1. Introduzione

mercoledì 2 marzo 2022 10:49

Ripassare retroazione e feedback

2 MARZO

ROBOTICA

Studio di macchine autonome con la possibilità di sostituire l'uomo in compiti specifici.

Dallo slavo ROBOTA (= lavoratori)

Le prime macchine si distinguevano in:
- macchine a controllo numerico
- telemanipolatori meccanici comandati tramite telecomandi.

→ dalla fusione dei due nascono i robot manipolatori che riescono a superare la specificità delle operazioni eseguite dalle singole tipologie.
Ciò permetteva di usare una stessa catena di montaggio per diversi modelli o una versatilità dei comportamenti.
Dunque, per ottenere ciò, era necessario trasformare i movimenti di un robot in un software.

I robot possono essere classificati in:
- industriali → hanno una base detta solidale all'ambiente
- mobili → sono dotati di sistemi di locomozione

I robot come i droni telecomandati non sono considerati autonomi

→ Per la ISO/8373-2.3, un robot industriale è "Un manipolatore con più gradi di libertà, **governato automaticamente**, **riprogrammabile, multiscopo**, che può essere fisso sul posto o mobile per utilizzo in applicazioni di automazioni industriali".

In base alla composizione meccanica si può classificare il robot.
Si parla di:
- catena cinematica aperta se le estremità sono libere e dunque sconnesse.
- catena cinematica chiusa se le estremità sono bloccate e dunque si crea un anello.

Si parla di interazione forte o debole con l'uomo in base alla necessaria interazione richiesta.

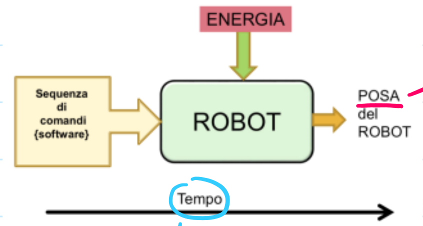
esempio di robot industriale

parte di feedback

parte di calcolo (che spesso contiene due CPU: una per l'interfaccia utente e una per i calcoli)

Motore elettrico (convertitore da en. elettrica a meccanica)

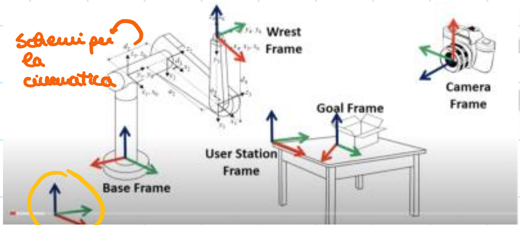
É possibile riassumere le componenti necessarie di un robot nel seguente schema



non si parla di posizione in quanto la posa è un concetto più ampio dato dall'unione di posizione e orientamento

un'azione richiede una evoluzione nel tempo

Schemi di riferimento:



Schemi per la cinematica

sistema di riferimento solidale col mondo

Un robot è programmato sul suo sistema di riferimento di base ma fra i vari sistemi deve esserci dialogo.

ROBOT INDUSTRIALI

Un robot industriale è costituito da bracci e giunti che possono essere di due tipi:

detti link

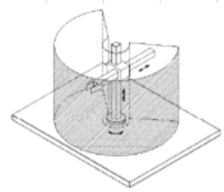
i bracci sono link rigidi

- rotoidali per le rotazioni
- prismatici per le traslazioni

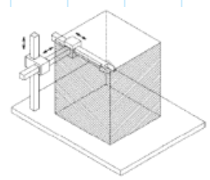
→ utile per prendere e depositare

I nomi sono determinati dal volume descritto dai movimenti:

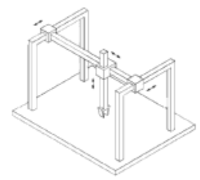
- Cilindrico



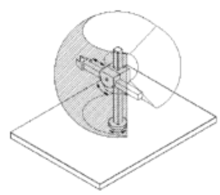
- Cartesiano



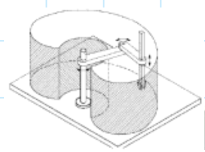
- Portale



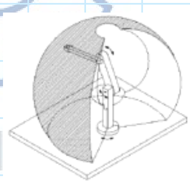
- Polare o sferico



- Scara



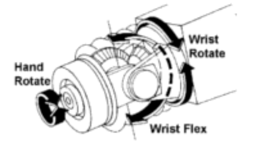
- Antropomorfo



Questi robot descritti sono a catena cinematica aperta in quanto non si richiudono su loro stessi creando anelli.

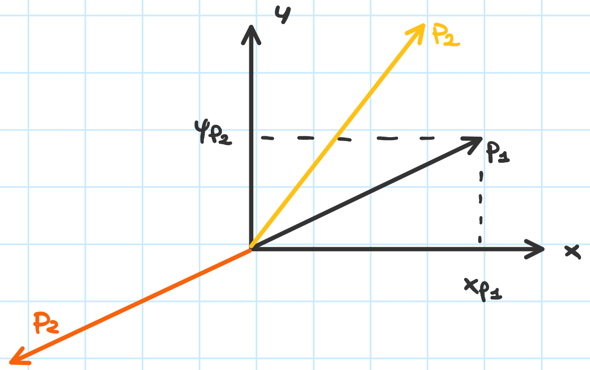
Alle strutture portanti dei robot è possibile collegare un componente detto polso sferico il quale garantisce delle rotazioni. La struttura portante è invece responsabile del posizionamento

Polso sferico:



ACCENNI DI ALGEBRA

Si assume di lavorare in R^2 per semplicità.



È data la seguente matrice:

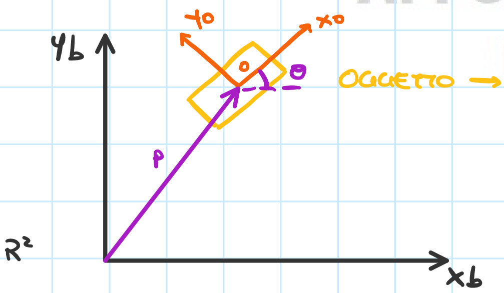
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Il prodotto AP_1 costituisce un vettore P_2 composto da due elementi.
Assumendo successivamente che $AP_1 = P_2 = \alpha P_1$ si definisce α come autovalori della matrice α e in R^2 ne esistono solamente 2 (a meno di considerazioni sul rango).
Autovalori e autovettori si definiscono solo su matrici quadrate ovvero dove spazio di arrivo e partenza coincidono.

Una matrice 3x2 mappa elementi da R^2 a R^3 mentre una matrice 2x3 mappa elementi da R^3 a R^2.

Un problema del tipo $Ax = y$ che è dato da un sistema di equazioni lineari consiste nell'individuare il punto x tale che, moltiplicandolo per A, si ottiene il vettore y.

La posa, come detto, è l'unione di posizione e orientamento.



OGGETTO → un punto materiale necessita solo della posizione mentre un oggetto anche dell'orientamento.
Un oggetto è composto da infiniti punti.

Per descrivere un oggetto sarebbe necessario avere infiniti vettori ciascuno individuante uno degli infiniti punti che lo compongono.
Essendo impraticabile, si procede ad aggiungere un sistema di riferimento solidale con l'oggetto.
Quando l'oggetto ruota / trasla, anche il sistema di riferimento si muove ma rimane solidale all'oggetto.

Perciò per identificare l'oggetto si utilizzano due mezzi:

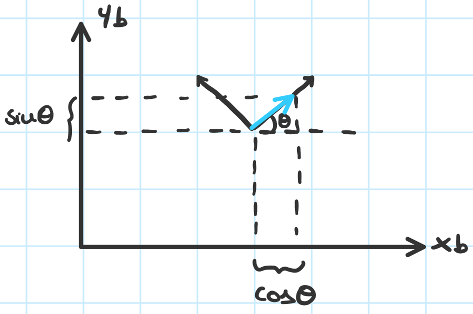
- un vettore che collega le origini del sistema di riferimento del piano con quello solidale all'oggetto
- un angolo che identifica il disallineamento dell'asse x del sistema di riferimento solidale con l'oggetto rispetto a quello del sistema di riferimento del piano.

con l'oggetto rispetto a quello del sistema di riferimento del piano.

