_1 + \underline{f}_2 = (\underbrace{4+2x+2y}_{G_1},\ \underbrace{2x+2y}_{G_2})$$

Poiché $\dfrac{dG_2}{dx} = \dfrac{dG_1}{dy}$ allora $\underline{G}$ è conservativo.

Dunque, $\oint G \circ dr = 0$ però se voglio posso determinare il

POTENZIALE $\rightarrow$ funzione scalare di cui $\underline{G}$ è gradiente. Per

Determino dunque $U(x,y) \mid \underline{G}(x,y) = \nabla U(x,y)$!

Calcolo la der. parziale $\dfrac{dU}{dx}$ che deve essere pari alla prima componente G_1 :

$$\frac{dU}{dx} = G_1 \Rightarrow U = 4x + x^2 + 2xy + c(y)$$ ESP. PROVVISORIA

Derivo parzialmente la prima espr. provvisoria che deve essere uguale a G_2

$$\frac{dU}{dy} = \frac{d\,(4x+x^2+2xy+c(y))}{dy} = 2x+2y$$

Ottengo $\cancel{2}x + c'(y) = \cancel{2}x + 2y \Rightarrow \int c'(y) = \int 2y \Rightarrow c(y) = y^2 + k$

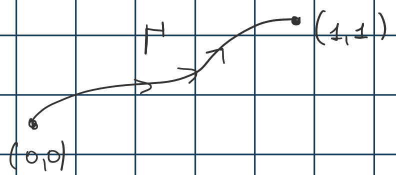
Perciò $\boxed{U(x,y) = 4x + x^2 + 2xy + y^2 + k}$

Di conseguenza, dato un percorso qualsiasi, poiché il campo è conservativo allora $L_\Gamma = \int_\Gamma \underline{G} \circ d\underline{r} = U(1,1) - U(0,0) = 8$

se H è tale che !

conservativo allora $L_\Gamma = \int_\Gamma \underline{G} \circ d\underline{z} = U(1,1) - U(0,0) = 8$

se Γ è tale che:



② Data $f(x,y) = 6x + 7y^2 + e^{x^2+y}$

a) verificare che $f(x,y)$ è differenziabile → applicare il Teor. del diff. totale

b) calcolare l'equazione del piano tangente nel punto $p=(0,0)$

c) calcolare $\nabla \circ (\nabla \times \nabla f)$ divergenza del rotore del gradiente

a) Per il teorema del diff totale $f(x,y)$ è quindi differenziabile

Equazione del differenziale: $df(x,y) = \nabla f(x,y) \circ (dx, dy) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy =$

indica l'incremento delle ordinate

$= (6 + 2x e^{x^2+y}) dx + (14y + e^{x^2 y}) dy$

b) Calcolo $f(0,0) = 6 \cdot 0 + 7 \cdot 0^2 + e^{0^2+0} = 1$ che chiamo z_0

Calcolo il differenziale:

$d f(x,y) = \nabla f(x,y) \circ (dx, dy) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy = (6 + 2x e^{x^2+y}) dx + (14y + e^{x^2+y}) dy$

così considero tutto un piano

Pongo $dx = x - x_0$, $df = z - z_0$, $dy = y - y_0$ per cui l'eq. del differenziale diventa

$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$ Poiché sto considerando il punto $p=(0,0)$

allora $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 1$ e dunque $z - 1 = 6x + y \Rightarrow z = 6x + y + 1$ che è il piano tangente in $p = (0,0)$

c) Calcolare la divergenza del rotore del gradiente $\nabla \circ (\nabla \times \nabla f)$

① Io posso considerare $f(x,y) = f(x,y,0)$ dunque con $z=0$ e $\forall (x,y) \in D$

② $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \longrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, 0\right) \longrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$

Poiché so che il rotore del gradiente di un campo scalare è sempre pari al vettore nullo

quindi $\nabla \times \nabla f(x,y,z) = 0$ Perciò $\nabla \circ (\nabla \times \nabla f(x,y,z)) = \nabla \circ \underline{0} = 0$

Ripetizione sulle serie

lunedì 16 novembre 2020 10:37

SERIE A TERMINI NON NEGATIVI

Data una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,+\infty)$ $(a_n \geq 0)$ posso definire

una nuova successione con segno

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_n = \vdots$

$\{S_n\}$ è detta successione delle somme parziali. La sommatoria S_n è detta somma parziale ennesima $\quad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

e viene detta serie numerica di termini generali a_n.

Notiamo che $\{S_n\}$ è una successione NON DECRESCENTE $(S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n)$

Allora $\lim_{n\to+\infty} S_n \begin{cases} S < +\infty \\ +\infty \end{cases}$

Il limite $\lim_{n\to+\infty} S_n =: S$ viene indicato con $S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$

e viene detta serie numerica di termini generali a_n.

Diremo che la serie è CONVERGENTE se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$

Invece è DIVERGENTE se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$

ESEMPIO

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 1 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} 1 = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

$$\boxed{\sum_{x=1}^{+\infty} \frac{1}{x} = +\infty}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} < +\infty$$

$\Rightarrow \{S_n\}$ converge $\Rightarrow S_n$ è una successione di Cauchy

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : n, m > \bar{n}$ allora $|S_n - S_m| < \varepsilon$

Fissiamo allora $\varepsilon < 1/2$ e scegliamo un $\bar{n}$ in modo che soddisfi $|S_n - S_m| < \varepsilon$

Da $m > \bar{n} \Rightarrow 2m > \bar{n}$ ho che poiché $|S_{2m} - S_m| = S_{2m} - S_m = \underbrace{\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{2m}}_{m \text{ termini}} \geq m \cdot \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}$

per la decrescenza

ma ciò implica che $|S_{2m} - S_m| \geq \varepsilon \Rightarrow \{S_n\}$ non è di Cauchy $\Rightarrow \{S_n\}$ non converge

PROPOSIZIONE: CONDIZIONE NECESSARIA affinché la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$ è che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

Infatti, se così non fosse, esisterebbero infiniti termini $\{a_{n_k}\}$ di $\{a_n\}$ tali che $a_{n_k} \geq \varepsilon_0 > 0$.

Pertanto $\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \geq \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n_k} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_0 = \varepsilon_0 \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \pm\infty}_{\text{criterio del confronto}}$ dunque sotto queste condizioni è impossibile per a_n convergere

PROPOSIZIONE! Se noi conosciamo il comportamento di una serie numerica e posso rapportarlo ad un'altra serie, allora posso conoscere anche il comportamento di quest'altra serie

Siano $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ due serie numeriche a termini non negativi. Allora ho che se $a_n \leq b_n$

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty$

2) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty$

Dim. Se $a_n \leq b_n \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$

Allora $S_n \leq t_n$, pertanto se $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty$

Viceversa se $\lim_{n\to+\infty} t_n < +\infty$ allora $\lim_{n\to+\infty} S_n < +\infty$

ESEMPIO: 1) Se $0<\alpha<1$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$. Infatti, $\frac{1}{n^\alpha} = \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha \geq \frac{1}{n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$

essendo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

2) La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5+\cos n}{2^n}$ è CONVERGENTE (supponendo che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} < +\infty$)

Infatti ho che $5+\cos n \leq 6$ poiché $-1 \leq \cos n \leq 1$. Ho dunque che

$0 \leq \frac{5+\cos n}{2^n} \leq 6 \frac{1}{2^n}$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} 6\frac{1}{2^n} < +\infty$ poiché prima supponevamo che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} < +\infty$

PROPOSIZIONE: Criterio del confronto asintotico

Ricordiamo che se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \in (0,+\infty)$ si dice che a_n e b_n sono ASINTOTICAMENTE EQUIVALENTI e si indicano con $\boxed{a_n \sim b_n}$

Se $a_n \sim b_n$ allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ hanno lo stesso comportamento.

ESEMPIO: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = ?$ $\Rightarrow$ Sappiamo che $a_n = \frac{1}{n^2} \sim b_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Lavoro su b_n!

ESEMPIO: $\sum_{n=1} \frac{1}{n^2} = ? \Rightarrow$ Sappiamo che $a_n = \frac{1}{n^2} \sim b_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Lavoro su b_n:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} \dots = 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$ Dunque converge

NOTA! Se $a_n \sim b_n \Rightarrow \sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso comportamento.
Ciò non significa che $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Infatti nell'esempio precedente il fatto che $\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)} \Rightarrow \sum \frac{1}{n^2} < +\infty$
NON significa che $\sum \frac{1}{n^2} = \sum \frac{1}{n(n+1)}$.
Infatti $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ mentre $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

PROPOSIZIONE: Criterio del confronto

Sia $S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a termini NON NEGATIVI. Allora se esiste $l = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n}$
(o equivalentemente $l = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$)

e
$$\begin{cases} l < 1 \Rightarrow S \text{ CONVERGE} \\ l = 1 \Rightarrow \text{non si può concludere nulla} \\ l > 1 \Rightarrow S \text{ DIVERGE} \end{cases}$$

ESEMPI di applicazione

1. $\sum_{n=0}^{n} q^k$, $q > 0$
Allora notiamo che $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{q^n} = q$

Dunque se
$$\begin{cases} 0 < q < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} q^n < +\infty & \text{CONVERGENTE} \\ 1 < q \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = +\infty & \\ q = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 = +\infty & \end{cases}$$
DIVERGENTE

2. $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} < +\infty$ $(0! = 1)$. Si ha che $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} = l$

Dunque $$\lim_{k \to +\infty} \frac{\frac{a^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{a^k}{k!}} = \lim_{k \to +\infty} \frac{k!}{(k+1)!} \cdot \frac{a^{k+1}}{a^k} = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k+1} \cdot a = 0 < 1$$

perciò è convergente

PROPOSIZIONE: Criterio di condensazione

La serie a termini non negativi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se e solo se converge la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$

ESEMPIO 1. $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^3(\log n)^2} = ?$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} 2^n\left[\frac{1}{(2^n)^3(\log 2^n)^2}\right] = \sum_{n=2}^{+\infty} 2^n\cdot\frac{1}{2^{3n}}\cdot\frac{1}{(n\log 2)^2} =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{2n}}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{(\log 2)^2}$$ e ho anche che

$$0 < \frac{1}{2^{2n}}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{(\log 2)^2} \le \frac{1}{2^{2n}} = \left(\frac{1}{4}\right)^n \text{ e } \sum\frac{1}{4^n} < +\infty$$

dunque $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^3(\log n)^2} < +\infty$

2. $$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\,\log n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n\frac{1}{\sqrt{(2^n)}\,\log 2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{2^{n/2}}\cdot\frac{1}{n\log 2} =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n/2}\cdot\frac{1}{n\log 2} = +\infty$$

Esempi vari:

1. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!\,n^3}{n^n}$ 2. $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n\log n}$ 3. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^5\,2^{2n}}{5^n}$ 4. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\log\left(\frac{n}{n+1}\right)\log\left(\frac{n}{n^2+1}\right)}{n}$

1. criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)!\,(n+1)^3}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!\cdot n^3} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{(n+1)}\,\cancel{n!}\,(n+1)^3\cdot n^n}{\cancel{(n+1)}(n+1)^n\,\cancel{n!}\,n^3} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^3}{(n+1)^n}\cdot\frac{n^n}{n^3} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\overbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^3}^{\to 1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

Inoltre: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$ per cui $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{e}$ con $e\in(0,1)$

2.

Ho che $$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n\log n} = \frac{\sqrt{n}\left[\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right]}{n\log n} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}{\sqrt{n}\,\log n} \sim \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}\log n} =$$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{3/2}}\cdot\frac{1}{\log n}$ e che $(1+t)^{1/2}-1 \sim \frac{1}{2}t$ per cui

$$\sum_{n\ge 1}\frac{1}{2}\,\frac{1}{n^{3/2}}\cdot\frac{1}{\log n} < \sum_{n\ge 1}\frac{1}{n^{3/2}}$$

3. criterio della radice

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n^5\cdot 2^{2n}}{5^n}} = \lim_{n\to+\infty}\overbrace{\left(\sqrt[n]{n}\right)}^{\to 1}{}^5\cdot\frac{4}{5} = \frac{4}{5} < 1$$

4.

$\log(t+1) \sim t+1$ Dunque

$$\log\left(\frac{n}{n+1}\right) = -\log\left(\frac{n}{n+1}\right) = -\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{n}$$

$\ldots\left(n\ \ldots\right) \sim \log 1 = -\log n$

$$\log\left(\frac{n}{n+1}\right) = -\log\left(\frac{n}{n+1}\right) = -\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{n}$$

$$\log\left(\frac{n}{n^2+1}\right) \sim \log\frac{1}{n} = -\log n$$

Inoltre $0 \le \frac{\log n}{n^2} \le \frac{\log n}{n^{1/2}} \cdot \frac{1}{n^{3/2}} \le \frac{1}{n^{3/2}} \Rightarrow \sum \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$

Dunque $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log\left(\frac{n}{n+1}\right)\log\left(\frac{n}{n^2+1}\right)}{n} < +\infty$

SERIE DI SEGNO QUALSIASI:

Sia ora $\{a_n\}$ una successione a termini di segno qualsiasi. La serie di termini generale a_n

$S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è detta serie a termini di segno variabile e non possiamo dire nulla sua esistenza.

Diremo che esso è CONVERGENTE se $\exists \lim_{n\to+\infty} S_n = S$ con $S \in (-\infty, +\infty)$

Diremo che invece S è ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE se $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty$

TEOREMA: Ogni serie assolutamente convergente è anche convergente semplicemente

ESEMPIO: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ è una serie assolutamente convergente

Nota: Se S non è assolutamente convergente, non è detto che non sia semplicemente convergente

ESEMPIO: $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k}$ converge SEMPLICEMENTE ma NON ASSOLUTAMENTE

La sua convergenza semplice è data dal criterio di Leibniz

PROPOSIZIONE: Criterio di Leibniz

Sia data $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$.

Se ① $\{a_n\}$ è decrescente

② $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$

Allora la serie $S = \lim_{n\to+\infty} n$ è CONVERGENTE.

Inoltre, la successione $\{S_{2n}\}$ approssima S per eccesso e la successione $\{S_{2n+1}\}$ approssima S per difetto

ESEMPIO: Sia dato $a<0$ allora $S = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} = a^k$ converge

$S = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{|a|^k}{k!}$. Notiamo che $\frac{|a|^k}{k!} \to 0$. Infatti,

$S = \sum_{k=0} (-1) \frac{|a|}{k!}$. Notiamo che $\frac{|a|}{k!} \to 0$. Infatti,

$$\frac{|a|^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{|a|^k}{k!} \frac{|a|}{k+1} \leq \frac{|a|^k}{k!} \cdot 1 = a_k$$

Inoltre, $a_{k+1} \leq a_k$, $\ell = \lim_{k \to +\infty} a_k$, $\lim_{k \to +\infty} a_{k+1} \leq \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{2} \frac{|a|^k}{k} = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{2} a_k = \frac{\ell}{2} \Rightarrow \ell = 0$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} = S = e^a \qquad \begin{cases} a < 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

Campo complesso

lunedì 16 novembre 2020 13:02

CAMPO COMPLESSO

$\mathbb{R}^2 \ni (a,b)$ $\begin{cases} \lambda(a,b) = (\lambda a, \lambda b) \\ (a,b)+(c,d) = (a+c, b+d) \end{cases}$

Prodotto: $(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$

Ho che $(0,1) = i$ con la condizione che $i^2 = 1 = (1,0)$

NUMERO COMPLESSO: $z = (a,b) = a(1,0) + b(0,1) = a+ib$

dove $\begin{cases} a = \text{parte reale} = Re(z) \\ b = \text{parte immaginaria} = Im(z) \end{cases}$

Proprietà:

$a+ib + c+id = (a+c) + i(bd)$

$\lambda(a+ib) = \lambda a + i\lambda b$

$(a+ib)\cdot(c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc)$

CAMPO: $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è il campo complesso. Più semplicemente $\mathbb{C}$ è l'insieme delle coppie (a,b) denotate formalmente con $a+ib$ e dotato delle operazioni sopra.

Proprietà:

L'**elemento neutro** rispetto alla moltiplicazione è $1 = 1 + i\cdot 0$

L'**elemento opposto** rispetto alla moltiplicazione è costruito come segue:

Dato $z = a+ib$, $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$. Infatti ho che:

$$z\cdot\frac{1}{z} = (a+ib)\left(\frac{a}{a^2+b^2} + i\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)\right) = \left(a\cdot\frac{a}{a^2+b^2} - b\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)\right) + i\left(\frac{-ab}{a^2+b^2} + \frac{b\cdot a}{a^2+b^2}\right)$$

L'elemento detto **complesso coniugato** di $z = a+ib$ è detto $\bar{z} = a - ib$. Perciò ho che

$\frac{z+\bar{z}}{2} = Re(z)$ e $\frac{z-\bar{z}}{2} = Im(z)$

L'elemento detto **modulo** è $|z| = (z \cdot \bar{z})^{1/2} = \sqrt{a^2+b^2}$ per cui ho che $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Valgono anche:

$$\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$
$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$

per il modulo:

$|z| \geq 0$ e $z=0 \iff |z|=0$

$|z| = |\bar{z}|$

$|Re(z)|, |Im(z)| \leq |z|$ e $|z| \leq |Re(z)| + |Im(z)|$

$|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

ESERCIZIO

Semplificare e trovare le soluzioni di $z^2 + i(Im\, z) + 2\bar{z} = 0$

Pongo $z = a+ib$ per cui ottengo $(a+ib)^2 + i(b) + 2\overline{(a+ib)} = 0$

da cui: $a^2 - b^2 + i2ab + 2a + ib + i2b = 0$

$$\downarrow$$

$$(a^2 - b^2 + 2a) + i(2ab - b) = 0 + i\,0$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + 2a = 0 \\ 2ab - b = 0 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + 2a = 0 \\ b(2a-1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + 2a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 - b^2 + 2a = 0 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{cases} a^2 + 2a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{4} - b^2 + 1 = 0 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

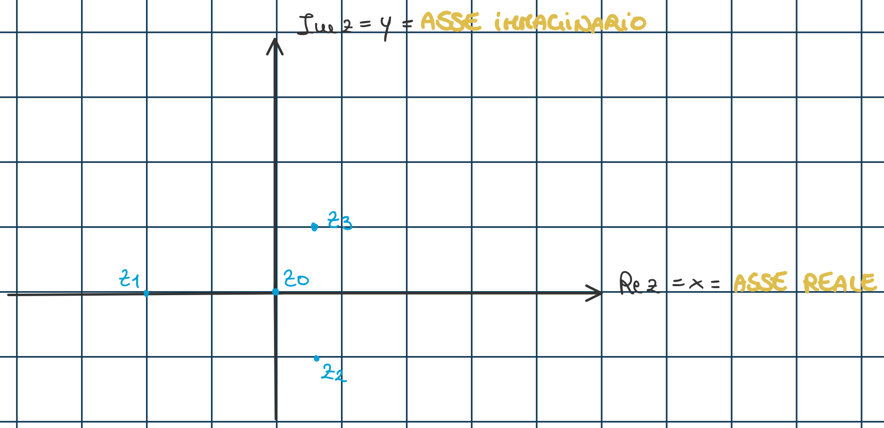
$$\begin{cases} a(a+2) = 0 \\ b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b^2 = \frac{5}{4} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{cases} a = 0 \lor a = -2 \\ b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -\frac{\sqrt{5}}{2} \lor b = \frac{\sqrt{5}}{2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

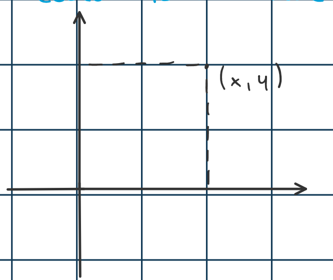
soluzioni: $z_0 = 0$, $z_1 = -2$ soluzioni: $z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{5}}{2}$, $z_3 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{5}}{2}$

Rappresentazione grafica:

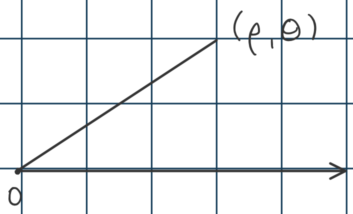


RAPPRESENTAZIONE POLARE

coordinate cartesiane



coordinate polari:



$\rho \in (0, +\infty)$
$\theta \in [0, 2\pi]$

Passaggio: $(x, y) \longrightarrow (\rho, \theta)$ $\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \end{cases}$

$(\rho, \theta) \longrightarrow (x, y)$ $\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$

da cui $\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$

Posso rappresentare un numero complesso come

$z = x + iy = \rho\cos\theta + i\rho\,\mathrm{sen}\,\theta = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

→ FORMA TRIGONOMETRICA

Ottengo che $\rho = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$ mentre, a meno di angoli giro, $\theta = \arg(z)$ ARGOMENTO

FORMULE DI DE MOIVRE

Sia $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

FORMULE DI DE MOIVRE

Sia $z_1 = \rho_1 (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$, $z_2 = \rho_2 (\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$

allora $z_1 \cdot z_2 = \begin{cases} \rho = |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = \rho_1 \cdot \rho_2 \\ \theta = \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = \theta_1 + \theta_2 \end{cases}$

analogamente $\dfrac{z_1}{z_2} = \begin{cases} \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} \\ \arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \end{cases}$

Come conseguenza ricaviamo

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ volte}} = \rho^n \left[\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)\right]$$

ESEMPIO: Calcolare ① $(i+1)^8$ e ② $(i+1)^5$

① $(1+i)^8 = (\sqrt{2})^8 \left[\cos\left(8 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(8 \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right] = 2^4 [1 + i \cdot 0] = 16$

$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\arg(1+i) = \theta$; $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Big\} \ \dfrac{\pi}{4}$

Analogamente:

② $(1+i)^5 = (\sqrt{2})^5 \left[\cos 5 \cdot \frac{\pi}{4} + i \sin 5 \cdot \frac{\pi}{4}\right] =$

$= 4\sqrt{2}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right] = -4 - 4i$

TEOREMA

Sia data la seguente equazione nel campo complesso

$$z^n = w_0 \quad , \ w_0 \in \mathbb{C} - \{0\} \ , \ w_0 = \rho_0 (\cos\theta_0 + i \sin\theta_0)$$

Allora tale equazione ha esattamente n radici che hanno espressione in forma trigonometrica

$$z_k = \rho_k (\cos\theta_k + i \sin\theta_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

dove $\rho_k = \sqrt[n]{\rho_0}$ e $\theta_k = \dfrac{\theta_0 + 2k\pi}{n}$ con $k = 0, 1, \ldots, n-1$

ESEMPIO: Risolvere $z^3 = 1$ $\Rightarrow$ che scrivo come $z^3 = 1 = 1 \cdot (\cos\theta + i \sin\theta)$

Se fossimo in $\mathbb{R}$, l'equazione $x^3 = 1$ avrebbe unica soluzione $x = 1$.

Invece, l'equazione $z^3 = 1$ ha esattamente 3 soluzioni nel campo complesso:

nel campo complesso:

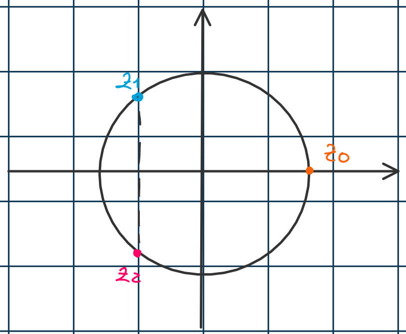
$$z_0 = \sqrt[n]{1}\left(\cos\left[\frac{0}{3}\right] + i \sin\left[\frac{0}{3}\right]\right) = 1$$

$$z_1 = \cos\left(\frac{0+2\cdot 1\cdot \pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = \cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

DUNQUE:

SOL $z_0 = 1$, $z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$



TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA:

Ogni polinomio di grado n su K complesso ha esattamente n radici complesse contate con le loro molteplicità.

In altre parole, dato un polinomio del tipo

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = b_0 (z-z_0)^{r_1} + \dots + \theta_n (z-z_m)^{r_m}$$

Dove $z_0, \dots, z_m$ sono radici distinte di $p(z) = 0$ e

$$r_1 + \dots + r_m = n$$

NOZIONI SU $\mathbb{C}$ IN RELAZIONE A $\mathbb{R}^2$

Si dice che $\mathbb{C}$ eredita la topologia di $\mathbb{R}^2$

Definiamo la BOLLA APERTA di raggio $R > 0$ e centro $z_0 \in \mathbb{C}$ e l'insieme

$$B_R(z_0) := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R \}$$

Definendo $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, definisco

$$B_R(x_0 + iy_0) := \left\{ x + iy \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < R \right\}$$

Un insieme $U \in \mathbb{C}$ si dirà aperto se esso è aperto visto come sottinsieme di coppie in $\mathbb{R}^2$.

Analogamente per i concetti di intorno, insieme chiuso, bordo...

Così, ad esempio, diremo che una successione di numeri complessi $\{z_n\}$ converge a $\tilde{z} \in \mathbb{C}$ se

$$\lim_{n\to+\infty} Re(z_n) = Re(\tilde{z}) \quad e \quad \lim_{n\to+\infty} Im(z_n) = Im(\tilde{z})$$

analogamente se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists_{\bar{n}\in\mathbb{N}} \text{ tale } \forall n \geq \bar{n} \quad |z_n - \tilde{z}| = \sqrt{(Re(z_n) - Re(\tilde{z}))^2 + (Im(z_n) - Im(\tilde{z}))^2} < \varepsilon$$

Una funzione $f : Dom(f) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \to f(z)$ si dirà convergente per $z \to z_0$ ad un elemento $\ell \in \mathbb{C}$ e si scriverà $\lim_{z\to z_0} f(z) = \ell$ se $\lim_{\substack{x\to Re(z_0)\\ y\to Im(z_0)}} Re(f(x+iy)) = Re(\ell)$ e contemporaneamente

$$\lim_{\substack{x\to Re(z_0)\\ y\to Im(z_0)}} Im(f(x+iy)) = Im(\ell)$$

O, in altre parole, se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \mid \forall z \in Dom(f)$ con $0 < |z - z_0| < \delta$ si ha $|f(z) - \ell| < \varepsilon$

f si dirà continua in $z_0 \in Dom(f)$ se

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$$

NOTAZIONE:

Spesso identificheremo $f(z) = f(x+iy) = Re\, f(x+iy) + i\, Im\, f(x+iy)$ con la funzione

$$\underset{\mathbb{R}^2}{(x,y)} \longmapsto \underset{\mathbb{R}^2}{(u(x,y), v(x,y))}$$

Noi possiamo sempre identificare un numero complesso attraverso una coppia di numeri reali

D'ora in poi andremo ad assumere che il dominio $Dom(f) = E \in \mathbb{C}$ e supporremo che sia E aperto e connesso per archi (a meno che non si dica il contrario)

3. Derivabilità

mercoledì 25 novembre 2020 13:23

DERIVABILITÀ ;

Sia $f: E \in \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Diremo che f è derivabile in $z_0 \in E$ se

$$\exists^{*} \lim_{\substack{h\to 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \underbrace{\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}}_{\text{RAPPORTO INCREMENTALE}} = \lim_{h\to 0} \left(f(z_0+h)-f(z_0)\right)\cdot\frac{1}{h}$$

coppia $x+iy$

ed è finito.

In questo caso denoteremo il limite $*$ con $f'(z_0) = \frac{df}{dz}\Big|_{z=z_0}$

$$y_1' = \left(3(x+1)y_1 + x^3 y_2 + e^{(x-3)} + x\right)$$

NOTA IMPORTANTE ;

Il limite $*$ è un limite UNIFORME su $Re(h) \to 0$ e $Im(h) \longrightarrow 0$

Es. ① $f(z) = z$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{z_0+h-z_0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = ?$$

② $f(z) = \bar{z}$ non è derivabile in $z_0 = 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\bar{h}}{h} = \lim_{\substack{h = x+iy \to 0 \\ x\to 0 \\ y \to 0}} \frac{x-iy}{x+iy} \quad \text{NON ESISTE !}$$

Infatti:
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{x-iy}{x+iy} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} \frac{x-iy}{x+iy} = \lim_{y\to 0} \frac{-iy}{iy} = -1$$

→ poiché sono diversi, non esiste il limite indicato sopra

③ $f(z) = z^n$, $z_0 \neq 0 \wedge n \geq 1$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(z_0+h)^n - z_0^n}{h} \quad \text{dove} \quad (z_0+h)^n = \underbrace{(z_0+h)\cdots(z_0+h)}_{n \text{ volte}} = \boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_0^k h^{n-k}}$$

FORMA BINOMIALE

$$\text{per cui} \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_0^k h^{n-k} - z_0^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} z_0^k h^{n-k}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} z_0^k h^{n-k-1} = n \cdot z_0^{n-1}$$

Dunque $\exists f'(z) = \frac{d}{dz} z^n \Big|_{z=z_0} = n \cdot z_0^{n-1}$

Il caso si estende a n razionale cioè pari a $q \in \mathbb{Q}$.
In questo caso va ristretta la derivabilità su $\mathbb{C} - \{0\}$
per gli esponenti negativi

④ $f(z) = Re(z)$ è derivabile?

$z = x+iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$

$$\text{Ho} \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x_0 + x - x_0}{x+iy} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x}{x+iy} = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x}{x+iy} = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x}{x+iy} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1 \end{cases}$$

$$\left(\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x}{x+iy} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1\right.$$

Re(z) non è derivabile in alcun punto

$\left\{\right.$ Non esiste la derivata in un punto z_0 qualsiasi

⑤ $f(z) = Re(z)$ è continua? cioè: $\lim_{z\to z_0} f(z) \overset{?}{=} f(z_0)$

$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x \overset{?}{=} x_0$ CERTAMENTE

Re(z) è una funzione ovunque continua e ovunque non derivabile

Differenze! Una funzione continua e non derivabile in alcun punto è la funzione di

R WEIRSTRASS

$\mathbb{C}$ Re(z)

Le funzioni derivabili su $\mathbb{C}$ non sono numerose come quelle su R

LEGAME DERIVATA COMPLESSA - R^2

TEOREMA

Sia $f: E \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione e sia $z_0 \in \mathbb{C}$. Allora f è derivabile in $z_0 \Rightarrow f$ è differenziabile in z_0 dove per differenziabilità intendiamo che $f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z-z_0) + \omega(z-z_0)$ con

$$\lim_{z\to z_0} \frac{\omega(z-z_0)}{|z-z_0|} = 0$$

Dim. se $\exists\, f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ con $h = z - z_0$

ottengo che $\lim_{h\to 0} \frac{f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)}{z-z_0} = 0$ dunque

se $\omega(z-z_0) = f(z)-f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)$ avrò che $\lim_{z\to z_0} \frac{\omega(z-z_0)}{z-z_0} = 0$

Dunque $f(z)-f(z_0) = f'(z_0)(z-z_0) + \omega(z-z_0)$

Come identificare funzioni eventualmente derivabili?

(senza ricorrere al calcolo del limite del rapporto incrementale)

si devono usare le equazioni di Cauchy - Riemann

Data $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ tale che $\begin{cases} u: E \subset R^2 \to R \\ v: E \subset R^2 \to R \end{cases}$

possiamo introdurre per u e v le derivate parziali (se esistono)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u_y \quad \frac{\partial v}{\partial x} = v_x \quad \frac{\partial v}{\partial y} = v_y$$

e associo ad esse la derivata

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x+iy) = u_x + i v_x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x+iy) = u_y + i v_y$$

ES. $f(x+iy) = \frac{1}{x+iy}$

$f(x+iy) = f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ e se $z = x+iy$ ciò è uguale a

$$\frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\,\frac{-y}{x^2+y^2}$$

Per cui ho che $f(x+iy) = u(x,y) + i v(x,y)$
dove $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ e $v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$

Dunque ottengo che (per x come potrei fare per y):

① $u_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{x^2+y^2}\right] = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

② $v_x(x,y) = -\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y}{x^2+y^2}\right] = \frac{y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

③ $\frac{\partial f}{\partial x}(x+iy) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + i\,\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{1}{|z|^4}\left[y^2-x^2+2ixy\right] =$

$= -\frac{1}{|z|^4}\left[x+iy\right]^2 = -\frac{z^2}{|z|^4} = \frac{z^2}{(z\cdot\bar{z})^2} = -\frac{z^2}{z^2\cdot\bar{z}^2} = -\frac{1}{\bar{z}^2}$

DA CONTROLLARE

ES. $f(z) = Re(z)$ NON È DERIVABILE IN ALCUN PUNTO.

Ammette comunque

① $f_x(x+iy) = \frac{\partial}{\partial x}x = 1$

② $f_y(x+iy) = \frac{\partial}{\partial y}x = 0$

NOTA: L'esistenza e continuità delle derivate parziali non implica la differenziabilità nel senso complesso della funzione

TEOREMA DELLE CONDIZIONI DI CAUCHY-RIEMANN

Sia $E \in \mathbb{C}$ aperto e connesso e sia $f: E \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Allora f è derivabile in $z_0 \in \mathbb{C}$ se e solo se

Le funzioni $u(x,y)$ e $v(x,y)$ sono differenziabili in x_0, y_0 dove $z_0 = x_0 + iy_0$ e valgono le condizioni seguenti:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \end{cases}$$

→ queste, denotate con (C-R) sono dette condizioni / equazioni di Cauchy-Riemann

DIMOSTRAZIONE: IMPLICAZIONE DIRETTA

Sia f derivabile (differenziabile) in z_0. Poniamo $z_0 = x_0 + i y_0$ e $u_0 = u(x_0, y_0)$ e $v_0 = v(x_0, y_0)$ e $z = x + iy$

Scrivo $f(z) - f(z_0) = u(x,y) - u_0 + i(v(x,y) - v_0)$ e

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + \omega(z - z_0) =$$

$$= (a_0 + i b_0)(x - x_0 + i(y - y_0)) + \omega(z - z_0) =$$

$$= \underline{a_0(x - x_0) - b_0(y - y_0)} + i\left(\underline{a_0(y - y_0) + b_0(x - x_0)}\right) + \omega(x - x_0, y - y_0)$$

Sono la stessa cosa

dunque ottengo che

ē differenziabile

① $u(x,y) - u_0 = a_0(x - x_0) - b_0(y - y_0) + \mathrm{Re}(\omega(x - x_0, y - y_0))$

② $v(x,y) - v_0 = a_0(y - y_0) + b_0(x - x_0) + \mathrm{Im}(\omega(x - x_0, y - y_0))$

Notiamo che:

$$u(x,y) = u_0 + \langle (a_0, -b_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle + \mathrm{Re}(\omega(x - x_0, y - y_0))$$

Allora deduco che u ē differenziabile in (x_0, y_0) e

$$u_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x_0 + h, y_0) - u_0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a_0(h - b_0)(y_0 - y_0) + \mathrm{Re}(\omega(h))}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} a_0 \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}} + \frac{\overset{\to 0}{\mathrm{Re}(\omega(h, 0))}}{\underset{\to 0}{h}} = a_0$$

Invece $u_y(x_0, y_0) = -b_0$.

Analogamente per $v(x,y) = a_0(y - y_0) + b(x - x_0) + \mathrm{Im}(\omega(x - x_0, y - y_0)) + v_0$

ho che $v_x(x_0, y_0) = b_0$ e $v_x(x_0, y_0) = a_0$

Poiché ē supposto v differenziabile $u_x(x_0, y_0) = a_0 = v_y(x_0, y_0)$ mentre

$u_y(x_0, y_0) = -b_0 = -v_x(x_0, y_0)$

Dimostrazione: IMPLICAZIONE INVERSA

Supponiamo che u e v siano differenziabili in (x_0, y_0) e che valgano le condizioni di (C-R) viste in precedenza. Si ha che:

$f(z) - f(z_0) = (u(x,y) - u_0) + i\,(v(x,y) - v_0) =$

$= \langle \nabla u(x,y), (x-x_0, y-y_0) \rangle + i \langle \nabla v(x_0,y_0), (x-x_0, y-y_0) \rangle +$

$+ \omega_1(x-x_0, y-y_0) + i\,\omega_2(x-x_0, y-y_0) = *$

$\nabla u(x_0,y_0) = (u_x(x_0,y_0), u_y(x_0,y_0)) = (a_0, -b_0)$

$\nabla v(x_0,y_0) = (v_x(x_0,y_0), v_y(x_0,y_0)) = (b_0, a_0)$

$\Longrightarrow a_0 = u_x = v_y \quad$ e $\quad b_0 = v_x = -u_y$

$* \;= a_0(x-x_0) + i^2 b(y-y_0) + i\,(b_0(x-x_0) + a_0(y-y_0)) +$

$+ \omega(x-x_0, y-y_0) =$

$= a_0((x-x_0) + i(y-y_0)) + i b_0[((x-x_0) + i(y-y_0)) +$

$+ \omega(x-x_0, y-y_0) = a_0(z-z_0) + i b_0(z-z_0) + \omega(z-z_0) =$

$z = x+iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$ poiché $= (a_0 + ib_0)(z-z_0) + \omega(z-z_0)$ Per cui

$f(z) - f(z_0) = (a_0 + ib_0)(z-z_0) + \omega(z-z_0)$

poiché $z = h + z_0$

$\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \frac{(a_0+ib_0)h + \omega(h)}{h}$ PASSO A LIMITE

$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(a_0+ib_0)h + \omega(h)}{h} = a_0 + ib_0 + \lim_{h\to 0} \frac{\omega(h)}{h}$ ($\to 0$)

per cui ottengo che f è DERIVABILE

COROLLARIO:

Nelle ipotesi appena viste la derivata $f'(z) = a_0 + ib_0 = u_x(x_0,y_0) + i v_x(x_0,y_0) =$
$= v_y(x_0,y_0) - i\,u_y(x_0,y_0)$

ESERCIZIO:

Quali tra le seguenti funzioni sono derivabili?

