$$\mathrm{Res}(f, z_2) = \frac{1}{6} e^{-i\frac{25}{6}\pi} = \frac{1}{6}\left[\cos\left(-\frac{25}{6}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{25}{6}\pi\right)\right] = \frac{1}{6}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right] = \frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{i}{12}$$

Perciò:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^6+1} = 2\pi i \left[-\frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{i}{12} - \frac{i}{6} + \frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{i}{12}\right] =$$

$$= 2\pi i\left(-\frac{i}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi \quad \text{da cui} \quad \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^6+1} = \frac{\pi}{3}$$

PARENTESI TEORICA!

RISOLUZIONE INTEGRALI IMPROPRI

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)}\cos(\alpha x)dx$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{R\to+\infty} \oint_{\gamma} \frac{P_1(z)}{P_2(z)} e^{i\alpha z} dz = A + iB$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{R\to+\infty}\left[\oint_{\gamma} \frac{P_1(z)}{P_2(z)} cos(\alpha z)dz + i\oint_{\gamma} \frac{P_1(z)}{P_2(z)} sin(\alpha z)dz\right]$$

RISOLUZIONE INTEGRALI IMPROPRI

$$\lim_{R\to+\infty}\left[\oint_{\gamma} \frac{P_1(z)}{P_2(z)} cos(\alpha z)dz\right] =$$

$$\lim_{R\to+\infty}\left[\int_{-R}^{R} \frac{P_1(x)}{P_2(x)} cos(\alpha x)dx + \int_{\gamma_R} \frac{P_1(z)}{P_2(z)} cos(\alpha z)dz\right] =$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)} cos(\alpha x)dx}$$

RISOLUZIONE INTEGRALI IMPROPRI

$$\lim_{R\to+\infty}\left[\oint_{\gamma} \frac{P_1(z)}{P_2(z)} sin(\alpha z)dz\right] =$$

$$\lim_{R\to+\infty}\left[\int_{-R}^{R} \frac{P_1(x)}{P_2(x)} sin(\alpha x)dx + \int_{\gamma_R} \frac{P_1(z)}{P_2(z)} sin(\alpha z)dz\right] =$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)} sin(\alpha x)dx}$$

RISOLUZIONE INTEGRALI IMPROPRI

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)}\cos(\alpha x)dx$$

$$\lim_{R\to+\infty} \oint_{\gamma} \frac{P_1(z)}{P_2(z)} e^{i\alpha z} dz = A + iB$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)} cos(\alpha x)dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)} sin(\alpha x)dx$$

RISOLUZIONE INTEGRALI IMPROPRI

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)} cos(\alpha x) dx = Re\left[\lim_{R\to+\infty} \oint_\gamma \frac{P_1(z)}{P_2(z)} e^{i\alpha z} dz\right]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)} sin(\alpha x) dx = Im\left[\lim_{R\to+\infty} \oint_\gamma \frac{P_1(z)}{P_2(z)} e^{i\alpha z} dz\right]$$

RISOLUZIONE INTEGRALI IMPROPRI

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)} cos(\alpha x) dx = Re\left[\lim_{R\to+\infty} \oint_\gamma \frac{P_1(z)}{P_2(z)} e^{i\alpha z} dz\right]$$

$$f(z) = \frac{P_1(z)}{P_2(z)} e^{i\alpha z}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)} sin(\alpha x) dx = Im\left[\lim_{R\to+\infty} \oint_\gamma \frac{P_1(z)}{P_2(z)} e^{i\alpha z} dz\right]$$

RISOLUZIONE INTEGRALI IMPROPRI

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)} cos(\alpha x) dx = Re\left[2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{m} Res(f, z_j)\right]$$

$$f(z) = \frac{P_1(z)}{P_2(z)} e^{i\alpha z}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1(x)}{P_2(x)} sin(\alpha x) dx = Im\left[2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{m} Res(f, z_j)\right]$$

Importante!!!

RISOLUZIONE INTEGRALI IMPROPRI

ESERCIZIO

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xcos(\pi x)}{\underbrace{x^2 + 2x + 5}_{x^2 > x \Rightarrow \text{converge}}} dx = Re\left[\lim_{R\to+\infty} \oint_\gamma \frac{ze^{i\pi z}}{z^2 + 2z + 5} dz\right]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xsin(\pi x)}{\underbrace{x^2 + 2x + 5}_{\text{converge}}} dx = Im\left[\lim_{R\to+\infty} \oint_\gamma \frac{ze^{i\pi z}}{z^2 + 2z + 5} dz\right]$$

ESERCIZI: $\displaystyle\oint \frac{z \cdot e^{i\pi z}}{z^2+2z+5} dz$

Trovo i poli:

$z^2+2z+5=0 \Rightarrow z_{1,2} = -1 \pm 2i$

Poiché ci interessano solo Θ y positive allora

$$\oint \frac{z \cdot e^{i\pi z}}{z^2+2z+5} dz = 2\pi i \, Res(f, -1+2i)$$

$$Res(f, -1+2i) = \lim_{z\to -1+2i} (z+1-2i) \cdot \frac{z e^{i\pi z}}{(z+1-2i)(z+1+2i)} =$$

$$= \lim \quad \frac{z \cdot e^{i\pi z}}{\quad} = \frac{(2i-1)e^{i\pi(2i-1)}}{\quad} = \frac{(2i-1)e^{2i^2\pi - i\pi}}{\quad} =$$

(5)

pari dispari

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+x+\sin(2x)}{x^4+5}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \oint_\gamma \frac{z^2}{z^4+5}\,dz + \operatorname{Im}\left[\lim_{R\to+\infty} \oint_\gamma \frac{z+e^{i2z}}{z^4+5}\,dz\right]$$

ma

pari dispari

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+x+\sin(2x)}{x^4+5}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \oint_\gamma \frac{z^2}{z^4+5}$$

(6)

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x^2+\cos(2x)}{x^4+5} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+\cos(2x)}{x^4+5}\,dx$$

12. Esercitazione 6

giovedì 21 gennaio 2021 09:47

Esercitazione 6 - 05/01/2021

- Serie di Fourier
- Trasformata di Fourier

SVILUPPO IN SERIE DI FOURIER

4.8.- Serie trigonometrica meglio detta GONIOMETRICA

È una serie di funzioni del tipo: serie →

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(nx + \varphi_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \operatorname{sen}\varphi_n \cos nx + A_n \cos\varphi_n \operatorname{sen} nx) \qquad [4.8.1]$$

dove A_n, φ_n e x sono reali.

Ponendo $A_n \cos\varphi_n = b_n$, $A_n \operatorname{sen}\varphi_n = a_n$ per $n = 1, 2, \dots$ e $A_0 \operatorname{sen}\varphi_0 = \frac{a_0}{2}$ la [4.8.1] diventa:

SERIE DI FOURIER

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)} \qquad [4.8.2]$$

che si riduce alla serie di seni

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx \quad \Big\{ \text{sviluppo in serie di seni}$$

se $a_n = 0$ per $n = 1, 2, \dots$, e alla serie di coseni

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad \Big\{ \text{sviluppo in serie di coseni}$$

se $b_n = 0$ per $n = 1, 2, \dots$

Siccome il termine generale

$$a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

è periodico di periodo 2π, la serie può essere studiata in un qualunque intervallo di ampiezza 2π e, se è convergente, la sua somma $S(x)$ è pure periodica di periodo 2π.

