ma poiché va bene ∀ qualsiasi ε, pongo $\varepsilon \to 0$ perciò

$$-2\pi i\, f(z_0) + \int_{C_R} \frac{f(\omega)}{\omega - \omega_0}\, d\omega = 0 \implies f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(\omega)}{\omega - \omega_0}\, d\omega$$

$$\frac{dv}{dy} = B = 6xy + 4x = 6xy + 4x + c'(y)$$

$$c'(y) = 0 \Rightarrow c(y) = C$$

DUNQUE $v(x, y) = 3xy^2 + 4xy - x^3 + C$ perció concludendo si ottiene

$$f(z) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2 + i\,(3xy^2 + 4xy - x^3 + C)$$

$k!$

<u>Dim:</u>

① $k=0 \Rightarrow a_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \Big|_{z=0} \overset{\text{infatti}}{=} a_0$

② $k \neq 0 \Rightarrow \frac{d^k}{dz^k} S = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \frac{d^k}{dz^k} z^n = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n\, k!\, z^{n-k} \Big|_{z=0} = a_k k!$

$$a_k = \frac{\frac{d^k}{dz^k} S(0)}{k!}$$

Dunque avrò che $\oint_{\gamma} = \oint_{\gamma_1} + \oint_{\gamma_2} = \frac{\pi i}{8}\left(e - \frac{5}{e^3}\right)$

dunque $\log z = \log|z| + i\arg(z)$ e il logaritmo è una funzione multivoca. Tuttavia si può operare una restrizione a $[0, 2\pi]$

ESEMPIO

piano reale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^2}\,dx = \lim_{\substack{R\to+\infty \\ \varepsilon\to 0^+}} \int_\varepsilon^R \frac{\log x}{1+x^2}\,dx$$

oppure

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^2}\,dx$$ nel piano complesso:

$$f(z) = \ln|z| + i\theta \quad \text{con } \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$$

$$\int_\varepsilon^R \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = \int_{[\varepsilon,R]} \frac{f(z)}{z^2+1}\,dz$$

~~Da~~ finire

(2) $z^n = w \Rightarrow$ l'operazione inversa è una radice ma non è una funzione invertibile e definita univocamente

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

$$= -i \oint_C \frac{dz}{z\left(\frac{z^2+1+4z}{2z}\right)^2} = -4i \oint_C \frac{z\,dz}{(z^2+4z+1)^2}$$

I punti di discontinuità sono $z^2+4z+1=0$ $\begin{cases} z_1 = -2+\sqrt{3} & \text{interno con mod. } 1 \\ z_2 = -2-\sqrt{3} & \text{esterno con mod. } 1 \end{cases}$

Dunque ottengo $-4i\oint_C = -4i\, 2\pi i \cdot Res\left(f, -2+\sqrt{3}\right)$

Calcolo il residuo $Res(f, -2+\sqrt{3}) = \lim_{z \to -2+\sqrt{3}} \frac{d}{dz}\left[(z+2-\sqrt{3})^2 \cdot \frac{z}{(z+2-\sqrt{3})^2(z+2+\sqrt{3})^2}\right] =$

$$= \lim_{z \to -2+\sqrt{3}} \frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(z+2+\sqrt{3})^2}\right] = \lim_{z \to -2+\sqrt{3}} \frac{(z+2+\sqrt{3})^2 - 2z(z+2+\sqrt{3})}{(z+2+\sqrt{3})^4} =$$

$$= \lim_{z \to -2+\sqrt{3}} \frac{\cancel{(z+2+\sqrt{3})}\,(z+2+\sqrt{3}-2z)}{(z+2+\sqrt{3})^{\cancel{4}\,3}} = \frac{4}{(2\sqrt{3})^3} = \frac{4}{{}^{2}\cancel{8}\cdot 3\sqrt{3}}$$

Dunque ottengo che

$$-4i\oint_C = -4i \cdot 2\pi i \cdot Res\left(f, -2+\sqrt{3}\right) = -4i \cdot \cancel{2}\pi i \cdot \frac{1}{{}_{3}\cancel{6}\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$\mathrm{Res}(f, z_2) = \frac{1}{6} e^{-i\frac{25}{6}\pi} = \frac{1}{6}\left[\cos\left(-\frac{25}{6}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{25}{6}\pi\right)\right] = \frac{1}{6}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right] = \frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{i}{12}$$

Perciò:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6+1} = 2\pi i\left[-\frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{i}{12} - \frac{i}{6} + \frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{i}{12}\right] =$$

$$= 2\pi i\left(-\frac{i}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi \quad \text{da cui} \quad \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^6+1} = \frac{\pi}{3}$$

PARENTESI TEORICA!

RISOLUZIONE INTEGRALI IMPROPRI

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)}\cos(\alpha x)dx$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{R\to+\infty} \oint_{\gamma} \frac{P_1(z)}{P_2(z)} e^{i\alpha z} dz = A + iB$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{R\to+\infty}\left[\oint_{\gamma} \frac{P_1(z)}{P_2(z)}\cos(\alpha z)dz + i\oint_{\gamma} \frac{P_1(z)}{P_2(z)}\sin(\alpha z)dz\right]$$

RISOLUZIONE INTEGRALI IMPROPRI

$$\lim_{R\to+\infty}\left[\oint_{\gamma} \frac{P_1(z)}{P_2(z)}\cos(\alpha z)dz\right] =$$

$$\lim_{R\to+\infty}\left[\int_{-R}^{R} \frac{P_1(x)}{P_2(x)}\cos(\alpha x)dx + \int_{\gamma_R} \frac{P_1(z)}{P_2(z)}\cos(\alpha z)dz\right] =$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)}\cos(\alpha x)dx}$$

RISOLUZIONE INTEGRALI IMPROPRI

$$\lim_{R\to+\infty}\left[\oint_{\gamma} \frac{P_1(z)}{P_2(z)}\sin(\alpha z)dz\right] =$$

$$\lim_{R\to+\infty}\left[\int_{-R}^{R} \frac{P_1(x)}{P_2(x)}\sin(\alpha x)dx + \int_{\gamma_R} \frac{P_1(z)}{P_2(z)}\sin(\alpha z)dz\right] =$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)}\sin(\alpha x)dx}$$

RISOLUZIONE INTEGRALI IMPROPRI

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)}\cos(\alpha x)dx$$

$$\lim_{R\to+\infty} \oint_{\gamma} \frac{P_1(z)}{P_2(z)} e^{i\alpha z} dz = A + iB$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)}\cos(\alpha x)dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)}\sin(\alpha x)dx$$

RISOLUZIONE INTEGRALI IMPROPRI

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)} cos(\alpha x) dx = Re\left[\lim_{R\to+\infty} \oint_{\gamma} \frac{P_1(z)}{P_2(z)} e^{i\alpha z} dz\right]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)} sin(\alpha x) dx = Im\left[\lim_{R\to+\infty} \oint_{\gamma} \frac{P_1(z)}{P_2(z)} e^{i\alpha z} dz\right]$$

RISOLUZIONE INTEGRALI IMPROPRI

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)} cos(\alpha x) dx = Re\left[\lim_{R\to+\infty} \oint_{\gamma} \frac{P_1(z)}{P_2(z)} e^{i\alpha z} dz\right]$$

$$f(z) = \frac{P_1(z)}{P_2(z)} e^{i\alpha z}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)} sin(\alpha x) dx = Im\left[\lim_{R\to+\infty} \oint_{\gamma} \frac{P_1(z)}{P_2(z)} e^{i\alpha z} dz\right]$$

RISOLUZIONE INTEGRALI IMPROPRI

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)} cos(\alpha x) dx = Re\left[2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{m} Res(f, z_j)\right]$$

$$f(z) = \frac{P_1(z)}{P_2(z)} e^{i\alpha z}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)} sin(\alpha x) dx = Im\left[2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{m} Res(f, z_j)\right]$$

Importante!!!

RISOLUZIONE INTEGRALI IMPROPRI

ESERCIZIO

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xcos(\pi x)}{\underbrace{x^2 + 2x + 5}_{x^2 > x \Rightarrow \text{converge}}} dx = Re\left[\lim_{R\to+\infty} \oint_{\gamma} \frac{ze^{i\pi z}}{z^2 + 2z + 5} dz\right]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xsin(\pi x)}{\underbrace{x^2 + 2x + 5}_{\text{converge}}} dx = Im\left[\lim_{R\to+\infty} \oint_{\gamma} \frac{ze^{i\pi z}}{z^2 + 2z + 5} dz\right]$$

ESERCIZI: $\oint \frac{z \cdot e^{i\pi z}}{z^2+2z+5} dz$

Trovo i poli:

$z^2+2z+5=0 \Rightarrow z_{1,2} = -1 \pm 2i$

Poiché ci interessano solo Ƨ y positive allora

$$\oint \frac{z \cdot e^{i\pi z}}{z^2+2z+5} dz = 2\pi i \, Res(f, -1+2i)$$

$$Res(f, -1+2i) = \lim_{z\to -1+2i} (z+1-2i) \cdot \frac{z e^{i\pi z}}{(z+1-2i)(z+1+2i)} =$$

$$= \lim \frac{z \cdot e^{i\pi z}}{} = \frac{(2i-1) e^{i\pi(2i-1)}}{} = \frac{(2i-1) e^{2i^2\pi - i\pi}}{} =$$

pari dispari

5) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+x+\sin(2x)}{x^4+5}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \oint_\gamma \frac{z^2}{z^4+5}\,dz + \operatorname{Im}\left[\lim_{R\to+\infty} \oint_\gamma \frac{z+e^{i2z}}{z^4+5}\,dz\right]$$

ma

pari dispari

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+x+\sin(2x)}{x^4+5}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \oint_\gamma \frac{z^2}{z^4+5}$$

6) $$\int_{-\infty}^{0} \frac{x^2+\cos(2x)}{x^4+5} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+\cos(2x)}{x^4+5}\,dx$$

12. Esercitazione 6

giovedì 21 gennaio 2021 09:47

Esercitazione 6 - 05/01/2021

- Serie di Fourier
- Trasformata di Fourier

SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER

4.8.- Serie trigonometrica → meglio detta GONIOMETRICA

serie →

È una serie di funzioni del tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(nx + \varphi_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \operatorname{sen}\varphi_n \cos nx + A_n \cos\varphi_n \operatorname{sen} nx) \qquad [4.8.1]$$

dove A_n, φ_n e x sono reali.

Ponendo $A_n \cos\varphi_n = b_n$, $A_n \operatorname{sen}\varphi_n = a_n$ per $n = 1, 2, \ldots$ e $A_0 \operatorname{sen}\varphi_0 = \frac{a_0}{2}$ la [4.8.1] diventa:

SERIE DI FOURIER

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)} \qquad [4.8.2]$$

che si riduce alla serie di seni

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx$$ { sviluppo in serie di seni

se $a_n = 0$ per $n = 1, 2, \ldots$, e alla serie di coseni

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$ { sviluppo in serie di coseni

se $b_n = 0$ per $n = 1, 2, \ldots$

Siccome il termine generale

$$a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

è periodico di periodo 2π, la serie può essere studiata in un qualunque intervallo di ampiezza 2π e, se è convergente, la sua somma $S(x)$ è pure periodica di periodo 2π.

4.9.- Relazione tra coefficienti e somma in una serie trigonometrica

PERIODO

Se la serie [4.8.2] è uniformemente convergente in tutto l'intervallo $(-\pi, \pi)$ e ha somma $S(x)$, sono verificate le seguenti relazioni:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cos nx\, dx \qquad [4.9.1]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(x) \operatorname{sen} nx\, dx \qquad [4.9.2]$$

ricavare i coefficienti

con $n = 1, 2, \ldots$

$$\boxed{S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)}$$

4.10.- Serie di Fourier

Una funzione DEVE essere periodica

Supponiamo che la funzione $f(x)$, avente periodo 2π, ammetta nell'intervallo $(-\pi, \pi)$ i seguenti integrali:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\, dx \qquad n = 1, 2, \ldots$$

detti coefficienti di Fourier della funzione $f(x)$. La serie trigonometrica [4.8.2] avente per coefficienti i precedenti integrali viene detta serie di Fourier associata alla funzione $f(x)$; essa può essere: Una serie di Fourier è:

1) divergente
2) convergente con somma $S(x) \neq f(x)$
3) convergente con somma $S(x) = f(x)$

$$\boxed{S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)}$$

4.10.- Serie di Fourier

Supponiamo che la funzione $f(x)$, avente periodo 2π, ammetta nell'intervallo $(-\pi, \pi)$ i seguenti integrali:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\, dx \qquad n = 1, 2, \ldots$$

detti coefficienti di Fourier della funzione $f(x)$. La serie trigonometrica [4.8.2] avente per coefficienti i precedenti integrali viene detta serie di Fourier associata alla funzione $f(x)$; essa può essere:

1) divergente
2) convergente con somma $S(x) \neq f(x)$
3) convergente con somma $S(x) = f(x)$

(funzioni che studieremo principalmente)

$$\boxed{S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)}$$

4.11.- Teorema fondamentale di convergenza

Si ricorda che per punto di discontinuità di prima specie di una funzione $f(x)$ si intende un punto $x = c$ in cui esistono finiti il limite destro e quello sinistro e tali che:

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = l_1 \qquad \lim_{x\to c^+} f(x) = l_2$$

con $l_1 \neq l_2$ (1).

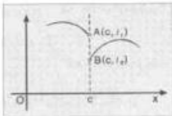


Fig. 4.11.1

Ciò premesso possiamo enunciare, omettendone la dimostrazione, il seguente teorema, valido per una funzione periodica definita nell'intervallo $(-\pi, \pi)$:

deve essere periodica

Nei punti in cui la funzione $f(x)$ è continua e derivabile, o almeno è dotata di derivata destra e sinistra, la serie di Fourier associata:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \quad (2)$$

con

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx$$

è convergente e la sua somma è $S = f(x)$.

continua e derivabile (o meglio le derivate destra e sinistra devono esistere finite anche se diverse)

Nei punti di discontinuità di prima specie in cui esistono finiti i limiti:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

la serie converge a

$$S = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

cioè alla media dei limiti destro e sinistro nel punto di discontinuità.

deve avere al massimo discontinuità a salto

Si ricorda che i due limiti considerati sono, rispettivamente, la pseudoderivata sinistra $f_-^*(x)$ e la pseudoderivata destra $f_+^*(x)$. Si ricordi inoltre che la pseudoderivata destra [sinistra] coincide con la derivata destra [sinistra] se è $f(x) = f(x+0)$ [$f(x) = f(x-0)$].

4.11.- Teorema fondamentale di convergenza

Si ricorda che per punto di discontinuità di prima specie di una funzione $f(x)$ si intende un punto $x = c$ in cui esistono finiti il limite destro e quello sinistro e tali che:

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = l_1 \qquad \lim_{x\to c^+} f(x) = l_2$$

con $l_1 \neq l_2$ (1).

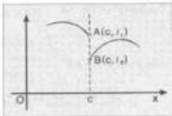


Fig. 4.11.1

Ciò premesso possiamo enunciare, omettendone la dimostrazione, il seguente teorema, valido per una funzione periodica definita nell'intervallo $(-\pi, \pi)$:

Nei punti in cui la funzione $f(x)$ è continua e derivabile, o almeno è dotata di derivata destra e sinistra, la serie di Fourier associata:

La serie di Fourier è somma di infinite armoniche

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)}_{\text{ARMONICA}} \quad (2)$$

armonica n indica l'addendo n della sommatoria

con

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx$$

è convergente e la sua somma è $S = f(x)$.

Nei punti di discontinuità di prima specie in cui esistono finiti i limiti:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

la serie converge a

$$S = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

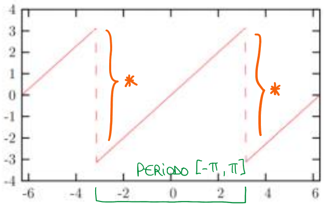
se ci sono asintoti non vale

cioè alla media dei limiti destro e sinistro nel punto di discontinuità.

Si ricorda che i due limiti considerati sono, rispettivamente, la pseudoderivata sinistra $f_-^*(x)$ e la pseudoderivata destra $f_+^*(x)$. Si ricordi inoltre che la pseudoderivata destra [sinistra] coincide con la derivata destra [sinistra] se è $f(x) = f(x+0)$ [$f(x) = f(x-0)$].

ESEMPIO 1.1. Consideriamo la funzione periodica di periodo 2π assegnata mediante

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } -\pi < x < \pi, \\ \text{periodica} & \text{di periodo } 2\pi. \end{cases}$$



DISCONTINUITÀ

$$S = \frac{-\pi + \pi}{2} = 0$$

$$\boxed{\text{La serie converge alla semisomma / media dei valori assunti tra destra e sinistra nel punto di discontinuità}}$$

4.11.- Teorema fondamentale di convergenza

Si ricorda che per punto di discontinuità di prima specie di una funzione $f(x)$ si intende un punto $x = c$ in cui esistono finiti il limite destro e quello sinistro e tali che:

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = l_1 \qquad \lim_{x\to c^+} f(x) = l_2$$

con $l_1 \neq l_2$ (1).

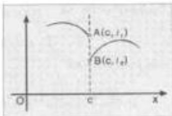


Fig. 4.11.1

Ciò premesso possiamo enunciare, omettendone la dimostrazione, il seguente teorema, valido per una funzione periodica definita nell'intervallo $(-\pi, \pi)$:

Nei punti in cui la funzione $f(x)$ è continua e derivabile, o almeno è dotata di derivata destra e sinistra, la serie di Fourier associata:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \quad (2)$$

con

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}$$

è convergente e la sua somma è $S = f(x)$.

Nei punti di discontinuità di prima specie in cui esistono finiti i limiti:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

la serie converge a

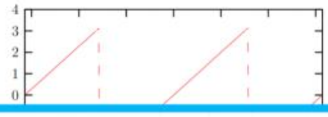
$$S = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

cioè alla media dei limiti destro e sinistro nel punto di discontinuità.

Si ricorda che i due limiti considerati sono, rispettivamente, la pseudod
stra $f_-^*(x)$ e la pseudoderivata destra $f_+^*(x)$. Si ricordi inoltre che la
vata destra [sinistra] coincide con la derivata destra [sinistra] se è $f(x)$
[$f(x) = f(x-0)$].

ESEMPIO 1.1. Consideriamo la funzione periodica di periodo 2π assegnata mediante

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } -\pi < x < \pi, \\ \text{periodica} & \text{di periodo } 2\pi. \end{cases}$$



I coefficienti dello sviluppo sono:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x \operatorname{sen} nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\,dx = 0$$

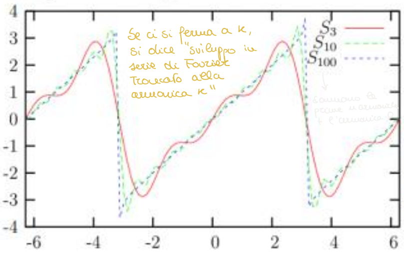
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-x\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,dx =$$

$$= -\frac{2\cos n\pi}{n} = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

La serie è perciò:

$$2\left(\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\operatorname{sen} nx}{n} + \ldots\right) \qquad [4.11.1]$$

e vale $f(x) = x$ nei punti dell'intervallo $[-\pi, \pi]$ e zero negli estremi $x = \mp\pi$ dove è nulla la media aritmetica dei limiti destro e sinistro, cioè $\dfrac{-\pi+\pi}{2} = 0$.



nell'inter-

a di deri-

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}$

è convergente e la sua somma è $S = f(x)$.
Nei punti di discontinuità di prima specie in cui esistono finiti i limiti:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

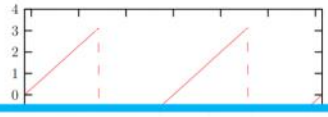
la serie converge a

$$S = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

cioè alla media dei limiti destro e sinistro nel punto di discontinuità.
Si ricorda che i due limiti considerati sono, rispettivamente, la pseudod[...] stra $f_-^*(x)$ e la pseudoderivata destra $f_+^*(x)$. Si ricordi inoltre che la [...] vata destra [sinistra] coincide con la derivata destra [sinistra] se è $f(x)$ [...] $[f(x) = f(x-0)]$.

ESEMPIO 1.1. Consideriamo la funzione periodica di periodo 2π assegnata mediante

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } -\pi < x < \pi, \\ \text{periodica} & \text{di periodo } 2\pi. \end{cases}$$



I coefficienti dello sviluppo sono:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\,\text{sen}\,nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\text{sen}\,nx}{n}\,dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\text{sen}\,nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-x\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,dx =$$

$$= -\frac{2\cos n\pi}{n} = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

La serie è perciò:

$$2\left(\text{sen}\,x - \frac{\text{sen}\,2x}{2} + \frac{\text{sen}\,3x}{3} + \dots + (-1)^{n+1}\,\frac{\text{sen}\,nx}{n} + \dots\right) \qquad [4.11.1]$$

e vale $f(x) = x$ nei punti dell'intervallo $[-\pi, \pi]$ e zero negli estremi $x = \mp\pi$ dove è nulla la media aritmetica dei limiti destro e sinistro, cioè $\frac{-\pi+\pi}{2} = 0$.

4.12.- Intervallo di integrazione di funzione periodica

Se una funzione $f(x)$, definita su tutto l'asse reale, è periodica di periodo T, l'integrale esteso a qualunque intervallo di ampiezza T, non dipende dalla posizione dell'intervallo sull'asse reale ossia l'integrale

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$$

non dipende dal valore di a.

Nel calcolo dei coefficienti di Fourier l'intervallo di integrazione $(-\pi, \pi)$ può essere perciò sostituito con un qualunque intervallo $(a, a+2\pi)$ di ampiezza 2π.

4.13.- Serie di Fourier di funzioni pari e dispari

Una funzione $f(x)$ è pari nell'intervallo $(-a, a)$ quando $f(-x) = f(x)$ (vedi fig. 4.13.1); per essa si ha:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

Una funzione è dispari nell'intervallo $(-a, a)$ quando $f(-x) = -f(x)$ (vedi fig. 4.13.2); per essa si ha:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

Come per gli integrali impropri, si semplificano gli integrali se le funzioni sono pari / dispari

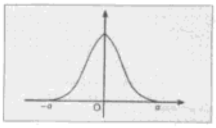


Fig. 4.13.1

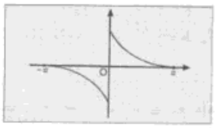


Fig. 4.13.2

Pertanto se si sviluppa in serie di Fourier una funzione pari, tenendo presente che $f(x)\cos nx$ è pari mentre $f(x)\,\text{sen}\,nx$ è dispari, si ha:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}\,x\,dx = 0$$

ossia lo sviluppo è costituito da una serie di coseni.

Analogamente, se $f(x)$ è dispari, $f(x)\cos nx$ è dispari mentre $f(x)\,\text{sen}\,nx$ è pari, per cui

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}\,nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\text{sen}\,nx\,dx$$

ossia lo sviluppo è costituito da una serie di seni.

4.16.- Serie di Fourier di funzione periodica di periodo 2λ

Per sviluppare in serie di Fourier una funzione $f(x)$ periodica di periodo 2λ definita nell'intervallo $(-\lambda, \lambda)$

(anche se il periodo non è 2π la serie è possibile da costruire BASTA CHE SIA PERIODICA)

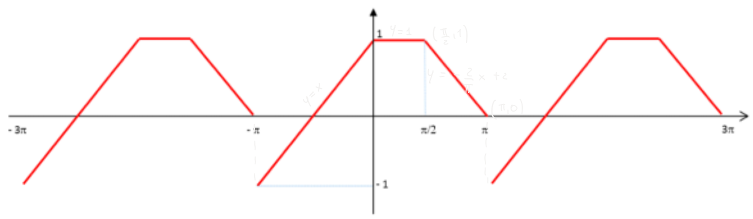
$$a_0 = \frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\lambda}\,dx \qquad [4.16.1]$$

$$b_n = \frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{\lambda}\,dx$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\lambda} + b_n\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{\lambda}\right)$$

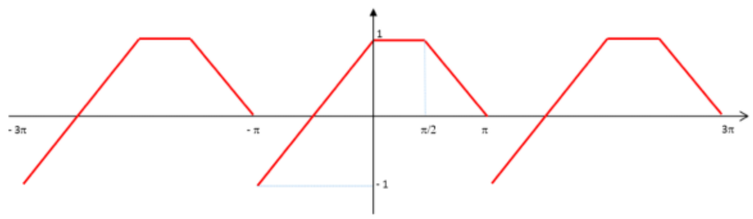
Applicare lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione rappresentata in Fig. 2, considerata come 2π periodica



$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & -\pi < x \leq 0 \\ f_2(x) & 0 < x \leq \pi/2 \\ f_3(x) & \pi/2 < x \leq \pi \end{cases}$$

Funzione continua a tratti

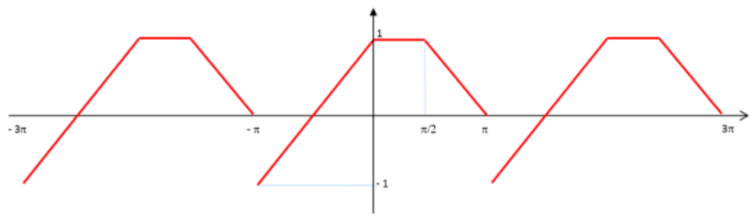
Applicare lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione rappresentata in Fig. 2, considerata come 2π periodica



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f_1(x)dx + \int_{0}^{\pi/2} f_2(x)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f_3(x)dx\right]$$

Ogni integrale deve essere spezzato lungo le curve continue

Applicare lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione rappresentata in Fig. 2, considerata come 2π periodica



$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f_1(x)cos(nx)dx + \int_{0}^{\pi/2} f_2(x)cos(nx)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f_3(x)cos(nx)dx\right]$$

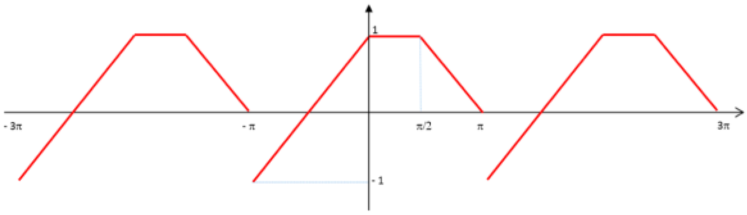
PASSAGGI

1) Verificare che sia
- periodica
- continua e derivabile
- ci siano solo un numero finito di discontinuità

2) Calcolare i seguenti che compongono la funzione di partenza

3) Si calcolano i coefficienti a_0, a_n e b_n tenendo conto che l'integrale di ciascuna area sottesa da un tratto continuo della curva

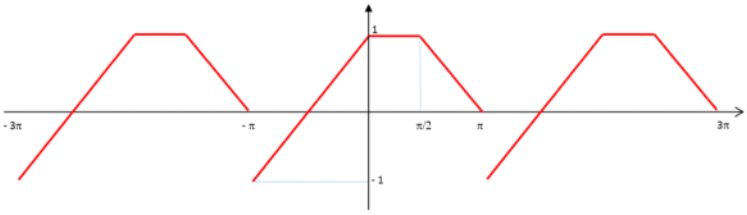
Applicare lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione rappresentata in Fig. 2, considerata come 2π periodica



$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(nx)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f_1(x)sin(nx)dx + \int_{0}^{\pi/2} f_2(x)sin(nx)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f_3(x)sin(nx)dx\right]$$

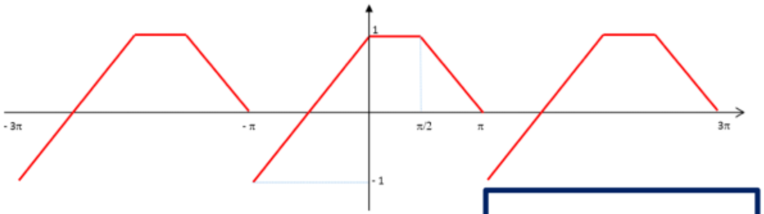
Applicare lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione rappresentata in Fig. 2, considerata come 2π periodica



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f_1(x)dx + \int_{0}^{\pi/2} f_2(x)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f_3(x)dx\right]$$

$$\boxed{\int (mx+q)dx = m\frac{x^2}{2} + qx + c}$$

Applicare lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione rappresentata in Fig. 2, considerata come 2π periodica

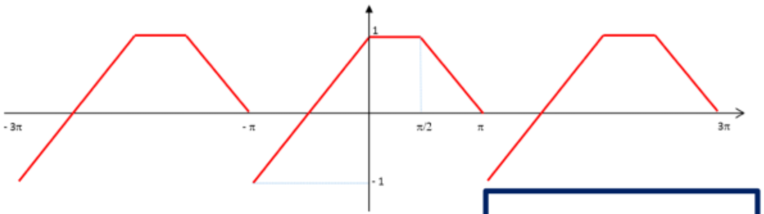


$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx =$$

$$\boxed{\int (mx+q)cos(nx)dx}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f_1(x)cos(nx)dx + \int_{0}^{\pi/2} f_2(x)cos(nx)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f_3(x)cos(nx)dx\right]$$

Applicare lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione rappresentata in Fig. 2, considerata come 2π periodica

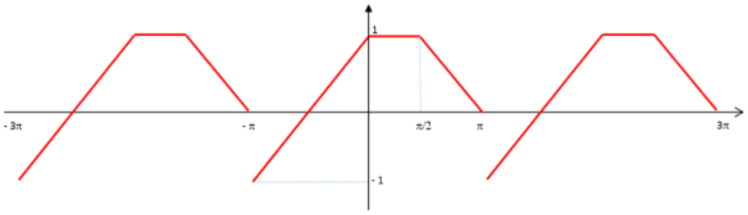


$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx =$$

$$\boxed{\int (mx+q)cos(nx)dx}$$

$$\boxed{m\int xcos(nx)dx} \qquad \boxed{q\int cos(nx)dx}$$

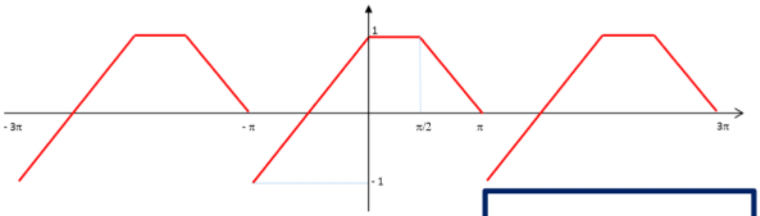
Applicare lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione rappresentata in Fig. 2, considerata come 2π periodica



$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx =$$

$$\boxed{\int xcos(nx)dx = \frac{x}{n}sin(nx) - \frac{1}{n}\int sin(nx)dx = \frac{x}{n}sin(nx) + \frac{1}{n^2}cos(nx) + c}$$

Applicare lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione rappresentata in Fig. 2, considerata come 2π periodica

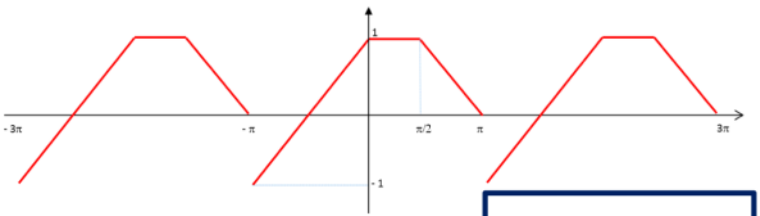


$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(nx)dx =$$

$$\boxed{\int (mx+q)sin(nx)dx}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f_1(x)sin(nx)dx + \int_{0}^{\pi/2} f_2(x)sin(nx)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f_3(x)sin(nx)dx\right]$$

Applicare lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione rappresentata in Fig. 2, considerata come 2π periodica

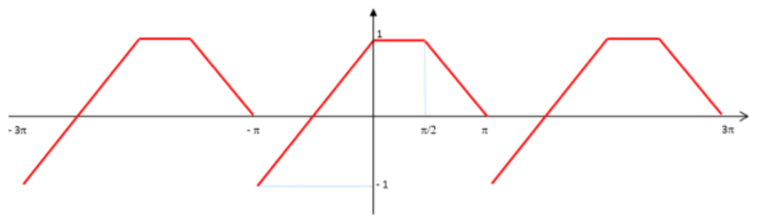


$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(nx)dx =$$

$$\boxed{\int (mx+q)sin(nx)dx}$$

$$\boxed{m\int xsin(nx)dx} \qquad \boxed{q\int sin(nx)dx}$$

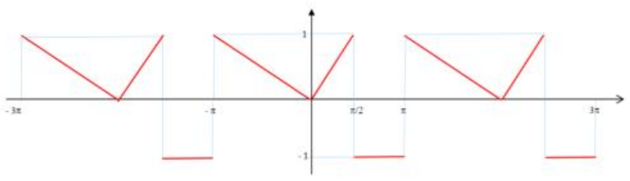
Applicare lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione rappresentata in Fig. 2, considerata come 2π periodica



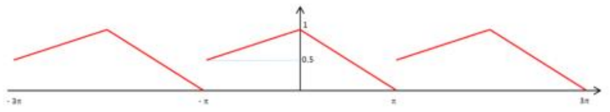
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(nx)dx =$$

$$\boxed{\int xsin(nx)dx = -\frac{x}{n}cos(nx) + \frac{1}{n}\int cos(nx)dx = -\frac{x}{n}cos(nx) + \frac{1}{n^2}sin(nx) + c}$$

Applicare lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione rappresentata in figura, considerata come 2π periodica



Applicare lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione rappresentata in Fig. 2, considerata come 2π periodica



and so on...

