Cos'è Analisi 2

giovedì 15 ottobre 2020 15:38

Il corso di analisi matematica II può essere visto come la perfetta continuazione del corso di analisi matematica I. In esso, di conseguenza, gli argomenti affrontati nel primo corso vengono dati per scontati. I punti trattati sono generalmente i seguenti:

- **Numeri complessi.**
- **Funzioni di piu' variabili.**
- **Equazioni differenziali.**
- **Integrali multipli.**

Vediamo brevemente in che cosa consistono.

I numeri complessi

L'argomento "**numeri complessi**" è in realtà considerato una sorta di introduzione a quelli che sono gli argomenti veri e propri del corso di analisi matematica II. Tutto sommato non è un argomento difficile. Anzi, se studiato con impegno e metodo giornaliero, risulta essere uno dei più semplici.

Prima di tutto, per poter comprendere i numeri complessi ed eseguire operazioni matematiche con essi, sarà necessario ripassare, seppur brevemente, le "**coordinate polari**". Per la verità avere una certa dimestichezza con le coordinate polari si rivelerà molto utile anche in seguito, quando si intraprenderà lo studio di altri argomenti.

Fatto questo, nel corso verrà fornita la **definizione di numero complesso**: trattasi di un numero formato da una parte reale sommata ad una parte immaginaria. Dopodiché se ne descrivono le caratteristiche principali, e come eseguire con essi le principali **operazioni**. Al termine, se ne illustra la rappresentazione nel "**piano complesso**".

Le funzioni di più variabili

Le **funzioni di più variabili** sono invece considerate l'argomento "principe" dell'analisi matematica II. Pertanto esso richiede solitamente molte lezioni, ed è certamente più complesso del precedente argomento.

Inizialmente, si cerca di introdurre lo studente a questo nuovo tipo di funzione attraverso una serie di **esempi e piccoli esercizi**. Essi hanno lo scopo di mostrare sia le caratteristiche principali di queste funzioni sia come tracciare –per le più semplici- il grafico.

Come accadeva anche nelle funzioni ad una sola variabile, risulta ancora una volta molto importante saper determinare il **dominio** della funzione. Qualche lezione a parte, poi, è spesso dedicata allo studio delle **quadriche**. Andando avanti, si parlerà anche di **vettori**, di **distanza tra due punti nello spazio** e di **intorni aperti e chiusi**.

funzioni di 2° grado

Di grande importanza quando si affronta l'argomento "funzioni di più variabili" sono inoltre le **funzioni continue**, di cui viene fornita la definizione, nonché la classificazione. Subito dopo aver introdotto questa tipologia di funzioni, ecco che comincerà lo studio delle **derivate parziali**.

Dopo aver introdotto i concetti di gradiente e di matrice hessiana delle derivate parziali, nonché quelli di funzioni composte e matrice jacobiana, ci si dedica a quella che è forse la più ampia applicazione delle derivate parziali. Sarebbe a dire lo studio dei **massimi** e dei **minimi** delle funzioni di più variabili.

L'argomento "funzioni di più variabili" si conclude infine con l'introduzione di curve e superfici come le **curve coordinate** e le **curve di livello**.

Le equazioni differenziali

Terminato lo studio delle funzioni di più variabili, ecco che comincia un nuovo argomento, quello delle **equazioni differenziali**. Un’equazione differenziale è un’equazione che coinvolge una o più derivate di una funzione incognita. Risolvere un’equazione differenziale significa trovare una funzione che la soddisfi.

Queste equazioni possono essere classificate come “**ordinarie**” (se coinvolgono derivate rispetto ad una sola variabile) oppure “**alle derivate parziali**” (se coinvolgono le derivate parziali della funzione incognita rispetto a più di una variabile). Un’ulteriore classificazione dipende anche dall’ordine della funzione, cioè dal “grado” della derivata di ordine massimo presente.
Nel corso di analisi matematica II difficilmente si intraprende lo studio di equazioni differenziali a più variabili: lo studio riguarda principalmente le equazioni differenziali ordinarie di primo e di secondo ordine.

Gli integrali doppi

Infine, il corso di analisi matematica II tratta lo studio degli **integrali doppi**, cioè di quegli integrali che riguardano le funzioni di più variabili (due variabili, per la precisione). Essi trovano applicazione nel calcolo del volume di una regione tridimensionale.
Dopo averne definito le caratteristiche e le proprietà necessarie per il loro calcolo, se ne illustra l’**iterazione in coordinate cartesiane** e il **passaggio in coordinate polari**.

Le regole per studiare efficacemente analisi matematica 2

Detto questo, per studiare analisi matematica II occorre naturalmente tener sempre presenti quelli che sono i consigli generali per intraprendere lo studio della matematica.
Li potete trovare al seguente **link** di un precedente articolo. Le regole che esso riporta, sebbene non siano destinate specificatamente allo studio dell’analisi matematica, si adattano perfettamente allo studio di qualsiasi materia scientifica. Per questo motivo, possiamo considerarle regole da seguire un po’ in tutte le circostanze. Volendo riassumere le principali, riadattandole per l’analisi matematica, esse sono le seguenti.

Procurarsi il giusto libro di testo

Una delle difficoltà maggiori nello studio dell’analisi matematica è forse rappresentato dal sapersi procurare i testi giusti. O, più in generale, il materiale didattico su cui studiare. Il docente consiglia spesso di affiancare lo studio degli appunti presi a lezione con la lettura di un libro di testo.
Ma quello suggerito non è sempre un testo sufficientemente chiaro, ed è in questo caso necessario intraprendere una lunga ricerca (nelle librerie universitarie o nelle biblioteche) prima di trovare quello che fa per noi. Il testo in questione dovrà essere di facile comprensione, ben strutturato e contenente tanti esercizi con cui potersi allenare.
Prendere sempre buoni appunti durante le lezioni. Come il libro di testo, anche gli appunti presi a lezione potrebbero non essere sufficientemente chiari o completi per studiare. Questo anche a causa del fatto che non si è riusciti a comprendere correttamente quello che è stato spiegato a lezione.
In caso di necessità, conviene dunque integrare sempre gli appunti personali con quelli di un compagno di corso. In questo modo ci si potrà rendere conto delle lacune presenti negli appunti personali e colmarle. Da non dimenticare poi il fatto che oggigiorno è possibile contare su un aiuto notevole proveniente dal

web.Tanto materiale sull’argomento (riassunti, appunti, dispense…) è infatti reperibile nella sezione **appunti universitari** del sito di **skuola.net**.

Studiare un po’ alla volta, giorno per giorno

Preparare riassunti e schemetti. Questo è un punto molto importante, sul quale ci si è soffermati anche nell’articolo relativo allo studio di funzione (raggiungibile attraverso questo **link**).Realizzare riassunti o schemi dei punti chiave previsti da ciascun argomento aiuta a inquadrare meglio i passaggi principali, a capire quali sono i punti salienti. Non solo: permette spesso di suddividere questioni complesse in tante piccole operazioni, facilitandone l’esecuzione. La presenza di una “tabella di marcia” così realizzata crea inoltre un “ordine mentale”.

Fare tanti esercizi ogni volta che viene spiegato un argomento nuovo.

Assistere all’esame orale degli altri studenti, in modo da farsi un’idea generale di ciò che viene chiesto.

Se necessario, studiare in gruppo aiuta a chiarire i dubbi.

Prendere ripetizioni. A questo proposito, si ricorda che, per qualsiasi ulteriore aiuto nello studio, è possibile utilizzare il servizio di **Skuola.net | Ripetizioni**, grazie al quale sarà possibile reperire un tutor esperto della materia.

Seguendo questi consigli lo studio dell’analisi matematica non sarà più un problema!

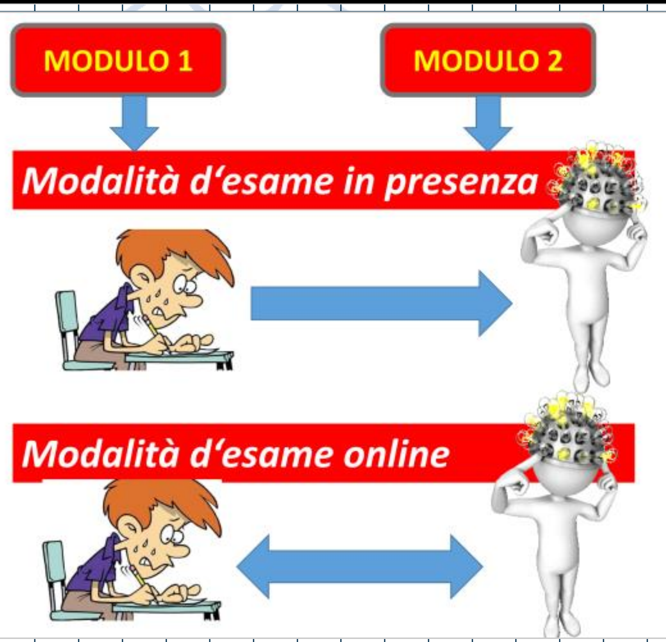
Introduzione al corso e primi concetti di Analisi 2

lunedì 5 ottobre 2020 12:02

MODALITÁ D'ESAME

Scritto di 3 ore + ORALE } MODALITÁ IN PRESENZA

Traccia personalizzata che va svolta in diretta } MODALITÁ ONLINE



CHE LA TEMPESTA ABBIA INIZIO …

FLASH DI ANALISI 1

Dominio (Campo di Esistenza)

Positività (Studio del segno)

In quali zone del Piano Cartesiano posso disegnare la funzione?

Se una funzione non è definita in un intervallo allora non ha senso studiarne il comportamento (es. limiti) in quegli intervalli

Intersezione con gli assi

Asintoti verticali ed orizzontali

Analisi agli estremi del Dominio → LIMITI

Crescenza, decrescenza
Massimi, minimi, flessi, asintoti obliqui
Concavità, convessità

STUDIO DELL'INTERNO DELLA FUNZIONE

→ DERIVATE

Calcolo dell'area tra la funzione e l'asse X → INTEGRALI

FLASH DI ANALISI 1

SERIE DI FUNZIONI

Una serie come somma di funzioni

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)=g_0(x)+g_1(x)+\ldots+g_{987}(x)+\cdots$$

NON tutte le serie sono esprimibili come sommatoria

Se la sommatoria è finita allora si dice TRONCATA

Si può considerare una funzione f(x) come somma di infinite «funzioni ingredienti»?

ANALISI 1	ANALISI 2

$f: A \subseteq \boldsymbol{R} \rightarrow B \subseteq \boldsymbol{R}$

FUNZIONE A VARIABILE IN R CON IMMAGINE IN R

CAMPI MONODIMENSIONALI

$f: A \subseteq \boldsymbol{R}^n \rightarrow B \subseteq \boldsymbol{R}^m$

GENERALIZZAZIONE

Si parla di CAMPI MULTIDIMENSIONALI

ANALISI 1	ANALISI 2

$f: A \subseteq \boldsymbol{R} \rightarrow B \subseteq \boldsymbol{R}$

ALGEBRA LINEARE (Matrici e autovalori)

$f: A \subseteq \boldsymbol{R}^n \rightarrow B \subseteq \boldsymbol{R}^m$

ANALISI 2

$f: A \subseteq \boldsymbol{R}^n \rightarrow B \subseteq \boldsymbol{R}^m$

IMMAGINE MONODIMENSIONALE DOMINIO QUALSIASI

$f: A \subseteq \boldsymbol{R}^n \rightarrow B \subseteq \boldsymbol{R}$

CAMPO SCALARE

DOMINIO R^n E IMMAGINE R^n

$f: A \subseteq \boldsymbol{R}^n \rightarrow B \subseteq \boldsymbol{R}^n$

CAMPO VETTORIALE

DOMINIO MONODIMENSIONALE IMMAGINE QUALSIASI

$f: A \subseteq \boldsymbol{R} \rightarrow B \subseteq \boldsymbol{R}^n$

CURVA

DOMINIO SOTTOINSIEME R^2 E IMMAGINE R^3

$f: A \subseteq \boldsymbol{R}^2 \rightarrow B \subseteq \boldsymbol{R}^3$

SUPERFICIE

Generalizzazione

DOMINIO R^n E IMMAGINE R^{n+1}

$f: A \subseteq \boldsymbol{R}^n \rightarrow B \subseteq \boldsymbol{R}^{n+1}$

IPER-SUPERFICIE

ANALISI 2

$f: A \subseteq \boldsymbol{R}^n \rightarrow B \subseteq \boldsymbol{R}^m$

CAMPO VETTORIALE

DOMINIO R^4 IMMAGINE R^3

$$\boxed{f: (x, y, z, t) \rightarrow \left(x^2 + e^y, \sqrt{z - t + x}, tx\right)} = R^4 \rightarrow R^3$$

$$f: (x, y, z, t) \rightarrow (f1, f2, f3)$$

TRE DIVERSI CAMPI SCALARI

$$\boxed{f1}: (x, y, z, t) \rightarrow (x^2 + e^y)$$

$$\boxed{f2}: (x, y, z, t) \rightarrow (\sqrt{z - t + x})$$

$$\boxed{f3}: (x, y, z, t) \rightarrow (tx)$$

Posso definire un qualsiasi spazio come vettore di campi scalari

ANALISI 2 – MODULO 1

$f: A \subseteq \boldsymbol{R}^n \rightarrow B \subseteq \boldsymbol{R}^m$

DOMINIO E POSITIVITA'

ANALISI 2 – MODULO 1

$f: A \subseteq \boldsymbol{R}^n \rightarrow B \subseteq \boldsymbol{R}^m$

DOMINIO E POSITIVITA'

LIMITI

Metodo delle rette, delle coordinate polari e sferiche, maggiorazione

ANALISI 2 – MODULO 1

$f: A \subseteq \boldsymbol{R}^n \rightarrow B \subseteq \boldsymbol{R}^m$

DOMINIO E POSITIVITA'

LIMITI

Metodo delle rette, delle coordinate polari e sferiche, maggiorazione

OTTIMIZZAZIONE LIBERA

Derivabilità e Differenziabilità, Gradiente, Derivata direzionale, Matrice Hessiana, Matrice Jacobiana

ANALISI 2 – MODULO 1

$f: A \subseteq \boldsymbol{R}^n \rightarrow B \subseteq \boldsymbol{R}^m$

DOMINIO E POSITIVITA'

LIMITI

Metodo delle rette, delle coordinate polari e sferiche, maggiorazione

OTTIMIZZAZIONE LIBERA

Derivabilità e Differenziabilità, Gradiente, Derivata direzionale, Matrice Hessiana, Matrice Jacobiana

OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA

Restrizioni, moltiplicatori di Lagrange

specifica di una parte del piano

ANALISI 2 – MODULO 1

$$f: A \subseteq \boldsymbol{R}^n \rightarrow B \subseteq \boldsymbol{R}^m$$

DOMINIO E POSITIVITA'

LIMITI

Metodo delle rette, delle coordinate polari e sferiche, maggiorazione

OTTIMIZZAZIONE LIBERA

Derivabilità e Differenziabilità, Gradiente, Derivata direzionale, Matrice Hessiana, Matrice Jacobiana

INTEGRAZIONE

PROBLEMI DI FISICA

- Integrali multipli
- Integrali curvilinei (Calcolo di un Lavoro)
- Integrali di Superficie (Calcolo di un Flusso)

OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA

Restrizioni, moltiplicatori di Lagrange

ANALISI 2 – MODULO 1

$$\boldsymbol{y}'(x) = f(x, \boldsymbol{y})$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

L' incognita non è un numero finito di soluzioni ma una o più equazioni che la risolvono

ANALISI 2 – MODULO 2

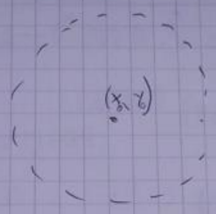
ANALISI COMPLESSA

Primi passi in ANALISI 2....

DEFINIZIONE DI INTORNO

INTORNO I_{x_0}
CIRCOLARE

IN $\mathbb{R}^2$



$$I_{x_0} = \{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2\}$$

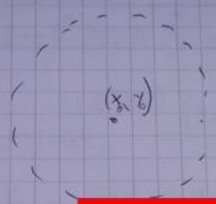
$<$ → APERTO

$\leq$ → CHIUSO

DEFINIZIONE DI INTORNO

INTORNO I_{x_0}
CIRCOLARE

IN $\mathbb{R}^2$



$$I_{x_0} = \{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2}\}$$

METRICA EUCLIDEA

$<$ → APERTO

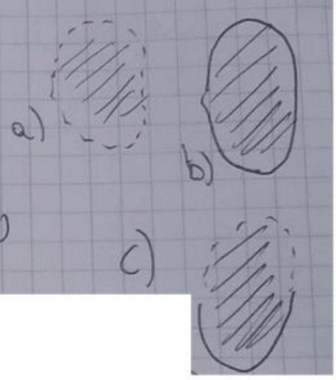
$\leq$ → CHIUSO

DEFINIZIONE DI INTORNO

Analogamente :

$A \subseteq \mathbb{R}^2$

a) APERTO
b) CHIUSO
c) NÉ APERTO NÉ CHIUSO



TRA QUALCHE SLIDES CAPIREMO MEGLIO, E FAREMO ALTRI ESEMPI...

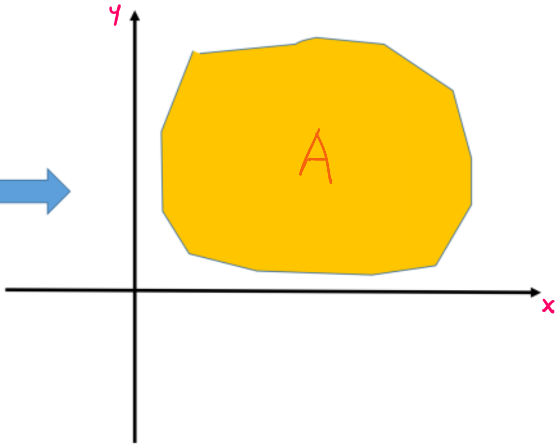
METRICA E SPAZIO METRICO

Sia $A \neq \emptyset$ *un insieme di punti*

$$A \subseteq \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n$$

$$A \subseteq \underbrace{\overset{x}{\boldsymbol{R}} \times \overset{y}{\boldsymbol{R}}}_{R^2}$$

COMBINAZIONE DI TUTTE LE COORDINATE POSSIBILI



METRICA E SPAZIO METRICO

Sia $A \neq \emptyset$ *un insieme di punti*

$$A \subseteq \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n$$

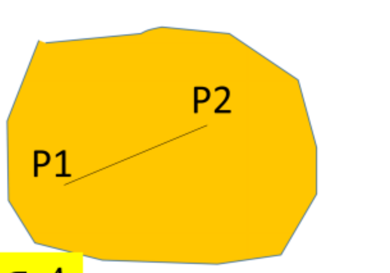
Sia $d: A \times A \longrightarrow [0, +\infty)$ NON NEGATIVA

una Metrica:

$d(P1, P2) = 0 \Leftrightarrow P1 \equiv P2$ Distanza nulla

$d(P1, P2) = d(P1, P2) \quad \forall (P1, P2) \in A$ Distanza fra due punti

$d(P1, P3) \leq d(P1, P2) + d(P2, P3) \quad \forall (P1, P2, P3) \in A$ Lato di un triangolo minore della Somma degli altri due



METRICA E SPAZIO METRICO

Sia $A \neq \emptyset$ *un insieme di punti*

$$A \subseteq \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n$$

(A, d) si definisce **SPAZIO METRICO**

= spazio in cui è definita la distanza fra punti

Sia $d: A \times A \longrightarrow [0, +\infty)$

una Metrica:

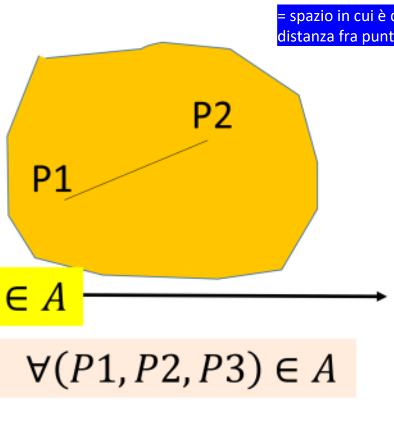
PROPRIETÀ

$d(P1, P2) = 0 \overset{\text{se e solo se}}{\Leftrightarrow} P1 \equiv P2$

$d(P1, P2) = d(P1, P2) \quad \forall (P1, P2) \in A$

$d(P1, P3) \leq d(P1, P2) + d(P2, P3) \quad \forall (P1, P2, P3) \in A$

Se valgono tutte e tre allora si parla di METRICA



METRICA E SPAZIO METRICO

$$d : \underbrace{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2}_{\text{DOMINIO}} \to \underbrace{\mathbb{R}^+}_{\text{IMMAGINE}} \qquad a \equiv (x_1, y_1)$$

$$b \equiv (x_2, y_2)$$

$$d(a,b) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$d(a,b) = \begin{cases} 0 & \text{se } a = b \\ 1 & \text{se } a \neq b \end{cases}$$

$$d(a,b) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

$$d(a,b) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

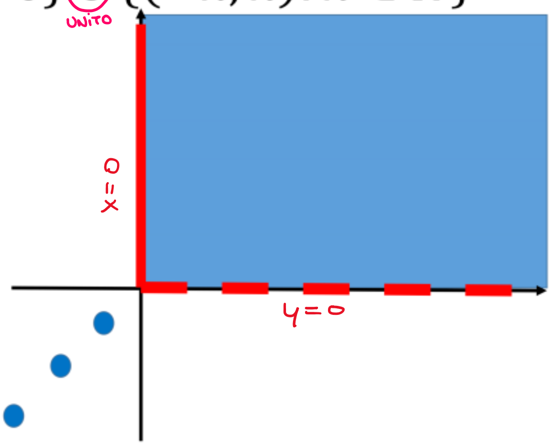
VERIFICARE LE PROPRIETÀ DI UNA METRICA

PUNTI INTERNI, ESTERNI, DI FRONTIERA, ISOLATI

$$A = \{(x,y) : x \geq 0 \underset{\text{AND}}{\wedge} y > 0\} \underset{\text{UNITO}}{\cup} \{(-n, n) : n \in \boldsymbol{N}\}$$

$\boxed{\text{DOMINIO}}$

Dove la funzione si può "disegnare"



PUNTI INTERNI, ESTERNI, DI FRONTIERA, ISOLATI

$$A = \{(x,y) : x \geq 0 \wedge y > 0\} \cup \{(-n, n) : n \in \boldsymbol{N}\}$$

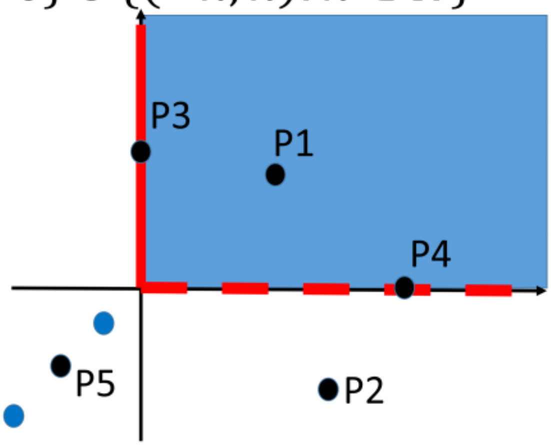
$P_1 \to$ punto interno

$P_2 \to$

$P_3 \to$

$P_4 \to$

$P_5 \to$



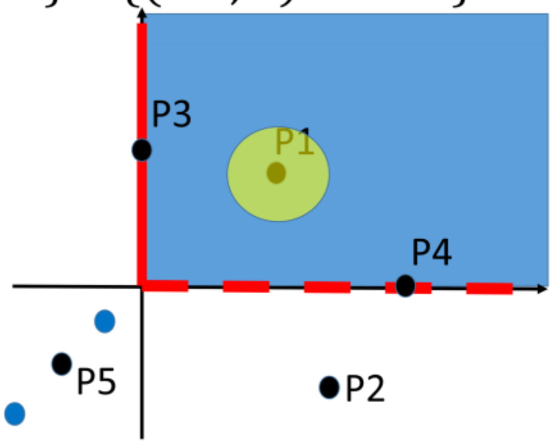
PUNTI INTERNI, ESTERNI, DI FRONTIERA, ISOLATI

$$A = \{(x,y): x \geq 0 \land y > 0\} \cup \{(-n,n): n \in \boldsymbol{N}\}$$

P1 è un punto INTERNO

$\exists\, I_{P1} \subset A$

Se esiste un intorno anche molto piccolo completamente contenuto nel dominio



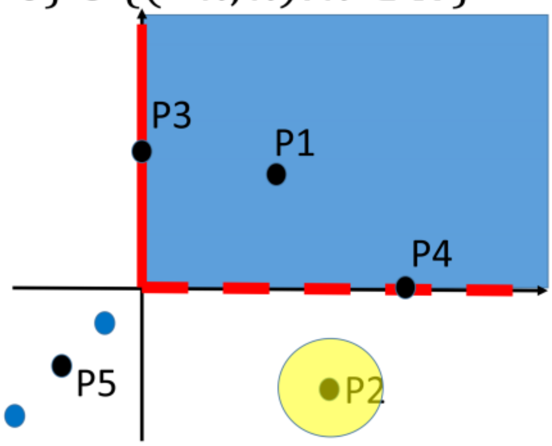
PUNTI INTERNI, ESTERNI, DI FRONTIERA, ISOLATI

$$A = \{(x,y): x \geq 0 \land y > 0\} \cup \{(-n,n): n \in \boldsymbol{N}\}$$

P2 è un punto ESTERNO

$\exists\, I_{P2} \not\subset A$

Se esiste un intorno piccolo tale che sia completamente fuori dal dominio



PUNTI INTERNI, ESTERNI, DI FRONTIERA, ISOLATI

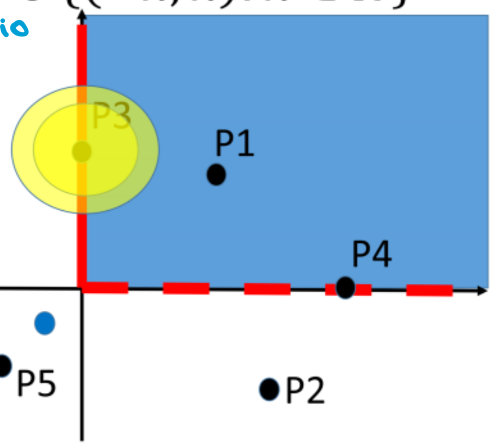
$$A = \{(x,y): x \geq 0 \land y > 0\} \cup \{(-n,n): n \in \boldsymbol{N}\}$$

ES. ESTREMI DEL DOMINIO

P3 è un punto DI FRONTIERA

$\forall\, I_{P3}, \exists\, P \in A \land \exists\, Q \notin A$

Se per ogni intorno piccolo i suoi punti sono in parte contenuti nel dominio e in parte no

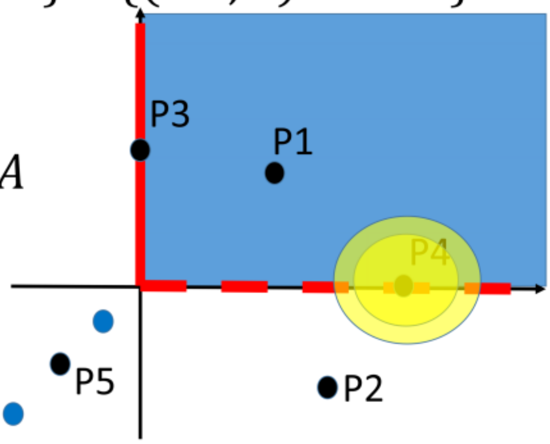


PUNTI INTERNI, ESTERNI, DI FRONTIERA, ISOLATI

$$A = \{(x, y): x \geq 0 \wedge y > 0\} \cup \{(-n, n): n \in \boldsymbol{N}\}$$

P4 è un punto DI FRONTIERA

$$\forall\, I_{P4}, \exists\, P \in A \wedge \exists\, Q \notin A$$



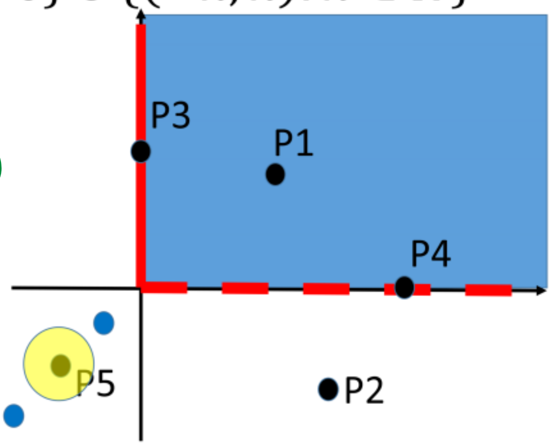
PUNTI INTERNI, ESTERNI, DI FRONTIERA, ISOLATI

$$A = \{(x, y): x \geq 0 \wedge y > 0\} \cup \{(-n, n): n \in \boldsymbol{N}\}$$

P5 è un punto ISOLATO

$$\exists\, I_{P5} : I_{P5} \cap A = \{P5\}$$

Se esiste un solo intorno del quale un punto è coincidente e appartiene al dominio



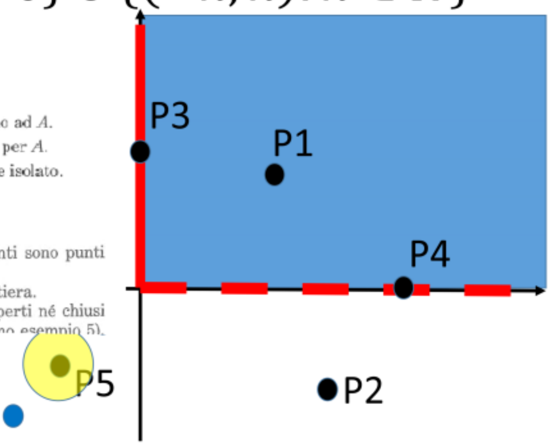
PUNTI INTERNI, ESTERNI, DI FRONTIERA, ISOLATI

$$A = \{(x, y): x \geq 0 \wedge y > 0\} \cup \{(-n, n): n \in \boldsymbol{N}\}$$

Osservazioni. In base alle definizioni date, si può notare che:

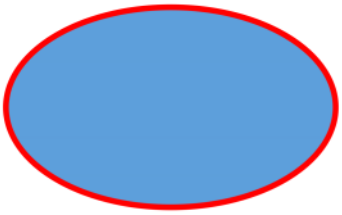
1) Un punto di frontiera di un insieme A non è né interno né esterno ad A.
2) Ogni punto isolato di un insieme A è anche un punto di frontiera per A.
3) Se $P \in A$, allora P non può essere contemporaneamente interno e isolato.

