

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Begriff der Regelung</b>	<b>3</b>
1.1	Dynamisches System	3
1.2	Vorgeschaltete Steuereinrichtung	3
1.3	Regelung	4
1.4	Zwei-Freiheitsgrade-Regelung (Steuerung + Regelung)	4
1.4.1	Störgrößenaufschaltung	5
<b>2</b>	<b>Modelle</b>	<b>7</b>
2.1	Zustandsdarstellung	7
2.1.1	Zustandsdarstellung bei Linearkombinationen	7
2.2	Blockschaltbild	8
2.3	Elementare Übertragungsglieder	8
2.3.1	Sprungfunktion, Impulsfunktion	10
2.4	Lineare zeitinvariante Modelle (LZI-Modelle)	10
2.4.1	Regelungsnormalform	11
2.4.2	Regelungsnormalform mit Ableitungen von $u$	11
2.4.3	Beobachtungsnormalform	11
2.5	Linearisierung im Arbeitspunkt	11
2.5.1	Ein Eingabeparameter	11
2.5.2	Mehere Eingabeparameter	12
2.5.3	Regelungsnormalform	12
<b>3</b>	<b>Laplace-Transformation</b>	<b>13</b>
3.1	Definition	13
3.2	Rücktransformation	13
3.3	Korrespondenztabelle	14
3.4	Eigenschaften der Laplace-Transformation	14
3.5	Lösung linearer zeitinvarianter Differentialgleichungen mittels Laplace-Transformation	14
3.5.1	Darstellungsformen von $G(s)$	15
3.5.2	Komplexe Übertragungsfunktion	15
3.6	Sprungantworten des PT2-Gliedes	15
3.7	Lösung der Zustandsgleichung mittels Laplace-Transformation	15
3.7.1	Polstellen	15
3.7.2	Zustandsgleichung mit Störgröße	16
3.8	Lösung der Zustandsgleichungen im Zeitbereich	16
3.8.1	Transitionsmatrix	16
<b>4</b>	<b>Analyse dynamischer Systeme</b>	<b>16</b>
4.1	Systemantworten	16
4.1.1	Impulsantwort	16
4.1.2	Sprungantwort	18
4.1.3	Systemantwort mittels Faltung	18
4.1.4	Anfangswertsatz der Laplace-Transformation	18
4.1.5	Endwertsatz der Laplace-Transformation	18
4.2	Stabilität	18
4.2.1	Sprungantwortstabilität	18
4.2.2	Übertragungsstabilität, BIBO-Stabilität	19
4.2.3	Asymptotische Stabilität	19
4.3	Pole, Nullstellen und Modellreduktion	19
4.3.1	Dominierende Pole	19
4.3.2	Nullstelleneffekte	19
4.3.3	Modellreduktion	20
4.4	Approximation des Totzeitgliedes	20
4.4.1	Approximation durch ein PT $n$ -Glied	20
4.4.2	Padé-Approximation	20
4.5	Modellidentifikation im Zeitbereich	20
4.6	Frequenzgang	22
4.6.1	Systemantwort auf harmonische Anregung	22

4.6.2	Frequenzgangortskurve und Bode-Diagramm . . . . .	22
4.6.3	Konstruktion von Bode-Diagramm . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Mathematische Grundlagen</b>	<b>24</b>
5.1	Komplexe Zahlen . . . . .	24
5.1.1	Definition . . . . .	24
5.1.2	Konjugiert komplexe Zahl . . . . .	24
5.1.3	Betrag einer komplexen Zahl . . . . .	24
5.1.4	Euler-Formel . . . . .	24
5.1.5	Polarkoordinaten . . . . .	24
5.1.6	Addition, Multiplikation . . . . .	24
5.2	Partialbruchzerlegung . . . . .	24
5.2.1	Beispiel . . . . .	25
5.3	Matrizen . . . . .	25
5.3.1	Matrix . . . . .	25
5.3.2	Addition . . . . .	25
5.3.3	Multiplikation mit Skalar . . . . .	26
5.3.4	Matrizenmultiplikation . . . . .	26
5.3.5	Transponierte . . . . .	26
5.3.6	Einheitsmatrix . . . . .	26
5.3.7	Skalarprodukt . . . . .	26
5.3.8	Determinante . . . . .	27
5.3.9	Inverse . . . . .	27
5.3.10	Adjunkte . . . . .	27
5.3.11	Eigenvektoren und Eigenwerte . . . . .	27
5.3.12	Matrix-Exponentialfunktion . . . . .	27
5.3.13	Zeitliche Ableitung eines Matrizenprodukts . . . . .	28
<b>6</b>	<b>Elektrotechnische Grundlagen</b>	<b>28</b>
6.1	Widerstand . . . . .	28
6.2	Kondensator . . . . .	28
6.3	Spule . . . . .	28
6.4	Kirchoff'sches Spannungsgesetz . . . . .	28
6.5	Kirchoff'sches Stromgesetz . . . . .	29
<b>7</b>	<b>Physikalische Grundlagen</b>	<b>29</b>
7.1	Kräfte . . . . .	29
7.2	Drehmomente . . . . .	30
7.3	Drehimpuls: . . . . .	30
<b>8</b>	<b>Tipps</b>	<b>30</b>
8.1	Zeichnen eines Blockschaltbildes . . . . .	30

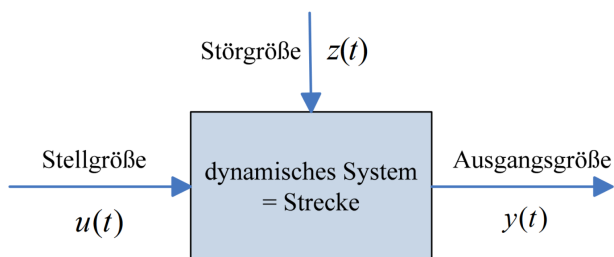
# 1 Begriff der Regelung

## 1.1 Dynamisches System

**Signale und Blöcke:**

Bezeichnung	Var.	Beschreibung
Ausgangsgröße	$y(t)$	Ausgangsgröße, der ein gewünschtes Verhalten aufgeprägt werden soll
Stellgröße	$u(t)$	Eingangsgröße, durch die das System gezielt beeinflusst werden kann
Störgröße	$z(t)$	Eingangsgröße, die störend und mit zumeist nur ungenau oder gar nicht bekannten Zeitverlauf auf das System wirkt

**Blockschaltbild**



## 1.2 Vorgeschaltete Steuereinrichtung

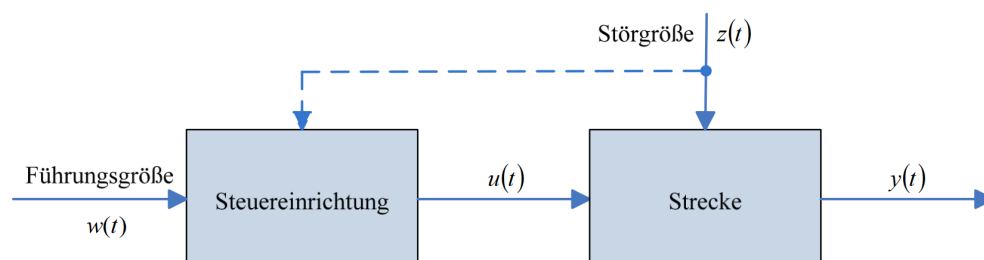
**Ziel**

- Übertragungsglied, das den Stellgrößenverlauf  $u(t)$  derart generiert, dass  $y(t)$  einem vorgegebenen Sollverlauf  $w(t)$  folgt.

**Signale und Blöcke:**

Bezeichnung	Var.	Beschreibung
Führungsgröße	$w(t)$	Von außen vorgegebener Soll-Verlauf für die Regelgröße $y(t)$
Ausgangsgröße	$y(t)$	Ausgangsgröße, der ein gewünschtes Verhalten aufgeprägt werden soll
Stellgröße	$u(t)$	Eingangsgröße, durch die das System gezielt beeinflusst werden kann
Störgröße	$z(t)$	Eingangsgröße, die störend und mit zumeist nur ungenau oder gar nicht bekannten Zeitverlauf auf das System wirkt

**Blockschaltbild**



### 1.3 Regelung

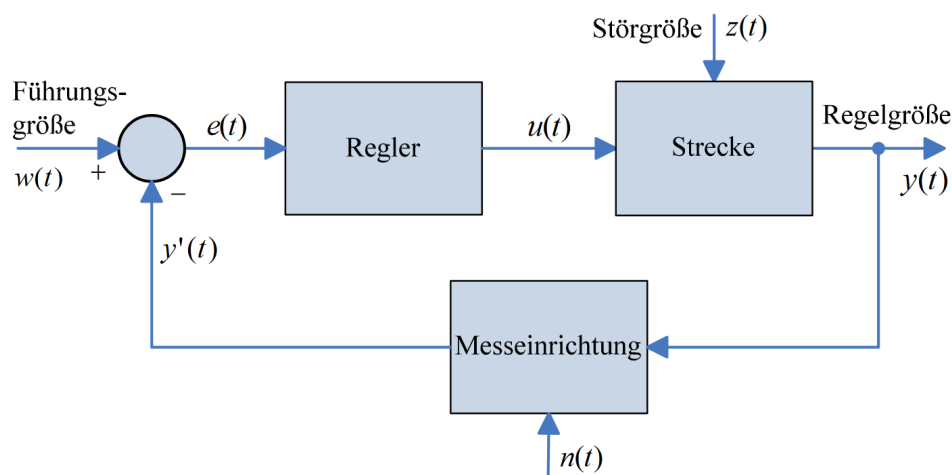
#### Ziel:

- Minderung des Einflusses von (nicht-messbaren) Störungen
- Minderung des Einflusses von Ungenauigkeiten des Streckenmodells
- Verbesserung des Folgeverhaltens

