Informazioni generali

lunedì 8 marzo 2021 12:12

Modulo Elettrotecnica

Corso Elettromagnetismo e Elettrotecnica

CdL- Ingegneria Informatica

A.A. 2020-2021

Prof. Marco Ricci, Dr. Stefano Laureti

marco.ricci@unical.it

stefano.laureti@unical.it

Riferimenti docente

Marco Ricci
Dipartimento di Ingegneria Informatica, Modellistica, Elettronica e Sistemistica, Università della Calabria
Cubo 41C, V piano,
Email: marco.ricci@unical.it, m.ricci@dimes.unical.it

Stefano Laureti
Dipartimento di Ingegneria Informatica, Modellistica, Elettronica e Sistemistica, Università della Calabria
Cubo 41C, V piano,
Email: stefano.laureti@unical.it,

Ricevimento Studenti (telematico via Teams):
Ricci: Martedì 17:00-19:00
Laureti: Mercoledì 17:00-19:00,
Per appuntamenti in giorni/orari differenti, è preferibile mandare prima una email

Materiale Didattico

Libro di testo di riferimento

«Circuiti elettrici», C.K. Alexander e M.N.O. Sadiku, G. Gruosso, G. Storti Gajani Mc-Graw-Hill (5ed o precedente)

Materiale on-line aggiuntivo (soluzioni esercizi e tutorial on-line)

Soluzioni esercizi libro:

http://highered.mheducation.com/sites/8838615624/student_view0/soluzioni_dei_problemi_contenuti_nell_eserciziario.html

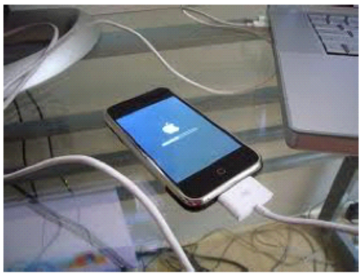
Tutorial on-line:

http://highered.mheducation.com/sites/8838615624/student_view0/tutorial_.html

Materiale a cura dei docenti

Materiale del corso su Microsoft Teams

Finalità del corso



Fornire le conoscenze di base necessarie alla comprensione del funzionamento dei circuiti elettrici che costituiscono i principali sistemi utilizzati per il trasferimento di energia e di informazione;
Introdurre la teoria dei circuiti e l'analisi in frequenza

Organizzazione e argomenti del corso

II SEMESTRE: 1 MARZO – 5 GIUGNO 2021

- Il corso si articola in 38 ore di Lezione e 18 ore di Esercitazioni
- Le esercitazioni verranno svolte dal Dr. Stefano Laureti

ESAMI

I° appello 22 Giugno

II° appello 7 Luglio

Organizzazione e argomenti del corso

Argomenti principali del corso:

- Breve riepilogo introduttivo all'elettromagnetismo
- Introduzione ai circuiti elettrici e alle loro proprietà
- Elementi di topologia
- Metodi di analisi per circuiti resistivi (senza memoria)
- Teoremi delle reti resistive
- Analisi di circuiti lineari generici nel dominio del tempo
- Circuiti lineari in regime sinusoidale
- Metodi di analisi per circuiti lineari in regime sinusoidale
- Potenza in regime sinusoidale

(il dettaglio del programma è disponibile sul canale Teams → documenti vari)

Organizzazione e argomenti del corso

Propedeuticità e prerequisiti:

Il corso di Analisi e il modulo di Elettromagnetismo sono propedeutici ad Elettromagnetismo ed Elettrotecnica (non si può completare l'esame senza aver superato Analisi)

Oltre alle propedeuticità, ci sono alcuni argomenti specifici che saranno utili durante il corso e necessari alla comprensione della teoria e/o allo svolgimento degli esercizi.

I principali pre-requisiti sono:

- Soluzione di sistemi di equazioni lineari algebriche di grado 2 o 3

  (es. Metodi di sostituzione o eliminazione di variabile, metodo di Cramer)
- Derivate ed integrali di funzioni elementari (principalmente funzioni sinusoidali)
- Numeri complessi, rappresentazione cartesiana e polare
- Elementi di trigonometria e formula di Eulero

Modalità d'esame

La valutazione si basa su un Esame Scritto e Orale congiunto

Valutazione Esame :

- La prova d'esame consiste nella risoluzione di alcuni circuiti e nel rispondere a delle domande sulla teoria
- Potrà sostenere l'esame chi:
  1) ha già superato ELETTROMAGNETISMO
  2) sostiene entrambe le prove nello stesso appello/sessione
- La valutazione finale complessiva del corso risulterà dalla media (per eccesso) dei due moduli ELETTROMAGNETISMO + ELETTROTECNICA (la lode sul singolo modulo vale 33). (con media in eccesso)
- E' possible richiedere di sostenere un esame orale aggiuntivo sugli argomenti di entrambe le materie (per prendere di più)
(su entrambi i moduli)

Dipartimento di Ingegneria Informatica, Modellistica, Elettronica e Sistemistica

A.A. 2020/2021

- ITALIANO
- ENGLISH

Denominazione insegnamento	**ELETTROMAGNETISMO ED ELETTROTECNICA - ELETTROTECNICA**
Contenuti	**Il corso introduce i fondamenti teorici della analisi circuitale concentrandosi principalmente sulla analisi di circuiti lineari e a costanti concentrate. Vengono sviluppati i metodi di analisi (metodo dei nodi, metodo degli anelli) sia per circuiti resistivi-senza memoria che per circuiti RLC-con memoria in regime permanente sinusoidale. Vengono introdotte e dimostrate le varie rappresentazioni esterne (Eq. di porta, Thevenin, Norton, Millman, etc.) e utilizzate per l'analisi dei circuiti lineari: senza memoria, RLC in regime permanente sinusoidale, RC e RL del primo ordine. Vengono date le prime nozioni sull'analisi in frequenza e sulle capacità filtranti dei circuiti lineari RLC.**
Codice insegnamento	**27000038**
Corso di Studio (CdS)	**INGEGNERIA INFORMATICA**
Livello CdS	**I**
Codice CdS	**0707**
Settore Scientifico Disciplinare (SSD)	**ING-IND/31 - ELETTROTECNICA**
Crediti Formativi Universitari (CFU)	**6**
Tipologia Attività Formativa (TAF)	**Affine/Integrativa**
Tipo attività formativa	**OB**
Anno di corso	**2**
Periodo didattico	**Secondo Semestre**
Docente responsabile	**RICCI Marco**
Altri docenti coinvolti	**LAURETI Stefano - ESE**
Organizzazione didattica	**LEZ** — **38.00** — **RICCI - Marco** **ESE** — **18.00** — **LAURETI - Stefano**

Lingua di insegnamento	**Italiano**
Prerequisiti	**Algebra lineare: risoluzione di sistemi lineari algebrici; numeri complessi e loro rappresentazioni ed operazioni. Fondamenti di analisi matematica: trigonometria, definizione e proprietà di base delle funzioni sinusoidali; equazioni differenziali del 1° ordine, integrale e derivata di funzioni di base (polinomi, funzioni sinusoidali ed esponenziali);**
Obiettivi formativi (in termini di risultati di apprendimento attesi)	**Al termine del corso lo studente dovrà essere in grado di analizzare semplici circuiti resistivi o circuiti contenenti elementi reattivi in regime permanente sinusoidale. Dovrà essere in grado di applicare i vari teoremi delle rappresentazioni esterne per semplificare l'analisi di porzioni di circuito di interesse. Dovrà essere in grado di valutare lo scambio di potenza elettrica all'interno dei vari elementi e dovrà possedere le basi per applicare i concetti di analisi circuitale a sistemi via via più complessi quali quelli contenenti elementi multi-porta, elementi non lineari, etc. Lo studente dovrà essere anche in grado di esporre gli argomenti teorici alla base della analisi dei circuiti e di cogliere le connessioni tra i vari argomenti del corso per sviluppare una capacità autonoma di analisi.**
	In dettaglio gli argomenti del corso sono: 1) INTRODUZIONE/RICHIAMO ALL'ELETTROMAGNETISMO: carica e corrente elettrica; campo elettrico e potenziale elettrico; campo magnetico, legge di Biot-Savaart e legge di Faraday; legge di Ohm, condensatori e induttori; 2) INTRODUZIONE AI CIRCUITI ELETTRICI a. dalle leggi di Maxwell ai circuiti elettrici; b. Circuiti elettrici a costanti concentrate: conseguenze e limiti di validità dell'ipotesi c. Grandezze elettriche: tensione, corrente e potenza. Convenzione dell'utilizzatore e convenzione dei generatori; d. Elementi circuitali ideali: resistore, condensatore, induttore, generatore indipendente di tensione, generatore indipendente di corrente, generatori dipendenti. Relazioni costitutive, potenza ed energia assorbita / scambiata dagli elementi ideali. e. Casi limite degli elementi ideali: corto-circuito e circuito aperto; f. Leggi di Kirchhoff delle correnti e delle tensioni (KCL e KVL): validità delle leggi di Kirchhoff nel caso di circuiti stazionari ed estensione ai circuiti a costanti concentrate con eccitazioni ed elementi generici; 3) ELEMENTI DI TOPOLOGIA a. Elementi topologici fondamentali: ramo, nodo, maglia, taglio; b. Concetti di serie e parallelo; c. Resistori in serie: resistenza e conduttanza equivalente di due resistori in serie, partitore di tensione, generalizzazione a N resistori in serie; d. Resistori in parallelo: resistenza e conduttanza equivalente di due resistori in parallelo, partitore di corrente, generalizzazione a N resistori in serie; e. Serie e parallelo di condensatori e induttori; f. Equivalenza stella-triangolo; g. Serie e parallelo di generatori ideali di tensione e corrente: casi propri (serie

Programma	**di generatori di tensione e parallelo di generatori di corrente) e casi impropri (parallelo di generatori di tensione e serie di generatori di corrente); h. Modelli reali dei generatori: generatore di tensione reale come partitore di tensione, generatore reale di corrente come partitore di corrente; i. Potenza generata e potenza erogata dai generatori reali; j. Equivalenza esterna dei generatori reali di tensione e corrente. 4) METODI DI ANALISI PER CIRCUITI RESISTIVI (o senza memoria) a. Introduzione ai metodi di analisi: scopo e importanza dei metodi di analisi; grandezze indipendenti ed equazioni di Kirchhoff linearmente indipendenti; b. Grafo di un circuito: definizione di grafo, grafo orientato, albero e co-albero; c. Indipendenza delle tensioni dei rami dell'albero e delle correnti dei rami del co-albero; tagli fondamentali e maglie fondamentali, d.Dal metodo base tagli al metodo dei nodi; metodo dei nodi con soli generatori di corrente, metodo dei nodi in presenza di generatori di tensione, metodo dei nodi e "supernodi"; e.Dal metodo base maglie al metodo degli anelli; metodo degli anelli con soli generatori di tensione, metodo degli anelli in presenza di generatori di corrente, metodo degli anelli e "superanelli"; 5) TEOREMI DELLE RETI RESISTIVE a.Proprietà dei circuiti: linearità, tempo invarianza, memoria. b.Principio di sovrapposizione degli effetti c.Equazione di porta e teorema di sostituzione d.Teorema di Millman e.Teorema di Thevenin f.Teorema di Norton g.Equivalenza tra rappresentazioni di Thevenin e Norton h.Teorema del massimo trasferimento di potenza 6) ANALISI DI CIRCUITI LINEARI GENERICI NEL DOMINIO DEL TEMPO a.Introduzione alla analisi di circuiti lineari nel dominio del tempo b.Circuiti del primo ordine: risp**
Modalità di erogazione	
Metodologie didattiche	**Lezioni frontali ed esercitazioni. Le Lezioni e le esercitazioni vengono erogate con l'ausilio del video proiettore e di una tavoletta grafica per fornire agli studenti documentazione di tutto ciò che viene scritto dal docente durante la lezione. Nel caso in cui l'insegnamento dovesse essere erogato a distanza per motivi di sicurezza sanitaria, le lezioni verranno effettuate in modalità sincrona in streaming con video-registrazione tramite il software Microsoft Teams.**
Metodi e criteri di valutazione dell'apprendimento	**La valutazione dell'esame è congiunta a quella del modulo di "Fondamenti di elettromagnetismo" e consiste nello svolgimento di alcuni esercizi riguardanti l'analisi di circuiti elettrici resistivi o in regime permanente sinusoidale e nel rispondere ad alcuni quesiti teorici sugli argomenti affrontati nel corso. Il tempo totale della prova per il modulo è solitamente di 2.5 ore. Per la prova scritta è prevista la possibilità di superare parte dell'esame tramite la prova intermedia.**

Testi di riferimento ed eventuali letture consigliate	**Testo di riferimento Circuiti Elettrici, Autori: Alexander, Sadiku, Gruosso, Storti Gajani, V edizione, McGraw-Hill. NOTA: Edizioni precedenti vanno ugualmente bene. Alcune parti potrebbero essere scambiate nell'indice Altri testi consigliati: Circuiti lineari e non lineari Autori: Leon O. Chua, Charles A. Desoer, Ernest S. Kuh, Jackson Libri Circuiti Elettrici / Renzo Perfetti, Zanichelli**
Peer review	**n.d.**
Stima del carico di lavoro per lo studente	**150 ore, inclusive di lezioni ed esercitazioni, cosi suddivise. 1) INTRODUZIONE/RICHIAMO ALL'ELETTROMAGNETISMO: ore lezione: 2 ore studio individuale: 3 Materiale a cura del docente 2) INTRODUZIONE AI CIRCUITI ELETTRICI ore lezione: 5 ore studio individuale: 8 CAPITOLO 1- Concetti e leggi fondamentali; CAPITOLO 7- Condensatori e induttori fino a 7.5; Materiale a cura del docente 3) ELEMENTI DI TOPOLOGIA ore lezione: 3 ore studio individuale: 4 CAPITOLO 2- Elementi circuitali semplici: bipoli adinamici; Materiale a cura del docente, 4) METODI DI ANALISI PER CIRCUITI RESISTIVI ore lezione: 5 ore studio individuale: 8 CAPITOLO 5 - Metodi di analisi; Materiale a cura del docente 5) TEOREMI DELLE RETI RESISTIVE ore lezione: 6 ore studio individuale: 9 CAPITOLO 4 – Teoremi delle reti; Materiale a cura del docente 6) ANALISI DI CIRCUITI LINEARI GENERICI NEL DOMINIO DEL TEMPO ore lezione: 4 ore studio individuale: 6 CAPITOLO 8 – Circuiti del primo ordine fino a 8.6); Materiale a cura del docente 7) CIRCUITI LINEARI IN REGIME SINUSOIDALE ore lezione: 5 ore studio individuale: 7 CAPITOLO 10 – Sinusoidi e fasori; Materiale a cura del docente 8) METODI DI ANALISI PER CIRCUITI LINEARI IN REGIME SINUSOIDALE ore lezione: 4 ore studio individuale: 6 CAPITOLO 11 – Analisi in regime sinusoidale fino a 11.7); Materiale a cura del docente 9) POTENZA IN REGIME SINUSOIDALE ore lezione: 4 ore studio individuale: 6 CAPITOLO 12 – Potenza in regime sinusoidale; Materiale a cura del docente Esercitazioni: 18 ore, ore di studio personale 18 ore Altre attività: Ore riservate allo sviluppo delle competenze trasversali ore studio individuale: 7 Ulteriori ore da dedicare alla preparazione dell'esame ore studio individuale: 12**
Orario delle lezioni, Calendario degli esami, Commissione d'esame	**https://www.dimes.unical.it/content/esami-e-orari**
Didattica a distanza	**Collegamento a Classe MS Teams Codice Classe Teams: a2xwywt**

Teaching Unit	**Electromagnetism and electrotechnics - ELECTROTECHNICS**

Contents	**The course provides the theoretical basis of the circuit analysis focusing on linear circuits under the lumped element model assumption. The main methods of analysis are introduced (nodal and mesh analysis) for both resistive, i.e. memory-less, circuits and for circuits in sinusoidal steady-state regime containing R,L and C components. Substitution and external representation theorems for electrical networks are demonstrated and used to simplify the analysis of linear circuits: (1) resistive; (2) RLC in sinusoidal steady-state; (3) 1st order RC and RL. Basic knowledge on frequency analysis and on filtering properties of RLC circuits is provided as well.**
Code of the Teaching Unit	**27000038**
Degree course (CdS)	**COMPUTER ENGINEERING**
Course level	**I**
Course unit code	**0707**
Scientific Disciplinary Sector (SSD)	**ING-IND/31 - ELETTROTECNICA**
Number of ECTS credits (CFU)	**6**
Type of Teaching Unit (TAF)	**Affine/Integrativa**
Teaching Unit Qualification	**OB**
Year course	**2**
Period in which the Teaching Unit is Provided	**Secondo Semestre**
Teacher	**RICCI Marco**
Further Optional Teaching Units	**LAURETI Stefano - ESE**
Hours of Lectures - Hours of Practicals - Hours of Laboratory	**LEZ** 38.00 RICCI - Marco **ESE** 18.00 LAURETI - Stefano
Language	**Italian**
Prerequisities	**Linear algebra: solving of algebraic linear systems; complex numbers and their representations and operations. Fundamentals of mathematical analysis: basic trigonometric functions, their definition and properties; 1st order differential equations; integration and derivative of basic functions (polynomials, sinusoids and exponentials);**

Learning outcomes	**At the end of the course the student will be able to analyse basic resistive or reactive circuits in steady-state sinusoidal regime. She/he will be able to use substitution and external representation theorems to simplify the analysis of portions of circuits. She/he will be able to evaluate the exchange of electrical power in the various circuit's elements and she/he will have the basic skills for applying the circuit analysis theory to more complex circuits such as circuits containing multi-port element, non-linear element, etc. The student must also be able to explain the theoretical arguments presented in the course and she/he must be able to understand the relationship between various topics to develop an autonomous capability of analysis.**
Program	**The topics of the course are the following; 1) INTRODUCTION/REVIEW OF ELECTROMAGNETISM FUNDAMENTALS: electric charge and current; electric field and potential; magnetic field, Biot-Savaart' law and Faraday's law; Ohm's law, capacitors and inductances 2) INTRODUCTION TO ELECTRICAL CIRCUITS a. from Maxwell's equations to electric circuits; b. Electric lumped circuit: limits and consequences of the model; c. Electrical quantities: voltage, current and power; d. Basic circuit elements: resistor, capacitor, inductor, independent voltage generator, independent current generator, controlled generators. Voltage-current relations, power and energy delivered / absorbed by the ideal elements. e. Limit cases: short-circuit and open-circuit f. Kirchhoff's voltage and current laws (KVL and KCL): limit of validity for stationary circuits and extension of the Kirchhoff's laws to lumped circuits with arbitrary excitations and elements; 3) ELEMENTS OF CIRCUITS TOPOLOGY a. Basic elements of topology: branches, nodes, loops and cuts; b. series and parallel; c. series resistors: resistance and conductance of series resistors; voltage divider; N-resistors series; d. Parallel resistors: equivalent resistance and conductance of two parallel resistors; current divider; N-resistors parallel e. series and parallel of capacitors and inductances; f. Y-Δ transform g. series and parallel of ideal independent sources: proper and improper combination (series of voltage sources and parallel of current sources; parallel of voltage sources and series of current sources); h. Circuit model of real sources: real voltage source as voltage divider; real current source as current divider; i. generated and delivered power by real sources; j. external equivalence between real voltage and real current generator 4) METHODS OF ANALYSIS OF RESISTIVE CIRCUITS (i.e. memoryless) a. intro to methods of analysis: aim and goals; set of independent quantities and Kirchhoff's equations; b. Graph of a circuit: definition; tree and co-tree; c. tree-voltages as independent set of voltages; cotree-currents as independent set of currents; d. from cut-analysis to node-analysis; node-analysis with current sources only; extension of node-analysis to the presence of voltage sources, node- and supernode-analysis; e. from loop-analysis to mesh-analysis;**

	mesh-analysis with voltage sources only; extension of mesh-analysis to the presence of current sources, mesh and supermesh-analysis; 5) THEOREMS OF RESISTIVE CIRCUITS a.Properties of circuits: linearity, time-invariance, memory. b. Superposition principle c. Port-equation and substitution theorem d. d. Millmann's Theorem e. Thevenin's Theorem f. Norton's theorem g. Equivalence between Thevenin's and Norton's circuits h. Maximum power transfer theorem 6) TIME-DOMAIN ANALYSIS OF ARBITRARY LINEAR CIRCUITS a. Introduction to the analysis of linear circuitsin time-domain b. 1st order circuits: analysis of source-free RC and RL circuits c. Singularity functions: Dirac's delta, Heavside's Step function d. Step response of 1st order RC and RL circuits 7) LINEAR CIRCUITS AND SINUSOIDAL STEADY-STATE ANALYSIS a. Basic elements: frequency, sinusoids, phasors; b. Phasors' properties and composition; c. Definition of impedance, admittance and symbolic Ohm's law d. impedance of the basic circuit elements e. Kirchhoff's law in sinusoidal steady-state 8) METHODS OF ANALYSIS FOR LINEAR CIRCUITS IN SINUSOIDAL STEADY-STATE
Delivery Mode	
Teaching Methods	**Lessons and exercises. Lessons and exercises are delivered by making use of the projector and of a graphics tablet to record the explanations wrote during the lessons and to provide them to the students In the event the course should be delivered remotely for health security reasons, the lessons will be performed synchronously in streaming with video recording through the Microsoft Teams software.**
Methods and Criteria for Learning Assessment	**The evaluation is unique for this module and for the module "Fooundations of Electromagnetism" and it consist on: (i) solving some exercises about the analysis of resistive and sinusoidal steady-state circuits; (ii) answering some theoretical questions about the course's topics. Typically, the examination lasts 2.5 hours. A mid-course written examination is planned that allow splitting the examination in two parts.**
Textbooks and Further References	**Reference textbook: Circuiti Elettrici, Autori: Alexander, Sadiku, Gruosso, Storti Gajani, V edizione, McGraw-Hill NOTE: Different editions can be used as well. Some parts could be swapped in the index Further suggested textbooks: Circuiti lineari e non lineari Autori: Leon O. Chua, Charles A. Desoer, Ernest S. Kuh, Jackson Libri Circuiti Elettrici / Renzo Perfetti, Zanichelli**
Peer review	**n.d.**
	150 hours of workload including lessons and exercise, subdivided as follo 1) INTRODUCTION/REVIEW OF ELECTROMAGNETISM FUNDAMENTALS: lessons: 2 hrs homework: 3 hrs 2) INTRODUCTION TO ELECTRICAL CIRCUITS lessons: 5 hrs homework: 8 hrs 3) ELEMENTS OF CIRCUITS TOPOLOGY lessons: 3 hrs

Student workload	**homework: 4 hrs 4) METHODS OF ANALYSIS OF RESISTIVE CIRCUITS lessons: 5 hrs homework: 8 hrs 5) THEOREMS OF RESISTIVE CIRCUITS lessons: 6 hrs homework: 9 hrs 6) TIME-DOMAIN ANALYSIS OF ARBITRARY LINEAR CIRCUITS lessons: 4 hrs homework: 6 hrs 7) LINEAR CIRCUITS AND SINUSOIDAL STEADY-STATE ANALYSIS lessons: 5 hrs homework: 7 hrs 8) METHODS OF ANALYSIS FOR LINEAR CIRCUITS IN SINUSOIDAL STEADY-STATE ANALYSIS lessons: 4 hrs homework: 6 hrs 9) ELECTRIC POWER IN SINUSOIDAL STEADY-STATE lessons: 4 hrs homework: 6 hrs Exercises: 18 hrs + 18 hrs homework Further activities: multi- inter- sectoral skills: 7 hrs homework Exam preparation 12 hrs homework**
Timetable, Examinations Schedule, Examinations Committee	https://www.dimes.unical.it/content/esami-e-orari
Distance Learning	MS Teams Classroom Link **Teams Classroom Code: a2xwywt**

Introduzione alla teoria dei circuiti

lunedì 8 marzo 2021 12:43

Cosa è l'Elettrotecnica

L'elettrotecnica è una scienza applicata che studia gli aspetti teorici e sperimentali dell'elettromagnetismo e ne promuove le relative applicazioni all'ingegneria.
Le aree di ricerca di interesse comprendono i fondamenti fisici dei circuiti elettrici e dei campi elettromagnetici e lo sviluppo di modelli e metodi teorici, numerici e sperimentali utili alla progettazione e caratterizzazione di dispositivi.

In questo corso verranno introdotti i fondamenti della Teoria dei circuiti, in particolare i fondamenti delle tecniche di analisi dei circuiti stazionari ed in regime sinusoidale.

2

Il meccanismo di movimento degli elettroni eccitati è descrivibile come un processo caotico

In particolare i LINEARI

Le informazioni trasmesse meccanicamente si trasmettono più difficilmente e peggio rispetto a quelle che sfruttano gli elettroni e il loro movimento eccitato

Cosa è l'Elettrotecnica

La didattica e la ricerca universitaria in elettrotecnica

- Riguarda gli aspetti teorici e sperimentali dei due filoni complementari dei campi elettromagnetici e dei circuiti, e lo sviluppo delle relative applicazioni nei vari settori dell'ingegneria.
- Forte interdisciplinarità del settore che sviluppa metodi e procedure applicate in un'ampia varietà di aree

⇒ Nel corso vedremo la basi della teoria dei circuiti

Cosa è la Teoria dei Circuiti

Nell'ambito dell'Elettrotecnica, la Teoria dei Circuiti si occupa di sviluppare a partire dalle equazioni di Maxwell modelli teorici che siano allo stesso tempo sufficientemente generali, semplici ed accurati per descrivere, progettare e caratterizzare dispositivi elettrici realizzati dalla interconnessione di singoli elementi rappresentati da modelli fisici semplificati.

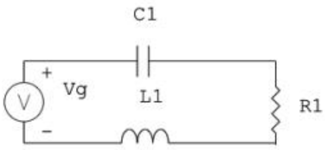
L'approccio circuitale non si limita poi alla trattazione dei soli fenomeni elettromagnetici ma è stato esteso a svariati ambiti (circuiti meccanici, termici, acustici, etc…)

5

Teoria dei Circuiti

- Sviluppo metodi analitici per la risoluzione dei circuiti → individuazione sistemi di equazioni risolutivi
- Metodi applicabili ad una grande varietà di «circuiti» descritti da uno stesso modello matematico

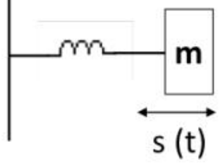
Circuito Elettrico: v=Ri



Eccitazione = Tensione

Effetto= Corrente

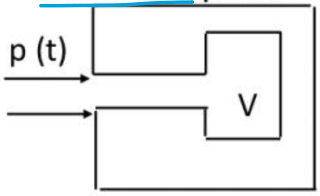
Circuito Meccanico: F=ks



Eccitazione = Forza

Effetto = Spostamento

Circuito Acustico: p=ZΨ



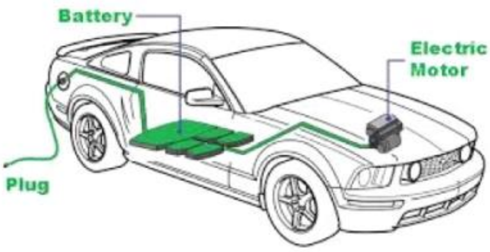
Eccitazione = Pressione

Effetto = Portata

Teoria dei circuiti

Teoria ed applicazioni dei circuiti elettrici

- Produzione e trasporto energia
- Generazione, trasmissione, ricezione ed elaborazione segnali (eg audio)
- Motori e Veicoli elettrici
- Modellazione circuitale sistemi (elettrici, meccanici, termici, acustici, ma anche misti, elettro-meccanici, etc..)



Punto di partenza: Eq. Di Maxwell

I fenomeni elettromagnetici sono descritti dalle eq. di Maxwell che legano tra loro le varie grandezze fisiche vettoriali e le proprietà dei materiali (vuoto compreso)

Grandezze fisiche

$\vec{E}$ **CAMPO ELETTRICO** [Volt/metro]

determinato da una distribuzione di cariche

$\vec{D}$ **INDUZIONE ELETTRICA** [Coulomb/m^2]

determinato dall'interazione di $\vec{E}$ con un materiale elettrico

$\vec{H}$ **CAMPO MAGNETICO** [Amperspira/m]

determinato da cariche in movimento

$\vec{B}$ **INDUZIONE MAGNETICA** [Weber/m^2]

determinato dall'interazione di $\vec{H}$ con un materiale magnetico

$\vec{J}$ **DENSITÀ DI CORRENTE DI CONDUZIONE** [Ampere/m^2]

legata al moto delle cariche

8

Punto di partenza: Eq. Di Maxwell

I fenomeni elettromagnetici sono descritti dalle eq. di Maxwell che legano tra loro le varie grandezze fisiche vettoriali e le proprietà dei materiali (vuoto compreso)

Proprietà dei materiali

ε Permettività dielettrica[Farad/m]

μ Permeabilità magnetica [Henry/m]

σ Conducibilità elettrica [Ω^{-1}/m]=[S/m]

ρ Densità spaziale di carica [Coulomb/m^3]

$$\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu \vec{\mathbf{H}}$$

$$\vec{\mathbf{J}} = \sigma(\vec{\mathbf{E}} - \vec{\mathbf{E}}_0) + \vec{\mathbf{J}}_0$$

$\vec{E}_0$ e $\vec{J}_0$ rappresentano le **ECCITAZIONI ESTERNE** (trasformazioni energetiche)

ρ (densità di carica) può essere considerata **SORGENTE INTERNA**

9

Punto di partenza: Eq. Di Maxwell

Equazioni di Maxwell in forma integrale

La 1ª Eq. di Maxwell è la legge di Gauss per il campo elettrico

Gauss's law for $\vec{E}$:

$$\underbrace{\oint \vec{E} \cdot d\vec{A}}_{\text{Flux of electric field through a closed surface}} = \frac{Q_{encl}}{\epsilon_0}$$

Q_{encl}: Charge enclosed by surface

ϵ_0: Electric constant

La 2ª Eq. di Maxwell è la legge di Gauss per il campo magnetico

Gauss's law for $\vec{B}$:

$$\underbrace{\oint \vec{B} \cdot d\vec{A}}_{\text{Flux of magnetic field through any closed surface ...}} = 0 \quad \text{... equals zero.}$$

10

Punto di partenza: Eq. Di Maxwell

Equazioni di Maxwell in forma integrale

La 3ª Eq. di Maxwell è la legge di Faraday sull'induzione e.m.

Faraday's law for a stationary integration path:

$$\underbrace{\oint \vec{E} \cdot d\vec{l}}_{\text{Line integral of electric field around path}} = -\underbrace{\frac{d\Phi_B}{dt}}_{\text{Negative of the time rate of change of magnetic flux through path}}$$

La 4ª Eq. di Maxwell è la legge di Ampere con l'aggiunta della corrente di spostamento

Ampere's law for a stationary integration path:

$$\underbrace{\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}}_{\text{Line integral of magnetic field around path}} = \mu_0 \left(i_C + \epsilon_0 \underbrace{\frac{d\Phi_E}{dt}}_{\text{Time rate of change of electric flux through path}} \right)_{encl}$$

ϵ_0: Electric constant

μ_0: Magnetic constant

i_C: Conduction current through path

$\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$: Displacement current through path

11

Punto di partenza: Eq. Di Maxwell

Equazioni di Maxwell in forma differenziale

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{lib}$$

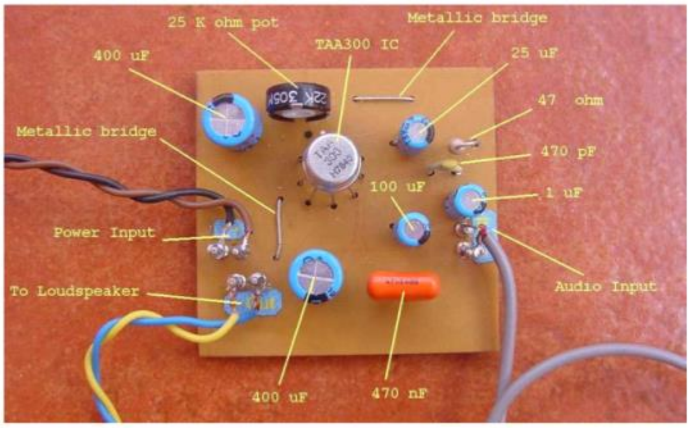
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

La soluzione completa di un problema elettromagnetico (nel limite classico) richiederebbe la soluzione delle equazioni di Maxwell in tutto il volume di spazio di interesse !!!!

12

Punto di partenza: Eq. Di Maxwell

Esempio di circuito: Amplificatore Audio

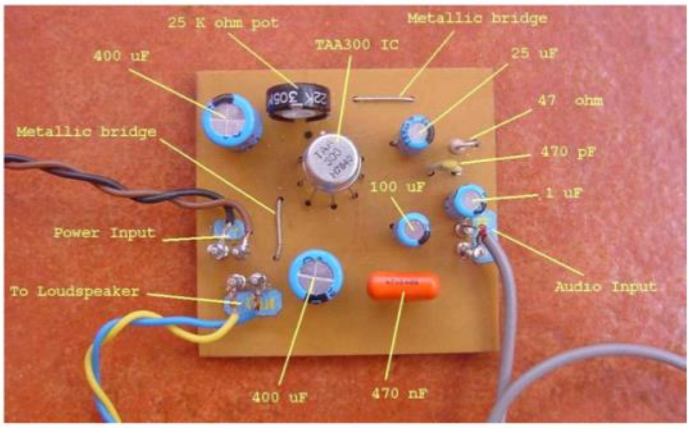


Risolvere le eq. Di Maxwell in tutto il volume di spazio è un problema estremamente complesso !!!! (Ora si usano software di calcolo numerico. Es. Finite element analysis)

13

Obiettivo: Teoria dei circuiti

Esempio di circuito: Amplificatore Audio



Trovare un modello semplificato che descriva con elevata approssimazione il funzionamento del circuito dal punto di vista funzionale non entrando nel dettaglio dei singoli componenti

14

Modello circuitale

L'approccio circuitale coniuga 2 processi fondamentali:

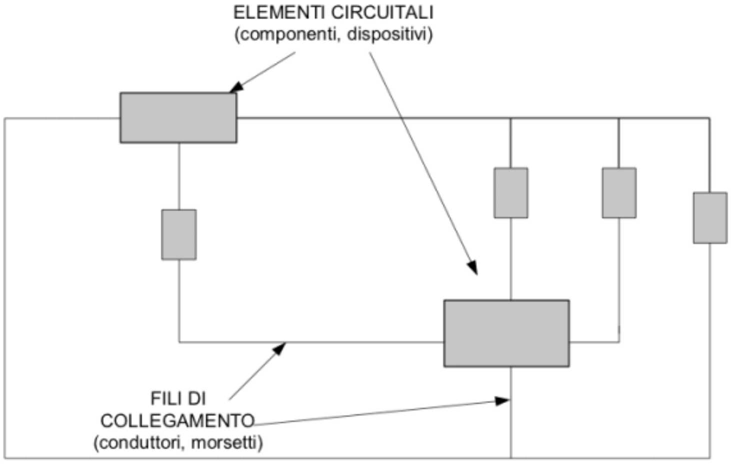
I. La modellazione fisica di dispositivi elementari che compiono una determinata azione tramite opportune grandezze descrittive
(Es. condensatore→accumulo carica, serbatorio→accumulo liquido, membrana altoparlante→ genera variazioni di pressione, etc….)
➥ Relazioni costitutive elementi

II. Lo studio delle relazioni che si instaurano tra le grandezze descrittive dei singoli componenti dovute alle connessioni dei componenti
➥ Relazioni topologiche

15

Modello circuitale: Definizione di Circuito

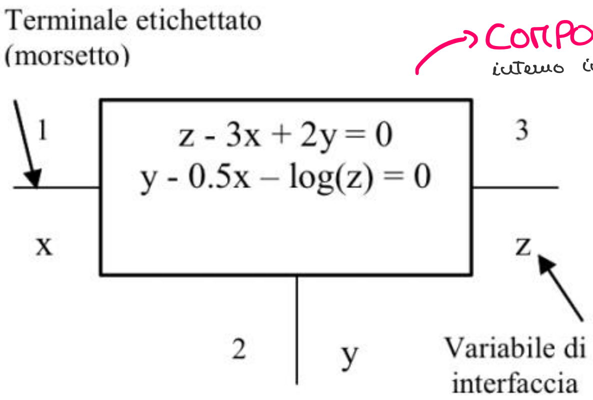
Un circuito è costituito da un insieme di *componenti* (detti anche elementi, o blocchi o dispositivi), appartenenti ad un insieme noto di tipi, collegati fra loro attraverso dei *collegamenti* (detti anche morsetti, o fili o conduttori) e tutti descritti dalla stesse grandezze o variabili di interfaccia



Modello circuitale: definizione di componente

Un componente è un elemento circuitale caratterizzato da un particolare insieme di morsetti (di ingresso/uscita) e da un opportuno insieme di equazioni fra le variabili di interfaccia (relazioni costitutive) dipendenti da un numero finito di costanti numeriche (parametri circuitali del componente).

→ COMPONENTE → al suo interno implementa delle funzioni

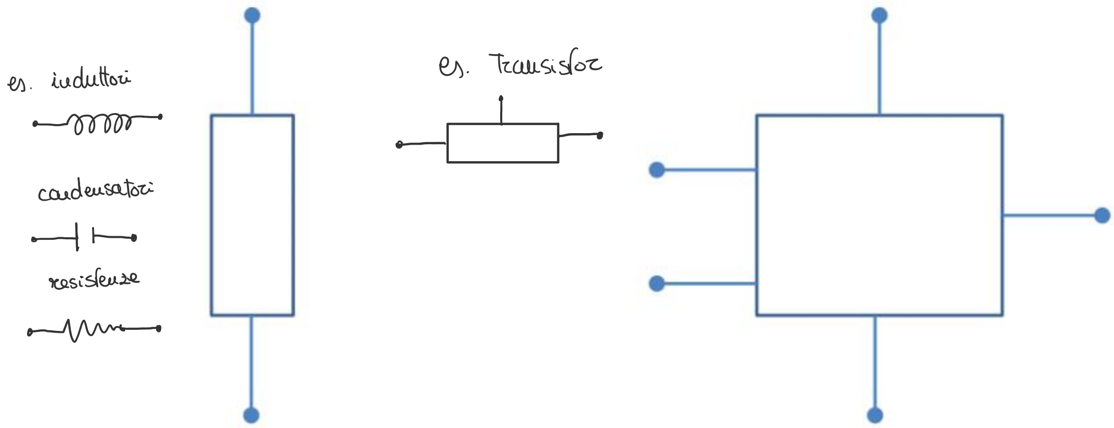


Modello circuitale: definizione di componente

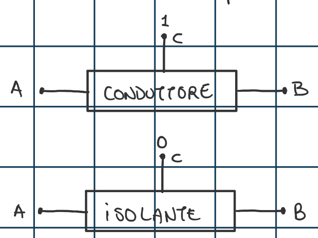
Ogni componente deve avere almeno 2 terminali

Elemento a 2 soli terminali = bipolo

Elemento generico n terminali = n-polo



Il TRANSISTOR ha Tre poli:



$R_{AB} = 0$ se $C = 1$

$R_{AB} = +\infty$ se $C = 0$

Quando collego due punti la resistenza varia. Di conseguenza il transistor è un interruttore elettrico comandato da un segnale e può fare o no passare corrente

Modello circuitale: definizione di collegamento

Un collegamento è una linea orientata o non orientata (a seconda dei tipi di circuiti) che collega fra loro i morsetti dei componenti circuitali. Essa impone sempre sia l'omogeneità (stessa unità di misura) che la continuità (stesso valore) alle variabili di interfaccia in corrispondenza dei morsetti. Costituisce quindi una equazione di vincolo.

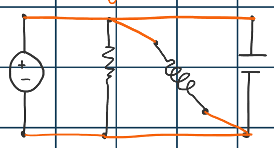
1) L'insieme dei collegamenti di un circuito è descritto da un grafo opportuno.

2) L'insieme dei collegamenti di un circuito genera un insieme di equazioni di vincolo fra le variabili di interfaccia.

così si ha anche uniformità delle unità di misura

ESEMPIO:

collegamenti



Nel nostro caso, i collegamenti saranno fili di rame e saranno considerati dei conduttori perfetti

* RISOLVERE = Trovare i valori delle variabili

Modello circuitale: Circuiti direzionali e non direzionali

I modelli circuitali in generale (siano essi elettrici o di altra natura) possono essere distinti in due classi, a seconda della natura del sistema di equazioni e della tecnica di soluzione:

1) Circuiti non direzionali (Circuiti elettrici analogici)
La direzione degli scambi fra componenti è indeterminata e non è stabilito un preciso rapporto di causa-effetto fra le variabili di interfaccia, che in generale dipendono da tutti i componenti del circuito. La tecnica di soluzione* calcola congiuntamente tutte le variabili di interfaccia.

2) Circuiti (uni-)direzionali (Circuiti digitali, logici, etc)
La direzione degli scambi fra componenti è stabilita a priori

2) Circuiti (uni-)direzionali (Circuiti digitali, logici, etc)
La direzione degli scambi fra componenti è stabilita a priori, il funzionamento dei vari blocchi è disaccoppiato, la tecnica di soluzione * calcola sequenzialmente le variabili di interfaccia.

Modello circuitale: Variabili di interfaccia

Le variabili di interfaccia (o grandezze descrittive) sono grandezze fisiche e/o segnali definibili sui collegamenti fra i componenti e sono sottoposte sia alle equazioni di vincolo generate dai collegamenti che alle equazioni (relazioni costitutive) dei componenti.

Tutte le variabili di interfaccia usualmente sono funzioni di una o più variabili indipendenti comuni (in genere il *tempo*).

La dipendenza temporale delle variabili può essere principalmente di 2 tipi:
1) "a tempo continuo" → es. raggio catodico
2) "a tempo discreto" → es. segnale digitale

Modello circuitale: Circuiti elettrici

Nel caso dei circuiti elettrici trattai nel corso, le variabili di interfaccia sono funzioni analogiche del tempo che riproducono l'andamento di grandezze del mondo fisico.

- hanno un valore per qualsiasi istante t;
- usualmente sono a valori reali, limitate e continue;
- per estensione si considerano anche a valori complessi, e/o non continue e/o non limitate.

Modello circuitale: Circuiti elettrici

- Le variabili di interfaccia possono essere differenti, la scelta più comune è di utilizzare la coppia di variabili Tensione-Corrente
  - Tensione o differenza di potenziale (grandezza «agli estremi»)
  - Corrente (grandezza «attraverso»)
- Sono circuiti analogici non direzionali a tempo continuo
- A partire da tensione e corrente si introduce un'ulteriore grandezza significativa, la potenza

$$p = v \times i$$

- due macro-classi di circuiti elettrici:
  - Circuiti a costanti concentrate (oggetto del corso)
  - Circuiti a costanti distribuite (corsi magistrali)

→ Si trascurano alcune grandezze (es. spazio percorso) e si considerano ininfluenti

→ le dimensioni e gli spazi non sono trascurabili

Modello circuitale: Circuiti elettrici

Un circuito a costanti concentrate è un circuito dove tutte le tensioni e le correnti sono funzioni solamente della variabile tempo, ovvero non si considera la variazione spaziale delle grandezze. Gli elementi di base sono resistor, condensatori, induttori, generatori indipendenti e dipendenti.

Un circuito a costanti distribuite è un circuito dove le tensioni e le correnti sono funzioni sia del tempo che dello spazio. Le linee di trasmissione sono un esempio di circuiti a costanti distribuite.

Circuiti elettrici a costanti concentrate:

25

Modello circuitale: Costanti concentrate

Si impongono limitazioni su:

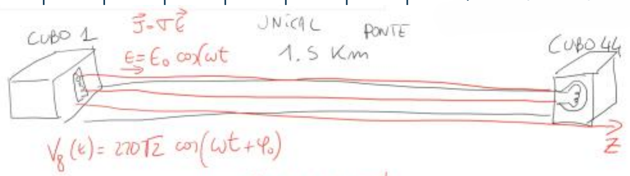
- Frequenze di lavoro (campi e.m. lentamente variabili) → la corrente di spostamento è nulla → non si generano onde elettromagnetiche
- Natura dei componenti (presenza in un componente di un solo fenomeno e.m. per volta, tempo-invarianza delle sue caratteristiche, etc..)

Si ipotizza che:

- Le dimensioni geometriche della struttura sede del fenomeno e.m. siano sufficientemente piccole da essere trascurate → Approccio Topologico
- La velocità di propagazione del fenomeno e.m. può considerarsi infinita → individuazione di regioni tipiche dove è presente un solo fenomeno
- Il tempo di trasmissione del fenomeno e.m. All'interno della struttura è nullo per cui le grandezze dipendono solo dal tempo → Costanti concentrate

Se posso trascurare le variazioni spaziali allora posso lavorare con costanti CONCENTRATE

CAMPO ELETTRICO



$V_g(t) = 220\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_0)$

$\omega = 2\pi f = 100\pi = 314 \frac{rad}{s}$

$E = E_0 \cos(\omega t - Kz + \varphi_0$

$V_g(t) = 220\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_0)$

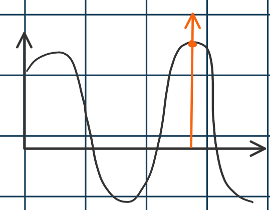
$\omega = 2\pi f = 100\pi = 314 \frac{rad}{s}$

$E = E_0 \cos(\omega t - \underset{\text{numero d'onda } \frac{2\pi}{\lambda}}{K} z + \varphi_0)$

$= E_0 \cos(2\pi f \cdot t - \frac{2\pi}{\lambda} z + \varphi_0) = E_0 \cos(2\pi [ft - \frac{z}{\lambda}] + \varphi_0)$

$\lambda \cdot f = \text{Velocità} \to c \qquad \lambda = \frac{3 \cdot 10^8 \ m/s}{50 \ \frac{1}{s}} = 0.6 \cdot 10^7 = 6 \cdot 10^6 \ m$

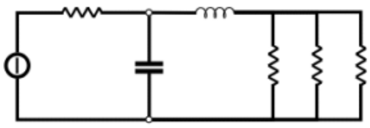
6000 Km



Quando ci si attacca alla corrente, ricordando che nelle formule della sinusoide vi è un φ_0, questo φ_0 rappresenta un angolo relativo al punto della curva che si tocca quando ci si collega alla corrente

Modello circuitale: Costanti concentrate

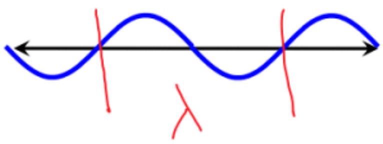
Limiti di validità dell'ipotesi Costanti Concentrate



In generale i campi sono funzioni del tempo e dello spazio.
Es. Campo elettrico 1D sinusoidale a frequenza f:

$$E(t,x) = E_0 \cos(2\pi(ft - \frac{x}{\lambda}))$$

λ=lunghezza d'onda



$$velocità = f\lambda \Longrightarrow \lambda = \frac{vel}{f}$$

Se le dimensioni del circuito sono trascurabili rispetto alla lunghezza d'onda delle tensioni e delle correnti

→ $\frac{x}{\lambda} \ll 1$ → $E(t,x) \sim E_0 \cos(2\pi f t)$

⇓

Non ci sono fenomeni di Propagazione, le grandezze dipendono solo dal tempo

⇓

$\frac{d}{ds} = 0$

Non compaiono derivate spaziali

Casi in cui l'ipotesi non è ammissibile:

- Microprocessori
- Antenne
- Linee di Trasmissione

Modello circuitale: Costanti concentrate

1) CIRCUITO AUDIO

si possono trascurare le dimensioni dei componenti.

Viene tenuto in considerazione il materiale ma a livello circuitale le dimensioni non contano

- frequenza più alta f~25 kHz
- corrispondente λ = 12 km (c/f)

SUPERIORE DI GRAN LUNGA ALLE DIMENSIONI DI UN CIRCUITO AUDIO (microfono, cassa, mixer, etc..)

2) CIRCUITO DI UN CALCOLATORE

- f può variare da 500 MHz a 3 GHz
- corrispondente λ = 0,6-0,1 m

non si tratta di un'onda sinusoidale ma di un segnale di clock e dunque è un'onda quadrata

IL MODELLO A PARAMETRI CONCENTRATI PUO' NON ESSERE SUFFICIENTEMENTE ACCURATO

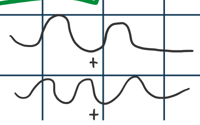
3) CIRCUITO FORNO A MICRO ONDE

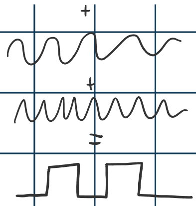
- λ varia tra 10 cm e 1 mm (f =3-300 GHz)

IL MODELLO A PARAMETRI CONCENTRATI NON E' PIU' VALIDO

28

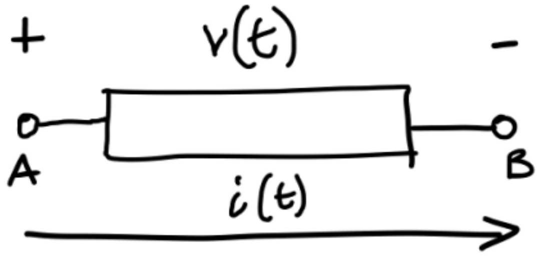
Per Fourier, un'onda quadrata è data dalla somma di una sinusoide della stessa frequenza più altre onde di frequenza molto maggiori



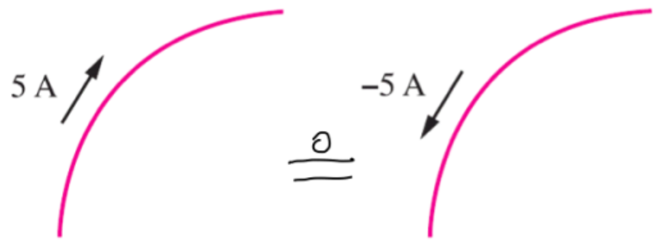


Modello circuitale: Costanti concentrate

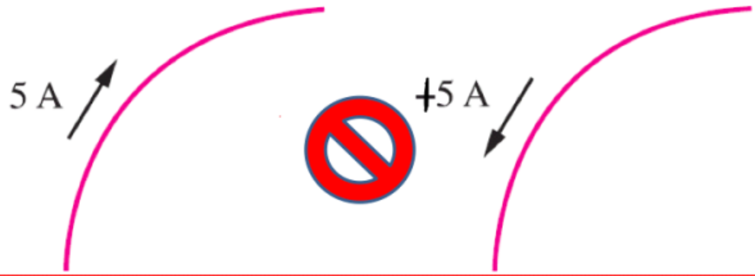
- Le grandezze descrittive / variabili di interfaccia sono la tensione (d.d.p.) e la corrente.
- Date le approssimazioni fatte, da queste grandezze si possono derivare tutte le altre grandezze di interesse (carica su un condensatore, flusso del campo magnetico, etc)
- Con le lettere minuscole solitamente si indicano le grandezze variabili nel tempo v(t), i(t). Si usano lettere maiuscole quando le grandezze sono o costanti nel tempo o a regime
- **NOTA BENE:** la corrente che entra in un bipolo è uguale a quella che esce.



Carica e corrente



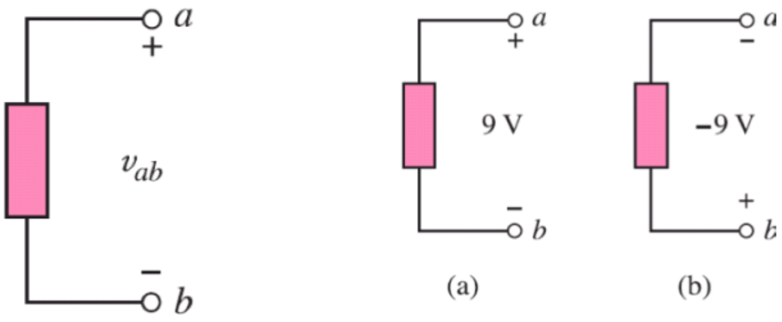
Cambiare simultaneamente segno e direzione della corrente non altera il risultato



Cambiare direzione senza cambiare segno corrente altera il risultato

16

Differenza di potenziale



$$V_{ab} = -V_{ba}$$

La caduta di tensione tra a e b è equivalente ad un aumento di tensione tra b e a →
Fissato un riferimento, il potenziale elettrico sui morsetti è univoco, ovvero fuori dai componenti il campo elettrico è conservativo

17

Potenza ed energia

La **potenza** è la rapidità di assorbimento o di emissione di energia nel tempo. Essa si misura in **Watt** (W).

$$p = \frac{dw}{dt}$$

w: energia (J)
t: tempo (s)

Dal punto di vista integrale:

$$\underbrace{E_u(t_1) - E_u(t_2)}_{\text{energia caduta}} = \int_{t_0}^{t_1} p(t)\,dt$$

$$p = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = vi$$

Potenza assorbita = - Potenza erogata

Per il **principio di conservazione dell'energia, in un sistema isolato**

$$\sum_{k\ rami} p_k(t) = 0, \forall t$$

18

L'energia totale non cambia dunque la sommatoria delle potenze (generate e assorbite) è zero. Dunque nella totalità un circuito è neutro

Potenza ed energia

L'**energia** è la capacità di eseguire un lavoro. Essa si misura in **Joule** (J).

L'energia assorbita o erogata da un elemento dall'istante t_0 all'istante t è:

$$w = \int_{t_0}^{t} p\,dt = \int_{t_0}^{t} v\,i\,dt$$

Le aziende produttrici di energia elettrica misurano l'energia in wattore (Wh):1 Wh = 3600 J

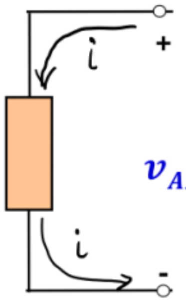
Come si può capire se un bipolo sta assorbendo o erogando potenza?

19

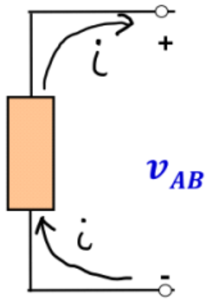
Potenza ed energia

Convenzione degli utilizzatori:
1) La corrente va dal «+» al «-»
2) $v_{AB} \times i = p^{(a)}$ (pot. assorbita)

Convenzione dei generatori:
1) La corrente va dal «-» al «+»
2) $v_{AB} \times i = p^{(g)}$ (pot. generata)



Anche se inverto i versi, mantenendo la convenzione correttamente ottengo uno stesso valore della potenza



$p^{(a)} > 0 \Rightarrow$ **il bipolo assorbe potenza**
$p^{(a)} < 0 \Rightarrow$ **il bipolo eroga potenza**

$p^{(g)} > 0 \Rightarrow$ **il bipolo eroga potenza**
$p^{(g)} < 0 \Rightarrow$ **il bipolo assorbe potenza**

Salvo avviso contrario, nel seguito si farà sempre riferimento alla convenzione degli utilizzatori.

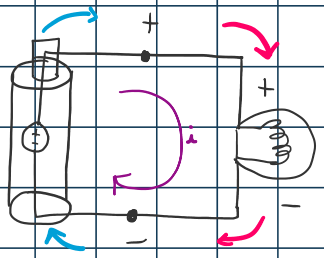
20

ESEMPIO:

$\boxed{V_{CARP} = V_{PILA}}$

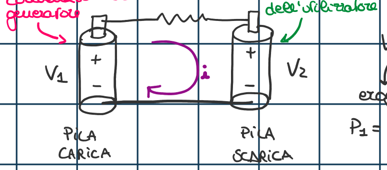
Convenzione

Convenzione dell'utilizzatore



Convenzione del generatore

PILE RICARICABILI!



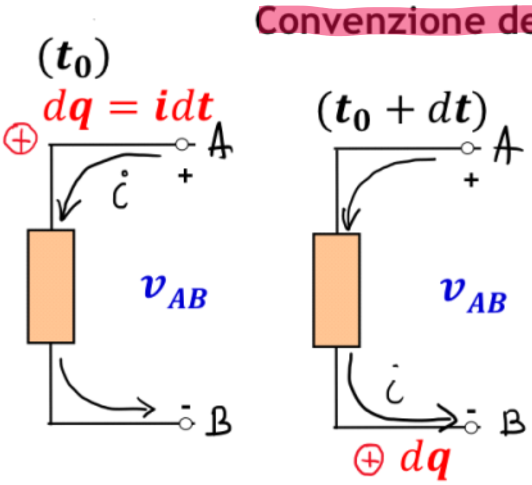
$V_1 > V_2$

eroga: $P_1 = V_1 \cdot i$

assorbe: $P_2 = V_2 \cdot i$

Potenza ed energia

Convenzione degli utilizzatori



La carica $dq = i \times dt$ nell'intervallo dt passa da un potenziale V_a a un potenziale $V_b < V_a$, cedendo quindi un'energia $dE = V_{ab}dq$ all'interno del bipolo. La potenza istantanea che assorbe il bipolo è pari a

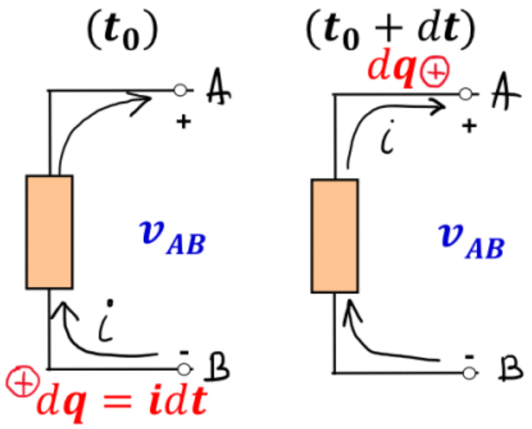
$$\frac{dE}{dt} = \frac{V_{ab}dq}{dt} = V_{ab}i$$

L'energia potenziale persa dalle cariche passando nel bipolo viene convertita in altre forme di energia: Resistore -> Calore, Condensatore -> aumento campo elettrico, Induttore -> aumento campo magnetico

21

Potenza ed energia

Convenzione dei generatori



La carica $dq = i \times dt$ passa da un potenziale V_b a un potenziale $V_a < V_b$, acquisendo un'energia potenziale $dU = V_{ab}dq$ all'interno del bipolo, che eroga quindi una energia dE= dU con una potenza pari a $\frac{dE}{dt} = \frac{V_{ab}dq}{dt} = V_{ab}i$

L'energia potenziale acquisita dalle cariche viene fornita/erogata dal bipolo: da generatori di tensione o corrente (che trasformano altre forme di energia), o da condensatori e induttori (che avevano accumulato energia in precedenza)

22

Elementi Attivi e Passivi

convertono un tipo di energia in un altro

- Gli elementi attivi possono generare energia
  - ➢ Esempi di elementi attivi sono i generatori di tensione o di corrente, sia indipendenti che dipendenti (vedi seguito)
- Gli elementi passivi non possono generare energia, solo assorbirla o scambiarla
  - ➢ Esempi di elementi passive sono resistori,
- In un dato circuito un elemento attivo può anche assorbire Potenza oltre che cederla, ad esempio quando carichiamo una batteria.

Componenti di base: il resistore

Il Resistore

SIMBOLO

- Resistività r: attitudine di un materiale ad opporsi al passaggio di corrente elettrica

conducibilità

$\bar{E} = \rho \cdot \bar{J}$ poiché $\bar{J} = \sigma \cdot \bar{E}$ $\rho = \frac{1}{\sigma}$

Materiale	Resistività ρ
polistirene	1x 10^18
Silicio	2,3x 10^5
Carbonio	4x 10^ -3
Alluminio	2,7x 10^ -6
Rame	1,7x 10^ -6

- Nel 1827 Georg Simon **Ohm** fornì la legge che consente di legare caratteristiche di resistività e geometria del materiale (a sezione uniforme) e la tensione ad esso applicata alla corrente che lo attraversa

$$i = \frac{A v}{\rho l} = \frac{1}{R} v = G v$$

$$R = \frac{\rho \cdot l}{A}$$

- Le tecnologie realizzative più frequenti sono: Impasto di carbonio; Film di carbonio; Film metallico; a filo (avvolto) per valori di R da qualche W a qualche decina di MW.
- Al variare della temperatura operativa si modifica il valore di resistenza. La sensibilità in temperatura k si misura in parti di grado Celsius per milione (ppm/° C)

$$k = \frac{1}{R}\frac{dR}{dT}$$

$R =$ resistenza

$T =$ temperatura

Componenti di base: il resistore

- Relazione costitutiva:

$$v(t) = R\, i(t);$$

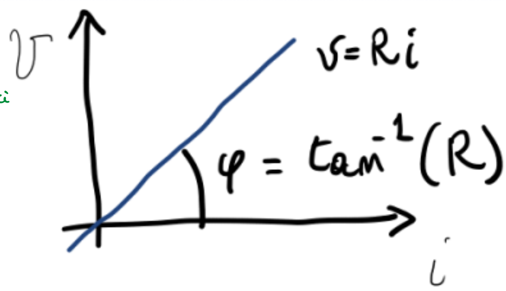
espressa secondo la convenzione degli utilizzatori

R = resistenza $[ohm, \Omega]$

$$i(t) = \frac{1}{R} v(t) = G\, v(t);$$

G = conduttanza $[mho, \Omega^{-1}]$

$= [siemens, S]$



- Resistore vincola V ed I ad essere sulla retta
- Cambio valore resistenza: cambio pendenza retta

- Potenza assorbita

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = [R \cdot i(t)] \cdot i(t) = i^2(t) \cdot R = \frac{v^2(t)}{R} = v^2(t)\, G$$

- Se R>0 p(t)>0 l'elemento assorbe potenza in ogni istante. L'elemento è passivo. I resistori realizzati con conduttori sono sempre passivi

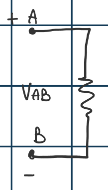
NOTA
1) Per un **bipolo non-lineare** si può definire più in generale la "**resistenza differenziale**" come r=dv/di, che rappresenta quindi la pendenza della curva v-i del bipolo;
2) alcuni componenti non-lineari hanno curva con **pendenza negativa** per alcuni intervalli di valori di i: questi bipoli si comportano, in tali intervalli della caratteristica, come resistori negativi; possono essere usati p.e. negli oscillatori per realizzare reazioni instabili. indipendenti

Riassunto formule:

$$R = \frac{\rho \cdot l}{A} = \frac{l}{\sigma \cdot A} \quad \text{poiché} \quad \rho = \frac{1}{\sigma}$$

$$G = \frac{1}{R} = \frac{A}{\rho \, l} = \frac{\sigma \cdot A}{l}$$

$$G = \frac{1}{R} = \frac{A}{\rho \cdot \ell} = \frac{\sigma \cdot A}{\ell}$$



$$i_{AB} = \frac{V_{AB}}{R} = V_{AB} \cdot G$$

$$p^{(a)} = V_{AB} \cdot i_{AB} = \frac{V_{AB}^2}{R} = V_{AB}^2 \cdot G = i_{AB} \cdot R = \frac{i_{AB}^2}{G} \geq 0$$

EFFETTO JOULE: $p = i^2 R = V^2 G$

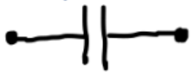
Componenti di base: il resistore

- Il Resistore
  - Oltre al valore di resistenza, importanti nel caratterizzare un resistore sono la max potenza che può dissipare e la precisione con cui è definito il suo valore nominale (tolleranza)
  - Codice colori: per i resistori a bassa potenza codice colori a 4 bande indica valore di resistenza e tolleranza

Componenti di base: il condensatore

- Il condensatore è un dispositivo capace di accumulare energia sotto forma di campo elettrico, tramite accumulo di cariche;
- Capacità C: mette in relazione il valore di tensione applicato sulle armature e l'entità di carica accumulata. C si misura in Farad [F]
- Nel caso di condensatore ad armature piane e parallele la capacità dipende in modo semplice da superficie A e distanza d delle armature e dalla costante dielettrica ε;
- Le tecnologie realizzative si differenziano per il tipo di dielettrico: fogli di carta impregnata o di mica; pellicole plastiche, materiale elettrolitico, per valori di C da qualche pF a qualche millesimo di F.

SIMBOLO



$$q(t) = C v(t)$$

$$C = \frac{\varepsilon A}{d}$$

Materiale	$\varepsilon_r = \varepsilon / \varepsilon_0$
vetro	7
Nylon	2
Bachelite	5

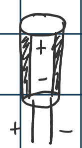
ε_0 = permettività del vuoto =

= 8,8541910^ (−12)

$A * s / (m * V) = Farad / m$

I condensatori solitamente possono essere caricati indifferentemente in un verso o nell'altro. Invece quelli elettrolitici hanno indicati sopra quali sono i poli e dunque caricandolo in modo sbagliato si brucerebbe

es. CONDENSATORE ELETTROLITICO



Componenti di base: il condensatore

- Relazione costitutiva:

$$\boxed{q(t) = Cv(t) \Rightarrow i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C\,\frac{dv(t)}{dt}}$$

- Energia assorbita

$$\boxed{E(t)} = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} i(\tau)v(\tau)d\tau =$$

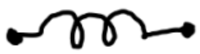
$$= C\int_{-\infty}^{t} v(\tau)\frac{dv(\tau)}{d\tau}d\tau \boxed{= \frac{1}{2}Cv^2(t)}$$

- Se C>0 l' elemento è passivo (accumula energia sotto forma di campo elettrico)

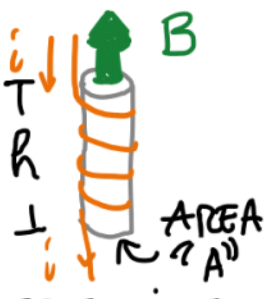
Componenti di base: l'induttore

- E' un dispositivo capace di accumulare energia sotto forma magnetica, ovvero sotto forma di flusso del campo magnetico;
- Induttanza L: mette in relazione il flusso totale concatenato all'avvolgimento con la corrente che vi scorre. L si misura in Henry [H]
- Si possono mettere in relazione le caratteristiche geometriche dell'avvolgimento e la permeabilità magnetica m del nucleo con l'induttanza L;
- Nuclei in ferro, che ha permeabilità magnetica >> dell'aria (approx pari a quella del vuoto m_0=4p 10^(-7) H/m) ma causano legami non lineari

SIMBOLO



$$\Phi_B(t) = L \cdot i(t)$$



SOLENOIDE

$$\Phi_B = \frac{\mu \cdot A \cdot i \cdot (n^\circ spire)^2}{h}$$

AUTOINDUZIONE:

$$V_L(t) = \frac{\partial \Phi_B(t)}{dt} = L\frac{d\,i(t)}{dt}$$

$$L = \mu \cdot \frac{Area}{lunghezza} \cdot n^\circ spire^2$$

$L = \mu \cdot \frac{Area}{lunghezza} \cdot n° spire^2$

$C = \frac{\varepsilon \cdot A}{e}$

Componenti di base: l’induttore

- Relazione costitutiva:

$$\Phi_B(t) = Li(t) \Rightarrow v(t) = \frac{d\Phi_B}{dt} = L\frac{di(t)}{dt}$$

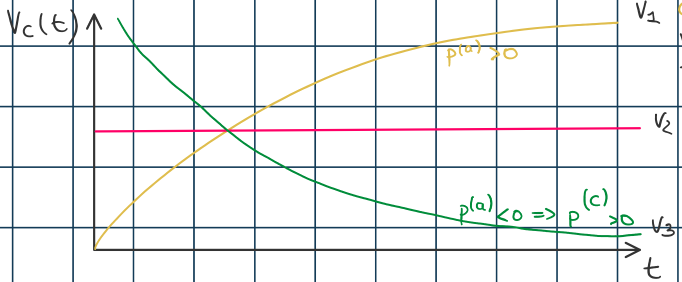
- Energia immagazzinata dall’elemento:

$$E(t) = \int_{-\infty}^{t} p(\tau)d\tau = \frac{1}{2}Li^2(t)$$

- Se L>0 l’elemento è passivo accumula energia sotto forma di campo magnetico

STATI DI UN CONDENSATORE

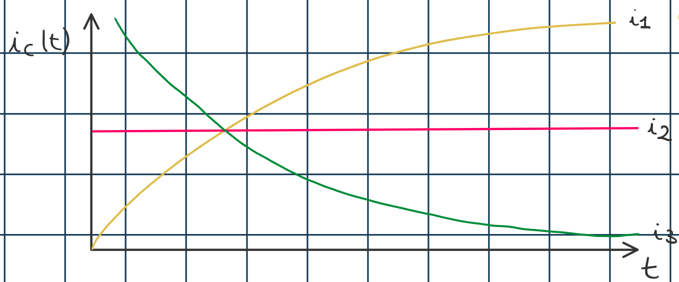
Ricordiamo che $p(t) = C \cdot v_C(t) \cdot \frac{dv(t)}{dt}$



CARICA → aumenta la ddp ovvero la carica / energia accumulata
$v'(t) > 0$
$i(t) > 0$

STAZIONARIO → carica ed energia sono costanti
$v'(t) = 0 = i(t)$

SCARICA → diminuisce la ddp ovvero la carica / energia accumulata
$v'(t) < 0$
$i(t) < 0$



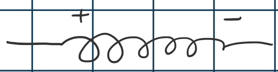
CARICA
$i'(t) > 0$
$v(t) > 0$

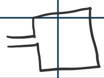
STAZIONARIO
i costante

SCARICA
$i(t) < 0$
$v(t) < 0$

La **LEGGE DI FARADAY** rientra nei casi in cui vi è

(con. utilizzatori) **autoinduzione** — (conv. generatori) **conversione energia**





es. energia meccanica in energia elettrica

caduta di tensione nell'induttore

$$V_L(t) = \frac{d\phi_B(t)}{dt}$$

dove ϕ_B è il flusso di autoinduzione

Forza elettromotrice

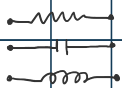
$$V_g(t) = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

CORTOCIRCUITARE

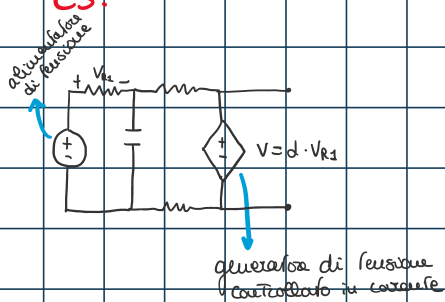
Unire (e dunque mettere in cortocircuito) due componenti (con un cortocircuito)

ELEMENTI

- **ATTIVI**
  - Generatori di
    - TENSIONE
      - IND.
      - CONT.
    - CORRENTE
      - IND.
      - CONT.
- **PASSIVI**



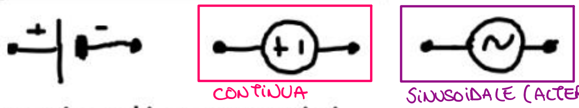
ES.



Componenti di base: i generatori indipendenti

Generatore indipendente di tensione

$v(t)=v_0(t)$



p(t) erogata senza vincoli energetici

Generatore indipendente di corrente

$i(t)=i_0(t)$

p(t) erogata senza vincoli energetici

Corto circuito e circuito aperto

vincola due punti in modo che abbiano lo stesso potenziale e cioè $\Delta V = 0$

$v(t)=0$

è descritto come un circuito chiuso

generatore di tensione spento (in realtà ogni collegamento è un corto circuito)

$i(t)=0$

è descritto come un circuito aperto

generatori disattivati

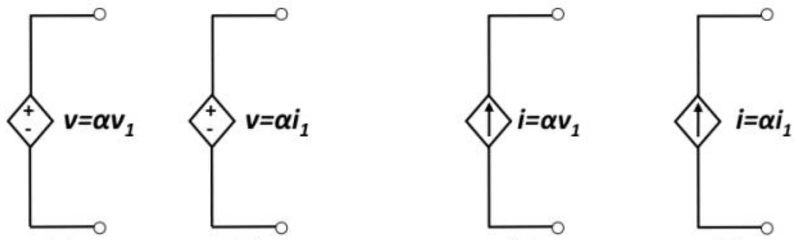
Componenti di base: i generatori dipendenti

Un **generatore ideale indipendente** è un elemento attivo che mantiene una tensione o corrente specificata che è completamente indipendente dalle altre variabili del circuito.

Un **generatore ideale dipendente** è un elemento attivo la cui tensione o corrente è controllata da un'altra tensione o corrente.

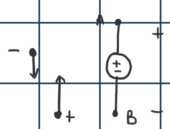
Generatore Tensione controllata in — GTCT (Tensione), GTCC (corrente)

Generatore corrente controllata in — GCCT (Tensione), GCCC (corrente)



32

GENERATORI DI TENSIONE IDEALE

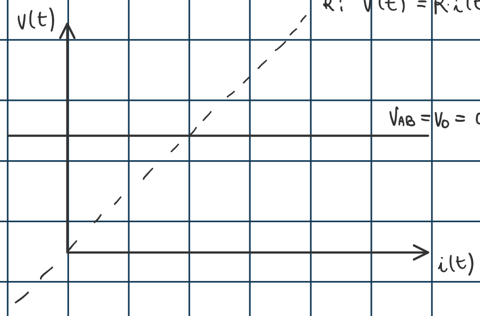


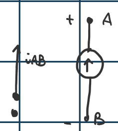
$$\Delta V = \begin{cases} \text{cost se il generatore è DC (Direct current)} \\ f(t) \text{ se } f(t) = V_0 \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0\right) \text{ e cioè è in AC (Alternative current)} \end{cases}$$

Caso DC:

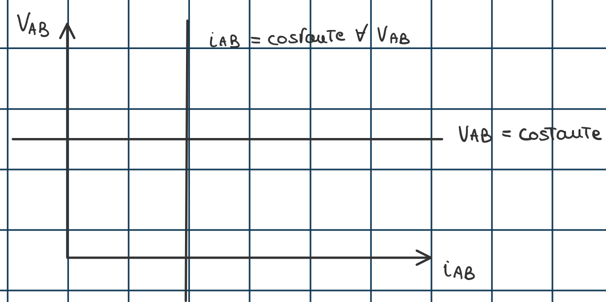
R: $v(t) = R \cdot i(t)$ → Resistore

$\boxed{V_{AB} \text{ è costante per ogni corrente } i}$

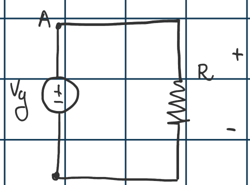




$$i_{AB} = \begin{cases} \text{costante se in DC} \\ g(t) \text{ se } g(t) = \cos(2\pi f t + \varphi_0) \text{ se in AC} \end{cases}$$



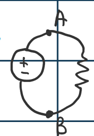
ESEMPIO



$V_g = V_A - V_B = V_{AB} = V_R$

$i = \frac{V_R}{R} = \frac{V_g}{R}$

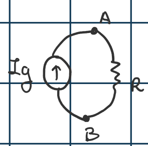
rotazione compatta



→ potenza erogata

$P_{V_g}^{(e)} = V_g \cdot i = V_g \cdot \frac{V_g}{R} = \frac{V_g^2}{R}$ [W]

Se $R \to 0$ allora $P_{V_g}^{(e)} \to +\infty$ *



$V_{I_g} = V_{AB} = R \cdot I_g$ [V]

$P_{I_g} = V_{I_g} \cdot I_g = R \cdot I_g^2$ [W]

Se $R \to +\infty$ allora $P_{I_g} \to +\infty$ *

* Nella realtà si usano degli accorgimenti per evitare che ci sia una potenza erogata infinita

Topologia dei circuiti

mercoledì 24 marzo 2021 10:36

Elementi di topologia dei Circuiti

Modulo di Elettrotecnica
CdL Ing. Informatica
A.A. 2020-2021

Marco Ricci, Stefano Laureti

1

Modello circuitale: Vincoli topologici

- Le tensioni variano solo ai capi dei componenti, le correnti solo dove si incontrano più "rami" del circuito;
- Ogni componente ha una caratteristica tensione-corrente univoca;
- i componenti sono considerati privi di dimensioni
- i collegamenti sono considerati conduttori perfetti (conducibilità infinita)→ niente caduta di potenziale lungo i conduttori né dissipazione di energia;
- nello spazio che circonda i componenti non ci sono cariche, il campo elettrico è conservativo, il campo magnetico è nullo

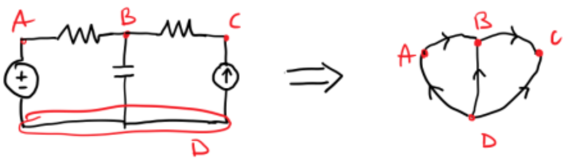
2

Topologia dei circuiti

Lo schema di un circuito è la rappresentazione astratta di un circuito fisico.

La disposizione degli elementi di un circuito nello schema può non avere relazione con la loro disposizione fisica (le dimensioni non contano).

Possiamo modificare e deformare lo schema di un circuito a piacere purché la disposizione delle connessioni tra i vari elementi rimanga la stessa



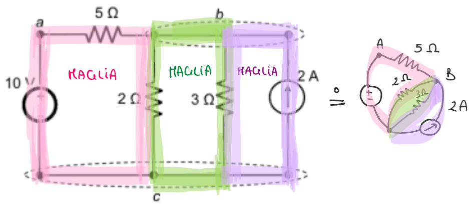
Topologia dei circuiti

lungo un ramo non c'è variazione di corrente

Un **ramo** rappresenta un singolo elemento attivo o passivo, quale ad esempio un generatore di tensione o un resistore.

Un **nodo** è il punto di connessione di due o più rami. ed è un punto EQUIPOTENZIALE

Una **maglia** è un qualunque percorso chiuso in un circuito.



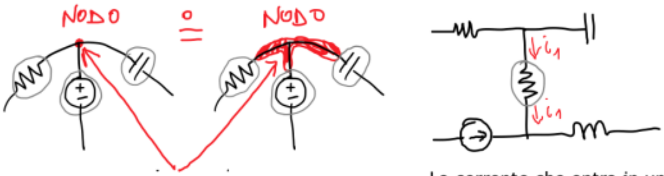
4

Topologia dei circuiti

Un nodo è un punto equipotenziale.

Tutti i collegamenti attaccati al nodo stanno allo stesso potenziale del nodo (ricorda: la tensione varia solo all'interno degli elementi che sono inaccessibili in quanto privi di dimensioni)

Un ramo è invece un tratto caratterizzato dall'essere attraversato in ogni suo punto dalla stessa corrente



Tutti i tratti di collegamenti attaccati ad un nodo sono equipotenziali

La corrente che entra in un elemento è uguale a quella che esce

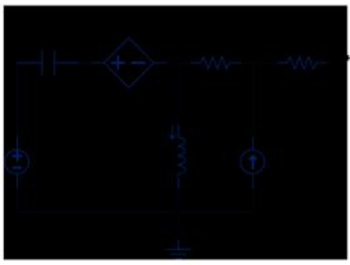
Topologia dei circuiti

Dato che la topologia di un circuito non dipende dal tipo di elementi ma solo dale loro connessioni reciproche, è utile introdurre il concetto di grafo, ovvero lo schema dei rami del circuito senza riportare gli elementi

Un grafo orientate è un grafo su cui si assegnano i versi delle correnti (e delle tensioni in accordo con la convenzione degli utilizzatori)

Topologia dei circuiti

Solo elementi che appartengono ad una maglia, ovvero solo gli elementi in cui scorre della corrente, contribuiscono alla funzionalità del circuito.

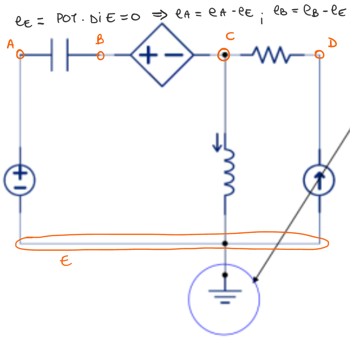


Questo elemento può essere rimosso senza influenzare ciò che accade nel resto del circuito, ovvero senza modificare la tensione ai capi degli altri elementi ne la corrente che vi scorre attraverso

Topologia dei circuiti

Esempio: Schema di un circuito:

e_E = POT. di E = 0 $\Rightarrow e_A = e_A - e_E$; $e_B = e_B - e_E$



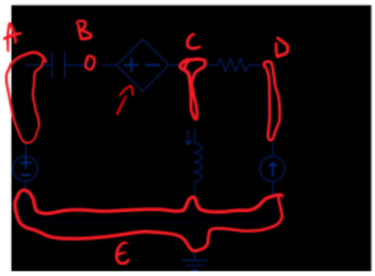
Messa a Terra

"*Ground*": di solito si usa assumere un punto (nodo) come riferimento per tutti gli altri per esprimere le differenze di potenziale tra diversi punti del circuito.

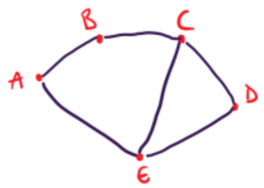
Al nodo di riferimento viene assegnato un potenziale nullo. *(NOTA: le forze dipendono dalla derivate del potenziale → l'aggiunta di una costante non cambia le forze in gioco)*

Topologia dei circuiti

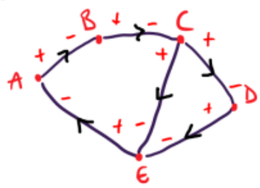
Esempio: Schema di un circuito:



GRAFO



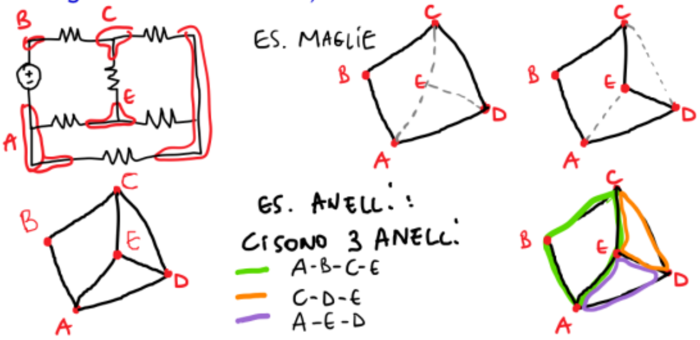
GRAFO ORIENTATO



Topologia dei circuiti

Una maglia è un qualsiasi percorso chiuso all'interno di un circuito in cui nessun nodo è percorso più di una volta.

Un anello è un particolare tipo di maglia tale che non contiene al suo interno altre maglie (si dice anche "maglia ad area minima")



Topologia dei circuiti

Se si conoscono tutti i potenziali dei nodi rispetto al potenziale del nodo preso come riferimento, allora tutte le grandezze elettriche del circuito possono essere determinate.

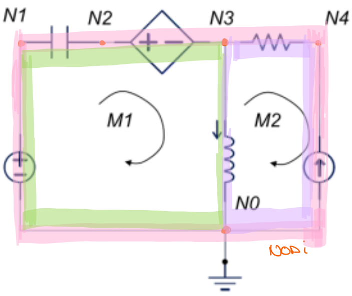
Lo stesso vale se conosciamo tutte le correnti degli anelli.

⇓

Potenziale dei nodi e correnti di anello sono due insieme di variabili indipendenti. Dai loro valori, tutti gli altri possono essere determinati.

Come trovare i valori delle variabili indipendenti (e come stabilire l'effettiva indipendenza) è lo scopo dei Metodi di Analisi dei Circuiti

Topologia dei circuiti



- In questo esempio ci sono 5 nodi e 2 anelli
- Oltre ai 2 anelli possiamo disegnare un'altra maglia che passa esternamente ai due anelli

Il GROUND (messa a Terra) ha lo scopo di far scaricare eventuali cariche accumulate

Leggi di Kirchhoff: KCL e KVL

→ Traduzione delle equazioni di Maxwell alla Topologia dei circuiti

Le leggi di delle correnti (Kirchhoff's Current Law - KCL) e delle tensioni (Kirchhoff's Voltage Law - KVL) sono le leggi fondamentali per l'analisi dei circuiti a partire dalla topologia degli stessi.

- la KCL è alla base del Metodo dei nodi, in cui

KVL) sono le leggi fondamentali per l'analisi dei circuiti a partire dalla topologia degli stessi.

- la KCL è alla base del Metodo dei nodi, in cui le incognite da trovare sono le tensioni dei nodi del circuito.
- la KVL è alla base del Metodo degli anelli, in cui le incognite da trovare sono le correnti di anello.

Legge di Kirchhoff delle correnti (KCL)

Dalla legge di conservazione della carica deriva la **prima legge di Kirchhoff**

La **legge di Kirchhoff delle correnti (KCL)** stabilisce che la somma algebrica delle correnti che entrano in un nodo (o in una superficie chiusa) è zero.

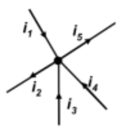
Se tale somma fosse diversa da zero allora ci sarebbe un accumulo di carica sulle congiunzioni esterne ai componenti (cosa si ipotizza non possibile)

$$\sum_{n=1}^{N} \pm i_n = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

N: rami connessi al nodo

i_n: n-esima corrente che entra o esce dal nodo



entra, esce

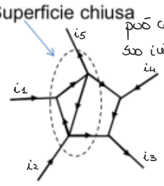
$$+i_1 - i_2 + i_3 + i_4 - i_5 = 0$$

$$\Rightarrow i_1 + i_3 + i_4 = i_2 + i_5$$

es. $i - i_1 - i_2 = 0 \Downarrow i = i_1 + i_2$

Superficie chiusa

può comprendere al suo interno più nodi



Somma delle correnti entranti = Somma delle correnti uscenti

14

Legge di Kirchhoff delle tensioni (KVL)

deriva dall'ip. che il campo elettrico sia conservativo e dunque è una conseguenza della conservazione dell'energia

Dal principio di conservazione dell'energia deriva la **seconda legge di Kirchhoff**

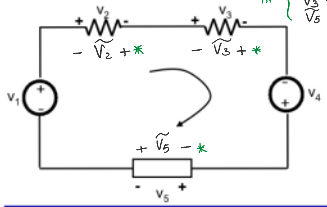
La **legge di Kirchhoff delle tensioni (KVL)** stabilisce che la somma algebrica delle tensioni lungo un percorso chiuso (o maglia) è zero.

$$\sum_{m=1}^{M} \pm v_m = 0$$

M: numero di tensioni (o rami) nella maglia

v_m: m-esima tensione

$* \begin{cases} \tilde{V}_2 = -V_2 \\ \tilde{V}_3 = -V_3 \\ \tilde{V}_5 = -V_5 \end{cases}$



$$-v_1 + v_2 + v_3 - v_4 + v_5 = 0$$

$$\Rightarrow v_1 + v_4 = v_2 + v_3 + v_5$$

Somma delle cadute di tensione = Somma degli aumenti di tensione.

15

ATTENZIONE!

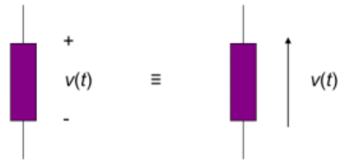
In presenza di induzione magnetica il campo non è conservativo ma, per l'ipotesi di costanti concentrate, il fenomeno è concentrato nell'induttore o nei generatori se essi sono basati sulla legge dell'induzione

KCL e KVL

Applicazione della KVL:

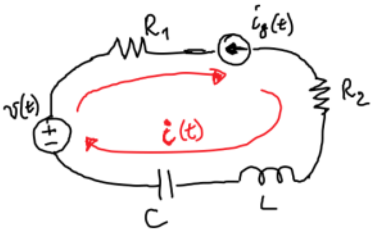
Seguendo il verso prescelto di percorrenza di una maglia, una tensione (d.d.p) si prende positiva se si entra dal segno "+", si prende negative se si entra nel "-"

In alcuni testi si usano delle frecce per rappresentare la d.d.p; la freccia parte dal "-" e punta al "+".



Resistenze in serie

In un circuito avente una sola maglia, la maglia è anche un anello. In tutti gli elementi del circuito fluisce la STESSA CORRENTE – gli elementi sono detti essere in SERIE.

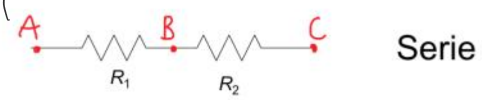


$$i(t) = -i_g(t) =$$
$$= i_v(t) = i_{R_1} = i_{R_2}$$
$$= i_C = i_L$$

Resistenze in serie

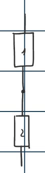
⇒ Due elementi sono in serie quando sono attraversati dalla stessa corrente

Attraversando la resistenze, la corrente rimane la stessa ma diminuisce e' energia potenziale e dunque vi è una caduta

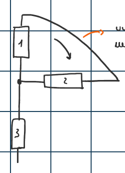


TOPOLOGIA: Due elementi sono in serie quando condividono un nodo in maniera esclusiva, nessun altro element è connesso al nodo comune

Serie:



Non serie:



un ramo così non modifica il circuito

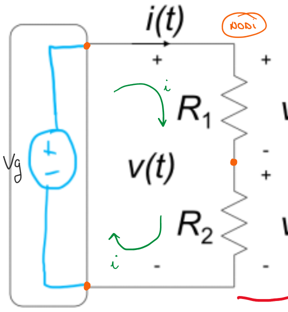
Il conduttore ohmico si comporta come un fluido e dunque la velocità della particella è costante perché le accelerazioni sono bilanciate dagli urti

Resistenze in serie

Consideriamo due resistenze in serie con una tensione $v(t)$ applicata ai loro capi:

Partitore di tensione:

se voglio dividere la Tensione Totale V_g, posso usare delle resistenze in serie in quanto $V_g = V_1 + V_2 + \dots V_n$



$$v_1(t) = v(t)\frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$v_2(t) = v(t)\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

KVL dell'anello:

$+V_{R1} + V_{R2} - V_g = 0 \Rightarrow +i \cdot R_1 + i \cdot R_2 - V_g = 0 \Rightarrow i = \frac{V_g}{R_1+R_2}$

imposto dal problema

si ha che:

$0 \le V_{R1} \le V_g$

$0 \le V_{R2} \le V_g$

$V_{R1} + V_{R2} = V_g$

ES.

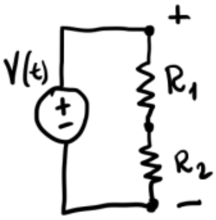
Se ho una batteria da 12 V e una lampadina da 10 V (che effettivamente è una resistenza), devo mettere una resistenza da 2 V.

La lampadina in questo caso (di resi. $= R_L$) sarà progettata per essere attraversata da una corrente $i = \frac{10}{R_L}$

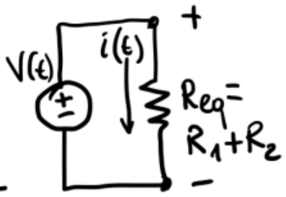
Resistenze in serie

La relazione tensione-corrente ai capi delle due resistenze non cambia se sostituiamo le due resistenze in serie con una singola RESISTENZA EQUIVALENTE di valore

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

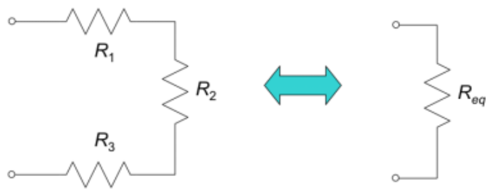


$i(t) = \frac{V(t)}{R_1+R_2} = \frac{V(t)}{R_{eq}}$



Resistenze in serie

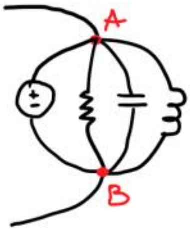
Per N resistori in serie, la RESISTENZA EQUIVALENTE ha un valore dato da:



$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_N$$

Resistenze in parallelo

Quando i due terminali di due o più bipoli sono connessi alla stessa coppia di nodi, tutti i bipoli vedono la stessa differenza di potenziale ai capi e gli elementi sono detti essere in PARALLELO

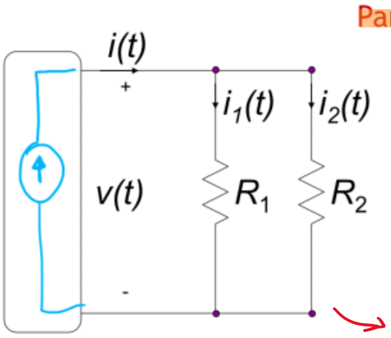


Resistenze in parallelo

Consideriamo due resistenze in PARALLELO con una tensione $v(t)$ ai loro capi:

Partitore di corrente

se voglio dividere la corrente totale i_g, posso usare delle resistenze in parallelo in quanto $i = i_1 + i_2 + \dots + i_n$



$$i_1(t) = i(t)\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$i_2(t) = i(t)\frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$-i_g + i_{R1} + i_{R2} = 0 \Rightarrow -i_g + \frac{V_{R1}}{R_1} + \frac{V_{R2}}{R_2} = 0 \Rightarrow V_{R1} = V_{R2} = e_A - e_B = e_A$$

$$\Downarrow$$

$$-i_g + \frac{e_A}{R_1} + \frac{e_A}{R_2} = 0 \Rightarrow e_A\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = i_g \Rightarrow e_A(G_1 + G_2) = i_g \Rightarrow e_A = \frac{i_g}{G_1 + G_2} \Leftrightarrow i = \frac{v_g}{R_1 + R_2}$$

partitore di corrente

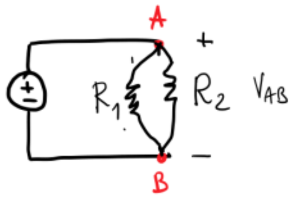
$$e_A = i_g \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \Leftrightarrow i = v_g \frac{G_1 \cdot G_2}{G_1 + G_2}$$

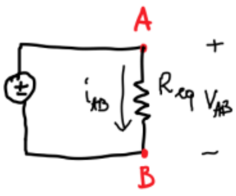
partitore di tensione

Resistenze in parallelo

La relazione tensione-corrente ai capi delle due resistenze non cambia se sostituiamo le due resistenze in parallelo con una singola RESISTENZA EQUIVALENTE di valore

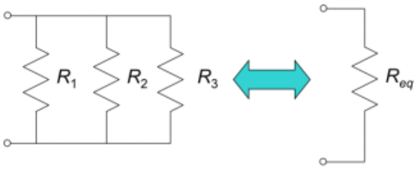
$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \qquad \frac{\min(R_1, R_2)}{2} \le R_{eq} < \min(R_1, R_2)$$





Resistenze in parallelo

Per N resistori in parallelo, la RESISTENZA EQUIVALENTE ha un valore dato da:



$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_N}}$$

Resistenze in parallelo

Se noi utilizziamo la conduttanza invece della resistenza otteniamo:

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_N}}$$

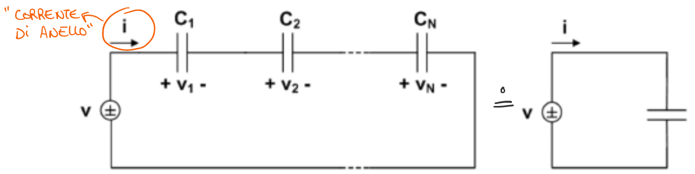
$$G_{eq} = G_1 + G_2 + G_3 + \cdots + G_N$$

In serie si sommano le resistenze, in parallel si sommano le conduttanze, questo è un esempio della dualità dei circuiti

* dimostrazioni a fine pagina

Condensatori in serie

La capacità equivalente di N condensatori collegati in serie è pari al reciproco della somma dei reciproci delle singole capacità.



$$v = v_1 + v_2 + \ldots + v_N$$

$$v = \frac{1}{C_1}\int_{t_0}^{t} i(t)dt + v_1(t_0) + \frac{1}{C_2}\int_{t_0}^{t} i(t)dt + v_2(t_0) + \cdots + \frac{1}{C_N}\int_{t_0}^{t} i(t)dt + v_N(t_0) =$$

$$= \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_N}\right)\int_{t_0}^{t} i(t)dt + v_1(t_0) + v_2(t_0) + \cdots + v_N(t_0) = \frac{1}{C_{eq}}\int_{t_0}^{t} i(t)dt + v(t_0)$$

Condensatori in serie

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_N}}$$

27

FORMULA GEOMETRICA

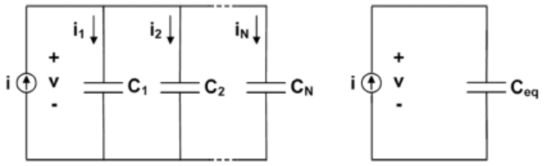
$$C = \frac{\varepsilon \cdot A}{d}$$

Mettere dei condensatori in serie ha lo scopo di partizionare i condensatori nel caso in cui io abbia a disposizione condensatori di bassa capacità

→ PARTITORE A CONDENSATORI

Condensatori in parallelo

La capacità equivalente di N condensatori collegati in parallelo è pari alla somma delle singole capacità.



$$i = i_1 + i_2 + ... + i_N$$

$$i = C_1\frac{dv}{dt} + C_2\frac{dv}{dt} + ... + C_N\frac{dv}{dt} = C_{eq}\frac{dv}{dt}$$

Condensatori in parallelo

$$\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2 + ... + C_N}$$

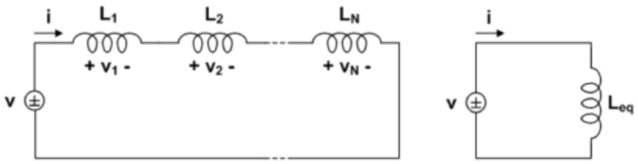
28

DIFFERENZA COND. / IND.:

Il condensatore conserva energia elettrica sotto forma di campo elettrico mentre l'induttore sotto forma di campo magnetico

Induttori in serie

L'induttanza equivalente di N induttori collegati in serie è pari alla somma delle singole induttanze.



$$v = v_1 + v_2 + ... v_N$$

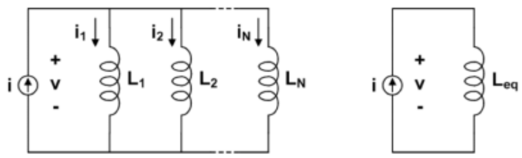
$$v = L_1\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt} + ... + L_N\frac{di}{dt} = L_{eq}\frac{di}{dt}$$

$$\boxed{L_{eq} = L_1 + L_2 + ... + L_N}$$

29

Induttori in parallelo

L'induttanza equivalente di N induttori collegati in parallelo è pari al reciproco della somma dei reciproci delle singole induttanze.



$$i = i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_N$$

$$i = \frac{1}{L_1}\int_{t_0}^{t} v(t)dt + i_1(t_0) + \frac{1}{L_2}\int_{t_0}^{t} v(t)dt + i_2(t_0) + \cdots + \frac{1}{L_N}\int_{t_0}^{t} v(t)dt + i_N(t_0) =$$

$$= \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_N}\right)\int_{t_0}^{t} v(t)dt + i_1(t_0) + i_2(t_0) + \cdots + i_N(t_0) = \frac{1}{L_{eq}}\int_{t_0}^{t} v(t)dt + i(t_0)$$

$$\boxed{\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + ... + \frac{1}{L_N}}$$

30

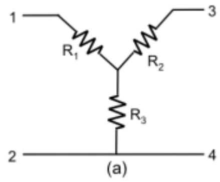
Riepilogo connessioni serie e parallelo

	SERIE	PARALLELO
RESISTORI	$R_{eq} = R_1 + R_2 + ... + R_N$	$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ... + \frac{1}{R_N}$
CONDENSATORI	$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + ... + \frac{1}{C_N}$	$C_{eq} = C_1 + C_2 + ... + C_N$
INDUTTORI	$L_{eq} = L_1 + L_2 + ... + L_N$	$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + ... + \frac{1}{L_N}$

31

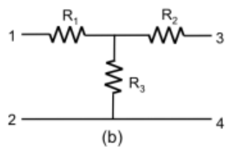
Trasformazioni stella-triangolo

STELLA



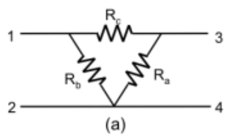
(a)

T



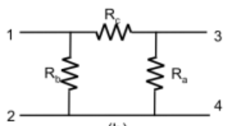
(b)

TRIANGOLO



(a)

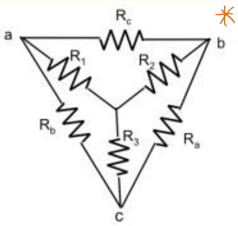
π



(b)

32

Trasformazioni stella-triangolo



$$R_1 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c} \qquad R_a = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_1}$$

$$R_2 = \frac{R_c R_a}{R_a + R_b + R_c} \qquad R_b = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_2}$$

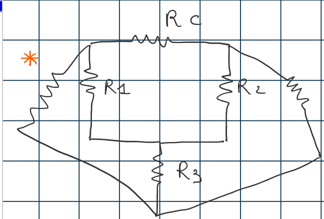
$$R_3 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c} \qquad R_c = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_3}$$

Ciascun resistore della rete a **stella** è il prodotto dei resistori nei due rami adiacenti delle rete a triangolo, diviso per la somma dei tre resistori del triangolo.

