Calcul Haute Performance et Simulation

Présentation d'un projet

Analyse numérique d'équations aux dérivées partielles par différences finies et implémentation optimisée pour le calcul haute performance

par Jean-Baptiste Gaillot

version 1.2

Information

Cette présentation est la suite d'une présentation initiale réalisé dans le cadre d'un stage du Master Calcul Haute Performance et Simulation (1ère année, 2ème semestre à l'Université de Perpignan Via Domitia pour l'année universitaire 2024–2025) comportant quelques améliorations réalisées à la suite de ce dernier.

Organisation – Partie mathématiques

Approche :

- concevoir un ou plusieurs schémas numériques pour obtenir une solution approchée du problème,
- s'assurer de l'existence et de l'unicité de la solution approchée,
- s'assurer des bonnes propriétés du schéma (consistance, convergence et erreur locale),
- concevoir un ou plusieurs schémas de résolution de l'éventuel système linéaire associé à ce schéma.

Organisation – Partie informatique

Approche :

- implémenter des fonctions de résolutions du problème et un programme principal,
- implémenter le calcul d'une solution exacte connue dans le but de calculer l'erreur entre la solution approchée et la solution exacte,
- implémenter la résolution du problème en différentes versions dans le but de comparer les performances (différents schémas en versions naïves, séquentielles, parallèles et utilisation d'une bibliothèque),
- structurer toutes ces étapes à travers un projet.

Les différents résultats (erreurs et temps d'exécutions) seront présentés sous forme de tableaux et de graphiques. Le langage de programmation utilisé est `C`.

Problèmes étudiés

Équation de Poisson en dimension 1

Équation de Poisson en dimension 2

Équation des ondes en dimension 1

Équation de la chaleur en dimension 2

Équation de Poisson en dimension 1

Problème

Soient $D :=]0,1[$, $f : D \to \mathbb{R}$ continue et bornée et le problème suivant :

Trouver u de classe C^4 telle que :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & \forall\, x \in D \\ u(x) = 0 & \forall\, x \in \partial D \end{cases}.$$

Discrétisation

$$-u''(x) = \frac{1}{h^2}\left(-u(x+h) + 2u(x) - u(x-h)\right) + E_h$$

avec

$$E_h := \frac{1}{12} h^2 u^{(4)}(x + \theta h).$$

Schéma

$$\boxed{\frac{1}{h^2}\left(-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}\right) = f_i}.$$

Schéma sous forme matricielle

$$\boxed{Au = f}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdot & \cdot \\ -1 & \ddots & \ddots & \cdot \\ \cdot & \ddots & \ddots & -1 \\ \cdot & \cdot & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{=:A} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{pmatrix}}_{=u} = \underbrace{\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}}_{=f}.$$

Existence et unicité de la solution approchée

Proposition A est définie-positive et $Au = f$ admet une unique solution.

Proposition Le schéma est consistant : $\lim_{h \to 0} |E_h| = 0$ et

$$|E_h| \leq \frac{1}{12} h^2 \sup_{x \in [0,1]} |f''(x)| .$$

Remarque Le schéma est d'ordre 2 pour x.

Proposition Soient $h > 0$, $e_h := (u_i - u(x_i))_{0 \leq i \leq N}$. Alors, le schéma est convergent :

$$\lim_{h \to 0} \|e_h\|_\infty = 0 \quad \text{et} \quad \|e_h\|_\infty \leq \frac{1}{96} h^2 \sup_{x \in [0,1]} |f''(x)| .$$

Méthode de Jacobi

$$D u^{(k+1)} = (E + F)\, u^{(k)} + f\,.$$

Schéma

$$\boxed{u_i^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(u_{i-1}^{(k)} + u_{i+1}^{(k)} + h^2 f_i\right)}.$$

Factorisation de Cholesky

$$\ell_{i,i} = \sqrt{a_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{i,k}^2} \quad \text{et} \quad \ell_{i,j} = \frac{1}{\ell_{j,j}} \left(a_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{i,k}\ell_{j,k} \right).$$

On calcule d'abord en colonnes puis en lignes.

Proposition Soit A une matrice tridiagonale, symétrique et définie-positive. Alors, la matrice L de la décomposition de Cholesky de A est bidiagonale inférieure.

Schéma

$$\boxed{\text{Pour } j \text{ de } 1 \text{ à } N-1 : \begin{cases} \ell_{i,i} = \sqrt{\alpha - \ell_{i,i-1}^2} & \text{si } d = 0 \\ \ell_{i,j} = \dfrac{\beta}{\ell_{j,j}} & \text{si } d = 1 \end{cases}}.$$

avec

$$d := i - j, \quad \alpha := \frac{2}{h^2} \quad \text{et} \quad \beta := -\frac{1}{h^2}.$$

Schéma

$$y_1 = \frac{f_1}{\ell_{1,1}} \quad \text{et} \quad \text{pour } i \text{ de 2 à } N-1 : y_i = \frac{f_i - \ell_{i,j-1} y_{i-1}}{\ell_{i,i}}$$

et

$$\boxed{u_{N-1} = \frac{y_{N-1}}{\ell_{N-1,N-1}} \quad \text{et} \quad \text{pour } i \text{ de } N-2 \text{ à } 1 : u_i = \frac{y_i - \ell_{i,j+1} u_{i+1}}{\ell_{i,i}}}.$$

Équation de Poisson en dimension 1 – Implémentation

Pour la suite, la fonction à approcher sera avec $f(x) = \pi^2 \sin(\pi x)$.