6. Un insieme di punti del piano si dice **aperto** se tutti i suoi punti sono punti interni.
Si dice invece **chiuso** un insieme che contenga tutta la propria frontiera.
Si osservi che vi sono insiemi di punti del piano che non sono né aperti né chiusi ... precedente e il prossimo esempio 5).



INSIEMI APERTI, CHIUSI

Un insieme chiuso non è detto che sia per forza Limitato (contenuto in una regione finita dello spazio)

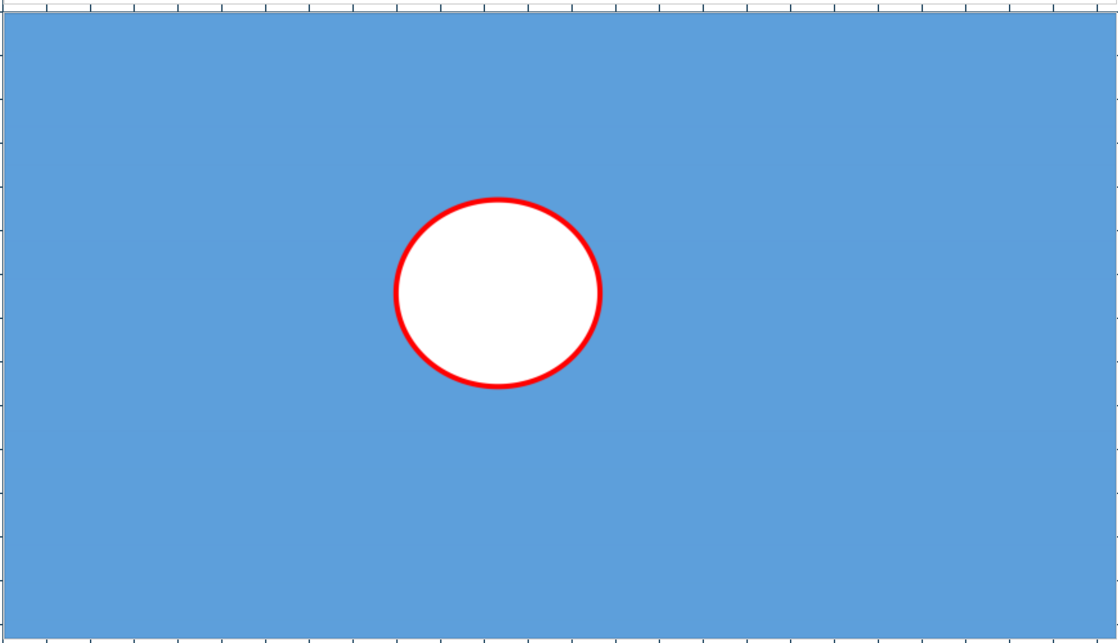


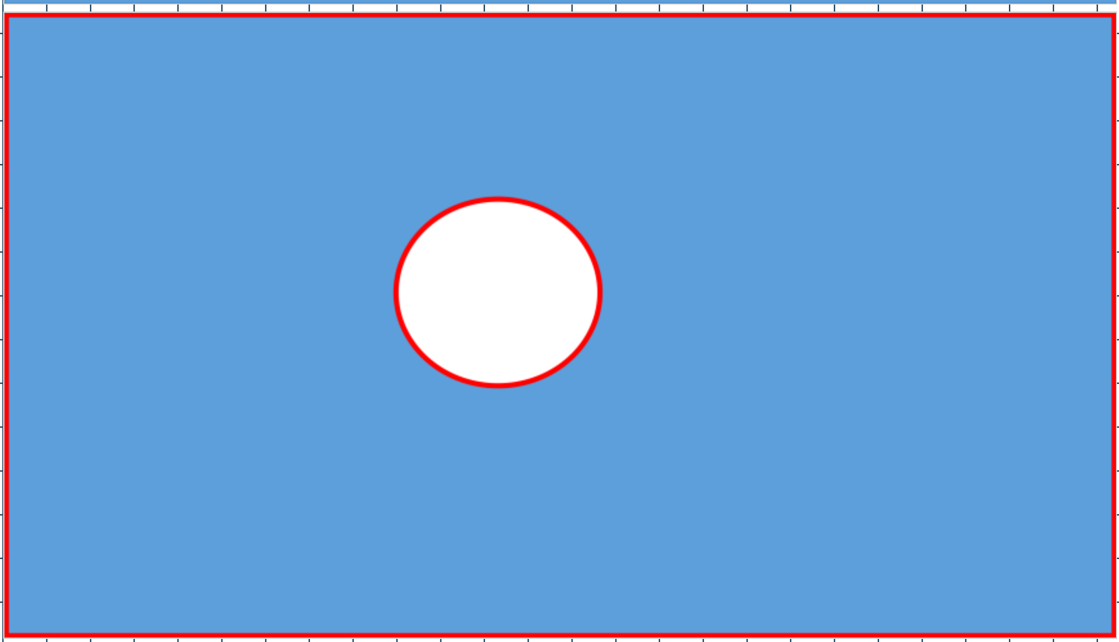
INSIEME IN R^2

Limitato -> gli estremi sono diversi da +∞ e -∞
Limitato superiormente -> solo l'estremo superiore è +∞
Limitato inferiormente -> solo l'estremo inferiore è -∞

Chiuso -> gli estremi sono inclusi nell'intervallo
Chiuso a destra -> l'estremo destro è incluso nell'intervallo
Chiuso a sinistra -> l'estremo sinistro è incluso nell'intervallo

Aperto -> gli estremi NON sono inclusi nell'intervallo
Aperto a destra -> l'estremo destro NON è incluso nell'intervallo
Aperto a sinistra -> l'estremo sinistro NON è incluso nell'intervallo





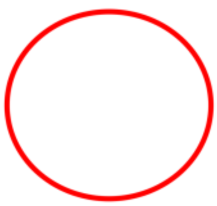
R
R^2
R^n

R
R^2
R^n

Insiemi aperti e chiusi contemporaneamente

a seconda dei contesti

Un insieme chiuso non deve per forza avere qualche punto interno



INSIEMI APERTI, CHIUSI

A è un APERTO se e solo se contiene solo punti INTERNI

A è un CHIUSO se e solo se contiene TUTTI I PUNTI DI FRONTIERA (in più può anche contenere punti interni)

A non è né APERTO nè CHIUSO se e solo se non contiene tutti i punti di frontiera

L'insieme di tutti i punti interni viene indicato come INTERNO DI A

$$\dot{A} \subseteq A$$

APERTO -> contiene solo punti INTERNI
CHIUSO -> contiene TUTTI i punti di frontiera -> contiene tutti i punti di accumulazione!!!
NE' APERTO NE' CHIUSO -> NON contiene TUTTI i punti di frontiera
APERTO E CHIUSO -> contiene TUTTI i punti di accumulazione e sono tutti interni

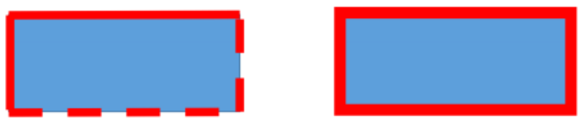
L'insieme di tutti i punti esterni viene indicato come ESTERNO DI A: E(A)

INSIEMI APERTI, CHIUSI

PUNTO DI ADERENZA: PUNTO INTERNO oppure PUNTO DI FRONTIERA

CHIUSURA DI A C(A): insieme di tutti i punti di aderenza

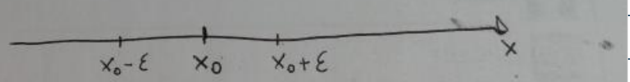
$$A \subseteq C(A)$$



$$A = C(A)$$

A è CHIUSO

Punto di accumulazione



$I_{x_0}(\varepsilon): \forall x \in \mathbb{R} \mid |x-x_0| < \varepsilon$

x_0 É UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE SE

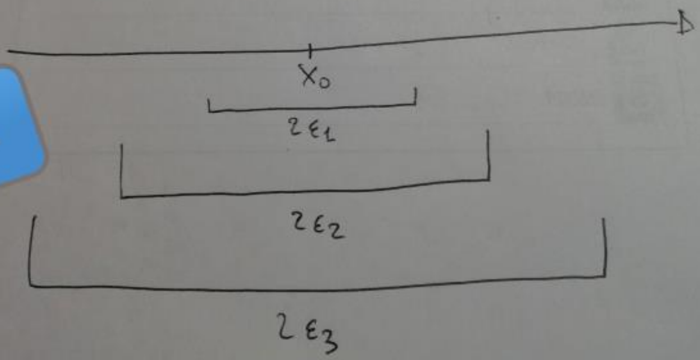
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ x \in I_{x_0}(\varepsilon) \ , \ x \neq x_0$

ANALISI 1

ANALISI 1

x_0 È UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE SE

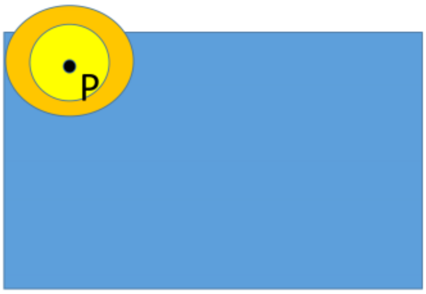
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ x \in I_{x_0}(\varepsilon), \ x \neq x_0$



ANALISI 2 — *Punto di accumulazione*

$$\forall I_P,$$
$$(I_P - \{P\}) \cap A \neq \emptyset$$

Togliendo il centro P, esiste, per ogni intervallo circolare, esiste almeno un punto appartenente al dominio



- Insieme derivato di A $Dr(A)$ = insieme di tutti i punti di accumulazione di A

PUNTO DI ADERENZA

↳ Un punto di aderenza o è di accumulaz. o è isolato

⇓

$C(A) = Dr(A) \cup I(A)$

con $I(A)$ pari all'insieme di tutti i punti isolati

Un punto di accumulazione è un punto di aderenza ma non vale il viceversa: il concetto di punto di aderenza è più generico poiché, similmente a quello di accumulazione, contempla che il punto dell'intorno possa essere uguale al punto stesso.

INSIEME PERFETTO

Insieme perfetto -> non vi sono punti isolati -> TUTTI I PUNTI DI ADERENZA SONO ANCHE DI ACCUMULAZIONE

- A è perfetto quando $Dr(A) = A$

INSIEME CONNESSO

- A è connesso ⟺ $\forall P_1, P_2$ ∃ Poligonale formata da tutti punti ∈ A

Qualsiasi sia la coppia di punti del piano presi esiste almeno un modo per congiungerli e che passa

DOMINIO

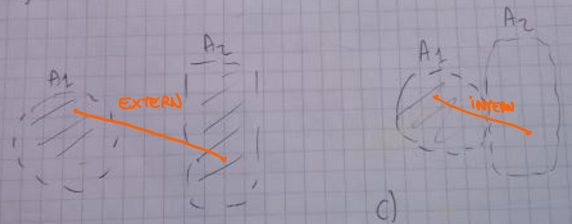
↓

Insieme dei punti di accumulazione e dei punti isolati da tutti punti $\in A$

Qualsiasi sia la coppia di punti del piano presi esiste almeno un modo per congiungerli e che passa da soli punti interni

Insieme dei punti di accumulazione e dei punti isolati

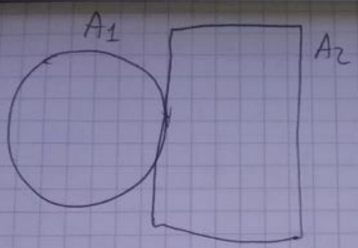
a)



b) Non connesso

c) Non connesso

- A è connesso $\Leftrightarrow$ $\forall P_1, P_2$ $\exists$ Poligonale formata da tutti punti $\in A$



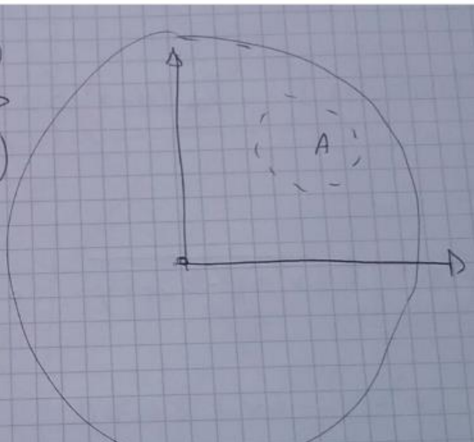
d) Connesso

In generale non ho connessione $\Leftrightarrow$ $A_i \cap A_j = \emptyset$

- INSIEME LIMITATO

$\exists I_P : A \subset I_P$

$\exists B(0,\delta): A \subset B(0,\delta)$



INSIEME ILLIMITATO SE $\nexists I_P$ o $\nexists \delta > 0 : A \subset B(0,\delta)$

INSIEME	LIMITATO	ILLIMITATO
APERTO	Aperto e limitato	Aperto e illimitato
CHIUSO	Chiuso e limitato	Chiuso e illimitato

COMPATTO

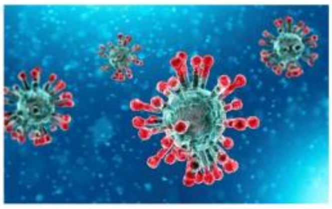
CHIUSO ≠ LIMITATO
APERTO ≠ ILLIMITATO

INSIEME	LIMITATO	ILLIMITATO
APERTO	Aperto e limitato	Aperto e illimitato
CHIUSO	COMPATTO	Chiuso e illimitato

INSIEME	LIMITATO	ILLIMITATO
APERTO	Aperto e limitato	Aperto e illimitato
CHIUSO	COMPATTO	Chiuso e illimitato

Teorema di Weierstrass: se f è definita in un compatto A, allora f ammette almeno un massimo e un minimo assoluto in A

Virus matematici da debellare.....

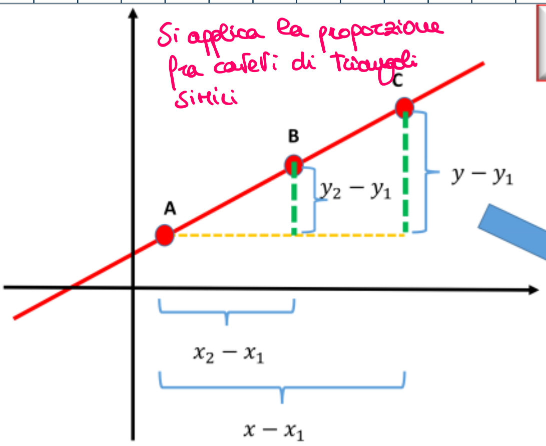


No!

$$\cancel{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3+1}{4+2}}$$

Equazione di una retta

Si applica la proporzione fra cateti di triangoli simili



$A = (x_1, y_1) \quad B = (x_2, y_2)$

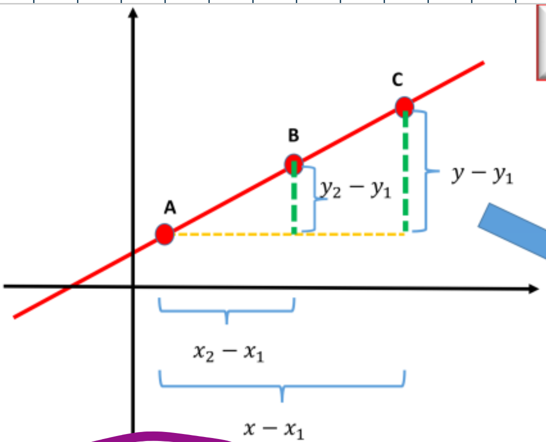
$C = (x, y)$

Similitudine tra triangoli

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

Equazione di una retta



$A = (x_1, y_1) \quad B = (x_2, y_2)$

$C = (x, y)$

Similitudine tra triangoli

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$q = y_1 - mx_1$$

modo per semplificare la formula

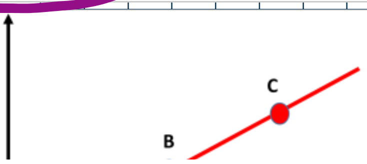
$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

$$y = mx - mx_1 + y_1$$

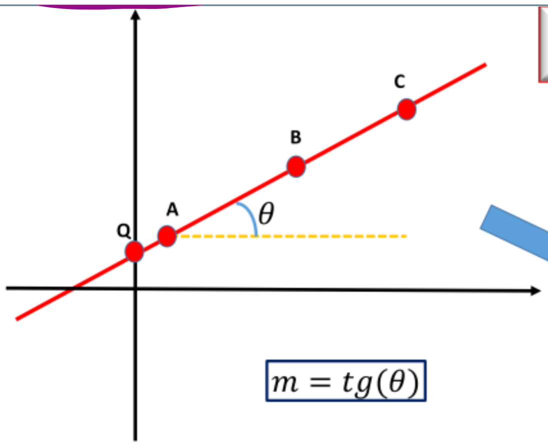
$$y = mx + q$$

INTERCETTA ALL'ORDINATA

Equazione di una retta



$A = (x_1, y_1) \quad B = (x_2, y_2)$



Equazione di una retta

$A = (x_1, y_1) \quad B = (x_2, y_2)$

$Q = (0, q) \qquad C = (x, y)$

Similitudine tra triangoli

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}$$

$$\boxed{m = tg(\theta)}$$

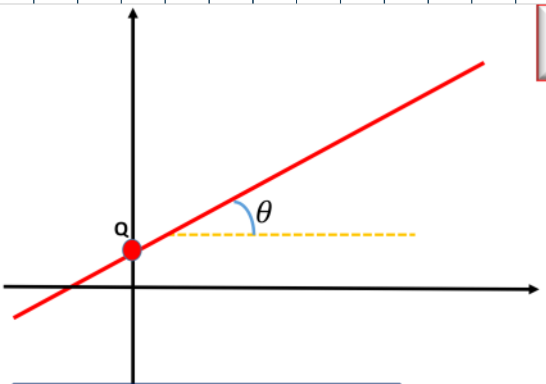
$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

$$\boxed{q = y_1 - m x_1}$$

$$\boxed{y - y_1 = m \cdot (x - x_1)}$$

$$\boxed{y = mx - mx_1 + y_1}$$

$$\boxed{y = mx + q}$$



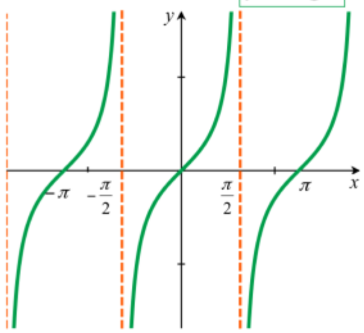
Equazione di una retta

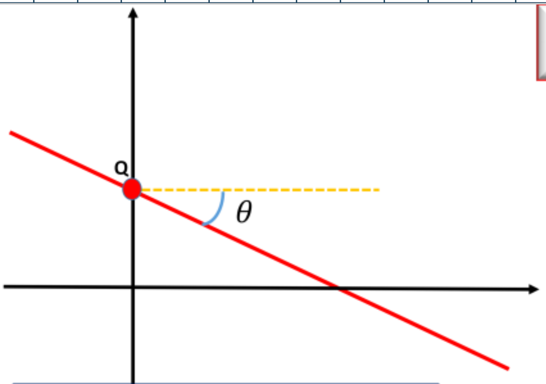
$$\boxed{y = mx + q} \qquad \boxed{m = tg(\theta)}$$

$Q = (0, q)$

$$\boxed{0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boldsymbol{m > 0}}$$

$y = \mathrm{tg}x$





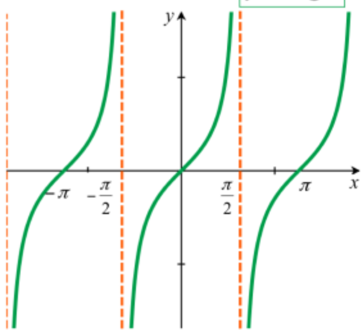
Equazione di una retta

$$\boxed{y = mx + q} \qquad \boxed{m = tg(\theta)}$$

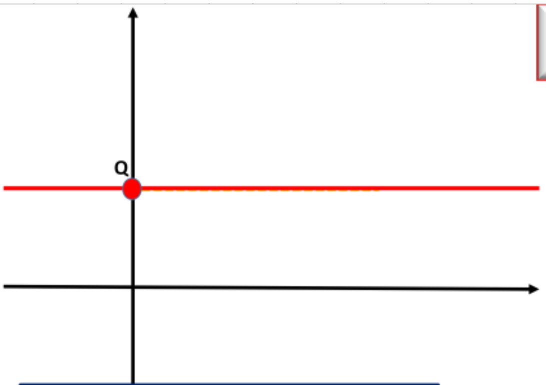
$Q = (0, q)$

$$\boxed{-\frac{\pi}{2} < \theta < 0 \Rightarrow \boldsymbol{m < 0}}$$

$y = \mathrm{tg}x$



Equazione di una retta



$$\boxed{y = mx + q}$$

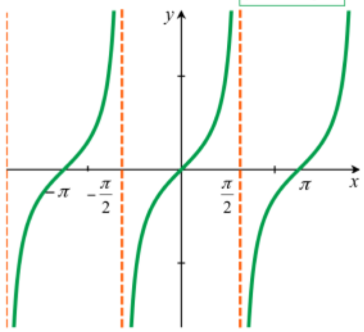
$$\boxed{m = tg(\theta)}$$

$$Q = (0, q)$$

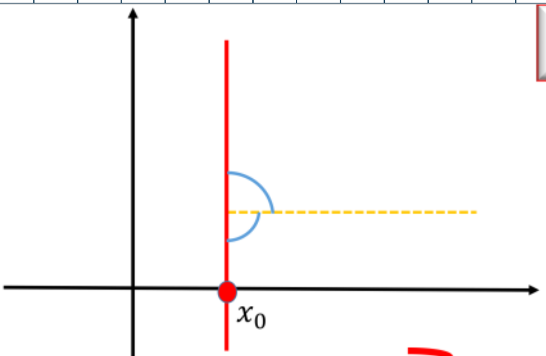
$$\boxed{\theta = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{m = 0}}$$

$$\boxed{y = q}$$

$y = \text{tg}x$



Equazione di una retta



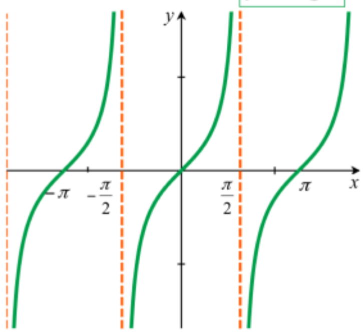
$$\boxed{y = mx + q}$$

$$\boxed{m = tg(\theta)}$$

$$Q = (0, q)$$

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{\theta = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \boldsymbol{m} \to +\infty} \\ \boxed{\theta = -\frac{\pi}{2} \Longrightarrow \boldsymbol{m} \to -\infty} \end{array}\right\} \boxed{x = x_0}$$

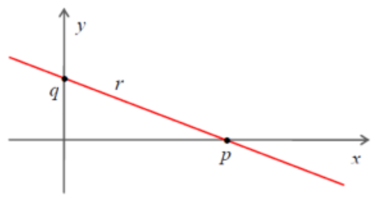
$y = \text{tg}x$



Da Materiale Didattico: Cartella **Geometria Analitica**

geometria analitica

Geometria analitica: la retta

equazione della retta		
	$ax + by + c = 0$	forma implicita
	$y = mx + q$	forma esplicita
	$\dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q} = 1$	forma segmentaria

nella forma esplicita	nella forma segmentaria
• m è detto coefficiente angolare $\quad m = -\frac{a}{b}$	• p è il punto di intersezione tra la retta e l'asse x
• q è il punto di intersezione tra la retta e l'asse y $\quad q = -\frac{c}{b}$	• q è il punto di intersezione tra la retta e l'asse y

DOMINIO E POSITIVITÀ...

DA ANALISI 1

$$\mathbf{Dom}\left(\boldsymbol{f}(x)\right) \qquad \mathbf{Pos}\left(\boldsymbol{f}(x)\right)$$

$$\mathbf{Pos}\left(\boldsymbol{f}(x)\right) \subseteq \mathbf{Dom}\left(\boldsymbol{f}(x)\right)$$

Se il dominio è [2; 5] non si può studiare la positività nell'intervallo (-oo, 0]

ESEMPI

1. Determinare il dominio della funzione

$$f(x;\ y) = log(y - x).$$

La funzione è definita se $y - x > 0 \longrightarrow y > x$. Per rappresentarne il dominio sul piano cartesiano, tracciamo la retta $y = x$.
Il dominio cercato è costituito dall'insieme dei punti che si trovano al di sopra di tale retta, ossia nel semipiano generato dalla retta $y = x$ e contenente i punti di ordinata positiva dell'asse y (fig. 11).
Infatti, consideriamo uno qualsiasi di tali punti: $P(x_0;\ y_0)$. Tracciamo da P la parallela all'asse y fino ad incontrare in $Q(x_0;\ x_0)$ la retta $y = x$. È evidente che l'ordinata di P è maggiore dell'ordinata di Q: $y_0 > x_0$, e perciò P appartiene al dominio della funzione data. Analogamente si può verificare che i punti che si trovano sotto alla retta $y = x$ non appartengono al dominio (ancora fig. 11), perché per essi la condizione $y > x$ non è verificata. Ovviamente la retta $y = x$ costituisce la frontiera del dominio, e non è contenuta in esso: il dominio è aperto (*).

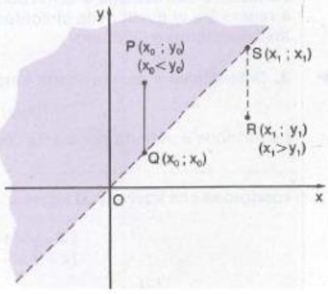
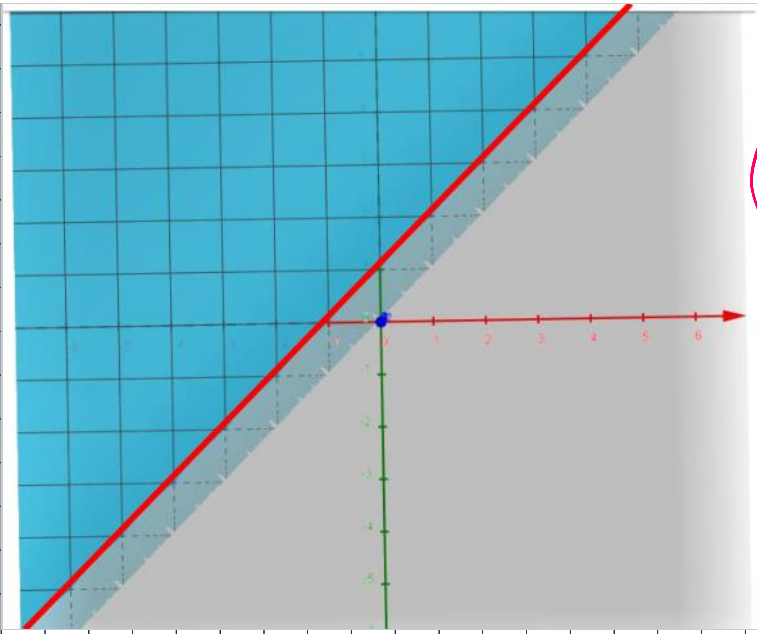


Fig. 11

$$f: A \subseteq \boldsymbol{R}^2 \rightarrow B \subseteq \boldsymbol{R}$$

Valgono le regole di ANALISI 1



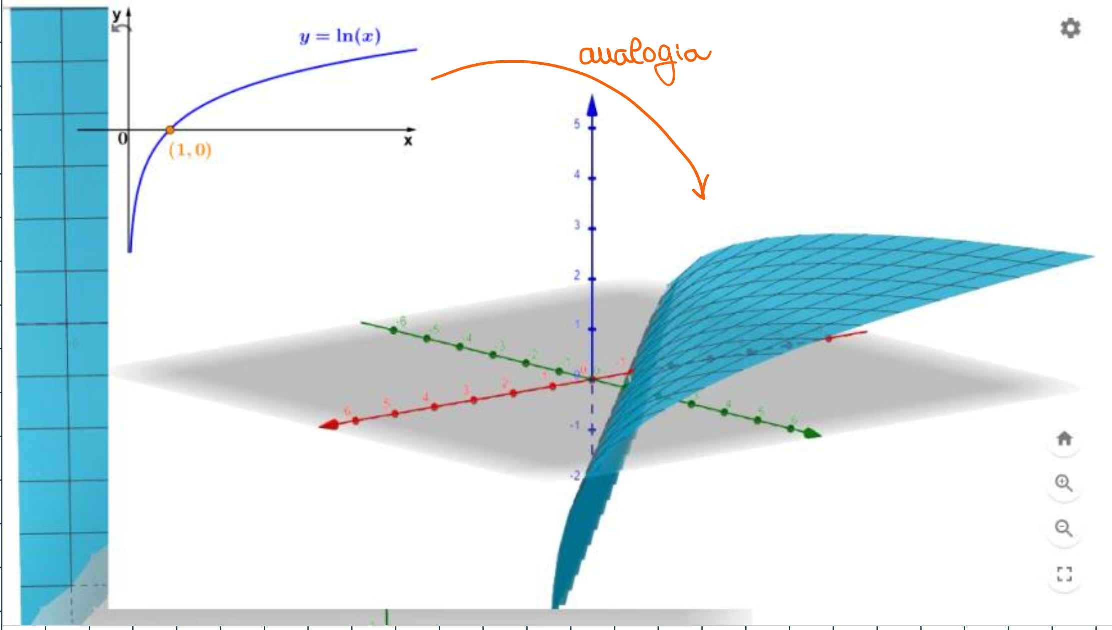
arg ≥ 1 !!!

