Inhaltsverzeichnis

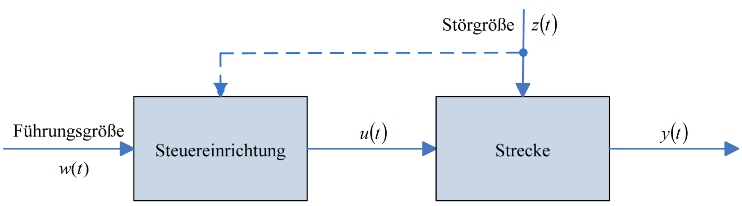
1 Begriff der Regelung

1.1 Signale und Blöcke:

Bezeichnung	Var.	Beschreibung
Führungsgröße	$w(t)$	Von außen vorgegebener Soll-Verlauf für die Regelgröße y(t)
Regelgröße	$y(t)$	Ausgangsgröße, der ein gewünschtes Verhalten aufgeprägt werden soll
Regelabweichung	$e(t)$	Entsteht durch Vergleich der Führungsgröße mit der gemessenen Regelgröße und soll klein gehalten werden ($e(t) = w(t) - y'(t)$)
Stellgröße	$u(t)$	Eingangsgröße, durch die das System gezielt beeinflusst werden kann
Störgröße	$z(t)$	Eingangsgröße, die störend und mit zumeist nur ungenau oder gar nicht bekannten Zeitverlauf auf das System wirkt
Störgröße	$z_1(t)$	Messbare Eingangsgröße, die störend auf das System wirkt
Störgröße	$z_2(t)$	Nicht-Messbare Eingangsgröße, die störend auf das System wirkt
Messrauschen	$n(t)$	
Regler		Übertragungsglied, das aus der Regelabweichung das Stellsignal u generiert, sodass y möglichst w folgt
Messglied/Messeinrichtung		Erfasst die Regelgröße y mittels eines Sensors und erzeugt ein zu $y(t)$ möglichst äquivalentes Signal $y'(t)$
Steuereinrichtung		Übertragungsglied, das den Stellgrößenverlauf $u(t)$ derart generiert, dass $y(t)$ einem vorgegebenen Sollverlauf $w(t)$ folgt. Besteht aus Störgrößenaufschaltung und Führungsgrößenaufschaltung
Störgrößenaufschaltung		Übertragungspfad zur Aufschaltung einer messbaren Störgröße auf die Stellgröße
Führungsgrößenaufschaltung		Übertragungspfad zur Aufschaltung der Führungsgröße auf die Stellgröße

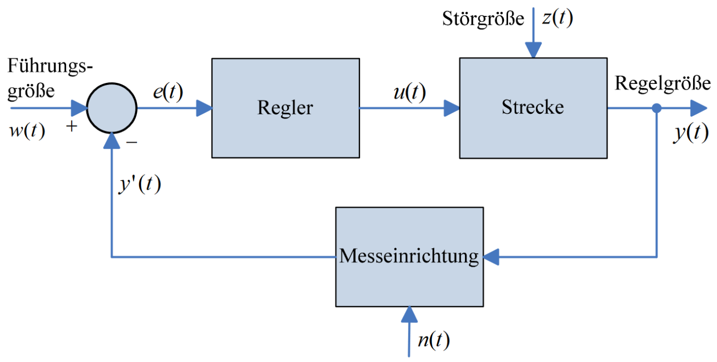
1.2 Vorgeschaltete Steuereinrichtung

Blockschaltbild



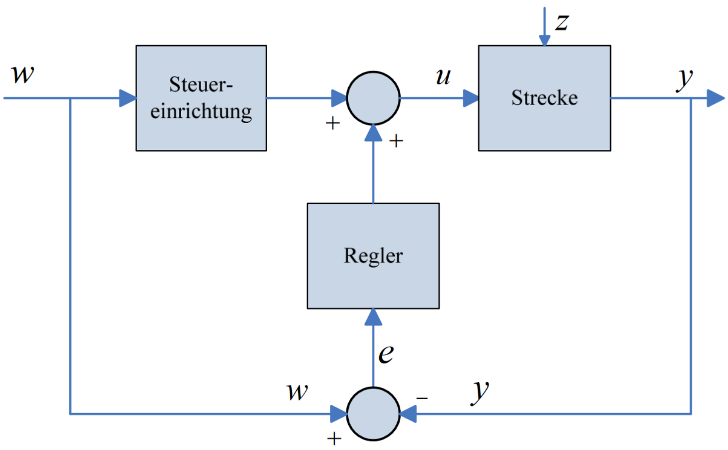
1.3 Regelung

Blockschaltbild



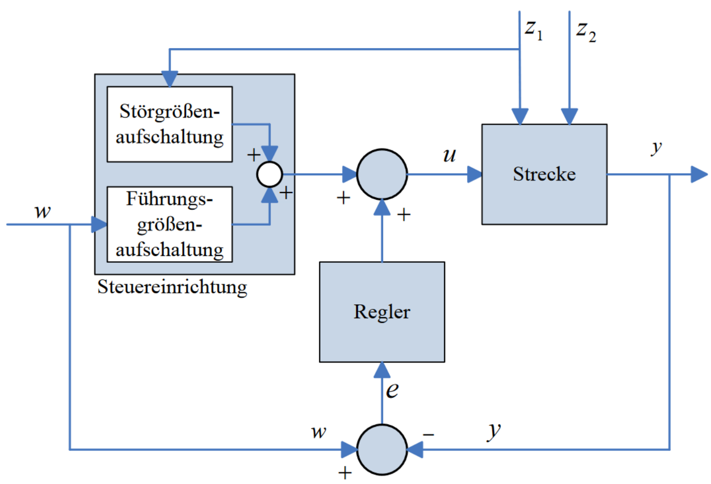
1.4 Zwei-Freiheitsgrade-Regelung (Steuerung + Regelung)

Blockschaltbild



1.4.1 Störgrößenaufschaltung

Blockschaltbild



2 Modelle

2.1 Zustandsdarstellung (bei Linearkombinationen)

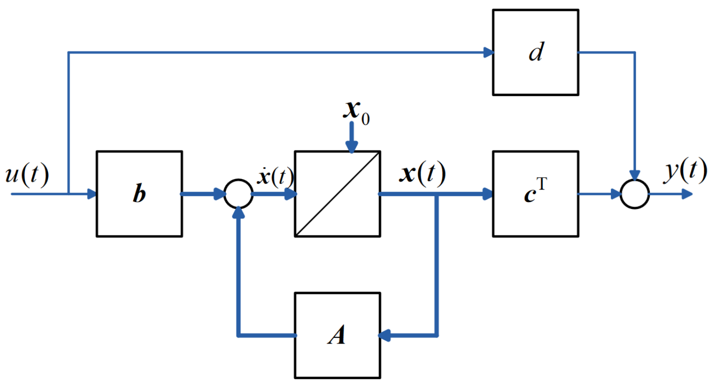
Bestehen die rechten Seiten der Zustandsgleichungen ausschließlich aus Linearkombinationen, d.h.:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + e_1 z + b_1 u \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + e_n z + b_n u \\
y &= c_1 x_1 + \dots + c_n x_n
\end{aligned}$$

so gilt:

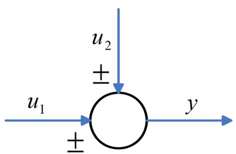
$$\begin{aligned}
\dot{x} = Ax + ez + bu \quad &\equiv \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ \dot{e}_n \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \dot{b}_n \end{bmatrix} u \\
y = c^T x \quad &\equiv \quad y = \begin{bmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Blockschaltbild:

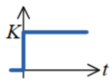
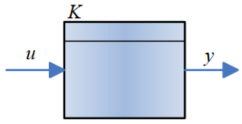
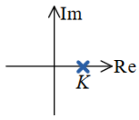
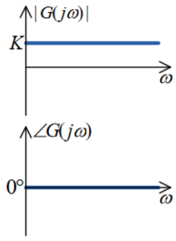
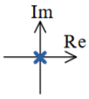
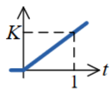
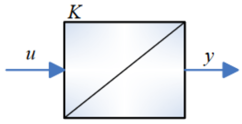
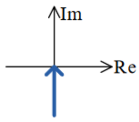
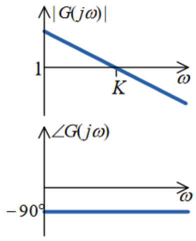
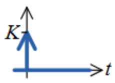
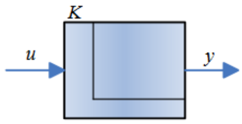
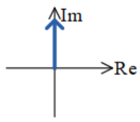
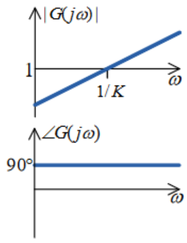
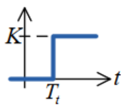
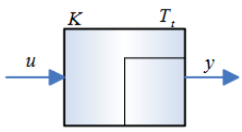
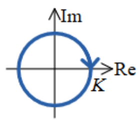
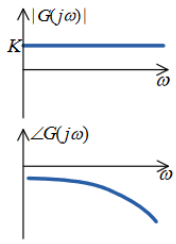
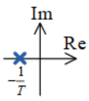
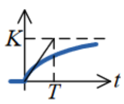
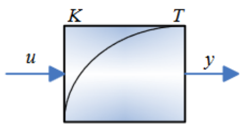
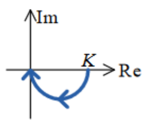
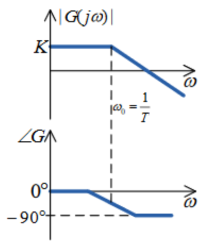


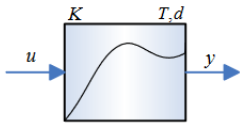
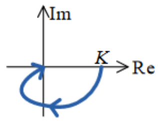
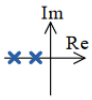
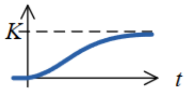
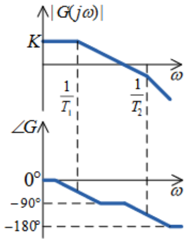
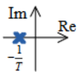
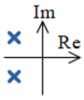
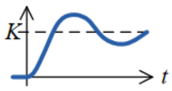
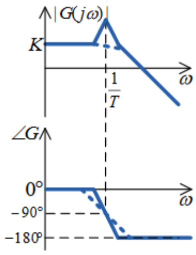
2.2 Elementare Übertragungsglieder

Summationsglied:



Weitere Übertragungsglieder:

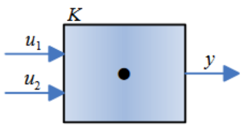
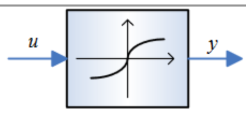
Name	*Funktional-beziehung*	*Übertragungs-funktion G(s)*	*Sprungantwort h(t) (0 für $t<0$)*	*Block-Symbol*	*Ortskurve*	*Bodediagramm*
P-Glied	$y = Ku$	*K*	$h(t)=K\sigma(t)$ 	 K heißt auch Verstärkungs-faktor		
I-Glied	$y(t)=K\int_0^t u(\tau)d\tau + y_0$ oder $\dot y(t) = u(t)$	$\frac{K}{s}$ Pollage: 	$h(t)=Kt$ 			
D-Glied	$y = K\dot u$	*Ks*	$h(t)=K\delta(t)$ 			
Tot-zeit-glied	$y=Ku(t-T_t)$ mit $T_t>0$	$K e^{-T_t s}$	$h = K\sigma(t-T_t)$ 			
PT1-Glied	$T\dot y + y = Ku$	$\frac{K}{1+Ts}$ Pollage: 	$h=K(1-e^{-t/T})$ 	 T heißt Zeitkonstante $\omega_0=\frac{1}{T}$ heißt Eckfrequenz		

PT2-Glied	$T^2\ddot{y}+2dT\dot{y}+y=Ku$ mit $T>0,\ d\geq 0$	Übertragungsfunktion: $G(s)=\frac{K}{1+2dTs+T^2s^2}$ d heißt (Lehrsche) Dämpfung			
	Fall 1: $d>1$	Pollagen: 	Sprungantworten: $h(t)=K\left(1-\frac{T_1}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_1}}+\frac{T_2}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_2}}\right)$ mit $T_{1/2}=T\left(d\pm\sqrt{d^2-1}\right)$ 		
	Fall 2: $d=1$		$h(t)=K\left(1-\left[1+\frac{t}{T}\right]e^{-\frac{t}{T}}\right)$		
	Fall 3: $0<d<1$	Pollagen: 	$h(t)=K\cdot\left[1-\frac{e^{-\frac{d}{T}t}}{\sqrt{1-d^2}}\sin(\frac{\sqrt{1-d^2}}{T}t+\varphi)\right]$ mit $\varphi=\arctan\frac{\sqrt{1-d^2}}{d}$ 	$\omega_0=\frac{1}{T}$ heißt Eckfrequenz; $\omega_e=\frac{\sqrt{1-d^2}}{T}$ heißt Eigenfrequenz.	

PT2-Glied (weitere Eigenschaften):

- Anfangssteigung der Sprungantwort $=0$
- Eigenschaft der Lehrschen Dämpfung d:

$d>1$	aperiodischer Fall
$d=1$	aperiodischer Grenzfall
$0<d<1$	aklingende Schwingung
$d=0$	Dauerschwingung (instabil)
$d<0$	aufklingende Schwingung (instabil)

M-Glied	$y=K\cdot u_1\cdot u_2$					
KL-Glied	$y=F(u)$					

Die Übertragungsglieder Summationsglied, Proportionalglied, Integrierglied, Differenzierglied und Totzeitglied sind linear.

2.3 Lineare zeitinvariante Modelle (LZI-Modelle)

2.3.1 Regelungsnormalform

Das System $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0 y = b_{n-1}u^{n-1} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0 u$
besitzt die Zustandsdarstellung (Regelungsnormalform)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} \end{bmatrix} x$$

2.3.2 Beobachtungsnormalform

Das System $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0 y = b_{n-1}u^{n-1} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0 u$
besitzt die Zustandsdarstellung (Beobachtungsnormalform)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

2.4 Linearisierung im Arbeitspunkt

2.4.1 Mehere Eingabeparameter

Sei $y = F(u_1, \dots u_n)$ eine Übertragungsfunktion ($n \in \mathbb{N}$).
Die linearisierte Funktion um den Arbeitspunkt $(u_{1,s}, \dots, u_{n,s})$ wird wie folgt berechnet:

$$\Delta y = f(\Delta u_1, \dots, \Delta u_n, u_{1,s}, \dots, u_{n,s}) = \left.\frac{\partial F(u_1, \dots u_n)}{\partial u_1}\right|_{\mathrm{AP}} \cdot \Delta u_1 + \cdots + \left.\frac{\partial F(u_1, \dots u_n)}{\partial u_n}\right|_{\mathrm{AP}} \cdot \Delta u_n$$

$$\mathrm{AP} \equiv u_1 = u_{1,s}, \dots, u_n = u_{n,s}$$

mit

$$y_s = F(u_s)$$

$$\Delta u_1 = u_1 - u_{1,s}, \dots, \Delta u_n = u_n - u_{n,s}$$

Die um den Arbeitspunkt linearisierte Beziehung zwischen den absoluten Größen ist definiert als:

$$y_{lin} = f(u_1, \dots, u_n, u_{1,s}, \dots, u_{n,s}) = \Delta y + y_s \qquad \text{(Ersetze } \Delta u_1 \text{ durch } u_1 - u_{1,s}, \dots)$$

3 Laplace-Transformation

3.1 Definition

Die Korrespondenz wird wie folgt dargestellt:

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(s)$$

3.2 Korrespondenztabelle (in der Prüfung ausgehändigt)

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$ (Dirac-Impuls)	1
$\delta(t-t_0)$	$e^{-t_0 s}$
$\sigma(t)$ (Einheitssprung)	$\frac{1}{s}$
$\sigma(t-t_0)$	$\frac{e^{-t_0 s}}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^n}{n!}, n \in \mathbb{N}_0$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$
$\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{1+Ts}$
$te^{\alpha t}$	$\frac{1}{(s-\alpha)^2}$
$\frac{t}{T^2}e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{(1+Ts)^2}$
$\frac{t^n}{n!}e^{\alpha t}$	$\frac{1}{(s-\alpha)^{n+1}}$
$1-e^{\alpha t}$	$\frac{-\alpha}{s(s-\alpha)}$
$1-e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{s(1+Ts)}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-\delta t}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+\delta)^2+\omega^2}$
$e^{-\delta t}\cos \omega t$	$\frac{s+\delta}{(s+\delta)^2+\omega^2}$
$t\sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$t\cos \omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$

wobei
$f(t) = 0$ für $t < 0$,
$T > 0, t_0 > 0, \omega > 0$ reell,
δ beliebig reell und
α beliebig komplex.

