Lezione 1

In questa lezione inizieremo a parlare dei limiti dei computer.

Partiamo osservando una linea retta.

Una **retta** è un'*ente geometrico fondamentale* costituito da un insieme **infinito** di punti, che possiamo rappresentare sul piano cartesiano utilizzando tre differenti equazioni: l'equazione implicita della retta, l'equazione esplicita della retta e l'equazione della retta passante per due punti:

Equazione implicita	**Equazione esplicita**	**Retta passante per due punti**
$ax + by + c = 0$	$y = mx + q$	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$
(con a, b e c numeri reali (a, b non contemporaneamente uguali a zero)	(con m coefficiente angolare)	(dove i due punti sono (x_1, y_1) e (x_2, y_2))

🤖 Ma come possiamo disegnare una retta sullo schermo di un computer ❓

La retta è un'entità *infinita*, mentre lo schermo di un computer è un dispositivo con dimensioni *finite*. Quindi, se vogliamo disegnare una linea retta sullo schermo di un computer dovremmo **approssimarla** con un segmento formato da un insieme di **pixel**!

La **trasformazione** di una forma in una **immagine costituita da pixel** è detta **rasterizzazione**.

Esercizio 01

La seguente griglia (Figura 1) di dimensioni 20 x 20 **pixel** *(quadratini)* rappresenta un (*piccolissimo*) schermo dove l'**origine delle coordinate di riferimento (0,0)** è posizionato nel pixel in alto a sinistra.

- Disegnate il segmento con estremi A e B, annerendo i pixel che vi sembrano più opportuni (la prima coordinata dei punti indica le ascisse, la seconda coordinata indica le ordinate):
  A = (2, 7)
  B = (18, 14)
- Quando avete finito, dividetevi in gruppi da due o tre persone e confrontate le rette disegnate.
  Sono tutte uguali?
- Esistono dei casi particolari in cui le linee possono essere disegnate in modo semplice e non ambiguo?