#### Signale und Blöcke:

Bezeichnung	Var.	Beschreibung
Führungsgröße	$w(t)$	Von außen vorgegebener Soll-Verlauf für die Regelgröße $y(t)$
Regelgröße	$y(t)$	Ausgangsgröße, der ein gewünschtes Verhalten aufgeprägt werden soll
Regelabweichung	$e(t)$	Entsteht durch Vergleich der Führungsgröße mit der gemessenen Regelgröße und soll klein gehalten werden ( $e(t) = w(t) - y'(t)$ )
Stellgröße	$u(t)$	Eingangsgröße, durch die das System gezielt beeinflusst werden kann
Störgröße	$z(t)$	Eingangsgröße, die störend und mit zumeist nur ungenau oder gar nicht bekannten Zeitverlauf auf das System wirkt
Messrauschen	$n(t)$	
Regler		Übertragungsglied, das aus der Regelabweichung das Stellsignal $u$ generiert, sodass $y$ möglichst $w$ folgt
Messglied/Messeinrichtung		Erfasst die Regelgröße $y$ mittels eines Sensors und erzeugt ein zu $y(t)$ möglichst äquivalentes Signal $y'(t)$

#### Blockschaltbild



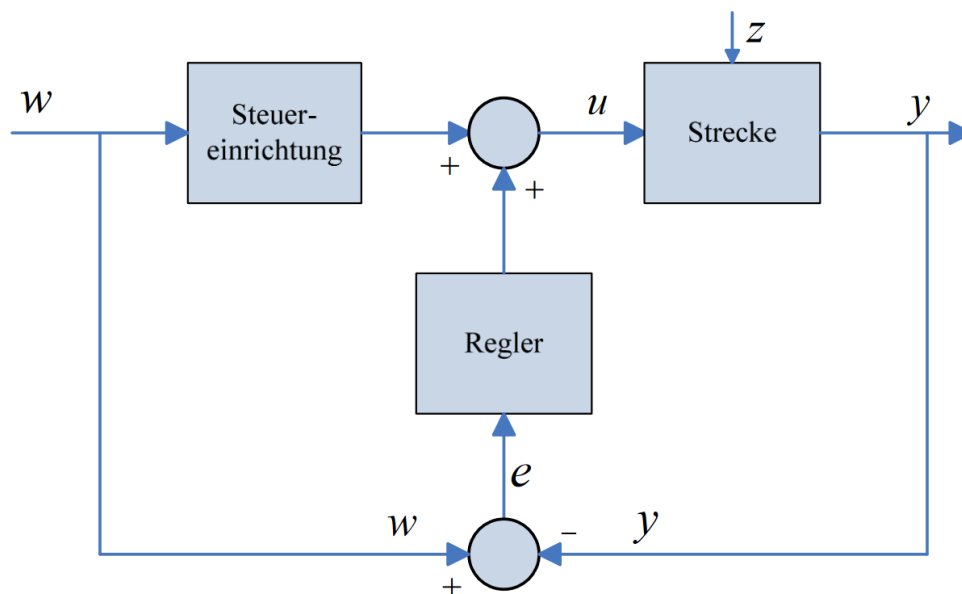
### 1.4 Zwei-Freiheitsgrade-Regelung (Steuerung + Regelung)

#### Ziel:

- Kombination der Vorteile der Regelschleife (see section 1.3) und der Vorteile der Steuerung (see section 1.2)

**Signale und Blöcke:**

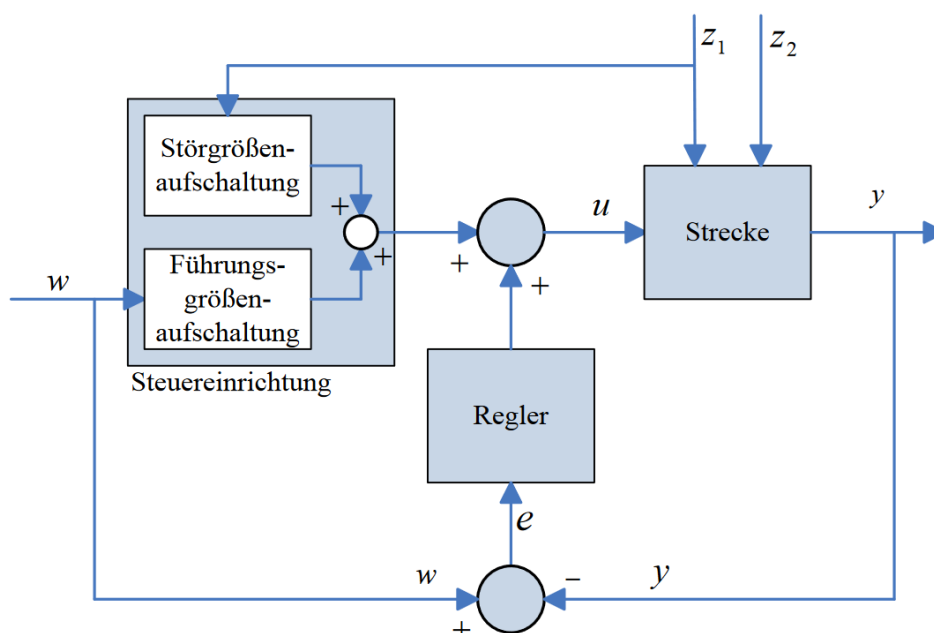
Bezeichnung	Var.	Beschreibung
Führungsgröße	$w(t)$	Von außen vorgegebener Soll-Verlauf für die Regelgröße $y(t)$
Regelgröße	$y(t)$	Ausgangsgröße, der ein gewünschtes Verhalten aufgeprägt werden soll
Regelabweichung	$e(t)$	Entsteht durch Vergleich der Führungsgröße mit der gemessenen Regelgröße und soll klein gehalten werden ( $e(t) = w(t) - y'(t)$ )
Stellgröße	$u(t)$	Eingangsgröße, durch die das System gezielt beeinflusst werden kann
Störgröße	$z(t)$	Eingangsgröße, die störend und mit zumeist nur ungenau oder gar nicht bekannten Zeitverlauf auf das System wirkt
Regler		Übertragungsglied, das aus der Regelabweichung das Stellsignal $u$ generiert, sodass $y$ möglichst $w$ folgt
Steuereinrichtung		Übertragungsglied, das den Stellgrößenverlauf $u(t)$ derart generiert, dass $y(t)$ einem vorgegebenen Sollverlauf $w(t)$ folgt.

**Blockschaltbild****1.4.1 Störgrößenaufschaltung****Ziel:**

- Mindern des Einflusses einer messbaren Störgröße auf den Ausgang

**Signale und Blöcke:**

Bezeichnung	Var.	Beschreibung
Führungsgröße	$w(t)$	Von außen vorgegebener Soll-Verlauf für die Regelgröße $y(t)$
Regelgröße	$y(t)$	Ausgangsgröße, der ein gewünschtes Verhalten aufgeprägt werden soll
Regelabweichung	$e(t)$	Entsteht durch Vergleich der Führungsgröße mit der gemessenen Regelgröße und soll klein gehalten werden ( $e(t) = w(t) - y'(t)$ )
Stellgröße	$u(t)$	Eingangsgröße, durch die das System gezielt beeinflusst werden kann
Störgröße	$z_1(t)$	Messbare Eingangsgröße, die störend auf das System wirkt
Störgröße	$z_2(t)$	Nicht-Messbare Eingangsgröße, die störend auf das System wirkt
Regler		Übertragungsglied, das aus der Regelabweichung das Stellsignal $u$ generiert, sodass $y$ möglichst $w$ folgt
Steuereinrichtung		Übertragungsglied, das den Stellgrößenverlauf $u(t)$ derart generiert, dass $y(t)$ einem vorgegebenen Sollverlauf $w(t)$ folgt. Besteht aus Störgrößenaufschaltung und Führungsgrößenaufschaltung
Störgrößenaufschaltung		Übertragungspfad zur Aufschaltung einer messbaren Störgröße auf die Stellgröße
Führungsgrößenaufschaltung		Übertragungspfad zur Aufschaltung der Führungsgröße auf die Stellgröße

**Blockschaltbild**

## 2 Modelle

### 2.1 Zustandsdarstellung

Zustandsdarstellung/Zustandsraummodell Ein Modell bestehend aus

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1 \dots x_n, z, u) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1 \dots x_n, z, u) \end{aligned} \right\} \text{Zustandsdifferentialgleichungen}$$

$$y = g(x_1 \dots x_n) \quad \text{Ausgangsgleichung}$$

bzw.

$$\dot{x} = f(x, z, u)$$

$$y = g(x)$$

wenn bei bekannten Eingangssignalen  $u(t)$  und  $z(t)$  und gegebenen Anfangswerten  $x_1(0), \dots, x_n(0)$  die Zeitverläufe  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  für  $t > 0$  eindeutig bestimmt sind.