3.3 Eigenschaften der Laplace-Transformation (in der Prüfung ausgehändigt)

Eigenschaft	Operation im Zeitbereich	Operation im Bildbereich
Linearität	$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$	$c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$
Differenziation	$\dot{f}(t)$	$sF(s) - f(0)$
	$\ddot{f}(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$
	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) s^{n-k-1}$
Integration	$\int_0^t f(\tau)\, d\tau$	$\frac{1}{s}F(s)$
Dämpfung	$f(t) \cdot e^{\alpha t}$	$F(s-\alpha)$
Faltung	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s) \cdot F_2(s)$
Zeitverschiebung	$f(t-t_0), t_0 > 0$	$e^{-t_0 s}F(s)$
Diffenrentiation der Bildfunktion	$(-1)^n t^n f(t)$	$F^{(n)}(s), n \in \mathbb{N}$
Skalierung der Zeitachse	$f(\alpha t), \alpha > 0$	$\frac{1}{\alpha}F(\frac{s}{\alpha})$
Anfangswertsatz	$\lim_{t\to+0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$, sofern $\lim_{t\to+0} f(t)$ existiert	
Endwertsatz	$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$, sofern $\lim_{t\to\infty} f(t)$ existiert	

3.4 Lösung linearer zeitinvarianter Differentialgleichungen mittels Laplace-Transformation

Sei $a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \cdots + b_1 \dot{u} + b_0 u$ mit $m \leq n$ und $a_n \neq 0$ die systembeschreibende Differentialgleichung. Die Lösung dieser DGL erfolgt durch die folgenden 5 Schritte:

1. Transformation der DGL in den Bildbereich mittels Laplace-Transformation
2. Auflösen nach $Y(s)$. Sind alle Anfangswerte gleich null, resultiert: $Y(s) = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0} \cdot U(s) \equiv Y(s) = G(s) \cdot U(s)$
3. Einsetzen von $U(s)$ ●—○ $u(t)$ in $Y(s) = G(s) \cdot U(s)$
4. Durchführung einer Partialbruchzerlegung von $Y(s)$
5. Rücktransformation in den Zeitbereich $y(t)$ ○—● $Y(s)$

3.4.1 Komplexe Übertragungsfunktion

Sei $Y(s) = G(s)U(s)$ eine systembeschreibende Differentialgleichung im Bildbereich.
$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ heißt komplexe Übertragungsfunktion.
Komplexe Übertragungsfunktionen der in Sektion **??** genannten Darstellungsformen heißen rationale Übertragungsfunktionen. Die zugehörigen Übertragungsglieder heißen rationale Übertragungsglieder, kurz R-Glieder.

3.5 Lösung der Zustandsgleichung mittels Laplace-Transformation

Sei ein LZI-System gegeben mit $\dot{x} = Ax + bu$ und $y = c^T x$.
Die Zustandsgleichungen im Bildbereich sind:

$$X(s) = \underbrace{(sI - A)^{-1} bU(s)}_{\text{Anregungsterm}} + \underbrace{(sI - A)^{-1} x(0)}_{\text{Anfangswertterm}} \quad ●—○ \; x(t)$$

$$Y(s) = \underbrace{c^T (sI - A)^{-1} bU(s)}_{\text{Anregungsterm}} + \underbrace{c^T (sI - A)^{-1} x(0)}_{\text{Anfangswertterm}} \quad ●—○ \; y(t)$$

Die komplexe Übertragungsfunktion $G(s)$ ist:

$$G(s) = c^T (sI - A)^{-1} b = \frac{c^T (\text{Adjunkte}(sI - A)) b}{\det(sI - A)} = \frac{Z(s)}{N(s)}$$

3.5.1 Polstellen

Jeder Pol von $G(s)$ ist Eigenwert von A. Ein Eigenwert von A ist genau dann Pol von $G(s)$, wenn er sich nicht herauskürzt, d.h. nicht gleichzeitig Nullstelle von $Z(s)$ ist.

4 Analyse dynamischer Systeme

4.1 Systemantworten

4.1.1 Impulsantwort

Sei $Y(s) = G(s)U(s)$ ein lineares zeitinvariantes System mit der komplexen Übertragungsfunktion $G(s)$.
Die Impulsantwort dieses Systems ist:

$$Y(s) = G(s) \; ●—○ \; g(t)$$

mit $u(t) = \delta(t)$ ○—● $U(s) = 1$,

4.1.2 Sprungantwort

Sei $Y(s) = G(s)U(s)$ ein lineares zeitinvariantes System mit der komplexen Übertragungsfunktion $G(s)$.
Die Sprungantwort dieses Systems ist:

$$Y(s) = \frac{G(s)}{s} = H(s) \; ●—○ \; h(t) = \int_0^t g(\tau)\, d\tau$$

mit $u(t) = \sigma(t)$ ○—● $U(s) = 1/s$,

4.1.3 Systemantwort mittels Faltung

Sei ein lineares zeitinvariantes System gegeben mit Eingangssignal $u(t)$, Ausgangssignal $y(t)$ und der Übertragungsfunktion $g(t)$.
Das Ein-Ausgangsverhalten dieses Systems lässt sich durch die Faltungsoperation beschreiben:

$$y(t) = g(t) * u(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)\ d\tau$$

4.1.4 Endwertsatz der Laplace-Transformation

Sei $y(t)$ eine Zeitfunktion sowie $Y(s)$ deren Laplace-Transformierte und

- $y(t \to \infty)$ existiert oder
- das System ist übertragungsstabil und das Eingangssignal konvergiert

Es gilt:

$$y(t \to \infty) = \lim_{s \to 0}[sY(s)]$$

Für die Sprungantwort gilt:

$$h(t \to \infty) = G(0), \qquad \text{sofern alle Pole von } G(s) \text{ links der } j\text{-Achse sind}$$

4.2 Stabilität

4.2.1 Sprungantwortstabilität, Übertragungsstabilität

- Ein lineares zeitinvariantes System ist übertragungsstabil/sprungantwortstabil, falls

  $$h(t \to \infty) = \int_0^\infty g(\tau)\ d\tau = c < \infty$$

  wobei $h(t) = \int_0^t g(\tau)\ d\tau$ die Sprungantwort des Systems ist.

- Ein rationales Übertragungsglied (R-Glied) ist genau dann sprungantwortstabil, wenn alle Pole der Übertragungsfunktion $G(s)$ in der linken komplexen Halbebene liegen.

4.2.2 Asymptotische Stabilität

Sei ein LZI-System gegeben mit $\dot{x} = Ax + bu$ und $y = c^T x$

- Das Zustandsraummodell ist genau dann asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte der Matrix A in der linken komplexen Halbebene liegen.
- Asymptotische Stabilität $\implies$ Übertragungsstabilität

4.3 Stationäre Verstärkung

Sei $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ die komplexe Übertragungsfunktion eines Systems und
sei dieses System stabil.
Außerdem werde dieses System mit einem Sprungsignal $u(t) = \kappa\sigma(t), \kappa \neq 0$ angeregt.
Die stationäre Verstärkung von $G(s)$ ist definiert als:

$$\frac{\lim_{t\to\infty} y(t)}{\lim_{t\to\infty} u(t)}$$

4.4 Frequenzgang

4.4.1 Systemantwort auf harmonische Anregung

Sei $Y(s) = G(s)U(s)$ die beschreibende Gleichung eines R-Gliedes, welches mit $u(t) = A\sin(\omega t)$ angeregt wird. Die Antwort diese R-Gliedes ist:

$$y(t) = y_D(t) + y_G(t)$$

mit dem Dauerschwingungsanteil

$$y_D(t) = A|G(j\omega)|\sin(\omega t + \angle G(j\omega))$$

Ist das System $G(s)$ stabil, so gilt für große t:

$$y(t) = y_D(t)$$

Größen:

Frequenzgang des Systems: $G(j\omega)$

Betrag des Frequenzgangs: $|G(j\omega)|$

Phase des Frequenzgangs: $\angle G(j\omega) = \arctan(-\omega T)$

wobei

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\angle G(j\omega)}$$

4.4.2 Frequenzgangortskurve und Bode-Diagramm

4.4.3 Konstruktion von Bode-Diagramm

Sei die komplexe Übertragungsfunktion eines R-Gliedes als Produkt einfacher Glieder gegeben, d.h.:

$$G(s) = K\cdot\frac{(s-q_1)\cdot\ldots\cdot(s-q_m)}{(s-p_1)\cdot\ldots\cdot(s-p_n)} = K\cdot(s-q_1)\cdot\ldots\cdot(s-q_m)\cdot\frac{1}{s-p_1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{s-p_n} = K\cdot G_1\cdot\ldots\cdot G_m\cdot G_{m+1}\cdot\ldots\cdot G_{n+m}$$

Die Betragskennlinie ist:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20\log|G_1| + \cdots + 20\log|G_{n+m}|$$

Die Phasenkennlinie ist:

$$\angle G(j\omega) = \angle G_1 + \cdots + \angle G_{n+m}$$

4.4.4 Graphische Konstruktion von Bode-Diagramm (Kurzform)

Umrechnungstabelle									
x	$0,01$	$0,1$	$0,32$	$0,5$	1	2	$3,2$	10	100
$20\log_{10}(x)$	-40	-20	≈ -10	≈ -6	0	≈ 6	≈ 10	20	40

1. Zeitkonstantenform:

$$G(j\omega) = K\cdot\frac{(j\omega)^k}{(j\omega)^l}\cdot\frac{(\tilde{T}_1 j\omega+1)\cdot\ldots\cdot(\tilde{T}_r j\omega+1)\cdot(\tilde{T}_{r+1}^2(j\omega)^2+2\tilde{d}_{r+1}\tilde{T}_{r+1}j\omega+1)\cdot\ldots\cdot(\tilde{T}_m^2(j\omega)^2+2\tilde{d}_m\tilde{T}_m j\omega+1)}{(T_1 j\omega+1)\cdot\ldots\cdot(T_s j\omega+1)\cdot(T_{s+1}^2(j\omega)^2+2d_{s+1}T_{s+1}j\omega+1)\cdot\ldots\cdot(T_n^2(j\omega)^2+2d_nT_nj\omega+1)}$$

2. Eckfrequenzen:

$$\tilde{\omega}_i = \frac{1}{|\tilde{T}_i|}, \qquad \eta_i = -\frac{1}{\tilde{T}_i} \text{ (falls einfache Nullstelle)}$$

$$\omega_i = \frac{1}{|T_i|}, \qquad p_i = -\frac{1}{T_i} \text{ (falls einfacher Pol)}$$

3. Amplitudengang:

Startwert: $A(\omega_{min}) = 20\log_{10}\left(\frac{\omega_{min}^k}{\omega_{min}^l}\cdot|K|\right)$ $[dB]$

Anfangssteigung: $A'(\omega_{min}) = (k-l)\cdot\frac{20dB}{Dekade}$

Verlauf		
		$A'(\omega_i^+) = A'(\omega_i^-) + \dots$
Nullstelle	einfach	$20dB/Dekade$
	doppelt/konjugiert komplex	$40dB/Dekade$
Pol	einfach	$-20dB/Dekade$
	doppelt/konjugiert komplex	$-40dB/Dekade$

4. Phasengang:

Startwert	
Verstärkungsfaktor	$\varphi(\omega_{min})$
$K > 0$	$0° + (k-l) \cdot 90°$
$K < 0$	$-180° + (k-l) \cdot 90°$

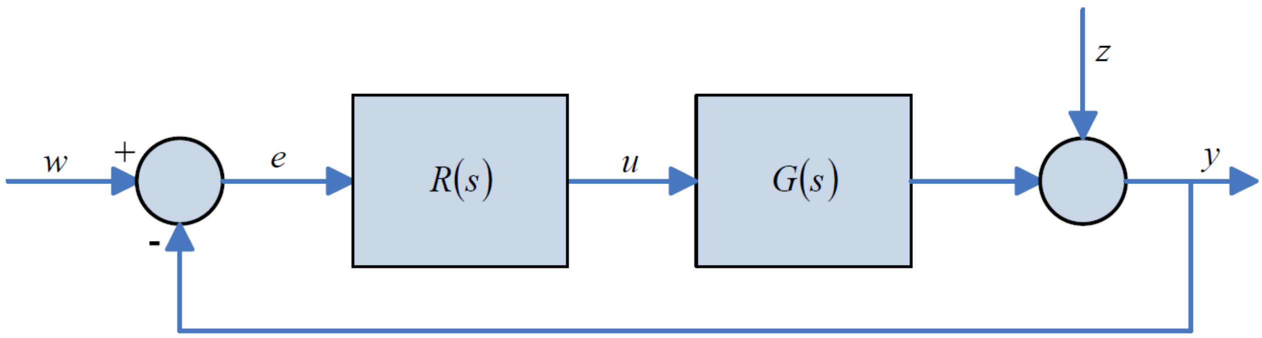
Grobverlauf			
			$\varphi(\omega_i^+) = \varphi(\omega_i^-) + \dots$
Nullstelle	einfach	$\eta_i < 0$	$90°$
		$\eta_i > 0$	$-90°$
	doppelt/konjugiert komplex	$\Re(\eta_{i/i+1}) \leq 0$	$+180°$
		$\Re(\eta_{i/i+1}) > 0$	$-180°$
Pol	einfach	$p_i < 0$	$-90°$
		$p_i > 0$	$90°$
	doppelt/konjugiert komplex	$\Re(p_{i/i+1}) \leq 0$	$-180°$
		$\Re(p_{i/i+1}) > 0$	$+180°$

Feinverlauf				
Änderung von Grobverlauf	Änderung bei -1 Dekade		Änderung bei +1 Dekade	
$\varphi(\omega_i^+) = \varphi(\omega_i^-) + \dots$	Pfeile	$\varphi'(\omega^+) = \varphi'(\omega^-) + \dots$	Pfeile	$\varphi'(\omega^+) = \varphi'(\omega^-) + \dots$
$x \cdot 90°$	$x \cdot \uparrow$	$x \cdot 45°$	$x \cdot \downarrow$	$-x \cdot 45°$
$-x \cdot 90°$	$x \cdot \downarrow$	$-x \cdot 45°$	$x \cdot \uparrow$	$x \cdot 45°$

5 Regelkreis und Stabilität

5.1 Standardregelkreis

Der Standardregelkreis ist definiert als:



mit dem Übertragungsverhalten:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{F_o(s)}{1+F_o(s)}}_{\substack{T(s)\\ \text{Führungsübertra-}\\ \text{gungsfunktion}}} W(s) + \underbrace{\frac{1}{1+F_o(s)}}_{\substack{S(s)\\ \text{Störübertragungs-}\\ \text{funktion}}} Z(s)$$

wobei $F_o(s) = G(s)R(s)$ die Übertragungsfunktion des offenen Kreises ist.

5.1.1 Führungsübertragungsfunktion $T(s)$

Sei $F_o(s) = \frac{Z_o(s)}{N_o(s)}$ die Übertragungsfunktion des offenen Kreises des Standardregelkreises.
Die Führungsübertragungsfunktion des Standardregelkreises ist definiert als:

$$T(s) = \frac{F_o(s)}{1+F_o(s)} = \frac{Z_o(s)}{Z_o(s)+N_o(s)}$$

5.1.2 Störübertragungsfunktion $S(s)$

Sei $F_o(s) = \frac{Z_o(s)}{N_o(s)}$ die Übertragungsfunktion des offenen Kreises des Standardregelkreises.
Die Störübertragungsfunktion des Standardregelkreises ist definiert als:

$$S(s) = \frac{1}{1+F_o(s)} = \frac{N_o(s)}{Z_o(s)+N_o(s)}$$

5.1.3 Eigenschaften des Standardregelkreises

5.2 Stabilität des Standardregelkreises

5.2.1 Übertragungsstabilität des Standardregelkreises

Der Standardregelkreis ist genau dann übertragungsstabil bezüglich $S(s)$ und $T(s)$, wenn sämtliche Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$F_o(s) + 1 = 0$$

in der linken komplexen Halbebene liegen.