① $f(z) = \overline{z^2}$ — NON derivabile ② $f(z) = z^2$ — derivabile

① $f(x+iy) = \overline{(x+iy)^2} = \overline{x^2 - y^2 + 2xy} = (x^2 - y^2) - i(2xy)$ (u, v)

$u_x = 2x \qquad v_x = -2y$

$u_y = -2y \qquad v_y = -2x$

$\begin{cases} u_x = -v_y \\ u_y = v_x \end{cases}$

poiché non vengono soddisfatte le condizioni di Cauchy-Riemann la funzione non è derivabile

② $f(x+iy) = (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$ (u, v)

$u_x = 2x \qquad v_x = -2y$

$u_y = 2x \qquad v_y = 2y$

$\begin{cases} u_x = u_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$

poiché vengono soddisfatte le condizioni di Cauchy-Riemann la funzione è derivabile

DEFINIZIONE: Diremo che una funzione $f: E = \mathrm{Dom}(f) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è OLOMORFA se f è derivabile in ogni punto di E

Es. $f(z) = e^{Re(z)}(\cos(\operatorname{Im} z) + i \sin(\operatorname{Im} z))$ } ESPONENZIALE COMPLESSA e^z

Essa è OLOMORFA su tutto il suo dominio. Infatti

$f(x+iy) = e^x \cos y + i \sin y \rightarrow u(x,y) = e^x \cos y \;;\; v(x,y) = e^x \sin y$

u e v sono differenziabili in ogni punto del dominio $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{C}$

Verifico le condizioni di Cauchy:

DA VERIFICARE

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\partial_y v = \partial_y (e^x \sin y) = e^x \cos y \\ &\partial_x u = \partial_x (e^x \cos y) = e^x \cos y \\ &\Longrightarrow \\ &\partial_y u = e^x(-\sin y) = -e^x \sin y \\ &\partial_x v = e^x \cdot \sin y \end{aligned}$$

Poiché le condizioni sono verificate per un qualsiasi punto, allora f è derivabile in ogni punto del dominio ($\mathbb{C}$) per cui ho che

$f'(z) = f'(x+iy) = u_x(x,y) + i v_x(x,y) = e^x \cos y + i e^x \sin y = f(z)$

per cui ottengo che $(e^z)' = e^z$

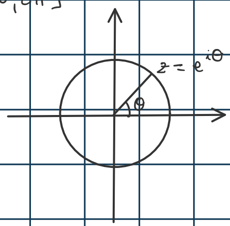
4. Formula di Gauss e teoremi vari

mercoledì 18 novembre 2020 11:34

FORMULA DI GAUSS

La formula $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ quando $z = x+iy$ è detta formula di Gauss. In particolare, se $z = iy$ allora $e^z = \cos y + i \sin y$.

Inoltre, $e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$



Posso anche definire

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \qquad \sin y = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}$$

per cui ho che sia $\cos z$ che $\sin z$ sono **FUNZIONI OLOMORFE** sui loro domini ($\mathbb{C}$)

PROPOSIZIONE: se f e g sono derivabili in z_0, allora per ogni coppia di numeri complessi a e b si ha che $af+bg$ è derivabile in z_0 e $(af+bg)' = af'+bg'$

Dim: Si procede come in $\mathbb{R}$ e si calcola

$$\lim_{h \to 0} \frac{af(z_0+h)+bf(z_0+h)-af(z_0)-bf(z_0)}{h} = \dots$$

$$\dots = (af+bg)' = af'+bg'$$

PROPOSIZIONE: Se f e g sono derivabili in $z_0 \in Dom(g) \cap Dom(f)$ avrò le seguenti proprietà:

1. $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$
2. $g(z_0) \neq 0$ $\quad \left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(f(z_0))^2}$
3. $(fg)'(z_0) = f'(g(z_0)) \cdot g'(z_0)$
4. Se f è invertibile, allora $(f^{-1})'(z_0) = \frac{1}{f'(w_0)}$ dove $z_0 = f(w_0)$

Per le proprietà sopra, posso scrivere che:

$$(\cos z)' = \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^{iz}\right)' + \frac{1}{2}\left(e^{-iz}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}e^{iz}\cdot(iz)' + \frac{1}{2}e^{-iz}(-iz)' = \frac{i}{2}e^{iz} - \frac{i}{2}e^{-iz} =$$

$$= \frac{i \cdot i}{2i}e^{iz} - \frac{i \cdot i\, e^{-iz}}{2i} = -\frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = -\sin z$$

dove $(\sin z)' = \cos z$, $z = x$ con $x \in \mathbb{R}$

$\sin x$ e $\cos x$ sono le funzioni trigonometriche che ben conosciamo

Altre funzioni che risultano essere ben estese in $\mathbb{C}$ sono seno e coseno iperbolico.
In particolare $\cosh z := \dfrac{e^{z}+e^{-z}}{2}$ e analogamente $\sinh z = \dfrac{e^{z}-e^{-z}}{2}$

ATTENZIONE! Non posso introdurre un maggiore o un maggiore uguale in $\mathbb{C}$ dove i numeri sono COPPIE
NON esiste una RELAZIONE D'ORDINE

Non tutte le funzioni non si possono estendere facilmente in $\mathbb{C}$ (ad esempio il logaritmo).
Se $z \neq 0$, l'equazione $w = \log z$ si traduce in $e^{w} = z$ pertanto il valore di w è difficile da trovare in quanto non vi è l'inversione univoca del logaritmo in $\mathbb{C}$. Si definisce quindi $w = \log \underbrace{|z|}_{>0} + i\,\mathrm{Arg}(z)$ dove $\mathrm{Arg}(z) = \{\arg(z) + 2k\pi\}$

NOTA! si può definire ① $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ ② $\sec z = \dfrac{1}{\cos z}$ ③ $\csc z = \dfrac{1}{\sin z}$ ④ $\cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$

COROLLARIO ALLE CONDIZIONI DI CAUCHY - RIEMANN

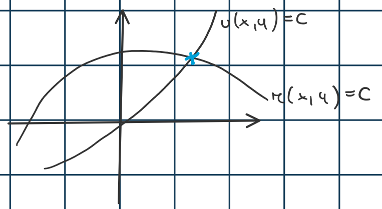
Sia E aperto connesso di $\mathbb{C}$ e sia $f: E \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Allora

① Dato $u \equiv u(x,y)$ allora v è determinato a meno di costanti
Viceversa, dato v allora u è determinato a meno di costanti

② Le curve di livello $\hat{I}_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, u(x,y) = c\}$ e $\Lambda_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, v(x,y) = c\}$ sono ortogonali nel senso che, quando si intersecano, lo fanno ad angolo retto.

1* Dunque, se f è olomorfa e conosco solo $\mathrm{Re}(f)$, la parte complessa è determinabile per cui $f(x,iy) = u(x,y) + iv(x,y)$

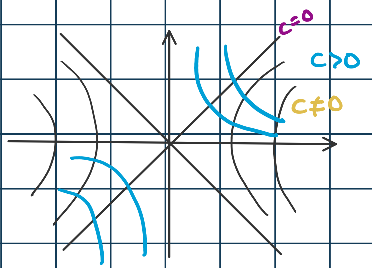
2* Quando considero due curve di livello tali



Es. $f(z) = z^2 \Rightarrow f(x,iy) = x^2 - y^2 + i(2xy)$ $u(x,y) = x^2 - y^2$ e $v(x,y) = 2xy$ per cui $x^2 - y^2 = c$

- Se $c = 0$ u e v degenerano negli assi di una iperbole equilatera
- Se $c \neq 0$ u e v individuano delle iperboli come quelle rappresentate sotto:

non credo sia corretto



Dim. ① Notiamo infatti che, data $u = u(x,y)$, poiché f è OLOMORFA, dalle equazioni di C.R. sappiamo che $\nabla v\,(v_x, v_y) = (-u_y, u_x)$ e poiché E è un aperto connesso, dai risultati sul gradiente di una funzione in più variabili, ne segue che u è determinata a meno di una costante perché il suo gradiente è nullo

(2) Sempre dalle equazioni di C.R., fissato il punto $x_0, y_0 \in \Gamma_c \cap \Delta_c$ si ha

$\nabla u(x_0,y_0) = (u_x(x_0,y_0), u_y(x_0,y_0)) = (-v_y(x_0,y_0), v_x(x_0,y_0)) \perp (v_x(x_0,y_0), v_y(x_0,y_0)) =$
$= \nabla v(x_0,y_0)$ per cui $\nabla u \perp \nabla v$

Inoltre, il gradiente ∇u è ortogonale alla curva di livello Γ_c e il gradiente ∇v è ortogonale a Δ_c

Dunque

$$\left.\begin{array}{l}\nabla u \perp \Gamma_c \\ \qquad\qquad e \quad \nabla u \perp \nabla v \\ \nabla v \perp \Delta_c\end{array}\right\} \Rightarrow \Gamma_c \perp \Delta_c$$

Infatti se $a \perp b$ e $b \perp c$ allora $a \perp c$

DEFINIZIONE: Una curva a valori complessi è una applicazione $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$. Essa si può rappresentare come $\gamma(t) = x(t) + i y(t)$

Essa si dice chiusa o semplice se la curva $\tilde{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$ lo è in $\mathbb{R}^2$

Analogamente, si dice regolare o regolare a tratti se lo è γ e cioè se $x(t)$ e $y(t)$ sono derivabili e $(x'(t), y'(t)) \neq (0,0)$ $\forall t \in (a,b)$ ($\forall t \in (a,b)$ tranne che per un numero finito di punti)

CURVE

1) Il segmento congiungente due numeri complessi $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ è la curva $t \in [0,1] \to t z_1 + (1-t) z_0 =$
$= z_0 + t(z_1 - z_0)$ e viene indicata con $[z_0, z_1]$

2) La circonferenza di centro $z_0 \in \mathbb{C}$ e di raggio $r > 0$ è data dalla legge $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ $\gamma(t) = z_0 + r e^{it} =$
$= z_0 + r[\cos t + i \sin t] = (x_0 + r\cos t + i(y_0 + r \sin t))$

DEFINIZIONE: Sia data una funzione $f : E \subset \mathbb{C}$ continua.

Sia data una curva $\gamma : [a,b] \to E$ regolare a tratti

Definiamo l'integrale curvilineo di f su γ come il numero complesso dato come segue

$$\int_\gamma f := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_a^b Re\left(f(\gamma(t))\gamma'(t)\right)dt + i\int_a^b Im\left(f(\gamma(t))\gamma'(t)\right)dt$$

Esempio fondamentale: Dato un numero intero m, definiamo $f(z) = z^m$ (Quanto scriverò potrà essere ripetuto anche per $f(z) = z^{im}$) e poniamo come dominio $E = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Consideriamo una parametrizzazione della circonferenza unitaria $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ $\gamma(t) = e^{it}$

Calcoliamo $\int_\gamma f$:

$$\int_\gamma f = \int_{a=0}^{b=2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} z^m \Big|_{z=e^{it}} (e^{it})'\,dt = \int_0^{2\pi} i e^{imt} \cdot e^{it}\,dt =$$

$$= i\int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t}\,dt = \begin{cases} m=-1 \Rightarrow i\int_0^{2\pi} 1\,dt \\ m \neq -1 \Rightarrow i \dfrac{1}{i(m+1)} e^{i(m+1)t}\Big|_0^{2\pi} \end{cases} = \begin{cases} 2\pi i & m=-1 \\ \dfrac{1}{m+1}\left[e^{2(m+1)\pi i} - 1\right] & m \neq -1 \end{cases} =$$

$\int e^{\alpha t} = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t}$

$$= \begin{cases} 2\pi i & m=-1 \\ 0 & m \neq -1 \end{cases} = \int_\gamma f = \begin{cases} 2\pi i & \text{se } m=-1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$e^{2(m+1)\pi i} = \cos(2(m+1)\pi) + i\sin(2(m+1)\pi)$

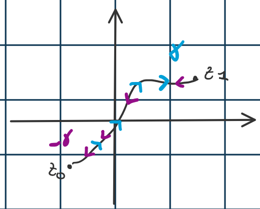
$e^{it} = \cos t + i \sin t$

Dunque ho calcolato $\int_C z^m$ con C che indica la CIRCONFERENZA

TEOREMA! Ricordiamo che se γ, γ_1 e γ_2 sono curve a valori in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{C}$, valgono le seguenti relazioni:

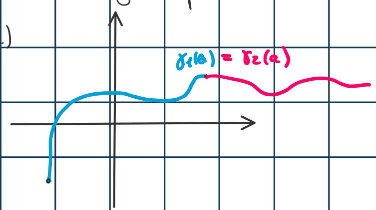
Se $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ $\gamma(a) = z_0$ e $\gamma(b) = z_1$, la curva $-\gamma$ è la curva avente lo stesso sostegno di γ ma tale che $\gamma(a) = z_1$ e $\gamma(b) = z_0$

IMMAGINE =



Se $a=-1$ e $b=1$ allora $-\gamma(t) = \gamma(-t)$ viceversa bisogna operare una traslazione del dominio

Date γ_1 e $\gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{C}$ tali che $\gamma_1(b) = \gamma_2(a)$



La curva $\gamma_1 \cup \gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{C}$ è la curva che si ottiene percorrendo la curva γ_1 e poi γ_2

Si può definire come SOMMA TOPOLOGICA e scrivere anche come $\gamma_1 \cup \gamma_2 = \gamma_1 \amalg \gamma_2$

TEOREMA! Siano $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to E \subset \mathbb{C}$ curve regolari a tratti e siano $f, f_1, f_2 : E \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Allora
1. $\int_{-\gamma} f = -\int_\gamma f$
2. $\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$
3. $\int_\gamma a f_1 + b f_2 = a \int_\gamma f_1 + b \int_\gamma f_2$
4. $\left| \int_\gamma f \right| \leq \int_\gamma |f|$

   NOTA! Il secondo integrale è un integrale curvilineo reale
5. Se φ è una funzione regolare e biunivoca. Allora $\int_{\varphi \circ \gamma_1} f = \int_{\gamma_1} (f \circ \gamma) \varphi'$

Es.: 1) $\int_\gamma 5z^4 - z^3 + z$ su $\gamma \equiv [0, 1+i]$ $\quad \gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = t(1+i)$

Se $f(z) = 5z^4 - z^3 + z \Rightarrow Dom(f) = \mathbb{C}$

Per definizione:

$$\int_\gamma 5z^4 - z^3 + z = \int_0^1 f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 5\,(t(1+i))^4 - (t\,(1+i)^3) + z)\,(1+i)\,dt =$$

$$= 5\,(1+i)^5 \int_0^1 t^4\,dt - (1+i)^4 \int_0^1 t^3\,dt + 2\,(i+1)\int_0^1 1\,dt =$$

$$= (1+i)^5 - (1+i)^4 \,\frac{t^4}{4}\Big|_0^1 + 2(1+i) = (1+i)^5 - \frac{(1+i)^4}{4} + 2(1+i)$$

2) $$\int_{C_2} \bar{z} + z^2\bar{z} = \int_0^{2\pi} \left(\overline{re^{it}} + (re^{it})^2\,\overline{re^{it}}\right) i r e^{it}\,dt$$

C_2 = "Circonferenza in $z_0 = 0$ e raggio r"

$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ $\quad \gamma(t) = r\,e^{it}$

$\overline{e^{it}} = \overline{(\cos t + i\sin t)} = \cos t - i\sin t = \cos(-t) +$

$+ \, i\sin(-t) = e^{-it}$

$$= \int_0^{2\pi} \left(r\,e^{-it} + r^3\,e^{it}\cdot e^{-it}\right) i r e^{it}\,dt =$$

$$= ir^2 \int_0^{2\pi} e^{-it}e^{it}\,dt + ir^4 \int_0^{2\pi} e^{it}\,e^{-it}\,e^{it}\,dt =$$

$$= ir^2 \int_0^{2\pi} 1\,dt + ir^4 \int_0^{2\pi} e^{it}\,dt =$$

$$= ir^2\,2\pi + ir^4\,\frac{1}{i}\,e^{it}\Big|_0^{2\pi} = 2\pi i r^2 + r^4\,(\overbrace{e^{2\pi i} - 1}^{=0}) = 2\pi i r^2$$

3) $$\int_\gamma z(z+4) \qquad \gamma(t) = 2e^{-it} \quad \text{con } t\in[0,\pi] \quad \gamma : [0,\pi] \to \mathbb{C}$$

$$\int_\gamma z^2 + 4z = \int_0^\pi \left[(2e^{-it})^2 + 4\,(2e^{-it})\right]\cdot(-2i)\,e^{-it}\,dt =$$

$$= -4i \int_0^\pi e^{-2it}\cdot e^{-it} - 16i \int_0^\pi e^{-it}\cdot e^{-it}\,dt =$$

$$= -4i \int_0^\pi e^{-3it} - 16i \int_0^\pi e^{-2it}\,dt = \frac{-4i}{-3i}\,e^{-3it}\Big|_0^\pi \;\frac{-16i}{-2i}\,e^{-2it}\Big|_0^\pi =$$

$$= \frac{4}{3}\left[e^{-3\pi} - 1\right] + 8\left[e^{-2\pi} - 1\right] = \frac{4}{3}\left[-2\right] = -\frac{8}{3}$$

DEFINIZIONE! Sia $f : E \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Diciamo che $F : E \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è una primitiva di f se ovviamente $F'(z) = f(z)\ \forall z \in E$

TEOREMA! Sia f una funzione continua con primitiva $F : E \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e sia $\gamma : [a,b] \to E$

TEOREMA: Sia f una funzione continua con primitiva $F: E \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e sia $\gamma: [a,b] \to E$ una curva regolare a tratti. Allora

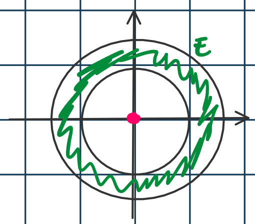
$$\int_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Dim: $\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_a^b (F(\gamma(t)))'\,dt =$

$= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$

COROLLARIO: Se γ è un circuito (o detta anche curva chiusa). Sia $\gamma(a) = \gamma(b)$, si ha $\int_\gamma f = 0$ ogni qualvolta f ammette una primitiva F

Es. $f(z) = \frac{1}{z}$ non ha una primitiva su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, dunque su NESSUN ANELLO del tipo $\{r < |z| < R\} = E$



$f: E \to \mathbb{C}$ è continua

$\nexists\, F$ tale che $F' = f$

Consideriamo il circuito $\gamma(t) = R_0 e^{it}$ $t \in [0, 2\pi]$ e $r < R_0 < R$.
Allora γ è un circuito tutto contenuto in E cioè $\gamma: [0,2\pi] \to E$
Dunque $\oint_\gamma f = \int_0^{2\pi} \frac{i R_0}{R_0 e^{it}} \cdot e^{it} = i \int_0^{2\pi} dt = i\, 2\pi \neq 0$

e perciò $\frac{1}{z}$ non ammette primitiva su $E = \{z : r < |z| < R\}$

Es. $n \neq -1$, sia $f(z) = z^n$ definito su $E = \{z \in \mathbb{C} \,/\, r < |z| < R\}$ allora z^n ammette una primitiva $F(x) = \frac{1}{n+1} z^{n+1}$. Infatti abbiamo già visto che $F'(z) = \frac{1}{n+1}((n+1)z^n) = f(z)$

DEFINIZIONE: Sia $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i r(x,y)$. Supponiamo che f abbia una primitiva $F(x+iy) = U(x,y) + i R(x,y)$. Per definizione F è derivabile e $F'(x+iy) = U_x(x,y) + i R_x(x,y)$

$$\begin{cases} U_x = R_y \\ U_y = -R_x \end{cases}$$ CONDIZIONI DI C-R

Dunque $F' = f \Rightarrow \begin{cases} u = U_x = R_y \\ r = R_x = -U_y \end{cases}$ $\quad (U_x, U_y) = (u, -r)$ $\quad (R_x, R_y) = (r, u)$

$\nabla U = (u, -r) \qquad \nabla R = (r, u)$

In altre parole, f ammette una primitiva quando le funzioni

$\nabla U = (u, -r)$ $\qquad \nabla R = (r, u)$

In altre parole, f ammette una primitiva quando le funzioni $(u(x,y), -r(x,y))$ e $(r(x,y), u(x,y))$ ammettono potenziale ($\exists\, U : E \to \mathbb{R}$ tale che $\nabla U = (\_,\_)$)

DEFINIZIONE: $f : E \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + ir$ definiamo i campi $(u(x,y), -r(x,y))$ e $(r(x,y), u(x,y))$ come i **CAMPI VETTORIALI ASSOCIATI** ad f o, in altre parole, definire le forme differenziali $\omega_1 = u\,dx - r\,dy$ e $\omega_2 = r\,dx + u\,dy$, le **FORME DIFFERENZIALI ASSOCIATE** ad f

TEOREMA: Sia $f : E \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, E aperto connesso ed f continua.
f ammette primitiva se e solo se le forme differenziali associate / i campi vettoriali associati sono **ESATTE**

Dim: Ponendo $dU = u\,dx - r\,dy$ e $dR = r\,dx + u\,dy$, ne segue che $F = U + iR$ è un potenziale di f.

TEOREMA: Sia E semplicemente connesso e $f : E \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ allora f ammette primitiva se e solo se le sue forme differenziali associate sono CHIUSE. Basta ricordare infatti che

TEOREMA: E semplicemente connesso e ω chiusa $\Rightarrow$ ω è esatta

Ricordiamo ulteriormente che una forma differenziale si dice chiusa se $\omega = f_1(x,y) + f_2(x,y)dy$ e tale che esistono continue $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)$, $\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)$ e

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)$$

TEOREMA: Una funzione $f : E \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è **OLOMORFA** se e solo se le sue forme differenziali associate sono chiuse o, in alternativa, se campi vettoriali associati sono irrotazionali

Dim: $\omega_1 = u\,dx - r\,dy$ $\qquad\qquad \omega_2 = r\,dx + u\,dy$

$u_x = -r_y \Rightarrow 1^a$ condizione di C-R $\qquad r_x = u_y \Rightarrow 2^a$ condizione di C-R

TEOREMA: Una funzione $F : E \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con E semplicemente connesso e aperto ammette primitiva se e solo se forme differenziali associate sono esatte e cioè se e solo se essa è **OLOMORFA**.

Dim: f ammette primitiva $\Leftrightarrow$ le forme differenziali sono ESATTE

$\Updownarrow$

f è olomorfa $\Leftrightarrow$ le forme differenziali sono chiuse

Notiamo inoltre che se γ è un cammino $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ con $\gamma : [a,b] \to E$ $\quad f : E \to \mathbb{C}$ $\quad$ e $\quad f = u + ir$

Notiamo inoltre che se γ è un cammino $\gamma(t) = x(t) + i y(t)$
con $\gamma : [a,b] \to E$ $\quad f : E \to \mathbb{C}$ e $f = u + i v$

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt = \int_a^b \{ u(x(t), y(t)) + i v(x(t), y(t)) \} \cdot$$

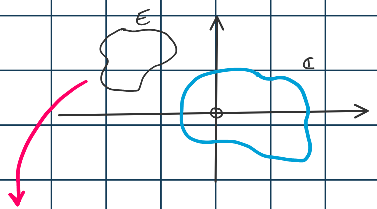
$$\cdot (\dot{x}(t) + i \dot{y}(t))\, dt = \int_a^b u(x(t), y(t))\, \dot{x}(t) - v(x(t), y(t))\, \dot{y}(t) +$$

$$+ i \int_a^b v(x(t), y(t))\, \dot{x}(t) + u(x(t), y(t))\, \dot{y}(t)\, dt =$$

$$= \int_a^b u\, dx - v\, dy + i \int_\gamma v\, dx + u\, dy = \int_\gamma \langle (u, -v), T \rangle +$$

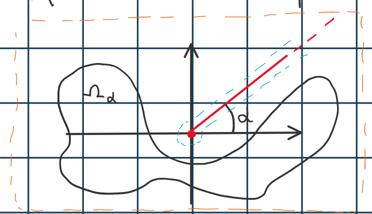
$$+ i \int_\gamma \langle (v, u), T \rangle = \omega((u, -v), \gamma) + i\, \omega((v, u), \gamma)$$

Es.: Abbiamo osservato che $f(z) = \frac{1}{z}$ non ammette primitiva su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Tuttavia, $f(z)$ è una funzione OLOMORFA su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (essa è derivabile in ogni punto che non sia $(0,0)$). Notiamo che $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ non è un aperto semplicemente connesso e pertanto non siamo nelle ipotesi di un teorema sopra per cui può essere olomorfa senza avere primitiva



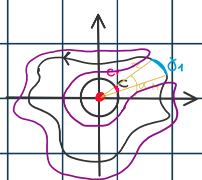
f ristretta ad E $(f_{/E})$ possiede una primitiva. In particolare se considero gli aperti semplicemente connessi che chiamo

$$\Omega_\alpha = \{ \rho e^{i\theta} \mid \rho > 0 \text{ e } \alpha < \theta < \alpha + 2\pi \}$$



Su Ω_α, $f(z) = \frac{1}{z}$ deve ed ha una **PRIMITIVA** ed essa è data da
$F(z) = F(\rho e^{i\theta}) = \ln \rho + i\theta + \text{cost}$ $\quad$ con $\rho > 0$ $\quad \theta \in (\alpha, \alpha + 2\pi)$
$F : \Omega_\alpha \to \mathbb{C}$

Consideriamo una qualsiasi curva chiusa (un circuito) $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ che circondi l'origine.



Γ è chiusa in Ω_α
Dunque $\int_\Gamma \frac{1}{z} = 0$

$\gamma_2 = \gamma - \gamma_1$

$\int_\gamma \frac{1}{z} = ?$ Per calcolarlo, usiamo una circonferenza C intorno all'origine e, a meno di riscalare, possiamo pensare C come circonferenza unitaria. Stabiliamo la direzione di γ (in questo caso senso antiorario). Mi muovo attraverso dei raggi che formano angoli α. Definisco due raggi e due pezzi di curve. Percorro le curve secondo il tragitto viola Γ.

Consideriamo

$$0 = \int_\Gamma \frac{1}{z} = \int_{\gamma-\gamma_1\cup R_1\cup\underset{\text{antiorario}}{(-C_1}-\gamma_2)\cup R_2} \frac{1}{z} = \int_{\gamma-\gamma_1}\frac{1}{z} + \int_{R_1}\frac{1}{z} - \int_{C_1-\gamma_2}\frac{1}{z} +$$

$$+\int_{R_2}\frac{1}{z} = \int_\gamma \frac{1}{z} - \int_{\gamma_1}\frac{1}{z} + \int_{R_1}\frac{1}{z} - \left(\int_{C_1}\frac{1}{z} - \int_{\gamma_2}\frac{1}{z}\right) + \int_{R_2}\frac{1}{z} =$$

$$= \int_\gamma\frac{1}{z} - \int_{C_1}\frac{1}{z} + \underbrace{\int_{\gamma_1\cup R_1\cup\gamma_2\cup R_2}\frac{1}{z}}_{=0} = \int_\gamma \frac{1}{z} - \int_{C_1}\frac{1}{z} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{1}{z} = \int_{C_1}\frac{1}{z} = 2\pi i$$

PROPOSIZIONE: Se $\gamma:[a,b] \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ è un circuito che circonda l'origine e percorso in senso antiorario allora

$$\int_\gamma \frac{1}{z} = 2\pi i$$

TEOREMA - FORMULA DI CAUCHY

Sia f olomorfa su E semplicemente connesso e tale che $B_R(z_0)\subset E$ tale che

Allora $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R(z_0)} \frac{f(w)}{w-z_0}\,dw$

$$-2\pi i f(z_0) + \int_{C_R(z_0)} \frac{f(w)}{w-z_0}\,dw = -\left(\int_{C_R(0)}\frac{1}{w}\,dw\right) f(z_0) + \int_{C_R(z_0)}\frac{f(w)}{z-z_0} =$$

$$\underset{\substack{w \rightsquigarrow w+z_0\\ \text{(Traslazione)}}}{=} -\left(\int_{C_R(z_0)}\frac{1}{w-z_0}\,dw\right)f(z_0) + \int_{C_R(z_0)}\frac{f(w)}{w-z_0} =$$

w non dipendente dall'ampiezza del circuito

$$= \int_{C_R(z_0)} \frac{f(w)-f(z_0)}{w-z_0}\,dw = \int_{C_\varepsilon(z_0)}\frac{f(w)-f(z_0)}{w-z_0}\,dw$$

esiste poiché la funzione è olomorfa

Ho che $w\in C_\varepsilon(z_0)$ con $|w-z_0|=\varepsilon\to 0$ perciò $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(w)-f(z_0)}{w-z_0} = f'(z_0) \sim$

$$\sim \int_{C_\varepsilon(z_0)} f'(z_0)\,dw = f'(z_0)\underbrace{\int_{C_\varepsilon(z_0)}dw}_{\text{lunghezza della circonferenza}} = f'(z_0)\cdot 2\pi\varepsilon$$

Dunque si ottiene $-2\pi i f(z_0) + \int_{C_R}\frac{f(w)}{w-z_0}\,dw = f'(z_0)\,2\pi\varepsilon \quad \forall\varepsilon>0 \quad \varepsilon<R$

ma poiché va bene in qualsiasi ε, pongo $\varepsilon\to 0$ perciò ma poiché va bene in qualsiasi ε, pongo $\varepsilon \to 0$ perciò

$$-2\pi i \, f(z_0) + \int_{C_R} \frac{f(w)}{w - w_0} \, dw = 0 \implies f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(w)}{w - w_0} \, dw$$

5. Esercitazione 1

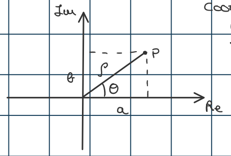
venerdì 27 novembre 2020 22:35

TEORIA:

NUMERI COMPLESSI:

$z = a + b \cdot i$

$z = x + iy$



Coordinate polari: $\begin{cases} a = x = \rho\cos\theta \\ b = y = \rho\sin\theta \end{cases}$

$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}$ dove $i = \sqrt{-1}$ e $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

NOTA: bisogna ricordarsi della periodicità per cui:

$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho[\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)]$ con $k \in \mathbb{Z}$

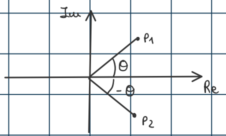
e perciò $z = \rho e^{i\theta} = \rho e^{i(\theta + 2k\pi)}$

Si ha che $\theta = \arg(z) \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ e $\rho = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

Dunque: nel piano complesso $(a, b) \Rightarrow (\rho, \theta)$ oppure $(\rho, \theta + 2k\pi)$

CONIUGATO COMPLESSO: $\bar{z} = a - b \cdot i$

Graficamente: $\bar{z} = \rho(\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta) = \rho(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$



RECIPROCO: $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{1}{a+ib} \cdot \frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a-ib}{a^2 - b^2 i^2} =$ con $i^2 = -1$

$$= \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$$

Dunque: $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a}{a^2+b^2}$ $\quad \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{b}{a^2+b^2}$

perciò $\left|\frac{1}{z}\right| = \sqrt{\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{b}{a^2+b^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{(a^2+b^2)^2}}$

Inoltre $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{|z|}$ e

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{-b}{a^2+b^2}}{\frac{a}{a^2+b^2}}\right) = \arctan\left(-\frac{b}{a}\right) = -\arctan\left(\frac{b}{a}\right) = -\arctan(z)$$

OPERAZIONI:

Dati

① $z_1 = a_1 + ib_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1) = \rho_1 e^{i\theta_1}$

② $z_2 = a_2 + ib_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2) = \rho_2 e^{i\theta_2}$

− Moltiplicazione

① $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot e^{i\theta_1} \cdot \rho_2 \cdot e^{i\theta_2} = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot e^{i(\theta_1+\theta_2)} =$
$= \rho_1 \cdot \rho_2 [\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

② $z_1 \cdot z_2 = (a+ib)(c+id) = ac + ibc + iad + i^2 bd =$
$= (ac - bd) + i(bc + ad)$

− Potenza

$z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n \cdot \theta)]$

− Radice

$z^n = w$ con $\begin{cases} z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \\ w = r(\cos\phi + i\sin\phi) \end{cases}$ * Manca la periodicità

$\rho^n(\cos(\theta n) + i\sin(\theta n)) = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ *

$r = \rho^n \Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r}$

$w = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ * manca la periodicità

$\rho^n(\cos(\theta n) + i\sin(\theta n)) = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ *

$r = \rho^n \Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r}$

$n\theta = \phi + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$

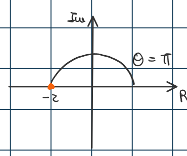
dunque $z = w^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r} \cdot \left[\cos\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\phi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$ con $k \in \mathbb{Z}$

ESEMPI:

1) $z^2+2=0 \Rightarrow z^2=-2$ dove posso scrivere $z^2=-2=w$

Scrivo $w=-2=a+ib$ con $a=-2$ $b=0$

Graficamente:



Dunque $w=-2=\rho e^{i\theta}=2e^{i(\pi+2k\pi)}$ con $\rho=\sqrt{a^2+b^2}$

Perciò $z=w^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\left[\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}_{\to 0}+i\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}_{1 \text{ con k pari},\ -1 \text{ con k dispari}}\right]$

Dunque $z^2+2=0 \Rightarrow z=\pm\sqrt{2}\,i$

2) $z^4+1=0$ che posso scrivere come $z^4=-1=\rho e^{i\theta}= e^{i(\pi+2k\pi)}$

Dunque $z_k=\sqrt[4]{1}\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{4}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)$

$z^4=-1$ $a=-1$ $b=0$

$\theta=\pi+2k\pi$ $\rho=1$

$z^4=e^{i(\pi+2k\pi)} \Rightarrow z=e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)}$

Per i vari valori di k ottengo che:

1) $k=0$ $z_0=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$
2) $k=1$ $z_1=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$
3) $k=2$ $z_2=\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{5}{4}\pi\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$
4) $k=3$ $z_3=\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$
5) $k=4$ $z_4=\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right)=z_0$

... $z_5=z_1$ e così via per la periodicità

3) $z^4-1=0 \Rightarrow z^4=1=e^{i(2k\pi)}$ con $k\in\mathbb{Z}$

$z^4=1$ $e^{i(2\pi+2k\pi}$

$\rho=1$ $\theta=\arctan\frac{0}{1}=0$

$2k\pi$

$z_k=e^{i\left(\frac{2k\pi}{4}\right)}=e^{ik\frac{\pi}{2}}=\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$

Per i vari k ottengo:

1) $k=0$ $z_0=\cos(0)+i\sin(0)=1$
2) $k=1$ $z_1=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=i$
3) $k=2$ $z_2=\cos(\pi)+i\sin(\pi)=-1$
4) $k=3$ $z_3=\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)+i\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)=-i$
5) $k=4$ $z_4=\cos(2\pi)+i\sin(2\pi)=z_0$

... $z_5=z_1$ e così via per la periodicità

NOTA! I punti distinti individuati sono pari al grado della equazione

$z^4-1=0$ può anche essere scritta come $(z+1)(z-1)(z^2+1)=0$

3) $|z-3i|=2$ dove $z=x+iy$

Ho che $z-3i=x+iy-3i=x+i(y-3)$ dunque

$Re(z-3i)=x$ e $Im(z-3i)=y-3$

Poiché $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ allora ho che

$|z-3i|=\sqrt{x^2+(y-3)^2}=2$ dunque è una circonferenza

$\Downarrow$

$x^2+(y-3)^2=4$ di centro $C=(0,3)$ e $r=2$

4) 1 Trovare z tale che $Re\left(\frac{z+i}{z-i}\right)=0$ dove $z\neq i$ per dominio

4.1 Trovare z tale che $Re\left(\frac{z+i}{z-i}\right)=0$ dove $\underbrace{z\neq i}_{z=i \text{ corrisponde a } P(0,1)}$ per Dominio

Sostituisco $z=x+iy$ per cui ottengo

$$\frac{x+iy+i}{x+iy-i}=\frac{(x+(y+1)i)}{x+(y-1)i}\cdot\frac{x-(y-1)i}{x-(y-1)i}=\frac{[x+(y+1)i][x+(1-y)i]}{x^2+(y-1)^2}=$$

$$=\frac{[x^2+(y^2-1)]+i[x(1-y)+x(y+1)]}{x^2+(y-1)^2}=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2}+i\,\frac{x(1-y)+x(y+1)}{x^2+(y-1)^2}$$

Poiché $Re\left(\frac{z+i}{z-i}\right)=0$ allora $\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2}=0 \Rightarrow \underbrace{x^2+y^2=1}_{\text{circonferenza di raggio unitario e raggio } r=1} \wedge \underbrace{P\neq(0,1)}_{\text{per dominio}}$

4.2 $Im\left(\frac{z+i}{z-i}\right)=0 \Rightarrow \frac{x(1-y)+x(y+1)}{x^2+(y-1)^2}=0 \Rightarrow \frac{x(1-\cancel{y}+1+\cancel{y})}{x^2+(y-1)^2}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0 \wedge \underbrace{P\neq(0,1)}_{\text{per dominio}}$

TEORIA:

FUNZIONI A VARIABILE COMPLESSA

Data $z=x+iy$, si ha che $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ tale che $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ (che si può scrivere come $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$)

Dunque f si dirà
- MONODROMA (univoca) $\longrightarrow$ ad ogni valore di z (considerato il periodo) ha lo stesso valore per qualsiasi giro
- POLIDROMA (plurivoca) $\longrightarrow$ ad ogni valore di z (considerato il periodo) NON ha lo stesso valore quando si compiono dei giri

ESEMPI

① $f(z)=z^n=[\rho e^{i(\theta+2k\pi)}]^n=\rho^n\cdot e^{in(\theta+2k\pi)}=\rho^n(\cos(n\theta+2nk\pi)+i\sin(n\theta+2nk\pi))=$
$=\rho^n(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))\quad\forall k\in\mathbb{Z}$

Dunque, qualsiasi sia il giro, la funzione è MONODROMA

② $f(z)=e^z=e^{a+i\theta}=e^a\cdot e^{i\theta}=e^a(\cos\theta+i\sin\theta)=e^{\rho\cdot e^{i(\theta+2k\pi)}}=$
$=e^{\rho\cos(\theta+2k\pi)+i\rho\sin(\theta+2k\pi)}=e^{\rho\cos(\theta+2k\pi)}\cdot e^{i\rho\sin(\theta+2k\pi)}=e^A\cdot e^{iB}\quad\forall k\in\mathbb{Z}$

> In generale, se dopo un numero k di giri completi (2π), tornando su un particolare z si ha sempre la stessa immagine $f(z)$ ~~quando la dip. dal valore k~~

Sono monodrome anche

- $f(z)=\cos z \Rightarrow \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

- $f(z)=\sin z \Rightarrow \sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

È polidroma invece la funzione:

$f(z)=\ln z=\ln\rho e^{i(\theta+2k\pi)}=\ln\rho+\ln e^{i(\theta+2k\pi)}=\ln\rho+i\theta+i2k\pi$

poiché $f(z)$ cambia al variare del numero di giri k. Tuttavia, si può rendere monodroma fissando un valore di k

Rendo monodroma $f(z)=\ln z$:

$f:(\rho,\theta)\to\ln\rho+i\theta\Rightarrow(\ln\rho,\theta)$

$Dom(f):\ \rho>0\ \wedge\ \theta\in[0,2\pi)$ per escludere 2π

Anche $f(z)=\sqrt[n]{z}=z^{1/n}=e^{\ln z^{1/n}}=e^{\frac{1}{n}\ln z}$ è POLIDROMA poiché lo è $\ln z$

CASI CHE AFFRONTEREMO: $z=x+iy\to f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

Anche $f(z) = \sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}} = e^{\ldots} = e^{\ldots}$ è POLIDROMA poiché lo è $\ln z$

CASI CHE AFFRONTEREMO: $z = x+iy \to f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

Es. $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 + (iy)^2 + 2x \cdot iy = x^2 - y^2 + i \cdot 2xy$ dove

$u(x,y) = x^2 - y^2$ e $v(x,y) = 2xy$

LIMITI E CONTINUITÀ DI UNA FUNZIONE MONODROMA

Si ha $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (cioè $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) per cui valgono le proprietà dei campi vettoriali tipo limiti, integrabilità, ecc.