Ne consegue che la posa si esprime come composto da $\{P, \Theta\}$ dove P in R^2 è dato da 2 componenti.

Il passaggio in R^3 è invece più complesso a causa della necessità di dover avere più di un angolo per rappresentare il disallineamento dei due sistemi di riferimento. È facile dimostrare che in R^3 si ha bisogno di almeno 3 angoli.

Anziché gli angoli si predilige l'uso dei versori del sistema di riferimento dell'oggetto che vengono proiettati sul sistema di riferimento dello spazio. In R^3 ne consegue che si hanno 9 componenti (tuttavia ridondanti in quanto legate fra di loro). Inoltre, è possibile applicare tale meccanismo anche in R^2:



Per ruotare una matrice in R^2 si utilizza la seguente matrice:

$$\begin{bmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{bmatrix}$$

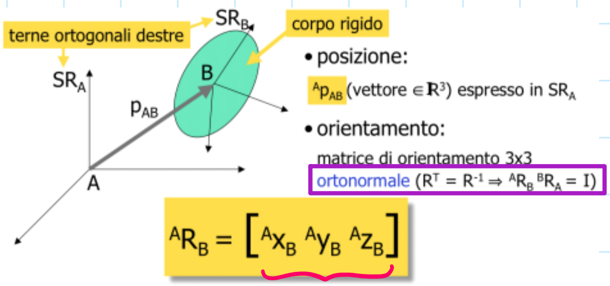
In R^3 una rotazione vi sono più parametri di descrizione che devono seguire un criterio ben definito (es. di eulero).

I robot industriali di solito hanno 6 gradi di libertà: tre per la posizione, tre per l'orientamento

8 MARZO

POSIZIONE E ORIENTAMENTO DEI CORPI

Utilizzando l'approccio dei versori si ha:



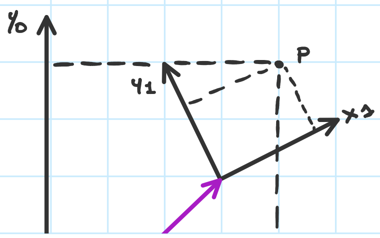
Versori proiettati sugli assi

Specifiche di notazione:

$\cos(\Theta) = C_\Theta$

$\cos(\Theta + \beta) = C_{\Theta\beta}$

Cambiamento di coordinate

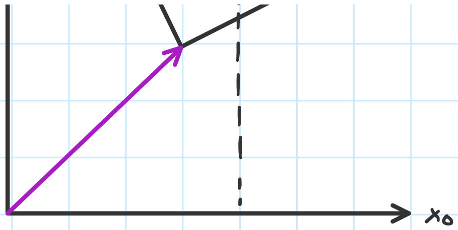


Matrice di rotazione per costruzione geometrica

$$R_1^0 = \begin{pmatrix} C_\Theta & -S_\Theta \\ S_\Theta & C_\Theta \end{pmatrix}$$

dal sistema zero al sistema 1

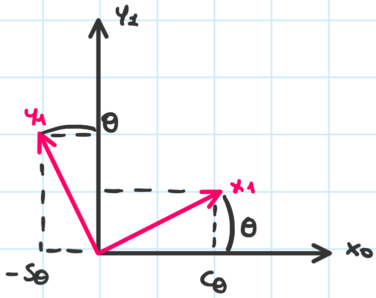
$p^0 = o_1^0 + R_1^0 \, p^1$



dal sistema zero
al sistema 1

$$p^0 = O^0_1 + R^0_1 \, p^1$$

La modalità più semplice consiste nel far combaciare le due origini:



PROPRIETÀ

$$R^0_1(\theta) = \begin{bmatrix} C\theta & -S\theta \\ S\theta & C\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C\theta & S\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -S\theta \\ C\theta \end{bmatrix} = 0$$

$$\det(R_1) = 1$$

$$\left[R^0_1\right]^{-1} = \left(R^0_1\right)^T = R^1_0$$

Data una matrice, essa è di rotazione se la norma delle colonne sia pari a 1 ovvero:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \iff$$

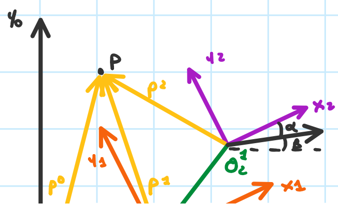
- $r_{11}^2 + r_{21}^2 = 1$
- $r_{12}^2 + r_{22}^2 = 1$
- $\begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \end{bmatrix} = r_{11} \cdot r_{12} + r_{21} \cdot r_{22} = 0$

es. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ è una matrice di rotazione in quanto rispetta i tre vincoli

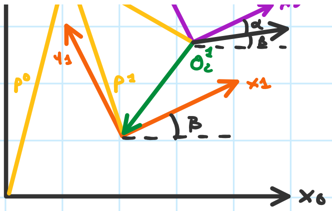
In R^3 si avrà una matrice 3x3 con 6 vincoli.

Risolvendo la matrice all'inverso si può ricavare l'angolo.

es.



Il punto P, anche se rimane fermo, può essere descritto rispetto ai vari sistemi di riferimento.



essere descritto rispetto ai vari sistemi di riferimento.

$$p^1 = \underbrace{O_2^1}_{\text{vettore spostamento fra il sistema 2 e il sistema 1}} + \underbrace{R_2^1}_{\text{matrice di rotazione dal sistema 1 al 2}} p^2$$

$$R_2^1 = \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha \\ S\alpha & C\alpha \end{bmatrix}$$

$\boxed{R_2^0 \rightarrow \text{"R da 2 a 0"}}$

$$p^0 = \underbrace{O_1^0 + R_1^0 p^1}_{O_1^0 + R_1^0 [O_2^1 + R_2^1 p^2]} \qquad R_1^0 = \begin{bmatrix} C\beta & -S\beta \\ S\beta & C\beta \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{O_1^0 + R_1^0 O_2^1}_{O_2^0} + \underbrace{R_1^0 R_2^1}_{R_2^0} \cdot p^2$$

somma triangolare dei vettori

→ le matrici di rotazione si possono COMPORRE

Le matrici di rotazione in R^3 presentano delle righe e colonne da matrice identità se avviene una rotazione elementare intorno ad un asse.

es. $R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ → rotazione intorno a x

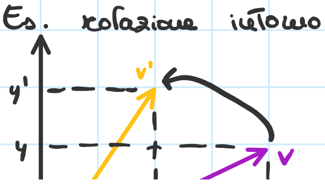
* si usa una rotazione LEVOGIRA

$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$ → rotazione intorno a y

$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ → rotazione intorno a z

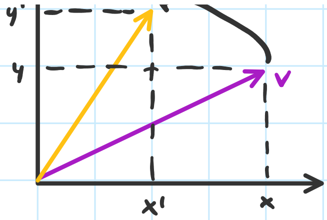
Per ruotare un vettore basta moltiplicarlo per una matrice di rotazione

Es. rotazione intorno



$x = |v| \cos\alpha$

$y = |v| \sin\alpha$



$x = |v| \cos\alpha$

$y = |v| \operatorname{sen}\alpha$

$$x' = |v| \cos(\alpha+\theta) = |v| (\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta) = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$y' = |v| \sin(\alpha+\theta) = |v| (\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta) = x\sin\theta + y\cos\theta$$

ovvero

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R_z(\theta) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Funzione arcotangente

La funzione arcotangente (ovvero $\tan^{-1}$) non è univoca ovvero non ha un risultato univoco. Si ricorre dunque, nei software matematici, delle funzioni a due argomenti come ad esempio atan2:

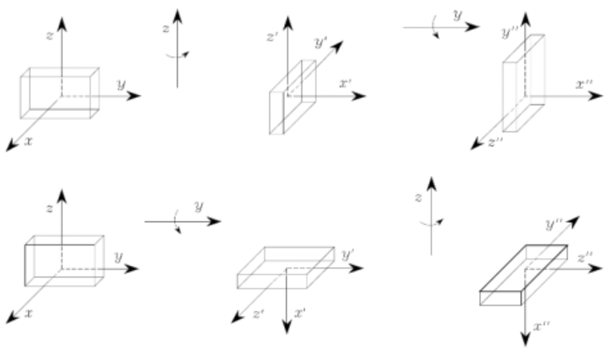
$$\operatorname{atan2}(y,x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x>0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & y \geq 0,\ x<0 \\ -\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & y<0,\ x<0 \\ \frac{\pi}{2} & y>0,\ x=0 \\ -\frac{\pi}{2} & y<0,\ x=0 \\ \text{undefined} & y=0,\ x=0 \end{cases}$$

In poche parole la MATRICE DI ROTAZIONE rappresenta una trasformazione di coordinate mettendo in relazione due terne differenti.

