Allgemein

Logarithmusregeln

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$	$\log_a(n \cdot m) = \log_a n + \log_a m$
$\log_a \frac{n}{m} = \log_a n - \log_a m$	$\log_a n^m = m \cdot \log_a n$
$\log_{a^b} n = \frac{1}{b} \cdot \log_a n$	$\log_b(b^x) = x$
$\log_b(a) = \frac{\ln a}{\ln b}$	$\log_a b = x \iff a^x = b$

Eigenschaften der Exponentialfunktion

$\exp(z)$ ist stetig auf $\mathbb{C}$
$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)\ \forall z, w \in \mathbb{C}$
$\exp(0) = 1$
$\exp(z) \neq 0\ \forall z \in \mathbb{C}$
$\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}\ \forall z \in \mathbb{C}$
$\exp(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$
$\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend
$\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist strikt konvex
$|\exp(z)| \leq \exp(|z|)$
$e^x \geq 1 + x$ für $x \geq 0 \iff x \geq ln(1+x)$ für $x \geq 0$

Eigenschaften des natürlichen Logarithmus

$\ln 1 = 0$
$\ln e = 1$
$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y\ \forall x, y > 0$
$\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y\ \forall x, y > 0$
$\ln(x^k) = k \cdot \ln x\ \forall k \in \mathbb{Z}, x > 0$
$\lim_{x \to \infty} \ln x = \infty$
$\lim_{x \downarrow 0} \ln x = -\infty$
$\ln: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend
$\ln: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ ist strikt konkav

Potenzregeln

$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$	$x^a = e^{a \cdot \ln x}\ x > 0$	$0^0 = 1$ nach Vorl.

Praktische Formeln

Binomische Formel	$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
Erste Binomische Formel	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Zweite Binomische Formel	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Dritte Binomische Formel	$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$
Positivität der Quadrate	$0 \leq (a-b)^2$
pq-Formel	$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$
Mitternachtsformel	$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Barneys Formel	$(x+c)^2 + d \stackrel{!}{=} 0 \iff x_{1,2} = -c \pm \sqrt{-d}$
Bernoullische Ungleichung	$(1+x)^n \geq 1 + nx\ \forall n \in \mathbb{N}_o, \forall x > -1$

Schranken

Supremum ($\sup M$)	kleinste obere Schranke von M
Infimum ($\inf M$)	größte untere Schranke von M
Maximum von M	$\sup M$, falls $\sup M \in M$
Minimum von M	$\inf M$, falls $\inf M \in M$

Dreiecksungleichung

$|x+y| \leq |x| + |y|\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ mit Gleichheit bei gleichem Vorzeichen
$|x+y| \geq ||x| - |y||\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ mit Gleichheit bei verschiedenen Vorzeichen für x, y

Vektoren

Länge eines Vektors $\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

Skalarprodukt $<x, y> := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \Rightarrow \|x\|^2 = <x, y>$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung $|<x, y>| \leq \|x\|\|y\|\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Folgen

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$

Konvergenz

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall\epsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \epsilon$
Dann ist a der Grenzwert: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

Jede konvergente Folge reeller Zahlen ist beschränkt.
monoton + beschränkt $\implies$ konvergent

Divergenz

$\forall a \in \mathbb{R} : \exists\epsilon > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N} : \exists n \geq n_0 : |a_n - a| \geq \epsilon$
Uneigentliche Konvergenz: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$

Rechenregeln für Grenzwerte

Nur anwendbar, wenn man von Konvergenz ausgeht - nicht bei Divergenz.
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$
$\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = ca \ \forall c \in \mathbb{R}$
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, falls $b \neq 0$

Asymptotische Gleichheit

Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zahlen $\neq 0$
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \implies a_n \simeq b_n$ für $n \to \infty$

Beispiele Asymptotische Gleicheit

$$n \simeq n+1$$
$$\ln(n!) \simeq n \ln n$$

Einschließungsregel

Falls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ und $a_n \leq b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, dann gilt $a \leq b$.

Es gelte $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle bis auf endlich viele n. Falls $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha = \lim\limits_{n\to\infty} c_n \implies \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$.

Monotonie

$\forall n$ gilt:	a_n ist:
$a_n \leq a_{n+1}$	monoton wachsend
$a_n \geq a_{n+1}$	monoton fallend
$a_n < a_{n+1}$	streng monoton wachsend
$a_n > a_{n+1}$	streng monoton fallend

Für jede monotone Folge gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n & \text{falls monoton wachsend} \\ \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n & \text{falls monoton fallend} \end{cases}$$

Teilfolge

$(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sei streng monoton wachsend
$\implies (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Wichtige Folgen und Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \to 1$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} \to 0$$
$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n \to e^x$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \to 1$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^m} \to \infty \ \forall m \in \mathbb{N}$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{(\ln x)^m} \to \infty \ \forall m \in \mathbb{N}$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\ln(\ln x)} \to \infty$$
$$\lim_{x\downarrow 0} x \ln x \to 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{b^n} \to \infty \text{ für } a > b > 1$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \to 1$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} \to 1$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \ln n}{\sqrt{\ln n}} \to 0$$
$$\lim_{x\downarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \to 1$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \to 1$$
$$\lim_{x\downarrow 0} x^a \to \begin{cases} 0 & a > 0 \\ 1 & a = 0 \\ \infty & a < 0 \end{cases}$$
$$\lim_{x\to\infty} x^a \to \begin{cases} \infty & a > 0 \\ 1 & a = 0 \\ 0 & a < 0 \end{cases}$$

Reihen

Wichtige Reihen und Grenzwerte

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty \quad \text{(Harmonische R.)}$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{konvergent}$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \infty$$
$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \begin{cases} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} & z \neq 1 \\ n+1 & z = 1 \end{cases}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \begin{cases} \frac{1}{1-z} & |z| < 1 \\ \infty & z \geq 1 \end{cases} \quad \text{(geometrische R.)}$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1 \quad \text{(Teleskopreihe)}$$
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} = \infty$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \quad \text{(Exponentialreihe)}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \quad \text{konvergent} \quad \text{(Leibnizreihe)}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin x \quad \text{(Sinusreihe)}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x \quad \text{(Kosinusreihe)}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} = \ln(1+x),\ |x| < 1$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \cdot x^k = (1+x)^n,\ |x| < 1 \quad \text{(Binomialreihe)}$$

Notwendige Konvergenzbedingung

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert $\implies \lim_{k\to\infty} a_k = 0$

Diese Bedingung ist notwendig, aber nicht hinreichend.