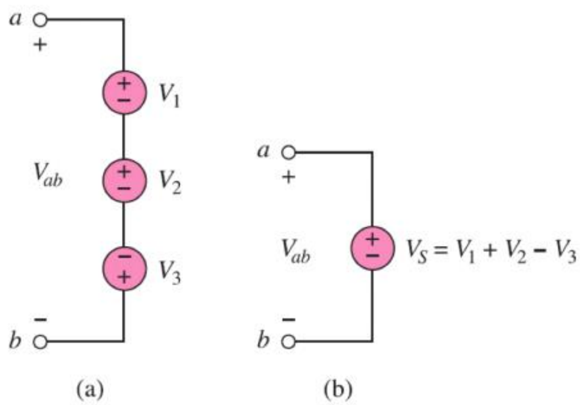
Ciascun resistore della rete a **triangolo** è pari alla somma di tutti i prodotti dei resistori della stella presi a due a due, divisa per il resistore ad esso opposto nella stella.

$$R_Y = \frac{R_\Delta}{3} \rightarrow R_\Delta = 3R_Y$$

33

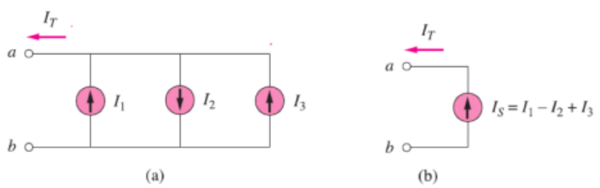


Generatori di tensione in serie



34

Generatori di corrente in parallelo



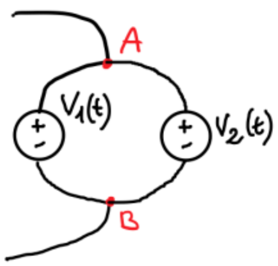
35

Generatori reali

INCONGRUENZE LEGATE AI MODELLI IDEALI

- Se $V_1(t) \neq V_2(t)$ → $V_1 = e_A - e_B$, $V_2 = e_A - e_B$ ⇒ $V_1 = V_2$ che è un assurdo

  Pretenderei che agli stessi nodi si abbiano contemporaneamente due ddp differenti



- Se $V_1(t) = V_2(t)$

  L'equilibrio alla maglia

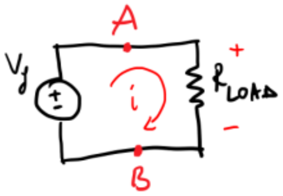
$$V_1(t) - V_2(t) = 0$$

non consente di calcolare la corrente che scorre (infinite soluzioni).

Generatori reali

INCONGRUENZE LEGATE AI MODELLI IDEALI

Un generatore ideale può erogare una potenza infinita



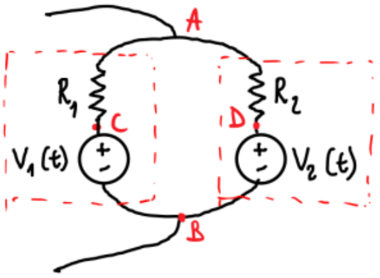
$$V_{R_{LOAD}} = V_g$$

$$P_{R_{LOAD}} = \frac{V_g^2}{R_{LOAD}}$$

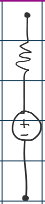
$$\text{SE } R_{LOAD} \longrightarrow 0 \Rightarrow P_{R_{LOAD}} \longrightarrow +\infty$$

Generatori reali

Occorre introdurre un modello più accurato, combinando più elementi ideali (serie di un generatore di tensione e di un resistore).



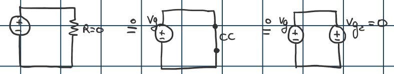
Questo modello più accurato consente di evitare le incongruenze e le limitazioni evidenziate.



approssima la pila poiché al suo interno vi sono fenomeni resistivi modellabili come una resistenza

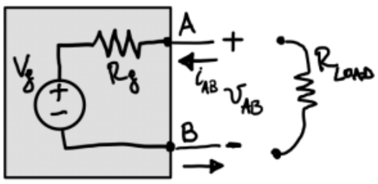
Caso limite di un resistore nullo => CORTO CIRCUITO

Caso limite di un generatore spento => CORTO CIRCUITO



Generatori reali

NOTA BENE: Un generatore reale di tensione non può mai erogare potenza infinita, un generatore reale ha sempre una resistenza interna che limita la corrente erogabile



Se chiudiamo un generatore reale di tensione su un carico resistivo otteniamo un partitore di tensione

Questo modello più accurato consente di evitare le incongruenze e le limitazioni evidenziate.

Generatori reali

INCONGRUENZE LEGATE AI MODELLI IDEALI

Se $i_1(t) \neq i_2(t)$

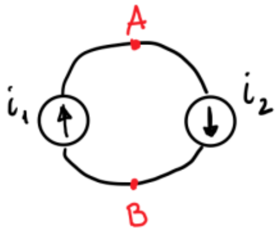
Pretenderei che sulla stessa Maglia si abbiano contemporaneamente due correnti differenti

Se $i_1(t) = i_2(t)$

La KLC ai nodi A o B

$$i_1(t) - i_2(t) = 0$$

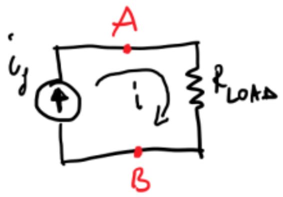
non consente di calcolare la tensione ai capi dei generatori (infinite soluzioni).



Generatori reali

INCONGRUENZE LEGATE AI MODELLI IDEALI

Un generatore ideale può erogare una potenza infinita



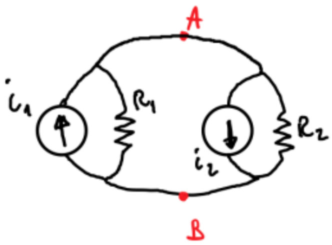
$$i_{R_{LOAD}} = i_g$$

$$P_{R_{LOAD}} = (i_g)^2 \cdot R_{LOAD}$$

se $R_{LOAD} \to +\infty \Rightarrow P_{R_{LOAD}} \to +\infty$

Generatori reali

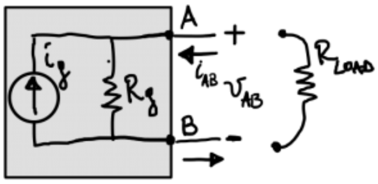
Occorre introdurre un modello più accurato, combinando più elementi ideali (parallelo di un generatore di corrente e di un resistore).



Questo modello più accurato consente di evitare le incongruenze e le limitazioni evidenziate.

Generatori reali

NOTA BENE: Un generatore reale di corrente non può mai erogare potenza infinita, un generatore reale ha sempre una resistenza interna che limita la tensione ai morsetti

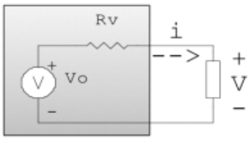


Se chiudiamo un generatore reale di corrente su un carico resistivo otteniamo un partitore di tensione

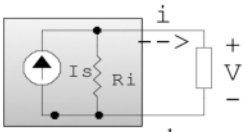
Questo modello più accurato consente di evitare le incongruenze e le limitazioni evidenziate.

Generatori reali

Equivalenza **esterna** dei generatori reali



$$V = V_0 - R_V i$$



$$i = i_0 - \frac{1}{R_i} v$$

I due generatori possono essere sostituiti tra loro in maniera equivalente.

Dalla equazione di equilibrio delle correnti al generatore di corrente ho:

$$i + \frac{v}{R_i} - I_S = 0 \Rightarrow I_S - i = \frac{v}{R_i}$$

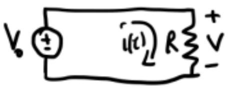
equivalente a quella del generatore di tensione se

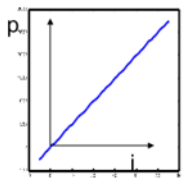
$V_0 = R_I I_S$ ed $R_v = R_i$

Generatori reali

Confronto tra modelli del generatore reale

Confrontiamo il generatore ideale di tensione con il modello del generatore reale di tensione tramite la potenza erogata sul carico esterno

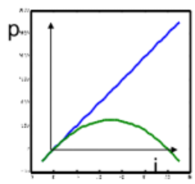




$P = v \cdot i = v_0 \cdot i$

dove $i = V_0/R$ (carico resistivo)

segue $\lim\limits_{\substack{i \to \infty \\ R = 0}} (P) = \infty$



$P = v \cdot i = (v_0 - R_v i) \cdot i = v_0 i - R_v i^2$

dove $i = V_0 / (R_v + R)$ (carico resistivo)

Generatori reali

La massima corrente che il generatore reale può far circolare si ha per la chiusura in corto circuito

$$i_{MAX} = i_{CC} = \frac{V_0}{R_v}$$

.

a cui corrisponde una potenza erogata al carico R nulla ()

$$p_{icc} = v_0 \cdot \frac{v_0}{R_v} - R_v \left(\frac{v_0}{R_v}\right)^2 = 0$$

La potenza massima su R si ha per $i = \frac{i_{cc}}{2}$ e vale $P_m = \frac{v_0^2}{4R_v}$

Per R_v=0 la potenza cresce indefinitamente al crescere di i (generatore ideale).

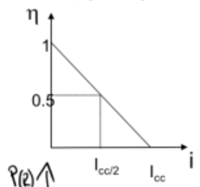
LA LIMITAZIONE NELLA MASSIMA POTENZA EROGABILE E' LEGATA ALLA PRESENZA DI Rv

Generatori reali

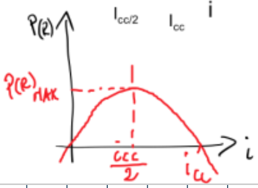
Rendimento

$$\eta = \frac{\text{potenza assorbita dal carico}}{\text{Potenza erogata dal generatore ideale}}$$

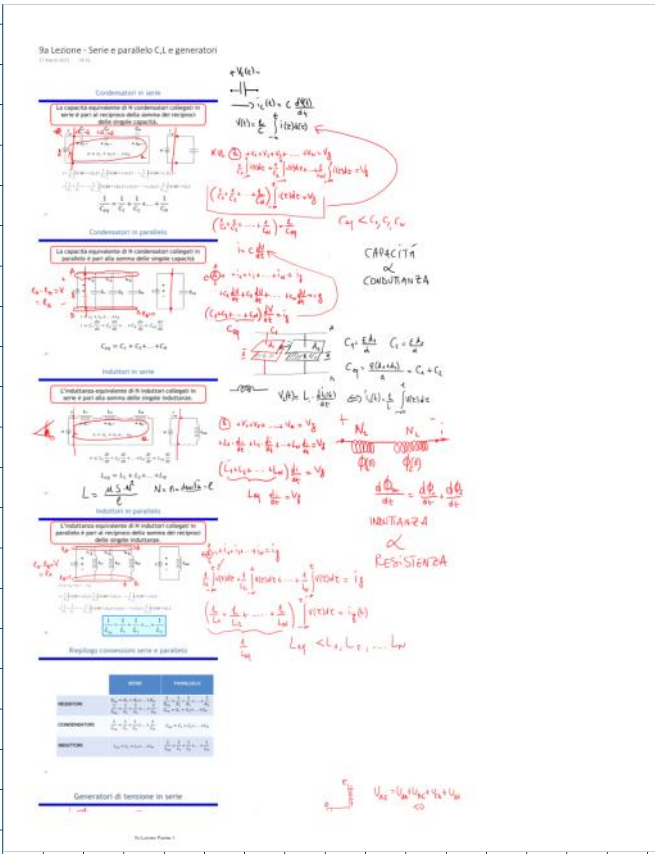
$$\eta = \frac{p}{p_0} = \frac{V \cdot I}{V_0 \cdot I} = \frac{(V_0 - V_R) \cdot I}{V_0 \cdot I} = 1 - \frac{V_R \cdot I}{V_0 \cdot I} = 1 - \frac{R \cdot I}{V_0}$$



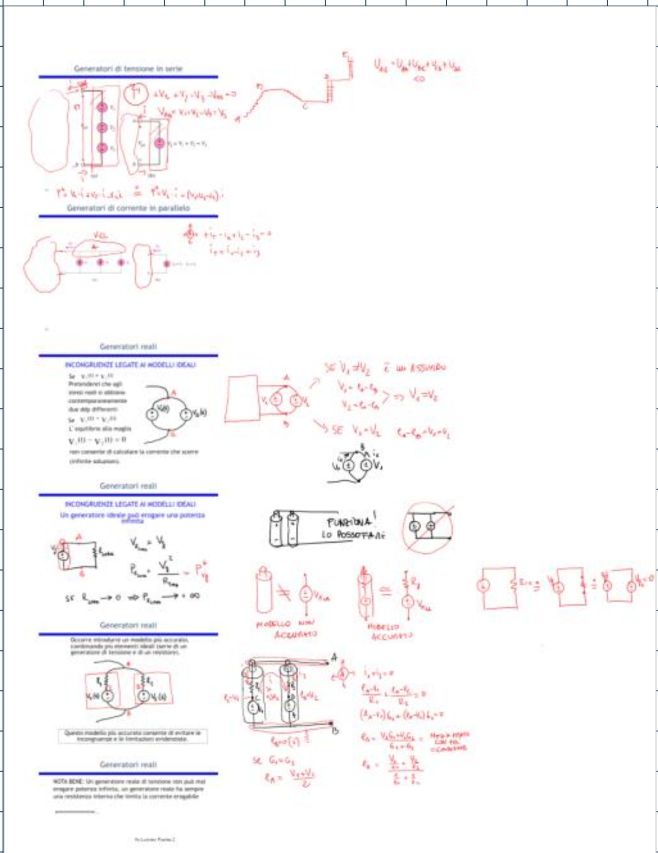
- Elevato rendimento (trasporto di energia)
- Massima potenza trasferita (trasmissione segnali)



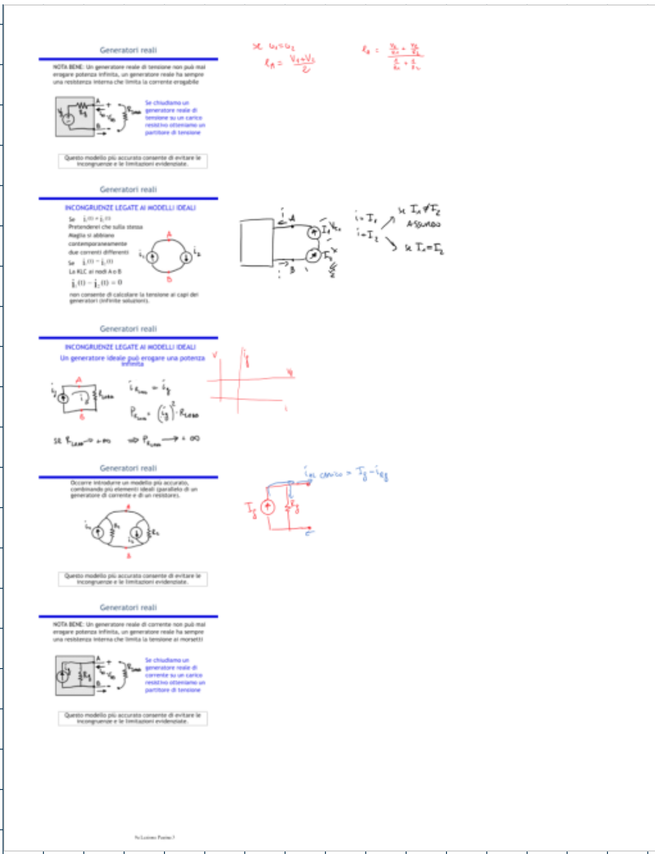
DiMOSTRAZIONE CONDENSATORi

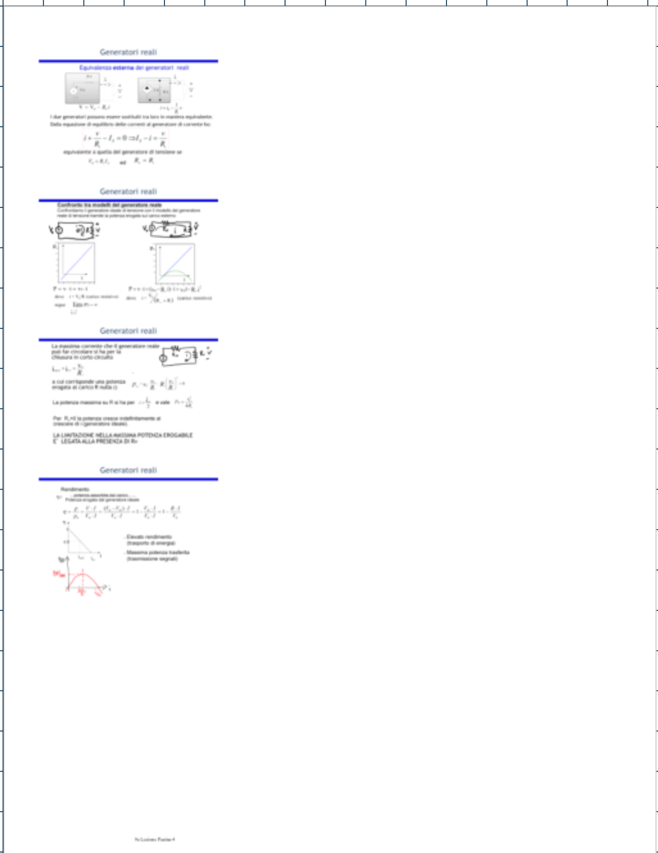


9a Lezione - Serie e parallelo C,L e generatori
Condensatori in serie
Condensatori in parallelo
CAPACITÀ ∝ CONDUTTANZA
Induttori in serie
Induttori in parallelo
INDUTTANZA ∝ RESISTENZA
Riepilogo connessioni serie e parallelo
Generatori di tensione in serie



Generatori di tensione in serie
Generatori di corrente in parallelo
Generatori reali
INCONGRUENZE LEGATE AI MODELLI IDEALI
Generatori reali
INCONGRUENZE LEGATE AI MODELLI IDEALI
Un generatore ideale può erogare una potenza infinita
FUNZIONA!
LO POSSO FARE
MODELLO NON ACCURATO
MODELLO ACCURATO
Generatori reali
Generatori reali


Generatori reali
NOTA BENE: Un generatore reale di tensione non può mai erogare potenza infinita, un generatore reale ha sempre una resistenza interna che limita la corrente erogabile
Se chiudiamo un generatore reale di tensione su un carico resistivo otteniamo un partitore di tensione
Questo modello più accurato consente di evitare le incongruenze e le limitazioni evidenziate.
se $v_1 = v_2$
$e_A = \frac{V_1+V_2}{2}$
Generatori reali
INCONGRUENZE LEGATE AI MODELLI IDEALI
Pretenderei che sulla stessa Maglia si abbiano contemporaneamente due correnti differenti
La KLC ai nodi A e B
non consente di calcolare la tensione ai capi dei generatori (infinite soluzioni).
$i = I_1$
$i = I_2$
se $I_1 \neq I_2$ ASSURDO
se $I_1 = I_2$
Generatori reali
INCONGRUENZE LEGATE AI MODELLI IDEALI
Un generatore ideale può erogare una potenza infinita
se $R_{LOAD} \to +\infty \Rightarrow P_{R_{LOAD}} \to +\infty$
Generatori reali
Occorre introdurre un modello più accurato, combinando più elementi ideali (parallelo di un generatore di corrente e di un resistore).
$i_{al\ carico} = I_g - i_{R_g}$
Questo modello più accurato consente di evitare le incongruenze e le limitazioni evidenziate.
Generatori reali
NOTA BENE: Un generatore reale di corrente non può mai erogare potenza infinita, un generatore reale ha sempre una resistenza interna che limita la tensione ai morsetti
Se chiudiamo un generatore reale di corrente su un carico resistivo otteniamo un partitore di tensione
Questo modello più accurato consente di evitare le incongruenze e le limitazioni evidenziate.


Generatori reali
Equivalenza esterna dei generatori reali
I due generatori possono essere sostituiti tra loro in maniera equivalente.
Dalla equazione di equilibrio delle correnti al generatore di corrente ho:
equivalente a quella del generatore di tensione se
Generatori reali
Confronto tra modelli del generatore reale
Generatori reali
La massima corrente che il generatore reale può far circolare si ha per la chiusura in corto-circuito
a cui corrisponde una potenza erogata al carico R nulla
La potenza massima su R si ha per
Per $R_i = 0$ la potenza cresce indefinitamente al crescere di i (generatore ideale).
LA LIMITAZIONE NELLA MASSIMA POTENZA EROGABILE E' LEGATA ALLA PRESENZA DI Ri
Generatori reali
Rendimento
Elevato rendimento (trasporto di energia)
Massima potenza trasferita (trasmissione segnali)

Esercizi

giovedì 25 marzo 2021 12:59

16 March 2021 09:28

Potenza ed energia

Convenzione degli utilizzatori:
1) La corrente va dal «+» al «-»
2) $v_{AB} \times i = p^{(a)}$ (pot. assorbita)

Convenzione dei generatori:
1) La corrente va dal «-» al «+»
2) $v_{AB} \times i = p^{(g)}$ (pot. generata)

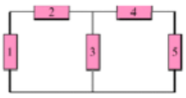
$p^{(a)} > 0 \Rightarrow$ **il bipolo assorbe potenza**
$p^{(a)} < 0 \Rightarrow$ **il bipolo eroga potenza**

$p^{(g)} > 0 \Rightarrow$ **il bipolo eroga potenza**
$p^{(g)} < 0 \Rightarrow$ **il bipolo assorbe potenza**

Salvo avviso contrario, nel seguito si farà sempre riferimento alla convenzione degli utilizzatori.

20

Esercizio
La figura sottostante mostra una rete di 5 elementi. Se
$p_1 = -205\,\text{W}, p_2 = 60\,\text{W}, p_4 = 45\,\text{W}, p_5 = 30\,\text{W}$ [P. ASSORBITE]
quant'è la potenza assorbita o erogata dall'elemento 3?

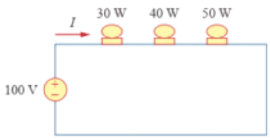


Si ha che $\sum_k P_k = 0 \Rightarrow P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 \Rightarrow$
$\Rightarrow P_3 = 205 - 60 - 45 - 30 = 70\,\text{W}$

Ergo Potenza assorbita $= -70\,\text{W}$ Potenza erogata

Esercizio

Tre lampadine sono collegate in serie ad un generatore di tensione da 100 [V] e consumano (Potenza assorbita) rispettivamente 30, 40 e 50 [W].
Sfruttando il principio di conservazione dell'energia, calcolare la corrente I e le resistenze delle Tre lampadine



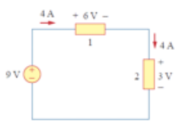
$P^e_{gen} = \sum P^a_{LAMP} = 30 + 40 + 50 = 120\,[\text{W}]$

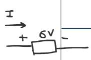
$P^e_{gen} = V_g \cdot I \Rightarrow I = \frac{120\,\text{W}}{100\,\text{V}} = 1{,}2\,[\text{A}]$

$P^a_R = I^2 \cdot R \Rightarrow R_1 = \frac{30\,\text{W}}{1{,}44\,\text{A}^2} \cong 20{,}8\,[\Omega]$

$R_2 = \frac{40}{1{,}44} \simeq 27{,}8\,[\Omega]$; $R_3 = \frac{50}{1{,}44} \cong 34{,}7\,[\Omega]$

Esercizio
Calcolare la potenza assorbita o erogata da ogni elemento nella figura sottostante





$P_1^A = 6 \cdot 4 = 24\,[\text{W}]$

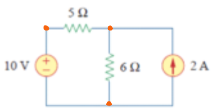
$P_2^A = 4 \cdot 3 = 12\,[\text{W}]$

$P_{Vg}^e = P_1^A + P_2^A = 36\,[\text{W}] = V \cdot I = 9 \cdot 4\,[\text{W}]$

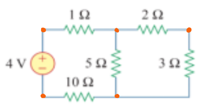
convenzione dei generatori

RIEPILOGO TOPOLOGIA

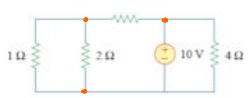
Dati i circuiti sottostanti, individuatene i nodi e le maglie



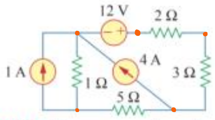
RAMI : 4
NODI : 3
ANELLI : 2
MAGLIE : 3



RAMI : 6
NODI : 5
ANELLI : 2
MAGLIE : 3



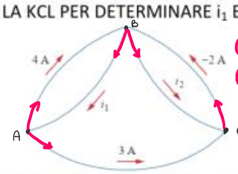
RAMI: 5
NODI: 3
ANELLI: 3
MAGLIE: 6



RAMI: 7
NODI: 5
ANELLI: 3
MAGLIE: 6

DOMANDA: dato un generico circuito planare con R rami e N<=R nodi, quanti anelli ci sono? $N_A = R - N + 1$

UTILIZZATE LA KCL PER DETERMINARE i_1 E i_2

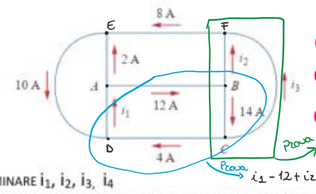


(A) $4A - i_1 + 3A = 0 \Rightarrow i_1 = 7A$

(B) $-4 + i_1 + i_2 - (-2) = 0$ corretto

(C) $-3 - i_2 - 2 \Rightarrow i_2 = -5A$

UTILIZZATE LA KCL PER DETERMINARE i_1, i_2 E i_3



(A) $2 + 12 - i_1 = 0 \Rightarrow i_1 = 14A$

(B) $i_2 - 12 + 14 = 0 \Rightarrow i_2 = -2A$

(C) $4 - 14 + i_3 = 0 \Rightarrow i_3 = 10A$

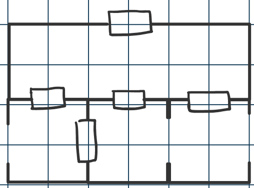
Prova $8 - 12 + 4 = 0$ Corretto

Prova $i_1 - 12 + i_2 + i_3 - 10 = 0 \Rightarrow 14 - 12 - 2 + 10 - 10 = 0$ Corretto

DETERMINARE i_1, i_2, i_3, i_4
SUGGERIMENTO: LA KCL VALE PER UNA QUALSIASI CURVA/SUPERFICIE CHIUSA

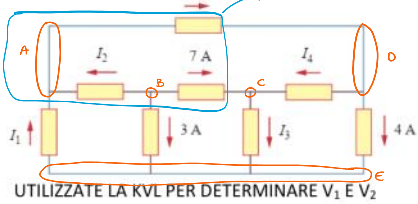
Nuova sezione 1 Pagina 3

Prova: una volta risolto il circuito, si può operare una verifica applicando le leggi di kirchoff al circuito



CHE TAGLI I RAMI DEL CIRCUITO -> Tagliate il ramo di una corrente incognita e rami con correnti note

Prova $-i_1 + 3 + 7 + 2 = 0 \Rightarrow i_1 = 12A$



(A) $-i_1 - i_2 + 2 = 0 \Rightarrow i_1 = 12A$

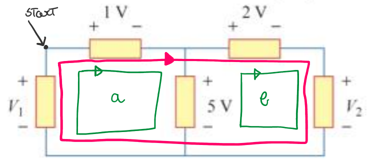
(B) $i_2 + 7 + 3 = 0 \Rightarrow i_2 = 10A$

(C) 2 incognite

(D) $-2 + i_4 + 4 = 0 \Rightarrow i_4 = -2A$

(E) 2 incognite

UTILIZZATE LA KVL PER DETERMINARE V_1 E V_2

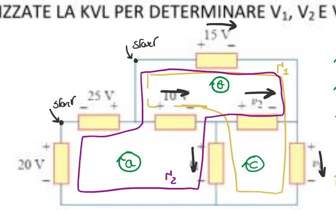


(a) $1V + 5V - V_1 = 0 \Rightarrow V_1 = 6V$

(b) $2 + V_2 - 5 = 0 \Rightarrow V_2 = 3V$

(T) $1 + 2 + V_2 - V_1 = 0 \Rightarrow 1 + 2 + 3 - 6 = 0$

UTILIZZATE LA KVL PER DETERMINARE V_1, V_2 E V_3



(a) $-25 + 10 + V_1 - 20 = 0 \Rightarrow V_1 = 35[V]$

(b) $15 - V_2 - 10 = 0 \Rightarrow V_2 = 5[V]$

(c) $V_2 + V_3 - V_1 = 0 \Rightarrow V_3 = 35 - 5 = 30[V]$

(Γ_1) $15 + V_3 - V_1 - 10 = 15 + 30 - 35 - 10 = 0$

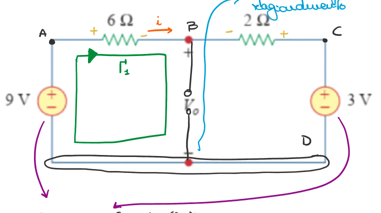
(Γ_2) $-25 + 15 - V_2 + V_1 - 20 = -30 - V_2 + V_1 = 0$

corretto

DETERMINARE V_0
NOTA: LA KVL VALE PER UN QUALSIASI PERCORSO CHIUSO CHE
PASSI PER DEI NODI DEL CIRCUITO

Nuova sezione 1 Pagina 4

posso disegnare un circuito aperto per facilitarmi le cose



Γ_1: $6i + V_o - 9V = 0$

$\Rightarrow V_o = 9 - 6i$

sapendo che

$6i + 2i + 3 - 9 = 0$

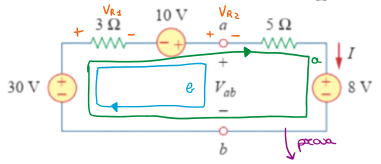
$\Rightarrow i = \frac{3}{4}$

allora

$V_o = \frac{9}{2}$ [V]

I due generatori in serie possono essere descritti attraverso un generatore equivalente

UTILIZZATE LA KVL PER DETERMINARE V_{ab} E I



1) Trovo i con ⓐ e la legge di ohm

2) Trovo V_{AB} con ⓑ

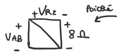
ⓐ $3i - 10 + 5i + 8 - 30 = 0$

$\Rightarrow 8i = 32 \Rightarrow i = 4$ [A]

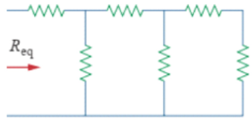
ⓑ $3i - 10 + V_{AB} - 30 = 0$

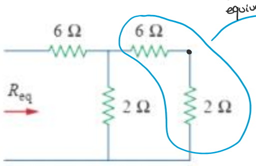
$\Rightarrow V_{AB} = 40 - 3i = 28$ [V]

prova

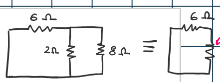


poiché $V_{AB} = 28 = 8 + 5 \cdot 4 = 28$





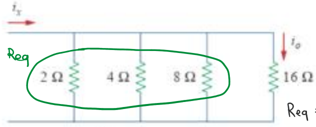
circuito equivalente

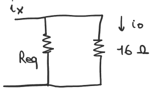


$\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{16}{10} = 1{,}6\ \Omega$

dunque $R_{eq} = 6 + 1{,}6 = 7{,}6\ \Omega$

Il valore di due resistenze in parallelo è sempre minore di entrambe le due resistenze

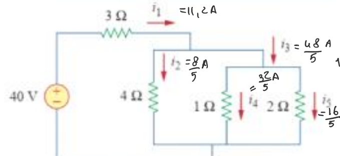




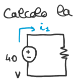
$i_o = i_x \cdot \frac{Req}{Req + 16}$

$Req = 2 // 4 // 8 \Rightarrow Geq = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \Rightarrow Req = \frac{1}{Geq} = \frac{8}{7}\ \Omega$

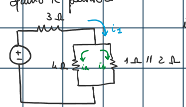
$\Rightarrow i_o = i_x \cdot \frac{8}{\cancel{7}} \cdot \frac{\cancel{7}}{8 + 112} \Rightarrow i_o = 2$ [A] $\Rightarrow i_x = 30$ [A]



1) Calcolo la resistenza equivalente



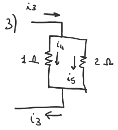
2) Sfrutto il partitore



$i_2 = i_1 \cdot \frac{G_{4\Omega}}{G_{4\Omega} + G_{//}} = i_1 \cdot \frac{R_{1//2}}{4\ \Omega + 1//2}$

$i_3 = i_1 \cdot \frac{4\ \Omega}{4\ \Omega + \frac{2}{3}\ \Omega}$

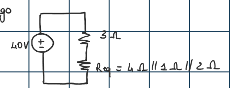
3)



$i_4 = i_3 \cdot \frac{2}{3}$

$i_5 = i_3 \cdot \frac{1}{3}$

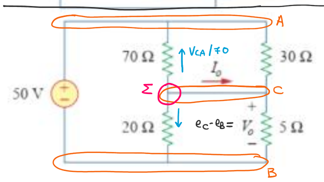
infine ottengo



$V_2 = 40 \cdot \frac{3}{3 + Req}$

$V_2 = 40 \cdot \frac{Req}{3 + Req}$

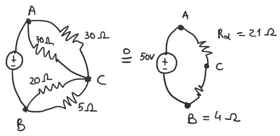
$i_2 = \frac{V_2}{4}$ $\quad i_4 = \frac{V_2}{1}$ $\quad i_5 = \frac{V_2}{2}$



i_4 e i_5 partitore di i_3 $\Rightarrow$

$i_5 = i_3 \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_4} = \frac{48}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{16}{5}$ A

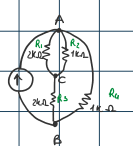
$i_4 = i_3 \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4} = \frac{48}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{5}$ A



$V_o = V \cdot \frac{R_\beta}{R_\alpha + R_\beta} = V \cdot \frac{4}{25} = 8$ [V]

Σ $-\frac{V_{AC}}{70} + i_o + \frac{V_o}{20} = -\frac{\cancel{42}^{6}}{\cancel{70}_{10}} + i_o + \frac{\cancel{8}^{4}}{\cancel{20}_{10}} = 0$

$\Rightarrow i_o = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0{,}2$ [A]



R_β

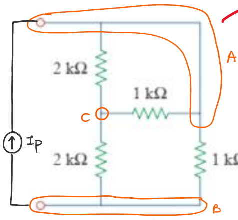
$Req = \left[\underbrace{(R_1 // R_2)}_{R_\alpha} + R_3 \right] // R_4$

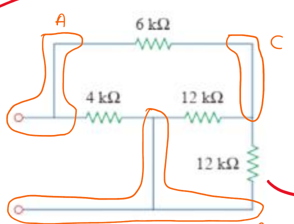
• $R_1 // R_2 = R_\alpha$ • $R_\alpha \perp R_3 = R_\beta$

$\Downarrow$

$R_\beta // R_4 = Req$

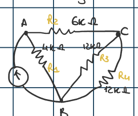
$Req = \frac{\left(\frac{2}{3} + 2\right) \cdot 1}{\frac{2}{3} + 2 + 1}\ k\Omega = \frac{8}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{11} = \frac{8}{11}\ k\Omega$





Tre lampadine a bulbo sono connesse come in figura.
Calcolare le correnti e le tensioni delle lampadine

5A



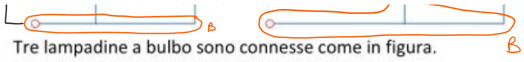
R_α

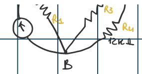
$Req = \left[(R_3 // R_4) + R_2 \right] // R_1$

• $R_3 // R_4 = R_\alpha$ • $R_\alpha \perp R_2 = R_\beta$

$\Downarrow$

$R_\beta // R_1 = Req$





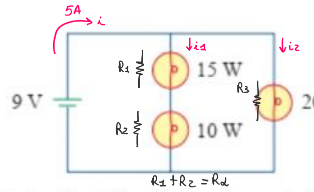
- $R_3 // R_4 = R_\alpha$ • $R_\alpha \perp R_2 = R_\beta$

$\Downarrow$

$R_\beta // R_1 = R_{eq}$

$R_{eq} = \dfrac{\left[\frac{12\cdot 12}{2\cdot 4} + 6\right]\cdot 4}{6+6+4} = \dfrac{48}{16} = 3k\,\Omega$

Tre lampadine a bulbo sono connesse come in figura.
Calcolare le correnti e le tensioni delle lampadine



$i \cdot v_g = (15+10+20)\,W$

$\Rightarrow i = \frac{45}{9} = 5A$

$R_\alpha \cdot i_1 = R_3 \cdot i_2 = 9$

$R_\alpha\, i_1^2 = 25$

$i_1 = \frac{25}{9}\,[A]$

$i_2 = i - i_1 = \frac{20}{9}\,[A]$

$R_\alpha \cdot i_1 = 9V \Rightarrow R_\alpha = \frac{9}{i_1} = \frac{9}{\frac{25}{9}} \Rightarrow R_1 + R_2 = \frac{81}{25}\,[\Omega]$

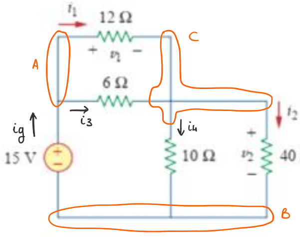
$R_3 \cdot i_2 = 9V \Rightarrow R_3 = \frac{81}{20}\,[\Omega] \Rightarrow i_2^2 \cdot \frac{81}{20} = 20\,[W] \Rightarrow$

$\Rightarrow i_2 = \sqrt{\frac{400}{81}} = \frac{20}{9}\,[A]$

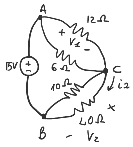
$R_1 = \frac{15}{i_1^2} = \frac{15}{25^2}\,9^2 = \frac{3\cdot 81}{25\cdot 5} = \frac{243}{125} = 1945\,[\Omega]$

$R_2 = \frac{10}{i_1^2} = \frac{10}{25}\,9^2 = \frac{2\cdot 81}{25\cdot 5} = \frac{162}{125} = 1,297\,[\Omega]$

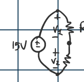
Calcolare i1, v1, i2 e v2, e la potenza dissipata dalle resistenze da 12 e 40



=



- $v_1 = e_A - e_C = V_{6\Omega}$ • $v_2 = e_C - e_B = V_{10\Omega}$



$R_\alpha = 6 // 12 = 4\,\Omega$

$v_1 = \frac{\cancel{15}^{5} \cdot 4}{\cancel{12}\,3} = 5\,[V]$

$v_2 = \frac{\cancel{15}^{5} \cdot \cancel{8}}{\cancel{12}\,3} = 10\,[V]$

$i_1 = \frac{V_1}{12} = \frac{5}{12}\,[A] \Rightarrow P^a_{12\Omega} = V_1\, i_1 = \frac{5 \cdot 5}{12} = 2{,}08\,[W]$

$i_2 = \frac{V_2}{40} = \frac{10}{40}\,[A] \Rightarrow P^a_{40\Omega} = V_2 \cdot i_2 = \frac{10 \cdot 10}{40} = 2{,}5\,[W]$

metodo dei nodi:

B riferimento $\Rightarrow e_B = 0\,[V]$

$e_A - e_B = V_g \Rightarrow$ vincolo $\Rightarrow e_A = 15\,[V]$

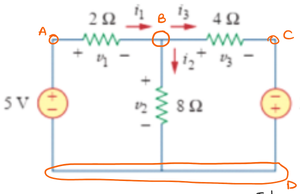
solo e_C incognita $\Rightarrow$ scrivo KLC di C

C $-i_1 - i_3 + i_2 + i_4 = 0 \Rightarrow$

$\frac{e_C - \overset{=15}{e_A}}{12} + \frac{e_C - \overset{=15}{e_A}}{6} + \frac{e_C - \overset{=0}{e_B}}{10} + \frac{e_C - \overset{=0}{e_B}}{40} = 0$

$\Rightarrow e_C \to v_1 = 15 - e_C$, $v_2 = e_C$

Calcolare i1, v1,i2, v3, i3 e v3, e verificare il bilancio energetico



(a) $2 \cdot i_1 + 8 \cdot i_2 - 5 = 0$

(b) $4 \cdot i_3 - 3 - 8 \cdot i_2 = 0$

B $-i_1 + i_3 + i_2 = 0 \Rightarrow i_1 = i_2 + i_3$

$\begin{cases} 2(i_2+i_3) + 8\cdot i_2 = 5 \\ -8 i_2 + 4 i_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ -8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

- $i_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{14}{56} = \frac{1}{4}A$ $i_3 = \dfrac{\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ -8 & 3 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{70}{56} = \frac{5}{4}A$ $i_1 = i_2 + i_3 = \frac{6}{4}A$

- $V_1 = 2 \cdot i_1 = 3V \Rightarrow p_1 = 3 \cdot \frac{6}{4} = \frac{18}{4}\,[W]$ $V_2 = 8 \cdot i_2 = 2\,[V] \Rightarrow p_2 = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\,[W]$

  $V_3 = 4 \cdot i_3 = 5V \Rightarrow p_3 = 5 \cdot \frac{5}{4} = \frac{25}{4}\,[W]$ $\sum p^a = \frac{18}{4} + \frac{2}{4} + \frac{25}{4} = \frac{45}{4}\,[W]$

- $P^g_{V_1} = 5 \cdot i_1 = 5 \cdot \frac{6}{4} = \frac{30}{4}\,[W]$ $P_{V_2} = 3 \cdot i_3 = \frac{15}{4}\,[W] \Rightarrow \sum p^g = \frac{45}{4}\,[W]$

Esercitazione 1

mercoledì 31 marzo 2021 12:34

Elettrotecnica
LT - Ingegneria Informatica
A.A. 2020-2021

Prof. Marco Ricci, Dr. Stefano Laureti
marco.ricci@unical.it
stefano.laureti@unical.it

Corso di Elettrotecnica
Esercitazione 1

Testo di riferimento

Alexander C., Sadiku M., *Circuiti Elettrici*, McGraw Hill

o la versione originale in inglese

Alexander C., Sadiku M., *Fundamentals of electric circuits*, McGraw Hill

Potenza elettrica

La potenza elettrica è la variazione di energia (assorbita o erogata) nel tempo.
Si misura in watt (W). watt=joule/secondo

$$p = \frac{dw}{dt}$$

w: energia (J)
t: tempo (s)

Poiché posso scrivere che

$$p = \frac{dE}{dt} = \underbrace{\frac{dE}{dq}}_{=V} \cdot \underbrace{\frac{dq}{dt}}_{=I} = V \cdot I$$

$$p = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = vi$$

Per il principio di conservazione delle potenze:
Potenza assorbita = - Potenza erogata

I fenomeni elettromagnetici avvengono solo all'interno e non si ha perdita o accumulo di carica

$$\sum p = 0$$

Potenza elettrica

Esercizio

Una batteria può fornire 85 mA per 12 ore. Quanta carica può erogare?
Se la tensione ai terminali è 1.2V, quanta energia può fornire?

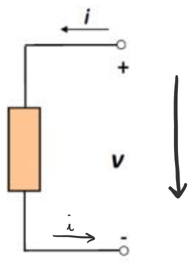
Soluzione

$q = it = 85 \times 10^{-3} \times 12 \times 60 \times 60 = 3{,}672$ C → carica (sapendo che $i = \frac{q}{t}$)

$E = pt = ivt = qv = 3672 \times 1.2 = 4406.4$ J → energia (sapendo che $p = \frac{E}{t}$)

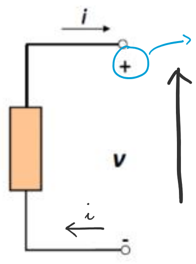
Potenza elettrica

Convenzione degli utilizzatori



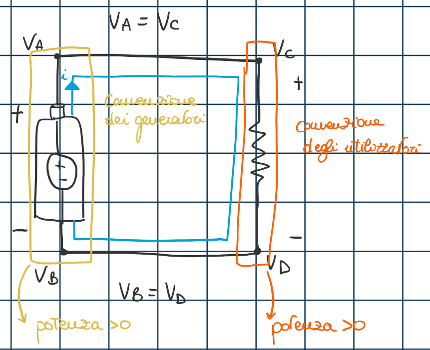
p>0 ⇒potenza assorbita
p<0 ⇒potenza erogata

Convenzione dei generatori



p>0 ⇒potenza erogata
p<0 ⇒potenza assorbita

Salvo avviso contrario, nel seguito si farà sempre riferimento alla convenzione degli utilizzatori

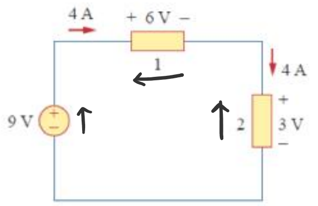


Si ottengono entrambe le potenze positive, dunque serve avere due regole (convenzioni) per definire che in un caso è assorbita e nell'altro erogata

Potenza elettrica

Esercizio
Calcolare la potenza assorbita o erogata da ogni elemento nella figura sottostante

1 MAGLIA
1 ANELLO



2 resistenze in serie
⇓
PARTITORE DI TENSIONE
⇓
partiziona la tensione

CONDUTTANZA $G = \frac{1}{R}$

Soluzione

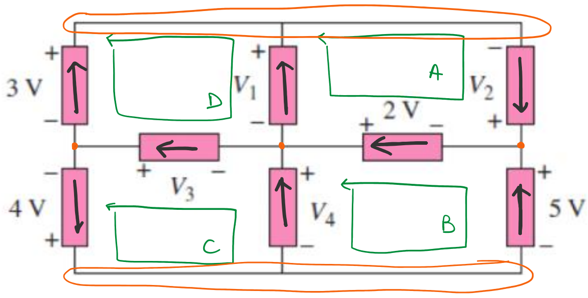
Le cadute di potenziale alle resistenze sono uguali alla potenza del generatore } REGOLA DELLA MAGLIA

P generatore= -9V·4A=-36W (erogata)
P1=4A·6V=24W (assorbita)
P2=4A·3V=12W (assorbita)

{ Convenzione degli utilizzatori

Legge di Kirchhoff per le tensioni (KVL)

Esercizio
Dato il circuito sottostante usare la KVL per trovare V1, V2, V3 e V4



Se entra dal meno è → NEGATIVA

(B) $-V_4 + 2V + 5V = 0 \Rightarrow V_4 = 7V$

(C) $4V + V_3 + V_4 = 0 \Rightarrow V_3 = -4V - V_4 = -11V$

(D) $+V_1 - V_3 - 3V = 0 \Rightarrow V_1 = V_3 + 3V = -8V$

(A) $-V_1 - V_2 - 2V = 0 \Rightarrow V_2 = -V_1 - 2V = 8V - 2V = 6V$

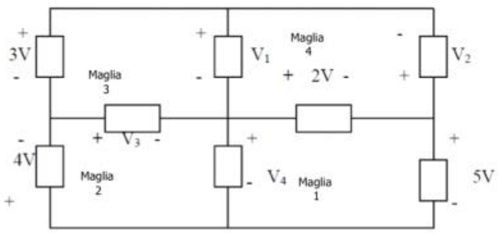
RAMI → componenti del circuito

Regola degli anelli

8 NODI

Legge di Kirchhoff per le tensioni (KVL)

Soluzione



Per la maglia 1,
$-V_4 + 2 + 5 = 0 \longrightarrow V_4 = 7V$

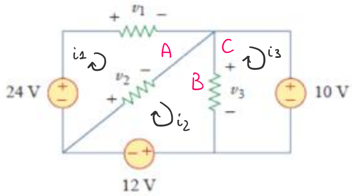
Per la maglia 2,
$+4 + V_3 + V_4 = 0 \longrightarrow V_3 = -4 - 7 = -11V$

Per la maglia 3,
$-3 + V_1 - V_3 = 0 \longrightarrow V_1 = V_3 + 3 = -8V$

Per la maglia 4,
$-V_1 - V_2 - 2 = 0 \longrightarrow V_2 = -V_1 - 2 = 6V$

Legge di Kirchhoff per le tensioni(KVL)

Esercizio
Dato il circuito sottostante trovare v1,v2 e v3



Ⓒ $10V - V_3 = 0 \Rightarrow V_3 = 10V$

Ⓑ $12V + V_2 + V_3 = 0 \Rightarrow V_2 = -12V - 10V = -22V$

Ⓐ $-24V + V_1 - V_2 = 0 \Rightarrow V_1 = V_2 + 24V = 2V$

Soluzione

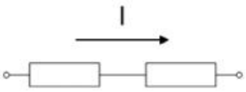
$-24 + v_1 + 10 + 12 = 0 \qquad v_1 = \underline{\mathbf{2V}}$

$v_2 + 10 + 12 = 0 \qquad v_2 = \underline{\mathbf{-22V}}$ poichè esce negativa, la resistenza andrebbe posta di segno opposto

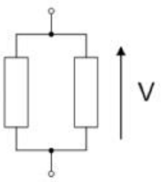
$-v_3 + 10 = 0 \qquad v_3 = \underline{\mathbf{10V}}$

Serie e parallelo

Due o più elementi sono detti in **serie** se sono concatenati, cioè condividono a due a due un nodo in maniera esclusiva, e quindi sono percorsi dalla stessa corrente.

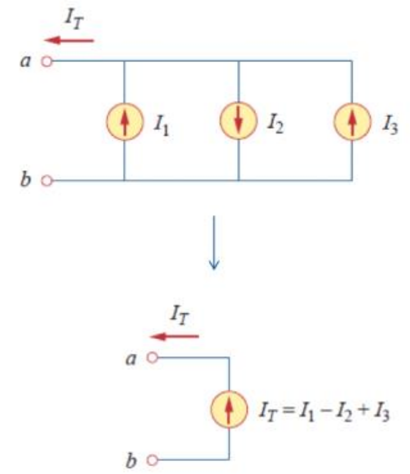


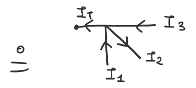
Due o più elementi sono detti in **parallelo** se sono collegati alla stessa coppia di nodi, e quindi hanno la stessa tensione.



Serie e parallelo

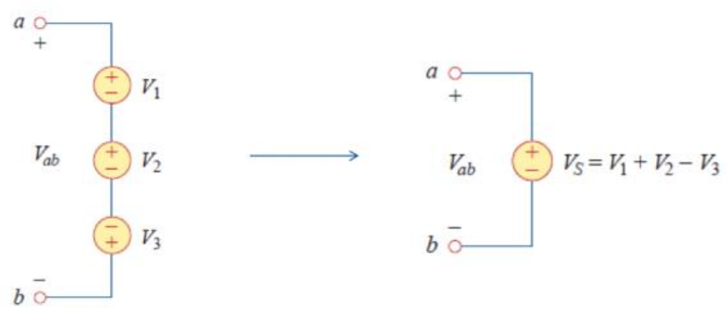
Generatori di corrente **in parallelo** si possono sommare per avere un generatore equivalente



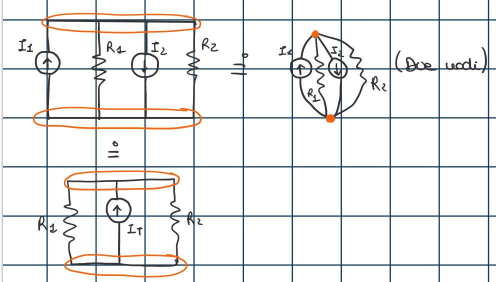


Serie e parallelo

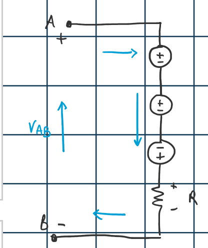
Generatori di tensione **in serie** si possono sommare per avere un generatore equivalente



ESEMPIO 1



ESEMPIO 2

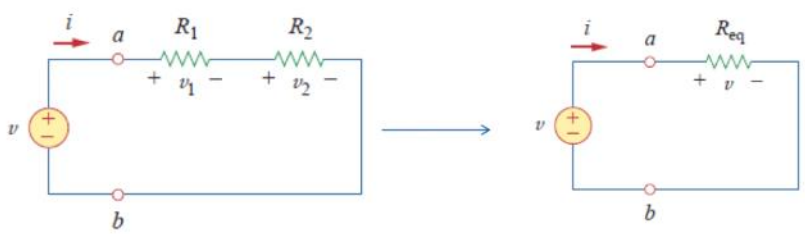


$- V_{AB} + V_1 + V_2 - V_3 + \underbrace{R \cdot i}_{V_R} = 0$

Serie di resistori

La resistenza equivalente di un numero qualsiasi di resistori collegati **in serie** è pari alla somma delle singole resistenze.

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$



$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_N = \sum^{N} R_n$ IN SERIE

$$R_{eq} = R_1 + R_1 + \cdots + R_N = \sum_{n=1}^{N} R_n$$

IN SERIE

Parallelo di resistori

La resistenza equivalente di due resistori collegati **in parallelo** è pari alla prodotto delle resistenze diviso la loro somma.

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$ dove $R_{eq} < \min\{R_1, R_2\}$!!!

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_N}$$

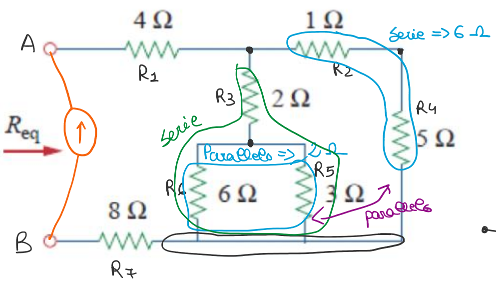
IN PARALLELO

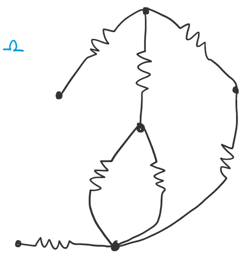
R_{eq} *è sempre minore della più piccola tra le resistenze*

Serie e parallelo di resistori

Esercizio

Data la rete di resistori in figura, determinare la resistenza equivalente



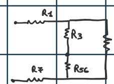


PASSAGGI !

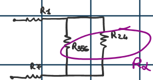
1) Inserire un generatore fittizio
2) Iniziare dalla parte più lontana del generatore

3) $R_{24} = 1+5 = 6\ \Omega$

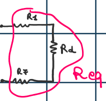
$R_{56} = \dfrac{1}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = 2\ \Omega$



$R_{356} = 2+2 = 4\ \Omega$



$R_d = \dfrac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = 2{,}4\ \Omega$

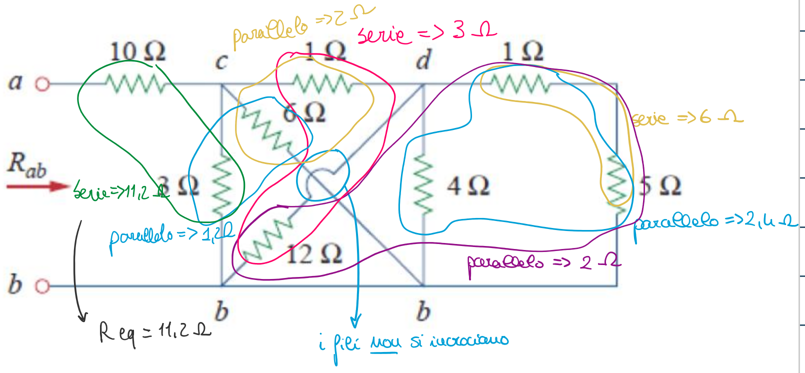


$R_{eq} = 4 + 2{,}4 + 8 = 14{,}4\ \Omega$

Serie e parallelo di resistori

Esercizio

Data la rete di resistori in figura, determinare la resistenza equivalente



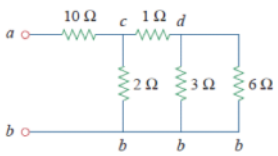
Serie e parallelo di resistori

Soluzione

$$3\,\Omega \parallel 6\,\Omega = \frac{3 \times 6}{3+6} = 2\,\Omega$$

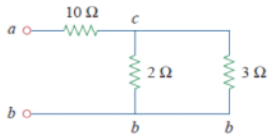
$$12\,\Omega \parallel 4\,\Omega = \frac{12 \times 4}{12+4} = 3\,\Omega$$

$$1\,\Omega + 5\,\Omega = 6\,\Omega$$



$$3\,\Omega \parallel 6\,\Omega = \frac{3 \times 6}{3+6} = 2\,\Omega$$

$$2\,\Omega + 1\,\Omega = 3\,\Omega$$

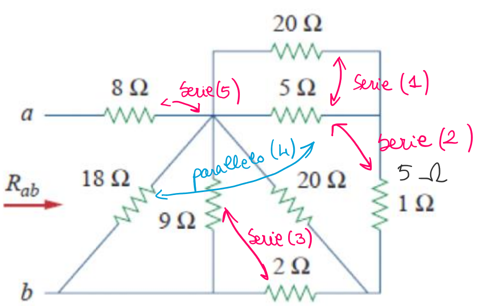


$$2\,\Omega \parallel 3\,\Omega = \frac{2 \times 3}{2+3} = 1.2\,\Omega$$

$$R_{ab} = 10 + 1.2 = 11.2\,\Omega$$

Serie e parallelo di resistori

Esercizio
Data la rete di resistori in figura, determinare la resistenza equivalente

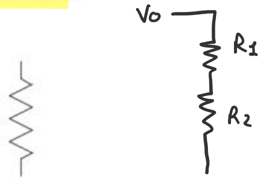


Soluzione
$R_{eq} = 11\Omega$

Nel circuito aperto $I=0 \ \forall V$
mentre nel circuito chiuso $V=0 \ \forall I$

Partitore di tensione

La tensione ai capi di una serie di resistori si ripartisce in maniera direttamente proporzionale alle loro resistenze.

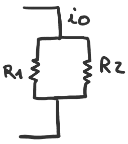


Si hanno delle resistenze in serie che sono attraversate dalla stessa corrente mentre la tensione si divide in maniera proporzionale

$$V_{cercata} = \frac{R \text{ di interesse}}{\text{Somma resistenze}} \ V_{\text{applicata alla serie}} \quad \text{es. } V_{R_2} = \frac{R_2}{R_1+R_2} V_0$$

Partitore di corrente

La corrente entrante in un parallelo di resistori si ripartisce in maniera inversamente proporzionale alle loro resistenze.



Se si hanno resistenze in parallelo, esse saranno attraversate dalla stessa Tensione mentre la corrente sarà divisa proporzionalmente alla resistenza

$$I_{cercata} = \frac{R \text{ del ramo non considerato}}{\text{Somma delle resistenze}} \cdot I_{iniziale}$$

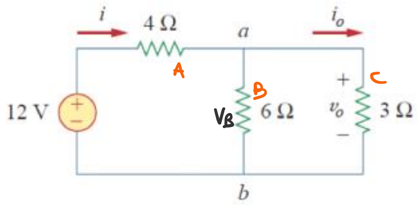
es $i_2 = \frac{R_1}{R_1+R_2} \cdot i_0$ $\quad$ $i_1 = \frac{R_2}{R_1+R_2} \cdot i_0$

Attenzione :

In corrente continua si parla di resistenza R. In corrente alternata (= regime sinusoidale) si parla di impedenza R

Serie e parallelo

Esercizio
Dato il circuito sottostante trovare io e vo e determinare la potenza dissipata sul resistore da 3Ω



Per trovare i :

$R_{BC} = \frac{1}{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}} = 2\,\Omega$ $\quad$ $R_{AB} = 4+2 = 6\,\Omega$ $\quad$ $i = \frac{12}{6} = 2\text{ A}$

Per il partitore di corrente ho che $\quad i_0 = \frac{R_B}{R_C+R_B} \cdot i = \frac{4}{3}\text{ A}$

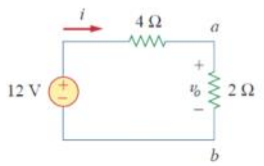
$V_0 = i_0 \cdot R = 4\,\Omega$

$P = V_0 \cdot i_0 = 5{,}3\text{ W}$

Serie e parallelo

Soluzione

$$6\,\Omega \parallel 3\,\Omega = \frac{6 \times 3}{6+3} = 2\,\Omega$$



$$i = \frac{12}{4+2} = 2\text{ A}$$

$$i_o = \frac{6}{6+3} i = \frac{2}{3}(2\text{ A}) = \frac{4}{3}\text{ A}$$

(Partitore di corrente al nodo a)

$$i_o = \frac{6}{6+3}i = \frac{2}{3}(2\text{ A}) = \frac{4}{3}\text{ A}$$

(Partitore di corrente al nodo a)

$$v_o = 3i_o = 4$$

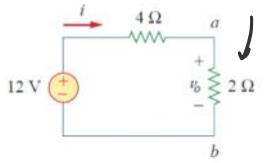
$$p_o = v_o i_o = 4\left(\frac{4}{3}\right) = 5.333\text{ W}$$

Serie e parallelo

Soluzione alternativa

$$6\,\Omega \parallel 3\,\Omega = \frac{6 \times 3}{6+3} = 2\,\Omega$$

se semplifico il parallelo posso considerarlo come un partitore di tensione



$$v_o = \frac{2}{2+4}(12\text{ V}) = 4\text{ V}$$

(Partitore di tensione)

$$v_o = 3i_o = 4 \quad \Rightarrow \quad i_o = \frac{4}{3}\text{ A}$$

$$p_o = v_o i_o = 4\left(\frac{4}{3}\right) = 5.333\text{ W}$$

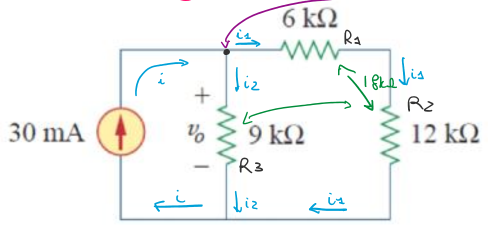
Serie e parallelo

Esercizio

Dato il circuito sottostante trovare v0 e la potenza di tutti gli elementi

Partitore di corrente

più è alta la resistenza e meno corrente passerà



$i = i_1 + i_2 \Rightarrow i_1 + i_2 = 30 \cdot 10^{-3}$ A

$i_1 = i \cdot \frac{R_{12}}{R_{12} + R_3} = 30 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{18 \cdot 10^3}{27 \cdot 10^3} = 20$ mA

$i_2 = i \cdot \frac{R_3}{R_{12} + R_3} = 10$ mA

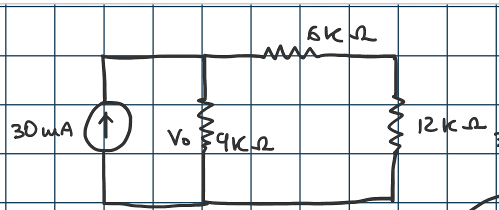
queste formule sono date dal fatto che la corrente è PROPORZIONALE ALLA RESISTENZA

Ricordiamo che $P = V^2 \cdot R = V \cdot i$

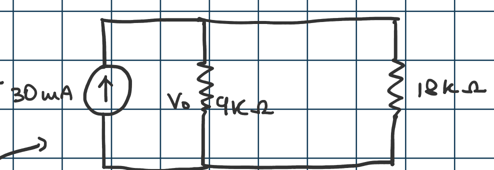
Generatore

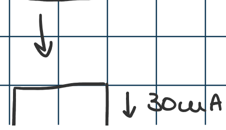
$$\begin{cases} P_{R1} = V^2 \cdot R_1 = (20 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 6 \cdot 10^3 = 2{,}4\ [W] \\ P_{R2} = 400 \cdot 10^{-6} \cdot 12 \cdot 10^3 = 4{,}8\ [W] \\ P_{R3} = 100 \cdot 10^{-6} \cdot 9 \cdot 10^3 = 0{,}9\ W \end{cases}$$

$\rightarrow P_{GEN} = P_{ASS} \Rightarrow P_{ASS} = P_{R1} + P_{R2} + P_{R3} = 8{,}1\ [W]$

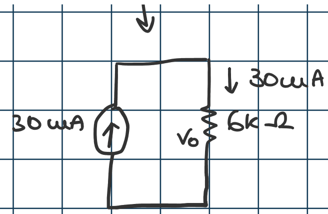


Semplifico il circuito





Semplifico il circuito

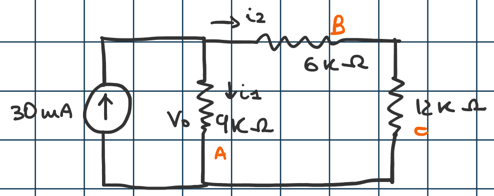


$i = \frac{V}{R} \Rightarrow V_o = i \cdot R = 30\,mA \cdot 6\,k\Omega = 180\,V$

Calcolo le potenze:

$P = V \cdot i$

Devo calcolare le correnti



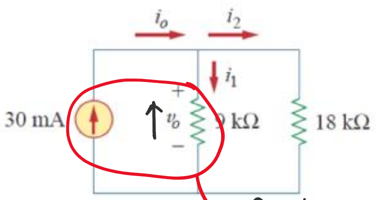
$30\,mA = i_1 + i_2 \qquad i_1 = \frac{V}{R} = \frac{180\,V}{9\,k\Omega} = 20\,mA$

$i_2 = 10\,mA$

Serie e parallelo

Soluzione

I resistori da 6kΩ e 12kΩ sono in serie, quindi possiamo scrivere il circuito equivalente



la tensione ai capi del gen è la stessa di vo (KVL)

Con un partitore di corrente otteniamo

$$i_1 = \frac{18{,}000}{9{,}000 + 18{,}000}(30\text{ mA}) = 20\text{ mA}$$

$$i_2 = \frac{9{,}000}{9{,}000 + 18{,}000}(30\text{ mA}) = 10\text{ mA}$$

Serie e parallelo

Soluzione (continua)

I resistori da 9kΩ e 18kΩ sono in parallelo, quindi vo è uguale su entrambi

$$v_o = 9{,}000 i_1 = 18{,}000 i_2 = 180 \text{ V.}$$

Potenza fornita dal generatore

$$p_o = -v_o i_o = -180(30) \text{ mW} = -5.4 \text{ W}$$

Potenza assorbita dal resistore da 12kΩ

$$p = iv = i_2(i_2 R) = i_2^2 R = (10 \times 10^{-3})^2\,(12{,}000) = 1.2 \text{ W}$$

Potenza assorbita dal resistore da 6kΩ

$$p = i_2^2 R = (10 \times 10^{-3})^2\,(6{,}000) = 0.6 \text{ W}$$

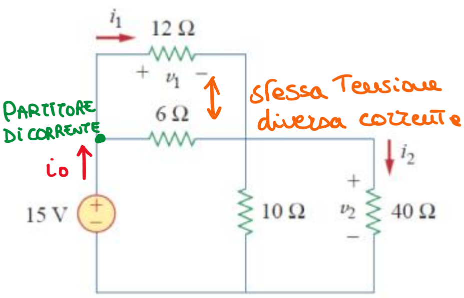
Potenza assorbita dal resistore da 9kΩ

$$p = \frac{v_o^2}{R} = \frac{(180)^2}{9{,}000} = 3.6 \text{ W} \quad \text{o} \quad p = v_o i_1 = 180(20) \text{ mW} = 3.6 \text{ W}$$

Serie e parallelo

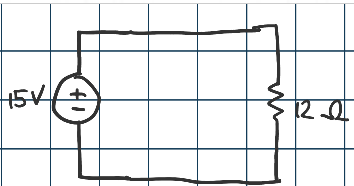
Esercizio

Dato il circuito sottostante trovare v1,v2,i1,i2 e la potenza dissipata sui resistori da 12Ω e 40Ω



Soluzione $v_1 = 5$ V, $i_1 = 416.7$ mA, $p_1 = 2.083$ W, $v_2 = 10$ V, $i_2 =$ 250 mA, $p_2 = 2.5$ W.

Semplifico il circuito



$$i_0 = \frac{V}{R} = \frac{\cancel{15}^{5}}{\cancel{12}_{4}} = \frac{5}{4} \text{ A}$$

$$i_1 = \frac{6}{12+6} \cdot \frac{5}{4} = \frac{\cancel{6}}{\cancel{18}_{3}} \cdot \frac{5}{4} = 416{,}7 \text{ mA}$$

$$i_u = \frac{\cancel{12}^{2}}{\cancel{18}_{6}} \cdot \frac{5}{\cancel{4}} = 833{,}3 \text{ mA}$$

$$V_1 = i_1 R_1 = 416{,}7 \text{ mA} \cdot 12\,\Omega = 5\text{V}$$

$$i_2 = \frac{10}{10+40} \cdot \frac{5}{4} = \frac{1}{4} = 250\ mA$$

$$V_2 = i_2 \cdot R = 40\Omega \cdot 250\ mA = 10V$$

Potenze: $i = \frac{V}{R}$

$$P = V \cdot i = \frac{V^2}{R} = i^2 \cdot R$$

$$P_{12} = (416,7\ mA)^2 \cdot 12 = 2W$$

$$P_{40} = (250mA)^2 \cdot 40 = 2,5W$$

Serie e parallelo

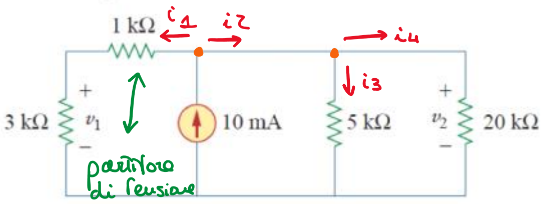
Esercizio

Dato il circuito sottostante trovare

a) v1e v2

b) la potenza dissipata sui resistori da 3kΩ e 20kΩ

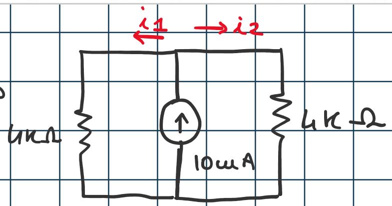
c) la potenza fornita dal generatore



Soluzione

(a) 15 V, 20 V, (b) 75 mW, 20 mW, (c) 200 mW.

Semplifico il circuito



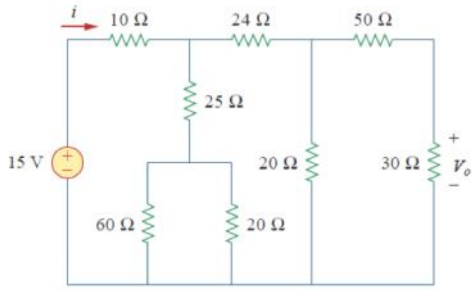
$$i_2 = i_1 = \frac{4k\Omega}{4k\Omega+4k\Omega} \cdot 10mA = 5mA$$

$$i_1 = \frac{V_0}{R} \Rightarrow V_0 = i_1 \cdot R = 20V$$

$$v_1 = \frac{3k\Omega}{(3+1)k\Omega} \cdot 20V = 15V$$

Serie e parallelo

Esercizio
Dato il circuito sottostante trovare I e Vo



Serie e parallelo

Soluzione

$$20//(30+50) = 16,\ \ 24 + 16 = 40,\ \ 60//20 = 15$$
$$R_{eq} = 10 + (15 + 25) // 40 = 10 + 20 = 30$$
$$i = \frac{v_s}{R_{eq}} = \frac{15}{30} = \underline{0.5\ \text{A}}$$

Se chiamiamo i1 la corrente nel resistore da 24Ω e io la corrente nel resistore da 50Ω, usando due partitori di corrente otteniamo

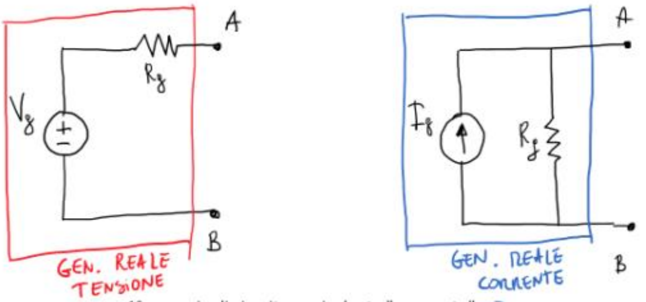
$$i_1 = \frac{40}{40+40} i = 0.25\ \text{A}, \quad \mathrm{i}_o = \frac{20}{20+80} i_1 = 0.05\ \text{A}$$
$$v_o = 30 i_o = 30x0.05 = \underline{1.5\ \text{V}}$$

Generatori reali

martedì 6 aprile 2021 12:04

9a Lezione - Generatori reali

23 March 2021 09:18

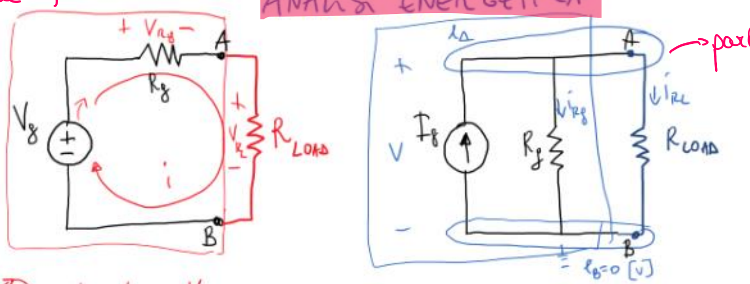


-> 1° esempio di circuito equivalente "composto"
-> concetto di potenza erogata e generata, rendimento e trasferimento potenza
->relazione con equazione di porta e retta di carico
-> relazione con equivalenza esterna, equivalenza dei generatori
->relazione con teoremi di Thevenin e Norton

partitore di tensione

ANALISI ENERGETICA

partitore di corrente



(a) $+V_{R_g} + V_{R_L} = V_g$

$+i \cdot R_g + i \cdot R_L = V_g$

$i = V_g$

$V_{R_g} = V_g \cdot \frac{R_g}{R_g + R_L}$

$V_{R_L} = V_g \cdot \frac{R_L}{R_g + R_L}$

$\boxed{\text{POTENZA CEDUTA AL CARICO}}$

(POTENZA EROGATA ALL'ESTERNO)

$P^{EROGATA} = P^A_{R_L} = i^2 R_L = V_g^2 \cdot \frac{R_L}{(R_g + R_L)^2}$ [W]

(A) $-I_g + i_{R_g} + i_{R_L} = 0$

$e_A G_G + e_A G_L = I_g$

$e_A = V = \frac{I_g}{G_g + G_L}$ [V]

$i_{R_g} = I_g \cdot \frac{G_g}{G_g + G_L}$

$i_{R_L} = I_g \cdot \frac{G_L}{G_g + G_L}$

POT. CEDUTA AL CARICO

(P EROGATA)

$P^{EROGATA} = P^A_{R_L} = V^2 \cdot G_L = I_g^2 \cdot \frac{G_L}{(G_g + G_L)^2}$ [W]

9a Lezione Pagina 1

$\boxed{\text{POTENZA GENERATA DAL GEN.}}$

$P^{GENERATA} = P^G_{V_g} = V_g \cdot i = V_g^2 \cdot \frac{1}{(R_g + R_L)}$ [W]

$\boxed{\text{POTENZA DISSIPATA INTERNAMENTE ("PERDITE")}}$

$P^{DISS.PATA} = P^A_{R_g} = i^2 R_g = V_g^2 \frac{R_g}{}$ [W]

$\boxed{\text{POT. generata dal generatore}}$

$P^{GEN} = I_g \cdot V = I_g^2 \cdot \frac{1}{G_g + G_L}$ [W]

$\boxed{\text{POT. dissipata internamente ("PERDITE")}}$

$P^{DISS} = P^A_{R_g} = V^2 \cdot G_g = I_g^2 \cdot \frac{G_g}{}$ [W]

POTENZA GENERATA DAL GEN.

$$p^{GENERATA} = p^G_{V_g} = V_g \cdot i = V_g^2 \cdot \frac{1}{(R_g+R_L)} \; [W]$$

POT. generata dal generatore

$$p^{GEN} = I_g \cdot V = I_g^2 \cdot \frac{1}{G_g+G_L} \; [W]$$

POTENZA DISSIPATA INTERNAMENTE ("PERDITE")

$$p^{DISSIPATA} = p^A_{R_g} = i^2 R_g = V_g^2 \frac{R_g}{(R_g+R_L)^2} \; [W]$$

POT. dissipata internamente "perdite"

$$p^{DISS} = p^A_{R_g} = V^2 G_g = I_g^2 \cdot \frac{G_g}{(G_g+G_L)^2} \; [W]$$

BILANCIO ENERGETICO

$$p^G_{V_g} = p^A_{R_g} + p^A_{R_L} \Rightarrow V_g^2 \cdot \frac{1}{R_g+R_L} = V_g^2 \left[\frac{R_g}{(R_g+R_L)^2} + \frac{R_L}{(R_g+R_L)^2}\right]$$

generata dissipata ceduta

BILANCIO ENERGETICO

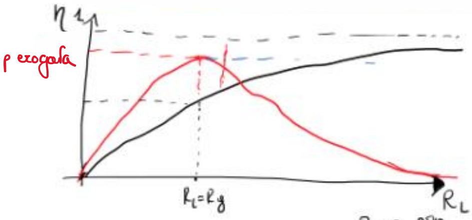
$$p^G_{I_g} = p^A_{R_g} + p^A_{R_L} \Rightarrow I_g^2 \frac{1}{G_g+G_L} = I_g^2 \left(\frac{G_g}{(G_g+G_L)^2} + \frac{G_L}{(G_g+G_L)^2}\right)$$

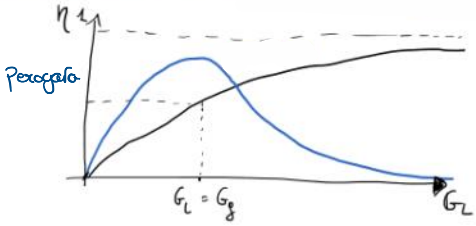
$$p^{EROGATA} = p^{GENERATA} - p^{DISSIPATA} =$$

$$p^{EROGATA} = p^{GENERATA} - p^{DISSIPATA}$$

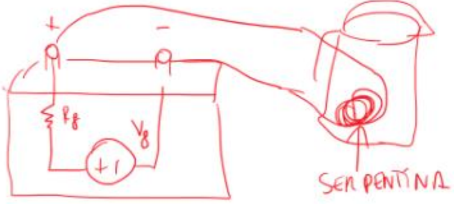
RENDIMENTO $\eta = \frac{p^{EROGATA}}{p^{GENERATA}} = \frac{R_L}{R_g+R_L}$

RENDIMENTO $\eta = \frac{p^{ERO}}{p^{GEN}} = \frac{G_L}{G_g+G_L}$





$$p^{EROGATA} = V_g^2 \cdot \frac{R_L}{(R_g+R_L)^2}$$
$\nearrow R_L = 0 \quad p^{ERO} = 0$
$\searrow R_L = +\infty \quad p^{ERO} = 0$



Vogliamo scaldare un contenitore pieno d'acqua attraverso un generatore

① IN QUANTO TEMPO SI SCALDA L'ACQUA ?

② COME FACCIO A SCALDARE IL PIÙ VELOCEMENTE POSSIBILE

③ PER QUALE VALORE DI R_L

9a Lezione Pagina 2

OTTENGO IL MASSIMO TRASFERIMENTO DI POTENZA ?

$$p^{EROGATA}(R_L) = V_g^2 \frac{R_L}{(R_g+R_L)^2} \rightarrow \frac{d P^E(R_L)}{d R_L} = 0$$

V_g e R_g sono costanti

$$p' = V_g^2 \cdot \frac{1(R_g+R_L)^{\cancel{2}} - R_L \cdot 2\cancel{(R_g+R_L)}1}{(R_g+R_L)^{\cancel{4}3}} = V_g^2 \frac{R_g + \cancel{R_L} - \cancel{2}R_L}{(R_g+R_L)^3}$$

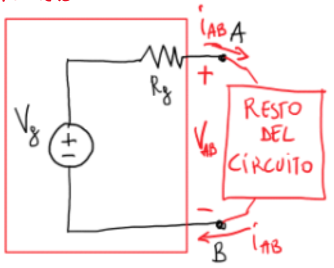
$\boxed{p^{EROGATA} \text{ è MASSIMA QUANDO } R_L = R_g}$

$\boxed{p^{EROGATA} \text{ è MASSIMA QUANDO } G_L = G_g}$

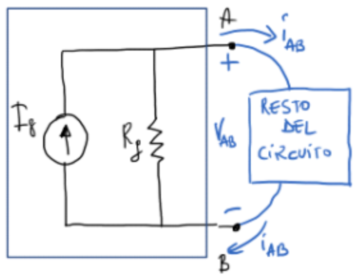
Partitore di tensione

Partitore di corrente

Partitore di tensione



Partitore di corrente

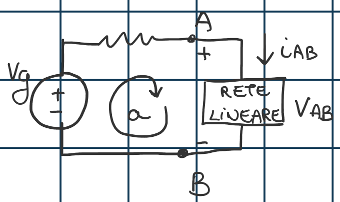


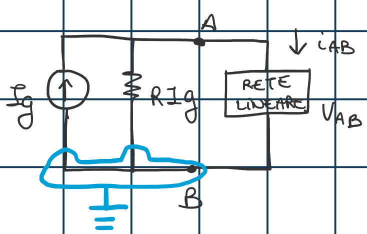
$$P^{MAX}_{erogata} = V_g^2 \cdot \frac{R_L}{(R_G+R_L)^2}\Bigg|_{R_L=R_g} = \frac{V_g^2}{4R_L} = \frac{V_g^2}{4R_G}$$

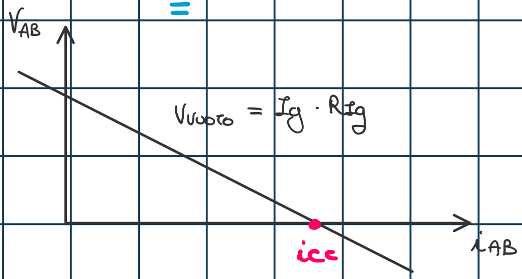
$$P^{MAX}_{erogata} = I_g^2 \cdot \frac{G_L}{(G_g+G_L)^2}\Bigg|_{G_L=G_g} = \frac{I_g^2}{4G_g} = \frac{I_g^2}{4G_L}$$

EQ. DI CARICO → definisce la retta di carico

LEGAME TENSIONE - CORRENTE GEN. REALI







Applico Kirchhoff

ⓐ $V_{Rvg} + V_{AB} = V_g$

$i_{AB} \cdot R_{Vg} + V_{AB} = V_g$

eq. di porta

equazione del tipo

$f(i_{AB}, V_{AB}) = g$

$V_{AB} = -i_{AB} \cdot R_{Vg} + V_g$

Applico Kirchhoff

$i_{Rg} + i_{AB} = I_g$

$\frac{V_{AB}}{R_{Ig}} + i_{AB} = I_g$

$V_{AB} = -i_{AB} \cdot R_{Ig} + I_g \cdot R_{Ig}$

1ª COND. LIMITE ⇒ $i_{AB} = 0$

$f(i_{AB}, V_{AB}) = 0$

$V_{AB} = -i_{AB} \cdot R_{vg} + V_g$

retta con pendenza negativa

1ª COND. LIMITE ⇒ $i_{AB} = 0$

dunque AB in C.A.

$V_{AB} = V_g = V_{vuoto} = V_{nominale}$

2ª COND. LIMITE ⇒ $V_{AB} = 0$

dunque AB in C.C.

$i_{AB} = i_{cc} = \frac{V_g}{R_{vg}}$ [A]

Se la rete è passiva allora

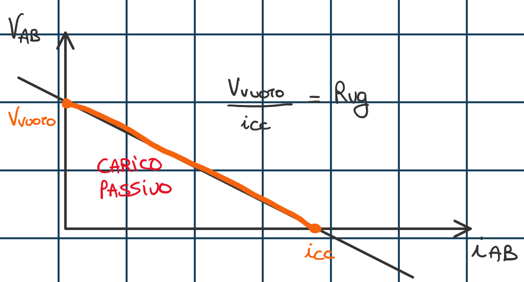
$V_{AB} < V_{vuoto}$ e $i_{AB} < i_{cc}$

e dunque si avrà che

$P_{erogata} < V_{vuoto} \cdot i_{cc}$

$P^{MAX}_{erogabile} = \frac{V_g^2}{4 R_{vg}} = \frac{1}{4} \cdot V_g \cdot \frac{V_g}{R_{vg}} =$

$= \frac{1}{4} \cdot V_{vuoto} \cdot i_{cc}$ [W]



1ª COND. LIMITE ⇒ $i_{AB} = 0$

dunque AB è in C.A.

$V_{AB} = V_{vuoto} = I_g \cdot R_{Ig}$ [V]

2ª COND. LIMITE ⇒ $V_{AB} = 0$

dunque AB è in C.C.

$i_{AB} = I_g = i_{cc}$

Se la rete è passiva allora

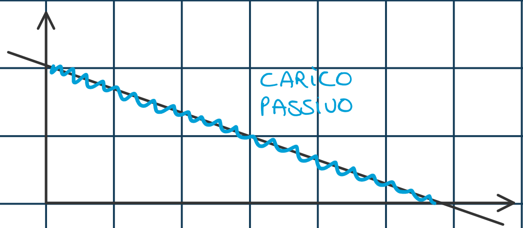
$V_{AB} < V_{vuoto}$ e $i_{AB} < i_{cc} = I_g$

$\frac{V_{vuoto}}{i_{cc}} = R_{Ig}$ RESISTENZA INTERNA

e dunque si avrà che

$P^{MAX}_{erogabile} = \frac{1}{4} \cdot \frac{I_g^2}{G_{Ig}} = \frac{1}{4} I_g \cdot \frac{I_g}{G_g} =$

$= \frac{1}{4} I_g \left(I_g \cdot R_{Ig}\right) = \frac{1}{4} V_{vuoto} \cdot i_{cc}$ [W]



RETTA DI CARICO:

Se la rete è lineare, quando si individuano V_{vuoto} e i_{cc}, si individua la retta di carico

→ **principio di equivalenza**

Due circuiti lineari accessibili ad una porta AB e aventi la stessa retta di carico allora sono equivalenti esternamente

↓

↓

Se la retta di carico è la stessa per i due generatori il resto del circuito non può distinguere tra l'uno e l'altro, ovvero tramite misure esterne non possiamo capire se nella scatola c'è un generatore di corrente reale o di tensione reale

Un generatore di tensione è equivalente a un generatore reale di corrente quando

$$V_g = I_g \cdot R_{Ig} \quad e \quad R_{Vg} = R_{Ig}$$

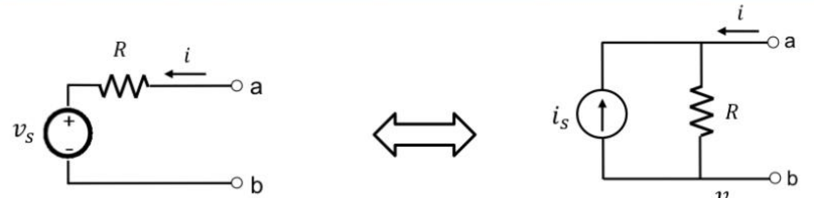
$$\Downarrow$$

$$V_g = I_g \cdot R_{Vg} = I_g \cdot R_g$$

→ Trasformazione di generatori

Trasformazione di generatori

Una **trasformazione di generatori** è l'operazione di sostituzione di un **generatore reale di tensione,** costituito da un gen. ideale di tensione v_s in serie a un resistore R, **con un generatore reale di corrente**, costituito da un gen. ideale di corrente i_s in parallelo a un resistore R, o viceversa.



$v_s = Ri_s$ $\qquad$ $i_s = \dfrac{v_s}{R}$

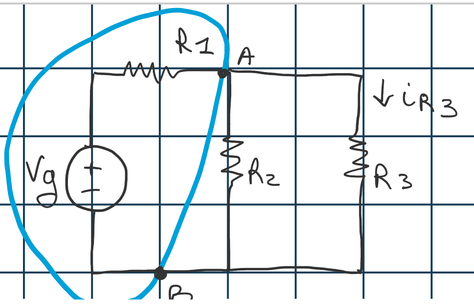
I due bipoli risultano equivalenti in quanto hanno la stessa relazione i-v

$$v_{ab} = v_s + Ri = Ri_s + Ri$$

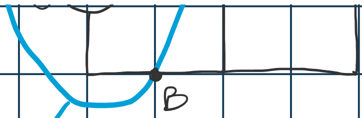
La trasformazione si applica anche ai generatori dipendenti ma non si applica ai generatori ideali di tensione e corrente.

13

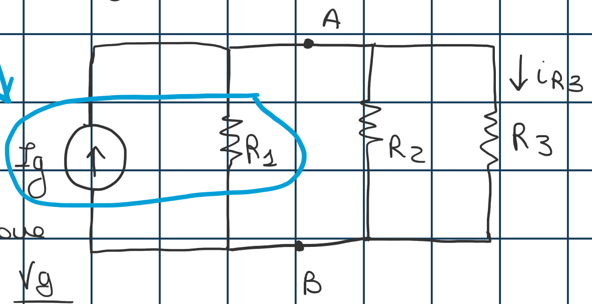
es.



Trovare i_{R3}



Quando mi interessa solo una porzione di circuito, posso operare una Trasformazione dei generatori



dove

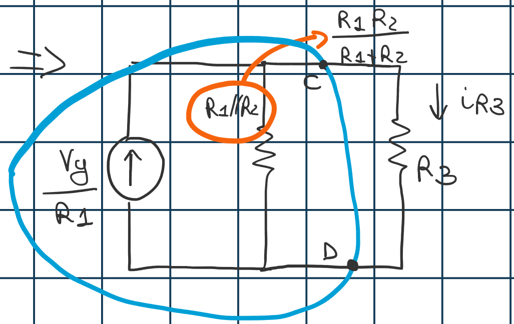
$$I_g = \frac{V_g}{R_1}$$

qui si avrà che

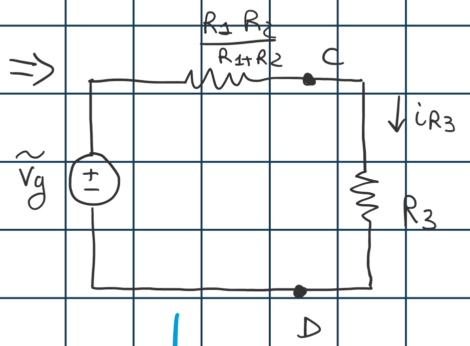
$$i_{R3} = I_g \cdot \frac{G_3}{G_1+G_2+G_3} = \frac{V_1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}} = \frac{V_g}{\cancel{R_1}\cancel{R_3}} \cdot \frac{\cancel{R_1} \cdot R_2 \cdot \cancel{R_3}}{R_2R_3+R_3R_1} = \frac{V_g \cdot R_2}{R_2R_3+R_3R_1}$$

SEMPLIFICO:

$\Rightarrow$



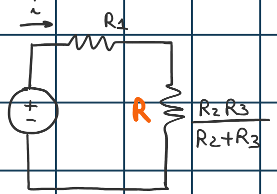
$\Rightarrow$



$$i_{R3} = \frac{\tilde{V}_g}{\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+R_3} = \frac{\tilde{V}_g}{\frac{R_1R_2+R_3}{R_1+R_2}} = \frac{V_g \cdot R_2}{R_1+R_2} \cdot \frac{R_1+R_2}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}$$

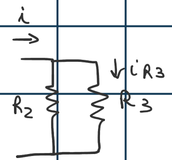
dunque $$i_{R3} = \frac{V_g \cdot R_2}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}$$

altro approccio!



dove $i = V_g \cdot \dfrac{1}{R_1+\frac{R_2R_3}{R_2+R_3}}$. Inoltre si ha che

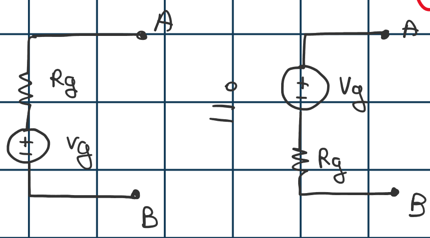
R $\longrightarrow$



$$i_{R3} = \frac{i \cdot R_2}{R_2+R_3}$$

Rappresentazione dei generatori:

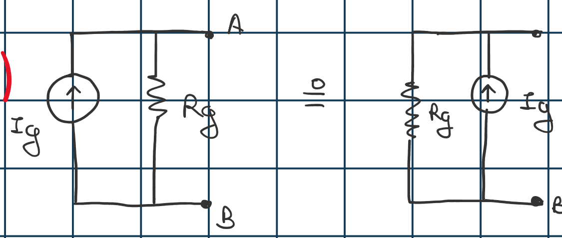
1)



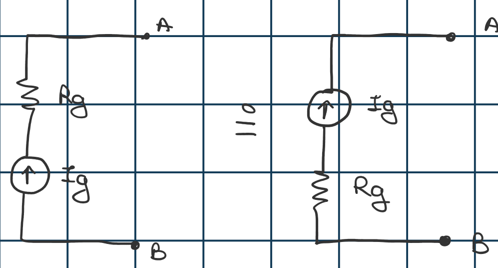
in quanto i due circuiti hanno eq. di porta (e dunque retta di carico) EQUIVALENTE

Fra i due varia solo il valore di potenziale fra A e B

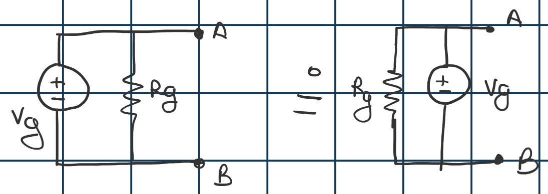
2)



3)



4)



A un circuito lineare è sempre associabile una RETTA DI CARICO

Teoremi delle reti lineari

martedì 20 aprile 2021 12:56

Linearità

Un sistema è lineare se soddisfa le proprietà di omogeneità e additività

Linearità=omogeneità+additività ↳ linearità fra input e output

Omogeneità: se l'ingresso x(t) viene moltiplicato per un fattore costante, l'uscita y(t) risulta moltiplicata per lo stesso fattore

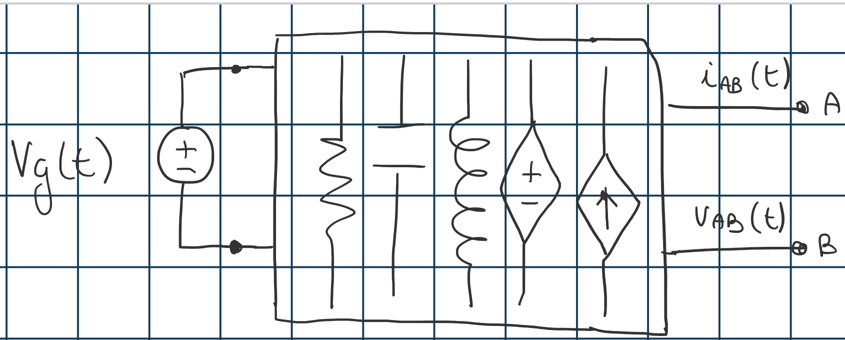
$$L\{x(t)\} = y(t);$$
$$L\{kx(t)\} = ky(t);$$

Additività: la risposta alla somme di più ingressi è pari alla somma delle risposte agli ingressi applicati separatamente

$$L\{x_1(t)\} = y_1(t); L\{x_2(t)\} = y_2(t);$$
$$L\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t);$$

Un sistema lineare è descritto da un sistema di equazioni differenziali lineari. Un circuito costituito da elementi lineari (e.g. resistori, condensatori e induttori, generatori dipendenti lineari) e da generatori indipendenti è lineare perché le relazioni costitutive dei singoli elementi sono operatori lineari ($v(t) = Ri(t); v(t) = {}^1/_C \int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\,\tau, v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$) e i sistemi risolutivi sono o sistemi algebrici o sistemi di equazioni differenziali con soli termini lineari

2



$v_{AB}(t) = L\{V_g(t)\}$

↳ applicazione

La derivata è lineare, la potenza e l'integrale no.