4.9.- Relazione tra coefficienti e somma in una serie trigonometrica

Se la serie [4.8.2] è uniformemente convergente in tutto l'intervallo $(-\pi, \pi)$ periodo e ha somma $S(x)$, sono verificate le seguenti relazioni:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(x)\cos nx\,dx \qquad [4.9.1]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(x)\,\mathrm{sen}\,nx\,dx \qquad [4.9.2]$$

ricavare i coefficienti

con $n = 1, 2, \ldots$

$$\boxed{S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n\,\mathrm{sen}\,nx)}$$

4.10.- Serie di Fourier

Una funzione deve essere periodica

Supponiamo che la funzione $f(x)$, avente periodo 2π, ammetta nell'intervallo $(-\pi, \pi)$ i seguenti integrali:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,nx\,dx \qquad n = 1, 2, \ldots$$

detti coefficienti di Fourier della funzione $f(x)$. La serie trigonometrica [4.8.2] avente per coefficienti i precedenti integrali viene detta serie di Fourier associata alla funzione $f(x)$; essa può essere: Una serie di Fourier è:

1) divergente
2) convergente con somma $S(x) \neq f(x)$
3) convergente con somma $S(x) = f(x)$

$$\boxed{S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n\,\mathrm{sen}\,nx)}$$

4.10.- Serie di Fourier

Supponiamo che la funzione $f(x)$, avente periodo 2π, ammetta nell'intervallo $(-\pi, \pi)$ i seguenti integrali:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,nx\,dx \qquad n = 1, 2, \ldots$$

detti coefficienti di Fourier della funzione $f(x)$. La serie trigonometrica [4.8.2] avente per coefficienti i precedenti integrali viene detta serie di Fourier associata alla funzione $f(x)$; essa può essere:

1) divergente
2) convergente con somma $S(x) \neq f(x)$

3) convergente con somma $S(x) = f(x)$ (funzioni che studieremo principalmente)

$$\boxed{S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n\,\mathrm{sen}\,nx)}$$

4.11.- Teorema fondamentale di convergenza

Si ricorda che per punto di discontinuità di prima specie di una funzione $f(x)$ si intende un punto $x = c$ in cui esistono finiti il limite destro e quello sinistro e tali che:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = l_1 \qquad \lim_{x \to c^+} f(x) = l_2$$

con $l_1 \neq l_2$ (¹).

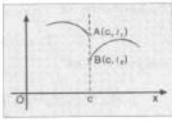


Fig. 4.11.1

Ciò premesso possiamo enunciare, omettendone la dimostrazione, il seguente teorema, valido per una funzione periodica definita nell'intervallo $(-\pi, \pi)$:

deve essere periodica

Nei punti in cui la funzione $f(x)$ è continua e derivabile, o almeno è dotata di derivata destra e sinistra, la serie di Fourier associata:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \quad (^2)$$

con

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx$$

è convergente e la sua somma è $S = f(x)$.

continua e derivabile (o meglio le derivate destra e sinistra devono esistere finite anche se diverse)

Nei punti di discontinuità di prima specie in cui esistono finiti i limiti:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

la serie converge a

$$S = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$$

cioè alla media dei limiti destro e sinistro nel punto di discontinuità.

deve avere al massimo discontinuità a salto

Si ricorda che i due limiti considerati sono, rispettivamente, la pseudoderivata sinistra $f_-^*(x)$ e la pseudoderivata destra $f_+^*(x)$. Si ricordi inoltre che la pseudoderivata destra [sinistra] coincide con la derivata destra [sinistra] se è $f(x) = f(x+0)$ $[f(x) = f(x-0)]$.

4.11.- Teorema fondamentale di convergenza

Si ricorda che per punto di discontinuità di prima specie di una funzione $f(x)$ si intende un punto $x = c$ in cui esistono finiti il limite destro e quello sinistro e tali che:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = l_1 \qquad \lim_{x \to c^+} f(x) = l_2$$

con $l_1 \neq l_2$ (¹).

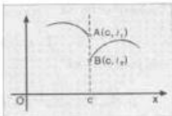


Fig. 4.11.1

Ciò premesso possiamo enunciare, omettendone la dimostrazione, il seguente teorema, valido per una funzione periodica definita nell'intervallo $(-\pi, \pi)$:

Nei punti in cui la funzione $f(x)$ è continua e derivabile, o almeno è dotata di derivata destra e sinistra, la serie di Fourier associata:

La serie di Fourier è somma di infinite armoniche

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx)}_{} \quad (^2)$$

ARMONICA → armonica n indica l'addendo n della sommatoria

con

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx$$

è convergente e la sua somma è $S = f(x)$.

Nei punti di discontinuità di prima specie in cui esistono finiti i limiti:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

la serie converge a

$$S = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$$

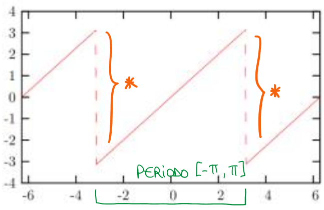
se ci sono asintoti non vale

cioè alla media dei limiti destro e sinistro nel punto di discontinuità.

Si ricorda che i due limiti considerati sono, rispettivamente, la pseudoderivata sinistra $f_-^*(x)$ e la pseudoderivata destra $f_+^*(x)$. Si ricordi inoltre che la pseudoderivata destra [sinistra] coincide con la derivata destra [sinistra] se è $f(x) = f(x+0)$ $[f(x) = f(x-0)]$.

Esempio 1.1. Consideriamo la funzione periodica di periodo 2π assegnata mediante

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } -\pi < x < \pi, \\ \text{periodica} & \text{di periodo } 2\pi. \end{cases}$$



DISCONTINUITÀ $\quad S = \frac{-\pi + \pi}{2} = 0$

$$\boxed{\text{La serie converge alla semisomma / media dei valori assunti tra destra e sinistra nel punto di discontinuità}}$$

4.11.- Teorema fondamentale di convergenza

Si ricorda che per punto di discontinuità di prima specie di una funzione $f(x)$ si intende un punto $x = c$ in cui esistono finiti il limite destro e quello sinistro e tali che:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = l_1 \qquad \lim_{x \to c^+} f(x) = l_2$$

con $l_1 \neq l_2$ (¹).

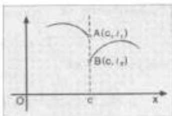
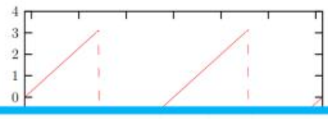


Fig. 4.11.1

Esempio 1.1. Consideriamo la funzione periodica di periodo 2π assegnata mediante

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } -\pi < x < \pi, \\ \text{periodica} & \text{di periodo } 2\pi. \end{cases}$$



Ciò premesso possiamo enunciare, omettendone la dimostrazione, il seguente teorema, valido per una funzione periodica definita nell'intervallo $(-\pi, \pi)$:

Nei punti in cui la funzione $f(x)$ è continua e derivabile, o almeno è dotata di derivata destra e sinistra, la serie di Fourier associata:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \quad (^2)$$

con

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}$$

è convergente e la sua somma è $S = f(x)$.