Perciò
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) + i\,v(x,y) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} (u(x,y), v(x,y)) = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) \\ \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) \end{cases}$$

DERIVATA DI UNA FUNZIONE MONODROMA

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \overset{\Delta z = \Delta x + i\Delta y}{=} \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{f(x_0 + iy_0 + \Delta x + i\Delta y) - f(x_0 + iy_0)}{\Delta x + i\Delta y}$$

Si ha che f è $\left\{\begin{matrix} \text{ANALITICA} \\ \text{OLOMORFA} \\ \text{REGOLARE} \end{matrix}\right\}$ se $f'(z)$ esiste, è continua ed indipendente dalla direzione di avvicinamento

$f = u(x,y) + iv(x,y)$ è ANALITICA $\iff$ $u(x,y)$ e $v(x,y) \in C^1$ e soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann
$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = \dfrac{dv}{dy} \\[2mm] \dfrac{du}{dy} = -\dfrac{dv}{dx} \end{cases}$$

ESEMPIO:

1. $f(z) = z^3 = (x+iy)^3$ che, sapendo $(a+b)^3 = a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3$, diventa

$= x^3 + 3i^2y^2x + 3x^2iy + 3i^3y^3 = (x^3 - 3xy^2) + i\,(3x^2y - y^3)$

Calcolo le derivate parziali:

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 - 3y^2 \qquad \frac{dv}{dy} = 3x^2 - 3y^2 \qquad \frac{du}{dy} = -6xy \qquad \frac{dv}{dx} = 6xy$$

Ho che le condizioni di C-R sono verificate dunque z^3 è ANALITICA.

Per calcolare la derivata rispetto a z si può calcolare in due modi:

1. Faccio derivata rispetto a z per poi sostituire $z = x+iy$. Dunque:

$f'(z) = 3z^2 = 3(x+iy)^2 = 3(x^2 - y^2 + 2ixy) = 3x^2 - 3y^2 + i\,6xy$

2. Se esiste il limite $\dfrac{df}{dz} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \ldots = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+iy+\Delta x) - f(x+iy)}{\Delta x} =$

Il valore del limite, fissato y, è dato calcolando il limite della derivata rispetto a x

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) + i\,v(x+\Delta x, y) - u(x,y) - iv(x,y)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x} = \frac{du}{dx} + i\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy} - i\frac{du}{dy}$$

$$= 3x^2 - 3y^2 + i6xy = 3x^2 - 3y^2 - i(-6xy) = 3x^2 - 3y^2 + 6ixy$$

2. $f(z) = \dfrac{z}{z+i} = \dfrac{x+iy}{x+i(y+1)} = \dfrac{(x+iy)(x - i(y+1))}{x^2 + (y+1)^2} = \dfrac{(x+iy)(x - iy - i)}{x^2 + (y+1)^2} = \dfrac{x^2 + iyx - iyx + y^2 - ix + y}{x^2 + (y+1)^2} =$

D: $z \neq -i \Rightarrow x+iy \neq -i \Rightarrow$
$\Rightarrow x \neq 0 \land y \neq -1$

$= \dfrac{x^2 + y^2 - ix}{x^2 + (y+1)^2}$ Dunque $u(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2 + y}{x^2 + (y+1)^2}$ $\quad v(x,y) = -\dfrac{x}{x^2 + (y+1)^2}$

Derivate parziali:

1) $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{dv}{dy} = \dfrac{2xy + 2x}{[x^2 + (y+1)^2]^2}$ $\qquad$ 2) $\dfrac{du}{dy} = -\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{-x^2 + 2y + y^2 + 1}{[x^2 + (y+1)^2]^2}$

Dunque $f'(z) = \dfrac{z + i - z}{(z+i)^2} = \dfrac{i}{(z+1)^2} = \dfrac{i}{[x + i(y+1)]^2} = \dfrac{i}{x^2 + i^2(y+1)^2 + 2i(y+1)} =$ da completare

ESEMPI DI FUNZIONI OLOMORFE

z^n $\forall z \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ detta INTERA (come tutti i polinomi)

e^z $\forall z \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ detta intera (come tutte le esponenziali)

$\cos z$ ''

$\operatorname{sen} z$ ''

$\ln z$ (se resa monodroma)

$z^{1/n}$ (se resa monodroma)

$1/z$ (se $x \neq 0 \wedge y \neq 0$)

Da fare! $f(z) = \bar{z} = x - iy$ $\quad f(z) = \overline{z^2 + 5z}$

$f(z) = \operatorname{Im}(z) = y$ $\quad f(z) = e^{\bar{z}^2}$

$f(z) = z^3 + i\bar{z}$

PROPRIETÁ DELLE DER. PARZIALI:

Ipotizzo che valga C-R

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = \dfrac{dv}{dy} \\ \dfrac{du}{dy} = -\dfrac{dv}{dx} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} = \dfrac{d^2v}{dydx} \\ \dfrac{d^2}{dy^2} = -\dfrac{d^2v}{dydx} \end{cases} \Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{d^2u}{dy^2} \Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0$$

Dunque $u(x,y)$ è ARMONICA

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = \dfrac{dv}{dy} \\ \dfrac{du}{dy} = -\dfrac{dv}{dx} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dxdy} = \dfrac{d^2v}{dy^2} \\ \dfrac{d^2u}{dxdy} = -\dfrac{d^2v}{dx^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} = 0$$

Dunque $v(x,y)$ è ARMONICA

CONCLUSIONE: u e v devono essere armoniche dunque si deve annullare il loro laplaciano

Dunque u e v sono dette ARMONICHE CONIUGATE.

Ottengo dunque che $dv = \dfrac{dv}{dx}dx + \dfrac{dv}{dy}dy = -\dfrac{du}{dy}dx + \dfrac{du}{dx}dy = F_1 dx + F_2 dy \Rightarrow$

Check vonfaziarsi/PSE

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{dF_2}{dx} = \dfrac{dF_1}{dy}}$ poiché $\dfrac{d^2u}{dx^2} + \dfrac{d^2u}{dy^2} = 0$ poiché è ARMONICA

ESEMPIO:

1 $u(x,y) = 2xy + 3xy^2 - 2y^3$ può essere una $\operatorname{Re}(z)$?

Calcolo il laplaciano: $\dfrac{du}{dx} = 2y + 3y^2$ mentre $\dfrac{d^2u}{dx^2} = 0$

$\dfrac{du}{dy} = 2x + 6xy - 6y^2$ mentre $\dfrac{d^2u}{dy^2} = 6x - 16y$

Dunque $u(x,y)$ non è armonica perciò $\nexists\, v(x,y)$ armonica coniugata

2 $u(x,y) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$ può essere una $\operatorname{Re}(z)$?

Calcolo il laplaciano: $\dfrac{du}{dx} = 6xy + 4x$ mentre $\dfrac{d^2u}{dx^2} = 6y + 4$

$\dfrac{du}{dy} = 3x^2 - 3y^2 - 4y$ mentre $\dfrac{d^2u}{dy^2} = -6y - 4$

Dunque $\dfrac{d^2u}{dx^2} + \dfrac{d^2u}{dy^2} = 0$ perciò $u(x,y)$ è ARMONICA dunque posso cercare $v(x,y)$.

Avrò che $dv = A\,dx + B\,dy$ dove $A = -\dfrac{du}{dy} = 3y^2 + 4y - 3x^2$

$B = \dfrac{du}{dx} = 6xy + 4x$

Dunque $v(x,y) = \int A\,dx = 3xy^2 + 4xy - x^3 + c(y)$

$\dfrac{dv}{dy} = B = 6xy + 4x = 6xy + 4x + c'(y)$

Da vedere

$$\frac{dv}{dy} = B = 6xy + 4x = 6xy + 4x + c'(y)$$

$$c'(y) = 0 \implies c(y) = C$$

DUNQUE $v(x, y) = 3xy^2 + 4xy - x^3 + C$ perció concludendo si ottiene

$$f(z) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2 + i\,(3xy^2 + 4xy - x^3 + C)$$

6. Appunti sulle successioni

venerdì 27 novembre 2020 13:14

SUCCESSIONI

Se prima si consideravano funzioni del tipo $f(x,y)$ con $f: U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

ora consideriamo funzioni $F: \mathbb{N}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $F(n,x) = f_n(x)$.

Possiamo anche definire una funzione $\{f_n(\cdot)\} = \{f_n\}$ che è una legge che

ad ogni $n \in \mathbb{N}$ fissato associa $f_n(\cdot) = F(n,\cdot): D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

cioè una successione di funzioni a una legge come questa appena presentata.

es. $\{f_n\}$, $f_n(t) = t^n$, $f_n: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$

$f_1(t) = t$

$f_2(t) = t^2$

$f_3(t) = t^3$

$\vdots$

Data la scrittura $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)$, posso definire due osservazioni:

1) qual è il valore della successione numerica ottenuta fissando t

2) qual è la funzione limite f tale che $f(t) = f_n(t)$

DEFINIZIONE: Sia data una successione di funzioni $\{f_n\}$ dove $f_n: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Diremo che $\{f_n\}$ converge puntualmente in $t_0 \in D$ ad un valore ℓ
se la successione numerica $f_n(t_0) \to \ell$. Ossia, se $\forall \varepsilon > 0$
$\exists\, \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon, t_0)$ tale che se $n > \bar{n}$ allora $|f_n(t_0) - \ell| < \varepsilon$

Es. $t_0 = \frac{1}{2}$ $\quad f_1(t_0) = t_0^{\,n} \longrightarrow 0$

Se per ogni $t \in D$ fissato, $\{f_n(t)\} \subset \mathbb{R}$ converge puntualmente
definisco la funzione $f(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)$

Es. $f_n(t) = \frac{n}{n+1}\, t + \frac{1}{n}$ $\quad$ con $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} t + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} = t \quad \text{dunque } f(t) = t$$

CONVERGENZA PUNTUALE:

Diremo che $\{f_n\}$ converge puntualmente su D ed f se

$$f(t) = \lim_{n \to +\infty} f_n(t) \quad \text{per ogni } t \in D \text{ fissato.}$$

$\forall t \in D \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon, t)$ quando $n \geq \bar{n}$ si ha che

$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$ **CONVERGENZA PUNTUALE**

Diremo che la successione $\{f_n\}$ converge uniformemente su D ad una funzione f se $\forall t \in D \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon)$ tale che $n \geq \bar{n}$ si ha

$$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$$

Se considero $f_n(t) = \frac{1}{\frac{1}{n} + t}$ con $t \in (0, +\infty)$ allora per $t \in (0, +\infty)$ fissato, si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} + t} = \frac{1}{t}$$ dunque si ha la **CONVERGENZA PUNTUALE**

Determiniamo $\bar{n}$, dato un $\varepsilon > 0$, tale che $n \geq \bar{n}$ e $\left| \frac{1}{\frac{1}{n} + t} - \frac{1}{t} \right| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \frac{1}{t} - \frac{1}{\frac{1}{n} + t} < \varepsilon \quad \Rightarrow \frac{t + \frac{1}{n} - t}{t\left(\frac{1}{n} + t\right)} \varepsilon \quad \Rightarrow \frac{1}{nt\left(\frac{1}{n} + t\right)} < \varepsilon \quad \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < nt\left(\frac{1}{n} + t\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < t(1 + nt) \quad \Rightarrow \frac{1}{t\varepsilon} < 1 + nt \quad \Rightarrow n > \frac{1}{t}\left(\frac{1}{t\varepsilon} - 1\right)$$ dove se scelgo

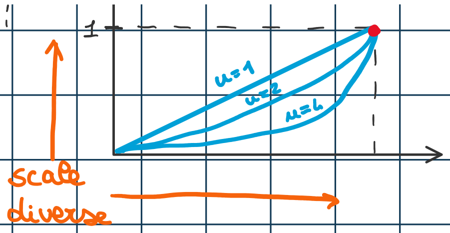
$$\bar{n} = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{\varepsilon t} - 1\right)$$ allora risulta che $n > \bar{n} \Rightarrow \left| \frac{1}{\frac{1}{n} + t} - \frac{1}{t} \right| < \varepsilon$

Anche $f_n(t) = t^n$ in $[0,1]$ **CONVERGE** alla funzione $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \in [0,1] \\ 1 & \text{se } t = 1 \end{cases}$

Graficamente:

La convergenza è **PUNTUALE**

Graficamente:



La convergenza è **PUNTUALE** ma **NON UNIFORME**

Invece per $f_n(t) = e^{-nt}$ con $t \in [0, +\infty]$ si ha che $\lim_{n \to +\infty} f_n(t) = 0$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ per cui $|e^{-nt}| < \varepsilon \Rightarrow e^{-nt} < \varepsilon \Rightarrow -nt < \ln\varepsilon \Rightarrow n > -\frac{\ln\varepsilon}{t}$

$\Rightarrow n > \frac{1}{t} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$

Si ha che $\{f_n\}$ in $[0, \frac{1}{2}]$ con $f_n(t) = t^n$ **CONVERGE UNIFORMEMENTE**
e $f(t) = 0$ in $[0, \frac{1}{2}]$
Prendo $|t^n - 0| < \varepsilon \Rightarrow t^n < \varepsilon$. Poiché $t \le \frac{1}{2} \Rightarrow t^n$ mancante

Affinché sia $t^n < \varepsilon$ è sufficiente scegliere $\bar{n}$ tale che $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon$. Infatti, con questa scelta si ha che, se $n > \bar{n}$, si ha

$$t^n \le t^{\bar{n}} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{\bar{n}} < \varepsilon \quad \text{per cui} \quad \bar{n} \ge \log_{\frac{1}{2}} \varepsilon$$

Analogamente succede per $f_n(t) = e^{-tn}$ con $t \in [1, +\infty]$ per cui $\lim_{n \to +\infty} e^{-nt} = 0$. Si ha che $e^{-nt} < \varepsilon$ per cui $n > \bar{n} \ge \frac{1}{t} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$

e scelto $\bar{n} > \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ ottengo $\bar{n} \ge \frac{1}{t} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ $\forall t \ge 1$
Ciò significa che se $\varepsilon > 0$ e scelto $\bar{n}$ come sopra, si ha che $e^{-nt} \to 0$ **UNIFORMEMENTE**

Conclusione 1 Esistono successioni di funzioni che convergono puntualmente ma non uniformemente

2 Eventualmente si può avere convergenza uniforme restringendo il dominio

NOTA: Se f_n converge verso una funzione f in modo uniforme allora f_n converge puntualmente verso f

NOTA: Per provare che una successione $\{f_n\}$ converge uniformemente verso una funzione f, bisogna provare che $\sup_{t \in A} |f_n(t) - f(t)| \to 0$

che $\sup_{t\in D} |f_n(t) - f(t)| \to 0$

Presa $f_n(t) = t^n$ con $t \in [0, \frac{1}{2}]$ si ha $\sup_{t\in[0,\frac{1}{2}]} |t^n - 0| = \sup_{t\in[0,\frac{1}{2}]} t^n \leq \frac{1}{2^n} \to 0$

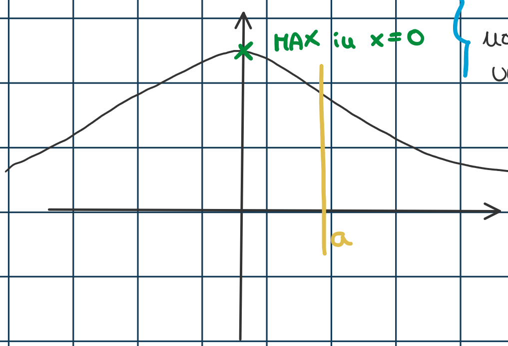
Preso $f_n(t) = e^{-nt}$ si ha $\sup_{t\in[1,+\infty]} e^{-nt} \to 0$ e e^{-nt} è decrescente in t e pertanto $e^{-nt} < e^{-n}$

per cui ottengo che $\sup_{t\in[1,+\infty]} e^{-nt} = e^{-n} \to 0$ con $n \to +\infty$

Se considero $f_n(t) = \frac{1}{1+nt^2}$ con $t \in [0,+\infty]$ si ha $f_n(t) \to 0$ e che

$\sup_{t\in[0,+\infty]} \left| \frac{1}{1+nt^2} - 0 \right| = \sup_{t\in[0,+\infty]} \frac{1}{1+nt^2}$. Facendo alcuni calcoli si ha che

$f_n(t) = \frac{1}{1+nt^2}$ per cui $f_n'(t) = -\frac{2nt}{(1+nt^2)^2} \geq 0$ se $t \leq 0$



non ho la convergenza uniforme

⇓

se però restringo il dominio usando a ottengo che

$f_n(t) = \frac{1}{1+nt^2}$ con $t \in [a,+\infty]$ e $a > 0$ fa sicché

$\sup_{t\in[a,+\infty]} \frac{1}{1+nt^2} = \frac{1}{1+na^2} \xrightarrow[\text{per } n\to+\infty]{} 0$

SERIE DI FUNZIONI:

Una serie di funzioni $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ è il limite della successione di funzioni data da

$S_0 = f_0$

$S_1 = f_0$?

$\vdots$

$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} f_n(t)$

NOTA: essendo $S(t)$ un limite, ha senso chiedersi se $S(t)$ è limite puntuale o uniforme di $S_n(t)$

Si dirà $S_n(t)$ è limite puntuale o uniforme se ci sono le basi.

Si dirà $S_n(t)$ è limite puntuale o uniforme se ci sono le basi.

Es. se considero $f_n(t) = t^n$ allora $s(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_n(t)$ converge uniformemente su ogni intervallo di tipo $[-a, a]$ con $a<1$ e converge puntualmente in $(-1,1)$. Sia $s'(t) = \frac{1}{1-t}$

Se si considera $S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} f_k(t) = \sum_{k=0}^{n} t^k$ con $t \in [-a, a]$ con $a<1$ ho a che fare con una SERIE GEOMETRICA di ragione k.

$t^k \leq a^k$

Se considero $\sup_{\substack{t\in[-a,a] \\ t>0}} \left| \sum_{k=0}^{n} t^k - \underbrace{\frac{1}{1-t}}_{= \sum_{k=0}^{+\infty} t^k} \right| = \sup_{\substack{t\in[-a,a] \\ t\geq 0}} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} t^k \right| \leq \sup_{t\in[0,a]} \sum_{k=n+1}^{+\infty} |t^k| \leq \sum_{n=?}^{+\infty} a^k =$

$= \sum_{k=0}^{+\infty} a^k - \sum_{k=0}^{n} a^k \xrightarrow[a<1]{n\to+\infty} 0$ nessuna dipendenza da t => convergenza uniforme

CRITERIO DI WEIRSTRASS

Data $f_n : I \to \mathbb{R}$, se esiste $\{c_n\} \subset [0, +\infty)$ tale che $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n < +\infty$ e $|f_n(t)| \leq c_n \ \forall t \in I$ allora $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ converge UNIFORMEMENTE su I (es. precedente con $c_n = a^n$)

TEOREMA: ① Se la successione $\{f_n\}$ è di funzioni continue, allora $s(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_n(t)$ è una funzione continua se la convergenza è uniforme

② Se la successione $\{f_n\}$ è di funzioni derivabili allora $s(t)$ è derivabile e $s'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(t)$ se la convergenza è uniforme

③ Se la serie $\sum f$ di funzioni continue è uniforme e $\int_a^b f_n$? allora $\int_a^b \sum f_n = \sum \int_a^b f_n$

SERIE DI POTENZE

Consideriamo ora serie di funzioni particolari e cioè parliamo di serie di potenze. Esse sono della forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{per } z_0 \in \mathbb{C} \text{ fissati e coefficienti } a_n \in \mathbb{C}$$

$z \in E \subseteq \mathbb{C}$

$$S_z \rightsquigarrow S(z+z_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Consideriamo serie di potenze della forma $* \ S_z = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

Lemma: Se la serie di potenze $*$ converge per qualche valore $\hat{z} \in \mathbb{C}$ allora la serie di potenze converge $\forall z \in \mathbb{C}$ con $|z| < |\hat{z}|$

Lemma: Se la serie di potenze * converge per qualche valore $\hat{z} \in \mathbb{C}$ allora la serie di potenze converge $\forall z \in \mathbb{C}$ con $|z| < |\hat{z}|$

Dim: Sia $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ e dobbiamo mostrare che $|S_z| < +\infty$ $\forall z$ t.c. $|z| < |\hat{z}|$

Possiamo scrivere $S_z = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \hat{z}^n \left(\frac{z}{\hat{z}}\right)^n$ per cui ottengo che

$$|S_z| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n \hat{z}^n| \left|\frac{z}{\hat{z}}\right|^n \; *$$

Osserviamo che $\sum a_n \hat{z}^n < +\infty \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n \hat{z}^n = 0 \Rightarrow |a_n \hat{z}^n| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

D'altra parte, posto $t = \left|\frac{z}{\hat{z}}\right|$ poiché $z < \hat{z}$ allora $t < 1$ e dunque $\sum t < +\infty$

e in particolare $\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{z}{\hat{z}}\right|^n = \frac{1}{1 - \left|\frac{z}{\hat{z}}\right|} = \frac{|\hat{z}|}{|\hat{z}| - |z|}$

$$* \Rightarrow |S_z| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{|a_n \hat{z}^n|}_{\leq 1} \left|\frac{z}{\hat{z}}\right|^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{z}{\hat{z}}\right|^n = \frac{|\hat{z}|}{|\hat{z}| - |z|} < +\infty$$

DEFINIZIONE: Definiamo la quantità raggio di convergenza di una serie di potenze $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ è definito come $R = \sup \left\{ |z| \;\middle|\; \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n < +\infty \right\}$

- $R = 0 \iff$ La serie converge solo per $z = 0$
- $R = +\infty \iff$ la serie converge per ogni $z \in \mathbb{C}$
- $R \in (0, +\infty) \iff$ La serie converge per ogni z con $|z| < R$ ma nulla si può dire su $z \in \mathbb{C}$, $|z| = R$

Es. $S_n = \sum \left(\frac{1}{n}\right) x^n \Rightarrow |x| < 1$ La serie converge

$\left|\sum \frac{1}{n} x^n\right| \leq \sum x^n \iff |x| < 1$

$x = -1 \qquad |x| = 1$

$S_x = \sum_n \frac{1}{n} (-1)^n \to$ converge

$x = 1 \qquad |x| = 1$

$S_x = \sum \frac{1}{n} \to$ diverge

TEOREMA: Data la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, posto $\ell = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ o analogamente

$\ell = \limsup_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ dove i due limiti coincidono sempre

Es. stabilire il raggio di convergenza

1) $\sum_{n=0}^{+\infty} n!\, z^n$ 2) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ 3) $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{m}{n} z^n$

1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to+\infty} n+1 = +\infty \Rightarrow R = 0$

2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow R = +\infty$

3) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\binom{m}{n+1}\right|}{\binom{m}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left|\frac{\cancel{m!}}{(m-n-1)!\,(n+1)!}\right|}{\frac{\cancel{m!}}{(m-n)!\,n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|(m-n)!\,n!|}{(m-n-1)!\,(n+1)!} =$

$= \lim_{n\to+\infty} \frac{m-n}{n+1}$

PROPOSIZIONE: Data la serie di potenze $S_z = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ allora

1. la serie converge uniformemente su ogni disco $D_{R'} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R' \}$ e $R' < R$. Dunque si ha $S_n^z = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \longrightarrow S_z$

2. la serie S_z è una funzione continua in z

3. la serie S_z è una funzione derivabile e la derivata coincide con la serie delle derivate $S'_z = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n z^{n-1}$

Inoltre, S' ha lo stesso raggio di convergenza di S'

- Iterando segue che

$S'^{(n)}_z = \frac{d^n}{dz^n} S_z = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n \frac{d^k}{dz^n} z^n$ e $S^{(n)}$ ha lo stesso raggio di convergenza di S

COROLLARIO: $a_k = \dfrac{\frac{d^k}{dz^k} S(0)}{k!}$

infatti

N: ② $k=0 \Rightarrow a_0 = \sum^{+\infty} a_n z^n = a$

$k!$

Dim:

① $k=0 \Rightarrow a_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \Big|_{z=0} \overset{\text{infatti}}{=} a_0$

② $k \neq 0 \Rightarrow \frac{d^k}{dz^k} S = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \frac{d^k}{dz^k} z^n = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n k! \, z^{n-k} \Big|_{z=0} = a_k k!$

$$a_k = \frac{\frac{d^k}{dz^k} S(0)}{k!}$$

7. Esercitazione 2

giovedì 26 novembre 2020 15:06

SLIDE:

TEORIA: ① $f(z) = u + iv$ ② $dz = dx + i\,dy$

③ $\int_\ell f(z)\,dz = \int_\ell (u+iv)(dx+i\,dy) = \int_\ell (u\,dx - v\,dy) + i\int_\ell (v\,dx + u\,dy)$

ESEMPI TEORICI:

N° 1

$f(z) = 1 \Rightarrow u(x,y) = 1 \;,\; v(x,y) = 0 \Rightarrow \int_\ell f(z)\,dz = \int_\ell dx + i\int_\ell dy = (x_1 - x_0) + i(y_1 - y_0)$

N° 2

$\int_\ell |dz|$ poiché $|dz| = \sqrt{dx^2+dy^2} = ds \Rightarrow \int_\ell |dz| = \int_\ell ds = \ell$

ds: lunghezza infinitesima della curva

ℓ: lunghezza del percorso

ESEMPI

N° 1

$\oint_C \frac{dz}{z-z_0}$ dove C = circonferenza di centro z_0 e raggio ε

Ho che: 1) $z = x+iy$ 2) $x = x_0 + \varepsilon\cos\theta$

3) $z_0 = x_0 + iy_0$ 4) $y = y_0 + \varepsilon\sin\theta$

Sostituisco per cui:

$z = (x_0 + \varepsilon\cos\theta) + i(y_0 + \varepsilon\sin\theta) = (x_0 + iy_0) + \varepsilon(\cos\theta + i\sin\theta) = z_0 + \varepsilon e^{i\theta}$

$\Rightarrow z - z_0 = \varepsilon e^{i\theta}_{[0 \le \theta \le 2\pi]} \Rightarrow dz = i e^{i\theta}\,d\theta \Rightarrow \oint \frac{dz}{z-z_0} = \oint_0^{2\pi} \frac{i e^{i\theta}\varepsilon\,d\theta}{\varepsilon e^{i\theta}} = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$

NOTA: $\frac{1}{z-z_0}$ non è SEMPLICEMENTE CONNESSO quindi non è CONSERVATIVO

però ho che $\oint_\ell \frac{dz}{z-z_0} = 0$ se i poli sono esterni

i punti di discontinuità sono detti poli

$f(z) = \frac{1}{z-z_0} = \frac{1}{x+iy-x_0-iy_0} = \frac{1}{(x-x_0)+i(y-y_0)} = \frac{(x-x_0)-i(y-y_0)}{[(x-x_0)+i(y-y_0)][(x-x_0)-i(y-y_0)]} =$

$= u(x,y) + i\,V(x,y)$ con $u(x,y) = \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ $\quad v(x,y) = \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

Inoltre si ha che, ipotizzando che valgano le condizioni di C-R:

$$\int_\ell f(z)\,dz = \int_\ell \underbrace{(u\,dx - v\,dy)}_{I_1} + i\int_\ell \underbrace{(v\,dx + u\,dy)}_{I_2}$$

C-R:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow u\,dx - v\,dy \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow v\,dx + u\,dy \end{cases}$$
FORME DIFFERENZIALI ESATTE

N° 2

$$\int_\ell (x^2 - iy^2)\,dz$$ con ℓ: $y = 2x^2$ tra $P_1 \equiv (1,2)$ e $P_2 \equiv (2,8)$

$u = x^2$ $\quad$ $v = -y^2$

$\Downarrow$

per la Teoria scritta sopra

$$\left(\int_\ell x^2\,dx + y^2\,dy + i\int_\ell -y^2\,dx + x^2\,dy\right.$$ dove posso ricondurre ad una variabile scrivendo che se $y = 2x^2$ allora $dy = 4x\,dx$

Parametrizzo ℓ:

$$\ell: \begin{cases} x = t \\ y = 2t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} dx = dt \\ dy = 4t\,dt \end{matrix}$$ con $t \in [1,2]$ tale che ottengo

$$\int_1^2 t^2\,dt + \int_1^2 4t^4 \cdot 4t\,dt + i\left[\int_1^2 -4t^4\,dt + \int_1^2 t^2\, 4t\,dt\right] =$$

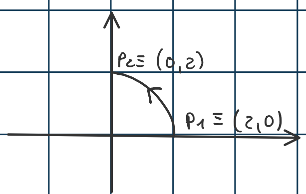
$$= \frac{t^3}{3}\Big|_1^2 + \cancel{16}^{\,8}\cdot\frac{t^6}{\cancel{6}_{\,3}}\Big|_1^2 + i\left[-\frac{4}{5}t^5\Big|_1^2 + \frac{\cancel{4}t^4}{\cancel{4}}\Big|_1^2\right] = \frac{511}{3} - i\cdot\frac{49}{5}$$

ESERCIZIO: verificare che $f(z) = x^2 - iy^2$ sia ANALITICA (= OLOMORFA)

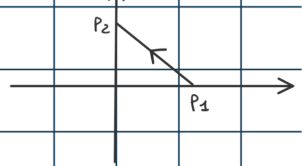
N° 3

$$\int_\gamma (z^2 + 3z)\,dz$$

a) γ: $|z| = 2$ tra $P_1 \equiv (2,0)$ e $P_2 \equiv (0,2)$ in senso antiorario



b) γ: segmento che unisce P_1 e P_2



$$z^2 + 3z = x^2 - y^2 + 3x + i(2xy + 3y)$$

$\Downarrow$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 3 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 3$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y$$

operando le sostituzioni e poi le derivate ottengo che è una funzione OLOMORFA

$\Downarrow$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y$

$f(z)$ analitica $\Rightarrow \int f(z)\,dz = \int_\gamma \underbrace{(u\,dx - v\,dy)}_{I_1} + i\int_\gamma \underbrace{(v\,dx + u\,dy)}_{I_2}$

Passo all'integrazione:

$I_1: \int_\gamma u\,dx - v\,dy \qquad \varphi_1(x,y) :=$ POTENZIALE

$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = u = x^2 - y^2 + 3 \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = -v = -2xy - 3y$

Ottengo che $\varphi_1(x,y) = \frac{x^3}{3} - y^2 x + \frac{3}{2}x^2 + f_1(y) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = -2xy + f_1'(y) = -2xy - 3y \Rightarrow f_1'(y) = -3y \Rightarrow f_1(y) = -\frac{3}{2}y^2 + C_1$

Perciò ottengo $\varphi_1(x,y) = \frac{x^3}{3} - y^2 x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}y^2 + C_1 \Rightarrow I_1 = \varphi_1(0,2) - \varphi_1(2,0) = -\frac{44}{3}$

$I_2: \int_\gamma (v\,dx + u\,dy) \qquad \varphi_2(x,y) :=$ POTENZIALE

$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = v = 2xy + 3y \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = u = x^2 - y^2 + 3x$

Ottengo che $\varphi_2(x,y) = x^2 y + 3xy + f_2(y) \Rightarrow \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = x^2 + 3x + f_2'(y) = x^2 - y^2 + 3x \Rightarrow$

$\Rightarrow f_2'(y) = -y^2 \Rightarrow f_2(y) = -\frac{y^3}{3} + C_2$

Perciò ottengo $\varphi_2(x,y) = x^2 y + 3xy - \frac{y^3}{3} + C_2 \Rightarrow I_2 = \varphi_2(0,2) - \varphi_2(2,0) = -\frac{8}{3}$

IN CONCLUSIONE:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = I_1 + I_2 = -\frac{44}{3} - i\frac{8}{3}$$

TEORIA!

