Inhaltsverzeichnis

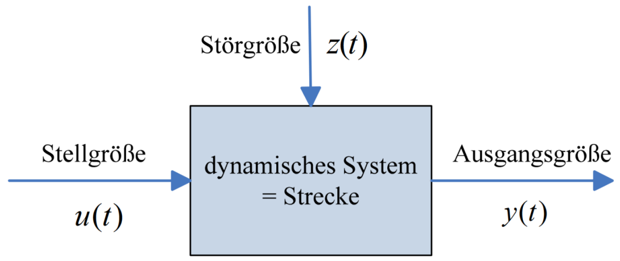
1 Begriff der Regelung

1.1 Dynamisches System

Signale und Blöcke:

Bezeichnung	Var.	Beschreibung
Ausgangsgröße	$y(t)$	Ausgangsgröße, der ein gewünschtes Verhalten aufgeprägt werden soll
Stellgröße	$u(t)$	Eingangsgröße, durch die das System gezielt beeinflusst werden kann
Störgröße	$z(t)$	Eingangsgröße, die störend und mit zumeist nur ungenau oder gar nicht bekannten Zeitverlauf auf das System wirkt

Blockschaltbild



1.2 Vorgeschaltete Steuereinrichtung

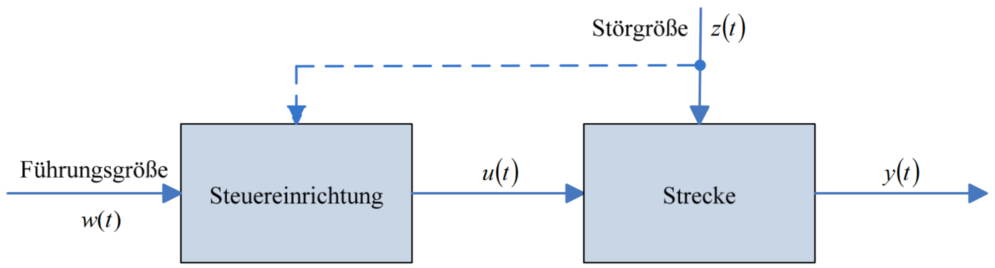
Ziel

- Übertragungsglied, das den Stellgrößenverlauf $u(t)$ derart generiert, dass $y(t)$ einem vorgegebenen Sollverlauf $w(t)$ folgt.

Signale und Blöcke:

Bezeichnung	Var.	Beschreibung
Führungsgröße	$w(t)$	Von außen vorgegebener Soll-Verlauf für die Regelgröße y(t)
Ausgangsgröße	$y(t)$	Ausgangsgröße, der ein gewünschtes Verhalten aufgeprägt werden soll
Stellgröße	$u(t)$	Eingangsgröße, durch die das System gezielt beeinflusst werden kann
Störgröße	$z(t)$	Eingangsgröße, die störend und mit zumeist nur ungenau oder gar nicht bekannten Zeitverlauf auf das System wirkt

Blockschaltbild



1.3 Regelung

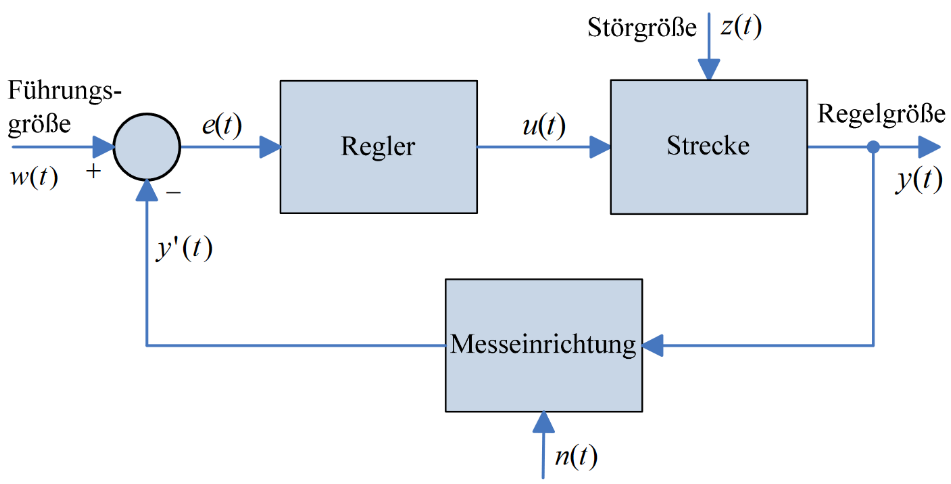
Ziel:

- Minderung des Einflusses von (nicht-messbaren) Störungen
- Minderung des Einflusses von Ungenauigkeiten des Streckenmodells
- Verbesserung des Folgeverhaltens

Signale und Blöcke:

Bezeichnung	Var.	Beschreibung
Führungsgröße	$w(t)$	Von außen vorgegebener Soll-Verlauf für die Regelgröße y(t)
Regelgröße	$y(t)$	Ausgangsgröße, der ein gewünschtes Verhalten aufgeprägt werden soll
Regelabweichung	$e(t)$	Entsteht durch Vergleich der Führungsgröße mit der gemessenen Regelgröße und soll klein gehalten werden ($e(t) = w(t) - y'(t)$)
Stellgröße	$u(t)$	Eingangsgröße, durch die das System gezielt beeinflusst werden kann
Störgröße	$z(t)$	Eingangsgröße, die störend und mit zumeist nur ungenau oder gar nicht bekannten Zeitverlauf auf das System wirkt
Messrauschen	$n(t)$	
Regler		Übertragungsglied, das aus der Regelabweichung das Stellsignal u generiert, sodass y möglichst w folgt
Messglied/Messeinrichtung		Erfasst die Regelgröße y mittels eines Sensors und erzeugt ein zu $y(t)$ möglichst äquivalentes Signal $y'(t)$

