

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Begriff der Regelung</b>	<b>4</b>
1.1	Dynamisches System	4
1.2	Vorgeschaltete Steuereinrichtung	4
1.3	Regelung	5
1.4	Zwei-Freiheitsgrade-Regelung (Steuerung + Regelung)	5
1.4.1	Störgrößenaufschaltung	6
<b>2</b>	<b>Modelle</b>	<b>8</b>
2.1	Zustandsdarstellung	8
2.1.1	Zustandsdarstellung bei Linearkombinationen	8
2.2	Blockschaltbild	9
2.3	Elementare Übertragungsglieder	9
2.3.1	Sprungfunktion, Impulsfunktion	11
2.4	Lineare zeitinvariante Modelle (LZI-Modelle)	11
2.4.1	Regelungsnormalform	12
2.4.2	Regelungsnormalform mit Ableitungen von $u$	12
2.4.3	Beobachtungsnormalform	12
2.5	Linearisierung im Arbeitspunkt	12
2.5.1	Ein Eingabeparameter	12
2.5.2	Mehere Eingabeparameter	13
2.5.3	Regelungsnormalform	13
<b>3</b>	<b>Laplace-Transformation</b>	<b>14</b>
3.1	Definition	14
3.2	Rücktransformation	14
3.3	Korrespondenztabelle	15
3.4	Eigenschaften der Laplace-Transformation	15
3.5	Lösung linearer zeitinvarianter Differentialgleichungen mittels Laplace-Transformation	16
3.5.1	Darstellungsformen von $G(s)$	16
3.5.2	Komplexe Übertragungsfunktion	16
3.6	Sprungantworten des PT2-Gliedes	16
3.7	Lösung der Zustandsgleichung mittels Laplace-Transformation	16
3.7.1	Polstellen	17
3.7.2	Zustandsgleichung mit Störgröße	17
3.8	Lösung der Zustandsgleichungen im Zeitbereich	17
3.8.1	Transitionsmatrix	17
<b>4</b>	<b>Analyse dynamischer Systeme</b>	<b>17</b>
4.1	Systemantworten	17
4.1.1	Impulsantwort	17
4.1.2	Sprungantwort	19
4.1.3	Systemantwort mittels Faltung	19
4.1.4	Anfangswertsatz der Laplace-Transformation	19
4.1.5	Endwertsatz der Laplace-Transformation	19
4.2	Stabilität	19
4.2.1	Sprungantwortstabilität	19
4.2.2	Übertragungsstabilität, BIBO-Stabilität	20
4.2.3	Asymptotische Stabilität	20
4.3	Pole, Nullstellen und Modellreduktion	20
4.3.1	Dominierende Pole	20
4.3.2	Nullstelleneffekte	20
4.3.3	Modellreduktion	21
4.4	Approximation des Totzeitgliedes	21
4.4.1	Approximation durch ein PTn-Glied	21
4.4.2	Padé-Approximation	21
4.5	Modellidentifikation im Zeitbereich	21
4.6	Frequenzgang	23
4.6.1	Systemantwort auf harmonische Anregung	23

4.6.2	Frequenzgangortskurve und Bode-Diagramm . . . . .	23
4.6.3	Konstruktion von Bode-Diagramm . . . . .	24
4.6.4	Graphische Konstruktion von Bode-Diagramm . . . . .	24
4.6.5	Graphische Konstruktion von Bode-Diagramm (Kurzform) . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Regelkreis und Stabilität</b>	<b>28</b>
5.1	Umformung von Blockschaltbildern . . . . .	28
5.2	Standardregelkreis . . . . .	31
5.2.1	Eigenschaften des Standardregelkreises . . . . .	31
5.3	Stabilität des Standardregelkreises . . . . .	31
5.3.1	Übertragungsstabilität des Standardregelkreises . . . . .	31
5.3.2	Asymptotische Stabilität des Standardregelkreises . . . . .	32
5.3.3	Asymptotische Stabilität beim Reglerentwurf . . . . .	32
5.4	Nyquist-Kriterium . . . . .	32
5.4.1	Einfaches Nyquist-Kriterium . . . . .	32
5.4.2	Allgemeines Nyquist-Kriterium . . . . .	32
5.4.3	Vereinfachtes Nyquist-Kriterium im Bode-Diagramm . . . . .	33
5.5	Robustheit der Stabilität . . . . .	34
<b>6</b>	<b>Reglerentwurf</b>	<b>34</b>
6.1	Anforderungen an das Regelverhalten . . . . .	34
6.2	Dynamik, Robustheit der Stabilität und Grenzen der Regelgüte . . . . .	34
6.2.1	Bode-Theorem . . . . .	35
6.3	Stationäres Verhalten . . . . .	35
6.4	Stationäre Genauigkeit . . . . .	35
6.4.1	Stationäre Genauigkeit bezüglich des Führungsverhalten . . . . .	35
6.4.2	Stationäre Genauigkeit bezüglich des Störverhaltens . . . . .	35
6.5	Grundtypen linearer Regler . . . . .	36
6.5.1	P-Regler . . . . .	36
6.5.2	I-Regler . . . . .	36
6.5.3	PI-Regler . . . . .	37
6.5.4	Idealer PD-Regler . . . . .	38
6.5.5	Realer PD-Regler . . . . .	38
6.5.6	Idealer PID-Regler . . . . .	39
6.5.7	Realer PID-Regler . . . . .	39
6.5.8	Einstellregeln nach Ziegler und Nichols . . . . .	40
6.6	Regelungsentwurf im Bodediagramm . . . . .	40
6.6.1	Phasenanstiebiges Glied (Lead-Glied) . . . . .	40
6.6.2	Phasenabsenkendes Glied (Lag-Glied) . . . . .	40
6.7	Kompensationsregler . . . . .	41
6.7.1	Vorgabe der Führungsübertragungsfunktion $T(s)$ . . . . .	41
6.7.2	Vorgabe der Störübertragungsfunktion $S(s)$ . . . . .	42
6.7.3	Grenzen der Kompensationsregelung . . . . .	42
6.8	Gütekriterien und optimale lineare Regelung . . . . .	42
6.8.1	Kennwerte der Sprungantwort . . . . .	42
6.8.2	Integalkriterien im Zeitbereich . . . . .	43
<b>7</b>	<b>Erweiterte Regelstrukturen und Zustandsregelung</b>	<b>43</b>
7.1	Kompensation von Aktor- und Sensorkennlinien . . . . .	43
7.2	Zwei-Freiheitsgrade-Regelung . . . . .	43
7.3	Störgrößenaufschaltung . . . . .	44
7.4	Kaskadenregelung . . . . .	45
7.5	Kaskade aus Zwei-Freiheitsgrade-Regelung . . . . .	45
7.6	Zustandsregelung . . . . .	46
7.6.1	Konstante Zustandsrückführung und Vorsteuerung . . . . .	46
7.6.2	Zustandsbeobachter . . . . .	48
7.6.3	Zustandsrückführung mit Beobachter . . . . .	49
7.6.4	Mehrgrößenregelung im Zustandsraum . . . . .	49
7.7	Nichtlineare Zustandsregelung durch Ein-/Ausgangslinearisierung . . . . .	50

<b>8 Digitale Realisierung</b>	<b>51</b>
8.1 Tustin-Transformation . . . . .	52
8.2 Glieder und Regler . . . . .	52
8.2.1 Digitales I-Glied . . . . .	52
8.2.2 Diskreter PD-Regler . . . . .	52
8.2.3 Diskreter PID-Regler . . . . .	52
8.3 Zeitdiskrete Zustandsdarstellung . . . . .	52
<b>A Mathematische Grundlagen</b>	<b>53</b>
A.1 Komplexe Zahlen . . . . .	53
A.1.1 Definition . . . . .	53
A.1.2 Konjugiert komplexe Zahl . . . . .	53
A.1.3 Betrag einer komplexen Zahl . . . . .	53
A.1.4 Euler-Formel . . . . .	53
A.1.5 Polarkoordinaten . . . . .	53
A.1.6 Addition, Multiplikation . . . . .	53
A.2 Partialbruchzerlegung . . . . .	53
A.2.1 Partialbruchzerlegung mit Koeffizientenvergleich . . . . .	53
A.2.2 Heavisidescher Zuhalttemethode . . . . .	54
A.3 Matrizen . . . . .	55
A.3.1 Matrix . . . . .	55
A.3.2 Addition . . . . .	55
A.3.3 Multiplikation mit Skalar . . . . .	55
A.3.4 Matrizenmultiplikation . . . . .	55
A.3.5 Transponierte . . . . .	55
A.3.6 Einheitsmatrix . . . . .	56
A.3.7 Skalarprodukt . . . . .	56
A.3.8 Determinante . . . . .	56
A.3.9 Inverse . . . . .	56
A.3.10 Adjunkte . . . . .	56
A.3.11 Eigenvektoren und Eigenwerte . . . . .	57
A.3.12 Matrix-Exponentialfunktion . . . . .	57
A.3.13 Zeitliche Ableitung eines Matrizenprodukts . . . . .	57
<b>B Elektrotechnische Grundlagen</b>	<b>57</b>
B.1 Widerstand . . . . .	57
B.2 Kondensator . . . . .	57
B.3 Spule . . . . .	58
B.4 Kirchhoff'sches Spannungsgesetz . . . . .	58
B.5 Kirchhoff'sches Stromgesetz . . . . .	58
<b>C Physikalische Grundlagen</b>	<b>58</b>
C.1 Kraft . . . . .	58
C.2 Drehmoment . . . . .	59
C.3 Drehimpuls: . . . . .	59
<b>D Tipps</b>	<b>59</b>
D.1 Zeichnen eines Blockschaltbildes . . . . .	59
D.2 Winkeländerung aus Nyquist-Ortskurve bestimmen . . . . .	60

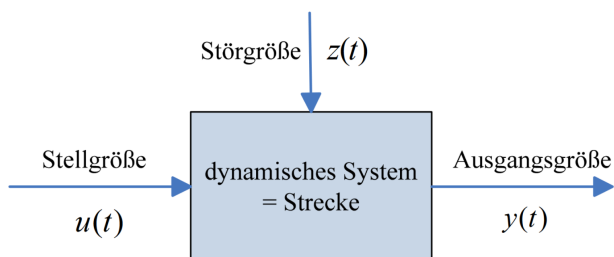
# 1 Begriff der Regelung

## 1.1 Dynamisches System

**Signale und Blöcke:**

Bezeichnung	Var.	Beschreibung
Ausgangsgröße	$y(t)$	Ausgangsgröße, der ein gewünschtes Verhalten aufgeprägt werden soll.
Stellgröße	$u(t)$	Eingangsgröße, durch die das System gezielt beeinflusst werden kann.
Störgröße	$z(t)$	Eingangsgröße, die störend und mit zumeist nur ungenau oder gar nicht bekannten Zeitverlauf auf das System wirkt.

**Blockschaltbild**



## 1.2 Vorgeschaltete Steuereinrichtung

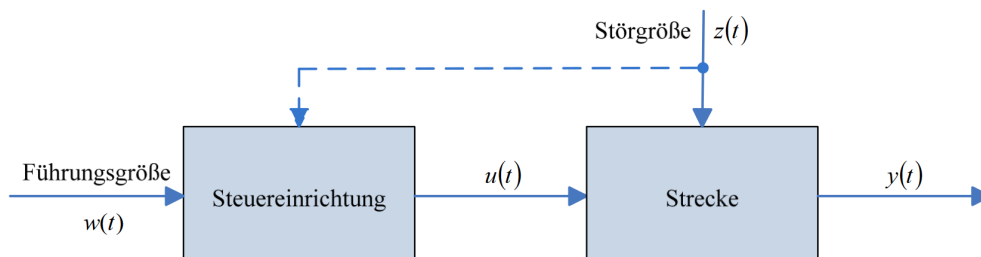
**Ziel**

- Übertragungsglied, das den Stellgrößenverlauf  $u(t)$  derart generiert, dass  $y(t)$  einem vorgegebenen Sollverlauf  $w(t)$  folgt.

**Signale und Blöcke:**

Bezeichnung	Var.	Beschreibung
Führungsgröße	$w(t)$	Von außen vorgegebener Soll-Verlauf für die Regelgröße $y(t)$
Ausgangsgröße	$y(t)$	Ausgangsgröße, der ein gewünschtes Verhalten aufgeprägt werden soll
Stellgröße	$u(t)$	Eingangsgröße, durch die das System gezielt beeinflusst werden kann
Störgröße	$z(t)$	Eingangsgröße, die störend und mit zumeist nur ungenau oder gar nicht bekannten Zeitverlauf auf das System wirkt

**Blockschaltbild**



### 1.3 Regelung

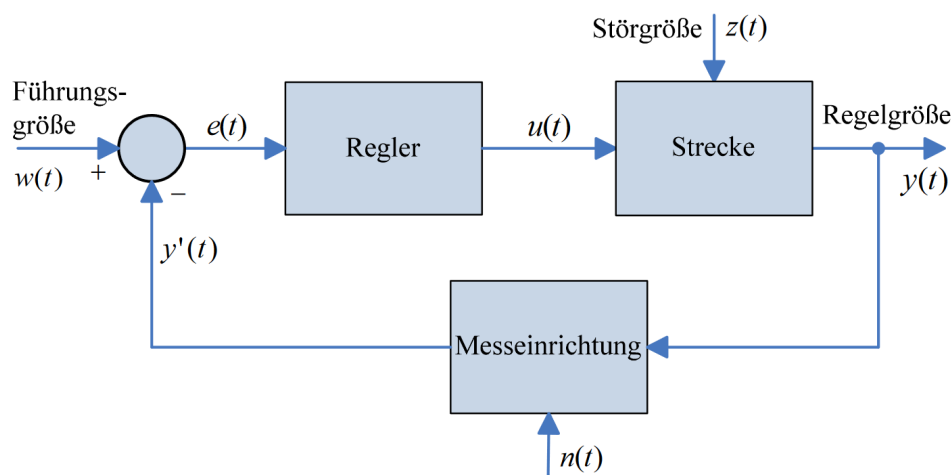
#### Ziel:

- Minderung des Einflusses von (nicht-messbaren) Störungen
- Minderung des Einflusses von Ungenauigkeiten des Streckenmodells
- Verbesserung des Folgeverhaltens

#### Signale und Blöcke:

Bezeichnung	Var.	Beschreibung
Führungsgröße	$w(t)$	Von außen vorgegebener Soll-Verlauf für die Regelgröße $y(t)$
Regelgröße	$y(t)$	Ausgangsgröße, der ein gewünschtes Verhalten aufgeprägt werden soll
Regelabweichung	$e(t)$	Entsteht durch Vergleich der Führungsgröße mit der gemessenen Regelgröße und soll klein gehalten werden ( $e(t) = w(t) - y'(t)$ )
Stellgröße	$u(t)$	Eingangsgröße, durch die das System gezielt beeinflusst werden kann
Störgröße	$z(t)$	Eingangsgröße, die störend und mit zumeist nur ungenau oder gar nicht bekannten Zeitverlauf auf das System wirkt
Messrauschen	$n(t)$	
Regler		Übertragungsglied, das aus der Regelabweichung das Stellsignal $u$ generiert, sodass $y$ möglichst $w$ folgt
Messglied/Messeinrichtung		Erfasst die Regelgröße $y$ mittels eines Sensors und erzeugt ein zu $y(t)$ möglichst äquivalentes Signal $y'(t)$

#### Blockschaltbild



### 1.4 Zwei-Freiheitsgrade-Regelung (Steuerung + Regelung)

#### Ziel:

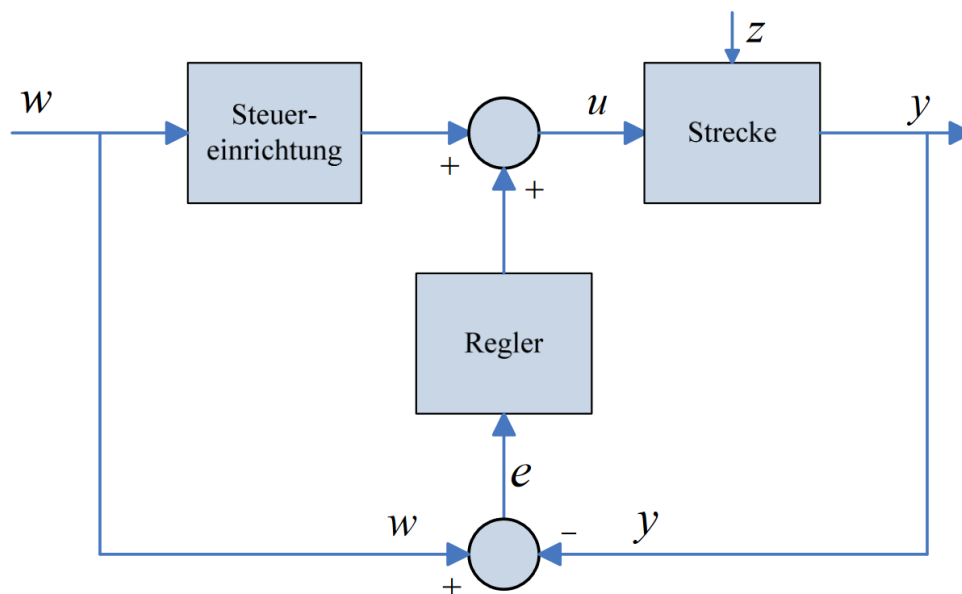
- Kombination der Vorteile der Regelschleife (see section 1.3) und der Vorteile der Steuerung (see section 1.2)

#### Eigenschaften:

- Treten keine Störungen  $z$  auf und gelingt es der Steuereinrichtung  $y$  exakt dem Verlauf  $w(t)$  folgen zu lassen, dann treten keine Regelabweichungen  $e$  auf und der Regler bleibt inaktiv.
- Tritt hingegen eine Störung auf, während  $w$  über längere Zeit null oder konstant ist, so wird die Störung vom Regler bekämpft und die Steuereinrichtung bleibt davon unberührt.

**Signale und Blöcke:**

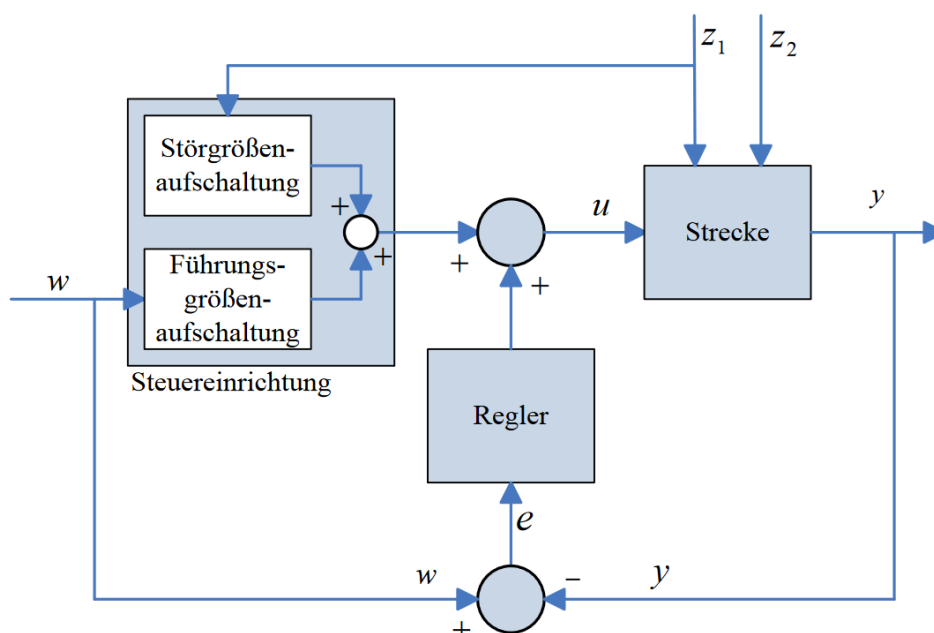
Bezeichnung	Var.	Beschreibung
Führungsgröße	$w(t)$	Von außen vorgegebener Soll-Verlauf für die Regelgröße $y(t)$
Regelgröße	$y(t)$	Ausgangsgröße, der ein gewünschtes Verhalten aufgeprägt werden soll
Regelabweichung	$e(t)$	Entsteht durch Vergleich der Führungsgröße mit der gemessenen Regelgröße und soll klein gehalten werden ( $e(t) = w(t) - y'(t)$ )
Stellgröße	$u(t)$	Eingangsgröße, durch die das System gezielt beeinflusst werden kann
Störgröße	$z(t)$	Eingangsgröße, die störend und mit zumeist nur ungenau oder gar nicht bekannten Zeitverlauf auf das System wirkt
Regler		Übertragungsglied, das aus der Regelabweichung das Stellsignal $u$ generiert, sodass $y$ möglichst $w$ folgt
Steuereinrichtung		Übertragungsglied, das den Stellgrößenverlauf $u(t)$ derart generiert, dass $y(t)$ einem vorgegebenen Sollverlauf $w(t)$ folgt.

**Blockschaltbild****1.4.1 Störgrößenaufschaltung****Ziel:**

- Mindern des Einflusses einer messbaren Störgröße auf den Ausgang

**Signale und Blöcke:**

Bezeichnung	Var.	Beschreibung
Führungsgröße	$w(t)$	Von außen vorgegebener Soll-Verlauf für die Regelgröße $y(t)$
Regelgröße	$y(t)$	Ausgangsgröße, der ein gewünschtes Verhalten aufgeprägt werden soll
Regelabweichung	$e(t)$	Entsteht durch Vergleich der Führungsgröße mit der gemessenen Regelgröße und soll klein gehalten werden ( $e(t) = w(t) - y'(t)$ )
Stellgröße	$u(t)$	Eingangsgröße, durch die das System gezielt beeinflusst werden kann
Störgröße	$z_1(t)$	Messbare Eingangsgröße, die störend auf das System wirkt
Störgröße	$z_2(t)$	Nicht-Messbare Eingangsgröße, die störend auf das System wirkt
Regler		Übertragungsglied, das aus der Regelabweichung das Stellsignal $u$ generiert, sodass $y$ möglichst $w$ folgt
Steuereinrichtung		Übertragungsglied, das den Stellgrößenverlauf $u(t)$ derart generiert, dass $y(t)$ einem vorgegebenen Sollverlauf $w(t)$ folgt. Besteht aus Störgrößenaufschaltung und Führungsgrößenaufschaltung
Störgrößenaufschaltung		Übertragungspfad zur Aufschaltung einer messbaren Störgröße auf die Stellgröße
Führungsgrößenaufschaltung		Übertragungspfad zur Aufschaltung der Führungsgröße auf die Stellgröße

**Blockschaltbild**

## 2 Modelle

### 2.1 Zustandsdarstellung

Zustandsdarstellung/Zustandsraummodell Ein Modell bestehend aus

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1 \dots x_n, z, u) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1 \dots x_n, z, u) \end{aligned} \right\} \text{Zustandsdifferentialgleichungen}$$

$$y = g(x_1 \dots x_n) \quad \text{Ausgangsgleichung}$$

bzw.

$$\dot{x} = f(x, z, u)$$

$$y = g(x)$$

wenn bei bekannten Eingangssignalen  $u(t)$  und  $z(t)$  und gegebenen Anfangswerten  $x_1(0), \dots, x_n(0)$  die Zeitverläufe  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  für  $t > 0$  eindeutig bestimmt sind.