Zustandsgleichungen

Zustandsdifferentialgleichungen und die Ausgangsgleichung zusammen

Trajektorie

Die  $n$  Zeitverläufe  $x_1(t), \dots, x_n(t)$

Zustandsvariablen

$x_1, \dots, x_n$

Zustand des Systems

Die Gesamtheit der Werte  $x_1, \dots, x_n$  zu einem festen Zeitpunkt  $t$

Zustandsvektor

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

#### 2.1.1 Zustandsdarstellung bei Linearkombinationen

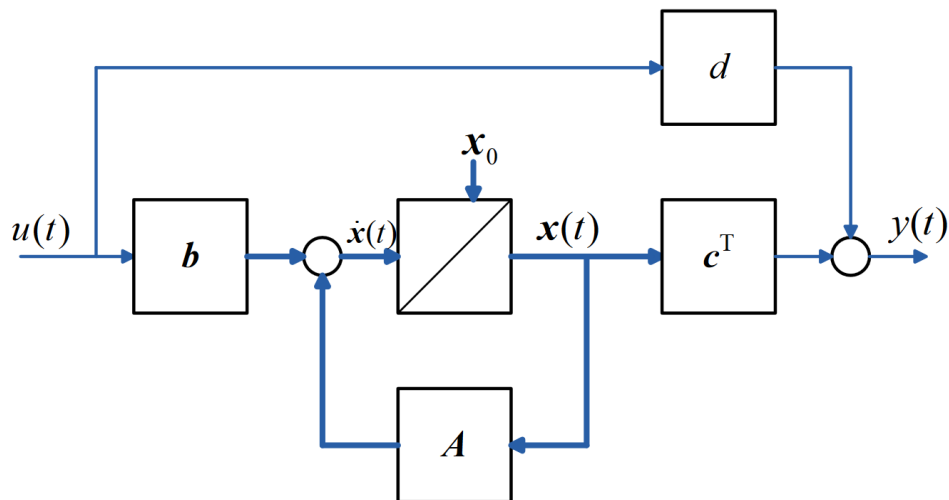
Bestehen die rechten Seiten der Zustandsgleichungen ausschließlich aus Linearkombinationen, d.h.:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + e_1z + b_1u \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + e_nz + b_nu \\ y &= c_1x_1 + \dots + c_nx_n \end{aligned}$$

so gilt:

$$\begin{aligned} \dot{x} = Ax + ez + bu &\equiv \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u(t) \\ y = c^T x &\equiv y = \begin{bmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Blockschaltbild:**

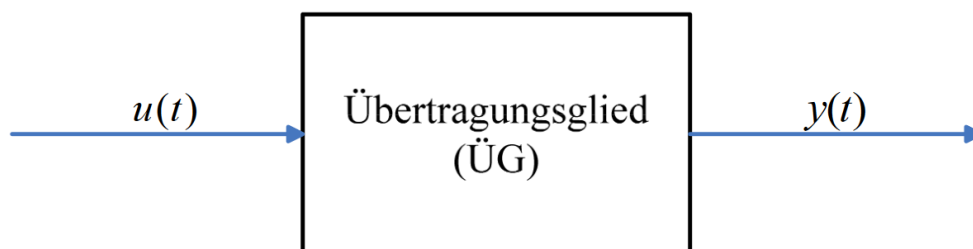


## 2.2 Blockschaltbild

**Funktion:**

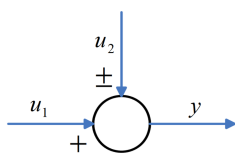
- Das Blockschaltbild ist eine graphische Darstellung der Funktionsbeziehungen zwischen den zeitveränderlichen Größen durch Blöcke und Wirkungslinien. Ein Block ordnet dabei jedem Zeitverlauf der Eingangsgröße eindeutig einen Zeitverlauf der Ausgangsgröße zu und wirkt so als Übertragungsglied. Die Zuordnungsvorschrift wird dabei in den Block hineingeschrieben.

**Blockschaltbild:**



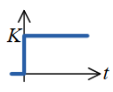
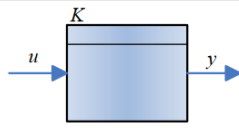
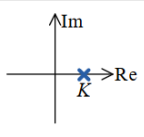
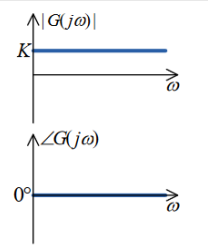
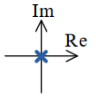
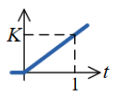
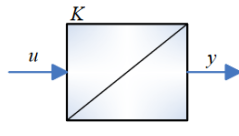
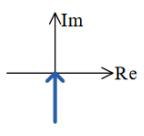
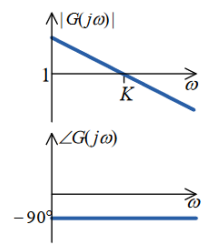
## 2.3 Elementare Übertragungsglieder

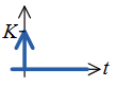
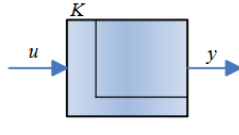
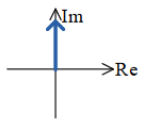
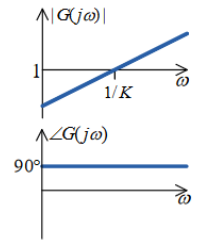
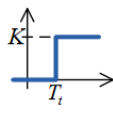
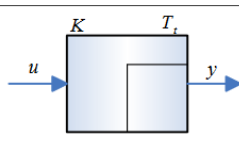
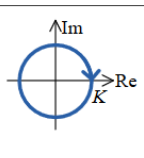
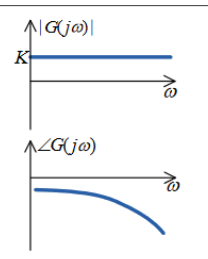
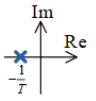
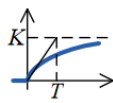
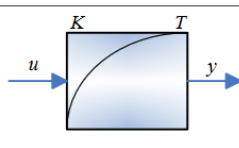
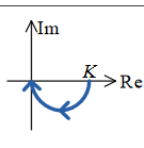
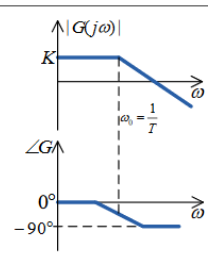
**Summationsglied:**

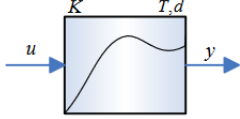
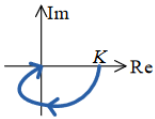
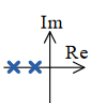
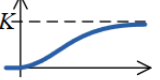
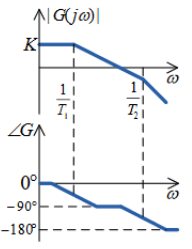

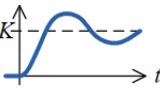
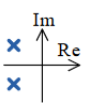
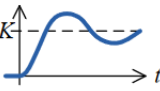
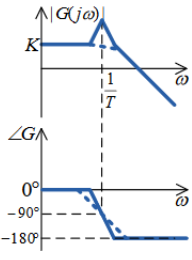
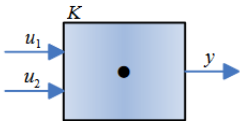
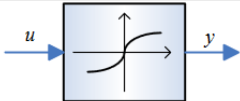


**Weitere Übertragungsglieder:**



Name	Funktional- beziehung	Übertragungs- funktion $G(s)$	Sprungantwort $h(t)$ (0 für $t < 0$ )	Block-Symbol	Ortskurve	Bodediagramm
<b>P- Glieder</b>	$y = Ku$	$K$	$h(t) = K\sigma(t)$ 	 $K$ heißt auch Verstärkungs- faktor		
<b>I- Glieder</b>	$y(t) = K \int_0^t u(\tau) d\tau + y_0$ oder $\dot{y}(t) = u(t)$	$\frac{K}{s}$ Pollage: 	$h(t) = Kt$ 			

<b>D- Glieder</b>	$y = K\dot{u}$	$Ks$	$h(t) = K\delta(t)$ 			
<b>Tot- zeit- glied</b>	$y = Ku(t - T_t)$ mit $T_t > 0$	$K e^{-T_t s}$	$h = K\sigma(t - T_t)$ 			
<b>PT1- Glieder</b>	$T\dot{y} + y = Ku$	$\frac{K}{1 + Ts}$ Pollage: 	$h = K(1 - e^{-t/T})$ 	 $T$ heißt Zeitkonstante $\omega_0 = \frac{1}{T}$ heißt Eckfrequenz		

<b>PT2-Glied</b>	$T^2\ddot{y} + 2dT\dot{y} + y = Ku$ mit $T > 0, d \geq 0$	Übertragungsfunktion: $G(s) = \frac{K}{1 + 2dT s + T^2 s^2}$ $d$ heißt (Lehrsche) Dämpfung			
Fall 1: $d > 1$	Pollagen: 	Sprungantworten: $h(t) = K \left( 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$ mit $T_{1/2} = T(d \pm \sqrt{d^2 - 1})$ 			
Fall 2: $d = 1$		$h(t) = K \left( 1 - \left[ 1 + \frac{t}{T} \right] e^{-\frac{t}{T}} \right)$ 			
Fall 3: $0 < d < 1$	Pollagen: 	$h(t) = K \cdot \left[ 1 - \frac{e^{-\frac{d}{T}t}}{\sqrt{1-d^2}} \sin\left(\frac{\sqrt{1-d^2}}{T}t + \varphi\right) \right]$ mit $\varphi = \arctan \frac{\sqrt{1-d^2}}{d}$ 	$\omega_0 = \frac{1}{T}$ heißt Eckfrequenz; $\omega_e = \frac{\sqrt{1-d^2}}{T}$ heißt Eigenfrequenz.		
<b>M-Glied</b>	$y = K \cdot u_1 \cdot u_2$				
<b>KL-Glied</b>	$y = F(u)$				

Die Übertragungsglieder Summationsglied, Proportionalglied, Integrierglied, Differenzierglied und Totzeitglied sind linear.

### 2.3.1 Sprungfunktion, Impulsfunktion

$$\text{Sprungfunktion } \sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Impulsfunktion } \delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt}$$

$$\text{Es gilt: } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^t \delta(t) dt = \sigma(t)$$

## 2.4 Lineare zeitinvariante Modelle (LZI-Modelle)

### Eigenschaften

- **Linearität:** Für  $y(t) = \varphi(u(t))$  gilt:
  - $\varphi(c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)) = c_1 \varphi(u_1(t)) + c_2 \varphi(u_2(t))$
- **Zeitinvarianz:**
  - $y(t) = \varphi(u(t))$  folgt  $\varphi(u(t - T)) = y(t - T)$

### 2.4.1 Regelungsnormalform

Das System  $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = b_0u$  besitzt die Zustandsdarstellung

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} x$$

Sie heißt Regelungsnormalform

### 2.4.2 Regelungsnormalform mit Ableitungen von u

Das System  $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = b_{n-1}u^{n-1} + \dots + b_1\dot{u} + b_0u$  besitzt die Zustandsdarstellung

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} \end{bmatrix} x$$

Sie heißt Regelungsnormalform

### 2.4.3 Beobachtungsnormalform

Das System  $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = b_{n-1}u^{n-1} + \dots + b_1\dot{u} + b_0u$  besitzt die Zustandsdarstellung

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Sie heißt Beobachtungsnormalform

## 2.5 Linearisierung im Arbeitspunkt

### 2.5.1 Ein Eingabeparameter

Sei  $y = F(u)$  eine Übertragungsfunktion.

