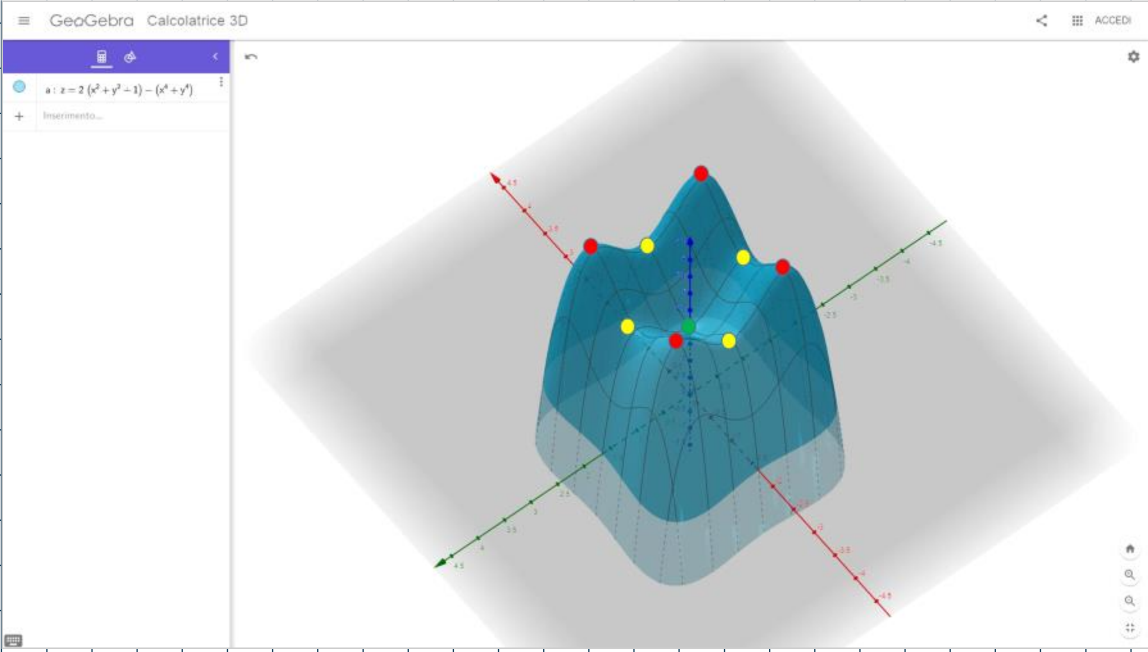
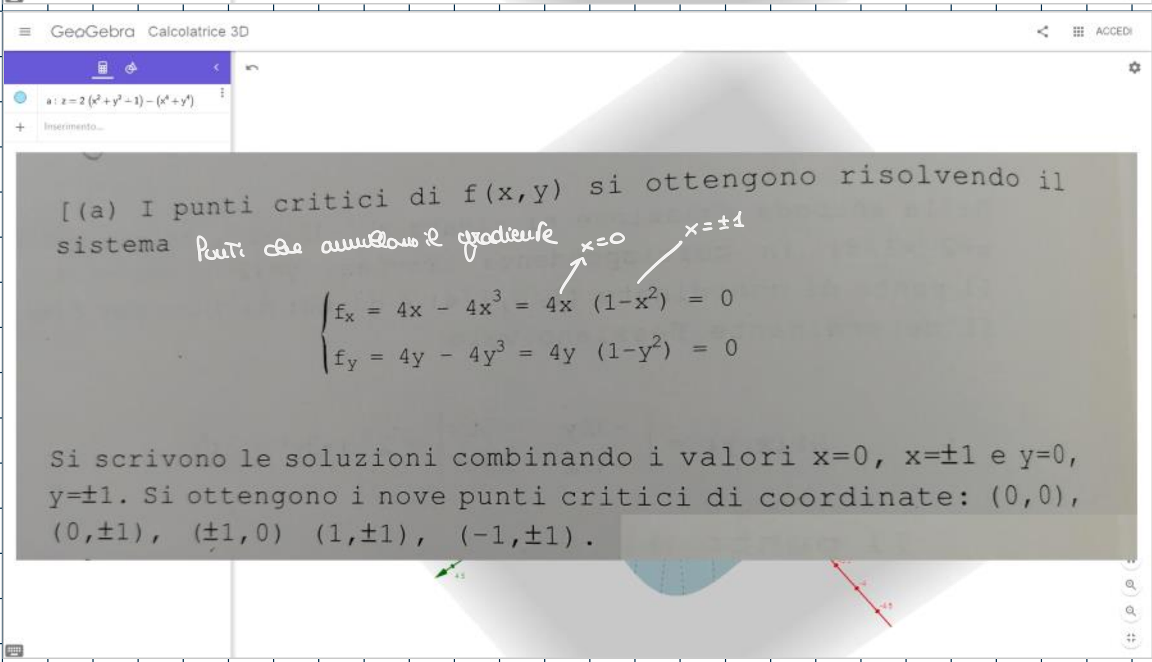




[(a) I punti critici di f(x,y) si ottengono risolvendo il sistema Punti che annullano il gradiente

$x=0$ $x=\pm 1$

$$\begin{cases} f_x = 4x - 4x^3 = 4x\ (1-x^2) = 0 \\ f_y = 4y - 4y^3 = 4y\ (1-y^2) = 0 \end{cases}$$

Si scrivono le soluzioni combinando i valori x=0, x=±1 e y=0, y=±1. Si ottengono i nove punti critici di coordinate: (0,0), (0,±1), (±1,0) (1,±1), (-1,±1).

ESTENSIONE DELLA DIFFERENZIABILITÀ

$\underline{f}: A \subseteq \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow$ è differenziabile se lo sono le varie componenti

$\underline{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)$

$\underset{\sim}{f}$ DIFFERENZIABILE IN $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ SE

ESISTE $\underline{L}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

TALE CHE $\qquad \underline{L} = (L_1, \dots, L_m)$

$$\begin{pmatrix} \lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \dfrac{f_1(\underline{x}_0+\underline{h}) - f_1(\underline{x}_0) - L_1(\underline{h})}{|\underline{h}|} \\ \lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \dfrac{f_2(\underline{x}_0+\underline{h}) - f_2(\underline{x}_0) - L_2(\underline{h})}{|\underline{h}|} \\ \vdots \\ \lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \dfrac{f_m(\underline{x}_0+\underline{h}) - f_m(\underline{x}_0) - L_m(\underline{h})}{|\underline{h}|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

= gradiente x vettore incrementi

$\underline{f}$ DIFFERENZIABILE IN $\underline{x}_0$ $\Leftrightarrow$ f_i DIFFERENZIABILE IN $\underline{x}_0$

$$d\underline{f}(\underline{x}_0) = \left[df_1(\underline{x}_0), df_2(\underline{x}_0), \dots, df_m(\underline{x}_0) \right] =$$

$$= \left[\frac{\partial f_1(\underline{x}_0)}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f_1(\underline{x}_0)}{\partial x_n} dx_n, \dots, \frac{\partial f_m(\underline{x}_0)}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f_m(\underline{x}_0)}{\partial x_n} dx_n \right]$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(\underline{x}_0)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(\underline{x}_0)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m(\underline{x}_0)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(\underline{x}_0)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$$

MATRICE DEI GRADIENTI O MATRICE JACOBIANA

MATRICE JACOBIANA $\underline{\underline{J}}_{m \times n}$

ESEMPIO

$$\underline{f}(x,y,z) = \left(x^2+y,\ xyz,\ \sin(xz),\ \cos(xy)\right)$$

Sono tutte differenziabili per il Teorema e dunque anche tutta la funzione è differenziabile

$$\underline{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

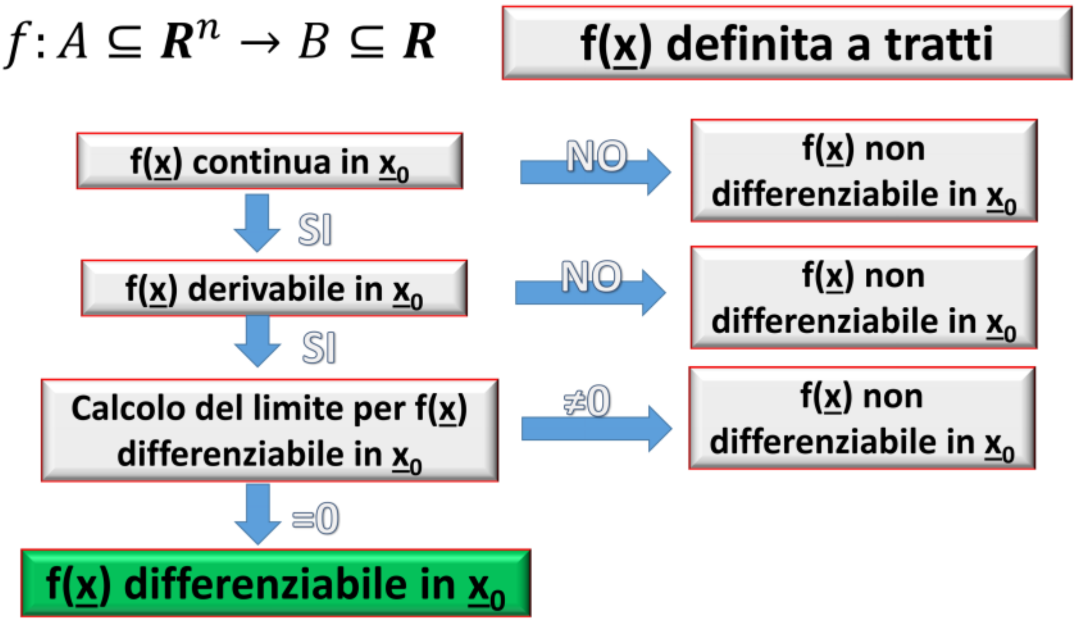
derivata rispetto a

$$\underline{\underline{J}}(x,y,z) = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$$

$$\underline{\underline{J}}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 1 & 0 \\ yz & xz & xy \\ z\cos(xz) & 0 & x\cos(xz) \\ -y\cos(xy) & -x\sin(xy) & 0 \end{pmatrix}$$

$$d\underline{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x\,dx + dy \\ yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz \\ z\cos(xz)\,dx + x\cos(xz)\,dz \\ -y\cos(xy)\,dx - x\sin(xy)\,dy \end{pmatrix}$$

$f : A \subseteq \boldsymbol{R}^n \rightarrow B \subseteq \boldsymbol{R}$



Continuità	Derivabilità	Differenziabilità

$$f(x,y)=\begin{cases} y^2 \sin(x+y) & y \le 0 \\ \dfrac{\ln(1+xy^2)}{y^\alpha} & y>0 \end{cases}$$

$y=0$ SEPARAZIONE

Funzione definita a tratti

esercizio parametrico

$\alpha>0$

- DETERMINARE PER QUALI VALORI DI α $f(x,y)$ É CONTINUA IN $(x,0)$
- SCELTO UN VALORE DI α (tra gli individuati come PLAUSIBILI) STUDIARE DERIVABILITÁ E DIFFERENZIABILITÁ

Continuità	Derivabilità	Differenziabilità

$$f(x,y)=\begin{cases} y^2 \sin(x+y) \\ \dfrac{\ln(1+xy^2)}{y^\alpha} \end{cases}$$

$\alpha>0$

- DETERMINARE PER QU…
$f(x,y)$ É CONTINUA
- SCELTO UN VALORE
DERIVABILITÁ E

$$\lim_{y\to 0^-} \underbrace{y^2}_{=0} \sin(x+\underbrace{y}_{=0}) = 0$$

sen x

devono darmi lo stesso risultato

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{\ln(1+xy^2)}{y^\alpha} = \lim_{y\to 0^+} \frac{xy^2}{y^\alpha} = \lim_{y\to 0^+} xy^{2-\alpha} = \begin{cases} 0 & \alpha<2 \\ x & \alpha=2 \end{cases}$$

xy^2

CONTINUA SE

$f(x,0)=0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+xy^2)}{xy^2}=1 \Downarrow \ln(1+xy^2)\sim xy^2$$

quindi

$$\left[\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \qquad \ln(1+x)\simeq x \quad x\to 0\right]$$

Continuità	Derivabilità	Differenziabilità

SCELGO $\alpha=1$

$$f(x,y)=\begin{cases} y^2 \sin(x+y) & y \le 0 \\ \dfrac{\ln(1+xy^2)}{y} & y>0 \end{cases}$$

Continua se $\alpha<2$

Continuità | **Derivabilità** | **Differenziabilità**

SCELGO $\alpha = 1$

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin(x+y) & y \leq 0 \\ \dfrac{\ln(1+xy^2)}{y} & y > 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f(x,0)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,0) - f(x,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{0 \cdot \sin(x+h+0) - 0 \cdot \sin(x+0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Continuità | **Derivabilità** | **Differenziabilità**

SCELGO $\alpha = 1$

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin(x+y) & y \leq 0 \\ \dfrac{\ln(1+xy^2)}{y} & y > 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f(x,0)}{\partial y} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x,k) - f(x,0)}{k} =$$

$$= \lim_{k \to 0^+} \frac{\frac{\ln(1+xk^2)}{k} - 0}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{\ln(1+xk^2)}{k^2}$$

Continuità | **Derivabilità** | **Differenziabilità**

SCELGO $\alpha = 1$

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin(x+y) & y \leq 0 \\ \dfrac{\ln(1+xy^2)}{y} & y > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{k \to 0^+} x \cdot \frac{\ln(1+xk^2)}{xk^2} = x$$

$$\frac{\partial f(x,0)}{\partial y} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x,k) - f(x,0)}{k} =$$

$$= \lim_{k \to 0^+} \frac{\frac{\ln(1+xk^2)}{k} - 0}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{\ln(1+xk^2)}{k^2}$$

Continuità	Derivabilità	Differenziabilità

SCELGO $\alpha = 1$

$$\lim_{k\to 0^-} \frac{k^2 \sin(x+k) - \overset{f(0,x)}{0}}{k} = \lim_{k\to 0^-} k\cdot \sin(x+k) = 0$$

$f(x$ … $) = \times$

— =

$$\lim_{k\to 0} \frac{\ln(1+xk^2)}{k^2}$$

f DERIVABILE IN $(x,0)$ SOLO PER $x=0$

f DERIVABILE IN $(0,0)$

$$\nabla f(0,0) = (0,0)$$

Continuità	Derivabilità	Differenziabilità

DIFFERENZIABILITÀ IN $(0,0)$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{f(h,k) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\circ(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \begin{cases} \displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0^-}} \frac{k^2 \sin(h+k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ \displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0^+}} \frac{\ln(1+hk^2)}{k\sqrt{h^2+k^2}} \end{cases}$$

Continuità	Derivabilità	Differenziabilità

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0^-}} \frac{k^2 \sin(h+k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \simeq \lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0^-}} \frac{k^2\cdot(h+k)}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \cancel{\lim} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2 \sin^2\vartheta \cdot \rho(\cos\vartheta + \sin\vartheta)}{\rho} = 0$$

se uguali allora $f(x,y)$ = differenziabile

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0^+}} \frac{\ln(1+hk^2)}{k\sqrt{h^2+k^2}} \simeq \lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0^+}} \frac{hk^2}{k\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0^+}} \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2 \cos\vartheta \sin\vartheta}{\rho} = 0$$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

Continuità | **Derivabilità** | **Differenziabilità**

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

CONTINUITÀ IN $(0,y)$ $\qquad f(0,y) = 0$

$$\lim_{x \to 0} (x+y)^2 \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$$

SOLO SE $y = 0$

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x} \Rightarrow \text{QUANTITÀ LIMITATA} \in [-1;1]$$

Continuità | **Derivabilità** | **Differenziabilità**

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

CONTINUITÀ SOLO IN $(0,0)$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \operatorname{sen}\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \to 0} h \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} =$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{0-0}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{0}{k} = 0$$

Continuità | **Derivabilità** | **Differenziabilità**

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} \frac{(h+k)^2 \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{h}}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \; ?$$

Continuità | **Derivabilità** | **Differenziabilità**

$$0 \le \left|\frac{(h+k)^2 \cdot \sin\frac{1}{h}}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \le \left|\frac{(h+k)^2}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| = \frac{(h+k)^2}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\frac{\cdots^2 \cdot \sin\frac{1}{h}}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \ ?$$

$$= \frac{h^2+2hk+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} + \frac{2hk}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \sqrt{h^2+k^2} + \frac{2hk}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Continuità | **Derivabilità** | **Differenziabilità**

$$0 \le \left|\frac{(h+k)^2 \cdot \sin\frac{1}{h}}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \le \left|\frac{(h+k)^2}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| = \frac{(h+k)^2}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\frac{\cdots^2 \cdot \sin\frac{1}{h}}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \ ?$$

$$\lim_{\substack{h\to0\\k\to0}} \frac{2hk}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\rho\to0}\frac{2\rho^2\cos\vartheta\sin\vartheta}{\rho} = 0$$

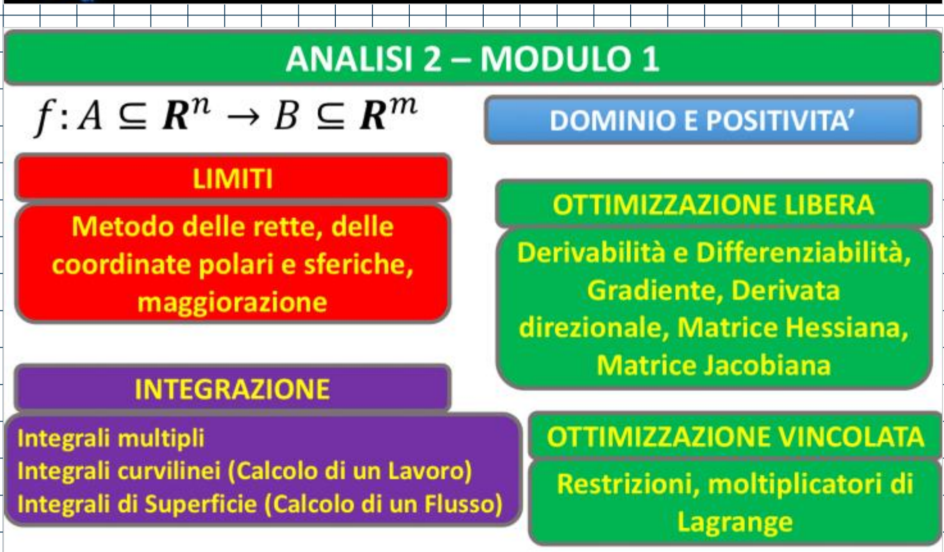
f DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$

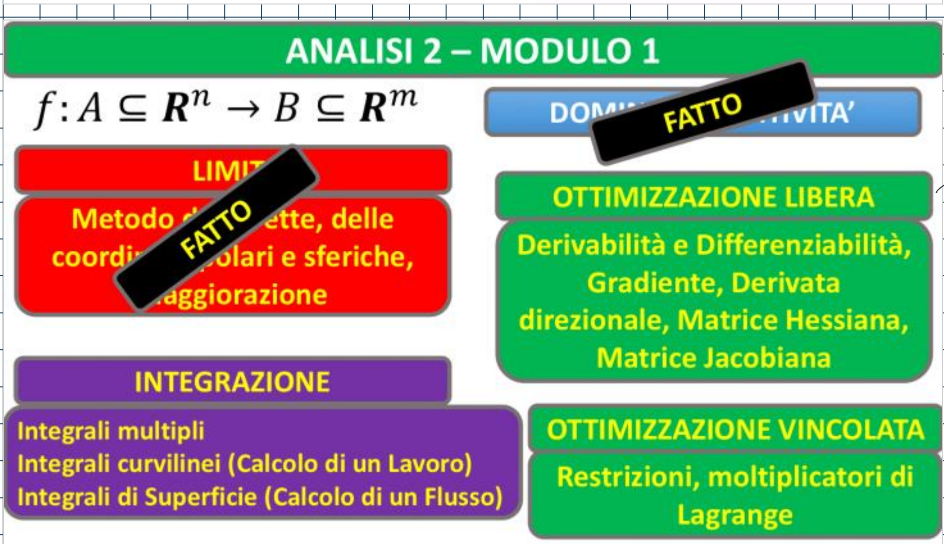
Nella prossima lezione:

- **Matrice Hessiana**

Ottimizzazione libera

giovedì 22 ottobre 2020 15:22





Nessun limite nella ricerca di massimi e minimi

ANALISI 2 – MODULO 1

$f: A \subseteq \boldsymbol{R}^n \rightarrow B \subseteq \boldsymbol{R}^m$

DOM [redacted] FATTO [redacted] IVITA'

LIMIT [redacted] FATTO

Metodo d [redacted] ette, delle coordi [redacted] olari e sferiche, [redacted] aggiorazione

OTTIMIZZAZIONE LIBERA

FATTO [redacted]

FATTO [redacted] Matrice Hessiana,

FATTO [redacted]

INTEGRAZIONE

Integrali multipli
Integrali curvilinei (Calcolo di un Lavoro)
Integrali di Superficie (Calcolo di un Flusso)

OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA

Restrizioni, moltiplicatori di Lagrange

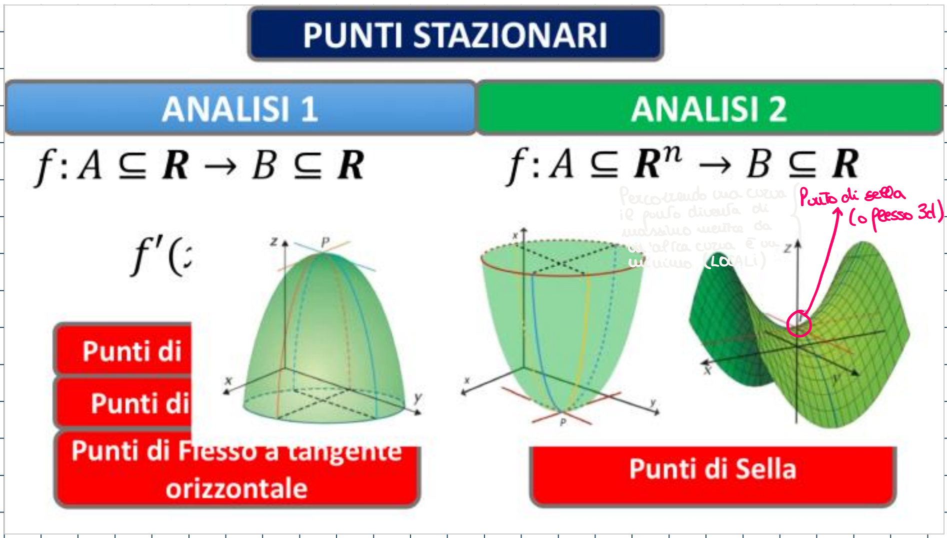
Si ricerca in una determinata parte del dominio
↓
Se un insieme è compatto allora presenta un massimo e un minimo

OTTIMIZZAZIONE LIBERA

PUNTI STAZIONARI

≠ critici → più generale → comprende STAZIONARI e PUNTI DI NON DERIVA. che divengono tali nei negli intorni

ANALISI 1	ANALISI 2
$f: A \subseteq \boldsymbol{R} \rightarrow B \subseteq \boldsymbol{R}$	$f: A \subseteq \boldsymbol{R}^n \rightarrow B \subseteq \boldsymbol{R}$
$f'(x_0) = 0$	$\nabla f(\underline{x}_0) = \underline{0}$
Punti di Massimo locale	Punti di Massimo locale
Punti di Minimo locale	Punti di Minimo locale
Punti di Flesso a tangente orizzontale	Punti di Sella



$P_0 = (x_0, y_0)$ → BIDIMENSIONALE

$P_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ → N DIMENSIONALE

P_0 È UN PUNTO DI MASSIMO LOCALE (MASSIMO RELATIVO)

SE ESISTE ALMENO UN INTORNO

$I_{P_0}(\varepsilon) : \forall P \in I_{P_0}(\varepsilon), \; f(P_0) \geq f(P)$

piccolo a nostro piacimento

la sua immagine

$P_0 = (x_0, y_0)$

$P_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$

P_0 È UN PUNTO DI MINIMO LOCALE (MINIMO RELATIVO)

$\exists \, I_{P_0}(\varepsilon) : \forall P \in I_{P_0}(\varepsilon), \; f(P_0) \leq f(P)$

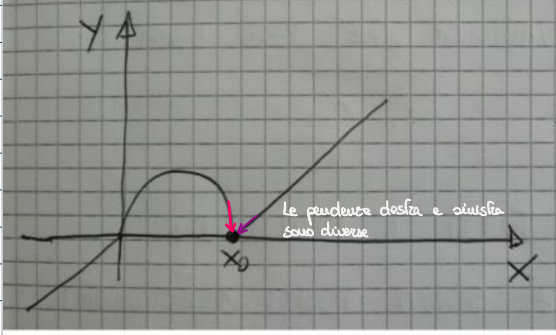
$\underline{P}_0$ È UN PUNTO CRITICO $\Leftrightarrow$ Se e solo se P_0 PUNTO DI MASSIMO LOCALE O MINIMO LOCALE O SELLA

$f'(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ punto critico
$\not\Leftarrow$

$\nabla f(\underline{P}_0) = \underline{0} \Rightarrow \underline{P}_0$ È UN PUNTO CRITICO

$\not\Leftarrow$ Ma un punto critico non è per forza a gradiente zero poiché ci sarà almeno una delle n derivate che non esiste

ESEMPIO DI ANALISI 1



x_0 È UN PUNTO ANGOLOSO

$\nexists f'(x_0)$

x_0 È UN PUNTO DI MINIMO RELATIVO

RICERCA DEI PUNTI CRITICI

PER $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

1) $\underline{P} \in A : \nabla f(\underline{P}) = \underline{0}$

2) $\underline{P} \in A : \nexists \nabla f(\underline{P})$ PUNTI DI NON DERIVABILITÀ

DOVE RICERCARE I PUNTI DI NON DERIVABILITÀ?

FUNZIONI DEFINITE A TRATTI

$$f(x,y) = \begin{cases} \text{-----} \\ \text{-----} \\ \text{-----} \end{cases}$$

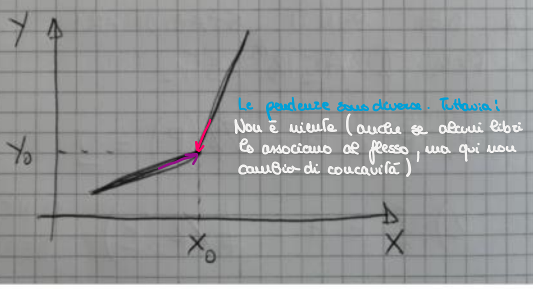
SI CONSIDERANO TUTTI I PUNTI PER I QUALI LA FUNZIONE CAMBIA ESPRESSIONE ANALITICA, E SI DEFINISCONO PUNTI DI NON DERIVABILITÀ SE PER ESSI $\nexists \nabla f(P)$

PUNTI $\in$ DOMINIO f MA $\notin$ DOMINIO ∇f

Alcuni punti, seppur di continuità, non prevedono la derivata prima

OVVIAMENTE, NON TUTTI I PUNTI DI NON DERIVABILITÀ SONO PUNTI **CRITICI**

ESEMPIO IN ANALISI 1



$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad \underline{P}_0 \in A$

f DIFFERENZIABILE IN $\underline{P}_0$

$$\boxed{\begin{array}{l} \nabla f(\underline{P}_0) = \underline{0} \\ \Downarrow \\ \underline{P}_0 \text{ È UN PUNTO STAZIONARIO} \end{array}}$$

COME CAPIRE SE $\underline{P}_0$ È UN PUNTO DI:

- MASSIMO LOCALE
- MINIMO LOCALE
- SELLA

MATRICE HESSIANA

In un dominio di ordine n ($\mathbb{R}^n$) ho n derivate parziali prime e n·n derivate parziali seconde

$$\underline{\underline{H}}(\underline{P}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\underline{P}_0)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\underline{P}_0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\underline{P}_0)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\underline{P}_0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\underline{P}_0)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\underline{P}_0)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial^2 f(P) & & & \partial^2 f(\underline{P}_0) \end{pmatrix}$$

In un dominio di ordine n ($\mathbb{R}^n$) ho n derivate parziali prime e n·n derivate parziali seconde

MATRICE HESSIANA

$$\underline{\underline{H}}(\underline{P_0}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(\underline{P_0})}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(\underline{P_0})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(\underline{P_0})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f(\underline{P_0})}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(\underline{P_0})}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(\underline{P_0})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f(\underline{P_0})}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(\underline{P_0})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

TEOREMA DI SCHWARZ

TEOREMA DELL' INVERSIONE DELL' ORDINE DI DERIVAZIONE

Hyp: $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}$

$\underline{P_0} \in A$

$f \in C^2(\underline{P_0})$

almeno continua sempre fino (e comprese) le derivate parziali seconde

TEOREMA DI SCHWARZ

TESI: $$\frac{\partial^2 f(\underline{P_0})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\underline{P_0})}{\partial x_j \partial x_i}$$

se derivo prima rispetto a x e poi a y è la stessa cosa di derivare prima rispetto a y e poi a x → ciò significa che la matrice è simmetrica

CONSEGUENZA: $\underline{\underline{H}}(\underline{P_0})$ É UNA MATRICE SIMMETRICA

Non ci sono autovalori complessi

$\underline{\underline{H}}(\underline{P_0})$ SIMMETRICA $\Rightarrow$ TUTTI GLI AUTOVALORI DI $\underline{\underline{H}}(\underline{P_0})$ SONO NUMERI REALI

RICHIAMI DI ALGEBRA LINEARE

$\underline{\underline{M}} \circ \underline{x} = \underline{y}$

ROTOTRASLAZIONE di vettori

$\underline{\underline{M}} \circ \underline{x} = \lambda \cdot \underline{x}$

SIMBOLO DI MATRICE — SIMBOLO DI VETTORE

fattore di allungamento/accorciamento

λ AUTOVALORE

$\underline{x}$ AUTOVETTORE

vettori che, dopo la Trasformazione, giacciono sulla stessa direzione cioè la rototraslazione non ha effetto ma vengono solo ingranditi o rimpiccioliti

$$\underline{\underline{M}} \circ \underline{x} - \lambda \cdot \underline{x} = \underline{0}$$

$$\underline{\underline{M}} \circ \underline{x} - \lambda \cdot \underline{\underline{I}} \circ \underline{x} = \underline{0} \qquad (\underline{\underline{M}} - \lambda \underline{\underline{I}}) \circ \underline{x} = \underline{0}$$

RICHIAMI DI ALGEBRA LINEARE

ESEMPIO

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Una soluzione al sistema è il vettore nullo. Un sistema ha almeno una soluzione non nulla se non è a rango pieno cioè ha determinante zero. Le λ verranno calcolate risolvendo le equazioni del

POLINOMIO CARATTERISTICO

PRODOTTO RIGA X COLONNA

$$\boxed{(\underline{\underline{M}} - \lambda \underline{\underline{I}}) \circ \underline{x} = \underline{0}}$$

matrice identità

$$\boxed{\det(\underline{\underline{M}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0}$$

RICHIAMI DI ALGEBRA LINEARE

$\underline{\underline{M}}$ SIMMETRICA $\Rightarrow$ $\det(\underline{\underline{M}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0$ AMMETTE COME SOLUZIONI λ_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ REALI

$\underline{\underline{M}}$ SIMMETRICA $\Rightarrow$ $\underline{\underline{M}}$ DIAGONALIZZABILE

Posso farla diventare $\neq 0$ lungo la diagonale e $= 0$ nelle altre posizioni

$$\det(\underline{\underline{M}}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

produttoria (PRODOTTO)

RICHIAMI DI ALGEBRA LINEARE

$\underline{\underline{H}}$ SIMMETRICA DEFINITA

DEFINITA POSITIVA $\Leftrightarrow$ $\lambda_i > 0$ $(i=1,\dots,n)$

DEFINITA NEGATIVA $\Leftrightarrow$ $\lambda_i < 0$ $(i=1,\dots,n)$

SEMI DEFINITA POSITIVA $\Leftrightarrow$ $\lambda_i \geq 0$ $(i=1,\dots,n)$

SEMI DEFINITA NEGATIVA $\Leftrightarrow$ $\lambda_i \leq 0$ $(i=1,\dots,n)$

NON DEFINITA $\Leftrightarrow$ $\lambda_i > 0 \wedge \lambda_j < 0$, $i \neq j$

Matrice Hessiana

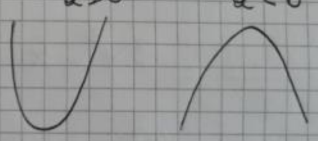
$\underline{\underline{H}}(\underline{P}_0)$ É DEFINITA POSITIVA $\Rightarrow$ $\underline{P}_0$ É UN PUNTO DI MINIMO LOCALE

$\boxed{\text{PARABOLA}}$

$y = ax^2 + bx + c$

$y' = 2ax + b$

$y'' = 2a$



Matrice Hessiana

$\underline{\underline{H}}(\underline{P}_0)$ É DEFINITA NEGATIVA $\Rightarrow$ $\underline{P}_0$ É UN PUNTO DI MASSIMO LOCALE

Autovalori <0 o >0 ma ≠0

$\underline{\underline{H}}(\underline{P}_0)$ É NON DEFINITA $\Rightarrow$ $\underline{P}_0$ É UN PUNTO DI SELLA

almeno un autovalore è =0

E SE $\underline{\underline{H}}(\underline{P}_0)$ É SEMIDEFINITA, OVVERO SE $\det(\underline{\underline{H}}(\underline{P}_0)) = 0$?

