

Progetto di Fondamenti di Automatica

GAIA ASSUNTA BERTOLINO
MAT. 209507

A.A. 2020/2021
TRACCIA 12

Traccia n° 12

a. Si consideri un sistema lineare e stazionario a tempo continuo descritto dalla seguente risposta al segnale $u(t) = e^{-t} 1(t)$

$$y(t) = \left(-\frac{7e^{-5t}}{44} + \frac{e^{-t}}{4} - \frac{4}{11} \sqrt{2} e^{-2t} \sin(\sqrt{2}t) - \frac{1}{11} e^{-2t} \cos(\sqrt{2}t) \right) 1(t)$$

Determinare:

1. la funzione di trasferimento del sistema ed i suoi poli e zeri;
2. i modi di evoluzione libera del sistema;
3. la risposta all'impulso del sistema;
4. il risposta al gradino ed il suo grafico;
5. la risposta alla rampa;
6. un possibile modello ARMA la cui funzione di trasferimento è quella ottenuta nel primo punto dell'esercizio;
7. le condizioni iniziali in corrispondenza delle quali la risposta al gradino coincide con la risposta a regime.

b. Disegnare e discutere il Diagramma di Bode per la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{64 (s - 1)}{s^2 (s^2 + 2s + 64)}$$

d. Si consideri il seguente schema di controllo in retroazione algebrica ed unitaria.

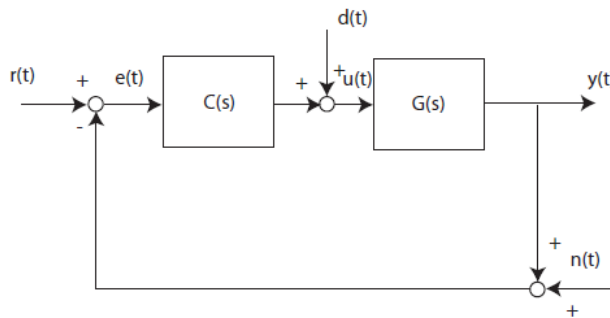


Figure 1:

dove $G(s)$ rappresenta la f.d.t. del processo

$$G(s) = \frac{169}{s(s^2 + 20s + 169)}$$

Si chiede di determinare un regolatore $C(s)$ di struttura semplice che garantisca il soddisfacimento delle seguenti specifiche:

1. errore nullo per un riferimento a gradino;
2. errore relativo sull'uscita, per un disturbo di carico a gradino, non superiore al 5%;
3. Picco di Risonanza $M_{r,dB} \leq 3 \text{ dB}$, banda passante $6 \leq \omega_{BW} \leq 13 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$

restart :

with(inttrans) : with(DynamicSystems) : with(plots) :

Esercizio a

Si consideri un sistema lineare e stazionario a tempo continuo descritto dalla seguente risposta al segnale

$$u_{\text{in}}(t) := \exp(-t) \cdot \text{Heaviside}(t) :$$

quale

$$y_{\text{out}}(t) := \left(-\frac{7}{44} \cdot \exp(-5 \cdot t) + \frac{\exp(-t)}{4} - \frac{4}{11} \cdot \text{sqrt}(2) \cdot \exp(-2 \cdot t) \cdot \sin(\text{sqrt}(2) \cdot t) - \frac{1}{11} \cdot \exp(-2 \cdot t) \cdot \cos(\text{sqrt}(2) \cdot t) \right) \cdot \text{Heaviside}(t)$$
$$y_{\text{out}} := t \mapsto \left(-\frac{7 \cdot e^{-5 \cdot t}}{44} + \frac{e^{-t}}{4} - \frac{4 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{-2 \cdot t} \cdot \sin(\sqrt{2} \cdot t)}{11} - \frac{e^{-2 \cdot t} \cdot \cos(\sqrt{2} \cdot t)}{11} \right) \cdot \text{Heaviside}(t) \quad (1)$$

▼ Determinare la funzione di trasferimento e i suoi poli

Un sistema lineare e stazionario a tempo continuo (detto anche LTI-TC) è definito continuo tale in quanto analizza con continuità un dato fenomeno e stazionario poiché a parità di ingresso viene restituito lo stato indipendentemente dal tempo. In particolare, per via della linearità, si avrà che la mappa di uscita sarà una funzione lineare in x (dove x è lo spazio di stato ovvero dei valori assunti dallo stato del sistema) ed u (dove u è lo spazio delle funzioni di ingresso). Un sistema del genere prevede anche parametri costanti e la validità del PSE (ovvero del principio di sovrapposizione degli effetti).

La funzione di trasferimento (detta anche f.d.t.) di un sistema lineare e stazionario a tempo continuo è una funzione che rappresenta il comportamento del sistema stabilendo il rapporto tra ingresso e uscita. Inoltre, la f.d.t. è una funzione nella variabile complessa s ed è quindi ricavabile conoscendo la relazione $G(s) = (Y(s))/(U(s))$ dove $Y(s)$ è la Trasformata di Laplace (detta anche \mathcal{L} -trasformata) della risposta e $U(s)$ la \mathcal{L} -trasformata dell'ingresso.

In particolare, la \mathcal{L} -trasformata è in termini matematici un integrale improprio parametrico in s quale

$$\mathcal{L}(f(t)) := \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt$$

e le funzioni che sono trasformabili tramite questo operatore sono dette funzioni di classe L.

Inoltre, nella risposta all'ingresso è presente la funzione di Heaviside, detta anche gradino o scalino unitario, che è una funzione right-sided, ovvero vale 0 per valori di ascissa minori dello 0:

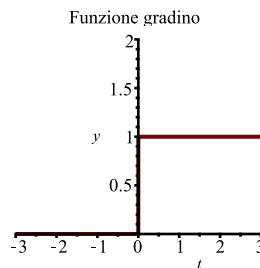
▼ La funzione gradino

La funzione gradino è definita come

$$u_{\text{gradino}}(t) := \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} :$$

La rappresento graficamente

`plot(u_gradino(t), t=-3..3, y=0..2, size=[200, 200], title="Funzione gradino")`



Ritornando al calcolo della funzione di trasferimento, riprendendo il discorso precedentemente fatto, la funzione di trasferimento del sistema è il rapporto tra la componente forzata della risposta e l'ingresso nel dominio di Laplace. Procedo dunque a calcolare la trasformata dei due segnali:

Trasformata di Laplace applicata alla risposta:

$$Y(s) := \text{laplace}(y_{\text{out}}(t), t, s) :$$

$Y(s)$

$$= \frac{s - 2}{(s + 5) (1 + s) (s^2 + 4s + 6)} \quad (1.1)$$

Trasformata di Laplace applicata all'ingresso:

$$U(s) := \text{laplace}(u_{\text{in}}(t), t, s) :$$

$U(s)$

$$\frac{1}{1 + s} \quad (1.2)$$

Calcolo la funzione di trasferimento che chiamo G:

$$G(s) := \left(\frac{Y(s)}{U(s)} \right) :$$

$G(s)$

$$= \frac{s - 2}{(s + 5) (s^2 + 4s + 6)} \quad (1.3)$$

Per il calcolo dei poli ricorro al calcolo delle radici del polinomio al denominatore della f.d.t., detto anche equazione caratteristica del sistema, mentre per calcolare gli zeri trovo le radici del numeratore.

Inoltre, per definizione, la f.d.t. presenta n poli se n è il grado del denominatore.

Calcolo degli zeri:

$$zeri := solve(numer(G(s)) = 0, s)$$

$$zeri := 2$$

(1.4)

Calcolo dei poli:

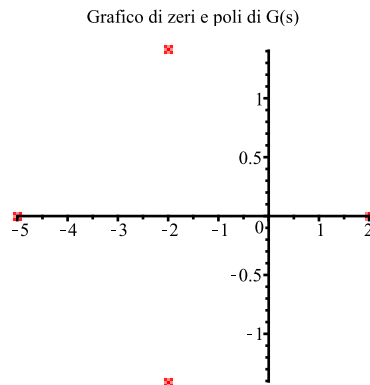
$$poli := solve(denom(G(s)) = 0, s)$$

$$poli := -5, 1\sqrt{2} - 2, -1\sqrt{2} - 2$$

(1.5)

Rappresento graficamente gli zeri e i poli della funzione di trasferimento ottenuta

`ZeroPolePlot(TransferFunction(G(s)), color = [red], title = "Grafico di zeri e poli di G(s)", size = [300, 300])`



In particolare, con le croci vengono identificati i tre poli ottenuti mentre con il cerchio l'unico zero. Dopo questo calcolo si può definire il cosiddetto ordine del sistema dato dal numero di poli della f.d.t.; in questo avremo un sistema di terzo ordine.

Dall'analisi dei poli ottenuti è inoltre possibile definire la BIBO stabilità o meno del sistema dove per stabilità si intende la capacità che ha un sistema dinamico di mantenere una condizione di funzionamento a fronte di perturbazioni di varia natura.

Tuttavia, bisogna precisare che tale proprietà non è direttamente legata al sistema dinamico generico ma alla particolare condizione operativa; invece, nel caso di sistemi LTI-TC (lineari e stazionari a tempo continuo) la stabilità dell'equilibrio, inteso come particolare risposta del sistema in corrispondenza della quale le variabili in gioco sono costanti, è estendibile a tutto il sistema. Di conseguenza, si possono fornire due definizioni, una di carattere più formale e l'altra più pratica, relativamente al termine BIBO stabilità; un sistema è dunque BIBO stabile se

- per ogni ingresso limitato, la corrispondente uscita forzata è limitata; tale definizione richiede però l'enumerazione di tutte le casistiche
- la risposta all'impulso è assolutamente integrabile; ciò implica la convergenza della f.

d.t. del sistema vista come L-trasformata sull'asse immaginario. Dal punto di vista pratico, ciò corrisponde a verificare che i poli della funzione di trasferimento siano a parte reale strettamente negativa.

Nel caso in questione si può dire che il sistema in studio è BIBO stabile in quanto i tre poli presentano parte reale strettamente negativa (-5, -2 e -2).

▼ Determinare i modi di evoluzione libera del sistema

I modi di evoluzione libera rappresentano i contributi delle componenti alla risposta nel dominio del tempo e il loro numero è pari all'ordine del sistema, per cui in questo caso avremo tre modi. Per calcolare i modi di evoluzione libera posso procedere sia calcolando l'antitrasformata (o trasformata inversa) di Laplace per poi depurare dai coefficienti il risultato ottenuto sia attraverso un calcolo manuale che tiene conto della molteplicità di ciascun polo.

In particolare, avendo ottenuto un polo reale e due complessi e coniugati, si avranno 1 modo (polinomial-)esponenziale generato dal polo reale e due modi (polinomial-)pseudo-oscillatori generati dai poli complessi e coniugati.