Se $f(z)$ OLOMORFA in una regione chiusa D, semplicemente connessa e con contorno C, allora

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

GAUSS-GREEN nel complesso

Per il teorema di Cauchy, se $f(z)$ è analitica all'interno e sul contorno di una regione D delimitata da due o più contorni chiusi, si ha:

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz + \oint_{C_3} f(z)\,dz$$

assumendo versi ANTIORARI

In altre parole, assumendo i percorsi antiorari, l'integrale esteso al contorno esterno è uguale alla somma di quelli estesi ai contorni interni

esempi: ① $\oint (z+z_0)^n\,dz$ con $n \geq 0$, z_0 costante e C una generica linea chiusa

esempi: ① $\oint_C (z-z_0)^n \, dz$ con $n \geq 0$, z_0 costante e C una generica linea chiusa

$f(z) = (z-z_0)^n$ è analitica su tutto $\mathbb{C}$ => l'integrale è sempre nullo

② $\oint \frac{dz}{z-z_0}$ vi sono due casi:

a) z_0 esterno al dominio D:

$f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ è analitica su D dunque $\oint \frac{dz}{z-z_0} = 0$

b) z_0 interno al dominio D:

$$\oint_C \frac{dz}{z-z_0} = \oint_{C_1} \frac{dz}{z-z_0} \quad 2\pi i$$

③ $\oint_\gamma \frac{1}{(z-z_0)^n} dz$ con $n = 2, 3, \dots$

vi sono due casi:

a) z_0 esterno al dominio D:

$$\oint \frac{dz}{(z-z_0)^n} = 0$$

b) z_0 interno al dominio D:

$z - z_0 = \varepsilon e^{i\theta}$ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$\Downarrow$

$(z-z_0)^n = \varepsilon^n e^{in\theta}$ => $dz = i\varepsilon e^{i\theta} d\theta$

$$\oint_\gamma \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \oint_{\gamma_1} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{i\varepsilon e^{i\theta} d\theta}{\varepsilon^n e^{in\theta}} =$$

$$= \frac{i}{\varepsilon^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i\theta(1-n)} d\theta = \frac{1}{\varepsilon^{n-1}} \int_0^{2\pi} \frac{i(1-n)}{i(1-n)} e^{i\theta(1-n)} d\theta =$$

$$= \frac{i}{\varepsilon^{n-1}} \cdot \frac{1}{i(1-n)} \cdot \int_0^{2\pi} i(1-n) e^{i\theta(1-n)} d\theta = \frac{1}{(1-n)\varepsilon^{n-1}} \left[e^{i\theta(1-n)} \right]_0^{2\pi} = 0$$

NOTA: $e^{i2k\pi} = 1$ con $k \in \mathbb{Z}$

RIASSUMENDO:

$$\oint_C (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{per } n = -1 \text{ e } z_0 \text{ interno a } C \\ 0 & \text{in tutti gli altri casi} \end{cases}$$

FORMULE DI CAUCHY:

Se $f(z)$ è analitica all'interno e sulla linea semplice e chiusa γ (qualunque essa sia) e z_0 è un punto interno a γ, allora

$$\oint \frac{f(z)}{\dots} dz = \begin{cases} 0 & \text{se } f(z) = (z-z_0) g(z) \\ \dots \end{cases}$$

{ con γ percorsa in senso antiorario

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \begin{cases} 0 & \text{se } f(z)=(z-z_0)g(z) \\ 2\pi i\, f(z_0) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

con γ percorsa in senso antiorario

Si dimostra che

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

PROPRIETÀ: Se una funzione di variabile complessa $f(z)$ ammette la derivata prima, allora ammette derivate di qualunque ordine. Ciò non è necessariamente vero per funzioni di variabili reali

ESEMPI:

N°1 $\oint_\gamma \frac{e^z}{z(z+1)}\,dz$ con $\gamma: |z-1| = 3$

Avrò che se $z = x+iy$ allora $z-1 = (x-1)+iy$ da cui $|z-1| = \sqrt{(x-1)^2+y^2} = 3$

Dunque γ è una circonferenza di raggio 3 e centro $(1,0)$

I punti di discontinuità $\begin{cases} z=0 \Rightarrow (0,0) \\ z=-1 \Rightarrow (-1,0) \end{cases}$ sono interni alla regione delimitata da γ

Semplifico la frazione:

$$\frac{1}{z(z+1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+1} = \frac{Az+A+Bz}{z(z+1)} = \frac{(A+B)z+A}{z(z+1)}$$

$$\begin{cases} A=1 \\ A+B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

Dunque posso riscrivere l'integrale come:

$$\oint_\gamma \frac{e^z}{z(z+1)} = \oint_\gamma e^z\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}\right)dz = \oint_\gamma \frac{e^z}{z}\,dz - \oint_\gamma \frac{e^z\,dz}{z+1} =$$

$$= 2\pi i\, e^0 - 2\pi e^{-1} = 2\pi i\,(1-e^{-1})$$

N°2 $\oint_\gamma \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}\,dz$ $\quad\gamma$: una qualsiasi curva semplice chiusa che racchiude $z=1$, che annulla anche il den.

Sapendo che $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$

e che $f''(1) = \frac{2!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}\, dz = 10$

dunque ottengo che $\oint_\gamma \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}\, dz = \frac{10}{2!} \cdot 2\pi i = 10\pi i$

N°3 $\oint_\gamma \frac{\cos(z)}{z(z^2+8)}\, dz$ con $D = \{ z \in \mathbb{C} : |Re(z)| \le 2 \wedge |Im(z)| \le 2 \}$

Punti di discontinuità: $\begin{cases} z_0 = 0 \in D \\ z_0 = 2\sqrt{2}\, i \notin D \\ z_0 = -2\sqrt{2}\, i \notin D \end{cases}$

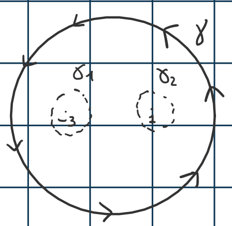
Dunque ho che $\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz \Rightarrow f(z) = \frac{\cos(z)}{z^2+8}$ con $z_0 = 0$

e che $f(z_0) = \frac{\cos(0)}{8} = \frac{1}{8}$. Da ciò ottengo che $\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0} = 2\pi i \cdot \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4} i$

N°4 $\oint_\gamma \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}\, dz$ con $\gamma : |z+1| = 3$

Calcolo γ : $|z+1| = 3 = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ dunque γ è una circonferenza di raggio $(-1,0)$ e raggio 3

Punti di discontinuità: $\begin{cases} z_0 = 1 \in D \\ z_0 = -3 \in D \end{cases}$ devo dunque considerarle entrambe



$\Rightarrow \oint_\gamma = \oint_{\gamma_1} + \oint_{\gamma_2}$

γ_1 : $f(z) = \frac{e^z}{z-1}$ con $z_0 = -3$

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{f(z)}{(z+3)^2}\, dz \Rightarrow \oint_{\gamma_1} = 2\pi i f'(-3) = -\frac{5\pi i}{8e^3}$$

γ_2 : $f(z) = \frac{e^z}{(z+3)^2}$ con $z_0 = 1$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} \frac{f(z)}{z-1} \Rightarrow \oint_{\gamma_2} = 2\pi i \frac{e}{16} = \frac{\pi i e}{8}$$

Dunque avrò che $\oint_\gamma = \oint_{\gamma_1} + \oint_{\gamma_2} = \frac{\pi i}{8}\left(e - \frac{5}{e^3}\right)$

8. Funzione analitica

lunedì 30 novembre 2020 11:13

FUNZIONE ANALITICA

Una funzione $f: E \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ si dice analitica se essa può essere scritta come una serie di potenze in un opportuno disco $D_\delta(z_0)$ per $z_0 \in \mathbb{C}$. Questo sviluppo si dice di Taylor:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}}{n!}$$

Es. ① $f(z) = \frac{1}{z}$ in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Posto $h = z - z_0$ per $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e se $|h| < |z_0|$ allora

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_0 + h} = \frac{1}{z_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{h}{z_0}} = \frac{1}{z_0} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{h}{z_0}\right)} = \frac{1}{z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{h}{z_0}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}} h^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}} (z-z_0) \quad \text{che vale se } |z-z_0| < |z_0|$$

② $f(z) = e^z = e^{z_0 + h} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{z_0} \frac{h^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{z_0}}{n!} (z-z_0)^n \qquad R = +\infty$

con $z = h + z_0$

TEOREMA: Ogni funzione analitica è olomorfa e si ha $f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$

In particolare ricordiamo $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$

Proposizione: Sia f analitica, allora $a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz$

$$\int_{C_R(z_0)} (z-z_0)^m = \int_{C_R(z_0)} z^m = 2\pi i \, \delta_m \quad \text{con} \quad \delta_m = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq -1 \\ 1 & \text{se } m = 1 \end{cases}$$

Fissiamo $k \in \mathbb{N}$ per cui:

$$\int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz = \int_{C_r(z_0)} \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n}{(z-z_0)^{k+1}} dz = \int_{C_r(z_0)} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^{n-k-1} dz =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_{C_R(z_0)} (z-z_0)^{n-k-1} dz = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot 2\pi i \, \delta_{n-k-1} = 2\pi i \, a_n$$

Dunque $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$; $a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)}$

$$\boxed{f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz}$$

FORMULA INTEGRALE DI CAUCHY PER LE DERIVATE

TEOREMA: Sia $f: E \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Allora f è anche analitica in E. Più precisamente, se $C_r(z_0) \subset E$ allora analitica in E. Più precisamente, se $C_r(z_0) \subset E$ allora

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0) \quad \text{su ogni disco } D_{r'}(z_0) \subset D_r(z_0)$$

dove i coefficienti a_n sono espressi come

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$$

Dim: Ricordiamo dalla formula integrale di Cauchy che se $z \in C_r(z_0)$ cioè se z è sufficientemente vicino a z_0 è che

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{w-z} \, dw$$

$$\frac{f(w)}{w-z} = \frac{1}{w-z_0} \frac{f(w)}{\frac{w-z_0+z_0-z}{w-z_0}} = \frac{1}{w-z_0} \frac{f(w)}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} \; * \quad \text{dove pongo } t = \frac{z-z_0}{w-z_0}$$

per ogni z tale che $|z-z_0| < |w-z_0| = r$

Inoltre $|t| < 1 \Rightarrow \sum t^n$ converge e $\sum t^n = \frac{1}{1-t}$

per cui posso riscrivere $*$ come $= \frac{1}{w-z_0} f(w) \sum \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n =$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n \Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n dw$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} \, dw \right) (z-z_0)^n$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} \, dw$$

$\Rightarrow f$ è analitica MANCANTE ZOOM

COROLLARIO: la derivata k-esima di una funzione olomorfa è data da

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{w-z} \, dw$$

Es. Risolvere $I = \int_\gamma \frac{e^{2z}}{(z^2+1)^2} \, dz$ con $\gamma: x^2+y^2 = \sqrt{3}$ $\quad C(0,0)$ $r=3$

Osservo che $z^2+1 = (z-i)(z+i)$ dunque ottengo che

$$\frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(z+1)(z-1)} + \frac{z^2-1}{(z+i)^2(z-i)^2} \right] = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{i} \left(\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i} \right) - \frac{1}{(z-i)^2} - \frac{1}{(z+i)^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{4i} \frac{1}{z+i} - \frac{1}{4i} - \frac{1}{z-i} - \frac{1}{4(z-i)^2} - \frac{1}{4(z^2+i)} \quad \text{dunque}$$

$$I = \frac{1}{4i} \int_\gamma \frac{e^{2z}}{z+i} dz - \frac{1}{4i} \int_\gamma \frac{e^{2z}}{z-i} dz - \frac{1}{4} \int_\gamma \frac{e^{2z}}{(z-i)^2} dz - \frac{1}{4} \int_\gamma \frac{e^{2z}}{z^2+i} dz$$

Risolvendo si ottiene che:

$$I = \frac{1}{4i} 2\pi i\, e^{-2i} - \frac{1}{4i} 2\pi e^{2i} - \frac{1}{4} 4\pi i\, e^{2i} - \frac{1}{4} 4\pi i\, e^{2i} =$$

$$= \pi \left[\left[\frac{1}{2} - i \right] e^{-2i} + \left[-\frac{1}{2} - i \right] e^{i} \right]$$

Corollario (Disuguaglianza di Cauchy): Se f è analitica su $D_R(z_0)$ ed è limitata da una costante $M > 0$, allora vale $|f^{(k)}(z_0)| \le \frac{k!}{R^k} M$

Dim: f limitata da M significa $|f(z)| \le M \quad \forall z \in D_R(z_0)$ dunque

$$f^{(k)}(z_0) = \left[\int_{\gamma_R(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz \right] \frac{k!}{2\pi i} \Rightarrow |f^{(k)}(z_0)| \le \frac{k!}{|2\pi i|} \int_{C_R(z_0)} \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{k+1}} dz$$

$$\Rightarrow |f^{(k)}(z_0)| \le \frac{k!}{2\pi} \int_{C_R(z_0)} \frac{M}{R^{k+1}} dz = \frac{k!}{2\pi} \frac{M}{R^{k+1}} \int_{C_R(z_0)} dz =$$

$$= \frac{k!}{2\pi} M \frac{1}{R^{k+1}} \cdot 2\pi R = \frac{k!}{R^k} M$$

Definizione: una funzione analitica su tutto il piano complesso si dice INTERA

TEOREMA DI LIOUVILLE: Sia $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ intera e limitata, allora f è COSTANTE

Dim: supponiamo che f sia intera e limitata. Scegliamo $z \in \mathbb{C}$ e $D_R(z_0)$ un disco di raggio arbitrariamente piccolo allora

$$|f'(z)| \le \frac{1!}{\underset{\to +\infty}{R}} M < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \text{ma se } f' = 0 \Rightarrow f = \text{costante SEMPRE}$$

TEOREMA (PRINCIPIO DEL MASSIMO MODULO): $f: E \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con E limitato e f olomorfa su E e continua su $\overline{E}$, allora

$$\sup_{z \in E} |f(z)| = \max_{z \in \overline{E}} |f(z)| = \max_{z \in \partial E} |f(z)|$$

$\overline{E}$ chiuso

∂E bordo di E

Dim: $|f|$ è continua su $\overline{E} \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Allora $|f|$ ammette un massimo M e un punto di massimo $z_0 \in \overline{E} = E \cup \partial E$. Se $z_0 \in \partial E$ abbiamo finito. Se $z_0 \in E$ allora $M = |f(z_0)| \le \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right| \le$

$$\le \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{R} \cdot 2\pi R = M \Rightarrow M \le \frac{1}{2\pi} \int_{C_R(z_0)} \frac{|f(z)|}{R} dz \le M$$

$$\text{quindi } 2\pi M = \int_{C_R(z_0)} |f(z)| dz \Rightarrow \int_{C_R(z_0)} M dz = \int_{C_R(z_0)} |f(z)| dz = 0$$

$\Rightarrow |M - f(x)| = 0$ su $C_R(z_0) \Rightarrow |f(z)| = M$ su $C_R(z_0)$ per ogni R tale che $C_R(z_0) \in E \Rightarrow |f(z)| = M$ su $D_R(z_0)$

$\Rightarrow |f(z)| = M$ su tutto $E \Rightarrow |f(z)|$ è costante su tutto E

$\Rightarrow z \to |f(z)|$ è costante su tutto $\bar{E}$ per continuità

$\Rightarrow \exists\, z_0 \in \partial E$ tale che $|f(z)| = M$

$\Rightarrow \max |f(z)| = M = |f(z)| = \max\limits_{z \in \bar{E}} |f(z)|$

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA: Sia $P = P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ un polinomio di grado n con coefficienti complessi. Allora esiste almeno un valore $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che $P(z_0) = 0$

Dim: se ho $a, b \in \mathbb{C}$ allora $|a-b| \geq \big||a| - |b|\big| \geq |a| - |b| \Leftarrow |a| \leq |a-b| + |b|$

più grande di tutti gli altri

Considerando $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ se $|z| >> 1 \Rightarrow |a_n z^n| \geq |a_{n-1} z^{n-1}| \dots$

allora $|P(z)| \geq |a_n||z|^n - |a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1}| \geq$

$\geq |a_n||z|^n - \left(|a_0| + |a_1||z| + \dots + |a_{n-1}||z|^{n-1}\right)$

Chiamiamo allora $g(|z|) = |a_n||z|^n - \left(|a_0| + |a_1||z| + \dots + |a_{n-1}||z|^{n-1}\right) \geq$

$\lim\limits_{|z| \to +\infty} g(|z|) = +\infty$

Supponiamo che $p(z) \neq 0$ allora $q(z) = \dfrac{1}{p(z)}$ sarebbe ben definita con $q: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ed olomorfa.

Inoltre $\lim\limits_{|z| \to +\infty} \dfrac{1}{|p(z)|} \leq \lim\limits_{|z| \to +\infty} \dfrac{1}{g(|z|)} = 0 \Rightarrow q(z)$ è limitata su $\mathbb{C} \Rightarrow$

$\Rightarrow q(z)$ è limitata e intera $\Rightarrow q(z)$ è costante. Ciò è un assurdo di fondo per $n \geq 1$. Dunque $\exists\, z_0 \in \mathbb{C}$ tale che $P(z_0) = 0$

SVILUPPO IN SERIE DI LAURENT: z_0 è una singolarità ISOLATA per una funzione $f: D_R(z_0) \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ è olomorfa sul disco $R > 0$

ES.: $f(z) = \dfrac{1}{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}$ dove $z_k = \dfrac{1}{k\pi}$ $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \Rightarrow z_k$ sono tutte singolarità isolate

$z_k = 0$ è una singolarità non isolata perché comunque io prenda un disco $D_R(0)$ con R piccolissimo, ci sarà sempre una singolarità del tipo $\dfrac{1}{k\pi} \in D_R(0)$ perché $\dfrac{1}{k\pi} \to 0$

TEOREMA DI LAURENT: Siano $E \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in E$. Supponiamo che $f: \{z \in E \,/\, R' < |z - z_0| < R\}$ dove $R > R'$ e $D_R(z_0) \subset E$. Allora per ogni $z \in \{z \in E \,/\, R' < |z - z_0| < R\}$ esiste un'unica successione $\{c_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ tale che 1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_{-n} z^n$ abbia raggio di convergenza maggiore o uguale di $\dfrac{1}{R'}$

(PARTE PRINCIPALE)

2) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$ abbia raggio di convergenza minore o uguale di R

(PARTE SINGOLARE)

3) $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} (z-z_0)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$

(SVILUPPO IN SERIE DI LAURENT)

Esempio ① $f(z) = e^{1/z}$ dove f è definita su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $z_0 = 0$ è un singolare isolato. Vogliamo esprimere $e^{1/z} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ perciò

$$e^w = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{n!} \Rightarrow w = z^{-1} = \frac{1}{z} \Rightarrow e^{1/z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot z^{-n} =$$

$$= 1 + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{(-n)!} z^n$$

$$e^{1/z} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n \quad c_0 = 1, \; c_n = \frac{1}{(-n)!} \; n<0 \; \text{ e } \; c_n = 0 \; n>0$$

② $f(z) = (z - z^2)^{-1} = \dfrac{1}{z(1-z)}$ con $f(z)$ era definita su $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-z} \quad \text{dove} \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

$0 < \varepsilon < |z| < 1$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{n-1} = \sum_{n=-1}^{+\infty} z^n \quad \text{con} \quad c_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \geq -1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e $z \in \{0 < \varepsilon_0 < |z| < R < 1\}$

Dunque

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-(1-z)} = \frac{1}{1-z} \sum (1-z)^n =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-1)^n$$

In generale: i coefficienti si possono calcolare con

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \, dz$$

Dunque se $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$ allora

$$\int_{C_R(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \, dz = \int_{C_R(z_0)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n (z-z_0)^n}{(z-z_0)^{k+1}} \, dz =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_{C_R(z_0)} (z-z_0)^{n-k-1} \, dz = c_k \cdot 2\pi i$$

DEFINIZIONE: Sia $E \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in E$ $f: E \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfa. Diremo che z_0 è una singolarità isolata

① ELIMINABILE se f si estende a tutto E cioè se f è è una singolarità isolata

① **ELIMINABILE** se f si estende a tutto E cioè se f è la restrizione di una funzione olomorfa su E

② **POLARE** se $|f| \to +\infty$ e $z \to z_0$

③ **ESSENZIALE** negli altri casi

Es. ① $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ dove $\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ dove $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} =$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ pari} \\ \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} & \text{se } n = 2k+1 \end{cases}$$

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{z^{2k+1}}{z}$$

$\tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n} \Rightarrow f(z) = \tilde{f}(z)$ su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ dunque z_0 è eliminabile

② $f(z) = \frac{1}{z^m}$, $m \geq 1$ $\quad |f(z)| = \frac{1}{|z|^m} \xrightarrow[|z| \to 0]{} +\infty \Rightarrow z_0 = 0$ è un polo

$$f(z) = \frac{1}{z^m} = \sum_{n=-m}^{+\infty} c_n z^n \quad c_n = 0 \; n \neq -m \quad c_{-m} = 1$$

③ $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ notiamo che $\lim_{\substack{x \to 0^- \\ y = 0}} e^{\frac{1}{x+iy}} = 0$ mentre

$\lim_{\substack{x \to 0^+ \\ y = 0}} e^{\frac{1}{x+iy}} = +\infty$ dunque $\nexists \lim_{z \to 0} |e^{1/z}|$ e pertanto non può essere né un polo né eliminabile

Infatti $e^{1/z} = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{1}{(-n)!} z^n$

Sia $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$ allora possiamo classificare la singolarità isolata come segue:

① se $c_n = 0 \; \forall n < 0$ allora z_0 è eliminabile

② se $c_m \neq 0$ e $c_n = 0 \; \forall n < m < 0$ allora z_0 sarà un polo detto di ordine $|m|$

Es. $f(z)$ del tipo $-z^{-5} + z^{-2} + z + \dots$

$z_0 = 0$ polo di ordine 5

③ se $c_n \neq 0$ per infiniti termini non positivi allora si dirà che z_0 è una singolarità essenziale.

Notiamo che dalla definizione segue che z_0 è un polo di ordine m se $\lim_{z \to z_0} (z-z_0)^m f(z)$ esiste ed è $\neq 0$

Infatti $f(z) = c_{-m}(z-z_0)^{-m} + c_{-m+1}(z-z_0)^{-m+1} + \dots$ allora

Infatti $f(z) = c_{-m}(z-z_0)^{-m} + c_{-m+1}(z-z_0)^{-m+1} + \dots$ allora

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^m \left(c_{-m}(z-z_0)^{-m} + c_{-m+1}(z-z_0)^{-m+1} \dots \right) =$$

$$= \lim_{z_0 \to z_m} c_{-m} + c_{-m+1}\underbrace{(z-z_0)}_{\to 0} + c_{-m+2}\underbrace{(z-z_0)^2}_{\to 0} + \dots + c_{-m} \neq 0$$

TEOREMA (condizione necessaria e sufficiente): sia z_0 una singolarità isolata per f e sia $D_R(z_0)$ un disco che non contenga altre singolarità di f e sia $U = D_R(z_0) \setminus \{z_0\}$. Allora z_0 è

① ELIMINABILE $\Leftrightarrow$ • f è limitata su U

• $\exists \lim_{z\to z_0} f(z)$

• $\lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0) = 0$

② POLO DI ORDINE $m \geq 1$ $\Leftrightarrow$ • $|f(z)| \leq \dfrac{M}{|z-z_0|^m} \quad \forall z \in U$

• $\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^{m+1} f(z) = 0$

• $\exists \lim_{z\to z_0} (z-z_0)^m f(z)$ ed è $\neq 0$

o, analogamente,

$\exists$ ϕ olomorfa e $\neq 0$ definita su U tale che $f(z) = \dfrac{\phi(z)}{(z-z_0)^m}$ su U

③ ESSENZIALE $\Leftrightarrow$ $\nexists \lim_{z\to z_0} f(z)$

Definizione: se z_0 è uno zero di ordine m per f allora è un polo per $\frac{1}{f}$

$f: E \to \mathbb{C}$ olomorfa, $z_0 \in E$ è uno zero di ordine m per f se esiste un intorno U di z_0 tale che $f(z) = (z-z_0)\varphi(z)$ per qualche funzione $\varphi(z) \neq 0$ su U e f analitica equivale ad affermare che $f(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} c_n (z-z_0)^m$ e $c_m \neq 0$ e $m > 0$

Es: determinare la natura di $z_0 = 0$ (cioè polo, ordine, tipo...) per le seguenti funzioni:

① $\dfrac{\sin z^4}{z^3}$ ② $\dfrac{1-e^{-z}}{z}$ ③ $\dfrac{e^{-\frac{1}{z^2}}}{z}$ ④ $z^3 \sin\frac{1}{z}$ ⑤ $\dfrac{\sin z}{z^4}$

① $\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \Rightarrow \dfrac{\sin z^4}{z^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} \dfrac{(z^4)^{2n+1}}{z^3} =$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{5n+n-3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{5n+1} = z + \dots$ allora $z_0 = 0$ diventa

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{5n+n-3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{5n+1} = z + \dots$$ allora $z_0 = 0$ diventa

uno zero di ordine 1

② $\underbrace{e^{-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!}}$ mentre $e^{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

$$\frac{1-e^{-z}}{z} = \frac{1}{z}\left[1 - \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!}\right)\right] = \frac{1}{z}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n!}\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^n}{(n+1)!} \Rightarrow z_0 = 0 \text{ è ELIMINABILE}$$

③ $f(z) = \frac{e^{-\frac{1}{z^2}}}{z}$ dove sappiamo che $e^{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ dunque

$$e^{-\frac{1}{z^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{z^2}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^{-2n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{|n|!} z^{2n}$$

Dunque $\frac{e^{-\frac{1}{z^2}}}{z} = \sum_{n=-\infty}^{n} \frac{(-1)^n}{|n|!} z^{2n-1} \Rightarrow z_0 = 0$ è ESSENZIALE

④ $f(z) = z^3 \sin\frac{1}{z}$ perché $\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ dunque

$$\sin\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{-2n-1}}{(2n+1)!} \text{ e quindi } z^3 \sin\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{-2n-1+3} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2-2n} = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{(-1)^n}{(2|n|+1)!} z^{2n+2} \Rightarrow z_0 \text{ è ESSENZIALE}$$

⑤ $f(z) = \frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-3} \Rightarrow$

$\Rightarrow z_0 = 0$ è un POLO di ordine 3

Definizione! Sia z_0 una singolarità isolata. Chiameremo residuo di f in z_0 il valore del coefficiente $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R(z_0)} f(z)\,dz$ il Residuo di f in z_0 esso sarà indicato mediante $Res(f, z_0)$

L'integrale è fatto perché $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} f(z)\,dz$

PROPOSIZIONE! Sia n un intero positivo e sia z_0 un polo di ordine $\leq n$ per f. Allora vale la formula $Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z-z_0)^n f(z)$

Infatti, se consideriamo uno sviluppo in serie di Laurent di una funzione in polo di ordine n, allora $f(z) = \sum_{k=-n}^{+\infty} c_k (z-z_0)^k$, perciò

$$(z-z_0)^n f(z) = \sum_{k=-n}^{+\infty} c_k (z-z_0)^{k+n}$$ Derivo:

$$\frac{d}{dz}(z-z_0)^n f(z) = \left(c_{-m}(z-z_0)^{n-m} + c_{-m+1}(z-z_0)^{n-m+1} + \dots\right) =$$

$$= c_{-m}(n-m)(z-z_0)^{n-m-1} + \dots + c_{-1}(n-1)(z-z_0)^{n-2} \dots)$$ Derivo:

$$\frac{d^2}{dz^2}\left((z-z_0)^n f(z)\right) = c_{-m}(n-m)\cdot(n-m+1)(z-z_0)^{n-m-2} + \dots$$ Dunque

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} = 0 + 0 + \dots + c_{-1}(n-1)(n-2)\dots 1 \cdot (z-z_0)^{(n-1)-(n+1)} + \dots$$
$$= 0 + \dots + c_{n-1}(n-1)! + (z-z_0)[\ \ ]$$

Mando al limite:

$$\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z-z_0)^n f(z)\right) = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{(n-1)!}\left[c_{-1}(n-1)! + (z-z_0)(\ )\right] =$$

$$= c_{-1} + \lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)^{\to 0}}{(n-1)!}(\ \ ) = c_{-1}$$

Residuo di:

Ex: ① $f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$ in $z_0 = 0$ ⟹ uso la serie di Laurent

$$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{dunque} \quad \frac{\sin z}{z^3} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n-2}}{(2n+1)!}$$

perciò $c_{-1} = 0$ e dunque $\mathrm{Res}(f,0) = 0$

② $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{2-z}$ in $z_0 = 2$ (polo spostato) ⟹ dunque non uso l'espressione ma considero che è olomorfa. Sicché:

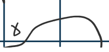
$$\mathrm{Res}(f,2) = \lim_{z\to 2}\frac{d}{dz}(z-2)f(z) = \lim_{z\to 2}(z-2)f(z) =$$

$$= \lim_{z\to 2}(z-2)\frac{e^{\frac{1}{z}}}{2-z} = -e^{\frac{1}{2}}$$

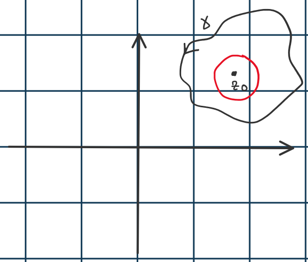
Metodo alternativo incomprensibile

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\varphi}{\psi}, z_0\right) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}$$

DEFINIZIONE: L'indice di avvolgimento di un circuito (curva chiusa) attorno ad un punto z_0 è il numero $\mathrm{ind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz$ e rappresenta il numero di giri che la curva compie attorno al punto z_0 girando in senso antiorario



di giri che la curva compie attorno al punto z_0 e girando in senso antiorario



TEOREMA DEI RESIDUI: Sia E un aperto connesso semplicemente (= senza buchi) e sia $f: E \setminus \{z_0, \dots, z_n\} \to \mathbb{C}$ olomorfa tranne che nelle singolarità isolate $z_0, \dots, z_n$. Sia γ una curva che racchiude al suo interno (CIRCUITO) le singolarità $z_0, \dots, z_n$.
Allora

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k)\, \mathrm{ind}(\gamma, z_k)$$

indice di avvolgimento

Dim: se $\gamma = C_R(z_0)$ e z_0 è l'unica singolarità isolata allora

$$\int_{C_R(z_0)} f(z) = \int_{C_R(z)} \sum c_n (z-z_0)^n dz = \int_{C_R(z_0)} c_{-1}(z-z_0)^{n-1} dz =$$

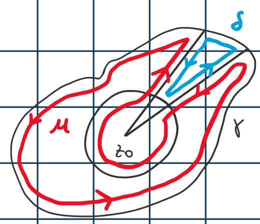
$$= c_{-1} \cdot 2\pi i = \mathrm{Res}(f, z_0)\, 2\pi i$$

Se si compiono più giri se $\gamma = C_R(z_0) \cup C_R(z_0 \dots \cup C_R(z_0)$ cioè unione di circonferenze dunque

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \mathrm{ind}(\gamma, z_0) \int_{C_R(z_0)} f(z) = 2\pi i\, f(z, z_0)\, \mathrm{ind}(\gamma, z_0)$$

Se vi è una singolarità e γ è un circuito qualsiasi allora

$$\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}\,dz = \int_{C_R} \frac{1}{z-z_0}$$



e meglio ancora

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{C_R(z_0)} f(z)\,dz$$

dunque $\int_\mu f(z)\,dz = 0 \qquad \int_\delta f(z)\,dz = 0$

$$\Downarrow$$

$$\int_{\mu \cup \delta} f(z)\,dz = 0 = \int_{\gamma \cup -C_R(z_0)} f(z)\,dt = 0 \Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = \int_{C_R(z_0)} f(z)\,dz =$$

$$= 2\pi i \cdot \mathrm{Res}(f, z_0) \Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\, \mathrm{ind}(\gamma, z_0) \cdot \mathrm{Res}(f, z_0)$$

In un altro caso con n curve:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=0}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\,dz =$$

con γ_k curve che circondano una stessa SINGOLARITÀ

$$= \sum^{n} 2\pi i\, \mathrm{Res}(f, z_n)\, \mathrm{ind}(\gamma_n, z_k)$$

$\int_\gamma \ldots \sum_{k=0} \int_{\gamma_k} \ldots$ una stessa SINGOLARITÀ

$$= \sum_{k=0}^{4} 2\pi i \, Res(f, z_k) \, ind(\gamma_k, z_k)$$

poiché $ind(\gamma_k, z_k) = ind(\gamma, z_k)$ allora

$$\int_\gamma f(z) = 2\pi i \sum_{k=0}^{4} Res(f, z_k) \, ind(\gamma, z_k)$$

Il teorema dei residui viene usato per gli integrali di seno e coseno:
Sia $F(x,y)$ una funzione razionale $F(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ e noi vogliamo calcolare $\int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t)\,dt$. Per farlo possiamo trasformarlo in un integrale complesso:

1) Usando le formule parametriche $\cos t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2}$ $\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$

2) Consideriamo l'integrale $\int_0^{2\pi} F\left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right) dt =$

$$= \int_{C_R(0)} g(z)\,dz$$

Es.: $\int_0^{2\pi} \frac{1}{3\sin t + \cos t}\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3\frac{e^{it} - e^{-it}}{2} + \frac{e^{it} - e^{-it}}{2}} =$

$$= 2i \int_0^{2\pi} \frac{dt}{6i + e^{it} - e^{-it} + ie^{it} + ie^{-it}} = 2i \int_0^{2\pi} \frac{dt}{6i + (1+i)e^{it} + (1-i)e^{-it}} =$$

per la parametrizzazione della circonferenza ho che $C_1(0): [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$
$z \longrightarrow e^{it}$

dunque $= 2i \int_{C_1(0)} \frac{z\,dz}{6i + (1+i)z + (i-1)z^{-1}} = 2i \int_{C_1(0)} \frac{z\,dz}{6iz + (1+i)z^2 + (i-1)}$ dove

mi chiedo quali siano gli zeri:

$$(1+i)z^2 + 6iz + (i-1) = 0 \implies z_{1,2} = \frac{-6i \pm \sqrt{(6i)^2 - 4(i+1)(i-1)}}{2(i+1)} =$$

$$= \frac{-6i \pm \sqrt{-28}}{2(i+1)} = \frac{-6i \pm 2i\sqrt{7}}{2(i+1)} = -3 \pm \sqrt{7} \left(\frac{i}{1+i}\right) \text{ dove}$$

Radice 1

$|z_1| = \left|\left(-3-\sqrt{7}\right)\left(\frac{i}{i+1}\right)\right| = (3+\sqrt{7}) \left|\frac{i}{1+i}\right|$ e dove $1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$ dunque

$i = e^{\frac{i\pi}{2}}$ dunque $\frac{i}{1+i} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ perciò $|z_1| = (3+\sqrt{7})\frac{\sqrt{2}}{2} > 1$

perciò una prima radice è FUORI dalla circonferenza unitaria

Radice 2

$|z_2| = (3-\sqrt{7})\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ quindi $3-\sqrt{7} \in (0, 3-\sqrt{4}) = (0,1)$

cioè appartiene alla CIRCONFERENZA

$|z_2| = (3-\sqrt{7})\,\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ quindi $3-\sqrt{7} \in (0, 3-\sqrt{7}) = (0,1)$

cioè appartiene alla CIRCONFERENZA

Dunque: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+\sin t+\cos t}\,dz = 2i \int_{C_1(0)} \underbrace{\frac{z}{6iz^2+(1+i)z+(1-i)}}_{=f(z)} = 2i\,\mathrm{Res}(f,z_2)\,2\pi i$

perciò $\displaystyle\mathrm{Res}(f,z_2) = \frac{z_2}{12iz+(1+i)}\Big|_{z=z_2} = \frac{(-3+\sqrt{7})\frac{i}{1+i}}{12\left[-3+\sqrt{7}\right]\frac{i}{1+i}+1+i}$

Es.: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\sin t}$ dove $\sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$ allora è pari a

$$\int_0^{2\pi} \frac{2i\,dt}{4i+e^{it}-e^{-it}} = \int_{C_1(0)} \frac{2i}{\underbrace{4i+z-\frac{1}{z}}_{\text{con } e^{iz}=z}} = 2i\int_{C_1(0)} \frac{z}{z^2+4iz-1}\,dz$$

perciò: $z^2+4iz-1=0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{-4i\pm 2\sqrt{5}i}{2} = -2i \pm 2\sqrt{5}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

per cui le due radici sono $\begin{cases} -2i-i\sqrt{3} \notin \text{circ.} \\ -2i+i\sqrt{3} \in \text{circ.} \end{cases}$

SINGOLARITÀ ALL'INFINITO: Sia $f: E\setminus\{z_0,\dots,z_n\} \to \mathbb{C}$ supponiamo che $\{z_0,\dots,z_n\} \subset B_R(z_0)$ e che pertanto f sia olomorfa su tutto $\mathbb{C}$ tranne $B_R(z_0)$ cioè f è olomorfa su un anello $(R,+\infty)$. Se pertanto $|z|>R$ allora vale che $f(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$. Se $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$

allora $g(z) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^{-n}$. Se $g(z)$ ha una singolarità essenziale, polare o eliminabile in $z_0=0$ diremo che f ha una singolarità, dello stesso tipo, all'infinito

RESIDUO ALL'INFINITO: $\displaystyle\mathrm{Res}(f,z_0) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R(0)} f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{-C_R(0)} f(z)\,dz$

PROPOSIZIONE: $\displaystyle\mathrm{Res}(f,\infty) = -\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2}\,f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$

Dim: $\displaystyle\mathrm{Res}(f,\infty) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R(0)} f(z)\,dz = \int_{-C_R(0)} f(z)\,dz = -\int_0^{2\pi} f(e^{it})\,d(e^{it}) =$ percorre in senso orario

$$= \int_0^{2\pi} f(e^{-it})\,d(e^{-it}) \text{ dunque}$$

$\displaystyle\int_{-C_R(0)} f = \int_0^{2\pi} f(e^{-it})\,d(e^{-it}) =$ dove se $e^{-it} = \frac{1}{e^{it}}$ allora $= \displaystyle\int_0^{2\pi} f\left(\frac{1}{e^{it}}\right) d\left(\frac{1}{e^{it}}\right) =$

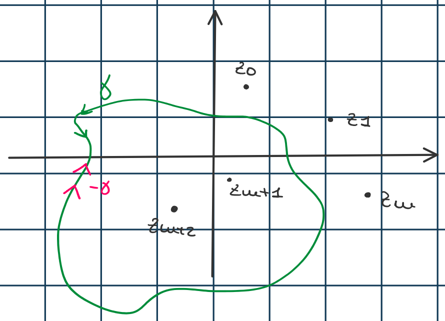
$$= \int_{C_R(0)} f\left(\frac{1}{t}\right) d\left(\frac{1}{t}\right) = \int_{C_R(0)} f\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right) dz = \int_{C_R(0)} \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) dt$$

dove $e^{it} = z$

Inoltre $Res(f,\infty) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R(0)} f = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R(0)} \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = -Res\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$

TEOREMA DEI RESIDUI ALL'INFINITO

Sia $f : \mathbb{C} \setminus \underbrace{\{z_0, \dots z_n\}}_{\text{SINGOLARITÀ}} \to \mathbb{C}$ olomorfa ovunque tranne in $\{z_0, \dots z_n\}$ se γ è una curva chiusa per cui le singolarità $\{z_0, \dots z_m\}$ si trovano al di fuori di γ allora $\oint_{-\gamma} f(z)dz = 2\pi i\left(\sum_{k=0}^{m} Res(f, z_k) + Res(f,\infty)\right)$



Inverto la curva γ in modo che inglobi le singolarità $\{z_0, \dots z_m\}$ escluse da γ che invece comprende $\{z_{m+1}, \dots z_n\}$

Corollario! se considero la somma $\underbrace{\sum_{k=0}^{n} Res(f, z_k)}_{\text{di tutte le singolarità}} + \underbrace{Res(f,\infty)}_{= -Res\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{t}\right), 0\right)} = 0$

Integrazione impropria!