5.2.2 Asymptotische Stabilität des Standardregelkreises

Kriterium 1:
Der Standardregelkreis ist genau dann asymptotisch stabil, wenn alle Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$Z_G(s)Z_R(s) + N_G(s)N_R(s) = 0$$

in der linken komplexen Halbebene liegen. Diese Lösungen sind die Systempole der Regelung.
Es gilt:

$$G(s) = \frac{Z_G(s)}{N_G(s)}, \qquad R(s) = \frac{Z_R(s)}{N_R(s)}$$

Kriterium 2:
Der Standardregelkreis ist genau dann asymptotisch stabil, wenn alle Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$F_o(s) + 1 = 0$$

in der linken komplexen Halbebene liegen und alle eventuelle Pol-Nullstellenkürzungen innerhalb der Strecke ($G(s)$), innerhalb des Reglers ($R(s)$) und zwischen Regler und Strecke ($G(s)R(s)$) ausschließlich links gelegene Pol-Nullstellenpaare betreffen.

5.3 Nyquist-Kriterium

$F_o(j\omega)$: Frequenzgangortskurve des offenen Kreises des Standardregelkreises

5.3.1 Voraussetzungen

- Allgemeines Nyquist-Kriterium
    1. $F_o(s) = \frac{b_0+b_1 s+\cdots+b_m s^m}{a_0+a_1 s+\cdots+a_n s^n} \cdot e^{-T_t s}$
    2. $m < n$ und $T_t \geq 0$
- Einfaches Nyquist-Kriterium (zusätzlich)
    1. Eines der folgenden Voraussetzungen ist erfüllt:
        (a) Alle Pole von $F_o(s)$ liegen in der linken komplexen Halbebene und $\frac{b_0}{a_0} > 0$
        (b) Ein Pol liegt in null, alle anderen Pole von $F_o(s)$ liegen in der linken komplexen Halbebene und $\frac{b_0}{a_1} > 0$
        (c) Zwei Pole liegen in null, alle anderen Pole von $F_o(s)$ liegen in der linken komplexen Halbebene und $\frac{b_0}{a_2} > 0$
- Einfaches Nyquist-Kriterium im Bode-Diagramm (zusätzlich)
    1. Es gibt genau eine Durchtrittsfrequenz ω_c mit $|F_o(j\omega_c)| = 1 = 0\ dB$.

5.3.2 Allgemeines Nyquist-Kriterium

r_0: Anzahl der in der rechten komplexen Halbebene liegende Pole von $F_o(s)$
a_0: Anzahl der auf der imaginären Achse gelegenen Pole von $F_o(s)$

er Regelkreis ist genau dann übertragungsstabil,

wenn die Winkeländerung ω_+ des Fahrstrahls vom Punkt -1 zur Ortskurve

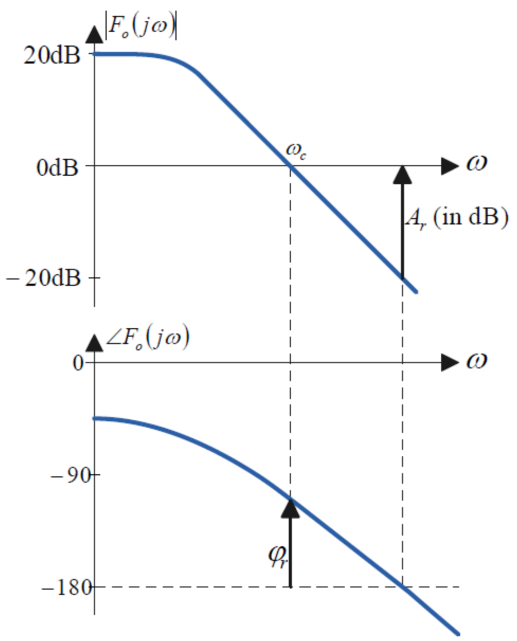
$$\omega_+ = r_0\pi + a_0\frac{\pi}{2}$$

beträgt, während die Nyquist-Ortskurve $F_o(j\omega)$ von $\omega = 0$ bis $\omega = \infty$ durchlaufen wird.

5.3.3 Einfaches Nyquist-Kriterium

Liegt der Punkt -1 links der von der in Richtung wachsender ω durchlaufenden Frequenzgangortskurve $F_o(j\omega)$, so ist der Regelkreis übertragungsstabil.

5.3.4 Einfaches Nyquist-Kriterium im Bode-Diagramm



Der Regelkreis ist übertragungsstabil, wenn

$$-180° < \angle F_o(j\omega_c) < 0$$

5.3.4.1 Phasenreserve

Die Phasenreserve φ_r ist definiert als:

$$\varphi_r = \angle F_o(j\omega_c) + \pi$$

Ist $\varphi_r > 0$, so ist der Regelkreis übertragungsstabil.

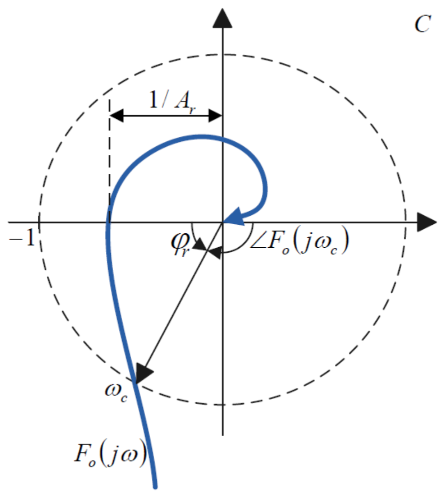
5.3.4.2 Amplitudenreserve

Sei ω_a die Frequenz, bei der der Phasengang gleich $-180°$ ist, d.h. $\angle F_o(j\omega_a) = -180°$
Die Amplitudenreserver ist definiert als:

$$A_r = -|F_o(j\omega_a)|$$

Ist $A_r > 1$, so ist der Regelkreis stabil

5.3.4.3 Amplituden- und Phasenreserve in der Frequenzgangortskurve



5.4 Robustheit der Stabilität

φ_r und A_r werden häufig als Maße der Robustheit der Stabilität gegenüber Fehlern oder Veränderungen des Modells $F_o(s)$ verwendet. Faustregel für gute Robustheit:

$$\varphi_r > 60° \qquad \text{und/oder} \qquad A_r > 2$$

6 Reglerentwurf

6.1 Anforderungen an das Regelverhalten

- Dynamisches Verhalten:
- Stationäre Genauigkeit:
- Robuste Stabilität:
- Realisierbarkeit des Reglers:
- Einhaltung von Begrenzungen:

6.2 Dynamik, Robustheit der Stabilität und Grenzen der Regelgüte

6.2.1 Bode-Theorem

Sei der geschlossene Regelkreis übertragungsstabil,
sei Zählergrad von $F_o(s) + 2 \leq$ Nennergrad von $F_o(s)$ und
sei p_i die in der rechten komplexen Halbebene liegende Pole von $F_o(s)$
Es folgt:

$$\int_0^\infty \ln|S(j\omega)|\, d\omega = \begin{cases} 0, & \text{sofern } F_o(s) \text{ stabil} \\ \pi \sum_i \Re(p_i), & \text{sofern } F_o(s) \text{ instabil} \end{cases}$$

6.3 Stationäre Genauigkeit

6.3.1 Stationäre Genauigkeit bezüglich des Führungsverhalten

Ein Regelkreis ist stationär genau bezüglich des Führungsverhaltens genau dann, wenn

- der geschlossene Regelkreis stabil ist
- und eine der folgenden (äquivalenten) Voraussetzungen erfüllt ist:
  - Ein freies I-Glied ist im offenen Kreis vorhanden
  - Die Übertragungsfunktion des offenen Kreises besitzt einen Pol im Ursprung
  - Die Führungsübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises hat eine stationäre Verstärkung von 1

Es folgt:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0 \text{ bzw. } \lim_{t\to\infty} y(t) = \kappa, \qquad \text{wobei } w(t) = \kappa\sigma(t), \kappa \neq 0$$

6.3.2 Stationäre Genauigkeit bezüglich des Störverhaltens

Ein Regelkreis ist stationär genau bezüglich des Führungsverhaltens genau dann, wenn

- stationär genau bezüglich des Führungsverhalten ist
- und eine der folgenden (äquivalenten) Voraussetzungen erfüllt ist:
  - Ein freies I-Glied ist im offenen Kreis zwischen Soll-/Istwert-Vergleich und Störeingriff vorhanden
  - Die Störübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises besitzt eine Nullstelle im Ursprung
  - Die Störübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises hat eine stationäre Verstärkung von 0

Es folgt:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0 \text{ bzw. } \lim_{t\to\infty} y(t) = \kappa, \qquad \text{wobei } w(t) = \kappa\sigma(t), \kappa \neq 0 \text{ und } z(t) = \zeta\sigma(t), \zeta \neq 0$$

6.4 Grundtypen linearer Regler

Sei im folgenden die Regelabweichung $e(t)$ die Eingangsgröße der Regler und die Stellgröße $u(t)$ die Ausgangsgröße der Regler im Zeitbereich bzw.
$R(s)$ die komplexe Übertragungsfunktion des Reglers.