Nel caso di composizioni di rotazioni rispetto ad una terna fissa, si moltiplicano da destra verso sinistra le singole matrici di rotazione in base all'ordine delle rotazioni.

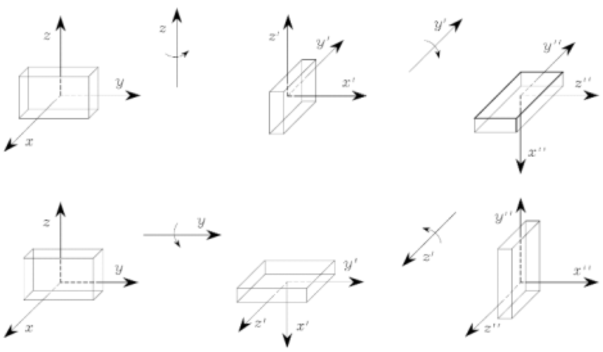
es $R_2^0 = R_1^0 R_0^1 R_2^1 R_1^0 = I R_2^1 R_1^0 = R_2^1 R_1^0$

Rotazioni rispetto ad una terna fissa



Per terna mobile si intende invece la terna solidale col corpo e si distingue da quella di riferimento (o fissa).

Rotazioni rispetto alla terna corrente



Nel caso di una terna mobile si moltiplicano invece le matrici di rotazione da sinistra verso destra.

es. $R_2^0 = R_1^0 \, R_2^1$

9 Marzo

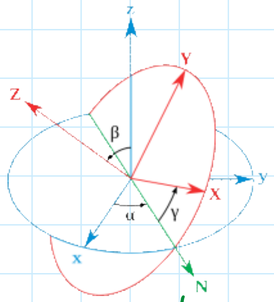
è di rotazione se
- le colonne hanno norma 1
- i prodotti scalari tra le colonne danno sempre 0 tranne quando fatte con loro stesse

Data una matrice di rotazione, per ricavare gli angoli di rotazione si utilizzano

Angoli in Terna mobile:

Gli ANGOLI DI EULERO vengono utilizzati per descrivere l'orientamento di un corpo rigido nello spazio.

Dato il piano di riferimento xyz e uno ruotato XYZ (coincidenti nell'origine), si definisce linea dei nodi la retta di intersezione fra



Linea dei nodi

Questa è tuttavia una delle 12 possibili combinazioni e prende il nome di ZXZ.

Dal punto di vista algebrico passare da xyz a XYZ significa operare un cambiamento di base in tre step che corrispondono a tre rotazioni secondo i tre angoli di Eulero che sono:

Angolo di precessione (α)
- $\alpha \rightarrow$ angolo fra l'asse x e la linea dei nodi

Angolo di nutazione (β)
- $\beta \rightarrow$ angolo fra gli assi z e Z

Angolo di rotazione propria (γ)
- $\gamma \rightarrow$ angolo fra la linea dei nodi e l'asse X

dunque le tre rotazioni saranno

1) rotazione di α intorno a z, facendo così coincidere x con N. La matrice sarà:

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) rotazione di β intorno a N. La matrice sarà:

$$R_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

3) rotazione di γ intorno a Z. La matrice sarà:

$$R_\gamma = \begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

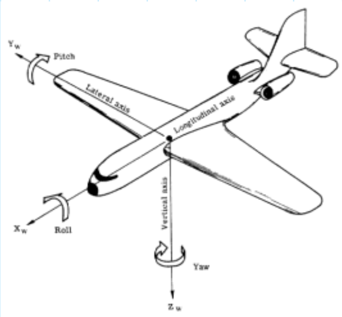
Data la matrice invece si cerca di ricavare i valori degli angoli e, come quasi tutti i problemi inversi, la soluzione non è univoca. In questo caso si ottiene sempre una coppia di soluzioni.

Angoli in Terna mobile:

Gli ANGOLI ROLL-PITCH-YAW possono essere facilmente rappresentati tramite il decollo di un aereo.

Angoli in Terna mobile:

Gli ANGOLI ROLL - PITCH - YAW possono essere facilmente rappresentati tramite il decollo di un aereo.
In questo caso, rispetto ad una rotazione fissa, bisogna fare una rotazione inversa cioè moltiplicando R_z per R_y per R_x.



Queste due rotazioni sono minime (a tre angoli) ma ne esistono anche non minime a 4 parametri.

Quale scegliere? È importante saper saltare da una terna all'altra in base al movimento compiuto.

COORDINATE OMOGENEE

Un punto nello spazio è individuato da tre coordinate dette non omogenee che sono x, y e z.
Si definiscono omogenee invece quelle coordinate $[x \;\; y \;\; z \;\; u]$ tali che

$$X = \frac{x}{u} \quad , \quad Y = \frac{y}{u} \quad , \quad Z = \frac{z}{u} \, .$$

↳ detto FATTORE DI SCALA

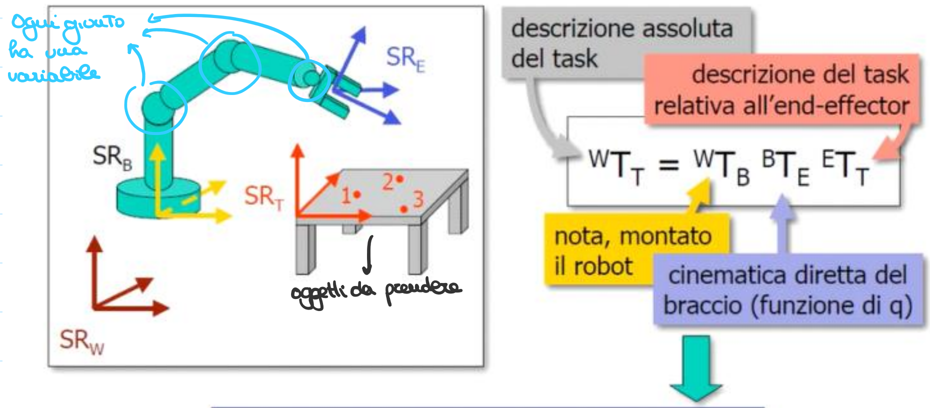
Dunque si avrà che il punto $P = a\,i_x + b\,j_y + c\,k_z$ sarà esprimibile attraverso tutte quelle quaterne di numeri $[x \;\; y \;\; z \;\; u]$ tali che $a = \frac{x}{u}$ $b = \frac{y}{u}$ $c = \frac{z}{u}$

L'origine avrà coordinate $[0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; u]$

es. $P = i_x + j_y + 9k_z$ può essere rappresentato come

$$P = [1 \quad 1 \quad 9 \quad 1]$$
$$P = [2 \quad 2 \quad 18 \quad 2]$$
$$P = [-9 \quad -9 \quad -81 \quad -9]$$

ESEMPIO CINEMATICA DIRETTA DI UN ROBOT

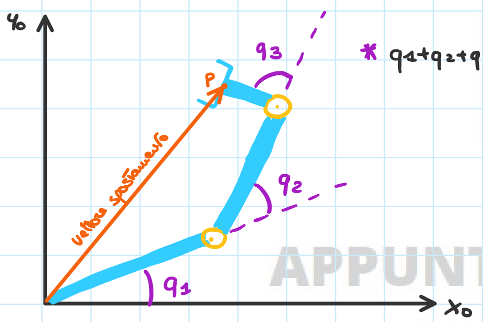


$$ {}^{B}T_E(q) = {}^{W}T_B^{-1}\ {}^{W}T_T\ {}^{E}T_T^{-1} = \text{cost} $$

Nel caso di un robot mobile, per capire il punto di partenza rispetto alla terra fissa si deve integrare le equazioni del moto al rovescio.

Per cinematica diretta si intende il calcolo della posizione di un oggetto conoscendo le coordinate dei suoi giunti. Per cinematica inversa si intende la determinazione dei parametri dei giunti per ottenere la posa cercata.

es



$* \ q_1+q_2+q_3=\theta$ Ricerchiamo la rototraslazione del sistema della mano rispetto a quello di riferimento.