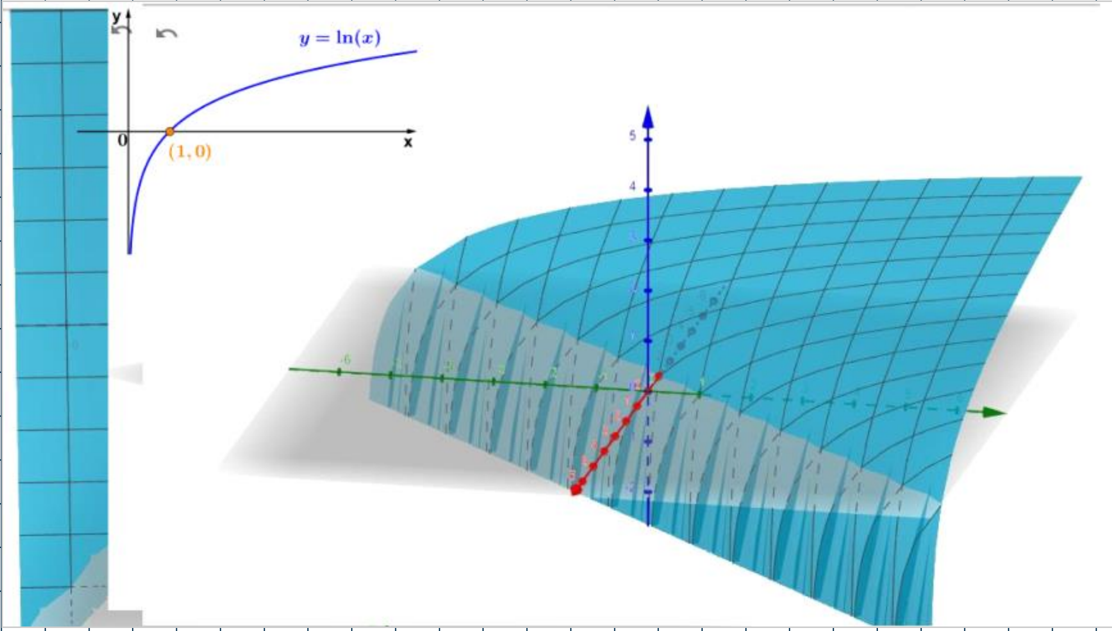
$$\ln(y - x) \geq 0$$

positività

$$y - x \geq 1$$

$$y \geq x + 1$$





$f: A \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}$

corrisponde allo studio della positività di una funzione

$x^2+y^2-6x+8y \geq 0$

2. Determinare il dominio della funzione

$$f(x;\,y) = \sqrt{x^2+y^2-6x+8y}. \tag{1}$$

La funzione è definita per quelle coppie $(x;\,y)$ che rendono il radicando della (1) maggiore o eguale a zero:

$$x^2+y^2-6x+8y \geqslant 0. \tag{2}$$

Com'è noto, l'equazione associata alla (2):

$$x^2+y^2-6x+8y=0$$

è rappresentata, nel piano cartesiano, da una circonferenza con centro $C(3;\,-4)$ e raggio $r=5$. Infatti essa si può porre nella forma: → Metodo di completamento del quadrato

$$(x-3)^2+(y+4)^2=25.$$

Operando identiche trasformazioni algebriche sulla (2), possiamo ottenerne una forma equivalente ma più facilmente interpretabile:

$$(x-3)^2+(y+4)^2 \geqslant 25. \tag{3}$$

La diseguaglianza (3) è verificata se e solo se x e y sono le coordinate di un punto avente distanza maggiore o eguale a 5 da $C(3;\,-4)$ (fig. 12).

$f: A \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}$

2. Determinare il dominio della funzione

$$f(x;\,y) = \sqrt{x^2+y^2-6x+8y}. \tag{1}$$

La funzione è definita per quelle coppie $(x;\,y)$ che rendono il radicando della (1) maggiore o eguale a zero:

$$x^2+y^2-6x+8y \geqslant 0.$$

Com'è noto, l'equazione associata alla (2):

$$x^2+y^2-6x+8y=0$$

è rappresentata, nel piano cartesiano, da una circonfere

raggio $r=5$. Infatti essa si può porre nella forma:

$$(x-3)^2+(y+4)^2=25.$$

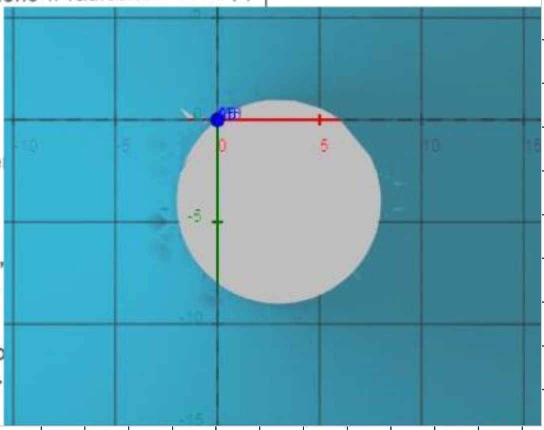
Operando identiche trasformazioni algebriche sulla (2),

forma equivalente ma più facilmente interpretabile:

$$(x-3)^2+(y+4)^2 \geqslant 25.$$

La diseguaglianza (3) è verificata se e solo se x e y sono

avente distanza maggiore o eguale a 5 da $C(3;\,-4)$ (fig.



Positività della funzione?

$f: A \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}$

2. Determinare il dominio della funzione

$$f(x;\,y) = \sqrt{x^2+y^2-6x+8y}. \tag{1}$$

La funzione è definita per quelle coppie $(x;\,y)$ che rendono il radicando della (1) maggiore o eguale a zero:

$$x^2+y^2-6x+8y \geqslant 0.$$

Com'è noto, l'equazione associata alla (2):

$$x^2+y^2-6x+8y=0$$

è rappresentata, nel piano cartesiano, da una circonfere

raggio $r=5$. Infatti essa si può porre nella forma:

$$(x-3)^2+(y+4)^2=25.$$

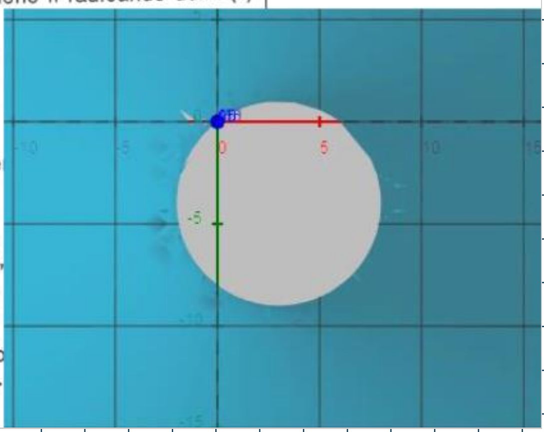
Operando identiche trasformazioni algebriche sulla (2),

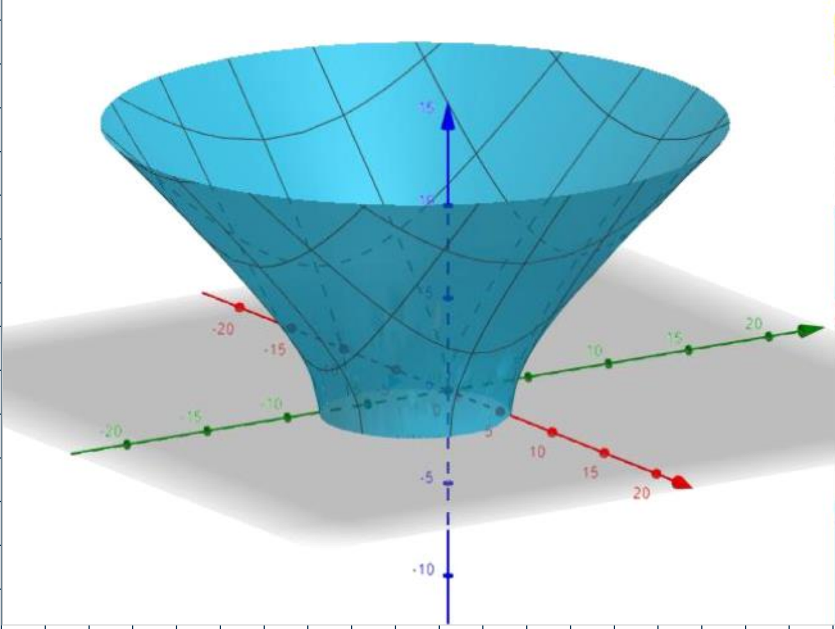
forma equivalente ma più facilmente interpretabile:

$$(x-3)^2+(y+4)^2 \geqslant 25.$$

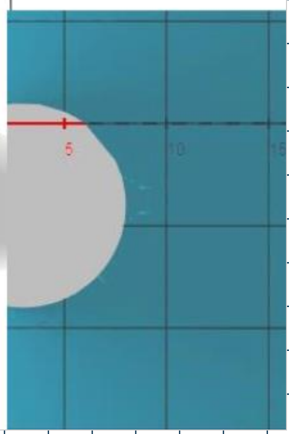
La diseguaglianza (3) è verificata se e solo se x e y sono

avente distanza maggiore o eguale a 5 da $C(3;\,-4)$ (fig.





$^2 \to B \subseteq \boldsymbol{R}$



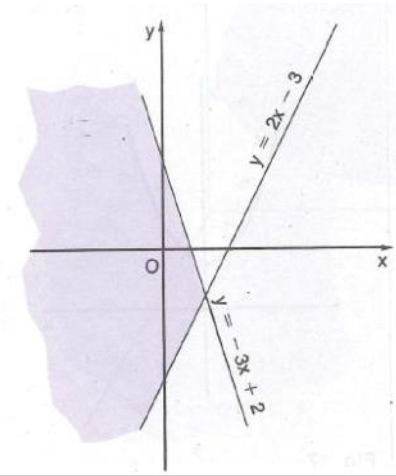
4. Determinare il dominio della funzione

$$f(x;\, y) = \sqrt{6 + 2y - 4x} + \sqrt{2 - 3x - y}.$$

La funzione è definita se entrambi i radicandi sono maggiori o eguali a zero:

$$\begin{cases} 6 + 2y - 4x \geqslant 0 \\ 2 - 3x - y \geqslant 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y \geqslant 2x - 3 \\ y \leqslant -3x + 2. \end{cases}$$

La prima disequazione è soddisfatta dalle coordinate dei punti che si trovano nel semipiano chiuso α che ha per origine la retta $y = 2x - 3$ e che contiene l'origine. La seconda disequazione è verificata nel semipiano chiuso β generato dalla retta $y = -3x + 2$ e contenente l'origine (fig. 14). Il dominio della funzione considerata è pertanto costituito dall'insieme $\alpha \cap \beta$, ossia dall'angolo colorato in figura 14, compresi i lati.



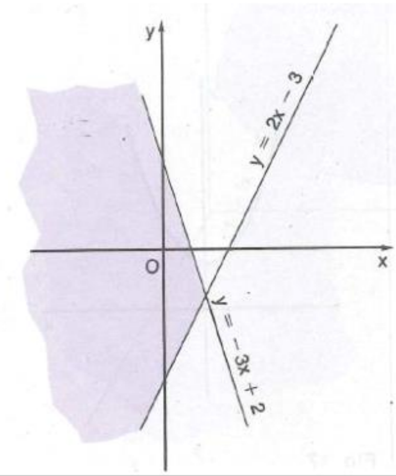
4. Determinare il dominio della funzione

$$f(x;\, y) = \sqrt{6 + 2y - 4x} + \sqrt{2 - 3x - y}.$$

La funzione è definita se entrambi i radicandi sono maggiori o eguali a zero:

$$\begin{cases} 6 + 2y - 4x \geqslant 0 \\ 2 - 3x - y \geqslant 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y \geqslant 2x - 3 \\ y \leqslant -3x + 2. \end{cases}$$

La prima disequazione è soddisfatta dalle coordinate dei punti che si trovano nel semipiano chiuso α che ha per origine la retta $y = 2x - 3$ e che contiene l'origine. La seconda disequazione è verificata nel semipiano chiuso β generato dalla retta $y = -3x + 2$ e contenente l'origine (fig. 14). Il dominio della funzione considerata è pertanto costituito dall'insieme $\alpha \cap \beta$, ossia dall'angolo colorato in figura 14, compresi i lati.



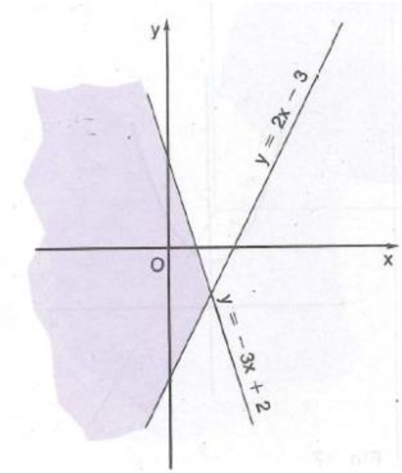
4. Determinare il dominio della funzione

$$f(x;\, y) = \sqrt{6 + 2y - 4x} + \sqrt{2 - 3x - y}.$$

La funzione è definita se entrambi i radicandi sono maggiori o eguali a zero:

$$\begin{cases} 6 + 2y - 4x \geqslant 0 \\ 2 - 3x - y \geqslant 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y \geqslant 2x - 3 \\ y \leqslant -3x + 2. \end{cases}$$

La prima disequazione è soddisfatta dalle coordinate dei punti che si trovano nel semipiano chiuso α che ha per origine la retta $y = 2x - 3$ e che contiene l'origine. La seconda disequazione è verificata nel semipiano chiuso β generato dalla retta $y = -3x + 2$ e contenente l'origine (fig. 14). Il dominio della funzione considerata è pertanto costituito dall'insieme $\alpha \cap \beta$, ossia dall'angolo colorato in figura 14, compresi i lati.



Positività della funzione?

SEZIONE

esempio

$$z = 3y^2 - x^2$$

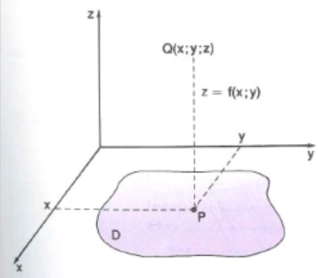


Fig. 19

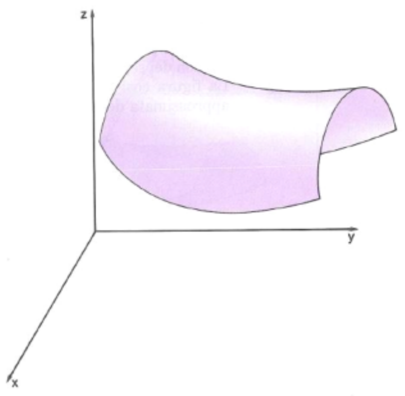


Fig. 20

SEZIONE

esempio

$$z = 3y^2 - x^2$$

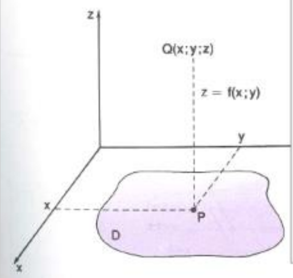


Fig. 19

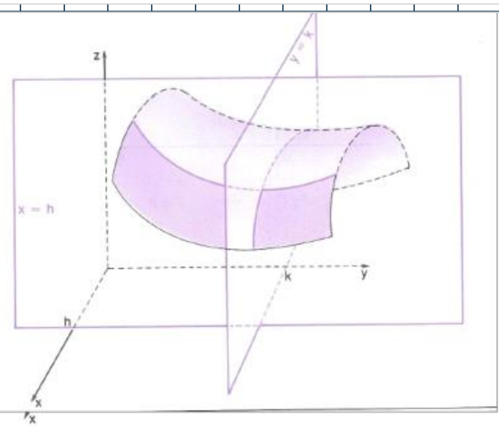


Fig. 22

Fig. 20

SEZIONE

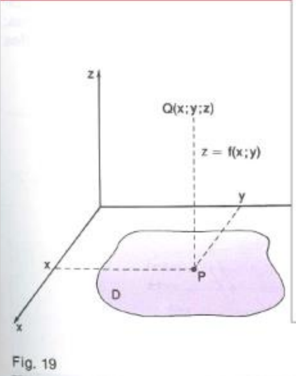


Fig. 19

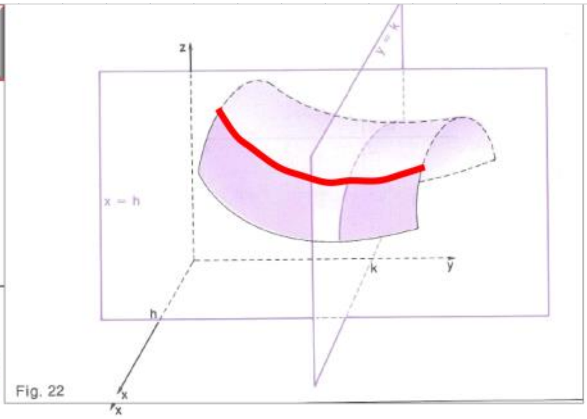


Fig. 22

Fig. 20

esempio

$z = 3y^2 - x^2$

$x = 2$
$z = 3y^2 - 4$

SEZIONE

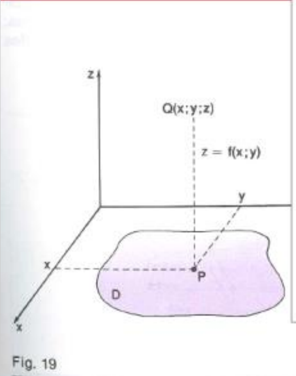


Fig. 19

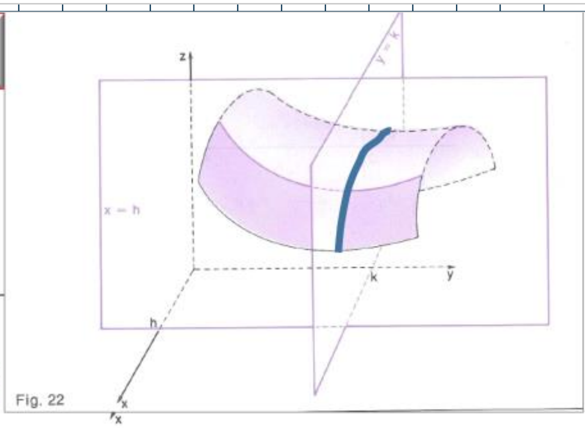


Fig. 22

Fig. 20

esempio

$z = 3y^2 - x^2$

$y = 3$
$z = 27 - x^2$

CURVE DI LIVELLO

17. Le **linee di livello** o **curve di livello** di una funzione di due variabili si ottengono sezionandone il grafico con piani paralleli al piano xy (fig. 32).

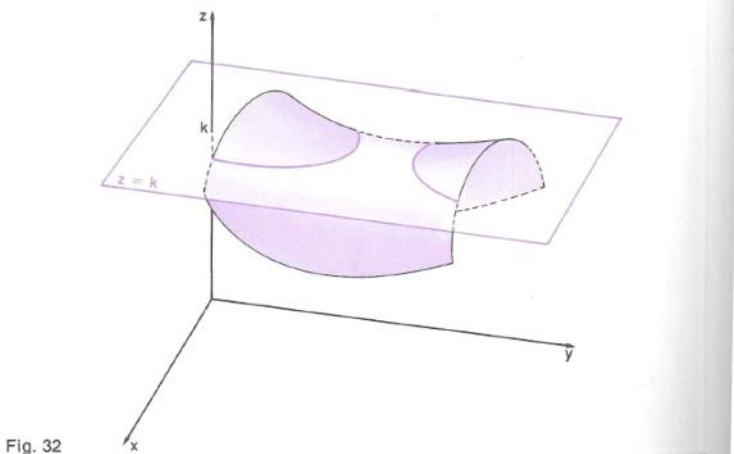


Fig. 32

esempio

$z = 3y^2 - x^2$

$z = 3$
$3 = 3y^2 - x^2$

CURVE DI LIVELLO

esempio

17. Le **linee di livello** o **curve di livello** di una funzione di due variabili si ottengono sezionandone il grafico con piani paralleli al piano xy (fig. 32).

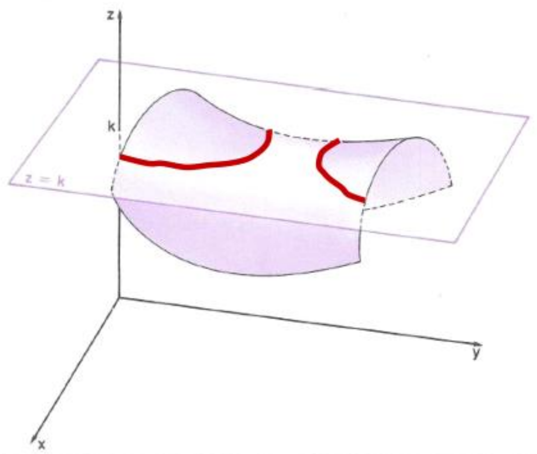
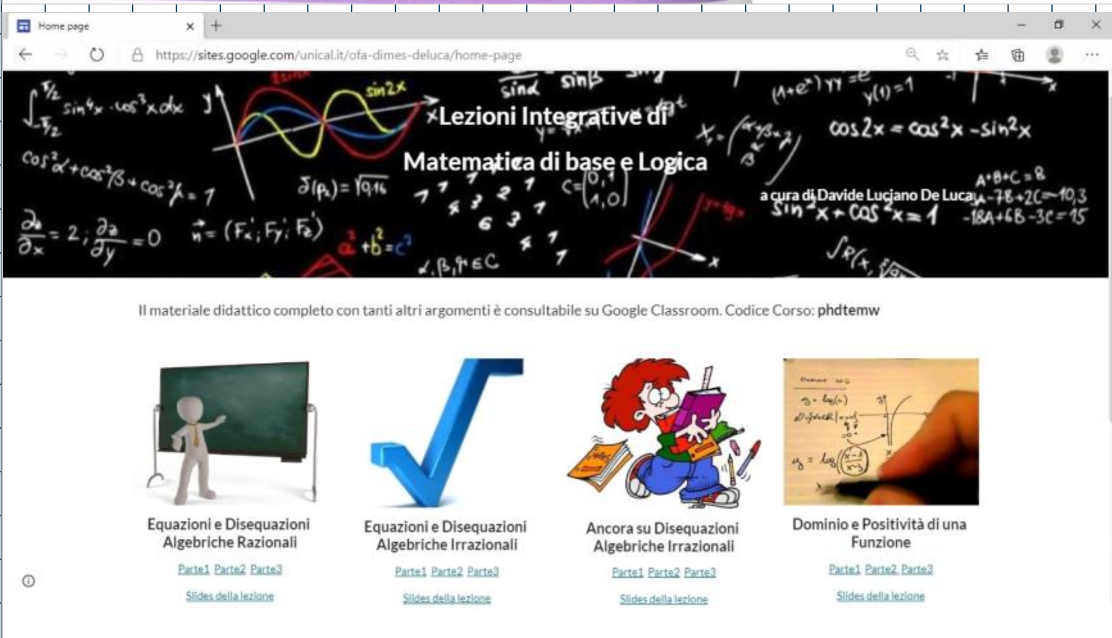


Fig. 32

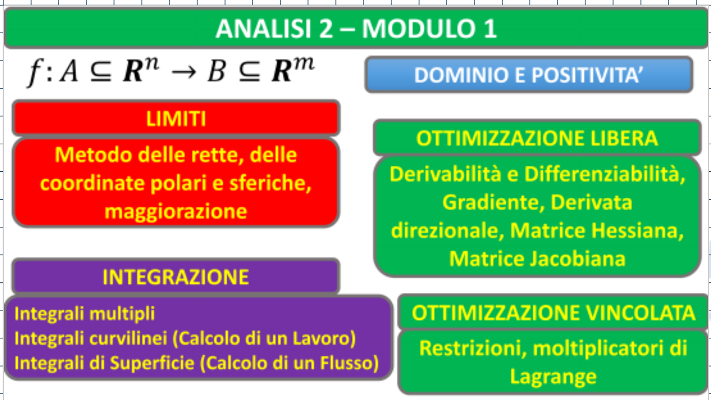
$$z = 3y^2 - x^2$$

$$z = 3$$
$$3 = 3y^2 - x^2$$

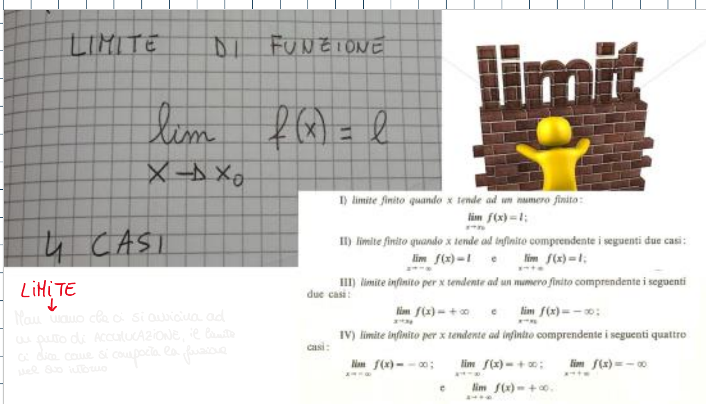



Nella prossima lezione:
• I limiti per funzioni a più variabili


UNIVERSITÀ DELLA CALABRIA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INFORMATICA, MODELLISTICA, ELETTRONICA E SISTEMISTICA
DIMES
CORSO DI
METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA INFORMATICA– MODULO 1
LIMITI DI FUNZIONE
Davide Luciano De Luca


ANALISI 2 – MODULO 1
$f: A \subseteq \boldsymbol{R}^n \rightarrow B \subseteq \boldsymbol{R}^m$
DOMINIO E POSITIVITA'
LIMITI
Metodo delle rette, delle coordinate polari e sferiche, maggiorazione
OTTIMIZZAZIONE LIBERA
Derivabilità e Differenziabilità, Gradiente, Derivata direzionale, Matrice Hessiana, Matrice Jacobiana
INTEGRAZIONE
Integrali multipli
Integrali curvilinei (Calcolo di un Lavoro)
Integrali di Superficie (Calcolo di un Flusso)
OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA
Restrizioni, moltiplicatori di Lagrange


RICHIAMI DI ANALISI 1
Cosa bisogna ricordare prima di iniziare con i limiti per funzioni in più variabili?