Esercizio n. 4

Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione:

$$f(x) = 12\cos(-2x) - \cos(4x) - 2sen(-7x) - 1$$ → Somma di funzioni periodiche

↳ se limito la funzione ad un periodo, è già sviluppata in serie!!!

e poi calcolare

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\left(1 + sen(7x)\right)dx$$

SVOLGIMENTO:

1) Cambio $sen(-x) = -sen(x)$ e $cos(-x) = cos x$

2) Ordino lo sviluppo

3) Individuo gli indici che non si annullano

Esercizio n. 4

Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione:

$$f(x) = 12\cos(-2x) - \cos(4x) - 2sen(-7x) - 1$$

e poi calcolare

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\left(1 + sen(7x)\right)dx$$

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nx) + b_n\,\mathrm{sen}(nx)}$$

Esercizio n. 4

Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione:

$$f(x) = 12\cos(-2x) - \cos(4x) - 2sen(-7x) - 1$$

$\cos(-x) = \cos x$ poiché è PARI

$sen(-x) = -sen\,x$ poiché è dispari

$$\boxed{f(x) = -1 + 12\cos(2x) - \cos(4x) + 2sen(7x)}$$

$\boxed{a_0 = -2}$ $\boxed{a_2 = 12}$ $\boxed{a_4 = -1}$ $\boxed{b_7 = 2}$

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nx) + b_n\,\mathrm{sen}(nx)}$$

Esercizio n. 4

Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione:

$$f(x) = 12\cos(-2x) - \cos(4x) - 2sen(-7x) - 1$$

$$\boxed{f(x) = -1 + 12\cos(2x) - \cos(4x) + 2sen(7x)}$$

$\boxed{a_0 = -2}$ $\boxed{a_2 = 12}$ $\boxed{a_4 = -1}$ $\boxed{b_7 = 2}$

e poi calcolare

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\left(1 + sen(7x)\right)dx$$

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(7x)dx}$$

$$\boxed{f(x) = -1 + 12\cos(2x) - 1\cos(4x) + 2sen(7x)}$$

$\boxed{a_0 = -2}$ $\boxed{a_2 = 12}$ $\boxed{a_4 = -1}$ $\boxed{b_7 = 2}$

$$\pi a_0 = \boxed{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(7x)dx}$$

perché

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad -2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad -2\pi = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$\boxed{f(x) = -1 + 12\cos(2x) - 1\cos(4x) + 2sen(7x)}$$

$\boxed{a_0 = -2}$ $\boxed{a_2 = 12}$ $\boxed{a_4 = -1}$ $\boxed{b_7 = 2}$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(nx)dx \qquad \boxed{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(7x)dx}$$

$= b_7\pi$

$$2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(7x)dx \qquad 2\pi = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(7x)dx$$

$$\boxed{f(x) = -1 + 12\cos(2x) - 1\cos(4x) + 2sen(7x)}$$

$\boxed{a_0 = -2}$ $\boxed{a_2 = 12}$ $\boxed{a_4 = -1}$ $\boxed{b_7 = 2}$

$$0 = \boxed{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(7x)dx}$$

Esercizio n. 4

Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione:

Somma di funzioni PARI = f(x) PARI

$f(x) = -0.5\cos(-2x) + 2\cos(6x) + 12$ $= 12 - 0,5\cos(2x) + 2\cos(6x)$ $\frac{a_0}{2}$

$\boxed{a_0 = 24}$ $\boxed{b_2 = -0,5}$ $\boxed{b_6 = 2}$

e poi calcolare

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)\left(2 - 3\cos(-6x)\right)dx \quad = 24\pi - 3\pi = 21\pi$$

$$\int_{-\pi}^{0} 2f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 2f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \pi \cdot 24$$

$$-3\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos 6x\,dx = -\frac{3}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 6x\,dx \qquad = 2 \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \cos 6x\, f(x) = 2\pi$$

allora $= -\frac{3}{2}2\pi = -3\pi$ dunque

TRASFORMATA DI FOURIER

TRASFORMATA DI FOURIER

1

generalizzazione della serie di Fourier per funzioni NON periodiche

PROPRIETÀ DELLA $f(x)$:

a) PERIODO $T = +\infty$ (OVVERO NON PERIODICA)

b) CONTINUA A TRATTI (CON DISCONTINUITÀ DI I SPECIE)

c) ASSOLUTAMENTE INTEGRABILE: $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < +\infty$ cioè deve convergere

$\Downarrow$

può essere considerata come un'onda

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-i\omega x}\, dx =$$

Si può esprimere una funzione del dominio x nel dominio ω delle frequenze

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-i\omega x}\, dx =$$

eulero: $e^{i\omega x} = \cos(\omega x) + i\sin(\omega x)$

$e^{-i\omega x} = \cos(-\omega x) + i\sin(-\omega x) = \cos(\omega x) - i\sin(\omega x)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \cos(\omega x)\, dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \mathrm{sen}(\omega x)\, dx =$$

$$= A(\omega) \quad - i\, B(\omega)$$

CASI PARTICOLARI

$f(x)$ PARI	$f(x)$ DISPARI
$A(\omega) = 2\int_0^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)\,dx$ PARI	$A(\omega) = 0$ spariscono i termini in coseno
$B(\omega) = 0$ spariscono i termini in seno	$B(\omega) = 2\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{sen}(\omega x)\,dx$ PARI

FUNZIONI CHE SI POSSONO DIAGRAMMARE:

- $A(\omega)$
- $B(\omega)$
- SPETTRO DELLE AMPIEZZE

  $|F(\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}$ modulo

  SE $f(x)$ È PARI $\Rightarrow$ $|F(\omega)| = |A(\omega)|$ perché $B(\omega) = 0$

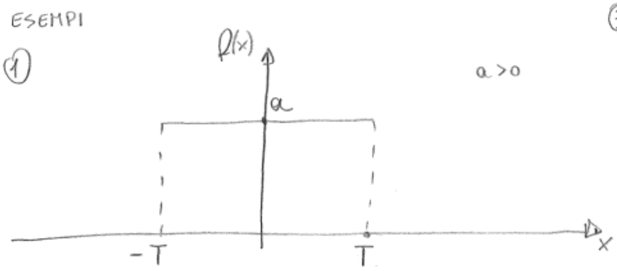
  SE $f(x)$ È DISPARI $\Rightarrow$ $|F(\omega)| = |B(\omega)|$ perché $A(\omega) = 0$

- SPETTRO DI FASE: $\operatorname{arctg}(B(\omega)/A(\omega))$

ESEMPI ③

①

$a > 0$



$F(\omega) = A(\omega) - i\,B(\omega)$

$f(x)$ É PARI $\Rightarrow$ $B(\omega) = 0$ Poiché è pari

$$A(\omega) = 2\int_0^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)\,dx$$

$$A(\omega) = 2\int_0^T a\cdot\cos(\omega x)\,dx = 2a\int_0^T \cos(\omega x)\,dx =$$

$$= \frac{2a}{\omega}\Big[\operatorname{sen}(\omega x)\Big]_0^T = \boxed{\frac{2a}{\omega}\operatorname{sen}\omega T}$$ REALE

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{2a}{\omega}\operatorname{sen}(\omega T) = 2aT$$

$$\lim_{\omega\to+\infty}\frac{2a}{\omega}\operatorname{sen}(\omega T) = 0 \qquad \lim_{\omega\to-\infty}\frac{2a}{\omega}\operatorname{sen}(\omega T) = 0$$

perché $-1 \le \operatorname{sen}(\omega T) \le 1$

⑥

$A(\omega) = 0 \Rightarrow \frac{2a}{\omega}\operatorname{sen}(\omega T) = 0 \Rightarrow \omega T = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow A(\omega) = 0$ QUANDO $\omega = \frac{k\pi}{T}$, CON $k \in \mathbb{Z}$

GRAFICO DI $A(\omega)$

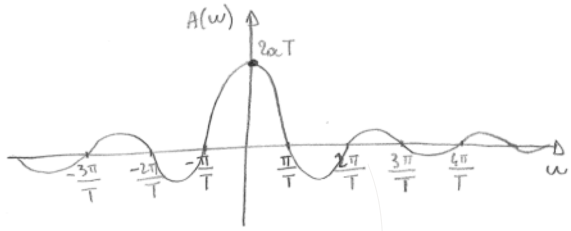


GRAFICO DI $|F(\omega)|$ → spettro delle ampiezze

UGUALE A $|A(\omega)|$ IN QUESTO CASO

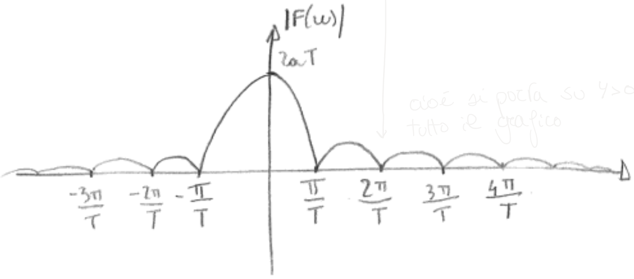
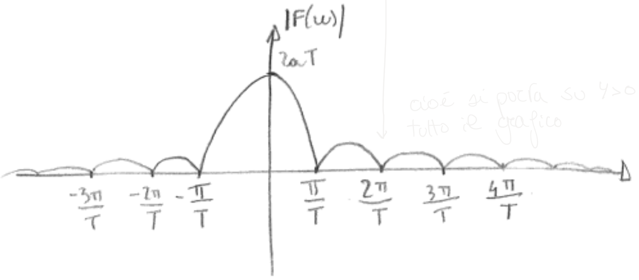


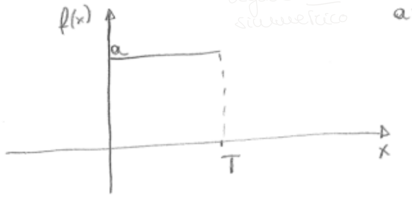
GRAFICO DI $|F(\omega)|$ → spettro delle ampiezze

UGUALE A $|A(\omega)|$ IN QUESTO CASO



ESEMPIO 2 (5)

segnale non simmetrico $a>0$



$$F(\omega) = A(\omega) - i \cdot B(\omega)$$

$$A(\omega) = \int_0^T a \cos(\omega x)\,dx = \frac{a}{\omega} \operatorname{sen}(\omega T) \quad \text{(VEDI ESEMPIO 1)}$$

fai a casa

$$B(\omega) = \int_0^T a \operatorname{sen}(\omega x)\,dx = \frac{a}{\omega}\Big[-\cos(\omega x)\Big]_0^T =$$

$$B(\omega) = \int_0^T a \operatorname{sen}(\omega x)\,dx = \frac{a}{\omega}\Big[-\cos(\omega x)\Big]_0^T =$$

$$= \frac{a}{\omega}\Big[1 - \cos(\omega T)\Big]$$

$$|F(\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{\omega^2}\left(\operatorname{sen}^2(\omega T) + 1 + \cos^2(\omega T) - 2\cos(\omega T)\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{\omega^2}\left(2 - 2\cos(\omega T)\right)} = \sqrt{\frac{2a^2}{\omega^2}\left(1 - \cos(\omega T)\right)}$$

(6)

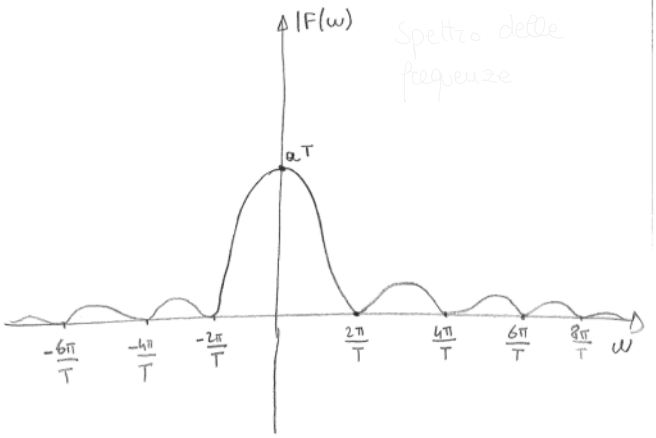
$$\lim_{\omega \to 0} \sqrt{\frac{2a^2}{\omega^2}\left(1 - \cos(\omega T)\right)} = \sqrt{2a^2T^2 \cdot \frac{1}{2}} = aT$$

$$\lim_{\omega \to +\infty} \sqrt{\frac{2a^2}{\omega^2}\left(1 - \cos(\omega T)\right)} = 0$$

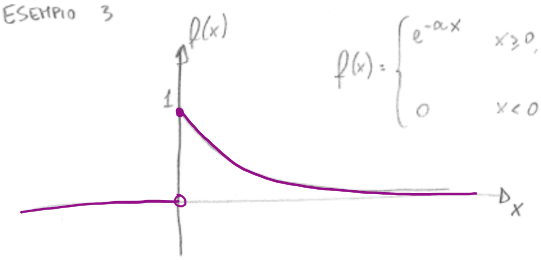
$$\lim_{\omega \to -\infty} \sqrt{\frac{2a^2}{\omega^2}\left(1 - \cos(\omega T)\right)} = 0$$

$$|F(\omega)| = 0 \Rightarrow \Big[1 - \cos(\omega T)\Big] = 0 \Rightarrow \cos(\omega T) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega T = 2K\pi \Rightarrow \omega = \frac{2K\pi}{T}, \text{ con } K \in \mathbb{Z}$$



ESEMPIO 3



$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & x \geq 0,\ a>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

$f(x)$ è assolutamente integrabile, poiché

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}$$

$$F(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cdot e^{-i\omega x}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-(a+i\omega)x}\,dx =$$

(non da $-\infty$ poiché sarebbe 0)

$$= \frac{1}{a+i\omega} = \frac{a-i\omega}{(a+i\omega)(a-i\omega)} = \frac{a-i\omega}{a^2+\omega^2} =$$

$$= \frac{a}{a^2+\omega^2} - i\,\frac{\omega}{a^2+\omega^2} = A(\omega) - i\,B(\omega) =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos(\omega x)\,dx - i\int_0^{+\infty} e^{-ax}\operatorname{sen}(\omega x)\,dx$$

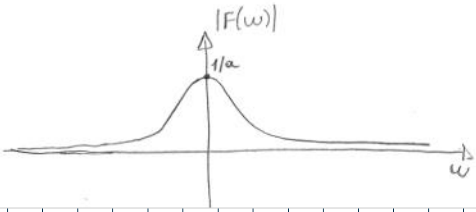
QUINDI (8)

$$A(\omega)=\frac{a}{a^2+\omega^2}$$

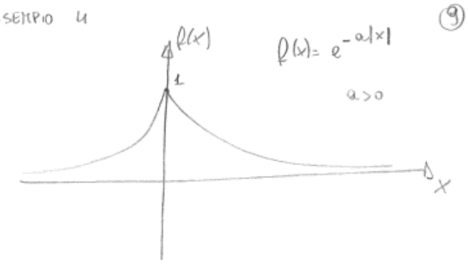
$$B(\omega)=\frac{\omega}{a^2+\omega^2}$$

$$|F(\omega)|=\sqrt{A^2(\omega)+B^2(\omega)}=\sqrt{\frac{a^2}{(a^2+\omega^2)^2}+\frac{\omega^2}{(a^2+\omega^2)^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{a^2+\omega^2}}$$



ESEMPIO 4 (9)



$$f(x)=e^{-a|x|}$$

$$a>0$$

$f(x)$ È PARI ED ASSOLUTAMENTE INTEGRABILE IN QUANTO:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=2\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx=\frac{2}{a}$$

(IN QUANTO $f(x)$ È SEMPRE POSITIVA)

$f(x)$ È PARI ED ASSOLUTAMENTE INTEGRABILE IN QUANTO:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=2\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx=\frac{2}{a}$$

(IN QUANTO $f(x)$ È SEMPRE POSITIVA)

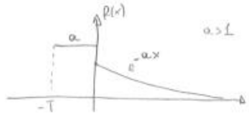
$$A(\omega)=2\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos(\omega x)\,dx=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$ (VEDI ESEMPIO 3)

$$B(\omega)=0$$

$$|F(\omega)|=|A(\omega)|=\left|\frac{2a}{a^2+\omega^2}\right|=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$ (IN QUANTO $a>0$ PER IPOTESI)

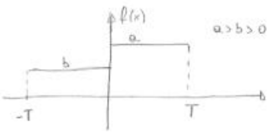
ALTRI ESEMPI (DA ANALIZZARE IN AUTONOMIA) (10)

5)



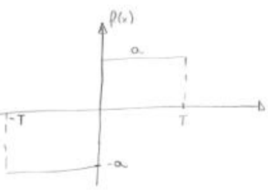
$a>1$

6)



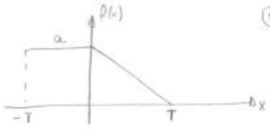
$a>b>0$

7)

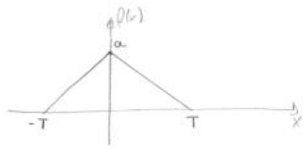


(11)

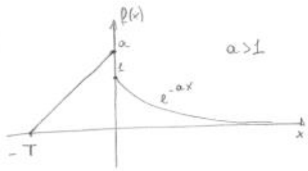
8)



9)



10)



$a>1$

$\omega \in \boldsymbol{R}$ **FOURIER**

$$\boxed{F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx}$$

$\omega \in \boldsymbol{C}$ **LAPLACE**

PROBLEMA DI CAUCHY

ODE PRIMO ORDINE

$$\begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

- Sol: $y = f(x) + c$ UNICA
- Necessita di un solo vincolo

Si calcola l'integrale generale e si sostituisce il vincolo per trovare l'integrale particolare

ODE SECONDO ORDINE

$$\begin{cases} y'' = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI

(vedi sopra)

$y = x$ e $y = -x$

$y = x \Rightarrow y^4 - 6y^4 + y^4 = -4y^4$

$-4y^4 \xrightarrow{1^a} -16y^3 \xrightarrow{2^a} -48y^2 \xrightarrow{3^a} -96y \xrightarrow{4^a} -96 < 0$

FLESSO

è una sella!!!

$f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xz + 2x + 2y + 1$

$\frac{df}{dx} = 6x - 2z + 2 \qquad \frac{df}{dy} = 4y + 2 \qquad \frac{df}{dz} = 2z - 2x$

$\frac{d^2f}{dxdy} = 0 \qquad \frac{d^2f}{dxdz} = -2 \qquad \frac{d^2f}{dx^2} = 6$

$\frac{d^2f}{dydx} = 0 \qquad \frac{d^2f}{dydz} = 0 \qquad \frac{d^2f}{dy^2} = 4$

$\frac{d^2f}{dzdx} = -2 \qquad \frac{d^2f}{dzdy} = 0 \qquad \frac{d^2f}{dz^2} = 2$

$$\underline{\underline{H}}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Punti critici:

$$\begin{cases} 6x - 2z + 2 = 0 \\ 4y + 2 = 0 \\ z = x \end{cases} \quad \begin{cases} 6z - 2z + 2 = 0 \\ y = -\frac{1}{2} \\ x = z \end{cases} \quad \begin{cases} z = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$4z + 2 = 0$

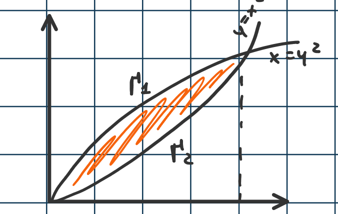
$$\underline{\underline{H}}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det = 32 > 0 \quad \text{Minimo}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{m^2 \sin(\pi x)}{m^2+1} = \frac{0}{m^2+1}$$ Non posso concludere nulla

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{(\rho \sin\theta - 1)^2 \sin(\pi \rho \cos\theta)}{(\rho\cos\theta - 2)^2 + (\rho \sin\theta - 1)^2} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\sin(\pi \rho \cos\theta)}{\frac{(\rho\cos\theta-2)^2}{(\rho\sin\theta-1)^2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{0}{\frac{4}{1}} = 0$$

Il limite dunque esiste

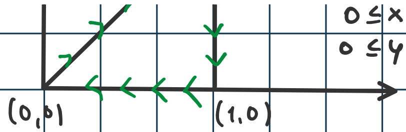
$\iint_D y^2\,dx\,dy \qquad D: \begin{cases} x^2 \le y \\ y^2 \le x \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 \le y \\ -\sqrt{x} \le y \le \sqrt{x} \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 \le y \le \sqrt{x}$



Funzione y-semplice:

$0 \le x \le 1$

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} y^2\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{y^3}{3}\Bigg|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}\,dx - \int_0^1 \frac{x^6}{3}\,dx = \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{15}\Bigg|_{x=0}^{x=1} - \frac{x^7}{21}\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{15} - \frac{1}{21} = \frac{3}{35}$$



$0 \le x \le 1$
$0 \le y \le x$

Applico Gauss-Green :

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_A (\nabla \times F)\, dA$$

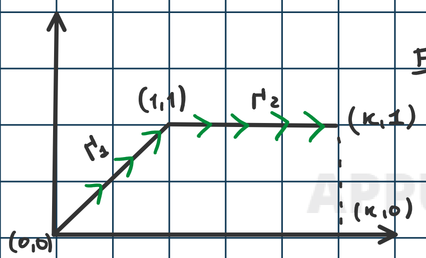
$$\nabla \times F = \left(\frac{dF_2}{dx} - \frac{dF_1}{dy} \right) k = (2x - 2y) k$$

NON É CONSERVATIVO !!!

verso

$$-\int_0^1 \int_0^x (2x - 2y)\, dy\, dx = -\int_0^1 (2xy - y^2)\Big|_{y=0}^{y=x} dx = -\int_0^1 (2x^2 - x^2)\, dx = \int_0^1 x^2\, dx =$$

$$= -\frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=1} = -\frac{1}{3} \neq 0 \quad \text{dunque} \quad L(\underline{F}) \neq 0 = -\frac{1}{3}$$



$\underline{F} = (x, x^2)$

Valore di k per cui $\displaystyle\int_{\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2} F \cdot dr = 3$

• Γ_1 : $x = y \Rightarrow r(t) = \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad t \in [0,1]$

$r'(t) = (1,1)$

$$\int_{\Gamma_1} \underline{F} \cdot dr = \int_0^1 t\, dt + \int_0^1 t^2\, dt = \frac{t^2}{2}\Big|_{t=0}^{t=1} + \frac{t^3}{3}\Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

• Γ_2 : $\begin{cases} y = 1 \\ 1 \le x \le k \end{cases} \Rightarrow r(t) = \begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases} \quad t \in [1, k]$

$r'(t) = (1, 0)$

$$\int_{\Gamma_2} \underline{F} \cdot dr = \int_1^k t\, dt = \frac{t^2}{2}\Big|_{t=1}^{t=k} = \frac{k^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\int_{\gamma_2} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_1^k t \, dt = \frac{t^2}{2} \Big|_{t=1}^{t=k} = \frac{k^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{k^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{5}{6} = 3 \quad \Rightarrow k^2 = \frac{16}{3} \quad \Rightarrow k = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

$$\begin{cases} 2x = 2x \\ -2y = -2y \end{cases} \Rightarrow \text{Le equazioni sono verificate}$$

$f(z) = z^2$ È DIFFERENZIABILE

2) $f(z) = |z| \Rightarrow |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$ $\qquad \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+5}}$

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \qquad v(x,y) = 0$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \frac{du}{dy} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \frac{dv}{dx} = 0 \qquad \frac{dv}{dy} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \end{cases}$$

Le equazioni non sono verificate

$f(z) = |z|$ non è differenziabile

3) $f(z) = z + 2\bar{z}$

$$z = x+iy \quad , \quad \bar{z} = x - iy$$

$$f(x,y) = x+iy - 2x + 2iy = -x + 3iy$$

$$u(x,y) = -x \qquad v(x,y) = 3y$$

$$\frac{du}{dx} = -1 \qquad \frac{du}{dy} = 0 \qquad \frac{dv}{dx} = 0 \qquad \frac{dv}{dy} = 3$$

$$\begin{cases} -1 = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$ Le equazioni non sono verificate

$f(z) = z + 2\bar{z}$ non è differenziabile

5) Calcolare i logaritmi delle seguenti funzioni

1) $z = i$ $\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$

$\log(i) = \log|z| + i\arg(z)$

$|z| = \sqrt{1^2 + 0} = 1$

$\arg(z) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$

$\log(i) = \log(1) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right)$

2) $z = -2$ $\begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \end{cases}$

$\log(-2) = \log|z| + i\arg(z)$

$|z| = \sqrt{4} = 2$

$\arg(z) = \arctan(0) = 0 + 2n\pi + \pi$

poiché $a < 0$ si deve aggiungere la periodicità

$\log(-2) = \log|2| + i(2n\pi + \pi)$

3) $z = 1 - i$ $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$

$\log(1-i) = \log|z| + i\arg(z)$

$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$f(x,y) = 2x + 2iy + x - iy = 3x + iy$$

$$u(x,y) = 3x \qquad v(x,y) = y$$

$$\frac{du}{dx} = 3 \quad \frac{du}{dy} = 0 \quad \frac{dv}{dx} = 0 \quad \frac{dv}{dy} = 1$$

$$\begin{cases} \overset{u_x}{3} = \overset{v_y}{1} \\ \overset{u_y}{0} = \overset{v_x}{0} \end{cases}$$

Le equazioni non sono verificate

Concetti fondamentali mod. 1

mercoledì 13 gennaio 2021 12:27

Insieme	- aperto: contiene solo punti interni - chiuso: contiene tutti i punti di frontiera - aperto e chiuso: esistono solo punti interni e sono tutti compresi - né aperto né chiuso: ha dei punti di frontiera ma non tutti	
Dominio semplice	Un dominio si dice semplice rispetto ad una variabile. Un dominio è - y-semplice o x-normale se la x è compresa fra due valori numerici e la y fra due funzioni di x - x-semplice o y-normale se la y è compresa fra due valori numerici e la x fra due funzioni di y	
Dominio connesso	Dominio in cui due punti possono essere uniti tramite una poligonale passante per il dominio stesso. E' come se esso fosse composto da un solo pezzo	
Dominio né connesso né semplicemente	Dominio composto da più pezzi	
Dominio semplicemente connesso	Dominio dove una qualsiasi curva può essere ristretta fino ad un punto. Non sono dunque presenti dei buchi. In r3 un dominio può essere semplicemente connesso se ha un buco ma non se è tagliato da una retta o un piano	
Dominio connesso non semplicemente	Dominio in cui è possibile unire due punti del dominio senza uscirne ma non è possibile ridurre una qualsiasi curva in esso contenuto ad un punto perché è presente un buco	Una corona è un dominio connesso
Curva regolare	Un curva è regolare se è derivabile e dunque non ha punti di discontinuità. Una curva è regolare a tratti se può essere divisa in un numero finito di curve a loro volta regolari	
Curva liscia o rettificabile	Una curva è liscia o rettificabile se è regolare (cioè è derivabile) e la sua derivata prima è continua (cioè la funzione è di classe C1)	