ESEMPIO

$$f(x,y) = x^2 + y^3 - xy$$

Le polinomiali sono tutte di classe C^∞

$\Downarrow$

TEOREMA DEL DIFF. TOTALE

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x - y$$

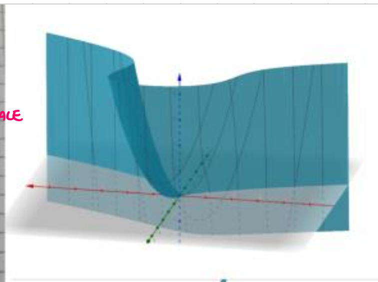
derivata parziale rispetto a x

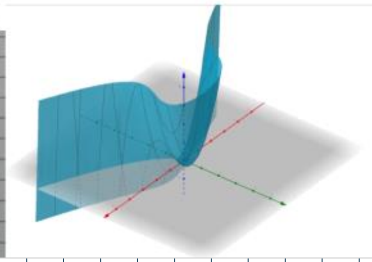
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3y^2 - x$$

derivata parziale rispetto a y

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3y^2 - x = 0 \end{cases}$$

Non è un sistema lineare





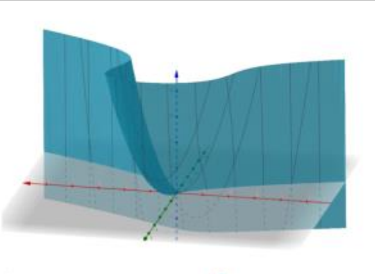
$$\begin{cases} y = 2x \\ 3\cdot(2x)^2 - x = 12x^2 - x = 0 \end{cases}$$

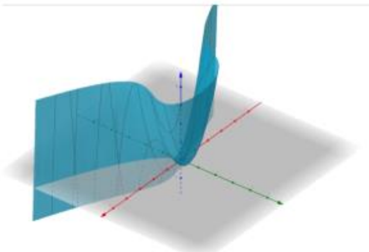
SOLUZIONI:

$x = 0 \Rightarrow y = 0$

$x = \frac{1}{12} \Rightarrow y = \frac{1}{6}$

$\underline{A} = (0,0)$ $\quad\quad$ $\underline{B} = \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\right)$





$$\underset{=}{H}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 6y \end{pmatrix}$$

2: der. rispetto a x e poi risp. a x

-1: der. rispetto a x e poi risp. a y

-1: der. rispetto a y der. poi rispetto a x

6y: der. rispetto a y e poi a y di nuovo

Il metodo della matrice hessiana mi permette di capire se un punto è di massimo o minimo

Calcolate in maniera GENERICA

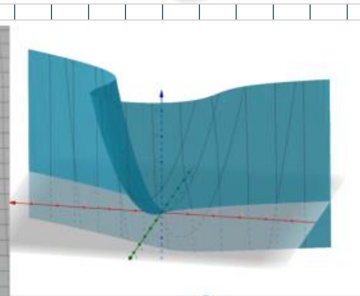
Sostituisco le coordinate del punto stazionario di interesse

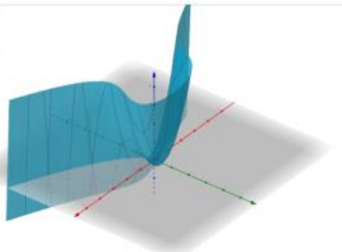
$$\underset{=}{H}(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcolate nel punto stazionario di interesse

$$\underset{=}{H}\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

CALCOLO DEGLI AUTOVALORI PER $\underset{=}{H}(0,0)$





CALCOLO DEGLI AUTOVALORI PER $\underline{\underline{H}}(0,0)$

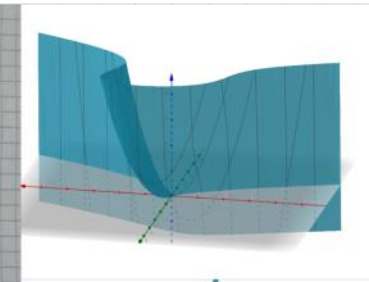
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

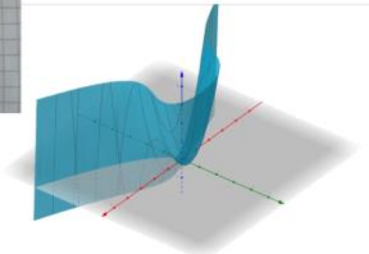
$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \overbrace{\det\left(\underline{\underline{H}}(0,0) - \lambda \underline{\underline{I}}\right)}^{\text{POLINOMIO CARATTERISTICO}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lambda(2-\lambda) - 1 = 0 \Rightarrow \lambda(2-\lambda) + 1 = 0$$

$$2\lambda - \lambda^2 + 1 = 0 \qquad \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0 \qquad \Delta = 4 + 4 = 8$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} 1 - \sqrt{2} < 0 \\ 1 + \sqrt{2} > 0 \end{cases}$$

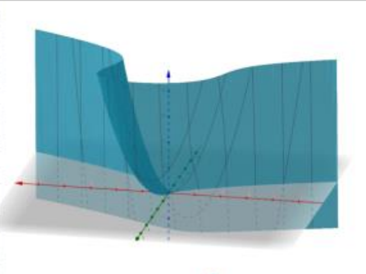


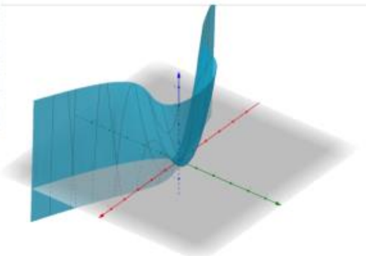


$\underline{\underline{H}}(0,0)$ É NON DEFINITA $\Rightarrow$ $\underline{A} = (0,0)$ É UN PUNTO DI SELLA

CALCOLO DEGLI AUTOVALORI PER $\underline{\underline{H}}\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\right)$

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0 \qquad (2-\lambda)(1-\lambda) - 1 = 0$$





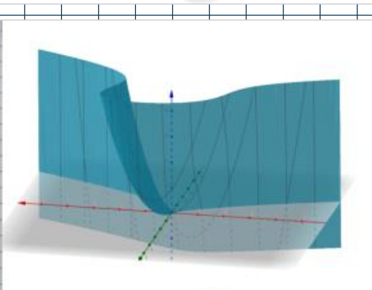
$$2 - 3\lambda + \lambda^2 - 1 = 0 \qquad \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

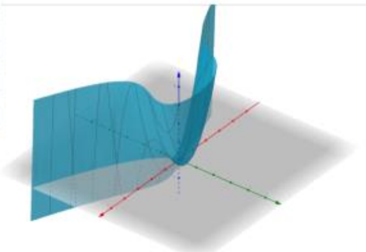
$$\Delta = 9 - 4 = 5 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

$\underline{\underline{H}}\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\right)$ É DEFINITA POSITIVA $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\underline{B} = \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\right)$ É UN PUNTO DI MINIMO RELATIVO





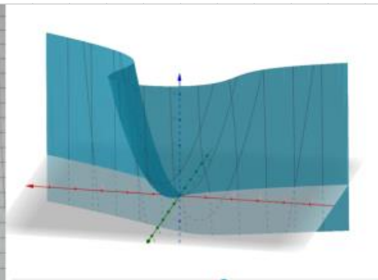
QUANDO $\underline{\underline{H}}(\underline{P}_0)$ È UNA 2×2

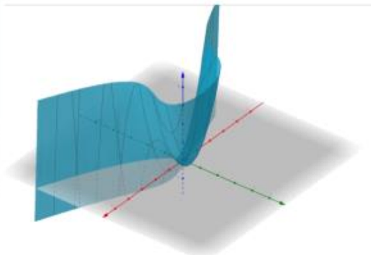
$$\det\left[\underline{\underline{H}}(\underline{P}_0)\right] = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \quad \text{se } \underline{\underline{H}}(\underline{P}_0) \text{ è } 2\times 2$$

$\underline{\underline{H}}(\underline{P}_0)$ DEFINITA POSITIVA $\Leftrightarrow$ $\det(\underline{\underline{H}}(\underline{P}_0)) > 0$ ET $\lambda_1 > 0$

$\underline{\underline{H}}(\underline{P}_0)$ DEFINITA NEGATIVA $\Leftrightarrow$ $\det(\underline{\underline{H}}(\underline{P}_0)) > 0$ ET $\lambda_1 < 0$

$\underline{\underline{H}}(\underline{P}_0)$ NON DEFINITA $\Leftrightarrow$ $\det(\underline{\underline{H}}(\underline{P}_0)) < 0$





RICHIAMI DI ALGEBRA LINEARE

TEOREMA DI JACOBI

Matrice $n\times n$ => n determinanti h_i $(i = 1, 2, \dots n)$

$$\underline{\underline{H}} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{12} & h_{22} & & \\ & & \ddots & \\ h_{1n} & & & h_{nn} \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{H}} \text{ Sym}$$

MATRICE SIMMETRICA

determinante

$$|h_1| = h_{11} \qquad |h_2| = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = h_{11} \cdot h_{22} - h_{12}^2$$

$$|h_3| = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{12} & h_{22} & h_{23} \\ h_{13} & h_{23} & h_{33} \end{vmatrix} \qquad |h_n| = \det\left[\underline{\underline{H}}\right]$$

RICHIAMI DI ALGEBRA LINEARE

TEOREMA DI JACOBI

$\underline{\underline{H}}$ DEFINITA POSITIVA $\Leftrightarrow$ $\overbrace{|h_i|}^{\text{minori della matrice}} > 0$, $i = 1, 2, \dots n$

NEL CASO 2×2 $\quad \overbrace{f_{xx}(\underline{P}_0)}^{\text{derivata seconda pura}} > 0$ ET

Primo elemento della matrice (h_{11})

$\mathrm{Det}(\underline{\underline{H}}(\underline{P}_0)) > 0$

$\underline{\underline{H}}$ DEFINITA NEGATIVA $\Leftrightarrow$ $|h_1| < 0$, $|h_2| > 0$, $|h_3| < 0 \dots$

$|h_{2k}| > 0$ ET $|h_{2k+1}| < 0$

RICHIAMI DI ALGEBRA LINEARE

TEOREMA DI JACOBI

$\underline{\underline{H}}$ DEFINITA POSITIVA $\Leftrightarrow$ $|h_i| > 0$, $i = 1, 2, \dots n$

NEL CASO 2x2 $f_{xx}(\underline{P_0}) > 0$ ET

$\mathrm{Det}\left(\underline{\underline{H}}(\underline{P_0})\right) > 0$

$\underline{\underline{H}}$ DEFINITA NEGATIVA $\Leftrightarrow$ $|h_1| < 0, |h_2| > 0,$

NEL CASO 2x2 $f_{xx}(\underline{P_0}) < 0$ ET

$\mathrm{DET}\left(\underline{\underline{H}}(\underline{P_0})\right) > 0$

RICHIAMI DI ALGEBRA LINEARE

$\underline{\underline{H}}$ SEMIDEFINITA POSITIVA $\Leftrightarrow$ $|h_k| \geq 0$

$\underline{\underline{H}}$ SEMIDEFINITA NEGATIVA $\Leftrightarrow$ $|h_{2k}| \geq 0$ ET

$|h_{2k+1}| \leq 0$

$\underline{\underline{H}}$ NON DEFINITA $\Leftrightarrow$

punto di sella

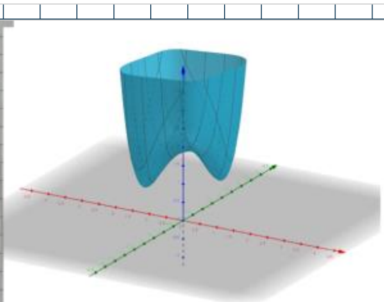
$\exists\, |h_{2k}| < 0$ AND

$\exists\, |h_{2k+1}| > 0$

ESEMPIO

$f(x,y) = 2(x^4 + y^4 + 1) - (x+y)^2$

è una funzione PARI



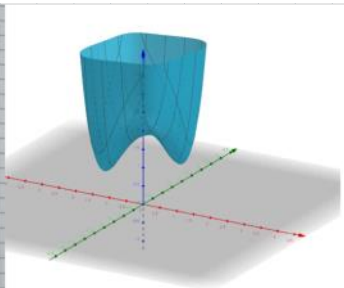
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 8x^3 - 2(x+y) = 2(4x^3 - x - y)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 8y^3 - 2(x+y) = 2(4y^3 - x - y)$$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} 4x^3 - x - y = 0 \\ 4y^3 - x - y = 0 \end{cases}$$

Poiché di 3° grado o devo andare di sostituzione o non posso usare i metodi di cramer ecc.

$$\begin{cases} 4x^3 = x+y \\ 4y^3 = x+y \end{cases} ; \quad \begin{cases} x^3 = y^3 \\ 4y^3 = x+y \end{cases}$$



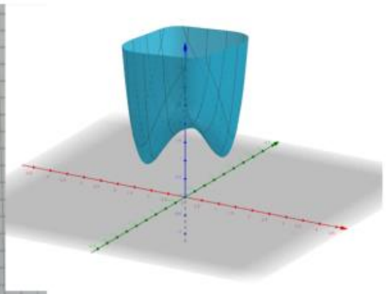
$x^3 = y^3 \Rightarrow x^3 - y^3 = 0 \qquad (x-y)(x^2+xy+y^2) = 0$

$x = y \qquad x^2+xy+y^2 = 0$?

$\Delta = y^2 - 4y^2 = -3y^2 < 0 \quad \nexists x \in \mathbb{R}$

$df = \nabla f \circ \underline{h} \quad$ con $\underline{h} = (dx, dy)$

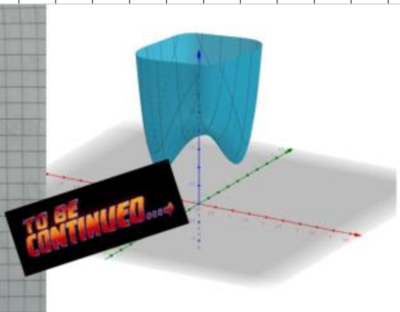
$$\begin{cases} x = y \\ 4x^3 = 2x \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = y \\ 2x^3 - x = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = y \\ x(2x^2-1) = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = y \\ x = 0 \ \cup \ x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \ \cup \ x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$\underline{A} = (0,0) \qquad \underline{B} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad \underline{C} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

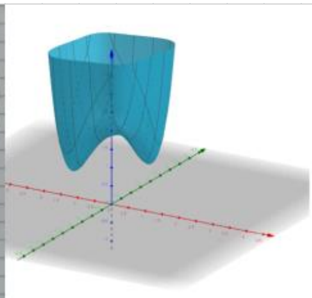
$$\underline{\underline{H}}(x,y) = \begin{pmatrix} 24x^2-2 & -2 \\ -2 & 24y^2-2 \end{pmatrix}$$



$$\underline{\underline{H}}(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \det \underline{\underline{H}}(0,0) = 0$$

$$\underline{\underline{H}}(\underline{B}) = \begin{pmatrix} 24 \cdot \frac{1}{2} - 2 & -2 \\ -2 & 24 \cdot \frac{1}{2} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{H}}(\underline{B}) = \begin{pmatrix} 24\cdot\frac{1}{2}-2 & -2 \\ -2 & 24\cdot\frac{1}{2}-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$$



$$\det \underline{\underline{H}}(\underline{B}) = 100-4 = 96 > 0$$

$\underline{B} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ É UN PUNTO DI MINIMO LOCALE

$\underline{C} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$?

ANALISI DEI PUNTI CON HESSIANO NULLO

SONO RICHIESTE ULTERIORI INDAGINI

Se det=0 si devono scegliere ulteriori analisi

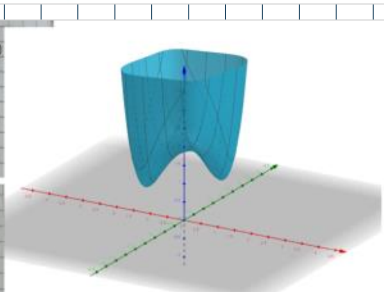
POSSIBILI STRATEGIE PER $f: A\subseteq\mathbb{R}^2 \to B\subseteq\mathbb{R}$

1) SE SI TROVANO 2 CURVE $y=g_1(x)$ E $y=g_2(x)$ LUNGO LE QUALI LA "RESTRIZIONE" DELLA $f(x,y)$ ASSUME UN COMPORTAMENTO DIVERSO IN CORRISPONDENZA DI $\underline{P_0}$ (AD ESEMPIO, LUNGO UNA RESTRIZIONE SI HA UN MINIMO E LUNGO L'ALTRA SI HA UN MASSIMO), ALLORA SI CONCLUDE CHE $\underline{P_0}$ É UN PUNTO DI SELLA

ANALISI DEI PUNTI CON HESSIANO NULLO

SONO RICHIESTE ULTERIORI INDAGINI

POSSIBILI STRATEGIE PER $f: A\subseteq\mathbb{R}^2 \to B\subseteq\mathbb{R}$



ESEMPIO $f(x,y) = 2(x^4+y^4+1) - (x+y)^2$

$A = (0,0)$ É AD HESSIANO NULLO

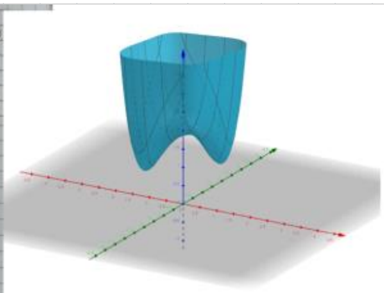
SCELGO $y = g_1(x) = x$ E $y = g_2(x) = -x$

$$f(x,y)\Big/_{g_1(x)} = 2(x^4+x^4+1) - (2x)^2 = $$
$$= 4x^4 + 2 - 4x^2 = \Gamma_1(x)$$

ANALISI DEI PUNTI CON HESSIANO NULLO

SONO RICHIESTE ULTERIORI INDAGINI

$$f(x,y)\Big|_{g_2(x)} = 2(x^4+(-x)^4+1)-(x-x)^2 =$$
$$= 2(2x^4+1) = 4x^4+2 = \Gamma_2(x)$$



DERIVATA PRIMA

$\Gamma_1'(x) = 16x^3 - 8x$

DERIVATA SECONDA

$\Gamma_1''(x) = 48x^2 - 8$

Sostituisco $x=0$ nella der. seconda

$\Gamma_1''(0) = -8 < 0$

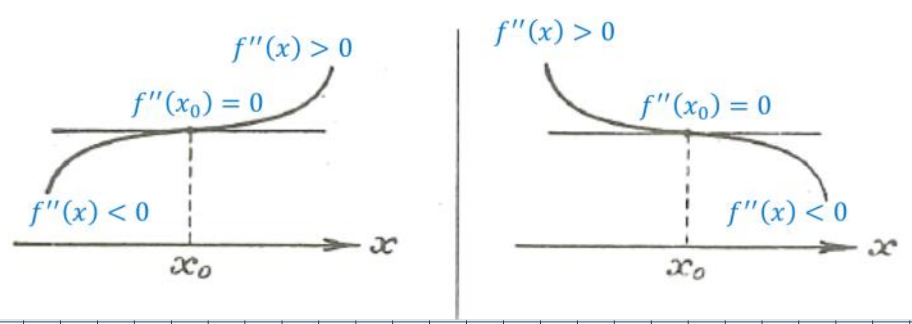
PUNTO DI MASSIMO LUNGO $\Gamma_1(x)$

Se un punto stazionario ha derivata seconda negativa allora è un massimo locale (in questo caso lungo $\Gamma_1'(x)$)

$\Gamma_2'(x) = 16x^3$ $\quad \Gamma_2''(x) = 48x^2$ $\quad \Gamma_2''(0) = 0$

Flessi **La tangente in x_0 attraversa la curva f(x)**

x_0 punto di flesso $\Rightarrow$ $f''(x_0) = 0$ ($\not\Leftarrow$)



Flessi **La tangente in x_0 attraversa la curva f(x)**

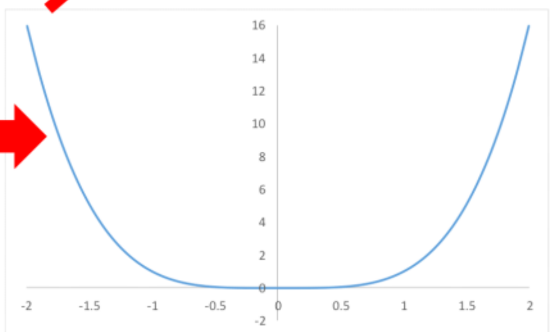
x_0 punto di flesso $\Rightarrow$ $f''(x_0) = 0$ ($\not\Leftarrow$)

$f(x) = x^4$

$f'(x) = 4x^3$

$f''(x) = 12x^2$

$f''(0) = 0$



Massimi e Minimi Relativi di una funzione

REGOLARI: Punti in

SINGOLARI: Punti in cui ... abile

102. - Secondo metodo per la ricerca dei massimi relativi, dei minimi relativi e dei flessi con tangente orizzontale: metodo delle derivate successive (1)

METODO DELLE DERIVATE SUCCESSIVE

$f'(x_1)$	$f''(x_1)$	$f'''(x_1)$	$f^{IV}(x_1)$	$f^{V}(x_1)$
$=0$	>0 min. LOCALI <0 max.			
$=0$	$=0$	>0 fl. asc. <0 fl. disc.		
$=0$	$=0$	$=0$	>0 min. <0 max.	
$=0$	$=0$	$=0$	$=0$	>0 fl. asc. <0 fl. disc.

e così via.

Quando lo studio del segno di f'(x) non è agevole

$f'(x) \geq 0$

Flessi

La tangente in x_0 attraversa la curva f(x)

x_0 punto di flesso $\Rightarrow$ $f''(x_0) = 0$ ($\Leftarrow$ barrato)

$f(x) = x^4$

$f'(x) = 4x^3$

$f''(x) = 12x^2$

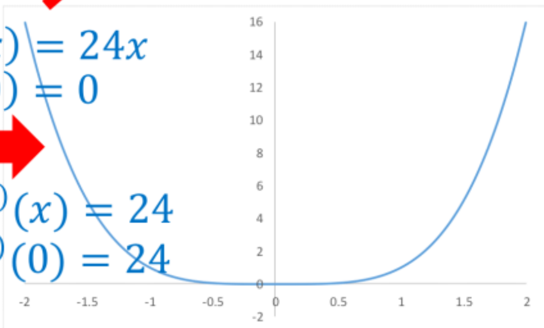
$f''(0) = 0$

$f'''(x) = 24x$

$f'''(0) = 0$

$f^{(IV)}(x) = 24$

$f^{(IV)}(0) = 24$



ANALISI DEI PUNTI CON HESSIANO NULLO

SONO RICHIESTE ULTERIORI INDAGINI

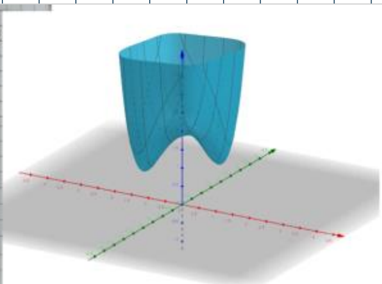
$f(x,y)\big|_{g_2(x)} = 2(x^4+(-x)^4+1) - (x-x)^2 =$

$= 2(2x^4+1) = 4x^4+2 = \Gamma_2(x)$

$\Gamma_2'(x) = 16x^3$ $\quad \Gamma_2''(x) = 48x^2$ $\quad \Gamma_2''(0) = 0$

$\Gamma_2'''(x) = 96x$ $\quad \Gamma_2'''(0) = 0$ $\quad \Gamma_2^{(IV)}(x) = 96$

$\Gamma_2^{(IV)}(0) = 96 > 0$ PUNTO DI MINIMO LUNGO $\Gamma_2(x)$



$\Rightarrow$ $A = (0,0)$

PUNTO DI SELLA

ANALISI DEI PUNTI CON HESSIANO NULLO

SONO RICHIESTE ULTERIORI INDAGINI

POSSIBILI STRATEGIE PER $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to B \subseteq \mathbb{R}$

2) $f(x,y) = g(ax+by)$ $\quad t = ax+by$

$f(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2})$ $\quad t = \sqrt{x^2+y^2}$

$f(x,y) = g(t)$

riconduco la funzione in x, y ad una funzione di analisi 1 ad una sola variabile t

ANALISI DEI PUNTI CON HESSIANO NULLO

SONO RICHIESTE ULTERIORI INDAGINI

POSSIBILI STRATEGIE PER $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to B \subseteq \mathbb{R}$

2) $f(x,y) = g(ax+by)$ $\quad t = ax+by$

$f(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2})$ $\quad t = \sqrt{x^2+y^2}$

$f(x,y) = g(t)$

$f(x,y) = g(ax+by)$

DER. PARZ. RISPETTO A X

$f_x = a\,g'(ax+by)$

DER. PARZ. RISPETTO A Y

$f_y = b\,g'(ax+by)$

DER. PARZ. RISPETTO A X E A X

$f_{xx} = a^2 g''(ax+by)$

DER. PARZ. RISPETTO A Y E A Y

$f_{yy} = b^2 g''(ax+by)$

DER. MISTA

$f_{xy} = ab\,g''(ax+by)$

DER. MISTA

$f_{yx} = ab\,g''(ax+by)$

Le derivate miste sono uguali se ci si riferisce ad una funzione di classe C^2

ANALISI DEI PUNTI CON HESSIANO NULLO

SONO RICHIESTE ULTERIORI INDAGINI

POSSIBILI STRATEGIE PER $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to B \subseteq \mathbb{R}$

2)

$$\underline{\underline{H}}(x,y) = \begin{pmatrix} a^2 g'' & ab\,g'' \\ ab\,g'' & b^2 g'' \end{pmatrix} = g'' \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$$

$b\,g'(ax+by)$

$f_{xx} = a^2 g''(ax+by)$ $\quad f_{yy} = b^2 g''(ax+by)$

$f_{xy} = ab\,g''(ax+by)$ $\quad f_{yx} = ab\,g''(ax+by)$

ANALISI DEI PUNTI CON HESSIANO NULLO

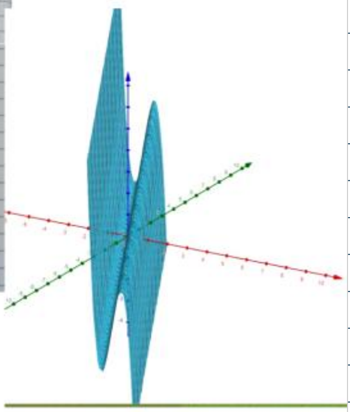
SONO RICHIESTE ULTERIORI INDAGINI

POSSIBILI STRATEGIE PER $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to B \subseteq \mathbb{R}$

ESEMPIO

$$f(x,y) = (2x+y) \cdot \left[3 - (2x+y)^2\right]$$

$t = 2x+y$ $\qquad f(x,y) = g(t) = t(3-t^2) =$
$$= 3t - t^3$$



ANALISI DEI PUNTI CON HESSIANO NULLO

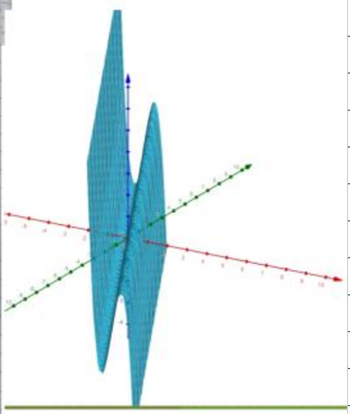
$g'(t) = 3 - 3t^2 = 3(1-t^2)$

$g'(t) = 0 \qquad t = -1 \quad \cup \quad t = 1$

$g'(t) \geq 0$

$t = -1$ PUNTO DI MINIMO RELATIVO

$t = 1$ PUNTO DI MASSIMO RELATIVO



ANALISI DEI PUNTI CON HESSIANO NULLO

SONO RICHIESTE ULTERIORI INDAGINI

POSSIBILI STRATEGIE PER $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to B \subseteq \mathbb{R}$

Un'intera curva (es. retta) può essere un luogo geometrico di minimi o massimi locali

$t = -1$ PUNTO DI MINIMO RELATIVO

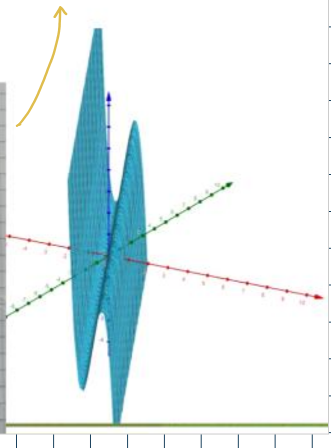
$t = 1$ PUNTO DI MASSIMO RELATIVO

$2x+y = -1 \qquad 2x+y+1 = 0 \qquad y = -2x-1$

LUOGO GEOMETRICO DI MINIMI LOCALI

$2x+y = 1 \qquad 2x+y-1 = 0 \qquad y = -2x+1$

LUOGO GEOMETRICO DI MASSIMI LOCALI



ANALISI DEI PUNTI CON HESSIANO NULLO

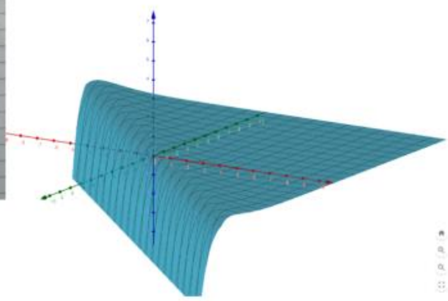
SONO RICHIESTE ULTERIORI INDAGINI

POSSIBILI STRATEGIE PER $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to B \subseteq \mathbb{R}$

$f(x,y) = (x-y) \cdot e^{y-x}$ $\qquad t = x-y$

$f(x,y) = g(t) = t \cdot e^{-t}$

$g'(t) = e^{-t} - t e^{-t} = e^{-t}(1-t)$



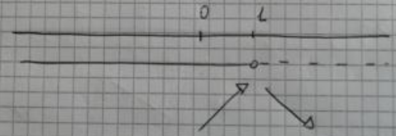
ANALISI DEI PUNTI CON HESSIANO NULLO

SONO RICHIESTE ULTERIORI INDAGINI

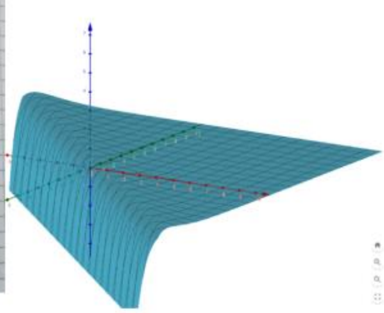
POSSIBILI STRATEGIE PER $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to B \subseteq \mathbb{R}$

$g'(t) \geq 0 \qquad e^{-t}(1-t) \geq 0 \qquad e^{-t} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$1-t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad t \leq 1$



$t=1$ PUNTO DI MASSIMO LOCALE

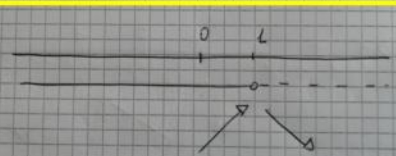


ANALISI DEI PUNTI CON HESSIANO NULLO

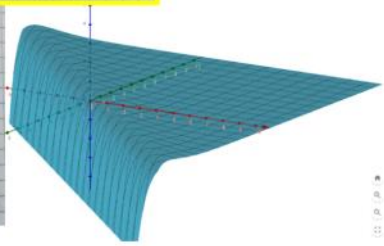
SONO RICHIESTE ULTERIORI INDAGINI

POSSIBILI STRATEGIE PER $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to B \subseteq \mathbb{R}$

$x-y=1 \qquad y = x-1$ É UN LUOGO GEOMETRICO DI MASSIMI LOCALI



$t=1$ PUNTO DI MASSIMO LOCALE



ANALISI DEI PUNTI CON HESSIANO NULLO

SONO RICHIESTE ULTERIORI INDAGINI

POSSIBILI STRATEGIE PER $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to B \subseteq \mathbb{R}$

3) $f(x,y) - f(x_0,y_0) \geq 0$

STUDIO DELLA POSITIVITÀ

SE $\exists I_{(x_0,y_0)} : f(x,y) - f(x_0,y_0) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in I_{(x_0,y_0)}$

$\Rightarrow (x_0,y_0)$ É UN PUNTO DI MINIMO LOCALE

SE $\exists I_{(x_0,y_0)} : f(x,y) - f(x_0,y_0) \leq 0 \quad \forall (x,y) \in I_{(x_0,y_0)}$

$\Rightarrow (x_0,y_0)$ É UN PUNTO DI MASSIMO LOCALE

ANALISI DEI PUNTI CON HESSIANO NULLO

SONO RICHIESTE ULTERIORI INDAGINI

POSSIBILI STRATEGIE PER $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to B \subseteq \mathbb{R}$

3) $f(x,y) - f(x_0,y_0) \geq 0$

STUDIO DELLA POSITIVITÀ

SE $\exists I_{(x_0,y_0)} : f(x,y) - f(x_0,y_0) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in I_{(x_0,y_0)}$

$\Rightarrow (x_0,y_0)$ É UN PUNTO DI MINIMO LOCALE

SE $\exists I_{(x_0,y_0)} : f(x,y) - f(x_0,y_0) \leq 0 \quad \forall (x,y) \in I_{(x_0,y_0)}$

$\Rightarrow (x_0,y_0)$ É UN PUNTO DI MASSIMO LOCALE

ALTRIMENTI (x_0,y_0) É UN PUNTO DI SELLA

ANALISI DEI PUNTI CON HESSIANO NULLO

SONO RICHIESTE ULTERIORI INDAGINI

POSSIBILI STRATEGIE PER $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to B \subseteq \mathbb{R}$

ESEMPIO

$f(x,y) = xy^2 \cdot e^{-(2x^2+y^2)}$

derivata parziale rispetto a x

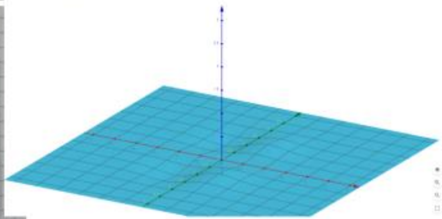
$f_x = y^2 e^{-(2x^2+y^2)} + xy^2 \cdot (-4x) \cdot e^{-(2x^2+y^2)} =$

$= e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (y^2 - 4x^2y^2)$

derivata parziale rispetto a y

$f_y = 2xy \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + xy^2 \cdot (-2y) \cdot e^{-(2x^2+y^2)} =$

$= e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (2xy - 2xy^3)$



ANALISI DEI PUNTI CON HESSIANO NULLO

SONO RICHIESTE ULTERIORI INDAGINI

POSSIBILI STRATEGIE PER $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to B \subseteq \mathbb{R}$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} y^2 - 4x^2y^2 = 0 \\ 2xy - 2xy^3 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} \underbrace{y^2}_{A}\underbrace{(1-4x^2)}_{B} = 0 \\ \underbrace{2xy}_{D}\underbrace{(1-y^2)}_{C} = 0 \end{cases}$$

Posso ora non considerare il Termine esponenziale poiché non si potrebbe mai annullare

$$\begin{cases} A \cdot B = 0 \,* \\ D \cdot C = 0 \,* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ D \cdot C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \Rightarrow y = 0 \checkmark \\ D = 0 \Rightarrow 2xy = 0 \end{cases} \begin{cases} A = 0 \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \; \times \\ C = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \end{cases}$$

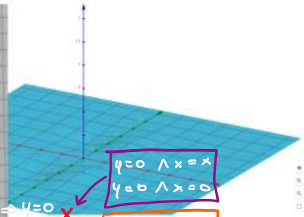
$$\begin{cases} B = 0 \\ C \cdot D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2} \checkmark \\ C = 0 \Rightarrow y = \pm 1 \end{cases} \begin{cases} B = 0 \Rightarrow 1 - 4x^2 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2} \\ D = 0 \Rightarrow 2xy = 0 \end{cases}$$