LIMITE DI FUNZIONE
$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$
4 CASI
limit
I) limite finito quando x tende ad un numero finito:
$\lim_{x \to x_0} f(x) = l;$
II) limite finito quando x tende ad infinito comprendente i seguenti due casi:
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l;$
III) limite infinito per x tendente ad un numero finito comprendente i seguenti due casi:
$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty;$
IV) limite infinito per x tendente ad infinito comprendente i seguenti quattro casi:
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty;$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty;$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$
LIMITE
Man mano che ci si avvicina ad un punto di ACCUMULAZIONE, il limite ci dice come si comporta la funzione nel suo intorno

1) x_0 finito, l finito $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$

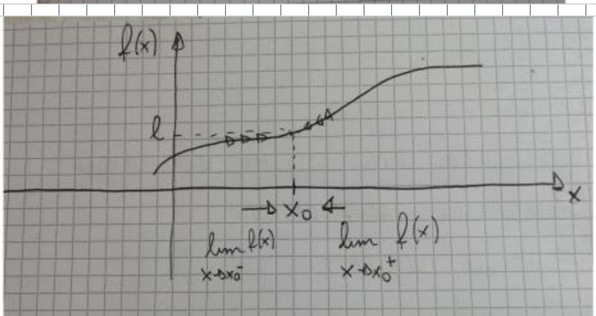
SOTTOCASI

a) limite destro

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) =$$

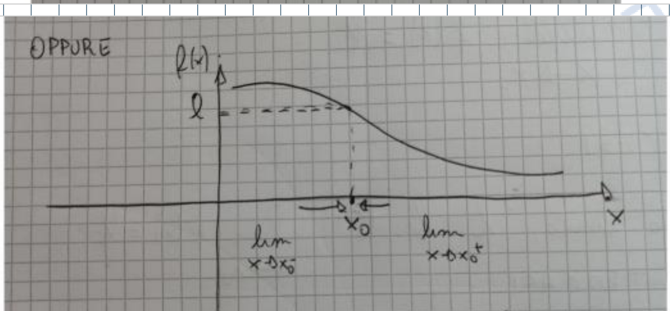
b) limite sinistro

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) =$$

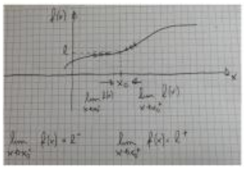


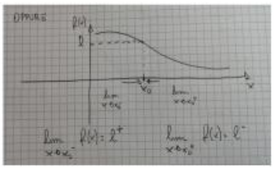
$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l^-$ $\qquad$ $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l^+$

OPPURE



$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l^+$ $\qquad$ $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l^-$





UTILITÀ

- $f(x)$ CONTINUA IN UN PUNTO x_0
- x_0 PUNTO DI DISCONTINUITÀ ELIMINABILE

2) a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$

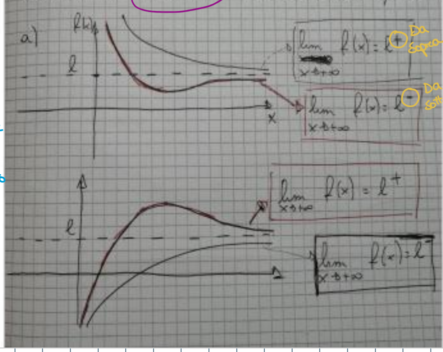
b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$

Poiché l'asintoto è una Tangente all'infinito "prima" dell'infinito la funzione può intersecare l'asintoto

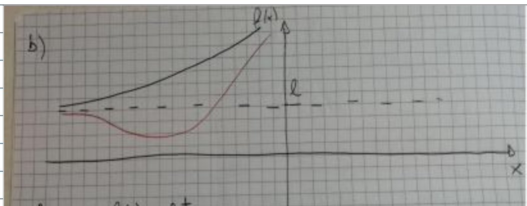
UTILITÀ

RICERCA DI ASINTOTI ORIZZONTALI $y = l$

Tangente all'infinito



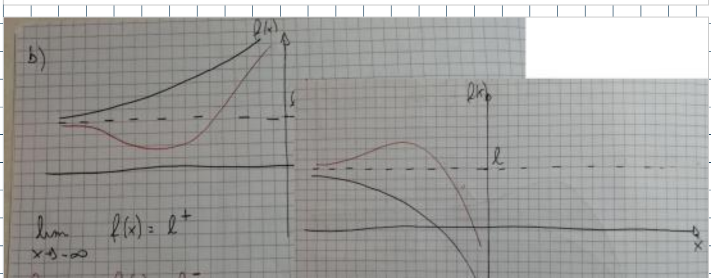
b)



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l^+$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l^-$

b)



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l^+$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l^-$

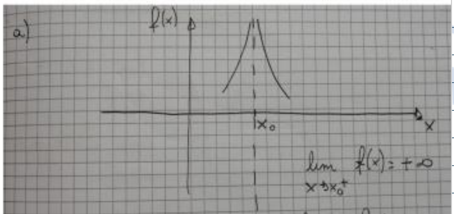
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l^-$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l^+$

3) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$

UTILITÀ: RICERCA DI ASINTOTI VERTICALI $x = x_0$

a)



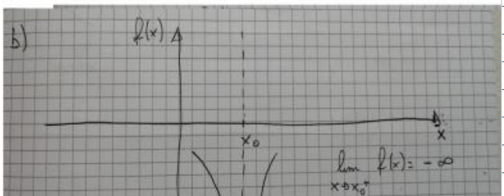
$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$

3) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$

UTILITÀ: RICERCA DI ASINTOTI VERTICALI $x = x_0$

b)

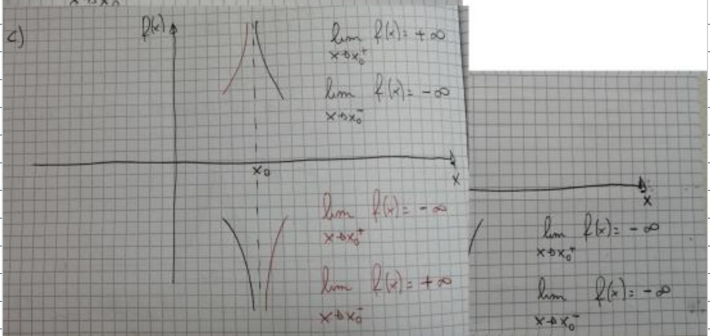


$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$

3) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$

c)



$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$

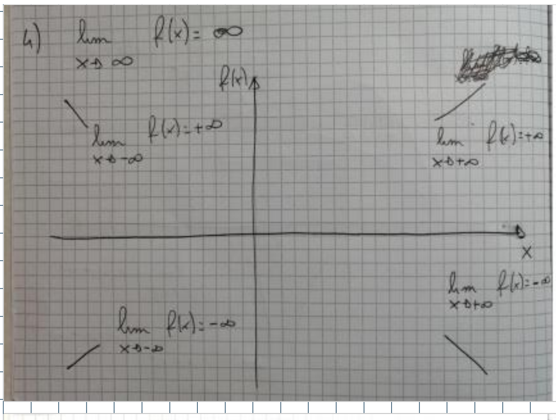
$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$

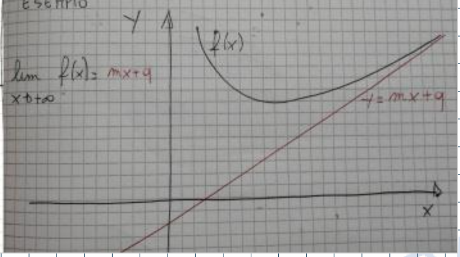
$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$



ULTERIORE ANALISI PER INVESTIGARE L'EVENTUALE PRESENZA DI ASINTOTI OBLIQUI (NE RIPARLEREMO CON LE DERIVATE)

ESEMPIO



VERIFICA	CALCOLO
$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$	$\lim_{x\to x_0} f(x) = ???$
l É GIÁ NOTO PER ESERCIZIO	

RISOLUZIONE LIMITI CON FORME INDETERMINATE

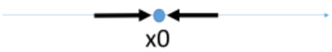
$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\to\infty}} F_1(x) + F_2(x) + \dots$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\to\infty}} \left[F_1(x) + F_2(x)\right] \cdot \frac{F_3(x)}{F_4(x)}$$

PRINCIPIO DI CONTEMPORANEITÁ DEL CALCOLO

Il limite viene calcolato contemporaneamente sia sopra che sotto nella funzione

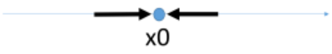
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \neq \frac{\lim_{x\to 0} e^x - 1}{x}$$

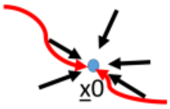
ANALISI 1	ANALISI 2
	

LIMITE DI UN PUNTO DI FRONTIERA

Come per analisi 1 in cui si parla di limite destro e limite sinistro,

ANALISI 1	ANALISI 2





$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = l$$

"x segnato"

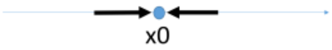
indica un vettore

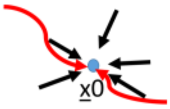
Basta una coppia di rette con cui da due informazioni diverse per concludere che il limite non esiste

Limite esiste ⟺ **Indipendenza dal percorso di avvicinamento**

cioè è uguale indipendentemente dal percorso con cui mi avvicino al punto

ANALISI 1	ANALISI 2





$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = l$$

Limite NON esiste ⟺ **dipendenza dal percorso di avvicinamento**

Se considero $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}$

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = l \qquad \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = +\infty \ (-\infty)$$

NOTAZIONE VETTORIALE

$\underline{x}_0$ è sempre un punto di accumulazione

In maniera equivalente posso scrivere

$$\lim_{\substack{x_1 \to x_{1,0} \\ x_2 \to x_{2,0} \\ \vdots \\ x_n \to x_{n,0}}} f(x_1, x_2, \dots x_n) = \begin{cases} \to l \\ \to +\infty \ (-\infty) \end{cases}$$

NOTAZIONE TRAMITE COMPONENTI

ANALISI 2

$f: A \subseteq \boldsymbol{R}^n \to B \subseteq \boldsymbol{R}^m$

$$f: (x, y, z, t) \to \left(x^2 + e^y, \sqrt{z - t + x}, tx\right)$$
$$f: (x, y, z, t) \to (f1, f2, f3)$$
$$f1: (x, y, z, t) \to (x^2 + e^y)$$
$$f2: (x, y, z, t) \to \left(\sqrt{z - t + x}\right)$$
$$f3: (x, y, z, t) \to (\,tx)$$

oppure nel caso semplice di $A \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = \begin{cases} \to l \\ \to +\infty \ (-\infty) \end{cases}$$

Nel caso di tendenza in $\mathbb{R}^n$ da un punto del dominio a $+\infty$ (o $-\infty$), nell'ipotesi che il dominio sia illimitato, bisogna chiarire alcune cose

$$\lim_{\underline{x} \to +\infty} \quad \text{può significare sia} \quad \lim_{\substack{x_1 \to +\infty \\ x_2 \to +\infty \\ \vdots \\ x_n \to +\infty}}$$

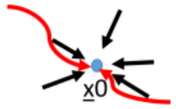
ma $\lim\limits_{\substack{x_1 \to x_0 \\ x_2 \to +\infty \\ \vdots \\ x_n \to +\infty}}$

Quindi è sufficiente che almeno una componente $\to +\infty$ $(o\ -\infty)$

Esempio (Da premettere che valgono le stesse regole di Analisi I in molti casi, ovvero si inizia sempre con la sostituzione dei valori, e solo se dopo si ottengono forme indeterminate, allora si passa al ragionamento con i metodi che adesso vediamo)

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to 0}} \frac{1-y}{1+x} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

ANALISI 2



$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = l$$

Limite esiste $\Leftrightarrow$ **Indipendenza dal percorso di avvicinamento**

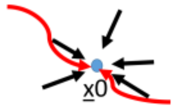
ANALISI 2

metodi

- **Maggiorazione**
- **Coordinate polari - sferiche**
- **Rette**

Esistenza del limite

Non esistenza del limite



$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = l$$

Limite esiste $\Leftrightarrow$ **Indipendenza dal percorso di avvicinamento**

Metodo della Maggiorazione

21. - Terzo teorema (del confronto) METODO DEI CARABINIERI

Date le tre funzioni $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ e $y = f_3(x)$ definite, rispettivamente, negli insiemi F_1, F_2, e F_3, se è

$$(F_1 \cap F_2) \cap F_3 = F \neq \varnothing,$$

se inoltre risulta, per $x \in F$:

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant f_3(x)\ (^1) \qquad (a)$$

e se infine, indicato con x_0 un punto di accumulazione di F, risulta:

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = \lim_{x \to x_0} f_3(x) = l, \qquad (b)$$

sarà anche:

$$\lim_{x \to x_0} f_2(x) = l.$$

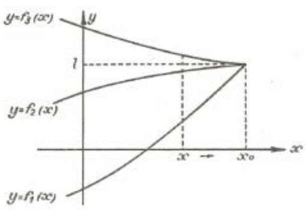


Fig. 29.

Metodo della Maggiorazione

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x}) = l \qquad \lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x}) - l = 0$$

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} |f(\underline{x}) - l| = 0$$

$$0 \le |f(\underline{x}) - l| \le g(v) \qquad \lim_{\substack{\underline{x}\to\underline{x}_0 \\ \Updownarrow \\ v\to v_0}} g(v) = 0$$

Metodo della Maggiorazione

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x}) = l$$ **Verifica: *l* è noto**

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x}) = ?$$ **Calcolo: *l* è da determinare**

Come uso la maggiorazione nei problemi di calcolo di un limite?

Metodo della Maggiorazione nei problemi di Verifica

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x}) = l$$ **Verifica: *l* è noto**

Esempio 1

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x \cdot y^2}{x^4+y^2+1} = 0$$

È intuitivo dire che la frazione è positiva

$$0 \le \left|\frac{x\,y^2}{x^4+y^2+1} - 0\right| \boxed{\le} \left|\frac{x\,y^2}{y^2}\right| = |x| \to 0$$

Un carabiniere è sempre ≥ 0

Il modulo serve ad operare la maggiorazione

Tolgo delle quantità

SEMPLIFICO

Metodo della Maggiorazione nei problemi di Verifica

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x}) = l$$ **Verifica: *l* è noto**

Esempio 2

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 - xy}{x+y^2} = 0$$

$$0 \le \left|\frac{x^2-xy}{x+y^2} - 0\right| = |x| \cdot \frac{|x-y|}{|x+y^2|} \le |x| \cdot \frac{|x|+|y|}{|x+y^2|} \le$$

$$\le |x|\,\frac{|x|+|y|}{|x|} = |x| + |y| \to 0 + 0$$

Metodo della Maggiorazione nei problemi di Calcolo

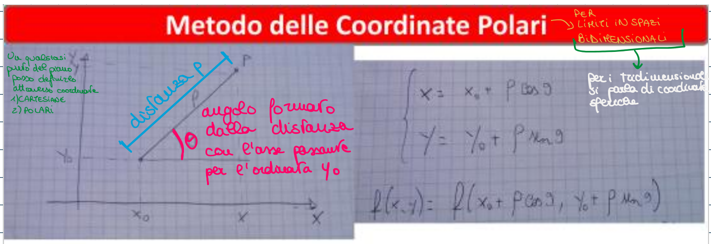
In base a quale criterio scegliere il termine

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x}) = ?$$ **Calcolo: *l* è da determinare**

Come uso la maggiorazione nei problemi di calcolo di un limite?

Assieme ad altre tecniche: ad es. il metodo delle coordinate polari

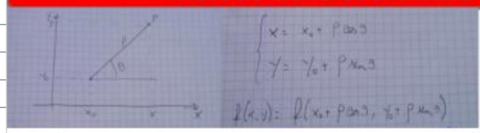
Metodo delle Coordinate Polari

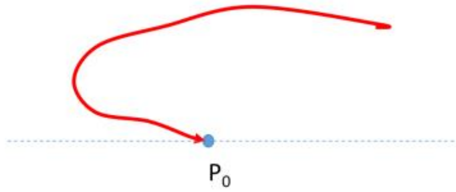


$$0 \leq \ |f(x_0 + \rho cos\theta, y_0 + sen\theta) - l| \leq g(\rho)$$

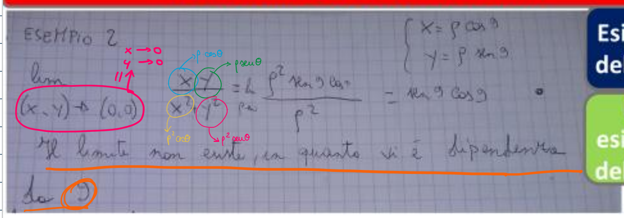
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = l \Leftrightarrow \lim_{\rho \to 0} g(\rho) = 0$$

Metodo delle Coordinate Polari





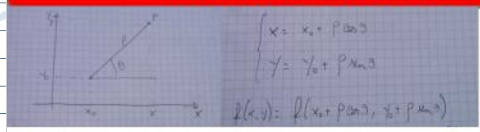
Metodo delle Coordinate Polari

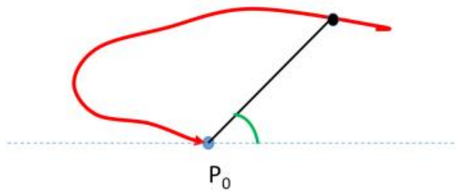


Esistenza del limite

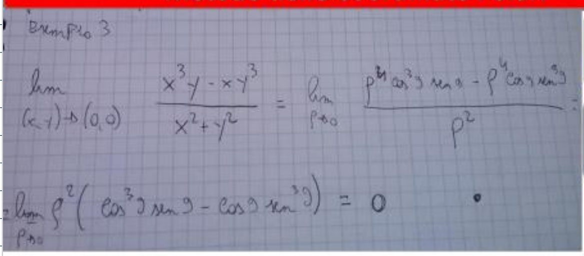
Non esistenza del limite

Metodo delle Coordinate Polari





Metodo delle Coordinate Polari



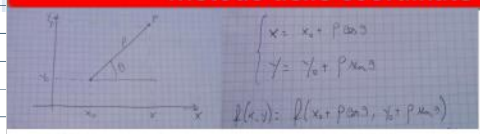
Esistenza del limite

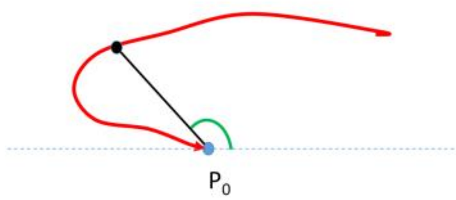
Non esistenza del limite

$$0 \leq \ |f(x_0 + \rho cos\theta, y_0 + sen\theta) - l| \leq g(\rho)$$

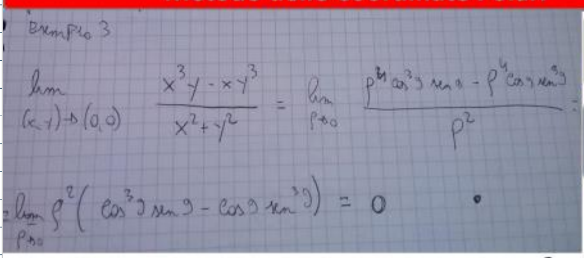
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = l \Leftrightarrow \lim_{\rho \to 0} g(\rho) = 0$$

Metodo delle Coordinate Polari





Metodo delle Coordinate Polari



Esistenza del limite

Non esistenza del limite

$$0 \leq \ |f(x_0 + \rho cos\theta, y_0 + sen\theta)| \leq M\rho^2$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \lim_{\rho \to 0} M\rho^2 = 0$$

Metodo delle Coordinate Polari

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{yx^2}{y^2+x^4} =$$

$(x,y) \to (0,0)$

Esistenza del limite

Non esistenza del limite

$$0 \le \ |f(x_0+\rho cos\theta, y_0+sen\theta)-l| \le g(\rho)$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = l \Leftrightarrow \lim_{\rho\to 0} g(\rho) = 0$$

Metodo delle Coordinate Polari

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{yx^2}{y^2+x^4} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho sen\theta \rho^2 cos^2\theta}{\rho^2 sen^2\theta + \rho^4 cos^4\theta} =$$

Esistenza del limite

Non esistenza del limite

$$0 \le \ |f(x_0+\rho cos\theta, y_0+sen\theta)-l| \le g(\rho)$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = l \Leftrightarrow \lim_{\rho\to 0} g(\rho) = 0$$

Metodo delle Coordinate Polari

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{yx^2}{y^2+x^4} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho sen\theta \rho^2 cos^2\theta}{\rho^2 sen^2\theta + \rho^4 cos^4\theta} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3 cos^2\theta sen\theta}{\rho^2[sen^2\theta + \rho^2 cos^4\theta]} =$$

Esistenza del limite

Non esistenza del limite

$$0 \le \ |f(x_0+\rho cos\theta, y_0+sen\theta)-l| \le g(\rho)$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = l \Leftrightarrow \lim_{\rho\to 0} g(\rho) = 0$$

Metodo delle Coordinate Polari

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{yx^2}{y^2+x^4} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho sen\theta \rho^2 cos^2\theta}{\rho^2 sen^2\theta + \rho^4 cos^4\theta} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3 cos^2\theta sen\theta}{\rho^2[sen^2\theta + \rho^2 cos^4\theta]} = \frac{0}{sen^2\theta}$$

Esistenza del limite

Non esistenza del limite

$$0 \le \ |f(x_0+\rho cos\theta, y_0+sen\theta)-l| \le g(\rho)$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = l \Leftrightarrow \lim_{\rho\to 0} g(\rho) = 0$$

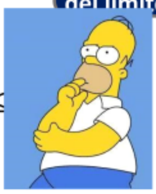
Metodo delle Coordinate Polari

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{yx^2}{y^2+x^4} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho sen\theta \rho^2 cos^2\theta}{\rho^2 sen^2\theta + \rho^4 cos^4\theta} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3 cos^2\theta sen\theta}{\rho^2[sen^2\theta + \rho^2 cos^4\theta]} = \frac{0}{sen^2\theta}$$

Esistenza del limite

Non esistenza del limite

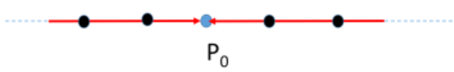


$$0 \le \ |f(x_0+\rho cos\theta, y_0+sen\theta)-l| \le$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = l \Leftrightarrow \lim_{\rho\to 0} g(\rho) = 0$$

Metodo delle Coordinate Polari

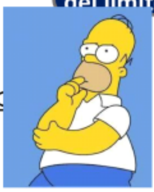
$sen\theta = 0$



=

Esistenza del limite

Non esistenza del limite



Metodo delle Coordinate Polari

$sen\theta = 0$

=

Esistenza del limite

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y) = l \Leftrightarrow \lim_{\rho\to 0} g(\rho) = 0$$

Metodo delle Coordinate Polari

Esistenza del limite

Non esistenza del limite

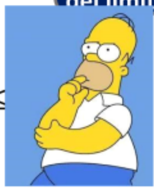
$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \frac{yx^2}{y^2+x^4} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho sen\theta \rho^2 cos^2\theta}{\rho^2 sen^2\theta + \rho^4 cos^4\theta} =$$

$$= \frac{\rho^3 cos^2\theta sen\theta}{[illegible] cos^4\theta]} = \frac{0}{sen^2\theta}$$

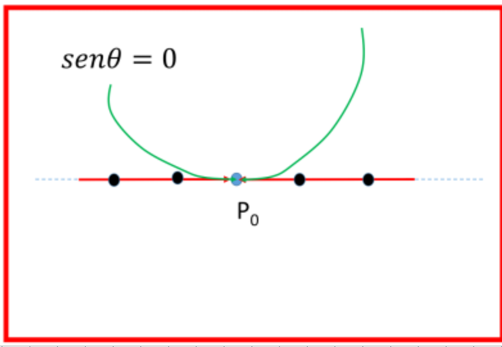
Ritorneremo tra un po' su questo esercizio....

$0 \leq |f(x_0 + \rho cos\theta, y_0$ [illegible] $\leq$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y) = l \Leftrightarrow \lim_{\rho\to 0} g(\rho) = 0$$



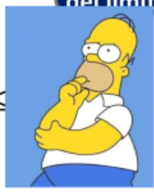
Metodo delle Coordinate Polari



$=$

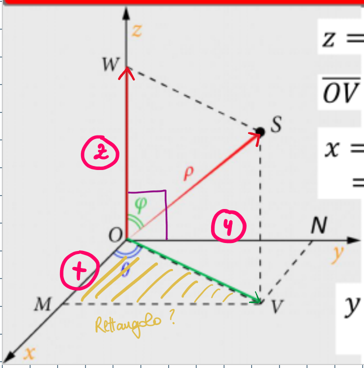
Esistenza del limite

Non esistenza del limite



Metodo delle Coordinate Sferiche

→ Tridimensionalità



$z = \overline{OW} = \rho cos\varphi$

$\overline{OV} = \overline{WS} = \rho sen\varphi$

$x = \overline{OM} = \overline{OV} cos\theta =$
$= \rho sen\varphi cos\theta$

qualsiasi cambio di sistema di riferimento può essere usato come metodo di sostituzione

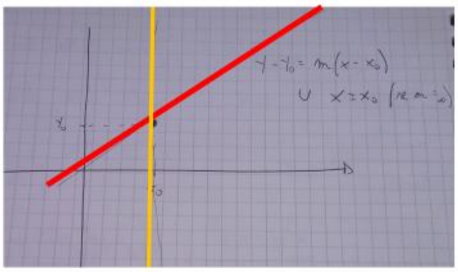
$y = \overline{ON} = \overline{MV} = \overline{OV} sen\theta =$
$= \rho sen\varphi sen\theta$

Esistenza del limite

Non esistenza del limite

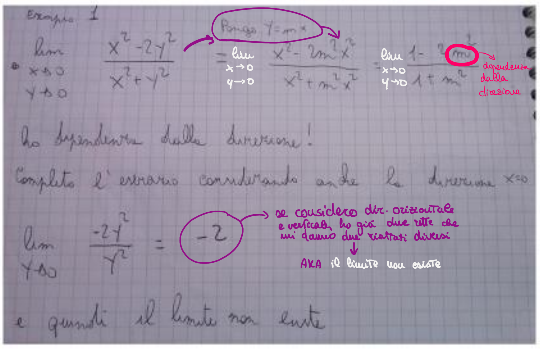
Metodo delle Rette

→ viene usato per dimostrare che un limite non esiste



Non esistenza del limite

Metodo delle Rette


Esempio 1

Pongo $y = mx$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \frac{x^2-2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \frac{x^2-2m^2x^2}{x^2+m^2x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \frac{1-2m^2}{1+m^2}$$

→ dipendenza dalla direzione

ho dipendenza dalla direzione!

Completo l'esercizio considerando anche la direzione $x=0$

$$\lim_{y\to 0} \frac{-2y^2}{y^2} = -2$$

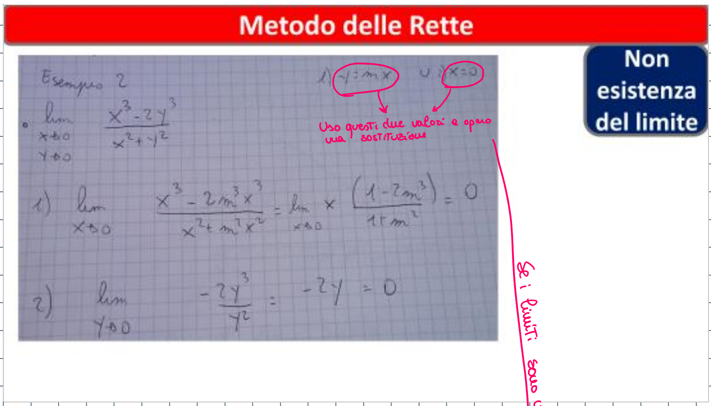
→ se considero dir. orizzontale e verticale, ho già due rette che mi danno due risultati diversi

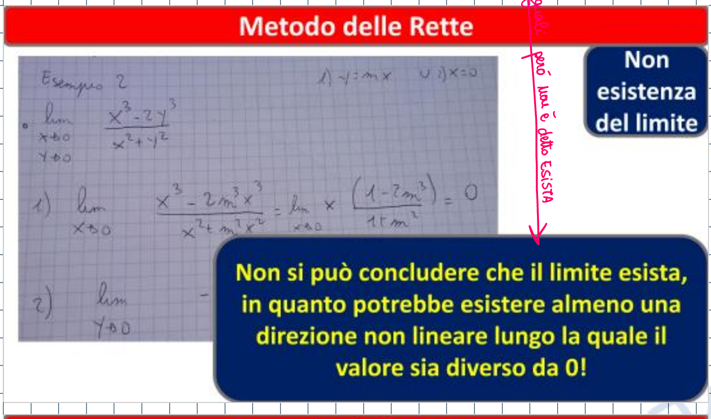
↓

AKA il limite non esiste

e quindi il limite non esiste

Non esistenza del limite





$x^3 = \rho^3 \cos^3\theta \qquad y^3 = \rho^3 \operatorname{sen}^3\theta$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3 - 2y^3}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3 cos^3\theta - \rho^3 sen^3\theta}{\rho^2 cos^2\theta + \rho^2 sen^2\theta} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3 cos^3\theta - \rho^3 sen^3\theta}{\rho^2} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \rho(cos^3\theta - sen^3\theta) = \cdots$$

LIVELLO LE POTENZE

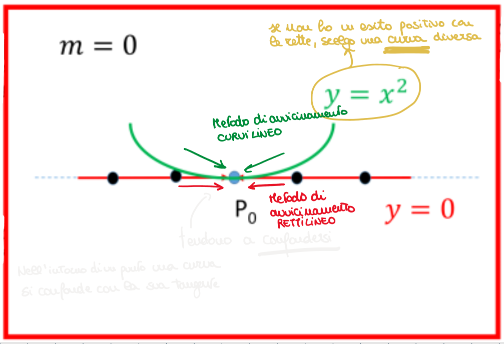
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{yx^2}{y^2 + x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^3}{m^2x^2 + x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{m^2 + x^2} = \frac{0}{m^2}$$

$2x \qquad 2x$

$$y = x^2$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{yx^2}{y^2 + x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = l \Leftrightarrow \lim_{\rho\to 0} g(\rho) = 0$$



FUNZIONI CONTINUE

Analogamente ad Analisi 1, devono verificarsi contemporaneamente 3 condizioni

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ — Il limite per $x \to x_0$ deve esistere e deve avere valore FINITO

2) $\exists f(x_0)$ — Il valore della funzione nel punto di accumulazione non esiste

3) $l = f(x_0)$ — Il valore della funzione nel punto di accumulazione coincide col risultato del limite

FUNZIONI CONTINUE

ESEMPIO 1

- $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \forall (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & x=0,\ y=0 \end{cases}$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^{\cancel{2}} \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{\cancel{\rho}} = 0$$

Utilizzando le coordinate polari si può semplificare la funzione per calcolare il valore del limite tramite la maggiorazione

Li si devono portare ad essere limiti ad una variabile tipica di ANALISI 1

$$0 \leq |f(x_0 + \rho cos\theta, y_0 + sen\theta) - l| \leq g(\rho)$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = l \Leftrightarrow \lim_{\rho \to 0} g(\rho) = 0$$

FUNZIONI CONTINUE

ESEMPIO 2

- $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \ln\sqrt{x^2+y^2} & \forall (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (x^2+y^2) \ln(\sqrt{x^2+y^2}) = \lim_{\rho \to 0} \rho^2 \ln \rho \ (0 \cdot \infty)$$

$$\Rightarrow \lim_{\rho \to 0} \frac{\ln \rho}{\frac{1}{\rho^2}} \overset{H}{=} \frac{\frac{1}{\rho}}{-\frac{2}{\rho^3}} = \frac{1}{\rho} \cdot -\frac{\rho^3}{2} \to 0$$

FUNZIONI CONTINUE

ESEMPIO 3

$f(x,y) = \begin{cases} xy \ln(\sqrt{x^2+y^2}) & \forall (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$$\lim_{\rho \to 0} \rho^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta \ln \rho = \cos\theta \operatorname{sen}\theta \cdot \lim_{\rho \to 0} \rho^2 \ln \rho = 0$$

FUNZIONI CONTINUE

ESEMPIO 4

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4} & \forall (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^4 \cos^2\vartheta \,\text{sen}^2\vartheta}{\rho^4 \cos^4\vartheta + \rho^4 \text{sen}^4\vartheta} = \frac{\cos^2\vartheta \,\text{sen}^2\vartheta}{\cos^4\vartheta + \text{sen}^4\vartheta}$$

$f(x,y)$ non è continua !!!

FUNZIONI CONTINUE

ESEMPIO 5

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^4} & \forall (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^3 \cos^2\vartheta \,\text{sen}\,\vartheta}{\rho^4 \cos^4\vartheta + \rho^4 \text{sen}^4\vartheta} = \frac{\cos^2\vartheta \,\text{sen}\,\vartheta}{\rho \cos^4\vartheta + \rho\,\text{sen}^4\vartheta} \to \pm\infty$$

$f(x,y)$ non è continua !!!

FUNZIONI CONTINUE

ESEMPIO 6

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}(xy)}{x} & x \neq 0 \\ y & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$$

Per essere continua devo avere

$$\lim_{(x,y) \to (0,y)} \frac{\text{sen}(xy)}{x} = y$$

Per $y \neq 0$

$$\lim_{(x,y) \to (0,y)} y\,\frac{\text{sen}(xy)}{xy} = y \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(xy)}{xy} = y \cdot 1 = y$$

Per $y = 0 \Rightarrow f(0,0) = 0$

$$0 \leq \left| \frac{\text{sen}(xy)}{\cancel{x}} \right| \leq \frac{|xy|}{|\cancel{x}|} = |y| \to 0$$

La funzione è continua

FUNZIONI CONTINUE

Per escludere la continuità è sufficiente trovare una sola direzione/curva $\phi(x) : y = \phi(x)$ lungo la quale il limite è diverso dal valore nel punto, ovvero

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = \lim_{x \to x_0} f(x, \phi(x)) \neq f(x_0, y_0)$$

FUNZIONI CONTINUE

ESEMPIO

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}\,xy}{xy+y^2} & y \neq 0 \\ x & y = 0 \end{cases}$$

Essendo $f(0,0) = 0$

Devo verificare se $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\text{sen}\,xy}{xy+y^2} = 0$?

