

Cos'è Analisi 2

giovedì 15 ottobre 2020 15:38

Il corso di analisi matematica II può essere visto come la perfetta continuazione del corso di analisi matematica I. In esso, di conseguenza, gli argomenti affrontati nel primo corso vengono dati per scontati. I punti trattati sono generalmente i seguenti:

- **Numeri complessi.**
- **Funzioni di più variabili.**
- **Equazioni differenziali.**
- **Integrali multipli.**

Vediamo brevemente in che cosa consistono.

I numeri complessi

L'argomento “**numeri complessi**” è in realtà considerato una sorta di introduzione a quelli che sono gli argomenti veri e propri del corso di analisi matematica II. Tutto sommato non è un argomento difficile. Anzi, se studiato con impegno e metodo giornaliero, risulta essere uno dei più semplici.

Prima di tutto, per poter comprendere i numeri complessi ed eseguire operazioni matematiche con essi, sarà necessario ripassare, seppur brevemente, le “**coordinate polari**”. Per la verità avere una certa dimestichezza con le coordinate polari si rivelerà molto utile anche in seguito, quando si intraprenderà lo studio di altri argomenti.

Fatto questo, nel corso verrà fornita la **definizione di numero complesso**: trattasi di un numero formato da una parte reale sommata ad una parte immaginaria. Dopodiché se ne descrivono le caratteristiche principali, e come eseguire con essi le principali **operazioni**. Al termine, se ne illustra la rappresentazione nel “**piano complesso**”.

Le funzioni di più variabili

Le **funzioni di più variabili** sono invece considerate l'argomento “principe” dell'analisi matematica II. Pertanto esso richiede solitamente molte lezioni, ed è certamente più complesso del precedente argomento.

Inizialmente, si cerca di introdurre lo studente a questo nuovo tipo di funzione attraverso una serie di **esempi e piccoli esercizi**. Essi hanno lo scopo di mostrare sia le caratteristiche principali di queste funzioni sia come tracciare –per le più semplici- il grafico.

Come accadeva anche nelle funzioni ad una sola variabile, risulta ancora una volta molto importante saper determinare il **dominio** della funzione. Qualche lezione a parte, poi, è spesso dedicata allo studio delle **quadriche**. Andando avanti, si parlerà anche di **vettori**, di **distanza tra due punti nello spazio** e di **intorni aperti e chiusi**.

Di grande importanza quando si affronta l'argomento “funzioni di più variabili” sono inoltre le **funzioni continue**, di cui viene fornita la definizione, nonché la classificazione. Subito dopo aver introdotto questa tipologia di funzioni, ecco che comincerà lo studio delle **derivate parziali**.

Dopo aver introdotto i concetti di gradiente e di matrice hessiana delle derivate parziali, nonché quelli di funzioni composte e matrice jacobiana, ci si dedica a quella che è forse la più ampia applicazione delle derivate parziali. Sarebbe a dire lo studio dei **massimi** e dei **minimi** delle funzioni di più variabili.

L'argomento “funzioni di più variabili” si conclude infine con l'introduzione di curve e superfici come le **curve coordinate** e le **curve di livello**.

Le equazioni differenziali

Terminato lo studio delle funzioni di più variabili, ecco che comincia un nuovo argomento, quello delle **equazioni differenziali**. Un'equazione differenziale è un'equazione che coinvolge una o più derivate di una funzione incognita. Risolvere un'equazione differenziale significa trovare una funzione che la soddisfi.

Queste equazioni possono essere classificate come “**ordinarie**” (se coinvolgono derivate rispetto ad una sola variabile) oppure “**alle derivate parziali**” (se coinvolgono le derivate parziali della funzione incognita rispetto a più di una variabile). Un'ulteriore classificazione dipende anche dall'ordine della funzione, cioè dal “grado” della derivata di ordine massimo presente.

Nel corso di analisi matematica II difficilmente si intraprende lo studio di equazioni differenziali a più variabili: lo studio riguarda principalmente le equazioni differenziali ordinarie di primo e di secondo ordine.

Gli integrali doppi

Infine, il corso di analisi matematica II tratta lo studio degli **integrali doppi**, cioè di quegli integrali che riguardano le funzioni di più variabili (due variabili, per la precisione). Essi trovano applicazione nel calcolo del volume di una regione tridimensionale.

Dopo averne definito le caratteristiche e le proprietà necessarie per il loro calcolo, se ne illustra l'**iterazione in coordinate cartesiane** e il **passaggio in coordinate polari**.

Le regole per studiare efficacemente analisi matematica 2

Detto questo, per studiare analisi matematica II occorre naturalmente tener sempre presenti quelli che sono i consigli generali per intraprendere lo studio della matematica.

Li potete trovare al seguente [link](#) di un precedente articolo. Le regole che esso riporta, sebbene non siano destinate specificatamente allo studio dell'analisi matematica, si adattano perfettamente allo studio di qualsiasi materia scientifica. Per questo motivo, possiamo considerarle regole da seguire un po' in tutte le circostanze. Volendo riassumere le principali, riadattandole per l'analisi matematica, esse sono le seguenti.

Procurarsi il giusto libro di testo

Una delle difficoltà maggiori nello studio dell'analisi matematica è forse rappresentata dal sapersi procurare i testi giusti. O, più in generale, il materiale didattico su cui studiare. Il docente consiglia spesso di affiancare lo studio degli appunti presi a lezione con la lettura di un libro di testo.

Ma quello suggerito non è sempre un testo sufficientemente chiaro, ed è in questo caso necessario intraprendere una lunga ricerca (nelle librerie universitarie o nelle biblioteche) prima di trovare quello che fa per noi. Il testo in questione dovrà essere di facile comprensione, ben strutturato e contenente tanti esercizi con cui potersi allenare.

Prendere sempre buoni appunti durante le lezioni. Come il libro di testo, anche gli appunti presi a lezione potrebbero non essere sufficientemente chiari o completi per studiare. Questo anche a causa del fatto che non si è riusciti a comprendere correttamente quello che è stato spiegato a lezione.

In caso di necessità, conviene dunque integrare sempre gli appunti personali con quelli di un compagno di corso. In questo modo ci si potrà rendere conto delle lacune presenti negli appunti personali e colmarle. Da non dimenticare poi il fatto che oggi è possibile contare su un aiuto notevole proveniente dal

web. Tanto materiale sull'argomento (riassunti, appunti, dispense...) è infatti reperibile nella sezione **appunti universitari** del sito di skuola.net.

Studiare un po' alla volta, giorno per giorno

Preparare riassunti e schemetti. Questo è un punto molto importante, sul quale ci si è soffermati anche nell'articolo relativo allo studio di funzione (raggiungibile attraverso questo [link](#)). Realizzare riassunti o schemi dei punti chiave previsti da ciascun argomento aiuta a inquadrare meglio i passaggi principali, a capire quali sono i punti salienti. Non solo: permette spesso di suddividere questioni complesse in tante piccole operazioni, facilitandone l'esecuzione. La presenza di una "tabella di marcia" così realizzata crea inoltre un "ordine mentale".

Fare tanti esercizi ogni volta che viene spiegato un argomento nuovo.

Assistere all'esame orale degli altri studenti, in modo da farsi un'idea generale di ciò che viene chiesto.

Se necessario, studiare in gruppo aiuta a chiarire i dubbi.

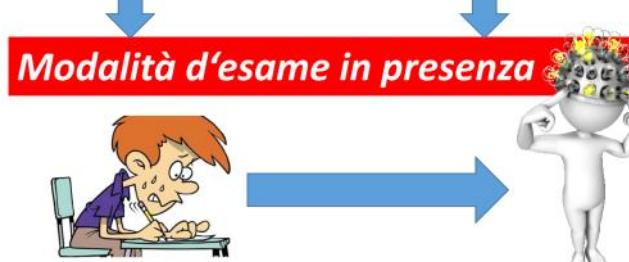
Prendere ripetizioni. A questo proposito, si ricorda che, per qualsiasi ulteriore aiuto nello studio, è possibile utilizzare il servizio di [Skuola.net | Ripetizioni](#), grazie al quale sarà possibile reperire un tutor esperto della materia.

Seguendo questi consigli lo studio dell'analisi matematica non sarà più un problema!

MODALITÀ D'ESAME

Scritto di 3 ore + ORALE } RODACIPI IN PRESENZA

Traccia personalizzata che va sulla linea diretta modalità on-line



CHE LA TEMPESTA ABBIA INIZIO ...



FLASH DI ANALISI 1

Dominio (Campo di Esistenza)

Positività (Studio del segno)

In quali zone del Piano Cartesiano posso disegnare la funzione?

Intersezione con gli assi

Analisi agli estremi del Dominio

Crescenza, decrescenza
STUDIO DELL'INTERNO DELLA FUNZIONE
Massimi, minimi, flessi, asintoti obliqui
Concavità, convessità

Calcolo dell'area tra la funzione e l'asse X

LIMITI

Asintoti verticali ed orizzontali

DERIVATE

INTEGRALI



Se una funzione non è definita in un intervallo allora non ha senso studiarne il comportamento (es. limiti) in quegli intervalli.

FLASH DI ANALISI 1

SERIE DI FUNZIONI

Una serie come somma di funzioni

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) = g_0(x) + g_1(x) + \dots + g_{987}(x) + \dots$$

Si può considerare una funzione $f(x)$ come somma di infinite «funzioni ingredienti»?



NON tutte le serie sono esprimibili come sommatoria

Se la sommatoria è finita allora si dice TRONCATA



ANALISI 1

ANALISI 2

$$f: A \subseteq \mathbf{R} \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}$$

FUNZIONE A VARIABILE
in \mathbf{R} CON IMMAGINI in \mathbf{R}

$$f: A \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}^m$$

GENERALIZZAZIONE

Si parla di campi multidimensionali

CAMPPI NONO DIMENTIONALI

ANALISI 1

ANALISI 2

$$f: A \subseteq \mathbf{R} \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}$$

$$f: A \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}^m$$

ALGEBRA LINEARE
(Matrici e autovalori)

ANALISI 2

$$f: A \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}^m$$

$f: A \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}$

CAMPO SCALARE

Dominio non bidimensionale Immagine qualsiasi
 $f: A \subseteq \mathbf{R} \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}^n$

CURVA

Dominio bidimensionale \mathbf{R}^2 e Immagine \mathbf{R}^3
 $f: A \subseteq \mathbf{R}^2 \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}^3$

SUPERFICIE

Dominio \mathbf{R}^n e Immagine \mathbf{R}^n

$f: A \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}^n$

CAMPO VETTORIALE

Generalizzazione

Dominio \mathbf{R}^n e Immagine \mathbf{R}^{n+1}

IPER-SUPERFICIE

ANALISI 2

$$f: A \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}^m$$

CAMPO VETTORIALE ↓

$f: (x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (x_1^2 + e^{x_2}, \sqrt{x_3 - x_2 + x_4}, x_1 x_2)$ = $\mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$

TRE DIVERSI CAMPI SCALARI:

$$\begin{aligned} f_1: (x_1, x_2, x_3, x_4) &\rightarrow (x_1^2 + e^{x_2}) \\ f_2: (x_1, x_2, x_3, x_4) &\rightarrow (\sqrt{x_3 - x_2 + x_4}) \\ f_3: (x_1, x_2, x_3, x_4) &\rightarrow (x_1 x_2) \end{aligned}$$

Posso definire un qualsiasi spazio come vettore di campi scalari

ANALISI 2 – MODULO 1

$$f: A \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}^m$$

DOMINIO E POSITIVITA'

ANALISI 2 – MODULO 1

$f: A \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}^m$

DOMINIO E POSITIVITA'

LIMITI

Metodo delle rette, delle coordinate polari e sferiche, maggiorazione

ANALISI 2 – MODULO 1

$f: A \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}^m$

DOMINIO E POSITIVITA'

LIMITI

Metodo delle rette, delle coordinate polari e sferiche, maggiorazione

OTTIMIZZAZIONE LIBERA

Derivabilità e Differenziabilità, Gradiente, Derivata direzionale, Matrice Hessiana, Matrice Jacobiana

ANALISI 2 – MODULO 1

$f: A \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}^m$

DOMINIO E POSITIVITA'

LIMITI

Metodo delle rette, delle coordinate polari e sferiche, maggiorazione

OTTIMIZZAZIONE LIBERA

Derivabilità e Differenziabilità, Gradiente, Derivata direzionale, Matrice Hessiana, Matrice Jacobiana

OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA

Restrizioni, moltiplicatori di Lagrange

Specifica di una
funzione del piano

ANALISI 2 – MODULO 1

$f: A \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}^m$

DOMINIO E POSITIVITÀ

LIMITI

Metodo delle rette, delle coordinate polari e sferiche, maggiorazione

OTTIMIZZAZIONE LIBERA

Derivabilità e Differenziabilità, Gradiente, Derivata direzionale, Matrice Hessiana, Matrice Jacobiana

INTEGRAZIONE

PROBLEMI DI FISICA

Integrali multipli

Integrali curvilinei (Calcolo di un Lavoro)

Integrali di Superficie (Calcolo di un Flusso)

OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA

Restrizioni, moltiplicatori di Lagrange

ANALISI 2 – MODULO 1

$y'(x) = f(x, y)$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

L'acquisita non è un numero
fatto di soluzioni ma una
o più equazioni che le riguardano

ANALISI 2 – MODULO 2

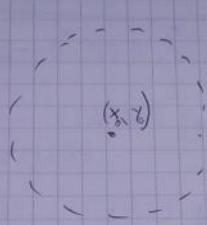
ANALISI COMPLESSA

Primi passi in ANALISI 2....



DEFINIZIONE DI INTORNO

INTORNO I_{x_0}
CIRCOLARE
IN \mathbb{R}^2



$$I_{x_0} = \left\{ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2 \right\}$$

APERTO
 $\leq \rightarrow$ CHIUSO

DEFINIZIONE DI INTORNO

INTORNO I_{x_0}
CIRCOLARE
IN \mathbb{R}^2



METRICA EUCLIDEA

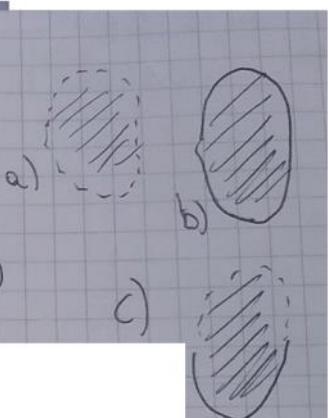
$$I_{x_0} = \left\{ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2 \right\}$$

APERTO
 $\leq \rightarrow$ CHIUSO

DEFINIZIONE DI INTORNO

Analogamente :

- $A \subseteq \mathbb{R}^2$
- a) APERTO
 - b) CHIUSO
 - c) NE' APERTO NE' CHIUSO

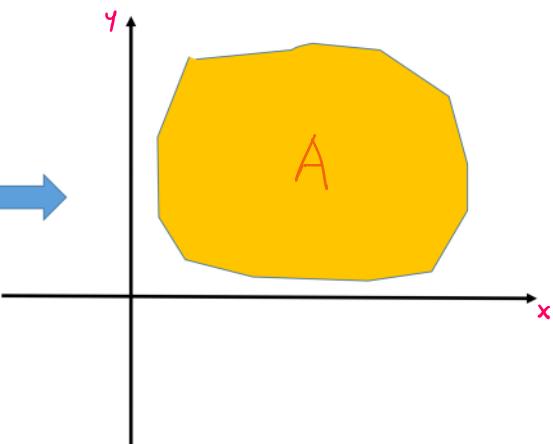


TRA QUALCHE SLIDES CAPIREMO MEGLIO, E FAREMO ALTRI ESEMPI...

METRICA E SPAZIO METRICO

Sia $A \neq \emptyset$ un insieme di punti
 $A \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$A \subseteq (\mathbb{R} \times \mathbb{R})^n$
 COMBINAZIONE DI
 TUTTE LE COORDINATE
 POSSIBILI



METRICA E SPAZIO METRICO

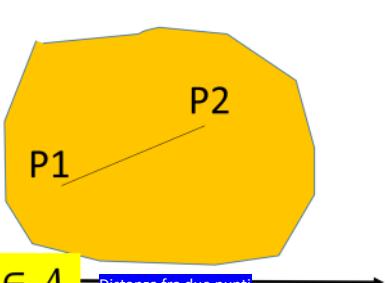
Sia $A \neq \emptyset$ un insieme di punti
 $A \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

Sia $d: A \times A \rightarrow [0, +\infty)$ una Metrica:

$$d(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 \equiv P_2 \quad \text{Distanza nulla}$$

$$d(P_1, P_2) = d(P_1, P_2) \quad \forall (P_1, P_2) \in A \quad \text{Distanza fra due punti}$$

$$d(P_1, P_3) \leq d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) \quad \forall (P_1, P_2, P_3) \in A \quad \text{Somma degli altri due}$$



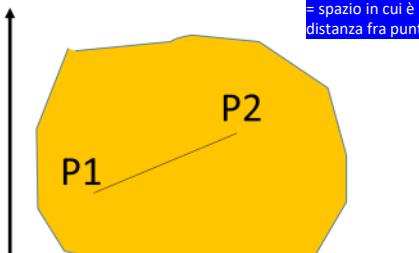
Lato di un triangolo minore della
 Somma degli altri due

METRICA E SPAZIO METRICO

Sia $A \neq \emptyset$ un insieme di punti
 $A \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

(A, d) si definisce
SPAZIO METRICO

= spazio in cui è definita la
 distanza fra punti



Sia $d: A \times A \rightarrow [0, +\infty)$ una Metrica:

$$d(P_1, P_2) = 0 \Leftrightarrow P_1 \equiv P_2$$

$$d(P_1, P_2) = d(P_1, P_2) \quad \forall (P_1, P_2) \in A$$

$$d(P_1, P_3) \leq d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) \quad \forall (P_1, P_2, P_3) \in A$$

PROPRIETÀ

Se valgono tutte e tre allora si parla di METRICA

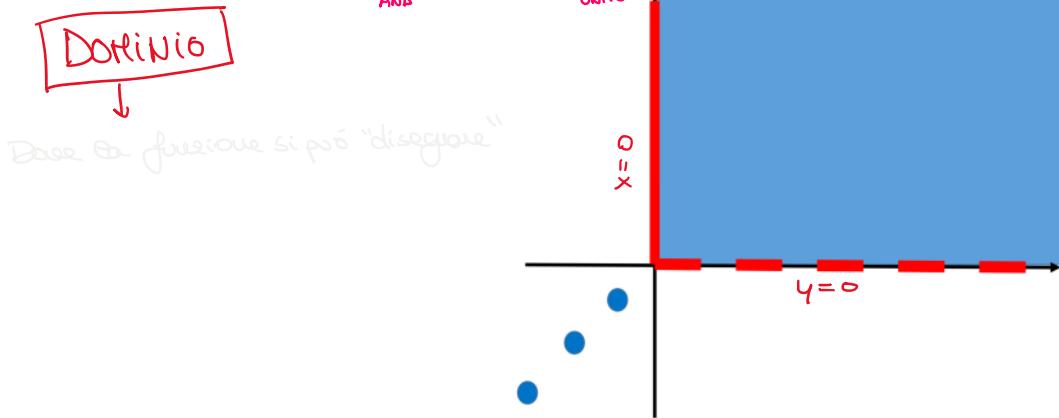
METRICA E SPAZIO METRICO

$d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ DOMINIO IMMAGINE
 $d(a, b) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
 $d(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{se } a = b \\ 1 & \text{se } a \neq b \end{cases}$
 $d(a, b) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$
 $d(a, b) = \max \{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$

~~a~~ $a = (x_1, y_1)$
~~b~~ $b = (x_2, y_2)$
VERIFICARE
LE
PROPRIETA'
DI UNA
METRICA

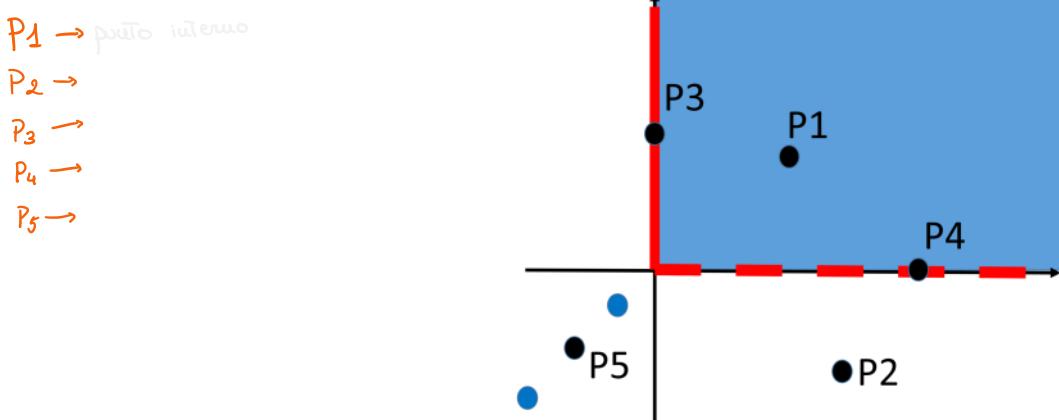
PUNTI INTERNI, ESTERNI, DI FRONTIERA, ISOLATI

$$A = \{(x, y) : x \geq 0 \wedge y > 0\} \cup \{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$$



PUNTI INTERNI, ESTERNI, DI FRONTIERA, ISOLATI

$$A = \{(x, y) : x \geq 0 \wedge y > 0\} \cup \{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$$



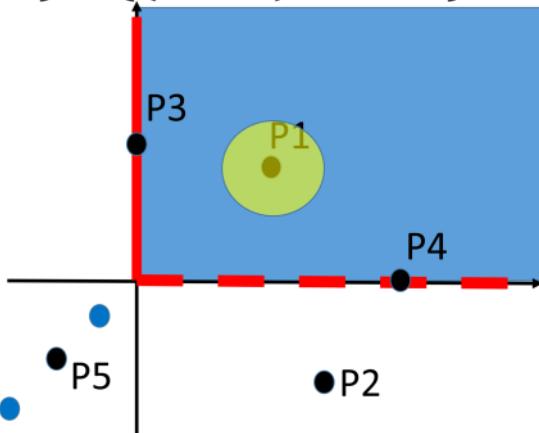
PUNTI INTERNI, ESTERNI, DI FRONTIERA, ISOLATI

$$A = \{(x, y) : x \geq 0 \wedge y > 0\} \cup \{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$$

P1 è un punto INTERNO

$$\exists I_{P1} \subset A$$

Se esiste un intorno anche molto piccolo completamente contenuto nel dominio



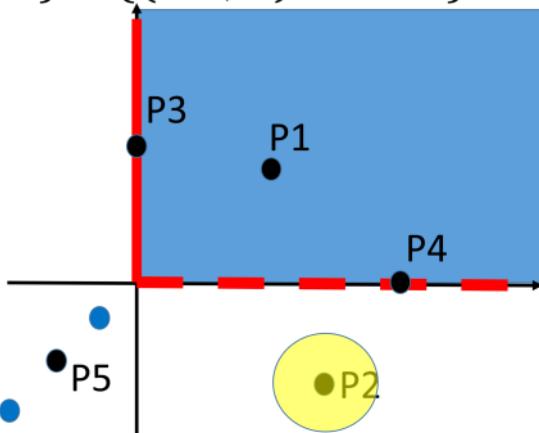
PUNTI INTERNI, ESTERNI, DI FRONTIERA, ISOLATI

$$A = \{(x, y) : x \geq 0 \wedge y > 0\} \cup \{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$$

P2 è un punto ESTERNO

$$\exists I_{P2} \not\subset A$$

Se esiste un intorno piccolo tale che sia completamente fuori dal dominio



PUNTI INTERNI, ESTERNI, DI FRONTIERA, ISOLATI

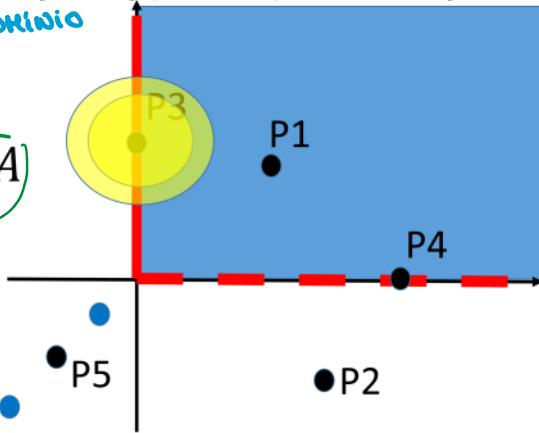
$$A = \{(x, y) : x \geq 0 \wedge y > 0\} \cup \{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$$

ES. ESTERNI DEL DOMINIO

P3 è un punto DI FRONTIERA

$$\forall I_{P3}, \exists P \in A \wedge \exists Q \notin A$$

Se per ogni intorno piccolo i suoi punti sono in parte contenuti nel dominio e in parte no

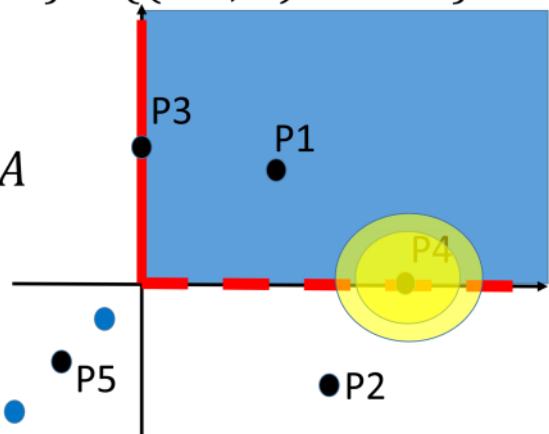


PUNTI INTERNI, ESTERNI, DI FRONTIERA, ISOLATI

$$A = \{(x, y) : x \geq 0 \wedge y > 0\} \cup \{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$$

P4 è un punto DI FRONTIERA

$$\forall I_{P4}, \exists P \in A \wedge \exists Q \notin A$$



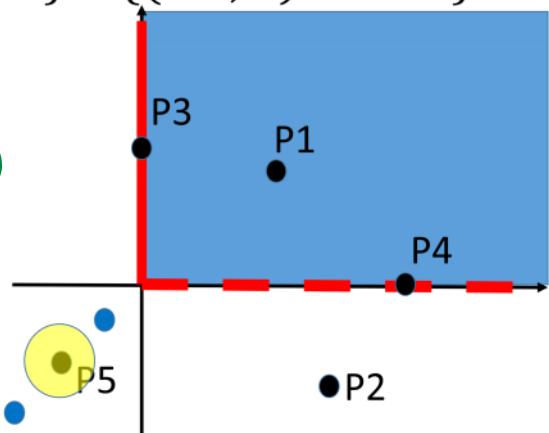
PUNTI INTERNI, ESTERNI, DI FRONTIERA, ISOLATI

$$A = \{(x, y) : x \geq 0 \wedge y > 0\} \cup \{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$$

P5 è un punto ISOLATO

$$\exists I_{P5} : I_{P5} \cap A = \{P5\}$$

Se esiste un solo intorno del quale un punto è coincidente e appartiene al dominio



PUNTI INTERNI, ESTERNI, DI FRONTIERA, ISOLATI

$$A = \{(x, y) : x \geq 0 \wedge y > 0\} \cup \{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$$

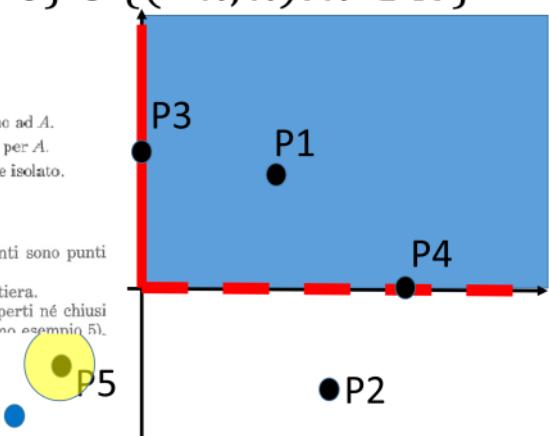
Osservazioni. In base alle definizioni date, si può notare che:

- 1) Un punto di frontiera di un insieme A non è né interno né esterno ad A .
- 2) Ogni punto isolato di un insieme A è anche un punto di frontiera per A .
- 3) Se $P \in A$, allora P non può essere contemporaneamente interno e isolato.

6. Un insieme di punti del piano si dice **aperto** se tutti i suoi punti sono punti interni.

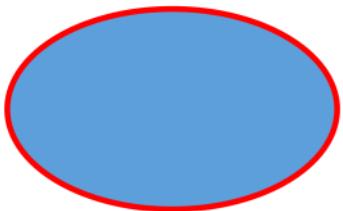
Si dice invece **chiuso** un insieme che contenga tutta la propria frontiera.

Si osservi che vi sono insiemi di punti del piano che non sono né aperti né chiusi (es. $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$).



INSIEMI APERTI, CHIUSI

Un insieme chiuso non è detto che sia per forza Limitato (contenuto in una regione finita dello spazio)



INSIEME IN \mathbb{R}^2

Limitato -> gli estremi sono diversi da $+\infty$ e $-\infty$

Limitato superiormente -> solo l'estremo superiore è $+\infty$

Limitato inferiormente -> solo l'estremo inferiore è $-\infty$

Chiuso -> gli estremi sono inclusi nell'intervallo

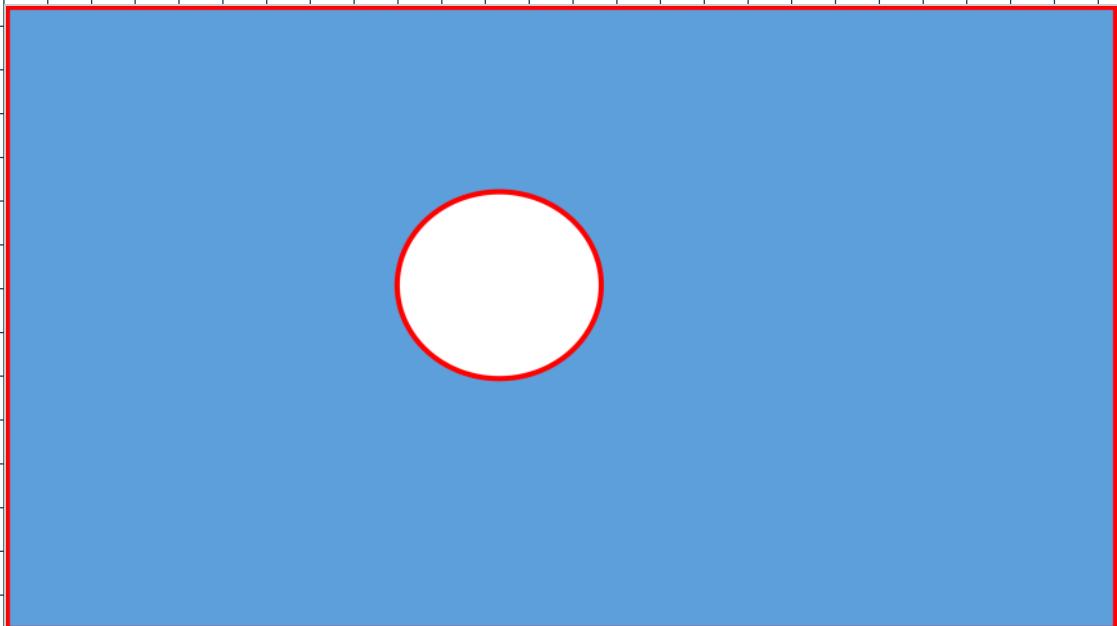
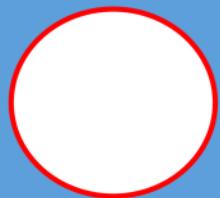
Chiuso a destra -> l'estremo destro è incluso nell'intervallo

Chiuso a sinistra -> l'estremo sinistro è incluso nell'intervallo

Aperto -> gli estremi NON sono inclusi nell'intervallo

Aperto a destra -> l'estremo destro NON è incluso nell'intervallo

Aperto a sinistra -> l'estremo sinistro NON è incluso nell'intervallo

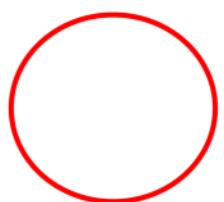


R
 R^2
 R^n

R
 R^2
 R^n

Insiemi aperti e chiusi
contemporaneamente

Ca seconda dei confini



Ora insieme diviso non deve
per forza avere qualche punto
interno

INSIEMI APERTI, CHIUSI

A è un APERTO se e solo se contiene solo punti INTERNI

A è un CHIUSO se e solo se contiene TUTTI i PUNTI DI FRONTIERA (in più può anche contenere punti interni)

A non è né APERTO né CHIUSO se e solo se non contiene tutti i punti di frontiera

L'insieme di tutti i punti interni viene indicato come INTERNO DI A

$$\dot{A} \subseteq A$$

APERTO -> contiene solo punti INTERNI
CHIUSO -> contiene TUTTI i punti di frontiera -> contiene tutti i punti di accumulazione!!!
NE' APERTO NE' CHIUSO -> NON contiene TUTTI i punti di frontiera
APERTO E CHIUSO -> contiene TUTTI i punti di accumulazione e sono tutti interni

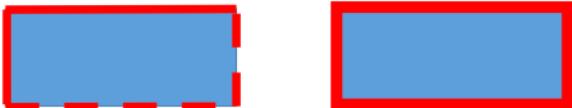
L'insieme di tutti i punti esterni viene indicato come ESTERNO DI A: E(A)

INSIEMI APERTI, CHIUSI

PUNTO DI ADERENZA: PUNTO INTERNO oppure PUNTO DI FRONTIERA

CHIUSURA DI A C(A): insieme di tutti i punti di aderenza

$$A \subseteq C(A)$$



$$A = C(A) \quad \text{A è CHIUSO}$$



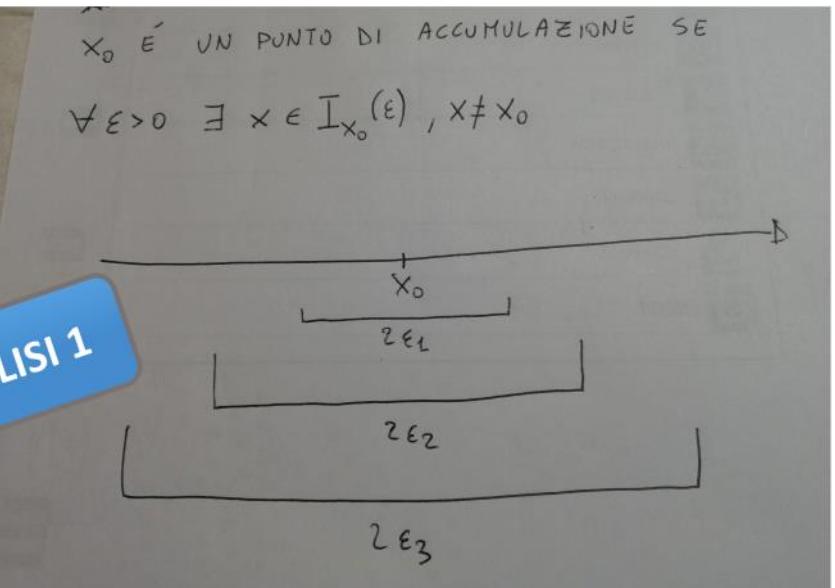
Punto di accumulazione

$$I_{x_0}(\epsilon) : \forall x \in \mathbb{R} / |x - x_0| < \epsilon$$

x_0 È UN PUNTO DI ACCUMULAZIONE SE

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists x \in I_{x_0}(\epsilon), x \neq x_0$$

ANALISI 1



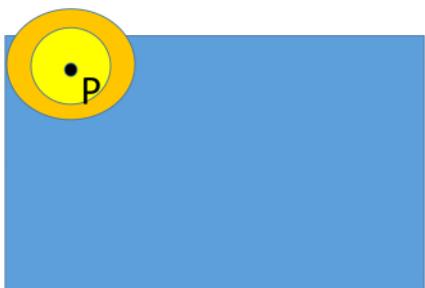
ANALISI 1

ANALISI 2

Punto di accumulazione

$$\forall I_P, \\ (I_P - \{P\}) \cap A \neq \emptyset$$

Togliendo il centro P , esiste per ogni intervallo circolare, esiste almeno un punto appartenente al dominio



- Insieme derivato di A $D(A) =$ insieme di tutti i punti di accumulazione di A

PUNTO DI ADERENZA

Un punto di aderenza è un punto di accumulazione

o è isolato

Un punto di accumulazione è un punto di aderenza ma non vale il viceversa: il concetto di punto di aderenza è più generico poiché, similmente a quello di accumulazione, contempla che il punto dell'intorno possa essere uguale al punto stesso.

$$C(A) = D(A) \cup I(A)$$

con $I(A)$ pari all'insieme di tutti i punti isolati

INSIEME PERFETTO

Insieme perfetto \rightarrow non vi sono punti isolati \rightarrow TUTTI I PUNTI DI ADERENZA SONO ANCHE DI ACCUMULAZIONE

- A è perfetto quando $D(A) = A$

INSIEME CONNESSO

- A è connesso $\Leftrightarrow \forall P_1, P_2 \exists$ Poligono formato da tutti punti $\in A$ Qualsiasi sia la coppia di punti del poligono esiste almeno un modo per connetterli e che passa