Limiti	in analisi 1 i limiti vengono calcolati lungo due direzioni (destra e sinistra). In analisi 2 invece devono essere uguali da TUTTE le direzioni. Se il limite dà origine ad una forma indeterminata, bisogna applicare uno dei seguenti metodi: - metodo delle rette: trovo due curve che sostituisco nel limite; se ottengo due risultati diversi il limite non esiste. Tuttavia, se ottengo lo stesso risultato non posso concludere nulla. Il metodo consiste nel valutare il limite lungo due direzioni diverse - coordinate: applico le coordinate polari nel bidimensionale e quelle sferiche nel tridimensionale. Questo metodo dice che il limite esiste se quello calcolato con la sostituzione è indipendente da teta - maggiorazione: pongo in valore assoluto la funzione così che sia maggiore di zero e ricerco una funzione che ne è maggiore e il cui limite è finito. Viene usato se il limite è noto e va solo verificato (di solito è pari a zero). Per semplificare un limite di una funzione di più variabili, posso anche operare una sostituizione in modo da renderlo un limite notevole di analisi 1	I limiti vengono usati ad esempio nel calcolo della continuità o derivabilità di funzioni definite a tratti
Derivata parziale	Geometricamente, la derivata parziale corrisponde alla pendenza di una retta tangente ad un punto della curva lungo una sezione di essa. Una funzione può essere derivabile MA NON CONTINUA. Infatti è possibile calcolare il piano tangente ad una curva ma non è detto che esista davvero. Dunque si parla di differenziabilità in quanto è un concetto più forte che implica a sua volta sia continuità che derivabilità	Una derivata parziale va calcolata attraverso il limite del rapporto incrementale quando è definita a tratti
Differenziabilità	La differenziabilità è un concetto più forte che implica a sua volta sia continuità che derivabilità. Tuttavia, una funzione che non è continua e/o derivabile in un punto, non è sicuramente differenziabile. Per verificare la differenziabilità si può - calcolare il limite $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ - applicare il teorema del differenziale totale secondo cui, se una funzione ha derivate prima continue (è cioè di classe C1) allora è differenziabile Se la funzione è differenziabile, l'equazione differenziale associata è df = fx dx + fy dy (cioè il prodotto scalare fra gradiente e vettore degli incrementi). Ponendo df = z - z0, dx = x - x0 e dy = y - y0 si ricava l'equazione del piano tangente in (x0, y0, z0)	Viene utilizzata per valutare quando una funzione è continua e derivabile. In base al tipo di funzione, uso il teorema del differenziale totale o la definizione del limite. Inoltre, dall'equazione del differenziale posso calcolare l'equazione del piano tangente
Gradiente	Trasforma una funzione scalare (Rn -> R) in funzione vettoriale (Rn -> Rn). E' perpendicolare alle curve di livello e geometricamente indica il punto in cui vi è maggiore variazione di pendenza e, infatti, lungo la curva di livello invece non si sale di quota. Il verso positivo del gradiente indica dove si sale; usando il verso negativo si scende.	Esiste solo se tutte le componenti sono finite e calcolabili. Viene usato nel processo di ottimizzazione per valutare se un punto è

		stazionario o meno: se il gradiente è nullo in un punto allora esso è critico ma ci possono essere punti critici il cui gradiente è diverso da zero.
Metodo del gradiente	Metodo che serve a ricercare un massimo e un minimo e viene compiuto utilizzando un passo (si ragiona infatti nel discreto) e si itera passo per passo fino a trovare il punto stazionario. In base alla grandezza del passo si arriva prima o dopo al punto ma se il passo è troppo grande, si rischia di sorpassare il punto.	
Matrice jacobiana	Matrice che generalizza il gradiente nel caso di una funzione di più variabili a valori vettoriali. Infatti, ogni elemento della matrice è una derivata prima parziale. Ogni colonna si riferisce ad una delle variabili mentre ogni riga ad una delle componenti. L'equazione differenziale in questo caso è ottenuta dalla matrice jacobiana per il vettore degli incrementi (dunque si otterranno tante equazioni quante sono le componenti)	
Jacobiano	Lo jacobiano è il determinante della matrice jacobiana di una funzione di più variabili a valori vettoriali. Lo jacobiano in un dato punto fornisce importanti informazioni circa il comportamento e l'invertibilità della funzione nell'intorno di un punto	
Ottimizzazione	Consiste nel ricercare massimi e minimi. E' di due tipi: - libera: ricerca in tutto il dominio di una funzione. Si calolano i punti stazionari attraverso il gradiente nel caso di funzioni a valori reali o della matrice jacobiana nel caso di una funzione a valori vettoriali e li si classifica tramite lo studio della matrice hessiana. Tale matrice riesce a definire localmente il comportamento del punto - vincolata: ricerca in un insieme descritto da una curva (a sua volta divisibile in curve più semplici) che fa da vincolo. Si cercano poi i punti stazionari della funzione (come fosse una ricerca libera) ma si conservano solo quelli interni alla curva di ricerca; si studiano poi i vertici individuati dal vincolo (se ad esempio la curva totale è formata da più curve allora vi saranno dei vertici); infine si sostuiscono a turno le varie sottocurve e si calcolano i punti stazionari relativi a ciascuna restrizione. Al termine si elencano tutti i punti stazionari ottenuti e si individuano massimo e minimo in base al valore della z. Nel caso in cui la restrizione data sia una curva chiusa, può essere applicato il metodo dei moltiplicatori di lagrange che permette di individuare (ma non classificare) i punti critici. Il metodo consiste nel calcolare la funzione lagrangiana che è la combinazione lineare della funzione e del vincolo (L = f + k g). Si possono dunque trovare i punti stazionari calcolando il gradiente di questa funzione e applicando il meccanismo di ottimizzazione libera. Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange può essere usata quando sia sa che la funzione ammette un minimo o massimo e il vincolo non per forza è una curva chiusa come ad esempio problemi di minima o massima distanza da un punto e minimizzazione o massimizzazione di aree. Nella ricerca libera, si usa la matrice hessiana in modo da definire il comportamento locale di ciascun punto. Invece, nell'ottimizzazione vincolata vale il teorema di Weirstrass per cui in un compatto (cioè un insieme chiuso e limitato) vi è sicuramente un massimo e un minimo. Poiché dunque si è interessati a sapere quali sono il massimo e il minimo assoluti, non serve operare una valutazione locale attraverso la matrice hessiana ma si fa una classifica in base al valore della z che individuerà il massimo e il minimo assoluti	Moltiplicatori di Lagrange -> problemi di massimizzazione o minimizzazione di aree
Matrice hessiana	La matrice hessiana è composta dalle derivate seconde parziali pure e miste. Per il teorema di Schwarz se la funzione è di classe C2 allora la matrice sarà simmetrica e cioè le derivate seconde parziali miste saranno tutte uguali. Ogni riga identifica la variabile verso cui fare prima la derivazione. La matrice hessiana viene utilizzata per classificare i punti stazionari in due modi: - calcolo del determinante della matrice: per il teorema di jacobi si ha che ○ definita positiva se tutti i determinanti delle sottomatrici sono maggiori di zero. Nel caso di una 2x2 basta che il determinante e fxx siano maggiori di zero -> minimo ○ definita negativa se tutti i determinanti delle sottomatrici di indice dispari siano minori di zero e che quelle di indice pari siano maggiori di zero. Nel caso di una 2x2 basta che il determinante sia maggiore di zero ed fxx minore -> massimo ○ semidefinita positiva se tutti i determninanti dei minori sono maggiori o uguali di zero -> metodo alternativo ○ semidefinita negativa se tutti determinanti dei minori di indice pari sono maggiori o uguali di zero e quelli di indice dispari sono minori o uguali di zero -> metodo alternativo ○ non definita se alcuni determinanti dei minori sono maggiori di zero e altri minori -> sella - calcolo degli autovalori attraverso il determinante del polinomio caratteristico: ○ definita positiva se tutti gli autovalori sono maggiori di zero -> minimo ○ definita negativa se tutti gli autovalori sono minori di zero -> massimo ○ semidefinita positiva se tutti gli autovalori sono maggiori o uguali di zero -> metodo alternativo ○ semidefinita negativa se tutti gli autovalori sono minori o uguali di zero -> metodo alternativo ○ non definita se alcuni autovalori sono maggiori di zero e altri minori -> sella Quando il determinante della matrice hessiana è nullo, la matrice si definisce semidefinita e non si può fare nessuna valutazione se non ricorrendo a due metodi:	

	- metodo delle rette: trovo due rette che sostituisco nella funzione per poi derivarla più volte. Se alla derivata n-esima (con n pari) sostituendo ottengo un valore diverso da zero allora ho un flesso mentre se n è dispari allora ho un massimo o minimo (ma solo lungo quella curva). Ottenendo un flesso (o un minimo lungo una curva e un massimo lungo l'altra), allora ho un a sella. Nel caso in cui ottenga sempre due minimi o due massimi, allora non posso concludere nulla. - metodo dei segni: studio il segno della funzione nell'intorno del punto: se è positiva, è un minimo; se negativa è un massimo mentre se è sia negativa che positiva è di sella. Posso anche ricondurre la funzione ad una di analisi 1 per compiere un classico studio di positività. - metodo della sostituzione: sostituisco una parte della equazione in modo da ridurla ad una equazione di analisi 1 Con lo studio dell'hessiano ottengo dei punti reltivi che posso essere ritenuti assoluti se la funzione è limitata e non ha punti di discontinuità (ad esempio degli asintoti)	
Laplaciano	Divergenza del gradiente di una funzione	Viene usato nelle equazioni differenziali
Rotore	(op vettoriale)	Viene usato per valutare se un campo è conservativo
Divergenza		Viene usato per calcolare il flusso di un campo di forze attraverso una superficie chiusa

Calcolo integrale

Metodi numerici	- Metodo dei trapezi: l'integrale è dato dalla soma dei trapezi rettangoli costruiti in ogni intervallo - Metodo di Cavalieri-Simpson: si approssima la curva ad un segmento parabolico e l'integrale è dato dalla somma degli integrali di tutti i tratti	
Integrale doppio	In analisi 2, l'integrale che calcola il volume sotteso da una curva e dunque è un integrale doppio in dx e dy. Se il dominio è rettangolare, esso è riconducibile al calcolo di due integrali di analisi 1 in quanto equivale alla somma di tutte le sezioni della curva. Se il dominio non è rettangolare ma è una curva qualsiasi, l'integrale si può risolvere attarverso il metodo di riduzione che consiste nel rendere il dominio x-semplice o y-semplice in modo da ottenere sempre due integrali di analisi 1; eventualmente, si può scomporre il dominio in più sottodominii semplici. Se il dominio lungo cui calcolare l'integrale non è semplificabile ma è assimilabile ad una parametrizzazione, si può operare un cambio di variabile. Solitamente si usano - coordinate polari per dominii circolari o simili a corone (con det J = p). In questo caso bisogna valutare teta in base allo spicchio della circonferenza e p in base al valore che il raggio assume - coordinbate ellittiche per dominii ellittici (con det J = a b p) Nel caso di traslazioni, ciascuna variabile è pari alla sua parametrizzazione più il valore della traslazione	Equivale a calcolare il volume sotteso ad una funzione. Tale dominio è descritto da una curva o intervallo e dunque può essere rettangolare o meno
Integrale triplo	L'integrale triplo (detto integrale di volume) può essere parametrizzato attraverso le - coordinate cilindriche (con det J = p) se vi è una simmetria della curvarispetto all'asse delle z - coordinate sferiche (con det J = p^2 sen teta) se vi è una simmetria della curva rispetto all'origine degli assi Per il teorema della divergenza, l'integrale triplo del gradiente di un campo vettoriale di classe C1 (cioè con derivata continua) equivale a calcolare il flusso uscente da una superficie chiusa S (cioè una superficie che definisce un volume).	Ha il significato fisico di momento d'inerzia/massa e l'integrale della sua divergenza è pari al flusso uscente da una superficie chiusa
Integrale di linea/curvilineo	L'integrale di linea o detto anche curvilineo calcola l'area fra una curva data e la proiezione della curva sulla funzione e tale area è chiamata tenda. Gli integrali si classificano in due specie: - Il calcolo degli integrali di linea su campi scalari è detto integrale di prima specie ed è lo stesso indipendentemente sia dalla parametrizzazione scelta che dal verso con cui si percorre la curva data. - Il calcolo degli integrali di linea su campi vettoriali è detto integrale di seconda specie ed indipendente dalla parametrizzazione scelta ma non dal verso di percorrenza della curva data. Dunque, esso è definibile come lavoro di un campo lungo una curva orientata poiché tale integrale calcola il lavoro totale compiuto dal campo stesso per spostare un punto fra gli estremi del dominio di integrazione. Inoltre, il lavoro è additivo e, data una curva regolare a tratti, basta calcolare il lavoro di ciascun tratto e sommarli. L'integrale di linea di un campo vettoriale calcolato lungo una curva chiusa è detto circuitazione ed è pari a zero se il campo è conservativo. Un campo vettoriale si dice conservativo se è possibile esprimerlo come il gradiente di una	Dal punto di vista fisico, l'integrale curvilineo di un campo vettoriale (funzione di più variabili a valori vettoriali) equivale al calcolo di un lavoro

	funzione detta potenziale scalare e in questo caso l'integrale lungo un percorso dato sarà pari alla differenza del potenziale scalare calcolato negli estremi del dominio. Se il percorso è una curva chiusa, allora la differenza di potenziale sarà zero e anche la circuitazione. Inoltre, un campo conservativo è anche irrotazionale (cioè la rotazionalità è pari a 0) ma un campo irrotazionale è conservativo solo se il dominio della funzione è semplicemente connesso. Dunque per risolvere gli esercizi vi sono vari modi: ○ se il campo è semplicemente connesso e irrotazionale, allora la circuitazione sarà pari a zero. Si può dunque calcolare il campo scalare e la funzione potenziale scalare tramite la quale si calcola poi l'integrale fra due punti come differenza del valore assunto dal potenziale stesso negli estremi ○ se il campo non è semplicemente connesso si può ▪ ricorrere alla parametrizzazione e al calcolo dell'integrale, valutando opportunamente come impostare gli estremi in base al verso di percorrenza ▪ costruire il campo come la somma di una parte conservativa e una non, nel caso in cui il dominio sia semplicemente connesso ma la funzione è rotazionale. Il calcolo dlel'integrale si riduce a calcolare l'integrale della funzione della parte non conservativa ○ teorema di Gauss-Green per la circuitazione: la circuitazione di campo non semplicemente connesso equivale al flusso del rotore del campo o meglio ancora all'integrale doppio di superficie del rotore del campo Si ha che conservatività e forma differenziale esatta sono sinonimi. Inoltre, irrotazionalità e forma differenziale chiusa sono anch'essi sinonimi.	
Integrali di superficie	L'integrale di superficie calcola l'estensione di una superficie curva ed è riducibile, tramite parametrizzazione, ad un integrale doppio. La risoluzione consiste in - parametrizzare la curva. In alcuni casi è utile utilizzare le ○ coordinate cilindriche se vi è una simmetria della curvarispetto all'asse delle z ○ coordinate sferiche se vi è una simmetria della curva rispetto all'origine degli assi - calcolare le derivate parziali - calcolare il vettore normale facendo il prodotto vettoriale delle derivate parziali - calcolare la norma del vettore normale - calcolare l'integrale della funzione parametrizzata per la norma Per risolvere l'integrale doppio ottenuto si ricorre al procedimento spiegato sopra. L'integrale di superficie rappresenta in fisica il flusso uscente da una superficie. Nel caso sia data una superficie regolare a tratti, viso che il flusso è additivo basta calcolare la somma dei flussi uscenti da ciascuna superficie. Nel caso del flusso uscente da una superficie chiusa, per il teorema della divergenza esso è pari all'integrale triplo della divergenza del campo se il campo è di classe C1 (cioè ha derivata continua) In r3, per il teorema di Strokes si ha che la circuitazione lungo una curva non chiusa è pari al flusso del rotore del campo attraverso la superficie delimitata da tale curva e cioè consiste nel l'integrale doppio di superficie del rotore del campo per il vettore normale In r2, per il teorema di Gauss-Green si ha che la circuitazione di un campo vettoriale è pari al flusso del rotore del campo attraverso la superficie delimitata dalla curva stessa e cioè consiste nel calcolare l'integrale doppio di superficie del rotore del campo dove il campo può avere dominio non semplicemente connesso (cioè delle discontinuità)	In fisica, l'integrale di superficie rappresenta il flusso in uscita da una superficie orientabile.
Funzione potenziale scalare	Un campo scalare conservativo è esprimibile come il gradiente di una funzione detta funzione potenziale scalare. Essa si può ricavare dalla funzione stessa in quanto la sua derivata parziale rispetto alle variabili equivale rispettivamente alle componenti della funzione.	

Problema di Cauchy	Sistema identificato da una equazione differenziale di ordine n (dove l'ordine identifica il grado di derivazione) e n vincoli (ovvero punti in cui deve passare la soluzione). Dopo la risoluzione dell'equazione differenziale, si sostituiscono i vincoli per risolverla. I teoremi collegati sono: - Per il teorema di Peano, si sa che se la funzione è continua allora esiste una soluzione al problema. - Per il teorema di esistenza ed unicità di una soluzione, si ha che se la funzione è continua e lipschitziana (cioè il suo rapporto incrementale è limitato da un valore detto costante di Lipschitz e cioè è continuo) allora esiste una unica soluzione al problema. La lipschtzianità è verificabile sia valutando che i rapporti incrementali calcolati nel punto siano limitati, sia valutando che le derivate prime parziali calcolate nel punto siano continue (e dunque di classe C1) in quanto essa può considerata una condizione sufficiente (ma non necessaria) Nel caso in cui sia lipschtziana localmente, la soluzione è localmente unica; se lo è globalmente, allora la soluzione è globalmente unica. Se una funzione data non è lipschtziana ma è comunque continua, continua a valere il teorema di peano per cui esiste sicuramente una soluzione ma non è detta che sia unica Un problema di Cauchy può essere: - ben posto: in base al vincolo è possibile ricavare una soluzione che lo soddisfa - mal posto: non può esistere una soluzione che soddisfa il vincolo I problemi di Cauchy si classificano in - problemi in piccolo: si considera l'esistenza della soluzione solo nell'intorno del punto - problemi in grande: trovata una soluzione ad un problema in piccolo, la sua esistenza si può estendere a tutto l'intervallo continuo che la comprende ed esso è detto intervallo massimale. Nel caso in cui tale intervallo equivalga a tutto l'intetvallo di definizione dell'equazione, allora è detta anche soluzione globale. Altrimenti, una soluzione è	

<table>
<tr><td></td><td>globale se è sicuramente valida in una striscia del dominio e inoltre si ha è che la funzione è lipschztiana globalmente per cui la soluzione ottenuta è anche unica e dunque globale.</td><td></td></tr>
<tr><td>Equazioni differenziali</td><td>Una equazione differenziale lega una variabile alle due derivate.
Una ODE di ordine n (cioè la cui derivata massima è n-esima) può essere scomposta in un sistema di n equazioni del primo ordine
Date delle soluzioni di una ODE, la loro combinazione lineare è una soluzione. Inoltre, se esse sono linearmente indipendenti allora la soluzione ottenuta è un integrale generale. L'indipendenza lineare si può valutare attraverso il determinante della matrice wronksiana (matrice dove su ogni riga vi è la derivata di ordine n di ciascuna variabile) che deve essere diverso da zero (cioè la matrice deve essere di rango pieno). Tale determinante è detto wronskiano.

Risoluzione delle equzioni differenziali:
- primo ordine:
○ semplici: $y' = f(x)$ -> integro n volte
○ a variabili separabili: $y' = f(x)\ g(x)$ -> la funzione può avere una soluzione costante che annulla g e una soluzione che si calcola ponendo $y' = dy/dx$
○ fratte -> si opera una parametrizzazione con $y = xu$ e $y' = u + xu$così diventa a variabili separabili
○ ineari: $y' + a(x)y = b(x)$ -> si usa il metodo del fattore integrante
- secondo ordine:
○ omogenee: si valuta il determinante dell'equazione caratteristica associata az^2 + bz + c = 0 e l'integrale generale dipende da uno dei tre casi possibili
○ non omogenee:
▪ si risolve la relativa equazione omogenea per trovare l'integrale generale con incognite sia c1 che c2 che si pongono $c_1 = c_1(x)$ e $c_2 = c_2(x)$ cioè le si considera come delle funzioni
▪ trovo ora una soluzione particolare calcolando la derivata dell'integrale generale ottenuto e ponendo che $c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 = 0$. Calcolo poi la derivata seconda ottendo così sia y' che y'' che si sostituiscono nell'equazione data in partenza e si costruisce un sistema. In questo momento si devono semplificare tutti i $c_1(x)$ e $c_2(x)$ e devono rimanere solo $c_1'(x)$ e $c_2'(x)$
▪ dal sistema calcolo $c_1(x)$ e $c_2(x)$ da sostituire nell'omogenea per trovare la soluzione particolare.
▪ La soluzione finale è data dalla somma dell'integrale generale e la soluzione particolare</td><td></td></tr>
</table>

Concetti fondamentali mod. 2

venerdì 15 gennaio 2021 11:37

Numeri complessi	I numeri complessi sono formati da una parte immaginaria e una reale e possono essere geometricamente rappresentati in un piano. Dunque è anche possibile rappresentarli tramite le coordinate polari o la forma esponenziale di Eulero Dalla rappresentazione in coordinate polari, si può facilmente calcolare la potenza di un numero complesso attraverso la formula di de Moivre e la radice n-esima.	
Successione di Cauchy	Una successione è detta di Cauchy se i termini della successione tendo a distare sempre di meno fra loro ovvero convergono ad uno stesso numero. Infatti, una serie è convergente solo se è di Cauchy	
Serie di numeri complessi	Una serie (sommatoria dei termini di una successione) di numeri complessi converge solo se converge le serie che sommano rispettivamente i termini reali e quelli immaginari. Condizione necessaria affinchè una serie converga è che il limite che tende ad infinito della funzione complessa sia zero Criterio dell'assoluta sommabilità: se converge la serie del valore assoluto di una funzione, allora converge la serie della funzione cioè se una serie è assolutamente convergente allora lo è anche semplicemente. Non vale ovviamente il contrario. Una serie di potenze a termini complessi è centrata in un valore z0. Essa è tale che se converge per z uguale al centro z0 e per un z1 diverso da z0, allora converge per tutti i valori compresi fra z0 e z1 ed esiste cioè un raggio che descrive la circonferenza dentro la quale la serie di potenze a termini negativi è sempre convergente, al di fuori della quale è sempre divergente e lungo la quale non si può dire né se è convergente né se è divergente. Il raggio può essere calcolato studiando il coefficiente an attraverso il - criterio del rapporto - criterio della radice Una serie di potenze a termini complessi è differenziabile. la derivata è ottenibile derivando la serie termine a termine e ha lo stesso raggio della serie di partenza. Un tipo particolare di serie di potenze a termini complessi è la serie di Taylor che lega una funzione alla sua derivata k-esima e può essere utilizzata per esprimere una funzione. Se z0 = 0 è detta serie di Maclaurin Un altro tipo è la serie di Laurent che viene utilizzata quando un punto per la serie di Taylor è una singolarità (il che vuol dire che la serie ottenuta è divergente), per cui non si può concludere nulla sul comportamento della funzione nel polo, come ad esempio nelle corone circolari. Infatti, essa è composta da una parte detta singolare e una regolare (dove quest'ultima corrisponde alla serie di Taylor) e tramite la parte singolare si riesce a comprendere il comportamento della funzione intorno al polo. Si dice che la serie di Laurent è utilizzabile in un intorno forato. Inoltre, se si prova a calcolare la serie di Laurent in un dominio non forato, questa non avrà una parte singolare e dunque si ridurrà alla sola parte regolare e cioè ad una serie di Taylor	
Funzione analitica	Una funzione è analitica se può essere espressa come una serie convergente di potenze a termini complessi cioè come una serie di Taylor convergente. Nel campo complesso, una funzione analitica è anche olomorfa	
Funzione olomorfa	Una funzione è olomorfa se è differenziabile. Nel campo complesso, una funzione olomorfa è anche analitica. Affinchè una funzione sia olomorfa (e dunque analitica) basta verificare che siano valide le equazioni di Cauchy Riemann che sono una condizione necessaria per la differenziabilità	
Differenziabilità o condizioni di Cauchy Riemann	Una funzione complessa è detta differenziabile in un punto se esiste finito il limite del rapporto incrementale in quel punto e tale limite è definito come la derivata prima calcolata nel punto stesso. Una funzione differenziabile in un punto è detta olomorfa. Anziché calcolare la differenziabilità, si possono usare le condizioni di Cauchy Riemann che sono due equazioni racchiuse in un sistema. Se esse sono verificate, allora la funzione è differenziabile, olomorfa e dunque analitica (quindi esprimibile come una serie convergente di Taylor) Nel campo complesso, se una funzione è derivabile una volta allora può essere derivata all'infinito	
Punti singolari	I punti singolari sono punti in cui la funzione non ha un comportamento ordinario. Essi sono: - polo nei punti di discontinuità. Poiché i punti di discontinuità sono definiti da una potenza, il grado indivisua l'ordine del polo e se il grado è pari a 1 allora si dice polo semplice - singolarità eliminabili se la funzione in quel punto non esiste ma il limite si - punti di diramazione se ad uno stesso punto della funzione corrispondono più valori. Ad ogni radice n-esima sono associati n rami mentre al logaritmo infiniti e ogni ramo è un piano di Riemann. Inoltre, un punto è detto di rotazione se fa passare da un ramo (o piano di Riemann) all'altro - singolarità essenziale se non è né un polo né un punto di diramazione Inoltre, una singolarità è definita all'infinito per la funzione f(z) se w = 0 lo è per la funzione f(1/w), altrimenti è una singolarità al finito e una singolarità è isolata se nel suo intorno non ci sono altre singolarità.	
Funzione monodroma	Funzione tale che la z ha lo stesso valore indipendentemente dal giro in cui ci si trova	
Funzione polidroma	Funzione tale che il valore di z è diverso in base al giro in cui si trova. Una funzione polidroma può essere monodroma se si restringe la funzione ad un solo giro	
Funzione armonica	Una funzione è armonica se descrive un campo conservativo e solenoidale. Si può verificare che sia armonica se si annulla il suo laplaciano ovvero se la somma delle derivate secondo pure è zero. Data una funzione reale, se essa è armonica allora posso ritenerla la parte reale di una funzione complessa e posso	

	trovare una funzione armonica coniugata che corrisponde all'immagine del numero	
Laplaciano	Il laplaciano corrisponde alla divergenza del gradiente di un campo vettoriale. Dunque, esso corrisponde alla somma delle derivate seconde di una funzione vettoriale e se è pari a zero allora la funzione è armonica	

Integrale di linea	Per il teorema di Cauchy Goursat, l'integrale di linea lungo una curva chiusa (detto anche circuitazione) di una funzione analitica (cioè descrivibile come una serie di potenze a termini complessa convergente e cioè differenziabile e cioè con dominio semplicemente connesso) è pari a zero. Per il teorema di deformazione del dominio, se una funzione è definita in un dominio racchiuso da più curve, la somma degli integrali opportunamenti valutati secondo l'orientamento, è zero. Questo è il caso in cui viene richiesto di calcolare un integrale lungo una curva chiusa valutando che il punto di discontinuità sia interno o esterno. Se il punto è esterno, la circuitazione è banalmente zero poiché la funzione ha un dominio semplicemente connesso descritto dalla curva; se il punto è interno, è dunque una singolarità e perciò bisogna considerare una curva che circonda tale discontinuità tale da formare, insieme alla curva di partenza, un dominio semplicemente connesso (cioè si aggira la discontinuità deformando il dominio). Tale concetto può essere esteso a un numero finito di discontinuità che richiedono di deformare il dominio attraverso altrettante curve. Esistono delle formule che semplificano il calcolo degli integrali: - Formula di Cauchy: viene utilizzata per calcolare l'integrale di una funzione con un polo in z0 - Formula integrale per le derivate di ordine superiore: viene utilizzata per calcolare l'integrale di una funzione con un polo in zo di ordine n - Teorema dei residui: esso è una generalizzazione del teorema integrale di Cauchy e può essere usato sia per funzioni complesse olomorfe che per funzioni reali. Il teorema dei residui afferma che l'integrale lungo una curva chiusa che racchiude un dominio forato (ovvero contenente dei punti di singolarità) può essere calcolato attraverso la somma dei residui dove i residui sono i coefficienti a-1 calcolati in ciascun polo. I residui sono gli unici termini della serie che non si annullano quando si integra lungo una curva chiusa. - Curva olomorfa: se una curva è olomorfa, posso calcolare l'integrale di linea lungo una curva non chiusa trovando la funzione potenziale e valutando l'integrale come la differenza della funzione potenziale calcolata nei due punti (mantenedo l'orientazione del percorso)	
Teorema di indipendenza del percorso	L'integrale di linea di una funzione analitica è indipendente dal percorso	
Teorema di Liouville	Se una funzione è analitica ed esiste un valore L tale da limitare la funzione, allora la funzione è costante. Dal teorema di Liouville si dimostra il teorema fondamentale dell'algebra secondo cui un polinomio di ordine n ha esattamente n zeri (o soluzioni)	
Integrali impropri	Per prima cosa bisogna verificare che sia valida la condizione necessaria affinchè un integrale converga e cioè il limite per z che tende a più infinito della funzione deve dare zero. Se l'integrale converge allora è possibile calcolare il suo risultato per cui si può applicare uno dei seguenti metodi di risoluzione: - Gli integrali impropri reali che vanno cioè da meno a più infinito possono essere calcolati nel campo complesso attraverso il teorema dei residui se si considera l'esistenza di una semicirconferenza che include tutti i poli della funzione. Nell'applicazione si deve distungere il caso in cui i poli si trovino solo all'interno della semicirconferenza o sull'asse reale. - Gli integrali reali in seno e coseno fra 0 e 2 pi greco, possono essere calcolati nel campo complesso immaginando una circonferenza che racchiude tutti i punti di discontinuità così che, dopo aver operato una sostituzione per esplicitare l'integrale in z, si possa applicare sempre il teorema dei residui. - Gli integrali reali in seno e/o coseno da meno a più infinito possono essere calcolati nel campo complesso associando alla funzione la sua relativa complessa e immaginando una circonferenza tale che renda possibile il calcolo dei residui. - Se la funzione da integrare fra meno e più infinito ha una parte dispari, poiché l'integrale di questa fa zero, allora l'integrale si riduce alla sola parte pari della funzione, alla quale può essere applicato il teorema dei residui - Se la funzione è da integrare fra 0 e più infinito o meno infinito e 0, allora l'integrale equivale alla metà del rispettivo integrale indefinito calcolato fra meno e più infinito Tutti gli altri integrali possono essere ricondotti ai precedenti (ad esempio se vi è una simmetria). Il valore principle di Cauchy degli integrali impropri equivale al limite dell'integrale (cioè a calcolare un integrale improprio come in analisi 1). Se tale limite esiste allora esso viene appunto detto valore principale di cauchy dell'integrale.	
Trasformata di Laplace	La trasformata di Laplace associa ad una funzione di variabile reale, una funzione di variabile complessa, aiutando la semplificazione dei calcoli. L'inversa della trasformata di Laplace è data dall'integrale di Bromwich.	

Applicazioni del calcolo dei residui	Il calcolo dei residui può essere applicato per - calcolare l'integrale di circuitazione in un dominio forato: Il teorema dei residui afferma che l'integrale lungo una curva chiusa che racchiude un dominio forato (ovvero contenente dei punti di singolarità) può essere calcolato attraverso la somma dei residui dove i residui sono i coefficienti a-1 calcolati in ciascun polo. I residui sono gli unici termini della serie che non si annullano quando si integra lungo una curva chiusa. - calcolare gli integrali impropri Il calcolo dei residui può essere applicato solamente se la funzione è espressa come una serie di Laurent	

Bramanti 1

mercoledì 6 gennaio 2021 18:22

Secondo appello di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2018/2019. Prof. M. Bramanti

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
Tot.	

Cognome e nome (in stampatello)________________________________
codice persona (o n°di matricola)________________________________
n°d'ordine (v. elenco)______________________________________

1. Risolvere il seguente problema di Cauchy, evidenziando i vari passi del procedimento e i risultati intermedi ottenuti.

$$\begin{cases} 2y'' + 3y' = 5x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -\frac{1}{9} \end{cases}$$

2. Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \sin y + y^3 \cos x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Calcolare le derivate parziali di f nell'origine, se esistono.
c. Stabilire se la funzione f è differenziabile nell'origine.

3. Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y) = \left(x^2 - 4\right)\left(\frac{y^2}{2} + y\right) + \frac{x^3}{2}.$$

4. Si consideri una lamina piana omogenea di massa m rappresentata da

$$\Omega = \left\{(x,y) : |y| \leq \frac{x^2}{R}, |x| \leq R\right\},$$

dove $R > 0$ ha le dimensioni di una lunghezza. Si calcoli il momento d'inerzia di Ω rispetto a un asse perpendicolare al piano xy e passante per l'origine.

1

5. Calcolare la massa totale di un solido conico non omogeneo, rappresentato da:

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 \leq \left(\frac{zR}{h} \right)^2, 0 \leq z \leq h \right\}, \text{ di densità}$$

$$\rho(x, y, z) = \frac{\mu}{R^2 h^3} z \sqrt{x^2 + y^2}$$

con $R, h, \mu > 0$ parametri fissati (aventi R, h le dimensioni di una lunghezza, μ di una massa). *Riportare con cura impostazione e passaggi.*

6. Sia Σ la superficie parametrizzata di equazioni

$$\begin{cases} x = u \cos t \\ y = u \sin t \\ z = t \end{cases} \quad \text{per } t \in [0, 2\pi], u \in [0, 1].$$

Dopo aver verificato che si tratta di una superficie regolare e calcolato l'elemento d'area dS, calcolare l'integrale di superficie

$$\int\int_\Sigma |x| \, dS.$$

7. Si consideri la funzione 4-periodica definita in $[-2, 2]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } |x| < 1 \\ x^2 - 1 \text{ se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

a. Dopo aver tracciato il grafico di f sul periodo $[-2, 2]$: in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.

b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di f, tenendo conto del periodo e delle simmetrie, semplificare opportunamente l'espressione ottenuta per i coefficienti di Fourier e scrivere la serie di Fourier.

(Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, poi particolarizzarla e eseguire il calcolo esplicito, riportando i passaggi essenziali e il risultato, nella forma più esplicita e semplificata).

Secondo appello di Analisi Matematica 2
Ingegneria Elettronica. Politecnico di Milano
A.A. 2018/2019. Prof. M. Bramanti
Svolgimento

Es.	Punti
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
Tot.	

1. Risolvere il seguente problema di Cauchy, evidenziando i vari passi del procedimento e i risultati intermedi ottenuti.

$$\begin{cases} 2y'' + 3y' = 5x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -\frac{1}{9} \end{cases}$$

Considero l'equazione omogenea:

$$2z'' + 3z' = 0.$$

Equazione caratteristica:

$$2\alpha^2 + 3\alpha = 0$$
$$\alpha = 0, \alpha = -\frac{3}{2}$$

perciò l'integrale generale dell'omogenea è:

$$z(x) = c_1 e^{-\frac{3}{2}x} + c_2.$$

Soluzione particolare dell'equazione completa: in base al metodo di somiglianza, cerchiamo una soluzione del tipo

$$y(x) = ax^2 + bx$$
$$y'(x) = 2ax + b$$
$$y''(x) = 2a$$
$$2(2a) + 3(2ax + b) = 5x$$

$$\begin{cases} 6a = 5 \\ 4a + 3b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{5}{6} \\ b = -\frac{10}{9} \end{cases}$$
$$y(x) = \frac{5}{6}x^2 - \frac{10}{9}x$$

e l'integrale generale dell'equazione di partenza è:

$$y(x)=\frac{5}{6}x^2-\frac{10}{9}x+c_1e^{-\frac{3}{2}x}+c_2.$$

Imponiamo le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} y(0)=c_1+c_2=0 \\ y'(0)=-\frac{10}{9}-\frac{3}{2}c_1=-\frac{1}{9} \end{cases} \quad \begin{cases} c_1=-\frac{2}{3} \\ c_2=\frac{2}{3} \end{cases}$$

perciò la soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(x)=\frac{5}{6}x^2-\frac{10}{9}x-\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}x}+\frac{2}{3}.$$

2. Si consideri la funzione:

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x\sin y+y^3\cos x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{per } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

a. Stabilire se f è continua in $(0,0)$.
b. Calcolare le derivate parziali di f nell'origine, se esistono.
c. Stabilire se la funzione f è differenziabile nell'origine.

a. Si ha:

$$\left|\frac{x\sin y+y^3\cos x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leq\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{|y|^3}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

passando in polari

$$=\frac{\rho^2|\cos\theta\sin\theta|}{\rho}+\frac{\rho^3|\sin\theta|^3}{\rho}\leq\rho+\rho^2\to0 \text{ per } \rho\to0$$

e la maggiorante infinitesima è indipendente da θ, perciò $f(x,y)\to0$ per $(x,y)\to(0,0)$ e la funzione è continua in $(0,0)$.
b.

$$f(x,0)=0, \text{ perciò } \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0.$$
$$f(0,y)=\frac{y^3}{|y|}=y|y|, \text{ perciò } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$$

c. La funzione dunque è differenziabile in $(0,0)$ se tende a zero il quoziente

$$g(x,y)\equiv\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x\sin y+y^3\cos x}{x^2+y^2}.$$

Notiamo tuttavia che

$$g(x,x)=\frac{x\sin x+x^3\cos x}{2x^2}=\frac{\sin x}{2x}+\frac{x\cos x}{2}\to\frac{1}{2} \text{ per } x\to0.$$

Dunque g non tende a zero, e f non è differenziabile nell'origine.

3. Dopo aver determinato tutti i punti stazionari della seguente funzione, studiarne la natura (cioè decidere se sono punti di minimo, massimo, o sella).

$$f(x,y) = \left(x^2-4\right)\left(\frac{y^2}{2}+y\right)+\frac{x^3}{2}.$$

$$\begin{cases} f_x = 2x\left(\frac{y^2}{2}+y\right)+\frac{3}{2}x^2 = 0 \\ f_y = \left(x^2-4\right)(y+1) = 0 \Longrightarrow x = \pm 2 \text{ o } y = -1 \end{cases}$$

$$y = -1 \Rightarrow -x + \frac{3}{2}x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ o } x = \frac{2}{3}, \text{ quindi}$$

$$(0,-1), \left(\frac{2}{3},-1\right).$$

$$x = \pm 2 \Rightarrow \pm 4\left(\frac{y^2}{2}+y\right)+6 = 0$$

$y^2+2y\pm 3 = 0$

$y^2+2y+3 = 0$ mai

$y^2+2y-3 = 0$ per $y = 1, y = -3$, quindi

$$(-2,1), (-2,-3)$$

Punti stazionari:

$$(0,-1), \left(\frac{2}{3},-1\right), (-2,1), (-2,-3).$$

Calcoliamo la matrice hessiana.

$$f_{xx} = 2\left(\frac{y^2}{2}+y\right)+3x$$
$$f_{xy} = 2x(y+1)$$
$$f_{yy} = x^2-4$$

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} y^2+2y+3x & 2x(y+1) \\ 2x(y+1) & x^2-4 \end{bmatrix}$$

Studiamo ora la natura dei punti stazionari:

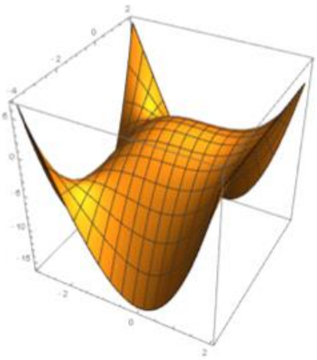
$$Hf(0,-1) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \text{ definita negativa,}$$

$(0,-1)$ è punto di massimo relativo.

$$Hf\left(\frac{2}{3},-1\right)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -\frac{32}{9}\end{bmatrix}\ \text{indefinita},$$
$$\left(\frac{2}{3},-1\right)\ \text{è punto di sella.}$$

$$Hf(-2,1)=\begin{bmatrix}-3 & -8\\ -8 & 0\end{bmatrix}\ \text{indefinita},$$
$$(-2,1)\ \text{è punto di sella.}$$

$$Hf(-2,-3)=\begin{bmatrix}-3 & 8\\ 8 & 0\end{bmatrix}\ \text{indefinita},$$
$$(-2,-3)\ \text{è punto di sella.}$$



4. Si consideri una lamina piana omogenea di massa m rappresentata da
$$\Omega=\left\{(x,y):|y|\le\frac{x^2}{R},|x|\le R\right\},$$
dove $R>0$ ha le dimensioni di una lunghezza. Si calcoli il momento d'inerzia di Ω rispetto a un asse perpendicolare al piano xy e passante per l'origine.
$$I=\frac{m}{|\Omega|}\int\int_\Omega\left(x^2+y^2\right)dxdy.$$
Calcoliamo anzitutto
$$|\Omega|=\int\int_\Omega dxdy=\int_{-R}^{R}\left(\int_{-\frac{x^2}{R}}^{\frac{x^2}{R}}dy\right)dx=4\int_0^R\left(\int_0^{\frac{x^2}{R}}dy\right)dx$$
$$=4\int_0^R\frac{x^2}{R}dx=\frac{4}{R}\frac{R^3}{3}=\frac{4}{3}R^2.$$

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{m}{\frac{4}{3}R^2}\int\int_\Omega \left(x^2+y^2\right)dxdy = \frac{3m}{4R^2}4\int_0^R\left(\int_0^{\frac{x^2}{R}}\left(x^2+y^2\right)dy\right)dx \\
&= \frac{3m}{R^2}\int_0^R\left(\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_0^{x^2/R}\right)dx = \frac{3m}{R^2}\int_0^R\left(\frac{x^4}{R}+\frac{x^6}{3R^3}\right)dx \\
&= \frac{3m}{R^2}\left[\frac{x^5}{5R}+\frac{x^7}{21R^3}\right]_0^R = \frac{3m}{R^2}\left(\frac{R^4}{5}+\frac{R^4}{21}\right) = 3mR^2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{21}\right) \\
&= 3mR^2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{21}\right) = 3mR^2\left(\frac{26}{105}\right) = \frac{26}{35}mR^2.
\end{aligned}
$$

5. Calcolare la massa totale di un solido conico non omogeneo, rappresentato da:

$$
\Omega = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq \left(\frac{zR}{h}\right)^2, 0 \leq z \leq h\right\}, \text{ di densità}
$$

$$
\rho(x,y,z) = \frac{\mu}{R^2h^3}z\sqrt{x^2+y^2}
$$

con $R, h, \mu > 0$ parametri fissati (aventi R, h le dimensioni di una lunghezza, μ di una massa). *Riportare con cura impostazione e passaggi.*

$$
\begin{aligned}
m &= \int\int\int_\Omega \rho(x,y,z)\,dxdydz = \int_0^h\left(\int\int_{x^2+y^2\leq\left(\frac{zR}{h}\right)^2}\frac{\mu}{R^2h^3}z\sqrt{x^2+y^2}dxdy\right)dz \\
&= \frac{\mu}{R^2h^3}\int_0^h z\left(2\pi\int_0^{\frac{zR}{h}}\rho^2d\rho\right)dz = 2\pi\frac{\mu}{R^2h^3}\int_0^h z\left(\frac{1}{3}\left(\frac{zR}{h}\right)^3\right)dz \\
&= \frac{2}{3}\pi\frac{\mu}{R^2h^3}\frac{R^3}{h^3}\int_0^h z^4dz = \frac{2}{3}\pi\frac{\mu R}{h^6}\frac{h^5}{5} = \frac{2}{15}\pi\mu\frac{R}{h}.
\end{aligned}
$$

6. Sia Σ la superficie parametrizzata di equazioni

$$
\begin{cases} x = u\cos t \\ y = u\sin t \\ z = t \end{cases} \quad \text{per } t \in [0, 2\pi], u \in [0,1].
$$

Dopo aver verificato che si tratta di una superficie regolare e calcolato l'elemento d'area dS, calcolare l'integrale di superficie

$$
\int\int_\Sigma |x|\,dS.
$$

La funzione vettoriale $\underline{r}(t,u)$ è evidentemente C^1, calcoliamo l'elemento d'area per verificare che non si annulla mai.

$$
\begin{aligned}
D\underline{r}(t,u) &= \begin{bmatrix} -u\sin t & u\cos t & 1 \\ \cos t & \sin t & 0 \end{bmatrix} \\
dS &= \sqrt{u^2+1}dtdu.
\end{aligned}
$$

Poiché $\sqrt{u^2+1} > 0$ sempre, la superficie è regolare. Calcoliamo:

$$\begin{aligned}\int\int_{\Sigma} |x|\, dS &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} u\, |\cos t|\, \sqrt{u^2+1} dt \right) du \\ &= \left(\int_0^1 u\sqrt{u^2+1} du \right) \left(4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt \right) \\ &= \left[\frac{1}{3} \left(u^2+1\right)^{3/2} \right]_0^1 4\, [\sin t]_0^{\pi/2} = \frac{4}{3} \left(2\sqrt{2} - 1 \right).\end{aligned}$$

7. Si consideri la funzione 4-periodica definita in $[-2,2]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } |x| < 1 \\ x^2 - 1 \text{ se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

a. Dopo aver tracciato il grafico di f sul periodo $[-2,2]$: in base alla teoria, cosa è possibile dire sulla rapidità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, per questa funzione? Cosa è possibile dire circa la convergenza puntuale della serie di Fourier? Rispondere motivando le affermazioni fatte.

b. Calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di f, tenendo conto del periodo e delle simmetrie, semplificare opportunamente l'espressione ottenuta per i coefficienti di Fourier e scrivere la serie di Fourier.

(Si raccomanda di scrivere esplicitamente la formula generale che si applica per il calcolo dei coefficienti di Fourier, poi particolarizzarla e eseguire il calcolo esplicito, riportando i passaggi essenziali e il risultato, nella forma più esplicita e semplificata).

a.

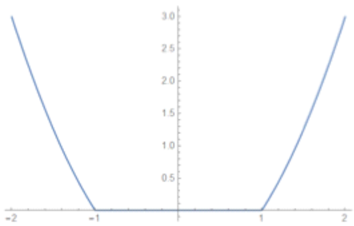


grafico di f in $[-2,2]$

La periodizzata è continua in $\mathbb{R}$, regolare a tratti e pari. Perciò la serie di Fourier di f converge puntualmente a f ovunque; i coefficienti di Fourier saranno $o(1/k)$ ma non meglio di così.

b. La funzione è pari, perciò $b_k = 0$ per ogni k. Per calcolare gli a_k, poiché

$T = 4$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$,

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(k\omega x)\,dx = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos(k\omega x)\,dx = \int_0^2 f(x)\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx$$
$$= \int_1^2 \left(x^2-1\right)\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx.$$

$$a_0 = \int_1^2 \left(x^2-1\right)dx = \left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^2 = \frac{8}{3}-2-\frac{1}{3}+1 = \frac{4}{3}$$

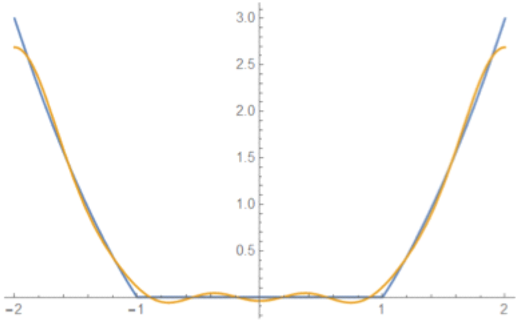
Per $k = 1, 2, 3...$,

$$a_k = \int_1^2 \left(x^2-1\right)\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx = \left[\left(x^2-1\right)\frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)\right]_1^2 - \int_1^2 2x\frac{2}{k\pi}\sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx$$
$$= -\frac{4}{k\pi}\left\{\left[-x\frac{2}{k\pi}\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{2}{k\pi}\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right)dx\right\}$$
$$= -\frac{4}{k\pi}\left\{-\frac{4}{k\pi}\cos(k\pi) + \frac{2}{k\pi}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{2}{k\pi}\right)^2\left[\sin\left(k\frac{\pi}{2}x\right)\right]_1^2\right\}$$
$$= \left(\frac{4}{k\pi}\right)^2\cos(k\pi) - \frac{8}{(k\pi)^2}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \frac{16}{(k\pi)^3}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$

e la serie di Fourier di f è

$$f(x) = \frac{2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{4}{k\pi}\right)^2\cos(k\pi) - \frac{8}{(k\pi)^2}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) + \frac{16}{(k\pi)^3}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right\}\cos\left(k\frac{\pi}{2}x\right).$$

Grafico di $f(x)$ insieme alla sua somma parziale di Fourier fino a $n = 5$:



Tracce esercizi ODE

domenica 27 dicembre 2020 21:15

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Esercizi con soluzione

1. Calcolare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali lineari del primo ordine:

   (a) $y' - 2y = 1$

   (b) $y' + y = e^x$

   (c) $y' - 2y = x^2 + x$

   (d) $3y' + y = 2\,e^{-x}$

   (e) $y' + 3y = e^{ix}$

   (f) $y' + 3y = \cos x$

   (g) $y' + 2xy = x$

   (h) $xy' + y = 3x^3 - 1 \quad (x > 0)$

   (i) $y' + e^x y = 3e^x$

   (j) $y' - (\tan x)y = e^{\sin x} \quad (-\pi/2 < x < \pi/2)$

   (k) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

   (l) $y' + (\cos x)y = \sin 2x$

2. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy lineari del primo ordine:

   (a) $\begin{cases} y' + (\cos x)y = e^{-\sin x} \\ y(\pi) = \pi \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} y' - 2y = \frac{e^{3x}}{e^x+1} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} y' - y = \frac{1}{\operatorname{ch} x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} y' + y = \sin x + 3\cos 2x \\ y(0) = 0 \end{cases}$

   (e) $\begin{cases} y' + iy = x \\ y(0) = 2 \end{cases}$

   (f) $\begin{cases} y' - y = e^{-ix} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

   (g) $\begin{cases} y' = (\cos x)y + \cos^3 x \\ y(0) = 0 \end{cases}$

3. (a) Dimostrare che ogni soluzione dell'equazione differenziale $x^2y' + 2xy = 1$ nell'intervallo $x > 0$ tende a zero per $x \to +\infty$.

   (b) Calcolare la soluzione y che soddisfa $y(2) = 2y(1)$.

4. Risolvere le seguenti equazioni differenziali a variabili separabili specificando, ove possibile, l'intervallo massimale I delle soluzioni:

   (a) $y' = x^2 y$

   (b) $yy' = x$

   (c) $y' = \frac{x+x^2}{y-y^2}$

   (d) $y' = \frac{e^{x-y}}{1+e^x}$

   (e) $y' = x^2y^2 - 4x^2$

5. (a) Utilizzando il teorema di esistenza e unicità, dimostrare che il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ ha soluzione unica per ogni $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

   (b) Dimostrare che la soluzione è

$$y(x) = \frac{y_0}{1 - y_0(x - x_0)}.$$

   (Si noti che per $y_0 = 0$ si ottiene la soluzione costante $y = 0$.)

   (c) Determinare l'intervallo massimale della soluzione in funzione del dato iniziale y_0.

6. (a) Utilizzando il teorema di esistenza e unicità, dimostrare che il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = 2\sqrt{y} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ ha soluzione unica per ogni $y_0 > 0,\ x_0 \in \mathbb{R}$.

   (b) Determinare la soluzione massimale.

   (c) Dimostrare che il problema di Cauchy con condizione iniziale $y(x_0) = 0$ ha più di una soluzione, esibendo almeno 2 soluzioni distinte.

Gli esercizi 7 e 8 riguardano il metodo delle approssimazioni successive per risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$

Ricordiamo che le approssimazioni successive per il problema (1) sono le funzioni $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \ldots$ definite da

$$\phi_0(x) = y_0, \qquad \phi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi_{n-1}(t))\, dt, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Sotto opportune ipotesi sulla funzione $f(x, y)$ (f continua e Lipschitziana in un rettangolo chiuso del tipo $|x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b$) si dimostra che le $\phi_n(x)$ convergono per $n \to \infty$ ad una soluzione $\phi(x)$ del problema (1) per ogni x in un intorno di x_0 e che tale soluzione è unica.

7. Si consideri il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = 3y + 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$.

   (a) Calcolare le prime 4 approssimazioni successive $\phi_0,\ \phi_1,\ \phi_2,\ \phi_3$.

   (b) Calcolare la soluzione esatta.

(c) Confrontare i risultati ottenuti in a) e in b).

8. Per ognuno dei seguenti problemi di Cauchy calcolare le prime 4 approssimazioni successive ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3:

   (a) $y' = x^2 + y^2, \; y(0) = 0$
   (b) $y' = 1 + xy, \; y(0) = 1$
   (c) $y' = y^2, \; y(0) = 0$
   (d) $y' = y^2, \; y(0) = 1$
   (e) $y' = 1 + y^2, \; y(0) = 0$
   (f) $y' = 1 - 2xy, \; y(0) = 0$.

9. Calcolare l'integrale generale (reale se i coefficienti sono reali) delle seguenti equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti del secondo ordine:

   (a) $y'' - 4y = 0$
   (b) $3y'' + 2y' = 0$
   (c) $y'' + 16y = 0$
   (d) $y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$
   (e) $y'' - 4y' + 5y = 0$
   (f) $y'' + 2iy' + y = 0$
   (g) $y'' - 2iy' - y = 0$
   (h) $y'' + (3i - 1)y' - 3iy = 0$.

10. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

   (a) $y'' + y' - 6y = 0, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0$
   (b) $y'' - 2y' - 3y = 0, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 1$
   (c) $y'' + 10y = 0, \quad y(0) = \pi, \; y'(0) = \pi^2$.
   (d) $y'' + (4i + 1)y' + y = 0, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 0$
   (e) $y'' + (3i - 1)y' - 3iy = 0, \quad y(0) = 2, \; y'(0) = 0$

11. Calcolare l'integrale generale (reale se i coefficienti sono reali) delle seguenti equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti:

   (a) $y''' + y = 0$
   (b) $y''' - 8y = 0$
   (c) $y^{(4)} - 16y = 0$
   (d) $y^{(4)} + 16y = 0$
   (e) $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$
   (f) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$
   (g) $y''' + 4y'' - 3y' - 18y = 0$
   (h) $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0$

(i) $y^{(4)} + y' = 0$
(j) $y^{(4)} + 10y'' + 25y = 0$
(k) $y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = 0$
(l) $y^{(5)} + y = 0$
(m) $y^{(6)} + y = 0$
(n) $y^{(6)} - y = 0$
(o) $y^{(8)} + 8y^{(6)} + 24y^{(4)} + 32y'' + 16y = 0$
(p) $y^{(10)} = 0$
(q) $y''' - 5y'' + 6y' = 0$
(r) $y^{(100)} + 100y = 0$
(s) $y^{(4)} + 5y'' + 4y = 0$
(t) $y''' - 3y' - 2y = 0$
(u) $y^{(5)} - y^{(4)} - y' + y = 0$
(v) $y''' - 3iy'' - 3y' + iy = 0$
(w) $y''' - iy'' + 4y' - 4iy = 0$
(x) $y''' + iy'' - 2y' - 2iy = 0$
(y) $y^{(4)} - iy = 0$
(z) $y^{(4)} + 4iy''' - 6y'' - 4iy' + y = 0$

12. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

(a) $y''' + y = 0, \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 1, \ y''(0) = 0$
(b) $y''' - 4y' = 0, \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 1, \ y''(0) = 0$
(c) $y^{(4)} + 16y = 0, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$
(d) $y^{(5)} - y^{(4)} - y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = y''(0) = y'''(0) = y^{(4)}(0) = 0$

13. Calcolare la funzione analitica

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots$$

in termini di funzioni elementari. (Suggerimento: usando il teorema di derivazione per serie si dimostri che y soddisfa l'equazione differenziale $y''' - y = 0$, con le condizioni iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = 0$.)

14. Calcolare la funzione analitica

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} = 1 + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{12}}{12!} + \cdots$$

in termini di funzioni elementari.

15. Dimostrare che se $k \in \mathbb{N}^+$ allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{kn}}{(kn)!} = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} e^{\alpha_j x}, \quad \text{dove} \quad \alpha_j = \sqrt[k]{1} = e^{i\frac{2\pi j}{k}} \ \ (j = 0, 1, \ldots, k-1).$$

16. Utilizzando il metodo di somiglianza, calcolare una soluzione particolare $y_p(x)$ delle seguenti equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti non omogenee del secondo ordine:

(a) $y'' + 4y = \cos x$
(b) $y'' + 4y = \sin 2x$
(c) $y'' - 3y' + 2y = x^2$
(d) $4y'' - y = e^x$
(e) $6y'' + 5y' - 6y = x$
(f) $y'' - 4y = 3e^{2x} + 4e^{-x}$
(g) $y'' - 4y' + 5y = 3e^{-x} + 2x^2$
(h) $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\cos x$
(i) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$
(j) $y'' - y' - 2y = e^{-x} + x^2 + \cos x$
(k) $y'' + 9y = x^2 e^{3x} + \cos 3x$
(l) $y'' + y = xe^x \cos 2x$
(m) $y'' + 2iy' + y = x$
(n) $y'' - 2iy' - y = e^{ix} - 2e^{-ix}$
(o) $y'' + iy' + 2y = 2\operatorname{ch} 2x + e^{-2x}$

17. Utilizzando il metodo di somiglianza, calcolare una soluzione particolare $y_p(x)$ delle seguenti equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti non omogenee:

(a) $y''' - y' = x$
(b) $y''' - 8y = e^{ix}$
(c) $y''' - 8y = \cos x$
(d) $y''' - 8y = \sin x$
(e) $y''' + 3y'' + 3y' + y = x^2 e^{-x}$
(f) $y''' = x^2 + e^{-x}\sin x$
(g) $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = xe^x \sin x$
(h) $y^{(4)} + 16y = \cos x$
(i) $y^{(4)} - 4y^{(3)} + 6y'' - 4y' + y = e^x$
(j) $y^{(4)} - y = e^x$
(k) $y^{(4)} - y = e^{ix}$
(l) $y^{(4)} - y = \cos x$
(m) $y^{(4)} - y = \sin x$

(n) $y^{(4)} - y = e^x \cos x$

(o) $y^{(4)} - y = xe^x \sin x$

18. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

(a) $\begin{cases} y'' - 8y' + 15y = 2\,e^{3x} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y'' - y = x\,e^x \\ y(0) = 0 = y'(0) \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y''' + y'' = 1 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y''' + y'' + y' = 1 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} y''' + y'' + y' + y = 1 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$

19. Utilizzando il metodo della risposta impulsiva risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

(a) $\begin{cases} y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x+2} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y'' + y = \frac{1}{\cos x} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} y'' - y = \frac{1}{\operatorname{ch} x} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$

(d) $\begin{cases} y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x^2+1} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$

(e) $\begin{cases} y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$

(f) $\begin{cases} y'' + y = \tan x \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$

(g) $\begin{cases} y'' + y = \frac{1}{\sin x} \\ y(\pi/2) = 0, \quad y'(\pi/2) = 0. \end{cases}$

(h) $\begin{cases} y'' - y = \frac{1}{\operatorname{sh} x} \\ y(1) = 0, \quad y'(1) = 0. \end{cases}$

(i) $\begin{cases} y'' - y' = \frac{1}{\operatorname{ch} x} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$

(j) $\begin{cases} y'' - 2y' + 2y = \frac{e^x}{1+\cos x} \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$

(k) $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{2x}}{(e^x+1)^2} \\ y(0) = 0, \ \ y'(0) = 0. \end{cases}$

(l) $\begin{cases} y''' - 3y'' + 3y' - y = \frac{e^x}{x+1} \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0. \end{cases}$

(m) $\begin{cases} y''' - 2y'' - y' + 2y = \frac{e^x}{e^x+1} \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0. \end{cases}$

(n) $\begin{cases} y''' + 4y' = \frac{1}{\sin 2x} \\ y(\pi/4) = y'(\pi/4) = y''(\pi/4) = 0. \end{cases}$

20. Si consideri l'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti variabili

$$y'' + \tfrac{1}{x}y' - \tfrac{1}{x^2}y = 0 \quad \text{per } x > 0.$$

(a) Dimostrare che ci sono soluzioni della forma x^r con r costante.

(b) Trovare 2 soluzioni linearmente indipendenti per $x > 0$ dimostrando la loro indipendenza lineare.

(c) Determinare le 2 soluzioni che soddisfano le condizioni iniziali $y(1) = 1,\ y'(1) = 0$ e $y(1) = 0,\ y'(1) = 1$.

21. (a) Dimostrare che ci sono soluzioni della forma x^r con r costante dell'equazione differenziale

$$x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0.$$

(b) Determinare 3 soluzioni linearmente indipendenti per $x > 0$ dimostrando la loro indipendenza lineare.

22. In ognuno dei seguenti casi viene data un'equazione differenziale, una funzione $y_1(x)$ e un intervallo. Verificare che y_1 soddisfa l'equazione nell'intervallo indicato, e trovare una seconda soluzione linearmente indipendente utilizzando il metodo di riduzione dell'ordine.

(a) $x^2y'' - 7xy' + 15y = 0, \quad y_1(x) = x^3 \quad (x > 0).$

(b) $x^2y'' - xy' + y = 0, \quad y_1(x) = x \quad (x > 0).$

(c) $y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0, \quad y_1(x) = e^{x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$

(d) $xy'' - (x+1)y' + y = 0, \quad y_1(x) = e^x \quad (x > 0).$

(e) $(1 - x^2)y'' - 2xy' = 0, \quad y_1(x) = 1 \quad (-1 < x < 1).$

(f) $x^2y'' + y' - \frac{1}{x}y = 0, \quad y_1(x) = x \quad (x > 0).$

(g) $x^2y'' - \frac{1}{2}xy' - y = 0, \quad y_1(x) = x^2 \quad (x > 0).$

(h) $x^2y'' + xy' - y = 0, \quad y_1(x) = x \quad (x > 0).$

(i) $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0, \quad y_1(x) = x \quad (x > 0).$

(j) $y'' - \frac{2}{x^2}y = 0, \quad y_1(x) = x^2 \quad (x > 0).$

(k) $y'' + \frac{1}{4x^2}y = 0, \quad y_1(x) = x^{1/2} \quad (x > 0).$

(l) $y'' - \frac{1}{x\log x}y' + \frac{1}{x^2\log x}y = 0, \quad y_1(x) = x \quad (x > 1).$

(m) $2x^2y'' + 3xy' - y = 0\,,\quad y_1(x) = 1/x \quad (x > 0)$.

(n) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0\,,\quad y_1(x) = x \quad (-1 < x < 1)$.

23. Utilizzando il metodo della variazione delle costanti determinare una soluzione particolare delle seguenti equazioni differenziali lineari non omogenee.

(a) $xy'' - (1 + x)y' + y = x^2e^{2x}$ (si veda l'esercizio 22 (d)).

(b) $x^2y'' - x(x + 2)y' + (x + 2)y = 2x^3$ (si veda l'esercizio 22 (i)).

(c) $y'' - \frac{2}{x^2}y = x$ (si veda l'esercizio 22 (j)).

24. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

(a) $\begin{cases} x^2y'' - xy' + y = x^2 \\ y(1) = 1,\ \ y'(1) = 0 \end{cases}$ (si veda l'esercizio 22 (b)).

(b) $\begin{cases} x^2y'' - 2y = 2x - 1 \\ y(1) = 0,\ \ y'(1) = 0 \end{cases}$ (si veda l'esercizio 22 (j)).