La matrice di rotazione sarà

$$ R_R^0 = R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Il vettore di spostamento che individua P sarà del tipo

$$ P_x = L_1 \cdot \overset{q_1}{\underline{c_1}} + L_2 \cdot \overset{q_1+q_2}{\underline{c_{12}}} + L_3 \cdot \overset{q_1+q_2+q_3}{\underline{c_{123}}} $$

$$ P_y = L_1 \cdot s_1 + L_2 \cdot s_{12} + L_3 \cdot s_{123} $$

$$ P_z = 0 $$

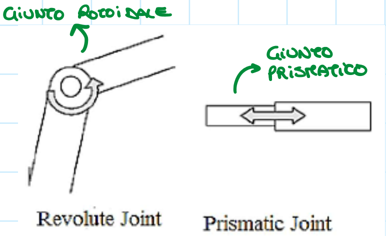
Si avrà dunque che

$$ \hat{R}_R^0 = \hat{R}_1^0 \cdot \hat{R}_2^1 \cdot \hat{R}_R^2 $$

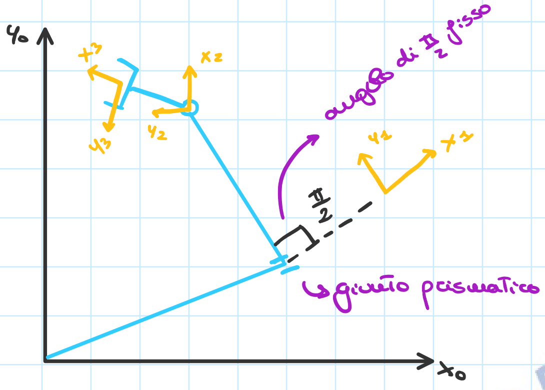
$$ \hat{R}_1^0 = \left[\begin{array}{ccc|c} c_1 & -s_1 & 0 & L_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & L_1 \cdot s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \hat{R}_2^1 = \left[\begin{array}{ccc|c} c_2 & -s_2 & 0 & L_2 \cdot c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & L_2 \cdot s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

$$ \hat{R}_R^2 = \left[\begin{array}{ccc|c} c_3 & -s_3 & 0 & L_3 \cdot c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & L_3 \cdot s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \rightarrow \quad \hat{R}_R^0 = \hat{R}_1^0(q_1) \cdot \hat{R}_2^1(q_2) \cdot \hat{R}_R^2(q_3) $$

15 Marzo



es. Braccio rotolato con giunto prismatico

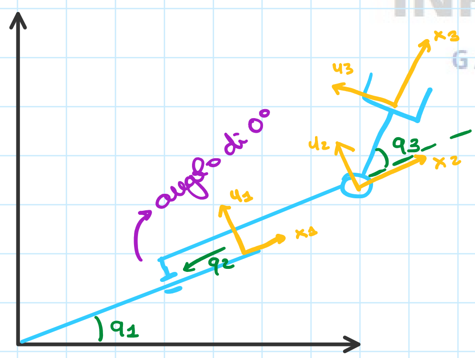


$$Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} rad \\ cm \\ rad \end{matrix}$$

$$\hat{R}_3^0(Q) = \hat{R}_1^0(q_1) \cdot \hat{R}_2^1(q_2) \cdot \hat{R}_3^2(q_3)$$

$$\hat{R}_2^1(q_2) = \left[\begin{array}{ccc|c} C_{\pi/2} & -S_{\pi/2} & 0 & \\ S_{\pi/2} & C_{\pi/2} & 0 & O_2^1 \\ 0 & 0 & 1 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & q_2 \\ 1 & 0 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

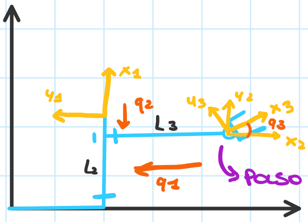
es.



$$\hat{R}_3^0(\Theta) = \hat{R}_1^0 \cdot \hat{R}_2^1 \cdot \hat{R}_3^2$$

$$\hat{R}_2^1(q_2) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & L_2 - q_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

es. Braccio con giunto rotoidale e origini sovrapposte



$$\hat{R}_3^0(Q) = \hat{R}_1^0 \cdot \hat{R}_2^1 \cdot \hat{R}_3^2$$

$$\hat{R}_3^2 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & 0 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \hat{R}_2^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -q_2 \\ -1 & 0 & 0 & -L_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{R}_1^0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & L_1-q_2 \\ 1 & 0 & 0 & L_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \hat{R}_3^0 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & \\ s_3 & c_3 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

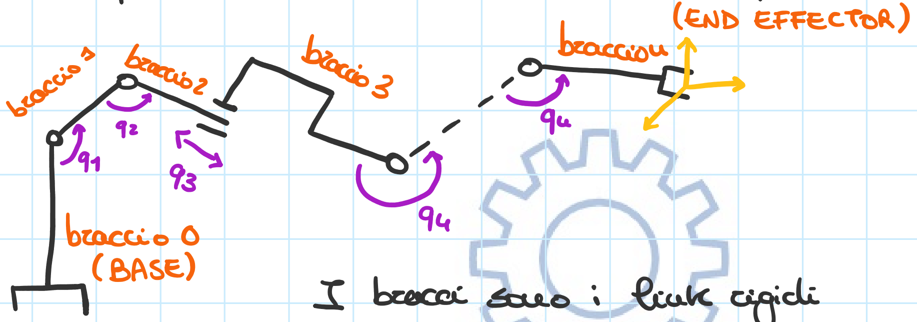
3. Cinematica dei robot

martedì 24 maggio 2022 19:31

Con CINEMATICA si intende la relazione, espressa tramite una matrice di rototraslazione, fra due terne di sistemi di riferimento, uno fisso e l'altro posti all'estremità del robot. La matrice dipenderà dai bracci e dai giunti che sono presenti.

Catene cinematiche aperte:

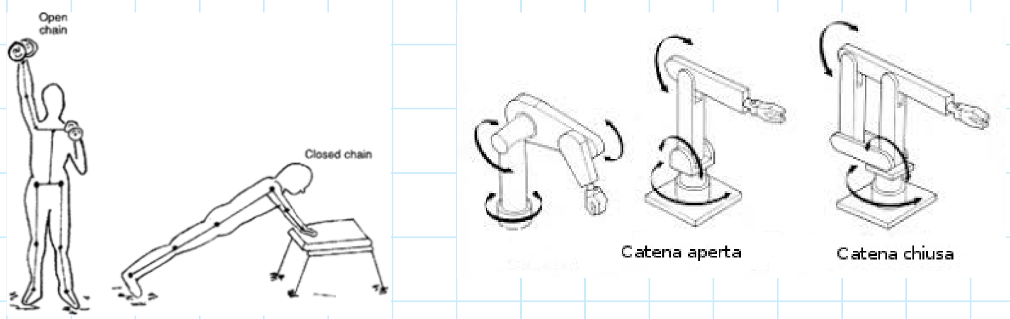
sono tali poiché esiste un membro con un solo accoppiamento.



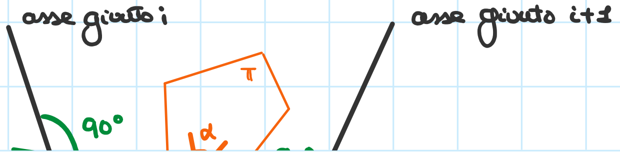
I bracci sono i link rigidi

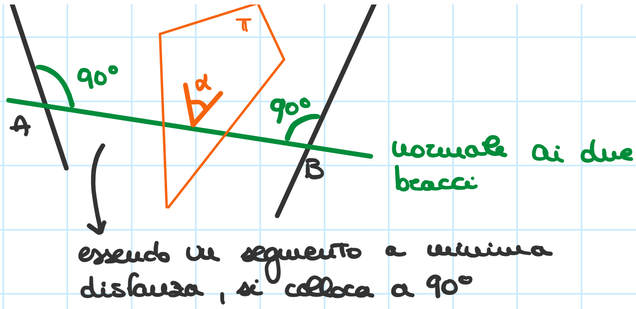
Assegnare le variabili di giunzione non è unico.