Blockschaltbild



1.4 Zwei-Freiheitsgrade-Regelung (Steuerung + Regelung)

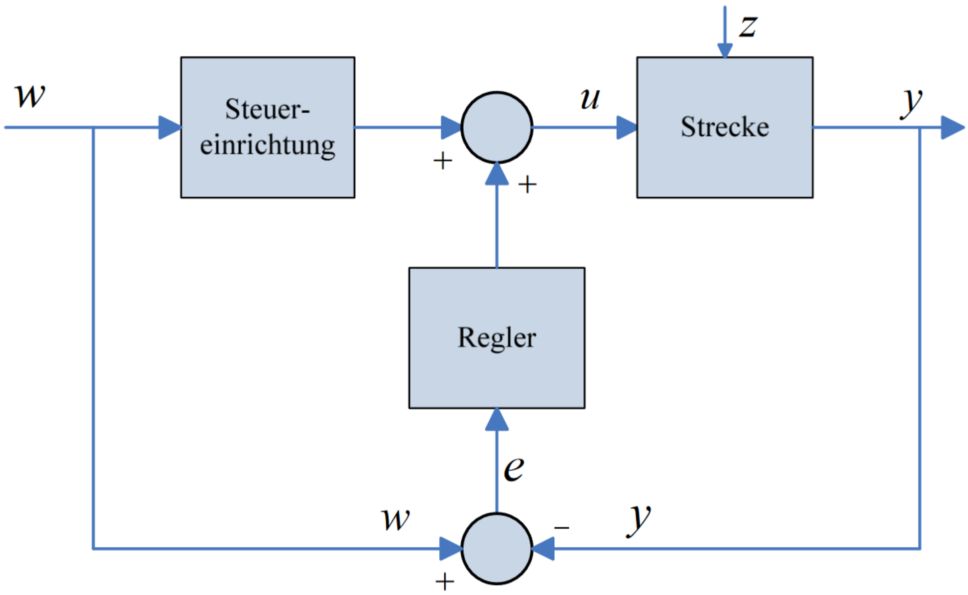
Ziel:

- Kombination der Vorteile der Regelschleife (see section 1.3) und der Vorteile der Steuerung (see section 1.2)

Signale und Blöcke:

Bezeichnung	Var.	Beschreibung
Führungsgröße	$w(t)$	Von außen vorgegebener Soll-Verlauf für die Regelgröße y(t)
Regelgröße	$y(t)$	Ausgangsgröße, der ein gewünschtes Verhalten aufgeprägt werden soll
Regelabweichung	$e(t)$	Entsteht durch Vergleich der Führungsgröße mit der gemessenen Regelgröße und soll klein gehalten werden $(e(t) = w(t) - y'(t))$
Stellgröße	$u(t)$	Eingangsgröße, durch die das System gezielt beeinflusst werden kann
Störgröße	$z(t)$	Eingangsgröße, die störend und mit zumeist nur ungenau oder gar nicht bekannten Zeitverlauf auf das System wirkt
Regler		Übertragungsglied, das aus der Regelabweichung das Stellsignal u generiert, sodass y möglichst w folgt
Steuereinrichtung		Übertragungsglied, das den Stellgrößenverlauf $u(t)$ derart generiert, dass $y(t)$ einem vorgegebenen Sollverlauf $w(t)$ folgt.

Blockschaltbild



1.4.1 Störgrößenaufschaltung

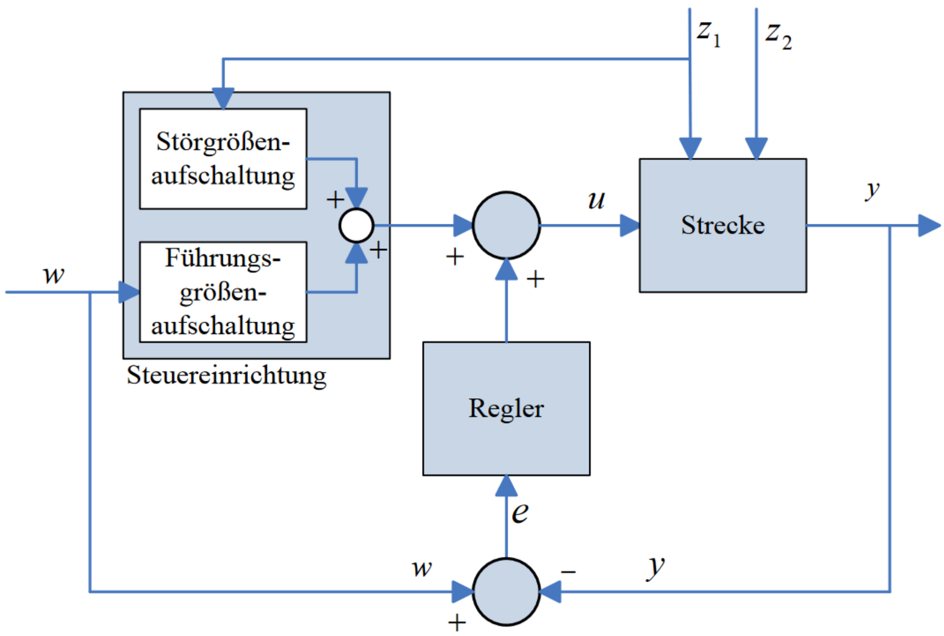
Ziel:

- Mindern des Einflusses einer messbaren Störgröße auf den Ausgang

Signale und Blöcke:

Bezeichnung	Var.	Beschreibung
Führungsgröße	$w(t)$	Von außen vorgegebener Soll-Verlauf für die Regelgröße y(t)
Regelgröße	$y(t)$	Ausgangsgröße, der ein gewünschtes Verhalten aufgeprägt werden soll
Regelabweichung	$e(t)$	Entsteht durch Vergleich der Führungsgröße mit der gemessenen Regelgröße und soll klein gehalten werden ($e(t) = w(t) - y'(t)$)
Stellgröße	$u(t)$	Eingangsgröße, durch die das System gezielt beeinflusst werden kann
Störgröße	$z_1(t)$	Messbare Eingangsgröße, die störend auf das System wirkt
Störgröße	$z_2(t)$	Nicht-Messbare Eingangsgröße, die störend auf das System wirkt
Regler		Übertragungsglied, das aus der Regelabweichung das Stellsignal u generiert, sodass y möglichst w folgt
Steuereinrichtung		Übertragungsglied, das den Stellgrößenverlauf $u(t)$ derart generiert, dass $y(t)$ einem vorgegebenen Sollverlauf $w(t)$ folgt. Besteht aus Störgrößenaufschaltung und Führungsgrößenaufschaltung
Störgrößenaufschaltung		Übertragungspfad zur Aufschaltung einer messbaren Störgröße auf die Stellgröße
Führungsgrößenaufschaltung		Übertragungspfad zur Aufschaltung der Führungsgröße auf die Stellgröße

Blockschaltbild



2 Modelle

2.1 Zustandsdarstellung

Zustandsdarstellung/Zustandsraummodell	Ein Modell bestehend aus $$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1 \dots x_n, z, u) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1 \dots x_n, z, u) \end{aligned}\right\} \text{Zustandsdifferentialgleichungen}$$ $$y = g(x_1 \dots x_n) \qquad \text{Ausgangsgleichung}$$ bzw. $$\dot{x} = f(x, z, u)$$ $$y = g(x)$$ wenn bei bekannten Eingangssignalen $u(t)$ und $z(t)$ und gegebenen Anfangswerten $x_1(0), \dots, x_n(0)$ die Zeitverläufe $x_1(t), \dots, x_n(t)$ für $t > 0$ eindeutig bestimmt sind.
Zustandsgleichungen	Zustandsdifferentialgleichungen und die Ausgangsgleichung zusammen
Trajektorie	Die n Zeitverläufe $x_1(t), \dots, x_n(t)$
Zustandsvariablen	$x_1, \dots, x_n$
Zustand des Systems	Die Gesamtheit der Werte $x_1, \dots, x_n$ zu einem festen Zeitpunkt t
Zustandsvektor	$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

2.1.1 Zustandsdarstellung bei Linearkombinationen

Bestehen die rechten Seiten der Zustandsgleichungen ausschließlich aus Linearkombinationen, d.h.:

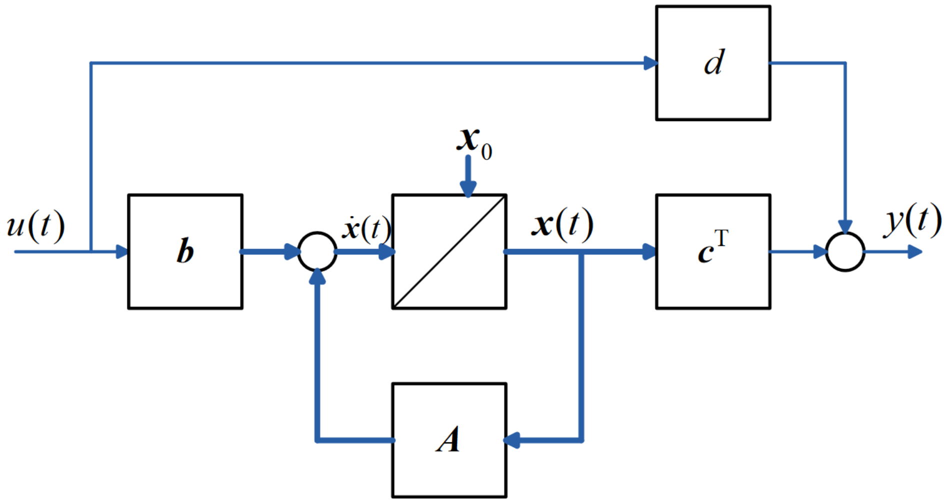
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + e_1 z + b_1 u \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + e_n z + b_n u \\ y &= c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \end{aligned}$$

so gilt:

$$\dot{x} = Ax + ez + bu \quad \equiv \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ \dot{e}_n \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \dot{b}_n \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = c^T x \quad \equiv \quad y = \begin{bmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Blockschaltbild:

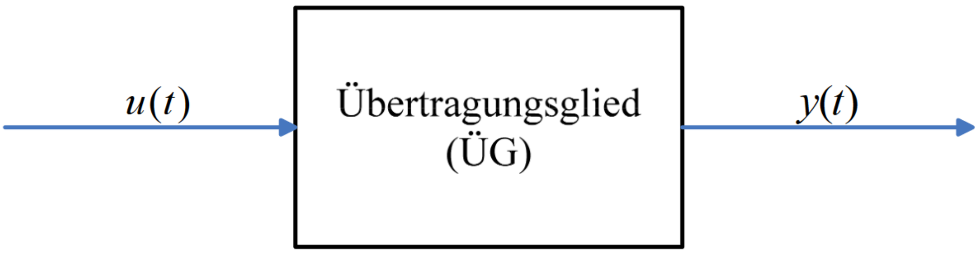


2.2 Blockschaltbild

Funktion:

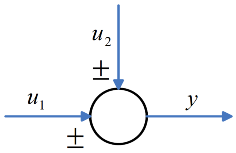
- Das Blockschaltbild ist eine graphische Darstellung der Funktionsbeziehungen zwischen den zeitveränderlichen Größen durch Blöcke und Wirkungslinien. Ein Block ordnet dabei jedem Zeitverlauf der Eingangsgröße eindeutig einen Zeitverlauf der Ausgangsgröße zu und wirkt so als Übertragungsglied. Die Zuordnungsvorschrift wird dabei in den Block hineingeschrieben.

