Vettori e carica

martedì 6 ottobre 2020 16:01

ESAME
1 esame 12 CFU diviso in 2

RICEVIMENTO
MARTEDÍ 15:00 - 16:00 / 17:00 - 18:00

LIBRI
ELEMENTS OF ELECTROMAGNETICS – Sadiku
FONDAMENTI DI CAMPI ELETTROMAGNETICI – Ulaby

ELETTROSTATICA
MAGNETOSTATICA
ELETTRICOSTATICA

ELETTROMAGNETISMO

Riguarda i fenomeni le cui grandezze si assumono non variabili nel tempo

CARICA → Sorgente del campo che fa riferimento ad un corpo dotato di una certa massa e di carica unitaria q per cui un qualsiasi corpo ha una determinata carica pari a n volte quella unitaria

Per un corpo assumo che la carica sia distribuita uniformemente e che ad un ΔV corrisponda una ΔQ
Si parla poi di densità di carica VOLUMETRICA

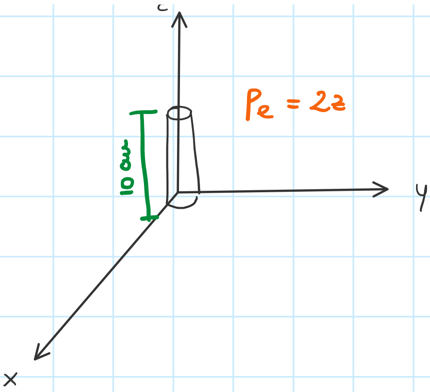
$$\rho_v = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV}$$ DENSITÀ VOLUMETRICA DI CARICA

ΔV: abbastanza grande da contenere abbastanza particelle ma comunque abbastanza piccolo per poterlo considerare come punto materiale

$$\rho_\ell = \lim_{\Delta \ell \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta \ell} = \frac{dQ}{d\ell}$$ } DENSITÀ DI CARICA LINEARE

$$\rho_s = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta s} = \frac{dQ}{ds}$$ } DENSITÀ DI CARICA SUPERFICIALE

Esercizio 1

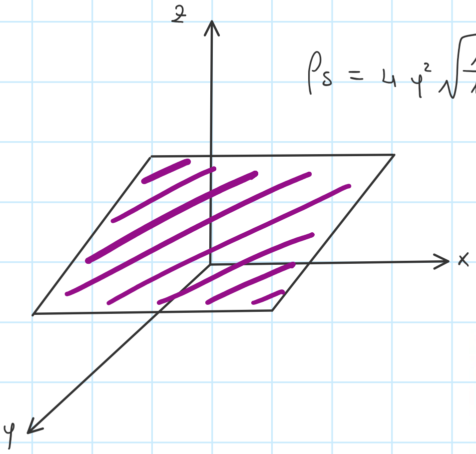


$$\rho_e = \lim_{\Delta\ell \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta \ell} = \frac{dQ}{d\ell}$$

da cui

$$Q = \int \rho_e \, d\ell$$

Esercizio 2



$$\rho_s = 4y^2 \sqrt{\frac{\mu C}{m^2}}$$

$-3m < x < 3m$

$-3m < y < 3m$

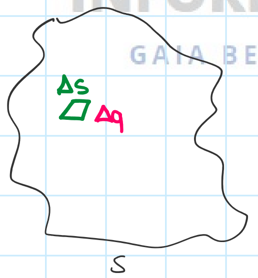
$$Q = \iint_S \rho_s \, dS = \int_{-3}^{3}\int_{-3}^{3} 4y^2 \cdot 10^{-6} dy \int_{-3}^{3} dx =$$

$$= 24 \cdot 10^{-6} \int_{-3}^{3} y^2 \, dy = 24 \cdot 18 \, \mu C$$

X SUPERFICIE

se fosse stato a n dimensioni, sarebbe stata una funzione a n variabili

$$\rho_S = f(x,y)$$



$$dQ = \rho_S \, dS$$

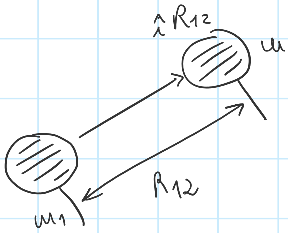
$$dQ = f(x,y) \cdot dS$$

X VOLUME

$$\rho_V = \frac{dQ}{dV} \qquad dQ = \rho_V \cdot dV$$

$$\rho_V = f(x,y,z) \Rightarrow Q \iiint_{x\,y\,z} f(x,y,z) \, dx\, dy\, dz$$

ATTRAZIONE FRA PARTICELLE

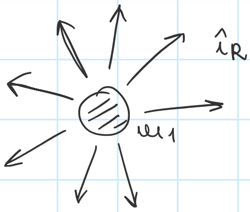


$R_{12} = |\underline{R}_{12}|$

$\underline{R}_{12} = \hat{\imath}_{R_{12}} \cdot R_{12}$

$\underline{F}_{g_{21}} = -\hat{\imath}_{R_{12}} \cdot G \dfrac{m_1 m_2}{R_{12}^2}$

$\underline{\Gamma}_1 = -\hat{\imath}_R \cdot \dfrac{G \cdot m_1}{R^2}$



$\underline{F}_g = \underline{\Gamma}_1 \cdot m_2$

Il campo di attrazione ha valore costante

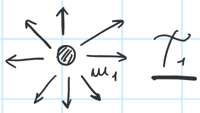
FORZA DI ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE

$\underline{F}_{g_{21}} = -\hat{\imath}_{R_{12}} \cdot G \dfrac{m_1 \cdot m_2}{R_{12}^2}$ → è una forza a distanza (basta vedere la distanza R)

FORZA ATTRATTIVA

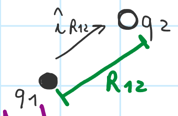
$\underline{F}_{g_{21}} = \underline{\Gamma}_1 \cdot m_2$

campo gravitazionale creato dalla massa m_1



FORZA ELETTRICA => ESPERIMENTO DI COULOMB

Si considerano due particelle che oltre ad essere portatori di massa, sono portatori di carica



le cariche possono avere SEGNO (±)

PROPRIETÀ:

Inoltre: le masse non hanno segno ma le cariche sì

1) Cariche di segno opposto si attraggono mentre cariche dello stesso segno si respingono

rispetto alla forza gravitazionale, può essere REPULSIVA

2) La forza elettrica agisce lungo la retta congiungente — retta che congiunge i due punti in cui si trovano le cariche

3) L'intensità di questa forza è direttamente proporzionale

2) La forza elettrica agisce lungo la retta congiungente punti in cui si trovano le cariche

3) L'intensità di questa forza è direttamente proporzionale al prodotto q e inversamente proporzionale al quadrato della distanza

$\varepsilon_0 \Rightarrow$ costante dielettrica

$\mu_0 \Rightarrow$ permeabilità magnetica

$$\underline{F}_{e21} = \hat{\imath}_{R12} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi \varepsilon_0 R_{12}^2}$$

$\varepsilon_0 \rightarrow$ costante dielettrica nel vuoto

Per la presenza di una carica, si genera un CAMPO ELETTRICO

$$\underline{E} = \hat{\imath}_R \cdot \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 R^2}$$

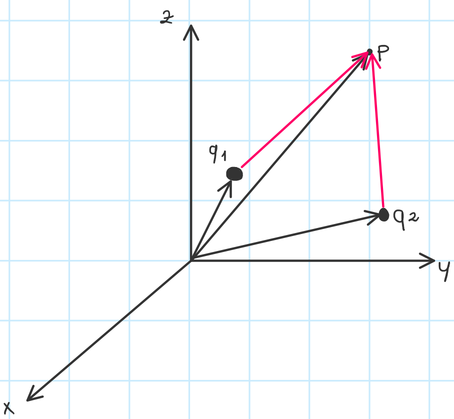
Sulle circonferenze concentriche nel corpo, il campo elettrico è costante

CAMPO DI UNA CARICA NEGATIVA — CAMPO DI UNA CARICA POSITIVA

Su q_2 agisce una forza $\underline{F_e} = q_2 \cdot E$ determinata dal campo elettrico della carica q_1

Nel campo elettrico vale il PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DELL'EFFETTO } Linearità del campo elettrico

per cui ho che $E = \sum_{i=1}^{n} E_i$



q_1, q_2 sono le SORGENTI

P è il punto di osservazione

$$\underline{E} = \hat{\imath}_R \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

definizione di versore

$$\underline{E}_1 = \frac{\underline{R}-\underline{R}_1}{|\underline{R}-\underline{R}_1|} \cdot \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 |\underline{R}-\underline{R}_1|^2}$$

$$\underline{E}_2 = \frac{\underline{R}-\underline{R}_2}{|\underline{R}-\underline{R}_2|} \cdot \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 |\underline{R}-\underline{R}_2|^2}$$

DA CUI

$$\underline{E} = \underline{E}_1 + \underline{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1(\underline{R}-\underline{R}_1)}{|\underline{R}-\underline{R}_1|^3} + \frac{q_2(\underline{R}-\underline{R}_2)}{|\underline{R}-\underline{R}_2|^3}\right]$$

Generalizzo per un numero DISCRETO di cariche

→ cioè ognuna in un punto

$$\underline{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i(\underline{R}-\underline{R}_i)}{|\underline{R}-\underline{R}_i|^3}$$

esempio

$q_1 = 2 \cdot 10^{-5}\ C$

$q_2 = -4 \cdot 10^{-5}\ C$

$P_1\ (1, 3, -1)$

$P_2\ (-3, 1, -2)$

$P\ (3, 1, -2)$

$q = 8 \cdot 10^{-5}\ C$

$\underline{R}_1 = \hat{x} + 3\hat{y} - \hat{z};$

$\underline{R}_2 = -3\hat{x} + \hat{y} - 2\hat{z};$

$\underline{R} = 3\hat{x} + \hat{y} - 2\hat{z};$

$\underline{R} - \underline{R}_1 = 2\hat{x} - 2\hat{y} - \hat{z};$

$\underline{R} - \underline{R}_2 = 6\hat{x}$

$|\underline{R} - \underline{R}_1| = \sqrt{2^2+2^2+1} = 3$

$|\underline{R} - \underline{R}_2| = 6$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2\cdot 10^{-5}(2\hat{x}-2\hat{y}-\hat{z})}{27} - \frac{4\cdot 10^{-5}(6\hat{x})}{216}\right] =$$

$$= \frac{10^{-5}}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{32\hat{x}-32\hat{y}-16\hat{z}-24\hat{x}}{216}\right] = \frac{10^{-5}}{4\pi\varepsilon_0}\left[\underbrace{\frac{8\hat{x}-32\hat{y}-16\hat{z}}{216}}_{\simeq \frac{\hat{x}-4\hat{y}-2\hat{z}}{27}}\right]$$

$$\underline{F_e} = q \cdot \underline{E} = \frac{8\cdot(10^{-5})}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\hat{x}-4\hat{y}-2\hat{z}}{27}\right)$$

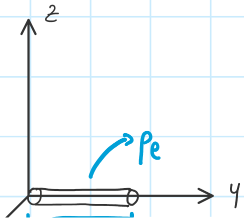
Il campo elettrico è un VETTORE

EX

$\rho_e = 10\,y\ [\frac{C}{m}]$ → densità lineare

→ distanza dalla base

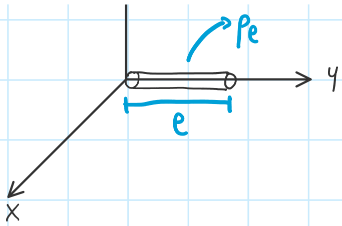
$\ell = 45\,cm$



→ distanza dalla base

$\ell = 45cm$

Calcolare Q Totale nel tubo



$$Q = \int_\ell \rho_\ell \, d\ell \; [C] = \int_0^{0,45} 10y \, dy = 10 \frac{y^2}{2} \Big|_0^{0,45} = 1,01 \; C$$