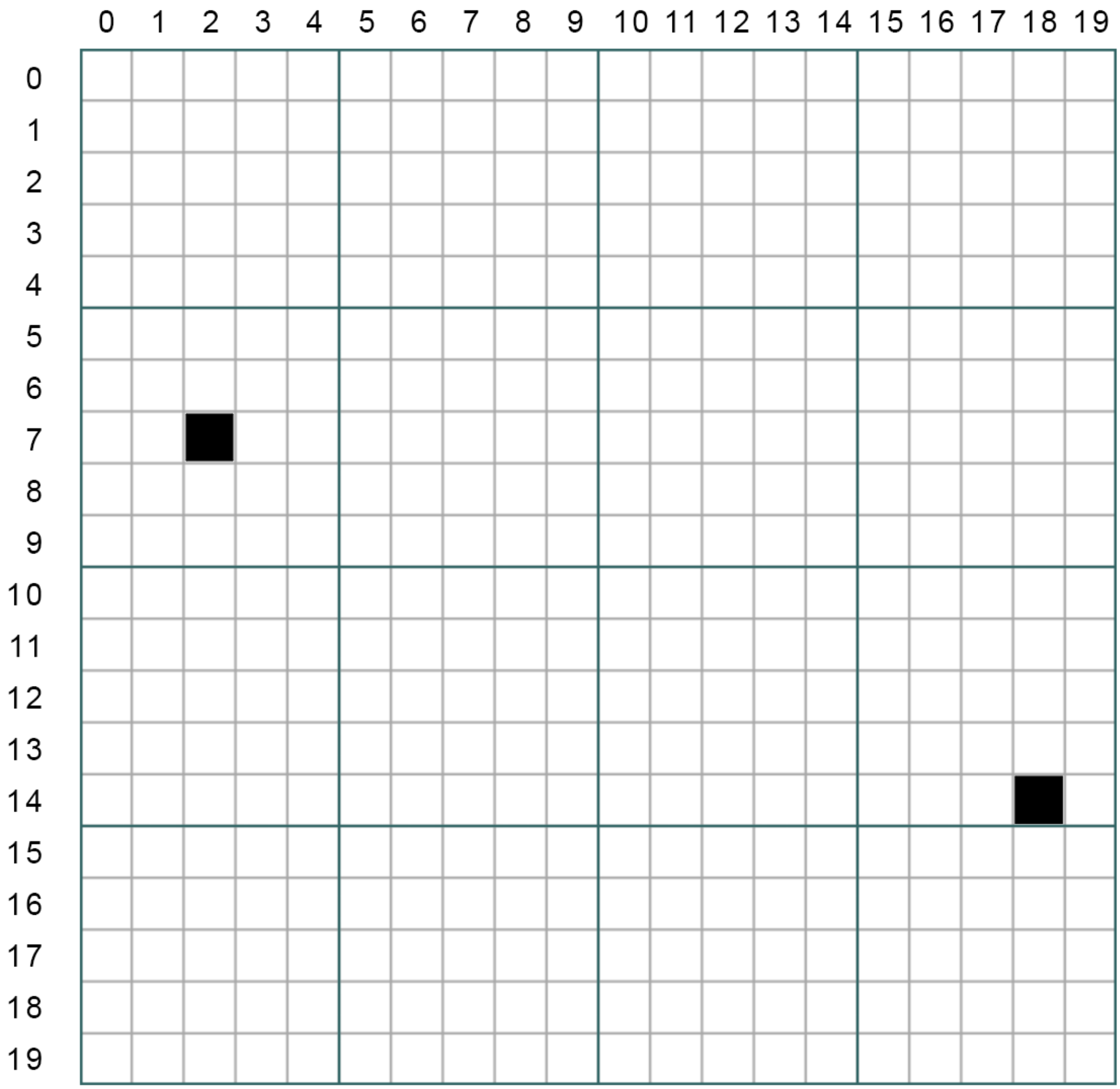


Figura 1: schema per l'esercizio 01.

💡 Perché l'origine delle coordinate di questa griglia sono in alto a sinistra? Perché imitano le coordinate degli schermi.

Esercizio 01 +

Osservando la tua retta, prova a scrivere lo pseudo codice che ne permette la realizzazione.

E' utilizzabile per disegnare altre rette?

Una possibile soluzione al problema della rappresentazione delle linee rette in uno schermo attraverso i pixel, sfrutta l'**equazione esplicita della retta**. Dati i due punti A e B, possiamo ricavare il valore di *m* e *q*:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \qquad q = y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} x_1$$

Tramite l'equazione esplicita della retta, per ogni valore di *x* compreso tra i due punti A e B, si calcola il valore corrispondete della *y*, che ci indica, una volta arrotondato a numero intero, le coordinate del pixel da colorare.

Ecco la procedura:

```
INPUT: due punti (x1, y1), (x2, y2)

m = (y1 - y2) / (x1 - x2)
q = y1 - m * x1
per ogni x tra min(x1, x2) e max(x1, x2)
    y = m*x + q
    colora il pixel (x, round(y))
```

Esercizio 02

Esiste almeno un caso particolare in cui questo algoritmo non funziona come desiderato?

▼ *Suggerimento*

Come viene disegnata il segmento con estremi (2, 18) e (5, 5)?

Esercizio 02 +

Scrivi, in Python, un programma che calcola e stampa le coordinate dei pixel che l'algoritmo *Naive line-drawing* (pseudo codice presentato sopra) andrebbe a disegnare.

Esegui il codice sui punti di estremi (2, 7) e (18, 14) (come nell'esercizio 1), e confrontali con la linea che avevi disegnato!

In tutti i casi in cui il coefficiente angolare della retta *m* è maggiore di 1, l'algoritmo *Naive line-drawing* non funziona come desiderato: lascia troppi spazi bianchi!

Per questo motivo sono stati sviluppati altri algoritmi per la rasterizzazione di linee, tra cui uno dei più utilizzati è l'**algoritmo di Bresenham**:

```
INPUT: due punti (x1, y1), (x2, y2)

a = 2 * (y2 - y1)
b = a - 2 * (x2 - x1)
p = a - (x2 - x1)

colora il pixel iniziale
per ogni x tra min(x1, x2)+1 e max(x1, x2)
  se p < 0:
    colora il pixel di ascissa x sulla stessa linea del pixel precedente
    p = p + a
  altrimenti:
    colora il pixel di ascissa x con ordinata incrementata rispetto al pixel precedente
    p = p + b
```

Oltre ad essere più corretto, l'algoritmo di Bresenham è più **efficiente**, perché le somme sono più semplici rispetto a moltiplicazioni e divisioni (usate, invece, nel ciclo dell'algoritmo *naive*).

Per fare altri due nomi di algoritmi di rasterizzazione di linee: algoritmo DDA e algoritmo della linea di Xiaolin Wu (che introduce l'effetto "sfumato" nelle linee, detto *antialiasing*).