$x = \frac{1}{2} \to y = 0 \to y = 0$

$x = -\frac{1}{2} \to -y = 0$

$\boxed{y = 0 \wedge x = x \\ y = 0 \wedge x = 0}$

$\boxed{x = \pm\frac{1}{2} \wedge y = 0 \vee x = \pm\frac{1}{2} \; y = \pm 1}$ $\checkmark$



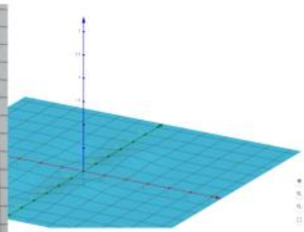
ANALISI DEI PUNTI CON HESSIANO NULLO

SONO RICHIESTE ULTERIORI INDAGINI

POSSIBILI STRATEGIE PER $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to B \subseteq \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases} \cup$$

$$\begin{cases} 1 - 4x^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 1 - 4x^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 1 - 4x^2 = 0 \\ 1 - y^2 = 0 \end{cases}$$



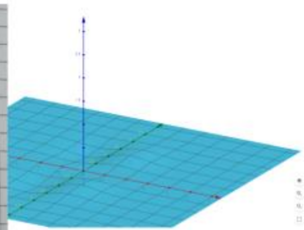
ANALISI DEI PUNTI CON HESSIANO NULLO

SONO RICHIESTE ULTERIORI INDAGINI

POSSIBILI STRATEGIE PER $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to B \subseteq \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \cup \cancel{\begin{cases} y = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases}} \cup$$

$$\cancel{\begin{cases} 1 - 4x^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases}} \cup \begin{cases} 1 - 4x^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 1 - 4x^2 = 0 \\ 1 - y^2 = 0 \end{cases}$$



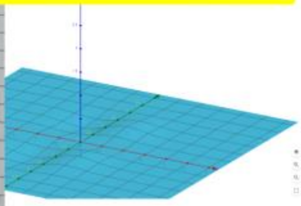
ANALISI DEI PUNTI CON HES

SONO RICHIESTE ULTERIORI

POSSIBILI STRATEGIE PER f: A

$$\boxed{(0,0) \quad (x,0) \quad \left(\frac{1}{2},0\right) \quad \left(-\frac{1}{2},0\right) \quad \left(\frac{1}{2},1\right) \quad \left(\frac{1}{2},-1\right) \quad \left(-\frac{1}{2},1\right) \quad \left(-\frac{1}{2},-1\right)}$$

$$\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \cup \begin{cases} y=0 \\ y=0 \end{cases} \cup \cancel{\begin{cases} y=0 \\ y=\pm 1 \end{cases}} \cup$$



$$\cancel{\begin{cases} 1-4x^2=0 \\ x=0 \end{cases}} \cup \begin{cases} 1-4x^2=0 \\ y=0 \end{cases} \cup \begin{cases} 1-4x^2=0 \\ 1-y^2=0 \end{cases}$$

$$f(x,y) = xy^2 \cdot e^{-(2x^2+y^2)}$$

$$f_x = y^2 e^{-(2x^2+y^2)} + xy^2 \cdot (-4x) \cdot e^{-(2x^2+y^2)} =$$

$$= e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (y^2 - 4x^2y^2)$$

$$f_y = 2xy \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + xy^2 \cdot (-2y) \cdot e^{-(2x^2+y^2)} =$$

$$= e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (2xy - 2xy^3)$$

$$f_{xx} = (-4x) \cdot e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (y^2 - 4x^2y^2) +$$

$$+ e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-8xy^2) =$$

$$= e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-4xy^2 + 16x^3y^2 - 8xy^2) =$$

$$= e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (16x^3y^2 - 12xy^2) =$$

$$= 4xy^2(4x^2-3) \cdot e^{-(2x^2+y^2)}$$

$$f(x,y) = xy^2 \cdot e^{-(2x^2+y^2)}$$

$$f_x = y^2 e^{-(2x^2+y^2)} + xy^2 \cdot (-4x) \cdot e^{-(2x^2+y^2)} =$$

$$= e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (y^2 - 4x^2y^2)$$

$$f_y = 2xy \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + xy^2 \cdot (-2y) \cdot e^{-(2x^2+y^2)} =$$

$$= e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (2xy - 2xy^3)$$

$$f_{yy} = e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-2y) \cdot (2xy - 2xy^3) +$$

$$+ e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (2x - 6xy^2) =$$

$$= e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-4xy^2 + 4xy^4 + 2x - 6xy^2) =$$

$$= 2x \cdot e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (2y^4 + 1 - 10y^2)$$

$$f(x,y) = xy^2 \cdot e^{-(2x^2+y^2)}$$

$$f_x = y^2 e^{-(2x^2+y^2)} + xy^2 \cdot (-4x) \cdot e^{-(2x^2+y^2)} =$$

$$= e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (y^2 - 4x^2y^2)$$

$$f_y = 2xy \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + xy^2 \cdot (-2y) \cdot e^{-(2x^2+y^2)} =$$

$$= e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (2xy - 2xy^3)$$

$$f_{xy} = (-2y) \cdot e^{-(8x^2+y^2)} \cdot (y^2 - 4x^2y^2) +$$

$$+ e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (2y - 8x^2y) =$$

$$= e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-2y^3 + 8x^2y^3 + 2y - 8x^2y) =$$

$$= 2y \cdot e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (1 + 4x^2y^2 - y^2 - 4x^2)$$

$$f(x,y) = xy^2 \cdot e^{-(2x^2+y^2)}$$

$$f_x = y^2 e^{-(2x^2+y^2)} + xy^2 \cdot (-4x) \cdot e^{-(2x^2+y^2)} =$$

$$= e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (y^2 - 4x^2y^2)$$

$$f_y = 2xy \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + xy^2 \cdot (-2y)$$

$$= e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (2xy - 2xy^3)$$

$$\underline{\underline{H}}(x,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2x e^{-2x^2} \end{pmatrix}$$

$(x,0)$ SONO PUNTI AD HESSIANO NULLO

$$f(x,y) = xy^2 \cdot e^{-(2x^2+y^2)}$$

STUDIO DELLA POSITIVITÀ

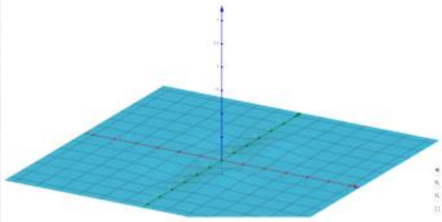
$$f(x,y) - f(x,0) \geq 0$$

$$f(x,0) = 0$$

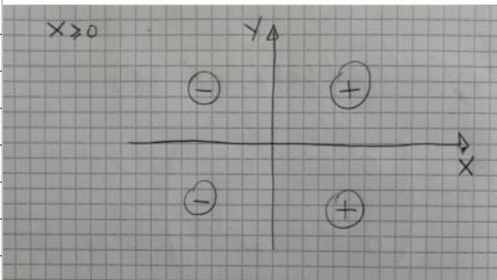
$$xy^2 \cdot e^{-(2x^2+y^2)} \geq 0$$

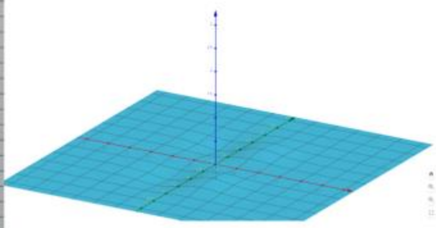
$$e^{-(2x^2+y^2)} > 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$xy^2 \geq 0 \qquad y^2 \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$$



$f(x,y) = x y^2 \cdot e^{-(2x^2+y^2)}$





$(x,0)$ SONO PUNTI DI:

MINIMO LOCALE PER $x > 0$
MASSIMO LOCALE PER $x < 0$
SELLA PER $x = 0$

$f(x,y) = x \cdot \sqrt[3]{(y-x)^2} = x(y-x)^{2/3}$

$f_x = (y-x)^{2/3} + x \cdot \frac{2}{3} \cdot (y-x)^{-1/3} \cdot (-1)$

$= \sqrt[3]{(y-x)^2} - \frac{2x}{3\sqrt[3]{y-x}} = \frac{3(y-x)-2x}{3\sqrt[3]{y-x}} =$

$= \frac{3y-5x}{3\sqrt[3]{y-x}}$

$f(x,y) = x \cdot \sqrt[3]{(y-x)^2} = x(y-x)^{2/3}$

$f_y = x \cdot \frac{2}{3}(y-x)^{-1/3} = \frac{2x}{3\sqrt[3]{y-x}}$

$y=x$ LUOGO GEOMETRICO DI PUNTI DI NON DERIVABILITÀ

$\nabla f(x,y) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} \frac{3y-5x}{3\sqrt[3]{y-x}} = 0 \\ \frac{2x}{3\sqrt[3]{y-x}} = 0 \end{cases} \quad \nexists (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = x \cdot \sqrt[3]{(y-x)^2} = x(y-x)^{2/3}$$

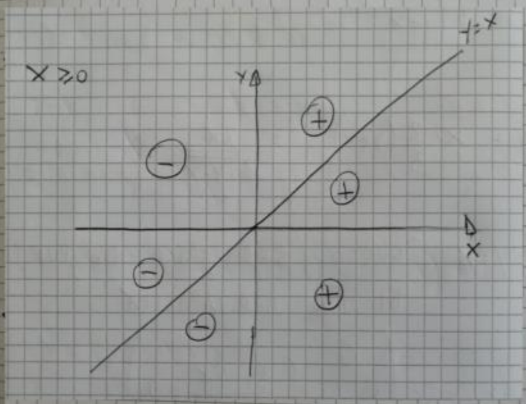
ANALISI DEI PUNTI DI NON DERIVABILITÀ

$$f(x,x) = 0$$

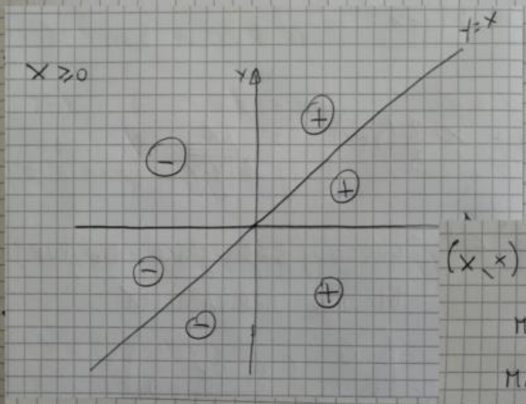
$$f(x,y) - f(x,x) \geq 0$$

$$x \cdot \sqrt[3]{(y-x)^2} \geq 0$$

$$f(x,y) = x \cdot \sqrt[3]{(y-x)^2} = x(y-x)^{2/3}$$



$$f(x,y) = x \cdot \sqrt[3]{(y-x)^2} = x(y-x)^{2/3}$$



(x,x) SONO PUNTI DI

MINIMO LOCALE PER $x > 0$

MASSIMO LOCALE PER $x < 0$

SELLA PER $x = 0$

ESEMPIO 2

$$f(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^2 - xy - xz$$

POLINOMIALE $\to C^\infty$

In base al teorema del differenziale totale allora è sicuramente differenziabile

In base al teorema di Schwarz le derivate seconde miste sono uguali

RICERCA DEI PUNTI CRITICI

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3y^2 - x = 0 \\ 2z - x = 0 \end{cases}$$

Non vi sono punti critici che non siano stazionari poiché non vi sono punti di non derivabilità

$$f(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^2 - xy - xz$$

$$\begin{cases} z = x/2 \\ 2x - y - \frac{x}{2} = 0 \\ 3y^2 - x = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} z = x/2 \\ y = \frac{3}{2}x \\ 3 \cdot \frac{9}{4}x^2 - x = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{3}{2}x \\ z = \frac{x}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} \frac{27}{4}x - 1 = 0 \\ y = \frac{3}{2}x \\ z = \frac{x}{2} \end{cases}$$

$(0,0,0)$ E $\left(\frac{4}{27}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}\right)$ SONO PUNTI CRITICI

$$f(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^2 - xy - xz$$

DERIVATE SECONDE PURE

" MISTE

$$H(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 6y & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

MATRICE HESSIANA

PUNTI CRITICI

$$f(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^2 - xy - xz$$

$$\underline{\underline{H}}(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

JACOBI!

MINIMO → tutti i minori devono essere positivi

MASSIMO → i minori pari devono essere positivi mentre gli altri negativi

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 6y & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$|h_1| = 2 \qquad |h_2| = -1$

$(0,0,0)$ PUNTO DI SELLA

$$\underline{\underline{H}}\left(\frac{4}{27}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & \frac{4}{3} & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 6y & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$|h_1| = 2 \qquad |h_2| = \frac{5}{3} \qquad |h_3| = |H| =$

$$= 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot 2 + 1 \cdot (-2) - 1 \cdot \left(\frac{4}{3}\right) =$$

$$= \frac{16}{3} - 2 - \frac{4}{3} = \frac{16 - 6 - 4}{3} = 2$$

$$\underline{\underline{H}}\left(\frac{4}{27}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & \frac{4}{3} & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$|h_1| > 0 \;,\; |h_2| > 0 \;,\; |h_3| > 0$

$\left(\frac{4}{27}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}\right)$ È PUNTO DI MINIMO LOCALE

ESEMPIO

$$f(x,y,z) = x + \alpha x^2 + \cos y + z^2 e^x$$

$\boxed{\alpha \in \mathbb{R}}$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 1 + 2\alpha x + z^2 e^x$$ DERIVATA PARZIALE RISPETTO A x

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = -\operatorname{sen} y$$ DERIVATA PARZIALE RISPETTO A y

DERIVATA PARZIALE

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = -\operatorname{sen} y$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = 2z\,e^{x}$$

DERIVATA PARZIALE RISPETTO A z

$$f(x,y,z) = x + \alpha x^2 + \cos y + z^2 e^x$$

Con le funzioni goniometriche, l'unica discriminante è per k pari e/o k dispari

$\alpha \in \mathbb{R}$

$$\nabla f(x,y,z) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2\alpha x + z^2 e^x = 0 \\ -\operatorname{sen} y = 0 \\ 2z e^x = 0 \end{cases}$$

La funzione è sempre continua

↓

I punti critici saranno tutti stazionari

$$\begin{cases} z = 0 \\ y = k\pi \\ 1 + 2\alpha x = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{2\alpha} \\ y = k\pi \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\underline{A} = \left(-\frac{1}{2\alpha}, k\pi, 0\right)$$

↓ dunque $\alpha \neq 0$ sicuramente

$$f(x,y,z) = x + \alpha x^2 + \cos y + z^2 e^x$$

$\alpha \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 1 + 2\alpha x + z^2 e^x$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = -\operatorname{sen} y$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = 2z\,e^x$$

$$\underline{A} = \left(-\frac{1}{2\alpha}, k\pi, 0\right)$$

$$f_{xx} = 2\alpha + z^2 e^x \qquad f_{xy} = 0 \qquad f_{xz} = 2z e^x$$

$$f_{yy} = -\cos y \qquad f_{yz} = 0 \qquad f_{zz} = 2e^x$$

---

con $\alpha = 0$ l'Hessiano non si raggiunge (oltre che non esiste il valore)

AUTOVALORI

$$\underline{\underline{H}}\left(-\frac{1}{2\alpha}, k\pi, 0\right) = \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\cos k\pi & 0 \\ 0 & 0 & 2e^{-1/2\alpha} \end{pmatrix}$$

Se una matrice è diagonalizzata, gli autovalori sono sulla diagonale principale

$$\lambda_1 = 2\alpha \qquad \lambda_2 = -\cos(k\pi) = (-1)^{k+1}$$

$$\lambda_3 = 2 \cdot e^{-1/2\alpha}$$

$\alpha < 0$ $\qquad \lambda_1 < 0 \qquad \forall k \in \mathbb{Z} \ \lambda_2 \neq 0$

$\lambda_3 > 0$

$\underline{A}$ È UN PUNTO DI SELLA

$$\lambda_1 = 2\alpha \qquad \lambda_2 = -\cos(k\pi) = (-1)^{k+1}$$

$$\lambda_3 = 2 \cdot e^{-1/2\alpha}$$

$$\underline{\underline{H}}\left(-\frac{1}{2\alpha}, k\pi, 0\right) = \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\cos k\pi & 0 \end{pmatrix}$$

$\alpha = 0$ HESSIANO NULLO ???

NO! COORDINATA x DI A NON ESISTE

$$\lambda_1 = 2\alpha \qquad \lambda_2 = -\cos(k\pi) = (-1)^{k+1}$$

$$\lambda_3 = 2 \cdot e^{-1/2\alpha}$$

$\underline{\underline{H}}$

$\alpha > 0 \qquad \lambda_1 > 0 \qquad \lambda_2 > 0$ CON k DISPARI

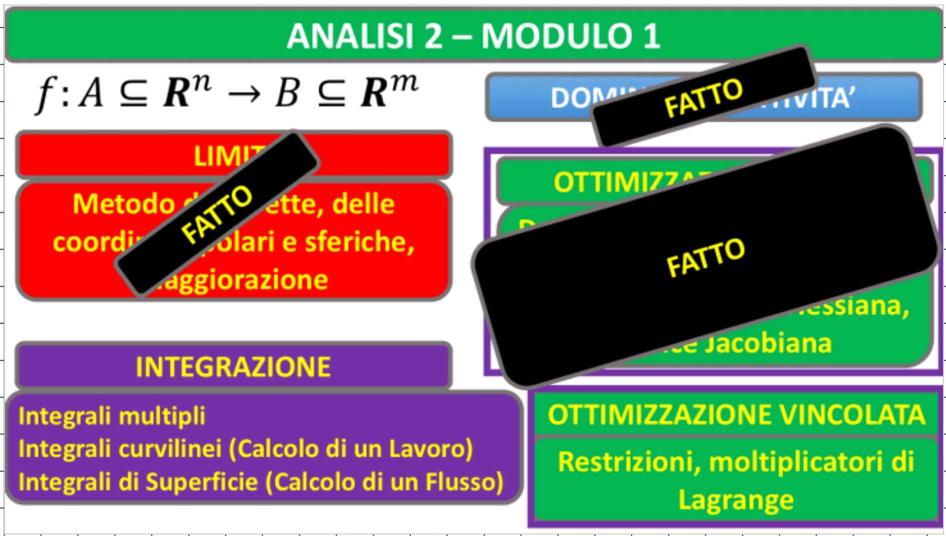
$\lambda_3 > 0 \qquad \lambda_2 < 0$ CON k PARI

$\underline{A}$ È PUNTO DI MINIMO LOCALE SE $\alpha > 0 \wedge k$ DISPARI

$\underline{A}$ È PUNTO DI SELLA SE $\alpha > 0 \wedge k$ PARI OPPURE SE $\alpha < 0, \forall k \in \mathbb{Z}$

$$\lambda_1 = 2\alpha \qquad \lambda_2 = -\cos(k\pi) = (-1)^{k+1}$$

$$\lambda_3 = 2 \cdot e^{-1/2\alpha}$$


ANALISI 2 – MODULO 1
$f: A \subseteq \boldsymbol{R}^n \to B \subseteq \boldsymbol{R}^m$
DOM [redacted] FATTO [redacted] IVITA'
LIMIT [redacted]
Metodo [redacted] FATTO [redacted] ette, delle
coordi [redacted] olari e sferiche,
[redacted] aggiorazione
OTTIMIZZA [redacted]
[redacted] FATTO [redacted] essiana,
[redacted] e Jacobiana
INTEGRAZIONE
Integrali multipli
Integrali curvilinei (Calcolo di un Lavoro)
Integrali di Superficie (Calcolo di un Flusso)
OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA
Restrizioni, moltiplicatori di Lagrange

Ottimizzazione vincolata

giovedì 22 ottobre 2020 16:05

OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA

Studiare massimi e minimi in una funzione chiusa

MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}$

A CHIUSO E LIMITATO (COMPATTO)

TEOREMA DI WEIERSTRASS

ESISTE ALMENO UN PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO

ESISTE ALMENO UN PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO

MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}$

OSSERVAZIONE: SICCOME INTERESSANO SOLO GLI ESTREMI ASSOLUTI, SI PUÓ EVITARE DI ANALIZZARE IL COMPORTAMENTO LOCALE.

DUNQUE SI PUÓ EVITARE LO STUDIO DELLA MATRICE HESSIANA NELL'INTERNO DEL DOMINIO COMPATTO A

SI ANALIZZANO:

1) NELL'INTERNO DI A:

- $\underline{P} \in A : \nabla f(\underline{P}) = \underline{0}$
- $\underline{P} \in A : \nexists \nabla f(\underline{P})$

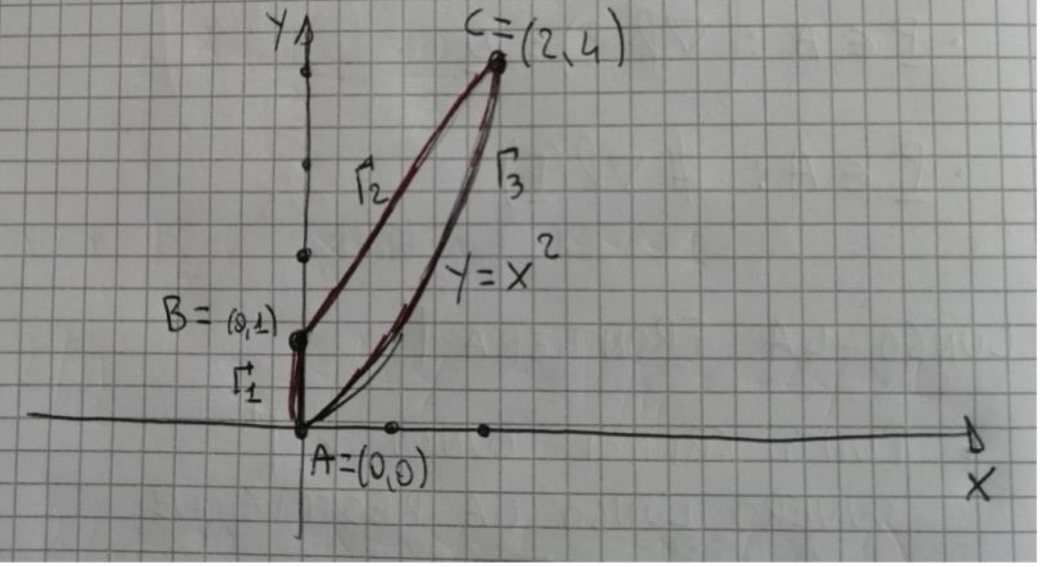
2) LUNGO LA FRONTIERA Γ

- PUNTI CRITICI LUNGO $f|_\Gamma$ OVVERO LUNGO LA RESTRIZIONE DI f LUNGO Γ (TECNICA DELLA PARAMETRIZZAZIONE, TECNICA DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE)
- PUNTI "SPIGOLO" LUNGO Γ, CHE SONO PUNTI DI NON DERIVABILITÁ (SI PENSI AI PUNTI ANGOLOSI IN ANALISI 1)

ESEMPIO

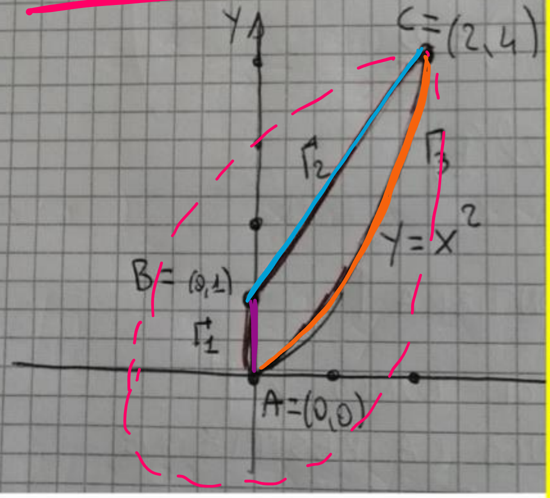
Per Weierstrass, poiché continua, esiste almeno un massimo e un minimo

$$f(x,y) = 3 - x^2 - y^2 + xy + y$$



ESEMPIO

$$f(x,y) = 3 - x^2 - y^2 + xy + y$$



$\Gamma_1 : x = 0 \wedge 0 \leq y \leq 1$

$\Gamma_2 : 0 \leq x \leq 2 \wedge y = \frac{3}{2}x + 1$

$\Gamma_3 : 0 \leq x \leq 2 \wedge y = x^2$

Analizzo prima i vertici e poi la frontiera

SPIGOLI LUNGO LA FRONTIERA $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$

Per ora sono massimi assoluti

$A = (0,0)$ $\quad B = (0,1)$ $\quad C = (2,4)$

$f(A) = 3 \qquad f(B) = 3 - 1 + 1 = 3$

$f(C) = 3 - 4 - 16 + 8 + 4 = -5$

ANALISI DELL' INTERNO DI A

derivata parziale rispetto a x

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -2x + y$$

derivata parziale rispetto a y

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -2y + x + 1$$

Le pongo = 0 e poi a sistema

$$\begin{cases} -2x + y = 0 \\ -2y + x + 1 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} y = 2x \\ -4x + x + 1 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = 1/3 \\ y = 2/3 \end{cases}$$

$\Gamma_1 : x = 0 \wedge 0 \leq y \leq 1$

$\Gamma_2 : 0 \leq x \leq 2 \wedge y = \frac{3}{2}x + 1$

$\Gamma_3 : 0 \leq x \leq 2 \wedge y = x^2$

IL PUNTO $P = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ APPARTIENE ALL' INTERNO DI A ???

L'ORDINATA $\frac{2}{3}$ DEVE ESSERE COMPRESA TRA $y = x^2$ PER $x = \frac{1}{3}$ E $y = \frac{3}{2}x + 1$ PER $x = \frac{1}{3}$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 < \frac{2}{3} < \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} + 1$$

$$\frac{1}{9} < \frac{2}{3} < \frac{3}{2} \quad \text{OK}$$

$$f\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = 3 - \frac{1}{9} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{3} = 3 - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} =$$

$$= 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

$\Gamma_1 : x = 0 \wedge 0 \leq y \leq 1$

$\Gamma_2 : 0 \leq x \leq 2 \wedge y = \frac{3}{2}x + 1$

$\Gamma_3 : 0 \leq x \leq 2 \wedge y = x^2$

LUNGO Γ_1 : $x = 0 \wedge 0 \leq y \leq 1$

$$f/\Gamma_1 : 3 - y^2 + y \Rightarrow f'/\Gamma_1 = -2y + 1$$

$$f'/\Gamma_1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(0, \frac{1}{2}\right) = 3 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$$

LUNGO Γ_2: $0 \leq x \leq 2 \ \wedge \ y = \frac{3}{2}x + 1$

$$f/\Gamma_2 = 3 - x^2 - \left(\frac{3}{2}x+1\right)^2 + x\left(\frac{3}{2}x+1\right) + \left(\frac{3}{2}x+1\right) =$$

$$\overset{\shortparallel}{f\left(x, \frac{3}{2}x+1\right)}$$

$$= 3 - x^2 - \frac{9}{4}x^2 - 3x - 1 + \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}x + 1 =$$

$$= 3 - \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}x^2 \qquad f'/\Gamma_2 = -\frac{1}{2} - \frac{7}{2}x$$

$$f'/\Gamma_2 = 0 \implies x = -1/7 \notin A$$

Γ_1: $x = 0 \ \wedge \ 0 \leq y \leq 1$

Γ_2: $0 \leq x \leq 2 \ \wedge \ y = \frac{3}{2}x + 1$

Γ_3: $0 \leq x \leq 2 \ \wedge \ y = x^2$

LUNGO Γ_3: $0 \leq x \leq 2 \ \wedge \ y = x^2$

$$f/\Gamma_3 = 3 - x^2 - x^4 + x^3 + x^2 = -x^4 + x^3 + 3$$

$$f'/\Gamma_3 = -4x^3 + 3x^2 = x^2(-4x+3)$$

$$f'/\Gamma_3 = 0 \implies x = 0 \ \vee \ x = \frac{3}{4}$$

Γ_1: $x = 0 \ \wedge \ 0 \leq y \leq 1$

Γ_2: $0 \leq x \leq 2 \ \wedge \ y = \frac{3}{2}x + 1$

Γ_3: $0 \leq x \leq 2 \ \wedge \ y = x^2$

X=0 GIA ANALIZZATO

$$X = \frac{3}{4} \wedge Y = \frac{9}{16}$$

$$f\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{16}\right) = 3 - \frac{9}{16} - \frac{81}{256} + \frac{27}{64} + \frac{9}{16} =$$

$$= \cancel{f_{/\Gamma_3}}\ f_{/\Gamma_3}\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{81}{256} + \frac{27}{64} + 3 =$$

$$= -\frac{81}{256} + \frac{108}{256} + 3 = \frac{27}{256} + 3$$

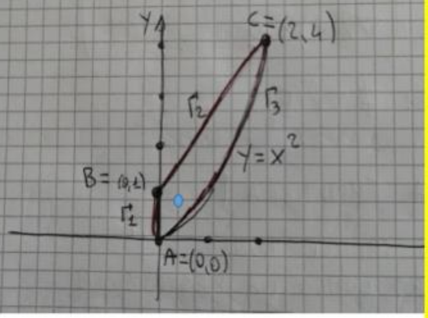
$\Gamma_1 : x = 0 \wedge 0 \leq Y \leq 1$

$\Gamma_2 : 0 \leq X \leq 2 \wedge Y = \frac{3}{2}x + 1$

$\Gamma_3 : 0 \leq X \leq 2 \wedge Y = x^2$

ESEMPIO

$f(x,y) = 3 - x^2 - y^2 + xy + y$



CLASSIFICA FINALE

$f\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = 3 + \frac{1}{3}$ MAX ASSOLUTO

$f\left(0, \frac{1}{2}\right) = 3 + \frac{1}{4}$

$f\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{16}\right) = 3 + \frac{27}{256}$

$f(0,0) = f(0,1) = 3$

$f(2,4) = -5$ MIN ASSOLUTO

$$f(x,y) = 3 - x^2 - y^2 + x$$

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \right\}$$

$$\Gamma(A) : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \implies y^2 = 1 - \frac{x^2}{4}$$

$$f/\Gamma = 3 - x^2 - 1 + \frac{x^2}{4} + x = -\frac{3}{4}x^2 + x + 2$$

CON $-2 \leq x \leq 2$

si annulla se

$$f'/\Gamma = -\frac{3}{2}x + 1 \qquad f'/\Gamma = 0 \implies x = \frac{2}{3}$$

$$y^2 = 1 - \frac{x^2}{4} = 1 - \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{4} = \frac{8}{9}$$

$$y = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \implies A = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$B = \left(\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$f(A) = f(B) = 3 - \frac{4}{9} - \frac{8}{9} + \frac{2}{3} = \frac{27 - 12 + 6}{9} =$$

$$= \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$$

ANALISI DELL' INTERNO DI A

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x+1=0 \\ -2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

$$f\left(\frac{1}{2},0\right) = 3 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$$

$f\left(\frac{1}{2},0\right)$ MAX ASSOLUTO

$f(A) = f(B)$ MIN ASSOLUTI

1.47 Determinare il massimo ed il minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = x^2y + xy^2 - xy$$

nel triangolo T in figura 1.38, definito da:

$$T=\{(x,y)\in R^2 : x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 1\}.$$

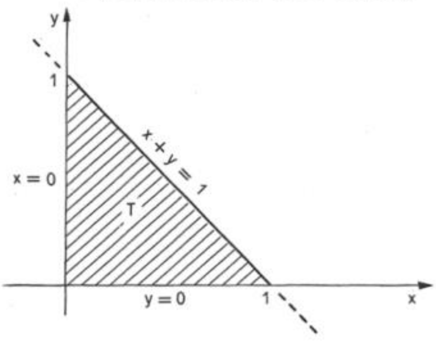


figura 1.38

derivata parziale rispetto a x

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy + y^2 - y$$

derivata parziale rispetto a y

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 + 2xy - x$$

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} 2xy + y^2 - y = 0 \\ x^2 + 2xy - x = 0 \end{cases}$$

1.47 Determinare il massimo ed il minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = x^2y + xy^2 - xy$$

nel triangolo T in figura 1.38, definito da:

$$T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0,\ \ y\geq 0,\ \ x+y\leq 1\}.$$

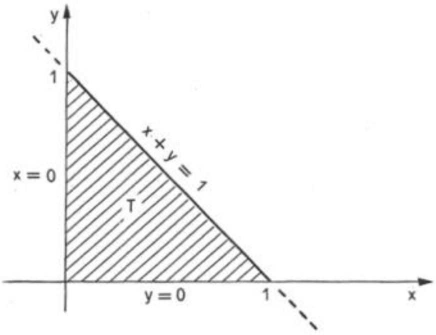


figura 1.38

ANNULLO LE DERIVATE

$$\begin{cases} y(2x+y-1)=0 \\ x(x+2y-1)=0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} y=0 \ \cup \ 2x+y-1=0 \\ x=0 \ \cup \ x+2y-1=0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}} \cup \underbrace{\begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases}} \cup \underbrace{\begin{cases} y=1 \\ x=0 \end{cases}} \cup \begin{cases} 2x+y-1=0 \\ x+2y-1=0 \end{cases}$$

Punti stazionari ↑ = spigoli

$$\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \cup \begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases} \cup \begin{cases} y=1 \\ x=0 \end{cases} \cup \begin{cases} y=1-2x \\ x+2-4x-1=0 \end{cases}$$

IMMAGINE = 0 IMMAGINE = 0 IMMAGINE = 0

Ex equo di immagine = 0

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} y=1-2x \\ 1=3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases}$$

IMMAGINE $= -\frac{1}{27}$

1.47 Determinare il massimo ed il minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = x^2y + xy^2 - xy$$

nel triangolo T in figura 1.38, definito da:

$$T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0,\ \ y\geq 0,\ \ x+y\leq 1\}.$$

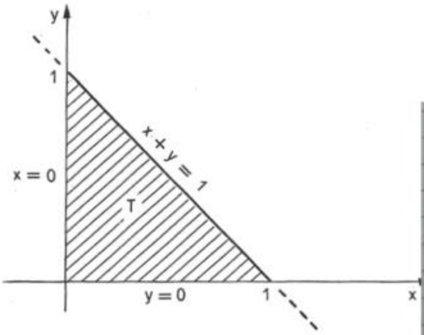


figura 1.38

$$(0,0) \qquad (1,0) \qquad (0,1) \qquad \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

$$f(0,0) = f(1,0) = f(0,1) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} + \frac{1}{27} - \frac{1}{9} = -\frac{1}{27}$$

