IN GENERALE $\nabla \times \underline{F} = \underline{0} \iff \begin{cases} \dfrac{\partial F_3}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial z} = \dfrac{\partial F_3}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y} \end{cases}$

$\underline{F} : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to B \subseteq \mathbb{R}^2$

$\underline{F} = (F_1, F_2) = (F_1, F_2, 0)$

- LA COMPONENTE F_3 É NULLA
- F_1 ED F_2 NON DIPENDONO DA z

IN GENERALE $\nabla \times \underline{F} = \underline{0} \iff$

$\underline{F} : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to B \subseteq \mathbb{R}^2$

$\underline{F} = (F_1, F_2) = (F_1, F_2, 0)$

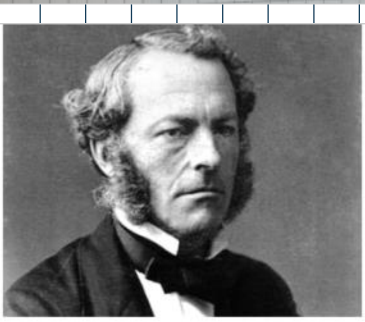
- LA COMPONENTE F_3 É NULLA
- F_1 ED F_2 NON DIPENDONO

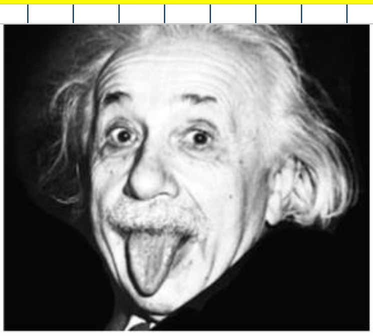
$$\nabla \times \underline{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{i}\left(\frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial 0}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

$$= \hat{k}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

SE $\underline{F}$ É 2D $\Rightarrow$ LA CONDIZIONE DI IRROTAZIONALITÁ É: $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y}$





Forma differenziale $\leftrightarrow$ **Lavoro infinitesimo**

$\omega = F_1 dx + F_2 dy + F_3\, dz$ | $dL = F_1 dx + F_2 dy + F_3\, dz$

ω Forma differenziale esatta $\leftrightarrow$ **$\underline{F}$ conservativo**

ω Forma differenziale chiusa $\leftrightarrow$ **$\underline{F}$ irrotazionale**

$$\underline{F} = \nabla U \Rightarrow \nabla \times \underline{F} = \underline{0}$$

Conservatività $\Rightarrow$ irrotazionalità

$\not\Leftarrow$

$$\nabla \times \underline{F} = \underline{0} \Rightarrow \underline{F} = \nabla U \ ?$$

BASTA FARE UN ESEMPIO DI CAMPO VETTORIALE IRROTAZIONALE CHE NON È CONSERVATIVO (OVVERO UN CAMPO IRROTAZIONALE CHE COMPIE UN LAVORO NON NULLO LUNGO UN PERCORSO CHIUSO)

$$\oint_C \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right) \circ (dx, dy) =$$

$$= \oint_C -\frac{y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy$$

$$F_1 = -\frac{y}{x^2+y^2} \qquad F_2 = \frac{x}{x^2+y^2}$$

DOMINIO DI $\underline{F} = (F_1, F_2) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\oint_C \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right) \circ (dx, dy) =$$

CHECK SU IRROTAZIONALITÀ

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2) + 2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \oint_C -\frac{y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+y^2}\, dy$$

$$F_1 = -\frac{y}{x^2+y^2} \qquad F_2 = \frac{x}{x^2+y^2}$$

DOMINIO DI $\underline{F} = (F_1, F_2) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\nabla \times \underline{F} = \underline{0}$$

$$C: \begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$dx = -R\,\mathrm{sen}\,t\,dt \qquad dy = R\cos t\,dt$$

$$\int_0^{2\pi} \left(-\frac{R\,\mathrm{sen}\,t}{R^2} \cdot (-R\,\mathrm{sen}\,t) + \frac{R\cos t}{R^2} \cdot R\cos t \right) dt =$$

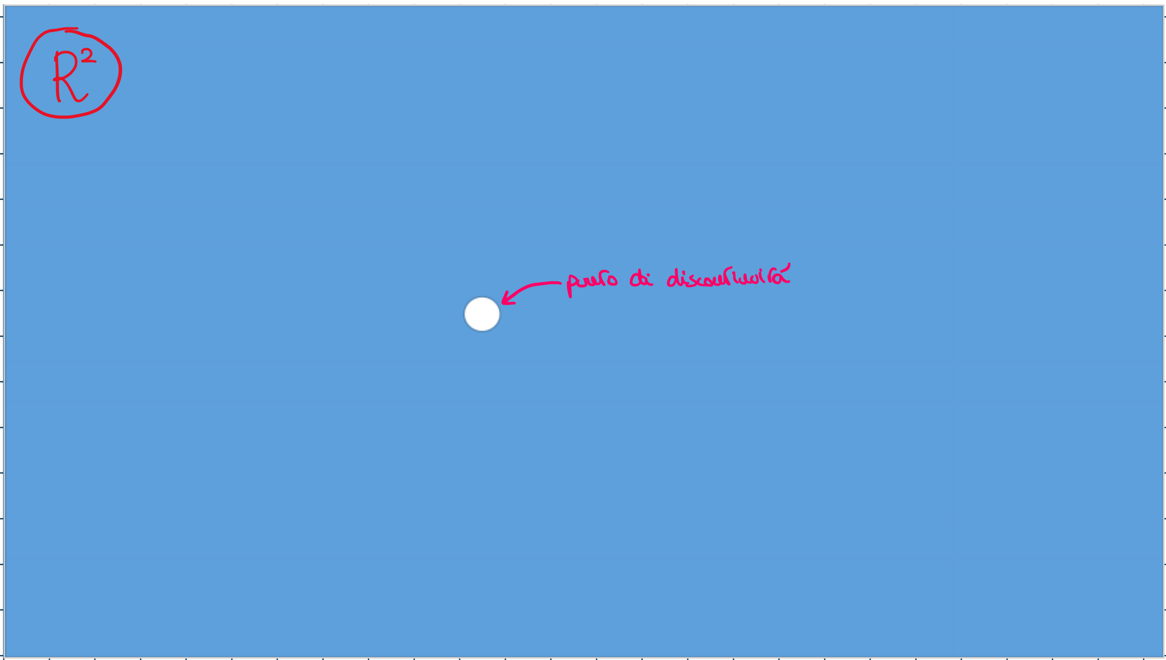
$$= \int_0^{2\pi} (\mathrm{sen}^2 t + \cos^2 t)\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

DOMINIO SEMPLICEMENTE CONNESSO

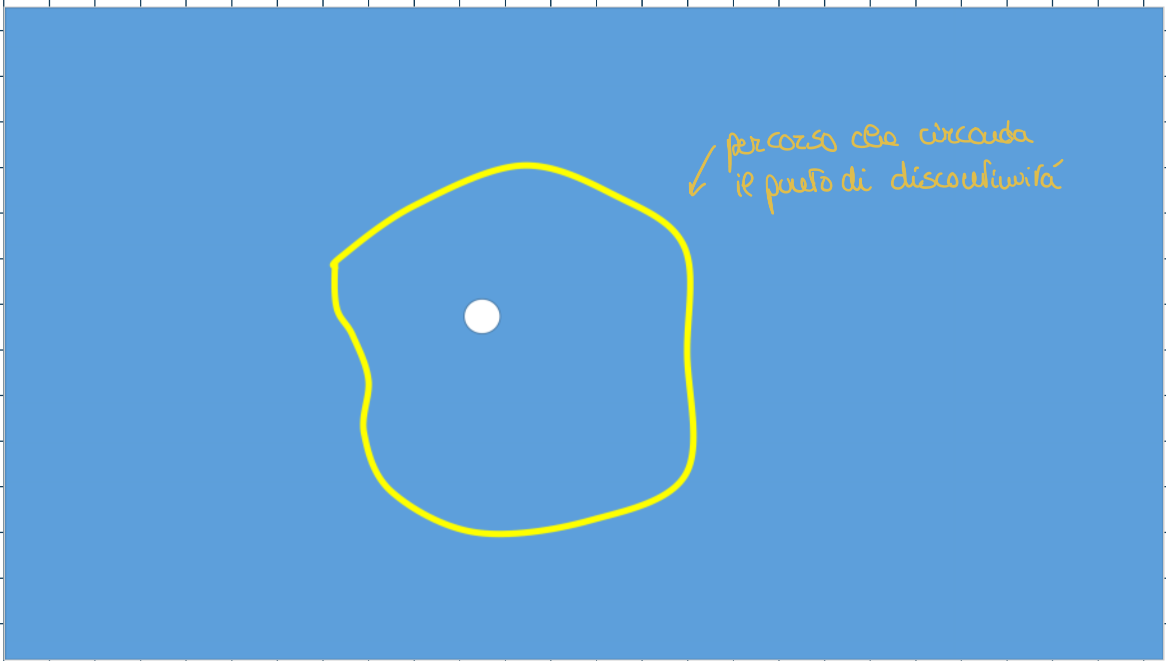
Dominio connesso e, inoltre, soddisfa la seguente condizione: qualsiasi curva semplice e chiusa al suo interno può essere ridotta (mediante una deformazione) ad un unico punto senza mai uscire dal dominio stesso

Semplicemente connesso:

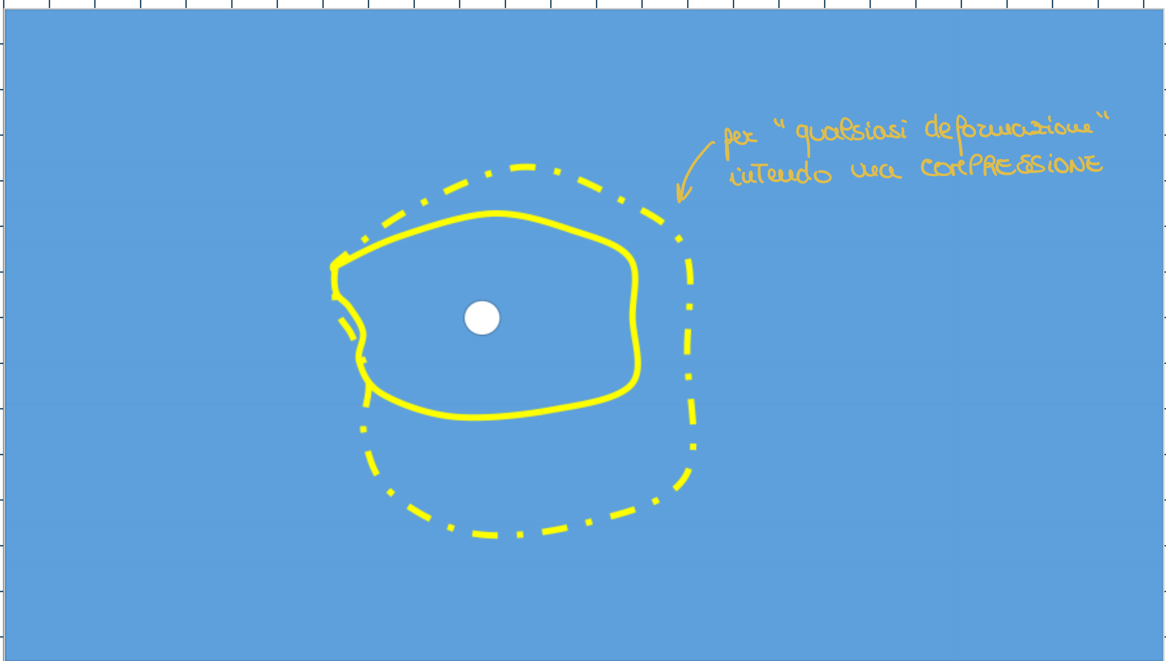
Dati due punti appartenenti al dominio esiste almeno una poligonale che li unisce senza uscire dal dominio



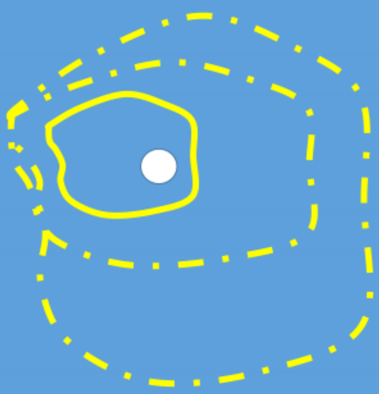
$\mathbb{R}^2$
punto di discontinuità



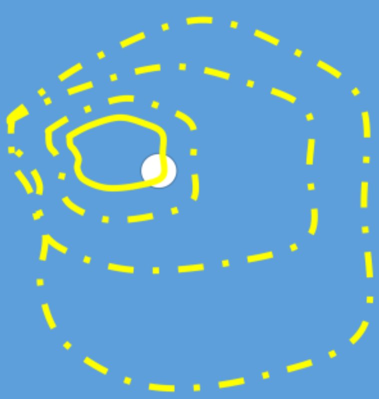
percorso che circonda
il punto di discontinuità



per "qualsiasi deformazione"
intendo una COMPRESSIONE



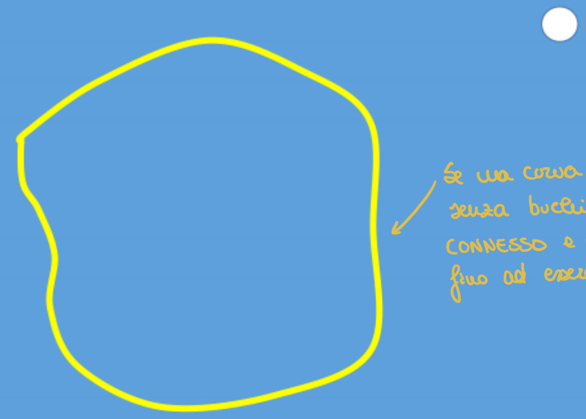
DOMINIO NON SEMPLICEMENTE CONNESSO:



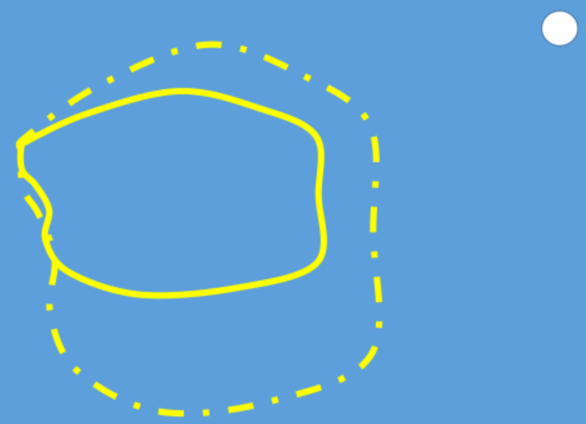
Le curve Tratteggiate sono curve chiuse che definiscono domini che comprendono il punto di discontinuità

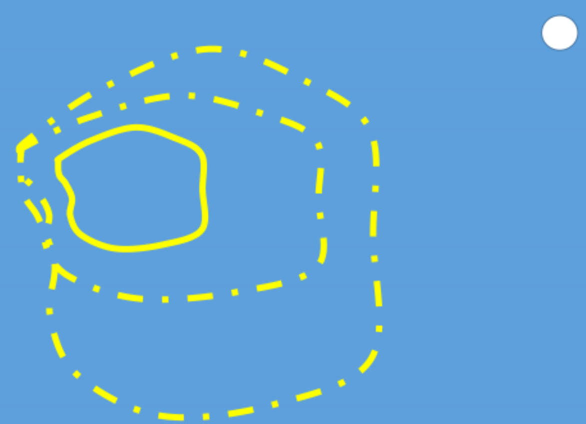
In R^2;

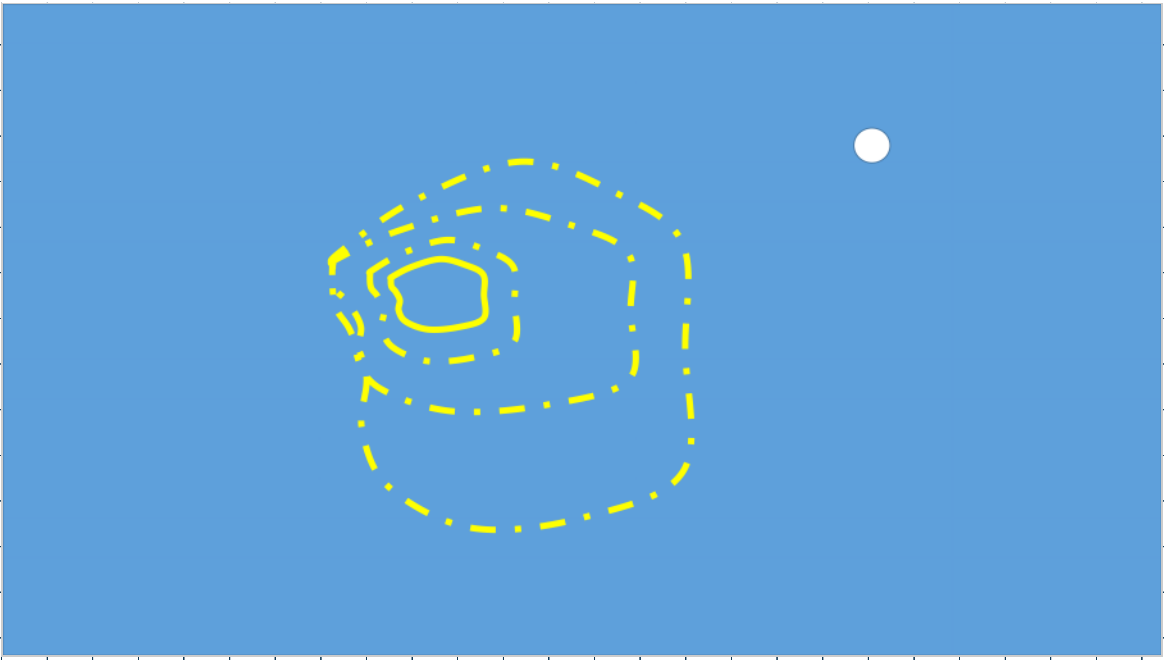
tutti gli intorni che circondano un punto di discontinuità non sono domini semplicemente connessi poiché possono essere DEFORMATI e dunque passare per il punto



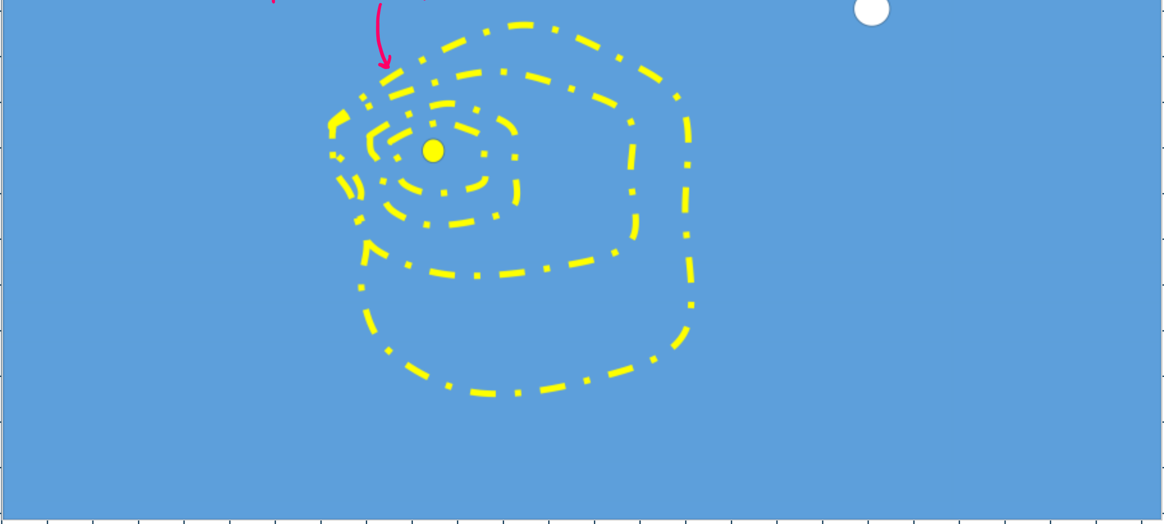
Se una curva definisce un dominio senza buchi, esso è SEMPLICEMENTE CONNESSO e può essere deformato fino ad essere un punto



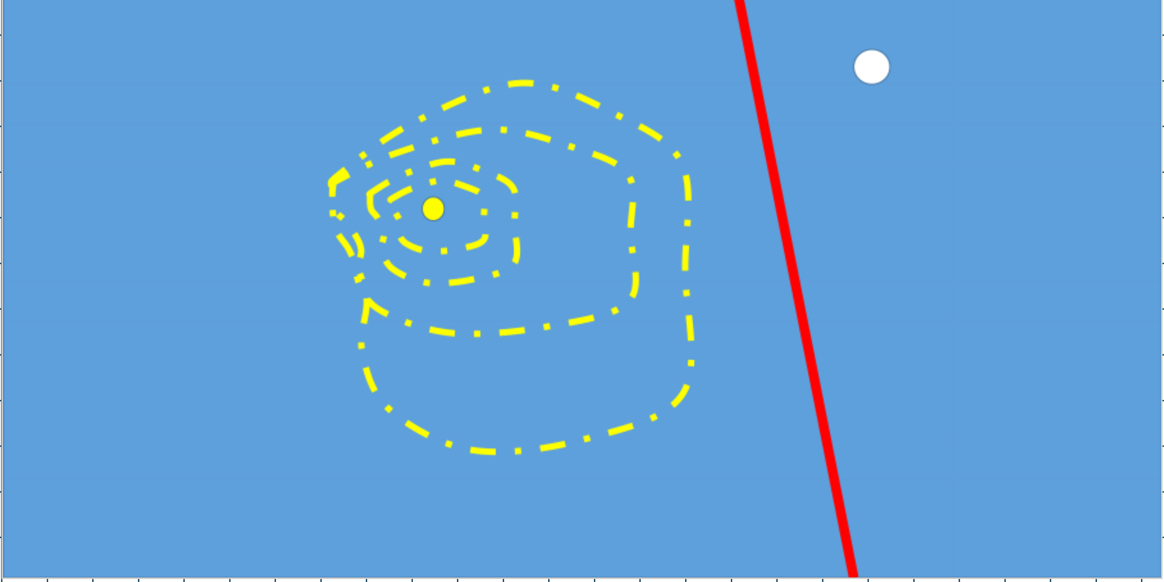




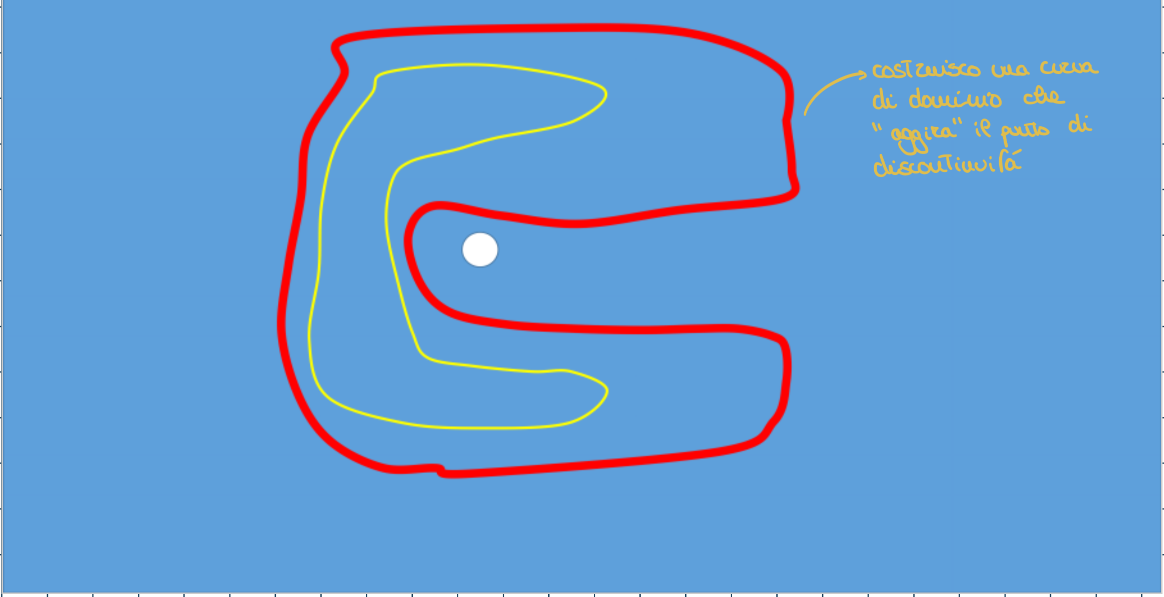
poiché il punto di discontinuità non è interno alla curva allora posso farla degenerare in un punto senza farla passare per un punto di discontinuità

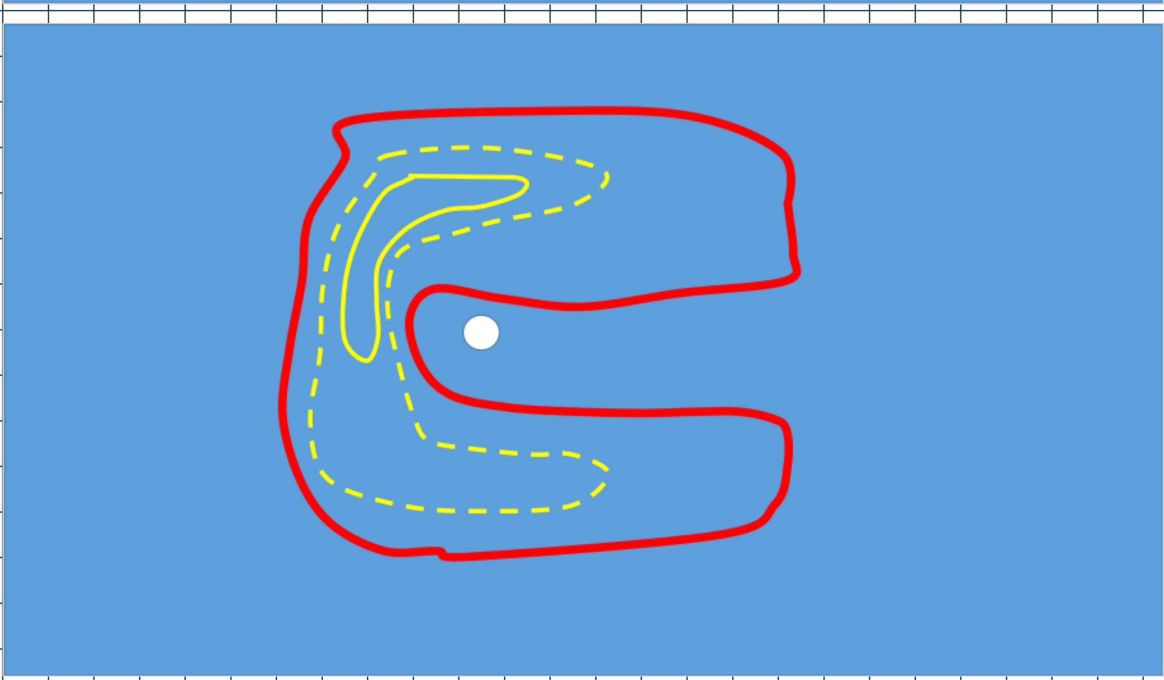


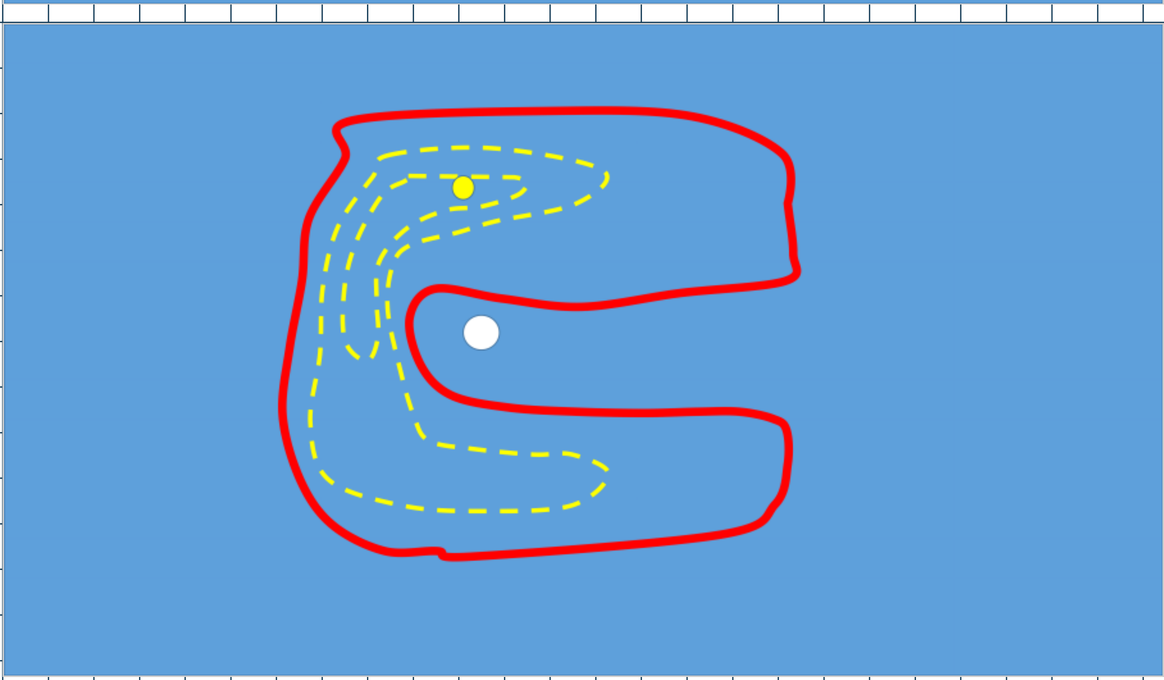
DOMINIO SEMPLICEMENTE CONNESSO:



DOMINIO SEMPLICEMENTE CONNESSO:







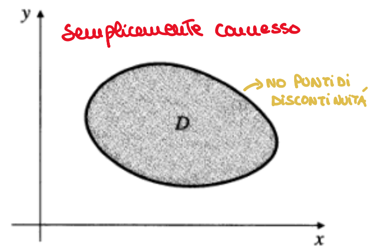


Figure 15.11 A simply connected domain

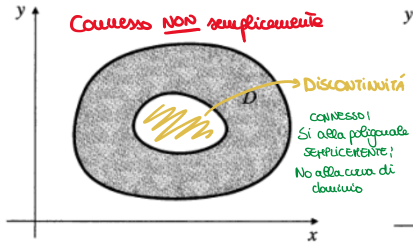


Figure 15.12 A connected domain that is not simply connected

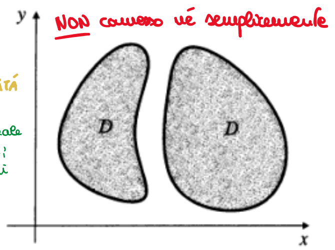


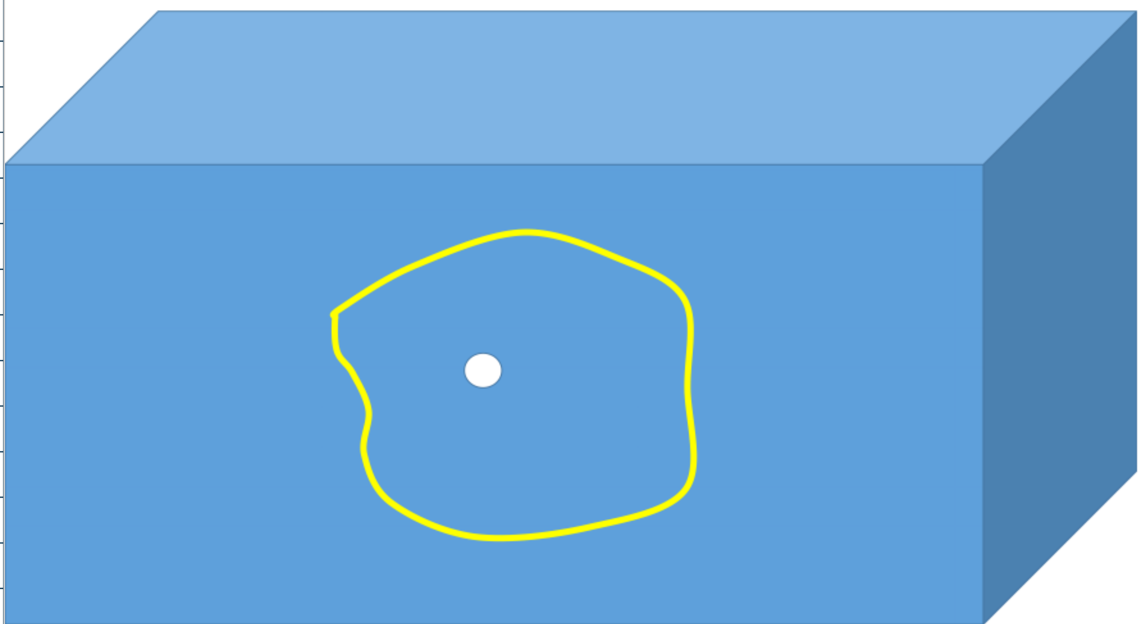
Figure 15.13 A domain that is not connected

In the plane, a simply connected domain D can have no holes, not even a hole consisting of a single point. The interior of every non-self-intersecting closed curve in such a domain D lies in D. For instance, the domain of the function $1/(x^2 + y^2)$ is not simply connected because the origin does not belong to it. (The origin is a "hole" in that domain.) In 3-space, a simply connected domain can have holes. The set of all points in $\mathbb{R}^3$ different from the origin is simply connected, as is the exterior of a ball. But the set of all points in $\mathbb{R}^3$ satisfying $x^2 + y^2 > 0$ is not simply connected. Neither is the interior of a doughnut (a *torus*). In general, each of the following conditions characterizes simply connected domains D:

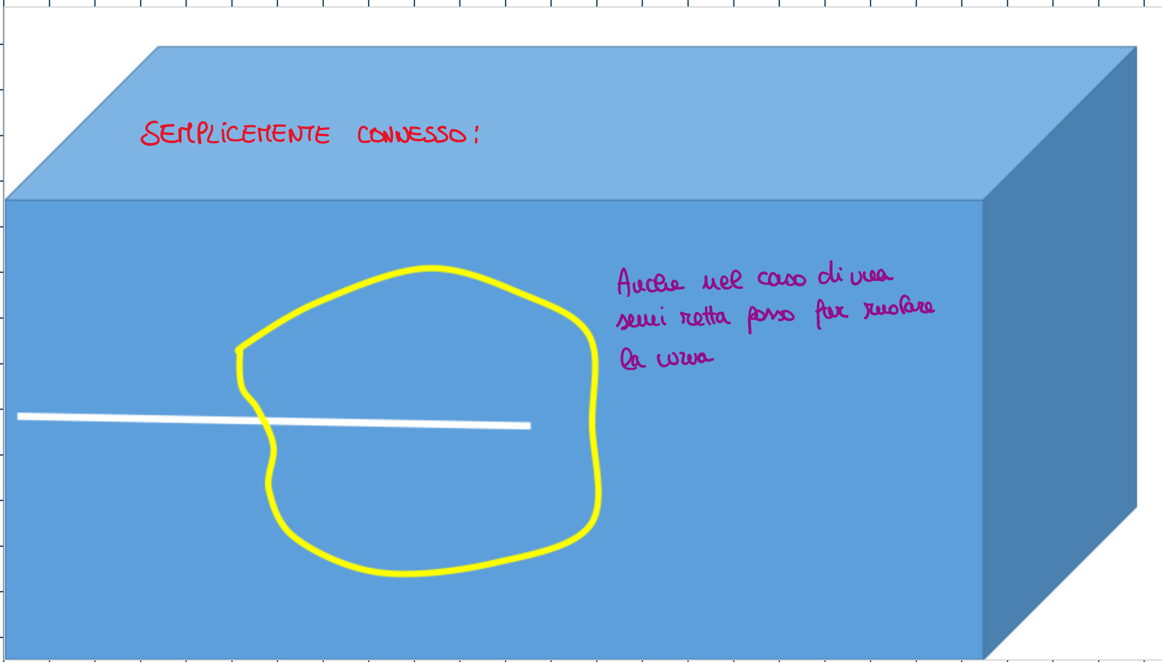
(i) Any simple closed curve in D is the boundary of a "surface" lying in D.