Minoranten- / Majorantenkriterium

Für $k \in \mathbb{N}$ seien $a_k \in \mathbb{C}$ und $b_k \in \mathbb{R}$ mit $|a_k| \leq b_k$.

$\implies \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ist Majorante für $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

$\implies \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ ist Minorante für $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Majorantenkriterium

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert $\implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut

und $|\sum_{k=1}^{\infty} a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Minorantenkriterium

$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ divergiert $\implies \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergiert

Anwendung Asymptotische Gleicheit

Seien $a_n, b_n > 0$ und $a_n \simeq b_n$

$\implies \sum_{k=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ sind entweder beide konvergent oder beide divergent.

Quotientenkriterium

Sei $a_k \neq 0$ für alle bis auf endlich viele k.
Falls der Grenzwert $q = \lim_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}|$ existiert, dann gilt:

$q < 1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert

$q = 1 \implies$ keine Aussage möglich

$q > 1 \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert

Leibnizkriterium

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\implies$ die alternierende Reihe $s = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k a_n$ konvergiert

Integralkriterium

Sei $f : [1, \infty) \to [0, \infty)$ monoton fallend, dann gilt:

$0 \leq \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f(x)dx \right) \leq f(1)$

$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergiert $\iff \int_1^{\infty} f(x)dx$ konvergiert

Absolute Konvergenz

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.
absolute Konvergenz $\implies$ Konvergenz (nach dem Majorantenkriterium)

Rechenregeln für Reihen

Sind $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent $\implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k + b_k$ ist konvergent und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k + b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent und $c \in \mathbb{R}$, dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ auch konvergent.

Wenn $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergent, dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k + b_k$ divergent.

Umordnungssatz

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann absolut, wenn für jede Bijektion $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die umgeordnete Reihe gegen ein und denselben Wert konvergiert: $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Cauchy-Produkt

Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent, dann ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ mit $c_k = \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}$ absolut konvergent und es gilt:

$$(\sum_{k=0}^{\infty} a_k)(\sum_{k=0}^{\infty} b_k) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k$$

Potenzreihe

Funktionsdarstellungen der Form
$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, |x| < r$
nennt man die Entwicklung der Funktion f in eine Potenzreihe
r nennt man den Konvergenzradius der Potenzreihe

Bedeutung von Potenzreihen

Ist zu gegebenen f eine Potenzreihenentwicklung
$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ bekannt,
so kann man f durch Polynome approximieren:
$f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Ist zu gegebenen a_k, $k \in \mathbb{N}$, die erzeugende Funktion
$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$
bekannt, kann man aus den Eigenschaften von f Rückschlüsse auf das Verhalten von $a_k, k \in \mathbb{N}$ ziehen.

Konvergenzradius

Zu jeder Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ gibt es einen Konvergenzradius $r \geq 0$, sodass gilt:

$|z| < r \implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ ist absolut konvergent

$|z| > r \implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ ist divergent

$r = \frac{1}{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$, falls $\left(\sqrt[k]{|a_k|}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert

Analytische Funktion

Eine Funktion $x \mapsto f(x)$ heißt in $x = 0$ analytisch, wenn f sich mit positiven Konvergenzradius $r > 0$ in eine Potenzreihe entwickeln lässt

Seien f, g in $x = 0$ analytisch mit
$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ für $|x| < r_f$
$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ für $|x| < r_g$

Dann gilt:
f' ist in $x = 0$ analytisch und
$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx}(a_k x^k) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ für $|x| < r_f$

Die Koeffizienten sind eindeutig: $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$

Die Stammfunktionen $\int f(x)dx$ sind in $x = 0$ analytisch und

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x a_k t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$$

$f + g$ und $f \cdot g$ sind in $x = 0$ analytisch mit
$(f + g)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k$

$(f \cdot g)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \Big) x^k$

Taylorsche Formel

Sei $\varepsilon > 0$, $f : (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \to \mathbb{R}$, dann gilt:
$f(a + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n)$, für $h \to 0$

Taylorsche Formel mit Restglied

Sei I ein offenes Intervall,
$f : I \to \mathbb{R}$ (n + 1)-mal stetig differenzierbar.
Dann gilt $\forall x, a \in I$
$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + R_{n+1}(a, x)$
mit den Restgliedformeln:
$R_{n+1}(a, x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t)dt$ (Cauchy)
$= \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1}$ für ein ξ zwischen a und x (Lagrange)

Taylorpolynom

Sei f n-mal stetig differenzierbar
$\implies$ n-tes Taylorpolynom von f um a:
$T_{n,a}f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k$

Taylorreihe

Für eine beliebig oft differenzierbare Funktion f mit $\lim_{n\to\infty} R_n(a, x) = 0$ gilt:
$f(x) = T_{\infty,a}f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k$

Stetigkeit

Definition

Eine Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^q$ mit Definitionsbereich D heißt im Punkt $x \in D$ stetig, falls für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ gilt:
$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$

f heißt stetig, wenn f in allen Punkten $x \in D$ stetig ist.