Tempo invarianza, memoria e causalità

Un sistema è tempo invariante quando la relazione causa-effetto non varia nel tempo, ovvero siano x(t) l'ingresso del sistema e y(t) l'uscita del sistema, per un sistema tempo invariante abbiamo:

$$L\{x(t)\} = y(t);$$

$$\underline{L\{x(t-t_0)\} = y(t-t_0);} \rightarrow \text{TRASLAZIONE TEMPORALE}$$

Un sistema è con memoria quando l'uscita ad un generico istante t dipende non solo dall'ingresso all'istante t ma anche ad istanti precedenti o successivi

es. risuonatore acustico all'aperto
↓
è influenzato dal clima e momento del giorno

$$ES: y(t) = arctg(x(t)); senza \ \ memoria$$

$$y(t) = x(-t); con \ memoria$$

dal punto di vista matematico si può anche avere un output basato su dati futuri

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \, ; con \ memoria$$

3

Poiché i circuiti che vedremo non sono unidirezionali, non ci sono cicli

Tempo invarianza, memoria e causalità

Un sistema con memoria è causale quando l'uscita dipende solo dall'ingresso a quell'istante di tempo o a istanti precedenti

$ES: y(t) = x(-t); \, non \; causale$ poiché ha ingressi a valori futuri

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \, ; causale$$

I modelli fisici sono sempre causali

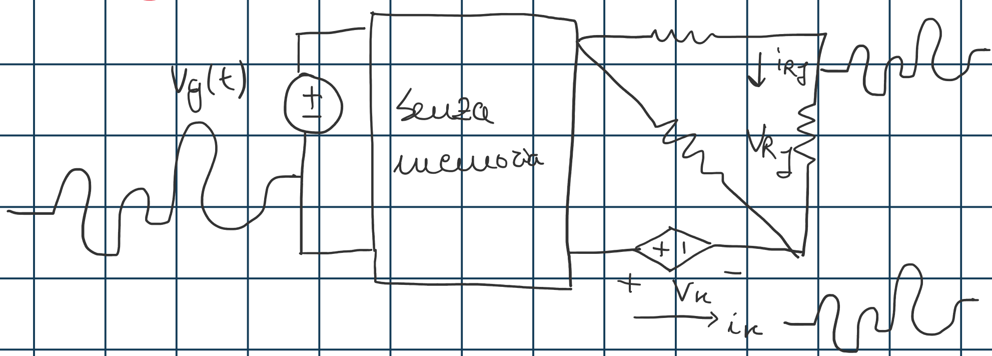
I modelli matematici possono essere causali o non causali

Quando vi è alterazione fra il segnale in ingresso e in uscita vi è sempre presenza di memoria

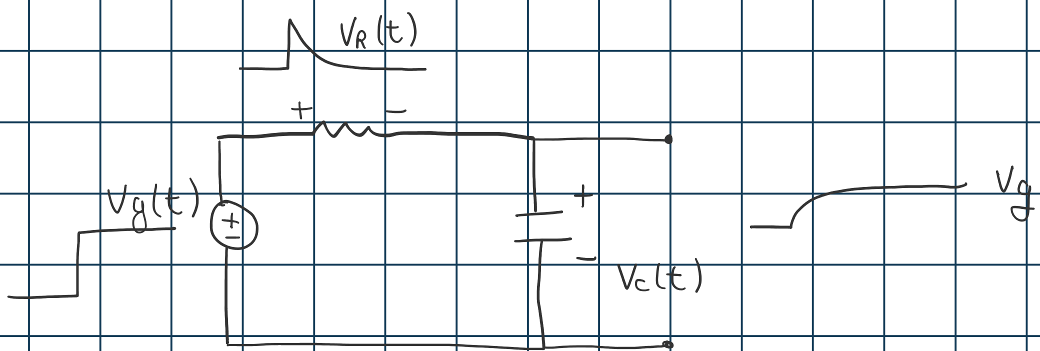
In tutti i circuiti senza memoria e mono ingresso vedono in uscita lo stesso input moltiplicato per una costante

4

SENZA MEMORIA



CON MEMORIA (condensatore)



Sovrapposizione degli effetti

Il principio di sovrapposizione degli effetti (PSE) afferma che l'effetto dovuto all'azione di più cause concomitanti è pari alla somma degli effetti che si ottengono quando ciascuna causa agisce da sola.

Il PSE coincide con la proprietà di additività, pertanto è valido per i sistemi lineari.

Il PSE per un circuito lineare: una tensione (o una corrente) in un circuito lineare è pari alla somma delle tensioni (o delle correnti) che si ottengono quando ciascuno dei generatori indipendenti agisce da solo.

La sovrapposizione è basata sul concetto di linearità e quindi non può essere applicata al calcolo della potenza su un elemento (la potenza dipende dal quadrato della tensione o della corrente).

Il PSE può essere usato in alternativa/concomitanza con i metodi di analisi per diminuire la complessità dei sistemi risolutivi degli stessi, soprattutto quando la soluzione del circuito con un singolo generatore alla volta è immediata

5

Algoritmo PSE

Ng= numero generatori indipendenti

for jg=1:Ng

-> lascio acceso solo il generatore j-esimo

-> spengo tutti gli altri generatori

-> risolvo il circuito e trovo le tensioni e correnti di ramo $v^k{}_{jg}, i^k{}_{jg}$

end

->sommo tutti i contributi

$$v^{TOT}{}_{jg} = \sum_{jg} v^k{}_{jg} \, , \, i^{TOT}{}_{jg} = \sum_{jg} i^k{}_{jg}$$

->posso ricavarmi le potenze dalle grandezze totali → il PSE non può essere applicato alla potenza

Sovrapposizione degli effetti

Applicazione del PSE

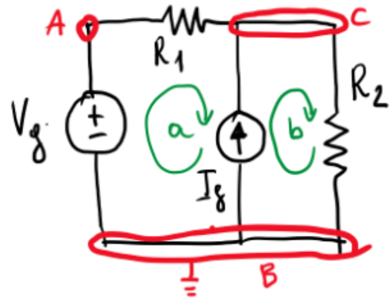
1. Spegnere tutti i generatori indipendenti eccetto uno.
2. Calcolare il valore dell'uscita (tensione o corrente) dovuto al solo generatore funzionante.
3. Ripetere i passi precedenti per ciascuno degli altri generatori indipendenti.
4. Calcolare il contributo totale sommando algebricamente tutti i contributi dei generatori indipendenti.

Spegnimento dei generatori

	acceso	spento
generatore di tensione	v	v=0
generatore di corrente	i	i=0

6

Sovrapposizione degli effetti



OUTPUT $V_{R_2} = V'_{R_2}(V_g) + V''_{R_2}(I_g)$; $I_{R_2} = I'_{R_2}(V_g) + I''_{R_2}(I_g)$

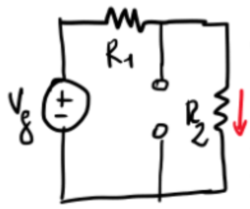
INPUT V_g ; I_g

$e_B = 0$ [V] $e_A - e_B = V_g$ [V] $\Rightarrow e_A = V_g$ [V]

e_C = incognita

CIRCUITO "I" $\rightarrow I_g = 0$ [A]

PARTITORE DI TENSIONE

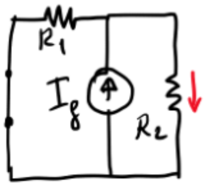


$$V'_{R_2}(V_g) = V_g \frac{R_2}{R_1+R_2} \text{ [V]}$$

$$I'_{R_2}(V_g) = \frac{V_g}{R_1+R_2} \text{ [A]}$$

CIRCUITO "II" $\rightarrow V_g = 0$ [V]

PARTITORE DI CORRENTE



$$V''_{R_2}(I_g) = I_g \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$$

$$I''_{R_2}(I_g) = I_g \frac{R_1}{R_1+R_2}$$

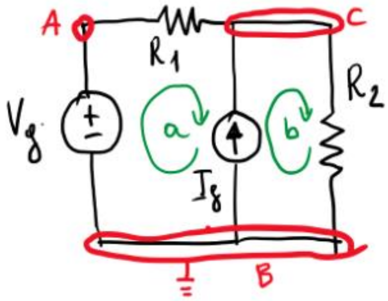
SOMMA DEI TERMINI

$$V_{R_2} = \frac{(V_g + I_g R_1) R_2}{R_1+R_2}$$

$$I_{R_2} = \frac{V_g + I_g R_1}{R_1+R_2}$$

7

Sovrapposizione degli effetti



OUTPUT $V_{R_2} = V'_{R_2}(V_g) + V''_{R_2}(I_g)$; $I_{R_2} = I'_{R_2}(V_g) + I''_{R_2}(I_g)$

INPUT V_g ; I_g

$e_B = 0$ [V] $e_A - e_B = V_g$ [V] $\Rightarrow$ $e_A = V_g$ [V]

e_C = incognita = V_{R_2}

$$C: \quad \frac{e_C - e_A}{R_1} + \frac{e_C - e_B}{R_2} - I_g = 0 \Rightarrow e_C\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{V_g}{R_1} + I_g$$

$$\Rightarrow V_{R_2}\frac{R_1 + R_2}{\cancel{R_1}R_2} = \frac{V_g + I_g R_1}{\cancel{R_1}} \Rightarrow V_{R_2} = \frac{(V_g + I_g R_1)R_2}{R_1 + R_2} \text{ [V]}$$

$$\Rightarrow i_{R_2} = \frac{V_{R_2}}{R_2} = \frac{V_g + I_g R_1}{R_1 + R_2} \text{ [A]}$$

✓ PSE VERIFICATO

8

Teoremi delle reti lineari

Quando non interessa conoscere tutte le grandezze all'interno di un circuito, la risoluzione dei circuiti lineari può essere effettuata tramite l'ausilio di teoremi delle reti lineari che consentono di ridurre la complessità del circuito da analizzare. Cosi come

Teoremi delle reti lineari:
- resistenze in serie;
- resistenze in parallelo;
- trasformazione stella-triangolo e viceversa;
- teorema di Thevenin;
- teorema di Norton;
- teorema di Millman;
- Equivalenza dei generatori reali

9

Dati due blocchi descritti dalla stessa retta di carico, essi sono indistinguibili esternamente alla porta

Teorema di sostituzione ed equazione di porta

Prima di dimostrare i teoremi delle reti lineari è utile presentare il concetto di equazione di porta e il teorema di sostituzione

EQUAZIONE DI PORTA

Consideriamo una parte di circuito accessibile da una porta composta dai terminali A-B. La tensione $v_{AB}(t)$ e la corrente $i_{AB}(t)$ sono vincolati a soddisfare una relazione del tipo

$$f(v_{AB}(t), i_{AB}(t)) = effetto\ dei\ generatori$$

Per circuiti resistivi lineari in particolare si hanno 2 casi:

Assenza di generatori $\alpha v_{AB}(t) + \beta i_{AB}(t) = 0$ da cui si ricava

$v_{AB}(t) = R_{AB} i_{AB}(t)$ o $iAB(t) = G_{AB} v_{AB}(t)$

Assenza di generatori $\alpha v_{AB}(t) + \beta i_{AB}(t) = 0$ da cui si ricava

$$v_{AB}(t) = R_{AB} i_{AB}(t) \text{ o } iAB(t) = G_{AB} v_{AB}(t)$$

(Resistenza/conduttanza di porta)

Presenza di generatori $\alpha v_{AB}(t) + \beta i_{AB}(t) = cost$

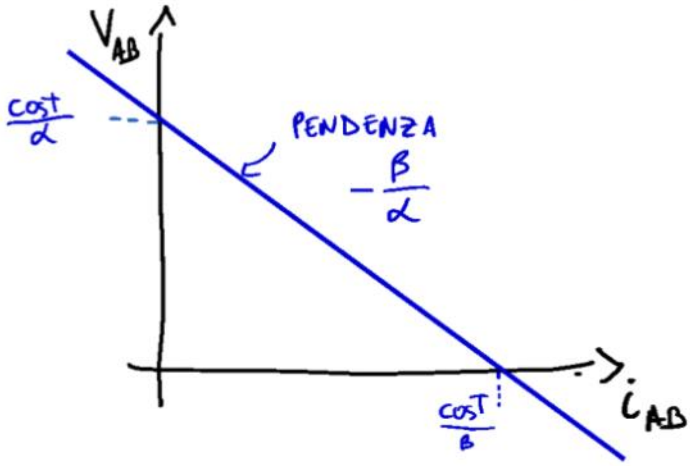
10

Teorema di sostituzione ed equazione di porta

L'EQUAZIONE DI PORTA individua una curva nel piano i-v dove giacciono i valori delle grandezze di porta che non possono assumere tutti i punti dello spazio bidimensionale

Per circuiti resistivi lineari questa curva è una retta, chiamata retta di carico

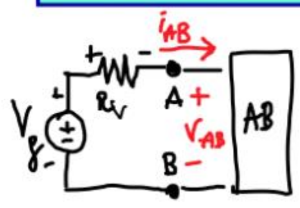
$$\alpha v_{AB}(t) + \beta i_{AB}(t) = cost \rightarrow v_{AB}(t) = -\frac{\beta}{\alpha} i_{AB}(t) + \frac{cost}{\alpha}$$



11

Teorema di sostituzione ed equazione di porta

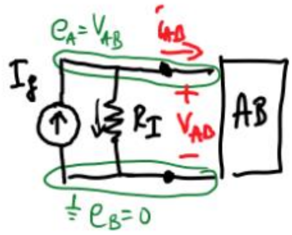
EQUAZIONE DI PORTA: ESEMPI



KVL: $V_{R_g} + V_{AB} = V_g$

$\Rightarrow V_{AB} + R_V i_{AB} = V_g$

$\alpha = 1$, $\beta = R_V$, $\text{cost} = V_g$



KCL: $i_{R_I} + i_{AB} = i_g$

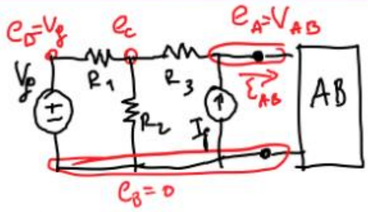
$\Rightarrow \dfrac{V_{AB}}{R_I} + i_{AB} = i_g$

$\alpha = \dfrac{1}{R_I}$, $\beta = 1$, $\text{cost} = i_g$

Per Rv=Ri e Vg=IgRv
(equivalenza dei generatori)
le due rette di carico coincidono

⇓

i due circuiti sono equivalenti
alla porta AB



KCL e_C: $e_C G_2 + (e_C - V_{AB}) G_3 + (e_C - V_g) G_1 = 0$

KCL e_A: $i_{AB} + (V_{AB} - e_C) G_3 = i_g$

DALLA 2^a EQ RICAVO:

$e_C = [i_{AB} - i_g + V_{AB} G_3] / G_3$

SOSTITUISCO NELLA I^a EQ E OTTENGO L'EQ DI PORTA

$$e_C (G_2 + G_3 + G_1) - V_{AB} G_3 = V_g G_1$$

$$[i_{AB} - i_g] \frac{(G_1 + G_2 + G_3)}{G_3} + V_{AB} (G_1 + G_2) = V_g G_1$$

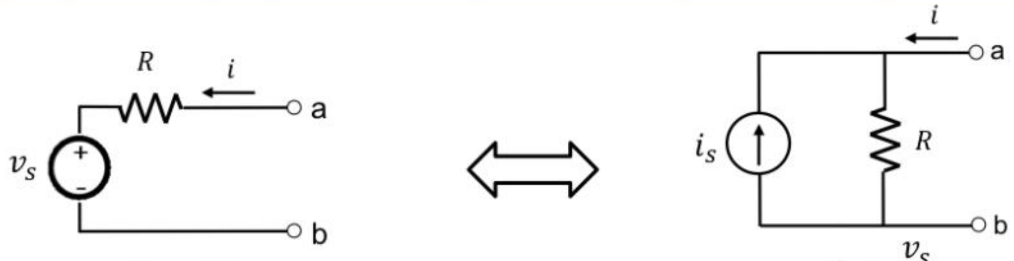
$$V_{AB} (G_1 + G_2) + i_{AB} \underset{=\beta}{\frac{(G_1 + G_2 + G_3)}{G_3}} = \underbrace{V_g G_1 + i_g \frac{(G_1 + G_2 + G_3)}{G_3}}_{= \text{cost}}$$

$\alpha = (G_1 + G_2)$, $\beta = \dfrac{(G_1 + G_2 + G_3)}{G_3}$,

12

Trasformazione di generatori

Una **trasformazione di generatori** è l'operazione di sostituzione di un **generatore reale di tensione,** costituito da un gen. ideale di tensione v_s in serie a un resistore R, **con un generatore reale di corrente**, costituito da un gen. ideale di corrente i_s in parallelo a un resistore R, o viceversa.



$v_s = Ri_s$ $\qquad$ $i_s = \dfrac{v_s}{R}$

I due bipoli risultano equivalenti in quanto hanno la stessa relazione i-v

$$v_{ab} = v_s + Ri = Ri_s + Ri$$

La trasformazione si applica anche ai generatori dipendenti ma non si applica ai generatori ideali di tensione e corrente.

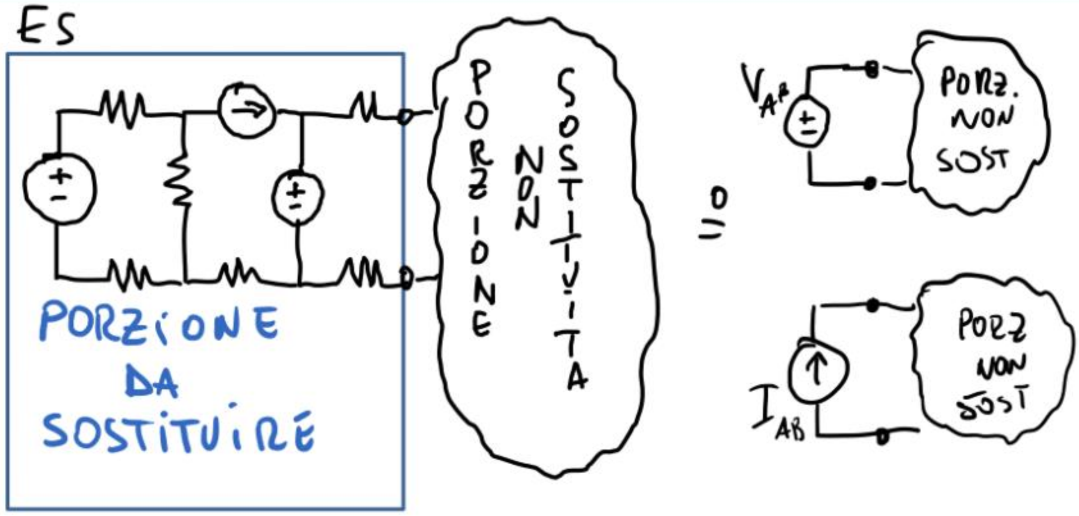
13

Teorema di sostituzione ed equazione di porta

TEOREMA DI SOSTITUZIONE

Una parte di circuito accessibile da una porta composta dai terminali A-B può essere sostituita da un generatore di tensione che assicura la tensione di porta o da un generatore di corrente che imprime la corrente di porta senza alterare le grandezze elettriche nella parte del circuito esterna alla porta

Es



14

Teorema di sostituzione ed equazione di porta

TEOREMA DI SOSTITUZIONE: DIMOSTRAZIONE

Le grandezze di porta $v_{AB}(t)$ e $i_{AB}(t)$ sono vincolate dalla Equazione di porta. Se fisso il valore di una delle due grandezze alla porta, automaticamente l'altra è vincolata.

TEOREMA DI SOSTITUZIONE: NOTE

L'equazione di porta dipende da come è fatto il circuito sia internamente che esternamente alla porta $\Rightarrow$ cambia se cambio i componenti o anche solo i valori dei componenti esterni alla porta $\Rightarrow$ il Teorema di sostituzione sostanzialmente necessità di sapere in anticipo quanto varrà una delle due grandezze di porta per poter essere applicato $\Rightarrow$ limitata applicabilità

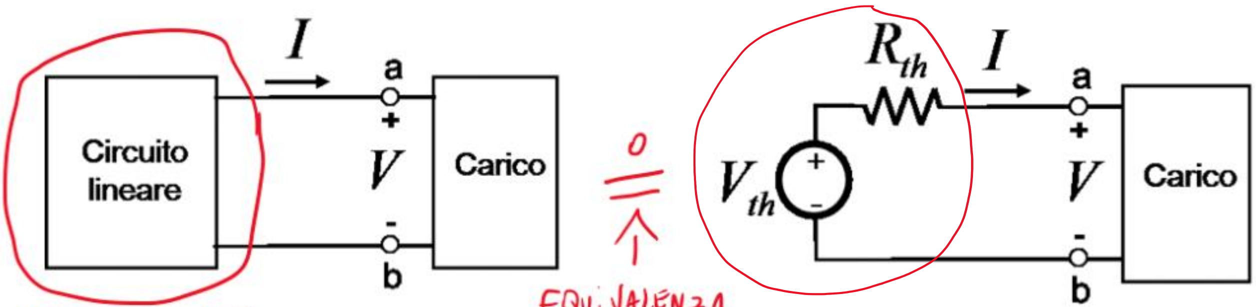
MA il Teorema di sostituzione vale anche

per circuiti non-lineari

15

Teorema di Thevenin

Il **teorema di Thevenin** afferma che un circuito lineare o una porzione di circuito accessibile da due terminali «a» e «b», può essere sostituito con un circuito equivalente formato da un generatore di tensione V_{Th} in serie con un resistore R_{Th}, in cui V_{Th} è la tensione a vuoto ai terminali «a» e «b» e R_{th} è la resistenza di ingresso, o equivalente, vista agli stessi terminali, quando i generatori indipendenti sono spenti.



PORZIONE DA SOSTITUIRE

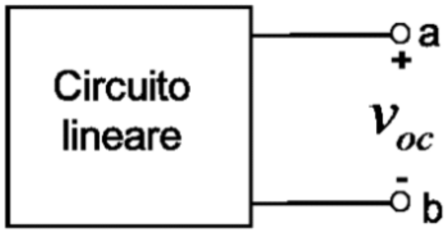
EQUIVALENZA ESTERNAMENTE ALLA PORTA "A-B" ⟹ LE GRANDEZZE ELETTRICHE NEL CARICO SONO LE STESSE

16

Teorema di Thevenin

Calcolo di V_{th}

Si può ignorare la composizione della parte del circuito da non sostituire



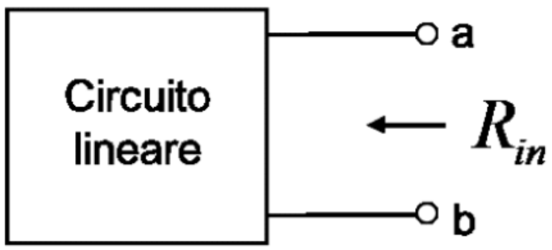
V_{Th} coincide con la tensione a vuoto del circuito (circuito aperto ai terminali «a» e «b»): $V_{Th} = V_{vuoto}$

17

Teorema di Thevenin

Calcolo di R_{Th}

Caso 1: il circuito non include generatori dipendenti



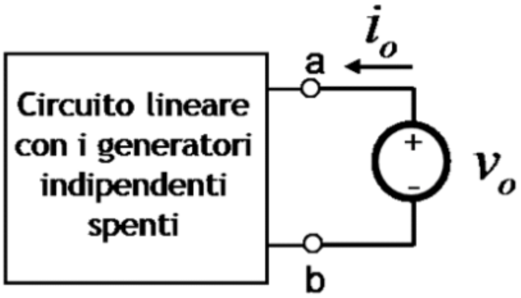
R_{Th} coincide con la resistenza R_{in} vista ai terminali «a» e «b» dopo aver spento tutti i generatori: $R_{Th}=R_{in}$

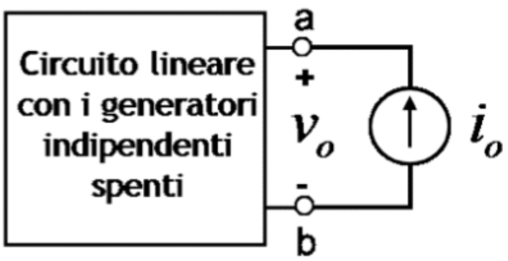
18

Teorema di Thevenin

Calcolo di R_{Th}

Caso 2: il circuito include generatori dipendenti





$$R_{th} = \frac{v_0}{i_0}$$

R_{Th} coincide con il rapporto tensione/corrente ai terminali «a» e «b» (convenzione dei generatori per il generatore di prova)

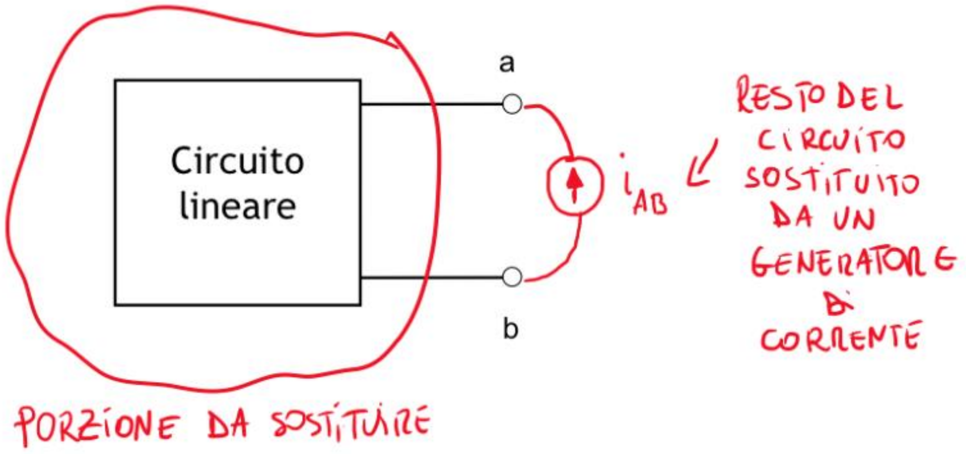
È indifferente usare un generatore di prova di tensione o di corrente

19

Teorema di Thevenin

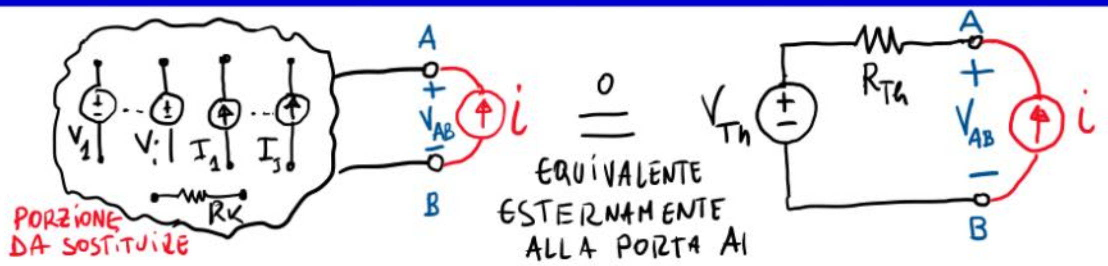
DIMOSTRAZIONE:

1. I parametri del teorema non dipendono dal resto del circuito ma solo dalla porzione da sostituire
2. il resto del circuito può essere rappresentato nel caso più generale da un generatore di corrente che imprime esattamente la corrente di porta (Teorema di sostituzione)



20

Dimostrazione del teorema di Thevenin



Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti al circuito lineare

$$v_{AB} = \sum_i A_i V_i + \sum_j B_j I_j + Ci = v_{AB}^{Int} + v_{AB}^{Ext}$$

con V_i e I_j i generatori indipendenti di tensione e corrente interni al circuito
L'effetto dei generatori indipendenti interni alla rete coincide con la tensione a vuoto (i=0 → porta ab a vuoto)

$$v_{AB}^{Int} = \sum_i A_i V_i + \sum_j B_j I_j = v_{AB}\Big|_{i=0} = v_{AB}^{vuoto}$$

pertanto coincide con la tensione di Thevenin

$$v_{AB}^{Int} = \sum_i A_i V_i + \sum_j B_j I_j = V_{Th}$$

21

Dimostrazione del teorema di Thevenin

L'effetto dei generatori esterni alla rete coincide con la tensione generata dal generatore di corrente

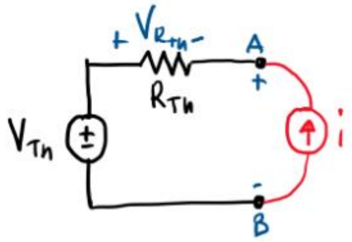
$$v_{AB}^{Ext} = Ci = v_{AB}\Big|_{V_i=0, I_j=0}$$

Il parametro C si ottiene calcolando la resistenza vista tra i due terminali, quando i generatori indipendenti sono spenti e pertanto coincide con la resistenza di Thevenin

$$C = \frac{v_{AB}}{i}\Bigg|_{V_i=0, I_j=0} = R_{Th}$$

Il circuito lineare con due terminali risulta equivalente al bipolo di Thevenin in quanto presentano la stessa relazione i-v

$$v_{AB} = v_{AB}^{Int} + v_{AB}^{Ext} = V_{Th} + R_{Th} i$$



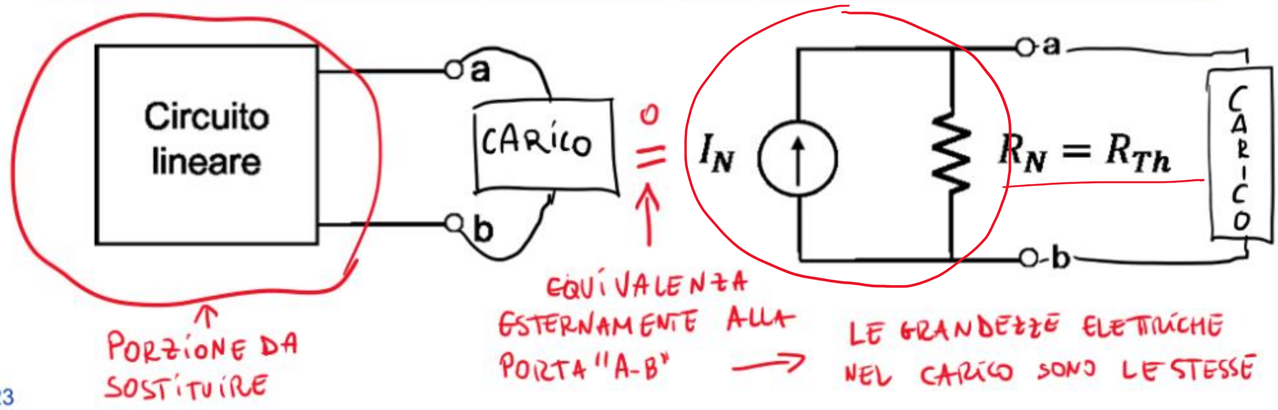
KVL $+V_{R_{Th}} + V_{AB} - V_{Th} = 0$ $\quad V_{R_{Th}} = -i R_{Th}$

$\Rightarrow V_{AB} = V_{Th} + R_{Th} \cdot i$

22

Teorema di Norton

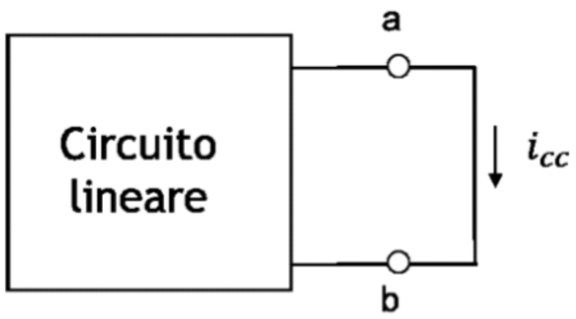
Il **teorema di Norton** afferma che un circuito lineare o una porzione di circuito accessibile da due terminali «a» e «b», può essere sostituito con un circuito equivalente formato da un generatore di corrente I_N in parallelo a un resistore R_N, in cui la corrente I_N è la corrente di corto circuito tra i terminali «a» e «b» e R_N è la resistenza equivalente vista ai capi degli stesso terminali, quando i generatori indipendenti sono spenti.



23

Teorema di Norton

Calcolo di I_N e R_N



I_N coincide con la corrente di corto circuito del circuito: $I_N = i_{cc}$

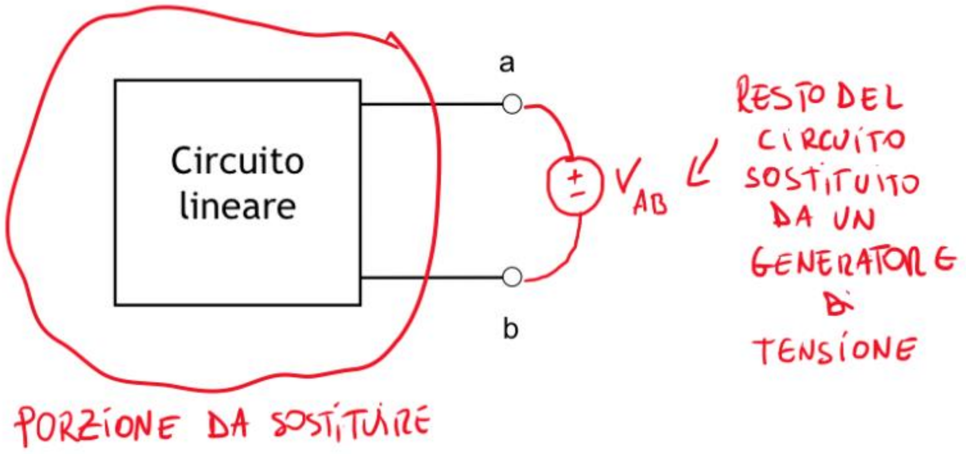
R_N coincide con la resistenza di Thevenin del circuito: $R_N = R_{th}$

24

Teorema di Norton

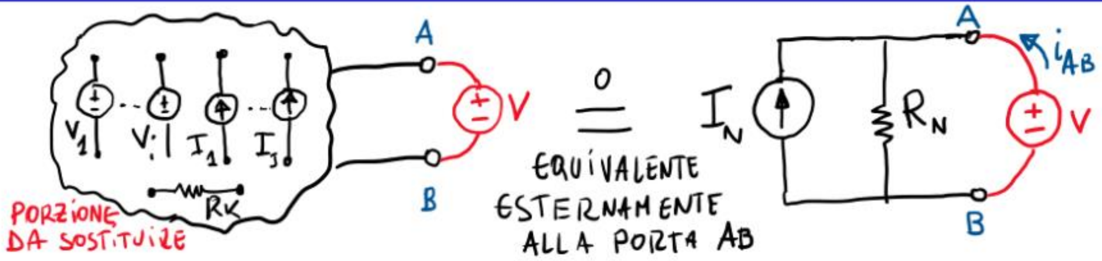
DIMOSTRAZIONE:

1. I parametri del teorema non dipendono dal resto del circuito ma solo dalla porzione da sostituire
2. il resto del circuito può essere rappresentato nel caso più generale da un generatore di tensione che imprime esattamente la tensione di porta (Teorema di sostituzione)



25

Dimostrazione del teorema di Norton



Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti al circuito lineare

$$i_{AB} = \sum_i a_i V_i + \sum_j b_j I_j + cv = i_{AB}^{Int} + i_{AB}^{Ext}$$

con V_i e I_j i generatori indipendenti di tensione e corrente interni al circuito
L'effetto dei generatori indipendenti interni alla rete coincide con la corrente di corto circuito a meno del verso (v=0 → porta ab in c.c.)

$$i_{AB}^{Int} = \sum_i a_i V_i + \sum_j b_j I_j = i_{AB}\Big|_{v=0} = -i_{c.c.}$$

pertanto coincide con la corrente di Norton cambiata di segno

$$i_{AB}^{Int} = \sum_i a_i V_i + \sum_j b_j I_j = -I_N$$

26

Dimostrazione del teorema di Norton

L'effetto dei generatori esterni alla rete coincide con la corrente generata dal generatore di tensione

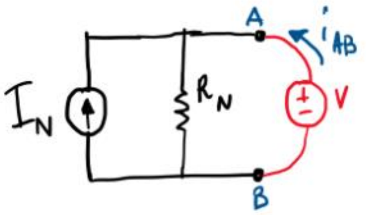
$$i_{AB}^{Ext} = cv = i_{AB}\Big|_{V_i=0, I_j=0}$$

Il parametro c si ottiene calcolando la conduttanza vista tra i due terminali, quando i generatori indipendenti sono spenti e pertanto coincide con l'inverso della resistenza di Norton (e di Thevenin)

$$c = \frac{i_{AB}}{v}\Bigg|_{V_i=0, I_j=0} = \frac{1}{R_N} = \frac{1}{R_T}$$

Il circuito lineare con due terminali risulta equivalente al bipolo di Norton in quanto presentano la stessa relazione i-v

$$i_{AB} = i_{AB}^{Int} + i_{AB}^{Ext} = -I_N + \frac{v_{AB}}{R_N}$$



KCL (A) $\quad -I_N + \frac{V}{R_N} - i_{AB} = 0$

$$i_{AB} = -I_N + \frac{V_{AB}}{R_N}$$

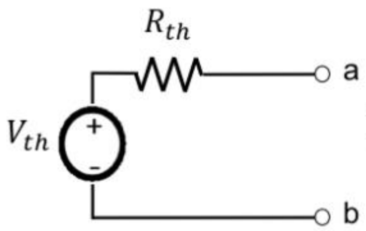
27

Relazione tra Thevenin e Norton

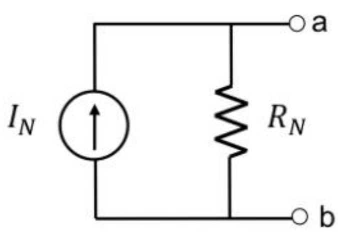
- I circuiti equivalenti di Thevenin e Norton rappresentano rispettivamente un generatore reale di tensione e un generatore reale di corrente.
  - Inoltre le resistenze interne dei due generatori reali coincidono

→ E' pertanto possibile sostituire un circuito equivalente di Thevenin con uno di Norton (e viceversa) sfruttando l'equivalenza dei generatori reali

→ D'altronde essendo i due teoremi validi per un carico generico (esclusi due casi limite), e i circuiti di Thevenin e Norton equivalenti (esternamente ad una porta) ad un generico circuito, ci si aspetta che i due circuiti siano equivalenti tra loro esternamente alla porta



$R_{th} = R_N$
$V_{th} = R_N I_N$



$R_N = R_{th}$
$I_N = \frac{V_{th}}{R_{th}}$

28

Visto che

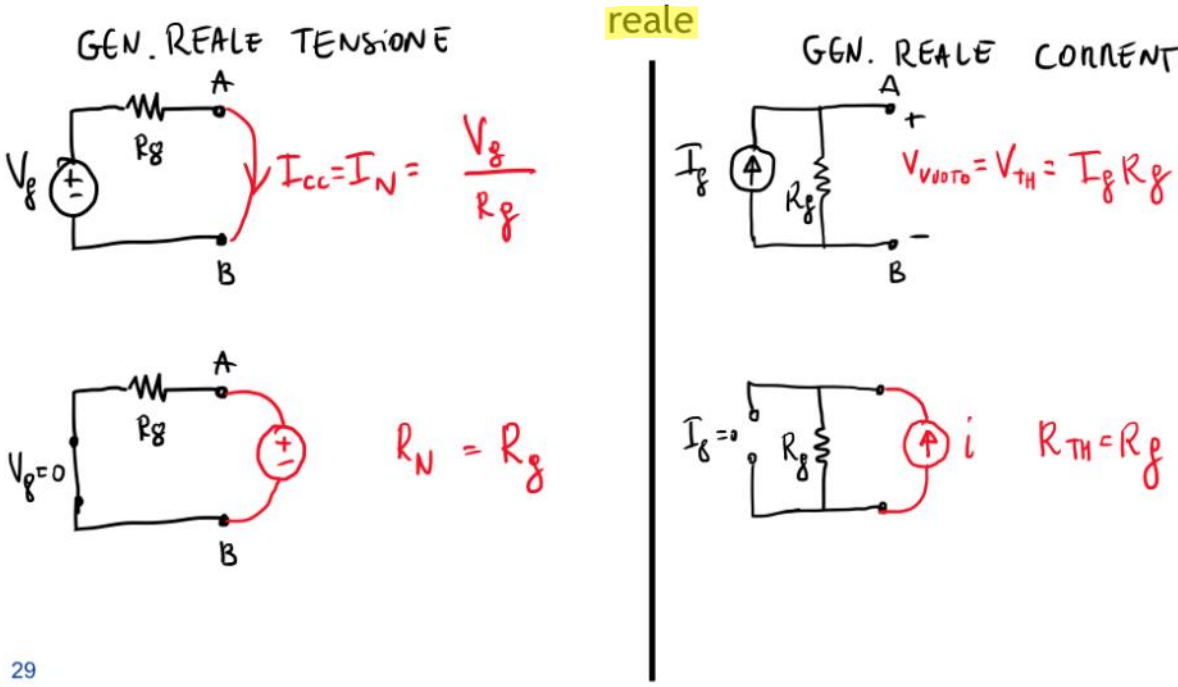
- $V_{AB} = R_N \cdot i_{AB} + R_N \cdot I_N$ per NORTON
- $V_{AB} = R_{TH} \cdot i_{AB} + V_{TH}$ per THEVENIN

allora R_N deve essere uguale a $R_{TH} = V$

inoltre $I_g = \frac{V_g}{R_g} \Rightarrow I_N = \frac{V_{TH}}{R_{TH}} = \frac{V_{TH}}{R_N}$ e dunque $V_{TH} = R_{TH} \cdot I_N = R_N \cdot I_N$

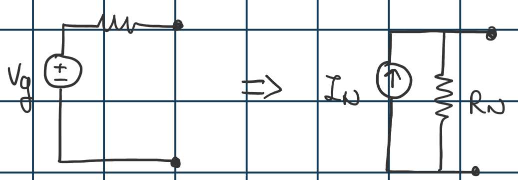
Relazione tra Thevenin e Norton

La relazione tra Thevenin e Norton si può vedere anche facilmente andando a calcolare il circuito equivalente di Norton di un generatore di tensione reale, e il circuito equivalente di Thevenin di un generatore di corrente reale

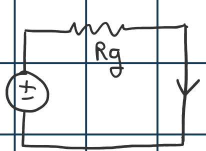


29

Es: viene richiesto di trovare l'equivalente di Norton di un circuito dato

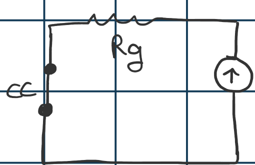


1° step → trovare I_{cc}



$i_{cc} = I_N = \frac{V_g}{R_g}$

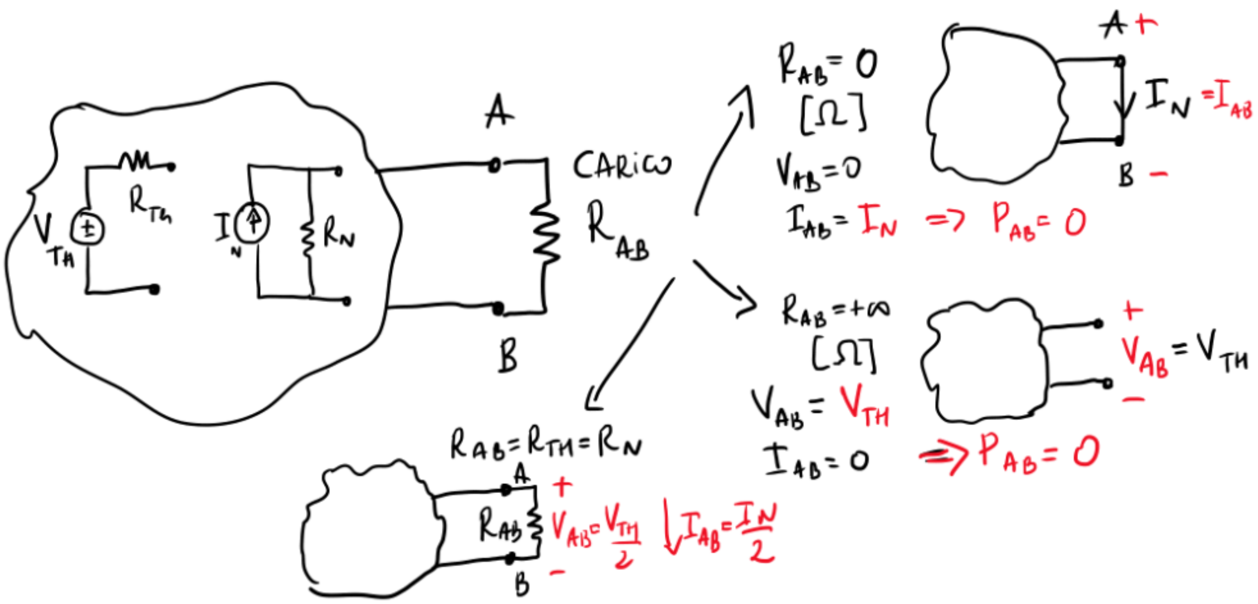
2° step → trovare R_{eq}



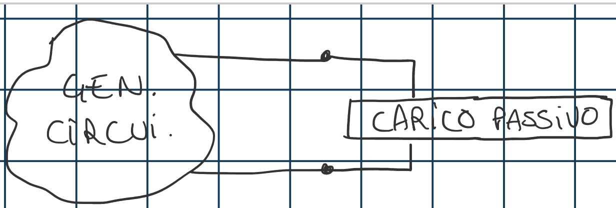
$i_{AB} \Rightarrow R_N = R_g$

Relazione tra Thevenin e Norton

La relazione tra Thevenin e Norton e i generatori reali ci dice anche che la massima potenza erogabile da una porzione di circuito alla porta AB è pari a $P_{Max}^{AB} = \frac{V_{Th}I_N}{4}$ e si ha quando la porta AB è chiusa su un carico resistivo di resistenza pari a $R_{AB} = R_{Th} = R_N$



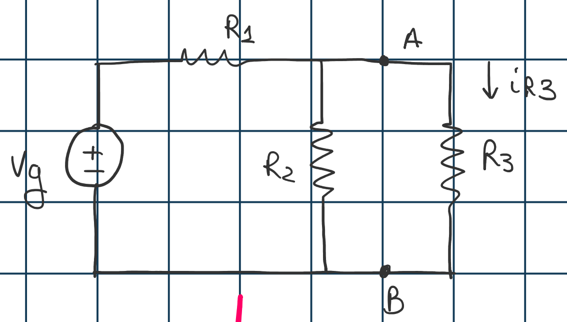
30



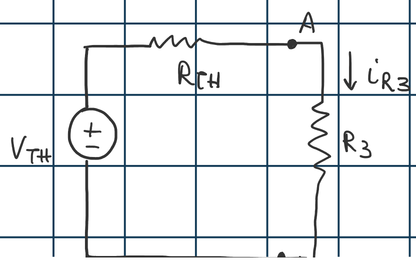
$\boxed{\text{MASSIMA POTENZA TRASFERIBILE}}$

→ $\text{MAX POT} = \frac{V_{TH} \cdot I_N}{4}$

ESERCIZI

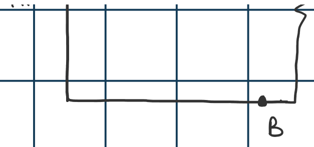


Thevenin



$$i_{R3} = \frac{V_{TH}}{R_{TH}+R_3}$$

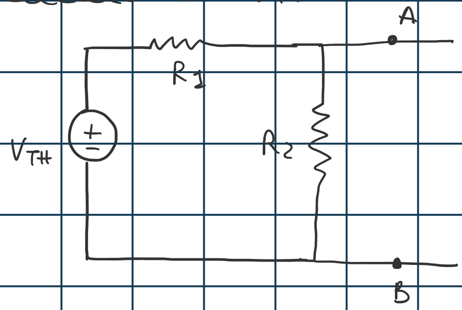
$$V_{R3} = V_{TH} \cdot \frac{R_3}{R_{TH}+R_3}$$



$R_{TH}+R_3$

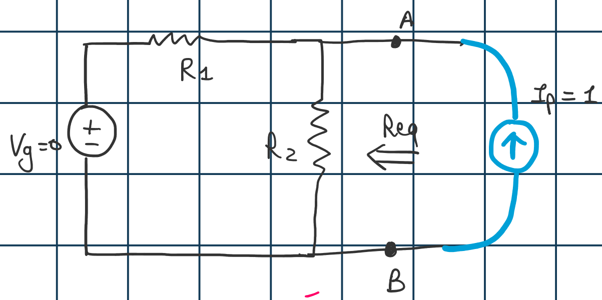
$$P_{R3} = \frac{V_{TH}^{\;2}}{(R_{TH}+R_3)} \cdot R_3$$

- Calcolo di V_{TH}:



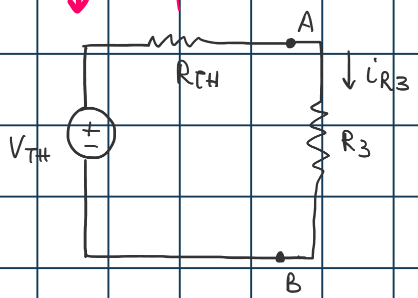
$$V_{AB}^{\,vuoto} = V_{TH} = V_g \cdot \frac{R_2}{R_1+R_2}$$

- Calcolo di R_{TH}:



$$R_{TH} = \frac{V_{AB}}{I_p} \stackrel{\circ}{=} V_{AB} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1+R_2}$$

dunque sarà

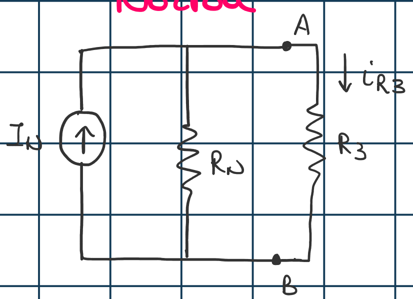


$$R_{TH} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1+R_2}, \quad V_{TH} = \frac{V_g R_2}{R_1+R_2}$$

$$i_{R3} = \frac{V_{TH}}{R_{TH}+R_3} = \frac{V_g R_2}{R_1+R_2} \cdot \frac{1}{\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}+R_3} =$$

$$= \frac{V_g \cdot R_2}{R_1+R_2} \cdot \frac{R_1+R_2}{R_1R_2+R_2R_3+R_3R_1}$$

Norton



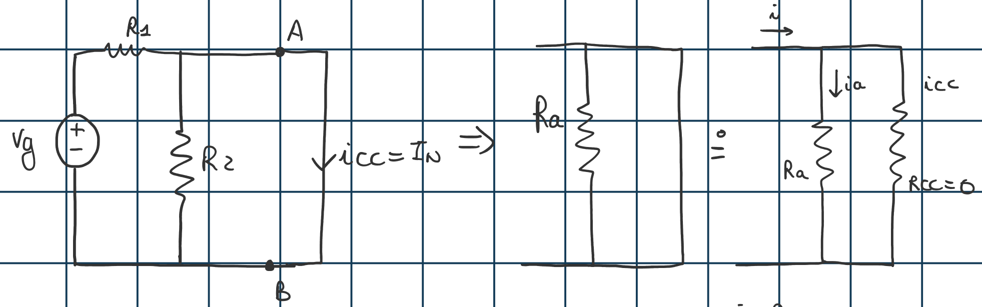
$$i_{R3} = I_N \cdot \frac{G_3}{G_N+G_3} = I_N \cdot R_N$$

$$V_{R3} = I_N \cdot \frac{1}{G_N+G_3} = I_N \cdot \frac{R_N R_3}{R_N+R_3}$$

$$P_{R3} = \frac{I_N^{\,2}\, G_3}{(G_N+G_3)^2}$$

- Calcolo di $I_N = i_{cc}$

• Calcolo di $I_N = i_{cc}$



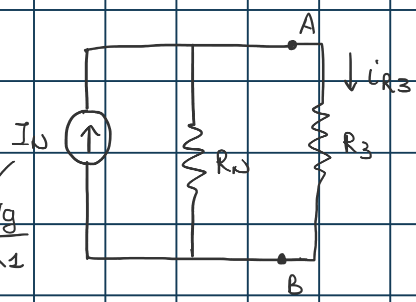
dove $i_a = \dfrac{i \cdot R_{cc}}{R_a + R_{cc}} = 0$

$i_{cc} = \dfrac{i \cdot R_a}{R_a + R_{cc}} = i$

$R_{eq} = \dfrac{R_a \cdot R_{cc}}{R_a + R_{cc}} = 0$

perciò $i_{cc} = I_N = \dfrac{V_g}{R_1}$

• Calcolo di R_N ($= R_{TH}$)



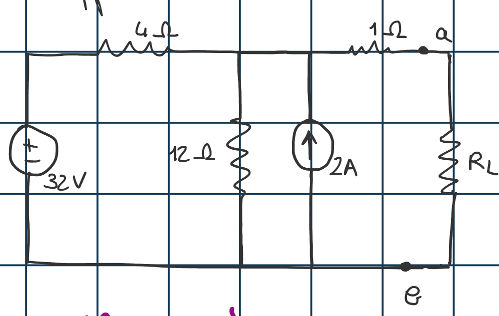
$I_N = \dfrac{V_g}{R_1}$

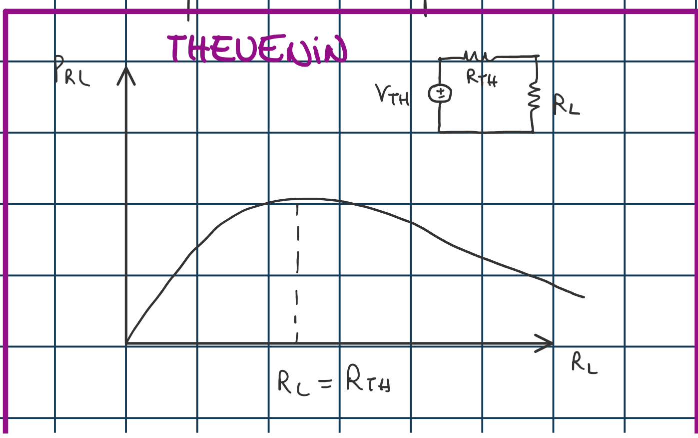
$$\left\{ i_{R_3} = \frac{I_N \cdot R_N}{R_N + R_3} = \frac{V_g}{R_1} \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3} \right.$$

ESEMPIO

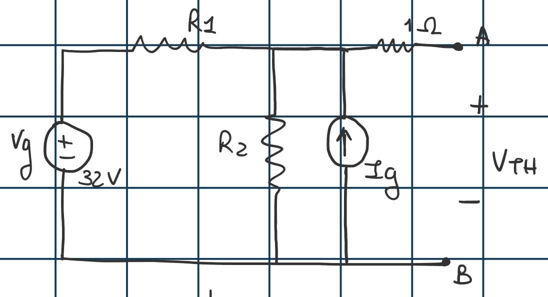
Per quale R_L, P_{RL} è massima?

Si applica il Teorema del massimo Trasferimento di potenza

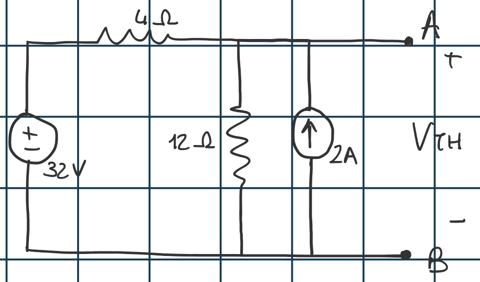




• thevenin:

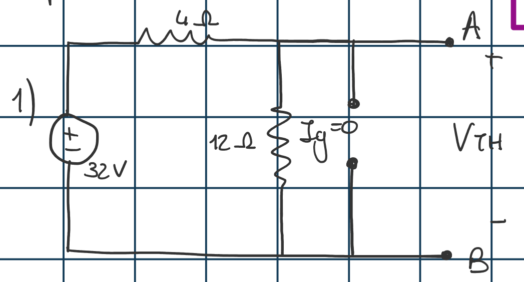


↓ diventa



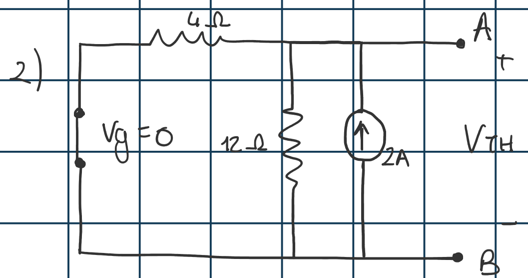
Applicando il PSE ho che:

1)



$$\left\{ V_{TH} = V_{R_2} = \frac{V_g \cdot R_2}{R_1+R_2} \right.$$

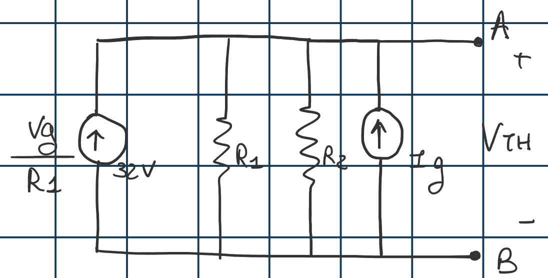
2)

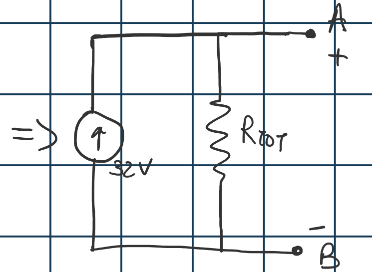


$$\left\{ V_{TH} = I_g = I_g \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1+R_2} \right.$$

Dunque $V_{TH} = \frac{V_g \cdot R_2}{R_1+R_2} + \frac{I_g \cdot R_1 \cdot R_2}{R_1+R_2} = \frac{V_g \cdot R_2 + I_g \cdot R_1 \cdot R_2}{R_1+R_2} = 30[V]$

Applicando la sostituzione dei generatori ho che:



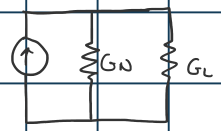


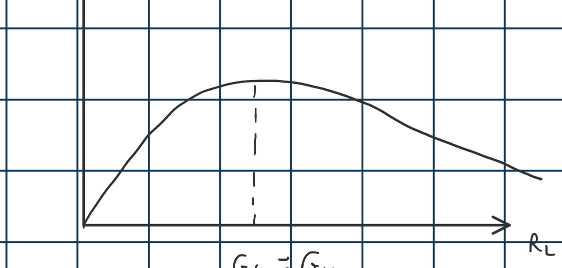
dove $V_{TOT} = I_{TOT} \cdot R_{TOT} = \frac{V_g + I_g \cdot R_1}{R_1} \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1+R_2} = \frac{V_g \cdot R_2 + I_g \cdot R_1 \cdot R_2}{R_1+R_2}$

$R_L = R_{TH}$

$P_{R_L} = \frac{V_{TH}^2}{4R_{TH}}$

NORTON



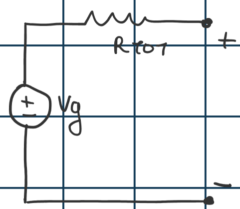


$G_L = G_N$

$P_{R_L} = \frac{I_N^2}{4G_N}$

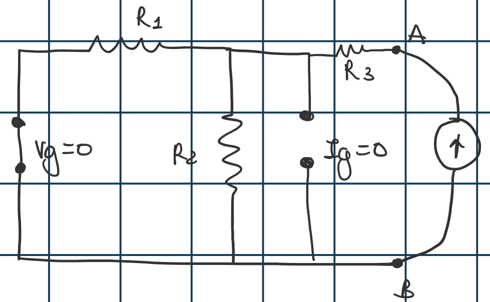
dove $V_{TOT} = I_{TOT} \cdot R_{TOT} = \dfrac{V_g + I_g \cdot R_1}{R_1} \cdot \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1+R_2} = \dfrac{V_g \cdot R_2 + I_g \cdot R_1 \cdot R_2}{R_1+R_2}$

Se sostituisco ulteriormente trovo per cui è equivalente la sostituzione

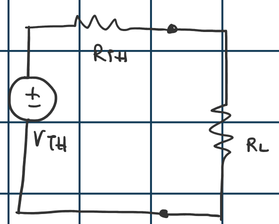


$V_{TH} = V_g = I_{TOT} \cdot R_{TOT}$

Calcolo di R_{TH}:



$R_{TH} = R_{eq} = (R_1 // R_2) + R_3 = \dfrac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_1+R_2}$

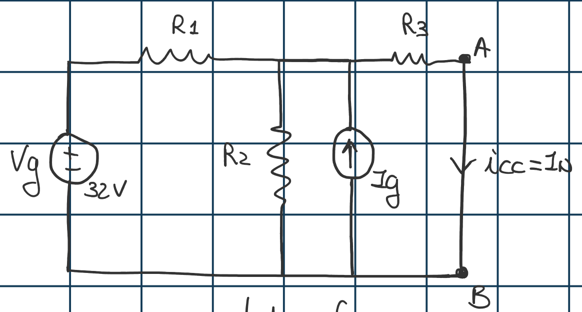


P_{RL} è massima quando $R_L = R_{TH} = \dfrac{48+12+4}{16} = 4\,[\Omega]$

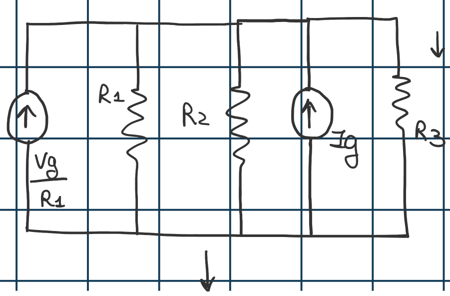
$P_{RL} = \dfrac{V_{TH}^2}{4R_{TH}} = \dfrac{30^2}{16} = \dfrac{900}{16}\,[W]$

$V_{TH} = \dfrac{V_g \cdot R_2 + I_g R_1 R_2}{R_1+R_2} = \dfrac{32 \cdot 12 + 2 \cdot 48}{16} = 30\,[V]$

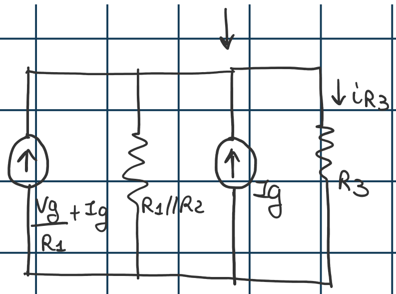
- **Norton:**



↓ diventa



↓



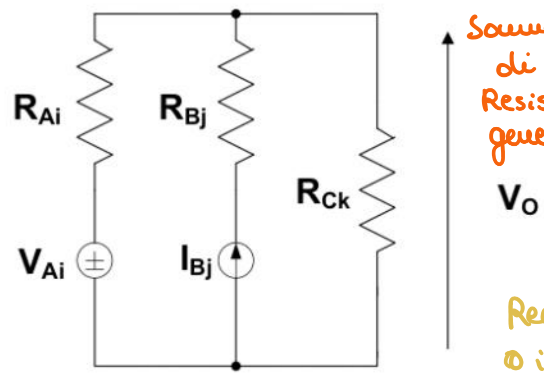
$$i_{R3} = I_N = \frac{V_g + I_g \cdot R_1}{R_1} \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_3} = \frac{V_g + I_g \cdot R_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}$$

Teorema di Millman

Il **teorema di Millman** afferma che la tensione V_o ai capi di un parallelo di:

- generatori di tensione V_{Ai} con in serie resistenze R_{Ai},
- generatori di corrente I_{Bj} con eventualmente in serie resistenze R_{Bj},
- resistenze R_{Ck},

è data dal prodotto di una corrente I_o per una resistenza R_o, $V_o = R_o I_o$, dove I_o è la somma delle correnti V_{Ai}/R_{Ai} e I_{Bj} e R_o è il parallelo delle resistenze R_{Ai} e R_{Ck}.



Sommatoria dei generatori di tensione fratto la somm. Resistenze in serie dei generatori di tensione

Sommatoria dei gen di corrente

$$V_O = R_O I_O = \frac{\sum_i \frac{V_{Ai}}{R_{Ai}} + \sum_j I_{Bj}}{\sum_i \frac{1}{R_{Ai}} + \sum_k \frac{1}{R_{Ck}}}$$

Reciproci delle resistenze che si trovano o in serie coi generatori di tensione o da sole => ovvero conduttanze

31

Dimostrazione del teorema di Millman

Il teorema di Millman si può dimostrare in vari modi, in particolare:

1) Attraverso il bilancio delle correnti a uno dei due nodi
2) Sfruttando l'equivalenza tra generatore reale di tensione e generatore reale di corrente

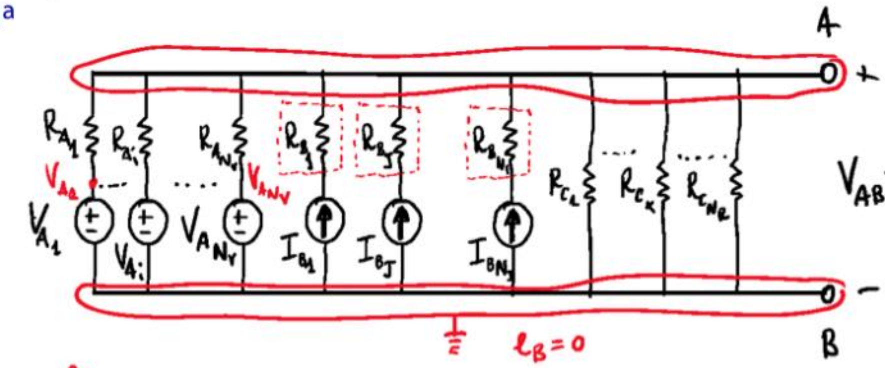
Iª

N_V = n° rami gen. tensione

N_I = n° rami gen. corrente

N_R = n° rami resistivi

$V_{AB} = e_A - e_B = V_o = I_o R_o = e_A$



$$(A)\ \frac{e_A - V_{A1}}{R_{A1}} + \dots + \frac{e_A - V_{Ai}}{R_{Ai}} + \dots + \frac{e_A - V_{AN_V}}{R_{AN_V}} + (-I_{B1}) + \dots + (-I_{Bj}) + \dots + (-I_{BN_I}) + \frac{e_A}{R_{C1}} + \dots + \frac{e_A}{R_{Ck}} + \frac{e_A}{R_{CN_R}} = 0$$

$$\Rightarrow e_A \left(\sum_{i=1}^{N_V} \frac{1}{R_{Ai}} + \sum_{k=1}^{N_R} \frac{1}{R_{Ck}} \right) = \left(\sum_{i=1}^{N_V} \frac{V_{Ai}}{R_{Ai}} + \sum_{j=1}^{N_I} I_{Bj} \right) \Rightarrow V_O = R_O I_O = \frac{\sum_i \frac{V_{Ai}}{R_{Ai}} + \sum_j I_{Bj}}{\sum_i \frac{1}{R_{Ai}} + \sum_k \frac{1}{R_{Ck}}}$$

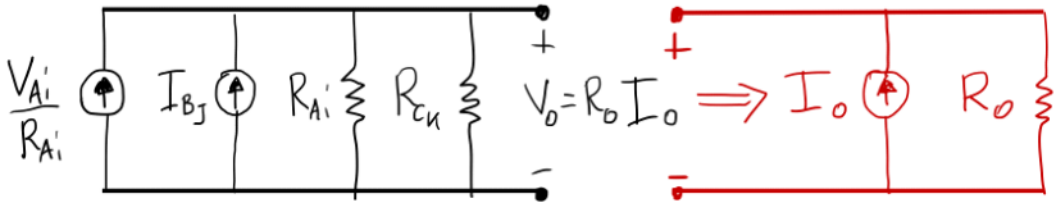
32

Dimostrazione del teorema di Millman

II^a DIMOSTRAZIONE:

1) trasformo i generatori reali di tensione, i generatori di tensione V_{Ai} con in serie i resistori R_{ai}, in generatori reali di corrente, ovvero aventi il generatore ideale di corrente V_{Ai}/R_{Ai} con in parallelo il resistore R_{Ai}
2) elimino le resistenze R_{Bj} in serie ai generatori di corrente I_{bj} (teorema di sostituzione)

→ ottengo il circuito equivalente riportato di seguito che può semplificarsi in un solo generatore di corrente I_0 in parallelo con una sola resistenza R_0



$$V_O = R_0 I_0 = \frac{\sum_i \frac{V_{Ai}}{R_{Ai}} + \sum_j I_{Bj}}{\sum_i \frac{1}{R_{Ai}} + \sum_k \frac{1}{R_{Ck}}}$$

NOTA: I_0 e R_0 sono i parametri del circuito equivalente di Norton del circuito di partenza. Il teorema di Millman fornisce quindi una strada per il calcolo del circuito equivalente di Norton per la classe di circuiti considerati dal teorema. Inoltre V_0 è la tensione di Thevenin, e quindi si deriva anche il circuito equivalente di Thevenin

33

Ancora sul teorema di Millman

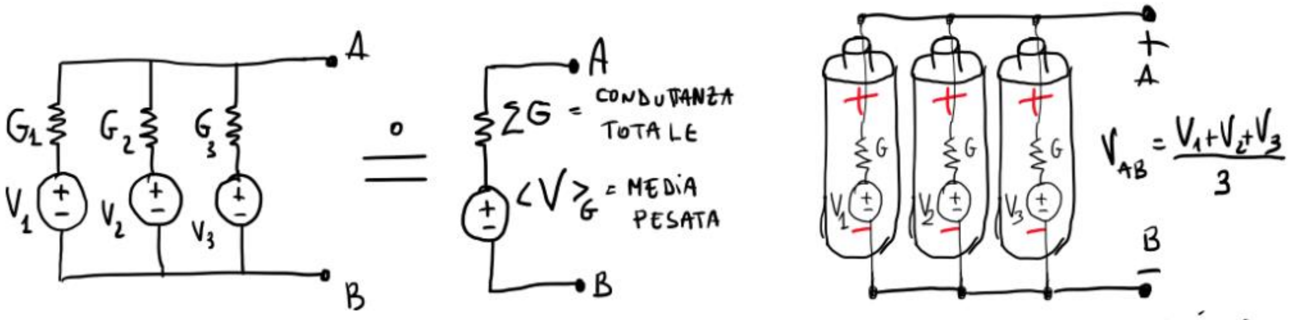
E' utile scrivere il teorema di Millman anche attraverso le conduttanze dei rami

$$V_O = \frac{\sum_i V_{Ai} G_{Ai} + \sum_j I_{Bj}}{\sum_i G_{Ai} + \sum_k G_{Ck}}$$

Se sono presenti solo rami con generatori di tensione, la formula diventa:

$$V_O = \frac{\sum_i V_{Ai} G_{Ai}}{\sum_i G_{Ai}} = \text{media pesata delle tensioni con pesi le conduttanze di ramo}$$

ESEMPIO $G_1 = G_2 = G_3 = G$

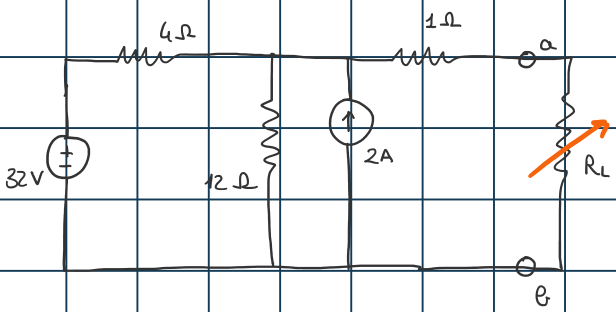


SE LE G SONO UGUALI ⇒

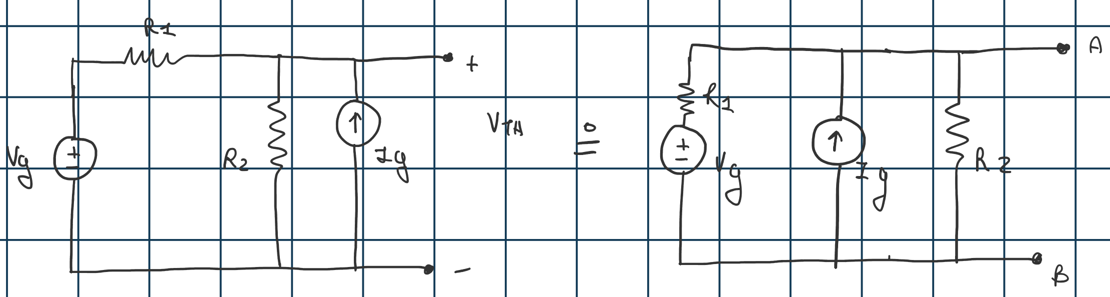
V_o = MEDIA ARITMETICA

34

Es.



Applico Millmann:



$$V_0 = R_0 \cdot I_0 = \frac{\frac{V_g}{R_1} + I_g}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = V_{TH} = \frac{\frac{V_g + I_g \cdot R_1}{R_1}}{\frac{R_1+R_2}{R_1 R_2}} \quad \frac{V_g \cdot R_2 + I_g \cdot R_1 \cdot R_2}{R_1+R_2}$$

Esercitazione 2

mercoledì 21 aprile 2021 12:13

Linearità

Un sistema è lineare se soddisfa le proprietà di omogeneità e additività

Linearità=omogeneità+additività

Omogeneità: se l'ingresso viene moltiplicato per un fattore costante, l'uscita risulta moltiplicata per lo stesso fattore

es. $v=iR \longrightarrow kiR=kv$

Additività: la risposta alla somme di più ingressi è pari alla somma delle risposte agli ingressi applicati separatamente

es.

Se abbiamo
$v_1 = i_1 R$
$v_2 = i_2 R$

Applicando $i_1 + i_2$ otteniamo:

$$v = (i_1 + i_2)R = i_1 R + i_2 R = v_1 + v_2$$

Da un punto di vista matematico, un sistema lineare è descritto da un sistema di equazioni differenziali lineari.

Linearità

Un circuito lineare è costituito da elementi lineari (resistori, condensatori e induttori, generatori dipendenti lineari) e da generatori indipendenti.

Gli ingressi di un circuito lineare sono rappresentati dai generatori indipendenti. Le uscite di un circuito lineare sono di solito le tensioni e le correnti.

Per ottenere il sistema di equazioni lineari che descrive un Circuito Resistivo Lineare (composto solo da generatori e resistori) è sufficiente applicare le 2 leggi di Kirchhoff e la legge di Ohm.

Esistono teoremi delle reti lineari che consentono di ridurre la complessità del circuito da analizzare.
- resistenze in serie;
- resistenze in parallelo;
- principio di sovrapposizione degli effetti;
- teorema di Thevenin;
- teorema di Norton;
- teorema di Millman.

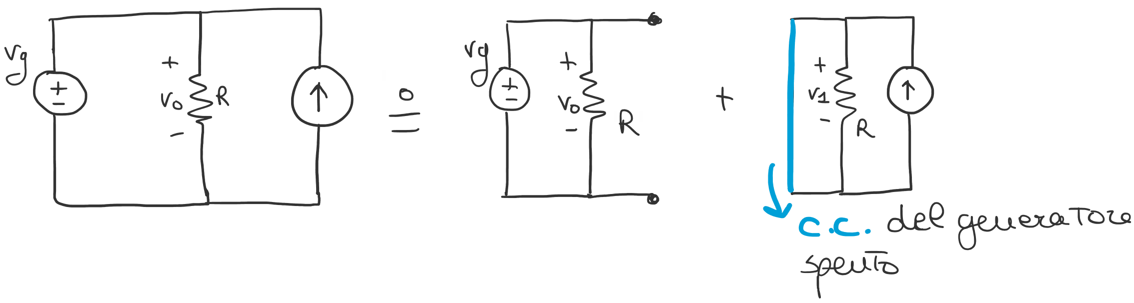
→ come semplificare un circuito

Sovrapposizione degli effetti

Il principio di sovrapposizione degli effetti (PSE) afferma che l'effetto dovuto all'azione di più cause concomitanti è pari alla somma degli effetti che si ottengono quando ciascuna causa agisce da sola.

Il PSE per un circuito lineare: una tensione (o una corrente) in un circuito lineare è pari alla somma algebrica delle tensioni (o delle correnti) che si ottengono quando ciascuno dei generatori indipendenti agisce da solo.

$V_o + v_1 = V = V_g$



Sovrapposizione degli effetti

Il PSE non può essere usato per calcolare direttamente la potenza su un elemento!
(La potenza non è una funzione lineare di tensioni e correnti)

Se su un resistore abbiamo una corrente i_1 dovuta all'azione di un generatore e una corrente i_2 dovuta all'azione di un altro generatore, non possiamo calcolare le singole potenze e poi sommarle, perché:

$$p_1 = R{i_1}^2$$
$$p_2 = R{i_2}^2$$

Ma la potenza effettiva sul resistore sarà

$$p = R(i_1 + i_2)^2 \neq p_1 + p_2$$

Possiamo quindi calcolare la corrente (o la tensione) TOTALE sul resistore e poi usarla per calcolare la potenza

Sovrapposizione degli effetti

Applicazione del PSE

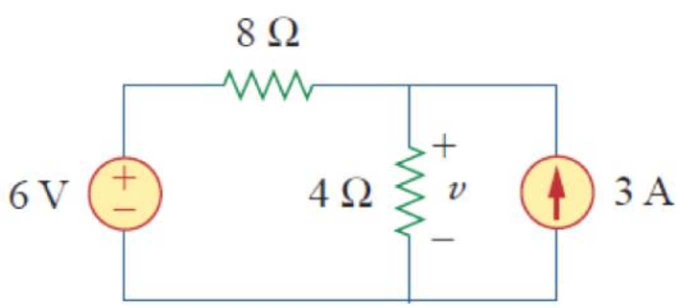
1. Spegnere tutti i generatori indipendenti eccetto uno.
2. Calcolare il valore dell'uscita (tensione o corrente) dovuto al solo generatore funzionante.
3. Ripetere i passi precedenti per ciascuno degli altri generatori indipendenti.
4. Calcolare il contributo totale sommando algebricamente tutti i contributi dei generatori indipendenti (fare attenzione ai versi).

Spegnimento dei generatori

	acceso	**spento**
generatore di tensione	**v**	**v=0**
generatore di corrente	**i**	**i=0**

Sovrapposizione degli effetti

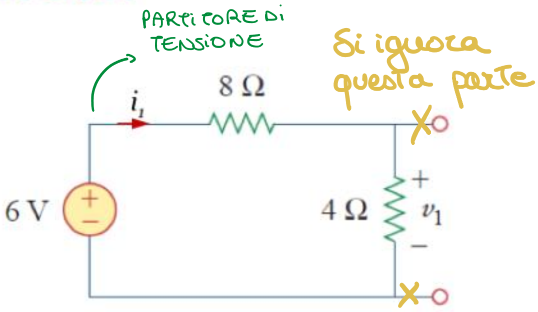
Esercizio
Dato il circuito sottostante usare il PSE per trovare v



Sovrapposizione degli effetti

Soluzione

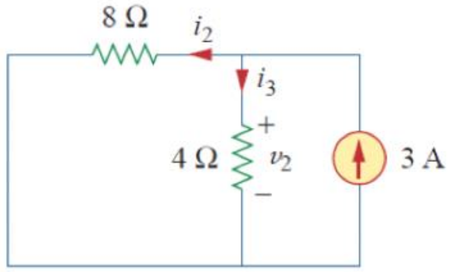
Spegniamo il generatore di corrente



$$12i_1 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_1 = 0.5 \text{ A}$$

$$v_1 = 4i_1 = 2 \text{ V}$$

Spegniamo il generatore di tensione



$$i_3 = \frac{8}{4 + 8}(3) = 2 \text{ A}$$

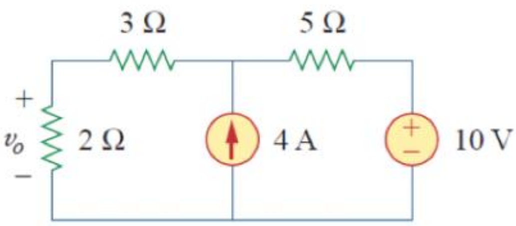
$$v_2 = 4i_3 = 8 \text{ V}$$

$$v = v_1 + v_2 = 2 + 8 = 10 \text{ V}$$

Sovrapposizione degli effetti

Esercizio

Dato il circuito sottostante usare il PSE per trovare Vo



Soluzione

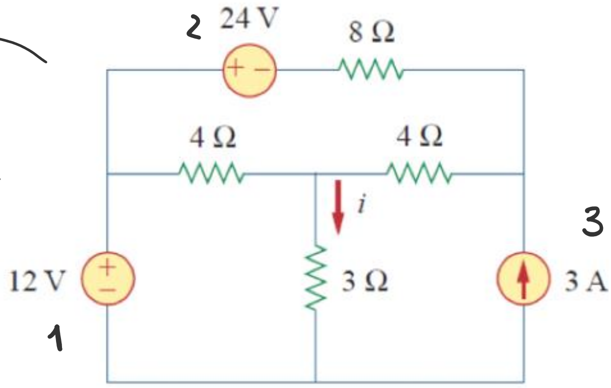
Vo=6V

Sovrapposizione degli effetti

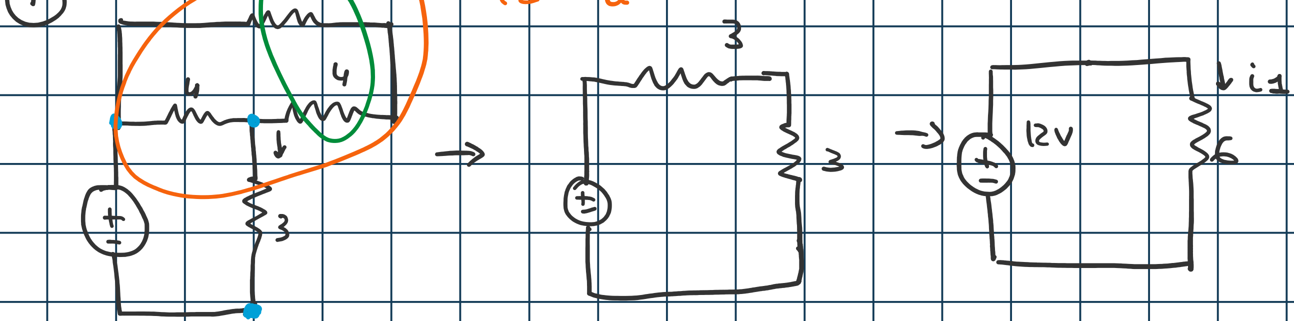
Esercizio

Dato il circuito sottostante usare il PSE per trovare i

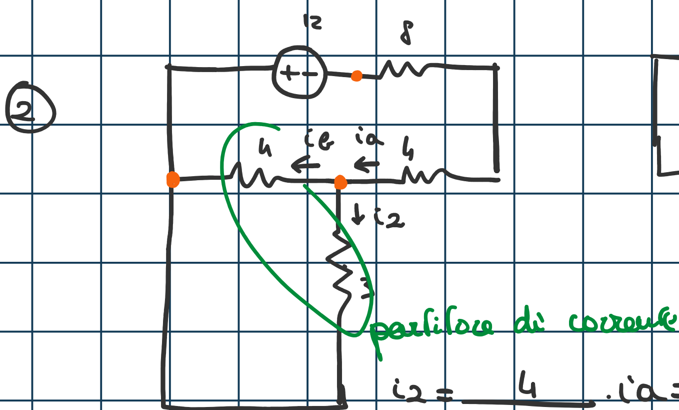
Questo circuito si risolve molto più facilmente col metodo degli anelli



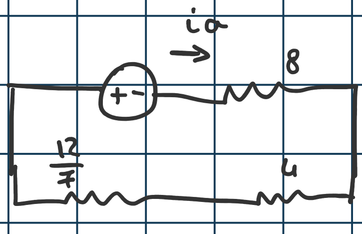
$\frac{1}{12} + \frac{1}{4} = 3$

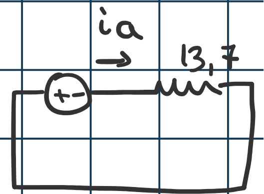


$i_1 = \frac{V}{R} = \frac{12}{6} = 2\,A$



partitore di corrente



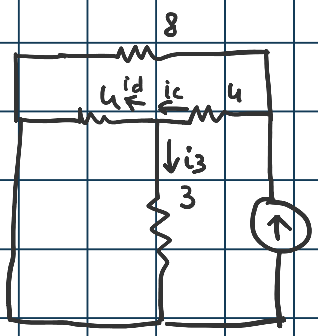


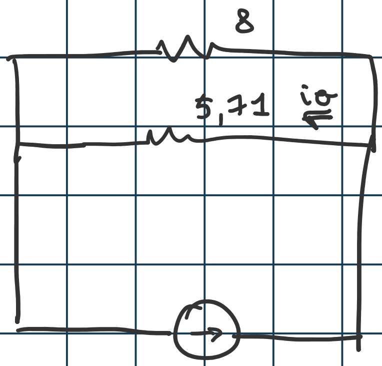
$i_a = \frac{-24V}{13,7} = -1,75$

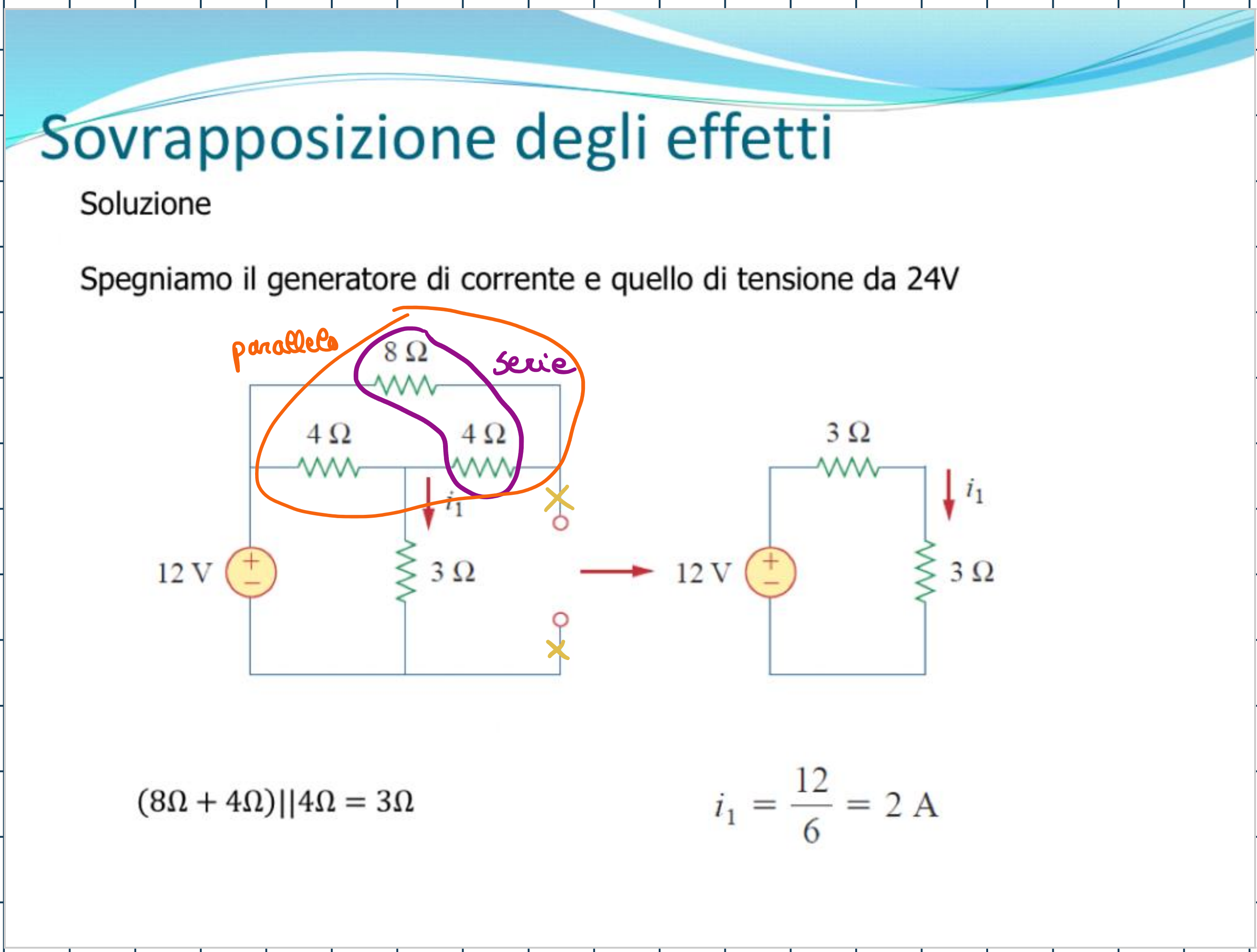
$i_2 = \frac{4}{3+4} \cdot i_a = -1\,A$

$i_2 = \frac{4}{3+4} \cdot i_a = 1\,A$

3







Sovrapposizione degli effetti

Soluzione (continua)

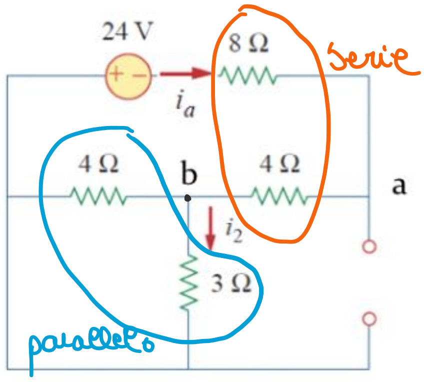
Spegniamo il generatore di corrente e quello di tensione da 12V

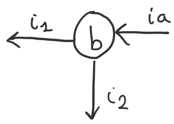
$4\Omega||3\Omega = 1{,}71\Omega$

$$i_a = \frac{-24V}{8\Omega + 4\Omega + 1{,}71\Omega} = -1{,}75A$$

Partitore di corrente nodo b

$$i_2 = \frac{4\Omega}{4\Omega + 3\Omega} i_a = -1A$$





Sovrapposizione degli effetti

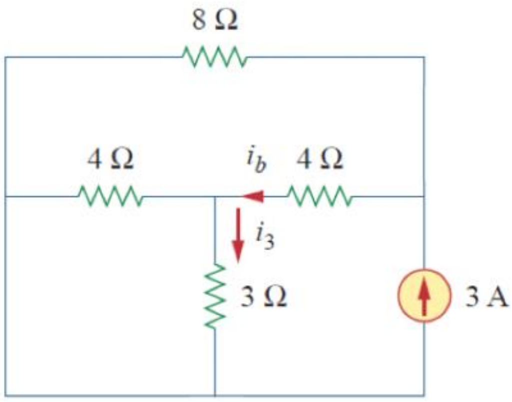
Soluzione (continua)

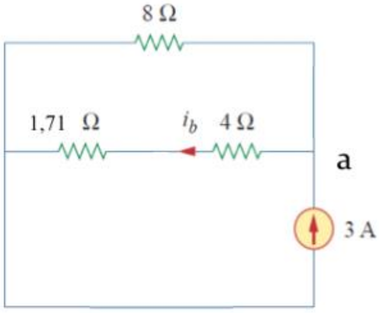
Spegniamo i generatori di tensione e lasciamo solo quello di corrente

$4\Omega||3\Omega = 1{,}71\Omega$

Partitore di corrente al nodo a

$$i_b = \frac{8\Omega}{8\Omega + 4\Omega + 1{,}71\Omega} 3A = 1{,}75A$$

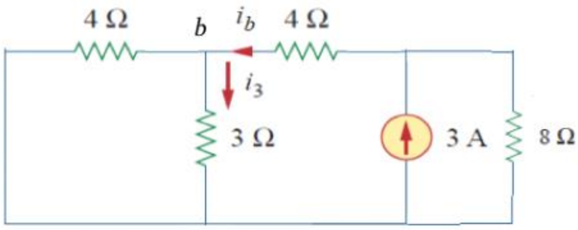




Sovrapposizione degli effetti

Soluzione (continua)

Il circuito può essere ridisegnato come in figura a destra.
Possiamo usare un partitore di corrente per ricavare i_3 al nodo b



Partitore di corrente nodo b

$$i_3 = \frac{4\Omega}{4\Omega + 3\Omega} i_b = 1A$$

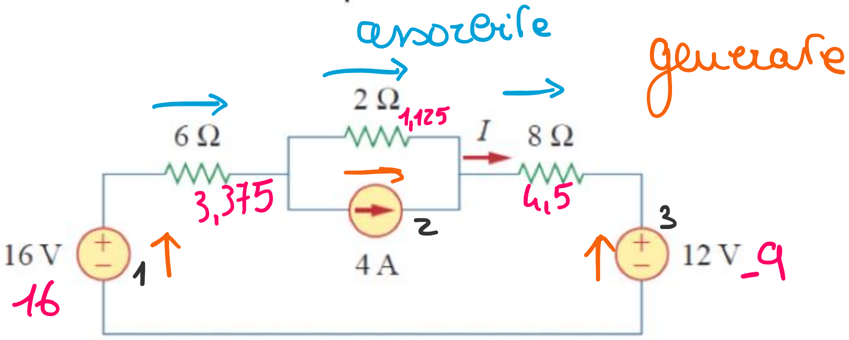
$\downarrow I = \downarrow i_1 + \uparrow i_2 + \downarrow i_3$

Sommiamo tutte e tre le componenti dovute all'azione di ogni singolo generatore per ottenere la corrente totale sulla resistenza da 3Ω

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = 2 - 1 + 1 = 2 \text{ A}$$

Sovrapposizione degli effetti

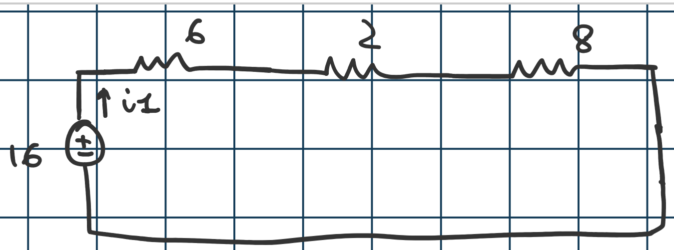
Esercizio
Dato il circuito sottostante usare il PSE per trovare I



Soluzione
I=0,75A

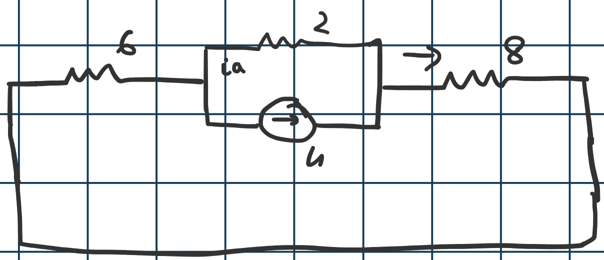
6 2 8

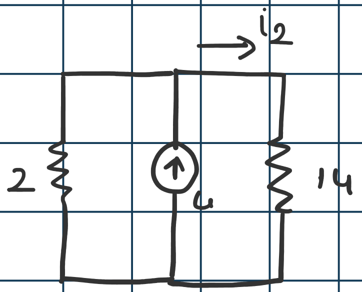
1



$$i_1 = \frac{V}{R} = \frac{16}{6+2+8} = 1A$$

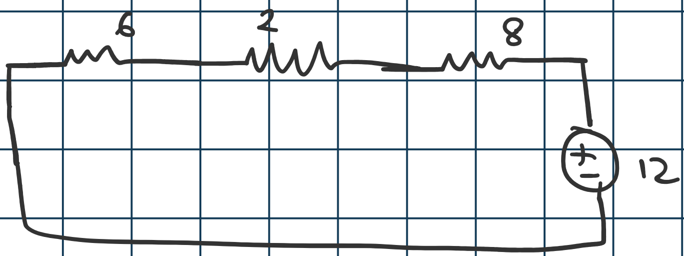
2

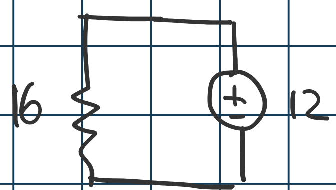




$$i_2 = \frac{2}{\cancel{16}_{\,4}} \cdot \cancel{4} = 0{,}5A$$

3



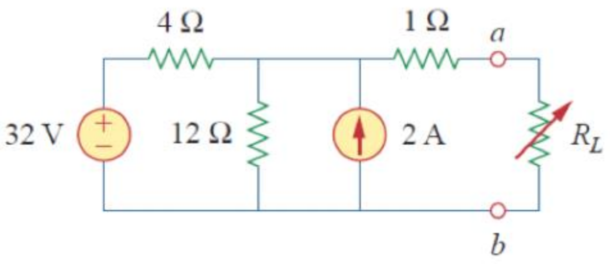


$$i_3 = -\frac{12}{16} = -0{,}75A$$

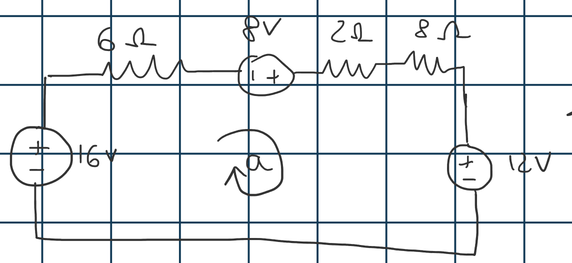
$$i = -0{,}75 + 0{,}5 + 1 = 0{,}75A$$

Sovrapposizione degli effetti

$P = I \cdot V$



SOL. con le trasformazioni



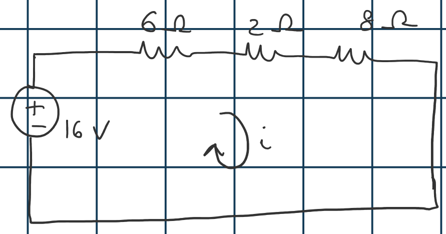
(a) $6i - 8 + 2i + 8i + 12 - 16 = 0$

$\Downarrow$

$i(6+2+8) = 12 \Rightarrow i = 3/4$

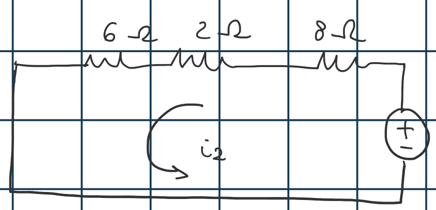
SOL. con il PSE

1)



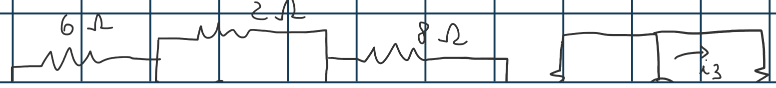
$\frac{16\,V}{(6+2+8)\,\Omega} = 1\,[A]$ [$\rightarrow$]

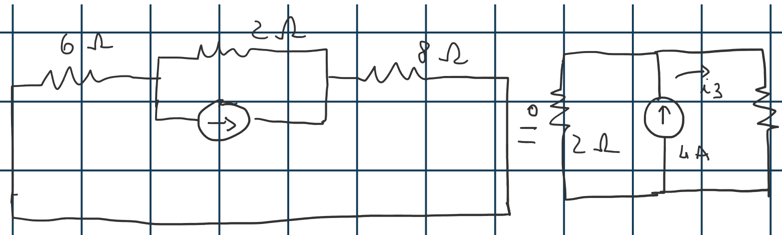
2)



$\frac{12\,V}{16\,\Omega} = 0{,}75\,[A]$ [$\leftarrow$]

3)



3) 

$R_{eq} = 14\ \Omega$

$i_3 = \frac{4A \cdot 2\ \Omega}{(2+14)\ \Omega} = 0,5\ [A]\ [\rightarrow]$

$\vec{I} = \vec{i_1} + \vec{i_2} + \vec{i_3} = 1 - 0,75 + 0,5 = 0,75\ A$

Domanda in più: verificare il bilancio energetico

Il bilancio si fa eguagliando potenza assorbita ed erogata

ASSORBITA $>0 \Rightarrow$ assorbite

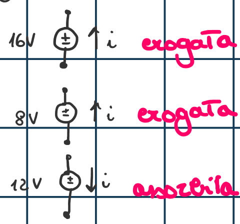
$$\left.\begin{aligned} P_{R1} &= R_1\, i^2 = 3,37\ [W] \\ P_{R2} &= R_2 \cdot i^2 = 1,125\ [W] \\ P_{R3} &= R_3 \cdot i^2 = 4,5\ [W] \end{aligned}\right\} P_a = 9\ [W]$$

GENERATA $<0 \Rightarrow$ assorbita

$P_{V_1}^{g} = V_1^{g} \cdot i = 12\ [W]$

$P_{V_2}^{g} = V_2^{g} \cdot i = 6\ [W]$

$P_{V_3}^{g} = -V_3^{g} \cdot i = -9\ [W]$



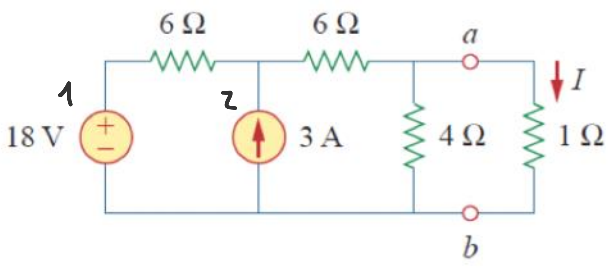
Il bilancio è rispettato

Due gen. stanno erogando potenza mentre uno si ricarica

Sovrapposizione

Esercizio

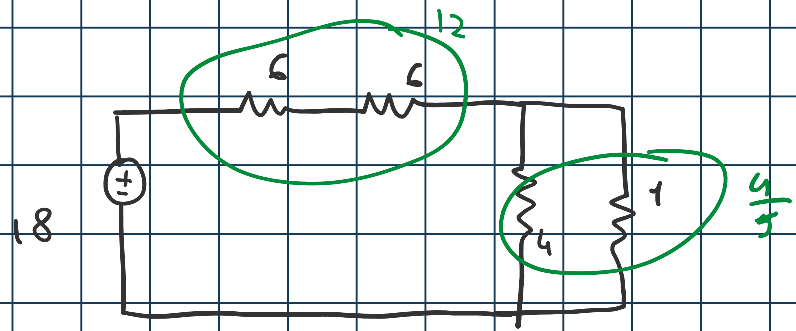
Determinare I con PSE

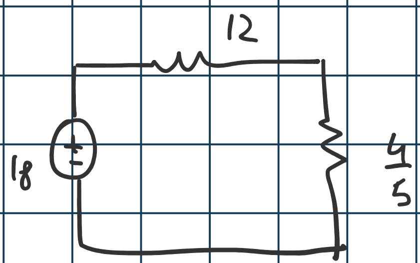


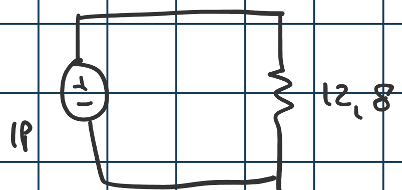
Soluzione

$I = 2.25$ A.