(c) $\begin{cases} y'' - \frac{1}{x\log x}y' + \frac{1}{x^2\log x}y = \log x \\ y(e) = 0,\ \ y'(e) = 0 \end{cases}$ (esercizio 22 (l)).

25. (a) Determinare 2 soluzioni indipendenti dell'equazione differenziale

$$x^2y'' + 4xy' + (2 + x^2)y = 0$$

nell'intervallo $x > 0$, cercandole nella forma $y(x) = \frac{z(x)}{x^2}$.

(b) Trovare una soluzione particolare dell'equazione differenziale

$$x^2y'' + 4xy' + (2 + x^2)y = x^2.$$

SOLUZIONI

1. Si usa la formula per l'integrale generale dell'equazione lineare $y' = a(x)y + b(x)$ con $a, b \in C^0(I)$, cioè
$$y(x) = e^{A(x)} \int e^{-A(x)} b(x)\, dx, \tag{2}$$
dove $A(x)$ è una qualsiasi primitiva di $a(x)$ sull'intervallo I.

   (a) $y(x) = ke^{2x} - \frac{1}{2}$ $(k \in \mathbb{R})$.
   (b) $y(x) = \frac{1}{2}e^{x} + ke^{-x}$ $(k \in \mathbb{R})$.
   (c) $y(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1) + ke^{2x}$ $(k \in \mathbb{R})$.
   (d) $y(x) = -e^{-x} + ke^{-x/3}$ $(k \in \mathbb{R})$.
   (e) $y(x) = \frac{3-i}{10}e^{ix} + ke^{-3x}$ $(k \in \mathbb{C})$.
   (f) $y(x) = \frac{1}{10}(3\cos x + \sin x) + ke^{-3x}$ $(k \in \mathbb{R})$.
   Si noti che la funzione $y_1(x) = \frac{1}{10}(3\cos x + \sin x)$, che è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, è precisamente la parte reale della soluzione particolare complessa $y_p(x) = \frac{3-i}{10}e^{ix}$ trovata nel punto precedente (con calcoli più semplici). Il motivo è che $\cos x = \operatorname{Re} e^{ix}$. La parte immaginaria di y_p, cioè la funzione $y_2(x) = \frac{1}{10}(-\cos x + 3\sin x)$, soddisfa invece l'equazione $y' + 3y = \sin x = \operatorname{Im} e^{ix}$.
   (g) $y(x) = \frac{1}{2} + ke^{-x^2}$ $(k \in \mathbb{R})$.
   (h) $y(x) = \frac{3}{4}x^3 - 1 + \frac{k}{x}$ $(k \in \mathbb{R})$
   (i) $y(x) = 3 + ke^{-e^x}$ $(k \in \mathbb{R})$
   (j) $y(x) = \frac{1}{\cos x}\left(e^{\sin x} + k\right)$ $(k \in \mathbb{R})$
   (k) $y(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x^2} + ke^{-x^2}$ $(k \in \mathbb{R})$
   (l) $y(x) = 2(\sin x - 1) + ke^{-\sin x}$ $(k \in \mathbb{R})$

2. Si calcola l'integrale generale tramite la formula (2), determinando poi la costante di integrazione k dalla condizione iniziale. Si può anche usare la formula
$$y(x) = y_0 e^{A(x)} + e^{A(x)} \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)} b(t)\, dt$$
che fornisce direttamente la soluzione del problema di Cauchy lineare con la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$. Qui $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)dt$ è la primitiva di $a(x)$ che si annulla nel punto $x_0 \in I$.

   (a) $y(x) = x\, e^{-\sin x}$
   (b) $y(x) = e^{2x} \log\left(\frac{e^x+1}{2}\right)$
   (c) $y(x) = x\, e^{x} - e^{x}\log(\operatorname{ch} x)$
   (d) $y(x) = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x + \frac{3}{5}\cos 2x + \frac{6}{5}\sin 2x - \frac{1}{10}e^{-x}$
   (e) $y(x) = 1 - ix + e^{-ix}$
   (f) $y(x) = \frac{-1+i}{2}\left(e^{-ix} - e^{x}\right)$
   (g) $y(x) = \sin^2 x + 2\sin x + 1 - e^{\sin x}$

3. (a) L'integrale generale è $y(x) = \frac{1}{x} + \frac{k}{x^2}$ $(x > 0,\ k \in \mathbb{R})$, pertanto $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$.
   (b) $y(x) = \frac{1}{x} - \frac{6}{7x^2}$

4. Si usa la formula che fornisce implicitamente le soluzioni non costanti dell'equazione a variabili separabili $\frac{dy}{dx} = a(x)b(y)$, cioè

$$\int \frac{dy}{b(y)} = \int a(x)\,dx.$$

A queste vanno aggiunte le eventuali soluzioni costanti $y(x) = \bar{y}$, $\forall x$, dove $\bar{y}$ sono gli zeri di $b(y)$.

   (a) $y(x) = ke^{x^3/3}$ $(k \in \mathbb{R})$. Per $k = 0$ si ottiene la soluzione costante $y = 0$. Si ha $I = \mathbb{R}$ per ogni valore di k.

   (b) $y(x) = \pm\sqrt{x^2+k}$ $(k \in \mathbb{R})$. Per ogni valore reale di k abbiamo 2 famiglie di soluzioni corrispondenti al segno + e al segno -, cioè $y_+(x) = \sqrt{x^2+k}$, $y_-(x) = -\sqrt{x^2+k}$. Notiamo che l'intervallo massimale I delle soluzioni $y_\pm$ dipende dal valore di k. Se $k > 0$ allora $I = \mathbb{R}$. Se $k = 0$ allora $I = \mathbb{R}^+$ oppure $I = \mathbb{R}^-$. (Nel punto $x = 0$ l'equazione in forma normale, $y'(x) = x/y(x)$, perde significato.) Infine se $k < 0$ si ha $I = (\sqrt{-k}, +\infty)$ oppure $I = (-\infty, -\sqrt{-k})$. (Nei punti $x = \pm\sqrt{-k}$ l'equazione in forma normale perde significato perchè $y(\pm\sqrt{-k}) = 0$ e y non è derivabile (tangente verticale).) Notiamo infine che la soluzione del problema di Cauchy $y' = x/y$, $y(x_0) = y_0$ con $y_0 \neq 0$ esiste ed è unica. Questo è in accordo con il teorema di esistenza e unicità, essendo la funzione $b(y) = 1/y$ di classe C^1 nell'intorno di qualsiasi punto $y_0 \neq 0$. Ad esempio

$$\begin{cases} y' = x/y \\ y(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow y(x) = \sqrt{x^2+1},\ I = \mathbb{R},$$

$$\begin{cases} y' = x/y \\ y(0) = -1 \end{cases} \Rightarrow y(x) = -\sqrt{x^2+1},\ I = \mathbb{R},$$

$$\begin{cases} y' = x/y \\ y(2) = -1 \end{cases} \Rightarrow y(x) = -\sqrt{x^2-3},\ I = (\sqrt{3}, +\infty),$$

$$\begin{cases} y' = x/y \\ y(-2) = 1 \end{cases} \Rightarrow y(x) = \sqrt{x^2-3},\ I = (-\infty, -\sqrt{3}).$$

   (c) $y(x)$ è definita implicitamente dall'equazione $3y^2 - 2y^3 = 3x^2 + 2x^3 + k$ $(k \in \mathbb{R})$.

   (d) $y(x) = \log(\log(e^x+1)+k)$ $(k \in \mathbb{R})$. L'intervallo I sul quale y è soluzione dipende da k. Se $k \geq 0$ si ha $I = \mathbb{R}$. Se invece $k < 0$, $I = (\log(e^{-k}-1), +\infty)$.

   (e) Vi sono le 2 soluzioni costanti $y(x) = 2$ e $y(x) = -2$ $\forall x$. Inoltre si ha

$$y(x) = 2\frac{1+ke^{4x^3/3}}{1-ke^{4x^3/3}} \qquad (k \in \mathbb{R}).$$

Per $k = 0$ si riottiene la soluzione costante $y = 2$, mentre la soluzione costante $y = -2$ non si ottiene per alcun valore reale di k (essa si ottiene invece prendendo il limite per $k \to \pm\infty$). L'intervallo I sul quale y è soluzione dipende da k e precisamente: se $k \leq 0$ allora $I = \mathbb{R}$; se $k > 0$ allora $I = (-\sqrt[3]{\frac{3}{4}\log k}, +\infty)$ oppure $I = (-\infty, -\sqrt[3]{\frac{3}{4}\log k})$.

5. (a) La funzione $b(y) = y^2$ è di classe C^1 su tutto $\mathbb{R}$.

   (b) La soluzione costante $y = 0$ è l'unica soluzione del problema di Cauchy con $y_0 = 0$. Separando le variabili si ottiene $y(x) = -1/(x+k)$ $(k \in \mathbb{R})$. Imponendo la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$ con $y_0 \neq 0$ si trova $k = -x_0 - 1/y_0$, da cui la formula indicata. Tale formula ha significato anche per $y_0 = 0$, nel qual caso fornisce la soluzione costante $y = 0$.

   (c) L'intervallo I sul quale y è soluzione dipende dal dato iniziale y_0. Infatti se $y_0 \neq 0$, deve essere $x \neq x_0 + 1/y_0$. Inoltre l'intervallo I deve contenere x_0. Si trova:

   - $y_0 = 0 \;\Rightarrow\; I = \mathbb{R}$;
   - $y_0 > 0 \;\Rightarrow\; I = (-\infty, x_0 + \frac{1}{y_0})$;
   - $y_0 < 0 \;\Rightarrow\; I = (x_0 + \frac{1}{y_0}, +\infty)$.

6. (a) La funzione $b(y) = 2\sqrt{y}$ è di classe C^1 nell'intorno di qualsiasi punto $y_0 > 0$. Non è invece di classe C^1 in un intorno di $y_0 = 0$, e non è neanche Lipschitziana in tale intorno in quanto il rapporto incrementale $(\sqrt{y} - 0)/(y - 0) = 1/\sqrt{y}$ non è limitato in un intorno di zero. Quindi il teorema di esistenza e unicità si può applicare solo per $y_0 > 0$.

   (b) La soluzione costante $y = 0$ non soddisfa la condizione iniziale $y(x_0) = y_0 > 0$. Separando le variabili nell'equazione $y' = 2\sqrt{y}$ si trova $\sqrt{y} = x + k$, che per $x + k \geq 0$ fornisce la soluzione $y(x) = (x+k)^2$. Imponendo la condizione iniziale si trova $k = \sqrt{y_0} - x_0$, da cui la soluzione del problema di Cauchy

$$y(x) = (x - x_0 + \sqrt{y_0})^2 \quad \text{definita su } I' = [x_0 - \sqrt{y_0}, +\infty).$$

   In questo caso y è soluzione anche nel punto $x = x_0 - \sqrt{y_0}$ in quanto sia y' che $2\sqrt{y}$ si annullano in tale punto. È possibile allora estendere la soluzione oltre tale punto (prolungamento sinistro), ottenendo la seguente soluzione massimale definita su tutto $\mathbb{R}$:

$$y(x) = \begin{cases} (x - x_0 + \sqrt{y_0})^2 & \text{se } x \geq x_0 - \sqrt{y_0}, \\ 0 & \text{se } x < x_0 - \sqrt{y_0}. \end{cases}$$

   La verifica è immediata.

   (c) Consideriamo ora il problema di Cauchy con condizione iniziale $y(x_0) = 0$. Innanzitutto c'è la soluzione costante $y(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Un'altra soluzione si trova separando le variabili per $x \geq x_0$ e incollando la soluzione costante per $x < x_0$:

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} (x - x_0)^2 & \text{se } x \geq x_0 \\ 0 & \text{se } x < x_0. \end{cases}$$

   Entrambe queste 2 soluzioni sono definite su tutto $\mathbb{R}$. Traslando la soluzione $\tilde{y}$ a destra di x_0 di una quantità arbitraria $c > 0$ si ottengono infinite soluzioni dello stesso problema di Cauchy. Tuttavia queste soluzioni coincidono con la soluzione costante in un intorno di x_0.

7. (a) $\phi_0(x) = 2$, $\phi_1(x) = 2 + 7x$, $\phi_2(x) = 2 + 7x + \frac{21}{2}x^2$, $\phi_3(x) = 2 + 7x + \frac{21}{2}x^2 + \frac{21}{2}x^3$.

   (b) $\phi(x) = \frac{1}{3}(7e^{3x} - 1)$.

(c) Usando lo sviluppo in serie di e^{3x} si verifica che $\phi_n(x)$ coincide con il polinomio di McLaurin di ordine n di $\phi(x)$.

8. (a) $\phi_0(x) = 0,\ \phi_1(x) = \frac{x^3}{3},\ \phi_2(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63},\ \phi_3(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{11 \cdot 189} + \frac{x^{15}}{15 \cdot 63^2}$.

   (b) $\phi_0(x) = 1,\ \phi_1(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2},\ \phi_1(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8},\ \phi_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{15} + \frac{x^6}{48}$. Si paragoni con la soluzione esatta $\phi(x) = e^{x^2/2}(1 + \int_0^x e^{-t^2/2}dt)$ calcolando lo sviluppo di McLaurin al quinto ordine di $\phi(x)$.

   (c) $\phi_0(x) = 0 = \phi_1(x) = \phi_2(x) = \phi_3(x)$. Si paragoni con la soluzione esatta.

   (d) $\phi_0(x) = 1,\ \phi_1(x) = 1 + x,\ \phi_2(x) = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3},\ \phi_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{2x^4}{3} + \frac{x^5}{3} + + \frac{x^6}{9} + \frac{x^7}{63}$. Si calcoli la soluzione esatta e il suo intervallo massimale e si confrontino i risultati.

   (e) $\phi_0(x) = 0,\ \phi_1(x) = x,\ \phi_2(x) = x + \frac{x^3}{3},\ \phi_3(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^7}{63}$. Si calcoli la soluzione esatta e il suo intervallo massimale e si confrontino i risultati.

   (f) $\phi_0(x) = 0,\ \phi_1(x) = x,\ \phi_2(x) = x - \frac{2x^3}{3},\ \phi_3(x) = x - \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^5}{15}$. Si paragoni con la soluzione esatta $\phi(x) = e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$.

9. (a) $y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.

   (b) $y(x) = c_1 + c_2e^{-2x/3} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.

   (c) $y(x) = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.

   (d) $y(x) = c_1e^{-x/2} + c_2xe^{-x/2} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.

   (e) $y(x) = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.

   (f) Le radici del polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^2 + 2i\lambda + 1$ sono

$$\lambda = -i \pm \sqrt{-1-1} = -i \pm i\sqrt{2} = i(-1 \pm \sqrt{2}).$$

   Pertanto l'integrale generale (complesso) è $y(x) = c_1e^{i(\sqrt{2}-1)x} + c_2e^{i(\sqrt{2}+1)x}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Notiamo che se si esclude la soluzione banale $y(x) = 0\ \forall x$ (ottenuta per $c_1 = c_2 = 0$), l'equazione non ha soluzioni reali comunque si prendano le costanti c_1, c_2.

   (g) Si ha $p(\lambda) = \lambda^2 - 2i\lambda - 1 = (\lambda - i)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = i$ con molteplicità 2. Pertanto $y(x) = c_1e^{ix} + c_2xe^{ix}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{C})$. Non vi sono soluzioni reali a parte quella banale.

   (h) Le soluzioni di $p(\lambda) = \lambda^2 + (3i - 1)\lambda - 3i = 0$ sono determinate dalla formula risolutiva delle equazioni di secondo grado:

$$\begin{aligned}\lambda &= \tfrac{1}{2}(1 - 3i \pm \sqrt{(1-3i)^2 + 12i}) = \tfrac{1}{2}(1 - 3i \pm \sqrt{1 - 9 - 6i + 12i}) \\ &= \tfrac{1}{2}(1 - 3i \pm \sqrt{1 - 9 + 6i}) = \tfrac{1}{2}(1 - 3i \pm \sqrt{(1+3i)^2}) \\ &= \tfrac{1}{2}(1 - 3i \pm (1 + 3i)) = 1,\ -3i.\end{aligned}$$

   Senza utilizzare l'identità $1 - 9 + 6i = (1 + 3i)^2$, avremmo dovuto calcolare le radici quadrate del numero complesso $z = -8 + 6i$, ed il calcolo sarebbe stato molto più lungo. L'integrale generale è $y(x) = c_1e^x + c_2e^{-3ix}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{C})$. In questo caso vi sono soluzioni reali dell'equazione differenziale, e cioè le funzioni $y_r(x) = c_1e^x$ con $c_1 \in \mathbb{R}$.

10. (a) $y(x) = \frac{3}{5}e^{2x} + \frac{2}{5}e^{-3x}$.

(b) $y(x) = \frac{1}{4}e^{3x} - \frac{1}{4}e^{-x}$.

(c) $y(x) = \pi \cos\sqrt{10}x + \frac{\pi^2}{\sqrt{10}} \sin\sqrt{10}x$.

(d) Notiamo che le condizioni iniziali $y(0) = y'(0) = 0$ e l'unicità delle soluzioni del problema di Cauchy implicano che $y(x) = 0\ \forall x$. Non c'è dunque bisogno di calcolare l'integrale generale, che richiede il calcolo delle radici quadrate del numero complesso $z = 8i - 19$.

(e) $y(x) = \frac{3i+9}{5}e^{x} + \frac{1-3i}{5}e^{-3ix}$ (si veda l'esercizio 9 (h)).

11. Ricordiamo che ogni radice $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ del polinomio caratteristico $p(\lambda)$ di molteplicità m_1 contribuisce all'integrale generale complesso con le m_1 funzioni:

$$e^{\lambda_1 x},\ \ xe^{\lambda_1 x},\ \ x^2e^{\lambda_1 x},\ \ldots,\ x^{m_1-1}e^{\lambda_1 x}.$$

Se $p(\lambda)$ ha coefficienti reali e $\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ (con $\beta_1 \neq 0$) è radice di molteplicità m_1, allora anche $\overline{\lambda_1} = \alpha_1 - i\beta_1$ è radice con la stessa molteplicità, e la coppia $\lambda_1, \overline{\lambda_1}$ contribuisce all'integrale generale reale con le $2m_1$ funzioni:

$$\begin{array}{l} e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x,\ \ xe^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x,\ \ldots,\ x^{m_1-1}e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, \\ e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x,\ \ xe^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x,\ \ldots,\ x^{m_1-1}e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x. \end{array}$$

(a) Le radici del polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^3+1$ sono le 3 radici cubiche di -1: $\lambda = \sqrt[3]{-1} = e^{\frac{i(\pi+2k\pi)}{3}}$ $(k = 0, 1, 2)$ $= e^{i\pi/3}, e^{i\pi}, e^{i5\pi/3} = -1, \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. L'integrale generale reale è $y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3e^{x/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$.

(b) $p(\lambda) = \lambda^3 - 8 = 0 \ \Leftrightarrow$
$\lambda = \sqrt[3]{8} = 2e^{\frac{2k\pi i}{3}} = 2, 2e^{2\pi i/3}, 2e^{4\pi i/3} = 2, 2(-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2, -1 \pm i\sqrt{3} \ \Rightarrow$
$y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-x}\cos\sqrt{3}x + c_3e^{-x}\sin\sqrt{3}x \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$.

(c) $p(\lambda) = \lambda^4 - 16 = 0 \ \Leftrightarrow$
$\lambda = \sqrt[4]{16} = 2e^{\frac{2k\pi i}{4}}$ $(k = 0, 1, 2, 3)$ $= 2, 2e^{i\pi/2}, 2e^{i\pi}, 2e^{3i\pi/2} = \pm 2, \pm 2i \ \Rightarrow$
$y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + c_3\cos 2x + c_4\sin 2x \quad (c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R})$.

(d) $p(\lambda) = \lambda^4 + 16 = 0 \ \Leftrightarrow$
$\lambda = \sqrt[4]{-16} = 2e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$ $(k = 0, 1, 2, 3)$ $= 2e^{i\pi/4}, 2e^{3i\pi/4}, 2e^{5i\pi/4}, 2e^{7i\pi/4}$
$= 2(\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}), 2(-\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2} \pm i\sqrt{2}, -\sqrt{2} \pm i\sqrt{2} \ \Rightarrow$
$y(x) = e^{\sqrt{2}x}(c_1\cos\sqrt{2}x + c_2\sin\sqrt{2}x) + e^{-\sqrt{2}x}(c_3\cos\sqrt{2}x + c_4\sin\sqrt{2}x)$
$(c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R})$. Ricordando che

$$\begin{cases} \operatorname{ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \\ \operatorname{sh} x = \frac{e^x-e^{-x}}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x \\ e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \end{cases}$$

possiamo anche scrivere l'integrale generale nella forma
$y(x) = \operatorname{ch}\sqrt{2}x(a\cos\sqrt{2}x + b\sin\sqrt{2}x) + \operatorname{sh}\sqrt{2}x(c\cos\sqrt{2}x + d\sin\sqrt{2}x)$
$(a, b, c, d \in \mathbb{R})$.

(e) $p(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)^2 = 0 \ \Leftrightarrow\ \lambda = \pm 1$ entrambe con $m = 2$. Pertanto
$y(x) = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-x} + c_4xe^{-x} \quad (c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R})$.
Possiamo anche scrivere l'integrale generale come
$y(x) = a\operatorname{ch} x + b\,x\operatorname{ch} x + c\operatorname{sh} x + d\,x\operatorname{sh}x \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$.

(f) $p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2+1)^2 = 0 \iff \lambda = \pm i$ con $m = 2 \Rightarrow$
$y(x) = c_1 \cos x + c_2 x \cos x + c_3 \sin x + c_4 x \sin x \quad (c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R})$.

(g) $p(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda - 18$. Si vede facilmente che $p(2) = 0$. Scomponendo con Ruffini si ottiene $p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda + 3)^2$, da cui le radici $\lambda_1 = 2$ con $m_1 = 1$ e $\lambda_2 = -3$ con $m_2 = 2 \Rightarrow y(x) = c_1 e^{2x} + (c_2 + c_3 x)e^{-3x} \;\; (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$.

(h) $p(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8 = (\lambda+2)^3$ da cui $\lambda_1 = -2$ con $m_1 = 3 \Rightarrow$
$y(x) = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)e^{-2x} \;\; (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$.

(i) $p(\lambda) = \lambda^4 + \lambda = \lambda(\lambda^3 + 1) = 0 \iff \lambda = 0, \sqrt[3]{-1} = 0, -1, \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$
$y(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + e^{x/2}(c_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x) \quad (c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R})$.

(j) $y(x) = (c_1 + c_2 x) \cos \sqrt{5}x + (c_3 + c_4 x) \sin \sqrt{5}x \quad (c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R})$.

(k) $p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1$. Si vede facilmente che $p(-1) = 0$. Scomponendo con Ruffini si ottiene $p(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda^2+1)$, da cui
$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$.

(l) $p(\lambda) = \lambda^5 + 1 = 0 \iff \lambda = \sqrt[5]{-1} = e^{i\frac{\pi + 2k\pi}{5}} \; (k = 0, 1, 2, 3, 4)$ da cui
$\lambda = e^{i\pi/5}, e^{i3\pi/5}, e^{i\pi}, e^{i7\pi/5}, e^{i9\pi/5} = -1, \cos\frac{\pi}{5} \pm i \sin\frac{\pi}{5}, \cos\frac{3\pi}{5} \pm i \sin\frac{3\pi}{5} \Rightarrow$

$$y(x) = c_1 e^{-x} + e^{\cos\frac{\pi}{5}x}(c_2 \cos(\sin\tfrac{\pi}{5}x) + c_3 \sin(\sin\tfrac{\pi}{5}x))$$
$$+ e^{\cos\frac{3\pi}{5}x}(c_4 \cos(\sin\tfrac{3\pi}{5}x) + c_5 \sin(\sin\tfrac{3\pi}{5})) \;\; (c_1, \ldots, c_5 \in \mathbb{R}).$$

È possibile scrivere esplicitamente i valori di seno e coseno di $\frac{\pi}{5}$ e $\frac{3\pi}{5}$:
$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$, $\sin\frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, $\cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$, $\sin\frac{\pi}{5} = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.

(m) $p(\lambda) = \lambda^6 + 1 = 0 \iff \lambda = \sqrt[6]{-1} = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{6}} \; (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5) \Rightarrow$
$\lambda = e^{i\pi/6}, e^{i\pi/2}, e^{i5\pi/6}, e^{i7\pi/6}, e^{i3\pi/2}, e^{i11\pi/6} = \pm i, \; \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2}, \; -\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2} \Rightarrow$
$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + e^{\frac{\sqrt{3}}{2}x}(c_3 \cos\frac{x}{2} + c_4 \sin\frac{x}{2}) + e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x}(c_5 \cos\frac{x}{2} + c_6 \sin\frac{x}{2})$
$(c_1, \ldots, c_6 \in \mathbb{R})$.

(n) $p(\lambda) = \lambda^6 - 1 = 0 \iff \lambda = \sqrt[6]{1} = e^{i\frac{2k\pi}{6}} \; (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5) \Rightarrow$
$\lambda = 1, e^{i\pi/3}, e^{i2\pi/3}, e^{\pi}, e^{i4\pi/3}, e^{i5\pi/3} = \pm 1, \; \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}, \; -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$
$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + e^{\frac{1}{2}x}(c_3 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_4 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x) + e^{-\frac{1}{2}x}(c_5 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_6 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$
$(c_1, \ldots, c_6 \in \mathbb{R})$.

(o) $p(\lambda) = \lambda^8 + 8\lambda^6 + 24\lambda^4 + 32\lambda^2 + 16 = (\lambda^2+2)^4 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$ con $m = 4 \Rightarrow$
$y(x) = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3) \cos \sqrt{2}x + (c_5 + c_6 x + c_7 x^2 + c_8 x^3) \sin \sqrt{2}x$
$(c_1, \ldots, c_8 \in \mathbb{R})$.

(p) $p(\lambda) = \lambda^{10} \Rightarrow \lambda_1 = 0$ con $m_1 = 10 \Rightarrow$
$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + c_5 x^4 + c_6 x^5 + c_7 x^6 + c_8 x^7 + c_9 x^8 + c_{10} x^9 \;\; (c_1, \ldots, c_{10} \in \mathbb{R})$.

(q) $p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda = \lambda(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = \lambda(\lambda-2)(\lambda-3) \Rightarrow$
$y(x) = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$.

(r) $p(\lambda) = \lambda^{100} + 100 = 0 \iff$
$\lambda = \sqrt[100]{-100} = \sqrt[100]{100}\, e^{i\frac{(2k+1)\pi}{100}} \equiv \lambda_k \;\; (k = 0, 1, \ldots, 99)$.
L'integrale generale complesso è $y(x) = \sum_{k=0}^{99} c_k e^{\lambda_k x}$ con $c_k \in \mathbb{C}$. Per scrivere l'integrale reale bisogna accorpare a 2 a 2 le radici complesse coniugate. Essendo $\overline{e^{i\theta}} = e^{i(2\pi - \theta)}$, si verifica facilmente che $\lambda_{99} = \overline{\lambda_0}$, $\lambda_{98} = \overline{\lambda_1}, \ldots, \lambda_{50} = \overline{\lambda_{49}} \Rightarrow$
$y(x) = \sum_{k=0}^{49} e^{\sqrt[100]{100} \cos\frac{2k+1}{100}\pi x}\left[a_k \cos\left(\sqrt[100]{100} \sin\frac{2k+1}{100}\pi x\right) + b_k \sin\left(\sqrt[100]{100} \sin\frac{2k+1}{100}\pi x\right)\right]$
con $a_k, b_k \in \mathbb{R}$.

(s) $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x \quad (c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R})$.

(t) $p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda - 2$. Essendo $p(-1) = 0$ possiamo scomporre con Ruffini ottenendo $p(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda-2) \Rightarrow y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-x} + +c_3 e^{2x} \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$.

(u) $p(\lambda) = \lambda^5 - \lambda^4 - \lambda + 1 = \lambda^4(\lambda - 1) - (\lambda - 1) = (\lambda - 1)(\lambda^4 - 1) \Rightarrow$
$\lambda_1 = 1\ (m_1 = 2),\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = i,\ \lambda_4 = -i \ \ (m_2 = m_3 = m_4 = 1) \Rightarrow$
$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^x + c_3 e^{-x} + c_4 \cos x + c_5 \sin x \quad (c_1, \ldots, c_5 \in \mathbb{R})$.

(v) $p(\lambda) = \lambda^3 - 3i\lambda^2 - 3\lambda + i = (\lambda - i)^3 \Rightarrow \lambda_1 = i$ con $m_1 = 3 \Rightarrow$
$y(x) = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)e^{ix} \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C})$

(w) $p(\lambda) = \lambda^3 - i\lambda^2 + 4\lambda - 4i = \lambda^2(\lambda - i) + 4(\lambda - i) = (\lambda - i)(\lambda^2 + 4) \Rightarrow$
$y(x) = c_1 e^{ix} + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C})$.
Le soluzioni con $c_1 = 0,\ c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ sono reali.

(x) $p(\lambda) = \lambda^3 + i\lambda^2 - 2\lambda - 2i = (\lambda + i)(\lambda^2 - 2) \Rightarrow$
$y(x) = c_1 e^{-ix} + c_2 e^{\sqrt{2}x} + c_3 e^{-\sqrt{2}x} \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C})$.
Le soluzioni con $c_1 = 0,\ c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ sono reali.

(y) $p(\lambda) = \lambda^4 - i = 0 \Leftrightarrow$
$\lambda = \sqrt[4]{i} = e^{i(\pi/2 + 2k\pi)/4}\ (k = 0, 1, 2, 3) \ = e^{i\pi/8}, e^{i5\pi/8}, e^{i9\pi/8}, e^{i13\pi/8} \Rightarrow$
$y(x) = c_1 e^{i\pi/8} + c_2 e^{i5\pi/8} + c_3 e^{i9\pi/8} + c_4 e^{i13\pi/8} \quad (c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{C})$.
Non vi sono soluzioni reali oltre a quella banale.

(z) $p(\lambda) = \lambda^4 + 4i\lambda^3 - 6\lambda^2 - 4i\lambda + 1 = (\lambda + i)^4 \Rightarrow$
$y(x) = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3)e^{-ix} \quad (c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{C})$.
Non vi sono soluzioni reali oltre a quella banale.

12. (a) Usando l'esercizio 11 (a) si ottiene
$y(x) = -\frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{3}e^{x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{3}e^{x/2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

(b) $y(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2x$.

(c) Usando l'esercizio 11 (d) otteniamo $y(x) = \cos\sqrt{2}x \operatorname{ch}\sqrt{2}x$.

(d) Usando l'esercizio 11 (u) si ottiene
$y(x) = \frac{5}{8}e^x - \frac{1}{4}xe^x + \frac{1}{8}e^{-x} + \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{4}\sin x$.