Komposition von Funktionen

Seien $g : D_1 \to D_2$, $f : D_2 \to D_3$ Funktionen. Die Komposition von f und g ist definiert durch $f \circ g : D_1 \to D_3$, $x \mapsto f(g(x))$.
Die Komposition zweier stetiger Funktionen ist stetig.

Beispiele von stetigen elementaren Funktionen

$$
\begin{array}{lcl}
f(x) & = & c \ (c = konstant) \\
f(x) & = & x \\
f(x) & = & |x| \\
f(x) & = & \sqrt{x} \\
f(x, y) & = & x + y \\
f(x, y) & = & xy \\
f(x, y) & = & \frac{x}{y} \\
f(x) & = & a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0 \\
f(x) & = & e^x \\
f(x) & = & sinx \lor \cos x \lor \tan x \lor \cot x
\end{array}
$$
Summen und Produkte stetiger Funktionen sind stetig.

Zwischenwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $y \in \mathbb{R}$ eine Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$, d.h. $f(a) < y < f(b)$ oder $f(a) > y > f(b)$.
Dann gibt es ein $x \in (a, b)$, d.h. $a < x < b$ mit $f(x) = y$.

Eine auf $[a, b]$ stetige Funktion nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Häufungspunkte

$a^* \in \mathbb{R}^d$ ist Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gibt mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a^*$

Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ besitzt mindestens eine konvergente Teilfolge und damit einen Häufungspunkt

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in \mathbb{R}^d$ heißt beschränkt, falls
$\exists M > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ ||x_n|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} x_{n,i}^2} \leq M$

Minima und Maxima von Funktionen

Sei $f : D \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$
$x \in D$ ist Minimumstelle und $f(x)$ ist Minimum von f auf D
$\iff f(x) \leq f(y) \; \forall y \in D$
$x \in D$ ist Maximumstelle und $f(x)$ ist Maximum von f auf D
$\iff f(x) \geq f(y) \; \forall y \in D$

Satz von Minimum und Maximum

Sei $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt $\implies$ Jede stetige Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ nimmt auf K ihr Maximum und Minimum an:
$\exists \underline{x}, \overline{x} \in K$ sodass $f(\underline{x}) \leq f(x) \leq f(\overline{x}) \; \forall x \in K$
$\underline{x} = \arg\min\limits_{x \in K} f(x)$
$\overline{x} = \arg\max\limits_{x \in K} f(x)$
$f(\underline{x}) = \min\limits_{x \in K} f(x)$
$f(\overline{x}) = \max\limits_{x \in K} f(x)$

Abgeschlossenheit

$A \subseteq \mathbb{R}^d$ ist abgeschlossen, falls der Grenzwert jeder konvergenten Folge aus A wider in A liegt

$\forall n \; x_n \in A$ und $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x \implies x \in A$

Kompaktheit

$K \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt kompakt, falls K abgeschlossen und beschränkt

Eine kompakte Menge $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}$ besitzt ein Maximum und ein Minimum

$K \subseteq \mathbb{R}^d$ ist kompakt $\iff$ Jede Teilfolge aus K besitzt eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K

Sei $f : K \subseteq \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^q$ stetig. Ist K kompakt
$\implies f(k) = \{f(x) : x \in K\}$ = Bild von K unter f ist kompakt
(d.h. stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt)

Wichtige Funktionen

Bijektion

$f : D \subseteq \mathbb{R}^d \to B \subseteq \mathbb{R}^q$ ist bijektiv, falls $\forall y \in B$ genau ein $x \in D$ existiert mit $f(x) = y$

$f^{-1} : B \to D, y \mapsto x$ heißt Umkehrfunktion von f

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend $\implies f : I \to f(I)$ ist bijektiv und $f^{-1} : f(I) \to I$ ist stetig und streng monoton wachsend
Es gilt: $f^{-1}(f(x)) = x \; \forall x \in I$
$f(f^{-1}(y)) = y \; \forall y \in f(I)$

Asymptotisches Verhalten von exp und ln

Die Exponentialfunktion wächst schneller als jedes Polynom

x wächst schneller gegen ∞ als jede Potenz des Logarithmus

Trigonometrische Funktionen

$$
\begin{array}{lll}
\cos^2 x + \sin^2 x = 1 & \cos(-x) = \cos x & \sin(-x) = -\sin x \\
\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y & & \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \\
\sin(x+y) = \cos x \cdot \sin y - \sin x \cdot \cos y & & \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}
\end{array}
$$

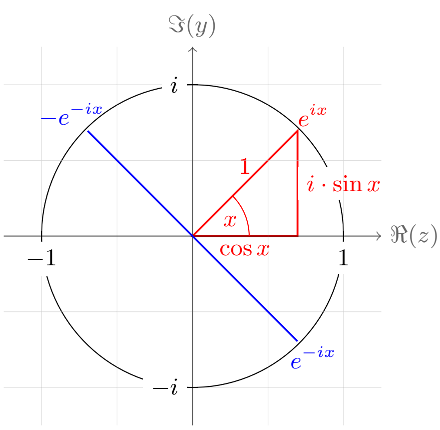
$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton wachsend $\iff$
$\arcsin : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton wachsend

$\cos : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton fallend $\iff$
$\arccos : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton fallend

$\tan : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton wachsend $\iff$
$\arctan : \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ist stetig und streng monoton fallend

Komplexe Zahlen

$$
\begin{array}{lll}
e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x & i^2 = -1 & z = x + iy \\
|e^{ix}|^2 = 1 & |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}} & \overline{z} = x - iy \\
\Re(z) = x & \Im(z) = y & \overline{\overline{z}} = z \\
\cos x = \dfrac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) & \sin x = \dfrac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) & \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \\
\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'} & &
\end{array}
$$



Differenzierbarkeit

Landau-Symbole

Seien $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ Funktionen und $x_0 \in \mathbb{R}^d \implies$

$f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ für $x \to x_0$, falls $\exists \varepsilon > 0\ \exists C > 0$ sodass ($\forall x \in \mathbb{R}^d$ mit $||x - x_0|| < \varepsilon) : |f(x))| \leq C \cdot |g(x)|$
Man sagt: f ist bis auf eine Konstante asymptotisch durch g beschränkt.
und

$f(x) = o(g(x))$ für $x \to x_0$, falls $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
Man sagt: f ist gegenüber g asymptotisch vernachlässigbar.