Supponiamo di voler integrare $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{\substack{R\to+\infty \\ S\to+\infty}} \int_{S}^{R} \frac{1}{1+x^2} dx$

Supponendo poi che l'integrale esista allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2} dx$$

ATTENZIONE! $\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x) dx = VP \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx =$ valore principale

$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ solo se questo esiste altrimenti questa eguaglianza non esiste

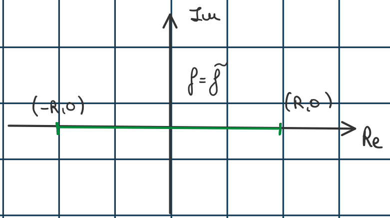
es. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \leq$ che esiste perché

$$\leq \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

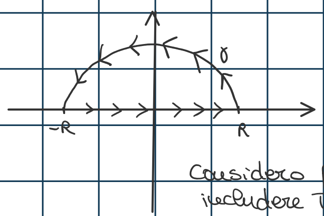
Nel campo complesso posso considerare $\tilde{f}(z) = \frac{1}{1+z^2}$ con $\tilde{f} : \mathbb{C} \setminus \{z_0, z_1\} \to \mathbb{C}$

che è ESTENSIONE di $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ di campo complesso

Allora per $R>0$ $\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \int_{[-R,R]} \tilde{f}(z)\,dz$



Perciò $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{R \to +\infty} \int_{[-R,R]} \tilde{f}(z)\,dz = \lim_{R \to 0} \int_{[-R,R]} \frac{1}{1+z^2}\,dz$



Considero R talmente grande da includere tutti i residui

γ è un circuito dunque

$$\int_{\gamma} \tilde{f}(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Res}(\tilde{f}, z_k)$$ dove $\{z_0, \dots z_n\}$ sono tutte singolarità al finito di f

Per $R>>0$ allora $\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \int_{[-R,R]} \tilde{f}(z)\,dz = \int_{\gamma} \tilde{f} - \int_{C_R(0)} \tilde{f} =$

$$= 2\pi i \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Res}(\tilde{f}, z_n) - \int_{C_R(0)} \tilde{f}$$

Ottengo:

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2\pi i \left[\operatorname{Res}(f, z_0) + \operatorname{Res}(f, z_1)\right] - \int_{C_R(0)} \tilde{f}$$

Caso particolare (mezza circonferenza):

$$\left| \int_{\frac{1}{2}C_R(0)} \tilde{f} \right| = \left| \int_{\frac{1}{2}C_R(0)} \frac{1}{1+z^2}\,dx \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{1}{1+(Re^{it})^2}\,d(Re^{it}) \right| = \int_0^{\pi} \left| \frac{R}{1+R^2 e^{2it}}\,d(e^{it}) \right| =$$

$$= \int_0^{\pi} \left| \frac{R}{R^2 e^{2it}}\,de^{it} \right| \leq \frac{R}{R^2} \int_0^{\pi} (e^{2it}\,de^{it}) \leq \frac{1}{R} \xrightarrow[\text{se } R \to +\infty]{\text{tende a}} 0$$

NON NEGATIVO

Dunque

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2\pi i \left(\operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+x^2}, z_0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^2}, z_1\right) \right) + \frac{1}{R}(\text{numero}) \Rightarrow$$

$\to 0$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2\pi i \left(\operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^2}, z_0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^2}, z_1\right) \right)$$

dove i poli sono $z_0 = i$ e $z_1 = -i$ per cui calcolo i residui solo dei poli con $\operatorname{Im} > 0$ (cioè dentro la curva);

- $\operatorname{Res}\left(\frac{1}{1+z^2}, i\right) = \left.\frac{1}{2z}\right|_i = \frac{1}{2i}$ $\Big\}$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi$

Riassunto procedimento:

1. Passaggio dall'integrale improprio al valore principale (l'integrale improprio esiste)
2. Generalizzazione della funzione al campo complesso
3. Proviamo che $\displaystyle\int_{C_R(0)\cap\{\operatorname{Im}>0\}} \tilde{f}(z)\,dz \longrightarrow 0$

Allora $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z_k)>0} \operatorname{Res}(\tilde{f}, z_k)$ $\Big\{$ La somma riguarda tutti e i soli residui aventi parte immaginaria >0

NOTA: Un metodo simile vale anche per

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ dove $f(x) \to +\infty$ e $x \to c \in (a,b)$

Dunque

$$\int_a^{c^-} f(x)\,dx + \int_{c^+}^{b} f(x)\,dx$$

Se $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ converge $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = PV\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \right)$$

Ci chiediamo:

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R(0)\cap\{\operatorname{Im}>0\}} f(z)\,dz \overset{?}{\longrightarrow} 0 \quad \text{quando } R \to +\infty$$

LEMMA DEL GRANDE CERCHIO: Sia Ω un aperto illimitato e sia $f: \Omega \to \mathbb{C}$ tale che

$$\lim_{\substack{|z|\to+\infty \\ z\in\mathbb{R}}} z f(z) = 0$$

Allora $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R(0)\cap\Omega} f(z)\,dz = 0$

Dim: $\Omega = \mathbb{C}$

$$\left| \int_{C_R(0)} f(z)\,dz \right| \underset{\theta \to Re^{i\theta}}{=} \left| \int_0^{2\pi} R f(Re^{i\theta})\, d e^{i\theta} \right| = \left| \int_0^{2\pi} i Re^{i\theta} f(Re^{i\theta})\,d\theta \right| \le$$

Dim: $\left|\int_{C_R(0)} f(z)\,dz\right| \underset{\substack{\theta \to Re^{i\theta} \\ \text{PARAMETRIZZAZIONE}}}{=} \left|\int_0^{2\pi} R f(Re^{i\theta})\, d e^{i\theta}\right| = \left|\int_0^{2\pi} i R e^{i\theta} f(Re^{i\theta})\, d\theta\right| \leq$

$\Omega = \mathbb{C}$

$$\leq \int_0^{2\pi} \underbrace{|Re^{i\theta} f(Re^{i\theta})\, d\theta|}_{\varepsilon(R)} < 2\pi \cdot \varepsilon(R) \xrightarrow{\text{se } R \to +\infty} 0$$

COROLLARIO: se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione si estende ed $\tilde{f}: \mathbb{C} \setminus \{z_0, \dots z_n\} \to \mathbb{C}$ olomorfa e se $\lim_{|z| \to \infty} z f(z) = 0$ allora

$$VP \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{Im(z_k) > 0} Res(\tilde{f}, z_k)$$

Dove la somma al secondo termine è fatta con tutti e soli i termini z_k aventi parte immaginaria > 0

LEMMA DEL PICCOLO CERCHIO: nelle ipotesi del lemma del grande cerchio, se $\lim_{\substack{|z| \to 0 \\ z \in \Omega}} z f(z) = 0$ allora $\lim_{R \to 0} \int_{C_R \cap \Omega} f(z)\, dz = 0$

ESEMPIO: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\, dx \Rightarrow$ converge assolutamente (e dunque anche semplicemente

Dunque $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\, dx = VP \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\, dx$

estensione nel piano complesso

Basta provare che $\lim_{|z| \to +\infty} z f(z) = 0$ allora $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\, dx = 2\pi i \sum_{Im(z_k) > 0} Res(f, z_k)$

$f(z) = \frac{z^2}{z^4+1} \Rightarrow z f(z) = \frac{z^3}{z^4+1} \xrightarrow{|z| \to +\infty} 0$

Inoltre $z^4+1=0$ ha 4 radici per cui:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\, dx = 2\pi i \left(Res\left(f(z), e^{i\frac{\pi}{4}}\right) + Res\left(f, e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)\right)$$

Calcolo:

$Res(f, z_0) = \left.\frac{z^2}{4z^3}\right|_{e^{i\pi/4}}$, $Res(f, z_0) = \left.\frac{z^2}{4z^4}\right|_{e^{3i\pi/4}} \Rightarrow$

$\Downarrow$

$Res(f, z_0) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{-1+i}$

$\Downarrow$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\, dx = 2\pi i \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\frac{1}{1+i} + \frac{1}{i-1} \right] = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

ESEMPIO:
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ R \to +\infty}} \int_\varepsilon^1 \frac{\sin x}{x}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ R \to +\infty}} \int_\varepsilon^R \frac{\sin x}{x}\, dx$$

In analisi complessa invece è più semplice da risolvere; si deve tenere conto che in $z_0 = 0$ vi è un polo

$\frac{\sin x}{x}$ è pari dunque

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

Poiché $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin z}{z}\, dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iz}}{z\, 2i}\, dz - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iz}}{z\, 2i}\, dz =$$

$$= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iz}}{z}\, dz - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z \cdot e^{iz}}\, dz =$$

$$= \frac{1}{2i}$$

Da finire

Lemma di Jordan: Siano R e Ω dei coefficienti >0. Sia ρ una funzione reale da 0 a 2π a valori $(0, +\infty)$ di classe C^1. Sia $\gamma(t)$ la curva definita mediante $\gamma(t) = \rho(t) \cdot e^{it}$ con $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$. $\gamma(t) = \rho(t) e^{it}$ è l'espressione in coordinate polari di una curva. Allora, se f è una funzione continua allora vale

$$\left| \int e^{i\omega z} f(z)\, dz \right| \le \text{cost}(\gamma) \sup |f(z)|$$

vale

$$\left| \int_\gamma e^{i\omega z} f(z)\,dz \right| \leq \frac{\cos t(\gamma)}{\omega} \sup_{z\in\gamma} |f(z)|$$

Inoltre se $\gamma(t) = R\rho(t)e^{it}$ allora il

$$\lim_{R\to+\infty} \left| \int_{\gamma_R} e^{i\omega z} f(z)\,dz \right| = 0$$

Se $\gamma_R = C_R$, $f(z) = \frac{1}{z}$ continua su γ_R

allora $\left| \int_{C_R} e^{iz} f(z)\,dz \right| \leq \frac{C_R}{\omega} \sup_{z\in C_R} |f(z)| \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$

FUNZIONI ESTENDIBILI:

1) $f(x) = e^x$ $\quad f: \mathbb{R} \to (0,+\infty)$

$\quad f^{-1}: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$

dunque è invertibile

$y = e^x$ ha un'unica soluzione e dunque è ben definita l'applicazione $y \to x$; $y = e^x$

dunque $\log y = x$

$f^{-1}(x) = \log y$

Nel campo complesso non può essere esteso il logaritmo

es. Trovare $z \in \mathbb{C}$ tale che $z = e^w$ genera infinite soluzioni se non si introduce una limitazione del tipo $w = u + iv$ definire come $\begin{cases} u = \log|z| \\ v = \theta + 2k\pi \Rightarrow \arg(z) + 2k\pi \end{cases}$

DUNQUE: l'importante è fare una restrizione che superi un giro completo dunque $\log z = \log|z| + i\arg(z)$ e il

logaritmo è una funzione multivoca. Tuttavia

si può operare una restrizione a $[0, 2\pi]$

piano reale

ESEMPIO $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^2}\,dx = \lim_{\substack{R\to+\infty \\ \varepsilon\to 0^+}} \int_\varepsilon^R \frac{\log x}{1+x^2}\,dx$

oppure

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^2}\,dx$ nel piano complesso:

$$f(z) = \ln|z| + i\theta \quad \text{con } \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$$

$$\int_\varepsilon^R \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = \int_{[\varepsilon, R]} \frac{f(z)}{z^2+1}\,dz$$

Da finire

(2) $z^n = w \Rightarrow$ l'operazione inversa è una radice ma non è una funzione invertibile e definita univocamente

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

9. Esercitazione 3

giovedì 3 dicembre 2020 15:04

TEORIA:

Formula di Cauchy: se $f(z)$ è analitica all'interno e sulla linea semplice e chiusa γ (qualunque essa sia) e z_0 è un punto interno a γ, allora

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \begin{cases} 0 & \text{se } f(z) = (z-z_0)\,g(z) \\ 2\pi i \cdot f(z_0) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

NOTA: γ è percorsa in senso antiorario

Inoltre si dimostra che

Secondo teorema di Cauchy:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

CASO DI UNA SOLA DISCONTINUITÀ z_0

Proprietà: se una funzione di variabile complessa $f(z)$ ammette la derivata prima, allora ammette derivate di qualsiasi ordine (cosa non sempre vera per le funzioni di variabile reale)

NOTA: assumendo tutti i sensi di percorrenza antiorari, l'integrale esteso al contorno esterno è uguale alla somma di quelli estesi ai contorni interni

Definizione: se $f(z)$ è analitica all'interno e su una curva chiusa e semplice γ, ad eccezione di un numero finito di poli $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$ allora

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}(f, \alpha_j)$$

dove

dove

$$\text{Res}(f,\alpha_j) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to\alpha_j} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z-\alpha_j)^n \cdot f(z)\right)$$ con n pari all'ordine del polo

ESERCIZI

① $$\oint_\gamma \frac{z^2(2z-1)^2}{(z-2)^2}\,dz$$ con $\gamma: (x-2)^2+y^2=1$ circonferenza di centro $(2,0)$ e raggio 1

MOLTEPLICITÁ

Il punto di discontinuità $z_0=2$ è interno al dominio ed è un $\boxed{\text{polo doppio}}$

dunque l'integrale è pari a $2\pi i\,\text{Res}(f,2) = 2\pi i \dfrac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 2}\dfrac{d}{dz}\left((z-2)^2\dfrac{z^2(2z-1)^2}{(z-2)^2}\right) =$

$= 2\pi i \cdot 84 = 168\pi i$

② $$\oint_\gamma \frac{dz}{(z^2+1)(z-1)^2}$$ con $\gamma: |z-(1+i)|^2 = 2$

I poli in questo caso sono $(z^2+1)(z-1)^2=0$
- $z=1$ (POL. 2, INTERNO)
- $z=i$ (POL. 1, INTERNO)
- $z=-i$ (POL. 1, ESTERNO)

Esplicito la curva γ:

$\gamma: |x+iy-(1+i)|^2=2 \Rightarrow |(x-1)+i(y-1)|^2=2 \Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=2$ Circonferenza di centro $(1,1)$ e raggio $\sqrt{2}$

Pertanto l'integrale è pari a $2\pi i\,[\text{Res}(f,1)+\text{Res}(f,i)]$

Dunque ottengo ciò:

- $\text{Res}(f,1) = \dfrac{1}{(2-1)!}\cdot\lim_{z\to1}\dfrac{d}{dz}\left((z-1)^2\dfrac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}\right)=$

$$= \lim_{z\to1}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z^2+1}\right) = \lim_{z\to1} -\frac{2z}{(z^2+1)^2} = -\frac{1}{2}$$

- $\text{Res}(f,i) = \dfrac{1}{(1-1)!}\cdot\lim_{z\to i}(z-i)\dfrac{1}{(z^2+1)(z-1)^2} = \lim_{z\to i}\dfrac{1}{(z+i)(z-1)^2} =$

$$= \frac{1}{2i(i-1)^2} = \frac{1}{2i(i^2-2i+1)} = -\frac{1}{4i^2} = \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2i\,(i-1)^2} = \frac{1}{2i\,(i^2-2i+1)} = -\frac{1}{4i^2} = \frac{1}{4}$$

da cui ottengo che:

$$\oint_\gamma = 2\pi i \left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right] = 2\pi i \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi i}{2}$$

3) $\displaystyle\oint_\gamma \frac{z^2}{(z^2+1)(z-2)}\,dz$ con $\gamma : |z| = 3$

Esplicito γ : $|z| = 3 \Rightarrow |x+iy| = 3 \Rightarrow |x+iy|^2 = 9 \Rightarrow x^2+y^2 = 3$ circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 3

I poli sono $(z^2+1)(z-2) \neq 0$ $z=i$, $z=-i$, $z=2$ } interni di molt. pari a 1

Dunque avrò che

$$\oint_\gamma = 2\pi i \left[\mathrm{Res}(f,i) + \mathrm{Res}(f,-i) + \mathrm{Res}(f,2)\right] =$$

$$= 2\pi i \left[\frac{i^2}{2i(i-2)} + \frac{i^2}{-2i(-i-2)} + \frac{4}{5}\right] = 2\pi i \left[\frac{i}{2(i-2)} + \frac{i}{2(i+2)} + \frac{4}{5}\right] =$$

$$\frac{i}{2(i-2)} \to \frac{i(i+2)}{2(i^2-4)} = \frac{i+2i}{-10} \qquad \frac{i}{2(i+2)} \to \frac{i(i-2)}{2(i^2-4)} = \frac{i^2-2i}{-10}$$

$$= 2\pi i \left[\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\right] = 2\pi i$$

4) $\displaystyle\oint_\gamma \frac{\sin(z+1)}{z(z+1)}\,dz$ con $\gamma : |z| = 3$

Esplicito γ : $x^2+y^2 = 9$ circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio pari a 3

I poli sono $z(z+1) \neq 0$ $z=0$, $z=-1$ } interni e di molt. pari a 1

Dunque avrò

$$\oint_\gamma = 2\pi i \left[\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,1)\right] \quad \text{dove}$$

- $\displaystyle \mathrm{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} \frac{\sin(z+1)}{z+1} = \sin(1)$

- $\text{Res}(f, -1) = \lim_{z \to -1} \dfrac{\sin(z+1)}{z} = 0$ SINGOLARITÀ ELIMINABILE $\downarrow$ non crea residuo $\Big\}$ già osservando la funzione si ha che $z = -1$ annulla den. e num.

Dunque $\displaystyle\oint_\gamma = 2\pi i \sin(1)$

(5) $\displaystyle\oint_\gamma \frac{z(z+1)}{\sin(z+1)}\,dz$ con $\gamma : |z| = 3 \Rightarrow \gamma : x^2+y^2=9$ circ. di centro $(0,0)$ e $r=3$

I punti di discontinuità sono:

$\sin(z+1) = 0 \Rightarrow z+1 = k\pi \Rightarrow z = k\pi - 1$ ma solo $z_0 = -1$ e $z_1 = \pi - 1$ sono INTERNI

Dunque
$$\oint_\gamma = 2\pi i \left[\text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(f, z_1)\right]$$

dove

- $\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to -1} z(z+1) \dfrac{z+1}{\underbrace{\sin(z+1)}_{\to 1}} = 0$ SINGOLARITÀ ELIMINABILE

- $\text{Res}(f, z_1) = \lim_{z \to \pi - 1} (z - \pi + 1) \cdot \dfrac{z(z+1)}{\sin(z+1)} = -(\pi - 1)\pi = \pi(1-\pi)$

ricordando che $\lim_{x \to \pi} \dfrac{\sin x}{x - \pi} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{H}{\Longrightarrow} \lim_{x \to \pi} \dfrac{\cos x}{1} = \cos \pi = -1$

Quindi
$$\oint_\gamma = 2\pi i \pi (1-\pi) = 2\pi^2 i (1-\pi)$$

(6) $\displaystyle\oint_\gamma \frac{dz}{e^z + 1}$ con $\gamma : |z - 2i| = 2$

Ricordando che $z = x+iy$ si ha che $e^z = e^x \cdot e^{iy}$ dunque $e^{iy} = \cos y + i \sin y$

dove se $x = 0$ e $y = \pi(2k+1)$, con $k \in \mathbb{Z}$, si ha che $e^z = -1$ e $z_k = \pi(2k+1)i$

Esplicito la curva $\gamma : |x+iy-2i| = 2 \Rightarrow |x + i(y-2)| = 2 \Rightarrow x^2 + (y-2)^2 = 4$

circonferenza di centro $(0,2)$ e raggio 2 circonferenza di centro $(0,2)$ e raggio 2

I poli sono $e^z = -1 \Rightarrow z_0 = \pi i$ interno con molt. = 1

Quindi $\oint_\gamma = 2\pi i \, Res(f, \pi i) = 2\pi i \lim_{z \to \pi i} \frac{z - \pi i}{e^z + 1} = 2\pi i(-1) = -2\pi i$

---

7) $\oint_\gamma \tan(z)dz$ dove $\gamma : |z| = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$

Ricordiamo che $\tan(z) \Rightarrow z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$

I poli sono $\cos z = 0 \Rightarrow z_0 = \frac{\pi}{2}$ e $z_{(-1)} = -\frac{\pi}{2}$

da cui ottengo

$$\oint_\gamma = 2\pi i \left[Res(f, z_0) + Res(f, z_{(-1)}) \right] \text{ dove}$$

- $Res(f, z_0) = \lim_{z \to \frac{\pi}{2}} \left(z - \frac{\pi}{2}\right) \tan(z) = -1$

ricordando che $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan x = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\cot x} \overset{H}{=} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -1$

- $Res(f, z_{(-1)}) = -1$

Dunque $\oint_\gamma = -4\pi i$

TEORIA: INTEGRALI GONIOMETRICI

Gli integrali goniometrici sono del tipo $\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$

PROCEDIMENTO: 1) si usano la formula di Eulero di $e^{i\theta}$ e si effettua la sostituzione

$$z = e^{i\theta} \Rightarrow d\theta = -i\frac{dz}{z}$$

$$dz = i \cdot e^{i\theta} d\theta = iz\,d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{i \cdot z} = \frac{i\,dz}{i^2 z} = -\frac{i\,dz}{z}$$

2) ci si riconduce ad un integrale nel piano complesso lungo una circonferenza di raggio unitario

3) si calcola l'integrale con il teorema dei residui

ESERCIZI

1) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+3\cos\theta}$ dove $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$

Se sostituisco ottengo $\oint_C -i\frac{dz}{z} \frac{1}{5+\frac{3}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)} = -i\oint_C \frac{dz}{z\left(5+\frac{3}{2}z+\frac{3}{2z}\right)} =$

circonferenza goniometrica di $C(0,0)$ e $r=1$

$= -i\oint_C \frac{dz}{\cancel{z}\cdot\frac{10z+3z^2+3}{2\cancel{z}}} = -i\oint_C \frac{2dz}{3z^2+10z+3} = -2i\int \frac{dz}{3z^2+10z+3}$

I punti di non derivabilità sono $3z^2+10z+3=0$ $\begin{cases} z_1 = -3 & \text{esterno} \\ z_2 = -\frac{1}{3} & \text{interno con molt.} = 1 \end{cases}$

Dunque ottengo $\oint_C = 2\pi i \,\text{Res}\left(f, -\frac{1}{3}\right) = 2\pi i \lim_{z\to -\frac{1}{3}} \frac{\left(z+\frac{1}{3}\right)}{\left(z+\frac{1}{3}\right)(z+3)3} =$

$= 2\pi i \lim_{z\to-\frac{1}{3}} \frac{1}{(z+3)3} = 2\pi i \frac{\cancel{3}}{8\cdot\cancel{3}} = \frac{\pi}{4}\cdot i$

Dunque $-2i\oint_C = -2i\cdot\frac{\pi}{4}i = \frac{\pi}{2}$

il risultato finale DEVE essere un numero REALE

2) $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(\cos\theta+2)^2}$ dove se $z=e^{i\theta}$ allora $d\theta = -i\frac{dz}{z}$ e $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$

Dunque posso scrivere $\oint_C -i\frac{dz}{z}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+2\right)^2} = -i\oint_C \frac{dz}{z\left(\frac{1}{2}\frac{z^2+1}{z}+2\right)^2} =$

$= -i\oint \frac{dz}{\;} = -4i\int \frac{z\,dz}{\;}$

$$= -i \oint_C \frac{dz}{z\left(\frac{z^2+1+4z}{2z}\right)^2} = -4i \oint_C \frac{z\,dz}{(z^2+4z+1)^2}$$

I punti di discontinuità sono $z^2+4z+1=0$

$z_1 = -2+\sqrt{3}$ interno con mod. 1

$z_2 = -2-\sqrt{3}$ esterno con mod. 1

Dunque ottengo $-4i\oint_C = -4i\,2\pi i \cdot Res(f, -2+\sqrt{3})$

Calcolo il residuo $Res(f,-2+\sqrt{3}) = \lim_{z\to -2+\sqrt{3}} \frac{d}{dz}\left[(z+2-\sqrt{3})^2 \cdot \frac{z}{(z+2-\sqrt{3})^2(z+2+\sqrt{3})^2}\right] =$

$$= \lim_{z\to -2+\sqrt{3}} \frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(z+2+\sqrt{3})^2}\right] = \lim_{z\to -2+\sqrt{3}} \frac{(z+2+\sqrt{3})^2 - 2z(z+2+\sqrt{3})}{(z+2+\sqrt{3})^4} =$$

$$= \lim_{z\to -2+\sqrt{3}} \frac{\cancel{(z+2+\sqrt{3})}(z+2+\sqrt{3}-2z)}{(z+2+\sqrt{3})^{\cancel{4}\,3}} = \frac{4}{(2\sqrt{3})^3} = \frac{4}{{}^{2}\cancel{8}\cdot 3\sqrt{3}}$$

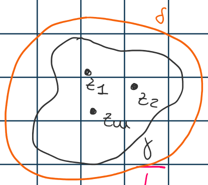
Dunque ottengo che

$$-4i\oint_C = -4i\cdot 2\pi i \cdot Re(f, -2+\sqrt{3}) = -4i\cdot \cancel{2}\pi i \cdot \frac{1}{{}_{3}\cancel{8}\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

10. Esercitazione 4

lunedì 14 dicembre 2020 12:25

TEORIA: RISOLUZIONE DI INTEGRALI IMPROPRI

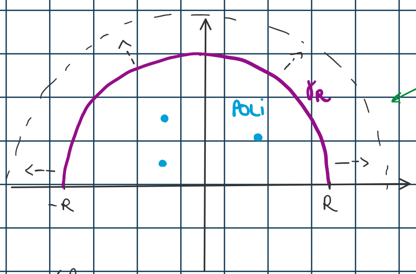


$$\underbrace{\oint_\gamma f(z)\,dz}_{\text{INTEGRALE CURVILINEO}} = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}(f, z_j)$$

qualsiasi sia il circuito chiuso γ, la somma dei residui e l'integrale è sempre uguale

INOLTRE: Anche la circuitazione lungo δ si calcola con la stessa somma poiché circonda gli stessi poli

LEMMA DEL GRANDE CERCHIO:



incremento il raggio sempre di più

$$\oint f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(z)\,dz + \int_{\gamma R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}(f, z_j)$$

DIVENTA

Poiché:

$$\boxed{\int_{-R}^{R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x+iy)\,(dx+i\,dy) = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx}$$

INTEGRALE IMPROPRIO

$$\lim_{R\to+\infty}\left[\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right] = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}(f, z_j)$$

DIVENTA

Se:

L'integrale improprio lungo x è convergente

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \ell$$

All'aumentare del raggio, l'integrale curvilineo della funzione a var. complessa tende a 0

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}(f, z_j)}$$

ATTENZIONE!

- Non vi devono essere poli sull'asse x
- La restrizione della funzione lungo l'asse delle x deve dar luogo ad un integrale che sia convergente
- La funzione deve dar luogo, nel piano complesso generico, ad un integrale curvilineo che tende a zero se $R\to+\infty$

!!! UN INTEGRALE IMPROPRIO PUÒ ESSERE CALCOLATO SFRUTTANDO LA SOMMA DEI RESIDUI

!!! UN INTEGRALE IMPROPRIO PUÒ ESSERE CALCOLATO SFRUTTANDO LA SOMMA DEI RESIDUI

Procedimento: ① L'integrale reale converge? ② L'integrale curvilineo con $R \to +\infty$ è pari a zero?

CRITERI DI CONVERGENZA:

① COND. NECESSARIA MA NON SUFFICIENTE:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \underset{\not\Leftarrow}{\overset{\text{se converge allora}}{\Longrightarrow}} \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$$

es. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx \overset{\text{converge}}{\not\Leftarrow} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Infatti $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c \to +\infty} \ln|c| = +\infty$

es. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n}\,dx$ CONVERGE CON $n > 1$

Infatti $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n}\,dx = \lim_{c \to +\infty} \frac{1}{(1-n)c^{n-1}} - \frac{1}{1-n} = \frac{1}{n-1}$

② CRITERIO DEL CONFRONTO:

Avendo $0 \leq f(x) \leq g(x)$ allora $0 \leq \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$

Per cui se

a) $\underbrace{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx}_{\text{DIVERGE}} \Longrightarrow \underbrace{\int_a^{+\infty} g(x)\,dx}_{\text{DIVERGE}}$

b) $\underbrace{\int_a^{+\infty} g(x)\,dx}_{\text{CONVERGE}} \Longrightarrow \underbrace{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx}_{\text{CONVERGE}}$

es. $0 < \frac{e^{-x}}{x^2} < \frac{1}{x^2} \quad \forall x \in [1, +\infty)$

Per cui $0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x^2}\,dx < \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$

Poiché $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ CONVERGE allora anche $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x^2}\,dx$ CONVERGE

③ CRITERIO DEL CONFRONTO ASSOLUTO:

Se $\left| \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ allora

se $\int_a^{+\infty} |f(x)\,dx|$ CONVERGE allora anche $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ CONVERGE

(ma non sempre vale il contrario)

se $\int_a |f(x)|\,dx$ converge allora anche $\int_a f(x)\,dx$ converge

(ma non sempre vale il contrario)

es. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| dx \;\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}\; \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$

DIVERGE — CONVERGE

es. $\displaystyle\left|\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx\right| \le \int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx \le \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$

CONVERGE — CONVERGE

COME ESTENDERE LA FUNZIONE AL CAMPO COMPLESSO:

① Rapporto fra polinomi: $\dfrac{P_1(x)}{P_2(x)} = \dfrac{P_1(z)}{P_2(z)}$ $\xrightarrow{\text{INOLTRE}}$ $\left|\dfrac{P_1(z)}{P_2(z)}\right| \le \dfrac{L}{R^k}$

con $k = P_2 - P_1$ e $k \ge 1$ cioè grado$(P_2) >$ grado(P_1)

② Rapporto fra polinomi + goniometrica: $\left.\begin{array}{l} \dfrac{P_1(x)}{P_2(x)}\cos(\alpha x) \\ \dfrac{P_1(x)}{P_2(x)}\sin(\alpha x) \end{array}\right\}$ $\dfrac{P_1(z)}{P_2(z)} e^{i\alpha z}$ $\xrightarrow{\text{INOLTRE}}$ $\left|\dfrac{P_1(z)}{P_2(z)}\right| \le \dfrac{L}{R^k}$

con $k = P_2 - P_1$ e $k > 0$ cioè grado$(P_2) \ge$ grado(P_1)

RISOLUZIONE INTEGRALI IMPROPRI

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{m} Res(f, z_j)}$$

$$\lim_{R\to+\infty} \oint_\gamma \frac{P_1(z)}{P_2(z)}dz = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{m} Res(f, z_j) = A + iB$$

Poiché si tratta di int. reali: { se $\boxed{B = 0}$ è CORRETTO $\quad \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = A}$

RISOLUZIONE INTEGRALI IMPROPRI

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{m} Res(f, z_j)}$$

$$\lim_{R\to+\infty} \oint_\gamma \frac{P_1(z)}{P_2(z)}dz = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{m} Res(f, z_j) = A + iB$$

I calcoli sono sbagliati !!!! se $\boxed{B \ne 0}$ HO SBAGLIATO! $\quad \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = A}$

RISOLUZIONE DI INT. IMPROPRI:

① $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}\,dx$ { È un rapporto fra polinomi dove grado (num) = 2 e grado (den) = 6 } Dunque l'integrale è convergente poiché può essere maggiorato. Anche la corrispettiva complessa lo sarà

Trovo i poli della complessa $\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)} \Longrightarrow$ $z_0 = i$ molt. 2, $z_1 = -i$ molt. 2

$z_2 = -1+i$ molt. 1, $z_3 = -1-i$ molt. 1

$\Downarrow$

Di questi, devo considerare solo quelli di **IMMAGINE POSITIVA**

Dunque $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}\,dx = 2\pi i\left[\mathrm{Res}(f, z_0) + \mathrm{Res}(f, z_2)\right]$

molt. 2 = derivata da fare

$(z - \text{polo})^{\text{molt.}}$

$\mathrm{Res}(f, z_0) = \mathrm{Res}(f, i) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left((z-i)^2 \frac{z^2}{(z-i)^2(z+i)^2(z^2+2z+2)}\right) = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{(z+i)^2(z^2+2z+2)}\right) = \frac{9i+12}{100}$

$\mathrm{Res}(f, z_2) = \mathrm{Res}(f, i-1) = \lim_{z\to i-1} \frac{(z-(i-1))z^2}{(z^2+1)^2(z-i+1)(z+i+1)} = \lim_{z\to i-1}\frac{z^2}{(z^2+1)^2(z+i+1)} = \frac{i^2-2i+1}{(i^2-2i+1+1)^2(i-1+i+1)} =$

$= \frac{-2i}{(1-2i)^2\cdot 2i} = \frac{1}{3+4i}\frac{(3-4i)}{(3-4i)} = \frac{3-4i}{25}$

Dunque $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)}\,dx = 2\pi i\left[\mathrm{Res}(f, z_0) + \mathrm{Res}(f, z_2)\right] = 2\pi i\left(\frac{9i+12}{100} + \frac{3-4i}{25}\right) = \frac{7}{50}\pi$

2) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^6+1}$ Se un estremo $\neq \pm\infty$ allora devo vedere se ha proprietà particolari. Ad esempio, qui $\frac{1}{x^6+1}$ è pari cioè $f(-x) = f(x)$ e perciò $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^6+1} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^6+1}\,dx$

Ho che l'integrale converge (basta vedere il grado di numeratore e denominatore)

Calcolo i poli: $z^6 = -1 = e^{i(\pi+2k\pi)} \Rightarrow z = \sqrt[6]{-1} = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\right)}$

dunque:

$k=0 \Rightarrow z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$ molt. 1

$k=1 \Rightarrow z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ molt. 1

$k=2 \Rightarrow z_2 = e^{i\frac{5}{6}\pi} = \cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi$ molt. 1

dove $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, $z_1 = i$, $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ dunque

Hanno tutti parte immaginaria positiva. Perciò:

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^6+1}\,dx = 2\pi i\left[\mathrm{Res}(f, z_0) + \mathrm{Res}(f, z_1) + \mathrm{Res}(f, z_2)\right]$

$\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{6}}} \left(z - e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\cdot\frac{1}{z^6+1} \overset{H}{=} \lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{6}}}\frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6}e^{-i\frac{5}{6}\pi} =$

$= \frac{1}{6}\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right] = \frac{1}{6}\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right] = -\frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{i}{12}$

$\mathrm{Res}(f, z_1) = \lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{2}}}\left(z - e^{i\frac{\pi}{2}}\right)\cdot\frac{1}{z^6+1} \overset{H}{=} \lim_{z\to e^{i\frac{\pi}{2}}}\frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6}e^{-i\frac{5}{2}\pi} =$

$= \frac{1}{6}\left[\cos\left(-\frac{5}{2}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{5}{2}\pi\right)\right] = \frac{1}{6}(0-i) = -\frac{i}{6}$

$\mathrm{Res}(f, z_2) = \frac{1}{6}e^{-i\frac{25}{6}\pi} = \frac{1}{6}\left[\cos\left(-\frac{25}{6}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{25}{6}\pi\right)\right] = \frac{1}{6}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right] = \frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{i}{12}$

$$\operatorname{Res}(f, z_2) = \frac{1}{6} e^{-i\frac{25}{6}\pi} = \frac{1}{6}\left[\cos\left(-\frac{25}{6}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{25}{6}\pi\right)\right] = \frac{1}{6}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right] = \frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{i}{12}$$

Perciò:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6+1} = 2\pi i \left[-\frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{i}{12} - \frac{i}{6} + \frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{i}{12}\right] =$$

$$= 2\pi i\left(-\frac{i}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi \quad \text{da cui} \quad \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^6+1} = \frac{\pi}{3}$$

PARENTESI TEORICA!