6.4.1 P-Regler

Definition:

$$\text{Zeitbereich:} \quad u(t) = K_R e(t)$$
$$\text{Bildbereich:} \quad R(s) = K_R$$

Wahl der Variablen:
K_R : wird so gewählt, dass Phasen- und Amplitudenreserve groß genug sind, z.B: $A_r > 2, \varphi_r > 60°$

Vorteile/Nachteile:

- Vorteile:

  - gute Dynamik bei einfachem Regleraufbau
- Nachteile:
  - keine stationäre Genauigkeit (außer wenn $G(s)$ ein I-Glied enthält und die Störung erst hinter dem I-Glied eingreift)

6.4.2 I-Regler

Definition:

$$\text{Zeitbereich:} \quad u(t) = K_I \int_0^t e(\tau)\; d\tau$$
$$\text{Bildbereich:} \quad R(s) = \frac{K_I}{s}$$

Wahl der Variablen:
K_I : wird so gewählt, dass Phasen- und Amplitudenreserve groß genug sind, z.B: $A_r > 2, \varphi_r > 60°$

Vorteile/Nachteile:

- Vorteile:
  - sichert stationäre Genauigkeit
- Nachteile:
  - tendenziell langsame Dynamik der Regelung

6.4.3 PI-Regler

Definition:

$$\text{Zeitbereich:} \quad u(t) = K_R e(t) + K_I \int_0^t e(\tau)\; d\tau$$
$$\text{Bildbereich:} \quad R(s) = \frac{K_I}{s}(1 + T_R s) = \frac{K_I}{s} + K_R$$

Wahl der Variablen:
$K_R = K_I \cdot T_R$
$T_R =$ größte Nennerzeitkonstante der Strecke (Zeitkonstantenform)
K_I : wird so gewählt, dass Phasen- und Amplitudenreserve groß genug sind, z.B: $A_r > 2, \varphi_r > 60°$

Vorteile/Nachteile:

- Vorteile:
  - schneller als I-Regler
  - gesicherte stationäre Genauigkeit

6.4.4 PD-Regler

Definition:

$$\text{Zeitbereich (ideal):} \quad u(t) = K_R(e(t) + T_R\dot{e}(t)) = K_R e(t) + K_D \dot{e}(t)$$
$$\text{Bildbereich (ideal):} \quad R(s) = K_R(1 + T_R s)$$
$$\text{Bildbereich (real):} \quad R(s) = K_R \frac{1+T_R s}{1+T_N s}, \qquad T_N < T_R$$

Wahl der Variablen:
$T_R =$ größte Streckenzeitkonstante
K_R : wird so gewählt, dass Phasen- und Amplitudenreserve groß genug sind, z.B: $A_r > 2, \varphi_r > 60°$
T_N : $\frac{T_R}{50} < T_N < \frac{T_R}{5}$

Vorteile/Nachteile:

- Vorteile:

- hohe Dynamik der Regelung erreichbar (schnellerer Regelkreis)

- Nachteile:
  - Verstärkung von hochfrequenten Störsignalen und Rauschen
  - D-Anteil kann die Stellgröße in die Begrenzung treiben
  - idealer PD-Regler ist nicht realisierbar (da Zählergrad > Nennergrad)

6.4.5 Idealer PID-Regler

Definition:

Zeitbereich (ideal): $u(t) = K_R e(t) + K_I \int_0^t e(\tau)\, d\tau + K_I \cdot T_{R1} \cdot T_{R2} \cdot \dot{e}(t)$

Bildbereich (ideal): $R(s) = \underbrace{K_I(T_{R1} + T_{R2})}_{\text{P-Glied}} + \underbrace{\frac{K_I}{s}}_{\text{I-Glied}} + \underbrace{K_I \cdot T_{R1} \cdot T_{R2} \cdot s}_{\text{D-Glied}}$

$= \frac{K_I}{s}(1 + T_{R1} \cdot s)(1 + T_{R2} \cdot s)$

Bildbereich (real): $R(s) = \frac{K_I(1+T_{R1} \cdot s)(1+T_{R2} \cdot s)}{s(1+T_N \cdot s)}$

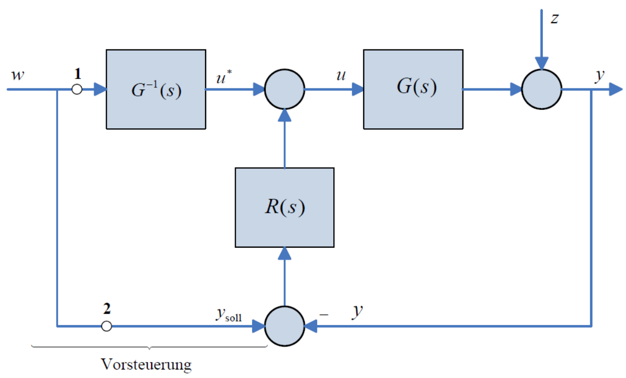
Wahl der Variablen:
T_{R1} = größte Streckenzeitkonstante
T_{R2} = zweitgrößte Streckenzeitkonstante
K_I : wird so gewählt, dass Phasen- und Amplitudenreserve groß genug sind, z.B: $A_r > 2, \varphi_r > 60°$
T_N : $\frac{T_R}{50} < T_N < \frac{T_R}{5}$

Vorteile/Nachteile:

- Vorteile:
  - hohe Dynamik
  - stationäre Genauigkeit
- Nachteile:
  - Verstärkung von hochfrequenten Störsignalen und Rauschen
  - D-Anteil kann die Stellgröße in die Begrenzung treiben (unendlich hohe Impulse)
  - idealer PID-Regler ist nicht realisierbar (da Zählergrad > Nennergrad)

7 Erweiterte Regelstrukturen und Zustandsregelung

7.1 Zwei-Freiheitsgrade-Regelung



Sonderfälle:

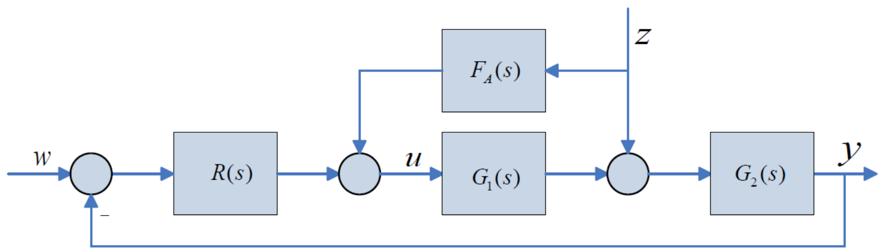
- Vorsteuerung ist nicht realisierbar (Zählergrad > Nennergrad):

  - Einfügen je eines PTn-Glieds bei 1 und 2 mit
    $V(s) = G_{PTn}(s) = \frac{1}{(1+Ts)^n}$
  - n mindestens so groß wählen, dass $G^{-1}(s)G_{PTn}(s)$ realisierbar ist.