▼ Procedimento manuale

$$modo_1 := e^{poli[1] \cdot t} \cdot \text{Heaviside}(t)$$

$$modo_1 := e^{-5t} \text{Heaviside}(t) \quad (2.1.1)$$

$$modo_2 := \exp(\text{Re}(poli[2]) \cdot t) \cdot \cos(\text{Im}(poli[2]) \cdot t) \cdot \text{Heaviside}(t)$$

$$modo_2 := e^{-2t} \cos(\sqrt{2} t) \text{Heaviside}(t) \quad (2.1.2)$$

$$modo_3 := \exp(\text{Re}(poli[3]) \cdot t) \cdot \sin(\text{Im}(poli[3]) \cdot t) \cdot \text{Heaviside}(t)$$

$$modo_3 := -e^{-2t} \sin(\sqrt{2} t) \text{Heaviside}(t) \quad (2.1.3)$$

▼ Procedimento automatico

Calcolo dell'antitrasformata:

$$modi_liberi := \text{expand}(\text{invlaplace}(G(s), s, t))$$

$$modi_liberi := \frac{7}{11 (e^t)^5} + \frac{5 \sqrt{2} \sin(\sqrt{2} t)}{11 (e^t)^2} - \frac{7 \cos(\sqrt{2} t)}{11 (e^t)^2} \quad (2.2.1)$$

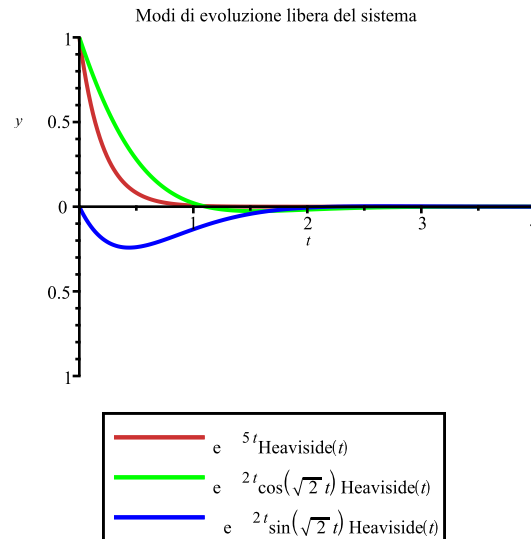
Raccolgo i coefficienti

$$modi_liberi := \left\{ \frac{11}{7} \cdot op(1, modi_liberi), \frac{11}{5 \sqrt{2}} \cdot op(2, modi_liberi), -\frac{11}{7} \cdot op(3, modi_liberi) \right\}$$

$$modi_liberi := \left\{ \frac{1}{(e')^5}, \frac{\cos(\sqrt{2} t)}{(e')^2}, \frac{\sin(\sqrt{2} t)}{(e')^2} \right\} \quad (2.2.2)$$

Rappresento graficamente i modi

`plot([(2.1.1), (2.1.2), (2.1.3)], t = 0 .. 4, y = -1 .. 1, title = "Modi di evoluzione libera del sistema", legend = [(2.1.1), (2.1.2), (2.1.3)], color = [orange, green, blue], size = [400, 400])`



▼ Determinare la risposta all'impulso del sistema

Per calcolare la risposta all'impulso (o funzione di Dirac) calcolo la risposta ad un ingresso la cui trasformata di Laplace è unitaria; di conseguenza, la risposta all'impulso coinciderà con la funzione di trasferimento.

Calcolo dunque la risposta impulsiva come l'antitrasformata della funzione di trasferimento

Calcolo dell'antitrasformata che chiamo $g(t)$

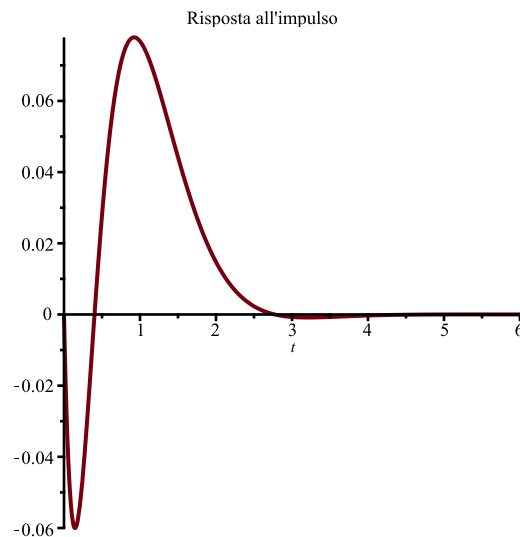
$g(t) := \text{invlaplace}(G(s), s, t) :$

$g(t)$

$$\frac{7 e^{-5t}}{11} + \frac{e^{-2t} (5 \sqrt{2} \sin(\sqrt{2} t) - 7 \cos(\sqrt{2} t))}{11} \quad (3.1)$$

Rappresento graficamente la risposta

`plot(g(t), t = 0 .. 6, size = [400, 400], title = "Risposta all'impulso")`



▼ Determinare la risposta al gradino e il suo grafico

La risposta al gradino (funzione definita precedentemente) si può ottenere sia come prodotto fra la funzione di trasferimento e la trasformata di Laplace del gradino che è pari a $\frac{1}{s}$ sia definendola come la quadratura della risposta all'impulso.

▼ Metodo della quadratura

$$y_{gradino1}(t) := \int_0^t g(\tau) d\tau :$$

$$y_{gradino1}(t)$$

$$\frac{1}{15} + \frac{2 e^{-2t} \cos(\sqrt{2} t)}{33} - \frac{17 \sqrt{2} e^{-2t} \sin(\sqrt{2} t)}{66} - \frac{7 e^{-5t}}{55} \quad (4.1.1)$$

▼ Metodo dell'antitrasformata

Calcolo la L-trasformata del segnale in ingresso

$$U_{gradino}(s) := \text{laplace}(1, t, s) :$$

$$U_{gradino}(s)$$

$$\frac{1}{s}$$

(4.2.1)

Calcolo la risposta del sistema attraverso l'antitrasformata di Laplace applicando in ingresso la funzione gradino

$$y_{gradino2}(t) := \text{invlaplace}(G(s) \cdot U_{gradino}(s), s, t) :$$

$$y_{gradino2}(t)$$

$$\frac{1}{15} - \frac{7e^{-5t}}{55} + \frac{(-17\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) + 4\cos(\sqrt{2}t))e^{-2t}}{66} \quad (4.2.2)$$

Da un primo sguardo sembrerebbe che i due metodi restituiscano valori diversi. Ricorro dunque all'utilizzo di una funzione di Maple per confrontare i due valori

$$\text{verify}(y_{\text{gradino1}}(t), y_{\text{gradino2}}(t), \text{equal}) \quad \text{true} \quad (4.1)$$

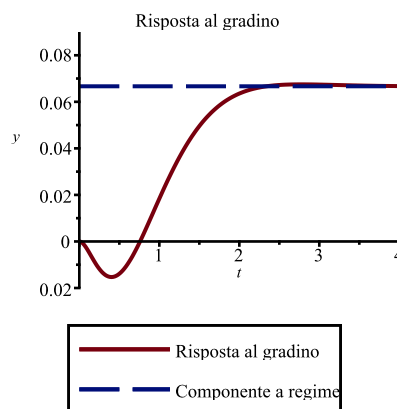
Poiché il sistema è BIBO stabile, dato un ingresso limitato si avrà un'uscita limitata. Si avrà dunque che la componente transitoria della risposta si estinguerà col tempo e rimarrà solo la componente a regime.

Grazie al teorema del valore finale possiamo calcolare ed evidenziare la componente a regime della risposta

$$y_{\text{regime}}(t) := \lim_{t \rightarrow \infty} (y_{\text{gradino2}}(t)) : \quad \frac{1}{15} \quad (4.2)$$

Rappresento graficamente la risposta ottenuta insieme alla rappresentazione della risposta a regime

`plot([y_gradino2(t), y_regime(t)], t = 0 .. 4, y = -0.02 .. 0.09, title = "Risposta al gradino", size = [300, 300], legend = ["Risposta al gradino", "Componente a regime"], 'linestyle' = [solid, dash])`



In particolare si verifica il cosiddetto fenomeno della controfase che si ha quando la risposta al gradino, per un intervallo di tempo finito, ha segno opposto a quello del valore di regime

▼ Determinare la risposta alla rampa

La funzione rampa è un segnale right-sided, ovvero vale zero per $t < 0$ e presenta una velocità di salita (detta deriva) che è costante. Infatti, il segnale è anche detto segnale a deriva costante.

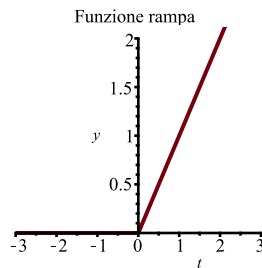
La funzione rampa

La funzione rampa è definita come

$$u_{rampa}(t) := \begin{cases} t & t > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} :$$

La rappresento graficamente

`plot(u_rampa(t), t=-3..3, y=0..2, size=[200, 200], title="Funzione rampa")`



Come nel caso del gradino, la risposta alla rampa può essere ottenuta sia attraverso il calcolo della quadratura della risposta alla rampa sia come prodotto fra la funzione di trasferimento e la trasformata di Laplace della rampa che in questo caso è pari a $\frac{1}{s^2}$

Metodo della quadratura

$$y_{rampa1}(t) := \int_0^t y_{gradino1}(\tau) d\tau :$$

$$y_{rampa1}(t) = -\frac{41}{450} + \frac{t}{15} + \frac{13 e^{-2t} \cos(\sqrt{2} t)}{198} + \frac{19 \sqrt{2} e^{-2t} \sin(\sqrt{2} t)}{198} + \frac{7 e^{-5t}}{275} \quad (5.2.1)$$

Metodo dell'antitrasformata

Calcolo la L-trasformata del segnale in ingresso

$$U_{rampa}(s) := \text{laplace}(t, t, s) :$$

$$U_{rampa}(s)$$

$$\frac{1}{s^2} \quad (5.3.1)$$

Calcolo la risposta del sistema attraverso l'antitrasformata di Laplace a cui applico in ingresso la funzione rampa

$$y_{rampa2}(t) := \text{invlaplace}(G(s) \cdot U_{rampa}(s), s, t) :$$

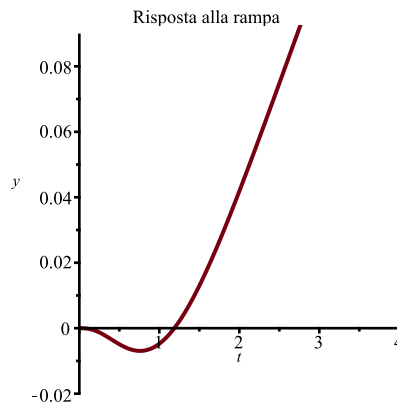
$$y_{rampa2}(t) = -\frac{41}{450} + \frac{t}{15} + \frac{7e^{-5t}}{275} + \frac{e^{-2t}(19\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) + 13\cos(\sqrt{2}t))}{198} \quad (5.3.2)$$

Da un primo sguardo sembrerebbe che i due metodi restituiscano valori diversi. Ricorro dunque all'utilizzo di una funzione di Maple per confrontare i due valori

$$\text{verify}(y_{rampa1}(t), y_{rampa2}(t), \text{equal}) \quad \text{true} \quad (5.1)$$

Rappresento graficamente la risposta ottenuta

$$\text{plot}(y_{rampa2}(t), t=0..4, y=-0.02..0.09, \text{title}="Risposta alla rampa", \text{size}=[300, 300])$$



Come si può vedere dal grafico la risposta alla rampa è esplosiva. Posso confermare ciò calcolando il limite per $t \rightarrow +\infty$ che tenderà, per l'appunto, a più infinito