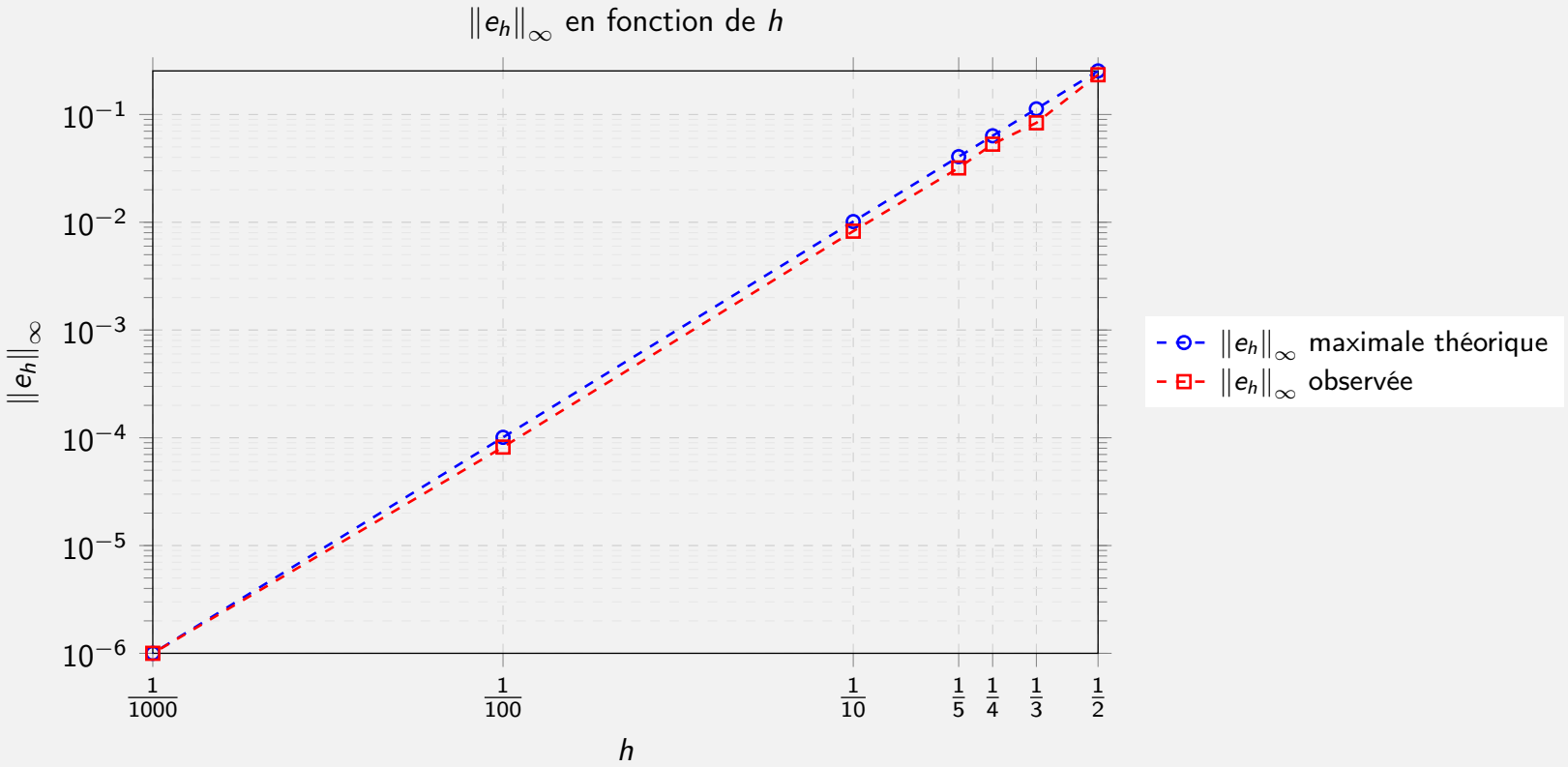
Commentaires

- Pour calculer $\mathtt{u}$, on résout le système linéaire avec la méthode de Gauss.
- On note ces résultats :

N	5	10	50	100	300	500	1500
$\|e_h\|_\infty$	0.031916	0.008265	0.000329	0.000082	0.000009	0.000003	<0.000001
Tps d'ex. (s)	<0.01	<0.01	<0.01	<0.01	0.01	0.05	1.00

- A est de taille $O(N)$ et la méthode de Gauss est $O(N^3)$ donc la complexité algorithmique est $O(N^3)$.

Commentaire On vérifie la proposition énoncée avec $f(x) = \pi^2 \sin(\pi x)$, d'après la proposition : $\|e_h\|_\infty \leq \frac{1}{96}\pi^4 h^2$.



Équation de Poisson en dimension 1 – Implémentation

Version avec méthode de résolution itérative en séquentiel

Rappel du schéma : $\boxed{u_i^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(u_{i-1}^{(k)} + u_{i+1}^{(k)} + h^2 f_i\right)}$.

Fontion qui applique le schéma à un nœud :

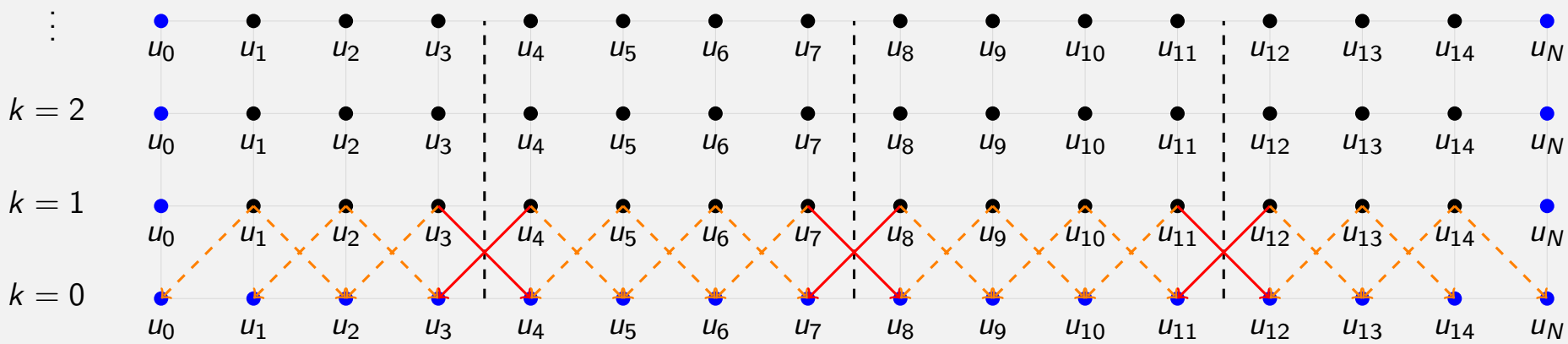
```
static inline __attribute__((always_inline))
double schema(double *f, double *u_anc, int i){

    double res = 0.5 * ((u_anc[i - 1] + u_anc[i + 1]) + h_carre * f[i]);

    return res;

}
```

Commentaire On note ces résultats :

N	5	10	50	100	300	500	1500
Nb. d'itérations	102	400	8506	31227	241002	617699	4557543
$\|e_h\|_\infty$	0.031916	0.008265	0.000329	0.000082	0.000007	0.000002	0.000045
Tps d'ex. (s)	<0.01	<0.01	<0.01	0.01	0.04	0.20	4.67

Commentaire On ajoute une directive `for` dans la boucle de la fonction `calculer_u_jacobi` et une directive `for` dans la boucle du calcul de la norme relative.

Illustration Schéma des dépendances pour 4 processus et $N = 15$:



Fonctions pour MPI

```
void creer_topologie(){

    int tore = 0;
    dims = 0;

    MPI_Dims_create(nb_cpu, 1, &dims);

    MPI_Cart_create(MPI_COMM_WORLD, 1, &dims, &tore, 0, &comm_1D);

    MPI_Barrier(comm_1D);

}
```

```
void infos_processus(){

    i_debut = (coords * nb_pt) / dims;
    i_fin = ((coords + 1) * nb_pt) / dims - 1;
    nb_pt_div = i_fin - i_debut + 1;

    MPI_Barrier(comm_1D);

}
```

Fonction pour obtenir les indices de départ et d'arrivé de la boucle principale :

```
void infos_bornes_boucles(int *i_boucle_debut, int *i_boucle_fin){

    *i_boucle_debut = 1;
    *i_boucle_fin = nb_pt_div + 1;

    if (i_debut == 0){
        (*i_boucle_debut) ++;
    }
    if (i_fin == nb_pt - 1){
        (*i_boucle_fin) --;
    }

}
```

Fonction pour échanger les halos :

```
void echanger_halos(double *u_div){

    // Envoi gauche, reception droite
    MPI_Sendrecv
    (&(u_div[1]), 1, MPI_DOUBLE, voisins[0], etiquette, &(u_div[nb_pt_div + 1]),
    1, MPI_DOUBLE, voisins[1], etiquette, comm_1D, &statut);

    // Envoi droite, reception gauche
    MPI_Sendrecv
    (&(u_div[nb_pt_div]), 1, MPI_DOUBLE, voisins[1], etiquette, &(u_div[0]), 1, MPI_DOUBLE,
    voisins[0], etiquette, comm_1D, &statut);

}
```