13. Applicando il teorema di derivazione per serie alla funzione

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots$$

e alle sue derivate y', y'', otteniamo:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$$
$$y''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!} = x + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$
$$y'''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-3}}{(3n-3)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = y(x).$$

Ponendo $x = 0$ vediamo che y soddisfa l'equazione differenziale $y''' - y = 0$ con le condizioni iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$. Consideriamo l'equazione differenziale $y''' - y = 0$. Le radici del polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^3 - 1$ sono le 3 radici cubiche dell'unità:

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = e^{2\pi i/3} = -\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad \alpha_2 = e^{4\pi i/3} = -\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

Per i calcoli è più comodo utilizzare l'integrale generale complesso, dato da

$$y(x) = c_0 e^{\alpha_0 x} + c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x},$$

dove $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Imponendo le condizioni iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} c_0 + c_1 + c_2 = 1 \\ c_0 + \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 = 0 \\ c_0 + \alpha_1^2 c_1 + \alpha_2^2 c_2 = 0, \end{cases} \tag{3}$$

la cui soluzione è $c_0 = c_1 = c_2 = \frac{1}{3}$, come si verifica subito. (Si noti che $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 0$, e che $\alpha_1^2 = \alpha_2$, $\alpha_2^2 = \alpha_1$.) Otteniamo infine

$$\begin{aligned} y(x) &= \tfrac{1}{3}\left(e^x + e^{(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})x} + e^{(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})x}\right) \\ &= \tfrac{1}{3}e^x + \tfrac{1}{3}e^{-\frac{x}{2}}\left(e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}x} + e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}x}\right) \\ &= \tfrac{1}{3}e^x + \tfrac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x. \end{aligned}$$

14. Procedendo come nell'esercizio precedente troviamo che la funzione $y(x)$ soddisfa l'equazione differenziale $y^{(4)} - y = 0$ con le condizioni iniziali $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$. Il polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^4 - 1$ ha le radici ± 1, $\pm i$, e l'integrale generale complesso è $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{ix} + c_4 e^{-ix}$. Imponendo le condizioni iniziali otteniamo il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 1 \\ c_1 - c_2 + ic_3 - ic_4 = 0 \\ c_1 + c_2 - c_3 - c_4 = 0 \\ c_1 - c_2 - ic_3 + ic_4 = 0, \end{cases} \tag{4}$$

la cui soluzione è $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = \frac{1}{4}$, come si verifica subito. Otteniamo infine

$$y(x) = \tfrac{1}{4}\left(e^x + e^{-x} + e^{ix} + e^{-ix}\right) = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{ch}\, x + \tfrac{1}{2}\cos x.$$

15. Per $k = 1$ l'identità da dimostrare si riduce allo sviluppo in serie dell'esponenziale $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n! = e^x$. Per $k = 2$ si riduce allo sviluppo in serie del coseno iperbolico $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}/(2n)! = (e^x + e^{-x})/2 = \mathrm{ch}\, x$. I casi $k = 3, 4$ sono stati trattati negli esercizi 13 e 14. Sia $k \in \mathbb{N}^+$, $k \geq 2$. Procedendo come nei 2 esercizi precedenti, si ottiene che la funzione

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{kn}}{(kn)!} = 1 + \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{x^{3k}}{(3k)!} + \cdots$$

soddisfa il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{(k)} - y = 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = \cdots = y^{(k-1)}(0) = 0. \end{cases}$$

Le radici del polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^k - 1$ sono le radici k-esime di 1:

$$\alpha_j = \sqrt[k]{1} = e^{i\frac{2\pi j}{k}} \quad (j = 0, 1, \ldots, k-1).$$

Notiamo che

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = e^{i\frac{2\pi}{k}}, \quad \alpha_2 = e^{i\frac{4\pi}{k}} = \alpha_1^2, \quad \ldots, \quad \alpha_{k-1} = e^{i\frac{2(k-1)\pi}{k}} = \alpha_1^{k-1},$$

cioè tutte le radici sono generate dalle potenze della radice α_1. L'integrale generale complesso è $y(x) = \sum_{j=0}^{k-1} c_j e^{\alpha_j x}$. Imponendo le condizioni iniziali otteniamo il sistema

$$\begin{cases} c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_{k-1} = 1 \\ c_0 + c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \cdots c_{k-1}\alpha_{k-1} = 0 \\ c_0 + c_1\alpha_1^2 + c_2\alpha_2^2 + \cdots c_{k-1}\alpha_{k-1}^2 = 0 \\ \vdots \\ c_0 + c_1\alpha_1^{k-1} + c_2\alpha_2^{k-1} + \cdots c_{k-1}\alpha_{k-1}^{k-1} = 0, \end{cases} \tag{5}$$

la cui soluzione è $c_0 = c_1 = c_2 = \cdots = c_{k-1} = \frac{1}{k}$. Infatti la prima riga è chiaramente soddisfatta da questi valori. La seconda riga è soddisfatta da $c_j = \frac{1}{k}\ \forall j$ se e solo se vale l'identità

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{k-1} = 0.$$

Questa è vera in quanto da $\alpha_1^k = 1$ si ottiene

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{k-1} = 1 + \alpha_1 + \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_1^{k-1} = \frac{1 - \alpha_1^k}{1 - \alpha_1} = 0,$$

dove abbiamo usato l'identità

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{k-1} = \frac{1 - x^k}{1 - x}$$

(somma della progressione geometrica) valida per ogni $x \neq 1$. Analogamente la p-esima riga del sistema precedente con $1 \leq p \leq k-1$ è soddisfatta da $c_j = \frac{1}{k}\ \forall j$ in quanto

$$\begin{aligned} 1 + \alpha_1^p + \alpha_2^p + \cdots + \alpha_{k-1}^p &= 1 + \alpha_1^p + \left(\alpha_1^2\right)^p + \cdots + \left(\alpha_1^{k-1}\right)^p \\ &= 1 + \alpha_1^p + (\alpha_1^p)^2 + \cdots + (\alpha_1^p)^{k-1} \\ &= \sum_{n=0}^{k-1} (\alpha_1^p)^n = \frac{1 - (\alpha_1^p)^k}{1 - \alpha_1^p} = 0 \end{aligned}$$

essendo $(\alpha_1^p)^k = \left(\alpha_1^k\right)^p = 1^p = 1$. Sostituendo i valori $c_j = \frac{1}{k}\ \forall j$ nell'integrale generale otteniamo infine che

$$y(x) = \frac{1}{k}\left(e^{\alpha_0 x} + e^{\alpha_1 x} + e^{\alpha_2 x} + \cdots + e^{\alpha_{k-1} x}\right),$$

come dovevasi dimostrare.

16. Ricordiamo che il metodo di somiglianza, o dei coefficienti indeterminati, consente di determinare una soluzione particolare di un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti non omogenea, $Ly = f(x)$, nel caso in cui il *termine forzante* $f(x)$ è un polinomio, un esponenziale, un seno o un coseno, o un prodotto di termini di questo tipo. Si cerca una soluzione particolare che sia simile a $f(x)$, contenente dei coefficienti incogniti che si determinano sostituendo la soluzione ipotizzata nell'equazione differenziale. Il metodo funziona in quanto un termine forzante del tipo sopra descritto è a sua volta soluzione di un'opportuna equazione differenziale omogenea a coefficienti costanti. Il risultato preciso è il seguente. Consideriamo innanzitutto il caso complesso, cioè un'equazione differenziale della forma

$$Ly = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = P(x)\, e^{\lambda_0 x}, \tag{6}$$

dove $a_1, \ldots, a_n, \lambda_0 \in \mathbb{C}$, e $P(x)$ è un polinomio a coefficienti complessi di grado k. La (6) definisce l'*operatore differenziale lineare a coefficienti costanti di ordine* n

$$L = \left(\tfrac{d}{dx}\right)^n + a_1 \left(\tfrac{d}{dx}\right)^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \tfrac{d}{dx} + a_n.$$

Sia $p(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$ il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea associata $Ly = 0$. Allora la (6) ha una soluzione particolare della forma

$$y(x) = x^m\, Q(x)\, e^{\lambda_0 x}, \tag{7}$$

dove $Q(x)$ è un polinomio a coefficienti complessi di grado k e

$$m = \begin{cases} 0 & \text{se } p(\lambda_0) \neq 0 \\ \text{molteplicità di } \lambda_0 & \text{se } p(\lambda_0) = 0. \end{cases}$$

Il polinomio $Q(x)$ è univocamente determinato sostituendo la (7) nella (6) e applicando il principio di identità dei polinomi. Notiamo che se $\lambda_0 = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (cioè se $\beta \neq 0$), il polinomio $Q(x)$ ha coefficienti complessi anche se $P(x)$ e L hanno coefficienti reali. Il metodo di somiglianza reale si ottiene applicando questo risultato al caso in cui $P(x)$ e L hanno coefficienti reali e separando la parte reale e la parte immaginaria della soluzione complessa (7). Si usa il fatto che se $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ risolve $Ly = P(x)e^{(\alpha+i\beta)x}$ (L a coefficienti reali, P polinomio reale), allora $y_1 = \operatorname{Re} y$ e $y_2 = \operatorname{Im} y$ risolvono rispettivamente $Ly_1 = P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ e $Ly_2 = P(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$. Il risultato preciso è il seguente: se L ha coefficienti reali allora l'equazione $Ly = P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$, dove $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $P(x)$ è un polinomio reale di grado k, ha una soluzione particolare della forma

$$y_p(x) = x^m\, e^{\alpha x} \Big(Q_1(x)\, \cos\beta x \,+\, Q_2(x)\, \sin\beta x \Big), \tag{8}$$

dove $Q_1(x)$ e $Q_2(x)$ sono due polinomi reali di grado $\leq k$ (ma almeno uno di essi ha grado k) e

$$m = \begin{cases} 0 & \text{se } p(\alpha + i\beta) \neq 0 \\ \text{molteplicità di } \alpha + i\beta & \text{se } p(\alpha + i\beta) = 0. \end{cases}$$

Notiamo che se $\beta = 0$ la formula (8) per una soluzione particolare di $Ly = P(x)e^{\alpha x}$ diventa identica alla formula (7) (essendo il polinomio $Q(x)$ reale per $\lambda_0 = \alpha \in \mathbb{R}$). Un risultato analogo alla (8) vale per l'equazione $Ly = P(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$ ($\beta \neq 0$). Più precisamente si dimostra che se la (8) risolve $Ly = P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$, allora la funzione

$$\tilde{y}_p(x) = x^m\, e^{\alpha x} \Big(-\, Q_2(x)\, \cos\beta x \,+\, Q_1(x)\, \sin\beta x \Big)$$

risolve $Ly = P(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$. Osserviamo infine che per abbreviare i calcoli è spesso utile usare il formalismo complesso anche nel caso di coefficienti reali. Per esempio per risolvere $Ly = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ($Ly = e^{\alpha x}\sin\beta x$) è sufficiente risolvere $Ly = e^{(\alpha+i\beta)x}$ e poi prendere la parte reale (immaginaria) della soluzione complessa trovata.

(a) Poichè $\cos x$ non è soluzione dell'omogenea, si cerca una soluzione particolare della forma $y_p(x) = a\cos x + b\sin x$, con a, b costanti da determinare. Si calcola $y_p'(x) = -a\sin x + b\cos x$, $y_p''(x) = -a\cos x - b\sin x$. Sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene $3a\cos x + 3b\sin x = \cos x$, da cui $a = 1/3$, $b = 0$, e $y_p(x) = \frac{1}{3}\cos x$.

(b) In questo caso $\sin 2x$ è già soluzione dell'omogenea, quindi si cerca y_p nella forma $y_p(x) = x(a\cos 2x + b\sin 2x)$. Si trova $y_p(x) = -\frac{1}{4}x\cos 2x$. Mostriamo come si possono abbreviare i calcoli utilizzando il formalismo complesso. Essendo $\sin 2x = \operatorname{Im} e^{2ix}$, invece di risolvere $y'' + 4y = \sin 2x$ risolviamo l'equazione complessa $y'' + 4y = e^{2ix}$ e poi prendiamo la parte immaginaria della soluzione particolare complessa trovata. Poichè e^{2ix} è già soluzione dell'omogenea, il metodo di somiglianza complesso dice di cercare una soluzione della forma $y(x) = Axe^{2ix}$ dove A è una costante complessa da determinare. Si calcola $y'(x) = (A + 2iAx)e^{2ix}$, $y''(x) = (4iA - 4Ax)e^{2ix}$. Sostituendo nell'equazione $y'' + 4y = e^{2ix}$ i termini proporzionali a x si semplificano e si trova $A = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}$. Dunque la soluzione particolare complessa è

$y(x) = -\frac{i}{4}xe^{2ix} = -\frac{i}{4}x(\cos 2x + i\sin 2x) = \frac{1}{4}x\sin 2x - \frac{1}{4}ix\cos 2x \;\Rightarrow$
$y_p(x) = \operatorname{Im} y(x) = -\frac{1}{4}x\cos 2x$.

(c) Il termine forzante è $x^2 = x^2e^{0\cdot x}$. Poichè $\lambda = 0$ non è radice del polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$, e poichè x^2 è un polinomio di secondo grado, si cerca y_p nella forma $y_p(x) = ax^2 + bx + c$. Si ottiene $y_p(x) = \frac{1}{4}(2x^2 + 6x + 7)$.

(d) Poichè e^x non è soluzione dell'omogenea, si cerca $y_p(x) = ae^x$ e si trova $y_p(x) = \frac{1}{3}e^x$.

(e) Si cerca $y_p(x) = ax + b$ e si trova $y_p(x) = -\frac{1}{6}x - \frac{5}{36}$.

(f) Si applica il principio di sovrapposizione, risolvendo separatamente l'equazione differenziale con i termini forzanti $3e^{2x}$ e $4e^{-x}$, e poi sommando le soluzioni particolari ottenute. Nel primo caso essendo e^{2x} già soluzione dell'omogenea, si cerca $y_p(x) = axe^{2x}$. Nel secondo caso si cerca $y_p(x) = be^{-x}$. Il risultato finale è $y_p(x) = \frac{3}{4}xe^{2x} - \frac{4}{3}e^{-x}$.

(g) Procedendo come nell'esercizio precedente, si trova $y_p(x) = \frac{3}{10}e^{-x} + \frac{2}{5}x^2 + \frac{16}{25}x + \frac{44}{125}$.

(h) Siccome $e^{2x}\cos x$ è soluzione dell'omogenea, si cerca una soluzione particolare nella forma $y(x) = x\,e^{2x}(a\,\cos x + b\,\sin x)$. Sostituendo nell'equazione si ottiene, con calcoli un pò laboriosi, $a = 0$ e $b = \frac{1}{2}$, da cui la soluzione particolare $y_p(x) = \frac{1}{2}x\,\sin x\,e^{2x}$. Come nell'esercizio 16 (b), si può ottenere la soluzione più velocemente usando il formalismo complesso. Essendo $e^{2x}\cos x = \operatorname{Re}\left(e^{(2+i)x}\right)$, invece di risolvere $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\cos x$ risolviamo l'equazione complessa

$$y'' - 4y' + 5y = e^{(2+i)x} \tag{9}$$

e poi prendiamo la parte reale della soluzione. Poichè $2 + i$ è radice di $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5$ con molteplicità 1, cerchiamo una soluzione particolare della (9) nella forma

$$y(x) = A\,x\,e^{(2+i)x}$$

dove $A \in \mathbb{C}$ è una costante complessa (polinomio complesso di grado zero) da determinare. Si ha

$$\begin{aligned} y'(x) &= A\,e^{(2+i)x} + A\,x(2+i)e^{(2+i)x}, \\ y''(x) &= 2A(2+i)e^{(2+i)x} + A\,x(2+i)^2 e^{(2+i)x}. \end{aligned}$$

Sostituendo nella (9) otteniamo l'equazione

$$e^{(2+i)x}\left\{A\,x\left[(2+i)^2 - 4(2+i) + 5\right] + 2A(2+i) - 4A\right\} = e^{(2+i)x}.$$

Il termine in parentesi quadra si annulla essendo uguale a $p(2+i) = 0$. Otteniamo $2Ai = 1$, da cui $A = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$, e

$$\begin{aligned} y(x) &= -\tfrac{i}{2}\,x\,e^{(2+i)x} = -\tfrac{i}{2}\,x\,e^{2x}(\cos x + i\sin x) \\ &= x\,e^{2x}(\tfrac{1}{2}\sin x - \tfrac{i}{2}\cos x). \end{aligned}$$

La soluzione particolare reale richiesta è allora

$$y_p(x) = \operatorname{Re} y(x) = \tfrac{1}{2}x\,e^{2x}\,\sin x.$$

Notiamo che la funzione $\operatorname{Im} y(x) = -\frac{1}{2}x\,e^{2x}\,\cos x$ risolve invece l'equazione $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\sin x$.

(i) Si cerca $y_p(x) = a\cos x + b\sin x$ e si trova $y_p(x) = \frac{1}{74}(7\cos x + 5\sin x)$.

(j) Si risolve separatamente l'equazione non omogenea con i 3 termini forzanti e^{-x}, x^2, $\cos x$. Nel primo caso si cerca $y_p(x) = axe^{-x}$, essendo e^{-x} già soluzione dell'omogenea. Nel secondo caso si cerca $y_p(x) = ax^2 + bx + c$, e nel terzo $y_p(x) = a\cos x + b\sin x$. Il risultato finale è
$y_p(x) = -\frac{1}{3}xe^{-x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} - \frac{3}{10}\cos x - \frac{1}{10}\sin x$.

(k) $y_p(x) = \frac{1}{162}(9x^2 - 6x + 1)e^{3x} + \frac{1}{6}x\sin 3x$.

(l) $y_p(x) = \frac{1}{50}[(11 - 5x)e^x\cos 2x + (-2 + 10x)e^x\sin 2x]$. Per abbreviare i calcoli conviene usare il formalismo complesso risolvendo $y'' + y = xe^{(1+2i)x}$ e poi prendendo la parte reale della soluzione.

(m) Procedendo come nel caso dei coefficienti reali, si cerca $y_p(x) = ax + b$ dove a, b sono 2 costanti possibilmente complesse da determinare. Si trova $y_p(x) = x - 2i$.

(n) Si risolve separatamente l'equazione con termine forzante e^{ix} e $-2e^{-ix}$. Nel primo caso, poichè $\lambda = i$ è radice del polinomio caratteristico di molteplicità 2 (si veda l'esercizio 9 (g)), si cerca y_p nella forma $y_p(x) = ax^2e^{ix}$ con $a \in \mathbb{C}$. Nel secondo caso si cerca $y_p(x) = be^{-ix}$ con $b \in \mathbb{C}$. Il risultato è $y_p(x) = \frac{1}{2}x^2e^{ix} + \frac{1}{2}e^{-ix}$.

(o) Le radici del polinomio caratteristico sono $i, -2i$. Il termine forzante è una combinazione lineare di e^{2x} e e^{-2x}. Possiamo risolvere separatamente cercando $y_p(x) = ae^{2x}$ in un caso e $y_p(x) = be^{-2x}$ nell'altro, con $a, b \in \mathbb{C}$. Il risultato è
$y_p(x) = \frac{3-i}{20}e^{2x} + \frac{6+2i}{20}e^{-2x}$.

17. (a) Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda^2 - 1)$ e le radici sono $\lambda = 0, \pm 1$. Il termine forzante è $x = x \cdot e^{0\cdot x}$. Poichè x è un polinomio di primo grado e $\lambda = 0$ è radice di $p(\lambda)$ di molteplicità 1, si cerca $y_p(x) = x(ax + b)$. Il risultato è $y_p(x) = -\frac{1}{2}x^2$.

(b) Si ha $p(\lambda) = \lambda^3 - 8 = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 4)$ e le radici sono $\lambda = 2, -1 \pm i\sqrt{3}$. Il termine forzante è e^{ix} e $\lambda = i$ non è radice di $p(\lambda)$, pertanto si cerca $y_p(x) = ae^{ix}$ con $a \in \mathbb{C}$. Il risultato è $y_p(x) = \frac{i-8}{65} e^{ix}$.

(c) È sufficiente prendere la parte reale della soluzione complessa trovata nell'esercizio precedente. Essendo

$$\tfrac{i-8}{65} e^{ix} = \tfrac{i-8}{65}(\cos x + i \sin x) = \tfrac{1}{65}[-8\cos x - \sin x + i(\cos x - 8\sin x)]$$

otteniamo $y_p(x) = \frac{1}{65}(-8\cos x - \sin x)$. Alternativamente si cerca y_p nella forma $a\cos x + b \sin x$ e si procede direttamente.

(d) Prendendo la parte immaginaria della soluzione complessa trovata nell'esercizio 17 (b) si ottiene $y_p(x) = \frac{1}{65}(\cos x - 8\sin x)$.

(e) Si ha $p(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3$ quindi $\lambda = -1$ è radice di $p(\lambda)$ di molteplicità 3. Il termine forzante $x^2 e^{-x}$ è il prodotto di un polinomio di secondo grado per e^{-x}. Dunque si cerca $y_p(x) = x^3(ax^2 + bx + c)e^{-x}$. Il risultato è $y_p(x) = \frac{1}{60} x^5 e^{-x}$.

(f) $y_p(x) = \frac{1}{60} x^5 - \frac{1}{4} e^{-x} \cos x + \frac{1}{4} e^{-x} \sin x$.

(g) Si ha $p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 2$. Si vede facilmente che $p(1) = 0$. Scomponendo con Ruffini si trova $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 2)$, da cui le radici $\lambda = 1, 1 \pm i$. Il termine forzante $xe^x \sin x$ è il prodotto di un polinomio di primo grado per la funzione $e^x \sin x$, che è già soluzione dell'omogenea. In accordo con il metodo di somiglianza reale, vi è una soluzione particolare della forma

$y_p(x) = xe^x[(ax + b)\cos x + (cx + d)\sin x]$. Per abbreviare i calcoli è preferibile utilizzare il formalismo complesso. Essendo $xe^x \sin x = \operatorname{Im} xe^{(1+i)x}$, si risolve l'equazione complessa

$$y''' - 3y'' + 4y' - 2y = xe^{(1+i)x}$$

e si prende la parte immaginaria della soluzione trovata. Il metodo di somiglianza complesso dice di cercare una soluzione particolare della forma

$$y(x) = x(Ax + B)e^{(1+i)x} = (Ax^2 + Bx)e^{(1+i)x},$$

con $A, B \in \mathbb{C}$. Calcolando y', y'' e y''' e sostituendo nell'equazione complessa si ottiene con facili calcoli $A = -1/4$, $B = -3i/4$. La soluzione particolare complessa è

$$y(x)x(-\tfrac{1}{4}x - \tfrac{3}{4}i)e^{(1+i)x} = xe^x\left[-\tfrac{1}{4}x\cos x + \tfrac{3}{4}\sin x + i\left(-\tfrac{3}{4}\cos x - \tfrac{1}{4}x \sin x\right)\right].$$

La soluzione particolare reale è $y_p(x) = xe^x\left(-\frac{3}{4}\cos x - \frac{1}{4}x\sin x\right)$.

(h) $y_p(x) = \frac{1}{17}\cos x$. (Conviene risolvere $y^{(4)} + 16y = e^{ix}$.)

(i) Si ha $p(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 6\lambda^2 - 4\lambda + 1 = (\lambda - 1)^4$, quindi $\lambda = 1$ è radice di $p(\lambda)$ di molteplicità 4 e l'integrale generale dell'omogenea è $(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3)e^x$. Poichè il termine forzante è proprio e^x, una soluzione particolare va cercata nella forma $y_p(x) = ax^4 e^x$. Il risultato è $y_p(x) = \frac{1}{24} x^4 e^x$.

(j) Si ha $p(\lambda) = \lambda^4 - 1 = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1)$ da cui le radici semplici $\lambda = \pm 1, \pm i$. Il termine forzante è e^x, quindi si cerca $y_p(x) = axe^x$. Il risultato è $y_p(x) = \frac{1}{4} xe^x$.

(k) Si cerca $y_p(x) = axe^{ix}$ con $a \in \mathbb{C}$. Si trova $a = i/4 \Rightarrow y_p(x) = \frac{i}{4} xe^{ix}$.

(l) Prendendo la parte reale della soluzione trovata nell'esercizio precedente si ottiene $y_p(x) = -\frac{1}{4}x\sin x$.

(m) Prendendo la parte immaginaria della soluzione complessa trovata nell'esercizio 17 (k) si ottiene $y_p(x) = \frac{1}{4}x\cos x$.

(n) Il termine forzante è $e^x \cos x = \operatorname{Re} e^{(1+i)x}$. Poichè $1+i$ non è radice di $p(\lambda)$, vi è una soluzione particolare della forma $y_p(x) = e^x(a\cos x + b\sin x)$. Per abbreviare i calcoli conviene usare il formalismo complesso e risolvere $y^{(4)} - y = e^{(1+i)x}$. Cercando una soluzione della forma $y(x) = ce^{(1+i)x}$ con $c \in \mathbb{C}$, si trova

$$c = \tfrac{1}{(1+i)^4-1} = -\tfrac{1}{5},$$

da cui la soluzione particolare complessa $y(x) = -\frac{1}{5}e^{(1+i)x}$. Prendendone la parte reale otteniamo $y_p(x) = -\frac{1}{5}e^x\cos x$.

(o) Il metodo di somiglianza reale dice che vi è una soluzione particolare della forma $y_p(x) = e^x[(ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x]$. Conviene però risolvere l'equazione complessa $y^{(4)} - y = xe^{(1+i)x}$ e poi prendere la parte immaginaria (essendo $xe^x \sin x = \operatorname{Im} xe^{(1+i)x}$). In accordo con il metodo di somiglianza complesso, cerchiamo una soluzione particolare complessa della forma $y(x) = (Ax+B)e^{(1+i)x}$ con $A, B \in \mathbb{C}$. Sostituendo nell'equazione complessa si ottiene abbastanza facilmente che $A = -1/5$, $B = 8(1-i)/25$. La soluzione complessa è dunque $y(x) = [-\frac{1}{5}x + \frac{8}{25}(1-i)]e^{(1+i)x}$. Prendendone la parte immaginaria otteniamo

$$y_p(x) = e^x\left[-\tfrac{8}{25}\cos x + (-\tfrac{1}{5}x + \tfrac{8}{25})\sin x\right].$$

18. Ricordiamo che l'integrale generale dell'equazione non omogenea $Ly = f(x)$ è dato da $y(x) = y_{om}(x) + y_p(x)$, dove y_{om} è l'integrale generale dell'equazione omogenea associata $Ly = 0$, e y_p è una soluzione particolare qualsiasi dell'equazione non omogenea.

(a) Determiniamo innanzitutto l'integrale generale. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 15 = (\lambda-3)(\lambda-5)$ e la soluzione generale dell'omogenea è $y_{om}(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{5x}$. L'equazione non omogenea ha termine forzante $2e^{3x}$. Poichè e^{3x} è già soluzione dell'omogenea, cerchiamo una soluzione particolare della non omogenea nella forma $y_p(x) = axe^{3x}$. Si ha

$$y_p'(x) = a(3x+1)e^{3x}, \quad y_p''(x) = a(9x+6)e^{3x}.$$

Sostituendo nell'equazione non omogenea otteniamo

$$a\,[9x + 6 - 8(3x+1) + 15x]\,e^{3x} = 2\,e^{3x},$$

da cui $a = -1$. L'integrale generale è dunque

$$y(x) = c_1\,e^{3x} + c_2\,e^{5x} - x\,e^{3x}.$$

Calcolando $y'(x)$ e imponendo le condizioni iniziali $y(0) = 0 = y'(0)$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 3c_1 + 5c_2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -1/2 \\ c_2 = 1/2. \end{cases}$$

La soluzione del problema di Cauchy è infine

$$y(x) = -\tfrac{1}{2}e^{3x} + \tfrac{1}{2}e^{5x} - x\,e^{3x}.$$

(b) Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$, quindi l'equazione omogenea ha la soluzione generale $y_{om}(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$. L'equazione non omogenea ha termine forzante xe^x. Poichè x un polinomio di primo grado e poichè e^x è già soluzione dell'omogenea, cerchiamo una soluzione particolare della non omogenea nella forma $y_p(x) = x(ax+b)e^x$. Si ha

$$y_p'(x) = [ax^2 + (2a+b)x + b]e^x, \quad y_p''(x) = [ax^2 + (4a+b)x + 2a + 2b]e^x.$$

Sostituendo nell'equazione non omogenea si ottiene

$$[ax^2 + (4a+b)x + 2a + 2b - ax^2 - bx]e^x = x\,e^x,$$

da cui $4ax + 2a + 2b = x$, e quindi

$$\begin{cases} 4a = 1 \\ 2a + 2b = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 1/4 \\ b = -1/4. \end{cases}$$

La soluzione particolare è $\frac{1}{4}x^2e^x - \frac{1}{4}xe^x$, e l'integrale generale dell'equazione non omogenea è

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \tfrac{1}{4}x^2 e^x - \tfrac{1}{4}x\,e^x.$$

Le condizioni iniziali danno origine al sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 - \frac{1}{4} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_1 = 1/8 \\ c_2 = -1/8. \end{cases}$$

La soluzione del problema di Cauchy è infine

$$y(x) = \tfrac{1}{8}\left[e^x - e^{-x} + 2x^2 e^x - 2x\,e^x\right].$$

(c) Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 = \lambda^2(\lambda+1)$, quindi c' è la radice doppia $\lambda = 0$ e la radice semplice $\lambda = -1$. L'integrale generale dell'omogenea è $y_{om}(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x}$. Il termine forzante è $1 = 1 \cdot e^{0 \cdot x}$, cioè il prodotto di un polinomio di grado zero per l'esponenziale $e^{0 \cdot x}$. Poichè $\lambda = 0$ è radice di $p(\lambda)$ di molteplicità 2, cerchiamo una soluzione particolare della non omogenea nella forma $y_p(x) = x^2 \cdot a$. Si ha $y_p'(x) = 2ax$, $y_p''(x) = 2a$, $y_p'''(x) = 0$. Sostituendo nella non omogenea otteniamo $a = 1/2$, da cui l'integrale generale

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + \tfrac{1}{2}x^2.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene il sistema

$$c_1 + c_3 = 0, \quad c_2 - c_3 = 0, \quad c_3 + 1 = 0,$$

la cui soluzione è $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = -1$. La soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = 1 - x - e^{-x} + \frac{1}{2}x^2$.

(d) Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda^2 + \lambda + 1)$, le radici di $p(\lambda)$ sono $\lambda = 0, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, e la soluzione generale dell'omogenea è
$y_{om}(x) = c_1 + c_2 e^{-x/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_3 e^{-x/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$.
Una soluzione particolare della non omogenea deve avere la forma $y_p(x) = x \cdot a$. Si ha $y_p'(x) = a$, $y_p''(x) = 0 = y_p'''(x)$. Sostituendo nella non omogenea otteniamo $a = 1$, da cui $y_p(x) = x$ e l'integrale generale

$y(x) = c_1 + c_2 e^{-x/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_3 e^{-x/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x + x$.

Imponendo le condizioni iniziali si trova, con facili calcoli, $c_1 = -1$, $c_2 = 1$, $c_3 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, da cui la soluzione del problema di Cauchy

$y(x) = -1 + e^{-x/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x - \frac{\sqrt{3}}{3} e^{-x/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x + x$.