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_{rampa2}(t) = \infty \quad (5.2)$$

▼ Determinare un possibile modello ARMA la cui funzione di trasferimento è quella ottenuta nel primo punto dell'esercizio

Per modello ARMA si intende una rappresentazione I-U che si può determinare a partire dalla funzione di trasferimento $G(s)$ ricordando che nel dominio della trasformata di Laplace vale la relazione $Y(s)=G(s)*U(s)$. Si scompone poi la funzione di trasferimento in numeratore e denominatore tale da far diventare la precedente relazione pari a $\text{den}G*Y(s) = \text{num}G*U(s)$ e si applica infine l'antitrasformata di Laplace tenendo poi conto del teorema della derivata; si ottiene in conclusione una relazione ingresso-uscita nel dominio del tempo, ovvero un'equazione differenziale. In questo caso il modello ottenuto è calcolato nel caso in cui le condizioni iniziali e le loro derivate siano nulle, per cui si ha una condizione di quiete,

e la risposta libera è pari a zero

Scompongo la funzione di trasferimento e riscrivo la relazione di partenza

$numG(s) := numer(G(s)) :$

$denG(s) := denom(G(s)) :$

$eq_diff_in_s := expand(denG(s) \cdot Y_{iu}(s) = U_{iu}(s) \cdot numG(s))$

$$eq_diff_in_s := Y_{iu}(s) s^3 + 9 Y_{iu}(s) s^2 + 26 Y_{iu}(s) s + 30 Y_{iu}(s) = -U_{iu}(s) s + 2 U_{iu}(s) \quad (6.1)$$

Applico il teorema della derivata e la linearità della trasformata di Laplace

$modello_arma := invlaplace(eq_diff_in_s, s, t) :$

Attraverso il comando subs sostituisco la terminologia utilizzata per rendere l'equazione più leggibile. In particolare, la simbologia $D^{(n)}y_{iu}$ indica una derivata di ordine n della variabile y_{iu}

$modello_arma := subs(\{ invlaplace(U_{iu}(s) s, s, t) = u_{iu}'(t), invlaplace(U_{iu}(s), s, t) = u_{iu}(t), invlaplace(Y_{iu}(s) s^3, s, t) = y_{iu}'''(t), invlaplace(Y_{iu}(s) s^2, s, t) = y_{iu}''(t), invlaplace(Y_{iu}(s) s, s, t) = y_{iu}'(t), invlaplace(Y_{iu}(s), s, t) = y_{iu}(t) \}, modello_arma) :$

$modello_arma$

$$D^{(3)}(y_{iu})(t) + 9 D^{(2)}(y_{iu})(t) + 26 D(y_{iu})(t) + 30 y_{iu}(t) = -D(u_{iu})(t) + 2 u_{iu}(t) \quad (6.2)$$

▼ Determinare le condizioni iniziali in corrispondenza delle quali la risposta al gradino coincide con la risposta a regime

La risposta a regime si può definire come quella risposta che si valuta in un istante t finito nell'ipotesi che l'ingresso sia stato applicato nel passato remoto rispetto a quell'istante di tempo, considerando dunque che la componente transitoria si sia annullata.

Per determinare dunque le condizioni iniziali in corrispondenza delle quali la risposta al gradino coincide con la risposta a regime possiamo valutare per quali valori la componente transitoria della risposta al gradino si annulla.

Infatti, la risposta si compone di due quantità quali la cosiddetta risposta libera (o risposta in evoluzione libera o risposta transitoria) e risposta forzata (o risposta di

regime).

Possiamo infatti scrivere che

$$Y(s) := Y_l(s) + Y_f(s)$$

La risposta a regime del gradino corrisponde ai primi due operandi della risposta al gradino stessa ottenuta precedentemente. Procedo a calcolare

Porto l'equazione in funzione di $Y(s)$ e impongo come ingresso la funzione gradino e che $u(0)$ sia pari a 0

$$IU_s := \text{laplace}(\text{modello_arma}, t, s)$$

$$\begin{aligned} IU_s := & s^3 \mathcal{L}(y_{iu}(t), t, s) - D^{(2)}(y_{iu})(0) - s D(y_{iu})(0) - s^2 y_{iu}(0) + 9 s^2 \mathcal{L}(y_{iu}(t), t, s) \\ & - 9 D(y_{iu})(0) - 9 s y_{iu}(0) + 26 s \mathcal{L}(y_{iu}(t), t, s) - 26 y_{iu}(0) + 30 \mathcal{L}(y_{iu}(t), t, s) = \\ & - s \mathcal{L}(u_{iu}(t), t, s) + u_{iu}(0) + 2 \mathcal{L}(u_{iu}(t), t, s) \end{aligned} \quad (7.1)$$

Attraverso il comando subs sostituisco la terminologia utilizzata per rendere l'equazione più leggibile

$$IU_s := \text{subs}(\{ \text{laplace}(y_{iu}(t), t, s) = Y_l(s), \text{laplace}(u_{iu}(t), t, s) = U_l(s) \}, IU_s)$$

$$\begin{aligned} IU_s := & s^3 Y_l(s) - D^{(2)}(y_{iu})(0) - s D(y_{iu})(0) - s^2 y_{iu}(0) + 9 s^2 Y_l(s) - 9 D(y_{iu})(0) \\ & - 9 s y_{iu}(0) + 26 s Y_l(s) - 26 y_{iu}(0) + 30 Y_l(s) = -s U_l(s) + u_{iu}(0) + 2 U_l(s) \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$eq(s) := \text{solve}(IU_s, Y_l(s)) :$$

$$\text{funzione}(s) := \text{simplify}\left(\text{subs}\left(\left\{U_l(s) = \frac{1}{s}, u_{iu}(0) = 0\right\}, eq(s)\right)\right) :$$

$$\begin{aligned} \text{funzione}(s) \\ \frac{(s^3 + 9 s^2 + 26 s) y_{iu}(0) + (s^2 + 9 s) D(y_{iu})(0) + D^{(2)}(y_{iu})(0) s - s + 2}{s (s + 5) (s^2 + 4 s + 6)} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Calcolo i poli e applico la tecnica dei fratti per ottenere le soluzioni all'equazione

$$\text{poli} := \text{solve}(\text{denom}(\text{funzione}(s)))$$

$$\text{poli} := -5, 0, 1\sqrt{2} - 2, -1\sqrt{2} - 2 \quad (7.4)$$

$$\text{fratto}_1 := \lim_{s \rightarrow -3} (s-3) \text{funzione}(s)$$

$$\text{fratto}_1 := -8 y_{iu}(0) - 6 D(y_{iu})(0) - D^{(2)}(y_{iu})(0) + \frac{5}{3} \quad (7.5)$$

$$\text{fratto}_2 := \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{d}{ds} (s^2 \cdot \text{funzione}(s)) \right)$$

$$\text{fratto}_2 := \frac{1}{15} \quad (7.6)$$

$$\text{fratto}_3 := \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot \text{funzione}(s)$$

$$\text{fratto}_3 := 0 \quad (7.7)$$

$$\text{fratto}_4 := \lim_{s \rightarrow -2 + \sqrt{2} \cdot I} (s + 2 - \sqrt{2} \cdot I) \cdot \text{funzione}(s)$$

$$\text{fratto}_4 := \frac{1}{-16 + 2 I \sqrt{2}} \left(15 I y_{iu}(0) \sqrt{2} + 8 I D(y_{iu})(0) \sqrt{2} + I D^{(2)}(y_{iu})(0) \sqrt{2} - 2 I \sqrt{2} + 5 D(y_{iu})(0) + D^{(2)}(y_{iu})(0) - 1 \right) \quad (7.8)$$

$$\text{fratto}_5 := \lim_{s \rightarrow -2 - \sqrt{2} \cdot I} (s + 2 + \sqrt{2} \cdot I) \cdot \text{funzione}(s)$$

$$\text{fratto}_5 := \frac{1}{-16 - 2 I \sqrt{2}} \left(-15 I y_{iu}(0) \sqrt{2} - 8 I D(y_{iu})(0) \sqrt{2} - I D^{(2)}(y_{iu})(0) \sqrt{2} + 2 I \sqrt{2} + 5 D(y_{iu})(0) + D^{(2)}(y_{iu})(0) - 1 \right) \quad (7.9)$$

Impongo che la soluzione al problema sia data dalle equazioni relativa ai fratti 1,4 e 5.

$\text{solve}(\{ \text{fratto}_1 = 0, \text{fratto}_4 = 0, \text{fratto}_5 = 0 \}, [y_{iu}(0), y_{iu}'(0), y_{iu}''(0)])$

$$\left[\left[y_{iu}(0) = \frac{1}{9}, D(y_{iu})(0) = -\frac{2}{9}, D^{(2)}(y_{iu})(0) = \frac{19}{9} \right] \right] \quad (7.10)$$

Si ottiene dunque che le condizioni iniziali per cui la risposta al gradino coincide con la risposta a regime sono

$$\begin{cases} y_{iu}(0) = \frac{1}{9} \\ y_{iu}'(0) = -\frac{2}{9} \\ y_{iu}''(0) = \frac{19}{9} \end{cases}$$

restart :

with(inttrans) : with(DynamicSystems) : with(plots) : with(PolynomialTools) :

Esercizio b

Disegnare e discutere il diagramma di Bode per la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) := \frac{64 \cdot (s - 1)}{s^2 \cdot (s^2 + 2 \cdot s + 64)}$$

$$G := s \mapsto \frac{64 \cdot s - 64}{s^2 \cdot (s^2 + 2 \cdot s + 64)} \quad (2)$$

▼ Diagramma di Bode

Il diagramma di Bode è un tipo di rappresentazione della risposta in frequenza di un sistema dinamico in cui si hanno due grafici: uno è il diagramma dei moduli $|G(jw)|$ e l'altro è relativo alla fase $\angle G(jw)$ entrambi al variare della variabile indipendente w mentre le variabili dipendenti sono il modulo e la fase. Inoltre, le scale delle ordinate sono logaritmiche poichè il modulo verrà descritto in decibel mentre la fase è già logaritmica.

Per tracciare il diagramma di Bode è necessario manipolare la funzione di trasferimento in modo da ottenere la risposta armonica nella cosiddetta *Forma di Bode*. Procedo dunque a calcolare i vari parametri necessari al problema quali il fattore di Bode K_b , gli zeri e i poli. Per quanto riguarda il modulo si identificano la pulsazione di bassa e alta frequenza che sono il minimo e il massimo tra le pulsazioni di rottura dei poli e degli zeri.