Équation de Poisson en dimension 1 – Implémentation

Version avec méthode de résolution directe

Structure `mat_2bandes` :

```
struct mat_2bandes{
    int N;
    double *diag; // taille N - 1
    double *sous_diag; // taille N - 2
};
```

Fonction pour allouer la structure :

```
void init_mat_2bandes(struct mat_2bandes *A){

    A -> N = N;
    A -> diag = (double *)malloc(idx_max * sizeof(double));
    A -> sous_diag = (double *)malloc((idx_max - 1) * sizeof(double));

}
```

Fonction pour libérer la structure :

```
void liberer_mat_2bandes(struct mat_2bandes *A){

    free(A -> diag);
    free(A -> sous_diag);

}
```

Équation de Poisson en dimension 1 – Implémentation

Version avec méthode de résolution directe

Rappel du schéma : $$\boxed{\text{Pour } j \text{ de 1 à } N-1 : \begin{cases} \ell_{i,i} = \sqrt{\alpha - \ell_{i,i-1}^2} & \text{si } d = 0 \\ \ell_{i,j} = \dfrac{\beta}{\ell_{j,j}} & \text{si } d = 1 \end{cases}}.$$

Fonction pour obtenir la décomposition de Cholesky :

```
void calculer_cholesky(struct mat_2bandes *L){

    h_carre = 1.0 / pow(N, 2);
    double alpha = 2.0 / h_carre;
    double beta = -1.0 / h_carre;

    (L -> diag)[0] = sqrt(alpha);
    (L -> sous_diag)[0] = beta / (L -> diag)[0];

    for (int i = 1 ; i < idx_max - 1 ; i ++){
        (L -> diag)[i] = sqrt(alpha - pow((L -> sous_diag[i - 1]), 2));
        (L -> sous_diag)[i] = beta / (L -> diag[i]);
    }

    (L -> diag)[idx_max - 1]
    = sqrt(alpha - pow((L -> sous_diag[idx_max - 2]), 2));

}
```

Test pour avoir un aperçu de la compression

```
Illustration de la structure mat_2bandes (exemple pour N petit) :

Structure mat2_bandes :
N = 7
diag      =  9.899495   8.573214   8.082904   7.826238   7.668116   7.560864
sous_diag = -4.949747  -5.715476  -6.062178  -6.260990  -6.390097

Matrice reelle correspondante :
  9.899495   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000
 -4.949747   8.573214   0.000000   0.000000   0.000000   0.000000
  0.000000  -5.715476   8.082904   0.000000   0.000000   0.000000
  0.000000   0.000000  -6.062178   7.826238   0.000000   0.000000
  0.000000   0.000000   0.000000  -6.260990   7.668116   0.000000
  0.000000   0.000000   0.000000   0.000000  -6.390097   7.560864
```

Équation de Poisson en dimension 1 – Implémentation

Version avec méthode de résolution directe

Fonction pour résoudre $Ly = f$:

```
void resoudre_cholesky_descente(struct mat_2bandes *L, double *f, double *y){

    y[0] = f[0] / (L -> diag)[0];

    for (int i = 1 ; i < idx_max ; i ++){
        y[i] = (f[i] - (L -> sous_diag)[i - 1] * y[i - 1]) / (L -> diag)[i];
    }

}
```

Rappel du schéma : $\boxed{u_{N-1} = \dfrac{y_{N-1}}{\ell_{N-1,N-1}} \quad \text{et} \quad \text{pour } i \text{ de } N-2 \text{ à } 1 : u_i = \dfrac{y_i - \ell_{i,j+1} u_{i+1}}{\ell_{i,i}}}$.

Fonction pour résoudre $L^T u = y$:

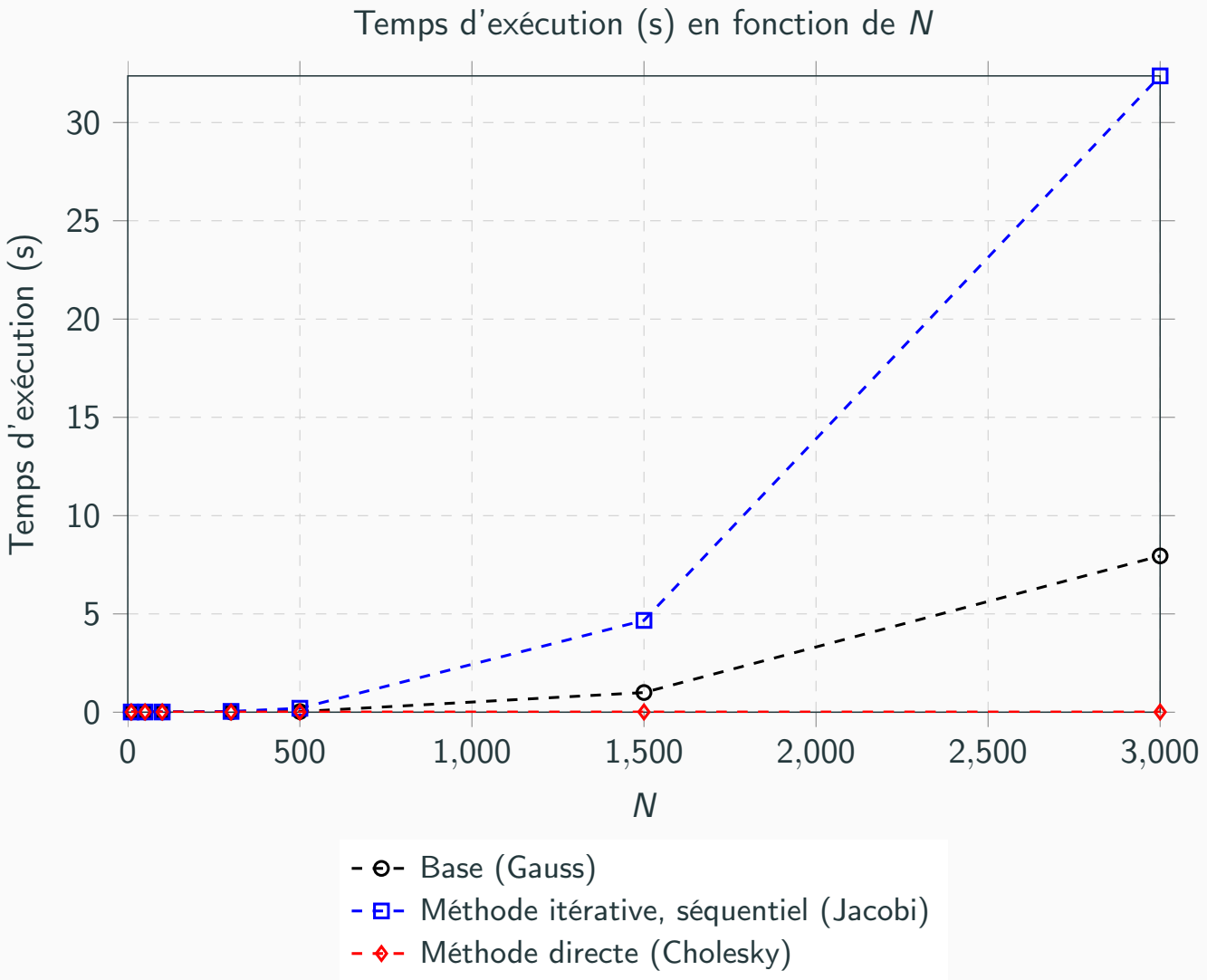
```
void resoudre_cholesky_remontee(struct mat_2bandes *L, double *y, double *u){

    u[idx_max - 1] = y[idx_max - 1] / (L -> diag)[idx_max - 1];

    for (int i = idx_max - 2 ; i >= 0 ; i --){
        u[i] = (y[i] - (L -> sous_diag)[i] * u[i + 1]) / (L -> diag)[i];
    }

}
```

Commentaires

- Le temps d'exécution est < 0.01 s pour $N = 1000000$.
- A possède $O(N)$ colonne. Pour chaque colonne, il y a $O(1)$ lignes à calculer. Pour chaque case, il y a $O(1)$ opérations. Donc la complexité algorithmique est $O(N)$.