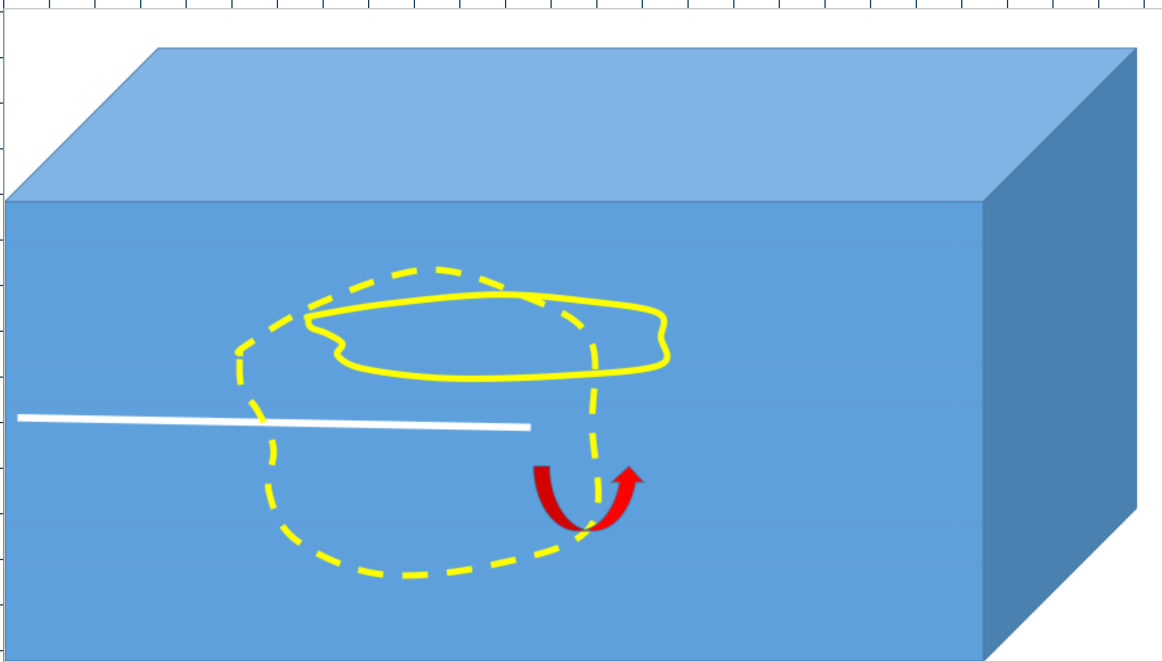
(ii) If $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$ are two curves in D having the same endpoints, then $\mathcal{C}_1$

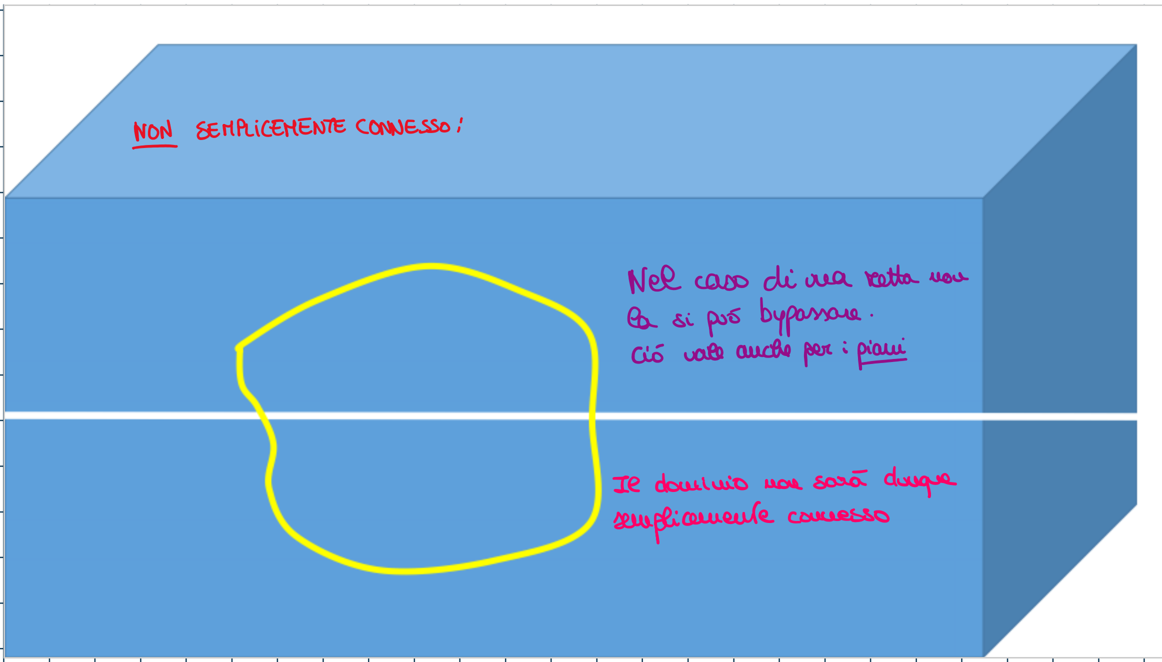
$\mathbb{R}^3$

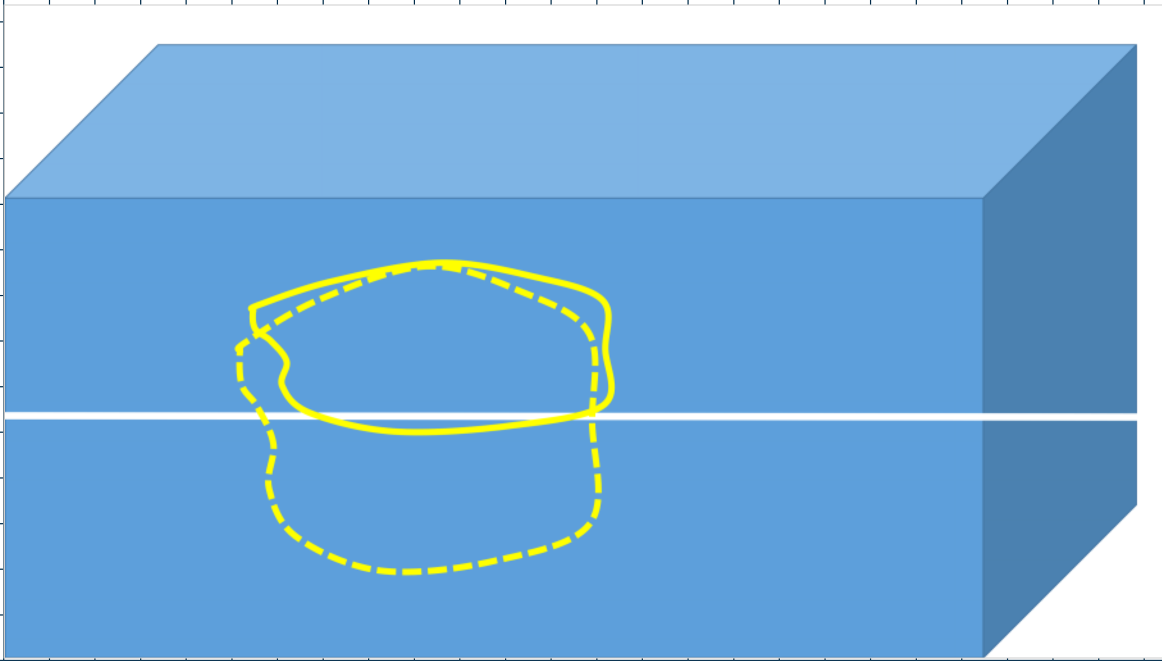


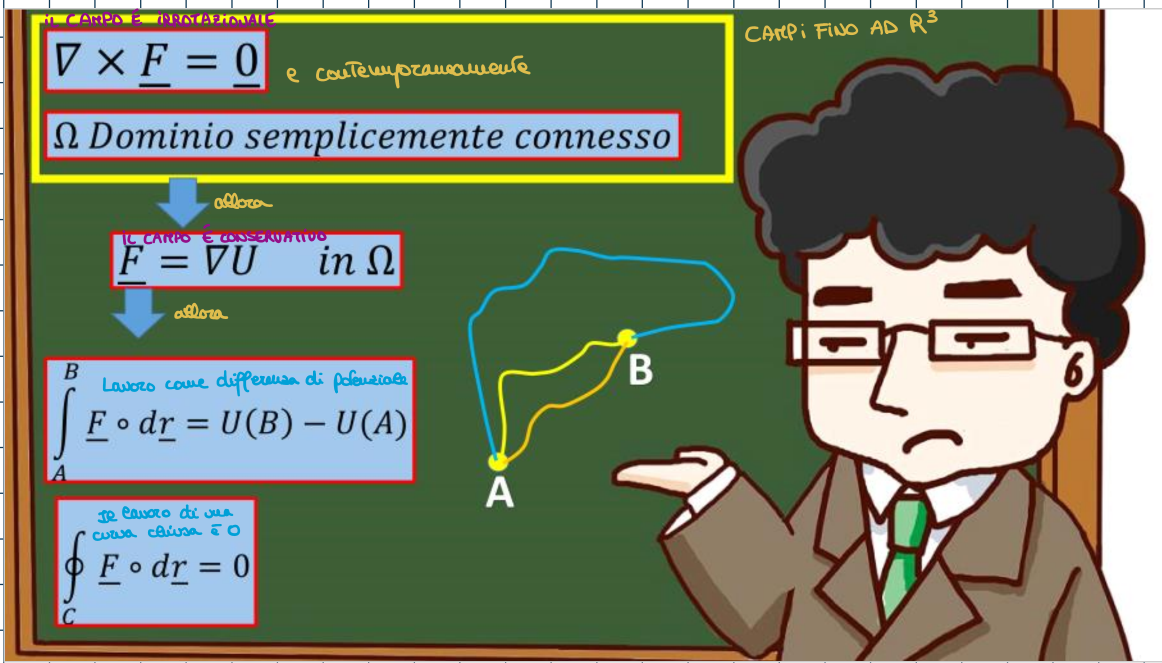

SEMPLICENTE CONNESSO:
Nel Tridimensionale si può far ruotare la curva ed aggirare il punto
Dunque la deformazione può essere compiuta anche tramite ROTAZIONE

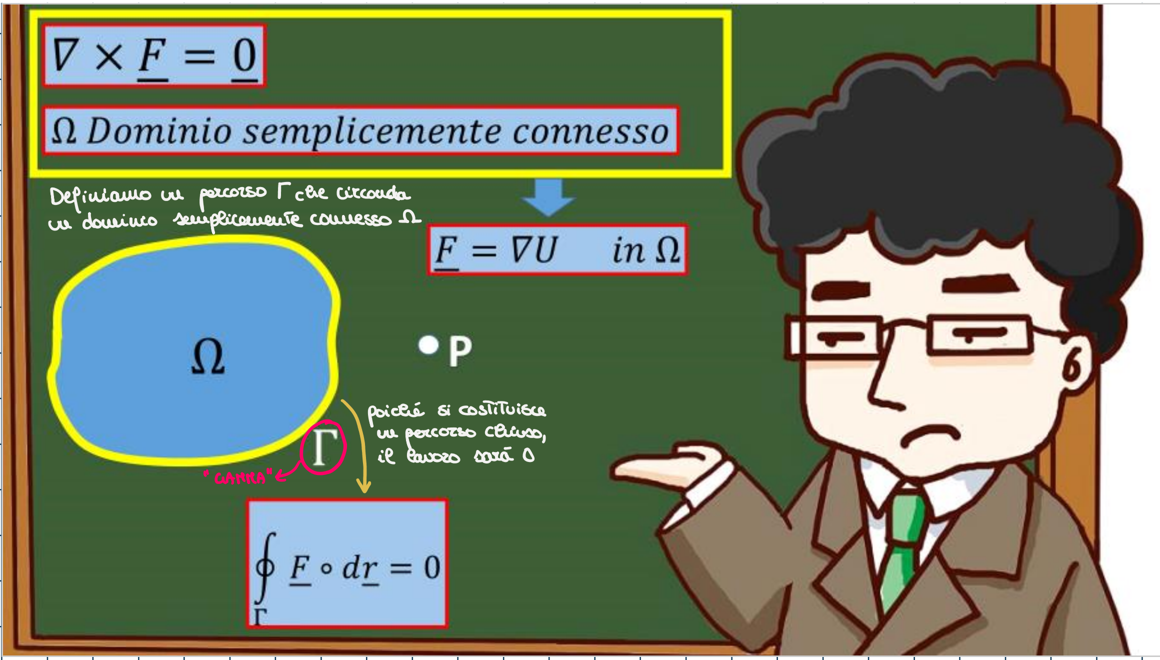

SEMPLICEMENTE CONNESSO:
Anche nel caso di una semi retta posso far ruotare la curva

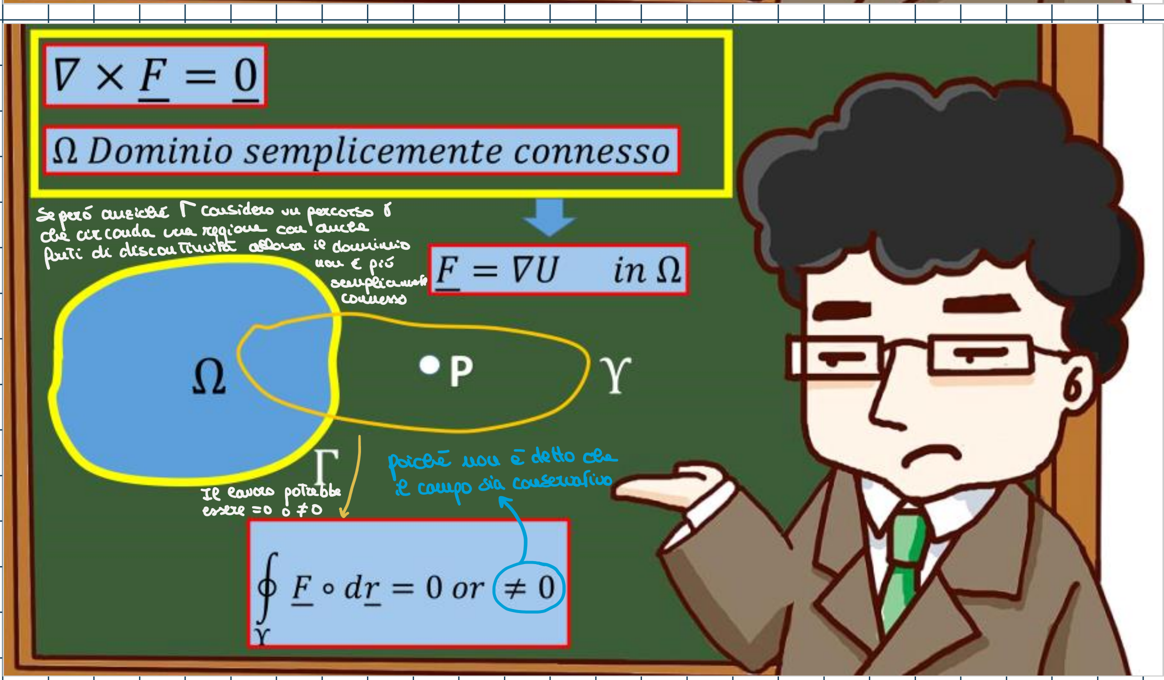



NON SEMPLICEMENTE CONNESSO:
Nel caso di una retta non la si può bypassare.
Ciò vale anche per i piani
Il dominio non sarà dunque semplicemente connesso




IL CAMPO È IRROTAZIONALE
$\nabla \times \underline{F} = \underline{0}$
e contemporaneamente
Ω Dominio semplicemente connesso
CAMPI FINO AD R^3
allora
IL CAMPO È CONSERVATIVO
$\underline{F} = \nabla U \quad in\ \Omega$
allora
Lavoro come differenza di potenziale
$\int_A^B \underline{F} \circ d\underline{r} = U(B) - U(A)$
Il lavoro di una curva chiusa è 0
$\oint_C \underline{F} \circ d\underline{r} = 0$
B
A





Algoritmo complessivo per risolvere Integrali curvilinei di II specie

CAMPO IRROTAZIONALE

$$\nabla \times \underline{F} = \underline{0} \wedge Dominio\ semplicemente\ connesso$$

conservativo ⇒ irrotazionale

non irrotazionale ⇒ non conservativo

SI

Il campo è conservativo

$\underline{F} = \nabla U$ ⇒ Determinazione di U

$$\int_A^B \underline{F} \circ d\underline{r} = U(B) - U(A)$$

$$\oint_C \underline{F} \circ d\underline{r} = 0$$

NO

$\underline{F} \neq \nabla U$

$$\int_A^B \underline{F} \circ d\underline{r}$$

⇒

- Parametrizzare curva/tratti di curva
- Esprimere F e dr in funzione di t
- Impostare il verso di percorrenza con gli estremi di integrazione

$\int_b^a$ $b \longrightarrow a$

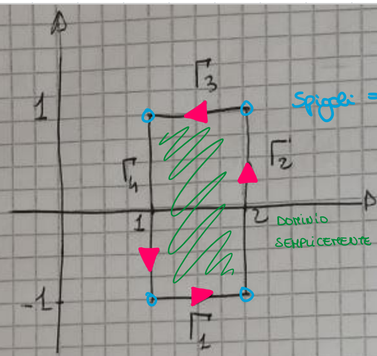
$\int_a^b$ $a \longrightarrow b$

PARAMETRIZZAZIONE :

$$\oint_{\Gamma} \Big(\underbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}}_{\text{Non si annulla mai quindi è un dominio semplicemente connesso}}, \frac{x}{x^2+y^2}\Big) \circ (dx, dy)$$

1ª comp. 2ª comp.

$\circ$ prodotto scalare

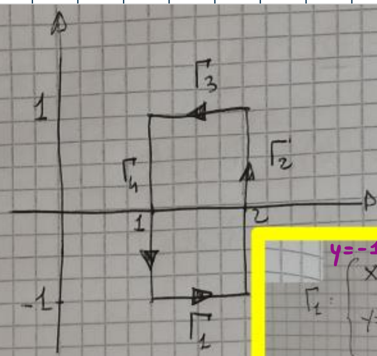


$$\oint_{\Gamma} \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \circ (dx, dy) = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} + \int_{\Gamma_4} = 0$$

poiché:

IRROTAZIONALITÀ + DOMINIO SEMPLICEMENTE CONNESSO $\Downarrow$ LAVORO $= 0$

$$\oint_{\Gamma} \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \circ (dx, dy)$$



$$\oint_{\Gamma} \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \circ (dx, dy) =$$

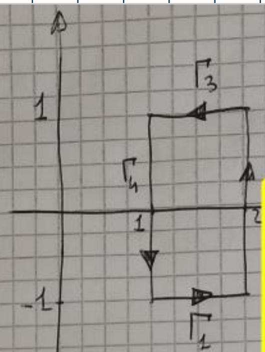
$y = -1$ $\quad 1 \le x \le 2$

$$\Gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = -1 \end{cases} \quad t \in [1, 2] \qquad dx = dt \quad dy = 0$$

$$\int_{\Gamma_1} \frac{1}{x^2+1}\, dx = \int_1^2 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_1^2 = \operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{4}$$

$$\int_{\Gamma_1} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int_1^2 \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t \Big|_1^2 = \operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{4}$$

$$\oint_{\Gamma} \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \circ (dx, dy)$$



$$\oint_{\Gamma} \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \circ (dx, dy) =$$

$x = 2$ $\quad -1 \le y \le 1$

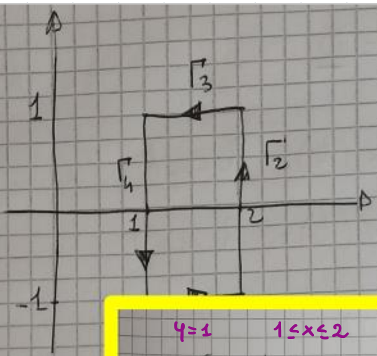
$$\Gamma_2 : \begin{cases} x = 2 \\ y = t \end{cases} \quad t \in [-1, 1] \qquad dx = 0 \quad dy = dt$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{2}{4+t^2}\, dt = \int_{-1}^{1} \frac{2\,dt}{4\left(1+\left(\frac{t}{2}\right)^2\right)} =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{2}\, dt = \operatorname{arctg} \frac{t}{2} \Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$$

$$\oint_{\Gamma} \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right) \circ (dx, dy)$$



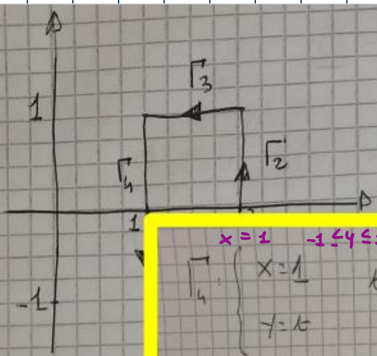
$$\oint_{\Gamma} \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right) \circ (dx,$$

$y=1$ $\quad 1 \le x \le 2$

$$\Gamma_3 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases} \quad t \in [1,2] \qquad dx = dt \quad dy = 0$$

$$\int_{\Gamma_3} = \int_2^1 \frac{-1}{1+t^2}\, dt = \int_1^2 \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{4}$$

$$\oint_{\Gamma} \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right) \circ (dx, dy)$$



$$\oint_{\Gamma} \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right) \circ (dx, d$$

$x=1$ $\quad -1 \le y \le 1$

$$\Gamma_4 : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases} \quad t \in [-1,1] \qquad dx = 0 \quad dy = dt$$

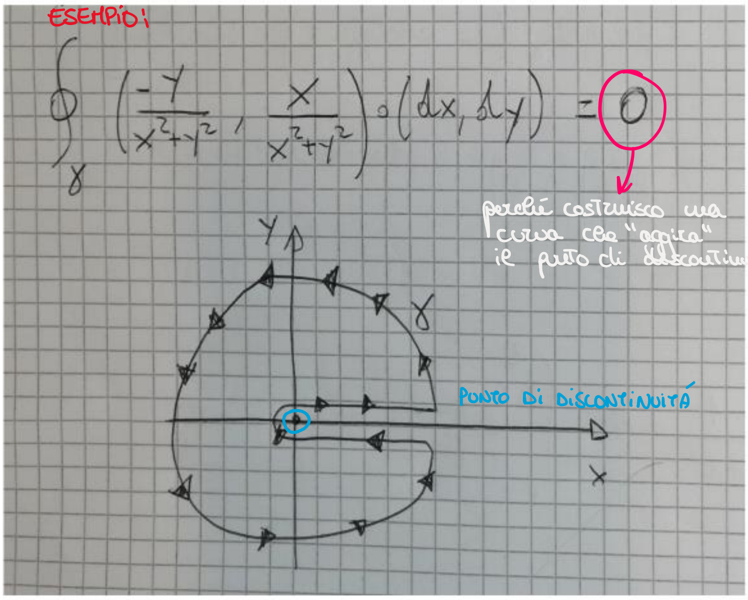
$$\int_{\Gamma_4} = \int_1^{-1} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \operatorname{arctg}(-1) - \operatorname{arctg}(1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\oint_{\Gamma} = 2\operatorname{arctg} 2 + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \pi = 0$$

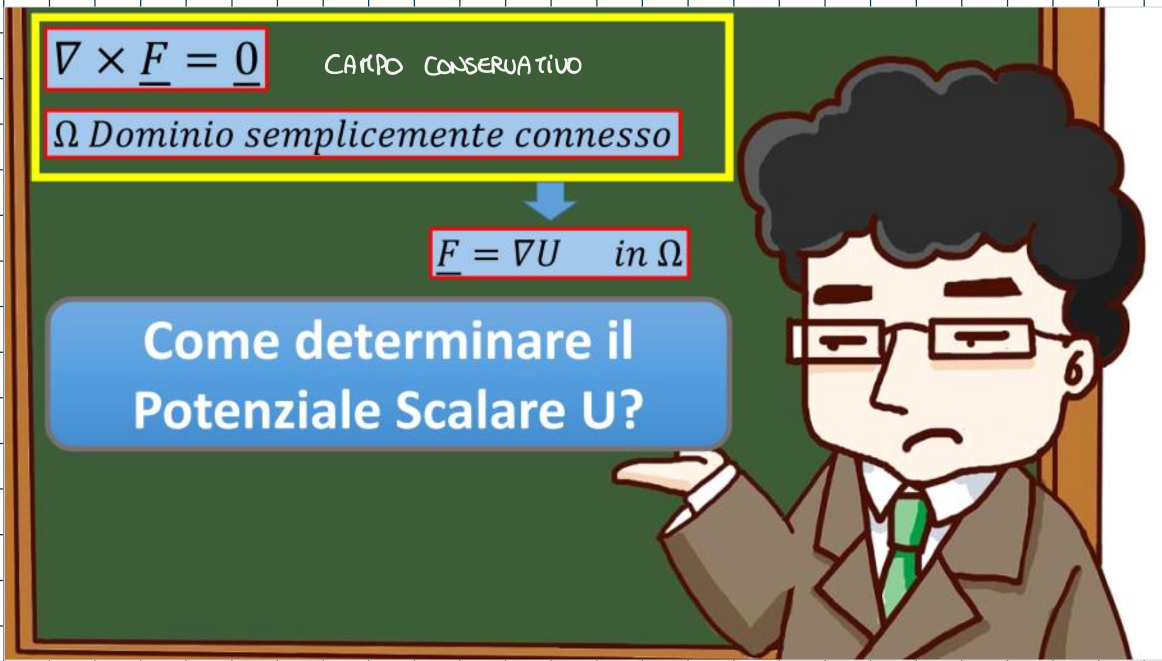
$$\operatorname{tg}\alpha = a = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad a > 0$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} \Rightarrow \begin{array}{l} \cos\alpha = \sin\beta \\ \sin\alpha = \cos\beta \end{array}$$

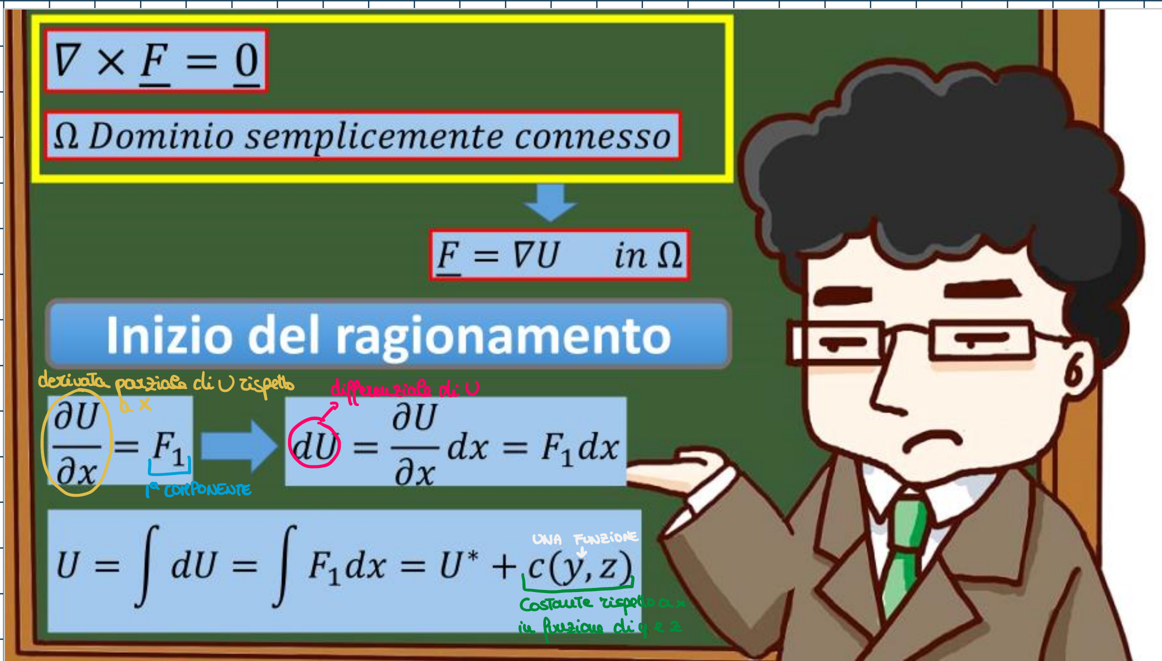
$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \qquad \text{se } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$



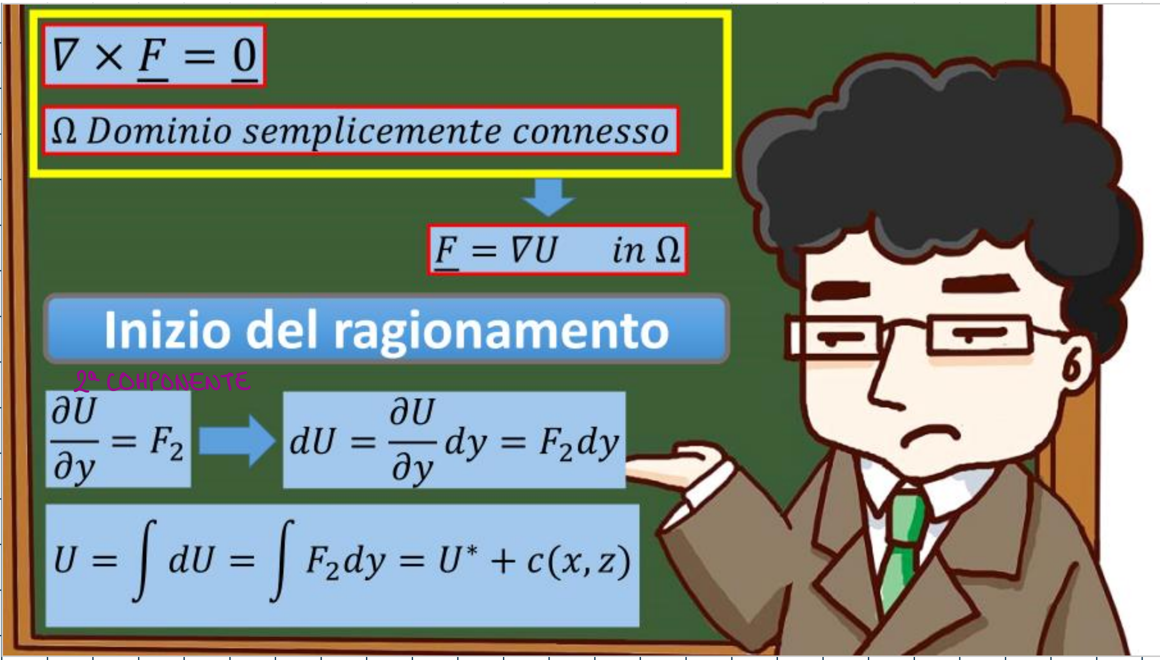
ESEMPIO:
$\oint_\gamma \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \circ (dx, dy) = 0$
perché costruisco una curva che "aggira" il punto di discontinuità
y
γ
PUNTO DI DISCONTINUITÁ
x

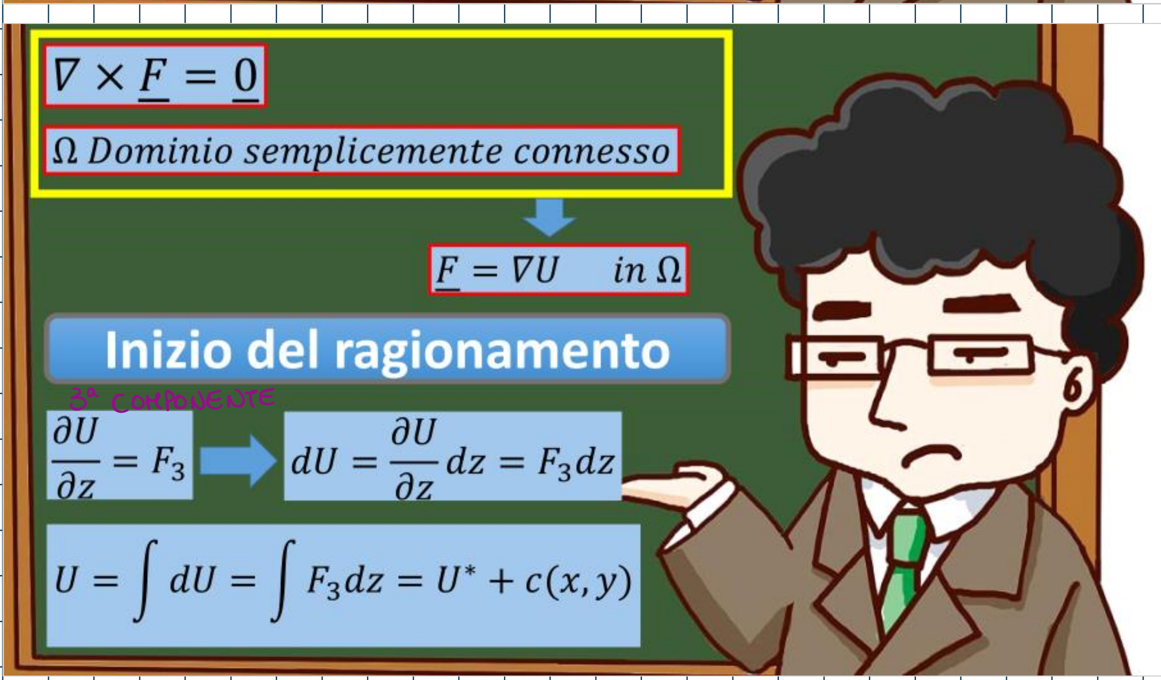


$\nabla \times \underline{F} = \underline{0}$
CAMPO CONSERVATIVO
Ω Dominio semplicemente connesso
$\underline{F} = \nabla U \quad in\ \Omega$
Come determinare il Potenziale Scalare U?



$\nabla \times \underline{F} = \underline{0}$
Ω Dominio semplicemente connesso
$\underline{F} = \nabla U \quad in\ \Omega$
Inizio del ragionamento
derivata parziale di U rispetto a x
differenziale di U
$\frac{\partial U}{\partial x} = \underbrace{F_1}_{1^a \text{ COMPONENTE}}$
$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx = F_1 dx$
UNA FUNZIONE
$U = \int dU = \int F_1 dx = U^* + \underbrace{c(y,z)}_{\text{costante rispetto a x in funzione di y e z}}$





ESEMPIO:

$\underline{F}(x,y,z) = (e^x \cos y + yz,\ xz - e^x \operatorname{sen} y,\ xy)$

campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$

non ci sono
- denominatori
- radici
- ⋮
- logaritmi

NON ci sono PUNTI DI DISCONTINUITÀ

$\underline{F}(x,y,z)$ DEFINITA $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

DUNQUE

DOMINIO SEMPLICEMENTE CONNESSO

È SEMPLICEMENTE CONNESSO

Domanda: Il campo è IRROTAZIONALE?

$\nabla \times \underline{F} = \underline{0}$?

Confronto le derivate parziali:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x \\ y = y \\ -e^x \operatorname{sen} y + z = z - e^x \operatorname{sen} y \end{cases}$$

$\underline{F}(x,y,z) = \left(e^x \cos y + yz,\; xz - e^x \sin y,\; xy\right)$

$\underline{F}(x,y,z)$ DEFINITA $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

DOMINIO SEMPLICEMENTE CONNESSO

dunque:

$\underline{F}(x,y,z)$ È UN CAMPO CONSERVATIVO

e perciò:

$\omega(x,y,z) = F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz =$

$= \left(e^x \cos y + yz\right)dx + \left(xz - e^x \sin y\right)dy + xy\,dz$

perciò:

È UNA FORMA DIFFERENZIALE ESATTA

(È ANCHE CHIUSA poiché F è IRROTAZIONALE)

DETERMINAZIONE DI $U(x,y,z)$

1° STEP: integrazione rispetto a x

$U(x,y,z) = \int \left(e^x \cos y + yz\right)dx =$

espressione temporanea di U

$= e^x \cos y + xyz + c_1(y,z)$

È costante di integrale indefinito ma in funzione di y e z

2° STEP: $\frac{dU}{dy} = F_2$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(e^x \cos y + xyz + c_1(y,z)\right) = F_2 = xz - e^x \sin y$

$- e^x \sin y + xz + \frac{\partial c_1(y,z)}{\partial y} = -e^x \sin y + xz$

$\frac{\partial}{\partial y} c_1(y,z) = 0 \Rightarrow c_1(y,z) = c_2(z)$

Costante rispetto alla variabile d'integrazione y ma in funzione della variabile rimasta z

* potrei partire da z e derivo poi per x e y o potrei partire da y e poi derivo per z e x

L'espressione temporanea è diventata:

$U(x,y,z) = e^x \cos y + xyz + c_2(z)$

3° STEP: $\frac{dU}{dz} = F_3$

$\frac{\partial}{\partial z}\left(e^x \cos y + xyz + c_2(z)\right) = F_3 = xy$

$xy + \frac{d\,c_2(z)}{dz} = xy$

$\frac{d\,c_2(z)}{dz} = 0 \Rightarrow c_2(z) = K$

Diventa una costante

L'espressione temporanea è diventata:

$U(x,y,z) = e^x \cos y + xyz + K$

si annulla poi nei calcoli

VERIFICA DEI CALCOLI

Cosa deve risultare:

$\frac{\partial U}{\partial x} = e^x \cos y + yz = F_1$ OK

$\frac{\partial U}{\partial y} = -e^x \sin y + xz = F_2$ OK

$\frac{\partial U}{\partial z} = xy = F_3$ OK

DUNQUE:

SIANO $A \equiv (0,0,0)$ E $B \equiv (1,1,1)$

$L_{AB} = \int_A^B \underline{F} \circ d\underline{r} = U(B) - U(A) =$

$= e\cos(1) + 1 + K - (1 + K) = e\cos(1)$

ESEMPIO: F_1 F_2

ESEMPIO:

$\underline{F}(x,y) = (\overbrace{2x+5y^3}^{F_1})\hat{i} + (\overbrace{15xy^2+2y}^{F_2})\hat{j}$

campo bidimensionale

$F_1 = 2x+5y^3 \qquad F_2 = 15xy^2+2y$

1) DOMINIO: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

DOMINIO SEMPLICEMENTE CONNESSO

2) CHECK SU IRROTAZIONALITÀ

$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 15y^2$ deve essere uguale a $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 15y^2$

$\underline{F}(x,y)$ È UN CAMPO CONSERVATIVO

$\omega(x,y) = (2x+5y^3)\,dx + (15xy^2+2y)\,dy$

È UNA FORMA DIFFERENZIALE ESATTA

3) DETERMINAZIONE DI $U(x,y)$

INTEGRO RISPETTO A x

1 $U(x,y) = \int F_1\,dx = \int (2x+5y^3)\,dx =$

$= \boxed{x^2+5xy^3+c(y)}$ Espressione Temporanea

DERIVO RISPETTO A y

2 $\frac{\partial(x^2+5xy^3+c(y))}{\partial y} = 15xy^2+2y$

$15xy^2 + \frac{dc(y)}{dy} = 15xy^2 + 2y$

$\frac{dc(y)}{dy} = 2y \Rightarrow c(y) = y^2+K$

$\boxed{U(x,y) = x^2+5xy^3+y^2+K}$

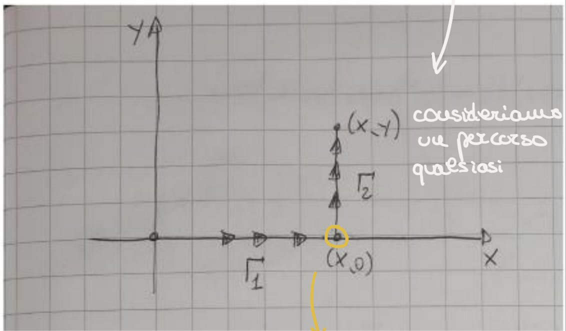
!! METODO ALTERNATIVO DI CALCOLO PER $U(x,y)$

$\int_\Gamma \underline{F}\circ d\underline{r} = U(x,y) - U(0,0)$

sapendo che sia conservativo

METODO ALTERNATIVO DI CALCOLO PER $U(x,y)$

$\int_\Gamma \underline{F}\circ d\underline{r} = U(x,y) - U(0,0)$



percorso regolare a tratti

a Tratti

È UNA FORMA DI[illegible] ESATTA

$\underline{F}(x,y) = (2x+5y^3)\hat{i} + (15xy^2+2y)\hat{j}$

$\Gamma_1: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad t \in [0, x] \qquad \begin{matrix} dx = dt \\ dy = 0 \end{matrix}$

$$\int_{\Gamma_1} \underline{F} \circ d\underline{r} = \int_0^x 2t\,dt = x^2$$

$\Gamma_2: \begin{cases} x = x \text{ (COSTANTE)} \\ y = t \end{cases} \quad t \in [0, y] \qquad \begin{matrix} dx = 0 \\ dy = dt \end{matrix}$ NON $dx = dt$

$$\int_{\Gamma_2} (15xt^2 + 2t)\,dt = \int_0^y (15xt^2+2t)\,dt = 5xy^3 + y^2$$

$\Gamma_1 + \Gamma_2$

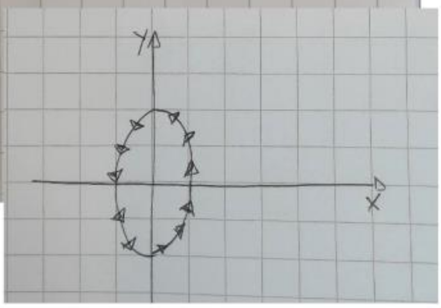
$U(x,y) - U(0,0) = x^2 + 5xy^3 + y^2$

ESERCIZIO:

$$\oint_\gamma (e^x \operatorname{sen} y + 3y)\,dx + (e^x \cos y + 2x - 2y)\,dy$$

INTEGRALE DI FORMA DIFFERENZIALE

$\gamma: \; x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$



DOMINIO SEMPLICEMENTE CONNESSO

$$\oint_\gamma (e^x \text{sen}\, y + 3y)\,dx + (e^x \cos y + 2x - 2y)\,dy$$

1) CHECK SU IRROTAZIONALITÁ

derivata della prima componente rispetto a y

$$\frac{\partial (e^x \text{sen}\, y + 3y)}{\partial y} = e^x \cos y + 3$$

lo scrivo come $2y + y$

derivata della seconda componente rispetto a x

$$\frac{\partial (e^x \cos y + 2x - 2y)}{\partial x} = e^x \cos y + 2$$

É ROTAZIONALE !!!

$$\nabla \times \underline{F} \neq \underline{0}$$

Se i due termini noti fossero stati uguali sarebbe stato irrotazionale

$$\oint_\gamma (e^x \text{sen}\, y + 3y)\,dx + (e^x \cos y + 2x - 2y)\,dy$$

ogni campo è dato da parte conservativa e parte non conservativa

$$\underline{F}(x,y) = \underline{F}_C(x,y) + \underline{F}_{NC}(x,y)$$

$$\underline{F}_C(x,y) = (e^x \text{sen}\, y + 2y,\ e^x \cos y + 2x - 2y)$$

quello che manca a F_C è una y dunque lo aggiungo tramite F_{NC}

$$\underline{F}_{NC} = (y, 0)$$

DUNQUE:

PERCORSO CHIUSO

$$\oint_\gamma \underline{F}\, d\underline{r} = \underbrace{\int_\gamma \underline{F}_C \circ d\underline{r}}_{=0} + \int_\gamma \underline{F}_{NC} \circ d\underline{r} = \int_\gamma \underline{F}_{NC} \circ d\underline{r}$$

CALCOLO DI $\int_\gamma \underline{F}_{NC} \circ d\underline{r} = \int_\gamma y\, dx$

$F_{NC} = (y, 0)$

Coordinate ellittiche

$$\gamma: \begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\,\text{sen}\, t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \qquad \begin{aligned} dx &= -\text{sen}\, t\, dt \\ dy &= 2\cos t\, dt \end{aligned}$$

$\int_\gamma y\, dx$

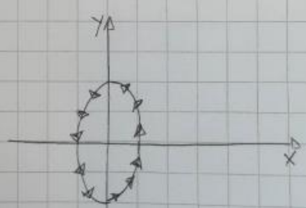
$$\int_0^{2\pi} (-2\,\text{sen}^2 t)\, dt =$$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\,\text{sen}^2 \alpha$

$-2\,\text{sen}^2 \alpha = \cos 2\alpha - 1$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos 2t - 1)\, dt = \left[\frac{1}{2}\text{sen}\, 2t - t\right]_0^{2\pi} =$$

$$= -2\pi$$



6.26 Dimostrare che le seguenti forme differenziali sono esatte nel loro insieme di definizione e determinare una loro primitiva f.