1

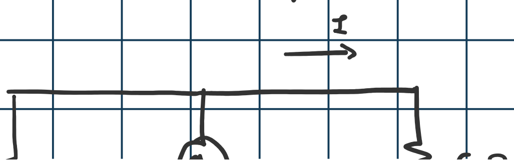


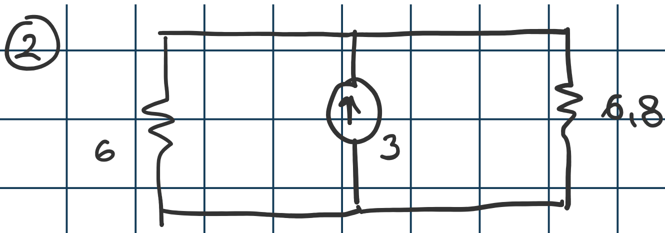


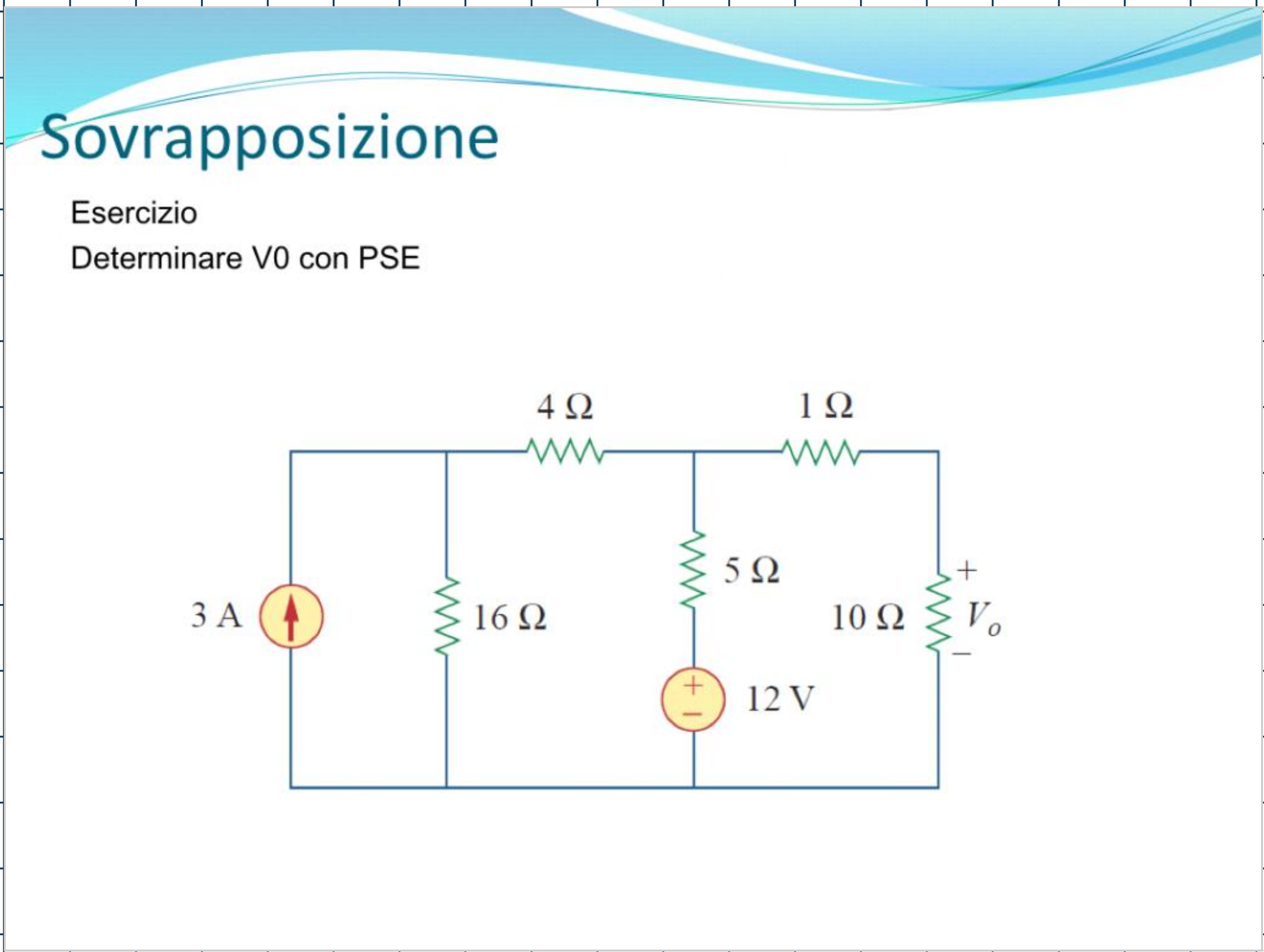


$i_1 = \frac{V}{R} = \frac{18}{12{,}8} = 1{,}4A$

2

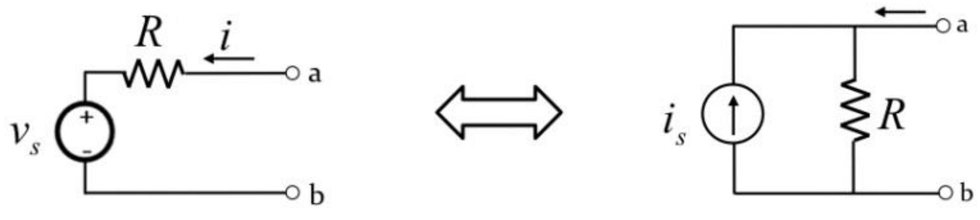



2
6
3
6,8


Sovrapposizione
Esercizio
Determinare V0 con PSE
4 Ω
1 Ω
5 Ω
3 A
16 Ω
10 Ω
+
V_o
−
12 V

Trasformazione di generatori

Una **trasformazione di generatori** è l'operazione di sostituzione di un generatore di tensione v_s in serie a un resistore R con un generatore di corrente i_s in parallelo a un resistore R, o viceversa.



$$v_s = Ri_s \qquad\qquad i_s = \frac{v_s}{R}$$

La trasformazione si applica anche ai generatori dipendenti ma
NON SI APPLICA AI GENERATORI IDEALI DI TENSIONE E CORRENTE
(cioè solo al generatore senza resistenza)

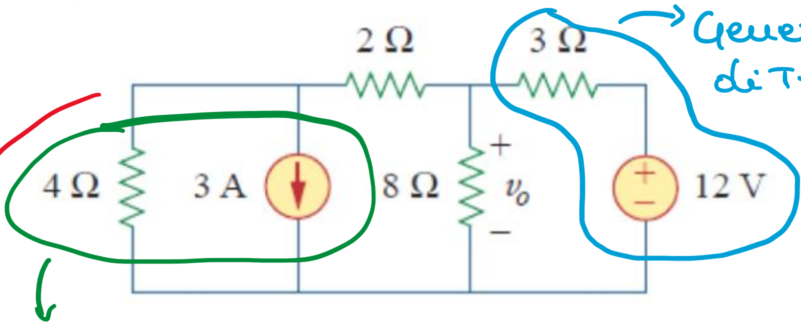
Il metodo di trasformazione dei generatori è uno dei metodi di risoluzione dei circuiti

Trasformazione di generatori

Esercizio

Usare la trasformazione dei generatori per trovare vo nel circuito in figura

Generatore reale di tensione

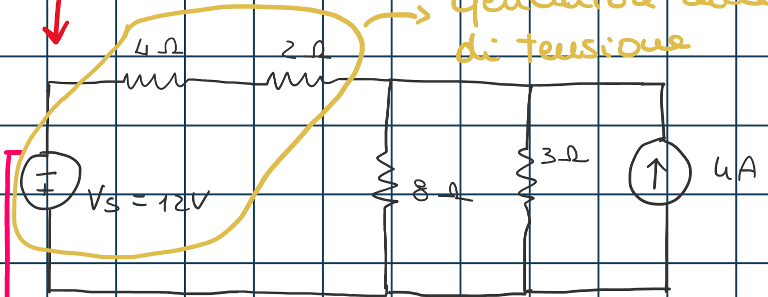


Generatore reale di corrente

=

il circuito sarà equivalente a

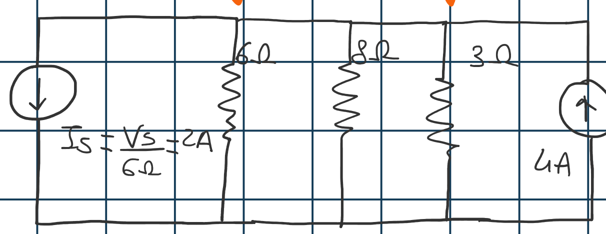
Generatore reale di tensione



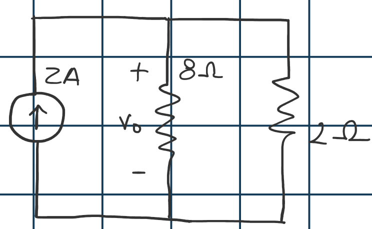
il verso del generatore segue il verso della corrente

=

parallelo



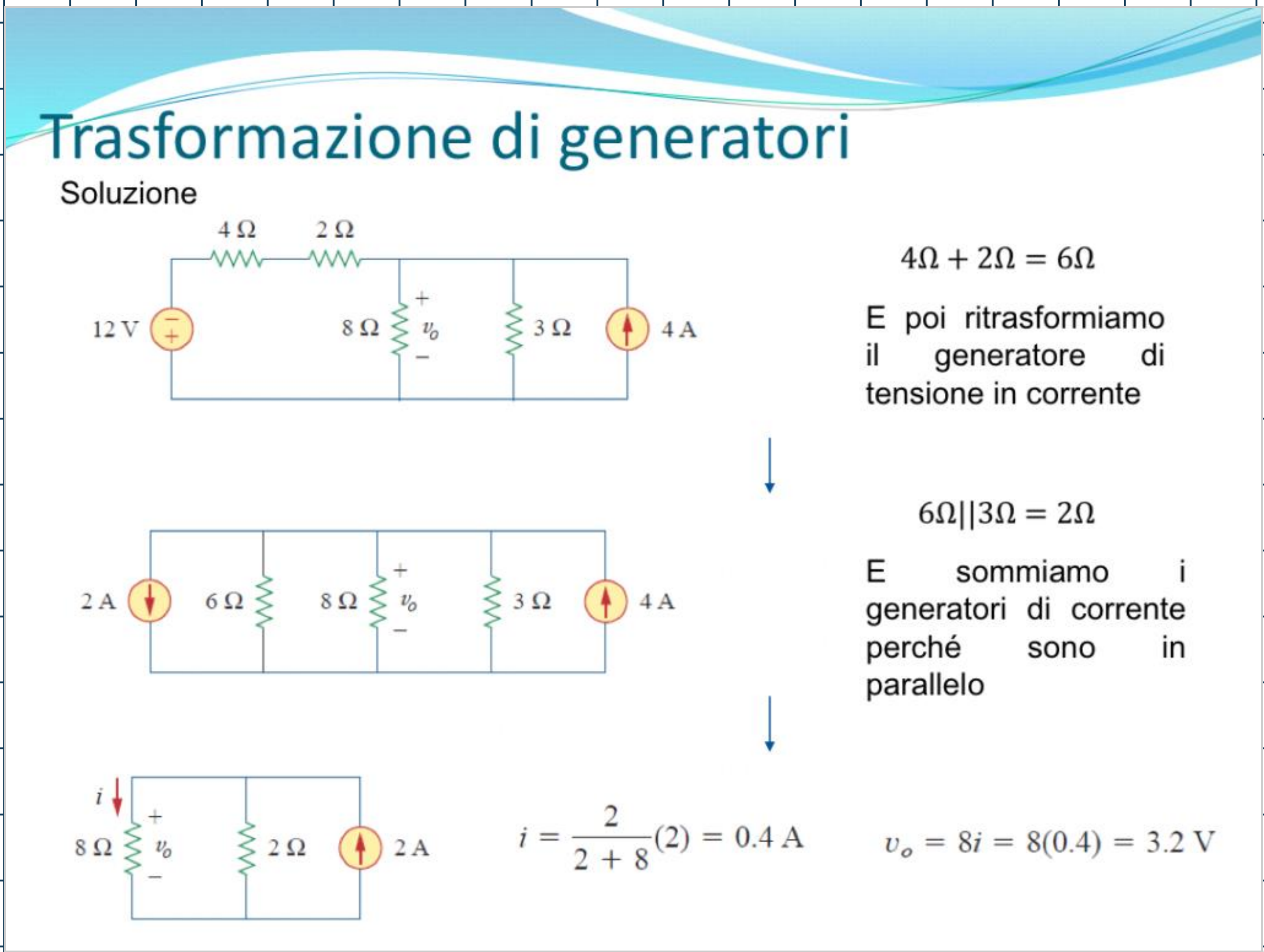
=



da ciò ottengo che $I_1 = 2A \cdot \frac{2\Omega}{\ } = \frac{1}{\ } [A]$

da ciò ottengo che $I_1 = 2A \cdot \frac{2\Omega}{(8+2)\Omega} = \frac{2}{5}\,[A]$

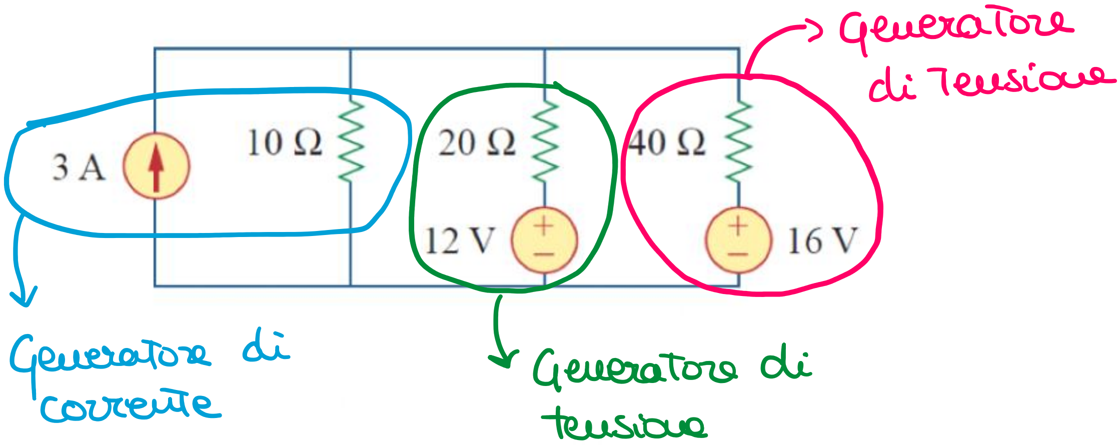
e perciò $R = 8\Omega$, $I_1 = 2/5\,[A]$ da cui $V_o = 16/5\,[V]$



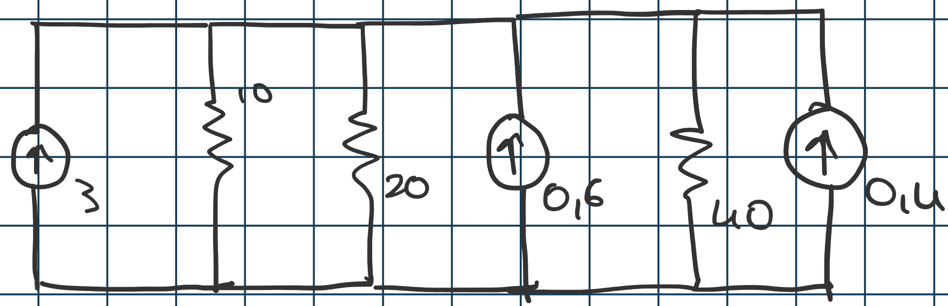
Trasformazione di generatori

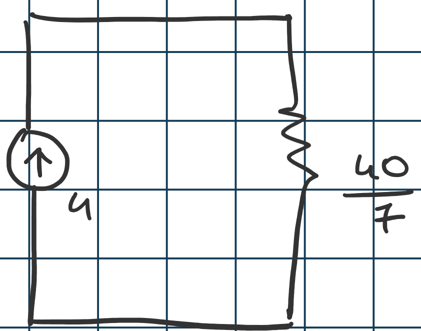
Esercizio

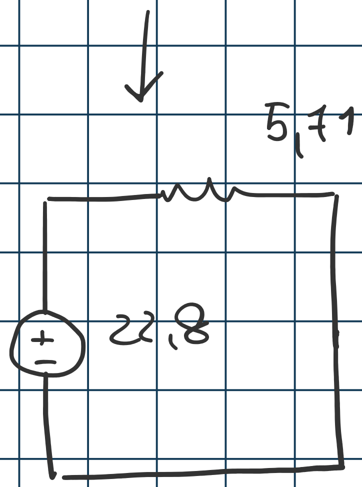
Usare la trasformazione dei generatori per ridurre il circuito in figura ad un solo generatore di tensione in serie ad una resistenza



Conviene trasformare prima i gen. di tensione in gen. di corrente in modo poi da applicare le leggi relative a resistenze in parallelo e generatori in parallelo





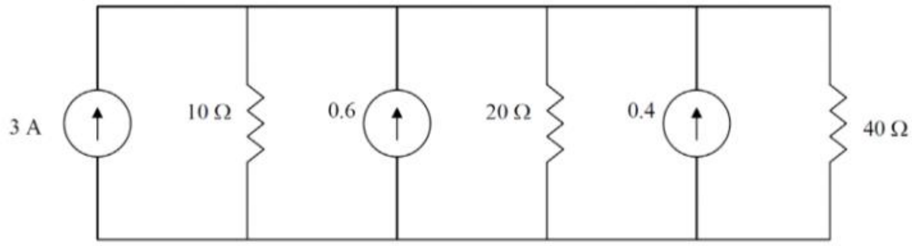


5,71
22,8

Trasformazione di generatori

Soluzione

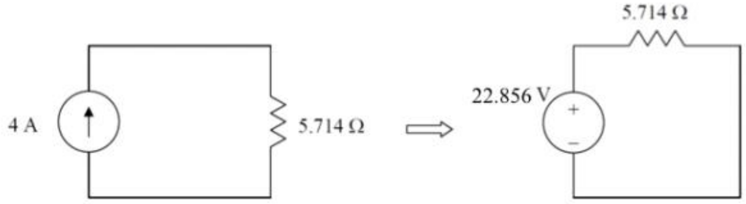
Convertiamo i generatori di tensione in corrente



Le resistenze sono in parallelo e possiamo trovarne l'equivalente. I generatori di corrente sono in parallelo e si possono sommare.

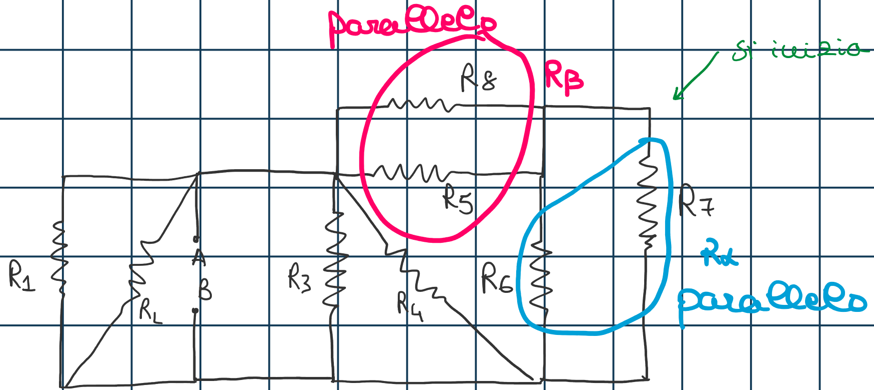
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40} = 0.1 + 0.05 + 0.025 = 0.175 \longrightarrow R_{eq} = 5.714\ \Omega$$

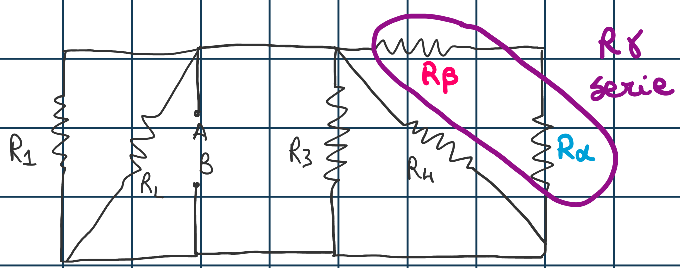
$$I_{eq} = 3 + 0.6 + 0.4 = 4$$

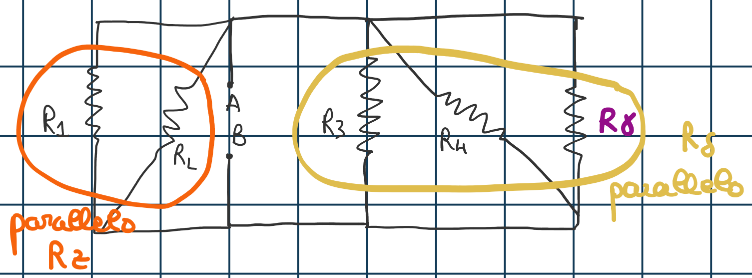


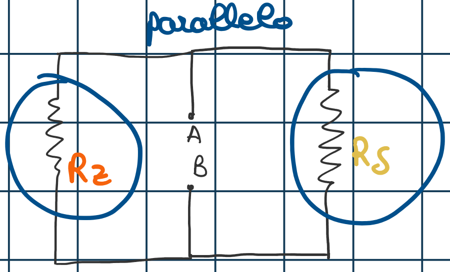
Esercizio

Calcolare il valore della resistenza alle porte AB (cioè R_{AB})



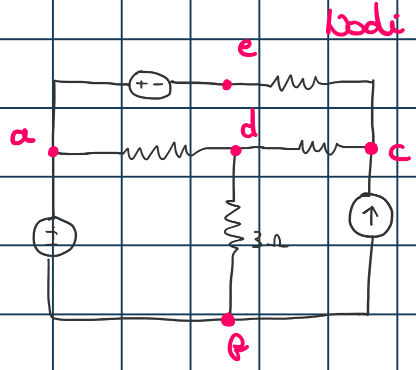






Dunque $R_{AB} = R_2 // R_5$

KCL e KVL



Applicazione delle leggi:

a : $i_1 + i_2 - i_3 = 0$

b : $i_3 - i_5 + i_7 = 0$

c : $-i_4 + i_6 - i_7 = 0$

d : $-i_2 + i_5 - i_6 = 0$

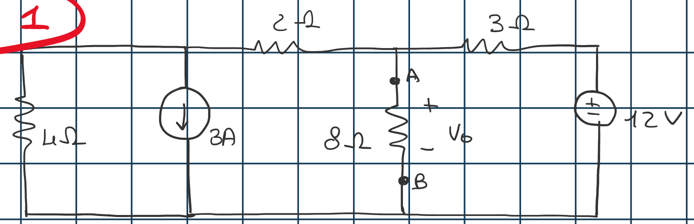
e : $-i_1 + i_4 = 0$

possibili somme

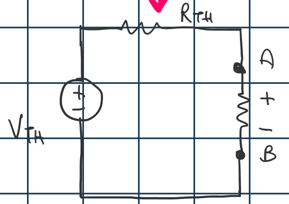
a + b : $i_2 + i_3 - i_5 + i_7 = 0$

a + e : $i_2 - i_3 + i_4 = 0$

Es. 1



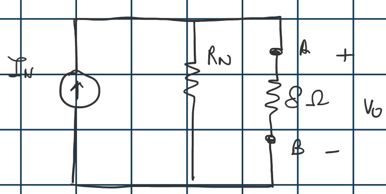
Thevenin



Trovo V_o applicando la formula del partitore:

$$V_o = V_{TH} \cdot \frac{8\,\Omega}{R_{TH}+8}$$

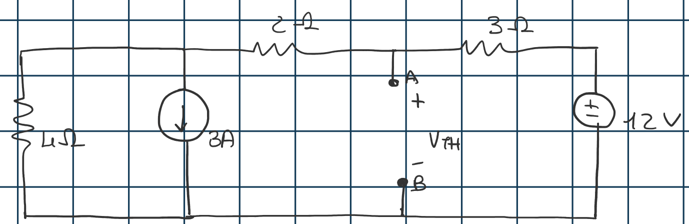
Norton



$= V_{TH}$

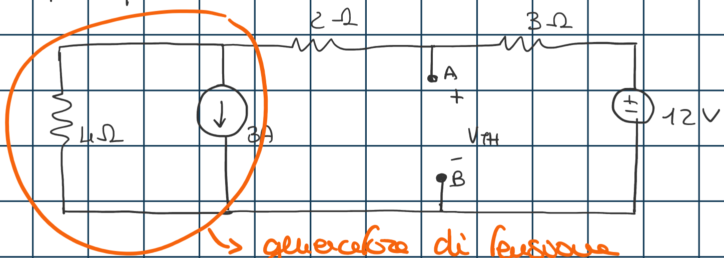
$$V_o = I_N \cdot \frac{R_N \cdot 8}{R_N+8}$$

Tensione V di Thevenin: tensione a vuoto fra A e B quando la porta è scollegata

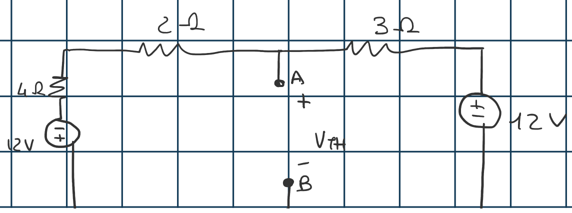


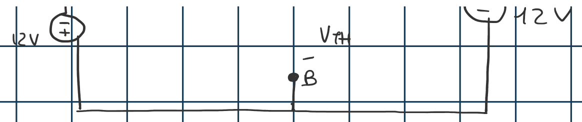
Si può applicare il PSE o si ha da una parte un partitore di tensione mentre dall'altro uno di corrente.

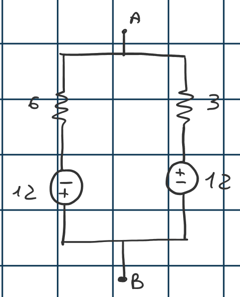
Oppure sfruttando i teoremi si ha



generatore di tensione

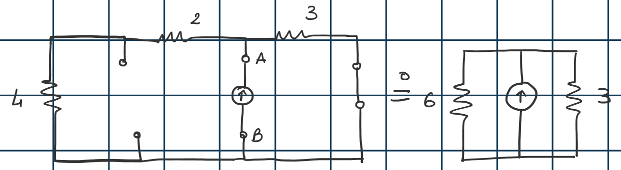






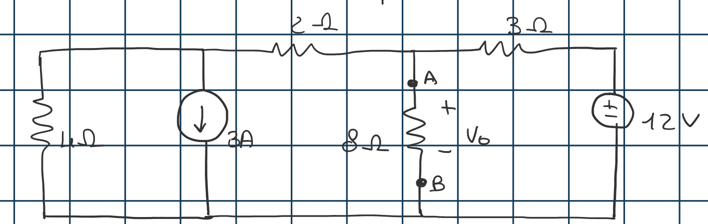
Si ha che $U_{AB} = V_{TH} \Rightarrow U_H = \dfrac{\sum \frac{V_{Ai}}{R_{Ai}} + \sum I_{Bj}}{\sum \frac{1}{R_{Ai}} + \sum \frac{1}{R_{Ck}}} = \dfrac{\frac{-12}{6} + \frac{12}{3}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}}$

$V_{TH} = \dfrac{\frac{12}{6}}{\frac{3}{6}} = 4V$

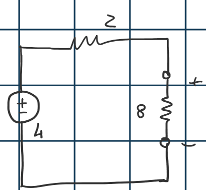


$\Rightarrow R_{TH} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)^{-1} = \frac{6 \cdot 3}{9} = 2\ \Omega$

Tornando al circuito di partenza si ha che

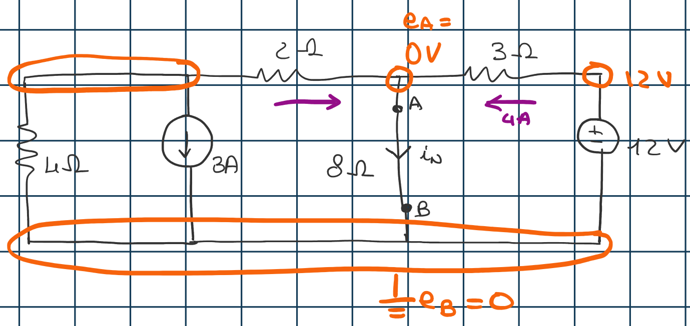


diventa

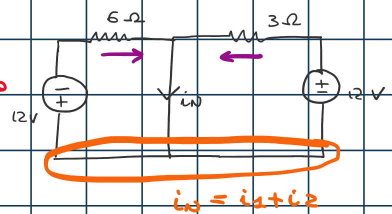


$V_0 = 4 \cdot \frac{8}{10} = 3{,}2\ [V]$

Come scegliere fra Thevenin e Norton: sono equivalenti ma alcuni circuiti si prestano di più al calcolo della tensione a vuoto (Thevenin) mentre altri al calcolo della corrente di corto circuito (Norton)

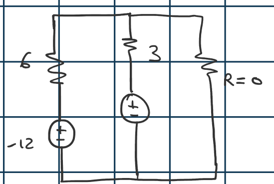


Trasformazione dei generatori



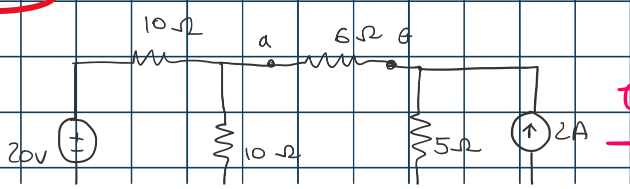
$i_N = \frac{12}{3} - \frac{12}{6} = \frac{12}{6} = 2A$

Applico Millmann:

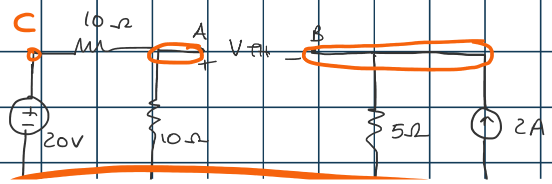


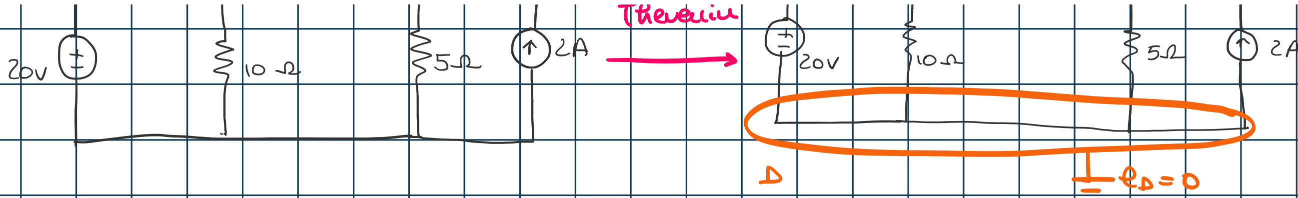
$V_H = I_0 \cdot R_0$

Es. 2

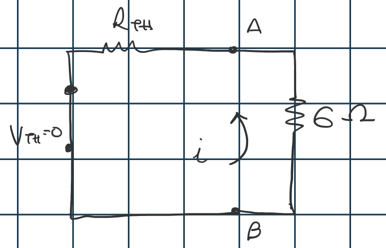


Thevenin





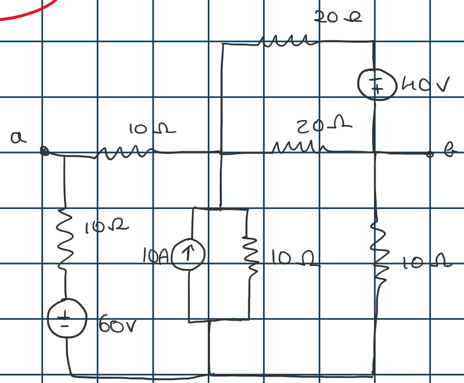
Dunque il circuito equivalente di Thevenin sarà:



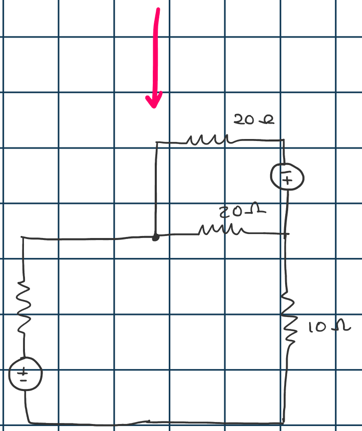
Il problema si spezza in due sottoproblemi consistenti nel calcolo dei potenziali e_A ed e_B:

$$\left.\begin{aligned} e_A &= \frac{e_C}{2} = \frac{20}{2} = 10\text{ V} \\ e_B &= 2A \cdot 5\Omega = 10\text{ V} \end{aligned}\right\} V_{TH} = e_B - e_A = 0$$

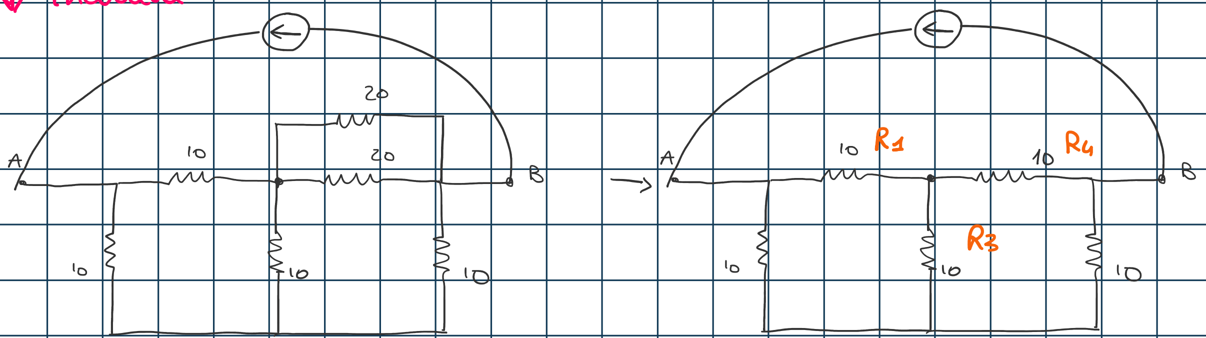
Es. 3



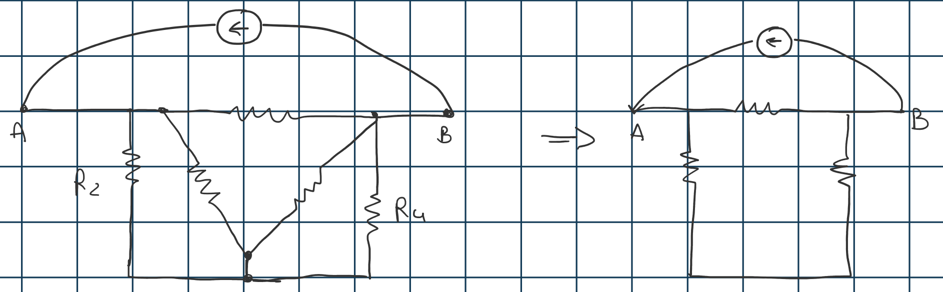
Si può anche applicare il PSE per calcolare la tensione di Thevenin oppure si può partire dalla corrente di Norton



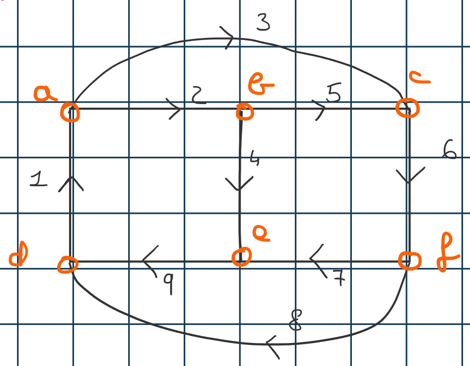
Thevenin



I rami ottenuti non sono né in serie né in parallelo. L'unica cosa che posso fare è l'analisi base nodi o l'analisi base anelli oppure ho che R_1, R_3 e R_4 sono a stella per cui posso riscrivere il circuito come



Es. 4



(a) $-i_1 + i_2 + i_3 = 0$

(b) $-i_2 + i_4 + i_5 = 0$

(f) $-i_6 + i_7 + i_8 = 0$

(Σ_{ab}) $-i_1 + i_3 + i_4 + i_5 = 0$

(Σ_{TOT}) $0 = 0$ poiché non ci sono "stacchi"

Il sistema si potrà poi scrivere in forma matriciale e sarà detta MATRICE DI INCIDENZA

Le equazioni KCL sono linearmente dipendenti (ovvero alcune sono superflue).

N-1 eq. KCL dei nodi sono sempre linearmente INDIPENDENTI

$\updownarrow$

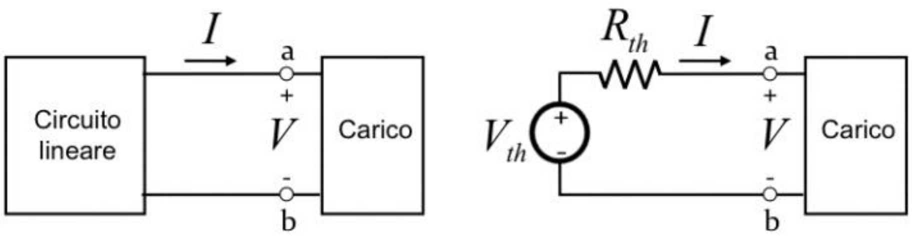
N-1 valori di potenziali incogniti → POTENZIALI NODALI INCOGNITI

Esercitazione 3

martedì 27 aprile 2021 16:19

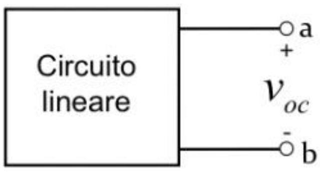
Teorema di Thevenin

Il **teorema di Thevenin** afferma che un circuito lineare con due terminali può essere sostituito con un circuito equivalente formato da un generatore di tensione V_{th} in serie con un resistore R_{th}, in cui V_{th} è la tensione a vuoto ai terminali e R_{th} è la resistenza di ingresso, o equivalente, vista agli stessi terminali, quando i generatori indipendenti sono spenti.



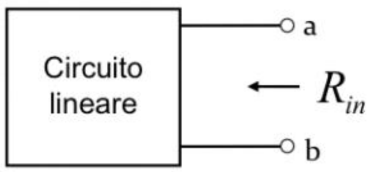
Teorema di Thevenin

Calcolo di V_{th}



V_{th} coincide con la tensione a vuoto del circuito (circuito aperto ai terminali ab): $V_{th} = v_{oc}$

Calcolo di R_{th}



R_{th} coincide con la resistenza R_{in} vista ai terminali ab dopo aver spento tutti i generatori: $R_{th}=R_{in}$

PROCEDIMENTO:

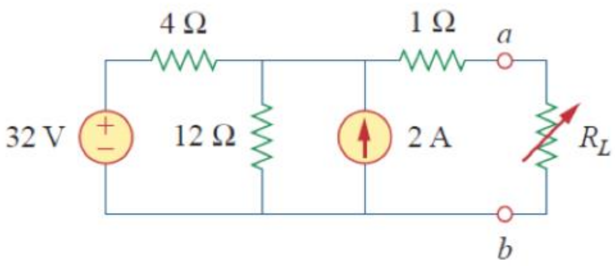
1° STEP: calcolare V_{TH} e R_{TH}

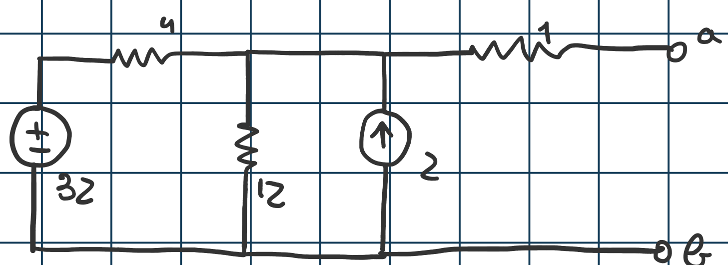
Teorema di Thevenin

Esercizio

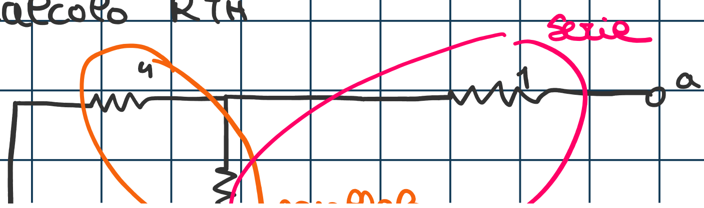
Determinare l'equivalente alla Thevenin del circuito in figura ai terminali ab.

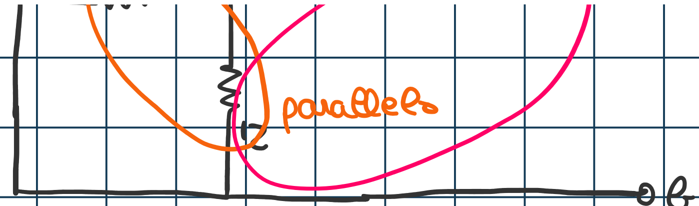
Quindi calcolare la potenza sul resistore R_L per valori di resistenza $R_L = 6, 16, 36\Omega$



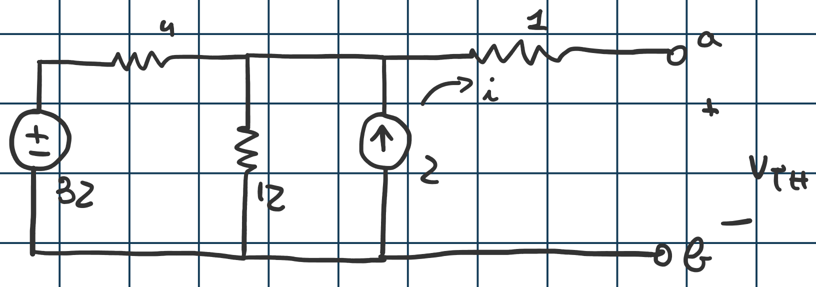


1) Calcolo R_{TH}

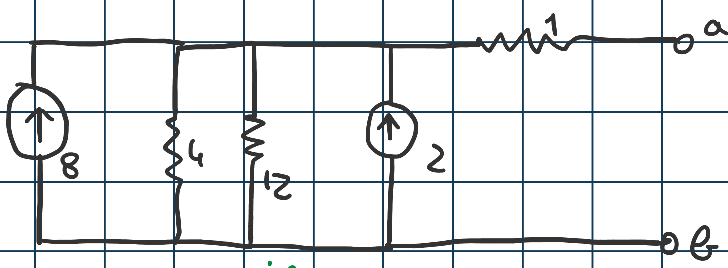


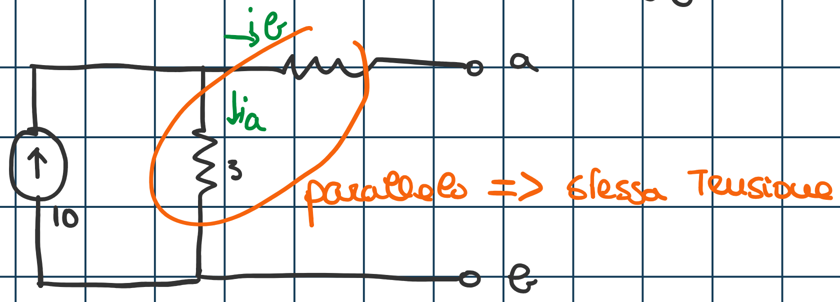


$$R_{TH} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}} = 4\,\Omega$$



2) Calcolo V_{TH}





$V = i \cdot R = 30\ V$

3) Potenza su RL

$P = V \cdot I = R \cdot I^2$

calcolo I: $\quad i_b = \frac{3}{3+1+6} \cdot 10 = 3A$

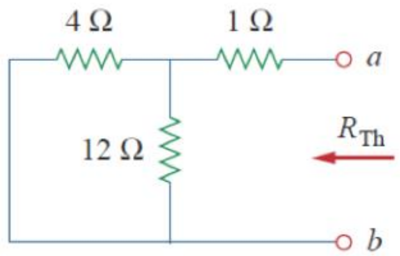
$P = R \cdot I^2 = 9 \cdot 6 = 54\ W$

Teorema di Thevenin

Soluzione

Calcolo di R_{Th}

Spegniamo i generatori (cortocircuitiamo quello di tensione e apriamo quello di corrente).

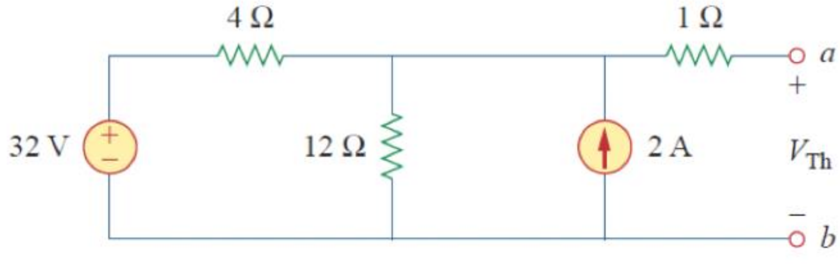


$$R_{\mathrm{Th}} = 4 \parallel 12 + 1 = \frac{4 \times 12}{16} + 1 = 4\ \Omega$$

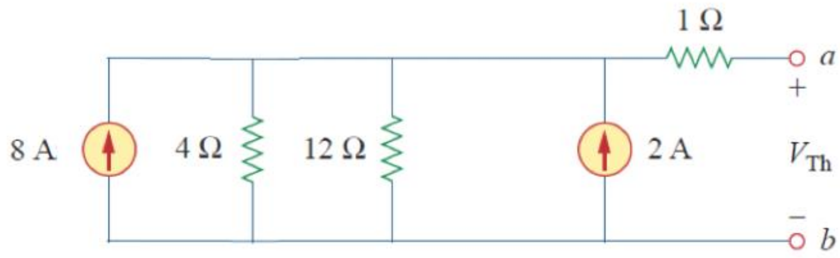
Teorema di Thevenin

Soluzione (continua)

Calcolo di V_{Th}



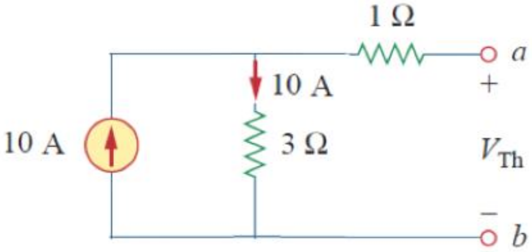
Possiamo trasformare il generatore di tensione in uno di corrente



Teorema di Thevenin

Soluzione (continua)

Sommiamo i generatori di corrente in parallelo e troviamo la resistenza equivalente del parallelo tra 4 e 12



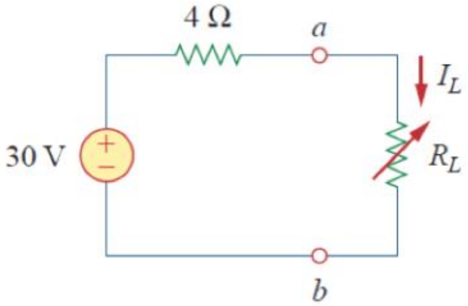
Sulla resistenza da 1Ω non scorre corrente, quindi non c'è caduta di tensione

$$V_{Th} = 3\Omega \cdot 10A = 30V$$

Teorema di Thevenin

Soluzione (continua)

Equivalente alla Thevenin



$$I_L = \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_L} = \frac{30}{4 + R_L}$$

Per $R_L = 6$,

$$I_L = \frac{30}{10} = 3 \text{ A}$$

$$P_{RL} = R_L I_L^2 = 54W$$

Per $R_L = 16$,

$$I_L = \frac{30}{20} = 1.5 \text{ A}$$

$$P_{RL} = R_L I_L^2 = 36W$$

Per $R_L = 36$,

$$I_L = \frac{30}{40} = 0.75 \text{ A}$$

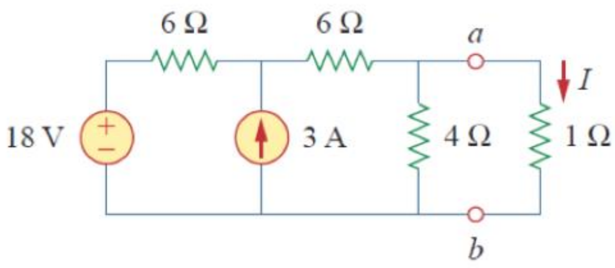
$$P_{RL} = R_L I_L^2 = 20.25W$$

Teorema di Thevenin

Esercizio

Determinare l'equivalente alla Thevenin del circuito in figura ai terminali *ab*.

Quindi calcolare I

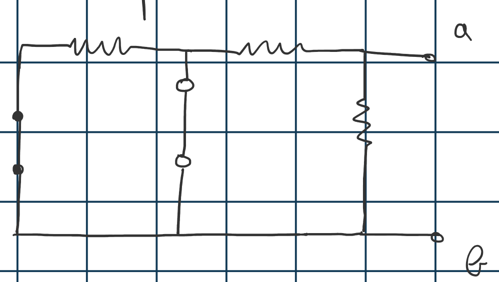


Soluzione

$V_{Th} = 9\text{ V}, R_{Th} = 3\ \Omega, I = 2.25\text{ A}.$

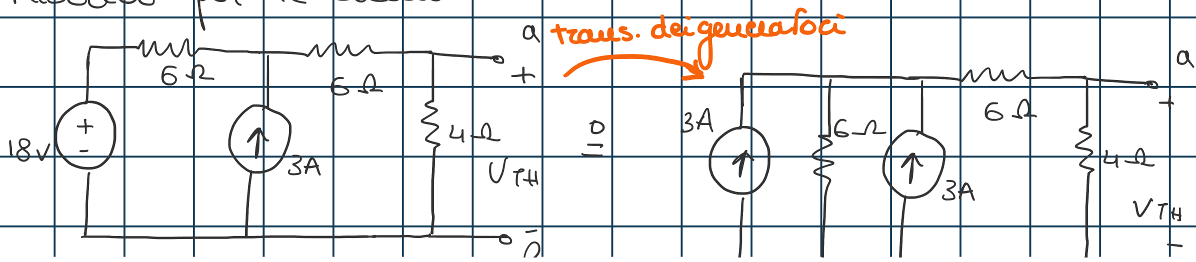
1° step: calcolo R_{TH} che è R_{AB}

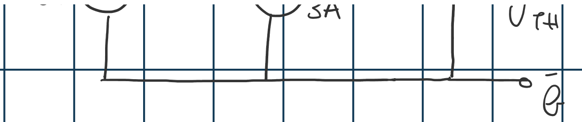
Al posto del generatore di tensione metto un cortocircuito posto mentre al posto del gen. di corrente metto un circuito aperto

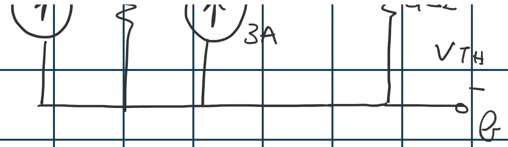


$R_{AB} = R_{TH} = (6+6)//4 = 3\ \Omega$

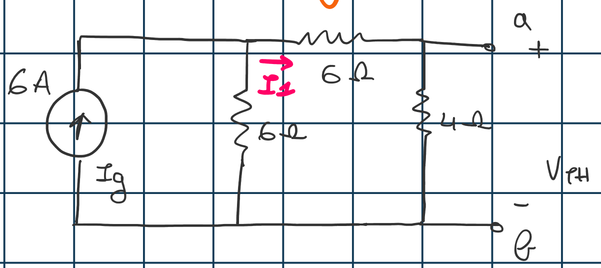
Riscrivo poi il circuito:







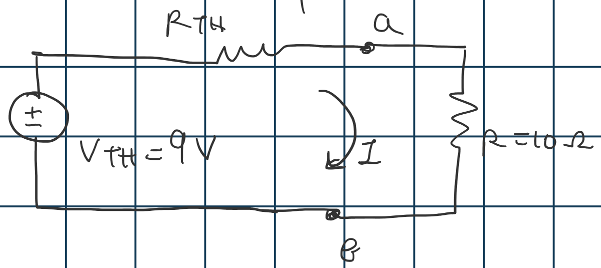
Sommo i generatori:



Ottengo che $I_1 = I_g \cdot \frac{6\,\Omega}{(6+4)+6\,\Omega} = 2,25\,A$

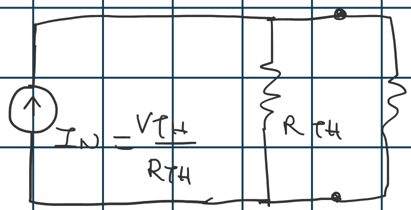
da cui $I_1 \cdot R_{4\Omega} = V_{TH} = 9\,V$

Si ottiene dunque:



$$I = \frac{9\,V}{4\,\Omega} = 2,25A$$

Equivalente di Norton:

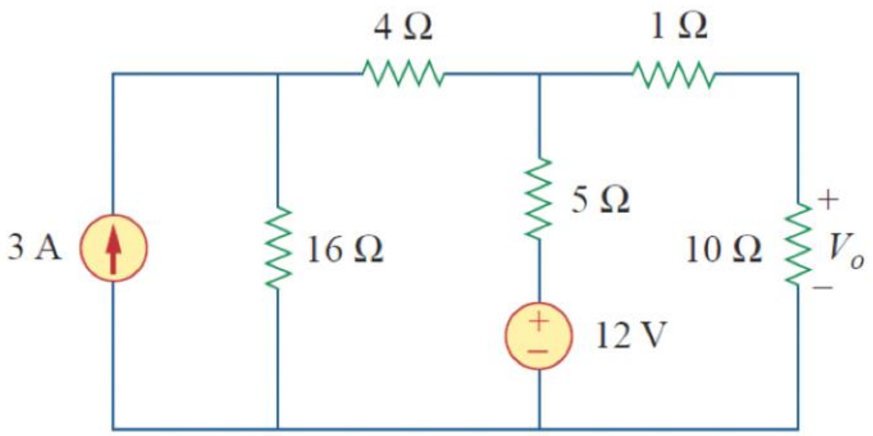


Teorema di Thevenin

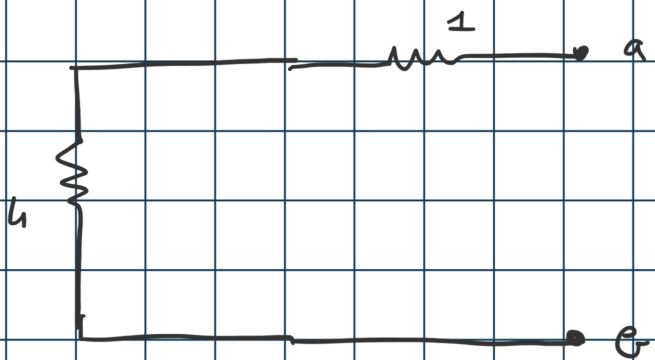
Esercizio

Usando il teorema di Thevenin determinare Vo.

???

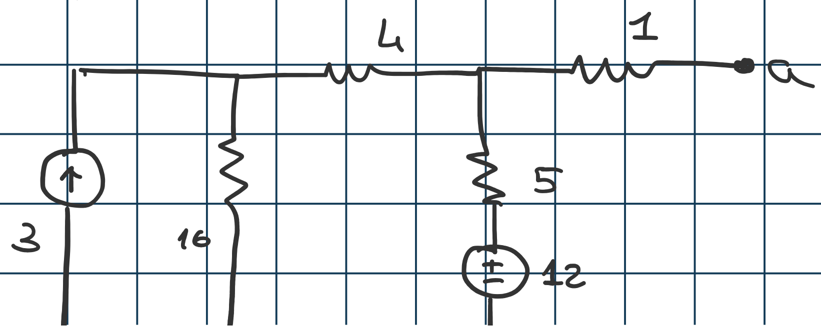


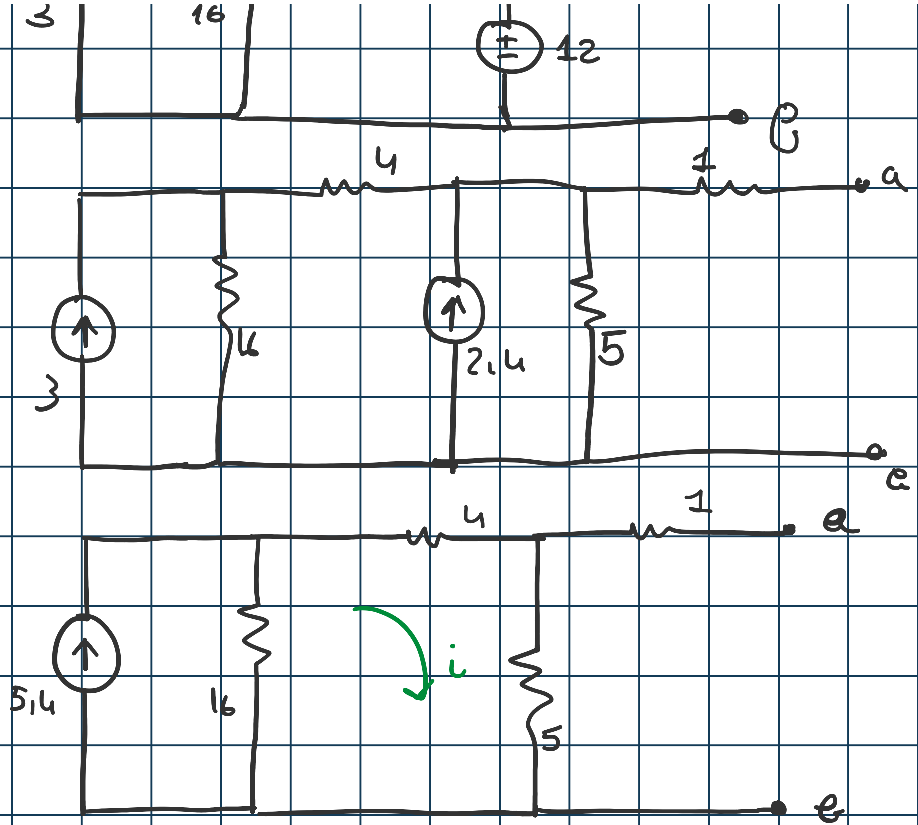
R_{TH} :



$R_{TH} = 5\ \Omega$

V_{TH} :

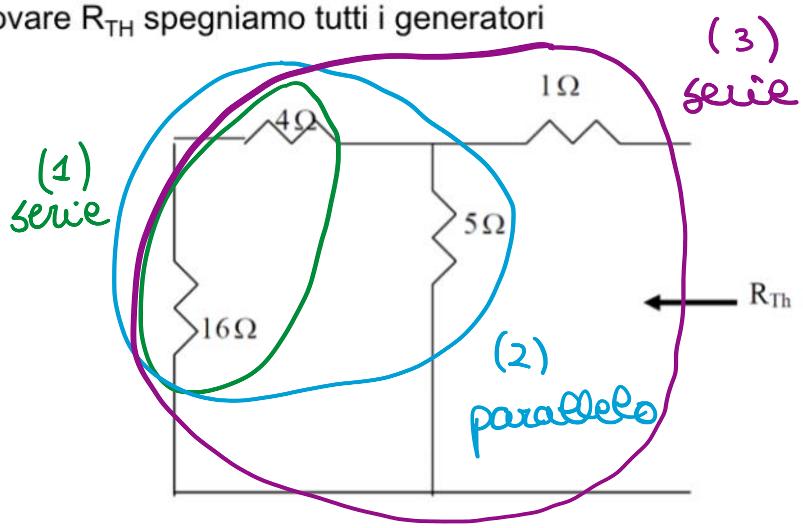



3
16
12
b
4
1
a
6
3
2,4
5
e
4
1
a
5,4
16
i
5
e

Teorema di Thevenin

Soluzione

Per trovare R_{TH} spegniamo tutti i generatori

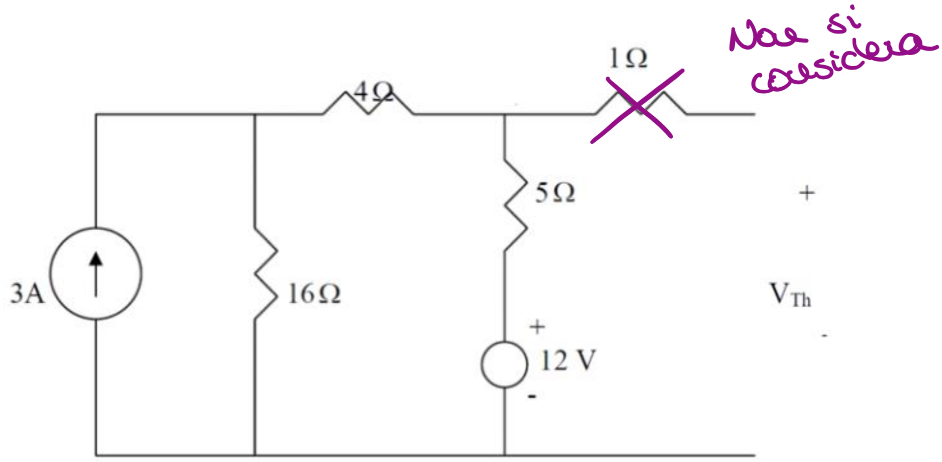


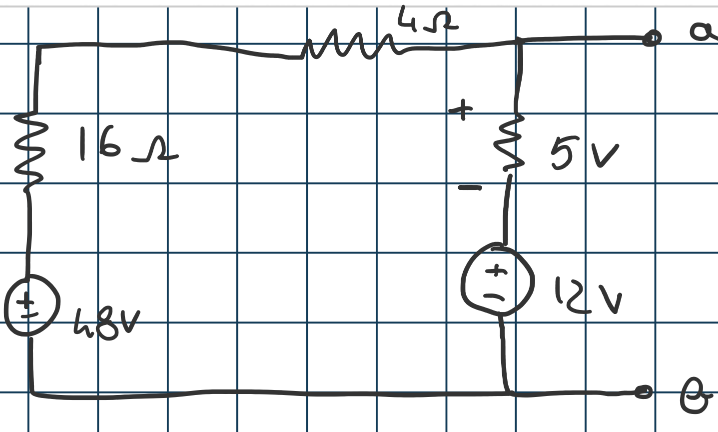
$$R_{Th} = 1 + 5//(4+16) = 1 + 4 = 5\Omega$$

Teorema di Thevenin

Soluzione

Per trovare V_{TH} consideriamo il circuito in figura



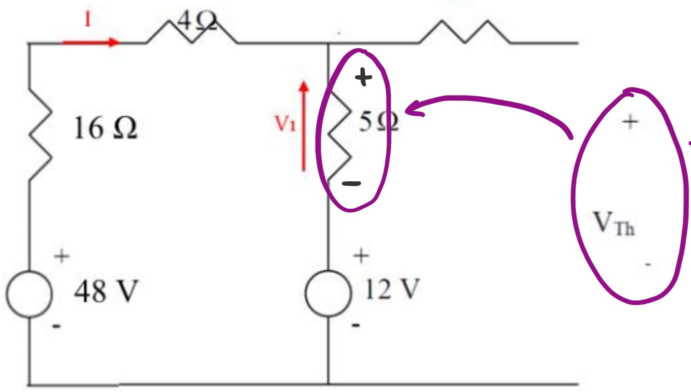


Equilibrio alla maglia i $-48V + i(16+4+5) + 12V = 0$

Teorema di Thevenin

Soluzione (continua)

Possiamo trasformare il generatore di corrente in uno di tensione e scrivere KVL per la maglia (sul resistore da 1Ω non c'è corrente, quindi non c'è caduta di tensione)



→ scelta arbitraria che si deve in caso modificare in base al risultato dell'esercizio

$$I = \frac{48V - 12V}{16\Omega + 4\Omega + 5\Omega} = 1{,}44A \qquad V_1 = 5\Omega \cdot I = 7{,}2V$$

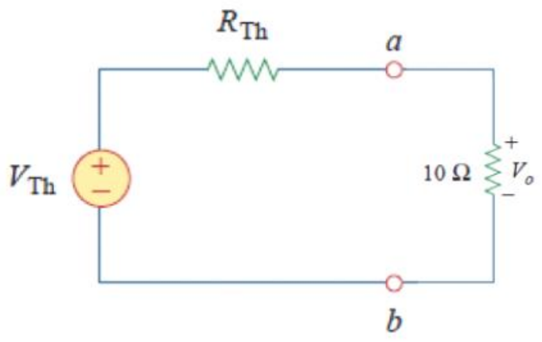
$$V_{Th} = V_1 + 12V = 19{,}2V$$

Teorema di Thevenin

Soluzione (continua)

Il circuito equivalente alla Thevenin ai terminali *ab* è quello in figura.

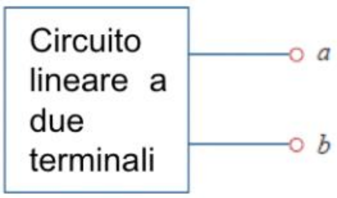
Per trovare Vo possiamo usare un partitore di tensione.



$$V_o = \frac{10\Omega}{10\Omega + R_{Th}} V_{Th} = \frac{10\Omega}{10\Omega + 5\Omega}\ 19{,}2V = 12{,}8V$$

Relazioni tra Thevenin e Norton

$$I_N = \frac{V_{\mathrm{Th}}}{R_{\mathrm{Th}}}$$



$$V_{\mathrm{Th}} = v_{oc}$$

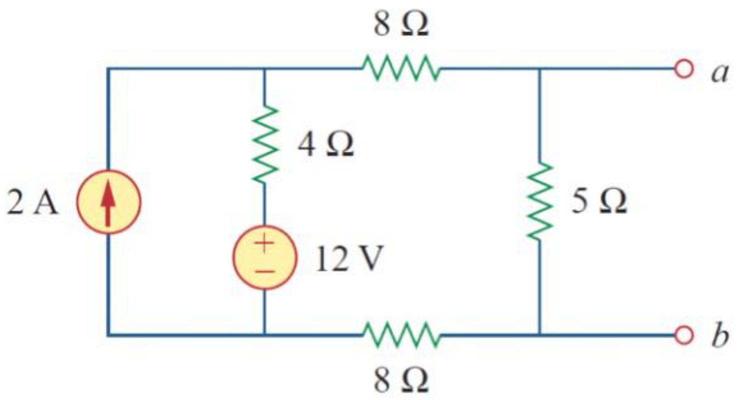
$$I_N = i_{sc}$$

$$R_{\mathrm{Th}} = \frac{v_{oc}}{i_{sc}} = R_N$$

Teorema di Norton

Esercizio

Determinare l'equivalente alla Norton del circuito in figura ai terminali *ab*.



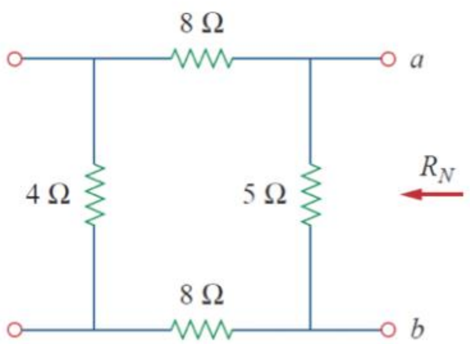
Bisogna calcolare I_{cc} e R_N

Teorema di Norton

Soluzione

Calcolo di R_N

Spegniamo i generatori (cortocircuitiamo quello di tensione e apriamo quello di corrente).



$$R_N = 5 \parallel (8 + 4 + 8) = 5 \parallel 20 = \frac{20 \times 5}{25} = 4\,\Omega$$

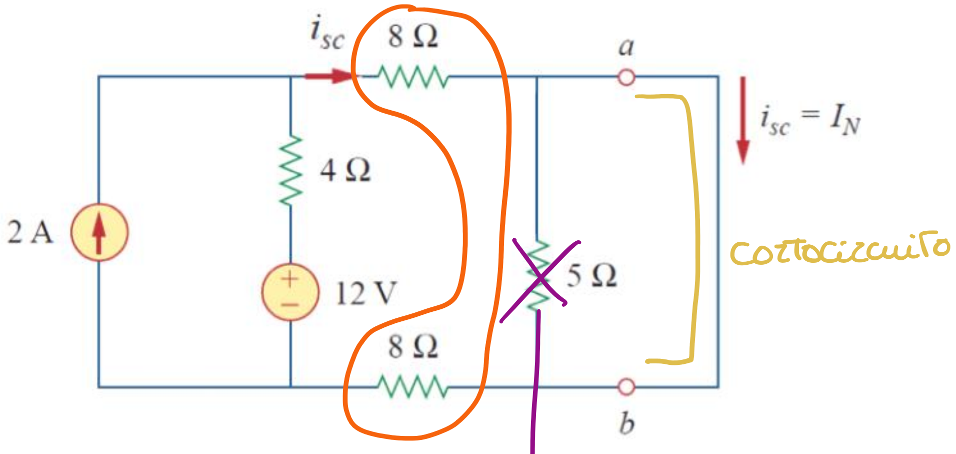
$R_{NORTON} = R_{THEVENIN}$ (il procedimento è uguale)

Teorema di Norton

Soluzione (continua)

Calcolo di I_N

diventano in serie



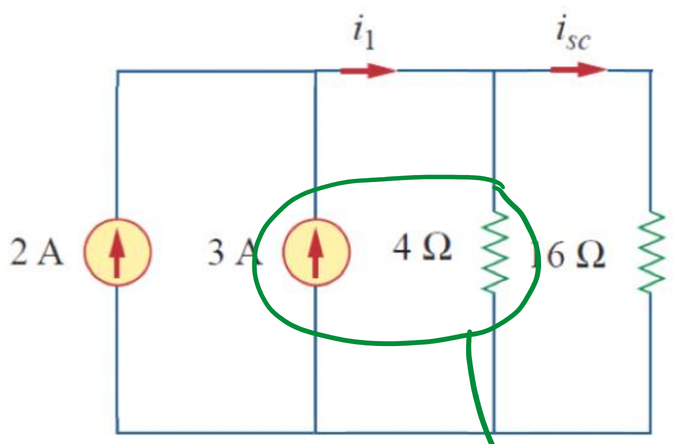
Poiché la corrente è "intelligente", scorrerà dove c'è meno resistenza, dunque non sul ramo da 5 Ω

Teorema di Norton

Soluzione (continua)

Il resistore da 5Ω è cortocircuitato, quindi non vi scorre corrente attraverso.

I due resistori da 8Ω sono in serie. Possiamo trasformare il generatore di tensione con in serie la resistenza da 4Ω in un generatore di corrente.



ho applicato la Tras. dei gen.

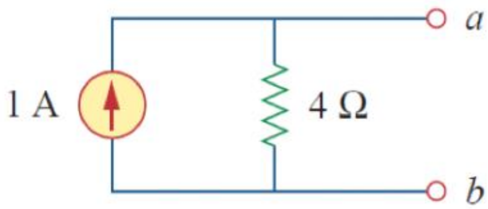
Teorema di Norton

Soluzione (continua)

Per trovare i_{sc} basta usare un partitore di corrente

$$i_{sc} = \frac{4\Omega}{4\Omega + 16\Omega} i_1 = \frac{4\Omega}{4\Omega + 16\Omega} 5A = 1A$$

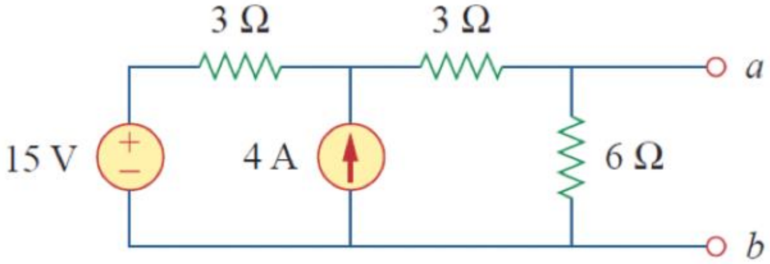
Equivalente alla Norton



Teorema di Norton

Esercizio

Determinare l'equivalente alla Norton del circuito in figura ai terminali ab.



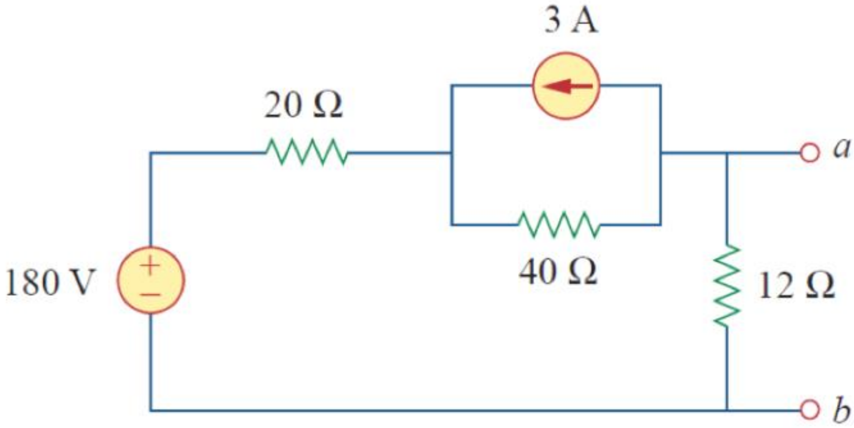
Soluzione

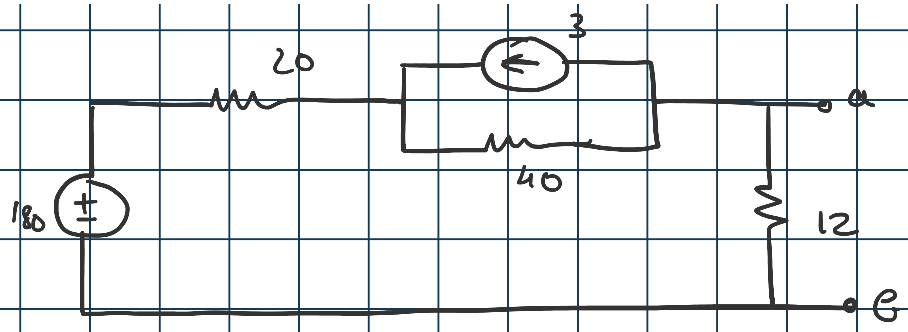
$$R_N = 3\ \Omega, I_N = 4.5\ \text{A}.$$

Teorema di Norton

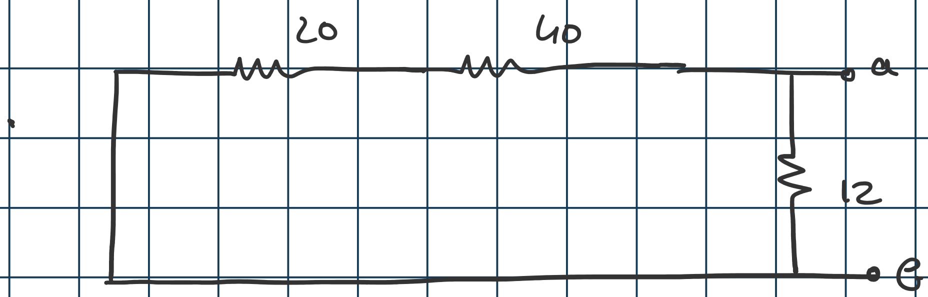
Esercizio

Determinare l'equivalente alla Norton del circuito in figura ai terminali ab.

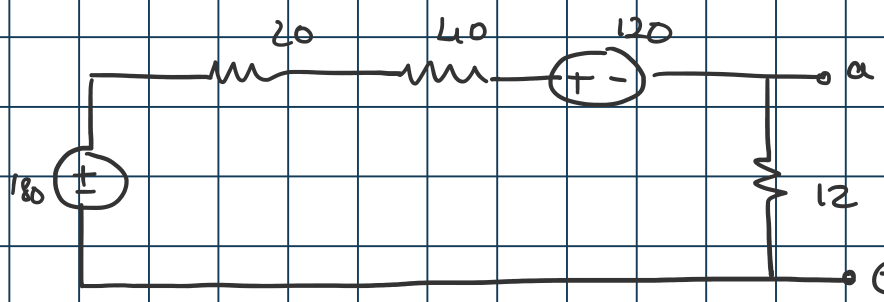


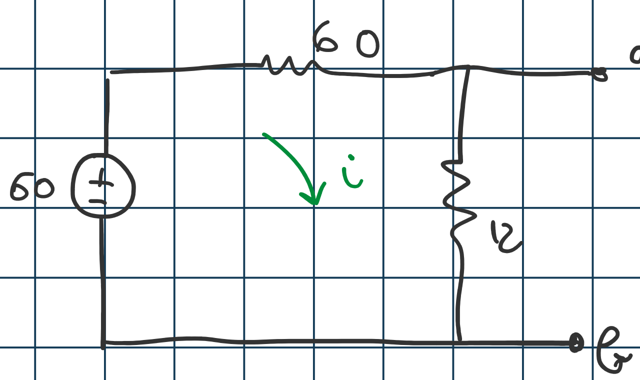


R_{TH} !



$$R_{TH} = \frac{1}{\frac{1}{60} + \frac{1}{12}} = 10$$





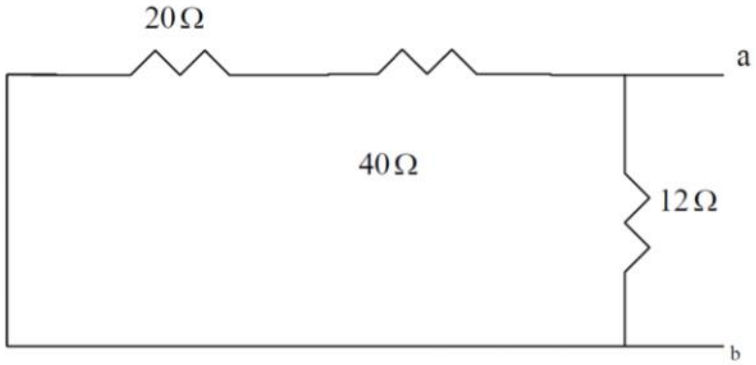
$$V_{TH} = \frac{12}{12+60} \cdot 60 = 10\ V$$

$$I_N = \frac{V_{TH}}{R_{TH}} = 1\ A$$

Teorema di Norton

Soluzione

Per trovare R_N spegniamo tutti i generatori



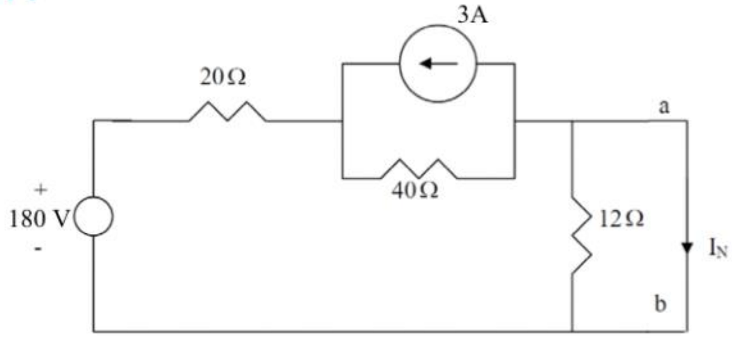
$$R_N = 12 // (20 + 40) = \underline{10\Omega}$$

Teorema di Norton

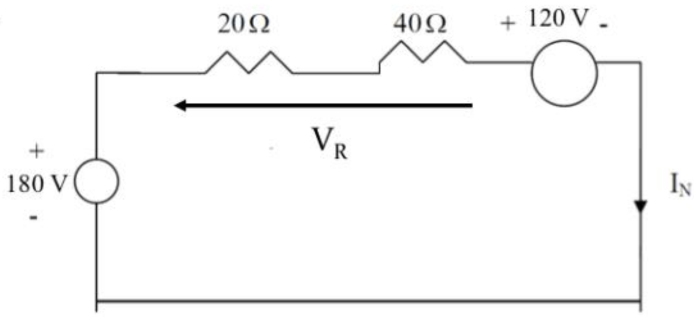
Soluzione (continua)

I_N può essere trovato dal circuito a destra.

Cortocircuitiamo i terminali *ab*



Trasformiamo il generatore di corrente in tensione e applichiamo KVL



$$180V - V_R - 120V = 0$$

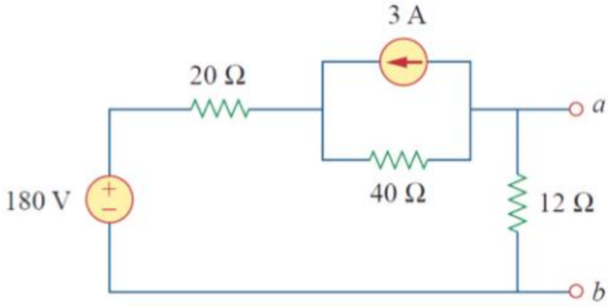
$$180V - 60\Omega \cdot I_N - 120V = 0$$

$$I_N = \frac{60V}{60\Omega} = 1A$$

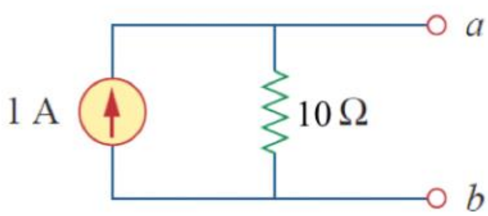
Teorema di Norton

Soluzione (continua)

Circuito di partenza



Equivalente alla Norton



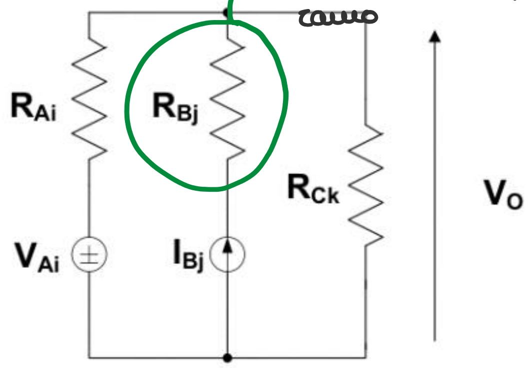
Teorema di Millman

Il **teorema di Millman** afferma che la tensione ai capi di un parallelo di:
- generatori di tensione V_{Ai} con in serie resistenze R_{Ai},
- generatori di corrente I_{Bj} con eventualmente in serie resistenze R_{Bj},
- resistenze R_{Ck},

è data definita come:

Non ha peso sulla tensione V_H in quanto non determina la corrente su quel ramo

$$V_H = V_O = R_O I_O = \frac{\sum_i \frac{V_{Ai}}{R_{Ai}} + \sum_j I_{Bj}}{\sum_i \frac{1}{R_{Ai}} + \sum_k \frac{1}{R_{Ck}}}$$



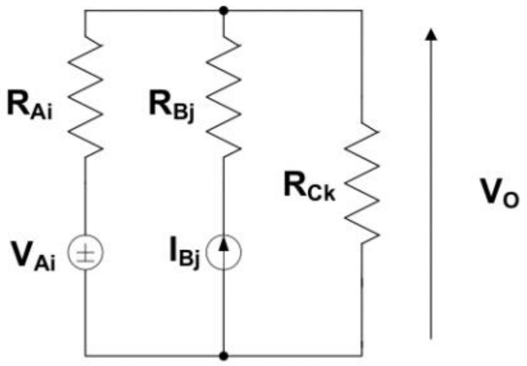
Il teorema di Millman NON si può usare su rami che hanno solo un generatore ideale di tensione (senza resistenza in serie).

Il calcolo di V_H è possibile anche se R_{Bj} non è una singola resistenza; l'importante è poter calcolare una resistenza equivalente

$\boxed{\text{Quando sono presenti dei paralleli conviene usare MILLMAN}}$

Teorema di Millman

Il teorema di Millman può essere usato solo in circuiti che contengono rami in parallelo e solo un generatore e una resistenza per ramo (o che possono essere ridotti ad una forma equivalente a questa).

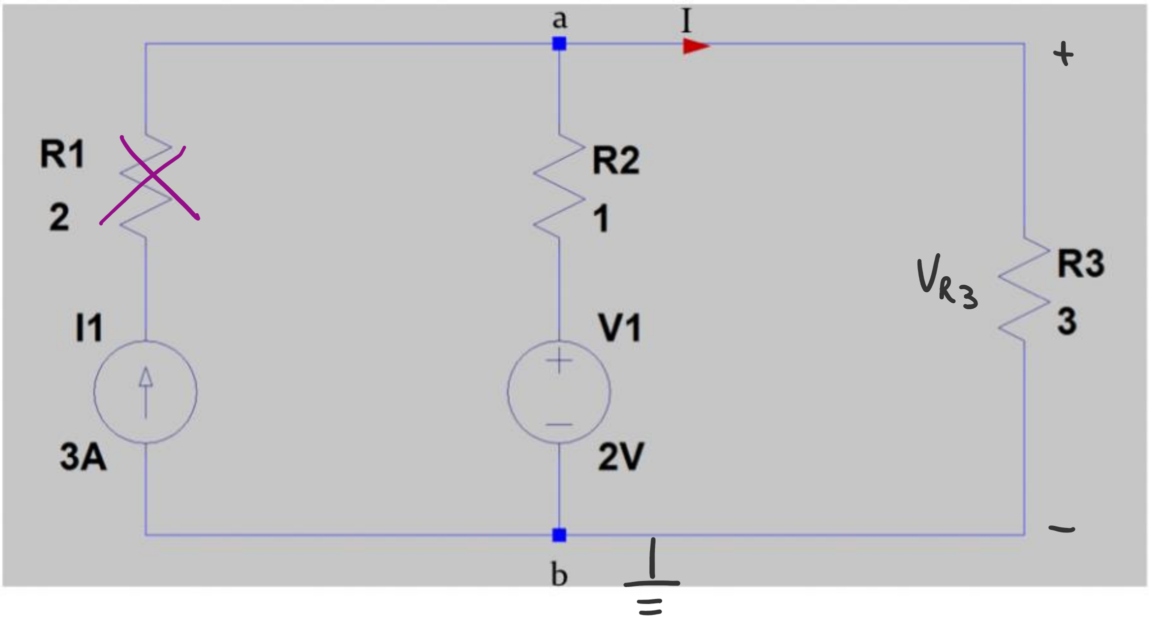


Il teorema di Millman NON si può usare su rami che hanno solo un generatore ideale di tensione (senza resistenza in serie).

Teorema di Millman

Esercizio

Applicando il Teorema di Millman al circuito in figura, determinare I su R_3



Teorema di Millman

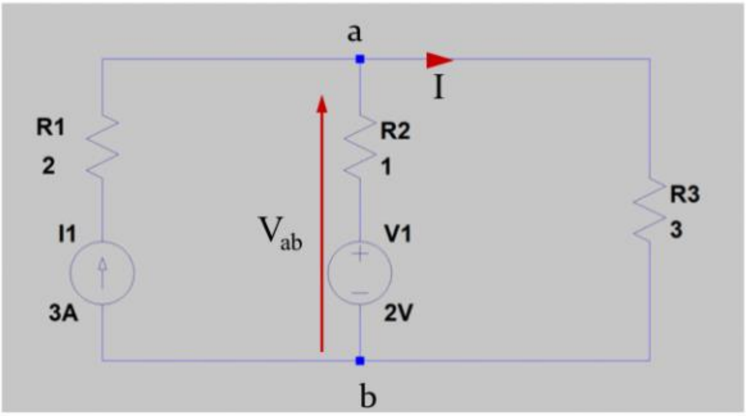
Soluzione

Applichiamo il teorema di Millman tra i nodi *a* e *b*

$$V_{ab} = \frac{I_1 + \frac{V_1}{R_2}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{3A + \frac{2V}{1\Omega}}{\frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{3\Omega}} = \frac{15}{4}V = 3.75V$$

Con la legge di Ohm possiamo trovare I

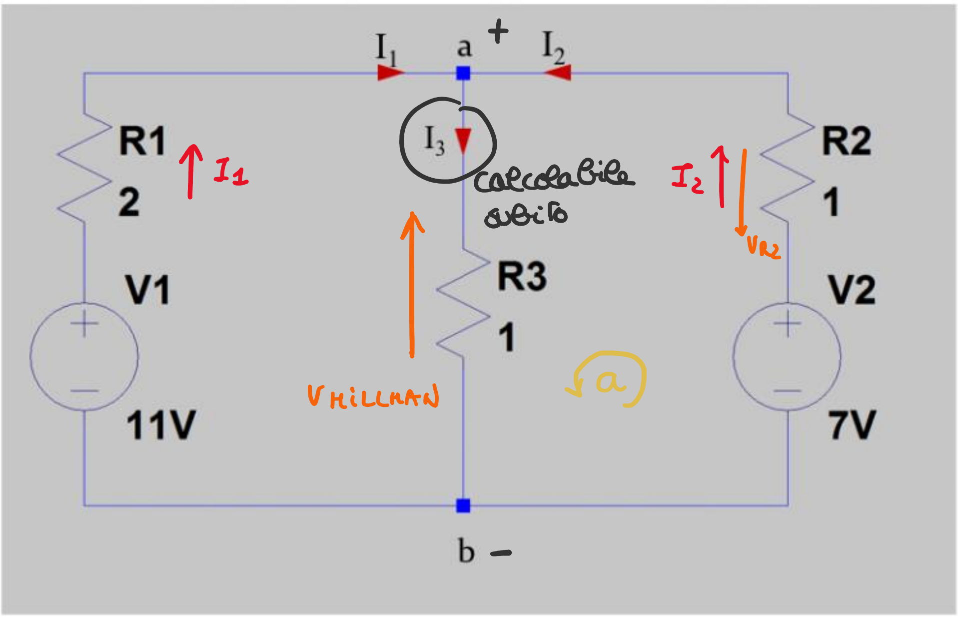
$$I_3 = \frac{V_{ab}}{R_3} = \frac{3.75V}{3\Omega} = 1.25A$$



Teorema di Millman

Esercizio

Applicando il Teorema di Millman al circuito in figura, determinare I1, I2 e I3.



$V_{R2} + V_{MILLMAN} - V_2 = 0 \Rightarrow V_{R2} = V_2 - V_{MILLMAN} = 7V - 5V = 2V$

$\frac{V_{R2}}{R_2} = I_2 = \frac{2\,[V]}{1\,[\Omega]} = 2\,[A]$

A $\quad I_3 - I_2 - I_1 = 0 \Rightarrow I_1 = I_3 - I_2 = 5A - 2A = 3\,[A]$

Teorema di Millman

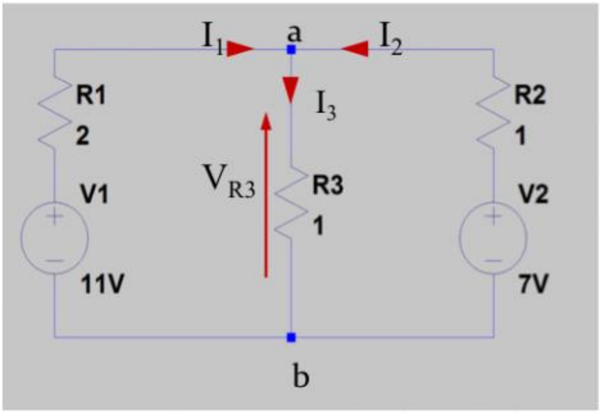
Soluzione

Applichiamo il teorema di Millman tra i nodi *a* e *b*

$$V_{ab} = \frac{\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = 5\,V$$

Con la legge di Ohm possiamo trovare I_3

$$I_3 = \frac{V_{R3}}{R_3} = \frac{V_{ab}}{R_3} = 5\ A$$



Teorema di Millman

insieme alla KCL vale per qualsiasi percorso chiuso

Soluzione (continua)

Per trovare I_1 e I_2 usiamo la KVL sulle due maglie

$$V_1 - V_{R1} - V_{ab} = 0$$

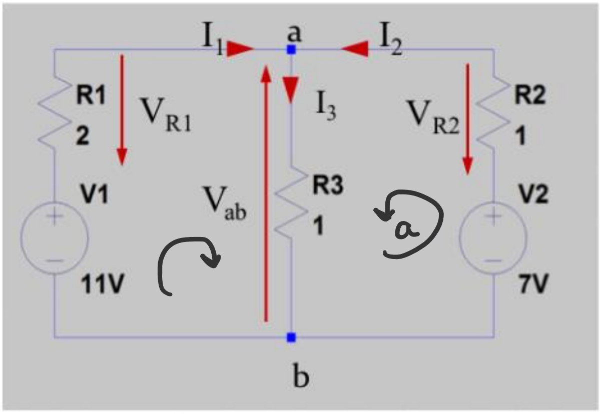
$$V_1 - I_1 R_1 - V_{ab} = 0$$

$$I_1 = \frac{V_1 - V_{ab}}{R_1} = \frac{11V - 5\ V}{2\Omega} = \quad A$$

$$V_2 - V_{R2} - V_{ab} = 0$$

$$V_2 - I_2 R_2 - V_{ab} = 0$$

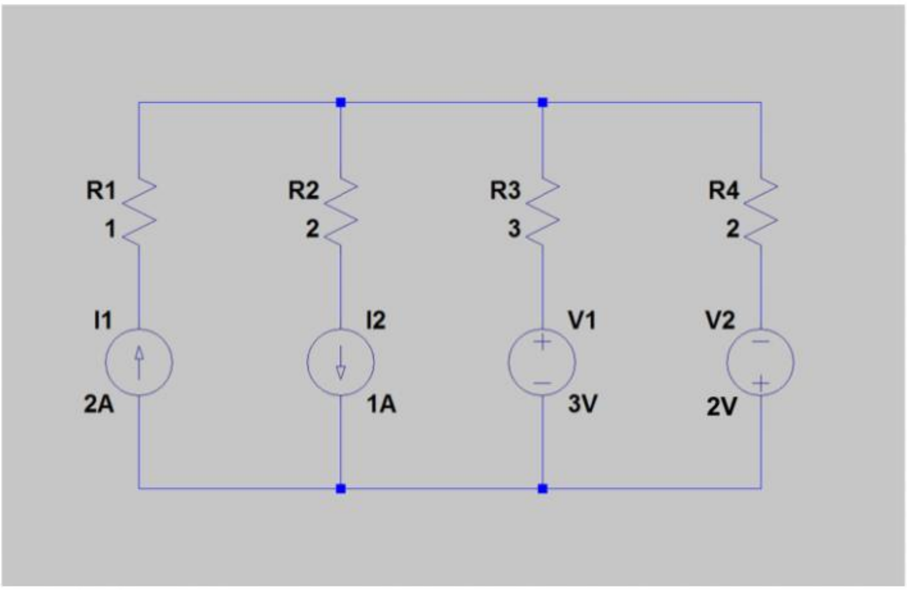
$$I_2 = \frac{V_2 - V_{ab}}{R_2} = \frac{7V - 5\ V}{1\Omega} = \quad A$$



Teorema di Millman

Esercizio

Applicando il Teorema di Millman al circuito in figura, determinare la tensione su R3 e R4



Teorema di Millman

Soluzione

Applichiamo il teorema di Millman tra i nodi *a* e *b*

$$V_{ab} = \frac{I_1 - I_2 + \frac{V_1}{R_3} - \frac{V_2}{R_4}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} = \frac{2A - 1A + \frac{3V}{3\Omega} - \frac{2V}{2\Omega}}{\frac{1}{3\Omega} + \frac{1}{2\Omega}} = \frac{6}{5}V = 1{,}2V$$

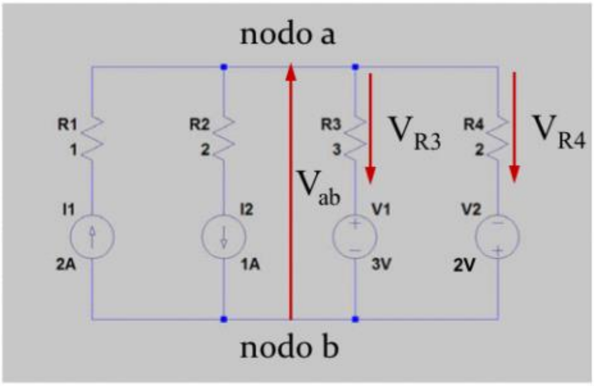
Con la KVL possiamo trovare V_{R3} e V_{R4}

$$V_{ab} + V_{R3} - V_1 = 0$$

$$V_{R3} = V_1 - V_{ab} = 3V - 1{,}2V = 1{,}8V$$

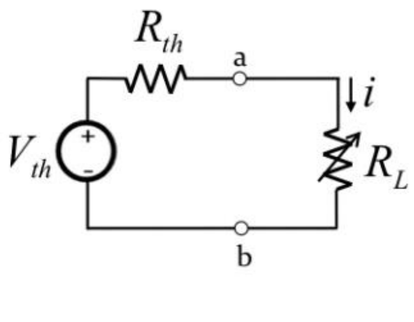
$$V_{ab} + V_{R4} + V_2 = 0$$

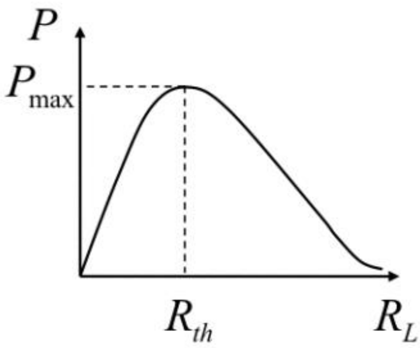
$$V_{R4} = -V_2 - V_{ab} = -2V - 1{,}2V = -3{,}2V$$



Massimo trasferimento di potenza

Si ha la massima potenza trasferita al carico quando la resistenza di carico R_L è uguale alla resistenza di Thevenin vista dal carico ($R_L = R_{th}$).