Zustandsgleichungen

Zustandsdifferentialgleichungen und die Ausgangsgleichung zusammen

Trajektorie

Die  $n$  Zeitverläufe  $x_1(t), \dots, x_n(t)$

Zustandsvariablen

$x_1, \dots, x_n$

Zustand des Systems

Die Gesamtheit der Werte  $x_1, \dots, x_n$  zu einem festen Zeitpunkt  $t$

Zustandsvektor

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

#### 2.1.1 Zustandsdarstellung bei Linearkombinationen

Bestehen die rechten Seiten der Zustandsgleichungen ausschließlich aus Linearkombinationen, d.h.:

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + e_1z + b_1u$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + e_nz + b_nu$$

$$y = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$$

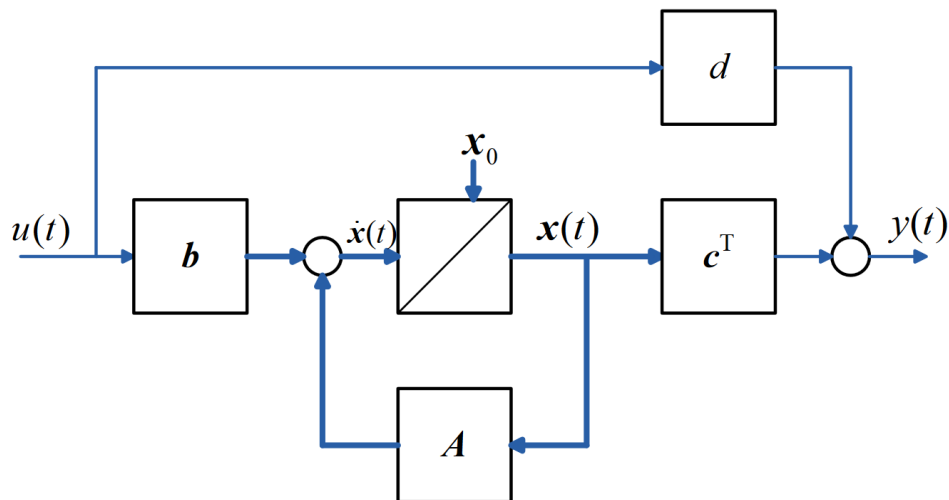
so gilt:

$$\dot{x} = Ax + ez + bu \quad \equiv \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u$$

$$y = c^T x \quad \equiv \quad y = \begin{bmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$



**Blockschaltbild:**

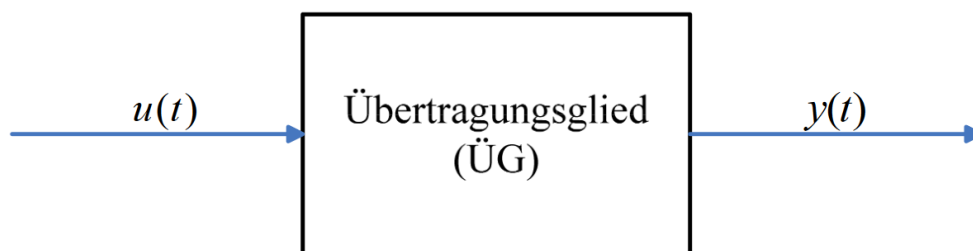


## 2.2 Blockschaltbild

**Ziel:**

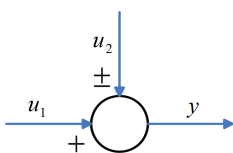
- Das Blockschaltbild ist eine graphische Darstellung der Funktionsbeziehungen zwischen den zeitveränderlichen Größen durch Blöcke und Wirkungslinien. Ein Block ordnet dabei jedem Zeitverlauf der Eingangsgröße eindeutig einen Zeitverlauf der Ausgangsgröße zu und wirkt so als Übertragungsglied. Die Zuordnungsvorschrift wird dabei in den Block hineingeschrieben.

**Blockschaltbild:**

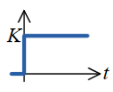
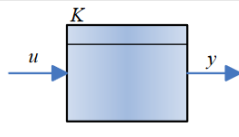
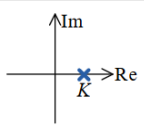
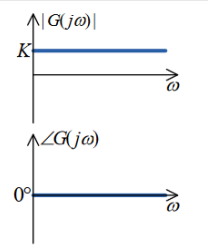
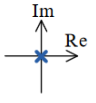
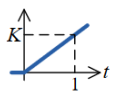
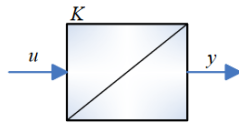
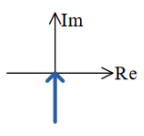
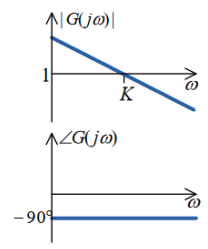


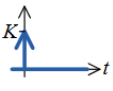
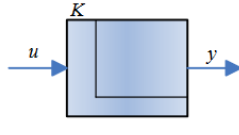
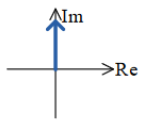
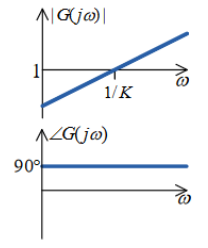
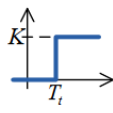
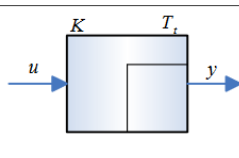
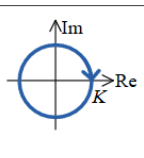
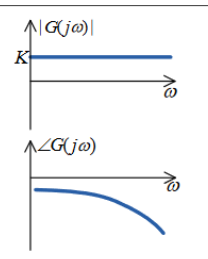
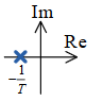
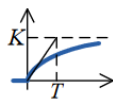
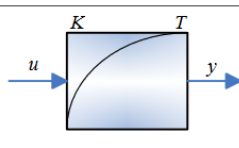
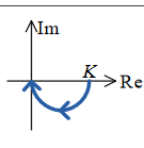
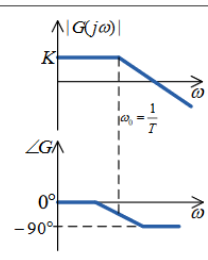
## 2.3 Elementare Übertragungsglieder

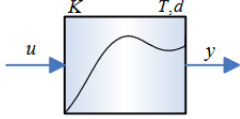
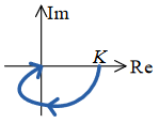
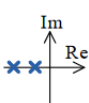
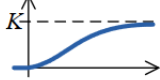
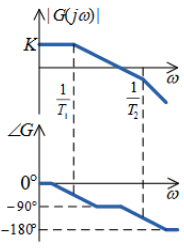

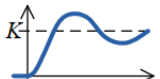
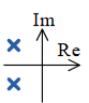
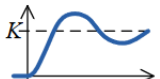
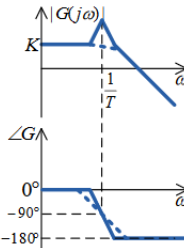
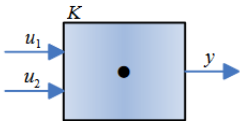
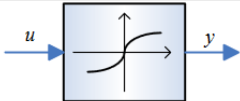
**Summationsglied:**



**Weitere Übertragungsglieder:**

Name	Funktional- beziehung	Übertragungs- funktion $G(s)$	Sprungantwort $h(t)$ (0 für $t < 0$ )	Block-Symbol	Ortskurve	Bodediagramm
<b>P- Glieder</b>	$y = Ku$	$K$	$h(t) = K\sigma(t)$ 	 $K$ heißt auch Verstärkungs- faktor		
<b>I- Glieder</b>	$y(t) = K \int_0^t u(\tau) d\tau + y_0$ oder $\dot{y}(t) = u(t)$	$\frac{K}{s}$ Pollage: 	$h(t) = Kt$ 			

<b>D- Glieder</b>	$y = K\dot{u}$	$Ks$	$h(t) = K\delta(t)$ 			
<b>Tot- zeit- glied</b>	$y = Ku(t - T_t)$ mit $T_t > 0$	$K e^{-T_t s}$	$h = K\sigma(t - T_t)$ 			
<b>PT1- Glieder</b>	$T\dot{y} + y = Ku$	$\frac{K}{1 + Ts}$ Pollage: 	$h = K(1 - e^{-t/T})$ 	 $T$ heißt Zeitkonstante $\omega_0 = \frac{1}{T}$ heißt Eckfrequenz		

<b>PT2-Glied</b>	$T^2\ddot{y} + 2dT\dot{y} + y = Ku$ mit $T > 0, d \geq 0$	Übertragungsfunktion: $G(s) = \frac{K}{1 + 2dT s + T^2 s^2}$ $d$ heißt (Lehrsche) Dämpfung			
Fall 1: $d > 1$	Pollagen: 	Sprungantworten: $h(t) = K \left( 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$ mit $T_{1/2} = T(d \pm \sqrt{d^2 - 1})$ 			
Fall 2: $d = 1$		$h(t) = K \left( 1 - \left[ 1 + \frac{t}{T} \right] e^{-\frac{t}{T}} \right)$ 			
Fall 3: $0 < d < 1$	Pollagen: 	$h(t) = K \cdot \left[ 1 - \frac{e^{-\frac{d}{T}t}}{\sqrt{1-d^2}} \sin\left(\frac{\sqrt{1-d^2}}{T}t + \varphi\right) \right]$ mit $\varphi = \arctan \frac{\sqrt{1-d^2}}{d}$ 	$\omega_0 = \frac{1}{T}$ heißt Eckfrequenz; $\omega_e = \frac{\sqrt{1-d^2}}{T}$ heißt Eigenfrequenz.		
<b>M-Glied</b>	$y = K \cdot u_1 \cdot u_2$				
<b>KL-Glied</b>	$y = F(u)$				

Die Übertragungsglieder Summationsglied, Proportionalglied, Integrierglied, Differenzierglied und Totzeitglied sind linear.

### 2.3.1 Sprungfunktion, Impulsfunktion

$$\text{Sprungfunktion } \sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Impulsfunktion } \delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt}$$

$$\text{Es gilt: } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^t \delta(t) dt = \sigma(t)$$

## 2.4 Lineare zeitinvariante Modelle (LZI-Modelle)

### Eigenschaften

- **Linearität:** Für  $y(t) = \varphi(u(t))$  gilt:
  - $\varphi(c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)) = c_1 \varphi(u_1(t)) + c_2 \varphi(u_2(t))$
- **Zeitinvarianz:**
  - $y(t) = \varphi(u(t))$  folgt  $\varphi(u(t - T)) = y(t - T)$

### 2.4.1 Regelungsnormalform

Das System  $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = b_0u$  besitzt die Zustandsdarstellung

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} x$$

Sie heißt Regelungsnormalform

### 2.4.2 Regelungsnormalform mit Ableitungen von u

Das System  $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = b_{n-1}u^{n-1} + \dots + b_1\dot{u} + b_0u$  besitzt die Zustandsdarstellung

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} \end{bmatrix} x$$

Sie heißt Regelungsnormalform

### 2.4.3 Beobachtungsnormalform

Das System  $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = b_{n-1}u^{n-1} + \dots + b_1\dot{u} + b_0u$  besitzt die Zustandsdarstellung

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

Sie heißt Beobachtungsnormalform

## 2.5 Linearisierung im Arbeitspunkt

### 2.5.1 Ein Eingabeparameter

Sei  $y = F(u)$  eine Übertragungsfunktion.

Die linearisierte Funktion um den Arbeitspunkt  $u_s$  ist berechnet als:

$$\Delta y = f(\Delta u, u_s) = \left. \frac{\partial F(u)}{\partial u} \right|_{u=u_s} \cdot \Delta u$$

mit

$$y_s = F(u_s)$$

$$\Delta u = u - u_s$$

Die um den Arbeitspunkt linearisierte Beziehung zwischen den absoluten Größen ist definiert als:

$$y_{lin} = f(u, u_s) = \Delta y + y_s \quad (\text{Ersetze } \Delta u \text{ durch } u - u_s)$$

### 2.5.2 Mehre Eingabeparameter

Sei  $y = F(u_1, \dots, u_n)$  eine Übertragungsfunktion ( $n \in \mathbb{N}$ ).

Die linearisierte Funktion um den Arbeitspunkt  $(u_{1,s}, \dots, u_{n,s})$  wird wie folgt berechnet:

$$\Delta y = f(\Delta u_1, \dots, \Delta u_n, u_{1,s}, \dots, u_{n,s}) = \left. \frac{\partial F(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1} \right|_{\text{AP}} \cdot \Delta u_1 + \dots + \left. \frac{\partial F(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_n} \right|_{\text{AP}} \cdot \Delta u_n$$

$$\text{AP} \equiv u_1 = u_{1,s}, \dots, u_n = u_{n,s}$$

mit

$$y_s = F(u_s)$$

$$\Delta u_1 = u_1 - u_{1,s}, \dots, \Delta u_n = u_n - u_{n,s}$$

Die um den Arbeitspunkt linearisierte Beziehung zwischen den absoluten Größen ist definiert als:

$$y_{lin} = f(u_1, \dots, u_n, u_{1,s}, \dots, u_{n,s}) = \Delta y + y_s \quad (\text{Ersetze } \Delta u_1 \text{ durch } u_1 - u_{1,s}, \dots)$$

### 2.5.3 Regelungsnormalform

Gegeben sei ein System in der Form  $\dot{x} = Ax + ez + bu$ ,  $y = c^T x$ .

Die  $n$  algebraischen Gleichungen seien definiert als:

$$f_1(x_1, \dots, x_n, z, u) = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + e_1z + b_1u$$

$\vdots$

$$f_n(x_1, \dots, x_n, z, u) = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + e_nz + b_nu$$

Die Ausgangsgröße sei definiert als:  $g(x_1, \dots, x_n) = y = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$

Das linearisierte Modell wird wie folgt berechnet:

$$\Delta \dot{x}(t) = A_l \Delta x(t) + e_l \Delta z(t) + b_l \Delta u(t)$$

$$\Delta y(t) = c_l^T \Delta x(t)$$

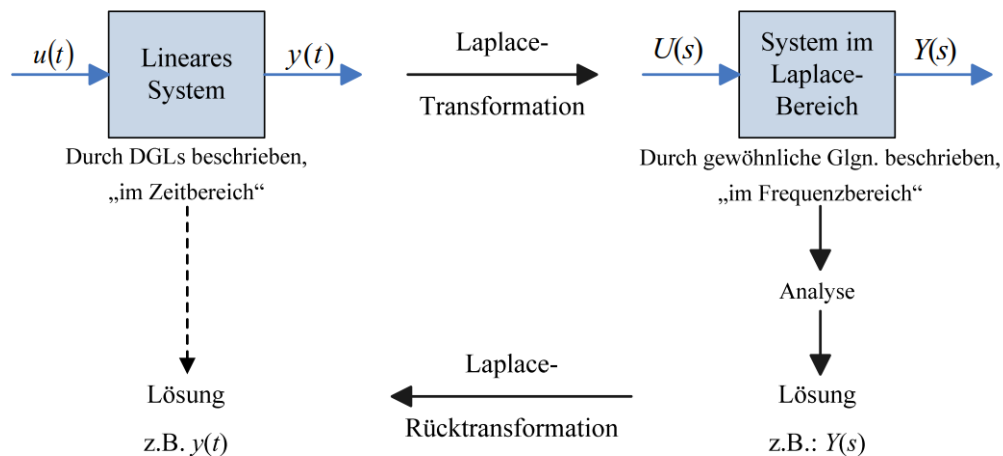
$$A_l = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right] \bigg|_{\text{AP}}$$

$$e_l = \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial z} \end{array} \right] \bigg|_{\text{AP}}$$

$$b_l = \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u} \end{array} \right] \bigg|_{\text{AP}}$$

$$c_l^T = \left[ \frac{\partial g}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial g}{\partial x_n} \right] \bigg|_{\text{AP}}$$

### 3 Laplace-Transformation



#### 3.1 Definition

Sei  $f(t)$  eine Zeitfunktion mit  $f(t) = 0$  für  $t < 0$ .

Die Laplace-Transformierte dieser Zeitfunktion ist definiert als:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

wobei  $s = \delta + j\omega$

Die Korrespondenz wird wie folgt dargestellt:

$$f(t) \circ \bullet F(s)$$

#### 3.2 Rücktransformation

Sei  $F(s)$  die Laplace-Transformierte zu  $f(t)$ .

Die Rücktransformation ist definiert als:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds$$

mit  $c$  in der Konvergenzhalbebene.

### 3.3 Korrespondenztabelle

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$ (Dirac-Impuls)	1
$\delta(t - t_0)$	$e^{-t_0 s}$
$\sigma(t)$ (Einheitssprung)	$\frac{1}{s}$
$\sigma(t - t_0)$	$\frac{e^{-t_0 s}}{s}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^n}{n!}, n \in \mathbb{N}_0$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s - \alpha}$
$\frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{1 + Ts}$
$t e^{\alpha t}$	$\frac{1}{(s - \alpha)^2}$
$\frac{t}{T^2} e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{(1 + Ts)^2}$
$\frac{t^n}{n!} e^{\alpha t}$	$\frac{1}{(s - \alpha)^{n+1}}$
$1 - e^{\alpha t}$	$\frac{-\alpha}{s(s - \alpha)}$
$1 - e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{s(1 + Ts)}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-\delta t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s + \delta)^2 + \omega^2}$
$e^{-\delta t} \cos \omega t$	$\frac{s + \delta}{(s + \delta)^2 + \omega^2}$
$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$

wobei

$f(t) = 0$  für  $t < 0$ ,  
 $T > 0, t_0 > 0, \omega > 0$  reell,  
 $\delta$  beliebig reell und  
 $\alpha$  beliebig komplex.

### 3.4 Eigenschaften der Laplace-Transformation

Eigenschaft	Operation im Zeitbereich	Operation im Bildbereich
Linearität	$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$	$c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$
Differenziation	$\dot{f}(t)$ $\ddot{f}(t)$ $f^{(n)}(t)$	$sF(s) - f(0)$ $s^2 F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$ $s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) s^{n-k-1}$
Integration	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} F(s)$
Dämpfung	$f(t) \cdot e^{\alpha t}$	$F(s - \alpha)$
Faltung	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s) \cdot F_2(s)$
Zeitverschiebung	$f(t - t_0), t_0 > 0$	$e^{-t_0 s} F(s)$
Differenziation der Bildfunktion	$(-1)^n t^n f(t)$	$F^{(n)}(s), n \in \mathbb{N}$
Skalierung der Zeitachse	$f(\alpha t), \alpha > 0$	$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$
Anfangswertsatz	$\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ , sofern $\lim_{t \rightarrow +0} f(t)$ existiert	
Endwertsatz	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$ , sofern $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ existiert	

### 3.5 Lösung linearer zeitinvarianter Differentialgleichungen mittels Laplace-Transformation

Sei  $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u$  mit  $m \leq n$  und  $a_n \neq 0$  die systembeschreibende Differentialgleichung. Die Lösung dieser DGL erfolgt durch die folgenden 5 Schritte:

1. Transformation der DGL in den Bildbereich mittels Laplace-Transformation
2. Auflösen nach  $Y(s)$ . Sind alle Anfangswerte gleich null, resultiert:  

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \cdot U(s) \equiv Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$
3. Einsetzen von  $U(s) \bullet \rightarrow u(t)$  in  $Y(s) = G(s) \cdot U(s)$
4. Durchführung einer Partialbruchzerlegung von  $Y(s)$
5. Rücktransformation in den Zeitbereich  $y(t) \circ \bullet Y(s)$

#### 3.5.1 Darstellungsformen von $G(s)$

$G(s)$  kann in folgenden Formen dargestellt werden:

Polynomform:  $G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}$

Linearfaktorform:  $G(s) = Q \frac{(s-q_1) \dots (s-q_m)}{(s-p_1) \dots (s-p_n)}$  mit  $Q = \frac{b_m}{a_n}$

Zeitkonstantenform:  $G(s) = K \frac{(1+\bar{T}_1 s) \dots (1+\bar{T}_m s)}{(1+T_1 s) \dots (1+T_n s)}$  mit  $\bar{T}_i = -\frac{1}{q_i}$ ,  $T_i = -\frac{1}{p_i}$ ,  $K = \frac{b_0}{a_0}$

Partialbruchform:  $G(s) = r_0 + \frac{r_1}{s-p_1} + \dots + \frac{r_n}{s-p_n}$

#### 3.5.2 Komplexe Übertragungsfunktion

Sei  $Y(s) = G(s)U(s)$  eine systembeschreibende Differentialgleichung im Bildbereich.

$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$  heißt komplexe Übertragungsfunktion.

Komplexe Übertragungsfunktionen der in Sektion 3.5.1 genannten Darstellungsformen heißen rationale Übertragungsfunktionen. Die zugehörigen Übertragungsglieder heißen rationale Übertragungsglieder, kurz R-Glieder.

