L'elemento detto **modulo** è $|z| = (z \cdot \bar{z})^{1/2} = \sqrt{a^2+b^2}$ per cui ho che $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Valgono anche:

$$\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$
$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$

per il modulo:

$|z| \geq 0$ e $z=0 \Longleftrightarrow |z|=0$

$|z| = |\bar{z}|$

$|Re(z)|, |Im(z)| \leq |z|$ e $|z| \leq |Re(z)| + |Im(z)|$

$|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

$|z_1 - z_2| \geq \big| |z_1| - |z_2| \big|$

## ESERCIZIO

Semplificare e trovare le soluzioni di $z^2 + i(Im\, z) + 2\bar{z} = 0$

Pongo $z = a+ib$ per cui ottengo $(a+ib)^2 + i(b) + 2\overline{(a+ib)} = 0$

da cui: $a^2 - b^2 + i2ab + 2a + ib + i2b = 0$

$$\downarrow$$

$$(a^2-b^2+2a) + i(2ab-b) = 0 + i \cdot 0$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + 2a = 0 \\ 2ab - b = 0 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + 2a = 0 \\ b(2a-1) = 0 \end{cases}$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + 2a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 - b^2 + 2a = 0 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\begin{cases} a^2 + 2a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{4} - b^2 + 1 = 0 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\begin{cases} a(a+2) = 0 \\ b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b^2 = \frac{5}{4} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

se $f$ è derivabile in ogni punto di $\mathbb{C}$

Es. $f(z) = e^{Re(z)}(\cos(\operatorname{Im} z) + i \sin(\operatorname{Im} z))$ } ESPONENZIALE COMPLESSA $e^z$

Essa è OLOMORFA su tutto il suo dominio. Infatti

$f(x+iy) = e^x \cos y + i \sin y \rightarrow u(x,y) = e^x \cos y \;;\; v(x,y) = e^x \sin y$

$u$ e $v$ sono differenziabili in ogni punto del dominio $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{C}$

Verifico le condizioni di Cauchy:

DA VERIFICARE

$$\begin{cases} u_x = v_y \longrightarrow & \partial_y v = \partial_y (e^x \sin y) = e^x \cos y \\ & \partial_x u = \partial_x (e^x \cos y) = e^x \cos y \\ & \Longrightarrow \\ u_y = -v_x \longrightarrow & \partial_y u = e^x(-\sin y) = -e^x \sin y \\ & \partial_x v = e^x \cdot \sin y \end{cases}$$

Poiché le condizioni sono verificate per un qualsiasi punto, allora $f$ è derivabile in ogni punto del dominio $(\mathbb{C})$ per cui ho che

$f'(z) = f'(x+iy) = u_x(x,y) + i v_x(x,y) = e^x \cos y + i e^x \sin y = f(z)$

per cui ottengo che $(e^z)' = e^z$

ma poiché va bene in qualsiasi $\varepsilon$, pongo $\varepsilon \to 0$ perciò

$$-2\pi i\, f(z_0) + \int_{C_R} \frac{f(w)}{w - w_0}\, dw = 0 \implies f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(w)}{w - w_0}\, dw$$

$$\frac{dv}{dy} = B = 6xy + 4x = 6xy + 4x + c'(y)$$

$$c'(y) = 0 \implies c(y) = C$$

DUNQUE $v(x, y) = 3xy^2 + 4xy - x^3 + C$ perció concludendo si ottiene

$$f(z) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2 + i\,(3xy^2 + 4xy - x^3 + C)$$

$k!$

Dim:

① $k=0 \Rightarrow a_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \Big|_{z=0} \xrightarrow{\text{infatti}} = a_0$

② $k \neq 0 \Rightarrow \frac{d^k}{dz^k} S = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \frac{d^k}{dz^k} z^n = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n k! \, z^{n-k} \Big|_{z=0} = a_k k!$

$$a_k = \frac{\frac{d^k}{dz^k} S(0)}{k!}$$

Dunque avrò che $\oint_{\gamma} = \oint_{\gamma_1} + \oint_{\gamma_2} = \frac{\pi i}{8}\left(e - \frac{5}{e^3}\right)$

dunque $\log z = \log|z| + i \arg(z)$ e il

logaritmo è una funzione multivoca. Tuttavia

si può operare una restrizione a $[0, 2\pi]$

piano reale

ESEMPIO $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^2}\,dx = \lim_{\substack{R \to +\infty \\ \varepsilon \to 0^+}} \int_\varepsilon^R \frac{\log x}{1+x^2}\,dx$

oppure

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^2}\,dx$ nel piano complesso i

$$f(z) = \ln|z| + i\theta \quad \text{con } \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$$

$$\int_\varepsilon^R \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = \int_{[\varepsilon, R]} \frac{f(z)}{z^2+1}\,dz$$

Da finire

2 $z^n = w \Rightarrow$ l'operazione inversa è una radice ma non è una funzione invertibile e definita univocamente

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

$$= -i \oint_C \frac{dz}{z\left(\frac{z^2+1+4z}{2z}\right)^2} = -4i \oint_C \frac{z\,dz}{(z^2+4z+1)^2}$$

I punti di discontinuità sono $z^2+4z+1=0$ $\begin{cases} z_1 = -2+\sqrt{3} & \text{interno con mod. } 1 \\ z_2 = -2-\sqrt{3} & \text{esterno con mod. } 1 \end{cases}$

Dunque ottengo $-4i\oint_C = -4i\, 2\pi i \cdot Res(f, -2+\sqrt{3})$

Calcolo il residuo $Res(f, -2+\sqrt{3}) = \lim_{z \to -2+\sqrt{3}} \frac{d}{dz}\left[(z+2-\sqrt{3})^2 \cdot \frac{z}{(z+2-\sqrt{3})^2(z+2+\sqrt{3})^2}\right] =$

$$= \lim_{z \to -2+\sqrt{3}} \frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(z+2+\sqrt{3})^2}\right] = \lim_{z \to -2+\sqrt{3}} \frac{(z+2+\sqrt{3})^2 - 2z(z+2+\sqrt{3})}{(z+2+\sqrt{3})^4} =$$

$$= \lim_{z \to -2+\sqrt{3}} \frac{\cancel{(z+2+\sqrt{3})}(z+2+\sqrt{3}-2z)}{(z+2+\sqrt{3})^{\cancel{4}\,3}} = \frac{4}{(2\sqrt{3})^3} = \frac{4}{{}^{2}\cancel{8}\cdot 3\sqrt{3}}$$

Dunque ottengo che

$$-4i\oint_C = -4i \cdot 2\pi i \cdot Res(f, -2+\sqrt{3}) = -4i \cdot \cancel{2}\pi i \cdot \frac{1}{{}_3\cancel{6}\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$