Nei punti di discontinuità di prima specie in cui esistono finiti i limiti:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

la serie converge a

$$S = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$$

cioè alla media dei limiti destro e sinistro nel punto di discontinuità.

Si ricorda che i due limiti considerati sono, rispettivamente, la pseudod… stra $f_-^*(x)$ e la pseudoderivata destra $f_+^*(x)$. Si ricordi inoltre che la … vata destra [sinistra] coincide con la derivata destra [sinistra] se è $f(x)$… $[f(x) = f(x-0)]$.

I coefficienti dello sviluppo sono:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x \operatorname{sen} nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\operatorname{sen} nx}{n}\,dx = 0$$

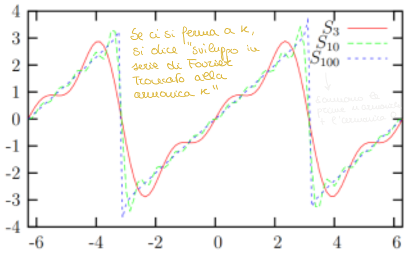
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-x\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,dx =$$

$$= -\frac{2\cos n\pi}{n} = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

La serie è perciò:

$$2\left(\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\operatorname{sen} nx}{n} + \ldots\right) \qquad [4.11.1]$$

e vale $f(x) = x$ nei punti dell'intervallo $[-\pi, \pi]$ e zero negli estremi $x = \mp\pi$ dove è nulla la media aritmetica dei limiti destro e sinistro, cioè $\frac{-\pi + \pi}{2} = 0$.



nell'inter-

a di deri-

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}$

è convergente e la sua somma è $S = f(x)$.

Nei punti di discontinuità di prima specie in cui esistono finiti i limiti:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

la serie converge a

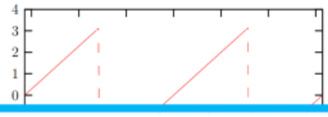
$$S = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$$

cioè alla media dei limiti destro e sinistro nel punto di discontinuità.

Si ricorda che i due limiti considerati sono, rispettivamente, la pseudode-
stra $f_-^*(x)$ e la pseudoderivata destra $f_+^*(x)$. Si ricordi inoltre che la
vata destra [sinistra] coincide con la derivata destra [sinistra] se è $f(x)$
$[f(x) = f(x-0)]$.

Esempio 1.1. Consideriamo la funzione periodica di periodo 2π assegnata mediante

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } -\pi < x < \pi, \\ \text{periodica} & \text{di periodo } 2\pi. \end{cases}$$



I coefficienti dello sviluppo sono:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\,\text{sen}\,nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\text{sen}\,nx}{n}\,dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,\text{sen}\,nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-x\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,dx =$$

$$= -\frac{2\cos n\pi}{n} = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

La serie è perciò:

$$2\left(\text{sen}\,x - \frac{\text{sen}\,2x}{2} + \frac{\text{sen}\,3x}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\text{sen}\,nx}{n} + \ldots\right) \qquad [4.11.1]$$

e vale $f(x) = x$ nei punti dell'intervallo $[-\pi, \pi]$ e zero negli estremi $x = \mp\pi$ dove è nulla la media aritmetica dei limiti destro e sinistro, cioè $\frac{-\pi+\pi}{2} = 0$.

4.12.- Intervallo di integrazione di funzione periodica

Se una funzione $f(x)$, definita su tutto l'asse reale, è periodica di periodo T, l'integrale esteso a qualunque intervallo di ampiezza T, non dipende dalla posizione dell'intervallo sull'asse reale ossia l'integrale

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$$

non dipende dal valore di a.

Nel calcolo dei coefficienti di Fourier l'intervallo di integrazione $(-\pi, \pi)$ può essere perciò sostituito con un qualunque intervallo $(a, a+2\pi)$ di ampiezza 2π.

4.13.- Serie di Fourier di funzioni pari e dispari

Una funzione $f(x)$ è pari nell'intervallo $(-a, a)$ quando $f(-x) = f(x)$ (vedi fig. 4.13.1); per essa si ha:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

Una funzione è dispari nell'intervallo $(-a, a)$ quando $f(-x) = -f(x)$ (vedi fig. 4.13.2); per essa si ha:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

Come per gli integrali impropri, si semplificano gli integrali se le funzioni sono pari / dispari

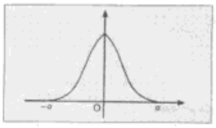


Fig. 4.13.1

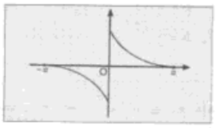


Fig. 4.13.2

Pertanto se si sviluppa in serie di Fourier una funzione pari, tenendo presente che $f(x)\cos nx$ è pari mentre $f(x)\,\text{sen}\,nx$ è dispari, si ha:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{\text{pari}}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\cos nx}_{\text{pari}}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\,\text{sen}\,x}_{\text{dispari}}\,dx = 0$$

ossia lo sviluppo è costituito da una serie di coseni.

Analogamente, se $f(x)$ è dispari, $f(x)\cos nx$ è dispari mentre $f(x)\,\text{sen}\,nx$ è pari, per cui

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{\text{dispari}}\,dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\cos nx}_{\text{dispari}}\,dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)\,\text{sen}\,nx}_{\text{pari}}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\text{sen}\,nx\,dx$$

ossia lo sviluppo è costituito da una serie di seni.

4.16.- Serie di Fourier di funzione periodica di periodo 2λ

Per sviluppare in serie di Fourier una funzione $f(x)$ periodica di periodo 2λ definita nell'intervallo $(-\lambda, \lambda)$

(anche se il periodo non è 2π la serie è possibile da costruire BASTA CHE SIA PERIODICA)

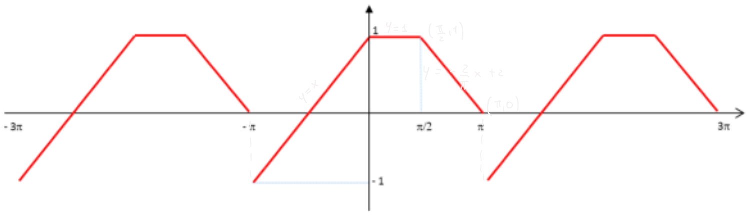
$$a_0 = \frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\lambda}\,dx \qquad [4.16.1]$$

$$b_n = \frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{\lambda}\,dx$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\lambda} + b_n\,\text{sen}\,\frac{n\pi x}{\lambda}\right)$$

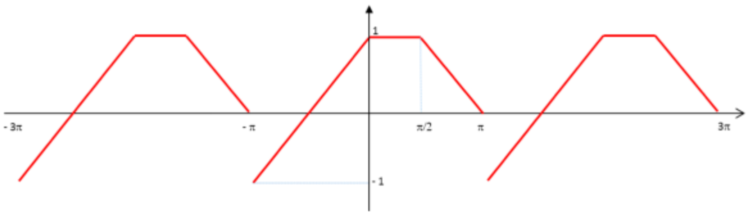
Applicare lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione rappresentata in Fig. 2, considerata come 2π periodica