### 3.6 Sprungantworten des PT2-Gliedes

Die Pole von der komplexen Übertragungsfunktion  $G(s)$  eines PT2-Gliedes werden wie folgt berechnet:

$$p_{1/2} = \frac{1}{T}(-d \pm \sqrt{d^2 - 1})$$

Es folgt:

- Fall 1:  $d > 1$ ,  $p_{1/2} \in \mathbb{R}^-$ , aperiodischer Fall
- Fall 2:  $d = 1$ ,  $p_1 = p_2, p_{1/2} \in \mathbb{R}^-$ , aperiodischer Grenzfall
- Fall 3:  $0 < d < 1$ ,  $p_{1/2} \in \mathbb{C}$ ,  $\Re(p_{1/2}) < 0$ , unterkritisch/periodisch gedämpfter Fall
- Fall 4:  $d = 0$ ,  $p_{1/2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , ungedämpfter Fall

### 3.7 Lösung der Zustandsgleichung mittels Laplace-Transformation

Sei ein LZI-System gegeben mit  $\dot{x} = Ax + bu$  und  $y = c^T x$ .

Die Zustandsgleichungen im Bildbereich sind:

$$X(s) = \underbrace{(sI - A)^{-1} b U(s)}_{\text{Anregungsterm}} + \underbrace{(sI - A)^{-1} x(0)}_{\text{Anfangswertterm}} \bullet \rightarrow x(t)$$

$$Y(s) = \underbrace{c^T (sI - A)^{-1} b U(s)}_{\text{Anregungsterm}} + \underbrace{c^T (sI - A)^{-1} x(0)}_{\text{Anfangswertterm}} \bullet \rightarrow y(t)$$

Die komplexe Übertragungsfunktion  $G(s)$  ist:

$$G(s) = c^T (sI - A)^{-1} b = \frac{c^T (\text{Adjunkte}(sI - A)) b}{\det(sI - A)} = \frac{Z(s)}{N(s)}$$



### 3.7.1 Polstellen

Jeder Pol von  $G(s)$  ist Eigenwert von  $A$ . Ein Eigenwert von  $A$  ist genau dann Pol von  $G(s)$ , wenn er sich nicht herauskürzt, d.h. nicht gleichzeitig Nullstelle von  $Z(s)$  ist.

### 3.7.2 Zustandsgleichung mit Störgröße

Seien die Zustandsgleichungen des LZI-Systems gegeben durch  $\dot{x} = Ax + ez + bu$  und  $y = c^T x$ .  
Die Zustandsgleichung im Bildbereich ist:

$$Y(s) = G(s)U(s) + G_z(s)Z(s)$$

und die Störübertragungsfunktion ist

$$G_z(s) = c^T (sI - A)^{-1} e$$

## 3.8 Lösung der Zustandsgleichungen im Zeitbereich

Sei ein LZI-System gegeben mit  $\dot{x} = Ax + bu$  und  $y = c^T x$ .  
Die Lösungen dieser Gleichungen sind:

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} bu(\tau) d\tau + e^{At} x(0)$$

$$y(t) = \int_0^t c^T e^{A(t-\tau)} bu(\tau) d\tau + c^T e^{At} x(0)$$

wobei

$$e^{At} = I + A \frac{t}{1!} + A^2 \frac{t^2}{2!} + \dots$$

### 3.8.1 Transitionsmatrix

Die Matrix  $e^{At}$  heißt Überführungs- bzw. Transitionsmatrix. Sie hat folgende Eigenschaften.

$$e^{At} \cdot e^{A\tau} = e^{A(t+\tau)}$$

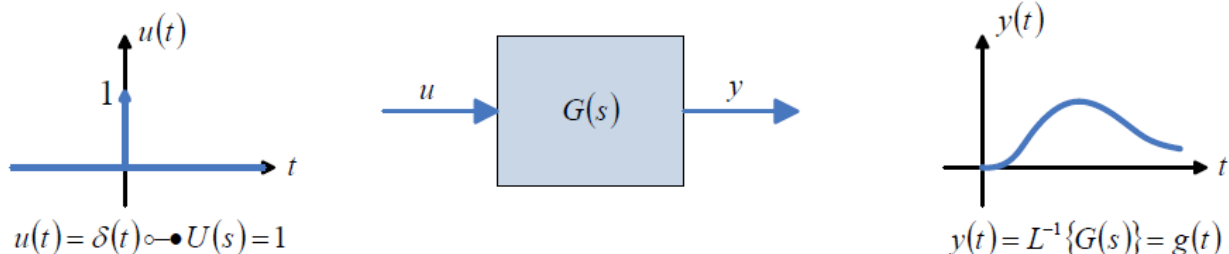
$$e^{-At} \cdot e^{At} = e^0 = I$$

$$\frac{de^{At}}{dt} = Ae^{At} = e^{At} A$$

## 4 Analyse dynamischer Systeme

### 4.1 Systemantworten

#### 4.1.1 Impulsantwort



Sei  $Y(s) = G(s)U(s)$  ein lineares zeitinvariantes System mit der komplexen Übertragungsfunktion  $G(s)$ .  
Die Impulsantwort dieses Systems ist:

$$Y(s) = G(s) \bullet \circ g(t)$$

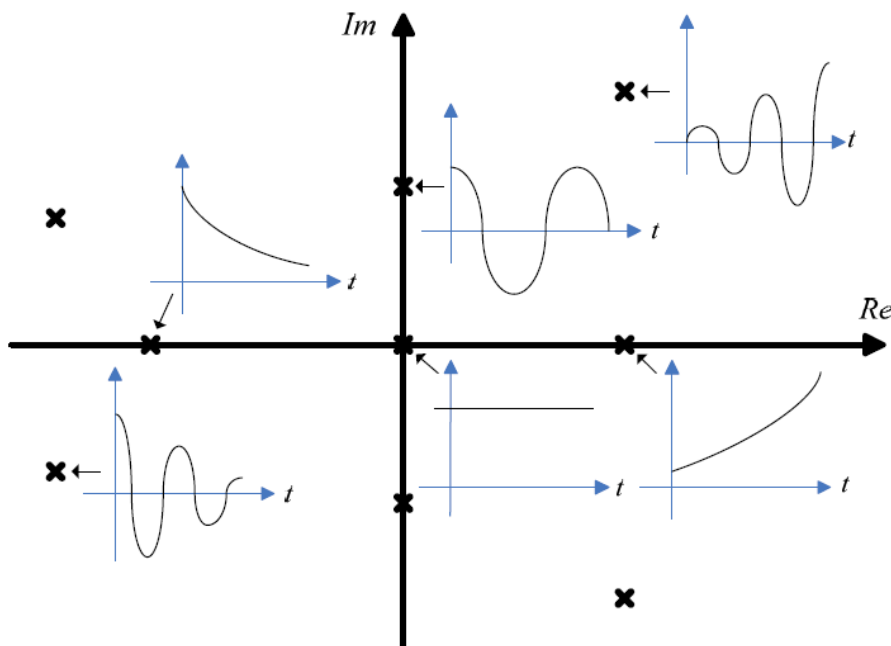
mit  $u(t) = \delta(t) \bullet \circ U(s) = 1$ ,

#### 4.1.1.1 Eigenschaften

Sei  $G(s)$  ein R-Glied in der Form:  $G(s) = \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{s-p_i} \bullet \circ g(t) = \sum_{i=1}^n r_i e^{p_i t}$   
und sei  $p_i$  der zugehörige  $i$ -te Pol.

Für den Charakter des zugehörigen Zeitsignals folgt:

einfacher negativ reeller Pol $p_i$ ,	$p_i \in \mathbb{R}^-$ :	abklingende $e$ -Funktion,	$r_i e^{p_i t}$
einfacher Pol in null,	$p_i = 0$ :	konstanter Anteil,	$r_i$
einfacher positiv reeller Pol $p_i$ ,	$p_i \in \mathbb{R}^+$ :	aufklingende $e$ -Funktion,	$r_i e^{p_i t}$
einfaches, in der linken Halbebene gelegenes konjugiert komplexes Polpaar,	$p_{1/2} = -\delta \pm j\omega \in \mathbb{C}, \Re(p_{1/2}) < 0$ :	abklingende Schwingung,	$e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi)$
einfaches, auf der imaginären Achse gelegenes komplexes Polpaar,	$p_{1/2} = \pm j\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ :	harmonische Dauerschwingung,	$\sin(\omega t + \varphi)$
einfaches, in der rechten Halbebene gelegenes konjugiert komplexes Polpaar,	$p_{1/2} = +\delta \pm j\omega \in \mathbb{C}, \Re(p_{1/2}) > 0$ :	aufklingende Schwingung,	$e^{\delta t} \sin(\omega t + \varphi)$



#### 4.1.1.2 Impulsantwort bei Zustandsdarstellung

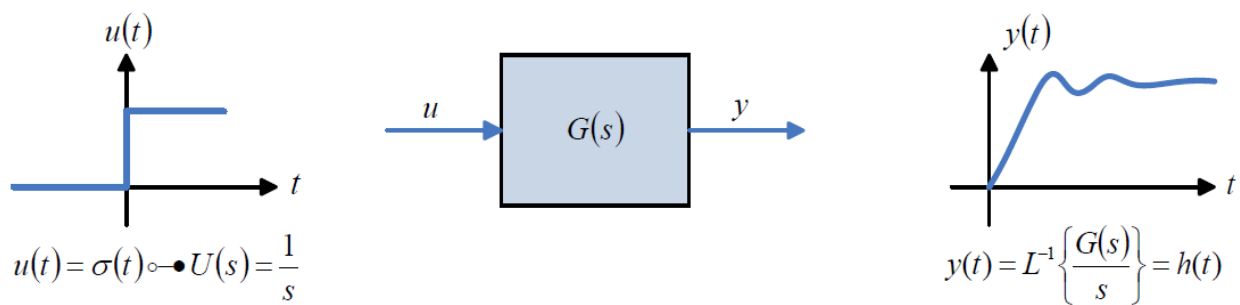
Sei ein LZI-System gegeben mit  $\dot{x} = Ax + bu$  und  $y = c^T x$ .

Die Impulsantwort dieses Systems ist:

$$g(t) = c^T e^{At} b \sigma(t)$$

wobei  $x(0) = 0$  und  $u(t) = \delta(t)$

### 4.1.2 Sprungantwort



Sei  $Y(s) = G(s)U(s)$  ein lineares zeitinvariantes System mit der komplexen Übertragungsfunktion  $G(s)$ . Die Sprungantwort dieses Systems ist:

$$Y(s) = \frac{G(s)}{s} = H(s) \bullet \circ h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau$$

mit  $u(t) = \sigma(t) \bullet \circ U(s) = 1/s$ ,

### 4.1.3 Systemantwort mittels Faltung

Sei ein lineares zeitinvariantes System gegeben mit Eingangssignal  $u(t)$ , Ausgangssignal  $y(t)$  und der Übertragungsfunktion  $g(t)$ .

Das Ein-Ausgangsverhalten dieses Systems lässt sich durch die Faltungsoperation beschreiben:

$$y(t) = g(t) * u(t) = \int_0^t g(t - \tau) u(\tau) d\tau$$

### 4.1.4 Anfangswertsatz der Laplace-Transformation

Sei  $y(t)$  eine Zeitfunktion sowie  $Y(s)$  deren Laplace-Transformierte.

Es gilt:

$$y(t \rightarrow 0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sY(s)], \quad \text{sofern } y(t \rightarrow 0^+) \text{ existiert}$$

Für die Sprungantwort gilt:

$$h(t \rightarrow 0^+) = G(\infty)$$

### 4.1.5 Endwertsatz der Laplace-Transformation

Sei  $y(t)$  eine Zeitfunktion sowie  $Y(s)$  deren Laplace-Transformierte.

Es gilt:

$$y(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [sY(s)], \quad \text{sofern } y(t \rightarrow \infty) \text{ existiert}$$

Für die Sprungantwort gilt:

$$h(t \rightarrow \infty) = G(0), \quad \text{sofern alle Pole von } G(s) \text{ links der } j\text{-Achse sind}$$

## 4.2 Stabilität

### 4.2.1 Sprungantwortstabilität

- Ein lineares zeitinvariantes System ist sprungantwortstabil, falls

$$h(t \rightarrow \infty) = \int_0^\infty g(\tau) d\tau = c < \infty$$

wobei  $h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau$  die Sprungantwort des Systems ist.

- Ein rationales Übertragungsglied (R-Glied) ist genau dann sprungantwortstabil, wenn alle Pole der Übertragungsfunktion  $G(s)$  in der linken komplexen Halbebene liegen.

### 4.2.2 Übertragungsstabilität, BIBO-Stabilität

- Ein dynamisches System heißt übertragungsstabil, wenn es auf jedes beschränkte Eingangssignal mit einem beschränkten Ausgangssignal antwortet.
- Andere Bezeichnungen sind: äußere Stabilität, Ein-/Ausgangsstabilität, BIBO (Bounded Input Bounded Output) Stabilität
- Sprungantwortstabilität  $\iff$  Übertragungsstabilität

### 4.2.3 Asymptotische Stabilität

Sei ein LZI-System gegeben mit  $\dot{x} = Ax + bu$  und  $y = c^T x$

- Das Zustandsraummodell heißt asymptotisch stabil, wenn  $x(t) \rightarrow 0$  für  $u(t) = 0$  und beliebige Anfangswerte  $x(0)$
- Das Zustandsraummodell ist genau dann asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte der Matrix  $A$  in der linken komplexen Halbebene liegen.
- Andere Bezeichnungen sind: asymptotische Zustandsstabilität, innere Stabilität
- Asymptotische Stabilität  $\implies$  Übertragungsstabilität
- Übertragungsstabilität  $\implies$  Asymptotische Stabilität, falls das Zählerpolynom der Übertragungsfunktion  $G(s)$  keine der Nennernullstellen kürzt und der Nennergrad von  $G(s)$  tatsächlich die Ordnung des Zustandsraummodells widerspiegelt.

#### 4.2.3.1 Asymptotisch stabiles R-Glied

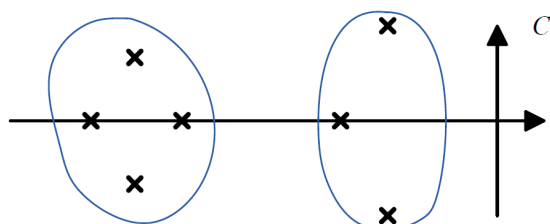
Sei  $G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0}$ ,  $n \geq m$ ,  $a_n \neq 0$  die komplexe Übertragungsfunktion eines R-Gliedes und

sei  $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u$  das zugehörige Zustandsraummodell der Ordnung  $n$ .

Das Zustandsraummodell der Ordnung  $n$  ist genau dann asymptotisch stabil, wenn alle  $n$  Systempole, also die Lösungen der charakteristischen Gleichung  $a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0 = 0$  in der linken komplexen Halbebene liegen.

## 4.3 Pole, Nullstellen und Modellreduktion

### 4.3.1 Dominierende Pole



- nicht dominierende Pole
- schnell abklingende Vorgänge
- dominierende Pole
- langsam abklingende Vorgänge

- näher an der imaginären Achse (links) liegende Pole sind dominante Pole  $\rightarrow$  langsam abklingende  $e$ -Funktion
- weiter von der imaginären Achse entfernt (links) liegende Pole sind nicht-dominante Pole  $\rightarrow$  schnell abklingende  $e$ -Funktion

### 4.3.2 Nullstelleneffekte

#### 4.3.2.1 Blockiereigenschaft einer Nullstelle

Sei  $G(s)$  eine komplexe Übertragungsfunktion mit der Nullstelle  $\eta$ .

Die spezielle Anregung  $u(t) = u_0 e^{\eta t}$  bewirkt in der Systemantwort  $y(t)$  keinen Anteil  $re^{\eta t}$ , d.h. die Nullstelle blockiert.

### 4.3.2.2 Wirkung der Nullstellenlage auf den Verlauf der Sprungantwort

- In der linken Halbebene gelegene Nullstellen:
  - links von den dominanten Polen: geringe Wirkung
  - rechts von den dominanten Polen: Überspringen oder sonstigen "Verbeulen" der Sprungantwort
- In der rechten Halbebene gelegene Nullstellen:
  - schwieriger zu regeln
  - z.B. Allpassglied:  $G(s) = -\frac{(Ts-1)}{(Ts+1)}$ , Sprungantwort beginnt bei  $-1$  und endet bei  $1$  für alle  $T > 0$

### 4.3.3 Modellreduktion

#### Ziel:

Entferne nicht dominierende Pole aus der komplexen Übertragungsfunktion und gelange so zu einem reduzierten Modell.

#### Verfahren:

Aus  $G(s) = \sum_{v=1}^n \frac{r_v}{s-p_v}$  werden diejenigen Summanden ersatzlos gestrichen, deren Dominanzmaß  $D_v = \left| \frac{r_v}{p_v} \right|$  vergleichsweise klein ist.

Rechts oder auf der imaginären Achse gelegene Pole werden nicht gestrichen.

## 4.4 Approximation des Totzeitgliedes

Sei  $G(s) = e^{-T_t s}$  die komplexe Übertragungsfunktion eines Totzeitgliedes.

Das Totzeitglied kann durch eine rationale Übertragungsfunktion angenähert und ersetzt werden.

Je höher die Ordnung  $n$  ist, desto genauer ist die Approximation.

### 4.4.1 Approximation durch ein PT $n$ -Glieder

Wird für die Annäherung ein PT $n$ -Glieder angesetzt, so folgt:

$$G(s) \approx \frac{1}{\left(1 + \frac{T_t}{n}s\right)^n}$$

### 4.4.2 Padé-Approximation

Wird für die Annäherung eine Padé-Approximation vorgenommen, so wird ein allgemeines rationales Übertragungsglied angesetzt und die Zähler- und Nennerkoeffizienten so gewählt, dass die zugehörige Taylorreihe um  $s = 0$  in möglichst vielen Gliedern mit der Taylorreihe von  $e^{-T_t s}$  übereinstimmt.

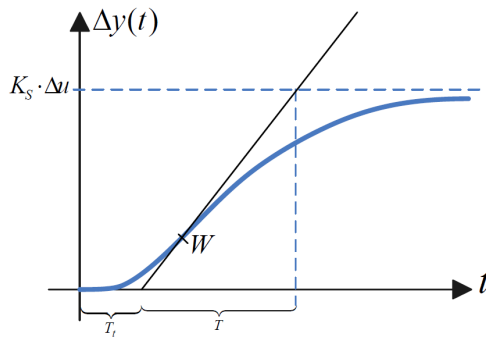
#### Padé-Approximationen des Totzeitgliedes:

Ordnung	Padé-Approximation mit Zählergrad $n$	Padé-Approximation mit Zählergrad $n - 1$
$n = 1$	$\frac{1 - \frac{1}{2}T_t s}{1 + \frac{1}{2}T_t s}$	$\frac{1}{1 + T_t s}$
$n = 2$	$\frac{1 - \frac{1}{2}T_t s + \frac{1}{12}T_t^2 s^2}{1 + \frac{1}{2}T_t s + \frac{1}{12}T_t^2 s^2}$	$\frac{1 - \frac{1}{3}T_t s}{1 + \frac{2}{3}T_t s + \frac{1}{6}T_t^2 s^2}$
$n = 3$	$\frac{1 - \frac{1}{2}T_t s + \frac{1}{10}T_t^2 s^2 - \frac{1}{120}T_t^3 s^3}{1 + \frac{1}{2}T_t s + \frac{1}{10}T_t^2 s^2 + \frac{1}{120}T_t^3 s^3}$	$\frac{1 - \frac{2}{5}T_t s + \frac{1}{20}T_t^2 s^2}{1 + \frac{3}{5}T_t s + \frac{3}{20}T_t^2 s^2 + \frac{1}{60}T_t^3 s^3}$

## 4.5 Modellidentifikation im Zeitbereich

Sei die Sprungantwort eines Systems als  $t - \Delta y(t)$  Diagramm gegeben.

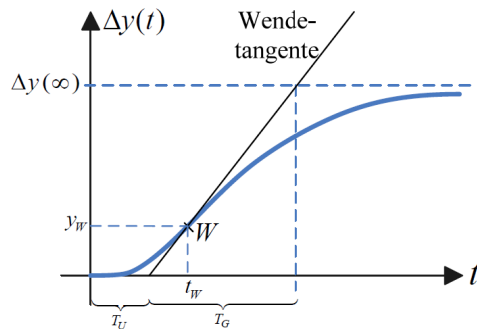
#### Annäherung durch Totzeitglied und PT1-Glied:



Der Verlauf kann durch ein Totzeitglied und ein nachgeschaltetes PT1-Glied angenähert werden.

1. Lege zeichnerisch die Wendetangente an die Kurve und bestimme die Totzeit  $T_t$  und die Zeitkonstante  $T$  des PT1-Gliedes wie im Bild angegeben.
2.  $G(s) = \frac{K_s}{1+Ts} e^{-T_t s}$

**Annäherung durch ein PTn-Glied:**



Der Verlauf kann durch ein PTn-Glied angenähert werden.