(e) Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = (\lambda+1)(\lambda^2+1)$ e l'integrale generale dell'omogenea è $y_{om}(x) = c_1 e^{-x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x$. Il termine forzante è $1 = 1 \cdot e^{0 \cdot x}$. Poichè $\lambda = 0$ non è radice di $p(\lambda)$, la non omogenea ha una soluzione particolare della forma $y_p(x) = a$. Si ha $y_p' = y_p'' = y_p''' = 0$. Sostituendo nella non omogenea si ottiene $a = 1$ da cui $y_p(x) = 1$ e l'integrale generale

$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x + 1$.

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene il sistema

$c_1 + c_2 + 1 = 0, \quad -c_1 + c_3 = 0, \quad c_1 - c_2 = 0,$

la cui soluzione è $c_1 = c_2 = c_3 = -1/2$. La soluzione del problema di Cauchy è

$y(x) = 1 - \frac{1}{2}(e^{-x} + \cos x + \sin x)$.

19. Ricordiamo che la *risposta impulsiva* di un'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti (reali o complessi) di ordine n

$$Ly = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

è la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(n-2)}(0) = 0, \quad y^{(n-1)}(0) = 1. \end{cases}$$

Il metodo della risposta impulsiva consente di determinare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea $Ly = f(x)$ quando f è una funzione continua qualsiasi su un intervallo I. Indicando con $g(x)$ la risposta impulsiva, si ha che l'equazione $Ly = f(x)$ ha una soluzione particolare data dall'*integrale di convoluzione*

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} g(x-t) f(t)\, dt \qquad (x_0, x \in I). \tag{10}$$

Più precisamente, si dimostra che y_p risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} Ly = f(x) \\ y(x_0) = y'(x_0) = \cdots = y^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases}$$

La formula (10) fornisce dunque la soluzione particolare dell'equazione non omogenea $Ly = f(x)$ che soddisfa condizioni iniziali tutte nulle nel punto $x_0 \in I$ e con un termine forzante continuo arbitrario $f \in C^0(I)$. Notiamo che se $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sono costanti arbitrarie, la soluzione del problema di Cauchy non omogeneo

$$\begin{cases} Ly = f(x) \\ y(x_0) = \alpha_1, \; y'(x_0) = \alpha_2, \; \ldots, \; y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_n \end{cases}$$

è data da $y(x) = y_{om}(x) + y_p(x)$, dove y_{om} risolve il problema di Cauchy omogeneo con le stesse condizioni iniziali di y, cioè

$$\begin{cases} Ly = 0 \\ y(x_0) = \alpha_1, \; y'(x_0) = \alpha_2, \; \ldots, \; y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_n. \end{cases}$$

La risposta impulsiva $g(x)$ è completamente determinata dalle radici del polinomio caratteristico $p(\lambda)$ e dalle loro molteplicità. Per $n = 1$, $g(x)$ è la soluzione del problema $y' + ay = 0$, $y(0) = 1$, ed è data da $g(x) = e^{\lambda_1 x}$, dove $\lambda_1 = -a$ è l'unica radice di $p(\lambda) = \lambda + a$. Per $n = 2$, $g(x)$ è la soluzione del problema

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \end{cases}$$

ed è data dalle seguenti formule. Siano λ_1, λ_2 le radici del polinomio caratteristico $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$. Allora

- se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ($\Leftrightarrow \ \Delta = a^2 - 4b \neq 0$)

$$g(x) = \tfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}\right);$$

- se $\lambda_1 = \lambda_2$ ($\Leftrightarrow \ \Delta = 0$)

$$g(x) = x\, e^{\lambda_1 x}.$$

Se a e b sono reali, $g(x)$ è reale e possiamo riscriverla come segue nel caso $\Delta \neq 0$: posto $\alpha = -a/2$ e

$$\beta = \begin{cases} \sqrt{-\Delta}/2 & \text{se } \Delta < 0 \\ \sqrt{\Delta}/2 & \text{se } \Delta > 0 \end{cases} \quad \text{così che} \quad \lambda_{1,2} = \begin{cases} \alpha \pm i\beta & \text{se } \Delta < 0 \\ \alpha \pm \beta & \text{se } \Delta > 0 \end{cases}$$

si ha

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2i\beta}\left(e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}\right) = \frac{1}{\beta}\, e^{\alpha x}\, \sin(\beta x) & \text{se } \Delta < 0 \\ \frac{1}{2\beta}\left(e^{(\alpha+\beta)x} - e^{(\alpha-\beta)x}\right) = \frac{1}{\beta}\, e^{\alpha x}\, \sinh(\beta x) & \text{se } \Delta > 0. \end{cases}$$

Per n generico, siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ le radici del polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

(non necessariamente distinte, ognuna contata con la sua molteplicità), e indichiamo con $g_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}$ la risposta impulsiva dell'equazione $Ly = 0$. Vale allora la formula ricorsiva:

$$g_{\lambda_1 \cdots \lambda_n}(x) = e^{\lambda_n x} \int_0^x e^{-\lambda_n t} g_{\lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}(t)\, dt, \tag{11}$$

che consente di calcolare $g_{\lambda_1 \ldots \lambda_n}$ iterativamente. Per esempio per $n = 3$ otteniamo dalla (11) le seguenti formule per la risposta impulsiva $g = g_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}$:

- se $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ (radici tutte distinte)

$$g(x) = \tfrac{e^{\lambda_1 x}}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)} + \tfrac{e^{\lambda_2 x}}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)} + \tfrac{e^{\lambda_3 x}}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)};$$

- se $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$

$$g(x) = \tfrac{1}{(\lambda_1-\lambda_3)^2}\left[e^{\lambda_3 x} - e^{\lambda_1 x} + (\lambda_1 - \lambda_3)\, x\, e^{\lambda_1 x}\right];$$

- se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$

$$g(x) = \tfrac{1}{2}\, x^2\, e^{\lambda_1 x}.$$

Notiamo che se i coefficienti dell'equazione differenziale $y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0$ sono tutti reali, allora $g(x)$ è reale. Infatti nel caso di radici tutte distinte se $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ e $\lambda_{2,3} = \alpha \pm i\beta$ con $\beta \neq 0$, si calcola

$$g(x) = \tfrac{1}{(\lambda_1-\alpha)^2+\beta^2}\left[e^{\lambda_1 x} + \tfrac{1}{\beta}(\alpha-\lambda_1)\, e^{\alpha x}\,\sin\beta x - e^{\alpha x}\,\cos\beta x\right].$$

In tutti gli altri casi $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sono reali se $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.

Per n generico si ottiene un'espressione semplice della risposta impulsiva $g = g_{\lambda_1 \dots \lambda_n}$ nel caso di radici tutte distinte o tutte uguali, cioè

- se $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \neq \lambda_n$ (radici tutte distinte)

  $$g(x) = c_1\, e^{\lambda_1 x} + c_2\, e^{\lambda_2 x} + \cdots + c_n\, e^{\lambda_n x},$$

  dove

  $$c_k = \frac{1}{\prod_{j\neq k}(\lambda_k - \lambda_j)} \qquad (1 \leq k \leq n);$$

- se $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n$

  $$g(x) = \frac{1}{(n-1)!}\, x^{n-1}\, e^{\lambda_1 x}.$$

Nel caso generale, siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ le radici *distinte* di $p(\lambda)$, di molteplicità $m_1, \dots, m_k$, con $m_1 + \cdots + m_k = n$. Esistono allora dei polinomi $G_1, \dots, G_k$, di gradi rispettivamente $m_1 - 1, \dots, m_k - 1$, tali che

$$g(x) = G_1(x) e^{\lambda_1 x} + \cdots + G_k(x) e^{\lambda_k x}.$$

Un metodo per determinare i polinomi $G_1, \dots, G_k$ è il seguente. Consideriamo la decomposizione di $1/p(\lambda)$ in fratti semplici su $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{m_k}} &= \frac{c_{11}}{\lambda-\lambda_1} + \frac{c_{12}}{(\lambda-\lambda_1)^2} + \cdots + \frac{c_{1m_1}}{(\lambda-\lambda_1)^{m_1}} + \cdots \\ &\quad + \frac{c_{k1}}{\lambda-\lambda_k} + \frac{c_{k2}}{(\lambda-\lambda_k)^2} + \cdots + \frac{c_{km_k}}{(\lambda-\lambda_k)^{m_k}}.\end{aligned}$$

Si dimostra allora che

$$G_j(x) = c_{j1} + c_{j2}x + c_{j3}\frac{x^2}{2!} + \cdots + c_{jm_j}\frac{x^{m_j-1}}{(m_j-1)!} \qquad (1 \leq j \leq k).$$

(a) Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2$, dunque $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, e la risposta impulsiva è $g(x) = x\, e^x$. Il termine forzante $\frac{e^x}{x+2}$ è continuo per $x > -2$ e per $x < -2$. Poichè le condizioni iniziali sono poste nel punto $x_0 = 0$, possiamo lavorare nell'intervallo $I = (-2, +\infty)$. Dalla formula (10) otteniamo la seguente soluzione del problema proposto nell'intervallo I:

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x (x-t)\, e^{x-t}\, \frac{e^t}{t+2}\, dt = e^x \int_0^x \frac{x-t}{t+2}\, dt \\ &= e^x \int_0^x \left(\frac{x+2}{t+2} - 1\right) dt = e^x\Big[(x+2)\log(t+2) - t\Big]_0^x \\ &= e^x\big[(x+2)\log(x+2) - x - (x+2)\log 2\big] \\ &= e^x (x+2)\log\left(\tfrac{x+2}{2}\right) - x\, e^x. \end{aligned}$$

Notiamo che l'integrale generale dell'equazione $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x+2}$ nell'intervallo I si può scrivere come

$$y_{gen}(x) = c_1 e^x + c_2 x\, e^x + e^x (x+2) \log(x+2) \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Infatti il termine $-x\, e^x - (x+2)e^x \log 2$ nella soluzione particolare trovata sopra può essere inglobato in $y_{om}(x) = c_1 e^x + c_2 x\, e^x$.

(b) Si ha $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$, dunque $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = i$, e la risposta impulsiva è $g(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin x$. I dati iniziali sono posti nel punto $x_0 = 0$ e possiamo lavorare nell'intervallo $I = (-\pi/2, \pi/2)$, dove il termine forzante $\frac{1}{\cos x}$ è continuo. Dalla formula (10) otteniamo

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x \sin(x-t) \frac{1}{\cos t}\, dt \\ &= \int_0^x (\sin x \cos t - \cos x \sin t) \frac{1}{\cos t}\, dt \\ &= \sin x \int_0^x dt - \cos x \int_0^x \frac{\sin t}{\cos t}\, dt \\ &= x \sin x + \cos x \, \log(\cos x). \end{aligned}$$

(c) Si ha $p(\lambda) = \lambda^2 - 1$, dunque $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, e la risposta impulsiva è $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$. Il termine forzante $\frac{1}{\operatorname{ch} x}$ è continuo su tutto $\mathbb{R}$. Dalla formula (10) si ha

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x \operatorname{sh}(x-t) \frac{1}{\operatorname{ch} t}\, dt \\ &= \int_0^x (\operatorname{sh} x \operatorname{ch} t - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} t) \frac{1}{\operatorname{ch} t}\, dt \\ &= \operatorname{sh} x \int_0^x dt - \operatorname{ch} x \int_0^x \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}\, dt \\ &= x \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x \, \log(\operatorname{ch} x). \end{aligned}$$

(d) $y(x) = x e^{-x} \arctan x - \frac{1}{2} e^{-x} \log(1 + x^2)$.

(e) $y(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos x} - \cos x\right)$.

(f) La risposta impulsiva è $g(x) = \sin x$, il termine forzante $\tan x$ è continuo nell'intervallo $I = (-\pi/2, \pi/2)$. Dalla formula (10) si ha

$$\begin{aligned} y(x) = &\int_0^x \sin(x-t) \tan t\, dt = \sin x \int_0^x \sin t\, dt - \cos x \int_0^x \tfrac{\sin^2 t}{\cos t}\, dt \\ = &\ \sin x (1 - \cos x) - \cos x \int_0^x \tfrac{1 - \cos^2 t}{\cos t}\, dt \\ = &\ \sin x (1 - \cos x) + \cos x \int_0^x \cos t\, dt - \cos x \int_0^x \tfrac{1}{\cos t}\, dt \\ = &\ \sin x - \cos x \int_0^x \tfrac{1}{\cos t}\, dt. \end{aligned}$$

Per calcolare l'integrale facciamo il cambio di variabili

$$\tan \tfrac{t}{2} = s \quad \Rightarrow \quad \cos t = \tfrac{1-s^2}{1+s^2}, \quad dt = \tfrac{2}{1+s^2} ds \quad \Rightarrow$$

$$\int_0^x \tfrac{1}{\cos t}\,dt = \int_0^{\tan x/2} \tfrac{2}{1-s^2}\,ds == -\int_0^{\tan x/2} \left(\tfrac{1}{s-1} - \tfrac{1}{s+1}\right)\,dt$$
$$= -\left[\log\left|\tfrac{s-1}{s+1}\right|\right]_0^{\tan x/2} = -\log\left|\tfrac{\tan x/2-1}{\tan x/2+1}\right|$$
$$= -\log\left|\tfrac{\sin x/2-\cos x/2}{\sin x/2+\cos x/2}\right| = -\log\left|\tfrac{\sin^2 x/2-\cos^2 x/2}{(\sin x/2+\cos x/2)^2}\right|$$
$$= -\log\left|\tfrac{\cos x}{1+\sin x}\right|.$$

Notando che $\frac{\cos x}{1+\sin x} > 0\ \forall x \in I$, otteniamo infine

$$y(x) = \sin x + \cos x \log\left(\tfrac{\cos x}{1+\sin x}\right).$$

(g) $y(x) = \sin x \log(\sin x) - (x - \pi/2)\cos x$ nell'intervallo $I = (0, \pi)$.

(h) $y(x) = \mathrm{sh}\, x \log(\mathrm{sh}\, x/\mathrm{sh}\, 1) - (x-1)\mathrm{ch}\, x$ nell'intervallo $I = (0, +\infty)$.

(i) Si ha $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1) \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0$, e la risposta impulsiva è $g(x) = e^x - 1$. Il termine forzante $\frac{1}{\mathrm{ch}\, x}$ è continuo su $\mathbb{R}$. Dalla formula (10) si ha

$$y(x) = \int_0^x \left(e^{x-t} - 1\right) \frac{1}{\mathrm{ch}\, t}\,dt = e^x \int_0^x \frac{e^{-t}}{\mathrm{ch}\, t}\,dt - \int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}\, t}\,dt.$$

I due integrali si calcolano elementarmente:

$$\int \frac{1}{\mathrm{ch}\, t}\,dt = 2\int \frac{1}{e^t + e^{-t}}\,dt = 2\int \frac{e^t}{e^{2t}+1}\,dt$$
$$= 2\arctan\left(e^t\right) + C,$$

$$\int \frac{e^{-t}}{\mathrm{ch}\, t}\,dt = 2\int \frac{1}{e^{2t}+1}\,dt = 2\int \frac{1 + e^{2t} - e^{2t}}{1+e^{2t}}\,dt$$
$$= 2t - \log\left(1 + e^{2t}\right) + C'.$$

Otteniamo infine

$$y(x) = e^x\Big[2t - \log\left(1 + e^{2t}\right)\Big]_0^x - 2\Big[\arctan\left(e^t\right)\Big]_0^x$$
$$= e^x\Big[2x - \log\left(1 + e^{2x}\right)\Big] + e^x \log 2 - 2\arctan\left(e^x\right) + \tfrac{\pi}{2},$$

(j) $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm i$, la risposta impulsiva è $g(x) = e^x \sin x$. Il termine forzante $1 + \cos x$ è continuo su $I = (-\pi, \pi)$. Dalla formula (10) otteniamo

$$y(x) = \int_0^x e^{x-t}\sin(x-t)\tfrac{e^t}{1+\cos t}\,dt = e^x \sin x \int_0^x \tfrac{\cos t}{1+\cos t}\,dt - e^x \cos x \int_0^x \tfrac{\sin t}{1+\cos t}\,dt.$$

I due integrali si calcolano elementarmente:

$$\int_0^x \tfrac{\sin t}{1+\cos t}\,dt = [-\log(1+\cos t)]_0^x = -\log\left(\tfrac{1+\cos x}{2}\right),$$

$$\int_0^x \tfrac{\cos t}{1+\cos t}\,dt = \int_0^x \tfrac{\cos t + 1 - 1}{1+\cos t}\,dt = \int_0^x dt - \int_0^x \tfrac{1}{1+\cos t}\,dt$$
$$= x - \int_0^x \tfrac{1}{2\cos^2 t/2}\,dt = x - \left[\tan\tfrac{t}{2}\right]_0^x = x - \tan\tfrac{x}{2} \quad \Rightarrow$$

$$y(x) = e^x \sin x(x - \tan\tfrac{x}{2}) + e^x \cos x \log\left(\tfrac{1+\cos x}{2}\right).$$

(k) $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)(\lambda-2) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 1, 2$. La risposta impulsiva è $g(x) = e^{2x} - e^x$. Il termine forzante $\frac{e^{2x}}{(e^x+1)^2}$ è continuo su $I = \mathbb{R}$. Dalla (10) si ha

$$y(x) = e^{2x} \int_0^x \tfrac{1}{(e^t+1)^2}\, dt - e^x \int_0^x \tfrac{e^t}{(e^t+1)^2}\, dt.$$

I due integrali si calcolano facilmente (ponendo ad esempio $e^t = s$) e si ottiene:

$$y(x) = e^{2x}\left(x - \log(e^x+1) + \tfrac{1}{e^x+1} + \log 2 - \tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{e^x}{e^x+1} - \tfrac{1}{2}e^x.$$

(l) $p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda-1)^3 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 1$ con molteplicità 3. La risposta impulsiva è $g(x) = \frac{1}{2}x^2 e^x$. Il termine forzante $\frac{e^x}{x+1}$ è continuo su $I = (-1, +\infty)$. Dalla formula (10) otteniamo

$$y(x) = \int_0^x \tfrac{1}{2}(x-t)^2 e^{x-t} \tfrac{e^t}{t+1}\, dt = \tfrac{1}{2}e^x \int_0^x \tfrac{x^2+t^2-2tx}{t+1}\, dt.$$

L'integrale si calcola facilmente e si ottiene

$$y(x) = \tfrac{1}{2}(x+1)^2 e^x \log(x+1) - \tfrac{1}{2}xe^x(\tfrac{3}{2}x+1).$$

(m) $p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = (\lambda-2)(\lambda^2-1) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \pm 1, 2$. La risposta impulsiva si calcola facilmente: $g(x) = -\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{6}e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}$. Il termine forzante $\frac{e^x}{e^x+1}$ è continuo su $\mathbb{R}$. Dalla formula (10) otteniamo

$$y(x) = -\tfrac{1}{2}e^x \int_0^x \tfrac{1}{e^t+1}\, dt + \tfrac{1}{6}e^{-x} \int_0^x \tfrac{e^{2t}}{e^t+1}\, dt + \tfrac{1}{3}e^{2x} \int_0^x \tfrac{e^{-t}}{e^t+1}\, dt.$$

I 3 integrali si calcolano facilmente con la sostituzione $e^t = s$ e decomponendo in fratti semplici. Il risultato finale è

$$\begin{aligned} y(x) = {} & (\tfrac{1}{2}e^x - \tfrac{1}{6}e^{-x} + \tfrac{1}{3}e^{2x}) \log(e^x+1) - \tfrac{1}{2}xe^x - \tfrac{1}{3}xe^{2x} + \tfrac{1}{6} \\ & + (-\tfrac{1}{2}\log 2 - \tfrac{1}{3})e^x + \tfrac{\log 2 - 1}{6}e^{-x} + \tfrac{1-\log 2}{6}e^{2x}. \end{aligned}$$

(n) $p(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda = \lambda(\lambda^2+4) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 0, \pm 2i$. La risposta impulsiva si calcola facilmente: $g(x) = \frac{1}{4}(1 - \cos 2x)$. Il termine forzante $\frac{1}{\sin 2x}$ è continuo su $I = (0, \pi/2)$. Dalla formula (10) otteniamo

$$y(x) = \tfrac{1}{4}\int_{\pi/4}^x \tfrac{1-\cos 2(x-t)}{\sin 2t}\, dt = \tfrac{1}{4}\int_{\pi/4}^x \tfrac{1}{\sin 2t}\, dt - \tfrac{1}{4}\cos 2x \int_{\pi/4}^x \tfrac{\cos 2t}{\sin 2t}\, dt - \tfrac{1}{4}\sin 2x \int_{\pi/4}^x dt.$$

Il secondo e il terzo integrale sono immediati. Il primo integrale si calcola scrivendo

$$\int \tfrac{1}{\sin 2t}\, dt = \int \tfrac{1}{2\sin t \cos t}\, dt = \tfrac{1}{2}\int \tfrac{1}{\tan t \cos^2 t}\, dt = \tfrac{1}{2}\log(\tan t) + k.$$

Il risultato finale è

$$y(x) = \tfrac{1}{8}\log(\tan x) - \tfrac{1}{8}\cos 2x \log(\sin 2x) - \tfrac{1}{4}(x - \pi/4)\sin 2x.$$

20. (a) Posto $y(x) = x^r$ si ha $y'(x) = rx^{r-1}$, $y''(x) = r(r-1)x^{r-2}$. Sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene $r(r-1)x^{r-2} + \frac{1}{x}rx^{r-1} - \frac{1}{x^2}x^r = 0$, cioè $x^r[r(r-1) + r - 1] = 0$, da cui $r^2 - 1 = 0$ e infine $r = \pm 1$. Abbiamo dunque le 2 soluzioni $y_1(x) = x$, $y_2(x) = 1/x$.

(b) Per dimostrare che y_1 e y_2 sono linearmente indipendenti per $x > 0$ è sufficiente calcolare il loro Wronskiano e mostrare che è diverso da zero su $\mathbb{R}^+$. Si ha

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1/x \\ 1 & -1/x^2 \end{vmatrix} = -\frac{2}{x} \neq 0 \quad \forall x > 0.$$

(c) Poichè y_1 e y_2 sono linearmente indipendenti, ogni soluzione dell'equazione differenziale si può scrivere come $y(x) = c_1 x + c_2/x$. Imponendo le condizioni iniziali si trova che

$$\begin{cases} y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0 \\ y(1) = 1, \ y'(1) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \tfrac{1}{2}(x + \tfrac{1}{x}),$$

$$\begin{cases} y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0 \\ y(1) = 0, \ y'(1) = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \tfrac{1}{2}(x - \tfrac{1}{x}).$$

21. (a) Procedendo come nell'esercizio precedente si trova che la funzione $y(x) = x^r$ risolve l'equazione differenziale $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$ se e solo se vale $r(r-1)(r-2) - 3r(r-1) + 6r - 6 = 0$, cioè $(r-1)(r^2 - 5r + 6) = 0$, da cui $r = 1, 2, 3$. Abbiamo dunque le 3 soluzioni $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$, $y_3(x) = x^3$.

(b) Calcolando il Wronskiano di y_1, y_2, y_3 si ha

$$W(y_1, y_2, y_3)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 2x^3 \neq 0 \quad \forall x > 0.$$

Quindi y_1, y_2, y_3 sono linearmente indipendenti per $x > 0$.

22. Consideriamo un'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine in forma normale $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$, dove $a, b \in C^0(I)$, I intervallo. Supponiamo di averne trovato una soluzione y_1 con $y_1(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$. Il metodo di riduzione dell'ordine consente allora di determinare una seconda soluzione indipendente da y_1. Si cerca tale soluzione nella forma $y_2(x) = z(x)y_1(x)$, dove $z(x)$ è una funzione da determinare. Si trova che la funzione $v = z'$ soddisfa l'equazione lineare del primo ordine $v' = -(2\frac{y_1'}{y_1} + a)v$, da cui

$$v(x) = k\frac{e^{-A(x)}}{(y_1(x))^2},$$

dove $A(x)$ è una qualsiasi primitiva di $a(x)$ su I e $k \in \mathbb{R}$ è una costante arbitraria. Integrando nuovamente e moltiplicando per $y_1(x)$ otteniamo la seconda soluzione

$$y_2(x) = k y_1(x) \int \frac{e^{-A(x)}}{(y_1(x))^2} \, dx. \tag{12}$$

Calcolando il Wronskiano di y_1 e y_2 si trova facilmente che

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = k e^{-A(x)} \neq 0 \ \ \forall k \neq 0.$$

Ricordando che se y è soluzione dell'equazione omogenea allora qualunque multiplo ky è ancora soluzione, concludiamo che qualunque valore di $k \neq 0$ nella (12), per esempio

$k = 1$, dà una soluzione y_2 indipendente da y_1. Inoltre nella (12) possiamo omettere la costante arbitraria di integrazione proveniente dall'integrale indefinito in quanto ogni termine del tipo $k'y_1(x)$ è proporzionale alla prima soluzione. Per esempio fissando un punto $x_0 \in I$ e prendendo sempre le primitive che si annullano in x_0, otteniamo la formula

$$y_2(x) = y_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-\int_{x_0}^{t} a(s)\, ds}}{(y_1(t))^2}\, dt$$

che fornisce una soluzione dell'equazione che si annulla in x_0.

(a) La verifica che $y_1(x) = x^3$ risolve l'equazione è immediata. Riscrivendo l'equazione in forma normale si ha $y'' - \frac{7}{x}y' + \frac{15}{x^2}y = 0$. Confrontando con $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ vediamo che $a(x) = -\frac{7}{x}$ e dunque $A(x) = -7\log x$. Sostituendo nella formula (12) otteniamo

$$y_2(x) = kx^3 \int \tfrac{e^{7\log x}}{(x^3)^2}\, dx = kx^3 \int \tfrac{x^7}{x^6}\, dx = kx^3(\tfrac{1}{2}x^2 + c).$$

Omettendo la costante di integrazione c (che dà un multiplo di y_1) e prendendo ad esempio $k = 2$ (ricordiamo che k si può fissare arbitrariamente) otteniamo la seconda soluzione indipendente nella forma $y_2(x) = x^5$.

(b) La verifica che $y_1(x) = x$ risolve l'equazione è immediata. Riscrivendo l'equazione in forma normale si ha $y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$, da cui $a(x) = -\frac{1}{x}$ e $A(x) = -\log x$. Sostituendo nella formula (12) con $k = 1$ e omettendo la costante di integrazione otteniamo

$$y_2(x) = x \int \tfrac{e^{\log x}}{x^2}\, dx = x \int \tfrac{1}{x}\, dx = x \log x.$$

(c) La verifica che $y_1(x) = x$ risolve l'equazione $y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0$ è facile. Si ha $a(x) = -4x \Rightarrow A(x) = -2x^2$. Sostituendo nella (12) con $k = 1$ e omettendo la costante di integrazione otteniamo

$$y_2(x) = e^{x^2} \int \tfrac{e^{2x^2}}{(e^{x^2})^2}\, dx = e^{x^2} \int dx = xe^{x^2}.$$

(d) La verifica che $y_1(x) = e^x$ risolve l'equazione è immediata. Riscrivendo l'equazione in forma normale si ha $y'' - (1 + \frac{1}{x})y' + \frac{1}{x}y = 0$. Dunque $a(x) - 1 - 1/x$ e $A(x) = -x - \log x$. Sostituendo nella (12) e integrando per parti senza mettere la costante di integrazione otteniamo

$$\begin{aligned} y_2(x) &= ke^x \int \tfrac{e^{x+\log x}}{(e^x)^2}\, dx = ke^x \int \tfrac{x}{e^x}\, dx = ke^x \int xe^{-x}\, dx \\ &= ke^x \left(-xe^{-x} + \int e^{-x}\, dx\right) = ke^x\left(-xe{-x} - e^{-x}\right) = k(-x - 1). \end{aligned}$$

Prendendo ad esempio $k = -1$ si ha $y_2(x) = x + 1$.

(e) La verifica che $y_1(x) = 1$ soddisfa l'equazione è immediata. L'equazione in forma normale è $y'' - \frac{2x}{1-x^2}y = 0$. Dunque $a(x) = \frac{2x}{x^2-1}$, da cui

$$A(x) = \int \tfrac{2x}{x^2-1}\, dx = \log|x^2 - 1| = \log(1 - x^2) \qquad (\text{per } -1 < x < 1).$$

Sostituendo nella (12) otteniamo

$$y_2(x) = k\int e^{-\log(1-x^2)}\,dx = -k\int \tfrac{1}{x^2-1}\,dx = -\tfrac{k}{2}\int \left(\tfrac{1}{x-1} - \tfrac{1}{x+1}\right)\,dx$$
$$= -\tfrac{k}{2}\log\left|\tfrac{x-1}{x+1}\right| = -\tfrac{k}{2}\log\left(\tfrac{1-x}{1+x}\right).$$

Prendendo ad esempio $k=-2$ otteniamo $y_2(x) = \log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

(f) La verifica che $y_1(x) = x$ risolve l'equazione è immediata. L'equazione in forma normale è $y'' + \frac{1}{x^2}y' - \frac{1}{x^3}y = 0$. Dunque $a(x) = 1/x^2$ e $A(x) = -1/x$. Sostituendo nella (12) otteniamo

$$y_2(x) = kx\int \tfrac{e^{1/x}}{x^2}\,dx = kx(-e^{1/x}).$$

Prendendo ad esempio $k=-1$ otteniamo $y_2(x) = xe^{1/x}$.

(g) $y_2(x) = x^{-1/2}$.

(h) $y_2(x) = 1/x$.

(i) $y_2(x) = xe^x$.

(j) $y_2(x) = 1/x$.

(k) $y_2(x) = \sqrt{x}\log x$.

(l) $y_2(x) = 1 + \log x$.

(m) $y_2(x) = \sqrt{x}$.