RISOLUZIONE INTEGRALI IMPROPRI

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)}\cos(\alpha x)dx$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{R\to+\infty} \oint_\gamma \frac{P_1(z)}{P_2(z)} e^{i\alpha z} dz = A + iB$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{R\to+\infty}\left[\oint_\gamma \frac{P_1(z)}{P_2(z)} cos(\alpha z)dz + i\oint_\gamma \frac{P_1(z)}{P_2(z)} sin(\alpha z)dz\right]$$

RISOLUZIONE INTEGRALI IMPROPRI

$$\lim_{R\to+\infty}\left[\oint_\gamma \frac{P_1(z)}{P_2(z)} cos(\alpha z)dz\right] =$$

$$\lim_{R\to+\infty}\left[\int_{-R}^{R} \frac{P_1(x)}{P_2(x)} cos(\alpha x)dx + \int_{\gamma_R} \frac{P_1(z)}{P_2(z)} cos(\alpha z)dz\right] =$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)} cos(\alpha x)dx}$$

RISOLUZIONE INTEGRALI IMPROPRI

$$\lim_{R\to+\infty}\left[\oint_\gamma \frac{P_1(z)}{P_2(z)} sin(\alpha z)dz\right] =$$

$$\lim_{R\to+\infty}\left[\int_{-R}^{R} \frac{P_1(x)}{P_2(x)} sin(\alpha x)dx + \int_{\gamma_R} \frac{P_1(z)}{P_2(z)} sin(\alpha z)dz\right] =$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)} sin(\alpha x)dx}$$

RISOLUZIONE INTEGRALI IMPROPRI

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)}\cos(\alpha x)dx$$

$$\lim_{R\to+\infty} \oint_\gamma \frac{P_1(z)}{P_2(z)} e^{i\alpha z} dz = A + iB$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)} cos(\alpha x)dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)} sin(\alpha x)dx$$

RISOLUZIONE INTEGRALI IMPROPRI

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)} cos(\alpha x)dx = Re\left[\lim_{R\to+\infty} \oint_\gamma \frac{P_1(z)}{P_2(z)} e^{i\alpha z} dz\right]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)} sin(\alpha x)dx = Im\left[\lim_{R\to+\infty} \oint_\gamma \frac{P_1(z)}{P_2(z)} e^{i\alpha z} dz\right]$$

RISOLUZIONE INTEGRALI IMPROPRI

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)} cos(\alpha x)dx = Re\left[\lim_{R\to+\infty} \oint_\gamma \frac{P_1(z)}{P_2(z)} e^{i\alpha z} dz\right]$$

$$f(z) = \frac{P_1(z)}{P_2(z)} e^{i\alpha z}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)} sin(\alpha x)dx = Im\left[\lim_{R\to+\infty} \oint_\gamma \frac{P_1(z)}{P_2(z)} e^{i\alpha z} dz\right]$$

RISOLUZIONE INTEGRALI IMPROPRI

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)} cos(\alpha x)dx = Re\left[2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{m} Res(f, z_j)\right]$$

$$f(z) = \frac{P_1(z)}{P_2(z)} e^{i\alpha z}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)} sin(\alpha x)dx = Im\left[2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{m} Res(f, z_j)\right]$$

Importante!!!

RISOLUZIONE INTEGRALI IMPROPRI

ESERCIZIO

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x cos(\pi x)}{\underbrace{x^2 + 2x + 5}_{x^2 > x \Rightarrow \text{converge}}} dx = Re\left[\lim_{R\to+\infty} \oint_\gamma \frac{z e^{i\pi z}}{z^2 + 2z + 5} dz\right]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x sin(\pi x)}{\underbrace{x^2 + 2x + 5}_{\text{converge}}} dx = Im\left[\lim_{R\to+\infty} \oint_\gamma \frac{z e^{i\pi z}}{z^2 + 2z + 5} dz\right]$$

ESERCIZI: $\displaystyle\oint \frac{z \cdot e^{i\pi z}}{z^2+2z+5} dz$

Trovo i poli:

$z^2+2z+5=0 \Rightarrow z_{1,2} = -1 \pm 2i$

Poiché ci interessano solo le y positive allora

$$\oint \frac{z \cdot e^{i\pi z}}{z^2+2z+5} dz = 2\pi i \, Res(f, -1+2i)$$

$$Res(f, -1+2i) = \lim_{z\to -1+2i} (z+1-2i) \cdot \frac{z e^{i\pi z}}{(z+1-2i)(z+1+2i)} =$$

$$= \lim \frac{z \cdot e^{i\pi z}}{} = \frac{(2i-1) e^{i\pi(2i-1)}}{} = \frac{(2i-1) e^{2i^2\pi - i\pi}}{} =$$

$z \to -1+2i \qquad (z+1-2i)(z+1+2i)$

$$= \lim_{z \to -1+2i} \frac{z \cdot e^{i\pi z}}{z+1+2i} = \frac{(2i-1)\, e^{i\pi(2i-1)}}{2i-1+1+2i} = \frac{(2i-1)\, e^{2i^2\pi - i\pi}}{4i} =$$

$$= \frac{(2i-1)\, e^{-2\pi} \cdot e^{-i\pi}}{4i}$$

Dunque $\oint = \cancel{2}\pi \cancel{i} \dfrac{(2i-1)\, e^{-2\pi} \cdot e^{-i\pi}}{{}_2\cancel{4}\cancel{i}} = \dfrac{\pi}{2} (2i-1)\, e^{-2\pi} \left(\cos(-\pi) + i \sin(-\pi)\right) =$

$$= \frac{\pi}{2} (1-2i) \cdot e^{-2\pi} = \frac{\pi}{2} e^{-2\pi} - i\pi e^{-2\pi}$$

ora se avessi avuto sen x nell'integrale reale
allora $\oint = \mathrm{Re}\left[\oint\right]$ mentre $\oint = \mathrm{Im}\left[\oint\right]$ se $\cos x$

(2) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+\cos(2x)}{x^2+2x+5}\, dx = \mathrm{Re}\left[\lim_{R \to +\infty} \oint_\gamma \frac{1+e^{i2z}}{z^2+2z+5}\, dz\right]$$

poiché

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+\cos(2x)}{x^2+2x+5}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+5}\, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2+2x+5}\, dx \Rightarrow$$

$$= \lim_{R \to +\infty} \oint_\gamma \frac{1}{z^2+2z+5}\, dz + \mathrm{Re}\left[\lim_{R \to +\infty} \oint_\gamma \frac{e^{i2z}}{z^2+2z+5}\, dz\right]$$

(3) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+\sin(2x)}{x^2+5}\, dx = \mathrm{Im}\left[\lim_{R \to +\infty} \oint_\gamma \frac{1+e^{i2z}}{x^2+5}\, dz\right]$$

però ho che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+\sin(2x)}{x^2+5}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+5}\, dx + \boxed{\cancel{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2+5}\, dx}} \to = 0$$

Funzione dispari

Funzione pari

dunque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+\sin(2x)}{x^2+5}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+5}\, dx$$

(4) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+\sin(2x)}{x^4+5}\, dx = \lim_{R \to +\infty} \oint_\gamma \frac{z}{z^4+5}\, dz + \mathrm{Im}\left[\lim_{R \to +\infty} \oint \frac{e^{i2z}}{z^4+5}\, dz\right]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+\sin(2x)}{x^4+5}\, dx = \cancel{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^4+5}\, dx} \to 0 + \cancel{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x^4+5}\, dx} \to 0$$

pari dispari

(5) $$\int^{+\infty} \frac{x^2 + x + \sin(2x)}{\quad}\, dx = \lim \oint \frac{z^2}{\quad}\, dz + \mathrm{Im}\left[\lim \oint \frac{z+e^{i2z}}{\quad}\, dz\right]$$

(5) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overset{\text{pari}}{x^2} + \overset{\text{dispari}}{x + \sin(2x)}}{x^4+5}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \oint_\gamma \frac{z^2}{z^4+5}\,dz + \operatorname{Im}\left[\lim_{R\to+\infty} \oint_\gamma \frac{z+e^{i2z}}{z^4+5}\,dz\right]$$

ma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overset{\text{pari}}{x^2} + \overset{\text{dispari}}{x + \sin(2x)}}{x^4+5}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \oint_\gamma \frac{z^2}{z^4+5}$$

(6) $$\int_{-\infty}^{0} \frac{x^2+\cos(2x)}{x^4+5} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+\cos(2x)}{x^4+5}\,dx$$

Riassunti :

Se non ci sono poli sull'asse x (l'asse Reale) si può calcolare un integrale improprio come somma dei residui dei poli se l'integrale è convergente
→ LEMMA DEL GRANDE CERCHIO

EULERO ⇒
- $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
- $e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$
- $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$
- $\cos^2 x = \left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}\left(1+\cos(2x)\right)$ *
- $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}$
- $\sin^2 x = \left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \dfrac{1}{2}\left(1-\cos(2x)\right)$ *

tale regola può essere applicata anche ad esponenziali maggiori *

- $\cos^3 x = \left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{4}\left(3\cos x + \cos(3x)\right)$
- $\sin^3 x = \left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \dfrac{1}{4}\left(3\sin x - \sin(3x)\right)$

Se ho un $\cos^u x + x^k$ devo scomporre $\cos^u x$

es $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+\cos^2 x}{x^4+1}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2x)}{x^4+1}\,dx = \mathrm{Re}\left[\lim_{R\to+\infty} \oint \frac{z^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{i2z}}{z^4+1}\,dz\right]$

La potenza di una funzione pari è pari, la potenza di una funzione dispari è
- pari se pot. pari
- dispari se pot. dispari

es $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos^3 x}{x^6+1}\,dx = 0$ poiché $\dfrac{\text{dispari}}{\text{pari}}$ (dispari, pari, pari)

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos^2 x}{x^6+1}\,dx = 0$ poiché $\dfrac{\text{dispari}}{\text{pari}}$ (dispari, pari, pari)

es $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+\sin^2 x}{x^8+1}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^8+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos(2x)}{2(x^8+1)}\,dx$ (dispari, pari; pari, pari)

$\sin x \Rightarrow$ dispari	$\sin^{2u} x \Rightarrow$ pari	$\sin^u x \Rightarrow$ dispari
$\cos x \Rightarrow$ pari	$\cos^{2u} x \Rightarrow$ pari	$\cos^u x \Rightarrow$ pari

es $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-\sin^3 x}{x^8+1}\,dx = 0$ (dispari, dispari)

es $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin^2 x}{x^8+1}\,dx = 0$ (dispari, pari, pari)

es $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin^u x}{x^8+1}\,dx =$ (dispari, pari se u pari, pari)

TEOREMA DEL GRANDE CERCHIO

Se si considera un punto sul piano complesso z_0 e un tratto di circonferenza tra θ_0 e θ_1 e data $f(z)$ olomorfa nel piano, se

$$\lim_{\substack{z \to +\infty \\ (R \to +\infty)}} (z - z_0) f(z) = \ell \quad (\text{finito})$$

allora $\displaystyle\lim_{R \to +\infty} \oint_\gamma f(z)\,dz = i\ell\,(\theta_1 - \theta_0)$ — Nel caso di un giro completo si ha un residuo

Si costruiscono delle circonferenze che escludono i punti di discontinuità.

In questo caso si fa, rispetto alle discontinuità fuori dall'asse x, attraverso non solo il grande cerchio ma anche il piccolo

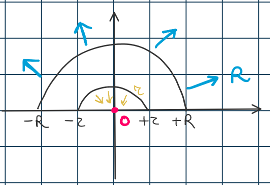
TEOREMA DEL PICCOLO CERCHIO

Se invece di considerare $z \to +\infty$ consideriamo $z \to z_0$!

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ (R \to 0)}} (z - z_0) f(z) = \ell \quad (\text{finito})$$

$$\text{allora} \quad \lim_{R \to 0^+} \oint_\gamma f(z)\,dz = i\ell\,(\theta_1 - \theta_0)$$

es. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ dove $\dfrac{\sin x}{x}$ converge sicuramente



$$\lim_{R \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0 \quad \text{poiché } f(z) \text{ non ha poli}$$

$$\lim_{r \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = i\pi$$

$$\text{per cui} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{e dunque} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi \quad \text{poiché } \sin x \text{ è pari}$$

es. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x+1)}\,dx \qquad f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z+1)}$

discontinuità sull'asse reale $x = -1$ quindi creo un cerchio che esclude $x = -1$

Nel campo complesso, $f(z)$ ha tre poli: $z = \pm i$ e $z = 1$.
In questo caso, poiché costruisco una semicirconferenza nel piano $y > 0$, solo $z = i$ è incluso nell'area e dunque ne calcolo il residuo

$$\operatorname{Res}(f(z), i) = \lim_{z \to i} (z-i) \frac{1}{(z-i)(z+i)(z+1)} = -\frac{i+1}{4}$$

Di conseguenza $2\pi i \operatorname{Res}(f(z), i) = \frac{\pi}{2} - i\frac{\pi}{2}$

Rispetto al caso di nessuna discontinuità sull'asse x ho che $Bi = 0$

Elimino la limitazione creata facendo i limiti degli integrali lungo le curve ottenendo

$$\lim_{r \to 0^+} \int_{\gamma_r^+(-1)} f(z)\,dz = i\pi\ell = \frac{i\pi}{2}$$

dunque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x+1)} dx = \frac{\pi}{2}$$

es. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{(x^2+4)(x-1)} dx \qquad f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+4)(z-1)}$ dove prendiamo la parte immaginaria

$x = 1$ è disc. sull'asse x e creiamo una area

si calcola con il limite

$$\lim_{\substack{R \to +\infty \\ r \to 0^+}} \left[\int_{-R}^{1-r} f(z)\,dz - \underbrace{\int_{\gamma_r^+(1)} f(z)\,dz} + \int_{1+r}^{R} f(z)\,dz + \int_{\gamma_R^+(0)} f(z)\,dz \xrightarrow{} 0 \right] =$$

$$= 2\pi i \underbrace{\operatorname{Res}(f(z), 2i)}$$

poiché $z^2+1 \Rightarrow z = \pm 2i$ è discontinuità nel campo complesso ma solo se $z = 2i$

Esercitazione 6 - 05/01/2021

- Serie di Fourier
- Trasformata di Fourier

SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER

4.8.- Serie trigonometrica → meglio detta GONIOMETRICA

serie → sommatoria di infinite funzioni

È una serie di funzioni del tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(nx + \varphi_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \operatorname{sen}\varphi_n \cos nx + A_n \cos\varphi_n \operatorname{sen} nx) \qquad [4.8.1]$$

dove A_n, φ_n e x sono reali.
Ponendo $A_n \cos\varphi_n = b_n$, $A_n \operatorname{sen}\varphi_n = a_n$ per $n = 1, 2, \dots$ e $A_0 \operatorname{sen}\varphi_0 = \frac{a_0}{2}$ la [4.8.1] diventa:

SERIE DI FOURIER

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)} \qquad [4.8.2]$$

che si riduce alla serie di seni

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx \quad \Big\}\ \text{sviluppo in serie di seni}$$

se $a_n = 0$ per $n = 1, 2, \dots$, e alla serie di coseni

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad \Big\}\ \text{sviluppo in serie di coseni}$$

se $b_n = 0$ per $n = 1, 2, \dots$
Siccome il termine generale

$\cos(0) = 1 \quad \operatorname{sen}(0) = 0$

$$a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

è periodico di periodo 2π, la serie può essere studiata in un qualunque intervallo di ampiezza 2π e, se è convergente, la sua somma $S(x)$ è pure periodica di periodo 2π.

4.9.- Relazione tra coefficienti e somma in una serie trigonometrica

periodo

Se la serie [4.8.2] è uniformemente convergente in tutto l'intervallo $(-\pi, \pi)$ e ha somma $S(x)$, sono verificate le seguenti relazioni:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(x)\cos nx\,dx \qquad [4.9.1]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(x)\,\text{sen}\, nx\,dx \qquad [4.9.2]$$

ricavare i coefficienti

con $n = 1, 2, \ldots$

$$\boxed{S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n\,\text{sen}\, nx)}$$

4.10.- Serie di Fourier

Una funzione deve essere periodica

Supponiamo che la funzione $f(x)$, avente periodo 2π, ammetta nell'intervallo $(-\pi, \pi)$ i seguenti integrali:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}\, nx\,dx \qquad n = 1, 2, \ldots$$

detti coefficienti di Fourier della funzione $f(x)$. La serie trigonometrica [4.8.2] avente per coefficienti i precedenti integrali viene detta serie di Fourier associata alla funzione $f(x)$; essa può essere: Una serie di Fourier è:

1) divergente
2) convergente con somma $S(x) \neq f(x)$
3) convergente con somma $S(x) = f(x)$

$$\boxed{S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n\,\text{sen}\, nx)}$$

4.10.- Serie di Fourier

Supponiamo che la funzione $f(x)$, avente periodo 2π, ammetta nell'intervallo $(-\pi, \pi)$ i seguenti integrali:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}\, nx\,dx \qquad n = 1, 2, \ldots$$

detti coefficienti di Fourier della funzione $f(x)$. La serie trigonometrica [4.8.2] avente per coefficienti i precedenti integrali viene detta serie di Fourier associata alla funzione $f(x)$; essa può essere:

1) divergente
2) convergente con somma $S(x) \neq f(x)$

3) convergente con somma $S(x) = f(x)$ (funzioni che studieremo principalmente)

$$\boxed{S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n\,\text{sen}\, nx)}$$

4.11.- Teorema fondamentale di convergenza

Si ricorda che per punto di discontinuità di prima specie di una funzione $f(x)$ si intende un punto $x = c$ in cui esistono finiti il limite destro e quello sinistro e tali che:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = l_1 \qquad \lim_{x \to c^+} f(x) = l_2$$

con $l_1 \neq l_2$ (1).

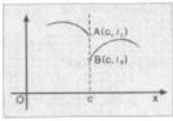


Fig. 4.11.1

Ciò premesso possiamo enunciare, omettendone la dimostrazione, il seguente teorema, valido per una funzione periodica definita nell'intervallo $(-\pi, \pi)$:

deve essere periodica

Nei punti in cui la funzione $f(x)$ è continua e derivabile, o almeno è dotata di derivata destra e sinistra, la serie di Fourier associata:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \quad (2)$$

con

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\, dx$$

è convergente e la sua somma è $S = f(x)$.

continua e derivabile (o meglio le derivate destra e sinistra devono esistere finite anche se diverse)

Nei punti di discontinuità di prima specie in cui esistono finiti i limiti:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

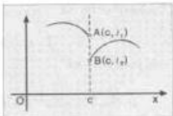
la serie converge a

$$S = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$$

cioè alla media dei limiti destro e sinistro nel punto di discontinuità.

deve avere al massimo discontinuità a salto

Si ricorda che i due limiti considerati sono, rispettivamente, la pseudoderivata sinistra $f_-^*(x)$ e la pseudoderivata destra $f_+^*(x)$. Si ricordi inoltre che la pseudoderivata destra [sinistra] coincide con la derivata destra [sinistra] se è $f(x) = f(x+0)$ $[f(x) = f(x-0)]$.



4.11.- Teorema fondamentale di convergenza

Si ricorda che per punto di discontinuità di prima specie di una funzione $f(x)$ si intende un punto $x = c$ in cui esistono finiti il limite destro e quello sinistro e tali che:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = l_1 \qquad \lim_{x \to c^+} f(x) = l_2$$

con $l_1 \neq l_2$ (1).

Fig. 4.11.1

Ciò premesso possiamo enunciare, omettendone la dimostrazione, il seguente teorema, valido per una funzione periodica definita nell'intervallo $(-\pi, \pi)$:

Nei punti in cui la funzione $f(x)$ è continua e derivabile, o almeno è dotata di derivata destra e sinistra, la serie di Fourier associata:

la serie di Fourier è somma di infinite armoniche

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)}_{\text{ARMONICA}} \quad (2)$$

ARMONICA → armonica n indica l'addendo n della sommatoria

con

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\, dx$$

è convergente e la sua somma è $S = f(x)$.

Nei punti di discontinuità di prima specie in cui esistono finiti i limiti:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

la serie converge a

$$S = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$$

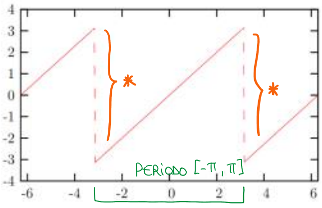
se ci sono asintoti non vale

cioè alla media dei limiti destro e sinistro nel punto di discontinuità.

Si ricorda che i due limiti considerati sono, rispettivamente, la pseudoderivata sinistra $f_-^*(x)$ e la pseudoderivata destra $f_+^*(x)$. Si ricordi inoltre che la pseudoderivata destra [sinistra] coincide con la derivata destra [sinistra] se è $f(x) = f(x+0)$ $[f(x) = f(x-0)]$.

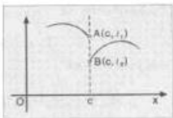
ESEMPIO 1.1. Consideriamo la funzione periodica di periodo 2π assegnata mediante

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } -\pi < x < \pi, \\ \text{periodica} & \text{di periodo } 2\pi. \end{cases}$$



DISCONTINUITÀ $S = \frac{-\pi + \pi}{2} = 0$

$\boxed{\text{La serie converge alla semisomma / media dei valori assunti tra destra e sinistra nel punto di discontinuità}}$



4.11.- Teorema fondamentale di convergenza

Si ricorda che per punto di discontinuità di prima specie di una funzione $f(x)$ si intende un punto $x = c$ in cui esistono finiti il limite destro e quello sinistro e tali che:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = l_1 \qquad \lim_{x \to c^+} f(x) = l_2$$

con $l_1 \neq l_2$ (1).

Fig. 4.11.1

Ciò premesso possiamo enunciare, omettendone la dimostrazione, il seguente teorema, valido per una funzione periodica definita nell'intervallo $(-\pi, \pi)$:

Nei punti in cui la funzione $f(x)$ è continua e derivabile, o almeno è dotata di derivata destra e sinistra, la serie di Fourier associata:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \quad (2)$$

con

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}$$

è convergente e la sua somma è $S = f(x)$.

Nei punti di discontinuità di prima specie in cui esistono finiti i limiti:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

la serie converge a

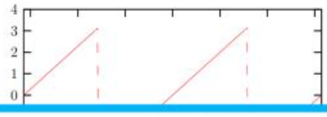
$$S = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$$

cioè alla media dei limiti destro e sinistro nel punto di discontinuità.

Si ricorda che i due limiti considerati sono, rispettivamente, la pseudod... sinistra $f_-^*(x)$ e la pseudoderivata destra $f_+^*(x)$. Si ricordi inoltre che la ... vata destra [sinistra] coincide con la derivata destra [sinistra] se è $f(x)$ ... $[f(x) = f(x-0)]$.

ESEMPIO 1.1. Consideriamo la funzione periodica di periodo 2π assegnata mediante

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } -\pi < x < \pi, \\ \text{periodica} & \text{di periodo } 2\pi. \end{cases}$$



I coefficienti dello sviluppo sono:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x \operatorname{sen} nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}\, dx = 0$$

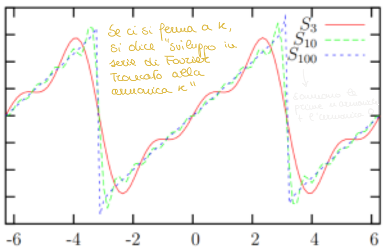
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left[-x\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nx}{n}\, dx =$$

$$= -\frac{2\cos n\pi}{n} = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

La serie è perciò:

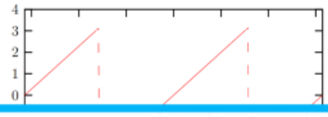
$$2\left(\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\operatorname{sen} nx}{n} + \ldots\right) \qquad [4.11.1]$$

e vale $f(x) = x$ nei punti dell'intervallo $[-\pi, \pi]$ e zero negli estremi $x = \mp\pi$ dove è nulla la media aritmetica dei limiti destro e sinistro, cioè $\frac{-\pi + \pi}{2} = 0$.



ESEMPIO 1.1. Consideriamo la funzione periodica di periodo 2π assegnata mediante

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } -\pi < x < \pi, \\ \text{periodica} & \text{di periodo } 2\pi. \end{cases}$$



$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}$

è convergente e la sua somma è $S = f(x)$.

Nei punti di discontinuità di prima specie in cui esistono finiti i limiti:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

la serie converge a

$$S = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

cioè alla media dei limiti destro e sinistro nel punto di discontinuità.

Si ricorda che i due limiti considerati sono, rispettivamente, la pseudod stra $f_-^*(x)$ e la pseudoderivata destra $f_+^*(x)$. Si ricordi inoltre che la vata destra [sinistra] coincide con la derivata destra [sinistra] se è $f(x)$ $[f(x) = f(x-0)]$.

I coefficienti dello sviluppo sono:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\,\text{sen}\,nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\text{sen}\,nx}{n}\,dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\text{sen}\,nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-x\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,dx =$$

$$= -\frac{2\cos n\pi}{n} = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

La serie è perciò:

$$2\left(\text{sen}\,x - \frac{\text{sen}\,2x}{2} + \frac{\text{sen}\,3x}{3} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{\text{sen}\,nx}{n} + \dots\right) \qquad [4.11.1]$$

e vale $f(x) = x$ nei punti dell'intervallo $[-\pi, \pi]$ e zero negli estremi $x = \mp\pi$ dove è nulla la media aritmetica dei limiti destro e sinistro, cioè $\frac{-\pi+\pi}{2} = 0$.

4.12.- Intervallo di integrazione di funzione periodica

Se una funzione $f(x)$, definita su tutto l'asse reale, è periodica di periodo T, l'integrale esteso a qualunque intervallo di ampiezza T, non dipende dalla posizione dell'intervallo sull'asse reale ossia l'integrale

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$$

non dipende dal valore di a.

Nel calcolo dei coefficienti di Fourier l'intervallo di integrazione $(-\pi, \pi)$ può essere perciò sostituito con un qualunque intervallo $(a, a+2\pi)$ di ampiezza 2π.

4.13.- Serie di Fourier di funzioni pari e dispari

Una funzione $f(x)$ è pari nell'intervallo $(-a, a)$ quando $f(-x) = f(x)$ (vedi fig. 4.13.1); per essa si ha:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

Una funzione è dispari nell'intervallo $(-a, a)$ quando $f(-x) = -f(x)$ (vedi fig. 4.13.2); per essa si ha:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

Come per gli integrali impropri, si semplificano gli integrali se le funzioni sono pari / dispari

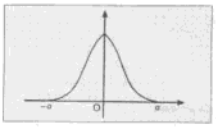


Fig. 4.13.1

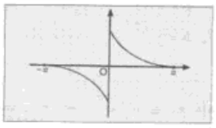


Fig. 4.13.2

Pertanto se si sviluppa in serie di Fourier una funzione pari, tenendo presente che $f(x)\cos nx$ è pari mentre $f(x)\,\text{sen}\,nx$ è dispari, si ha:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}\,x\,dx = 0$$

ossia lo sviluppo è costituito da una serie di coseni.

Analogamente, se $f(x)$ è dispari, $f(x)\cos nx$ è dispari mentre $f(x)\,\text{sen}\,nx$ è pari, per cui

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}\,nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\text{sen}\,nx\,dx$$

ossia lo sviluppo è costituito da una serie di seni.

4.16.- Serie di Fourier di funzione periodica di periodo 2λ

Per sviluppare in serie di Fourier una funzione $f(x)$ periodica di periodo 2λ definita nell'intervallo $(-\lambda, \lambda)$

anche se il periodo non è 2π la serie è possibile da costruire. BASTA CHE SIA PERIODICA

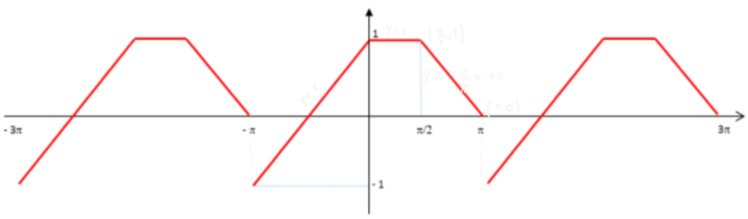
$$a_0 = \frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\lambda}\,dx \qquad [4.16.1]$$

$$b_n = \frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{\lambda}\,dx$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\lambda} + b_n\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{\lambda}\right)$$

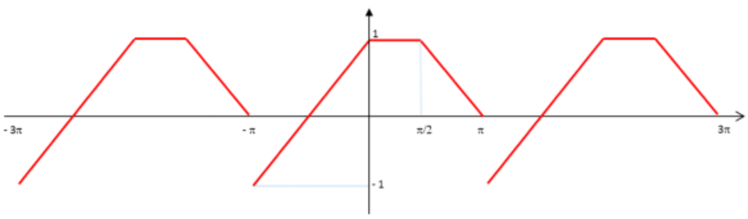
Applicare lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione rappresentata in Fig. 2, considerata come 2π periodica



$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & -\pi < x \leq 0 \\ f_2(x) & 0 < x \leq \pi/2 \\ f_3(x) & \pi/2 < x \leq \pi \end{cases}$$

Funzione continua a tratti

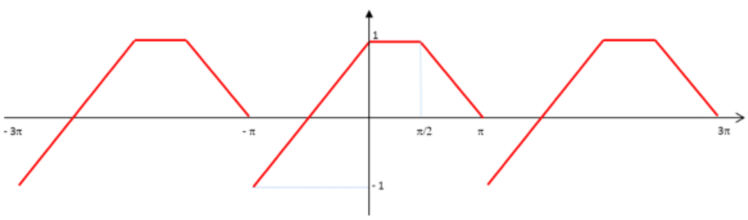
Applicare lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione rappresentata in Fig. 2, considerata come 2π periodica



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f_1(x)dx + \int_{0}^{\pi/2} f_2(x)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f_3(x)dx\right]$$

Ogni integrale deve essere spezzato lungo le curve continue

Applicare lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione rappresentata in Fig. 2, considerata come 2π periodica



$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f_1(x)cos(nx)dx + \int_{0}^{\pi/2} f_2(x)cos(nx)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f_3(x)cos(nx)dx\right]$$

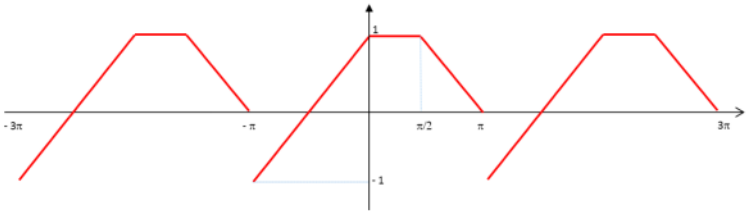
PASSAGGI

1) Verificare che sia
   - periodica
   - continua e derivabile
   - ci siano solo un numero finito di discontinuità

2) Calcolare i seguenti che compongono la funzione di partenza

3) Si calcolano i coefficienti a_0, a_n e b_n tenendo conto che l'integrale di ciascuna area sottesa da un tratto continuo della curva

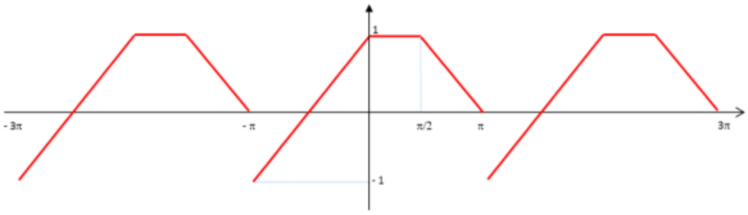
Applicare lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione rappresentata in Fig. 2, considerata come 2π periodica



$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sin(nx) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} f_1(x) sin(nx) dx + \int_{0}^{\pi/2} f_2(x) sin(nx) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f_3(x) sin(nx) dx \right]$$

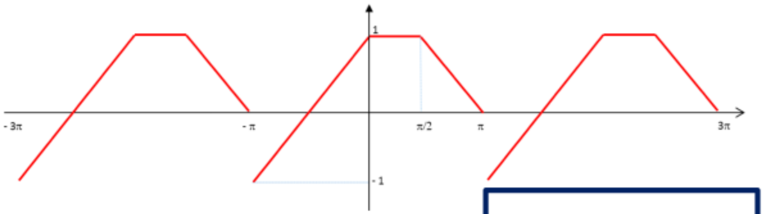
Applicare lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione rappresentata in Fig. 2, considerata come 2π periodica



$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} f_1(x) dx + \int_{0}^{\pi/2} f_2(x) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f_3(x) dx \right]$$

$$\boxed{\int (mx + q) dx = m \frac{x^2}{2} + qx + c}$$

Applicare lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione rappresentata in Fig. 2, considerata come 2π periodica

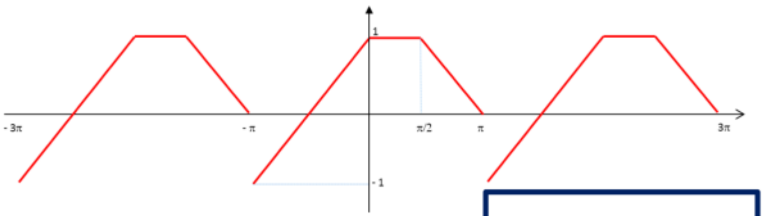


$$\boxed{\int (mx + q) cos(nx) dx}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(nx) dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} f_1(x) cos(nx) dx + \int_{0}^{\pi/2} f_2(x) cos(nx) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f_3(x) cos(nx) dx \right]$$

Applicare lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione rappresentata in Fig. 2, considerata come 2π periodica

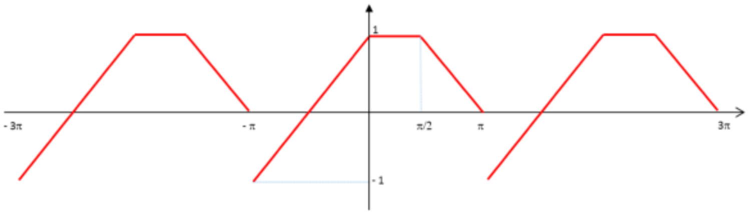


$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(nx) dx =$$

$$\boxed{\int (mx + q) cos(nx) dx}$$

$$\boxed{m \int x cos(nx) dx} \qquad \boxed{q \int cos(nx) dx}$$

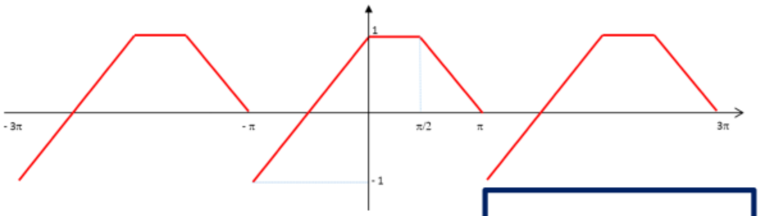
Applicare lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione rappresentata in Fig. 2, considerata come 2π periodica



$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx =$$

$$\boxed{\int xcos(nx)dx = \frac{x}{n}sin(nx) - \frac{1}{n}\int sin(nx)dx = \frac{x}{n}sin(nx) + \frac{1}{n^2}cos(nx) + \mathrm{c}}$$

Applicare lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione rappresentata in Fig. 2, considerata come 2π periodica

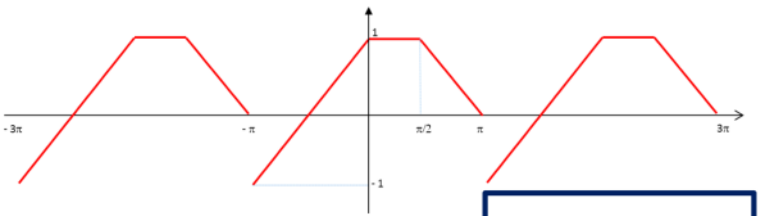


$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(nx)dx =$$

$$\boxed{\int (mx+q)sin(nx)dx}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f_1(x)sin(nx)dx + \int_{0}^{\pi/2} f_2(x)sin(nx)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f_3(x)sin(nx)dx\right]$$

Applicare lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione rappresentata in Fig. 2, considerata come 2π periodica

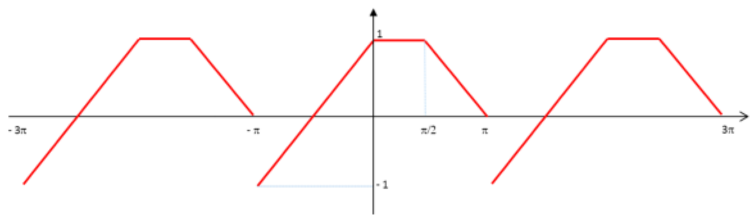


$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(nx)dx =$$

$$\boxed{\int (mx+q)sin(nx)dx}$$

$$\boxed{m\int xsin(nx)dx} \qquad \boxed{q\int sin(nx)dx}$$

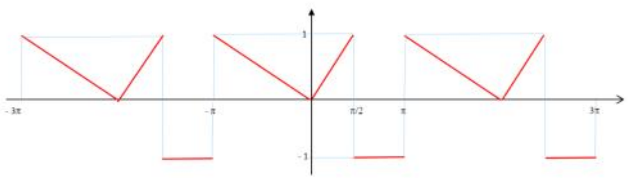
Applicare lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione rappresentata in Fig. 2, considerata come 2π periodica



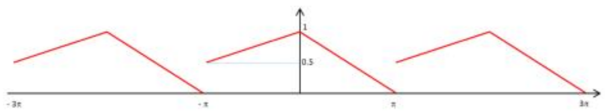
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(nx)dx =$$

$$\boxed{\int xsin(nx)dx = -\frac{x}{n}cos(nx) + \frac{1}{n}\int cos(nx)dx = -\frac{x}{n}cos(nx) + \frac{1}{n^2}sin(nx) + c}$$

Applicare lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione rappresentata in figura, considerata come 2π periodica



Applicare lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione rappresentata in Fig. 2, considerata come 2π periodica



and so on...