$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & -\pi < x \leq 0 \\ f_2(x) & 0 < x \leq \pi/2 \\ f_3(x) & \pi/2 < x \leq \pi \end{cases}$$

Funzione continua a tratti

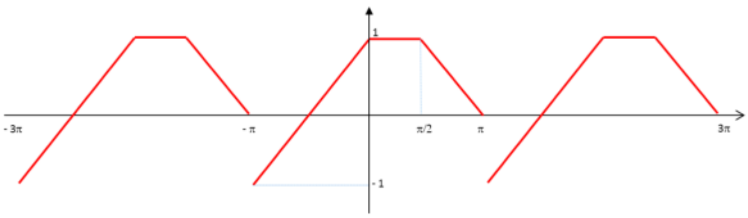
Applicare lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione rappresentata in Fig. 2, considerata come 2π periodica



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f_1(x)dx + \int_{0}^{\pi/2} f_2(x)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f_3(x)dx\right]$$

Ogni integrale deve essere spezzato lungo le curve continue

Applicare lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione rappresentata in Fig. 2, considerata come 2π periodica



$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f_1(x)cos(nx)dx + \int_{0}^{\pi/2} f_2(x)cos(nx)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f_3(x)cos(nx)dx\right]$$

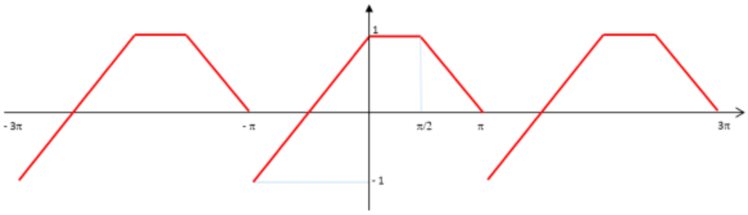
PASSAGGI

1) Verificare che sia
   - periodica
   - continua e derivabile
   - ci siano solo un numero finito di discontinuità

2) Calcolare i segmenti che compongono la funzione di partenza

3) Si calcolano i coefficienti a_0, a_n e b_n tenendo conto che l'integrale di ciascuna area sottesa da un tratto continuo della curva

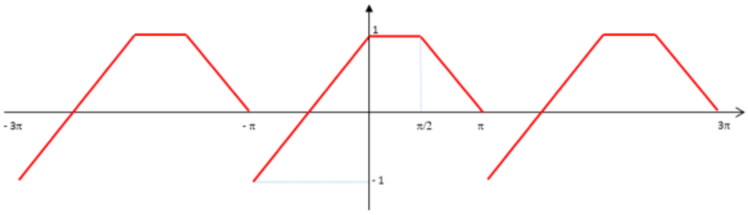
Applicare lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione rappresentata in Fig. 2, considerata come 2π periodica



$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(nx)dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f_1(x)sin(nx)dx + \int_{0}^{\pi/2} f_2(x)sin(nx)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f_3(x)sin(nx)dx\right]$$

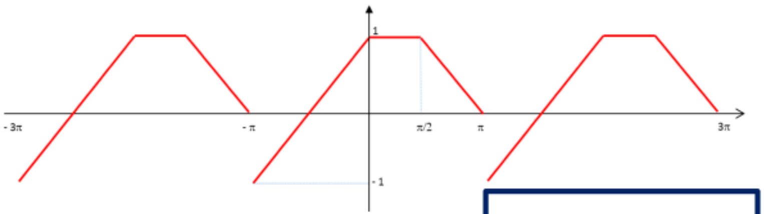
Applicare lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione rappresentata in Fig. 2, considerata come 2π periodica



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f_1(x)dx + \int_{0}^{\pi/2} f_2(x)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f_3(x)dx\right]$$

$$\boxed{\int (mx+q)dx = m\frac{x^2}{2} + qx + c}$$

Applicare lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione rappresentata in Fig. 2, considerata come 2π periodica

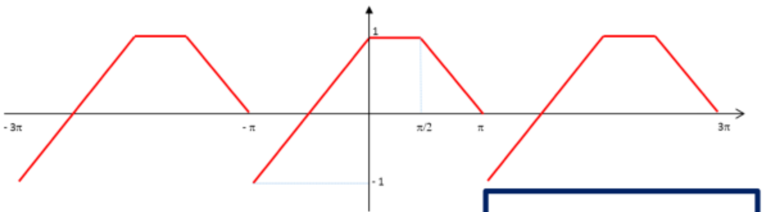


$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx =$$

$$\boxed{\int (mx+q)cos(nx)dx}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f_1(x)cos(nx)dx + \int_{0}^{\pi/2} f_2(x)cos(nx)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f_3(x)cos(nx)dx\right]$$

Applicare lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione rappresentata in Fig. 2, considerata come 2π periodica

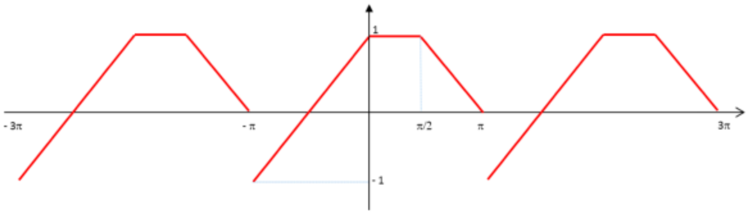


$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx =$$

$$\boxed{\int (mx+q)cos(nx)dx}$$

$$\boxed{m\int xcos(nx)dx} \qquad \boxed{q\int cos(nx)dx}$$

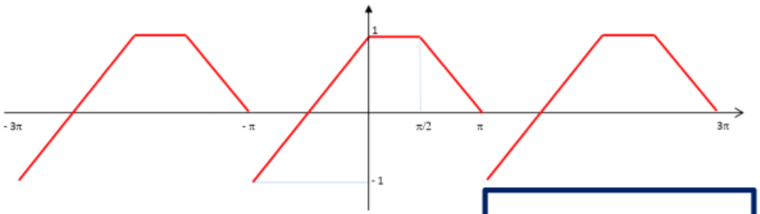
Applicare lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione rappresentata in Fig. 2, considerata come 2π periodica



$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx =$$

$$\boxed{\int xcos(nx)dx = \frac{x}{n}sin(nx) - \frac{1}{n}\int sin(nx)dx = \frac{x}{n}sin(nx) + \frac{1}{n^2}cos(nx) + c}$$

Applicare lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione rappresentata in Fig. 2, considerata come 2π periodica

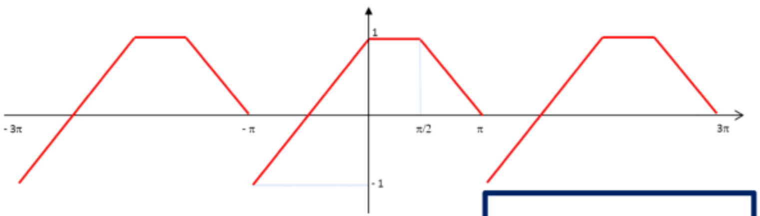


$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(nx)dx =$$

$$\boxed{\int (mx+q)sin(nx)dx}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f_1(x)sin(nx)dx + \int_{0}^{\pi/2} f_2(x)sin(nx)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f_3(x)sin(nx)dx\right]$$