Équation de Poisson en dimension 1 – Implémentation

Comparaison des performances des méthodes



Équation de Poisson en dimension 2

Problème

Soient $D :=]0,1[\times]0,1[$, $f : D \to \mathbb{R}$ continue et bornée et le problème suivant :

Trouver u de classe C^4 telle que :

$$\begin{cases} -\Delta u(x,y) = f(x,y) & \forall\ (x,y) \in D \\ u(x,y) = 0 & \forall\ (x,y) \in \partial D \end{cases}.$$

Discrétisation

$$-\Delta u(x,y) = \frac{1}{h_x^2}\delta_x^2 + \frac{1}{h_y^2}\delta_y^2 + E_h$$

avec

$$\delta_x^2 := -u(x-h_x,y) + 2u(x,y) - u(x+h_x,y),$$
$$\delta_y^2 := -u(x,y-h_y) + 2u(x,y) - u(x,y+h_y)$$

et

$$E_{h_x,h_y} := \frac{1}{12}\left(h_x^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x+\theta_x h_x,y) + h_y^2\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x,y+\theta_y h_y)\right).$$

Schéma

$$\boxed{\frac{1}{h^2}\left(-u_{i-1,j} - u_{i,j-1} + 4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1}\right) = f_{i,j}}.$$

Schéma sous forme matricielle par blocs

$$\boxed{Au = f} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} \boxed{M} & \boxed{-I} & \cdot & \cdot \\ \boxed{-I} & \ddots & \ddots & \cdot \\ \cdot & \ddots & \ddots & \boxed{-I} \\ \cdot & \cdot & \boxed{-I} & \boxed{M} \end{pmatrix}}_{=:A} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{pmatrix}}_{=u} = \underbrace{\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix}}_{=f}$$

avec

$$M := \begin{pmatrix} 4 & -1 & \cdot & \cdot \\ -1 & \ddots & \ddots & \cdot \\ \cdot & \ddots & \ddots & -1 \\ \cdot & \cdot & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Existence et unicité de la solution approchée

Proposition A est définie-positive et $Au = f$ admet une unique solution.

Notation Soit $d \in \{1, \ldots, 4\}$. Alors,

$$C_{u,d} := \max \left\{ \sup_{(x,y)\in[0,1]^2} \left| \frac{\partial^d u}{\partial x^d}(x,y) \right|, \sup_{(x,y)\in[0,1]^2} \left| \frac{\partial^d u}{\partial y^d}(x,y) \right| \right\}.$$

Proposition Le schéma est consistant : $\lim_{h\to 0} |E_h| = 0$ et $|E_h| \leq \frac{1}{6} h^2 |C_{u,4}|$.

Remarque Le schéma est d'ordre 2 pour x et pour y.

Proposition *(admise)* Soient $h > 0, e := e_h, e_j := \left(\|u_j - u(x_j)\|_\infty\right)_{0 \leq j \leq N}$. Alors, le schéma utilisé est convergent :

$$\forall\, j \in \{1, \ldots, N-1\} : \lim_{h \to 0} \|e_j\|_\infty = 0$$

et

$$\exists\, C > 0,\ \forall\, j \in \{1, \ldots, N-1\} : \|e_j\|_\infty \leq C h^2 \left(C_{u,4} + h C_{u,3}\right).$$

Méthode de Jacobi

$$Du^{(k+1)} = (E + F)\, u^{(k)} + f.$$

Schéma

$$\boxed{u_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k)} + u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)} + h^2 f_{i,j}\right).}$$

Factorisation de Cholesky

$$\ell_{i,i} = \sqrt{a_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} \ell_{i,k}^2} \quad \text{et} \quad \ell_{i,j} = \frac{1}{\ell_{j,j}} \left(a_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{i,k}\ell_{j,k} \right).$$

On calcule d'abord en colonnes puis en lignes.

Proposition Soit A une matrice avec N diagonales inférieures, symétrique et définie-positive. Alors, la matrice L de la décomposition de Cholesky de A possède N diagonales inférieures.

Schéma

$$\text{Pour } j \text{ de } 1 \text{ à } (N-1)^2 : \begin{cases} \ell_{i,i} = \sqrt{\alpha - \displaystyle\sum_{k=\max\{1,j-N+d+1\}}^{i-1} \ell_{i,k}^2} & \text{si } d = 0 \\ \ell_{i,j} = \left(a_{i,j} - \displaystyle\sum_{k=\max\{1,j-N+d+1\}}^{j-1} \ell_{i,k}\ell_{j,k} \right) / \ell_{j,j} & \text{si } d > 0. \end{cases}$$

avec

$$d := i - j, \quad \text{et} \quad \alpha := \frac{4}{h^2}.$$

Schéma

$$y_1 = \frac{f_1}{\ell_{1,1}} \quad \text{et} \quad \text{pour } i \text{ de 2 à } (N-1)^2 : y_i = \left(f_i - \sum_{k=\max\{1,i-N+1\}}^{i-1} \ell_{i,k} y_k \right) / \ell_{i,i}$$

et

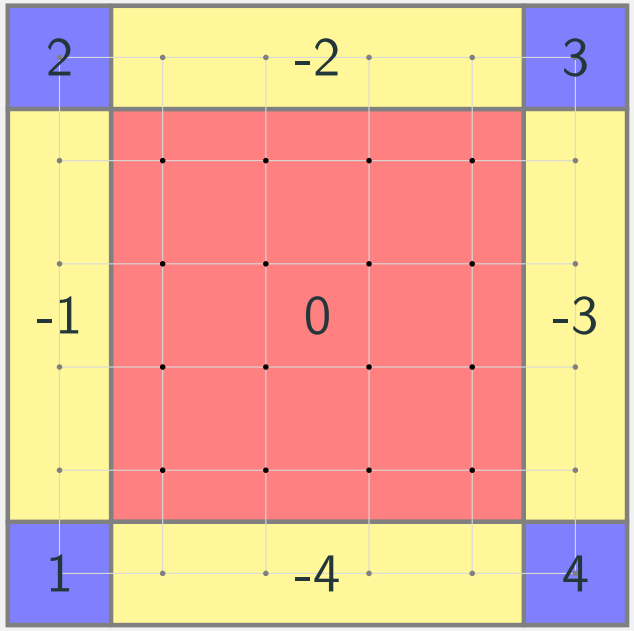
$$\boxed{u_{(N-1)^2} = \frac{y_{(N-1)^2}}{\ell_{(N-1)^2,(N-1)^2}} \quad \text{et} \quad \text{pour } i \text{ de } (N-1)^2 - 1 \text{ à } 1 : u_i = \left(y_i - \sum_{k=i+1}^{\min\{i+N-1,(N-1)^2\}} \ell_{k,i} u_k \right) / \ell_{i,i}}.$$

Équation de Poisson en dimension 2 – Implémentation

Pour la suite, la fonction à approcher sera avec $f(x, y) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$.