(n) $y_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

23. Supponiamo di conoscere un sistema fondamentale di soluzioni y_1, y_2 dell'equazione lineare omogenea $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$. Il metodo della variazione delle costanti consente allora di determinare una soluzione particolare y_p dell'equazione non omogenea $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$, dove a, b, f sono funzioni continue su un intervallo I. Si cerca y_p nella forma $y_p = z_1y_1 + z_2y_2$, dove z_1 e z_2 sono funzioni da determinare. Imponendo la condizione $z_1'y_1 + z_2'y_2 = 0$ e sostituendo nell'equazione non omogenea si ottiene $z_1'y_1' + z_2'y_2' = f(x)$. Quindi le 2 funzioni z_1, z_2 soddisfano il sistema lineare 2×2 (omettendo la dipendenza da x per semplicità)

$$\begin{cases} z_1'y_1 + z_2'y_2 = 0 \\ z_1'y_1' + z_2'y_2' = f. \end{cases}$$

Il determinante del sistema è precisamente il Wronskiano di y_1 e y_2

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix},$$

che è sempre diverso da zero su I. Dunque il sistema ha soluzione unica che si calcola ad esempio con la regola di Kramer:

$$z_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)} = -\frac{y_2 f}{W(y_1,y_2)} \qquad z_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)} = \frac{y_1 f}{W(y_1,y_2)}.$$

Integrando e sostituendo in $y_p = z_1 y_1 + z_2 y_2$ otteniamo

$$y_p(x) = -y_1(x) \int \frac{y_2(x) f(x)}{W(y_1, y_2)(x)}\, dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x) f(x)}{W(y_1, y_2)(x)}\, dx. \tag{13}$$

In questa formula si possono omettere le costanti arbitrarie di integrazione provenienti dagli integrali indefiniti in quanto tali costanti danno termini del tipo $k_1 y_1 + k_2 y_2$ che sono soluzione dell'omogenea. Alternativamente possiamo fissare un punto $x_0 \in I$ e integrare tra x_0 e x ottenendo

$$y_p(x) = -y_1(x) \int_{x_0}^{x} \frac{y_2(t) f(t)}{W(y_1, y_2)(t)}\, dt + y_2(x) \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t) f(t)}{W(y_1, y_2)(t)}\, dt. \tag{14}$$

Si dimostra che questa funzione soddisfa l'equazione non omogenea con le condizioni iniziali $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$. La formula (14) è analoga alla formula (10), alla quale essa si riduce nel caso dei coefficienti costanti. Per vedere questo con maggiore chiarezza, riscriviamo la (14) nella forma seguente

$$y_p(x) = \int_{x_0}^{x} g(x,t) f(t)\, dt,$$

dove $g(x,t)$ è la funzione $g : I \times I \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x,t) = -y_1(x) \frac{y_2(t)}{W(y_1, y_2)(t)} + y_2(x) \frac{y_1(t)}{W(y_1, y_2)(t)}.$$

È evidente che $\forall t \in I$ fissato, la funzione $x \to g(x,t)$ soddisfa l'equazione omogenea essendo una combinazione lineare di y_1 e y_2 con coefficienti dipendenti da t. È facile dimostrare che questa funzione soddisfa le seguenti condizioni iniziali nel punto $x = t$: $g(t,t) = 0$, $\frac{\partial g}{\partial x}(t,t) = 1$. Nel caso dei coefficienti costanti si ha che $g(x,t) = g(x-t)$, dove $g(x) = g(x,0)$ è la risposta impulsiva.

(a) Un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione lineare omogenea $xy'' - (1+x)y' + y = 0$ per $x > 0$ è dato da $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = x + 1$ (si veda l'esercizio 22 (d)). Il Wronskiano di y_1, y_2 è

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^x & x+1 \\ e^x & 1 \end{vmatrix} = e^x - (x+1)e^x = -xe^x.$$

Consideriamo ora l'equazione non omogenea in forma normale, $y'' - (1 + \frac{1}{x})y' + \frac{1}{x}y = xe^{2x}$. Applicando la formula (13) otteniamo

$$\begin{aligned} y_p(x) = &\; -e^x \int \frac{x+1}{-xe^x} xe^{2x}\, dx + (x+1) \int \frac{e^x}{-xe^x} xe^{2x}\, dx \\ &= e^x \int (x+1)e^x\, dx - (x+1) \int e^{2x}\, dx \\ &= e^x \cdot xe^x - \tfrac{1}{2}(x+1)e^{2x} = \tfrac{1}{2}(x-1)e^{2x}. \end{aligned}$$

Abbiamo omesso qualsiasi costante di integrazione negli integrali indefiniti.

(b) Un sistema fondamentale dell'omogenea è dato da $y_1(x) = x$, $y_2(x) = xe^x$ (vedi esercizio 22 (i)). Il Wronskiano è

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} x & xe^x \\ 1 & (x+1)e^x \end{vmatrix} = x^2 e^x.$$

Applicando la formula (13) all'equazione scritta in forma normale,
$y'' - \frac{x+2}{x} y' + \frac{x+2}{x^2} y = 2x$, si ottiene

$$\begin{aligned} y_p(x) = & -x \int \frac{xe^x}{x^2 e^x} 2x \, dx + xe^x \int \frac{x}{x^2 e^x} 2x \, dx \\ = & -2x \int dx + 2xe^x \int e^{-x} \, dx = -2x^2 - 2x. \end{aligned}$$

Poichè $-2x$ è soluzione dell'omogenea, possiamo prendere più semplicemente $y_p(x) = -2x^2$.

(c) $y_p(x) = \frac{1}{4} x^3$.

24. (a) Calcoliamo innazitutto una soluzione particolare dell'equazione non omogenea $y'' - \frac{1}{x} y' + \frac{1}{x^2} y = 1$. Nell'esercizio 22 (b) si è visto che un sistema fondamentale dell'omogenea associata è $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x \log x$. Il Wronskiano è

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} x & x \log x \\ 1 & \log x + 1 \end{vmatrix} = x.$$

Dalla (13) otteniamo

$$y_p(x) = -x \int \log x \, dx + x \log x \int dx = -x(x \log x - x) + x^2 \log x = x^2.$$

L'integrale generale della non omogenea è dunque $y(x) = c_1 x + c_2 x \log x + x^2$. Imponendo le condizioni iniziali si ottiene $c_1 + 1 = 1$, $c_1 + c_2 + 2 = 0$, da cui $c_1 = 0$ e $c_2 = -2$. La soluzione è $y(x) = -2x \log x + x^2$.

(b) Una soluzione particolare è $y_p(x) = \frac{1}{2} - x$. Il risultato è $y(x) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} - x$.

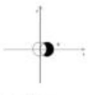
(c) Una soluzione particolare è $y_p(x) = \frac{1}{2} x^2 (\log x - 1)$. Il risultato è
$y(x) = -ex + \frac{e^2}{2}(1 + \log x) + \frac{1}{2} x^2 (\log x - 1)$.

25. (a) Sostituendo $y(x) = z(x)/x^2$ nell'equazione differenziale si ottiene che la funzione z deve soddisfare l'equazione $z'' + z = 0$. Due soluzioni indipendenti di questa equazione sono $z_1(x) = \cos x$, $z_2(x) = \sin x$. Otteniamo dunque le 2 soluzioni $y_1(x) = \frac{\cos x}{x^2}$, $y_2(x) = \frac{\sin x}{x^2}$. Queste sono indipendenti in quanto

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} \frac{\cos x}{x^2} & \frac{\sin x}{x^2} \\ -\frac{\sin x}{x^2} - \frac{2 \cos x}{x^3} & \frac{\cos x}{x^2} - \frac{2 \sin x}{x^3} \end{vmatrix} = \frac{1}{x^4} \neq 0 \ \ \forall x > 0.$$

(b) Scrivendo l'equazione non omogenea in forma normale, $y'' + \frac{4}{x} y' + (1 + \frac{2}{x^2}) y = 1$, e procedendo con la variazione delle costanti, otteniamo la soluzione particolare $y_p(x) = 1 - \frac{2}{x^2}$.

Svolgimento: Il dominio D è dato da



Poiché f è simmetrica e lo è anche il dominio D, allora

$$\iint_D \frac{3y^2}{x^2}\,dxdy = 2\iint_{D_1} \frac{3y^2}{x^2}\,dxdy\,,$$

dove D_1 è la parte di D contenuta nel I quadrante.
Per calcolare l'integrale passiamo a coordinate polari

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta\,. \end{cases}$$

Bisogna determinare i valori tra cui variano ρ e θ. Dalla condizione

$$1 \le x^2 + y^2 \le 2x$$

si ottiene

$$1 \le \rho \le 2\cos\theta\,,$$

mentre, tenendo conto del fatto che il punto P di intersezione delle due circonferenze è dato da $P = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, si ha che

$$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right].$$

Sostituendo nell'integrale si ottiene

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{3y^2}{x^2}\,dxdy &= 6\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_1^{2\cos\theta} \rho\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\,d\rho \\ &= 6\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_1^{2\cos\theta} d\theta \\ &= 3\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(4\sin^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right) d\theta \\ &= 3\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(3 - 2\cos 2\theta - \frac{1}{\cos^2\theta}\right) d\theta\,,\end{aligned}$$

grazie alla formula di duplicazione del coseno e alla prima identità fondamentale della trigonometria.
Calcolando l'ultimo integrale rimasto si ha

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{3y^2}{x^2}\,dxdy &= 3[3\theta - \sin 2\theta - \tan\theta]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= 3\left(\pi - \frac{3}{2}\sqrt{3}\right).\end{aligned}$$

7

Prova Scritta di Analisi Matematica 2 del 1 febbraio 2010 | A

Esercizio 4. Dati il campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{y}{2}\arctan(2x+y)\vec{i} - 2x\arctan(2x+y)\vec{j} + (z^2 - xy)\vec{k}$$

e il solido

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \Omega,\, 0 \le z \le 2x + y\}$$

con

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - 2x \le y \le 2 - 2x,\, 1 + 2x \le y \le 2 + 2x\}\,,$$

si chiede di
rappresentare Ω
Svolgimento:

calcolare il flusso del campo $\vec{F}$ uscente dalla superficie del solido D, utilizzando il teorema della divergenza.
Svolgimento: Dal teorema della divergenza si ha

$$\Phi_e(\vec{F}, \partial D) = \iint_{\partial D} \vec{F}\cdot\vec{n}_e\,dS = \iiint_D \mathrm{div}\vec{F}\,dxdydz\,.$$

dove ∂D indica la frontiera del solido D e $\vec{n}_e$ la normale esterna a ∂D.
La divergenza del campo $\vec{F}$ è

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\vec{F} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{2}\,arctg(2x+y)\right) + \frac{\partial}{\partial y}(-2x\,arctg(2x+y)) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2 - xy) \\ &= \frac{y - 2x}{(2x+y)^2 + 1}\,.\end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned}\Phi_e(\vec{F}, \partial D) &= \iiint_D \frac{y - 2x}{(2x+y)^2 + 1}\,dxdydz \\ &= \iint_\Omega dxdy \int_0^{2x+y} \frac{y - 2x}{(2x+y)^2 + 1}\,dz \\ &= \iint_\Omega \frac{(y - 2x)(2x + y)}{(2x+y)^2 + 1}\,dxdy,\end{aligned}$$

essendo $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R} : (x,y) \in \Omega, \quad 0 \le z \le 2x + y\}$.
Per calcolare l'integrale doppio su Ω consideriamo il seguente cambiamento di variabili

$$\begin{cases} u = y + 2x \\ v = y - 2x \end{cases}$$

con $u, v \in [1, 2]$ e

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

8

Allora si ottiene

$$\begin{aligned}\Phi_e(\vec{F}, \partial D) &= \iint_\Omega \frac{(y - 2x)(2x + y)}{(2x+y)^2 + 1}\,dxdy \\ &= \frac{1}{4}\int_1^2 dv \int_1^2 \frac{uv}{u^2 + 1}\,du \\ &= \frac{1}{4}\int_1^2 v\,dv \int_1^2 \frac{u}{u^2 + 1}\,du \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{v^2}{2}\right]_1^2 \cdot \left[\frac{1}{2}\log(u^2 + 1)\right]_1^2 \\ &= \frac{3}{16}\log\frac{5}{2}\,.\end{aligned}$$

9

$\gamma : \gamma_1$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = 1 \\ 0 \le y \le \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{5}{3}\right]$$

$$f|_{\gamma_2} = 2t^3 - 3t^4$$

$$2t^3 - 3t^4 \overset{1^a}{\Longrightarrow} 6t^2 - 12t^3 = 0 \Rightarrow 6t^2(1 - 2t) = 0$$

$$t = 0 \qquad t = \frac{1}{2}$$

1 Lug 2011 - soluzione

domenica 10 gennaio 2021 16:33

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DELLA CALABRIA

CORSO DI LAURA IN INGEGNERIA INFORMATICA

- Complementi di Analisi Probabilitá e Statistica-Primo Modulo -

APPELLO DEL 1 Luglio 2011

CORRETTORE

Complementi di Analisi Probabilitá e Statistica-Primo Modulo del 1 Luglio 2011

Esercizio 1.Si consideri la seguente equazione differenziale

$$y' = \frac{e^{4x}(y^2-2)}{y(3+e^{4x})}$$

Si chiede

di trovare l'integrale generale dell'equazione

Svolgimento: Si tratta di un'equazione differenziale a variabili separabili:

$$y' = \frac{e^{4x}}{3+e^{4x}}\frac{y^2-2}{y}$$

Per risolvere l'equazione dobbiamo separare le variabili. Naturalmente $y \neq 0$ altrimenti l'equazione non ha senso. Per separare le variabili dobbiamo supporre $y^2 - 2 \neq 0 \Rightarrow y \neq \sqrt{2}$ e $y \neq -\sqrt{2}$. Le funzioni $y = \sqrt{2}$ e $y = -\sqrt{2}$ sono soluzioni perché verificano l'equazione. A questo punto possiamo separare le variabili e si ha:

$$\frac{y}{y^2-2}y' = \frac{e^{4x}}{3+e^{4x}} \Rightarrow \int \frac{y}{y^2-2}\,dy = \int \frac{e^{4x}}{3+e^{4x}}\,dx$$

da cui segue

$$\frac{1}{2}\log|y^2-2| = \frac{1}{4}\log(3+e^{4x}) + c \Rightarrow \log|y^2-2| = \frac{1}{2}\log(3+e^{4x}) + c.$$

Quindi si ha

$$\log|y^2-2| = \log\sqrt{3+e^{4x}} + c \Rightarrow |y^2-2| = k\sqrt{3+e^{4x}}$$
$$\Rightarrow y^2 = 2 + k\sqrt{3+e^{4x}} \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Pertanto

$$y = \pm\sqrt{2+k\sqrt{3+e^{4x}}}.$$

Poiché le soluzioni $y = \sqrt{2}$ e $y \neq -\sqrt{2}$ si ottengono per $k = 0$, possiamo concludere che la soluzione generale dell'equazione differenziale é

$$y = \pm\sqrt{2+k\sqrt{3+e^{4x}}} \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{R}$$

Determinare le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{e^{4x}(y^2-2)}{y(3+e^{4x})} \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

Svolgimento: Poiché $y(0) = 4$, bisogna imporre tale condizione alla funzione $y = \sqrt{2+k\sqrt{3+e^{4x}}}$. Si ha:

$$16 = 2 + k\sqrt{4} \Rightarrow 16 = 2 + 2k \Rightarrow k = 7.$$

Quindi la soluzione é

$$y = \sqrt{2+7\sqrt{3+e^{4x}}}$$

16:35 - 16:53

1 $\quad y' = \dfrac{e^{4x}(y^2-2)}{y(3+e^{4x})}$

D: $y^2-2 \neq 0 \Rightarrow y \neq \pm\sqrt{2}$

- Trovare l'integrale generale

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{4x}(y^2-2)}{y(3+e^{4x})}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{\overbrace{2y}^{f'(x)}}{\underbrace{y^2-2}_{f(x)}}\,dy = \frac{1}{4}\int \frac{\overbrace{4e^{4x}}^{f'(x)}}{\underbrace{e^{4x}+3}_{f(x)}}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\ln|y^2-2| = \frac{1}{4}\ln(e^{4x}+3) + c$$

$$\frac{1}{2}\ln|y^2-2| = \frac{1}{2}\ln k\sqrt{e^{4x}+3}$$

$$|y^2-2| = k\sqrt{e^{4x}+3}$$

$$y = \pm\sqrt{2+k\sqrt{e^{4x}+3}}$$

2 $\quad \begin{cases} y' = \dfrac{e^{4x}(y^2-2)}{y(3+e^{4x})} \\ y(0) = 4 \end{cases}$

$$y = \pm\sqrt{2+k\sqrt{e^{4x}+3}}$$

$$4 = \pm\sqrt{2+k\sqrt{e^0+3}}$$

$$4 = \pm\sqrt{2+k\sqrt{4}}$$

$$4 = \pm\sqrt{2+2k}$$

$$2+2k = 16$$

$$2k = 14$$

$$k = 7$$

$$y = \pm\sqrt{2+7\sqrt{e^{4x}+3}}$$

Complementi di Analisi Probabilitá e Statistica-Primo Modulo del 1 Luglio 2011

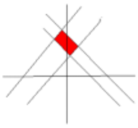
Esercizio 2 Calcolare il seguente integrale

$$\int\int_D \frac{(x-y)\cos(x^2+y^2-2xy)}{(x+y)^2+3}\,dx\,dy$$

dove

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{\frac{\pi}{2}} + x \le y \le \sqrt{\pi} + x, \sqrt{3} - x \le y \le 3 - x\right\}$$

Svolgimento:



effettuaiamo un cambio di variabili

$$\begin{cases} y - x = u \\ x + y = v \end{cases} \quad \text{con} \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\frac{1}{2}$$

L'integrale diventa

$$\frac{1}{2}\int\int_{D'} \frac{-u\cos u^2}{v^2+3}\,du\,dv$$

dove

$$D' = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{\frac{\pi}{2}} \le u \le \sqrt{\pi}, \sqrt{3} \le v \le 3\right\}.$$

Pertanto si ha

$$\frac{1}{2}\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\pi}} -u\cos u^2\,du \int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{1}{v^2+3}\,dv = \left[-\frac{1}{4}\sin u^2\right]_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\pi}} \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{v}{\sqrt{3}}\right]_{\sqrt{3}}^{3} = \frac{\pi}{48\sqrt{3}}$$

2 $\displaystyle\iint_D \frac{(x-y)\cos(x^2+y^2-2xy)}{(x+y)^2+3}\,dx\,dy$ $\qquad \sqrt{\frac{\pi}{2}} + x \le y \le \sqrt{\pi} + x$

$\sqrt{3} - x \le y \le 3 - x$

$\Downarrow$

$$\iint_D \frac{(x-y)\cos(x-y)^2}{(x+y)^2+3}\,dx\,dy$$

Pongo $\begin{cases} x - y = t \\ x + y = z \end{cases}$ $\quad z'(t) = \Big\{$

$$\begin{cases} y \ge \sqrt{\frac{\pi}{2}} + x \Rightarrow \cancel{x} - t \ge \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \cancel{x} \Rightarrow \boxed{t \le -\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \\ y \le \sqrt{\pi} + x \Rightarrow \cancel{x} - t \le \sqrt{\pi} + \cancel{x} \Rightarrow \boxed{t \ge -\sqrt{\pi}} \end{cases} \qquad -\sqrt{\pi} \le t \le -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\begin{cases} y \ge \sqrt{3} - x \Rightarrow \cancel{y} \ge \sqrt{3} - z + \cancel{y} \Rightarrow \boxed{z \ge \sqrt{3}} \\ y \le 3 - x \Rightarrow \cancel{y} \le 3 - z + \cancel{y} \Rightarrow \boxed{z \le 3} \end{cases} \qquad \sqrt{3} \le z \le 3$$

$\sin t^2 = 2t\cos t^2$

$$\int_{\sqrt{3}}^{3}\int_{-\sqrt{\pi}}^{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{t\cos t^2}{z^2+3}\,dt\,dz = \int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{1}{z^2+3} \int_{-\sqrt{\pi}}^{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}} t\cos t^2\,dt\,dz = \int_{\sqrt{3}}^{3}$$

3 Feb 2015 - soluzione

domenica 10 gennaio 2021 18:43

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DELLA CALABRIA
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA INFORMATICA

- Prova scritta di MATEMATICA II-Primo Modulo -

APPELLO DEL 3 Febbraio 2015

Matematica II-Primo Modulo del 3 Febbraio 2015

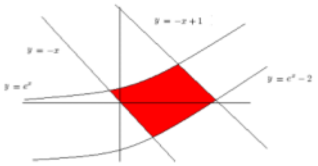
Esercizio 1.(7 punti) Calcolare il seguente integrale

$$\int\int_D (e^x + 1)\arcsin(y + x)\,dx\,dy$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^x - 2 \le y \le e^x,\ -x \le y \le -x + 1\}$$

Svolgimento:



Conviene utilizzare un cambio di variabile

$$\begin{cases} y - e^x = u \\ y + x = v \end{cases}$$

da cui segue

$$D' = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : -2 \le u \le 0,\ 0 \le v \le 1\}$$

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} -e^x & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(e^x + 1)$$

dunque

$$\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| = \frac{1}{e^x + 1}.$$

Pertanto si ha

$$\int\int_D (e^x + 1)\arcsin(y + x)\,dx\,dy = \int\int_{D'} \arcsin v\,du\,dv =$$

$$\int_{-2}^{0} du \int_0^1 \arcsin v\,dv = 2\left[v \arcsin v^2|_0^1 - \int_0^1 \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}}\,dv\right] =$$

$$\pi + 2\sqrt{1 - v^2}|_0^1 = \pi - 2$$

Matematica II-Primo Modulo del 3 Febbraio 2015

Esercizio 2. (14 punti)
Si consideri la funzione

$$f(x, y) = 2x^2 - \arctan(x^2 + y^2)$$

Calcolare le derivate parziali prime

Svolgimento:

$$f_x(x, y) = 4x - \frac{2x}{1 + (x^2 + y^2)^2}, \quad f_y(x, y) = -\frac{2y}{1 + (x^2 + y^2)^2}$$

Calcolare il piano tangente nel punto $(1, 0)$

Svolgimento:

$$f(1, 0) = 2 - \frac{\pi}{4}, \ f_x(1, 0) = 3, \quad f_y(1, 0) = 0.$$

Dunque l'equazione del piano tangente è

$$z = 2 - \frac{\pi}{4} + 3(x - 1).$$

Determinare i punti critici e classificarli

Svolgimento:
Per trovare i punti critici occorre risolvere il sistema

$$\begin{cases} 4x - \dfrac{2x}{1 + (x^2 + y^2)^2} = 0 \\ \\ -\dfrac{2y}{1 + (x^2 + y^2)^2} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - \dfrac{2x}{1 + x^4} = 0 \\ \\ y = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione segue

$$2x\left(\frac{1 + 2x^4}{1 + x^4}\right) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Pertanto abbiamo il punto critico $(0, 0)$. Per classificarlo conviene utilizzare il metodo delle restrizioni. Consideriamo $y = 0$ allora si ha

$$f(x, 0) = 2x^2 - \arctan x^2,$$

da cui segue

$$f'(x, 0) = 4x - \frac{2x}{1 + x^4} = 2x\left(\frac{1 + 2x^4}{1 + x^4}\right) \ge 0 \Rightarrow x \ge 0.$$

Pertanto per questa restrizione $(0, 0)$ è un minimo relativo. Ora consideriamo $x = 0$ allora si ottiene la funzione

$$f(0, y) = -\arctan y^2$$

da cui segue

$$f'(0, y) = -\frac{2y}{1 + y^4} \ge 0 \Rightarrow y \le 0.$$

Per questa restrizione $(0, 0)$è un massimo relativo. Possiamo allora concludere che $(0, 0)$ è un punto di sella.

Determinare massimi e minimi assoluti nell'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 9,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$$

Svolgimento:

$\boxed{19:10}$

② $f(x,y) = 2x^2 - \arctan(x^2+y^2)$

- Derivate parziali prime:

$$\frac{df}{dx} = 4x - \frac{2x}{1+(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{df}{dy} = -\frac{2y}{1+(x^2+y^2)^2}$$

- Piano tangente in $P(1,0)$ con $z = 2 - \frac{\pi}{4}$

$\nabla f_x(1,0) = 4 - \frac{2}{1+1} = 4 - 1 = 3$

$\nabla f_y(1,0) = 0$

$dz = \nabla f_y(1,0) \cdot e$

$dz = 3\,dx + 0 \cdot dy$

$z = 3(x-1) - \frac{\pi}{4} + 2$

Non vi sono punti critici interni a D. Parametrizziamo il bordo.

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 0. \end{cases}, \ t \in [0,3], \quad \gamma_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = t. \end{cases}, \ t \in [0,3]$$

$$\gamma_3(t) : \begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 3\sin t. \end{cases}, \ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Pertanto si ha

$$f(\gamma_1(t)) = 2t^2 - \arctan t^2, t \in (0,3) \Rightarrow f'(\gamma_1(t)) = 2t\left(\frac{1+2t^4}{1+t^4}\right)$$

che non si annulla mai in $(0,3)$;

$$f(\gamma_2(t)) = -\arctan t^2, t \in (0,3) \Rightarrow f'(\gamma_2(t)) = -\left(\frac{2t}{1+t^4}\right)$$

che non si annulla mai in $(0,3)$;

$$f(\gamma_3(t)) = 6\cos^2 t - \arctan \arctan 9, \ t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f'(\gamma_3(t)) = -12\cos t \sin t = 0, \ t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

da cui segue

$$\sin t = 0, \ \cos t = 0 \Rightarrow t = 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \notin \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Anche in questo caso non troviamo punti critici. Pertanto resta da valutare la funzione in O, A e B.

$$f(0,0) = 0, \ f(3,0) = 18 - \arctan 9, \ f(0,3) = -\arctan 9.$$

Il minimo assoluto è $-\arctan 9$, mentre il massimo assoluto è $18 - \arctan 9$.

Matematica II-Primo Modulo del 3 Febbraio 2015

Esercizio 3. (9 punti) **Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale**

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-3x}\cos x$$

Svolgimento: Si tratta di un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti del secondo ordine. Risolviamo l'equazione omogenea

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

L'equazione caratteristica associata é

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow (\lambda + 2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \quad \text{con molteplicità} \quad 2.$$

Pertanto la soluzione dell'equazione omogenea é

$$y_O(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Adesso troviamo una soluzione particolare della forma

$$\bar{y}(x) = e^{-3x}(a\cos x + b\sin x).$$

Derivando si ha

$$\bar{y}'(x) = e^{-3x}[(-3a+b)\cos x + (-3b-a)\sin x],$$
$$\bar{y}''(x) = e^{-3x}[(8a-6b)\cos x + (8b+6a)\sin x].$$

Sostituendo nell'equazione si ha

$$(8a-6b)\cos x + (8b+6a)\sin x] + 4[(-3a+b)\cos x + (-3b-a)\sin x] + 4[a\cos x + b\sin x] = \cos x$$

$$\Rightarrow -2b\cos x + 2a\sin x = \cos x \Rightarrow b = -\frac{1}{2}, \ a = 0.$$

Dunque

$$\bar{y}(x) = -\frac{1}{2}e^{-3x}\sin x.$$

Pertanto l'integrale generale dell'equazione differenziale é dato da

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-3x}\sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = e^{-3x}\cos x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Svolgimento:

$$y'(0) = -2c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-2x} - 2c_2 x e^{-2x} + \frac{3}{2}e^{-3x}\sin x - \frac{1}{2}e^{-3x}\cos x$$

da cui segue

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ -2c_1 + c_2 - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = 1, \ c_2 = \frac{5}{2}$$

Dunque

$$y_C(x) = e^{-2x} + \frac{5}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-3x}\sin x.$$

$1-x$

$$\begin{cases} y_1' = [\ln(x^2+3)]\, y_2 - \cos\sqrt{x+3} \\ y_2' = y_1 + y_2 \operatorname{sen} x + \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) \end{cases}$$

$$f_1(x, y_2) = [\ln(x^2+3)]\, y_2 - \cos\sqrt{x+3}$$

01 Lug 2020 - 9

giovedì 14 gennaio 2021 17:44

Università della Calabria – Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Corso di Analisi Matematica 2

Prova del giorno 01/07/2020

Esercizio n. 1

$\underline{F_1} = (2, x+y)$ $\qquad$ $\underline{F_2} = (k(x+y), 3)$

1) CALCOLARE I VALORI DI $k \in \mathbb{R}$ TALI CHE:

- $\underline{J_1} = \underline{F_1} + \underline{F_2}$ È CONSERVATIVO
- $\underline{J_2} = \underline{F_1} - \underline{F_2}$ È CONSERVATIVO

Conservativo se
1) campo semplicemente connesso
2) irrotazionale

2) IL LAVORO DEL CAMPO $\underline{G} = \underline{J_1} + \underline{J_2}$ LUNGO ~~UN~~ IL PERCORSO CHIUSO $x^2+y^2=4$

→ poiché sono campi conservativi allora il lavoro è zero

Esercizio n. 2

$\underline{F} = (1, 2x, x^2)$

$\underline{U} = (0, 1, 0)$

CALCOLARE $\underbrace{\nabla \circ (\underline{U} \times \underline{F})}_{\text{divergenza del rotore}}$

$$\underline{U} \times \underline{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2x & x^2 \end{vmatrix} = \begin{matrix} i & j & k & i & j \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2x & x^2 & 1 & 2x \end{matrix} = x^2 i - k$$

$$\nabla \circ (\underline{U} \times \underline{F}) = 2x$$

Esercizio n. 3
Risolvere il seguente integrale improprio

pari

dispari pari

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(-4x) - sen(-3x) + x^2}{x^6+1}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(4x) + sen(3x) + x^2}{x^6+1}\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(4x)}{x^6+1}\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^6+1}\,dx$$

anche questo

questo si risolve coi residui prendendo la parte reale

Esercizio n. 4
Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione:

$$f(x) = 12\cos(-2x) - \cos(4x) - 2sen(-7x) - 1$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} -f(x)(1 + sen(7x))dx$$

01 Lug 2020 - 8

giovedì 14 gennaio 2021 18:16

Università della Calabria – Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Corso di Analisi Matematica 2

Prova del giorno 01/07/2020

$a^2 = 2$
$b = 0$

Esercizio n. 1

$$\underline{\underline{H}} = \begin{pmatrix} x+2y & x^2+b \\ x^{a^2} & e^{(y+n)} \end{pmatrix}$$

$x^{a^2} = x^2+b$

$\log_x(x^{a^2}) = \log_x(x^2+b)$

$a^2 = \log_x(x^2+b)$

$a = \pm\sqrt{\log_x(x^2+b)}$

minimo se det>0

- DETERMINARE I VALORI DI $a, b \in \mathbb{R}$ CHE RENDONO $\underline{\underline{H}}$ HESSIANA

$$\underline{\underline{H}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & e^{(1+n)} \end{pmatrix}$$

- I VALORI DI $n \in \mathbb{R}$ CHE RENDONO $P \equiv (1,1)$ UN PUNTO DI MINIMO RELATIVO

$\det = 3e^{(1+n)} > 0$ sempre

ESCLUDENDO IL CASO DI HESSIANO NULLO

Esercizio n. 2

$\underline{F} = (x, y^2, 1+2z)$ $\quad \underline{F} \times \underline{U} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ U_1 & U_2 & U_3 \end{vmatrix} = (G_1, G_2, G_3)$

$\underline{U} = (1, 1, 1)$

$\nabla \times (\underline{F} \times \underline{U}) = \begin{vmatrix} i & j & k \end{vmatrix}$

$\underline{G} = \nabla \times (\underline{F} \times \underline{U})$

VERIFICARE SE $\underline{G}$ É CONSERVATIVO

Esercizio n. 3
Risolvere il seguente integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{x3}}{x^4+1}dx$$

DIMOSTRARE CHE L'INTEGRALE APPENA SCRITTO CONVERGE!!!!!

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{x} + \cos(-3x) - sen(4x)}{x^4+1}dx$$

Esercizio n. 4
Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione:

$$f(x) = \cos(-5x) - \cos(-3x) - 3\,\mathrm{sen}(-2x) - 8sen(-5x) + 1$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} -f(x)(1 + sen(5x))dx$$