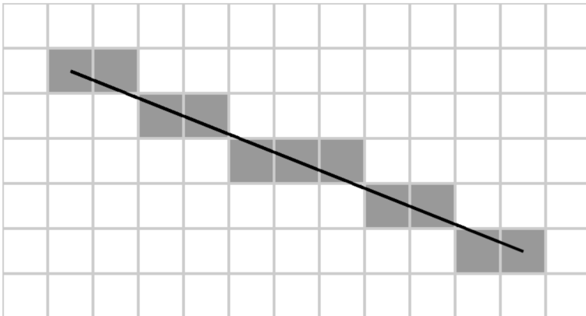


Figura 2: Esempio di linea disegnata con l’algoritmo di Bresenham.
Credits: Dnttllthmmnm (1), (2)

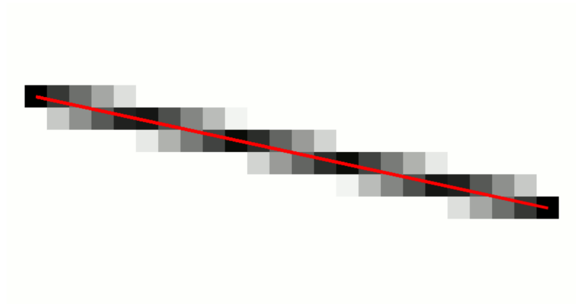


Figura 3: Esempio di linea disegnata con l’algoritmo di Xiaolin Wu.

💡 *Approfondimento* - per una ulteriore spiegazione del metodo di Bresenham, leggete questo paragrafo: https://www.csfieldguide.org.nz/en/chapters/computer-graphics/drawing-lines-and-circles/#bresenham-s-line-algorithm

📎 Cosa possiamo ricavare dall’esempio della rasterizzazione delle linee?

I computer hanno dei **limiti**!

Così come abbiamo incontrato i limiti nella rappresentazione grafica, li troviamo anche nella rappresentazione dei **numeri** e nei **calcoli** numerici.

1. Abbiamo visto che le linee rette, che sono infinite, devono essere approssimate da segmenti finiti. Allo stesso modo non tutti i numeri possono essere rappresentati dai computer, ma devono essere **approssimati**. Infatti, i computer hanno un **spazio di memoria finita** per i dati!

2. Alcuni problemi possono essere risolti con **algoritmi differenti**, e la rasterizzazione delle linee ne è un esempio. Il problema della rasterizzazione è un problema di approssimazione, e metodi differenti portano a soluzioni finali leggermente diverse le une dalle altre, più o meno vicine alla soluzione ideale.

3. Il tempo di calcolo di un problema dipende da quante operazioni bisogna eseguire. Vorremmo trovare le soluzioni più veloci (o comunque eseguibili in *tempo finito!*).

Cos'è il calcolo numerico?

💡 Il **calcolo numerico** è la disciplina matematica che studia i metodi per risolvere problemi matematici tramite algoritmi computazionali.

I metodi del calcolo numerico possono essere suddivisi in due categorie:

1. **Metodi diretti**: risolvono i problemi ottenendo la soluzione esatta, applicando un numero finito di operazioni (ad esempio risolvere in modo esatto un sistema di equazioni lineari);
2. **Metodi iterativo**: risolvono i problemi tramite successive approssimazioni, che portano ad ottenere una soluzione anch'essa approssimata.

Il concetto di **approssimazione** è fondamentale nel calcolo numerico. Perché accontentarsi di una soluzione approssimata?

> Perché alcuni problemi non hanno soluzioni analitiche (come il *problema dei tre corpi*, Figura 4), oppure perché calcolare la soluzione esatta richiederebbe troppo tempo (ad esempio calcolare il valore di una funzione molto complessa).