FUNZIONI CONTINUE

Scelgo $y = \phi(x) = x \quad (\phi(x_0) = y_0)$

e sostituisco

$$\lim_{x \to 0} f(x, x) = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

la funzione non è continua!!!

FUNZIONI CONTINUE

Trucchetti speditivi…

Per controllare se il limite non esiste

y=0	x=0
y=x	y=-x

FUNZIONI CONTINUE

TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE (Analoghe con Analisi 1)

1) Se $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}$ è continua in A^*, lo sarà anche in ogni sottoinsieme di A. Non è vero il viceversa

$f(\underline{x}) \in C^0(A)$ $\quad$ $\boxed{C^m(A)}$ sono continue anche le derivate fino all'ord. m

FUNZIONI CONTINUE

2) TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

Se $f \in C^0(A)$ e sia $P_0 \in A$

Se $f(P_0) > 0$ $(o < 0) \Rightarrow \exists\, I_{P_0}$ (oppure $B(P_0, \delta)$) $\mid \forall P \in I_{P_0}$ risulta $f(P) > 0$ (<0)

ovvero, in ogni punto dell'intorno la funzione assume lo stesso segno di $f(P_0)$

3) $f \in C^0(A)$ si dice limitata superiormente, inferiormente o limitata se la sua immagine (codominio ristretto) è rispettivamente limitato sup, inf, o limitato

INSIEME	LIMITATO	ILLIMITATO
APERTO	Aperto e limitato	Aperto e illimitato
CHIUSO	COMPATTO	Chiuso e illimitato

Teorema di Weierstrass: se f è definita in un compatto A, allora f ammette almeno un massimo e un minimo assoluto in A

Nella prossima lezione:

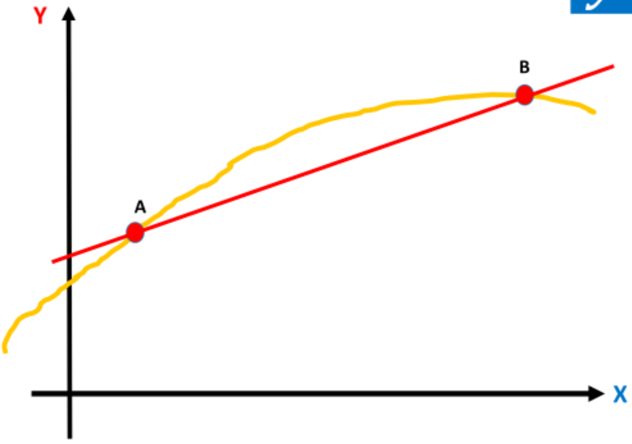
- **Richiami di derivata e differenziale da Analisi 1**

Rapporto incrementale

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

STUDIO DI FUNZIONE

$$y = f(x) = y(x)$$



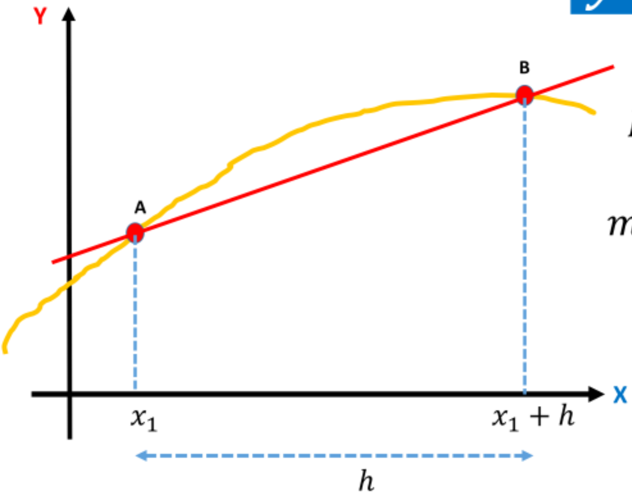
$$A = (x_1, f(x_1))$$

$$B = (x_2, f(x_2))$$

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

STUDIO DI FUNZIONE

$$y = f(x) = y(x)$$



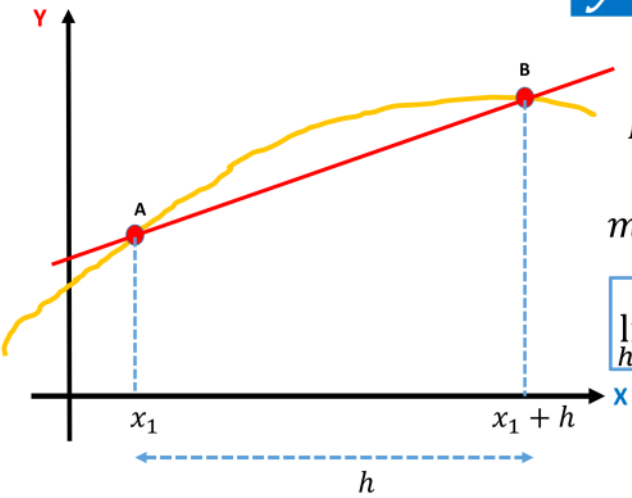
$$A = (x_1, f(x_1))$$

$$B = (x_1 + h, f(x_1 + h))$$

$$m = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

STUDIO DI FUNZIONE

$$y = f(x) = y(x)$$



$$A = (x_1, f(x_1))$$

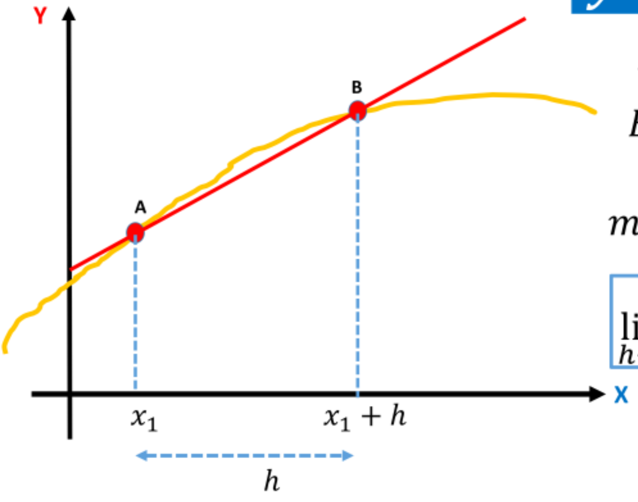
$$B = (x_1 + h, f(x_1 + h))$$

$$m = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}}$$

STUDIO DI FUNZIONE

$$y = f(x) = y(x)$$



$$A = (x_1, f(x_1))$$

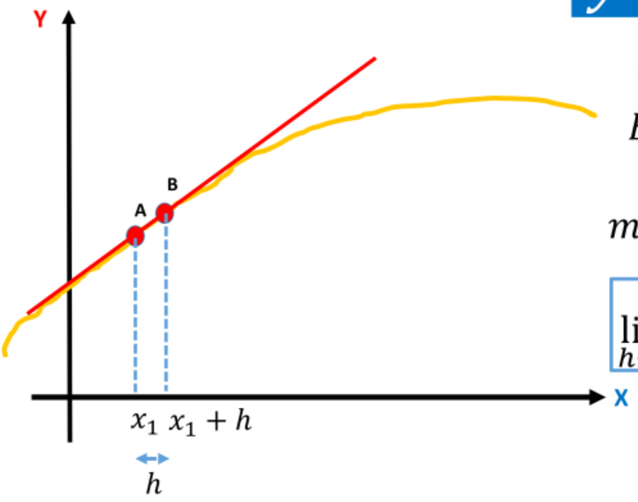
$$B = (x_1 + h, f(x_1 + h))$$

$$m = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}}$$

STUDIO DI FUNZIONE

$$y = f(x) = y(x)$$



$$A = (x_1, f(x_1))$$

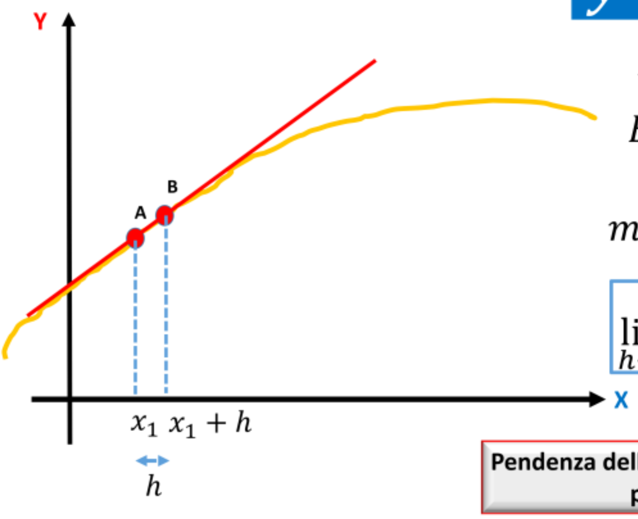
$$B = (x_1 + h, f(x_1 + h))$$

$$m = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}}$$

STUDIO DI FUNZIONE

$$y = f(x) = y(x)$$



$$A = (x_1, f(x_1))$$

$$B = (x_1 + h, f(x_1 + h))$$

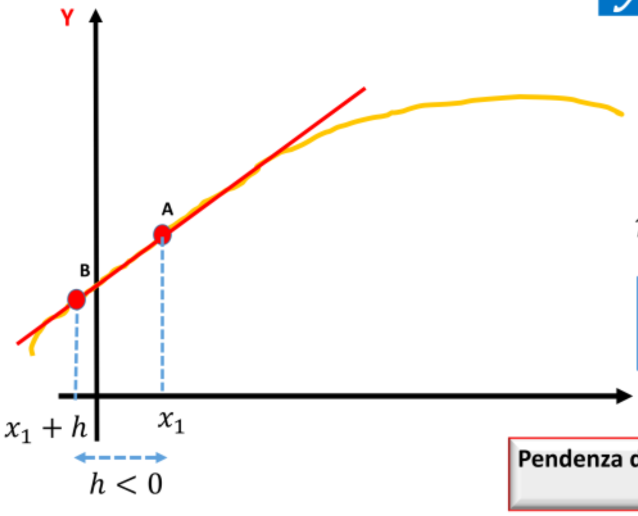
$$m = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}}$$

Pendenza della retta tangente alla funzione, nel punto $A = (x_1, f(x_1))$

Stesso ragionamento da sinistra

$$y = f(x) = y(x)$$



$$A = (x_1, f(x_1))$$

$$B = (x_1 + h, f(x_1 + h))$$

$$m = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

$\Downarrow$

Pendenza della retta tangente alla funzione, nel punto $A = (x_1, f(x_1))$

f(x) è derivabile nel punto x_1

$\Updownarrow$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

Esiste ed è finito

$\Updownarrow$

La pendenza che ho avvicinandoci da sinistra e quella che ho da destra è la stessa

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

Esistono, sono finiti e coincidono

f(x) è derivabile nel punto x_1

$\Updownarrow$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

Nel punto x_1 la funzione ammette retta tangente con pendenza m finita

$\Updownarrow$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

Da destra e da sinistra si hanno gli stessi valori di pendenza m finita, per quanto riguarda la retta tangente

Notazioni

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$$

$$= f'(x_1) = y'(x_1) = \boxed{\frac{df(x_1)}{dx}} = \boxed{\frac{dy(x_1)}{dx}} = Df(x_1)$$

$f'(x)$ **La derivata in un punto generico x è essa stessa una funzione!!!!!!**

Notazioni

$f'(x)$ **La derivata in un punto generico x è essa stessa una funzione!!!!!!**

$f''(x)$

$f'''(x)$

$f^{(n)}(x)$

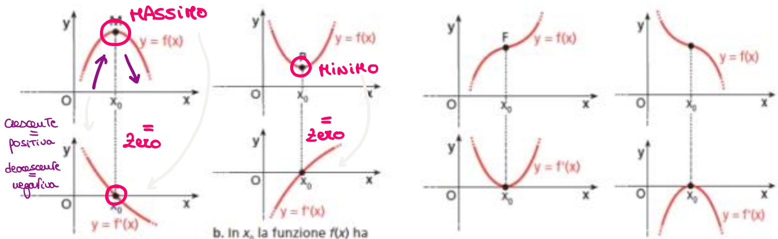
Retta tangente in x_1 alla funzione f(x)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} = f'(x_1) = m$$

$$\boxed{y - y_1 = m\,(x - x_1)}$$

$$\boxed{y - f(x_1) = f'(x_1) \cdot (x - x_1)}$$

Da f(x) ad f'(x) e viceversa...



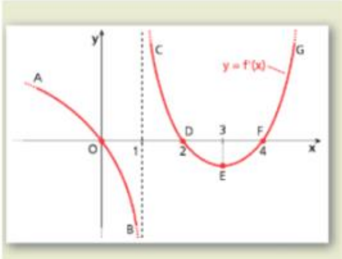
a. In x_0 la funzione $f(x)$ ha un massimo relativo. Nello stesso punto, la derivata $f'(x)$ è nulla e quindi il suo grafico interseca l'asse x in x_0. A sinistra di x_0 la derivata è positiva, a destra è negativa.

b. In x_0 la funzione $f(x)$ ha un minimo relativo: quindi $f'(x_0) = 0$.
Il grafico della derivata interseca l'asse x in x_0; a sinistra di x_0 la derivata è negativa, a destra è positiva.

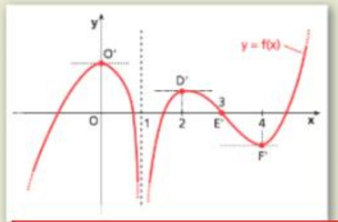
c. In x_0 $f(x)$ ha un flesso orizzontale ascendente, quindi $f'(x_0) = 0$. Il grafico della derivata interseca l'asse x in x_0, e $f'(x)$ è positiva sia a destra sia a sinistra di x_0. Pertanto in x_0 c'è un minimo per $f'(x)$.

d. In x_0 $f(x)$ ha un flesso orizzontale discendente: con considerazioni analoghe al caso precedente, per $x \neq x_0$ $f'(x)$ è negativa. Pertanto in x_0 c'è un massimo per $f'(x)$.

Piccolo antipasto di studio di funzione...



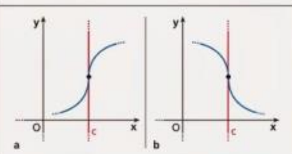
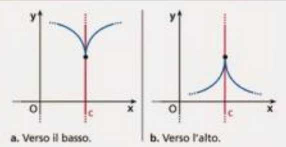
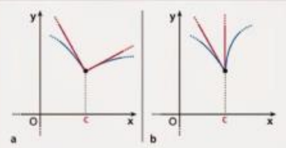
f'(x)



f(x)

Piccolo antipasto di studio di funzione...

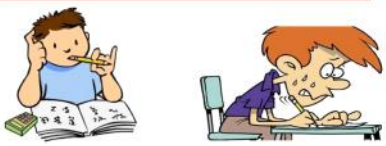
Punti di non derivabilità

Punti di non derivabilità	Grafico	Derivata
Flesso a tangente verticale		a) $f'_-(c) = f'_+(c) = +\infty$ b) $f'_-(c) = f'_+(c) = -\infty$
Cuspide	 a. Verso il basso. b. Verso l'alto.	a) $f'_-(c) = -\infty, \quad f'_+(c) = +\infty$ b) $f'_-(c) = +\infty, \quad f'_+(c) = -\infty$
Punto angoloso		$f'_-(c) \neq f'_+(c)$ a) entrambe finite b) una finita, l'altra infinita

Se la funzione non è continua allora non puoi studiare la derivabilità in essa

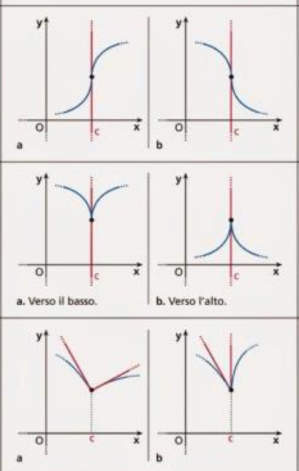
Punti che appartengono al dominio della funzione, ma non appartengono al dominio della derivata

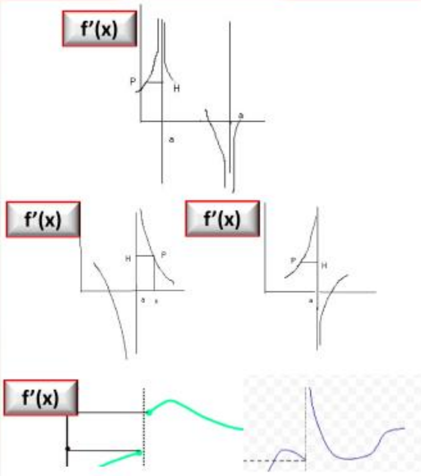
Punti estremi delle funzioni definite a tratti, cioè i punti in cui cambia la funzione



Punti di non derivabilità

Punti di non derivabilità	Grafico	Derivata
Flesso a tangente verticale	a, b	a) $f'_-(c) = f'_+(c) = +\infty$ b) $f'_-(c) = f'_+(c) = -\infty$
Cuspide	a. Verso il basso. b. Verso l'alto.	a) $f'_-(c) = -\infty, \quad f'_+(c) = +\infty$ b) $f'_-(c) = +\infty, \quad f'_+(c) = -\infty$
Punto angoloso	a, b	$f'_-(c) \neq f'_+(c)$ a) entrambe finite b) una finita, l'altra infinita





f(x) derivabile in x_0 → **f(x) continua in x_0**

~~←~~ NON PER FORZA

f(x) non continua in x_0 → **f(x) non derivabile in x_0**

In FISICA......

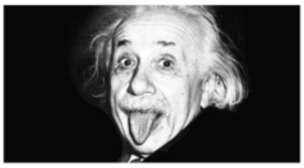
$$\boldsymbol{s}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\boldsymbol{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t)) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

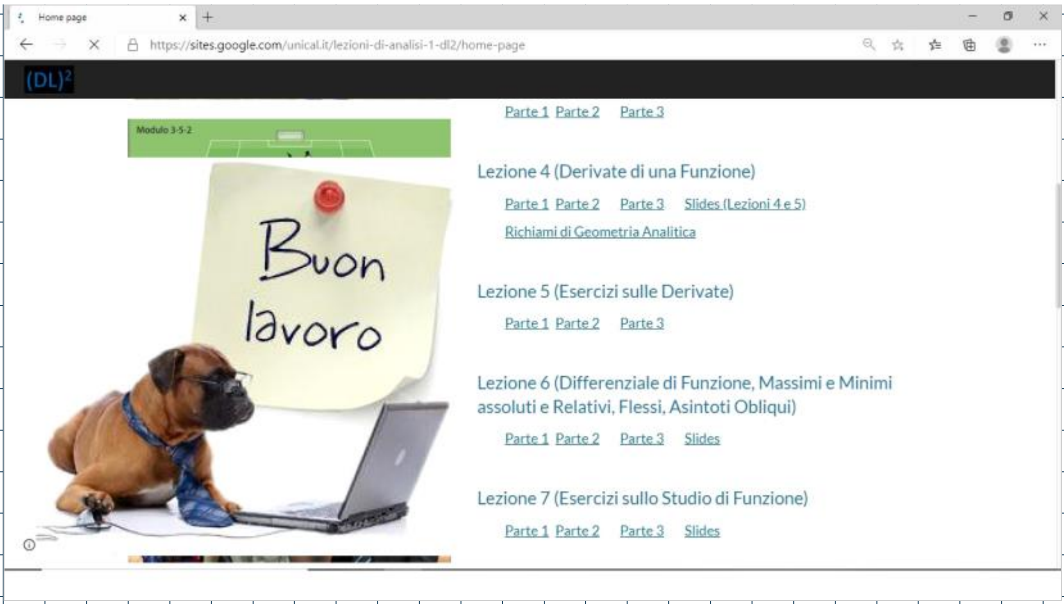
$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} \qquad v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} \qquad v_z(t) = \frac{dz(t)}{dt}$$

$$\boldsymbol{a}(t) = (a_x(t), a_y(t), a_z(t)) = (v_x'(t), v_y'(t), v_z'(t)) =$$

$$= (x''(t), y''(t), z''(t))$$



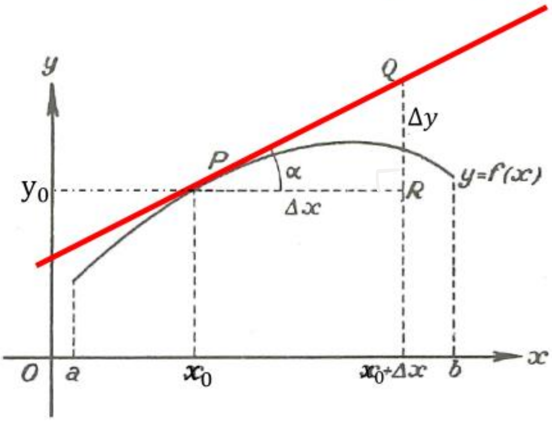
Le derivate in fisica trovano applicazione nella velocità ecc.


Home page
https://sites.google.com/unical.it/lezioni-di-analisi-1-dl2/home-page
(DL)²
Modulo 3-5-2
Buon lavoro
Parte 1 Parte 2 Parte 3
Lezione 4 (Derivate di una Funzione)
Parte 1 Parte 2 Parte 3 Slides (Lezioni 4 e 5)
Richiami di Geometria Analitica
Lezione 5 (Esercizi sulle Derivate)
Parte 1 Parte 2 Parte 3
Lezione 6 (Differenziale di Funzione, Massimi e Minimi assoluti e Relativi, Flessi, Asintoti Obliqui)
Parte 1 Parte 2 Parte 3 Slides
Lezione 7 (Esercizi sullo Studio di Funzione)
Parte 1 Parte 2 Parte 3 Slides


PRIMI PASSI CON IL DIFFERENZIALE

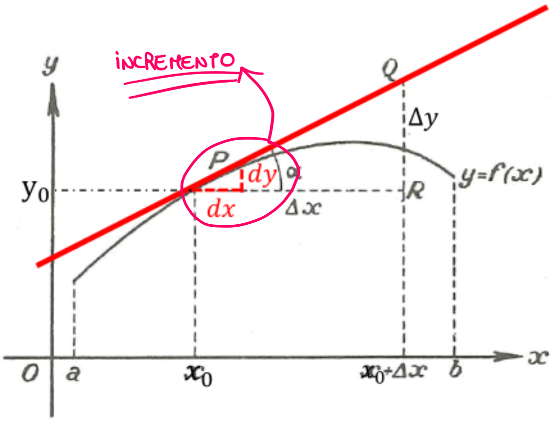
$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x$$



$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

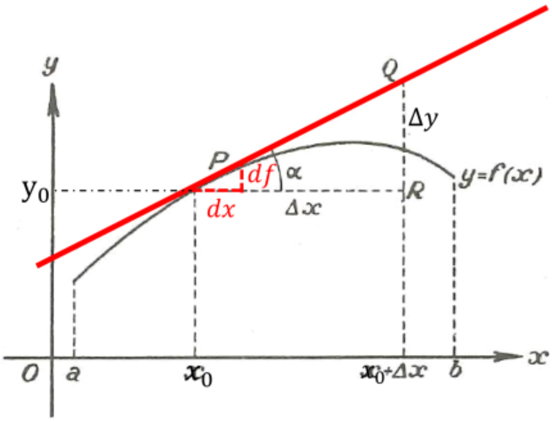


$$dy = f'(x_0) \cdot dx$$

L'incremento di ordinata della funzione viene calcolato sulla retta tangente!

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

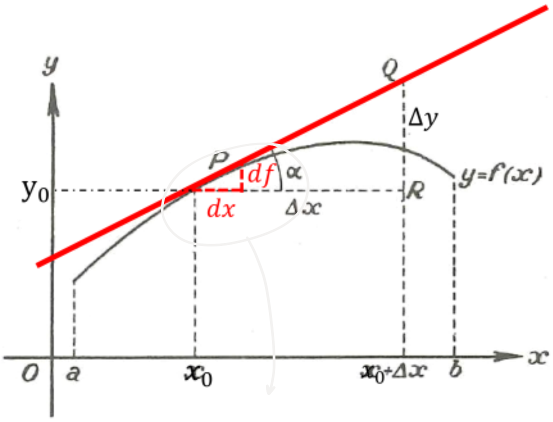


$$df = f'(x_0) \cdot dx$$

L'incremento di ordinata della funzione viene calcolato sulla retta tangente!

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x$$



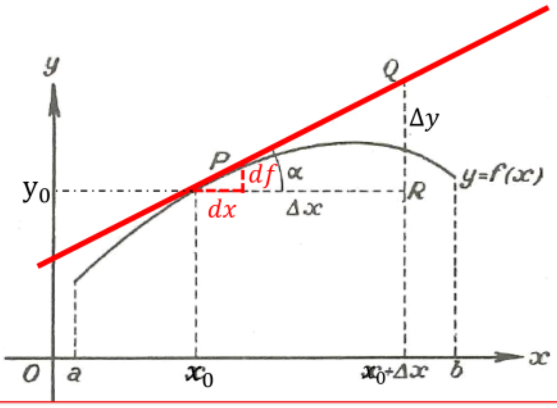
$$\boxed{df} = f'(x_0) \cdot \boxed{dx}$$

DIFFERENZIALI

DIFFERENZIALE

approssimazione lineare dell'incremento di ORDINATA per variazione infinitesima di ASCISSA → variabile INDIPENDENTE

Differenziale df di una funzione f(x)



$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

$$\boxed{df} = f'(x_0) \cdot \boxed{dx}$$

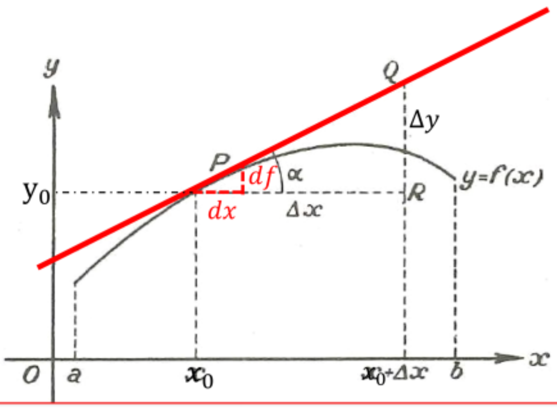
DIFFERENZIALI

Approssimazione lineare dell'incremento di funzione, valutato per piccoli incrementi di ascissa

Differenziale df di una funzione f(x)

$$\boxed{dx \coloneqq \Delta x \to 0}$$

$$\boxed{df \coloneqq \Delta f \to 0}$$



$$\boxed{df} = f'(x_0) \cdot \boxed{dx}$$

DIFFERENZIALI

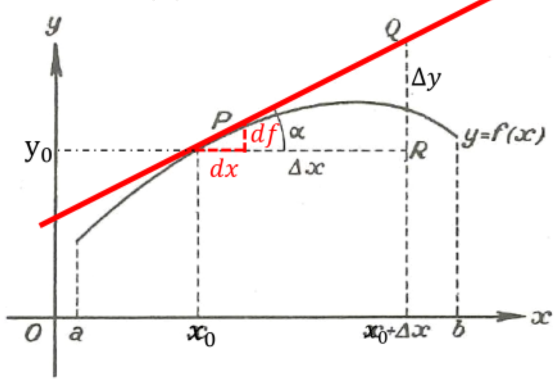
Approssimazione lineare dell'incremento di funzione, valutato per piccoli incrementi di ascissa

Differenziale df di una funzione f(x)

$$dx := \Delta x \to 0$$

$$df := \Delta f \to 0$$

Una qualsiasi superficie ogni punto può essere approssimato alla propria tangente !!!



$$\boxed{df} = f'(x_0) \cdot \boxed{dx}$$

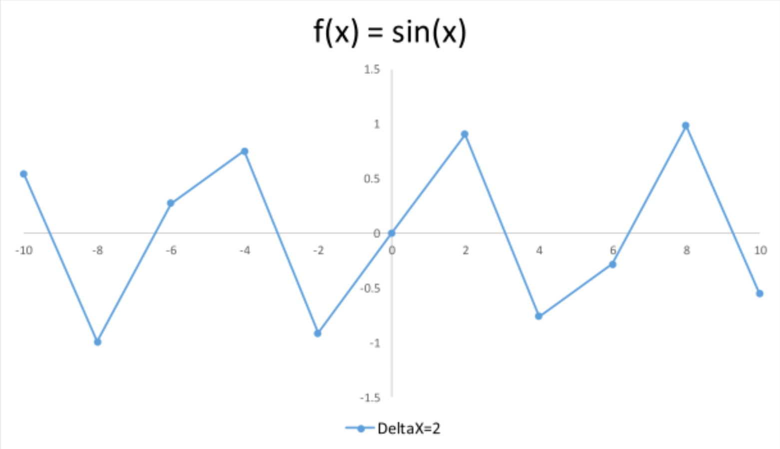
DIFFERENZIALI

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + O(\Delta x)$$

Differenziale df di una funzione f(x)

Utilità pratica

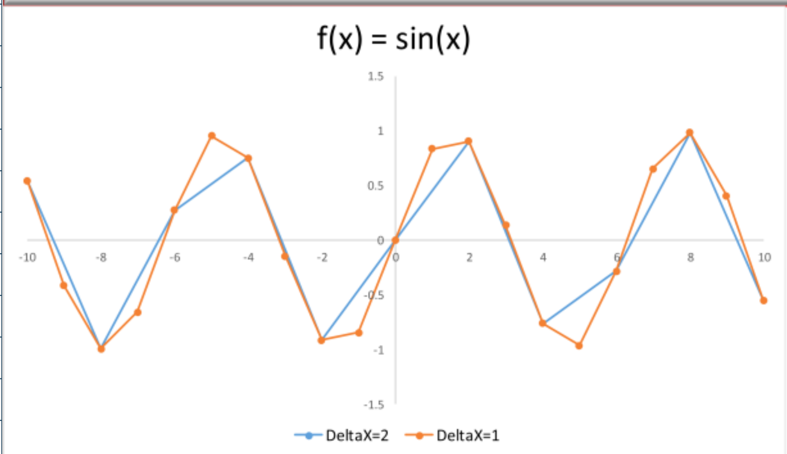
Grafico di funzione utilizzando spezzate di lunghezza limitata



Differenziale df di una funzione f(x)

Utilità pratica

Grafico di funzione utilizzando spezzate di lunghezza limitata



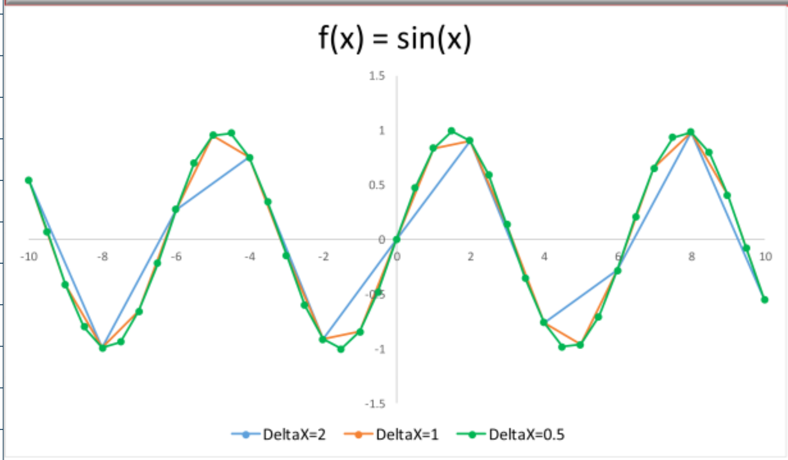
Differenziale df di una funzione f(x)

Utilità pratica

Grafico di funzione utilizzando spezzate di lunghezza limitata

f(x) = sin(x)

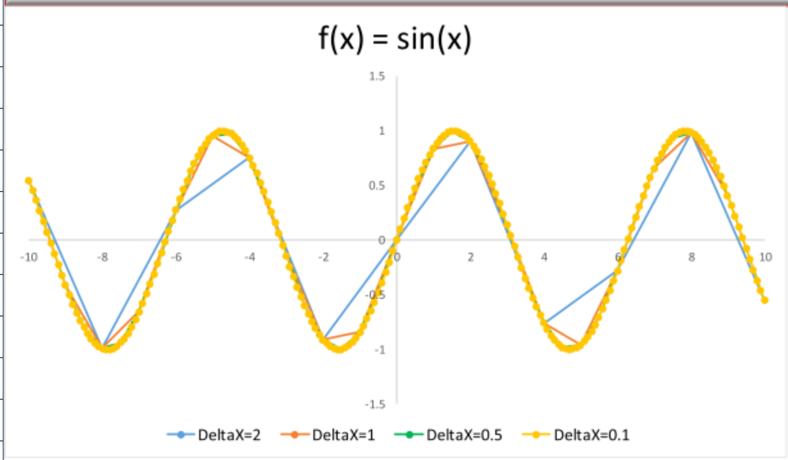
APPROSSIMAZIONE TRAMITE SPEZZATE



Differenziale df di una funzione f(x)

Utilità pratica

Grafico di funzione utilizzando spezzate di lunghezza limitata



Proprietà dei differenziali

Stesse proprietà delle derivate

$$d(f+g+\cdots)=df+dg+\cdots$$

$$d(f\cdot g)=df\cdot g+f\cdot dg$$

$$df\cdot g=d(f\cdot g)-f\cdot dg$$

Utile nell'integrazione per parti

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x + O(\Delta x)$$

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x + \boxed{O(\Delta x)}$$

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x+\boxed{O(\Delta x)}$$

SVILUPPO IN SERIE DI TAYLOR...