$f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ für $x \to -\infty$, falls $\exists M > 0\ \exists C > 0$, sodass $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $x < -M$ gilt: $|f(x) \leq C \cdot |g(x)|$

$f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ für $x \to \infty$, falls $\exists M > 0\ \exists C > 0$, sodass $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $x > M$ gilt: $|f(x) \leq C \cdot |g(x)|$

Beispiele

$f(x) = \mathcal{O}(1) \iff |f(x)| \leq C$
$\implies f$ ist in einer Umgebung von x_0 beschränkt
$f(x) = o(1) \iff \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{1} = 0$
$\implies f$ ist in einer Umgebung von x_0 beschränkt $\implies f(x) = \mathcal{O}(1)$
$f(h) = o(h) \iff f(h) = o(1)$

Differenzierbarkeit

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in $x_0 \in I$, falls für eine Zahl $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ die Linearisierung $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|)$ für $x \to x_0$ gültig ist.

Die approximierende Gerade $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ heißt Tangente von f in x_0.

Ihre Steigung $f'(x_0)$ heißt Ableitung von f in x_0

f ist in jedem Punkt differenzierbar $\iff$ f ist differenzierbar

Differenzierbarkeit $\implies$ Stetigkeit

Differenzenquotient

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{mit } h = x - x_0$$
$$f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$$

Wichtige Ableitungen

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$a^x = e^{x \ln(a)}$	$a^x \cdot \ln(a)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1 + x^2}$

Ableitungsregeln

Voraussetzung: f, g sind differenzierbar in x

$$(cf)'(x) = cf'(x)$$
$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) \quad \text{(Summenregel)}$$
$$(fg)'(x) = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x) \quad \text{(Produktregel)}$$
$$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2} \quad \text{(Quotientenregel)}$$
$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \text{(Kettenregel)}$$
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x)} \quad \text{falls f bijektiv}$$

Anwendungen der Ableitung

Extrema

Globale Maxima/Minima

f hat bei $x_0 \in [a,b]$ ein globales Maximum, falls $f(x_0) \geq f(x)$
f hat bei $x_0 \in [a,b]$ ein globales Minimum, falls $f(x_0) \leq f(x)$

Lokale Maxima/Minima

f hat bei $x_0 \in [a,b]$ ein lokales Maximum, falls $\exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \cap [a,b]$ gilt: $f(x_0) \geq f(x)$

f hat bei $x_0 \in [a,b]$ ein lokales Minimum, falls $\exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \cap [a,b]$ gilt: $f(x_0) \leq f(x)$

Globale Extrema sind auch lokale Extrema

Hat f in x_0 ein lokales Extremum $\implies f'(x_0) = 0$

Strikte Extrema

Gilt $f(x_0) > f(x) \implies f$ hat in x_0 ein striktes Maximum
Gilt $f(x_0) < f(x) \implies f$ hat in x_0 ein striktes Minimum

Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und diff'bar auf (a,b)
$\implies$ Es gibt ein $\xi \in (a,b)$ mit $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$

Ist $f(a) = f(b) \implies$ Es gibt ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$

Verallgemeinerter Mittelwertsatz

Sei $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und diff'bar auf (a,b) und sei $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$
$\implies g(a) \neq g(b)$ und
es gibt ein $\xi \in (a,b)$ mit $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

Monotonie

$\forall x, y \in I$ mit $x \leq y$ gilt:	$f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist:
$f(x) \leq f(y)$	monoton wachsend
$f(x) \geq f(y)$	monoton fallend

$\forall x, y \in I$ mit $x < y$ gilt:	$f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist:
$f(x) < f(y)$	streng monoton wachsend
$f(x) > f(y)$	streng monoton fallend

Konstante Funktionen sind monoton wachsend und monoton fallend

Monotoniekriterium

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und diff'bar auf (a,b). Dann gilt

$\forall x \in (a,b)$ gilt:		f ist auf $[a,b]$:
$f'(x) > 0$	$\implies$	streng monoton wachsend
$f'(x) < 0$	$\implies$	streng monoton fallend
$f'(x) \geq 0$	$\iff$	monoton wachsend
$f'(x) \leq 0$	$\iff$	monoton fallend

Hinreichendes Kriterium für Extrema

Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ diff'bar und $f'(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in (a,b) \implies$

$f' \geq 0$ in $(x_0-\varepsilon, x_0)$ und $f' \leq 0$ in $(x_0, x_0+\varepsilon)$
$\implies$ lokales Maximum in x_0

$f' \leq 0$ in $(x_0-\varepsilon, x_0)$ und $f' \geq 0$ in $(x_0, x_0+\varepsilon)$
$\implies$ lokales Minimum in x_0

$f' \geq 0$ in (a, x_0) und $f' \leq 0$ in (x_0, b)
$\implies$ globales Maximum in x_0

$f' \leq 0$ in (a, x_0) und $f' \geq 0$ in (x_0, b)
$\implies$ globales Minimum in x_0

Gilt $\forall x \in (a,b) : f'(x) = 0 \iff f = const$ auf (a,b)