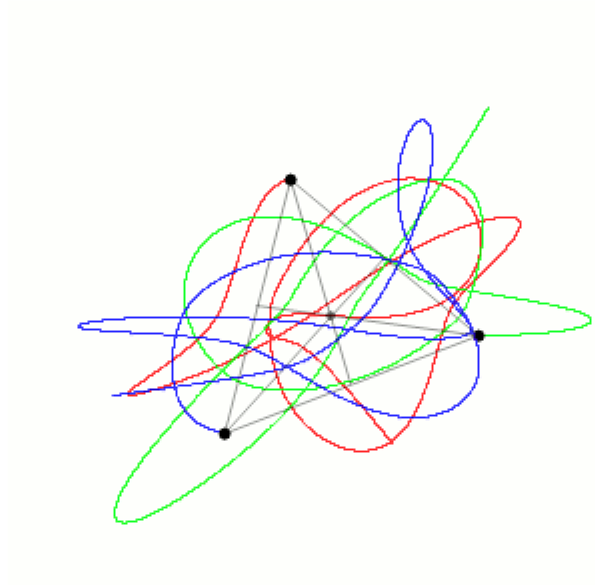


Figura 4: Approssimazione delle traiettorie di tre corpi soggetti all'attrazione gravitazionale reciproca (detto "problema dei tre corpi").
Credits: Dnttllthmmnm

🔌 Il calcolo numerico nasce molto prima dell'avvento dei computer! Perché i metodi del calcolo numerico permettevano di facilitare i calcoli a mano. Per esempio, pensate ad Archimede: fu il primo a definire un metodo per approssimare scientificamente il valore di Pi greco.

> Dopo questa breve descrizione di cos'è il calcolo numerico, quali potrebbero essere, secondo voi, le sue applicazioni?
> Scrivetele qui: http://scrumblr.ca/applicazioni_del_calcolo_numerico0822