Esercitazione vettori e carica

giovedì 8 ottobre 2020 10:40

GRANDEZZA
- Vettoriale → es. campo elettrico
- Scalare → es. carica
  - ↳ nei vettori non basta parlare di scalare

VETTORI

Ogni vettore può essere espresso attraverso i versori e le sue componenti

$$\underline{A} = \hat{x} \cdot A_x + \hat{y} \cdot A_y + \hat{z} \cdot A_z$$

MODULO → $|\underline{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$

VERSORE → $\hat{i}_A = \frac{\underline{A}}{|\underline{A}|} = \frac{\hat{x} \cdot A_x + \hat{y} A_y + \hat{z} \cdot A_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$

esempio

Calcolare il modulo e versore del vettore $\underline{A} = \hat{x}\, 3$

Modulo: $|\underline{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{A_x^2} = \sqrt{3^2} = 3$

Versore: $\hat{i}_A = \frac{\underline{A}}{|\underline{A}|} = \frac{\hat{x} \cdot A_x + \hat{y} \cdot A_y + \hat{z} \cdot A_z}{\sqrt{}}$

SOMMA DI VETTORI →

$$A = \hat{x} \cdot A_x + \hat{y} A_y + \hat{z} \cdot A_z$$

$$B = \hat{x} \cdot B_x + \hat{y} \cdot B_y + \hat{z} \cdot B_z$$

$$A + B = C = \hat{x}\,(A_x + B_x) + \hat{y}\,(A_y + B_y) + \hat{z}\,(A_z + B_z)$$

SOTTRAZIONE DI VETTORI →

$$A = \hat{x} \cdot A_x + \hat{y} \cdot A_y + \hat{z} \cdot A_z$$

$$B = \hat{x} \cdot B_x + \hat{y} \cdot B_y + \hat{z} \cdot B_z$$

SOTTRAZIONE DI VETTORI → $A = \hat{x} \cdot A_x + \hat{y} \cdot A_y + \hat{z} \cdot A_z$

$$B = \hat{x} \cdot B_x + \hat{y} \cdot B_y + \hat{z} \cdot B_z$$

$$A - B = C = \hat{x}\,(A_x - B_x) + \hat{y}\,(A_y - B_y) + \hat{z}\,(A_z - B_z)$$

VETTORE POSIZIONE E DISTANZA

Il vettore posizione individua un punto nello spazio mentre il vettore distanza indica la distanza fra punti e si calcola $\overrightarrow{AB} = (B_x - A_x)\hat{x} + (B_y - A_y)\hat{y} + (B_z - A_z)\hat{z}$

PRODOTTO SCALARE

$$A \cdot B = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z$$

PRODOTTO VETTORIALE

$C = \underbrace{A \times B}$ → "A vettor B"

In modulo si ha $|C| = |A|\,|B| \operatorname{sen}\theta$

Il verso viene definito dalla REGOLA DELLA MANO DESTRA

Inoltre, il prodotto vettoriale NON È COMMUTATIVO e può anche essere espresso tramite una matrice

$$A \times B = \begin{array}{ccc} + & - & + \\ 00 & 01 & 11 \end{array} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \hat{x}\,(A_y B_z - A_z B_y) - \hat{y}\,(A_x B_z - A_z B_x) + \hat{z}\,(A_x B_y - A_y B_x)$$

esercizio

A è diretto dall'origine verso il punto di coordinate $P_1(2, 3, 3)$ mentre

B è diretto dall'origine

Manca la Traccia

$\underline{B} = \hat{x} + \hat{y}(-2) + \hat{z}\,2$

$|\underline{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$

$\hat{i}_b = \frac{\underline{B}}{|\underline{B}|} = \frac{\hat{x} + \hat{y}(-2) + \hat{z}\,2}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{\hat{x} + \hat{y}(-2) + \hat{z}\,2}{3}$

PRODOTTO SCALARE:

$A \cdot B = (\hat{x}\,2 + \hat{y}\,3 + \hat{z}\,3) \cdot (\hat{x} + \hat{y}(-2) + \hat{z}\,2) = 2 - 6 + 6 = 2$

PRODOTTO VETTORIALE

$A \times B = (\hat{x}\,2 + \hat{y}\,3 + \hat{z}\,3) \times (\hat{x} + \hat{y}(-2) + \hat{z}\,2) =$

$= -\hat{z}\,4 - \hat{y}\,4 - \hat{z}\,3 + \hat{x}\,6 + \hat{y}\,3 - \hat{x}\,6 = -\hat{y} - \hat{z}\,7$

esempio 2

$\underline{A} = \hat{x} + \hat{y}\,2 + \hat{z}\,3 \qquad \underline{B} = \hat{x} + \hat{y} + \hat{z}$

$A \cdot B = (\hat{x} + \hat{y}\,2 + \hat{z}\,3) \cdot (\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}) = 1 + 2 + 3 = 6$

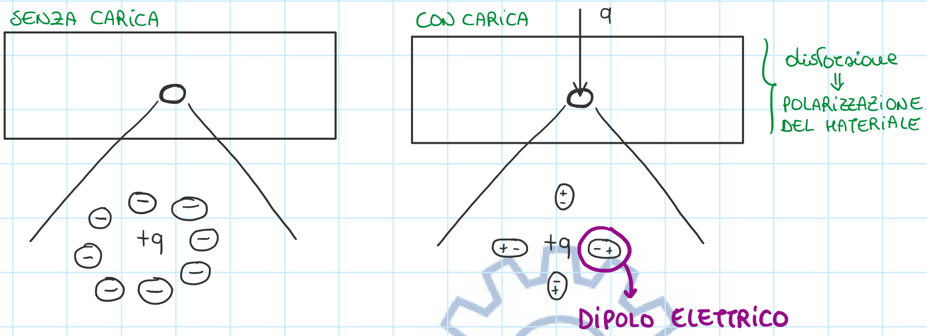
$A \times B = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{x}\,(2-3) - \hat{y}\,(1-3) + \hat{z}\,(1-2) = -\hat{x} + \hat{y}\,2 - \hat{z}$

Legge di Gauss e induzione elettrica

sabato 30 gennaio 2021 13:31

Il campo elettrico generato da una carica può essere visto come una perturbazione

In assenza della carica, il mezzo è **ELETTRICAMENTE NEUTRO**. Quando viene poi inserita la carica, a livello atomico vi è uno spostamento della nube elettronica che causa una polarizzazione del materiale



Per misurare il grado di polarizzazione del materiale si misura attraverso la **PERMITTIVITÀ ELETTRICA**, detta anche costante dielettrica

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0}$$

con $\varepsilon_r \geq 1$ — costante dielettrica relativa

altrimenti si avrebbe che un'onda che si sposta nel mezzo lo fa velocità maggiore di quella della luce. Infatti

$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}}$ da cui (generalizzando) $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \, \mu_0}}$

la costante μ_0 non cambia in un mezzo non magnetico

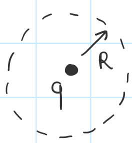
Di conseguenza si ha che $\varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 = \varepsilon \leq \varepsilon_0$ perciò $\varepsilon_r \leq 1$

INDUZIONE ELETTRICA

L'induzione elettrica è il vettore che descrive la reazione del mezzo all'introduzione di una carica in un mezzo e dunque descrive la reazione alla distorsione

$$\boxed{\underline{D} = \varepsilon \cdot \underline{E}}$$

es.



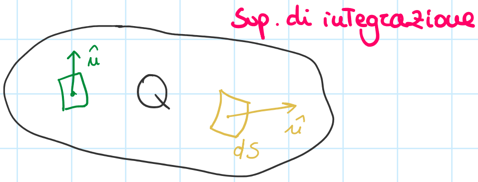
$\underline{E} = \hat{i}_R \frac{q}{4\pi\varepsilon R^2}$ — $4\pi R^2$ è l'area della sfera

$\underline{D} = \varepsilon \cdot \underline{E} = \hat{i}_R \cdot \frac{q}{4\pi R^2}$

Da tale formula posso ottenere che

$$|\underline{D}| \cdot 4\pi R^2 = q$$

dove, generalizzando ad un volume si ha che



$$\boxed{Q = \oiint_S \underline{D} \circ \hat{u}\, dS}$$

LEGGE DI GAUSS PER LE CARICHE ELETTRICHE

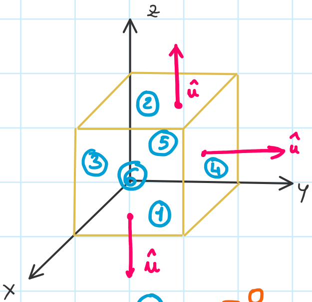
⇓

La carica totale lungo una superficie chiusa è dato dall'integrale di flusso (integrale doppio) dell'induzione elettrica per il versore normale

Una carica puntuale genera una induzione elettrica che è costante per tutte le circonferenze di raggio costante. Se però si considera una distribuzione di carica non costante e dunque non discreta ma continua, bisogna ricorrere a tale integrale

Esercizio

Data l'induzione elettrica, calcolare la carica contenuta in un volume cubico. $\underline{D} = \hat{x}\, 2(x+y) + \hat{y}\,(3x-2y)$



La superficie S rappresenta la superficie del cubo. Poiché il flusso è additivo, calcolo il flusso uscente da ogni singola faccia

* Tali valori indicano la quota della faccia che si sta trattando

$$Q = \oiint_S \underline{D} \circ \hat{u}\, dS = \cancel{\int_0^2\int_0^2 \underline{D} \circ (-\hat{z})\Big|_{z=0} dx\,dy} + \cancel{\int_0^2\int_0^2 \underline{D} \circ \hat{z}\Big|_{z=2} dx\,dy} + \int_0^2\int_0^2 \underline{D} \circ (-\hat{y})\Big|_{y=0} dx\,dz + \int_0^2\int_0^2 \underline{D} \circ \hat{y}\Big|_{y=2} dx\,dz + \int_0^2\int_0^2 \underline{D} \circ (-\hat{x})\Big|_{x=0} dx\,dz + \int_0^2\int_0^2 \underline{D} \circ \hat{x}\Big|_{x=2} dx\,dz =$$

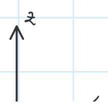
$$= \int_0^2\int_0^2 (-3x)\, dx\,dz + \int_0^2\int_0^2 (3x-4)\, dx\,dz + \int_0^2\int_0^2 (-2y)\, dy\,dz + \int_0^2\int_0^2 (4+2y)\, dy\,dz =$$

$$= -12 - 4 - 8 + 24 = 0$$

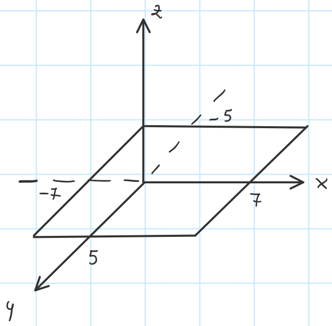
Non c'è carica e cioè il campo è solenoidale ovvero a divergenza nulla. Ciò significa che la somma delle cariche si annulla

Esercizio

Una lastra quadrata nel piano x, y occupa uno spazio delimitato su x da −7 m a 7 m e su y da −5 m a 5 m. È data una densità di carica superficiale $\rho_s = 8x^2$ [mC/m²]. Calcolare la carica totale



Ricordando che $Q = \int_S \rho_s\, dS$ [C] allora



Ricordando che $Q = \int_S \rho_S \, dS \; [C]$ allora

$$Q = \int_{-7}^{7}\int_{-5}^{5} 8x^2 \cdot 10^{-3}\, dx\, dy = 8 \cdot 10^{-3} \int_{-7}^{7} x^2 dx \int_{-5}^{5} dy = 8 \cdot 10^{-3} \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-7}^{7} \left. y \right|_{-5}^{5} = 18{,}2 \; [C]$$

TRACCIA 5 SET 2017

5 Set 2017

Appello di FONDAMENTI DI ELETTROMAGNETISMO
del 5 settembre 2017

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Informatica

Cognome e Nome: ———————————— **Matricola:** ————

Quesito

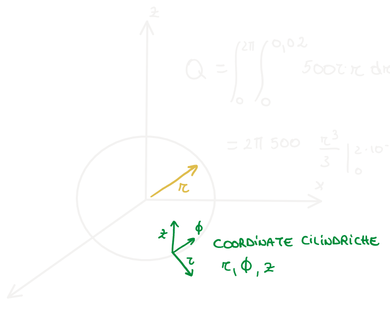
Ricavare l'espressione della legge di Joule.