1.97 Determinare il massimo ed il minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = x^2y + xy^2 - xy$$

nel triangolo T in figura 1.38, definito da:

$$T=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : x\geq 0,\ y\geq 0,\ x+y\leq 1\}.$$

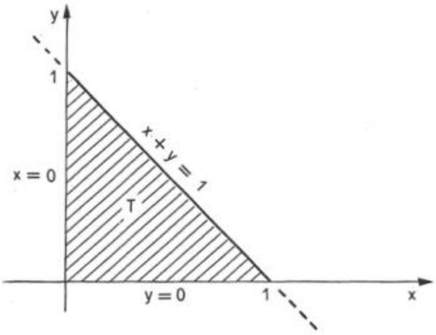


figura 1.38

$\Gamma_1 : \; x=0 \;\wedge\; 0\leq y\leq 1$

$\Gamma_2 : \; 0\leq x\leq 1 \;\wedge\; x+y=1$

$\Gamma_3 : \; 0\leq x\leq 1 \;\wedge\; y=0$

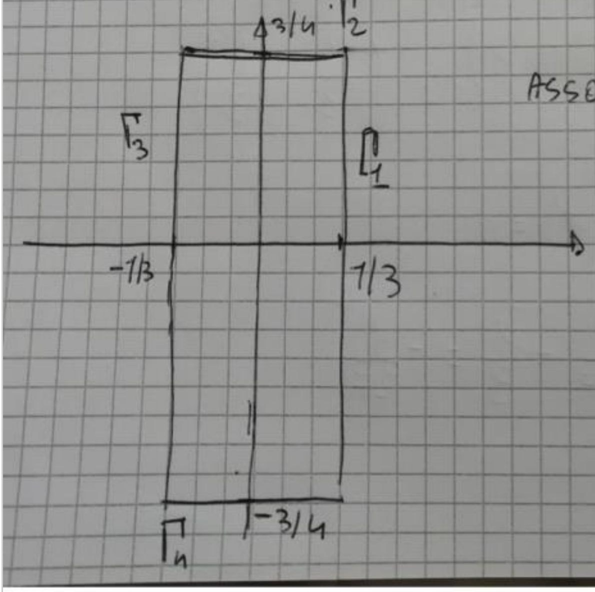
INTERSEZIONE spigoli - dominio

$f/\Gamma_1 = 0$

$$f/\Gamma_2 = x^2\cdot(1-x) + x(1-x)^2 - x(1-x)$$
$$= x(1-x)(x+1-x-1) = 0$$

$f/\Gamma_3 = 0$

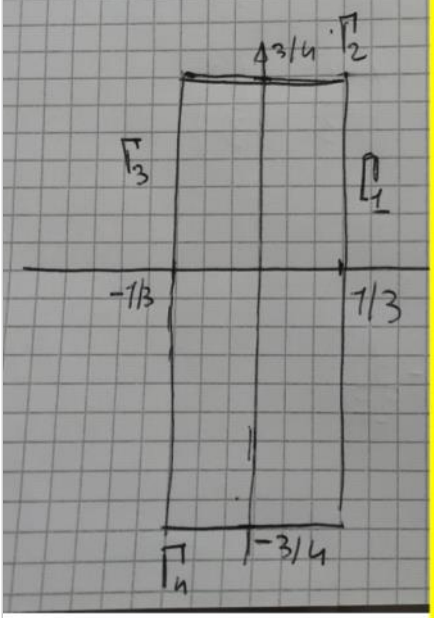
$$f(x,y) = -12xy - \sqrt{(1-9x^2)(9-16y^2)}$$



MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI SU

$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$

$f(x,y) = -12xy - \sqrt{(1-9x^2)(9-16y^2)}$



$\Gamma_1: \quad x = \frac{1}{3} \quad \wedge \quad -\frac{3}{4} \le y \le \frac{3}{4}$

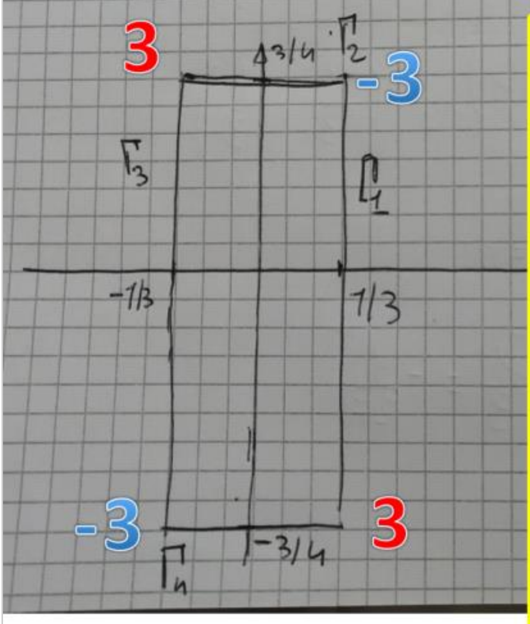
$\Gamma_2: \quad -\frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{3} \quad \wedge \quad y = \frac{3}{4}$

$\Gamma_3: \quad x = -\frac{1}{3} \quad \wedge \quad -\frac{3}{4} \le y \le \frac{3}{4}$

$\Gamma_4: \quad -\frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{3} \quad \wedge \quad y = -\frac{3}{4}$

SPIGOLI : $\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right) \quad \left(-\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right) \quad \left(-\frac{1}{3}, -\frac{3}{4}\right) \quad \left(\frac{1}{3}, -\frac{3}{4}\right)$

$f(x,y) = -12xy - \sqrt{(1-9x^2)(9-16y^2)}$



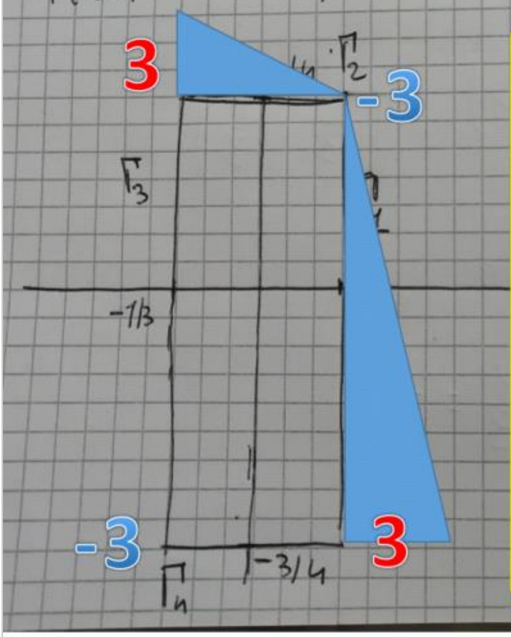
$f\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right) = -12 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = -3$

$f\left(-\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right) = -12 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right) = 3$

$f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{3}{4}\right) = -12 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -3$

$f\left(\frac{1}{3}, -\frac{3}{4}\right) = -12 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = 3$

$$f(x,y) = -12xy - \sqrt{(1-9x^2)(9-16y^2)}$$



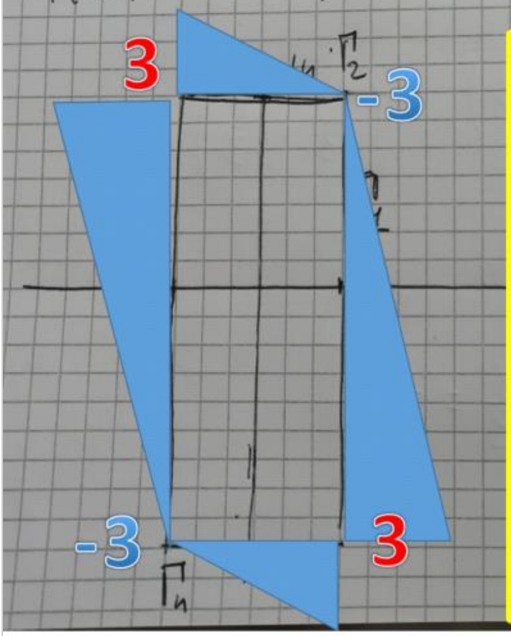
$f/\Gamma_1 = -4y \qquad f'/\Gamma_1 = -4$

f/Γ_1 MONOTONA DECRESCENTE

$f/\Gamma_2 = -12x \cdot \frac{3}{4} = -9x \qquad f'/\Gamma_2 = -9$

f/Γ_2 MONOTONA DECRESCENTE

$$f(x,y) = -12xy - \sqrt{(1-9x^2)(9-16y^2)}$$



$f/\Gamma_3 = -12 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot y = 4y \qquad f'/\Gamma_3 = 4$

f/Γ_3 MONOTONA CRESCENTE

$f/\Gamma_4 = -12x \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = 9x \qquad f'/\Gamma_4 = 9$

f/Γ_4 MONOTONA CRESCENTE

OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA

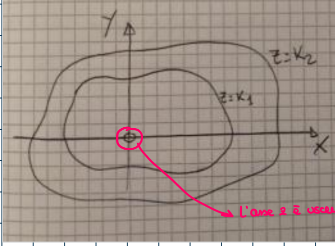
I MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

UTILIZZO NEI CASI IN CUI

- LA FRONTIERA È "MONOFORMULA" ~~(SENZA S~~ (SENZA SPIGOLI) E INOLTRE

POTREBBE RISULTARE DIFFICILE LA METODOLOGIA DELLE RESTRIZIONI



OBIETTIVO

ricerca vincolata a dei compatti (= insiemi chiusi e limitati che, per Weierstrass, hanno almeno un punto di massimo e uno di minimo assoluti) di massimi e minimi

CURVE DI LIVELLO

Luoghi geometrici che sono insiemi di punti caratterizzati dalla stessa z

sono dei compatti e tutti i punti di una curva sono minimi e massimi assoluti

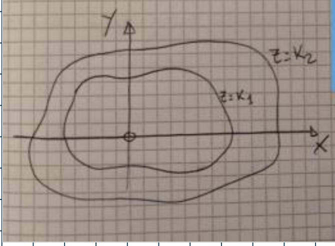
è come se fosse una curva costante in Analisi 1

MOLTIPLICATORI DI LAGRAN

UTILIZZO NEI CASI IN CUI

- LA FRONTIERA È "MONO ~~(SENZA S~~ (SENZA SPIGOLI)

POTREBBE RISULTARE DIF METODOLOGIA DELLE RES



$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to B \subseteq \mathbb{R}$

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}$

CASO DI FRONTIERA COINCIDENTE CON UNA CURVA DI LIVELLO $f(x,y)=k$

$\Rightarrow g(x,y) = f(x,y) - k = 0$

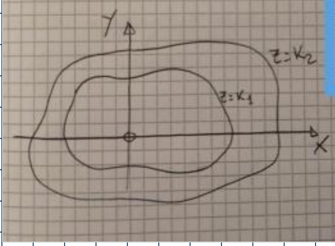
SE $g(x,y)=0$ È UN VINCOLO

MOLTIPLICATORI DI LAGRAN

UTILIZZO NEI CASI IN CUI

- LA FRONTIERA È "MONO ~~(SENZA S~~ (SENZA SPIGOLI

POTREBBE RISULTARE DI METODOLOGIA DELLE RES



IL VINCOLO $g(x,y)=0$ È UN COMPATTO (VINCOLO CHIUSO E LIMITATO)

E DUNQUE VALE PER ESSO IL TEOREMA DI WEIERSTRASS

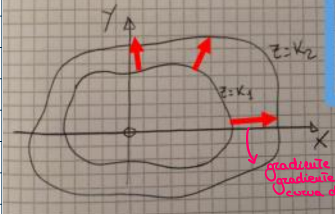
INOLTRE, ESSENDO $g(x,y)=0$ UNA CURVA DI LIVELLO, TUTTI I PUNTI SU DI ESSA SARANNO CONTEMPORANEAMENTE DI MASSIMO E DI MINIMO ASSOLUTI

MOLTIPLICATORI DI LAGRAN

UTILIZZO NEI CASI IN CUI

- LA FRONTIERA É "MONO
~~(SENZA~~ (SENZA SPIGOLI

POTREBBE RISULTARE DI
METODOLOGIA DELLE RES



gradiente del vincolo e gradiente sul punto della curva di livello

punta alla curva di livello di k maggiore che è quello che ha il massimo

IN TUTTI QUESTI PUNTI DI MASSIMO E MINIMO ASSOLUTI, $\nabla f(x,y)$ É PERPENDICOLARE AL VINCOLO $g(x,y)=0$ IN QUANTO $g(x,y)=0$ É UNA CURVA DI LIVELLO PER $z=f(x,y)$

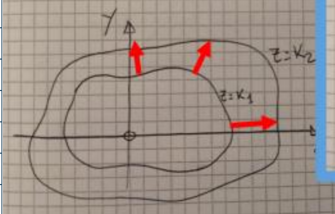
E SE $g(x,y)=0$ É UN COMPATTO QUALSIASI, NON NECESSARIAMENTE CURVA DI LIVELLO PER $z=f(x,y)$?

MOLTIPLICATORI DI LAGRA

UTILIZZO NEI CASI IN CUI

- LA FRONTIERA É "MON
~~(SENZA~~ (SENZA SPIGOL

POTREBBE RISULTARE D
METODOLOGIA DELLE RE



MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI ANDRANNO SEMPRE RICERCATI SOLO NEI PUNTI IN CUI:

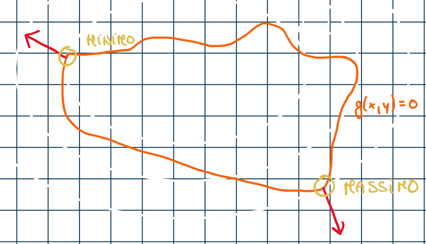
$$\nabla f(x,y) \,//\, \nabla g(x,y)$$

OVVERO

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$$

DA CUI // e con versi concordi

$$\nabla f(x,y) - \lambda \nabla g(x,y) = \underline{0}$$



I gradienti del punto di intersezione di curva e di curva di livello sono equipollenti e cioè paralleli (sono sulla stessa direzione)

Quali sono la curva di livello più piccola e quale più grande che intersecano la curva individuano massimo e minimo ASSOLUTI

IN MOLTI LIBRI, LA CONDIZIONE DI PARALLELISMO VIENE SCRITTA COME

$$\nabla f(x,y) = -\lambda \nabla g(x,y)$$

DA CUI // ma con versi discordi

$$\nabla f(x,y) + \lambda \nabla g(x,y) = \underline{0}$$

ESSENDO ∇ UN OPERATORE LINEARE SI HA CHE IL GRADIENTE DI UNA FUNZIONE SCALARE SOMMA É PARI ALLA SOMMA DEI GRADIENTI DELLE SINGOLE FUNZIONI ADDENDO

$$\nabla f(x,y) + \lambda \nabla g(x,y) = \nabla f(x,y) + \nabla(\lambda g(x,y)) =$$

$$= \nabla\big(f(x,y) + \lambda g(x,y)\big) = \underline{0}$$

$L := f(x,y) + \lambda g(x,y) =$ FUNZIONE LAGRANGIANA

$L(x,y,\lambda)$

$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to B \subseteq \mathbb{R}$

$L : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to E \subseteq \mathbb{R}$

GENERALIZZAZIONE CON PIÚ VINCOLI E CON $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

CON m VINCOLI

$$L(x_1, \dots x_n, \lambda_1, \dots \lambda_m) = f(x_1, \dots x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, g_i(x_1, \dots x_n)$$

$$L: D \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \to E \subseteq \mathbb{R}$$

LA RICERCA DEI MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI PASSERÁ PER

GENERALIZZAZIONE CON PIÚ V
CON $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

CON m VINCOLI

$L(x_1, \dots x_n, \lambda_1, \dots \lambda_m) = f(x_1, \dots x_n)$

$L: D \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \to E \subseteq \mathbb{R}$

LA RICERCA DEI MASSIMI E M

ASSOLUTI PASSERÁ PER

$$\nabla L = \underline{0} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_m} = 0 \end{cases}$$

NEL CASO $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \Rightarrow L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

$$\nabla L(x, y, \lambda) = \underline{0} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

ESEMPIO

$f(x, y) = x \cdot y \qquad g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

$$L(x, y, \lambda) = x \cdot y + \lambda (x^2 + y^2 - 1)$$

$$\nabla L(x, y, \lambda) = \underline{0} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = y + 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = x + 2\lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2\lambda x \\ x + 2\lambda(-2\lambda x) = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} y = -2\lambda x \\ x - 4\lambda^2 x = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} y = -2\lambda x \\ x(1 - 4\lambda^2) = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \ \cup \ \lambda = \pm 1/2 \\ y = -2\lambda x \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 0 + 0 = 1 \ ? \end{cases} \cup \begin{cases} \lambda = 1/2 \\ y = -x \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \cup$$

$$\cup \begin{cases} \lambda = -1/2 \\ y = x \\ 2x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2}/2 \\ y = \mp\sqrt{2}/2 \\ \lambda = 1/2 \end{cases} \cup \begin{cases} x = \pm\sqrt{2}/2 \\ y = \pm\sqrt{2}/2 \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

PUNTI CRITICI

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$$ MASSIMO ASSOLUTO

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$ MINIMO ASSOLUTO

ESEMPIO

$$f(x,y) = (x-2y)^2 \qquad g(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} - 1 = 0$$

$$L(x,y,\lambda) = (x-2y)^2 + \lambda\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} - 1\right)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2(x-2y) + \frac{\lambda x}{2} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = -4(x-2y) + \frac{2}{3}\lambda y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} - 1 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2x - 4y + \frac{\lambda x}{2} = 0 \\ -4x + 8y + \frac{2}{3}\lambda y = 0 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 8y + \lambda x = 0 \\ -4x + 8y + \frac{2}{3}\lambda y = 0 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} - 1 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 4x - 8y = -\lambda x \\ 4x - 8y = \frac{2}{3}\lambda y \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} - 1 = 0 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} -\lambda x = \frac{2}{3}\lambda y \\ 4x - 8y = -\lambda x \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} - 1 = 0 \end{cases}$$ Qui non si semplifica

$$; \quad \begin{cases} \lambda\left(\frac{2}{3}y + x\right) = 0 \\ 4x - 8y = -\lambda x \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} - 1 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ 4x - 8y = 0 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} - 1 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = -\frac{3}{2}x \\ 4x + 12x = -\lambda x \\ \frac{x^2}{4} + \frac{9}{4}x^2 \cdot \frac{1}{3} - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ x = 2y \\ y^2 + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} y = -\frac{3}{2}x \\ \lambda = -16 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ x = 2y \\ y^2 = \frac{3}{4} \end{cases} \cup \begin{cases} y = -\frac{3}{2}x \\ \lambda = -16 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases} \cup \begin{cases} \lambda = -16 \\ x = \pm 1 \\ y = \mp \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(1, -\frac{3}{2}\right), \left(-1, \frac{3}{2}\right)$$

$f\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = f\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$ MINIMO ASSOLUTO

$f\left(1, -\frac{3}{2}\right) = f\left(-1, \frac{3}{2}\right) = 16$ MASSIMO ASSOLUTO

ESEMPIO

FUNZIONE: $f(x,y) = (3x+2y)^2$

VINCOLO → garanzia che sia chiuso e limitato: $g(x,y) = 4x^2 + y^2 - 4 = 0$

LAGRANGE: $f(x) + \lambda \cdot g(x,y)$

$$L(x,y,\lambda) = (3x+2y)^2 + \lambda(4x^2+y^2-4)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 6(3x+2y) + 8\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 4(3x+2y) + 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 4x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 3x+2y = -\frac{4}{3}\lambda x \\ 3x+2y = -\frac{1}{2}\lambda y \\ 4x^2+y^2-4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda\left(\frac{4}{3}x - \frac{1}{2}y\right) = 0 \\ 3x+2y = -\frac{1}{2}\lambda y \\ 4x^2+y^2-4=0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ 3x = -2y \\ 4 \cdot \frac{4}{9}y^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = \frac{8}{3}x \\ 3x + \frac{16}{3}x = -\frac{4}{3}\lambda x \\ 4x^2 + \frac{64}{9}x^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ x = -\frac{2}{3}y \\ \frac{25}{9}y^2 = 4 \end{cases} \cup \begin{cases} y = \frac{8}{3}x \\ \frac{25}{3}x = -\frac{4}{3}\lambda x \\ \frac{100}{9}x^2 = 4 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ y = \pm\frac{6}{5} \\ x = \mp\frac{4}{5} \end{cases} \cup \begin{cases} \lambda = -25/4 \\ x = \pm\frac{3}{5} \\ y = \pm\frac{8}{5} \end{cases}$$

$$\left(\frac{4}{5}, -\frac{6}{5}\right), \left(-\frac{4}{5}, \frac{6}{5}\right), \left(\frac{3}{5}, \frac{8}{5}\right), \left(-\frac{3}{5}, -\frac{8}{5}\right)$$

Calcolo l'immagine. Se fa 0 è minimo mentre >0 massimo

$f\left(\frac{4}{5}, -\frac{6}{5}\right) = f\left(-\frac{4}{5}, \frac{6}{5}\right) = 0$ MINIMO ASSOLUTO

z minore → curva di livello più piccola che interseca il vincolo

$f\left(\frac{3}{5}, \frac{8}{5}\right) = f\left(-\frac{3}{5}, -\frac{8}{5}\right) = 25$ MASSIMO ASSOLUTO

z maggiore → curva di livello più piccola che interseca il vincolo

GENERALIZZAZIONE DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

USO DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE ANCHE QUANDO IL VINCOLO NON È UN COMPATTO

IN TUTTI QUEI CASI IN CUI A PRIORI SAPPIAMO CHE IL PROBLEMA AMMETTE SICURAMENTE UN MINIMO E/O UN MASSIMO ASSOLUTO

ESEMPIO

DATA UNA FUNZIONE $y = f(x)$ DETERMINARE IL PUNTO $(x, f(x))$ CON DISTANZA MINIMA DALL'ORIGINE DEGLI ASSI

$$d = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \Rightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2$$

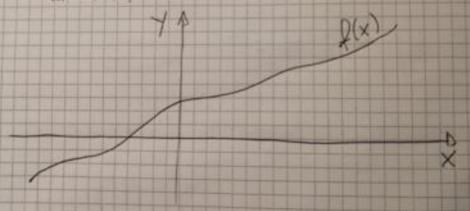
$$(x_0, y_0) = (0,0) \Rightarrow d^2 = x^2+y^2 = f(x,y)$$ distanza al quadrato di un punto generico dall'origine

TALE FUNZIONE DISTANZA $f(x,y)$ DEVE ESSERE VINCOLATA A CONSIDERARE SOLO PUNTI SU $y = f(x)$

$$y = f(x) \Rightarrow g(x,y) = y - f(x) = 0$$

$$L(x,y,\lambda) = (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+\lambda(y-f(x))$$

$$(x_0, y_0) = (0,0) \Rightarrow L(x,y,\lambda) = x^2+y^2+\lambda(y-f(x))$$



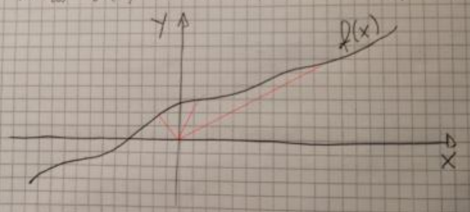
TALE PROBLEMA AMMETTE SICURAMENTE UN MINIMO ASSOLUTO

$$y = f(x) \Rightarrow g(x,y) = y - f(x) = 0$$

$$L(x,y,\lambda) = (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+\lambda(y-f(x))$$

$$(x_0, y_0) = (0,0) \Rightarrow L(x,y,\lambda) = x^2+y^2+\lambda(y-f(x))$$

I punti stazionari, in questo caso, che trovo tramite i moltiplicatori di Lagrange sono tutti minimi



TALE PROBLEMA AMMETTE SICURAMENTE UN MINIMO ASSOLUTO

ESEMPIO

Quali sono i punti / il punto $\in g(x,y)$ presentano una distanza minima da $(0,0)$

FUNZIONE $f(x,y) = x^2+y^2$ VINCOLO $g(x,y) = x+3y-1 = 0$

LAGRANGIANA

$$L(x,y,\lambda) = x^2+y^2+\lambda(x+3y-1)$$

Quali sono i punti / il punto $\in g(x,y)$ presentano una distanza minima da $(0,0)$

ESEMPIO

FUNZIONE: $f(x,y) = x^2 + y^2$ VINCOLO: $g(x,y) = x+3y-1 = 0$

LAGRANGIANA:

$$L(x,y,\lambda) = x^2+y^2+\lambda(x+3y-1)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x+\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y+3\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x+3y-1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\lambda/2 \\ y = -\dfrac{3}{2}\lambda \\ -\dfrac{\lambda}{2} - \dfrac{9}{2}\lambda - 1 = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \lambda = -1/5 \\ x = 1/10 \\ y = \dfrac{3}{10} \end{cases}$$

CON LE RESTRIZIONI

$x+3y-1=0$ $\quad \boxed{y = -\dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{3}} \Rightarrow \Gamma(x)$

$f(x,y) = x^2+y^2$

$$f(x,y)|_\Gamma = x^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{x}{3}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{9}(1-2x+x^2) =$$

$$= x^2 + \frac{x^2}{9} - \frac{2}{9}x + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{1}{9}$$

derivata

$$f'|_\Gamma = \frac{20}{9}x - \frac{2}{9}x \qquad f'|_\Gamma = 0 \Rightarrow x = 1/10$$

derivata

$$f''|_\Gamma = \frac{20}{9} \quad \forall x$$

CON LE RESTRIZIONI

$x+3y-1=0$ $\quad y = -\dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{3} \Rightarrow \Gamma(x)$

$f(x,y)|_\Gamma = x^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{x}{3}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{9}(1-2x+x^2) =$

$x = 1/10$ PUNTO DI MINIMO LUNGO LA RESTRIZIONE

$$y = -\frac{1}{30} + \frac{1}{3} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

$\left(\frac{1}{10}, \frac{3}{10}\right)$ PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO

$f\left(\frac{1}{10}, \frac{3}{10}\right) = \frac{1}{100} + \frac{9}{100} = \frac{1}{10}$ MINIMO ASSOLUTO

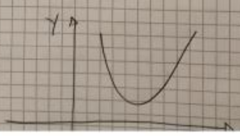
IN GENERALE, SE

$f(x,y) = (\quad)^m$ CON m PARI $\in \mathbb{N}$

$f(x_1 \dots x_n) = (\quad)^m$ CON m PARI $\in \mathbb{N}$

$f(x,y)$ O $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ AMMETTONO SICURAMENTE UN MINIMO ASSOLUTO IN TUTTO IL LORO DOMINIO, E DUNQUE AMMETTONO UN MINIMO ASSOLUTO IN OGNI LORO RESTRIZIONE

(A VOLTE ANCHE UN MASSIMO!)



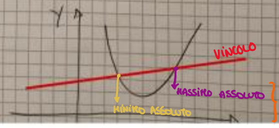
IN GENERALE, SE

$f(x,y) = (\quad)^m$ CON m PARI $\in \mathbb{N}$

$f(x_1, \dots, x_n) = (\quad)^n$ CON n PARI $\in \mathbb{N}$

$f(x,y)$ O $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ AMMETTONO SICURAMENTE UN MINIMO ASSOLUTO IN TUTTO IL LORO DOMINIO, E DUNQUE AMMETTONO UN MINIMO ASSOLUTO IN OGNI LORO RESTRIZIONE

(A VOLTE ANCHE UN MASSIMO!)



Vale questo risultato SOLO in questo caso poiché si tratta di una ottimizzazione vincolata alla retta

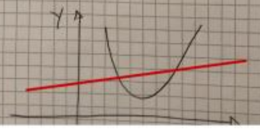
IN GENERALE, SE

$f(x,y) = (\quad)^m$ CON m PARI $\in \mathbb{N}$

$f(x_1, \dots, x_n) = (\quad)^n$ CON n PARI $\in \mathbb{N}$

$f(x,y)$ O $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ AMMETTONO SICURAMENTE UN MINIMO ASSOLUTO IN TUTTO IL LORO DOMINIO, E DUNQUE AMMETTONO UN MINIMO ASSOLUTO IN OGNI LORO RESTRIZIONE

(A VOLTE ANCHE UN MASSIMO!)



STESSO DISCORSO SE $f(x,y) \geq 0$ PIÙ IN GENERALE, O $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$

ESEMPIO

1) $f(x,y) = (x-y)^2$

2) $f(x,y) = e^{(x^2+y^2)}$

$g(x,y) = y - x^2 = 0$

1) $L(x,y,\lambda) = (x-y)^2 + \lambda(y - x^2)$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2(x-y) - 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = -2(x-y) + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = y - x^2 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} (x-y) = \lambda x \\ -2\lambda x + \lambda = 0 \\ y - x^2 = 0 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} (x-y) = \lambda x \\ \lambda(1-2x) = 0 \\ y - x^2 = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ x = y \\ x - x^2 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 1/2 \\ y = 1/4 \\ \lambda = 1/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ x = 0 \quad x = 1 \\ y = 0 \quad y = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} \lambda = 1/2 \\ x = 1/2 \\ y = 1/4 \end{cases}$$

$$(0,0) \quad (1,1) \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0,0) = 0 \\ f(1,1) = 0 \end{array}\right\} \text{MINIMO ASSOLUTO}$$

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \quad \text{MASSIMO ASSOLUTO}$$

2) $L(x,y,\lambda) = e^{(x^2+y^2)} + \lambda(y - x^2)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x e^{(x^2+y^2)} - 2x\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y e^{(x^2+y^2)} - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = y - x^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x\left(e^{(x^2+y^2)} - \lambda\right) = 0 \\ 2y e^{(x^2+y^2)} - \lambda = 0 \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = e^{(x^2+y^2)} \\ 2y e^{(x^2+y^2)} - e^{(x^2+y^2)} = 0 \\ y = x^2 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 0 \\ 2y e^{y^2} - \lambda = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = e^{(x^2+y^2)} \\ e^{(x^2+y^2)}(2y - 1) = 0 \\ y = x^2 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = e^{(x^2+y^2)} \\ y = 1/2 \\ x = \pm \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases}$$

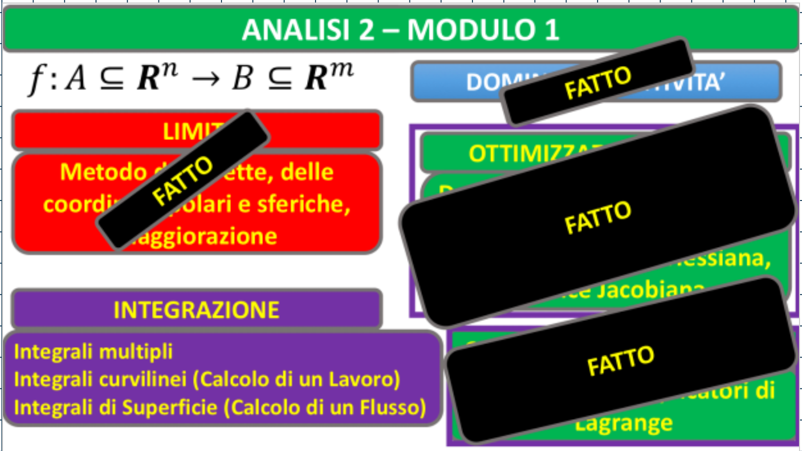
$$\begin{cases} \lambda = e^{(x^2+y^2)} \\ e^{(x^2+y^2)}(2y-1)=0 \\ y = x^2 \end{cases} \cup \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ \lambda=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = \\ y = \\ x = \end{cases}$$

$(0,0)$ $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

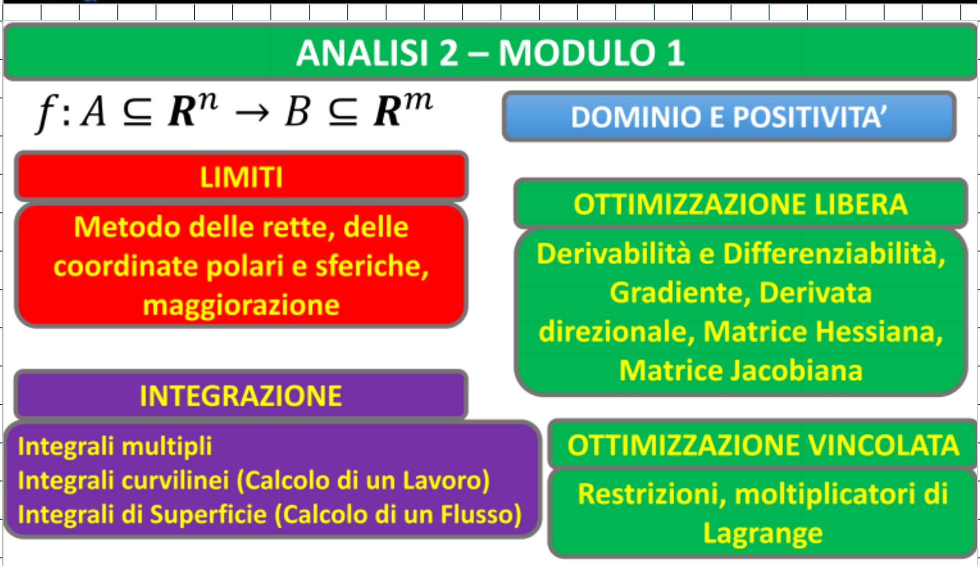
$f(0,0) = 1$ MINIMO ASSOLUTO

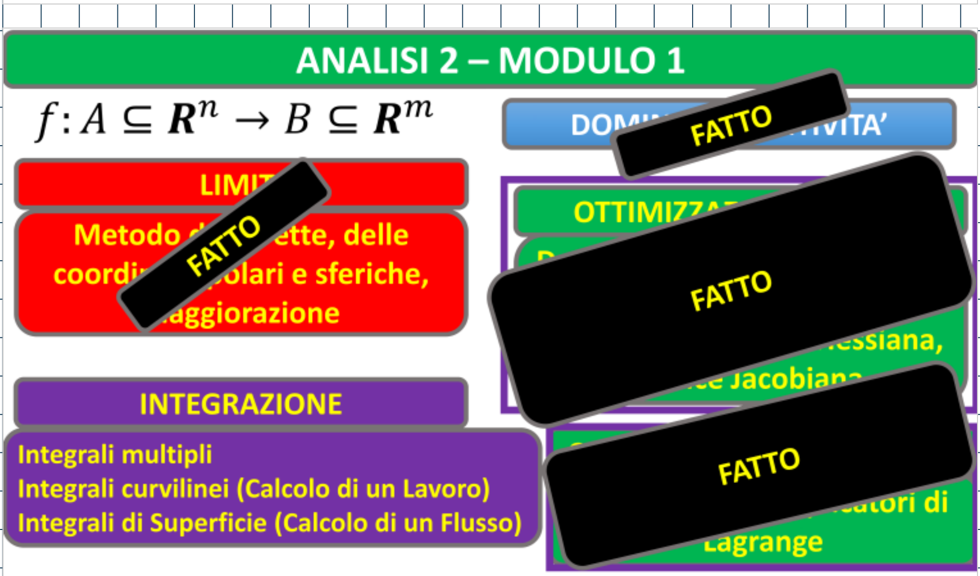
$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) = e^{3/4}$ MASSIMO ASSOLUTO



Integrali multipli

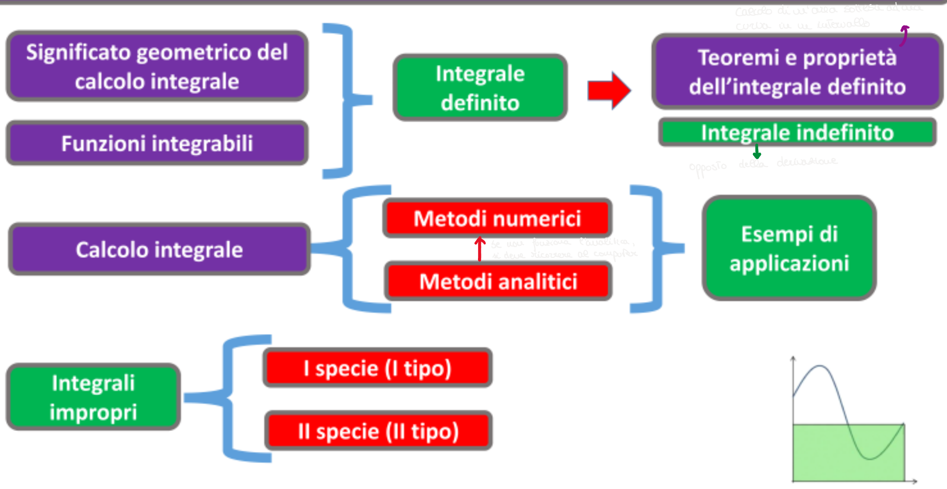
sabato 31 ottobre 2020 10:48

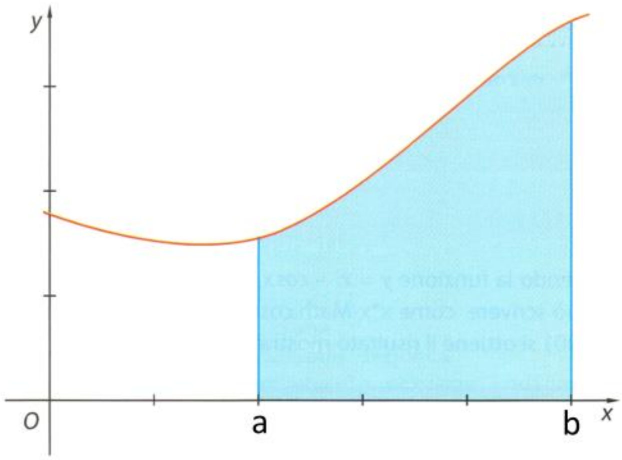


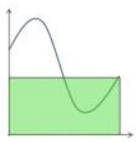


DA ANALISI 1...