Applicare lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione rappresentata in Fig. 2, considerata come 2π periodica

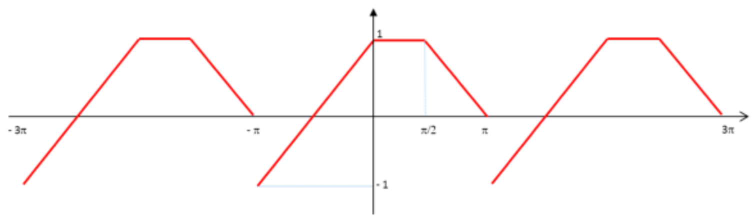


$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(nx)dx =$$

$$\boxed{\int (mx+q)sin(nx)dx}$$

$$\boxed{m\int xsin(nx)dx} \qquad \boxed{q\int sin(nx)dx}$$

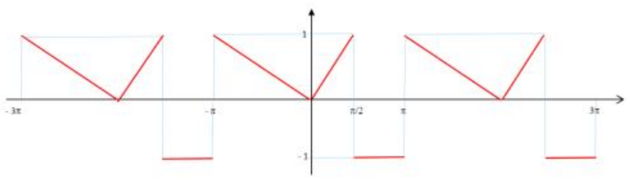
Applicare lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione rappresentata in Fig. 2, considerata come 2π periodica



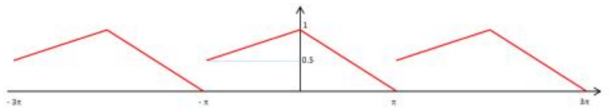
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sin(nx) dx =$$

$$\boxed{\int x sin(nx) dx = -\frac{x}{n} cos(nx) + \frac{1}{n} \int cos(nx) dx = -\frac{x}{n} cos(nx) + \frac{1}{n^2} sin(nx) + c}$$

Applicare lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione rappresentata in figura, considerata come 2π periodica



Applicare lo sviluppo in serie di Fourier per la funzione rappresentata in Fig. 2, considerata come 2π periodica



and so on...

Esercizio n. 4

Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione:

$$f(x) = 12\cos(-2x) - \cos(4x) - 2sen(-7x) - 1$$ → Somma di funzioni periodiche

↳ se limito la funzione ad un periodo, è già sviluppata in serie!!!

e poi calcolare

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \left(1 + sen(7x)\right) dx$$

SVOLGIMENTO:

1) Cambio $sen(-x) = -sen(x)$ e $cos(-x) = cos x$

2) Ordino lo sviluppo

3) Individuo gli indici che non si annullano

Esercizio n. 4

Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione:

$$f(x) = 12\cos(-2x) - \cos(4x) - 2sen(-7x) - 1$$

e poi calcolare

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\left(1 + sen(7x)\right) dx$$

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)}$$

Esercizio n. 4

Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione:

$$f(x) = 12\cos(-2x) - \cos(4x) - 2sen(-7x) - 1$$

cos(-x) = cos x poichè è PARI

sin(-x) = -sin x poichè è dispari

$$\boxed{f(x) = -1 + 12\cos(2x) - \cos(4x) + 2sen(7x)}$$

$$\boxed{a_0 = -2} \quad \boxed{a_2 = 12} \quad \boxed{a_4 = -1} \quad \boxed{b_7 = 2}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)}$$

Esercizio n. 4

Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione:

$$f(x) = 12\cos(-2x) - \cos(4x) - 2sen(-7x) - 1$$

$$\boxed{f(x) = -1 + 12\cos(2x) - \cos(4x) + 2sen(7x)}$$

$$\boxed{a_0 = -2} \quad \boxed{a_2 = 12} \quad \boxed{a_4 = -1} \quad \boxed{b_7 = 2}$$

e poi calcolare

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\left(1 + sen(7x)\right) dx \qquad \boxed{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(7x)dx}$$

$$\boxed{f(x) = -1 + 12\cos(2x) - 1\cos(4x) + 2sen(7x)}$$

$$\boxed{a_0 = -2} \quad \boxed{a_2 = 12} \quad \boxed{a_4 = -1} \quad \boxed{b_7 = 2}$$

$$\pi a_0 = \boxed{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(7x)dx}$$

perché

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad -2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad -2\pi = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$\boxed{f(x) = -1 + 12\cos(2x) - 1\cos(4x) + 2sen(7x)}$$

$\boxed{a_0 = -2}$ $\boxed{a_2 = 12}$ $\boxed{a_4 = -1}$ $\boxed{b_7 = 2}$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(nx)dx$$

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(7x)dx}$$

$= b_7 \pi$

$$2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(7x)dx \qquad 2\pi = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(7x)dx$$

$$\boxed{f(x) = -1 + 12\cos(2x) - 1\cos(4x) + 2sen(7x)}$$

$\boxed{a_0 = -2}$ $\boxed{a_2 = 12}$ $\boxed{a_4 = -1}$ $\boxed{b_7 = 2}$

$$0 = \boxed{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(7x)dx}$$

Esercizio n. 4

Sviluppare in serie di Fourier la seguente funzione:

Somma di funzioni PARI = f(x) PARI

$$f(x) = -0.5\cos(-2x) + 2\cos(6x) + 12 = 12 - 0{,}5\cos(2x) + 2\cos(6x)$$

$\frac{a_0}{2}$

$\boxed{a_0 = 24}$ $\boxed{b_2 = -0{,}5}$ $\boxed{b_6 = 2}$

e poi calcolare

$$\int_{-\pi}^{0} \cdot f(x)\left(2 - 3\cos(-6x)\right)dx = 24\pi - 3\pi = 21\pi$$

$$\int_{-\pi}^{0} 2f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 2f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \pi \cdot 24$$

$$-3\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos 6x\,dx = -\frac{3}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 6x\,dx \qquad = 2 \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi}\cos 6x\, f(x) = 2\pi$$

allora $= -\frac{3}{2}2\pi = -3\pi$ dunque

TRASFORMATA DI FOURIER

TRASFORMATA DI FOURIER

1

generalizzazione della serie di Fourier per funzioni NON periodiche

PROPRIETÀ DELLA $f(x)$:

a) PERIODO $T = +\infty$ (OVVERO NON PERIODICA)

b) CONTINUA A TRATTI (CON DISCONTINUITÀ DI I SPECIE)

c) ASSOLUTAMENTE INTEGRABILE: $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < +\infty$ aka deve convergere