Die linearisierte Funktion um den Arbeitspunkt  $u_s$  ist berechnet als:

$$\Delta y = f(\Delta u, u_s) = \left. \frac{\partial F(u)}{\partial u} \right|_{u=u_s} \cdot \Delta u$$

mit

$$\Delta y = y - y_s$$

$$y_s = F(u_s)$$

$$\Delta u = u - u_s$$

Die um den Arbeitspunkt linearisierte Beziehung zwischen den absoluten Größen ist definiert als:

$$y_{lin} = f(u, u_s) = \Delta y + y_s \quad (\text{Ersetze } \Delta u \text{ durch } u - u_s)$$

### 2.5.2 Mehrere Eingabeparameter

Sei  $y = F(u_1, \dots, u_n)$  eine Übertragungsfunktion ( $n \in \mathbb{N}$ ).

Die linearisierte Funktion um den Arbeitspunkt  $(u_{1,s}, \dots, u_{n,s})$  wird wie folgt berechnet:

$$\Delta y = f(\Delta u_1, \dots, \Delta u_n, u_{1,s}, \dots, u_{n,s}) = \left. \frac{\partial F(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1} \right|_{\text{AP}} \cdot \Delta u_1 + \dots + \left. \frac{\partial F(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_n} \right|_{\text{AP}} \cdot \Delta u_n$$

$$\text{AP} \equiv u_1 = u_{1,s}, \dots, u_n = u_{n,s}$$

mit

$$\Delta y = y - y_s$$

$$y_s = F(u_s)$$

$$\Delta u_1 = u_1 - u_{1,s}, \dots, \Delta u_n = u_n - u_{n,s}$$

Die um den Arbeitspunkt linearisierte Beziehung zwischen den absoluten Größen ist definiert als:

$$y_{lin} = f(u_1, \dots, u_n, u_{1,s}, \dots, u_{n,s}) = \Delta y + y_s \quad (\text{Ersetze } \Delta u_1 \text{ durch } u_1 - u_{1,s}, \dots)$$

### 2.5.3 Regelungsnormalform

Gegeben sei ein System in der Form  $\dot{x} = Ax + ez + bu$ ,  $y = c^T x$ .

Die  $n$  algebraischen Gleichungen seien definiert als:

$$f_1(x_1, \dots, x_n, z, u) = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + e_1z + b_1u$$

$\vdots$

$$f_n(x_1, \dots, x_n, z, u) = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + e_nz + b_nu$$

Die Ausgangsgröße sei definiert als:  $g(x_1, \dots, x_n) = y = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$

Das linearisierte Modell wird wie folgt berechnet:

$$\Delta \dot{x}(t) = A_l \Delta x(t) + e_l \Delta z(t) + b_l \Delta u(t)$$

$$\Delta y(t) = c_l^T \Delta x(t)$$

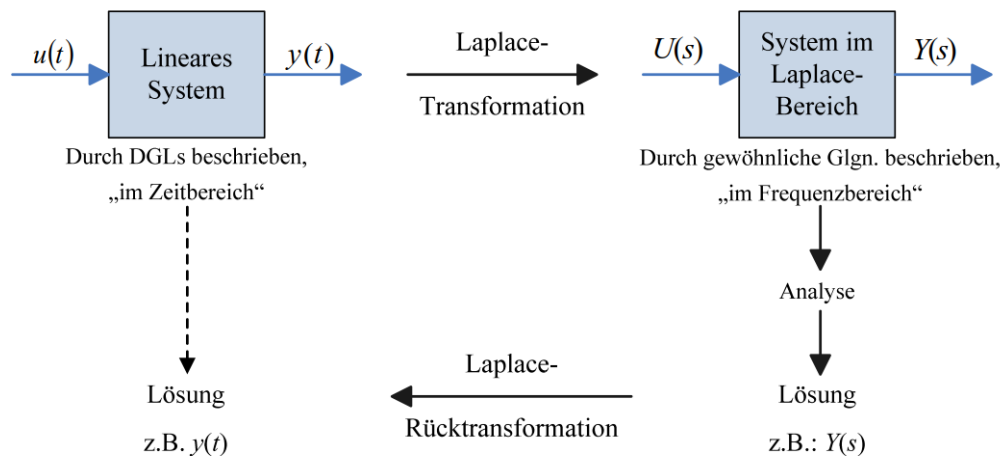
$$A_l = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right] \bigg|_{\text{AP}}$$

$$e_l = \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial z} \end{array} \right] \bigg|_{\text{AP}}$$

$$b_l = \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u} \end{array} \right] \bigg|_{\text{AP}}$$

$$c_l^T = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \end{array} \right] \bigg|_{\text{AP}}$$

### 3 Laplace-Transformation



#### 3.1 Definition

Sei  $f(t)$  eine Zeitfunktion mit  $f(t) = 0$  für  $t < 0$ .

Die Laplace-Transformierte dieser Zeitfunktion ist definiert als:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

wobei  $s = \delta + j\omega$

Die Korrespondenz wird wie folgt dargestellt:

$$f(t) \circ \bullet F(s)$$

#### 3.2 Rücktransformation

Sei  $F(s)$  die Laplace-Transformierte zu  $f(t)$ .

Die Rücktransformation ist definiert als:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds$$

mit  $c$  in der Konvergenzhalbebene.

### 3.3 Korrespondenztabelle

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$ (Dirac-Impuls)	1
$\delta(t - t_0)$	$e^{-t_0 s}$
$\sigma(t)$ (Einheitssprung)	$\frac{1}{s}$
$\sigma(t - t_0)$	$\frac{e^{-t_0 s}}{s}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^n}{n!}, n \in \mathbb{N}_0$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s - \alpha}$
$\frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{1 + Ts}$
$t e^{\alpha t}$	$\frac{1}{(s - \alpha)^2}$
$\frac{t}{T^2} e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{(1 + Ts)^2}$
$\frac{t^n}{n!} e^{\alpha t}$	$\frac{1}{(s - \alpha)^{n+1}}$
$1 - e^{\alpha t}$	$\frac{-\alpha}{s(s - \alpha)}$
$1 - e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{s(1 + Ts)}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-\delta t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s + \delta)^2 + \omega^2}$
$e^{-\delta t} \cos \omega t$	$\frac{s + \delta}{(s + \delta)^2 + \omega^2}$
$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$

wobei

$f(t) = 0$  für  $t < 0$ ,  
 $T > 0, t_0 > 0, \omega > 0$  reell,  
 $\delta$  beliebig reell und  
 $\alpha$  beliebig komplex.

### 3.4 Eigenschaften der Laplace-Transformation

Eigenschaft	Operation im Zeitbereich	Operation im Bildbereich
Linearität	$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$	$c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$
Differenziation	$\dot{f}(t)$ $f^{(n)}(t)$	$sF(s) - f(0)$ $s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
Integration	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} F(s)$
Dämpfung	$f(t) \cdot e^{\alpha t}$	$F(s - \alpha)$
Faltung	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s) \cdot F_2(s)$
Zeitverschiebung	$f(t - t_0), t_0 > 0$	$e^{-t_0 s} F(s)$
Differenziation der Bildfunktion	$(-1)^n t^n f(t)$	$F^{(n)}(s), n \in \mathbb{N}$
Skalierung der Zeitachse	$f(\alpha t), \alpha > 0$	$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$
Anfangswertsatz	$\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ , sofern $\lim_{t \rightarrow +0} f(t)$ existiert	
Endwertsatz	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$ , sofern $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ existiert	

### 3.5 Lösung linearer zeitinvarianter Differentialgleichungen mittels Laplace-Transformation

Sei  $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u$  mit  $m \leq n$  und  $a_n \neq 0$  die systembeschreibende Differentialgleichung. Die Lösung dieser DGL erfolgt durch die folgenden 5 Schritte:

1. Transformation der DGL in den Bildbereich mittels Laplace-Transformation
2. Auflösen nach  $Y(s)$ . Sind alle Anfangswerte gleich null, resultiert:  

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} U(s) \equiv Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$
3. Einsetzen von  $U(s) \bullet \rightarrow \circ u(t)$  in  $Y(s) = G(s) \cdot U(s)$
4. Durchführung einer Partialbruchzerlegung von  $Y(s)$
5. Rücktransformation in den Zeitbereich  $y(t) \circ \rightarrow \bullet Y(s)$

### 3.5.1 Darstellungsformen von $G(s)$

$G(s)$  kann in folgenden Formen dargestellt werden:

Polynomform: 
$$G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}$$

Linearfaktorform: 
$$G(s) = Q \frac{(s-q_1) \cdot \dots \cdot (s-q_m)}{(s-p_1) \cdot \dots \cdot (s-p_n)} \quad \text{mit } Q = \frac{b_m}{a_n}$$

Zeitkonstantenform: 
$$G(s) = K \frac{(1+\bar{T}_1 s) \cdot \dots \cdot (1+\bar{T}_m s)}{(1+T_1 s) \cdot \dots \cdot (1+T_n s)} \quad \text{mit } \bar{T}_i = -\frac{1}{q_i}, T_i = -\frac{1}{p_i}, K = \frac{b_0}{a_0}$$

Partialbruchform: 
$$G(s) = r_0 + \frac{r_1}{s-p_1} + \dots + \frac{r_n}{s-p_n}$$

### 3.5.2 Komplexe Übertragungsfunktion

Sei  $Y(s) = G(s)U(s)$  eine systembeschreibende Differentialgleichung im Bildbereich.

$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$  heißt komplexe Übertragungsfunktion.

Komplexe Übertragungsfunktionen der in Sektion 3.5.1 genannten Darstellungsformen heißen rationale Übertragungsfunktionen. Die zugehörigen Übertragungsglieder heißen rationale Übertragungsglieder, kurz R-Glieder.