Esercizio

Un disco circolare di raggio r é caratterizzato da una densitá di carica superficiale avente simmetria azimutale, crescente linearmente con r da 0 (al centro) fino a $10[C/m^2]$ in corrispondenza di $r = 2cm$.
Calcolare la carica totale presente sul disco.

varia solo al variare del raggio

$$\rho_S = \frac{10\,r}{2 \cdot 10^{-2}} = 500\,r \qquad dS = r\,dr\,d\phi$$



$$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^{0{,}02} 500\,r \cdot r\, dr\, d\phi = 500 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{0{,}02} r^2 dr =$$

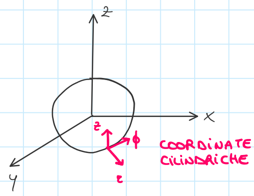
$$= 2\pi \, 500 \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^{2\cdot 10^{-2}} = 8{,}35 \cdot 10^{-3}\, C$$

1

Bisogna ricordare che $\rho_S = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS}$

CARICA TOTALE SU UN DISCO

Supponiamo di avere un disco circolare caricato elettricamente caratterizzato da una densità di carica superficiale avente simmetria azimutale che cresce linearmente con R. ρ_s parte da 0 per R = 0 fino a 15 C/m² per R = 7 cm (= il disco ha un raggio di 7 cm e ρ_s varia con la distanza). Calcolare la carica totale



Si sa che $Q = \int_S \rho_s \, dS$ dove

- $\rho_s = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{15 r}{7 \cdot 10^{-2}} = 2,14 \cdot 10^2 r$
- $dS = r \, dr \, d\phi$ { superficie infinitesima del disco in coordinate cilindriche

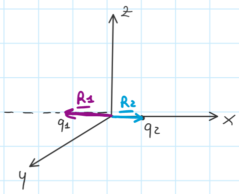
dunque $Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{7 \cdot 10^{-2}} 2,14 \cdot 10^2 r^2 \, dr \, d\phi =$

poiché si tratta di un disco

$$= 2,14 \cdot 10^{-2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{7 \cdot 10^{-2}} r^2 \, dr = 2,14 \cdot 10^2 \cdot 2\pi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{0,07} = 0,1537 \, [C]$$

FORZA ELETTRICA FRA DUE CARICHE

Due cariche di 20 microCoulomb ciascuno poste nel vuoto hanno coordinate $P_1(-1,0,0)$ e $P_2(1,0,0)$. Trovare la forza elettrica esercitata da q_1 su q_2



La forza è un VETTORE. Dunque nella formula ci sarà il versore congiungente le due cariche

$$\underline{F}_{12} = \hat{i}_{R_{12}} \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi \varepsilon_0 R^2} \, [N]$$

$\hat{i}_{R_{12}} = \frac{\underline{R}_2 - \underline{R}_1}{|\underline{R}_2 - \underline{R}_1|}$

se viene dato un mezzo diverso dal vuoto allora bisogna usare $\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$ ricordando che $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$

dunque ottengo che $\underline{F}_{12} = \frac{(\underline{R}_2 - \underline{R}_1)}{|\underline{R}_2 - \underline{R}_1|} \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi \varepsilon_0 |\underline{R}_2 - \underline{R}_1|^2} \, [N]$

Calcolo i versori $\underline{R}_1$ e $\underline{R}_2$:

$\underline{R}_1 = -\hat{x}$ $\quad \underline{R}_2 = \hat{x}$ $\quad$ dunque $\underline{R}_2 - \underline{R}_1 = \hat{x} - (-\hat{x}) = 2\hat{x}$

modulo di un vettore

$|\underline{R}_2 - \underline{R}_1| = \sqrt{2^2} = 2$

Dunque la forza elettrica sarà:

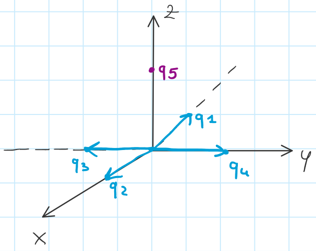
$$\underline{F}_{12} = \frac{2\hat{x}}{2} \frac{(20 \cdot 10^{-6})^2}{4\pi \varepsilon_0 \cdot 4} = 0,89 \, \hat{x} \, [N]$$

FORZA ELETTRICA FRA PIÙ PARTICELLE

Quattro cariche di 10 µC sono poste nello spazio

FORZA ELETTRICA FRA PIÙ PARTICELLE

Quattro cariche di 10 μC sono poste nello spazio libero. Esse sono uguali fra loro e sono poste alle coordinate $P_1(-3,0,0)$, $P_2(3,0,0)$, $P_3(0,-3,0)$, $P_4(0,3,0)$. Trovare la forza elettrica esercitata da queste quattro cariche su una quinta di 20 μC posta in $P_5(0,0,4)$



In questo caso si calcola la forza generata da ogni singola carica su q_5 e si sommano per ottenere la forza totale a cui è sottoposta.
Dunque

$$\underline{F}_{TOT} = \underline{F}_{15} + \underline{F}_{25} + \underline{F}_{35} + \underline{F}_{45}$$

$\underline{R}_1 = -3\hat{x}$, $\underline{R}_2 = 3\hat{x}$, $\underline{R}_3 = -3\hat{y}$, $\underline{R}_4 = 3\hat{y}$, $\underline{R}_5 = 4\hat{z}$

per cui ottengo che

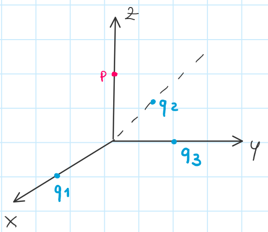
$\underline{R}_5 - \underline{R}_1 = 4\hat{z} + 3\hat{x}$, $\underline{R}_5 - \underline{R}_2 = 4\hat{z} - 3\hat{x}$, $\underline{R}_5 - \underline{R}_3 = 4\hat{z} + 3\hat{y}$, $\underline{R}_5 - \underline{R}_4 = 4\hat{z} - 3\hat{y}$

$|\underline{R}_5 - \underline{R}_1| = \sqrt{16+9} = 5$, $|\underline{R}_5 - \underline{R}_2| = \sqrt{16+9} = 5$, $|\underline{R}_5 - \underline{R}_3| = \sqrt{16+9} = 5$, $|\underline{R}_5 - \underline{R}_4| = \sqrt{16+9} = 5$

$$\underline{F}_{15} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(\underline{R}_5 - \underline{R}_1)}{|\underline{R}_5 - \underline{R}_1|} = \frac{(10\cdot 10^{-6})(20\cdot 10^{-6})(4\hat{z}+3\hat{x})}{4\pi\varepsilon_0 \; 125} =$$

Si procede a calcolare ciascuna forza e alla fine si sommano

Tre cariche q_1, q_2 e q_3 uguali fra loro e di 3 μC, si trovano nello spazio libero alle coordinate $P_1(2,0,0)$, $P_2(-2,0,0)$ e $P_3(0,2,0)$. Calcolare il campo elettrico totale in $P(0,0,2)$



Per calcolare il campo elettrico, si usa il principio di sovrapposizione degli effetti; si valuta il campo di ogni carica nel punto P come se le altre due cariche non ci fossero e si sommano alla fine i tre campi ottenuti

Si sa che $\boxed{\underline{E} = \hat{i}_r \frac{q}{4\pi\varepsilon R^2}}$ per cui $\underline{E}_{TOT} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{q_i(\underline{R}-\underline{R}_i)}{|\underline{R}-\underline{R}_i|^3}\right]$ $\left[\frac{V}{m}\right]$

Calcolo le distanze:

$\underline{R}_1 = 2\hat{x}$; $\underline{R}_2 = -2\hat{x}$; $\underline{R}_3 = 2\hat{y}$; $R = 2\hat{z}$

$\underline{R} - \underline{R}_1 = 2\hat{z} - 2\hat{x}$; $\underline{R} - \underline{R}_2 = 2\hat{z} + 2\hat{x}$; $\underline{R} - \underline{R}_3 = 2\hat{z} - 2\hat{y}$

$|\underline{R} - \underline{R}_1| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$; $|\underline{R} - \underline{R}_2| = 2\sqrt{2}$; $|R - R_3| = 2\hat{z} - 2\hat{y}$

Dunque avremo che:

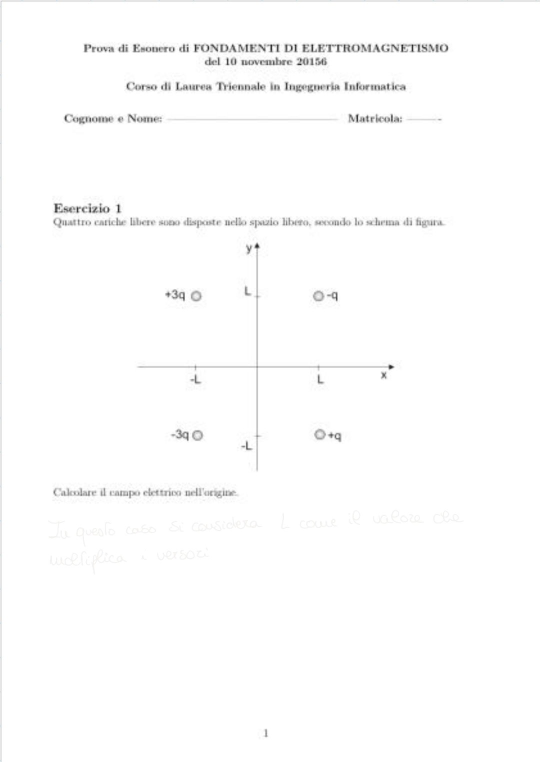
$$\underline{E}_{TOT} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{q_i(\underline{R}-\underline{R}_i)}{|\underline{R}-\underline{R}_i|^3}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1(\underline{R}-\underline{R}_1)}{|\underline{R}-\underline{R}_1|} + \frac{q_2(\underline{R}-\underline{R}_2)}{|\underline{R}-\underline{R}_2|} + \frac{q_3(\underline{R}-\underline{R}_3)}{|\underline{R}-\underline{R}_3|}\right] =$$

$$= \frac{3\cdot 10^{-9}}{4\pi\varepsilon_0(\sqrt{8})^3}\left[6\hat{z}-2\hat{y}\right]\ \left[\frac{V}{m}\right]$$

Se in P ci fosse una carica q_4 pari a $10\,\mu C$, quale sarebbe la forza esercitata?