Commentaires

- Tout les tableaux utilisés sont linéarisés pour garantir la contiguité.
- Pour calculer `u`, on résout le système linéaire avec la méthode de Gauss.
- Les numéros du type de bord de la fonction `connaitre_bord` sont les suivants :



Commentaires *(suite)*

- On note ces résultats :

N	10	50	100
$\|e_h\|_\infty$	0.00038444	0.00001661	0.00000417
Tps d'ex. (s)	$<$0.1	4.1	278.9

- A est de taille $O(N^2)$ et la méthode de Gauss est $O(N^3)$ donc la complexité algorithmique est $O(N^6)$.

Équation de Poisson en dimension 2 – Implémentation

Version avec méthode de résolution itérative en séquentiel

Rappel du schéma : $$\boxed{u_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k)} + u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)} + h^2 f_{i,j}\right)}.$$

Fonction qui applique le schéma à un nœud :

```
static inline __attribute__((always_inline))
double schema(double *f, double *u_anc, int i, int j){

    double res
    = 0.25
    * (u_anc[IDX(i - 1, j)]
    + u_anc[IDX(i, j - 1)]
    + u_anc[IDX(i + 1, j)]
    + u_anc[IDX(i, j + 1)]
    + h_carre * f[IDX(i, j)]);

    return res;

}
```

Commentaire On note ces résultats :

N	10	50	100	300	500	700
Nb. d'itérations	102	2298	8506	66569	171980	320379
$\|e_h\|_\infty$	0.00038444	0.00001661	0.00000417	0.00000046	0.00000015	0.00000005
Tps d'ex. (s)	<0.1	<0.1	0.1	4.8	34.6	128.4

Commentaires

- On ajoute des directives `for`.
- On note ces résultats :

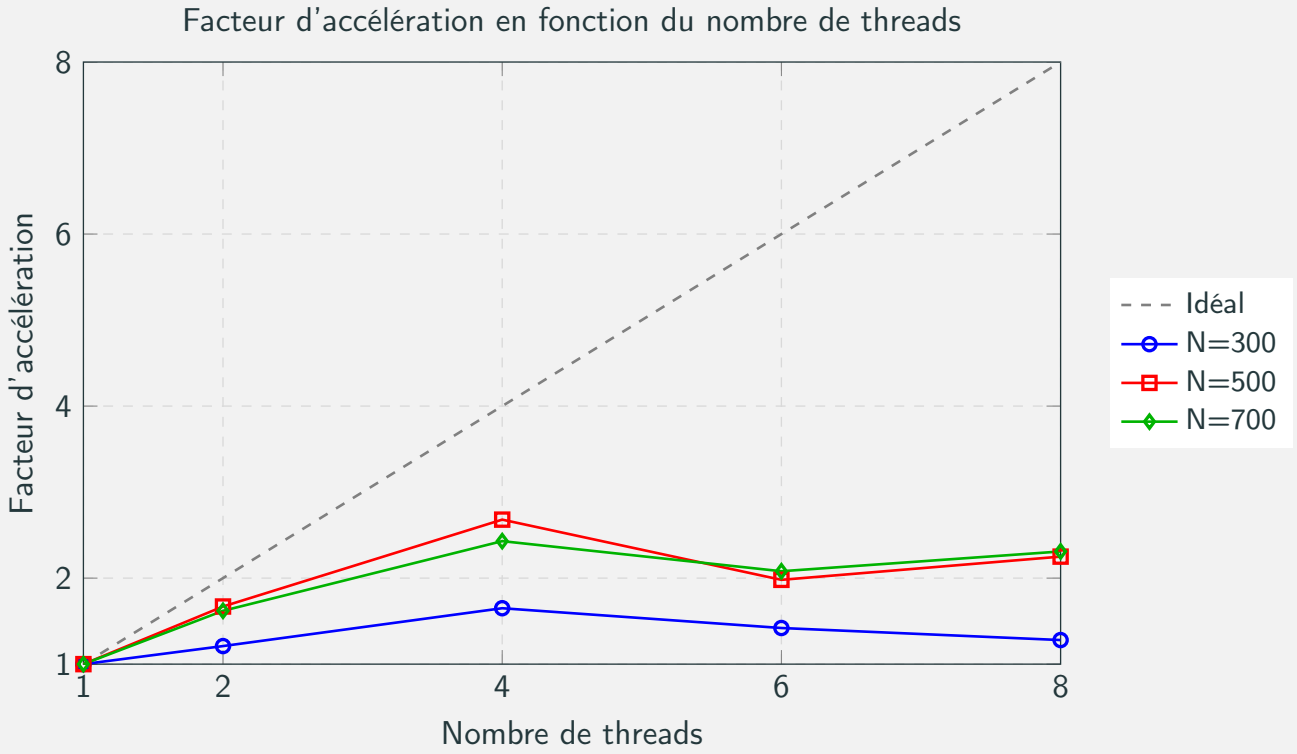
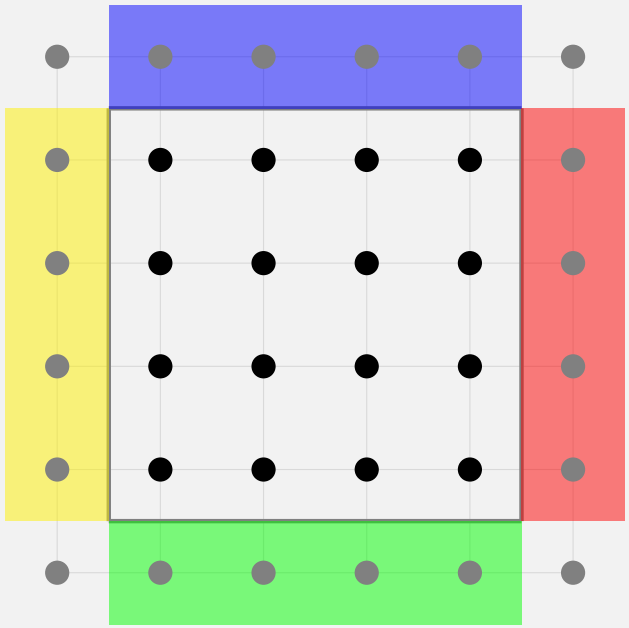
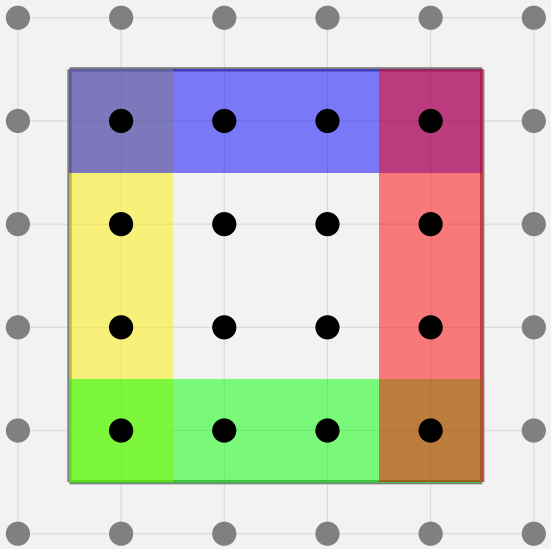