## 3.6 Sprungantworten des PT2-Gliedes

Die Pole von der komplexen Übertragungsfunktion  $G(s)$  eines PT2-Gliedes werden wie folgt berechnet:

$$p_{1/2} = \frac{1}{T}(-d \pm \sqrt{d^2 - 1})$$

Es folgt:

- Fall 1:  $d > 1$ ,  $p_{1/2} \in \mathbb{R}^-$ , aperiodischer Fall
- Fall 2:  $d = 1$ ,  $p_1 = p_2, p_{1/2} \in \mathbb{R}^-$ , aperiodischer Grenzfall
- Fall 3:  $0 < d < 1$ ,  $p_{1/2} \in \mathbb{C}, \Re(p_{1/2}) < 0$ , unterkritisch/periodisch gedämpfter Fall
- Fall 4:  $d = 0$ ,  $p_{1/2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , ungedämpfter Fall

## 3.7 Lösung der Zustandsgleichung mittels Laplace-Transformation

Sei ein LZI-System gegeben mit  $\dot{x} = Ax + bu$  und  $y = c^T x$ .

Die Zustandsgleichungen im Bildbereich sind:

$$X(s) = (sI - A)^{-1}bU(s) + (sI - A)^{-1}x(0) \bullet \rightarrow \circ x(t)$$

$$Y(s) = c^T(sI - A)^{-1}bU(s) + c^T(sI - A)^{-1}x(0) \bullet \rightarrow \circ y(t)$$

Die komplexe Übertragungsfunktion  $G(s)$  ist:

$$G(s) = c^T(sI - A)^{-1}b = \frac{c^T(\text{Adjunkte}(sI - A))b}{\det(sI - A)} = \frac{Z(s)}{N(s)}$$

### 3.7.1 Polstellen

Jeder Pol von  $G(s)$  ist Eigenwert von  $A$ . Ein Eigenwert von  $A$  ist genau dann Pol von  $G(s)$ , wenn er sich nicht herauskürzt, d.h. nicht gleichzeitig Nullstelle von  $Z(s)$  ist.

### 3.7.2 Zustandsgleichung mit Störgröße

Seien die Zustandsgleichungen des LZI-Systems gegeben durch  $\dot{x} = Ax + ez + bu$  und  $y = c^T x$ .  
Die Zustandsgleichung im Bildbereich ist:

$$Y(s) = G(s)U(s) + G_z(s)Z(s)$$

und die Störübertragungsfunktion ist

$$G_z(s) = c^T (sI - A)^{-1} e$$

### 3.8 Lösung der Zustandsgleichungen im Zeitbereich

Sei ein LZI-System gegeben mit  $\dot{x} = Ax + bu$  und  $y = c^T x$ .  
Die Lösungen dieser Gleichungen sind:

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} bu(\tau) d\tau + e^{At} x(0)$$

$$y(t) = \int_0^t c^T e^{A(t-\tau)} bu(\tau) d\tau + c^T e^{At} x(0)$$

wobei

$$e^{At} = I + A \frac{t}{1!} + A^2 \frac{t^2}{2!} + \dots$$

#### 3.8.1 Transitionsmatrix

Die Matrix  $e^{At}$  heißt Überführungs- bzw. Transitionsmatrix. Sie hat folgende Eigenschaften.

$$e^{At} \cdot e^{A\tau} = e^{A(t+\tau)}$$

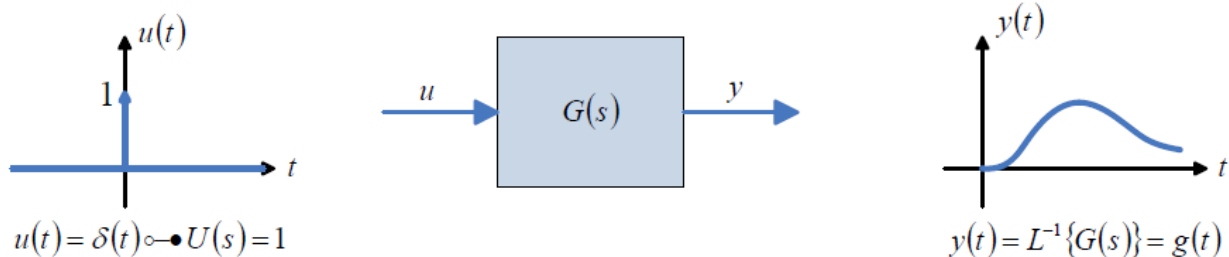
$$e^{-At} \cdot e^{At} = e^0 = I$$

$$\frac{de^{At}}{dt} = Ae^{At} = e^{At} A$$

## 4 Analyse dynamischer Systeme

### 4.1 Systemantworten

#### 4.1.1 Impulsantwort



Sei  $Y(s) = G(s)U(s)$  ein lineares zeitinvariantes System mit der komplexen Übertragungsfunktion  $G(s)$ .  
Die Impulsantwort dieses Systems ist:

$$Y(s) = G(s) \bullet \circ g(t)$$

mit  $u(t) = \delta(t) \bullet \circ U(s) = 1$ ,

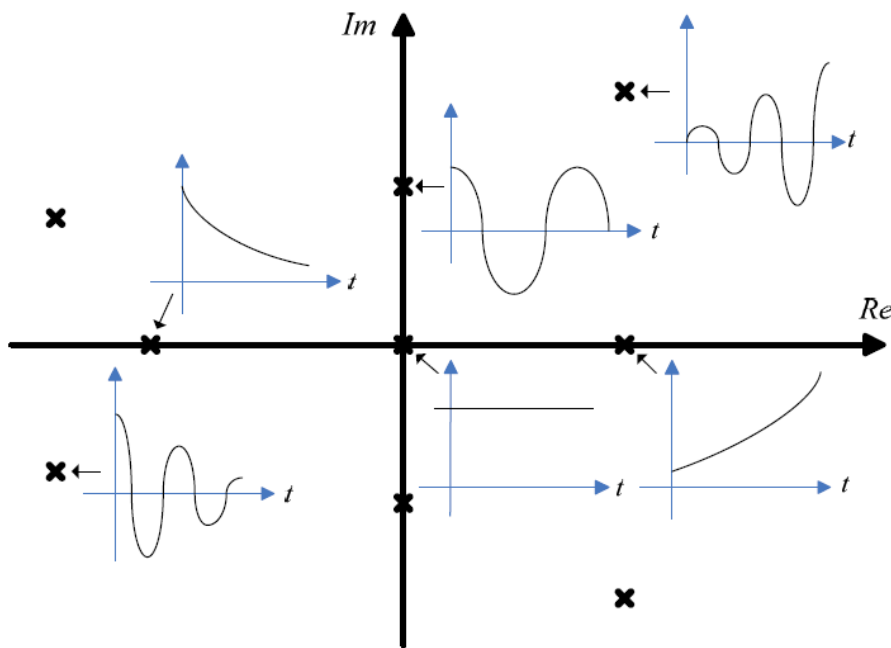


#### 4.1.1.1 Eigenschaften

Sei  $G(s)$  ein R-Glied in der Form:  $G(s) = \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{s-p_i}$  und sei  $p_i$  der zugehörige  $i$ -te Pol.

Für den Charakter des zugehörigen Zeitsignals folgt:

einfacher negativ reeller Pol $p_i$ ,	$p_i \in \mathbb{R}^-$ :	abklingende $e$ -Funktion,	$r_i e^{p_i t}$
einfacher Pol in null,	$p_i = 0$ :	konstanter Anteil,	$r_i$
einfacher positiv reeller Pol $p_i$ ,	$p_i \in \mathbb{R}^+$ :	aufklingende $e$ -Funktion,	$r_i e^{p_i t}$
einfaches, in der linken Halbebene gelegenes konjugiert komplexes Polpaar,	$p_{1/2} = -\delta \pm j\omega \in \mathbb{C}, \Re(p_{1/2}) < 0$ :	abklingende Schwingung,	$e^{-\delta t} \sin(\omega t + \phi)$
einfaches, auf der imaginären Achse gelegenes komplexes Polpaar,	$p_{1/2} = \pm j\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ :	harmonische Dauerschwingung,	$\sin(\omega t + \varphi)$
einfaches, in der rechten Halbebene gelegenes konjugiert komplexes Polpaar,	$p_{1/2} = +\delta \pm j\omega \in \mathbb{C}, \Re(p_{1/2}) > 0$ :	aufklingende Schwingung,	$e^{\delta t} \sin(\omega t + \varphi)$



#### 4.1.1.2 Impulsantwort bei Zustandsdarstellung

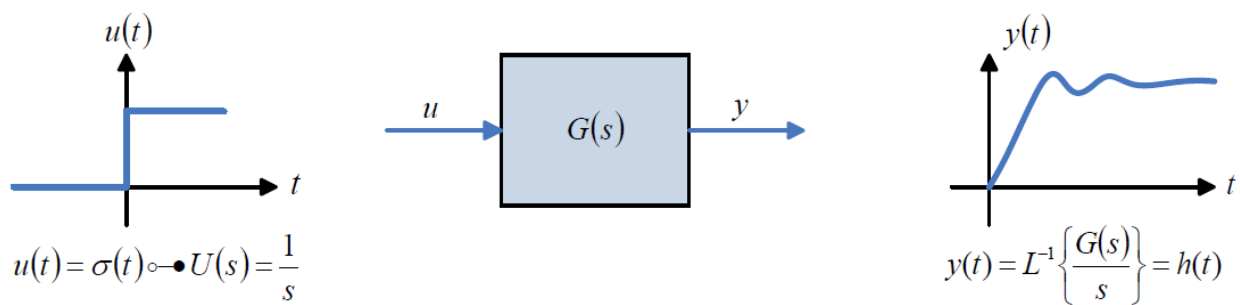
Sei ein LZI-System gegeben mit  $\dot{x} = Ax + bu$  und  $y = c^T x$ .