La forza sarebbe $\underline{F_4} = q_4 \cdot \underline{E_{TOT}}\ [N]$

APPELLO 10 NOV 2016 - EX N°1


Prova di Esonero di FONDAMENTI DI ELETTROMAGNETISMO del 10 novembre 20156

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Informatica

Cognome e Nome: ——————— Matricola: ———

Esercizio 1
Quattro cariche libere sono disposte nello spazio libero, secondo lo schema di figura.

Calcolare il campo elettrico nell'origine.

In questo caso si considera L come il valore che moltiplica i versori

1

$\underline{E_{TOT}}$ in $P(0,0)$

Si ha che:

$$\underline{E_{TOT}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\sum_{i=0}^{n}\frac{q_i(\underline{R}-\underline{R_i})}{|\underline{R}-\underline{R_i}|^3}\right]\ \left[\frac{V}{m}\right]$$

$$\begin{cases} (1)\ \underline{R_1} = L\hat{x}+L\hat{y} \quad (2)\ \underline{R_2} = -L\hat{x}+L\hat{y} \\ (3)\ \underline{R_3} = -L\hat{x}-L\hat{y} \quad (4)\ \underline{R_4} = L\hat{x}-L\hat{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{R}-\underline{R_1} = -L\hat{x}-L\hat{y}\ ;\ \underline{R}-\underline{R_2} = L\hat{x}-L\hat{y} \\ \underline{R}-\underline{R_3} = L\hat{x}+L\hat{y}\ ;\ \underline{R}-\underline{R_4} = -L\hat{x}+L\hat{y} \end{cases}$$

$$|\underline{R}-\underline{R_1}| = \sqrt{(-L)^2+(-L)^2} = \sqrt{L^2+L^2} = \sqrt{2L^2} = L\sqrt{2}$$

$$|\underline{R}-\underline{R_2}| = L\sqrt{2}$$

$$|\underline{R}-\underline{R_3}| = L\sqrt{2}$$

$$|\underline{R}-\underline{R_4}| = L\sqrt{2}$$

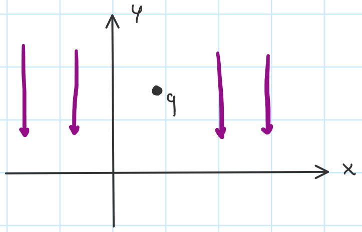
Dunque si avrà che:

$$\underline{E_{TOT}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-q(-L\hat{x}-L\hat{y})}{(L\sqrt{2})^3} + \frac{3q(L\hat{x}-L\hat{y})}{(L\sqrt{2})^3} - \frac{3q(L\hat{x}+L\hat{y})}{(L\sqrt{2})^3} + \frac{q(-L\hat{x}+L\hat{y})}{(L\sqrt{2})^3}\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(L\sqrt{2})^3}\left[-4L\hat{y}\right]\ \left[\frac{V}{m}\right]$$

Potenziale elettrico

domenica 31 gennaio 2021 11:17

Si prende in esame un campo elettrico uniforme preesistente (generato in precedenza da delle cariche)



$$\underline{E} = -\hat{y}\, E_y$$

Si immerge una ulteriore carica q nel campo preesistente.
Essa subirà una forza elettrica $\underline{F} = q \cdot \underline{E} = -\hat{y}\, q \cdot E_y$ mostrando che la forza elettrica ha lo stesso verso del campo.

Se si sposta la carica lungo l'asse y (cioè in senso opposto rispetto alla direzione del campo) con una velocità che è costante (e cioè accelerazione nulla) allora la forza totale agente sulla carica deve annullarsi secondo i principi della meccanica.

Di conseguenza $\underline{F}_{ext} + \underline{F} = 0 \Rightarrow \underline{F}_{ext} = -\underline{F} = \hat{y}\, q\, E_y$

Se si vuole sapere l'energia necessaria a spostare la particella di una lunghezza $d\underline{l} = \hat{y}\, dy$ sarà $dw = \underline{F}_{ext} \circ d\underline{l}$ da cui ottengo che $dw = -q\, \underline{E} \circ d\underline{l} = q \cdot E_y\, dy$

TENSIONE DIFFERENZIALE (O POTENZIALE ELETTRICO DIFFERENZIALE) → energia potenziale elettrica infinitesima per unità di carica

$$\boxed{dV = \frac{dw}{q} = E_y\, dy = -\underline{E} \circ d\underline{l} \quad [V]}$$

differenza di potenziale in un punto.

Dati due punti P_1 e P_2, $V_{21} = \underbrace{V_2}_{} - \underbrace{V_1}_{} = \int_{P_1}^{P_2} -\underline{E} \circ d\underline{l}$

potenziale elettrico in ciascun punto

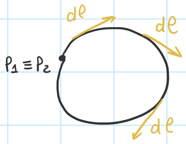
Per il principio di conservazione dell'energia, l'integrale (e cioè la differenza) è indipendente dal cammino. Ciò avviene perché la forza elettrica è **CONSERVATIVA**

LEGGE DI KIRCHOFF PER LA TENSIONE

LEGGE DI KIRCHOFF PER LA TENSIONE

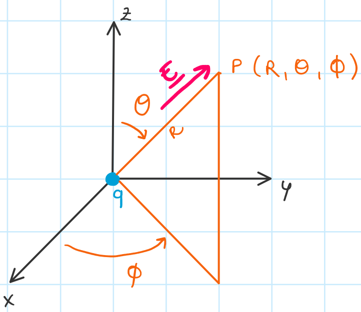
La caduta potenziale netta in un circuito chiuso è zero

$$\oint_C \underline{E} \circ d\underline{\ell} = 0$$



Tale legge è conseguenza del fatto che l'energia elettrica è conservativa

Data una carica puntuale si può individuare un punto P tramite delle coordinate sferiche



Il campo elettrico generato da q è

$$\underline{E} = \hat{\imath}_R \frac{q}{4\pi\varepsilon R^2}$$

La tensione in un punto è calcolato tramite l'integrale fra R e infinito dove la tensione all'infinito è uguale a zero per definizione per cui

$$V = -\int_{\infty}^{R} \underline{E} \circ d\underline{\ell}$$ è il potenziale in un punto (P ad esempio)

Ponendo $d\underline{\ell} = \hat{\imath}_R \, dR$ allora

$$V = -\int_{\infty}^{r} \left(\hat{\imath}_R \frac{q}{4\pi\varepsilon R^2}\right) \circ \hat{\imath}_R \, dR = -\frac{q}{4\pi\varepsilon} \underbrace{\int_{\infty}^{r} \frac{dR}{R^2}}_{} =$$

$-\frac{1}{R}$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{R}\Big|_{\infty}^{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r}$$

In fine allora in un punto P si hanno

CAMPO ELETTRICO $\Rightarrow$ $\underline{E} = \hat{\imath}_R \cdot \frac{q}{4\pi\varepsilon R^2}$ $\left[\frac{V}{m}\right]$ (vettore)

POTENZIALE ELETTRICO $\Rightarrow$ $V = \frac{q}{4\pi\varepsilon R}$ $[V]$ (scalare)

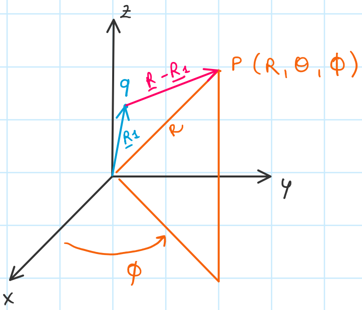
Differenze:

1) Il campo è un vettore mentre il potenziale è uno scalare

Differenze:

1) Il campo è un vettore mentre il potenziale è uno scalare
2) Il potenziale elettrico è inversamente proporzionale alla distanza mentre il campo alla distanza al quadrato

Secondo un'ulteriore configurazione, si considera una carica posta in un punto diverso dall'origine:



In questo caso si ha che

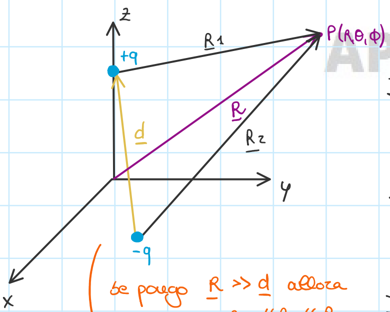
$$V(\underline{R}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon|\underline{R}-\underline{R}_1|}$$

potenziale nel punto P individuato dal vettore R

Se anziché avere una carica ne ho n e voglio calcolare il potenziale in un punto, posso sfruttare il principio di sovrapposizione degli effetti per cui ho che

$$V(\underline{R}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q}{4\pi\varepsilon|\underline{R}-\underline{R}_i|}$$

DIPOLO ELETTRICO



Il dipolo elettrico è composto da due cariche di segno opposto poste ad una distanza $\underline{d}$

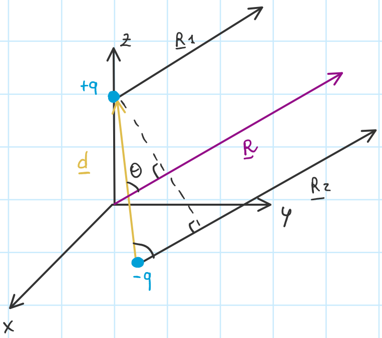
Si considera un punto P identificato da un vettore $\underline{R} >> \underline{d}$ (molto più grande di $\underline{d}$)

Il potenziale in P sarà dato da

$$V = \sum_{i=1}^{2} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon|\underline{R}-\underline{R}_i|} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \quad \text{con } R_1 = |\underline{R}_1|,\ R_2 = |\underline{R}_2|$$

Se pongo $\underline{R} >> \underline{d}$ allora è come se $\underline{R}_1 \,//\, \underline{R} \,//\, \underline{R}_2$.

Da ciò ne deriva che



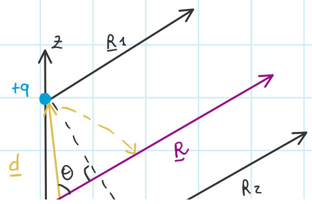
Posso dunque operare una parametrizzazione tale che

$R_2 \cong R_1 + d\cos\theta$ per cui ottengo che

$$\begin{cases} R_2 - R_1 \cong d\cos\theta \\ R_1 \cdot R_2 \cong R^2 \end{cases}$$

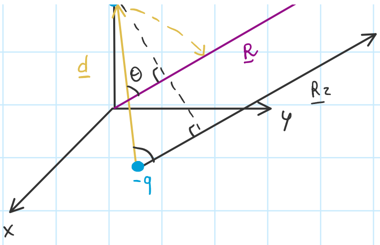
perciò il potenziale in un punto a causa di un dipolo elettrico è

$$V \cong \frac{q}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{d\cos\theta}{R^2}$$



Se ribalto il vettore $\underline{d}$ su $\underline{R}$ ottengo che posso scrivere $q\,d\cos\theta = q\,\underline{d} \circ \hat{i}_R$

in quanto sto facendo un prodotto scalare con q d che è il momento di dipolo



Se ribalto il vettore $\underline{d}$ su $\underline{R}$ ottengo che posso scrivere $qd\cos\theta = q\,\underline{d}\circ\hat{\imath}_R$ in quanto solo facendo un prodotto scalare con $q\,\underline{d}$ che è il MOMENTO DI DIPOLO DEL DIPOLO ELETTRICO che indico con $\underline{P}$

Da ciò ottengo che $V = \dfrac{\underline{P}\cdot\hat{\imath}_R}{4\pi\varepsilon R^2}$ e ne deriva che il potenziale, considerato un dipolo, ha la stessa proporzionalità rispetto al raggio che ha il campo

Esercizio

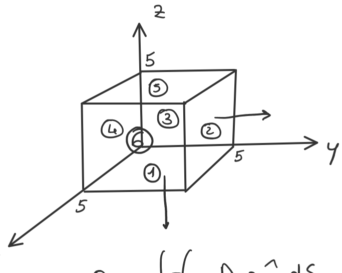
21 Feb 2017

Esercizio

Assegnato il vettore induzione elettrica:

$$\underline{D} = \hat{x}\;5(x-2y) + \hat{y}(3x+y)$$

calcolare la carica totale Q contenuta in un cubo di lato pari a 5 m, avente tre lati coincidenti con gli assi x, y, z ed uno dei suoi vertici coincidente con l'origine.