* Catena aperta e catena chiusa

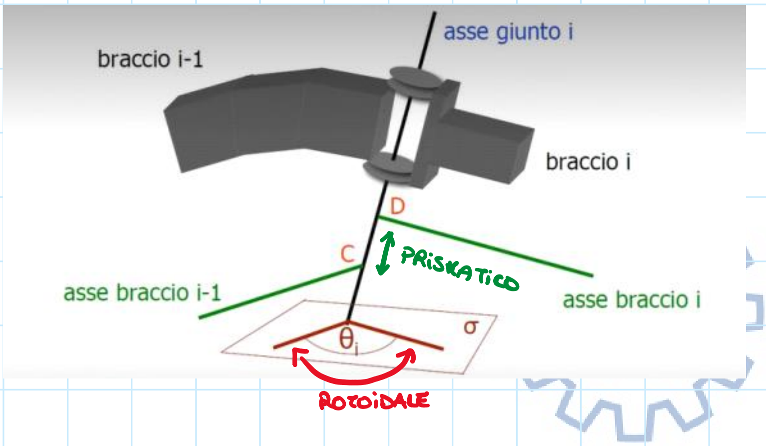


Dati dei giunti, ognuno ha un asse ed esiste una relazione fra giunti che definisce il disallineamento degli assi attraverso un angolo detto di TWIST





Allo stesso modo è possibile definire una relazione fra gli assi dei bracci. L'angolo in questo caso è detto VARIABILE se il giunto è rotoidale mentre variabile è la distanza fra gli assi se il giunto è prismatico.

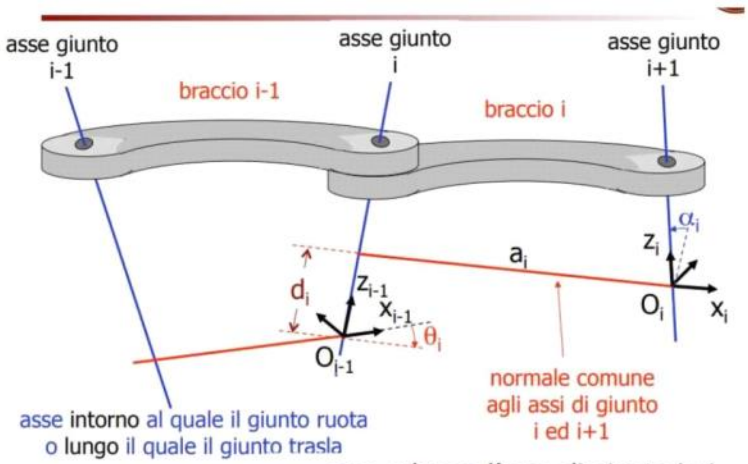


da questo approccio nasce la

CONVENZIONE DI DENAVIT-HARTENBERG

Tale convenzione viene utilizzata per scegliere i sistemi di riferimento in modo che ogni trasformazione (es. rototraslazione) sia rappresen=tabile col minimo numero di parametri (che è quattro).

In questa assegnazione non è rilevante la meccanica bensì la disposizione degli assi.



- asse z_i lungo l'asse di giunto i+1
- asse x_i lungo la normale comune agli assi di giunto i e i+1 (verso: i → i+1)

PARAMETRI DI DENAVIT-HARTENBERG

- a_i = distanza DO_i orientata con x_i (costante = "lunghezza" braccio i)
- d_i = distanza $O_{i-1}D$ orientata con z_{i-1} (variabile se giunto i PRISMATICO)
- α_i = angolo di twist tra z_{i-1} e z_i intorno a x_i (costante)
- θ_i = angolo tra x_{i-1} e x_i intorno a z_{i-1} (variabile se giunto i ROTATORIO)

(dimostrazione mancante)

La matrice di rototraslazione sarà del tipo:

$$\hat{R}_i^{i-1}(q_i) = \left[\begin{array}{ccc|c} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \cdot \cos\alpha_i & \sin\alpha_i \cdot \sin\theta_i & a_i \cdot \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\alpha_i \cdot \cos\theta_i & -\sin\alpha_i \cdot \cos\theta_i & a_i \cdot \sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Vi possono essere ambiguità quando

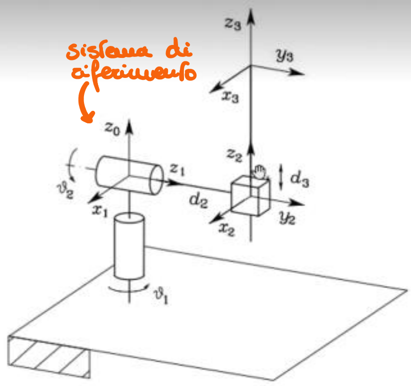
- $a_i = 0$. Si cerca di porre quindi $\theta_i = 0$
- z_{i-1} e z sono paralleli quindi a_i può essere posta ovunque. Si cerca quindi di porlo in modo da avere $d_i = 0$

Inoltre, le condizioni iniziali sono arbitrarie mentre le finali dipendono da quelle immediatamente precedenti.

ESEMPIO TABELLA DH

sferico

Braccio	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
1	0	$-\pi/2$	0	ϑ_1
2	0	$\pi/2$	d_2	ϑ_2
3	0	0	d_3	0



Matrici di rototraslazioni:

$$A_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_2^1 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0 = A_1^0 A_2^1 A_3^2$$

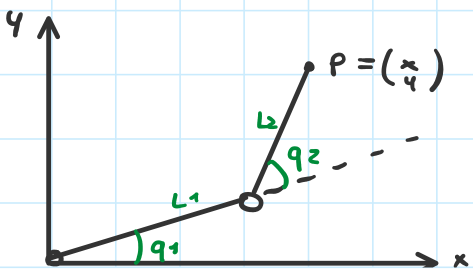
$$= \begin{bmatrix} c_1c_2 & -s_1 & c_1s_2 & c_1s_2d_3 - s_1d_2 \\ s_1c_2 & c_1 & s_1s_2 & s_1s_2d_3 + c_1d_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 & c_2d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

CINEMATICA INVERSA

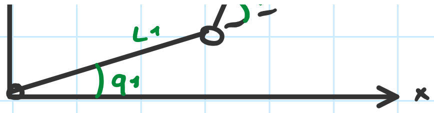
Per cinematica inversa si intende il calcolo delle variabili di giunto conoscendo la posa del robot, ovvero la tabella di D-H.

→ dunque il problema consiste nell'individuare dati di posizionamento di bracci e giunti per ottenere una posa ricercata.

Es. cinematica diretta



$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{matrix} L_1 \cdot C_1 + L_2 \cdot C_{12} \\ L_1 \cdot S_1 + L_2 \cdot S_{12} \end{matrix}$$



* manca la dimostrazione della cinematica inversa

I metodi di risoluzione sono di due tipologie:

- Soluzione ANALITICA
  È un tipo di soluzione NON numerica ma detta in forma chiusa ovvero attraverso una formula matematica.
- Soluzione di ottimizzazione che va a ricercare la soluzione migliore attraverso step successivi di approssimazione numerica

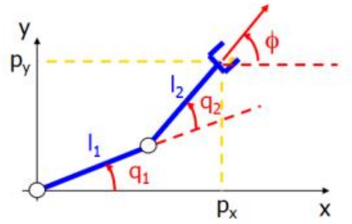
CINEMATICA DIFFERENZIALE

Negli spostamenti di un robot, tramite traslazioni e rotazioni, si può parlare di velocità e, dunque, con cinematica differenziale si intende lo studio dei legami tra il moto (cioè la loro velocità) dei giunti e il moto (cioè la velocità lineare e angolare) nello spazio cartesiano attraverso lo jacobiano del manipolatore.
Infatti, la velocità è esprimibile come la derivata dello spazio sul tempo.

