

Analisi del Problema di Risk Management AIFS

Gaia Galizia 319707
Sofia Iani 332152
Alessio Attanasi 319689

1 Introduzione

Il problema analizzato riguarda la gestione del rischio finanziario per AIFS, un'azienda che organizza viaggi di studio all'estero. AIFS si trova esposta a due principali fonti di incertezza:

- **Tasso di cambio tra USD e EUR:** essendo l'azienda americana, ma con costi in euro, è vulnerabile a fluttuazioni del cambio.
- **Volume di studenti:** il numero di iscrizioni effettive è incerto.

Per mitigare tali rischi, l'azienda utilizza un portafoglio di strumenti finanziari composto da:

- **Contratti forward:** contratti lineari e simmetrici che permettono di acquistare valuta in un tempo futuro T ad un tasso fissato in t_0
- **Opzioni call:** strumenti che danno il diritto, ma non l'obbligo, di acquistare valuta a un tasso prefissato. Le call offrono flessibilità, ma hanno un costo iniziale (premio).

Le decisioni vanno prese al tempo $t_0 = 0$ e si suppongono noti il prezzo forward, il prezzo strike e il costo per la call e si assume, inoltre, che la maturità dei contratti sia T . L'obiettivo del modello è determinare il mix ottimale di forward e opzioni per ridurre al minimo il rischio associato alle variazioni del volume studenti e del tasso di cambio.

2 Modello di Ottimizzazione

Schema del modello

Il modello stocastico illustrato utilizza la **CV@R** (Conditional Value at Risk) come misura di rischio essendo asimmetrica e coerente. Di seguito, ne vengono definiti gli elementi principali.

1. Generazione degli scenari

Si generano N scenari equiprobabili per le seguenti variabili aleatorie:

- V : volume di studenti, campionato da una distribuzione Beta, scelta poiché consente di modellare una variabile asimmetrica con un range definito tra 10000 e 30000, centrato attorno al valore nominale di 25000,
- p : tasso di cambio, campionato da una distribuzione Normale, ovvero da una distribuzione simmetrica in quanto il range è definito tra 1.01 e 1.48, centrato attorno al valore nominale di 1.22.

2. Variabili decisionali

Le decisioni prese prima di conoscere gli esiti aleatori sono:

- $V_f \geq 0$: volume coperto tramite forward.
- $V_c \geq 0$: volume totale di call acquistate.

Le decisioni dipendenti dallo scenario s sono:

- $V_{ce}^s \geq 0$: volume di call esercitate nello scenario s .

3. Funzione di costo in ciascuno scenario s

La funzione di costo totale nello scenario s è data da:

$$\text{Cost}_s = (V_f + V_{ce}^s) \cdot (1,22 \cdot 1000) + (0,05 \cdot 1000 \cdot 1,22) \cdot V_c + p^s \cdot (V^s - V_f - V_{ce}^s) \cdot 1000,$$

dove:

- $(V_f + V_{ce}^s) \cdot (1,22 \cdot 1000)$ è il costo del volume coperto tramite forward e call esercitate.
- $0,05 \cdot 1000 \cdot 1,22 \cdot V_c$ è il costo totale per le call acquistate al tempo $t_0 = 0$
- $p^s \cdot (V^s - V_f - V_{ce}^s) \cdot 1000$ è il costo del volume non coperto, pagato al tasso spot nello scenario s .

5. Vincoli

- **Vincolo di copertura massima del volume:**

$$V_f + V_{ce}^s \leq V^s, \quad \forall s.$$

- **Vincolo sulle call esercitate:**

$$V_{ce}^s \leq V_c, \quad \forall s.$$

6. Formulazione della minimizzazione del CV@R

- Sia N il numero totale di scenari simulati.
- Siano $\omega_s = \frac{1}{N}$ le probabilità equiprobabili associate agli scenari.
- Sia $\alpha \in (0, 1)$ il livello di confidenza (ad esempio $\alpha = 0,95$).
- Sia θ una variabile ausiliaria per il Value at Risk ($V@R_\alpha$).
- Sia $z_s = \max(0, \text{Cost}_s - \theta)$, ovvero la loss in eccesso rispetto a $V@R_\alpha$, la quale è 0 se la loss non eccede la soglia θ per lo scenario s . Può essere riscritto in forma lineare come:

$$\begin{cases} z_s \geq \text{Cost}_s - \theta, \\ z_s \geq 0, \end{cases} \quad \forall s.$$