(a) $\omega = (\cos y - y^3 \operatorname{sen} x)\, dx + (3y^2 \cos x - x \operatorname{sen} y)\, dy$

(b) $\omega = y(y + 3x^2)\, dx + x(2y + x^2)\, dy$

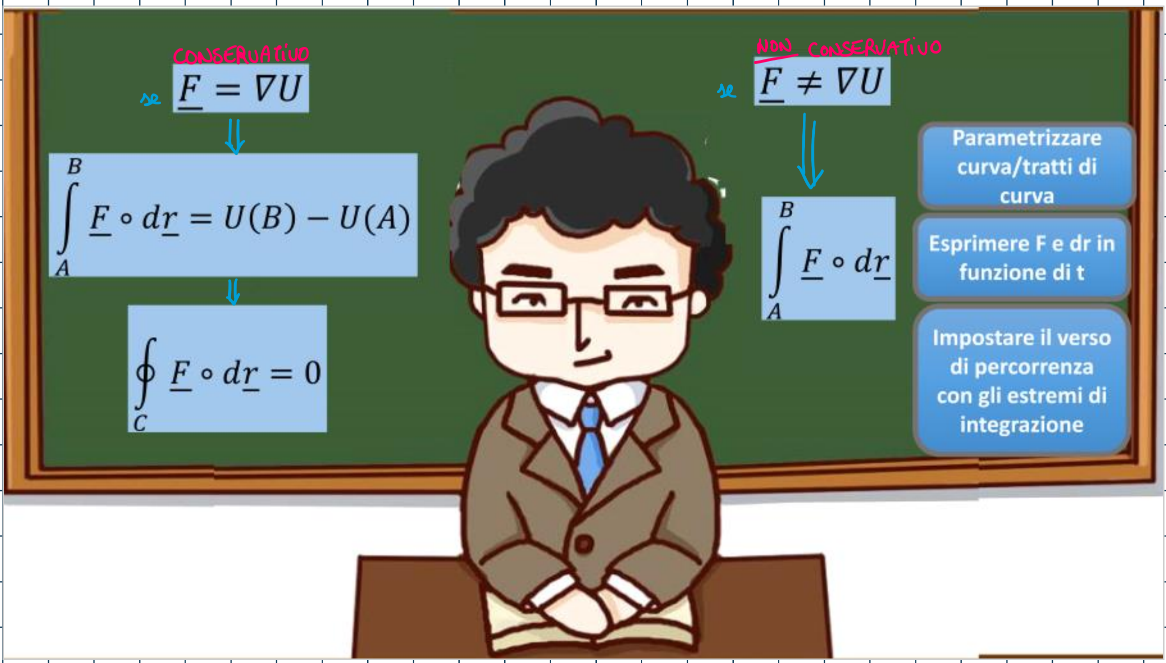
(c) $\omega = (1 + \cos x \cos y - y^2 \operatorname{sen} x)\, dx + (2y \cos x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y)\, dy$

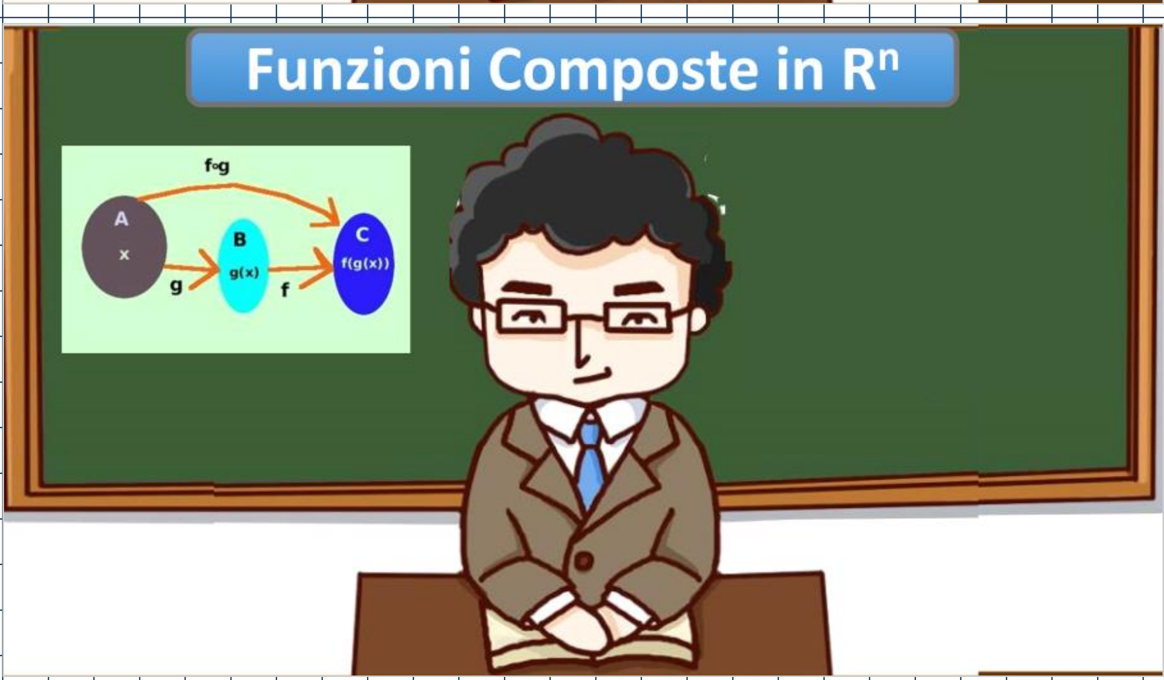
(d) $\omega = (\operatorname{sen} y - y \cos x)\, dx + (x \cos y - \operatorname{sen} x)\, dy$

(e) $\omega = (\log y + \cos x)\, dx + (x/y)\, dy$

(f) $\omega = (y^2 - 3y \cos x)\, dx + (2xy - 3 \operatorname{sen} x)\, dy + 4z^3\, dz$

(g) $\omega = [y \cos(x+z) - \operatorname{sen}(x+y)]\, dx + [\operatorname{sen}(x+z) - \operatorname{sen}(x+y)]\, dy + y \cos(x+z)\, dz$





FUNZIONI COMPOSTE

IN ANALISI 1

$$A \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{f} B \subseteq \mathbb{R} \xrightarrow{g} C \subseteq \mathbb{R}$$

$$h = g \circ f = g(f(x))$$

$$(h(x) = g(f(x)))$$

$$\frac{d\,h(x)}{dx} = \frac{d\,g(f(x))}{d\,f(x)} \cdot \frac{d\,f(x)}{dx}$$

Inoltre:

$$h(x) = e^{\operatorname{sen} x} \longrightarrow \begin{cases} g = e^{(\ )} \\ f = \operatorname{sen} x \end{cases}$$

$$h'(x) = e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x$$

IN ANALISI 2

L'immagine di f è dominio di g (come dimensione)

$$A \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} B \subseteq \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} C \subseteq \mathbb{R}^k$$

$$\underline{h} = \underline{g} \circ \underline{f} \qquad \underline{h} = (h_1, h_2, \dots h_k)$$

$$\underline{f} = (f_1, f_2, \dots f_m) \qquad \underline{g} = (g_1, g_2, \dots g_k)$$

$$\underline{\underline{J}}\underline{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & & \\ & & \ddots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & & & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad m \times n$$

$$\underline{\underline{J}}\underline{g} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial f_1} & \frac{\partial g_1}{\partial f_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial f_m} \\ \vdots & \frac{\partial g_2}{\partial f_2} & & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial f_1} & & & \frac{\partial g_k}{\partial f_m} \end{pmatrix} \quad k \times m$$

La matrice che mette insieme le derivate parziali è detta **MATRICE JACOBIANA** ed è detta anche **MATRICE DEI GRADIENTI** dove ogni riga è associata al gradiente della generica componente rispetto a tutte le variabili indipendenti

$$\underline{\underline{J}}\underline{h} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial h_k}{\partial x_1} & \cdots & & \frac{\partial h_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad k \times n$$

$$\boxed{\underset{(k \times n)}{\underline{\underline{J}}\underline{h}} = \underset{(k \times m) \times (m \times n)}{\underline{\underline{J}}\underline{g} \circ \underline{\underline{J}}\underline{f}}}$$

PROPRIETÀ DELL'ALGEBRA

$$\frac{\partial h_1}{\partial x_1} = \frac{\partial g_1}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_1}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \dots \frac{\partial g_1}{\partial f_m} \cdot \frac{\partial f_m}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_j} = \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial f_s} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial x_j}$$

diventa una sommatoria

ESEMPIO

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$f(x,y) = (\underbrace{e^{xy}}_{f_1}, \underbrace{\operatorname{sen}(x\cdot y)}_{f_2}, \underbrace{x+y}_{f_3})$$

$$g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$g(u,v,w) = (\underbrace{u\,v\,w}_{g_1}, \underbrace{u+v+w}_{g_2})$$

$f_1 \cdot f_2 \cdot f_3$ $\quad$ $f_1 + f_2 + f_3$

$u = f_1$
$v = f_2$
$w = f_3$

$$h = g \circ f = (\underbrace{e^{xy} \cdot \operatorname{sen}(x \cdot y) \cdot (x+y)}_{h_1}, \underbrace{e^{xy} + \operatorname{sen}(x\cdot y) + x + y}_{h_2})$$

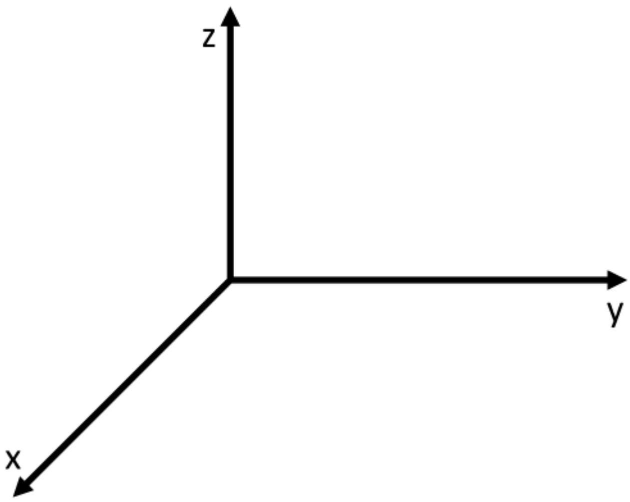
$$\frac{\partial h_1}{\partial x_1} = \frac{\partial g_1}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_1}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial g_1}{\partial f_3} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial x_1} =$$

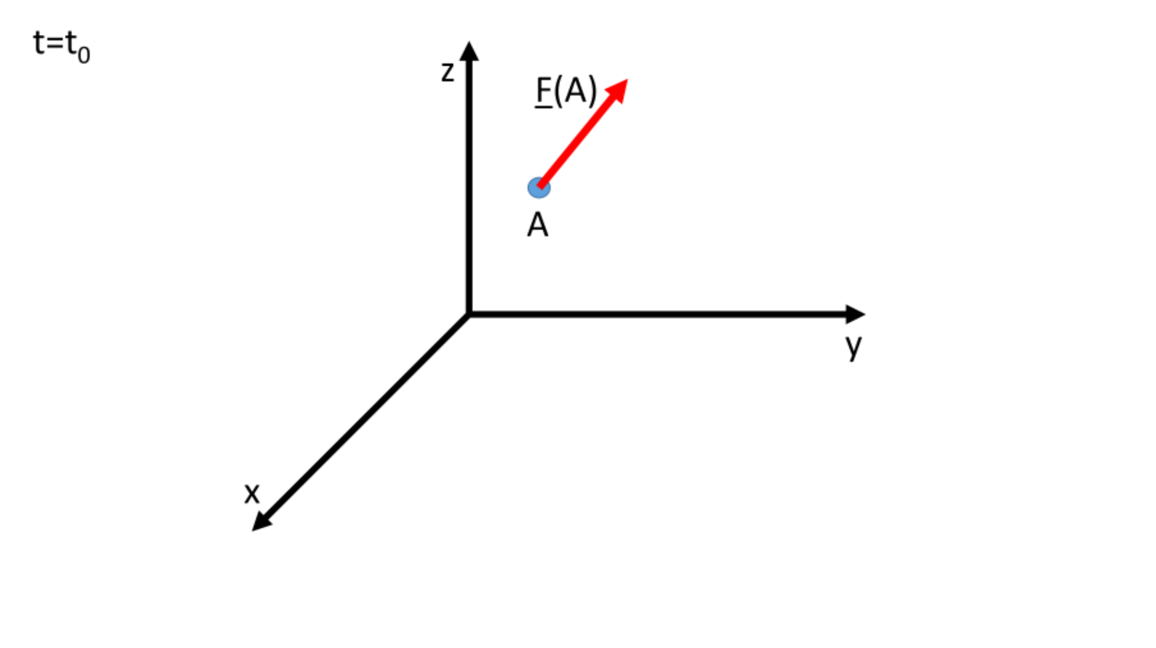
$$= vw \cdot y e^{xy} + uw \cdot y \cos(xy) + uv \cdot 1 =$$

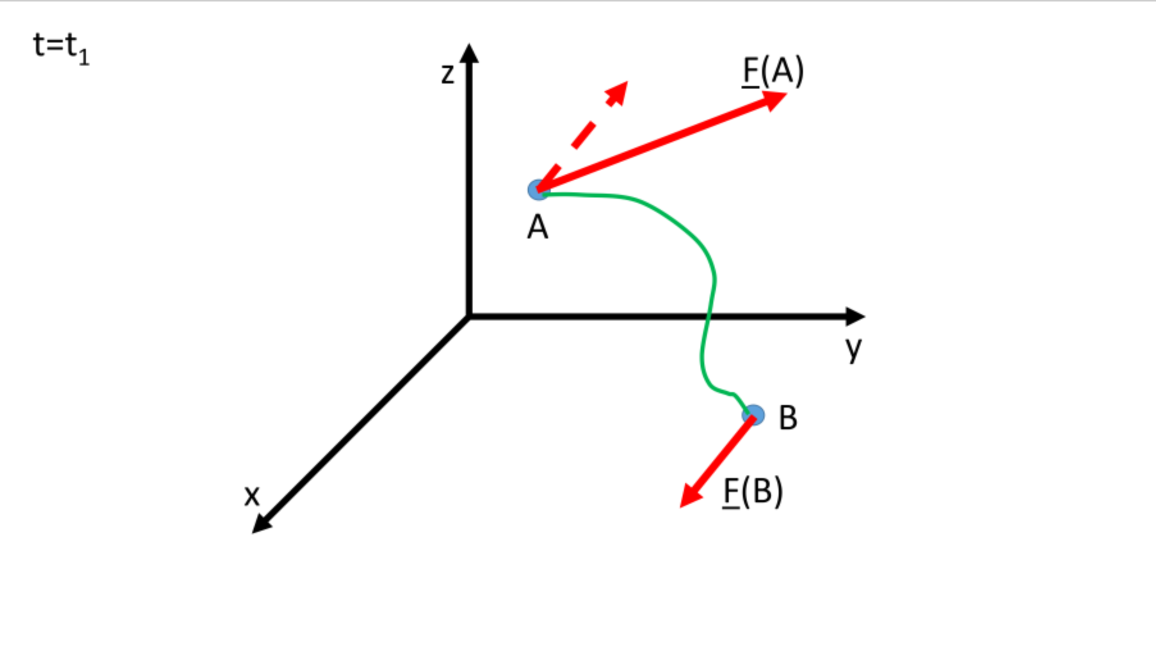
$$= y e^{xy} \cdot \operatorname{sen}(xy) \cdot [x+y] + e^{xy} \cdot (x+y) \cdot y \cos(xy) +$$

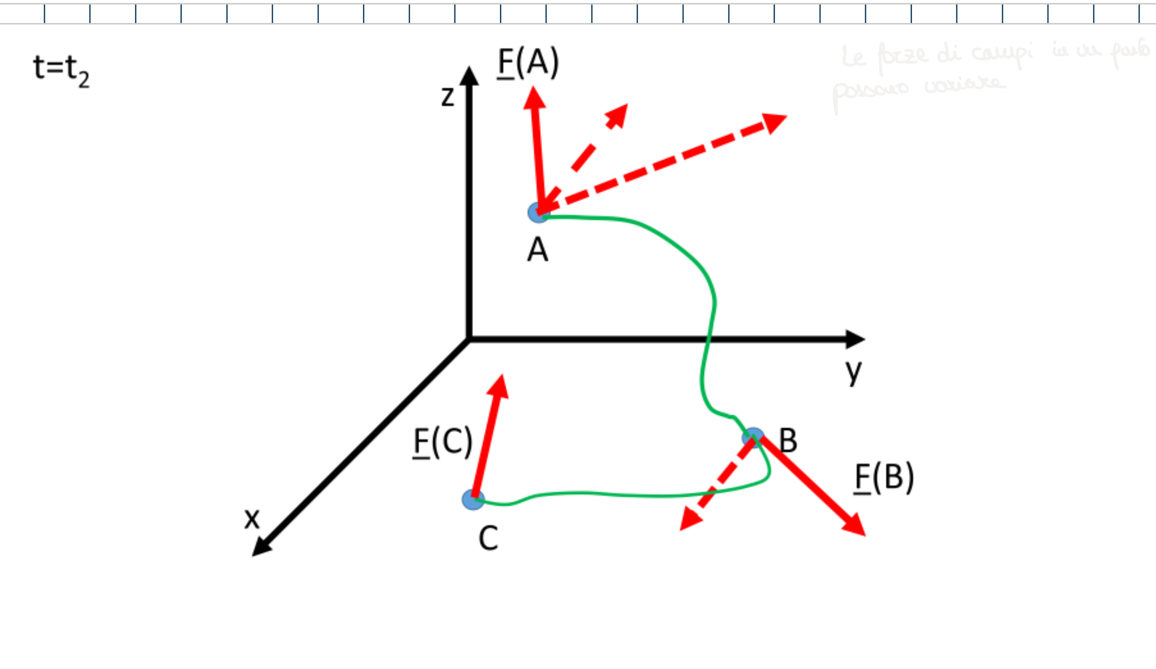
$$+ e^{xy} \cdot \operatorname{sen}(xy)$$

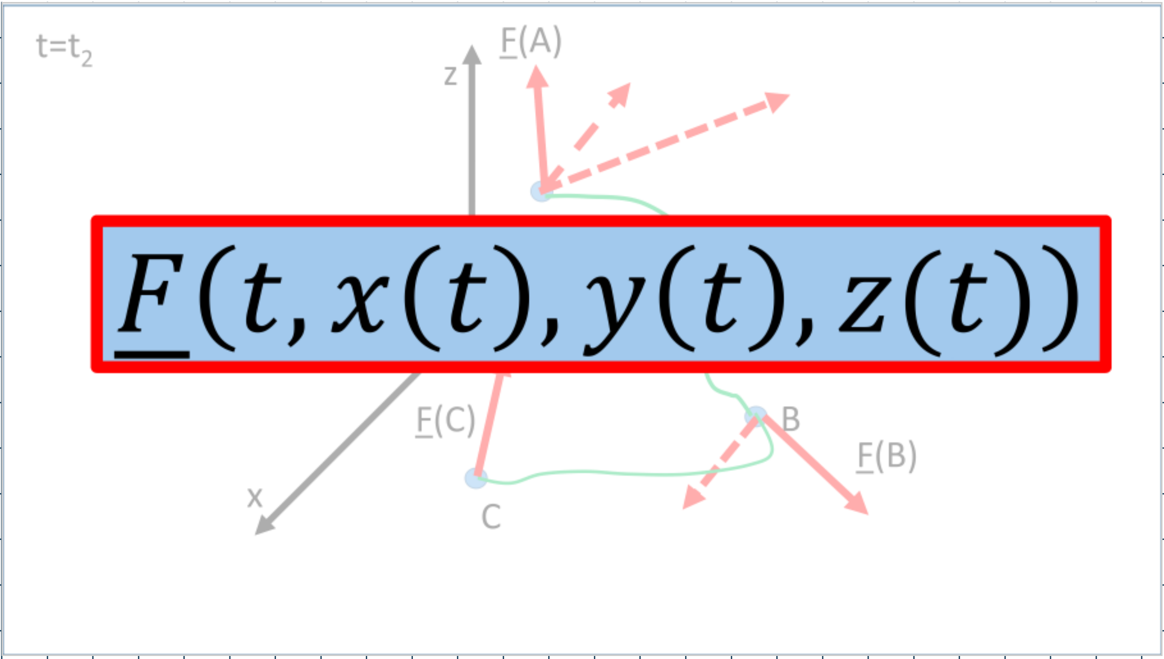
CONTINUARE DA SOLI....




t=t0
z
F(A)
A
y
x


t=t1
z
F(A)
A
y
B
x
F(B)


t=t2
F(A)
z
Le forze di campi in un punto
possono variare
A
y
F(C)
B
F(B)
x
C



$$\underline{F}(t,x(t),y(t),z(t))$$

Si considera una variabile indipendente tempo t, che definisce un percorso (traiettoria, o curva) in R4, ovvero una funzione $t \to (t, x(t), y(t), z(t))$ e successivamente un campo vettoriale associato a tale percorso. In dettaglio:

$$t \to (t,x(t),y(t),z(t)) \to \vec{F}(t,x(t),y(t),z(t)) = \Big(F_1(t,x(t),y(t),z(t)), F_2(t,x(t),y(t),z(t)), F_3(t,x(t),y(t),z(t))\Big)$$

$$\frac{d\vec{F}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dF_1}{dt} \\ \frac{dF_2}{dt} \\ \frac{dF_3}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial t} & \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial t} & \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial t} & \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{dz}{dt} \\ \frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{\partial F_2}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F_2}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{dz}{dt} \\ \frac{\partial F_3}{\partial t} + \frac{\partial F_3}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F_3}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\frac{dz}{dt} \end{pmatrix}$$

focalizzando l'attenzione ad esempio, su F1 (analogamente, possiamo analizzare F2 ed F3):

$$\frac{dF_1}{dt} = \frac{\partial F_1}{\partial t} + \boxed{\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{dz}{dt}}$$

Derivata totale della grandezza scalare F1 rispetto al tempo t: indica la variazione **complessiva** di F1 nel tempo, e tiene conto di tue aspetti: 1) F1 può variare (in modulo, direzione e verso) focalizzando l'attenzione su un punto preciso dello spazio e osservando cosa succede nel tempo t (**approccio euleriano**); 2) F1 può variare seguendo il singolo percorso di una particella (**approccio lagrangiano**)

$$\frac{d\underline{F}}{dt} = \frac{\partial \underline{F}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{F}}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \underline{F}}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \underline{F}}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}$$

Esempio pratico:

1. se io focalizzo l'attenzione sulla porta dell'aula (ovvero mi concentro su un punto specifico dello spazio) e annoto sul quaderno quanti studenti entrano alle 8:30, quanti ne entrano alle 8:35, quanti ne entrano alle 8:40, ecc… sto applicando un approccio di tipo EULERIANO;
2. se, invece, seguo nel tempo gli spostamenti di uno specifico studente all'interno dell'aula, allora sto applicando un approccio di tipo LAGRANGIANO.

Casi particolari:

$\frac{\partial F_1}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{dF_1}{dt} = \frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{dz}{dt}$ e il campo si definisce **stazionario**, nel senso che, da un punto di vista euleriano, in un generico punto (x0, y0, z0) la grandezza F1 non cambia le sue proprietà nel tempo, ma può assumere valori diversi in punti diversi dello spazio.

Ovvero:

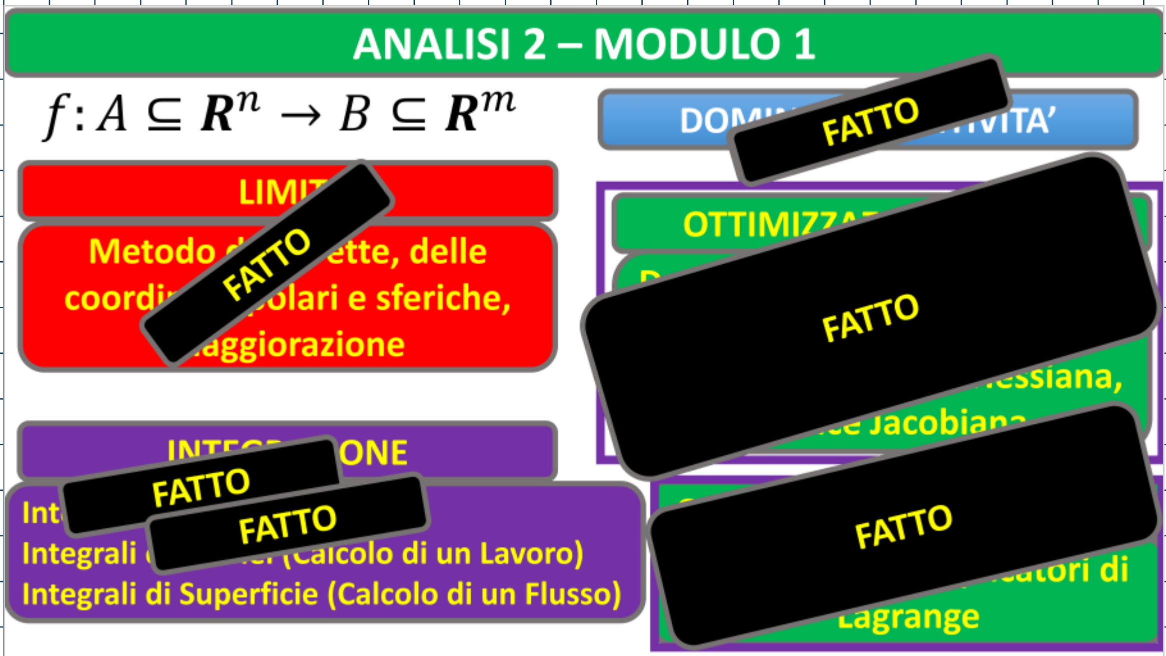
F1(x0, y0, z0) ≠ F1(x1, y1, z1)

Ciò vuol dire, riprendendo l'esempio pratico di prima, che dalla porta dell'aula entra sempre lo stesso numero di studenti nell'unità di tempo, indipendentemente dall'orario, ma il numero (costante) di studenti nell'unità di tempo che entra dalla porta laterale in alto alla gradinata può essere diverso.

Inoltre, quando $\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}, \frac{\partial F_1}{\partial y}, \frac{\partial F_1}{\partial z}\right) = (0, 0, 0)$,

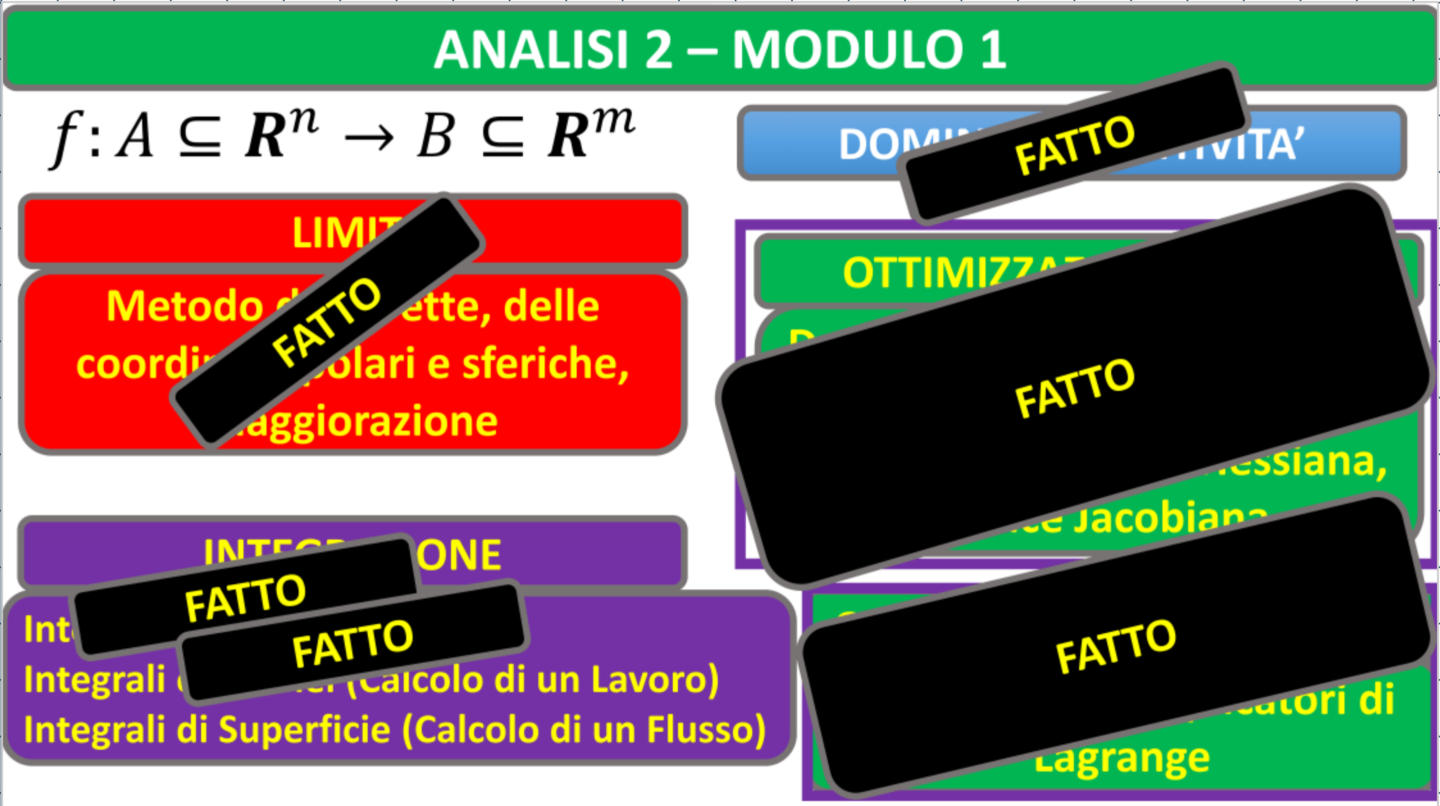
oltre a $\frac{\partial F_1}{\partial t} = 0, allora\ \frac{dF_1}{dt} = 0$

e il campo si dice **COSTANTE** (caso particolare di campo stazionario), ovvero non ho dipendenza né dal tempo e né dallo spazio.