Esercizio n. 4

Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione:

$$f(x) = 12\cos(-2x) - \cos(4x) - 2sen(-7x) - 1$$ → Somma di funzioni periodiche

↳ se limito la funzione ad un periodo, è già sviluppata in serie!!!

e poi calcolare

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\left(1 + sen(7x)\right)dx$$

SVOLGIMENTO:

1) Cambio $sen(-x) = -sen(x)$ e $cos(-x) = cos\,x$
2) Ordino lo sviluppo
3) Individuo gli indici che non si annullano

Esercizio n. 4

Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione:

$$f(x) = 12\cos(-2x) - \cos(4x) - 2sen(-7x) - 1$$

e poi calcolare

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\left(1 + sen(7x)\right)dx$$

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nx) + b_n\,\text{sen}(nx)}$$

Esercizio n. 4

Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione:

$$f(x) = 12\cos(-2x) - \cos(4x) - 2sen(-7x) - 1$$

cos(-x) = cos x poichè è PARI

sin(-x) = - sin x poichè è dispari

$$\boxed{f(x) = -1 + 12\cos(2x) - \cos(4x) + 2sen(7x)}$$

$$\boxed{a_0 = -2} \quad \boxed{a_2 = 12} \quad \boxed{a_4 = -1} \quad \boxed{b_7 = 2}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nx) + b_n\,\text{sen}(nx)}$$

Esercizio n. 4

Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione:

$$f(x) = 12\cos(-2x) - \cos(4x) - 2sen(-7x) - 1$$

$$\boxed{f(x) = -1 + 12\cos(2x) - \cos(4x) + 2sen(7x)}$$

$$\boxed{a_0 = -2} \quad \boxed{a_2 = 12} \quad \boxed{a_4 = -1} \quad \boxed{b_7 = 2}$$

e poi calcolare

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\left(1 + sen(7x)\right)dx$$

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(7x)dx}$$

$$\boxed{f(x) = -1 + 12\cos(2x) - 1\cos(4x) + 2sen(7x)}$$

$$\boxed{a_0 = -2} \quad \boxed{a_2 = 12} \quad \boxed{a_4 = -1} \quad \boxed{b_7 = 2}$$

$$\pi a_0 = \boxed{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(7x)dx}$$

perchè

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad -2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad -2\pi = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$\boxed{f(x) = -1 + 12\cos(2x) - 1\cos(4x) + 2sen(7x)}$$

$\boxed{a_0 = -2}$ $\boxed{a_2 = 12}$ $\boxed{a_4 = -1}$ $\boxed{b_7 = 2}$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(nx)dx \qquad \boxed{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(7x)dx}_{= b_7\pi}}$$

$$2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(7x)dx \qquad 2\pi = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(7x)dx$$

$$\boxed{f(x) = -1 + 12\cos(2x) - 1\cos(4x) + 2sen(7x)}$$

$\boxed{a_0 = -2}$ $\boxed{a_2 = 12}$ $\boxed{a_4 = -1}$ $\boxed{b_7 = 2}$

$$0 = \boxed{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(7x)dx}$$

Esercizio n. 4

Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione:

Somma di funzioni PARI = f(x) PARI

$$f(x) = -0.5\cos(-2x) + 2\cos(6x) + 12 = \underbrace{12}_{\frac{a_0}{2}} - 0{,}5\cos(2x) + 2\cos(6x)$$

$\boxed{a_0 = 24}$ $\boxed{b_2 = -0{,}5}$ $\boxed{b_6 = 2}$

e poi calcolare

$$\int_{-\pi}^{0} \cdot f(x)\left(2 - 3\cos(-6x)\right)dx = 24\pi - 3\pi = 21\pi$$

$$\int_{-\pi}^{0} 2f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 2f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \pi \cdot 24$$

$$-3\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos 6x\,dx = -\frac{3}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 6x\,dx = 2 \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}\cos 6x\, f(x) = 2\pi$$

allora $= -\frac{3}{2}2\pi = -3\pi$ dunque

TRASFORMATA DI FOURIER

TRASFORMATA DI FOURIER

1

PROPRIETÀ DELLA $f(x)$: generalizzazione della serie di Fourier per funzioni NON periodiche

a) PERIODO $T = +\infty$ (OVVERO NON PERIODICA)

b) CONTINUA A TRATTI (CON DISCONTINUITÀ DI I SPECIE)

c) ASSOLUTAMENTE INTEGRABILE: $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty$ aka deve convergere

$\Downarrow$

può essere considerata come un'onda

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-i\omega x}\,dx =$$

Si può esprimere una funzione del dominio x nel dominio ω delle frequenze

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-i\omega x}\,dx =$$

eulero: $e^{i\omega x} = \cos(\omega x) + i\sin(\omega x)$

$e^{-i\omega x} = \cos(-\omega x) + i\sin(-\omega x) = \cos(\omega x) - i\sin(\omega x)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \cos(\omega x)\,dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{sen}(\omega x)\,dx =$$

$$= A(\omega) - i\,B(\omega)$$

CASI PARTICOLARI

$f(x)$ PARI	$f(x)$ DISPARI
$A(\omega) = 2\int_0^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)\,dx$ PARI	$A(\omega) = 0$ spariscono i termini in coseno
$B(\omega) = 0$ spariscono i termini in seno	$B(\omega) = 2\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{sen}(\omega x)\,dx$ PARI

FUNZIONI CHE SI POSSONO DIAGRAMMARE:

- $A(\omega)$
- $B(\omega)$
- SPETTRO DELLE AMPIEZZE

  $|F(\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}$ ↳ modulo

  SE $f(x)$ È PARI $\Rightarrow |F(\omega)| = |A(\omega)|$ perché $B(\omega) = 0$

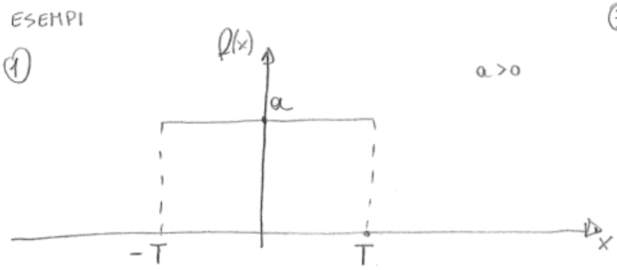
  SE $f(x)$ È DISPARI $\Rightarrow |F(\omega)| = |B(\omega)|$ perché $A(\omega) = 0$

- SPETTRO DI FASE: $\mathrm{arctg}(B(\omega)/A(\omega))$

ESEMPI ③

①

$a > 0$



$F(\omega) = A(\omega) - i\,B(\omega)$

$f(x)$ É PARI $\Rightarrow$ $B(\omega) = 0$ poiché è pari

$$A(\omega) = 2\int_0^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)\,dx$$

$$A(\omega) = 2\int_0^T a\cdot\cos(\omega x)\,dx = 2a\int_0^T \cos(\omega x)\,dx =$$

$$= \frac{2a}{\omega}\Big[\operatorname{sen}(\omega x)\Big]_0^T = \boxed{\frac{2a}{\omega}\operatorname{sen}\omega T}$$ REALE

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{2a}{\omega}\operatorname{sen}(\omega T) = 2aT$$

$$\lim_{\omega\to+\infty}\frac{2a}{\omega}\operatorname{sen}(\omega T) = 0 \qquad \lim_{\omega\to-\infty}\frac{2a}{\omega}\operatorname{sen}(\omega T) = 0$$

perché $-1 \le \operatorname{sen}(\omega T) \le 1$

---

⑥

$A(\omega) = 0 \Rightarrow \frac{2a}{\omega}\operatorname{sen}(\omega T) = 0 \Rightarrow \omega T = K\pi$ con $K \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow A(\omega) = 0$ QUANDO $\omega = \frac{K\pi}{T}$, CON $K \in \mathbb{Z}$

GRAFICO DI $A(\omega)$

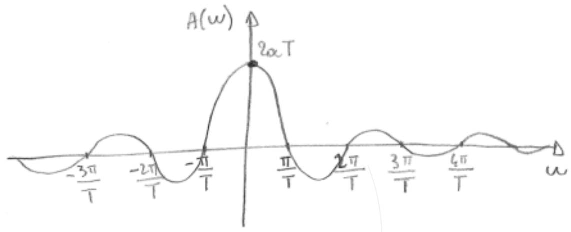


GRAFICO DI $|F(\omega)|$ → spettro delle ampiezze

UGUALE A $|A(\omega)|$ IN QUESTO CASO

cioè si porta su y>0 tutto il grafico

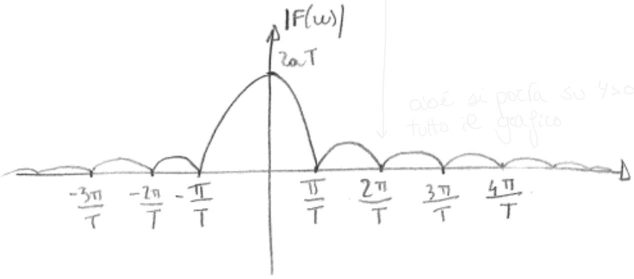
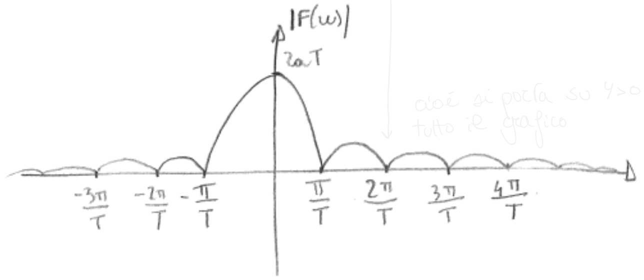


GRAFICO DI $|F(\omega)|$ → spettro delle ampiezze

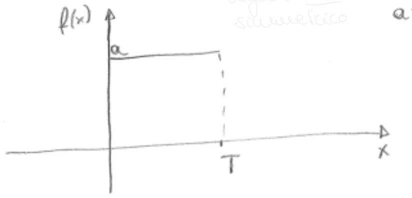
UGUALE A $|A(\omega)|$ IN QUESTO CASO



ESEMPIO ② (5)

segnale non simmetrico

$a>0$



$$F(\omega)= A(\omega) - i\cdot B(\omega)$$

$$A(\omega)=\int_0^T a\cos(\omega x)\,dx = \frac{a}{\omega}\,\operatorname{sen}(\omega T) \quad \text{(VEDI ESEMPIO 1)}$$

fai comunque

$$B(\omega)=\int_0^T a\,\operatorname{sen}(\omega x)\,dx = \frac{a}{\omega}\Big[-\cos(\omega x)\Big]_0^T =$$

$$B(\omega)=\int_0^T a\,\operatorname{sen}(\omega x)\,dx = \frac{a}{\omega}\Big[-\cos(\omega x)\Big]_0^T =$$

$$= \frac{a}{\omega}\Big[1-\cos(\omega T)\Big]$$

$$|F(\omega)| = \sqrt{A^2(\omega)+B^2(\omega)} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{\omega^2}\Big(\operatorname{sen}^2(\omega T)+1+\cos^2(\omega T)-2\cos(\omega T)\Big)} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{\omega^2}\big(2-2\cos(\omega T)\big)} = \sqrt{\frac{2a^2}{\omega^2}\big(1-\cos(\omega T)\big)}$$

(6)

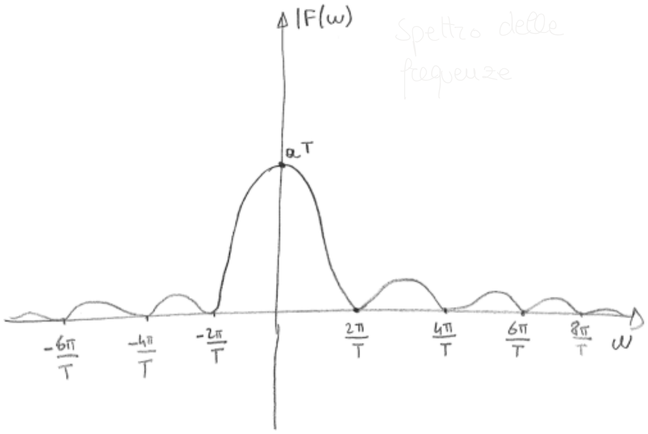
$$\lim_{\omega\to 0}\sqrt{\frac{2a^2}{\omega^2}\big(1-\cos(\omega T)\big)} = \sqrt{2a^2T^2\cdot\frac{1}{2}} = aT$$

$$\lim_{\omega\to +\infty}\sqrt{\frac{2a^2}{\omega^2}\big(1-\cos(\omega T)\big)} = 0$$

$$\lim_{\omega\to -\infty}\sqrt{\frac{2a^2}{\omega^2}\big(1-\cos(\omega T)\big)} = 0$$

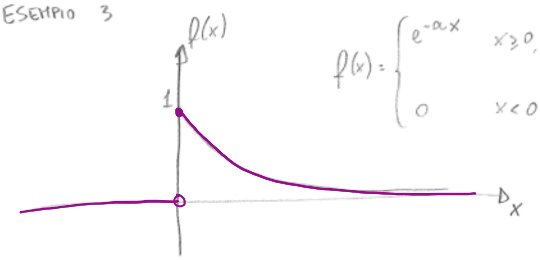
$$|F(\omega)|=0 \Rightarrow \Big[1-\cos(\omega T)\Big]=0 \Rightarrow \cos(\omega T)=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega T = 2k\pi \Rightarrow \omega = \frac{2k\pi}{T}, \text{ con } k\in\mathbb{Z}$$



ESEMPIO 3

7



$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & x \geq 0,\ a>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

$f(x)$ è assolutamente integrabile, poiché

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}$$

$$F(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cdot e^{-i\omega x}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-(a+i\omega)x}\,dx =$$

(non da $-\infty$ poiché sarebbe 0)

$$= \frac{1}{a+i\omega} = \frac{a-i\omega}{(a+i\omega)(a-i\omega)} = \frac{a-i\omega}{a^2+\omega^2} =$$

$$= \frac{a}{a^2+\omega^2} - i\,\frac{\omega}{a^2+\omega^2} = A(\omega) - i\,B(\omega) =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos(\omega x)\,dx - i\int_0^{+\infty} e^{-ax}\operatorname{sen}(\omega x)\,dx$$

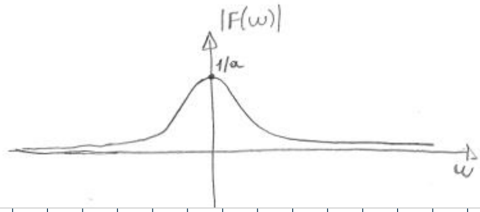
QUINDI (8)

$$A(\omega)=\frac{a}{a^2+\omega^2}$$

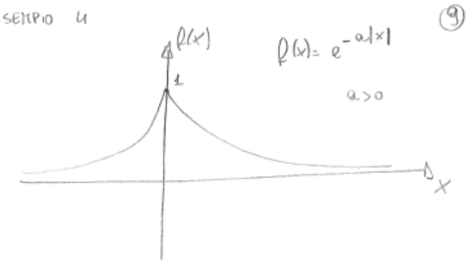
$$B(\omega)=\frac{\omega}{a^2+\omega^2}$$

$$|F(\omega)|=\sqrt{A^2(\omega)+B^2(\omega)}=\sqrt{\frac{a^2}{(a^2+\omega^2)^2}+\frac{\omega^2}{(a^2+\omega^2)^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{a^2+\omega^2}}$$



ESEMPIO 4 (9)



$$f(x)=e^{-a|x|}$$

$a>0$

$f(x)$ É PARI ED ASSOLUTAMENTE INTEGRABILE IN QUANTO:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=2\int_0^{+\infty}e^{-ax}\,dx=\frac{2}{a}$$

(IN QUANTO $f(x)$ É SEMPRE POSITIVA)

$f(x)$ É PARI ED ASSOLUTAMENTE INTEGRABILE IN QUANTO:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=2\int_0^{+\infty}e^{-ax}\,dx=\frac{2}{a}$$

(IN QUANTO $f(x)$ É SEMPRE POSITIVA)

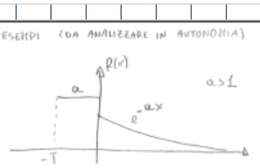
$$A(\omega)=2\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos(\omega x)\,dx=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$ (VEDI ESEMPIO 3)

$$B(\omega)=0$$

$$|F(\omega)|=|A(\omega)|=\left|\frac{2a}{a^2+\omega^2}\right|=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$ (IN QUANTO $a>0$ PER IPOTESI)

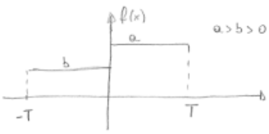
ALTRI ESEMPI (DA ANALIZZARE IN AUTONOMIA) (10)

5)



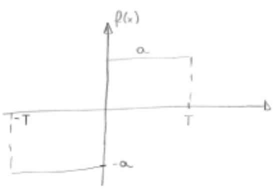
$a>1$

6)



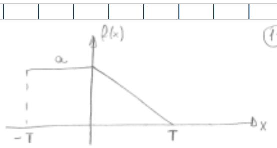
$a>b>0$

7)

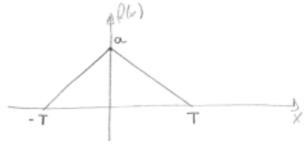


(11)

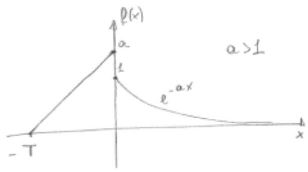
8)



9)



10)



$a>1$

$\omega \in \boldsymbol{R}$ FOURIER

$$\boxed{F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx}$$

$\omega \in \boldsymbol{C}$ LAPLACE

Schema equazioni differenziali

venerdì 11 dicembre 2020 20:49

TIPI DI SOLUZIONI

In base all'ordine ho lo stesso numero di parametri c_i nella soluzione

- **INTEGRALE GENERALE**: È una famiglia di soluzioni dove perciò compaiono una o più costanti c → **FAMIGLIA PARAMETRIZZATA DI SOLUZIONI**
- **INTEGRALE PARTICOLARE**: Grazie ad alcuni vincoli, si assegnano valori specifici alle costanti dell'integrale generale
- **INTEGRALE SINGOLARE**

TIPI DI EQUAZIONI

- **PRIMO ORDINE**: $\underbrace{y' = x(y-2)}$ Equazioni in cui l'ordine di derivazione massimo è uno
- **SECONDO O ORDINE N**: $\underbrace{y'' - 5y' + 6y = 2x^2}$ Equazioni in cui il massimo ordine di derivazione è n con $n \geq 2$

GRADO: elevamento a potenza della derivata di ordine massimo

es. $y''' + y'' - (y')^3 = \sin x \Rightarrow$ **GRADO = 1** (e non 3!!!)

TIPI DI EQUAZIONI DEL PRIMO ORDINE

SEMPLICI (ORDINE N)

$\underbrace{y' = f(x)}$

Basta integrare i due membri n volte se n è l'ordine

A VARIABILI SEPARABILI

$\underbrace{y' = f(x) \cdot g(y)}$

- **SOLUZIONI COSTANTI**: Si verifica se esiste un y_0 tale che $g(y_0)=0$. Se esiste, $y=y_0$ è soluzione costante
- **INTEGRALE GENERALE**: Si pone $y' = \frac{dy}{dx}$, si separano le due variabili e si integra. Vi saranno n parametri c_i in base all'ordine

OMOGENEE

$\underbrace{y' = \frac{A(x,y)}{B(x,y)}}$ 2 polinomi

Si pone $y = xv$ e $y' = v + xv'$ perciò diventa a variabili separabili

LINEARI

$\underbrace{y' + a(x)y = b(x)}$

Se $a(x)$ e $f(x)$ sono continue in I, anche la soluzione lo sarà nello stesso intervallo

- $b(x) = 0 \Rightarrow$ OMOGENEA LINEARE → **DIVENTA A VAR. SEPARABILI**
- $a(x) = 0$ → **DIVENTA SEMPLICE E BASTA INTEGRARE**
- $b(x) \neq 0 \Rightarrow$ COMPLETA → **METODO DEL FATTORE INTEGRANTE**

1) Trovo una primitiva di $a(x)$ tale che $A'(x) = a(x)$ (senza parametri c)
2) Moltiplico entrambi i membri per $e^{A(x)}$ per cui ottengo
$$y' e^{A(x)} + a(x) e^{A(x)} y = f(x) e^{A(x)}$$
dove $y' e^{A(x)} + a(x) e^{A(x)} y = \left[y e^{A(x)}\right]'$
3) Integro entrambi i membri per cui ottengo
$$y e^{A(x)} = \int f(x) e^{A(x)} dx + c$$
4) Isolo la y: $y = e^{-A(x)} \int f(x) e^{A(x)} dx + c e^{-A(x)}$

TIPI DI EQUAZIONI DEL SECONDO ORDINE LINEARI

OMOGENEE

$\underbrace{ay'' + by' + cy = 0}$

Si valuta il determinante della equazione caratteristica $az^2 + bz + c = 0$

- $\Delta > 0 \Rightarrow$ DUE SOLUZIONI REALI DISTINTE
  Base: $e^{z_1 x}, e^{z_2 x}$
  SOL.: $y = c_1 \cdot e^{z_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{z_2 \cdot x}$
- $\Delta = 0 \Rightarrow$ DUE SOLUZIONI REALI COINCIDENTI
  Base: e^{zx}, xe^{zx}
  SOL.: $y = e^{z \cdot x}(c_1 + c_2 x) = c_1 \cdot e^{zx} + x c_2 e^{zx}$
- $\Delta < 0 \Rightarrow$ DUE SOLUZIONI COMPLESSE CONIUGATE
  $z_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ Base: $e^{\alpha x}\sin\beta x, e^{\alpha x}\cos\beta x$
  SOL.: $y = e^{\alpha x}(c_1 \cdot \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$

→ L'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale di dimensione 2

↓ CIOÈ

- Una soluzione moltiplicata per una costante è a sua volta una soluzione
- La combinazione lineare di due soluzioni è a sua volta una soluzione

↓

SOL.: $c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2$

parametri liberi (c_1, c_2); Base dello spazio (y_1, y_2)

NON OMOGENEE

$\underbrace{y'' + ay' + by = f(x)}$

METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI

1) Si risolve l'equazione omogenea associata $f(x) = y'' = 0$ e si trova l'integrale generale incognito in c_1 e c_2
2) Si sostituiscono le costanti c_1 e c_2 con le funzioni $c_1(x)$ e $c_2(x)$ che sono quelle da trovare
3) Si deriva il risultato della omogenea
4) Si impone la somma delle derivate pari a zero (trovando così la prima equazione del sistema da risolvere) $c_1'(x) y_1 + c_2'(x) y_2 = 0$
5) Si deriva una seconda volta
6) Si sostituiscono derivata prima e seconda individuate nella equazione di partenza (ATTENZIONE!!! $c_1(x)$ e $c_2(x)$ si devono semplificare TUTTI e devono rimanere solo $c_1'(x)$ e $c_2'(x)$)
7) Si imposta il sistema con le equazioni trovate al punto 4 e 6 per ricavare $c_1'(x)$ e $c_2'(x)$
8) Si integrano $c_1'(x)$ e $c_2'(x)$ e si sostituiscono i risultati nella equazione del punto 2 per trovare una soluzione particolare
9) L'integrale generale è dato dalla combinazione lineare fra il risultato dell'omogenea e la soluzione particolare
10) Sostituisco i due vincoli e ottengo un integrale particolare

1) Risolvo l'equazione omogenea associata e trovo la soluzione $y_0 = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2$
2) Trovo una soluzione particolare y_p risolvendo il sistema
$$\begin{cases} c_1'(x) y_1 + c_2'(x) y_2 = 0 \\ c_1'(x) y_1' + c_2'(x) y_2' = f(x) \end{cases} \quad y_p = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2$$
3) La soluzione finale sarà $y = y_p + y_0$

COMPLICATO

1) Si risolve la rispettiva omogenea $y'' + ay' + by = 0$ e trovo la soluzione y_0
2) Si considera la natura di $f(x)$: $y'' + ay' + by = f(x)$

- POLINOMIO $\Rightarrow$
  - $b \neq 0 \Rightarrow$ si pone $y = cx + d$, $y' = c$ e $y'' = 0$ che eguaglio all'omogenea sopra per trovare c e d e la soluzione $y_1 = cx + d$. La soluzione finale è $y = y_0 + y_1$
  - $c = 0$ e $b \neq 0 \Rightarrow$ si pone $y = cx^2 + dx$, $y' = 2cx + d$ e $y'' = 2c$ che eguaglio all'omogenea sopra per trovare c e d e la soluzione $y_1 = cx^2 + dx$. L'integrale generale sarà è $y = y_0 + y_1$
  - $c = 0$ e $b = 0 \Rightarrow$ integro il polinomio $f(x)$
- $s(x) \cdot e^{\alpha x}$ (polinomio) $\Rightarrow$
  - $\alpha \neq y_0 \Rightarrow$ si pone $y = (cx+d)e^x$, $y' = (cx+d+c)e^x$ e $y'' = (cx+d+2c)e^x$ che eguaglio all'omogenea sopra per trovare c e d e la soluzione $y_1 = cx + d$. L'integrale generale sarà $y = y_1 \cdot e^x + y_0$
  - $\alpha = y_0$ (ad una) $\Rightarrow$ si pone $y = (cx+d)e^x$, $y' = (cx+d+c)e^x$ e $y'' = (cx+d+2c)e^x$ che eguaglio all'omogenea sopra per trovare c e d e la soluzione $y_1 = cx + d$. L'integrale generale sarà $y = x \cdot y_1 \cdot e^{\alpha x} + y_0$
  - $\alpha = y_0$ (a tutte) $\Rightarrow$ si pone $y = (cx+d)e^x$, $y' = (cx+d+c)e^x$ e $y'' = (cx+d+2c)e^x$ che eguaglio all'omogenea sopra per trovare c e d e la soluzione $y_1 = cx + d$. L'integrale generale sarà $y = x^2 \cdot y_0 \cdot e^{\alpha x} + y_1$
- $e^{\alpha x}(h \cdot \cos\beta x + k \cdot \sin\beta x) \Rightarrow$
  - non c'è e $\Rightarrow \alpha = 0$
  - non c'è cos $\Rightarrow h = 0$
  - non c'è sin $\Rightarrow k = 0$

  - $\alpha + i\beta \neq y_0 \Rightarrow$ si pone $y = e^{\alpha x}(c\cos\beta x + d\sin\beta x)$,
    $y' = e^{\alpha x}[\sin\beta x(\alpha d - \beta c) + \cos\beta x(\alpha c + \beta d)]$ e
    $y'' = e^{\alpha x}[\sin\beta x(\alpha^2 d - \alpha\beta c - \beta^2 d) + \cos\beta x(\alpha^2 c + 2\alpha\beta d - \beta^2 c)]$
    che eguaglio all'omogenea sopra per trovare c e d e la soluzione $y_1 = e^{\alpha x}(c\cos\beta x + b\sin\beta x)$. L'integrale generale sarà $y_0 = y_0 + y_1$ (cioè $y = e^{\alpha x}(c\cos\beta x + d\sin\beta x) + y_1$
  - $\alpha + i\beta = y_0 \Rightarrow$ si pone $y = x \cdot e^{\alpha x}(c\cos\beta x + d\sin\beta x)$,
    $y' = e^{\alpha x}[\sin\beta x(-cx\beta + dx\alpha + d) + \cos\beta x(cx\alpha + dx\beta + c)]$ e
    $y'' = e^{\alpha x}\{\sin\beta x[d(x\alpha^2 - x\beta^2 + 2\alpha) - 2c\beta(\alpha x + 1)] + \cos\beta x[c(x\alpha^2 - x\beta^2 + 2\alpha) + 2d\beta(x\alpha + 1)]\}$
    che eguaglio all'omogenea sopra per trovare c e d e la soluzione $y_1 = e^{\alpha x}(c\cos\beta x + b\sin\beta x)$. L'integrale generale sarà $y_0 = y_0 + y_1$ (cioè $y = xe^{\alpha x}(c\cos\beta x + d\sin\beta x) + y_1$

PROBLEMA DI CAUCHY

I vincoli sono assegnati !!! Tutti nella stessa ascissa x_0

- ODE PRIMO ORDINE
- ODE SECONDO ORDINE

ODE PRIMO ORDINE

$$\begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

- Sol: $y = f(x) + c$ UNICA
- Necessita di un solo vincolo

Si calcola l' integrale generale e si sostituisce il vincolo per trovare l'integrale particolare

ODE SECONDO ORDINE

$$\begin{cases} y'' = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI

(vedi sopra)

Schema esercizi svolti sulle ODE

domenica 27 dicembre 2020 11:00

TIPO 1: ODE 1° ORDINE "ELEMENTARE"

$y' = f(x) \xrightarrow{\text{Basta integrare}} y = \int f(x)\,dx = F(x) + c$

es. $y' = 3e^{2x} \Rightarrow y = \int 3e^{2x}\,dx = \frac{3}{2}e^{2x} + c$

TIPO 2: ODE 2° ORDINE O PIÙ "ELEMENTARE"

$y'' = f(x) \xrightarrow[\text{due volte}]{\text{Basta integrare}} y' = \int f(x)\,dx = F(x) + c_1 \Rightarrow y = \int F(x)\,dx + c_1 x + c_2$

es. $y'' = 2 - \cos x \Rightarrow y' = \int (2 - \cos x)\,dx = 2x - \sin x + c_1 \Rightarrow y = \int (2x - \sin x + c_1)\,dx = x^2 + \cos x + c_1 x + c_2$

TIPO 3: ODE A VAR. SEPARABILI

$y' = f(x)g(y) \xrightarrow{\text{Basta spezzare}} \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx$

!!! BISOGNA CONTROLLARE LE SOL. COSTANTI !!!
Se $\exists\, y_0 \in \mathbb{R} \mid g(y_0) = 0$ allora $y = y_0$ è una soluzione costante!

es. $y' = y^2 \ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y^2 \ln x \Rightarrow \int \frac{1}{y^2}\,dy = \int \ln x\,dx \Rightarrow y = -\frac{1}{x\ln x - x + c}$

↳ va aggiunta la soluzione costante $y(x) = 0$ poiché $g(y) = y^2$ e $g(y_0) = 0$ con $y_0 = 0$

TIPO 4: ODE LINEARI 1° ORDINE

$y' + a(x)\,y(x) = f(x)$
- se $a(x) = 0$ diventa "elementare"
- se $f(x) = 0$ diventa a variabili separabili
- se $f(x) \neq 0$ e $a(x) \neq 0$ applico il metodo del fattore integrante

es. $y' - xy = 2x \Rightarrow$ pongo $a(x) = -x$. Ho che $A'(x) = a(x)$ per cui $A(x) = \int -x\,dx = -\frac{x^2}{2}$

Moltiplico i membri per $e^{-\frac{x^2}{2}}$: $\underbrace{y' e^{-\frac{x^2}{2}} - x\, e^{-\frac{x^2}{2}} y}_{=\left[y e^{-\frac{x^2}{2}}\right]'} = 2x\, e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow \int \left[y\, e^{-\frac{x^2}{2}}\right]' = \int 2x\, e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \Rightarrow$

$\Rightarrow y\, e^{-\frac{x^2}{2}} = -2e^{-\frac{x^2}{2}} + c \Rightarrow y = -2 + c\, e^{\frac{x^2}{2}}$

TIPO 5: ODE LINEARE 2° ORDINE OMOGENEE

$ay'' + by' + c = 0 \longrightarrow$ Si studia il det. dell'equazione associata $az^2 + bz + c = 0$

es. $y'' - 5y' + 4y = 0 \longrightarrow z^2 - 5z + 4 = 0 \Rightarrow z = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$ ($\Delta > 0 \Rightarrow$ 2 sol. distinte)

Dunque la soluzione sarà $y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{x}$

es. $y'' + 2y' + 2y = 0 \Rightarrow z^2 + 2z + 2 = 0 \Rightarrow z = -1 \pm \sqrt{1 - 2} = -1 \pm \sqrt{-1} = -1 \pm i$ ($\Delta < 0$ dunque 2 sol. complesse) $\begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 1 \end{cases}$