La minimizzazione del **Conditional Value at Risk** (CV@R), una misura che cattura le perdite attese negli scenari peggiori, è espressa dalla seguente formula:

$$\min \quad \theta + \frac{1}{(1 - \alpha)N} \sum_{s=1}^N z_s.$$

7. Formulazione finale del problema

Il problema di programmazione lineare si formula come:

$$\min_{V_f, V_c, V_{ce}^s, \theta, z_s} \quad \theta + \frac{1}{(1 - \alpha)N} \sum_{s=1}^N z_s$$

$$\begin{aligned} \text{soggetto a:} \quad & \text{Cost}_s = (V_f + V_{ce}^s) \cdot 1,22 \cdot 1000 + 0,05 \cdot 1000 \cdot 1,22 \cdot V_c + p^s \cdot (V^s - V_f - V_{ce}^s) \cdot 1000 \quad \forall s, \\ & V_f + V_{ce}^s \leq V^s \quad \forall s, \\ & V_{ce}^s \leq V_c \quad \forall s, \\ & z_s \geq \text{Cost}_s - \theta \quad \forall s, \\ & z_s \geq 0 \quad \forall s, \\ & V_f \geq 0, V_c \geq 0, V_{ce}^s \geq 0, \end{aligned}$$

Vincoli del modello

Il modello considera i seguenti vincoli:

- **Vincolo di copertura:** in questo modello si suppone che il volume totale coperto da forward e opzioni esercitate in uno scenario non possa superare il volume di studenti effettivi di quello scenario.
- **Vincolo sulle opzioni:** la quantità di opzioni esercitate in uno scenario non può superare la quantità totale di opzioni acquistate.
- **Definizione del CV@R:** le variabili z_s devono rispettare la condizione $z_s \geq \text{Cost}_s - \theta$, dove Cost_s è il costo totale nello scenario s .

3 Analisi dei risultati

3.1 Analisi dell'Impatto del Numero di Scenari

Un'analisi della stabilità della soluzione ottimale al variare del numero di scenari ha mostrato i seguenti comportamenti:

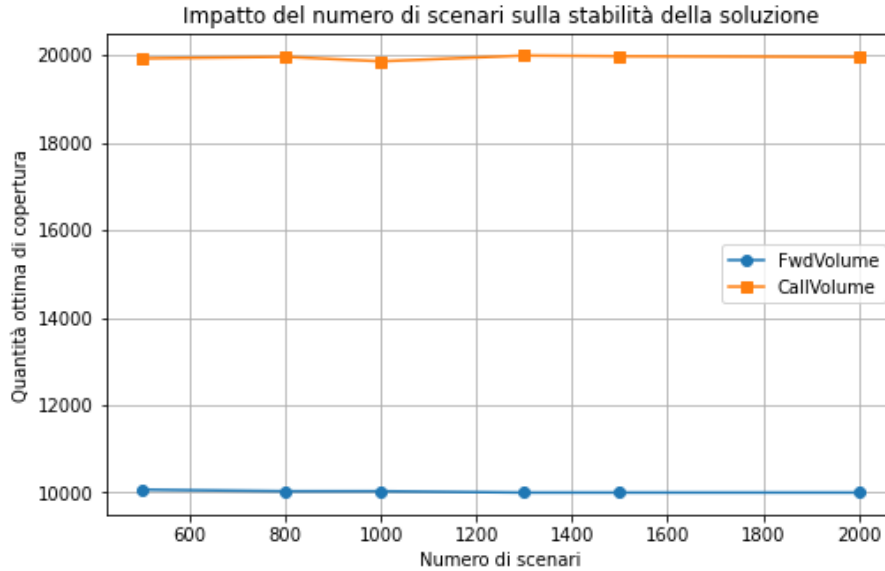


Figure 1: Impatto del numero di scenari sulla stabilità della soluzione.