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\sum_{n=1}^{+\infty} f^{(n)}(x_0)\cdot\frac{(\Delta x)^n}{n!}$$

$$f(x_0+\Delta x)=\sum_{n=0}^{+\infty} f^{(n)}(x_0)\cdot\frac{(\Delta x)^n}{n!}$$

SVILUPPO IN SERIE DI TAYLOR

$x_0=0 \quad \Delta x := x$

se pongo

diventa

SVILUPPO IN SERIE DI MAC LAURIN...

$$f(x)=f(0)+\sum_{n=1}^{+\infty} f^{(n)}(0)\cdot\frac{(x)^n}{n!}$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} f^{(n)}(0)\cdot\frac{(x)^n}{n!}$$

ESEMPI

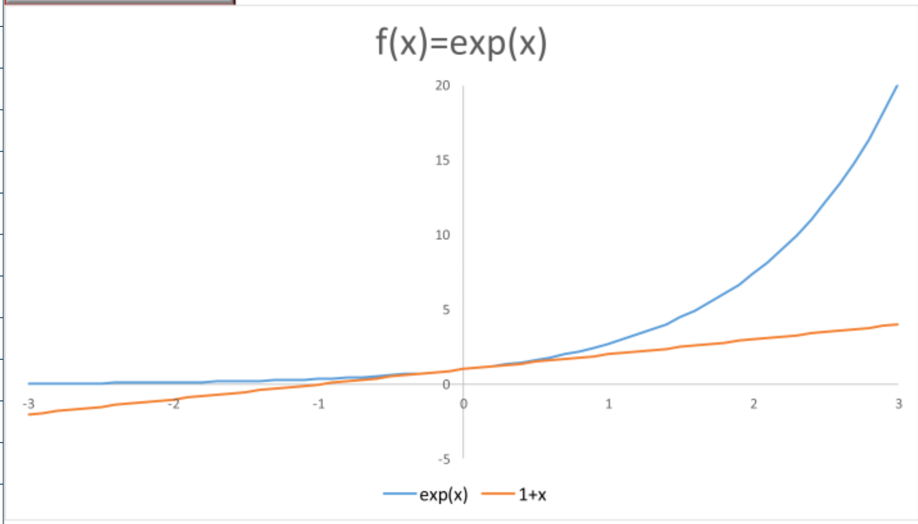
$$f(x)=f(0)+\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} f^{(n)}(0)\cdot\frac{(x)^n}{n!}}$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+..$$

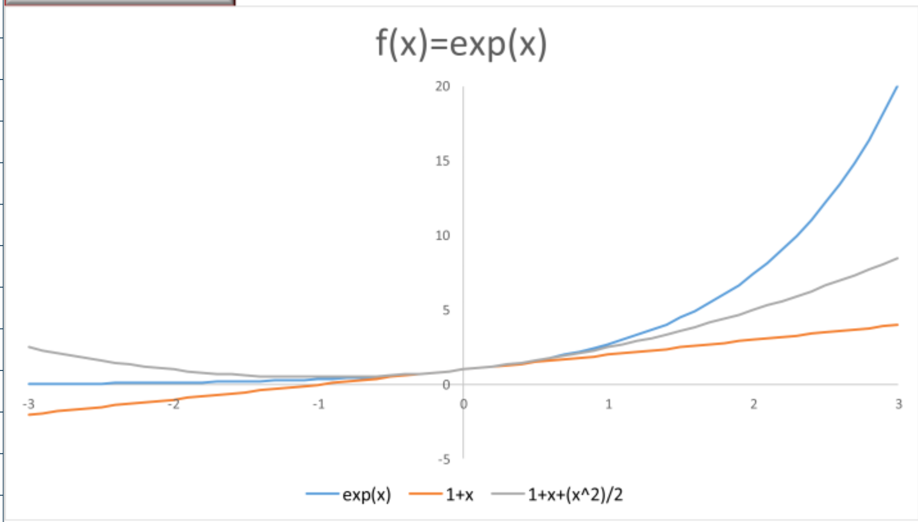
$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+..$$

era una APPROSSIMAZIONE accettabile attraverso una somma di funzioni elementari

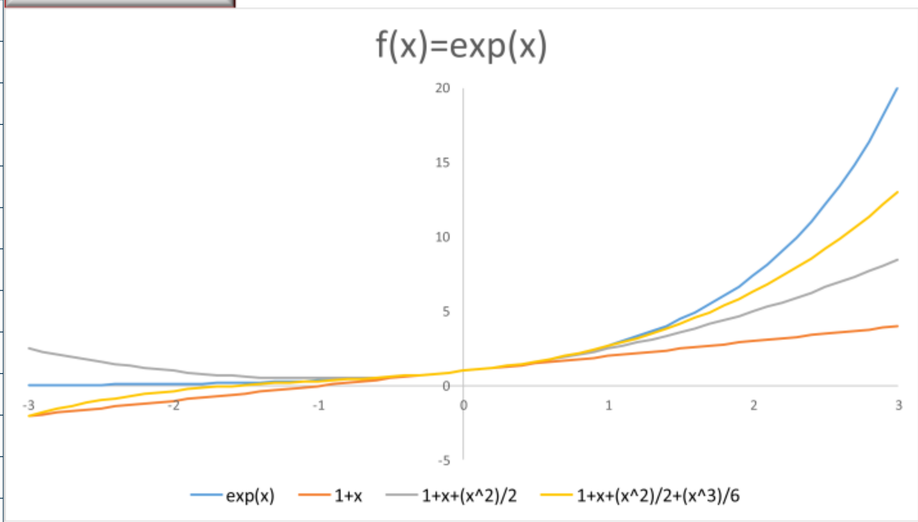
ESEMPI



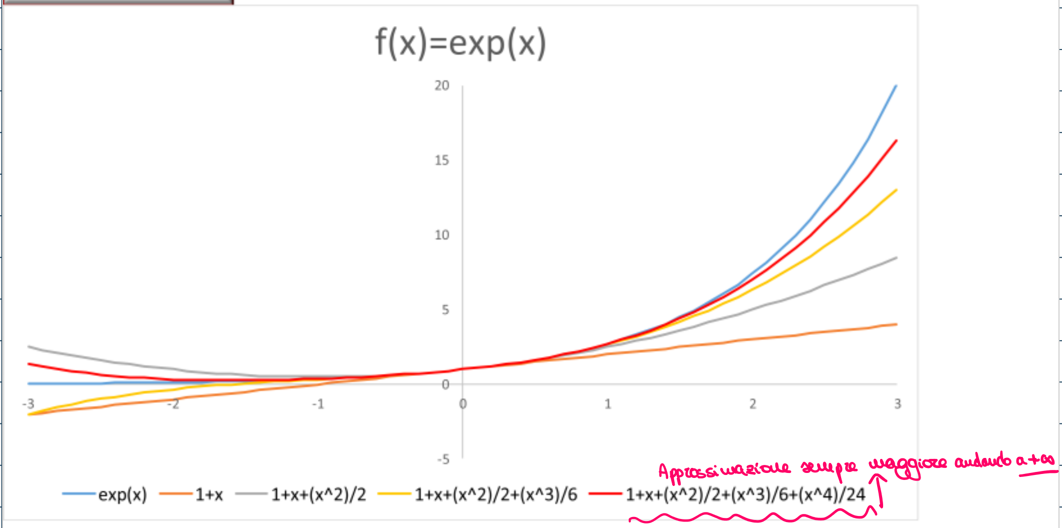
ESEMPI



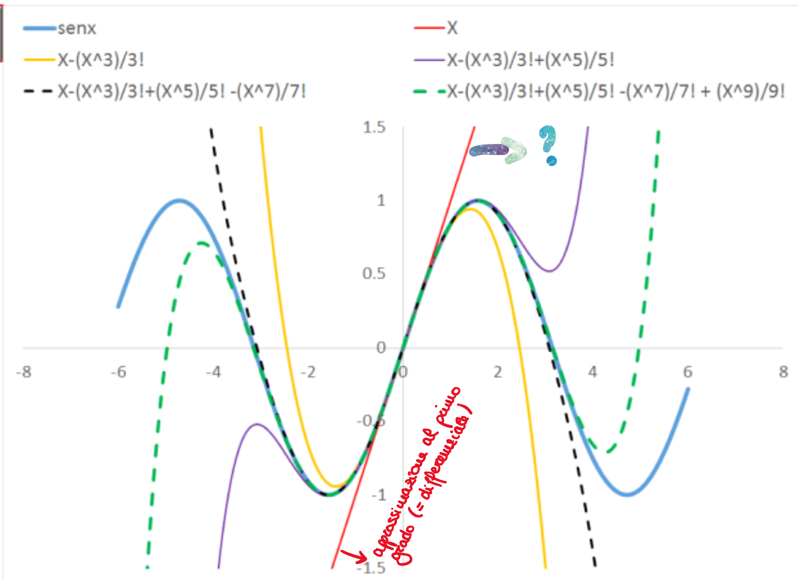
ESEMPI



ESEMPI



ESEMPI



ESEMPI

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} f^{(n)}(0) \cdot \frac{(x)^n}{n!}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + ..$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + ..$$

ESEMPI

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} f^{(n)}(0) \cdot \frac{(x)^n}{n!}$$

$$\left.\begin{aligned} e^x &= 1 + x + O(x) \\ \sin(x) &= x + O(x) \end{aligned}\right\} \quad \boxed{x \to 0}$$

per x che tende a 0

asintoticamente simili

ESEMPI

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} f^{(n)}(0) \cdot \frac{(x)^n}{n!}$$

$$\left.\begin{aligned} e^x &\cong 1 + x \\ \sin(x) &\cong x \end{aligned}\right\} \quad \boxed{x \to 0}$$

ESEMPI

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} f^{(n)}(0) \cdot \frac{(x)^n}{n!}$$

$$\left.\begin{aligned} e^x &\cong 1 + x \\ \sin(x) &\cong x \end{aligned}\right\} \quad \boxed{x \to 0}$$

$$e^x - 1 \cong x$$

$$\frac{e^x - 1}{x} \cong 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

ESEMPI

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} f^{(n)}(0) \cdot \frac{(x)^n}{n!}$$

$$\left.\begin{array}{l} e^x \cong 1 + x \\ \\ \sin(x) \cong x \end{array}\right\} \boxed{x \to 0}$$

$$\frac{\sin(x)}{x} \cong 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Nella prossima lezione:

- **Derivabilità e Differenziabilità in R^n**

Derivabilità e differenziabilità

lunedì 12 ottobre 2020 12:48

ANALISI 1 → $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ → MONODIMENSIONALE

ANALISI 2 ↓

Derivata direzionale → $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h v) - f(x_0)}{h} = \frac{\partial f(x_0)}{\partial v}$ → Multidimensionale

VERSORE
↓
vettore direzionale che mi definisce la direzione specifica

Il passaggio dall'Analisi 1 ad Analisi 2 porta ad avere curve in piani multidimensionali. La tangente in un punto si trova su un piano che taglia la curva nello spazio

BASE CANONICA → vettori che hanno tutte le componenti pari a 0 tranne una sola che vale 1

SOMMA DI VETTORI

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Il **RAPPORTO INCREMENTALE** viene applicato per una sola variabile indipendente. Tutte le altre variabili indipendenti possono essere considerate come delle costanti

Derivata parziale → la derivata dipende da più variabili. La derivata perciò fa riferimento ad una sola variabile e tratta le altre come $\boxed{\text{COSTANTI}}$

$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$

se esistono le derivate lungo tutte le direzioni canoniche

Se la funzione è derivabile in ogni punto P appartenente ad un insieme A allora è derivabile in tutto A

CALCOLO:

Il rapporto incrementale viene applicato per una sola variabile indipendente. Tutte le altre variabili indipendenti possono essere considerate come delle costanti

es. $z = f(x,y) = x \cdot y \cdot e^{xy} + x - y$

$$\frac{dz}{dx} = z_x = \frac{df(x,y)}{dx} = f_x = \frac{df}{dx} = \frac{d(x \cdot y\, e^{xy} + x - y)}{dx} =$$

$$= \frac{d(x \cdot y \cdot e^{xy})}{dx} + \underbrace{\frac{d(x)}{dx}}_{1} - \underbrace{\frac{d(y)}{dx}}_{0 \text{ costante}} = \underbrace{\frac{d(x\,y)}{dx}}_{y \text{ costante}} e^{xy} + x \cdot y\, \underbrace{\frac{d(e^{xy})}{dx}}_{\text{derivata}} + 1 =$$

$$= y \cdot e^{xy} + x y^2 e^{xy} + 1$$

ANALISI 2 – MODULO 1

$f : A \subseteq \boldsymbol{R}^n \to B \subseteq \boldsymbol{R}^m$

DOMINIO E POSITIVITA'

LIMITI

Metodo delle rette, delle coordinate polari e sferiche, maggiorazione

OTTIMIZZAZIONE LIBERA

Derivabilità e Differenziabilità, Gradiente, Derivata direzionale, Matrice Hessiana, Matrice Jacobiana

INTEGRAZIONE

Integrali multipli
Integrali curvilinei (Calcolo di un Lavoro)
Integrali di Superficie (Calcolo di un Flusso)

OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA

Restrizioni, moltiplicatori di Lagrange

ANALISI 2 – MODULO 1

$f : A \subseteq \boldsymbol{R}^n \to B \subseteq \boldsymbol{R}^m$

DOMINIO E POSITIVITA'

FATTO

LIMITI

Metodo delle rette, delle coordinate polari e sferiche, maggiorazione

FATTO

OTTIMIZZAZIONE LIBERA

Derivabilità e Differenziabilità, Gradiente, Derivata direzionale, Matrice Hessiana, Matrice Jacobiana

INTEGRAZIONE

Integrali multipli
Integrali curvilinei (Calcolo di un Lavoro)
Integrali di Superficie (Calcolo di un Flusso)

OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA

Restrizioni, moltiplicatori di Lagrange

ANALISI 2 – MODULO 1

$f: A \subseteq \boldsymbol{R}^n \rightarrow B \subseteq \boldsymbol{R}^m$

DOM[redacted]IVITA'

FATTO

LIM[redacted]

FATTO

Metodo [redacted]ette, delle coordi[redacted]olari e sferiche, [redacted]aggiorazione

OTTIMIZZAZIONE LIBERA

Derivabilità e Differenziabilità, Gradiente, Derivata direzionale, Matrice Hessiana, Matrice Jacobiana

INTEGRAZIONE

Integrali multipli
Integrali curvilinei (Calcolo di un Lavoro)
Integrali di Superficie (Calcolo di un Flusso)

OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA

Restrizioni, moltiplicatori di Lagrange

ANALISI 1

$f: A \subseteq \boldsymbol{R} \rightarrow B \subseteq \boldsymbol{R}$

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

ANALISI 2

$f: A \subseteq \boldsymbol{R}^n \rightarrow B \subseteq \boldsymbol{R}$

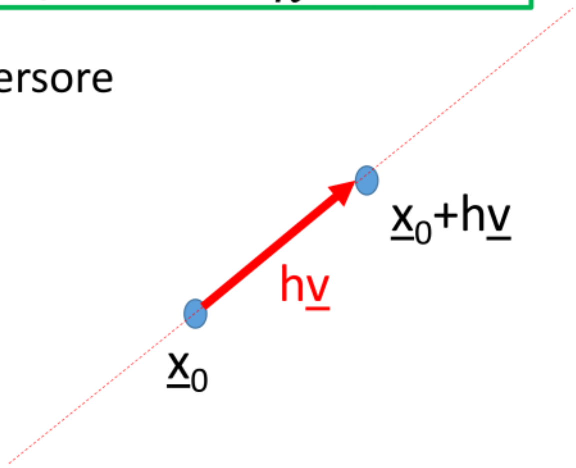
$f: A \subseteq \boldsymbol{R}^n \rightarrow B \subseteq \boldsymbol{R}^m$

ne riparleremo dopo.....

ANALISI 1	ANALISI 2
$f: A \subseteq \boldsymbol{R} \to B \subseteq \boldsymbol{R}$	$f: A \subseteq \boldsymbol{R}^n \to B \subseteq \boldsymbol{R}$
$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$	$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(\underline{x}_0 + h\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{h}}$

$\underline{v}$ è un versore

$$\boxed{|\underline{v}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2} = 1}$$



ANALISI 1	ANALISI 2
$f: A \subseteq \boldsymbol{R} \to B \subseteq \boldsymbol{R}$	$f: A \subseteq \boldsymbol{R}^n \to B \subseteq \boldsymbol{R}$
$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$	$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(\underline{x}_0 + h\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{h}}$

$$\| \qquad \boxed{\frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial \underline{v}}}$$

Il limite deve esistere e deve essere finito

ANALISI 1	ANALISI 2
$f: A \subseteq \boldsymbol{R} \to B \subseteq \boldsymbol{R}$	$f: A \subseteq \boldsymbol{R}^n \to B \subseteq \boldsymbol{R}$
$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$	$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(\underline{x}_0+h\underline{v})-f(\underline{x}_0)}{h}}$

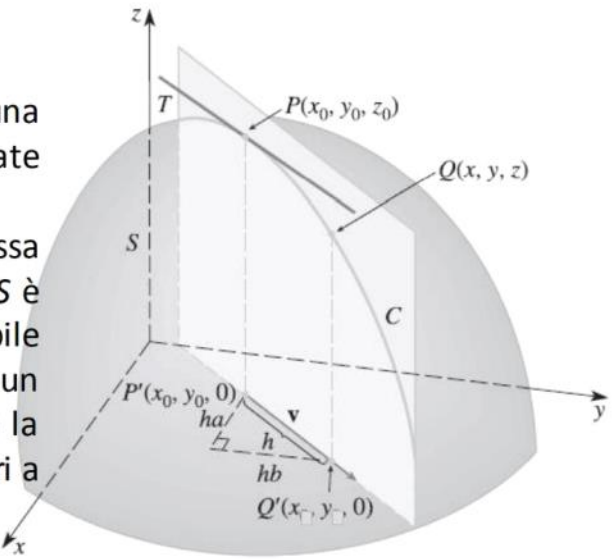
$$\|$$

Derivata direzionale $\boxed{\frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial \underline{v}}}$

Il limite deve esistere e deve essere finito

SIGNIFICATO GEOMETRICO DERIVATA DIREZIONALE

Il grafico della funzione $z = f(x, y)$ rappresenta una superficie S in R^3, e il punto P di coordinate (x_0, y_0, z_0) con $z_0 = f(x_0, y_0)$ si trova su S.
Fissato $\boldsymbol{v}$, consideriamo il piano verticale che passa per P nella direzione di $\boldsymbol{v}$: la sua intersezione con S è una curva C, grafico della funzione di una variabile $z = g(h) = f(x_0 + ah, y_0 + bh)$ visualizzato in un piano verticale. La curva C passa per il punto P e la sua retta tangente in P ha coefficiente angolare pari a $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$



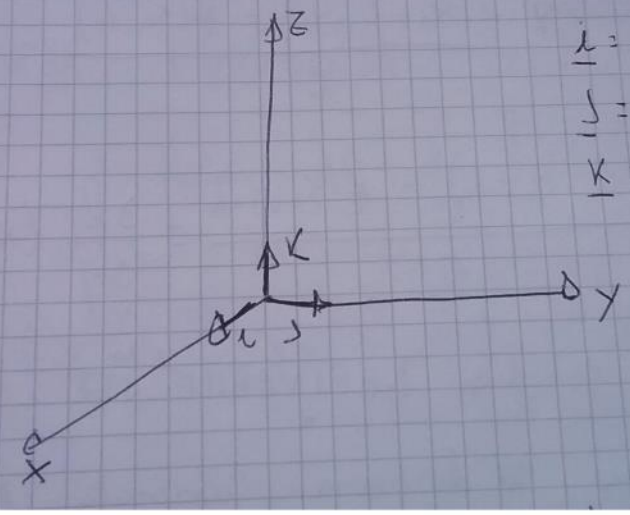
From: http://www.robertocapone.com/wp-content/uploads/downloads/2014/05/Calcolo-differenziale-due-variabili.pdf

DERIVATA PARZIALE

$f: A \subseteq \boldsymbol{R}^n \rightarrow B \subseteq \boldsymbol{R}$

Si considera la base canonica in $\mathbb{R}^n$

in $\mathbb{R}^3$



$\underline{i} = (1,0,0) \rightarrow x$

$\underline{j} = (0,1,0) \rightarrow y$

$\underline{k} = (0,0,1) \rightarrow z$

DERIVATA PARZIALE

$f: A \subseteq \boldsymbol{R}^n \rightarrow B \subseteq \boldsymbol{R}$

In generale $\underline{e}_1 = (1,0,0,\dots 0) \rightarrow x_1$

$\underline{e}_2 = (0,1,0,\dots 0) \rightarrow x_2$

$\vdots$

$\underline{e}_n = (0,0,0 \dots 1) \rightarrow x_n$

DERIVATA PARZIALE

$f: A \subseteq \boldsymbol{R}^n \rightarrow B \subseteq \boldsymbol{R}$

lungo la direzione e_1 abbiamo

$\to x_1$

$\to x_2$

$\vdots$

$\to x_n$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{e}_1) - f(x_0)}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_{10}+t, x_{20}, \ldots x_{n0}) - f(x_{10}, x_{20}, \ldots x_{n0})}{t}$$

Analogamente x le altre direzioni e_i.

DERIVATA PARZIALE

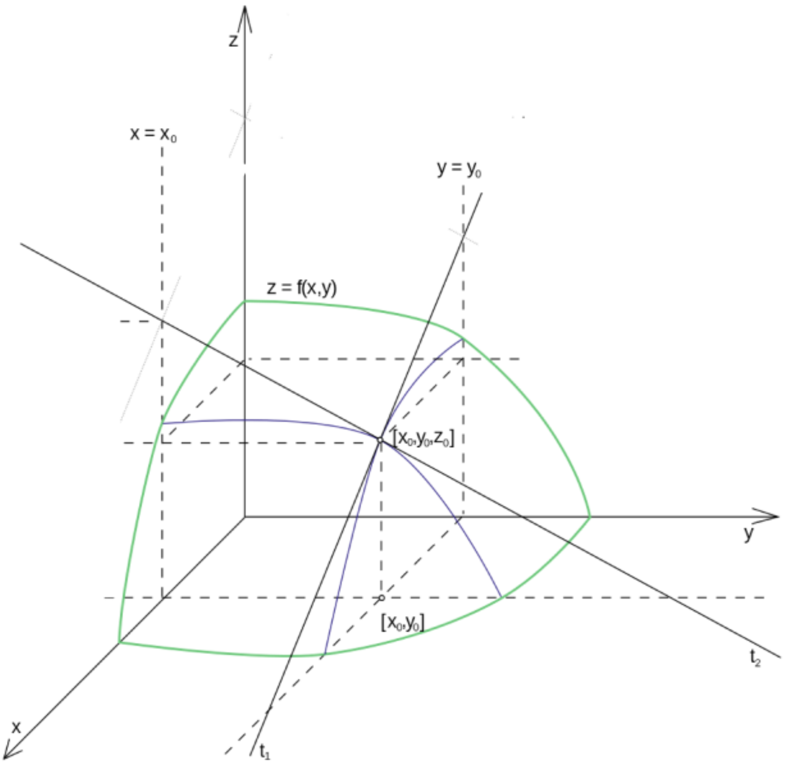
Il rapporto incrementale viene applicato per una sola variabile indipendente. Tutte le altre variabili indipendenti possono essere considerate come delle costanti

In $\mathbb{R}^2$

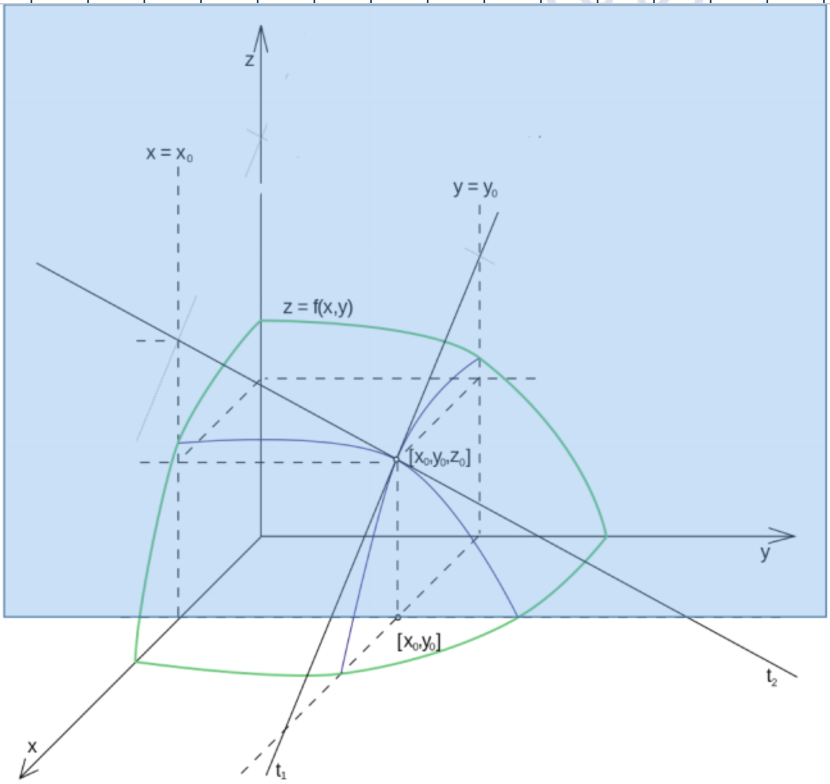
$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