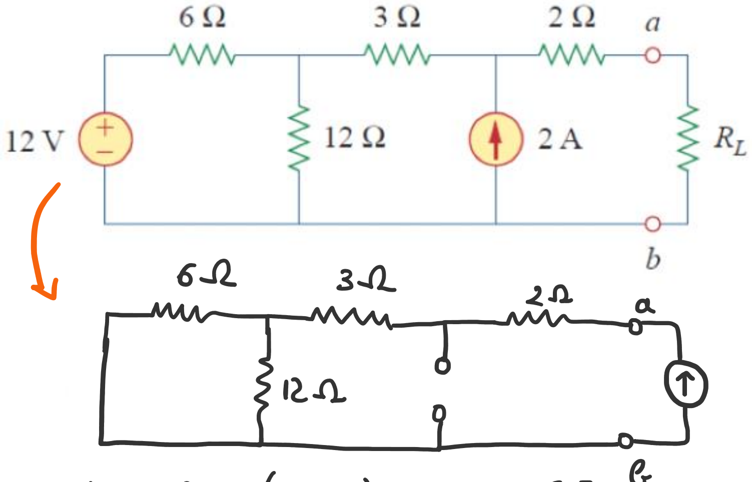
$$p = i^2 R_L = \left(\frac{V_{th}}{R_{th} + R_L}\right)^2 R_L$$

Se $\boxed{R_L = R_{th}}$ allora $\boxed{p_{max} = \frac{V_{th}^2}{4R_{th}}}$

Massimo trasferimento di potenza

Esercizio

Determinare R_L tale da avere il massimo trasferimento di potenza nel circuito in figura

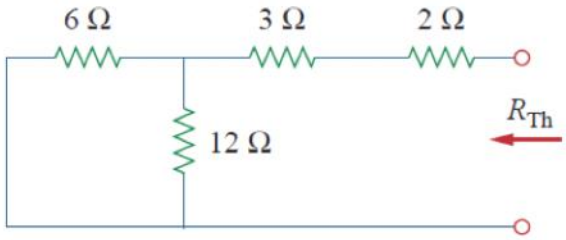


dove $R_{eq} = (6 // 12) + 3 + 2 = 9 [\Omega]$

Massimo trasferimento di potenza

Soluzione

Per trovare R_{TH} spegniamo tutti i generatori

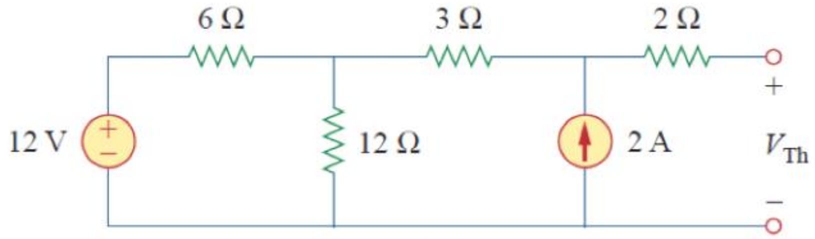


$$R_{Th} = 2 + 3 + 6 \| 12 = 5 + \frac{6 \times 12}{18} = 9\ \Omega$$

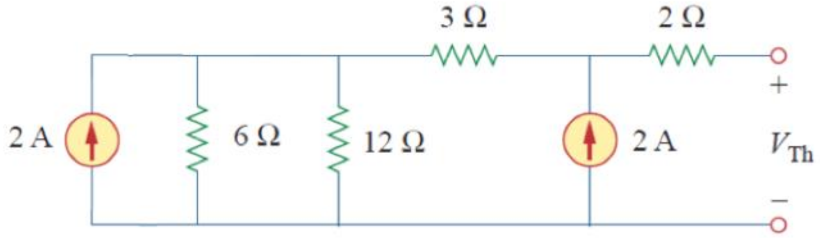
Massimo trasferimento di potenza

Soluzione (continua)

Per trovare V_{TH} stacchiamo il carico e troviamo la tensione a vuoto dal circuito in figura



Possiamo trasformare il generatore reale di tensione in uno di corrente

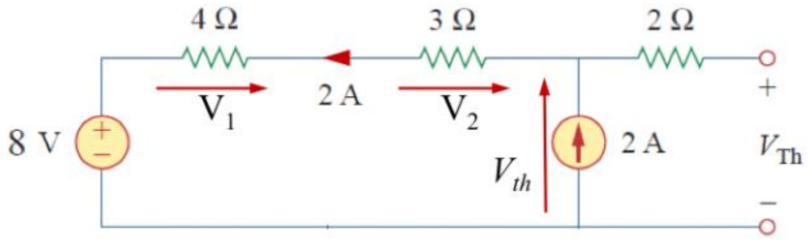


Massimo trasferimento di potenza

Soluzione (continua)

Facciamo il parallelo di resistenze e ritrasformiamo in un generatore di tensione

$6\Omega||12\Omega = 4\Omega$



La corrente che scorre nella maglia è forzata dal generatore di corrente, quindi 2A

Usiamo la KVL per trovare la caduta sul generatore di corrente, che corrisponde alla V_{th} perché sul resistore da 2Ω non c'è corrente e quindi non c'è caduta di tensione

$$8V + V_1 + V_2 - V_{th} = 0$$

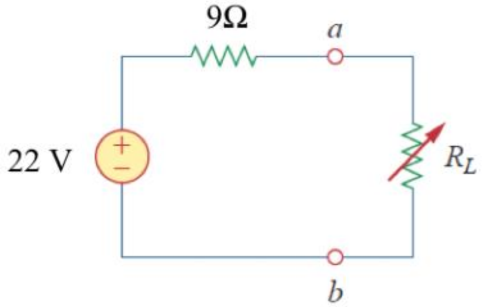
$$8V + 4\Omega \cdot 2A + 3\Omega \cdot 2A - V_{th} = 0$$

$$V_{th} = 22V$$

Massimo trasferimento di potenza

Soluzione (continua)

Il circuito equivalente alla Thevenin è quello in figura

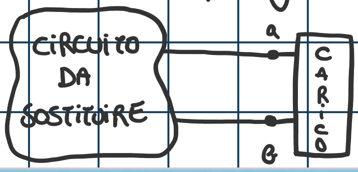


Il massimo trasferimento di potenza si ha quando $R_L = R_{\text{Th}} = 9\ \Omega$

In questo caso la potenza trasferita al carico sarà

$$p_{\max} = \frac{V_{\text{Th}}^2}{4R_L} = \frac{22^2}{4 \times 9} = 13.44\ \text{W}$$

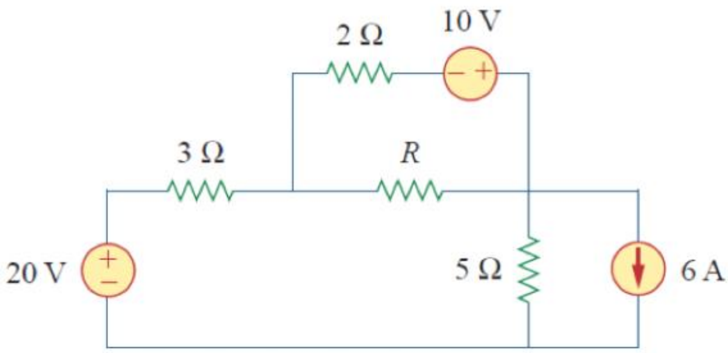
Per massimizzare il rendimento bisogna avere la resistenza di carico molto più grande della resistenza interna



Massimo trasferimento di potenza

Esercizio

Determinare la massima potenza che può essere trasferita al resistore R nel circuito in figura

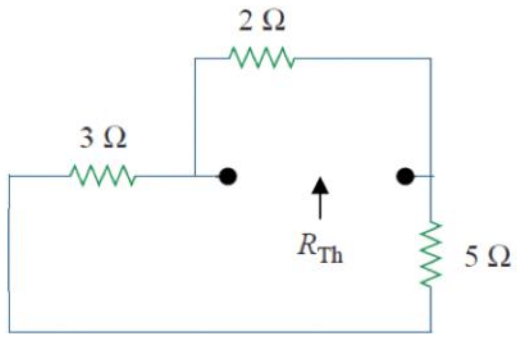


Massimo trasferimento di potenza

Soluzione

Troviamo l'equivalente alla Thevenin del circuito ai capi del resistore R

Per trovare R_{TH} spegniamo tutti i generatori



$$R_{Th} = 2||(3+5) = 2||8 = \underline{\mathbf{1.6\ ohm}}$$

Massimo trasferimento di potenza

Soluzione

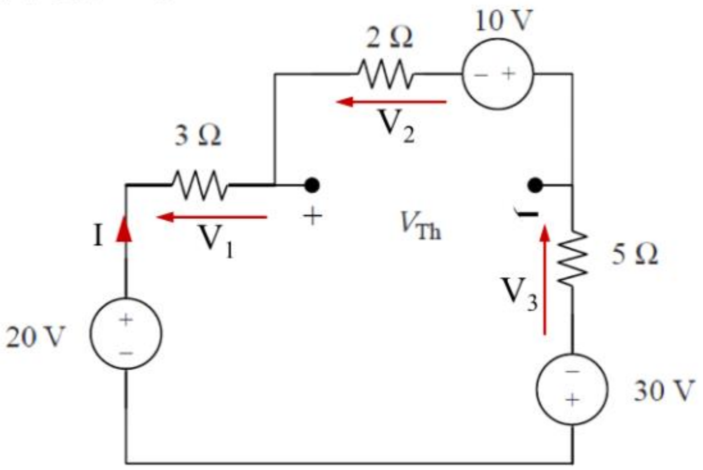
Possiamo trasformare il generatore reale di corrente in uno di tensione e scrivere la KVL per la maglia esterna

$$20V - V_1 - V_2 + 10V - V_3 + 30V = 0$$
$$20V - I \cdot 3\Omega - I \cdot 2\Omega + 10V - I \cdot 5\Omega + 30V = 0$$

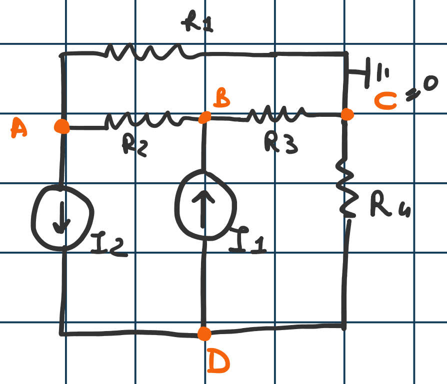
$$I = \frac{60V}{10\Omega} = 6A$$

Per trovare V_{TH} possiamo usare la KVL

$$V_{Th} - V_2 + 10V = 0$$
$$V_{Th} - I \cdot 2\Omega + 10V = 0$$
$$V_{Th} - 6A \cdot 2\Omega + 10V = 0$$
$$V_{Th} = 2V$$



ESERCIZI SUI NODI



CASO 1: solo generatori di corrente

$I_1 = 1\,[A] \qquad I_2 = 3\,[A]$

$R_1 = R_2 = 1\,[\Omega] \rightarrow G_1, G_2 = 1\,[\Omega^{-1}]$

$R_3 = R_4 = 2\,[\Omega] \rightarrow G_3, G_4 = \frac{1}{2}\,[\Omega^{-1}]$

3 incognite ⇒ 3 equazioni da scrivere

↳ $e_a, e_b, e_d = ?$

A → $(e_A - \underset{}{\overset{=0}{\underline{e_C}}})G_1 + (e_A - e_B) \cdot G_2 + I_2 = 0$

B → $(e_B - e_A) G_1 + (e_B - \overset{=0}{\underline{e_C}}) \cdot G_3 - I_1 = 0$

D → $(e_D - \overset{=0}{\underline{e_C}}) \cdot G_4 + I_1 - I_2 = 0$

Mettiamo in evidenza i termini noti:

$$e_A (G_1 + G_2) + e_B(-G_2) = -I_2$$

$$e_A (-G_2) + e_B (G_2 + G_3) = I_1$$

$$e_D \cdot G_4 = I_2 - I_1$$

Costruisco il sistema matriciale:

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 & G_2 + G_3 & 0 \\ 0 & 0 & G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ e_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_2 \\ I_1 \\ I_2 - I_1 \end{bmatrix}$$

Si evince che $e_d = \frac{I_2 - I_1}{G_4} = 4\,[V]$

Inoltre:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_A \\ e_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_2 \\ I_1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta G = 3-1 = 2$$

$$e_A = \frac{\begin{vmatrix} -I_2 & -1 \\ I_1 & 3/2 \end{vmatrix}}{\Delta G} = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3/2 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-7/2}{2} = -7/4 \; [V]$$

$$e_B = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -I_2 \\ 1 & I_1 \end{vmatrix}}{\Delta G} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2-3}{2} = -\frac{1}{2} \; [V]$$

$$e_D = 4V$$

$$\sum P_{erogata_{GEN}} = \sum P_{Assorbita_{RESISTORE}}$$

$$P_{R1} = \frac{(e_A - e_C)^2}{R_1} = \frac{(e_C - e_A)^2}{R_1} = \frac{49}{16} \; [W]$$

$$P_{R2} = \frac{(e_A - e_B)^2}{R_2} = \frac{(-7/4 + 1/2)^2}{2} = \frac{25}{16} \; [W]$$

$$P_{R3} = \frac{(e_B - e_C)^2}{R_3} = 1/8 \; [W]$$

$$P_{R4} = \frac{(e_C - e_D)^2}{R_4} = 16/2 = 8 \; [W]$$

Dunque:

$$V_{I1} = e_B - e_D = -1/2 - 4 = -9/2 \; [V]$$

$$P^g_{I1} = V_{I1} \cdot I_1 = -9/2 \cdot 1 = -9/2 \; [W]$$

$$V_{I2} = e_D - e_A = 7/4 + 4 = 23/4 \; [V]$$

$$P_{I2} = V_{I2} \cdot I_2 = 23/4 \cdot 3 = 69/4 \; [W]$$

Metodi di analisi

martedì 27 aprile 2021 12:31

Metodi di analisi per circuiti analogici lineari

Corso di Elettrotecnica
CdL Ing. Elettronica-Informatica
A.A. 2020-2021

Marco Ricci, Stefano Laureti

Metodi di analisi

Dato un circuito di R rami e N nodi, il suo comportamento è completamente determinato una volta note tutte le 2R grandezze elettriche 2R: R tensioni ed R correnti di ramo.

Il problema fondamentale della analisi dei circuiti è come determinare queste grandezze sfruttando
- le conoscenze sugli elementi del circuito: R relazioni costitutive i-v (corrente-tensione), una per ogni ramo, e
- le conoscenze su come sono connessi, ovvero le relazioni topologiche espresse tramite KCL e KVL

I problemi principali sono 2:

- se considero tutte le 2R incognite simultaneamente arrivo a scrivere sistemi risolutivi non risolvibili a mano anche per circuiti semplici (Tableau equation)
- Le relazioni topologiche che si possono scrivere sono sovrabbondanti (data l'omogeneità della KCL e della KVL ogni loro combinazione da vita ad un'altra relazione valida)

Metodi di analisi

In generale (circuiti LTI lineari tempo invarianti) è richiesta l' individuazione di 2R equazioni linearmente indipendenti.

Si pongono i seguenti 3 quesiti:

I. quali equazioni scrivere?
II. come garantire la lineare indipendenza delle equazioni?
III. è possibile ridurre la complessità del sistema risolvente da ordine 2R e risolverlo «a blocchi»? (ovvero diagonalizzare il sistema risolutivo)

$\Downarrow$

Sviluppo dei metodi di analisi

Metodi di analisi

Cosa sono:

- Procedure sistematiche (Algoritmi) per la soluzione di circuiti elettrici
- Metodi per ridurre la complessità dei sistemi risolutivi
- Strategie per individuare in maniera visiva il sistema di equazioni indipendenti di numero minimo necessarie alla soluzione del sistema

Limitiamo inizialmente lo studio a reti senza memoria (resistive) in cui il rapporto tra corrente e tensione è sempre algebrico → sistemi risolutivi algebrici

Metodi di analisi

In presenza di elementi con memoria (capacità, induttori, detti anche elementi reattivi), le relazioni tra tensione e corrente sono in generale descritte da relazioni integro-differenziali e i sistemi risolutivi saranno sistemi di equazioni integro-differenziali e quindi riconducibili ad un sistema di equazioni differenziali.

La soluzione di questi sistemi nel caso più generale (elementi con memoria con eccitazioni arbitrarie) richiede strumenti matematici avanzati quali la trasformata di Laplace.

In alcuni casi, come per lo studio dei circuiti a regime sinusoidale in cui tutte le eccitazioni sono sinusoidali, i sistemi possono essere ricondotti a sistemi algebrici con coefficienti in generale rappresentati da numeri complessi

$\Downarrow$

metodo dei fasori

Metodi di analisi

Quesito I: quali equazioni scrivere ?

Ci sono due tipi di relazioni che legano tra loro le incognite del sistema, ovvero le tensioni e correnti dei rami:

1) R equazioni dalle relazioni costitutive degli elementi
   → 1 rel. Costitutiva per ogni ramo.
2) Altre R relazioni si ottengono dalle relazioni topologiche espresse tramite le leggi di Kirchhoff

Metodi di analisi

Quesito II: come assicurare l'indipendenza lineare delle equazioni ?

1) Le R equazioni costitutive degli elementi (sono indipendenti tra loro essendo «locali»)
2) Altre R relazioni si ottengono dalle relazioni topologiche espresse tramite le leggi di Kirchhoff.

NOTA: Per un dato circuito posso scrivere molte eq. di Kirchhoff (essendo omogenee possono essere combinate tra loro per dare altre equazioni), inoltre possiamo scrivere equazioni basate su la KCL e su la KVL.

Come individuarne solo R indipendenti? E come ripartirle tra KCL e KVL?

Metodi di analisi

Quesito II: lineare indipendenza?

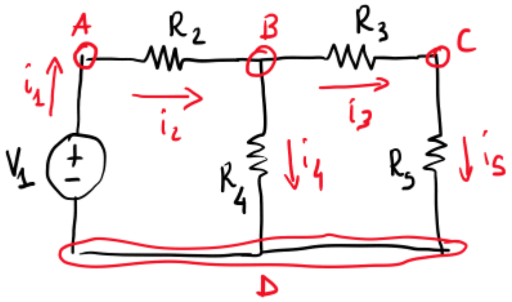
Esempio:

Equilibrio correnti nodi A,B,C,D

Legge di Kirchhoff:

A: $-i_1+i_2=0$ B: $-i_2+i_3+i_4=0$

C: $-i_3+i_5=0$ D: $+i_1-i_4-i_5=0$



Se si scrivono le precedenti relazioni in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

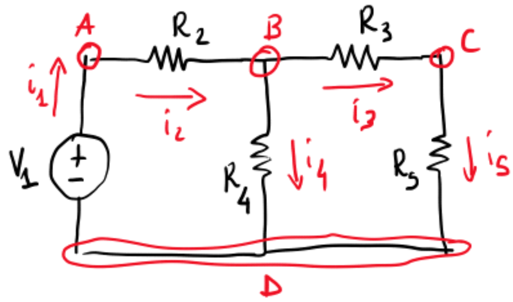
le equazioni sono **linearmente dipendenti**.

Necessità individuazione metodi sistematici

Metodi di analisi

Quesito III: complessità sistema risolvente

Ricerca insiemi minimi di tensioni o di correnti indipendenti da cui derivare le altre tramite le leggi di Kirchhoff



Esempio

tensioni dei rami 1,4,5

$$v_2 = v_1 - v_4$$
$$v_3 = v_4 - v_5$$

Ricavo le altre tensioni
3=N-1 tensioni indipendenti
3=N-1 potenziali nodali incogniti

correnti dei rami 2,3

$$i_1 = i_2$$
$$i_4 = i_2 - i_3$$
$$i_5 = i_3$$

Ricavo le altre correnti
2=R-N+1 correnti indipendenti
2=R-N+1 correnti di anello

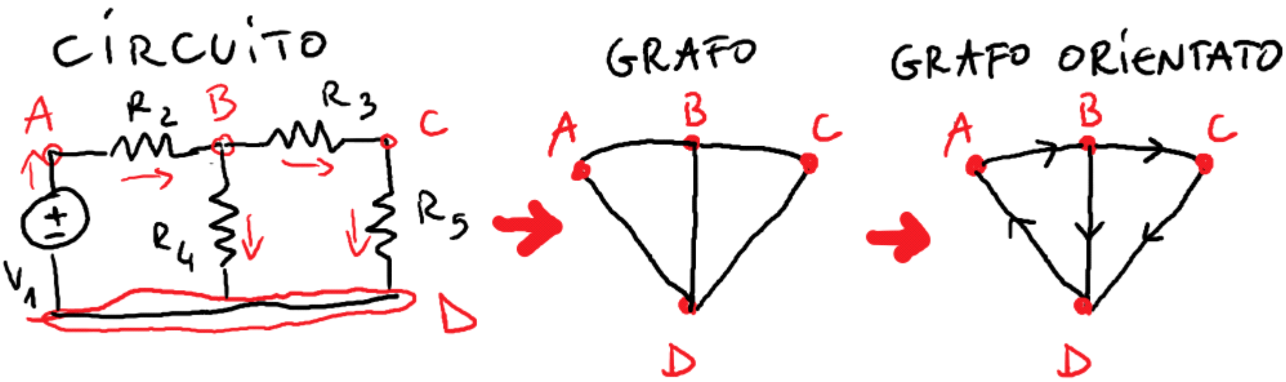
Metodi di analisi

Per determinare gli insiemi **minimi** di tensioni e correnti **linearmente indipendenti** si sfruttano proprietà topologiche derivanti dalle leggi di Kirchhoff, che non dipendono dalla natura degli elementi sui rami.

La scelta di un insieme di tensioni o di correnti indipendenti non dipende dalla tipologia di elementi del circuito, né dalla tipologia di segnali di eccitazione, ma solo dalla loro connessioni

⇓

Partiamo dai concetti di GRAFO e di GRAFO orientato

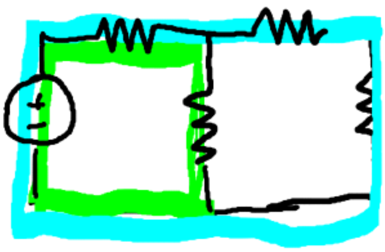


Metodi di analisi

Elementi del Grafo di un circuito

KVL
- **Maglia**: insieme di rami che formano un percorso chiuso tale che non percorre mai un ramo 2 volte.
- **Anello**: maglia che non contiene all'interno altre maglie

KCL
- **Taglio**: una superficie finita chiusa che taglia un insieme i rami (una sola volta ogni ramo).



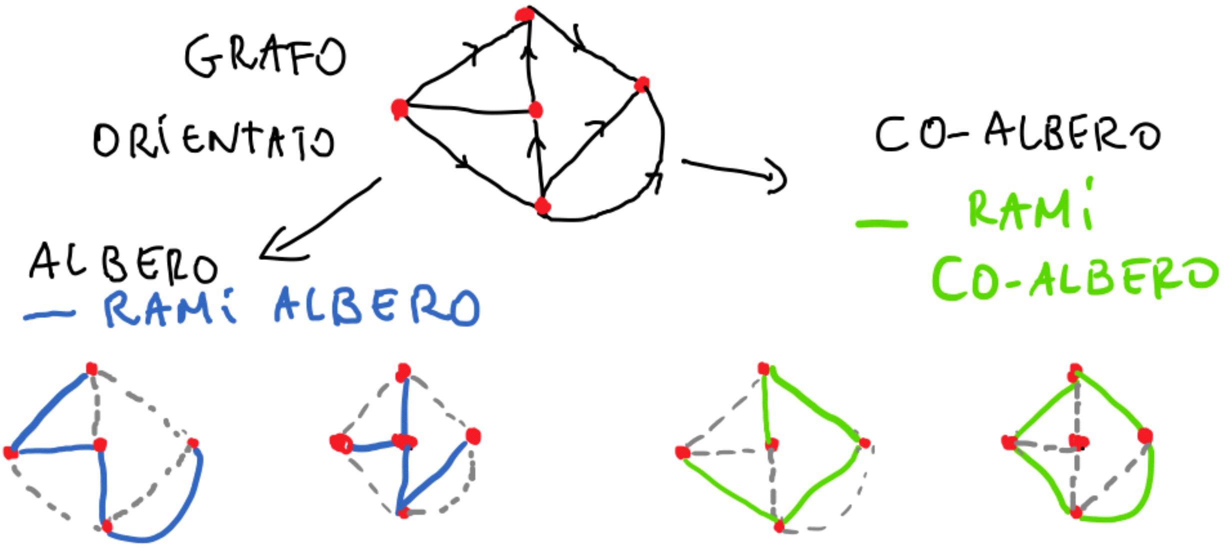
- MAGLIA
- ANELLO
- TAGLIO

Metodi di analisi

Elementi del Grafo di un circuito

Albero: insieme connesso di rami che tocca tutti i nodi del grafo una sola volta senza formare percorsi chiusi (N nodi ⇒ N-1 rami albero)

Co-albero: insieme di tutti i rami del circuito non compresi nell'albero (R-N+1 rami del co-albero)



Metodi di analisi

Proprietà di albero e co-albero

Enunciato 1: Le tensioni dei rami dell'albero $\{v_{aj}\}$ costituiscono un insieme indipendente di tensioni. Tramite combinazioni lineari delle tensioni dei rami dell'albero posso esprimere le tensioni dei rami del co-albero

Dimostrazione: Dato che l'albero non forma percorsi chiusi, non posso scrivere una KVL che contenga solo rami dell'albero ⇒

Non posso esprimere la tensione di un qualsiasi ramo dell'albero come combinazione degli altri rami dell'albero ⇒ i rami dell'albero formano un insieme di tensioni indipendenti

Se invece aggiungo un qualsiasi ramo del co-albero si forma una maglia (Maglia fondamentale) che contiene il ramo del co-albero e solo rami dell'albero ⇒ posso scrivere una KVL che lega la tensione del ramo del co-albero alle tensioni dei rami dell'albero ⇒ posso esprimere la tensione del ramo del co-albero v_{ck} come combinazione di rami dell'albero compresi nella maglia

$v_{ck} + \sum_{aj} A_{kj} A v_{aj} = 0 \Rightarrow v_{ck} = \sum_{aj} -A_{kj} v_{aj}$

Metodi di analisi

Proprietà di albero e co-albero

Enunciato 2: Le correnti dei rami del co-albero $\{i_{ck}\}$ costituiscono un insieme indipendente di correnti. Tramite combinazioni lineari delle $\{i_{ck}\}$ posso esprimere le correnti dei rami dell' albero

Dimostrazione: Dato che l'albero tocca tutti i nodi, non posso scrivere una KCL che contenga solo rami dell'albero, ovvero non posso tracciare una superficie chiusa (un taglio) che tagli solo rami del co-albero senza passare 2 volte per uno stesso ramo⇒

Non posso esprimere la corrente di un qualsiasi ramo del co-albero come combinazione delle correnti degli altri rami del co-albero ⇒

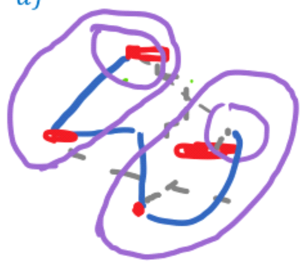
i rami del co-albero formano un insieme di correnti indipendenti

E' sempre invece possibile disegnare una superficie chiusa che tagli solo un ramo dell'albero e rami del co-albero (Taglio fondamentale) ⇒ posso scrivere una KCL che lega la corrente del ramo dell'albero i_{aj} alle correnti del co-albero

⇒ posso esprimere la corrente del ramo dell'albero i_{aj} come combinazione di rami del co-albero compresi nel taglio

$i_{aj} + \sum_{ck} B_{jk} i_{ck} = 0 \Rightarrow i_{aj} = \sum_{ck} -B_{jk} i_{ck}$

— TAGLI



Metodi di analisi

Quante incognite e quante equazioni?

N-1 tensioni $\{v_{aj}\}$ dei rami dell'albero indipendenti	$\Rightarrow$	N-1 tagli fondamentali N-1 KCL
+		+
R-N+1 correnti $\{i_{ck}\}$ del co-albero indipendenti	$\Rightarrow$	R-N+1 maglie fondamentali R-N+1 KVL
=		=
R incognite indipendenti		R eq. Kirchhoff

Grazie alla topologia ho individuato R grandezze indipendenti e R equazioni di Kirchhoff $\Rightarrow$ se le R equazioni sono indipendenti posso risolvere il circuito

$\Downarrow$

Le equazioni sono linearmente indipendenti (segue dimostrazione)

Metodi di analisi

Indipendenza delle equazioni

1 Taglio fondamentale

per ogni ramo albero

$\Downarrow$

$$\begin{array}{l} \text{RAMO 1} \\ \text{RAMO 2} \\ \\ \text{RAMO N-1} \end{array} \begin{cases} i_{a1} + \sum_{ck} (\pm) i_{ck} = 0 \\ i_{a2} + \sum_{ck} (\pm) i_{ck} = 0 \\ \vdots \\ i_{a(N-1)} + \sum_{ck} (\pm) i_{ck} = 0 \end{cases}$$

in ciascuna equazione compare una CORRENTE RAMO ALBERO non presente nelle altre equazioni $\Rightarrow$

le equazioni sono linearmente indipendenti

METODO BASE TAGLI

(in presenza di gen. corrente)

1 Maglia fondamentale

Pe-r ogni ramo co-albero

$\Downarrow$

$$\begin{array}{l} \text{RAMO 1} \\ \text{RAMO 2} \\ \\ \text{RAMO R-N+1} \end{array} \begin{cases} v_{c1} + \sum_{aj} (\pm) v_{aj} = 0 \\ v_{c2} + \sum_{aj} (\pm) v_{aj} = 0 \\ \vdots \\ v_{c(R-N+1)} + \sum_{aj} (\pm) v_{aj} = 0 \end{cases}$$

in ciascuna equazione compare una TENSIONE RAMO CO-ALBERO non presente nelle altre equazioni $\Rightarrow$

le equazioni sono linearmente indipendenti

METODO BASE MAGLIE

(in presenza di gen. tensione)

Metodi di analisi

Indipendenza delle equazioni

Le equazioni precedenti si possono riscrivere in forma matriciale nella seguente maniera, dove si evidenzia che:

I. Le correnti dell'albero possono essere scritte come combinazioni di quelle del co-albero

II. Le tensioni del co-albero possono essere scritte come combinazioni di quelle dell'albero

$$\underbrace{\begin{bmatrix} i_{a_1} \\ i_{a_2} \\ \vdots \\ i_{a_{N-1}} \end{bmatrix}}_{N-1 \times 1} + \begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} i_{c_1} \\ i_{c_2} \\ \vdots \\ i_{c_{R-N+1}} \end{bmatrix}}_{R-N+1 \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} v_{c_1} \\ v_{c_2} \\ \vdots \\ v_{c_{R-N+1}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & & \\ & B & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{A_1} \\ v_{A_2} \\ \vdots \\ v_{a_{N-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si dimostra che le due matrici A e B sono collegate, in particolare si ha:

$$[B] = -[A]^T$$

$$\dim(A) = (N-1) \times (R-N+1)$$

$$\dim(B) = (R-N+1) \times (N-1)$$

Metodi di analisi

Riassumendo

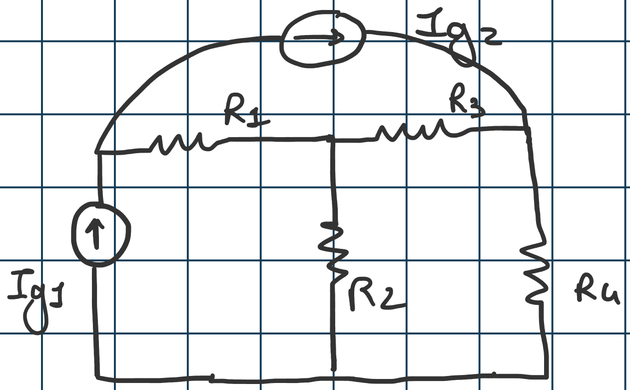
- Abbiamo trovato 2R equazioni linearmente indipendenti nelle 2R incognite. Queste equazioni sono suddivise in 3 blocchi tra di loro indipendenti → relazioni costitutive, tagli fondamentali e maglie fondamentali

$$\begin{bmatrix} v_{a_J} \\ v_{c_K} \end{bmatrix} = [R]\begin{bmatrix} i_{a_J} \\ i_{c_K} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C \\ O \\ S \\ T \end{bmatrix};\quad [i_{a_J}] = -[A][i_{c_K}];\quad [v_{c_K}] = -[B][v_{a_J}]$$

- Invece di risolvere un sistema 2R equazioni, possiamo risolvere un sistema più piccolo andando a sostituire le relazioni di sopra «un blocco alla volta »
- A seconda se partiamo dai tagli fondamentali o dalle maglie fondamentali avremo due classi di algoritmi distinti, uno che ci permette di trovare le tensioni indipendenti da cui ricavare tutte le altre grandezze, l'altro che ci permette di trovare le correnti indipendenti da cui ricavare tutte le altre grandezze

TAGLI FONDAMENTALI ⇔ TENSIONI ALBERO (⇔ METODO DEI NODI)
MAGLIE FOND. ⇔ CORRENTI COALBERO(⇔ METODO DEGLI ANELLI)

es. circuito



$I_{g1} = 1A$
$I_{g2} = 2A$
$R_k = k\,\Omega$

Metodi di analisi

ALGORITMI RISOLUTIVI

1. individuare un albero sul grafo orientato

2. scrivere le equazioni dei tagli fondamentali → N-1 KCL

3. sostituire le correnti con le tensioni tramite le R relazioni costitutive del tipo $i=Gv+i_0$ (ovvero in presenza di soli generatori di corrente)

4. sostituire le tensioni del coalbero come combinazione delle tensioni dell'albero tramite le maglie fondamentali →R-N+1 KVL

5. risolvere il sistema avente come incognite le N-1 $\{v_{aj}\}$ tensioni dell'abero

2. scrivere le equazioni delle maglie fondamentali →R-N+1 KVL

3. sostituire le tensioni con le correnti tramite le R relazioni costitutive $v=Ri+v_0$ (ovvero in presenza di soli generatori di tensione)

4. sostituire le correnti dell' albero come combinazione delle correnti del co-albero tramite i tagli fondamentali → N-1 KCL

5. risolvere il sistema avente come incognite le R-N+1 $\{i_{ck}\}$ correnti del co-abero

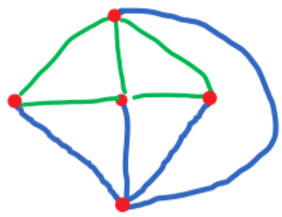
Metodo dei nodi (solo generatori di corrente)

1. il metodo dei nodi è un caso particolare del metodo dei tagli quando invece delle tensioni dei rami dell'albero prendiamo come incognite i potenziali dei nodi del circuito espressi rispetto ad un nodo di riferimento assunto a potenziale nullo
2. i due metodi coincidono per una particolare scelta dell'albero
3. Il metodo dei nodi conduce ad un algoritmo risolutivo più semplice rispetto a quello del metodo dei tagli e ad un sistema risolutivo «scrivibile a vista»

Metodo dei nodi (solo generatori di corrente)

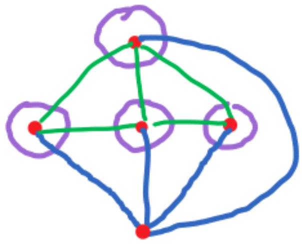
Scelto un nodo di riferimento, se aggiungo nel grafo dei rami fittizi a conduttanza nulla (ovvero dei circuiti aperti), le grandezze all'interno del circuito non vengono alterate.

A questo punto posso scegliere l'albero come l'insieme dei rami che connettono il nodo di riferimento con tutti gli altri nodi



Data l'ipotesi di campo conservativo, le tensioni dei rami dell'albero coincidono con i potenziali dei nodi rispetto al nodo di riferimento

Inoltre i tagli fondamentali diventano delle linee chiuse che circondano tutti i nodi escluso quello di riferimento



Metodo dei nodi (solo generatori di corrente)

ALGORITMO METODO DEI NODI

1. scegliere un nodo come riferimento
2. prendere come variabili ausiliarie (incognite) gli N-1 potenziali degli altri nodi rispetto al riferimento
3. scrivere gli equilibri di corrente a tutti i nodi tranne quello di riferimento (somma delle correnti uscenti per convenzione)
4. utilizzare le relazioni costitutive, esprimendo le correnti dei rami resistivi in funzione dei potenziali di nodo ESPRESSI RISPETTO AL POTENZIALE DEL NODO DI RIFERIMENTO e delle resistenze dei rami.
5. Risolvere il sistema risultante con incognite i potenziali dei nodi (escluso il riferimento). Il sistema risultante è del tipo:

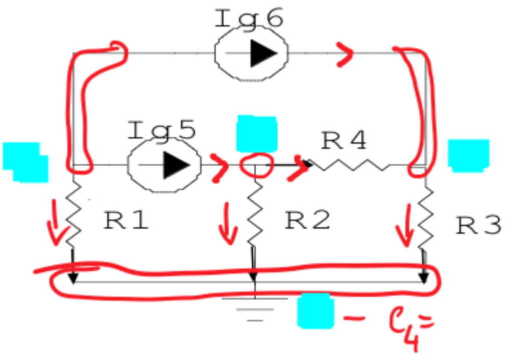
$$\left[\quad \hat{G} \quad \right] \left[\vec{e} \right] = \left[\vec{I} \right] \qquad \begin{cases} \hat{G} & \text{Matrice di conduttanze} \\ \vec{e} & \text{Vettore dei potenziali incogniti} \\ \vec{I} & \text{Vettore delle correnti} \end{cases}$$

Metodo dei nodi (solo generatori di corrente)

VANTAGGI DEL METODO DEI NODI

1. Definizione dell'albero implicita
2. Le KCL sono semplicemente le eq. di bilancio ai nodi, quindi di immediata individuazione (per convenzione si prende la somma delle correnti uscenti)
3. Non c'è bisogno di scrivere le tensioni del co-albero come combinazione di quelle dell'albero, sono naturalmente espresse come differenze tra i potenziali dei rispettivi nodi
4. Applicabile a qualsiasi tipo di circuito
5. Vedremo che inoltre la presenza di generatori di tensione semplifica la soluzione del circuito

Metodo dei nodi (solo generatori di corrente)



I° step: fisso il riferimento al ④ → $e_4=0$;
II° step: scrivo le KCL degli altri nodi, ①②③

$$
\begin{array}{l}
\text{KCL ①} \\
\text{KCL ②} \\
\text{KCL ③}
\end{array}
\begin{cases}
i_1+i_5+i_6=0 \\
i_2+i_4-i_5=0 \\
i_3-i_4-i_6=0
\end{cases}
$$

III° step: scrivo le correnti tramite i potenziali dei nodi usando le relazioni costitutive del tipo $i=Gv+i_0$
(NOTA: questo lo posso fare per i rami resistivi ($i=Gv$) e per i rami contenenti gen. di corrente indipendenti ($i=i_0$) o dipendenti ($i=a\,i_j$, $i={}_b v_k$)
!! Per i rami contenenti gen. di tensione la corrente è indeterminata ed incognita !!

$$
\begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 \\ 0 & (G_2+G_4) & -G_4 \\ 0 & -G_4 & (G_3+G_4) \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} -I_{g_5}-I_{g_6} \\ I_{g_5} \\ I_{g_6} \end{bmatrix}
$$

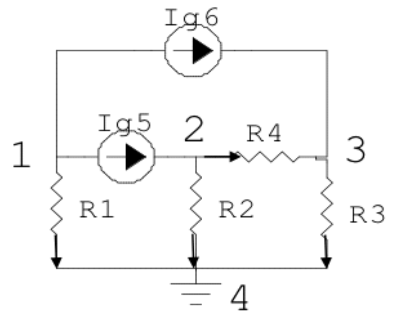
IV° step: risolvo il sistema ottenuto

Metodo dei nodi (solo generatori di corrente)

Osserviamo che, nella matrice dei coefficienti:

- il termine diagonale $\hat{G}(k,k)$ =(somma di tutte le conduttanze collegate al nodo k);
- Il termine $\hat{G}(k,i)$ =-(somma delle conduttanze che connettono **direttamente** i nodi k ed i) $\Rightarrow \hat{G}(k,i) = \hat{G}(i,k) \Rightarrow$ matrice simmetrica (se ho preso sempre le correnti uscenti o entranti)
- nel vettore dei termini noti il termine $\vec{I}(k)$=(somma delle correnti entranti nel nodo k impresse da generatori).
  (NOTA: le correnti uscenti si prendono come negative)

$$\begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 \\ 0 & (G_2+G_4) & -G_4 \\ 0 & -G_4 & (G_3+G_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_{g_5} - I_{g_6} \\ I_{g_5} \\ I_{g_6} \end{bmatrix}$$



Metodo dei nodi con generatori di tensione

Cosa succede se è presente uno o più generatori di tensione?

- Il generatore di tensione V_g vincola la differenza di potenziale tra due nodi $\Rightarrow V_g=(e_j-e_k) \Rightarrow$ riduce il numero di potenziali incogniti: $e_j= V_g+e_k$

$\Rightarrow$ riduce il numero di KCL da scrivere per formare il sistema risolutivo

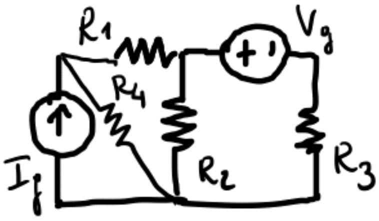
- Allo stesso tempo la corrente che scorre nei generatori di tensione I_{Vg} è determinata dal resto del circuito

$\Rightarrow$ le correnti dei generatori sono incognite aggiuntive

- il numero di incognite da risolvere rimane pertanto invariato ma in genere posso prima determinare le tensioni dei nodi incognite (sistema risolutivo di dimensioni ridotte) e successivamente determinare le correnti dei generatori utilizzando le KCL non scritte in precedenza.
- se è presente un solo generatore di tensione, allora la scelta più conveniente per il nodo di riferimento è quella del «-» del generatore di tensione.
- se sono presenti più generatori, la scelta più conveniente è scegliere come riferimento il nodo a cui sono connessi più generatori di tensione.

Metodo dei nodi con generatori di tensione

Esempio metodo nodi con generatore di tensione



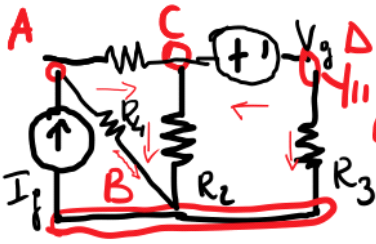
I step: fisso il nodo di riferimento coincidente con il «-» del generatore $\Rightarrow e_D=0$, $e_C=V_g$

II step: scrivo le KLC per i potenziali incogniti dei nodi A e B (C è vincolato)

$R_1 = 1[\Omega]$, $R_2 = 2[\Omega]$, $R_3 = 3[\Omega]$

KCL A: $i_{R_1} + i_{R_4} - i_g = 0$

KCL B: $-i_{R_2} - i_{R_3} - i_{R_4} + i_g = 0$



$e_D = 0[V]$

III step: scrivo le correnti dei rami resistivi in termini di potenziali e conduttanze

$i_{R_1} = (e_A - e_C)G_1 = (e_A - V_g)G_1$; $i_{R_2} = (V_g - e_B)G_2$

$i_{R_3} = (e_D - e_B)G_3 = -e_B G_3$; $i_{R_4} = (e_A - e_B)G_4$

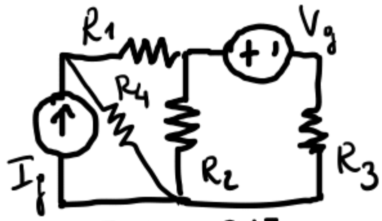
IV step: risolvo il sistema nelle incognite (e_A e e_B)

$$e_A G_1 + (e_A - e_B)G_4 = i_g + V_g G_1$$
$$e_B G_2 + e_B G_3 + (e_B - e_A)G_4 = -i_g + V_g G_2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} G_1+G_4 & -G_4 \\ -G_4 & G_2+G_3+G_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_A \\ e_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_g + V_g G_1 \\ -i_g + V_g G_2 \end{bmatrix}$$

Metodo dei nodi con generatori di tensione

Esempio metodo nodi con generatore di tensione



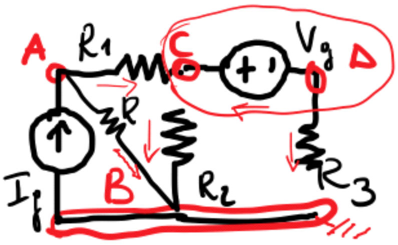
$V_g = 5\,[V]$, $I_g = 4\,[A]$

$R_1 = 1\,[\Omega]$, $R_2 = 2\,[\Omega]$, $R_3 = 3\,[\Omega]$

V step: trovo la corrente del generatore di tensione con la KCL al nodo vincolato (C)

KCL (C) : $i_{R_2} - i_{R_1} - i_{V_g} = 0 \Rightarrow i_{V_g} = i_{R_2} - i_{R_1} \Rightarrow$

$i_{V_g} = (V_g - e_A)G_2 - (e_A - V_g)G_1$



$e_B = 0 \quad e_C = e_D + V_g$

NOTA: avessimo preso un riferimento diverso (ex. B), il procedimento sarebbe stato lo stesso ma avremmo dovuto inserire da subito l'incognita corrente del generatore di tensione

KCL (A) : $i_{R_1} + i_{R_4} - i_g = 0$

KCL (D) : $i_{R_3} + i_{V_g} = 0 \Rightarrow i_{V_g}$ incognito

aggiungo KCL (C) : $i_{R_2} - i_{R_1} - i_{V_g} = 0 \Rightarrow i_{V_g} = i_{R_2} - i_{R_1}$

KCL (A) : $i_{R_1} + i_{R_4} = i_g$

KCL (D-C) : $i_{R_3} + i_{R_2} - i_{R_1} = 0$

NOTA: la 2° eq. è la KCL di una linea che circonda i nodi C e D, detta «supernodo»

Metodo degli anelli

E’ possibile semplificare ulteriormente il metodo delle maglie cosi come fatto con il metodo dei nodi a partire dal metodo dei tagli?

Ovvero non dover scegliere un albero (step I) e non dover sostituire le correnti dell’albero con combinazioni di quelle del co-albero (step V)?

$\Downarrow$

Per circuiti planari ottengo dei vantaggi se scelgo come correnti incognite le correnti fittizie degli anelli invece che le più generali correnti del co-albero.

METODO DEGLI ANELLI

Metodo degli anelli

VANTAGGI

✓Gli anelli sono univocamente identificati → non ho bisogno di scegliere albero e co-albero e di individuare maglie e tagli fondamentali

✓Posso scrivere le tensioni dei rami resistivi direttamente tramite le correnti di anello cosi da ottenere un sistema di R-N+1 equazioni in R-N+1 correnti indipendenti senza dover esprimere le correnti dell'albero tramite quelle del co-albero (i.e. senza scrivere le KCL dei tagli fondamentali)

✓Su ogni ramo si sovrappongono al massimo 2 sole correnti di anello e sempre in versi opposti → facilita la scrittura del sistema

NOTA BENE

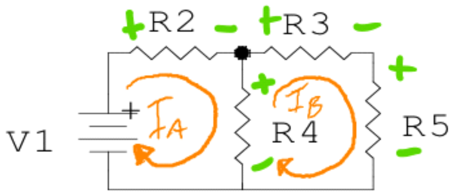
Non sempre posso scegliere un albero in modo tale che le correnti del co-albero coincidano con quelle di anello

È possibile dimostrare però che un grafo planare connesso con *R rami* e *N* nodi ha [*R-N+1*] anelli distinti, tanti quanti i rami del co-albero.

L'insieme di tutti gli anelli di un grafo planare ha la stessa proprietà di completezza di un insieme di maglie fondamentali, cioè qualsiasi altra maglia del grafo planare può essere ottenuta dall'unione di due o più anelli, dove l'unione è realizzata eliminando i rami in comune.

Questo assicura la lineare indipendenza delle KVL sugli anelli

Metodo degli anelli



I° step: scrivere le KVL per gli anelli

A $\quad V_{R2} + V_{R4} = V_1$

B $\quad V_{R3} + V_{R5} - V_{R4} = 0$

II° step: Scrivere le tensioni dei rami resistivi in funzione delle correnti di anello

A $\quad I_A R_2 + (I_A - I_B) R_4 = V_1 \Rightarrow I_A (R_2 + R_4) - I_B R_4 = V_1$

B $\quad I_B R_3 + I_B R_5 + (I_B - I_A) R_4 = 0 \Rightarrow -I_A R_4 + I_B (R_3 + R_4 + R_5) = 0$

III° step: risolvere il sistema

$$\begin{bmatrix} R_2 + R_4 & -R_4 \\ -R_4 & R_3 + R_4 + R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Delta_R = R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_2 R_5 + R_3 R_4$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} V_1 & -R_4 \\ 0 & R_3 + R_4 + R_5 \end{vmatrix}}{\Delta_R} \; , \qquad I_B = \frac{\begin{vmatrix} R_2 + R_4 & V_1 \\ -R_4 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_R}$$

Metodo degli anelli

- Metodo analisi base anelli –<u>scrittura diretta sistema risolvente</u>-:
  - Individuare gli anelli ed associarvi le corrispondenti correnti di anello, tutte che girano in verso orario per convenzione;
  - Scrivere il sistema delle KVL agli anelli –una equazione per ciascuno anello considerando le correnti di anello circolanti esclusivamente nel rispettivo anello
    - Il termine k,k della matrice dei coefficienti è pari alla somma delle resistenze dei rami resistivi presenti sul k-esimo anello;
    - Il termine k,i della matrice dei coefficienti è nullo o pari all'opposto della della resistenza comune all'anello k-esimo ed i-esimo;
    - Il termine k-esimo del vettore dei termini noti è pari alla somma delle tensioni impresse dai generatori di tensione presenti nell'anello k-esimo: ciascun addendo ha segno + o – a seconda che la corrente di anello sia o meno uscente dal morsetto positivo del generatore.
  - Risolto il sistema ho le correnti di anello da cui posso ricavarmi tutte le altre grandezze elettriche

Metodo degli anelli con generatori di corrente

Cosa succede se è presente uno o più generatori di corrente?

- Il generatore di corrente vincola la corrente su un ramo $\Rightarrow$ il generatore vincola una sola corrente di anello o al massimo due correnti di anello tra di loro $\Rightarrow$ riduce il numero di correnti incognite

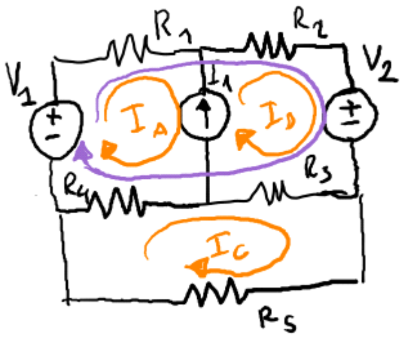
$\Rightarrow$ riduce il numero di KVL da scrivere per formare il sistema risolutivo

- Allo stesso tempo la tensione ai capi dei generatori di corrente è determinata dal resto del circuito

$\Rightarrow$ le tensioni dei generatori di corrente sono incognite aggiuntive

- il numero di incognite da risolvere rimane pertanto invariato ma in genere posso prima determinare le correnti di anello incognite (sistema risolutivo di dimensioni ridotte) e successivamente determinare le tensioni dei generatori di corrente utilizzando le KVL non scritte in precedenza.
- se è presente un solo generatore di corrente e coincide o si può far coincidere con una corrente di anello a meno del verso, scriveremo direttamente le equazioni dei restanti anelli, altrimenti è conveniente scrivere l'equazione del «superanello» che si ottiene dalla fusione degli anelli che condividono il generatore in cui eliminiamo il ramo del generatore → in questo caso bisogna però considerare entrambe le correnti di anello iniziali che circolano in parti diverse del superanello

Metodo dei superanelli



$I_1 = I_B - I_A \Rightarrow I_B = I_A + I_1$

I_1 vincola I_A e I_B => si può scrivere il sistema risolutivo scrivendo le KVL all'anello C e al superanello formato dalla fusione dei 2 anelli A+B

A+B : $I_A R_1 + I_B R_2 + (I_B - I_C) R_3 + (I_A - I_C) R_4 = V_1 - V_2$ con $I_B = I_A + I_1$

C : $(I_C - I_A) R_4 + (I_C - I_B) R_3 + I_C R_5 = 0$

$\Rightarrow$ A+B : $I_A (R_1 + R_2 + R_3 + R_4) - I_C (R_3 + R_4) = V_1 - V_2 - I_1 (R_2 + R_3)$

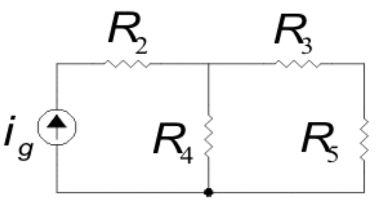
C : $I_C (R_3 + R_4 + R_5) - I_A (R_3 + R_4) = I_1 R_3$

In questo modo si determinano prima due correnti di anello indipendenti, poi le altre incognite. La tensione ai capi del generatore di corrente si trova facendo il bilancio delle tensioni su uno dei due anelli A o B

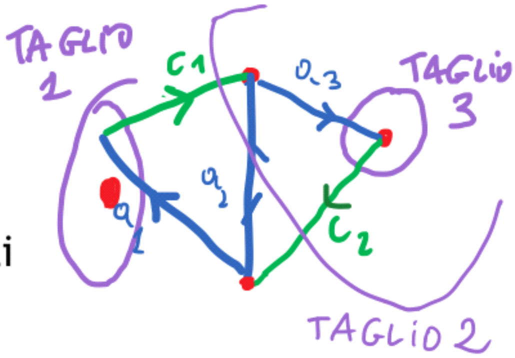
Approfondimento: Metodi di analisi

Metodo dei tagli fondamentali
(con soli generatori di corrente)

Approfondimento: Metodi di analisi



I° step: definisco il grafo e l'albero: 3 tagli fondamentali



II° step: scrivo le KCL per ogni taglio

KCL 1 : $-i_{a_1} + i_{c_1} = 0$

KCL 2 : $-i_{a_2} - i_{c_1} + i_{c_2} = 0$

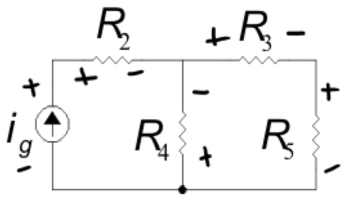
KCL 3 : $-i_{a_3} + i_{c_2} = 0$

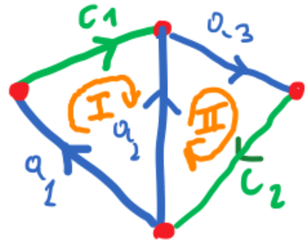
$$\begin{bmatrix} i_{a_1} \\ i_{a_2} \\ i_{a_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ +1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{c_1} \\ i_{c_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

III° step: esprimo le correnti tramite le relazioni costitutive

$i_{a_1} = i_g$; $i_{a_2} = V_{R_4} \cdot G_4$; $i_{a_3} = V_{R_3} \cdot G_3$; $i_{c_1} = V_{R_2} \cdot G_2$; $i_{c_2} = V_{R_5} \cdot G_5$

Approfondimento: Metodi di analisi





$$\left.\begin{aligned} & V_{R_2} \cdot G_2 = i_g \\ & -V_{R_4} G_4 - V_{R_2} G_2 + V_{R_5} G_5 - 0 \\ & -V_{R_3} G_3 + V_{R_5} G_5 = 0 \end{aligned}\right\}$$ 3 eq LINEARMENTE INDIPENDENTI

IV° step: esprimo le tensioni del coalbero tramite quelle dell'albero

KVL I $\quad V_{R_2} - V_{R_4} - V_{I_g} = 0 \Rightarrow V_{R_2} = V_{I_g} + V_{R_4}$

KVL II $\quad V_{R_5} + V_{R_4} + V_{R_3} = 0 \Rightarrow V_{R_5} = -V_{R_4} - V_{R_3}$

SISTEMA RISOLUTIVO $\hat{G}\vec{v} = \vec{i}$

$$\left.\begin{aligned} & (V_{I_g} + V_{R_4}) G_2 = i_g \\ & -V_{R_4} G_4 - (V_{I_g} + V_{R_4}) G_2 - (V_{R_4} + V_{R_3}) G_5 = 0 \\ & -V_{R_3} G_3 - (V_{R_4} + V_{R_3}) G_5 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} G_2 & G_2 & 0 \\ -G_2 & -(G_2+G_4+G_5) & -G_5 \\ 0 & -G_5 & -(G_3+G_5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{I_g} \\ V_{R_4} \\ V_{R_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Approfondimento: Metodi di analisi

Con il metodo dei tagli arrivo a scrivere un sistema risolutivo del tipo:

$$\left[\hat{G}\right]\begin{bmatrix} V_{a_1} \\ V_{a_2} \\ \vdots \\ V_{a_{N-1}} \end{bmatrix} = \left[\hat{I}_{GEN.}\right]$$

Le incognite sono le tensioni dei rami dell'albero e i termini noti sono le correnti dei generatori e la matrice dei coefficienti ha le dimensioni di una conduttanza per assicurare la omogeneità dimensionale.
Questo metodo vale per qualsiasi tipo di circuito lineare, anche non planare

DOMANDE:

1. è possibile semplificare il metodo e renderlo ancora più rapido?
2. è possibile analizzare anche circuiti con generatori di tensione?

$\Downarrow$

Metodo dei nodi

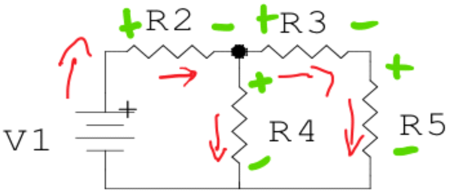
Approfondimento: Metodi di analisi

Metodo delle maglie fondamentali
(con soli generatori di tensione)

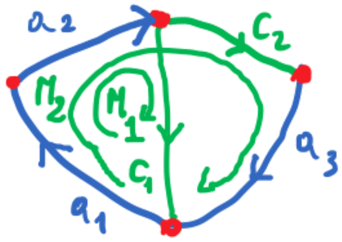
Approfondimento: Metodi di analisi

- Metodo di analisi base maglie:
  - Scegliere un albero sul grafo orientato ed individuare le R-N+1 maglie fondamentali;
  - Scrivere l'equilibrio delle tensioni alle maglie fondamentali;
  - Rami "resistivi" o: nel sistema di equilibrio esprimere le tensioni di ramo in funzione delle correnti di ramo tramite relazioni costitutive;
  - Esprimere, nel sistema di equilibrio, le correnti dei rami dell'albero come combinazione delle correnti sui rami del coalbero (tramite equazioni ai tagli fondamentali). IL SISTEMA E' COMPATIBILE: incognite correnti sui rami del co-albero
  - Risolvere, ricavando le incognite (correnti sui rami del co-albero); calcolare poi le altre correnti (tramite eq tagli fondamentali) e le tensioni di ramo (tramite relaz costitutive)

Approfondimento: Metodi di analisi



I° step: grafo, albero e coalbero e individuare le maglie fondamentali



II° step: Scrivere le equazioni delle maglie fondamentali

M1 $V_{a1} - V_{a2} = V_{c1}$

M2 $V_{a1} - V_{a2} - V_{a3} = V_{c2}$

III° step: Scrivere le equazioni costitutive

$$v_{a1} = +v_g; \; v_{a2} = R_2 i_{a2};$$

$$v_{a3} = R_5 i_{a3}; \; v_{c1} = R_4 i_{c1};$$

$$v_{c2} = R_3 i_{c2}$$

IV° step: riscrivere le eq. di maglia in termini delle correnti di ramo

$$v_g - R_2 i_{a2} = R_4 i_{c1}$$

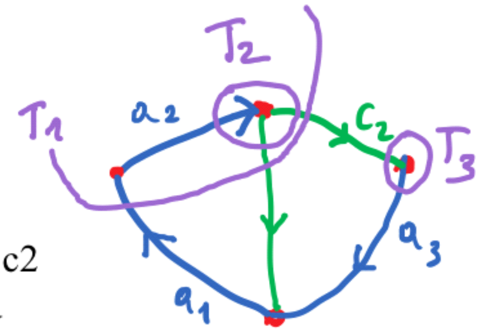
$$v_g - R_2 i_{a2} - R_5 i_{a3} = R_3 i_{c2}$$

2 equazioni per

4 incognite

Approfondimento: Metodi di analisi

V° step: sostituire le correnti dell'albero come combinazioni delle correnti del coalbero (Ricorda i_a-Ai_c=0) scrivendo le equazioni dei tagli fondamentali



$$i_{a1} = i_{c1} + i_{c2} ; i_{a2} = i_{c1} + i_{c2} ; i_{a3} = i_{c2}$$

$$R_4 i_{c1} + R_2 (i_{c1} + i_{c2}) = v_g$$

$$R_3 i_{c2} + R_2 (i_{c1} + i_{c2}) + R_5 i_{c2} = v_g$$

SISTEMA COMPATIBILE: 2 equazioni per 2 incognite (i_2, i_3)

- Il sistema risolvente cui si è pervenuti può interpretarsi come se esistessero delle correnti di maglia –circolanti nelle maglie fondamentali, di valore coincidente con le corrispondenti correnti dei rami del co-albero- ;
- Questa interpretazione consente un modo agevole di pervenire direttamente al sistema risolvente finale

Approfondimento: Metodi di analisi

- Metodo analisi base maglie –scrittura diretta sistema risolvente-:
  - Scegliere un albero sul grafo orientato, individuare le maglie fondamentali ed associarvi le corrispondenti correnti di maglia;
  - Scrivere il sistema di equilibrio delle tensioni alle maglie fondamentali –una equazione per ciascuna maglia fondam.-
    - Il termine k,k della matrice dei coefficienti è pari alla somma delle resistenze dei rami resistivi presenti sulla k-esima maglia fondamentale;
    - Il termine k,i della matrice dei coefficienti è pari alla somma delle resistenze dei rami resistivi comuni alle maglie k-esima ed i-esima; il segno di ciascun addendo è positivo se le correnti di maglia percorrono il ramo comune con versi concordi o discordi;
    - Il termine k-esimo del vettore dei termini noti è pari alla somma delle tensioni impresse dai generatori di tensione presenti nella maglia k-esima: ciascun addendo ha segno + o – a seconda che la corrente di maglia sia o meno uscente dal morsetto positivo del generatore.
  - Risolto il sistema ho le correnti di maglia –dei rami del co-albero -

Approfondimento: metodi di analisi e Linearità

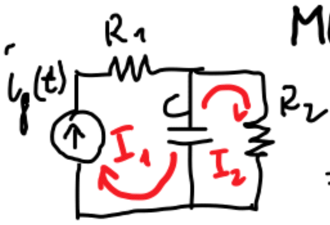
L'analisi di un circuito resistivo ha un sistema risolutivo algebrico del tipo:

$$\left[\hat{R}_{J,K}\right]\begin{bmatrix}I_1\\ I_2\\ \vdots\\ I_N\end{bmatrix} = \left[\alpha \vec{V}^{J}_{gen} + \beta(R\vec{I}^{J}_{gen})\right] \Rightarrow$$

$$\left[\hat{G}_{J,K}\right]\begin{bmatrix}e_1\\ \vdots\\ e_N\end{bmatrix} = \left[\alpha \vec{I}^{J}_{gen} + \beta(G\vec{V}^{J}_{gen})\right]$$

la linearità è evidente

L'analisi di un circuito con memoria ha un sistema risolutivo integro differenziale con solo termini lineari



METODO DEGLI ANELLI: KVL 1 $I_1(t) = i_g(t)$

KVL 2 $I_2(t)R_2 + V_C(t) = 0$ $\quad V_C = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}[I_2(\tau) - I_1(\tau)]\,d\tau$

$$\Rightarrow I_2(t)R_2 + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} I_2(\tau)\,d\tau = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_g(\tau)\,d\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{I}_2(t)R_2 + \frac{I_2(t)}{C} = \frac{i_g(t)}{C} \Rightarrow$$

SISTEMA LINEARE

44

Approfondimento: Teorema di Telleghen

Correnti rami ALB a partire da quelle del COALB

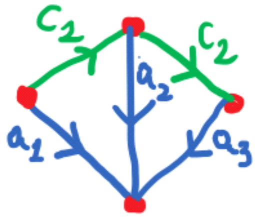
Equilibrio correnti ai tagli fondamentali

$$I_{A1} + I_{C1} = 0$$

$$I_{A2} - I_{C1} + I_{C2} = 0$$

$$I_{A3} - I_{C2} = 0$$

$$\begin{bmatrix} I_{A1} \\ I_{A2} \\ I_{A3} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{[A]} \begin{bmatrix} I_{C1} \\ I_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Tensioni sui rami COALB a partire da quelle dell' ALB

Equilibrio tensioni alle maglie fondamentali

$$V_{C1} - V_{A1} + V_{A2} = 0$$

$$V_{C2} - V_{A2} + V_{A3} = 0$$

$$\begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{[B]} \begin{bmatrix} V_{A1} \\ V_{A2} \\ V_{A3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[B] = -[A]^t$$

Approfondimento: Teorema di Telleghen

- Ordiniamo i vettori di tensioni e correnti, distinguendo quelle di albero e coalbero

$$[I]=\begin{bmatrix} I_A \\ I_C \end{bmatrix};\quad [V]=\begin{bmatrix} V_A \\ V_C \end{bmatrix}$$

$$[I_A]+[A][I_C]=[0];\quad [V_C]+[B][V_A]=[0]$$

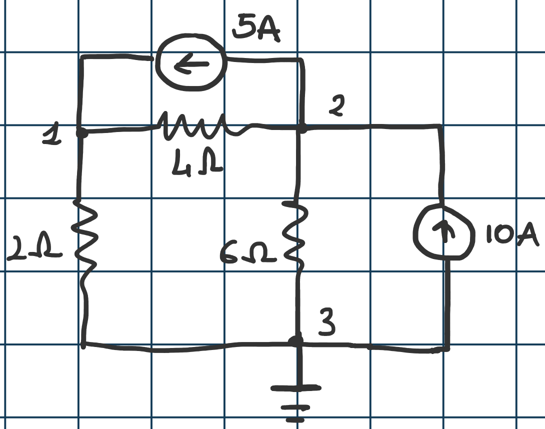
- Effettuiamo il prodotto scalare fra tali vettori

$$[I]^t[V]=[I_A]^t[V_A]+[I_C]^t[V_C]=\left(-[I_C]^t[A]^t\right)[V_A]-[I_C]^t([B][V_A])=$$

$$=[I_C]^t[B][V_A]-[I_C]^t[B][V_A]=0$$

Sono ortogonali
i vettori delle tensioni di ramo e delle relative correnti

Esercizio i



① $-5+(e_1-e_2)\frac{1}{4}+\frac{e_1}{2}=0$

② $5+(e_2-e_1)\frac{1}{4}+\frac{e_2}{6}-10=0$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{4}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}+\frac{1}{6} \end{bmatrix}}_{\hat{G}} \underbrace{\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}}_{\vec{e}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}}_{\vec{I}} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{12} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\hat{G}\,\vec{e}=\vec{I}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \end{bmatrix}$$

$$\stackrel{\circ}{=} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\vec{e} = \hat{G}^{-1} \vec{I} = \frac{\begin{bmatrix} 5/3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}{3 \cdot \frac{5}{3} - 1 \cdot 1} \cdot \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25/3 + 5 \\ 20 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 40/3 = 13,\bar{3} \\ 20 \end{bmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \end{matrix}$$

Circuiti del primo ordine

lunedì 7 giugno 2021 13:04

Circuiti del I° ordine

Corso di Elettrotecnica
A.A. 2020-2021

Marco Ricci, Stefano Laureti

1

Circuiti del primo ordine

Un **circuito del primo ordine** è caratterizzato da un'equazione differenziale del primo ordine.

I circuiti elettrici del primo ordine sono di due tipi: RC o RL.

L'eccitazione può essere di due tipi:

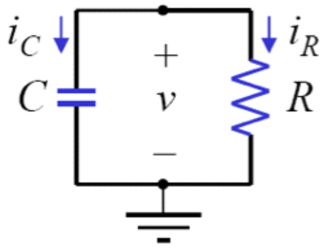
- autonoma: il circuito non comprende generatori indipendenti ed evolve nel tempo grazie all'energia immagazzinata nel condensatore (RC) o nell'induttore (RL);
- forzata: il circuito comprende generatori indipendenti che ne determinano il comportamento nel tempo.

2

La risposta naturale di un circuito RC

La **risposta naturale** rappresenta il comportamento intrinseco di un circuito, senza l'intervento di sorgenti esterne di eccitazione.

$$i_C + i_R = 0$$



$$C \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = 0 \Rightarrow v(t) = A\mathrm{e}^{-t/RC} \Leftarrow v(0) = V_0$$

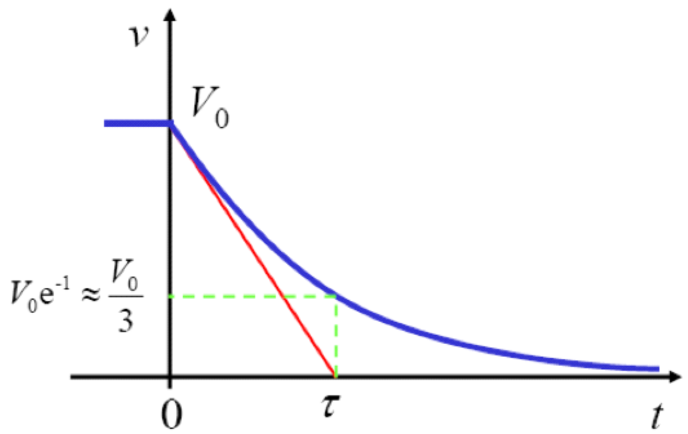
$$\boxed{v(t) = V_0 \mathrm{e}^{-t/RC}}$$

3

La risposta naturale di un circuito RC

$$v(t) = V_o e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\tau = RC$$

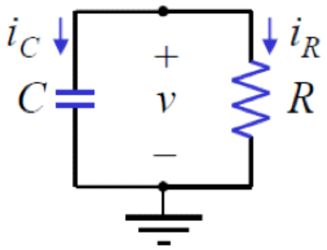


La **costante di tempo** τ di un circuito è il tempo richiesto affinché la risposta decada di un fattore 1/e o 36.8% del suo valore iniziale.

4

La risposta naturale di un circuito RC

$$v(t) = V_o e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow i_R(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V_o}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$



Potenza dissipata nel resistore:

$$p(t) = v i_R = \frac{V_o^2}{R} e^{-\frac{2t}{\tau}}$$

Energia assorbita dal resistore fino all'istante *t*:

$$w(t) = \int_0^t p\,dt = \int_0^t \frac{V_o^2}{R} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = -\frac{\tau V_o^2}{2R}\left[e^{-\frac{2t}{\tau}}\right]_0^t = \frac{1}{2} C V_o^2 \left(1 - e^{-2t/\tau}\right)$$

$$w_R(\infty) = \frac{1}{2} C V_o^2 = w(0)$$

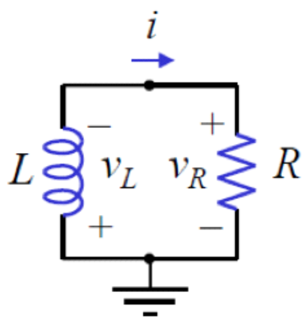
Dopo un tempo sufficientemente lungo ($t \gg \tau$) il resistore ha assorbito tutta l'energia immagazzinata nel condensatore all'istante iniziale ($t = 0$).

5

La risposta naturale di un circuito RL

Applicando la KVL alla maglia di figura, si ottiene:

$$v_L + v_R = 0$$



$$L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i = 0$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0 \quad \Rightarrow \quad i(t) = A\mathrm{e}^{-Rt/L} \quad \Leftarrow \quad i(0) = I_0$$

$$\Downarrow$$

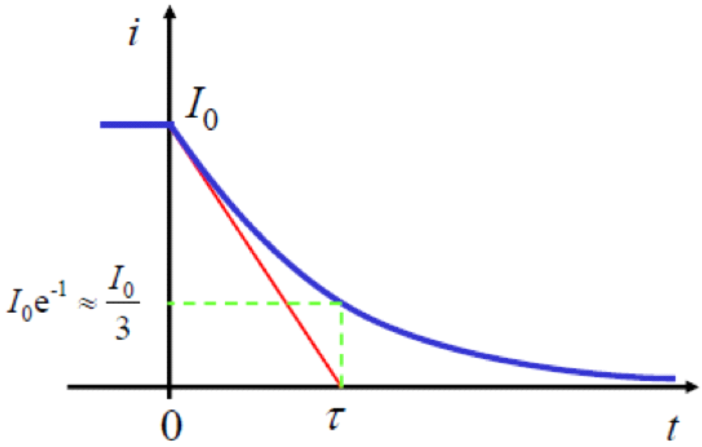
$$\boxed{i(t) = I_0 \mathrm{e}^{-Rt/L}}$$

6

La risposta naturale di un circuito RL

$$i(t) = I_o e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$

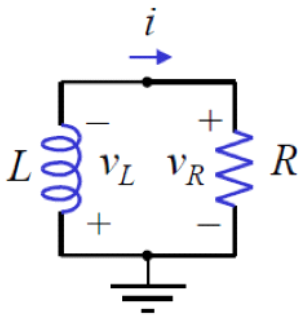


La **costante di tempo** τ di un circuito è il tempo richiesto affinché la risposta decada di un fattore 1/e o 36.8% del suo valore iniziale.

7

La risposta naturale di un circuito RL

$$i(t) = I_o e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow v_R(t) = i(t)R = I_o R e^{-\frac{t}{\tau}}$$



Potenza dissipata nel resistore:

$$p(t) = v i_R = R I_o^2 e^{-\frac{2t}{\tau}}$$

Energia assorbita dal resistore fino all'istante *t*:

$$w(t) = \int_0^t p dt = \int_0^t R I_o^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = -\frac{\tau R I_o^2}{2}\left[e^{-\frac{2t}{\tau}} \right]_0^t = \frac{1}{2} L I_o^2 \left(1 - e^{-2t/\tau} \right)$$

$$w_R(\infty) = \frac{1}{2} L I_o^2 = w(0)$$

Dopo un tempo sufficientemente lungo (t $\gg \tau$) il resistore ha assorbito tutta l'energia immagazzinata nell'induttore all'istante iniziale (t = 0).

La risposta naturale di un circuito del primo ordine

Il calcolo della risposta naturale di un circuito RC (RL) autonomo richiede:

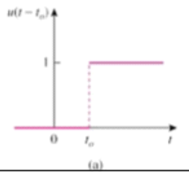
- la conoscenza o il calcolo della tensione (corrente) sul condensatore(induttore) all'istante iniziale V_0 (I_0);
- il calcolo della resistenza equivalente R posta in parallelo al condensatore (induttore) per il calcolo della costante di tempo τ=RC (τ=L/R).

La funzione gradino unitario

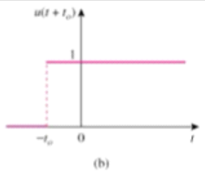
La **funzione a gradino unitario** è una funzione discontinua.
Essa viene utilizzata per rappresentare variazioni molto rapide di tensione o corrente.

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

$$u(t - t_o) = \begin{cases} 0, & t < t_o \\ 1, & t > t_o \end{cases}$$



$$u(t + t_o) = \begin{cases} 0, & t < -t_o \\ 1, & t > -t_o \end{cases}$$



La funzione gradino unitario

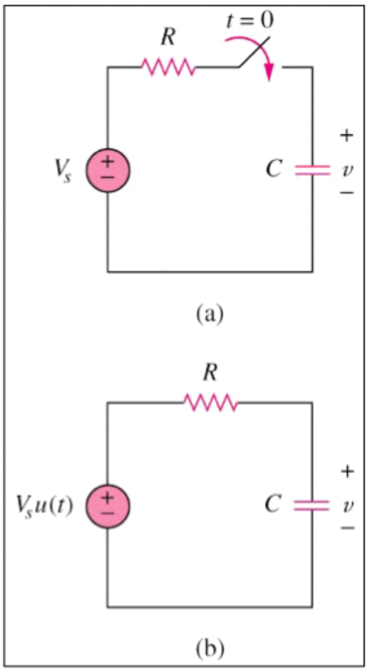
Generatore di
tensione

Generatore di
corrente

11

Risposta al gradino di un circuito *RC*

La **risposta a gradino** di un circuito è il suo comportamento quando l'eccitazione è una funzione a gradino, che può essere una tensione o una corrente.



- **Condizione iniziale**:

  $v(0-) = v(0+) = V_0$

- Applicando KCL,

$$c\frac{dv}{dt}+\frac{v-V_s u(t)}{R}=0$$

oppure

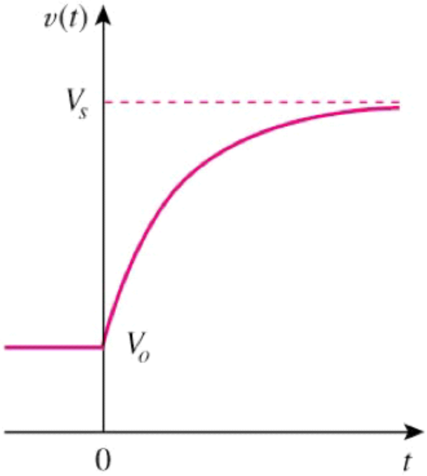
$$\frac{dv}{dt}=-\frac{v-V_s}{RC}u(t)$$

dove u(t) è la funzione a gradino unitario

12

Risposta al gradino di un circuito *RC*

Integrando ambo i membri e considerando le condizioni iniziali, la soluzione dell'equazione è:



$$v(t) = \begin{cases} V_0 & t < 0 \\ V_s + (V_0 - V_s)e^{-t/\tau} & t > 0 \end{cases}$$

Valore finale a t -> ∞

Valore iniziale a t = 0

Risposta completa

Risposta completa = Risposta naturale (energia immagazzinata) + Risposta forzata (sorgente indipendente)

$V_0 e^{-t/\tau}$ $\qquad$ $V_s(1-e^{-t/\tau})$

13

Risposta al gradino di un circuito *RC*

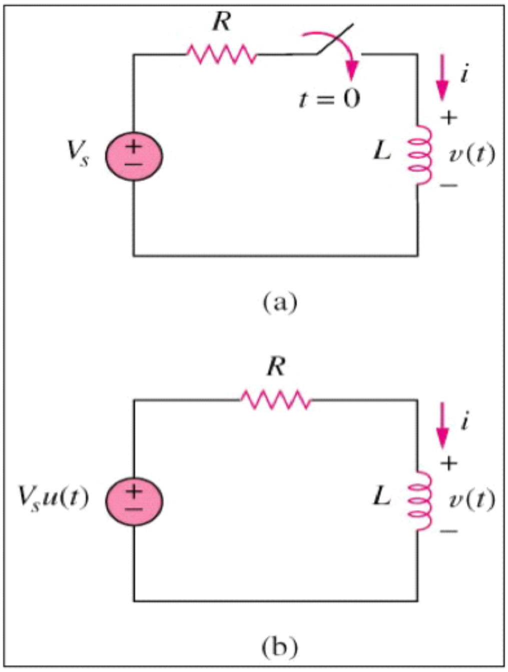
Sono necessari tre step per trovare la risposta al gradino di un **circuito RC**:

1. La **tensione iniziale** del condensatore v(0).
2. La **tensione finale** del condensatore v(∞) — la tensione DC attraverso il condensatore.
3. La **costante di tempo** τ.

$$v(t) = v(\infty) + [v(0+) - v(\infty)]\, e^{-t/\tau}$$

14

Risposta al gradino di un circuito *RL*



- **Corrente iniziale**
  $i(0-) = i(0+) = I_o$
- **Corrente finale attraverso l'induttore**
  $i(\infty) = Vs/R$
- **Costante di tempo** $\tau = L/R$

$$\boxed{i(t) = \frac{V_s}{R} + (I_o - \frac{V_s}{R})e^{-\frac{t}{\tau}}u(t)}$$

15

Risposta al gradino di un circuito *RL*

Sono necessari tre step per trovare la risposta al gradino di un **circuito RL**:

1. La **corrente iniziale** nell'induttore i(0) a t = 0+.
2. La **corrente finale** nell'induttore i(∞).
3. La **costante di tempo** τ.

$$i(t) = i(\infty) + [i(0+) - i(\infty)]\, e^{-t/\tau}$$

16

Sinusoidi e fasori

lunedì 7 giugno 2021 13:04

Introduzione al regime sinusoidale

Una sinusoide è un segnale che ha la forma della funzione seno o coseno.

Una corrente (tensione) sinusoidale è anche detta corrente (tensione) alternata (o ac dall'inglese alternate current che si contrappone a dc direct current).

La distribuzione dell'energia elettrica avviene utilizzando tensioni e correnti che variano con legge sinusoidale.

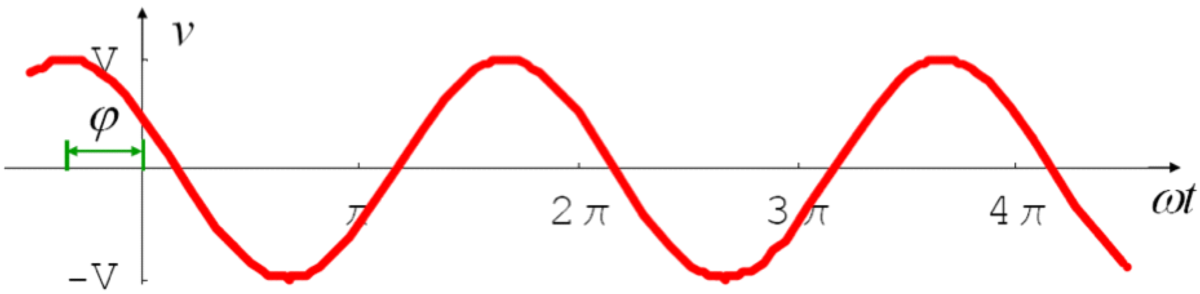
Grazie all'analisi di Fourier, qualunque segnale variabile nel tempo può essere scomposto in una somma di contributi sinusoidali (serie di Fourier o integrale di Fourier).

2

Segnali sinusoidali

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi)$$

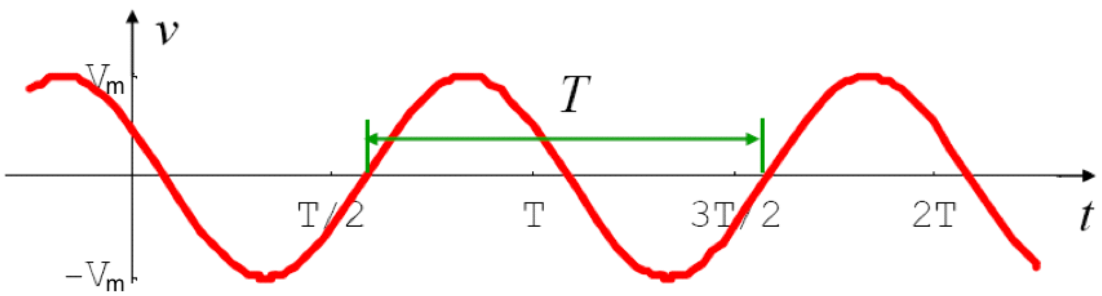
V_m ampiezza della sinusoide
ω frequenza angolare o pulsazione (rad/s)
ωt argomento della sinusoide
φ fase della sinusoide



3

Segnali sinusoidali

Il periodo $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ è il tempo impiegato per compiere un ciclo



La frequenza $f = \dfrac{1}{T}$ è il numero di cicli per secondo e si misura in Hertz (1 Hz=1s^{-1}). Si ha $\omega = 2\pi f$.

4

Numeri complessi

Unità immaginaria: $j^2 = -1$

$z = x + jy$ forma rettangolare o cartesiana

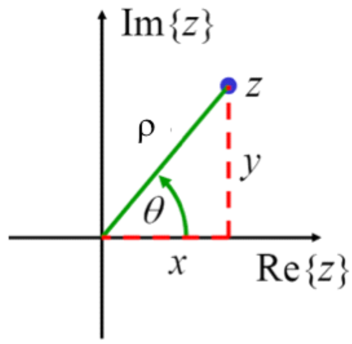
$z = \rho e^{j\theta}$ forma esponenziale

$z = \rho\angle\theta$ forma polare

x	parte reale di z
y	parte immaginaria di z
ρ	modulo di z
θ	argomento di z

$$x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ \theta = arctg\left(y / x\right)$$



5

Numeri complessi

$$z_1 = x_1 + jy_1,\ z_2 = x_2 + jy_2$$

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + j(y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + j(y_1 - y_2)$$

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$z_1 / z_2 = \rho_1 / \rho_2 e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

6

Fasori

Un **fasore** è un numero complesso che rappresenta l'ampiezza e la fase della sinusoide.

Poiché $e^{\pm j\varphi} = \cos\varphi \pm j\sin\varphi$ (identità di Eulero) si ha:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi) = V_m \operatorname{Re}\left\{e^{j(\omega t + \varphi)}\right\} = \operatorname{Re}\left\{V_m e^{j\omega t} e^{j\varphi}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\mathbf{V} e^{j\omega t}\right\}$$

Il numero complesso $\mathbf{V} = V e^{j\varphi}$ rappresenta il fasore che corrisponde alla funzione v(t) alla pulsazione ω ed è indipendente dal tempo t.

funzione	fasore
$v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi)$	$\mathbf{V} = V_m e^{j\varphi}$ $\lvert\mathbf{V}\rvert = V_m$ $\arg\{\mathbf{V}\} = \varphi$

7

Proprietà dei fasori: linearità

Funzione	Fasore
$v_1(t)=V_{m1}\cos\left(\omega t+\varphi_1\right)$ $v_2(t)=V_{m2}\cos\left(\omega t+\varphi_2\right)$ $v(t)=a_1\cdot v_1(t)+a_2\cdot v_2(t)$ $a_1\ e\ a_2\ costanti\ reali$	$\mathbf{V}_1=V_{m1}e^{j\varphi_1}$ $\mathbf{V}_2=V_{m2}e^{j\varphi_2}$ $\mathbf{V}=a_1\cdot\mathbf{V}_1+a_2\cdot\mathbf{V}_2$

Dimostrazione

$$v(t)=a_1\cdot v_1\left(t\right)+a_2\cdot v_2\left(t\right)=a_1\cdot V_{m1}\cos\left(\omega t+\varphi_1\right)+a_2\cdot V_{m2}\cos\left(\omega t+\varphi_2\right)=$$

$$=\mathrm{Re}\left\{a_1\cdot V_{m1}e^{j\varphi_1}e^{j\omega t}\right\}+\mathrm{Re}\left\{a_2\cdot V_{m2}e^{j\varphi_2}e^{j\omega t}\right\}$$

$$=\mathrm{Re}\left\{\left(a_1\cdot V_{m1}e^{j\varphi_1}+a_2\cdot V_{m2}e^{j\varphi_2}\right)e^{j\omega t}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\left(a_1\cdot\mathbf{V}_1+a_2\cdot\mathbf{V}_2\right)e^{j\omega t}\right\}$$

8

Proprietà dei fasori: derivazione

Funzione	Fasore
$v_1(t) = V_{m1}\cos(\omega t + \varphi_1)$	$\mathbf{V}_1 = V_{m1}e^{j\varphi_1}$
$v(t) = \dfrac{dv_1(t)}{dt}$	$\mathbf{V} = j\omega\mathbf{V}_1$

Dimostrazione

$$v(t) = \frac{dv_1(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(V_{m1}\cos(\omega t + \varphi_1)\right) = \frac{d}{dt}\mathrm{Re}\left\{V_{m1}e^{j\varphi_1}e^{j\omega t}\right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\frac{d}{dt}\left(V_{m1}e^{j\varphi_1}e^{j\omega t}\right)\right\} = \mathrm{Re}\left\{j\omega V_{m1}e^{j\varphi_1}e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{j\omega\mathbf{V}_1e^{j\omega t}\right\}$$

9

Proprietà dei fasori: integrazione

Funzione	Fasore
$v_1(t) = V_{m1}\cos(\omega t + \varphi_1)$	$\mathbf{V}_1 = V_{m1}e^{j\varphi_1}$
$v(t) = \int v_1(t)dt$	$\mathbf{V} = \dfrac{\mathbf{V}_1}{j\omega}$

Dimostrazione

$$v(t) = \int v_1(t)\,dt = \int V_{m1}\cos(\omega t + \varphi_1) = \mathrm{Re}\left(\left\{V_{m1}e^{j\varphi_1}e^{j\omega t}\right\}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\frac{d}{dt}\left(V_{m1}e^{j\varphi_1}e^{j\omega t}\right)\right\} = \mathrm{Re}\left\{j\omega V_{m1}e^{j\varphi_1}e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\int\left\{j\omega\mathbf{V_1}e^{j\omega t}\right\}$$

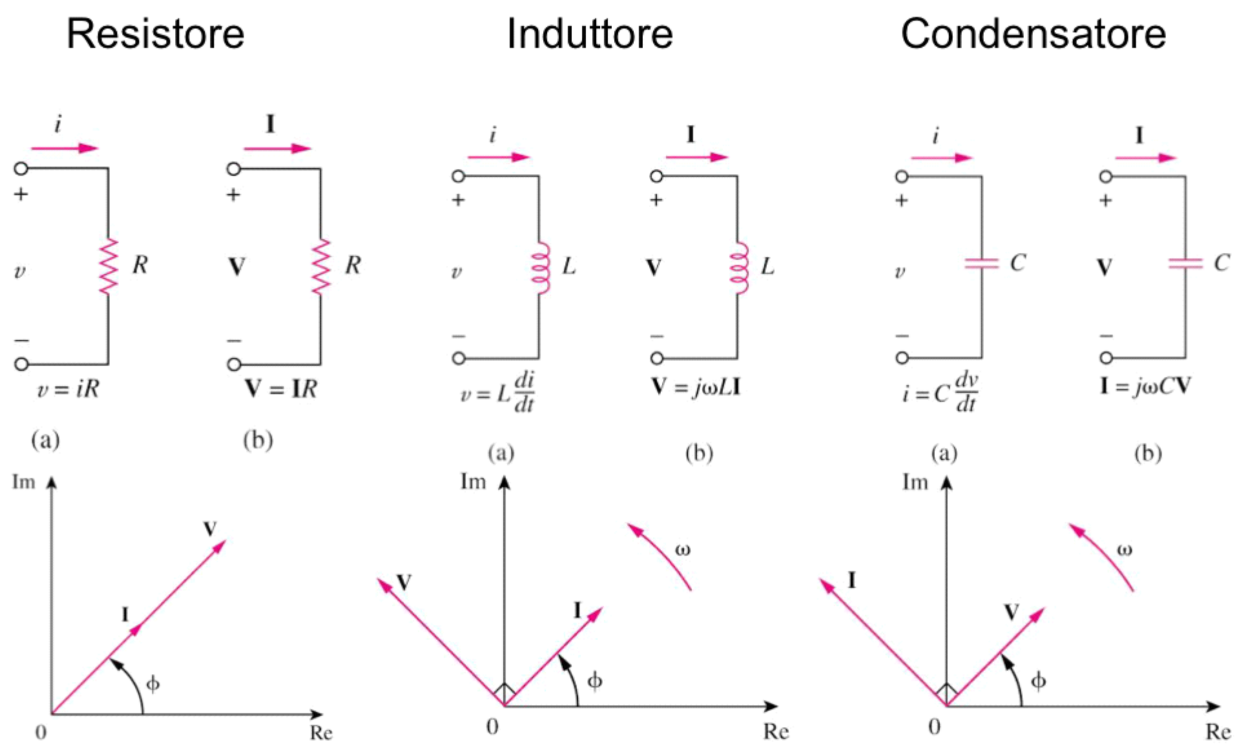
Quando è possibile usare i fasori?

Un circuito può essere analizzato nel dominio dei fasori quando tutti i segnali (tensioni e correnti) sono sinusoidi alla stessa pulsazione ω

Tutti i generatori indipendenti funzionano alla pulsazione ω e il circuito include solo elementi lineari

11

Relazione tra fasori di tensione e di corrente



12

Relazione tra fasori di tensione e di corrente

Sommario delle relazioni corrente-tensione		
Elemento	Dominio del tempo	Dominio della frequenza
R	$v = Ri$	$V = RI$
L	$v = L\dfrac{di}{dt}$	$V = j\omega LI$
C	$i = C\dfrac{dv}{dt}$	$V = \dfrac{I}{j\omega C}$

13

Impedenza

L'**impedenza Z** di un circuito è il rapporto tra il fasore della tensione V e il fasore della corrente I, misurata in Ohm Ω

$$Z = \frac{V}{I} = R + jX$$

$$R = \mathrm{Re}\{Z\} \quad \textit{resistenza}$$
$$X = \mathrm{Im}\{Z\} \quad \textit{reattanza}$$

X positivo per L e negativo per C

$$|\mathbf{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\theta_Z = arctg\left(\frac{X}{R}\right)$$

14

Ammettenza

L'**ammettenza Y** è il reciproco dell'impedenza e si misura in Siemens (S)

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{I}{V} = G + jB$$

$$G = \mathrm{Re}\{Y\} \quad conduttanza$$
$$B = \mathrm{Im}\{Y\} \quad suscettanza$$

$$|\mathbf{Y}| = \sqrt{G^2 + B^2} = \frac{1}{|\mathbf{Z}|}$$

$$\theta_Y = arctg\left(\frac{B}{G}\right) = -\theta_Z$$

15

Impedenza e ammettenza per R, L, C

Impedenze e ammettenze di elementi passivi		
Elemento	**Impedenza**	**Ammettenza**
R	$Z = R$	$Y = \frac{1}{R}$
L	$Z = j\omega L$	$Y = \frac{1}{j\omega L}$
C	$Z = \frac{1}{j\omega C}$	$Y = j\omega C$

16

Analisi in regime sinusoidale

Analisi in regime sinusoidale

Se tutti i generatori indipendenti funzionano alla stessa frequenza e il circuito comprende solo elementi lineari, si può vedere che:

1. A regime, esauriti i transitori, tutte le grandezze elettriche (tensioni e correnti) sono sinusoidali della stessa frequenza, caratterizzate completamente quindi da ampiezza e fase
2. Si introduce quindi per ogni grandezza elettrica un numero complesso, chiamato fasore, che contiene l'informazione su ampiezza e fase
3. → i generatori (dipendenti) vengono perciò rappresentati come vincoli sui fasori di tensione e corrente di un determinato ramo.
4. → gli elementi passivi sono caratterizzati completamente dai fasori delle proprie grandezze, in particolare le relazioni costitutive degli elementi possono essere scritte attraverso l'impedenza o l'ammettenza del componente

Analisi in regime sinusoidale

Metodo dei fasori: analisi del circuito simbolico nel dominio dei fasori

1. Si ottiene un circuito simbolico che può essere risolto con tecniche standard dato che la KCL e la KVL valgono anche per questo circuito simbolico, che si comporta come un circuito resistivo dove generatori e «resistenze» hanno valori complessi.
2. In questo circuito valgono le stesse regole, teoremi, proprietà e metodi di analisi visti per i circuiti resistivi
3. Una volta risolto il circuito nel dominio dei fasori, si passa dai fasori alle funzioni nel dominio del tempo ritrovando le vere grandezze fisiche

19

Analisi in regime sinusoidale

Si consideri un circuito lineare con generatori indipendenti sinusoidali che lavorano a frequenze diverse.

Le impedenze/ammettenze dipendono dalla frequenza e quindi si ha un circuito diverso per ogni frequenza.

Il circuito lineare può essere analizzato applicando il principio di sovrapposizione degli effetti: si calcolano separatamente le risposte ad ogni generatore e si sommano nel dominio del tempo.