Superficie ed integrali di superficie

giovedì 12 novembre 2020 13:15

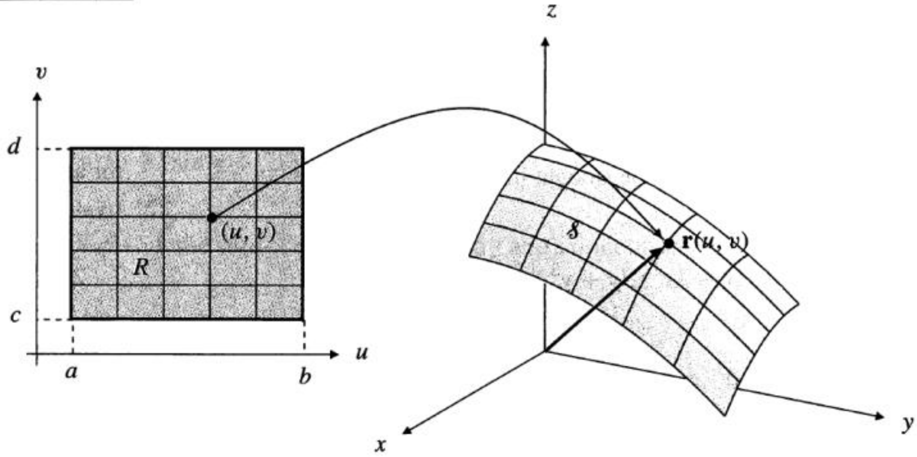


SUPERFICIE REGOLARE o superficie liscia

$\underline{\sigma}: K \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$

non per forza un volume ma una superficie piegata

$\underline{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$



PROPRIETÀ

1) $\underline{\sigma} \in C^1(\mathring{K})$, OVVERO σ_i $(i=1,2,3)$ DEVONO ESSERE DI $C^1(\mathring{K})$

le tre componenti

applicazione lineari

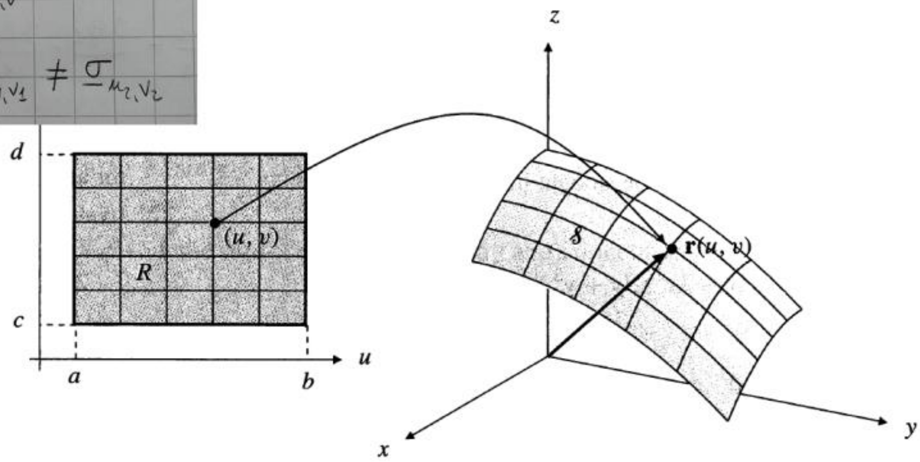
2) $\underline{\sigma}$ INIETTIVA

presi due punti diversi del dominio, ad essi corrispondono due punti di immagine diversa

$(u,v) \longrightarrow (\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) = \underline{\sigma}_{u,v}$

$(u_1,v_1) \neq (u_2,v_2) \Rightarrow \underline{\sigma}_{u_1,v_1} \neq \underline{\sigma}_{u_2,v_2}$

3) $$\underline{\underline{J}}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_1(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial \sigma_2(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_2(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial \sigma_3(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_3(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix}$$



La matrice Jacobiana $\underline{\underline{J}}(u,v)$ DEVE AVERE RANGO 2 → RANGO MASSIMO

$\forall (u,v) \in \mathring{K}$

OVVERO LE DUE COLONNE DI $\underline{\underline{J}}(u,v)$ DEVONO ESSERE LINEARMENTE INDIPENDENTI

3) $$\underline{\underline{J}}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_1(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial \sigma_2(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_2(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial \sigma_3(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_3(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix}$$

TRA POCO CAPIREMO IL SIGNIFICATO GEOMETRICO

La matrice Jacobiana

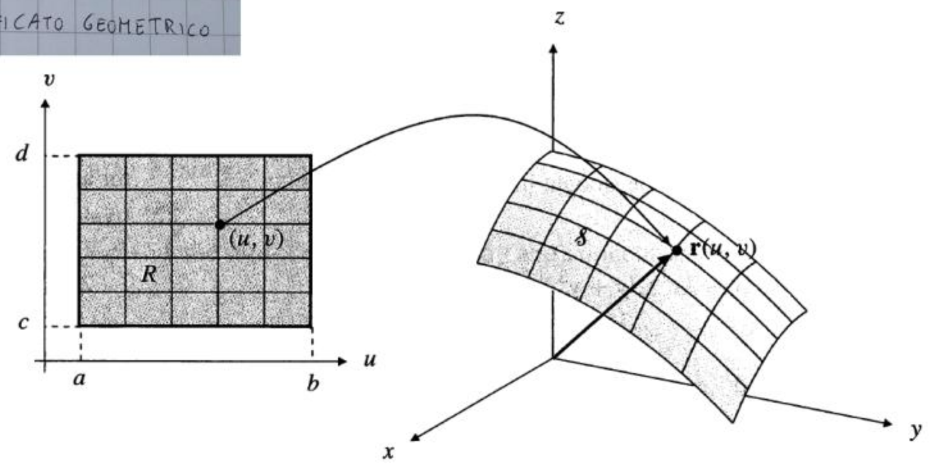
$\underline{J}(u,v)$ DEVE AVERE RANGO 2 → RANGO MASSIMO

$\forall (u,v) \in \mathring{K}$

3) $$\underline{J}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_1(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial \sigma_2(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_2(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial \sigma_3(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_3(u,v)}{\partial v} \end{pmatrix}$$

OVVERO LE DUE COLONNE DI $\underline{J}(u,v)$ DEVONO ESSERE LINEARMENTE INDIPENDENTI

TRA POCO CAPIREMO IL SIGNIFICATO GEOMETRICO



INTANTO:

è applicazione (u,v) che restituisce tre componenti

$$\underline{\sigma} : (u,v) \longrightarrow (\sigma_1(u,v), \sigma_2(u,v), \sigma_3(u,v))$$ COORDINATE DI CIASCUN PUNTO

equivale a ↓

$$\underline{\sigma} : (u,v) \longrightarrow (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

ANCHE UN CAMPO SCALARE

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}$$

È UNA SUPERFICIE 3-D anche se non per forza ha un volume

COME PARAMETRIZZARE UN CAMPO SCALARE PER OTTENERE UNA RAPPRESENTAZIONE EQUIVALENTE IN TERMINI DI $\underline{\sigma}(u,v)$?

$$\underline{\sigma}(u,v): \begin{cases} \sigma_1(u,v) = x(u,v) = u \\ \sigma_2(u,v) = y(u,v) = v \\ \sigma_3(u,v) = z(u,v) = f(x,y) = f(u,v) \end{cases}$$

Posso trasformare una superficie in da R^2 a R^3

ESEMPIO

$z = f(x,y) = x^2 + y^2$

riparametrizzo

$$\underline{\sigma}(u,v): \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v^2 \end{cases}$$

$z = x^3 - y + xy^2$

riparametrizzo

$$\underline{\sigma}(u,v): \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^3 - v + uv^2 \end{cases}$$

$$\underbrace{\underline{\sigma}(u,v) \in C^1(\mathring{K})}_{\text{L'applicazione deve essere di classe } C^1} \Rightarrow \begin{cases} x(u,v) \in C^1(\mathring{K}) \\ y(u,v) \in C^1(\mathring{K}) \\ z(u,v) \in C^1(\mathring{K}) \end{cases}$$

superficie = campo scalare $f(x,y)$

* OVVERO $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ SONO CAMPI SCALARI DIFFERENZIABILI (IN BASE AL TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE), OVVERO LA SUPERFICIE $\underline{\sigma}(u,v)$ É DIFFERENZIABILE, E QUINDI IN UN INTORNO PICCOLO DI UN SUO PUNTO (x,y,z) LA SUPERFICIE É APPROSSIMABILE AL SUO PIANO TANGENTE

Equazione di un piano tangente:

$(z - z_0) = a(x - x_0) + b(y - y_0)$

$dz = a\,dx + b\,dy$

$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$

$d\underline{r}$ = Spostamento infinitesimo percorrendo lo spazio tridimensionale

$= (dx, dy, dz) = \left(dx, dy, \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) =$

spezzo nei componenti

$= dx\left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}\right) + dy\left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$

Se lo spostamento è infinitesimo, grazie al differenziale, è lo stesso se mi muovo sulla superficie o sul suo piano tangente

$d\underline{r}$ = Spostamento infinitesimo percorrendo lo spazio tridimensionale

$$= (dx, dy, dz) = \left(dx, dy, \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right) =$$

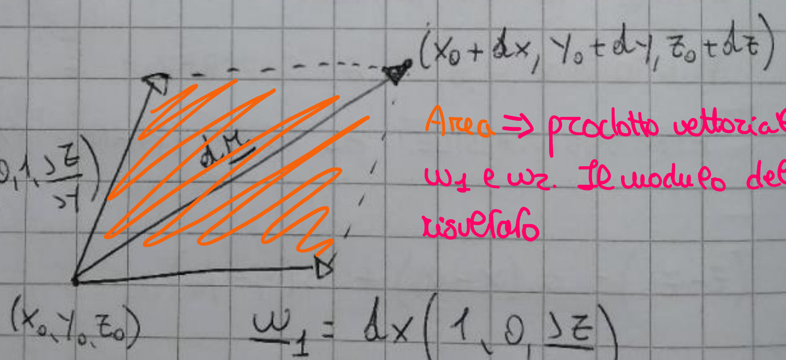
spezzo nei componenti

$$= dx\left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}\right) + dy\left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$= \underline{w}_1 + \underline{w}_2$$

Se lo spostamento è infinitesimo, grazie al differenziale, è lo stesso se mi muovo sulla superficie o sul suo piano tangente

$\underline{w}_2 = dy\left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$



Area ⇒ prodotto vettoriale w_1 e w_2. Il modulo del risultato

$\underline{w}_1 = dx\left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}\right)$

$\underline{W}_1$ E $\underline{W}_2$ DEVONO ESSERE LINEARMENTE INDIPENDENTI PER OTTENERE GRAFICAMENTE UNA SUPERFICIE, LA CUI AREA CORRISPONDE AL MODULO DEL PRODOTTO VETTORIALE TRA I DUE VETTORI:

$$dS = |\underline{w}_1 \times \underline{w}_2|$$

NON deve essere nulla dunque $\sin\theta \neq 0$ e dunque $\theta \neq 180°$ (cioè w_1 e w_2 non devono essere paralleli e linearmente dipendenti)

ORA, PARTENDO DALLA PARAMETRIZZAZIONE DI UN CAMPO SCALARE $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to B \subseteq \mathbb{R}$

$$\underline{\sigma}(u,v): \begin{cases} \sigma_1(u,v) = x(u,v) = u \\ \sigma_2(u,v) = y(u,v) = v \\ \sigma_3(u,v) = z(u,v) = z(x,y) \end{cases} \qquad \begin{aligned} dx &= du \\ dy &= dv \\ dz &= \frac{\partial \sigma_3}{\partial u} du + \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} dv \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial u} = 1 \qquad \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} = 1 \qquad \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} = 0 \qquad \frac{\partial \sigma_2}{\partial u} = 0$$

$$\underline{w}_1 = du \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u}, \frac{\partial \sigma_2}{\partial u}, \frac{\partial \sigma_3}{\partial u} \right)$$

$$\underline{w}_2 = dv \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial v}, \frac{\partial \sigma_2}{\partial v}, \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} \right)$$

i due vettori, devono continuare ad essere linearmente indipendenti anche in questa forma

$$dS = \left\| \begin{matrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} du & \frac{\partial \sigma_2}{\partial u} du & \frac{\partial \sigma_3}{\partial u} du \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} dv & \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} dv & \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} dv \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_3}{\partial u} \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} & \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} \end{matrix} \right\| \cdot du\, dv$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial u} & \frac{\partial \sigma_3}{\partial u} \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} & \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} & \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} \end{pmatrix}$$

È LA MATRICE TRASPOSTA DI $\underline{\underline{J}}(u,v)$

matrice Jacobiana

Se una matrice ha rango n, anche la sua trasposta ha rango n

$$\underline{w}_1 = du \cdot \underline{T}_u \qquad \underline{T}_u = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u}, \frac{\partial \sigma_2}{\partial u}, \frac{\partial \sigma_3}{\partial u} \right)$$

VETTORI

$$\underline{w}_2 = dv \cdot \underline{T}_v \qquad \underline{T}_v = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial v}, \frac{\partial \sigma_2}{\partial v}, \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} \right)$$

$$dS = \left| \underline{w}_1 \times \underline{w}_2 \right| = \left| \underline{T}_u \times \underline{T}_v \right| du\,dv$$

AREA DI S

$$\iint_S dS = \iint_D \left| \underline{T}_u \times \underline{T}_v \right| du\,dv$$

da CAMPO SCALARE a SUPERFICIE

$$\underline{\sigma}(u,v) = u\cdot\hat{i} + v\cdot\hat{j} + z(u,v)\cdot\hat{k}$$
$$= x\cdot\hat{i} + y\cdot\hat{j} + z(x,y)\cdot\hat{k}$$

$$\underline{T}_u = \left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$\underline{T}_v = \left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$\underline{T}_u \times \underline{T}_v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial z}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\hat{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\hat{j} + \hat{k}$$

$$ds = |\underline{T}_u \times \underline{T}_v| \cdot du\, dv =$$

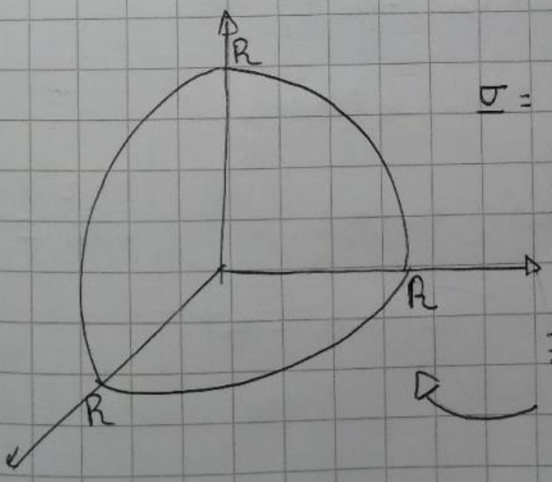
$$= \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \cdot dx\,dy =$$

$$= \sqrt{|\nabla f|^2 + 1} \cdot dx\,dy \qquad f(x,y) = z(x,y)$$

gradiente

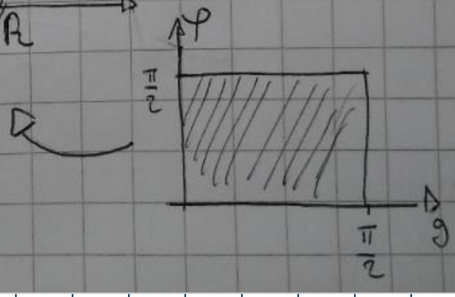
SFERA

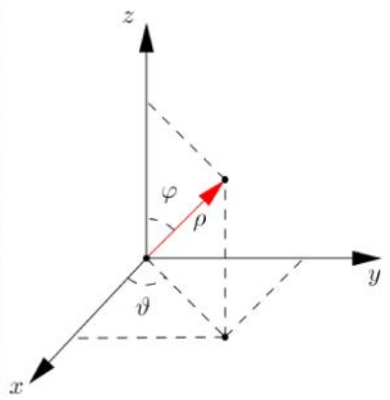
CALCOLO DELL'AREA DI UNA PORZIONE $\left(= \frac{1}{8}\right)$ DI SUPERFICIE SFERICA DI RAGGIO R E CENTRO $C = (0,0,0)$



Fissato

$$\underline{\sigma} = \begin{cases} x = \underline{R} \sin\varphi \cos\vartheta \\ y = \underline{R} \sin\varphi \sin\vartheta \\ z = \underline{R} \cos\varphi \end{cases}$$





$(\vartheta,\varphi) \to \left(R\,\text{sen}\varphi\cos\vartheta,\ R\,\text{sen}\varphi\,\text{sen}\vartheta,\ R\cos\varphi\right)$

$T_\vartheta = \left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial\vartheta}, \frac{\partial\sigma_2}{\partial\vartheta}, \frac{\partial\sigma_3}{\partial\vartheta}\right) = \left(\frac{\partial x}{\partial\vartheta}, \frac{\partial y}{\partial\vartheta}, \frac{\partial z}{\partial\vartheta}\right) =$

$= R\left(-\text{sen}\varphi\,\text{sen}\vartheta,\ \text{sen}\varphi\cos\vartheta,\ 0\right)$

$T_\varphi = \left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial\varphi}, \frac{\partial\sigma_2}{\partial\varphi}, \frac{\partial\sigma_3}{\partial\varphi}\right) = \left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}, \frac{\partial y}{\partial\varphi}, \frac{\partial z}{\partial\varphi}\right) =$

$= R\left(\cos\varphi\cos\vartheta,\ \cos\varphi\,\text{sen}\vartheta,\ -\text{sen}\varphi\right)$

$$T_\vartheta \times T_\varphi = \begin{vmatrix} \hat i & \hat j & \hat k \\ -\text{sen}\varphi\,\text{sen}\vartheta & \text{sen}\varphi\cos\vartheta & 0 \\ \cos\varphi\cos\vartheta & \cos\varphi\,\text{sen}\vartheta & -\text{sen}\varphi \end{vmatrix} \cdot R^2 =$$

$$= R^2\left[-\text{sen}^2\varphi\cdot\cos\vartheta\cdot\hat i - \text{sen}^2\varphi\,\text{sen}\vartheta\,\hat j - (\text{sen}^2\vartheta\cos\varphi\,\text{sen}\varphi + \cos^2\vartheta\cos\varphi\,\text{sen}\varphi)\cdot\hat k\right]$$

$= R^2\left(-\text{sen}^2\varphi\cos\vartheta,\ -\text{sen}^2\varphi\,\text{sen}\vartheta,\ -\cos\varphi\,\text{sen}\varphi\right) =$

$= R^2\,\text{sen}\varphi\left(-\text{sen}\varphi\cos\vartheta,\ -\text{sen}\varphi\,\text{sen}\vartheta,\ -\cos\varphi\right)$

$(\vartheta,\varphi) \to \left(R\,\text{sen}\varphi\cos\vartheta,\ R\,\text{sen}\varphi\,\text{sen}\vartheta,\ R\cos\varphi\right)$

$T_\vartheta = \left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial\vartheta}, \frac{\partial\sigma_2}{\partial\vartheta}, \frac{\partial\sigma_3}{\partial\vartheta}\right) = \left(\frac{\partial x}{\partial\vartheta}, \frac{\partial y}{\partial\vartheta}, \frac{\partial z}{\partial\vartheta}\right) =$

$= R\left(-\text{sen}\varphi\,\text{sen}\vartheta,\ \text{sen}\varphi\cos\vartheta,\ 0\right)$

$T_\varphi = \left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial\varphi}, \frac{\partial\sigma_2}{\partial\varphi}, \frac{\partial\sigma_3}{\partial\varphi}\right) = \left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}, \frac{\partial y}{\partial\varphi}, \frac{\partial z}{\partial\varphi}\right) =$

$= R\left(\cos\varphi\cos\vartheta,\ \cos\varphi\,\text{sen}\vartheta,\ -\text{sen}\varphi\right)$

$$T_\vartheta \times T_\varphi = \begin{vmatrix} \hat i & \hat j & \hat k \\ -\text{sen}\varphi\,\text{sen}\vartheta & \text{sen}\varphi\cos\vartheta & 0 \\ \cos\varphi\cos\vartheta & \cos\varphi\,\text{sen}\vartheta & -\text{sen}\varphi \end{vmatrix} \cdot R^2 =$$

$|T_\vartheta \times T_\varphi| = R^2\,\text{sen}\varphi\cdot\sqrt{\text{sen}^2\varphi\cos^2\vartheta + \text{sen}^2\varphi\,\text{sen}^2\vartheta + \cos^2\varphi} =$

$= R^2\,\text{sen}\varphi\cdot\sqrt{\text{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi} = R^2\,\text{sen}\varphi$

$S = \iint_D R^2\,\text{sen}\varphi\,d\varphi\,d\vartheta = R^2\int_0^{\pi/2}\text{sen}\varphi\,d\varphi\cdot\int_0^{\pi/2}d\vartheta =$

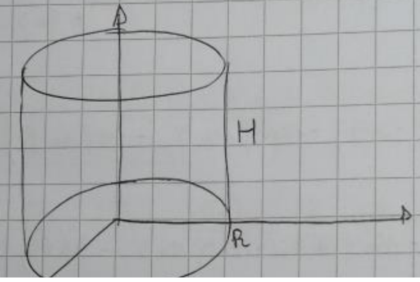
$= R^2\cdot\frac{\pi}{2}$

AREA DI TUTTA LA SUPERFICIE SFERICA

$8\cdot R^2\cdot\frac{\pi}{2} = 4\pi R^2$

CILINDRO:

CALCOLO DELLA SUPERFICIE DI UN CILINDRO



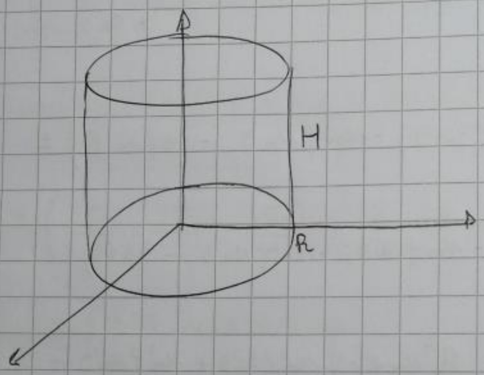
PARAMETRIZZAZIONE DI S1

$$S1 \Rightarrow \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\,\text{sen}\vartheta \\ z = 0 \end{cases} \qquad \rho\in[0,R] \quad \vartheta\in[0,2\pi]$$

$T_\rho = \left(\frac{\partial x}{\partial\rho}, \frac{\partial y}{\partial\rho}, \frac{\partial z}{\partial\rho}\right) = \left(\cos\vartheta,\ \text{sen}\vartheta,\ 0\right)$

CILINDRO:

CALCOLO DELLA SUPERFICIE DI UN CILINDRO



SUPERFICIE REGOLARE A TRATTI

$S1 \to$ BASE CIRCOLARE INFERIORE

$S2 \to$ BASE CIRCOLARE SUPERIORE

$S3 \to$ SUPERFICIE LATERALE

PARAMETRIZZAZIONE DI S1

$$S1 \Rightarrow \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \\ z = 0 \end{cases} \qquad \rho \in [0, R] \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\underline{T}_\rho = \left(\frac{\partial x}{\partial \rho}, \frac{\partial y}{\partial \rho}, \frac{\partial z}{\partial \rho}\right) = (\cos\theta, \text{sen}\,\theta, 0)$$

$$\underline{T}_\theta = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta}\right) = (-\rho\,\text{sen}\,\theta, \rho\cos\theta, 0)$$

$$\underline{T}_\rho \times \underline{T}_\theta = \begin{vmatrix} i & \hat{j} & k \\ \cos\theta & \text{sen}\,\theta & 0 \\ -\rho\,\text{sen}\,\theta & \rho\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = \rho\hat{K}$$

$$dS_1 = |\underline{T}_\rho \times \underline{T}_\theta|\, d\rho\, d\theta = \rho\, d\rho\, d\theta$$

$$S_1 = \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho\, d\rho\, d\theta = \int_0^R \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = \pi R^2$$

CALCOLO DI S2 È ANALOGO

$$S2 \Rightarrow \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \\ z = H \end{cases}$$

. . .

CALCOLO DI S3

$$S3 \Rightarrow \begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi] \quad z \in [0, H]$$

$$T_\theta = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta}\right) = \left(-R \operatorname{sen}\theta, R\cos\theta, 0\right)$$

$$T_z = \left(\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial z}{\partial z}\right) = \left(0, 0, 1\right)$$

$$T_\theta \times T_z = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -R\operatorname{sen}\theta & R\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(R\cos\theta, R\operatorname{sen}\theta\right)$$

$$\left|T_\theta \times T_z\right| = R$$

$$T_\theta = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta}\right) = \left(-R \operatorname{sen}\theta, R\cos\theta, 0\right)$$

$$T_z = \left(\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial z}{\partial z}\right) = \left(0, 0, 1\right)$$

$$dS_3 = \left|T_\theta \times T_z\right| d\theta\, dz = R\, d\theta\, dz$$

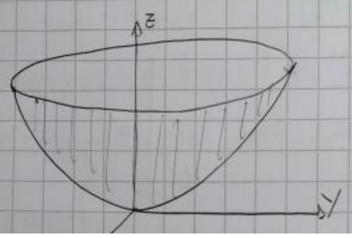
$$S_3 = \int_0^H \int_0^{2\pi} R\, dz\, d\theta = 2\pi R \cdot H$$

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot H$$

PARABOLOIDE:

CALCOLO DELL' AREA DEL PARABOLOIDE

$$f(x,y) = x^2 + y^2 = z(x,y)$$



$$(\rho, \theta) \to \left(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta, \rho^2\right)$$

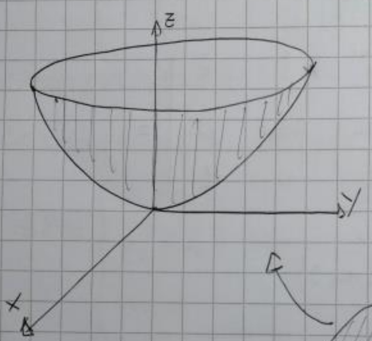
$$T_\rho = \left(\frac{\partial x}{\partial \rho}, \frac{\partial y}{\partial \rho}, \frac{\partial z}{\partial \rho}\right) = \left(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 2\rho\right)$$

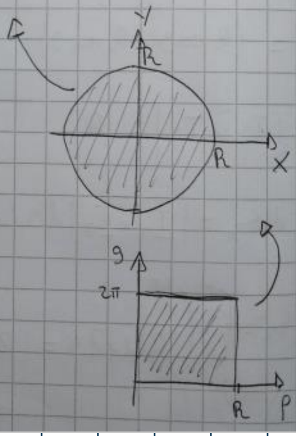
$$T_\theta = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta}, \frac{\partial z}{\partial \theta}\right) = \left(-\rho\operatorname{sen}\theta, \rho\cos\theta, 0\right)$$

PARABOLOIDE 1

CALCOLO DELL'AREA DEL PARABOLOIDE

$f(x,y) = x^2 + y^2 = z(x,y)$





$$\underline{\sigma}: \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta \\ z = \rho^2 \end{cases}$$

$$(\rho, \vartheta) \to (\rho\cos\vartheta, \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta, \rho^2)$$

$$\underline{T}_\rho = \left(\frac{\partial x}{\partial \rho}, \frac{\partial y}{\partial \rho}, \frac{\partial z}{\partial \rho}\right) = (\cos\vartheta, \mathrm{sen}\,\vartheta, 2\rho)$$

$$\underline{T}_\vartheta = \left(\frac{\partial x}{\partial \vartheta}, \frac{\partial y}{\partial \vartheta}, \frac{\partial z}{\partial \vartheta}\right) = (-\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta, \rho\cos\vartheta, 0)$$

$$\underline{T}_\rho \times \underline{T}_\vartheta = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\vartheta & \mathrm{sen}\,\vartheta & 2\rho \\ -\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta & \rho\cos\vartheta & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2\rho^2\cos\vartheta, +2\rho^2\,\mathrm{sen}\,\vartheta, \rho)$$

$$|\underline{T}_\rho \times \underline{T}_\vartheta| = \sqrt{4\rho^4\cos^2\vartheta + 4\rho^4\,\mathrm{sen}^2\vartheta + \rho^2} =$$

$$= \sqrt{4\rho^4 + \rho^2} = \sqrt{\rho^2(4\rho^2+1)} = \rho\sqrt{4\rho^2+1}$$

$$dS = \rho\sqrt{4\rho^2+1} \cdot d\rho \cdot d\vartheta$$

$$S=\int_0^R\int_0^{2\pi}\rho\sqrt{4\rho^2+1}\cdot d\rho\, d\vartheta =$$

$$=\int_0^R \rho\sqrt{4\rho^2+1}\, d\rho \cdot \int_0^{2\pi} d\vartheta =$$

$$=2\pi\int_0^R \rho\sqrt{4\rho^2+1}\, d\rho$$

$$2\pi\cdot\frac{1}{8}\int_0^R 8\rho\cdot\sqrt{4\rho^2+1}\cdot d\rho \qquad \left[\int\sqrt{x}\, dx = \dots\right]$$

RISOLUZIONE EQUIVALENTE

$$S=\iint_D \sqrt{1+|\nabla f(x,y)|^2}\, dx\, dy$$

$$f(x,y)=x^2+y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}=2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=2y$$

$$|\nabla f|^2 = 4x^2+4y^2$$

$$\iint \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

PASSAGGIO A COORDINATE POLARI ....

$$\iint \sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho\, d\rho\, d\vartheta$$

$$(u,v) \xrightarrow{\Phi} (x,y,z) \xrightarrow{f} f(x,y,z)$$

$$\underbrace{\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3}_{} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$dS = |T_u \times T_v|\, du\, dv \Rightarrow$ ESPRESSIONE SUPERFICIE INFINITESIMA

Se voglio integrare un campo scalare con la stessa dimensione dell'immagine del campo di dominio

$$\iint_S f(x,y,z)\, dS$$

INTEGRALI SUPERFICIALI DI CAMPI SCALARI

posso esprimerlo anche in rapporto solo a u e v

$$\iint_S f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot |T_u \times T_v|\, du\, dv$$

Tutte le basi ds non giacciono sullo stesso piano

ESEMPIO

$$\iint_S x^3 e^z\, dS$$

$S = S3$ (SUPERFICIE LATERALE CILINDRICA DELL'ESERCIZIO PRECEDENTE, MA DELIMITATA CON $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$S \Rightarrow \begin{cases} x = R\cos\vartheta \\ y = R\sin\vartheta \\ z = z \end{cases} \qquad \vartheta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad z \in [0, H]$$

$dS = |T_\vartheta \times T_z| = R\, d\vartheta\, dz$

$$\int_0^H \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \overset{x^3e^z}{\boxed{R^3\cos^3\vartheta \cdot e^z}} \cdot \overset{dS}{\boxed{R \cdot d\vartheta \cdot dz}} =$$

$$= R^4 \cdot \int_0^H e^z\, dz \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\vartheta\, d\vartheta =$$

$$= R^4 \cdot (e^H - 1) \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \overbrace{(1-\sin^2\vartheta)\cdot\cos\vartheta}^{=\cos^3\vartheta}\, d\vartheta =$$

$$\Big|_{-\pi/2}$$

$$= R^4\left(e^H-1\right)\cdot\left(\operatorname{sen}\vartheta - \frac{\operatorname{sen}^3\vartheta}{3}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

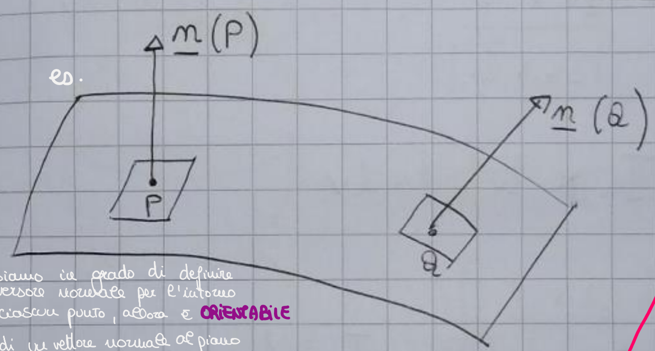
$$= R^4\left(e^H-1\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}R^4\left(e^H-1\right)$$

E SE AVESSIMO PRESO $\vartheta\in[0,\pi]$?

Teoremi di integrali superficiali di campi vettoriali

sabato 14 novembre 2020 11:07

SUPERFICIE REGOLARE (LISCIA) ORIENTABILE

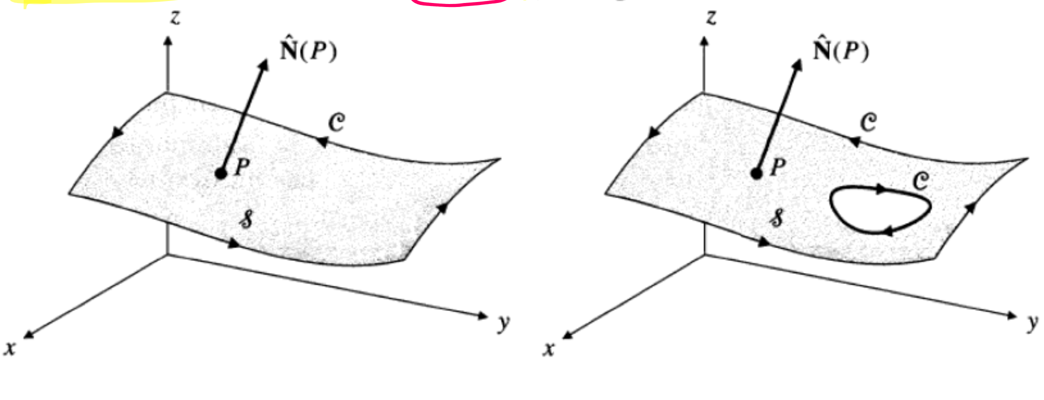


Se siamo in grado di definire un versore normale per l'intorno di ciascun punto, allora è ORIENTABILE

↓ quindi un vettore normale al piano tangente in quel punto

É POSSIBILE DEFINIRE IL VERSORE NORMALE $\underline{n}$ IN OGNI PUNTO E, INOLTRE ...

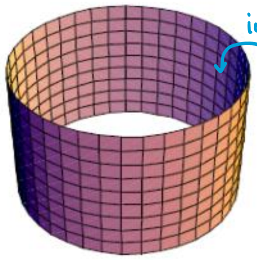
An oriented surface $\mathcal{S}$ **induces an orientation** on any of its boundary curves $\mathcal{C}$; if we stand on the positive side of the surface $\mathcal{S}$ and walk around $\mathcal{C}$ in the direction of its orientation, then $\mathcal{S}$ will be on our left side. (See Figure 15.26(a) and (b).)



A *piecewise smooth* surface is **orientable** if, whenever two smooth component surfaces join along a common boundary curve $\mathcal{C}$, they induce *opposite* orientations along $\mathcal{C}$. This forces the normals $\hat{\mathbf{N}}$ to be on the same side of adjacent components.

Una classe di enti geometrici di questo tipo è costituita dalle cosiddette *superfici non orientabili*, ovvero superfici che non possiedono un'orientazione naturale.

Per chiarire meglio quanto detto, partiamo da un esempio concreto di superficie che è parte dell'esperienza comune. Pensiamo alla superficie laterale di un cilindro: la possiamo ottenere facilmente incollando fra loro i lati opposti di un foglio di carta rettangolare. La seguente figura mostra una simile superficie cilindrica.



impossibile farlo senza attraversare il bordo

⇓

ORIENTABILE

Fig.1. Superficie cilindrica, superficie orientabile.

Si potrebbe ingenuamente pensare che tutte le superfici debbano avere due facce: un "sopra" e un "sotto". L'esempio appena mostrato calza alla perfezione: se immaginiamo di camminare sulla superficie esterna del cilindro, non riusciremo mai ad arrivare a camminare sulla superficie interna senza attraversare il bordo.

Per convincersi, di ciò basta colorare la superficie cilindrica partendo da una delle due facce: se non si attraversa il bordo con il pennarello, si finisce inevitabilmente con il colorare solo una delle facce.

Le superfici di questo tipo si chiamano *orientabili*: hanno un sopra ed un sotto, hanno due facce, possono essere orientate.

Una classe di enti geometrici di questo tipo è costituita dalle cosiddette *superfici non orientabili*, ovvero superfici che non possiedono un'orientazione naturale.

Per chiarire meglio quanto detto, partiamo da un esempio concreto di superficie che è parte dell'esperienza comune. Pensiamo alla superficie laterale di un cilindro: la possiamo ottenere facilmente incollando fra loro i lati opposti di un foglio di carta rettangolare. La seguente figura mostra una simile superficie cilindrica.

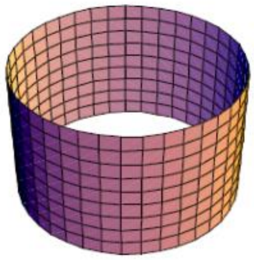
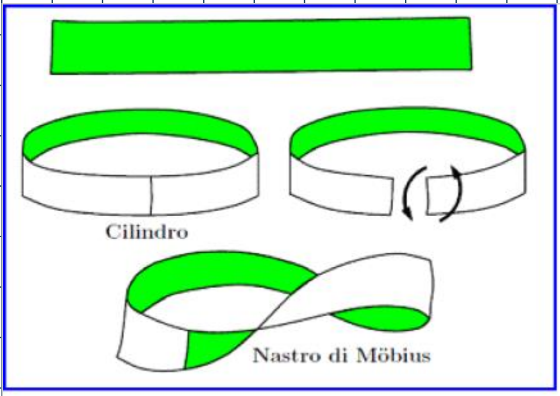


Fig.1. Superficie cilindrica, superficie orientabile.

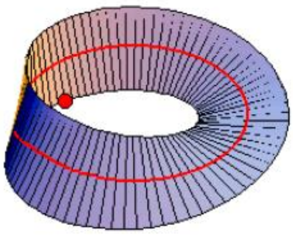
Ma ci sono superfici che hanno una sola faccia. Si può passare da "una faccia all'altra" (terminologia impropria, visto che abbiamo appena detto che la faccia è una sola) senza dover per questo attraversare il bordo, o bucare la superficie stessa.

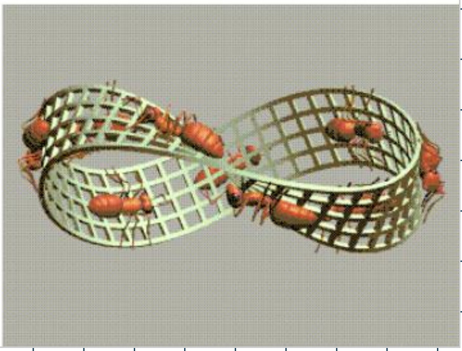
È molto semplice costruire una superficie di questo tipo: basta prendere la stessa striscia rettangolare di carta usata per costruire la superficie cilindrica: ora, però, prima di incollare due lati opposti del rettangolo, facciamo fare mezzo giro a un lato. Infine incolliamo i due lati, dei quali uno è stato ribaltato di mezzo giro, e otteniamo la superficie rappresentata in fig.2.

La superficie che abbiamo costruito si chiama *nastro di Moebius*, ed è una superficie *non orientabile*; infatti, se proviamo a colorare il nastro partendo da un suo punto qualsiasi, finiamo con il colorare tutto il nastro senza attraversare il bordo.



NASTRO DI MOEBIUS





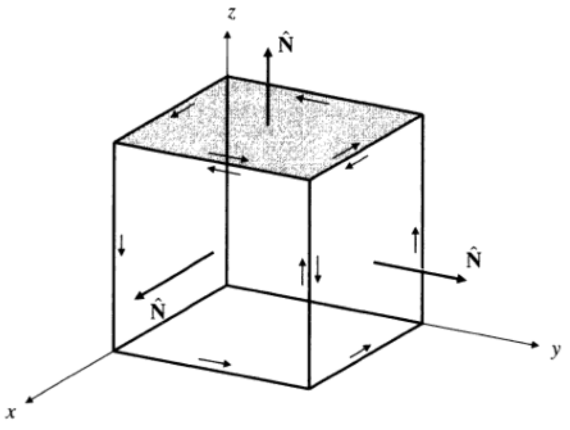


Figure 15.27 The surface of the cube is orientable; adjacent faces induce opposite orientations on their common edge

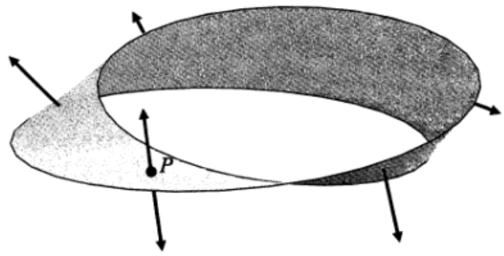


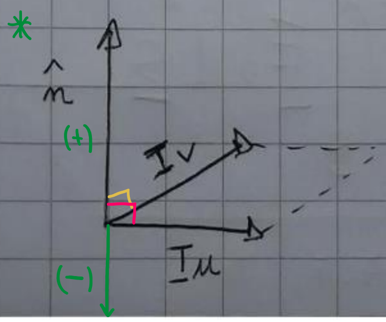
Figure 15.28 The Möbius band is not orientable; it has only one "side"

$\underline{n} \cdot dS$

SUPERFICIE ORIENTABILE INFINITESIMA

VERSORE

$$d\underline{S} = \underline{n} \cdot dS = \hat{n} \cdot dS$$



$$\hat{n} = \frac{\underline{T}_u \times \underline{T}_v}{|\underline{T}_u \times \underline{T}_v|}$$

$$\hat{n}\cdot dS = \frac{\underline{T}_u \times \underline{T}_v}{|\underline{T}_u \times \underline{T}_v|} \cdot |\underline{T}_u \times \underline{T}_v| \cdot du\, dv =$$

$$= (\underline{T}_u \times \underline{T}_v) \cdot du\, dv$$

$$\hat{n}\cdot dS = \pm (\underline{T}_u \times \underline{T}_v) \cdot du\, dv$$

SONO IO UTENTE CHE DECIDO IL VERSO DI INTERESSE

potrei voltare $\hat{n}$ in un verso sopra (+) o verso sotto (−)

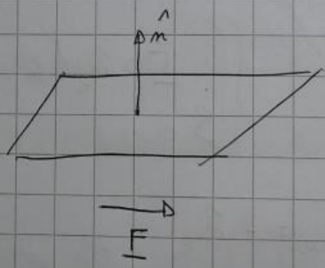
* vedi foto a pag. prec.

FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE

$\underline{F}$ ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE $\underline{S}$

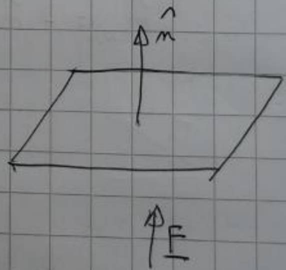
$$\iint_S \underline{F} \circ \hat{n}\, dS = \boxed{\iint_S \underline{F} \circ d\underline{S}} = \iint_S \underline{F}(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t)\, dS$$

INTEGRALE SUPERFICIALE DI UN CAMPO VETTORIALE



Se $\hat{u} \perp \underline{F}$ se $\hat{u} \times \underline{F} = 0$ per cui $\underline{F}$ non attraversa la sop. e dunque $\underline{F} = 0$

Se $\hat{u} \parallel \underline{F}$ allora $\hat{u} \times \underline{F} \neq 0$



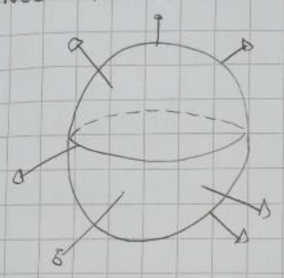
~~FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE~~

~~$\underline{F}$ ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE $\underline{S}$~~

$$\cancel{\iint_S \underline{F} \circ \hat{n}\, dS = \iint_S \underline{F} \circ d\underline{S}}$$

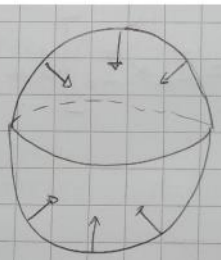
~~INTEGRALE SUPERFICIALE DI UN CAMPO VETTORIALE~~

NEL CASO DI SUPERFICIE CHIUSA



NORMALE USCENTE

$$\iint_S \underline{F} \circ \hat{n}_u \cdot dS$$



NORMALE ENTRANTE

$$\iint_S \underline{F} \circ \hat{n}_e \, dS$$

$$\hat{n}_u = -\hat{n}_e$$

Dunque

$$\underline{F}(x,y,z) = \underline{F}\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$$

$$\iint_S \underline{F} \circ \hat{n} \, dS =$$

$$= \iint \underline{F}\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) \circ \left[\pm\left(\underline{T}_u \times \underline{T}_v\right)\right] \cdot du \, dv$$

ESERCIZIO!

CALCOLARE IL FLUSSO DI

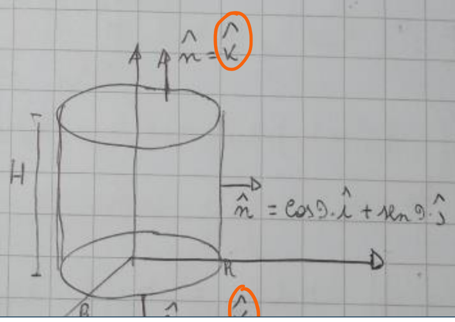
$$\underline{F}(x,y,z) = x \cdot \hat{i} + y \hat{j} + z \cdot \hat{k} = (x,y,z)$$

USCENTE DALLA SUPERFICIE CHIUSA DEL CILINDRO

Poiché definita a tratti la divido in:

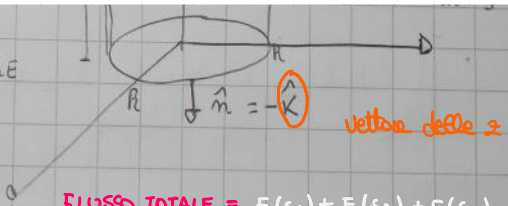
S1: BASE CIRCOLARE INFERIORE

S2: BASE CIRCOLARE



S2: BASE CIRCOLARE SUPERIORE

S3: SUPERFICIE LATERALE



FLUSSO TOTALE = $F(S_1) + F(S_2) + F(S_3)$

additivo

$$S1: \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho \sin\vartheta \\ z = 0 \end{cases} \qquad \hat{n} = -\hat{k} = (0,0,-1)$$

NOTAZIONE VETTORIALE

$\rho \in [0, R]$

$\vartheta \in [0, 2\pi]$

$$\underline{F} = (\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta, 0)$$

$$\iint_{S_1} F \cdot \hat{n} = 0$$

$$\iint_{S_1} (\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta, 0)\circ(0,0,-1)\cdot dS_1 = 0$$

$$S_2: \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \\ z = H \end{cases} \qquad \hat{n} = \hat{k} = (0,0,1)$$

quota di S_2

$\rho \in [0, R] \quad \vartheta \in [0, 2\pi]$

$$\underline{F} = (\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta, H)$$

$$\iint_{S_2} (\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta, H)\circ(0,0,1)\cdot dS_2 =$$

$$= \iint_{S_2} H\, dS_2 = H \iint_{S_2} dS_2 = \pi R^2 \cdot H$$

integrale di superficie di dS_2

$$S_3: \begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \hat{n} = (\cos\theta, \text{sen}\,\theta, 0)$$

$$\theta \in [0, 2\pi] \quad z \in [0, H]$$

$$\iint_{S_3} (R\cos\theta, R\,\text{sen}\,\theta, z) \circ (\cos\theta, \text{sen}\,\theta, 0)\, dS_3 =$$

$$= \iint_{S_3} R \cdot dS_3 = R \iint_{S_3} dS_3 = R \cdot 2\pi R \cdot H =$$

$$= 2\pi R^2 \cdot H$$

FLUSSO TOTALE $= 3\pi R^2 \cdot H$

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

SIA V UN DOMINIO IN $\mathbb{R}^3$ IL CUI BORDO SIA UNA SUPERFICIE CHIUSA ORIENTATA S

SE $\underline{F}(x,y,z)$ È UN CAMPO VETTORIALE LISCIO, OVVERO $\underline{F}(x,y,z) \in C^1$

Integrale doppio di sup. chiusa (che chiude un volume)

$$\oiint_S \underline{F}(x,y,z) \circ \hat{n}\, dS = \iiint_V \nabla \circ \underline{F}(x,y,z) \cdot dV$$

VALE PER CALCOLARE IL

$\boxed{\text{FLUSSO USCENTE DALLA SUPERFICIE CHIUSA } S}$

per calcolare quello entrante basta cambiargli il segno

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

$$\nabla \circ \underline{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \circ (F_1, F_2, F_3) =$$

$$= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

ESERCIZIO PRECEDENTE

$\underline{F} = (x, y, z) \qquad \nabla \circ \underline{F} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$

$$\oiint_S \underline{F} \circ \hat{n} \, dS = \iiint_V \nabla \circ \underline{F} \, dx\,dy\,dz =$$

$$= 3 \iiint_V dV = 3 \cdot \pi R^2 \cdot H$$

ESERCIZIO:

$\underline{F} = \left(Hxy^2,\ Hx^2y,\ (x^2+y^2)\cdot z^2\right)$

CALCOLARE IL FLUSSO USCENTE DALLA SUPERFICIE CILINDRICA DELL' ESERCIZIO PRECEDENTE

Senza parametrizzare applico il teorema della divergenza

$$\oiint_S \underline{F}\circ\hat{n}\, dS = \iiint_V \nabla\circ\underline{F}\, dV =$$

$$\iiint_V \Big(\underbrace{Hy^2}_{\frac{d\,1^a}{dx}} + \underbrace{Hx^2}_{\frac{d\,2^a}{dy}} + \underbrace{2z(x^2+y^2)}_{\frac{d\,3^a}{dz}}\Big)\, dV =$$

$$= \iiint_V \left[H(x^2+y^2) + 2z(x^2+y^2)\right] dx\, dy\, dz$$

Passo alle coordinate cilindriche in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \le \rho \le R \\ 0 \le \vartheta \le 2\pi \\ 0 \le z \le H \end{array} \qquad |\underline{J}_{(\rho,\vartheta,z)}| = \rho$$

$$\iiint_V (H\rho^2 + 2z\rho^2)\cdot\rho\, d\rho\, d\vartheta\, dz$$

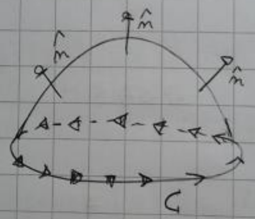
INTEGRALE TRIPLO CON DOMINIO CUBICO

$$= \int_0^{2\pi} d\vartheta \cdot \int_0^R \left[\int_0^H (H\rho^2 + 2z\rho^2)\rho\, dz\right] d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^R (H^2\rho^3 + H^2\rho^3)\, d\rho = 4\pi H^2 \cdot \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^R = \pi H^2 R^4$$

TEOREMA DI STOKES → Serve a risolvere problemi legati al lavoro → Lega integrale curvilineo a integrale di superficie

SIA S UNA SUPERFICIE LISCIA E ORIENTATA NON CHIUSA, IL CUI CONTORNO SIA UNA CURVA CHIUSA C ORIENTATA POSITIVAMENTE



R^3

$$\oint_C \underline{F}\cdot d\underline{r} = \iint_S (\nabla\times\underline{F})\cdot\hat{n}\, dS$$

La circuitazione lungo il percorso C è un integrale di superficie di campo vettoriale che non è F ma il suo ROTORE

IN $\mathbb{R}^2$ STOKES DIVENTA IL TEOREMA DI GAUSS-GREEN

IN $\mathbb{R}^2$ $\underbrace{\nabla\times\underline{F}}_{\text{Rotore}} = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\hat{k}$

$$\hat{n}\, dS = \hat{k}\cdot dA$$

$$\oint_C \underline{F}\cdot d\underline{r} = \iint_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA$$

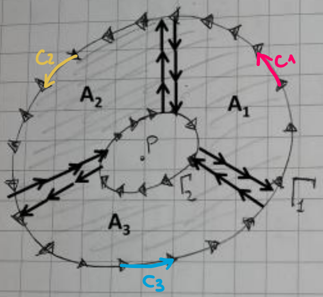
R^2

OSSERVAZIONE: $\underline{F}\in C^1(A)$

MA SE $\underline{F}$ NON È DEFINITA IN QUALCHE PUNTO DEL DOMINIO A???

IL TEOREMA PUÒ ESSERE APPLICATO ANCHE PER DOMINI NON SEMPLICEMENTE CONNESSI

IL TEOREMA PUÓ ESSERE APPLICATO ANCHE PER DOMINI NON SEMPLICEMENTE CONNESSI



$$\iint_{A_1}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dA_1+\iint_{A_2}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dA_2+\iint_{A_3}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dA_3$$

$$=\oint_{C_1}\underline{F}\cdot d\underline{r}+\oint_{C_2}\underline{F}\cdot d\underline{r}+\oint_{C_3}\underline{F}\cdot d\underline{r}=$$

$$=\oint_{\Gamma_1}\underline{F}\cdot d\underline{r}\underset{\text{opposti}}{+}\oint_{\Gamma_2}\underline{F}\cdot d\underline{r}$$

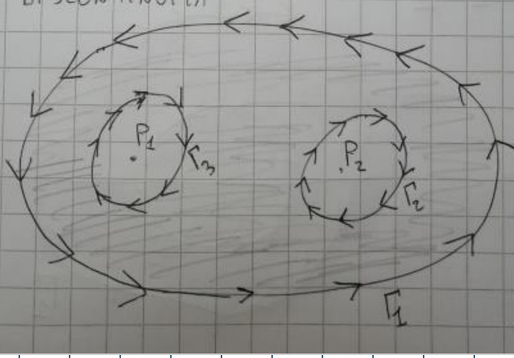
$$\iint_{A=A_1\cup A_2\cup A_3}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dA=\oint_{\Gamma_1}\underline{F}\cdot d\underline{r}+\oint_{\Gamma_2}\underline{F}\cdot d\underline{r}$$

IN GENERALE

$$\iint\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)dA=\sum_{i=1}^{m}\oint_{\Gamma_i}\underline{F}\, d\underline{r}$$

Sommatoria di tutte le circuitazioni

Γ_i : i-ESIMA CURVA ORIENTATA POSITIVAMENTE E COINCIDENTE O CON IL BORDO PIÚ ESTERNO O CON UN PERCORSO INTORNO AD UN PUNTO DI DISCONTINUITÀ



INOLTRE, SE $\underbrace{\nabla \times \underline{F} = \underline{0}}_{\text{IRROTAZIONALE}}$, OVVERO

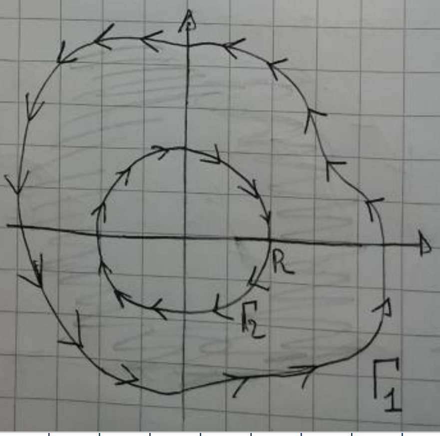
$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

ALLORA $$\sum_{i=1}^{n} \oint_{\Gamma_i} \underline{F} \circ d\underline{r} = 0$$

$$\underline{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

DEFINITO IN $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

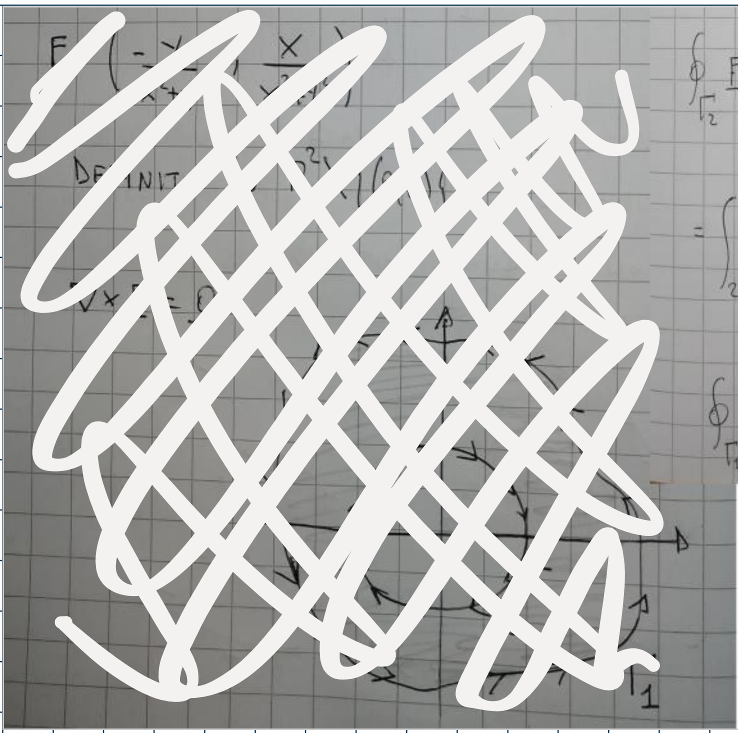
$\nabla \times \underline{F} = \underline{0}$



$$\oint_{\Gamma_1} \underline{F} \circ d\underline{r} + \oint_{\Gamma_2} \underline{F} \circ d\underline{r} = 0$$

$$\Gamma_2 : \begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \operatorname{sen} t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$dx = -R \operatorname{sen} t \, dt \qquad dy = R \cos t \, dt$



$$\oint_{\Gamma_2} \underline{F}\circ d\underline{r} = \int_{2\pi}^{0} \left(\frac{-R\sin t}{R^2}\cdot(-R\sin t) + \frac{R\cos t}{R^2}\cdot R\cos t\right) dt =$$

$$= \int_{2\pi}^{0} (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = \int_{2\pi}^{0} dt = -2\pi$$

RISULTATO INDIPENDENTE DAL RAGGIO R

$$\oint_{\Gamma_1} \underline{F}\circ d\underline{r} = 2\pi$$

$$\iint_S (\nabla\times \underline{F})\circ \hat{n}\, dS = \oint_C \underline{F}\circ d\underline{r}$$

$$\nabla\times \underline{F} = \underline{0} \Rightarrow \oint_C \underline{F}\circ d\underline{r} = 0$$

$$\underline{F} = \nabla U \Rightarrow \oint_C \underline{F}\circ d\underline{r} = 0$$

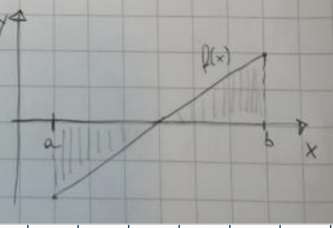
$$\oint_C \underline{F}\circ d\underline{r} = 0 \Rightarrow \nabla\times \underline{F} = \underline{0} \quad ?$$

$$\Rightarrow \underline{F} = \nabla U \quad ?$$

lo si aspetta anche quando non è IRROTAZIONALE

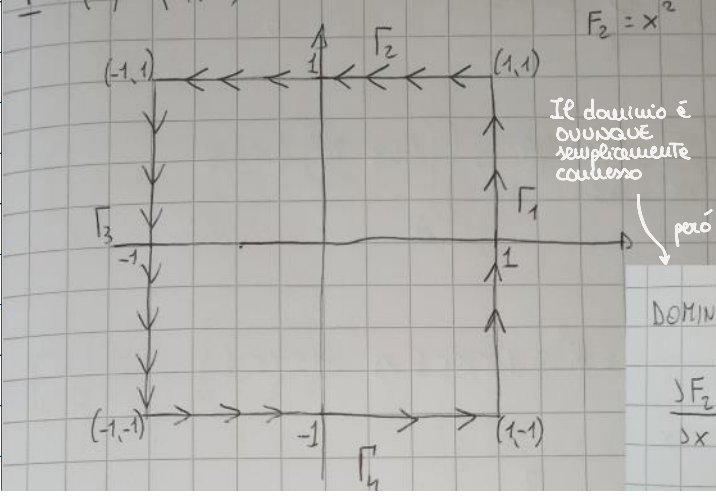
$$\iint_S \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA = \oint_C \underline{F}\circ d\underline{r}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx$$



ESEMPIO

$$\underline{F} = (y^2, x^2) \qquad F_1 = y^2 \qquad F_2 = x^2$$



Il dominio è OVUNQUE semplicemente connesso

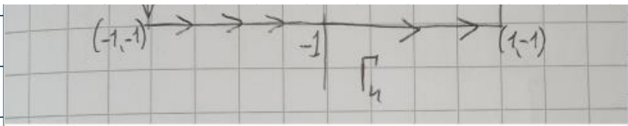
però

$F_1: 4y-2xy+3x$

$F_2: 3xy-y$

DOMINIO SEMPLICEMENTE CONNESSO

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y$$



Sarà un caso di campo NON conservativo ma di lavoro NULLO

Ci si aspetta dunque che $\oint_\Gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} = 0$, ma:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y$$

IL CAMPO $\underline{F}$ É ROTAZIONALE

$$\nabla \times \underline{F} \neq \underline{0} \Rightarrow \underline{F} \neq \nabla U$$

CAMPO ROTAZIONALE $\Rightarrow$ NON CONSERVATIVITÁ

CALCOLO $\oint_\Gamma \underline{F} \cdot d\underline{r}$ CON GAUSS-GREEN

posso perché ho un percorso chiuso

$$\iint_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA = \iint_A (2x-2y)\,dx\,dy$$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \wedge -1 \leq y \leq 1\}$$

$$\int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{1}(2x-2y)\,dy\right]dx$$

$$\int_{-1}^{1}(2x-2y)\,dy = \left.(2xy-y^2)\right|_{-1}^{1} = 2x-1-(-2x-1) = 4x$$

$$\int_{-1}^{1} 4x\,dx = \left.2x^2\right|_{-1}^{1} = 0$$

VERIFICO tramite gli integrali di linea:

$$\Gamma_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases} \quad t \in [-1,1] \qquad dx = 0, \quad dy = dt$$

$$\int_{\Gamma_1} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_{\Gamma_1} F_1\,dx + F_2\,dy = \int_{\Gamma_1} F_2\,dy = \int_{-1}^{1} dt = 2$$

$$\Gamma_2: \begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases} \quad t \in [-1,1] \qquad dx = dt, \quad dy = 0$$

$$\int_{\Gamma_2} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_{\Gamma_2} F_1\,dx + F_2\,dy = \int_{\Gamma_2} F_1\,dx = \int_{1}^{-1} dt = -2$$

$$\Gamma_3: \begin{cases} x = -1 \\ y = t \end{cases} \quad t \in [-1,1] \qquad dx = 0, \quad dy = dt$$

$$\int_{\Gamma_3} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_{\Gamma_3} F_1\,dx + F_2\,dy = \int_{\Gamma_3} F_2\,dy = \int_{+1}^{-1} dt = -2$$

$$\Gamma_4: \begin{cases} x = t \\ y = -1 \end{cases} \quad t \in [-1,1] \qquad dx = dt, \quad dy = 0$$

$$\int_{\Gamma_4} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_{\Gamma_4} F_1\,dx + F_2\,dy = \int_{\Gamma_4} F_1\,dx = \int_{-1}^{1} dt = 2$$

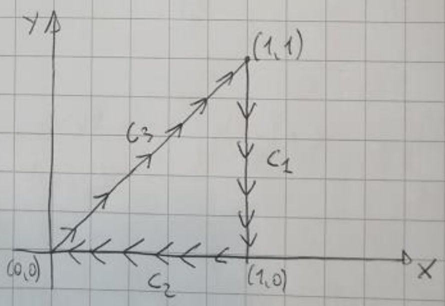
$$\oint_\Gamma \underline{F} \cdot d\underline{r} = 2-2-2+2 = 0$$

ESEMPIO

$\underline{F} = (y^2, x^2)$

$F_1 = y^2$

$F_2 = x^2$



$\nabla \times \underline{F} \neq \underline{0}$

IL VERSO DI PERCORRENZA DEL BORDO É NEGATIVO

$$\iint_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA = \oint_C \underline{F} \circ d\underline{r}$$

VALE PER C ORIENTATA POSITIVAMENTE

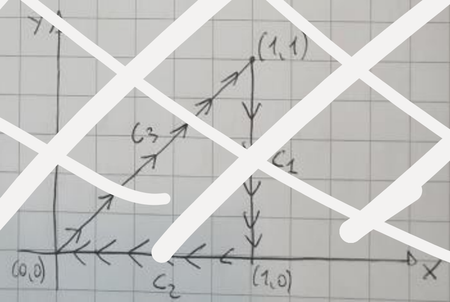
SE C É PERCORSA NEGATIVAMENTE, DEVO CAMBIARE SEGNO ALL' INTEGRALE

$$\iint_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA \Rightarrow \iint_A \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x}\right) dA$$

$$\iint_A (2y - 2x)\, dA$$

$A: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \ \wedge\ 0 \le y \le x\}$

~~$\underline{F} = (y^2, \ldots)$~~



~~$F_1 = y^2$~~

~~$F_2 = x^2$~~

~~$\iint_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA = \oint \underline{F} \cdot d\underline{r}$~~

~~VALE PER C ORIENTATO POSITIVAMENTE~~

~~SE C È PERCORSO NEGATIVAMENTE, BISOGNA CAMBIARE SEGNO ALL'INTEGRALE~~

~~$\iint_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA \Rightarrow \iint_A \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x}\right) dA$~~

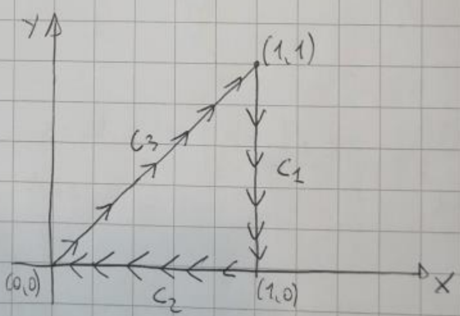
$$\int_0^1 \left[\int_0^x (2y-2x)\,dy \right] dx = \int_0^1 \left[\left. (y^2 - 2xy) \right|_0^x \right] dx =$$

$$\int_0^1 (x^2 - 2x^2)\,dx = -\int_0^1 x^2\,dx = -\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = -\frac{1}{3}$$

$$\iint_A (2y-2x)\,dA$$

$$A : \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \ \wedge \ 0 \le y \le x \right\}$$

$\underline{F} = (y^2, x^2)$



$F_1 = y^2$

$F_2 = x^2$

$\nabla \times \underline{F} \neq \underline{0}$

IL VERSO DI PERCORRENZA DEL BORDO É NEGATIVO

$$C_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases} \qquad t \in [0,1] \qquad \begin{matrix} dx = 0 \\ dy = dt \end{matrix}$$

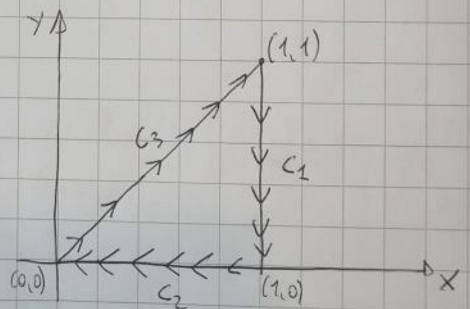
$$\int_{C_1} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_{C_1} F_2\,dy = \int_1^0 dt = -1$$

$$C_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \qquad t \in [0,1] \qquad \begin{matrix} dx = dt \\ dy = 0 \end{matrix}$$

$\underline{F} = (y^2, x^2)$

$F_1 = y^2$

$F_2 = x^2$



$\nabla \times \underline{F} \neq \underline{0}$

IL VERSO DI PERCORRENZA DEL BORDO É NEGATIVO

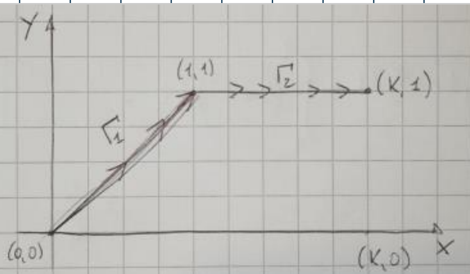
$C_3: \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad t \in [0,1] \qquad dx = dt, \quad dy = dt$

$$\int_{C_3} \underline{F} \circ d\underline{r} = \int_{C_3} F_1 dx + F_2 dx = \int_0^1 (t^2 + t^2) dt =$$

$$= \int_0^1 2t^2 dt = \frac{2}{3} t^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\oint_{C \text{ (ORIENTATA NEGATIVAMENTE)}} \underline{F} \circ d\underline{r} = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} = -1 + 0 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

$\underline{F} = (x, x^2)$



DETERMINARE IL VALORE DI K>1 TALE CHE

$$\int_{\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2} \underline{F} \circ d\underline{r} = 3$$

$F_1 = x \qquad F_2 = x^2$

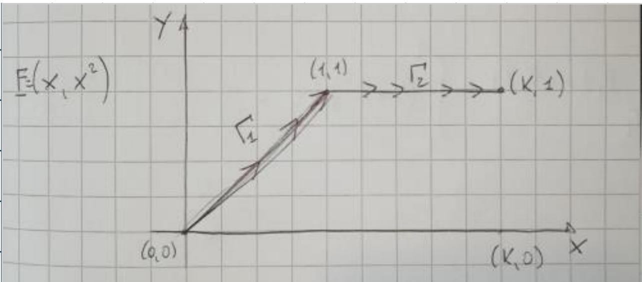
$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$

$\nabla \times \underline{F} \neq \underline{0} \implies \underline{F} \neq \nabla U$

$\Gamma_1: \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad t \in [0,1] \qquad dx = dt, \quad dy = dt$

$$\int_{\Gamma_1} F_1 dx + F_2 dt = \int_0^1 (t + t^2) dt = \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{5}{6}$$



DETERMINARE IL VALORE DI K>1 TALE CHE

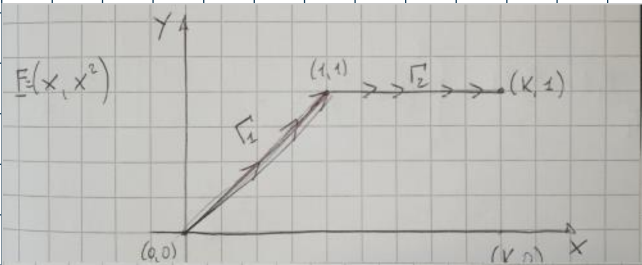
$$\int_{\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2} \underline{F}\circ d\underline{r} = 3$$

$$\Gamma_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases} \quad t\in[1, K] \qquad dx = dt \quad dy = 0$$

$$\int_{\Gamma_2} F_1 dx + F_2 dy = \int_1^K t \cdot dt = \frac{t^2}{2}\Big|_1^K = \frac{K^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\int_{\Gamma} \underline{F}\circ d\underline{r} = 3 \quad \text{(DATO DI INPUT)}$$

$$3 = \frac{5}{6} + \frac{K^2}{2} - \frac{1}{2}$$



$$K^2 = 2\cdot\left(3 - \frac{5}{6} + \frac{1}{2}\right) = 2\cdot\left(\frac{18-5+3}{6}\right) =$$

$$= \frac{16}{3}$$

$$K = \pm\frac{4}{\sqrt{3}} = \pm\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$K = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ (K>1 PER RICHIESTA ESERCIZIO)

$$\Gamma_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases} \quad t\in[1, K] \qquad dx = dt \quad dy = 0$$

$$\int_{\Gamma_2} F_1 dx + F_2 dy = \int_1^K t \cdot dt = \frac{t^2}{2}\Big|_1^K = \frac{K^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\int_{\Gamma} \underline{F}\circ d\underline{r} = 3 \quad \text{(DATO DI INPUT)}$$

$$3 = \frac{5}{6} + \frac{K^2}{2} - \frac{1}{2}$$

Complementi sui campi vettoriali ed esercizi

sabato 14 novembre 2020 13:34

Significato fisico del rotore (Tratto dal testo *A. Bacciotti, CALCOLO DIFFERENZIALE E INTEGRALE II. Seconda parte: Vettori, funzioni reali di più variabili reali, serie, Celid*).

Il termine *rotore* rimanda inevitabilmente alla rotazione. In effetti, dato il campo vettoriale F di $\mathbb{R}^3$, si osserva che il vettore $\text{rot}F$ è in qualche modo legato alla rotazione. Per renderci conto di ciò, consideriamo un caso molto semplice di un corpo rigido. Ogni movimento del corpo rigido si può immaginare come una combinazione di un moto traslatorio e di un moto rotatorio intorno al baricentro. Supponiamo per semplicità che in ogni punto $P(x,y,z)$ del corpo rigido la velocità $\vec{v}(P)$ dipenda solo dalla posizione del punto P e che la velocità angolare $\vec{\omega}$ sia costante. Allora

$$\vec{v}(P) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{PO} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \wedge (x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= (\omega_2 z - \omega_3 y)\vec{i} + (\omega_3 x - \omega_1 z)\vec{j} + (\omega_1 y - \omega_2 x)\vec{k}.$$

Ne segue che

$$\operatorname{rot}\vec{v}(P) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_2 z - \omega_3 y & \omega_3 x - \omega_1 z & \omega_1 y - \omega_2 x \end{vmatrix} = (2\omega_1, 2\omega_2, 2\omega_3) = 2\vec{\omega}.$$

Quindi il rotore del campo di velocità è multiplo del vettore velocità angolare, che è chiaramente legato alla rotazione. In particolare in questo semplice esempio si ha che

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{\omega} = \vec{0}.$$

Per questo motivo si dice che un campo è *irrotazionale* quando il suo rotore è nullo. Questa terminologia si utilizza anche nei casi più generali. Quando si considera ad esempio il moto di un fluido, $\operatorname{rot}\vec{v} = \vec{0}$ indica assenza di vorticosità.

TEORIA DELLA DIVERGENZA:

$$\oiint \underline{F} \circ \hat{n} \, dS = \iiint_V \underbrace{\nabla \circ \underline{F}}_{\text{divergenza del campo vettoriale}} \, dx\,dy\,dz$$

Se F = 0 allora
1) Flusso entrante uguale a flusso uscente
o
2) nessun flusso attraversa la superficie

Se va a 0 indica la capacità di un flusso a non uscire dalla superficie

POTENZIALE VETTORE

1) $\underline{F}(x,y,z)$ SI DICE SOLENOIDALE IN UN DOMINIO $D \subseteq \mathbb{R}^3$ SE

$$\underbrace{\nabla \circ \underline{F}}_{\text{DIVERGENZA}} = 0 \quad \forall (x,y,z) \in D$$

2) SE $\underline{F}(x,y,z)$ È UN CAMPO VETTORIALE LISCIO SOLENOIDALE, DEFINITO IN $D \in \mathbb{R}^3$ SEMPLICEMENTE CONNESSO

$\Rightarrow$ ALLORA ESISTE UN CAMPO VETTORIALE $\underline{G}(x,y,z)$: $\underline{F} = \nabla \times \underline{G}$

F = rotore di G

dove $\underline{G}(x,y,z)$ SI DEFINISCE POTENZIALE VETTORE

Inoltre,

$$\nabla \circ \underline{F} = \nabla \circ \underbrace{(\nabla \times \underline{G})}_{=0\,?}$$

Dimostrazione:

$$\nabla \times \underline{G} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} =$$

Inoltre,

$$\nabla \circ \underline{F} = \nabla \circ \underbrace{(\nabla \times \underline{G})}_{=0?}$$

Dimostrazione:

$$\nabla \times \underline{G} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{i}\left(\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right)$$

$$\nabla \circ (\nabla \times \underline{G}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G_1}{\partial z} - \frac{\partial G_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 G_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 G_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 G_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 G_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 G_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 G_1}{\partial z \partial y} = 0$$

CAMPO VETTORIALE ARMONICO:

$\underline{F}(x,y,z)$ SI DICE ARMONICO SE È CONTEMPORANEAMENTE CONSERVATIVO (LAMELLARE) E SOLENOIDALE. Cioè:

conservativo = lamellare

divergenza di un gradiente

$$\begin{cases} \underline{F} = \nabla U \\ \nabla \circ \underline{F} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\nabla \circ (\nabla U)} = 0$$

pari a 0 per la solenoidità

$$\nabla \circ (\nabla U) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \circ \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) =$$

$\underline{F}(x,y,z)$ SI DICE ARMONICO SE É CONTEMPORANEAMENTE CONSERVATIVO (LAMELLARE) E SOLENOIDALE. Cioè:

$$\begin{cases} \underline{F} = \nabla U \\ \nabla \circ \underline{F} = 0 \end{cases} \Rightarrow \nabla \circ (\nabla U) = 0$$

Somma delle derivate pure parziali

$$\nabla \circ (\nabla U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \nabla^2 U$$

LAPLACIANO DI U

$$\begin{cases} \underline{F} = \nabla U \\ \nabla \circ \underline{F} = 0 \end{cases} \Rightarrow \nabla \circ (\nabla U) = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \nabla^2 U$$

LAPLACIANO DI U

$\nabla^2 U = 0$ SE IL CAMPO $\underline{F}(x,y,z)$ É ARMONICO

Il Laplaciano è zero

ESEMPIO:

$$\underline{F} = (a y^{m}, b x^{n}) \qquad a, b \in \mathbb{R} \quad m, n \in \mathbb{N}$$

dunque DOMINIO SEMPLICEMENTE CONNESSO

DETERMINARE I VALORI DI a, b, m, n CHE RENDONO $\underline{F}$ CONSERVATIVO $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$F_1 = a y^{m} \qquad F_2 = b x^{n}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = n \cdot b \cdot x^{(n-1)} \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y} = m \cdot a \cdot y^{(m-1)}$$

Si devono eguagliare SEMPRE (poichè mi interessa la conservatività)

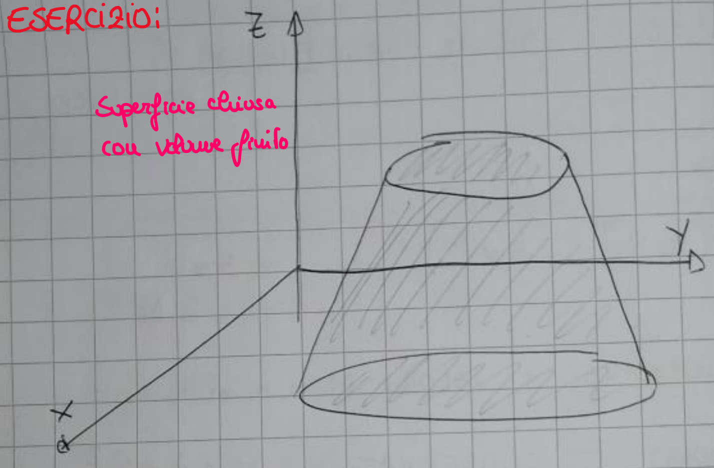
$$n \cdot b \cdot x^{(n-1)} = m \cdot a \cdot y^{(m-1)}$$

devono essere Termini noti e lo sono se $m-1=0$ ed $n-1=0$

dunque:

$$n = m = 1 \Rightarrow b = a$$

ESERCIZIO:



$$\underline{F} = \left(e^{z} + \cos y,\; x^3 - 7\sqrt{z^2+1},\; xy + \operatorname{sen}(x^2+1)\right)$$

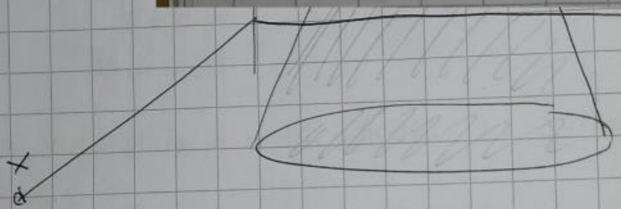
CALCOLARE $\displaystyle\oiint \underline{F} \circ \hat{n}\, dS$

il flusso in uscita

Applico il teorema della divergenza:

$$\oiint \underline{F} \circ \hat{n}\, dS = \iiint_V \nabla \circ \underline{F}\, dx\, dy\, dz = \dots$$

La divergenza fa zero poiché le derivate parziali sono tutte nulle



$$\underline{F} = \left(e^{z} + \cos y,\; x^3 - 7\sqrt{z^2+1},\; xy + \operatorname{sen}(x^2+1)\right)$$

CALCOLARE $\displaystyle\oiint \underline{F} \circ \hat{n}\, dS$

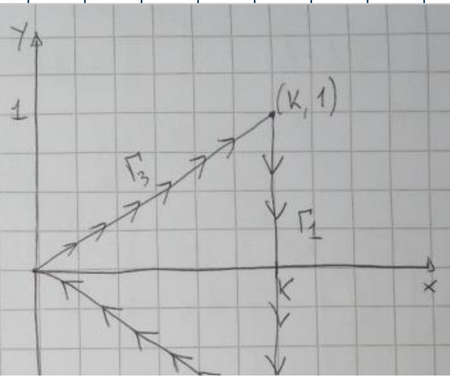
ESERCIZIO!