INTEGRALE DI UNA FUNZIONE

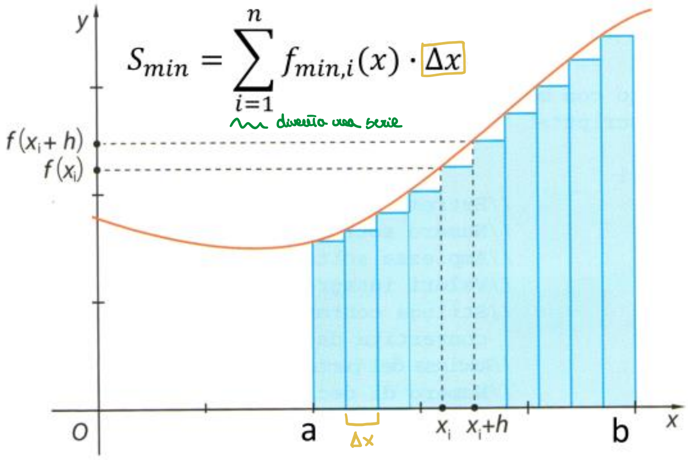




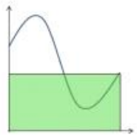


$$S_{min} = \sum_{i=1}^{n} f_{min,i}(x) \cdot \boxed{\Delta x}$$

diventa una serie



Georg Friedrich
Bernhard Riemann

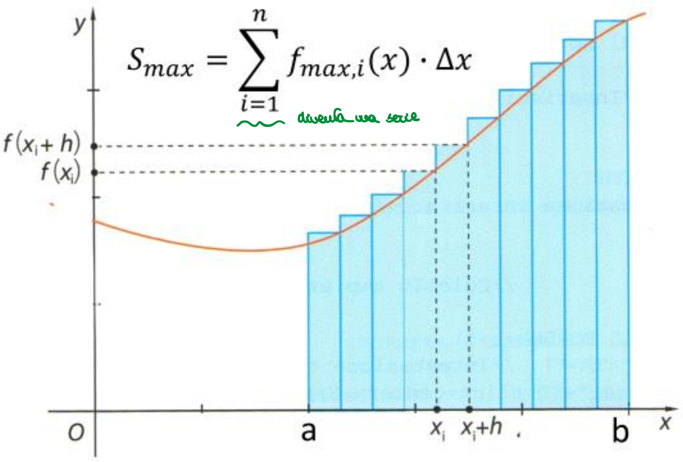


$$f_{min,i}(x) = min\{f(x_i), f(x_i + h)\}$$

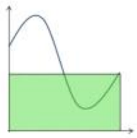
$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$S_{max} = \sum_{i=1}^{n} f_{max,i}(x) \cdot \Delta x$$

diventa una serie

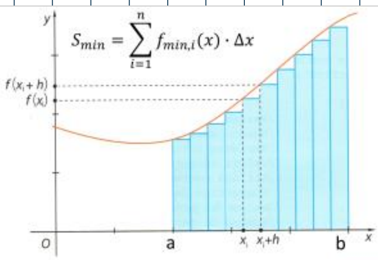


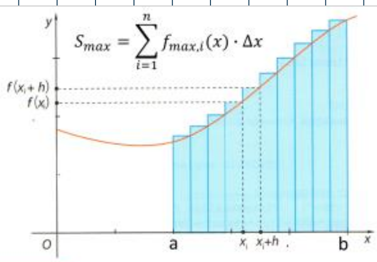
Georg Friedrich
Bernhard Riemann



$$f_{max,i}(x) = max\{f(x_i), f(x_i + h)\}$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$





$$\boxed{S_{min} \leq S \leq S_{max}}$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$dx := \Delta x \to 0$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (n \to +\infty)}} S_{min} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (n \to +\infty)}} S_{max} = S \quad \Longleftrightarrow \quad S = \int_a^b f(x)dx$$

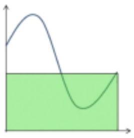
Mandando $\Delta x \to 0$, se la funzione è integrabile, $n \to +\infty$ e S_{min} diventa uguale a S_{max}

f(x) è integrabile secondo Riemann in [a, b]

S:= Integrale definito

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE

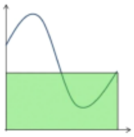


$$\int_{\boxed{a}}^{\boxed{b}} \boxed{f(x)}\,dx = \underbrace{F(a,b)}_{\text{funzione integrale}}$$

b → Estremo superiore di integrazione

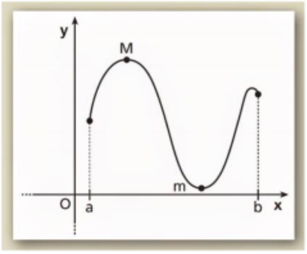
$f(x)$ → funzione integranda

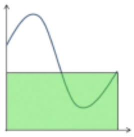
a → Estremo inferiore di integrazione



Classi di funzioni integrabili

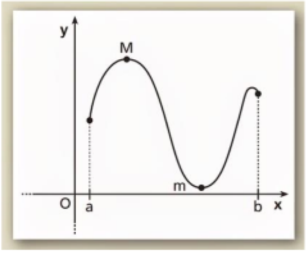
$\boldsymbol{f}: [a; b] \to R$ continua



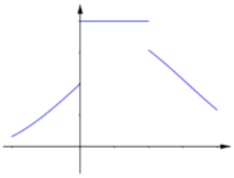


Classi di funzioni integrabili

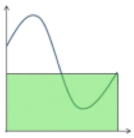
$\boldsymbol{f}: [a; b] \to R$ continua



$\boldsymbol{f}: [a; b] \to R$ limitata e con un numero finito (anche nullo) di discontinuità

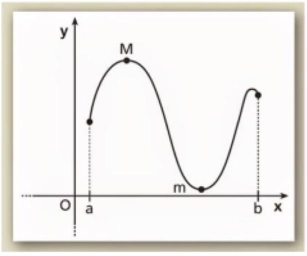


Basta spezzare la funzione lungo i punti di discontinuità e calcolare gli integrali dei singoli tratti

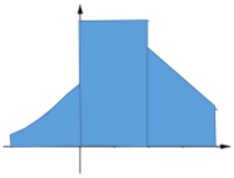


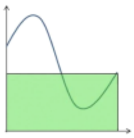
Classi di funzioni integrabili

$\boldsymbol{f}: [a; b] \to R$ continua

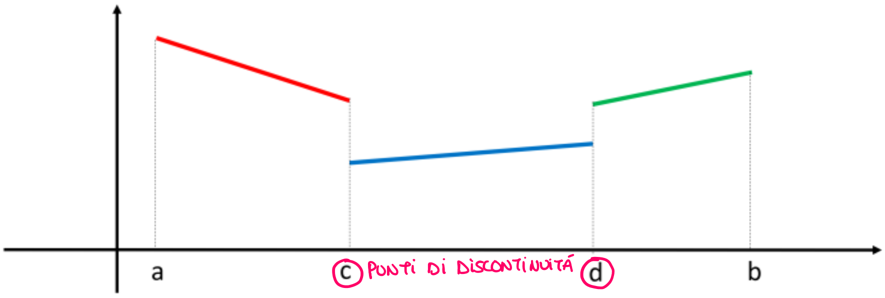


$\boldsymbol{f}: [a; b] \to R$ limitata e con un numero finito (anche nullo) di discontinuità

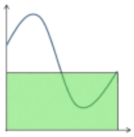




Classi di funzioni integrabili

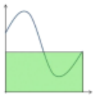


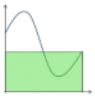
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$$

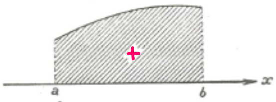


Teoremi e proprietà dell'integrale definito

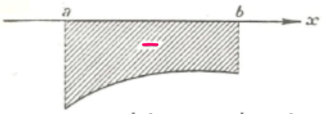
Segno dell'integrale definito





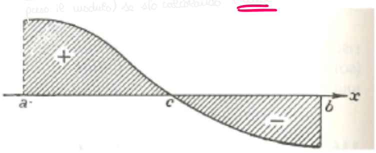


$$\int_a^b f(x)dx > 0$$



$$\int_a^b f(x)dx < 0 \Rightarrow \left|\int_a^b f(x)dx\right| = \int_a^b |f(x)|dx = -\int_a^b f(x)dx$$

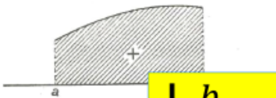
L'integrale di un'area con immagine negativa deve essere cambiato di segno (ne deve essere preso il modulo) se sto calcolando l'area

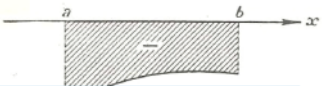


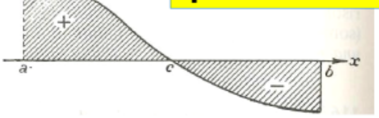
$$\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$$

Teoremi e proprietà dell'integrale definito

Segno dell'integrale definito







$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

$$\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$$

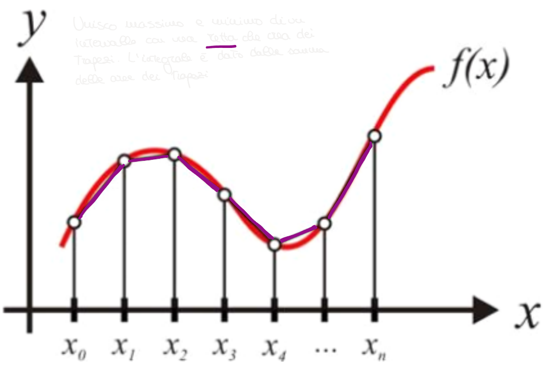
Calcolo integrale

Metodi numerici

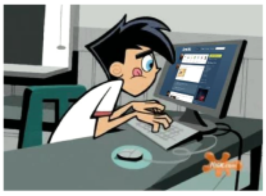
Metodi analitici

Calcolo Integrale – Metodi Numerici

Unisco massimo e minimo di un intervallo con una retta che crea dei trapezi. L'integrale è dato dalla somma delle aree dei trapezi

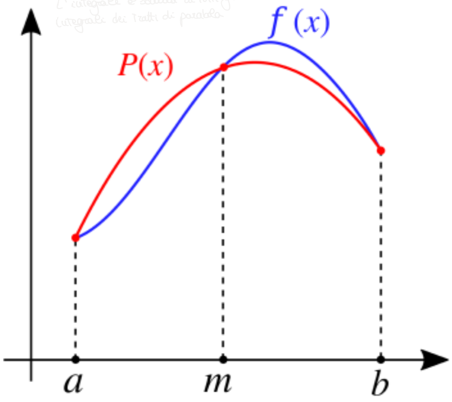


Metodo dei trapezi

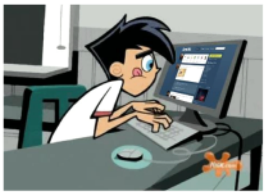


Calcolo Integrale – Metodi Numerici

Descrivo ogni intervallo come un segmento parabolico. L'integrale è somma di tutti gli integrali dei tratti di parabola

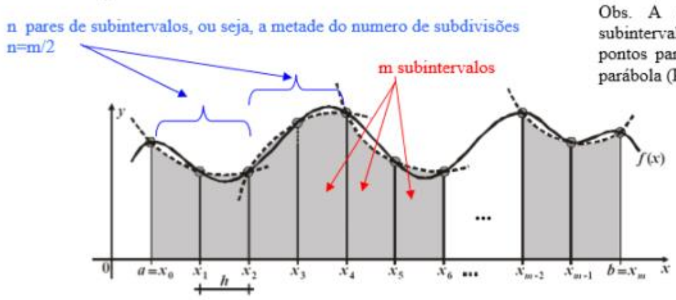


Metodo di Cavalieri-Simpson



Vamos agora repetir o procedimento anterior para n pares de subintervalos. Definimos o número de subintervalos pela letra $m = 2n$.

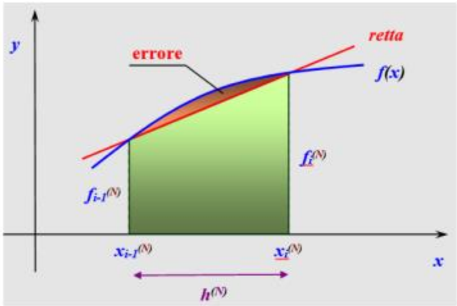
Obs. A cada par de subintervalos temos 3 pontos para ajustar uma parábola ($P_2(x)$)

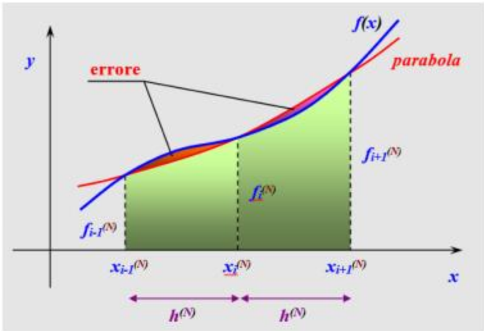


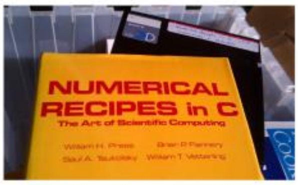
Na figura, tome $h = \dfrac{b-a}{m} \Rightarrow \boxed{h = x_i - x_{i-1}}\ (i = 1, 2, \ldots m)$, para $m = 2n \Rightarrow \boxed{m \text{ é par}}$.

Aplica-se a regra de Simpson repetidas vezes no intervalo $[a, b] = [x_0, x_m]$.

$x_0, x_1, \ldots, x_m$ são pontos igualmente espaçados.



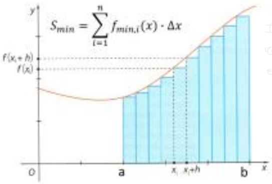




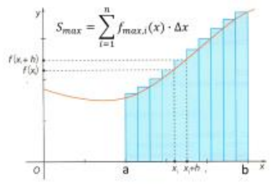
IN ANALISI 2…

ANALISI 1	ANALISI 2

ANALISI 1



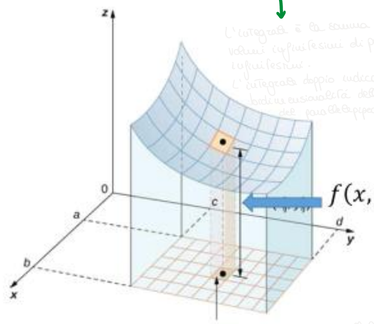
Integrale → somma di rettangoli di area infinitesima e che hanno base infinitesima dx



$$f(x)dx \Rightarrow \int_{\Omega} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

ANALISI 2

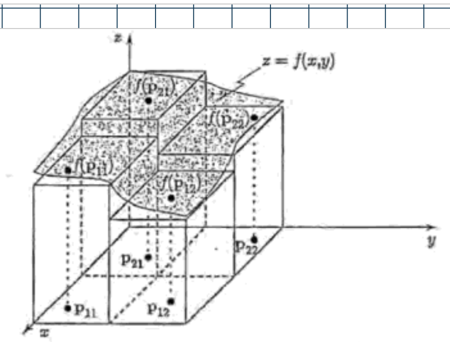
L'integrale è la somma dei volumi infinitesimi di parallelepipedi infinitesimi.
L'integrale doppio indica la bidimensionalità della base del parallelepipedo

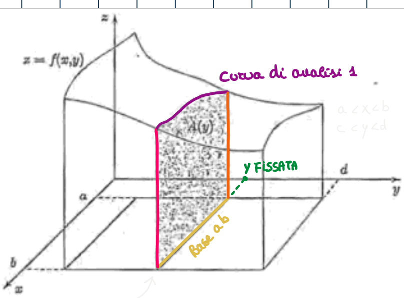


$dxdy$

La base dei parallelepipedi sono dei rettangoli di area infinitesima e di lati di base infinitesimi dx e dy

$$f(x,y)dxdy \Rightarrow \iint_{\Omega} \underbrace{f(x,y)dxdy}_{\text{Sommatoria di parallelepipedi infinitesimi}}$$



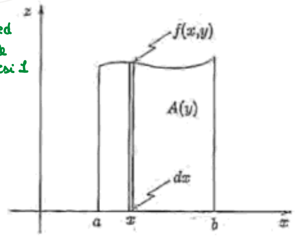


Integro prima solo in base a x (fissata una y che individua un piano) e poi in base a y

Per ogni y fissata fra c ed d devo calcolare un integrale di una funzione di analisi 1

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int_{c}^{\overset{y}{d}} \int_{a}^{\overset{x}{b}} f(x,y)dxdy =$$

$$= \int_{c}^{d} \left[\int_{a}^{b} f(x,y)dx \right] dy = \int_{c}^{d} A(y)dy$$



INTEGRALE DOPPIO

$$\boxed{\iint_{\Omega}} f(x,y)\,dx\,dy$$

INTEGRALE TRIPLO

$$\boxed{\iiint_{\Omega}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

INTEGRALE MULTIPLO (a numero n generico di variabili di integrazione)

$$\boxed{\int_{\Omega}} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\,dx_1\,dx_2 \cdots dx_n$$

INTEGRALI MULTIPLI

	DOMINIO	RISULTATO
$\int_a^b f(x)\,dx$	$A \subset \mathbb{R}$ $A: \{x \in \mathbb{R}: x \in [a,b]\}$	MISURA IN $\mathbb{R}^2$ (AREA)
$\iint_S f(x,y)\,dx\,dy$ (INTEGRALE DOPPIO)	$S \subset \mathbb{R}^2$	MISURA IN $\mathbb{R}^3$ (VOLUME)
$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ (INTEGRALE TRIPLO)	$V \subset \mathbb{R}^3$	MISURA IN $\mathbb{R}^4$
$\int_{\Omega} f(x_1, x_2, \dots x_n)\,dx_1\,dx_2 \dots dx_n$ (INTEGRALE MULTIPLO)	$\Omega \subset \mathbb{R}^n$	MISURA IN $\mathbb{R}^{n+1}$

TEOREMI GENERALI

1) $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ É CONTINUA $\Rightarrow$ f É INTEGRABILE

2) $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ É LIMITATA E CONTINUA, SALVO UN INSIEME DI MISURA NULLA DI ELEMENTI DI DISCONTINUITÀ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ f É INTEGRABILE

A meno che non si parli di assoluti, altrimenti si perde la linearità

CONCETTO DI MISURA PER UN DOMINIO Ω

L'integrale può servirmi a calcolare i domini

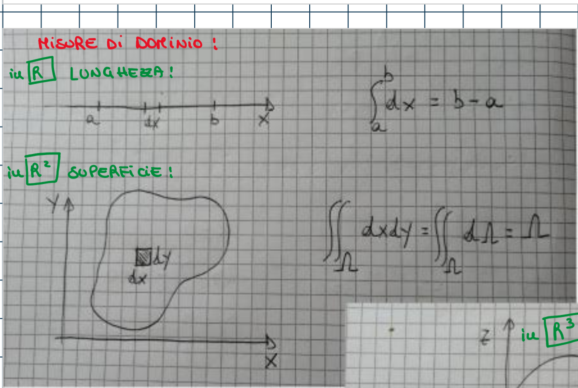
- $\Omega \subset \mathbb{R}$ É MISURABILE SE LA FUNZIONE COSTANTE $f(x) = 1$ É INTEGRABILE IN Ω

$$\Omega = \{ x \in \mathbb{R} : x \in [a, b] \} \qquad \int_a^b 1 \cdot dx = b - a$$

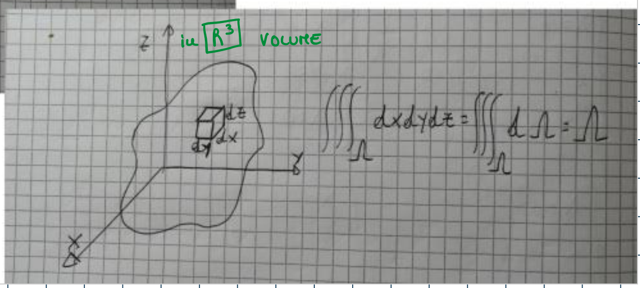
É LA MISURA DI Ω

volume di altezza unitaria

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ LA SUA MISURA É $\iint_\Omega 1 \cdot dx\, dy$ = SUPERFICIE
- $\Omega \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow$ LA SUA MISURA É $\int_\Omega 1 \cdot dx_1 dx_2 \cdot \ldots \cdot dx_n$



In questi casi la funzione integranda è pari a 1



ELEMENTI A MISURA NULLA

HANNO MISURA NULLA

$\Omega \subset \mathbb{R}$ — PUNTI

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — PUNTI, LINEE

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — PUNTI, LINEE, AREE

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — TUTTI GLI ELEMENTI DI DIMENSIONE $\mathbb{R}^m$, CON $m = 0, 1, \dots (n-1)$

PROCEDURA DI CALCOLO DEGLI INTEGRALI MULTIPLI

1) RAPPRESENTAZIONE DEL DOMINIO Ω
2) RIDUZIONE DELL'INTEGRALE MULTIPLO AD INTEGRALI ITERATI, OVVERO AL CALCOLO DI SUCCESSIVI INTEGRALI DI UNA SOLA VARIABILE, E PER OGNUNO DI ESSI VALGONO, OVVIAMENTE, TUTTE LE PROPRIETÀ APPRESE IN ANALISI MATEMATICA 1

1) RAPPRESENTAZIONE DEL DOMINIO

LE NOSTRE APPLICAZIONI RIGUARDERANNO SOLO DOMINI REGOLARI, OVVERO DOMINI CHE POSSONO ESSERE CONSIDERATI COME UNIONE DI DOMINI SEMPLICI

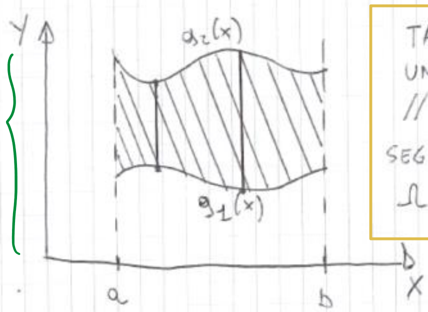
DEFINIZIONE DI DOMINIO SEMPLICE IN $\mathbb{R}^2$ (L'ESTENSIONE IN $\mathbb{R}^n$ É IMMEDIATA)

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ È Y-SEMPLICE SE È ESPRIMIBILE NEL MODO SEGUENTE

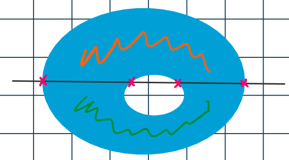
$$\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [a, b], \ g_1(x) \le y \le g_2(x) \}$$

e x varia fra a e b e la y varia fra due funzioni che non si intersecano

La x varia fra due valori costanti mentre la y fra due funzioni



TAGLIANDO Ω CON UNA QUALSIASI RETTA // ALL'ASSE Y, IL SEGMENTO INTERSECA Ω SOLO IN DUE PUNTI

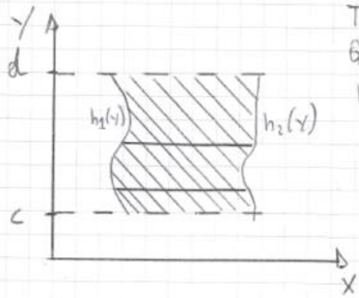


La retta intersecherebbe la retta in 4 punti. Quindi, spezzo il dominio in modo da calcolare gli integrali di figure semplici (1 e 2)

In questo caso potrei anche calcolare l'integrale di tutta la curva azzurra e poi sottraggo il valore del dell'integrale della curva interna

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ È X-SEMPLICE SE È ESPRIMIBILE NEL SEGUENTE MODO:

$$\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \in [c, d], \ h_1(y) \le x \le h_2(y) \}$$

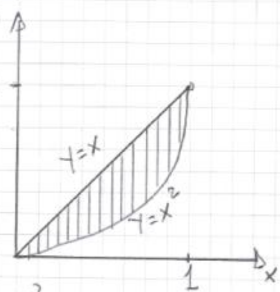


TAGLIANDO Ω CON UNA QUALSIASI RETTA // ASSE X, IL SEGMENTO INTERSECA Ω SOLO IN DUE PUNTI

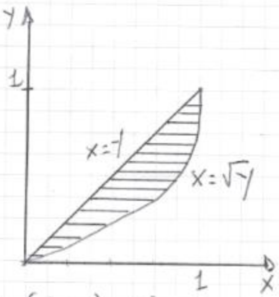
La y varia fra due numeri fissi mentre la x varia fra due funzioni

- QUALCHE DOMINIO Ω PUÒ ESSERE SIA Y-SEMPLICE, SIA X-SEMPLICE

ESEMPIO



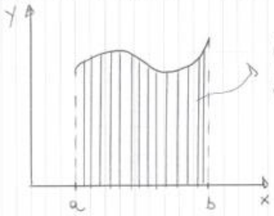
$\Longleftrightarrow$



$$\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 1, \ x^2 \le y < x \}$$

$$\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le y \le 1, \ y \le x \le \sqrt{y} \}$$

DALL' ANALISI MATEMATICA 1 . . . .



$$\int_a^b f(x)\,dx$$

POSSO RISCRIVERE IL TUTTO NEL SEGUENTE MODO

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [a,b] \ , \ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

$\Rightarrow$ Ω É y- SEMPLICE

CALCOLO LA MISURA DI Ω

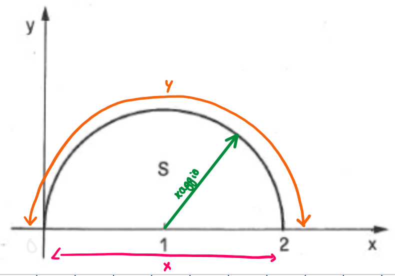
$$\iint_{\Omega} dx\,dy = \int_a^b \left[\int_0^{f(x)} dy\right] dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Esercizio 1

$$\iint_S xy \ dx \ dy$$

dove S è il semicerchio chiuso in figura 3.1, di centro (1,0) e raggio 1, con y≥0.

Traccia:
come rendo la curva x-semplice o y-semplice ?



$$\iint_S xy\,dx\,dy$$

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \ \wedge \ 0 \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}\right\}$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \qquad x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$$

$$y^2 = 2x - x^2 \qquad y = \pm\sqrt{2x-x^2}$$

$y = \sqrt{2x-x^2}$ NEL I QUADRANTE

Bisogna integrare prima secondo la variabile compresa fra due funzioni continue

$$\int_0^2 \left[\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} xy\,dy\right] dx$$

$$\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} xy\,dy = x \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} y\,dy = x \cdot \left(\frac{y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{2x-x^2}} \right) =$$

poiché integro rispetto a y allora tratto la y come COSTANTE

Bisogna integrare prima secondo la variabile compresa fra due funzioni concrete

$$\int_0^2 \left[\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} xy \, dy \right] dx$$

$$\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \underbrace{xy}\, dy = x \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} y \, dy = x \cdot \left(\frac{y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{2x-x^2}} \right) =$$

poiché integro rispetto a y allora tratto la y come COSTANTE

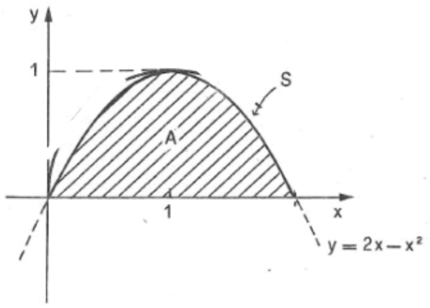
$$= x \cdot \frac{(2x-x^2)}{2} \Rightarrow \int_0^2 \frac{2x^2-x^3}{2} dx = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4} \right)\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{16}{3} - 4 \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

Esercizio 2

$$\iint_A xy \, dx \, dy$$

dove $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2x-x^2\}$.



$$\iint_A xy \, dx \, dy$$

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2 \ \wedge \ 0 \le y \le 2x - x^2 \right\}$$

$$\int_0^2 \left[\int_0^{2x-x^2} xy \, dy \right] dx$$

$$\int_0^{2x-x^2} \underbrace{xy}\, dy = x \int_0^{2x-x^2} y \, dy = x \left(\frac{y^2}{2} \Big|_0^{2x-x^2} \right) =$$

tratto la x come una costante

$$= \frac{x}{2}\left(4x^2-4x^3+x^4\right) = \frac{1}{2}\left(4x^3-4x^4+x^5\right)$$

$$\frac{1}{2}\int_0^2 \left(4x^3-4x^4+x^5\right)dx = \frac{1}{2}\left(x^4-\frac{4}{5}x^5+\frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_0^2 =$$

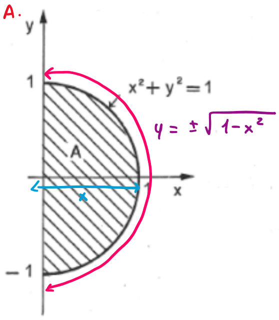
$$= \frac{1}{2}\left(16-\frac{128}{5}+\frac{64}{6}\right) = 8-\frac{64}{5}+\frac{16}{3} = \frac{120-192+80}{15} =$$

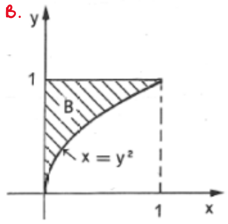
$$= \frac{8}{15}$$

Esercizio 3

(a) $\iint_A x \, dx \, dy$ (b) $\iint_B \frac{y}{(1+x)\,(1+y^2)} \, dx \, dy$

dove A e B sono rispettivamente gli insiemi rappresentati nelle figure 3.5, 3.6.