Potenza in regime sinusoidale

lunedì 7 giugno 2021 13:05

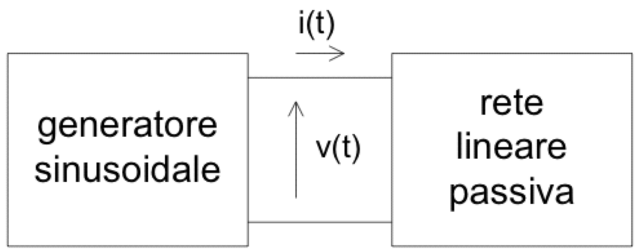
Potenza in regime permanente sinusoidale

Elettrotecnica
A.A. 2020-2021

Marco Ricci, Stefano Laureti

1

Potenza istantanea



$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v)$$
$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$$

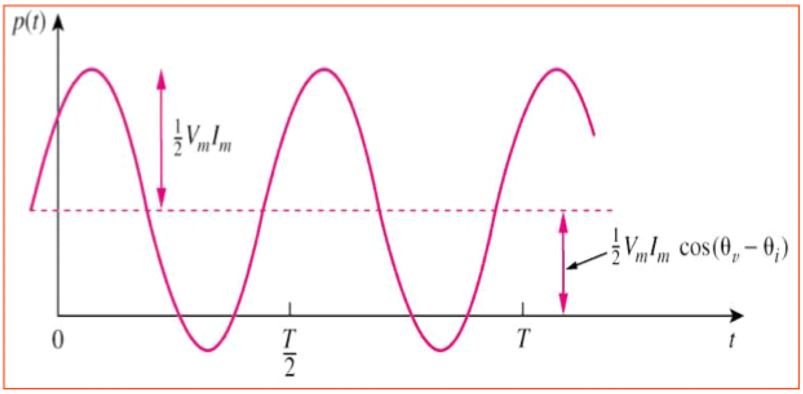
La **potenza istantanea** è

$$p(t) = V_m I_m \cos(\omega t + \theta_v)\cos(\omega t + \theta_i) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)$$

2

Potenza istantanea

$$p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)$$



La potenza istantanea è periodica con periodo T/2

3

Potenza media

La **potenza media** è

$$P \equiv \frac{1}{T}\int_T p(t)dt = \frac{1}{T}\int_T \frac{1}{2}V_m I_m \cos\left(\theta_v - \theta_i\right) + \frac{1}{2}V_m I_m \cos\left(2\omega t + \theta_v + \theta_i\right)dt$$

$$\boxed{\begin{array}{l} P = \frac{1}{2}V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) = \cos(\Phi) \\ \text{con } \Phi = \theta_v - \theta_i \end{array}}$$

Carico resistivo (R)

$$\theta_v = \theta_i \Rightarrow P = \frac{1}{2}V_m I_m = \frac{V_m^2}{2R} = \frac{1}{2}RI_m^2$$

Carico reattivo (L e C)

$$\theta_v = \theta_i \pm 90^o \Rightarrow P = 0$$

4

Potenza media

Considerando i fasori di tensione e corrente

$$\frac{1}{2}\mathrm{VI}^* = \frac{1}{2}V_m I_m\left(\cos\left(\theta_v - \theta_i\right) + j\sin\left(\theta_v - \theta_i\right)\right)$$

la potenza media risulta pari a

$$\boxed{P = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}\mathrm{VI}^*\right\}}$$

5

Valori efficaci

Il **valore efficace** di una tensione (corrente) periodica è la tensione (corrente) costante in grado di fornire ad un resistore la stessa potenza media della tensione (corrente) periodica.

$$P = \frac{1}{T}\int_T Ri^2 dt = RI_{eff}^2 \Rightarrow I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_T i^2 dt} = I_{rms}$$

$$P = \frac{1}{T}\int_T \frac{v^2}{R} dt = \frac{V_{eff}^2}{R} \Rightarrow V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_T v^2 dt} = V_{rms}$$

Il valore efficace di una tensione (corrente) periodica coincide con la radice quadrata del suo valor quadratico medio (root mean square, rms).

6

Potenza media e valori efficaci

Considerando segnali sinusoidali per un resistore

$$P = \frac{1}{2} R I_m^2 = R I_{eff}^2 \Rightarrow \boxed{I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}}$$

$$P = \frac{V_m^2}{2R} = \frac{V_{eff}^2}{R} \Rightarrow \boxed{V_{eff} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}}$$

7

Potenza media e valori efficaci

La potenza media può essere espressa in termini di valori efficaci

$$P = \frac{1}{2} V_m \cdot I_m \cos(\theta_v - \theta_i)$$

$$= \frac{V_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cos(\theta_v - \theta_i)$$

$$= V_{eff} \cdot I_{eff} \cos(\theta_v - \theta_i)$$

8

Potenza apparente e fattore di potenza

$$P = V_{eff} \cdot I_{eff} \cos(\theta_v - \theta_i) = S \cos(\theta_v - \theta_i)$$

$S = V_{eff} \cdot I_{eff}$ è detta **potenza apparente** e si misura in VA (voltampere).

$pf = \frac{P}{S} = \cos(\theta_v - \theta_i) = \cos(\Phi)$ è il **fattore di potenza**

Il **fattore di potenza** rappresenta il coseno dello sfasamento tra la tensione e la corrente. Esso rappresenta anche il coseno dell'argomento dell'impedenza.

Carico resistivo: $\Rightarrow \theta_v - \theta_i = 0 \Rightarrow pf = 1$

Carico reattivo: $\Rightarrow \theta_v - \theta_i = \pm 90^o \Rightarrow pf = 0$

9

Fasori efficaci

Definendo i fasori efficaci:

$$\mathbf{V}_{eff} = \frac{\mathbf{V}_m}{\sqrt{2}} = V_{eff}\angle\theta_v \qquad \mathbf{I}_{eff} = \frac{\mathbf{I}_m}{\sqrt{2}} = I_{eff}\angle\theta_i$$

Si ha:

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{\mathbf{V}_{eff}}{\mathbf{I}_{eff}} = \frac{V_{eff}}{I_{eff}}\angle(\theta_v - \theta_i)$$

10

Potenza complessa

La **potenza complessa** è

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathbf{V}\cdot\mathbf{I}^* = \frac{1}{2}V_m \cdot I_m\left(\cos\left(\theta_v - \theta_i\right) + j\sin\left(\theta_v - \theta_i\right)\right)$$

$$= \mathbf{V}_{eff}\cdot\mathbf{I}_{eff}^* = V_{eff}\cdot I_{eff}\left(\cos\left(\theta_v - \theta_i\right) + j\sin\left(\theta_v - \theta_i\right)\right)$$

Poiché $\mathbf{V} = \mathbf{Z}\cdot\mathbf{I}$ e $\mathbf{V}_{eff} = \mathbf{Z}\cdot\mathbf{I}_{eff}$ si ha:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathbf{Z}\cdot|\mathbf{I}|^2 = \mathbf{Z}\cdot\left|\mathbf{I}_{eff}\right|^2 = \frac{1}{2}\frac{|\mathbf{V}|^2}{\mathbf{Z}^*} = \frac{\left|\mathbf{V}_{eff}\right|^2}{\mathbf{Z}^*}$$

Potenza complessa

Poiché $\mathbf{Z} = R + jX$ si ha:

$$\mathbf{S} = (R + jX) \cdot \left| \mathbf{I}_{eff} \right|^2 = P + jQ$$

Vale anche:

$$\Rightarrow \mathbf{S} = V_{eff} \cdot I_{eff} \left(\cos\ (\theta_v - \theta_i) + j\ \sin\ (\theta_v - \theta_i) \right)$$

e quindi:

$$P = V_{eff} \cdot I_{eff} \cos\ (\theta_v - \theta_i)$$ **potenza reale o attiva**

$$Q = V_{eff} \cdot I_{eff} \sin\ (\theta_v - \theta_i)$$ **potenza reattiva**

12

Potenza complessa

$P = V_{eff} \cdot I_{eff} \cos\,(\theta_v - \theta_i)$ è la potenza media fornita al carico. Questa è l'unica potenza utile ed è anche la potenza che il carico realmente dissipa.

Si misura in *Watt* (W).

$Q = V_{eff} \cdot I_{eff} \sin\,(\theta_v - \theta_i)$ misura lo scambio di energia tra il generatore e la parte reattiva del carico.

Si misura in *volt-ampere reattivi* (VAR).

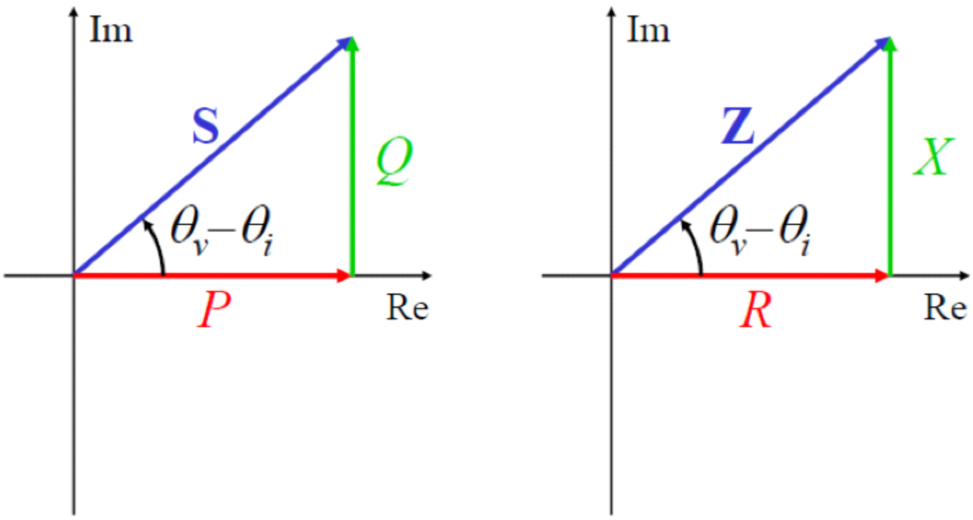
Q=0	per carichi resistivi	$(\theta_v = \theta_i)$
Q>0	per carichi induttivi	$(\theta_v > \theta_i)$
Q<0	per carichi capacitivi	$(\theta_v < \theta_i)$

13

Potenza complessa

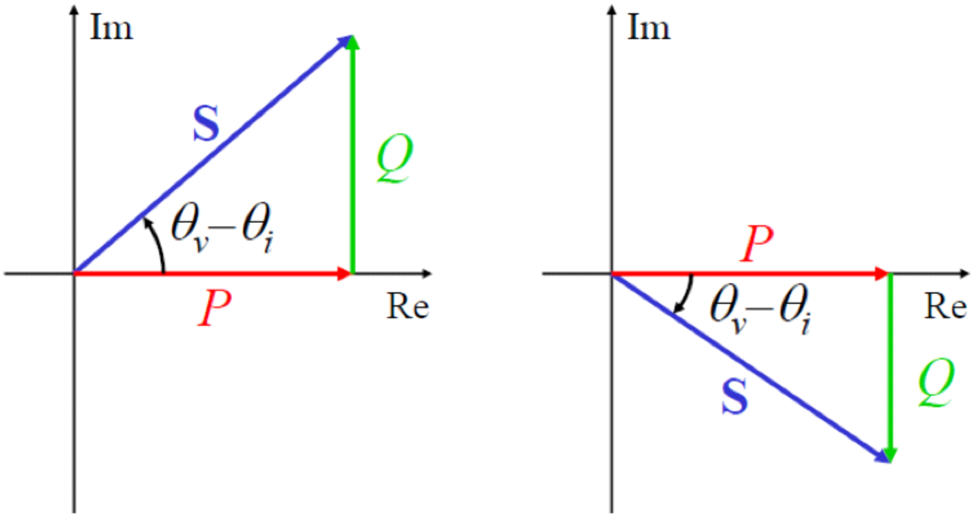
$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathbf{V}\cdot\mathbf{I}^* = P + jQ = V_{eff}I_{eff}\angle(\theta_v - \theta_i)$	**potenza complessa**	**VA**
$S = \lvert\mathbf{S}\rvert = V_{eff}I_{eff} = \sqrt{P^2 + Q^2}$	**potenza apparente**	**VA**
$P = \mathrm{Re}\{\mathbf{S}\} = S\cos(\theta_v - \theta_i)$	**potenza reale o attiva**	**W**
$Q = \mathrm{Im}\{\mathbf{S}\} = S\sin(\theta_v - \theta_i)$	**potenza reattiva**	**VAR**
$\frac{P}{S} = \cos(\theta_v - \theta_i)$	**fattore di potenza**	***adim***

Triangolo delle potenze



15

Triangolo delle potenze



Carico induttivo $Q > 0$

Carico capacitivo $Q < 0$

16

Conservazione della potenza complessa

In un circuito, la potenza complessa, la potenza reale e la potenza reattiva si conservano

Se il circuito include *N* elementi, con la convenzione dell'utilizzatore si ha:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N} \mathbf{S}_n = 0} \qquad \boxed{\sum_{n=1}^{N} P_n = 0} \qquad \boxed{\sum_{n=1}^{N} Q_n = 0}$$

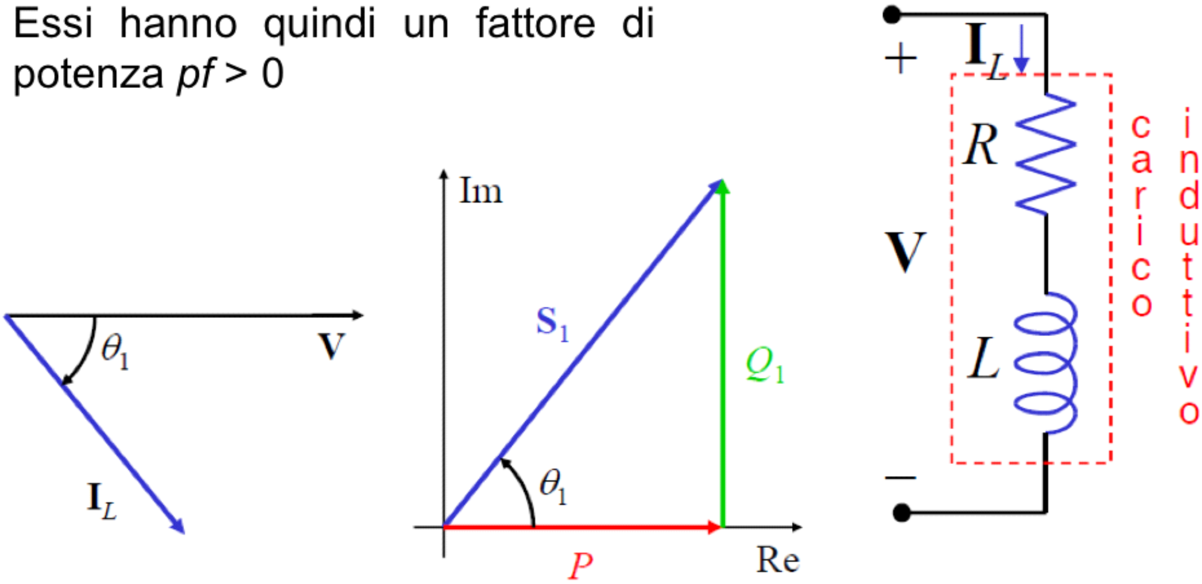
In generale, la legge di conservazione non vale per le potenze apparenti

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N} S_n = \sum_{n=1}^{N} |\mathbf{S}_n| \neq 0}$$

17

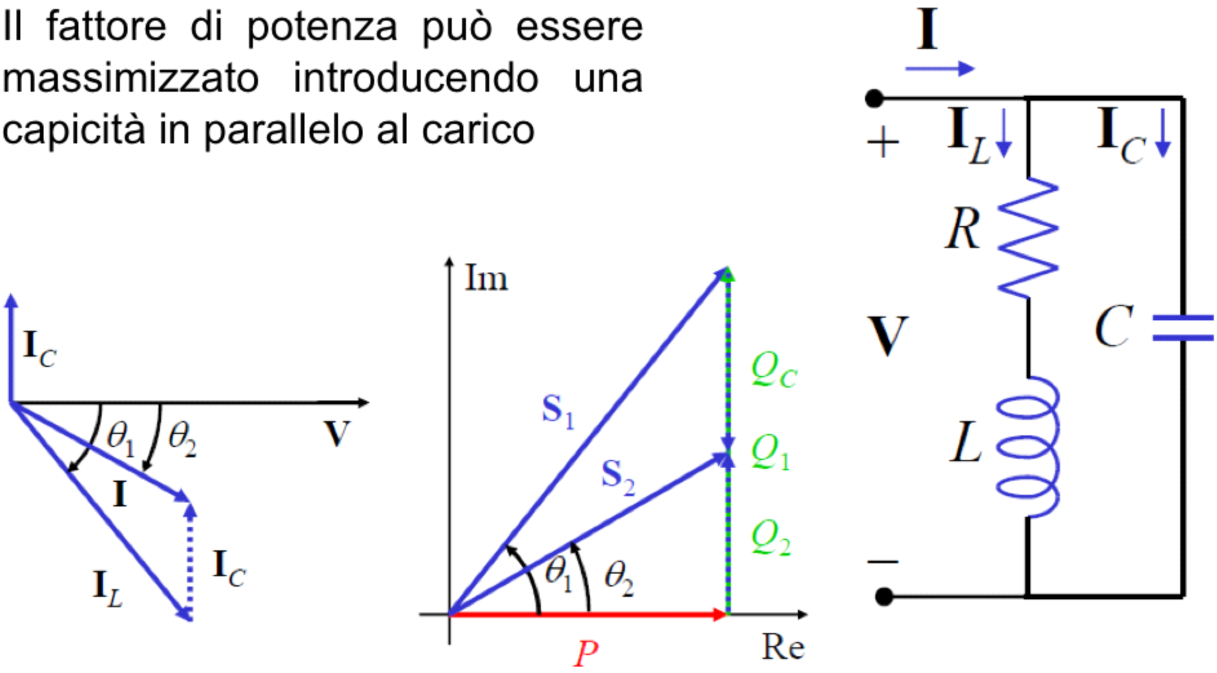
Rifasamento

Molti carichi domestici e industriali sono di tipo induttivo. Essi hanno quindi un fattore di potenza *pf* > 0



Rifasamento

Il fattore di potenza può essere massimizzato introducendo una capicità in parallelo al carico



Rifasamento

Per il carico induttivo originale si ha:

$$P = S_1 \cos\theta_1 \qquad Q_1 = S_1 \sin\theta_1 = P \cdot \tan\theta_1$$

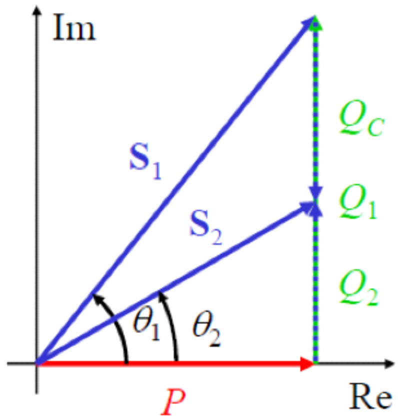
Per aumentare il fattore di potenza da cosθ_1 a cosθ_2 senza alterare la potenza reale (P=S_2 cosθ_2) si deve avere:

$$Q_2 = S_2 \sin\theta_2 = P \cdot \tan\theta_2$$

da cui: $Q_C = Q_1 - Q_2 = P\left(tg\theta_1 - tg\theta_2\right)$

Ricordando che $Q_C = {V_{eff}^2}/{X_C} = \omega C V_{eff}^2$

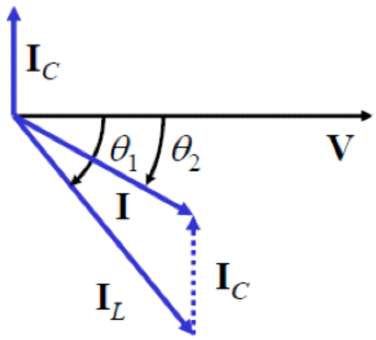
$$C = \frac{Q_C}{\omega V_{eff}^2} = \frac{P\left(tg\theta_1 - tg\theta_2\right)}{\omega V_{eff}^2}$$

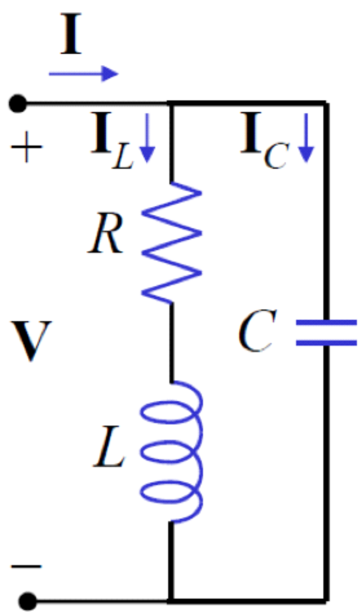


20

Rifasamento

Il rifasamento riduce l'ampiezza della corrente in ingresso al carico ($I < I_L$) a parità di potenza reale assorbita.



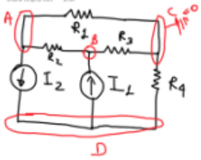


21

Esercitazione 4

lunedì 7 giugno 2021 13:09

Esercitazione IV - 16 Aprile



CASO 1 · SOLO GEN. CORRENTE

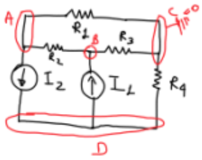
$I_1 = 1\,[A]$ $\quad I_2 = 3A$

$R_1 = R_2 = 1\,[\Omega] \to G_1, G_2 = 1\,[\Omega^{-1}]$

$R_3 = R_4 = 2\,[\Omega] \to G_3 = G_4 = \frac{1}{2}\,[\Omega^{-1}]$

C = NODO DI RIFERIMENTO

$e_C = 0\,[V] \Rightarrow e_A, e_B, e_D = ?$ 3 INCOGNITE



$A \to (e_A - \overset{0}{e_C}) \cdot G_1 + (e_A - e_B) \cdot G_2 + I_2 = 0$

$B \to (e_B - e_A) \cdot G_2 + (e_B - \cancel{e_C}^{\,0}) \cdot G_3 - I_1 = 0$

$D \to (e_D - \cancel{e_C}^{\,0}) \cdot G_4 + I_1 - I_2 = 0$

$$\left.\begin{aligned} &e_A(G_1+G_2) + e_B(-G_2) = -I_2 \\ &e_A(-G_2) + e_B(G_2+G_3) = I_1 \\ &e_D \cdot G_4 = I_2 - I_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} (G_1+G_2) & -G_2 & 0 \\ -G_2 & G_2+G_3 & 0 \\ 0 & 0 & G_4 \end{bmatrix}}_{\hat{G}} \underbrace{\begin{bmatrix} e_A \\ e_B \\ e_D \end{bmatrix}}_{\vec{e}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -I_2 \\ +I_1 \\ I_2 - I_1 \end{bmatrix}}_{\vec{I}} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3/2 \end{bmatrix}}_{\hat{G}} \begin{bmatrix} e_A \\ e_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_2 \\ +I_1 \end{bmatrix}$$

$\Delta_G = 3 - 1 = 2$

$e_D = \frac{I_2 - I_1}{G_4} = \frac{[3-1]\,A}{1/2} = 4V$

$$e_A = \frac{\begin{vmatrix} -I_2 & -1 \\ +I_1 & 3/2 \end{vmatrix}}{\Delta_G} = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3/2 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-9/2 + 1}{2} = \frac{-7/2}{2} = -7/4\,[V]$$

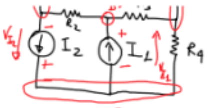
$$e_B = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -I_2 \\ -1 & +I_1 \end{vmatrix}}{\Delta_G} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2-3}{2} = -\frac{1}{2}\,[V]$$

$e_D = 4V$; $\quad e_A = -\frac{7}{4}V$; $\quad e_C = 0\,[V]$; $e_B = -\frac{1}{2}\,[V]$;

$e_A = -7/4$ ✓

$\sum P_{EROGATA\,GEN} = \sum P_{ASS.\,RESISTORE}$

GEN … ASS, RESISTORE



$$P_{R_1} = \frac{(e_A - e_C)^2}{R_1} = \frac{(e_C - e_A)^2}{R_1} = \frac{49}{16}\,[W]$$

$$P_{R_2} = \frac{(e_A - e_B)^2}{R_2} = \frac{(-7/4 + \frac{1}{2})^2}{1} = \frac{25}{16}\,[W]$$

$$P_{R_3} = \frac{(e_B - e_C)^2}{R_3} = 1/8\,[W]$$

$$P_{R_4} = \frac{(e_C - e_D)^2}{R_4} = \frac{16}{2} = 8\,[W]$$

$$\sum_{i=1}^{4} P_{ASS,R_i} = P_{R_1} + P_{R_2} + P_{R_3} + P_{R_4} = \frac{51}{4}\,[W]$$

$$V_{I_1} = e_B - e_D = -\frac{1}{2} - 4$$

$$V_{I_1} = -9/2\,[V]$$

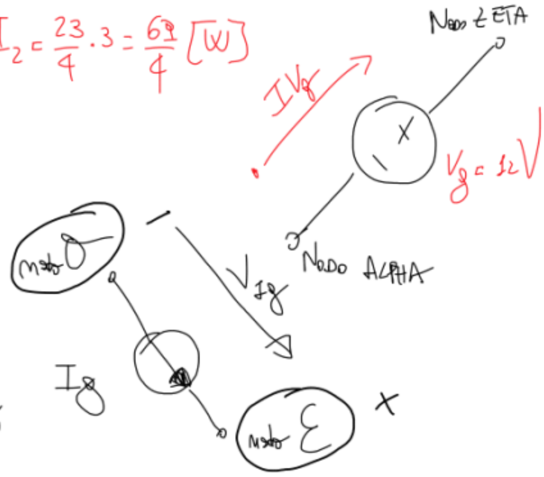
$$P^{g}_{I_1} = V_{I_1} \cdot I_1 = -\frac{9}{2} \cdot 1 = -\frac{9}{2}\,[W]$$

$$V_{I_2} = e_D - e_A = 4 + 7/4 = \frac{23}{4}\,[V] \rightarrow P_{I_2} = V_{I_2} \cdot I_2 = \frac{23}{4} \cdot 3 = \frac{69}{4}\,[W]$$

$$\sum P^{I_i}_{EROGATE} = \sum P^{R_i}_{ASSORBITE} \;\; ?$$

$$\underbrace{\frac{69}{4} - \frac{9}{2}}_{[W]\ \frac{51}{4}} = \frac{51}{4}\,[W]$$

$$\frac{51}{4} = \frac{51}{4}\,[W]$$



$$V_g = 12V \quad P_{V_g} = V_g\, I_{V_g}$$

Esercitazione 5

lunedì 7 giugno 2021 13:09

$V_{g1} = 1 [V]$
$V_{g2} = 2 [V]$
$R_1 = R_2 = 1 [\Omega]$
$R_3 = R_4 = 2 [\Omega]$

BILANCIO POTENZE E POTENZE DISSIPATE DAI RESISTORI

(a) $i_a R_1 + (i_a - i_b) \cdot R_2 - V_{g2} = 0 \Rightarrow i_a(R_1+R_2) + i_b(-R_2) = V_{g2}$

(b) $(i_b - i_a) R_2 + (i_b - i_c) \cdot R_3 - V_{g1} = 0 \Rightarrow i_a(-R_2) + i_b(R_2+R_3) + i_c(-R_3) = V_{g1}$

(c) $i_c \cdot R_4 + (i_c - i_b) \cdot R_3 + V_{g2} = 0 \Rightarrow i_b(-R_3) + i_c(R_3+R_4) = -V_{g2}$

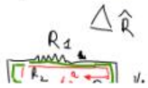
$$\underbrace{\begin{bmatrix} R_1+R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2+R_3 & -R_3 \\ 0 & -R_3 & R_3+R_4 \end{bmatrix}}_{\hat{R}} \underbrace{\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}}_{\vec{i}} = \underbrace{\begin{bmatrix} V_{g2} \\ V_{g1} \\ -V_{g2} \end{bmatrix}}_{\vec{V}} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$\Delta \hat{R} = 12$

$$i_a = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{vmatrix}}{\Delta \hat{R}} = \frac{24-8}{12} = \frac{\cancel{16}\,4}{\cancel{12}\,3} = 4/3 \ [A]$$

$$i_b = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}}{\Delta \hat{R}} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} [A]$$

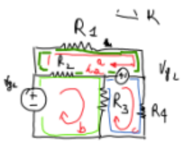
$$i_c = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix}}{\Delta \hat{R}} = \frac{-2}{12} = -\frac{1 A}{6}$$



$V_{g1} = 1 [V]$

$i_a = 4/3 [A]$

$D\ V^2\ D\ T^2$



$V_{g_1} = 1[V]$
$V_{g_2} = 2[V]$
$R_1 = R_2 = 1[\Omega]$
$R_3 = R_4 = 2[\Omega]$

$i_a = 4/3\ [A]$
$i_b = \frac{2}{3}\ [A]$
$i_c = -\frac{1}{6}\ [A]$

$$P = \frac{V^2}{R} = R \cdot I^2$$

$P_{R_1} = i_a^2 \cdot R_1 = \frac{16}{9} \cdot 1 = \frac{16}{9}\ [W]$

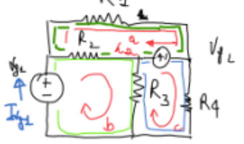
$P_{R_2} = (i_b - i_a)^2 \cdot R_2 = (i_a - i_b)^2 \cdot R_2 = \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\right)^2 \cdot 1 = \frac{4}{9}\ [W]$

$P_{R_3} = (i_c - i_b)^2\, R_3 = (i_b - i_c)^2 \cdot R_3 = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right)^2 \cdot 2 = \frac{25}{36} \cdot 2 = \frac{50}{36}\ [W] = \frac{25}{18}\ [W]$

$P_{R_4} = i_c^2 R_4 = \frac{1}{36} \cdot 2 = \frac{1}{18}\ [W]$

$$\sum_{i=1}^{4} P_{R_i}^{ASS} = \left(\frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{25}{18} + \frac{1}{18}\right)[W] = \frac{20}{9} + \frac{\cancel{26}\,13}{\cancel{18}\,9} = \frac{11}{3}\,\frac{\cancel{33}}{\cancel{9}}\ [W]$$

$$\sum P^{GEN}_{GENERATE}$$



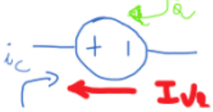
$V_{g_1} = 1[V]$
$V_{g_2} = 2[V]$
$R_1 = R_2 = 1[\Omega]$
$R_3 = R_4 = 2[\Omega]$

$$P_{GENERATORI} = V_g \cdot I_{V_g}$$

$P^{GEN}_{V_{g_1}} = V_{g_1} \cdot I_{V_{g_1}} = 1[V]\,(i_b) = \frac{2}{3}\ [W]$

$P^{GEN}_{V_{g_2}} = V_{g_2}\,(I_{V_{g_2}}) = \frac{3}{2}[A] \cdot 2[V] = 3\ [W]$

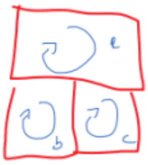
$$\sum P_g^{gen} = \frac{11}{3}\ [W] =$$



$\mathbf{I_{V_2}} = i_a - i_c = \frac{4}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{2}\ [A]$

$\sum P_{ASS}^{R_x}$

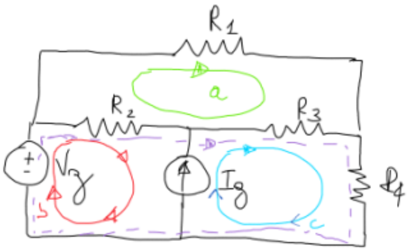
$I_{V_{g2}} = i_a - i_c = \frac{4}{3} + \frac{1}{6} = \boxed{\frac{3}{2}}$ [A]



$$\begin{bmatrix} R_1+R_2 & -R_3 & \\ -R_3 & R_2+R_3 & \\ & & R_2+R_3+R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_g \\ V_g \\ 0 \\ V_{g3}+V_{g4} \end{bmatrix}$$

$\hat{R} \quad \vec{i} \quad \vec{V}$

ESEMPIO



$I_g = 1$ [A]

$V_g = 2$ [V]

$R_1 = R_2 = 1$ [Ω]

$R_3 = R_4 = 2$ [Ω]

VERIFICARE BILANCIO

$$I_g = i_c - i_b \Rightarrow i_c = I_g + i_b \Rightarrow i_b = i_c - I_g$$

$$a) \quad i_a(R_1) + (i_a - i_c)\cdot R_3 + (i_a - i_b)R_2 = 0$$

$$b+c) \quad (i_b - i_a)R_2 + (i_c - i_a)\cdot R_3 + i_c R_4 - V_g = 0$$

$$\Rightarrow \quad i_a(R_1 + R_3 + R_2) + i_c(-R_3 - R_2) + I_g R_2 = 0$$

$$i_c(R_2 + R_3 + R_4) - I_g R_2 + i_a(-R_2 - R_3) + \quad - V_g = 0$$

$$i_a(R_1 + R_2 + R_3) + i_c(-R_3 - R_2) = -I_g R_2$$

$$i_a(-R_2 - R_3) + i_c(R_2 + R_3 + R_4) = V_g + I_g R_2$$

$$\begin{bmatrix} R_1+R_2+R_3 & -R_3-R_2 \\ -R_3-R_2 & R_2+R_3+R_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_g R_2 \\ V_g + I_g R_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = \Delta\hat{R} = 11$$

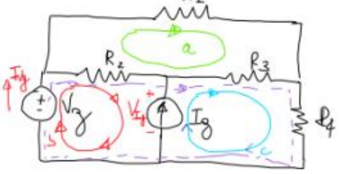
$$i_a = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}{\Delta\hat{R}} = \frac{-5+9}{11} = \frac{4}{11}\,[A] \simeq 0.36\,[A]$$

$$i_c = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}}{11} = \frac{12-3}{11} = \frac{9}{11} \simeq 0.81\,[A]$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = \Delta\hat{R} = 11$$

$i_c = i_b + I_g$

$i_a = 0.36\,[A]$ $\quad i_b = -0.19\,[A]$ $\quad i_c = +0.81\,[A]$ $\qquad i_b = i_c - I_g = 0.81\,[A] - 1\,[A] = -0.$



$I_g = 1\,[A]$

$V_g = 2\,[V]$

$R_1 = R_2 = 1\,[\Omega]$

$R_3 = R_4 = 2\,[\Omega]$

$P_{R_1} = i_a^2 \cdot R_1 \approx 0.13\,[W]$

$P_{R_2} = R_2 \cdot (i_a - i_b)^2 \cong 0.3\,[W]$

$P_{R_3} = R_3\,(i_a - i_c)^2 \cong 0.4\,[W]$

$P_{R_4} = R_4\, i_c^2 \cong 1.31\,[W]$

$\sum 0.3 + 0.4 + 0.13 +$

$P^g_{V_g} = V_g \cdot I_{V_g} = 2\,[V] \cdot (-0.19)\,[A] \cong -0.38\,[W]$

$P^g_{I_g} = I_g \cdot V_{I_g} =$

$\overset{!}{=} 1\,[A] \cdot 2.55\,[V] = 2.55\,[W]$

b) $-V_g + (i_b - i_a) R_2 + V_{I_g} = 0 \Rightarrow$

$V_{I_g} = (i_a - i_b) \cdot R_2 + V_g$

$V_{I_g} = 0.55 + 2 = 2.55\,[V]$

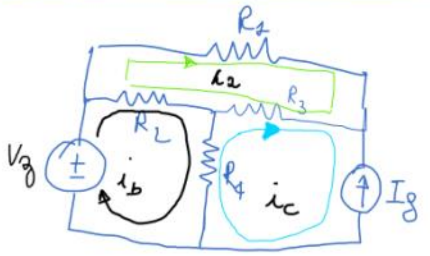
$\sum\ 2.55 - 0.38 = 2.14? \Rightarrow 2.17 \cong 2.14$

$[W]$

$19\ [A]$

$1.31 \simeq 2.14\ [W]$

$[W]$



$I_g = 1\,[A] \quad V_g = 2\,[V]$

$R_1, R_2 = 1\,[\Omega]$

$R_3, R_4 = 2\,\Omega$

$i_c = -I_g = -1\,[A] \quad i_a = ? \quad i_b = ?$

(a) $i_a R_1 + (i_a + I_g) R_3 + (i_a - i_b) R_2 = 0$

(b) $(i_b - i_a) R_2 + (i_b + I_g) \cdot R_4 - V_g = 0$

$$i_a (R_1 + R_2 + R_3) + i_b (-R_2) = -I_g R_3$$

$$i_a (-R_2) + i_b (R_2 + R_4) = V_g - I_g R_4$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} R_1+R_2+R_3 & -R_2 \\ -R_2 & R_2+R_4 \end{bmatrix}}_{\hat{R}} \underbrace{\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix}}_{\vec{i}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -I_g R_3 \\ V_g - I_g R_4 \end{bmatrix}}_{\vec{V}} \qquad \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

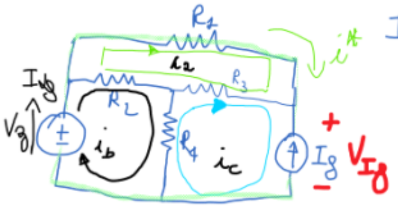
$\Downarrow$

$\Delta_{\hat{R}} = 12 - 1 = 11$

$$i_a = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}{11} = \frac{-6}{11} = \frac{-6}{11} \; [A]$$

$$i_b = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{11} = \frac{0-2}{11} = -\frac{2}{11} \; [A]$$

$$i_c = -1 \; [A]$$



$I_g = 1 \; [A] \quad V_g = 2 \; [V]$

$R_1, R_2 = 1 \; [\Omega]$

$R_3, R_4 = 2 \Omega$

$$P_{R_1} = i_a^2 \cdot R_1 \simeq 0.297 \; [W]$$

$$P_{R_2} = (i_a - i_b)^2 \cdot R_2 \simeq 0.132 \; [W]$$

$$P_{R_3} = (i_a - i_c)^2 \cdot R_3 \simeq 0.413 \; [W]$$

$$P_{R_4} = (i_c - i_b)^2 \cdot R_4 \simeq 1.34 \; [W]$$

$$\sum \simeq 2.1$$

$$P_{V_g} = V_g \cdot I_{V_g} = 2 \; [V] \cdot \left(-\frac{2}{11}\right) A = -0.36 \; [W]$$

$$P_{I_g} = I_g \left(V_{I_g} \right) \Rightarrow$$

$$-V_g + i_a R_1 + V_{I_g} = 0 \Rightarrow$$

$$V_{I_g} = V_g - i_a R_1 = 2 \; [V] + \frac{6}{11} \; [V] = \frac{28}{11} \; [V] \simeq 2.54 \; [V]$$

$$P_{I_g} = 1A \; 2.54 V = 2.54 \; [W]$$

-3 [W]

$$\sum P^{gen} \simeq \underbrace{2.54 - 0.36}_{2.18} [W] = \sum P_{ASS} = 2.13 [W]$$

2.18 [W]

BILANCIO VERIFICATO

Esercitazione 6

lunedì 7 giugno 2021 13:09

Esercitazione VI -30 Aprile

giovedì 29 aprile 2021 16:45

Sinusoidi

Una **sinusoide** è un segnale che ha la forma della funzione seno o coseno.

Una corrente (tensione) sinusoidale è anche detta corrente (tensione) alternata (o ac dall'inglese *alternate current*, che si contrappone a dc: *direct current*).

Grazie all'analisi di **Fourier**, qualunque segnale variabile nel tempo può essere scomposto in una somma di contributi sinusoidali (serie di Fourier o integrale di Fourier).

Sinusoidi

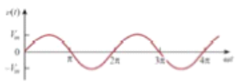
$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi) \quad [V]$$

V_m ampiezza della sinusoide

ω frequenza angolare o pulsazione (rad/s)

$(\omega t + \phi)$ argomento della sinusoide

ϕ fase della sinusoide



$\omega = [Rad] \cdot [s^{-1}]$

$\omega = f$

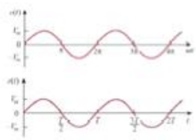
$\omega = \boxed{2\pi f}$

Sinusoidi

Il periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ è il tempo impiegato per compiere un ciclo

La frequenza $f = \frac{1}{T}$ è il numero di cicli per secondo e si misura in Hertz ($1Hz=\frac{1}{s}$).

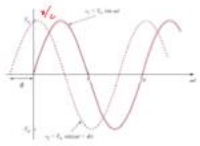
$\frac{\omega}{2\pi}$



Sinusoidi

$v_1(t) = V_m \sin \omega t$ e $v_2(t) = V_m \sin(\omega t + \phi)$ 10

Se $\phi \neq 0$ si dice che le due sinusoidi sono *sfasate*, altrimenti si dice che sono *in fase*



Sinusoidi

Usando le identità trigonometriche possiamo trasformare seni in coseni e viceversa

$$\sin(\omega t \pm 180^\circ) = -\sin\omega t$$
$$\cos(\omega t \pm 180^\circ) = -\cos\omega t$$
$$\sin(\omega t \pm 90^\circ) = \pm\cos\omega t$$
$$\cos(\omega t \pm 90^\circ) = \mp\sin\omega t$$

Sinusoidi

Esercizio
Determinare ampiezza, fase, pulsazione, periodo e frequenza delle seguenti sinusoidi

a) $v(t) = 12\cos(50t + 10^\circ)$ $\quad \omega = 50\ rad/s$
b) $v(t) = 5\sin(4\pi t - 60^\circ)$ $\quad 4\pi\ rad/s$

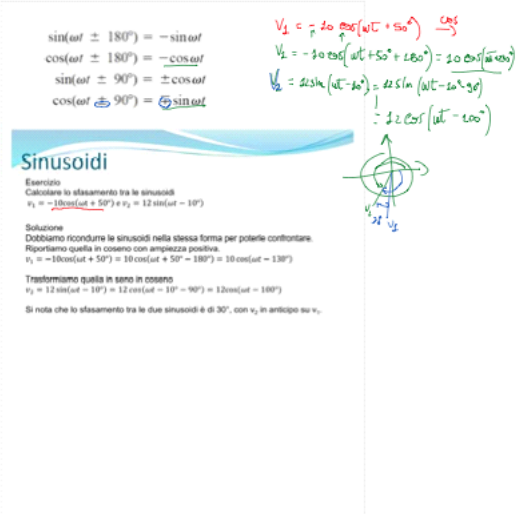
Soluzione

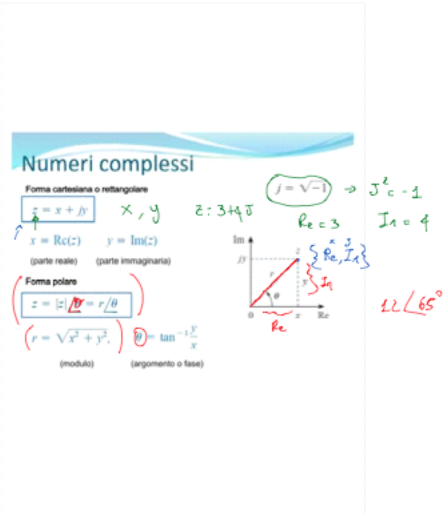
a) Ampiezza $V_m = 12V$
Fase $\phi = 10^\circ$
Pulsazione $\omega = 50\ rad/s$
Periodo $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,1257\ s$
Frequenza $f = \frac{1}{T} = 7,958\ Hz$

a) Ampiezza $V_m = 5V$
Fase $\phi = -60^\circ$
Pulsazione $\omega = 4\pi\ rad/s = 12,57\ rad/s$
Periodo $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,5\ s$
Frequenza $f = \frac{1}{T} = 2\ Hz$

$$v(t) = 12\cos(50t + 10^\circ)$$
$$\phi = 10^\circ$$
$$\omega = 50$$
$$A = 12$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0,1256\ s$$
$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = 7,96\ Hz$$

$$v(t) = 5\sin(4\pi t - 60^\circ)$$
$$\phi = -60^\circ$$
$$A = 5$$
$$\omega = 4\pi$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{2} = 0,5\ s$$
$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,5} = 2\ Hz$$





$V_1 = -10\cos(\omega t + 50°)$

$V_2 = 12\sin(\omega t - 10°)$

poiché

$\sin(\omega t \pm 90°) = \pm\cos(\omega t)$

posso scrivere che

$\cos(\omega t + 50°) = \sin(\omega t + 50° + 90°)$

$V_1 = -10\sin(\omega t + 140°)$

Ricordando che

$-\sin(\omega t) = \sin(\omega t - 180°)$

ho che

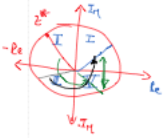
$V_1 = 10\sin(\omega t - 40°)$

Lo sfasamento è dunque di 30° e V_2 è in anticipo su V_1

Numeri complessi

Conversione da cartesiana a polare (regole per la fase)

$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$	Se x>0	1° quadrante
$\theta = 180° + \tan^{-1}\frac{y}{x}$	Se x<0	2° quadrante
$\theta = 180° + \tan^{-1}\frac{y}{x}$	Se x<0	3° quadrante
$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$	Se x>0	4° quadrante



$z = 3 + j4$
$z^* = -3 + j4$

Numeri complessi

$r = \sqrt{Re^2 + Im^2}$ $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{Im}{Re}\right)$

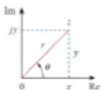
$j = \sqrt{-1}$

Forma esponenziale

$\boxed{z = re^{j\theta}}$ $z = re^{j\theta}$

$r = \sqrt{x^2 + y^2},$ (modulo) $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ (argomento)

$x = r\cos\theta,$ $y = r\sin\theta$



Numeri complessi

$z = x + jy, \quad (x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)$ Forma cartesiana

$z = r\underline{/\theta}, \quad \left(r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}\right)$ Forma polare

$z = re^{j\theta}, \quad \left(r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}\right)$ Forma esponenziale

FORMA CARTESIANA

$R\angle\theta$

FORMA POLARE

FORMA ESPONENZIALE

$Re^{j\theta}$

Numeri complessi

Esercizio

Esprimere i seguenti numeri complessi in forma polare e esponenziale

(a) $z_1 = 6 + j8$, (b) $z_2 = 6 - j8$, (c) $z_3 = -6 + j8$, (d) $z_4 = -6 - j8$

Soluzione

a) Per z_1=6+j8 (1° quadrante)

$r_1 = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10, \quad \theta_1 = \tan^{-1}\frac{8}{6} = 53.13°$

Forma polare $10\underline{/53.13°}$

Forma esponenziale $10e^{j53.13°}$

b) Per z_2=6-j8 (4° quadrante)

$r_2 = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10, \quad \theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{-8}{6}\right) = -53.13° = \boxed{306.87°}$

Forma polare $10\underline{/306.87°}$

Forma esponenziale $10e^{j306.87°}$

Numeri complessi

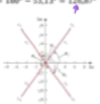
Soluzione

c) Per z3=-6+j8 (2° quadrante)

$r_3 = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10,\qquad \theta_3 = 180° + \tan^{-1}\left(\frac{8}{-6}\right) = 180° - 53{,}13° = 126{,}87°$

Forma polare $10\angle 126.87°$

Forma esponenziale $10e^{j126.87°}$



d) Per z4=-6-j8 (3° quadrante)

$r_4 = \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = 10,\qquad \theta_4 = 180° + \tan^{-1}\left(\frac{-8}{-6}\right) = 180° + 53{,}13° = 233{,}13°$

Forma polare $10\angle 233.13°$

Forma esponenziale $10e^{j233.13°}$

(a) $12\angle -60° \to x + jy$, $12\sin(-60°)$, $12\cos(-60°)$ $= 6 + j\,10.39$

Numeri complessi

Esercizio

Esprimere i seguenti numeri complessi in forma cartesiana

(a) $12\angle -60°$, (b) $-50\angle 285°$, (c) $8e^{j10°}$, (d) $20e^{-j\pi/3}$

rad → grad

$-\frac{\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi}$ 60

$-60°$

Soluzione

a) $12\angle -60° = 12\cos(-60°) + j12\sin(-60°) = 6 - j10.39$

b) $-50\angle 285° = -50\cos 285° - j50\sin 285° = -12.94 + j48.3$

$8\angle 10°$

c) $8e^{j10°} = 8\cos 10° + j8\sin 10° = 7.878 + j1.389$

d) $20e^{-j\pi/3} = 20\cos(-\pi/3) + j20\sin(-\pi/3) = 10 - j17.32$

Numeri complessi

Operazioni con i numeri complessi

Se $z_1 = x_1 + jy_1$ e $z_2 = x_2 + jy_2$

$z_1^* = x_1 - jy_1$

$z^* = x - jy = r\angle{-\theta} = re^{-j\theta}$ Complesso Coniugato

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$ Somma

$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$ Differenza

$z_1 z_2 = r_1 r_2 \angle{\theta_1 + \theta_2}$ Prodotto

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle{\theta_1 - \theta_2}$ Rapporto

$\frac{1}{j} = -j \Rightarrow \frac{j}{j} \cdot \frac{1}{j} = \frac{j}{-1}$

$\frac{1}{j} = -j$

$3 + j4 = z$

$3 - j4 = z^*$

$(3+j4) \cdot (3-j4) = 9 \cancel{-12j} \cancel{+12j} + 16$

$= 9 + 16 = r^2$

$\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Fasori

Un **fasore** è un numero complesso che rappresenta l'ampiezza e la fase di una sinusoide.

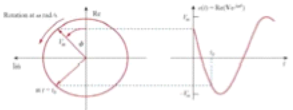
Per l'identità di Eulero $e^{\pm j\phi} = \cos\phi \pm j\sin\phi$

Quindi $\cos\phi = \mathrm{Re}(e^{j\phi})$
$\sin\phi = \mathrm{Im}(e^{j\phi})$

E possiamo scrivere $v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) = \mathrm{Re}(V_m e^{j(\omega t + \phi)}) = \mathrm{Re}(V_m e^{j\phi} e^{j\omega t})$

Funzione del tempo	Fasore
$\boxed{v(t) = \mathrm{Re}(\mathbf{V} e^{j\omega t})}$	$\mathbf{V} = V_m e^{j\phi} = V_m \angle{\phi}$

Fasori



Fasori

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{V} = V_m \underline{/\phi}$$

Dominio del tempo — Dominio dei Fasori

1) $v(t)$ è la rappresentazione istantanea (o nel dominio del tempo), mentre **V** è la rappresentazione in frequenza (o nel dominio dei fasori)

2) $v(t)$ dipende dal tempo, mentre **V** no.

3) $v(t)$ è sempre reale senza termini complessi, mentre **V** è generalmente un numero complesso.

Fasori

$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{V} = V_m \angle \phi$

Dominio del tempo — Dominio dei Fasori

Trasformazione

$V_m \cos(\omega t + \phi)$	$V_m \angle \phi$
$I_m \cos(\omega t + \theta)$	$I_m \angle \theta$
$V_m \sin(\omega t + \phi)$	$V_m \angle \phi$
$I_m \sin(\omega t + \theta)$	$I_m \angle \theta$

Fasori

Proprietà dei Fasori

Funzione	Fasore	
$v_1(t) = V_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1)$ $v_2(t) = V_{m2} \cos(\omega t + \varphi_2)$ $v(t) = a_1 \cdot v_1(t) + a_2 \cdot v_2(t)$ a_1 e a_2 costanti reali	$\mathbf{V}_1 = V_{m1} e^{j\varphi_1}$ $\mathbf{V}_2 = V_{m2} e^{j\varphi_2}$ $\mathbf{V} = a_1 \cdot \mathbf{V}_1 + a_2 \cdot \mathbf{V}_2$	Linearità

Funzione	Fasore	
$v_1(t) = V_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1)$ $v(t) = \frac{dv_1(t)}{dt}$	$\mathbf{V}_1 = V_{m1} e^{j\varphi_1}$ $\mathbf{V} = j\omega \mathbf{V}_1$	Derivazione

Funzione	Fasore	
$v_1(t) = V_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1)$ $v(t) = \int v_1(t) dt$	$\mathbf{V}_1 = V_{m1} e^{j\varphi_1}$ $\mathbf{V} = \frac{\mathbf{V}_1}{j\omega}$	Integrazione

Fasori

Esercizio
Trasformare le seguenti sinusoidi in fasori

(a) $i = 6\cos(50t - 40^\circ)$ A
(b) $v = -4\sin(30t + 50^\circ)$ V

Soluzione

a) $\mathbf{I} = 6\angle{-40^\circ}$ A

b) $-\sin A = \cos(A + 90^\circ)$ quindi

$$v = -4\sin(30t + 50^\circ) = 4\cos(30t + 50^\circ + 90^\circ) = 4\cos(30t + 140^\circ) \text{ V}$$

$$\mathbf{V} = 4\angle{140^\circ} \text{ V}$$

Fasori

Esercizio
Trasformare le seguenti sinusoidi in fasori

(a) $v = 7\cos(2t + 40^\circ)$ V
(b) $i = -4\sin(10t + 10^\circ)$ A

Soluzione

a) $\mathbf{V} = 7\angle{40^\circ}$ V

b) $-\sin A = \cos(A + 90^\circ)$ quindi

$$i = -4\sin(10t + 10^\circ) \text{ A} = 4\cos(10t + 10^\circ + 90^\circ)$$

$$\mathbf{I} = 4\angle{100^\circ} \text{ A}$$

Fasori

Esercizio
Trasformare i seguenti fasori in sinusoidi

(a) $\mathbf{I} = -3 + j4$ A
(b) $\mathbf{V} = j8e^{-j20^\circ}$ V

Soluzione

a) $\mathbf{I} = -3 + j4 = 5\angle 126.87^\circ$ $\qquad r = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

$i(t) = 5\cos(\omega t + 126.87^\circ)$ A $\qquad \theta = \arctan\left(\frac{4}{-3}\right) + 180^\circ = 126{,}87^\circ$

b) $j = 1\angle 90^\circ$ quindi

$$\mathbf{V} = j8\angle -20^\circ = (1\angle 90^\circ)(8\angle -20^\circ)$$
$$= 8\angle 90^\circ - 20^\circ = 8\angle 70^\circ \text{ V}$$

$v(t) = 8\cos(\omega t + 70^\circ)$ V

Fasori

Esercizio
Trasformare i seguenti fasori in sinusoidi

(a) $\mathbf{V} = -10\angle 30^\circ$ V
(b) $\mathbf{I} = j(5 - j12)$ A

Soluzione

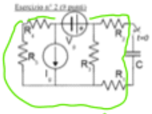
a) $v(t) = -10\cos(\omega t + 30^\circ) = 10\cos(\omega t + 180^\circ + 30^\circ) = 10\cos(\omega t + 210^\circ)$

b) $\boldsymbol{I} = j(5 - j12) = 12 + j5 = 13e^{j22{,}62^\circ}$

$r = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$
$\theta = \arctan\left(\frac{5}{12}\right) = 22{,}62^\circ$

$i(t) = 13\cos(\omega t + 22{,}62^\circ)$

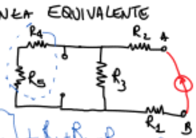
Esercizio n° 2 (9 punti)



ESAME SETTEMBRE 2017

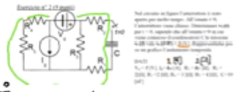
$$V_C(t) = V_{TH} + (V_0 - V_{TH})e^{-\frac{t}{\tau}}$$

I° STEP → CALCOLO RESISTENZA EQUIVALENTE



$$\underbrace{\left[(R_4+R_5)\,\|\,R_3\right]}_{R_{eq}^*} + R_2 + R_1 = R_{AB} = R_{TH}$$

$$\frac{5\cdot 2}{5+2} \Rightarrow \frac{10}{7} + \frac{14}{7} + \frac{14}{7} = \frac{38}{7} = R_{TH}$$

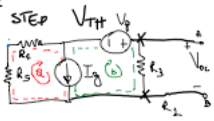


SUPER ANELLO

$I_g = i_a - i_b$

$i_a = I_g + i_b$

II° STEP V_{TH}



$V_{oc} = V_{TH} = V_{R_3}$

$(a+b)$ $i_a(R_4) - V_g + i_b(R_3) + i_a \cdot R_5 = 0$

$(I_g + i_b)(R_4 + R_5) + i_b \cdot R_3 = V_g \Rightarrow i_b(R_4+R_5+R_3) = V_g - I_g(R_4+R_5)$

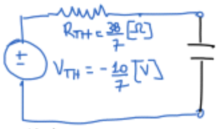
$i_b = \dfrac{V_g - I_g(R_4+R_5)}{R_4+R_5+R_3}$

$R_3 = 2\Omega \quad R_4 = 1\Omega \quad V_g = 5V$

$I_g = 2A \quad R_5 = 4\Omega$

$i_b = \dfrac{5-10}{7} = -\dfrac{5}{7}\,[A]$

$V_{TH} = V_{R_3} = i_b \cdot R_3 = -\dfrac{10}{7}\,[V]$



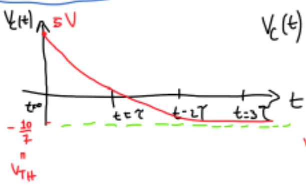
$V_c(t) = V_{TH} + (V_0 - V_{TH})\, e^{-t/\tau}$, $V_0 = 5[V]$

$\tau = R_{TH} \cdot C$

per $t \to \infty$

$V_c(t) = -\dfrac{10}{7} + \left(5 + \dfrac{10}{7}\right) e^{-t/\tau}$

a $t = 0 \Rightarrow 5\,[V]$



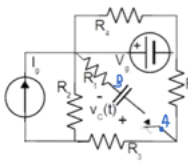
a $t = t^* = 1\tau$

$V_c(t) = -\dfrac{10}{7} + \left(5 + \dfrac{10}{7}\right) \cdot \dfrac{1}{2.71}$

$V_c(t) \cong 0{,}84\,[V]$

---

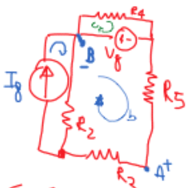
6 LUGLIO 2017



Nel circuito in figura l'interruttore è stato aperto per molto tempo. All'istante t=0, l'interruttore viene chiuso. Determinare **vc(t)** per t > 0, sapendo che all'istante t=0 in cui viene connesso il condensatore C la tensione **vc(t)** vale **vc(t=0⁺)** = 5 [V]. Rappresentarne poi su un grafico l'andamento temporale.

DATI

V_g = **k** [V], I_g = 2 [A], R_1 = 1[Ω], R_2 = 4[Ω], R_3 = 2 [Ω], R_4 = 2 [Ω], R_5 = **k** [Ω], C=20 [nF]



R_{TH}

$R_2 + R_3$ SERIE

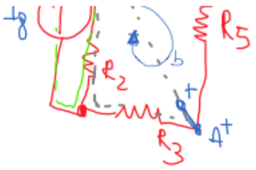
$[R_5 \| (R_2 + R_3)] + R_1 = R_{TH}$

SERIE

$i_a = I_g$

(b) $+V_g + i_b R_5 + i_b R_3 + (i_b - I_g) R_2 = 0$

(c) $-V_g + i_c \cdot R_4 = 0 \Rightarrow i_c = \dfrac{V_g}{R_4}$



ⓒ $-V_g + i_c \cdot R_4 = 0 \Rightarrow i_c = \frac{V_g}{R_4}$

$$i_b = \frac{-V_g + I_g \cdot R_2}{R_5 + R_3 + R_2} \Rightarrow i_b$$

$$-V_{TH} + i_b \cdot R_3 + (i_b - i_c) R_2 = 0 \quad \Rightarrow V_{TH} = i_b (R_3 + R_2) - i_c R_2$$

$$V_C(t) = V_{TH} + (V_0 - V_{TH}) e^{-t/\tau}$$

Esercitazione 6 appunti supplementari

lunedì 7 giugno 2021 13:10

ESERCITAZIONE VII

STEFANO LAURETI

SVOLGIMENTO

$$\sin(\omega t \pm 180°) = -\sin \omega t$$
$$\cos(\omega t \pm 180°) = -\cos \omega t$$
$$\sin(\omega t \pm 90°) = \pm \cos \omega t$$
$$\cos(\omega t \pm 90°) = \mp \sin \omega t$$

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi)$$

V_m = Ampiezza della sinusoide

ω = frequenza angolare (rad/s)

$(\omega t + \phi)$ = argomento della sinusoide

ϕ = fase della sinusoide

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ = periodo (Tempo impiegato per compiere un ciclo)

$f = \frac{1}{T}$ = frequenza = $\frac{n° \text{ cicli}}{s}$ $\Rightarrow 2\pi f = \omega$

ESERCIZIO

CALCOLARE SFASAMENTO TRA

$$v_1 = -10\cos(\omega t + 50°) \quad e \quad v_2 = 12\sin(\omega t - 10°)$$

RICORDANDO CHE:

$$\sin(\omega t \pm 180°) = -\sin \omega t$$

$$\cos(\omega t \pm 180°) = -\cos \omega t$$

$$\sin(\omega t \pm 90°) = \pm \cos \omega t$$

$$\cos(\omega t \pm 90°) = \mp \sin \omega t$$

$$v_1 = 10\cos(\omega t + 50° - 180°) = 10\cos(\omega t - 130°)$$

$$v_2 = 12\sin(\omega t - 10° - 90°) = 12\cos(\omega t - 100°)$$

$$\Delta\phi = \phi_{v_2} - \phi_{v_1} = 30° \Rightarrow v_2$$ IN ANTICIPO DI 30° RISPETTO A v_1

NUMERI COMPLESSI

$j = \sqrt{-1}$

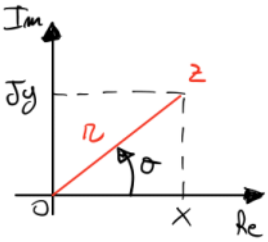
FORMA CARTESIANA O RETTANGOLARE

$\underset{\text{NUMERO COMPLESSO}}{z} = x + jy \qquad \underbrace{x = Re(z)}_{\text{PARTE REALE}} \qquad \underbrace{y = Im(z)}_{\text{PARTE IMMAGINARIA}}$

FORMA POLARE

$z = |z| \angle \theta = r \angle \theta$

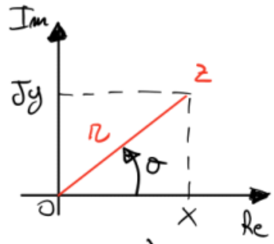
$\underset{\text{MODULO}}{r} = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad \underset{\text{ARGOMENTO O FASE}}{\theta} = \tan^{-1} \frac{y}{x}$



CONVERSIONE DA CARTESIANA A POLARE
(REGOLA PER LA FASE)

se $x<0$ II° quadrante $\theta = 180 + \tan^{-1} \frac{y}{x}$	se $x>0$ I° quadrante $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$
se $x<0$ III° quadrante $\theta = 180 + \tan^{-1} \frac{y}{x}$	se $x>0$ IV quadrante $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$

FORMA POLARE



$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$z = x + Jy \quad (x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta)$ FORMA CARTESIANA

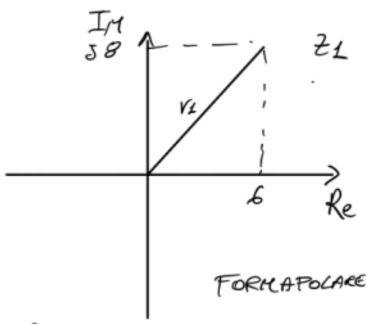
$z = r\angle\theta \quad \left(r = \sqrt{x^2+y^2},\ \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}\right)$ FORMA POLARE

$z = re^{J\theta} \quad \left(r = \sqrt{x^2+y^2},\ \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}\right)$ FORMA ESPONENZIALE

ESERCIZIO

ESPRIMERE $z_1 = 6 + J8$; $z_2 = 6 - J8$; $z_3 = -6 + J8$; $z_4 = -6 - J8$;

IN FORMA POLARE ED ESPONENZIALE

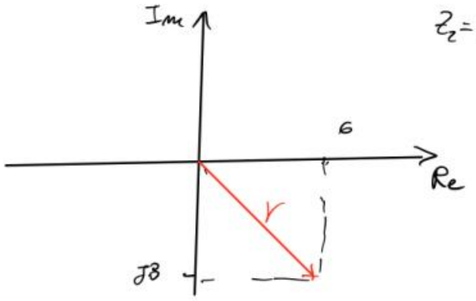


$r_1 = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{8}{6}\right) = 53.13°$

FORMA POLARE → $10\angle 53.13°$

FORMA ESPONENZIALE $10e^{J53.13°}$



$z_2 = 6 - J8$

$r = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-8}{6}\right) = -53.13^\circ$

FORMA POLARE

$10 \angle -53.13^\circ$

FORMA ESPONENZIALE

$10e^{-J53.13}$

$z_3 = -6 + 8J$ (II° QUADRANTE)

$r = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

$\theta = 180^\circ + \tan^{-1}\left(\frac{8}{-6}\right) = 126.87$

FORMA POLARE

$10 \angle 126.87^\circ$

FORMA ESPONENZIALE

$10\, e^{J126.87^\circ}$

$z_4 = -6 - 8J$ (III quadrante)

$r = 10$

$\theta = 180^\circ + \tan^{-1}\left(\frac{-8}{-6}\right) = 233.13^\circ$

$10 \angle 233.13^\circ$

$10\, e^{J233.13^\circ}$

ESERCIZIO: ESPRIMERE I SEGUENTI NUMERI COMPLESSI DA FORMA POLARE O ESPONENZIALE IN FORMA CARTESIANA

$12\angle{-60^\circ} = 12\cos(-60^\circ) + j\,12\sin(-60^\circ) = 12\cdot 0.5 - j\,12\cdot 0.86 = 6 - j10.39$

$-50\angle{285^\circ} = -50\cos(285^\circ) - 50\,j\sin(285^\circ) = -12.94 + j48.30$

$8e^{j10} = 8\cos(10^\circ) + j8\sin(10^\circ) = 7.88 + j1.39$

$20e^{-j\pi/3} = 20\cos(-\pi/3) + j\,20\sin(-\pi/3) = 10 - j17.32$

OPERAZIONI CON I NUMERI COMPLESSI

$\frac{1}{j} = -j$; se $z_1 = x_1 + jy_1$ e $z_2 = x_2 + jy_2$;

COMPLESSO CONIUGATO

$$z^* = x - jy = r\angle{-\theta} = re^{-j\theta}$$

SOMMA

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

DIFFERENZA

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$

PRODOTTO

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \angle{\theta_1 + \theta_2}$$

RAPPORTO

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\angle{\theta_1 - \theta_2}$$

FASORE => è un numero complesso che rappresenta l'ampiezza e la fase di una sinusoide

IDENTITÀ DI EULERO

$$e^{\pm j\phi} = \cos\phi \pm j\sin\phi \text{, QUINDI } \begin{cases} \cos\phi = Re\left(e^{j\phi}\right) \\ \sin\phi = I_m\left(e^{j\phi}\right) \end{cases}$$

SI PUÒ QUINDI SCRIVERE:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) = Re\left(V_m e^{j(\omega t+\phi)}\right) = Re\left(V_m e^{j\phi} \cdot e^{j\omega t}\right)$$

FUNZIONE DEL TEMPO

$$v(t) = Re\left(\mathbf{V} e^{j\omega t}\right)$$

FASORE

$$\mathbf{V} = V_m e^{j\phi} = V_m \angle\phi$$

QUINDI

$$\underbrace{v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)}_{\text{DOMINIO DEL TEMPO}} \Longleftrightarrow \underbrace{\mathbf{V} = V_m \angle\phi = V_m e^{j\phi}}_{\text{DOMINIO DEI FASORI}}$$

NOTA BENE:

1) $v(t)$ è la rappresentazione istantanea (o nel dominio del tempo), mentre $\mathbf{V}$ è la rappresentazione in frequenza (o nel dominio dei fasori)
2) $v(t)$ dipende dal tempo; $\mathbf{V}$ non dipende dal tempo.
3) $v(t)$ è sempre reale senza termini complessi, mentre $\mathbf{V}$ è generalmente un numero complesso

TRASFORMAZIONE DAL DOMINIO DEL TEMPO AL DOMINIO DEI FASORI, E VICEVERSA

DOMINIO DEL TEMPO — DOMINIO DEI FASORI

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) \iff \mathbf{V} = V_m \angle \phi$$

TRASFORMAZIONE

$V_m \cos(\omega t + \phi)$	$V_m \angle \phi$
$I_m \cos(\omega t + \theta)$	$I_m \angle \theta$
$V_m \sin(\omega t + \phi)$	$V_m \angle \phi$
$I_m \sin(\omega t + \theta)$	$I_m \angle \theta$

PROPRIETÀ DEI FASORI

FUNZIONE NEL TEMPO	FASORE	
$v_1(t) = V_{m_1} \cos(\omega t + \varphi_1)$ $v_2(t) = V_{m_2} \cos(\omega t + \varphi_2)$ $v(t) = a_1 \cdot v_1(t) + a_2 \cdot v_2(t)$ a_1 e a_2 costanti reali	$\mathbf{V}_1 = V_{m_1} e^{j\varphi_1}$ $\mathbf{V}_2 = V_{m_2} e^{j\varphi_2}$ $\mathbf{V} = a_1 \cdot \mathbf{V}_1 + a_2 \mathbf{V}_2$	LINEARITÀ
$v_1(t) = V_{m_1} \cos(\omega t + \varphi_1)$ $v(t) = \dfrac{d v_1(t)}{dt}$	$\mathbf{V}_1 = V_{m_1} e^{j\varphi_1}$ $\mathbf{V} = j\omega \mathbf{V}_1$	DERIVAZIONE
$v_1(t) = V_{m_1} \cos(\omega t + \varphi_1)$ $v(t) = \int v_1(t)\, dt$	$\mathbf{V}_1 = V_{m_1} e^{j\varphi_1}$ $\mathbf{V} = \dfrac{\mathbf{V}_1}{j\omega}$	INTEGRAZIONE

Esercizio

TRASFORMARE LE SEGUENTI SINUSOIDI IN FASORI

(a) $i(t) = 6\cos(50t - 40°)\,A$

$\mathbf{I} = 6\angle -40°\,A$ Il fasore indica ampiezza e fase della sinusoide

(b) $v(t) = -4\sin(30t + 50°)\,V$

RICORDANDO CHE $-\sin A = \cos(A + 90)$

$v = -4\sin(30t + 50° + 90°) = +4\cos(30t + 140°)\,V$

$\mathbf{V} = 4\angle 140°\ V$

c) $v(t) = 7\cos(2t + 40°)\ V$

$\mathbf{V} = 7\angle 40°\ [V]$

d) $i(t) = -4\sin(10t + 10°)\,A \Rightarrow +4\cos(10t + 100°)$

$\mathbf{I} = 4\angle 100° = 4e^{j100}\ [A]$

ESERCIZIO

TRASFORMARE I SEGUENTI FASORI IN SINUSOIDI

a) $\mathbf{I} = -3 + j4 \; [A]$

$r = \sqrt{-3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = 5 \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{-3}\right) + 180° = 126.87°$

$i(t) = 5\cos(\omega t + 126.87°) \; [A]$

b) $\mathbf{V} = j8e^{-j20°} \; [V]$ ricordiamo che $j = 1\angle 90°$

$\mathbf{V} = j8\angle -20° = 1\angle 90° \cdot 8\angle -20° = 8\angle 90° - 20° = 8\angle 70°$

$v(t) = 8\cos(\omega t + 70°) \; [V]$

c) $\mathbf{V} = -10\angle 30° \; [V]$

$v(t) = -10\cos(\omega t + 30°) = 10\cos(\omega t + 30° + 180°) = 10\cos(\omega t + 210)$

$v(t) = 10\cos(\omega t + 210°) \; [V]$

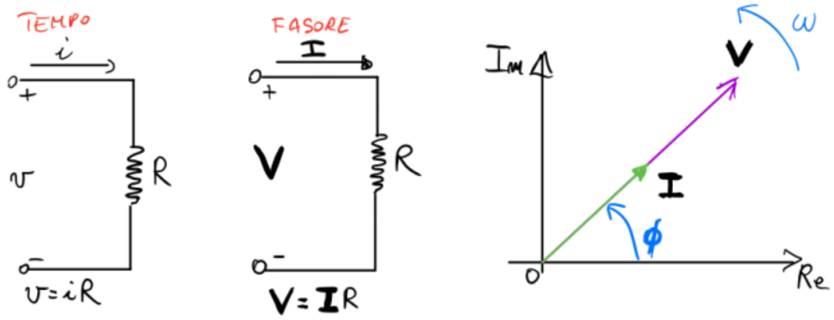
d) $\mathbf{I} = j(5 - j12) \; [A] = 12 + j5 = 13e^{j22.62}$

$r = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13; \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) = 22.62°$

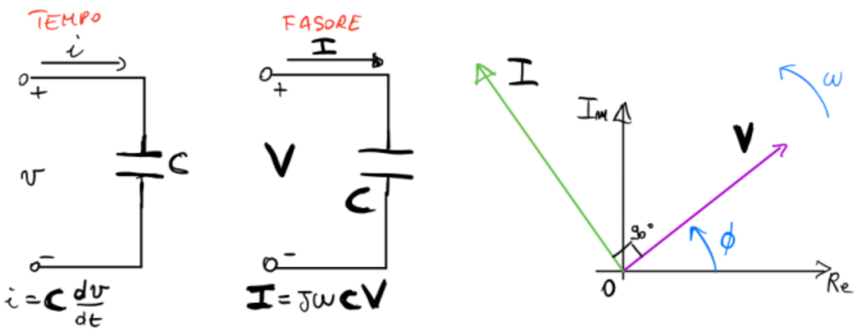
$i(t) = 13\cos(\omega t + 22.62°)$

FASORI = RELAZIONI TRA TENSIONE E CORRENTE PER GLI ELEMENTI CIRCUITALI

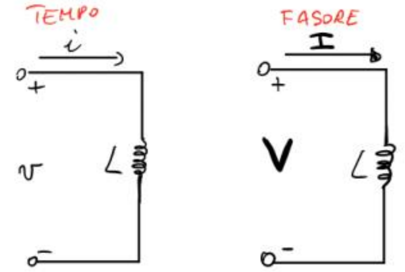
RESISTORE



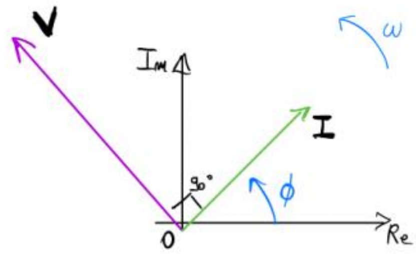
CONDENSATORE



INDUTTORE



$v = L\frac{di}{dt}$ $\qquad$ $\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$



SOMMARIO DELLE RELAZIONI CORRENTE-TENSIONE		
ELEMENTO	**DOMINIO DEL TEMPO**	**DOMINIO DELLA FREQUENZA**
RESISTORE (R)	$v = R \cdot I$	$\mathbf{V} = R\mathbf{I}$
INDUTTORE (L)	$v = L\frac{di}{dt}$	$\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$ $\frac{V}{I} = j\omega L$
CONDENSATORE (C)	$i = C\frac{dv}{dt}$	$\mathbf{I} = j\omega C\mathbf{V}$ $\frac{V}{I} = \frac{1}{j\omega C}$

ESERCIZIO

Abbiamo una tensione $v(t) = 12\cos(60t + 45°)$ applicata ad un induttore da $0.1\,[H]$. Determinare la corrente nell'induttore in regime stazionario.

↳ non varia nel tempo

⇒ SVOLGIMENTO

PER UN INDUTTORE $\mathbf{V} = j\omega L\,\mathbf{I}$; $\omega = 60\left[\frac{rad}{s}\right]$ $\mathbf{V} = 12\angle 45°\,[V]$

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{j\omega L} = \frac{12\angle 45°}{j\,60 \times 0.1} = \frac{\overset{2}{\cancel{12}}\angle 45°}{1\angle 90 \cdot \cancel{6}} = 2\angle 45° - 90°$$

$$= 2\angle -45°\ [A]$$

PASSIAMO AL DOMINIO DEL TEMPO

$$i(t) = 2\cos(60t - 45°)\,[A]$$

ESERCIZIO

$v(t) = 10\cos(100t + 30°)$ APPLICATA SU UN CONDENSATORE DA $50\mu F = 50 \cdot 10^{-6}\,[F]$. $\mathbf{I} = ?$

$\underbrace{\mathbf{I} = j\omega C\,\mathbf{V}}_{\text{PER IL CONDENSATORE}}$, $\omega = 100\left[\frac{rad}{s}\right]$ $\mathbf{V} = 10\angle 30°$

$$\mathbf{I} = 1\angle 90° \cdot 50 \cdot 10^{-6} \cdot 10\angle 30° \cdot 100 = 0.05\angle 120°\ [A]$$

NEL TEMPO

$$i(t) = 5 \cdot 10^{-2}\cos(100t + 120°)\,[A]$$

$\omega = 100$
$\phi = 30°$
$A = 10$

$V = A\angle\phi$
$v = 10\angle 30°$

$I = j\omega C V$

$= j \cdot 100 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 10\angle 30°$

$= 1\angle 90° \cdot 500 \cdot 10^{-6} \cdot 10\angle 30°$

$= 0{,}05\angle 120°$

CONCETTO D'IMPEDENZA

IMPEDENZA = RAPPORTO TRA FASORE TENSIONE V e FASORE CORRENTE I

$$Z = \frac{V}{I} \quad \text{OPPURE} \quad V = Z \cdot I$$

$$Z = \frac{V}{I} = R + jX$$

PER INDUTTORE $X > 0$
PER CONDENSATORE $X < 0$

$R = Re\{Z\}$ = RESISTENZA

$X = Im\{Z\}$ = REATTANZA

$$Z = R + jX = |Z| \angle \sigma$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} \; ; \; \sigma = \tan^{-1}\left(\frac{X}{R}\right)$$

$$R = |Z| \cos\sigma \qquad X = |Z| \sin\sigma$$

L'AMMETTENZA Y È IL RECIPROCO DELL'IMPEDENZA E SI MISURA IN SIEMENS (S)

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{I}{V} = G + jB$$

$$\underbrace{G = \mathrm{Re}\{Y\}}_{\text{CONDUTTANZA}}$$

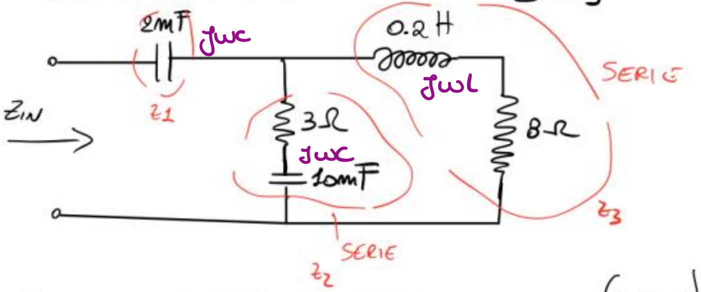
$$\underbrace{B = \mathrm{Im}\{Y\}}_{\text{SUSCETTANZA}}$$

$$|Y| = \sqrt{G^2 + B^2} = \frac{1}{|Z|}$$

$$\theta_Y = \tan^{-1}\left(\frac{B}{G}\right) = -\theta_Z$$

ESERCIZIO

DETERMINARE $R_{\text{EQUIVALENTE}}$. ASSUMERE $\omega = 50 \left[\frac{RAD}{S}\right]$



$$Z_1 = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j50 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = -10j\ \Omega$$

$$Z_3 = 8 + j50 \cdot 0.2 = (8 + 10j)\ \Omega$$

$$Z_2 = 3 + \frac{1}{j \cdot 1 \cdot 10^{-2} \cdot 50} = (3 - 2j)\ \Omega$$

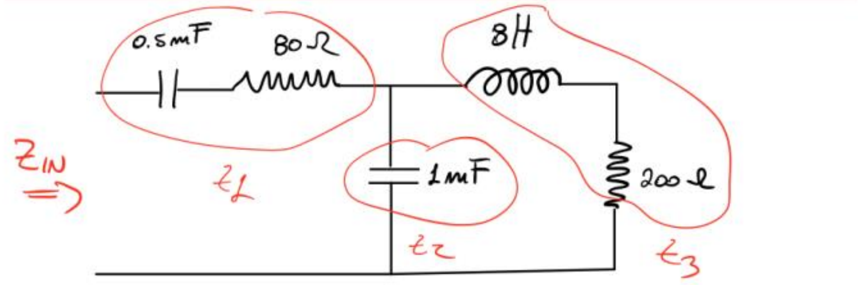
$$Z_{IN} = Z_1 + (Z_2 \parallel Z_3) = -10j + \left(\frac{(8+j10)\cdot(3-j2)}{(8+j10)+(3-j2)} \right) =$$

$$= -j10 + \left(\frac{(8+j10)\cdot(3-j2)}{11+j8} \right) = -j10 + \frac{(24-16j+30j+20)}{11+j8} =$$

$$= -j10 + \left(\frac{(44+14j)\cdot(11-j8)}{(11+j8)\cdot(11-j8)} \right) =$$

$$= -j10 + \frac{484 - j352 + 154j + 112}{11^2+8^2} = \frac{596-198j}{185} =$$

$$= -j10 + \frac{596}{185} - \frac{198j}{185} = 3.22 - j11.07 \; [\Omega]$$



$Z_{IN} = ?$ $\quad \omega = 10 \left[\frac{RAD}{S}\right]$

$$z_1 = \frac{1}{j\omega C} + 80 = \frac{1}{j10\cdot 0{,}5 \cdot 10^{-4}} + 80 = 80 - 200j$$

$$z_2 = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j\cdot 10 \cdot 10^{-3}} = -100j$$

$$z_3 = j\omega L + 200 = j80 + 200$$

$$z_{in} = (z_2 \parallel z_3) + z_1 = \frac{1}{\frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}} + z_1 = \frac{1}{\frac{1}{-100j} + \frac{1}{80j+200}} + 80 - 200j =$$

$$= \frac{80j+200}{100j(80j+200)+1} + 80 - 200j = \frac{800j+200}{-179+20000j} + 80 - 100j =$$

$=$ Da finire

$$Z_1 = \frac{1}{JWC} + 80 = \frac{1}{J10 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 80 - J200 \, [\Omega]$$

$$Z_2 = \frac{1}{JWC} = \frac{1}{J \cdot 10 \cdot 1 \cdot 10^{-3}} = -100 J \, [\Omega]$$

$$Z_3 = 200 + J10 \cdot 8 = 200 + J80 \, \Omega$$

$$Z_{IN} = Z_1 + \left(Z_2 \| Z_3 \right) = 80 - J200 + \left(\frac{-100J \cdot (200 + 80J)}{200 - 20J} \right)$$

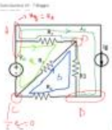
$$= 80 - J200 + \left(\frac{(-20.000 J + 8000) \cdot (200 + 20J)}{(200 - 20J)(200 + 20J)} \right) =$$

$$= 80 - J200 + \frac{2 \cdot 10^6 - 3.84 \cdot 10^6}{200^2 + 20^2 = 40400} =$$

$$= 80 - J200 + 49.50 - 95J = 129.50 - 295J$$

Esercitazione 7

lunedì 7 giugno 2021 13:10



Esercizio n°1 (10 punti)
Dato il circuito in figura, determinare: (1) la potenza assorbita dai resistori, (2) la potenza generata dal generatore ideale di tensione V_g e dal generatore ideale di corrente I_g.
Verificare poi il bilancio energetico.

DATI: V_g = 4 [V], I_g = 1 [A], R_1 = 7 [Ω], R_2 = 4 [Ω], R_3 = 5 [Ω], R_4 = 2 [Ω]

N → 4

R → 6

ANELLI $\underbrace{R-N+1}$ = 3

(2) KCL AI NODI $\underbrace{A \; e \; D}$

$i_c = I_g$ $\quad i_a$ ed i_b 2 KVL a e b

(a) $(i_a - I_g)R_2 + (i_a - i_b)R_3 - V_g = 0$ I

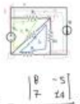
RISOLUZIONE CON METODO ANELLI

(b) $(i_b - I_g)R_1 + i_b R_4 + (i_b - i_a) R_3 = 0$ II

I $\; i_a (R_2 + R_3) + i_b(-R_3) = V_g + I_g R_2$

II $\; i_a(-R_3) + i_b(R_1 + R_4 + R_3) = I_g R_1$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (R_2+R_3) & -R_3 \\ -R_3 & (R_1+R_4+R_3) \end{bmatrix}}_{\hat{R}} \underbrace{\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix}}_{\vec{i}} = \begin{bmatrix} V_g + I_g R_2 \\ I_g \cdot R_1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -5 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$\hat{\Delta}_R = (9 \cdot 14) - 25 = 101$

$$i_a = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -5 \\ 7 & 14 \end{vmatrix}}{101} = \frac{112+35}{101} = \frac{147}{101} = 1.45\,[A] = i_a$$

$i_c = 1\,[A]$

$$i_b = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 8 \\ -5 & 7 \end{vmatrix}}{101} = \frac{63+40}{101} = \frac{103}{101} = 1.02\,[A] = i_b$$

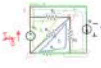
$P_{R_1} = (i_c - i_b)^2 R_1 = 0.02^2 \cdot 7 = 0.003\,[W]$

$P_{R_2} = (i_c - i_a)^2 R_2 = 0.81\,[W]$

$P_{R_3} = (i_b - i_a)^2 \cdot R_3 = 0.92\,[W]$

$P_{R_4} = i_b^2 \cdot R_4 = 1.02^2 \cdot 2 = 2.08\,[W]$

$$\sum_{i=1}^{4} P_{R,i}^{ASS} \cong 3.81\,[W]$$

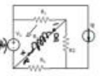


$P_{V_g} = V_g \cdot I_{V_g} = 1.45[A] \cdot 4 = 5.8\,[W]$

$P_{I_g} = I_g \cdot V_{I_g} = 1\,[A] \cdot -1.96\,[V] = -1.96\,[W]$

KVL $\; -V_{I_g} + i_b R_4 - V_g = 0 \Rightarrow V_{I_g} = i_b R_4 - V_g = -1.96\,[V]$

$$\sum P_{gen}^{i} = (5.8 - 1.96)\,[W] = 3.84\,[W]$$



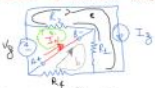
CIRCUITO DEL I ORDINE

DATI → $I_0 = 4\,[A]$

$V_g u(t) = 3\,[V]$

$i_L(t)$ DISEGNARE L'ANDAMENTO DELLA CORRENTE NEL TEMPO

I° STEP



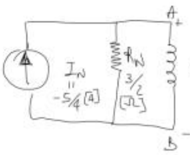
$i_c = I_g$

$$I_N = i_b - i_a = \frac{1}{2} - \frac{7}{4} = \frac{2-7}{4} = -\frac{5}{4}\,[A]$$

(a) $R_2(i_a - I_g) - V_g = 0 \Rightarrow i_a = \dfrac{V_g + R_2 I_g}{R_2 = 4} = \dfrac{7}{4}\,[A]$

(b) $R_1(i_b - I_g) + i_b (R_4) = 0 \Rightarrow i_b = \dfrac{I_g R_1}{R_1 + R_4} = \dfrac{1 \cdot 2}{4} = \dfrac{1}{2}\,[A]$

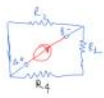
$\tau = \dfrac{R}{L}\,[S]$



$L = 3 \cdot 10^{-3}\,[H]$

$I_N = -5/4\,[A]$

$I_0 = 4\,[A]$



$$(R_1 + R_4) \,||\, R_2 = \frac{6 \cdot 2}{6+2} = \frac{3}{2} \; R_N$$

$$i_L(t) = I_N + [I_0 - I_N] \cdot e^{-t/\tau}$$

CORRENTE MOLTIPLICATIVA → $P_L > 0$ ASSORBITA

$t_0 \to i_L(t) = I_0$

$t_\infty \to i_L(t) = I_N$

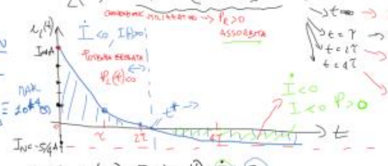
$t = \tau \to i_L(t=\tau) = I_N + \dfrac{[I_0 - I_N]}{2.71} = 0.68\,[A]$

$t = 2\tau \to i_L(t=2\tau) = I_N + \left(\dfrac{[I_0 - I_N]}{e^2}\right) = -5/4 + \dots$

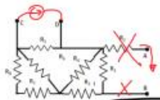
$t = 4\tau \to i_L(4\tau) = I_N + \left(\dfrac{[I_0 - I_N]}{e^4}\right) = -5 \dots$

$e^4 \simeq 54$

$\tau = \dfrac{R_N}{L} = \dfrac{3/2}{3 \cdot 10^{-3}} = 10^{4}\,[s]$



$P_L(t) = V_L(t) \cdot I_L(t) = \underset{>0}{L} \cdot \dot{I}_L(t) \cdot I_L(t)$



Esercizio n° 3 (8 punti)

Determinare la resistenza equivalente R_{AB}, vista ai capi della porta AB, e la resistenza equivalente R_{CD} vista ai capi della porta R_{CD} sapendo che:

R_1 = 4 [Ω], R_2 = 4 [Ω], R_3 = 2 [Ω], R_4 = 5 [Ω], R_5 = 8 [Ω], R_6 = 8 [Ω], R_7 = 3 [Ω], R_8 = 6 [Ω]

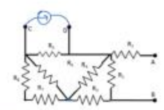
↗ 4 AB 4 CD

CALCOLO PASS.

$R_\alpha = R_8 + R_7 \quad R_\beta = R_\alpha \,||\, R_6 \quad R_\gamma = R_\beta + R_5$

$R_\delta = R_\gamma \,||\, R_4 \quad R_\varepsilon = R_\delta + R_3, \quad R_{ZETA} = R_\varepsilon \,||\, R_1$

$R_{AB} = R_2 + R_{ZETA}$



Esercizio n° 3 (8 punti)

Determinare la resistenza equivalente R_{AB}, vista ai capi della porta AB, e la resistenza equivalente R_{CD} vista ai capi della porta R_{CD} sapendo che:

R_1 = 4 [Ω], R_2 = 4 [Ω], R_3 = 2 [Ω], R_4 = 5 [Ω], R_5 = 8 [Ω], R_6 = 8 [Ω], R_7 = 3 [Ω], R_8 = 6 [Ω]

$R_\alpha = R_1 + R_3 \quad R_\beta = R_\alpha \,||\, R_4 = \dfrac{R_\alpha R_4}{R_\alpha + R_4} \quad R_\varepsilon = R_\beta + R_\delta$

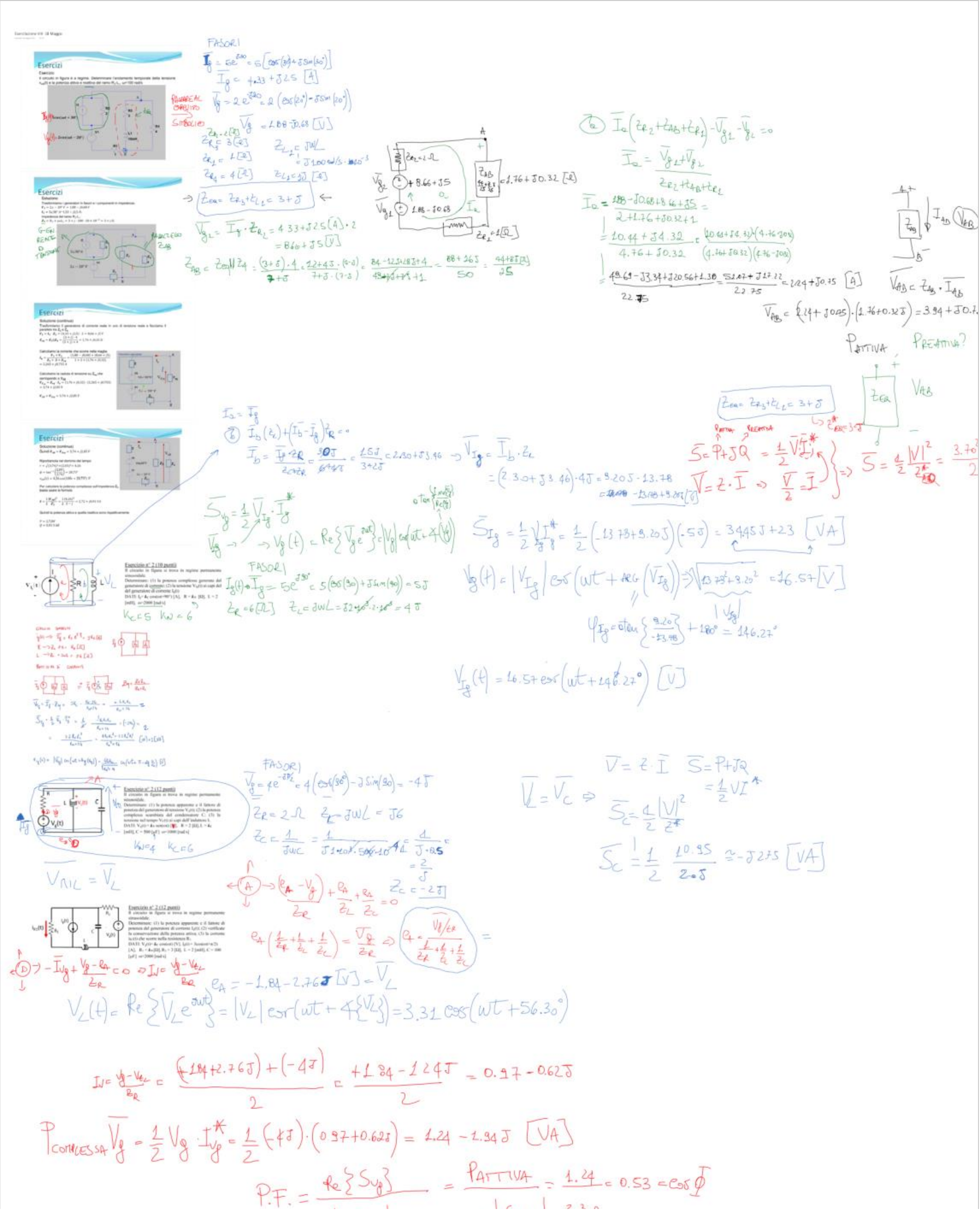
$R_\gamma = R_8 + R_7 \quad R_\delta = R_\gamma \,||\, R_6 \quad R_{AB} = R_\varepsilon \,||\, R_5$

$$\frac{5.25}{7.34} \overset{0.71}{=} -0.54 \; [A]$$

$$+0.09 \cong -1.25 + 0.09 \cong -1.16 \; [A]$$

Esercitazione 8

lunedì 7 giugno 2021 13:10



$I_{COMPLESSA}$ ...

$$P.F. = \frac{Re\{S_{V_g}\}}{|S_{V_g}| \rightarrow P_{APPARENTE}} = \frac{P_{ATTIVA}}{|S_{V_g}|} = \frac{1.24}{2.30} = 0.53 = \cos\phi$$

$$1 + J1.32 - 0.24 = \boxed{3.70 + J2.03}\ [V]$$

$$\bar{S} = \bar{P} + J\bar{Q}$$

$$P_{ATTIVA} = Re\{\bar{S}\} = 2.67\ [W]$$

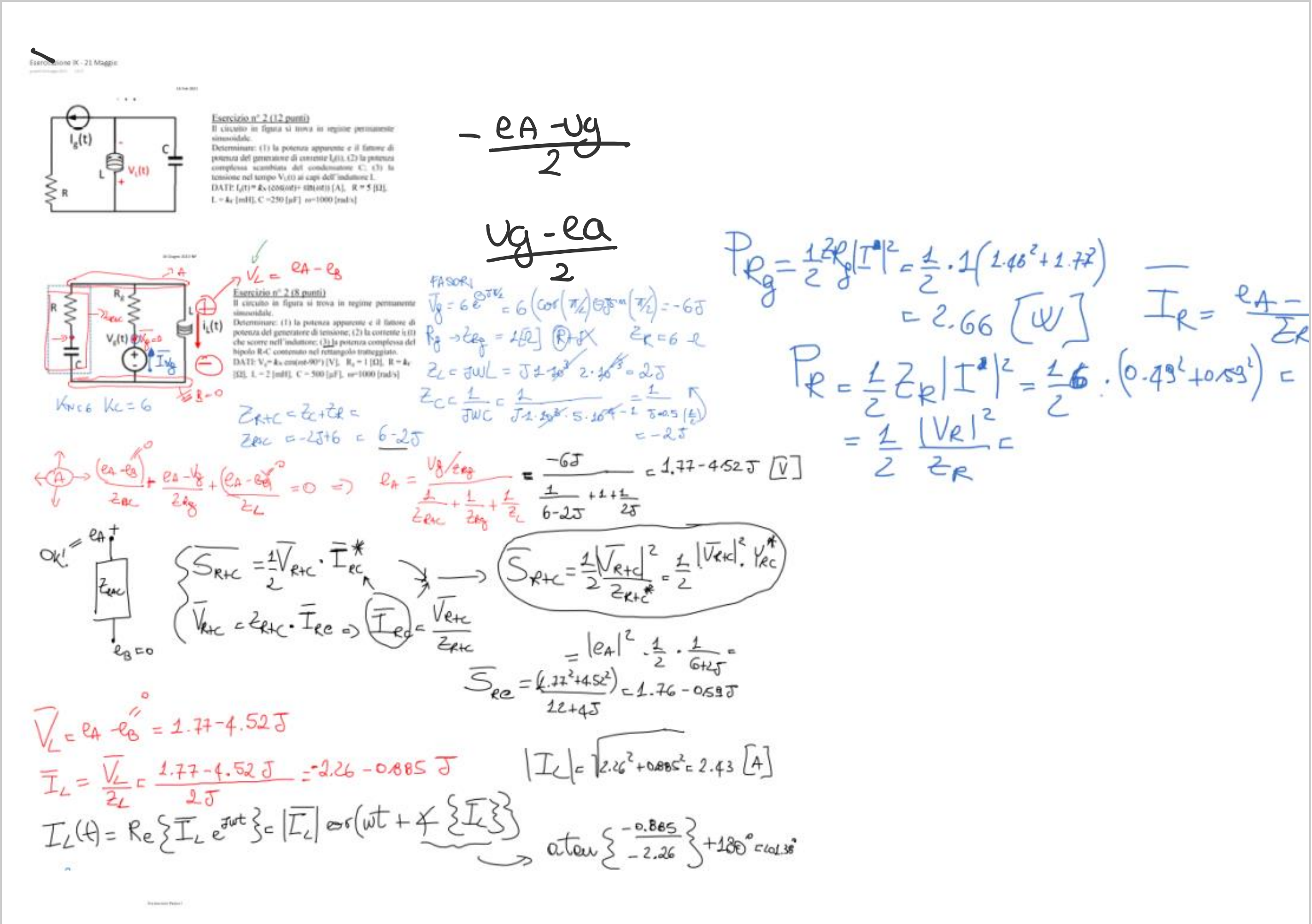
$$\frac{\ldots + 2.03^2}{(3-J)} = \frac{(6.85 + 2.06)}{3-J} \cdot \frac{(3+J)}{(3+J)} = \frac{20.55 + 6.18 + 6.85J + 2.06J}{9+1} = \frac{26.73 + J8.91}{10} = 2.67 + 0.89J\ [VA]$$

$P_{REATTIVA}$ [VAR]

0.89

Esercitazione 9

lunedì 7 giugno 2021 13:11



$$\frac{e_B}{c} = \frac{1.77 \cdot 4.52 J}{6 - 2J} = 0.49 - 0.59 J$$

1.76 [W]

$$I_L(t) = \mathrm{Re}\{\bar{I}_L e^{j\omega t}\} = |\bar{I}_L| \cos(\omega t + \underbrace{\measuredangle \bar{I}_L}) \rightarrow \mathrm{atan}\left\{\frac{-0.885}{-2.26}\right\} + 180° = 201.38°$$

$$I_L(t) = 2.43 \cos(\omega t + 201.38°) \; [A]$$

$$\frac{\bar{V}_g - e_A}{Z_{R_g}} - \bar{I}_{V_g} = 0 \Rightarrow \bar{I}_{V_g} = \frac{\bar{V}_g - e_A}{Z_{R_g}} = \frac{-6J - 1.77 + 4.52J}{1} = -1.48J - 1.77 \; [A]$$

$$\bar{S}_{V_g} = \frac{1}{2} \bar{V}_g \cdot \bar{I}_{V_g}^* = \frac{1}{2} \cdot (-6J) \cdot (-1.77 + 1.48J) = 4.44 + 5.31J \; [VA]$$

$P + JQ$

$$P.F. = \cos\phi = \frac{P}{|\bar{S}_{V_g}|} = \frac{4.44}{[6.92]} = 0.64 \quad \rightarrow P = 4.44 \; [W]$$

$Q = 5.31$ [VAR]

$|6.92|$

$$P(t)_{V_g} = P_{APP}(\cos(\phi)) + P_{APP}(\cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I))$$

$$= P_{APP}(\cos(\varphi_V - \varphi_I)) + P_{APP}(\cos(2\omega t + 309°))$$

$$\varphi_V = \mathrm{atan}\left\{\frac{\mathrm{Im}\{-6\}}{\mathrm{Re}\{0\}}\right\} = \pi/2$$

$$\varphi_I = \mathrm{atan}\left\{\frac{-1.48}{-1.77}\right\} + 180° = 309$$

$$\varphi_V + \varphi_I = \varphi_V - \varphi_I + 2\varphi_I$$

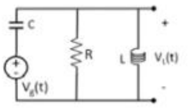
-0.77

VERIFICA CONSERVAZIONE POTENZA ATTIVA

$$\mathrm{Re}\{\bar{S}_{V_g}\} = \mathrm{Re}\{\bar{S}_{R_g}\} + \mathrm{Re}\{\bar{S}_R\} =$$

$$4.44 \; [W] \simeq 4.43 \; [W]$$

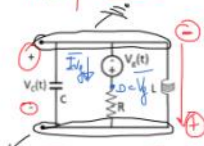
$= 96$



Esercizio n° 2 (8 punti)
Il circuito in figura si trova in regime permanente sinusoidale.
Determinare: (1) la potenza apparente e il fattore di potenza del generatore di tensione; (2) la tensione $V_L(t)$ ai capi del dell'induttore L, (3) verificate la conservazione della potenza attiva
DATI: $V_g = k_C \cos(\omega t) + 2 \sin(\omega t)$ [V], $R = k_N$ [Ω], L = 2 [mH], C = 100 [μF] ω=2000 [rad/s]

$K_N = 4 \quad K_C = 6$

V_{MILL}



Esercizio n° 2 (8 punti)
Il circuito in figura si trova in regime permanente sinusoidale.
Determinare: (1) la potenza complessa del generatore di tensione; (2) la tensione $V_C(t)$ ai capi del del condensatore; (3) verificate la conservazione della potenza reattiva
DATI: $V_g = 2\cos(\omega t) - k_C \sin(\omega t)$ [V], R = 2 [Ω], L = k_N [mH], C = 500 [μF] ω=1000 [rad/s]

FASORI

$$\bar{V}_g = 2 - 6 e^{-j\pi/2} = 2 - 6\left[\cos(\pi/2) - j\sin(\pi/2)\right]$$

$$\bar{V}_g = 2 + 6j$$

$$Z_R = 2 [\Omega]$$

$$Z_L = j\omega L = j \cdot \cancel{10^3} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \cancel{10^{-3}} = 4j$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j \cdot 1 \cdot \cancel{10^3} \cdot 5 \cdot \cancel{10^{-4}}} = \frac{2}{j} = -2j$$

$$\bar{V}_{MIL} = -\bar{V}_C = \frac{\bar{V}_g / Z_R}{\frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_L}} = \frac{1+3j}{\frac{1}{-2j} + 0.5 + \frac{1}{4j}} = 4 + 4j$$

$$\bar{V}_C = -\bar{V}_{MIL} = -4 - 4j \rightarrow V_C(t) = \mathrm{Re}\{\bar{V}_C e^{j\omega t}\} = |V_C| \cos(\omega t + \measuredangle\{\bar{V}_C\})$$

$$V_C(t) = 5.65 \cos(\omega t + 225°)$$

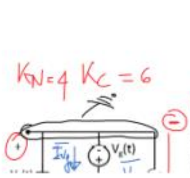
$$|V_C| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 5.65 [V]$$

$$\measuredangle \bar{V}_C = \mathrm{atan}\left\{\frac{\mathrm{Im}\{\bar{V}_C\}}{\mathrm{Re}\{\bar{V}_C\}}\right\} =$$

$$\measuredangle V_C = \mathrm{atan}\left\{\frac{-4}{-4}\right\} + 180° = 225°$$

$K_N = 4 \quad K_C = 6$

V_{MILL}



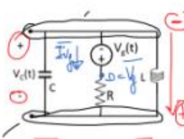
Esercizio n° 2 (8 punti)
Il circuito in figura si trova in regime permanente sinusoidale.
Determinare: (1) la potenza complessa del generatore

FASORI

$$\bar{V}_g = 2 - 6 e^{-j\pi/2} = 2 - 6\left[\cos(\pi/2) - j\sin(\pi/2)\right]$$

$$\bar{V}_g = 2 + 6j$$

$$Z_L = j\omega L = j \cdot \cancel{10^3} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \cancel{10^{-3}} = 4j$$



Esercizio n° 2 (8 punti)

Il circuito in figura si trova in regime permanente sinusoidale.