1. Lege zeichnerisch die Wendetangente an die Kurve und bestimme die Verzugszeit  $T_U$ , die Ausgleichszeit  $T_G$ , sowie  $t_W$  und  $y_W$  wie im Bild angegeben.
2.  $K = \frac{\Delta y(\infty)}{\Delta u}$ , wobei  $\Delta u$  die Höhe des sprungförmigen Eingangssignal bezeichnet
3. Die Ordnung  $n$  wird aus der Tabelle abgelesen, anhand von  $\frac{T_U}{T_G}$  oder  $\frac{y_W}{\Delta y(\infty)}$
4. Mithilfe der Werte  $T_U, T_G, t_W$  und  $n$  und der Tabelle bestimmt man drei Werte für  $T$ . Der Mittelwert wird schließlich verwendet.
5.  $G(s) = \frac{K}{(1+Ts)^n}$

Tabelle:

$n$	$\frac{T_U}{T_G}$	$\frac{y_W}{\Delta y(\infty)}$	$\frac{t_W}{T}$	$\frac{T_G}{T}$	$\frac{T_U}{T}$
1	0	0	0	1	0
2	0,104	0,264	1	2,718	0,282
3	0,218	0,323	2	3,695	0,805
4	0,319	0,353	3	4,463	1,425
5	0,410	0,371	4	5,119	2,100
6	0,493	0,384	5	5,699	2,811
7	0,570	0,394	6	6,226	3,549
8	0,642	0,401	7	6,711	4,307
9	0,709	0,407	8	7,164	5,081
10	0,773	0,413	9	7,590	5,869

## 4.6 Frequenzgang

### 4.6.1 Systemantwort auf harmonische Anregung

Sei  $Y(s) = G(s)U(s)$  die beschreibende Gleichung eines R-Gliedes, welches mit  $u(t) = A \sin(\omega t)$  angeregt wird. Die Antwort dieses R-Gliedes ist:

$$y(t) = y_D(t) + y_G(t)$$

mit dem Dauerschwingungsanteil

$$y_D(t) = A|G(j\omega)| \sin(\omega t + \angle G(j\omega))$$

Ist das System  $G(s)$  stabil, so gilt für große  $t$ :

$$y(t) = y_D(t)$$

**Größen:**

Frequenzgang des Systems:  $G(j\omega)$

Betrag des Frequenzgangs:  $|G(j\omega)|$

Phase des Frequenzgangs:  $\angle G(j\omega) = \arctan(-\omega T)$

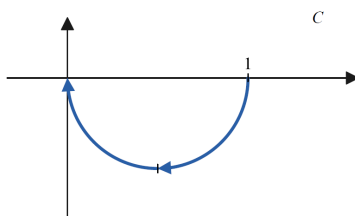
wobei

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\angle G(j\omega)}$$

### 4.6.2 Frequenzgangortskurve und Bode-Diagramm

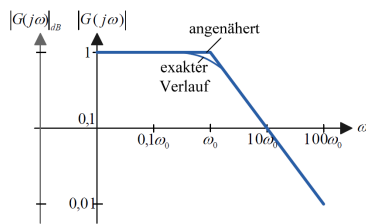
Sei  $Y(s) = G(s)U(s)$  die beschreibende Gleichung eines Systems.

**Frequenzgangortskurve:**



Die Frequenzgangortskurve ist die Ortskurve  $G(j\omega)$  für  $0 \leq \omega < \infty$  in der komplexen Zahlenebene. Die Pfeilspitze zeigt in Richtung wachsender Frequenz  $\omega$ .

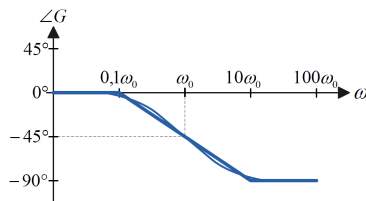
**Amplitudengang:**



Der Amplitudengang/Betragskennlinie ist  $|G(j\omega)|$  für  $0 \leq \omega < \infty$ .

Die  $|G(j\omega)|$ -Achse wird in Dezibel (dB) skaliert, mit  $|G|_{dB} = 20 \log |G|$ .

### Phasengang:



Der Phasengang/Phasenkennlinie ist  $\angle G(j\omega)$  für  $0 \leq \omega < \infty$ .

Die  $\angle G(j\omega)$ -Achse wird in Grad angegeben; die  $\omega$ -Achse wird logarithmisch aufgetragen.

### Bode-Diagramm:

Betrags- und Phasenkennlinie zusammen heißen Bode-Diagramm bzw. Frequenzkennlinien des Systems  $G(s)$ .

#### 4.6.3 Konstruktion von Bode-Diagramm

Sei die komplexe Übertragungsfunktion eines R-Gliedes als Produkt einfacher Glieder gegeben, d.h.:

$$G(s) = K \cdot \frac{(s - q_1) \cdot \dots \cdot (s - q_m)}{(s - p_1) \cdot \dots \cdot (s - p_n)} = K \cdot (s - q_1) \cdot \dots \cdot (s - q_m) \cdot \frac{1}{s - p_1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{s - p_n} = K \cdot G_1 \cdot \dots \cdot G_m \cdot G_{m+1} \cdot \dots \cdot G_{n+m}$$

Die Betragskennlinie ist:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log |G_1| + \dots + 20 \log |G_{n+m}|$$

Die Phasenkennlinie ist:

$$\angle G(j\omega) = \angle G_1 + \dots + \angle G_{n+m}$$

#### 4.6.4 Graphische Konstruktion von Bode-Diagramm

Sei eine komplexe Übertragungsfunktion  $G(s)$  gegeben.

1. Bringe die Übertragungsfunktion in Zeitkonstantenform:

$$G(j\omega) = K \cdot \frac{(j\omega)^k}{(j\omega)^l} \cdot \frac{Z_1 \cdot \dots \cdot Z_m}{N_1 \cdot \dots \cdot N_n}$$

wobei

$$Z_i = (\tilde{T}_i j\omega + 1) \quad \text{für jede einfache Nullstelle } \neq 0$$

$$Z_i = (\tilde{T}_i^2 (j\omega)^2 + 2\tilde{d}_i \tilde{T}_i j\omega + 1) \quad \text{für jedes konjugiert komplexe Nullstellenpaar/jede doppelte Nullstelle } \neq 0$$

$$N_i = (T_i j\omega + 1) \quad \text{für jeden einfachen Pol } \neq 0$$

$$N_i = (T_i^2 (j\omega)^2 + 2d_i T_i j\omega + 1) \quad \text{für jedes konjugiert komplexe Polpaar/jeden doppelten Pol } \neq 0$$

sowie

$K$  : Verstärkungsfaktor

$k$  : Anzahl der Nullstellen im Ursprung

$l$  : Anzahl der Pole im Ursprung



## 2. Ermittlung der Eckfrequenzen:

- Für jede einfache Nullstelle  $\neq 0$ :

$$\tilde{\omega}_i = \frac{1}{|\tilde{T}_i|}, \quad \text{Eckfrequenz der Nullstelle: } \eta_i = -\frac{1}{\tilde{T}_i}$$

- Für jede konjugiert komplexe Nullstelle/jede doppelte Nullstelle:

$$\tilde{\omega}_i = \frac{1}{|\tilde{T}_i|}, \quad \text{Eckfrequenz der Nullstellen: } \eta_{i/i+1} : \tilde{T}_i^2(j\omega)^2 + 2\tilde{d}_i\tilde{T}_ij\omega + 1 \stackrel{!}{=} 0$$

- Für jeden einfachen Pol  $\neq 0$ :

$$\omega_i = \frac{1}{|T_i|}, \quad \text{Eckfrequenz des Pols: } p_i = -\frac{1}{T_i}$$

- Für jeden konjugiert komplexen Pol/jeden doppelten Pol:

$$\omega_i = \frac{1}{|T_i|}, \quad \text{Eckfrequenz der Pole: } p_{i/i+1} : T_i^2(j\omega)^2 + 2d_iT_ij\omega + 1 \stackrel{!}{=} 0$$

3. Approximation des Amplitudengangs  $A(\omega) = |G(j\omega)|$ 3.1 Startwert des Amplitudengangs  $A(\omega_{min})$ :

$\omega_{min}$ : kleinste Frequenz im Diagramm

$$A(\omega_{min}) = 20 \log_{10} \left( \frac{\omega_{min}^k}{\omega_{min}^l} \cdot |K| \right) \quad [dB]$$

3.2 Anfangssteigung des Amplitudengangs  $A'(\omega_{min})$ :

$$A'(\omega_{min}) = (k - l) \cdot \frac{20dB}{\text{Dekade}}$$

3.3 Verlauf des Amplitudengangs:  $A'(\omega_i)$ :

Sei  $A'(\omega_i^-)$  die Steigung des Amplitudengangs bis zur Frequenz  $\omega_i$ .

Die Steigung ab der Frequenz  $\omega_i$  ist:

- Für jede einfache Nullstelle mit Eckfrequenz  $\tilde{\omega}_i$ :

$$A'(\tilde{\omega}_i^+) = A'(\omega_i^-) + \frac{20dB}{\text{Dekade}}$$

- Für jedes konjugiert komplexe Nullstellenpaar/jede doppelte Nullstelle mit Eckfrequenz  $\tilde{\omega}_i$ :

$$A'(\tilde{\omega}_i^+) = A'(\omega_i^-) + \frac{40dB}{\text{Dekade}}$$

- Für jeden einfachen Pol mit Eckfrequenz  $\omega_i$ :

$$A'(\omega_i^+) = A'(\omega_i^-) - \frac{20dB}{\text{Dekade}}$$

- Für jedes konjugiert komplexe Polstellenpaar/jeden doppelten Pol mit Eckfrequenz  $\omega_i$ :

$$A'(\omega_i^+) = A'(\omega_i^-) - \frac{40dB}{\text{Dekade}}$$

4. Approximation des Phasengangs  $\varphi(\omega) = \angle G(j\omega)$ 4.1 Startwert des Phasengangs  $\varphi(\omega_{min})$ :

- Für  $K > 0$ :

$$\varphi(\omega_{min}) = 0^\circ + (k - l) \cdot 90^\circ$$

- Für  $K < 0$ :

$$\varphi(\omega_{min}) = -180^\circ + (k - l) \cdot 90^\circ$$

#### 4.2 Grobverlauf des Phasengangs $\varphi(\omega_i)$ :

Sei  $\varphi(\omega_i^-)$  die Phase bis zur Frequenz  $\omega_i$ .

Die Phase ab der Frequenz  $\omega_i$  ist:

- Für jede einfache Nullstelle  $\eta_i$  mit Eckfrequenz  $\tilde{\omega}_i$ :

- Falls  $\eta_i < 0$ :

$$\varphi(\tilde{\omega}_i^+) = \varphi(\omega_i^-) + 90^\circ$$

- Falls  $\eta_i > 0$ :

$$\varphi(\tilde{\omega}_i^+) = \varphi(\omega_i^-) - 90^\circ$$

- Für jedes konjugiert komplexe Nullstellenpaar/jede doppelte Nullstelle  $\eta_{i/i+1}$  mit Eckfrequenz  $\tilde{\omega}_i$ :

- Falls  $\Re(\eta_{i/i+1}) \leq 0$ :

$$\varphi(\tilde{\omega}_i^+) = \varphi(\omega_i^-) + 180^\circ$$

- Falls  $\Re(\eta_{i/i+1}) > 0$ :

$$\varphi(\tilde{\omega}_i^+) = \varphi(\omega_i^-) - 180^\circ$$

- Für jeden einfachen Pol  $p_i$  mit Eckfrequenz  $\omega_i$ :

- Falls  $p_i < 0$ :

$$\varphi(\omega_i^+) = \varphi(\omega_i^-) - 90^\circ$$

- Falls  $p_i > 0$ :

$$\varphi(\omega_i^+) = \varphi(\omega_i^-) + 90^\circ$$

- Für jedes konjugiert komplexe Polpaar/jeden doppelten Pol  $p_{i/i+1}$  mit Eckfrequenz  $\omega_i$ :

- Falls  $\Re(p_{i/i+1}) \leq 0$ :

$$\varphi(\tilde{\omega}_i^+) = \varphi(\omega_i^-) - 180^\circ$$

- Falls  $\Re(p_{i/i+1}) > 0$ :

$$\varphi(\tilde{\omega}_i^+) = \varphi(\omega_i^-) + 180^\circ$$

#### 4.3 Feinverlauf des Phasengangs:

- Pfeile einzeichnen

- Für jede Phasenerhöhung  $\varphi(\omega_i^+) = \varphi(\omega_i^-) + x \cdot 90^\circ$  an der Eckfrequenz  $\omega_i$ :

Zeichne  $x$  Pfeile nach oben ( $\uparrow$ ) an der Frequenz  $\omega_i - (1 \text{ Dekade})$  und  $x$  Pfeile nach unten ( $\downarrow$ ) an der Frequenz  $\omega_i + (1 \text{ Dekade})$

- Für jede Phasensenkung  $\varphi(\omega_i^+) = \varphi(\omega_i^-) - x \cdot 90^\circ$  an der Eckfrequenz  $\omega_i$ :

Zeichne  $x$  Pfeile nach unten ( $\downarrow$ ) an der Frequenz  $\omega_i - (1 \text{ Dekade})$  und  $x$  Pfeile nach oben ( $\uparrow$ ) an der Frequenz  $\omega_i + (1 \text{ Dekade})$

- Feinverlauf einzeichnen:

Sei  $\varphi'(\omega^-)$ : die Steigung der Phase bis zur nächsten Frequenz mit einem oder mehreren Pfeilen, wobei  $x$  Pfeile nach oben ( $\uparrow$ ) und  $y$  Pfeile nach unten ( $\downarrow$ ) zeigen.

Die Steigung der Phase ab dieser Frequenz ist:

$$\varphi'(\omega^+) = \varphi'(\omega^-) + (x - y) \cdot 45^\circ$$

#### 4.6.5 Graphische Konstruktion von Bode-Diagramm (Kurzform)

1. Zeitkonstantenform:

$$G(j\omega) = K \cdot \frac{(j\omega)^k}{(j\omega)^l} \cdot \frac{(\tilde{T}_1 j\omega + 1) \cdot \dots \cdot (\tilde{T}_r j\omega + 1) \cdot (\tilde{T}_{r+1}^2(j\omega)^2 + 2\tilde{d}_{r+1}\tilde{T}_{r+1}j\omega + 1) \cdot \dots \cdot (\tilde{T}_m^2(j\omega)^2 + 2\tilde{d}_m\tilde{T}_m j\omega + 1)}{(T_1 j\omega + 1) \cdot \dots \cdot (T_s j\omega + 1) \cdot (T_{s+1}^2(j\omega)^2 + 2d_{s+1}T_{s+1}j\omega + 1) \cdot \dots \cdot (T_n^2(j\omega)^2 + 2d_n T_n j\omega + 1)}$$

2. Eckfrequenzen:

$$\tilde{\omega}_i = \frac{1}{|\tilde{T}_i|}, \quad \eta_i = -\frac{1}{\tilde{T}_i} \text{ (falls einfache Nullstelle)}$$

$$\omega_i = \frac{1}{|T_i|}, \quad p_i = -\frac{1}{T_i} \text{ (falls einfacher Pol)}$$

3. Amplitudengang:

$$\text{Startwert: } A(\omega_{min}) = 20 \log_{10} \left( \frac{\omega_{min}^k}{\omega_{min}^l} \cdot |K| \right) \quad [dB]$$

$$\text{Anfangssteigung: } A'(\omega_{min}) = (k - l) \cdot \frac{20dB}{\text{Dekade}}$$

Umrechnungstabelle									
$x$	0,01	0,1	0,32	0,5	1	2	3,2	10	100
$20 \log_{10}(x)$	-40	-20	$\approx -10$	$\approx -6$	0	$\approx 6$	$\approx 10$	20	40

Verlauf		
		$A'(\omega_i^+) = A'(\omega_i^-) + \dots$
Nullstelle	einfach	$20dB/\text{Dekade}$
	doppelt/konjugiert komplex	$40dB/\text{Dekade}$
Pol	einfach	$-20dB/\text{Dekade}$
	doppelt/konjugiert komplex	$-40dB/\text{Dekade}$

4. Phasengang:

Startwert	
Verstärkungsfaktor	$\varphi(\omega_{min})$
$K > 0$	$0^\circ + (k - l) \cdot 90^\circ$
$K < 0$	$-180^\circ + (k - l) \cdot 90^\circ$

Grobverlauf			
			$\varphi(\omega_i^+) = \varphi(\omega_i^-) + \dots$
Nullstelle	einfach	$\eta_i < 0$	$90^\circ$
		$\eta_i > 0$	$-90^\circ$
	doppelt/konjugiert komplex	$\Re(\eta_{i/i+1}) \leq 0$	$+180^\circ$
		$\Re(\eta_{i/i+1}) > 0$	$-180^\circ$
Pol	einfach	$p_i < 0$	$-90^\circ$
		$p_i > 0$	$90^\circ$
	doppelt/konjugiert komplex	$\Re(p_{i/i+1}) \leq 0$	$-180^\circ$
		$\Re(p_{i/i+1}) > 0$	$+180^\circ$

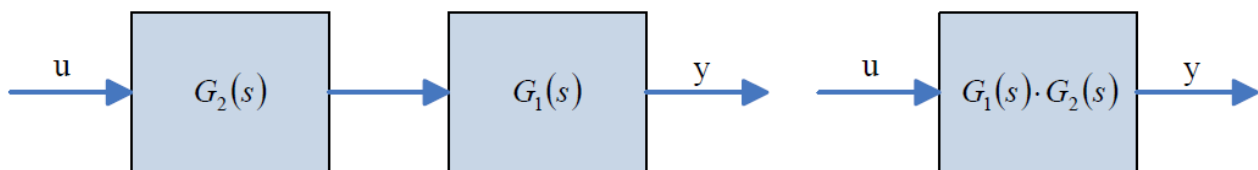
Feinverlauf				
Änderung von Grobverlauf $\varphi(\omega_i^+) = \varphi(\omega_i^-) + \dots$	Änderung bei -1 Dekade		Änderung bei +1 Dekade	
	Pfeile	$\varphi'(\omega^+) = \varphi'(\omega^-) + \dots$	Pfeile	$\varphi'(\omega^+) = \varphi'(\omega^-) + \dots$
$x \cdot 90^\circ$	$x \cdot \uparrow$	$x \cdot 45^\circ$	$x \cdot \downarrow$	$-x \cdot 45^\circ$
$-x \cdot 90^\circ$	$x \cdot \downarrow$	$-x \cdot 45^\circ$	$x \cdot \uparrow$	$x \cdot 45^\circ$

## 5 Regelkreis und Stabilität

### 5.1 Umformung von Blockschaltbildern

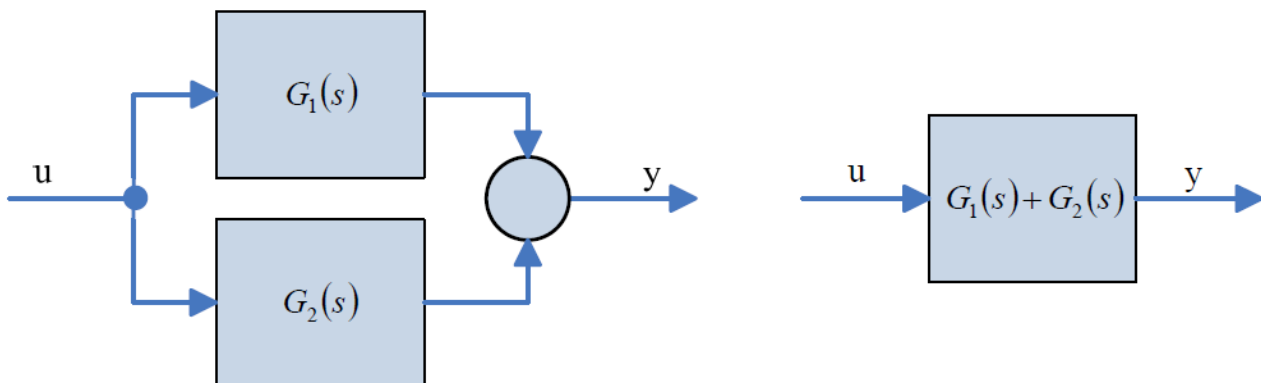
Blockschaltbilder lassen sich gemäß folgender Regeln umformen, wobei jeweils die linke und rechte Darstellung äquivalent sind.