$\Downarrow$

può essere considerata come un'onda

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-i\omega x}\, dx =$$

Si può esprimere una funzione dal dominio x nel dominio ω delle frequenze

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-i\omega x}\, dx =$$

eulero: $e^{i\omega x} = \cos(\omega x) + i \sin(\omega x)$

$e^{-i\omega x} = \cos(-\omega x) + i \sin(-\omega x) = \cos(\omega x) - i \sin(\omega x)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \cos(\omega x)\, dx - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \mathrm{sen}(\omega x)\, dx =$$

$$= A(\omega) - i\, B(\omega)$$

CASI PARTICOLARI

$f(x)$ PARI	$f(x)$ DISPARI
$A(\omega) = 2\int_0^{+\infty} f(x) \cos(\omega x)\, dx$ PARI	$A(\omega) = 0$ spariscono i termini in coseno
$B(\omega) = 0$ spariscono i termini in seno	$B(\omega) = 2\int_0^{+\infty} f(x)\, \mathrm{sen}(\omega x)\, dx$ PARI

FUNZIONI CHE SI POSSONO DIAGRAMMARE:

- $A(\omega)$
- $B(\omega)$
- SPETTRO DELLE AMPIEZZE

  $|F(\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}$ ← modulo

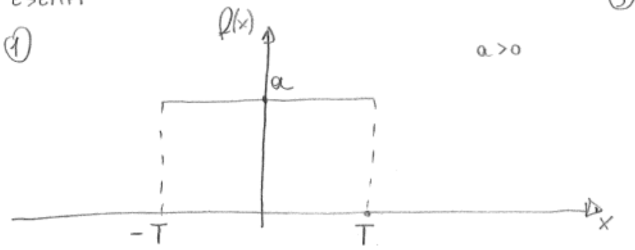
  SE $f(x)$ È PARI $\Rightarrow |F(\omega)| = |A(\omega)|$ perché $B(\omega) = 0$

  SE $f(x)$ È DISPARI $\Rightarrow |F(\omega)| = |B(\omega)|$ perché $A(\omega) = 0$

- SPETTRO DI FASE: $\mathrm{arctg}(B(\omega)/A(\omega))$

ESEMPI ③

① $a>0$



$F(\omega) = A(\omega) - i\,B(\omega)$

$f(x)$ È PARI $\Rightarrow$ $B(\omega)=0$ Poiché è pari

$A(\omega) = 2\int_0^{+\infty} f(x)\cos(\omega x)\,dx$

$$A(\omega) = 2\int_0^T a\cdot\cos(\omega x)\,dx = 2a\int_0^T \cos(\omega x)\,dx =$$

$$= \frac{2a}{\omega}\Big[\operatorname{sen}(\omega x)\Big]_0^T = \boxed{\frac{2a}{\omega}\operatorname{sen}\omega T} \quad \text{REALE}$$

$$\lim_{\omega\to 0} \frac{2a}{\omega}\operatorname{sen}(\omega T) = 2aT$$

$$\lim_{\omega\to +\infty} \frac{2a}{\omega}\operatorname{sen}(\omega T) = 0 \qquad \lim_{\omega\to -\infty} \frac{2a}{\omega}\operatorname{sen}(\omega T) = 0$$

perché $-1 \le \operatorname{sen}(\omega t) \le 1$

$A(\omega)=0 \Rightarrow \frac{2a}{\omega}\operatorname{sen}(\omega T)=0 \Rightarrow \omega T = K\pi$ con $K\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow A(\omega)=0$ QUANDO $\omega = \frac{K\pi}{T}$, CON $K\in\mathbb{Z}$

GRAFICO DI $A(\omega)$

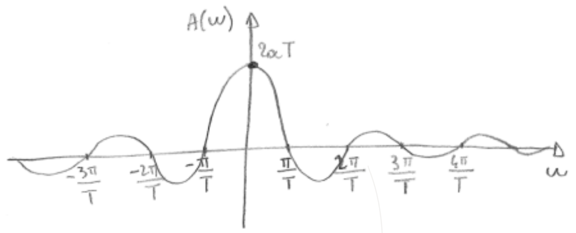
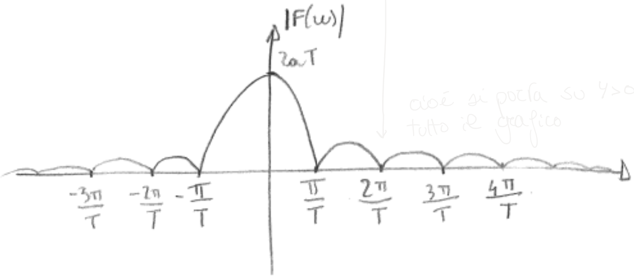


GRAFICO DI $|F(\omega)|$ → spettro delle ampiezze

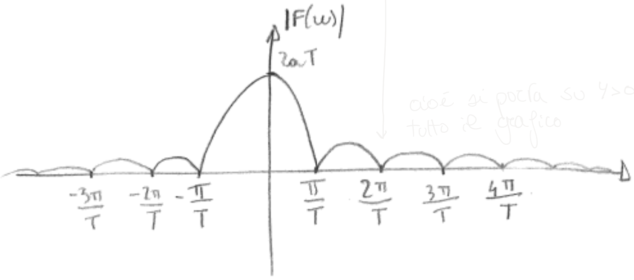
UGUALE A $|A(\omega)|$ IN QUESTO CASO



cioè si porta su y>0 tutto il grafico

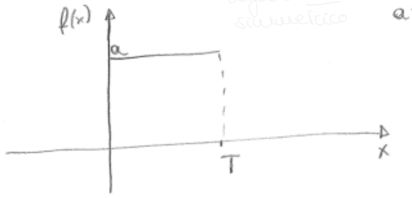
GRAFICO DI $|F(\omega)|$ → spettro delle ampiezze

UGUALE A $|A(\omega)|$ IN QUESTO CASO



ESEMPIO ②   ⑤

segnale non simmetrico $a>0$



$$F(\omega) = A(\omega) - i \cdot B(\omega)$$

$$A(\omega) = \int_0^T a\cos(\omega x)\,dx = \frac{a}{\omega}\,\mathrm{sen}(\omega T) \quad \text{(VEDI ESEMPIO 1)}$$

$$B(\omega) = \int_0^T a\,\mathrm{sen}(\omega x)\,dx = \frac{a}{\omega}\Big[-\cos(\omega x)\Big]_0^T =$$

$$B(\omega) = \int_0^T a\,\mathrm{sen}(\omega x)\,dx = \frac{a}{\omega}\Big[-\cos(\omega x)\Big]_0^T =$$

$$= \frac{a}{\omega}\Big[1 - \cos(\omega T)\Big]$$

$$|F(\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{\omega^2}\left(\mathrm{sen}^2(\omega T) + 1 + \cos^2(\omega T) - 2\cos(\omega T)\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{\omega^2}\left(2 - 2\cos(\omega T)\right)} = \sqrt{\frac{2a^2}{\omega^2}\left(1 - \cos(\omega T)\right)}$$