Inoltre, si parla di JACOBIANO in quanto, dato un sistema di funzioni che esprime il cambiamento di coordinate, è possibile definire una matrice di derivate parziali di tali trasformazioni il cui determinante è proprio chiamato jacobiano associato al cambiamento di coordinate.
Lo jacobiano è ottenibile tramite diverse modalità ovvero

- per differenziazione e si ottiene lo jacobiano analitico
- senza derivazione e si ottiene lo jacobiano geometrico

Esempio jacobiano analitico robot 2R planare → movimento in 2D (su un piano)



cinematica diretta

$$r \begin{cases} p_x = l_1 c_1 + l_2 c_{12} \\ p_y = l_1 s_1 + l_2 s_{12} \\ \phi = q_1 + q_2 \end{cases}$$

$$\dot{p}_x = -l_1 s_1 \dot{q}_1 - l_2 s_{12}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)$$

$$\dot{p}_y = l_1 c_1 \dot{q}_1 + l_2 c_{12}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)$$

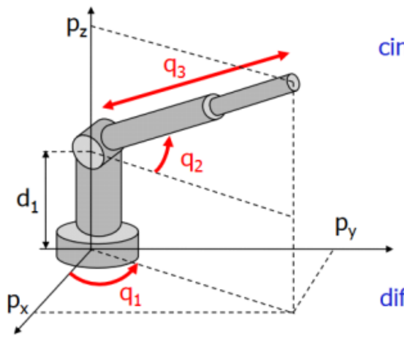
$$\dot{\phi} = \omega_z = \dot{q}_1 + \dot{q}_2$$

Jacobiano analitico = geometrico

$$J_r(q) = \begin{pmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \\ \hline 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \end{matrix}}\right\} J_L(q) \\ \left.\vphantom{a}\right\} J_A(q) \end{array}$$

data r, qui è una matrice 3 x 2

Esempio jacobiano analitico robot planare → movimento in 3D (nello spazio)



cinematica diretta (qui solo r = p)

$$p_x = q_3 c_2 c_1$$

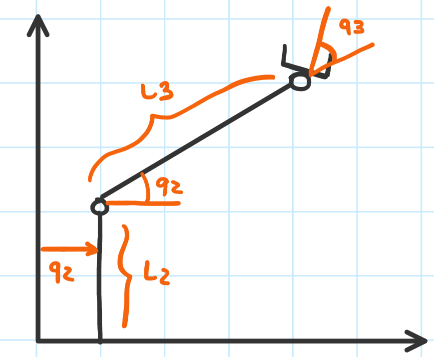
$$p_y = q_3 c_2 s_1$$

$$p_z = d_1 + q_3 s_2$$

differenziando rispetto al tempo

$$v = \dot{p} = \begin{pmatrix} -q_3 c_2 s_1 & -q_3 s_2 c_1 & c_2 c_1 \\ q_3 c_2 c_1 & -q_3 s_2 s_1 & c_2 s_1 \\ 0 & q_3 c_2 & s_2 \end{pmatrix} \dot{q} = J_r(q)\, \dot{q}$$

ESERCIZIO



$$\begin{cases} x = q_1 + L_3 \cdot c_2 \\ y = L_2 + L_3 \cdot s_2 \\ \theta = q_2 + q_3 \end{cases}$$

Ne deriva che

$$v_x = \dot{x} = q_1 - L_3 \cdot s_2 \cdot q_2$$

$$v_y = \dot{y} = L_3 \cdot c_2 \cdot q_2$$

$$\omega = \dot{\theta} = q_2 + q_3$$

$$\Rightarrow J = \begin{bmatrix} 1 & -L_3 \cdot s_2 & 0 \\ 0 & L_3 \cdot c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

configurazione SINGOLARE: la matrice perde di rango

$\det(J) = L_3 \cdot c_2$ che è pari a 0 quando $q_2 = \frac{\pi}{2}$

configurazione SINGOLARE: la matrice perde di rango

$\det(J) = l_3 \cdot c_2$ che è pari a 0 quando $\begin{cases} q_2 = \frac{\pi}{2} \\ q_2 = \frac{\pi}{2} + \pi \end{cases}$

In generale, l'angolo più facile da calcolare è q_1 (secondo la convenzione).

La matrice di rotazione è detta OPERATORE UNITARIO ovvero si ha che se $U^T \cdot U = U \cdot U^T = I$ allora $U^{-1} = U^T$ e dunque U è un operatore unitario. Inoltre, il determinante di tale matrice è 1, nel caso in cui fosse pari a -1 si parla di rotazione immaginaria ovvero non conforme allo schema che segue la regola della mano destra.

In aggiunta, gli operatori unitari sono invarianti rispetto alla norma ovvero anche se si applica tale operatore, la norma non cambia. Ciò significa che ruotando un corpo, la sua dimensione NON si modifica, ovvero non viene stracciato.

Per riassumere:

in R^2 si ha che una matrice di rotazione sarà

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Dunque per ruotare P da A a B bisogna fare $P_B = \underbrace{R_{A2B}}_{\text{da A a B}} \cdot P_A$

mentre nella rototraslazione sarà $P_B = R_{A2B} \cdot P_A + \underbrace{t}_{\text{traslazione}}$

Tuttavia, anziché avere una matrice e una traslazione, si scrive tutto come una singola matrice che sarà

$$\begin{bmatrix} P_B \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} R_{A2B} & t \\ \hline 0 - 0 & 1 \end{array}\right]}_{Rt_{A2B}} \begin{bmatrix} P_A \\ 1 \end{bmatrix}$$

Attenzione! Anche se R (matrice di rotazione) è un operatore unitario, ciò non vale per R_t (matrice di rototraslazione), a meno che, ad esempio, $t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ovvero la traslazione sia pari a 0 e la matrice sia di rotazione

Procedimento per ottenere l'inversa: possibile domanda d'esame

R_t^{-1} computation, given $P \in \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$.

$$\begin{bmatrix} \tilde{P} \\ 1 \end{bmatrix} = R_t \begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \tilde{\mathcal{P}} = R_t \mathcal{P} \longleftrightarrow \begin{cases} \tilde{P} & = RP + t \\ 1 & = 1 \end{cases}$$

$$\tilde{P} = RP + t \rightarrow P = R^{-1}(\tilde{P} - t) \rightarrow P = R^T(\tilde{P} - t)$$

$$P = R^T\tilde{P} + (-R^T t) \rightarrow \begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} R^T & -R^T t \\ \hline \mathbb{0}^T & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \tilde{P} \\ 1 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \mathcal{P} = R_t^{-1}\tilde{\mathcal{P}}$$

$$R_t^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} R^T & -R^T t \\ \hline \mathbb{0}^T & 1 \end{array}\right]$$

Le rotazioni di $\frac{\pi}{2}$ di tutto un sistema di riferimento sono dette rotazioni elementari.

4. Toolbox

domenica 29 maggio 2022 14:59

TOOLBOX 2D

Il toolbox di Peter Corke permette di eseguire routine in modo veloce. Le funzioni principali sono:

- rot2 (θ) ⇒ Calcola la matrice di rotazione

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

- trot2 (θ) ⇒ calcola la matrice di rototraslazione con traslazione nulla

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- transl2 (x, y) ⇒ calcola la matrice di traslazione di x e y

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per ottenere una matrice di rototraslazione si deve fare la moltiplicazione

$$\text{transl2}(x,y) \cdot \text{trot2}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x \\ \sin\theta & \cos\theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