**Serienschaltung:**



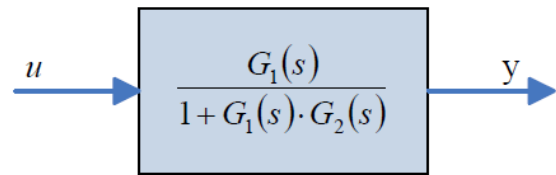
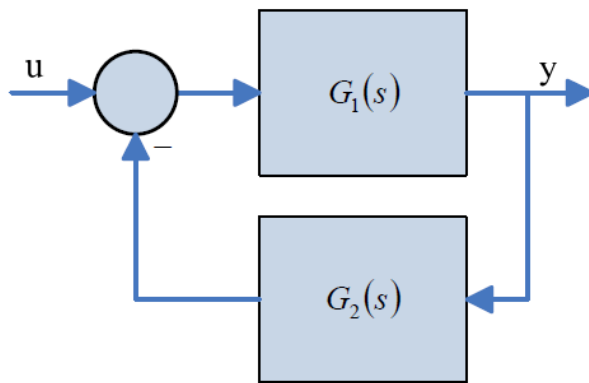
$$Y(s) = G_1(s) \cdot (G_2(s) \cdot U(s)) = (G_1(s) \cdot G_2(s)) \cdot U(s)$$

**Parallelschaltung:**



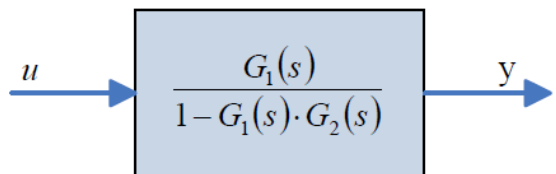
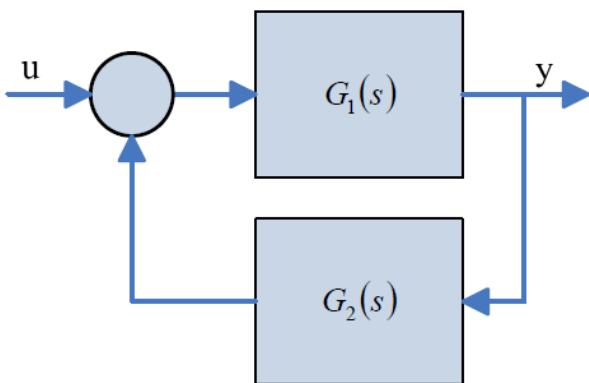
$$Y(s) = G_1(s) \cdot U(s) + G_2(s) \cdot U(s) = (G_1(s) + G_2(s)) \cdot U(s)$$

**Gegenkopplung:**



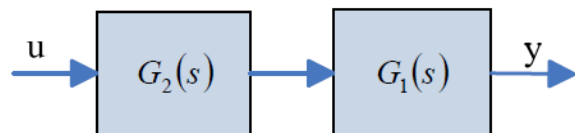
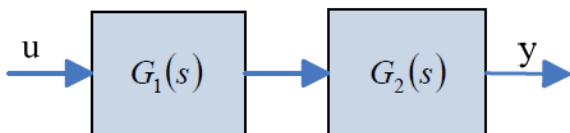
$$Y(s) = G_1(s) \cdot (U(s) - G_2(s) \cdot Y(s)) \implies Y(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s) \cdot G_2(s)} \cdot U(s)$$

**Mitkopplung:**



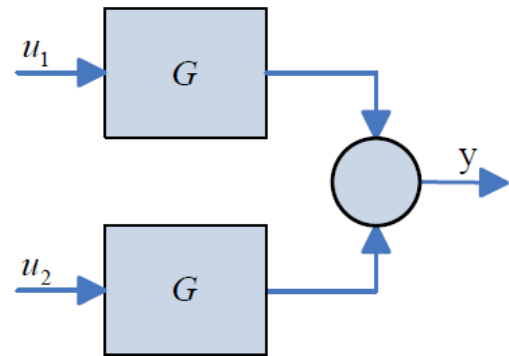
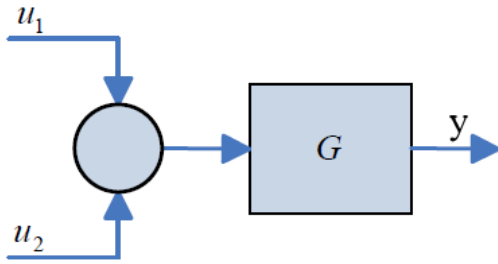
$$Y(s) = G_1(s) \cdot (U(s) + G_2(s) \cdot Y(s)) \implies Y(s) = \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s) \cdot G_2(s)} \cdot U(s)$$

**Vertauschen zweier Blöcke:**



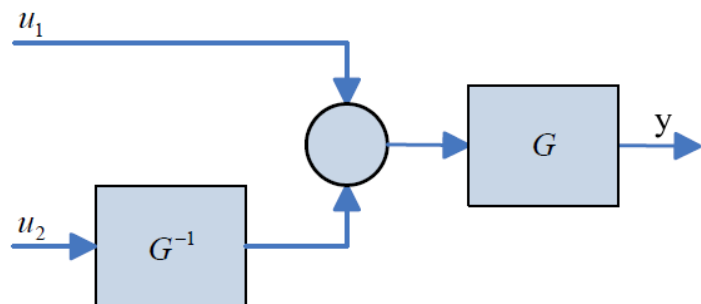
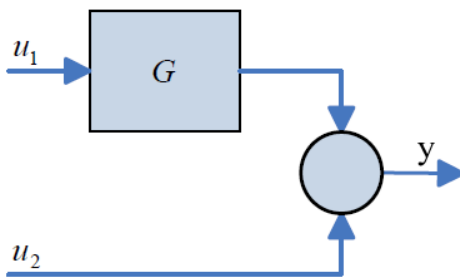
$$Y(s) = G_2(s) \cdot G_1(s) \cdot U(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot U(s)$$

**Vertauschen eines Blockes vor ein Summier-Glied:**



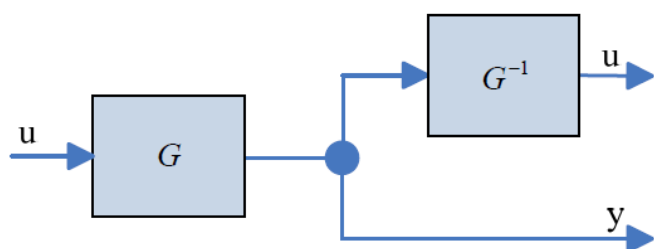
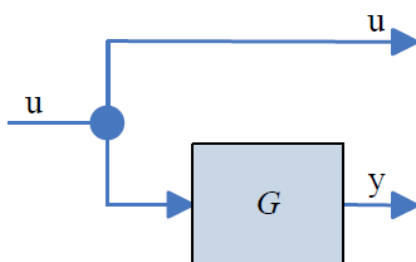
$$Y(s) = G(s) \cdot (U_1(s) + U_2(s)) = G(s) \cdot U_1(s) + G(s) \cdot U_2(s)$$

**Verlegung eines Blocks hinter ein Summier-Glied:**

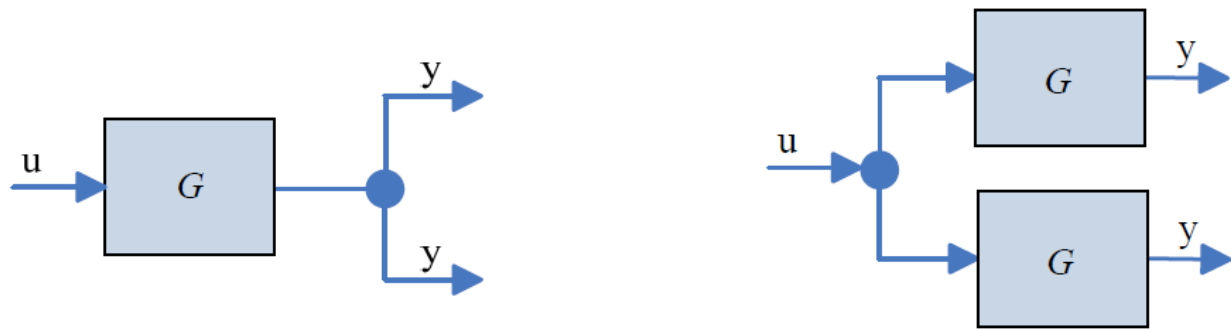


$$Y(s) = G(s) \cdot U_1(s) + U_2(s) = G(s) \cdot (U_1(s) + \frac{1}{G(s)} \cdot U_2(s))$$

**Verlegung eines Blocks vor eine Verzweigungsstelle:**

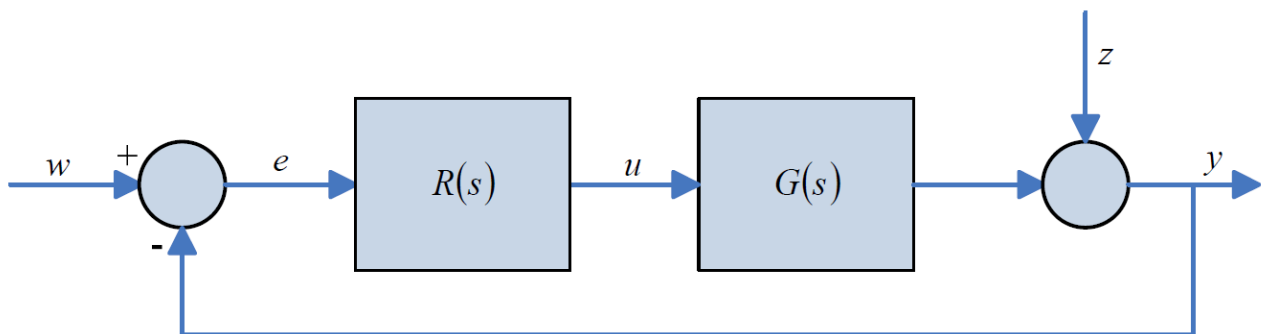


**Verlegung eines Blocks hinter eine Verzweigungsstelle:**



## 5.2 Standardregelkreis

Der Standardregelkreis ist definiert als:



mit dem Übertragungsverhalten:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{F_o(s)}{1 + F_o(s)}}_{T(s) \text{ Führungsübertragungsfunktion}} W(s) + \underbrace{\frac{1}{1 + F_o(s)}}_{S(s) \text{ Störübertragungsfunktion}} Z(s)$$

wobei  $F_o(s) = G(s)R(s)$  die Übertragungsfunktion des offenen Kreises ist.

### 5.2.1 Eigenschaften des Standardregelkreises

- Die Führungsübertragungsfunktion  $T(s)$  beschreibt den Einfluss der Führungsgröße  $w(t)$  auf die Regelgröße  $y(t)$
- Die Störübertragungsfunktion bzw. Empfindlichkeitsfunktion  $S(s)$  beschreibt den Einfluss der Störgröße  $z(t)$  auf  $y(t)$
- Es gilt:  $T(s) + S(s) = 1$
- Die Regelabweichung  $e$  ist:  $E(s) = W(s) - Y(s) = \frac{1}{1+F_o(s)}W(s) - \frac{1}{1+F_o(s)}Z(s)$
- Die Stellgröße  $u$  ist:  $U(s) = R(s)E(s) = \frac{R(s)}{1+F_o(s)}W(s) - \frac{R(s)}{1+F_o(s)}Z(s)$

## 5.3 Stabilität des Standardregelkreises

### 5.3.1 Übertragungsstabilität des Standardregelkreises

Der Standardregelkreis ist genau dann übertragungsstabil bezüglich  $S(s)$  und  $T(s)$ , wenn sämtliche Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$F_o(s) + 1 = 0$$

in der linken komplexen Halbebene liegen.

### 5.3.2 Asymptotische Stabilität des Standardregelkreises

#### Kriterium 1:

Der Standardregelkreis ist genau dann asymptotisch stabil, wenn alle Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$Z_0(s) + N_0(s) = 0$$

in der linken komplexen Halbebene liegen. Diese Lösungen sind die Systempole der Regelung.

Es gilt:

$$\begin{aligned} Z_0(s) &= Z_G(s)Z_R(s), & N_0(s) &= N_G(s)N_R(s) \\ G(s) &= \frac{Z_G(s)}{N_G(s)}, & R(s) &= \frac{Z_R(s)}{N_R(s)} \end{aligned}$$

#### Kriterium 2:

Der Standardregelkreis ist genau dann asymptotisch stabil, wenn alle Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$F_o(s) + 1 = 0$$

in der linken komplexen Halbebene liegen und alle eventuelle Pol-Nullstellenkürzungen innerhalb der Strecke ( $G(s)$ ), innerhalb des Reglers ( $R(s)$ ) und zwischen Regler und Strecke ( $G(s)R(s)$ ) ausschließlich links gelegene Pol-Nullstellenpaare betreffen.

### 5.3.3 Asymptotische Stabilität beim Reglerentwurf

Für asymptotische Stabilität der Regelung ist beim Entwurf zu beachten:

Rechts oder auf der imaginären Achse gelegene Pole und Nullstellen der Strecke dürfen durch den Regler nicht gekürzt werden.

## 5.4 Nyquist-Kriterium

### 5.4.1 Einfaches Nyquist-Kriterium

Sei  $F_o(j\omega)$  die Frequenzgangortskurve des offenen Kreises des Standardregelkreises (auch Nyquist-Ortskurve genannt) und seien die unten genannten Voraussetzungen erfüllt.

Liegt der Punkt  $-1$  links der von der in Richtung wachsender  $\omega$  durchlaufenden Frequenzgangortskurve  $F_o(j\omega)$ , so ist der Regelkreis übertragungsstabil.

#### Voraussetzungen:

1.  $F_o(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n} \cdot e^{-T_t s}$
2.  $m < n$  und  $T_t \geq 0$
3. Eines der folgenden Voraussetzungen ist erfüllt:
  - (a) Alle Pole von  $F_o(s)$  liegen in der linken komplexen Halbebene und  $\frac{b_0}{a_0} > 0$
  - (b) Ein Pol liegt in null, alle anderen Pole von  $F_o(s)$  liegen in der linken komplexen Halbebene und  $\frac{b_0}{a_1} > 0$
  - (c) Zwei Pole liegen in null, alle anderen Pole von  $F_o(s)$  liegen in der linken komplexen Halbebene und  $\frac{b_0}{a_2} > 0$

### 5.4.2 Allgemeines Nyquist-Kriterium

Sei  $F_o(j\omega)$  die Frequenzgangortskurve des offenen Kreises des Standardregelkreises und seien die unten genannten Voraussetzungen erfüllt.

Außerdem sei  $r_0$  die Anzahl der in der rechten komplexen Halbebene liegende Pole von  $F_o(s)$  und sei  $a_0$  die Anzahl der auf der imaginären Achse gelegenen Pole von  $F_o(s)$

Der Regelkreis ist genau dann übertragungsstabil, wenn die Winkeländerung  $\omega_+$  des Fahrstrahls vom Punkt  $-1$  zur Ortskurve

$$\omega_+ = r_0 \pi + a_0 \frac{\pi}{2}$$

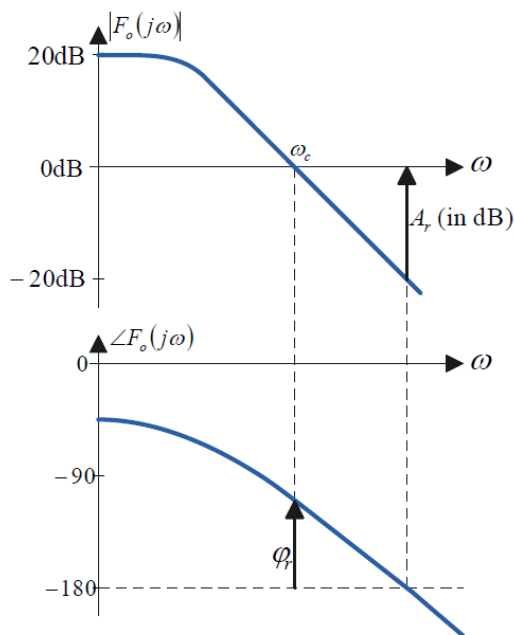
beträgt, während die Nyquist-Ortskurve  $F_o(j\omega)$  von  $\omega = 0$  bis  $\omega = \infty$  durchlaufen wird.

#### Voraussetzungen:

1.  $F_o(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n} \cdot e^{-T_t s}$
2.  $m < n$  und  $T_t \geq 0$



### 5.4.3 Vereinfachtes Nyquist-Kriterium im Bode-Diagramm



Sei  $F_o(j\omega)$  die Frequenzgangskurve des offenen Kreises des Standardregelkreises und seien die unten genannten Voraussetzungen erfüllt.  
Der Regelkreis ist übertragungsstabil, wenn

$$-180^\circ < \angle F_o(j\omega_c) < 0$$

#### Voraussetzungen:

1.  $F_o(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n} \cdot e^{-T_t s}$
2.  $m < n$  und  $T_t \geq 0$
3. Eines der folgenden Voraussetzungen ist erfüllt:
  - (a) Alle Pole von  $F_o(s)$  liegen in der linken komplexen Halbebene und  $\frac{b_0}{a_0} > 0$
  - (b) Ein Pol liegt in null, alle anderen Pole von  $F_o(s)$  liegen in der linken komplexen Halbebene und  $\frac{b_0}{a_1} > 0$
  - (c) Zwei Pole liegen in null, alle anderen Pole von  $F_o(s)$  liegen in der linken komplexen Halbebene und  $\frac{b_0}{a_2} > 0$
4. Es gibt genau eine Durchtrittsfrequenz  $\omega_c$  mit  $|F_o(j\omega_c)| = 1 = 0 \text{ dB}$ .

#### 5.4.3.1 Phasenreserve

Die Phasenreserve  $\varphi_r$  ist definiert als:

$$\varphi_r = \angle F_o(j\omega_c) + \pi$$

Ist  $\varphi_r > 0$ , so ist der Regelkreis übertragungsstabil.

#### 5.4.3.2 Amplitudenreserve

Sei  $\omega_a$  die Frequenz, bei der der Phasengang gleich  $-180^\circ$  ist, d.h.  $\angle F_o(j\omega_a) = -180^\circ$

Die Amplitudenreserve ist definiert als:

$$A_r = -|F_o(j\omega_a)|$$

Ist  $A_r > 1$ , so ist der Regelkreis stabil

## 5.5 Robustheit der Stabilität

$\varphi_r$  und  $A_r$  werden häufig als Maße der Robustheit der Stabilität gegenüber Fehlern oder Veränderungen des Modells  $F_o(s)$  verwendet. Faustregel für gute Robustheit:

$$\varphi_r > 60^\circ \quad \text{und/oder} \quad A_r > 2$$

Für gute Robustheit der Stabilität soll der kleinste Abstand

$$|d|_{\min} = \min_{\omega} |F_o(j\omega) + 1|$$

der Nyquist-Ortskurve vom Punkt  $-1$  möglichst groß sein, Faustregel:

$$|d|_{\min} \geq 0,5$$

## 6 Reglerentwurf

### 6.1 Anforderungen an das Regelverhalten

#### 1. Dynamisches Verhalten:

- Es sind gleichzeitig Schnelligkeit und gute Dämpfung des Einschwingverhaltens (z.B. nach einer Änderung von  $w$  oder  $z$  anzustreben)
- Gleichzeitige Schnelligkeit und gute Dämpfung sind gegenläufig  $\rightarrow$  Kompromiss wird angestrebt
- Hohe Dynamik und Robustheit der Stabilität sind gegenläufig

#### 2. Stationäre Genauigkeit:

- Die Regelabweichung  $e(t)$  soll für konstante Störungen als auch für konstante Führungsgrößen für große  $t$  gegen null gehen, d.h.
  - konstante Störungen sollen stationär ohne Wirkung auf  $y$  sein (Störkompensation)
  - $y$  soll sich stationär auf den konstanten Wert  $w$  der Führungsgröße einstellen (Sollwertfolge)

#### 3. Robuste Stabilität:

- Die zu fordernde Stabilität einer Regelung muss robust gegen Fehler und langsame Veränderungen des Streckenmodells sein. Robustheitsmaße sind u.a.:
  - Phasenreserve
  - Amplitudenreserve
  - kleinster Abstand der Nyquist-Ortskurve vom Punkt  $-1$
  - Robustheit der Regelgüte

#### 4. Realisierbarkeit des Reglers:

- Rationale Übertragungsglieder sind realisierbar, wenn für ihre Übertragungsfunktion gilt: Zählergrad  $\leq$  Nennergrad

#### 5. Einhaltung von Begrenzungen:

- Systemgrößen dürfen nicht an ihre technisch bedingten Grenzen stoßen.
- Häufig betroffen sind die Stellgrößen (z.B: Einhalten eines Maximalwerts)

### 6.2 Dynamik, Robustheit der Stabilität und Grenzen der Regelgüte

Sei  $d = F_o(j\omega) + 1$  der Fahrstrahl der Nyquist-Ortskurve  $F_o(j\omega)$  (welche dem kritischen Punkt  $-1$  am nächsten kommt, wo  $d$  den kleinsten Betrag hat).

Für die Störübertragungsfunktion  $S(s)$  folgt:

$$|S(s)| = \begin{cases} < 1 & \text{für } |d| > 1 \\ = 1 & \text{für } |d| = 1 \\ > 1 & \text{für } |d| < 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Störungen werden durch die Regelung gemindert} \\ \\ \text{Störungen werden durch die Regelung verstärkt} \end{array}$$

### 6.2.1 Bode-Theorem

Sei der geschlossene Regelkreis übertragungsstabil,  
 sei Zählergrad von  $F_o(s) + 2 \leq$  Nennergrad von  $F_o(s)$  und  
 sei  $p_i$  die in der rechten komplexen Halbebene liegende Pole von  $F_o(s)$   
 Es folgt:

$$\int_0^\infty \ln |S(j\omega)| d\omega = \begin{cases} 0, & \text{sofern } F_o(s) \text{ stabil} \\ \pi \sum_i \Re(p_i), & \text{sofern } F_o(s) \text{ instabil} \end{cases}$$

#### Eigenschaften:

- Die Summe der Flächen, wo  $|S(s)| < 1$  gleicht der Summe der Flächen, wo  $|S(s)| > 1$ , sofern  $F_o(s)$  stabil ist.
- Jede Verbesserung des Störverhaltens in einem gewissen Frequenzbereich muss mit einer Verschlechterung in einem anderen Frequenzbereich bezahlt werden.
- Die störungsmindernde Wirkung einer Regelung findet vor allem bei niedrigen Frequenzen statt und endet im Wesentlichen beim kleinsten  $\omega$  für das gilt:  $|S(j\omega)| = 1$ .

#### Voraussetzungen für gute Robustheit der Stabilität und gute Dämpfung des Einschwingverhaltens

- Die Ortskurve  $F_o(j\omega)$  soll dem Punkt  $-1$  nicht sehr nahe kommen bzw. es soll gelten  $|S(j\omega)| < 2 = 6dB, \forall \omega$ .
- Oberhalb von  $\omega_1$  soll  $F_o(j\omega)$  sehr klein werden, wobei  $\omega_1$  das kleinste  $\omega$  ist, für das  $|S(j\omega)| = 1$  ist.

## 6.3 Stationäres Verhalten

- Für stationäre Genauigkeit muss zwischen Soll-Istwertvergleich und Störeingriff ein Integrierglied enthalten sein. Andernfalls ist die stationäre Regelabweichung  $e_{stat} \neq 0$ , kann aber durch Vergrößern von der Verstärkung  $V$  kleiner gemacht werden.
- Ein Erhöhen der Verstärkung  $V$  verschlechtert sich die Robustheit der Stabilität und kann Instabilität bewirken.
- Ein Einfügen eines I-Gliedes  $\frac{K_I}{s}$  erschwert die Stabilisierung eines Regelkreises und macht ihn langsamer.

## 6.4 Stationäre Genauigkeit

### 6.4.1 Stationäre Genauigkeit bezüglich des Führungsverhalten

Ein Regelkreis ist stationär genau bezüglich des Führungsverhaltens genau dann, wenn

- der geschlossene Regelkreis stabil ist
- und eine der folgenden (äquivalenten) Voraussetzungen erfüllt ist:
  - Ein freies I-Glied ist im offenen Kreis vorhanden
  - Die Übertragungsfunktion des offenen Kreises besitzt einen Pol im Ursprung
  - Die Führungsübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises hat eine stationäre Verstärkung von 1

Es folgt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \text{ bzw. } \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \kappa, \quad \text{wobei } w(t) = \kappa \sigma(t), \kappa \neq 0$$

### 6.4.2 Stationäre Genauigkeit bezüglich des Störverhaltens

Ein Regelkreis ist stationär genau bezüglich des Führungsverhaltens genau dann, wenn

- stationär genau bezüglich des Führungsverhalten ist
- und eine der folgenden (äquivalenten) Voraussetzungen erfüllt ist:
  - Ein freies I-Glied ist im offenen Kreis zwischen Soll-/Istwert-Vergleich und Störeingriff vorhanden
  - Die Störübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises besitzt eine Nullstelle im Ursprung
  - Die Störübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises hat eine stationäre Verstärkung von 0

Es folgt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \text{ bzw. } \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \kappa, \quad \text{wobei } w(t) = \kappa \sigma(t), \kappa \neq 0 \text{ und } z(t) = \zeta \sigma(t), \zeta \neq 0$$

## 6.5 Grundtypen linearer Regler

Sei im folgenden die Regelabweichung  $e(t)$  die Eingangsgröße der Regler und die Stellgröße  $u(t)$  die Ausgangsgröße der Regler im Zeitbereich bzw.