$\underline{F} = (y^2+1,\; xy+3)$

DETERMINARE

IL VALORE DI $K>0$

AFFINCHÉ

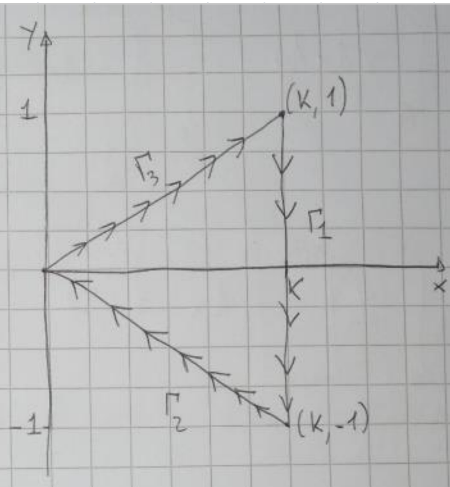


ESERCIZIO:

$\underline{F} = (y^2+1,\ xy+3)$

DETERMINARE IL VALORE DI $K>0$ AFFINCHÉ

$$\oint \underline{F} \cdot d\underline{r} = 1$$



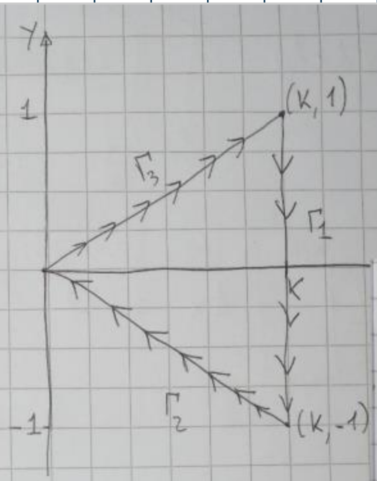
METODI:

1) Parametrizzazione delle tre superfici e sommatoria del lavoro che deve essere pari a 1
2) Poiché il percorso è chiuso, si può legare l'integrale di linea ad uno di superficie tramite Gauss-Green (devo verificare che il campo sia irrotazionale)

$\underline{F} = (y^2+1,\ xy+3)$

DETERMINARE IL VALORE DI $K>0$ AFFINCHÉ

$$\oint \underline{F} \cdot d\underline{r} = 1$$



METODO (2):

GAUSS-GREEN: $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = y \qquad \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = 2y$

$$\iint_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy$$

SE $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ É ORIENTATA POSITIVAMENTE

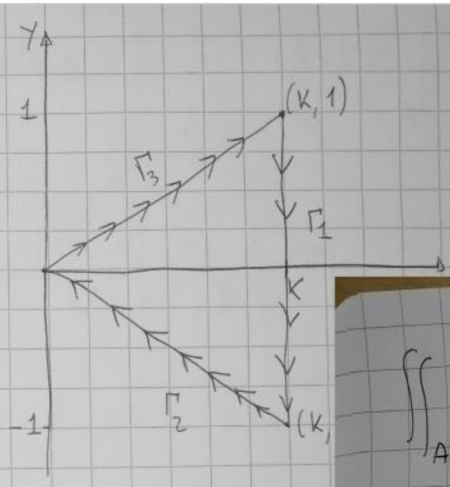
IN QUESTO CASO $\displaystyle\iint_A \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x}\right) dx\,dy$

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le K \ \wedge\ -\frac{x}{K} \le y \le \frac{x}{K}\right\}$$

$\underline{F} = (y^2+1,\ xy+3)$

DETERMINARE IL VALORE DI $K>0$ AFFINCHÉ

$$\oint \underline{F} \cdot d\underline{r} = 1$$



$$\iint_A y\, dx\, dy = \int_0^K \left[\int_{-\frac{x}{K}}^{x/K} y\, dy \right] dx =$$

$$= \int_0^K \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-x/K}^{x/K} dx = 0$$

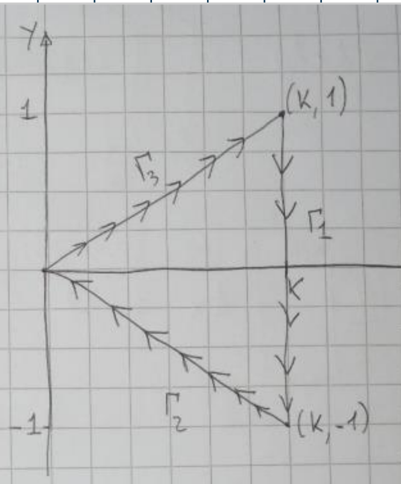
dunque!

$$\nexists K \in \mathbb{R} : \oint \underline{F} \cdot d\underline{r} = 1$$

$\underline{F} = (y^2+1,\ xy+3)$

DETERMINARE IL VALORE DI $K>0$ AFFINCHÉ

$$\oint \underline{F} \cdot d\underline{r} = 1$$



METODO ①:

VERIFICA CON INTEGRALI CURVILINEI

$$\Gamma_1 : \begin{cases} x = K \\ y = t \end{cases} \quad t \in [-1, 1] \quad \xrightarrow{\text{differenziali}} \quad \begin{matrix} dx = 0 \\ dy = dt \end{matrix}$$

$$\int F_2\, dy = \int_1^{-1} (Kt+3)\, dt = \left. \frac{Kt^2}{2} + 3t \right|_1^{-1} =$$

$$= \frac{K}{2} - 3 - \frac{K}{2} - 3 = -6$$

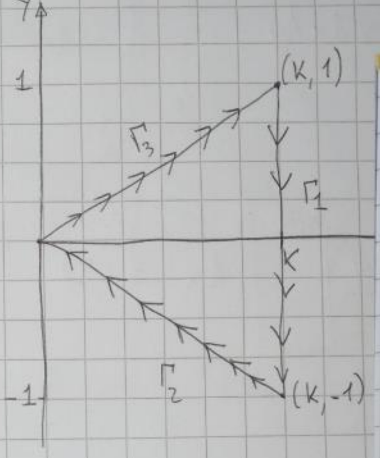
$\underline{F} = (y^2+1,\ xy+3)$

DETERMINARE

IL VALORE DI $K>0$

AFFINCHÉ

$\oint \underline{F} \cdot d\underline{r} = 1$



$\Gamma_2: \begin{cases} x = t \\ y = -\dfrac{t}{K} \end{cases} \quad t \in [0, K] \qquad dx = dt \quad dy = -\dfrac{1}{K}\,dt$

$$\int_K^0 \left(\frac{t^2}{K^2}+1\right)dt + \int_K^0 \left(-\frac{t^2}{K}+3\right)\cdot\left(-\frac{1}{K}\right)\cdot dt =$$

$$= \int_K^0 \left(\frac{t^2}{K^2} + 1 + \frac{t^2}{K^2} - \frac{3}{K}\right)dt = \frac{2}{K^2}\int_K^0 t^2\,dt + \left(1-\frac{3}{K}\right)\int_K^0 dt =$$

$$= \frac{2}{K^2}\cdot\left(\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_K^0 + \left(1-\frac{3}{K}\right)\cdot t\Big|_K^0 = -\frac{2}{3}K - K + 3$$

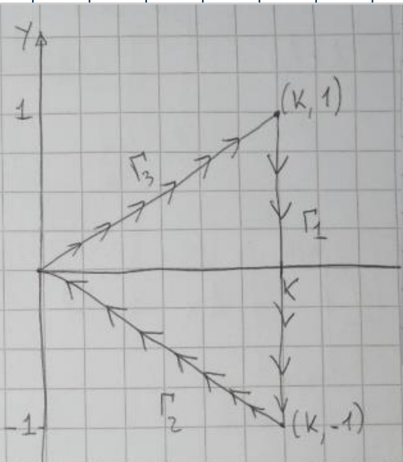
$\underline{F} = (y^2+1,\ xy+3)$

DETERMINARE

IL VALORE DI $K>0$

AFFINCHÉ

$\oint \underline{F} \cdot d\underline{r} = 1$



$\Gamma_3: \begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{t}{K} \end{cases} \quad t \in [0, K] \qquad dx = dt \quad dy = \dfrac{1}{K}\,dt$

$$\int_0^K \left(\frac{t^2}{K^2}+1\right)dt + \int_0^K \left(\frac{t^2}{K}+3\right)\cdot\frac{1}{K}\cdot dt =$$

$$= \int_0^K \left(\frac{t^2}{K^2} + 1 + \frac{t^2}{K^2} + \frac{3}{K}\right)dt =$$

$$= \frac{2}{K^2}\int_0^K t^2\,dt + \left(1+\frac{3}{K}\right)\int_0^K dt =$$

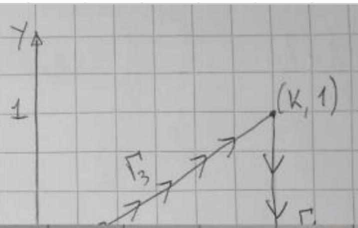
$$= \frac{2}{3}K + K + 3$$

$$\oint \underline{F}\cdot d\underline{r} = -6 - \frac{2}{3}K - K + 3 + \frac{2}{3}K + K + 3 = 0$$

PER CASA: TESTARE $\underline{F} = (y^3+1,\ xy+3)$

LUNGO LO STESSO PERCORSO

$\underline{F} = (y^2+1,\ xy+3)$



DETERMINARE

$\Gamma_3: \begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{t}{K} \end{cases} \quad t \in [0, K] \qquad dx = dt \qquad dy = \dfrac{1}{K}\, dt$

$$\iint_A f(x,y)\, dx\, dy \qquad f(x,y) = y \quad \text{FUNZIONE DISPARI}$$

A SIMMETRICO RISPETTO AD ASSE x $(y=0)$

LUNGO LO STESSO PERCORSO

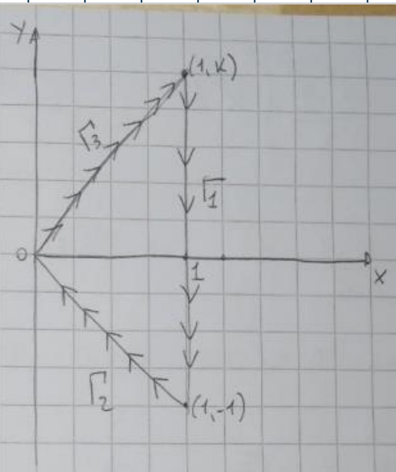
$= \frac{2}{3}K + K + 3$

ESERCIZIO!

$\underline{F} = (y^2+1,\ xy+3)$

DETERMINARE IL VALORE DI K AFFINCHÉ

$$\oint \underline{F} \cdot d\underline{r} = 1$$



$$\iint_A \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x} \right) dx\, dy$$

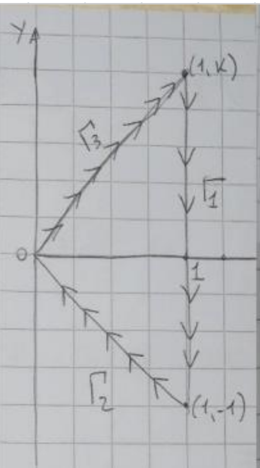
GAUSS-GREEN PER CIRCUITI ORIENTATI NEGATIVAMENTE

$A: \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 1 \ \wedge\ -x \le y \le Kx \}$

$\underline{F} = (y^2+1, \, xy+3)$

DETERMINARE IL VALORE DI K AFFINCHÉ

$\oint \underline{F} \cdot d\underline{r} = 1$



$$\iint_A \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x} \right) dx\,dy$$

GAUSS-GR

CIRCUITI

NEGATIV

$A: \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \le x \le 1 \; \wedge \; -x \le y \le kx \right\}$

$$\int_0^1 \left[\int_{-x}^{kx} y \, dy \right] dx = \int_0^1 \frac{y^2}{2} \Bigg|_{-x}^{kx} dx = \int_0^1 \left(\frac{k^2 x^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right) dx =$$

$$= \frac{(k^2-1)}{2} \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{k^2-1}{6}$$

$$\frac{k^2-1}{6} = 1 \implies k^2 = 7 \implies k = \pm\sqrt{7}$$

DAL DISEGNO, PRENDO $K > 0$, OVVERO $K = \sqrt{7}$

PER $K = -\sqrt{7}$

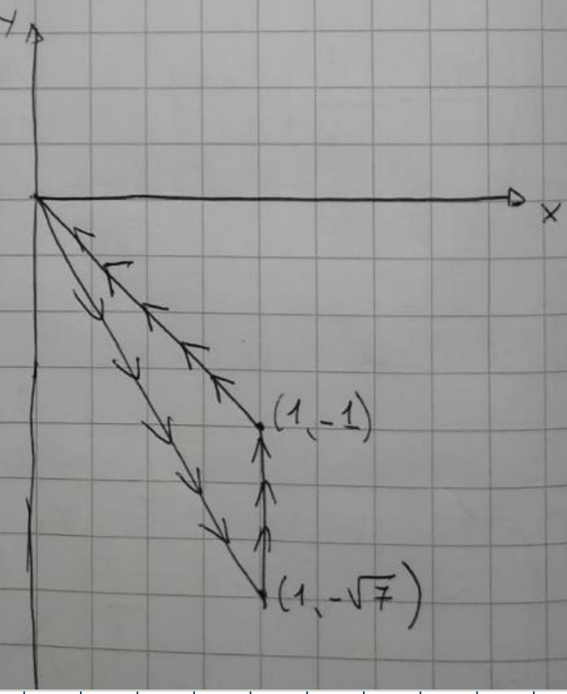
IL CIRCUITO

SAREBBE

STATO

ORIENTATO

POSITIVAMENTE



kx $dx = \int_0^1 \left(\frac{k^2 x^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right) dx =$ $-x$

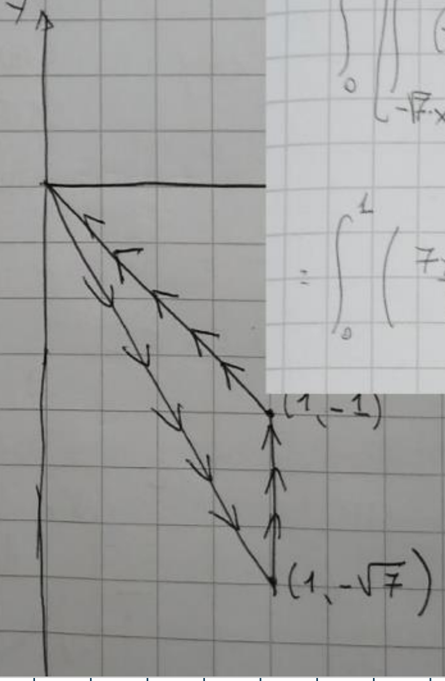
$\frac{k^2-1}{6}$

$7 \implies k = \pm\sqrt{7}$

$K > 0$, OVVERO $K = \sqrt{7}$

PER $K = -\sqrt{7}$

IL CIRCUITO SAREBBE STATO ORIENTATO POSITIVAMENTE



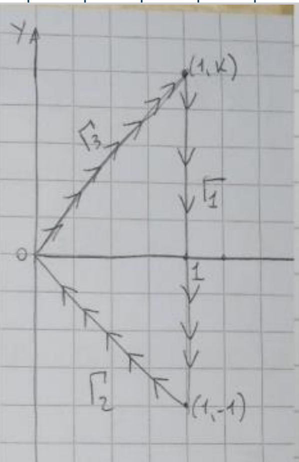
USANDO GAUSS GREEN

$$\int_0^1 \left[\int_{-\sqrt{7}x}^{-x} (-y)\,dy\right] dx = \int_0^1 \left[\int_{-x}^{-\sqrt{7}x} y\,dy\right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{7x^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right) dx = 3\int_0^1 x^2\,dx = 1$$

$K > 0$, OVVERO $K = \sqrt{7}$

$\underline{F} = (y^2+1,\ xy+3)$



DETERMINARE IL VALORE DI K AFFINCHÉ

$\oint \underline{F} \circ d\underline{r} = 1$

$$\iint_A \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x}\right) dx\,dy$$

GAUSS-GREEN CIRCUITI OR

NEGATIVAM

$A: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 1 \ \wedge\ -x \le y \le$

INTEGRALI DI LINEA NEL CASO $K > 0$

$\Gamma_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \end{cases} \quad t \in [-1, K] \quad \begin{matrix} dx = 0 \\ dy = dt \end{matrix}$

$$\int_K^{-1} (t+3)\,dt = \left.\frac{t^2}{2} + 3t\right|_K^{-1} = \frac{1}{2} - 3 - \frac{K^2}{2} - 3K =$$

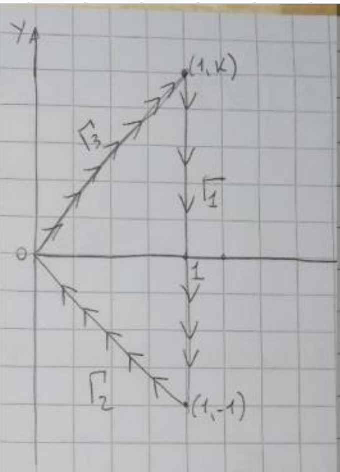
$$= -\left(\frac{K^2}{2} + 3K + \frac{5}{2}\right)$$

$$= \int_{\Gamma_1} \underline{F} \circ d\underline{r}$$

$\underline{F} = (y^2+1,\ xy+3)$

DETERMINARE IL VALORE DI K AFFINCHÉ

$\oint \underline{F} \circ d\underline{r} = 1$



$$\iint_A \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x}\right) dx\,dy$$

GAUSS-GREEN PE CIRCUITI ORIEN NEGATIVAMENT

$A: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \ \wedge\ -x \le y < Kx$

$$\Gamma_2: \begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases} \quad t \in [0,1] \qquad dx = dt \quad dy = -dt$$

$$\int_{\Gamma_2} \underline{F} \circ d\underline{r} = \int_1^0 (t^2+1)\,dt + (-t^2+3)\cdot(-1)\cdot dt =$$

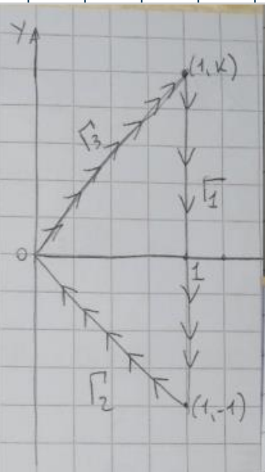
$$= \int_1^0 (t^2+1+t^2-3)\,dt = 2\int_1^0 t^2\,dt - 2\int_1^0 dt =$$

$$= -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}$$

$\underline{F} = (y^2+1,\ xy+3)$

DETERMINARE IL VALORE DI K AFFINCHÉ

$\oint \underline{F} \circ d\underline{r} = 1$



$$\iint_A \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x}\right) dx\,dy$$

GAUSS-GRE CIRCUITI NEGATIV

$A: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \ \wedge\ -x \le y$

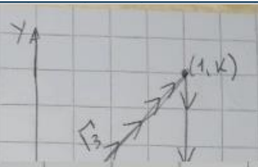
$$\Gamma_3: \begin{cases} x = t \\ y = Kt \end{cases} \quad t \in [0,1] \qquad dx = dt \quad dy = K\,dt$$

$$\int_{\Gamma_3} \underline{F} \circ d\underline{r} = \int_0^1 (K^2t^2+1)\,dt + (Kt^2+3)\cdot K\,dt =$$

$$= \int_0^1 (K^2t^2+1+K^2t^2+3K)\,dt = 2K^2\int_0^1 t^2\,dt + (1+3K)\int_0^1 dt =$$

$$= \frac{2}{3}K^2 + 1 + 3K$$

$\underline{F} = (y^2+1, xy+3)$



$\Gamma_3: \begin{cases} x = t \end{cases} \qquad t \in [0,1] \qquad dx = dt$

$$\oint_\Gamma \underline{F} \circ d\underline{r} = -\frac{K^2}{2} - 3K - \frac{5}{2} + \frac{4}{3} + \frac{2}{3}K^2 + 1 + 3K =$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)K^2 + \left(1 + \frac{4}{3} - \frac{5}{2}\right) = \frac{K^2}{6} + \frac{6+8-15}{6} =$$

$$= \frac{K^2-1}{6}$$

ODE

sabato 14 novembre 2020 13:36

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

$\boxed{\text{O. D. E.}}$

(ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS)

$\boxed{\text{P. D. E.}}$

(PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS)

Non si deve trovare un valore di x ma una equazione che rispetta tale relazione↓

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', y^{(n-1)})$$

Forma esplicita

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$$

Forma implicita

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

O.D.E. (ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS)

P.D.E. (PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS)

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^{\underbrace{n+1}} \to \mathbb{R}$$

ARGOMENTI

$$F: A \subseteq \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

O.D.E. (ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS)

P.D.E. (PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS)

ESEMPI:

$$y^{(n)} := y^{(n)}(x)$$

derivata ordinaria di ordine n

Devo trovare le funzioni y^n tali che:

① $y' = 6xy + \cos x$

② $y'' = 7y' - 3y\sqrt{x} + e^{x^2}$

Dato un campo scalare trovo la relazione fra essa e le derivate parziali

$$\frac{\partial U(x,y,t)}{\partial t} = 3\frac{\partial^2 U(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial U(x,y,t)}{\partial y}$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Esempio:

$y' = 5x + 6 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 5x+6 \Rightarrow$

$\Rightarrow dy = (5x+6)dx$

$\int dy = \int (5x+6)dx \Rightarrow$

$y + K_1 = \frac{5}{2}x^2 + 6x + K_2$

$y = \frac{5}{2}x^2 + 6x + (K_2 - K_1)$

$\boxed{y = \frac{5}{2}x^2 + 6x + C}$

soluzione integrale generale

STUDIEREMO SOLO LE ODE

1) CLASSIFICAZIONE: QUANTI TIPI DI ODE?

2) CONDIZIONI DI ESISTENZA: QUANDO ESISTE ALMENO UNA SOLUZIONE?

3) CONDIZIONI DI UNICITÀ: QUANDO LA SOLUZIONE, OLTRE AD ESISTERE, È ANCHE UNICA?

4) TECNICHE DI RISOLUZIONE

TIPI DI SOLUZIONE (INTEGRALE SOLUZIONE)

- **SOLUZIONE O INTEGRALE GENERALE:**
  LA SOLUZIONE É UNA FAMIGLIA DI SOLUZIONI (COMPAIONO UNA O PIÚ COSTANTI c_i)

- **SOLUZIONE O INTEGRALE PARTICOLARE:**
  SI ASSEGNANO DEI VALORI SPECIFICI ALLE COSTANTI c_i (PROBLEMI DI CAUCHY E PROBLEMI AI LIMITI)

- **SOLUZIONE O INTEGRALE SINGOLARE:** LA SOLUZIONE NON PUÒ ESSERE RICAVATA PER NESSUN VALORE DI c_i, MA BISOGNA FARE DEI RAGIONAMENTI SPECIFICI

CLASSIFICAZIONE ODE

	ORDINE	GRADO
a) $y' = x(y-2)$	1	1
b) $y'' - 5y' + 6y = 2x^2$	2	1
c) $(y')^2 + xy' - y = 0$	1	2
d) $(y''')^2 + y'' - y' = \operatorname{sen} x$	3	2
e) $y''' + y'' - (y')^3 = \operatorname{sen} x$	3	1

ORDINE: É IL MASSIMO ORDINE DI DERIVAZIONE NELL' ODE

GRADO: ESPONENTE DI ELEVAMENTO A POTENZA AVENTE COME BASE LA DERIVATA DI ORDINE MASSIMO

$y' = f(x,y) = f(x, y(x))$ un campo scalare

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Devo trovare una curva di Analisi 1 tale che:

$y: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ \forall x \in I$ SI HA $y' = f(x, y(x))$

INOLTRE, $\forall x \in I$ RISULTA $(x, y(x)) \in A$

Equazioni differenziali a variabili separabili

$y' = 5y \qquad y'(x) = 5y(x)$

$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 5y \Rightarrow \frac{dy}{y} = 5dx$

$\int \frac{dy}{y} = \int 5dx \Rightarrow \ln|y| + K_1 = 5x + K_2$

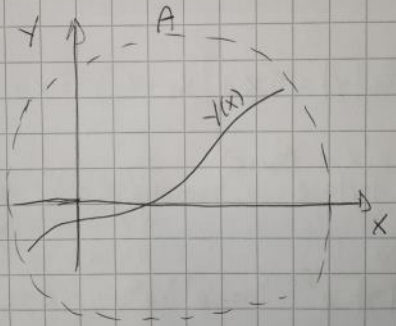
$y' = f(x,y) = f(x, y(x))$ un campo scalare

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Devo trovare una curva di Analisi 1 tale che:

$y: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; \forall x \in I$ SI HA $y' = f(x, y(x))$

INOLTRE, $\forall x \in I$ RISULTA $(x, y(x)) \in A$



LA SOLUZIONE $y(x)$ É UN SOTTOINSIEME DI A

Equazioni differenziali a variabili separabili

$y' = 5y \qquad y'(x) = 5y(x)$

$$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 5y \Rightarrow \frac{dy}{y} = 5dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 5dx \Rightarrow \ln|y| + K_1 = 5x + K_2$$

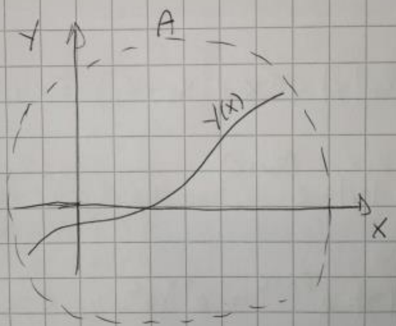
$$\Rightarrow \ln|y| = 5x + (K_2 - K_1) = 5x + C$$

$y' = f(x,y) = f(x, y(x))$

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$y: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/\; \forall x \in I$ SI HA $y' = f(x, y(x))$

INOLTRE, $\forall x \in I$ RISULTA $(x, y(x)) \in A$



LA SOLUZIONE $y(x)$ É UN SOTTOINSIEME DI A

$y' = 5y \qquad y'(x) = 5y(x)$

$$|y| = e^{(5x+c)}$$

$$|y| = e^{5x+c} = e^{5x} \cdot e^{c} \qquad C := e^{c}$$

$$y = Ce^{5x} \qquad C \gtrless 0$$

SOLUZIONE O INTEGRALE GENERALE

ESEMPIO DI COSTRUZIONE DI UNA ODE

$y(x) = y = ax^2 + bx \Rightarrow ax^2 + bx - y = 0$

$y' = 2ax + b \qquad y'' = 2a$

$a = \frac{y''}{2} \qquad b = y' - 2ax = y' - y'' \cdot x$

$\frac{y''}{2} \cdot x + (y' - y''x) \cdot x - y = 0$

$y = ax^2 + bx$ É SOLUZIONE GENERALE

COME STIMARE a E b ?

ESEMPIO DI COSTRUZIONE DI UNA ODE

Vincoli

$\downarrow$

informazioni aggiuntive per stimare il coefficiente

In base all'ordine ho bisogno di più vincoli

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases} \quad \text{OPPURE} \quad \begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_A) = y_A \\ y(x_B) = y_B \end{cases}$$

CONDIZIONI INIZIALI (PROBLEMA DI CAUCHY)

CONDIZIONI AL CONTORNO

PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

PARTIAMO DAL CASO SEMPLICE DI ODE DEL I ORDINE
CAPIREMO TRA POCO COME CONVERTIRE UN'ODE DI ORDINE GENERICO n AD UN SISTEMA DI n ODE DEL I ORDINE

PER UN ASSEGNATO x_0, SI IMPONE UN NUMERO DI VINCOLI PARI ALL'ORDINE DELL'ODE

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0'(x_0) \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} y''' = f(x, y, y', y'') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \\ y''(x_0) = y_0'' \end{cases}$$

PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

PARTIAMO DAL CASO SEMPLICE DI ODE DEL I ORDINE
CAPIREMO TRA POCO COME CONVERTIRE UN'ODE DI ORDINE GENERICO n AD UN SISTEMA DI n ODE DEL I ORDINE

ESEMPIO

$$\begin{cases} y' = 5y \\ y(0) = 3 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} y = Ce^{5x} & \text{SOLUZIONE GENERALE} \\ y(0) = 3 \Rightarrow 3 = C \cdot e^{5 \cdot 0} \Rightarrow C = 3 \end{cases}$$

$$y = 3e^{5x} \quad \text{SOLUZIONE PARTICOLARE}$$

UN PROBLEMA DI CAUCHY (P.C.) PUÒ ESSERE

- BEN POSTO: SI RIESCE A TROVARE UN INTEGRALE PARTICOLARE DAL VINCOLO IMPOSTO
- MAL POSTO: NON SI RIESCE A TROVARE UN INTEGRALE PARTICOLARE DAL VINCOLO IMPOSTO

ESEMPIO → ben posto

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{matrix} y = c e^x \\ 1 = c \cdot e^0 = c \end{matrix} \quad \Rightarrow y = e^x$$

P.C. BEN POSTO

ESEMPIO → mal posto

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{y} \\ y(2) = -3 \end{cases} \Rightarrow$$

DALLA PRIMA RIGA:

$$y' = f(x,y) = 2\sqrt{y}$$

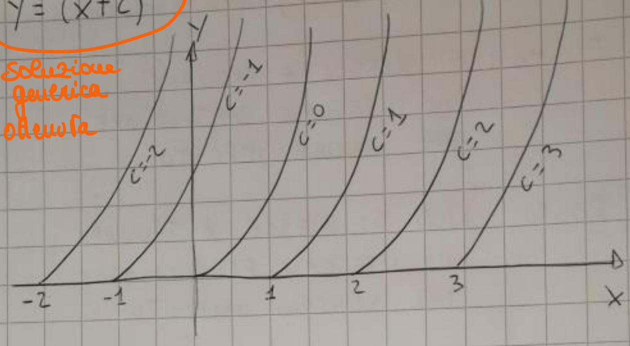
$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y} \; ; \; \frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx$$

$$\int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int dx = \sqrt{y} + k_1 = x + k_2 \Rightarrow \sqrt{y} = x + c$$

$$\sqrt{y} = x + c \quad \wedge \quad x + c \geq 0$$

$y = (x+c)^2$ $\quad x \geq -c$

soluzione generica ottenuta

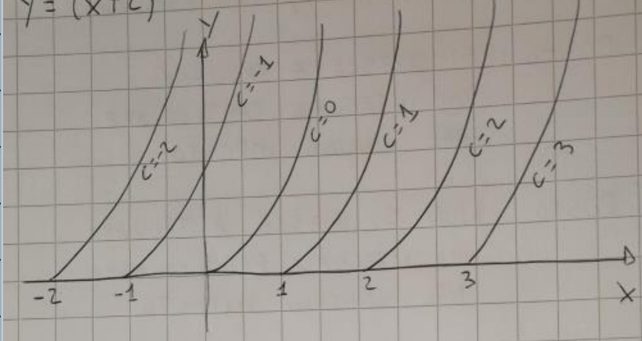


$y \geq 0 \Rightarrow y(2) = -3$ É IMPOSSIBILE IN QUESTO CASO

PROBLEMA DI CAUCHY MAL POSTO

$y = (x+c)^2 \wedge x \geq -c$ SOLUZIONE GENERALE

$y = (x+c)^2$ $\quad x \geq -c$



$y \geq 0 \Rightarrow y(2) = -3$ É IMPOSSIBILE IN QUESTO CASO

PROBLEMA DI CAUCHY MAL POSTO

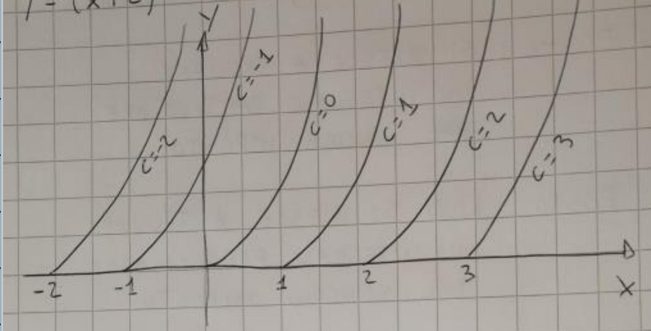
$y = (x+c)^2 \wedge x \geq -c$ SOLUZIONE GENERALE

$y = 0$ É COMUNQUE SOLUZIONE DI $y' = f(x,y) = 2\sqrt{y}$ MA NON É OTTENIBILE PER NESSUN VALORE DELLA COSTANTE C → la soluzione è un punto

$y = 0$ É SOLUZIONE O INTEGRALE SINGOLARE PER $y' = f(x,y) = 2\sqrt{y}$

SU ALCUNI TESTI L'INTEGRALE SINGOLARE VIENE ANCHE INDICATO COME INTEGRALE DI FRONTIERA

$y=(x+c)^2$ $\quad x \geq -c$



$y \geq 0 \implies y(2)=-3$ É IMPOSSIBILE IN QUESTO CASO

PROBLEMA DI CAUCHY MAL POSTO

$y=(x+c)^2 \ \wedge\ x \geq -c$ SOLUZIONE GENERALE

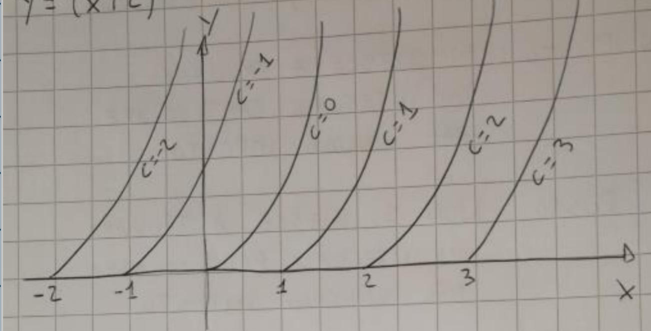
$y' = f(x,y) = 2\sqrt{y}$

DOMINIO $f(x,y) = 2\sqrt{y}$ É $y \geq 0$

$y=0$ É LA FRONTIERA (COMPRESA NEL DOMINIO IN QUESTO CASO)

$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \dfrac{1}{\sqrt{y}} \implies y=0$ NON APPARTIENE AL DOMINIO DI $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$

$y=(x+c)^2$ $\quad x \geq -c$



$y \geq 0 \implies y(2)=-3$ É IMPOSSIBILE IN QUESTO CASO

PROBLEMA DI CAUCHY MAL POSTO

$y=(x+c)^2 \ \wedge\ x \geq -c$ SOLUZIONE GENERALE

PROCEDURA **INTEGRALE SINGOLARE**

$y' = f(x,y)$

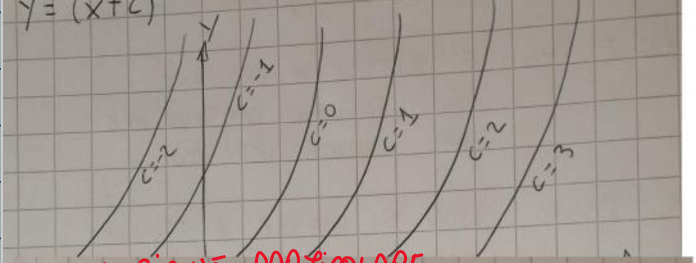
SIA $y(x)$ UNA SOLUZIONE PER

$y' = f(x,y) \qquad f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

SE $y(x)$ APPARTIENE AL CAMPO DI ESISTENZA DI $f(x,y)$ MA NON APPARTIENE AL CAMPO DI ESISTENZA DI $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, ALLORA

$y(x)$ É INTEGRALE SINGOLARE PER $y' = f(x,y)$

$y = (x+c)^2 \qquad x \geq -c$



SOLUZIONE PARTICOLARE

SE, INVECE, $y(x)$ APPARTIENE ANCHE AL DOMINIO DI $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ ALLORA

$y(x)$ É UNA SOLUZIONE PARTICOLARE, ASSEGNANDO UN PARTICOLARE VALORE ALLA COSTANTE C NELL'ESPRESSIONE DELL'INTEGRALE GENERALE

PROCEDURA

$y' = f(x,y)$

SIA $y(x)$ UNA SOLUZIONE PER

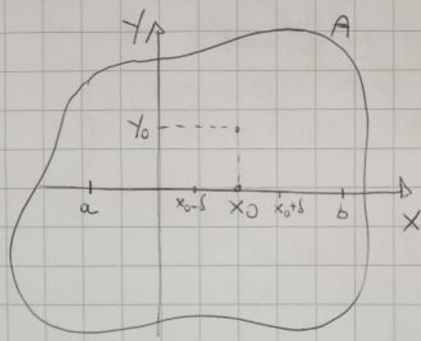
$y' = f(x,y) \qquad f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

SE $y(x)$ APPARTIENE AL CAMPO DI ESISTENZA DI $f(x,y)$ MA NON APPARTIENE AL CAMPO DI ESISTENZA DI $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, ALLORA

$y(x)$ É INTEGRALE SINGOLARE PER $y' = f(x,y)$

SCHEMA

PROBLEMA DI CAUCHY
- BEN POSTO
  - IN PICCOLO
  - IN GRANDE
- MAL POSTO



$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

P.C. IN PICCOLO: UNA VOLTA IMPOSTA LA CONDIZIONE DI PASSAGGIO PER IL PUNTO (x_0, y_0), SI FOCALIZZA L'ATTENZIONE SOLO SU UN INTORNO DI x_0, E SI STUDIA SE E QUANTE FUNZIONI SOLUZIONE PASSANTI PER (x_0, y_0) CI SONO

$y: [x_0 - \delta ; x_0 + \delta] \to \mathbb{R}$

P.C. IN GRANDE: SI FISSA A PRIORI UN INTERVALLO $[a,b]$, CON $x_0 \in [a,b]$, E SI STUDIA SE E QUANTE FUNZIONI

$y: [a,b] \to \mathbb{R}$

SONO SOLUZIONI DEL P. C.

PROBLEMA DI CAUCHY

P.C. IN PICCOLO: UNA VOLTA IMPOSTA LA CONDIZIONE
... IL PUNTO (x_0, y_0),
...TENZIONE SOLO SU
...$_0$, E SI STUDIA
...UNZIONI SOLUZIONE
...$x_0, y_0)$ CI SONO
$\to \mathbb{R}$

SE E QUANTE FUNZIONI

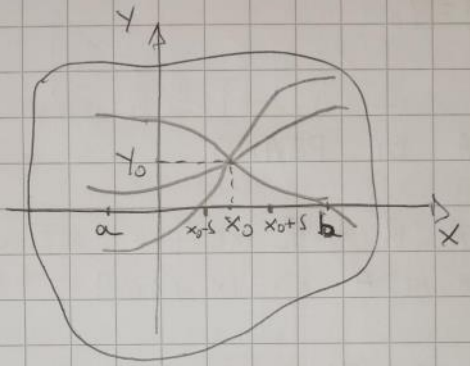
$\Downarrow$

CONDIZIONI DI ESISTENZA
UNICITÀ
DELLA SOLUZIONE

PRIORI UN
$[a, b]$, CON
], E SI STUDIA
FUNZIONI
$\mathbb{R}$
DEL P.C.

CONDIZIONI DI ESISTENZA

ESISTE ALMENO UNA SOLUZIONE?



CONDIZIONE DI UNICITÀ

LA SOLUZIONE È UNICA?