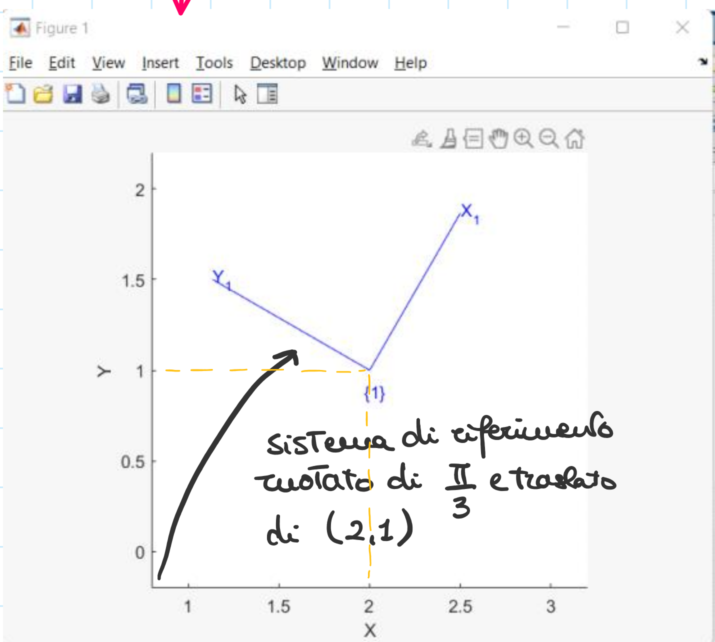
$$\neq$$

$$\text{trot2}(\theta) \cdot \text{transl}(x,y)$$

es.

```
%% 2d rotation
theta=pi/3;
R1=rot2(theta);
R2=[
    cos(theta) -sin(theta);
    sin(theta) cos(theta)
    ];

theta=pi/3;
TR=trot2(theta);
Tt=transl2(2,1);
TRt=Tt*TR;
plotvol([0 4 0 4]);
trplot2(TRt,'frame','1','color','b');
```

```
>> TR=trot2(theta)

TR =
```
Matrice di rotazione
```
    0.5000   -0.8660         0
    0.8660    0.5000         0
         0         0    1.0000

>> Tt=transl2(2,1)

Tt =
```
Matrice di traslazione
```
     1     0     2
     0     1     1
     0     0     1

>> TRt=Tt*TR

TRt =
```
Matrice di rototraslazione
```
    0.5000   -0.8660    2.0000
    0.8660    0.5000    1.0000
         0         0    1.0000
```



TOOLBOX 3D

Nel caso 3D, bisogna realizzare la rotazione del sistema rispetto a tre matrici ciascuna relativa ad uno degli assi.

- $rot_x(\theta) \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

  rotazione intorno all'asse x

- roty(θ) ⇒
$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$
rotazione intorno all'asse y

- rotz(θ) ⇒
$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
rotazione intorno all'asse z

- trplot(R) ⇒ crea il grafico 3D di rotazione dove R è una rotx/roty/rotz

- tranimate(R) ⇒ crea una animazione della rotazione dove R è una rotx/roty/rotz

Oltre che alle matrici di rotazioni, due altri modi di esprimere le rototraslazioni sono gli angoli di Eulero e i quaternioni (o asse-angolo). Nel caso degli angoli di Eulero, si hanno 27 possibili combinazioni delle rotazioni intorno ai 3 assi, di cui 12 in cui non ci sono rotazioni consecutive intorno allo stesso asse. Inoltre, per una stessa soluzione vi sono due di queste combinazioni.

Un esempio di combinazione degli angoli di Eulero è la roll-pitch-yaw detta anche ZYX o XYZ.

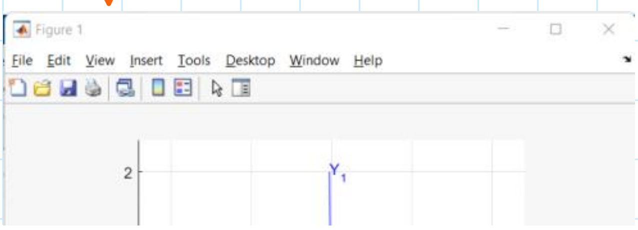
es.

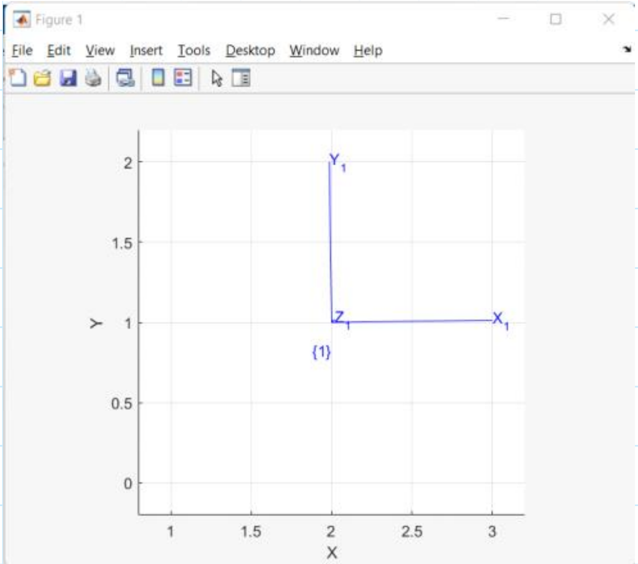
```
roll=-pi/3;   --> x
pitch=pi/3;   --> y
yaw=pi/4;     --> z
TR=trotz(yaw)*troty(pitch)*trotx(roll);
Tt=transl(2,1,-1);
TRt=Tt*TR;
trplot(TRt,'frame','1','color','b');
```

```
>> TR=trotz(yaw)*troty(pitch)*trotx(roll)

TR =
```
Matrice di rotazione ZYX
```
    0.9997   -0.0140    0.0180         0
    0.0137    0.9997    0.0185         0
   -0.0183   -0.0183    0.9997         0
         0         0         0    1.0000
```

```
>> Tt=transl(2,1,-1)

Tt =
```
Matrice di Traslazione
```
     1     0     0     2
     0     1     0     1
     0     0     1    -1
     0     0     0     1
```

```
>> TRt=Tt*TR

TRt =
```
Matrice di rototraslazione
```
    0.9997   -0.0140    0.0180    2.0000
    0.0137    0.9997    0.0185    1.0000
   -0.0183   -0.0183    0.9997   -1.0000
         0         0         0    1.0000
```





0.9997	-0.0140	0.0180	2.0000
0.0137	0.9997	0.0185	1.0000
-0.0183	-0.0183	0.9997	-1.0000
0	0	0	1.0000

Interpolazione: dati dei punti distinti, una curva di interpolazione li unisce e va a definire quali sono gli altri punti in mezzo. Ad esempio, con questo codice è possibile definire in quanti passi arrivare da T_0 a T_1 attraverso una interpolazione.

▸ **trinterp**: *T = trinterp(T0, T1, S) is a homogeneous transform (4x4) interpolated between T0 when S=0 and T1 when S=1*

```
roll0=0;
pitch0=0;
yaw0=0;
roll1=pi/3;
pitch1=pi/5;
yaw1=4*pi/5;
T0=transl(0.4, 0.2, 0)*rpy2tr(roll0,pitch0,yaw0);
T1=transl(-0.4, -0.2, 0.3)*rpy2tr(roll1,pitch1,yaw1);
N=50;
Ts=trinterp(T0, T1,[0:N-1]/(N-1));
tranimate(Ts);
```


Nel caso di catene cinematiche aperte è più facile la cinematica diretta che l'inversa in quanto quest'ultima richiede l'inversione di equazioni non lineari. Nel caso di catene cinematiche chiuse invece è più semplice la cinematica inversa che quella diretta.

CREAZIONE DI UN ROBOT

Si data una catena cinematica

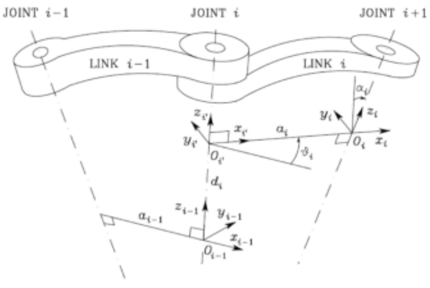


Fig. 2.16. Denavit–Hartenberg kinematic parameters

parametro che varia se il giunto è PRISMATICO

L_1	θ_1	d_1	a_1	α_1
...	...	...	...	...
L	θ	d	a	α
...	...	...	...	...
L_n	θ_n	d_n	a_n	α_n

parametri che NON variano poiché sono legati alla geometria del secondo braccio rispetto al primo

parametro che varia se il giunto è ROTOIDALE

Nel toolbox è presente una funzione chiamata Link che riceve cinque parametri:

$L = \text{Link}([\theta, d, a, \alpha, \sigma], \text{'standard'})$

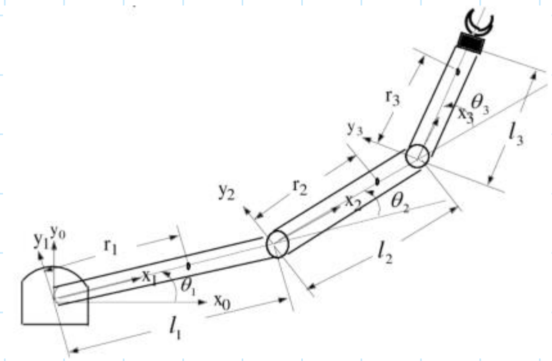
dove $\sigma = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ se il giunto è rotoidale / prismatico

ogni Link crea un braccio e tramite la funzione SerialLink posso unirli in un robot. Tale funzione riceve tre parametri:

robot = SerialLink([L1 L2 ... Ln], 'name', 'myRobot')

I robot non sono destri in determinate zone dello spazio di azione ovvero non gli si riesce ad imprimere, in quelle zone, la forza necessaria a farlo agire.