Die Impulsantwort dieses Systems ist:

$$g(t) = c^T e^{At} b \sigma(t)$$

wobei  $x(0) = 0$

### 4.1.2 Sprungantwort



Sei  $Y(s) = G(s)U(s)$  ein lineares zeitinvariantes System mit der komplexen Übertragungsfunktion  $G(s)$ . Die Sprungantwort dieses Systems ist:

$$Y(s) = \frac{G(s)}{s} = H(s) \bullet \circ h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau$$

mit  $u(t) = \sigma(t) \bullet \circ U(s) = 1/s$ ,

### 4.1.3 Systemantwort mittels Faltung

Sei ein lineares zeitinvariantes System gegeben mit Eingangssignal  $u(t)$ , Ausgangssignal  $y(t)$  und der Übertragungsfunktion  $g(t)$ .

Das Ein-Ausgangsverhalten dieses Systems lässt beschreiben durch:

$$y(t) = g(t) * u(t)$$

wobei  $g(t) * u(t) = \int_0^t g(t - \tau)u(\tau) d\tau$  die Faltungsoperation ist.

### 4.1.4 Anfangswertsatz der Laplace-Transformation

Sei  $y(t)$  eine Zeitfunktion sowie  $Y(s)$  deren Laplace-Transformierte.

Es gilt:

$$y(t \rightarrow 0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sY(s)], \quad \text{sofern } y(t \rightarrow 0^+) \text{ existiert}$$

Für die Sprungantwort gilt:

$$h(t \rightarrow 0^+) = G(\infty)$$

### 4.1.5 Endwertsatz der Laplace-Transformation

Sei  $y(t)$  eine Zeitfunktion sowie  $Y(s)$  deren Laplace-Transformierte.

Es gilt:

$$y(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [sY(s)], \quad \text{sofern } y(t \rightarrow \infty) \text{ existiert}$$

Für die Sprungantwort gilt:

$$h(t \rightarrow \infty) = G(0), \quad \text{sofern alle Pole von } G(s) \text{ links der } j\text{-Achse sind}$$

## 4.2 Stabilität

### 4.2.1 Sprungantwortstabilität

Ein lineares zeitinvariantes System ist sprungantwortstabil, falls

$$h(t \rightarrow \infty) = \int_0^\infty g(\tau) d\tau = c < \infty$$

wobei  $h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau$  die Sprungantwort des Systems ist.

Ein rationales Übertragungsglied (R-Glied) ist genau dann sprungantwortstabil, wenn alle Pole der Übertragungsfunktion  $G(s)$  in der linken komplexen Halbebene liegen.

### 4.2.2 Übertragungsstabilität, BIBO-Stabilität

- Ein dynamisches System heißt übertragungsstabil, wenn es auf jedes beschränkte Eingangssignal mit einem beschränkten Ausgangssignal antwortet.
- Andere Bezeichnungen sind: äußere Stabilität, Ein-/Ausgangsstabilität, BIBO (Bounded Input Bounded Output) Stabilität
- Sprungantwortstabilität  $\iff$  Übertragungsstabilität

### 4.2.3 Asymptotische Stabilität

Sei ein LZI-System gegeben mit  $\dot{x} = Ax + bu$  und  $y = c^T x$

- Das Zustandsraummodell heißt asymptotisch stabil, wenn  $x(t) \rightarrow 0$  für  $u(t) = 0$  und beliebige Anfangswerte  $x(0)$
- Das Zustandsraummodell ist genau dann asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte der Matrix  $A$  in der linken komplexen Halbebene liegen.
- Andere Bezeichnungen sind: Zustandsstabilität, innere Stabilität
- Asymptotische Stabilität  $\implies$  Übertragungsstabilität
- Übertragungsstabilität  $\implies$  Asymptotische Stabilität, falls das Zählerpolynom der Übertragungsfunktion  $G(s)$  keine der Nennernullstellen kürzt und der Nennergrad von  $G(s)$  tatsächlich die Ordnung des Zustandsraummodells widerspiegelt.

#### 4.2.3.1 Asymptotisch stabiles R-Glied

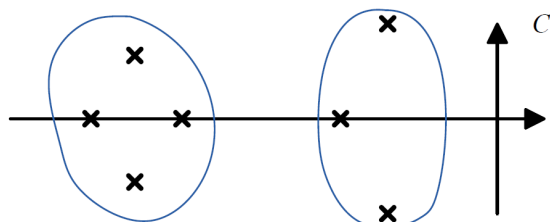
Sei  $G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0}$ ,  $n \geq m$ ,  $a_n \neq 0$  die komplexe Übertragungsfunktion eines R-Gliedes und

sei  $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u$  das zugehörige Zustandsraummodell der Ordnung  $n$ .

Das Zustandsraummodell der Ordnung  $n$  ist genau dann asymptotisch stabil, wenn alle  $n$  Systempole, also die Lösungen der charakteristischen Gleichung  $a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0 = 0$  in der linken komplexen Halbebene liegen.

## 4.3 Pole, Nullstellen und Modellreduktion

### 4.3.1 Dominierende Pole



- nicht dominierende Pole
- schnell abklingende Vorgänge
- dominierende Pole
- langsam abklingende Vorgänge

- näher an der imaginären Achse (links) liegende Pole sind dominante Pole  $\rightarrow$  langsam abklingende  $e$ -Funktion
- weiter von der imaginären Achse entfernt (links) liegende Pole sind nicht-dominante Pole  $\rightarrow$  schnell abklingende  $e$ -Funktion

### 4.3.2 Nullstelleneffekte

#### 4.3.2.1 Blockiereigenschaft einer Nullstelle

Sei  $G(s)$  eine komplexe Übertragungsfunktion mit der Nullstelle  $\eta$ .

Die spezielle Anregung  $u(t) = u_0 e^{\eta t}$  bewirkt in der Systemantwort  $y(t)$  keinen Anteil  $re^{\eta t}$ , d.h. die Nullstelle blockiert.

### 4.3.2.2 Wirkung der Nullstellenlage auf den Verlauf der Sprungantwort

- In der linken Halbebene gelegene Nullstellen
  - links von den dominanten Polen: geringe Wirkung
  - rechts von den dominanten Polen: Überspringen oder sonstigen "Verbeulen" der Sprungantwort
- In der rechten Halbebene gelegene Nullstellen
  - schwieriger zu regeln
  - z.B. Allpassglied:  $G(s) = -\frac{(Ts-1)}{(Ts+1)}$ , Sprungantwort beginnt bei  $-1$  und endet bei  $1$  für alle  $T > 0$

### 4.3.3 Modellreduktion

#### Ziel:

Entferne nicht dominierende Pole aus der komplexen Übertragungsfunktion und gelange so zu einem reduzierten Modell.

#### Verfahren:

Aus  $G(s) = \sum_{v=1}^n \frac{r_v}{s-p_v}$  werden diejenigen Summanden ersatzlos gestrichen, deren Dominanzmaß  $D_v = \left| \frac{r_v}{p_v} \right|$  vergleichsweise klein ist.

Rechts oder auf der imaginären Achse gelegene Pole werden nicht gestrichen.

## 4.4 Approximation des Totzeitgliedes

Sei  $G(s) = e^{-T_t s}$  die komplexe Übertragungsfunktion eines Totzeitgliedes.

Das Totzeitglied kann durch eine rationale Übertragungsfunktion angenähert und ersetzt werden.

Je höher die Ordnung  $n$  ist, desto genauer ist die Approximation.

### 4.4.1 Approximation durch ein PT $n$ -Glied

Wird für die Annäherung ein PT $n$ -Glied angesetzt, so folgt:

$$G(s) \approx \frac{1}{(1 + \frac{T_t}{n}s)^n}$$

### 4.4.2 Padé-Approximation

Wird für die Annäherung eine Padé-Approximation vorgenommen, so wird ein allgemeines rationales Übertragungsglied angesetzt und die Zähler- und Nennerkoeffizienten so gewählt, dass die zugehörige Taylorreihe um  $s = 0$  in möglichst vielen Gliedern mit der Taylorreihe von  $e^{-T_t s}$  übereinstimmt.

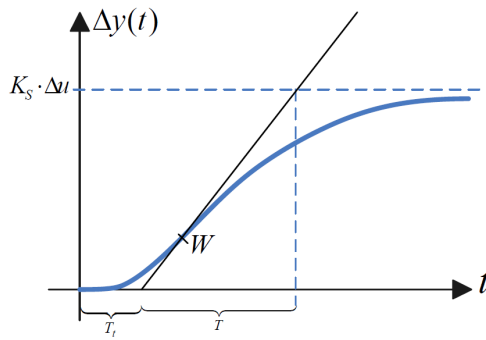
#### Padé-Approximationen des Totzeitgliedes:

Ordnung	Padé-Approximation mit Zählergrad $n$	Padé-Approximation mit Zählergrad $n - 1$
$n = 1$	$\frac{1 - \frac{1}{2}T_t s}{1 + \frac{1}{2}T_t s}$	$\frac{1}{1 + T_t s}$
$n = 2$	$\frac{1 - \frac{1}{2}T_t s + \frac{1}{12}T_t^2 s^2}{1 + \frac{1}{2}T_t s + \frac{1}{12}T_t^2 s^2}$	$\frac{1 - \frac{1}{3}T_t s}{1 + \frac{2}{3}T_t s + \frac{1}{6}T_t^2 s^2}$
$n = 3$	$\frac{1 - \frac{1}{2}T_t s + \frac{1}{10}T_t^2 s^2 - \frac{1}{120}T_t^3 s^3}{1 + \frac{1}{2}T_t s + \frac{1}{10}T_t^2 s^2 + \frac{1}{120}T_t^3 s^3}$	$\frac{1 - \frac{2}{5}T_t s + \frac{1}{20}T_t^2 s^2}{1 + \frac{3}{5}T_t s + \frac{3}{20}T_t^2 s^2 + \frac{1}{60}T_t^3 s^3}$

## 4.5 Modellidentifikation im Zeitbereich

Sei die Sprungantwort eines Systems als  $t - \Delta y(t)$  Diagramm gegeben.