$R(s)$  die komplexe Übertragungsfunktion des Reglers.

### 6.5.1 P-Regler

**Definition:**

$$\text{Zeitbereich: } u(t) = K_R e(t)$$

$$\text{Bildbereich: } R(s) = K_R$$

**Wahl der Variablen:**

$K_R$  : wird so gewählt, dass Phasen- und Amplitudenreserve groß genug sind, z.B:  $A_r > 2, \varphi_r > 60^\circ$

**Vorteile/Nachteile:**

- Vorteile:
  - gute Dynamik bei einfachem Regleraufbau
- Nachteile:
  - keine stationäre Genauigkeit (außer wenn  $G(s)$  ein I-Glied enthält und die Störung erst hinter dem I-Glied eingreift)

### 6.5.2 I-Regler

**Definition:**

$$\text{Zeitbereich: } u(t) = K_I \int_0^t e(\tau) d\tau$$

$$\text{Bildbereich: } R(s) = \frac{K_I}{s}$$

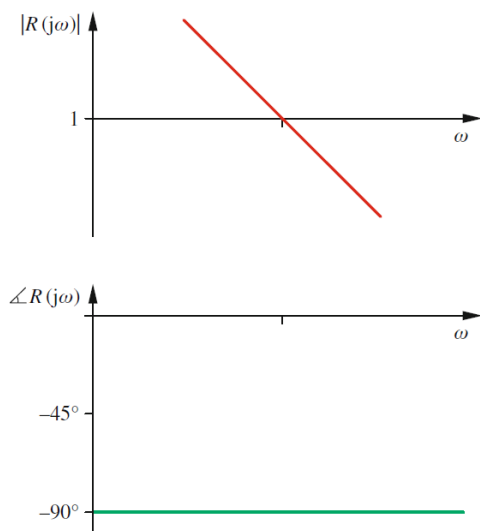
**Wahl der Variablen:**

$K_I$  : wird so gewählt, dass Phasen- und Amplitudenreserve groß genug sind, z.B:  $A_r > 2, \varphi_r > 60^\circ$

**Vorteile/Nachteile:**

- Vorteile:
  - sichert stationäre Genauigkeit
- Nachteile:
  - tendenziell langsame Dynamik der Regelung

**Bode-Diagramm:**



### 6.5.3 PI-Regler

#### Definition:

Zeitbereich:  $u(t) = K_R e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau$

Bildbereich:  $R(s) = \frac{K_I}{s}(1 + T_R s) = \frac{K_I}{s} + K_R$

#### Wahl der Variablen:

$$K_R = K_I \cdot T_R$$

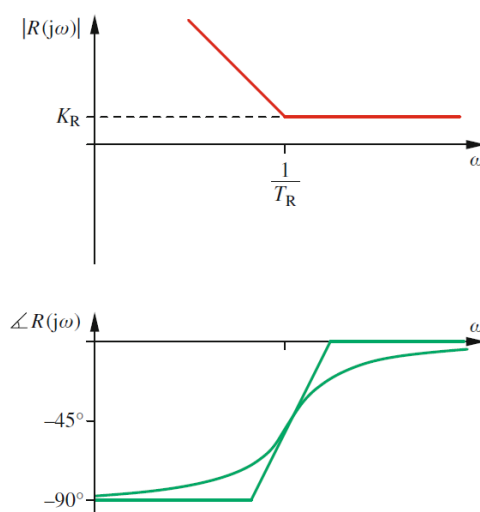
$T_R$  = größte Nennerzeitkonstante der Strecke

$K_I$  : wird so gewählt, dass Phasen- und Amplitudenreserve groß genug sind, z.B.:  $A_r > 2, \varphi_r > 60^\circ$

#### Vorteile/Nachteile:

- Vorteile:
  - schneller als I-Regler
  - gesicherte stationäre Genauigkeit

#### Bode-Diagramm:



### 6.5.4 Idealer PD-Regler

**Definition:**

Zeitbereich:  $u(t) = K_R(e(t) + T_R \dot{e}(t)) = K_R e(t) + K_D \dot{e}(t)$

Bildbereich:  $R(s) = K_R(1 + T_R s) = K_R + K_D s$

**Wahl der Variablen:**

$$K_D = K_R + T_R$$

**Vorteile/Nachteile:**

- Vorteile:
  - hohe Dynamik der Regelung erreichbar
- Nachteile:
  - Verstärkung der höherfrequenten Störwelligkeit in  $e(t)$
  - D-Anteil kann die Stellgröße in die Begrenzung treiben

### 6.5.5 Realer PD-Regler

**Definition:**

Bildbereich:  $R(s) = K_R \frac{1+T_R s}{1+T_N s}, \quad T_N < T_R$

**Wahl der Variablen:**

$T_R$  = größte Streckenzeitkonstante

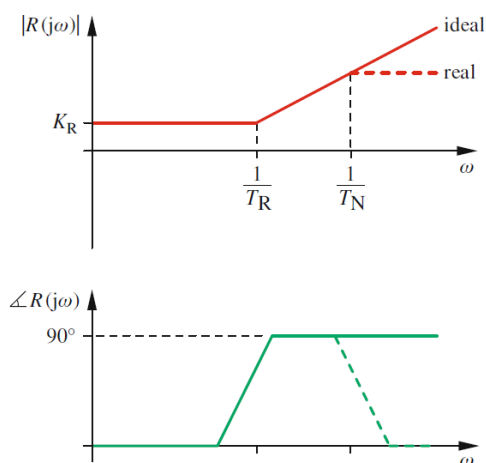
$K_R$  : wird so gewählt, dass Phasen- und Amplitudenreserve groß genug sind, z.B:  $A_r > 2, \varphi_r > 60^\circ$

$$T_N : \frac{T_R}{50} < T_N < \frac{T_R}{5}$$

**Vorteile/Nachteile:**

- Vorteile:
  - hohe Dynamik der Regelung erreichbar
- Nachteile:
  - D-Anteil kann Messstörungen verstärken
  - D-Anteil kann die Stellgröße in die Begrenzung treiben

**Bode-Diagramm:**



### 6.5.6 Idealer PID-Regler

**Definition:**

$$\text{Zeitbereich: } u(t) = K_R e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_I \cdot T_{R1} \cdot T_{R2} \cdot \dot{e}(t)$$

$$\begin{aligned} \text{Bildbereich: } R(s) &= \underbrace{K_I(T_{R1} + T_{R2})}_{\text{P-Glied}} + \underbrace{\frac{K_I}{s}}_{\text{I-Glied}} + \underbrace{K_I \cdot T_{R1} \cdot T_{R2} \cdot s}_{\text{D-Glied}} \\ &= K_R \left( 1 + \frac{1}{T_I \cdot s} + T_D s \right) \\ &= \frac{K_I}{s} (1 + T_{R1} \cdot s)(1 + T_{R2} \cdot s) \end{aligned}$$

**Wahl der Variablen:**

$$K_R = K_I(T_{R1} + T_{R2})$$

$$T_I = \frac{K_R}{K_I}$$

$$T_D = \frac{K_I \cdot T_{R1} \cdot T_{R2}}{K_R}$$

### 6.5.7 Realer PID-Regler

**Definition:**

$$\text{Bildbereich: } R(s) = \frac{K_I(1+T_{R1} \cdot s)(1+T_{R2} \cdot s)}{s(1+T_N \cdot s)}$$

**Wahl der Variablen:**

$T_{R1}$  = größte Streckenzeitkonstante

$T_{R2}$  = zweitgrößte Streckenzeitkonstante

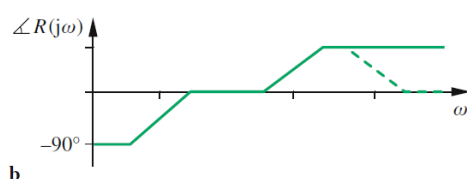
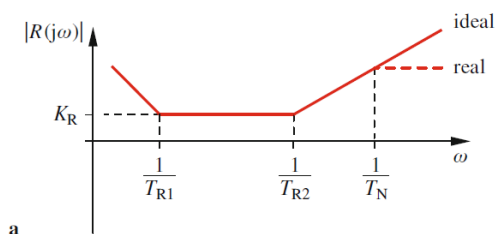
$K_I$  : wird so gewählt, dass Phasen- und Amplitudenreserve groß genug sind, z.B.:  $A_r > 2, \varphi_r > 60^\circ$

$$T_N : \frac{T_R}{50} < T_N < \frac{T_R}{5}$$

**Vorteile/Nachteile:**

- Vorteile:
  - hohe Dynamik
  - stationäre Genauigkeit
- Nachteile:
  - D-Anteil kann Messstörungen verstärken
  - D-Anteil kann die Stellgröße in die Begrenzung treiben

**Bode-Diagramm:**



### 6.5.8 Einstellregeln nach Ziegler und Nichols

Die Regelstrecke weise rein verzögerndes Verhalten auf (PTn-Glieder mit reellen Polen, Totzeitglieder) und sei  $K_{R,krit}$  der Wert für  $K_R$  ab dem Dauerschwingungen auftreten, wenn der Regelkreis zunächst nur mit einem P-Regler mit  $R(s) = K_R$  betrieben wird und sei  $T_{krit}$  die zugehörige Schwingungsdauer.

Den gewählten Regler stellt man nach folgender Tabelle ein:

	P-Regler	PI-Regler	PID-Regler
$K_R$	$0,5 \cdot K_{R,krit}$	$0,45 \cdot K_{R,krit}$	$0,6 \cdot K_{R,krit}$
$T_I$		$0,85 \cdot T_{krit}$	$0,5 \cdot T_{krit}$
$T_D$			$0,12 \cdot T_{krit}$

## 6.6 Regelungsentwurf im Bodediagramm

Sei  $R_{alt}(s)$  der Regler eines Systems.

Weitere Freiheitsgrade zur Gestaltung von Reglern erhält man durch sukzessives Hinzufügen von phasenhebenden oder phasenabsenkenden Korrekturgliedern  $R_{kor}(s)$ .

Der neue Regler ist dann:

$$R_{neu}(s) = R_{alt}(s) \cdot R_{kor}(s)$$

### 6.6.1 Phasenhebendes Glied (Lead-Glied)

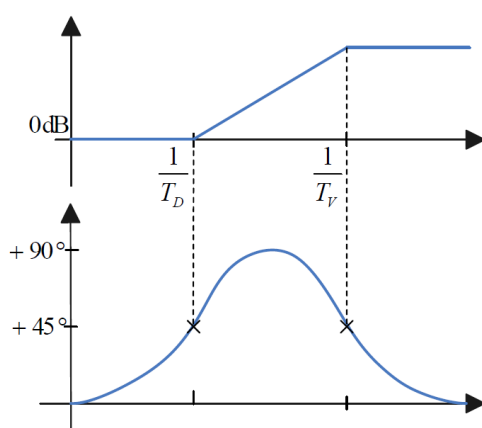
Die Übertragungsfunktion des phasenhebenden Glieds ist definiert als:

$$R_{kor}(s) = \frac{1 + T_D s}{1 + T_V s}, \quad T_D > T_V$$

**Eigenschaften:**

- Das Korrekturglied kann die Durchtrittsfrequenz und/oder die Phasenreserve der Regelung vergrößern.
- Es sind höhere Stellgrößenauslässe zu erwarten
- Das Korrekturglied hat die Übertragungsfunktion eines realen PD-Reglers

**Bode-Diagramm:**



### 6.6.2 Phasenabsenkendes Glied (Lag-Glied)

Die Übertragungsfunktion des phasenabsenkenden Glieds ist definiert als:

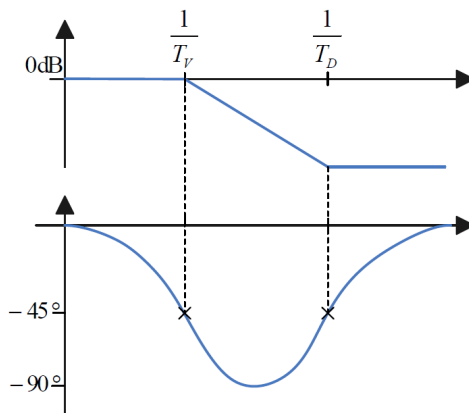
$$R_{kor}(s) = \frac{1 + T_D s}{1 + T_V s}, \quad T_D < T_V$$

**Eigenschaften:**



- Wird typischerweise bei Frequenzen deutlich unterhalb der Durchtrittsfrequenz eingesetzt.
- Ermöglicht im offenen Kreis eine Erhöhung der Verstärkung niedriger Frequenzen ohne die Robustheit ungünstig zu verändern

### Bode-Diagramm:



## 6.7 Kompensationsregler

Sei ein beliebiges Übertragungsverhalten für den geschlossenen Regelkreis vorgegeben. Durch Kompensation kann der passende Regler ermittelt werden.

### Voraussetzungen:

Sei ein geschlossener Regelkreis gegeben mit zusätzlichem Störeingriff  $z_2$  vor der Strecke  $G(s)$  und sei  $T(s) = \frac{G(s)R(s)}{1+G(s)R(s)}$  die zugehörige Führungsübertragungsfunktion, sei  $S(s) = \frac{1}{1+G(s)R(s)}$  die zugehörige Störübertragungsfunktion und seien  $F_{z_2,y}(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)R(s)}$  und  $F_{w,u}(s) = \frac{R(s)}{1+G(s)R(s)}$  zwei weitere zugehörige Übertragungsfunktionen. Für die Stabilität der Regelung müssen allesamt stabil sein.

### 6.7.1 Vorgabe der Führungsübertragungsfunktion $T(s)$

#### Realisierbarkeit von $R(s)$ :

Der Regler  $R(s)$  ist realisierbar, wenn bei der Vorgabe von  $T(s)$  gilt:

$$\text{Nennergrad}(T) - \text{Zählergrad}(T) \geq \text{Nennergrad}(G) - \text{Zählergrad}(G)$$

#### Stationäre Genauigkeit:

Sei stationäre Genauigkeit vorausgesetzt ( $T(0) = \frac{Z_T(0)}{N_T(0)} = 1$ ), dann erhält  $R(s)$  einen Pol in null (außer die Strecke besitzt bereits einen Pol in null).

#### Stabilität:

Für Stabilität der vier Übertragungsfunktionen ( $T(s), S(s), F_{z_2,y}(s), F_{w,u}(s)$ ) müssen alle Pole von  $T$  in der linken komplexen Halbebene liegen.

- Für die Stabilität von  $F_{w,u}(s) = \frac{T(s)}{G(s)}$  müssen eventuell vorhandene rechte gelegene Nullstellen von  $G(s)$  gleichzeitig Zählernullstellen von  $T(s)$  sein.
- Für die Stabilität von  $F_{z_2,y}(s) = \frac{T(s)}{R(s)}$  liegt es nahe die Strecke  $G(s)$  als stabil vorauszusetzen.

#### Definition des Reglers:

Sei  $G(s) = \frac{Z_G(s)}{N_G(s)}$  und

sei  $T(s) = \frac{Z_T(s)}{N_T(s)}$

Der Regler  $R(s)$  lässt sich berechnen gemäß:

$$R(s) = \frac{T(s)}{G(s)(1 - T(s))} = \frac{Z_T N_G}{Z_G (N_T - Z_T)}$$

### 6.7.2 Vorgabe der Störübertragungsfunktion $S(s)$

#### Realisierbarkeit von $R(s)$ :

Für die Realisierbarkeit von  $R(s)$  ist  $S(s)$  anzusetzen als:

$$S(s) = \frac{s^q + a_{q-1}s^{q-1} + \dots + a_{q-n+m}s^{q-n+m} + b_{q-n+m-1}s^{q-n+m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^q + a_{q-1}s^{q-1} + \dots + a_1s + a_0}, \quad q \geq n - m$$

**Stationäre Genauigkeit:** Für stationäre Genauigkeit ist  $b_0 = 0$  zu wählen

#### Störübertragungsfunktion minimaler Ordnung

Die Störübertragungsfunktion minimaler Ordnung ( $q = n - m$ ) mit stationärer Genauigkeit ist:

$$S(s) = \frac{s^{n-m} + a_{n-m-1}s^{n-m-1} + \dots + a_1s}{s^{n-m} + a_{n-m-1}s^{n-m-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

#### Stabilität:

Für die Stabilität der Regelung müssen  $Z_s$  und  $N_s$  ( $S(s) = \frac{Z_s(s)}{N_s(s)}$ ) so gewählt werden, dass eventuell vorhandene rechts gelegene Pole und Nullstellen der Strecke sich herauskürzen.

#### Definition des Reglers:

Sei  $G(s) = \frac{Z_G(s)}{N_G(s)}$  und

sei  $S(s) = \frac{Z_S(s)}{N_S(s)}$

Der Regler  $R(s)$  lässt sich berechnen gemäß:

$$R(s) = \frac{1 - S(s)}{G(s)S(s)} = \frac{(N_S - Z_S)N_G}{Z_G Z_S}$$

### 6.7.3 Grenzen der Kompensationsregelung

Als Indikator für eine zu schnell eingestellte Regelung dient die Übertragungsfunktion von der Störung  $z$  auf die Stellgröße  $u$ :

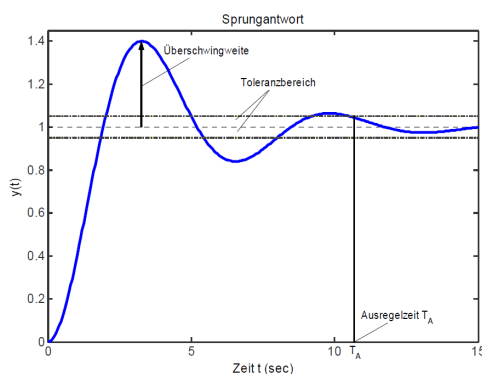
$$F_{zu}(s) = \frac{U(s)}{Z(s)} = -\frac{R(s)}{1 + R(s)G(s)}$$

Weist sie starke Überhöhungen auf, so ist mit hohen Stellgrößenausschlägen zu rechnen.

## 6.8 Gütekriterien und optimale lineare Regelung

### 6.8.1 Kennwerte der Sprungantwort

- Überschwingweite: soll möglichst gering
- Ausregelzeit:
  - Zeit, die bis zum entgültigen Eintreten der Sprungantwort in einem  $\pm 5\%$ -Toleranzbereich um den stationären Endwert verstreicht.
  - soll möglichst kurz sein



## 6.8.2 Integralkriterien im Zeitbereich

Die Integralkriterien bewerten den gesamten Verlauf der Regelabweichung  $e(t)$  bei sprungförmiger Änderung der Führungsgröße.

### 6.8.2.1 Betragsregelfläche (IAE, Integral of Absolute Error)

$$\int_0^{\infty} |e(t)| dt$$

Ein kleiner Wert des Integrals bedeutet einen kleinen mittleren Regelfehler.

### 6.8.2.2 Zeitgewichtete Betragsregelfläche (ITAE, Integral of Time weighted Absolute Error)

$$\int_0^{\infty} t|e(t)| dt$$

Der Regelfehler wird für kleine Zeiten schwächer gewichtet als für große.

### 6.8.2.3 Quadratische Regelfläche (ISE, Integral of Squared Error)

$$\int_0^{\infty} e^2(t) dt$$

Hier gehen große Regelabweichungen besonders stark ein.

### 6.8.2.4 Integralkriterium mit Berücksichtigung des Stellgrößenverlaufs

$$\int_0^{\infty} (e^2(t) + qu^2(t)) dt$$

wobei  $q$  eine positive reelle vorzugebene Konstante ist.

Größere Werte für  $q$  verringern die Stellgrößenausschläge und verbessern die Robustheit der Stabilität.

Kleinere Werte für  $q$  erhöhen die Dynamik der Regelung.

## 7 Erweiterte Regelstrukturen und Zustandsregelung

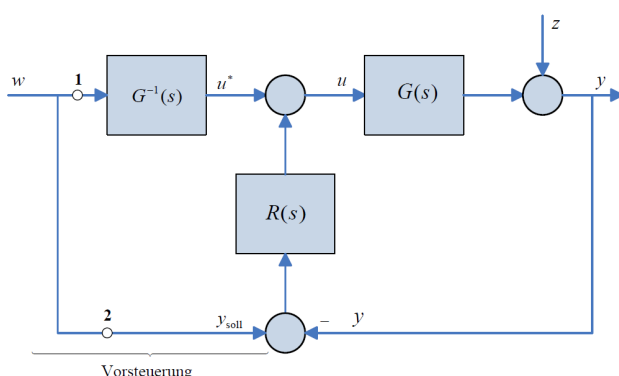
### 7.1 Kompensation von Aktor- und Sensorkennlinien

- **Problem:** Aktoren und Sensoren eines Regelkreises weisen häufig ein-eindeutige nichtlineare Kennlinien auf.
- **Lösung:** Vor- bzw. Nachschalten der inversen Kennlinien  
→ Lineares Übertragungsverhalten (je ein P-Glied mit Verstärkung eins)

### 7.2 Zwei-Freiheitsgrade-Regelung

**Grundsatz:**

- Regelkreise sollen vorrangig auf gutes Störverhalten und Robustheit der Stabilität ausgelegt werden. Das Führungsverhalten kann unabhängig durch eine Steuereinrichtung (Vorsteuerung) manipuliert werden.



**Verhalten der Regelung:**

- Keine Störung ( $z = 0$ ) und variable Führungsgröße  $w$ :
  - $e = w - y = 0$  (Regler bleibt inaktiv)
  - $Y(s) = G(s)G^{-1}(s)W(s) = W(s)$  (ideales Führungsverhalten)
- $w = 0$  und  $z(t) \neq 0$ :
  - Steuereinrichtung bleibt ohne Einfluss.