A. $\iint_A x \, dx \, dy$

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \ \wedge \ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}\right\}$$

$$x^2+y^2=1 \qquad y^2 = 1-x^2 \qquad y = \pm\sqrt{1-x^2}$$

Integro rispetto a y

$$\int_0^1 \left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x \, dy\right] dx$$

COSTANTE

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x \, dy = x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy = x \cdot 2\sqrt{1-x^2}$$

Integro rispetto a x:

$$\int_0^1 2x\sqrt{1-x^2} \, dx \Rightarrow \qquad t = 1-x^2 \qquad dt = -2x\,dx$$

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x\,dy = x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy = x \cdot 2\sqrt{1-x^2}$$

Integro rispetto a x:

$$\int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\,dx \Rightarrow \qquad t = 1-x^2 \qquad dt = -2x\,dx$$

$$\Rightarrow -\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\cdot(-2x)\,dx = -\frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

OPPURE posso anche integrare prima rispetto a x e poi a y se la rendo x-semplice (cioè y fra due numeri e x fra due funzioni)

$$A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R} : -1 \le y \le 1 \ \wedge\ 0 \le x \le \sqrt{1-y^2}\right\}$$

$$\int_{-1}^{1}\left[\int_0^{\sqrt{1-y^2}} x\,dx\right]dy$$

Integro rispetto a x

$$\int_0^{\sqrt{1-y^2}} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1-y^2}{2}$$

$$\cancel{\int_0^{\sqrt{1-y^2}} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1-y^2}{2}}$$

Integro rispetto a y

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-y^2)\,dy = \frac{1}{2}\left(y-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

B.

$$\iint_B \frac{y}{(1+x)(1+y^2)}\,dx\,dy$$

$$B = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \ \wedge\ \sqrt{x} \le y \le 1\right\}$$

$$\int_0^1\left[\int^{1} \frac{y}{(1+x)(1+y^2)}\,dy\right]dx$$

B.

$$\iint_B \frac{y}{(1+x)(1+y^2)}\,dx\,dy$$

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 1 \ \wedge\ \sqrt{x} \le y \le 1\right\}$$

$$\int_0^1 \left[\int_{\sqrt{x}}^1 \frac{y}{(1+x)(1+y^2)}\,dy\right] dx$$

Integro rispetto a y:

$$\int_{\sqrt{x}}^1 \frac{y}{(1+x)(1+y^2)}\,dy = \frac{1}{(1+x)} \cdot \int_{\sqrt{x}}^1 \frac{y}{1+y^2}\,dy =$$

$$= \frac{1}{2(1+x)} \int_{\sqrt{x}}^1 \frac{2y}{1+y^2}\,dy = \frac{1}{2(1+x)} \cdot \left(\ln(1+y^2)\right)\Big|_{\sqrt{x}}^1 =$$

$$= \frac{1}{2(1+x)} \cdot \left(\ln 2 - \ln(1+x)\right)$$

Integro rispetto a x:

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\underbrace{\frac{\ln 2}{1+x}}_{\int_0^1 \ln 2 \cdot \frac{1}{1+x}dx} - \underbrace{\frac{\ln(1+x)}{1+x}}_{\int_0^1 \ln(1+x)\cdot\frac{1}{1+x}dx}\right) dx = \frac{1}{2}\ln 2 \cdot \ln(1+x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln^2 2 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x}\,dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} t = x+1 \\ dt = dx \\ \int \frac{\ln t}{t}\,dt = \frac{(\ln t)^2}{2} \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\ln^2 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln^2(1+x)}{2}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\ln^2 2 - \frac{1}{4}\ln^2 2 = \frac{1}{4}\ln^2 2$$

Esercizio 4

Sia I l'insieme tratteggiato in figura 3.9. Verificare che

(a) $\iint_I x^2y^2dxdy = \frac{56}{3}\log 2.$

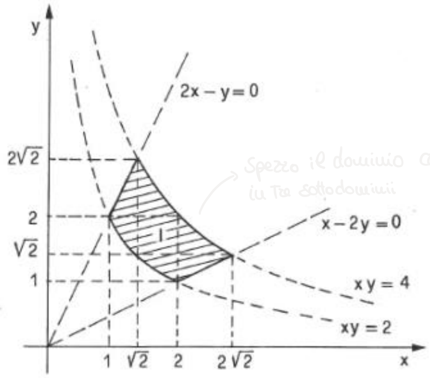


figura 3.9

Esercizio 4

Sia I l'insieme tratteggiato in figura 3.9. Verificare che

(a) $\iint_I x^2y^2dxdy = \frac{56}{3}\log 2.$

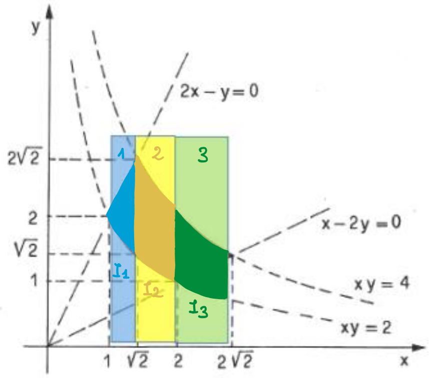


figura 3.9

$$\iint_I x^2y^2\,dx\,dy$$

$$I = I_1 \cup I_2 \cup I_3$$

y-semplice

$$I_1 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1 \le x \le \sqrt{2} \ \wedge\ \frac{2}{x} \le y \le 2x\right\}$$

y-semplice

$$I_2 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \sqrt{2} \le x \le 2 \ \wedge\ \frac{2}{x} \le y \le \frac{4}{x}\right\}$$

y-semplice

$$I_3 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2 \le x \le 2\sqrt{2} \ \wedge\ \frac{x}{2} \le y \le \frac{4}{x}\right\}$$

$$\underbrace{\iint_I x^2y^2\,dx\,dy}_{\text{TOTALE}} = \iint_{I_1} x^2y^2\,dx\,dy + \iint_{I_2} x^2y^2\,dx\,dy + \iint_{I_3} x^2y^2\,dx\,dy$$

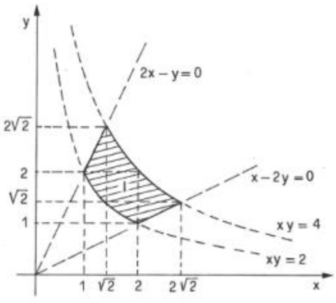


figura 3.9

N.B. SE $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$

$$\Rightarrow \iint f_1(x) f_2(y)\,dx\,dy = \int \left[f_1(x) \int f_2(y)\,dy \right] dx =$$

$$\iint_{I_1} x^2 y^2\,dx\,dy = \int_1^{\sqrt{2}} x^2 \cdot \left[\int_{2/x}^{2x} y^2\,dy \right] dx =$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} x^2 \cdot \left(\frac{y^3}{3} \Big|_{2/x}^{2x} \right) dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{x^2}{3} \cdot \left(8x^3 - \frac{8}{x^3} \right) dx =$$

$$= \frac{8}{3} \int_1^{\sqrt{2}} \left(x^5 - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{x^6}{6} - \ln x \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{8}{6} - \ln\sqrt{2} - \frac{1}{6} \right) = \frac{8}{3} \left(\frac{7}{6} - \ln\sqrt{2} \right) = \boxed{\frac{28}{9} - \frac{8}{3}\ln\sqrt{2}}$$

$$\iint_{I_2} x^2 y^2\,dx\,dy = \int_{\sqrt{2}}^{2} x^2 \left[\int_{2/x}^{4/x} y^2\,dy \right] dx =$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{2} x^2 \cdot \left(\frac{y^3}{3} \Big|_{2/x}^{4/x} \right) dx = \frac{1}{3} \int_{\sqrt{2}}^{2} x^2 \cdot \left(\frac{64}{x^3} - \frac{8}{x^3} \right) dx =$$

$$= \frac{56}{3} \ln x \Big|_{\sqrt{2}}^{2} = \boxed{\frac{56}{3} \left(\ln 2 - \ln\sqrt{2} \right)}$$

$$\iint_{I_3} x^2y^2\,dx\,dy = \int_2^{2\sqrt{2}} x^2\left[\int_{x/2}^{4/x} y^2\,dy\right]dx =$$

$$= \int_2^{2\sqrt{2}} x^2\cdot\left(\frac{y^3}{3}\Bigg|_{x/2}^{4/x}\right)dx = \frac{1}{3}\int_2^{2\sqrt{2}} x^2\left(\frac{64}{x^3} - \frac{x^3}{8}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_2^{2\sqrt{2}}\left(\frac{64}{x} - \frac{x^5}{8}\right)dx = \frac{64}{3}\ln x\Big|_2^{2\sqrt{2}} - \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{6}x^6\Big|_2^{2\sqrt{2}} =$$

$\ln\sqrt{2}$

$$= \frac{64}{3}\left(\ln 2\sqrt{2} - \ln 2\right) - \frac{1}{144}\left(512 - 64\right) =$$

$$= \frac{64}{3}\ln\frac{2\sqrt{2}}{2} - \frac{448}{144} = \boxed{\frac{64}{3}\ln\sqrt{2} - \frac{28}{9}}$$

$$\iint_I x^2y^2\,dx\,dy =$$

TOTALE

$$= \frac{28}{9} - \frac{8}{3}\ln\sqrt{2} + \frac{56}{3}\ln 2 - \frac{56}{3}\ln\sqrt{2} + \frac{64}{3}\ln\sqrt{2} - \frac{28}{9} =$$

$$= \boxed{\frac{56}{3}\ln 2}$$

ESEMPIO DI FUNZIONE UN RETTANGOLO!

sia x-semplice che y-semplice

$f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(x) \quad a \le x \le b \quad c \le y \le d$

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy = \iint f_1(x)\cdot f_2(x)\,dx\,dy =$$

$$= \int_a^b f_1(x)\left[\int_c^d f_2(y)\,dy\right]dx = \int_a^b f_1(x)\cdot dx\cdot\int_c^d f_2(y)\,dy$$

esempio:

$\iint_S xy\,dx\,dy$ con $0 \le x \le 1$ e $1 \le y \le 2$

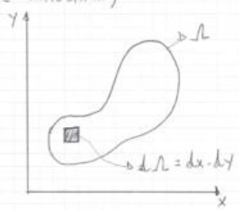
$$S = \int_0^1 x\,dx\cdot\int_1^2 y\,dy = \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_1^2 =$$

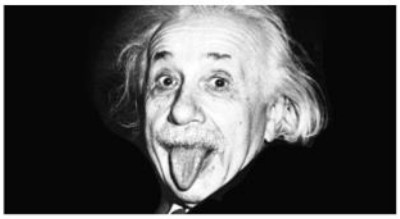
$$= \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

APPLICAZIONI PER LA FISICA...

GEOMETRIA DELLE MASSE ... IN $\mathbb{R}^2$ (ESTENSIONE IN $\mathbb{R}^3$ É IMMEDIATA)

Divido una superficie in tantissime piccole aree la cui somma mi dà l'area totale





$$\iint_\Omega dx\,dy = \iint_\Omega d\Omega$$

COORDINATE DEL BARICENTRO

$$x_G = \frac{\iint_\Omega x\,d\Omega}{\iint_\Omega d\Omega} \qquad y_G = \frac{\iint_\Omega y\,d\Omega}{\iint_\Omega d\Omega}$$

SE SI INTRODUCE LA FUNZIONE DENSITÀ SUPERFICIALE $\rho(x,y)$

$\rho = \frac{M}{V} \to \rho\cdot V = M$

M = MASSA

$$\iint_\Omega \rho(x,y)\,d\Omega = \iint_\Omega \rho(x,y)\,dx\,dy = M$$

La somma delle masse infinitesime mi dà la massa

$$x_G = \frac{\iint_\Omega x\cdot\rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint_\Omega \rho(x,y)\,dx\,dy} \qquad y_G = \frac{\iint_\Omega y\cdot\rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint_\Omega \rho(x,y)\,dx\,dy}$$

CAMBIO DI VARIABILE IN $\mathbb{R}^2$

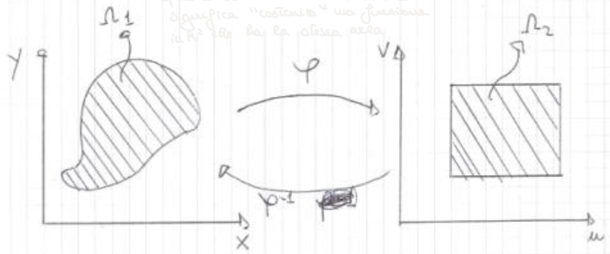
$$\int_{x(a)}^{x(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(x(t))\,x'(t)\,dt.$$

SIA $\varphi: \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$

$$\iint_{\Omega_1} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Omega_2} f(x(u,v), y(u,v)) \cdot |\det J_{\varphi(u,v)}|\,du\,dv$$

dove $J_{\varphi}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$

operare un cambio di variabile significa "costruire" una funzione in $\mathbb{R}^2$ che ha la stessa area



AFFINCHÉ IL CAMBIO DI VARIABILE φ POSSA ESSERE APPLICATO, DEVE SUSSISTERE LA CONDIZIONE

matrice Jacobiana

$$\det \boxed{J}_{\varphi(u,v)} \neq 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega_1$$

DETTA ANCHE CONDIZIONE DI INVERTIBILITÀ DELLA TRASFORMAZIONE φ

INOLTRE È NOTO DALL'ALGEBRA LINEARE CHE IL LEGAME TRA IL $\det J_{\varphi}(u,v)$ E IL $\det J_{\varphi^{-1}}(x,y)$ È IL SEGUENTE

$$|\det J_{\varphi}| \cdot |\det J_{\varphi^{-1}}| = 1$$

PER CUI:

$$J_{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad J_{\varphi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$$|\det J_{\varphi^{-1}}| = \frac{1}{|\det J_{\varphi}^{-1}|}$$

ESEMPI → Funziona principalmente con archi di circonferenza

a) COORDINATE POLARI

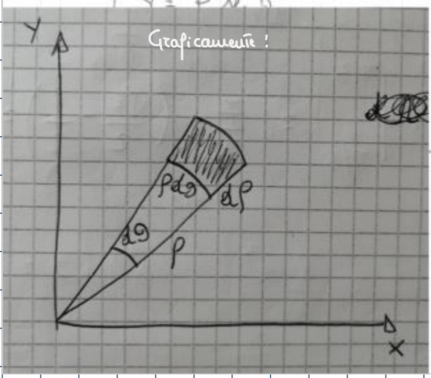
$$\varphi : \begin{cases} x = \rho \cos\vartheta \\ y = \rho \operatorname{sen}\vartheta \end{cases} \Rightarrow J\varphi(\rho,\vartheta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\rho \operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & \rho\cos\vartheta \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\det J\varphi(\rho,\vartheta)\right| = \rho$$

ESEMPI

a) COORDINATE POLARI

$$\varphi : \begin{cases} x = \rho \cos\vartheta \\ \dots \end{cases} \Rightarrow J\varphi(\rho,\vartheta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \end{pmatrix} =$$



$\dots t\, J\varphi(\rho,\vartheta)\big| = \rho$

$$dA = \rho\, d\theta\, d\rho$$

$$\Downarrow$$

$$dx \cdot dy = \rho \cdot d\theta \cdot d\rho$$

ESEMPIO

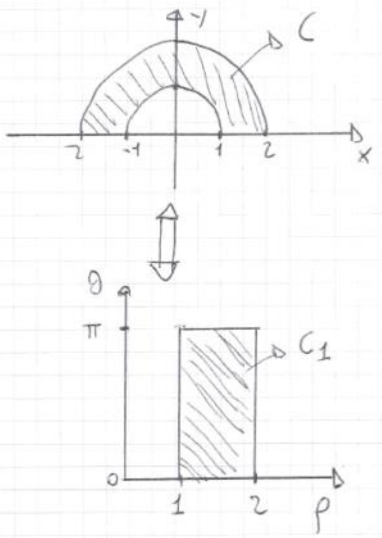
- CALCOLARE

$$\iint_C \frac{y}{x^2+y^2}\, dx\, dy$$

Pongo $\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\theta \\ y = \rho\cos\theta \end{cases}$

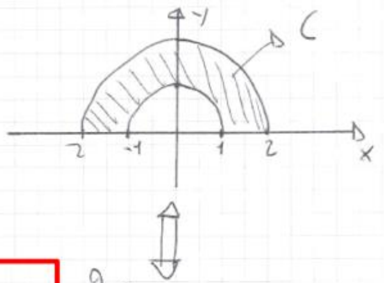
$$\Downarrow \quad \left|\det J\varphi(\rho,\vartheta)\right|$$

$$\iint_{C_1} \frac{\rho \operatorname{sen}\vartheta}{\rho^2} \cdot \rho \cdot d\rho\, d\vartheta =$$



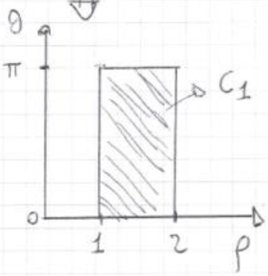
- CALCOLARE

$$\iint_C \frac{y}{x^2+y^2}\, dx\, dy$$



$$= \iint_{C_1} \operatorname{sen}\vartheta \, d\rho\, d\vartheta = \int_1^2 d\rho \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\vartheta \, d\vartheta =$$

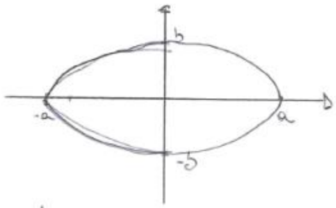
$$= \int_1^2 d\rho \cdot \left[-\cos\vartheta\right]_0^{\pi} = 2\int_1^2 d\rho = 2$$

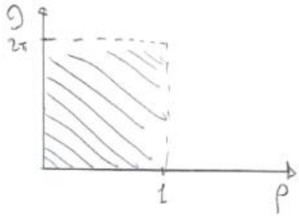


a1) COORDINATE ELLITTICHE

$\rho \rightarrow$ percentuale di vicinanza al bordo

$$\varphi : \begin{cases} x = a\cdot\rho\cos\vartheta \\ y = b\cdot\rho\cdot\operatorname{sen}\vartheta \end{cases}$$





$0 \leq \rho \leq 1$

$0 \leq \vartheta \leq 2\pi$

$$J\varphi(\rho,\vartheta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\vartheta & -a\rho\operatorname{sen}\vartheta \\ b\operatorname{sen}\vartheta & b\rho\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\det J\varphi(\rho,\vartheta) = ab\rho\cos^2\vartheta + ab\rho\operatorname{sen}^2\vartheta = ab\cdot\rho \geq 0$$

CALCOLARE L'AREA DI UN'ELLISSE

$$\iint dx\, dy = \iint ab\rho\, d\rho\, d\vartheta = ab\int_0^1 \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta =$$

$$= ab\cdot\pi$$

Esercizio

(a) $\iint_C x \, dx \, dy$

dove C è il settore di corona circolare rappresentato in figura 3.15.

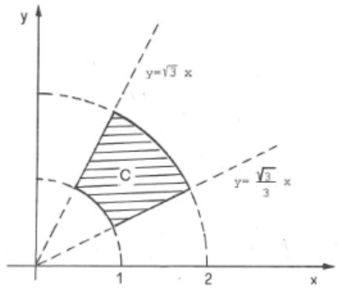


figura 3.15

$$\iint_C x \, dx \, dy \qquad dx\,dy = \rho \, d\theta \, d\rho$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3} x \qquad y = mx \qquad y = tg\,\theta \cdot x$$

$$tg\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$ angolo della Tangente $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$y = \sqrt{3}x \qquad tg\,\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$ angolo della Tangente $y = \sqrt{3}$

$$C_1 = \left\{ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le \rho \le 2 \ \wedge \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{3} \right\}$$

$$C_1 = \left\{ (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le \rho \le 2 \ \wedge \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{3} \right\}$$

$$\iint_{C_1} \rho\cos\theta \cdot \rho \cdot d\rho \, d\theta = \int_1^2 \rho^2 d\rho \cdot \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi/3} \cos\theta \, d\theta =$$

$$= \left.\frac{\rho^3}{3}\right|_1^2 \cdot \left. \operatorname{sen}\theta \right|_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{7}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{7}{6}\left(\sqrt{3} - 1\right)$$

Esercizio

3.16 Sia C il cerchio in figura 3.16 di centro (r,0) e raggio r, con r parametro positivo. Calcolare gli integrali doppi:

(a) $\iint_C (x^2+y^2)\,dx\,dy$ (b) $\iint_C \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$

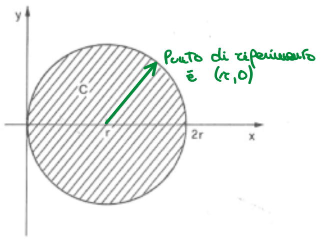


figura 3.16

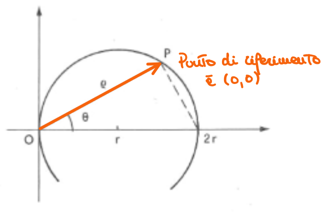


figura 3.17

1.

Punto di riferimento (r,0) $\begin{cases} x = x_0 + \rho\cos\theta \\ y = y_0 + \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$

$$\iint_C (x^2+y^2)\,dx\,dy \qquad \begin{cases} x = r + \rho\cos\theta \\ y = \rho\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$$C_1 = \left\{ (\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le \rho \le r \ \wedge\ 0 \le \theta \le 2\pi \right\}$$

$$\iint_{C_1} \left(r^2 + 2r\rho\cos\theta + \rho^2\cos^2\theta + \rho^2\operatorname{sen}^2\theta\right)\cdot\rho\,d\rho\,d\theta =$$

$$= \iint_{C_1} \left(\rho r^2 + \rho^3 + 2r\rho^2\cos\theta\right) d\rho\,d\theta =$$

$$= \int_0^r \left[\int_0^{2\pi} \left(\rho r^2 + \rho^3 + 2r\rho^2\cos\theta\right) d\theta\right] d\rho =$$

$$= \int_0^r \left[2\pi\rho r^2 + 2\pi\rho^3 + \left(2r\rho^2 \operatorname{sen}\theta\Big|_0^{2\pi}\right)\right] d\rho =$$

$$= \int_0^r 2\pi\left(\rho r^2 + \rho^3\right) d\rho = 2\pi\left[r^2\frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^4}{4}\right]_0^r = \frac{3}{2}\pi r^4$$

2.

$$\iint_C \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

Punto di riferimento (0,0)

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta \end{cases} \qquad -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2} \qquad 0 \le \rho \le 2r\cos\vartheta$$

$$C_1 = \left\{ (\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2} \ \wedge \ 0 \le \rho \le 2r\cos\vartheta \right\}$$

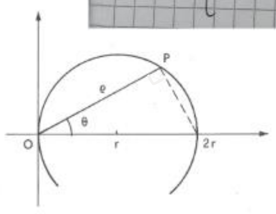


figura 3.17

poiché $\begin{cases} dx\cdot dy = \rho\cdot d\rho\, d\vartheta \\ \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\rho^2(\sin^2 x+\cos^2 x)} = \sqrt{\rho^2} = \rho \end{cases}$

$$\iint_{C_1} \rho^2\, d\rho\, d\vartheta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \left[\int_0^{2r\cos\vartheta} \rho^2\, d\rho \right] d\vartheta =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^{2r\cos\vartheta} \right) d\vartheta = \frac{8}{3} r^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\vartheta\, d\vartheta =$$

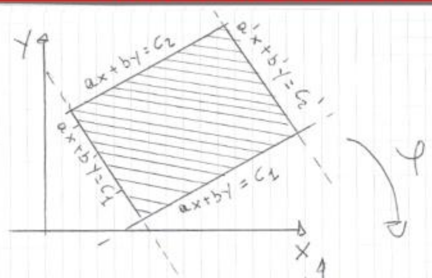
$$= \frac{8r^3}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\mathrm{sen}^2\vartheta)\cos\vartheta\, d\vartheta =$$

derivata

$$= \frac{8}{3} r^3 \left[\mathrm{sen}\,\vartheta - \frac{\mathrm{sen}^3\vartheta}{3} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{8}{3} r^3 \left[1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right] =$$

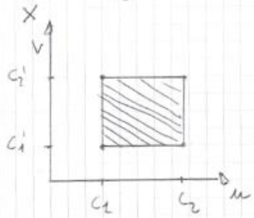
$$= \frac{32}{9} r^3$$

Altri cambi di variabili negli integrali doppi



$u = ax+by$

$v = a'x+b'y$



$c_1 \le u \le c_2$

$c'_1 \le v \le c'_2$

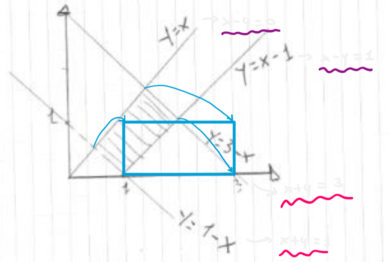
Altri cambi di variabili negli integrali doppi

Esercizio

• CALCOLARE

$$\iint_{\Omega} (x-y)\log(x+y)\,dx\,dy$$

CON Ω DEFINITO DAL SEGUENTE QUADRILATERO



SUGGERIMENTO:

$\boxed{u = x-y}$

$\boxed{v = x+y}$

$0 \le u \le 1$!

$1 \le v \le 3$!

$u = x-y \qquad v = x+y$

$$\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\det \varphi^{-1}| = 2 \Rightarrow |\det \varphi| = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \iint (x-y)\ln(x+y)\,dx\,dy = \iint u \ln v \cdot \frac{1}{2}\,du\,dv$$

$$|\det \varphi^{-1}| = 2 \Rightarrow |\det \varphi| = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \iint (x-y)\ln(x+y)\,dx\,dy = \iint u \ln v \cdot \frac{1}{2}\,du\,dv$$

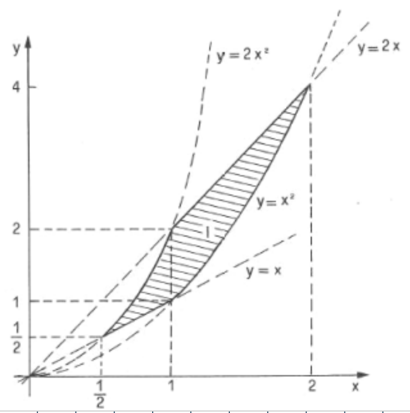
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 u\left[\int_1^3 \ln v\,dv\right]du = \frac{1}{2}\int_0^1 u\left[v\ln v - v\right]_1^3 du =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 u\,(3\ln 3 - 3 + 1)\,du = \frac{1}{2}\cdot(3\ln 3 - 2)\cdot \left.\frac{u^2}{2}\right|_0^1 =$$

$$= \frac{3}{4}\ln 3 - \frac{1}{2}$$

Altri cambi di variabili negli integrali doppi

$$\iint_I \frac{x}{y}\,dx\,dy$$



$$u = \frac{x^2}{y}$$

$$v = \frac{x}{y}$$

$$\frac{1}{2} \le u \le 1$$

$$\frac{1}{2} \le v \le 1$$

$$\iint_I \frac{x}{y}\,dx\,dy$$

$$I = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \le \frac{x^2}{y} \le 1 \ \wedge\ \frac{1}{2} \le \frac{x}{y} \le 1\right\}$$

$$u = \frac{x^2}{y} \qquad v = \frac{x}{y}$$

$$u = \frac{x^2}{y} \qquad v = \frac{x}{y}$$

$$|\det \varphi^{-1}| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{matrix} \right\| = \left| -\frac{2x^2}{y^3} + \frac{x^2}{y^3} \right| =$$

$= \frac{x^2}{y^3}$ GUARDANDO IL DISEGNO, Y È NEL PRIMO QUADRANTE $\Rightarrow y^3 > 0$

$$|\det \varphi| = \frac{y^3}{x^2}$$

$= \frac{x^2}{y^3}$ GUARDANDO IL DISEGNO, Y È NEL PRIMO QUADRANTE $\Rightarrow y^3 > 0$

$$|\det \varphi| = \frac{y^3}{x^2}$$

$$\iint \frac{x}{y}\, dx\, dy = \iint \frac{x}{y} \cdot \frac{y^3}{x^2}\, du\, du = \iint \frac{y^2}{x}\, du\, dv =$$

$$= \iint \frac{u}{v^3}\, du\, dv \qquad \frac{x^2}{y} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^3 = \frac{y^2}{x}$$

$$\int_{1/2}^{1} u \left[\int_{1/2}^{1} v^{-3}\, dv \right] du = \int_{1/2}^{1} u \cdot \left(-\frac{1}{2v^2} \right) \Bigg|_{1/2}^{1} du =$$

$$= \int_{1/2}^{1} u \left(-\frac{1}{2} + 2 \right) du = \frac{3}{2} \frac{u^2}{2} \Bigg|_{1/2}^{1} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) =$$

$$= \frac{3}{2} \left(\frac{4-1}{8} \right) = \frac{9}{16}$$

Integrali tripli

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz$$

Esercizio

$$\iiint_{\Omega} (x+y+z)\,dxdydz$$

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; 0 \le x \le 1, \; 0 \le y \le 1, \; 0 \le z \le 1\right\}.$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \left(\int_0^1 (x+y+z)\, \underset{1°}{dz} \right) \underset{2°}{dy} \right] \underset{3°}{dx} =$$

1° Integrale

$$\int_0^1 (x+y+z)\,dz = xz + yz + \frac{z^2}{2}\Big|_0^1 =$$

$$= x + y + \frac{1}{2}$$

2° Integrale

$$\int_0^1 \left(x+y+\frac{1}{2}\right) dy = xy + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}y\Big|_0^1 =$$

$$= x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = x + 1$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 \left(\int_0^1 (x+y+z)\,dz \right) dy \right] dx =$$

3° Integrale

$$\int_0^1 (x+1)\,dx = \frac{x^2}{2} + x\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$= x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = x + 1$$

Cambio di variabili negli Integrali tripli

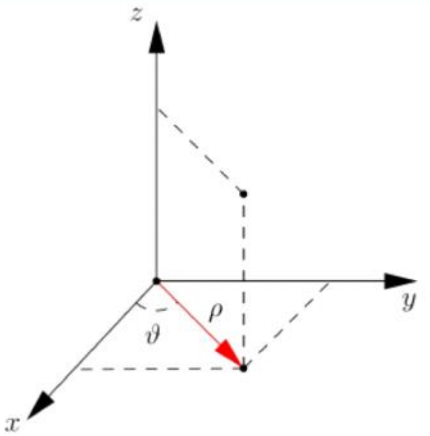
$$\varphi : \begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$$

Esempi:
1. **Coordinate cilindriche**
2. **Coordiniate sferiche**

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint_{\Omega'} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \cdot \left|\det J_{\varphi(u,v,w)}\right| \cdot du\, dv\, dw$$

Coordinate cilindriche



$$\Phi_c(\rho,\vartheta,z) = \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \\ z = z \end{cases}$$

$$\rho \geq 0, \vartheta \in [0, 2\pi), z \in \mathbb{R}.$$

$$\Phi_c : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(\rho,\vartheta,z) \mapsto (\underbrace{\rho\cos\vartheta}_{x(\rho,\vartheta,z)}, \underbrace{\rho\sin\vartheta}_{y(\rho,\vartheta,z)}, \underbrace{z}_{z(\rho,\vartheta,z)}).$$

Coordinate cilindriche

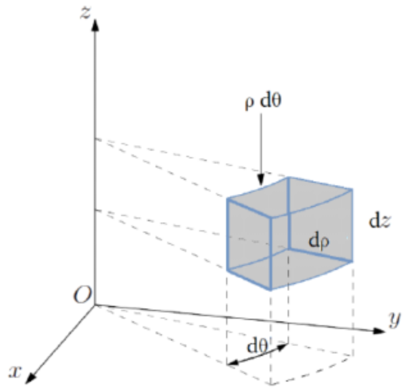
$$\left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho}(\rho,\vartheta,z) & \frac{\partial x}{\partial\vartheta}(\rho,\vartheta,z) & \frac{\partial x}{\partial z}(\rho,\vartheta,z) \\ \frac{\partial y}{\partial\rho}(\rho,\vartheta,z) & \frac{\partial y}{\partial\vartheta}(\rho,\vartheta,z) & \frac{\partial y}{\partial\rho}(\rho,\vartheta,z) \\ \frac{\partial z}{\partial\rho}(\rho,\vartheta,z) & \frac{\partial z}{\partial\vartheta}(\rho,\vartheta,z) & \frac{\partial z}{\partial z}(\rho,\vartheta,z) \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\cos\vartheta) & \frac{\partial}{\partial\vartheta}(\rho\cos\vartheta) & \frac{\partial}{\partial z}(\rho\cos\vartheta) \\ \frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\sin\vartheta) & \frac{\partial}{\partial\vartheta}(\rho\sin\vartheta) & \frac{\partial}{\partial z}(\rho\sin\vartheta) \\ \frac{\partial}{\partial\rho}(z) & \frac{\partial}{\partial\vartheta}(z) & \frac{\partial}{\partial z}(z) \end{pmatrix}\right|$$

$$= \left|\det\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\rho\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \rho\cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = |\rho\cos^2\vartheta + \rho\sin^2\vartheta| = \rho,$$

Coordinate cilindriche

$$dV = dxdydz = \rho d\vartheta \cdot dp \cdot dz = \rho dpd\vartheta dz$$

già sapevo che $dx \cdot dy = \rho \cdot d\rho \cdot d\theta$



VOLUME DI UN CILINDRO

$$\iiint_V dxdydz = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^H \rho \, d\rho \, d\vartheta \, dz$$

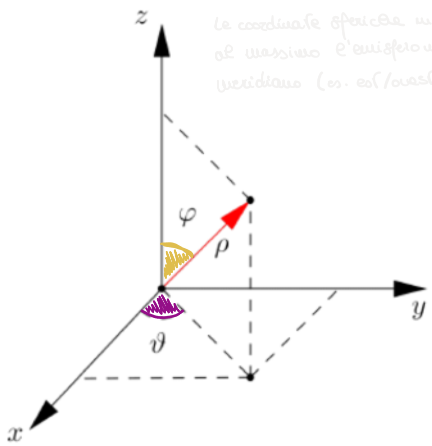
$0 \le \rho \le R \ \wedge \ 0 \le \vartheta \le 2\pi \ \wedge \ 0 \le z \le H$

$$\int_0^R \rho \, d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\vartheta \cdot \int_0^H dz = \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^R \cdot \vartheta\Big|_0^{2\pi} \cdot z\Big|_0^H =$$

$$= \frac{R^2}{2} \cdot 2\pi \cdot H = \pi R^2 \cdot H$$

Coordinate sferiche

Le coordinate sferiche mi indicano al massimo l'emisfero ma non il meridiano (es. est/ovest)



$$\Phi_s(\rho, \vartheta, \varphi) = \begin{cases} x = \rho \cos\vartheta \sin\varphi \\ y = \rho \sin\vartheta \sin\varphi \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

$$\rho \geq 0, \boxed{\vartheta \in [0, 2\pi)}, \boxed{\varphi \in [0, \pi)}.$$

$$\Phi_s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(\rho, \vartheta, \varphi) \mapsto (\underbrace{\rho\cos\vartheta\sin\varphi}_{x(\rho,\vartheta,\varphi)}, \underbrace{\rho\sin\vartheta\sin\varphi}_{y(\rho,\vartheta,\varphi)}, \underbrace{\rho\cos\varphi}_{z(\rho,\vartheta,\varphi)}).$$

Coordinate sferiche

$$\left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho}(\rho,\vartheta,\varphi) & \frac{\partial x}{\partial \vartheta}(\rho,\vartheta,\varphi) & \frac{\partial x}{\partial \varphi}(\rho,\vartheta,\varphi) \\ \frac{\partial y}{\partial \rho}(\rho,\vartheta,\varphi) & \frac{\partial y}{\partial \vartheta}(\rho,\vartheta,\varphi) & \frac{\partial y}{\partial \rho}(\rho,\vartheta,\varphi) \\ \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho,\vartheta,\varphi) & \frac{\partial}{\partial \vartheta}(\rho,\vartheta,\varphi) & \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho,\vartheta,\varphi) \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\cos\vartheta\sin\varphi) & \frac{\partial}{\partial \vartheta}(\rho\cos\vartheta\sin\varphi) & \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho\cos\vartheta\sin\varphi) \\ \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\sin\vartheta\sin\varphi) & \frac{\partial}{\partial \vartheta}(\rho\sin\vartheta\sin\varphi) & \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho\sin\vartheta\sin\varphi) \\ \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\cos\varphi) & \frac{\partial}{\partial \vartheta}(\rho\cos\varphi) & \frac{\partial}{\partial \varphi}(\rho\cos\varphi) \end{pmatrix}\right|$$

$$= \left|\det\begin{pmatrix} \cos\vartheta\sin\varphi & -\rho\sin\vartheta\sin\varphi & \rho\cos\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & \rho\cos\vartheta\sin\varphi & \rho\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{pmatrix}\right|$$

$$= \boxed{\rho^2\sin\varphi.}$$

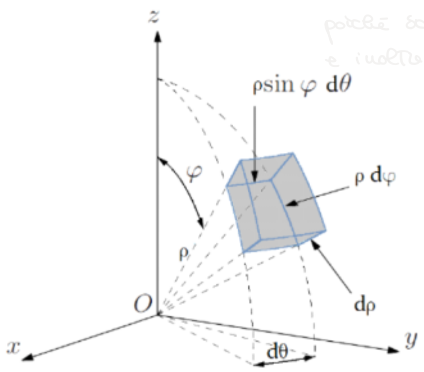
> 0 poiché $\begin{cases} \sin\varphi > 0 \text{ sempre } 0<\varphi<\pi \\ \rho^2 > 0 \text{ sempre} \end{cases}$

Tolgo il modulo poiché

Coordinate sferiche

$$dV = dxdydz = \rho sin\varphi d\vartheta \cdot \rho d\varphi \cdot dp = \rho^2 sin\varphi dp d\vartheta d\varphi$$

poiché so già che $dx \cdot dy = \rho \cdot d\theta \cdot d\rho$
e inoltre $dz = \rho \cdot \sin\varphi \cdot d\theta$



VOLUME DI UNA SFERA

$0<\varphi<\pi$
$0<\theta<2\pi$

$$\iiint_V dx\,dy\,dz = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta =$$

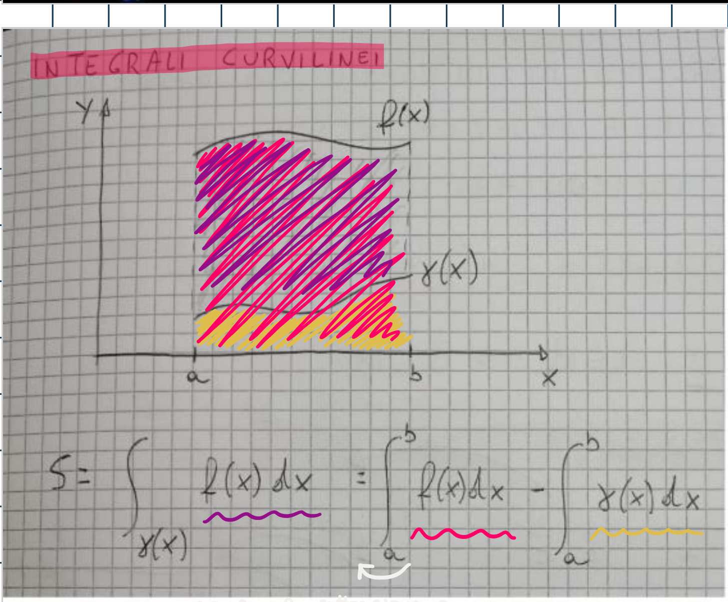
Poiché la funzione integranda posso esprimerla come fattori indipendenti allora posso spezzare in tre integrali

$$= \int_0^R \rho^2 d\rho \cdot \int_0^\pi \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \cdot \int_0^{2\pi} d\theta =$$

$$= \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^R \cdot (-\cos\varphi)\Big|_0^\pi \cdot \theta\Big|_0^{2\pi} = \frac{R^3}{3} \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Integrali Curvilinei

mercoledì 4 novembre 2020 11:20

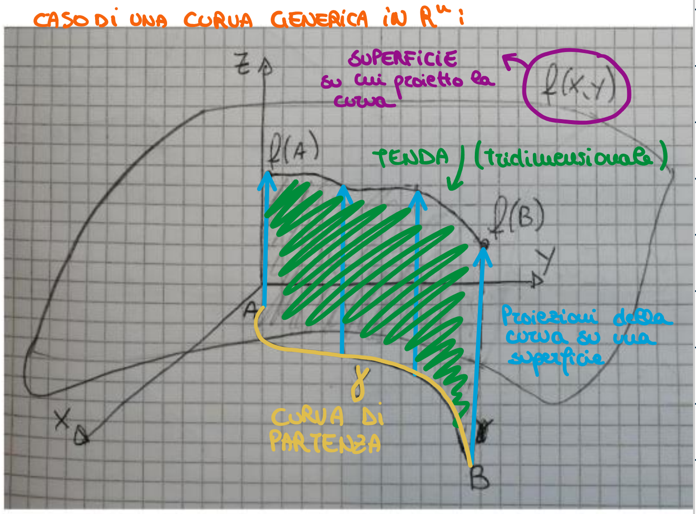


Anziché fare la sottrazione a destra opero il calcolo a sinistra usando come base dell'integrale la curva $\gamma(x)$

ESEMPIO DI ESERCIZIO!