Sapendo che $Q = \oiint_S \underline{D}\circ\hat{u}\,dS$ divido l'integrale in sei parti

$$Q = \int_0^5\int_0^5 \cancelto{0}{\underline{D}\big|_{z=0}\circ(-\hat{z})}\,dx\,dy + \int_0^5\int_0^5 \underline{D}\big|_{y=5}\circ\hat{y}\,dx\,dz + \int_0^5\int_0^5 \underline{D}\big|_{x=0}\circ(-\hat{x})\,dy\,dz +$$

$$+\int_0^5\int_0^5 \underline{D}\big|_{y=0}\circ(-\hat{y})\,dx\,dz + \int_0^5\int_0^5 \cancelto{0}{\underline{D}\big|_{z=5}\circ\hat{z}}\,dx\,dy + \int_0^5\int_0^5 \underline{D}\big|_{x=5}\circ\hat{x}\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^5\int_0^5 \left[\cancelto{0}{\hat{x}(5x-50)} + \hat{y}(3x+5)\right]\circ\hat{y}\,dx\,dy + \int_0^5\int_0^5\left[-10y\,\hat{x} + \cancelto{0}{y\,\hat{y}}\right]\circ(-\hat{x})\,dy\,dz +$$

$$+\int_0^5\int_0^5 \left[\cancelto{0}{5x\,\hat{x}} + 3x\,\hat{y}\right)\circ(-\hat{y})\,dx\,dz + \int_0^5\int_0^5\left[\hat{x}(25-10y) + \cancelto{0}{\hat{y}(15+y)}\right]\circ\hat{x}\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^5\int_0^5 3x+5\;dx\,dy + \int_0^5\int_0^5 10y\,dy\,dz - \int_0^5\int_0^5 y\;dx\,dz + \int_0^5\int_0^5 25-10y\;dy\,dz =$$

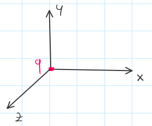
$$= \int_0^5 dy\int_0^5 3x+5\,dx + \int_0^5 dz\int_0^5 10y\,dy - \int_0^5 dz\int_0^5 3x\,dx + \int_0^5 dz\int_0^5 25-10y\,dy =$$

$$= 750\ C$$

2

LAVORO PER SPOSTARE UNA CARICA IN 1-D

Trovare il lavoro compiuto per spostare una carica puntiforme $q = -20\,\mu C$ dall'origine a un punto di coordinate $P(4,0,0)$. Vi è un campo elettrico pari a $\underline{E} = \left(\frac{x}{2}\right)\hat{x} + 2x\hat{y}\ \left[\frac{V}{m}\right]$



$$dw = \underbrace{-q\cdot\underline{E}}_{\text{Forza esterna}}\cdot d\underline{l} = \underline{F}_{ext}\cdot d\underline{l}$$

Tratto infinitesimo lungo il quale si sposta la particella

dove $\underline{F}_{ext} = -\underline{F} = -q\,\underline{E}$

Perciò si ottiene che $w = \int_l -q\,\underline{E}\cdot d\underline{l}$ con $d\underline{l} = \hat{x}\,dx$

Nel problema si avrà che:

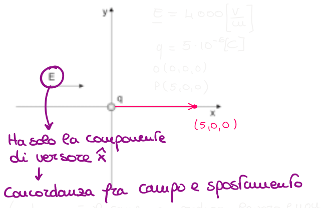
$$w = -\int_0^4 (-20\cdot10^{-6})\left[\left(\frac{x}{2}\hat{x} + 2x\hat{y}\right)\cdot\hat{x}\right]dx = \int_0^4 (20\cdot10^{-6})\left[\frac{x}{2}\hat{x}\cdot\hat{x}\right]dx +$$

$$+\int_0^4 (20\cdot10^{-6})\left[2x\hat{y}\cdot\hat{x}\right]dx = \int_0^4 (20\cdot10^{-6})\frac{x}{2}\,dx = (10\cdot10^{-6})\int_0^4 x\,dx =$$

$$= (10\cdot10^{-6})\left[\frac{x^2}{2}\Big|_0^4\right] = (10\cdot10^{-6})8 = 80\cdot10^{-6}\ [J]$$

APPELLO 10 NOV 2016 - EX N°2

Esercizio 2
Nella configurazione di figura, il campo elettrico ha intensità pari a 4K [V/m]. Una carica puntiforme $q = 5\mu$ [C] è disposta nell'origine del sistema di riferimento.



Calcolare:

- la variazione di energia potenziale elettrica per spostare la carica q dall'origine al punto di coordinate (5,0);
- la differenza di potenziale tra il punto di coordinate (5,0) e l'origine.

2

1) Ricordando che $dw = -q\,\underline{E}\cdot d\underline{l}$ e che

$\underline{E} = \hat{x}(4\cdot10^3)\ \left[\frac{V}{m}\right]$

Poiché lo spostamento è solo lungo $\hat{x}$ allora $d\underline{l} = \hat{x}\,dx$

Perciò definisco

$$w = \int_l -q\,\underline{E}\cdot d\underline{l} = -\int_0^5 (5\cdot10^{-6})(4\cdot10^3)\underbrace{\hat{x}\cdot\hat{x}}_{1}\,dx =$$

$$= -\int_0^5 (5\cdot10^{-6})(4\cdot10^3)\,dx = -(20\cdot10^{-3})\left[x\Big|_0^5\right] =$$

$$= -(20\cdot10^{-3})\cdot5 = -0{,}10\ [J]$$

Concordanza fra campo e spostamento

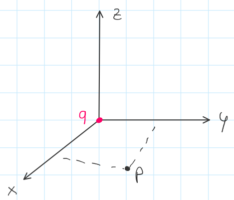
2) V_{21} (la differenza di potenziale) è pari alla differenza fra il potenziale calcolato in P e quello calcolato in O. Inoltre, $dV = \frac{dw}{q}$ per cui ho:

$$V_{21} = V_2 - V_1 = -\int_0^5 \underline{E}\cdot d\underline{l} = -\int_0^5 \hat{x}(4\cdot10^3)\cdot\hat{x}\,dx = -\int_0^5 4\cdot10^3\,dx =$$

$$= -(4\cdot10^3)\left[x\Big|_0^5\right] = -4\cdot10^3\cdot5\ [V] = -20\ [kV]$$

LAVORO PER SPOSTARE UNA CARICA IN 2-D

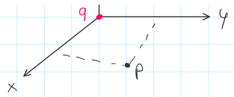
Calcolare il lavoro richiesto per spostare una carica q pari a $3\,\mu C$ dall'origine a un punto di coordinate $P(2,2,0)$ in presenza di un campo $\underline{E} = -\hat{y}\,7\ \left[\frac{V}{m}\right]$



Sapendo che $dw = -q\cdot\underline{E}\cdot d\underline{l}$ e $d\underline{l} = \hat{x}\,dx + \hat{y}\,dy$

perché lo spostamento è in due dimensioni allora

$$w = -q\left[\int_0^2 \cancel{\underline{E}\cdot\hat{x}\,dx}^{\,0} + \int_0^2 \underline{E}\cdot\hat{y}\,dy\right] =$$



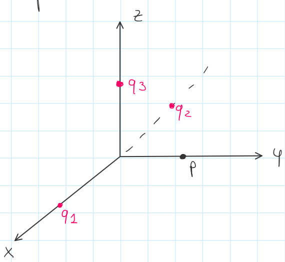
$$W = -q\left[\int_0^2 \cancel{\underline{E}\cdot\hat{x}\,dx}^{\,0} + \int_0^2 \underline{E}\cdot\hat{y}\,dy\right] =$$

$$= -q\left[\int_0^2 -\underbrace{\hat{y}\cdot 7\cdot\hat{y}}_{1}\,dy\right] = 7q\int_0^2 dy = 7q\,y\Big|_0^2 =$$

$= 42\,\mu J$ In questo caso, il lavoro è svolto da una forza esterna

POTENZIALE IN UN PUNTO

Tre cariche puntuali di valore $q = 3\,\mu C$ sono collocate nei punti di coordinate $P_1(2,0,0)$, $P_2(-2,0,0)$, $P_3(0,0,2)$. Calcolare il potenziale V in $P(0,2,0)$



Il potenziale in un punto è pari a la somma dei potenziali di ogni singola carica in quel punto e cioè:

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{|\underline{R}-\underline{R}_i|}}$$

Calcolo i vettori:

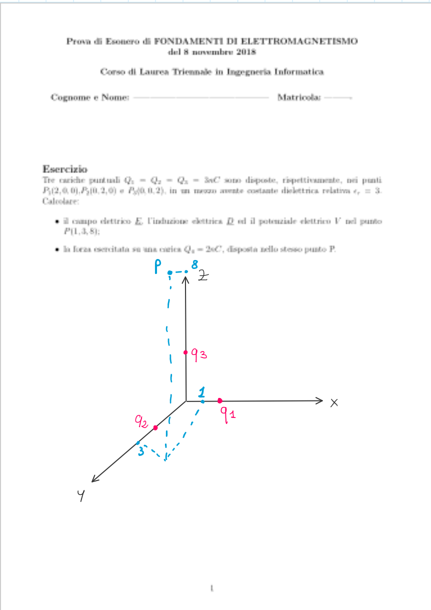
$\underline{R}_1 = 2\hat{x}$; $\underline{R}_2 = -2\hat{x}$; $\underline{R}_3 = 2\hat{z}$; $\underline{R} = 2\hat{y}$

$\underline{R}-\underline{R}_1 = 2\hat{y}-2\hat{x}$; $\underline{R}-\underline{R}_2 = 2\hat{y}+2\hat{x}$; $\underline{R}-\underline{R}_3 = 2\hat{y}-2\hat{z}$

$|\underline{R}-\underline{R}_1| = 2\sqrt{2}$ $\quad |\underline{R}-\underline{R}_2| = 2\sqrt{2}$ $\quad |\underline{R}-\underline{R}_3| = 2\sqrt{2}$

Dunque $V = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right) = 28{,}6\ [V]$

ESONERO 8 NOV 2018



Prova di Esonero di FONDAMENTI DI ELETTROMAGNETISMO del 8 novembre 2018

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Informatica

Cognome e Nome: ———————— **Matricola:** ———

Esercizio

Tre cariche puntuali $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 3nC$ sono disposte, rispettivamente, nei punti $P_1(2,0,0)$, $P_2(0,2,0)$ e $P_3(0,0,2)$, in un mezzo avente costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 3$. Calcolare:

- il campo elettrico $\underline{E}$, l'induzione elettrica $\underline{D}$ ed il potenziale elettrico V nel punto $P(1,3,8)$;
- la forza esercitata su una carica $Q_4 = 2nC$, disposta nello stesso punto P.