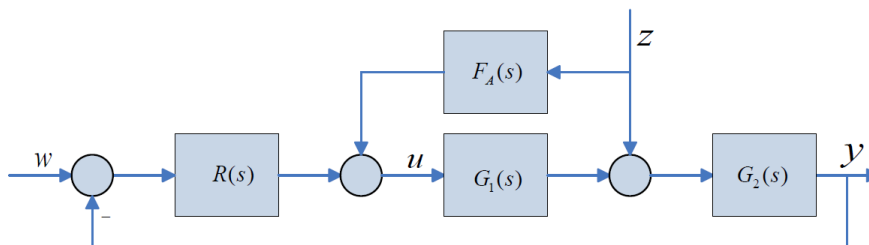
**Sonderfälle:**

- Führungsgröße ist nicht beeinflussbar:
  - Einfügen je eines PT $n$ -Glieds bei 1 und 2 mit  

$$V(s) = G_{PTn}(s) = \frac{1}{(1+Ts)^n}$$
  - $n$  mindestens so groß wählen, dass  $G^{-1}(s)G_{PTn}(s)$  realisierbar ist.
  - Führungsverhalten nicht mehr ideal
- $G(s)$  besitzt eine rechts gelegene Nullstelle  $\eta$ :
  - Einfügen je eines Glieds bei 1 und 2 mit  

$$V(s) = \frac{1 - \frac{\eta}{s}}{1 + Ts}$$
- $G(s)$  enthält eine Totzeit  $T_t$ :
  - Einfügen je eines Glieds bei 1 und 2 mit  

$$V(s) = e^{-T_t s}$$
- Für alle Fälle gilt:
  - Führungsübertragungsverhalten ist:  $V(s)$
  - $Y(s) = V(s) \cdot W(s) + \frac{1}{1+G(s)R(s)} Z(s)$

**7.3 Störgrößenaufschaltung**

$$Y(s) = \frac{G_2(G_1 F_A + 1)}{1 + G_2 G_1 R} Z(s)$$

**Ideale Störgrößenaufschaltung:**

$$F_A(s) = -\frac{1}{G_1(s)}, \quad \text{realisierbar, falls Zählergrad} < \text{Nennergrad}$$

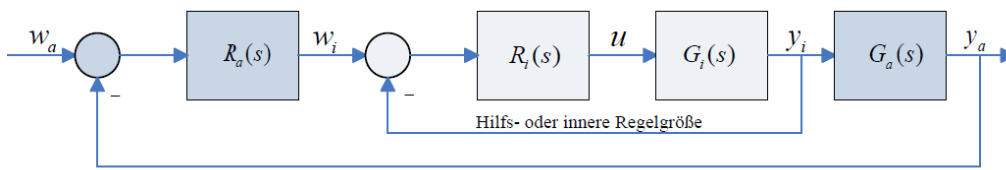
**Reale Störgrößenaufschaltung:**

$$F_A(s) = -\frac{1}{G_1(s)} \cdot \underbrace{\frac{1}{(1+Ts)^n}}_{\text{PTn-Glied}}$$

**Statische Störgrößenaufschaltung:**

$$F_A(s) = -\frac{1}{G_1(0)}$$

## 7.4 Kaskadenregelung



### Ziel:

- Schnelleres Reagieren auf Störungen in der inneren Schleife durch Verwenden einer zusätzlichen verfügbaren Messgröße

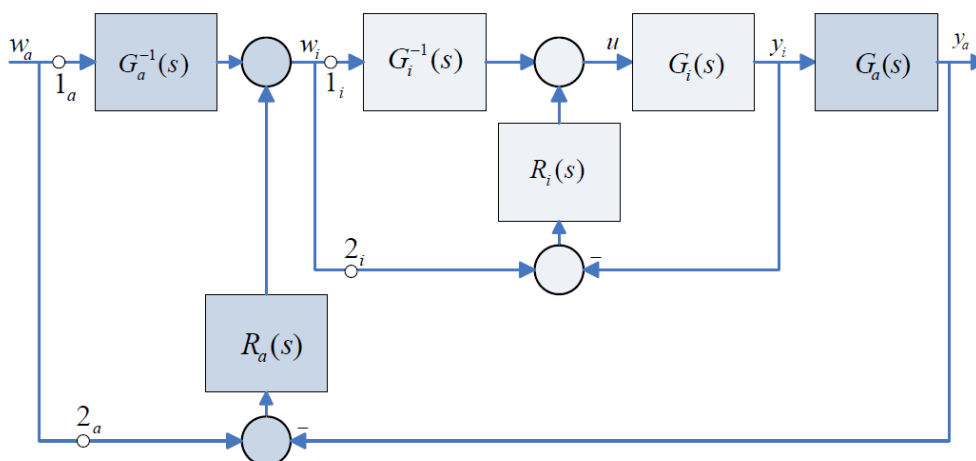
### Entwurf:

1. Entwurf eines Reglers  $R_i(s)$  für die Regelstrecke  $G_i(s)$ , sodass ein günstiges Störverhalten von  $y_i$  bei robuster Stabilität eintritt.  
Die Führungsübertragungsfunktion ist:

$$T_i(s) = \frac{Y_i(s)}{W_i(s)} = \frac{G_i R_i}{1 + G_i R_i}$$

2. Innere Schleife wird mit  $G_a(s)$  zu der äußeren Schleife  $\bar{G}_a(s) = T_i(s)G_a(s)$
3. Entwurf eines Reglers  $R_a(s)$  für die Regelstrecke  $\bar{G}_a(s)$ , sodass ein günstiges Störverhalten von  $y_a$  mit zumeist stationärer Genauigkeit eintritt.

## 7.5 Kaskade aus Zwei-Freiheitsgrade-Regelung



### Ziel:

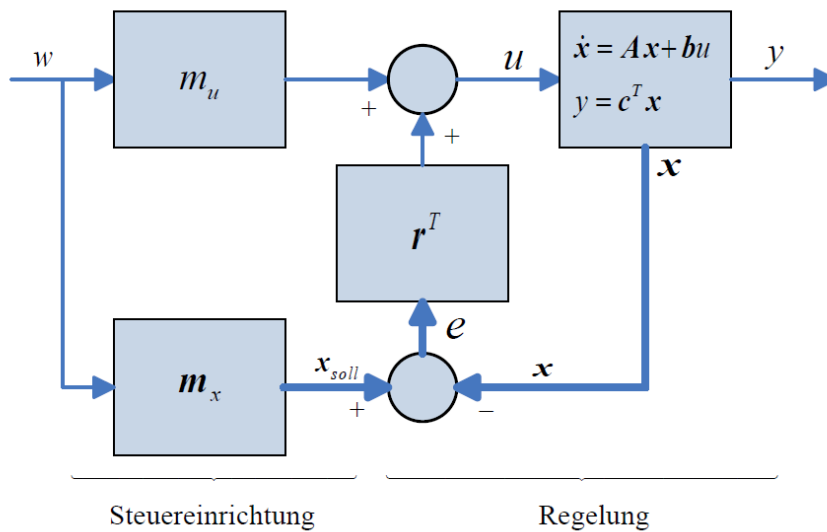
- Kombination der Vorteile der Kaskadenregelung und der Zwei-Freiheitsgrade-Regelung

### Eigenschaften:

Bezeichnung	Var.	Beschreibung
Regler (innere Schleife)	$R_i$	Wird für gutes Störverhalten der Strecke $G_i$ ausgelegt.
Vorsteuerung (innere Schleife)	$G_i^{-1}$	Sorgt für ideales Führungsverhalten $T_i(s) = \frac{Y_i(s)}{W_i(s)} = 1$ der inneren Schleife
Regler (äußere Schleife)	$R_a$	Wird für gutes Störverhalten der Strecke $G_a$ ausgelegt
Vorsteuerung (äußere Schleife)	$G_a^{-1}$	Sorgt für ideales Führungsverhalten der äußeren Schleife

## 7.6 Zustandsregelung

### 7.6.1 Konstante Zustandsrückführung und Vorsteuerung



Sei die Strecke in Zustandsdarstellung.

#### Formeln

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$$

$$y(t) = c^T x(t)$$

$$u(t) = r^T e(t) + m_u w(t) = r^T (m_x w(t) - x(t)) + m_u w(t)$$

$$G_{wy}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = c^T (sI - A_r)^{-1} b_r \quad (\text{Komplexe Übertragungsfunktion:})$$

#### Variablen

Bezeichnung	Var.
P-Glied Verstärkung	$m_u \in \mathbb{R}$
-	$m_x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$
Zustands-Sollverlauf	$x_{soll}(t) = m_x w(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$
vektorielle Regelabweichung	$e(t) = \begin{bmatrix} e_1(t) \\ \vdots \\ e_n(t) \end{bmatrix} = x_{soll}(t) - x(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$
Faktoren	$r^T = \begin{bmatrix} r_1 & \dots & r_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$
Systemordnung	$n$ (Zahl der Elemente von $x$ )

#### Anforderungen

##### 1. Anforderung:

Im stationären Fall (d.h. im eingeschwungenen Zustand mit  $\dot{x} = 0$ ) soll die Regelgröße  $y$  den Sollwert  $w$  annehmen, also  $y = w$ , und die vektorielle Regelabweichung  $e = x_{soll} - x$  soll null werden, also  $x = x_{soll}$

Es folgt:

$$\begin{bmatrix} A & b \\ c^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_x \\ m_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

##### 2. Anforderung:

Das dynamische Verhalten der Regelung soll asymptotisch stabil sein und eine gewünschte Schnelligkeit und Dämpfung

aufweisen.

Es folgt:

$$\dot{x}(t) = (A - br^T)x(t)$$

Für asymptotische Stabilität müssen die Eigenwerte  $p_1, \dots, p_n$  der Matrix  $A - br^T$  (Regelungseigenwerte) in der linken komplexen Halbebene liegen.

Entwurf:

1. Aufstellen des charakteristischen Polynoms (in Abh. von  $r^T$  und  $s$ ):  
 $\det(sI - A + br^T) = s^n + c_{n-1}(r_1, \dots, r_n) \cdot s^{n-1} + \dots + c_0(r_1, \dots, r_n)$ , wobei  $c_i = f(r_1, \dots, r_n)$
2. Aufstellen eines Polynoms mit den gewünschten Eigenwerten (in Abh. von  $s$ ):  
 $P(s) = (s - p_1) \cdot \dots \cdot (s - p_n) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$ , wobei  $p_i$  die gewünschten Eigenwerte sind
3. Einsetzen der Variablen aus 1. und 2. in folgende Gleichungen und auflösen nach  $r_1, \dots, r_n$ :

$$\begin{aligned} c_{n-1}(r_1, \dots, r_n) &= a_{n-1} \\ &\vdots \\ c_0(r_1, \dots, r_n) &= a_0 \end{aligned}$$

### Eigenschaften

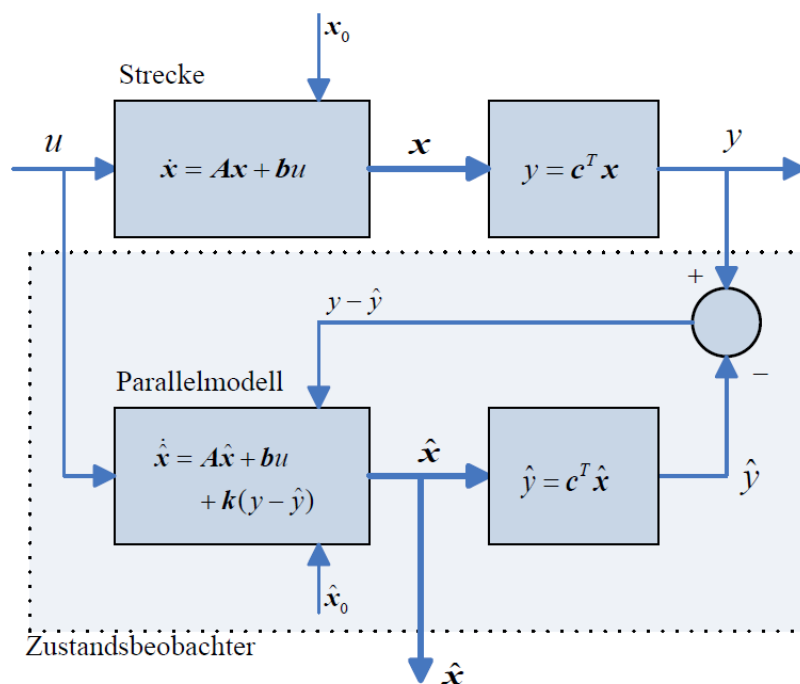
- Alle Eigenwerte und somit die vollständige Dynamik der Regelung können vom Entwerfer vorgegeben werden. Dazu ist die Messung aller  $n$  Zustandsvariablen nötig (oder deren Schätzung durch einen sogenannten Zustandsbeobachter).
- Die Entwürfe des Reglers  $r^T$  und der Vorsteuerung  $m_u, m_x$  geschehen unabhängig.
- Die Vorgabe der Eigenwerte erlaubt eine sehr gezielte und umfassende Gestaltung der gesamten Systemdynamik. Je weiter links die Regelungseigenwerte platziert werden, desto schneller das Regelverhalten, desto höher aber auch die Stellgrößenausschläge.

#### 7.6.1.1 Berücksichtigung des Eingriffs einer äußeren Störung $z(t)$

$$\dot{x} = (A - br^T)x + b(r^T m_x + m_u)w + \bar{e}z = A_r x + b_r w + \bar{e}z$$

$$Y(s) = c^T (sI - A_r)^{-1} b_r W(s) + c^T (sI - A_r)^{-1} \bar{e} Z(s)$$

## 7.6.2 Zustandsbeobachter



### Ziel:

- Schätzung des Zustandsvektors  $x$  (, da  $x(t)$  nicht messbar)
- Einführung eines Vektors  $\hat{x}$  als Schätzung für  $x$

### Formeln:

Zustandsschätzung  $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + bu + k(y - \hat{y}) = (A + kc^T)\hat{x} + bu + ky$

Schätzung für  $y$   $\hat{y} = c^T \hat{x}$

Schätzfehler  $\tilde{x} = x - \hat{x}$

Ableitung des Schätzfehlers  $\dot{\tilde{x}} = (A - kc^T)\tilde{x} = A_k \tilde{x}$

### Entwurf:

1.  $\det(sI - A + kc^T) = s^n + c_{n-1}(k_1, \dots, k_n) \cdot s^{n-1} + \dots + c_0(k_1, \dots, k_n)$ , wobei  $c_i = f(k_1, \dots, k_n)$
2.  $P(s) = (s - p_1) \cdot \dots \cdot (s - p_n) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$ , wobei  $p_i$  die gewünschten Eigenwerte sind
3. Auflösen nach  $k_1, \dots, k_n$ :

$$\begin{aligned} c_{n-1}(k_1, \dots, k_n) &= a_{n-1} \\ &\vdots \\ c_0(k_1, \dots, k_n) &= a_0 \end{aligned}$$

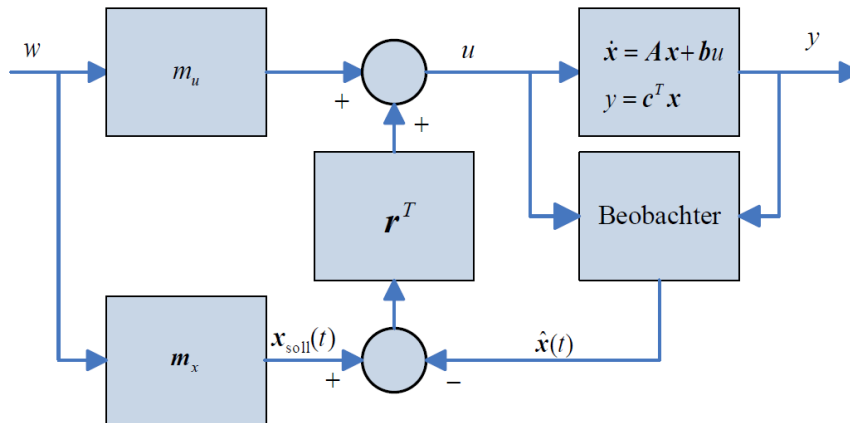
### Eigenschaften:

- $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x} = x$
- Der Zustandsbeobachter wird vollständig im Digitalrechner realisiert.



- Der Zustandsbeobachter kann auf Fälle erweitert werden, in denen nicht nur eine, sondern mehrere Messgrößen zur Verfügung stehen.
- Je weiter links die Eigenwerte liegen, desto schneller klingt der Schätzfehler ab, desto empfindlicher wird die Schätzung aber gegenüber Störungen durch Messrauschen.

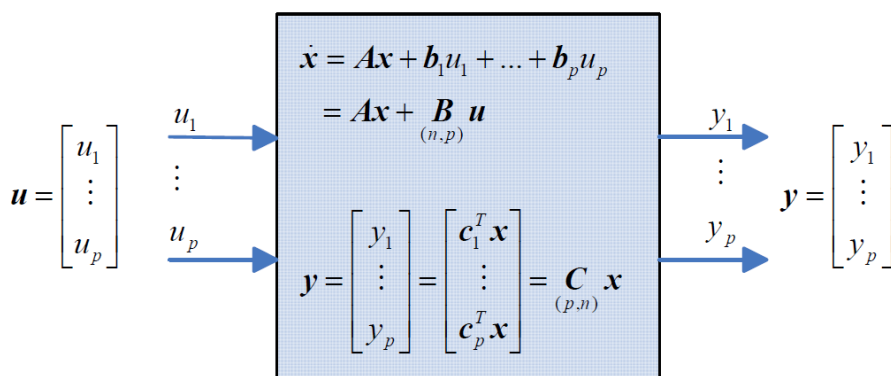
### 7.6.3 Zustandsrückführung mit Beobachter

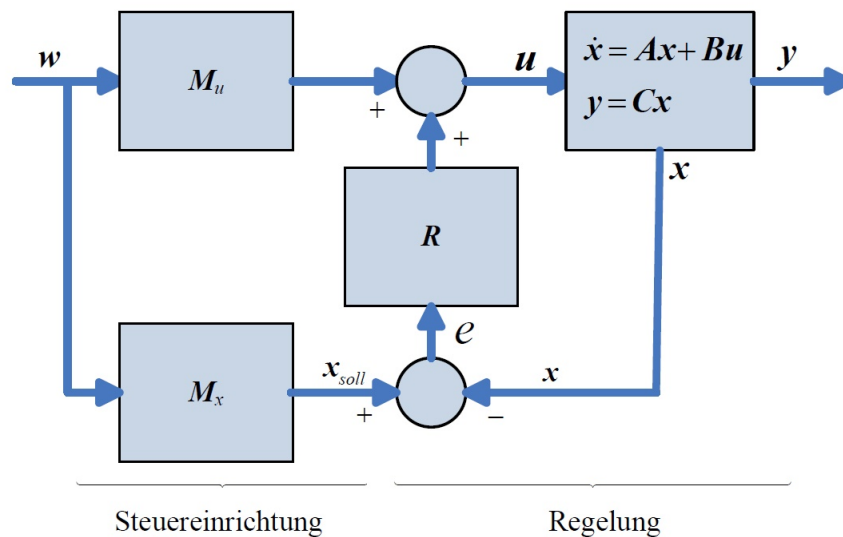


**Ziel:**

- Verwendung der Zustandsrückführung trotz nicht-messbarer Zustandsvariablen

### 7.6.4 Mehrgrößenregelung im Zustandsraum



**Ziel:**

- Verwenden von mehreren Stell- und Regelgrößen

**Formeln:**

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

$$Y(s) = C(sI - A_R)^{-1} B_R W(s) + C(sI - A_R)^{-1} E Z(s) \quad A_R = A - BR, B_R = B(RM_x + M_u)$$

**Variablen**

Stellgrößen  $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times 1}$

Regelgrößen  $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times 1}$

$$B \in \mathbb{R}^{n \times p}, \quad C \in \mathbb{R}^{p \times n}, \quad R \in \mathbb{R}^{p \times n}, \quad M_u \in \mathbb{R}^{p \times p}, \quad M_x \in \mathbb{R}^{n \times p}$$

**Entwurf:**

$$1. \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ M_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

- Bestimmung der Reglermatrix  $R$  wie in 7.6.1

**7.7 Nichtlineare Zustandsregelung durch Ein-/Ausgangslinearisierung****Ziel:**

- Verfahren, mit dem man gewisse nichtlineare Strecken durch ein nichtlineares Zustandsrückführungsgesetz derart regeln kann, dass lineares Ein-/Ausgangsverhalten (lineares Führungsverhalten) eintritt.

**Vorgehen:**

- Formulieren der nichtlinearen Streckenbeschreibung in der Zustandsdarstellung:

$$\dot{x} = a(x) + b(x)u$$

$$y = c(x) := c_0(x)$$

2. Ableiten von  $y$  nach  $x$  solange bis  $u$  auftaucht:

Wiederhole solange bis  $b_q(x) \neq 0$ ; starte mit  $q = 0$ ; inkrementiere  $q$  nach jedem Schritt um 1

$$y^{(q)} = \frac{\partial c_{q-1}}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \dots + \frac{\partial c_{q-1}}{\partial x_n} \dot{x}_n = c_q(x) + b_q(x)u$$

3. Einsetzen in Wunschkifferentialgleichung (hier:  $y^{(q)} + a_{q-1}y^{(q-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = a_0w$ ):

$$c_q(x) + b_q(x)u + a_{q-1}y^{(q-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = a_0w$$

4. Auflösen nach  $u$ :

$$u = \frac{1}{b_q(x)}(-c_q(x) - a_{q-1}y^{(q-1)} - a_1\dot{y} - a_0y + a_0w)$$

5. Einsetzen von  $y^{(i)} = c_i(x)$  aus Schritt 2:

$$u = \frac{1}{b_q(x)}(-c_q(x) - a_{q-1}c_{q-1}(x) - \dots - a_1c_1(x) - a_0c(x) + a_0w)$$

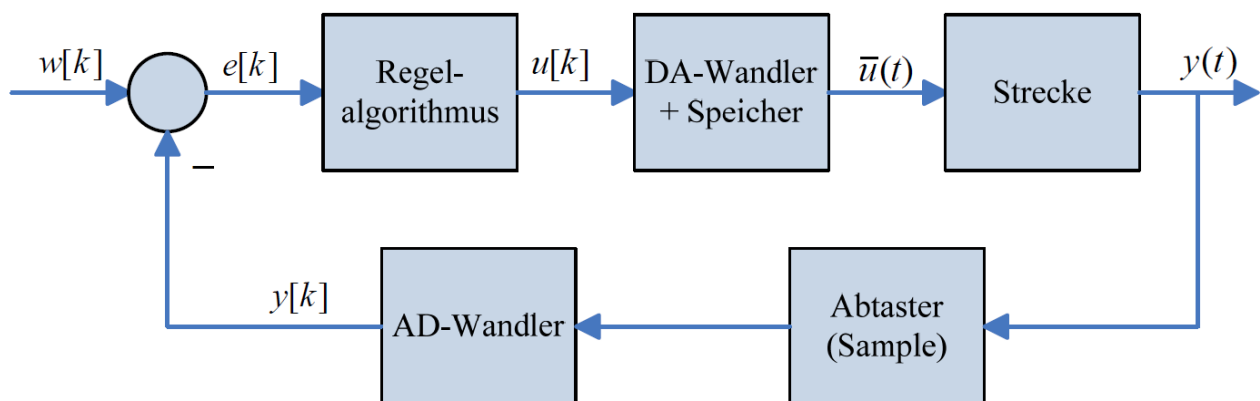
Außerdem gilt:

$$Y(s) = \frac{a_0}{s^q + a_{q-1}s^{q-1} + \dots + a_0}W(s)$$

**Eigenschaften:**

- Der sogenannte relative Grad  $q$  ist bei technisch sinnvollen Systemen stets kleiner oder gleich der Systemordnung  $n$ .
- Der Entwurf sichert lineares Ein-/Ausgangsverhalten.
- Die Dynamik der Zustandsvariablen bleibt nichtlinear.
- Falls  $q < n$  ist, können nur  $q$  Pole vorgegeben werden. Die verbleibenden  $n-q$  Freiheitsgrade der Systemdynamik bleiben im Systeminneren „versteckt“ und können instabiles Verhalten von Zustandsvariablen bewirken. Falls  $q = n$  ist und alle oben verwendeten Ausdrücke frei von Singularitäten sind (zumindest im interessierenden Bereich des Zustandsraums), dann darf man im Allgemeinen von einem stabilen Systemverhalten ausgehen.