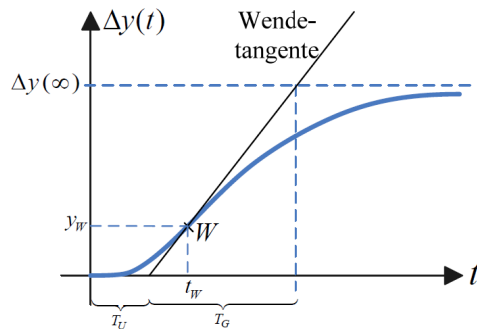
#### Annäherung durch Totzeitglied und PT1-Glied:



Der Verlauf kann durch ein Totzeitglied und ein nachgeschaltetes PT1-Glied angenähert werden.

1. Lege zeichnerisch die Wendetangente an die Kurve und bestimme die Totzeit  $T_t$  und die Zeitkonstante  $T$  des PT1-Gliedes wie im Bild angegeben.
2.  $G(s) = \frac{K_s}{1+Ts} e^{-T_t s}$

**Annäherung durch ein PTn-Glied:**



Der Verlauf kann durch ein PT $n$ -Glied angenähert werden.

1. Lege zeichnerisch die Wendetangente an die Kurve und bestimme die Verzugszeit  $T_U$ , die Ausgleichszeit  $T_G$ , sowie  $t_W$  und  $y_W$  wie im Bild angegeben.
2.  $K = \frac{\Delta y(\infty)}{\Delta u}$ , wobei  $\Delta u$  die Höhe des sprungförmigen Eingangssignal bezeichnet
3. Die Ordnung  $n$  wird aus der Tabelle abgelesen, anhand von  $\frac{T_U}{T_G}$  oder  $\frac{y_W}{\Delta y(\infty)}$
4. Mithilfe der Werte  $T_U, T_G, t_W$  und  $n$  und der Tabelle bestimmt man drei Werte für  $T$ . Der Mittelwert wird schließlich verwendet.
5.  $G(s) = \frac{K}{(1+Ts)^n}$

Tabelle:

$n$	$\frac{T_U}{T_G}$	$\frac{y_W}{\Delta y(\infty)}$	$\frac{t_W}{T}$	$\frac{T_G}{T}$	$\frac{T_U}{T}$
1	0	0	0	1	0
2	0,104	0,264	1	2,718	0,282
3	0,218	0,323	2	3,695	0,805
4	0,319	0,353	3	4,463	1,425
5	0,410	0,371	4	5,119	2,100
6	0,493	0,384	5	5,699	2,811
7	0,570	0,394	6	6,226	3,549
8	0,642	0,401	7	6,711	4,307
9	0,709	0,407	8	7,164	5,081
10	0,773	0,413	9	7,590	5,869

## 4.6 Frequenzgang

### 4.6.1 Systemantwort auf harmonische Anregung

Sei  $Y(s) = G(s)U(s)$  die beschreibende Gleichung eines R-Gliedes, welches mit  $u(t) = \sin(\omega t)$  angeregt wird. Die Antwort dieses R-Gliedes ist:

$$y(t) = y_D(t) + y_G(t)$$

mit dem Dauerschwingungsanteil

$$y_D(t) = |G(j\omega)| \sin(\omega t + \angle G(j\omega))$$

Ist das System  $G(s)$  stabil, so gilt für große  $t$ :

$$y(t) = y_D(t)$$

**Größen:**

Frequenzgang des Systems:  $G(j\omega)$

Betrag des Frequenzgangs:  $|G(j\omega)|$

Phase des Frequenzgangs:  $\angle G(j\omega) = \arctan(-\omega T)$

wobei

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\angle G(j\omega)}$$

### 4.6.2 Frequenzgangortskurve und Bode-Diagramm

**Frequenzgangortskurve:**

Die Frequenzgangortskurve ist die Ortskurve  $G(j\omega)$  für  $0 \leq \omega < \infty$  in der komplexen Zahlenebene.

Die Pfeilspitze zeigt in Richtung wachsender Frequenz  $\omega$ .

**Amplitudengang:**

Der Amplitudengang/Betragskennlinie ist  $|G(j\omega)|$  für  $0 < \omega < \infty$ .

Die  $|G(j\omega)|$ -Achse wird in Dezibel (dB) skaliert, mit  $|G|_{dB} = 20 \log |G|$ .

**Phasengang:**

Der Phasengang/Phasenkennlinie ist  $\angle G(j\omega)$  für  $0 < \omega < \infty$ .

Die  $\angle G(j\omega)$ -Achse wird in Grad angegeben; die  $\omega$ -Achse wird logarithmisch aufgetragen.

**Bode-Diagramm:**

Betrags- und Phasenkennlinie zusammen heißen Bode-Diagramm bzw. Frequenzkennlinien des Systems  $G(s)$ .

### 4.6.3 Konstruktion von Bode-Diagramm

Sei die komplexe Übertragungsfunktion eines R-Gliedes als Produkt einfacher Glieder gegeben, d.h.:

$$G(s) = K \cdot \frac{(s - q_1) \cdot \dots \cdot (s - q_m)}{(s - p_1) \cdot \dots \cdot (s - p_n)} = K \cdot (s - q_1) \cdot \dots \cdot (s - q_m) \cdot \frac{1}{s - p_1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{s - p_n} = K \cdot G_1 \cdot \dots \cdot G_m \cdot G_{m+1} \cdot \dots \cdot G_{n+m}$$

Die Betragskennlinie ist:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log |G_1| + \dots + 20 \log |G_{n+m}|$$

Die Phasenkennlinie ist:

$$\angle G(j\omega) = \angle G_1 + \dots + \angle G_{n+m}$$

## 5 Mathematische Grundlagen

### 5.1 Komplexe Zahlen

#### 5.1.1 Definition

Eine komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C}$  ist definiert als:

$$z = x + jy$$

wobei  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $j = \sqrt{-1}$  ist die imaginäre Einheit.

Der Real- und Imaginärteil ist definiert als:

$$\Re(z) = x, \quad \Im(z) = y$$

#### 5.1.2 Konjugiert komplexe Zahl

Sei  $z \in \mathbb{C}$ .

Die zu  $z$  konjugiert komplexe Zahl  $z^*$  ist:

$$z^* = x - jy$$

#### 5.1.3 Betrag einer komplexen Zahl

Sei  $z \in \mathbb{C}$ .

Der Betrag von  $z$  ist:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

#### 5.1.4 Euler-Formel

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$$

#### 5.1.5 Polarkoordinaten

Sei  $z \in \mathbb{C}$ .

$z$  angegeben in Polarkoordinaten ist definiert als:

$$z = |z|(\cos \varphi + j \sin \varphi) = |z|e^{j\varphi}$$

wobei

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & \text{für } x > 0 \\ \pi + \arctan(\frac{y}{x}) & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

#### 5.1.6 Addition, Multiplikation

Sei  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .

Es folgt:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

## 5.2 Partialbruchzerlegung

$$\text{Sei } R(s) = \frac{b_n s^n + \dots + b_1 s + b_0}{a_m s^m + \dots + a_1 s + a_0}$$

1. Finde alle Polstellen  $p_i$  von  $R(s)$

2. Setze Partialbrüche an:

$$R(s) = G_1 + \dots + G_m = \frac{Z_1}{N_1} + \dots + \frac{Z_m}{N_m}, \quad G_i = \frac{Z_i}{N_i}, \text{ wobei}$$

- $G_i = \frac{r_i}{s - p_i}$ , für jeden einfachen reellen Pol  $p_i$

- $G_i + G_{i+1} = \frac{r_i s + r_{i+1}}{(s - p_i)(s - p_{i+1})}$ , für jedes konjugiert komplexes Polpaar  $p_i, p_{i+1} = p_i^*$



- $G_i + \dots + G_k = \frac{r_i}{s-p_i} + \frac{r_{i+1}}{(s-p_i)^2} + \dots + \frac{r_{i+k-1}}{(s-p_i)^k}$ , für jeden k-fachen reellen Pol  $p_i = p_{i+1} = \dots = p_{i+k-1}$

3. Bringe alle Brüche auf denselben Nenner und addiere sie:

$$R(s) = \frac{Z_1}{N_1} + \dots + \frac{Z_m}{N_m} = \frac{Z_1(N_2 \dots N_m)}{N_1 \dots N_m} + \dots + \frac{Z_m(N_1 \dots N_{m-1})}{N_1 \dots N_m} = \frac{Z_1(N_2 \dots N_m) + \dots + Z_m(N_1 \dots N_{m-1})}{N_1 \dots N_m}$$

4. Multipliziere den Zähler aus und forme um zu:

$$f(x) = \frac{(c_{1,m}r_1 + \dots + c_{m,m}r_m)s^m + \dots + (c_{1,0}r_1 + \dots + c_{m,0}r_m)s^0}{N_1 \dots N_m}$$

5. Löse folgendes lineare Gleichungssystem:

$$(c_{1,m}r_1 + \dots + c_{m,m}r_m) = b_m$$

$$\vdots$$

$$(c_{1,0}r_1 + \dots + c_{m,0}r_m) = b_0$$

6. Setze  $r_1$  bis  $r_m$  in die Gleichung aus Schritt 2 ein ( $R(s) = G_1 + \dots + G_m$ )

### 5.2.1 Beispiel

$$\text{Sei } R(s) = \frac{5s-1}{s^2-1}$$

1. Finde alle Polstellen  $p_i$  von  $R(s)$ :

$$p_1 = -1 \text{ und } p_2 = 1$$

2. Setze Partialbrüche an:

$$\Rightarrow R(s) = \frac{r_1}{s-1} + \frac{r_2}{s+1}$$

3. Bringe alle Brüche auf denselben Nenner und addiere sie:

$$R(s) = \frac{r_1(s+1)}{s^2-1} + \frac{r_2(s-1)}{s^2-1} = \frac{r_1(s+1) + r_2(s-1)}{s^2-1}$$

4. Multipliziere den Zähler aus und forme um:

$$R(s) = \frac{(r_1+r_2)s + (r_1-r_2)}{s^2-1}$$

5. Löse folgendes lineare Gleichungssystem:

$$r_1 + r_2 = 5$$

$$r_1 - r_2 = -1$$

$$\Rightarrow r_1 = 2 \wedge r_2 = 3$$

6. Setze  $r_1$  und  $r_2$  in die Gleichung aus Schritt 2 ein ( $R(s) = \frac{r_1}{s-1} + \frac{r_2}{s+1}$ ):

$$R(s) = \frac{2}{s-1} + \frac{3}{s+1}$$

## 5.3 Matrizen

### 5.3.1 Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}, i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}$$

### 5.3.2 Addition

Seien  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  zwei Matrizen.