Esempio Robot planare a tre braccia



link	θ	d	a	α	σ
L_1	q_1	0	l_1	0	0
L_2	q_2	0	l_2	0	0
L_3	q_3	0	l_3	0	0

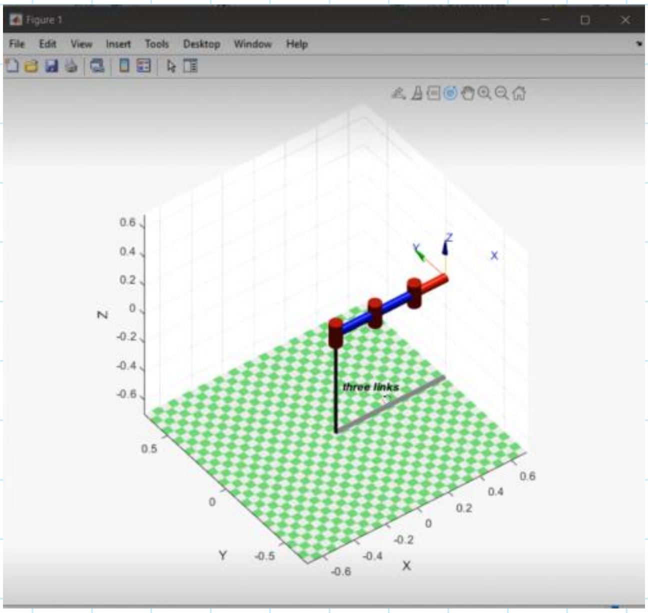
```
l1=0.25;%m
l2=0.25;%m
l3=0.2;%m

sigma1=0;%%rot
sigma2=0;%%rot
sigma3=0;%%rot

q1_min=0;q1_max=pi/2;
q2_min=0;q2_max=pi/2;
q3_min=-pi/2;q3_max=pi/2;
```

```
%Link([theta d a alpha])
L1=Link([0,0,l1,0,sigma1],'standard');
L2=Link([0,0,l2,0,sigma2],'standard');
L3=Link([0,0,l3,0,sigma3],'standard');

L=[L1 L2 L3];
threelinks=SerialLink(L, 'name', 'three links');
```

costruisce la tabella di DH e funziona ad oggetti

Attenzione! Non conviene utilizzare i limiti di giunto del toolbox ma conviene costruire le traiettorie affinché non ci passino.

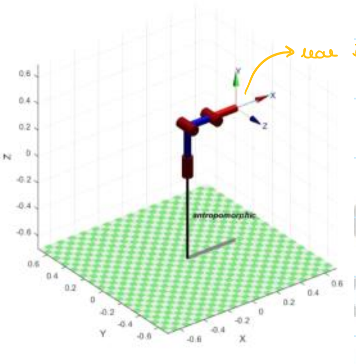
es. richiamare threelink.plot([0,0,0]) genera per il robot precedente tale plot:



Esempio Robot antropomorfo

link	θ	d	a	α	σ
L_1	q_1	l_1	0	$\frac{\pi}{2}$	0
L_2	q_2	0	l_2	0	0
L_3	q_3	0	l_3	0	0

```
L1=Link([0,l1,0,pi/2,sigma1]);
L2=Link([0,0,l2,0,sigma2]);
L3=Link([0,0,l3,0,sigma3]);
L=[L1 L2 L3];
antro=SerialLink(L, 'name', 'antro');
```



non è stato messo il polso

La funzione jtraj opera la join fra delle pose del braccio in modo da creare una sorta di traiettoria. Attraverso questa funzione è possibile, ad esempio, realizzare il movimento di pick and place.

Come scegliere una soluzione?

Fra le multiple soluzioni, si sceglie una soluzione in base a due caratteristiche:

1) quella che rispetta i vincoli ambientali
2) quella che è più vicina alla configurazione attuale

e, in caso,

3) quella più destra

La funzione fkine genera la soluzione di cinematica diretta ovvero la matrice di rototraslazione necessaria a realizzare lo spostamento del robot su cui viene chiamato fino al punto passato come argomento

$$T1 = antro.fkine([0,0,0]) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 + l_3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La funzione ikine genera invece la soluzione alla cinematica inversa

matrice di rototraslazione

rotx rotz

$$antro.ikine(\underline{T1}, 'mask', \underbrace{[1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0]}_{x\ y\ z\ \ roty}) = \underline{[0\ 0\ 0]}$$ → posizione di arrivo

La maschera guida l'inversione. Mettendo un altro 1 (diminuendo i gradi di libertà) potrebbe non esserci soluzione

Il problema di cinematica inversa può essere risolto anche in altri due modi.

Lez. 16 aprile, dimostrazione cinematica differenziale

ne deriva che

Conoscendo il valore attuale di una variabile e la sua derivata è possibile ricavare una stima del suo valore successivo.

Il concetto alla base della prima modalità consiste nel risolvere il problema una sola volta con le condizioni iniziali e, successivamente, di risolvere il problema come di cinematica differenziale. Tale struttura nella teoria del controllo è detta ad anello aperto. Tuttavia, con questo procedimento si rischia a lungo andare di accumulare errori. Conviene, dunque, periodicamente "azzerare" il sistema risolvendo nuovamente il problema di cinematica inversa.

ESEMPI:

Cinematica differenziale

Ikine

```matlab
%% manipolatore planare a due bracci

l1=0.2;%m
l2=0.2;%m

sigma1=0;%%rot
sigma2=0;%%rot

%Link([theta d a alpha])
L1=Link([0,0,l1,0,sigma1],'standard');
L2=Link([0,0,l2,0,sigma2],'standard');


L=[L1 L2];
twolinks=SerialLink(L, 'name', 'two links');

R=0.4;

% theta=0:deg2rad(10):2*pi;
theta_dot=deg2rad(10);%%rad/sec

y_dot=@(theta)(R*cos(theta)*theta_dot);
x_dot=@(theta)(-R*sin(theta)*theta_dot);


theta0=0;
Q0=[0.01;0.01];

Q=Q0';

T=0.1;%sec
Qk=Q0;

for k=1:2*pi/(theta_dot*T)
    J=twolinks.jacob0(Qk);
    J=J(1:2,1:2);
    theta=theta0+theta_dot*k*T;
    v=[
        x_dot(theta);
        y_dot(theta);
        ];
    Qk1=Qk+pinv(J)*v*T;
    Q=[
        Q;
        Qk1'
        ];
    Qk=Qk1;
end

twolinks.plot(Q);
```

↳ catena ad anello aperto

```matlab
%% manipolatore planare a due bracci

l1=0.2;%m
l2=0.2;%m

sigma1=0;%%rot
sigma2=0;%%rot

%Link([theta d a alpha])
L1=Link([0,0,l1,0,sigma1],'standard');
L2=Link([0,0,l2,0,sigma2],'standard');


L=[L1 L2];
twolinks=SerialLink(L, 'name', 'two links');



R=0.4;%0.3;

% theta=0:deg2rad(10):2*pi;
theta_dot=deg2rad(10);%%rad/sec

yt=@(theta)(R*sin(theta));
xt=@(theta)(R*cos(theta));

% % % y_dot=@(t)(R*cos(t)*theta_dot);
% % % x_dot=@(t)(-R*sin(t)*theta_dot);


theta0=0;
Q0=[0.01;0.01];

Q=Q0';

T=0.1;%sec
Qk=Q0;

for k=1:2*pi/(theta_dot*T)
    theta=theta0+theta_dot*k*T;

    Rt=transl(xt(theta),yt(theta),0)*trotz(theta);

    Qk1=twolinks.ikine(Rt,Qk,'mask',[1 1 0 0 0 0]);
    Q=[
        Q;
        Qk1(:)'
        ];
    Qk=Qk1;
    k
end



twolinks.plot(Q);
```

↳ sempre corretto