

Inhaltsverzeichnis

1 Begriff der Regelung	3
1.1 Signale und Blöcke:	3
1.2 Vorgeschaltete Steuereinrichtung	3
1.3 Regelung	4
1.4 Zwei-Freiheitsgrade-Regelung (Steuerung + Regelung)	4
1.4.1 Störgrößenaufschaltung	4
2 Modelle	5
2.1 Zustandsdarstellung (bei Linearkombinationen)	5
2.2 Elementare Übertragungsglieder	5
2.3 Lineare zeitinvariante Modelle (LZI-Modelle)	8
2.3.1 Regelungsnormalform	8
2.3.2 Beobachtungsnormalform	8
2.4 Linearisierung im Arbeitspunkt	8
2.4.1 Mehre Eingabeparameter	8
3 Laplace-Transformation	8
3.1 Definition	8
3.2 Korrespondenztabelle (in der Prüfung ausgehändigt)	9
3.3 Eigenschaften der Laplace-Transformation (in der Prüfung ausgehändigt)	9
3.4 Lösung linearer zeitinvarianter Differentialgleichungen mittels Laplace-Transformation	10
3.4.1 Komplexe Übertragungsfunktion	10
3.5 Lösung der Zustandsgleichung mittels Laplace-Transformation	10
3.5.1 Polstellen	10
4 Analyse dynamischer Systeme	10
4.1 Systemantworten	10
4.1.1 Impulsantwort	10
4.1.2 Sprungantwort	10
4.1.3 Systemantwort mittels Faltung	11
4.1.4 Endwertsatz der Laplace-Transformation	11
4.2 Stabilität	11
4.2.1 Sprungantwortstabilität, Übertragungsstabilität	11
4.2.2 Asymptotische Stabilität	11
4.3 Stationäre Verstärkung	11
4.4 Frequenzgang	12
4.4.1 Systemantwort auf harmonische Anregung	12
4.4.2 Frequenzgangortskurve und Bode-Diagramm	12
4.4.3 Konstruktion von Bode-Diagramm	12
4.4.4 Graphische Konstruktion von Bode-Diagramm (Kurzform)	12
5 Regelkreis und Stabilität	13
5.1 Standardregelkreis	13
5.1.1 Führungsübertragungsfunktion $T(s)$	14
5.1.2 Störübertragungsfunktion $S(s)$	14
5.1.3 Eigenschaften des Standardregelkreises	14
5.2 Stabilität des Standardregelkreises	14
5.2.1 Übertragungsstabilität des Standardregelkreises	14
5.2.2 Asymptotische Stabilität des Standardregelkreises	14
5.3 Nyquist-Kriterium	15
5.3.1 Einfaches Nyquist-Kriterium	15
5.3.2 Allgemeines Nyquist-Kriterium	15
5.3.3 Vereinfachtes Nyquist-Kriterium im Bode-Diagramm	15
5.4 Robustheit der Stabilität	17

6	Reglerentwurf	17
6.1	Anforderungen an das Regelverhalten	17
6.2	Dynamik, Robustheit der Stabilität und Grenzen der Regelgüte	17
6.2.1	Bode-Theorem	17
6.3	Stationäre Genauigkeit	17
6.3.1	Stationäre Genauigkeit bezüglich des Führungsverhalten	17
6.3.2	Stationäre Genauigkeit bezüglich des Störverhaltens	18
6.4	Grundtypen linearer Regler	18
6.4.1	P-Regler	18
6.4.2	I-Regler	18
6.4.3	PI-Regler	19
6.4.4	Idealer PD-Regler	20
6.4.5	Realer PD-Regler	20
6.4.6	Idealer PID-Regler	21
6.4.7	Realer PID-Regler	21
7	Erweiterte Regelstrukturen und Zustandsregelung	22
7.1	Zwei-Freiheitsgrade-Regelung	22
7.2	Störgrößenaufschaltung	23
7.3	Kaskadenregelung	23
7.4	Zustandsregelung	24
7.4.1	Konstante Zustandsrückführung und Vorsteuerung	24
7.4.2	Zustandsbeobachter	26
7.5	Nichtlineare Zustandsregelung durch Ein-/Ausgangslinearisierung	27
8	Digitale Realisierung	27
8.1	Tustin-Transformation	27
A	Mathematische Grundlagen	28
A.1	Partialbruchzerlegung	28
A.1.1	Partialbruchzerlegung mit Koeffizientenvergleich	28
A.1.2	Heavisidescher Zuhalttemethode	28
A.2	Matrizen	29
A.2.1	Determinante	29
A.2.2	Inverse	29
B	Elektrotechnische Grundlagen	29
B.1	Widerstand	29
B.2	Kondensator	29
B.3	Spule	30
C	Physikalische Grundlagen	30

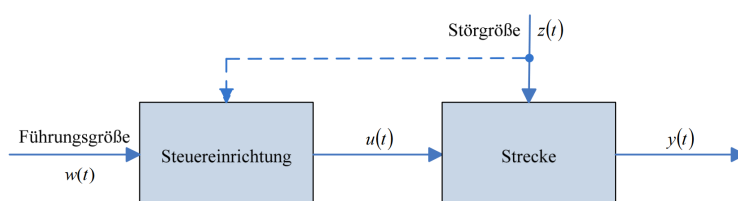
1 Begriff der Regelung

1.1 Signale und Blöcke:

Bezeichnung	Var.	Beschreibung
Führungsgröße	$w(t)$	Von außen vorgegebener Soll-Verlauf für die Regelgröße $y(t)$
Regelgröße	$y(t)$	Ausgangsgröße, der ein gewünschtes Verhalten aufgeprägt werden soll
Regelabweichung	$e(t)$	Entsteht durch Vergleich der Führungsgröße mit der gemessenen Regelgröße und soll klein gehalten werden ($e(t) = w(t) - y'(t)$)
Stellgröße	$u(t)$	Eingangsgröße, durch die das System gezielt beeinflusst werden kann
Störgröße	$z(t)$	Eingangsgröße, die störend und mit zumeist nur ungenau oder gar nicht bekannten Zeitverlauf auf das System wirkt
Störgröße	$z_1(t)$	Messbare Eingangsgröße, die störend auf das System wirkt
Störgröße	$z_2(t)$	Nicht-Messbare Eingangsgröße, die störend auf das System wirkt
Messrauschen	$n(t)$	
Regler		Übertragungsglied, das aus der Regelabweichung das Stellsignal u generiert, sodass y möglichst w folgt
Messglied/Messeinrichtung		Erfasst die Regelgröße y mittels eines Sensors und erzeugt ein zu $y(t)$ möglichst äquivalentes Signal $y'(t)$
Steuereinrichtung		Übertragungsglied, das den Stellgrößenverlauf $u(t)$ derart generiert, dass $y(t)$ einem vorgegebenen Sollverlauf $w(t)$ folgt. Besteht aus Störgrößenaufschaltung und Führungsgrößenaufschaltung
Störgrößenaufschaltung		Übertragungspfad zur Aufschaltung einer messbaren Störgröße auf die Stellgröße
Führungsgrößenaufschaltung		Übertragungspfad zur Aufschaltung der Führungsgröße auf die Stellgröße

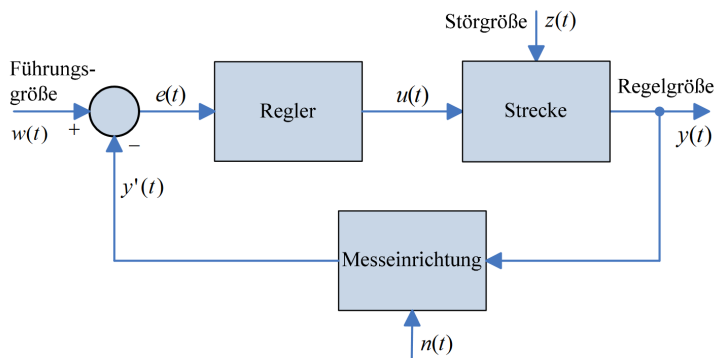
1.2 Vorgeschaltete Steuereinrichtung

Blockschaltbild



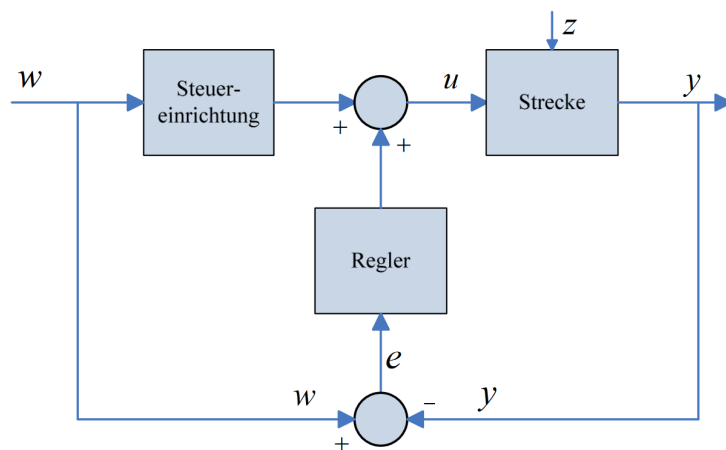
1.3 Regelung

Blockschaltbild



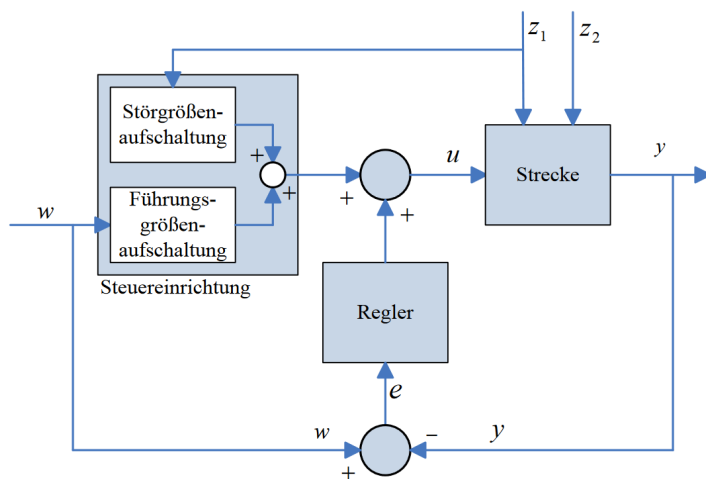
1.4 Zwei-Freiheitsgrade-Regelung (Steuerung + Regelung)