1

ε_r deve essere ≥ 1 altrimenti vi sarebbero delle velocità nel vuoto maggiori di quella della luce

Sapendo che $\underline{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{q_i\,(\underline{R}-\underline{R}_i)}{|\underline{R}-\underline{R}_i|^3}\right]\ \left[\dfrac{V}{m}\right]$

e che $\varepsilon = \varepsilon_r\cdot\varepsilon_0$ allora in questo caso si avrà che $\varepsilon = 3\,\varepsilon_0$

Calcolo i raggi:

$\underline{R}_1 = 2\hat{x}$; $\underline{R}_2 = 2\hat{y}$; $\underline{R}_3 = 2\hat{z}$; $\underline{R} = \hat{x}+3\hat{y}+8\hat{z}$

$\underline{R}-\underline{R}_1 = -\hat{x}+3\hat{y}+8\hat{z}$ $\qquad |\underline{R}-\underline{R}_1| = \sqrt{1+9+64} = \sqrt{74}$

$\underline{R}-\underline{R}_2 = \hat{x}+\hat{y}+8\hat{z}$ $\qquad |\underline{R}-\underline{R}_2| = \sqrt{1+1+64} = \sqrt{66}$

$\underline{R}-\underline{R}_3 = \hat{x}+3\hat{y}+6\hat{z}$ $\qquad |\underline{R}-\underline{R}_3| = \sqrt{1+9+36} = \sqrt{46}$

Dunque posso calcolare il campo elettrico:

$$\underline{E} = \frac{1}{12\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1(\underline{R}-\underline{R}_1)}{|\underline{R}-\underline{R}_1|^3} + \frac{q_2(\underline{R}-\underline{R}_2)}{|\underline{R}-\underline{R}_2|^3} + \frac{q_3(\underline{R}-\underline{R}_3)}{|\underline{R}-\underline{R}_3|^3}\right] =$$

$$= \frac{10\cdot 10^{-9}}{12\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-\hat{x}+3\hat{y}+8\hat{z}}{636{,}57} + \frac{\hat{x}+\hat{y}+8\hat{z}}{538{,}18} + \frac{\hat{x}+3\hat{y}+6\hat{z}}{311{,}98}\right] =$$

$$= 0{,}03\hat{x} + 0{,}14\hat{y} + 0{,}42\hat{z}\ \left[\frac{V}{m}\right]$$

Per quanto riguarda l'induzione elettrica essa è $D = \varepsilon\cdot\underline{E} = 3\varepsilon_0\,\underline{E} = (2{,}65\cdot 10^{-11})(0{,}03\hat{x}+0{,}14\hat{y}+0{,}42\hat{z})\ \left[\dfrac{C}{m^2}\right]$

Per quanto riguarda il potenziale in $P(1,3,8)$ esso è $V = \dfrac{1}{12\pi\varepsilon_0}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{q}{|\underline{R}-\underline{R}_i|}\ [V] = \dfrac{3\cdot 10^{-9}}{4\pi\,(2{,}65\cdot 10^{-11})}\left[\dfrac{1}{8{,}6}+\dfrac{1}{8{,}12}+\dfrac{1}{6{,}78}\right] = 3{,}42\ [V]$

Il potenziale è una grandezza <u>SCALARE</u>

La forza elettrica esercitata su una carica $q_4 = 2\cdot 10^{-9}\,C$ nel punto $P(1,3,8)$ basta moltiplicare la carica per il campo elettrico. Dunque

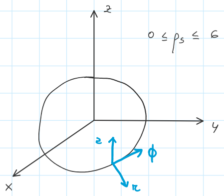
La forza elettrica esercitata su una carica $q_4 = 2 \cdot 10^{-9}\,C$ nel punto $P(1,3,8)$ basta moltiplicare la carica per il campo elettrico. Dunque

$$\underline{F} = q_4 \cdot \underline{E} = 2 \cdot 10^{-9} \left(0{,}03\hat{x} + 0{,}14\hat{y} + 0{,}42\hat{z}\right) \quad [N]$$

Per la forza elettrica vale il principio di sovrapposizione per cui la forza si poteva calcolare anche calcolando le forze elettriche esercitate da ciascuna carica su q_4 e sommandole

APPELLO 27 GIU 2019 → densità di carica superficiale

Un disco circolare di raggio r è caratterizzato da una densità di carica superficiale avente simmetria azimutale crescente linearmente con r da O al centro fino a $6\,C/m^2$ in corrispondenza di $r = 3\,cm$. Calcolare la carica totale Q distribuita sul disco



$0 \le \rho_s \le 6 \left[\frac{C}{m^2}\right]$ con $r = 3 \cdot 10^{-2}\,m$

Sapendo che $\rho_s = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta s} = \frac{dq}{ds}$

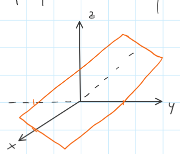
allora $Q = \int_S \rho_s \, dS \quad [C]$

Scrivo $\rho_s = \frac{6r}{3 \cdot 10^{-2}} = \frac{2r}{10^{-2}} = 200\,r$ e che $dS = r\,dr \cdot d\phi$ per le coordinate cilindriche

dunque $Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{3 \cdot 10^{-2}} 200\,r^2\,dr\,d\phi = 200 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{0{,}03} r^2\,dr = 200 \cdot 2\pi \left[\frac{r^2}{3}\right]_0^{0{,}03} = 0{,}011\ [C] = 11\ mC$

CARICA TOTALE DI UNA LASTRA QUADRATA

Una lastra quadrata nel piano (x,y) occupa uno spazio delimitato dalle coordinate $-7 \le x \le 7$ e $-5 \le y \le 5$. Si calcoli la carica totale presente sulla lastra sapendo che la densità di carica superficiale è $\rho_s = 8x^2 \left[\frac{mC}{m^2}\right] = 8 \cdot 10^{-3}\,x^2\,\frac{C}{m^2}$



Si ha che $Q = \int_S \rho_s\,dS$ dove $dS = dx\,dy$

$$Q = \int_{-5}^{5} \int_{-7}^{7} 8 \cdot 10^{-3} x^2\,dx\,dy = 8 \cdot 10^{-3} \int_{-5}^{5} dy \int_{-7}^{7} x^2\,dx =$$

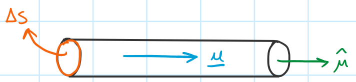
$$= 8 \cdot 10^{-3}\, y \Big|_{-5}^{5} \frac{x^3}{3}\Big|_{-7}^{7} = 8 \cdot 10^{-3}(5+5)\left(\frac{343}{3} + \frac{343}{3}\right) = 18{,}2\ [C]$$

Conduttori e legge di Ohm

domenica 31 gennaio 2021 21:05

Si considera un cilindro elettricamente carico con una densità di carica volumetrica con sezione omogenea ΔS (omogenea = sezione costante). Al suo interno le cariche si muovono con una velocità media $\underline{u}$. Nell'intervallo di tempo Δt, le cariche si spostano di un tratto Δl tale che $\Delta l = u \cdot \Delta t$ intesa come scalare

Per calcolare la carica infinitesima Δq che attraversa la sezione ΔS nel tempo Δt.



Sapendo che $\Delta q = \rho_V \cdot \Delta V$ e che $\Delta V = \Delta l \cdot \Delta S$ allora

$\Delta q = \rho_V \cdot u \cdot \Delta t \cdot \Delta S$

Passiamo dunque definire la corrente come la quantità di corrente che passa nel tratto Δl nell'unità di tempo per cui

$$\Delta i = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \underbrace{\rho_V \cdot u}_{} \cdot \Delta S = \underline{J} \cdot \Delta S$$

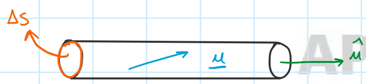
$\left[\frac{C}{m^2 \cdot s}\right]$

densità superficiale di corrente $\left[\frac{A}{m^2}\right]$

versore lungo la lunghezza del cavo

Nel caso di una velocità non parallela al versore $\hat{u}$ si ha che

$\Delta q = \rho_V \cdot \underline{u} \circ \hat{u}\ \Delta S\, \Delta t$



Dunque, visto queste osservazioni, nel caso generale $\underline{J}$ è un vettore in quanto $\underline{J} = \rho_V \cdot \underline{u}$ e perciò si ha che la corrente è

$$\boxed{I = \iint_S \underline{J} \circ \hat{u}\ dS}$$

Come nella permettività, anche per la permeabilità $\mu = \mu_r \cdot \mu_0$ e $\mu_r \geq 1$.
Vi è anche un terzo parametro detto **CONDUCIBILITÀ** che misura la capacità degli elettroni di muoversi se viene applicato un campo e si indica con σ

In condizione di quiete (in assenza di campo elettrico) gli elettroni liberi si muovono casualmente senza dare origine a correnti.
Se viene introdotto un campo invece gli elettroni liberi si muoveranno con velocità media $\underline{u}_e$ detta VELOCITÀ DI DERIVA ELETTRONICA e dà origine ad una corrente detta di CONDUZIONE. Inoltre $\underline{u}_e = -\mu_e \cdot \underline{E}$ dove μ_e

velocità media $\underline{u}_e$ detta VELOCITÀ DI DERIVA ELETTRONICA e dà origine ad una corrente detta di CONDUZIONE. Inoltre $\underline{u}_e = -\mu_e \cdot \underline{E}$ dove μ_e è la MOBILITÀ ELETTRONICA

Un materiale che non ha solo cariche negative libere ma anche positive è detto SEMICONDUTTORE e tali cariche positive sono dette LACUNE e sono causate dallo spostamento degli elettroni i quali lasciano dei vuoti e dunque una carica positiva. In questo caso $\underline{u}_h = \mu_h \cdot \underline{E}$ con μ_h detta mobilità delle lacune

Nel caso in cui siano presenti delle lacune, la densità di corrente

$$\underline{J} = \underline{J}_e + \underline{J}_h = \rho_{ve} \cdot \underline{u}_e + \rho_{vh} \cdot \underline{u}_h = -\rho_{ve} \cdot \mu_e \cdot \underline{E} + \rho_{vh} \cdot \mu_h \cdot \underline{E} =$$

$$= \underline{E}\,(-\rho_{ve} \cdot \mu_e + \rho_{vh} \cdot \mu_h) = \sigma \cdot \underline{E} \quad \text{ponendo che} \quad \sigma = e\,(N_e \mu_e + N_h \mu_h) \quad \left[\frac{S}{m}\right]$$

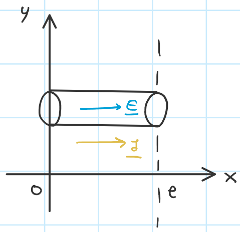
$$\underbrace{\rho_{ve} = -N_e \cdot e} \qquad \underbrace{\rho_{vh} = N_h \cdot e}$$

N_e ed N_h sono il numero rispettivamente il numero di elettroni e di lacune

LEGGE DI OHM

Dalla formula $\underline{J} = \sigma \cdot \underline{E}$, se $\sigma \neq 0$ e viene applicato un campo, allora si genera un flusso di corrente.

Esercizio



Poiché $\underline{J} = \sigma \cdot \underline{E}$, $\underline{J}$ ha lo stesso verso di $\underline{E}$.