▼ Zeri e poli

Calcolo gli zeri e i poli della funzione di trasferimento sottoforma di vettori

```
poli := [ solve(denom(G(s)), s) ]
```

$$poli := [0, 0, -1 + 3I\sqrt{7}, -1 - 3I\sqrt{7}] \quad (8.1.1)$$

```
zeri := [ solve(numer(G(s)), s) ]
```

$$zeri := [1] \quad (8.1.2)$$

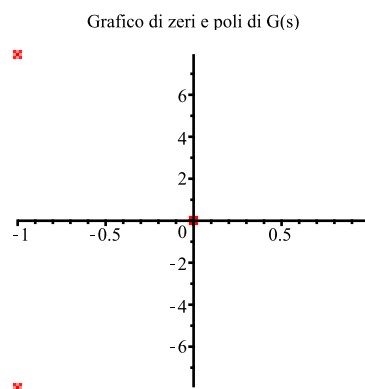
Calcolo il numero di poli nell'origine, detti anche effetti integrali

```
eff_int := numboccur(poli, 0)
```

$$eff_int := 2 \quad (8.1.3)$$

Rappresento graficamente gli zeri e i poli della funzione di trasferimento ottenuta

```
ZeroPolePlot(TransferFunction(G(s)), color = [red], title = "Grafico di zeri e poli di G(s)", size = [300, 300])
```



In particolare, con le croci vengono identificati i tre poli ottenuti (di cui uno con molteplicità due) mentre con il cerchio l'unico zero. Inoltre, è presente uno zero in 1 ed esso si definisce zero a fase non minima in quanto ha parte reale maggiore di zero mentre i due poli ottenuti sono complessi e coniugati.

La funzione di trasferimento sarebbe BIBO stabile visti i poli $-1 + 3i\sqrt{7}$ e $-1 - 3i\sqrt{7}$ che si trovano nel semipiano sinistro in quanto hanno parte reale strettamente negativa ma è presente un polo instabile nell'origine che annulla tale considerazione.

Smorzamento e pulsazione naturale

Nel caso dato avrò il cosiddetto fenomeno della risonanza proprio a causa della presenza di poli complessi e coniugati detti poli a basso smorzamento. Ciò significa che si avrà un picco che non renderà monotono decrescente il diagramma dei moduli e l'approssimazione asintotica avrà sempre un errore; il massimo errore sarà proprio pari al picco di risonanza. In particolare, determino lo smorzamento δ e la pulsazione naturale ω_n (nel cui intorno vi sarà una pulsazione di risonanza ω_r)

associando il polinomio del denominatore $s^2 + 2 \cdot s + 64$ al polinomio $s^2 - 2 \delta \omega_n \cdot s + \omega_n^2$. Utilizzando il principio di identità dei polinomi in particolare avremo:

$$\begin{cases} \omega_n^2 = 1 \\ 2 \cdot \delta \cdot \omega_n = -2 \end{cases}$$

$$\text{solve}\left(\left\{\omega_n^2 = 1, 2 \cdot \delta \cdot \omega_n = -\frac{1}{2}\right\}, [\delta, \omega_n]\right)$$

$$\left[\left[\delta = -\frac{1}{4}, \omega_n = 1\right], \left[\delta = \frac{1}{4}, \omega_n = -1\right]\right] \quad (8.2.1)$$

Prendo in considerazione il secondo risultato ottenuto ovvero $\delta := \frac{1}{4}$: in quanto è importante

notare che per $\delta \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ si ha appunto il fenomeno della risonanza.

Inizialmente non consideriamo la risonanza ma costruiamo il diagramma di Bode approssimato dal quale poi andremo ad effettuare le correzioni dovute.

Elimino i poli nell'origine dalla lista dei poli e calcolo la pulsazione di taglio

$\text{poli} := \text{remove}(x \rightarrow x = 0, \text{poli})$

$$\text{poli} := [-1 + 3i\sqrt{7}, -1 - 3i\sqrt{7}] \quad (8.1)$$

Calcolo il numero di poli e zeri al netto degli effetti integrali

$np := \text{numelems}(\text{poli})$

$$np := 2 \quad (8.2)$$

$nz := \text{numelems}(\text{zeri})$

$$nz := 1 \quad (8.3)$$

Pulsazioni di taglio

Pulsazione di taglio degli zeri

$$\Omega_t := \text{abs}\sim(\text{zeri})$$

$$\Omega_t := [1] \quad (8.3.1)$$

Pulsazione di taglio dei poli

$$\omega_t := \text{abs}\sim(\text{poli})$$

$$\omega_t := [8, 8] \quad (8.3.2)$$

Guadagno di Bode

Il guadagno di Bode che è una costante in grado di far "slittare" il diagramma di Bode. Considerando la presenza di un polo nell'origine di molteplicità due, tale valore sarà diverso da $G(0)$

$$K_b := \lim_{s \rightarrow 0} s^{\text{eff_int}} \cdot G(s)$$

$$K_b := -1 \quad (8.4.1)$$

Il guadagno di Bode è minore di uno. Ciò significa che ha un contributo sul diagramma delle fasi.

Inoltre, il polo nell'origine dà come contributo sui moduli una retta con pendenza -40 dB/decade passante per l'origine mentre sulle fasi garantisce un ritardo costante di 180° .

Valuto lo spostamento operato dal guadagno di Bode sul grafico dei moduli

$$K_{b_dB} := \text{evalf}(20 \cdot \log_{10}(|K_b|))$$

$$K_{b_dB} := 0. \quad (8.4.2)$$

Dunque, esso non sposterà il grafico

Diagramma dei moduli

Procedo ora a valutare i contributi dei vari fattori. Il metodo dell'approssimazione asintotica corrisponde a calcolare gli asintoti della funzione in alta e bassa frequenza in modo poi da raccorderli.

Contributo dei poli e degli zeri

Per quanto riguarda i due poli nell'origine essi daranno un contributo pari ad una retta di coefficiente angolare pari a $-20 \cdot \text{eff_int}$ db/decade che passa per l'origine degli esponenti. Poiché la loro molteplicità è 2 allora la retta avrà pendenza -40 db/decade. Per riassumere: $-40 \cdot \log_{10}(\omega)$:

Per quanto riguarda lo zero a fase non minima esso darà un contributo pari a zero in bassa

frequenza per ogni pulsazione inferiore alla pulsazione di taglio mentre in alta frequenza per pulsazioni maggiori alla pulsazione di taglio darà un contributo pari ad una semiretta di pendenza +20 db/dec a partire da 1 che è il valore della pulsazione di rottura Ω_t . Per riassumere:

$$\begin{cases} 0 & \omega < 1 \\ 20 \cdot \log_{10}(\omega) & \omega \geq 1 \end{cases} :$$

Per quanto riguarda i poli complessi posso procedere non considerando la risonanza e approssimandoli a poli reali e coincidenti con pulsazione di taglio ω_n pari a quella naturale.

Il loro contributo al diagramma dei moduli in bassa frequenza sarà pari a 0 db per ogni pulsazione inferiore alla pulsazione naturale e, in alta frequenza per pulsazioni maggiori alla pulsazione naturale, pari ad una retta con pendenza -40 db/decade. Per riassumere

$$\begin{cases} 0 & \omega < 1 \\ -40 \cdot \log_{10}(\omega) & \omega \geq 1 \end{cases} :$$

▼ Rappresentazione della funzione modulo

Determino la pulsazione di taglio a più bassa frequenza sui moduli

$$\text{omegaleftmodulo} := \min(\min(\Omega_t), \min(\omega_t))$$

$$\text{omegaleftmodulo} := 1 \quad (8.5.2.1)$$

Determino la pulsazione di taglio a più alta frequenza sui moduli

$$\text{omegarightmodulo} := \max(\max(\Omega_t), \max(\omega_t))$$

$$\text{omegarightmodulo} := 8 \quad (8.5.2.2)$$

Per approssimare la funzione modulo unisco i singoli contributi in una funzione:

$$f_a(\omega, \omega_c) := \begin{cases} 0 & \frac{\omega}{\omega_c} < 1 \\ 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) & \frac{\omega}{\omega_c} \geq 1 \end{cases} :$$

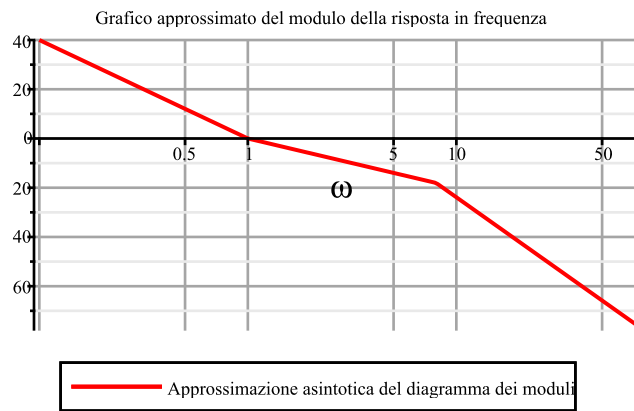
$$f_G(\omega) := 20 \cdot \log_{10}(|K_b|) - \text{eff_int} \cdot 20 \cdot \log_{10}(\omega) + \sum_{i=1}^{nz} f_a(\omega, \Omega_t[i]) - \sum_{i=1}^{np} f_a(\omega, \omega_t[i]) :$$

Rappresento le funzioni approssimate

$$\text{semilogplot}(f_G(\omega), \omega = 0.1 \cdot \text{omegaleftmodulo} .. 10 \cdot \text{omegarightmodulo}, \text{axis} = [\text{gridlines}],$$

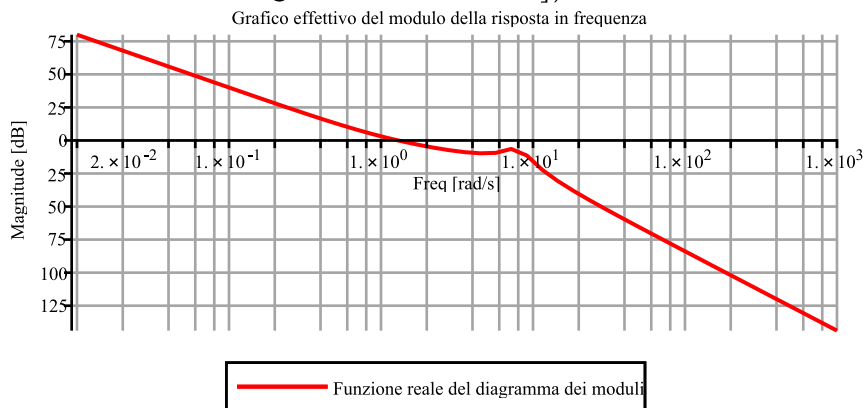
$$\text{title} = \text{"Grafico approssimato del modulo della risposta in frequenza"}, \text{legend}$$

$$= [\text{"Approssimazione asintotica del diagramma dei moduli"}], \text{color} = [\text{red}], \text{size} = [500, 300])$$



Rappresento poi effettivamente la funzione attraverso il comando `MagnitudePlot` di Maple

```
MagnitudePlot(TransferFunction(G(s)), size = [650, 300], color = [red], title
= "Grafico effettivo del modulo della risposta in frequenza", legend
= ["Funzione reale del diagramma dei moduli"])
```



▼ Diagramma delle fasi

Procedo ora a valutare i contributi dei vari fattori

▼ Contributo dei poli e degli zeri

Per quanto riguarda lo zero, esso è a fase non minima e darà un contributo pari a zero per pulsazioni minori di un decimo della pulsazione di taglio Ω_t , un contributo pari a un segmento in ritardo crescente con pendenza pari a -45° per le pulsazioni comprese fra un decimo di Ω_t e 10 volte Ω_t nella cosiddetta banda di media frequenza e infine un contributo pari a -90° nella zona di alta frequenza per valori maggiore di 10 volte Ω_t . Per riassumere:

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 & \omega < \frac{1}{10} \\ -\frac{\text{Pi}}{4} \cdot \log_{10}(10 \cdot \omega) & \frac{1}{10} \leq \omega < 10 \\ -\frac{\text{Pi}}{2} & \omega \geq 10 \end{array} \right.$$