Nella Figura 1 si può osservare come, variando il numero di scenari da 500 fino a 2000, il volume ottimo di Forward (linea blu) e di Call (linea arancione) restino sostanzialmente stabili: il valore del Forward oscilla attorno a 10000, mentre le Call si assestano intorno a 20000. Questo indica che, superata una certa numerosità, il modello CV@R converge a una soluzione robusta e poco sensibile ad ulteriori incrementi del numero di simulazioni, garantendo stabilità nelle decisioni di copertura.

Table 1: Risultati al variare del numero di scenari				
NumScenari	Fwd	Call	Theta	Obj(CV@R)
500	10067.85	19928.57	37810989.48	37814633.58
800	10031.86	19966.41	37813624.63	37817101.06
1000	10031.86	19862.99	37811213.36	37816528.07
1300	10000.45	19995.36	37817987.38	37819641.74
1500	10000.45	19979.48	37816513.25	37819412.88
2000	10000.45	19964.99	37816630.08	37819378.96

All'aumentare del numero di scenari (da 500 a 2000), i valori di θ e dell'obiettivo $\text{Obj}(\text{CV@R})$ tendono a stabilizzarsi. In particolare, si osserva una riduzione delle variazioni tra i parametri man mano che il campione di simulazione aumenta, indice di una maggiore precisione statistica.

3.2 Impatto del grado di incertezza sul mix forward/opzioni

3.2.1 Impatto della deviazione standard del tasso di cambio (`std.tasso`)

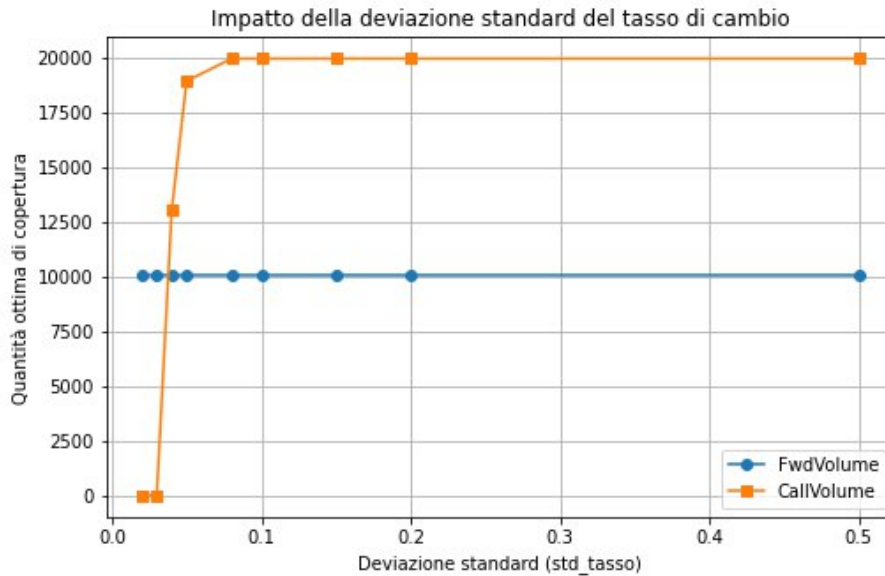


Figure 2: Impatto della deviazione standard del tasso di cambio (`std.tasso`).

La Figura 2 mostra come, variando la deviazione standard (`std.tasso`) della distribuzione da cui campioniamo il tasso di cambio, si modifichi il mix tra Forward e Call. In particolare, per bassi valori di volatilità, la soluzione tende a non coprire tramite Call in quanto il rischio di variazioni estreme del tasso è contenuto. All'aumentare della volatilità, per 0.04 e 0.05, è possibile notare un incremento nel volume di Call, fino a che non tende a stabilizzarsi intorno a 20000 unità per i valori successivi (0.08, 0.10, 0.15, 0.20, 0.50), mentre la copertura via Forward si mantiene sempre attorno a 10000. Questo indica che, se il rischio di movimenti estremi del tasso cresce, l'ottimo del modello cerca maggiore protezione con le opzioni, a costo di pagare il premio, per evitare dei costi eccessivi sui picchi di cambio sfavorevoli.