DOMINIO

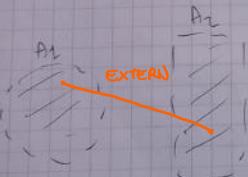
↓
Insieme dei punti di accumulazione e dei punti isolati

de tutti punti $\in A$

qualsiasi sia la coppia di punti
del prezzo presi esiste almeno un
modo per collegarli e che passa
da soli punti interni



a)



b)

Non connesso

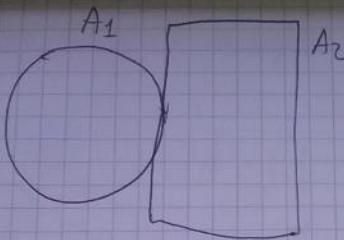


c)

Non connesso

↓
insieme dei punti di accumulazione
e dei punti isolati

- $A \in \text{connesso} \Leftrightarrow \forall P_1, P_2 \exists \text{ Poligonale formato da tutti punti } \in A$



d) Connesso

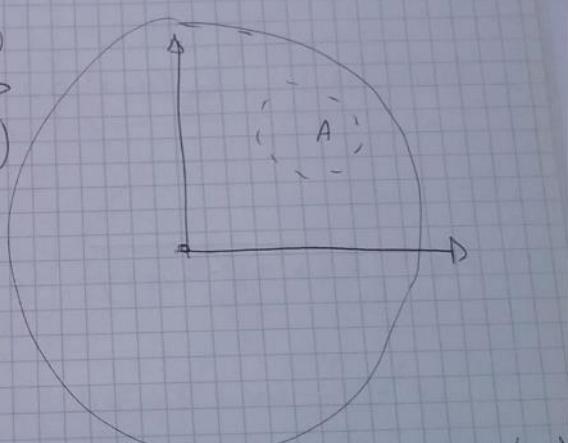
In generale non ho connessione $\Leftrightarrow \boxed{\text{A}_1 \cap \text{A}_2 = \emptyset}$

$$\text{A}_1 \cap \text{A}_2 = \emptyset$$

• INSIEME LIMITATO

$$\exists I_p : A \subset I_p$$

$$\exists B(0, s) : A \subset B(0, s)$$



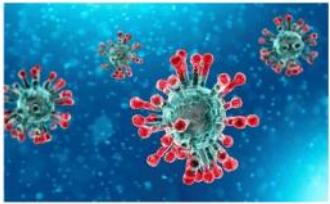
INSIEME ILLIMITATO SE $\# I_p = \# \{s > 0 : A \subset B(0, s)\}$

INSIEME	LIMITATO	ILLIMITATO
APERTO	Aperto e limitato	Aperto e illimitato
CHIUSO	Chiuso e limitato	Chiuso e illimitato
Chiuso \neq Limitato Aperto \neq Illimitato		COMPATTO

INSIEME	LIMITATO	ILLIMITATO
APERTO	Aperto e limitato	Aperto e illimitato
CHIUSO	COMPATTO	Chiuso e illimitato

INSIEME	LIMITATO	ILLIMITATO
APERTO	Aperto e limitato	Aperto e illimitato
CHIUSO	COMPATTO	Chiuso e illimitato

Teorema di Weierstrass: se f è definita in un compatto A , allora f ammette almeno un massimo e un minimo assoluto in A



Virus matematici da debellare.....



$$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3+1}{4+2}$$



Si applica la proporzione fra cateti di triangoli simili

Equazione di una retta

$$A = (x_1, y_1) \quad B = (x_2, y_2)$$

$$C = (x, y)$$

Similitudine tra triangoli

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

Equazione di una retta

$$A = (x_1, y_1) \quad B = (x_2, y_2)$$

$$C = (x, y)$$

Similitudine tra triangoli

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

$$y = mx - mx_1 + y_1$$

$$y = mx + q$$

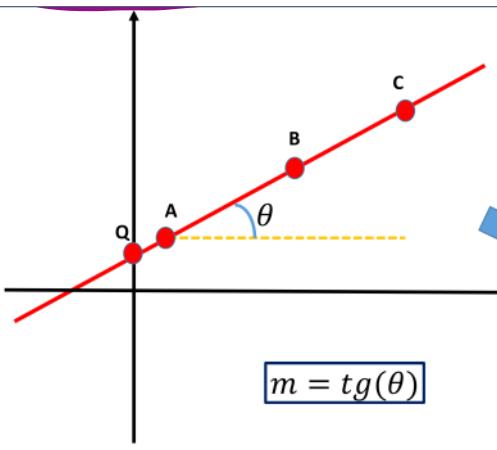
modo per semplificare la formula

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$q = y_1 - mx_1$$

Equazione di una retta

$$A = (x_1, y_1) \quad B = (x_2, y_2)$$



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$q = y_1 - mx_1$$

Equazione di una retta

$$A = (x_1, y_1) \quad B = (x_2, y_2)$$

$$Q = (0, q)$$

$$C = (x, y)$$

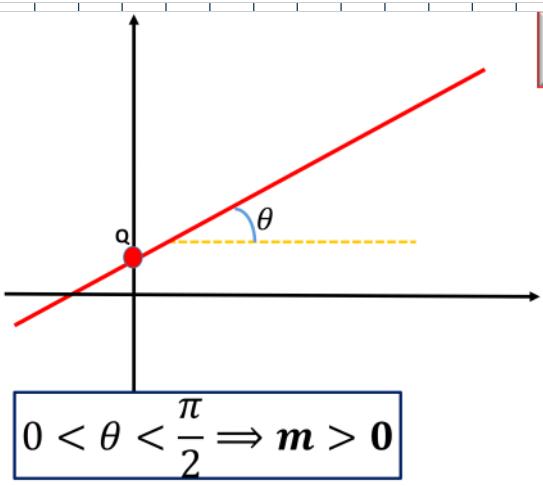
Similitudine tra triangoli

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

$$y = mx - mx_1 + y_1$$

$$y = mx + q$$



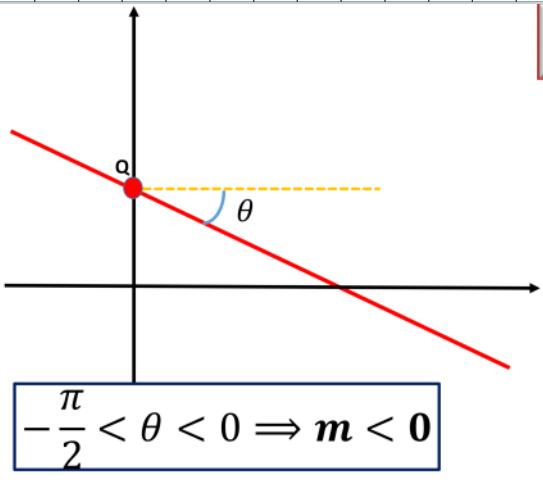
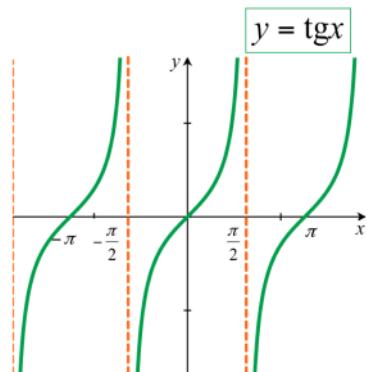
$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow m > 0$$

Equazione di una retta

$$y = mx + q$$

$$m = \operatorname{tg}(\theta)$$

$$Q = (0, q)$$



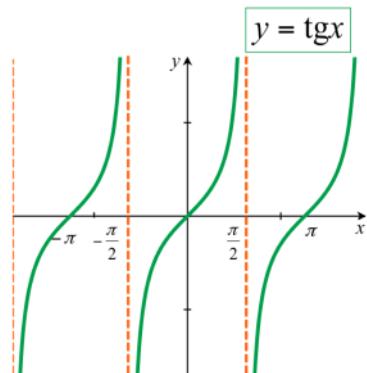
$$-\frac{\pi}{2} < \theta < 0 \Rightarrow m < 0$$

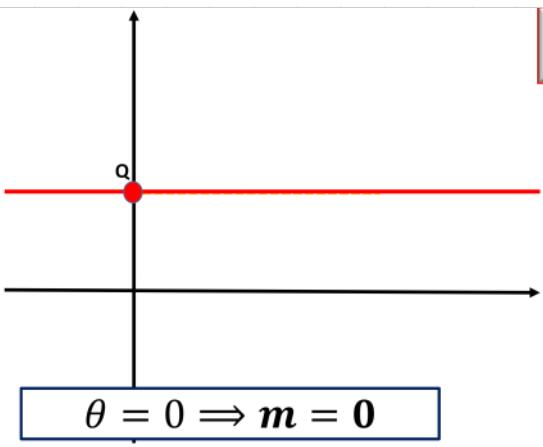
Equazione di una retta

$$y = mx + q$$

$$m = \operatorname{tg}(\theta)$$

$$Q = (0, q)$$



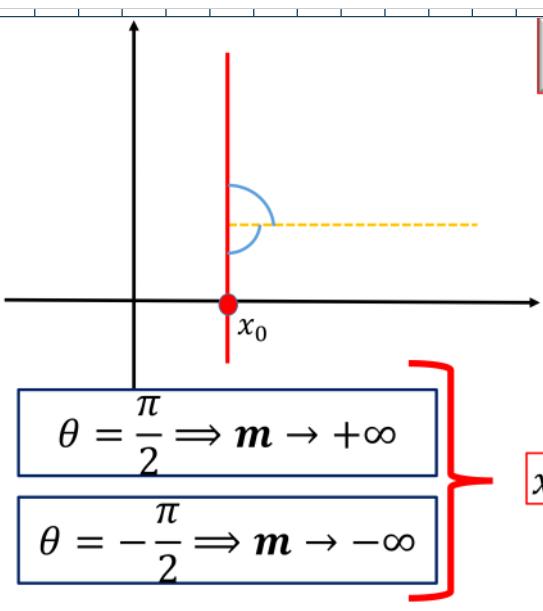
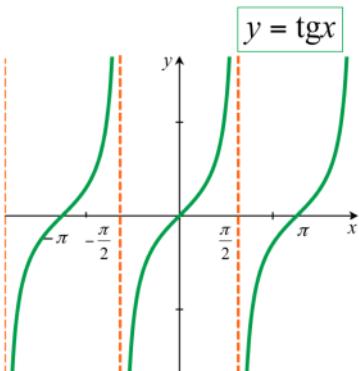


Equazione di una retta

$$y = mx + q$$

$$m = tg(\theta)$$

$$Q = (0, q)$$

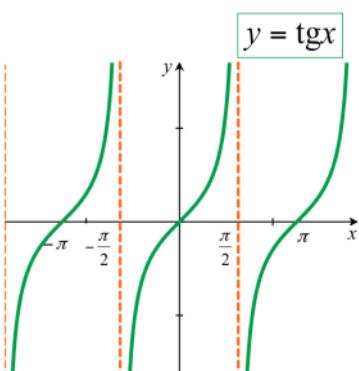


Equazione di una retta

$$y = mx + q$$

$$m = tg(\theta)$$

$$Q = (0, q)$$



Da Materiale Didattico: Cartella Geometria Analitica

geometria analitica

Geometria analitica: la retta

equazione della retta	
	$ax + by + c = 0$ forma implicita
	$y = mx + q$ forma esplicita
	$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ forma segmentaria
nella forma esplicita	nella forma segmentaria
<ul style="list-style-type: none"> m è detto coefficiente angolare q è il punto di intersezione tra la retta e l'asse y 	<ul style="list-style-type: none"> p è il punto di intersezione tra la retta e l'asse x q è il punto di intersezione tra la retta e l'asse y
$m = -\frac{a}{b}$	
$q = -\frac{c}{b}$	

DOMINIO E POSITIVITÀ...



DA ANALISI 1

Dom($f(x)$)

Pos($f(x)$)

Pos($f(x)$) ⊆ Dom($f(x)$)

Se il dominio è [2; 5] non si può studiare la positività nell'intervallo (-oo, 0]



ESEMPI

1. Determinare il dominio della funzione

$$f(x; y) = \log(y - x).$$

La funzione è definita se $y - x > 0 \rightarrow y > x$. Per rappresentarne il dominio sul piano cartesiano, tracciamo la retta $y = x$.

Il dominio cercato è costituito dall'insieme dei punti che si trovano al di sopra di tale retta, ossia nel semipiano generato dalla retta $y = x$ e contenente i punti di ordinata positiva dell'asse y (fig. 11).

Infatti, consideriamo uno qualsiasi di tali punti: $P(x_0; y_0)$. Tracciamo da P la parallela all'asse y fino ad incontrare in $Q(x_0; x_0)$ la retta $y = x$. È evidente che l'ordinata di P è maggiore dell'ordinata di Q : $y_0 > x_0$, e perciò P appartiene al dominio della funzione data. Analogamente si può verificare che i punti che si trovano sotto alla retta $y = x$ non appartengono al dominio (ancora fig. 11), perché per essi la condizione $y > x$ non è verificata. Ovviamente la retta $y = x$ costituisce la frontiera del dominio, e non è contenuta in esso: il dominio è aperto (*).

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$$

Vediamo le regole di Analisi 1

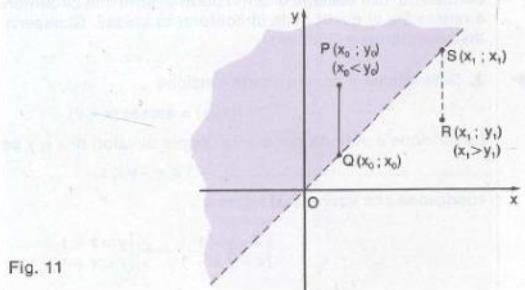
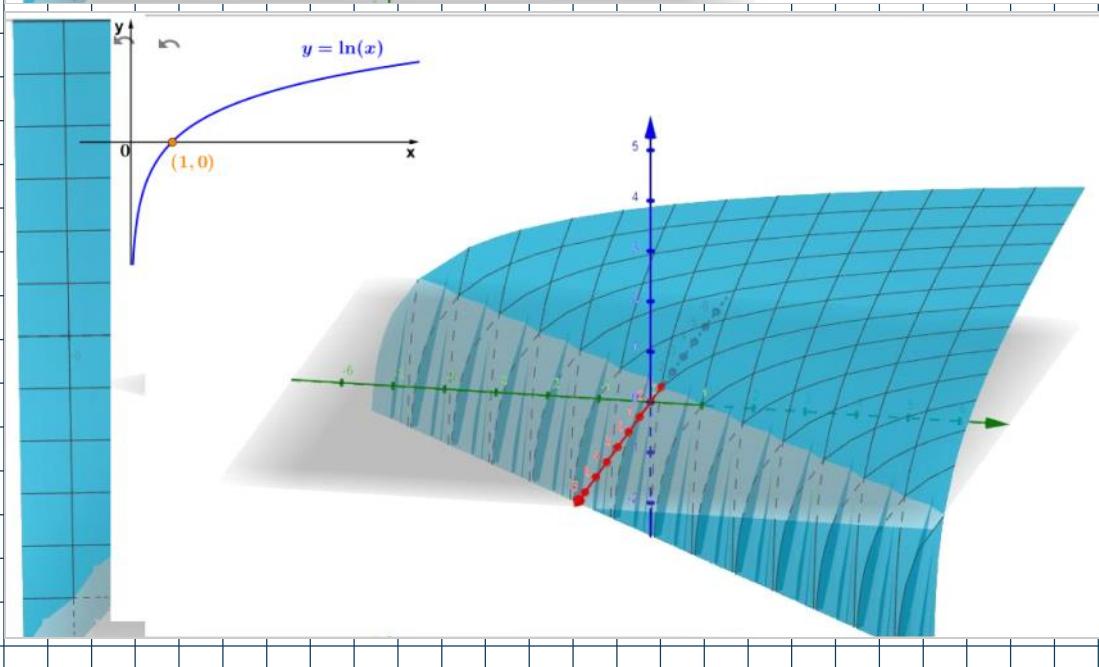
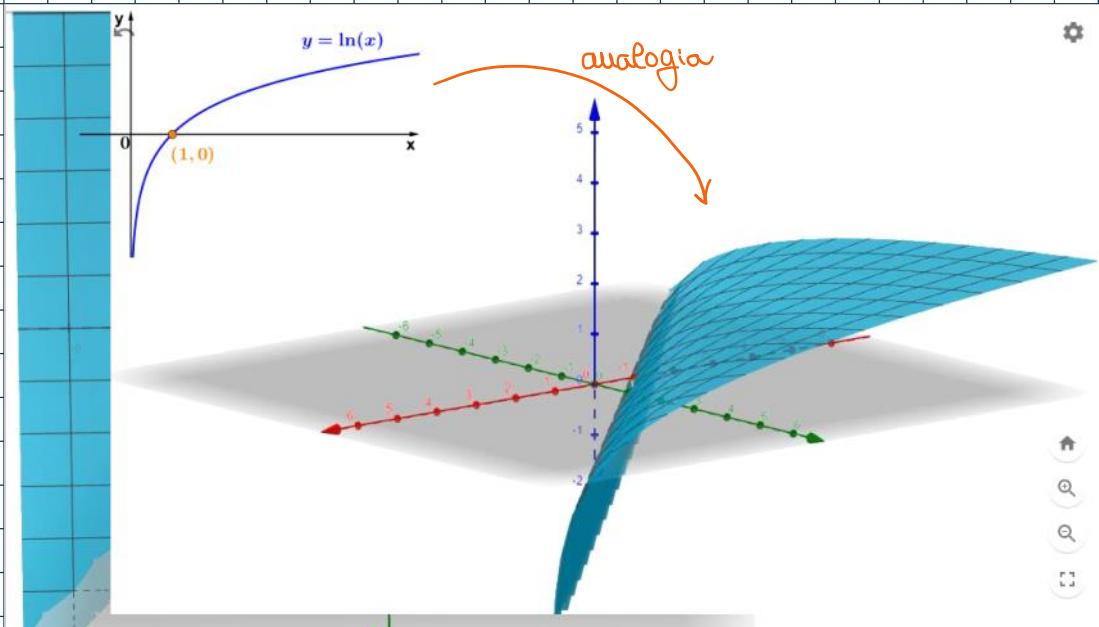
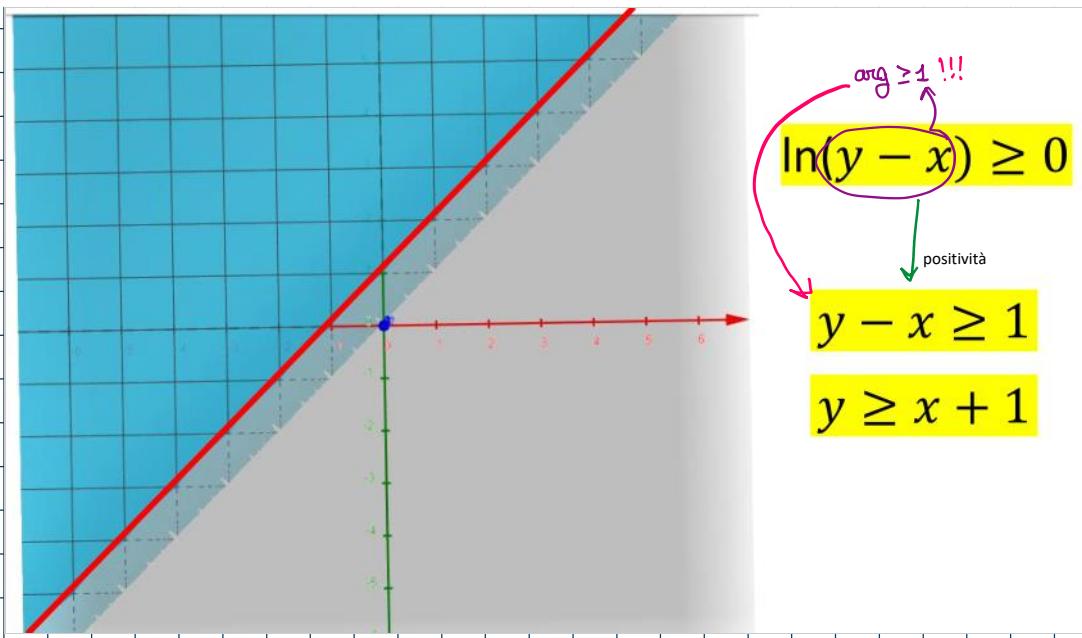


Fig. 11



$$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$$

2. Determinare il dominio della funzione

$$f(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 6x + 8y}. \quad (1)$$

La funzione è definita per quelle coppie $(x; y)$ che rendono il radicando della (1) maggiore o eguale a zero:

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y \geq 0. \quad (2)$$

Com'è noto, l'equazione associata alla (2):

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$$

è rappresentata, nel piano cartesiano, da una circonferenza con centro $C(3; -4)$ e raggio $r = 5$. Infatti essa si può porre nella forma:

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25.$$

Operando identiche trasformazioni algebriche sulla (2), possiamo ottenerne una forma equivalente ma più facilmente interpretabile:

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 \geq 25. \quad (3)$$

La diseguaglianza (3) è verificata se e solo se x e y sono le coordinate di un punto avente distanza maggiore o eguale a 5 da $C(3; -4)$ (fig. 12).

corrisponde allo studio della
positività di una funzione

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y \geq 0$$

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$$

2. Determinare il dominio della funzione

$$f(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 6x + 8y}. \quad (1)$$

La funzione è definita per quelle coppie $(x; y)$ che rendono il radicando della (1) maggiore o eguale a zero:

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y \geq 0.$$

Com'è noto, l'equazione associata alla (2):

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$$

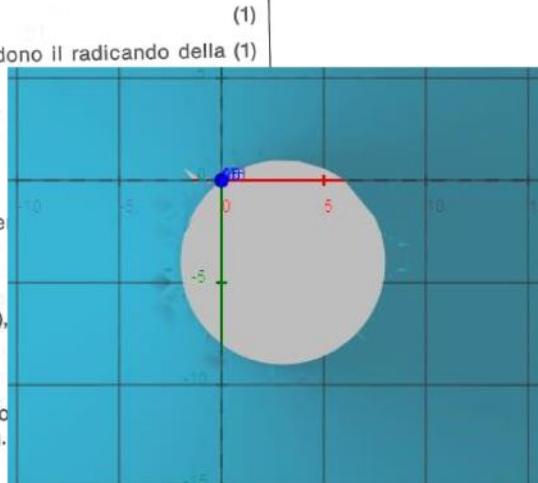
è rappresentata, nel piano cartesiano, da una circonferenza con centro $C(3; -4)$ e raggio $r = 5$. Infatti essa si può porre nella forma:

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25.$$

Operando identiche trasformazioni algebriche sulla (2), possiamo ottenerne una forma equivalente ma più facilmente interpretabile:

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 \geq 25.$$

* La diseguaglianza (3) è verificata se e solo se x e y sono le coordinate di un punto avente distanza maggiore o eguale a 5 da $C(3; -4)$ (fig. 12).



Positività della funzione?

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$$

2. Determinare il dominio della funzione

$$f(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 6x + 8y}. \quad (1)$$

La funzione è definita per quelle coppie $(x; y)$ che rendono il radicando della (1) maggiore o eguale a zero:

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y \geq 0.$$

Com'è noto, l'equazione associata alla (2):

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$$

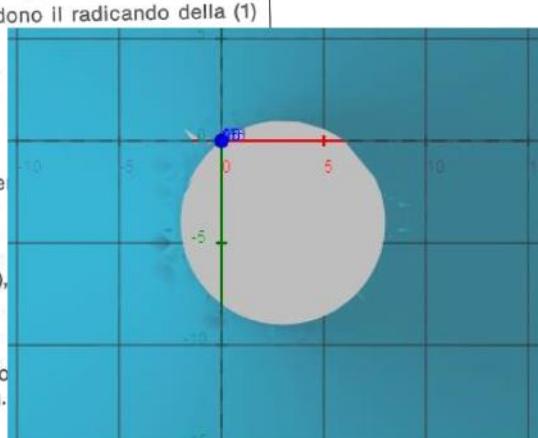
è rappresentata, nel piano cartesiano, da una circonferenza con centro $C(3; -4)$ e raggio $r = 5$. Infatti essa si può porre nella forma:

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25.$$

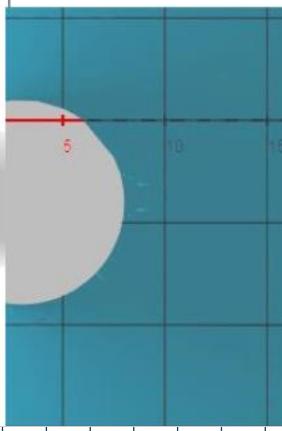
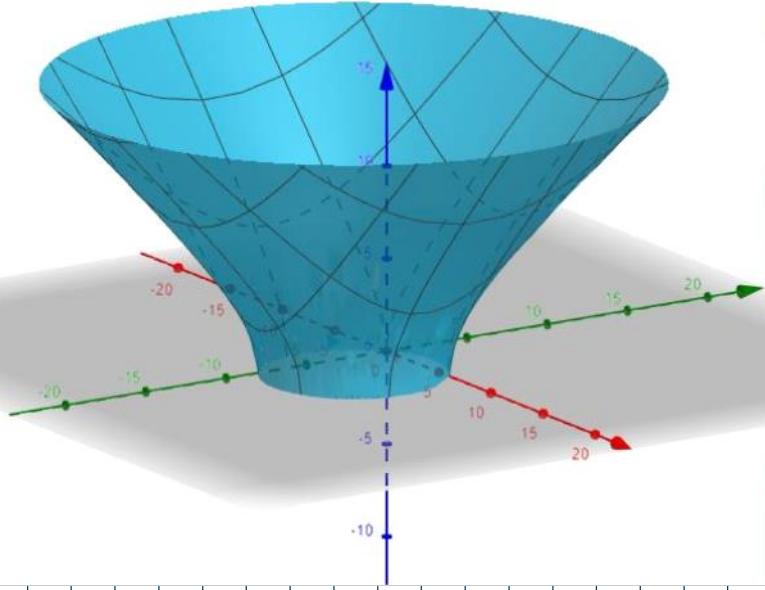
Operando identiche trasformazioni algebriche sulla (2), possiamo ottenerne una forma equivalente ma più facilmente interpretabile:

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 \geq 25.$$

* La diseguaglianza (3) è verificata se e solo se x e y sono le coordinate di un punto avente distanza maggiore o eguale a 5 da $C(3; -4)$ (fig. 12).



$$\mathbb{R}^2 \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$$



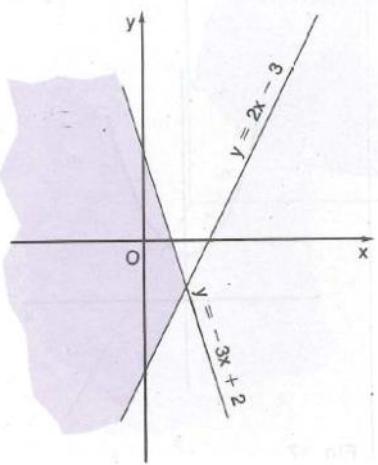
4. Determinare il dominio della funzione

$$f(x; y) = \sqrt{6 + 2y - 4x} + \sqrt{2 - 3x - y}.$$

La funzione è definita se entrambi i radicandi sono maggiori o eguali a zero:

$$\begin{cases} 6 + 2y - 4x \geq 0 \\ 2 - 3x - y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq 2x - 3 \\ y \leq -3x + 2 \end{cases}.$$

La prima disequazione è soddisfatta dalle coordinate dei punti che si trovano nel semipiano chiuso α che ha per origine la retta $y = 2x - 3$ e che contiene l'origine. La seconda disequazione è verificata nel semipiano chiuso β generato dalla retta $y = -3x + 2$ e contenente l'origine (fig. 14). Il dominio della funzione considerata è pertanto costituito dall'insieme $\alpha \cap \beta$, ossia dall'angolo colorato in figura 14, compresi i lati.



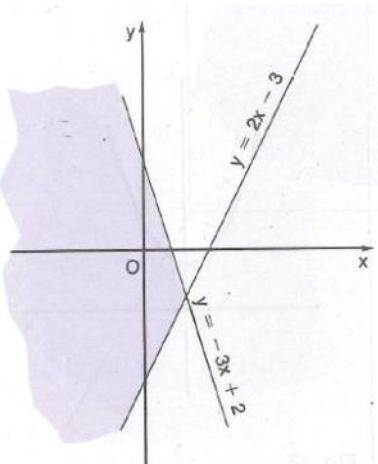
4. Determinare il dominio della funzione

$$f(x; y) = \sqrt{6 + 2y - 4x} + \sqrt{2 - 3x - y}.$$

La funzione è definita se entrambi i radicandi sono maggiori o eguali a zero:

$$\begin{cases} 6 + 2y - 4x \geq 0 \\ 2 - 3x - y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq 2x - 3 \\ y \leq -3x + 2 \end{cases}.$$

La prima disequazione è soddisfatta dalle coordinate dei punti che si trovano nel semipiano chiuso α che ha per origine la retta $y = 2x - 3$ e che contiene l'origine. La seconda disequazione è verificata nel semipiano chiuso β generato dalla retta $y = -3x + 2$ e contenente l'origine (fig. 14). Il dominio della funzione considerata è pertanto costituito dall'insieme $\alpha \cap \beta$, ossia dall'angolo colorato in figura 14, compresi i lati.



Positività della funzione?

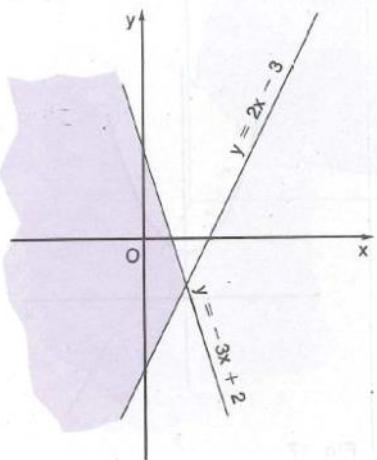
4. Determinare il dominio della funzione

$$f(x; y) = \sqrt{6+2y-4x} + \sqrt{2-3x-y}.$$

La funzione è definita se entrambi i radicandi sono maggiori o eguali a zero:

$$\begin{cases} 6+2y-4x \geq 0 \\ 2-3x-y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq 2x-3 \\ y \leq -3x+2 \end{cases}$$

La prima disequazione è soddisfatta dalle coordinate dei punti che si trovano nel semipiano chiuso α che ha per origine la retta $y = 2x - 3$ e che contiene l'origine. La seconda disequazione è verificata nel semipiano chiuso β generato dalla retta $y = -3x + 2$ e contenente l'origine (fig. 14). Il dominio della funzione considerata è pertanto costituito dall'insieme $\alpha \cap \beta$, ossia dall'angolo colorato in figura 14, compresi i lati.



Positività della funzione?

SEZIONE

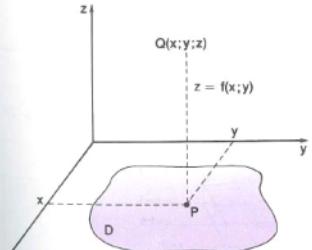


Fig. 19

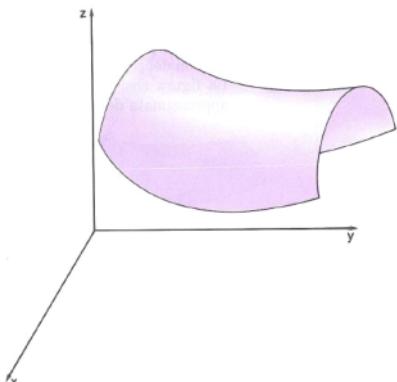


Fig. 20

esempio

$$z = 3y^2 - x^2$$

SEZIONE

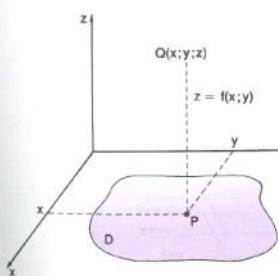


Fig. 19

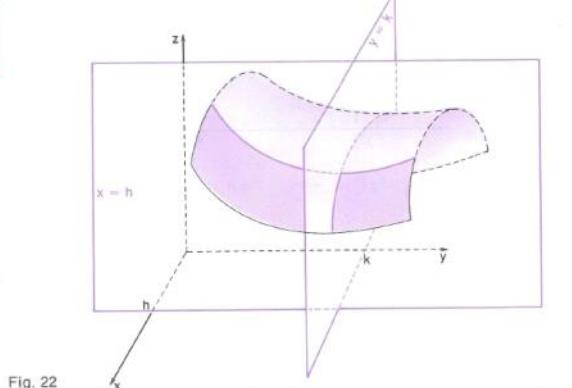


Fig. 20

esempio

$$z = 3y^2 - x^2$$

SEZIONE

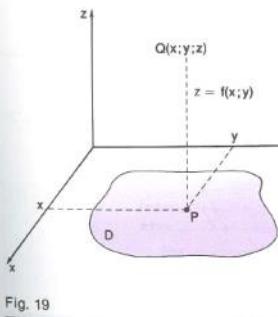


Fig. 19

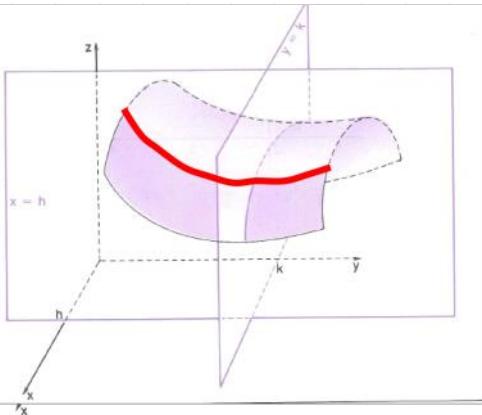


Fig. 20

esempio

$$z = 3y^2 - x^2$$

$$x = 2$$

$$z = 3y^2 - 4$$

SEZIONE

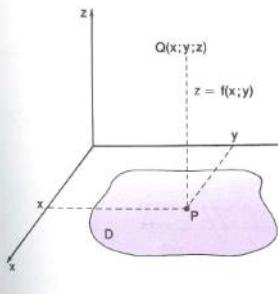


Fig. 19

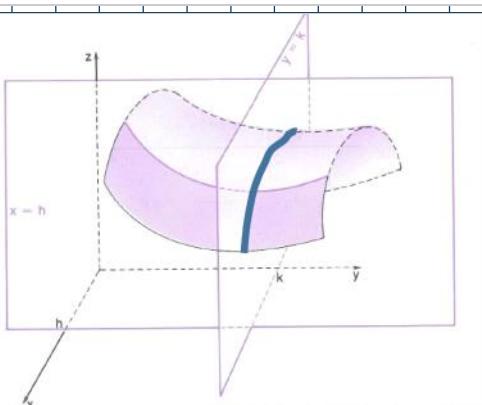


Fig. 20

esempio

$$z = 3y^2 - x^2$$

$$y = 3$$

$$z = 27 - x^2$$

CURVE DI LIVELLO

17. Le linee di livello o curve di livello di una funzione di due variabili si ottengono sezionandone il grafico con piani paralleli al piano xy (fig. 32).

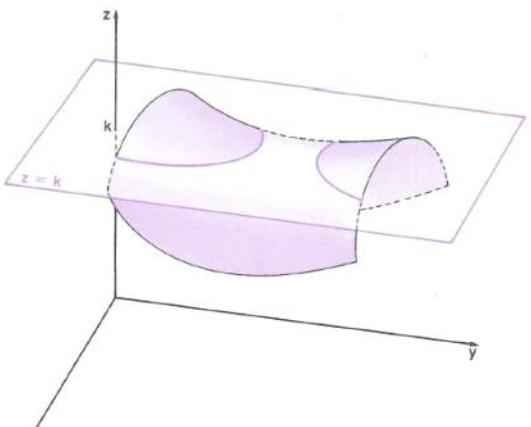


Fig. 32

esempio

$$z = 3y^2 - x^2$$

$$z = 3$$

$$3 = 3y^2 - x^2$$

CURVE DI LIVELLO

17. Le linee di livello o curve di livello di una funzione di due variabili si ottengono sezionandone il grafico con piani paralleli al piano xy (fig. 32).