Data una curva in (x, y, z) e una funzione che sta sopra (e disposta lungo una superficie), calcola l'area della tenda dove per tenda si intende la traccia lasciata nella proiezione di tutti i punti sulla superficie $f(x, y)$

CASO DI UNA CURVA GENERICA IN R^n:



CALCOLO DI INTEGRALI CON BASE UNA CURVA GENERICA E NON UN SEGMENTO ORIZZONTALE

CONCETTO DI CURVA

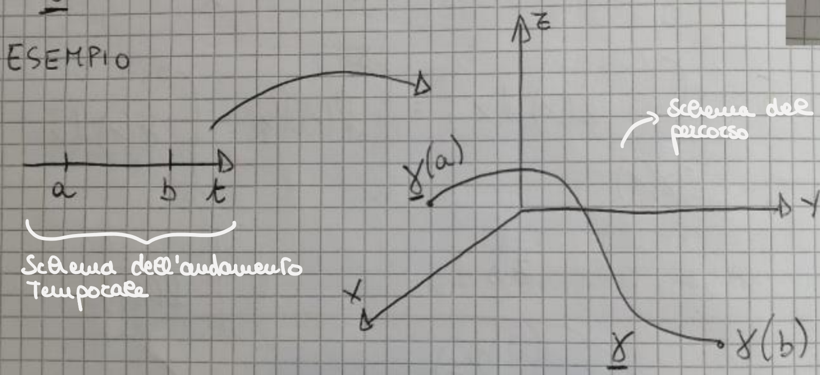
$\underline{\gamma}: A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}^n$

L' immagine può essere non rappresentabile graficamente

$\underline{\gamma}: [a, b] \to B \subseteq \mathbb{R}^3$

$\underline{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$

ESEMPIO



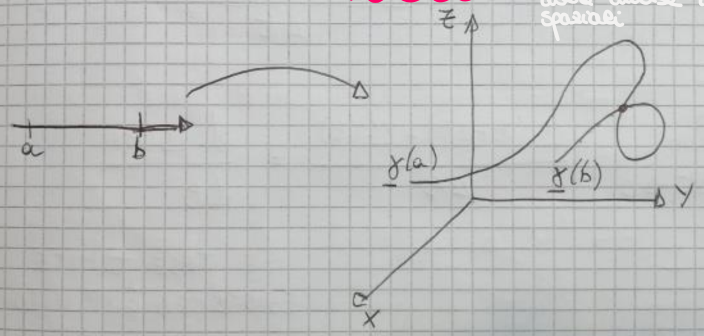
DEFINIZIONI

Il dominio della funzione è MONODIMENSIONALE (es. tempo → funzioni di fisica)

CURVA SEMPLICE

$\underline{\gamma}: A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}^n$ É UNA CURVA SEMPLICE SE É INIETTIVA

Valori diversi di dominio temporale devono avere diverse immagini spaziali

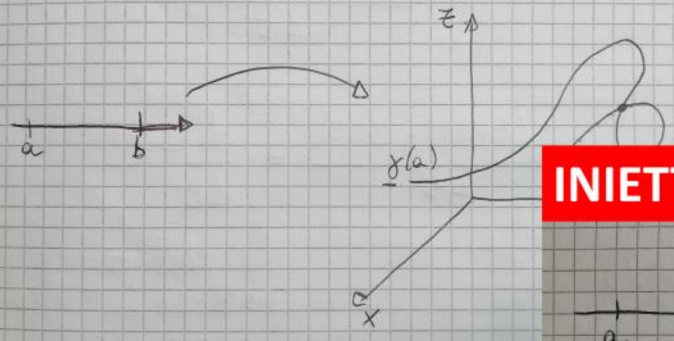


NON INIETTIVA

DEFINIZIONI

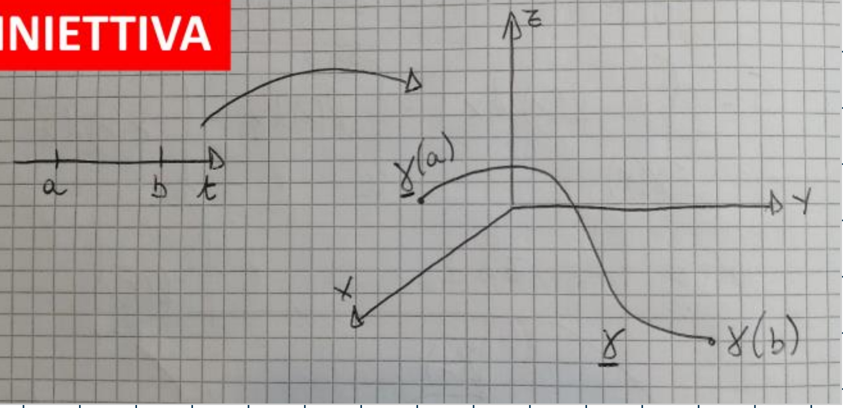
CURVA SEMPLICE

$\underline{\gamma}: A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}^m$ É UNA CURVA SEMPLICE SE É INIETTIVA



NON INIETTIVA

INIETTIVA



DEFINIZIONI

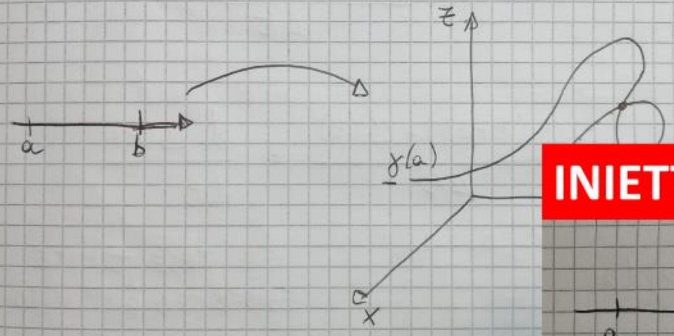
CURVA SEMPLICE

$\underline{\gamma}: A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}^m$ É UNA CURVA SEMPLICE SE É INIETTIVA

L'IMMAGINE DI A, OVVERO $\gamma(A)$ SI DEFINISCE SOSTEGNO DELLA CURVA

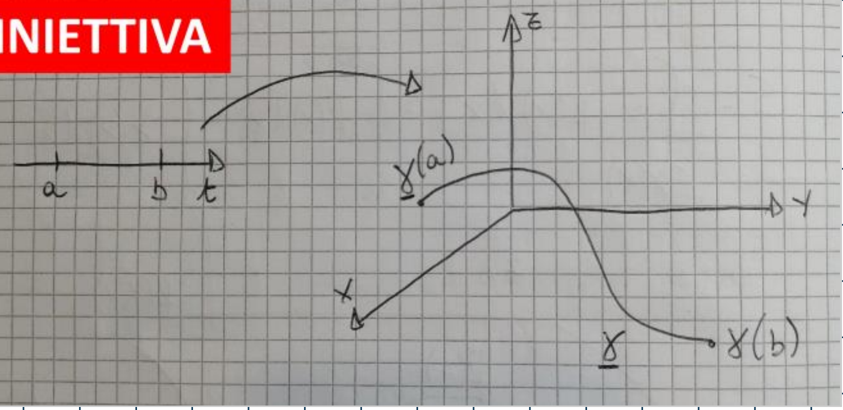
UNA CURVA $\underline{\gamma} \in C^k(A) \Leftrightarrow \gamma_i \in C^k(A)$ $i = 1, 2, \dots, m$

Se ogni coordinata di γ è di classe C^k, anche tutta la funzione lo è e viceversa



NON INIETTIVA

INIETTIVA



CALCOLO DIFFERENZIALE PER UNA CURVA

ESEMPIO

$$\underline{\gamma}: t \longrightarrow \underline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$$

posso generalizzare per qualsiasi n per cui $\mathbb{R}^n$

Considero un intervallo di ampiezza Δt:

$$[t, t+\Delta t] \Rightarrow \underbrace{\frac{\underline{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t)}{\Delta t}}$$

Lo scrivo come un rapporto incrementale

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\underline{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\,\underline{r}(t)}{dt}$$

calcolandone il limite sto considerando un intervallo piccolissimo per cui calcolo la velocità istantanea

SE TALE LIMITE ESISTE ED É FINITO ESSO COSTITUISCE LA VELOCITÀ ISTANTANEA $\underline{v}(t)$

CALCOLO DIFFERENZIALE PER UNA CURVA

ESEMPIO

$$\underline{\gamma}: t \longrightarrow \underline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$$

$$[t, t+\Delta t] \Rightarrow \frac{\underline{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t)}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\underline{r}(t+\Delta t) - \underline{r}(t)}{\Delta t}$$

SI DIMOSTRA CHE

$$\frac{d\,\underline{r}(t)}{dt} = \underline{v}(t) = \frac{d\,x(t)}{dt} \cdot \hat{i} + \frac{d\,y(t)}{dt} \cdot \hat{j} + \frac{d\,z(t)}{dt} \cdot \hat{k}$$

UNA CURVA SI DERIVA (E SI INTEGRA) DERIVANDO (ED INTEGRANDO) LE SINGOLE COMPONENTI

MODULO DELLA VELOCITÀ

$$|\underline{v}(t)| = |(v_x(t), v_y(t), v_z(t))| =$$
$$= \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t) + v_z^2(t)}$$

SE LE COMPONENTI DI $\underline{v}(t)$ SONO DERIVABILI $\Rightarrow$ È POSSIBILE CALCOLARE L'ACCELERAZIONE

$$\underline{a}(t) = a_x(t)\cdot\hat{i} + a_y(t)\cdot\hat{j} + a_z(t)\cdot\hat{k} =$$
$$= \frac{d\,v_x(t)}{dt}\cdot\hat{i} + \frac{d\,v_y(t)}{dt}\cdot\hat{j} + \frac{d\,v_z(t)}{dt}\cdot\hat{k} =$$
$$= \frac{d^2x(t)}{dt^2}\cdot\hat{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\cdot\hat{j} + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\cdot\hat{k}$$

IN GENERALE

$$\underline{\gamma}: t \to \mathbb{R}^n$$
$$\underline{\gamma}' = (\gamma_1', \dots, \gamma_n')$$
$$\underline{\gamma}'' = (\gamma_1'', \dots, \gamma_n'')$$

DEFINIZIONI

$\underline{\gamma}: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ È ~~REGOLARE~~ FUNZIONE SE È

1) DERIVABILE E

2) $\underline{\gamma}'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \dots, \gamma_n'(t)) \neq \underline{0}$ $\quad \forall t \in (a,b)$

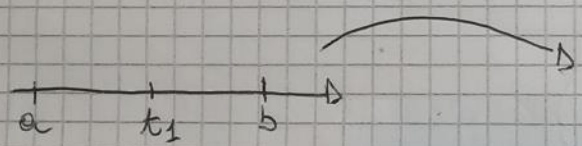
Se la velocità istantanea si annulla vuol dire che la particella si ferma in un punto ed in questo caso la curva è definita come non regolare

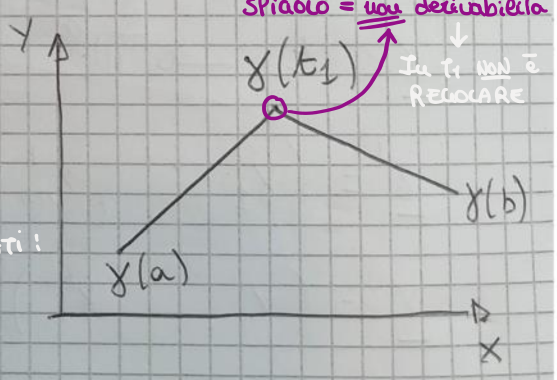
$\underline{\gamma}'(t) = \underline{0} \Rightarrow$ VELOCITÀ ISTANTANEA NULLA

FISICAMENTE, LA PARTICELLA SI FERMA

DEFINIZIONI

CURVA REGOLARE A TRATTI





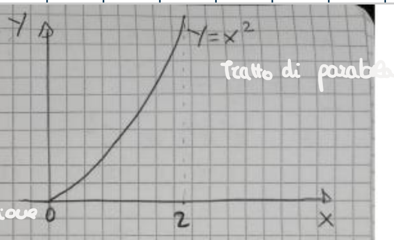
Una curva può essere regolare in tratti SEPARATI:

$\underline{\gamma}$ REGOLARE IN (a, t_1)

$\underline{\gamma}$ REGOLARE IN (t_1, b)

ESEMPIO

$y = x^2 \quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



POSSO ESPRIMERE f COME UNA CURVA? (in funzione di t)

DOMINIO TEMPORALE

$\underline{\gamma}: [a, b] \to (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\underline{\gamma}(t) = \begin{cases} x = t \\ y = f(x(t)) = f(t) = t^2 \end{cases}$$

$\underline{\gamma}: [0, 2] \to [t, t^2]$

VELOCITÀ

$\boxed{\underline{\gamma}'(t)} = \underline{v}(t) = (1, 2t) = \hat{i} + 2t \cdot \hat{j}$

ACCELERAZIONE

$\boxed{\underline{\gamma}''(t)} = \underline{a}(t) = (0, 2) = 2 \cdot \hat{j}$

OGNI $y = f(x)$ DI ANALISI 1 PUÒ ESSERE ESPRESSA COME

$\underline{\gamma}: [a, b] \to (x, y) \in \mathbb{R}^2$ cioè una funzione in base al tempo

$$\underline{\gamma}(t) = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(x(t)) = f(t) \end{cases}$$

DEFINIZIONI

CURVA LISCIA (O RETTIFICABILE) ⇒ è facilmente misurabile la lunghezza del percorso

$\underline{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ É LISCIA SE É REGOLARE

cioè con tutte le proprietà di una retta regolare

E $\gamma(t) \in C^1$ (regolare e di classe C^1)

cioè continua

REGOLE DI DERIVAZIONE DI FUNZIONI VETTORIALI

$\underline{\quad}$ → VETTORE

1) $$\frac{d}{dt}\left(\underline{r}(t) + \underline{s}(t)\right) = \frac{d\,\underline{r}(t)}{dt} + \frac{d\,\underline{s}(t)}{dt}$$

2) $$\frac{d}{dt}\left(\lambda(t) \cdot \underline{r}(t)\right) = \frac{d\,\lambda(t)}{dt} \cdot \underline{r}(t) + \lambda(t) \cdot \frac{d\,\underline{r}(t)}{dt}$$

3) $$\frac{d}{dt}\left(\underline{r}(t) \circ \underline{s}(t)\right) = \frac{d\,\underline{r}(t)}{dt} \circ \underline{s}(t) + \underline{r}(t) \circ \frac{d\,\underline{s}(t)}{dt}$$

4) $$\frac{d}{dt}\left(\underline{r}(t) \times \underline{s}(t)\right) = \frac{d\,\underline{r}(t)}{dt} \times \underline{s}(t) + \underline{r}(t) \times \frac{d\,\underline{s}(t)}{dt}$$

TO BE CONTINUED...

ESERCIZIO DI FISICA

DIMOSTRARE CHE

$$|\underline{v}(t)| = \text{COST} \iff \underline{a}(t) \perp \underline{v}(t)$$

perpendicolare

$$|\underline{v}(t)| = \sqrt{\underline{v}(t) \circ \underline{v}(t)}$$

equivale al modulo euclideo

$$\underline{a}(t) = \frac{d\,\underline{v}(t)}{dt}$$

$$\underline{a}(t) \circ \underline{v}(t) = \frac{d(\underline{v}(t))}{dt} \circ \underline{v}(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\underline{v}(t) \circ \underline{v}(t)\right) = 0 \quad \text{SE } |\underline{v}(t)| = \text{COST}$$

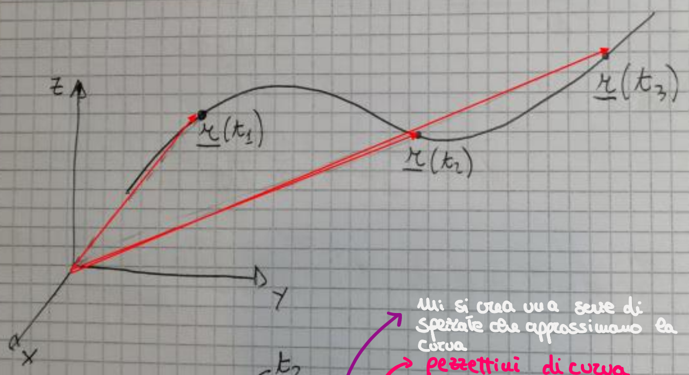
Prodotto scalare di due vettori paralleli

LUNGHEZZA DI UN TRATTO DI CURVA LISCIA

INIZIAMO CON

$$\underline{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$$

$$\underline{r}(t) = x(t) \cdot \hat{i} + y(t) \cdot \hat{j} + z(t) \cdot \hat{k}$$



$$L_{t_1,t_2} = \int_{t_1}^{t_2} |d\,\underline{r}(t)|$$

Mi si crea una serie di spezzate che approssimano la curva

pezzettini di curva

→ DIFFERENZIALE $d\underline{r}(t)$

Lunghezza infinitesi dello spostamento al variare del Tempo

$$d\,\underline{r}(t) = \frac{d(\underline{r}(t))}{dt} \cdot dt$$

$$d\underline{r}(t) = (d\,x(t),\, d\,y(t),\, d\,z(t)) =$$

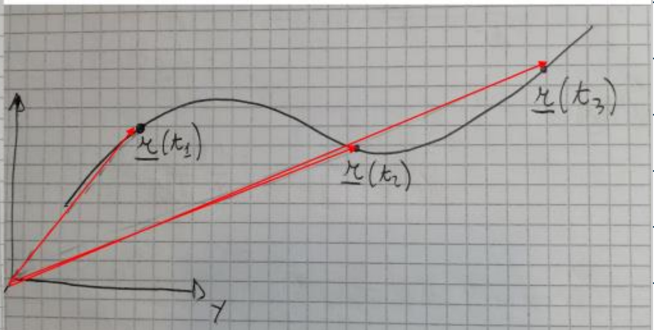
$$= \left(\frac{d\,x(t)}{dt} \cdot dt,\ \frac{d\,y(t)}{dt} \cdot dt,\ \frac{d\,z(t)}{dt}\, dt \right) =$$

$$= \left(\frac{d\,x(t)}{dt},\ \frac{d\,y(t)}{dt},\ \frac{d\,z(t)}{dt} \right) \cdot dt =$$

$$= \frac{d\,\underline{r}(t)}{dt} \cdot dt$$

$$|d\underline{r}(t)| = \left| \frac{d\,\underline{r}(t)}{dt} \right| \cdot dt$$

$$L_{t_1,t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{d\,\underline{r}(t)}{dt} \right| \cdot dt$$



$$L_{t_1,t_2} = \int_{t_1}^{t_2} |d\underline{r}(t)|$$

$$d\,\underline{r}(t) = \frac{d\,(\underline{r}(t))}{dt} \cdot dt$$

ASCISSA CURVILINEA

$s(t)$ → percorso compiuto da $t=0$

$$s(t) = \int_0^t \left| \frac{d\,\underline{r}(t)}{dt} \right| dt$$

$$\boxed{\underline{r}(t) = \underline{r}(t(s)) = \underline{r}(s)}$$

Se la curva è **LISCIA** allora il vettore posizione (percorso in funzione del Tempo) posso porlo in funzione di questo spostamento scalare poiché il tempo stesso può essere espresso in sua funzione

ESEMPIO

ELICA CIRCOLARE

circonferenza di cui aumenta la z (dall'alto sembrano solo tante circonferenze, la z aumenta se vista in prospettiva)

$$\underline{r}(t) = \underbrace{a\cos t}\cdot\hat{i} + \underbrace{a\,\text{sen}\, t}\cdot\hat{j} + b\cdot t\cdot\hat{k}$$

aiutano ad individuare circonferenze

$$a, b \in \mathbb{R}^+ \quad , \quad t \in [0, +\infty)$$

$$\frac{d\underline{r}(t)}{dt} = -a\,\text{sen}\,t\cdot\hat{i} + a\cos t\cdot\hat{j} + b\cdot\hat{k}$$

$$\left|\frac{d\underline{r}(t)}{dt}\right| = \sqrt{a^2\text{sen}^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\boxed{s(t) = \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\cdot dt = \sqrt{a^2+b^2}\cdot t}$$

$$t = t(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\underline{r}(s) = a\cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\cdot\hat{i} + a\,\text{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\cdot\hat{j} + \frac{b\cdot s}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\hat{k}$$

$$s \in [0, +\infty)$$

IN $\mathbb{R}^2$

$$y = f(x) \implies \underline{r}(t) = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases}$$

$$s(t) = \int_0^t \underbrace{\sqrt{\overset{t'}{1} + (\overset{f'(t)}{f'(t)})^2}}_{\text{MODULO DI } |ab|}\, dt$$

$\sqrt{a^2+b^2}$

$$L_{t_1,t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + (f'(t))^2}\; dt$$

ESERCIZIO

LUNGHEZZA DI UNA CIRCONFERENZA

$$\underline{\gamma} : [0, 2\pi] \to (R\cos\vartheta, R\,\text{sen}\,\vartheta)$$

$$\underline{\gamma}'(t) = \underline{\gamma}'(\vartheta) = (-R\,\text{sen}\,\vartheta, R\cos\vartheta)$$

$$L_{0,2\pi} = \int_0^{2\pi} \sqrt{(R^2\text{sen}^2\vartheta + R^2\cos^2\vartheta)}\; d\vartheta = \int_0^{2\pi} R\, d\vartheta = 2\pi R$$

$$L_{\vartheta_1,\vartheta_2} = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} R\, d\vartheta = (\vartheta_2 - \vartheta_1)\cdot R$$

$$s(\vartheta) = \int_0^{\vartheta} R\, d\vartheta = \vartheta R$$

IN GENERALE

$$\underline{\gamma} : \underbrace{[a, b]}_{\text{dominio monodimensionale}} \to \mathbb{R}^n \qquad t_1, t_2 \in [a, b]$$

$$L_{t_1,t_2} = \int_{t_1}^{t_2} |\underline{\gamma}'(t)|\cdot dt$$

IN GENERALE

$\underline{\gamma} : \underbrace{[a, b]}_{\text{dominio monodimensionale}} \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad t_1, t_2 \in [a, b]$

$$L_{t_1, t_2} = \int_{t_1}^{t_2} |\underline{\gamma}'(t)| \cdot dt$$

$$s(t) = \int_0^t |\underline{\gamma}'(t)| \cdot dt$$

$$ds(t) = |d\underline{\gamma}(t)| = \underbrace{|\underline{\gamma}'(t)|}_{\text{vettore spostamento / velocità istantanea}} \cdot dt$$

$$s(t) = \int_0^t ds(t)$$

INTEGRALE CURVILINEO

$\underline{\gamma} : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}^n$

$ds(t)$ MODULO DELLO SPOSTAMENTO INFINITESIMO LUNGO LA CURVA (QUANTITÀ SCALARE)

$d\underline{r}(t)$ VARIAZIONE INFINITESIMA DEL VETTORE POSIZIONE (QUANTITÀ VETTORIALE)

$$ds(t) = |d\underline{r}(t)|$$

SIA $f : B \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow C \subseteq \mathbb{R}$

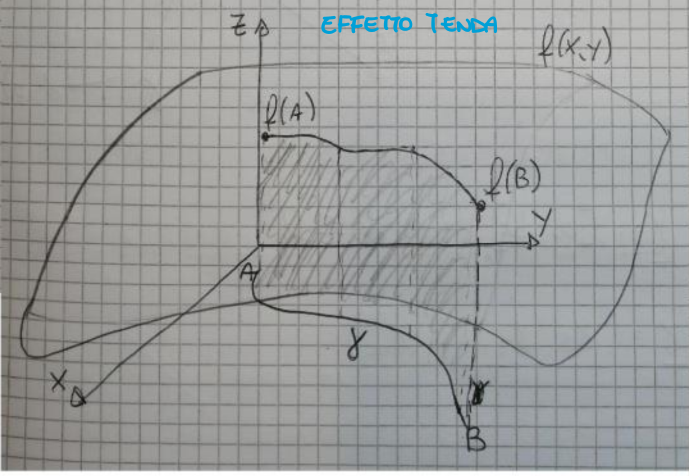
$$f(x_1(t), x_2(t), \dots x_n(t)) = f(\underline{r}(t))$$

$$I_1 = \int_\gamma f(\underline{r}(t)) \cdot ds(t) = \int_\gamma f(\underline{r}(t)) \cdot \left|\frac{d\underline{r}(t)}{dt}\right| dt$$

INTEGRALE CURVILINEO DI CAMPI SCALARI

INTEGRALE CURVILINEO Campi scalari!

$\underline{\gamma}: A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}^n$



$ds(t) = |d\underline{r}(t)|$

SIA $f: B \subseteq \mathbb{R}^n \to C \subseteq \mathbb{R}$

$f(x_1(t), x_2(t), \dots x_n(t)) = f(\underline{r}(t))$

$$I_1 = \int_\gamma f(\underline{r}(t)) \cdot ds(t) = \int_\gamma f(\underline{r}(t)) \cdot \left| \frac{d\underline{r}(t)}{dt} \right| dt$$

INTEGRALE CURVILINEO DI CAMPI SCALARI

Campi vettoriali!