Blockschaltbild:

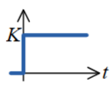
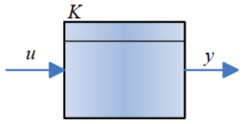
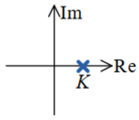
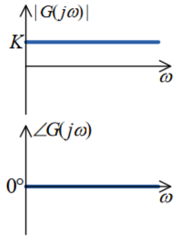
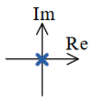
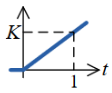
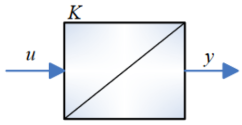
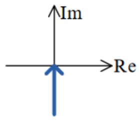
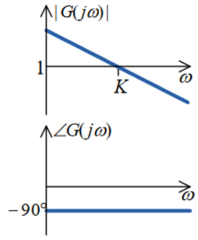
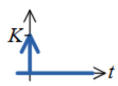
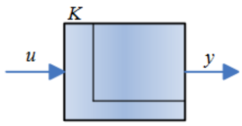
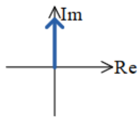
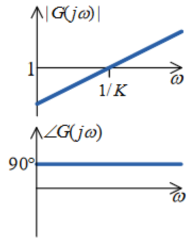
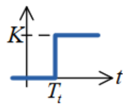
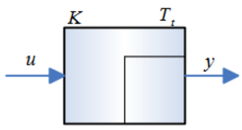
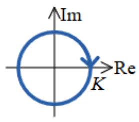
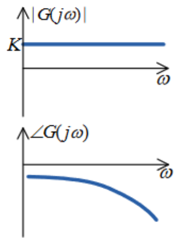
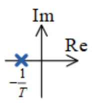
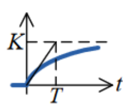
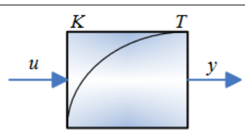
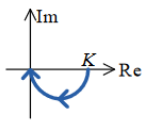
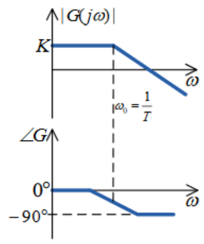


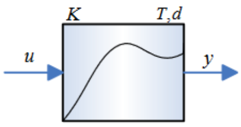
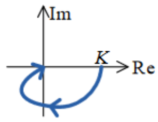
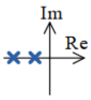
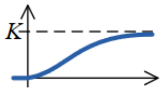
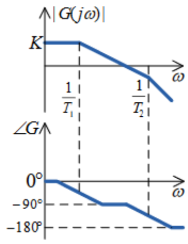
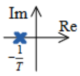
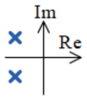
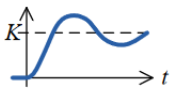
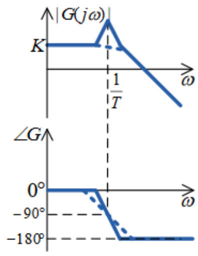
2.3 Elementare Übertragungsglieder

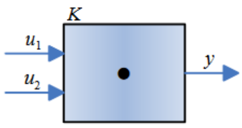
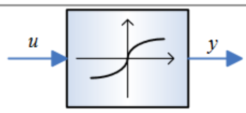
Summationsglied:



Weitere Übertragungsglieder:

Name	*Funktional-beziehung*	*Übertragungs-funktion G(s)*	*Sprungantwort h(t) (0 für $t<0$)*	*Block-Symbol*	*Ortskurve*	*Bodediagramm*
P-Glied	$y = Ku$	*K*	$h(t) = K\sigma(t)$ 	 K heißt auch Verstärkungsfaktor		
I-Glied	$y(t) = K\int_0^t u(\tau)d\tau + y_0$ oder $\dot{y}(t) = u(t)$	$\frac{K}{s}$ Pollage: 	$h(t) = Kt$ 			
D-Glied	$y = K\dot{u}$	*Ks*	$h(t) = K\delta(t)$ 			
Tot-zeit-glied	$y = Ku(t - T_t)$ mit $T_t > 0$	$K e^{-T_t s}$	$h = K\sigma(t - T_t)$ 			
PT1-Glied	$T\dot{y} + y = Ku$	$\frac{K}{1+Ts}$ Pollage: 	$h = K(1 - e^{-t/T})$ 	 T heißt Zeitkonstante $\omega_0 = \frac{1}{T}$ heißt Eckfrequenz		

PT2-Glied	$T^2\ddot{y}+2dT\dot{y}+y=Ku$ mit $T>0$, $d\geq 0$	Übertragungsfunktion: $G(s)=\frac{K}{1+2dTs+T^2s^2}$ d heißt (Lehrsche) Dämpfung				
	Fall 1: $d>1$	Pollagen: 	Sprungantworten: $h(t)=K\left(1-\frac{T_1}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_1}}+\frac{T_2}{T_1-T_2}e^{-\frac{t}{T_2}}\right)$ mit $T_{1/2}=T\left(d\pm\sqrt{d^2-1}\right)$ 			
	Fall 2: $d=1$		$h(t)=K\left(1-\left[1+\frac{t}{T}\right]e^{-\frac{t}{T}}\right)$			
	Fall 3: $0<d<1$	Pollagen: 	$h(t)=K\cdot\left[1-\frac{e^{-\frac{d}{T}t}}{\sqrt{1-d^2}}\sin(\frac{\sqrt{1-d^2}}{T}t+\varphi)\right]$ mit $\varphi=\arctan\frac{\sqrt{1-d^2}}{d}$ 		$\omega_0=\frac{1}{T}$ heißt Eckfrequenz; $\omega_e=\frac{\sqrt{1-d^2}}{T}$ heißt Eigenfrequenz.	