Blockschaltbild



1.4.1 Störgrößenaufschaltung

Blockschaltbild



2 Modelle

2.1 Zustandsdarstellung (bei Linearkombinationen)

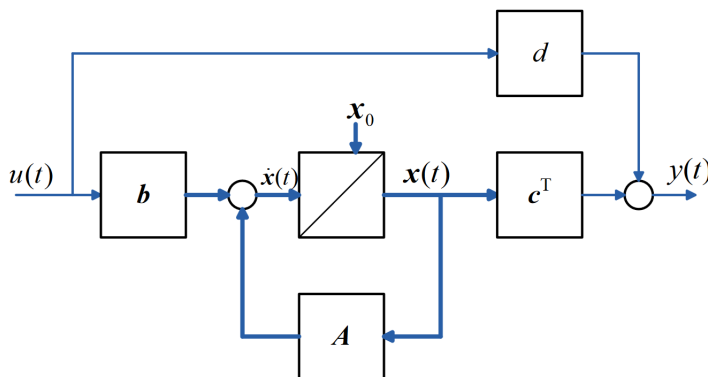
Bestehen die rechten Seiten der Zustandsgleichungen ausschließlich aus Linearkombinationen, d.h.:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + e_1z + b_1u \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + e_nz + b_nu \\ y &= c_1x_1 + \dots + c_nx_n\end{aligned}$$

so gilt:

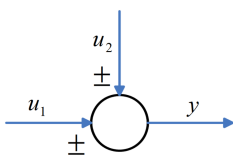
$$\begin{aligned}\dot{x} = Ax + ez + bu &\equiv \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u \\ y = c^T x &\equiv y = \begin{bmatrix} c_1 & \dots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Blockschaltbild:

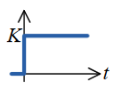
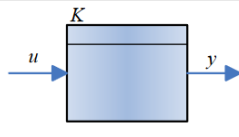
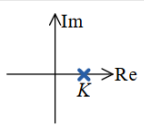
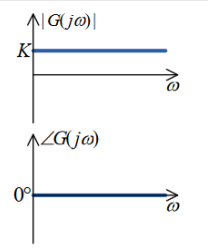
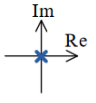
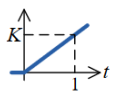
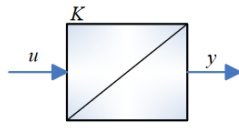
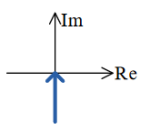
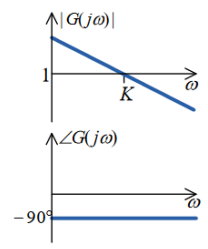


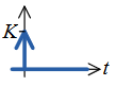
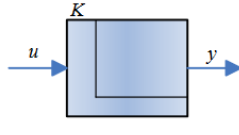
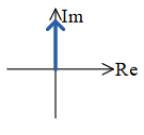
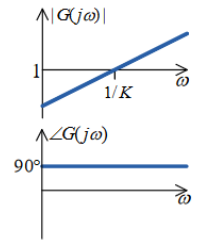
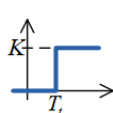
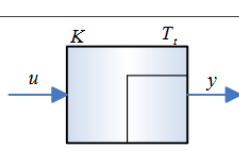
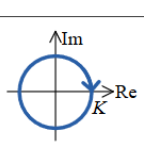
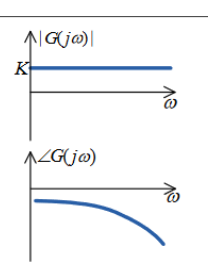
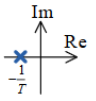
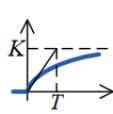
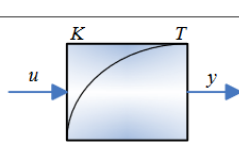
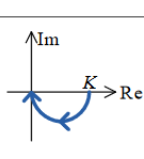
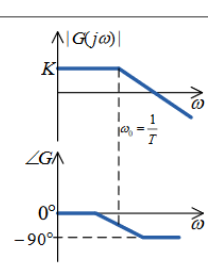
2.2 Elementare Übertragungsglieder

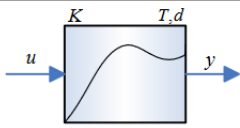
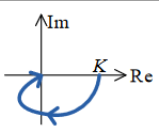
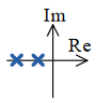
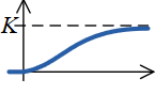
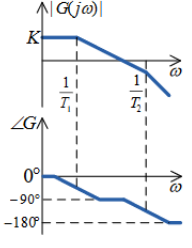

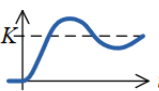
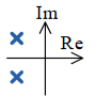
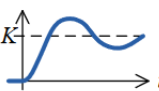
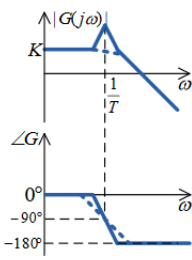
Summationsglied:



Weitere Übertragungsglieder:

Name	Funktional- beziehung	Übertragungs- funktion $G(s)$	Sprungantwort $h(t)$ (0 für $t < 0$)	Block-Symbol	Ortskurve	Bodediagramm
P- Glieder	$y = Ku$	K	$h(t) = K\sigma(t)$ 	 K heißt auch Verstärkungs- faktor		
I- Glieder	$y(t) = K \int_0^t u(\tau) d\tau + y_0$ oder $\dot{y}(t) = u(t)$	$\frac{K}{s}$ Pollage: 	$h(t) = Kt$ 			

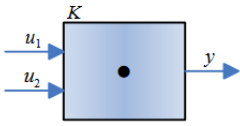
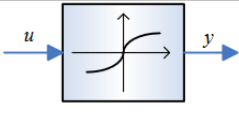
D- Glieder	$y = K\dot{u}$	Ks	$h(t) = K\delta(t)$ 			
Tot- zeit- glied	$y = Ku(t - T_t)$ mit $T_t > 0$	$K e^{-T_t s}$	$h = K\sigma(t - T_t)$ 			
PT1- Glieder	$T\dot{y} + y = Ku$	$\frac{K}{1 + Ts}$ Pollage: 	$h = K(1 - e^{-t/T})$ 	 T heißt Zeitkonstante $\omega_0 = \frac{1}{T}$ heißt Eckfrequenz		

PT2-Glied	$T^2\ddot{y} + 2dT\dot{y} + y = Ku$ mit $T > 0, d \geq 0$	Übertragungsfunktion: $G(s) = \frac{K}{1 + 2dT s + T^2 s^2}$ d heißt (Lehrsche) Dämpfung			
Fall 1: $d > 1$	Pollagen: 	Sprungantworten: $h(t) = K \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \right)$ mit $T_{1/2} = T(d \pm \sqrt{d^2 - 1})$ 			
Fall 2: $d = 1$		$h(t) = K \left(1 - \left[1 + \frac{t}{T} \right] e^{-\frac{t}{T}} \right)$ 			
Fall 3: $0 < d < 1$	Pollagen: 	$h(t) = K \cdot \left[1 - \frac{e^{-\frac{d}{T}t}}{\sqrt{1-d^2}} \sin\left(\frac{\sqrt{1-d^2}}{T}t + \varphi\right) \right]$ mit $\varphi = \arctan \frac{\sqrt{1-d^2}}{d}$ 	$\omega_0 = \frac{1}{T}$ heißt Eckfrequenz; $\omega_e = \frac{\sqrt{1-d^2}}{T}$ heißt Eigenfrequenz.		

PT2-Glied (weitere Eigenschaften):

- Anfangssteigung der Sprungantwort = 0
- Eigenschaft der Lehrschen Dämpfung d :

$d > 1$	aperiodischer Fall
$d = 1$	aperiodischer Grenzfall
$0 < d < 1$	aklingende Schwingung
$d = 0$	Dauerschwingung (instabil)
$d < 0$	aufklingende Schwingung (instabil)

M-Glied	$y = K \cdot u_1 \cdot u_2$					
KL-Glied	$y = F(u)$					

Die Übertragungsglieder Summationsglied, Proportionalglied, Integrierglied, Differenzierglied und Totzeitglied sind linear.

2.3 Lineare zeitinvariante Modelle (LZI-Modelle)

2.3.1 Regelungsnormalform

Das System $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = b_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + b_1\dot{u} + b_0u$ besitzt die Zustandsdarstellung (Regelungsnormalform)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} \end{bmatrix} x$$

2.3.2 Beobachtungsnormalform

Das System $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = b_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + b_1\dot{u} + b_0u$ besitzt die Zustandsdarstellung (Beobachtungsnormalform)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

2.4 Linearisierung im Arbeitspunkt

2.4.1 Mehrere Eingabeparameter

Sei $y = F(u_1, \dots, u_n)$ eine Übertragungsfunktion ($n \in \mathbb{N}$).

Die linearisierte Funktion um den Arbeitspunkt $(u_{1,s}, \dots, u_{n,s})$ wird wie folgt berechnet:

$$\Delta y = f(\Delta u_1, \dots, \Delta u_n, u_{1,s}, \dots, u_{n,s}) = \left. \frac{\partial F(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1} \right|_{\text{AP}} \cdot \Delta u_1 + \dots + \left. \frac{\partial F(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_n} \right|_{\text{AP}} \cdot \Delta u_n$$

$$\text{AP} \equiv u_1 = u_{1,s}, \dots, u_n = u_{n,s}$$

mit

$$y_s = F(u_s)$$

$$\Delta u_1 = u_1 - u_{1,s}, \dots, \Delta u_n = u_n - u_{n,s}$$

Die um den Arbeitspunkt linearisierte Beziehung zwischen den absoluten Größen ist definiert als:

$$y_{lin} = f(u_1, \dots, u_n, u_{1,s}, \dots, u_{n,s}) = \Delta y + y_s \quad (\text{Ersetze } \Delta u_1 \text{ durch } u_1 - u_{1,s}, \dots)$$

3 Laplace-Transformation

3.1 Definition

Die Korrespondenz wird wie folgt dargestellt:

$$f(t) \circ \bullet F(s)$$

3.2 Korrespondenztabelle (in der Prüfung ausgehändigt)

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$ (Dirac-Impuls)	1
$\delta(t - t_0)$	$e^{-t_0 s}$
$\sigma(t)$ (Einheitssprung)	$\frac{1}{s}$
$\sigma(t - t_0)$	$\frac{e^{-t_0 s}}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^n}{n!}, n \in \mathbb{N}_0$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s - \alpha}$
$\frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{1 + Ts}$
$t e^{\alpha t}$	$\frac{1}{(s - \alpha)^2}$
$\frac{t}{T^2} e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{(1 + Ts)^2}$
$\frac{t^n}{n!} e^{\alpha t}$	$\frac{1}{(s - \alpha)^{n+1}}$
$1 - e^{\alpha t}$	$\frac{-\alpha}{s(s - \alpha)}$
$1 - e^{-\frac{t}{T}}$	$\frac{1}{s(1 + Ts)}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-\delta t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s + \delta)^2 + \omega^2}$
$e^{-\delta t} \cos \omega t$	$\frac{s + \delta}{(s + \delta)^2 + \omega^2}$
$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$

wobei

 $f(t) = 0$ für $t < 0$, $T > 0, t_0 > 0, \omega > 0$ reell, δ beliebig reell und α beliebig komplex.

