Lezione 2

Nella scorsa lezione abbiamo parlato dei limiti dei computer e abbiamo definito cos'è il calcolo numerico. Ma nella pratica, quali sono i limiti dei calcolatori che devono manipolare numeri?

Torniamo al *pi greco* π

Qual' è il valore del Pi greco?

Quante cifre di questa famosa costante vi ricordate? E soprattutto, quante cifre dobbiamo utilizzare nei calcoli?

Se volessimo calcolare il valore della circonferenza di un CD, probabilmente useremmo la formula $diametro * 3.14$, ma se stessimo lavorando alla NASA e dovessimo calcolare un'orbita dal raggio di più di $2.3 * 10^{10} Km$ *(23 miliardi di chilometri!)*, equivalente alla distanza a cui si trova la navicella spaziale più lontana da terra (il Voyager 1), allora avremmo sicuramente bisogno di un valore di π con più cifre. Ovvero, avremmo bisogno di una numero più **preciso!**

Infatti, la differenza nei risultati dalla circonferenza utilizzando π con **due cifre decimali** e con **quindici cifre decimali** è di più di 74 milioni di chilometri!

$$2 \cdot 3.14 \cdot 23\ 523\ 781\ 248 Km = 1.477293462 \cdot 10^{11} Km$$

$2 \cdot 3.141592653589793 \cdot 23\ 523\ 781\ 248 Km = 1.478042767 \cdot 10^{11} Km$

$\Delta = 7.493050674 \cdot 10^{7} Km$

Per questo motivo è indispensabile utilizzare più di due cifre decimali, e infatti sono *quindici* le cifre decimali del π che la NASA utilizza normalmente nei suoi calcoli [1]:

$$3.141592653589793$$

💡 Approfondimento: un breve video su Pi greco

The infinite lif of pi: storia, valore e applicazioni.

Anche nei computer la rappresentazione del valore di π è necessariamente una approssimazione, perché non abbiamo a disposizione una quantità *infinita* di bit per memorizzarlo!

Esercizio 03

Quante cifre ha la costante `math.pi` di Python?

Qual è il suo tipo di dato?

Numeri di macchina

💡 Un numero di macchina è la rappresentazione di tale numero in un calcolatore.

Il pi greco è un numero reale e, in quanto tale, in Python è rappresentato come un **floating point** (o “numero in virgola mobile”).

Lo **standard IEEE 754** definisce la rappresentazione e le operazioni dei floating point.

Numeri Floating Point: un ripasso

I numeri floating point si distinguono in base al numero di bit utilizzati per la rappresentazione:

- Floating point a **singola precisione**: 32 bit
  - 1 bit di segno, s
  - 8 bit per l'esponente, e
  - 23 bit per la mantissa, m

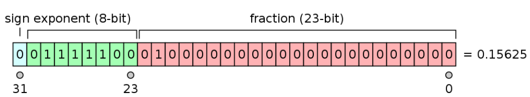


Figura 5: schema dei floating point a singola precisone.
Credits: Codekaizen

- Floating point a **doppia precisione**: 64 bit
  - 1 bit di segno, s
  - 11 bit per l'esponente, e
  - 52 bit per la mantissa, m

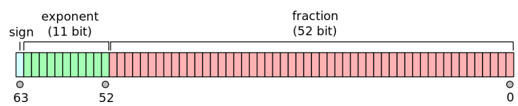


Figura 6: schema dei floating point a doppia precisione.

Di conseguenza ogni numero arbitrario è rappresentato nel seguente modo (dove *m* è normalizzata, ovvero inizia sempre con 1 ed indica le cifre del numero da rappresentare):

$$n = (-1)^s \cdot 2^e \cdot m$$

💡 I *float* di Python sono numeri a virgola mobile a doppia precisione.

🤖 Le limitazioni dei numeri macchina: alcuni principali errori

Esercizio 04

Leggi il seguente codice:

```
u = 1
i = 0

while 1 + u > 1:
```

```
    u = u / 2
    i = i + 1
```

Cosa accadrà in esecuzione?

Il numero finito di bit usati dai numeri di macchina implica che alcuni numeri saranno rappresentati con un **errore di arrotondamento**! Come succede con il pi greco, che è un numero dalle cifre infinite.

Quindi, i **numeri macchina** sono un **insieme finito e limitato** di numeri rappresentabili! Numeri troppo piccoli e numeri troppo grandi non potranno essere rappresentati come floating point.

La libreria Python `sys` permette di ottenere informazioni al riguardo:

```
import sys
sys.float_info
```

Se possiamo scrivere il numero `1.7*10**308` senza problemi, con il numero `1.8*10**308` Python stamperà `inf` per indicare che il numero è troppo grande (*inf* = *infinity*). Questo è un caso di **overflow aritmetico**.