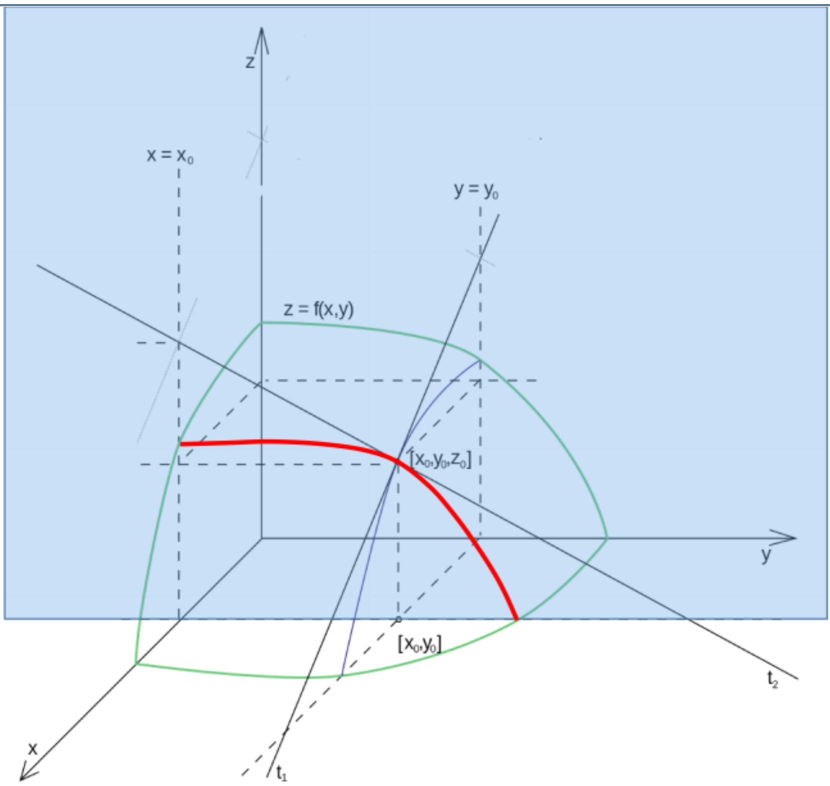
$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0, y_0+t) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

SIGNIFICATO GEOMETRICO DERIVATA PARZIALE

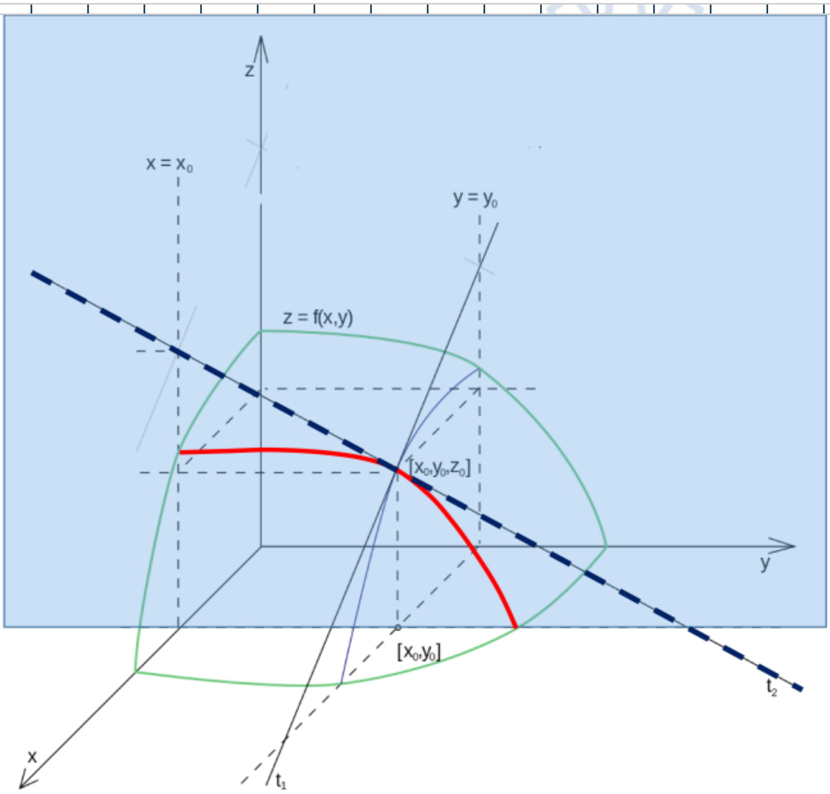


SIGNIFICATO GEOMETRICO DERIVATA PARZIALE





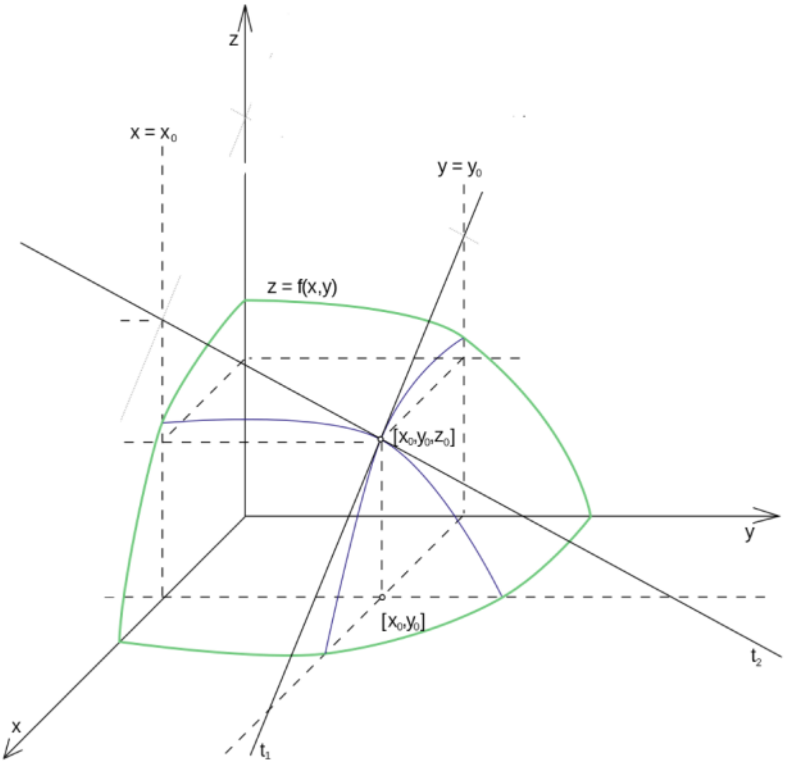
SIGNIFICATO GEOMETRICO DERIVATA PARZIALE



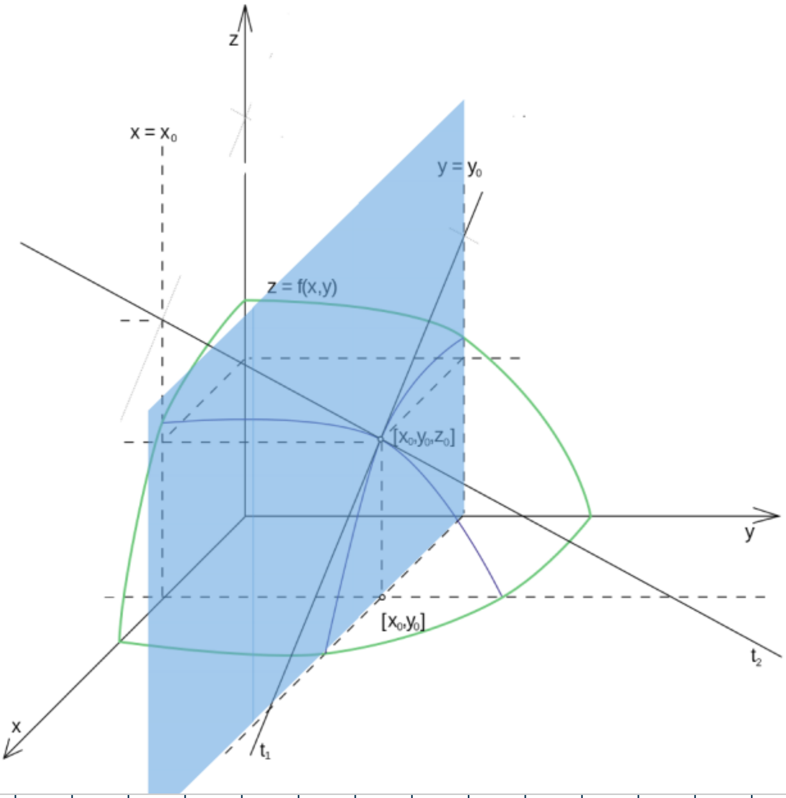
SIGNIFICATO GEOMETRICO DERIVATA PARZIALE

$$\boxed{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}}$$

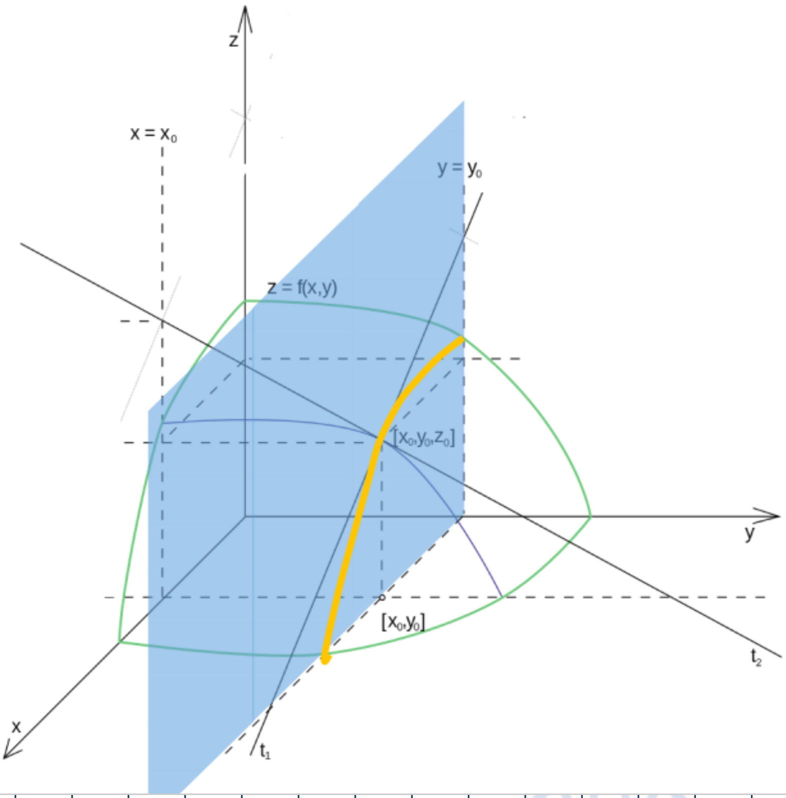
Corrisponde alla pendenza della retta tangente al punto di coordinate (x_0, y_0, z_0), considerando la sezione ottenuta intersecando la funzione z=f(x,y) con il piano di equazione $x=x_0$.



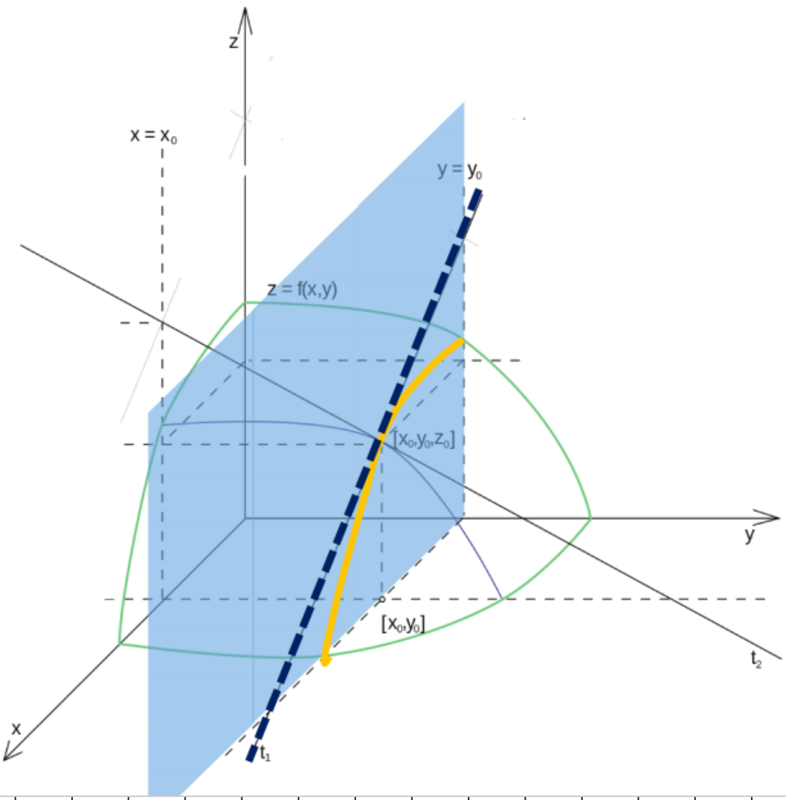
SIGNIFICATO GEOMETRICO DERIVATA PARZIALE



SIGNIFICATO GEOMETRICO DERIVATA PARZIALE



SIGNIFICATO GEOMETRICO DERIVATA PARZIALE



SIGNIFICATO GEOMETRICO DERIVATA PARZIALE

$$\boxed{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}}$$

Corrisponde alla pendenza della retta tangente al punto di coordinate (x_0, y_0, z_0), considerando la sezione ottenuta intersecando la funzione z=f(x,y) con il piano di equazione $y=y_0$.

DERIVATA PARZIALE

Una funzione f si dice derivabile in un punto P se i limiti dei rapporti incrementali per ogni direzione canonica esistono finiti, ovvero se la funzione ammette **tutte** le derivate parziali nel punto P.

Se la funzione f è derivabile in ogni punto P appartenente ad un insieme A, allora f è derivabile in tutto A

Come calcolare la derivata parziale

mercoledì 14 ottobre 2020 09:36

COME CALCOLARE LE DERIVATA PARZIALI?

Il rapporto incrementale viene applicato per una sola variabile indipendente. Tutte le altre variabili indipendenti possono essere considerate come delle costanti

COME CALCOLARE LE DERIVATA PARZIALI?

Il rapporto incrementale viene applicato per una sola variabile indipendente. Tutte le altre variabili indipendenti possono essere considerate come delle costanti

$$z = f(x, y) = xye^{xy} + x - y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} =$$

COME CALCOLARE LE DERIVATA PARZIALI?

Il rapporto incrementale viene applicato per una sola variabile indipendente. Tutte le altre variabili indipendenti possono essere considerate come delle costanti

$$z = f(x, y) = xye^{xy} + x - y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial (xye^{xy} + x - y)}{\partial x}$$

COME CALCOLARE LE DERIVATA PARZIALI?

Il rapporto incrementale viene applicato per una sola variabile indipendente. Tutte le altre variabili indipendenti possono essere considerate come delle costanti

$$z = f(x,y) = xye^{xy} + x - y$$

y è da considerare come una costante se si sta calcolando f_x

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial (xye^{xy} + x - y)}{\partial x}$$

COME CALCOLARE LE DERIVATA PARZIALI?

Il rapporto incrementale viene applicato per una sola variabile indipendente. Tutte le altre variabili indipendenti possono essere considerate come delle costanti

$$z = f(x,y) = xye^{xy} + x - y$$

y è da considerare come una costante se si sta calcolando f_x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial (xye^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial (x)}{\partial x} - \frac{\partial (y)}{\partial x}$$

COME CALCOLARE LE DERIVATA PARZIALI?

Il rapporto incrementale viene applicato per una sola variabile indipendente. Tutte le altre variabili indipendenti possono essere considerate come delle costanti

$$z = f(x,y) = xye^{xy} + x - y$$

y è da considerare come una costante se si sta calcolando f_x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial (xye^{xy})}{\partial x} + 1 - 0$$

COME CALCOLARE LE DERIVATA PARZIALI?

Il rapporto incrementale viene applicato per una sola variabile indipendente. Tutte le altre variabili indipendenti possono essere considerate come delle costanti

$$z = f(x,y) = xye^{xy} + x - y$$

y è da considerare come una costante se si sta calcolando f_x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial (xy)}{\partial x} e^{xy} + xy \frac{\partial (e^{xy})}{\partial x} + 1$$

COME CALCOLARE LE DERIVATA PARZIALI?

Il rapporto incrementale viene applicato per una sola variabile indipendente. Tutte le altre variabili indipendenti possono essere considerate come delle costanti

$$z = f(x,y) = xye^{xy} + x - y$$

y è da considerare come una costante se si sta calcolando f_x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy} + xy^2e^{xy} + 1$$

COME CALCOLARE LE DERIVATA PARZIALI?

Il rapporto incrementale viene applicato per una sola variabile indipendente. Tutte le altre variabili indipendenti possono essere considerate come delle costanti

$$z = f(x,y) = xye^{xy} + x - y$$

x è da considerare come una costante se si sta calcolando f_y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} + x^2ye^{xy} - 1$$

COME CALCOLARE LE DERIVATA PARZIALI?

Quando bisogna calcolare necessariamente il limite del rapporto incrementale?

Quando, invece, posso applicare la «tabella» delle derivate assieme alle proprietà (somma, prodotto, divisione, funzioni composte)?

COME CALCOLARE LE DERIVATA PARZIALI?

Quando bisogna calcolare necessariamente il limite del rapporto incrementale?

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 - y^3}{x^2 + 3y^2}, & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{if } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Derivare singolarmente i due tratti è SBAGLIATO

↓

Si deve applicare il limite del rapporto incrementale

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = ?$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{2h-1}{h} = \lim_{h\to 0} 2 - \frac{1}{h} = \cdots}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Funzione non derivabile in x=0

POICHÉ il limite è INFINITO

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{2h-1}{h} = \lim_{h\to 0} 2 - \frac{1}{h} = \cdots}$$

INOLTRE: Poiché continuità => derivabilità e non continuità => non deriv. visto che $f(x)$ in 0 non è continua, allora non è DERIVABILE

COME CALCOLARE LE DERIVATA PARZIALI?

Quando, invece, posso applicare la «tabella» delle derivate assieme alle proprietà (somma, prodotto, divisione, funzioni composte)?

$$z = f(x,y) = xye^{xy} + x - y$$

DERIVATA PARZIALE

Esistono tutte le derivate parziali

derivate direzionali calcolate su direzioni SPECIFICHE (es. base canonica)

$\boxed{\dfrac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial \underline{e}_1}}$

$\boxed{\dfrac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial \underline{e}_2}}$ → modalità vettoriale

•
•
•

$\boxed{\dfrac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial \underline{e}_n}}$

DERIVATA PARZIALE

Esistono tutte le derivate parziali

$\boxed{\dfrac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_1}}$

$\boxed{\dfrac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_2}}$ → modalità scalare

•
•
•

$\boxed{\dfrac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_n}}$

DERIVATA PARZIALE

Esistono tutte le derivate parziali

GRADIENTE

VETTORE DELLE DERIVATE PARZIALI

devono essere finite. Se una è infinita o non esiste allora non esiste il gradiente

$\boxed{\dfrac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_1}}$

$\boxed{\dfrac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_2}}$

•
•
•

$\boxed{\dfrac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_n}}$

$$\Rightarrow \quad \nabla f(\underline{x}_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

DERIVATA PARZIALE

Esistono tutte le derivate parziali

GRADIENTE

RAPP. DI UN VETTORE
- riga
- colonna

$\boxed{\dfrac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_1}}$

$\boxed{\dfrac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_2}}$

•
•
•

$\boxed{\dfrac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_n}}$

NABLA

$$\Rightarrow \quad \nabla f(\underline{x}_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$\mathrm{grad} f(\underline{x}_0)$

DERIVATA PARZIALE

GRADIENTE

In un punto

$$\nabla f(\underline{x}_0) = \left(\frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_n}\right)$$

Generica

$$\nabla f(\underline{x}) = \left(\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_n}\right)$$

TO BE CONTINUED...

∇

Operatore NABLA

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

$$\nabla o \underline{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) o \,(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

$$\nabla o \underline{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}$$

DIVERGENZA

$$div(\underline{v})$$

TO BE CONTINUED...

∇

Operatore NABLA

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

PRODOTTO SCALARE FRA DUE VETTORI

$$\nabla o \nabla f(\underline{x}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) o \left(\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_n}\right)$$

gradiente

$$\nabla o \nabla f = \nabla^2 f$$

LAPLACIANO

Somma di tutte le derivate prime

TO BE CONTINUED...

∇

Operatore NABLA

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

Calcolo il determinante della matrice

PRODOTTO VETTORIALE

$$\nabla \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

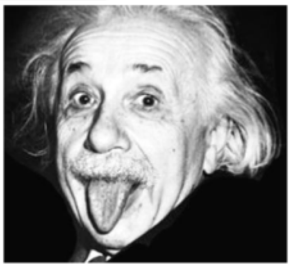
ROTORE

$$rot(\underline{F})$$

TO BE CONTINUED...

∇

Operatore NABLA



- GRADIENTE
- DIVERGENZA
- ROTORE
- LAPLACIANO

∇

Operatore NABLA

GRADIENTE	OTTIMIZZAZIONE
DIVERGENZA	FLUSSO DI UN CAMPO DI FORZE DA ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE CHIUSA
ROTORE	CAMPI CONSERVATIVI
LAPLACIANO	EQUAZIONI DIFFERENZIALI

∇

Operatore NABLA

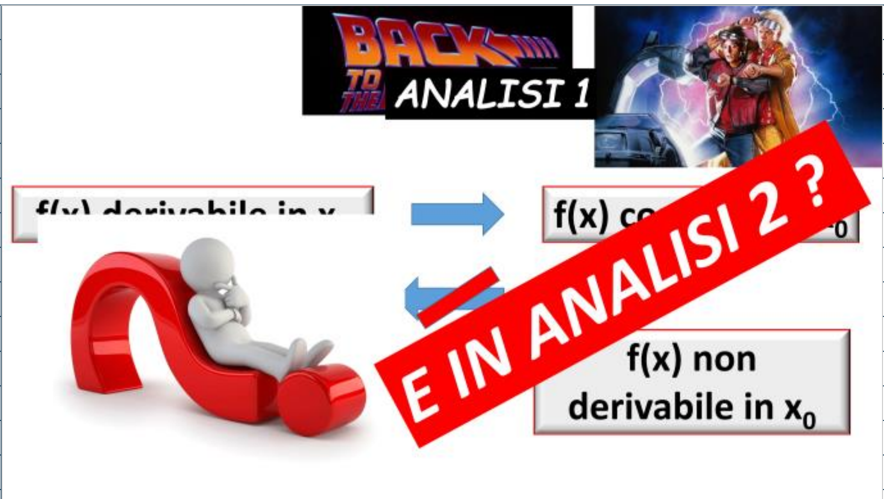
GRADIENTE	OTTIMIZZAZIONE
DIVERGENZA	FLUSSO DI UN CAMPO DI FORZE DA ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE CHIUSA
ROTORE	CAMPI CONSERVATIVI
LAPLACIANO	EQUAZIONI DIFFERENZIALI

NELLE PROSSIME PUNTATE……..

f(x) derivabile in x_0 $\Rightarrow$ f(x) continua in x_0

f(x) continua in x_0 $\cancel{\Rightarrow}$ f(x) derivabile in x_0

f(x) non continua in x_0 $\Rightarrow$ f(x) non derivabile in x_0



$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \forall(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=0 \quad ?????\qquad \lim_{\rho\to0}\frac{\rho^2cos\theta sen\theta}{\rho^2}=\cdots$$

La funzione non è continua

$\Downarrow$

In analisi 1 implicherebbe che non è derivabile

f(x,y) non continua in (0,0)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \forall(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

applico la derivazione tramite rapp. incrementale

perché non si calcola?

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{0}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0}{h^3}=0$$

f(x,y) non continua in (0,0)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \forall(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{0}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0}{h^3}=0$$

f(x,y) non continua in (0,0)

$$\lim_{h\to0}\frac{0}{h^3}=0$$

$$\frac{0}{m}\quad(m\neq0)$$

$$\boxed{f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \forall (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}}$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^3} = 0$$

f(x,y) non continua in (0,0)

f(x,y) è derivabile in (0,0)

ANALISI 1

f(x) derivabile in x_0 ⇒ f(x) continua in x_0

f(x) derivabile in x_0 ⇍ f(x) continua in x_0

f(x) non continua in x_0 ⇒ f(x) non derivabile in x_0

ANALISI 2

non esistono LEGAMI

solo il differenziale può dare informazioni

f($\underline{x}$) derivabile in $\underline{x}_0$ ⇏ f($\underline{x}$) continua in $\underline{x}_0$

f($\underline{x}$) derivabile in $\underline{x}_0$ ⇍ f($\underline{x}$) continua in $\underline{x}_0$

f($\underline{x}$) non continua in $\underline{x}_0$ ⇏ f($\underline{x}$) non derivabile in $\underline{x}_0$

ANALISI 2

Dice quando una funzione è sicuramente continua e quando derivabile

$f: (a, b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$

SIGNIFICATO GEOMETRICO del differenziale in Analisi 1

Approssimare, nell'intorno di un punto, alla tangente nel punto stesso

$f(x)$ DIFFERENZIABILE IN x_0 SE ESISTE UN'APPLICAZIONE LINEARE $L_{x_0}(\cdot)$ TALE CHE

tutte le potenze sono al primo grado

dipende ANCHE dal punto x_0 che sto considerando

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)}{h} = 0$$

è simile ad un rapporto incrementale

$$L_{x_0} := a \cdot h$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - ah}{h} = 0$$

ANALISI 1

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)}{h} = 0$$

$$L_{x_0} := a \cdot h$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - ah}{h} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{= f'(x_0)} = a$$

$$a = f'(x_0)$$

$$L_{x_0}(h) = \overbrace{f'(x_0)}^{a} \cdot \overbrace{h}^{h}$$

$$df(x_0) = f'(x_0)\,dx$$

ANALISI 2

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Poiché il numeratore è somma di scalari, anche il denominatore sarà uno scalare

$$\lim_{\underline{h} \to \underline{0}} \frac{f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) - L_{\underline{x}_0}(\underline{h})}{|\underline{h}|} = 0$$

$$L_{\underline{x}_0}(\underline{h}) = L_1 h_1 + L_2 h_2 + \dots + L_n h_n$$

$L_i = L_i(\underline{x}_0)$ Dipendono dal vettore posizione

$$\underline{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$$

se $\underline{h} \to 0$ allora $t \to 0$

SCALARE · VERSORE

$$\underline{h} = t\,\underline{v}$$

* proprietà

$$|\underline{v}| = 1$$

$$\underline{h} \to \underline{0} \iff t \to 0$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0) - L_{\underline{x}_0}(t\underline{v})}{|t\underline{v}|} = 0$$

$L_{\underline{x}_0}(\cdot)$ APPLICAZIONE LINEARE

$$\Downarrow$$

$$L_{\underline{x}_0}(t\underline{v}) = t \cdot L_{\underline{x}_0}(\underline{v})$$

* proprietà

$$|t \cdot \underline{v}| = |t| \cdot |\underline{v}| = |t|$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\underline{x}_0+t\underline{v})-f(\underline{x}_0)-t\,L_{\underline{x}_0}(\underline{v})}{|t|}=0$$

Se una funzione è differenziabile in un punto, allora esiste sicuramente la derivata direzionale in qualsiasi direzione

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(\underline{x}_0+t\underline{v})-f(\underline{x}_0)-t\,L_{\underline{x}_0}(\underline{v})}{t}=0$$

Il limite del rapporto incrementale esiste sempre

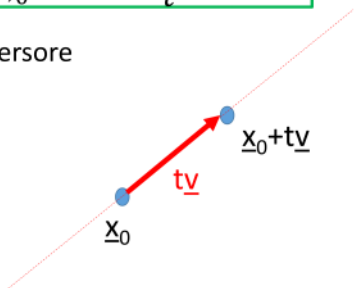
$$\boxed{\lim_{t\to 0^+} \frac{f(\underline{x}_0+t\underline{v})-f(\underline{x}_0)}{t}} = L_{\underline{x}_0}(\underline{v})$$

Valore che l'applicazione lineare assume in quella direzione

ANALISI 1	ANALISI 2
$f: A \subseteq \mathbf{R} \to B \subseteq \mathbf{R}$	$f: A \subseteq \mathbf{R}^n \to B \subseteq \mathbf{R}$
$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$	$\lim_{t\to 0} \frac{f(\underline{x}_0+t\underline{v})-f(\underline{x}_0)}{t}$

$\underline{v}$ è un versore

$$|\underline{v}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2} = 1$$



$$L_{\underline{x}_0}(\underline{v}) = \frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial \underline{v}} = L_1 v_1 + L_2 v_2 + \dots + L_n v_n$$

$$L_i = L_i(\underline{x}_0)$$

f DIFFERENZIABILE IN $\underline{x}_0 \Rightarrow \forall\, \underline{v}$ ESISTE $\frac{\partial f(x_0)}{\partial \underline{v}}$

$\Downarrow$

ESISTE $\nabla f(x_0)$

Se la derivata esiste per tutte le direzioni, allora esiste anche per gli assi e le direzioni canoniche.