3.3 Eigenschaften der Laplace-Transformation (in der Prüfung ausgehändigt)

Eigenschaft	Operation im Zeitbereich	Operation im Bildbereich
Linearität	$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$	$c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$
Differenziation	$\dot{f}(t)$ $\ddot{f}(t)$ $f^{(n)}(t)$	$sF(s) - f(0)$ $s^2 F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$ $s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) s^{n-k-1}$
Integration	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} F(s)$
Dämpfung	$f(t) \cdot e^{\alpha t}$	$F(s - \alpha)$
Faltung	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s) \cdot F_2(s)$
Zeitverschiebung	$f(t - t_0), t_0 > 0$	$e^{-t_0 s} F(s)$
Differenziation der Bildfunktion	$(-1)^n t^n f(t)$	$F^{(n)}(s), n \in \mathbb{N}$
Skalierung der Zeitachse	$f(\alpha t), \alpha > 0$	$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$
Anfangswertsatz	$\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$, sofern $\lim_{t \rightarrow +0} f(t)$ existiert	
Endwertsatz	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$, sofern $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ existiert	

3.4 Lösung linearer zeitinvarianter Differentialgleichungen mittels Laplace-Transformation

Sei $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1 \dot{u} + b_0 u$ mit $m \leq n$ und $a_n \neq 0$ die systembeschreibende Differentialgleichung. Die Lösung dieser DGL erfolgt durch die folgenden 5 Schritte:

1. Transformation der DGL in den Bildbereich mittels Laplace-Transformation
2. Auflösen nach $Y(s)$. Sind alle Anfangswerte gleich null, resultiert:

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \cdot U(s) \equiv Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$
3. Einsetzen von $U(s) \bullet \rightarrow u(t)$ in $Y(s) = G(s) \cdot U(s)$
4. Durchführung einer Partialbruchzerlegung von $Y(s)$
5. Rücktransformation in den Zeitbereich $y(t) \circ \bullet Y(s)$

3.4.1 Komplexe Übertragungsfunktion

Sei $Y(s) = G(s)U(s)$ eine systembeschreibende Differentialgleichung im Bildbereich.

$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ heißt komplexe Übertragungsfunktion.

Komplexe Übertragungsfunktionen der in Sektion ?? genannten Darstellungsformen heißen rationale Übertragungsfunktionen. Die zugehörigen Übertragungsglieder heißen rationale Übertragungsglieder, kurz R-Glieder.

3.5 Lösung der Zustandsgleichung mittels Laplace-Transformation

Sei ein LZI-System gegeben mit $\dot{x} = Ax + bu$ und $y = c^T x$.

Die Zustandsgleichungen im Bildbereich sind:

$$X(s) = \underbrace{(sI - A)^{-1} b U(s)}_{\text{Anregungsterm}} + \underbrace{(sI - A)^{-1} x(0)}_{\text{Anfangswertterm}} \bullet \rightarrow x(t)$$

$$Y(s) = \underbrace{c^T (sI - A)^{-1} b U(s)}_{\text{Anregungsterm}} + \underbrace{c^T (sI - A)^{-1} x(0)}_{\text{Anfangswertterm}} \bullet \rightarrow y(t)$$

Die komplexe Übertragungsfunktion $G(s)$ ist:

$$G(s) = c^T (sI - A)^{-1} b = \frac{c^T (\text{Adjunkte}(sI - A)) b}{\det(sI - A)} = \frac{Z(s)}{N(s)}$$

3.5.1 Polstellen

Jeder Pol von $G(s)$ ist Eigenwert von A . Ein Eigenwert von A ist genau dann Pol von $G(s)$, wenn er sich nicht herauskürzt, d.h. nicht gleichzeitig Nullstelle von $Z(s)$ ist.

4 Analyse dynamischer Systeme

4.1 Systemantworten

4.1.1 Impulsantwort

Sei $Y(s) = G(s)U(s)$ ein lineares zeitinvariantes System mit der komplexen Übertragungsfunktion $G(s)$.

Die Impulsantwort dieses Systems ist:

$$Y(s) = G(s) \bullet \rightarrow g(t)$$

mit $u(t) = \delta(t) \circ \bullet U(s) = 1$,

4.1.2 Sprungantwort

Sei $Y(s) = G(s)U(s)$ ein lineares zeitinvariantes System mit der komplexen Übertragungsfunktion $G(s)$.

Die Sprungantwort dieses Systems ist:

$$Y(s) = \frac{G(s)}{s} = H(s) \bullet \rightarrow h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau$$

mit $u(t) = \sigma(t) \circ \bullet U(s) = 1/s$,

4.1.3 Systemantwort mittels Faltung

Sei ein lineares zeitinvariantes System gegeben mit Eingangssignal $u(t)$, Ausgangssignal $y(t)$ und der Übertragungsfunktion $g(t)$.

Das Ein-Ausgangsverhalten dieses Systems lässt sich durch die Faltungsoperation beschreiben:

$$y(t) = g(t) * u(t) = \int_0^t g(t - \tau) u(\tau) d\tau$$

4.1.4 Endwertsatz der Laplace-Transformation

Sei $y(t)$ eine Zeitfunktion sowie $Y(s)$ deren Laplace-Transformierte und

- $y(t \rightarrow \infty)$ existiert oder
- das System ist übertragungsstabil und das Eingangssignal konvergiert

Es gilt:

$$y(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [sY(s)]$$

Für die Sprungantwort gilt:

$$h(t \rightarrow \infty) = G(0), \quad \text{sofern alle Pole von } G(s) \text{ links der } j\text{-Achse sind}$$

4.2 Stabilität

4.2.1 Sprungantwortstabilität, Übertragungsstabilität

- Ein lineares zeitinvariantes System ist übertragungsstabil/sprungantwortstabil, falls

$$h(t \rightarrow \infty) = \int_0^\infty g(\tau) d\tau = c < \infty$$

wobei $h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau$ die Sprungantwort des Systems ist.

- Ein rationales Übertragungsglied (R-Glied) ist genau dann sprungantwortstabil, wenn alle Pole der Übertragungsfunktion $G(s)$ in der linken komplexen Halbebene liegen.

4.2.2 Asymptotische Stabilität

Sei ein LZI-System gegeben mit $\dot{x} = Ax + bu$ und $y = c^T x$

- Das Zustandsraummodell ist genau dann asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte der Matrix A in der linken komplexen Halbebene liegen.
- Asymptotische Stabilität \implies Übertragungsstabilität

4.3 Stationäre Verstärkung

Sei $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ die komplexe Übertragungsfunktion eines Systems und sei dieses System stabil.

Außerdem werde dieses System mit einem Sprungsignal $u(t) = \kappa \sigma(t)$, $\kappa \neq 0$ angeregt.

Die stationäre Verstärkung von $G(s)$ ist definiert als:

$$\frac{\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)}{\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)}$$

4.4 Frequenzgang

4.4.1 Systemantwort auf harmonische Anregung

Sei $Y(s) = G(s)U(s)$ die beschreibende Gleichung eines R-Gliedes, welches mit $u(t) = A \sin(\omega t)$ angeregt wird. Die Antwort dieses R-Gliedes ist:

$$y(t) = y_D(t) + y_G(t)$$

mit dem Dauerschwingungsanteil

$$y_D(t) = A|G(j\omega)| \sin(\omega t + \angle G(j\omega))$$

Ist das System $G(s)$ stabil, so gilt für große t :

$$y(t) = y_D(t)$$

Größen:

Frequenzgang des Systems: $G(j\omega)$

Betrag des Frequenzgangs: $|G(j\omega)|$

Phase des Frequenzgangs: $\angle G(j\omega) = \arctan(-\omega T)$

wobei

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\angle G(j\omega)}$$

4.4.2 Frequenzgangortskurve und Bode-Diagramm

4.4.3 Konstruktion von Bode-Diagramm

Sei die komplexe Übertragungsfunktion eines R-Gliedes als Produkt einfacher Glieder gegeben, d.h.:

$$G(s) = K \cdot \frac{(s - q_1) \cdot \dots \cdot (s - q_m)}{(s - p_1) \cdot \dots \cdot (s - p_n)} = K \cdot (s - q_1) \cdot \dots \cdot (s - q_m) \cdot \frac{1}{s - p_1} \cdot \dots \cdot \frac{1}{s - p_n} = K \cdot G_1 \cdot \dots \cdot G_m \cdot G_{m+1} \cdot \dots \cdot G_{n+m}$$

Die Betragskennlinie ist:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log |G_1| + \dots + 20 \log |G_{n+m}|$$

Die Phasenkennlinie ist:

$$\angle G(j\omega) = \angle G_1 + \dots + \angle G_{n+m}$$

4.4.4 Graphische Konstruktion von Bode-Diagramm (Kurzform)

Umrechnungstabelle									
x	0,01	0,1	0,32	0,5	1	2	3,2	10	100
$20 \log_{10}(x)$	-40	-20	≈ -10	≈ -6	0	≈ 6	≈ 10	20	40