Die Summe dieser Matrizen ist definiert als:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1m} + b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \dots & a_{nm} + b_{nm} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

### 5.3.3 Multiplikation mit Skalar

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  eine Matrix und  $\alpha \in \mathbb{R}$  ein Skalar.  
Das Produkt  $\alpha A$  ist definiert als:

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \dots & \alpha \cdot a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha \cdot a_{n1} & \dots & \alpha \cdot a_{nm} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

### 5.3.4 Matrizenmultiplikation

Seien  $A \in \mathbb{R}^{l \times m}$  und  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  zwei Matrizen.  
Das Produkt dieser Matrizen ist definiert als:

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{l1} & \dots & c_{ln} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{l \times n}, \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot b_{jk} \in \mathbb{R}, i \in \{1, \dots, l\}, k \in \{1, \dots, n\}$$

Es gelten folgende Gesetze:

- Assoziativgesetz:  $(AB)C = A(BC)$
- Distributivgesetz:  $A(B + C) = AB + AC$

Es gilt kein Kommutativgesetz:  $AB \neq BA$

### 5.3.5 Transponierte

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  eine Matrix.  
Die Transponierte von A ist definiert als:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

### 5.3.6 Einheitsmatrix

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .  
Es gilt:

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

### 5.3.7 Skalarprodukt

Sei  $v, w \in \mathbb{R}^n$   
Das Skalarprodukt dieser Vektoren ist:

$$\langle v, w \rangle = v^T \cdot w = v_1 w_1 + \dots + v_n w_n$$

### 5.3.8 Determinante

**Determinante einer  $2 \times 2$  Matrix** Sei  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

Die Determinante dieser Matrix ist definiert als:

$$\det(A) = |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

**Determinante einer  $3 \times 3$  Matrix** Sei  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .

Die Determinante dieser Matrix ist definiert als:

$$\det(A) = |A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

### Eigenschaften

- $\det(A) \neq 0 \implies$  Spaltenvektoren von  $A$  sind linear unabhängig
- $\det(A) \neq 0 \implies$  Inverse von  $A$  existiert
- $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

### 5.3.9 Inverse

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .

Die Inverse von  $A$  existiert, falls  $\det(A) \neq 0$ .

Sie ist definiert als:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{ad}A$$

Es gilt:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

### 5.3.10 Adjunkte

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Die Adjunkte von  $A$  ist definiert als:

$$\text{ad}A = \begin{bmatrix} a_{11}^* & \dots & a_{1n}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^* & \dots & a_{nn}^* \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad a_{ik}^* = (-1)^{i+k} \det A_{ki}, \quad i, k \in \{1, \dots, n\}$$

### 5.3.11 Eigenvektoren und Eigenwerte

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und

sei  $Av = v\lambda$ .

Dann ist  $v \in \mathbb{R}^n$  ein Eigenvektor von  $A$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  der dazugehörige Eigenwert von  $A$ .

Die Eigenwerte  $\lambda$  werden durch Lösen des charakteristischen Polynoms bestimmt:

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

### 5.3.12 Matrix-Exponentialfunktion

Die Matrix-Exponentialfunktion ist definiert als:

$$e^{At} = I + A\frac{t}{1!} + A^2\frac{t^2}{2!} + \dots$$

### Eigenschaften:

- $e^{At_1} \cdot e^{At_2} = e^{A(t_1+t_2)}$
- $e^{At} \cdot e^{-At} = I$
- $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A$

### 5.3.13 Zeitliche Ableitung eines Matrizenprodukts

Seien  $P, Q$  zwei Matrizen.

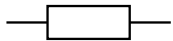
Es gilt:

$$\frac{d}{dt}(PQ) = P\dot{Q} + \dot{P}Q$$

## 6 Elektrotechnische Grundlagen

### 6.1 Widerstand

Schaltzeichen:

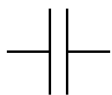


Formel:

$$U = R \cdot I$$

### 6.2 Kondensator

Schaltzeichen:



Formel:

$$U = \frac{1}{C} \int I \, dt \iff \dot{U} = \frac{I}{C}$$

### 6.3 Spule

Schaltzeichen:



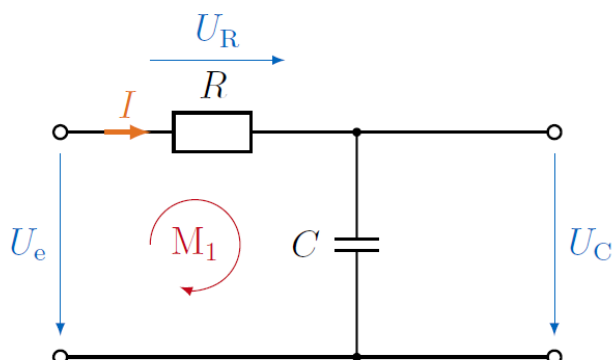
Formel:

$$U = L \cdot \dot{I}$$

### 6.4 Kirchhoff'sches Spannungsgesetz

In einem geschlossenen Stromkreis (Masche) ist die Summe aller Spannungen gleich null

Beispiel:



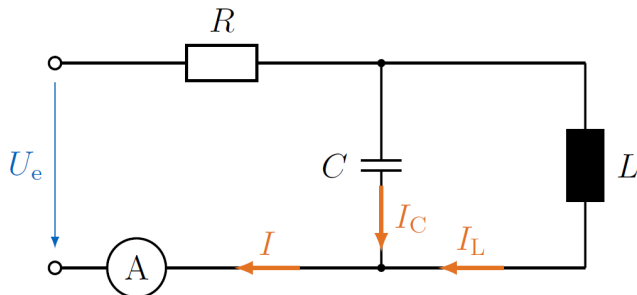
Für Masche  $M_1$  gilt:

$$U_R + U_C - U_e = 0$$

## 6.5 Kirchhoff'sches Stromgesetz

In jedem Knotenpunkt ist die Summe aller Ströme gleich null.

**Beispiel:**



$$I_C + I_L - I = 0$$

## 7 Physikalische Grundlagen

### 7.1 Kräfte

**Kräftegleichgewicht:**

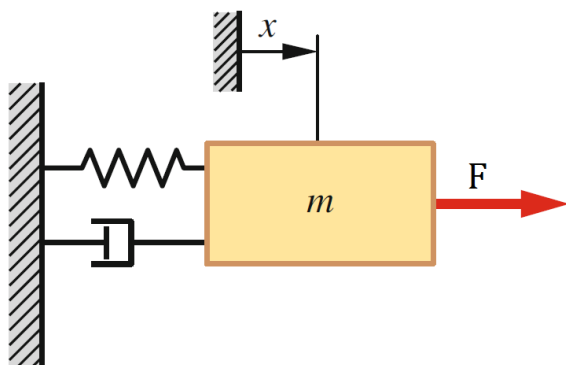
Die Summe aller Kräfte, die an einem Körper angreifen, addieren sich zu null.

$$\sum F_i = 0$$

**Newtonsche Gesetze**

1. Wirkt auf einen Körper keine Kraft oder befindet er sich im Kräftegleichgewicht, so bleibt er in Ruhe oder er bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig weiter.
2.  $F = m \cdot a$  ( $m$ : Masse des Körpers,  $a$ : Beschleunigung, die der Körper erfährt)
3.  $F_1 = -F_2$  (Kraft gleich Gegenkraft)

**Masse-Feder-Dämpfer System**



$m$ : Masse des Körpers,  $d$ : Dämpferkonstante,  $k$ : Federkonstante,  $F$ : Stellkraft

$$F = m \cdot \ddot{x} + d\dot{x} + kx$$

## 7.2 Drehmomente

### Momentengleichgewicht:

Die Summe aller Momente um jeden (einen) beliebigen Punkt eines Körpers addieren sich zu null.

$$\sum M_i = 0$$

### Berechnung in Abhängigkeit von F:

$r$ : Abstand der Wirkungslinie der Kraft von der Drehachse,  $F$ : wirkende Kraft

$$M = r \times F$$

## 7.3 Drehimpuls:

$J$ : Trägheitsmoment,  $\omega$ : Winkelgeschwindigkeit

$$L = J \cdot \omega$$

# 8 Tipps

## 8.1 Zeichnen eines Blockschaltbildes

- Verzweigungen von Signalen werden durch einen schwarzen Punkt markiert, um die Verwechslungsgefahr mit Kreuzungen ohne Kontakt zu vermeiden.
- Signale werden immer explizit mit Summationsgliedern aufaddiert.
- Proportionalitätsfaktoren von 1 können weggelassen werden.
- Das Vorzeichen beim Summationsglied steht immer rechts vom Pfeil. Die Pluszeichen müssen nicht explizit angegeben werden.
- Das Vorzeichen einer Rückführung steht am Soll-/Istwert-Vergleich

### Allgemeine Vorgehensweise:

1. Differentialgleichung nach höchster Ableitung auflösen
2.  $n$  I-Glieder mit zugehörigen Anfangswerten nebeneinander zeichnen, verbinden und beschriften
3. Summationsglieder für die höchste Ableitung bilden
4. Jeden Term der rechten Seite aus bestehenden Signalen bilden

## Anmerkungen

Dies ist eine Zusammenfassung der Vorlesung Regelungstechnik an der Technischen Universität München. Gehalten wurde diese Vorlesung durch Lohmann B. im Sommersemester 2019. Ersteller dieser Zusammenfassung ist Gaida B. Alle Angaben sind ohne Gewähr.

## Literaturverzeichnis

Werner Skolaut. *Maschinenbau. Ein Lehrbuch für das ganze Bachelor-Studium*. Springer Vieweg. Heidelberg, 2018, S. 1271 - 1387