Similmente: il numero `2.3*10**-308` è molto vicino al più piccolo numero rappresentabile, e numeri più piccoli verranno arrotondati a 0.0, fenomeno detto **underflow aritmetico**.

💡 Nota: prova a scrivere il numero `2.2*10**-309` nell'interprete di Python. Cosa succede?

Numeri più piccoli rispetto al minimo indicato da `sys.float_info` possono essere rappresentati utilizzando una notazione non normalizzata della mantissa (permettendo valori di *m* che iniziano con 0).
Quindi è meglio lavorare con numeri piccoli, piuttosto che con numeri molto grandi!

💡 *Approfondimento*: per una spiegazione alternativa leggete il paragrafo "Floating-point representation"

Quindi, come possiamo calcolare il pi greco?

Archimede fu in grado di calcolare una buona approssimazione di pi greco utilizzando un *metodo numerico* chiamato **metodo di esaustione.**

Il metodo di esaustione permette di calcolare l'area di una figura geometrica piana approssimandola con quella di poligoni, che con l'aumentare del numero di lati diventano sempre più simili alla figura originale.

In particolare, il metodo di Archimede per l'approssimazione del pi greco si basa sul calcolo di un **limite inferiore** e di un **limite superiore** per la costante, rispettivamente ottenuti dal **poligono inscritto** e **circoscritto**.

La serie di approssimazioni parte dall'**esagono**, e ad ogni iterazione si utilizza un poligono regolare con il doppio dei lati del precedente.

> 💡 Un po' di geometria…

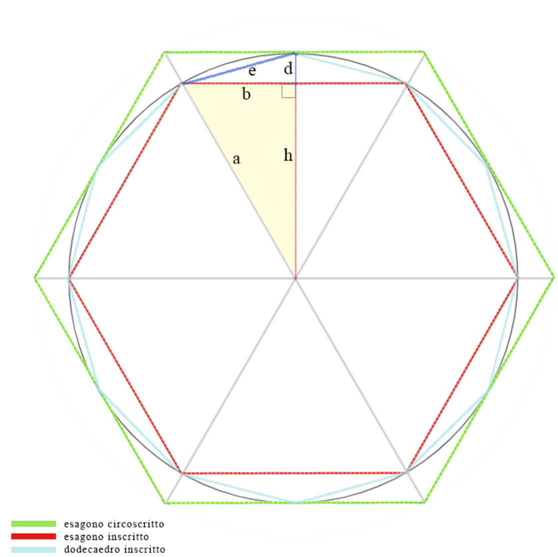
Consideriamo un cerchio di **raggio** $r = 1$.

Il metodo per il calcolo approssimato di π inizia da **due esagoni regolari** (con numero di lati $n = 6$**).** Scriviamo tutti i dati interessanti:

- **Esagono inscritto**
  - ▼ lato del poligono

    $$l = a = r = 1$$
  - ▼ lato b

    $$b = \frac{l}{2} = \frac{1}{2}$$
  - ▼ altezza h



$$h = \sqrt{1 - (\frac{l}{2})^2}$$

▼ area

$$A = n * \frac{l \cdot h}{2}$$

- **Esagono circoscritto**
  Siccome i due triangoli evidenziati in giallo sono triangoli simili, i loro lati sono proporzionali.

  ▼ altezza h'

  $$h' = r = 1$$

  ▼ lato b'

  rapporto $rapp = \frac{h'}{h} = \frac{1}{h}$
  $$b' = rapp \cdot b$$

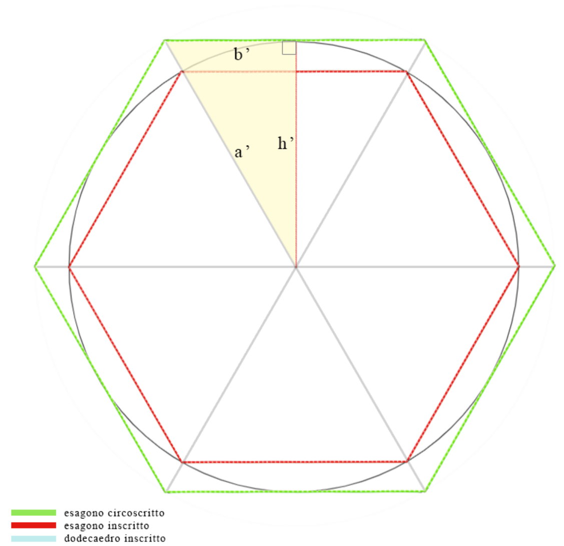
  ▼ lato del poligono l'

  $$l' = 2 \cdot b'$$

  ▼ area

  $$A' = n * \frac{l' * h'}{2}$$

Schema 1: esagono e dodecagono inscritti alla circonferenza.



Schema 2: esagono inscritto ed esagono circoscritto alla circonferenza.