M-Glied	$y=K\cdot u_1\cdot u_2$					
KL-Glied	$y=F(u)$					

Die Übertragungsglieder Summationsglied, Proportionalglied, Integrierglied, Differenzierglied und Totzeitglied sind linear.

2.3.1 Sprungfunktion, Impulsfunktion

$$\text{Sprungfunktion} \quad \sigma(t)=\begin{cases}0 & \text{für } t<0\\ 1 & \text{für } t\geq 0\end{cases}$$

$$\text{Impulsfunktion} \quad \delta(t)=\frac{d\sigma(t)}{dt}$$

$$\text{Es gilt:} \quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$$

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(t)dt=\sigma(t)$$

2.4 Lineare zeitinvariante Modelle (LZI-Modelle)

Eigenschaften

- **Linearität:** Für $y(t)=\varphi(u(t))$ gilt:
  - $\varphi(c_1u_1(t)+c_2u_2(t))=c_1\varphi(u_1(t))+c_2\varphi(u_2(t))$
- **Zeitinvarianz:**
  - $y(t)=\varphi(u(t))$ folgt $\varphi(u(t-T))=y(t-T)$

2.4.1 Regelungsnormalform

Das System $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0 y = b_0 u$
besitzt die Zustandsdarstellung

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} x$$

Sie heißt Regelungsnormalform

2.4.2 Regelungsnormalform mit Ableitungen von u

Das System $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0 y = b_{n-1}u^{n-1} + \dots + b_1\dot{u} + b_0 u$
besitzt die Zustandsdarstellung

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} \end{bmatrix} x$$

Sie heißt Regelungsnormalform

2.4.3 Beobachtungsnormalform

Das System $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0 y = b_{n-1}u^{n-1} + \dots + b_1\dot{u} + b_0 u$
besitzt die Zustandsdarstellung

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Sie heißt Beobachtungsnormalform

2.5 Linearisierung im Arbeitspunkt

2.5.1 Ein Eingabeparameter

Sei $y = F(u)$ eine Übertragungsfunktion.
Die linearisierte Funktion um den Arbeitspunkt u_s ist berechnet als:

$$\Delta y = f(\Delta u, u_s) = \left.\frac{\partial F(u)}{\partial u}\right|_{u=u_s} \cdot \Delta u$$

mit

$$\Delta y = y - y_s$$
$$y_s = F(u_s)$$
$$\Delta u = u - u_s$$

Die um den Arbeitspunkt linearisierte Beziehung zwischen den absoluten Größen ist definiert als:

$$y_{lin} = f(u, u_s) = \Delta y + y_s \qquad \text{(Ersetze } \Delta u \text{ durch } u - u_s\text{)}$$

2.5.2 Mehere Eingabeparameter

Sei $y = F(u_1, \dots u_n)$ eine Übertragungsfunktion ($n \in \mathbb{N}$).
Die linearisierte Funktion um den Arbeitspunkt $(u_{1,s}, \dots, u_{n,s})$ wird wie folgt berechnet:

$$\Delta y = f(\Delta u_1, \dots, \Delta u_n, u_{1,s}, \dots, u_{n,s}) = \left.\frac{\partial F(u_1, \dots u_n)}{\partial u_1}\right|_{\mathrm{AP}} \cdot \Delta u_1 + \dots + \left.\frac{\partial F(u_1, \dots u_n)}{\partial u_n}\right|_{\mathrm{AP}} \cdot \Delta u_n$$

$$\mathrm{AP} \equiv u_1 = u_{1,s}, \dots, u_n = u_{n,s}$$

mit

$$\Delta y = y - y_s$$
$$y_s = F(u_s)$$
$$\Delta u_1 = u_1 - u_{1,s}, \dots, \Delta u_n = u_n - u_{n,s}$$

Die um den Arbeitspunkt linearisierte Beziehung zwischen den absoluten Größen ist definiert als:

$$y_{lin} = f(u_1, \dots, u_n, u_{1,s}, \dots, u_{n,s}) = \Delta y + y_s \qquad \text{(Ersetze } \Delta u_1 \text{ durch } u_1 - u_{1,s}, \dots\text{)}$$

2.5.3 Regelungsnormalform

Gegeben sei ein System in der Form $\dot{x} = Ax + ez + bu$, $y = c^T x$.
Die n algebraischen Gleichungen seien definiert als:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n, z, u) &= a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + e_1 z + b_1 u \\ &\vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n, z, u) &= a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + e_n z + b_n u \end{aligned}$$

Die Ausgangsgröße sei definiert als: $g(x_1, \dots, x_n) = y = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$
Das linearisierte Modell wird wie folgt berechnet:

$$\Delta \dot{x}(t) = A_l \Delta x(t) + e_l \Delta z(t) + b_l \Delta u(t)$$

$$\Delta y(t) = c_l^T \Delta x(t)$$

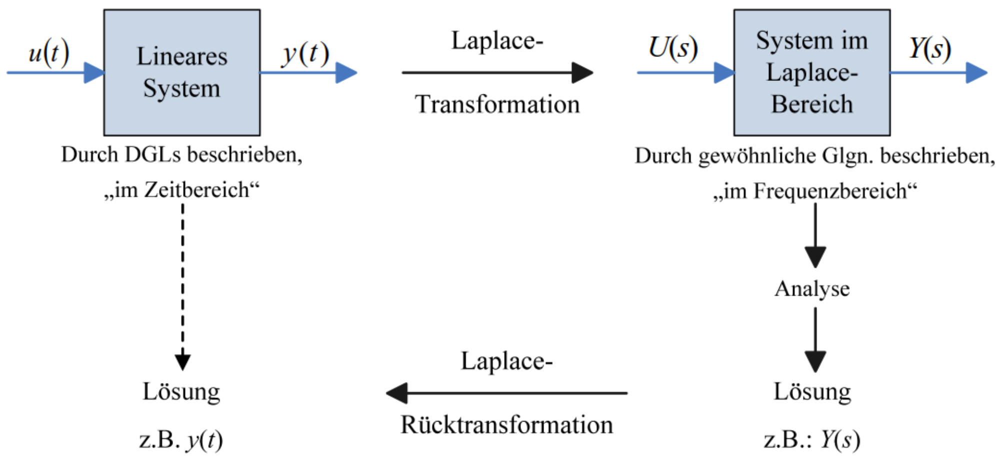
$$A_l = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}\right|_{\mathrm{AP}}$$

$$e_l = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial z} \end{bmatrix}\right|_{\mathrm{AP}}$$

$$b_l = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u} \end{bmatrix}\right|_{\mathrm{AP}}$$

$$c_l^T = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \end{bmatrix}\right|_{\mathrm{AP}}$$

3 Laplace-Transformation



3.1 Definition

Sei $f(t)$ eine Zeitfunktion mit $f(t) = 0$ für $t < 0$.
Die Laplace-Transformierte dieser Zeitfunktion ist definiert als:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

wobei $s = \delta + j\omega$

Die Korrespondenz wird wie folgt dargestellt:

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; F(s)$$

3.2 Rücktransformation

Sei $F(s)$ die Laplace-Transformierte zu $f(t)$.
Die Rücktransformation ist definiert als:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}ds$$

mit c in der Konvergenzhalbebene.

3.3 Korrespondenztabelle

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$ (Dirac-Impuls)	1
$\delta(t-t_0)$	$e^{-t_0 s}$
$\sigma(t)$ (Einheitssprung)	$\frac{1}{s}$
$\sigma(t-t_0)$	$\frac{e^{-t_0 s}}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^n}{n!}, n \in \mathbb{N}_0$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$
$\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{1+Ts}$
$te^{\alpha t}$	$\frac{1}{(s-\alpha)^2}$
$\frac{t}{T^2}e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{(1+Ts)^2}$
$\frac{t^n}{n!}e^{\alpha t}$	$\frac{1}{(s-\alpha)^{n+1}}$
$1-e^{\alpha t}$	$\frac{-\alpha}{s(s-\alpha)}$
$1-e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{s(1+Ts)}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-\delta t}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+\delta)^2+\omega^2}$
$e^{-\delta t}\cos \omega t$	$\frac{s+\delta}{(s+\delta)^2+\omega^2}$
$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$t \cos \omega t$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$

wobei
$f(t) = 0$ für $t < 0$,
$T > 0, t_0 > 0, \omega > 0$ reell,
δ beliebig reell und
α beliebig komplex.

3.4 Eigenschaften der Laplace-Transformation

Eigenschaft	Operation im Zeitbereich	Operation im Bildbereich
Linearität	$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$	$c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$
Differenziation	$\dot{f}(t)$ $f^{(n)}(t)$	$sF(s) - f(0)$ $s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
Integration	$\int_0^t f(\tau)\ d\tau$	$\frac{1}{s}F(s)$
Dämpfung	$f(t) \cdot e^{\alpha t}$	$F(s-\alpha)$
Faltung	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s) \cdot F_2(s)$
Zeitverschiebung	$f(t-t_0), t_0 > 0$	$e^{-t_0 s}F(s)$
Diffenrentiation der Bildfunktion	$(-1)^n t^n f(t)$	$F^{(n)}(s), n \in \mathbb{N}$
Skalierung der Zeitachse	$f(\alpha t), \alpha > 0$	$\frac{1}{\alpha}F(\frac{s}{\alpha})$
Anfangswertsatz	$\lim_{t\to+0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$, sofern $\lim_{t\to+0} f(t)$ existiert	
Endwertsatz	$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$, sofern $\lim_{t\to\infty} f(t)$ existiert	

3.5 Lösung linearer zeitinvarianter Differentialgleichungen mittels Laplace-Transformation

Sei $a_n y^{(n)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \cdots + b_1 \dot{u} + bu$ mit $m \leq n$ und $a_n \neq 0$ die systembeschreibende Differentialgleichung. Die Lösung dieser DGL erfolgt durch die folgenden 5 Schritte:

1. Transformation der DGL in den Bildbereich mittels Laplace-Transformation
2. Auflösen nach $Y(s)$. Sind alle Anfangswerte gleich null, resultiert:
   $Y(s) = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0} U(s) \equiv Y(s) = G(s) \cdot U(s)$
3. Einsetzen von $U(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\, u(t)$ in $Y(s) = G(s) \cdot U(s)$
4. Durchführung einer Partialbruchzerlegung von $Y(s)$
5. Rücktransformation in den Zeitbereich $y(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, Y(s)$

3.5.1 Darstellungsformen von G(s)

$G(s)$ kann in folgenden Formen dargestellt werden:

Polynomform:	$G(s) = \frac{b_m s^m + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0}$	
Linearfaktorform:	$G(s) = Q \frac{(s-q_1)\cdot \ldots \cdot (s-q_m)}{(s-p_1)\cdot \ldots \cdot (s-p_n)}$	mit $Q = \frac{b_m}{a_n}$
Zeitkonstantenform:	$G(s) = K \frac{(1+\bar{T}_1 s)\cdot \ldots \cdot (1+\bar{T}_m s)}{(1+T_1 s)\cdot \ldots \cdot (1+T_n s)}$	mit $\bar{T}_i = -\frac{1}{q_i}$, $T_i = -\frac{1}{p_i}$, $K = \frac{b_0}{a_0}$
Partialbruchform:	$G(s) = r_0 + \frac{r_1}{s-p_1} + \cdots + \frac{r_n}{s-p_n}$	