Per quanto riguarda i poli nell'origine, essi causeranno uno slittamento in ritardo un una fase pari a $\frac{\text{eff_int} \cdot \text{Pi}}{2}$

Per quanto riguarda i poli complessi e coniugati essi saranno considerati come reali e coincidenti, trascurando per ora il fattore risonanza. Di conseguenza, essi definiranno un contributo pari a zero nella zona di bassa frequenza, un contributo pari ad una retta di pendenza pari a -90° per le pulsazioni comprese nella zona di bassa frequenza ovvero fra un decimo di Ω_t e 10 volte Ω_t e infine un contributo pari ad un ritardo costante di 180° nella zona di alta frequenza. Per riassumere:

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 & \omega < \frac{1}{10} \\ -\frac{\text{Pi}}{2} \cdot \log_{10}(10 \cdot \omega) & \frac{1}{10} \leq \omega < 10 \\ -\text{Pi} & \omega \geq 10 \end{array} \right.$$

▼ Rappresentazione del diagramma delle fasi

Determino la pulsazione di taglio a più bassa frequenza sulla fase

$$\begin{aligned} \text{omegaleftfase} &:= \min \left(\min \left(\frac{\Omega_t}{10} \right), \min \left(\frac{\omega_t}{10} \right) \right) \\ \text{omegaleftfase} &:= \frac{1}{10} \end{aligned} \quad (8.6.2.1)$$

Determino la pulsazione di taglio a più alta frequenza sulla fase

$$\begin{aligned} \text{omegarightfase} &:= \max \left(\max(10 \cdot \Omega_t), \max(10 \cdot \omega_t) \right) \\ \text{omegarightfase} &:= 80 \end{aligned} \quad (8.6.2.2)$$

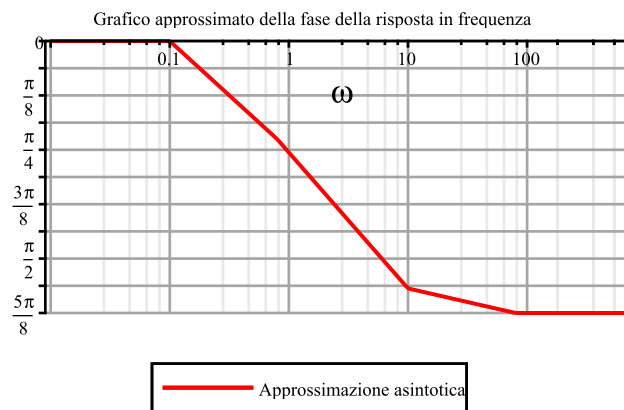
Per approssimare la funzione modulo unisco i singoli contributi in una funzione:

$$g_a(\omega, \omega_c) := \begin{cases} 0 & \frac{\omega}{\omega_c} < \frac{1}{10} \\ \frac{\pi}{4} \cdot \log_{10} \left(\frac{\omega}{\frac{\omega_c}{10}} \right) & \frac{1}{10} \leq \frac{\omega}{\omega_c} < 10 \\ \frac{\pi}{2} & \frac{\omega}{\omega_c} \geq 10 \end{cases} :$$

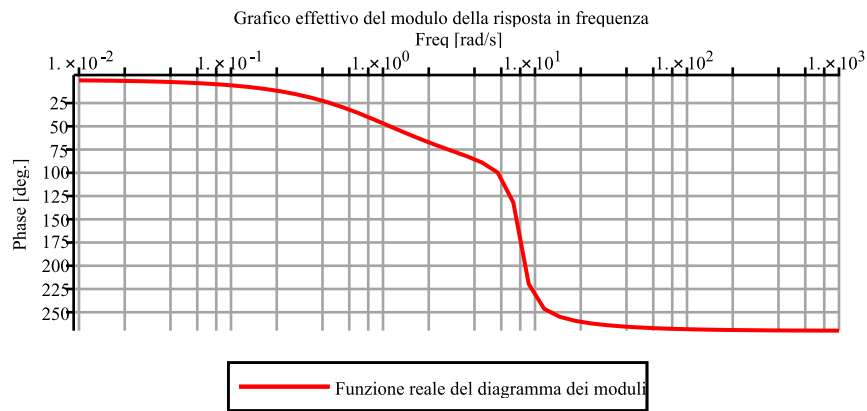
$$g_G(\omega) := \frac{1 - \text{signum}(K_b)}{2} \cdot \pi - \frac{\text{eff_int} \cdot \pi}{2} + \sum_{i=1}^{nz} \text{signum}(-\text{zeri}[i]) \cdot g_a(\omega, \Omega_t[i]) - \sum_{i=1}^{np} \text{signum}(-\text{poli}[i]) \cdot g_a(\omega, \omega_t[i]) :$$

Rappresento le funzioni approssimata e non in maniera sovrapposta per valutarne l'andamento

`semilogplot([g_G(ω)], ω = 0.1 · omegaleftfase .. 10 · omegarightfase, axis = [gridlines],
tickmarks = [default, piticks], title
= "Grafico approssimato della fase della risposta in frequenza", legend
= ["Approssimazione asintotica"], color = [red], size = [500, 300])`



Rappresento poi effettivamente la funzione attraverso il comando `MagnitudePlot` di Maple
`PhasePlot(TransferFunction(G(s)), size = [650, 300], color = [red], title
= "Grafico effettivo del modulo della risposta in frequenza", legend
= ["Funzione reale del diagramma dei moduli"])`



Specifiche

Calcolo la pendenza iniziale e quella finale sul diagramma dei moduli. La misurazione avviene in dB/decade

$$pendenza_{in} := 20 \cdot eff_int$$

$$pendenza_{in} := -40 \quad (8.7.1)$$

$$pendenza_{fin} := 20 \cdot eff_int + 20 \cdot (nz - np)$$

$$pendenza_{fin} := -60 \quad (8.7.2)$$

Calcolo la fase iniziale e quella finale. Per fare ciò devo separare i poli e gli zeri che si trovano nel semipiano destro da quelli che si trovano nel semipiano sinistro, non considerando i poli nell'origine

$$nz_{pos} := \text{numelems}(\text{remove}(x \rightarrow \text{Re}(x) > 0, \text{zeri}))$$

$$nz_{pos} := 0 \quad (8.7.3)$$

$$nz_{neg} := \text{numelems}(\text{remove}(x \rightarrow \text{Re}(x) < 0, \text{zeri}))$$

$$nz_{neg} := 1 \quad (8.7.4)$$

$$np_{pos} := \text{numelems}(\text{remove}(x \rightarrow \text{Re}(x) > 0, \text{poli}))$$

$$np_{pos} := 2 \quad (8.7.5)$$

$$np_{neg} := \text{numelems}(\text{remove}(x \rightarrow \text{Re}(x) < 0, \text{poli}))$$

$$np_{neg} := 0 \quad (8.7.6)$$

Bisogna ricordare che un polo di molteplicità due si trova nello zero

Calcolo la fase iniziale

$$fase_iniziale := \frac{(1 - \text{signum}(K_b))}{2} \cdot \text{Pi} - \frac{eff_int \cdot \text{Pi}}{2}$$

$$fase_iniziale := 0 \quad (8.7.7)$$

$$fase_finale := fase_iniziale + \frac{(nz_{pos} - nz_{neg}) \cdot \text{Pi}}{2} - \frac{(np_{pos} - np_{neg}) \cdot \text{Pi}}{2}$$

$$fase_finale := -\frac{3\pi}{2} \quad (8.7.8)$$

$$sfasamento_relativo := fase_finale - fase_iniziale$$

$$sfasamento_relativo := -\frac{3\pi}{2} \quad (8.7.9)$$

Si ha dunque che il grafico della fase inizia a 0 gradi e termina a -270 gradi

Per calcolare le pendenze negli intervalli intermedi, considero i punti in cui avviene un cambio di pendenza in modo da accoppiarli secondo ciascun intervallo

▼ *Calcolo degli intervalli per il diagramma dei moduli*

Calcolo quali sono le pulsazioni di taglio in cui avvengono cambiamenti di pendenza

$$puls_taglio_moduli := \text{sort}\left(\text{convert}\left(\text{convert}(\Omega_r, \text{set}) \cup \text{convert}(\omega_r, \text{set}), \text{list}\right)\right)$$

$$puls_taglio_moduli := [1, 8] \quad (8.7.1.1)$$

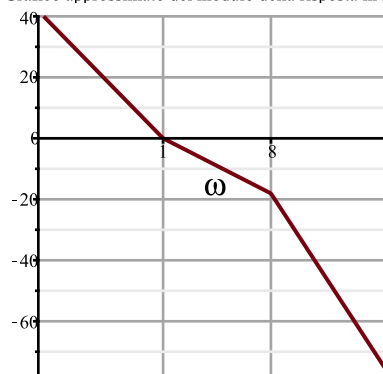
Rappresento nuovamente il grafico per comodità

$$\text{semilogplot}(f_G(\omega), \omega = 0.1 \cdot \text{omegaleftmodulo} .. 10 \cdot \text{omegarightmodulo}, \text{axis} = [\text{gridlines}],$$

$$\text{tickmarks} = [puls_taglio_moduli, \text{default}], \text{title}$$

$$= \text{"Grafico approssimato del modulo della risposta in frequenza"}, \text{size} = [300, 300])$$

Grafico approssimato del modulo della risposta in fre-



Procedo al calcolo delle pendenze del diagramma utilizzando la derivata logaritmica e considerando le pulsazioni di taglio presenti nel diagramma. Scrivo per prima cosa le funzioni derivate

$$df(\omega, \omega_c) := \begin{cases} 0 & \frac{\omega}{\omega_c} < 1 \\ 20 & \frac{\omega}{\omega_c} \geq 1 \end{cases} :$$

$$d_modulo(\omega) := -eff_int \cdot 20 + \sum_{i=1}^{nz} df(\omega, \Omega_t[i]) - \sum_{i=1}^{np} df(\omega, \omega_t[i]) :$$

$$len_1 := numelems(puls_taglio_moduli)$$

$$len_1 := 2 \quad (8.7.1.2)$$

Procedo tramite il comando seq a calcolare le pendenze dei tratti della spezzata

$$seq\left(\left[[puls_taglio_moduli[k], puls_taglio_moduli[k+1]], \right. \right. \\ \left. \left. d_modulo\left(\frac{puls_taglio_moduli[k] + puls_taglio_moduli[k+1]}{2}\right) \right], k=1 .. len_1 - 1 \right) \\ [[1, 8], -20] \quad (8.7.1.3)$$

▼ **Calcolo degli intervalli per il diagramma delle fasi**

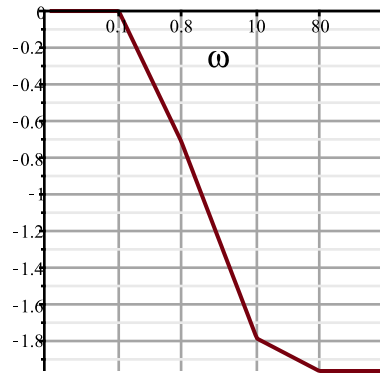
Calcolo quali sono le pulsazioni di taglio in cui avvengono cambiamenti di pendenza

$$puls_taglio_fase := sort\left(convert\left(convert\left(\frac{\Omega_t}{10}, set \right) \mathbf{union} convert\left(\frac{\omega_t}{10}, set \right) \right. \right. \\ \left. \left. \mathbf{union} convert(10 \cdot \Omega_p, set) \mathbf{union} convert(10 \cdot \omega_p, set), list \right) \right) \\ puls_taglio_fase := \left[\frac{1}{10}, \frac{4}{5}, 10, 80 \right] \quad (8.7.2.1)$$