1. Zeitkonstantenform:

$$G(j\omega) = K \cdot \frac{(j\omega)^k \cdot (\tilde{T}_1 j\omega + 1) \cdot \dots \cdot (\tilde{T}_r j\omega + 1) \cdot (\tilde{T}_{r+1}^2(j\omega)^2 + 2\tilde{d}_{r+1}\tilde{T}_{r+1}j\omega + 1) \cdot \dots \cdot (\tilde{T}_m^2(j\omega)^2 + 2\tilde{d}_m\tilde{T}_m j\omega + 1)}{(j\omega)^l \cdot (T_1 j\omega + 1) \cdot \dots \cdot (T_s j\omega + 1) \cdot (T_{s+1}^2(j\omega)^2 + 2d_{s+1}T_{s+1}j\omega + 1) \cdot \dots \cdot (T_n^2(j\omega)^2 + 2d_nT_n j\omega + 1)}$$

2. Eckfrequenzen:

$$\tilde{\omega}_i = \frac{1}{|\tilde{T}_i|}, \quad \eta_i = -\frac{1}{\tilde{T}_i} \text{ (falls einfache Nullstelle)}$$

$$\omega_i = \frac{1}{|T_i|}, \quad p_i = -\frac{1}{T_i} \text{ (falls einfacher Pol)}$$

3. Amplitudengang:

$$\text{Startwert: } A(\omega_{min}) = 20 \log_{10} \left(\frac{\omega_{min}^k}{\omega_{min}^l} \cdot |K| \right) \quad [dB]$$

$$\text{Anfangssteigung: } A'(\omega_{min}) = (k - l) \cdot \frac{20dB}{\text{Dekade}}$$

Verlauf		
		$A'(\omega_i^+) = A'(\omega_i^-) + \dots$
Nullstelle	einfach	$20\text{dB}/\text{Dekade}$
	doppelt/konjugiert komplex	$40\text{dB}/\text{Dekade}$
Pol	einfach	$-20\text{dB}/\text{Dekade}$
	doppelt/konjugiert komplex	$-40\text{dB}/\text{Dekade}$

4. Phasengang:

Startwert	
Verstärkungsfaktor	$\varphi(\omega_{min})$
$K > 0$	$0^\circ + (k - l) \cdot 90^\circ$
$K < 0$	$-180^\circ + (k - l) \cdot 90^\circ$

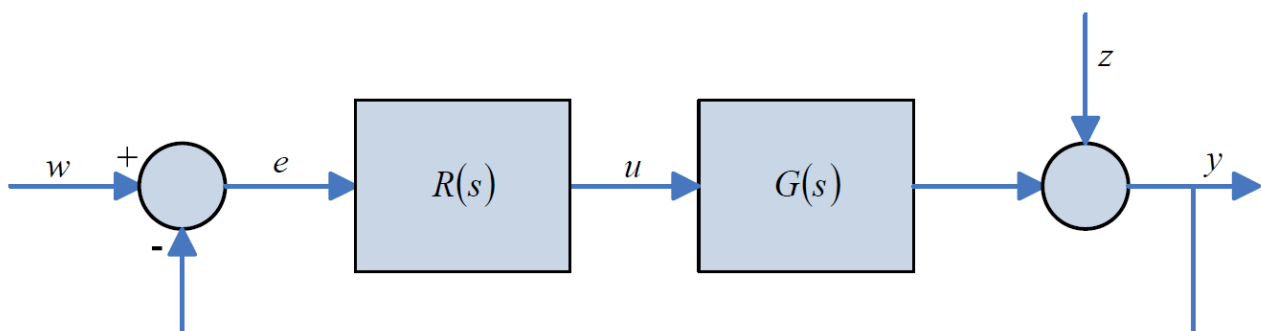
Grobverlauf			
			$\varphi(\omega_i^+) = \varphi(\omega_i^-) + \dots$
Nullstelle	einfach	$\eta_i < 0$	90°
		$\eta_i > 0$	-90°
	doppelt/konjugiert komplex	$\Re(\eta_{i/i+1}) \leq 0$	$+180^\circ$
		$\Re(\eta_{i/i+1}) > 0$	-180°
Pol	einfach	$p_i < 0$	-90°
		$p_i > 0$	90°
	doppelt/konjugiert komplex	$\Re(p_{i/i+1}) \leq 0$	-180°
		$\Re(p_{i/i+1}) > 0$	$+180^\circ$

Feinverlauf				
Änderung von Grobverlauf $\varphi(\omega_i^+) = \varphi(\omega_i^-) + \dots$	Änderung bei -1 Dekade		Änderung bei +1 Dekade	
	Pfeile	$\varphi'(\omega^+) = \varphi'(\omega^-) + \dots$	Pfeile	$\varphi'(\omega^+) = \varphi'(\omega^-) + \dots$
$x \cdot 90^\circ$	$x \cdot \uparrow$	$x \cdot 45^\circ$	$x \cdot \downarrow$	$-x \cdot 45^\circ$
$-x \cdot 90^\circ$	$x \cdot \downarrow$	$-x \cdot 45^\circ$	$x \cdot \uparrow$	$x \cdot 45^\circ$

5 Regelkreis und Stabilität

5.1 Standardregelkreis

Der Standardregelkreis ist definiert als:



mit dem Übertragungsverhalten:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{F_o(s)}{1 + F_o(s)}}_{T(s) \text{ Führungsübertragungsfunktion}} W(s) + \underbrace{\frac{1}{1 + F_o(s)}}_{S(s) \text{ Störübertragungsfunktion}} Z(s)$$

wobei $F_o(s) = G(s)R(s)$ die Übertragungsfunktion des offenen Kreises ist.

5.1.1 Führungsübertragungsfunktion $T(s)$

Sei $F_o(s) = \frac{Z_o(s)}{N_o(s)}$ die Übertragungsfunktion des offenen Kreises des Standardregelkreises.
Die Führungsübertragungsfunktion des Standardregelkreises ist definiert als:

$$T(s) = \frac{F_o(s)}{1 + F_o(s)} = \frac{Z_o(s)}{Z_o(s) + N_o(s)}$$

5.1.2 Störübertragungsfunktion $S(s)$

Sei $F_o(s) = \frac{Z_o(s)}{N_o(s)}$ die Übertragungsfunktion des offenen Kreises des Standardregelkreises.
Die Störübertragungsfunktion des Standardregelkreises ist definiert als:

$$S(s) = \frac{1}{1 + F_o(s)} = \frac{N_o(s)}{Z_o(s) + N_o(s)}$$

5.1.3 Eigenschaften des Standardregelkreises

5.2 Stabilität des Standardregelkreises

5.2.1 Übertragungsstabilität des Standardregelkreises

Der Standardregelkreis ist genau dann übertragungsstabil bezüglich $S(s)$ und $T(s)$, wenn sämtliche Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$F_o(s) + 1 = 0$$

in der linken komplexen Halbebene liegen.

5.2.2 Asymptotische Stabilität des Standardregelkreises

Kriterium 1:

Der Standardregelkreis ist genau dann asymptotisch stabil, wenn alle Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$Z_G(s)Z_R(s) + N_G(s)N_R(s) = 0$$

in der linken komplexen Halbebene liegen. Diese Lösungen sind die Systempole der Regelung.

Es gilt:

$$G(s) = \frac{Z_G(s)}{N_G(s)}, \quad R(s) = \frac{Z_R(s)}{N_R(s)}$$

Kriterium 2:

Der Standardregelkreis ist genau dann asymptotisch stabil, wenn alle Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$F_o(s) + 1 = 0$$

in der linken komplexen Halbebene liegen und alle eventuelle Pol-Nullstellenkürzungen innerhalb der Strecke ($G(s)$), innerhalb des Reglers ($R(s)$) und zwischen Regler und Strecke ($G(s)R(s)$) ausschließlich links gelegene Pol-Nullstellenpaare betreffen.

5.3 Nyquist-Kriterium

5.3.1 Einfaches Nyquist-Kriterium

Sei $F_o(j\omega)$ die Frequenzgangortskurve des offenen Kreises des Standardregelkreises (auch Nyquist-Ortskurve genannt) und seien die unten genannten Voraussetzungen erfüllt.

Liegt der Punkt -1 links der von der in Richtung wachsender ω durchlaufenden Frequenzgangortskurve $F_o(j\omega)$, so ist der Regelkreis übertragungsstabil.

Voraussetzungen:

1. $F_o(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n} \cdot e^{-T_t s}$
2. $m < n$ und $T_t \geq 0$
3. Eines der folgenden Voraussetzungen ist erfüllt:
 - (a) Alle Pole von $F_o(s)$ liegen in der linken komplexen Halbebene und $\frac{b_0}{a_0} > 0$
 - (b) Ein Pol liegt in null, alle anderen Pole von $F_o(s)$ liegen in der linken komplexen Halbebene und $\frac{b_0}{a_1} > 0$
 - (c) Zwei Pole liegen in null, alle anderen Pole von $F_o(s)$ liegen in der linken komplexen Halbebene und $\frac{b_0}{a_2} > 0$

5.3.2 Allgemeines Nyquist-Kriterium

Sei $F_o(j\omega)$ die Frequenzgangortskurve des offenen Kreises des Standardregelkreises und seien die unten genannten Voraussetzungen erfüllt.

Außerdem sei r_0 die Anzahl der in der rechten komplexen Halbebene liegende Pole von $F_o(s)$ und sei a_0 die Anzahl der auf der imaginären Achse gelegenen Pole von $F_o(s)$

Der Regelkreis ist genau dann übertragungsstabil, wenn die Winkeländerung ω_+ des Fahrstrahls vom Punkt -1 zur Ortskurve

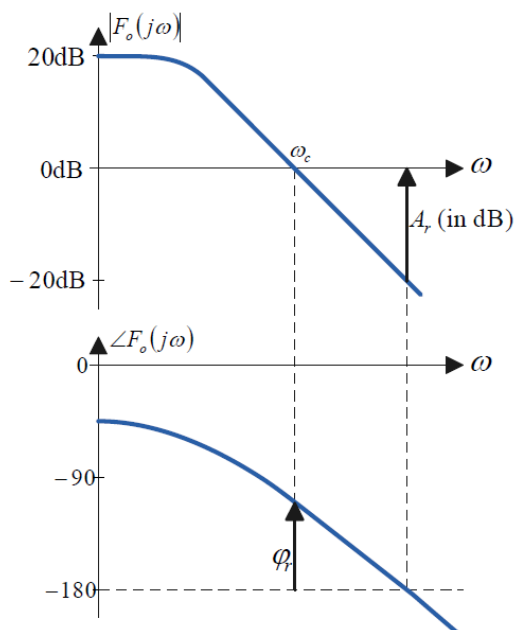
$$\omega_+ = r_0 \pi + a_0 \frac{\pi}{2}$$

beträgt, während die Nyquist-Ortskurve $F_o(j\omega)$ von $\omega = 0$ bis $\omega = \infty$ durchlaufen wird.