Regel von de l'Hospital

Sei $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ oder ∞
und $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert
$\implies \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Höhere Ableitungen

$$\begin{aligned} f' &= f^{(1)} \\ f'' &= f^{(2)} \\ &\dots \\ \dots &= f^{(n)} \end{aligned}$$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist n-mal diff'bar in (a,b), falls $f^{(1)}, \dots, f^{(n)}$ auf (a,b) existieren

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist n-mal stetig diff'bar in (a,b), falls $f^{(1)}, \dots, f^{(n)}$ auf (a,b) existieren und dort stetig sind. Man schreibt $f \in \mathcal{C}^n(a,b)$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist unendlich oft diff'bar in (a,b), falls $f^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert. Man schreibt $f \in \mathcal{C}^\infty(a,b)$

Polynome sind in $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$
$\exp \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

Krümmungsverhalten

Für $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ gilt:

$f'' \geq 0$ auf (a,b)	$\iff$	f ist konvex (linksgekrümmt) oder gerade
$f'' \leq 0$ auf (a,b)	$\iff$	f ist konkav (rechtsgekrümmt) od. gerade
$f'' > 0$ auf (a,b)	$\implies$	f ist strikt konvex (linksgekrümmt)
$f'' < 0$ auf (a,b)	$\implies$	f ist strikt konkav (rechtsgekrümmt)

Lokale Extrema

$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0 \implies$ striktes lokales Minimum in x_0
$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0 \implies$ striktes lokales Maximum in x_0

$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0 \implies$ keine Aussage möglich für x_0

Kurvendiskussion

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ und f zweimal stetig differenzierbar

Randverhalten

$\lim_{x\to a} f(x)$ und $\lim_{x\to b} f(x)$

Extrema

1. Bestimme alle x_i, für die gilt $f'(x_i) = 0$ $i \in \mathbb{N}$
2. Berechne für alle x_i $f''(x_i)$:
   $f''(x_i) > 0 \implies$ striktes lokales Minimum in x_i
   $f''(x_i) < 0 \implies$ striktes lokales Maximum in x_i
   $f''(x_i) = 0$:
   $f(x_i - \varepsilon) \geq f(x_i)$ und $f(x_i + \varepsilon) \geq f(x_i)$
   $\implies$ lokales Minimum in x_i
   $f(x_i - \varepsilon) \leq f(x_i)$ und $f(x_i + \varepsilon) \leq f(x_i)$
   $\implies$ lokales Maximum in x_i
   $f(x_i - \varepsilon) \leq f(x_i)$ und $f(x_i + \varepsilon) \leq f(x_i)$
   $\implies$ kein Extremum in x_i
3. Bestimme globales Maximum:
   $$\max(f(x_i), \lim_{x\to a} f(x), \lim_{x\to b} f(x) = \begin{cases} c \implies c \text{ ist glob. Maximum} \\ \pm\infty \implies \text{kein glob. Maximum} \end{cases}$$
4. Bestimme globales Minimum:
   $$\min(f(x_i), \lim_{x\to a} f(x), \lim_{x\to b} f(x) = \begin{cases} c \implies c \text{ ist glob. Minimum} \\ \pm\infty \implies \text{kein glob. Minimum} \end{cases}$$

Monotonie

Bestimme für alle Intervalle (x_i, x_{i+1}) mit $f'(x_i) = 0$ $\forall i$

Für alle x in (x_i, x_{i+1}) gilt:		f ist auf (x_i, x_{i+1})
$f'(x) > 0$	$\implies$	streng monoton wachsend
$f'(x) < 0$	$\implies$	streng monoton fallend
$f'(x) \geq 0$	$\implies$	monoton wachsend
$f'(x) \leq 0$	$\implies$	monoton fallend

Krümmung

Bestimme für alle Intervalle (x_i, x_{i+1}) mit $f''(x_i) = 0$ $\forall i$

Für alle x in (x_i, x_{i+1}) gilt:		f ist in (x_i, x_{i+1})
$f'' > 0$	$\implies$	strikt konvex (linksgekrümmt)
$f'' < 0$	$\implies$	strikt konkav (rechtsgekrümmt)
$f'' = 0$	$\implies$	keine Aussage möglich

Integration

Riemann-Summe

$$S_z = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \text{ mit } \xi_j \in [x_{j-1}, x_j], 1 \leq j \leq n$$

Riemann-Integral

Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt (Riemann-)integrierbar, falls für alle Zerlegungsfolgen $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Feinheit $|Z_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ die zugehörigen Riemann-Summen S_{Z_n} für jede Wahl der Zwischenpunkte gegen denselben Grenzwert I(f) konvergiert:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = I(f)$$

$I(f)$ heißt bestimmtes Integral von $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

f heißt Integrand

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar

Integraleigenschaften

Normierung:

$$\int_a^b 1dx = \int_a^b dx = b - a$$
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Positivität:

$$f \geq 0 \text{ auf } [a, b] \implies \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

Monotonie:

$$f \geq g \text{ auf } [a, b] \implies \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

Linearität:

$$\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$$

Zerlegbarkeit:

$$a < c < b \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Verschiebung um c:

$$\int_a^b f(x - c)dx = \int_{a-c}^{b-c} f(x)dx$$

Skalierung um c:

$$\int_a^b f(cx)dx = \frac{1}{c} \int_{ac}^{bc} f(x)dx$$

Sonstige:

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln \frac{f(b)}{f(a)}$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $p : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar mit $p > 0$. Dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = f(\xi) \int_a^b p(x)dx$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig.
$F : [a, b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$
ist in jedem $x \in (a, b)$ differenzierbar und es gilt:
$F'(x) = f(x)$

Stammfunktion

Sei $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar
$F'(x) = f(x)\ \forall x \in (a, b)$
$\implies$ F ist eine Stammfunktion von f auf (a, b)

Zwei Stammfunktionen unterscheiden sich nur durch eine Konstante:
$G(x) = F(x) + c$