Le applicazioni del calcolo numerico

🪐 Astronomia

- Il calcolo numerico è fondamentale per la **ricostruzione delle immagini** di **telescopi** e **satelliti**. Questi strumenti, compresi i famosi *Hubble Space Telescope* (https://hubblesite.org/) e il più recente *Webb Space Telescope* (https://webb.nasa.gov/), producono immagini affette da **rumore** (perturbazioni nei segnali e nei dati). Questo rumore deve essere rimosso (tramite metodi del calcolo numerico) per ottenere immagini che possono essere studiate dagli scienziati. [1]

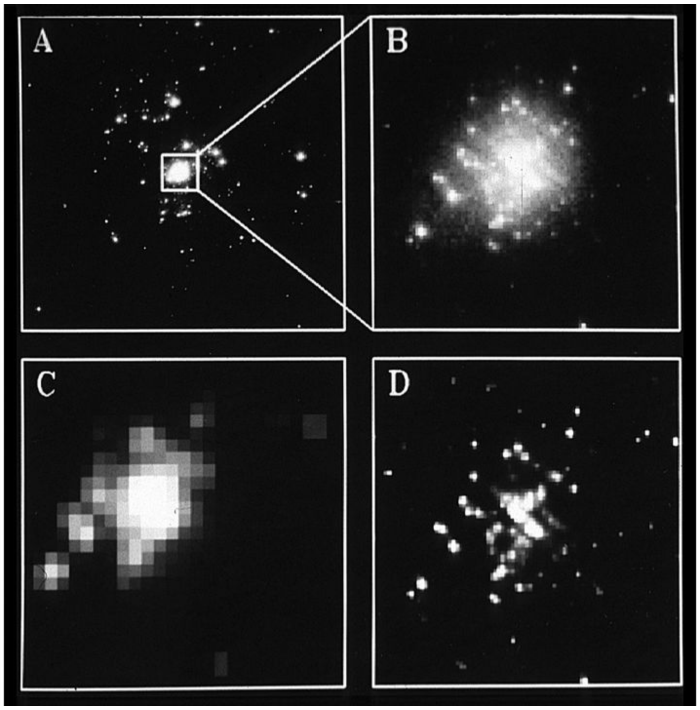
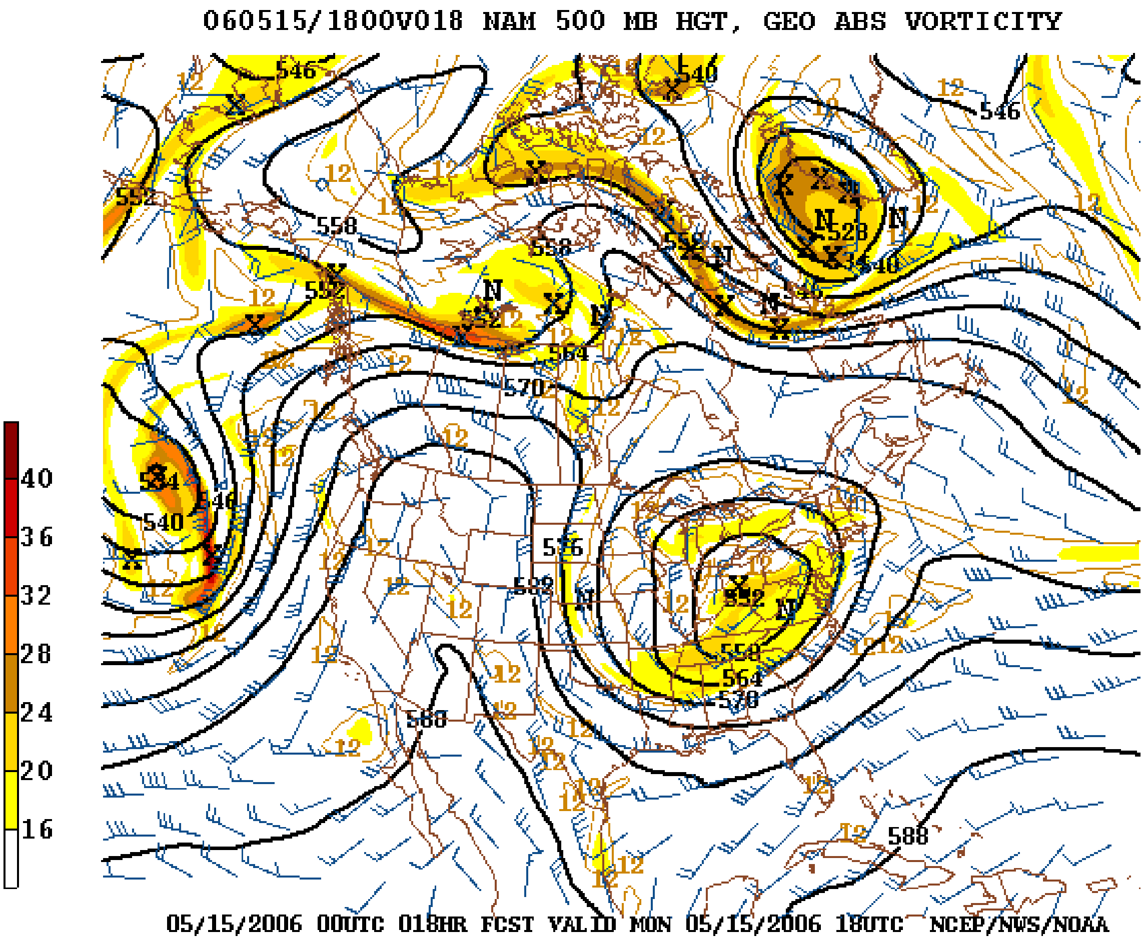