Voraussetzungen:

1. $F_o(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n} \cdot e^{-T_t s}$
2. $m < n$ und $T_t \geq 0$

5.3.3 Vereinfachtes Nyquist-Kriterium im Bode-Diagramm



Sei $F_o(j\omega)$ die Frequenzgangortskurve des offenen Kreises des Standardregelkreises und seien die unten genannten Voraussetzungen erfüllt.
Der Regelkreis ist übertragungsstabil, wenn

$$-180^\circ < \angle F_o(j\omega_c) < 0$$

Voraussetzungen:

1. $F_o(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n} \cdot e^{-T_t s}$
2. $m < n$ und $T_t \geq 0$
3. Eines der folgenden Voraussetzungen ist erfüllt:
 - (a) Alle Pole von $F_o(s)$ liegen in der linken komplexen Halbebene und $\frac{b_0}{a_0} > 0$
 - (b) Ein Pol liegt in null, alle anderen Pole von $F_o(s)$ liegen in der linken komplexen Halbebene und $\frac{b_0}{a_1} > 0$
 - (c) Zwei Pole liegen in null, alle anderen Pole von $F_o(s)$ liegen in der linken komplexen Halbebene und $\frac{b_0}{a_2} > 0$
4. Es gibt genau eine Durchtrittsfrequenz ω_c mit $|F_o(j\omega_c)| = 1 = 0 \text{ dB}$.

5.3.3.1 Phasenreserve

Die Phasenreserve φ_r ist definiert als:

$$\varphi_r = \angle F_o(j\omega_c) + \pi$$

Ist $\varphi_r > 0$, so ist der Regelkreis übertragungsstabil.

5.3.3.2 Amplitudenreserve

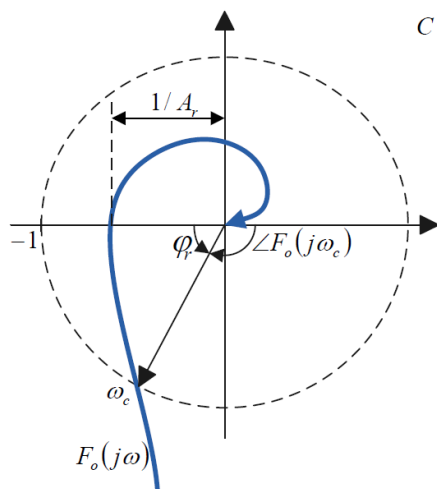
Sei ω_a die Frequenz, bei der der Phasengang gleich -180° ist, d.h. $\angle F_o(j\omega_a) = -180^\circ$

Die Amplitudenreserve ist definiert als:

$$A_r = -|F_o(j\omega_a)|$$

Ist $A_r > 1$, so ist der Regelkreis stabil

5.3.3.3 Amplituden- und Phasenreserve in der Frequenzgangortskurve



5.4 Robustheit der Stabilität

φ_r und A_r werden häufig als Maße der Robustheit der Stabilität gegenüber Fehlern oder Veränderungen des Modells $F_o(s)$ verwendet. Faustregel für gute Robustheit:

$$\varphi_r > 60^\circ \quad \text{und/oder} \quad A_r > 2$$

6 Reglerentwurf

6.1 Anforderungen an das Regelverhalten

1. **Dynamisches Verhalten:**
2. **Stationäre Genauigkeit:**
3. **Robuste Stabilität:**
4. **Realisierbarkeit des Reglers:**
5. **Einhaltung von Begrenzungen:**

6.2 Dynamik, Robustheit der Stabilität und Grenzen der Regelgüte

6.2.1 Bode-Theorem

Sei der geschlossene Regelkreis übertragungsstabil,
 sei Zählergrad von $F_o(s) + 2 \leq$ Nennergrad von $F_o(s)$ und
 sei p_i die in der rechten komplexen Halbebene liegende Pole von $F_o(s)$
 Es folgt:

$$\int_0^\infty \ln |S(j\omega)| d\omega = \begin{cases} 0, & \text{sofern } F_o(s) \text{ stabil} \\ \pi \sum_i \Re(p_i), & \text{sofern } F_o(s) \text{ instabil} \end{cases}$$

Eigenschaften:

- Die Summe der Flächen, wo $|S(s)| < 1$ gleicht der Summe der Flächen, wo $|S(s)| > 1$, sofern $F_o(s)$ stabil ist.
- Jede Verbesserung des Störverhaltens in einem gewissen Frequenzbereich muss mit einer Verschlechterung in einem anderen Frequenzbereich bezahlt werden.
- Die störungsmindernde Wirkung einer Regelung findet vor allem bei niedrigen Frequenzen statt und endet im Wesentlichen beim kleinsten ω für das gilt: $|S(j\omega)| = 1$.

Voraussetzungen für gute Robustheit der Stabilität und gute Dämpfung des Einschwingverhaltens

- Die Ortskurve $F_o(j\omega)$ soll dem Punkt -1 nicht sehr nahe kommen bzw. es soll gelten $|S(j\omega)| < 2 = 6\text{dB}, \forall \omega$.
- Oberhalb von ω_1 soll $F_o(j\omega)$ sehr klein werden, wobei ω_1 das kleinste ω ist, für das $|S(j\omega)| = 1$ ist.

6.3 Stationäre Genauigkeit

6.3.1 Stationäre Genauigkeit bezüglich des Führungsverhalten

Ein Regelkreis ist stationär genau bezüglich des Führungsverhaltens genau dann, wenn

- der geschlossene Regelkreis stabil ist
- und eine der folgenden (äquivalenten) Voraussetzungen erfüllt ist:
 - Ein freies I-Glied ist im offenen Kreis vorhanden
 - Die Übertragungsfunktion des offenen Kreises besitzt einen Pol im Ursprung
 - Die Führungsübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises hat eine stationäre Verstärkung von 1

Es folgt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \text{ bzw. } \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \kappa, \quad \text{wobei } w(t) = \kappa \sigma(t), \kappa \neq 0$$

6.3.2 Stationäre Genauigkeit bezüglich des Störverhaltens

Ein Regelkreis ist stationär genau bezüglich des Führungsverhaltens genau dann, wenn

- stationär genau bezüglich des Führungsverhalten ist
- und eine der folgenden (äquivalenten) Voraussetzungen erfüllt ist:
 - Ein freies I-Glied ist im offenen Kreis zwischen Soll-/Istwert-Vergleich und Störeingriff vorhanden
 - Die Störübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises besitzt eine Nullstelle im Ursprung
 - Die Störübertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises hat eine stationäre Verstärkung von 0

Es folgt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \text{ bzw. } \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \kappa, \quad \text{wobei } w(t) = \kappa \sigma(t), \kappa \neq 0 \text{ und } z(t) = \zeta \sigma(t), \zeta \neq 0$$

6.4 Grundtypen linearer Regler

Sei im folgenden die Regelabweichung $e(t)$ die Eingangsgröße der Regler und die Stellgröße $u(t)$ die Ausgangsgröße der Regler im Zeitbereich bzw.

$R(s)$ die komplexe Übertragungsfunktion des Reglers.

6.4.1 P-Regler

Definition:

$$\text{Zeitbereich: } u(t) = K_R e(t)$$

$$\text{Bildbereich: } R(s) = K_R$$

Wahl der Variablen:

K_R : wird so gewählt, dass Phasen- und Amplitudenreserve groß genug sind, z.B: $A_r > 2, \varphi_r > 60^\circ$

Vorteile/Nachteile:

- Vorteile:
 - gute Dynamik bei einfachem Regleraufbau
- Nachteile:
 - keine stationäre Genauigkeit (außer wenn $G(s)$ ein I-Glied enthält und die Störung erst hinter dem I-Glied eingreift)

6.4.2 I-Regler

Definition:

$$\text{Zeitbereich: } u(t) = K_I \int_0^t e(\tau) d\tau$$

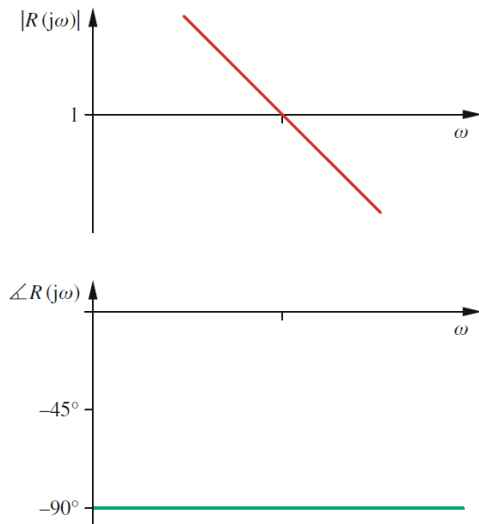
$$\text{Bildbereich: } R(s) = \frac{K_I}{s}$$

Wahl der Variablen:

K_I : wird so gewählt, dass Phasen- und Amplitudenreserve groß genug sind, z.B: $A_r > 2, \varphi_r > 60^\circ$

Vorteile/Nachteile:

- Vorteile:
 - sichert stationäre Genauigkeit
- Nachteile:
 - tendenziell langsame Dynamik der Regelung

Bode-Diagramm:**6.4.3 PI-Regler****Definition:**

$$\text{Zeitbereich: } u(t) = K_R e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau$$

$$\text{Bildbereich: } R(s) = \frac{K_I}{s}(1 + T_R s) = \frac{K_I}{s} + K_R$$

Wahl der Variablen:

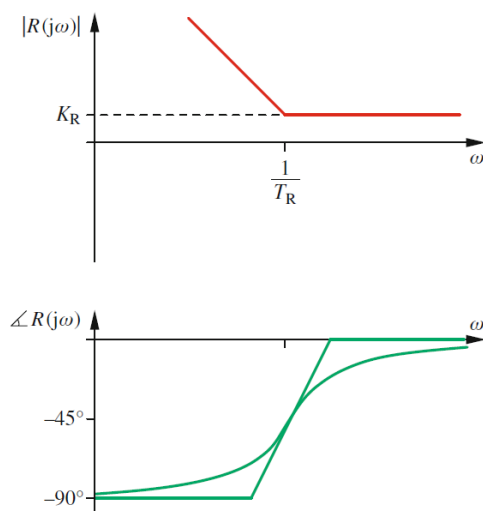
$$K_R = K_I \cdot T_R$$

T_R = größte Nennerzeitkonstante der Strecke (Zeitkonstantenform)