P.C. IN PICCOLO

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

TEOREMA DI PEANO

SE $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ É UNA FUNZIONE CONTINUA IN A ED $(x_0, y_0) \in A$, A APERTO

ALLORA ESISTE ALMENO UNA FUNZIONE

$$y: [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbb{R}$$

CHE É SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY

P.C. IN PICCOLO

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

TEOREMA DI PEANO

SE $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ É U

CONTINUA IN A ED $(x_0, y_0$

ALLORA ESISTE ALMENO

$y: [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to$

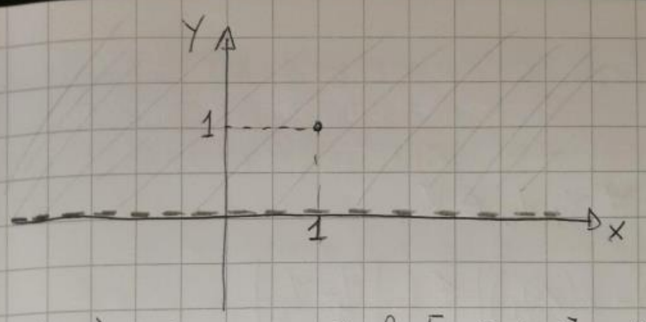
CHE É SOLUZIONE DEL

Esempio

$$\begin{cases} y' = e^x \ln y \\ y(1) = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{applico peano}} f(x,y) = e^x \ln y$$

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

Dominio: $A: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$

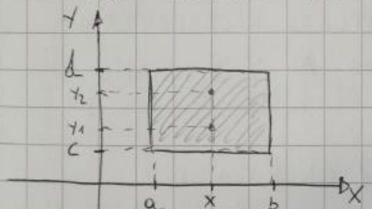


$(1,1) \in A$ $\quad \exists f: [1-\delta, 1+\delta] \to \mathbb{R}$

SOLUZIONE DEL P.C. ASSEGNATO

DEFINIZIONE DI FUNZIONE LIPSCHITZIANA

(UTILE PER LA CONDIZIONE DI UNICITA' DELLA SOLUZIONE PER UN PROBLEMA DI CAUCHY)



SIANO $I = [a, b]$

$K = [c, d]$

$R = I \times K$

R RETTANGOLO

$\exists L > 0$:

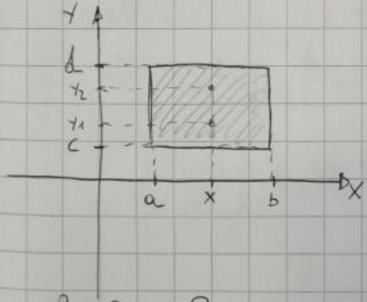
$\forall x \in I$ E $\forall y_1, y_2 \in K$,

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

OVVERO

DEFINIZIONE DI FUNZIONE LIPSCHITZIANA

(UTILE PER LA CONDIZIONE DI UNICITÀ DELLA SOLUZIONE PER UN PROBLEMA DI CAUCHY)



SIANO $I = [a, b]$

$K = [c, d]$

$R = I \times K$

R RETTANGOLO

SIA $f : R \to \mathbb{R}$

f È LIPSCHITZIANA IN y UNIFORMEMENTE RISPETTO AD x SE

$\exists\, L > 0$:

$\forall x \in I$ E $\forall y_1, y_2 \in K$,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|$$

OVVERO

$$\frac{|f(x, y_1) - f(x, y_2)|}{|y_1 - y_2|} \leq L$$

OSSERVAZIONE: IL RAPPORTO INCREMENTALE RISPETTO AD y È LIMITATO

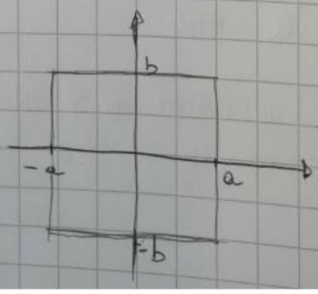
f LIP RISPETTO AD $y \Rightarrow f$ CONTINUA RISPETTO AD y

ESEMPIO

$f(x, y) = \sqrt{|y|}$

$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$A = \mathbb{R}^2$



$R = [-a, a] \times [-b, b]$

VERIFICARE SE f È LIP

$\forall x \in [-a, a] \wedge \forall y_1, y_2 \in [-b, b]$

Basta trovare un punto in cui non è LIP per dire che non lo è mai

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|$$

$$\left|\sqrt{|y_1|} - \sqrt{|y_2|}\right| \leq L\,|y_1 - y_2|$$

SCELGO $x = 0$ E $y_1 = 0$, E y_2 GENERICO

$$\left|\sqrt{|y_2|}\right| \leq L\,|y_2| \Rightarrow \frac{\sqrt{|y_2|}}{|y_2|} \leq L$$

SCELGO PER COMODITÀ $y_2 > 0$

$$\frac{\sqrt{y_2}}{y_2} \leq L \qquad \lim_{y_2 \to 0} \frac{\sqrt{y_2}}{y_2} = +\infty$$

$f(x, y) = \sqrt{|y|}$ NON È LIPSCHITZIANA

QUANDO $f(x,y)$ É SICURAMENTE LIP ?

Hyp: • $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN A APERTO

• $\forall (x,y) \in A \quad \exists \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ CONTINUA E LIMITATA IN A

OVVERO

$$\exists M > 0 : \forall (x,y) \in A, \left| \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right| \leq M$$

TESI:

$\forall R = (I \times K) \subseteq A$, $f(x,y)$ É LIP

DIM.

TEOREMA DI LAGRANGE

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b-a)$$

$$|f(b) - f(a)| = |f'(c)| \cdot |(b-a)|$$

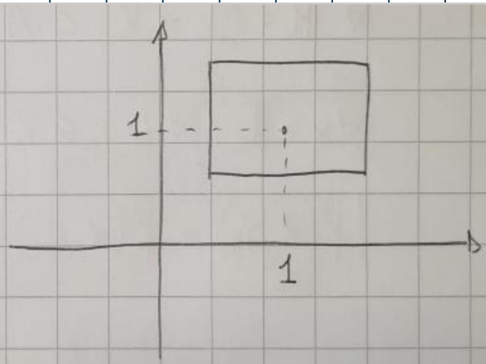
$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = \left| \frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y} \right| \cdot |y_1 - y_2|$$

$\bar{y} \in (y_1, y_2)$

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq M \cdot |y_1 - y_2|$$

ESEMPIO

$f(x,y) = e^x \ln y$



$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{e^x}{y}$$

R É UN COMPATTO

$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_R$ AMMETTE MASSIMO E MINIMO ASSOLUTI

$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_R$ É LIMITATA $\Rightarrow f$ É LIP

TEOREMA DI ESISTENZA ED UNICITÀ LOCALE DELLA SOLUZIONE PER UN PROBLEMA DI CAUCHY IN PICCOLO

Hyp: • A APERTO DI $\mathbb{R}^2$

• $f: A \to \mathbb{R}$ CONTINUA

condizioni del teorema di PEANO

$\Downarrow$

dunque è LIP

• f LIP $\forall R$ CHIUSO $\subset A$
e limitato

OVVERO

$\forall R = (I \times K) \subset A,\ \exists L_R > 0 /$

$\forall x \in I,\ \forall y_1, y_2 \in K,$

$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L_R |y_1 - y_2|$

TESI:

$\forall (x_0, y_0) \in A,\ \exists!\ y: [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbb{R}$

SOLUZIONE DEL P.C. $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

N.B.: LA SOLUZIONE $y(x)$ É DI CLASSE C^1

ESEMPIO

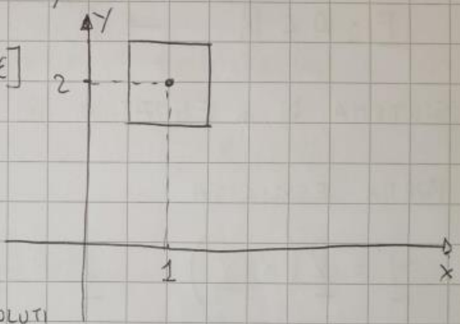
equazione differenziale del primo ordine

$\begin{cases} y' = y^3 \cdot \operatorname{sen}(xy) \\ y(1) = 2 \end{cases}$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ CONTINUA

$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cos(xy) \cdot y^3 + 3y^2 \operatorname{sen}(xy)$

$R = [1-\delta, 1+\delta] \times [2-\varepsilon, 2+\varepsilon]$



R É UN COMPATTO

$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_R$ AMMETTE MASSIMO E MINIMO ASSOLUTI

IN QUANTO $\frac{\partial f}{\partial y}$ É CONTINUA IN $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leq L$

$\exists!\ y: [1-\delta, 1+\delta] \to \mathbb{R}$ SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY ASSEGNATO

SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL I ORDINE

$\underline{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$

$\underline{F}(x, \underline{Y}, \underline{Y}') = \underline{0}$ $\qquad \underline{Y}' = (Y_1', Y_2', \dots, Y_n')$

FORMA IMPLICITA

$\underline{F} : A \subseteq \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}^n$

SISTEMA DI n EQUAZIONI IN n INCOGNITE

FORMA ESPLICITA

$\underline{Y}' = \underline{f}(x, \underline{Y})$ $\qquad \underline{f} : A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$

OBIETTIVO:

TROVARE $Y_i : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad (i = 1, 2, \dots, n)$

DERIVABILI IN I, TALI CHE

$\underline{F}(x, \underline{Y}, \underline{Y}') = \underline{0}$

OPPURE

$\underline{Y}' = \underline{f}(x, \underline{Y})$

$$\underline{Y}' = \underline{f}(x, \underline{Y}) \Rightarrow \begin{cases} Y_1' = f_1(x, Y_1, Y_2, \dots Y_n) \\ Y_2' = f_2(x, Y_1, Y_2, \dots Y_n) \\ \vdots \\ Y_n' = f_n(x, Y_1, Y_2, \dots Y_n) \end{cases}$$

ESEMPIO

$$\begin{cases} Y_1' = e^x \cdot Y_1 + Y_2 \cdot \sin x = f_1(x, Y_1, Y_2) \\ Y_2' = Y_1 \cdot \cos x + Y_2 \cdot e^{-x} = f_2(x, Y_1, Y_2) \end{cases}$$

$\underline{f} = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$\underline{Y} = (Y_1, Y_2) : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$Y_1 : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$Y_2 : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} \underline{y}' = \underline{f}(x, \underline{y}) \\ \underline{y}(x_0) = \underline{y}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_i = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots n) \\ y_i(x_0) = y_{0,i} \end{cases}$$

OGNI EQUAZIONE DIFFERENZIALE DI ORDINE n PUÓ ESSERE RISCRITTA COME UN SISTEMA DI n ODE DEL I ORDINE

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

$$y = y_1$$
$$y' = y_1' = y_2$$
$$y'' = y_1'' = y_2' = y_3$$
$$y''' = y_1''' = y_2'' = y_3' = y_4$$
$$\vdots$$
$$y^{(n-1)} = \dots = y_n$$

PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} \underline{y}' = \underline{f}(x, \underline{y}) \\ \underline{y}(x_0) = \underline{y}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_i = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots n) \\ y_i(x_0) = y_{0,i} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, y_3, \dots y_n) \end{cases}$$

OGNI EQUAZIONE DIFFERENZIALE DI ORDINE n PUÓ ESSERE RISCRITTA COME UN SISTEMA DI n ODE DEL I ORDINE

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

$$y = y_1$$
$$y' = y_1' = y_2$$
$$y'' = y_1'' = y_2' = y_3$$
$$y''' = y_1''' = y_2'' = y_3' = y_4$$
$$\vdots$$
$$y^{(n-1)} = \dots = y_n$$

$$y''' + 3y'' - 6x \cdot y' + y = \cos x$$

$$y''' = -3y'' + 6x\,y' - y + \cos x$$

$y = y_1$

$y' = y_1' = y_2$

$y'' = y_1'' = y_2' = y_3$

$y''' = y_3'$

$$\begin{cases} y_1' = y_2 = f_1(x, y_1, y_2, y_3) \\ y_2' = y_3 = f_2(x, y_1, y_2, y_3) \\ y_3' = -3y_3 + 6x\,y_2 - y_1 + \cos x = f_3(x, y_1, y_2, y_3) \end{cases}$$

$f_i : A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$

$R = I \times K$

$K =$ IPERCUBO IN $\mathbb{R}^n$

RETTANGOLO IN $\mathbb{R}^n$

$K = [c_1, d_1] \times [c_2, d_2] \times \dots$

$\dots \times [c_n, d_n]$

f_i É CONTINUA E $\dfrac{\partial f}{\partial y_i}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ CONTINUE

E LIMITATE IN $A \Rightarrow f_i$ LIP IN $\forall R \subset A$

$$\underline{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n) \quad \text{LIP}$$

$$\Updownarrow$$

$$f_i \quad \text{LIP} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

TEOREMA DI ESISTENZA ED UNICITÀ DELLA SOLUZIONE PER P.C. IN PICCOLO RIGUARDANTI SISTEMI DI ODE DEL I ORDINE

$$\begin{cases} \underline{y}' = \underline{f}(x, \underline{y}) \\ \underline{y}(x_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

HYP: A APERTO IN $\mathbb{R}^{n+1}$

$\underline{f} : A \to \mathbb{R}^n$ CONTINUA

$\underline{f}$ LIP $\forall$ R $\subset$ A

TESI:

$\forall (x_0, \underline{y}_0) \in A \quad \exists! \ \underline{y} : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbb{R}^n$

SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY IN PICCOLO

ESEMPIO

$$\begin{cases} y_1' = \operatorname{sen} x \cdot y_1 - e^x \cdot y_2 = f_1(x, y_1, y_2) = f_1(x, \underline{y}) \\ y_2' = y_2 \cdot (\ln x + \cos^2 x) = f_2(x, y_1, y_2) = f_2(x, \underline{y}) \\ y_1(1) = 2 = y_{0,1} \\ y_2(1) = 3 = y_{0,2} \end{cases}$$

$\underline{f} = (f_1, f_2) : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

DOMINIO

$A : \{ (x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3 : x > 0 \}$

DOMINIO

$A : \{(x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$

$(x_0, y_{0,1}, y_{0,2}) = (1, 2, 3) \in A$

ESISTE ALMENO UNA SOLUZIONE

$$\underline{y} : [1-\delta, 1+\delta] \to \mathbb{R}^2$$

PER UNICITÀ DELLA SOLUZIONE
VALUTO LA LIP IN UN GENERICO
COMPATTO $R \subset A$

PEANO GENERALIZZATO

$$\begin{cases} y_1' = \operatorname{sen} x \cdot y_1 - e^x \cdot y_2 = f_1(x, y_1, y_2) = f_1(x, \underline{y}) \\ y_2' = y_2 \cdot (\ln x + \cos^2 x) = f_2(x, y_1, y_2) = f_2(x, \underline{y}) \\ y_1(1) = 2 = y_{0,1} \\ y_2(1) = 3 = y_{0,2} \end{cases}$$

$\underline{f} = (f_1, f_2) : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$A : \{(x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$

$(x_0, y_{0,1}, y_{0,2}) = (1, 2, 3) \in A$

ESISTE ALMENO UNA SOLUZIONE

$$\underline{y} : [1-\delta, 1+\delta] \to \mathbb{R}^2$$

PER UNICITÀ DELLA SOLUZIONE
VALUTO LA LIP IN UN GENERICO
COMPATTO $R \subset A$

$\dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} = \operatorname{sen} x \qquad \dfrac{\partial f_1}{\partial y_2} = -e^x$

$\dfrac{\partial f_2}{\partial y_1} = 0 \qquad \dfrac{\partial f_2}{\partial y_2} = \ln x + \cos^2 x$

TUTTE LE $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}$ $(i = 1, 2$ E $j = 1, 2)$

SONO FUNZIONI CONTINUE

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_j} : A \to \mathbb{R}$$

$M_R = \max\{M_{i,j,R}\}$

E DUNQUE SONO CONTINUE
IN $\forall$ R (COMPATTO) $\subset A$

$\Rightarrow \left|\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}\right| < M_{i,j,R} \Rightarrow \left|\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}\right| < M_R$

$$\begin{cases} y_1' = \sin x \cdot y_1 - e^x \cdot y_2 = f_1(x, y_1, y_2) = f_1(x, \underline{y}) \\ y_2' = y_2 \cdot (\ln x + \cos^2 x) = f_2(x, y_1, y_2) = f_2(x, \underline{y}) \\ y_1(1) = 2 = y_{0,1} \\ y_2(1) = 3 = y_{0,2} \end{cases}$$

$\underline{f} = (f_1, f_2) : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$A : \{(x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$

$(x_0, y_{0,1}, y_{0,2}) = (1, 2, 3) \in A$

ESISTE ALMENO UNA SOLUZIONE

$\underline{y} : [1-\delta, 1+\delta] \to \mathbb{R}^2$

PER UNICITÀ DELLA SOLUZIONE VALUTO LA LIP IN UN GENERICO COMPATTO $R \subset A$

$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = \sin x \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y_2} = -e^x$

$\frac{\partial f_2}{\partial y_1} = 0 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = \ln x + \cos^2 x$

TUTTE LE $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ ($i = 1,2$ E $j = 1,2$)

SONO FUNZIONI CONTINUE

$\frac{\partial f_i}{\partial y_j} : A \to \mathbb{R}$

E DUNQUE SONO CONTINUE IN $\forall R$ (COMPATTO) $\subset A$

$\Rightarrow \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right| < M_R \Rightarrow \underline{f}$ LIP

$$\begin{cases} y_1' = \sin x \cdot y_1 - e^x \cdot y_2 = f_1(x, y_1, y_2) = f_1(x, \underline{y}) \\ y_2' = y_2 \cdot (\ln x + \cos^2 x) = f_2(x, y_1, y_2) = f_2(x, \underline{y}) \\ y_1(1) = 2 = y_{0,1} \\ y_2(1) = 3 = y_{0,2} \end{cases}$$

$\underline{f} = (f_1, f_2) : A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$A : \{(x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$

$(x_0, y_{0,1}, y_{0,2}) = (1, 2, 3) \in A$

ESISTE ALMENO UNA SOLUZIONE

$\underline{y} : [1-\delta, 1+\delta] \to \mathbb{R}^2$

PER UNICITÀ DELLA SOLUZIONE VALUTO LA LIP IN UN GENERICO COMPATTO $R \subset A$

$\exists! \; \underline{y} : [1-\delta, 1+\delta] \to \mathbb{R}^2$ SOLUZIONE

$\exists! \; y_1 : [1-\delta, 1+\delta] \to \mathbb{R}$

$\exists! \; y_2 : [1-\delta, 1+\delta] \to \mathbb{R}$

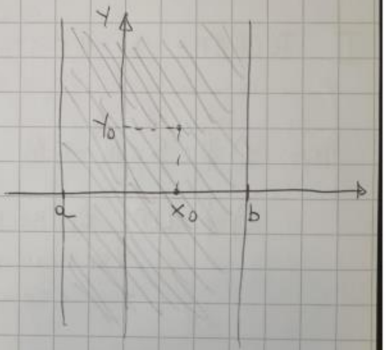
TEOREMA DI ESISTENZA ED UNICITÀ IN GRANDE (GLOBALE) PER ODE DEL I ORDINE

SI FISSA A PRIORI L'INTERVALLO SU CUI VALUTARE ESISTENZA ED UNICITÀ DELLA SOLUZIONE

SI CONSIDERA UNA STRISCIA

$S=[a,b]\times\mathbb{R}$

$$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$



Hyp:

1) $f: S\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ [redacted] CONTINUA IN S

2) f LIMITATA IN S $\Leftrightarrow$ $\exists M>0$ / $\forall (x,y)\in S,\ |f(x,y)|\le M$

3) f LIP $\forall$ R CHIUSO E LIMITATO $\subset S$

$\forall R=[I\times K]$ [redacted] $\subset S$

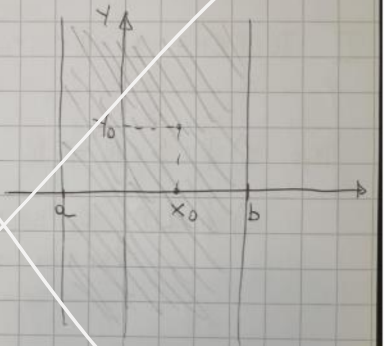
TEOREMA DI ESISTENZA ED UNICITÀ IN GRANDE (GLOBALE) PER ODE DEL I ORDINE

SI FISSA A PRIORI L'INTERVALLO SU CUI VALUTARE ESISTENZA ED UNICITÀ DELLA SOLUZIONE

SI CONSIDERA UNA STRISCIA

$S=[a,b]\times\mathbb{R}$

$$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$



Hyp:

1) $f: S\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ [redacted] CONTINUA IN S

2) f LIMITATA IN S $\Leftrightarrow$ $\exists M>0$ / $\forall (x,y)\in S,\ |f(x,y)|\le M$

3) f LIP $\forall$ R CHIUSO E LIMITATO $\subset S$

$\forall R=[I\times K]$ [redacted] $\subset S$

TESI

$\forall (x_0,y_0)\in S\ \exists!\ y:[a,b]\to\mathbb{R}$ SOLUZIONE DEL P.C. IN GRANDE

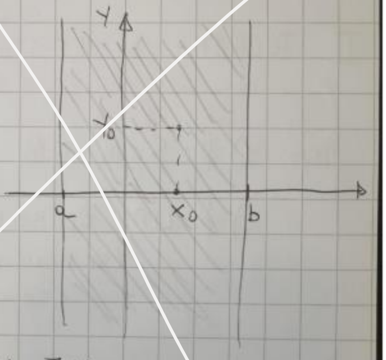
N.B. = UN RETTANGOLO SOLO CHIUSO (E NON ANCHE LIMITATO) POTREBBE ESSERE TUTTA LA STRISCIA

TEOREMA DI ESISTENZA ED UNICITÀ IN GRANDE (GLOBALE) PER ODE DEL I ORDINE

SI FISSA A PRIORI L'INTERVALLO SU CUI VALUTARE ESISTENZA ED UNICITÀ DELLA SOLUZIONE

SI CONSIDERA UNA STRISCIA

$S = [a, b] \times \mathbb{R}$



$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Hyp:

1) $f : S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

CONTINUA IN S

2) f LIMITATA IN S $\Leftrightarrow$ $\exists M > 0 /$

$\forall (x, y) \in S, \; |f(x, y)| \leq M$

3) f LIP $\forall$ R CHIUSO E LIMITATO $\subset S$

$\forall R = (I \times K) \subset S$

II TEOREMA DI ESISTENZA ED UNICITÀ GLOBALE

Hyp: 1) $f : S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN S

2) f LIP GLOBALMENTE IN S

(SI CONSIDERA TUTTA LA STRISCIA IN BLOCCO)

TESI:

$\forall (x_0, y_0) \in S \;\; \exists!\, y : [a, b] \to \mathbb{R}$

SOLUZIONE DEL P.C. IN GRANDE

- f LIP $\forall$ R CHIUSO $\subset A$

OVVERO

$\forall R = (I \times K) \subset A, \; \exists L_R > 0 /$

$\forall x \in I, \; \forall y_1, y_2 \in K,$

$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L_R |y_1 - y_2|$

f LIP GLOBALMENTE IN $S = [a, b] \times \mathbb{R}$

(SI CONSIDERA TUTTA LA STRISCIA IN BLOCCO)

OVVERO

$\exists L > 0 /$

$\forall x \in I, \; \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$

I TEOREMA DI ESISTENZA ED UNICITÀ GLOBALE DELLA SOLUZIONE PER SISTEMI DI ODE DEL I ORDINE

SI CONSIDERA $S=[a,b]\times\mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \underline{y}' = \underline{f}(x,\underline{y}) \\ \underline{y}(x_0)=\underline{y}_0 \end{cases}$$

$$\underline{f}:[a,b]\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$f_i:[a,b]\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$i=1,\dots,n$$

Hyp:
1) f_i CONTINUE IN S $(i=1,2,\dots,n)$
2) f_i LIMITATE IN S $(i=1,2,\dots,n)$
3) f_i LIP $\forall$ R CHIUSO E LIMITATO $\subset S$ $(i=1,2,\dots,n)$

II TEOREMA

Hyp:
1) $\underline{f}:[a,b]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN $S=[a,b]\times\mathbb{R}^n$
2) $\underline{f}$ LIP GLOBALMENTE IN S

TESI:

$\forall(x_0,\underline{y}_0)\in S$ $\exists!\ \underline{y}:[a,b]\to\mathbb{R}$ SOLUZIONE DEL P.C. IN GRANDE

$\exists!\ y_i:[a,b]\to\mathbb{R}$ $(i=1,2,\dots,n)$

$$\begin{cases} y_1' = \cos x \cdot y_1 + x^3 \cdot y_2 = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = -y_1 + e^{-3x} \cdot y_2 + \ln(x^2+1) = f_2(x, y_1, y_2) \\ y_1(1) = 2 \\ y_2(1) = -1 \end{cases}$$

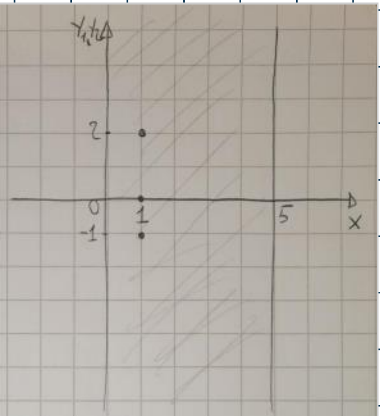
$S = [0, 5] \times \mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} y_1' = \cos x \cdot y_1 + x^3 \cdot y_2 = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = -y_1 + e^{-3x} \cdot y_2 + \ln(x^2+1) = f_2(x, y_1, y_2) \\ y_1(1) = 2 \\ y_2(1) = -1 \end{cases}$$

$S = [0, 5] \times \mathbb{R}^2$

$\underline{f} = (f_1, f_2)$

É CONTINUA IN S



VERIFICA DELLA LIP

$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = \cos x$

$\frac{\partial f_1}{\partial y_2} = x^3$ $\frac{\partial f_2}{\partial y_1} = -1$ $\frac{\partial f_2}{\partial y_2} = e^{-3x}$

$\left|\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\right| \leq 1$ $\left|\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\right| \leq 125$

$\left|\frac{\partial f_2}{\partial y_1}\right| \leq 1$ $\left|\frac{\partial f_2}{\partial y_2}\right| \leq 1$

ODEL e ODELO

giovedì 19 novembre 2020 20:49

Seconda Parte

- Esistenza ed unicità in grande
- ODE Lineari (ODEL)
- ODE Lineari Omogenee (ODELO)
- ODELO a coefficienti costanti

$y' = f(x, y)$ due punti della stessa y $\quad f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\forall R = (I \times K) \subset A, \exists L_R > 0 /$

$\forall x \in I, \forall y_1, y_2 \in K,$

$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L_R |y_1 - y_2|$

$$\vec{\underline{y}'} = \underline{f}(x, \underline{y}) \Rightarrow \begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots y_n) \end{cases}$$

$f_i: A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$

$R = I \times K$ due vettori

$I = [a, b] \quad K = [c_1, d_1] \times [c_2, d_2] \times \dots \times [c_n, d_n]$

$\forall x \in I, \forall \underline{y}_A, \underline{y}_B \in K, \exists L_R > 0 /$

$$|f_i(x, \underline{y}_A) - f_i(x, \underline{y}_B)| \leq L_R \cdot \sum_{j=1}^{n} |y_{j,A} - y_{j,B}|$$

SE f_i É CONTINUA E $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ $(j = 1, 2, \dots n)$ SONO CONTINUE E LIMITATE IN $A \Rightarrow f_i$ É LIP

$y' = f(x,y) \qquad f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\forall R = (I \times K) \subset A, \ \exists L_R > 0 /$

$\forall x \in I, \ \forall y_1, y_2 \in K,$

$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L_R |y_1 - y_2|$

$$\underline{y}' = \underline{f}(x,\underline{y}) \Rightarrow \begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots y_n \end{cases}$$

$f_i : A \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$

$R = I \times K$

DIM:

$$|f_i(x,\underline{y}_A) - f_i(x,\underline{y}_B)| = \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_1}(y_{1,A} - y_{1,B}) + \frac{\partial f_i}{\partial y_2}(y_{2,A} - y_{2,B}) + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial y_n}(y_{n,A} - y_{n,B}) \right| \le \left|\frac{\partial f_i}{\partial y_1}\right| |y_{1,A} - y_{1,B}| + \dots + \left|\frac{\partial f_i}{\partial y_n}\right| |y_{n,A} - y_{n,B}|$$

SE PER HYP $\left|\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right| \le L_R \quad \forall j = 1, 2, \dots n$

$$\Rightarrow |f_i(x,\underline{y}_A) - f_i(x,\underline{y}_B)| \le L_R \cdot \sum_{j=1}^{n} |y_{j,A} - y_{j,B}|$$

OVVIAMENTE:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \underline{f} : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ CONTINUA} \\ 2)\ \underline{f} \text{ GLOBALMENTE LIP} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, \underline{y} \text{ UNICA SOLUZIONE}$$

potrebbe non essere unica

SE $\underline{f}$ NON É LIP $\not\Rightarrow$ $\underline{y}$ NON SIA UNICA

ESEMPIO

$y' = x y^2 = f(x,y)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy \qquad S: [a,b] \times \mathbb{R}$

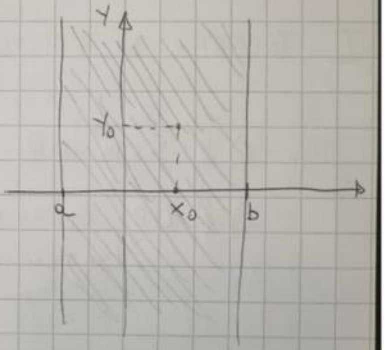
TEOREMA DI ESISTENZA ED UNICITÁ IN GRANDE (GLOBALE) PER ODE DEL I ORDINE

SI FISSA A PRIORI L'INTERVALLO SU CUI VALUTARE ESISTENZA ED UNICITÁ DELLA SOLUZIONE

SI CONSIDERA UNA STRISCIA

$S = [a, b] \times \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$



Hyp:

1) $f: S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN S

2) f LIMITATA IN S $\Leftrightarrow \exists M > 0 /$ $\forall (x, y) \in S, |f(x, y)| \le M$

3) f LIP $\forall R$ CHIUSO E LIMITATO $\subset S$ $\forall R = [I \times K]$: $\subset S$

TESI

$\forall (x_0, y_0) \in S \ \exists! \ y : [a, b] \to \mathbb{R}$ SOLUZIONE DEL P.C. IN GRANDE

N.B. = UN RETTANGOLO SOLO CHIUSO (E NON ANCHE LIMITATO) POTREBBE ESSERE TUTTA LA STRISCIA

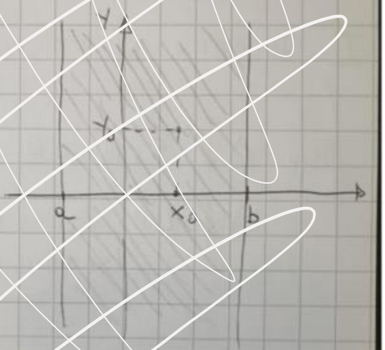
TEOREMA DI ESISTENZA ED UNICITÁ IN GRANDE (GLOBALE) PER ODE DEL I ORDINE

SI FISSA A PRIORI L'INTERVALLO SU CUI VALUTARE ESISTENZA ED UNICITÁ DELLA SOLUZIONE

SI CONSIDERA UNA STRISCIA

$S = [a, b] \times \mathbb{R}$

$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$



Hyp:

1) $f: S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN S

2) f LIMITATA IN S $\Leftrightarrow \exists M > 0 /$ $\forall (x, y) \in S, |f(x, y)| \le M$

3) f LIP $\forall R$ CHIUSO E LIMITATO $\subset S$ $\forall R = [I \times K]$: $\subset S$

II TEOREMA DI ESISTENZA ED UNICITÁ GLOBALE

Hyp: 1) $f: S \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN S

2) f LIP GLOBALMENTE IN S (SI CONSIDERA TUTTA LA STRISCIA IN BLOCCO)

TESI:

$\forall (x_0, y_0) \in S \ \exists! \ y : [a, b] \to \mathbb{R}$ SOLUZIONE DEL P.C. IN GRANDE

• $\underline{f}$ LIP $\forall$ R CHIUSO $\subset A$

OVVERO

$\forall R = (I \times K) \subset A, \ \exists L_R > 0 \ /$

$\forall x \in I, \ \forall y_1, y_2 \in K,$

$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L_R |y_1 - y_2|$

f LIP GLOBALMENTE IN $S = [a,b] \times \mathbb{R}$

(SI CONSIDERA TUTTA LA STRISCIA IN BLOCCO)

OVVERO

$\exists L > 0 \ /$

$\forall x \in I, \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$

I TEOREMA DI ESISTENZA ED UNICITÀ GLOBALE DELLA SOLUZIONE PER SISTEMI DI ODE DEL I ORDINE

SI CONSIDERA $S = [a,b] \times \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \underline{y}' = \underline{f}(x, \underline{y}) \\ \underline{y}(x_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

tutti i componenti

$\underline{f} : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

singola componente

$f_i : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$i = 1, \dots, n$

Hyp: 1) f_i CONTINUE IN S $(i = 1, 2, \dots, n)$

2) f_i LIMITATE IN S $(i = 1, 2, \dots, n)$

3) f_i LIP $\forall$ R CHIUSO E LIMITATO $\subset S$ $(i = 1, 2, \dots, n)$

II TEOREMA

Hyp: 1) $\underline{f} : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ CONTINUA IN $S = [a,b] \times \mathbb{R}^n$

2) $\underline{f}$ LIP GLOBALMENTE IN S

TESI:

$\forall (x_0, \underline{y}_0) \in S \quad \exists! \ \underline{y} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

SOLUZIONE DEL P.C IN GRANDE

$\exists! \ y_i : [a,b] \to \mathbb{R}$

$(i = 1, 2, \dots, n)$

$$\begin{cases} y_1' = \cos x \cdot y_1 + x^3 \cdot y_2 = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = -y_1 + e^{-3x} \cdot y_2 + \ln(x^2+1) = f_2(x, y_1, y_2) \\ y_1(1) = 2 \\ y_2(1) = -1 \end{cases}$$

Intervallo fissato a priori

$S = [0, 5] \times \mathbb{R}^2$

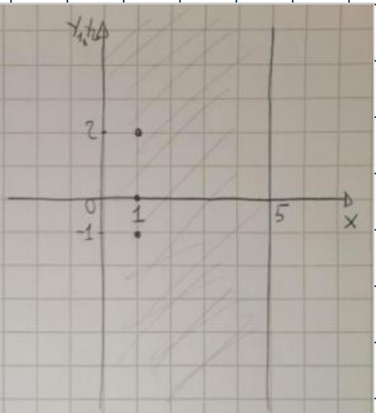
$$\begin{cases} y_1' = \cos x \cdot y_1 + x^3 \cdot y_2 = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = -y_1 + e^{-3x} \cdot y_2 + \ln(x^2+1) = f_2(x, y_1, y_2) \\ y_1(1) = 2 \\ y_2(1) = -1 \end{cases}$$

$S = [0, 5] \times \mathbb{R}^2$

Verifico che sia LIP

$\underline{f} = (f_1, f_2)$

É CONTINUA IN S



VERIFICA DELLA LIP

$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = \cos x$

$\frac{\partial f_1}{\partial y_2} = x^3$ $\quad \frac{\partial f_2}{\partial y_1} = -1$ $\quad \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = e^{-3x}$

$\left|\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\right| \leq 1$ $\quad \left|\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\right| \leq 125$

$\left|\frac{\partial f_2}{\partial y_1}\right| \leq 1$ $\quad \left|\frac{\partial f_2}{\partial y_2}\right| \leq 1$

IMPORTANZA DEI TEOREMI APPENA STUDIATI

ESISTE UNA CLASSE DI ODE IN CUI LA SOLUZIONE ESISTE ED É UNICA IN UNA STRISCIA ASSEGNATA?

ODE LINEARI

SONO EQUAZIONI IN CUI TUTTE LE DERIVATE HANNO UN ESPONENTE MASSIMO DI ELEVAMENTO A POTENZA PARI A 1

$$y'' + 5x y' + 16x^7 y = 18 \,\mathrm{sen}(e^x)$$

SI RICORDA CHE $y = y^{(0)}$

ODE LINEARI DEL PRIMO ORDINE

$$a(x)\cdot y' = b(x)\cdot y + c(x) \qquad S = I \times \mathbb{R}$$

$$a(x), b(x), c(x) : I \to \mathbb{R} \qquad S = [a,b] \times \mathbb{R}$$

SUPPONENDO $a(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$

$$y' = \frac{b(x)}{a(x)}\cdot y + \frac{c(x)}{a(x)} \Rightarrow y' = P(x)y + q(x)$$

$$\begin{cases} y' = P(x)\cdot y + q(x) = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$ CONTINUA IN S

$P(x), q(x) : I \to \mathbb{R}$

CONTINUE IN I CHIUSO E LIMITATO

$\Rightarrow |P(x)| \leq M_p, \ |q(x)| \leq M_q$ IN I

VERIFICA LIP GLOBALE IN S

$\forall x \in I, \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}, \ \exists L \geq 0 \ |$

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|$$

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |P(x)\cdot y_1 + q(x) - P(x)\cdot y_2 - q(x)| =$$
$$= |P(x)\cdot y_1 - P(x)\cdot y_2| \leq |P(x)|\cdot|y_1 - y_2| \leq M_p\cdot|y_1 - y_2|$$

$$\begin{cases} y' = p(x)\cdot y + q(x) = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$ CONTINUA IN S

$p(x), q(x) : I \to \mathbb{R}$

CONTINUE IN I CHIUSO E LIMITATO

$\Rightarrow |p(x)| \leq M_p, \ |q(x)| \leq M_q$ IN I

VERIFICA LIP GLOBALE IN S

$\forall x \in I, \ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}, \ \exists L > 0 \ /$

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|$$

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |p(x)\cdot y_1 + q(x) - p(x)\cdot y_2 - q(x)| =$$

$$= |p(x)\cdot y_1 - p(x)\cdot y_2| \leq |p(x)|\cdot|y_1 - y_2| \leq M_p\cdot|y_1 - y_2|$$

ESEMPIO

$$\begin{cases} y' = (\cos x)\cdot y + \operatorname{sen} x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$S = [-10, 50] \times \mathbb{R}$

ANALOGAMENTE PER SISTEMI DI ODE LINEARI DEL PRIMO ORDINE

$$\begin{cases} y_i' = a_{i,1}(x)\, y_1 + a_{i,2}(x)\cdot y_2 + \ldots + a_{i,n}(x)\, y_n + b(x) \\ i = 1, \ldots, n \end{cases}$$

$a_{i,j}(x), \ b_i(x) : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ CONTINUE

E OVVIAMENTE LIMITATE ESSENDO I UN COMPATTO

ODE LINEARI DI ORDINE n

$$a_0(x)\cdot y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\cdot y' + a_n(x)\, y = b(x)$$

SE IL TERMINE NOTO $b(x) = 0 \Rightarrow$ ODE LINEARE OMOGENEA

Data una equazione differenziale di ordine n la si può convertire in un sistema di n equazioni del primo ordine

PROPRIETÀ DI UNA ODE LINEARE OMOGENEA

1. SE $y_1(x)$ É SOLUZIONE PARTICOLARE, ALLORA ANCHE $c\,y_1(x)$ (CON c COSTANTE ARBITRARIA) É SOLUZIONE

banalmente: se y1 è soluzione, la somma dà zero. Se invece considero C·y1, nella derivata avrò come coefficiente c da mettere a raccoglimento dunque anche c è soluzione

$$a_0(x)\, y_1^{(n)} + a_1(x)\, y_1^{(n-1)} + \ldots\ a_{n-1}(x)\cdot y_1' + a_n(x)\, y_1 = 0$$

$$a_0(x)\cdot\left[c\, y_1^{(n)}\right] + a_1(x)\cdot\left[c\, y_1^{(n-1)}\right] + \ldots\ a_n(x)\left[c\, y_1\right] =$$

$$= c\left[a_0(x)\, y_1^{(n)} + a_1(x)\, y_1^{(n-1)} + \ldots\ a_{n-1}(x)\cdot y_1' + a_n(x)\, y_1\right] = 0$$

ODE LINEARI DI ORDINE n

$$a_0(x)\cdot y^{n} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)\cdot y' + a_n(x)\, y = b(x)$$

SE IL TERMINE NOTO $b(x) = 0 \Rightarrow$ ODE LINEARE OMOGENEA

PROPRIETÀ DI UNA ODE LINEARE OMOGENEA

2 SE $y_1(x)$ E $y_2(x)$ SONO 2 SOLUZIONI DELL'ODE LINEARE OMOGENEA DI ORDINE n, ALLORA ANCHE UNA LORO COMBINAZIONE LINEARE $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ É SOLUZIONE

richiama il principio di sovrapposizione della fisica

Quando il problema è lineare, una soluzione è anche la combinazione lineare di soluzioni semplici (che siano due o n)

ODE LINEARI DI ORDINE n

$$a_0(x)\cdot y^{n} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)\cdot y' + a_n(x)\, y = b(x)$$

SE IL TERMINE NOTO $b(x) = 0 \Rightarrow$ ODE LINEARE OMOGENEA

PROPRIETÀ DI UNA ODE LINEARE OMOGENEA

3 PIÚ IN GENERALE, PER UNA ODE LINEARE E OMOGENEA, SE $y_1(x), y_2(x), \dots y_n(x)$ DI ORDINE n SONO n SOLUZIONI, ALLORA ANCHE

$$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots c_n y(x)$$

É SOLUZIONE

DATO CHE $n =$ ORDINE DI ODE
$n =$ NUMERO DI COSTANTI ARBITRARIE

$y(x)$ PUÓ CONSIDERARSI INTEGRALE GENERALE???