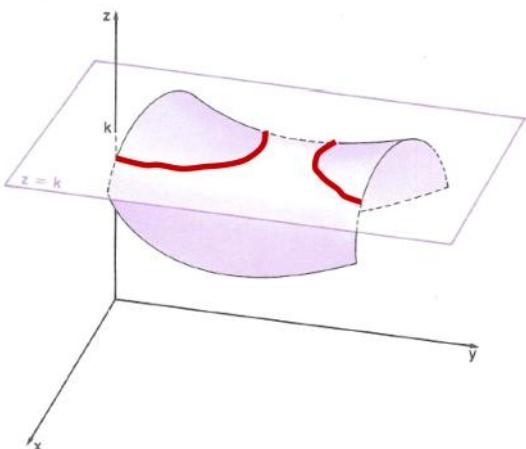


Fig. 32

esempio

$$z = 3y^2 - x^2$$

$$z = 3$$

$$3 = 3y^2 - x^2$$

Il materiale didattico completo con tanti altri argomenti è consultabile su Google Classroom. Codice Corso: phdtemw



Equazioni e Diseguaglianze Algebriche Razionali

[Parte1](#) [Parte2](#) [Parte3](#)
[Slides della lezione](#)



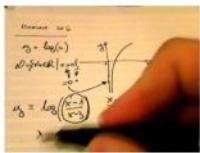
Equazioni e Diseguaglianze Algebriche Irrazionali

[Parte1](#) [Parte2](#) [Parte3](#)
[Slides della lezione](#)



Ancora su Diseguaglianze Algebriche Irrazionali

[Parte1](#) [Parte2](#) [Parte3](#)
[Slides della lezione](#)



Dominio e Positività di una Funzione

[Parte1](#) [Parte2](#) [Parte3](#)
[Slides della lezione](#)



Lezione 1 (Introduzione, Dominio e Positività)

[Parte_1](#) [Parte_2](#) [Parte_3](#) [Slides](#)

Lezione 2 (Limiti di Funzione)

[Parte_1](#) [Parte_2](#) [Parte_3](#) [Slides \(Lezioni 2 e 3\)](#)

Lezione 3 (Funzioni Continue)

**Nella prossima
lezione:**

- **I limiti per
funzioni a più
variabili**





UNIVERSITÀ DELLA CALABRIA
DIPARTIMENTO DI
INGEGNERIA INFORMATICA,
MODELLISTICA, ELETTRONICA
E SISTEMISTICA
DAMES

$\nabla \cdot \mathbf{f} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$

$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$

$x_1 = -t^2 p_1, x_2 = t^2 p_2, p \in \mathbb{R}$

$x_1 = t + x_2$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$

$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$

$F_B = 2 \times y^2 - 1 = 1$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$A + B + C = 15$

$(A+1)(B+2) = 10$

$(A+1)(B+2) = 10$

$(A+1)(B+2) = 10$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$y = \frac{1}{x+2}$

Davide Luciano De Luca

CORSO DI
METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA
INFORMATICA - MODULO 1
LIMITI DI FUNZIONE

ANALISI 2 – MODULO 1

 $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}^m$

DOMINIO E POSITIVITÀ'

LIMITI

Metodo delle rette, delle coordinate polari e sferiche, maggiorazione

OTTIMIZZAZIONE LIBERA

Derivabilità e Differenziabilità, Gradiente, Derivata direzionale, Matrice Hessiana, Matrice Jacobiana

INTEGRAZIONE

Integrali multipli

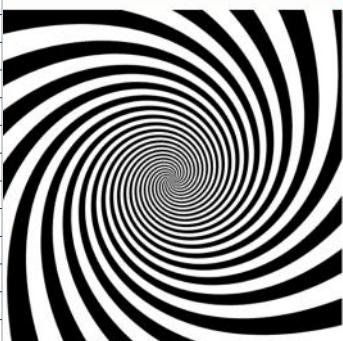
Integrali curvilinei (Calcolo di un Lavoro)

Integrali di Superficie (Calcolo di un Flusso)

OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA

Restrizioni, moltiplicatori di Lagrange

RICHIAMI DI ANALISI 1



Cosa bisogna ricordare prima di iniziare con i limiti per funzioni in più variabili?

LIMITI DI FUNZIONE

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

4 CASI

I) limite finito quando x tende ad un numero finito:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l;$$

II) limite finito quando x tende ad infinito comprendente i seguenti due casi:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l;$$

III) limite infinito per x tendente ad un numero finito comprendente i seguenti due casi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty;$$

IV) limite infinito per x tendente ad infinito comprendente i seguenti quattro casi:

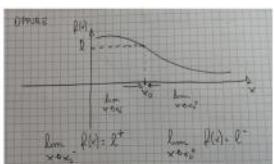
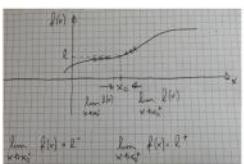
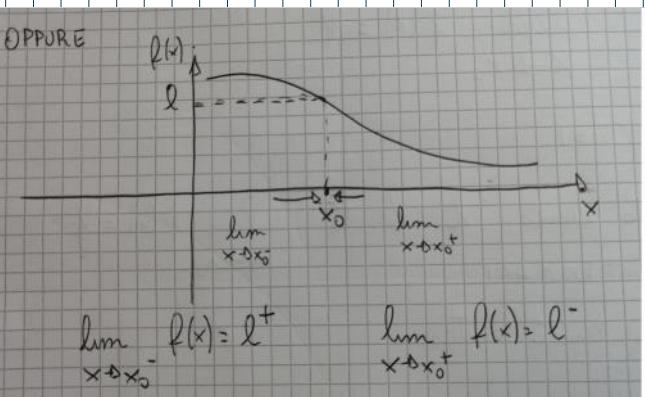
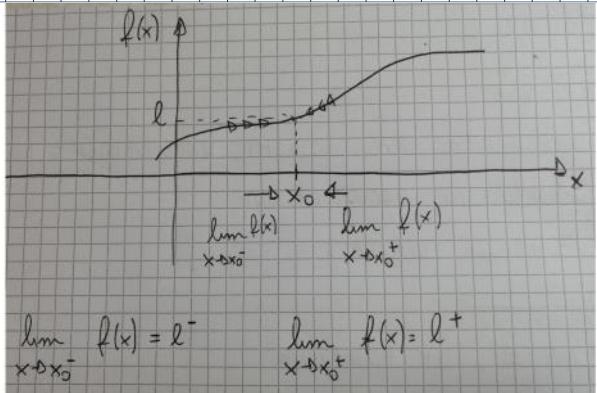
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty;$$

$$\text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

1) x_0 finito, l finito $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$
 SOTTO CASI

a) limite destro
 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) =$

b) limite sinistro
 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) =$

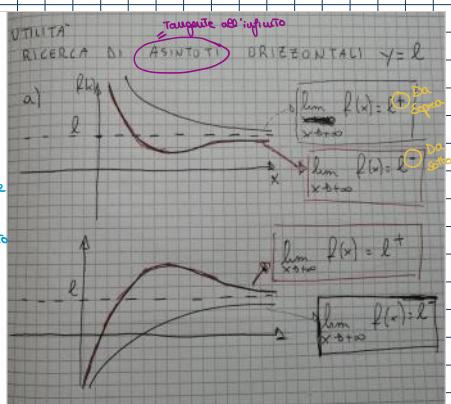


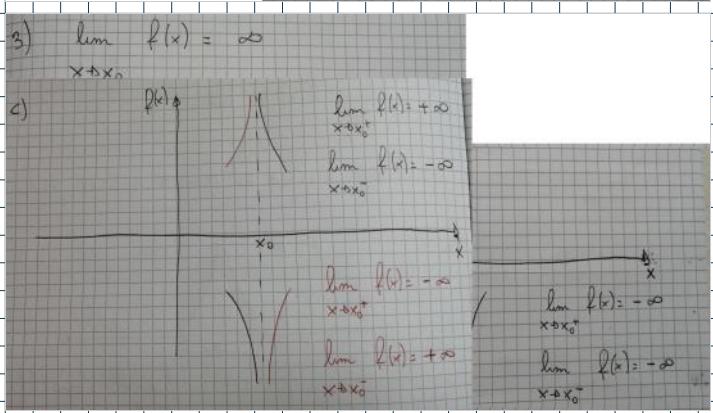
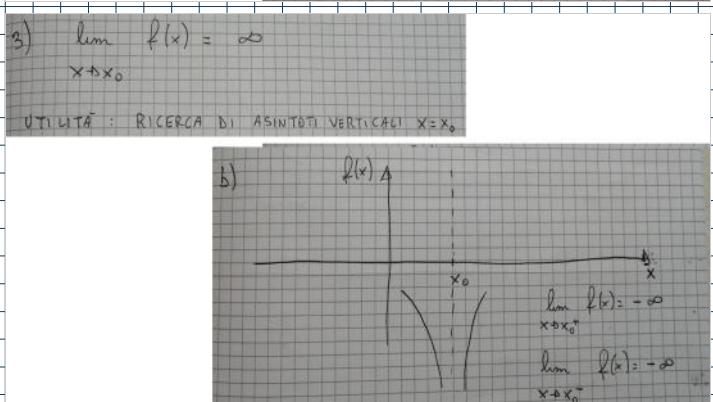
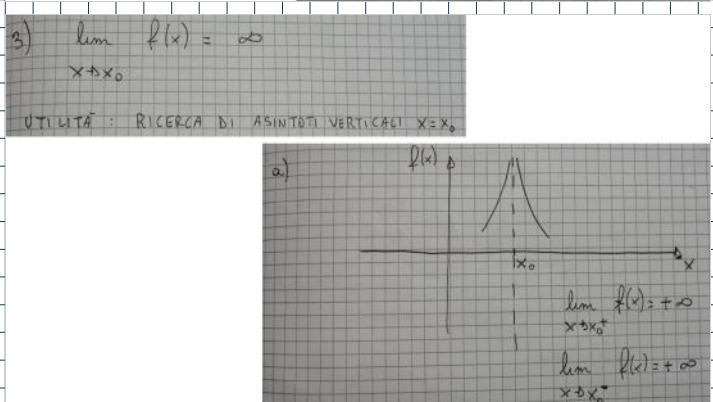
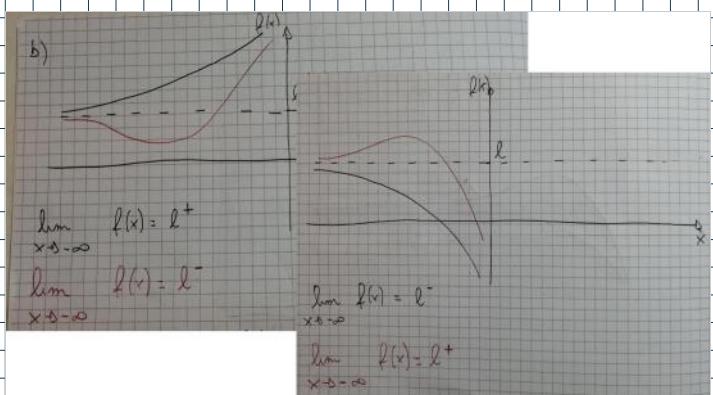
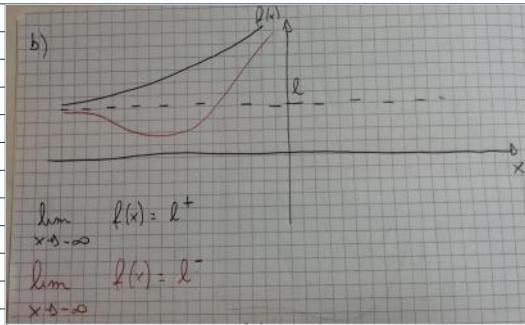
UTILITÀ

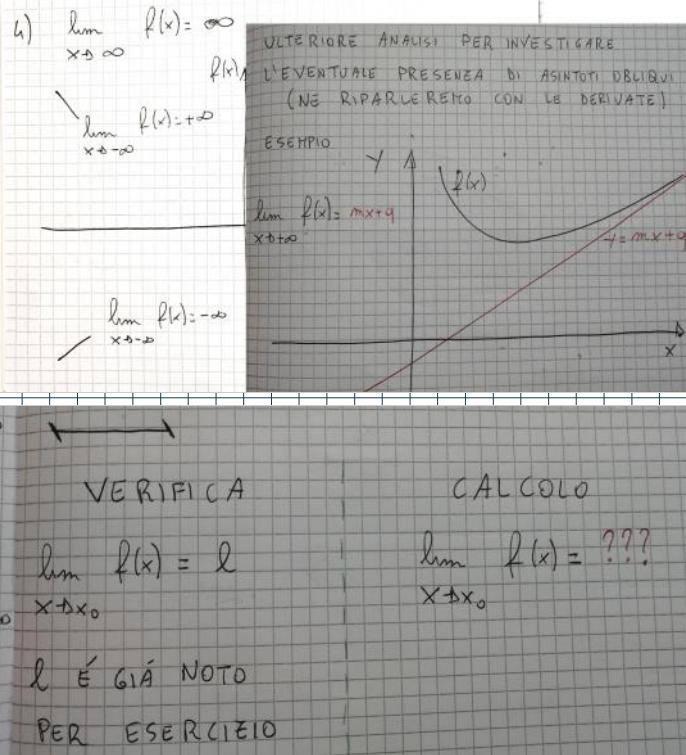
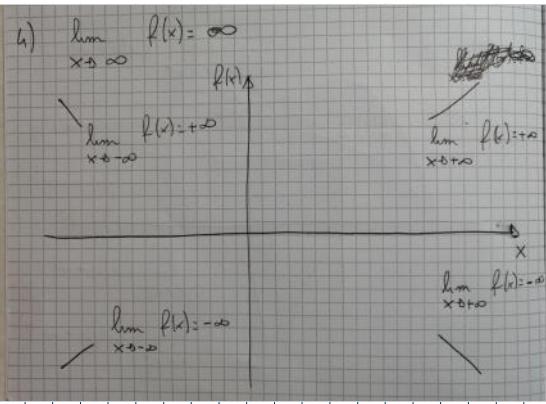
- $f(x)$ CONTINUA IN UN PUNTO x_0
- x_0 PUNTO DI DISCONTINUITÀ ELIMINABILE

2) a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$
 b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$

Poiché l'asintoto è una tangente all'infinito "prima" dell'infinito la funzione può intersecare l'asintoto







RISOLUZIONE LIMITI CON FORME INDETERMinate



ANALISI 1



LIMITE DI UN PUNTO DI FRONTIERA
↓

Cose per cui si parla di
Limite destro e Limite sinistro,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow \infty}} F_1(x) + F_2(x) = \dots$$

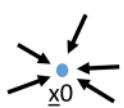
$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow 0}} [F_1(x) + F_2(x)] \cdot \frac{F_3(x)}{F_4(x)}$$

PRINCIPIO DI CONTEMPORANEITÀ DEL CALCOLO

Le limiti viene calcolato contemporaneamente sia sopra che sotto nella funzione

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x}$$

ANALISI 2



ANALISI 1

ANALISI 2

Basta una coppia di valori che sia da due informazioni diverse per concludere che il limite non esiste.

Limite esiste

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) = l$$

" \underline{x} seguito"

indica un vettore

Indipendenza dal percorso di avvicinamento

ANALISI 1

ANALISI 2

Limite NON esiste

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) = l$$

dipendenza dal percorso di avvicinamento

se considero $f: A \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) = l \quad \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) = +\infty \quad (-\infty)$$

NOTAZIONE VETTORIALE

\underline{x}_0 è sempre un punto di accumulazione

In maniera equivalente posso scrivere

$$\lim_{\substack{\underline{x}_1 \rightarrow \underline{x}_{1,0} \\ \underline{x}_2 \rightarrow \underline{x}_{2,0} \\ \vdots \\ \underline{x}_n \rightarrow \underline{x}_{n,0}}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} l \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

NOTAZIONE TRAMITE COMPONENTI

ANALISI 2

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}^m$$

$$f: (x, y, z, t) \rightarrow (x^2 + e^y, \sqrt{z - t + x}, tx)$$

$$f: (x, y, z, t) \rightarrow (f_1, f_2, f_3)$$

$$f_1: (x, y, z, t) \rightarrow (x^2 + e^y)$$

$$f_2: (x, y, z, t) \rightarrow (\sqrt{z - t + x})$$

$$f_3: (x, y, z, t) \rightarrow (tx)$$

appare nel caso semplice di $A \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\lim_{\substack{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(\underline{x}, y) = \begin{cases} l \\ +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

Nel caso di tendenza in \mathbb{R}^m di un punto del dominio a $+\infty$ ($-\infty$), nell'ipotesi che il dominio sia illimitato, bisogna chiarire alcune cose

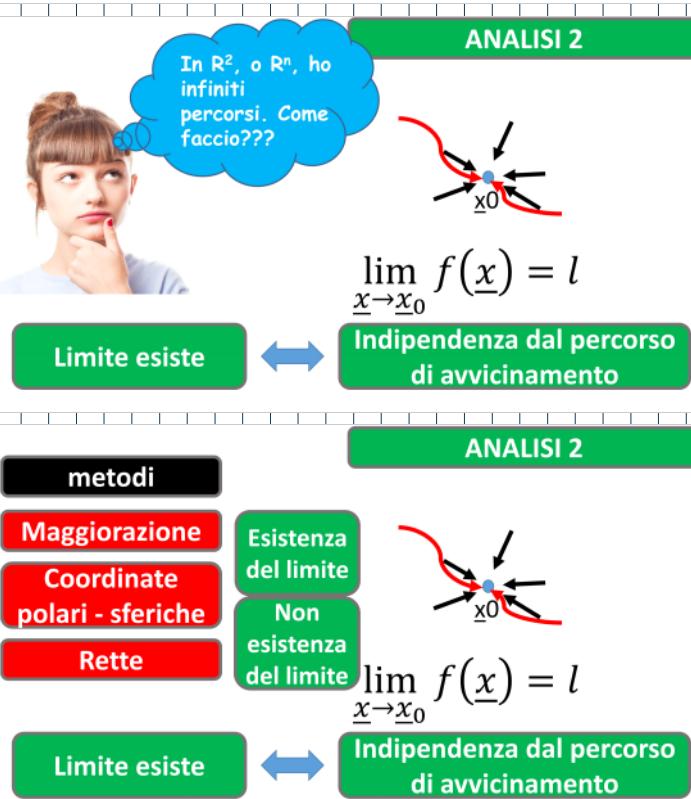
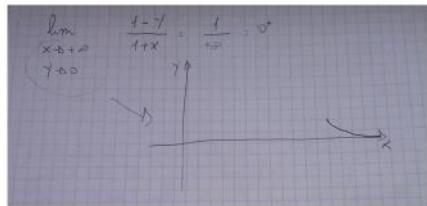
$$\lim_{\underline{x} \rightarrow +\infty} f(\underline{x}) \quad \text{Più significativo se} \quad \lim_{\substack{x_1 \rightarrow +\infty \\ x_2 \rightarrow +\infty \\ \vdots \\ x_n \rightarrow +\infty}}$$

ma l'è
 $x_1 \rightarrow x_0$
 $x_2 \rightarrow +\infty$

Quando è sufficiente che almeno una
 Componibile $\rightarrow +\infty$ ($0 - \infty$)

$x_n \rightarrow +\infty$

Esempio (Se premettere che valgono le stesse regole
 di Analisi I in molti casi, ovvero si entra sempre
 con la sostituzione dei valori e si esce dopo in
 stessa forma indeterminata, allora si passa
 al ragionamento con i metodi che adesso vedremo)

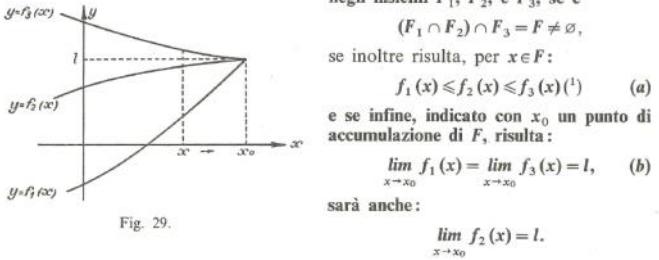


Metodo della Maggiorazione

21. - Terzo teorema (del confronto) Metodo dei CARABINIERI



Date le tre funzioni $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ e $y = f_3(x)$ definite, rispettivamente, negli insiemini F_1 , F_2 , e F_3 , se è



Metodo della Maggiorazione

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) = l \quad \lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) - l = 0$$

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} |f(\underline{x}) - l| = 0$$

$$0 \leq |f(\underline{x}) - l| \leq g(v) \quad \lim_{\substack{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0 \\ v \rightarrow v_0}} g(v) = 0$$

Metodo della Maggiorazione

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) = l \quad \text{Verifica: } l \text{ è noto}$$

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) = ? \quad \text{Calcolo: } l \text{ è da determinare}$$

Come uso la maggiorazione nei problemi di calcolo di un limite?



Metodo della Maggiorazione nei problemi di Verifica

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) = l \quad \text{Verifica: } l \text{ è noto}$$

Esempio 1

$$\lim_{\substack{\underline{x} \rightarrow \underline{0} \\ \underline{y} \rightarrow \underline{0}}} \frac{x+y^2}{x^4+y^2+1} = 0$$

È intuitivo dire che la frazione è positiva

Un calcolo è superiore a 0
In realtà deve ad essere di approssimazione

Tutto delle quantità

Semplifico

Metodo della Maggiorazione nei problemi di Verifica

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) = l \quad \text{Verifica: } l \text{ è noto}$$

Esempio 2

$$\lim_{\substack{\underline{x} \rightarrow \underline{0} \\ \underline{y} \rightarrow \underline{0}}} \frac{x^2-y^2}{x+y^2} = 0$$

$$0 \leq \left| \frac{x^2-y^2}{x+y^2} - 0 \right| = |x| \cdot \frac{|x-y|}{|x+y^2|} \leq |x| \cdot \frac{|x(1+y^2)|}{|x+y^2|}$$

$$\leq |x| \frac{|x| + |y|}{|x|} = |x| + |y|$$

Metodo della Maggiorazione nei problemi di Calcolo

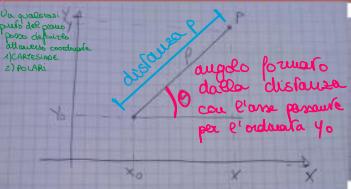
$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} f(\underline{x}) = ? \quad \text{Calcolo: } l \text{ è da determinare}$$

Come uso la maggiorazione nei problemi di calcolo di un limite?



Assieme ad altre tecniche: ad es. il metodo delle coordinate polari

Metodo delle Coordinate Polari



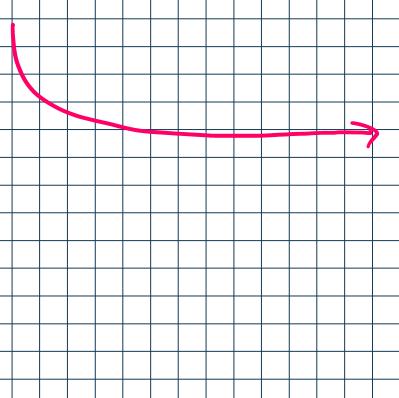
per i limiti in spazi bidimensionali

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho \cos \theta \\ y = y_0 + \rho \sin \theta \end{cases}$$

$$f(x,y) = f(x_0 + \rho \cos \theta, y_0 + \rho \sin \theta)$$

$$0 \leq |f(x_0 + \rho \cos \theta, y_0 + \rho \sin \theta) - l| \leq g(\rho)$$

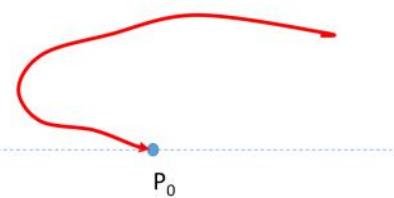
$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x,y) = l \Leftrightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0} g(\rho) = 0$$



Metodo delle Coordinate Polari

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho \cos \theta \\ y = y_0 + \rho \sin \theta \end{cases}$$

$$f(x,y) = f(x_0 + \rho \cos \theta, y_0 + \rho \sin \theta)$$



Metodo delle Coordinate Polari

ESEMPIO 2

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 (\cos^3 \theta - \sin^3 \theta)}{\rho^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho (\cos^3 \theta - \sin^3 \theta)$$

Il limite non esiste, in quanto vi è dipendenza da θ

Esistenza del limite

Non esistenza del limite

Metodo delle Coordinate Polari

ESEMPIO 3

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 (\cos^3 \theta - \sin^3 \theta)}{\rho^2} =$$

Esistenza del limite

Non esistenza del limite

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 (\cos^3 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta \cos \theta) = 0$$

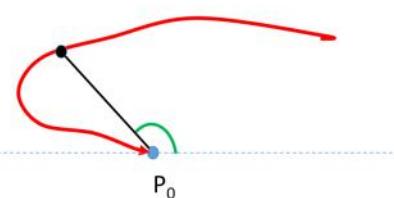
$$0 \leq |f(x_0 + \rho \cos \theta, y_0 + \rho \sin \theta) - l| \leq g(\rho)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x,y) = l \Leftrightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0} g(\rho) = 0$$

Metodo delle Coordinate Polari

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho \cos \theta \\ y = y_0 + \rho \sin \theta \end{cases}$$

$$f(x,y) = f(x_0 + \rho \cos \theta, y_0 + \rho \sin \theta)$$



Metodo delle Coordinate Polari

ESEMPIO 3

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 (\cos^3 \theta - \sin^3 \theta)}{\rho^2} =$$

Esistenza del limite

Non esistenza del limite

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 (\cos^3 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta \cos \theta) = 0$$

$$0 \leq |f(x_0 + \rho \cos \theta, y_0 + \rho \sin \theta)| \leq M \rho^2$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0} M \rho^2 = 0$$

Metodo delle Coordinate Polari

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{yx^2}{y^2 + x^4} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ \rho \rightarrow 0}} \frac{\rho \sin \theta \rho^3 \cos^2 \theta}{\rho^2 \sin^2 \theta + \rho^4 \cos^4 \theta} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 \sin \theta \cos^2 \theta}{\rho^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 \sin \theta \cos^2 \theta}{\rho^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \sin \theta \cos^2 \theta = 0$$

Esistenza del limite
Non esistenza del limite

$$0 \leq |f(x_0 + \rho \cos \theta, y_0 + \sin \theta) - l| \leq g(\rho)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = l \Leftrightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0} g(\rho) = 0$$

Metodo delle Coordinate Polari

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{yx^2}{y^2 + x^4} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho \sin \theta \rho^2 \cos^2 \theta}{\rho^2 \sin^2 \theta + \rho^4 \cos^4 \theta} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{\rho^2 [\sin^2 \theta + \rho^2 \cos^4 \theta]} =$$

Esistenza del limite
Non esistenza del limite

$$0 \leq |f(x_0 + \rho \cos \theta, y_0 + \sin \theta) - l| \leq g(\rho)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = l \Leftrightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0} g(\rho) = 0$$

Metodo delle Coordinate Polari

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{yx^2}{y^2 + x^4} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho \sin \theta \rho^2 \cos^2 \theta}{\rho^2 \sin^2 \theta + \rho^4 \cos^4 \theta} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{\rho^2 [\sin^2 \theta + \rho^2 \cos^4 \theta]} =$$

Esistenza del limite
Non esistenza del limite

$$0 \leq |f(x_0 + \rho \cos \theta, y_0 + \sin \theta) - l| \leq g(\rho)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = l \Leftrightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0} g(\rho) = 0$$

Metodo delle Coordinate Polari

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{yx^2}{y^2 + x^4} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho \sin \theta \rho^2 \cos^2 \theta}{\rho^2 \sin^2 \theta + \rho^4 \cos^4 \theta} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{\rho^2 [\sin^2 \theta + \rho^2 \cos^4 \theta]} = \frac{0}{\sin^2 \theta}$$

Esistenza del limite
Non esistenza del limite

$$0 \leq |f(x_0 + \rho \cos \theta, y_0 + \sin \theta) - l| \leq g(\rho)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = l \Leftrightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0} g(\rho) = 0$$

Metodo delle Coordinate Polari

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{yx^2}{y^2 + x^4} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho \sin \theta \rho^2 \cos^2 \theta}{\rho^2 \sin^2 \theta + \rho^4 \cos^4 \theta} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{\rho^2 [\sin^2 \theta + \rho^2 \cos^4 \theta]} = \frac{0}{\sin^2 \theta}$$

Esistenza del limite
Non esistenza del limite

$$0 \leq |f(x_0 + \rho \cos \theta, y_0 + \sin \theta) - l| \leq$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = l \Leftrightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0} g(\rho) = 0$$



$$\sin \theta = 0$$

$$P_0$$

Esistenza del limite

Non esistenza del limite



Metodo delle Coordinate Polari

$$\sin \theta = 0$$

Esistenza del limite

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = l \Leftrightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0} g(\rho) = 0$$



Metodo delle Coordinate Polari

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{yx^2}{y^2 + x^4} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho \sin \theta \rho^2 \cos^2 \theta}{\rho^2 \sin^2 \theta + \rho^4 \cos^4 \theta} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{\rho^2 (\sin^2 \theta + \rho^2 \cos^4 \theta)} = \frac{0}{\sin^2 \theta} \\ &\text{Ritneremo tra un po' su questo esercizio....} \\ 0 \leq |f(x_0 + \rho \cos \theta, y_0 + \rho \sin \theta)| &\leq \\ \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = l &\Leftrightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0} g(\rho) = 0 \end{aligned}$$

Esistenza del limite

Non esistenza del limite



Metodo delle Coordinate Polari

$$\sin \theta = 0$$

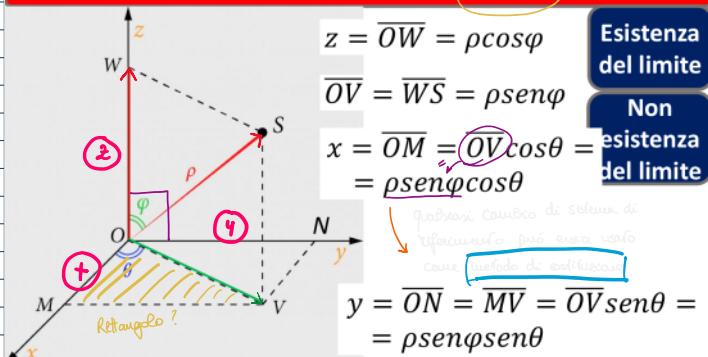
P_0

Esistenza del limite
Non esistenza del limite



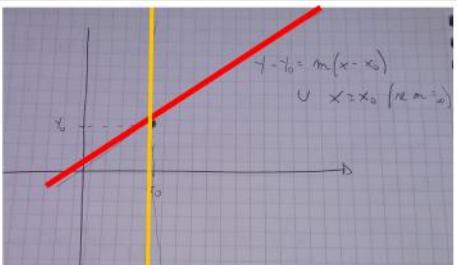
Metodo delle Coordinate Sferiche

Esistenza del limite
Non esistenza del limite



Metodo delle Rette

Non esistenza del limite



Metodo delle Rette

Non esistenza del limite

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - 2y^2}{x^2 + y^2} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - 2m^2 x^2}{x^2 + m^2 x^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - 2m^2}{1 + m^2} \text{ dipende dalla direzione!} \\ \text{La dipendenza dalla direzione!} \\ \text{Completo l'errore considerando anche la direzione } x \neq 0 \\ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-2y^2}{y^2} &= -2 \quad \text{se considero dire orizzontale e verifico che due rette che mi fanno due risultati diversi} \\ &\downarrow \text{AKA la limita non esiste} \end{aligned}$$

Metodo delle Rette

Esempio 2

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 - 2y^3}{x^2 + y^2}$$

1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 - 2y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-2m^3)}{1+m^2} = 0$

2) $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{-2y^3}{y^2} = -2y = 0$

Non esistenza del limite

$y = mx$ $x = 0$
Usa questi due valori a spese di costituzionalità

Se i punti sono solo 2 non è dato che esista

Metodo delle Rette

Esempio 2

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 - 2y^3}{x^2 + y^2}$$

1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 - 2y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-2m^3)}{1+m^2} = 0$

2) $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{-2y^3}{y^2} = -2y = 0$

Non esistenza del limite

Non si può concludere che il limite esista, in quanto potrebbe esistere almeno una direzione non lineare lungo la quale il valore sia diverso da 0!

Metodo delle Rette

Esempio 2

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 - 2y^3}{x^2 + y^2}$$

Coordinate polari....

1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 - 2y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 \cos^3 \theta - \rho^3 \sin^3 \theta}{\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} =$

2) $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{-2y^3}{y^2} = -2y = 0$

Non esistenza del limite

Non si può concludere che il limite esista, in quanto potrebbe esistere almeno una direzione non lineare lungo la quale il valore sia diverso da 0!

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 - 2y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 \cos^3 \theta - \rho^3 \sin^3 \theta}{\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} =$$

$$= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 \cos^3 \theta - \rho^3 \sin^3 \theta}{\rho^2} =$$

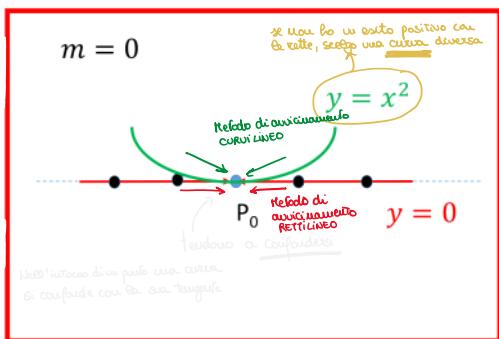
$$= \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho (\cos^3 \theta - \sin^3 \theta) = \dots$$

LIVELLO LE POTENZE

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{yx^2}{y^2 + x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^3}{m^2 x^2 + x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{m^2 + x^2} = \frac{0}{m^2}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{yx^2}{y^2 + x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = l \Leftrightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0} g(\rho) = 0$$



FUNZIONI CONTINUE

Analogamente alle Analisi 1, devono verificarsi contemporaneamente 3 condizioni

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \text{Il limite per } x \rightarrow x_0 \text{ deve esistere e avere valore finito}$$

$$2) \exists f(x_0) \quad \text{Il valore della funzione nel punto di accumulazione deve esistere}$$

$$3) l = f(x_0) \quad \text{Il valore della funzione nel punto di accumulazione coincide col risultato del limite}$$

FUNZIONI CONTINUE

ESEMPIO 1

$$\bullet f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \forall (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix} \end{cases}$$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \cos \theta \sin \theta}{\rho} = 0$

Utilizzando le coordinate polari si può semplificare la funzione per calcolare il valore del limite. Tuttavia la suggestione

Le si devono mettere ad essere punti ad una variabile. Tipico di analisi 2.

$$0 \leq |f(x_0 + \rho \cos \theta, y_0 + \sin \theta) - l| \leq g(\rho)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = l \Leftrightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0} g(\rho) = 0$$

FUNZIONI CONTINUE

ESEMPIO 2

$$\bullet f(x, y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \ln(\sqrt{x^2+y^2}) & \forall (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2+y^2) \ln(\sqrt{x^2+y^2}) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 \ln \rho = (0, -\infty)$$

$$\therefore \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\ln \rho}{\rho^2} = \frac{\frac{1}{\rho}}{-\frac{2}{\rho^3}} = \frac{1}{\rho} \cdot -\frac{\rho^2}{2} \rightarrow 0$$

FUNZIONI CONTINUE

ESEMPIO 3

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \ln(\sqrt{x^2+y^2}) & \forall (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 \cos \theta \sin \theta \ln \rho = \cos \theta \sin \theta \cdot \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^2 \ln \rho = 0$$

FUNZIONI CONTINUE

ESEMPIO 4

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} & \forall (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^4 \cos^2 p \sin^2 p}{p^4 \cos^4 p + p^4 \sin^4 p} = \frac{\cos^2 0 \sin^2 0}{\cos^4 0 + \sin^4 0} = 1$$

$f(x, y)$ non è continua !!!

FUNZIONI CONTINUE

ESEMPIO 5

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \forall (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^3 \cos^2 p \sin^2 p}{p^4 \cos^4 p + p^4 \sin^4 p} = \frac{p \cos^2 0 \sin^2 0}{p^4 \cos^4 0 + p^4 \sin^4 0} = 1 \neq 0$$

$f(x, y)$ non è continua !!!

FUNZIONI CONTINUE

ESEMPIO 6

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x} & x \neq 0 \\ y & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x} = 1$$

Per avere continuità bisogna avere

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\ln(x)}{x} = 1$$

Per $y \neq 0$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{y \ln(x)}{x} = y \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x} = y \cdot 1 = y$$

Per $y = 0 \Rightarrow f(0, 0) = 0$

$$0 \leq \left| \frac{\ln(x)}{x} \right| \leq \frac{|x|}{|x|} = 1$$

Se funzione è continua

FUNZIONI CONTINUE

Per escludere la continuità è sufficiente trovare una
solide direzione / curva lungo la quale il limite è
diverso dal valore nel punto, ovvero

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, \phi(x)) \neq f(x_0, y_0)$$

FUNZIONI CONTINUE

ESEMPIO

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\ln xy}{x^2 + y^2} & y \neq 0 \\ x & y = 0 \end{cases}$$

Essendo $f(0, 0) = 0$

Bisogna verificare se $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln xy}{x^2 + y^2} = 0$?

FUNZIONI CONTINUE

Salgo $y = \phi(x) = x$ ($\phi(x_0) = y_0$)
e sostituisco

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

la funzione non è continua!!!

FUNZIONI CONTINUE

Trucchetti speditivi...