K_I : wird so gewählt, dass Phasen- und Amplitudenreserve groß genug sind, z.B.: $A_r > 2, \varphi_r > 60^\circ$

Vorteile/Nachteile:

- Vorteile:
 - schneller als I-Regler
 - gesicherte stationäre Genauigkeit

Bode-Diagramm:

6.4.4 Idealer PD-Regler

Definition:

Zeitbereich: $u(t) = K_R(e(t) + T_R \dot{e}(t)) = K_R e(t) + K_D \dot{e}(t)$

Bildbereich: $R(s) = K_R(1 + T_R s) = K_R + K_D s$

Wahl der Variablen:

$$K_D = K_R + T_R$$

Vorteile/Nachteile:

- Vorteile:
 - hohe Dynamik der Regelung erreichbar (schnellerer Regelkreis)
- Nachteile:
 - Verstärkung von hochfrequenten Störsignalen und Rauschen
 - D-Anteil kann die Stellgröße in die Begrenzung treiben

6.4.5 Realer PD-Regler

Definition:

Bildbereich: $R(s) = K_R \frac{1+T_R s}{1+T_N s}, \quad T_N < T_R$

Wahl der Variablen:

T_R = größte Streckenzeitkonstante

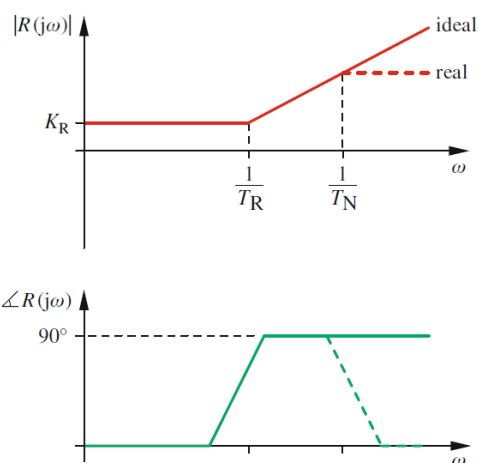
K_R : wird so gewählt, dass Phasen- und Amplitudenreserve groß genug sind, z.B: $A_r > 2, \varphi_r > 60^\circ$

$$T_N : \frac{T_R}{50} < T_N < \frac{T_R}{5}$$

Vorteile/Nachteile:

- Vorteile:
 - hohe Dynamik der Regelung erreichbar
- Nachteile:
 - D-Anteil kann Messstörungen verstärken
 - D-Anteil kann die Stellgröße in die Begrenzung treiben

Bode-Diagramm:



6.4.6 Idealer PID-Regler

Definition:

$$\text{Zeitbereich: } u(t) = K_R e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_I \cdot T_{R1} \cdot T_{R2} \cdot \dot{e}(t)$$

$$\begin{aligned} \text{Bildbereich: } R(s) &= \underbrace{K_I(T_{R1} + T_{R2})}_{\text{P-Glied}} + \underbrace{\frac{K_I}{s}}_{\text{I-Glied}} + \underbrace{K_I \cdot T_{R1} \cdot T_{R2} \cdot s}_{\text{D-Glied}} \\ &= K_R \left(1 + \frac{1}{T_I \cdot s} + T_D s\right) \\ &= \frac{K_I}{s} (1 + T_{R1} \cdot s)(1 + T_{R2} \cdot s) \end{aligned}$$

Wahl der Variablen:

$$K_R = K_I(T_{R1} + T_{R2})$$

$$T_I = \frac{K_R}{K_I}$$

$$T_D = \frac{K_I \cdot T_{R1} \cdot T_{R2}}{K_R}$$

Vorteile/Nachteile:

- Vorteile:
 - hohe Dynamik
 - stationäre Genauigkeit
- Nachteile:
 - Verstärkung von hochfrequenten Störsignalen und Rauschen
 - D-Anteil kann die Stellgröße in die Begrenzung treiben (unendlich hohe Impulse)
 - nicht realisierbar (da Zählergrad > Nennergrad)

6.4.7 Realer PID-Regler

Definition:

$$\text{Bildbereich: } R(s) = \frac{K_I(1+T_{R1} \cdot s)(1+T_{R2} \cdot s)}{s(1+T_N \cdot s)}$$

Wahl der Variablen:

T_{R1} = größte Streckenzeitkonstante

T_{R2} = zweitgrößte Streckenzeitkonstante

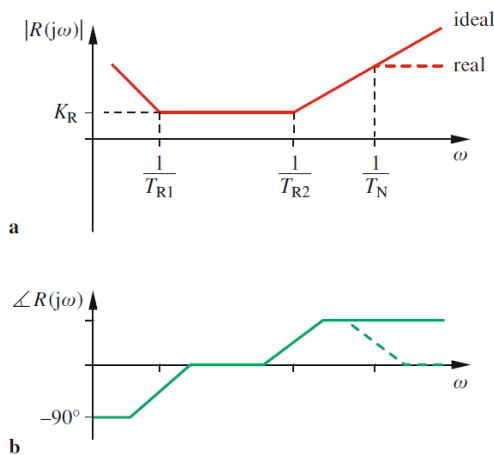
K_I : wird so gewählt, dass Phasen- und Amplitudenreserve groß genug sind, z.B.: $A_r > 2, \varphi_r > 60^\circ$

$$T_N : \frac{T_R}{50} < T_N < \frac{T_R}{5}$$

Vorteile/Nachteile:

- Vorteile:
 - hohe Dynamik
 - stationäre Genauigkeit
- Nachteile:
 - D-Anteil kann Messstörungen verstärken
 - D-Anteil kann die Stellgröße in die Begrenzung treiben

Bode-Diagramm:

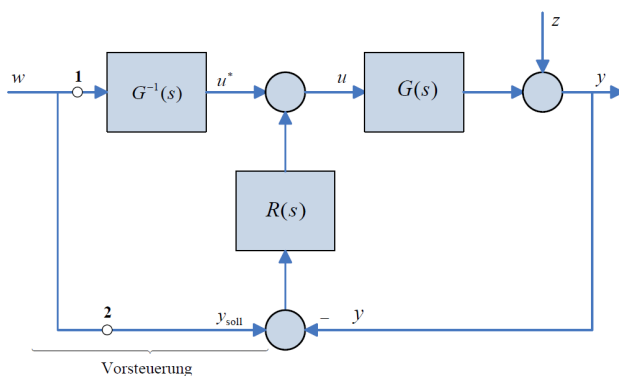


7 Erweiterte Regelstrukturen und Zustandsregelung

7.1 Zwei-Freiheitsgrade-Regelung

Grundsatz:

- Regelkreise sollen vorrangig auf gutes Störverhalten und Robustheit der Stabilität ausgelegt werden. Das Führungsverhalten kann unabhängig durch eine Steuereinrichtung (Vorsteuerung) manipuliert werden.



Verhalten der Regelung:

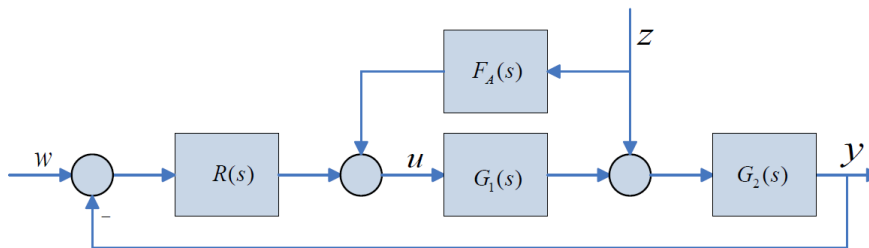
- Keine Störung ($z = 0$) und variable Führungsgröße w :
 - $e = w - y = 0$ (Regler bleibt inaktiv)
 - $Y(s) = G(s)G^{-1}(s)W(s) = W(s)$ (ideales Führungsverhalten)
- $w = 0$ und $z(t) \neq 0$:
 - Steuereinrichtung bleibt ohne Einfluss.

Sonderfälle:

- Vorsteuerung ist nicht realisierbar (Zählergrad > Nennergrad):
 - Einfügen je eines PT_n -Glieds bei 1 und 2 mit $V(s) = G_{PTn}(s) = \frac{1}{(1+Ts)^n}$
 - n mindestens so groß wählen, dass $G^{-1}(s)G_{PTn}(s)$ realisierbar ist.
 - Führungsverhalten nicht mehr ideal
- $G(s)$ besitzt eine rechts gelegene Nullstelle η :
 - Einfügen je eines Glieds bei 1 und 2 mit $V(s) = \frac{1 - \frac{1}{\eta}s}{1+Ts}$

- $G(s)$ enthält eine Totzeit T_t :
 - Einfügen je eines Glieds bei 1 und 2 mit $V(s) = e^{-T_t s}$
- Für alle Fälle gilt:
 - Führungsübertragungsverhalten ist: $V(s)$
 - $Y(s) = V(s) \cdot W(s) + \frac{1}{1+G(s)R(s)} Z(s)$

7.2 Störgrößenaufschaltung



$$Y(s) = \frac{G_2(G_1 F_A + 1)}{1 + G_2 G_1 R} Z(s)$$

Ideale Störgrößenaufschaltung:

$$F_A(s) = -\frac{1}{G_1(s)}, \quad \text{realisierbar, falls Zählergrad} < \text{Nennergrad}$$

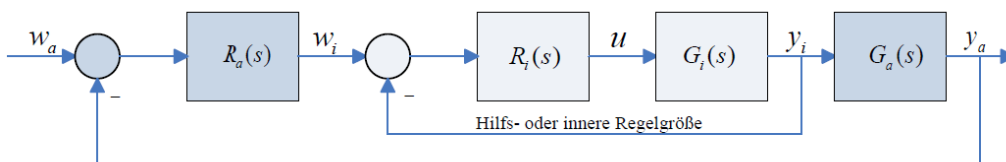
Reale Störgrößenaufschaltung:

$$F_A(s) = -\frac{1}{G_1(s)} \cdot \underbrace{\frac{1}{(1+Ts)^n}}_{\text{PTn-Glied}}$$

Statische Störgrößenaufschaltung:

$$F_A(s) = -\frac{1}{G_1(0)}$$

7.3 Kaskadenregelung



Ziel:

- Schnelleres Reagieren auf Störungen in der inneren Schleife durch Verwenden einer zusätzlichen verfügbaren Messgröße

Entwurf:

1. Entwurf eines Reglers $R_i(s)$ für die Regelstrecke $G_i(s)$, sodass ein günstiges Störverhalten von y_i bei robuster Stabilität eintritt.