Dati $|\underline{J}| = 3 \cdot 10^5 \left[\frac{A}{m^2}\right]$ e $\sigma = 2 \cdot 10^7 \left[\frac{S}{m}\right]$

calcolare il campo elettrico, la caduta di potenziale ai capi

Si ha che $\underline{J} = \hat{x} \cdot 3 \cdot 10^5$ poiché indirizzata lungo $\hat{x}$.

Di conseguenza $\underline{E} = \dfrac{\underline{J}}{\sigma} = \hat{x}\,\dfrac{3 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^7} = \hat{x}\; 1{,}5 \cdot 10^{-2} \left[\frac{V}{m}\right]$

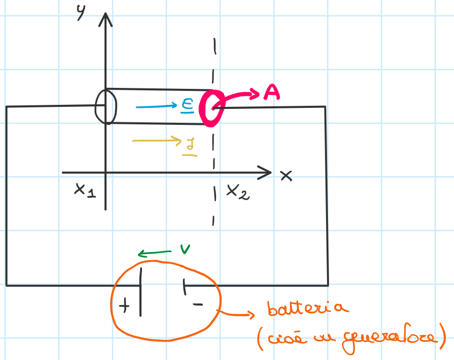
Per quanto riguarda la differenza di potenziale fra l e 0 si ha che

$$V = -\int_l^0 \underline{E} \circ d\underline{l} = \int_0^{100} 1{,}5 \cdot 10^{-2}\, \hat{x} \circ \hat{x}\, dx = 1{,}5 \cdot 10^{-2} \int^{100} dx =$$

$$V = -\int_{\ell}^{0} \underline{E} \circ d\underline{\ell} = \int_{0}^{100} 1{,}5 \cdot 10^{-2}\, \hat{x} \circ \hat{x}\, dx = 1{,}5 \cdot 10^{-2} \int_{0}^{100} dx =$$

$$= 1{,}5 \cdot 10^{-2} \cdot 100 = 1{,}5\,[V]$$

Esercizio



Sapendo che $\underline{E} = \hat{x}\, E_x$ allora $V = V_1 - V_2 = -\int_{x_2}^{x_1} \underline{E} \circ d\underline{\ell} = -\int_{x_2}^{x_1} (\hat{x}\, E_x) \circ \hat{x}\, dx =$

$= E_x \cdot \ell$

Dunque $\boxed{V = E_x \cdot \ell}$

La corrente sarà $I = \iint_A \underline{J} \circ \hat{u}\, dS = \iint_A 6 \cdot \underbrace{\underline{E} \circ \hat{u}}_{\hat{x} E_x \circ \hat{x}}\, dS = 6 \cdot E_x \cdot A$

RESISTENZA

$$\boxed{R = \frac{V}{I} = \frac{\cancel{E_x} \cdot \ell}{6 \cdot \cancel{E_x} \cdot A} = \frac{\ell}{6 \cdot A}}$$

$$\boxed{R = \frac{V}{I} = \frac{-\int_{\ell} \underline{E} \circ d\underline{\ell}}{\iint_S \underline{J} \circ \hat{u}\, dS} \left[\frac{V}{A}\right] [\Omega]}$$

POTENZA DISSIPATA

Sulle cariche (elettroni o lacune) agiscono delle forze

$\underline{F_e} = q_e \cdot \underline{E} = \rho_{ve} \cdot \Delta V \cdot \underline{E}$

$\underline{F_h} = q_h \cdot \underline{E} = \rho_{vh} \cdot \Delta V \cdot \underline{E}$

Per spostare una carica di un tratto $\Delta\ell$ si ha un lavoro ΔW tale che

$\Delta W = \underline{F_e} \cdot \underline{\Delta \ell_e} + \underline{F_h} \cdot \underline{\Delta \ell_h}$

Poiché la potenza dissipata è il lavoro compiuto nell'unità di tempo allora

$\Delta P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \underline{F_e} \cdot \underbrace{\frac{\underline{\Delta \ell_e}}{\Delta t}}_{\underline{u_e}} + \underline{F_h} \cdot \underbrace{\frac{\underline{\Delta \ell_h}}{\Delta t}}_{\underline{u_h}} = \underline{F_e} \circ \underline{u_e} + \underline{F_h} \circ \underline{u_h} = \rho_{ve} \cdot \Delta V \cdot \underline{E} \circ \underline{u_e} + \rho_{vh} \cdot \Delta V \cdot \underline{E} \circ \underline{u_h} =$

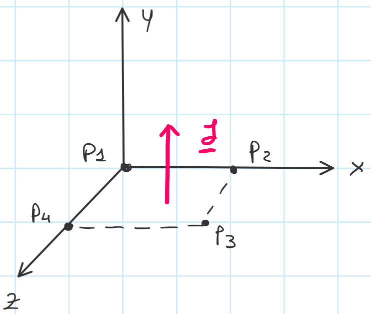
$= (\rho_{ve} \cdot \underline{E} \circ \underline{u_e} + \rho_{vh} \cdot \underline{E} \circ \underline{u_h})\, \Delta V = \underline{E} \circ \underline{J} \cdot \Delta V$

Per calcolare invece la potenza totale dissipata in un volume ho che

$$P = \iiint \Delta P = \iiint_V \underline{E} \circ \underline{J} \cdot dV = \iiint_V \sigma \cdot \underbrace{\underline{E} \cdot \underline{E}}_{|\underline{E}|^2} dV = \boxed{\iiint_V \sigma \, |\underline{E}|^2 \, dV}$$ LEGGE DI JOULE

Esercizio

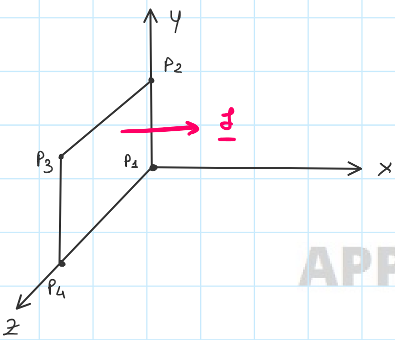
Supponiamo di avere una densità di corrente $\underline{J} = \hat{y}\, 4xz \left[\frac{A}{m^2}\right]$ e una lastra quadrata posta con i vertici in 4 punti. Calcolare la corrente che attraversa la lastra



$$I = \iint_S \underline{J} \circ \hat{u}\, dS = \int_0^2 \int_0^2 \hat{y}\, 4xz \circ \hat{y}\, dx\, dz =$$

$$= \int_0^2 \int_0^2 4xz\, dx\, dz = 4 \int_0^2 z\, dz \int_0^2 x\, dx = 4 \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^2 \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 = 4 \cdot \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}} = 16\, [A]$$

Esercizio



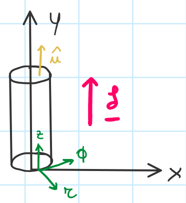
$$\underline{J} = \hat{x}\, 3y^2 z \left[\frac{A}{m^2}\right]$$

$$I = \iint_S \underline{J} \circ \hat{u}\, dS = \int_0^4 \int_0^4 (\hat{x}\, 3y^2 z) \circ \hat{x}\, dz\, dy = \int_0^4 \int_0^4 3y^2 z\, dz\, dy =$$

$$= 3 \int_0^4 y^2\, dy \int_0^4 z\, dz = 3 \left.\frac{y^3}{3}\right|_0^4 \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^4 = \cancel{3} \cdot \frac{4^3}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{16}^{8}}{\cancel{2}} = 512 \quad [A]$$

Esercizio

Supponiamo di avere un conduttore cilindrico di raggio $r = 50\, cm = 0{,}5\, m$ caratterizzato da una densità di carica $\underline{J} = \hat{y}\,(3 \cdot 10^2)\rho$ con ρ in centimetri. Calcolare I attraverso il cilindro



In questo caso bisogna usare le coordinate cilindriche

per cui $dS = \rho \cdot d\phi \cdot \underline{d\rho}$

questo poiché viene data la componente radiale

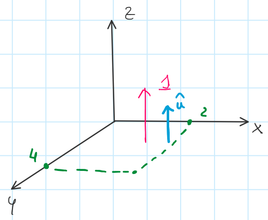
$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{0,5} \left[\hat{y}\,(3 \cdot 10^2)\, \rho \cdot 10^{-2}\right] \circ \hat{y}\; \rho\, d\phi\, d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{0,5} 3\rho^2\, d\phi\, d\rho = 3 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{0,5} \rho^2\, d\rho =$$

$$= 3 \left.\phi\right|_0^{2\pi} \left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^{0,5} = \cancel{3} \cdot 2\pi \cdot \frac{0{,}5^3}{\cancel{3}} = 0{,}78\, [A]$$

CORRENTE IN UNA PORZIONE DI PIANO

Calcolare la corrente che passa attraverso la porzione di piano definita da $0 \le x \le 2$ e $0 \le y \le 4$ sapendo che la densità di corrente vale $\underline{J} = \hat{z}\, 50 \sin(3x)\ \left[\frac{A}{m^2}\right]$



Corrente e densità sono collegati dalla relazione:

$$\boxed{I = \underbrace{\iint_S \underline{J} \cdot \hat{u}\, ds}_{\text{si ottiene uno scalare}}\ [A]}$$

verso del vettore normale

dunque $I = \int_0^2 \int_0^4 \left[\hat{z}\, 50 \sin(3x)\right] \cdot \hat{z}\, dx\, dy = 50 \int_0^2 \sin(3x)\, dx \int_0^4 dy =$

$\hat{z} \cdot \hat{z} = 1$

$$= \frac{200}{3}\left[-\cos(3x)\Big|_0^2\right] = \frac{200}{3}(-\cos 6 + 1) = 2{,}65\ [A]$$

NUMERO DI ELETTRONI LIBERI

$S = \text{SIEMENS}$

Calcolare il numero di elettroni liberi nell'alluminio considerando che la sua conducibilità è pari a $\sigma = 3{,}5 \cdot 10^7 \left(\frac{S}{m}\right)$ e che la sua mobilità elettronica $\mu_e = 0{,}0015 \left(\frac{m^2 \cdot S}{V}\right)$

N_e = Numero degli elettroni o densità degli elettroni $= -\frac{\rho_{ve}}{e}$

ρ_{ve}: densità di carica volumetrica degli elettroni

e: carica assoluta del singolo elettrone

Inoltre, $\rho_{ve} = -\frac{\sigma}{\mu_e}$ perché $\sigma = -\rho_{ve} \cdot \mu_e$

Dunque $\rho_{ve} = -\frac{3{,}5 \cdot 10^7}{0{,}0015} = -2{,}33 \cdot 10^{10} \left(\frac{C}{m^3}\right)$

$N_e = -\frac{\rho_{ve}}{e} = -\frac{(-2{,}33 \cdot 10^{10})}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 1{,}45 \cdot 10^{29} \left[\frac{\text{elettroni}}{m^2}\right]$

DENSITÀ DI CARICA / CORRENTE / VELOCITÀ DI DERIVA / DENSITÀ DI VOLUME

Un filo di rame dal diametro di cinque millimetri $(5 \cdot 10^{-3} m)$ con conducibilità $\sigma = 4{,}5 \cdot 10^7 \left[S/m\right]$ e mobilità elettronica $\mu_e = 0{,}005 \left[\frac{m^2 \cdot S}{V}\right]$ è soggetta ad un campo elettrico $\underline{E} = \hat{x}\, 20 \left[\frac{mV}{m}\right] = 20 \cdot 10^{-3}\, \hat{x} \left[\frac{V}{m}\right]$