Per controllare se il limite non esiste

y=0

x=0

y=x

y=-x

FUNZIONI CONTINUE

TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE (Analisi con Analisi 1)

1) Se $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ è continua in A^* , lo sarà anche in ogni intorno di A . Non è vero il viceversa

$$+ f(x) \in C^0(A)$$

$C^m(A)$ non contiene anche la derivata fino all'ordine m

FUNZIONI CONTINUE

2) TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

Se $f \in C^0(A)$ e $x_0 \in A$

Se $f(x_0) > 0$ ($= < 0$) $\Rightarrow \exists I_{x_0}$ (oppure

$B(x_0, r)$) | $\forall x \in I_{x_0}$ risulta $f(x) > 0$ (< 0)

Avendo, in ogni punto dell'intorno la funzione assume lo stesso segno di $f(x_0)$

3) $f \in C^0(A)$ si dice limitata superiormente, infossi

o limitata se la sua immagine (estremo ridotto)

è superiormente limitato sup, inf, o limitato

INSIEME	LIMITATO	ILLIMITATO
APERTO	Aperto e limitato	Aperto e illimitato
CHIUSO	COMPATTO	Chiuso e illimitato

Teorema di Weierstrass: se f è definita in un compatto A , allora f ammette almeno un massimo e un minimo assoluto in A

**Nella prossima
lezione:**

- Richiami di derivata e differenziale da Analisi 1





The collage features various mathematical concepts and formulas:

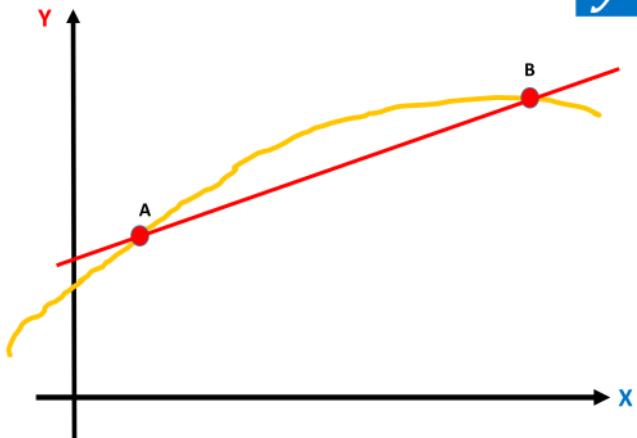
- Top Left:** University of Calabria logo and text: "UNIVERSITÀ DELLA CALABRIA", "DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA INFORMATICA, MODELLISTICA, ELETTRONICA E SISTEMISTICA", "DIMES".
- Top Center:** $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$, $2x^2y''+y^2=2$, $x_1=-11P, x_2=-P, x_3=7P, P \in \mathbb{R}$.
- Top Right:** $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$, $F_0 = 2 \times yz - 1 = 1$.
- Middle Left:** $y_{i+1} = Y_i + b_i K_2$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$.
- Middle Center:** $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.
- Middle Right:** A 3D plot showing a surface S and vectors \mathbf{F}_0 and \mathbf{F}_1 at point M .
- Bottom Left:** $\int \int \int_{M_1} f(x,y,z) dx dy dz = \int_0^{M_1} \left(\int_0^1 \left(\int_{\frac{1}{2}(1-z)}^1 f(x,z) dx \right) dz \right) dp$.
- Bottom Center:** $\operatorname{CORSO DI METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA INFORMATICA - MODULO 1}$
- Bottom Right:** $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $A+B+C=8$, $-4A+6B+10C=15$, $-18A+6B-3C=15$.
- Bottom Left Diagram:** A diagram showing a right-angled triangle with legs a and b , hypotenuse c , and angle θ at vertex C .
- Bottom Right Diagram:** A diagram of a rectangular prism with dimensions a , b , and c .
- Bottom Center:** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$.
- Bottom Right Text:** Davide Luciano De Luca

Rapporto incrementale

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

STUDIO DI FUNZIONE

$$y = f(x) = y(x)$$



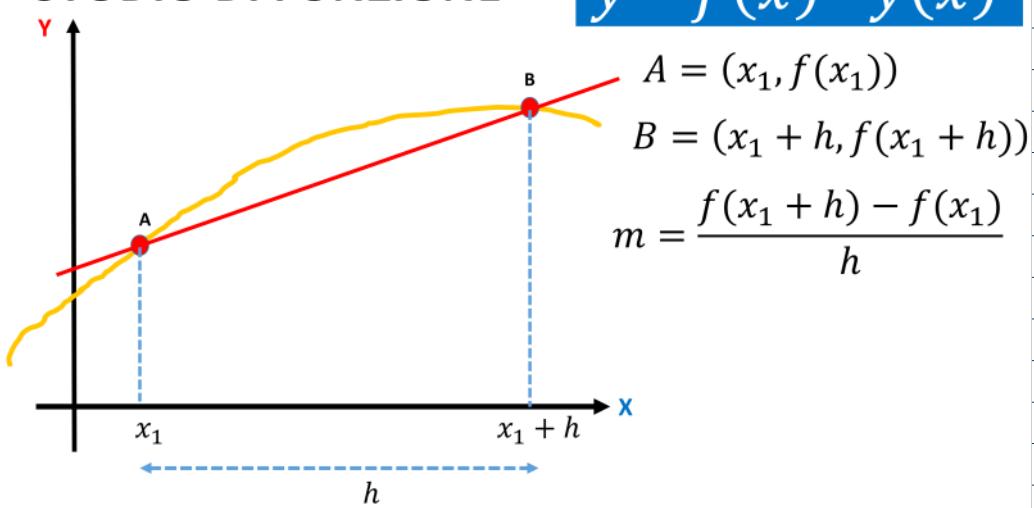
$$A = (x_1, f(x_1))$$

$$B = (x_2, f(x_2))$$

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

STUDIO DI FUNZIONE

$$y = f(x) = y(x)$$



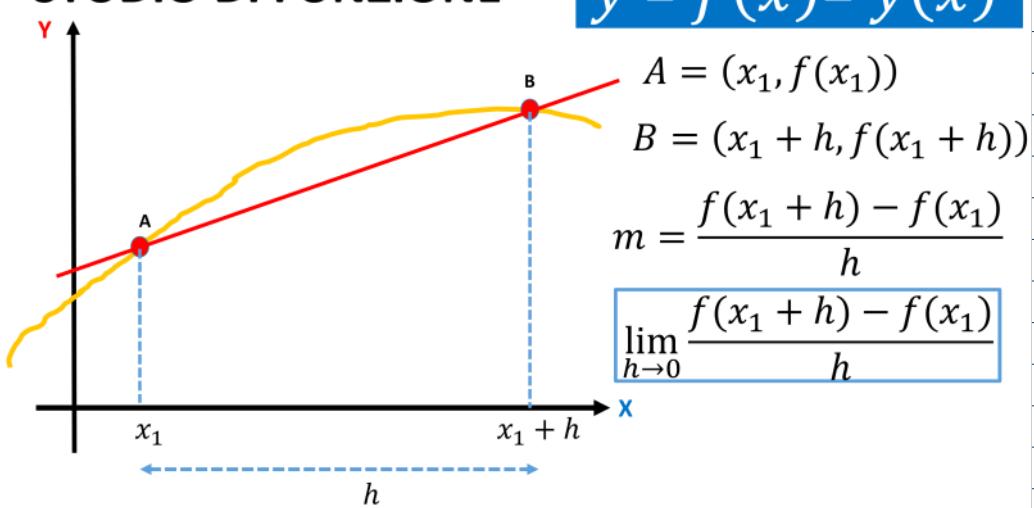
$$A = (x_1, f(x_1))$$

$$B = (x_1 + h, f(x_1 + h))$$

$$m = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

STUDIO DI FUNZIONE

$$y = f(x) = y(x)$$



$$A = (x_1, f(x_1))$$

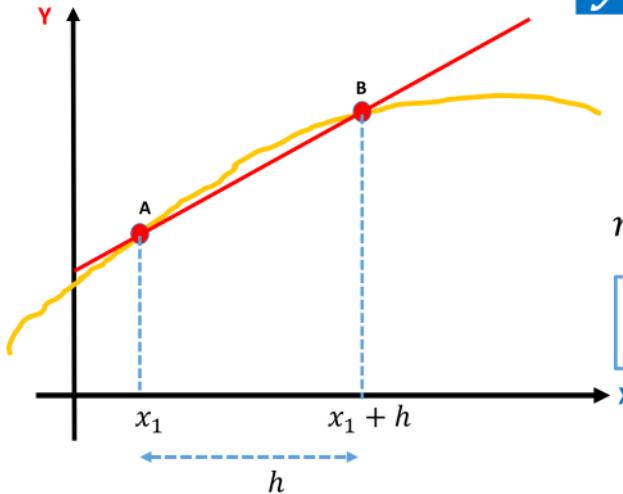
$$B = (x_1 + h, f(x_1 + h))$$

$$m = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

STUDIO DI FUNZIONE

$$y = f(x) = y(x)$$



$$A = (x_1, f(x_1))$$

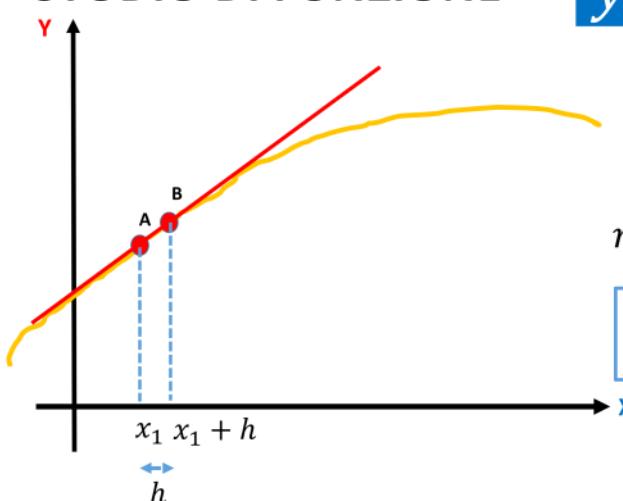
$$B = (x_1 + h, f(x_1 + h))$$

$$m = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

STUDIO DI FUNZIONE

$$y = f(x) = y(x)$$



$$A = (x_1, f(x_1))$$

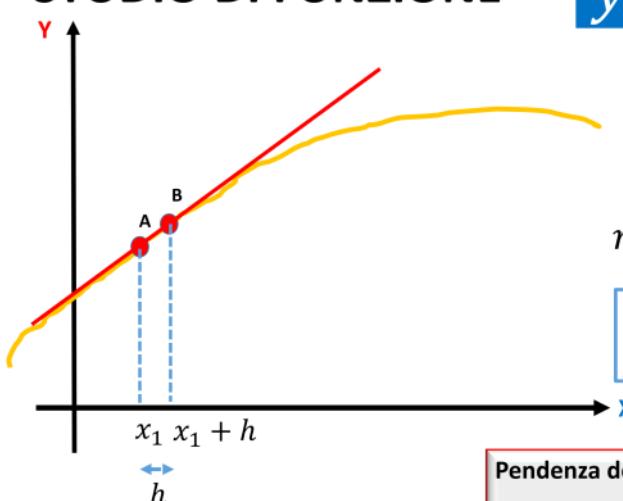
$$B = (x_1 + h, f(x_1 + h))$$

$$m = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

STUDIO DI FUNZIONE

$$y = f(x) = y(x)$$



$$A = (x_1, f(x_1))$$

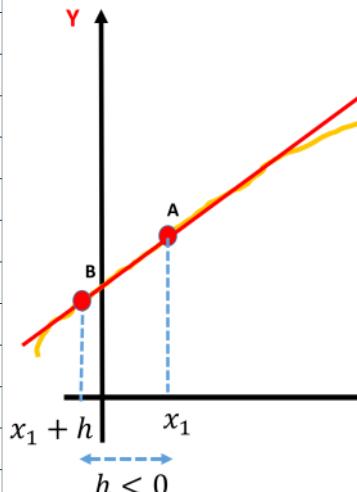
$$B = (x_1 + h, f(x_1 + h))$$

$$m = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

Pendenza della retta tangente alla funzione, nel punto $A = (x_1, f(x_1))$

Stesso ragionamento da sinistra



$$y = f(x) = y(x)$$

$$A = (x_1, f(x_1))$$

$$B = (x_1 + h, f(x_1 + h))$$

$$m = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

Pendenza della retta tangente alla funzione, nel punto $A = (x_1, f(x_1))$

$f(x)$ è derivabile nel punto x_1



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

Esiste ed è finito

La pendenza che ho calcolato da sinistra e quella che ho da destra è la stessa



$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

Esistono, sono finiti e coincidono

$f(x)$ è derivabile nel punto x_1



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

Nel punto x_1 la funzione ammette retta tangente con pendenza m finita



$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

Da destra e da sinistra si hanno gli stessi valori di pendenza m finita, per quanto riguarda la retta tangente

Notazioni

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} \quad \begin{array}{c} \parallel \\ \parallel \\ \parallel \end{array} \quad Df(x_1)$$
$$f'(x_1) \quad y'(x_1) \quad \begin{array}{c} df(x_1) \\ \hline dx \end{array} \quad \begin{array}{c} dy(x_1) \\ \hline dx \end{array}$$

$f'(x)$

**La derivata in un punto generico x è essa stessa
una funzione!!!!!!**

Notazioni

$f'(x)$

**La derivata in un punto generico x è essa stessa
una funzione!!!!!!**

$f''(x)$

$f'''(x)$

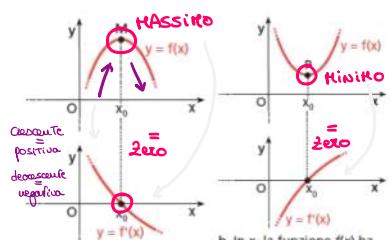
$f^{(n)}(x)$

Retta tangente in x_1 alla funzione $f(x)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} = f'(x_1) = m$$
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

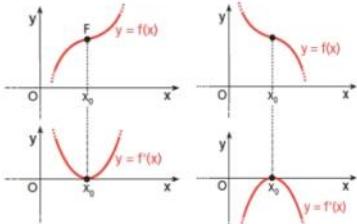
$$y - f(x_1) = f'(x_1) \cdot (x - x_1)$$

Da $f(x)$ ad $f'(x)$ e viceversa...

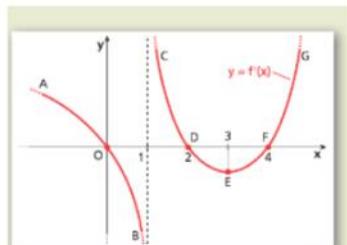


a. In x_0 la funzione $f(x)$ ha un massimo relativo. Nello stesso punto, la derivata $f'(x)$ è nulla e quindi il suo grafico interseca l'asse x in x_0 . A sinistra di x_0 , la derivata è positiva, a destra è negativa.

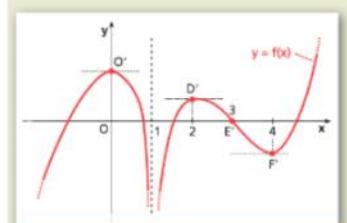
b. In x_0 la funzione $f(x)$ ha un minimo relativo: quindi $f'(x_0) = 0$. Il grafico della derivata interseca l'asse x in x_0 a sinistra di x_0 , la derivata è negativa, a destra è positiva.



Piccolo antipasto di studio di funzione...



$f'(x)$



$f(x)$

Piccolo antipasto di studio di funzione...



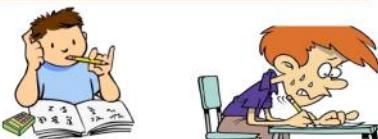
Punti di non derivabilità

Punti di non derivabilità	Grafico	Derivata
Flesso a tangente verticale	 a	a) $f'_-(c) = f'_+(c) = +\infty$ b) $f'_-(c) = f'_+(c) = -\infty$
Cuspide	 a. Verso il basso. b. Verso l'alto.	a) $f'_-(c) = -\infty, f'_+(c) = +\infty$ b) $f'_-(c) = +\infty, f'_+(c) = -\infty$
Punto angoloso	 a	$f'_-(c) \neq f'_+(c)$ a) entrambe finite b) una finita, l'altra infinita



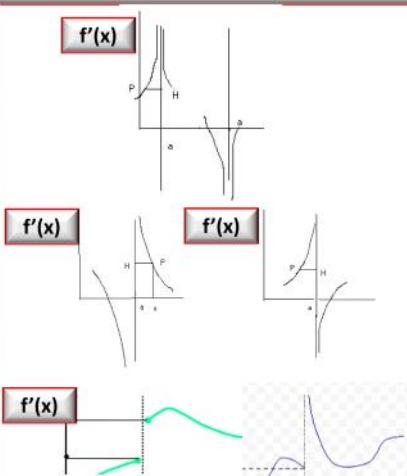
Punti che appartengono al dominio della funzione, ma non appartengono al dominio della derivata

Punti estremi delle funzioni definite a tratti, cioè i punti in cui cambia la funzione



Punti di non derivabilità

Punti di non derivabilità	Grafico	Derivata
Flesso a tangente verticale		a) $f'_-(c) = f'_+(c) = +\infty$ b) $f'_-(c) = f'_+(c) = -\infty$
Cuspide		a) $f'_-(c) = -\infty, f'_+(c) = +\infty$ b) $f'_-(c) = +\infty, f'_+(c) = -\infty$
Punto angoloso		$f'_-(c) \neq f'_+(c)$ a) entrambe finite b) una finita, l'altra infinita



f(x) derivabile in x_0

f(x) continua in x_0

NON PER FORZA

f(x) non continua in x_0

f(x) non derivabile in x_0

In FISICA.....

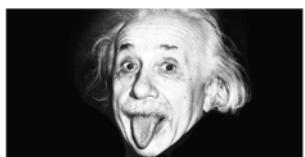
$$\mathbf{s}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\mathbf{v}(t) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t)) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} \quad v_z(t) = \frac{dz(t)}{dt}$$

$$\mathbf{a}(t) = (a_x(t), a_y(t), a_z(t)) = (v_x'(t), v_y'(t), v_z'(t)) =$$

$$= (x''(t), y''(t), z''(t))$$



Le derivate in fisica. Trazano applicazione nella velocità ecc.

Home page × + https://sites.google.com/unical.it/lezioni-di-analisi-1-dl2/home-page

(DL)²

Modulo 3-5-2

Parte 1 Parte 2 Parte 3

Lezione 4 (Derivate di una Funzione)

Parte 1 Parte 2 Parte 3 Slides (Lezioni 4 e 5)
Richiami di Geometria Analitica

Lezione 5 (Esercizi sulle Derivate)

Parte 1 Parte 2 Parte 3

Lezione 6 (Differenziale di Funzione, Massimi e Minimi assoluti e Relativi, Flessi, Asintoti Obliqui)

Parte 1 Parte 2 Parte 3 Slides

Lezione 7 (Esercizi sullo Studio di Funzione)

Parte 1 Parte 2 Parte 3 Slides

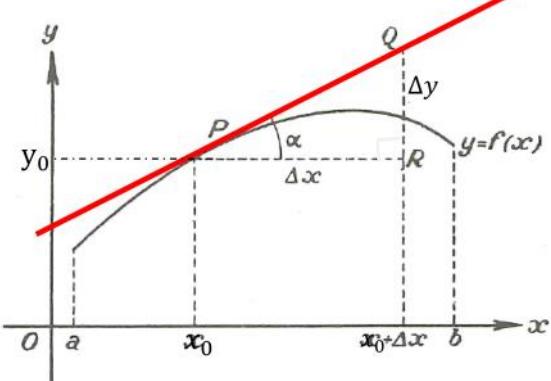


PRIMI PASSI CON IL DIFFERENZIALE



$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x$$



$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

$$dy = f'(x_0) \cdot dx$$

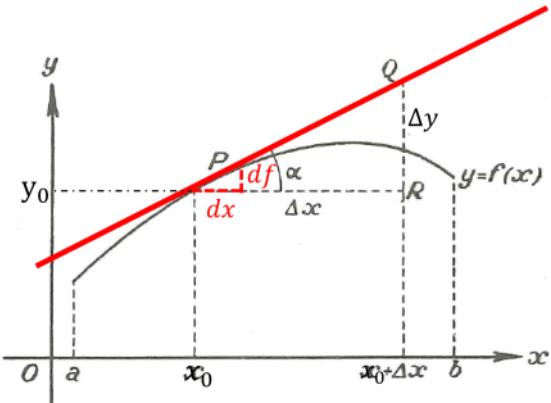
L'incremento di ordinata della funzione viene calcolato sulla retta tangente!

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

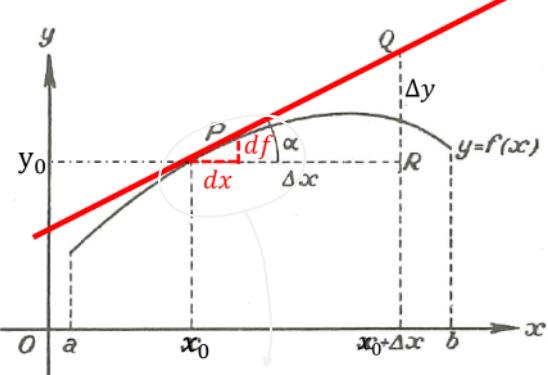
$$df = f'(x_0) \cdot dx$$

L'incremento di ordinata della funzione viene calcolato sulla retta tangente!



$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

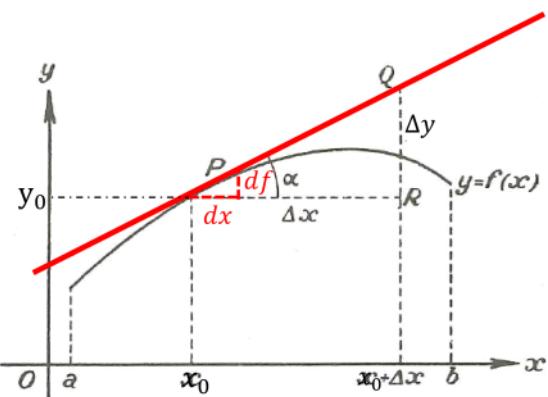


$$df = f'(x_0) \cdot dx$$

DIFFERENZIALI

Differenziale → approssimazione lineare dell'incremento di ordinata per variazione infinitesima di ascissa → variabile INDEPENDENTE

Differenziale df di una funzione f(x)



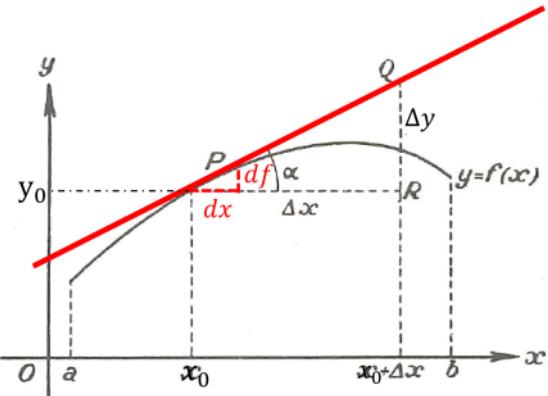
$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

$$df = f'(x_0) \cdot dx$$

DIFFERENZIALI

Approssimazione lineare dell'incremento di funzione, valutato per piccoli incrementi di ascissa

Differenziale df di una funzione f(x)



$$dx := \Delta x \rightarrow 0$$

$$df := \Delta f \rightarrow 0$$

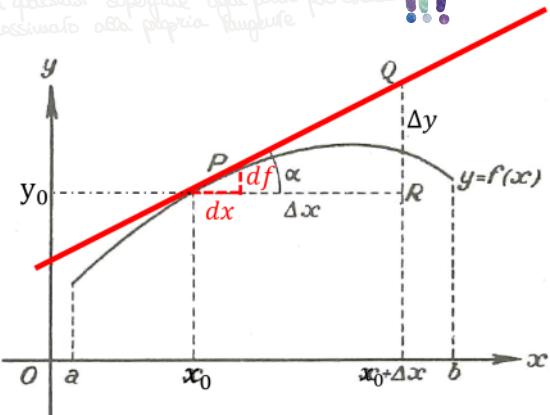
$$df = f'(x_0) \cdot dx$$

DIFFERENZIALI

Approssimazione lineare dell'incremento di funzione, valutato per piccoli incrementi di ascissa

Differenziale df di una funzione $f(x)$

Ora già si vede che la curva può essere approssimata alla parabola. Auguri!!!



$$dx := \Delta x \rightarrow 0$$

$$df := \Delta f \rightarrow 0$$

$$df = f'(x_0) \cdot dx$$

DIFFERENZIALI

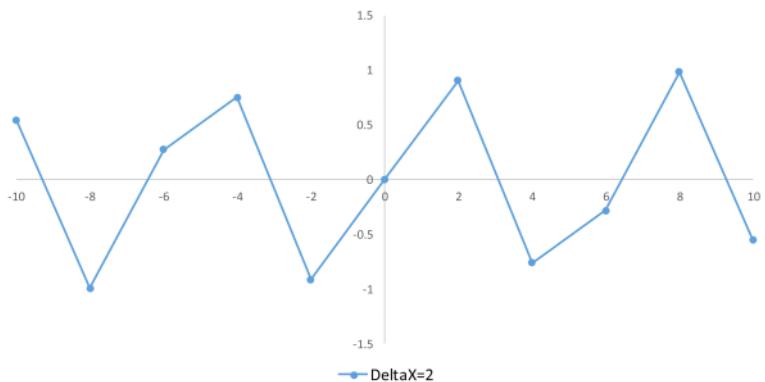
$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + O(\Delta x)$$

Differenziale df di una funzione $f(x)$

Utilità pratica

Grafico di funzione utilizzando spezzate di lunghezza limitata

$$f(x) = \sin(x)$$

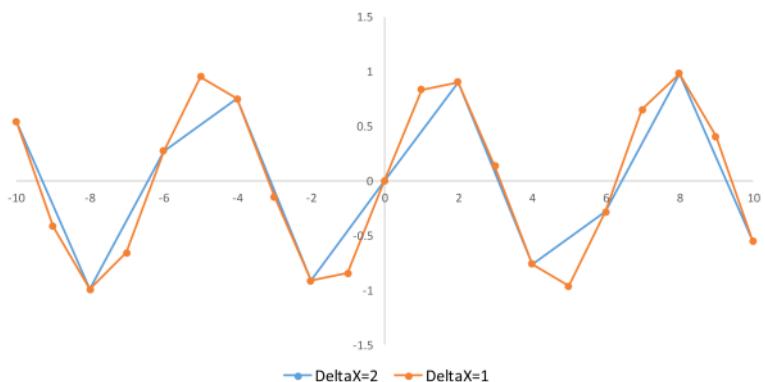


Differenziale df di una funzione $f(x)$

Utilità pratica

Grafico di funzione utilizzando spezzate di lunghezza limitata

$$f(x) = \sin(x)$$



Differenziale df di una funzione $f(x)$

Utilità pratica

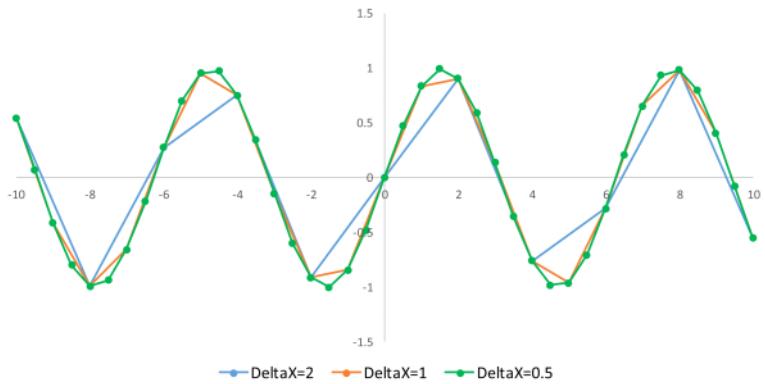
Grafico di funzione utilizzando spezzate di lunghezza limitata

$$f(x) = \sin(x)$$

APPROXIMAZIONE TRAMITE SPEZZATE

Grafico di funzione utilizzando spezzate di lunghezza limitata

$$f(x) = \sin(x)$$

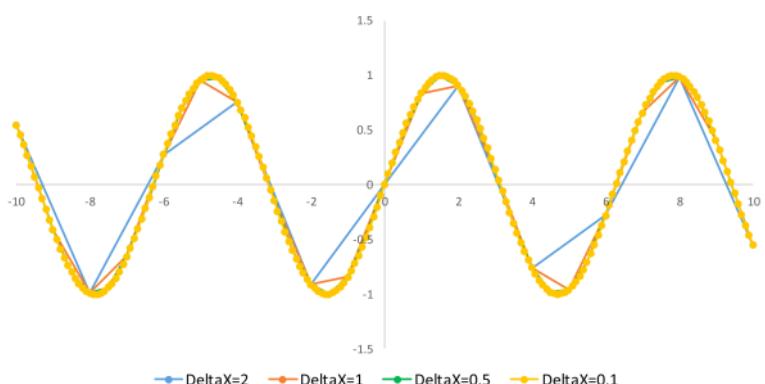


Differenziale df di una funzione $f(x)$

Utilità pratica

Grafico di funzione utilizzando spezzate di lunghezza limitata

$$f(x) = \sin(x)$$



Proprietà dei differenziali

Stesse proprietà delle derivate

$$d(f + g + \dots) = df + dg + \dots$$

$$d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg$$



$$df \cdot g = d(f \cdot g) - f \cdot dg$$

Utile nell'integrazione per parti



$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x + O(\Delta x)$$

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x + \boxed{O(\Delta x)}$$

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x + O(\Delta x)$$

SVILUPPO IN SERIE DI TAYLOR...

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} f^{(n)}(x_0) \cdot \frac{(\Delta x)^n}{n!}$$

$$f(x_0 + \Delta x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f^{(n)}(x_0) \cdot \frac{(\Delta x)^n}{n!}$$

SVILUPPO IN SERIE DI TAYLOR

$$x_0 = 0 \quad \Delta x := x$$



↓
diventa

SVILUPPO IN SERIE DI MAC LAURIN...

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} f^{(n)}(0) \cdot \frac{(x)^n}{n!}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f^{(n)}(0) \cdot \frac{(x)^n}{n!}$$

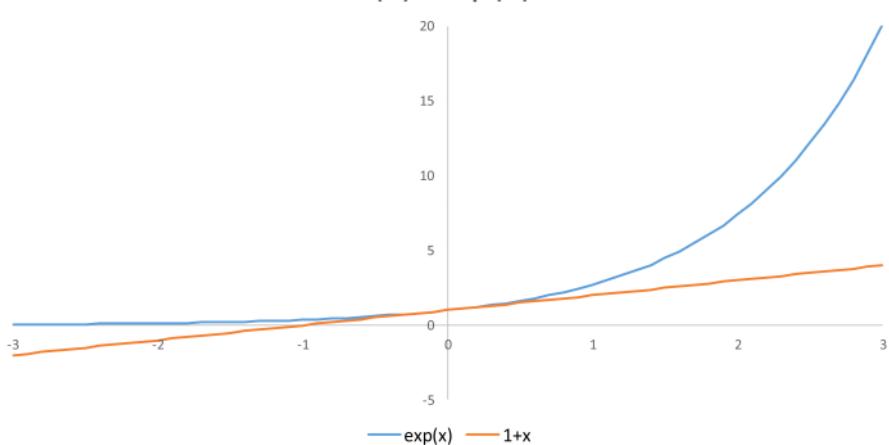
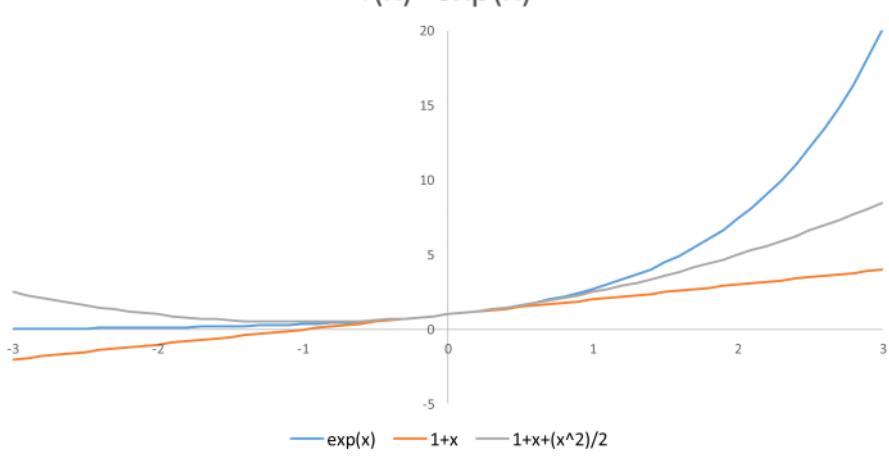
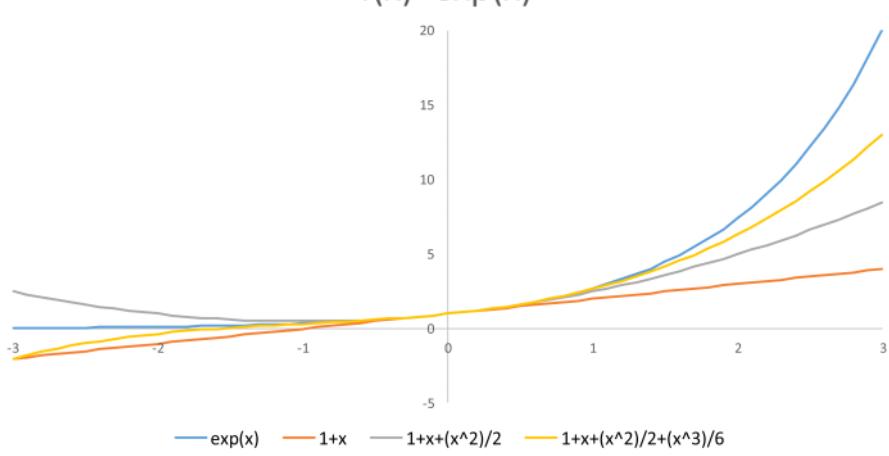
ESEMPI

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} f^{(n)}(0) \cdot \frac{(x)^n}{n!}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \dots$$

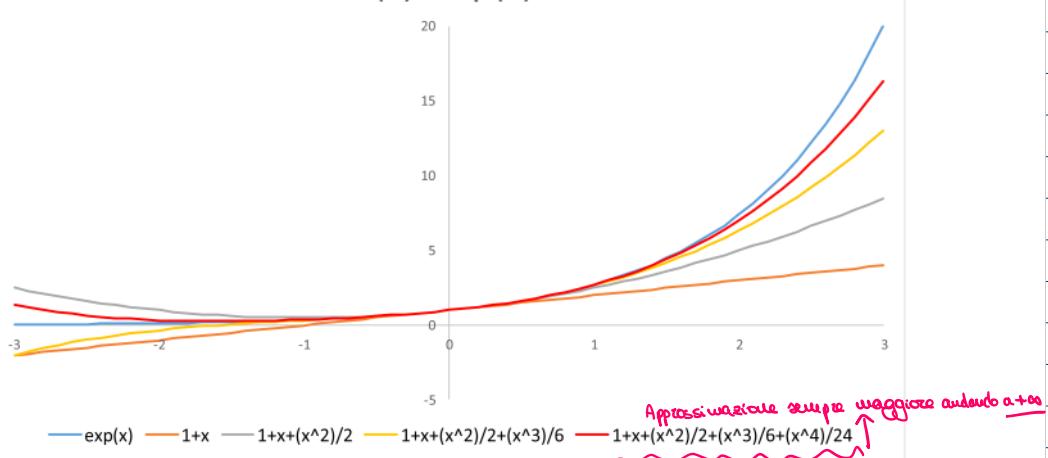
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots$$

crea una APPROXIMAZIONE
accettabile attraverso una somma di
funzioni elementari

ESEMPI $f(x)=\exp(x)$ **ESEMPI** $f(x)=\exp(x)$ **ESEMPI** $f(x)=\exp(x)$ 

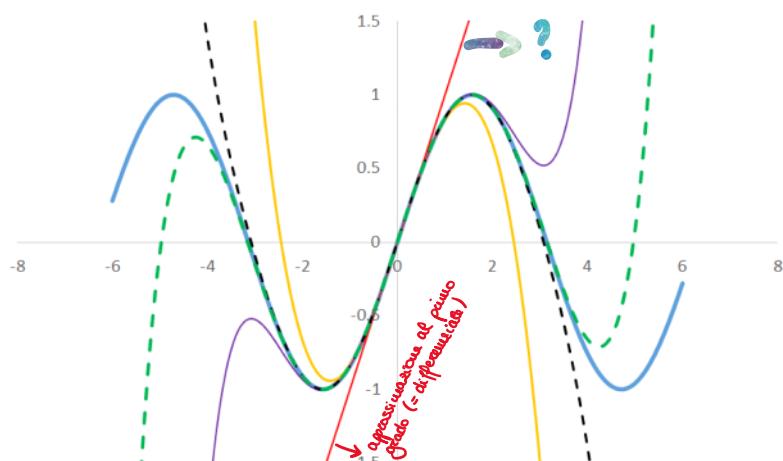
ESEMPI

$$f(x) = \exp(x)$$



ESEMPI

— senx — $x - (x^3)/3!$ - - $x - (x^3)/3! + (x^5)/5! - (x^7)/7!$	— x — $x - (x^3)/3! + (x^5)/5! - (x^7)/7! + (x^9)/9!$
---	---



ESEMPI

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} f^{(n)}(0) \cdot \frac{(x)^n}{n!}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \dots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots$$

ESEMPI

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} f^{(n)}(0) \cdot \frac{(x)^n}{n!}$$

$$\left. \begin{array}{l} e^x = 1 + x + O(x) \\ \hline \sin(x) = x + O(x) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{per } x \text{ che tende a 0} \\ x \rightarrow 0 \end{array}$$

asintoticamente simili

ESEMPI

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} f^{(n)}(0) \cdot \frac{(x)^n}{n!}$$

$$\left. \begin{array}{l} e^x \cong 1 + x \\ \hline \sin(x) \cong x \end{array} \right\} \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \end{array}$$

ESEMPI

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} f^{(n)}(0) \cdot \frac{(x)^n}{n!}$$

$$\left. \begin{array}{l} e^x \cong 1 + x \\ \hline \sin(x) \cong x \end{array} \right\} \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} e^x - 1 &\cong x \\ \frac{e^x - 1}{x} &\cong 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= 1 \end{aligned}$$

ESEMPI

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} f^{(n)}(0) \cdot \frac{(x)^n}{n!}$$

$$\left. \begin{array}{l} e^x \cong 1 + x \\ \sin(x) \cong x \end{array} \right\} \quad \boxed{x \rightarrow 0}$$

$$\frac{\sin(x)}{x} \cong 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Nella prossima
lezione:

- **Derivabilità e Differenziabilità in \mathbb{R}^n**



Derivabilità e differenziabilità

lunedì 12 ottobre 2020 12:48

ANALISI 1 →

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \boxed{\text{MONODIMENSIONALE}}$$

ANALISI 2 ↓

Derivata direzionale →

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t_0 h) - f(x_0)}{t_0 h} = \frac{df(x_0)}{dy} \quad \boxed{\text{MULTIDIMENSIONALE}}$$

VECTORE

vettore direzionale che mi definisce la direzione specifica

Il passaggio dall'Analisi 1 ad Analisi 2 parla di curva

in spazi multidimensionali. La tangente in un punto si trova su un piano che taglia la curva nello spazio

BASE CANONICA → vettori che hanno tutte le componenti pari a

0 tranne una sola che vale 1

SOMMA DI VETTORI

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Le **RAPPORTO INCREMENTALE** viene applicato per una sola variabile indipendente. Tutte le altre variabili indipendenti possono essere considerate come delle costanti

Derivata parziale → la derivata dipende da più variabili.