<code>std.tasso</code>	Fwd	Call	Theta	Obj(CV@R)
0.02	10067.85	0.00	36933508.26	37168913.43
0.03	10067.85	0.00	37147220.96	37495510.55
0.04	10067.85	12995.46	37607204.74	37766434.43
0.05	10067.85	18907.10	37770363.21	37806366.08
0.08	10067.85	19928.57	37810989.48	37814633.58
0.10	10067.85	19930.72	37809640.55	37814654.03
0.15	10067.85	19931.97	37811196.57	37814671.10
0.20	10067.85	19932.08	37809723.83	37814673.45
0.50	10067.85	19932.15	37811207.44	37814673.98

Dalla tabella è possibile anche notare che θ e $\text{Obj}(\text{CV@R})$ aumentano con l'aumentare di `std.tasso`, a sottolineare il maggiore rischio complessivo (rappresentato dal CV@R) dovuto ad una volatilità più elevata.

3.2.2 Impatto della variazione di β_2 (parametro della distribuzione Beta per il rischio volume)

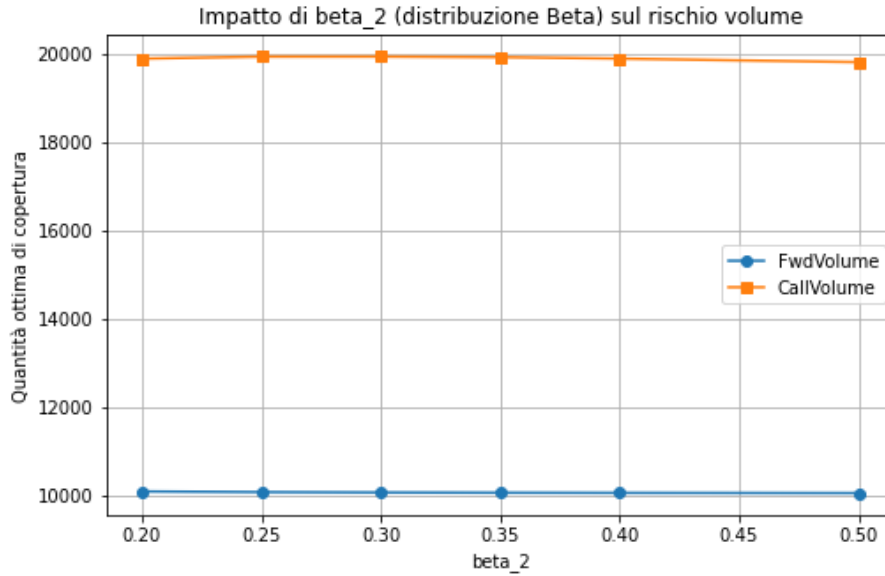


Figure 3: Impatto di β_2 (distribuzione Beta) sul volume da coprire.

La Figura 3 mostra come la soluzione ottima varia modificando il parametro β_2 della distribuzione Beta impiegata per simulare i volumi da coprire (quindi la volatilità della quantità di valuta estera necessaria). Si osserva che il Forward rimane pressoché stabile intorno a 10000 unità, mentre la quantità di Call oscilla leggermente tra circa 19000 e 20000. Anche in questo caso la soluzione dimostra una certa robustezza: la scelta del volume da coprire in Forward e in Call non varia in modo radicale al variare di β_2 .

Table 3: Risultati al variare di β_2

β_2	Fwd	Call	Theta	Obj(CV@R)
0.20	10083.14	19883.12	37813393.84	37814579.91
0.25	10067.85	19928.57	37810989.48	37814633.58
0.30	10059.25	19929.18	37794915.66	37810473.53
0.35	10053.78	19916.71	37767571.82	37800771.34
0.40	10050.01	19884.16	37695761.35	37777335.27
0.50	10045.17	19804.26	37511145.22	37687876.55

Variare il parametro β_2 nella distribuzione Beta influisce sui volumi simulati, e di conseguenza modifica i parametri in tabella. In particolare, si osserva una diminuzione graduale sia in Fwd sia in Call, nonché sui valori di θ e $\text{Obj}(\text{CV@R})$, man mano che β_2 aumenta (da 0.20 a 0.50).