Rappresento nuovamente il grafico per comodità

$$semilogplot(g_G(\omega), \omega = 0.1 \cdot \text{omegaleftfase} .. 10 \cdot \text{omegarightfase}, axis = [gridlines], tickmarks \\ = [puls_taglio_fase, default], title \\ = "Grafico approssimato della fase della risposta in frequenza", size = [300, 300])$$

Grafico approssimato della fase della risposta in frequ



Procedo al calcolo delle pendenze del diagramma utilizzando la derivata logaritmica e considerando le pulsazioni di taglio presenti nel diagramma. Scrivo per prima cosa le funzioni derivate

$$dg(\omega, \omega_c) := \begin{cases} 0 & \frac{\omega}{\omega_c} < \frac{1}{10} \\ \frac{\pi}{4} & \frac{1}{10} \leq \frac{\omega}{\omega_c} < 10 \\ 0 & \frac{\omega}{\omega_c} \geq 10 \end{cases}$$

$$d_fase(\omega) := \sum_{i=1}^{nz} \text{signum}(-zeri[i]) \cdot dg(\omega, \Omega_i[i]) - \sum_{i=1}^{np} \text{signum}(-poli[i]) \cdot dg(\omega, \omega_i[i]) :$$

$$len_2 := \text{numelems}(puls_taglio_fase)$$

$$len_2 := 4$$

(8.7.2.2)

Procedo tramite il comando seq a calcolare le pendenze dei tratti della spezzata

$$seq\left(\left[[puls_taglio_fase[k], puls_taglio_fase[k+1]], \right. \right. \\ \left. \left. d_fase\left(\frac{puls_taglio_fase[k] + puls_taglio_fase[k+1]}{2}\right) \right], k=1 .. len_2 - 1\right)$$

$$\left[\left[\frac{1}{10}, \frac{4}{5} \right], -\frac{\pi}{4} \right], \left[\left[\frac{4}{5}, 10 \right], -\frac{\pi}{4} + \frac{\left(-\frac{1}{8} + \frac{3I\sqrt{7}}{8} \right) \pi}{4} \right. \\ \left. + \frac{\left(-\frac{1}{8} - \frac{3I\sqrt{7}}{8} \right) \pi}{4} \right], \left[[10, 80], \frac{\left(-\frac{1}{8} + \frac{3I\sqrt{7}}{8} \right) \pi}{4} \right. \\ \left. + \frac{\left(-\frac{1}{8} - \frac{3I\sqrt{7}}{8} \right) \pi}{4} \right] \quad (8.7.2.3)$$

▼ Correzioni da applicare per la risonanza

Il fenomeno della risonanza causa un'assenza di monotonicità sul diagramma dei moduli in quanto è presente un picco alla cui altezza, nel diagramma delle fasi, si evince invece una discesa più "ripida". E' dunque possibile individuare la cosiddetta pulsazione di risonanza all'altezza della quale è presente una tangente orizzontale; essa corrisponde dunque al picco del grafico dei moduli e si calcola come

$$M_r := evalf\left(\frac{1}{2 \cdot \delta \cdot \sqrt{1 - \delta^2}}\right)$$

$$M_r := 2.065591118 \quad (8.8.1)$$

In decibel sarà:

$$M_{r_dB} := evalf\left(20 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{2 \cdot \delta \cdot \sqrt{1 - \delta^2}}\right)\right)$$

$$M_{r_dB} := 6.300887150 \quad (8.8.2)$$

La pulsazione di risonanza all'altezza della quale si ha il picco di risonanza è

$$\omega_r := evalf\left(\omega_n \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \delta^2}\right) :$$

$$\omega_r$$

$$0.9354143468 \omega_n \quad (8.8.3)$$

Si possono dunque applicare delle "correzioni" per rendere il grafico maggiormente fedele grazie anche al fatto che il valore di smorzamento è minore di 0.5; infatti, per valori maggiori le correzioni sono ininfluenti.

Si opera innanzitutto innalzando il diagramma dei moduli nell'intorno della pulsazione di risonanza che è centrato in corrispondenza della pulsazione naturale ω_n con un'ampiezza pari a $2 \cdot \delta$ e si raccorda il grafico di conseguenza.

Per quanto riguarda il diagramma delle fasi, invece, si ha che:

- per $\omega < \omega_n \cdot 10^{-\delta}$ si approssima a 0°
- per $\omega > \omega_n \cdot 10^\delta$ si approssima a -180°
- per $\omega_n \cdot 10^{-\delta} \leq \omega \leq \omega_n \cdot 10^\delta$ si approssima con un segmento di pendenza $-\frac{90}{\delta} \frac{deg}{decade}$

Dunque dovrò modificare l'intervallo in media frequenza dei poli complessi e coniugati, ovvero

$$\frac{\omega_n}{10} \leq \omega \leq 10 \cdot \omega_n, \text{ con il seguente intervallo:}$$

$$evalf\left(\omega_n \cdot 10^{-\delta}\right) \leq \omega \leq evalf\left(\omega_n \cdot 10^\delta\right) = 0.5623413252 \omega_n \leq \omega \leq 1.778279410 \omega_n$$

ed il segmento in media frequenza sul diagramma delle fasi avrà pendenza pari a $-\frac{90}{\delta} = -360$ $\frac{\text{gradi}}{\text{decade}}$

Si otterrebbe così dunque un grafico che rappresenta meglio il picco di risonanza.

restart : with(DynamicSystems) : with(plots) :

Esercizio d

Prima di procedere alla risoluzione dell'esercizio in Matlab, compio i calcoli preliminari dell'analisi della f.d.t.

Analisi della funzione di trasferimento

$$G(s) := \frac{169}{s \cdot (s^2 + 20s + 169)}$$

$$G := s \mapsto \frac{169}{s \cdot (s^2 + 20 \cdot s + 169)} \quad (9.1)$$

Per identificare i poli procedo con il calcolo della soluzione del polinomio che compone il denominatore mentre per trovare gli zeri risolvo il numeratore della funzione di trasferimento

Calcolo degli zeri:

$$\text{zeri} := \text{solve}(\text{numer}(G(s)) = 0, s)$$

$$\text{zeri} := () \quad (9.2)$$

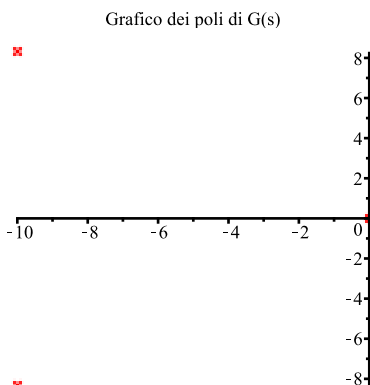
Calcolo dei poli:

$$\text{poli} := \text{solve}(\text{denom}(G(s)) = 0, s)$$

$$\text{poli} := 0, -10 + i\sqrt{69}, -10 - i\sqrt{69} \quad (9.3)$$

Rappresento graficamente i poli della funzione di trasferimento ottenuta

`ZeroPolePlot(TransferFunction(G(s)), color = [red], title = "Grafico dei poli di G(s)", size = [300, 300])`



In particolare, con le croci vengono identificati i tre poli ottenuti, tra cui uno in zero.

▼ Determinare l'errore nullo per un riferimento a gradino

Questo tipo di richiesta è classificabile come un problema di asservimento di posizione relativo ad una funzione di tipo uno in cui è già presente un fattore integrale determinato dalla presenza del polo nell'origine.

Più specificatamente, dato un gradino di ampiezza R , in generale l'errore si calcola come

$$e_{\infty, o} := \lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = \frac{R}{1 + k_p} \quad \text{dove } k_p := \lim_{s \rightarrow 0} C(s) \cdot G(s) \text{ è detta costante di posizione}$$

Affinchè l'errore sia nullo basta allora che tale costante di posizione sia pari a più infinito. Poichè si è in presenza di una funzione di trasferimento con polo in zero e di una frazione propria in quanto il grado del numeratore è minore di quello del denominatore, il regolatore $C(s)$ sarà scelto come un valore costante; infatti, l'aggiunta di un ulteriore fattore integrale provocherebbe instabilità e risulterebbe superfluo se non dannoso. Di conseguenza, ottengo che per la presenza di tale zero il limite di k_p tende a più infinito e dunque l'errore è 0.

Sottolineo anche come lo stesso termine "regolatore di struttura semplice" faccia riferimento ad un principio di parsimonia nell'aggiunta di regolatori.

▼ Determinare l'errore relativo all'uscita per un disturbo di carico a gradino non superiore al 5%

L'errore di uscita è un problema legato alla precisione statica del sistema (ovvero l'analisi a transitorio esaurito delle uscite dello schema di controllo a fronte di un dato riferimento). In questo tipo di problemi, la precisione è determinata dalla presenza o meno di fattori integrali ma una maggiore precisione gioca a discapito della bipo stabilità della retroazione.

Procedo a calcolare il guadagno statico del controllore affinché si abbia un errore non superiore al 5% applicando il teorema del valore finale.

Per i ragionamenti precedentemente fatti, il controllore lo considero come un valore costante in quanto la rete non necessita di un ulteriore fattore integrale

$$C(s) := k :$$

Ricavo la funzione di anello. Essa è definita come serie fra il controllore e la funzione di trasferimento $G(s)$

$$L(s) := C(s) \cdot G(s) :$$

$$L(s)$$

$$\frac{169 k}{s (s^2 + 20 s + 169)} \quad (11.1)$$

Per il teorema del valore finale si ha che l'errore relativo all'uscita si calcola come

$$y_{d, \infty} := \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(s)}{1 + L(s)}$$

$$y_{d, \infty} := \frac{1}{k} \quad (11.2)$$

Poiché devo avere che $\frac{1}{k} < 0.05 = \frac{1}{20}$ ottengo che

$$\text{solve}(\{y_{d, \infty} < 0.05, k > 0\}, \{k\})$$

$$\{20. < k\} \quad (11.3)$$

Di conseguenza posso concludere che il valore del guadagno statico deve essere tale che $C(0) \geq 20$ ovvero maggiore di 20.

Il punto 3 è stato svolto e commentato in Matlab e successivamente rielaborato in Word per aggiungere i grafici, quindi presenterà un font differente

Picco di risonanza $M_{r_db} \leq 3$ db, banda passante $6 \text{ rad/sec} \leq \omega_{bw} \leq 13 \text{ rad/sec}$

L'obiettivo del problema è quello di modulare i parametri richiesti per sagomare una nuova funzione di anello in modo che essa abbia i valori di progetto. Lavorerò in una logica ex-ante per poi operare delle verifiche finali dopo le quali, se la traccia non è stata rispettata, si potranno operare delle ulteriori modifiche ai valori scelti fino al raggiungimento del risultato sperato.