Determinare: (1) la potenza complessa del generatore di tensione; (2) la tensione $V_C(t)$ ai capi del del condensatore; (3) verificate la conservazione della potenza reattiva

DATI: $V_g = 2\cos(\omega t) + k_C \sin(\omega t)$ [V], $R = 2$ [Ω], $L = k_N$ [mH], $C = 500$ [μF] $\omega = 1000$ [rad/s]

$\overline{V}_g = 2 + 6J$ $\quad Z_L = J\omega L = J \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 4J$

$Z_R = 2 [\Omega]$ $\quad Z_C = \frac{1}{J\omega C} = \frac{1}{J \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = \frac{2}{J} = -2J$

$$\overline{V}_{M/L} = -\overline{V}_C = \frac{\overline{V}_g / R}{\frac{1}{Z_C} + \frac{1}{R_R} + \frac{1}{Z_L}} = \frac{1+3J}{\frac{1}{-2J} + 0{,}5 + \frac{1}{4J}} = 4 + 4J$$

$$\overline{S}_{V_g} = \frac{1}{2} V_g (\overline{I}_{V_g})^* \qquad -\overline{I}_{V_g} + \frac{e_D - V_M}{Z_R} = 0 \rightarrow \overline{I}_{V_g} = \frac{1+3J-2-2J}{1} = -1 + J \; [A]$$

$$\overline{S}_{V_g} = \frac{1}{2} (2+6J) \cdot (-1-J) = \frac{-2-2J-6J+6}{2} = +2 - 4J$$

$$\overline{S}_{V_g} = P + JQ$$

$P = 2 [W]$

$Q = -4 [VAR]$

$$\overline{S}_{Z_C} = \frac{1}{2} \frac{|V_{Z_C}|^2}{Z_C^*} = \frac{1}{2} \frac{|V_{M/L}|^2}{Z_C^*} = \frac{16+16}{+4J} = -8J$$

$$\overline{S}_{Z_L} = \frac{1}{2} |V_{Z_L}|^2 / Z_L^* = \frac{1}{2} \frac{|V_{M/L}|^2}{Z_L^*} = \frac{32}{2 \cdot -4J} = -\frac{4}{J}\frac{J}{J} = +4J$$

$$I_M \{\overline{S}_{V_g}\} = I_M \{\overline{S}_{Z_C}\} + I_M \{\overline{S}_{Z_L}\} =$$

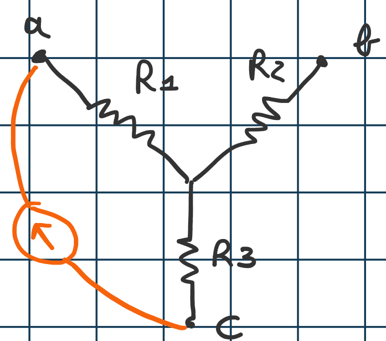
$$-4 [VAR] = -8 [VAR] + 4 [VAR] = -4 [VAR]$$

Circuiti a stella

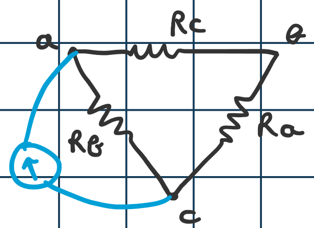
martedì 27 aprile 2021 15:43

Per fare in modo che due circuiti siano equivalenti, basta collegare gli estremi e intermezzare un generatore e fare l'equivalenza delle resistenze

1)

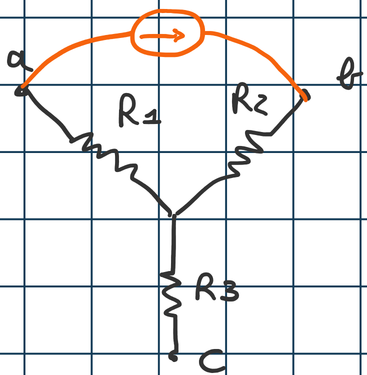


$R_{ac} = R_1 + R_3$

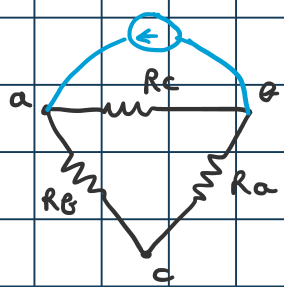


$$R_{ac} = R_b \,//\, (R_a + R_c) = \frac{R_a R_b + R_b R_c}{R_a + R_b + R_c}$$

2)

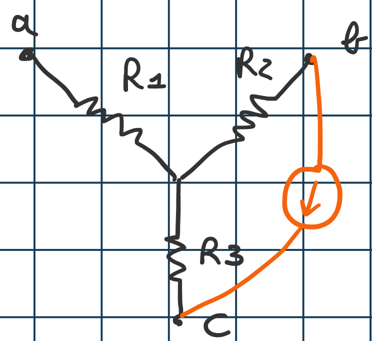


$R_{ab} = R_1 + R_2$

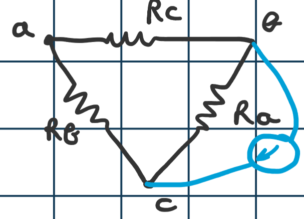


$$R_{ab} = R_c \,//\, (R_a + R_b) = \frac{R_c R_a + R_b R_c}{R_a + R_b + R_c}$$

3)



$R_{bc} = R_2 + R_3$



$$R_{bc} = R_a \,//\, (R_b + R_c) = \frac{R_a R_b + R_c R_a}{R_a + R_b + R_c}$$

In conclusione: $R_a = \underline{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$

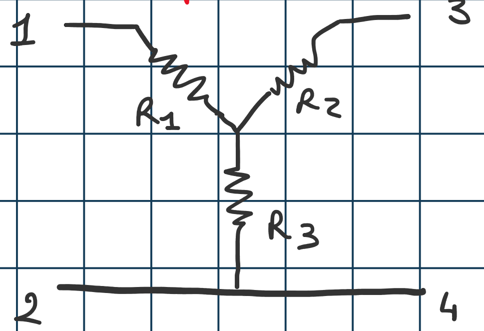
In conclusione:

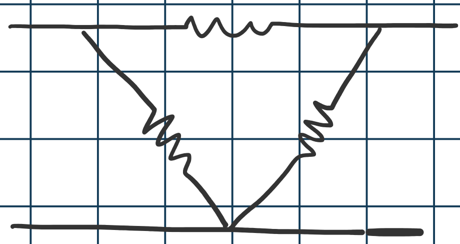
$$R_a = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_1}$$

$$R_b = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_2}$$

$$R_c = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_3}$$

esempio:

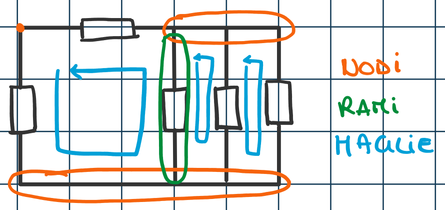




Esercizi leggi di Kirchhoff

giovedì 10 giugno 2021 13:05

Schema e leggi:



Ramo → presenta un singolo elemento

Nodo → punto di incrocio / connessione fra più rami

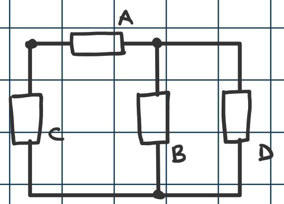
Maglia → percorso chiuso di un circuito

Serie → due elementi sono in serie se condividono un nodo in maniera esclusiva.

Due elementi in serie sono attraversati dalla stessa corrente

Parallelo → due elementi sono in parallelo se condividono una coppia di nodi.

Due elementi in parallelo sono attraversati dalla stessa tensione



In questo caso si hanno tre nodi. Inoltre posso fare B // D e A ⊥ C

KCL → la somma delle correnti entranti in un nodo è zero.

Ricorda $I = \frac{V}{R}$

KVL → la somma delle tensioni lungo un percorso chiuso / maglia è zero

(1)

$V_4 = 7V$

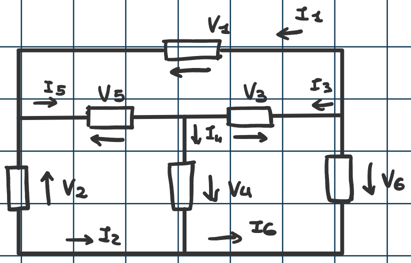
$V_5 = 9V$

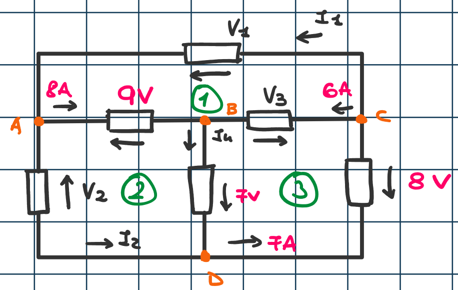
$V_6 = 8V$

$I_3 = 6A$

$I_5 = 8A$

$I_6 = 7A$





Applico la KVL:

Applico la KVL:

(1) $V_1 - 9V + V_3 = 0 \rightarrow V_1 - 9V - 1V = 0 \Rightarrow V_1 = 10V$

(2) $9V - V_2 - 7V = 0 \Rightarrow V_2 = 2V$

(3) $V_3 + 8V - 7V = 0 \Rightarrow V_3 = -1V$

Applico la KCL:

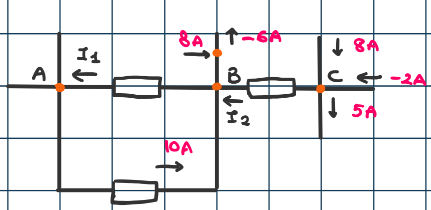
A $I_1 - 8A - I_2 = 0 \rightarrow I_1 - 8A + 7A = 0 \Rightarrow I_1 = 1A$

B $6A + 8A - I_4 = 0 \Rightarrow I_4 = 14A$

C $-I_1 - 6A + 7A = 0 \Rightarrow I_1 = 1A$

D $I_4 + I_2 - 7A = 0 \rightarrow 14A + I_2 - 7A = 0 \Rightarrow I_2 = -7A$

(2)



Applico la KCL:

A Mi manca l'uscita

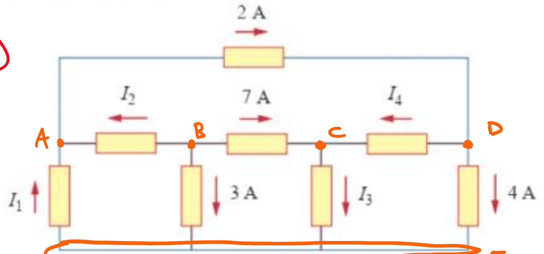
B Questo nodo è più complesso

$I_e - I_d - I_1 + I_2 + I_f = 0 \Rightarrow I_1 = I_2 + I_f + I_e - I_d = 25A$

C $8A - 2A - 5A - I_2 = 0 \Rightarrow I_2 = 1A$

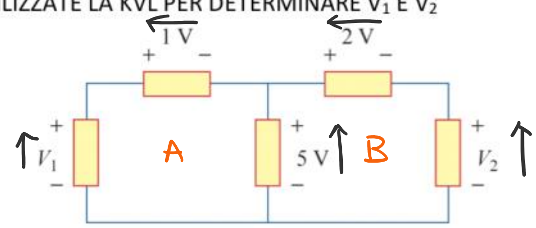
CHE TAGLI I RAMI DEL CIRCUITO -> Tagliate il ramo di una corrente incognita e rami con correnti note

(1)



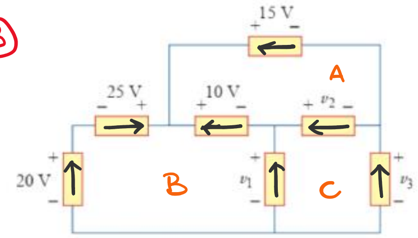
UTILIZZATE LA KVL PER DETERMINARE V_1 E V_2

(2)



UTILIZZATE LA KVL PER DETERMINARE V_1, V_2 E V_3

(3)



(1)

(A) $-2A + I_2 + I_1 = 0$

$I_1 = 2A - I_2 = 12A$

(B) $-I_2 - 7A - 3A = 0$

$I_2 = -10A$

(C) $7A + I_4 - I_3 = 0$

$I_3 = 5A$

(D) $-I_4 - 4A + 2A = 0$

$I_4 = -2A$

(2) (A) $V_1 - 1V - 5V = 0 \Rightarrow V_1 = 6V$

(B) $5V - 2V - V_2 = 0 \Rightarrow V_2 = 3V$

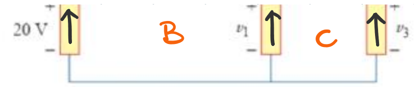
TOT: $6V - 1V - 2V - 3V = 0$

(3) (A) $10V - 15V + V_2 = 0 \Rightarrow V_2 = 5V$

(B) $20V + 25V - 10V - V_1 = 0 \Rightarrow V_1 = 35V$

(C) $V_1 - V_2 - V_3 = 0 \Rightarrow V_3 = 30V$

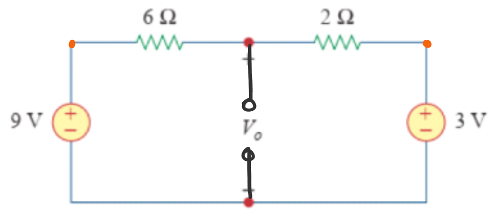
TOT: $20V + 25V - 10V - 5V - 30V = 0$



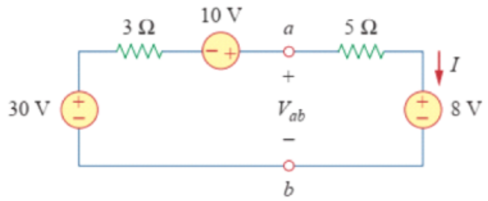
$tot: \ 20V + 25V - 10V - 5V - 30V = 0$

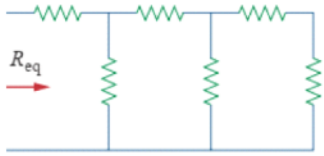
DETERMINARE V_0
NOTA: LA KVL VALE PER UN QUALSIASI PERCORSO CHIUSO CHE
PASSI PER DEI NODI DEL CIRCUITO

Nuova sezione 1 Pagina 4



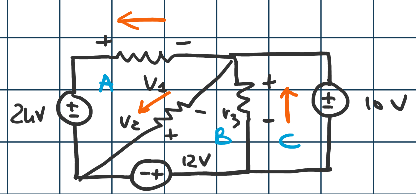
UTILIZZATE LA KVL PER DETERMINARE V_{ab} E I





Nuova sezione 1 Pagina 5

3



conv. dei generatori

A $\quad 24V - V_1 + V_2 = 0 \rightarrow V_1 = 2V$

B $\quad V_2 + 12V + V_3 = 0 \rightarrow V_2 = -22V$

C $\quad -V_3 + 10V = 0 \rightarrow V_3 = 10V$

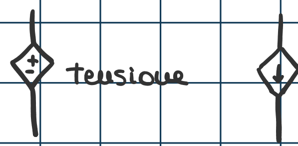
Esercizi sui generatori

giovedì 10 giugno 2021 13:23

Schema e formule:

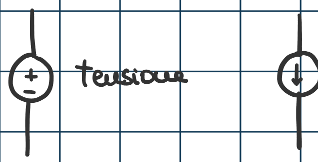
Generatore dipendente → la tensione (o corrente) di un generatore dipendente è controllata da un'altra tensione (o corrente)

SIMBOLO:



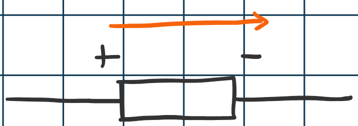
Generatore indipendente → la tensione (o corrente) di un generatore indipendente non è controllata da un'altra tensione (o corrente) ma rimane costante a quella specificata

SIMBOLO:



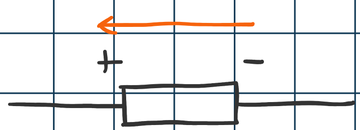
Convenzione degli utilizzatori

La corrente entra dal morsetto positivo ed esce da quello negativo



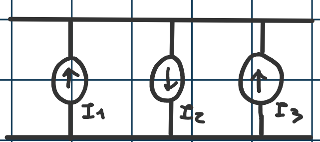
Convenzione dei generatori

La corrente entra dal morsetto negativo ed esce da quello positivo



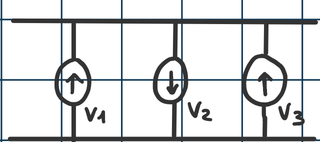
Parallelo di generatori:

CORRENTE



$I = I_1 - I_2 + I_3$

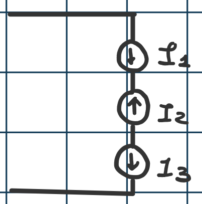
TENSIONE



$$V = \frac{1}{\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} + \frac{1}{V_3}}$$

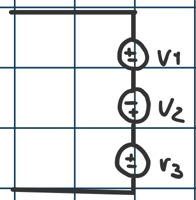
Serie di generatori:

CORRENTE



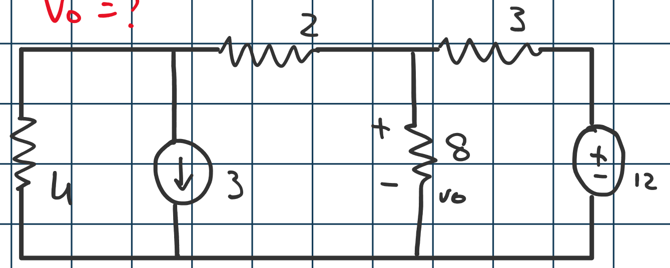
$$I = \frac{1}{\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} + \frac{1}{I_3}}$$

TENSIONE

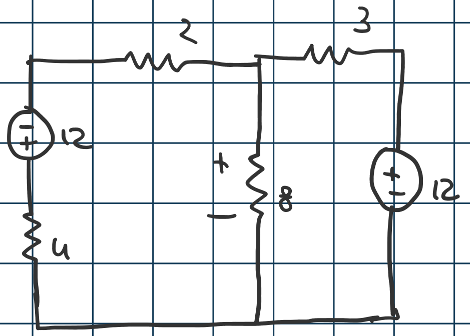


$$V = V_1 - V_2 + V_3$$

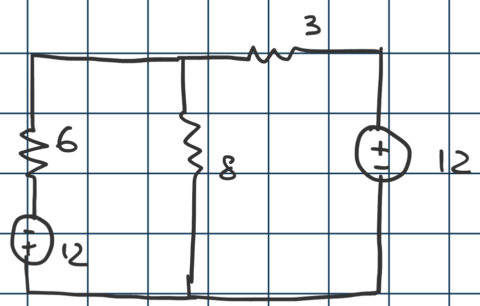
1) $V_0 = ?$

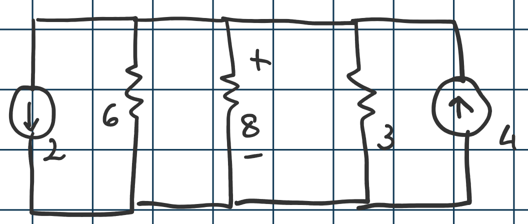


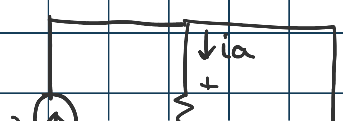
$\Downarrow$

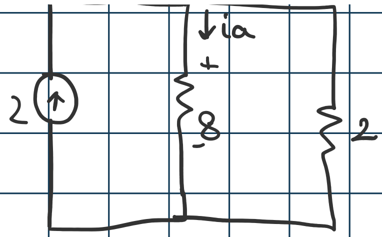


$\Downarrow$





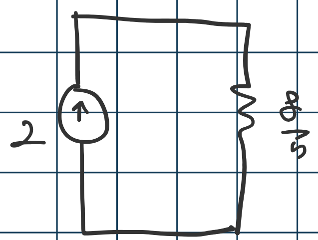




$$i_a = \frac{2}{8+2} \cdot 2 = \frac{2}{5}$$

$$V_o = \frac{2}{5} \cdot 8 = 3{,}2$$

oppure



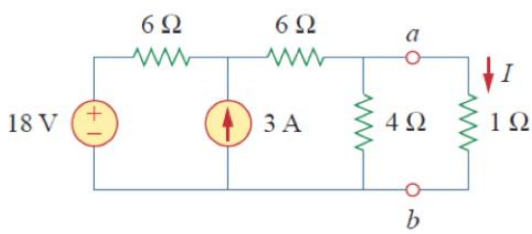
$$V_o = i \cdot R = 2 \cdot \frac{8}{5} = 3{,}2\,V$$

Teorema di Thevenin

Esercizio

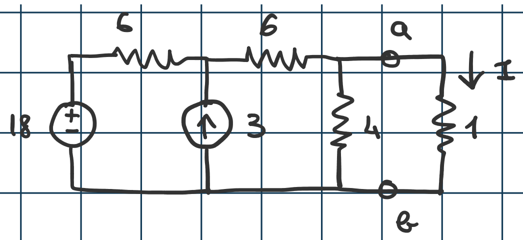
Determinare l'equivalente alla Thevenin del circuito in figura ai terminali *ab*.

Quindi calcolare I

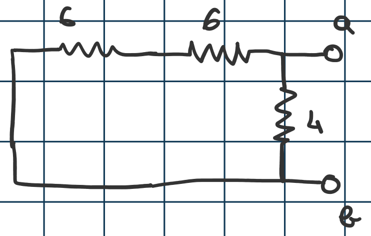


Soluzione

$V_{Th} = 9$ V, $R_{Th} = 3\ \Omega$, $I = 2.25$ A.

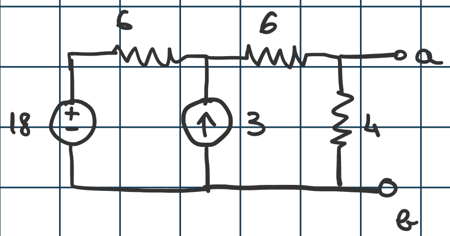


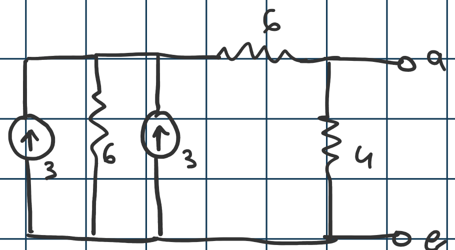
Calcolo R_{TH}

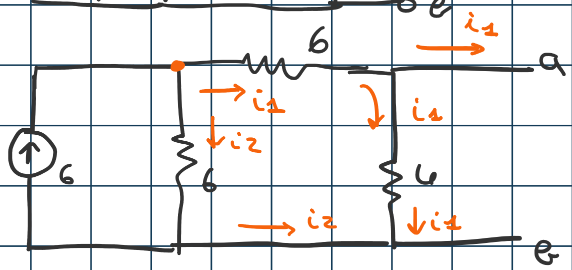


$$R_{TH} = \frac{1}{\frac{1}{12} + \frac{1}{4}} = 3\ \Omega$$

Calcolo V_{TH}





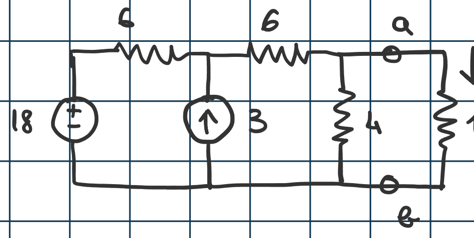


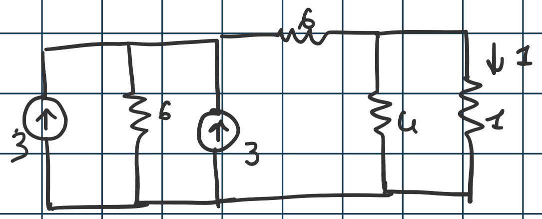
$$i_1 = \frac{6}{6+6+4} \cdot 6 = 2{,}25\ A$$

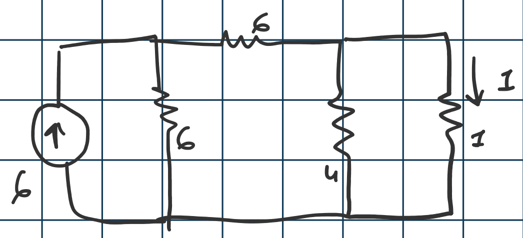
$$V_{TH} = i_1 \cdot R = 4 \cdot 2{,}25 = 9$$

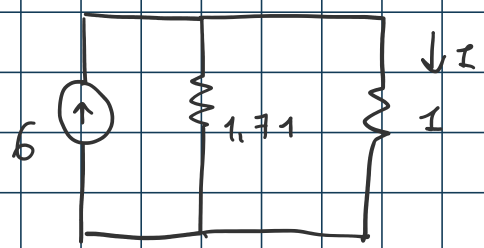
6 6 a $I = i_1 = 2{,}25\ A$

$I = i_L = 2{,}25\ A$

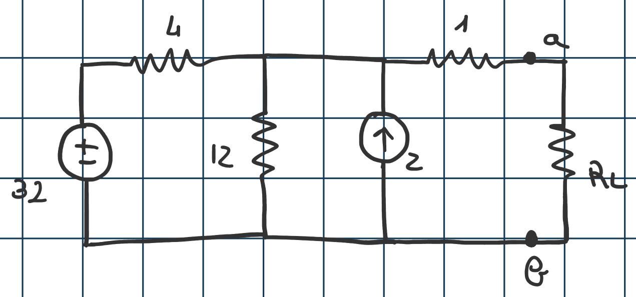








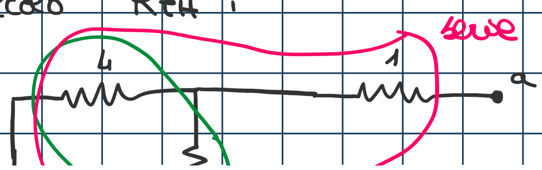
$$I = \frac{1{,}71}{2{,}71}$$

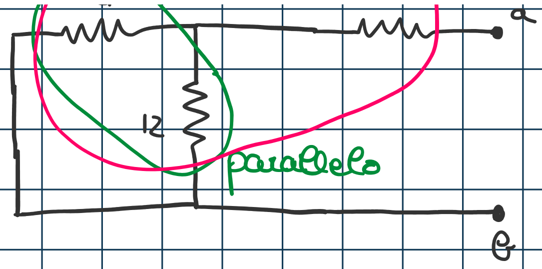


Calcolare l'equivalente alla Thevenin

↳ = generatore di tensione in serie con una resistenza

Calcolo R_{TH} :

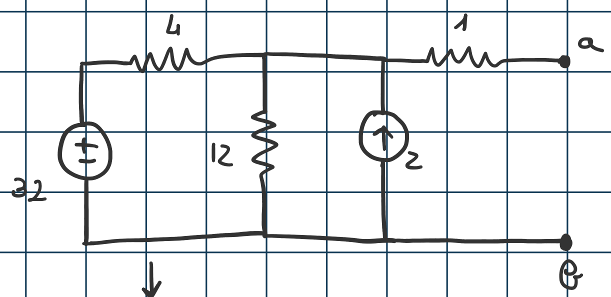


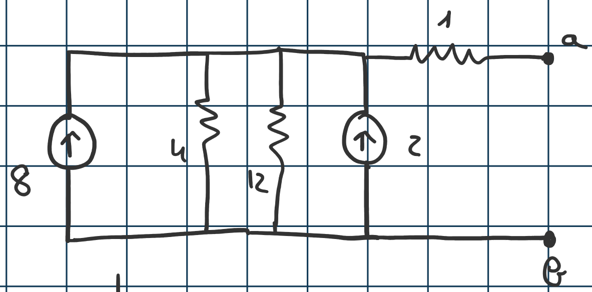


$$R_1 = \frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}} = 3$$

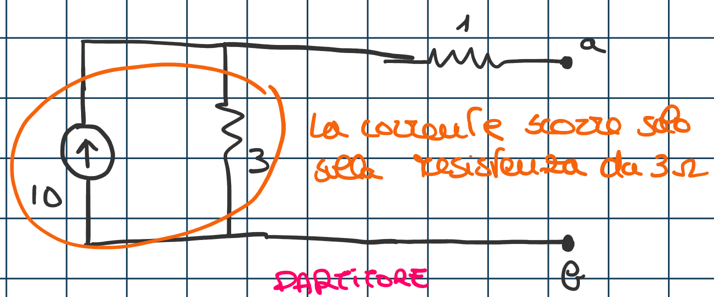
$$R_{TH} = 1+3 = 4\ \Omega$$

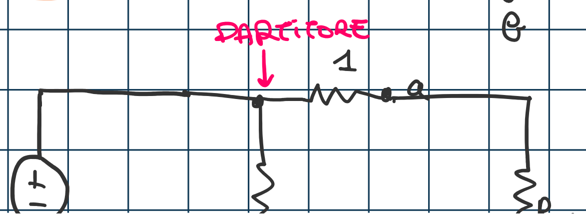
Devo calcolare ora V_{TH}. Posso procedere semplificando il circuito attraverso la trasformazione dei generatori

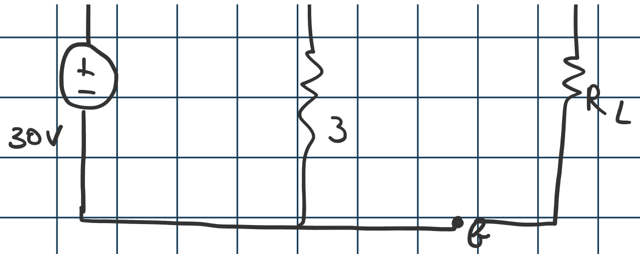




$$I = \frac{V}{R} \Rightarrow V = I \cdot R$$







La potenza sulla resistenza R_L si misura come

$$I = \frac{V}{R}$$

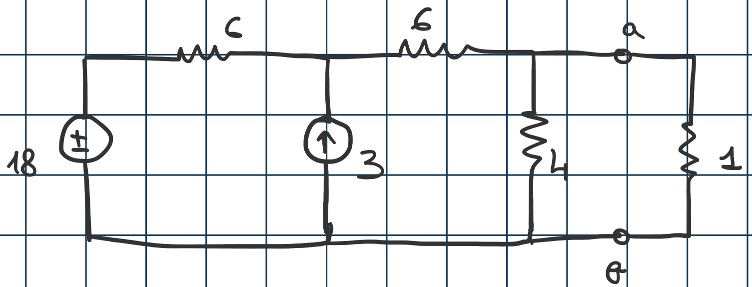
$$P = I \cdot V = R \cdot I^2$$

Dunque ho che $V_{TH} = 30$

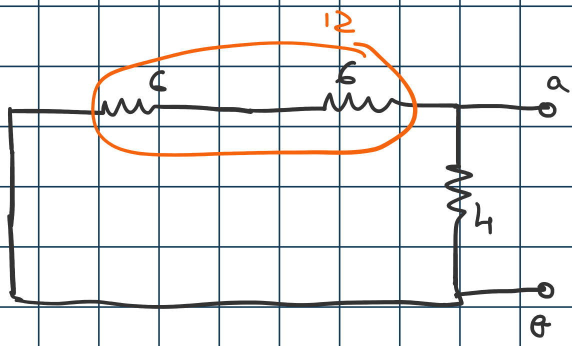
Calcolo la corrente che attraversa R_L

$$i_B = \frac{3}{3+1+6} \cdot V_{TH} = 3A$$

$$P = R \cdot I^2 = 9 \cdot 6 = 56W$$



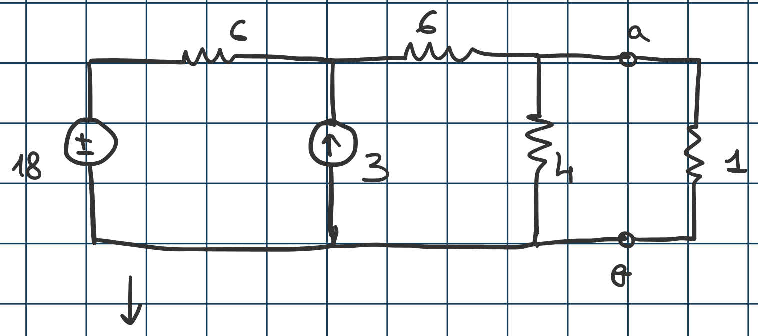
Calcolo R_{TH}

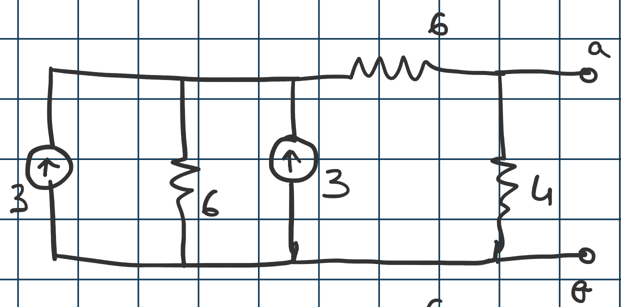


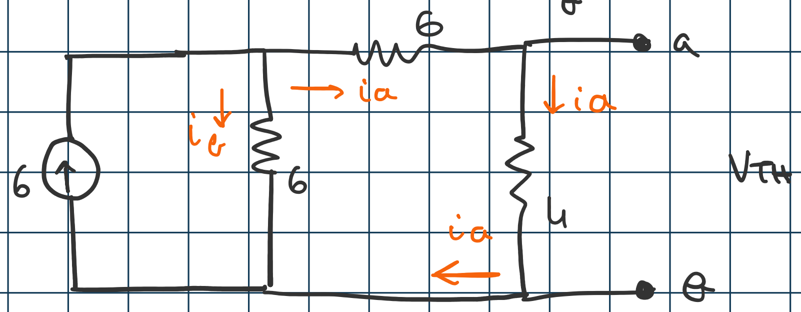
$$R_{TH} = \frac{1}{\;} = 3\,\Omega$$

$$R_{TH} = \frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}} = 3\,\Omega$$

Calcolo V_{TH}:



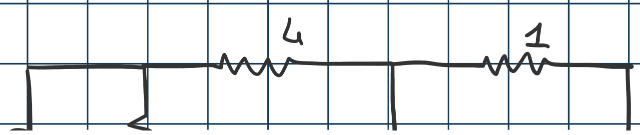


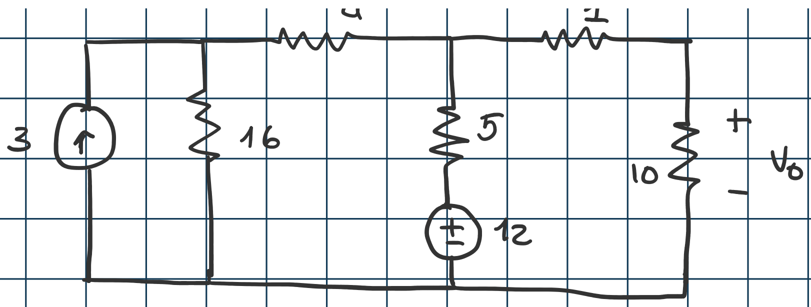


$$i_a = \frac{6}{16} \cdot 6 = 2{,}25\ A$$

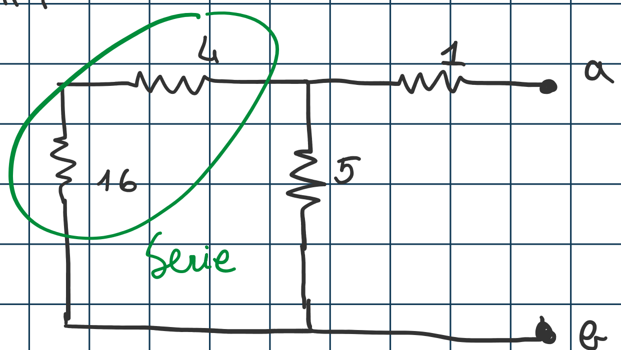
$$V_{TH} = I \cdot R_{4\Omega} = 9\,V$$

In questo caso mi devo calcolare la corrente che scorre nel ramo da $4\,\Omega$ al fine di ottenere V_{TH} che è la stessa ai capi della resistenza da $4\,\Omega$.





R_{TH} :

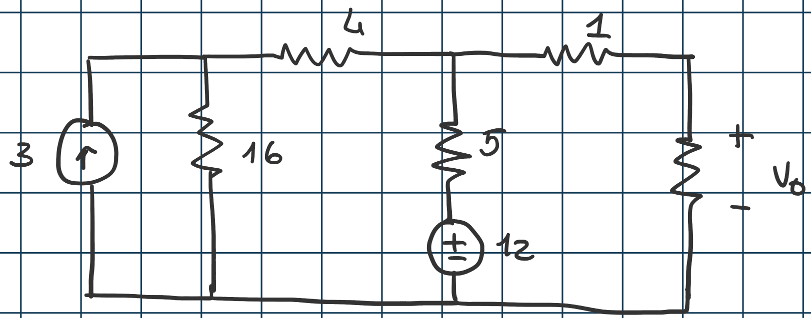


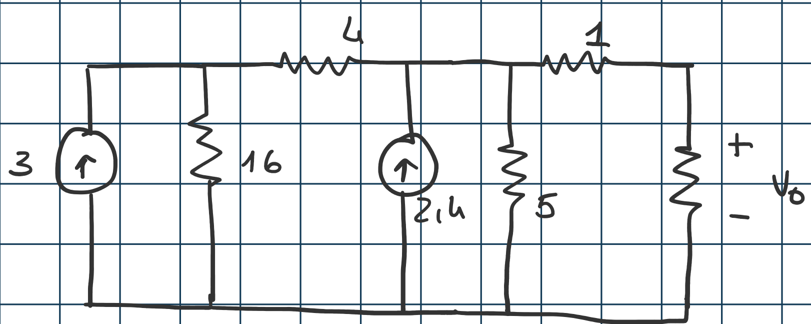
$R_1 = 20$

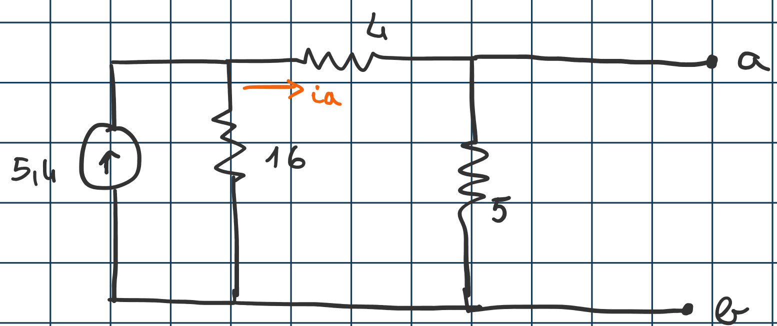
$R_2 = \dfrac{1}{\frac{1}{20} + \frac{1}{5}} = 4$

$\boxed{R_{TH} = 4 + 1 = 5\ \Omega}$

Semplifico :







$$i_a = 5,4 \frac{16}{16+4+5} = 5,76$$

$$V_{TH} = I \cdot R =$$

Esercizi potenza dissipata

venerdì 11 giugno 2021 10:56

Schema e formule:

$I = \frac{V}{R}$ CORRENTE

$P_R = V_R \cdot I$ POTENZA DISSIPATA

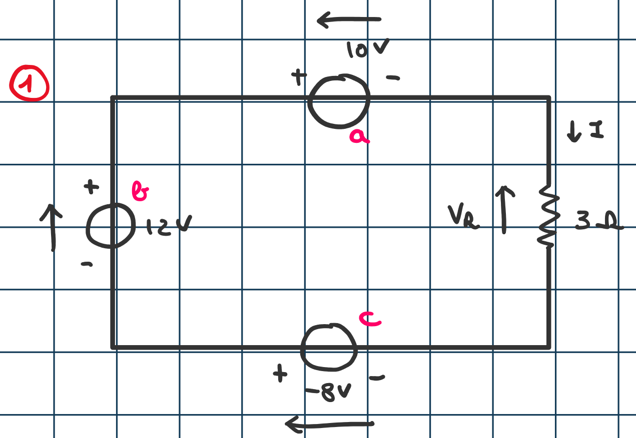
↳ R → resistenza

Principio di conservazione dell'energia:

In un circuito si ha che la somma delle potenze (assorbite/erogate) è ZERO

Energia → $E = p \cdot t$ (poiché $p = \frac{E}{t}$)

①



Applico la KVL:

$-8V + 12V - 10V - V_R = 0$

$V_R = -8V + 12V - 10V = -6V$

Poiché $I = \frac{V_R}{R} = \frac{-6V}{3\Omega} = -2A$

$P_R = V_R \cdot I = -2A \cdot (-6A) = 12W$

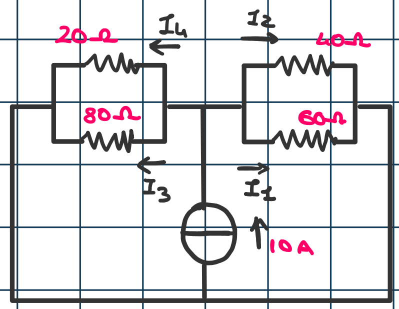
Calcolo le singole potenze:

ⓐ $P = V \cdot I = 10\,(+2A) = 20W$

ⓑ $P = V \cdot I = 12\,(-2A) = -24W$

ⓒ $P = V \cdot I = -8 \cdot (-2A) = 16W$

2



Applico la KCL:

$10A = I_4 + I_3 + I_2 + I_1$

Semplifico il circuito calcolando le resistenze in parallelo:

$R_{1,2} = 20\Omega \,//\, 80\Omega =$

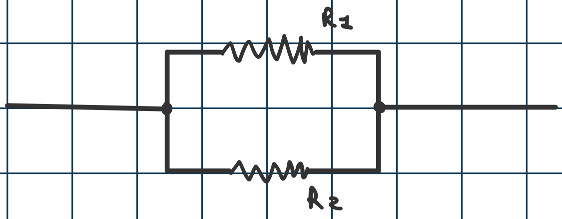
Esercizi resistenza equivalente

venerdì 11 giugno 2021 12:52

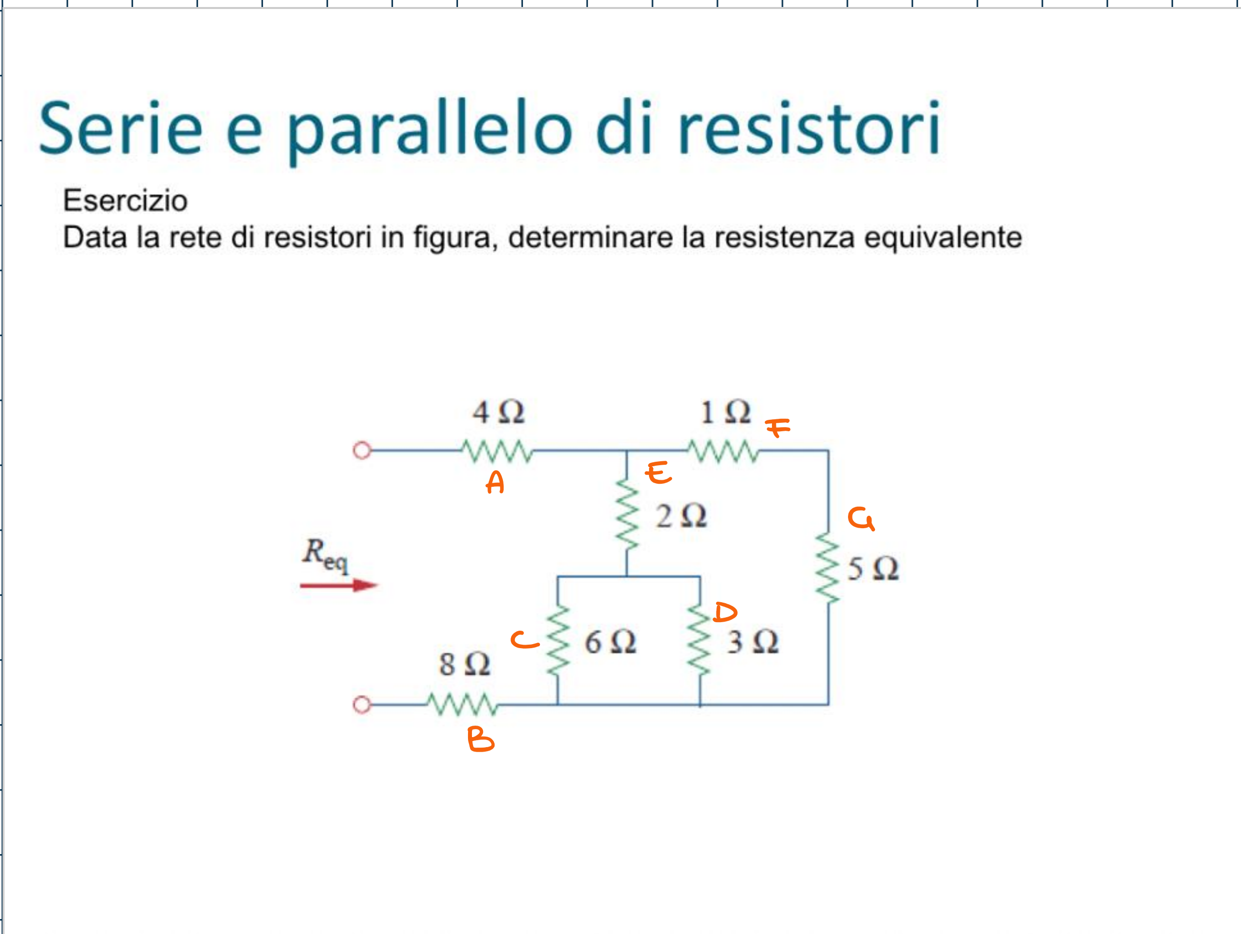
RESISTENZE IN SERIE

$$R = R_1 + R_2$$

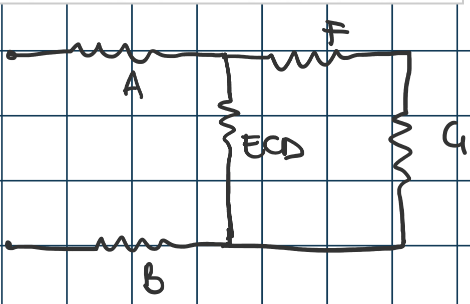
RESISTENZE IN PARALLELO



$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

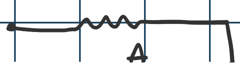


$$R_{CD} = \frac{1}{\frac{1}{C} + \frac{1}{D}} = \frac{1}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = 2$$

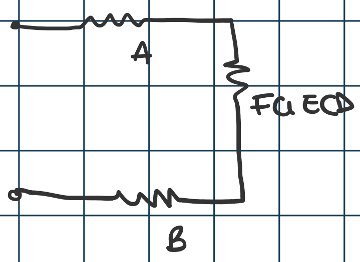


$$R_{ECD} = 2 + 2 = 4\ \Omega$$

$$R_{FG} = 1 + 5 = 6\ \Omega$$



$R_{FG} = 1+5 = 6\,\Omega$



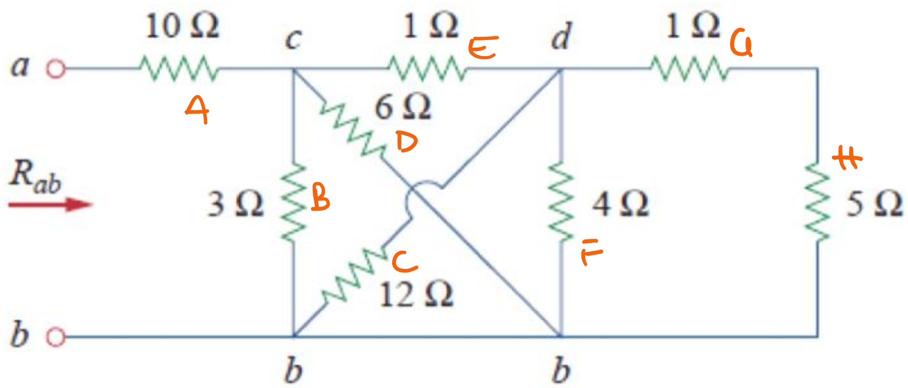
$$R_{FGECD} = \frac{1}{\frac{1}{6}+\frac{1}{4}} = \frac{12}{5}$$

$$R_{eq} = 4+8+\frac{12}{5} = \frac{72}{5} = 14{,}4$$

2

Serie e parallelo di resistori

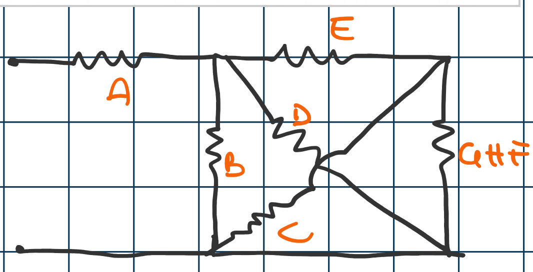
Esercizio
Data la rete di resistori in figura, determinare la resistenza equivalente



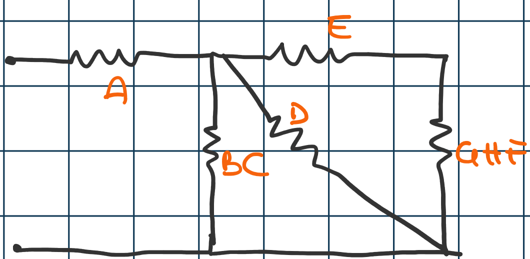
$R_{eq} = 11{,}2\,\Omega$

$R_{GH} = 1+5 = 6\,\Omega$

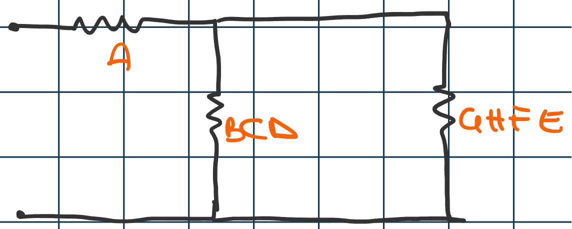
$$R_{GHF} = \frac{1}{\frac{1}{6}+\frac{1}{4}} = \frac{12}{5} = 2{,}4\,\Omega$$



$$R_{BC} = \frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{12}} = \frac{12}{5} = 2{,}4\,\Omega$$



$$R_{BCD} = \frac{1}{\frac{1}{2,4} + \frac{1}{6}} = \frac{12}{7}$$



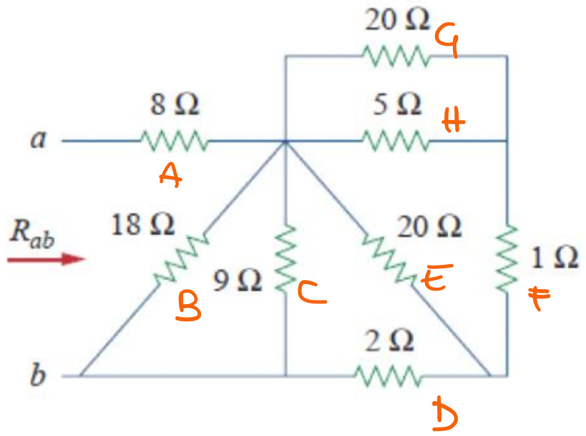
$$R_{EGHF} = 1 + 2,4 = 3,4\ \Omega$$

$$R_{BCDGHFE} = \frac{1}{\frac{7}{12} + \frac{1}{3,4}} = \frac{204}{179}$$

$$R_{eq} = 10 + \frac{204}{179} = 11,3$$

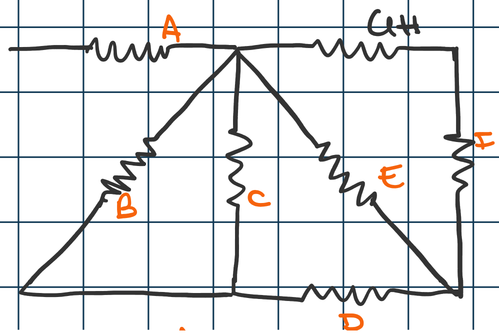
Serie e parallelo di resistori

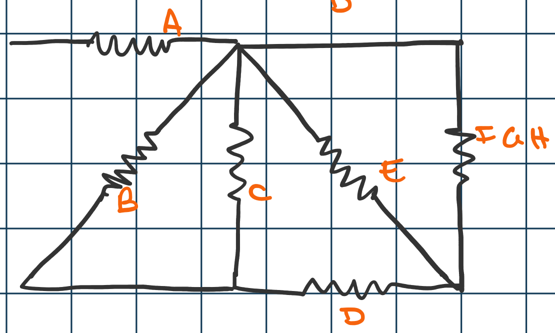
Esercizio
Data la rete di resistori in figura, determinare la resistenza equivalente



Soluzione
$R_{eq} = 11\Omega$

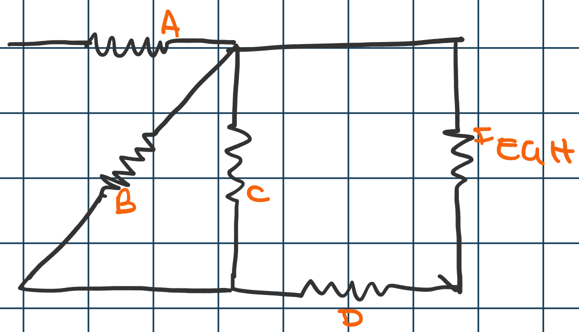
$$R_{GH} = \frac{1}{\frac{1}{20} + \frac{1}{5}} = 4\ \Omega$$



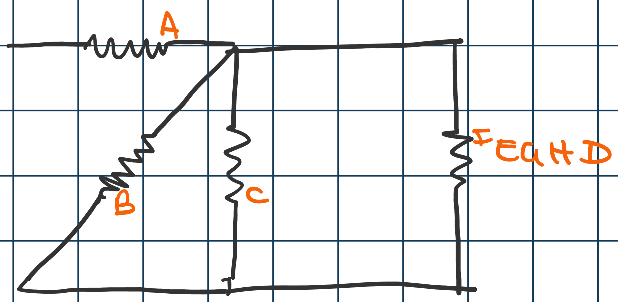


$R_{FGH} = 4\Omega + 1\Omega = 5\Omega$

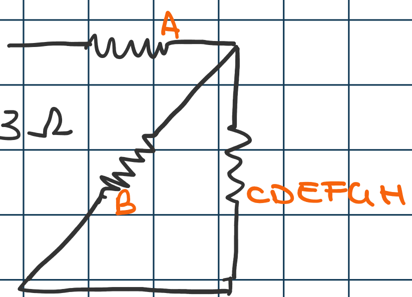
$$R_{EFGH} = \frac{1}{\frac{1}{20} + \frac{1}{5}} = 4\Omega$$



$R_{DEFGH} = 4 + 2\Omega = 6\Omega$



$$R_{CDEFGH} = \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = \frac{18}{5}$$



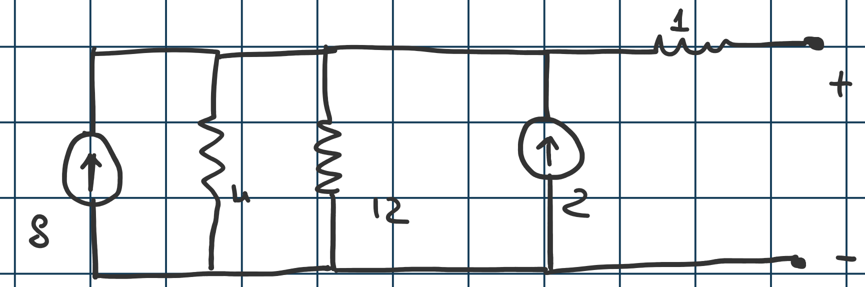
$$R_{BCDEFGH} = \frac{1}{\frac{1}{18} + \frac{5}{18}} = \frac{18}{6} = 3\Omega$$

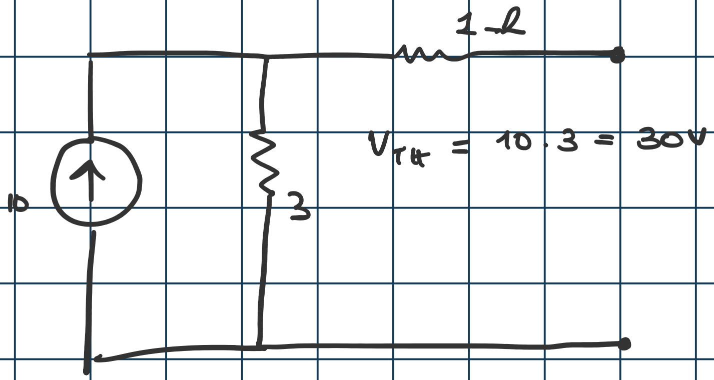
$R_{eq} = 8\Omega + 3\Omega = 11\Omega$

Esercizi svolti

giovedì 1 luglio 2021 13:15

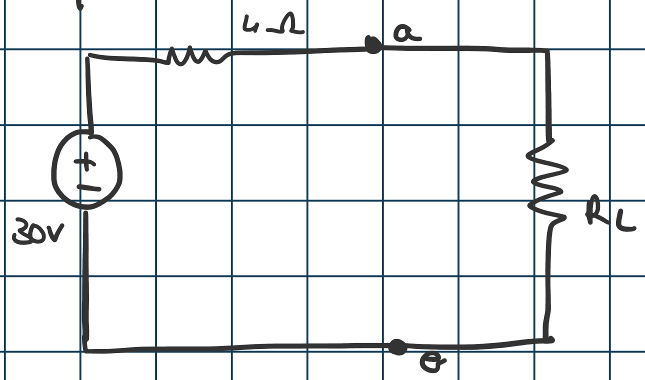
THEVENIN





$V_{TH} = 10 \cdot 3 = 30V$

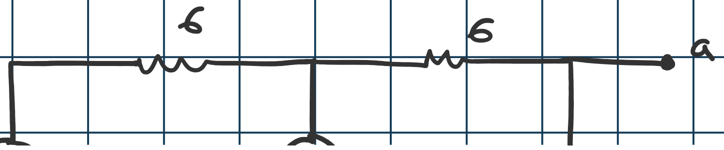
L'equivalente di Thevenin sarà

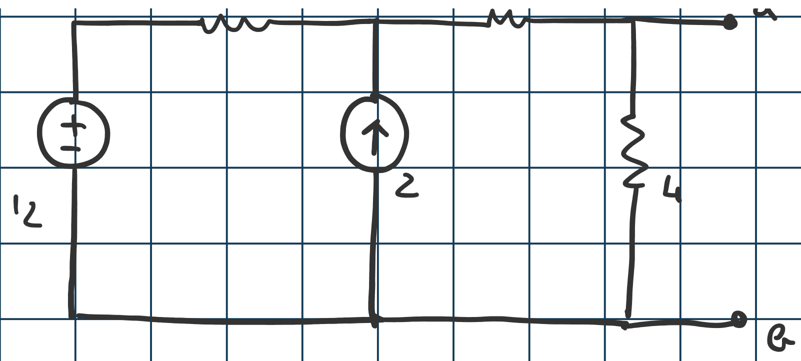


$$I = \frac{V}{R} = \frac{30}{10} = 3A$$

$$P = I \cdot V = R \cdot I^2 = 3^2 \cdot 6 = 54\ W$$

2



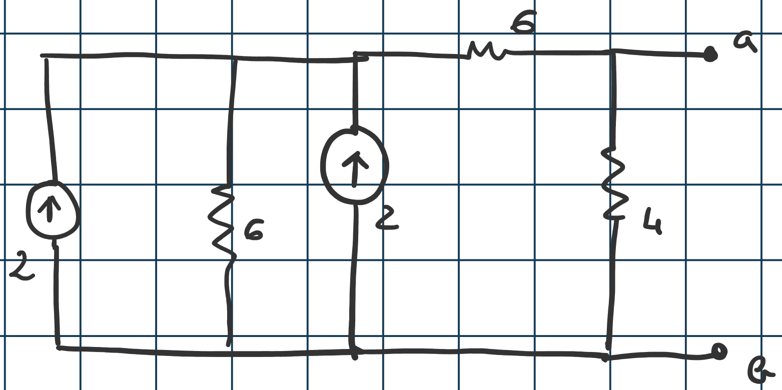


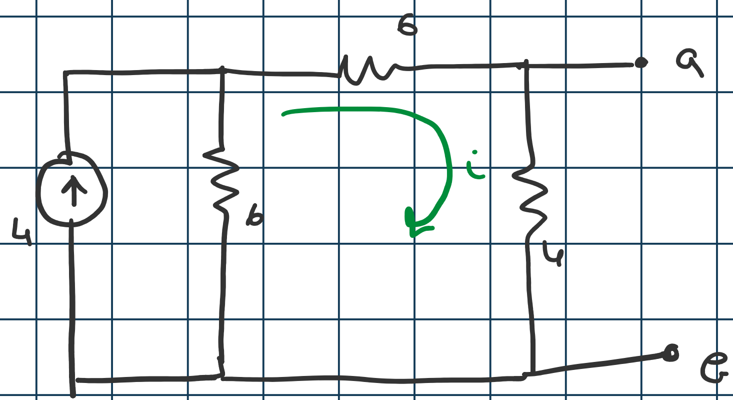
R_{TH} :

$R_1 = 6+6 = 12$

$R_{TH} = \frac{1}{\frac{1}{12}+\frac{1}{4}} = 3\ \Omega$

V_{TH} :



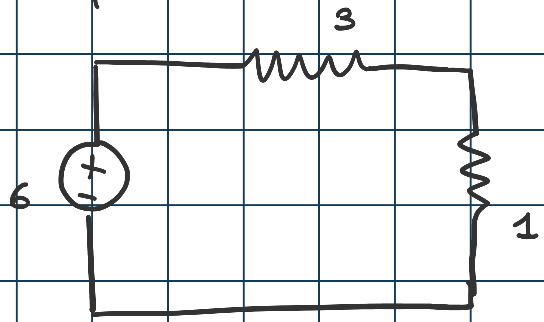


$i = \frac{6}{6+4+6} \cdot 4 = 1{,}5$

$V_{TH} = i \cdot 4 = 6\ V$

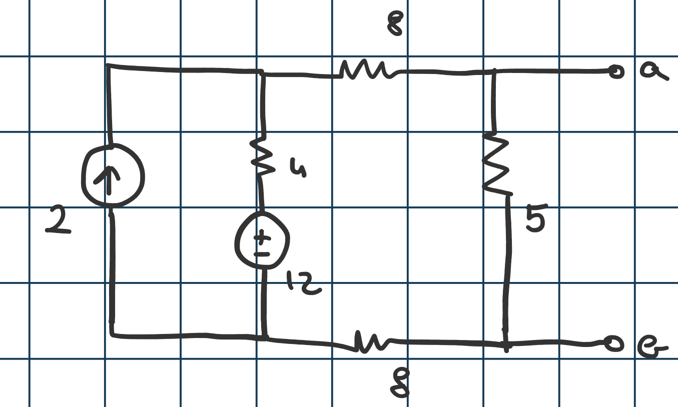
$V_{TH} = i \cdot 4 = 6\ V$

L'equivalente sarà:

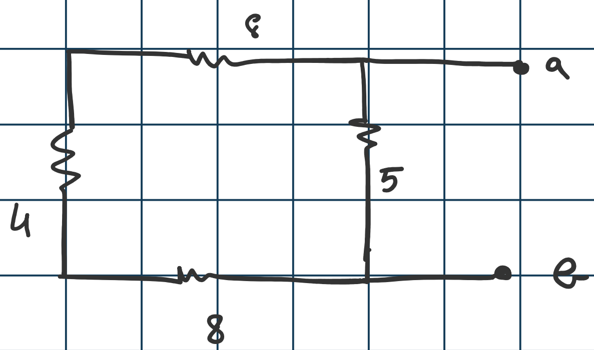


$i = \dfrac{6}{4} = 1{,}5\ A$

NORTON



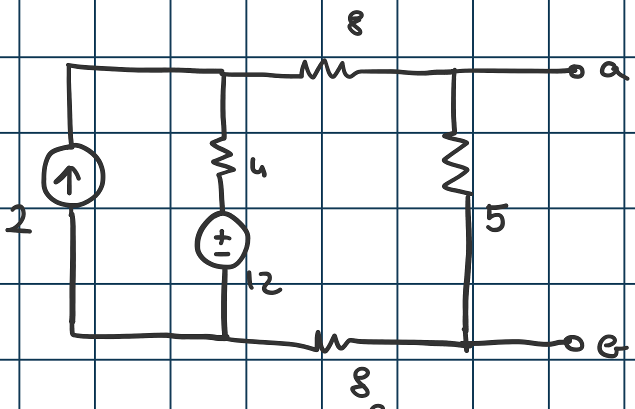
R_N:

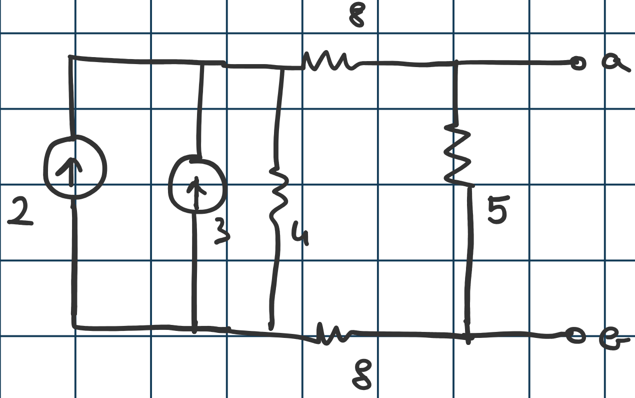


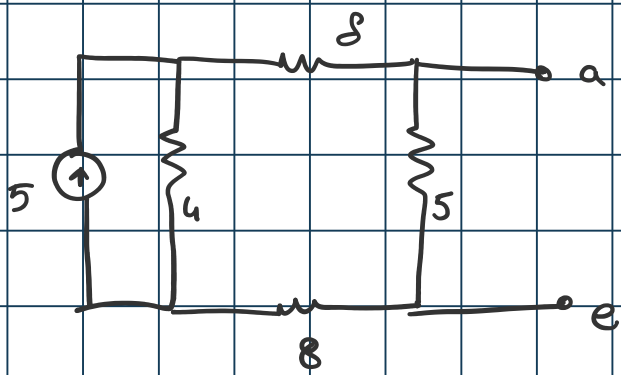
$R_N = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{}} = 4\ \Omega$

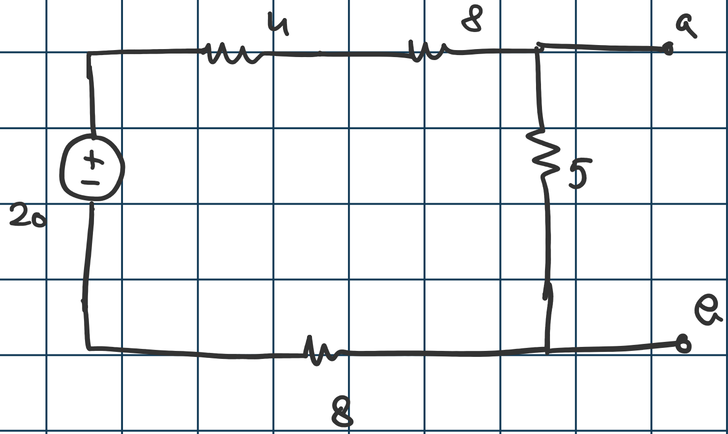
$$R_N = \frac{1}{\frac{1}{5} + \frac{1}{4+8+8}} = 4\,\Omega$$

I_N:





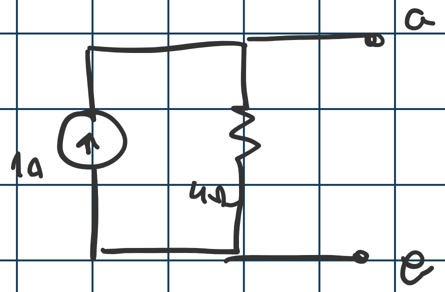




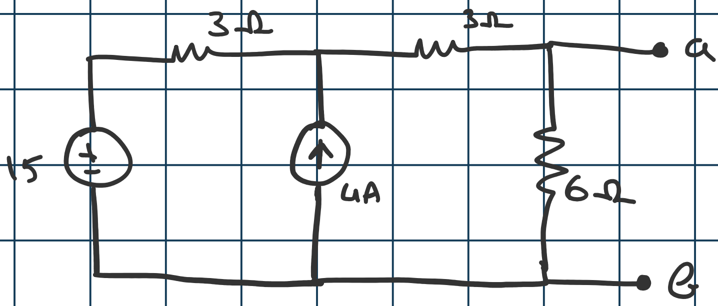
$$V_{TH} = \frac{5}{4+8+8+5} \cdot 20 = 4$$

$$I = \frac{V_{TH}}{R_{TH}} = 1\,A$$

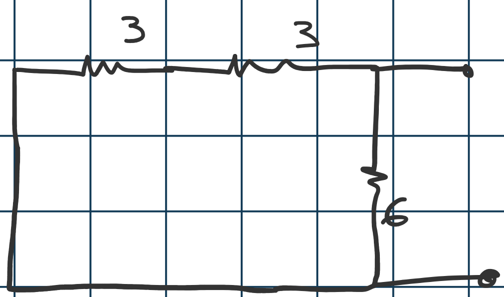
L'equivalente sarà



2

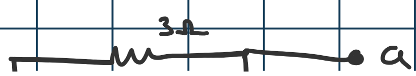


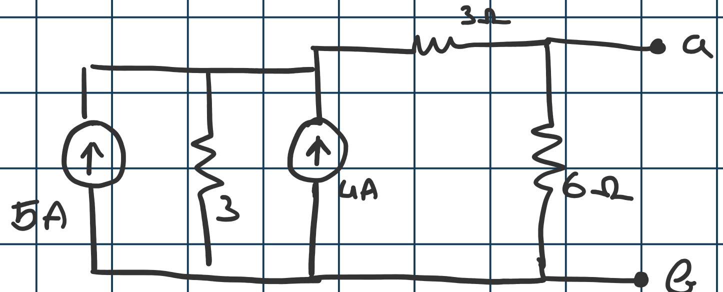
R_N :

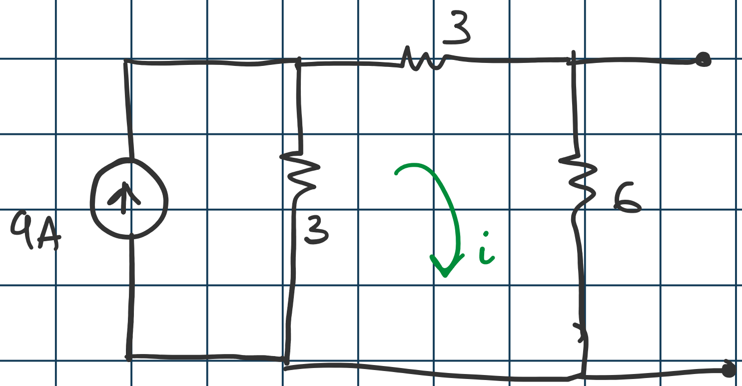


$$R_N = \frac{1}{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}} = 3\,\Omega$$

V_{TH} :



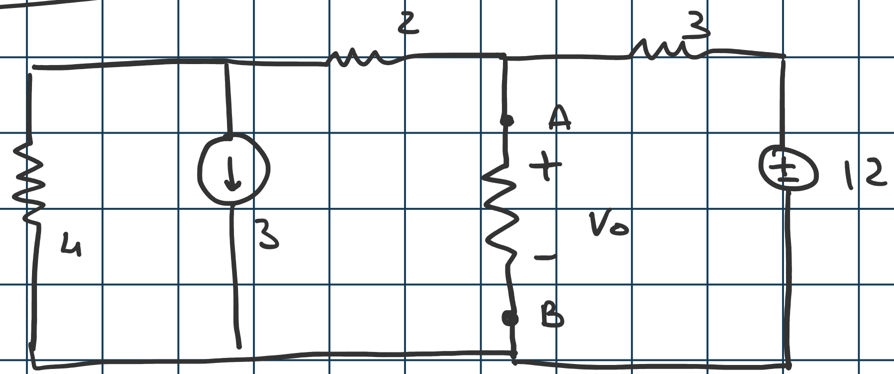




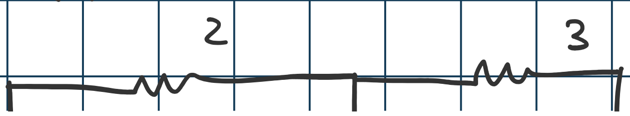
$$i = \frac{3}{3+3+6} \cdot 9 = \frac{9}{4} = 2{,}25$$

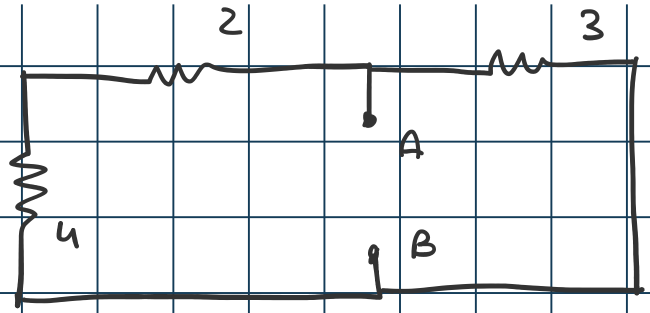
$$V_{TH} = i \cdot 6 = 13{,}5\ V$$

$$I_N = \frac{V_{TH}}{R_{TH}} = 4{,}5\ A$$



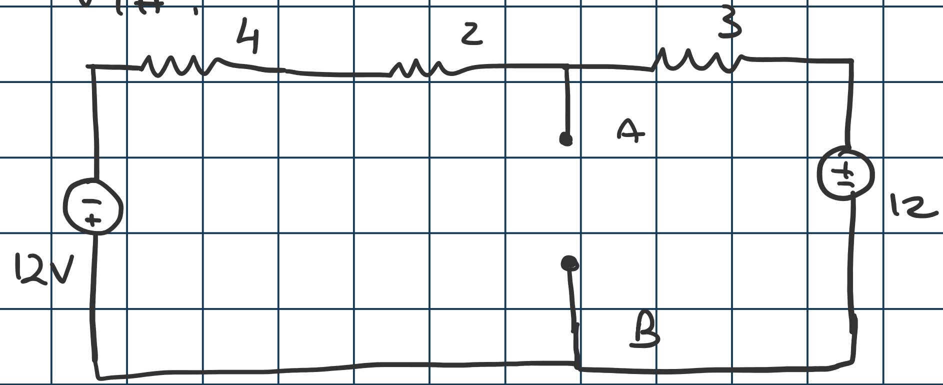
R_{TH} :

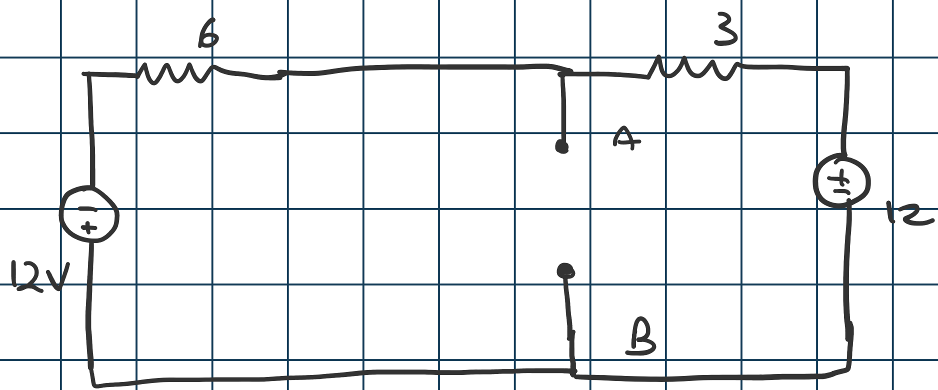




$$R_{TH} = \frac{1}{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}} = 2\,\Omega$$

V_{TH}:



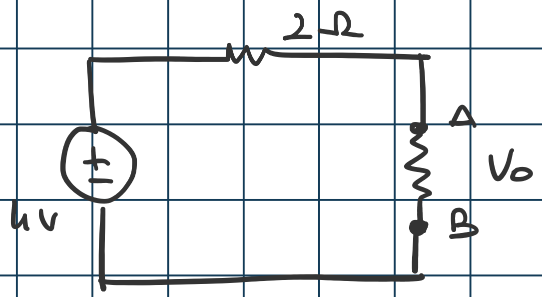


MILLMAN

$$V_{TH} = \frac{-\frac{12}{6}+\frac{12}{3}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}} = 4V$$

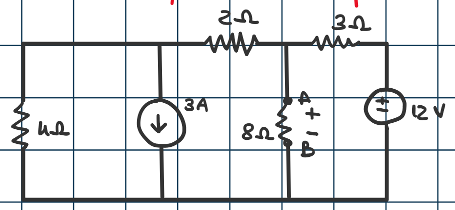
Posso dunque scrivere l'equivalente

Posso dunque scrivere l'equivalente di Thevenin



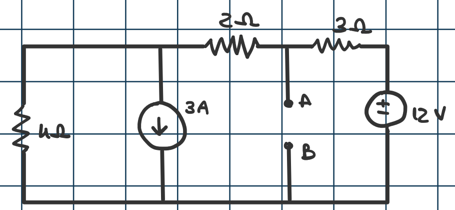
$$V_0 = \frac{8}{8+2} \cdot 4 = 3{,}2\,V$$

1 Thevenin, Millman, Norton

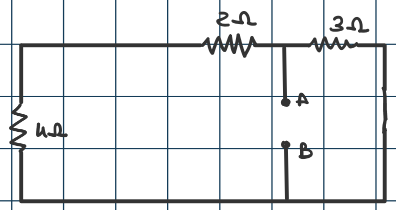


In questo caso devo eliminare la parte di circuito compresa fra i capi AB e ricavare il circuito equivalente che agisce su quella porta.

Lavoro dunque su questo circuito



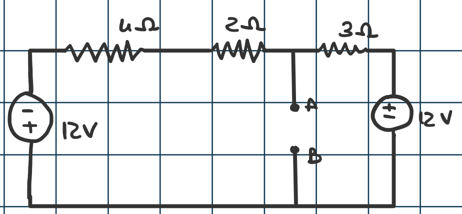
Parte 1: calcolo R_{TH}



$$R_{TH} = \frac{1}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = 2\Omega$$

Parte 2: calcolo V_{TH}

↓ trasf. dei generatori

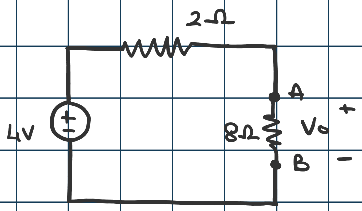


Ottengo così un circuito con due soli nodi per cui posso applicare MILLMAN

$$V_{TH} = V_{AB} = \frac{-\frac{12}{6} + \frac{12}{3}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = 4V$$

6 3

Parte 3: costruisco il circuito equivalente



Parte 4: calcolo V_o

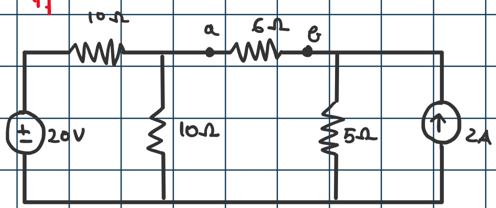
↓ Partitore di tensione

$$V_o = \frac{8}{8+2} \cdot 4 = 3{,}2\,V$$

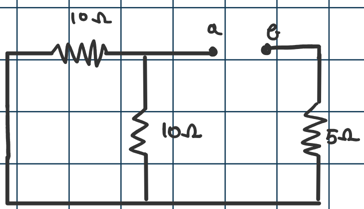
Parte 5: calcolo I_N (Norton)

$$i_N = \frac{V_{TH}}{R_{TH}} = \frac{4}{2} = 2\,A$$

(2) Non applicabilità di Millman

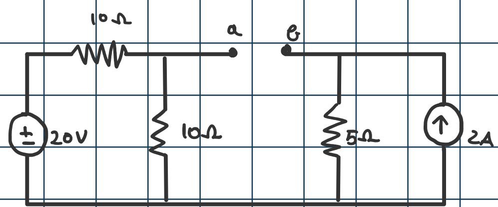


Parte 1: calcolo R_{TH}



$$R_{TH} = \frac{1}{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}} + 5 = 10\,\Omega$$

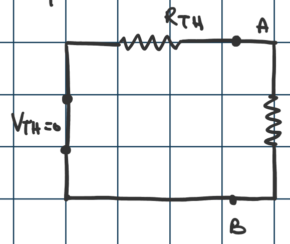
Parte 2: Calcolo V_{TH}



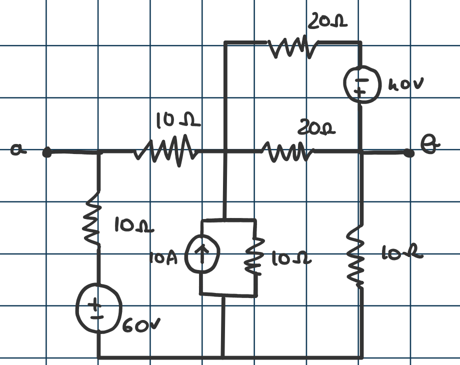
In questo caso non posso applicare Millman in quanto ho che la porta non si trova ai capi del circuito ma da un solo lato e dunque i componenti non sono in parallelo. Calcolo dunque V_{TH} come la differenza fra il potenziale in A e quello in B:

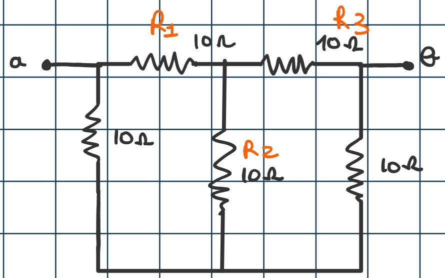
$$\left.\begin{aligned} V_A &= \frac{V_C}{20}\cdot 10 = \frac{20}{2} = 10V \\ V_B &= 2A \cdot 5\Omega = 10V \end{aligned}\right\} \quad V_{TH} = V_B - V_A = 0V$$

L'equivalente di Thevenin sarà

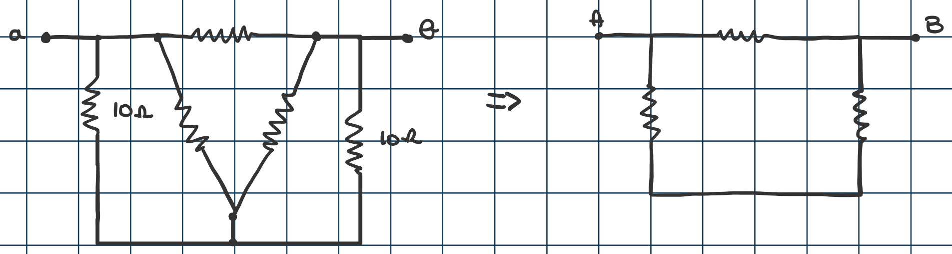


③ Circuito a stella

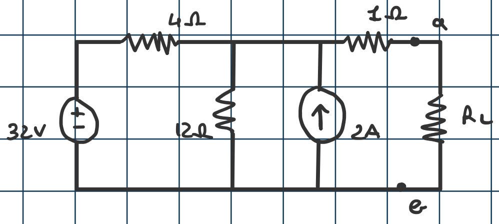




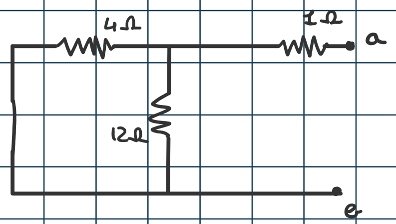
In questo caso non ci sono resistenze in serie o in parallelo. Posso dunque ricorrere all'analisi dei nodi o degli anelli oppure posso operare una trasformazione delle resistenze R_1, R_2 e R_3 a stella ottenendo dunque che



④ Thevenin



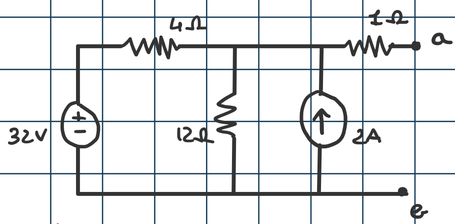
Parte 1: calcolo R_{TH}



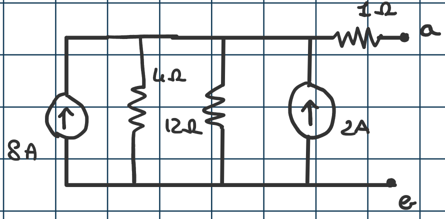
$$R_1 = \frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{12}} = 3\,\Omega$$

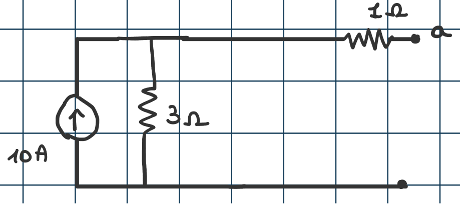
$$R_{TH} = 3+1 = 4\,\Omega$$

Parte 2: calcolo V_{TH}



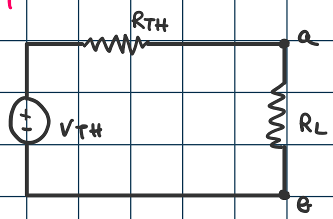
↓ trasformazione dei generatori



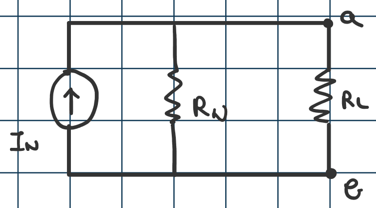


$V_{TH} = 10A \cdot 3\Omega = 30V$

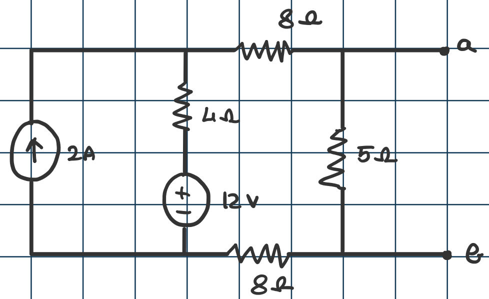
Equivalente di Thevenin:



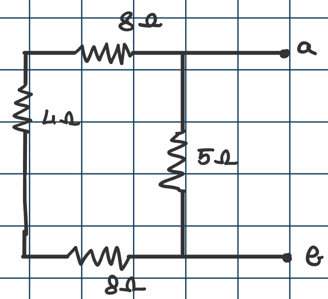
Equivalente di Norton



5 Thevenin



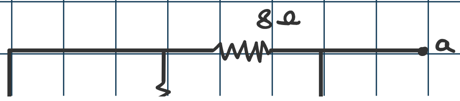
Parte 1: calcolo R_{TH}

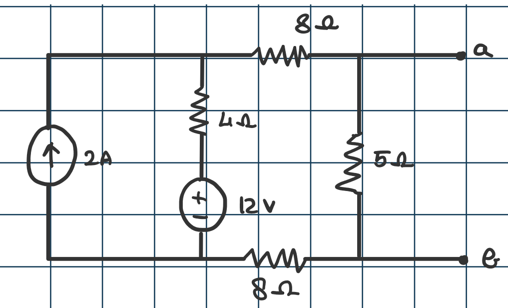


$R_1 = 8+8+4 = 20\,\Omega$

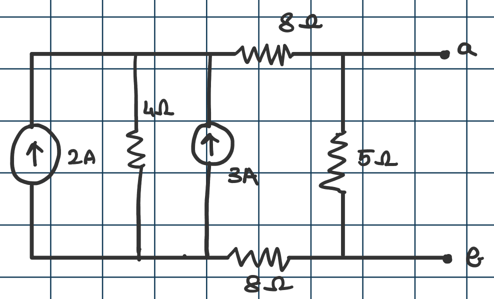
$$R_{TH} = \frac{1}{\frac{1}{20}+\frac{1}{5}} = 4\,\Omega$$

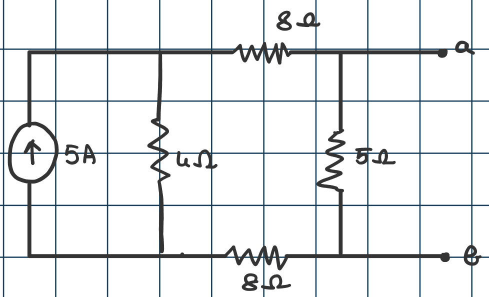
Parte 2: calcolo V_{TH}



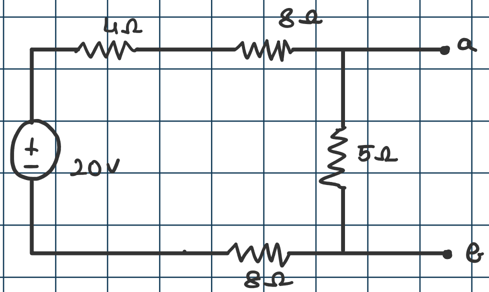


Trasformazione dei generatori





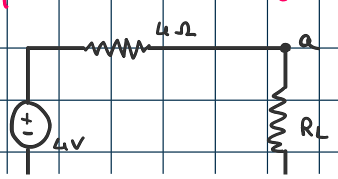
Trasformazione dei generatori

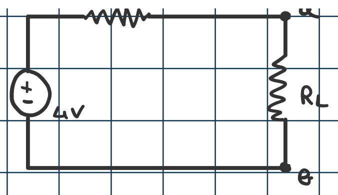


$$V_{TH} = \frac{5}{4+8+5+8} \cdot 20 = 4V$$

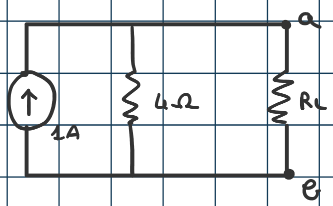
$$I_N = \frac{V_{TH}}{R_{TH}} = 1A$$

Equivalente di Thevenin

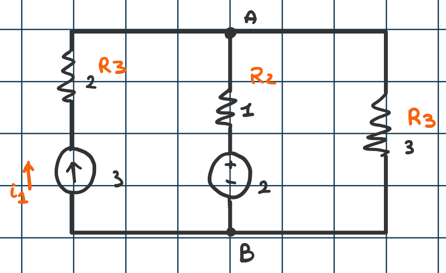




Equivalente di Norton



⑤ Casi particolari di Millman



Parte 1: Calcolo V_{AB}

Per il teorema di Millman ho che la differenza di potenziale ai capi di una porta di un circuito dove le restanti componenti sono in parallelo è dato dalla somma delle correnti fratto la somma dei reciproci delle resistenze.

In questo caso Millman si può applicare solamente ai rami di R_2 e R_3 poiché il teorema vale per il ramo in cui si trova un generatore di corrente solo se in parallelo vi è una resistenza. Dunque applico Millman ai rami di R_2 ed R_3.

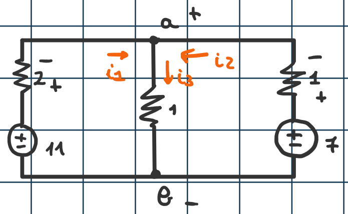
Inoltre, Millman può essere applicato ai rami in cui si trova una resistenza o al massimo una resistenza e un generatore.

considero la corrente ma non la resistenza in serie al suo generatore

$$V_{AB} = \frac{I_1 + \frac{V_1}{R_2}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{3+2}{1+\frac{1}{3}} = \frac{15}{4}$$

$$I_3 = \frac{V_{AB}}{R_3} = \frac{5}{4} = 1,25\,A$$

6 Millman



Parte 1: Calcolo V_{AB}

Nella formula di Millman si tengono in considerazione le correnti dei generatori

$$V_{AB} = \frac{\frac{11}{2} + \frac{7}{1}}{\frac{1}{2} + 1 + 1} = 5V$$

Parte 2: Calcolo i_3

$$i_3 = \frac{V_{AB}}{R} = 5\ A$$

Parte 3: calcolo i_2 e i_1 tramite la KVL

Per calcolare la corrente i_2 (o i_1) devo considerare il fatto che esse sono calcolate dopo il passaggio sulla resistenza e quindi devo calcolarla tenendo in considerazione la variazione di potenziale avvenuta.

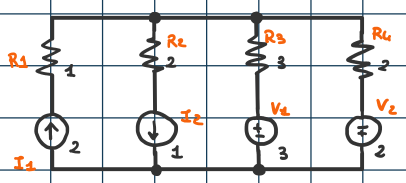
Per la KVL ho nel primo anello che

$$V_1 - V_{R1} - V_{ab} = 0 \Rightarrow V_{R1} = -V_{ab} + V_1 = -5+11 = 6V$$

$$I_1 = \frac{V_{R1}}{R_1} = \frac{6}{2} = 3\ A \qquad I_2 = I_3 - I_1 = 2A$$

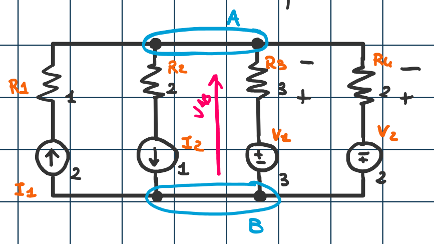
In questo caso ho considerato come opposto il segno della differenza di potenziale nelle resistenze R_1 ed R_2 in modo da ottenere corretto il segno della corrente

7 Millman



Trovare V_{R3} e V_{R4}

Posso dire che il circuito presenta due nodi A e B in questo modo



Applico Millmann per calcolare V_{AB}

$$V_{AB} = \frac{I_1 - I_2 + \frac{V_1}{R_3} - \frac{V_2}{R_4}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} = \frac{2 - 1 + \frac{3}{3} - \frac{2}{2}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = 1{,}2\,V$$

Applico la KVL agli anelli:

$V_1 - V_{R3} + V_{R4} + V_2 = 0$

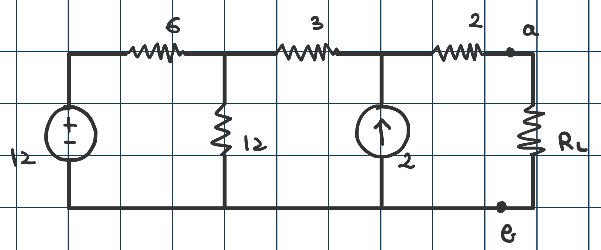
$V_{AB} + V_{R3} - V_1 = 0 \Rightarrow V_{R3} = -V_{AB} + V_1 = 1{,}8$

$V_{R4} = -V_2 + V_{R3} - V_1 = -2 + 1{,}8 - 3 = -3{,}2$

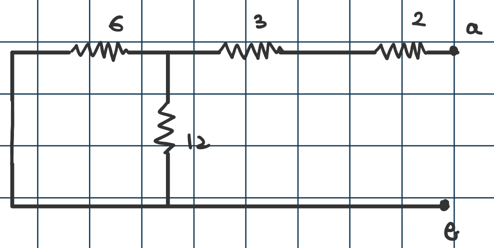
Tensione negativa: una tensione negativa indica che la polarità è invertita rispetto a quella scelta inizialmente nel circuito.