In questo caso sono stati considerati solamente valori del parametro β_2 piccoli in quanto sono quelli che permettono di avere le simulazioni relative al volume incerto centrate attorno al valore 25000 e contenute in un range definito tra 10000 e 30000.

Tuttavia, si può vedere anche cosa succede prendendo valori di β_2 più grandi: la figura 4 mostra, infatti, come per valori di β_2 più elevati diminuisca il volume coperto in Call, fino ad arrivare a 0 per $\beta_2 \geq 3$. Quindi al diminuire della volatilità sul volume diminuisce anche la copertura in Call, così come il valore di θ e di $\text{Obj}(\text{CV@R})$ in quanto si deve fronteggiare un rischio inferiore. Qualora, invece, la distribuzione diventasse più larga (maggiore volatilità), ci si potrebbe aspettare un incremento dell'utilizzo di Call per fronteggiare la maggiore incertezza.

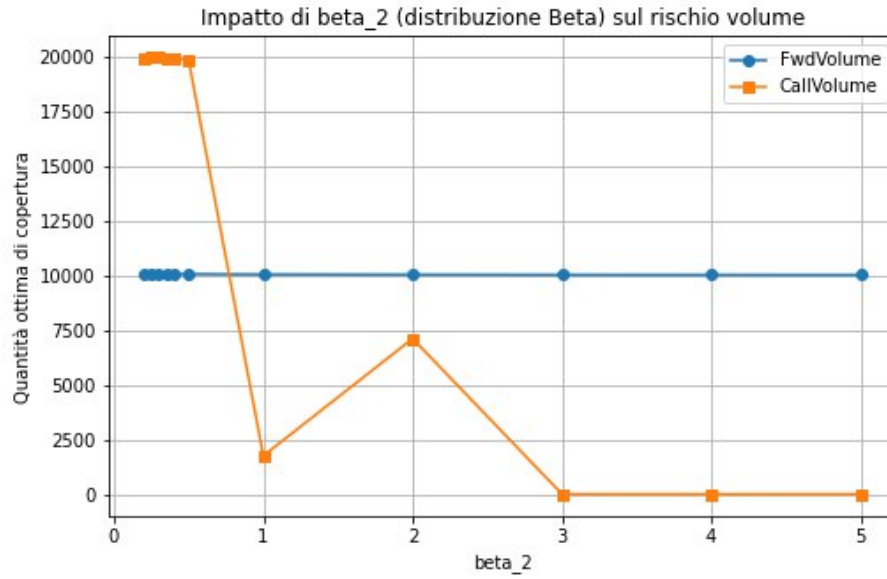


Figure 4: Impatto di β_2 (distribuzione Beta) sul volume da coprire.

Table 4: Impatto della variazione di β_2 (distribuzione Beta per i volumi)

β_2	Fwd	Call	Theta	Obj(CV@R)
0.20	10083.14	19883.12	37813393.84	37814579.91
0.25	10067.85	19928.57	37810989.48	37814633.58
0.30	10059.25	19929.18	37794915.66	37810473.53
0.35	10053.78	19916.71	37767571.82	37800771.34
0.40	10050.01	19884.16	37695761.35	37777335.27
0.50	10045.17	19804.26	37511145.22	37687876.55
1.00	10027.48	1746.83	34772103.77	36027466.45
2.00	10018.73	7099.01	29064899.94	31388629.91
3.00	10012.06	0.00	25162443.72	27310940.65
4.00	10008.92	0.00	22923474.43	25142627.03
5.00	10007.09	0.00	21362678.59	23360854.04