Definisco la variabile che conterrà la funzione di trasferimento

```
s = zpk('s');  
G = 169/(s*(s^2+20*s+169));
```

Dopo aver calcolato il range di valori che il guadagno statico può assumere in modo che l'errore sull'uscita, per un disturbo di carico a gradino, sia inferiore al 5%, scelgo un valore C tale che rispetti tale intervallo ottenuto (ovvero $C(0) \geq 20$).

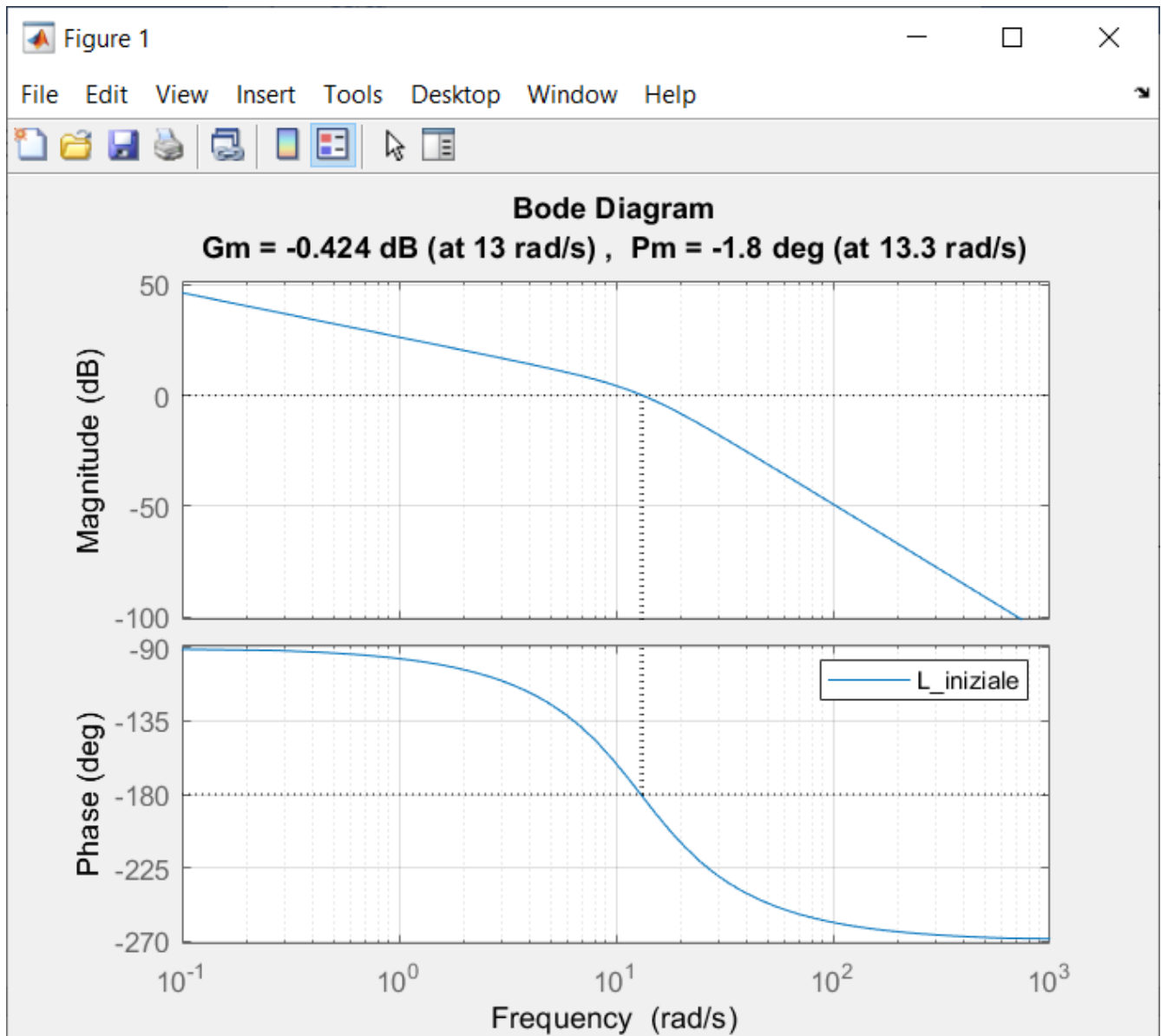
Scelgo C pari a 21 e tramite il comando series costruisco la funzione di anello che è data dalla serie (detta anche cascata) della funzione di trasferimento data e il controllore.

```
C = 21;  
L_iniziale = series(C,G);
```

```
L_iniziale =  
  
          3549  
-----  
s (s^2 + 20s + 169)
```

Tramite il comando margin, verifico i valori di ω_c , ovvero la pulsazione di attraversamento, e della fase che chiamo ϕ

```
figure(1);  
margin(L_iniziale);  
grid;  
legend;
```



Ottengo un $\omega_c = 13.3$ rad/s e $\phi = -1.8^\circ$ dunque la funzione d'anello non è BIBO stabile per il criterio di Bode, il quale asserisce che se una funzione di anello presenta guadagno statico positivo, diagramma dei moduli monotono decrescente, pulsazione di attraversamento unica e margine di fase positivo allora è stabile.

In questo caso viene a cadere l'ultima condizione.

Dunque l'algoritmo di controllo dovrà stabilizzare in retroazione il sistema oltre che rispettare le specifiche legate alla precisione dinamica.

Il picco di risonanza è definito come il massimo assoluto del diagramma dei moduli della risposta in frequenza e per essere minore o uguale a 3dB devo calcolare lo smorzamento critico ovvero quel valore che corrisponde proprio ad un picco di 3dB. Posso compiere il calcolo attraverso la funzione `smorz_Mr`

```
delta_cr = smorz_Mr(3);
```

Ottingo che lo smorzamento critico è pari a 0.3832. Di conseguenza, sapendo che il margine di fase è all'incirca 100 volte il valore dello smorzamento critico, esso sarà pari all'incirca a 39°.

Considerando il fatto che la pulsazione di attraversamento è un minorante della banda passante, dopo vari tentativi, concludo che buon valore a cui porla è tra 6 e 6.4, quindi scelgo 6.3 rad/s.

Per banda passante si intende l'intervallo di pulsazioni in corrispondenza del quale il modulo della risposta in frequenza è pressocché piatto e quindi la fase della risposta in frequenza è nulla.

Procedo ora a calcolare i valori della funzione di anello tenendo in considerazione la nuova pulsazione e ottengo così i valori di modulo e fase

```
wc = 6.3;  
[modulo,fase] = bode(L_iniziale,wc);  
margine_fase_iniziale = 180-abs(fase);
```

```
modulo =
```

```
3.1202
```

```
fase =
```

```
-134.2572
```

```
margine_fase_iniziale =
```

```
45.7428
```


Ottingo un valore del modulo maggiore di 1 e l'argomento negativo. Avrò che il margine di fase iniziale, pari a $180 - \text{abs}(\text{argomento})$, sarà 45.7428° ovvero maggiore del margine di fase richiesto che è 39° .

In aggiunta, poiché picco di risonanza e smorzamento sono inversamente proporzionali, per mantenerlo al di sotto dei 3 dB allora il margine di fase deve essere al di sopra del valore critico e cioè maggiore di 39° .

Ho dunque bisogno di introdurre una rete corretttrice detta "attenuatrice" che, nell'intorno della pulsazione di attraversamento scelta, attenua il modulo mentre lascia intatta (o modifica di poco) la fase in quanto in questo caso rispetta già i parametri necessari richiesti dalla progettazione.

La rete attenuatrice opera ponendo sul diagramma delle frequenze della funzione di anello un polo prima ed uno zero dopo nella regione di bassa frequenza.

Tale rete è descritta da una funzione di trasferimento del tipo

$$C_{\text{lead}}(s) = (1+s\tau_{\text{auz}})/(1+s\tau_{\text{aup}})$$

dove τ_{aup} è la costante di tempo del polo e τ_{auz} è la costante di tempo dello zero; entrambe devono essere maggiori di zero.

La rete dovrà dunque mantenere quasi inalterato il margine di fase e prendo dunque come riferimento per il progetto un angolo θ pari a -1.7428°

```
theta = 44 - margine_fase_iniziale;
```

```
theta =
```

```
-1.7428
```

La variabile m rappresenta l'attenuazione necessaria per far recuperare il valore unitario della funzione di anello

```
m=1/modulo;
```

```
m =
```

```
0.3205
```

Provo a costruirmi la rete corretrice e verifico in particolare il segno dei due fattori τ_{uz} e τ_{up}

```
[tauz,taup] = generica(wc,m,theta);  
taup =
```

11.0680

```
tauz =
```

3.5441

Ottengo due valori τ_{up} e τ_{uz} positivi per cui ho ottenuto una rete corretrice corretta.

Tuttavia, per verificare la correttezza della rete ottenuta, procedo a graficarla in modo da operare un'analisi ex-post.

In particolare, chiamo C_{lead} la f.d.t della rete anticipatrice da mettere in cascata prima con il controllore prima identificato e poi con la funzione di trasferimento della rete di partenza.

Calcolo la funzione di trasferimento della rete anticipatrice
 $C_{lead} = (1+s\tau_{uz})/(1+s\tau_{up});$

```
C_lead =
```

$$\frac{0.32021 (s+0.2822)}{(s+0.09035)}$$

Calcolo la funzione della cascata fra f.d.t. della rete anticipatrice e il controllore

```
C_finale = series(C,C_lead);
```

```
C_finale =
```

$$\frac{6.7244 (s+0.2822)}{(s+0.09035)}$$

Calcolo la funzione di anello finale che descrive la rete

```
L_finale = series(C_finale,G);
```