$\downarrow$

dunque è differenziabile

Se è differenziabile esiste anche il gradiente ed è anche derivabile

f DIFFERENZIABILE IN $\underline{x}_0 \Rightarrow f$ DERIVABILE IN $\underline{x}_0$

$\underline{v} = \underline{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ *

prima direzione della base canonica

$$L_{\underline{x}_0}(\underline{v}) = \frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\underbrace{\partial \underline{e}_1}} = \frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_1} = L_1$$

Derivata parziale rispetto alla prima componente

Primo coefficiente dell'applicazione lineare

$\underline{v} = \underline{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$

$$L_{\underline{x}_0}(\underline{v}) = \frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial \underline{e}_2} = \frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_2} = L_2$$

$$L_i = \frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_i}$$

$$L_{\underline{x}_0}(\underline{v}) = \frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial \underline{v}} = L_1 v_1 + L_2 v_2 + \dots + L_n v_n$$

COMPONENTI DEL VETTORE V

$\underline{v} = \underline{e}_1 = (1, 0, 0 \ldots 0)$

$$L_{\underline{x}_0}(\underline{v}) = \frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial \underline{e}_1} = \frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_1} = L_1$$

$\underline{v} = \underline{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots 0)$

$$L_{\underline{x}_0}(\underline{v}) = \frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial \underline{e}_2} = \frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_2} = L_2$$

$$L_i = \frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_i}$$

$$L_i = L_i(\underline{x}_0)$$

Ip. → funzione differenziale

Se voglio calcolare una derivata direzionale, sostituisco le derivate parziali, posso esprimerla come prodotto scalare fra gradiente e vettore di direzione

$$L_{\underline{x}_0}(\underline{v}) = \frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial \underline{v}} = \frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_2} v_2 + \ldots + \frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_n} v_n$$

$$= \nabla f(\underline{x}_0) \circ \underline{v}$$

$$L_{\underline{x}_0}(\underline{h}) = \nabla f(\underline{x}_0) \circ \underline{h} \qquad \underline{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$$

$$\underline{h} = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$$

$$L_{\underline{x}_0}(\underline{h}) = df(\underline{x}_0) = \frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \ldots + \frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_n} dx_n$$

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to B \subseteq \mathbb{R}$ BIDIMENSIONALE

$z = f(x, y)$ **FUNZIONE DIFFERENZIABILE** per ipotesi

derivata parziale rispetto a x — derivata parziale rispetto a x

$$df(x_0, y_0) = \boxed{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}} \cdot \underbrace{dx}_{\text{Incremento infinitesimo}} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \underbrace{dy}_{\text{Incremento infinitesimo}}$$

$$dz = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} dy$$

VALORE DELLA QUOTA

$$z_0 = f(x_0, y_0)$$

$$dz = z - z_0 \qquad dx = x - x_0 \qquad dy = y - y_0$$

Non lo considero piccolo ma finito (Δz, Δx e Δy)

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} dy$$

$$dz = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} dy$$

$$z_0 = f(x_0, y_0)$$

$$dz = z - z_0 \qquad dx = x - x_0 \qquad dy = y - y_0$$

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot (y - y_0)$$

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

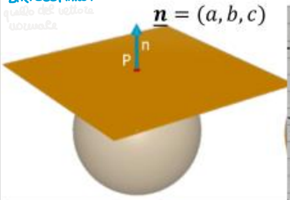
$$a=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\qquad b=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\qquad c=-1$$

IPOTESI:
Hyp: $f(x,y)$ DIFFERENZIABILE IN (x_0,y_0) $\Rightarrow$

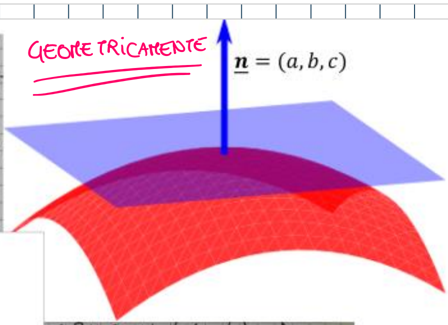
$\Rightarrow$ ESISTE IL PIANO TANGENTE AD f NEL PUNTO $(x_0, y_0, \underbrace{f(x_0,y_0)}_{\text{QUOTA}})$

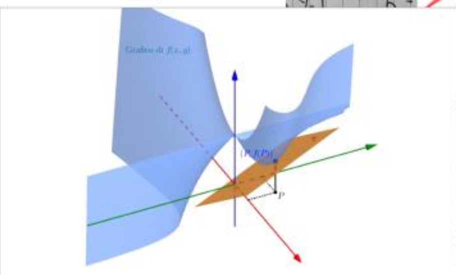
z_0

DIR. DEL PIANO:



GEOMETRICAMENTE





ABILE IN (x_0,y_0) $\Rightarrow$ TANGENTE AD f $f(x_0,y_0))$

ESEMPIO — definita in tutto il suo dominio ($\mathbb{R}^2$)

$f: A\subseteq\mathbb{R}^2 \to B\subseteq\mathbb{R}$

$f(x,y)=x^2y^3$ DIFFERENZIABILE PER IPOTESI

CALCOLARE L'ESPRESSIONE DEL DIFFERENZIALE $df(x,y)$ NEL PUNTO $P_0\equiv(1,2)$

DETERMINARE L'EQUAZIONE DEL PIANO π TANGENTE NEL PUNTO P_0

$$df(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy=$$

$$=\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x},\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)\odot(dx,dy)$$

prodotto vettoriale

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2xy^3\qquad\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=3x^2y^2$$

$$df(x,y)=2xy^3dx+3x^2y^2dy$$

Espressione generale del differenziale

$$df=\nabla f\cdot \underline{h}=\frac{df}{dx}(x-x_0)+\frac{df}{dy}(y-y_0)$$

$$\frac{df}{dx}=2xy^3\overset{P(1,2)}{\Longrightarrow}=16$$

$$\frac{df}{dy}=3x^2y^2\overset{P(1,2)}{\Longrightarrow}=12$$

Generica: $df=2xy^3dx+3x^2y^2dy$

Nel punto: $df=16dx+12dy$

Piano tangente:

$z_0=f(1,2)=8$

$$z-z_0=\nabla f\cdot h=\frac{df}{dx}(x-x_0)+\frac{df}{dy}(y-y_0)$$

$$z=16(x-1)+12(y-2)+8$$

$$z=16x-16+48y-24+8$$

$$z=16x+48y-32$$

$$df(x,y) = 2xy^3\,dx + 3x^2y^2\,dy$$

$$df(1,2) = 16\,dx + 12\,dy$$

$$\nabla f(1,2) = (16, 12)$$

dir. di uno versore

$$\frac{\partial f(1,2)}{\partial \underline{v}} = \nabla f(1,2) \circ (v_1, v_2) =$$

$$= (16,12) \circ (v_1, v_2) = 16v_1 + 12v_2$$

AD ESEMPIO : $\underline{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\nabla f(1,2) = (16, 12)$$

$$\frac{\partial f(1,2)}{\partial \underline{v}} = \nabla f(1,2) \circ (v_1, v_2) =$$

$$= (16,12) \circ (v_1, v_2) = 16v_1 + 12v_2$$

AD ESEMPIO : $\underline{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\frac{\partial f(1,2)}{\partial \underline{v}} = 16 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 14\sqrt{2}$$

$$\pi: \; a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

$x_0 = 1 \qquad y_0 = 2 \qquad z_0 = f(1,2) = 8$

$a = \frac{\partial f(1,2)}{\partial x} = 16 \qquad b = \frac{\partial f(1,2)}{\partial y} = 12 \qquad c = -1$

$$\pi: \; 16(x-1) + 12(y-2) - (z-8) = 0$$

$$16x - 16 + 12y - 24 - z + 8 = 0$$

FORMA CANONICA

$$16x + 12y - z - 32 = 0$$

FORMA ESPLICITA

$$z = 16x + 12y - 32$$

TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE

(CONDIZIONI SUFFICIENTI PER LA DIFFERENZIABILITÀ)

Se si può applicare il teorema allora non si deve applicare la definizione

IPOTESI:

Hyp: $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to B \subseteq \mathbb{R}$

La funzione deve essere ALMENO di ordine C1

CONTINUA ALMENO FINO ALLA DERIVATA DI ORDINE 1 (PRIMA)

$\underline{x}_0 \in A$

$f \in C^1(\underline{x}_0)$ $\qquad f(\underline{x})$ CONTINUA IN $\underline{x}_0$

tutte le derivate parziali prime

$\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_i}$ CONTINUA IN $\underline{x}_0$ $\quad i = 1, 2, \dots, n$

$\Rightarrow f(\underline{x})$ É DIFFERENZIABILE IN $\underline{x}_0$

$f \in C^1(A) \Rightarrow f$ DIFFERENZIABILE IN A

TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE
(CONDIZIONI SUFFICIENTI PER LA DIFFERENZIABILITÀ)

$$f(x,y) = x^2 - 3y + 2xy$$

$$f(x,y) = e^{x^2-1} + y \cdot x$$

$$f(x_1,x_2,x_3) = e^{x_1} + x_2 x_3 - x_1^4$$

$f \notin C^1(A) \not\Rightarrow f$ NON DIFFERENZIABILE IN A

f DIFFERENZIABILE $\Rightarrow f$ CONTINUA ?

DIM.:

1) f definita in x_0 2) Esiste il limite

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) = 0$$

Pongo $x = x_0 + h$

$$\lim_{\underline{h} \to \underline{0}} f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) = 0$$

$$\lim_{|\underline{h}| \to 0} f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) = 0$$

Se un vettore $\to 0$, anche il suo modulo $\to 0$

Tesi

$$f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0)$$

sottraggo e sommo la stessa quantità

$$f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) - \nabla f(\underline{x}_0) \circ \underline{h} + \nabla f(\underline{x}_0) \circ \underline{h}$$

$$|\underline{h}| \cdot \frac{f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) - \nabla f(\underline{x}_0) \circ \underline{h} + \nabla f(\underline{x}_0) \circ \underline{h}}{|\underline{h}|}$$

$$f(\underline{x}_0+\underline{h})-f(\underline{x}_0)-\nabla f(\underline{x}_0)\circ\underline{h}+\nabla f(\underline{x}_0)\circ\underline{h}$$

$$|\underline{h}|\cdot\left[\underbrace{\left(\frac{f(\underline{x}_0+h)-f(\underline{x}_0)-\nabla f(\underline{x}_0)\circ\underline{h}}{|\underline{h}|}\right)}_{\text{differenziabile (che per ipotesi è zero)}}+\frac{\nabla f(\underline{x}_0)\circ\underline{h}}{|h|}\right]$$

$$\lim_{|\underline{h}|\to 0}|\underline{h}|\cdot\frac{\nabla f(x_0)\circ\underline{h}}{|h|}=\lim_{\underline{h}\to\underline{0}}\nabla f(\underline{x}_0)\circ\underline{h}=0$$

Hyp: f DIFFERENZIABILE IN $\underline{X}_0$

$\Rightarrow$ ESISTE $\nabla f(\underline{x}_0)$

$$f(\underline{x}_0+\underline{h})-f(\underline{x}_0)-\nabla f(\underline{x}_0)\circ\underline{h}+\nabla f(\underline{x}_0)\circ\underline{h}$$

Una funzione può essere definita in un punto ma non essere continua

$$|\underline{h}|\cdot\left[0+\frac{\nabla f(\underline{x}_0)\circ\underline{h}}{|h|}\right]$$

$$\lim_{|\underline{h}|\to 0}|\underline{h}|\cdot\frac{\nabla f(x_0)\circ\underline{h}}{|h|}=\lim_{\underline{h}\to\underline{0}\,=\,|h|\to 0}\nabla f(\underline{x}_0)\circ\underline{h}=0$$

Hyp: f DIFFERENZIABILE IN $\underline{X}_0$

$\Rightarrow$ ESISTE $\nabla f(\underline{x}_0)$

Differenziabilità implica continuità

f DIFFERENZIABILE $\Rightarrow$ $\begin{cases} f \text{ DERIVABILE IN OGNI DIREZIONE} \\ f \text{ CONTINUA} \\ \text{ESISTE (IPER)PIANO TANGENTE} \end{cases}$

f NON CONTINUA IN $\underline{X}_0$ $\Rightarrow$ f NON DIFFERENZIABILE IN $\underline{X}_0$

f NON DERIVABILE IN $\underline{X}_0$ $\Rightarrow$ f NON DIFFERENZIABILE IN $\underline{X}_0$

f CONTINUA $\not\Rightarrow$ f DIFFERENZIABILE

ESEMPIO: $f(x,y)=|x|$

In (0,0) non è derivabile e dunque non è differenziabile

$$\nexists\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\Rightarrow\nexists\ \underbrace{\nabla f(0,0)}_{\text{GRADIENTE}}\Rightarrow$$

f NON DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$

f DERIVABILE $\not\Rightarrow$ f DIFFERENZIABILE

ESEMPIO

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \forall (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

DA UN ESERCIZIO PRECEDENTE, IN $(0,0)$ SONO STATE CALCOLATE $f_x = 0$ E $f_y = 0$

DUNQUE $f(x,y)$ É DERIVABILE IN $(0,0)$

DUNQUE $f(x,y)$ É DERIVABILE IN $(0,0)$

STUDIO DELLA DIFFERENZIABILITÁ IN $(0,0)$

$$\lim_{\substack{h_1 \to 0 \\ h_2 \to 0}} \frac{f(0+h_1, 0+h_2) - f(0,0) - h_1 f_x(0,0) - h_2 f_y(0,0)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$\underline{h} = (h_1, h_2)$ $\qquad |\underline{h}| = \sqrt{h_1^2+h_2^2}$

$\underline{h} \to \underline{0} \iff \begin{matrix} h_1 \to 0 \\ h_2 \to 0 \end{matrix} \iff |\underline{h}| \to 0$

$$\lim_{\substack{h_1 \to 0 \\ h_2 \to 0}} \frac{\frac{h_1 h_2}{h_1^2+h_2^2} - 0 - h_1 \cdot 0 - h_2 \cdot 0}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{h_1 \to 0 \\ h_2 \to 0}} \frac{h_1 \cdot h_2}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

Per essere differenziabile dovrebbe essere 0

SE $h_1 = h_2 \Rightarrow \lim\limits_{h_1 \to 0} \dfrac{h_1^2}{2h_1^2 \cdot |h_1| \cdot \sqrt{2}} = \infty$

IL LIMITE NON VALE 0 $\Rightarrow$ f NON DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$

Esercizi sulla differenziabilità

lunedì 26 ottobre 2020 11:53

ANALISI 2

DIFFERENZIABILITÀ
$\Downarrow$
CONTINUITÀ

$$f: A \subseteq \boldsymbol{R}^n \to B \subseteq \boldsymbol{R}$$

- Se la funzione ammette almeno tutte le derivate parziali, allora la funzione è derivabile
- Se la funzione è differenziabile, in quel punto posso approssimare la curva al piano tangente passante per il punto (Errore Trascurabile $= 0$)

f(x) differenziabile in $\underline{x}_0$ $\Rightarrow$

- **Tutte le derivate direzionali in $\underline{x}_0$**
  $\Downarrow$
- **f(x) derivabile in $\underline{x}_0$**
- **gradiente in $\underline{x}_0$**
- **Piano tangente in $\underline{x}_0$**
- **f(x) continua in $\underline{x}_0$**

- Se $f(x)$ (definita a Tratti o monoformula) è differenziabile in un punto / più punti allora si possono calcolare le derivate direzionali
- Se esistono le derivate di tutte le direzioni, esistono anche quelle per le basi canoniche

ANALISI 2

$$f: A \subseteq \boldsymbol{R}^n \to B \subseteq \boldsymbol{R}$$

f(x) $\in C^1(A)$ $\Rightarrow$ **f(x) differenziabile in A**

TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE

Se il campo scalare (funzione) è di classe almeno C_1 (continua fino al primo ordine di derivazione) allora è differenziabile in tutti i punti di classe C_1

$f : A \subseteq \boldsymbol{R}^n \rightarrow B \subseteq \boldsymbol{R}$

STEP da seguire negli esercizi ↓

f(x) definita a tratti

f(x) continua in x_0	Poiché ¬con ⇒ ¬dif — NO →	**f(x) non differenziabile in x_0**
↓ SI		
f(x) derivabile in x_0	Poiché ¬der ⇒ ¬dif — NO →	**f(x) non differenziabile in x_0**
↓ SI		
Calcolo del limite per f(x) differenziabile in x_0	Poiché ¬(=0) ⇒ ¬dif — ≠0 →	**f(x) non differenziabile in x_0**
↓ =0		
f(x) differenziabile in x_0		

Continuità	Derivabilità	Differenziabilità

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2+y^2} & \forall (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

posso fare una sostituzione $t = x^2+y^2$

CONTINUITÀ IN $(0,0)$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2+y^2}$$

ESEMPIO

Continuità ↓

!!! Una cosa da fare è ridurre la funzione ad una assimilabile ad un limite notevole di ANALISI 1 per calcolare il limite che serve per la continuità

Continuità | **Derivabilità** | **Differenziabilità**

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2+y^2} \\ 1 \end{cases}$$

$t = x^2 + y^2$

$t \to 0 \iff x^2 + y^2 \to 0$

$\Updownarrow$

$x \to 0$

$y \to 0$

CONTINUITÁ IN $(0,0)$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$$

Poiché la funzione esiste in $(0,0)$ ed esiste il limite per $f(x,y) \longrightarrow (0,0)$ e questi coincidono allora é CONTINUA

$f(x,y)$ CONTINUA IN $(0,0)$

Continuità | **Derivabilità** | **Differenziabilità**

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2+y^2} \\ 1 \end{cases}$$

DERIVABILITÁ IN $(0,0)$

Applico il limite del rapporto incrementale

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{e^{h^2} - 1}{h^2} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{h^2} - 1 - h^2}{h^3} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\overset{\text{de l'Hop}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{2he^{h^2} - 2h}{3h^2} = \lim_{h \to 0} \frac{2e^{h^2} - 2}{3h} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

* Tutti i limiti notevoli possono essere calcolati con De L'Hopital

Continuità | **Derivabilità** | **Differenziabilità**

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2+y^2} \\ 1 \end{cases}$$

de l'Hôp $= \lim_{h\to 0} \dfrac{4he^{h^2}}{6} = 0$

$|k| \to 0 = \underline{k} \to 0 =$ le sue componenti devono tendere contemporaneamente a 0 scalare

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} =$$

$k \to$ incremento

$$= \lim_{k\to 0} \frac{\dfrac{e^{k^2}-1}{k^2} - 1}{k} = \dots = 0$$

$f(x,y)$ DERIVABILE IN $(0,0)$

Continuità | **Derivabilità** | **Differenziabilità**

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2+y^2} \\ 1 \end{cases}$$

STUDIO DELLA DIFFERENZIABILITÀ

$$\lim_{\substack{h\to 0 \\ k\to 0}} \frac{f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0)\cdot h - f_y(0,0)\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

L = gradiente · incrementi infinitesi di h,k

devo considerare che devono Tendere CONTEMPORANEAMENTE

$$= \lim_{\substack{h\to 0 \\ k\to 0}} \frac{\dfrac{e^{h^2+k^2}-1}{h^2+k^2} - 1}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$h = \rho\cos\theta \qquad k = \rho\sin\theta$

Continuità	Derivabilità	Differenziabilità

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2+y^2} \\ 1 \end{cases}$$

STUDIO DELLA DIFFERENZIABILITÀ

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\dfrac{e^{\rho^2} - 1}{\rho^2} - 1}{\rho} = \dots \; 0$$

$f(x,y)$ DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$

Continuità	Derivabilità	Differenziabilità

$$f(x,y) = \begin{cases} y^3 x + y^2 & x \geq 0 \\ \dfrac{e^{xy} - 1}{x} & x < 0 \end{cases}$$

La diversità ora non è in un punto ma in due zone diverse

CONTINUITÀ IN $(0,y)$

$f(0,y) = y^2$ $\quad \lim_{x \to 0^+} y^3 x + y^2 = y^2$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^{xy} - 1}{x} = \lim_{x \to 0^-} y \cdot \frac{(e^{xy} - 1)}{xy} = y$$

Continuità	Derivabilità	Differenziabilità

$$f(x,y) = \begin{cases} y^3 x + y^2 & x \geq 0 \\ \dfrac{e^{xy}-1}{x} & x < 0 \end{cases}$$

CONTINUITÀ IN $(0,y)$

$f(0,y) = y^2$

$$\lim_{x \to 0^+} y^3 x + y^2 = y^2$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^{xy}-1}{x} = \lim_{x \to 0^-} y \cdot \frac{(e^{xy}-1)}{xy} = y$$

$f(x,y)$ NON CONTINUA IN $(0,y)$ CON $y \neq 0$

Continuità	Derivabilità	Differenziabilità

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln x + x & x > 1 \\ (x-1)^2 \operatorname{sen} y + 1 & x \leq 1 \end{cases}$$

CONTINUITÀ IN $(1,y)$

$\underbrace{f(1,y) = 1}_{\text{Funzione calcolata nel punto}}$

$$\lim_{x \to 1^+} y^2 \ln x + x = 1$$

$$\lim_{x \to 1^-} (x-1)^2 \operatorname{sen} y + 1 = 1$$

Limiti destro e sinistro

Continuità	Derivabilità	Differenziabilità

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln x + x & x > 1 \\ (x-1)^2 \sin y + 1 & x \leq 1 \end{cases}$$

$f(x,y)$ CONTINUA IN $(1,y)$

$f(1,y) = 1$ $\qquad \lim_{x \to 1^+} y^2 \ln x + x = 1$

$$\lim_{x \to 1^-} (x-1)^2 \sin y + 1 = 1$$

Continuità	**Derivabilità**	Differenziabilità

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln x + x & x > 1 \\ (x-1)^2 \sin y + 1 & x \leq 1 \end{cases}$$

DERIVABILITÁ IN $(1,y)$

Se le pendenze da destra e da sinistra sono diverse allora non è derivabile in quel punto

1) Applico il limite del rapporto incrementale

2) Applico una modalità alternativa

Continuità | **Derivabilità** | **Differenziabilità**

$$f(x,y)=\begin{cases} y^2 \ln x + x \\ (x-1)^2 \sin y + 1 \end{cases}$$

DERIVABILITÀ IN

$$\frac{\partial f(1,y)}{\partial x} = \lim_{t \to 0} \frac{f(1+t, y) - f(1,y)}{t}$$

INCREMENTO

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{y^2 \ln(1+t) + t + 1 - 1}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \left[y^2 \cdot \frac{\ln(1+t)}{t} + 1 \right] = y^2 + 1$$

Continuità | **Derivabilità** | **Differenziabilità**

$$f(x,y)=\begin{cases} y^2 \ln x + x \\ (x-1)^2 \sin y + 1 \end{cases}$$

DERIVABILITÀ IN

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{(t+1-1)^2 \sin y + 1 - 1}{t} = \lim_{t \to 0^-} t \sin y = 0$$

$\nexists \ \frac{\partial f(1,y)}{\partial x} \Rightarrow f(x,y)$ NON È DERIVABILE IN $(1,y)$

$\Downarrow$

$f(x,y)$ NON È DIFFERENZIABILE IN $(1,y)$

Continuità | Derivabilità | Differenziabilità

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln x + x & x > 1 \\ (x-1)^2 \sin y + 1 & x \le 1 \end{cases}$$

DERIVABILITÀ IN $(1, y)$

ALTRO MODO

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \begin{cases} \frac{y^2}{x} + 1 & x > 1 \\ 2(x-1)\sin y & x \le 1 \end{cases}$$

LIMITE DELLA DERIVATA PARZIALE

pendenza

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{y^2}{x} + 1 = y^2 + 1$$

$$\lim_{x \to 1^-} 2(x-1)\sin y = 0$$

PROPRIETÀ DEL GRADIENTE $\nabla f(\underline{x}_0)$

Ricerca dell'ottimo

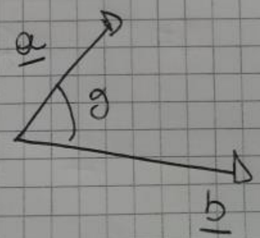
massimi e minimi

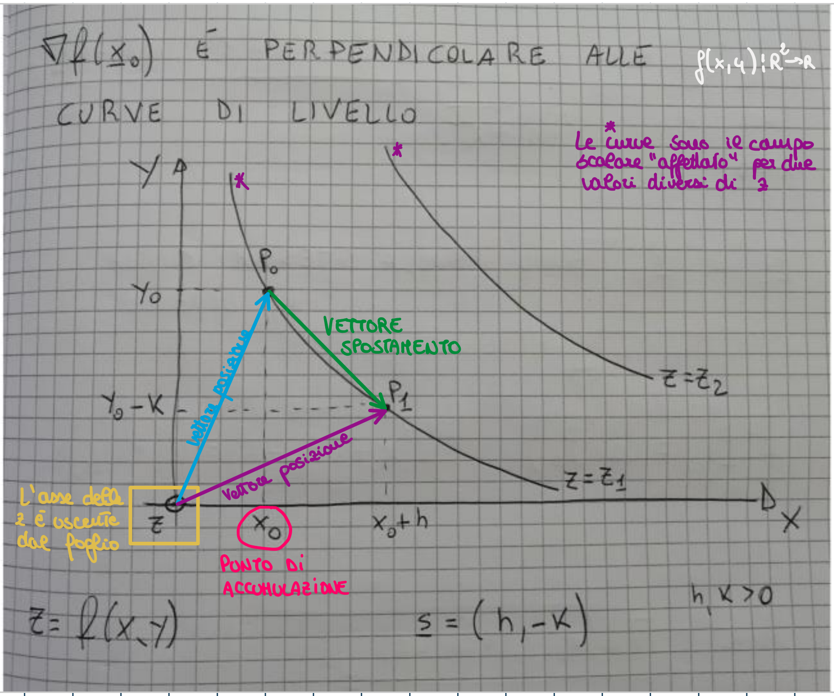
f DIFFERENZIABILE IN $\underline{x}_0 \Rightarrow \exists^* \nabla f(\underline{x}_0)$

$\exists!$ Esiste ed è unico

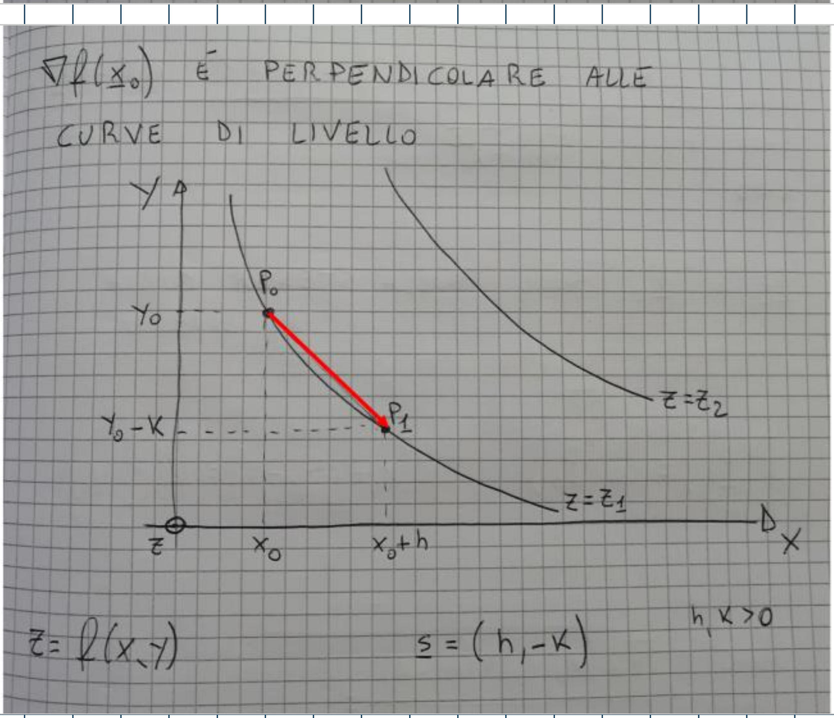
Il prodotto scalare di due vettori, geometricamente, è:

RICHIAMI: $\underline{a} \circ \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos\vartheta$



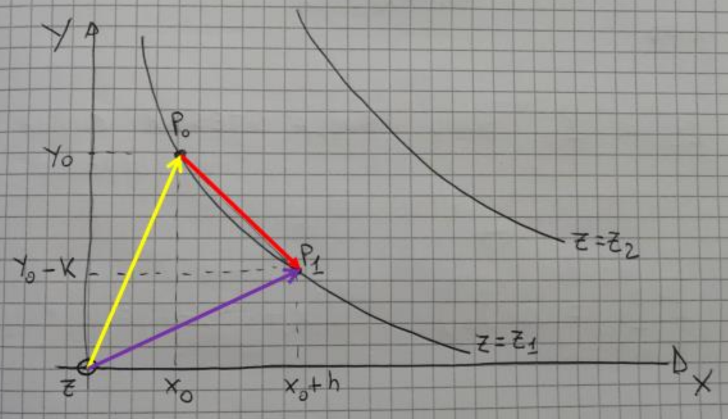


∇f(x₀) É PERPENDICOLARE ALLE CURVE DI LIVELLO
f(x,y): R² → R
* Le curve sono il campo scalare "affettato" per due valori diversi di z
P₀
y₀
VETTORE SPOSTAMENTO
vettore posizione
y₀ - k
P₁
vettore posizione
z = z₂
z = z₁
L'asse della z è uscente dal foglio
z
x₀
x₀ + h
x
y
PUNTO DI ACCUMULAZIONE
z = f(x, y)
s = (h, -k)
h, k > 0



∇f(x₀) É PERPENDICOLARE ALLE CURVE DI LIVELLO
P₀
y₀
y₀ - k
P₁
z = z₂
z = z₁
z
x₀
x₀ + h
x
y
z = f(x, y)
s = (h, -k)
h, k > 0

$\nabla f(\underline{x}_0)$ È PERPENDICOLARE ALLE CURVE DI LIVELLO



$z = f(x, y)$ $\qquad$ $\underline{s} = (h, -k)$ $\qquad$ $h, k > 0$

$f(x,y)$ DIFFERENZIABILE PER IPOTESI

$$\lim_{\underline{s} \to \underline{0}} \frac{\overbrace{f(\underline{P}_1)}^{\text{Funzione definita in } P_1} - \overbrace{f(\underline{P}_0)}^{\text{Funzione definita in } P_0} - \overbrace{L_{P_0}(\underline{s})}^{\text{L'applicazione lineare che riceve } s}}{|\underline{s}|} = 0 \qquad \underline{P}_1 = \underline{P}_0 + \underline{s}$$

Vettore spostamento

Somma algebrica!

$$\underline{P}_1 = \underline{P}_0 + \underline{s} = \underbrace{(x_0, y_0) + (h, -k)}_{\text{Somma delle componenti}} = (x_0 + h, y_0 - k)$$

Campo scalare = gradiente $\circ$ vettore spostamento

PRODOTTO SCALARE

$$L_{P_0}(\underline{s}) = \nabla f(\underline{P}_0) \circ \underline{s} = \nabla f(x_0, y_0) \circ (h, -k) =$$

$$= \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot h - \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot k$$

esplicito in h, k

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} \frac{f(x_0 + h, y_0 - k) - f(x_0, y_0) - \nabla f(x_0, y_0) \circ (h, -k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Se due punti sono sulla stessa curva di livello, allora hanno la stessa immagine, ovvero la stessa z

$\underline{P}_1$ E $\underline{P}_0$ SONO SULLA STESSA CURVA DI LIVELLO

$$\Downarrow$$

$$f(\underline{P}_1) = f(\underline{P}_0) \qquad f(x_0 + h, y_0 - k) = f(x_0, y_0)$$