Illustration Schéma de la structure d'un sous-tableau :





Fonctions MPI

```
void creer_types(){

    int taille_send[2] = {nb_pt_div_j + 2, nb_pt_div_i + 2};
    int sous_taille_send[2] = {nb_pt_div_j, nb_pt_div_i};
    int debut_send[2] = {1, 1};

    MPI_Type_contiguous(nb_pt_div_i, MPI_DOUBLE, &ligne);
    MPI_Type_vector(nb_pt_div_j, 1, nb_pt_div_i + 2, MPI_DOUBLE, &colonne);

    MPI_Type_create_subarray
    (2, taille_send, sous_taille_send, debut_send, MPI_ORDER_C, MPI_DOUBLE,
    &bloc_send);

    MPI_Type_commit(&ligne);
    MPI_Type_commit(&colonne);
    MPI_Type_commit(&bloc_send);

    MPI_Barrier(comm_2D);

}
```

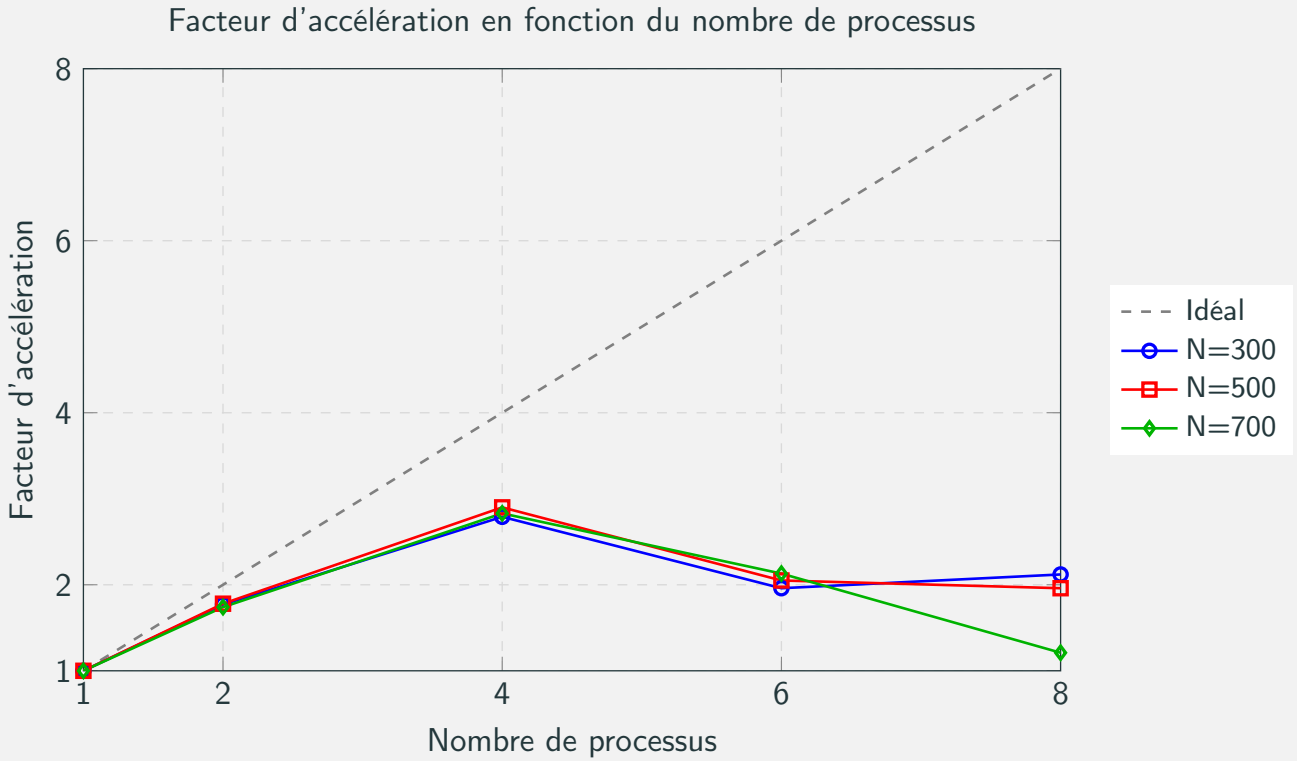
Équation de Poisson en dimension 2 – Implémentation

Version avec méthode de résolution itérative en parallèle avec MPI

```
void echanger_halos(double *u_div){

    // Envoi haut, reception bas
    MPI_Sendrecv
    (&(u_div[IDX(1, nb_pt_div_j)]), 1, ligne, voisins[1], etiquette,
    &(u_div[IDX(1, 0)]), 1, ligne, voisins[3], etiquette, comm_2D, &statut);

    // Envoi bas, reception haut
    MPI_Sendrecv
    (&(u_div[IDX(1, 1)]), 1, ligne, voisins[3], etiquette,
    &(u_div[IDX(1, nb_pt_div_j + 1)]), 1, ligne, voisins[1], etiquette,
    comm_2D, &statut);

    // Envoi gauche, reception droite
    MPI_Sendrecv
    (&(u_div[IDX(1, 1)]), 1, colonne, voisins[0], etiquette,
    &(u_div[IDX(nb_pt_div_i + 1, 1)]), 1, colonne, voisins[2], etiquette,
    comm_2D, &statut);

    // Envoi droite, reception gauche
    MPI_Sendrecv
    (&(u_div[IDX(nb_pt_div_i, 1)]), 1, colonne, voisins[2], etiquette,
    &(u_div[IDX(0, 1)]), 1, colonne, voisins[0], etiquette, comm_2D,
    &statut);

}
```

Commentaires

- Pour regrouper les résultats sur le rang 0, on utilise un type dérivé `bloc_recv` crée dynamiquement par le rang 0 (voir la fonction `regrouper_u`).
- On note ces résultats :



Version avec un mode de communication non bloquant

Commentaires

- Dès que la communication est lancée, on fait les calculs sur l'intérieur du sous-domaine (en excluant les bords locaux), ensuite on vérifie / attend que la communication soit terminée, enfin on fait les calculs sur les bords locaux avec la fonction `test_fin_echange_halos`.
- Pour calculer sur les bords du sous-domaine (2 lignes (sauf 2 coins), 2 colonnes (sauf 2 coins) et 4 coins), on utilise la fonction `calculer_u_jacobi_bords`.