Unbestimmtes Integral

$\int f(x)dx$ ist eine Stammfunktion von $f(x)$

Bestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = [F(x)]_{x=a}^{x=b} = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Wichtige Stammfunktionen

f(x)	F(x)
$x^a, a \neq -1$	$\frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$
e^x	e^x
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\ln x$	$x \ln x - x$
$a^x, a > 0$	$\frac{1}{\ln a} a^x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$

Substitutionsregel

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Merkregel:
$u = g(x)$, $du = g'(x)dx$
$a \Rightarrow g(a)$, $b \Rightarrow g(b)$

Beispiel:
$\int_0^1 \sin(2x) \cdot 2dx$, $g(x) = 2x$, $f(g(x)) = \sin(2x)$, $g'(x) = 2$
$u := 2x$, $du = 2dx$, $g(0) = 0$, $g(1) = 2$
$$\int_0^1 \sin(2x) \cdot 2dx = \int_0^2 \sin(u)du = [-\cos(u)]_0^2 = [-\cos(2x)]_0^1$$

Partielle Integration

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)dx$$

Partialbruchzerlegung

Sei $f(x) = \frac{\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_m x^m + \cdots + \beta_1 x + \beta_0}$

1. Finde alle Polstellen $x_{\infty,i}$ von $f(x)$ $\implies$
$f(x) = \frac{a_1}{x - x_{\infty,1}} + \cdots + \frac{a_m}{x - x_{\infty,m}}$
$= \frac{a_1 \cdot (x - x_{\infty,2}) \cdot \ldots \cdot (x - x_{\infty,m})}{\beta_m x^m + \cdots + \beta_1 x + \beta_0}$
$+ \frac{a_2 \cdot (x - x_{\infty,1})(x - x_{\infty,3}) \cdot \ldots \cdot (x - x_{\infty,m})}{\beta_m x^m + \cdots + \beta_1 x + \beta_0}$
$+ \cdots + \frac{a_m \cdot (x - x_{\infty,1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_{\infty,m-1})}{\beta_m x^m + \cdots + \beta_1 x + \beta_0}$

2. Forme um zu:
$f(x) = \frac{(c_{1,m}a_1 + \cdots + c_{m,m}a_m)x^m + \cdots + (c_{1,0}a_1 + \cdots + c_{m,0}a_m)}{\beta_m x^m + \cdots + \beta_1 x + \beta_0}$

3. Löse folgendes lineare Gleichungssystem:
$$\begin{gathered}(c_{1,m}a_1 + \cdots + c_{m,m}a_m) = \alpha_m \\ \vdots \\ (c_{1,0}a_1 + \cdots + c_{m,0}a_m) = \alpha_0\end{gathered}$$

4. Setze a_1 bis a_m ein in:
$f(x) = \frac{a_1}{x - x_{\infty,1}} + \cdots + \frac{a_m}{x - x_{\infty,m}}$

Integration mit Partialbruchzerlegung

Sei $f(x) = \int \frac{\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_m x^m + \cdots + \beta_1 x + \beta_0} dx$

Befolge Schritt 1 - 4

$\implies f(x) = \int \frac{a_1}{x - x_{\infty,1}} + \cdots + \frac{a_m}{x - x_{\infty,m}} dx$
$= a_1 \ln |x - x_{\infty,1}| + \cdots + a_m \ln |x - x_{\infty,m}|$

Beispiel

Sei $f(x) = \int \frac{5x - 1}{x^2 - 1} dx$

1. Finde alle Polstellen $x_{\infty,i}$ von $f(x) : x_{\infty,1} = -1$ und $x_{\infty,2} = 1$
$\implies f(x) = \int \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{x+1} dx = \int \frac{a_1(x+1) + a_2(x-1)}{x^2 - 1} dx$

2. Forme um zu:
$f(x) = \int \frac{(a_1 + a_2)x + (a_1 - a_2)}{x^2 - 1}$

3. Löse folgendes lineare Gleichungssystem:
$a_1 + a_2 = 5 \land a_1 - a_2 = -1 \implies a_1 = 2 \land a_2 = 3$

4. Setze a_1 bis a_2 ein:
$f(x) = \int \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+1} dx$

5. Löse Integral
$f(x) = 2\ln(x - 1) + 3\ln(x + 1)$

Uneigentliches Integral

Ist $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ auf $[a, \beta]$ für alle $a < \beta < b$ integrierbar
$\implies \int_a^b f(x)dx = \lim_{\beta \to b} \int_a^\beta f(x)dx$
heißt uneigentliches Integral, falls der Grenzwert existiert.
(b kann auch ∞ sein)

Gilt analog für die untere Grenze

Ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ auf $[\alpha, \beta]$ für alle $a < \alpha < \beta < b$ integrierbar
$\implies \int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \to a} \int_\alpha^c f(x)dx + \lim_{\beta \to b} \int_c^\beta f(x)dx$
heißt uneigentliches Integral, falls die Grenzwerte für ein $c \in (a, b)$ existieren.
(b kann auch ∞ sein, a kann auch $-\infty$ sein)

Einseitiger Grenzwert

Rechtsseitiger Grenzwert: $\lim_{x \downarrow x_0} f(x) = c$
Linksseitiger Grenzwert: $\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = c$

Bekannte unbestimmte Integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \infty$$
$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx = \text{nicht wohldefiniert}$$
$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \infty$$
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha - 1} & \text{falls } \alpha > 1 \\ \infty & \text{falls } \alpha < 1 \end{cases}$$
$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \infty & \text{falls } \alpha > 1 \\ \frac{1}{1 - \alpha} & \text{falls } \alpha < 1 \end{cases}$$
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

Parameterabhängige Integrale

Sei $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

$F : [c, d] \to \mathbb{R},\ y \mapsto \int_a^b f(x, y)dx$ ist stetig.