La derivata però fa riferimento ad una sola variabile e tratta le altre come costanti

$$\hookrightarrow \frac{df}{dx}$$

→ esistono le derivate lungo

Tutte le direzioni canoniche

Se la funzione è derivabile in ogni punto P appartenente ad un insieme A allora è derivabile in tutto A

CALCOLO:

te rapporto incrementale viene applicato per una sola variabile indipendente. Tutte le altre variabili indipendenti possono essere considerate come delle costanti.

$$\text{es. } z = f(x, y) = x \cdot y \cdot e^{xy} + x - y$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= z_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} - \cancel{\alpha(x \cdot y e^{xy} + x - y)} = \\ &= \cancel{\alpha(x \cdot y e^{xy})} + \cancel{\alpha(x)} - \cancel{\alpha(y)} = \cancel{\alpha(x)} e^{xy} + x \cdot y \cancel{\alpha(e^{xy})} + 1 = \\ &= y \cdot e^{xy} + x y^2 e^{xy} + 1 \end{aligned}$$

1 → costante

costante → costante

derivata



UNIVERSITÀ DELLA CALABRIA
DIPARTIMENTO DI
INGEGNERIA INFORMATICA,
MODELLISTICA, ELETTRONICA
E SISTEMISTICA
DIMES

$$grad f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$Y_{i+1} = Y_i + b_i K_2$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x = 1$$

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 2$$

$$x_1 = -11p, x_2 = -p, x_3 = 7p, p \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

$$F_2 = 2xyz - 1 = 1$$



$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$A+B+C=8$$

$$-3A-7B+2C=10,3$$

$$-18A+6B-3C=15$$

CORSO DI METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA INFORMATICA - MODULO 1

DERIVABILITÀ E DIFFERENZIABILITÀ NEL MULTIDIMENSIONALE

Davide Luciano De Luca

ANALISI 2 – MODULO 1

$f: A \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}^m$

DOMINIO E POSITIVITA'

LIMITI

Metodo delle rette, delle coordinate polari e sferiche, maggiorazione

OTTIMIZZAZIONE LIBERA

Derivabilità e Differenziabilità, Gradiente, Derivata direzionale, Matrice Hessiana, Matrice Jacobiana

INTEGRAZIONE

Integrali multipli
Integrali curvilinei (Calcolo di un Lavoro)
Integrali di Superficie (Calcolo di un Flusso)

OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA

Restrizioni, moltiplicatori di Lagrange

ANALISI 2 – MODULO 1

$f: A \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}^m$

DOMINIO E POSITIVITA'

LIMITI

Metodo delle rette, delle coordinate polari e sferiche, maggiorazione

FATTO

OTTIMIZZAZIONE LIBERA

Derivabilità e Differenziabilità, Gradiente, Derivata direzionale, Matrice Hessiana, Matrice Jacobiana

INTEGRAZIONE

Integrali multipli
Integrali curvilinei (Calcolo di un Lavoro)
Integrali di Superficie (Calcolo di un Flusso)

OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA

Restrizioni, moltiplicatori di Lagrange

ANALISI 2 – MODULO 1

$f: A \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}^m$

DOMINIO DI DEFINIZIONE

FATTO

LIMITI

Metodo delle coordinate polari e sferiche, maggiorazione

FATTO

INTEGRAZIONE

Integrali multipli

Integrali curvilinei (Calcolo di un Lavoro)

Integrali di Superficie (Calcolo di un Flusso)

OTTIMIZZAZIONE LIBERA

Derivabilità e Differenziabilità, Gradiente, Derivata direzionale, Matrice Hessiana, Matrice Jacobiana

OTTIMIZZAZIONE VINCOLATA

Restrizioni, moltiplicatori di Lagrange

ANALISI 1

$f: A \subseteq \mathbf{R} \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ANALISI 2

$f: A \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}^m$

$f: A \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}^m$

ne ripareremo dopo.....

ANALISI 1

$$f: A \subseteq \mathbf{R} \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

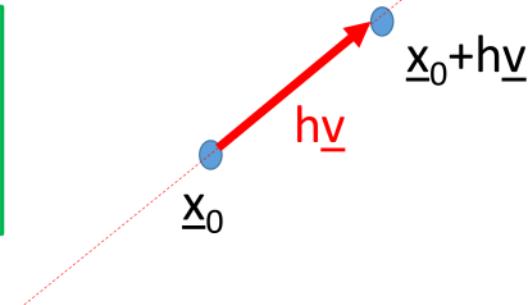
ANALISI 2

$$f: A \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x}_0 + h\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{h}$$

\underline{v} è un versore

$$|\underline{v}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} = 1$$



ANALISI 1

$$f: A \subseteq \mathbf{R} \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ANALISI 2

$$f: A \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x}_0 + h\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{h}$$

||

$$\frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial \underline{v}}$$

Il limite deve esistere e deve essere finito

ANALISI 1

$$f: A \subseteq \mathbf{R} \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ANALISI 2

$$f: A \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x}_0 + h\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{h}$$

||

Derivata
direzionale

$$\frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial \underline{v}}$$

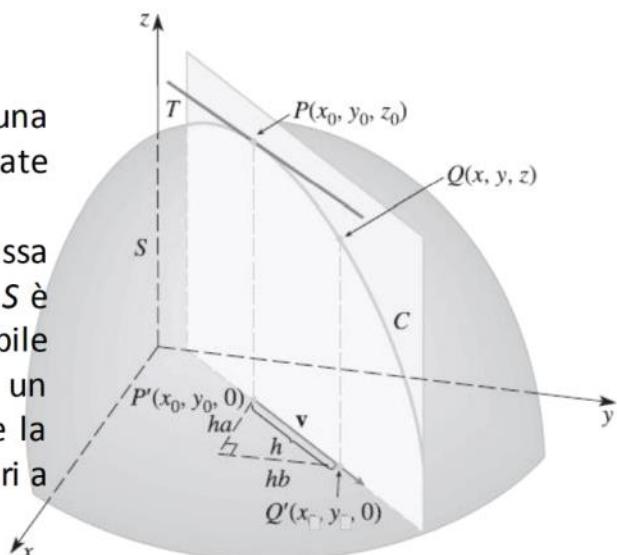
Il limite deve esistere e deve essere finito

SIGNIFICATO GEOMETRICO DERIVATA DIREZIONALE

Il grafico della funzione $z = f(x, y)$ rappresenta una superficie S in \mathbf{R}^3 , e il punto P di coordinate (x_0, y_0, z_0) con $z_0 = f(x_0, y_0)$ si trova su S .

Fissato \underline{v} , consideriamo il piano verticale che passa per P nella direzione di \underline{v} : la sua intersezione con S è una curva C , grafico della funzione di una variabile $z = g(h) = f(x_0 + ah, y_0 + bh)$ visualizzato in un piano verticale. La curva C passa per il punto P e la sua retta tangente in P ha coefficiente angolare pari a

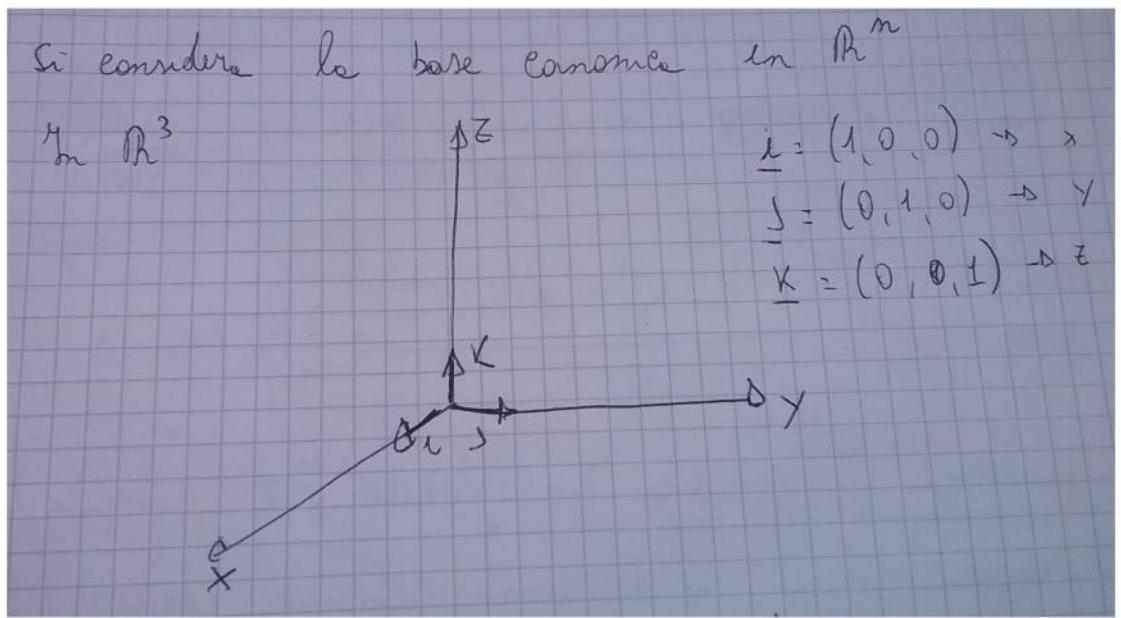
$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(x_0, y_0)$$



From: <http://www.robertocapone.com/wp-content/uploads/downloads/2014/05/Calcolo-differenziale-due-variabili.pdf>

DERIVATA PARZIALE

$f: A \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}$



DERIVATA PARZIALE

$f: A \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}$

In generale

$$\underline{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0) \rightarrow x_1$$
$$\underline{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0) \rightarrow x_2$$
$$\vdots$$
$$\underline{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1) \rightarrow x_n$$

DERIVATA PARZIALE

$$f: A \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}$$

lungo la direzione e_1 abbiamo

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t e_1) - f(x_0)}{t} =$$

$\rightarrow x_1$
 $\rightarrow x_2$
 \vdots
 $\rightarrow x_n$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, x_{20}, \dots, x_{n0}) - f(x_0, x_{20}, \dots, x_{n0})}{t}$$

Analogamente per le altre direzioni e_i .

DERIVATA PARZIALE

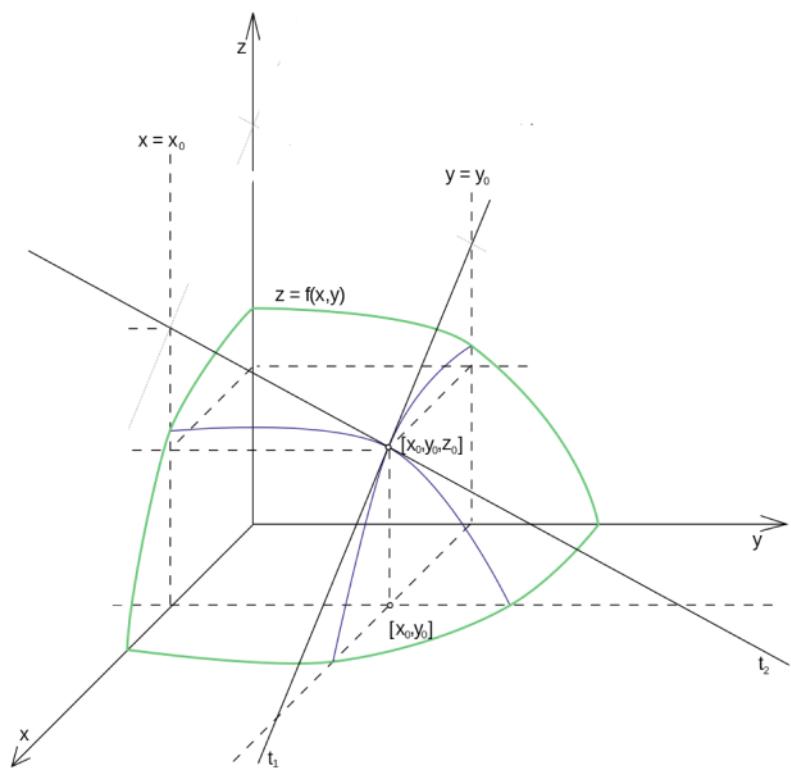
Il rapporto incrementale viene applicato per una sola variabile indipendente. Tutte le altre variabili indipendenti possono essere considerate come delle costanti

In \mathbf{R}^2

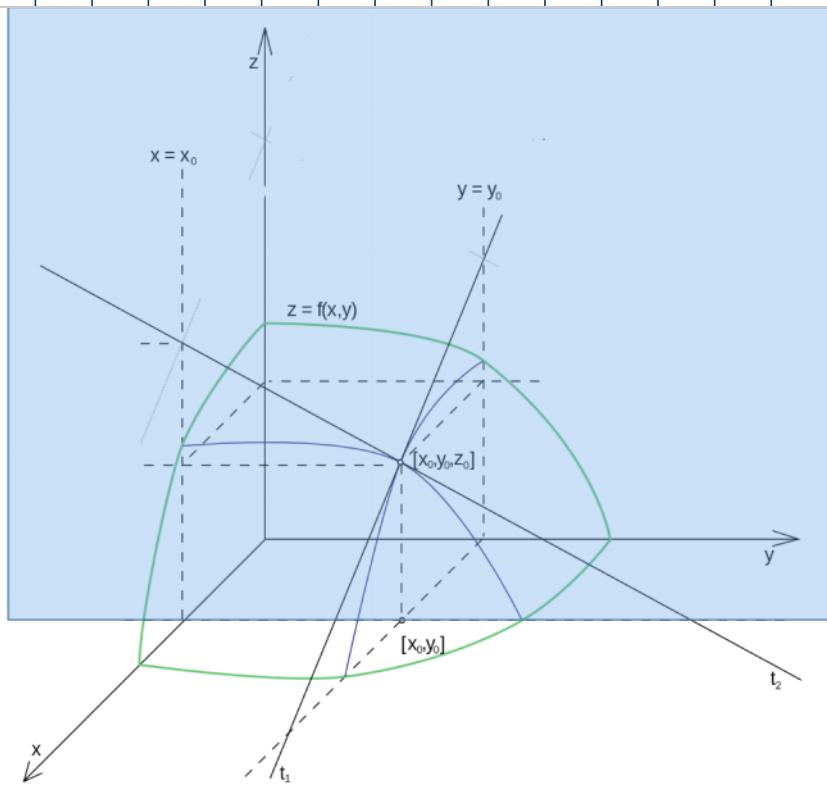
$$\lim_{t \rightarrow 0} \cancel{\frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

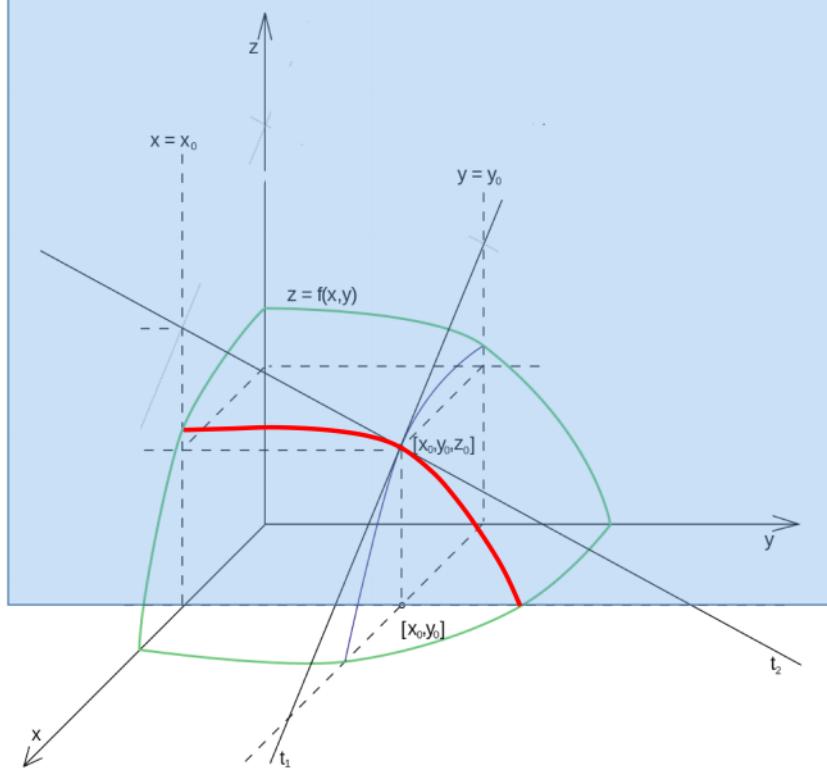
**SIGNIFICATO
GEOMETRICO
DERIVATA
PARZIALE**



**SIGNIFICATO
GEOMETRICO
DERIVATA
PARZIALE**



SIGNIFICATO GEOMETRICO DERIVATA PARZIALE

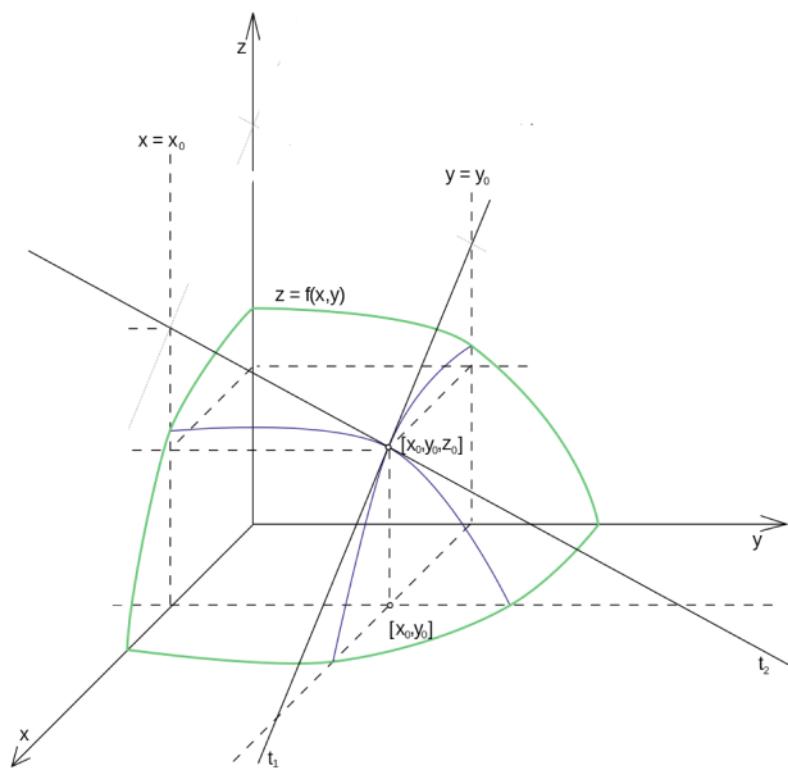


SIGNIFICATO GEOMETRICO DERIVATA PARZIALE

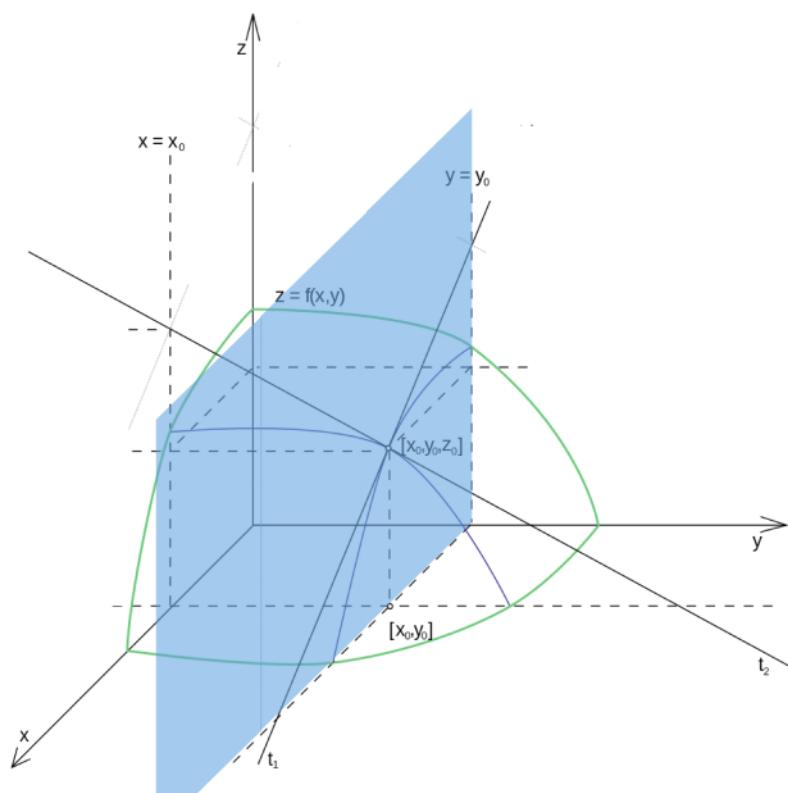
$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$$

Corrisponde alla pendenza della retta tangente al punto di coordinate (x_0, y_0, z_0) , considerando la sezione ottenuta intersecando la funzione $z=f(x,y)$ con il piano di equazione $x=x_0$.

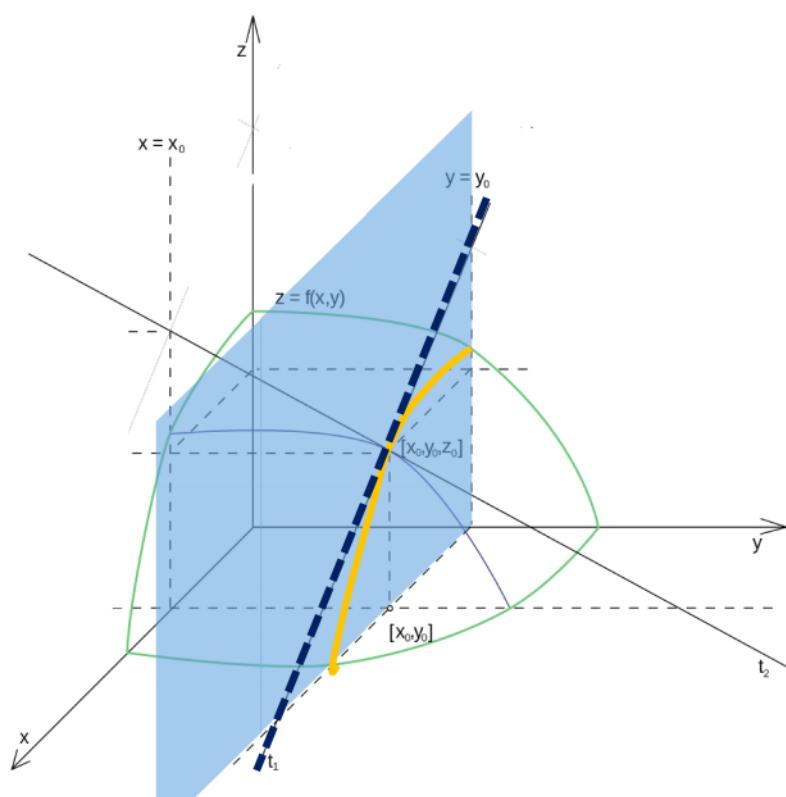
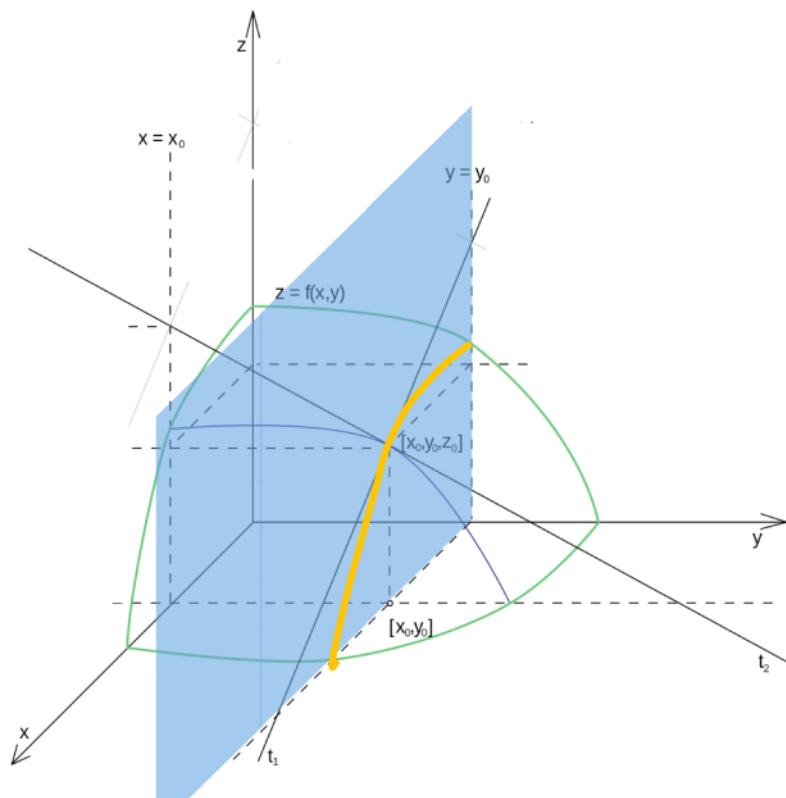
**SIGNIFICATO
GEOMETRICO
DERIVATA
PARZIALE**



**SIGNIFICATO
GEOMETRICO
DERIVATA
PARZIALE**



SIGNIFICATO GEOMETRICO DERIVATA PARZIALE



SIGNIFICATO GEOMETRICO DERIVATA PARZIALE

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$$

Corrisponde alla pendenza della retta tangente al punto di coordinate (x_0, y_0, z_0) , considerando la sezione ottenuta intersecando la funzione $z=f(x,y)$ con il piano di equazione $y=y_0$.

DERIVATA PARZIALE

Una funzione f si dice derivabile in un punto P se i limiti dei rapporti incrementali per ogni direzione canonica esistono finiti, ovvero se la funzione ammette **tutte** le derivate parziali nel punto P .

Se la funzione f è derivabile in ogni punto P appartenente ad un insieme A , allora f è derivabile in tutto A

COME CALCOLARE LE DERIVATA PARZIALI?

Il rapporto incrementale viene applicato per una sola variabile indipendente. Tutte le altre variabili indipendenti possono essere considerate come delle costanti

COME CALCOLARE LE DERIVATA PARZIALI?

Il rapporto incrementale viene applicato per una sola variabile indipendente. Tutte le altre variabili indipendenti possono essere considerate come delle costanti

$$z = f(x, y) = xye^{xy} + x - y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} =$$

COME CALCOLARE LE DERIVATA PARZIALI?

Il rapporto incrementale viene applicato per una sola variabile indipendente. Tutte le altre variabili indipendenti possono essere considerate come delle costanti

$$z = f(x, y) = xye^{xy} + x - y$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial(xye^{xy} + x - y)}{\partial x}$$

COME CALCOLARE LE DERIVATA PARZIALI?

Il rapporto incrementale viene applicato per una sola variabile indipendente. Tutte le altre variabili indipendenti possono essere considerate come delle costanti

$$z = f(x, y) = xye^{xy} + x - y$$

y è da considerare come una costante se si sta calcolando f_x

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial (xye^{xy} + x - y)}{\partial x}$$

COME CALCOLARE LE DERIVATA PARZIALI?

Il rapporto incrementale viene applicato per una sola variabile indipendente. Tutte le altre variabili indipendenti possono essere considerate come delle costanti

$$z = f(x, y) = xye^{xy} + x - y$$

y è da considerare come una costante se si sta calcolando f_x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial (xye^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial (x)}{\partial x} - \frac{\partial (y)}{\partial x}$$

COME CALCOLARE LE DERIVATA PARZIALI?

Il rapporto incrementale viene applicato per una sola variabile indipendente. Tutte le altre variabili indipendenti possono essere considerate come delle costanti

$$z = f(x, y) = xye^{xy} + x - y$$

y è da considerare come una costante se si sta calcolando f_x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial (xye^{xy})}{\partial x} + \boxed{1} - \boxed{0}$$

COME CALCOLARE LE DERIVATA PARZIALI?

Il rapporto incrementale viene applicato per una sola variabile indipendente. Tutte le altre variabili indipendenti possono essere considerate come delle costanti

$$z = f(x, y) = xye^{xy} + x - y$$

y è da considerare come una costante se si sta calcolando f_x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial (xy)}{\partial x} e^{xy} + xy \frac{\partial (e^{xy})}{\partial x} + 1$$

COME CALCOLARE LE DERIVATA PARZIALI?

Il rapporto incrementale viene applicato per una sola variabile indipendente. Tutte le altre variabili indipendenti possono essere considerate come delle costanti

$$z = f(x, y) = xye^{xy} + x - y$$

y è da considerare come una costante se si sta calcolando f_x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy} + xy^2e^{xy} + 1$$

COME CALCOLARE LE DERIVATA PARZIALI?

Il rapporto incrementale viene applicato per una sola variabile indipendente. Tutte le altre variabili indipendenti possono essere considerate come delle costanti

$$z = f(x, y) = xye^{xy} + x - y$$

x è da considerare come una costante se si sta calcolando f_y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} + x^2ye^{xy} - 1$$



COME CALCOLARE LE DERIVATA PARZIALI?

Quando bisogna calcolare necessariamente il limite del rapporto incrementale?

Quando, invece, posso applicare la «tabella» delle derivate assieme alle proprietà (somma, prodotto, divisione, funzioni composte)?



COME CALCOLARE LE DERIVATA PARZIALI?

Quando bisogna calcolare necessariamente il limite del rapporto incrementale?



$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3 - y^3}{x^2 + 3y^2}, & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{if } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Dunque sia puramente i due tratti è sbagliato



Si deve applicare il limite del rapporto incrementale



$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = ?$$



$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



BACK TO THE ANALISI 1

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

BACK TO THE ANALISI 1

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2 - \frac{1}{h} = \dots$$

BACK TO THE ANALISI 1

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Funzione non derivabile in $x=0$
Poiché le buona è infinito



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2 - \frac{1}{h} = \dots$$

INOLTRE! Poiché continua \Rightarrow derivabile e non continua \Rightarrow non deriva
visto che $f'(0)$ non è continua, allora non è derivabile

COME CALCOLARE LE DERIVATA PARZIALI?

Quando, invece, posso applicare la «tabella» delle derivate assieme alle proprietà (somma, prodotto, divisione, funzioni composte)?



$$z = f(x, y) = xye^{xy} + x - y$$

DERIVATA PARZIALE

Se dimostra che:

Esistono tutte le derivate parziali

$$\frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial e_1}$$

derivate direzionali
calcolare le direzioni
specifiche (a base vettoriale)

$$\frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial e_2}$$

modalità vettoriale

•

•

•

$$\frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial e_n}$$

DERIVATA PARZIALE

Esistono tutte le derivate parziali

$$\frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_2}$$

•

•

•

$$\frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_n}$$

DERIVATA PARZIALE

Esistono tutte le derivate parziali

GRADIENTE

$$\frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_1}$$

VETTORE DELLE
DERIVATE PARZIALI
se derivate esiste finite. Se
una è infinita o una esiste
altrora non esiste il gradiente

$$\frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_2}$$

•

•

•

$$\frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_n}$$

$$\nabla f(\underline{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

DERIVATA PARZIALE

Esistono tutte le derivate parziali

GRADIENTE

$$\frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_1}$$

RAPP. DI UN
VETTORE
riga
colonne

$$\frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_2}$$

•

•

•

$$\frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_n}$$



gradf(\underline{x}_0)

$$\nabla f(\underline{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

DERIVATA PARZIALE

GRADIENTE

In un punto

$$\nabla f(\underline{x}_0) = \left(\frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\underline{x}_0)}{\partial x_n} \right)$$

Generica

$$\nabla f(\underline{x}) = \left(\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_n} \right)$$

**TO BE
CONTINUED....**

▽

Operatore NABLA

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

$$\nabla o \underline{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) o (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

$$\nabla o \underline{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}$$

DIVERGENZA

div(v) **TO BE
CONTINUED....**

▽

Operatore NABLA

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

$$\nabla o \nabla f(\underline{x}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) o \left(\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_n} \right)$$

$$\nabla o \nabla f = \nabla^2 f$$

LAPLACIANO

Somma di tutte le derivate parziali

**TO BE
CONTINUED....**

▽

Operatore NABLA

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

Calcolo le determinante della matrice

$$\nabla \times \underline{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

ROTORE

rot(F)

**TO BE
CONTINUED....**



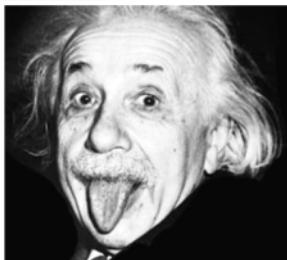
Operatore NABLA

GRADIENTE

DIVERGENZA

ROTORE

LAPLACIANO



Operatore NABLA

GRADIENTE

OTTIMIZZAZIONE

DIVERGENZA

FLUSSO DI UN CAMPO DI FORZE DA
ATTRaverso UNA SUPERFICIE
CHIUSA

ROTORE

CAMPi CONSERVATiVi

LAPLACIANO

EQUAZIONi DIFFERENZIALi



Operatore NABLA

GRADIENTE

OTTIMIZZAZIONE

DIVERGENZA

FLUSSO DI UN CAMPO DI FORZE DA
ATTRaverso UNA SUPERFICIE
CHIUSA

ROTORE

NELLE PROSSIME PUNTATE.....

CAMPi CONSERVATiVi

LAPLACIANO

EQUAZIONi DIFFERENZIALi



$f(x)$ derivabile in x_0



$f(x)$ continua in x_0



$f(x)$ non
continua in x_0



$f(x)$ non
derivabile in x_0



$f(x)$ derivabile in x

$f(x)$ continua in x_0



E IN ANALISI 2 ?

$f(x)$ non derivabile in x_0

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \forall (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0 \quad ?????? \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \cos \theta \sin \theta}{\rho^2} = \dots$$

$f(x, y)$ non continua in $(0, 0)$

La funzione non è continua
In questo i risultati da non sono diversi

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \forall (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h^3} = 0$$

perché non si calcola?