Équation de Poisson en dimension 2 – Implémentation

Version avec méthode de résolution directe en séquentiel

Structure `mat_Nbandes` :

```
struct mat_Nbandes{
    int N;
    double **diags;
};
```

Fonction pour allouer la structure :

```
void init_mat_Nbandes(struct mat_Nbandes *A){

    A -> N = N;
    A -> diags = (double **)malloc(N * sizeof(double *));
    for (int i = 0 ; i < A -> N ; i ++){
        (A -> diags)[i] = (double *)malloc((idx_max - i) * sizeof(double));
    }

}
```

Fonction pour libérer la structure :

```
void liberer_mat_Nbandes(struct mat_Nbandes *A){

    for (int i = 0 ; i < A -> N ; i ++){
        free((A -> diags)[i]);
    }
    free(A -> diags);

}
```

Équation de Poisson en dimension 2 – Implémentation

Version avec méthode de résolution directe en séquentiel

Rappel du schéma :

$$\begin{cases} \ell_{i,i} = \sqrt{\alpha - \sum_{k=\max\{1,j-N+d+1\}}^{i-1} \ell_{i,k}^2} & \text{si } d = 0 \\ \ell_{i,j} = \left(a_{i,j} - \sum_{k=\max\{1,j-N+d+1\}}^{j-1} \ell_{i,k}\ell_{j,k} \right) / \ell_{j,j} & \text{si } d > 0. \end{cases}$$

Fonction pour obtenir la décomposition de Cholesky :

```
void calculer_cholesky(struct mat_Nbandes *L){

    h_carre = 1.0 / pow(N, 2);
    double alpha = 4.0 / h_carre;

    for (int j = 0 ; j < idx_max ; j ++){
        for (int d = 0 ; d < N && j + d < idx_max ; d ++){

            int i = d + j;

            if (d == 0){
                (L -> diags)[0][j] = alpha;
                for (int k = max(0, j - N + d + 1) ; k < i ; k ++){
                    int d_1 = i - k;
                    (L -> diags)[0][j] -= pow((L -> diags)[d_1][k], 2);
                }
                (L -> diags)[0][j] = sqrt((L -> diags)[0][j]);
            }

            else{
                (L -> diags)[d][j] = valeur_a(i, j);
                for (int k = max(0, j - N + d + 1) ; k < j ; k ++){
                    int d_1 = i - k;
                    int d_2 = j - k;
                    (L -> diags)[d][j] -= (L -> diags)[d_1][k] * (L -> diags)[d_2][k];
                }
                (L -> diags)[d][j] /= (L -> diags)[0][j];
            }

        }
    }

}
```

Test pour avoir un aperçu de la compression

```
Illustration de la structure mat_Nbandes (exemple pour N petit) :

Structure mat_Nbandes :
N = 4
diag[0] =  8.0000  7.7460  7.7287  7.7275  7.3829  7.3668  7.6995  7.3261  7.3139
diag[1] = -2.0000 -2.0656 -0.1380 -2.2184 -2.3331 -0.2074 -2.2717 -2.4056
diag[2] =  0.0000 -0.5164 -0.5521 -0.0370 -0.6222 -0.6863 -0.0585
diag[3] = -2.0000 -2.0656 -2.0702 -2.0705 -2.1672 -2.1719

Matrice reelle correspondante :
 8.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
-2.0000  7.7460  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
 0.0000 -2.0656  7.7287  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
-2.0000 -0.5164 -0.1380  7.7275  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
 0.0000 -2.0656 -0.5521 -2.2184  7.3829  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000
 0.0000  0.0000 -2.0702 -0.0370 -2.3331  7.3668  0.0000  0.0000  0.0000
 0.0000  0.0000  0.0000 -2.0705 -0.6222 -0.2074  7.6995  0.0000  0.0000
 0.0000  0.0000  0.0000  0.0000 -2.1672 -0.6863 -2.2717  7.3261  0.0000
 0.0000  0.0000  0.0000  0.0000  0.0000 -2.1719 -0.0585 -2.4056  7.3139
```

Équation de Poisson en dimension 2 – Implémentation

Version avec méthode de résolution directe en séquentiel

Fonction pour résoudre $Ly = f$:

```
void resoudre_cholesky_descente(struct mat_Nbandes *L, double *f, double *y){

    y[0] = f[0] / (L -> diags)[0][0];

    for (int i = 1 ; i < idx_max ; i ++){
        y[i] = f[i];
        for (int k = max(0, i - N + 1) ; k < i ; k ++){
            int d = i - k;
            y[i] -= (L -> diags)[d][k] * y[k];
        }
        y[i] /= (L -> diags)[0][i];
    }

}
```

Équation de Poisson en dimension 2 – Implémentation

Version avec méthode de résolution directe en séquentiel

Rappel du schéma :

$$u_{(N-1)^2} = \frac{y_{(N-1)^2}}{\ell_{(N-1)^2,(N-1)^2}} \quad \text{et} \quad \text{pour } i \text{ de } (N-1)^2 - 1 \text{ à } 1 : u_i = \left(y_i - \sum_{k=i+1}^{\min\{i+N-1,(N-1)^2\}} \ell_{k,i} u_k \right) / \ell_{i,i} .$$

Fonction pour résoudre $L^T u = y$:

```
void resoudre_cholesky_remontee(struct mat_Nbandes *L, double *y, double *u){

    u[idx_max - 1] = y[idx_max - 1] / (L -> diags)[0][idx_max - 1];

    for (int i = idx_max - 2 ; i >= 0 ; i --){
        u[i] = y[i];
        for (int k = i + 1 ; k < min(i + N, idx_max) ; k ++){
            int d = k - i;
            u[i] -= (L -> diags)[d][i] * u[k];
        }
        u[i] /= (L -> diags)[0][i];
    }

}
```

Commentaires

- On note ces résultats :

N	10	50	100	300	500	700
$\|e_h\|_\infty$	0.00038444	0.00001661	0.00000417	0.00000046	0.00000017	0.00000009
Tps d'ex. (s)	<0.1	<0.1	<0.1	4.6	35.8	383.5

- A possède $O(N^2)$ colonne. Pour chaque colonne, il y a $O(N)$ lignes à calculer. Pour chaque case, il y a $O(N)$ opérations. Donc la complexité algorithmique est $O(N^4)$.

Bibliothèque Cholmod

Étapes :

- créer une fonction pour définir la structure de matrice creuse en créant des tableaux :
  - `lignes` qui contient les indices des lignes où se trouve une valeur non nulle,
  - `valeurs` qui contient les valeurs aux indices stockés,
  - `offsets` qui contient le nombre de valeurs non nulles d'une colonne,

  (voir les fonctions `construire_matrice_creuse` et `connaitre_bord`).
- créer une fonction qui fait le travail

Équation de Poisson en dimension 2 – Implémentation

Version avec méthode de résolution directe en séquentiel

Fonction principale :