ODE LINEARI DI ORDINE n

$$a_0(x)\cdot y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)\cdot y' + a_n(x)\, y = b(x)$$

SE IL TERMINE NOTO $b(x)=0 \Rightarrow$ ODE LINEARE OMOGENEA

PROPRIETÀ DI UNA ODE LINEARE OMOGENEA

SI, SE $y_1(x), y_2(x), \dots y_n(x)$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0$$

SOLO SE $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$

3) PIÙ IN GENERALE, PER UNA ODE LINEARE E OMOGENEA, SE $y_1(x), y_2(x), \dots y_n(x)$ DI ORDINE n SONO n SOLUZIONI, ALLORA ANCHE

$$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots\ c_n y(x)$$

È SOLUZIONE

DATO CHE $n =$ ORDINE DI ODE
$n =$ NUMERO DI COSTANTI ARBITRARIE

$y(x)$ PUÓ CONSIDERARSI INTEGRALE GENERALE???

COME VERIFICARE, IN GENERALE, SE $y_1(x) \dots y_n(x)$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI?

$y_i := y_i(x)$

$$\begin{cases} c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots\ c_n y_n = 0 \\ c_1 y_1' + c_2 y_2' + \dots\ c_n y_n' = 0 \\ \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)} + c_2 y_2^{(n-1)} + \dots\ c_n y_n^{(n-1)} = 0 \end{cases}$$

COMBINAZIONI LINEARI
↓
ottengo n equazioni in n incognite

!!! Dei vettori linearmente indipendenti individuano la base di uno spazio vettoriale

$$\underline{\underline{W}}(x) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

MATRICE WRONSKIANA

Sono l.i. se $\boxed{\det(\underline{\underline{W}}(x)) \neq 0}$ $\forall x \in I$

cioè di RANGO PIENO

ESEMPIO

DIRE SE SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

a) x, x^2, x^3

b) $e^x, 2e^x, e^{2x}$

c) e^x, xe^x, x^2e^x

c) e^x, xe^x, x^2e^x

a) $\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} 2x & 3x^2 \\ 2 & 6x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2 & 6x \end{vmatrix} =$

f' f''

$= x(12x^2 - 6x^2) - (6x^3 - 2x^3) = 2x^3$

$2x^3 \neq 0 \iff x \neq 0$ → Striscia che non comprendono $x=0$

DIRE SE SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

a) x, x^2, x^3

b) e^x, $2e^x$, e^{2x}

c) e^x, xe^x, x^2e^x

$$\begin{array}{cccc} & 1^a & 2^a & \\ b) & & & \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} e^x & 2e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^x & 2e^{2x} \\ e^x & 2e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} = 0$$

f' f''

I e II COLONNA SONO PROPORZIONALI

DIRE SE SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

a) x, x^2, x^3

b) e^x, $2e^x$, e^{2x}

c) e^x, xe^x, x^2e^x

DA FARE *

VERIFICARE PER CASA:

d) $e^x \cos x$, $e^x \operatorname{sen} x$

e) e^{3x}, e^{-2x}, e^{5x}

c) $\begin{vmatrix} e^x & xe^x & x^2e^x \\ e^x & e^x + xe^x & 2xe^x + x^2e^x \\ \dots \end{vmatrix} = 2e^{3x} \neq 0$

mai una esponenziale è pari a 0

$$\begin{vmatrix} e^x & e^x + xe^x & 2xe^x + x^2e^x \\ e^x & 2e^x + xe^x & 2e^x + 4xe^x + x^2e^x \end{vmatrix} = 2e^{3x} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ODE LINEARI, OMOGENEE E A COEFFICIENTI COSTANTI

Semplificazione:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

ESEMPI:

$n=1$ $\qquad y' = Ky \qquad y = ce^{Kx}$ SOLUZIONE GENERALE

$y' = 5y \qquad y = ce^{5x}$

$y = e^{Kx}$ SOLUZIONE PARTICOLARE

$y = e^{\lambda x}$ È SOLUZIONE DI UNA ODE LINEARE OMOGENEA, A COEFFICIENTI COSTANTI, DI ORDINE n?

$y = e^{\lambda x} \qquad y' = \lambda e^{\lambda x} \qquad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$y^{(n)} = \lambda^n \cdot e^{\lambda x}$

$$a_0[\lambda^n e^{\lambda x}] + a_1[\lambda^{n-1} \cdot e^{\lambda x}] + \dots + a_{n-1}[\lambda e^{\lambda x}] + a_n \cdot e^{\lambda x} = 0$$

$$= e^{\lambda x}[a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n] = 0$$

LE n SOLUZIONI λ_i $(i=1,2,\dots,n)$ DELL'EQUAZIONE ALGEBRICA ASSOCIATA

$\Rightarrow y = e^{\lambda_i x}$ SOLUZIONE DELL'ODE

$y = e^{\lambda x}$ È SOLUZIONE DI UNA ODE LINEARE OMOGENEA, A COEFFICIENTI COSTANTI, DI ORDINE n?

$$y = e^{\lambda x} \qquad y' = \lambda e^{\lambda x} \qquad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

$$y^{(n)} = \lambda^n \cdot e^{\lambda x}$$

$$a_0 \left[\lambda^n e^{\lambda x}\right] + a_1 \left[\lambda^{n-1} \cdot e^{\lambda x}\right] + \dots + a_{n-1} \left[\lambda e^{\lambda x}\right] + a_n \cdot e^{\lambda x} = 0$$

$$= e^{\lambda x} \left[a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n\right] = 0$$

LE n SOLUZIONI λ_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ DELL'EQUAZIONE ALGEBRICA ASSOCIATA

$\Rightarrow y = e^{\lambda_i x}$ SOLUZIONE DELL'ODE

$n = 2$

$$ay'' + by' + cy = 0 \Rightarrow e^{\lambda x}\left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right) = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Downarrow$

1) $\Delta > 0 \Rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

2) $\Delta = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 \cdot x \cdot e^{\lambda_1 x}$$

3) $\Delta < 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

soluzioni complesse e coniugate

$$y(x) = e^{\alpha x} \cdot \left(c_1 \cos\beta x + c_2 \operatorname{sen}\beta x\right)$$

ESEMPI

1) $y'' - 5y' + 6y = 0 \qquad e^{\lambda x}\left(\lambda^2 - 5\lambda + 6\right) = 0$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

2) $y'' - 2y' + y = 0 \qquad e^{\lambda x}\left(\lambda^2 - 2\lambda + 1\right) = 0$

$$y = c_1 e^{x} + c_2 \cdot x \cdot e^{x}$$

3) $y'' - 2y' + 2y = 0 \qquad e^{\lambda x}\left(\lambda^2 - 2\lambda + 2\right) = 0 \qquad \lambda_{1,2} = 1 \pm i$

$$y = c_1 e^{x} \cos x + c_2 e^{x} \operatorname{sen} x$$

$n > 2$ } di ordine superiore al 2°

ESEMPI

$n=5$ $\quad \lambda_1 = 3 \quad m=3$ SOL. TRIPLA

$\lambda_2 = 2 \quad m=1$ SOL. SINGOLA

$\lambda_3 = -1 \quad m=1$ SOL. SINGOLA

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x \cdot e^{3x} + C_3 x^2 e^{3x} + C_4 e^{2x} + C_5 e^{-x}$$

Se il grado di una equazione è dispari, almeno una soluzione è reale, le soluzioni complesse e coniugate sono sempre a coppie

$n=5$ $\quad \lambda_1 = 3 \quad m=1$ SOL. SINGOLA

Soluzioni complesse e coniugate $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_2 = 4+5i \quad m=2 \text{ SOL. DOPPIA} \\ \lambda_3 = 4-5i \quad m=2 \text{ SOL. DOPPIA} \end{array} \right.$

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} \cos 5x + C_3 x \cdot e^{4x} \cdot \cos 5x + C_4 e^{4x} \operatorname{sen} 5x + C_5 x \cdot e^{4x} \cdot \operatorname{sen} 5x$$

ESEMPIO

$$\begin{cases} y'' - 12y' + 35y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \text{ condizioni al contorno } ; \quad \begin{cases} y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{7x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

$$y(0) = C_1 + C_2 = 1$$

$$y' = 5C_1 e^{5x} + 7C_2 e^{7x} \qquad y'(0) = 5C_1 + 7C_2 = 2$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 5C_1 + 7C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad C_1 = \frac{5}{2} \quad C_2 = -\frac{3}{2}$$

$$y = \frac{5}{2} e^{5x} - \frac{3}{2} e^{7x}$$

ODE non omogenee

sabato 14 novembre 2020 13:37

Terza Parte

- ODE Lineari non omogenee
- Metodo della variazione delle costanti
- Altri schemi di ODE
- Risoluzione numerica di ODE
- Applicazioni in Fisica

ODE LINEARI NON OMOGENEE

$$a_0(x)\,y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \dots\ a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = b(x)$$

$$y(x) = y_{OMO}(x) + y_P(x)$$

y_{OMO} ↓ SOLUZIONE GENERALE DELL'ODE OMOGENEA ASSOCIATA

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

Quando un problema è lineare, vige il principio di sovrapposizione degli effetti: se y_0 e y_1 sono due soluzioni, anche la combinazione lineare y_0+y_1 è soluzione

DIM:

$$a_0(x)\left[y_{OMO}^{(n)} + y_P^{(n)}\right] + a_1(x)\left[y_{OMO}^{(n-1)} + y_P^{(n-1)}\right] + \dots$$

$$\dots + a_{n-1}(x)\left[y'_{OMO} + y'_P\right] + a_n(x)\cdot\left[y_{OMO} + y_P\right] = b(x)$$

$$a_0(x)\,y_P^{(n)} + a_1(x)\,y_P^{(n-1)} + \dots\ a_n(x)\cdot y_P = b(x)$$

COME CALCOLARE $y_P(x)$?

METODO DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI (METODO DI LAGRANGE)

METODO DELLA VARIAZIONE DELLE COSTANTI (METODO DI LAGRANGE)

CASO $n=2$ ESTENDIBILE AD n GENERICO

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x)$$

SIANO y_1 e y_2 LE SOLUZIONI DELL' OMOGENEA ASSOCIATA

allora pongo la relazione:

$$y_p = \underbrace{c_1(x)}_{\text{NON costanti ma FUNZIONI}} y_1 + \underbrace{c_2(x)}_{} y_2$$

INFATTI! se y_1 e y_2 sono soluzioni, anche la loro combinazione lineare è SOLUZIONE

$$y_p' = c_1'(x)\cdot y_1 + c_1(x)\cdot y_1' + c_2'(x)y_2 + c_2(x)y_2' =$$

$$= \left(c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2\right) + c_1(x)y_1' + c_2(x)y_2'$$

IMPONGO $c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 = 0$ → Pongo cioè che $c_1(x)$ e $c_2(x)$ siano delle COSTANTI o che comunque $c_1'(x)y_1$ e $c_2'(x)y_2$ siano opposte

$$\Rightarrow y_p' = c_1(x)y_1' + c_2(x)y_2'$$

$$y_p'' = c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' + c_1(x)y_1'' + c_2(x)y_2''$$

Le due espressioni vanno ora sostituite nella equazione di partenza

ADESSO

$$y_p'' + a_1(x)y_p' + a_2(x)y_p = b(x)$$

$$c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' + c_1(x)y_1'' + c_2(x)y_2'' + a_1(x)\left[c_1(x)y_1' + c_2(x)y_2'\right]$$

$$+ a_2(x)\left[c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2\right] = b(x)$$

ADESSO

$$y_p'' + a_1(x)y_p' + a_2(x)y_p = b(x)$$

$$c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' + c_1(x)y_1'' + c_2(x)y_2'' + a_1(x)\left[c_1(x)y_1' + c_2(x)y_2'\right]$$

$$+ a_2(x)\left[c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2\right] = b(x)$$

Raccolgo a fattor comune

$$c_1(x)\underbrace{\left[y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1\right]}_{=0 \text{ poiché soluzione dell'omo associata}} + c_2(x)\cdot\underbrace{\left[y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2\right]}_{=0 \text{ poiché soluzione dell'omo associata}}$$

$$\underbrace{+\, c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = b(x)}_{\text{Equazione rimanente}}$$

$$\begin{cases} c_1'(x)\cdot y_1 + c_2'(x)\cdot y_2 = 0 & \to \text{ord} = 0 \text{ per le primitive} \\ c_1'(x)\cdot y_1' + c_2'(x)\cdot y_2' = b(x) & \to \text{ord} = 1 \text{ per le primitive derivate} \end{cases}$$

MATRICE DEI TERMINI NOTI = MATRICE WRONSKIANA

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

Posso risolvere con i determinanti o con altri metodi di risoluzione dei sistemi

$$C_1(x) = \int c_1'(x) = \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ b(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\det(\underline{\underline{W}}(x))} \qquad C_2(x) = \int c_2'(x) = \int \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & b(x) \end{vmatrix}}{\det(\underline{\underline{W}}(x))}$$

$C_1(x)$ e $C_2(x)$ ottenuti, saranno i pesi da sostituire in $y_p = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$

GENERALIZZAZIONE PER $n > 2$

$$y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots\ldots\ a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = b(x)$$

$$y = y_{omo} + y_p$$

$y_1, y_2, \ldots\ y_n$ SOLUZIONI DELL'OMOGENEA ASSOCIATA

$$y_p = C_1(x)\,y_1 + C_2(x)\,y_2 + \ldots + C_n(x)\,y_n$$

$$\begin{cases} C_1'(x)\,y_1 + C_2'(x)\,y_2 + \ldots + C_n'(x)\,y_n = 0 \\ C_1'(x)\,y_1' + C_2'(x)\,y_2' + \ldots + C_n'(x)\,y_n' = 0 \\ \vdots \\ C_1'(x)\,y_1^{(n-1)} + C_2'(x)\,y_2^{(n-1)} + \ldots\ C_n'(x)\,y_n^{(n-1)} = b(x) \end{cases}$$

solo all'ultimo

CASO $n = 1$

ODE del 1° ordine

$$y' + a_1(x)\,y = b(x)$$

OMOGENEA ASSOCIATA

$$y' + a_1(x)\cdot y = 0$$

$$y' = -a_1(x)\,y$$

$$\frac{dy}{y} = -a_1(x)\,dx$$

$$A_1(x) = \int a(x)\,dx$$

$$\ln|y| = -A_1(x) + c$$

$$y_{omo} = c\,e^{-A_1(x)}$$

SOL. OMOGENEA ASSOCIATA

$$y_p = C_1(x)\cdot e^{-A_1(x)}$$

SOL. PARTICOLARE DELLA ODE LINEARE DEL 1° ORDINE

Questa volta ho solo una equazione

$$C_1'(x)\cdot e^{-A_1(x)} = b(x) \quad \Rightarrow \quad C_1'(x) = e^{A_1(x)}\cdot b(x)$$

$$C_1(x) = \int e^{A_1(x)}\cdot b(x)\,dx$$

$$y_p = e^{-A_1(x)}\cdot\int e^{A_1(x)}\cdot b(x)\,dx$$

$$y = y_{omo} + y_p = e^{-A_1(x)}\cdot\left[\int e^{A_1(x)}\cdot b(x)\,dx + c\right] =$$

$$= e^{-A_1(x)}\cdot\left[G(x) + K + c\right] \qquad K + c := c$$

$$= e^{-A_1(x)}\cdot\left[G(x) + K + c\right] \qquad K + c := c$$

$$y = e^{-A_1(x)}\cdot\left[G(x) + c\right]$$

MA IN ALCUNI TESTI

FORMULA FINALE/COMPLETA

TROVATE LA FORMA

$$y = e^{-A_1(x)}\cdot\int e^{A_1(x)}\cdot b(x)\,dx$$

CHE COMPRENDE ANCHE y_{omo}

ESERCIZI:

1) $y' - 2xy = e^{x^2}$ $\qquad y' = 2xy$ OMOGENEA ASSOCIATA

ODEL NON OMOGENEA DEL 1° ORDINE DI 1° GRADO

1) SOL. OMO: $-a_1(x) = 2x \qquad -A_1(x) = x^2$

$$\ln|y| = x^2 + c \qquad y_{omo} = c \cdot e^{x^2}$$

$$y_p = e^{x^2} \cdot \left[\int e^{-x^2} \cdot e^{x^2}\, dx\right] = e^{x^2} \cdot \left[\int dx\right] =$$

$$= e^{x^2}(x + c) \implies y = e^{x^2}(x + c)$$

2) $y'' + y = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ $\qquad$ D: $\sin x \neq 0 \Downarrow x \neq k\pi$ ha una discontinuità

ODEL del 2° ordine

$y'' + y = 0$ OMOGENEA ASSOCIATA

la risolvo con l'eq. algebrica associata

$\lambda^2 + 1 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm i$

$$y_{omo} = c_1 \cdot \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$$

$$y_1 = \cos x \qquad y_2 = \operatorname{sen} x$$

METODO DI LAGRANGE

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\operatorname{sen} x = 0 \\ -c_1'(x)\operatorname{sen} x + c_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{W}}(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix} \implies \det \underline{\underline{W}}(x) = 1$$

$$c_1'(x) = \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ \frac{1}{\operatorname{sen} x} & \cos x \end{vmatrix} = -1 \qquad c_2'(x) = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & \frac{1}{\operatorname{sen} x} \end{vmatrix} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

integro

$$c_1(x) = -x \qquad c_2(x) = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\, dx =$$

$$= \ln|\operatorname{sen} x|$$

$$y_p = c_1(x)\cos x + c_2(x)\operatorname{sen} x =$$

$$= -x\cos x + \operatorname{sen} x \cdot \ln|\operatorname{sen} x|$$

$$y = y_{omo} + y_p = \cos x(-x + c_1) + \operatorname{sen} x\left[\ln|\operatorname{sen} x| + c_2\right]$$

$$y' = f(x,y) = a(x) \cdot b(y)$$

A VARIABILI SEPARABILI

$$\frac{dy}{b(y)} = \frac{dx}{a(x)}$$

SI TESTANO ANCHE LE $y : b(y) = 0$

SOLUZIONI COSTANTI:

Se $\exists\, b(y) = 0$, questa è soluzione particolare poiché risolve $y' = 0$ e dunque y costante

(ODE GENERALMENTE NON LINEARE)

È LINEARE SE $b(y) = y$

ESEMPIO

Problema di Cauchy

1) $\begin{cases} y' = y^2 = f(x,y) = a(x) \cdot b(y) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\qquad a(x) = 1 \quad b(y) = y^2$

$f(x,y) = y^2 \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$y^2 = 0 \implies y = 0$ NON RISPETTA IL VINCOLO

1° STEP:

Cerco le soluzioni costanti e, se non soddisfano il vincolo, le escludo

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \qquad \frac{dy}{y^2} = dx$$

$$-\frac{1}{y} + K_1 = x + K_2 \qquad -\frac{1}{y} = x + (K_2 - K_1) = x + c$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{x+c}}$$ INTEGRALE GENERALE

PROBLEMA "IN PICCOLO" $\longrightarrow$ y' è continua e $y(0)=1 \in$ al suo dominio

$(0,1) \in$ Dominio di $f(x,y) \Rightarrow \exists\ y:[-\delta,\delta] \to \mathbb{R}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_R$ LIMITATA

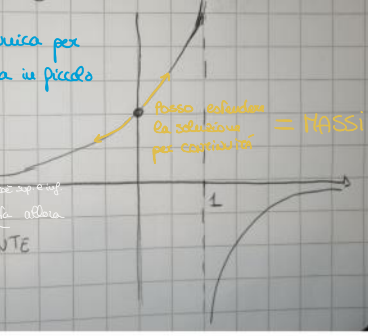
$\exists!\ y:[-\delta,\delta] \to \mathbb{R}$

Poiché y' continua, allora la soluzione è unica e si calcola imponendo il vincolo nell'integrale generale

$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = -\frac{1}{c} \Rightarrow c = -1$

$$y = \frac{1}{1-x}$$

soluzione unica per il problema in piccolo



PROBLEMA DI CAUCHY IN GRANDE:

Poiché la derivata prima non è limitata (cioè sup. e inf.) allora

$f(x,y)$ NON È GLOBALMENTE LIP

② $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ $\qquad y = 0$ È SOLUZIONE COSTANTE

INT. GENERALE $\boxed{y = -\frac{1}{x+c}}$ $\qquad 0 = -\frac{1}{c}$

Nessuna soluzione con c finito rispetta il vincolo perciò solo $y(0)=0$ è soluzione

③ $\begin{cases} y' = (y-1)^2 \\ y(3) = 1 \end{cases}$ $\qquad (y-1)^2 = 0 \Rightarrow y = 1$

$y = 1$ È SOLUZIONE costante DEL P.C

A ⇒ B

¬A ∨ B

¬B ⇒ ¬

$$\frac{dy}{(y-1)^2} = dx \qquad -\frac{1}{y-1} = x + c$$

$$\frac{dy}{(y-1)^2} = dx \qquad -\frac{1}{y-1} = x + c$$

INTEGRALE GENERALE

$$1 - y = \frac{1}{x+c} \Rightarrow \boxed{y = 1 - \frac{1}{x+c} = \frac{x+c-1}{x+c}}$$

$1 = \frac{2+c}{3+c} \qquad c \neq -3 \qquad 3 + c = 2 + c \qquad \nexists\ c \in \mathbb{R}$

Dunque l'unica soluzione è quella costante

RISOLUZIONE NUMERICA DI ODE

FUNZIONE LIPSCHITZIANA

↓

- LOCALMENTE:

  Se f è eventualmente illimitata e continua e la sua derivata prima è anche continua, allora è localmente lipschitziana

- GLOBALMENTE:

  Se f è eventualmente illimitata e continua e la sua derivata prima f' è limitata, allora è globalmente lipschitziana ⇒ La funzione è limitata e, calcolando le derivate parziali, esse sono limitate

Inoltre, se una funzione è lineare e la striscia presa in considerazione è tale che la funzione è continua in essa

SOL. UNICA PROBLEMA DI CAUCHY IN PICCOLO

↓ condizione SUFFICIENTE

Se una funzione e continua e localmente lipschitziana (cioè anche la derivata prima f' è continua) allora esiste una sola soluzione locale (in un piccolo intervallo)

↓

Se non è lipschitziana, la soluzione potrebbe non essere unica

poiché è cond. sufficiente ma non necessaria

↓

Tuttavia, per il TEOREMA DI PEANO sappiamo che esiste almeno una soluzione se f è continua

SOL. UNICA PROBLEMA DI CAUCHY IN GRANDE

↓

Se una funzione e continua e globalmente lipschitziana (cioè anche la derivata prima f' è continua) allora esiste una sola soluzione globale

PASSAGGI

↓

Dato un problema di Cauchy, se f è continua allora per il teorema di Peano so che esiste almeno una soluzione.

È unica?

RISOLUZIONE NUMERICA DI ODE

ODE 1° ORDINE

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \Rightarrow dy = f(x,y)\,dx$$

$$\underbrace{y_1 - y_0}_{dy} = f(x_0, y_0)\cdot \underbrace{(x_1 - x_0)}_{dx} \quad \text{dove} \quad x_1 = x_0 + h$$

h: passo di integrazione, valore scelto dal programmatore

$$\cancel{\frac{dy}{dx} = f(x,y) \Rightarrow dy = f(x,y)\,dx}$$

$$\cancel{y_1 - y_0 = f(x_0,y_0)\cdot(x_1 - x_0) \quad x_1 = x_0 + h}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= y_0 + f(x_0, y_0)\cdot h \\ y_2 &= y_1 + f(x_1, y_1)\cdot h \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})\cdot h \end{aligned}}$$

con $\boxed{x_n = x_{n-1} + h}$

SCHEMA DI EULERO

ESEMPIO

ODEL non omogenea

$$\begin{cases} y' = 2xy + e^{x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

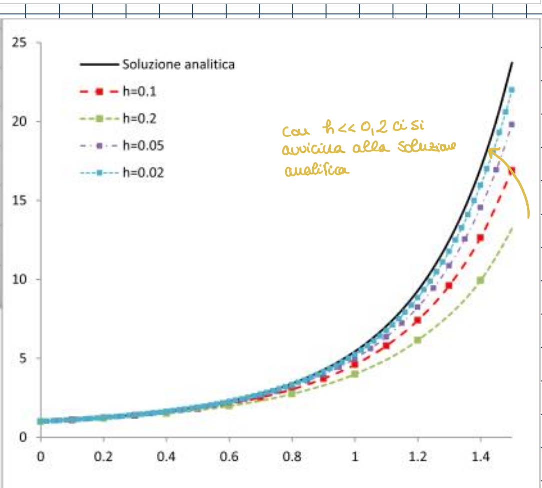
$$y = e^{x^2}(x + c)$$

$$1 = 1\cdot(0 + c) \qquad c = 1$$

$$y = e^{x^2}(x+1)$$

ESEMPIO

$$\begin{cases} y' = 2xy + e^{x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$



allora per il teorema di Peano so che esiste almeno una soluzione.

È unica?

↓

Il problema si basa sul teorema di esistenza ed unicità locale, dunque devo verificare che sia continua e lipschitziana nel vincolo cioè devo verificare che la derivata parziale rispetto al vincolo sia CONTINUA o che comunque il vincolo appartenga al dominio della derivata prima (che se è continua sarà così)

APPLICAZIONI IN FISICA

$$\begin{cases} y'' = -g \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = v_0 \end{cases} \qquad y'' = -g$$

$$y' = -\int g \, dt = -gt + c_1$$

$$y = \int (-gt + c_1) \, dt =$$

$$= -g \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2$$

$$y_0 = -g \cdot \frac{0^2}{2} + c_1 \cdot 0 + c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = y_0$$

$$y'(0) = v_0 = -g \cdot 0 + c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = v_0$$

$$y(t) = -g \frac{t^2}{2} + v_0 t + y_0$$

MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

Oscillazioni libere di un corpo pesante

27. Colleghiamo una sfera di massa m all'estremo P di una molla, sospesa nell'altro estremo ad un centro fisso e disposta verticalmente.
Assumiamo come sistema di riferimento l'asse verticale y, rivolto verso il basso e con l'origine nel punto O, corrispondente alla posizione d'equilibrio dell'estremo P della molla (fig. 3). All'istante $t = 0$ la sfera viene collegata alla molla: si ha quindi $y = 0$ e $v = 0$ per $t = 0$ (condizioni iniziali).
Sulla sfera agisce la forza peso $F_p = mg$ e la forza di richiamo della molla $F_m = -ky$, dove $k > 0$ indica la costante elastica della molla. La risultante delle forze che agiscono sulla pallina è quindi

$$F = mg - ky. \tag{1}$$

Ricordando che, per il secondo principio della dinamica, è $F = ma$ e che è inoltre

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = y'',$$

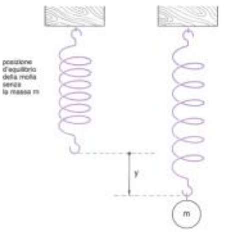


Fig. 3

la (1) diventa

$$my'' = mg - ky \longrightarrow my'' + ky = mg$$

ossia

$$y'' + \frac{k}{m} y = g. \tag{2}$$

La (2) è un equazione differenziale lineare *non omogenea* del secondo ordine. Per risolverla occorre quindi determinare dapprima l'integrale generale dell'equazione omogenea associata:

$$y'' + \frac{k}{m} y = 0. \tag{3}$$

La (3) è formalmente identica all'equazione differenziale risolta al numero precedente. Il suo integrale generale è perciò

$$y = c_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}\, t + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k}{m}}\, t. \tag{4}$$

Per risolvere la (2) occorre poi determinarne un integrale particolare. È facile verificare che la funzione costante

$$y = \frac{mg}{k}$$

$$y'' + \frac{k}{m} y = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot i$$

y_p:

$$\begin{cases} c_1'(t) \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) + c_2'(t) \cdot \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) = 0 \\ -c_1'(t) \left[\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)\right] \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} + c_2'(t) \cdot \left[\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)\right] \sqrt{\frac{k}{m}} = g \end{cases}$$

$$y'' + \frac{k}{m} y = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot i$$

$$\underline{\underline{W}}(t) = \begin{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) & \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) \\ -\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) & \sqrt{\frac{k}{m}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) \end{pmatrix}$$

$$\det \underline{\underline{W}}(t) = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

y_p:

$$\begin{cases} c_1'(t) \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) + c_2'(t) \cdot \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) = 0 \\ -c_1'(t) \left[\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)\right] \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} + c_2'(t) \cdot \left[\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)\right] \sqrt{\frac{k}{m}} = g \end{cases}$$

$$c_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right) \\ g & \sqrt{\frac{K}{m}}\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right) \end{vmatrix}}{\sqrt{K/m}} = -g\cdot\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right)\cdot\sqrt{\frac{m}{K}}$$

$$c_1(t) = -g\sqrt{\frac{m}{K}}\cdot\int \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right)dt =$$

$$= -g\cdot\sqrt{\frac{m}{K}}\cdot\sqrt{\frac{m}{K}}\cdot\int \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right)\cdot\sqrt{\frac{K}{m}}\,dt =$$

$$= -g\frac{m}{K}\cdot\left(-\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right)\right) = \frac{mg}{K}\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right)$$

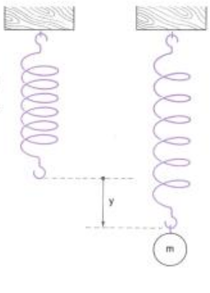
$$c_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right) & 0 \\ \sqrt{\frac{K}{m}}\cdot\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right) & g \end{vmatrix}}{\sqrt{K/m}} = g\cdot\sqrt{\frac{m}{K}}\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right)$$

$$c_2(t) = g\cdot\sqrt{\frac{m}{K}}\cdot\sqrt{\frac{m}{K}}\cdot\int\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot\cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right)dt =$$

$$= g\cdot\frac{m}{K}\cdot\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right)$$

$$Y_p = \frac{mg}{K}\cdot\cos^2\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right) + \frac{mg}{K}\cdot\operatorname{sen}^2\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t\right) = \frac{mg}{K}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = y'',$$



soddisfa la (2), il cui integrale generale è perciò dato dalla somma dell'integrale generale (4) dell'equazione omogenea associata con la soluzione particolare ora trovata:

$$y = c_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \frac{mg}{k}. \tag{5}$$

Derivando la (5) si ottiene

$$y' = v = -c_1\sqrt{\frac{k}{m}}\operatorname{sen}\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + c_2\sqrt{\frac{k}{m}}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t. \tag{6}$$

Possiamo ora determinare le costanti c_1 e c_2 in modo che siano verificate le condizioni iniziali. Sostituendo $t = 0$ e $y = 0$ nella (5) otteniamo

$$0 = c_1 + \frac{mg}{k} \longrightarrow c_1 = -\frac{mg}{k}.$$

Sostituendo $t = 0$ e $v = 0$ nella (6), si ha:

$$0 = c_2\sqrt{\frac{k}{m}} \longrightarrow c_2 = 0.$$

L'equazione del moto esaminato è pertanto:

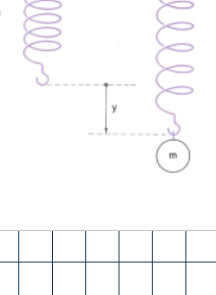
$$y = -\frac{mg}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \frac{mg}{k}$$

ossia

$$y = \frac{mg}{k}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right).$$

5

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = y'',$$



Dal grafico della legge oraria in figura 4, si può osservare che il moto della sfera è un moto armonico, il cui periodo, detto *periodo proprio del sistema*, è $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Tale periodo dipende dalla massa m della sfera e dalla costante elastica k della molla. Le oscillazioni avvengono attorno al *punto di equilibrio* $y = \frac{mg}{k}$, così chiamato perché in tale punto la forza peso e la forza di richiamo della molla si equilibrano, essendo eguali in modulo ed opposte in verso.

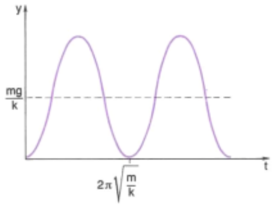


Fig. 4

Esercitazione finale parte 1

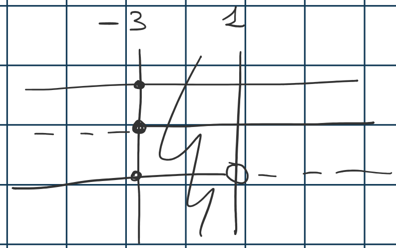
domenica 13 dicembre 2020 15:27

1) Dove possiamo definire una striscia che rispetti la lipschitzianità globale

$$\begin{cases} y_1' = [\ln(x^2+3)\, y_2 - \cos(\sqrt{x+3}) = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = y_1 + y_2 \sin x + \ln \frac{1}{1-x} = f_2(x, y_1, y_2) \end{cases}$$

Dominio: $A \subset R^3 \longrightarrow R^2$

$$\begin{cases} x^2+3>0 \\ x+3 \geq 0 \\ \frac{1}{1-x} > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 > -3 \quad \Rightarrow \forall x \in R \\ x \geq -3 \\ x < 1 \end{cases}$$



$A : \{ (x, y_1, y_2) \in R^3 \mid -3 \leq x < 1 \}$

Cerchiamo dunque una striscia tale che $S : [a, b] \times R^2$ dove è soddisfatto un problema di Cauchy in grande

Ad esempio possiamo scegliere $S : [-2, 0] \times R^2$ poiché

1) È continua
2) Per Peano, poiché è continua presenta almeno una soluzione
3) Poiché le equazioni sono lineari e dunque esiste una sola soluzione globale

oppure risolvo un sistema dove pongo due passaggi:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2) \\ y_1(-1) = 2 \\ y_2(-1) = 1 \end{cases}$$

Verifico le derivate parziali:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = 0 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y_2} = \ln(x^2+3) \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y_1} = 1 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = \sin x$$

Sono funzioni solo in x e sono limitate. Possono essere maggiorate da una unica L di Lipschitz e quindi la funzione vettoriale f di componenti f_1 e f_2 è GLOBALMENTE LIPSCHITZIANE

... di una delle ... è Lipschitziane e quindi la funzione vettoriale f di componenti f_1 e f_2 è GLOBALMENTE LIPSCHITZIANE

(2) Trovare se quali a del sis. la striscia $S: [1,2]\times R^2$ soddisfa un problema di Cauchy in grande

$$\begin{cases} \sqrt{a^2-x^2}\cdot y_1' = e^{\cos x}\cdot y_2 \\ y_2' = \frac{1}{e^x}(y_1+y_2) \end{cases} \xrightarrow[\text{ESPLICITA}]{\text{FORMA}} \begin{cases} y_1' = \frac{e^{\cos x}}{\sqrt{a^2-x^2}}\, y_2 \\ y_2' = \frac{1}{e^x}(y_1+y_2) \end{cases}$$

Prob. parametrico

Le derivate devono stare sulla SINISTRA

DOMINIO: $A\subset R^3 \to R^2$

$$\begin{cases} a^2-x^2>0 \Rightarrow a^2>x^2 \Rightarrow -a<x<a \\ e^x\neq 0 \Rightarrow \forall x\in R \end{cases}$$

$A: \{(x,y_1,y_2)\in R^3 \mid -a<x<a\} = (-a,a)\times R^2 \to R^2$

$a>2$ poiché altrimenti non inglobarebbe la striscia $[1,2)$

Verifico che sia Lipschitziana ponendo $a=3$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1}=0 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y_2}=\frac{e^{\cos x}}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y_1}=\frac{1}{e^x} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y_2}=\frac{1}{e^x}$$

Sono funzioni solo di x. Dunque sono continue in $[1,2]$ e perciò limitate secondo Weierstrass. Perciò sono Lipschitziane

(3) Determinare per quali $x\in R$ e $a\in R$ per cui è Lip. globalmente

$$\begin{cases} y_1' = \ln(1-x)\,y_1 + e^x y_2 - \cos 7x \\ y_2' = \sqrt{a^2-1}\cdot y_2 \end{cases}$$

DOMINIO: $A\subset R^3 \to {}^2$