## 8 Digitale Realisierung



- **Abtaster:** Entnimmt dem elektrischen Messsignal  $y$  zu den diskreten Zeiten  $t = 0, T, 2T, \dots$  dessen Wert (Samples).
- **Analog-Digital-Wandler (AD-Wandler):** Wertediskretisiert die Samples (Wandelt die zeitdiskreten Messwerte in Binärzahlen um).
- **Digital-Analog-Wandler (DA-Wandler):** Wandelt den jeweils aktuellen Wert  $u[k]$  in einen elektrischen Spannungswert, welcher bis zum nächsten Abtastzeitpunkt gehalten wird.  
→ treppenförmiges Stellgrößensignal  $\bar{u}(t)$
- **Abtastzeit  $T$ :** Zeit zwischen zwei Samples.

## 8.1 Tustin-Transformation

Sei  $z \cdot u[k] = u[k+1]$  sowie  $z^{-1} \cdot u[k] = u[k-1]$

Die Tustin-Transformation ist definiert als:

$$R(z) = \frac{u[k]}{e[k]} = \frac{T(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})} \quad \text{entspricht} \quad R(s) = \frac{1}{s}$$

$$R(z) = \frac{u[k]}{e[k]} = \frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})} \quad \text{entspricht} \quad R(s) = s$$

## 8.2 Glieder und Regler

Sei  $T$  die Abtastzeit zwischen zwei Samples und

sei  $e[k]$  die Regelabweichung zum Zeitpunkt  $t = kT$

### 8.2.1 Digitales I-Glied

Sei das I-Glied definiert als  $R(s) = \frac{1}{s}$

Der Algorithmus für das I-Glied ist definiert als:

$$u[k] = u[k-1] + \frac{T}{2}(e[k-1] + e[k])$$

### 8.2.2 Diskreter PD-Regler

Sei der PD-Regler definiert als  $R(s) = K_R(1 + T_R s)$

Der Algorithmus für den PD-Regler ist definiert als:

$$u[k] = -u[k-1] + d_0 e[k] + d_1 e[k-1]$$

wobei  $d_0 = \frac{K_R}{T}(T + 2T_R), \quad d_1 = \frac{K_R}{T}(T - 2T_R)$

### 8.2.3 Diskreter PID-Regler

Sei der PID-Regler definiert als  $R(s) = K_R(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s)$

Der Algorithmus für den PID-Regler ist definiert als:

$$u[k] = u[k-1] + d_0 e[k] + d_1 e[k-1] + d_2 e[k-2]$$

wobei  $d_0 = K_R(\frac{T_D}{T} + \frac{T}{T_I} + 1), \quad d_1 = -K_R(1 + 2\frac{T_D}{T}), \quad d_2 = K_R \frac{T_D}{T}$

## 8.3 Zeitdiskrete Zustandsdarstellung

Sei ein System in Zustandsdarstellung gegeben mit  $\dot{x} = Ax + bu$  und  $y = c^T x$

Die zeitdiskrete Zustandsdarstellung ist definiert als:

$$x[k+1] = \Phi x[k] + \beta u[k]$$

$$y[k] = c^T x[k]$$

wobei

$$\Phi = e^{AT}$$

$$\beta = A^{-1}(\Phi - I)b$$

## A Mathematische Grundlagen

### A.1 Komplexe Zahlen

#### A.1.1 Definition

Eine komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C}$  ist definiert als:

$$z = x + jy$$

wobei  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $j = \sqrt{-1}$  ist die imaginäre Einheit.

Der Real- und Imaginärteil ist definiert als:

$$\Re(z) = x, \quad \Im(z) = y$$

#### A.1.2 Konjugiert komplexe Zahl

Sei  $z \in \mathbb{C}$ .

Die zu  $z$  konjugiert komplexe Zahl  $z^*$  ist:

$$z^* = x - jy$$

#### A.1.3 Betrag einer komplexen Zahl

Sei  $z \in \mathbb{C}$ .

Der Betrag von  $z$  ist:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

#### A.1.4 Euler-Formel

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$$

#### A.1.5 Polarkoordinaten

Sei  $z \in \mathbb{C}$ .

$z$  angegeben in Polarkoordinaten ist definiert als:

$$z = |z|(\cos \varphi + j \sin \varphi) = |z|e^{j\varphi}$$

wobei

$$\varphi = \arg(z) = \angle z = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y < 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x < 0, y \geq 0 \\ -\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x < 0, y < 0 \end{cases}$$

#### A.1.6 Addition, Multiplikation

Sei  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .

Es folgt:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

## A.2 Partialbruchzerlegung

### A.2.1 Partialbruchzerlegung mit Koeffizientenvergleich

$$\text{Sei } R(s) = \frac{b_n s^n + \dots + b_1 s + b_0}{a_m s^m + \dots + a_1 s + a_0}$$

1. Finde alle Polstellen  $p_i$  von  $R(s)$

2. Setze Partialbrüche an:

$$R(s) = G_1 + \dots + G_m = \frac{Z_1}{N_1} + \dots + \frac{Z_m}{N_m}, \quad G_i = \frac{Z_i}{N_i}, \text{ wobei}$$

- $G_i = \frac{r_i}{s-p_i}$ , für jeden einfachen reellen Pol  $p_i$
- $G_i + G_{i+1} = \frac{r_i s + r_{i+1}}{(s-p_i)(s-p_{i+1})}$ , für jedes konjugiert komplexes Polpaar  $p_i, p_{i+1} = p_i^*$
- $G_i + \dots + G_k = \frac{r_i}{s-p_i} + \frac{r_{i+1}}{(s-p_i)^2} + \dots + \frac{r_{i+k-1}}{(s-p_i)^k}$ , für jeden k-fachen reellen Pol  $p_i = p_{i+1} = \dots = p_{i+k-1}$

3. Bringe alle Brüche auf denselben Nenner und addiere sie:

$$R(s) = \frac{Z_1}{N_1} + \dots + \frac{Z_m}{N_m} = \frac{Z_1(N_2 \dots N_m)}{N_1 \dots N_m} + \dots + \frac{Z_m(N_1 \dots N_{m-1})}{N_1 \dots N_m} = \frac{Z_1(N_2 \dots N_m) + \dots + Z_m(N_1 \dots N_{m-1})}{N_1 \dots N_m}$$

4. Multipliziere den Zähler aus und forme um zu:

$$R(z) = \frac{(c_{1,m}r_1 + \dots + c_{m,m}r_m)s^m + \dots + (c_{1,0}r_1 + \dots + c_{m,0}r_m)s^0}{N_1 \dots N_m}$$

5. Löse folgendes lineare Gleichungssystem:

$$(c_{1,m}r_1 + \dots + c_{m,m}r_m) = b_m$$

$$\vdots$$

$$(c_{1,0}r_1 + \dots + c_{m,0}r_m) = b_0$$

6. Setze  $r_1$  bis  $r_m$  in die Gleichung aus Schritt 2 ein ( $R(s) = G_1 + \dots + G_m$ )

### Beispiel:

$$\text{Sei } R(s) = \frac{5s-1}{s^2-1}$$

1. Finde alle Polstellen  $p_i$  von  $R(s)$ :

$$p_1 = -1 \text{ und } p_2 = 1$$

2. Setze Partialbrüche an:

$$\Rightarrow R(s) = \frac{r_1}{s-1} + \frac{r_2}{s+1}$$

3. Bringe alle Brüche auf denselben Nenner und addiere sie:

$$R(s) = \frac{r_1(s+1)}{s^2-1} + \frac{r_2(s-1)}{s^2-1} = \frac{r_1(s+1) + r_2(s-1)}{s^2-1}$$

4. Multipliziere den Zähler aus und forme um:

$$R(s) = \frac{(r_1+r_2)s + (r_1-r_2)}{s^2-1}$$

5. Löse folgendes lineare Gleichungssystem:

$$r_1 + r_2 = 5$$

$$r_1 - r_2 = -1$$

$$\Rightarrow r_1 = 2 \wedge r_2 = 3$$

6. Setze  $r_1$  und  $r_2$  in die Gleichung aus Schritt 2 ein ( $R(s) = \frac{r_1}{s-1} + \frac{r_2}{s+1}$ ):

$$R(s) = \frac{2}{s-1} + \frac{3}{s+1}$$

### A.2.2 Heavisidescher Zuhalttemethode

$$\text{Sei } R(s) = \frac{b_n s^n + \dots + b_1 s + b_0}{a_m s^m + \dots + a_1 s + a_0}$$

1. Finde alle Polstellen  $p_i$  von  $R(s)$

2. Setze Partialbrüche an:

$$R(s) = G_1 + \dots + G_m = \frac{Z_1}{N_1} + \dots + \frac{Z_m}{N_m}, \quad G_i = \frac{Z_i}{N_i}, \text{ wobei}$$

- $G_i = \frac{r_i}{s-p_i}$ , für jeden einfachen reellen Pol  $p_i$
- $G_i + G_{i+1} = \frac{r_i}{(s-p_i)} + \frac{r_{i+1}^*}{(s-p_{i+1})}$ , für jedes konjugiert komplexes Polpaar  $p_i, p_{i+1} = p_i^*$
- $G_i + \dots + G_k = \frac{r_i}{s-p_i} + \frac{r_{i+1}}{(s-p_i)^2} + \dots + \frac{r_{i+k-1}}{(s-p_i)^k}$ , für jeden k-fachen reellen Pol  $p_i = p_{i+1} = \dots = p_{i+k-1}$

3. Koeffizienten bestimmen:

$$r_i = \left. \frac{b_n s^n + \dots + b_1 s + b_0}{N_1 \dots N_{i-1} \cdot N_{i+1} \dots N_m} \right|_{s=p_i}$$

4. Setze  $r_1$  bis  $r_m$  in die Gleichung aus Schritt 2 ein ( $R(s) = G_1 + \dots + G_m$ )

## A.3 Matrizen

### A.3.1 Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}, i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}$$

### A.3.2 Addition

Seien  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  zwei Matrizen.

Die Summe dieser Matrizen ist definiert als:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1m} + b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \dots & a_{nm} + b_{nm} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

### A.3.3 Multiplikation mit Skalar

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  eine Matrix und  $\alpha \in \mathbb{R}$  ein Skalar.

Das Produkt  $\alpha A$  ist definiert als:

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \dots & \alpha \cdot a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha \cdot a_{n1} & \dots & \alpha \cdot a_{nm} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

### A.3.4 Matrizenmultiplikation

Seien  $A \in \mathbb{R}^{l \times m}$  und  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  zwei Matrizen.

Das Produkt dieser Matrizen ist definiert als:

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{l1} & \dots & c_{ln} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{l \times n}, \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot b_{jk} \in \mathbb{R}, i \in \{1, \dots, l\}, k \in \{1, \dots, n\}$$

Es gelten folgende Gesetze:

- Assoziativgesetz:  $(AB)C = A(BC)$
- Distributivgesetz:  $A(B + C) = AB + AC$

Es gilt kein Kommutativgesetz:  $AB \neq BA$

### A.3.5 Transponierte

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  eine Matrix.

Die Transponierte von A ist definiert als:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

### A.3.6 Einheitsmatrix

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .

Es gilt:

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

### A.3.7 Skalarprodukt

Sei  $v, w \in \mathbb{R}^n$

Das Skalarprodukt dieser Vektoren ist:

$$\langle v, w \rangle = v^T \cdot w = v_1 w_1 + \dots + v_n w_n$$

### A.3.8 Determinante

#### Determinante einer $2 \times 2$ Matrix

Sei  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

Die Determinante dieser Matrix ist definiert als:

$$\det(A) = |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

#### Determinante einer $3 \times 3$ Matrix

Sei  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .

Die Determinante dieser Matrix ist definiert als:

$$\det(A) = |A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

#### Eigenschaften

- $\det(A) \neq 0 \implies$  Spaltenvektoren von  $A$  sind linear unabhängig
- $\det(A) \neq 0 \implies$  Inverse von  $A$  existiert
- $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

### A.3.9 Inverse

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .

Die Inverse von  $A$  existiert, falls  $\det(A) \neq 0$ .

Sie ist definiert als:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{ad}A$$

Es gilt:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

**Inverse einer  $2 \times 2$  Matrix** Sei  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  und

sei  $\det A \neq 0$ .

Die Inverse von  $A$  ist definiert als:

$$\frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

### A.3.10 Adjunkte

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Die Adjunkte von  $A$  ist definiert als:

$$\text{ad}A = \begin{bmatrix} a_{11}^* & \dots & a_{1n}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^* & \dots & a_{nn}^* \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad a_{ik}^* = (-1)^{i+k} \det A_{ki}, \quad i, k \in \{1, \dots, n\}$$



### A.3.11 Eigenvektoren und Eigenwerte

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und

sei  $Av = v\lambda$ .

Dann ist  $v \in \mathbb{R}^n$  ein Eigenvektor von  $A$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  der dazugehörige Eigenwert von  $A$ .

Die Eigenwerte  $\lambda$  werden durch Lösen des charakteristischen Polynoms bestimmt:

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

### A.3.12 Matrix-Exponentialfunktion

Die Matrix-Exponentialfunktion ist definiert als:

$$e^{At} = I + A \frac{t}{1!} + A^2 \frac{t^2}{2!} + \dots$$

**Eigenschaften:**

- $e^{At_1} \cdot e^{At_2} = e^{A(t_1+t_2)}$
- $e^{At} \cdot e^{-At} = I$
- $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A$

### A.3.13 Zeitliche Ableitung eines Matrizenprodukts

Seien  $P, Q$  zwei Matrizen.

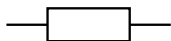
Es gilt:

$$\frac{d}{dt}(PQ) = P\dot{Q} + \dot{P}Q$$

## B Elektrotechnische Grundlagen

### B.1 Widerstand

Schaltzeichen:

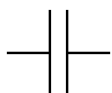


Formel:

$$u = R \cdot i$$

### B.2 Kondensator

Schaltzeichen:

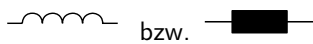


Formel:

$$u = \frac{1}{C} \int i \, dt \iff \dot{u} = \frac{i}{C}$$

### B.3 Spule

Schaltzeichen:



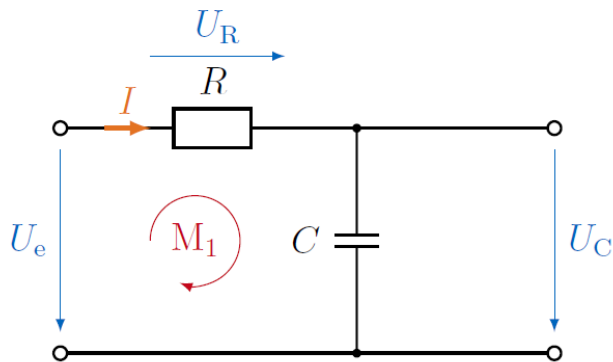
Formel:

$$u = L \cdot \frac{di}{dt}$$

### B.4 Kirchhoff'sches Spannungsgesetz

In einem geschlossenen Stromkreis (Masche) ist die Summe aller Spannungen gleich null

Beispiel:



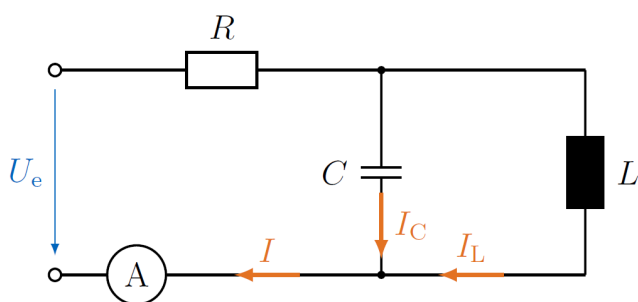
Für Masche  $M_1$  gilt:

$$U_R + U_C - U_e = 0$$

### B.5 Kirchhoff'sches Stromgesetz

In jedem Knotenpunkt ist die Summe aller Ströme gleich null.

Beispiel:



$$I_C + I_L - I = 0$$

## C Physikalische Grundlagen

### C.1 Kraft

Kräftegleichgewicht:

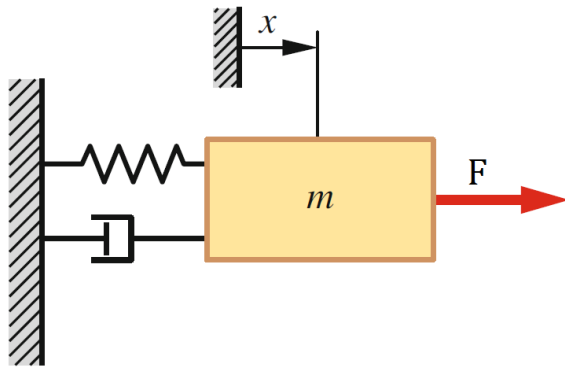
Die Summe aller Kräfte, die an einem Körper angreifen, addieren sich zu null.

$$\sum F_i = 0$$

## Newtonsche Gesetze

1. Wirkt auf einen Körper keine Kraft oder befindet er sich im Kräftegleichgewicht, so bleibt er in Ruhe oder er bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig weiter.
2.  $F = m \cdot a$  ( $m$ : Masse des Körpers,  $a$ : Beschleunigung, die der Körper erfährt)
3.  $F_1 = -F_2$  (Kraft gleich Gegenkraft)

## Masse-Feder-Dämpfer System



$m$ : Masse des Körpers,  $d$ : Dämpferkonstante,  $k$ : Federkonstante,  $F$ : Stellkraft

$$F = m \cdot \ddot{x} + d\dot{x} + kx$$

## C.2 Drehmoment

### Momentengleichgewicht:

Die Summe aller Momente um jeden (einen) beliebigen Punkt eines Körpers addieren sich zu null.

$$\sum M_i = 0$$

### Berechnung in Abhängigkeit von F:

$r$ : Abstand der Wirkungslinie der Kraft von der Drehachse  
 $F$ : wirkende Kraft

$$M = r \times F$$

### Berechnung in Abhängigkeit von J:

$\ddot{\varphi}$ : Winkelbeschleunigung  
 $J$ : Trägheitsmoment

$$M = J \cdot \ddot{\varphi}$$

## C.3 Drehimpuls:

$J$ : Trägheitsmoment  
 $\omega$ : Winkelgeschwindigkeit

$$L = J \cdot \omega$$

## D Tipps

### D.1 Zeichnen eines Blockschaltbildes

- Verzweigungen von Signalen werden durch einen schwarzen Punkt markiert, um die Verwechslungsgefahr mit Kreuzungen ohne Kontakt zu vermeiden.
- Signale werden immer explizit mit Summationsgliedern aufaddiert.
- Proportionalitätsfaktoren von 1 können weggelassen werden.

- Das Vorzeichen beim Summationsglied steht immer rechts vom Pfeil. Die Pluszeichen müssen nicht explizit angegeben werden.
- Das Vorzeichen einer Rückführung steht am Soll-/Istwert-Vergleich

**Allgemeine Vorgehensweise:**

1. Differentialgleichung nach höchster Ableitung auflösen
2.  $n$  I-Glieder mit zugehörigen Anfangswerten nebeneinander zeichnen, verbinden und beschriften
3. Summationsglieder für die höchste Ableitung bilden
4. Jeden Term der rechten Seite aus bestehenden Signalen bilden

**D.2 Winkeländerung aus Nyquist-Ortskurve bestimmen**

1. Man stehe auf dem Punkt  $-1$  und blicke zum Beginn der Ortskurve (bei  $\omega = 0$ )
2. Nun drehe man sich so, dass man (immer auf die Ortskurve blickend) der Ortskurve bis zum Endpunkt ( $\omega = \infty$ ) folgt.
3. Der Winkel der Drehung um die eigene Achse vom Startpunkt bis zum Endpunkt entspricht der Winkeländerung  $\omega_+$ , wobei
  - Drehung im Uhrzeigersinn: negativer Winkel
  - Drehung gegen den Uhrzeigersinn: positiver Winkel

## Anmerkungen

Dies ist eine Zusammenfassung der Vorlesung Regelungstechnik an der Technischen Universität München. Gehalten wurde diese Vorlesung durch Lohmann B. im Sommersemester 2019. Ersteller dieser Zusammenfassung ist Gaida B. Alle Angaben sind ohne Gewähr.

## Literaturverzeichnis

Werner Skolaut. *Maschinenbau. Ein Lehrbuch für das ganze Bachelor-Studium*. Springer Vieweg. Heidelberg, 2018, S. 1271 - 1387