3.5.2 Komplexe Übertragungsfunktion

Sei $Y(s) = G(s)U(s)$ eine systembeschreibende Differentialgleichung im Bildbereich.
$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ heißt komplexe Übertragungsfunktion.
Komplexe Übertragungsfunktionen der in Sektion 3.5.1 genannten Darstellungsformen heißen rationale Übertragungsfunktionen. Die zugehörigen Übertragungsglieder heißen rationale Übertragungsglieder, kurz R-Glieder.

3.6 Sprungantworten des PT2-Gliedes

Die Pole von der komplexen Übertragungsfunktion $G(s)$ eines PT2-Gliedes werden wie folgt berechnet:

$$p_{1/2} = \frac{1}{T}(-d \pm \sqrt{d^2 - 1})$$

Es folgt:

Fall 1:	$d > 1$,	$p_{1/2} \in \mathbb{R}^-$,	aperiodischer Fall
Fall 2:	$d = 1$,	$p_1 = p_2, p_{1/2} \in \mathbb{R}^-$,	aperiodischer Grenzfall
Fall 3:	$0 < d < 1$,	$p_{1/2} \in \mathbb{C}, \Re(p_{1/2}) < 0$,	unterkritisch/periodisch gedämpfter Fall
Fall 4:	$d = 0$,	$p_{1/2} \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$,	ungedämpfter Fall

3.7 Lösung der Zustandsgleichung mittels Laplace-Transformation

Sei ein LZI-System gegeben mit $\dot{x} = Ax + bu$ und $y = c^T x$.
Die Zustandsgleichungen im Bildbereich sind:

$$X(s) = (sI - A)^{-1} bU(s) + (sI - A)^{-1} x(0) \bullet\!\!-\!\!\circ\, x(t)$$

$$Y(s) = c^T (sI - A)^{-1} bU(s) + c^T (sI - A)^{-1} x(0) \bullet\!\!-\!\!\circ\, y(t)$$

Die komplexe Übertragungsfunktion $G(s)$ ist:

$$G(s) = c^T (sI - A)^{-1} b = \frac{c^T (\mathrm{Adjunkte}(sI - A)) b}{\det(sI - A)} = \frac{Z(s)}{N(s)}$$

3.7.1 Polstellen

Jeder Pol von $G(s)$ ist Eigenwert von A. Ein Eigenwert von A ist genau dann Pol von $G(s)$, wenn er sich nicht herauskürzt, d.h. nicht gleichzeitig Nullstelle von $Z(s)$ ist.

3.7.2 Zustandsgleichung mit Störgröße

Seien die Zustandsgleichungen des LZI-Systems gegeben durch $\dot{x} = Ax + ez + bu$ und $y = c^T x$.
Die Zustandsgleichung im Bildbereich ist:

$$Y(s) = G(s)U(s) + G_z(s)Z(s)$$

und die Störübertragungsfunktion ist

$$G_z(s) = c^T (sI - A)^{-1} e$$

3.8 Lösung der Zustandsgleichungen im Zeitbereich

Sei ein LZI-System gegeben mit $\dot{x} = Ax + bu$ und $y = c^T x$.
Die Lösungen dieser Gleichungen sind:

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} bu(\tau)\ d\tau + e^{At} x(0)$$

$$y(t) = \int_0^t c^T e^{A(t-\tau)} bu(\tau)\ d\tau + c^T e^{At} x(0)$$

wobei

$$e^{At} = I + A\frac{t}{1!} + A^2 \frac{t^2}{2!} + \dots$$

3.8.1 Transitionsmatrix

Die Matrix e^{At} heißt Überführungs- bzw. Transitionsmatrix. Sie hat folgende Eigenschaften.

$$e^{At} \cdot e^{A\tau} = e^{A(t+\tau)}$$

$$e^{-At} \cdot e^{At} = e^0 = I$$

$$\frac{de^{At}}{dt} = Ae^{At} = e^{At} A$$

4 Analyse dynamischer Systeme

5 Mathematische Grundlagen

5.1 Komplexe Zahlen

5.1.1 Definition

Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist definiert als:

$$z = x + jy$$

wobei $x, y \in \mathbb{R}$ und $j = \sqrt{-1}$ ist die imaginäre Einheit.

Der Real- und Imaginärteil ist definiert als:

$$\Re(z) = x, \qquad \Im(z) = y$$

5.1.2 Konjugiert komplexe Zahl

Sei $z \in \mathbb{C}$.
Die zu z konjugiert komplexe Zahl z^* ist:

$$z^* = x - jy$$

5.1.3 Betrag einer komplexen Zahl

Sei $z \in \mathbb{C}$.
Der Betrag von z ist:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

5.1.4 Euler-Formel

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$$

5.1.5 Polarkoordinaten

Sei $z \in \mathbb{C}$.
z angegeben in Polarkoordinaten ist definiert als:

$$z = |z|(\cos\varphi + j\sin\varphi) = |z|e^{j\varphi}$$

wobei

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & \text{für } x > 0 \\ \pi + \arctan(\frac{y}{x}) & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

5.1.6 Addition, Multiplikation

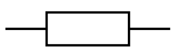
Sei $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
Es folgt:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$
$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

6 Elektrotechnische Grundlagen

6.1 Widerstand

Schaltzeichen:

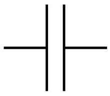


Formel:

$$U = R \cdot I$$

6.2 Kondensator

Schaltzeichen:



Formel:

$$U = \frac{1}{C} \int I \text{ dt} \iff \dot{U} = \frac{I}{C}$$

6.3 Spule

Schaltzeichen:

 bzw. 