⑥

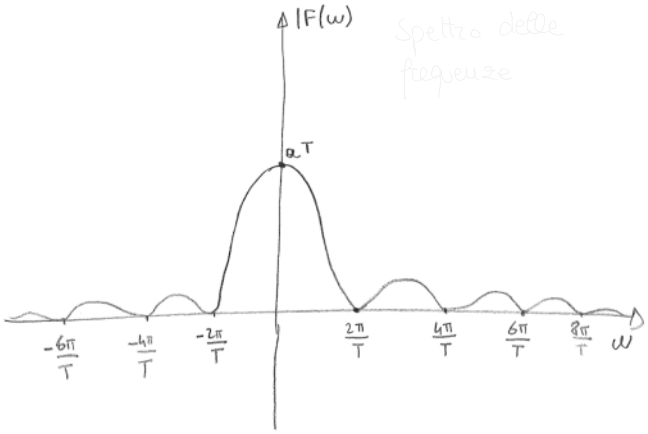
$$\lim_{\omega \to 0} \sqrt{\frac{2a^2}{\omega^2}\left(1 - \cos(\omega T)\right)} = \sqrt{2a^2T^2 \cdot \frac{1}{2}} = aT$$

$$\lim_{\omega \to +\infty} \sqrt{\frac{2a^2}{\omega^2}\left(1 - \cos(\omega T)\right)} = 0$$

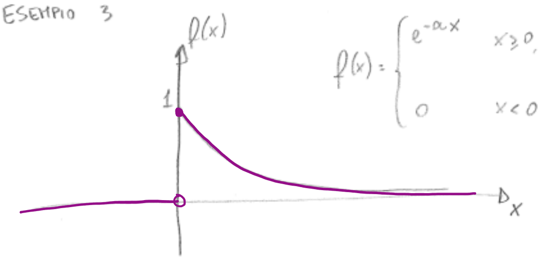
$$\lim_{\omega \to -\infty} \sqrt{\frac{2a^2}{\omega^2}\left(1 - \cos(\omega T)\right)} = 0$$

$$|F(\omega)| = 0 \Rightarrow \Big[1 - \cos(\omega T)\Big] = 0 \Rightarrow \cos(\omega T) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega T = 2K\pi \Rightarrow \omega = \frac{2K\pi}{T}, \text{ con } K \in \mathbb{Z}_1$$



ESEMPIO 3 ⑦



$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & x \geq 0,\ a>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

$f(x)$ è assolutamente integrabile, poiché

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-ax}\, dx = \frac{1}{a}$$

$$F(\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cdot e^{-i\omega x}\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-(a+i\omega)x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{a+i\omega} = \frac{a-i\omega}{(a+i\omega)(a-i\omega)} = \frac{a-i\omega}{a^2+\omega^2} =$$

$$= \frac{a}{a^2+\omega^2} - i\,\frac{\omega}{a^2+\omega^2} = A(\omega) - i\,B(\omega) =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos(\omega x)\, dx - i \int_0^{+\infty} e^{-ax} \operatorname{sen}(\omega x)\, dx$$

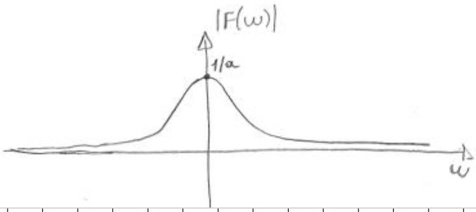
QUINDI

$$A(\omega)=\frac{a}{a^2+\omega^2}$$

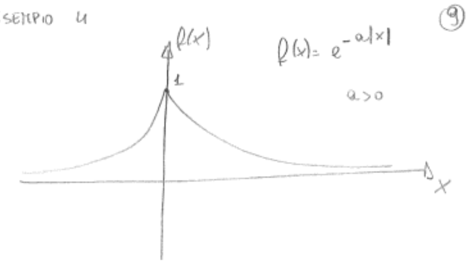
$$B(\omega)=\frac{\omega}{a^2+\omega^2}$$

$$|F(\omega)|=\sqrt{A^2(\omega)+B^2(\omega)}=\sqrt{\frac{a^2}{(a^2+\omega^2)^2}+\frac{\omega^2}{(a^2+\omega^2)^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{a^2+\omega^2}}$$



ESEMPIO 4



$$f(x)=e^{-a|x|}$$

$a>0$

$f(x)$ É PARI ED ASSOLUTAMENTE INTEGRABILE IN QUANTO:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=2\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx=\frac{2}{a}$$

(IN QUANTO $f(x)$ É SEMPRE POSITIVA)

$f(x)$ É PARI ED ASSOLUTAMENTE INTEGRABILE IN QUANTO:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=2\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx=\frac{2}{a}$$

(IN QUANTO $f(x)$ É SEMPRE POSITIVA)

$$A(\omega)=2\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos(\omega x)\,dx=\frac{2a}{a^2+\omega^2}\quad\text{(VEDI ESEMPIO 3)}$$

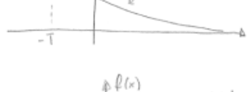
$$B(\omega)=0$$

$$|F(\omega)|=|A(\omega)|=\left|\frac{2a}{a^2+\omega^2}\right|=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

(IN QUANTO $a>0$ PER IPOTESI)

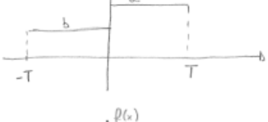
ALTRI ESEMPI (DA ANALIZZARE IN AUTONOMIA)

5)



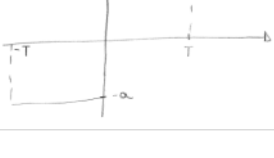
$a>1$

6)

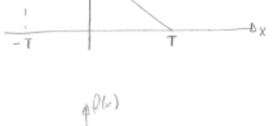


$a>b>0$

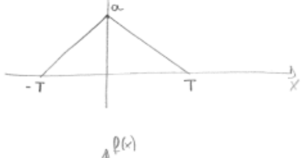
7)



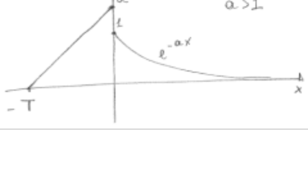
8)



9)



10)



$a>1$

$\omega \in \boldsymbol{R}$ **FOURIER**

$$\boxed{F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx}$$

$\omega \in \boldsymbol{C}$ **LAPLACE**

PROBLEMA DI CAUCHY

ODE PRIMO ORDINE

$$\begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

- Sol: $y = f(x) + c$ UNICA
- Necessita di un solo vincolo

Si calcola l'integrale generale e si sostituisce il vincolo per trovare l'integrale particolare

ODE SECONDO ORDINE

$$\begin{cases} y'' = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI

(vedi sopra)

$y = x$ e $y = -x$

$y=x \Rightarrow y^4 - 6y^4 + y^4 = -4y^4$

$-4y^4 \xrightarrow{1^a} -16y^3 \xrightarrow{2^a} -48y^2 \xrightarrow{3^a} -96y \xrightarrow{4^a} -96 < 0$

FLESSO

è una sella!!!