  $\rightarrow$ Führungsverhalten nicht mehr ideal

- $G(s)$ besitzt eine rechts gelegene Nullstelle η:
  - Einfügen je eines Glieds bei 1 und 2 mit
    $V(s) = \frac{1-\frac{1}{\eta}s}{1+Ts}$
- $G(s)$ enthält eine Totzeit T_t:
  - Einfügen je eines Glieds bei 1 und 2 mit
    $V(s) = e^{-T_t s}$
- Für alle Fälle gilt:
  - $Y(s) = V(s) \cdot W(s) + \frac{1}{1+G(s)R(s)}Z(s)$

7.2 Störgrößenaufschaltung



$$Y(s) = \frac{G_2(G_1F_A + 1)}{1 + G_2G_1R}Z(s)$$

Ideale Störgrößenaufschaltung:

$$F_A(s) = -\frac{1}{G_1(s)}, \qquad \text{realisierbar, falls Zählergrad} < \text{Nennergrad}$$

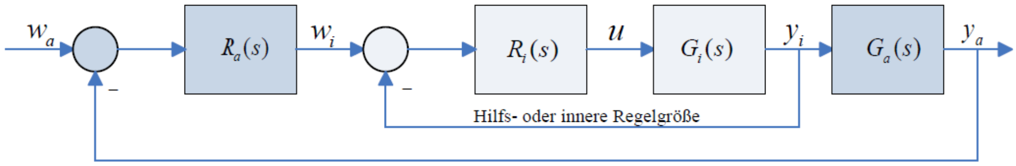
Reale Störgrößenaufschaltung:

$$F_A(s) = -\frac{1}{G_1(s)} \cdot \underbrace{\frac{1}{(1+Ts)^n}}_{\text{PTn-Glied}}$$

Statische Störgrößenaufschaltung:

$$F_A(s) = -\frac{1}{G_1(0)}$$

7.3 Kaskadenregelung

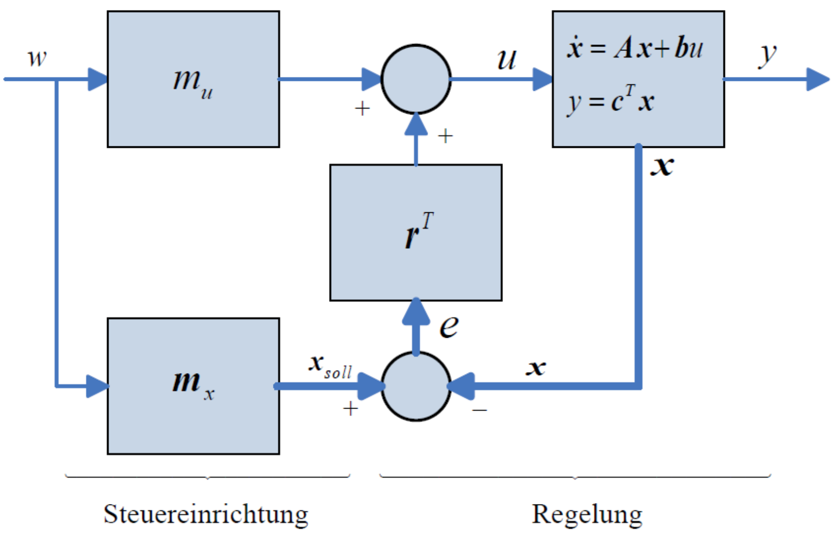


Entwurf:

1. Entwurf eines Reglers $R_i(s)$ für die Regelstrecke $G_i(s)$, sodass ein günstiges Störverhalten von y_i bei robuster Stabilität eintritt.
   Die Führungsübertragungsfunktion ist:
$$T_i(s) = \frac{Y_i(s)}{W_i(s)} = \frac{G_i R_i}{1 + G_i R_i}$$
2. Innere Schleife wird mit $G_a(s)$ zu der äußeren Schleife $\bar{G}_a(s) = T_i(s)G_a(s)$
3. Entwurf eines Reglers $R_a(s)$ für die Regelstrecke $\bar{G}_a(s)$, sodass ein günstiges Störverhalten von y_a mit zumeist stationärer Genauigkeit eintritt.

7.4 Zustandsregelung

7.4.1 Konstante Zustandsrückführung und Vorsteuerung



Sei die Strecke in Zustandsdarstellung mit $\dot{x} = Ax + bu$ und $y = c^T x$

Formeln

$$\dot{x}(t) = (A - br^T)x + b(r^T m_x + m_u)w = A_r x + b_r w$$
$$y(t) = c^T x(t)$$
$$u(t) = r^T e(t) + m_u w(t) = r^T(m_x w(t) - x(t)) + m_u w(t)$$
$$G_{wy}(s) = T(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = c^T(sI - A_r)^{-1} b_r \qquad \text{(Komplexe Übertragungsfunktion:)}$$

Variablen

- $A_r = (A - br^T)$
- $b_r = b(r^T m_x + m_u)$

Entwurf:
m_u, m_v bestimmen:

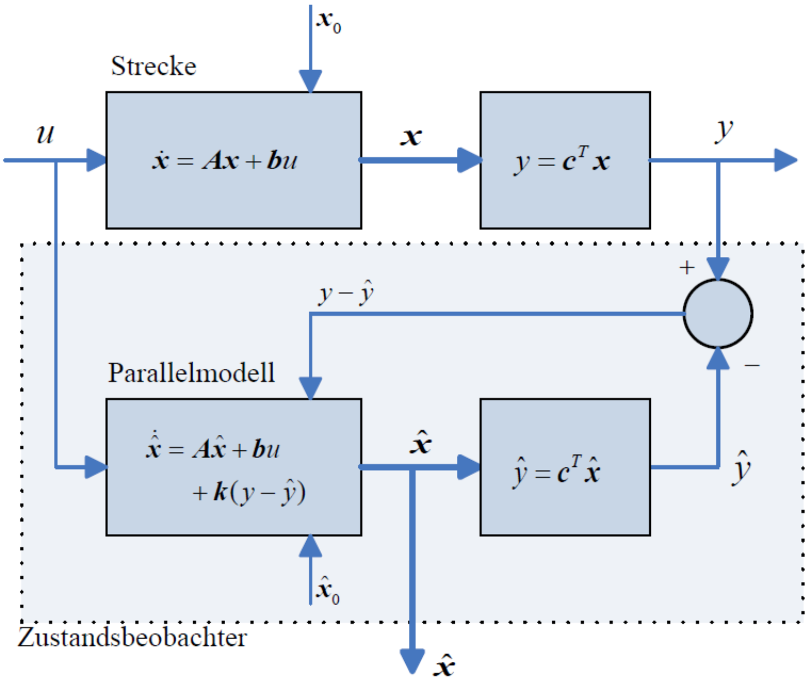
$$\begin{bmatrix} A & b \\ c^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_x \\ m_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

r^T bestimmen:

1. Aufstellen des charakteristischen Polynoms (in Abh. von r^T und s):
   $\det(sI - A + br^T) = s^n + c_{n-1}(r_1, \ldots, r_n) \cdot s^{n-1} + \cdots + c_0(r_1, \ldots, r_n)$, wobei $c_i = f(r_1, \ldots, r_n)$
2. Aufstellen eines Polynoms mit den gewünschten Eigenwerten (in Abh. von s):
   $P(s) = (s - p_1) \cdot \ldots \cdot (s - p_n) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$, wobei p_i die gewünschten Eigenwerte sind
3. Einsetzten der Variablen aus 1. und 2. in folgende Gleichungen und auflösen nach $r_1, \ldots, r_n$:

$$c_{n-1}(r_1, \ldots, r_n) = a_{n-1}$$
$$\vdots$$
$$c_0(r_1, \ldots, r_n) = a_0$$

7.4.2 Zustandsbeobachter



Formeln:

Zustandsschätzung	$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + bu + k(y - \hat{y}) = (A + kc^T)\hat{x} + bu + ky$
Schätzung für y	$\hat{y} = c^T\hat{x}$
Schätzfehler	$\tilde{x} = x - \hat{x}$
Ableitung des Schätzfehlers	$\dot{\tilde{x}} = (A - kc^T)\tilde{x} = A_k\tilde{x}$

Entwurf:

1. $\det(sI - A + kc^T) = s^n + c_{n-1}(k_1, \ldots, k_n) \cdot s^{n-1} + \cdots + c_0(k_1, \ldots, k_n)$, wobei $c_i = f(k_1, \ldots, k_n)$
2. $P(s) = (s - p_1) \cdot \ldots \cdot (s - p_n) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$, wobei p_i die gewünschten Eigenwerte sind
3. Auflösen nach $k_1, \ldots, k_n$:

$$c_{n-1}(k_1, \ldots, k_n) = a_{n-1}$$
$$\vdots$$
$$c_0(k_1, \ldots, k_n) = a_0$$

7.5 Nichtlineare Zustandsregelung durch Ein-/Ausgangslinearisierung

Vorgehen:

1. Formulieren der nichtlinearen Streckenbeschreibung in der Zustandsdarstellung:
   $\dot{x} = a(x) + b(x)u$
   $y = c(x) := c_0(x)$
2. Ableiten von y nach x solange bis u auftaucht:
   Wiederhole solange bis $b_q(x) \neq 0$; starte mit $q = 1$; inkrementiere q nach jedem Schritt um 1
   $y^{(q)} = \frac{\partial c_{q-1}}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \cdots + \frac{\partial c_{q-1}}{\partial x_n}\dot{x}_n = c_q(x) + b_q(x)u$
3. Einsetzen von $y^{(i)} = c_i(x)$ in Wunschdifferentialgleichung
   $c_q(x) + b_q(x)u + a_{q-1}c_{q-1}(x) + \cdots + a_0 c_0(x) = a_0 w$
4. Auflösen nach u:

Außerdem gilt:

$$Y(s) = \frac{a_0}{s^q + a_{q-1}s^{q-1} + \cdots + a_0}W(s)$$

8 Digitale Realisierung

8.1 Tustin-Transformation

Sei $z \cdot u[k] = u[k+1]$ sowie $z^{-1} \cdot u[k] = u[k-1]$
Die Tustin-Transformation ist definiert als:

$$R(z) = \frac{u[k]}{e[k]} = \frac{T(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})} \quad \text{entspricht} \quad R(s) = \frac{1}{s}$$

$$R(z) = \frac{u[k]}{e[k]} = \frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})} \quad \text{entspricht} \quad R(s) = s$$

A Mathematische Grundlagen

A.1 Partialbruchzerlegung

A.1.1 Partialbruchzerlegung mit Koeffizientenvergleich

Sei $R(s) = \frac{b_n s^n + \cdots + b_1 s + b_0}{a_m s^m + \cdots + a_1 s + a_0}$

1. Finde alle Polstellen p_i von $R(s)$

2. Setze Partialbrüche an:
$R(s) = G_1 + \cdots + G_m = \frac{Z_1}{N_1} + \cdots + \frac{Z_m}{N_m}, \qquad G_i = \frac{Z_i}{N_i}$, wobei

- $G_i = \frac{r_i}{s-p_i}$, für jeden einfachen reellen Pol p_i
- $G_i + G_{i+1} = \frac{r_i s + r_{i+1}}{(s-p_i)(s-p_{i+1})}$, für jedes konjugiert komplexes Polpaar $p_i, p_{i+1} = p_i^*$
- $G_i + \cdots + G_k = \frac{r_i}{s-p_i} + \frac{r_{i+1}}{(s-p_i)^2} + \cdots + \frac{r_{i+k-1}}{(s-p_i)^k}$, für jeden k-fachen reellen Pol $p_i = p_{i+1} = \cdots = p_{i+k-1}$

3. Bringe alle Brüche auf denselben Nenner und addiere sie:
$R(s) = \frac{Z_1}{N_1} + \cdots + \frac{Z_m}{N_m} = \frac{Z_1(N_2 + \cdots + N_m)}{N_1 \cdot \ldots \cdot N_n} + \cdots + \frac{Z_m(N_1 + \cdots + N_{m-1})}{N_1 \cdot \ldots \cdot N_n} = \frac{Z_1(N_2 + \cdots + N_m) + \cdots + Z_m(N_1 + \cdots + N_{m-1})}{N_1 \cdot \ldots \cdot N_n}$

4. Multipliziere den Zähler aus und forme um zu:
$R(z) = \frac{(c_{1,m} r_1 + \cdots + c_{m,m} r_m) s^m + \cdots + (c_{1,0} r_1 + \cdots + c_{m,0} r_m) s^0}{N_1 \cdot \ldots \cdot N_n}$

5. Löse folgendes lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} (c_{1,m} r_1 + \cdots + c_{m,m} r_m) &= b_m \\ &\vdots \\ (c_{1,0} r_1 + \cdots + c_{m,0} r_m) &= b_0 \end{aligned}$$

6. Setze r_1 bis r_m in die Gleichung aus Schritt 2 ein $(R(s) = G_1 + \cdots + G_m)$

Beispiel:
Sei $R(s) = \frac{5s-1}{s^2-1}$

1. Finde alle Polstellen p_i von $R(s)$:
$p_1 = -1$ und $p_2 = 1$

2. Setze Partialbrüche an:
$\Longrightarrow \; R(s) = \frac{r_1}{s-1} + \frac{r_2}{s+1}$

3. Bringe alle Brüche auf denselben Nenner und addiere sie:
$R(s) = \frac{r_1(s+1)}{s^2-1} + \frac{r_2(s-1)}{s^2-1} = \frac{r_1(s+1) + r_2(s-1)}{s^2-1}$

4. Multipliziere den Zähler aus und forme um:
$R(s) = \frac{(r_1+r_2)s + (r_1-r_2)}{s^2-1}$

5. Löse folgendes lineare Gleichungssystem:
$r_1 + r_2 = 5$
$r_1 - r_2 = -1$
$\Longrightarrow \; r_1 = 2 \wedge r_2 = 3$

6. Setze r_1 und r_2 in die Gleichung aus Schritt 2 ein $(R(s) = \frac{r_1}{s-1} + \frac{r_2}{s+1})$:
$R(s) = \frac{2}{s-1} + \frac{3}{s+1}$

A.1.2 Heavisidescher Zuhaltemethode

Sei $R(s) = \frac{b_n s^n + \cdots + b_1 s + b_0}{a_m s^m + \cdots + a_1 s + a_0}$

1. Finde alle Polstellen p_i von $R(s)$

2. Setze Partialbrüche an:
$R(s) = G_1 + \cdots + G_m = \frac{Z_1}{N_1} + \cdots + \frac{Z_m}{N_m}$, $\quad G_i = \frac{Z_i}{N_i}$, wobei

- $G_i = \frac{r_i}{s-p_i}$, für jeden einfachen reellen Pol p_i
- $G_i + G_{i+1} = \frac{r_i}{(s-p_i)} + \frac{r_i^*}{(s-p_{i+1})}$, für jedes konjugiert komplexes Polpaar $p_i, p_{i+1} = p_i^*$
- $G_i + \cdots + G_k = \frac{r_i}{s-p_i} + \frac{r_{i+1}}{(s-p_i)^2} + \cdots + \frac{r_{i+k-1}}{(s-p_i)^k}$, für jeden k-fachen reellen Pol $p_i = p_{i+1} = \cdots = p_{i+k-1}$

3. Koeffizienten bestimmen:

$$r_i = \left. \frac{b_n s^n + \cdots + b_1 s + b_0}{N_1 \cdot \ldots \cdot N_{i-1} \cdot N_{i+1} \cdot \ldots \cdot N_m} \right|_{s=p_i}$$

4. Setze r_1 bis r_m in die Gleichung aus Schritt 2 ein $(R(s) = G_1 + \cdots + G_m)$

A.2 Matrizen

A.2.1 Determinante

Determinante einer 2×2 Matrix
Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$.
Die Determinante dieser Matrix ist definiert als:

$$\det(A) = |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

A.2.2 Inverse

Inverse einer 2×2 Matrix
Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times2}$ und
sei $\det A \neq 0$.
Die Inverse von A ist definiert als:

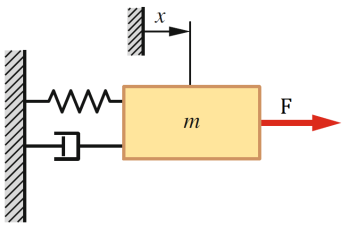
$$\frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

B Elektrotechnische Grundlagen

Widerstand:	$U = R \cdot I$
Kondensator:	$U = \frac{1}{C} \int I \; dt$, $I = C \cdot \dot{U}$
Induktivität:	$U = L \cdot \dot{I}$

C Physikalische Grundlagen

Masse-Feder-Dämpfer System



m: Masse des Körpers, d: Dämpferkonstante, k: Federkonstante, F: Stellkraft

$$F = m \cdot \ddot{x} + d\dot{x} + kx$$

Anmerkungen

Dies ist eine Kurzzusammenfassung der Vorlesung Regelungstechnik an der Technischen Universität München. Gehalten wurde diese Vorlesung durch Lohmann B. im Sommersemester 2019. Ersteller dieser Zusammenfassung ist Gaida B. Alle Angaben sind ohne Gewähr.

Literaturverzeichnis

Werner Skolaut. *Maschinenbau. Ein Lehrbuch für das ganze Bachelor-Studium*. Springer Vieweg. Heidelberg, 2018, S. 1271 - 1387