$f(x, y)$ non continua in $(0, 0)$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \forall (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h^3} = 0$$

$f(x, y)$ non continua in $(0, 0)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h^3} = 0 \quad \frac{0}{m} \quad (m \neq 0)$$



$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \forall (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h^3} = 0$$

f(x,y) non continua in (0,0)



f(x,y) è derivabile in (0,0)

ANALISI 1

f(x) derivabile in x_0



f(x) continua in x_0



f(x) non continua in x_0



f(x) non derivabile in x_0

ANALISI 2

f(x) derivabile in x_0



f(x) continua in x_0

f(x) non continua in x_0



f(x) non derivabile in x_0



ANALISI 2

f(x) derivabile in x_0



f(x) continua in x_0



Se si è di differenziabilità
non dà informazioni

Non esistono legami

Dice quando una funzione
è sicuramente continua
o grande derivabile

$$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x_0 \in (a, b)$$

$f(x)$ DIFFERENZIABILE IN x_0 SE ESISTE

UN'APPLICAZIONE LINEARE $L_{x_0}(\cdot)$

TALE CHE

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)}{h} = 0$$

Tutte le potenze sono del primo grado
dipende linearmente dal punto x_0
sto considerando

$$L_{x_0}(\cdot) = a \cdot h$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - a \cdot h}{h} = 0$$

SIGNIFICATO GEOMETRICO
DELLA DIFFERENZA
IN AURELIO 1

Approssimare,
nel intorno di un
punto, della tangente
nel punto stesso

F

simile
ad un rapporto
incrementale

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)}{h} = 0$$

ANALISI 1

$$L_{x_0}(\cdot) = a \cdot h$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - a \cdot h}{h} = 0$$

$$\uparrow \quad \Downarrow \quad = f'(x_0)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = a$$

$$a = f'(x_0)$$

$$L_{x_0}(h) = f'(x_0) \cdot h$$

$$df(x_0) = f'(x_0) dx$$

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

ANALISI 2

Poiché il numeratore è somma di
scalari, anche il denominatore sarà
uno scalare

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - L_{x_0}(h)}{\|h\|} = 0$$

$$L_{x_0}(h) = L_1 h_1 + L_2 h_2 + \dots + L_m h_m \quad L_i = L_i(x_0)$$

Espresso dal
vettore posizione

$$h = (h_1, h_2, \dots, h_m)$$

se $h \rightarrow 0$ allora $t \rightarrow 0$

$$h = t \underline{v} \quad * \text{ proprietà} \quad |\underline{v}| = 1$$

$$h \rightarrow 0 \Leftrightarrow t \rightarrow 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t\underline{v}) - f(x_0) - L_{x_0}(t\underline{v})}{|t\underline{v}|} = 0$$

$L_{x_0}(\cdot)$ APPLICAZIONE LINEARE

$$L_{x_0}(t\underline{v}) = t \cdot L_{x_0}(\underline{v}) \quad * \text{ proprietà}$$

$$|t \cdot \underline{v}| = |t| \cdot |\underline{v}| = |t|$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t\underline{v}) - f(x_0) - L_{x_0}(\underline{v})}{|t|} = 0$$

Se una funzione è differenziabile in un punto allora esiste sicuramente la derivata direzionale in quella stessa direzione

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t\underline{v}) - f(x_0) - L_{x_0}(\underline{v})}{t} = 0$$

Il punto del rapporto incrementale esiste sempre

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t\underline{v}) - f(x_0)}{t} = L_{x_0}(\underline{v})$$

valore che l'applicazione prescece assunse in quella direzione

ANALISI 1

$$f: A \subseteq \mathbf{R} \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ANALISI 2

$$f: A \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t\underline{v}) - f(x_0)}{t}$$

\underline{v} è un versore

$$|\underline{v}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} = 1$$

$$L_{x_0}(\underline{v}) = \frac{\partial f(x_0)}{\partial \underline{v}} = L_1 v_1 + L_2 v_2 + \dots + L_m v_m$$

$L_i = L_i(x_0)$

f DIFFERENZIABILE IN $x_0 \Rightarrow \forall \underline{v} \exists \frac{\partial f(x_0)}{\partial \underline{v}}$

\Downarrow

$\exists \nabla f(x_0)$

f DIFFERENZIABILE IN $x_0 \Rightarrow f$ DERIVABILE IN x_0

Se la derivata esiste per tutte le direzioni allora esiste anche per gli assi e la derivata cartesiana
dunque è differentiabile

Se è differentiabile esiste anche la gradiente ed è anche derivabile

$$\underline{v} = \underline{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)^*$$

prima direzione della base cartesiana

$$L_{x_0}(\underline{v}) = \frac{\partial f(x_0)}{\partial \underline{e}_1} = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1} = L_1$$

Primo coefficiente della applicazione lineare

Derivata parziale rispetto alla prima componente

$$\underline{v} = \underline{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$L_{x_0}(\underline{v}) = \frac{\partial f(x_0)}{\partial \underline{e}_2} = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_2} = L_2$$

$$L_i = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}$$

$$L_{x_0}(\underline{v}) = \frac{\partial f(x_0)}{\partial \underline{v}} = L_1 v_1 + L_2 v_2 + \dots + L_m v_m$$

COMPONENTI DEL VETTORE v

$$\underline{v} = \underline{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$$

$$L_{\underline{x}_0}(\underline{v}) = \frac{\partial f(x_0)}{\partial \underline{e}_1} = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1} = L_1$$

$$\underline{v} = \underline{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$L_{\underline{x}_0}(\underline{v}) = \frac{\partial f(x_0)}{\partial \underline{e}_2} = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_2} = L_2$$

$$L_i = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}$$

$$L_i = L_i(\underline{x}_0)$$

Ip. \rightarrow funzione differenziabile
Se voglio calcolare una derivata
direzionale, scrivo la derivata
parziale, posso scrivere come
prodotto scalare fra gradiente e
vettore di direzione

$$L_{\underline{x}_0}(\underline{v}) = \frac{\partial f(x_0)}{\partial \underline{v}} = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_2} v_2 + \dots + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n} v_n \\ = \nabla f(x_0) \circ \underline{v}$$

$$L_{\underline{x}_0}(\underline{h}) = \nabla f(x_0) \circ \underline{h} \quad \underline{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n) \\ \underline{h} = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$$

$$L_{\underline{x}_0}(\underline{h}) = df(x_0) = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_2} \cdot dx_2 + \dots + \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n} \cdot dx_n$$

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$

$z = f(x, y)$ FUNZIONE DIFFERENZIABILE per ipotesi

derivata parziale rispetto a x derivata parziale rispetto a y

$$df(x_0, y_0) = \left[\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \right] dx + \left[\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right] dy$$

$$dz = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} dy$$

VALORE DELLA QUOTTA

$$z_0 = f(x_0, y_0)$$

$$dz = z - z_0 \quad dx = x - x_0 \quad dy = y - y_0$$

Non ho considerato il termine della
radice (da fare)

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} dy$$

$$dz = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} dy$$

$$z_0 = f(x_0, y_0)$$

$$dz = z - z_0 \quad dx = x - x_0 \quad dy = y - y_0$$

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot (y - y_0)$$

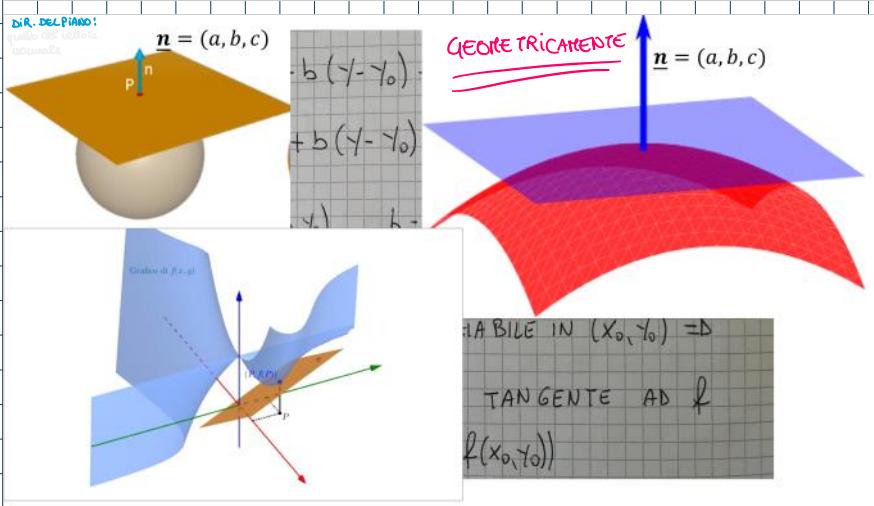
$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

$$a = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \quad b = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \quad c = -1$$

Ipotesi: $f(x, y)$ DIFFERENZIABILE IN $(x_0, y_0) \Rightarrow$
 \Rightarrow ESISTE IL PIANO TANGENTE AD f
 NEL PUNTO $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$



ESEMPIO

Definita in tutto il suo dominio \mathbb{R}^2

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = x^2 y^3 \quad \text{DIFFERENZIABILE PER IPOTESI}$$

CALCOLARE L'ESPRESSIONE DEL DIFFERENZIALE
 $df(x, y)$ NEL PUNTO $P_0 \equiv (1, 2)$

DETERMINARE L'EQUAZIONE DEL PIANO π
 TANGENTE NEL PUNTO P_0

$$df(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy =$$

$$= \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) \cdot (dx, dy)$$

prodotto vettoriale

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2x^2 y^3 \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 3x^2 y^2$$

$$df(x, y) = 2x^2 y^3 dx + 3x^2 y^2 dy$$

Espressione generica del differenziale

$$df = \nabla f \cdot h = \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x^2 y^3 \stackrel{P(1,2)}{\Rightarrow} = 16$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 y^2 \stackrel{P(1,2)}{\Rightarrow} = 12$$

Generica: $df = 2x^2 y^3 dx + 3x^2 y^2 dy$

Nel punto: $df = 16 dx + 12 dy$

Piano tangente:

$$z_0 = f(1, 2) = 8$$

$$z - z_0 = \nabla f \cdot h = \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0)$$

$$z = 16(x - 1) + 12(y - 2) + 8$$

$$z = 16x - 16 + 12y - 24 + 8$$

$$z = 16x + 12y - 32$$

$$df(x,y) = 2x^3 dx + 3x^2 y^2 dy$$

$$df(1,2) = 16 dx + 12 dy$$

$$\nabla f(1,2) = (16, 12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(1,2)}{\partial \underline{v}} &= \nabla f(1,2) \circ (\underline{v}_1, \underline{v}_2) = \\ &= (16, 12) \circ (\underline{v}_1, \underline{v}_2) = 16\underline{v}_1 + 12\underline{v}_2 \end{aligned}$$

$$\text{AD ESEMPIO : } \underline{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\nabla f(1,2) = (16, 12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(1,2)}{\partial \underline{v}} &= \nabla f(1,2) \circ (\underline{v}_1, \underline{v}_2) = \\ &= (16, 12) \circ (\underline{v}_1, \underline{v}_2) = 16\underline{v}_1 + 12\underline{v}_2 \end{aligned}$$

$$\text{AD ESEMPIO : } \underline{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\frac{\partial f(1,2)}{\partial \underline{v}} = \frac{16 \cdot \sqrt{2}}{2} + \frac{12 \cdot \sqrt{2}}{2} = 14\sqrt{2}$$

$$\pi: a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

$$x_0 = 1 \quad y_0 = 2 \quad z_0 = f(1,2) = 8$$

$$a = \frac{\partial f(1,2)}{\partial x} = 16 \quad b = \frac{\partial f(1,2)}{\partial y} = 12 \quad c = -1$$

$$\pi: 16(x-1) + 12(y-2) - (z-8) = 0$$

$$16x - 16 + 12y - 24 - z + 8 = 0$$

$$16x + 12y - z - 32 = 0$$

FORMA ESPlicita

$$z = 16x + 12y - 32$$

TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE

(CONDIZIONI SUFFICIENTI PER LA DIFFERENZIABILITÀ)

Hip: $f: A \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$

La funzione deve essere ALMENO di ordine C_1

Se si può applicare il teorema allora non si deve applicare la definizione

$$x_0 \in A$$

$$f \in C^1(x_0) \quad f(x) \text{ CONTINUA IN } x_0$$

CONTINUA ALMENO FINO ALLA DERIVATA DI ORDINE $\underline{1}$ (ORDINE)

tutte le derivate parziali prima

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \text{ CONTINUA IN } x_0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$\Rightarrow f(x)$ È DIFFERENZIABILE IN x_0

$f \in C^1(A) \Rightarrow f$ DIFFERENZIABILE IN A

TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE
(CONDIZIONI SUFFICIENTI PER LA DIFFERENZIABILITÀ)

$$f(x, y) = x^2 - 3y + 2xy$$

$$f(x, y) = e^{x^2-1} + y \cdot x$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1} + x_2 x_3 - x_1^2$$

$f \notin C^1(A) \Rightarrow f$ NON DIFFERENZIABILE IN A

f DIFFERENZIABILE $\Rightarrow f$ CONTINUA?

DIM.

1) f definita in x_0 2) Esiste il limite

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow x_0} f(\underline{x}) - f(x_0) = 0 \quad \text{Ponendo } \underline{x} = x_0 + h$$

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} f(x_0 + h) - f(x_0) = 0$$

Se un vettore $\rightarrow 0$, anche il suo modulo $\rightarrow 0$

tesi

$$f(x_0 + h) - f(x_0)$$

scrittura è come la classe precedente

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \nabla f(x_0) \circ \underline{h} + \nabla f(x_0) \circ \underline{h}$$

$$\frac{|h| \cdot [f(x_0 + h) - f(x_0) - \nabla f(x_0) \circ \underline{h} + \nabla f(x_0) \circ \underline{h}]}{|h|}$$

$$f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) = \nabla f(\underline{x}_0) \circ \underline{h} + \nabla f(\underline{x}_0) \circ \underline{h}$$

$$|\underline{h}| \cdot \left[\frac{(f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) - \nabla f(\underline{x}_0) \circ \underline{h})}{|\underline{h}|} + \frac{\nabla f(\underline{x}_0) \circ \underline{h}}{|\underline{h}|} \right]$$

differenziabilità (con per ipotesi è zero)

$$\lim_{|\underline{h}| \rightarrow 0} |\underline{h}| \cdot \frac{\nabla f(\underline{x}_0) \circ \underline{h}}{|\underline{h}|} = \lim_{\underline{h} \rightarrow 0} \nabla f(\underline{x}_0) \circ \underline{h} = 0$$

Hyp: f DIFFERENZIABILE IN \underline{x}_0

\Rightarrow ESISTE $\nabla f(\underline{x}_0)$

$$f(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) - \nabla f(\underline{x}_0) \circ \underline{h} + \nabla f(\underline{x}_0) \circ \underline{h}$$

Una funzione può essere
definita in un punto ma
non essere continua

$$|\underline{h}| \cdot \left[0 + \frac{\nabla f(\underline{x}_0) \circ \underline{h}}{|\underline{h}|} \right]$$

$$\lim_{|\underline{h}| \rightarrow 0} |\underline{h}| \cdot \frac{\nabla f(\underline{x}_0) \circ \underline{h}}{|\underline{h}|} = \lim_{\underline{h} \rightarrow 0} \nabla f(\underline{x}_0) \circ \underline{h} = 0$$

$\sim \underline{h} \rightarrow 0$

Hyp: f DIFFERENZIABILE IN \underline{x}_0

\Rightarrow ESISTE $\nabla f(\underline{x}_0)$

Differenziabilità implica continuità

f DIFFERENZIABILE \Rightarrow $\begin{cases} f \text{ DERIVABILE IN OGNI DIREZIONE} \\ f \text{ CONTINUA} \\ \text{ESISTE (IPER) PIANO TANGENTE} \end{cases}$

f NON CONTINUA IN $\underline{x}_0 \Rightarrow f$ NON DIFFERENZIABILE IN \underline{x}_0

f NON DERIVABILE IN $\underline{x}_0 \Rightarrow f$ NON DIFFERENZIABILE IN \underline{x}_0

f CONTINUA $\neq f$ DIFFERENZIABILE

ESEMPIO: $f(x, y) = |x|$ in $(0,0)$ non è derivabile e
dunque non è differenziabile

$$\nexists \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} \Rightarrow \nexists \nabla f(0,0) = 0$$

f NON DIFFERENZIABILE
IN $(0,0)$

f DERIVABILE $\Rightarrow f$ DIFFERENZIABILE

ESEMPIO

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \forall (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

DA UN ESERCIZIO PRECEDENTE, IN $(0,0)$.

SONO STATE CALCOLATE $f_x=0$ E $f_y=0$

DUNQUE $f(x,y)$ È DERIVABILE IN $(0,0)$

DUNQUE $f(x,y)$ È DERIVABILE IN $(0,0)$

STUDIO DELLA DIFFERENZIABILITÀ IN $(0,0)$

$$\lim_{\substack{h_1 \rightarrow 0 \\ h_2 \rightarrow 0}} \frac{f(0+h_1, 0+h_2) - f(0,0) - h_1 f_x(0,0) - h_2 f_y(0,0)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

$$\underline{h} = (h_1, h_2) \quad |\underline{h}| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$$

$$\underline{h} \rightarrow 0 \quad \Leftrightarrow \quad h_1 \rightarrow 0 \quad \underset{h_2 \rightarrow 0}{\Leftrightarrow} \quad |\underline{h}| \rightarrow 0$$

$$\lim_{\substack{h_1 \rightarrow 0 \\ h_2 \rightarrow 0}} \frac{\frac{h_1 h_2}{h_1^2 + h_2^2} - 0 - h_1 \cdot 0 - h_2 \cdot 0}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{h_1 \rightarrow 0 \\ h_2 \rightarrow 0}} \frac{h_1 \cdot h_2}{(h_1^2 + h_2^2) \sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

Per essere differenziabile
dovrebbe essere 0

$$\text{SE } h_1 = h_2 \quad \Rightarrow \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{h_1^2}{2h_1 \cdot |\underline{h}_1| \cdot \sqrt{2}} = \infty$$

IL LIMITE NON VALE 0 $\Rightarrow f$ NON DIFFERENZIABILE
IN $(0,0)$



ANALISI 2

DIFERENZIABILITÀ
↓
CONTINUITÀ

$$f: A \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}$$

- Se la funzione ammette almeno tutte le derivate parziali, allora la funzione è derivabile.
- Se la funzione è differenziabile, si può parlare approssimazione della curva al punto tangente passante per il punto (Teorema Tangenziale).

f(x) differenziabile in x₀ →

- Se f(x) (definita a tratti o monofunzionale) è differenziabile in un punto (più punti) allora si possono calcolare le derivate direzionali.
- Se esistono le derivate di tutte le direzioni, esistono anche quelle per le basi canoniche.

Tutte le derivate direzionali in x₀

f(x) derivabile in x₀
gradiente in x₀

Piano tangente in x₀

f(x) continua in x₀

ANALISI 2

$$f: A \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}$$

f(x) ∈ C¹(A) → **f(x) differenziabile in A**

TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE

Se il campo scalare (funzione) è di classe almeno C₁ (definiva fino al primo ordine di derivate) allora è differenziabile in tutti i punti di classe C₁.

$$f: A \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}$$

STEP da seguire negli esercizi

$f(\underline{x})$ continua in \underline{x}_0

SI

$f(\underline{x})$ derivabile in \underline{x}_0

SI

Calcolo del limite per $f(\underline{x})$ differenziabile in \underline{x}_0

$=0$

$f(\underline{x})$ differenziabile in \underline{x}_0

$f(\underline{x})$ definita a tratti

Poiché $T_{\text{cau}} \Rightarrow T_{\text{dif}}$

NO

$f(\underline{x})$ non differenziabile in \underline{x}_0

Poiché $T_{\text{der}} \Rightarrow T_{\text{dif}}$

NO

$f(\underline{x})$ non differenziabile in \underline{x}_0

Poiché $T(=0) \Rightarrow T_{\text{dif}}$

$\neq 0$

$f(\underline{x})$ non differenziabile in \underline{x}_0

Continuità

Derivabilità

Differenziabilità

ESEMPIO

Continuità ↓

Una cosa da fare è ridurre
la funzione ad una assimileabile
ad un limite che volevole di ANALISI 1
per calcolare il limite che serve
per la continuità

CONTINUITÀ IN $(0,0)$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} - 1$$

Continuità

Derivabilità

Differenziabilità

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 1 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

$$t = x^2 + y^2$$

$$\begin{aligned} t \rightarrow 0 &\Leftrightarrow x^2 + y^2 \rightarrow 0 \\ &\Leftrightarrow x \rightarrow 0 \\ &\Leftrightarrow y \rightarrow 0 \end{aligned}$$

CONTINUITÀ IN $(0,0)$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1 \quad \left\{ \text{Poiché la funzione esiste in } (0,0) \text{ ed esiste il limite per } f(x,y) \rightarrow (0,0) \text{ e questi coincidono allora è continua}$$

$f(x,y)$ CONTINUA IN $(0,0)$

Continuità

Derivabilità

Differenziabilità

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 1 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

DERIVABILITÀ IN $(0,0)$

Applico il limite del rapporto incrementale

$$\frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{h^2}-1}{h^2} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{h^2}-1-h^2}{h^3} = \boxed{0}$$

$$\stackrel{\text{de l'Hop}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h e^{h^2} - 2h}{3h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2e^{h^2} - 2}{3h} = \boxed{0}$$

*

Tutti i limiti volevoli possono essere calcolati con de l'Hopital

Continuità

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Derivabilità

definizione

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 e^{h^2}}{6} = 0$$

$|k| \rightarrow 0 \Rightarrow k \rightarrow 0 \Rightarrow$ le sue componenti devono tendere contemporaneamente a 0 scalare

$$\lim_{\gamma} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{|k|} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k}$$

$$= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{k^2}-1}{k^2} - 1}{k} = \dots = 0$$

$f(x,y)$ DERIVABILE IN $(0,0)$

Differenziabilità

Continuità

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

devo considerare che devo tendere CONTEMPORANEAMENTE

Derivabilità

STUDIO DELLA DIFFERENZIABILITÀ

$$\lim_{\sqrt{h^2+k^2} \rightarrow 0} \frac{f(h,k) - f(0,0) - f_x(0,0) \cdot h - f_y(0,0) \cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{\sqrt{h^2+k^2} \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{h^2+k^2}-1}{h^2+k^2} - 1}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$L = \text{gradienti} \cdot \text{incrementi infinitesimi di } h \text{ e } k$

$h = r \cos \varphi$ $k = r \sin \varphi$

Continuità

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 1 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

Derivabilità

STUDIO DELLA DIFFERENZIABILITÀ

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{\rho^2}-1}{\rho^2} - 1}{\rho} = \dots = 0$$

$f(x,y)$ DIFFERENZIABILE IN $(0,0)$

Differenziabilità

Continuità

$$f(x,y) = \begin{cases} y^3 x + y^2 & x \geq 0 \\ \frac{e^{xy}-1}{x} & x < 0 \end{cases}$$

La diversità ora non è la un punto ma in due zone diverse

Derivabilità

CONTINUITÀ IN $(0,y)$

$$f(0,y) = y^2 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} y^3 x + y^2 = y^2$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{xy}-1}{x} = \\ & = \lim_{x \rightarrow 0^-} y \cdot \frac{\frac{e^{xy}-1}{xy} - 1}{\frac{1}{y}} = y \end{aligned}$$

Differenziabilità

Continuità

$$f(x,y) = \begin{cases} y^3 x + y^2 & x \geq 0 \\ \frac{e^{xy} - 1}{x} & x < 0 \end{cases}$$

Derivabilità

Differenziabilità

CONTINUITÀ IN $(0,y)$

$$\begin{aligned} f(0,y) &= y^2 & \lim_{x \rightarrow 0^+} y^3 x + y^2 &= y^2 \\ & & \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{xy} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} y \cdot \frac{e^{xy} - 1}{xy} = y \end{aligned}$$

$f(x,y)$ NON CONTINUA IN $(0,y)$ CON $y \neq 0$

Continuità

Derivabilità

Differenziabilità

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln x + x & x > 1 \\ (x-1)^2 \ln y + 1 & x \leq 1 \end{cases}$$

CONTINUITÀ IN $(1,y)$

$$f(1,y) = 1$$

Funzione continua nel punto

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} y^2 \ln x + x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1)^2 \ln y + 1 = 1$$

Limiti destro e sinistro

Continuità

Derivabilità

Differenziabilità

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln x + x & x > 1 \\ (x-1)^2 \ln y + 1 & x \leq 1 \end{cases}$$

$f(x,y)$ CONTINUA IN $(1,y)$

$$f(1,y) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} y^2 \ln x + x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1)^2 \ln y + 1 = 1$$

Continuità

Derivabilità

Differenziabilità

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln x + x & x > 1 \\ (x-1)^2 \ln y + 1 & x \leq 1 \end{cases}$$

DERIVABILITÀ IN $(1,y)$

1) Applico il criterio del rapporto incrementale

2) Applico una modulosa alternativa

Se le funzioni da destra e da sinistra sono diverse allora non è derivabile in quel punto

Continuità

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln x + x \\ (x-1)^2 \ln y + 1 \end{cases}$$

DERIVABILITÀ IN

Derivabilità

$$\frac{\partial f(1,y)}{\partial x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t,y) - f(1,y)}{t}$$

INCREMENTO

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{y^2 \ln(1+t) + t + 1 - 1}{t} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[y^2 \cdot \frac{\ln(1+t)}{t} + 1 \right] = y^2 + 1$$

Differenziabilità

Continuità

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln x + x \\ (x-1)^2 \ln y + 1 \end{cases}$$

DERIVABILITÀ IN

Derivabilità

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{(t+1-1)^2 \ln y + 1 - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} t \ln y = 0$$

$\frac{\partial f(1,y)}{\partial x} \neq f(1,y)$ → $f(x,y)$ NON È DERIVABILE
IN $(1,y)$

\Downarrow
 $f(x,y)$ NON È DIFFERENZIABILE
IN $(1,y)$

Differenziabilità

Continuità

Derivabilità

Differenziabilità

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln x + x & x > 1 \\ (x-1)^2 \ln y + 1 & x \leq 1 \end{cases}$$

DERIVABILITÀ IN $(1, y)$

ALTRÒ MODO

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \begin{cases} \frac{y^2}{x} + 1 & x > 1 \\ 2(x-1) \ln y & x \leq 1 \end{cases}$$

LIMITE DELLA DERIVATA PARZIALE
pendenza

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{y^2}{x} + 1 = y^2 + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} 2(x-1) \ln y = 0$$

PROPRIETÀ DEL GRADIENTE $\nabla f(\underline{x}_0)$

f DIFFERENZIABILE IN $\underline{x}_0 \Rightarrow \exists^* \nabla f(\underline{x}_0)$

Ie prodotto scalare di due vettori, geometricamente, è:

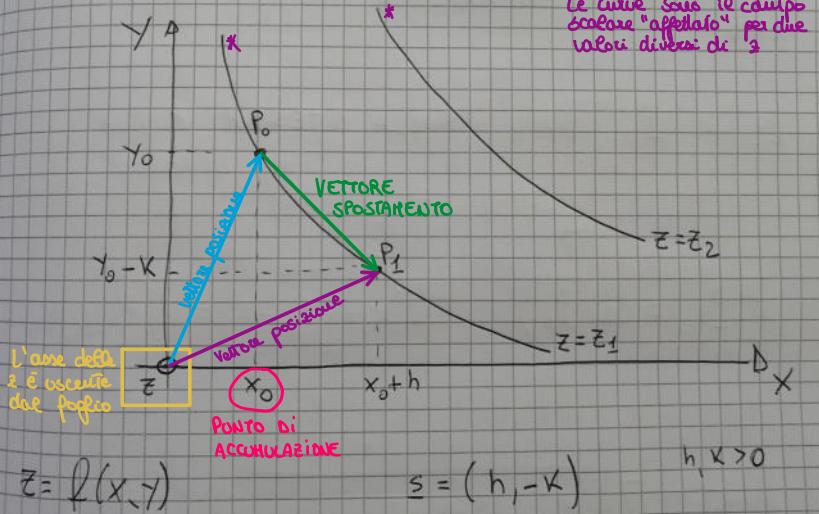
RICHIAMI: $\underline{a} \circ \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos \vartheta$

Ricerca dell'ottimo

massimi e minimi

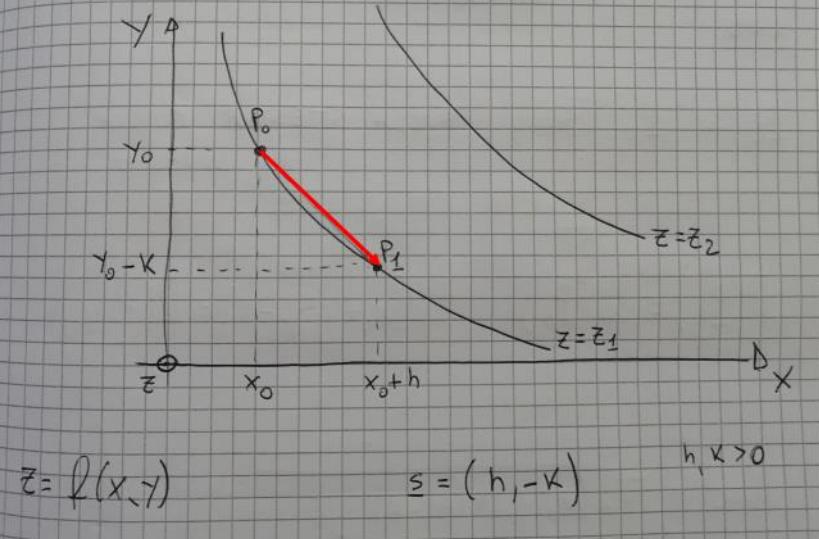
$\nabla f(x_0)$ È PERPENDICOLARE ALLE CURVE DI LIVELLO $f(x,y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

CURVE DI LIVELLO

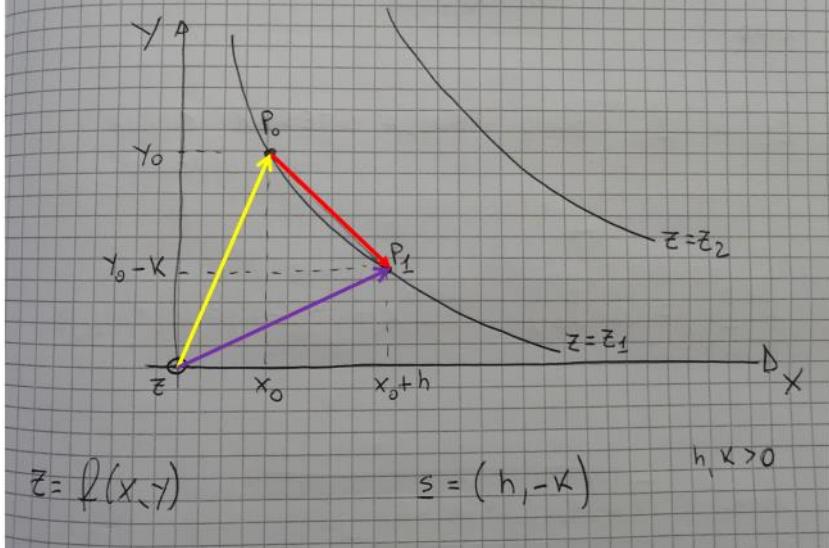


$\nabla f(x_0)$ È PERPENDICOLARE ALLE

CURVE DI LIVELLO



$\nabla f(x_0)$ È PERPENDICOLARE ALLE CURVE DI LIVELLO



$f(x, y)$ DIFFERENZIABILE PER I POTESI

Funzione definita in P_2 Funzione definita in P_0 L'applicazione lineare che riceve s

$$\lim_{\underline{s} \rightarrow 0} \frac{f(P_1) - f(P_0) - L_{P_0}(\underline{s})}{|\underline{s}|} = 0$$

$P_1 = P_0 + \underline{s}$

Vettore spostamento

Somma algebrica:

$$P_1 = P_0 + \underline{s} = (x_0, y_0) + (h, -k) = (x_0 + h, y_0 - k)$$

PRODOTTO SCALARE

Campo scalare = gradiente \circ vettore spostamento

$$L_{P_0}(\underline{s}) = \nabla f(P_0) \circ \underline{s} = \nabla f(x_0, y_0) \circ (h, -k) =$$

$$= \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot h - \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot k$$

$\lim_{h \rightarrow 0}$

esistente in h, k

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 - k) - f(x_0, y_0) - \nabla f(x_0, y_0) \circ (h, -k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

$k \rightarrow 0$

Se due punti sono sulla stessa curva di livello, allora hanno la stessa tangente, ovvero la stessa ∇f

P_1 E P_0 SONO SULLA STESSA CURVA DI LIVELLO



$$f(P_1) = f(P_0)$$

$$f(x_0 + h, y_0 - k) = f(x_0, y_0)$$

$$f(\underline{P}_1) = f(\underline{P}_0) \quad f(x_0 + h, y_0 - k) = f(x_0, y_0)$$

\lim

$h \rightarrow 0$

$k \rightarrow 0$

0

$$-\nabla f(x_0, y_0) \circ (h, -k) = 0$$

\underline{P}_1 E \underline{P}_0 SONO SULLA STESSA CURVA DI LIVELLO



$$f(\underline{P}_1) = f(\underline{P}_0) \quad f(x_0 + h, y_0 - k) = f(x_0, y_0)$$

\lim

$h \rightarrow 0$

$k \rightarrow 0$

$$\frac{\nabla f(x_0, y_0) \circ (h, -k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$$

\lim

$s \rightarrow 0$

$$\frac{\nabla f(\underline{P}_0) \circ s}{|s|} = 0$$

PER IPOTESI

!!!

$$\Rightarrow \nabla f(\underline{P}_0) \circ s = 0 \quad \begin{matrix} \text{cioè significa che il gradiente si dispone} \\ \text{perpendicolarmente alla curva di livello} \end{matrix}$$

$$\nabla f(\underline{P}_0) \perp s \quad (\text{SPOSTAMENTO LUNGO UNA CURVA DI LIVELLO})$$

Da continuo a discreto \Rightarrow CONCENTRARE

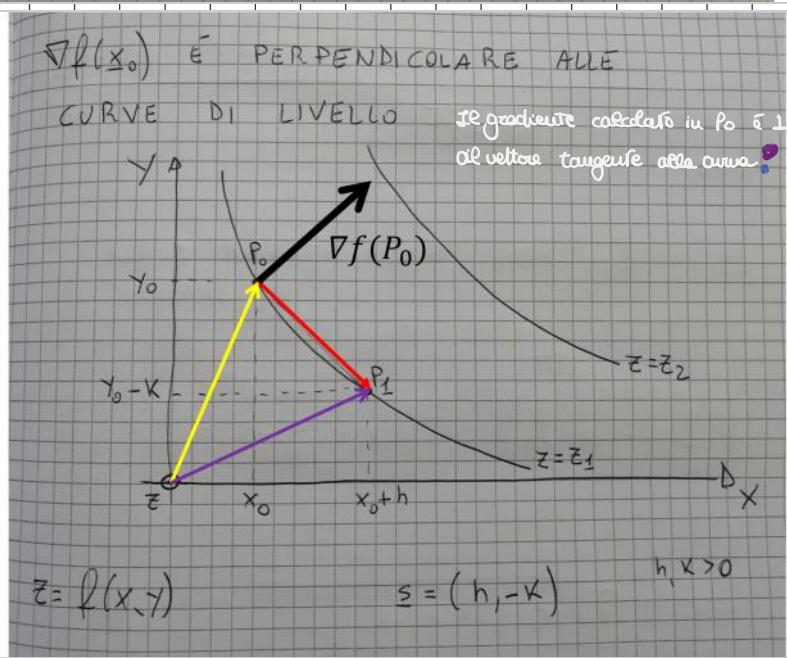


$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \frac{\nabla f(x_0, y_0) \circ (h, -k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$$

$$= \lim_{\underline{s} \rightarrow 0} \frac{\nabla f(P_0) \circ \underline{s}}{|\underline{s}|} = 0 \quad \text{PER IPOTESI}$$

$\Rightarrow \nabla f(P_0) \circ \underline{s} = 0 \Rightarrow$

$\nabla f(P_0) \perp \underline{s}$ (SPOSTAMENTO LUNGO UNA CURVA DI LIVELLO)



ANCORA SULLA DERIVATA DIREZIONALE

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial \underline{v}} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \underline{v} = |\nabla f(x_0, y_0)| \cdot |\underline{v}| \cos \theta$$

=0 se direz. e
gradiente sono
perpendicolari

direzione di
massima
pendenza
in cui la funz.
è massima

S stessa direzione
ma verso opposto

MASSIMA VARIAZIONE POSITIVA PER $\cos \theta = 1$

$\Rightarrow \underline{v} \parallel \nabla f(x_0, y_0)$ E CONCORDI IN VERSO

MASSIMA VARIAZIONE NEGATIVA PER $\cos \theta = -1$

$\Rightarrow \underline{v} \parallel \nabla f(x_0, y_0)$ E DISCORDI IN VERSO

ANCORA SULLA DERIVATA DIREZIONALE

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial \underline{v}} = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \underline{v} = |\nabla f(x_0, y_0)| \cdot |\underline{v}| \cos \theta$$

GRADIENTE

$\nabla f(x_0, y_0)$ RAPPRESENTA LA DIREZIONE
DI MASSIMA PENDENZA

MASSIMA VARIAZIONE NEGATIVA PER $\cos \theta = -1$

$\Rightarrow \underline{v} \parallel \nabla f(x_0, y_0)$ E DISCORDI IN VERSO

$$f(x, y) = \frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{2}$$

Funzione solare
 $R^2 \rightarrow z$

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{x}{5}, y \right)$$

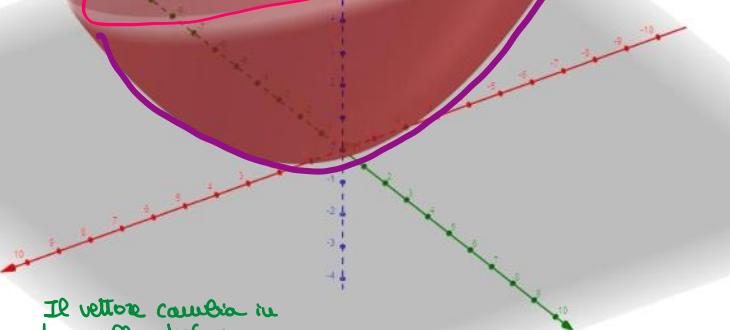
$= z$

In base al
senso del
differenziale
e derivata e
differenziale ?