Immagine originale (A) tratta dalla telecamera *Wide Field / Planetary Camera* del telescopio spaziale Hubble, e il risultato di tre diverse tecniche di ricostruzione di immagini (B), (C), (D).
Credits: NASA, ESA, STScI

🌤️ Meteorologia

- Le previsioni del tempo prevedono molti calcoli complicati, tra cui la risoluzione di equazioni differenziali (equazioni che lega una funzione incognita alle sue derivate) che avviene tramite **metodi di approssimazione numerica**, oggetto di studio del Calcolo Numerico.

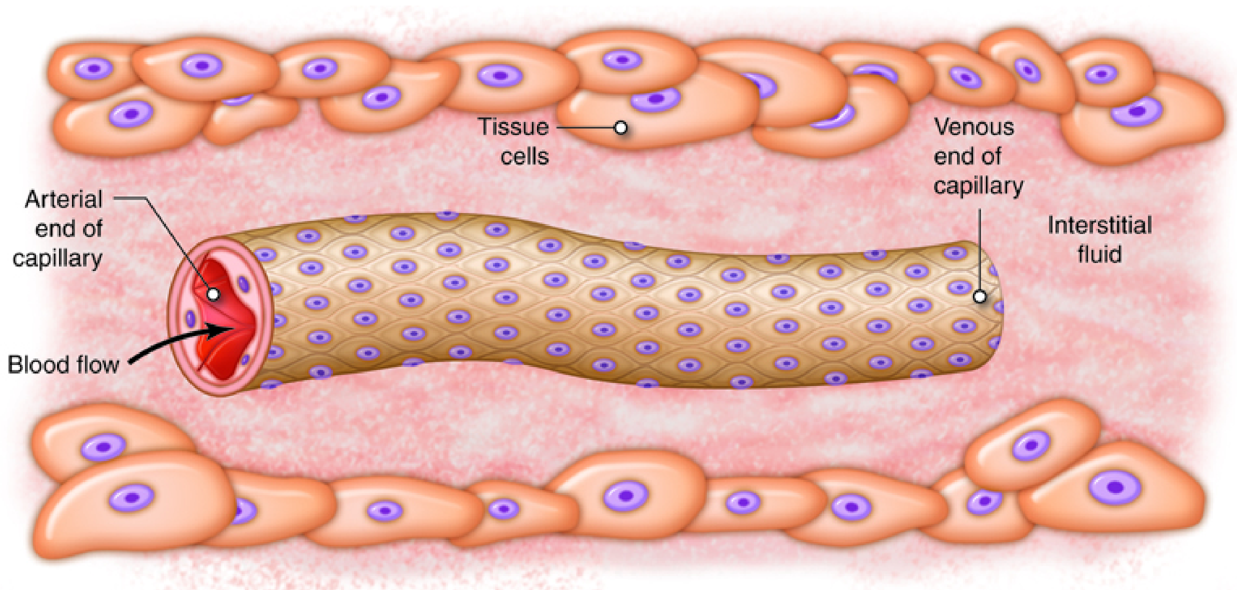


Carta meteorologica.

Credits: NWS

🧬 Biologia

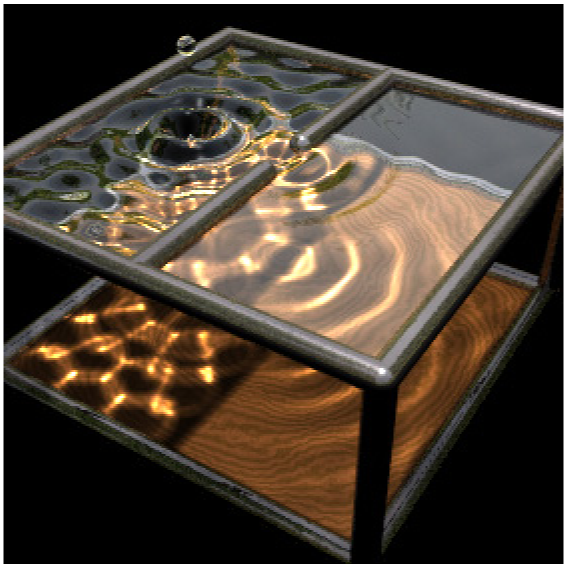
- In modo simile a quanto avviene per le immagini astronomiche, le tecniche di calcolo numerico vengono utilizzate per la ricostruzione delle immagini provenienti da **microscopi a fluorescenza** (microscopi ottici ottici che permettono l'osservazione di campioni precedentemente marcati con una molecola fluorescente: https://it.wikipedia.org/wiki/Microscopio_a_fluorescenza).
- Inoltre, i metodi del calcolo numerico vengono utilizzati per modellare vari fenomeni nel campo della medicina, come il trasporto di sostanze chimiche nel corpo umano [2], o la dinamica di una popolazione di cellule staminali.



Flusso sanguigno capillare.
Credits: CCCS Open Textbooks

📏 Simulazioni fisiche e computer grafica

- Le simulazioni di fenomeni fisici prevedono spesso l'utilizzo di equazioni differenziali. Il calcolo numerico mette a disposizione dei metodi per realizzare, tramite la **computer grafica**, **simulazioni scientifiche** che ci aiutano a capire i fenomeni del nostro mondo! Questi stessi metodi ci permettono anche di realizzare (e vedere) incredibili film di animazione



Simulazione dell'ondulazione dell'acqua.
Credits: Paul Nylander

💡 Avete visto il film "***Il diritto di contare***" (pagina Wikipedia)?

Se non lo avete ancora visto, consideratelo il compito per casa! Un bellissimo film che racconta una storia vera (con qualche licenza artistica) che tratta di matematica, calcolatori, integrazione e diritti femminili.

Sentirete nominare il metodo di Eulero, una procedura dell'**analisi numerica** per la risoluzione delle equazioni differenziali!

E per un interessante approfondimento che chiarisce le verità storiche di Katherine Johnson e del metodo di Eulero, quadrate questo breve video:

https://www.youtube.com/watch?v=gdxYsVniOYo

Concludiamo la lezione 1:

Avete dei dubbi su quello che abbiamo visto in questa lezione? Quale argomento avete capito meglio? E quale peggio? **Scrivetelo qui**: http://scrumblr.ca/lezione01_calcolo_numerico0822

Immagine di testata: Webb Space Telescope (NASA, ESA, CSA, STScI)