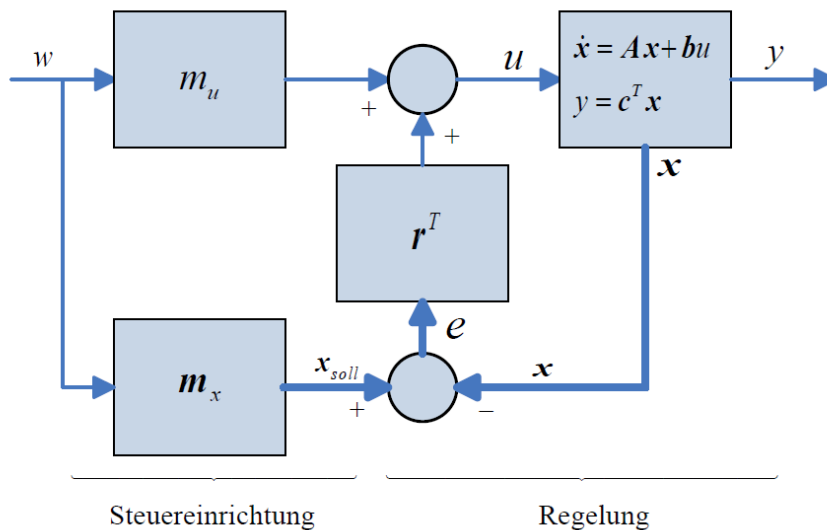
Die Führungsübertragungsfunktion ist:

$$T_i(s) = \frac{Y_i(s)}{W_i(s)} = \frac{G_i R_i}{1 + G_i R_i}$$

2. Innere Schleife wird mit $G_a(s)$ zu der äußeren Schleife $\bar{G}_a(s) = T_i(s)G_a(s)$
3. Entwurf eines Reglers $R_a(s)$ für die Regelstrecke $\bar{G}_a(s)$, sodass ein günstiges Störverhalten von y_a mit zumeist stationärer Genauigkeit eintritt.

7.4 Zustandsregelung

7.4.1 Konstante Zustandsrückführung und Vorsteuerung



Sei die Strecke in Zustandsdarstellung mit $\dot{x} = Ax + bu$ und $y = c^T x$

Formeln

$$\dot{x}(t) = (A - br^T)x + b(r^T m_x + m_u)w = A_r x + b_r w$$

$$y(t) = c^T x(t)$$

$$u(t) = r^T e(t) + m_u w(t) = r^T (m_x w(t) - x(t)) + m_u w(t)$$

$$G_{wy}(s) = T(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = c^T (sI - A_r)^{-1} b_r \quad (\text{Komplexe Übertragungsfunktion:})$$

Variablen

Bezeichnung	Var.
P-Glied Verstärkung	$m_u \in \mathbb{R}$
-	$m_x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$
Zustands-Sollverlauf	$x_{soll}(t) = m_x w(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$
vektorielle Regelabweichung	$e(t) = \begin{bmatrix} e_1(t) \\ \vdots \\ e_n(t) \end{bmatrix} = x_{soll}(t) - x(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$
Faktoren	$r^T = \begin{bmatrix} r_1 & \dots & r_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$
Systemordnung	n (Zahl der Elemente von x)
-	$A_r = (A - br^T)$
-	$b_r = b(r^T m_x + m_u)$

Anforderungen**1. Anforderung:**

Im stationären Fall (d.h. im eingeschwungenen Zustand mit $\dot{x} = 0$) soll die Regelgröße y den Sollwert w annehmen, also $y = w$, und die vektorielle Regelabweichung $e = x_{soll} - x$ soll null werden, also $x = x_{soll}$

Es folgt:

$$\begin{bmatrix} A & b \\ c^T & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_x \\ m_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Anforderung:

Das dynamische Verhalten der Regelung soll asymptotisch stabil sein und eine gewünschte Schnelligkeit und Dämpfung aufweisen.

Es folgt:

$$\dot{x}(t) = (A - br^T)x(t)$$

Für asymptotische Stabilität müssen die Eigenwerte p_1, \dots, p_n der Matrix $A - br^T$ (Regelungseigenwerte) in der linken komplexen Halbebene liegen.

Entwurf:

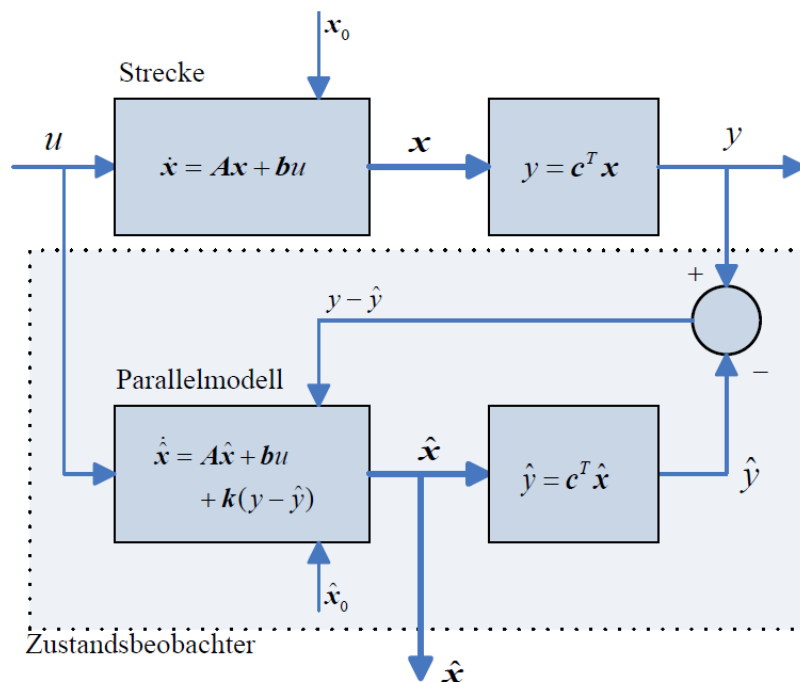
1. Aufstellen des charakteristischen Polynoms (in Abh. von r^T und s):
 $\det(sI - A + br^T) = s^n + c_{n-1}(r_1, \dots, r_n) \cdot s^{n-1} + \dots + c_0(r_1, \dots, r_n)$, wobei $c_i = f(r_1, \dots, r_n)$
2. Aufstellen eines Polynoms mit den gewünschten Eigenwerten (in Abh. von s):
 $P(s) = (s - p_1) \cdot \dots \cdot (s - p_n) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$, wobei p_i die gewünschten Eigenwerte sind
3. Einsetzen der Variablen aus 1. und 2. in folgende Gleichungen und auflösen nach r_1, \dots, r_n :

$$\begin{aligned} c_{n-1}(r_1, \dots, r_n) &= a_{n-1} \\ &\vdots \\ c_0(r_1, \dots, r_n) &= a_0 \end{aligned}$$

Eigenschaften

- Alle Eigenwerte und somit die vollständige Dynamik der Regelung können vom Entwerfer vorgegeben werden. Dazu ist die Messung aller n Zustandsvariablen nötig (oder deren Schätzung durch einen sogenannten Zustandsbeobachter).
- Die Entwürfe des Reglers r^T und der Vorsteuerung m_u, m_x geschehen unabhängig.
- Die Vorgabe der Eigenwerte erlaubt eine sehr gezielte und umfassende Gestaltung der gesamten Systemdynamik. Je weiter links die Regelungseigenwerte platziert werden, desto schneller das Regelverhalten, desto höher aber auch die Stellgrößenausschläge.

7.4.2 Zustandsbeobachter



Ziel:

- Schätzung des Zustandsvektors x (, da $x(t)$ nicht messbar)
- Einführung eines Vektors \hat{x} als Schätzung für x

Formeln:

Zustandsschätzung $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + bu + k(y - \hat{y}) = (A + kc^T)\hat{x} + bu + ky$

Schätzung für y $\hat{y} = c^T \hat{x}$

Schätzfehler $\tilde{x} = x - \hat{x}$

Ableitung des Schätzfehlers $\dot{\tilde{x}} = (A - kc^T)\tilde{x} = A_k \tilde{x}$

Entwurf:

1. $\det(sI - A + kc^T) = s^n + c_{n-1}(k_1, \dots, k_n) \cdot s^{n-1} + \dots + c_0(k_1, \dots, k_n)$, wobei $c_i = f(k_1, \dots, k_n)$
2. $P(s) = (s - p_1) \cdot \dots \cdot (s - p_n) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$, wobei p_i die gewünschten Eigenwerte sind
3. Auflösen nach k_1, \dots, k_n :

$$\begin{aligned} c_{n-1}(k_1, \dots, k_n) &= a_{n-1} \\ &\vdots \\ c_0(k_1, \dots, k_n) &= a_0 \end{aligned}$$

Eigenschaften:

- $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x} = x$
- Der Zustandsbeobachter wird vollständig im Digitalrechner realisiert.

- Der Zustandsbeobachter kann auf Fälle erweitert werden, in denen nicht nur eine, sondern mehrere Messgrößen zur Verfügung stehen.
- Je weiter links die Eigenwerte liegen, desto schneller klingt der Schätzfehler ab, desto empfindlicher wird die Schätzung aber gegenüber Störungen durch Messrauschen.

7.5 Nichtlineare Zustandsregelung durch Ein-/Ausgangslinearisierung

Ziel:

- Verfahren, mit dem man gewisse nichtlineare Strecken durch ein nichtlineares Zustandsrückführungsgesetz derart regeln kann, dass lineares Ein-/Ausgangsverhalten (lineares Führungsverhalten) eintritt.