SIA $\underline{F}: B \subseteq \mathbb{R}^n \to C \subseteq \mathbb{R}^n$

$\underline{F} = (F_1, F_2, \dots F_n)$

$\underline{F}(\underline{r}(t)) = (F_1(\underline{r}(t)), F_2(\underline{r}(t)), \dots F_n(\underline{r}(t)))$

$$I_2 = \int_\gamma \underline{F}(\underline{r}(t)) \circ d\underline{r}(t)$$

INTEGRALE CURVILINEO DI UN CAMPO VETTORIALE

↓

!!! DA UN PUNTO DI VISTA FISICO, É IL CALCOLO DI UN LAVORO

FISICAMENTE, É UN LAVORO INFINITESIMO

$\underline{F}(\underline{r}(t)) = (F_1(x_1(t), x_2(t), \dots x_n(t)), \dots, F_n(x_1(t), \dots x_n(t)))$

$d\underline{r}(t) = (dx_1(t), dx_2(t), \dots dx_n(t))$

$F_i(x_1(t), \dots x_n(t)) := F_i \qquad i = 1, 2, \dots n$

$dx_i(t) := dx_i$

$\underline{F}(\underline{r}(t)) \circ d\underline{r}(t) = F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + \dots F_n dx_n$

FORMA DIFFERENZIALE => in Fisica: Lavoro Infinitesimo

IN $\mathbb{R}^3$

$\underline{r}:[a,b]\longrightarrow(x,y,z)$

$\underline{F}:(x,y,z)\longrightarrow\left(F_1(x,y,z),F_2(x,y,z),F_3(x,y,z)\right)$

$\underline{r}:[t_1,t_2]\longrightarrow\left(x(t),y(t),z(t)\right)$

$\underline{F}:\left(x(t),y(t),z(t)\right)\longrightarrow\Big(F_1\left(x(t),y(t),z(t)\right), F_2\left(x(t),y(t),z(t)\right), F_3\left(x(t),y(t),z(t)\right)\Big)$

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\underline{F}(\underline{r}(t))\circ d\underline{r}(t)=$$

COMPONENTI DEL VETTORE SPOSTAMENTO

$$=\int_{t_1}^{t_2}F_1\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot dx(t)+\int_{t_1}^{t_2}F_2\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot dy(t)$$

COMPONENTI DEL VETTORE FORZA

$$+\int_{t_1}^{t_2}F_3\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot dz(t)=$$

$$=\boxed{\begin{matrix}\frac{dx(t)}{dt}dt\\ \frac{dy(t)}{dt}dt\\ \frac{dz(t)}{dz}dt\end{matrix}}$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}F_1(\underline{r}(t))\cdot\frac{dx(t)}{dt}dt+\int_{t_1}^{t_2}F_2(\underline{r}(t))\cdot\frac{dy(t)}{dt}dt+$$

$$\int_{t_1}^{t_2}F_3(\underline{r}(t))\cdot\frac{dz(t)}{dt}dt$$

IN $\mathbb{R}^3$

$\underline{r}:[a,b]\longrightarrow(x,y,z)$

$\underline{F}:(x,y,z)\longrightarrow\left(F_1(x,y,z),F_2(x,y,z),F_3(x,y,z)\right)$

$\underline{r}:[t_1,t_2]\longrightarrow\left(x(t),y(t),z(t)\right)$

$\underline{F}:\left(x(t),y(t),z(t)\right)\longrightarrow\Big(F_1\left(x(t),y(t),z(t)\right), F_2\left(x(t),y(t),z(t)\right), F_3\left(x(t),y(t),z(t)\right)\Big)$

$$\oint\underline{F}(\underline{r}(t))\circ d\underline{r}(t)$$

LAVORO CALCOLATO SU UN PERCORSO CHIUSO:

!!! CIRCUITAZIONE

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\underline{F}(\underline{r}(t))\circ d\underline{r}(t)=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}F_1\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot dx(t)+\int_{t_1}^{t_2}F_2\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot dy(t)$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}F_3\left(x(t),y(t),z(t)\right)\cdot dz(t)=$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}F_1(\underline{r}(t))\cdot\frac{dx(t)}{dt}dt+\int_{t_1}^{t_2}F_2(\underline{r}(t))\cdot\frac{dy(t)}{dt}dt+$$

$$\int_{t_1}^{t_2}F_3(\underline{r}(t))\cdot\frac{dz(t)}{dt}dt$$

ESERCIZI

CAMPO SCALARE

↓

feuda

1. $\int_\Gamma (x+y^3)\,ds$ $\qquad \Gamma: \begin{cases} x=t \\ y=t \end{cases}$ $\quad t\in[0,1]$ $\quad \rightarrow y=x$ BISETTRICE 1° e 3° quadrante

$$(x'(t), y'(t)) = \frac{dr(t)}{dt} = (1,1)$$

$$\int_a^b f(r(t))\,|r'(t)|$$

$$ds = \underbrace{\left|\frac{dr(t)}{dt}\right|}_{\sqrt{1^2+1^2}} \cdot dt = \sqrt{2}\cdot dt$$

$$\int_\Gamma (t+t^3)\cdot\sqrt{2}\cdot dt = \int_0^1 \sqrt{2}\,(t+t^3)\,dt =$$

$$= \sqrt{2}\cdot\left(\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

ESERCIZI

2. $\int_\Gamma x^2 y\, ds$ $\qquad \Gamma: \begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\operatorname{sen} t \end{cases}$ $\quad t\in[0,\pi/2]$

$$ds = \left|\frac{dr(t)}{dt}\right| = |(x'(t), y'(t))| = |(-2\operatorname{sen} t, 2\cos t)|$$

$$ds = \sqrt{(-2\operatorname{sen} t)^2+(2\cos t)^2}\cdot dt = 2\,dt$$

$$\int_\Gamma (2\cos t)^2\cdot(2\operatorname{sen} t)\cdot 2\,dt = 16\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\cdot \operatorname{sen} t\,dt =$$

$$= -16\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\cdot(-\operatorname{sen} t)\,dt = -16\cdot\frac{\cos^3(t)}{3}\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{16}{3}$$

ESERCIZI

3. $$\int_\Gamma \sqrt{x^2+y^2}\,ds \qquad \Gamma: \begin{cases} x = e^t\cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$\frac{dr(t)}{dt} = (x'(t), y'(t)) = \left(\underline{e^t\cos t - e^t\sin t}^{\,2}, \underline{e^t\sin t + e^t\cos t}^{\,2}\right)$$

$$ds = \sqrt{e^{2t}(\cos^2 t - 2\cos t\cdot\sin t + \sin^2 t) + e^{2t}(\sin^2 t + 2\sin t\cos t + \cos^2 t)}\cdot dt$$

ESERCIZI

$$= \sqrt{e^{2t}(1 - 2\sin t\cos t) + e^{2t}(1 + 2\sin t\cos t)}\;dt =$$

$$= \sqrt{2e^{2t}}dt = \sqrt{2}\cdot e^t\,dt \quad |r'(t)|$$

$$\int_\Gamma \sqrt{e^{2t}\cos^2 t + e^{2t}\sin^2 t}\cdot\sqrt{2}e^t\cdot dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}\sqrt{2}e^{2t}\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{2\pi} e^{2t}\cdot 2dt =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[e^{2t}\right]_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(e^{4\pi} - 1\right)$$

ESERCIZI

4. $\int_\Gamma z\,ds$ CAMPO SCALARE $\Gamma: \begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\,\text{sen}\, t \\ z = 4t \end{cases}$ $t \in [0, \pi]$

$\begin{cases} x'(t) = -3\,\text{sen}\, t \\ y'(t) = 3\cos t \\ z'(t) = 4 \end{cases}$ $ds = \sqrt{9\,\text{sen}^2 t + 9\cos^2 t + 16}\,dt =$

$= \sqrt{9+16}\,dt = 5\,dt$

$\int_0^\pi 4t \cdot 5\,dt = 20\int_0^\pi t\,dt = 20\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^\pi = 10\pi^2$

ESERCIZI

5. $\int_\Gamma \left(\frac{2}{3}x + 4z\right) ds$ CAMPO SCALARE $\Gamma: \begin{cases} x = 3t \\ y = \frac{3}{2}t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$ $t \in [0, 1]$

$\begin{cases} x'(t) = 3 \\ y'(t) = 3t \\ z'(t) = 3t^2 \end{cases}$ $ds = \sqrt{9 + 9t^2 + 9t^4}\,dt =$ $|r'(t)|$

$= 3\sqrt{1+t^2+t^4}\,dt$

$3\int_0^1 (2t + 4t^3)\sqrt{1+t^2+t^4}\,dt =$

$3 \cdot \frac{2}{3}\left.(1+t^2+t^4)^{3/2}\right|_0^1 = 2\left(\sqrt{3^3} - 1\right) = 2\left(\sqrt{27} - 1\right)$

SIA $\underline{F} : B \subseteq \mathbb{R}^n \to C \subseteq \mathbb{R}^n$

$\underline{F} = (F_1, F_2, \dots F_n)$

$\underline{F}(\underline{r}(t)) = (F_1(\underline{r}(t)), F_2(\underline{r}(t)), \dots F_n(\underline{r}(t)))$

$$I_2 = \int_\gamma \underline{F}(\underline{r}(t)) \circ d\underline{r}(t)$$

INTEGRALE CURVILINEO DI UN CAMPO VETTORIALE

DA UN PUNTO DI VISTA FISICO, É IL CALCOLO DI UN LAVORO

FISICAMENTE, É UN LAVORO INFINITESIMO

$\underline{F}(\underline{r}(t)) = (F_1(x_1(t), x_2(t), \dots x_n(t)), \dots, F_n(x_1(t), \dots x_n(t)))$

$d\underline{r}(t) = (dx_1(t), dx_2(t), \dots dx_n(t))$

$F_i(x_1(t), \dots x_n(t)) := F_i \qquad i = 1, 2, \dots n$

$dx_i(t) := dx_i$

$\underline{F}(\underline{r}(t)) \circ d\underline{r}(t) = F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + \dots F_n dx_n$

FORMA DIFFERENZIALE

IN $\mathbb{R}^3$

$\underline{r} : [a, b] \to (x, y, z)$

$\underline{F} : (x, y, z) \to (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$

$\underline{r} : [t_1, t_2] \to (x(t), y(t), z(t))$

$\underline{F} : (x(t), y(t), z(t)) \to (F_1(x(t), y(t), z(t)), F_2(x(t), y(t), z(t)), F_3(x(t), y(t), z(t)))$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \underline{F}(\underline{r}(t)) \circ d\underline{r}(t) =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} F_1(x(t), y(t), z(t)) \cdot dx(t) + \int_{t_1}^{t_2} F_2(x(t), y(t), z(t)) \cdot dy(t)$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} F_3(x(t), y(t), z(t)) \cdot dz(t) =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} F_1(\underline{r}(t)) \cdot \frac{dx(t)}{dt} dt + \int_{t_1}^{t_2} F_2(\underline{r}(t)) \cdot \frac{dy(t)}{dt} dt +$$

$$\int_{t_1}^{t_2} F_3(\underline{r}(t)) \cdot \frac{dz(t)}{dt} dt$$

t definisce il dominio della funzione

IN $\mathbb{R}^3$

$\underline{r} : [a,b] \longrightarrow (x, y, z)$

$\underline{F} : (x,y,z) \longrightarrow \left(F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)\right)$

$\underline{r} : [t_1, t_2] \longrightarrow (x(t), y(t), z(t))$

$\underline{F} : (x(t), y(t), z(t)) \rightarrow \left(F_1(x(t), y(t), z(t)), F_2(x(t), y(t), z(t)), F_3(x(t), y(t), z(t)) \right)$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \underline{F}(\underline{r}(t)) \circ d\underline{r}(t) =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} F_1(x(t), y(t), z(t)) \cdot dx(t) + \int_{t_1}^{t_2} F_2(x(t), y(t), z(t)) \cdot dy(t)$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} F_3(x(t), y(t), z(t)) \cdot dz(t) =$$

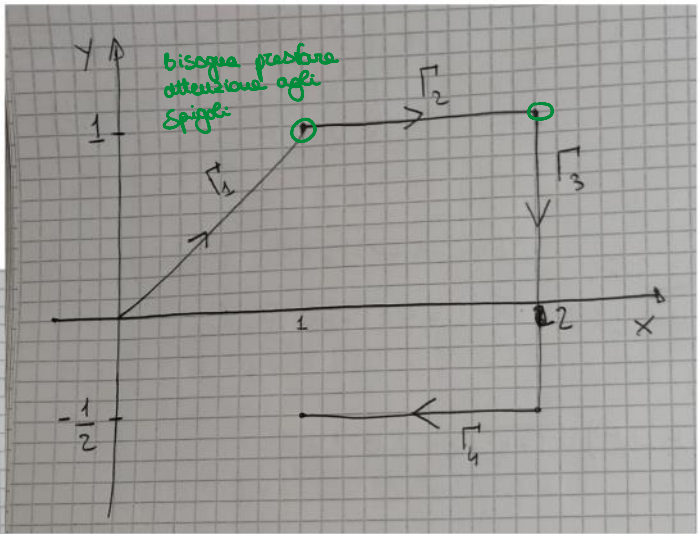
$$= \int_{t_1}^{t_2} F_1(\underline{r}(t)) \cdot \frac{dx(t)}{dt}\, dt + \int_{t_1}^{t_2} F_2(\underline{r}(t)) \cdot \frac{dy(t)}{dt}\, dt + \int_{t_1}^{t_2} F_3(\underline{r}(t)) \cdot \frac{dz(t)}{dt}\, dt$$

$$\oint \underline{F}(\underline{r}(t)) \circ d\underline{r}(t)$$

LAVORO CALCOLATO SU UN PERCORSO CHIUSO:

CIRCUITAZIONE

ESERCIZI



1.

$\underline{F} = (x, x^2)$ CAMPO DI FORZE

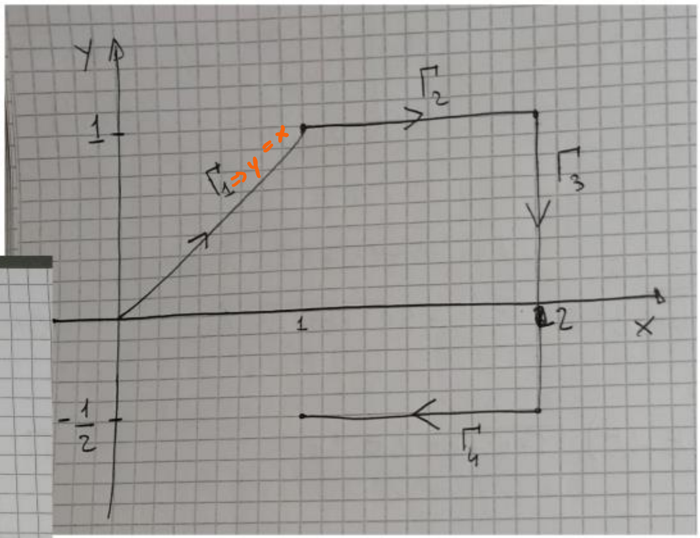
CALCOLARE IL LAVORO LUNGO IL PERCORSO

$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$

ADDITIVO

$L_\Gamma = L_{\Gamma_1} + L_{\Gamma_2} + L_{\Gamma_3} + L_{\Gamma_4}$

ESERCIZI



CALCOLO L_{Γ_1}

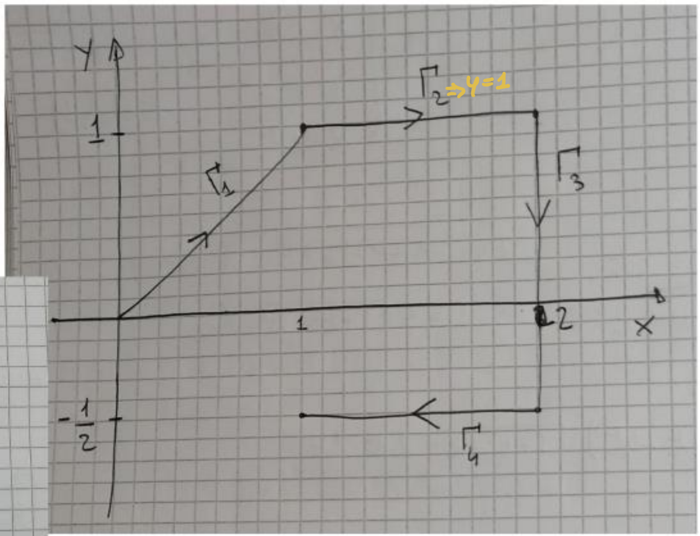
$$\Gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad \text{Retta } y = x \quad t \in [0,1] \xrightarrow{\text{derivata}} \begin{cases} dx = dt \\ dy = dt \end{cases}$$

$$L_{\Gamma_1} = \int \overset{1^a \text{ comp.}}{F_1}\, dx + \int \overset{2^\circ \text{ comp.}}{F_2}\, dy = \int_0^1 t\, dt + \int_0^1 t^2\, dt =$$

$$= \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 + \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Bisogna verificare che il campo sia completamente regolare o, nel caso in cui non lo sia e presenti degli spigoli, va spezzata

ESERCIZI



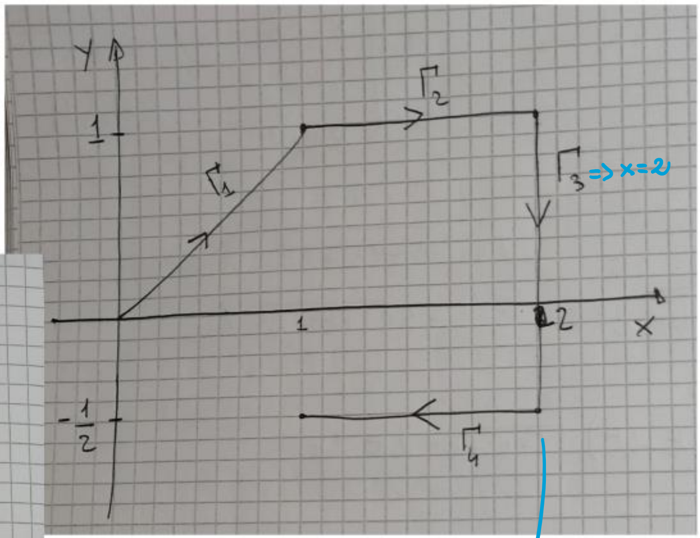
CALCOLO L_{Γ_2}

$$\Gamma_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{RETTA } y = 1 \quad t \in [1,2] \xrightarrow{\text{derivata}} \begin{cases} dx = dt \\ dy = 0 \end{cases}$$

$$L_{\Gamma_2} = \int F_1\, dx + \int F_2\, dy = \int_1^2 t\, dt = \frac{t^2}{2}\Big|_1^2 =$$

$$= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

ESERCIZI



CALCOLO L_{Γ_3}

RETTA $x=2$

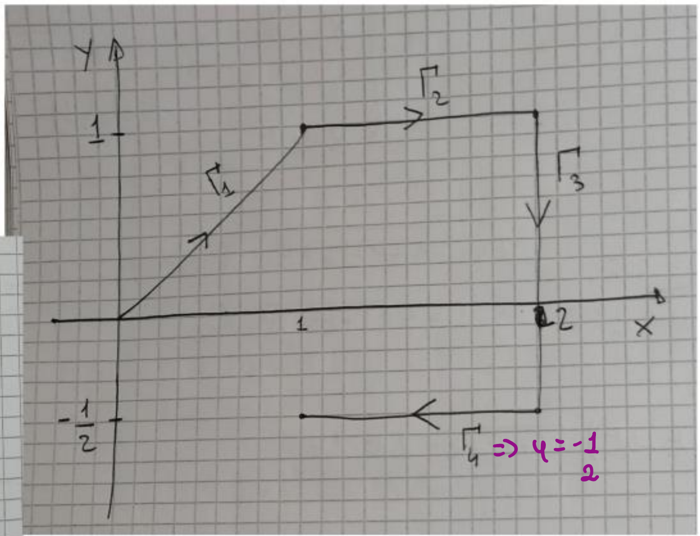
$$\Gamma_3: \begin{cases} x = 2 \\ y = t \end{cases} \qquad t \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right] \xrightarrow{\text{derivata}} \begin{cases} dx = 0 \\ dy = dt \end{cases}$$

$$L_{\Gamma_3} = \int F_1\,dx + \int \overset{= y = x^2 = 4}{F_2}\,dy = \int_1^{-1/2} 4\,dt = 4t\Big|_1^{-1/2} =$$

$$= 4\left(-\frac{1}{2} - 1\right) = 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -6$$

In questo caso, per l'integrale si segue il verso del percorso

ESERCIZI



CALCOLO L_{Γ_4}

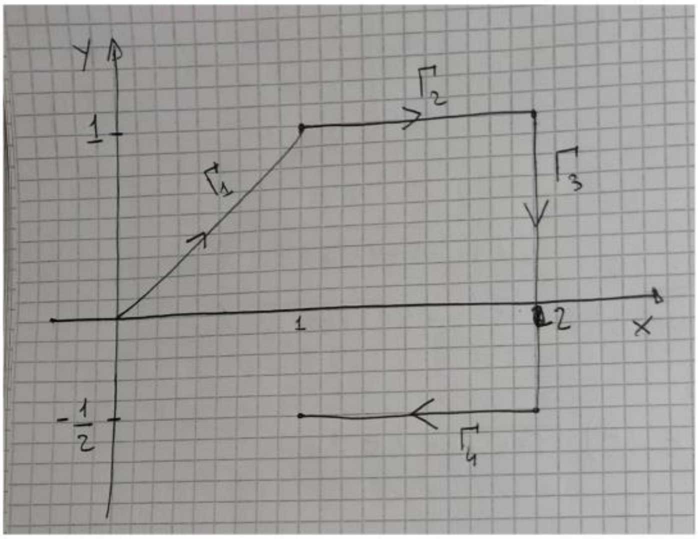
RETTA $y = -\frac{1}{2}$

$$\Gamma_4: \begin{cases} x = t \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \qquad t \in [1, 2] \xrightarrow{\text{derivata}} \begin{cases} dx = dt \\ dy = 0 \end{cases}$$

$$L_{\Gamma_4} = \int F_1\,dx + \int F_2\,dx = \int_2^1 t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_2^1 =$$

$$= \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

ESERCIZI

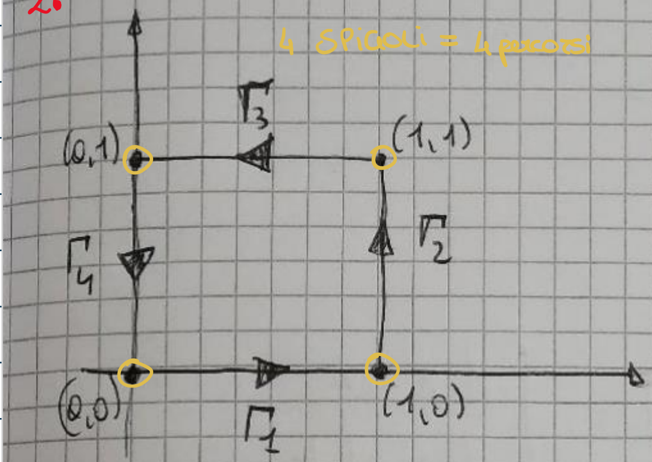


SOMMA FINALE!

$$L_\Gamma = \frac{5}{6} + \frac{3}{2} - 6 - \frac{3}{2} = \frac{5}{6} - 6 = \frac{5-36}{6} = -\frac{31}{6}$$

ESERCIZI

2. CIRCUITAZIONE



$$\underline{F} = (x^2, xy^2) = (F_1, F_2)$$

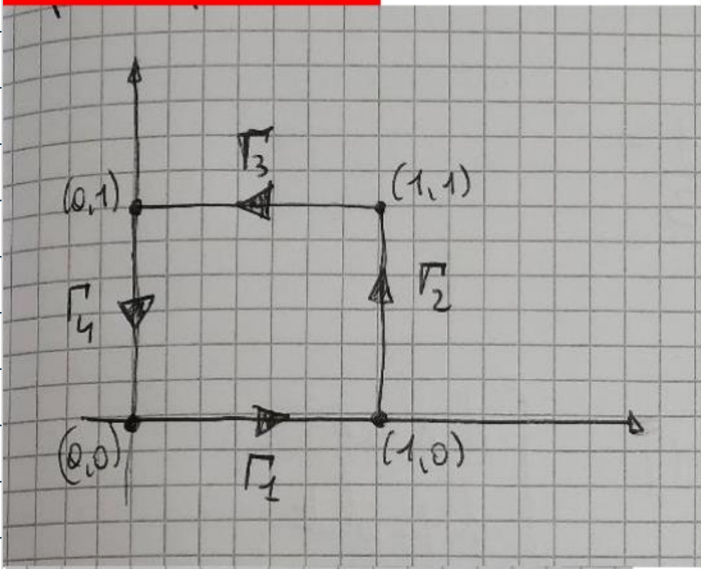
$$\Gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad t \in [0,1] \quad \begin{cases} dx = dt \\ dy = 0 \end{cases}$$

$$L_{\Gamma_1} = \int_0^1 t^2\, dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\Gamma_2 : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases} \quad t \in [0,1] \quad \begin{cases} dx = 0 \\ dy = dt \end{cases}$$

$$L_{\Gamma_2} = \int_0^1 t^2\, dt = \frac{1}{3}$$

ESERCIZI



$$\underline{F}=(x^2,\ xy^2)=(F_1,F_2)$$

$$\Gamma_3:\begin{cases} x=t \\ y=1 \end{cases} \quad t\in[0,1] \qquad \begin{cases} dx=dt \\ dy=0 \end{cases}$$

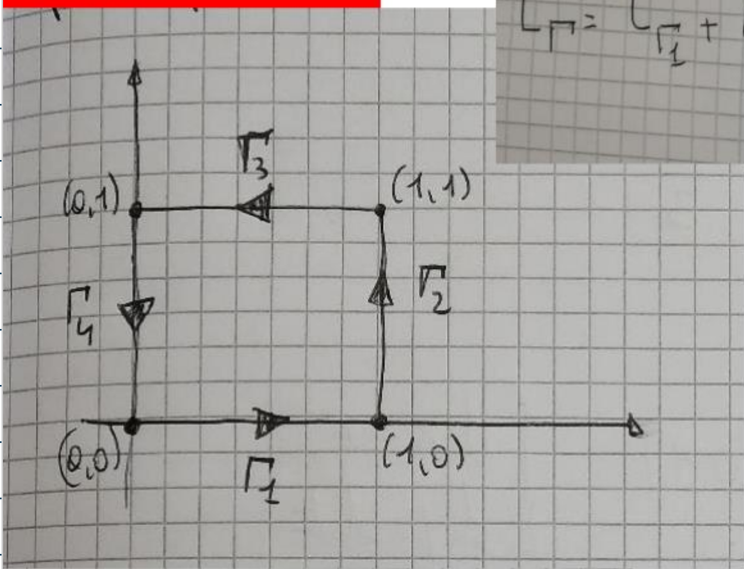
$$L_{\Gamma_3}=\int_1^0 t^2\,dt=-\frac{1}{3}$$

$$\Gamma_4:\begin{cases} x=0 \\ y=t \end{cases} \quad t\in[0,1] \ : \ \begin{cases} dx=0 \\ dy=dt \end{cases}$$

$$L_{\Gamma_4}=\int_1^0 0\cdot t^2\cdot dt=0$$

ESERCIZI

$$L_{\Gamma}=L_{\Gamma_1}+L_{\Gamma_2}+L_{\Gamma_3}+L_{\Gamma_4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+0=\frac{1}{3}$$



$$\underline{F}=(x^2,\ xy^2)=(F_1,F_2)$$

ESERCIZI

2.

$\underline{F} = (x - z,\ 1 - xy,\ y)$

$$\Gamma: \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases} \quad t \in [0, 1] \xrightarrow{\text{derivata}} \begin{cases} dx = dt \\ dy = 2t\, dt \\ dz = 3t^2 dt \end{cases}$$

$$L_\Gamma = \int F_1\, dx + \int F_2\, dy + \int F_3\, dz =$$

ESERCIZI

$\underline{F} = (x - z,\ 1 - xy,\ y)$

$$\Gamma: \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

$$L_\Gamma = \int F_1\, dx + \int F_2\, dy + \int F_3\, dz =$$

$$= \int_0^1 (t - t^3)\, dt + \int_0^1 (1 - t^3) \cdot 2t\, dt + \int_0^1 t^2 \cdot 3t^2\, dt =$$

$$= \int_0^1 (t - t^3 + 2t - 2t^4 + 3t^4)\, dt =$$

$$= \int_0^1 (t + 2t - t^3 + t^4)\, dt = \int_0^1 (t^4 - t^3 + 3t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{4 - 5 + 30}{20} = \frac{29}{20}$$

ANCORA SUI CAMPI VETTORIALI

$\underline{F}: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}^n$

⇓ DOMINIO E CODOMINIO HANNO LO STESSO CAMPO $\mathbb{R}^n$

ESEMPIO IN $\mathbb{R}^3$

$\underline{F}: A \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}^3$

$$\underline{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\cdot\hat{i} + F_2(x,y,z)\cdot\hat{j} + F_3(x,y,z)\cdot\hat{k}$$

NON METTO $x(t), y(t), z(t)$ MA SOLO x, y, z PER NON APPESANTIRE LA NOTAZIONE, MA È OVVIO CHE TALE DIPENDENZA DAL TEMPO t POSSA ESSERCI

SIA $U(x,y,z)$ UN CAMPO SCALARE, OVVERO $U: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\nabla U(x,y,z) = \left(\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z} \right)$$

$\nabla U(x,y,z)$ È OVVIAMENTE UN CAMPO VETTORIALE

$\underline{F}(x,y,z)$ È UN CAMPO VETTORIALE CONSERVATIVO SE è i.e. gradiente del campo scalare ESISTE UN CAMPO SCALARE $U(x,y,z)$ [DEFINITO POTENZIALE SCALARE O FUNZIONE POTENZIALE SCALARE] TALE CHE:

$$\nabla U(x,y,z) = \underline{F}(x,y,z)$$

OVVERO: derivata parziale del campo scalare

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_1 \; ; \; \frac{\partial U}{\partial y} = F_2 \; ; \; \frac{\partial U}{\partial z} = F_3$$

OVVIAMENTE, TALE DEFINIZIONE SI PUÒ GENERALIZZARE IN $\mathbb{R}^n$

un campo di forze è conservativo → cioè gradiente di un campo scalare

SE $\underline{F}(x,y,z) = \nabla U(x,y,z)$ ALLORA

$$\int_\gamma \underline{F} \circ d\underline{r} = \underbrace{U(B) - U(A)}_{\text{differenza di potenziale}}$$

INDIPENDENTEMENTE DAL PERCORSO γ CHE CONGIUNGE IL PUNTO INIZIALE A

DIM:

un campo di forze è conservativo → cioè gradiente di un campo scalare

SE $\underline{F}(x,y,z) = \nabla U(x,y,z)$ ALLORA

$$\int_\gamma \underline{F} \circ d\underline{r} = \underbrace{U(B) - U(A)}_{\text{differenza di potenziale}}$$

INDIPENDENTEMENTE DAL PERCORSO γ CHE CONGIUNGE IL PUNTO INIZIALE A E IL PUNTO FINALE B

DIM:

IPOTESI $\underline{F} = \nabla U \Rightarrow \underline{F} \circ d\underline{r} =$

$$= F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz =$$

$$= \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz =$$

$$= dU$$

$$\int_\gamma dU = U(B) - U(A)$$

CONSEGUENZA

$$\oint_\gamma \underline{F} \circ d\underline{r} = 0 \quad \text{SE } \underline{F} = \nabla U$$

$$\oint dU = U(A) - U(A) = 0$$

IN $\mathbb{R}^3$, $\underline{F} = \nabla U \Rightarrow \nabla \times \underline{F} = \underline{0}$

OVVERO, SE $\underline{F}$ É CONSERVATIVO ALLORA $\underline{F}$ É IRROTAZIONALE

DIM:

$$\nabla \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{i}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

UTILIZZANDO L'IPOTESI $\underline{F} = \nabla U$

$$\underbrace{F_1 = \frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_2 = \frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_3 = \frac{\partial U}{\partial z}}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) =$$

derivata parziale seconda MISTA ⇓ Applico Schwarz

$$= \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0$$

IN GENERALE $\nabla \times \underline{F} = \underline{0} \iff \begin{cases} \dfrac{\partial F_3}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial z} = \dfrac{\partial F_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y} \end{cases}$

Ogni campo bidimensionale può essere visto come un campo tridimensionale con terza componente nulla e prima e seconda non legate alla terza

$\underline{F} : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to B \subseteq \mathbb{R}^2$

$\underline{F} = (F_1, F_2) = (F_1, F_2, 0)$

- LA COMPONENTE F_3 É NULLA
- F_1 ED F_2 NON DIPENDONO DA z

IN GENERALE $\nabla \times \underline{F} = \underline{0} \iff$

$\underline{F} : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to B \subseteq \mathbb{R}^2$

$\underline{F} = (F_1, F_2) = (F_1, F_2, 0)$

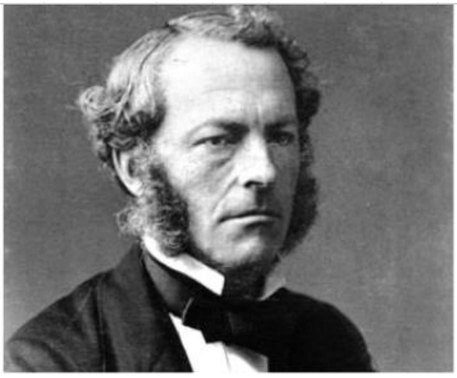
- LA COMPONENTE F_3 É NULLA
- F_1 ED F_2 NON DIPENDONO D

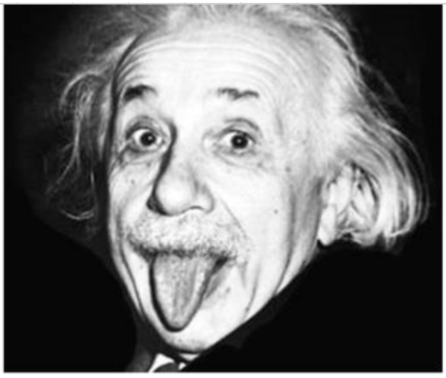
$$\nabla \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{i}\left(\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial 0}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

$$= \hat{k}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

SE $\underline{F}$ É 2D $\Rightarrow$ LA CONDIZIONE DI IRROTAZIONALITÁ É: $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y}$





Forma differenziale

Forma differenziale esatta

Forma differenziale chiusa

Lavoro infinitesimo

$\underline{F}$ conservativo

$\underline{F}$ irrotazionale

$$\underline{F} = \nabla U \Rightarrow \nabla \times \underline{F} = \underline{0}$$

$$\nabla \times \underline{F} = \underline{0} \Rightarrow \underline{F} = \nabla U \ ?$$

BASTA FARE UN ESEMPIO DI CAMPO VETTORIALE IRROTAZIONALE CHE NON É CONSERVATIVO (OVVERO UN CAMPO IRROTAZIONALE CHE COMPIE UN LAVORO NON NULLO LUNGO UN PERCORSO CHIUSO)

$$\oint_C \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)\circ(dx,dy) =$$

$$= \oint_C -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

$F_1 = -\frac{y}{x^2+y^2}$ $\qquad$ $F_2 = \frac{x}{x^2+y^2}$

DOMINIO DI $\underline{F} = (F_1, F_2) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\oint_C \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)\circ(dx,dy) =$$

CHECK SU IRROTAZIONALITÀ

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \oint_C -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

$F_1 = -\frac{y}{x^2+y^2}$ $\qquad$ $F_2 = \frac{x}{x^2+y^2}$

DOMINIO DI $\underline{F} = (F_1, F_2) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\nabla \times \underline{F} = \underline{0}$$

$$C: \begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$dx = -R\,\mathrm{sen}\,t\,dt \qquad dy = R\cos t\,dt$$

$$\int_0^{2\pi} \left(-\frac{R\,\mathrm{sen}\,t}{R^2} \cdot (-R\,\mathrm{sen}\,t) + \frac{R\cos t}{R^2} \cdot R\cos t \right) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\mathrm{sen}^2 t + \cos^2 t)\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Ancora sui Campi Conservativi

lunedì 2 novembre 2020 10:37

ANCORA SUI CAMPI VETTORIALI

$$\underline{F}: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}^n$$

ESEMPIO IN $\mathbb{R}^3$

$$\underline{F}: A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$\underline{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\cdot\hat{i} + F_2(x,y,z)\hat{j} + F_3(x,y,z)\cdot\hat{k}$$

NON METTO $x(t), y(t), z(t)$ MA SOLO x, y, z PER NON APPESANTIRE LA NOTAZIONE, MA È OVVIO CHE TALE DIPENDENZA DAL TEMPO t POSSA ESSERCI

Il gradiente di un campo scalare è anch'esso un campo vettoriale

SIA $U(x,y,z)$ UN CAMPO SCALARE, OVVERO

$$U: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\nabla U(x,y,z) = \left(\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial U(x,y,z)}{\partial z}\right)$$

$\nabla U(x,y,z)$ È OVVIAMENTE UN CAMPO VETTORIALE

$\underline{F}(x,y,z)$ È UN CAMPO VETTORIALE CONSERVATIVO SE ESISTE UN CAMPO SCALARE $U(x,y,z)$ [DEFINITO POTENZIALE SCALARE O FUNZIONE POTENZIALE SCALARE] TALE CHE:

$$\nabla U(x,y,z) = \underline{F}(x,y,z)$$

OVVERO: $\frac{\partial U}{\partial x} = F_1 \; ; \; \frac{\partial U}{\partial y} = F_2 \; ; \; \frac{\partial U}{\partial z} = F_3$

OVVIAMENTE, TALE DEFINIZIONE SI PUÒ GENERALIZZARE IN $\mathbb{R}^n$

$\boxed{\text{Un campo vettoriale è CONSERVATIVO se si può scrivere come gradiente di un campo scalare}}$

$\boxed{\text{Il campo scalare di cui F è gradiente è detta funzione potenziale scalare}}$

SE $\underline{F}(x,y,z) = \nabla U(x,y,z)$ ALLORA

$$\int_\gamma \underline{F} \circ d\underline{r} = \underbrace{U(B)}_{\text{funzione potenziale valutata in B}} - \underbrace{U(A)}_{\text{funzione potenziale valutata in A}}$$

indipendentemente dal percorso

INDIPENDENTEMENTE DAL PERCORSO γ CHE CONGIUNGE IL PUNTO INIZIALE A E IL PUNTO FINALE B

DIM:

IPOTESI $\underline{F} = \nabla U \Rightarrow \underline{F} \circ d\underline{r} =$

$$= F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz =$$

$$= \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz =$$

$$= dU$$

$$\int_\gamma dU = U(B) - U(A)$$

CONSEGUENZA: il lavoro di un percorso chiuso è 0

$$\oint \underline{F} \circ d\underline{r} = 0 \quad \text{SE} \quad \underline{F} = \nabla U$$

$$\oint dU = U(A) - U(A) = 0$$

IN $\mathbb{R}^3$, $\underline{F} = \nabla U \Rightarrow \nabla \times \underline{F} = \underline{0}$

OVVERO, SE $\underline{F}$ È CONSERVATIVO ALLORA $\underline{F}$ È IRROTAZIONALE

Il viceversa non è sempre vero

operazione matematica fino alla 3ª dim.

DIM:

$$\nabla \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{i}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

UTILIZZANDO L'IPOTESI $\underline{F} = \nabla U$

$$F_1 = \frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_2 = \frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_3 = \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0$$