8 Massimo Trasferimento di potenza

Si ha il massimo trasferimento di potenza quando la resistenza di carico è uguale alla resistenza di Thevenin.
La potenza trasferita si calcola come $P_{max} = \frac{V_{TH}^2}{4R_{TH}}$



Parte 1: calcolo R_{TH}

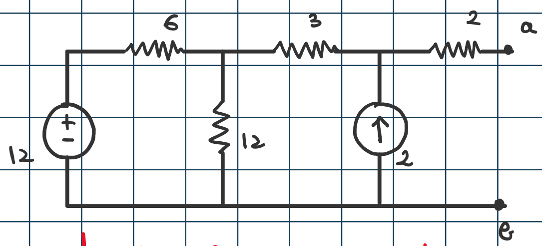


$$R_1 = \frac{1}{\frac{1}{6}+\frac{1}{12}} = 4\ \Omega$$

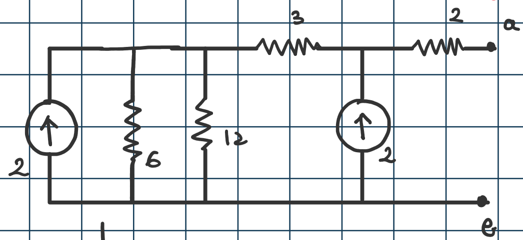
$$R_{TH} = 3+2+4 = 9\ \Omega$$

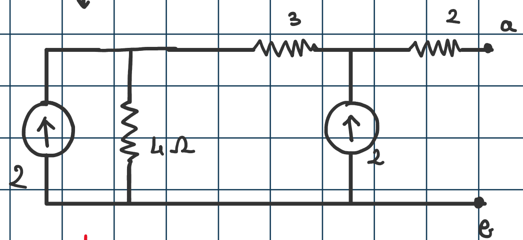
Dunque, affinché ci sia il massimo trasferimento di potenza, bisogna avere una resistenza di carico R_L pari a $9\ \Omega$.

Parte 2: calcolo V_{TH}

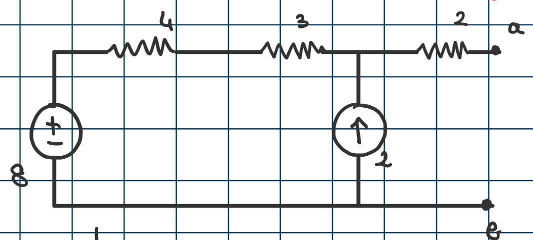


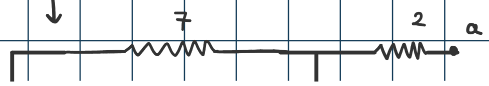
Trasformazione dei generatori

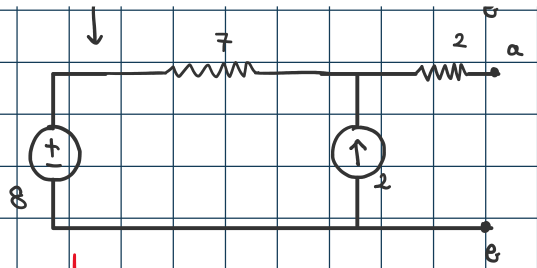




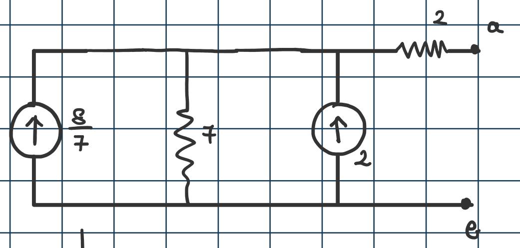
Trasformazione dei generatori

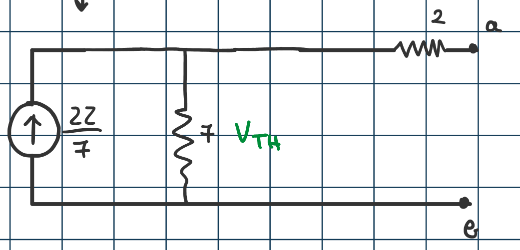






Trasformazione dei generatori

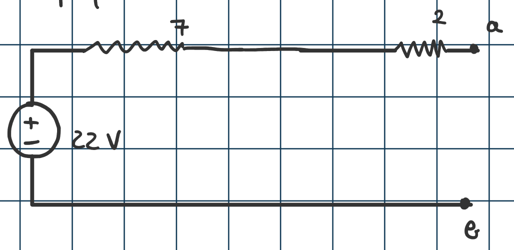




$$V_{TH} = i \cdot R = \frac{22}{7} \cdot 7 = 22V$$

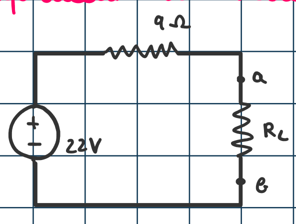
Per calcolare V_{TH} devo semplificare il circuito ed individuare la differenza di potenziale ai capi della resistenza in parallelo alla porta.

Semplificando ulteriormente avrei ottenuto che



Per cui avrei ottenuto la semplificazione ricercata e l'equivalente di Thevenin

Equivalente di Thevenin

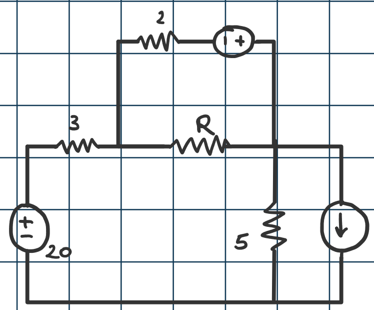


Massimo trasferimento $\Rightarrow p = \frac{V_{TH}^2}{4R} = \frac{22^2}{4 \cdot 9} = 13{,}44\ W$

Massimo trasferimento di potenza $\Rightarrow p = \frac{V_{TH}^2}{4R_{TH}} = \frac{22^2}{4 \cdot 9} = 13,44\ W$

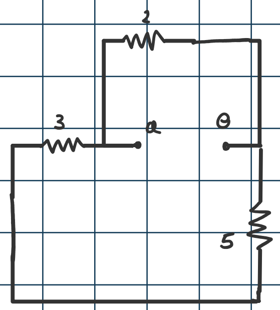
Per massimizzare il rendimento bisogna avere una resistenza di carico molto più grande di quella interna.

⑨ Massimo trasferimento di potenza



Calcolare il massimo trasferimento di potenza su R

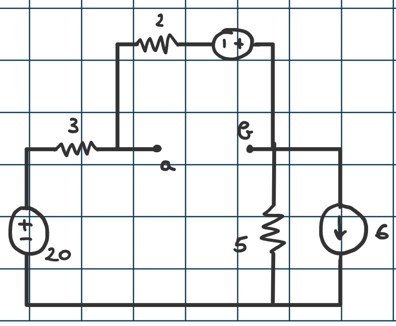
Parte 1: calcolo R_{TH}



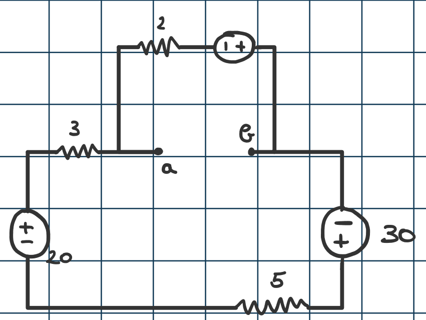
$R_1 = 3+5 = 8\ \Omega$

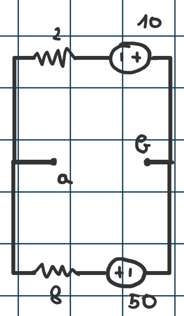
$R_{TH} = \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}} = \frac{8}{5} = 1,6\ \Omega$

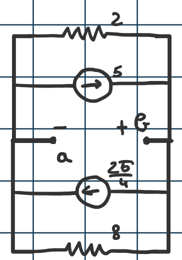
Parte 2: calcolo V_{TH}



trasformazione dei generatori







Millman

$$V_{AB} = \frac{5 - \frac{25}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{8}} = -2\,V$$

Ottengo dunque che $p = \frac{V_{TH}^2}{4 \cdot R_{TH}} = \frac{4}{4 \cdot 1,6} = \frac{5}{8} = 0,625\,W$

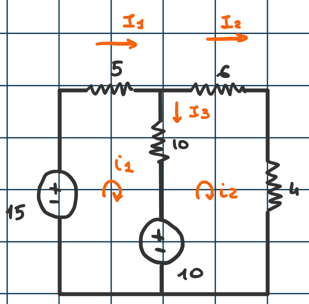
10 Metodo degli anelli:

Il metodo degli anelli prevede l'applicazione sistematica della della KVL per trovare le correnti incognite.
Per ANELLO si intende una maglia senza altre all'interno.

L'algoritmo è il seguente:
1) Si assegna ad ogni anello una corrente (che per ora è incognita).
2) Si applica la KVL ad ogni anello, ricordando di poter applicare

1) Si assegna ad ogni anello una corrente (che per ora è incognita).
2) Si applica la KVL ad ogni anello, ricordando di poter applicare la legge di Ohm
3) Si risolvono le equazioni ottenute

Esempio 1



Trovare I_1, I_2 ed I_3

Parte 1: assegno le correnti agli anelli
Parte 2: applico la KVL

$$-15 + 5 \cdot i_1 + 10\,(i_1 - i_2) + 10 = 0$$
$$\downarrow$$
$$15 \cdot i_1 - 10\, i_2 = 5$$
$$\downarrow$$
$$3 i_1 - 2 i_2 = 1$$

$$-10 - 10(i_1 - i_2) + 6\, i_2 + 4 i_2 = 0$$
$$\downarrow$$
$$-10\, i_1 + 20\, i_2 = 10$$
$$\downarrow$$
$$i_1 = 2 i_2 - 1$$

Parte 3: posso utilizzare sia il metodo di sostituzione che cramer

Metodo di sostituzione

$$\begin{cases} i_1 = 2 i_2 - 1 \\ 3 i_1 - 2 i_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 6 i_2 - 3 - 2 i_2 = 1$$
$$\downarrow$$
$$i_2 = 1\,A, \quad i_1 = 1\,A$$
$$i_3 = i_1 - i_2 = 0$$

Metodo di Cramer

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - (-6) = -2 + 6 = 4$$

Metodo di Cramer

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2-(-6) = -2+6 = 4$$

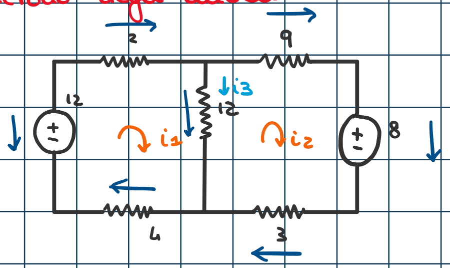
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2-(-2) = 4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1-(-3) = 4$$

$$i_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1\ A \qquad i_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1\ A$$

Avrò che $I_1 = i_1 = 1A$, $I_2 = i_2 = 1A$ e $I_3 = i_3 = 0$

(11) Metodo degli anelli:



Parte 1: definisco le correnti

Parte 2: applico le KVL

$$-12 + 2 \cdot i_1 + 12 \cdot (i_1 - i_2) + 4 i_1 = 0$$
$$-12 + 2 i_1 + 12 i_1 - 12 i_2 + 4 i_1 = 0$$
$$18 i_1 - 12 i_2 = 12$$
$$3 i_1 - 2 i_2 = 2$$

$$12(i_2 - i_1) + 9 i_2 + 8 + 3 i_2 = 0$$
$$12 i_2 - 12 i_1 + 9 i_2 + 8 + 3 i_2 = 0$$
$$24 i_2 - 12 i_1 = -8$$
$$6 i_2 - 3 i_1 = -2$$

Parte 3: applico Cramer

$$\begin{cases} 3 i_1 - 2 i_2 = 2 \\ -3 i_1 + 6 i_2 = -2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 6 = 12$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 4 = 8$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0$$

Dunque $i_1 = \frac{2}{3}$, $i_2 = 0$ e $i_3 = \frac{2}{3}$

(12) Metodo degli anelli con generatori di corrente

- Se un generatore di corrente è presente in un solo anello allora la corrente di anello è pari a quella del generatore.
- Se un generatore di corrente fa parte di due anelli si ha che somma algebrica delle due correnti di anello è pari a quella del generatore. Si parla in questo caso di SUPERANELLO e, nel caso in cui più superanelli si intersecano, si ha un superanello unico e più grande e ogni superanello deve rispettare la KVL.

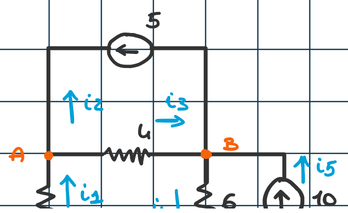
(13) Metodo dei nodi

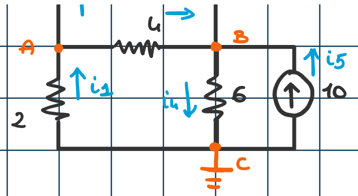
Il metodo dei nodi prevede l'applicazione sistematica della della KCL per trovare le tensioni incognite.

L'algoritmo è il seguente:

1) Si sceglie un nodo di riferimento il cui potenziale è posto a 0
2) Si assegna ad ogni nodo una tensione (che per ora è incognita).
2) Si applica la KCL ad ogni nodo, ricordando di poter applicare la legge di Ohm
3) Si risolvono le equazioni ottenute

RICORDA Gli elementi circuitali sono percorsi dal polo positivo a quello negativo. Per un resistore si ha che $i = \frac{V_+ - V_-}{R}$





Calcolare le Tensioni di nodo V_A e V_B

Parte 1: pongo il nodo C a potenziale 0

Parte 2: applico la KCL

(A) $i_1 - i_2 - i_3 = 0$

Poiché è presente un solo generatore di corrente all'anello di i_2 posso porre $i_2 = -5$

Dunque ottengo

$i_1 + 5 - i_3 = 0$

(B) $i_2 + i_3 - i_4 + i_5 = 0$

dove $i_2 = -5$ e per lo stesso motivo di prima ho $i_5 = 10$

$-5 + i_3 - i_4 + 10 = 0$

Dunque ottengo

$i_3 - i_4 = -5$

Parte 3: riscrivo le correnti attraverso la legge di Ohm

Posso scrivere $i_3 = \dfrac{V_A - V_B}{4}$ e $i_1 = \dfrac{V_C - V_A}{2} = -\dfrac{V_A}{2}$

ovvero mettendo al numeratore la variazione di potenziale seguendo il verso di attraversamento

Posso poi anche scrivere che $i_4 = \dfrac{V_B - V_C}{6} = \dfrac{V_B}{6}$

Riscrivo dunque le equazioni e ottengo che

$$\begin{cases} -\dfrac{V_A}{2} + 5 + \dfrac{V_B - V_A}{4} = 0 \\ \dfrac{V_A - V_B}{4} - \dfrac{V_B}{6} = -5 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2V_A + 20 + V_B - V_A = 0 \\ 3V_A - 3V_B - 2V_B = -60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3A - V_B = 20 \\ 3V_A - 5V_B = -60 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -15 + 3 = -12$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 20 & -1 \\ -60 & -5 \end{vmatrix} = -100 - 60 = -160$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 20 \\ 3 & -60 \end{vmatrix} = -180 - 60 = -240$$

$$V_A = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 13{,}3\,V$$

$$V_B = \frac{\Delta_2}{2} = 20\,V$$

$$V_C = 0$$

Calcolo dunque le correnti:

$$i_3 = \frac{V_A - V_B}{4} = 1{,}6\,A$$

$$i_4 = \frac{V_B - V_C}{6} = \frac{V_B}{6} = 3{,}3\,A$$

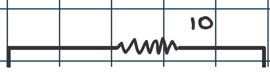
$$i_1 = \frac{V_C - V_A}{2} = -\frac{V_A}{2} = -6{,}65\,A$$

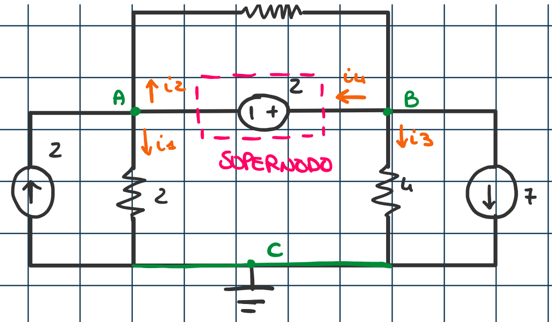
$$i_5 = 10\,A$$

$$i_2 = -5\,A$$

(14) Metodo dei nodi con generatori di tensione

- Se un generatore di tensione è collegato fra il nodo di riferimento e un altro, si pone che il potenziale di quest'ultimo è pari a quello del generatore.
- Se un generatore di corrente è collegato fra due nodi (nessuno dei due di riferimento) allora si pone che la differenza di potenziale fra i due nodi è proprio pari alla tensione del generatore
  Si parla in questo caso di SUPERNODO quando si ha un generatore di tensione si trova collegato a due nod





Posso scrivere che:

$$V_B - V_A = 2 \rightarrow V_B = 2 + V_A$$

$$i_1 = \frac{V_A - V_C}{2} = \frac{V_A}{2}$$

$$i_2 = \frac{V_A - V_B}{10}$$

$$i_3 = \frac{V_B - V_C}{4} = \frac{V_B}{4}$$

Scrivo le KCL:

Ⓐ $2 - i_1 - i_2 + i_4 = 0$

$$2 - \frac{V_A}{2} + \frac{V_B - V_A}{10} + i_4 = 0$$

$$20 - 5V_A + V_B - V_A + 10 i_4 = 0$$

$$20 - 6V_A + V_B + 10 \cdot i_4 = 0$$

$$20 - 6V_A + 2 + V_A + 10 i_4 = 0$$

$$22 - 5V_A + 10 i_4 = 0$$

Ⓑ $i_2 - i_4 - i_3 - 7 = 0$

$$\frac{V_A - V_B}{10} - i_4 - \frac{V_B}{4} - 7 = 0$$

$$2V_A - 2V_B - 20 i_4 - 5V_B - 140 = 0$$

$$2V_A - 7V_B - 20 i_4 - 140 = 0$$

$$2V_A - 7(2 + V_A) - 20 i_4 - 140 = 0$$

$$2V_A - 14 - 7V_A - 20 i_4 - 140 = 0$$

$$-5V_A - 20 i_4 - 154 = 0$$

$$\begin{cases} -5V_A - 20 i_4 - 154 = 0 \\ 22 - 5V_A + 10 i_4 = 0 \end{cases}$$

$$i_4 = \frac{5V_A - 22}{10}$$

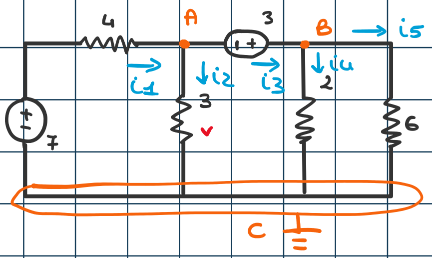
$$-5V_A - \overset{2}{\cancel{20}}\left(\frac{5V_A - 22}{\cancel{10}}\right) - 154 = 0$$

$-5V_A - 10V_A + 44 - 154 = 0$

$-15\, V_A = 110$

$V_A = -7{,}33 \qquad V_B = V_A + 2 = -5{,}33$

(15) Metodo dei nodi modificato



Calcolare v ed i

Pongo $V_C = 0$ e ottengo dunque che

$v = V_A - V_C = V_A$

Applico la KCL:

(A) $i_1 - i_2 - i_3 = 0$

Ricordo che $\quad i_1 = \frac{7}{4} = 1{,}75\,A \;, \; i_2 = \frac{V_A - V_C}{3} = \frac{V_A}{3}$

$V_B - V_A = 3$

Posso allora scrivere la relazione come

$1{,}75 - \frac{V_A}{3} - i_3 = 0$

(B) $i_3 - i_4 - i_5 = 0$

Ricordo che $\quad i_4 = \frac{V_B - V_C}{2} = \frac{V_B}{2} \qquad i_5 = \frac{V_B - V_C}{6} = \frac{V_B}{6}$

Posso allora scrivere la relazione come

$i_3 - \frac{V_B}{2} - \frac{V_B}{6} = 0$

Dunque ottengo che

$$\begin{cases} 1,75 - \frac{VA}{3} - i_3 = 0 \\ i_3 - \frac{VB}{2} - \frac{VB}{6} = 0 \\ VB - VA = 3 \end{cases}$$

$$1,75 - \frac{VA}{3} - \frac{VB}{2} - \frac{VB}{6} = 0$$

$$10,5 - 2VA - 3VB - VB = 0$$

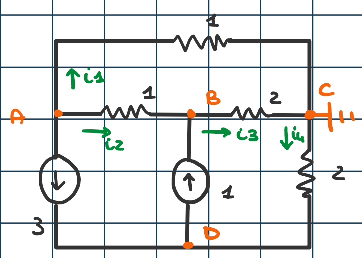
$$\begin{cases} -2VA - 4VB + 10,5 = 0 \\ VB = 3 + VA \end{cases}$$

$$-2VA - 12 - 4VA + 10,5 = 0$$

$$VA = -0,25$$

Per cui $VB = 3 - 0,25 = 2,75$ e $i_4 = \frac{VB}{2} = 1,4A$

16 Metodo dei nodi e potenza erogata



Calcolare VA, VB, VD

Applico la KCL:

A $-3 - i_2 - i_1 = 0$

Pongo che $i_2 = \frac{VA - VB}{1} = VA - VB$ e che $i_1 = \frac{VA - VC}{1} = VA$

$-3 + VB - 2VA = 0$

B $i_2 - i_3 + 1 = 0$

Pongo che $i_3 = \frac{V_B - V_C}{2} = \frac{V_B}{2}$ e ottengo che

$$V_A - V_B - \frac{V_B}{2} + 1 = 0$$

$$2V_A - 2V_B - V_B + 2 = 0$$

$$2V_A - 3V_B + 2 = 0$$

D $-1 + 3 - i_4 = 0$

Dove $i_4 = \frac{V_C - V_D}{2} = -\frac{V_D}{2}$

Dunque $-1 + 3 + \frac{V_D}{2} = 0 \Rightarrow V_D = 4V$

Ottengo dunque che

$$\begin{cases} -3 + V_B - 2V_A = 0 \\ 2V_A - 3V_B + 2 = 0 \\ V_D = 4V \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_B = 2V_A + 3 \\ 2V_A - 6V_A - 9 + 2 = 0 \\ V_D = 4V \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_B = 2V_A + 3 = -\frac{1}{2} \\ V_A = -\frac{7}{4} \\ V_D = 4V \end{cases}$$

Calcolo le potenze assorbite. Inoltre ricordo che la somma delle potenze erogate deve essere uguale a quella delle potenze assorbite ovvero la somma algebrica di tutte le potenze è zero.
Nel caso delle potenze è indifferente il segno della tensione in quanto viene elevata al quadrato.

$$P_{R1} = \frac{(V_A - V_C)^2}{1} = \frac{49}{16}$$

$$P_{R2} = \frac{(V_A - V_B)^2}{1} = \frac{25}{16}$$

$$P_{R3} = \frac{(V_B - V_C)^2}{2} = \frac{1}{8}$$

$$P_{R4} = \frac{(V_C - V_D)^2}{2} = 8$$

Dunque $P_A = \frac{49}{16} + \frac{25}{16} + \frac{1}{8} + 8 = \frac{51}{4}$

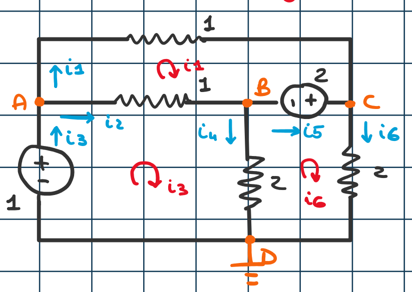
$$P_{I1} = V \cdot I = (V_B - V_D) \cdot I_1 = -\frac{9}{2}$$

$$P_{I2} = V \cdot I = (V_D - V_A) \cdot I_2 = \frac{69}{4}$$

Dunque $P_E = \frac{69}{4} - \frac{9}{2} = \frac{51}{4}$

In conclusione il bilancio è corretto poiché ho che la potenza assorbita è uguale a quella generata. Per potenza assorbita si intende quella degli elementi passivi mentre per potenza generata si intende quella degli elementi attivi.

(17) Analisi delle maglie (anelli)



Individuo subito che

$V_A - V_D = 1$ e $V_C - V_B = 2$

Applico la KCL:

(A) $i_3 - i_1 - i_2 = 0$

Pongo che $i_1 = \frac{V_A - V_C}{1} = V_A - V_C$

$$i_2 = \frac{V_A - V_B}{1} = V_A - V_B$$

Ottengo dunque che

$i_3 - V_A + V_C - V_A + V_B = 0$

$i_3 - 2V_A + V_B + V_C = 0$

(B) $i_2 - i_4 - i_5 = 0$

Pongo che $i_4 = \frac{V_B - V_D}{2} = \frac{V_B}{2}$

$V_A - V_B - \frac{V_B}{2} - i_5 = 0$

$2V_A - 2V_B - V_B - i_5 = 0$

$2V_A - 3V_B - i_5 = 0$

(C) $i_1 + i_5 - i_6 = 0$

Pongo $i_6 = \frac{V_C - V_D}{6} = \frac{V_C}{6}$

$V_A - V_C + i_5 - \frac{V_C}{6} = 0$

$6V_A - 6V_C + i_5 - V_C = 0$

$6V_A - 7V_C + i_5 = 0$

Ho ottenuto il seguente sistema:

$$\begin{cases} V_A = 1 + V_D \\ V_C = 2 + V_B \\ i_3 - 2V_A + V_B + V_C = 0 \\ 2V_A - 3V_B - i_5 = 0 \\ 6V_A - 7V_C + i_5 = 0 \end{cases}$$

$8V_A - 3V_B - 7V_C = 0$

$8V_A - 3V_B - 14 - 7V_B = 0$

$8V_A - 10V_B - 14 = 0$

$i_3 - 2V_A + V_B + 2 + V_B = 0$

$i_3 - 2V_A + 3V_B + 2 = 0$

⋮

In questo caso ottengo che il metodo dei nodi è poco efficiente.
Ricorro dunque a quello delle maglie

1) $2 - i_2 \cdot 1 + i_1 \cdot i = 0$

$2 - i_2 + i_1 = 0$

$i_3 = i_1 + i_2$

$i_4 = i_2 - i_5$

$i_6 = i_1 + i_5$

$\rightarrow i_5 = i_2 - i_4$

$i_6 = i_1 + i_2 - i_4$

2) $-1 + i_2 \cdot 1 + 2 \cdot i_4 = 0$

$-1 + i_2 + 2 \cdot i_4 = 0$

3) $-2 + 2\cdot i_6 - 2\cdot i_4 = 0$

$-2 + 2i_1 + 2i_2 - 4i_4 = 0$

Ottengo il sistema

$$\begin{cases} i_1 - i_2 + 2 = 0 \\ i_2 + 2i_4 - 1 = 0 \\ 2i_1 + 2i_2 - 4i_4 - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_1 = i_2 - 2 \\ i_2 = 1 - 2i_4 \\ 2i_2 - 4 + 2i_2 - 4i_4 - 2 = 0 \end{cases}$$

$\downarrow$

$\cancel{4} - 8i_4 - \cancel{4} - 4i_4 - 2 = 0$

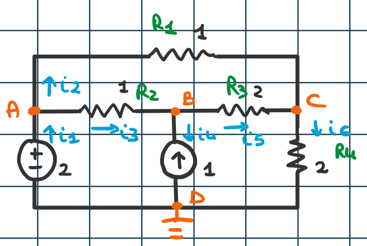
$-12\cdot i_4 = 2$

$i_4 = -\frac{1}{6}$

$i_2 = 1 + \frac{2}{6} = \frac{4}{3}$

$i_1 = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3}$

(18) Verifica del bilancio energetico



Per calcolare il bilancio energetico ho bisogno di correnti e quindi uso l'analisi nodale:

$V_A - V_D = 2 \Rightarrow V_A = 2$

(A) $i_1 - i_2 - i_3 = 0$

Dove $i_2 = \frac{V_A - V_C}{1} = V_A - V_C$

$i_3 = \frac{V_A - V_B}{1} = V_A - V_B$

$i_1 - V_A + V_C - V_A + V_B = 0$

$i_1 - 2V_A + V_C + V_B = 0 \rightarrow i_1 - 4 + V_C + V_B = 0$

(B) $i_3 - i_4 - i_5 = 0$

Dove $i_5 = \dfrac{V_B - V_C}{2}$ e $i_4 = -1$

$$V_A - V_B + 1 + \frac{V_C - V_B}{2} = 0$$

$$2V_A - 2V_B + 2 + V_C - V_B = 0$$

$$2V_A - 3V_B + V_C + 2 = 0$$

(C) $i_2 - i_6 + i_5 = 0$

Dove $i_6 = \dfrac{V_C - V_D}{2} = \dfrac{V_C}{2}$

$$V_A - V_C - \frac{V_C}{2} + \frac{V_B - V_C}{2} = 0$$

$$2V_A - 2V_C - V_C + V_B - V_C = 0$$

$$2V_A - 4V_C + V_B = 0 \Rightarrow 4 - 4V_C + V_B = 0$$

(D) $i_4 + i_6 - i_1 = 0$

$$i_4 + \frac{V_C}{2} - i_1 = 0$$

$$i_1 = -1 + \frac{V_C}{2}$$

Ottengo il sistema

$$\begin{cases} i_1 - 4 + V_C + V_B = 0 \\ 6 - 3V_B + V_C = 0 \\ 4 - 4V_C + V_B = 0 \end{cases}$$

$V_C = 3V_B - 6$

$4 - 12V_B + 24 + V_B = 0$

$-11V_B + 28 = 0$

$V_B = 2{,}54\ V$

$V_C = 1{,}63\ V$

$V_A = 2$

$V_D = 0$

Calcolo ora le correnti:

$i_2 = 2 - 1{,}63 = 0{,}36\ A$

$i_3 = 2 - 2{,}54 = -0{,}54\ A$

$i_4 = -1$

$i_5 = \dfrac{2{,}54 - 1{,}63}{2} = 0{,}45\ A$

$i_1 = 4 - V_C - V_B = -0{,}18\,A$

$i_6 = \frac{1{,}63}{2} = 0{,}81\,A$

Le correnti di anello saranno

$i_1 = -0{,}18\,A$

$i_2 = 0{,}36\,A$

$i_6 = 0{,}81\,A$

Procedo a calcolare il bilancio energetico

Potenze assorbite:

$P_{R1} = V \cdot I = R \cdot I^2 = 1 \cdot i_2^2 = 0{,}1296\,W$

$P_{R2} = R \cdot I^2 = 1 \cdot i_3^2 = 0{,}54^2 = 0{,}2916\,W$

$P_{R3} = R \cdot I^2 = 2 \cdot i_5^2 = 0{,}405\,W$

$P_{R4} = R \cdot I^2 = 2 \cdot i_6^2 = 1{,}3122\,W$

$\Sigma P_A = 2{,}1384\,W$

Potenze generate

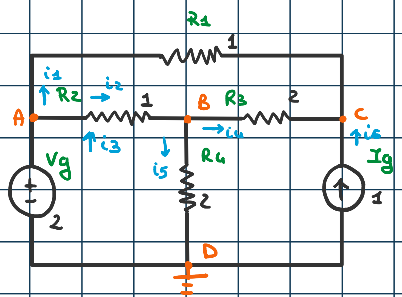
$P_{Vg1} = V \cdot I = 2 \cdot i_1 = -0{,}36\,W$

$P_{Ig1} = V \cdot I = V_B \cdot i_4 = V_B = 2{,}54\,W$

$\Sigma P_G = 2{,}54 - 0{,}36 = 2{,}18\,W$

L'equilibrio è trovato

(19) Bilancio energetico



Pongo $i_6 = 1$

$V_A - V_D = 2 \rightarrow V_A = 2$

$i_1 = \frac{V_A - V_C}{1} = V_A - V_C = 2 - V_C$

$i_2 = \frac{V_A - V_B}{1} = V_A - V_B = 2 - V_B$

i_3 non posso scriverla

$$i_4 = \frac{VB - VC}{2}$$

$$i_5 = \frac{VB - VD}{2} = \frac{VB}{2}$$

(A) $i_3 - i_1 - i_2 = 0$

$i_3 - VA + VC - VA + VB = 0$

$i_3 - 4 + VB + VC = 0$

(B) $i_2 - i_4 - i_5 = 0$

$$2 - VB + \frac{VC - VB}{2} - \frac{VB}{2} = 0$$

$4 - 2VB + VC - VB - VB = 0$

$4 - 4VB + VC = 0$

(C) $i_1 + i_4 + i_6 = 0$

$$2 - VC + \frac{VB - VC}{2} + 1 = 0$$

$4 - 2VC + VB - VC + 2 = 0$

$6 - 3VC + VB = 0$

Posso scrivere il sistema

$$\begin{cases} 6 - 3VC + VB = 0 \\ 4 - 4VB + VC = 0 \end{cases}$$

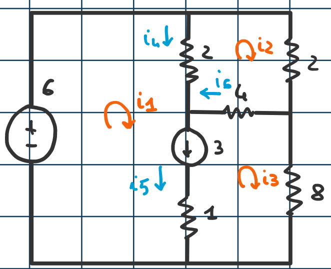
$VB = 3VC - 6$

$4 - 12VC + 24 + VC = 0$

$28 - 11VC = 0$

Il problema prosegue con gli stessi dati del prec

(21) Metodo degli anelli



Pongo $-i_4 + i_1 - i_2 = 0$

$i_4 = i_1 - i_2$

$i_6 + i_4 - i_5 = 0$

$i_6 = i_5 - i_4$

$i_5 + i_3 - i_1 = 0$

$i_5 = i_1 - i_3$

$i_6 = i_2 - i_3$

Applico la KVL:

① $6 + i_4 \cdot 2 + 3 + i_5 \cdot 1 = 0$

$6 + 2i_1 - 2i_2 + 3 + i_1 - i_3 = 0$

$3i_1 - 2i_2 - i_3 + 9 = 0$

② $-2 \cdot i_4 + 2i_2 + 4 \cdot i_6 = 0$

$-2(i_1 - i_2) + 2i_2 + 4(i_2 - i_3) = 0$

$-2i_1 + 2i_2 + 2i_2 + 4i_2 - 4i_3 = 0$

$-2i_1 + 8i_2 - 4i_3 = 0$

③ $8 \cdot i_3 - i_5 - 3 = 0$

$8 \cdot i_3 - i_1 + i_3 = 0$

$-i_1 + 0i_2 + 9i_3 = 0$

Ottengo il sistema

$$\begin{cases} 3i_1 - 2i_2 - i_3 = -9 \\ -2i_1 + 8i_2 - 4i_3 = 0 \\ -i_1 + 0i_2 + 9i_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 8 & -4 \\ -1 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 164$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -9 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 648$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -9 & -1 \\ -2 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 198$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -9 \\ -2 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -72$$

Dunque ho che

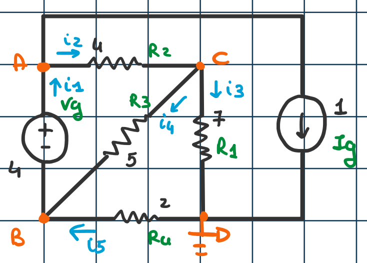
$i_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{648}{164} = 3{,}9\ A$

$i_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{198}{164} = 1{,}2\ A$

$i_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-72}{164} = -0{,}43\ A$

(22) Bilancio energetico

16:06 – 16:26



$V_A - V_B = 4 \rightarrow V_A = V_B + 4$

$i_2 = \frac{V_A - V_C}{4} \quad i_3 = \frac{V_C}{7} \quad i_4 = \frac{V_C - V_B}{5} \quad i_5 = \frac{-V_B}{2}$

(A) $i_1 - i_2 - 1 = 0$

$i_1 - \frac{V_A - V_C}{4} - 1 = 0$

$4i_1 - V_A - V_C - 4 = 0$

$4i_1 - V_B - 4 - V_C - 4 = 0$

(B) $-i_1 + i_4 + i_5 = 0$

$-i_1 + \frac{V_C - V_B}{5} - \frac{V_B}{2} = 0$

$-10i_1 + 2V_C - 2V_B - 5V_B = 0$

(C) $i_2 - i_3 - i_4 = 0$

$\frac{V_A - V_C}{4} - \frac{V_C}{7} + \frac{V_B - V_C}{5} = 0$

$35V_A - 35V_C - 20V_C + 28V_B - 28V_C = 0$

$35V_B + 140 - 35V_C - 20V_C + 28V_B - 28V_C = 0$

$$\begin{cases} 4i_1 - V_B - V_C = 8 \\ -10i_1 - 7V_B + 2V_C = 0 \\ 63V_B - 83V_C = -140 \end{cases}$$

$40i_1 - 10V_B - 10V_C = 80$

$-40i_1 - 28V_B + 8V_C = 0$

$// \quad -38V_B - 2V_C = 80$

$V_C = \frac{-38V_B - 80}{2}$

$63V_B - 83\left(\frac{-38V_B - 80}{2}\right) + 140 = 0$

$630 v_B + 1577 v_B + 3320 + 140 = 0$

$1640 v_B = -3460$

$v_B = -2{,}1\ V$

$v_C = 0{,}08\ V$

$v_A = 1{,}9\ V$

$i_2 = \frac{v_A - v_C}{4} = 0{,}455$ $\qquad i_4 = \frac{v_C - v_B}{5} = 0{,}436$

$i_3 = \frac{v_C}{7} = 0{,}011$ $\qquad i_5 = \frac{-v_B}{2} = 1{,}05$

$4 i_1 - v_B - v_C = 8$

$\rightarrow i_1 = \frac{8 + v_B + v_C}{4} = 1{,}49\ A$

Calcolo la potenza assorbita:

$P_{R1} = R \cdot I^2 = 7 \cdot i_3^2 = 7 \cdot 0{,}011^2 = 8{,}47 \cdot 10^{-4}\ W$

$P_{R2} = R \cdot i_2^2 = 0{,}82\ W$

$P_{R3} = 5 \cdot 0{,}436^2 = 0{,}95\ W$

$P_{R4} = 2 \cdot i_5^2 = 2{,}205\ W$

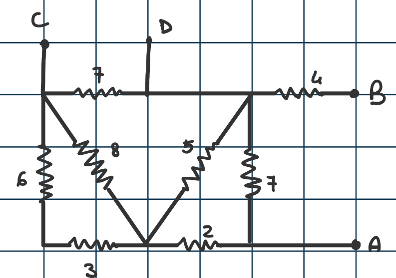
$\Sigma P_A = 3{,}97\ W$

$P_{vg} = V \cdot I_1 = 5{,}96$

$P_{Ig} = V \cdot I = V_D - V_A = -V_A = -1{,}9$

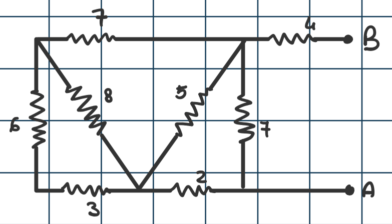
Il bilancio è <u>corretto</u>

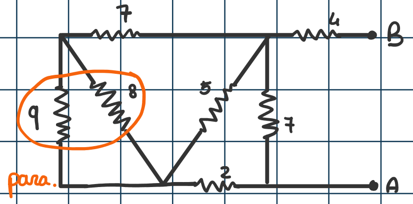
(22) Resistenza equivalente

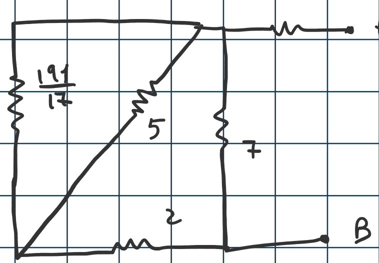


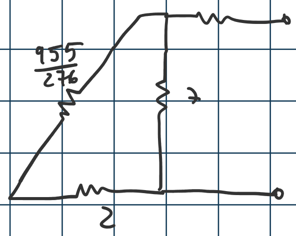
Determinare la resistenza equivalente alla porta AB e alla porta CD

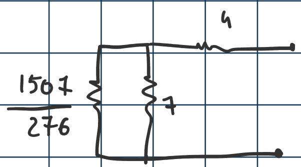
Per la porta AB il circuito sarà:

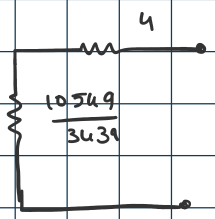






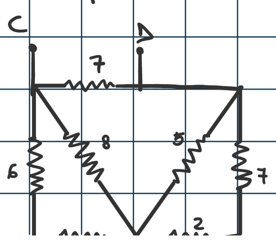


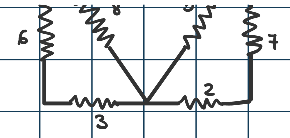


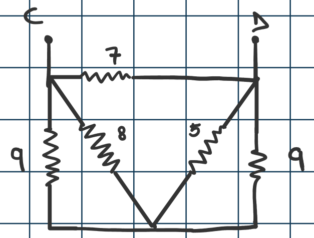


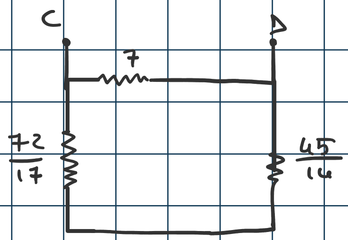
$$R_{eq} = 4 + \frac{10549}{3439} = 7\ \Omega$$

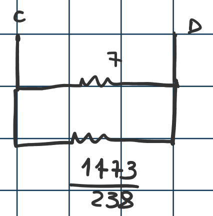
Per la porta CD avrò:





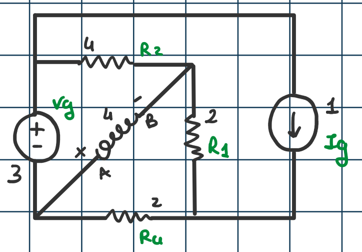






$R_{eq} = 3,6$

(23) Circuiti del 1° ordine / andamento nel tempo



Calcolare $i_L(t)$ e disegnarne l'andamento nel tempo

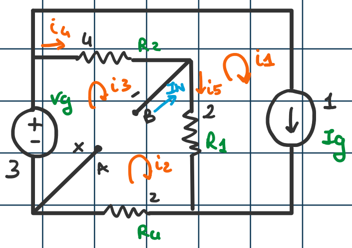
La funzione gradino è la massima approssimazione di un interruttore

La parte senza memoria di un circuito può essere sostituita con l'equivalente di Norton o Thevenin.

In questo caso si ha un induttore per cui vado a calcolare la corrente di cortocircuito che lo attraversa, se avessi avuto un condensatore sarebbe stato più utile trovare la tensione.

un condensatore sarebbe stato più utile trovare la tensione.

Questo circuito era stato risolto prima con dati diversi. Procedo dunque a calcolare I_N:



Lo risolvo col metodo degli anelli

$i_1 = 1$

$I_N = i_2 - i_3$ $\qquad i_4 = i_3 - 1$ $\qquad i_5 = -1 + i_2$

Applico la KVL:

① $-V_g + R_2(i_3 - 1) = 0$

$-3 + 4i_3 - 4 = 0$

$4i_3 = 7$

$i_3 = \frac{7}{4}$ $\qquad i_4 = \frac{7}{4} - 1 = \frac{3}{4}$

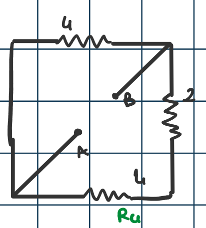
② $2 \cdot i_2 + 2i_5 = 0$

$2i_2 + 2i_2 - 2 = 0$

$i_2 = \frac{1}{2}$ A

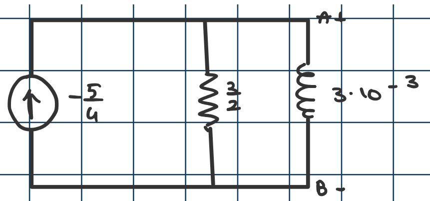
$I_N = i_2 - \quad = \frac{1}{2} - \frac{7}{4} = -\frac{5}{4}$

Cerco ora la resistenza R_{TH}



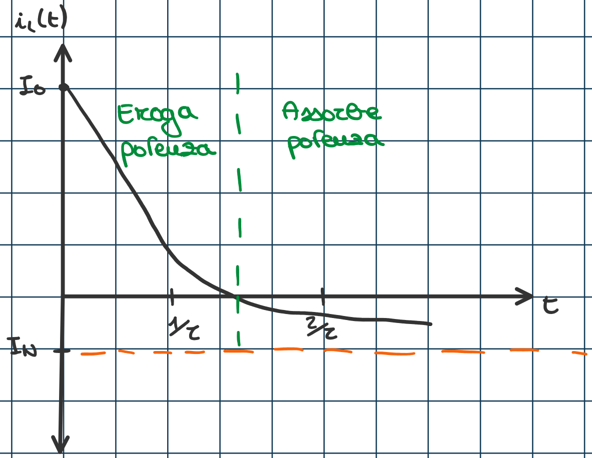
$R_{TH} = \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = \frac{3}{2}$

Il circuito equivalente sarà dunque



$\tau = \frac{L}{R} = 2 \cdot 10^{-3}$

Si ha che $i_L(t) = I_N + (I_0 - I_N)\, e^{-\tau t}$



Il valore iniziale sarà a 0 con ordinata pari a $I_0 = 4$ (data dal problema)

A più infinito invece tende a I_N

Calcolo altri punti intermedi quando $t = \frac{1}{\tau}$ e $t = \frac{2}{\tau}$

Se $t = \frac{1}{\tau} \Rightarrow i_L(t) = I_N + (I_0 - I_N)\, e^{-1} = I_N + \frac{I_0 - I_N}{e} = 0{,}68$

Se $t = \frac{2}{\tau} \Rightarrow i_L(t) = I_N + (I_0 - I_N)\, e^{-2} = I_N + \frac{I_0 - I_N}{e^2} = -0{,}54$

Dunque nel caso di un circuito RL devo ricorrere ad individuare il circuito equivalente di Thevenin per poi utilizzare la corrente I_N ricavata nella legge generale

$$i_L(t) = I_N + (I_0 - I_N) \cdot e^{-t\tau} \quad \text{con } \tau = \frac{L}{R}$$

Inoltre vale la relazione $P_L(t) = V_L(t) \cdot I_L(t) = L \cdot \dot{I}_L(t) \cdot I_L(t)$

Nel caso di un circuito RC, per ottenere la legge nel tempo devo invece calcolare l'equivalente di Thevenin per poi utilizzare la tensione V_{TH} ricavata nella legge generale

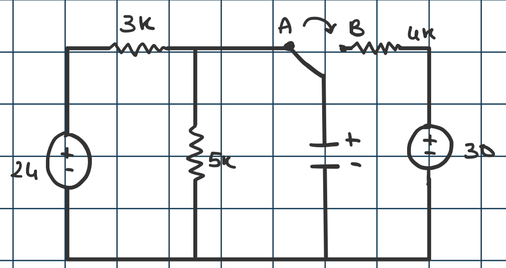
$$V_C(t) = V_{TH} + (V_0 - V_{TH})\, e^{-t\tau} \quad \text{con } \tau = RC$$

I circuiti del primo ordine presentano, oltre ai soliti componenti privi di memoria, dei componenti dinamici come condensatori o induttori.

Se il circuito è inizialmente chiuso mi viene dato un valore che è quello di regime nonché V_{TH}; quando il circuito viene aperto vi è poi un processo di scarica.

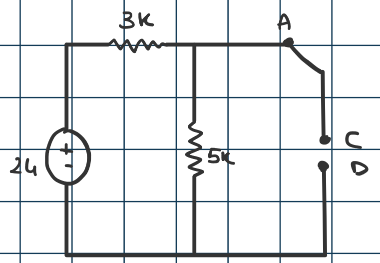
Se il circuito è inizialmente chiuso mi viene dato un valore che è quello di regime nonché V_{TH} ; quando il circuito viene aperto vi è poi un processo di scarica.
Se il circuito è inizialmente aperto e poi viene chiuso ho invece un processo di carica

24 Interruttore mobile



Il circuito è stato per molto tempo chiuso su A. Viene poi spostato su B

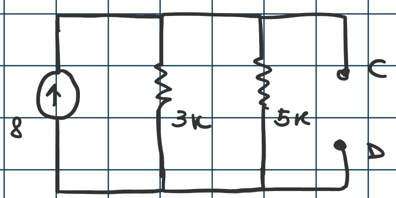
Calcolo per prima cosa il valore iniziale di v agli estremi del condensatore quando il circuito era chiuso su A

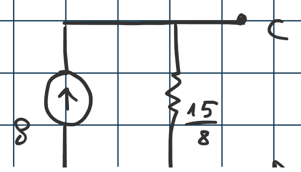


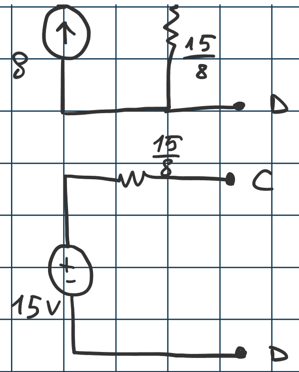
La tensione ai capi CD è la stessa di quella ai capi della resistenza da 5K Ω.
Siamo in presenza di un partitore di tensione per cui

$$V_D = \frac{5}{3+5} \cdot 24 = 15\,V$$

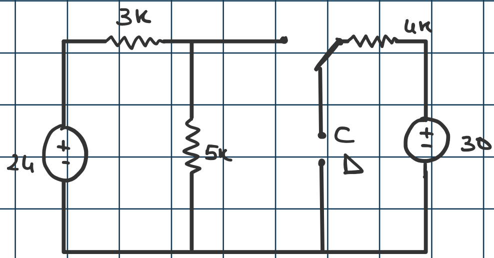
Potevo ottenere lo stesso risultato calcolando V_{TH}. Segue il procedimento







Ora procedo a calcolare V di regime quando il circuito si chiude su B



Per calcolare V_{TH} procedo a calcolare l'equivalente di Thevenin /Norton

In questo caso l'unica resistenza visibile da CD è quella da $4K\Omega$ in quanto nelle altre non scorre corrente.
Stessa cosa vale per la tensione di regime V_{TH} che in questo caso è l'unica visibile. Di conseguenza avrò

$v_0 = 15V$

$V_{TH} = 30V$

$R_{TH} = 4K\Omega$

$C = 0{,}5 \cdot 10^{-3}\ F$

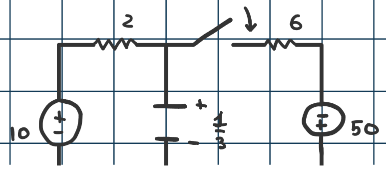
Di conseguenza $\tau = \frac{1}{RC} = \frac{1}{2}$

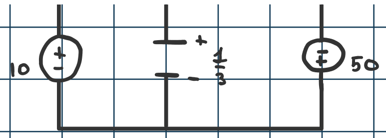
Dunque la legge sarà

$$v_C(t) = 30 - 15\, e^{-\frac{t}{2}}$$

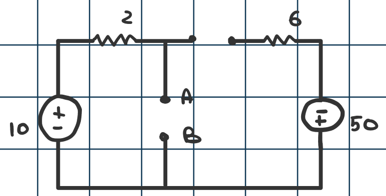
12:25

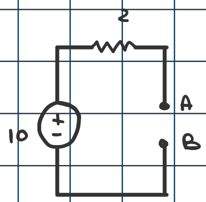
25 Processo di carica





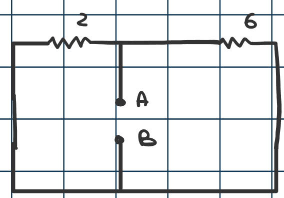
Calcolo v_0 ai capi del condensatore con l'interruttore aperto





Avrò che $v_0 = 10$

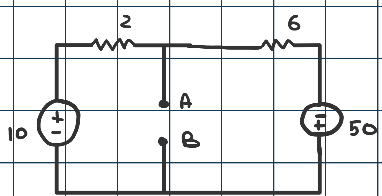
Procedo ora a calcolare R_{TH} a circuito chiuso

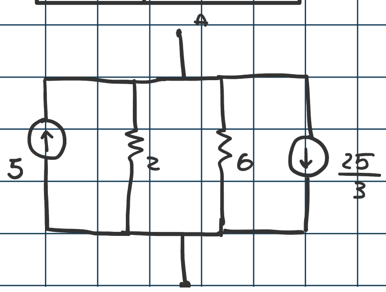


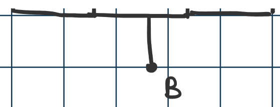
$$R_{TH} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}} = 1{,}5\ \Omega$$

$$\tau = \frac{1}{RC} = 2\ s$$

Calcolo ora V_{TH} ovvero la tensione a regime







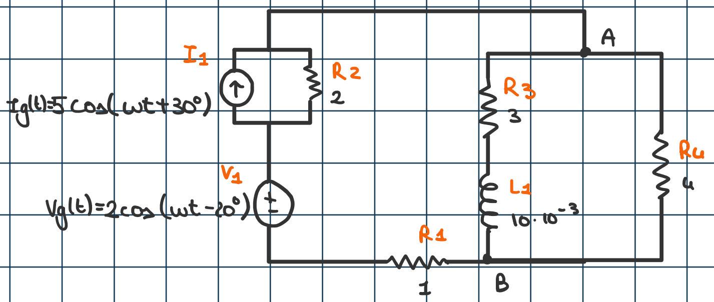
Applico Millman:

$$V_{TH} = \frac{5 - \frac{25}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}} = -5\,V$$

Dunque la legge sarà

$$v_C(t) = -5 + 15\,e^{-2t}$$

26 Circuiti sinusoidali / potenza attiva e reattiva



Determinare l'andamento temporale della tensione $V_{AB}(t)$ e la potenza attiva e reattiva del $\underbrace{\text{ramo } R_3 L_1}_{\text{ovvero fra A e B}}$ sapendo che $\omega = 100$

Prima parte: passo ad un circuito dei fasori

Scrivo i fasori ricordando che esso è pari a $A \cdot e^{j\phi}$
e che per eulero ho che $e^{j\phi} = \cos\phi + j\sin\phi$

Ho che $I_g(t) = 5\cos(\omega t + 30°)$ dunque
$\overline{I_g} = 5 \cdot e^{j30} = 5(\cos 30 + j \sin 30) = 4{,}33 + j\,2{,}5$ [A]

Ho che $V_g(t) = 2\cos(\omega t - 20°)$ dunque
$\overline{V_g} = 2\,e^{-j20} = 2[\cos(-20°) + j\sin(-20°)] = 1{,}87 - j \cdot 0{,}68$ [V]

Seconda parte: calcolo le impedenze:

Per le resistenze è banale in quanto è pari al valore stesso della resistenza
$Z_{R1} = 1\,\Omega$ $\quad Z_{R2} = 3\,\Omega$ $\quad Z_{R4} = 4\,\Omega$ $\quad Z_{R2} = 2\,\Omega$

Per l'induttanza invece vale la formula $z_L = j\omega L$ (per il condensatore $\frac{1}{j\omega C}$)
$z_{L1} = j \cdot 100 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = j\ \Omega$

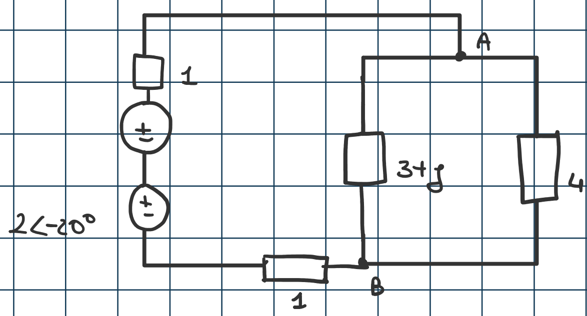
Terza parte: calcolo l'impedenza del ramo di interesse

Per le impedenze in serie, l'impedenza equivalente è data dalla somma delle impedenze.

Per le impedenze in parallelo, l'impedenza equivalente è data dal reciproco della somma dei reciproci delle impedenze.

Quarta parte: calcolo la differenza di potenziale ai capi di AB

Devo calcolare per prima cosa la tensione ai capi AB. Nel regime sinusoidale valgono le solite leggi e teoremi per cui semplifico il circuito



Il fasore del nuovo generatore $\overline{V_{g2}}$ sarà dato da

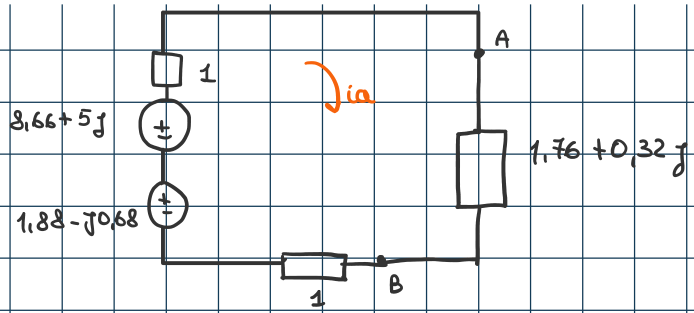
$$\overline{V_{g2}} = \overline{I_{g2}} \cdot z_{R2} = (4{,}33 + j\,2{,}5)\,2 = 8{,}66 + 5j$$

Calcolo dunque l'impedenza fra i capi AB

$$z_{AB} = z_{eq} \,//\, z_{R4} = \frac{(3+j)\cdot 4}{(7+j)} = \frac{4(3+j)(7-j)}{(7+j)(7-j)} = 1{,}76 + 0{,}32j$$

per eliminare j devo ridurre la frazione

Il circuito ottenuto sarà dunque



Ho ottenuto una sola maglia per cui posso applicare la KVL:

$$i_a\,(z_{R2} + z_{AB} + z_{R1}) - \overline{V}_{g1} - \overline{V}_{g2} = 0$$

Dunque $i_a = \dfrac{\overline{V}_{g1} + \overline{V}_{g2}}{z_{R2} + z_{AB} + z_{R1}} = 2,24 + 0,75j$ [A]

Ottengo dunque che $V_{AB} = z_{AB} \cdot i_a = 3,70 + 2,03j$ [V]

Quinta parte: Trovare potenza attiva e reattiva

Per calcolare le potenze attiva e reattiva calcolo per prima cosa la potenza complessa che è composta appunto da potenza attiva e reattiva

La potenza complessa si calcola come $S = \underset{\text{reattiva}}{\overset{\text{attiva}}{P + jQ}} = \frac{1}{2} V I^*$ Fasore coniugato

Tale formula vale SEMPRE. Tuttavia nel caso di un bipolo vale anche la formula generalizzata di ohm $V = z \cdot I$. Di conseguenza la potenza complessa diventa

$$S = \frac{1}{2}\frac{|V|^2}{z^*} = \frac{Re^2 + Im^2}{2z^*}$$

Ottengo dunque che in questo caso $z = z_{eq} = 3 + j$ e dunque $z^* = 3 - j$ perciò

$$S = \frac{1}{2}\frac{|V|^2}{z^*} = \frac{Re^2 + Im^2}{2z^*} = \frac{3,7^2 + 2,03^2}{2(3-j)} = 2,67 + 0,89j \text{ [V·A]}$$

Ricordando dunque che $S = P + jQ$ avrò che la potenza attiva sarà pari a 2,67 [W] e la potenza passiva sarà pari a 0,89 [V·A·R]

In questo caso era dato un circuito composto da resistenze e una sola induttanza. La potenza reattiva è in questo caso positiva che è corretta in quanto è appunto presente un induttore; se la potenza reattiva fosse uscita negativa allora ci sarebbe stato un errore nel calcolo

Dunque per riassumere:

Dato un circuito sinusoidale, per prima cosa devo portare tutte le grandezze nel dominio dei fasori ricordando che data una espressione del tipo $A\cos(\omega t+\phi)$ allora il fasore sarà $A\cdot e^{j\phi}$ e che, per Eulero, si ha $e^{j\phi} = \cos\phi + j\sin\phi$.

Il secondo step consiste nel calcolare le varie impedenze ricordando che vi sono tre casi:

- RESISTENZA $Z = R$
- CONDENSATORE $Z = \frac{1}{j\omega C}$
- INDUTTORE $Z = j\omega L$

Calcolo poi la variazione di potenziale e l'impedenza complessiva ai capi del ramo di interesse così poi da poter calcolare la potenza complessa che è data da

COMPONENTE DI IMPEDENZA Z

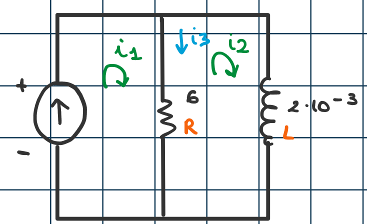
$$S = \frac{1}{2}\frac{|V|^2}{Z^*} = \frac{Re^2+Im^2}{2Z^*} \; [VA]$$

GENERATORE DI CORRENTE CON I_g

$$S = \frac{1}{2} V_g \cdot I_g^* \; [VA]$$

Ricordando che $S = P + jQ$ otterrò che la potenza attiva è P e si misura in W mentre la potenza reattiva sarà Q e si misura in V·A·R

27 Circuiti sinusoidali / potenza complessa



$$S = \frac{|V|^2}{2Z^*} = \frac{Re^2+Im^2}{2Z^*}$$

$\omega = 2000$ rad/s

$I_g = 5\cos(\omega t + 90°)$ [A]

Calcolare la potenza complessa e la tensione nel tempo $V_g(t)$

Prima parte: trasformo le relazione in fasori e calcolo le impedenze

$$\bar{I}_g = 5e^{90j} = 5(\cos 90° + j\sin 90°) = 5j \; [A]$$

$$Z_R = 6 \qquad Z_L = j\omega L = j\cdot 2000\cdot 2\cdot 10^{-3} = 4j$$

Seconda parte: calcolo la tensione ai capi del generatore di corrente

Seconda parte: calcolo la tensione ai capi del generatore di corrente

$i_1 = 5j \qquad i_3 = i_1 - i_2 = 5j - i_2$

① $-V_g + 6 i_3 = 0 \qquad 30j - 6 i_2 = V_g$

② $6 i_3 - 4j \cdot i_2 = 0$

$30j - 6 i_2 - 4j\, i_2 = 0$

$$i_2 = \frac{30j}{6+4j} \cdot \frac{(6-4j)}{(6-4j)} = \frac{180j + 120}{36+16} = 2{,}3 + 3{,}46j$$

Dunque $V_g = 30j - 6 \cdot 2{,}3 - 6 \cdot 3{,}46j = -13{,}8 + 9{,}24j$

Terza parte: calcolo la potenza complessa

Nel caso del generatore di corrente la formula diventa

$$S = \frac{1}{2} V_g \cdot I_g^* = \frac{1}{2} (-13{,}8 + 9{,}24j)(-5j) = 23 + 34{,}45 \ [VA]$$

Ultima parte: calcolo dell'espressione della tensione

La tensione ai capi del generatore di corrente posso applicare la formula

$$V_g(t) = |V_{Ig}| \cos(\omega t + \underbrace{\arg(V_{Ig})}) = 16{,}57 \cos(2000t + 146°)$$

L'argomento è pari a
$\arctan\left(\frac{Im}{Re}\right)$

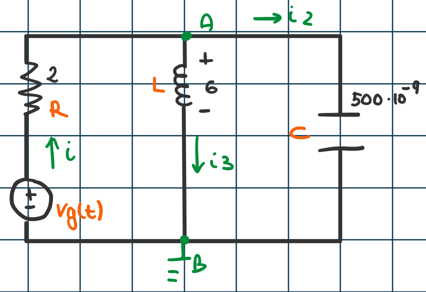
se la parte reale è minore
di zero devo aggiunger 180
e quindi diventa pari a
$\arctan\left(\frac{Im}{Re}\right) + 180°$

Dunque, dati degli elementi circuitali posso dire che
$i(t)$ e $v(t)$ sono del tipo

$v(t) = |V| \cos(\omega t + \arg(V))$
$i(t) = |I| \cos(\omega t + \arg(I))$

$i(t) = |I| \cos(\omega t + \arg(I))$

28



$v_g(t) = 4 \operatorname{sen}(\omega t)$

$\omega = 1000$ rad/s

Calcolare la potenza apparente e il fattore di potenza del generatore di tensione, la potenza complessa scambiata dal condensatore e la tensione nel tempo ai capi dell'induttore

Prima parte: trasformo nel dominio dei fasori

$Z_R = 2 \qquad Z_L = j\omega L = 6j \qquad Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -2j$

Per trasformare V_g devo prima riportarlo sotto forma di coseno. Ho che $\sin(\omega t) = \cos(\omega t - 90°)$

Dunque $V_g(t) = 4\cos(\omega t - 90°)$

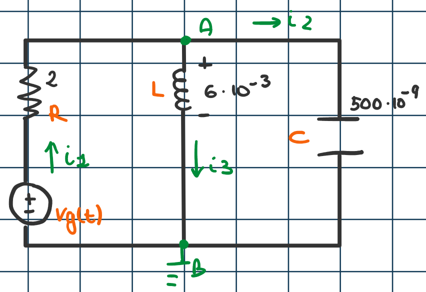
$$V_g = 4e^{-90j} = 4[\cos(-90°) + j\sin(-90°)] = -4j$$

Seconda parte: calcolo la potenza apparente

La potenza apparente si calcola come $S = V_{eff} \cdot I_{eff}$

dove $V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2 dt}$ e $I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt}$

Calcolo la corrente i ai capi del generatore di tensione:



NODI:

NODI :

A $i_1 - i_2 - i_3 = 0$ $\quad i_3 = \frac{VA}{6} = -\frac{VA\,j}{6}$ $\quad i_2 = \frac{VA}{-2j} = \frac{VA\,j}{2}$

$i_1 = \frac{Vg - Va}{R} = \frac{-4j - VA}{2}$ In questo caso la differenza di potenziale è causata da Vg-VA

$$\frac{-4j - VA}{2} + \frac{VA\,j}{6} - \frac{VA\,j}{2} = 0$$

$$-12j - 3VA + VA\,j - 3VA\,j = 0$$

$$-3VA - 2VA\,j = 12j$$

$$VA = \frac{12j}{(-3-2j)}\frac{(-3+2j)}{(-3+2j)} = \frac{-36j - 24}{9+4} = -2{,}7j - 1.84$$

Dunque $i_1 = -0{,}65j + 0{,}92$

P complessa sarà :

$$S = \frac{1}{2} V_g \cdot I_g^* = \frac{1}{2}(-4j)\cdot(0{,}92 + 0{,}65j) = 1{,}24 - 1{,}94j$$

La potenza apparente sarà

$$|S| = \sqrt{Re^2 + Im^2} = 2{,}3$$

Il fattore di potenza sarà

$$pf = \frac{P \rightarrow \text{attiva}}{|S| \rightarrow \text{apparente}} = \frac{1{,}24}{2{,}3} = 0{,}53$$

La tensione nel tempo sarà invece data dalla formula

$$V_L(t) = |V| \cos(\omega t + \arg(V)) = 3{,}24 \cos(\omega t + 56{,}3^\circ)$$

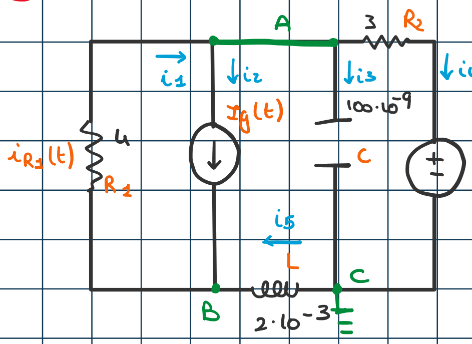
$V = VA$

$|V| = \sqrt{Re^2 + Im^2} = 3{,}26$ $\quad \arg\left(\frac{Im}{Re}\right) = 56{,}3^\circ$

Esercizi svolti

domenica 4 luglio 2021 16:25

① Esercizio 3



$\omega = 2000 \ rad/s$

$V_g(t) = 6 \cos(\omega t)$

$I_g(t) = 3 \cos(\omega t + 90°)$

Determinare

- la potenza apparente
- il fattore di potenza

} generatore di corrente { $|S| = \sqrt{Im^2 + Re^2}$, $pf = \frac{P \ attiva}{|S|}$

- verificare la conservazione della potenza attiva
- la corrente che scorre in R_1

1) Scrivo i componenti nel dominio dei fasori

$Z_{R2} = 3 \quad Z_{R1} = 4 \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j2000 \cdot 100 \cdot 10^{-9}} = -\frac{j}{5000}$

$Z_L = j\omega L = 2 \cdot 10^{-3} \cdot j \cdot 2000 = 4j$

$I_g = 3 e^{90j} = 3 (\cos 90° + j \sin 90°) = 3j$

$V_g = 6$

2) Calcolo correnti e variazioni di potenziale

$i_2 = I_g = 3j \qquad i_1 = \frac{V_B - V_A}{4} \qquad i_3 = 5000 \ V_A$

$i_4 = \frac{V_A + 6}{3} \qquad i_5 = -\frac{V_B}{4j} = \frac{V_B}{4} j$

(A) $i_1 - i_2 - i_3 - i_4 = 0$

$\frac{V_B - V_A}{4} - 3j - 5000 V_A - \frac{V_A + 6}{3} = 0$

$3 V_B - 3 V_A - 36j - 60000 V_A - 4 V_A - 24 = 0$

(B) $-i_1 + i_2 + i_5 = 0$

$$\frac{VA-VB}{4} + 3j + \frac{VB}{4} j = 0$$

(C) $i_3 + i_4 - i_5 = 0$

$$5000\,VA + \frac{VA+6}{3} - \frac{VB}{4} j = 0$$

Una volta fatti i vari calcoli ottengo che

$$S = \frac{1}{2} V \cdot I^* \quad \text{dove} \quad V = V_A - V_B, \quad I = 3j$$

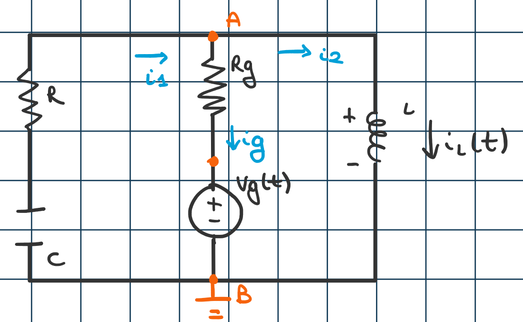
$$|S| = \sqrt{Re^2 + Im^2}$$

$$pf = \frac{P}{|S|}$$

La corrente che scorre in R_1 è $i_1 = \frac{VB - VA}{4}$

Per verificare la conservazione della potenza attiva devo verificare che la somma delle potenze degli elementi passivi quali le resistenze sia pari alla parte reale della potenza complessa mentre per verificare la conservazione della potenza reattiva devo verificare che la somma delle potenze degli elementi circuitali dotati di memoria quali condensatori e induttori sia pari alla parte immaginaria della potenza complessa

(2) 19:40



$V_g = 6\cos(\omega t - 90°)$

$R_g = 1$

$R = 6$

$L = 2 \cdot 10^{-3}$

$C = 500 \cdot 10^{-6}$

$\omega = 1000$

1) potenza apparente
2) fattore di potenza

generatore di tensione: basta calcolare la complessa

$$fp = \frac{P}{|S|} = \frac{P}{\sqrt{Re^2(S) + Im^2(S)}}$$

1) potenza apparente
2) fattore di potenza
3) la corrente $i_L(t)$
4) la potenza complessa al bipolo RC

generatore di tensione: basta calcolare la complessa

$$f_P = \frac{P}{|S|} = \frac{P}{\sqrt{Re^2(S) + Im^2(S)}}$$

$$i_L(t) = |I_L| \cos(\omega t + \arg(I_L))$$

1) Trasformo nel dominio dei fasori

$$\overline{V_g} = 6\, e^{-90j} = 6\left(\cos(-90°) + j \sin(-90°)\right) = -6j$$

$$Z_R = 6\ \Omega$$

$$Z_L = j\omega L = j \cdot 1000 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 2j$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j \cdot 1000 \cdot 500 \cdot 10^{-6}} = \frac{2}{j} = -2j$$

$$Z_{Rg} = 1\ \Omega$$

2) La potenza apparente posso calcolarla come

$$S_a = V_{g\,eff} \cdot I_{g\,eff} = \sqrt{P^2 + Q^2} = |S| \quad \text{dove } S \text{ è}$$

la potenza complessa pari a $S = P + Qj = \frac{1}{2} V_g \cdot I_g^*$

Procedo dunque a calcolarmi I_g:

Applico l'analisi nodale per cui definisco le correnti e pongo come incognita il potenziale in A

(A) $i_1 - i_g - i_2 = 0$

$$i_g = V_A - V_g(t) = V_A + 6j$$

$$i_1 = \frac{-V_A}{6-2j} \cdot \frac{6+2j}{6+2j} = \frac{-6V_A - 2V_A j}{40}$$

$$i_2 = \frac{V_A}{2j} = -\frac{V_A}{2} j$$

$$-\frac{6V_A}{40} - \frac{1}{20} V_A j - V_A - 6j + \frac{V_A}{2} j = 0$$

$$-1{,}15 V_A + 0{,}45 V_A j = 6j$$

$$V_A = \frac{6j}{0{,}45j - 1{,}15} = \frac{6j(0{,}45j + 1{,}15)}{-2025 - 1{,}3225} = \frac{-2{,}7 + 6{,}9j}{-1{,}525} = -4{,}52j + 1{,}77$$

$$i_g = V_A + 6j = -4{,}52j + 1{,}77 + 6j = 1{,}77 + 1{,}48j$$

$i_g = V_A + 6j = -4{,}52j + 1{,}77 + 6j = 1{,}77 + 1{,}48j$

Dunque ho che $S = \frac{1}{2} V_g \cdot I_g^* = \frac{1}{2}(-6j)(1{,}77 - 1{,}48j) =$

$= -5{,}31j - 4{,}44$

$|S| = \sqrt{Re^2 + Im^2} = 6{,}92$

Dunque $fp = \frac{P}{|S|} = \frac{-4{,}44}{6{,}92} = -0{,}64$

Avrò che $i_L(t) = |i_2| \cos(\omega t + \arg(i_2))$

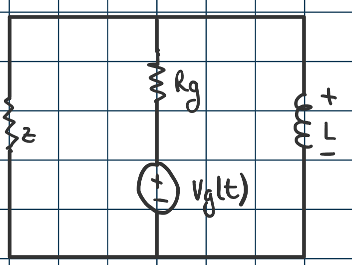
dove $i_2 = -\frac{V_A}{2} j = \frac{4{,}52 j^2}{2} - \frac{1{,}77}{2} j = -2{,}26 - 0{,}885 j$

$|i_2| = \sqrt{2{,}26^2 + 0{,}885^2} = 2{,}42$

$\arg(i_2) = \arg\left(\frac{-0{,}885}{-2{,}26}\right) + 180° = 201{,}38$

Dunque $i_L(t) = 2{,}42 \cos(\omega t + 201{,}38°)$

Per quanto riguarda il bipolo RC posso considerare una impedenza $Z = Z_R + Z_C = 6 - 2j$ e un circuito del tipo



Sapendo che $S = \frac{1}{2}\frac{|V|^2}{Z^*} = \frac{1}{2} V \cdot I^*$ in questo caso

posso calcolarla come

$S = \frac{1}{2}\frac{|V_A|^2}{Z^*} = \frac{4{,}52^2+1{,}77^2}{2(6+2j)} = \frac{23{,}56}{2(6+2j)} = \frac{11{,}7\,(6-2j)}{40} = 1{,}76 - 0{,}59j$

Traccia svolta 27 febbraio

sabato 3 luglio 2021 14:10

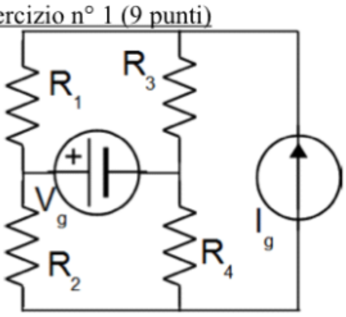
Corso di Elettrotecnica -Prova scritta del 27/02/2018 -A

NOME	COGNOME	MATRICOLA	CORSO E ANNO DI STUDI

In riferimento ad entrambi gli esercizi, si considerino le seguenti due costanti:

☐ k_N *pari* al numero di lettere del proprio nome; ☐ k_C *pari* al numero di lettere del proprio cognome.

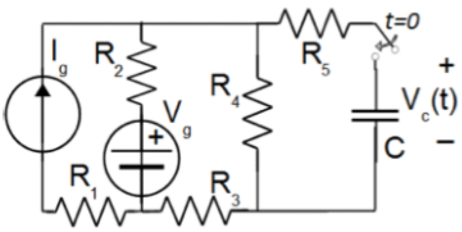
Esercizio n° 1 (9 punti)



Dato il circuito in figura, determinare: (1) la potenza assorbita dai resistori, (2) la potenza generata dal generatore ideale di tensione V_g e dal generatore ideale di corrente I_g.
Verificate poi il bilancio energetico.

DATI
$V_g = k_N$ [V], $I_g = 1$ [A], $R_1 = 1$ [Ω],
$R_2 = k_C$ [Ω], $R_3 = 2$ [Ω], $R_4 = 4$ [Ω]

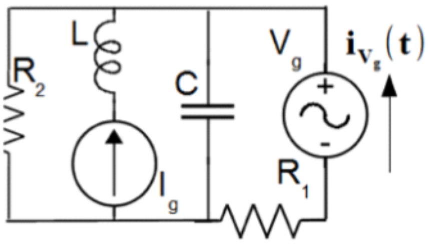
Esercizio n° 2 (9 punti)



Nel circuito in figura l'interruttore è stato aperto per molto tempo. All'istante t=0, l'interruttore viene chiuso.
Determinare $v_C(t)$ per $t > 0$, sapendo che all'istante t=0 in cui viene connesso il condensatore C la tensione $v_C(t)$ vale $v_C(t=0^-) = 4$ [V]. Rappresentarne poi su un grafico l'andamento temporale.

DATI: $V_g = 10$ [V], $I_g = k_C$ [A], $R_1 = 2$ [Ω], $R_2 = 2$ [Ω], $R_3 = 4$[Ω], $R_4 = k_N$ [Ω], $R_5 = 2$ [Ω], C=0.2 [μF]

Esercizio n° 3 (12 punti)



Il circuito in figura si trova in regime permanente sinusoidale.
Determinare: (1) la potenza complessa, la potenza istantanea e il fattore di potenza del generatore di corrente Ig; (2) la potenza complessa del generatore di tensione Vg; (3) la corrente $i_{Vg}(t)$ che scorre nel generatore di tensione Vg.

DATI: $V_g = k_N \cos(\omega t)$[V], $I_g = k_C \cos(\omega t - \pi/2)$ [A], $R_1 = 2$ [Ω], $R_2 = 4$ [Ω], C =500[μF], L= 0.2[mH], ω=1000 [rad/s]

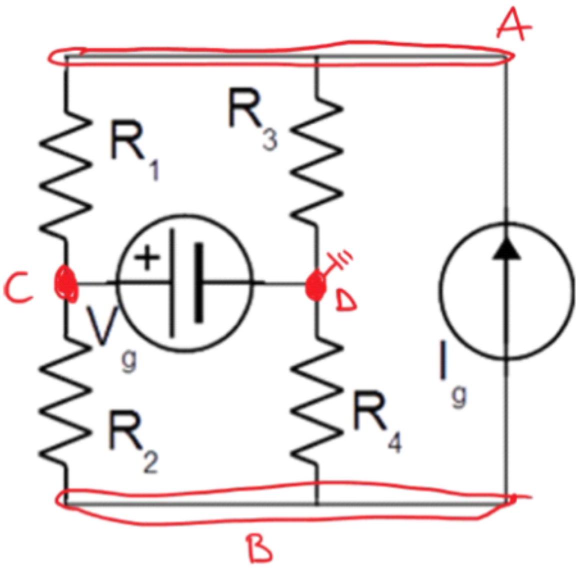
IL PRESENTE FOGLIO DEVE ESSERE CONSEGNATO UNITAMENTE ALL'ELABORATO

ESEMPIO CON Kn=7, Kc=8

Soluzioni Prova Scritta Elettrotecnica del 27 Febbraio 2018 - Compito A

Esercizio n° 1

```
reset();assume(kn, Type::PosInt):; assume(kc, Type::PosInt):;
kn:=7; kc:=8;
7
8
```



Dato il circuito infigura, determinare: (1) la potenza assorbita dai resistori, (2) la potenza generata dal

generatore ideale di tensione V_g e dalgeneratore ideale di corrente I_g.

Verificate poi ilbilancio energetico.

DATI

V_g= $\boldsymbol{k_N}$[V], I_g= *1* [A], R_1 = 1 [Ω],

R_2= $\boldsymbol{k_C}$ [Ω], R_3=2 [Ω], R_4= 4 [Ω]

Parametri del circuito (generatori e resistenze)

```
Vg:=kn; Ig:=1:; R1:=1:; R2:=kc:; R3:=2:; R4:=4:;
G1:=1/R1:;G2:=1/R2:;G3:=1/R3:;G4:=1/R4;
7
1/4
```

Utilizzo il metodi dei nodi con nodi incogniti A e B. Il nodi D è il riferimento, quindi Ed=0. Il potenziale del nodo C è vincolato: Ec=Vg.

Per i nodi incogniti posso scrivere le equazioni: (Ea-Ec)*G1+Ea*G3=Ig; (Eb-Ec)*G2+Eb*G4=-Ig

```
Ed:=0;Ec:=Vg;
Ea:=(Ig+Ec*G1)/(G1+G3);
Eb:=(-Ig+Ec*G2)/(G2+G4);
```

0

7

$\frac{16}{3}$

$-\frac{1}{3}$

Tovate le tensioni dei nodi posso ricavare tutte le potenze dei resistori

```
PR1:= (Ea-Ec)^2*G1:;float(PR1);
PR2:= (Eb-Ec)^2*G2:;float(PR2);
PR3:= (Ea-Ed)^2*G3:;float(PR3);
PR4:= (Eb-Ed)^2*G4:;float(PR4);
```

2.777777778

6.722222222

14.22222222

0.02777777778

Calcolo la potenza totale assorbita dalle resistenze

```
Ptot:=float(expand(PR1+PR2+PR3+PR4))
```

23.75

Calcolo ora le potenze erogate dai generatori (NOTA: va utilizzata la convenzione dei generatori per i versi).
Per calcolare la potenza del generatore di tensione mi devo prima calcolare la corrente che ci scorre attraverso
tramite l'applicazione della KCL ad un nodo a cui è connesso il generatore, ad esempio il nodo D.
In questo caso si ha Ivg=Eb*G4+Ea*G3.
La tensione ai capi del generatore di corrente è invece semplicemente data da Vig=Ea-Eb

```
 Vig:=Ea-Eb; float(Vig);
Ivg:=Eb*G4+Ea*G3;
```

$\frac{17}{3}$

5.666666667

$\frac{31}{12}$

```
PIg:=(Vig*(Ig));
PVg:=Vg*Ivg;
```

$\frac{17}{3}$

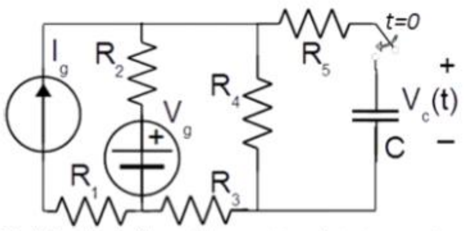
$\frac{217}{12}$

Calcolo la potenza totale generata da Ig e Vg che deve essere uguale a quella assorbita dai resistori

```
PtotGen:=float(float(expand(PVg+PIg)))
```

23.75

Esercizio n° 2



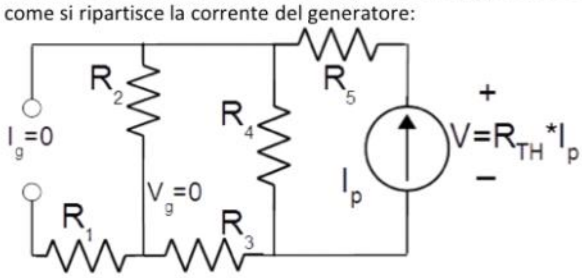
Nel circuito in figura l'interruttore è stato aperto per molto tempo. All'istante t=0, l'interruttore viene chiuso.
Determinare $v_C(t)$ per t > 0, sapendo che all'istante t=0 in cui viene connesso il condensatore C la tensione $v_C(t)$ vale $v_C(t=0^-) = 4$[V]
Rappresentarne poi su un grafico l'andamento temporale.
DATI
$V_g = 10$ [V], $I_g = kc$ [A], $R_1 = 2$ [Ω], $R_2 = 2$ [Ω], $R_3 = 4$[Ω], $R_4 =$ kn [Ω], $R_5 = 2$[Ω], C=0.2 [microF]

```
Vg:=10:; Ig:=kc:; R1:=2:; R2:=2:; R3:=4:; R4:=kn:;R5:=2:;
C:=2e-7;V0:=4;
```

0.0000002

4

Devo trovare il circuito equivalente di Thevenin visto ai capi del condensatore C.
Prima calcolo la resistenza di Thevenin.
Disattivo i generatori, sostituisco la capacità con un generatore di corrente di prova Ip ed analizzo come si ripartisce la corrente del generatore:



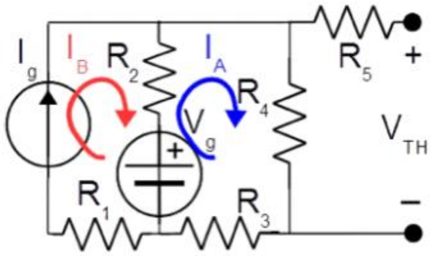
R1 è in serie con un ramo aperto per cui risulta ininfluente.
R2 e R3 sono quindi in serie. La loro serie (R2+R3) è in parallelo con R4 e la resistenza equivalente è in serie con R5.
La resistenza equivalente di Thevenin è pertanto Rth=((R2+R3)*R4)/(R2+R3+R4)+R5

```
Rth:=((R2+R3)*R4)/(R2+R3+R4)+R5;
float(Rth)
```

$\frac{68}{13}$

5.230769231

Calcolo poi la tensione di Thevenin ovvero la tensione a vuoto ai capi della capacità.



Utilizzando il metodo degli anelli con la scelta delle correnti come in figura si trova che Vth=I_A* R4.
Per trovare IA scrivo la KVL sapendo che IB=Ig.
(IA-IB)*R2+IA*(R3+R4)=Vg da cui IA= (Vg+IB*R2)/(R2+R3+R4)
--> Vth=(Vg*R4+IB*R2*R4)/(R2+R3+R4)

```
Vth:=(Vg*R4+Ig*R2*R4)/(R2+R3+R4);float(Vth);
```

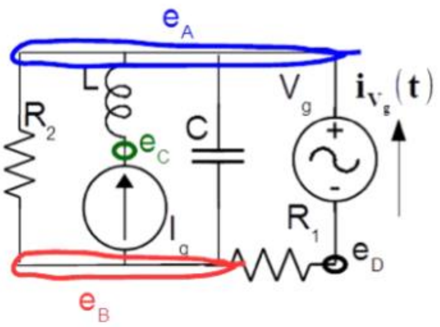
14

14.0

```
tau:=RTh*C
```

0.0000002 RTh

Esercizio n° 3



Il circuito infigura si trova in regime permanente sinusoidale.Determinare: (1) la potenza complessa, la potenza istantanea
e il fattore di potenza delgeneratore di corrente Ig; (2) la potenza complessa del generatore di tensioneVg;
(3) la corrente $i_{Vg}(t)$ che scorre nel generatore di tensione Vg.
DATI:
V_g= $\boldsymbol{k_N}$ cos(wt)[V], I_g= $\boldsymbol{k_C}$ cos(wt-pi/2)[A], R_1 = 2 [Ω], R_2 = 4 [Ω], C =500[microF], L= 0.2[mH], w=1000[rad/s]
Calcolo fasori e Impedenze:

```
assume(kn, Type::PosInt):; assume(kc, Type::PosInt):;
Vg:=kn;Ig:=-kc*I;
ZR1:=2;YR1:=1/ZR1:;ZR2:=4;YR2:=1/ZR2:;
L:=0.0002;C:=0.0005;w:=1000;
ZL:=I*w*L;YL:=1/ZL:;ZC:=-I/(w*C);YC:=1/ZC:;
```

7

$-8\,i$

2

4

0.0002

0.0005

1000

$0.2\,i$

$-2.0\,i$

Applico il teorema di Millman per trovare la differenza di potenziale e_A-e_B, dove e_B è il nodo di riferimento (e_B=0)

e_A=e_A-e_B=(Vg/ZR1+Ig)/((1/ZR1)+(1/ZC)+(1/ZR2))=(Vg*YR1+Ig)/(YR1+YC+YR2)

```
eA:=(Vg*YR1+Ig)/(YR1+YC+YR2);
```

$-1.692307692 - 9.538461538\,i$

Calcolo le potenze.

Per calcolare la potenza del generatore di corrente, devo prima trovare il fasore della tensione ai sui capi.

Essendo in serie con L avremo: V_{Ig}+V_L=V_{Ig}-Ig*ZL=e_A

V_{Ig}=e_A+Ig*ZL

```
VIg:=eA+Ig*ZL;
```

$-0.09230769231 - 9.538461538\,i$

Per calcolare la potenza del generatore di tensione, devo prima trovare il fasore della corrente che vi circola attraverso.

Essendo in serie con R avremo: I_{vg}=I_{R1}=(e_B-e_D)*YR1=-e_D*YR1 dove e_D=e_A-V_g

I_{vg}=-(e_A-V_g)*YR1

```
IVg:=-(eA-Vg)*YR1
```

$4.346153846 + 4.769230769\,i$

(1) la potenza complessa, la potenza istantanea e il fattore di potenza delgeneratore di corrente Ig;

```
SIg:=(1/2)*VIg*conjugate(Ig);
PIg:=(1/2)*abs(VIg)*abs(Ig)*cos(arg(VIg)-arg(Ig))+(1/2)*abs(VIg)*abs(Ig)
cosPHI:=abs(Re(SIg))/abs(SIg);
```

$38.15384615 - 0.3692307692\,i$

$$38.15563271\cos\left(\frac{\pi}{2} - 1.580473444\right) + 38.15563271\cos\left(2000\,t - \frac{\pi}{2} - 1.580473444\right)$$

0.9999531771

(2) la potenza complessa del generatore di tensioneVg;

```
SVg:=(1/2)*Vg*conjugate(IVg);
```

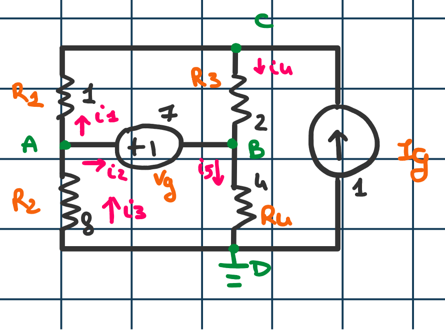
$15.21153846 - 16.69230769\,i$

(3) la corrente $i_{Vg}(t)$ che scorre nel generatore di tensione Vg.

```
iVg(t):=abs(IVg)*cos(w*t+arg(IVg))
```

$6.452489084\cos(1000\,t + 0.8317783803)$

1) 14:10 - 14:25



Calcolare la P_A e la P_E e verificare il bilancio

Posso scrivere che

$V_A - V_B = 7$

$i_1 = \frac{V_A - V_C}{1} = V_A - V_C$

i_2 non posso scriverla

$i_3 = \frac{V_D - V_A}{8} = -\frac{V_A}{8}$

$i_4 = \frac{V_C - V_B}{2}$

$i_5 = \frac{V_B - V_D}{4} = \frac{V_B}{4}$

Applico la KCL:

(A) $i_3 - i_1 - i_2 = 0$

$-\frac{V_A}{8} - V_A + V_C - i_2 = 0$

$-V_A - 8V_A + 8V_C - 8i_2 = 0$

$-9V_A + V_C - 8i_2 = 0$

(B) $i_4 + i_2 - i_5 = 0$

$\frac{V_C - V_B}{2} + i_2 - \frac{V_B}{4} = 0$

$2V_C - 2V_B + 4i_2 - V_B = 0$

$2V_C - 3V_B + 4i_2 = 0$

(C) $i_1 - i_4 + 1 = 0$

$V_A - V_C + \frac{V_B - V_C}{2} + 1 = 0$

2

$2VA - 2VC + VB - VC + 2 = 0$

$2VA - 3VC + VB + 2 = 0$

Ⓓ $-1 - i3 + i5 = 0$

$-1 + \frac{VA}{8} + \frac{VB}{4} = 0$

$-8 + VA + 4B = 0$

Ottengo che

$VA = 7 + VB$

$-8 + 7 + VB + 4VB = 0$

$5VB = 1$

$VB = \frac{1}{5} = 0{,}2 \ V$

$VA = 7 + VB = 7{,}2 \ V$

$VC = \frac{2VA + VB + 2}{3} = \frac{\overbrace{14{,}4 + 0{,}2 + 2}^{16{,}6}}{3} = 5{,}5\overline{3}$

$VD = 0$

$i1 = VA - VC = 1{,}6$

$i2 = \frac{3VB - 2VC}{4} = -2{,}615 \ A$

$i3 = \frac{-VA}{8} = -0{,}9$

$i4 = \frac{VC - VB}{2} = 2{,}665 \ A$

$i5 = \frac{VB}{4} = 0{,}05 \ A$

Procedo a calcolare le potenze assorbite

$P_{R1} = V \cdot I = R \cdot I^2 = 1 \cdot i1^2 = 1{,}6^2 = 2{,}56 \ W$ $\frac{i5}{a}$

$P_{R1} = V \cdot I = R \cdot I^2 = 1 \cdot i_1^2 = 1,6^2 = 2,56\,W$ $\quad \frac{25}{9}$

$P_{R2} = R \cdot I^2 = 8 \cdot i_3^2 = 6,48\,W$

$P_{R3} = R \cdot I^2 = 2 \cdot i_4^2 = 14,2\,W$ $\quad \frac{128}{9}$

$P_{R4} = R \cdot I^2 = 4 \cdot i_5^2 = 0,01\,W$

$\sum P_A = 23,49\,W$

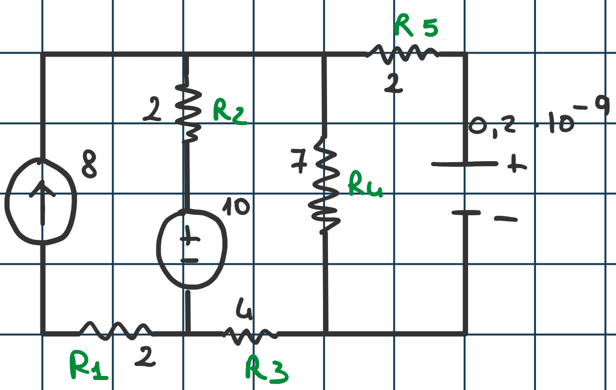
$P_{vg} = V \cdot I = 7 \cdot i_2 = -18,305$

$P_{Ig} = V \cdot I = -V_C \cdot 1 = -5,33$

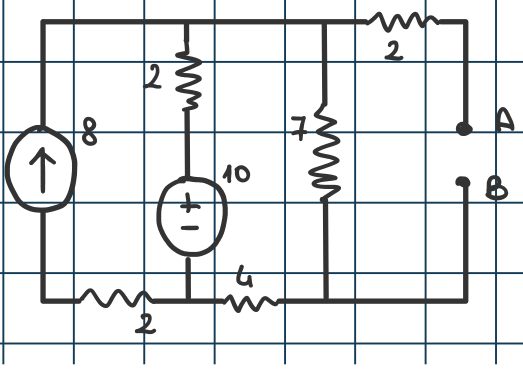
$\sum P_E = 23,85\,W$

Il bilancio è verificato

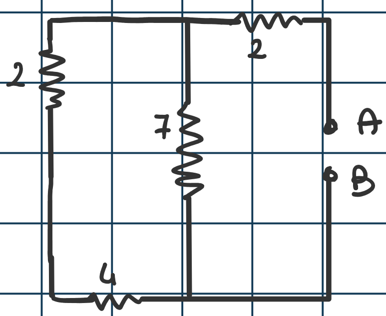
2) 18:50



Calcolo l'equivalente di Thevenin ai capi del condensatore.
Considero a tal proposito il seguente circuito



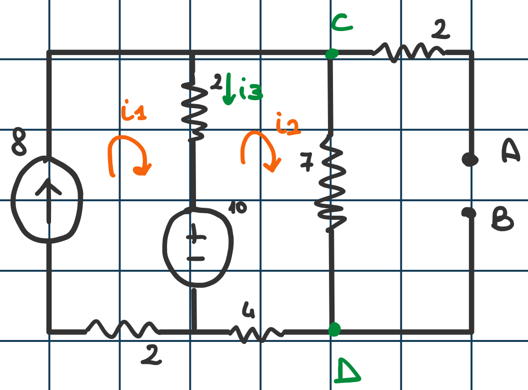
Calcolo R_{TH}:



$R_1 = 6$

$R_2 = \dfrac{1}{\frac{1}{6}+\frac{1}{7}} = \dfrac{42}{13}$

$R_{TH} = \dfrac{68}{13} = 5{,}23\ \Omega$



$i_1 = 8$

$i_3 = i_1 - i_2 = 8 - i_2$

(2) $2 \cdot i_3 + 10 - 7i_2 - 4i_2 = 0$

$16 - 2i_2 + 10 - 7i_2 - 4i_2 = 0$

$-13i_2 + 26 = 0$

$i_2 = 2$

$V_{TH} = 7 \cdot i_2 = 14 = V_C - V_A$

Scrivo ora ~~la~~ legge. la legge generale:

$$V_C(t) = V_{TH} + (V_0 - V_{TH})\, e^{-t\tau} \quad \text{con} \quad \tau = \frac{1}{RC}$$

$$V_C(t) = 14 - 10\, e^{-t\tau} \quad \text{con} \quad \tau = \frac{1}{0{,}2 \cdot 10^{-9} \cdot 5{,}3}$$