1) Si determini la densità di carica volumetrica degli elettroni liberi

Si ha che $\rho_{ve} = -\frac{\sigma}{\mu_e} = -\frac{4{,}5 \cdot 10^7}{0{,}005} \cdot \frac{V \cdot \cancel{S}}{m^2 \cdot \cancel{S}/m} = -9 \cdot 10^9 \left[\frac{C}{m^3}\right]$

2) Calcolare la densità di corrente

Per la legge di Ohm, la densità di corrente $\underline{J}$ è uguale alla conducibilità per il campo elettrico

Dunque $\underline{J} = \sigma\, \underline{E} = 4{,}5 \cdot 10^7 (20 \cdot 10^{-3}\, \hat{x}) = \hat{x}\, 9 \cdot 10^5 \left[\frac{A}{m^2}\right]$

3) Calcolare la velocità di deriva degli elettroni

La velocità di deriva degli elettroni è $\underline{u}_e$

Il meno indica che la velocità ha direzione opposta al campo

La velocità di deriva degli elettroni è $\underline{u}_e$

Si ha che $\underline{u}_e = -\mu_e \cdot \underline{E} = -0{,}005\,(\hat{x} \cdot 20 \cdot 10^{-3}) = -10^{-4}\,\hat{x}\ \left(\frac{m}{s}\right)$

Il meno indica che la velocità ha direzione opposta al campo

4) Calcolare la densità di volume (volumetrica) degli elettroni liberi

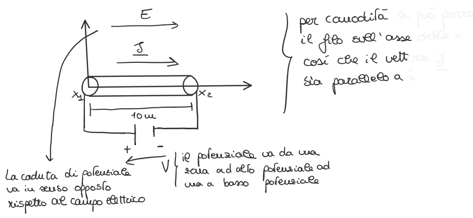
Si ha che $\rho_{ve} = -N_e \cdot e$ e $N_e = -\frac{\rho_{ve}}{e} = \frac{-(-9 \cdot 10^{9})}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 5{,}62 \cdot 10^{28}\ \left[\frac{\text{elettroni}}{m^2}\right]$

APPELLO 10 LUGLIO 2017 – CAMPO ELETTRICO, RESISTENZA, POTENZIALE

Esercizio
Si consideri un filo conduttore di lunghezza $L = 10m$ e sezione A uniforme, avente conducibilitá $\sigma = 2 \cdot 10^7 [S/m]$. Sapendo che la densitá di corrente lungo il filo vale:

$$\underline{J} = \hat{x}\, 4 \cdot 10^5 [A/m^2]$$

calcolare il campo elettrico $\underline{E}$ e la caduta di potenziale V ai capi del filo conduttore.



2

Per calcolare il campo elettrico si può usare la legge di Ohm:

$$\underline{J} = \sigma \cdot \underline{E} \Rightarrow \underline{E} = \frac{\underline{J}}{\sigma} = \hat{x}\,\frac{4 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^7} = \hat{x}\ 0{,}02\ \left[\frac{V}{m}\right]$$

Per calcolare il potenziale si calcola

$$V = -\int_{x_1}^{x_2} \underline{E} \cdot d\underline{\ell} = \int_{x_2}^{x_1} \underline{E} \cdot d\underline{\ell} = -\int_0^{10} \underline{E} \cdot \hat{x}\, dx =$$

$$= -\int_0^{10} (\hat{x}\, 0{,}02) \cdot \hat{x}\, dx = -\int_0^{10} 0{,}02\, dx = -0{,}02x\Big|_0^{10} = -0{,}2\ [V]$$

ricordando che $d\underline{\ell} = \hat{x}\, dx$

Posso scrivere anche $\boxed{V = E_x \cdot \ell}$

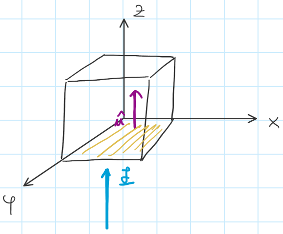
Per calcolare la resistenza uso la formula

$\boxed{R = \frac{\ell}{\sigma \cdot A}}$ dove $A = \frac{\pi d^2}{4} = 0{,}0028\ m^2$

e dunque $R = \frac{10\,m}{(2 \cdot 10^7)(0{,}0028)} = 1{,}78 \cdot 10^{-4}\ [\Omega]$

POTENZA DISSIPATA DA UN CONDUTTORE

Supponiamo di avere un mezzo di forma cubica di lato 20 cm e conducibilità σ pari a $2 \cdot 10^{-5}\ [S/m]$ ed è caratterizzato da una densità di corrente $\underline{J} = \hat{z}\ 3{,}5\ [A/m^2]$.
Calcolare la corrente I, il campo elettrico $\underline{E}$ e la potenza dissipata P



Per calcolare la corrente si sa che $I = \iint_S \underline{J} \cdot \hat{n}\, dS$

dove $dS = dx\,dy$ perciò

$$I = \int_0^{20 \cdot 10^{-2}} \int_0^{20 \cdot 10^{-2}} (\hat{z} \cdot 3{,}5) \cdot \hat{z}\ dx\,dy = 3{,}5 \int_0^{20 \cdot 10^{-2}} dx \int_0^{20 \cdot 10^{-2}} dy = 0{,}14\,[A]$$

Dato un mezzo, la corrente scorre per piani. Quindi bisogna considerare un piano perpendicolare a $\underline{J}$ ovvero la SUPERFICIE attraverso la quale scorre la corrente

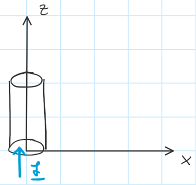
Di conseguenza se $\underline{J} = \sigma \underline{E} \Rightarrow \underline{E} = \frac{\underline{J}}{\sigma} = \frac{\hat{z}\ 3{,}5}{2 \cdot 10^{-5}} = 175\,\hat{z}\ \left[\frac{kV}{m}\right]$

Per quanto riguarda la potenza essa è $\boxed{P = \int_V \sigma |\underline{E}|^2\, dV\ [W]}$ perciò

Per quanto riguarda la potenza essa è $\boxed{P = \int_V 6|E|^2 dV \ [W]}$ perciò

$$P = 6|E|^2 \boxed{\iiint_V dV} = 6 \ (175 \cdot 10^3)^2 \cdot \boxed{\ell^3} = 2 \cdot 10^{-5} \ (175 \cdot 10^3)^2 \ (0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2) = 4{,}9 \ [kW]$$

Un conduttore cilindrico di raggio $r = 2 \cdot 10^{-2}$ m è percorso da una corrente elettrica avente densità $\underline{J} = \hat{z} \ 1{,}5 \cdot e^{-3\rho}$ (dove ρ è una variabile dipendente da una componente radiale).
Calcolare la corrente totale che fluisce nel conduttore



$$I = \iint_S \underline{J} \cdot \hat{u} \, dS \ [A]$$

In questo caso $\hat{u} = \hat{z}$ e $dS = \underline{\rho \, d\phi \, d\rho}$ coordinate cilindriche

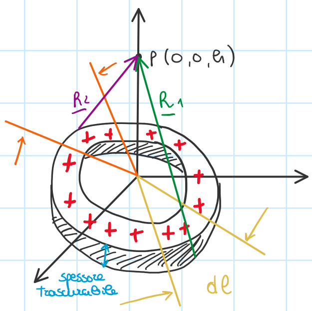
dunque $I = \int_0^{2\pi} \int_0^{0{,}02} (\underbrace{\hat{z} \cdot 1{,}5 \cdot e^{-3\rho}) \cdot \hat{z}}_{=1} \rho \, d\phi \, d\rho =$

$$= 1{,}5 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{0{,}02} \boxed{\rho \, e^{-3\rho} \, d\rho} = 1{,}5 \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{e^{-3\rho}}{9} (-3\rho - 1) \Big|_0^{0{,}02} \right] = 5{,}7 \cdot 10^{-4} \ [A]$$

INTEGRALE NOTEVOLE

$$\int x \, e^{ax} = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1)$$

ANELLO CARICO



Viene dato un anello carico elettricamente di cui viene preso un tratto infinitesimo $d\ell$ dalla cui metà viene tirato un raggio al punto P chiamato $\underline{R}_1$.
Si ha che $d\ell = b\, d\phi$ per cui $dq = \rho_\ell \cdot d\ell = \rho_\ell\, b\, d\phi$
da ciò ne deriva che

$$d\underline{E}_1 = \hat{r}_{R_1} \cdot \frac{dq}{4\pi\varepsilon R_1^2}$$ che è il campo generato nel punto P

Esplicito $\underline{R}_1 = -\hat{r} b + \hat{z} h$ per cui $|\underline{R}_1| = \sqrt{b^2+h^2}$

perciò $$d\underline{E}_1 = \frac{(-\hat{r} b + \hat{z} h)}{\sqrt{b^2+h^2}} \cdot \frac{\rho_\ell\, b\, d\phi}{4\pi\varepsilon(b^2+h^2)} = d\underline{E}_2$$ campo generato in maniera diametralmente opposto

Poiché $d\underline{E} = d\underline{E}_1 + d\underline{E}_2$ allora

$$d\underline{E} = 2\, d\underline{E}_1 = \hat{z} \frac{\rho_\ell\, b\, h}{2\pi\varepsilon(b^2+h^2)^{3/2}}\, d\phi$$ dove sparisce $\hat{r}$ poiché la componente radiale è opposta nei due campi

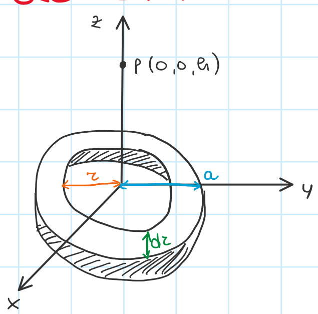
Perciò basta poi integrare

$$\underline{E} = \int_0^\pi d\underline{E} = \hat{z} \frac{\rho_\ell\, b\, h}{2\varepsilon\, (b^2+h^2)^{3/2}}$$

Sapendo che $Q = 2\pi \rho_\ell b$ allora il campo finale sarà

$$\underline{E} = \hat{z} \frac{h}{4\pi\varepsilon\, (b^2+h^2)^{3/2}}$$

DISCO CARICO



Poiché si ha che $dS = 2\pi r\, dr$ e che $dq = \rho_s\, dS = 2\pi r \rho_s\, dr$

$$d\underline{E} = \hat{z} \frac{h}{4\pi\varepsilon(r^2+h^2)^{3/2}}\, dq = \hat{z} \cdot \frac{h}{4\pi\varepsilon(r^2+h^2)^{3/2}}\, 2\pi r\, \rho_s\, dr$$

Per calcolare il campo basta integrare:

$$\underline{E} = \int_0^a d\underline{E} = \int_0^a \frac{\hat{z}\, h \cdot 2\pi r \cdot \rho_s\, dr}{4\pi\varepsilon\, (r^2+h^2)^{3/2}} = \hat{z} \frac{h \rho_s}{2\varepsilon} \int_0^a \frac{r\, dr}{(r^2+h^2)^{3/2}} =$$

con $$\int \frac{r\, dr}{(r^2+h^2)^{3/2}} \qquad x = r^2+h^2 \qquad \frac{1}{2}\int x^{-\frac{3}{2}}\, dx = \frac{1}{2}\, \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} = -x^{-\frac{1}{2}}$$

Da ciò consegue che $$\int_0^a \frac{r\, dr}{(r^2+h^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{r^2+h^2}}\Bigg|_0^a = -\frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}} + \frac{1}{h}$$