Dunque una base sarà $(e^{-x}\sin x,\ e^{-x}\cos x)$ e una soluzione sarà $y = c_1 e^{-x}\sin x + c_2 e^{-x}\cos x$

Schema integrali multipli

martedì 5 gennaio 2021 16:38

DOPPI

1) CURVE MULTIPLE

Spezzo in vari intervalli, a loro volta y-semplici o x-semplici

2) CORONE - COORDINATE POLARI * se traslata e non di centro (0,0)

Faccio un cambio di variabile (possibile poiché $|\det f'(\rho,\theta)| = \rho \neq 0$) e

dunque pongo $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\,\text{sen}\,\theta$ e $dA = dx \cdot dy = \rho \cdot d\theta \cdot d\rho$

$x = x_0 + \rho\cos\theta$ * $y = y_0 + \rho\,\text{sen}\,\theta$ *

3) COORDINATE ELLITTICHE

Faccio un cambio di variabile (possibile poiché $|\det f'(\rho,\theta)| = a \cdot b \cdot \rho \neq 0$) e

dunque pongo $x = a\rho\cos\theta$, $y = b\rho\,\text{sen}\,\theta$ e $dA = dx \cdot dy = a \cdot b \cdot \rho \cdot d\theta \cdot d\rho$

4) CAMBIO DI VARIABILI

Pongo delle variabili pari a u, v, ecc. e verifico che il determinante della matrice jacobiana ottenuta sia diverso da zero in quanto ciò rende possibile il cambio di variabile. Devo anche individuare poi la forma in y-semplice / x-semplice. Si avrà che $dx\,dy = |\det J| \cdot du \cdot dv$

MATRICE JACOBIANA

TRIPLI

1) CAMBIO DI VARIABILE - COORDINATE CILINDRICHE

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

Simmetria rispetto all'asse delle z

$dV = dx\,dy\,dz = \rho\,d\theta \cdot d\rho \cdot dz$

2) CAMBIO DI VARIABILE - COORDINATE SFERICHE

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

$\varphi \to$ COLATITUDINE

Simmetria rispetto all'origine degli assi

$dV = dx\,dy\,dz = \overbrace{\rho\sin\varphi\,d\theta}^{dz} \cdot \overbrace{\rho\,d\varphi \cdot d\rho}^{dx \cdot dy} = \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$ * $dz = \rho\sin\varphi\,d\theta$

INTEGRALI CURVILINEI

SE IRROTAZIONALE E CON DOMINIO SEMPLICEMENTE CONNESSO

INTEGRALI CURVILINEI

SE IRROTAZIONALE E CON DOMINIO SEMPLICEMENTE CONNESSO

- Allora è CONSERVATIVO: (È UNA FORMA DIFFERENZIALE ESATTA E CHIUSA)

① $\int_A^B \underline{F} \cdot d\underline{z} = U(B) - U(A)$ con $\underline{F} = \nabla U$

② $\oint \underline{F} \cdot d\underline{z} = 0$

ALTRIMENTI:

- Allora è NON CONSERVATIVO:

① $\underline{F} \neq \nabla U$

② $\int_A^B F \circ dz \longrightarrow$
- Parametrizzazione
- Esprimere F e dz in funzione di t
- Impostare un verso di percorrenza e, in base ad essi, gli estremi di integrazione

CALCOLO DEL POTENZIALE

① INTEGRARE RISPETTO A x

$$U(x,y,z) = \int F_1\, dx = f_1(x,y,z) + c_1(y,z)$$

② RAPPORTARE ALLA SECONDA COMPONENTE

$$\frac{dU}{dy} = F_2 \Rightarrow \frac{d\left[f_1(x,y,z) + c_1(y,z)\right]}{dy} = F_2 \Rightarrow U = f_1(x,y,z) + c_2(z)$$

$$=0 \Rightarrow c_1(y,z) = c_2(z)$$

Dunque $U(x,y,z) = f_1(x,y,z) + c_2(z)$

③ RAPPORTARE ALLA TERZA COMPONENTE

$$\frac{dU}{dz} = F_3 \Rightarrow \frac{d\left[f_1(x,y,z) + c_2(z)\right]}{dz} \Rightarrow U = f_1(x,y,z) + k$$

$$=0 \Rightarrow c_2(z) = k$$

OTTIMIZZAZIONE LIBERA → Trova massimi e minimi locali (che potrebbero essere assoluti)

1) VALUTARE LA CLASSE
↓
Per Schwarz, se f è di classe C^2 allora le derivate seconde miste coincidenti

Se una funzione è composta
Tipo $z = g(ax+by)$
si sostituisce $t = ax+by$
es. $z = (2x+y)[3-(2x+y)^2] \Rightarrow t = 2x+y$

2) TROVARE i PUNTI STAZIONARI
↓
Si pone $\nabla f(x,y) = (0,0)$.
Attenzione! Valutare se sono tutti critici

3) CALCOLARE LA MATRICE HESSIANA
↓
se di classe C^2(almeno) è simmetrica

$\boxed{2\times 2}$

$$\underline{\underline{H}}(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

Simmetria

$\boxed{3\times 3}$

$$\underline{\underline{H}}(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{pmatrix}$$

4) CALCOLARE IL DETERMINANTE DELLA MATRICE
↓
Se $\det(\underline{\underline{H}}(x_0)) = 0$ allora devo usare il metodo al punto 7

Se $\underline{\underline{H}}$ è 2×2
- $\det(\underline{\underline{H}}(x_0)) < 0 \Rightarrow$ NON DEFINITA
- $\det(\underline{\underline{H}}(x_0)) > 0$ e $f_{xx}(x_0) > 0 \Rightarrow$ DEFINITA POSITIVAMENTE
- $\det(\underline{\underline{H}}(x_0)) > 0$ e $f_{xx}(x_0) < 0 \Rightarrow$ DEFINITA NEGATIVAMENTE

Se $\underline{\underline{H}}$ è $n\times n$

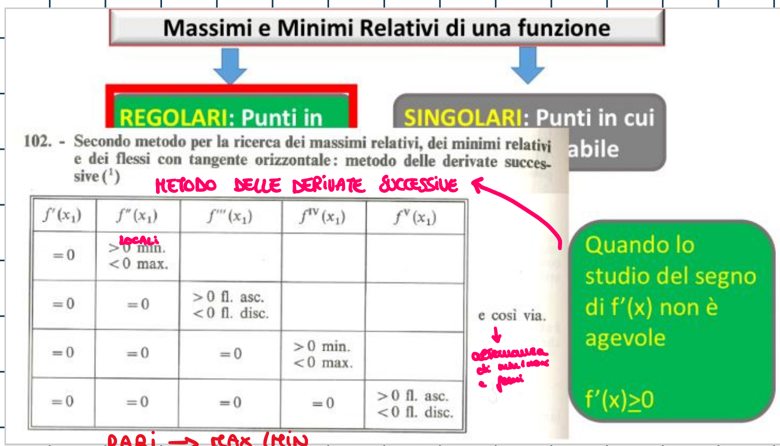
TEOREMA DI JACOBI
- Tutti i minori hanno $\det > 0 \Rightarrow$ DEFINITA POSITIVA
- I minori di i pari hanno $\det < 0$ e di i dispari $\det < 0 \Rightarrow$ DEFINITA NEGATIVA
- Tutti i minori hanno $\det \geq 0 \Rightarrow$ SEMIDEFINITA POSITIVA
- I minori, alternati, hanno $\det \leq 0$ ($\det \geq 0$) $\Rightarrow$ SEMIDEFINITA NEGATIVA
- $\exists$ un minore con $\det < 0$ ed uno con $\det > 0 \Rightarrow$ NON DEFINITA

5) CALCOLARE GLI AUTOVALORI
↓
Si calcola $\det(\underline{\underline{H}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0$

6) VALUTARE GLI AUTOVALORI
- $\lambda > 0 \Rightarrow$ Definita positivamente → MINIMO LOCALE
- $\lambda < 0 \Rightarrow$ Definitiva negativamente → MASSIMO LOCALE
- $\lambda > 0$ e $\lambda < 0 \Rightarrow$ Non definita → SELLA
- $\lambda \geq 0 \Rightarrow$ Semidefinita positiva
- $\lambda \leq 0 \Rightarrow$ Semidefinita negativa

7) ANALISI DEI PUNTI CON HESSIANO NULLO
— METODO DELLE RETTE

Se det $(\underline{H}(x_0)) = 0$ allora creo una restrizione tramite delle rette (es. $y = x$, $y = -x$) e itero la derivazione fin quando, sostituendo x_0, non ottengo un numero $\gtrless 0$. In base all'ordine di derivazione, avrò che tal punto è, per quella curva,



102. - Secondo metodo per la ricerca dei massimi relativi, dei minimi relativi e dei flessi con tangente orizzontale: metodo delle derivate successive [1]

METODO DELLE DERIVATE SUCCESSIVE

$f'(x_1)$	$f''(x_1)$	$f'''(x_1)$	$f^{IV}(x_1)$	$f^{V}(x_1)$
$=0$	>0 min. (locali) <0 max.			
$=0$	$=0$	>0 fl. asc. <0 fl. disc.		
$=0$	$=0$	$=0$	>0 min. <0 max.	
$=0$	$=0$	$=0$	$=0$	>0 fl. asc. <0 fl. disc.

e così via.

PARI → MAX / MIN
DISPARI → FLESSO

- Se per entrambe le curve è di massimo, è un MASSIMO
- Se per entrambe le curve è di minimo, è un MINIMO
- Se per una curva è massimo e per l'altra minimo, è una SELLA

– METODO DEL SEGNO

Se det $(\underline{H}(x_0)) = 0$ allora studio il segno della funzione.
- Se nell'intorno di x_0 è positiva, è un punto di minimo relativo
- Se nell'intorno di x_0 è negativa, è un punto di massimo relativo
- Se nell'intorno di x_0 è sia negativa sia positiva, è un punto di sella

8) Per valutare se max e min sono assoluti, si deve valutare se la funzione è limitata o illimitata e lo si fa studiando
- punti di discontinuità
- limiti agli estremi del dominio

OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA → trova solo massimi e minimi assoluti

* Vale il teorema di Weierstrass e non si studia la matrice hessiana perché non serve studiare gli estremi locali ma solo gli ASSOLUTI

1) ANALIZZARE I VERTICI

Prendo le curve di restrizione e verifico se i vertici sono massimi o minimi

2) TROVARE I PUNTI STAZIONARI CLASSICI

Calcolo le derivate prime e trovo i punti stazionari i quali devono essere interni alla curva ottenuta con le costrizioni

3) TROVARE I PUNTI STAZIONARI SOSTITUENDO I VINCOLI

Si sostituiscono a turno le curve di vincolo nella curva di partenza, calcolo le derivate prime e trovo i punti stazionari i quali devono essere interni alla curva ottenuta con le costrizioni

4) CLASSIFICA FINALE

Si pongono in ordine i risultati ottenuti e si ottengono così i massimi e minimi assoluti

METODO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

1) COSTRUIRE LA FUNZIONE LAGRANGIANA

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

2) TROVARE I PUNTI STAZIONARI

Si pone $\nabla L(x,y,\lambda)=0$ cioè $\frac{dL}{dx}=0$, $\frac{dL}{dy}=0$, $\frac{dL}{d\lambda}=0$...

Esercizi ottimizzazione libera

domenica 3 gennaio 2021 16:19

1 $f(x,y) = x^2+y^3-xy$ funzione di classe C^∞

- Calcolo le derivate parziali

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x-y \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3y^2-x$$

- Trovo dove ci sono punti stazionari:

$$\nabla f(0,0) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} 2x-y=0 \\ 3y^2-x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x \\ 3\cdot 4\cdot x^2-x=0 \end{cases} \begin{cases} y=2x \\ x(12x-1)=0 \end{cases}$$

SOLUZIONI: ① $\underbrace{x=0,\ y=0}_{A}$ ② $\underbrace{x=\frac{1}{12},\ y=\frac{1}{6}}_{B}$

A e B sono due punti stazionari. Per studiarli applico la matrice Hessiana

calcolo le derivate seconde miste

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 6y \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y} = -1 \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x} = -1$$

$$\underline{\underline{H}}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6y \end{pmatrix}$$ MATRICE SIMMETRICA ⇒ Una funzione di classe C^2 ha matrice hessiana simmetrica → SCHWARZ

PUNTO A: $\underline{\underline{H}}(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Calcolo gli autovalori tali che $\det(\underline{\underline{H}} - \lambda\cdot\underline{\underline{I}}) = 0$

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(2-\lambda)-(-1)(-1) = \boxed{-2\lambda+\lambda^2-1=0}$$

$\Delta = 1+1>0$

$$\lambda^2-2\lambda-1=0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1\pm\sqrt{2} \begin{cases} 1+\sqrt{2} > 0 \\ 1-\sqrt{2} < 0 \end{cases}$$

$\underline{\underline{H}}(0,0)$ non è definita quindi $A(0,0)$ è un punto di SELLA

PUNTO B: $\underline{\underline{H}}(\frac{1}{12},\frac{1}{6}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)-1 = 2-2\lambda-\lambda+\lambda^2-1 = \boxed{\lambda^2-3\lambda+1=0}$$

$\Delta = 9-4>0$

$$\lambda^2-3\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda_1\lambda_2 = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2} \begin{cases} \frac{3+\sqrt{5}}{2} > 0 \\ \frac{3-\sqrt{5}}{2} > 0 \end{cases}$$

$\underline{\underline{H}}(\frac{1}{16},\frac{1}{6})$ è definita positiva quindi $B(\frac{1}{16},\frac{1}{6})$ è un minimo locale

---

2 $f(x,y) = 2(x^4+y^4+1)-(x+y)^2$ funzione di classe C^∞

- Calcolo le derivate parziali

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 8x^3-2(x+y) = 2(4x^3-x-y) \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 8y^3-2(x+y) = 2(4y^3-x-y)$$

- Trovo i punti stazionari:

$$\nabla f(0,0) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} 4x^3-x-y=0 \\ \cancel{-4y^3+x+y=0} \\ 4y^3-x-y=0 \end{cases} \Rightarrow 4x^3-4y^3=0 \Rightarrow \underbrace{(x-y)}_{x=y}\underbrace{(x^2+xy+y^2)}_{x^2+xy+y^2=0}=0$$

$\Delta = y^2-4y^2 = -3y^2 < 0 \ \nexists x\in\mathbb{R}$

Risolvo usando $x=y$:

$$\begin{cases} x = y \\ 4x^3 - x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow 4y^3 - y - y = 0 \Rightarrow 4y^3 - 2y = 0 \Rightarrow 2y\,(2y^2 - 1) = 0 \left\langle \begin{array}{l} y = 0 \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right.$$

SOLUZIONI: ① $\underbrace{x = 0,\ y = 0}_{A}$ ② $\underbrace{x = \frac{\sqrt{2}}{2},\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}}_{B}$ ③ $\underbrace{x = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2}}_{C}$

costruisco la matrice hessiana:

$$\frac{d^2 f(x,y)}{dx^2} = 2(12x^2 - 1) \qquad \frac{d^2 f(x,y)}{dx\,dy} = -2 \qquad \frac{d^2 f(x,y)}{dy^2} = 2(12y^2 - 1) \qquad \frac{d^2 f(x,y)}{dy\,dx} = -2$$

$$\underline{\underline{H}}(x,y) = \begin{pmatrix} 2(12x^2 - 1) & -2 \\ -2 & 2(12y^2 - 1) \end{pmatrix}$$

PUNTO A:

$$\underline{\underline{H}}(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

!!! non posso concludere nulla

Scelgo allora due curve $g_1(x) = x$ e $g_2(x) = -x$

$f''(x_0) < 0$ allora è MAX (lungo la prima curva)

① $f(x,y)\big|_{g_1(x)} = 2(x^4 + x^4 + 1) - (x+x)^2 = 4x^4 + 2 - 4x^2 \xRightarrow{\text{1 derivo}} 16x^3 - 8x \xRightarrow{\text{2 derivo}} 48x^2 - 8 \xRightarrow{x=0} -8 < 0$

② $f(x,y)\big|_{g_2(x)} = 2(x^4 + x^4 + 1) - (x - x)^2 = 4x^4 + 2 \xRightarrow{\text{1 derivo}} 16x^3 \underset{\text{MAX}}{\xRightarrow{\text{2 derivo}}} 48x^2 \xRightarrow{x=0} 0 = 0 \underset{\text{FLESSO}}{\xRightarrow{\text{3 derivo}}} 96x \xRightarrow{x=0} 0 \underset{\text{MAX}}{\xRightarrow{\text{4 derivo}}} 96 \xRightarrow{x=0} 96 > 0$ Dunque è MINIMO

Perciò in A si ha un punto di sella

PUNTO B:

$$\underline{\underline{H}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 10 & -2 \\ -2 & \end{vmatrix} = 100 - 4 = 96 > 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 10 - \alpha & -2 \\ -2 & 10 - \alpha \end{pmatrix} = (10 - \alpha)^2 - 4 = 100 + \alpha^2 - 20\alpha - 4 = \alpha^2 - 20\alpha + 96 = 0$$

$$\alpha = 10 \pm \sqrt{100 - 96} = \left\langle \begin{array}{l} 10 + 2 = 12 \\ 10 - 2 = 8 \end{array} \right.$$

è un punto di minimo locale

PUNTO C:

$$H\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$ ↳ vale lo stesso di B

- Ricerca massimi e minimi

$f(x,y) = 3x^2 + y^2 - x^3 y \Rightarrow$ poiché è una polinomiale, è di classe C^∞ dunque per Schwarz è differenziabile

Calcolo le derivate parziali:

$$\frac{d f(x,y)}{dx} = 6x - 3x^2 y \qquad \frac{d f(x,y)}{dy} = 2y - x^3$$

Calcolo le derivate seconde miste:

$$\frac{d^2 f(x,y)}{dx\,dy} = -3x^2 \qquad \frac{d^2 f(x,y)}{dy\,dx} = -3x^2$$

Calcolo le derivate seconde pure:

$$\frac{d^2 f(x,y)}{dx^2} = -6xy \qquad \frac{d^2 f(x,y)}{dy^2} = 2$$

La matrice Hessiana sarà:

$$\underline{\underline{H}}(x,y) = \begin{pmatrix} -6xy & -3x^2 \\ -3x^2 & 2 \end{pmatrix}$$

Trovo i punti stazionari:

$$\nabla f(0,0) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} 6x - 3x^2 y = 0 \\ 2y - x^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - 3\frac{x^5}{2} = 0 \\ y = \frac{x^3}{2} \end{cases}$$

Trovo i punti stazionari:

$\nabla f(0,0) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} 6x - 3x^2 y = 0 \\ 2y - x^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x - \frac{3x^5}{2} = 0 \\ y = \frac{x^3}{2} \end{cases}$

$* \quad 6x - \frac{3}{2}x^5 = 0 \Rightarrow 12x - 3x^5 = 0 \Rightarrow 3x(4 - x^4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x^4 = 4 \begin{cases} x^2 = 2 \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases} \\ \cancel{x^2 = -2} \end{cases} \end{cases}$

SOLUZIONI:

① $\underbrace{x=0,\ y=0}_{A}$ ② $\underbrace{x=-\sqrt{2},\ y=-\sqrt{2}}_{B}$ ③ $\underbrace{x=\sqrt{2},\ y=\sqrt{2}}_{C}$

PUNTO A:

$\underline{\underline{H}}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\underline{\underline{H}}(0,0)) = 0$

metodo delle rette:

Pongo $g_1(x) = x$ e $g_2(x) = -x$

$f(x,y)|_{g_1(x)} = 3x^2 + x^2 - x^3 \cdot x = -x^4 + 4x^2 \overset{f'}{\Longrightarrow} -4x^3 + 8x \xrightarrow{x=0} 0 \qquad \overset{f''}{\Longrightarrow} -12x^2 + 8 \xrightarrow{x=0} 8 > 0$

→ rispetto a $g_1(x)$ è un minimo

$f(x,y)|_{g_2(x)} = 3x^2 + x^2 + x^3 \cdot x = x^4 + 4x^2 \overset{f'}{\Longrightarrow} 4x^3 + 8x \xrightarrow{x=0} 0 \qquad \overset{f''}{\Longrightarrow} 12x + 8 \xrightarrow{x=0} 8 > 0$

→ rispetto a $g_2(x)$ è un minimo

posso dire che $(0,0)$ è minimo

PUNTO B:

$\underline{\underline{H}}(-\sqrt{2},-\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\underline{\underline{H}}(-\sqrt{2},-\sqrt{2})) = -24 - 36 < 0$

è sicuramente NON DEFINITA ⇒ SELLA

Calcolo lo stesso gli autovalori:

$\det \begin{pmatrix} -12-\lambda & -6 \\ -6 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (-12-\lambda)(2-\lambda) - 36 = -24 + 12\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 36 = \boxed{\lambda^2 + 10\lambda - 60 = 0}$

$\Delta = 25 + 60 > 0$

$\lambda^2 + 10\lambda - 60 = 0 \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 = -5 \pm \sqrt{85} \begin{cases} -5 + \sqrt{85} > 0 \\ -5 - \sqrt{85} < 0 \end{cases}$ } SELLA

PUNTO C: → uguale al punto B

$\underline{\underline{H}}(\sqrt{2},\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$ $\det(\underline{\underline{H}}(\sqrt{2},\sqrt{2})) = -24 - 36 < 0$

sicuramente è non definita ⇒ SELLA

- Ricerca massimi e minimi

$f(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ ⇒ funzione di classe C^∞

calcolo le derivate parziali:

$\frac{d f(x,y)}{dx} = 4x^3 - 12y^2 x \qquad \frac{d f(x,y)}{dy} = -12x^2 y + 4y^3$

Calcolo le derivate seconde miste:

$\frac{d^2 f(x,y)}{dx dy} = -24xy \qquad \frac{d^2 f(x,y)}{dy dx} = -24xy$

Calcolo le derivate seconde pure:

$\frac{d^2 f(x,y)}{dx^2} = 12x^2 - 12y^2 \qquad \frac{d^2 f(x,y)}{dy^2} = -12x^2 + 12y^2$

Per trovare i punti stazionari pongo $\nabla f(x,y) = (0,0)$

$$\begin{cases} 4x^3 - 12y^2x = 0 \\ -12x^2y + 4y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x(x^2 - 3y^2) = 0 \\ -12x^2y + 4y^3 = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} x = 0 \\ y(1+4y^2) = 0 \end{cases}$ → $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ ✓ oppure $\begin{cases} x = 0 \\ 4y^2 = -1 \end{cases}$ ✗

$$\begin{cases} x^2 = 3y^2 \\ -12(3y^2)y + 4y^3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 3y^2 \\ -36y^3 + 4y^3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 3y^2 \\ -32y^3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

SOLUZIONI: 1) $\underbrace{x = 0,\ y = 0}_{A}$ ESISTE UN SOLO PUNTO CRITICO

$$\underline{\underline{H}}(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 12y^2 & -24xy \\ -24xy & -12x^2 + 12y^2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{H}}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\underline{\underline{H}}(0,0)) = 0$$

Procedo con il metodo delle rette:

$g_1(x) = x$ e $g_2(x) = -x$ e $g_3(x) = 0$

1) $f(x,y)|_{g_1(x)} = x^4 - 6x^4 + x^4 = -4x^4 \overset{f'}{\Longrightarrow} -16x^3 \overset{f''}{\Longrightarrow} -48x^2 \overset{f'''}{\Longrightarrow} -96x \overset{f^{(IV)}}{\Longrightarrow} -96 < 0$ MASSIMO

($-16x^3 \xrightarrow{x=0} 0$, $-48x^2 \xrightarrow{x=0} 0$, $-96x \xrightarrow{x=0} 0$)

2) $f(x,y)|_{g_2(x)} = x^4 - 6x^4 + x^4 =$ stessa cosa

3) $f(x,y)|_{g_3(x)} = x^4 \overset{f'}{\Longrightarrow} 4x^3 \overset{f''}{\Longrightarrow} 3x^2 \overset{f'''}{\Longrightarrow} 6x \overset{f^{(IV)}}{\Longrightarrow} 6 > 0$ MINIMO

Dunque $(0,0)$ è di SELLA

$f(x,y) = 3x^2 + y^2 - x^3y \Rightarrow$ Funzione di classe C^∞

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(6x - 3x^2y,\ 2y - x^3\right)$$

Trovo i punti stazionari:

$$\nabla f(x,y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 6x - 3x^2y = 0 \\ 2y - x^3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x(2 - xy) = 0 \\ x^3 = 2y \end{cases}$$

$3x(2-xy) = 0$ → $x = 0$ oppure $xy = 2$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{x^3}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} xy = 2 \\ y = \frac{x^3}{2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x^4 = 4 \\ y = \frac{x^3}{2} \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2 \to x = \sqrt{2},\ x = -\sqrt{2}$$

↓

A: $(0,0)$ B: $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ C: $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

Matrice Hessiana:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6 - 6xy \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -3x^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

$$\underline{\underline{H}} = \begin{pmatrix} 6-6xy & -3x^2 \\ -3x^2 & 2 \end{pmatrix}$$

(A) $\underline{\underline{H}}(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $6 > 0$ $\Rightarrow \det(\underline{\underline{H}}(0,0)) = 12 > 0$ → è definita positiva $\Downarrow$ MINIMO LOCALE

(B) $\underline{\underline{H}}(\sqrt{2},\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\underline{\underline{H}}(\sqrt{2},\sqrt{2})) = -12-36 < 0$ → non è definita $\Downarrow$ PUNTO DI SELLA

(C) $\underline{\underline{H}}(-\sqrt{2},-\sqrt{2}) \Rightarrow$ situazione precedente

---

$f(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$

$\frac{df}{dx} = 4x^3 - 12xy^2 \qquad \frac{df}{dy} = -12x^2y + 4y^3$

$\frac{d^2f}{dx^2} = 12x - 12y^2 \qquad \frac{d^2f}{dy^2} = -12x^2 + 12y^2$

$\frac{d^2f}{dxdy} = -24xy \qquad \frac{d^2f}{dydx} = -24xy$

PUNTI CRITICI:

$$\begin{cases} 4x^3 - 12xy^2 = 0 \\ -12x^2y + 4y^3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x(x^2 - 12y^2) = 0 \\ 4y(y^2 - 12x^2) = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x = 0 \\ x^2 - 12y^2 = 0 \\ y = 0 \\ y^2 - 12x^2 = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 - 12y^2 = 0 \\ y^2 - 12x^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y^2 - 12x^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 12y^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$-144x^2 + 12y^2$

$-143x^2 + 0 = 0$

$y = 0 \qquad x = 0$

A: $(0,0)$ unico punto critico

$$\underline{\underline{H}}(x,y) = \begin{pmatrix} 12x - 12y^2 & -24xy \\ -24xy & -12x^2 + 12y^2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{H}}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \det(\underline{\underline{H}}(0,0)) = 0$$

metodo delle rette:

$y = x \quad e \quad y = -x$

$y = x \Rightarrow y^4 - 6y^4 + y^4 = -4y^4$

$-4y^4 \xrightarrow{1^a} -16y^3 \xrightarrow{2^a} -48y^2 \xrightarrow{3^a} -96y \xrightarrow{4^a} -96 < 0$

FLESSO

è una sella!!!

$f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xz + 2x + 2y + 1$

$\frac{df}{dx} = 6x - 2z + 2 \quad \frac{df}{dy} = 4y + 2 \quad \frac{df}{dz} = 2z - 2x$

$\frac{d^2f}{dxdy} = 0 \quad \frac{d^2f}{dxdz} = -2 \quad \frac{d^2f}{dx^2} = 6$

$\frac{d^2f}{dydx} = 0 \quad \frac{d^2f}{dydz} = 0 \quad \frac{d^2f}{dy^2} = 4$

$\frac{d^2f}{dzdx} = -2 \quad \frac{d^2f}{dzdy} = 0 \quad \frac{d^2f}{dz^2} = 2$

$$\underline{\underline{H}}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Punti Critici:

$4z + 2 = 0$

$$\begin{cases} 6x - 2z + 2 = 0 \\ 4y + 2 = 0 \\ z = x \end{cases} \quad \begin{cases} 6z - 2z + 2 = 0 \\ y = -\frac{1}{2} \\ x = z \end{cases} \quad \begin{cases} z = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{H}}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det = 32 > 0 \quad \text{Minimo}$$

1) $\boxed{\begin{cases} yy' = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}} \Rightarrow y\frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow \int y\,dy = \int dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = x + c \Rightarrow y = \sqrt{2(x+c)}$ INT. GENERALE

$y' \cdot y = 1$

$p(x) = 0$

$g(y) = y$

Se $y(0) = 2$ allora $2 = \sqrt{2c} \Rightarrow c = 2$ per cui $y = \sqrt{2x+4}$ SOL. PARTICOLARE

$\downarrow$

unica poiché le funzioni di partenza sono continue

Inoltre se $y_0 = 0$ allora $g(y) = 0$

ma $y(0) = 0$ non rispetta il vincolo

2) $\boxed{\begin{cases} y' = 2x\sqrt{1-y^2} \\ y(\sqrt{\pi}) = \frac{1}{2} \end{cases}} \rightarrow y' - 2x\sqrt{1-y^2} = 0$

$g(y) = \sqrt{1-y^2} = 0$ se $1-y^2 = 0 \rightarrow y^2 = 1 \rightarrow y = \pm 1$ SOL. COSTANTE

DOMINIO: $1-y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1$

Integro: $\frac{dy}{dx} = 2x\sqrt{1-y^2} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy = \int 2x\,dx \Rightarrow \arcsin y = x^2 + c \Rightarrow y = \sin(x^2+c)$

DOMINIO: $-1 \leq \sin(x^2+c) \leq 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x^2 + c \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$y(\sqrt{\pi}) = \frac{1}{2} \Rightarrow \arcsin\frac{1}{2} = \pi + c \Rightarrow c \begin{cases} \frac{\pi}{6} - \pi \Rightarrow c = -\frac{5}{6}\pi \\ \frac{5}{6} - \pi \Rightarrow c = -\frac{\pi}{6} \end{cases}$

Poiché $-\frac{\pi}{2} \leq \pi + c \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2}\pi \leq c \leq -\frac{\pi}{2}$ allora solo $c = -\frac{5}{6}\pi$ è accettabile

Dunque $y = \sin\left(x^2 - \frac{5}{6}\pi\right)$ SOLUZIONE con $\sqrt{\frac{\pi}{3}} \leq x \leq \sqrt{\frac{4}{3}\pi}$

1) $\boxed{y' - 2y = 1}$ Lineare non omogenea del 1° ordine $\rightarrow$ la riporto a var. separabili

$y' - 2y - 1 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 + 2y \Rightarrow dy = (1+2y)\,dx \Rightarrow \int \frac{1}{1+2y}\,dy = \int dx$

$\int \frac{1}{1+2y}\,dy \Rightarrow \boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(f(x)) + c} \Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{2}{2y+1}\,dy = \frac{1}{2}\ln(2y+1) + c$

$\frac{1}{2}\ln(2y+1) = x + c \Rightarrow \ln(2y+1) = 2x + 2c \Rightarrow 2y + 1 = e^{2(x+c)} \Rightarrow y = \frac{e^{2(x+c)} - 1}{2}$

2) $\boxed{y' + y = e^x}$ Lineare non omogenea del 1° ordine

$y' + a(x)y = 0$ Trovo $A(x)$: $A'(x) = a(x)$

$A(x) = \int a(x) = \int 1\,dx = x$

Moltiplico per e^x

$y'e^x + e^x y = e^{2x}$

$(ye^x)' = y'e^x + e^x y$

$ye^x = \frac{1}{2}\int 2e^{2x}\,dx$

$ye^x = \frac{1}{2}e^{2x} + c$

$$y = \frac{1}{2}e^{x} + \frac{c}{e^{x}}$$

③ $\boxed{y' - 2y = x^2 + x}$

$$a(x) = -2 \Rightarrow A(x) = \int -2\,dx = -2x + c$$

$$y'e^{-2x} - 2e^{-2x}y = (x^2+x)e^{-2x}$$

$$(ye^{-2x})' = y'e^{-2x} - 2e^{-2x}y$$

$$ye^{-2x} = \int \underbrace{(x^2+x)}_{f(x)} \overbrace{e^{-2x}}^{g'(x)}\,dx \qquad f(x) = x^2 + x \quad f'(x) = 2x + 1 \quad g(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$$

$$\int (x^2+x)e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}(x^2+x)e^{-2x} + \int e^{-2x}\,dx + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2+x)e^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-2x} + c$$

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + ce^{2x}$$

④ $\boxed{3y' + y = 2e^{-x}}$ $\longrightarrow$ $y' + \frac{1}{3}y = \frac{2}{3}e^{-x}$

- $a(x) = \frac{1}{3} \Rightarrow A(x) = \frac{1}{3}x$
- $y'e^{\frac{x}{3}} + \frac{1}{3}ye^{\frac{x}{3}} = \frac{2}{3}e^{-x} \cdot e^{\frac{x}{3}}$
- $ye^{\frac{x}{3}} = -\int -\frac{2}{3}e^{-\frac{2}{3}x}\,dx = -e^{-\frac{2}{3}x} + c$

$$\Downarrow$$

$$y = -e^{-x} + ce^{-\frac{x}{3}}$$

⑤ $\boxed{y' + 3y = e^{ix}}$

- $a(x) = 3 \Rightarrow A(x) = 3x$
- $\underbrace{y'e^{3x} + 3ye^{3x}}_{(ye^{3x})' = y'e^{3x} + 3ye^{3x}} = e^{ix} \cdot e^{3x}$
- $ye^{3x} = \int e^{(3+i)x}\,dx = \frac{1}{3+i}\int (3+i)e^{(3+i)x}\,dx = \frac{e^{(3+i)x}}{3+i} + c$
- $y = \frac{\cancel{e^{3x}} \cdot e^{ix}}{\cancel{e^{3x}}(3+i)} + \frac{c}{e^{3x}} = \frac{e^{ix}}{3+i} + ce^{-3x}$

⑥ $\boxed{y' + 2xy = x}$

- $a(x) = 2x \Rightarrow A(x) = x^2$
- $\underbrace{y'e^{x^2} + 2xye^{x^2}}_{(ye^{x^2})' = y'e^{x^2} + 2xe^{x^2}} = xe^{x^2}$
- $ye^{x^2} = \frac{1}{2}\int 2x\, e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$
- $y = \frac{1}{2} + c\, e^{-x^2}$

7) $\boxed{y' + 3y = \cos x}$

- $a(x) = 3 \Rightarrow A(x) = 3x$
- $\underbrace{y'e^{3x} + 3ye^{3x}}_{(ye^{3x})' = y'e^{3x} + 3ye^{3x}} = \cos x\, e^{3x}$
- $ye^{3x} = \int \underbrace{\cos x}_{g'(x)} \cdot \underbrace{e^{3x}}_{f(x)} dx =$

$f(x) = e^{3x}$ $\quad f'(x) = e^{3x}\, 3$
$g(x) = \sin x$ $\quad g'(x) = \cos x$

$= \sin x\, e^{3x} - 3\int \underbrace{\underbrace{e^{3x}}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{g'(x)}\, dx}_{=}$

$f(x) = e^{3x}$ $\quad f'(x) = 3e^{3x}$
$g(x) = -\cos x$ $\quad g'(x) = \sin x$

$- e^{3x} \cos x + 3\int \cos x \cdot e^{3x} dx$

$$\int \cos x\, e^{3x} dx = \sin x \cdot e^{3x} + 3e^{3x} \cos x - 9\int \cos x\, e^{3x} dx$$

$$\downarrow$$

$$\int \cos x \cdot e^{3x} dx = \frac{\sin x\, e^{3x}}{10} + \frac{3}{10} e^{3x} \cos x + c$$

- $y = \frac{1}{10} \sin x + \frac{3}{10} \cos x + c\, e^{-3x}$

8) $\boxed{xy' + y = 3x^3 - 1} \Rightarrow y' + \frac{1}{x} y = 3x^2 - \frac{1}{x}$

- $a(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow A(x) = \ln x$
- $\underbrace{y'\, e^{\ln x} + \frac{1}{x} e^{\ln x} y}_{(ye^{\ln x})' = y'e^{\ln x} + \frac{1}{x} ye^{\ln x}} = \left(3x^2 - \frac{1}{x}\right) e^{\ln x}$
- $y\, e^{\ln x} = \int \left(3x^2 - \frac{1}{x}\right) e^{\ln x} dx = \int 3x^3 dx - \int 1 dx$