Vorgehen:

1. Formulieren der nichtlinearen Streckenbeschreibung in der Zustandsdarstellung:
 $\dot{x} = a(x) + b(x)u$
 $y = c(x) := c_0(x)$
2. Ableiten von y nach x solange bis u auftaucht:
Wiederhole solange bis $b_q(x) \neq 0$; starte mit $q = 1$; inkrementiere q nach jedem Schritt um 1
 $y^{(q)} = \frac{\partial c_{q-1}}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \dots + \frac{\partial c_{q-1}}{\partial x_n} \dot{x}_n = c_q(x) + b_q(x)u$
3. Einsetzen in Wunschkifferentialgleichung (hier: $y^{(q)} + a_{q-1}y^{(q-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = a_0w$):
 $c_q(x) + b_q(x)u + a_{q-1}y^{(q-1)} + \dots + a_1\dot{y} + a_0y = a_0w$
4. Auflösen nach u :
 $u = \frac{1}{b_q(x)}(-c_q(x) - a_{q-1}y^{(q-1)} - a_1\dot{y} - a_0y + a_0w)$
5. Einsetzen von $y^{(i)} = c_i(x)$ aus Schritt 2:
 $u = \frac{1}{b_q(x)}(-c_q(x) - a_{q-1}c_{q-1}(x) - \dots - a_1c_1(x) - a_0c(x) + a_0w)$

Außerdem gilt:

$$Y(s) = \frac{a_0}{s^q + a_{q-1}s^{q-1} + \dots + a_0} W(s)$$

Eigenschaften:

- Der sogenannte relative Grad q ist bei technisch sinnvollen Systemen stets kleiner oder gleich der Systemordnung n .
- Der Entwurf sichert lineares Ein-/Ausgangsverhalten.
- Die Dynamik der Zustandsvariablen bleibt nichtlinear.
- Falls $q < n$ ist, können nur q Pole vorgegeben werden. Die verbleibenden $n-q$ Freiheitsgrade der Systemdynamik bleiben im Systeminnern „versteckt“ und können instabiles Verhalten von Zustandsvariablen bewirken. Falls $q = n$ ist und alle oben verwendeten Ausdrücke frei von Singularitäten sind (zumindest im interessierenden Bereich des Zustandsraums), dann darf man im Allgemeinen von einem stabilen Systemverhalten ausgehen.

8 Digitale Realisierung

8.1 Tustin-Transformation

Sei $z \cdot u[k] = u[k+1]$ sowie $z^{-1} \cdot u[k] = u[k-1]$

Die Tustin-Transformation ist definiert als:

$$R(z) = \frac{u[k]}{e[k]} = \frac{T(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})} \quad \text{entspricht} \quad R(s) = \frac{1}{s}$$

$$R(z) = \frac{u[k]}{e[k]} = \frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})} \quad \text{entspricht} \quad R(s) = s$$

A Mathematische Grundlagen

A.1 Partialbruchzerlegung

A.1.1 Partialbruchzerlegung mit Koeffizientenvergleich

Sei $R(s) = \frac{b_n s^n + \dots + b_1 s + b_0}{a_m s^m + \dots + a_1 s + a_0}$

1. Finde alle Polstellen p_i von $R(s)$

2. Setze Partialbrüche an:

$$R(s) = G_1 + \dots + G_m = \frac{Z_1}{N_1} + \dots + \frac{Z_m}{N_m}, \quad G_i = \frac{Z_i}{N_i}, \text{ wobei}$$

- $G_i = \frac{r_i}{s-p_i}$, für jeden einfachen reellen Pol p_i
- $G_i + G_{i+1} = \frac{r_i s + r_{i+1}}{(s-p_i)(s-p_{i+1})}$, für jedes konjugiert komplexes Polpaar $p_i, p_{i+1} = p_i^*$
- $G_i + \dots + G_k = \frac{r_i}{s-p_i} + \frac{r_{i+1}}{(s-p_i)^2} + \dots + \frac{r_{i+k-1}}{(s-p_i)^k}$, für jeden k-fachen reellen Pol $p_i = p_{i+1} = \dots = p_{i+k-1}$

3. Bringe alle Brüche auf denselben Nenner und addiere sie:

$$R(s) = \frac{Z_1}{N_1} + \dots + \frac{Z_m}{N_m} = \frac{Z_1(N_2 + \dots + N_m)}{N_1 \dots N_n} + \dots + \frac{Z_m(N_1 + \dots + N_{m-1})}{N_1 \dots N_n} = \frac{Z_1(N_2 + \dots + N_m) + \dots + Z_m(N_1 + \dots + N_{m-1})}{N_1 \dots N_n}$$

4. Multipliziere den Zähler aus und forme um zu:

$$R(z) = \frac{(c_{1,m} r_1 + \dots + c_{m,m} r_m) s^m + \dots + (c_{1,0} r_1 + \dots + c_{m,0} r_m) s^0}{N_1 \dots N_n}$$

5. Löse folgendes lineare Gleichungssystem:

$$(c_{1,m} r_1 + \dots + c_{m,m} r_m) = b_m$$

$$\vdots$$

$$(c_{1,0} r_1 + \dots + c_{m,0} r_m) = b_0$$

6. Setze r_1 bis r_m in die Gleichung aus Schritt 2 ein ($R(s) = G_1 + \dots + G_m$)

Beispiel:

Sei $R(s) = \frac{5s-1}{s^2-1}$

1. Finde alle Polstellen p_i von $R(s)$:

$$p_1 = -1 \text{ und } p_2 = 1$$

2. Setze Partialbrüche an:

$$\Rightarrow R(s) = \frac{r_1}{s-1} + \frac{r_2}{s+1}$$

3. Bringe alle Brüche auf denselben Nenner und addiere sie:

$$R(s) = \frac{r_1(s+1)}{s^2-1} + \frac{r_2(s-1)}{s^2-1} = \frac{r_1(s+1) + r_2(s-1)}{s^2-1}$$

4. Multipliziere den Zähler aus und forme um:

$$R(s) = \frac{(r_1+r_2)s + (r_1-r_2)}{s^2-1}$$

5. Löse folgendes lineare Gleichungssystem:

$$r_1 + r_2 = 5$$

$$r_1 - r_2 = -1$$

$$\Rightarrow r_1 = 2 \wedge r_2 = 3$$

6. Setze r_1 und r_2 in die Gleichung aus Schritt 2 ein ($R(s) = \frac{r_1}{s-1} + \frac{r_2}{s+1}$):

$$R(s) = \frac{2}{s-1} + \frac{3}{s+1}$$

A.1.2 Heavisidescher Zuhalttemethode

Sei $R(s) = \frac{b_n s^n + \dots + b_1 s + b_0}{a_m s^m + \dots + a_1 s + a_0}$

1. Finde alle Polstellen p_i von $R(s)$

2. Setze Partialbrüche an:

$$R(s) = G_1 + \dots + G_m = \frac{Z_1}{N_1} + \dots + \frac{Z_m}{N_m}, \quad G_i = \frac{Z_i}{N_i}, \text{ wobei}$$

- $G_i = \frac{r_i}{s-p_i}$, für jeden einfachen reellen Pol p_i
- $G_i + G_{i+1} = \frac{r_i}{(s-p_i)} + \frac{r_i^*}{(s-p_{i+1})}$, für jedes konjugiert komplexes Polpaar $p_i, p_{i+1} = p_i^*$
- $G_i + \dots + G_k = \frac{r_i}{s-p_i} + \frac{r_{i+1}}{(s-p_i)^2} + \dots + \frac{r_{i+k-1}}{(s-p_i)^k}$, für jeden k-fachen reellen Pol $p_i = p_{i+1} = \dots = p_{i+k-1}$

3. Koeffizienten bestimmen:

$$r_i = \left. \frac{b_n s^n + \dots + b_1 s + b_0}{N_1 \cdot \dots \cdot N_{i-1} \cdot N_{i+1} \cdot \dots \cdot N_m} \right|_{s=p_i}$$

4. Setze r_1 bis r_m in die Gleichung aus Schritt 2 ein ($R(s) = G_1 + \dots + G_m$)

A.2 Matrizen

A.2.1 Determinante

Determinante einer 2×2 Matrix

Sei $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Die Determinante dieser Matrix ist definiert als:

$$\det(A) = |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

A.2.2 Inverse

Inverse einer 2×2 Matrix

Sei $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und

sei $\det A \neq 0$.

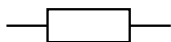
Die Inverse von A ist definiert als:

$$\frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

B Elektrotechnische Grundlagen

B.1 Widerstand

Schaltzeichen:

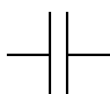


Formel:

$$u = R \cdot i$$

B.2 Kondensator

Schaltzeichen:

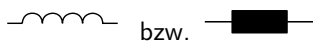


Formel:

$$u = \frac{1}{C} \int i \, dt \iff \dot{u} = \frac{i}{C}$$

B.3 Spule

Schaltzeichen:

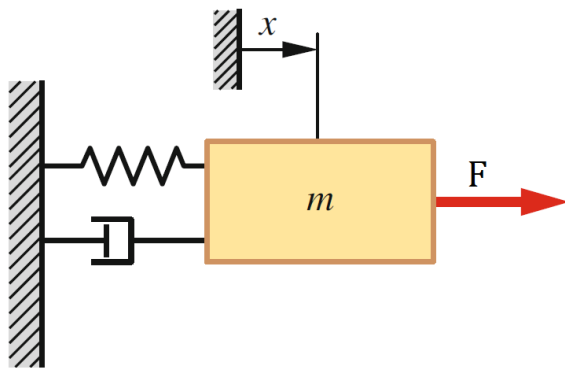


Formel:

$$u = L \cdot \frac{di}{dt}$$

C Physikalische Grundlagen

Masse-Feder-Dämpfer System



m : Masse des Körpers, d : Dämpferkonstante, k : Federkonstante, F : Stellkraft

$$F = m \cdot \ddot{x} + d\dot{x} + kx$$

Anmerkungen

Dies ist eine Zusammenfassung der Vorlesung Regelungstechnik an der Technischen Universität München. Gehalten wurde diese Vorlesung durch Lohmann B. im Sommersemester 2019. Ersteller dieser Zusammenfassung ist Gaida B. Alle Angaben sind ohne Gewähr.

Literaturverzeichnis

Werner Skolaut. *Maschinenbau. Ein Lehrbuch für das ganze Bachelor-Studium*. Springer Vieweg. Heidelberg, 2018, S. 1271 - 1387