$$\int_c^d F(y)dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx$$

Wenn f auf $[a, b] \times [c, d]$ eine stetige partielle Ableitung $\partial_y f$ besitzt, dann ist F stetig differenzierbar mit: $F'(y) = \int_a^b \partial_y f(x, y)dx \ \forall y \in [c, d]$
$$\implies \frac{d}{dy}\Big(\int_a^b f(x, y)dx\Big) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx$$

Integralsinus

$$Si(b) = \int_0^b si(x)dx = \int_0^b \frac{\sin x}{x}dx$$

Darstellung eine Funktion als Reihe

Seien $f_k : [a, b] \to \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ integrierbar
und es gebe $a_k \in \mathbb{R}$ mit $|f_k(x)| \leq a_k \ \forall x \in [a, b] \ \forall k$

und $\sum_{k=1}^\infty a_k < \infty \implies$

$f(x) = \sum_{k=1}^\infty f_k(x)$ konvergiert und

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \sum_{k=1}^\infty f_k(x)dx = \sum_{k=1}^\infty \int_a^b f_k(x)dx$$

Abschätzung von Summen und Reihen

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton. Dann folgt

f ist monoton wachsend $\implies \sum_{k=a}^{b-1} f(k) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \sum_{k=a+1}^{b} f(k)$

f ist monoton fallend $\implies \sum_{k=a+1}^{b} f(k) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \sum_{k=a}^{b-1} f(k)$

Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher

Parametrisierte Kurve

Eine parametrisierte Kurve im $\mathbb{R}^n$ ist eine Abbildung
$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$
deren Komponenten γ_i stetig sind

γ heißt stetig diff'bar, wenn alle γ_i stetig diff'bar sind.

$\gamma([a, b]) = \{\gamma(t) : t \in [a, b]\}$ heißt Spur von γ.

Eine Kurve beschreibt die Bewegung eines Punktes im Raum
$t\hat{=}$ Zeit, $\gamma(t)\hat{=}$ Ort des Punktes zur Zeit t

Tangentialvektor, Geschwindigkeit

Die Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ sei diff'bar. Dann heißt
$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t))$
Tangentialvektor oder Geschwindigkeitsvektor zur Stelle t

$$||\gamma'(t)|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \gamma_k'(t)^2}$$
heißt Geschwindigkeit zur Zeit t.

Falls $\gamma'(t) \neq 0$ heißt
$T_\gamma(t) = \frac{\gamma'(t)}{||\gamma'(t)||}$
Tangentialeinheitsvektor an der Stelle t
$||T_\gamma(t)|| = 1$

Kurve

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar, so ist
$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, f(t))$ eine Kurve in $\mathbb{R}^2$
mit $\frac{\gamma'(t)}{||\gamma'(t)||} = \frac{(1, f'(t))}{\sqrt{1 + f'(t)^2}}$

partielle Ableitung

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$
Ist die Funktion
$\mathbb{R} \ni \xi \mapsto f(x_1, \dots, x_{k-1}, \xi, x_{k+1}, \dots, x_n)$
diffbar, so heißt ihre Ableitung partielle Ableitung von f nach x_k und wird mit

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \partial_{x_k} f(x) = \partial_k f(x)$$

bezeichnet, wobei $x = (x_1, \dots, x_n)$

Gradient

$$\nabla f(x) = grad\ f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix}$$
heißt Gradient von f
$Df(x) = \nabla f(x)^T$

Totale Differenzierbarkeit

Ist Df stetig, dann ist f total differenzierbar:
$f(x + h) = f(x) + Df(x)h + o(||h||)$ für $\mathbb{R}^n \ni h \to 0$
$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}, ||h|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} h_i^2}$$

Tangentialebene

Sei f in x_0 total differenzierbar, dann gilt:
$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + o(||x - x_0||)$ für $x \to x_0$

$x \mapsto f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0)$
beschreibt die Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$

2. Differentielle Ableitung

Ist $\partial_i f$ nach x_j differenzierbar, so schreiben wir für die Ableitung:
$$\partial_j \partial_i f = \partial_{x_j} \partial_{x_i} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Hessematrix

$$Hf(x) = \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f(x) & \dots & \partial_1\partial_n f(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_n\partial_1 f(x) & \dots & \partial_n\partial_n f(x) \end{pmatrix}$$
heißt Hesse-Matrix von f im Punkt x

Sind alle $\partial_i \partial_j f$ stetig, so gilt: $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f \ \forall i, j$

Lokale Extrema

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig diff'bar:
Für alle $x \in U$ mit $\nabla f(x) = 0$ folgt:

f hat in x ein		$Hf(x)$ ist	Alle EW von $Hf(x)$ sind
lokales Minimum	$\Longrightarrow$	positiv semidefinit	≥ 0
lokales Maximum	$\Longrightarrow$	negativ semidefinit	≤ 0
striktes lokales Minimum	$\Longleftrightarrow$	positiv definit	> 0
striktes lokales Maximum	$\Longleftrightarrow$	negativ definit	< 0

Vorgehensweise zur Bestimmung der Extrema

1. Bestimme alle kritischen Punkte von f, d.h aller $x \in U$ mit $\nabla f(x) = 0$
2. Für jeden kritischen Punkt x von f: Bestimme $Hf(x)$
3. Untersuche die Eigenwerte $\lambda_i(x)$ von $Hf(x)$ für jeden kritischen Punkt
   Alle $\lambda_i(x) > 0$ $\Longrightarrow$ striktes lokales Minimum in x
   Alle $\lambda_i(x) < 0$ $\Longrightarrow$ striktes lokales Maximum in x
   Alle $\lambda_i(x) \geq 0$ $\Longrightarrow$ lok. Minimum oder Sattelpunkt in x
   Alle $\lambda_i(x) \leq 0$ $\Longrightarrow$ lok. Maximum oder Sattelpunkt in x
   $\exists \lambda_i(x) > 0 \land \exists \lambda_i < 0 \Longrightarrow$ Sattelpunkt in x