3.3 Impatto del livello di confidenza (CV@R_level)

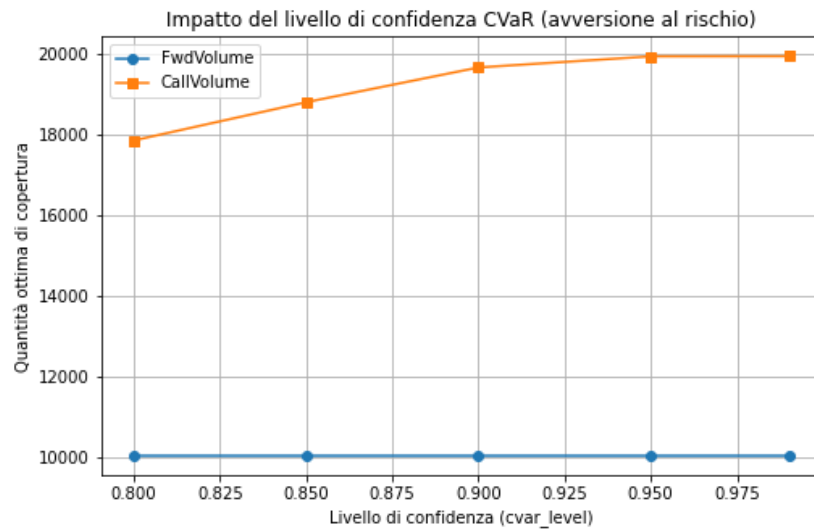


Figure 5: Impatto del livello di confidenza (CV@R).

In Figura 5 analizziamo come varia la soluzione al variare del livello di confidenza α adottato nella definizione di CV@R (da 0.80 a 0.99) e si può notare come all'aumentare di α aumenti il volume coperto in Call (mentre quello in Forward rimane costante).

Table 5: Risultati al variare di `cvar_level`

CV@R_level	Fwd	Call	Theta	Obj(CV@R)
0.99	10067.85	19932.15	37815852.04	37815859.51
0.95	10067.85	19928.57	37810989.48	37814633.58
0.90	10067.85	19653.57	37752527.58	37800788.05
0.85	10067.85	18793.23	37564716.67	37757045.38
0.80	10067.85	17846.27	37331632.36	37678794.33

Il nostro obiettivo è minimizzare i costi, dunque se α aumenta, si è più conservativi e avversi al rischio, per cui si cerca di limitare le perdite estreme.

Con una Call option, abbiamo il diritto, ma non l'obbligo, di comprare la valuta ad un tasso fisso pagando un costo al tempo $t_0 = 0$, quindi esse presentano un rischio limitato: la perdita massima è il costo pagato per l'opzione. Dunque se ci si trova nello scenario di dollaro forte, è possibile scegliere di non esercitare l'opzione, mentre con le Forward non si ha questa flessibilità. Permette, così, di limitare le perdite nei casi peggiori. Aumentando *alfa* conviene, quindi, aumentare il volume coperto tramite Call. Ovviamente, per definizione del CV@R, all'aumentare del livello α aumentano anche θ e $\text{Obj}(\text{CV@R})$.

4 Osservazioni finali

4.1

In questo elaborato il costo dell'opzione call è stato considerato costante. Tuttavia nel caso di una call option su un tasso di cambio tra due valute, ad esempio USD/EUR, la valutazione del prezzo dell'opzione può essere influenzata da diversi fattori quali il prezzo del sottostante, la volatilità, il tasso di interesse delle valute coinvolte, il tempo alla scadenza. Più precisamente la formula di Black-Scholes per una call option su un tasso di cambio è la seguente:

$$C = e^{-r_f(T-t)} S_0 N(d_1) - e^{-r_d(T-t)} K N(d_2)$$

dove:

- C è il prezzo della call option,
- S_0 è il tasso di cambio,
- K è il prezzo di esercizio (strike price),
- r_d è il tasso di interesse per la valuta domestica,
- r_f è il tasso di interesse per la valuta di base,
- $T - t$ è il tempo residuo fino alla scadenza,
- $N(d_1)$ e $N(d_2)$ sono le probabilità cumulative della distribuzione normale standard,
- σ è la volatilità del tasso di cambio.

I parametri d_1 e d_2 sono calcolati come segue:

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r_d - r_f + \frac{\sigma^2}{2})(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}$$

4.2

In questo elaborato non è stato considerato il caso in cui venga coperto più del 100% attraverso forward e call. L'idea sarebbe stata in quel caso di vendere la copertura aggiuntiva al tasso spot.