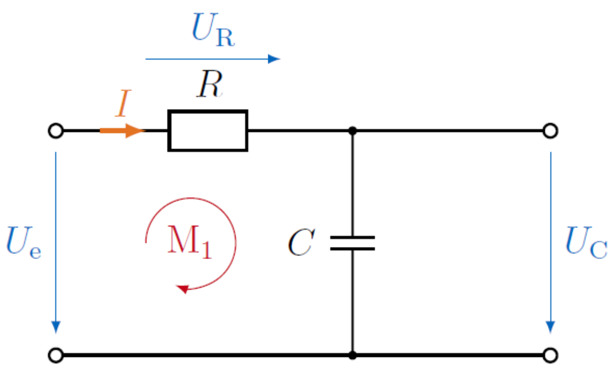
Formel:

$$U = L \cdot \dot{I}$$

6.4 Kirchoff'sches Spannungsgesetz

In einem geschlossenen Stromkreis (Masche) ist die Summe aller Spannungen gleich null

Beispiel:

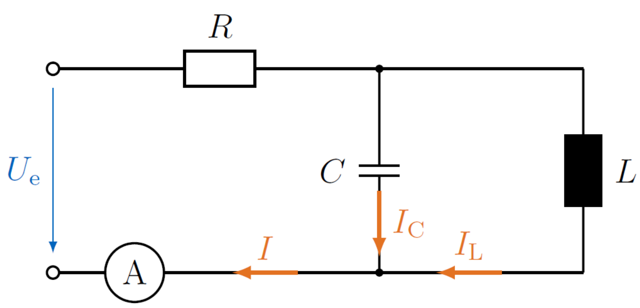


Für Masche M_1 gilt:

$$U_R + U_C - U_e = 0$$

6.5 Kirchoff'sches Stromgesetz

In jedem Knotenpunkt ist die Summe aller Ströme gleich null.
Beispiel:



$$I_C + I_L - I = 0$$

7 Physikalische Grundlagen

7.1 Kräfte

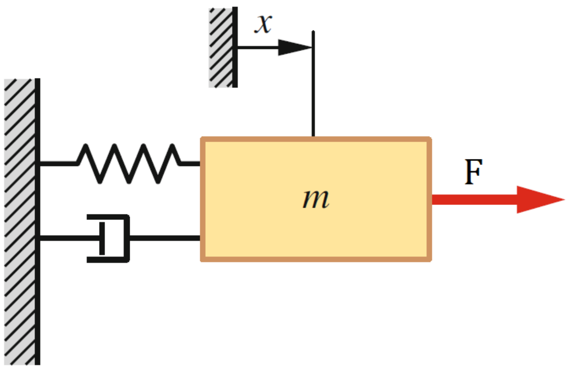
Kräftegleichgewicht:
Die Summe aller Kräfte, die an einem Körper angreifen, addieren sich zu null.

$$\sum F_i = 0$$

Newtonsche Gesetze

1. Wirkt auf einen Körper keine Kraft oder befindet er sich im Kräftegleichgewicht, so bleibt er in Ruhe oder er bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig weiter.
2. $F = m \cdot a$ (m: Masse des Körpers, a: Beschleunigung, die der Körper erfährt)
3. $F_1 = -F_2$ (Kraft gleich Gegenkraft)

Masse-Feder-Dämpfer System



m: Masse des Körpers, d: Dämpferkonstante, k: Federkonstante, F: Stellkraft

$$F = m \cdot \ddot{x} + d\dot{x} + kx$$

7.2 Drehmomente

Momentengleichgewicht:
Die Summe aller Momente um jeden (einen) beliebigen Punkt eines Körpers addieren sich zu null.

$$\sum M_i = 0$$

Berechnung in Abhängigheit von F:
r: Abstand der Wirkungslinie der Kraft von der Drehachse, F: wirkende Kraft

$$M = r \times F$$

7.3 Drehimpuls:

J: Trägheitsmoment, ω: Winkelgeschwindigkeit

$$L = J \cdot \omega$$

8 Tipps

8.1 Zeichnen eines Blockschaltbildes

- Verzweigungen von Signalen werden durch einen schwarzen Punkt markiert, um die Verwechslungsgefahr mit Kreuzungen ohne Kontakt zu vermeiden.
- Signale werden immer explizit mit Summationsgliedern aufaddiert.
- Proportionalitätsfaktoren von 1 können weggelassen werden.
- Das Vorzeichen beim Summationsglied steht immer rechts vom Pfeil. Die Pluszeichen müssen nicht explizit angegeben werden.
- Das Vorzeichen einer Rückführung steht am Soll-/Istwert-Vergleich

Allgemeine Vorgehensweise:

1. Differentialgleichung nach höchster Ableitung auflösen
2. n I-Glieder mit zugehörigen Anfangswerten nebeneinander zeichnen, verbinden und beschriften
3. Summationsglieder für die höchste Ableitung bilden
4. Jeden Term der rechten Seite aus bestehenden Signalen bilden

Anmerkungen

Dies ist eine Zusammenfassung der Vorlesung Regelungstechnik an der Technischen Universität München. Gehalten wurde diese Vorlesung durch Lohmann B. im Sommersemester 2019. Ersteller dieser Zusammenfassung ist Gaida B. Alle Angaben sind ohne Gewähr.

Literaturverzeichnis

Werner Skolaut. *Maschinenbau. Ein Lehrbuch für das ganze Bachelor-Studium*. Springer Vieweg. Heidelberg, 2018, S. 1271 - 1387