Sattelpunkte sind keine Extrema

Jacobimatrix

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $f: U \to \mathbb{R}^m$ heißt in $x \in U$ total diff'bar, falls es eine lineare Abbildung
$A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $h \mapsto A(h) = Ah$
gibt, sodass gilt:
$f(x+h) = f(x) + Ah + o(||h||)$

$$A \cdot h = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}, \; f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \; a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$$

Ist f in x differenzierbar $\iff$ Alle Komponenten sind in x differenzierbar

A heißt Jacobimatrix von f mit
$A = Df(x) = J_f(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Differentialgleichungen

Differentialgleichungen beschreiben Prozesse bei denen die Zustandsänderungsrate eine gegebene einfach Funktion des Zustands ist

Trennung der Variablen

Sei $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit
$y'(x) = f(x) \cdot g(y(x)) \implies$

$$\int^{x=y(x)} \frac{1}{g(x)} dx = \int f(x) dx$$

Sei $G(x) = \int \frac{1}{g(x)} dx$ und $F(x) = \int f(x) dx \implies$
$G(y(x)) = F(x)$ und $y(x) = G^{-1}(F(x))$, falls G eine Umkehrfunktion besitzt.

Merke: $f(x)$ hängt nicht von y ab. $g(y)$ hängt nur von y ab.

Trennung der Variablen - Anfangswertproblem

Sei $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit
$y'(x) = f(x) \cdot g(y(x))$ und $y(x_0) = y_0 \implies$

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{g(s)} ds = \int_{x_0}^{x} f(t) dt$$

Merke: $f(x)$ hängt nicht von y ab. $g(y)$ hängt nur von y ab.

Homogene lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Sei $a, f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit
$y'(x) + a(x) \cdot y(x) = 0$ und
$A(x) = \int a(x) dx \implies$

$$y(x) = c \cdot e^{-A(x)}$$

Homogene lineare Dgl 1. Ordnung - Anfangswertproblem

Sei $a, f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit
$y'(x) + a(x) \cdot y(x) = 0$ und $y(x_0) = y_0$
$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t) dt \implies$

$$y(x) = y_0 \cdot e^{-A(x)}$$

Inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

Sei $a, f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit
$y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$ und
$A(x) = \int a(x) dx \implies$

$$y(x) = e^{-A(x)} \cdot \left(c + \int_{x_0}^{x} f(t) e^{A(t)} dt\right)$$

Inhomogene lineare Dgl 1. Ordn. - Anfangswertproblem

Sei $a, f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit
$y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$ und $y(x_0) = y_0$
$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t) dt \implies$

$$y(x) = e^{-A(x)} \cdot \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t) e^{A(t)} dt\right)$$

Lineare Abhängigkeit

Seien $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ Funktionen, dann gilt:
y_1 und y_2 sind linear unabhängig, falls:
$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \neq 0 \; \forall x \in I$, falls $\alpha_1 \neq 0 \wedge \alpha_2 \neq 0$
y_1 und y_2 sind linear abhängig, wenn sie nicht linear unabhängig sind.

Wronski-Determinante

$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}$
heißt Wronski-Determinante von y_1 und y_2

y_1 und y_2 sind linear unabhängig $\iff W(x) \neq 0$

Homogene lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

Seien $a, b, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit
$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$

$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \implies$
$\lambda_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{D}$, $\lambda_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{D}$, $D = \frac{a^2}{4} - b$

Fall 1: $D > 0$

$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$, c_1, c_2 beliebig

Fall 2: $D = 0$

$y(x) = c_1 e^{-\frac{a}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{a}{2}x}$, c_1, c_2 beliebig

Fall 3: $D < 0$

$y(x) = e^{-\frac{a}{2}x}(c_1 \cos(\sqrt{-D}x) + c_2 \sin(\sqrt{-D}x)$, c_1, c_2 beliebig

Inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

Seien $a, b, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit
$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x)$

1. Bestimme die allgemeine Lösung $y_h(x)$ von $y_h''(x) + ay_h'(x) + by_h(x) = 0$
2. Bestimme $y_p(x)$
3. $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

Fall 1: $f(x) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$

1. Stelle $y_p(x)$ auf: $y_p(x) = b_n t^n + \cdots + b_1 t + b_0$
2. Berechne $y_p''(x)$ und $y_p'(x)$
3. Setze $y_p''(x)$, $y_p'(x)$ und $y_p(x)$ in Gleichung ein: $y_p''(x) + ay_p'(x) + by(x) = f(x)$
4. Ermittle durch Gleichung die Werte von $b_0, b_1, \ldots, b_n$
5. Setze $b_0, b_1, \ldots, b_n$ in $y_p(x)$ ein

Fall 2: $f(x) = e^{\alpha t}(a_1 \cos(\beta t) + a_2 \sin(\beta t))$

1. Stelle $y_p(x)$ auf: $y_p(x) = e^{\alpha t}(b_1 \cos(\beta t) + b_2 \sin(\beta t))$
2. Berechne $y_p''(x)$ und $y_p'(x)$
3. Setze $y_p''(x)$, $y_p'(x)$ und $y_p(x)$ in Gleichung ein: $y_p''(x) + ay_p'(x) + by(x) = f(x)$
4. Ermittle durch Gleichung die Werte von b_1 und b_2
5. Setze b_1 und b_2 in $y_p(x)$ ein

Anmerkungen

Dies ist eine Zusammenfassung der Vorlesung Analysis für Informatiker an der Technischen Universität München. Gehalten wurde diese Vorlesung durch Rolles S. im Wintersemester 2017/18. Alle Angaben sind ohne Gewähr.