PARABOLIDE
ELLITTICO

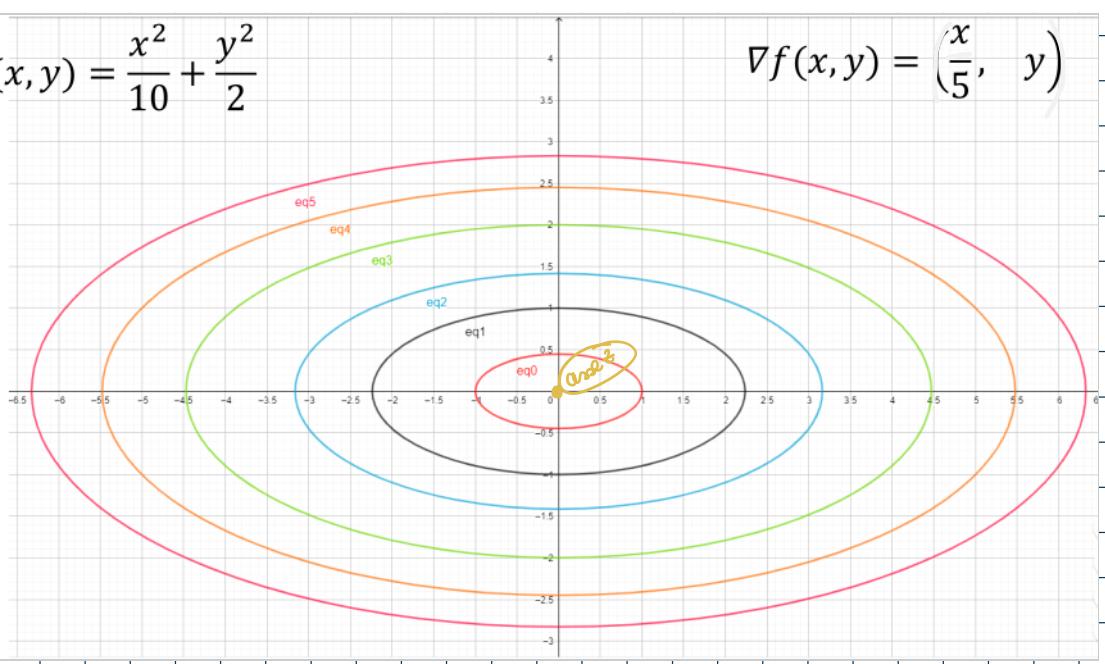
ELLISI
CONCENTRICHE DI
QUOTA Z

PARABOLE



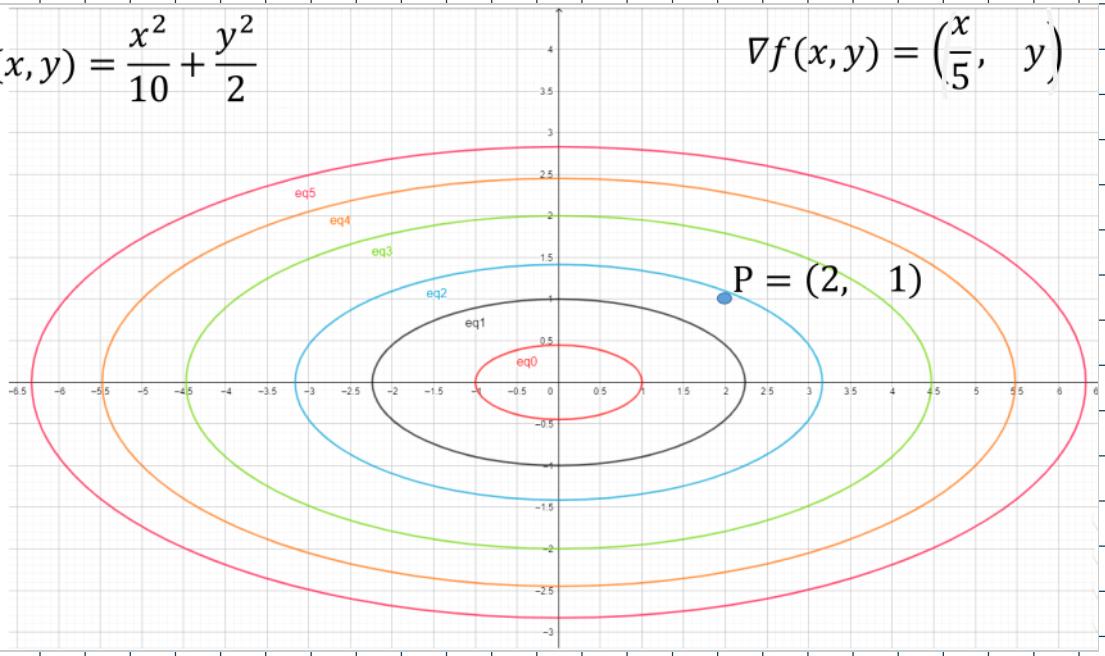
$$f(x, y) = \frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{2}$$

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{x}{5}, \quad y \right)$$



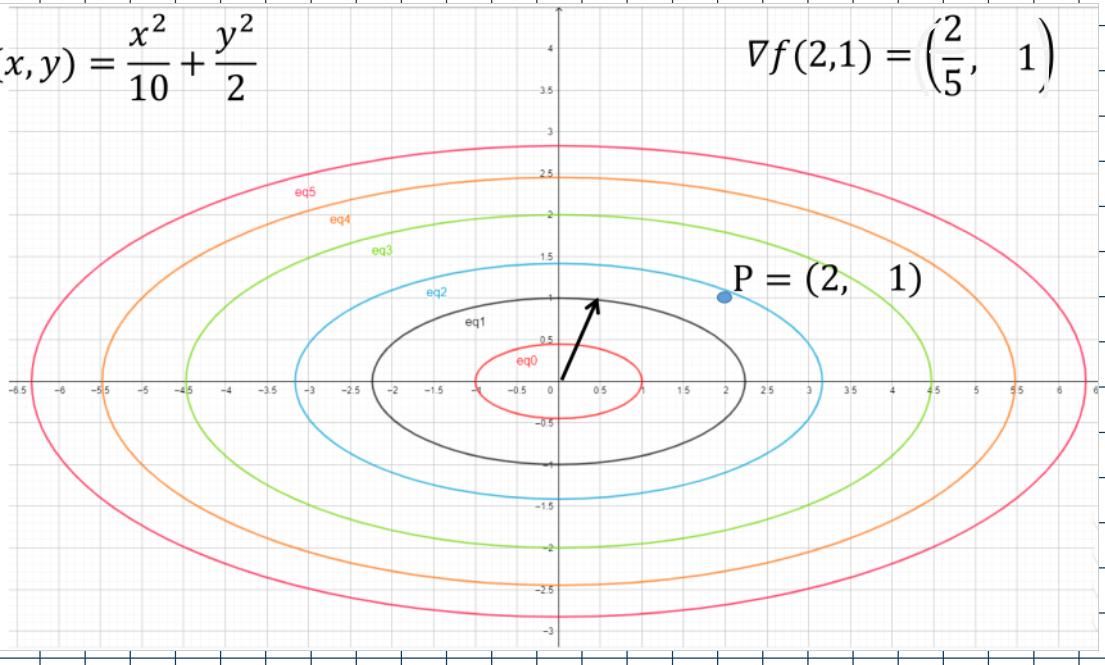
$$f(x, y) = \frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{2}$$

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{x}{5}, \quad y \right)$$



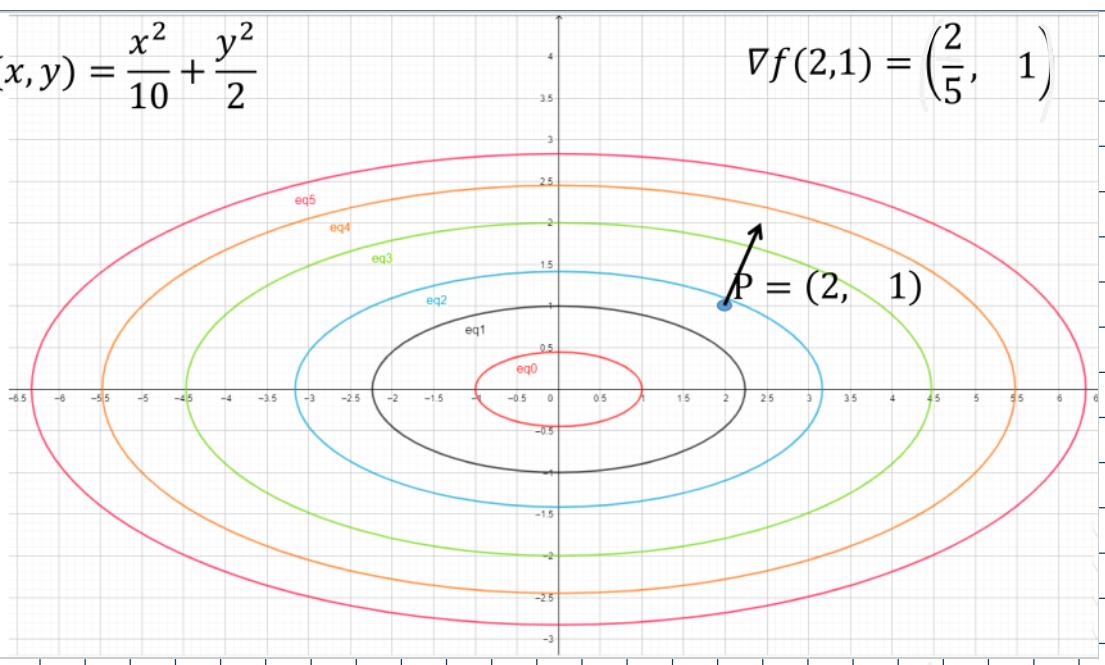
$$f(x, y) = \frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{2}$$

$$\nabla f(2,1) = \left(\frac{2}{5}, \quad 1 \right)$$



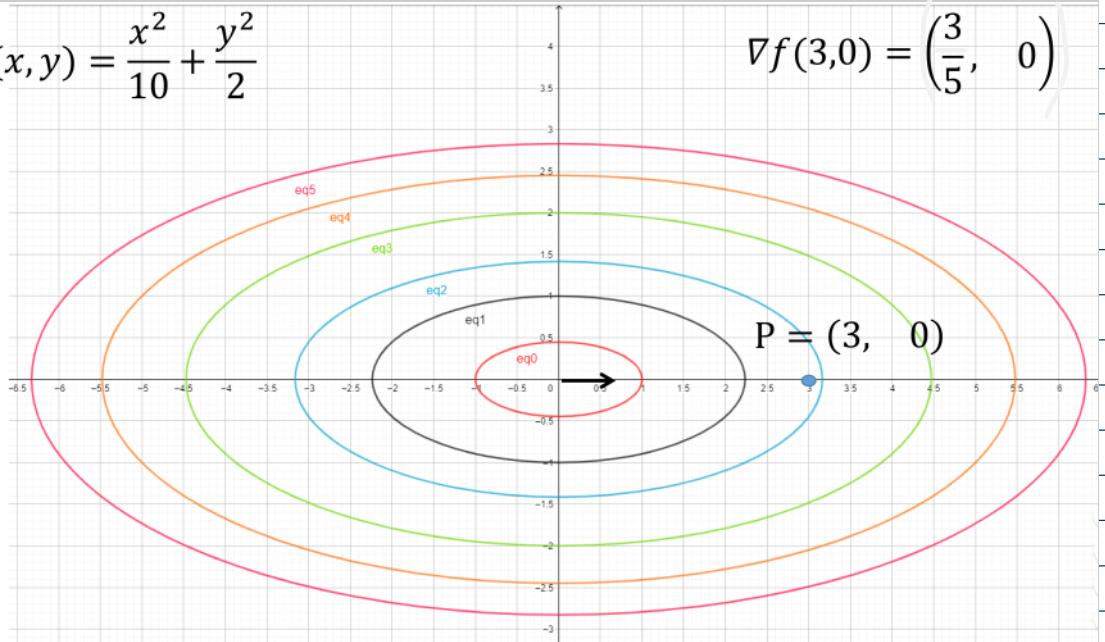
$$f(x, y) = \frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{2}$$

$$\nabla f(2,1) = \left(\frac{2}{5}, 1 \right)$$



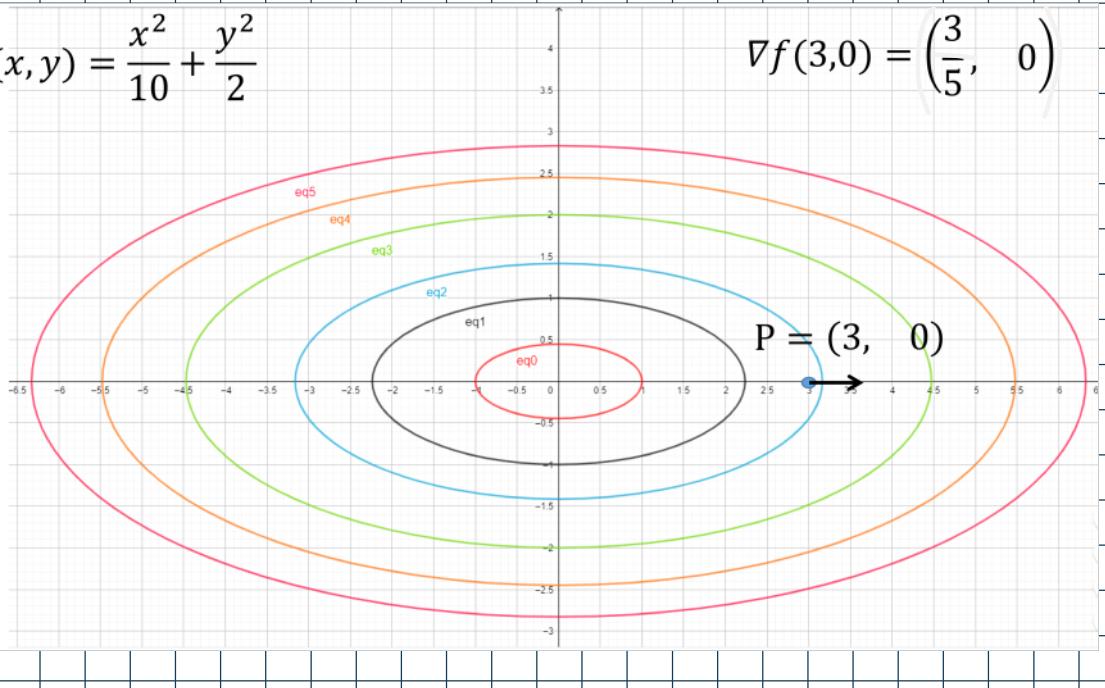
$$f(x, y) = \frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{2}$$

$$\nabla f(3,0) = \left(\frac{3}{5}, 0 \right)$$



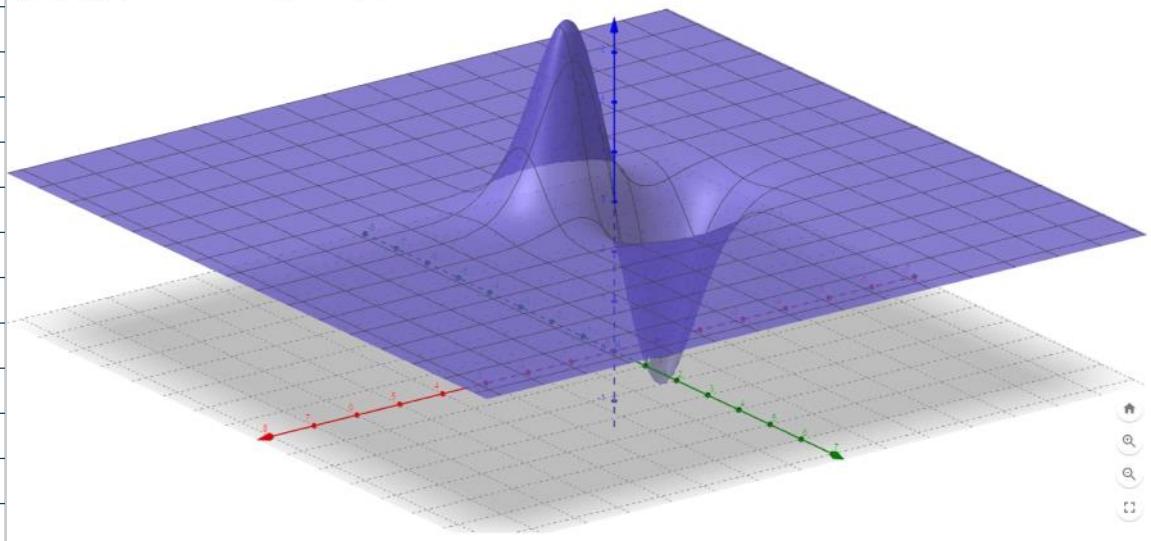
$$f(x, y) = \frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{2}$$

$$\nabla f(3,0) = \left(\frac{3}{5}, 0 \right)$$

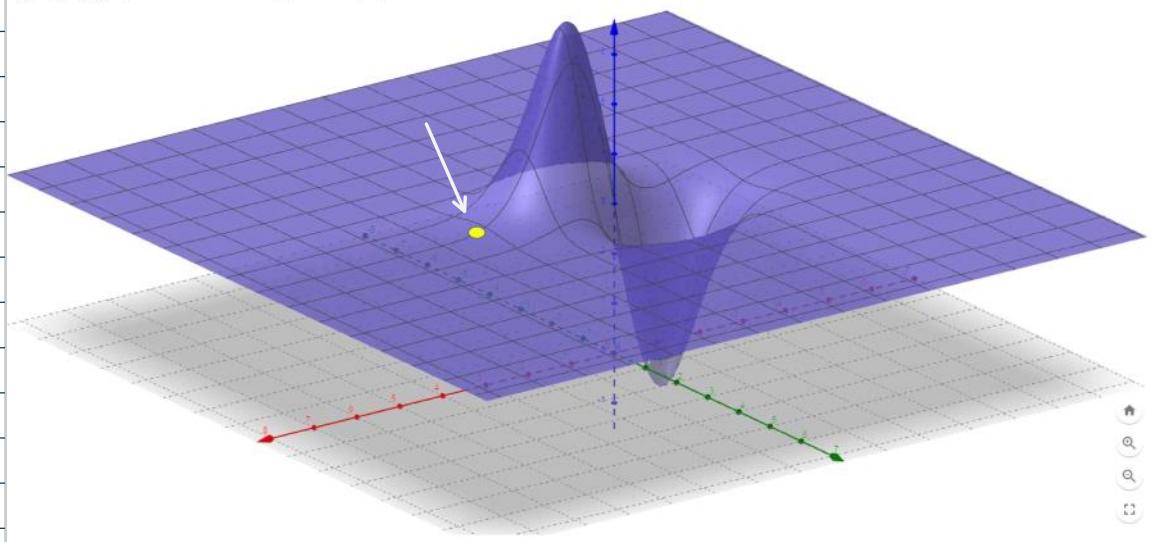


$$f(x, y) = 3 + 5(x - y)e^{-(0.5x^2+y^2)}$$

$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

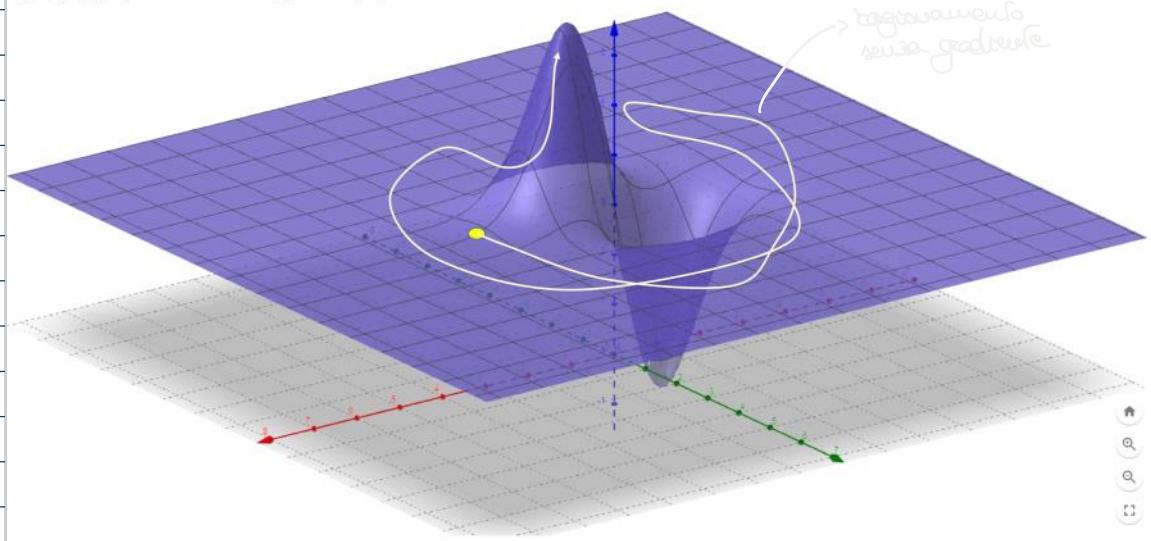


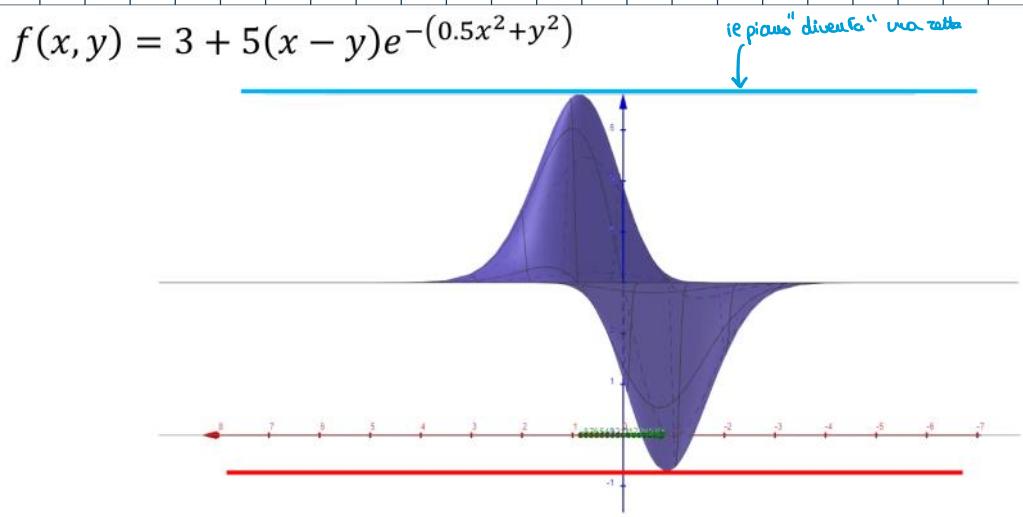
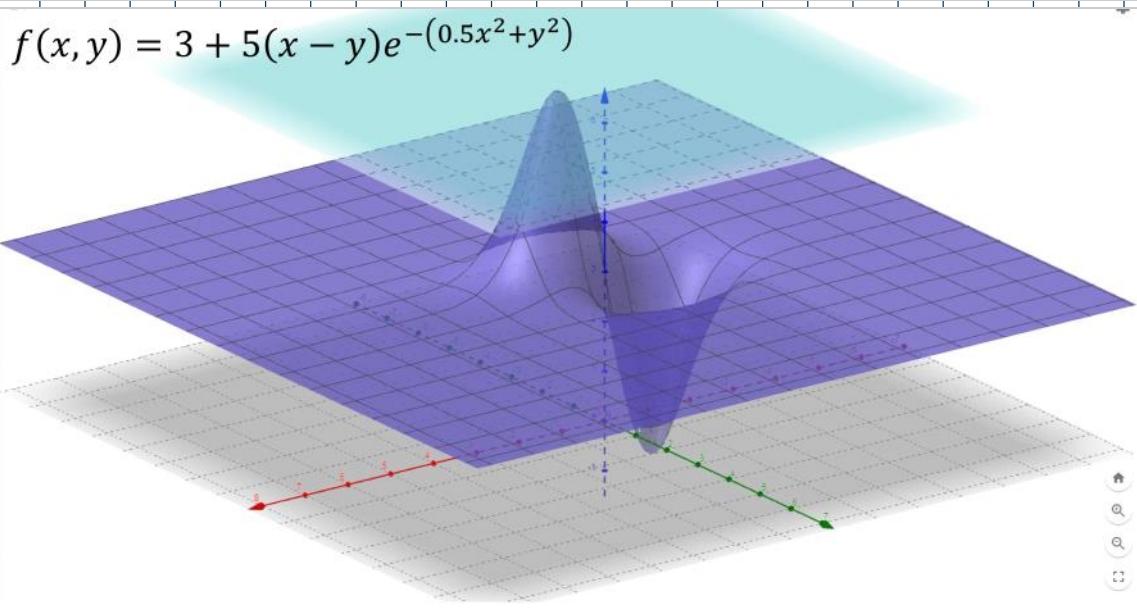
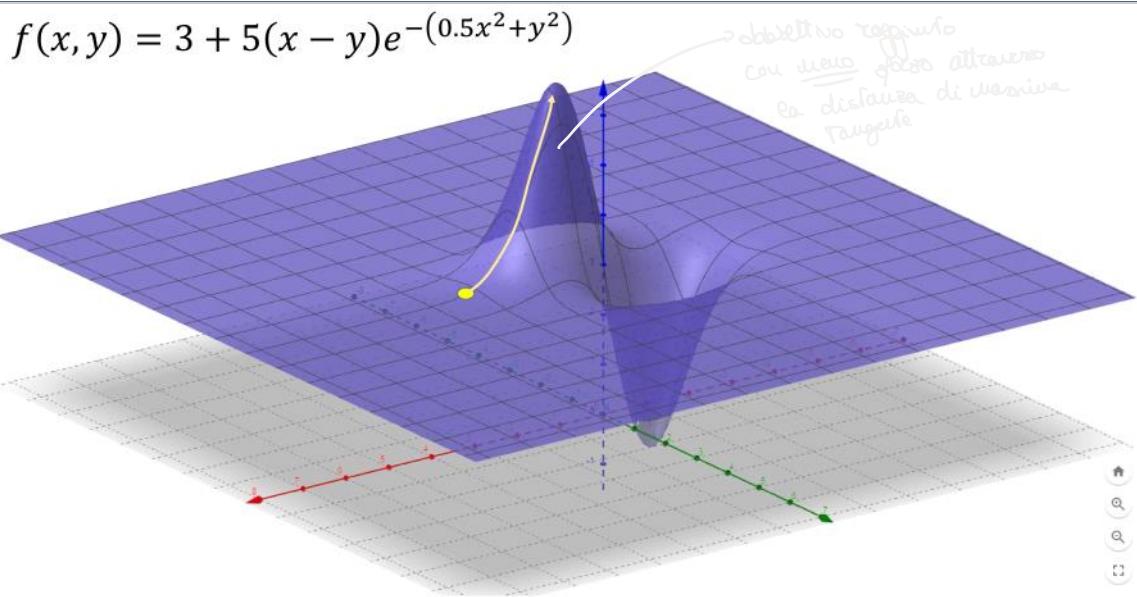
$$f(x, y) = 3 + 5(x - y)e^{-(0.5x^2+y^2)}$$



$$f(x, y) = 3 + 5(x - y)e^{-(0.5x^2+y^2)}$$

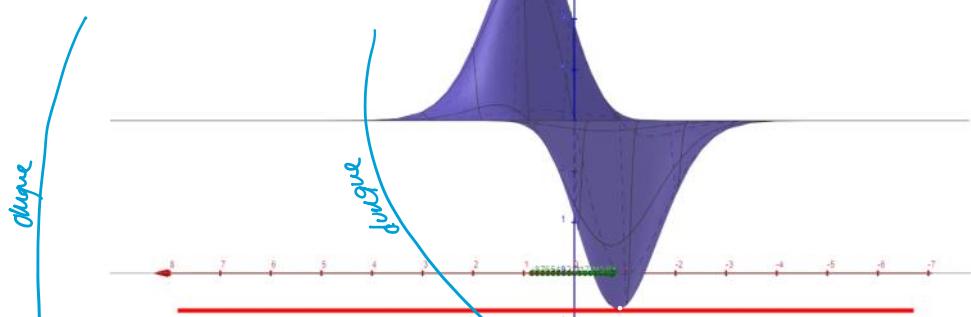
regressando
se o gradiente





$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \rightarrow \text{equazione del piano}$$

$$z = \text{cost} \Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0$$



$$a = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \quad b = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$z = \text{cost} \Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0$$

caso del punto critico

caso delle tangenze

↓

$$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$$

$$a = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \quad b = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

PUNTI STAZIONARI

ANALISI 1

ANALISI 2

$$f: A \subseteq \mathbf{R} \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}$$

$$f: A \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}$$

$$f'(x_0) = 0 \iff \nabla f(\underline{x}_0) = \underline{0}$$

Punti di Massimo locale

Punti di Minimo locale

Punti di Flesso a tangente
orizzontale

Punti di Massimo locale

Punti di Minimo locale

Punti di Sella

PUNTI STAZIONARI

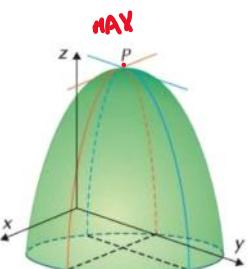
ANALISI 1

ANALISI 2

$$f: A \subseteq \mathbf{R} \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}$$

$$f: A \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}$$

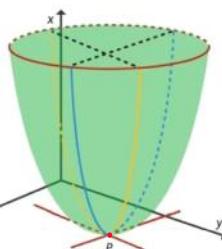
$f'(c)$



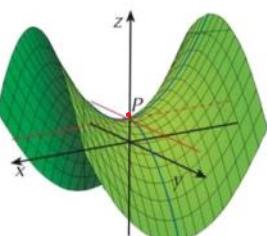
Punti di

Punti di

Punti di Flesso a tangente
orizzontale



Punti di Sella



PUNTI STAZIONARI

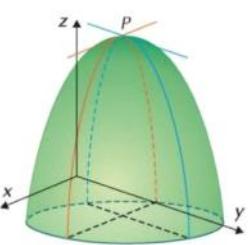
ANALISI 1

ANALISI 2

$$f: A \subseteq \mathbf{R} \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}$$

$$f: A \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow B \subseteq \mathbf{R}$$

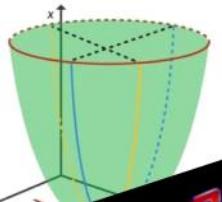
$f'(c)$



Punti di

Punti di

Punti di Flesso a tangente
orizzontale



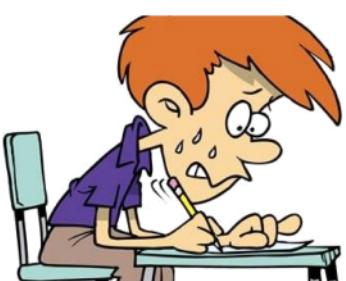
TO BE
CONTINUED...

Punti di Sella

ALGORITMI DI OTTIMIZZAZIONE

METODI ANALITICI
(SOLUZIONI ANALITICHE)

METODI NUMERICI
(SOLUZIONI NUMERICHE)



ANALISI NUMERICA

METODI ANALITICI
(SOLUZIONI ANALITICHE)



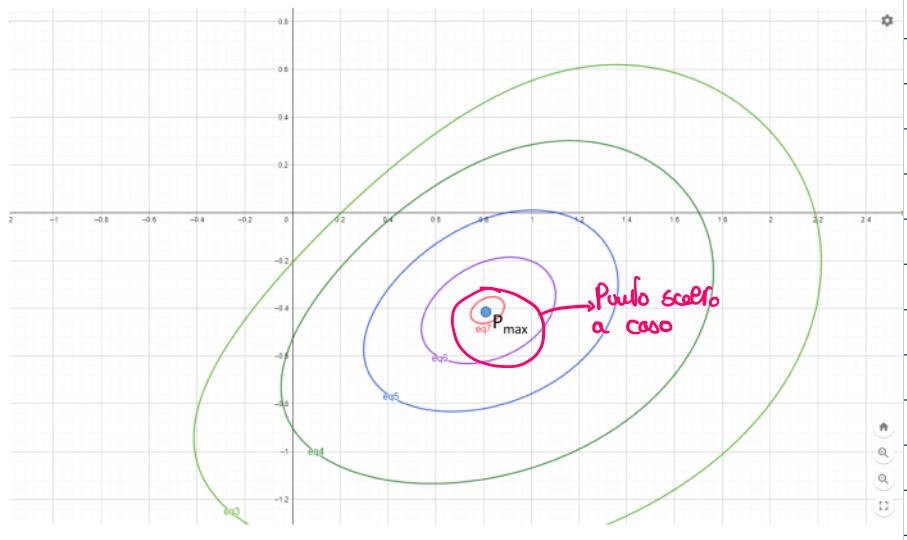
METODI NUMERICI
(SOLUZIONI NUMERICHE)



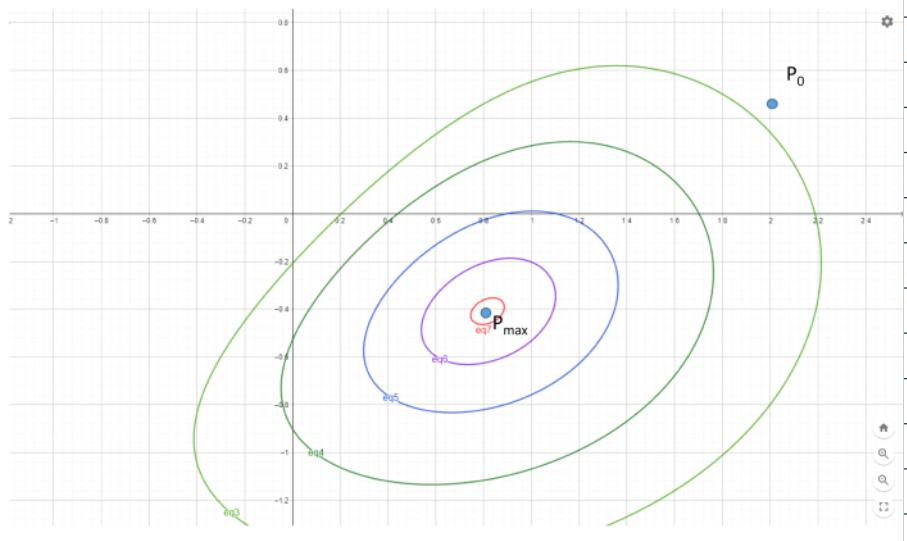
METODO DEL GRADIENTE

BENCHMARK
↓

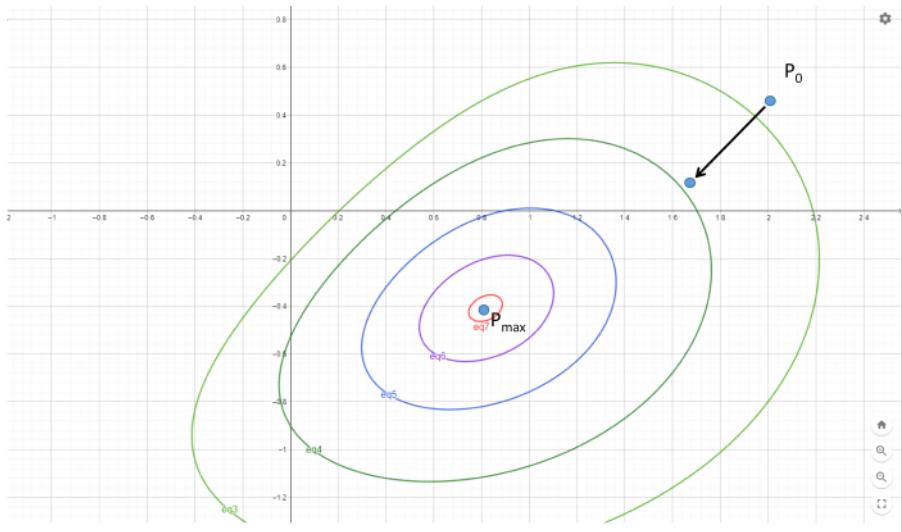
prova per la valutazione
delle prestazioni di un
dispositivo