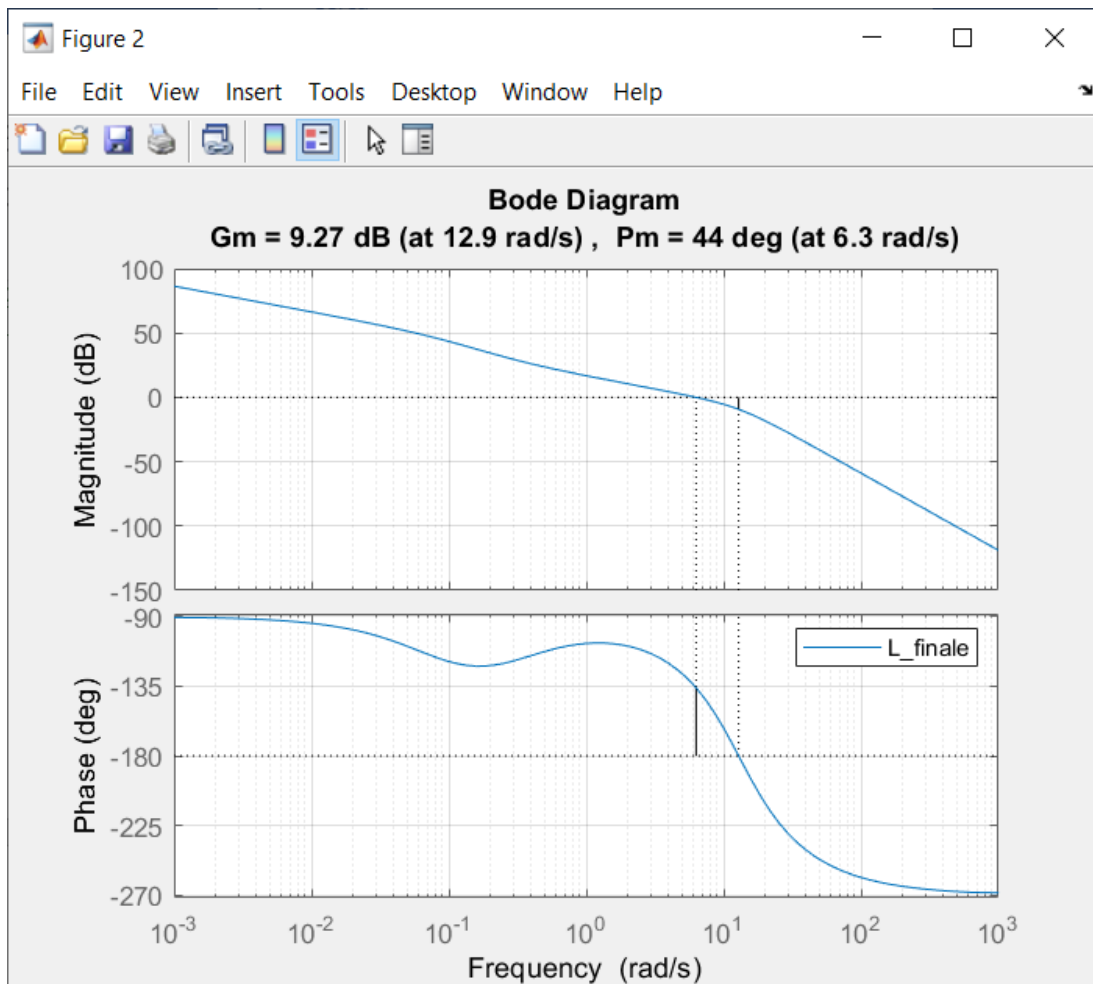
```
L_finale =
```

$$\frac{1136.4 (s+0.2822)}{s (s+0.09035) (s^2 + 20s + 169)}$$

Rappresento la funzione di anello finale ottenuta.

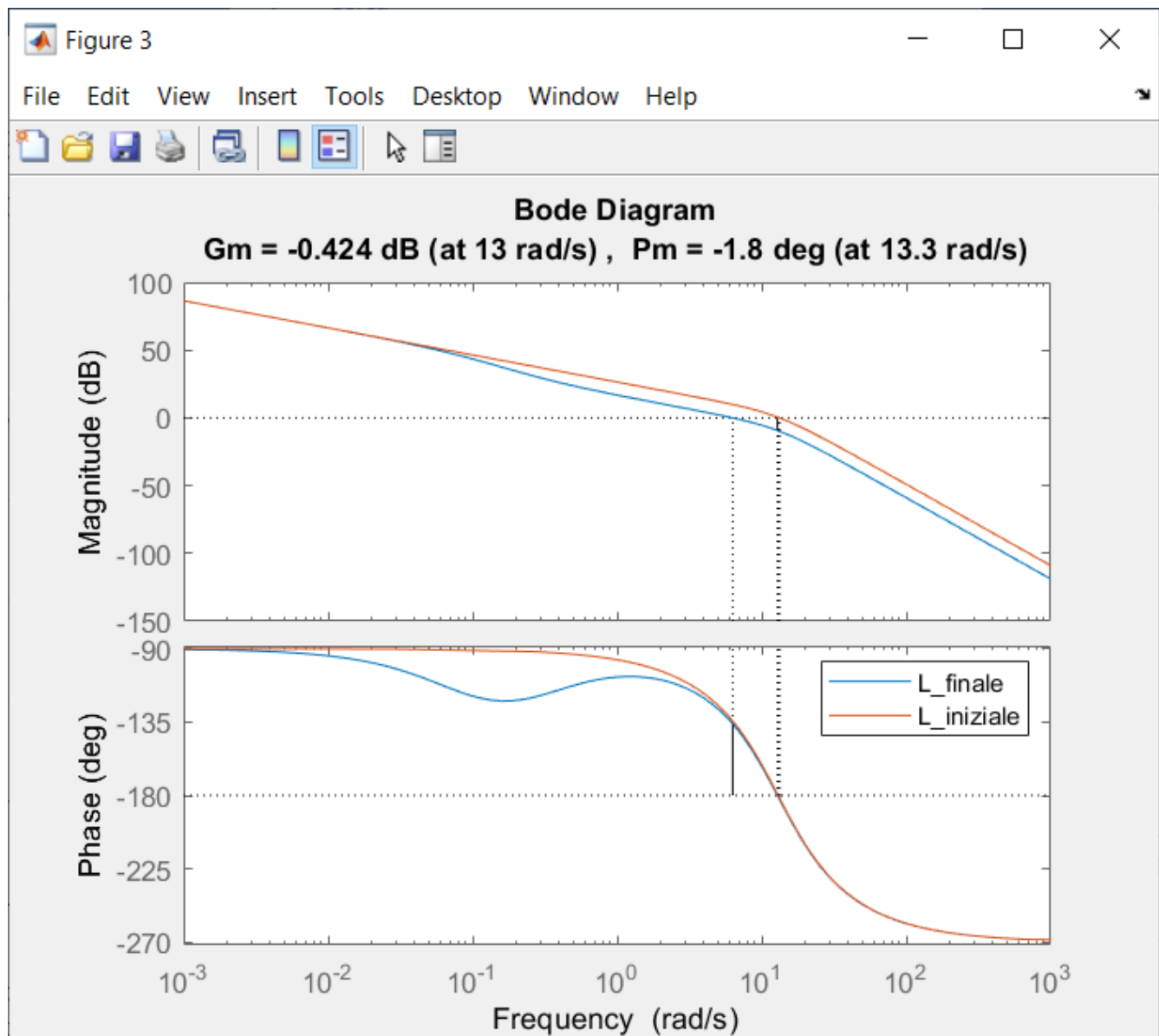
Ho ottenuto che il sistema risulta essersi stabilizzato per il criterio di Bode in quanto la funzione di anello presenta guadagno statico positivo, diagramma dei moduli monotono decrescente, pulsazione di attraversamento unica e margine di fase positivo

```
figure(2);  
margin(L_finale);  
grid;  
legend;
```



Rappresento sovrapposte le funzioni di anello iniziale e quella compensata per evidenziarne le differenze.

```
figure(3);  
margin(L_finale);  
hold on;  
margin(L_iniziale);  
legend;
```



Tramite il comando `feedback` procedo a calcolare la funzione di trasferimento della retroazione tramite la quale posso verificare graficamente che il picco di risonanza è minore di 3 dB

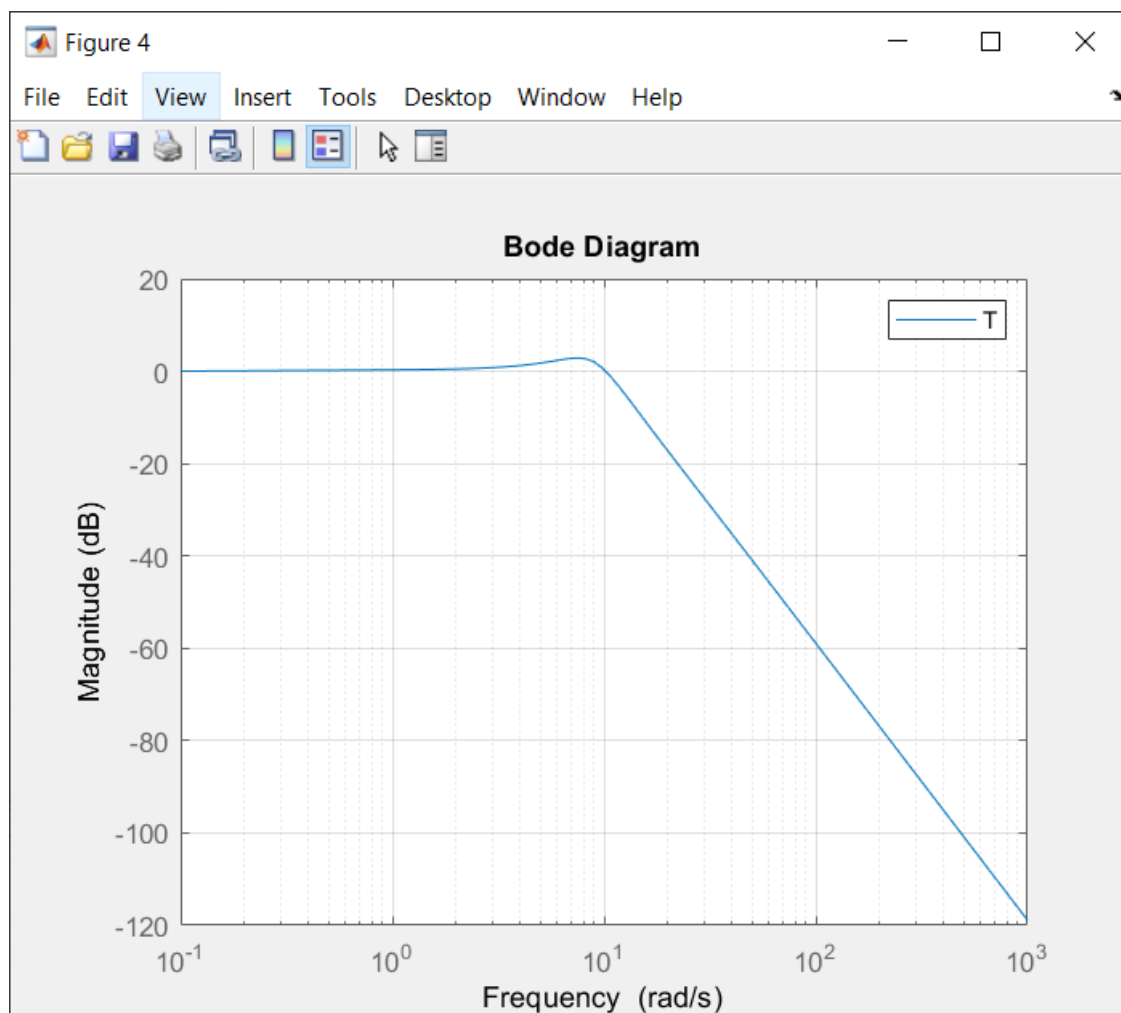
```
T = feedback(L_finale,1);
```

T =

$$1136.4 (s+0.2822)$$

$$\frac{1136.4 (s+0.2822)}{(s+13.63) (s+0.2905) (s^2 + 6.168s + 80.97)}$$

```
figure(4);  
bodemag(T);  
grid;  
legend;
```



Oltre che ad una verifica grafica, posso ricorrere ad una verifica numerica dei valori ricercati: tramite la funzione `mag2db` ottengo che il valore del picco di risonanza è 2.8756 dB (dunque al di sotto di 3dB) e tramite il comando `bandwidth` ottengo che la pulsazione è pari a 11.6129, dunque perfettamente in linea con la fascia richiesta fra 6 e 13 rad/sec

```
picco_risonanza = mag2db(getPeakGain(T));
```

```
pulsazione_banda_passante = bandwidth(T);
```

```
picco_risonanza =
```

```
2.8756
```

```
pulsazione_banda_passante =
```

```
11.6129
```