Siccome l'area del cerchio è $Area = \pi \cdot r^2$, e $r = 1$, allora il limite inferiore e superiore di pi greco sono rispettivamente A e A'!

💪 Mancano pochi calcoli e sarà possibile passare all'iterazione successiva!

Dobbiamo solo "costruire" il **poligono regolare successivo**, aggiornando alcuni valori...

- $n_i = n \cdot 2$

▼ Qual è la lunghezza del lato del nuovo poligono?
Sfruttiamo il poligono precedente (come nell'immagine Schema 1).

  - $d = r - h$

- il lato del poligono è quindi $l_i = e = \sqrt{d^2 + b^2}$

Esercizio 05

Partendo dalla descrizione del metodo di esaustione di Archimede, implementa un codice Python che esegue le prime 15 iterazioni del metodo, stampando ogni limite inferiore e superiore.

Esercizio 05 +

Modifica il codice precedente in modo che ad ogni iterazione la stampa comprenda il valore stimato di π come media dei due limiti ottenuti, così come il suo *errore assoluto* (valore assoluto della differenza tra il valore reale e il valore calcolato $E_a = |val - val^*|$) e il suo *errore relativo percentuale* (dove l'errore relativo è $E_r = \frac{E_a}{|val|}$).

💡 **Il metodo di esaustione vi ricorda qualcosa?**
Questo metodo è alla base del concetto di **integrale di una funzione**!

Metodo dei rettangoli

Un integrale definito sugli estremi $[x_0, x_1]$ associa ad una funzione l'area sottesa al suo grafico e compresa tra gli estremi stessi. Come nel seguente esempio:

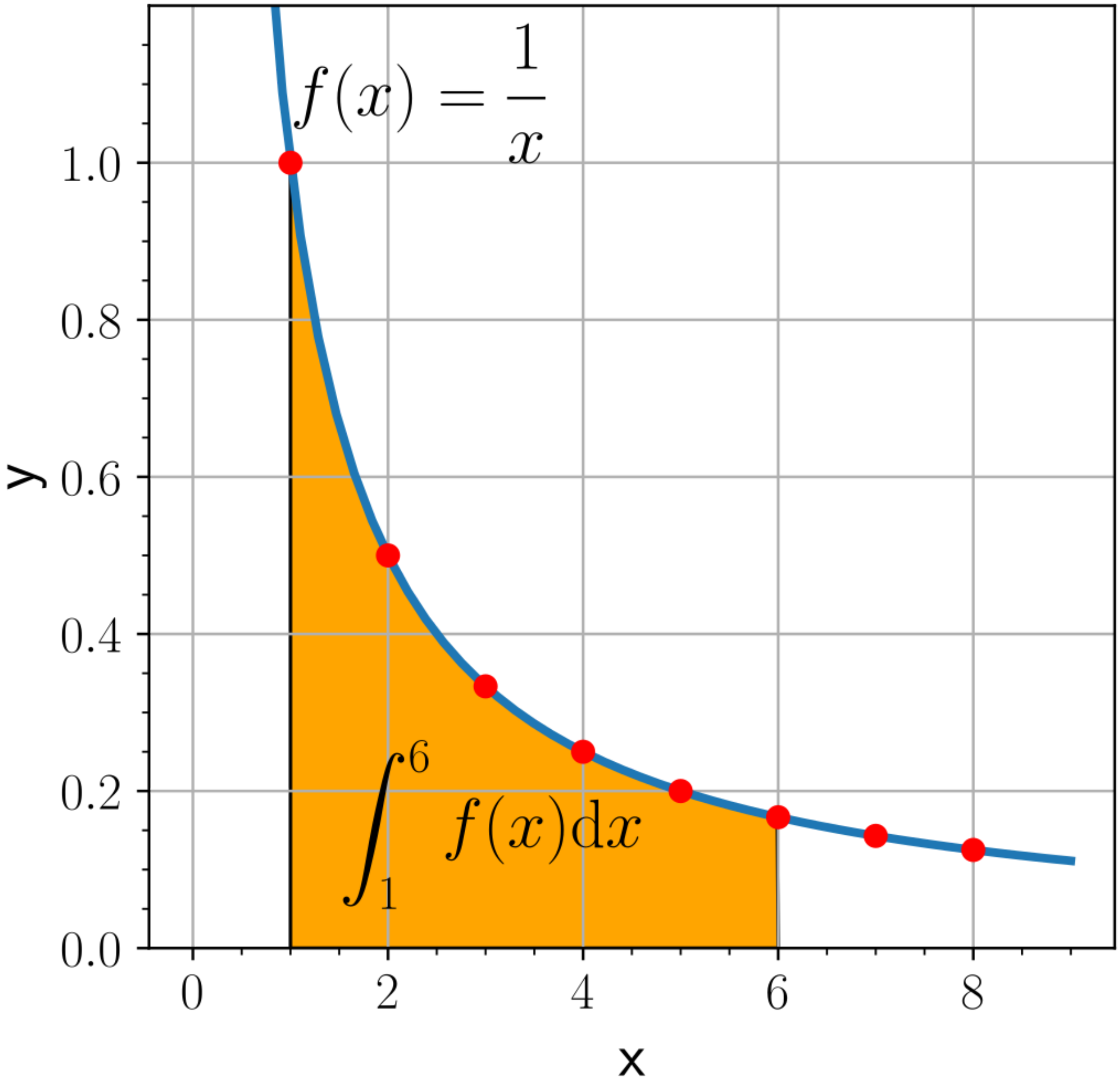


Figura 7: Esempio di integrale definito.
Credits: Krishnavedala

Una delle tante aree di studio del calcolo numerico è proprio quella del calcolo (o della **stima**) degli **integrali definiti**!

Esercizio 06

Provate a costruire lo pseudo codice Python del metodo dei rettangoli per il calcolo approssimato degli integrali definiti di una funzione:

esercizio a questo link

▼ Un metodo molto conosciuto è il **metodo dei rettangoli** (o *somma di Riemann*), che approssima il valore dell'integrale definito tra $[x_0, x_f]$ di una funzione $f(x)$ con un numero finito di somme di aree, costruite nel seguente modo:

- si divide l'intervallo $[x_0, f]$ in n sotto intervalli uguali di larghezza $b = \frac{|x_f - x_0|}{n}$;
- su ogni intervallo $[x_i, x_{i+1}]$ si costruisce un rettangolo di altezza $f(\frac{x_{i+1}-x_i}{2})$, ovvero di altezza uguale al valore della funzione f nel **punto medio dell'intervallo**;
- il valore stimato dell'integrale equivale alla **somma delle aree dei rettangoli** costruiti: $\int_{x_0}^{x_f} f(x)dx \simeq \sum_{i=x_0}^{x_f-1} f(\frac{x_{i+1}-x_i}{2}) \cdot b$

💡 Nota: più gli intervalli sono piccoli, più l'area calcolata sarà vicina a quella sottesa alla curva, e più accurato sarà il valore stimato dell'integrale.

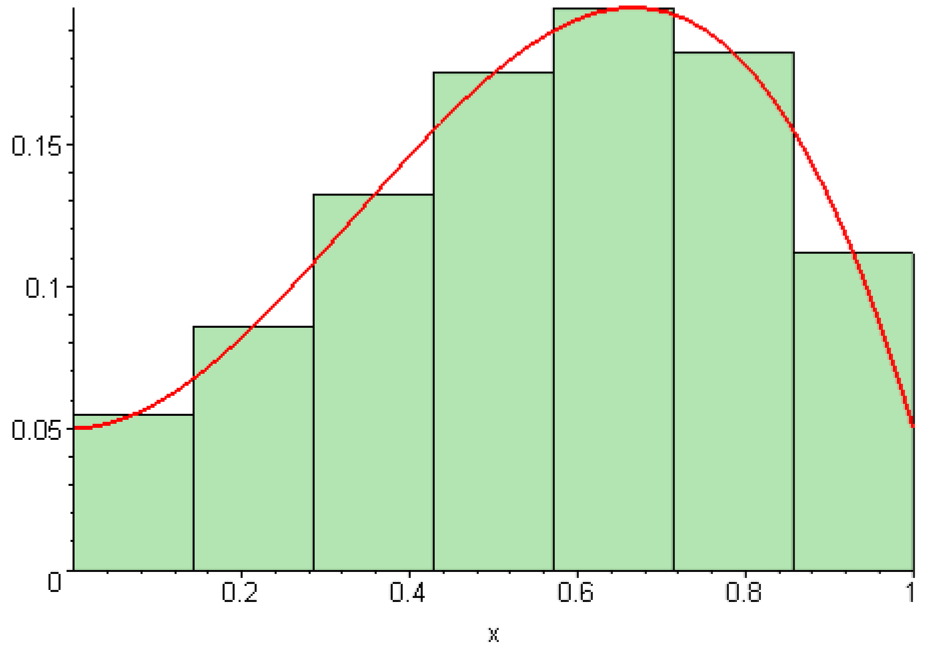


Figura 8: Animazione del metodo dei rettangoli (metodo di Riemann mid point) al crescere del numero degli intervalli di suddivisione.
Credits: 09glasgow09

Concludiamo la lezione 2:

Avete dei dubbi su quello che abbiamo visto in questa lezione? Quale argomento avete capito meglio? E quale peggio? **Scrivetelo qui**: http://scrumblr.ca/lezione02_calcolo_numerico0822

Immagine di testata: Webb Space Telescope (NASA, ESA, CSA, STScI)