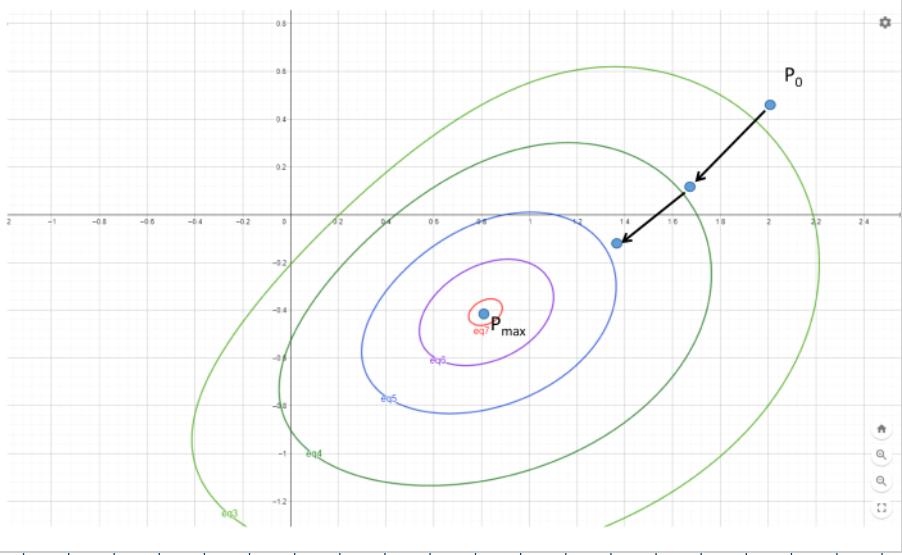
METODO DEL GRADIENTE



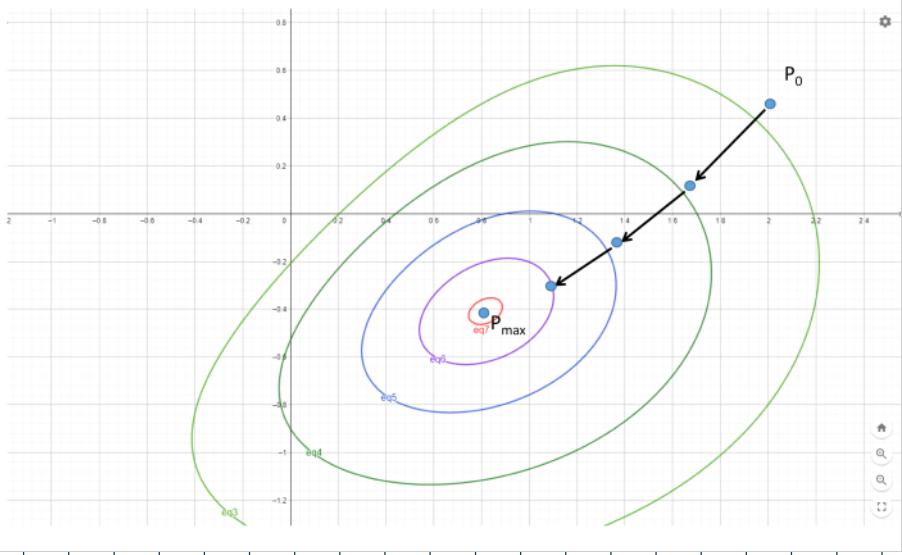
METODO DEL GRADIENTE



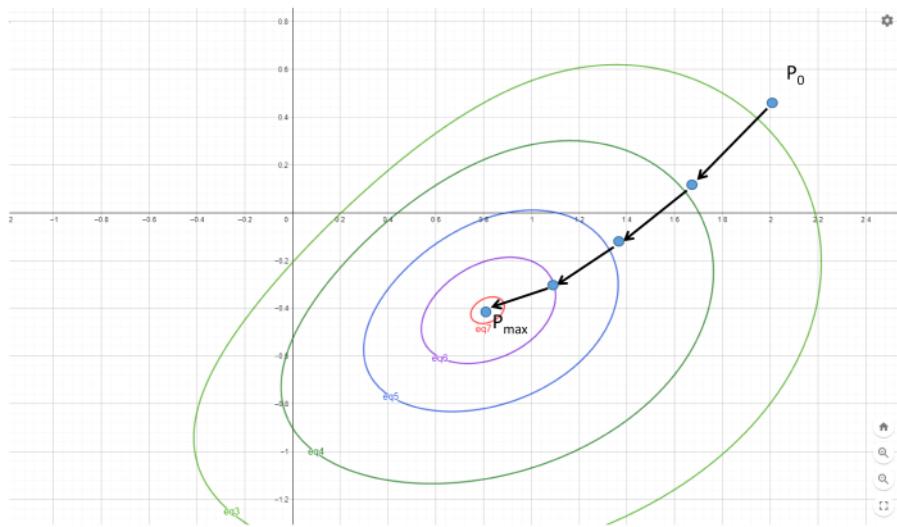
METODO DEL GRADIENTE



METODO DEL GRADIENTE



METODO DEL GRADIENTE



METODO DEL GRADIENTE - ALGORITMO

scelta del punto iniziale P_0 ; calcolo $f(P_0)$; calcolo $\nabla f(P_0)$

IF $|\nabla f(P_0)| < \varepsilon$ THEN

$P_{max} = P_0; f(P_{max}) = f(P_0)$

ELSE

$cont = 0; P_{cont} = P_0; calcolo f(P_{cont}); calcolo \nabla f(P_{cont})$

DO

$cont = cont + 1$

$P_{cont} = P_{cont} + \alpha \cdot \nabla f(P_{cont})$

calcolo $f(P_{cont})$; calcolo $\nabla f(P_{cont})$

LOOP UNTIL $|\nabla f(P_{cont})| < \varepsilon$ OR $cont = 1000$

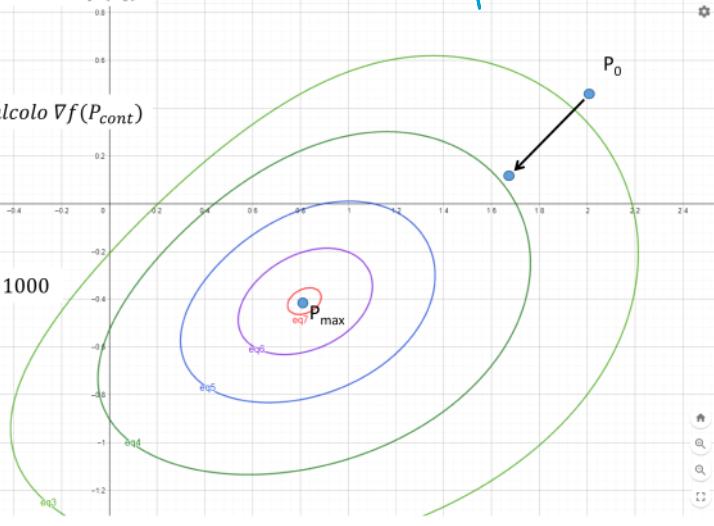
$P_{max} = P_{cont}; f(P_{cont}) = f(P_{cont})$

END IF

Il computer non ragiona
nel continuo ma nel
DISCRETO

CRITERIO DI ARRESTO per tentativi

introducere una variabile
calcolare può essere utile
per interrompere il loop
esplorando i valori creasi



METODO DEL GRADIENTE - ALGORITMO

scelta del punto iniziale P_0 ; calcolo $f(P_0)$; calcolo $\nabla f(P_0)$

IF $|\nabla f(P_0)| < \varepsilon$ THEN

$P_{max} = P_0; f(P_{max}) = f(P_0)$

ELSE

$cont = 0; P_{cont} = P_0; calcolo f(P_{cont}); calcolo \nabla f(P_{cont})$

DO

$cont = cont + 1$

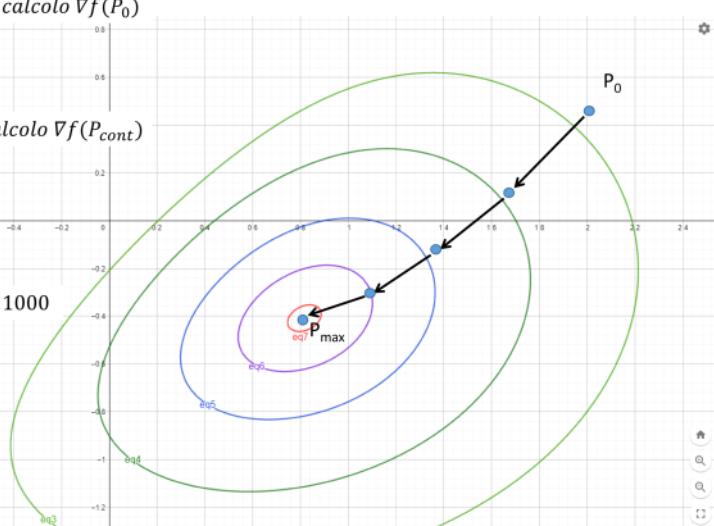
$P_{cont} = P_{cont} + \alpha \cdot \nabla f(P_{cont})$

calcolo $f(P_{cont})$; calcolo $\nabla f(P_{cont})$

LOOP UNTIL $|\nabla f(P_{cont})| < \varepsilon$ OR $cont = 1000$

$P_{max} = P_{cont}; f(P_{cont}) = f(P_{cont})$

END IF

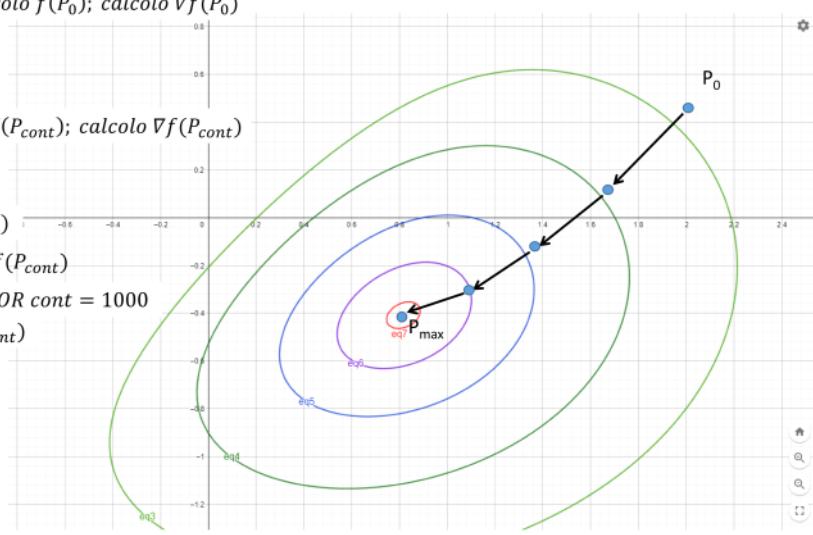


METODO DEL GRADIENTE - ALGORITMO

```

scelta del punto iniziale  $P_0$ ; calcolo  $f(P_0)$ ; calcolo  $\nabla f(P_0)$ 
IF  $|\nabla f(P_0)| < \varepsilon$  THEN
     $P_{max} = P_0$ ;  $f(P_{max}) = f(P_0)$ 
ELSE
     $cont = 0$ ;  $P_{cont} = P_0$ ; calcolo  $f(P_{cont})$ ; calcolo  $\nabla f(P_{cont})$ 
    DO
         $cont = cont + 1$ 
         $P_{cont} = P_{cont} + \alpha \cdot \nabla f(P_{cont})$ 
        calcolo  $f(P_{cont})$ ; calcolo  $\nabla f(P_{cont})$ 
    LOOP UNTIL  $|\nabla f(P_{cont})| < \varepsilon$  OR  $cont = 1000$ 
     $P_{max} = P_{cont}$ ;  $f(P_{cont}) = f(P_{cont})$ 
END IF

```

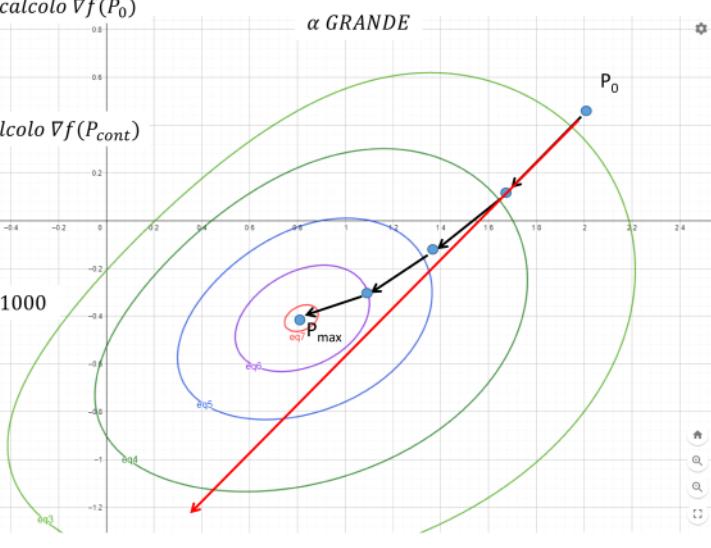


METODO DEL GRADIENTE - ALGORITMO

```

scelta del punto iniziale  $P_0$ ; calcolo  $f(P_0)$ ; calcolo  $\nabla f(P_0)$ 
IF  $|\nabla f(P_0)| < \varepsilon$  THEN
     $P_{max} = P_0$ ;  $f(P_{max}) = f(P_0)$ 
ELSE
     $cont = 0$ ;  $P_{cont} = P_0$ ; calcolo  $f(P_{cont})$ ; calcolo  $\nabla f(P_{cont})$ 
    DO
         $cont = cont + 1$ 
         $P_{cont} = P_{cont} + \alpha \cdot \nabla f(P_{cont})$ 
        calcolo  $f(P_{cont})$ ; calcolo  $\nabla f(P_{cont})$ 
    LOOP UNTIL  $|\nabla f(P_{cont})| < \varepsilon$  OR  $cont = 1000$ 
     $P_{max} = P_{cont}$ ;  $f(P_{cont}) = f(P_{cont})$ 
END IF

```

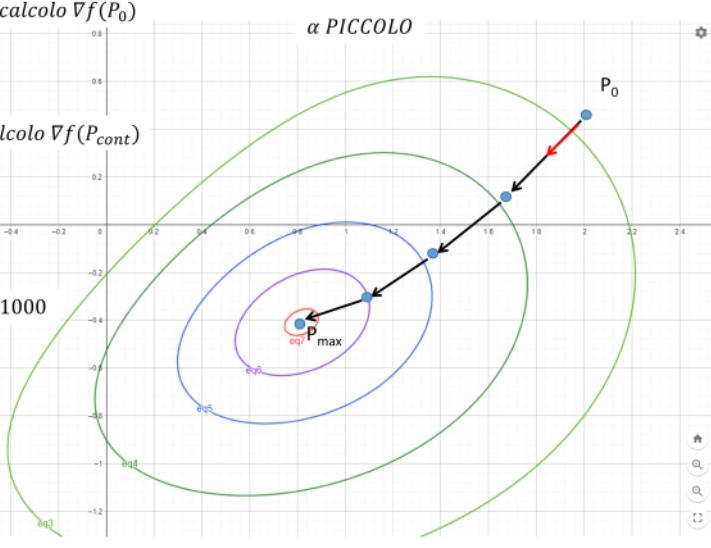


METODO DEL GRADIENTE - ALGORITMO

```

scelta del punto iniziale  $P_0$ ; calcolo  $f(P_0)$ ; calcolo  $\nabla f(P_0)$ 
IF  $|\nabla f(P_0)| < \varepsilon$  THEN
     $P_{max} = P_0$ ;  $f(P_{max}) = f(P_0)$ 
ELSE
     $cont = 0$ ;  $P_{cont} = P_0$ ; calcolo  $f(P_{cont})$ ; calcolo  $\nabla f(P_{cont})$ 
    DO
         $cont = cont + 1$ 
         $P_{cont} = P_{cont} + \alpha \cdot \nabla f(P_{cont})$ 
        calcolo  $f(P_{cont})$ ; calcolo  $\nabla f(P_{cont})$ 
    LOOP UNTIL  $|\nabla f(P_{cont})| < \varepsilon$  OR  $cont = 1000$ 
     $P_{max} = P_{cont}$ ;  $f(P_{cont}) = f(P_{cont})$ 
END IF

```



METODO DEL GRADIENTE - ALGORITMO



α GRANDE



α PICCOLO

SLOW BUT
SURE

METODO DEL GRADIENTE - ALGORITMO

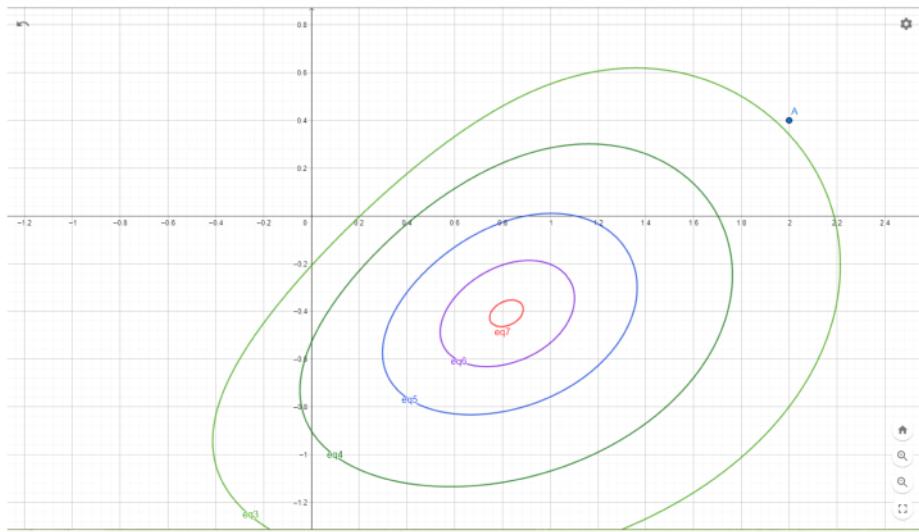
α VARIABILE



SLOW BUT
SURE

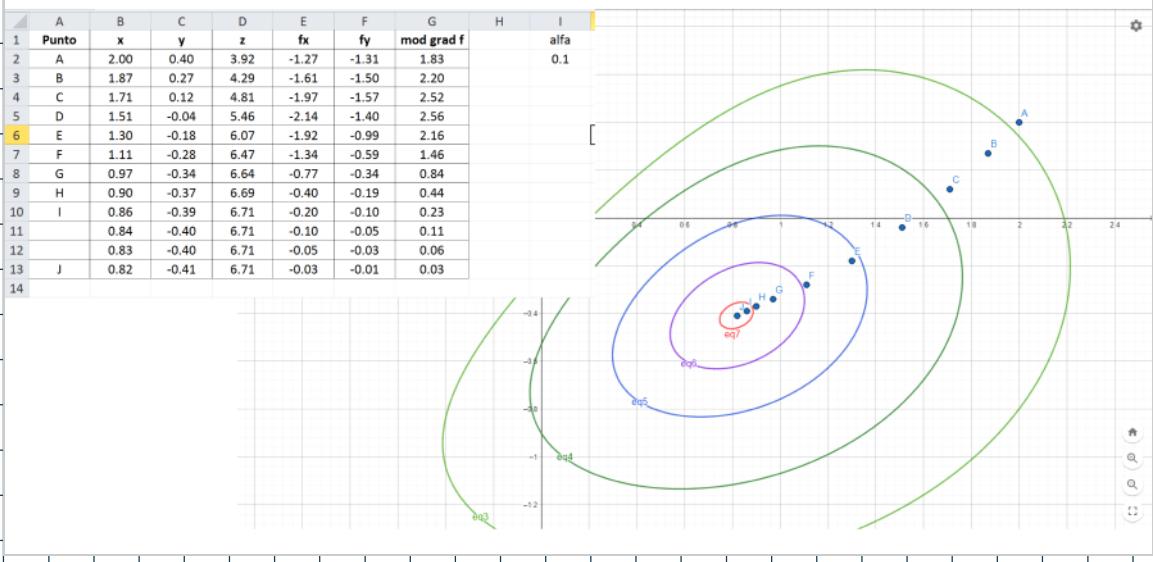
$$f(x, y) = 3 + 5(x - y)e^{-(0.5x^2+y^2)}$$

$$A = (2, 0.4)$$



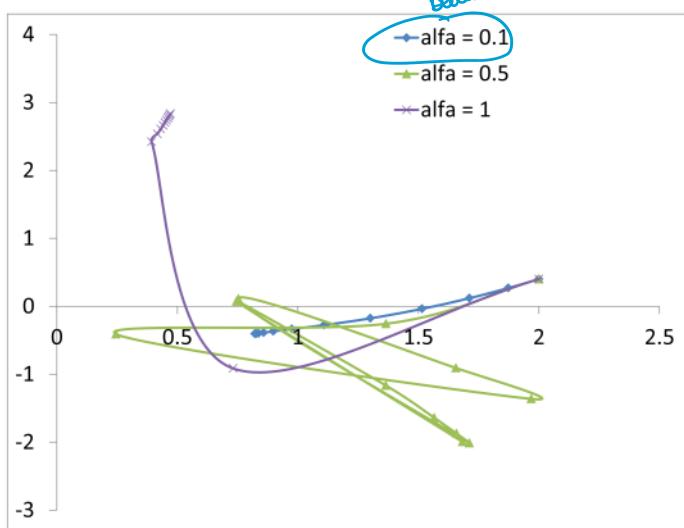
$$f(x, y) = 3 + 5(x - y)e^{-(0.5x^2+y^2)}$$

$$A = (2, 0.4)$$



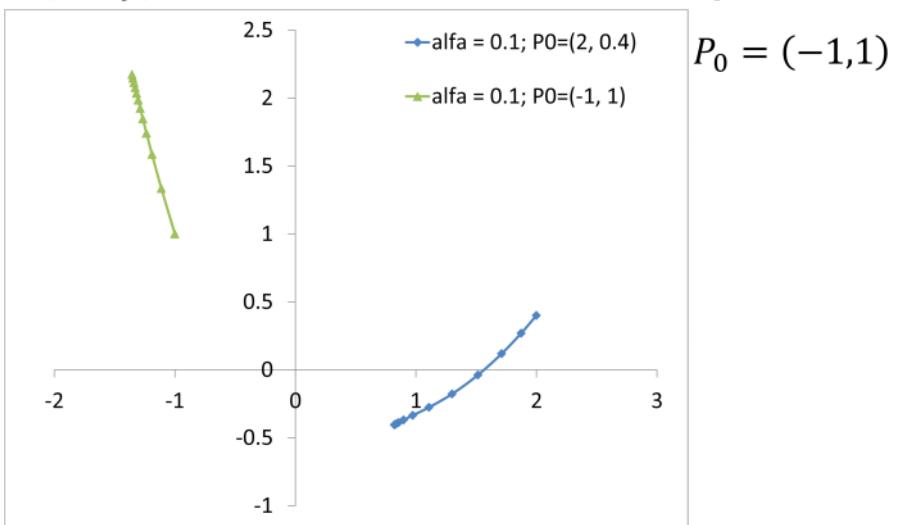
$$f(x, y) = 3 + 5(x - y)e^{-(0.5x^2+y^2)}$$

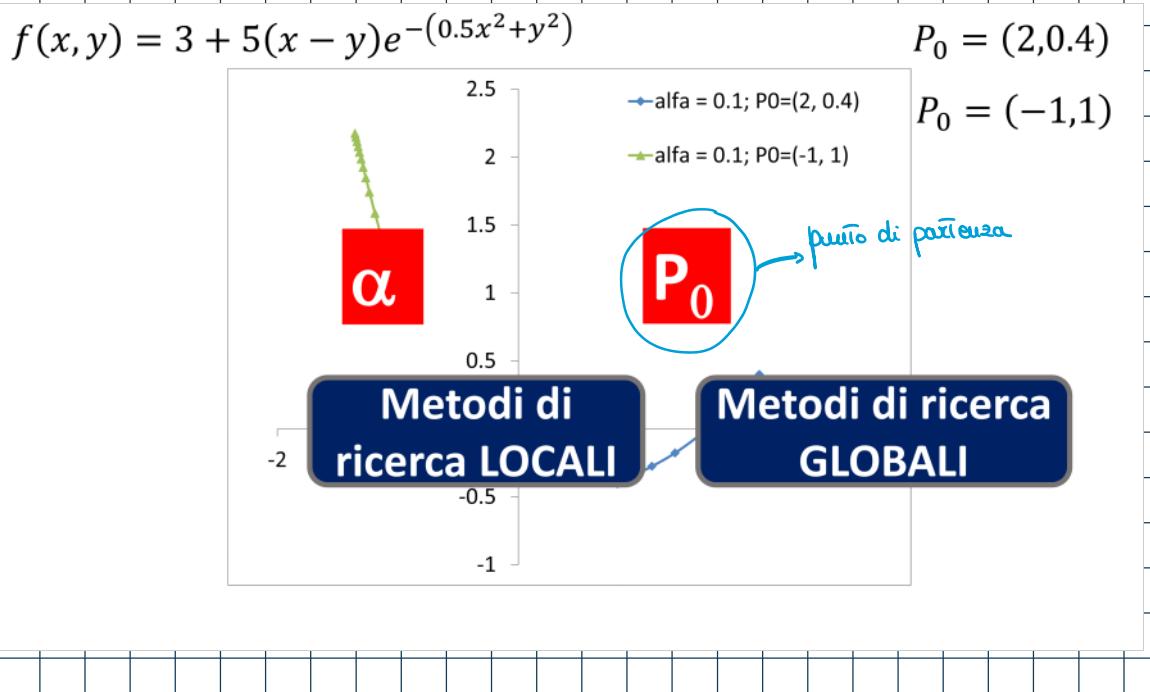
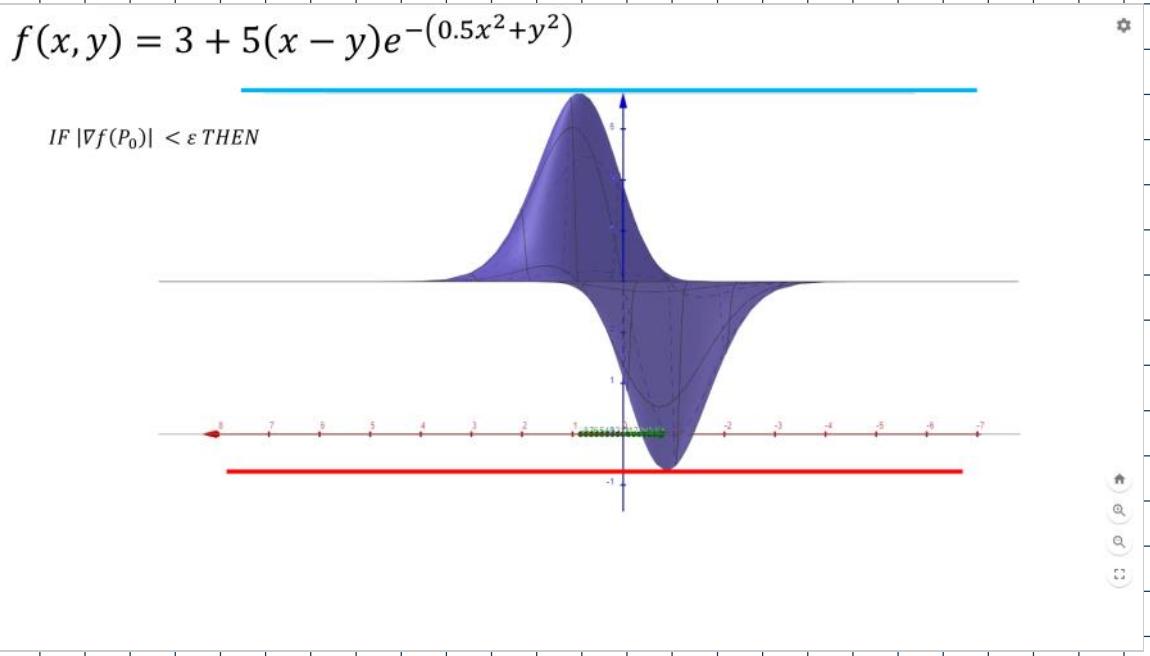
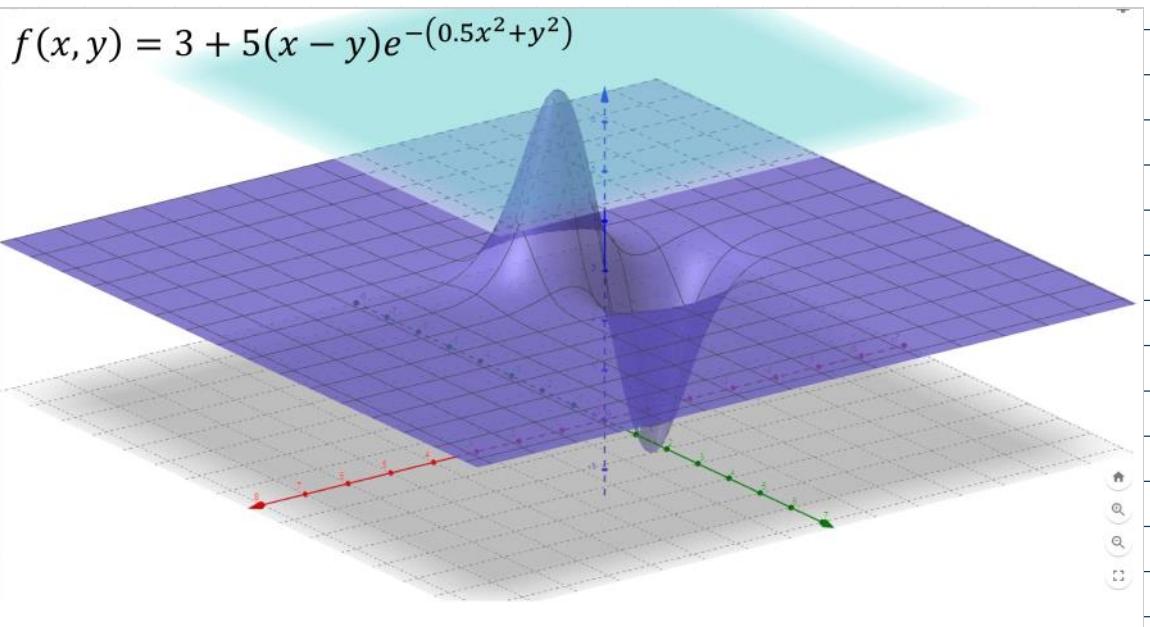
$$P_0 = (2, 0.4)$$



$$f(x, y) = 3 + 5(x - y)e^{-(0.5x^2+y^2)}$$

$$P_0 = (2, 0.4)$$



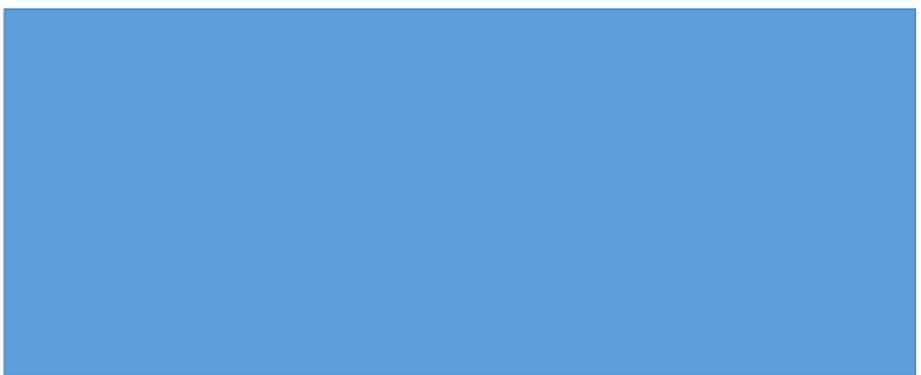


**Metodi di
ricerca LOCALI**



**Metodi di ricerca
GLOBALI**

α P_0



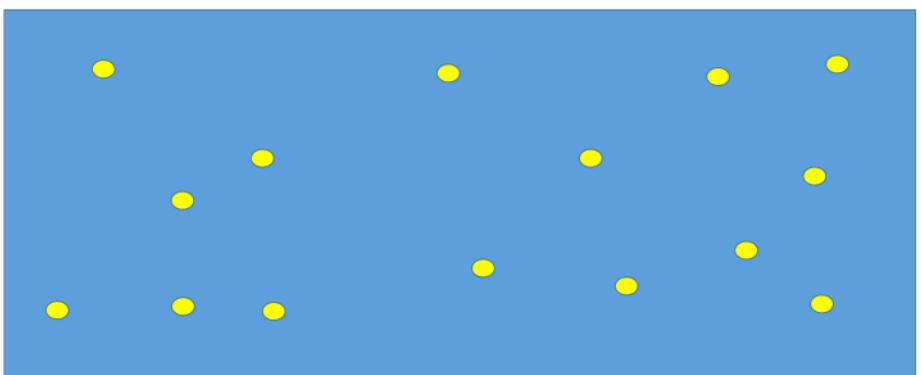
COLLEGAMENTO
de un solo movimiento

**Metodi di
ricerca LOCALI**



**Metodi di ricerca
GLOBALI**

α P_0

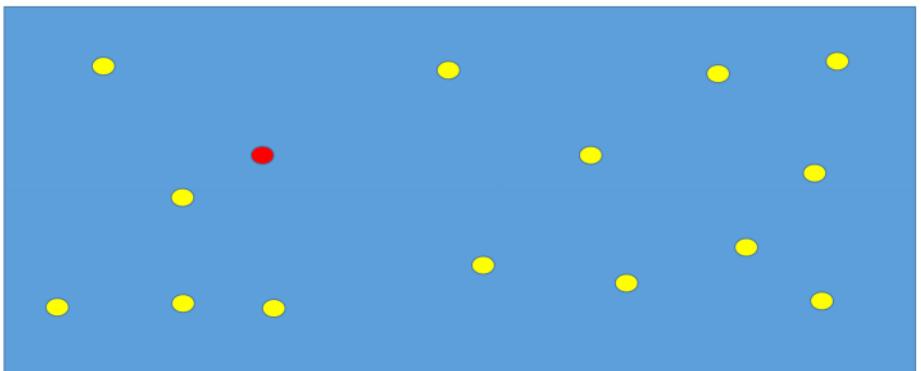


**Metodi di
ricerca LOCALI**



**Metodi di ricerca
GLOBALI**

α P_0



Metodi di ricerca LOCALI

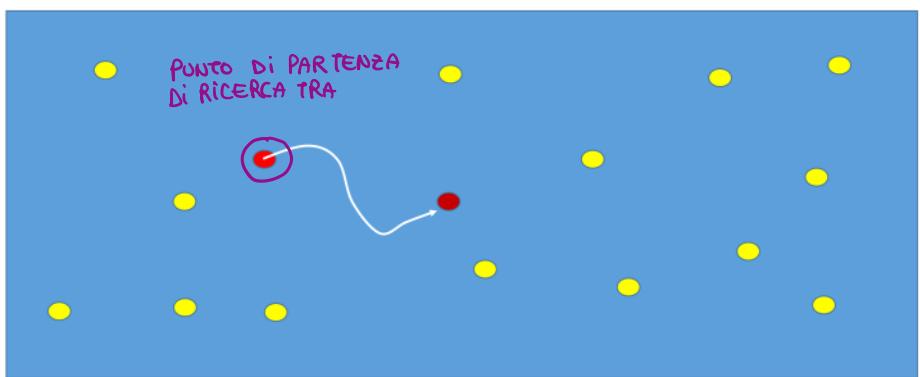


Metodi di ricerca GLOBALI

dal punto ottenuto costituisce
oggetto ricerca

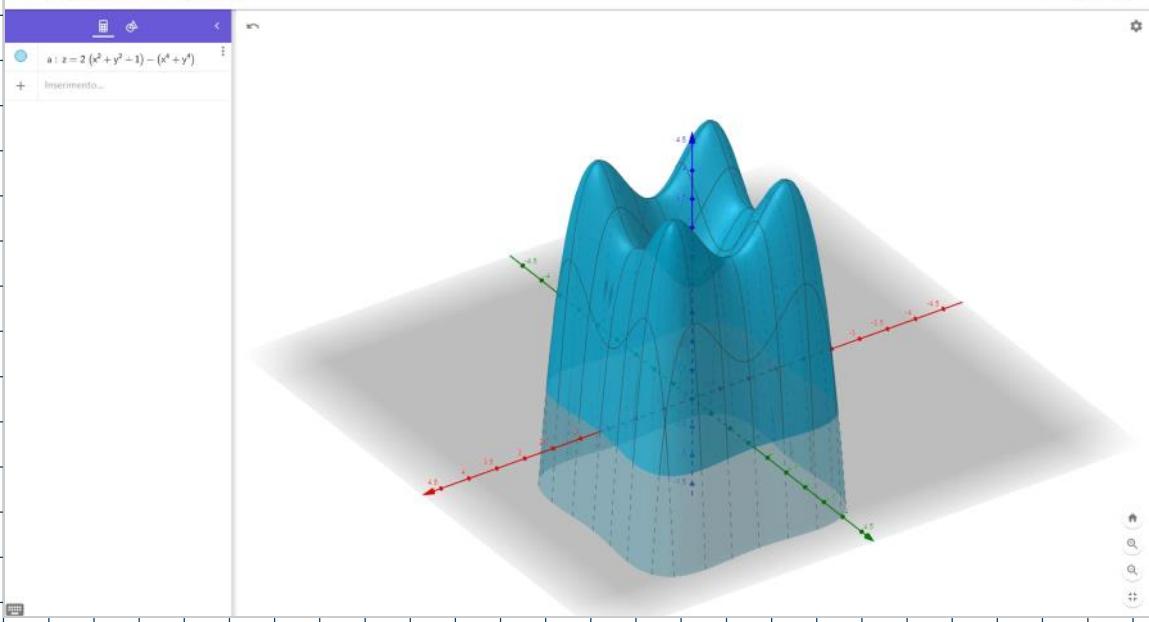
α P_0

punti a caso



GeoGebra Calcolatrice 3D

ACCEDI



GeoGebra Calcolatrice 3D

ACCEDI