$f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xz + 2x + 2y + 1$

$\frac{df}{dx} = 6x - 2z + 2$ $\quad \frac{df}{dy} = 4y + 2$ $\quad \frac{df}{dz} = 2z - 2x$

$\frac{d^2f}{dxdy} = 0$ $\quad \frac{d^2f}{dxdz} = -2$ $\quad \frac{d^2f}{dx^2} = 6$

$\frac{d^2f}{dydx} = 0$ $\quad \frac{d^2f}{dydz} = 0$ $\quad \frac{d^2f}{dy^2} = 4$

$\frac{d^2f}{dzdx} = -2$ $\quad \frac{d^2f}{dzdy} = 0$ $\quad \frac{d^2f}{dz^2} = 2$

$$\underline{\underline{H}}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Punti Critici:

$$\begin{cases} 6x - 2z + 2 = 0 \\ 4y + 2 = 0 \\ z = x \end{cases} \quad \begin{cases} 6z - 2z + 2 = 0 \quad (4z+2=0) \\ y = -\frac{1}{2} \\ x = z \end{cases} \quad \begin{cases} z = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

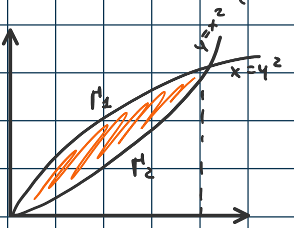
$$\underline{\underline{H}}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det = 32 > 0$$ Minimo

$= \lim_{x \to 2} \frac{m^2 \sin(\pi x)}{m^2+1} = \frac{0}{m^2+1}$ Non posso concludere nulla

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{(\rho \sin\theta - 1)^2 \sin(\pi \rho \cos\theta)}{(\rho\cos\theta - 2)^2 + (\rho \sin\theta - 1)^2} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\sin(\pi \rho \cos\theta)}{\frac{(\rho\cos\theta-2)^2}{(\rho\sin\theta-1)^2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{0}{\frac{4}{1}} = 0$$

Il limite dunque esiste

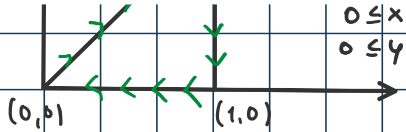
$$\iint_D y^2\,dx\,dy \qquad D: \begin{cases} x^2 \le y \\ y^2 \le x \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 \le y \\ -\sqrt{x} \le y \le \sqrt{x} \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 \le y \le \sqrt{x}$$



Funzione y - semplice:

$0 \le x \le 1$

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} y^2\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{y^3}{3}\Big|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3}\,dx - \int_0^1 \frac{x^6}{3}\,dx = \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{15}\Big|_{x=0}^{x=1} - \frac{x^7}{21}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{15} - \frac{1}{21} = \frac{3}{35}$$



$0 \le x \le 1$
$0 \le y \le x$

Applico Gauss-Green:

$$\oint_C F \cdot dr = \iint_A (\nabla \times F)\, dA$$

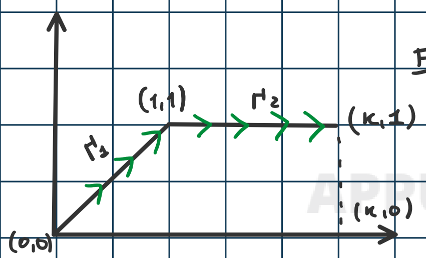
$$\nabla \times F = \left(\frac{dF_2}{dx} - \frac{dF_1}{dy}\right) k = (2x - 2y)k$$

NON É CONSERVATIVO !!!

verso

$$-\int_0^1 \int_0^x (2x - 2y)\, dy\, dx = -\int_0^1 \left(2xy - y^2\right)\Big|_{y=0}^{y=x} dx = -\int_0^1 (2x^2 - x^2)\, dx = \int_0^1 x^2\, dx =$$

$$= -\frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=1} = -\frac{1}{3} \neq 0 \quad \text{dunque} \quad L(\underline{F}) \neq 0 = -\frac{1}{3}$$



$\underline{F} = (x, x^2)$

Valore di k per cui $\displaystyle\int_{\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2} F \cdot dr = 3$

- Γ_1 : $x = y \implies r(t) = \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad t \in [0,1]$

$r'(t) = (1,1)$

$$\int_{\Gamma_1} \underline{F} \cdot dr = \int_0^1 t\, dt + \int_0^1 t^2\, dt = \frac{t^2}{2}\Big|_{t=0}^{t=1} + \frac{t^3}{3}\Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

- Γ_2 : $\begin{cases} y = 1 \\ 1 \le x \le k \end{cases} \implies r(t) = \begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases} \quad t \in [1, k]$

$r'(t) = (1, 0)$

$$\int_{\Gamma_2} \underline{F} \cdot dr = \int_1^k t\, dt = \frac{t^2}{2}\Big|_{t=1}^{t=k} = \frac{k^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\int_{M_2} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_1^k t \, dt = \frac{t^2}{2}\Big|_{t=1}^{t=k} = \frac{k^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{k^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{5}{6} = 3 \implies k^2 = \frac{16}{3} \implies k = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

$$\begin{cases} 2x = 2x \\ -2y = -2y \end{cases} \Rightarrow \text{Le equazioni sono verificate}$$

$f(z) = z^2$ È DIFFERENZIABILE

2) $f(z) = |z| \Rightarrow |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$ $\qquad \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+5}}$

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

$u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ $\qquad v(x,y) = 0$

$\frac{du}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad \frac{du}{dy} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\quad \frac{dv}{dx} = 0$ $\quad \frac{dv}{dy} = 0$

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \end{cases}$$ Le equazioni non sono verificate

$f(z) = |z|$ non è differenziabile

3) $f(z) = z + 2\bar{z}$

$z = x+iy$, $\bar{z} = x-iy$

$f(x,y) = x+iy - 2x + 2iy = -x + 3iy$

$u(x,y) = -x$ $\qquad v(x,y) = 3y$

$\frac{du}{dx} = -1$ $\quad \frac{du}{dy} = 0$ $\quad \frac{dv}{dx} = 0$ $\quad \frac{dv}{dy} = 3$

$$\begin{cases} -1 = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$ Le equazioni non sono verificate

$f(z) = z + 2\bar{z}$ non è differenziabile

⑤ Calcolare i logaritmi delle seguenti funzioni:

1) $z = i$ $\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$

$$\log(i) = \log|z| + i\arg(z)$$

$$|z| = \sqrt{1^2 + 0} = 1$$

$$\arg(z) = \arctan\left(1\right) = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$$

$$\log(i) = \log(1) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right)$$

2) $z = -2$ $\begin{cases} a = -2 \\ b = 0 \end{cases}$

$$\log(-2) = \log|z| + i\arg(z)$$

$$|z| = \sqrt{4} = 2$$

poiché $a < 0$ si deve aggiungere la periodicità

$$\arg(z) = \arctan(0) = 0 + 2n\pi + \pi$$

$$\log(-2) = \log|2| + i(2n\pi + \pi)$$

3) $z = 1 - i$ $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$

$$\log(1-i) = \log|z| + i\arg(z)$$

$$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$f(x,y) = 2x+2iy + x - iy = 3x + iy$$

$$u(x,y) = 3x \quad v(x,y) = y$$

$$\frac{du}{dx} = 3 \quad \frac{du}{dy} = 0 \quad \frac{dv}{dx} = 0 \quad \frac{dv}{dy} = 1$$

$$\begin{cases} u_x \quad\quad v_y \\ 3 = 1 \\ u_y \quad\quad v_x \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Le equazioni non sono verificate