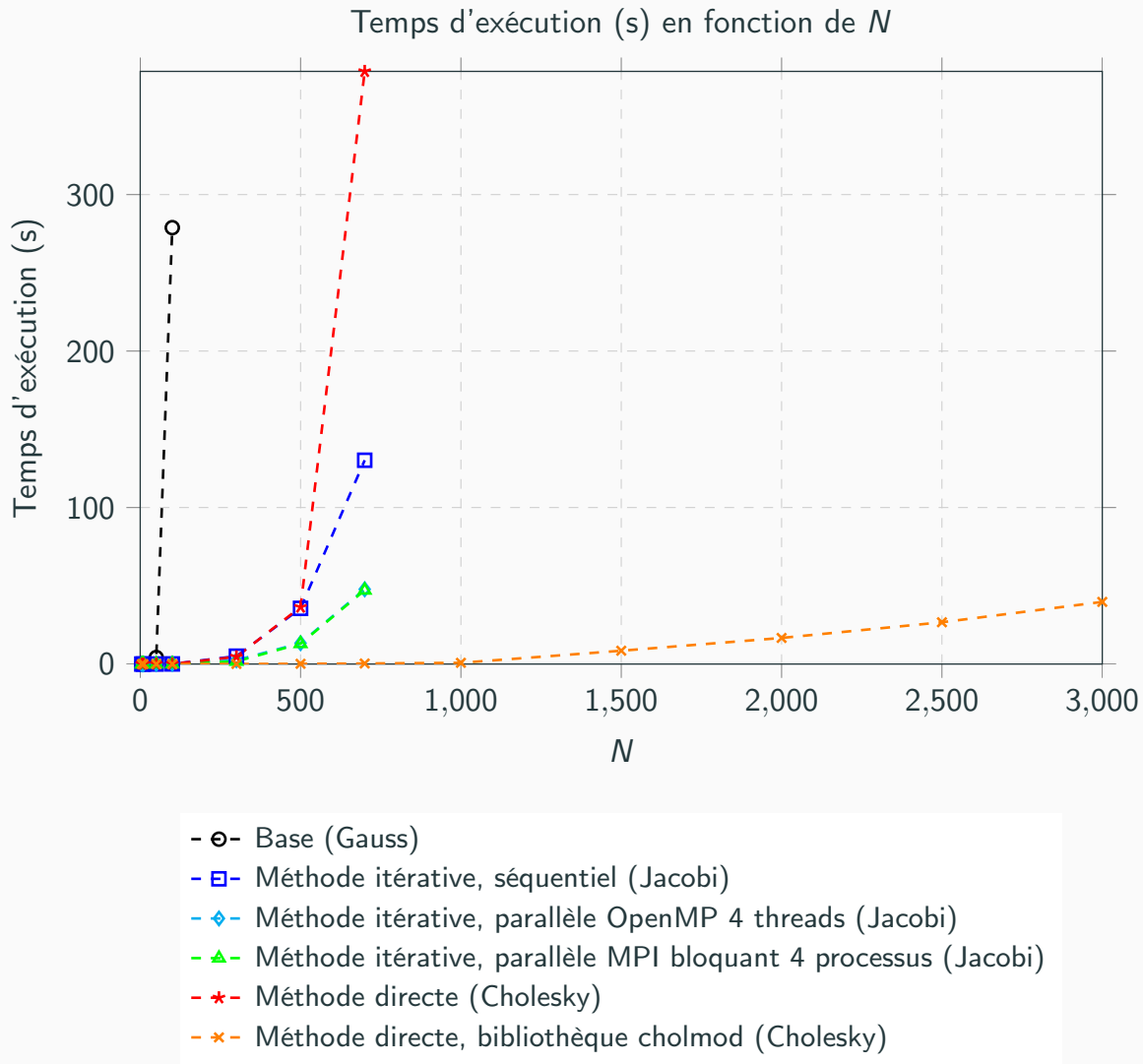
```
void resoudre(cholmod_sparse *A, double *f, double *u){

    h_carre = 1.0 / pow(N, 2);
    double *f_int = (double *)malloc(idx_max * sizeof(double));
    double *u_int = (double *)malloc(idx_max * sizeof(double));

    extraire_interieur(f, f_int, nb_pt);
    extraire_interieur(u, u_int, nb_pt);

    cholmod_dense *f_dense =
    cholmod_allocate_dense(A -> nrow, 1, A -> nrow, CHOLMOD_REAL, &c);
    memcpy(f_dense -> x, f_int, A -> nrow * sizeof(double));

    cholmod_factor *L = cholmod_analyze(A, &c);
    cholmod_factorize(A, L, &c);

    cholmod_dense *u_dense = cholmod_solve(CHOLMOD_A, L, f_dense, &c);

    memcpy(u_int, u_dense -> x, A -> nrow * sizeof(double));

    inserer_interieur(u_int, u, nb_pt);

    cholmod_free_factor(&L, &c);
    cholmod_free_dense(&f_dense, &c);
    cholmod_free_dense(&u_dense, &c);

    free(f_int);
    free(u_int);

}
```

Commentaire On note ces résultats :

N	1000	2000	3000	4000	5000
$\|e_h\|_\infty$	0.00000004	0.00000001	<0.00000001	<0.00000001	<0.00000001
Tps d'ex. (s)	0.7	15.7	39.3	79.3	174.5

Équation de Poisson en dimension 2 – Implémentation

Comparaison des performances des méthodes



Équation des ondes en dimension 1

Problème

Soient $L, T, c > 0, D :=]0, L[$ et le problème suivant :

Trouver u de classe C^2 telle que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 & \forall\, x \in D,\ \forall\, t \in]0, T] \\ u(x,t) = 0 & \forall\, x \in \partial D,\ \forall\, t \in [0, T] \\ u(x,0) =: u_0(x) & \forall\, x \in D \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) =: u_1(x) & \forall\, x \in D \end{cases}.$$

Discrétisation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{1}{h_t^2}\left(u(x,t+h_t) - 2u(x,t) + u(x,t-h_t)\right) + E_{h_t}$$

avec

$$E_{h_t} := -\frac{1}{12} h_t^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x, t+\theta h_t)\,.$$

Schéma

$$\boxed{\begin{cases} u_i^1 = h_t u_1(x_i) + u_0(x_i) \\ u_i^{k+1} = -u_i^{k-1} + 2\left(1 - \dfrac{c^2 h_t^2}{h^2}\right) u_i^k + \dfrac{c^2 h_t^2}{h^2}\left(u_{i-1}^k + u_{i+1}^k\right) \quad \text{si } k > 0 \end{cases}}.$$

Remarques

- Le schéma est explicite.
- Pour $k > 0$, le schéma dépend de valeurs en $k-1$ et en $k-2$.

Proposition Le schéma admet une unique solution.

Proposition Les schémas sont consistants en espace et en temps : $\lim_{h \to 0} |E_h| = 0$ et $\lim_{h_t \to 0} |E_{h_t}| = 0$.

Remarque Le schéma est d'ordre 2 pour x et pour y et d'ordre 2 pour t.

Proposition *(admise)* Le schéma est convergent si $c\dfrac{h_t}{h} \leq 1$.

Remarques

- On vérifiera cette proposition avec un exemple.
- Cette proposition s'appelle la condition de Courant-Friedrichs-Levy (CFL).

Équation des ondes en dimension 1 – Implémentation

Pour la suite, la fonction à approcher sera avec $L = 1$, $T = 1$, $c = 1$, $u_0(x) = \sin(\pi x)$ et $u_1(x) = 0$.

Équation des ondes en dimension 1 – Implémentation

Rappel du schéma :

$$\begin{cases} u_i^1 = h_t u_1(x_i) + u_0(x_i) \\ u_i^{k+1} = -u_i^{k-1} + 2\left(1 - \dfrac{c^2 h_t^2}{h^2}\right) u_i^k + \dfrac{c^2 h_t^2}{h^2}(u_{i-1}^k + u_{i+1}^k), \quad \text{si } k > 0 \end{cases}.$$

Fonctions qui appliquent le schéma à un nœud (pour $k > 0$ puis pour $k = 0$)

```
static inline __attribute__((always_inline))
double schema(double *u_anc_0, double *u_anc_1, int i, int k){

    double res = // const_1 = pow(c, 2) * pow(h_t, 2) / pow(h, 2)
    -u_anc_1[i]
    + 2 * (1 - const_1) * u_anc_0[i]
    + const_1 * (u_anc_0[i - 1] + u_anc_0[i + 1]);

    return res;

}
```

```
void init_u_1(double (*u_1)(double), double *u_anc_1, double **u_anc_0){

    *u_anc_0 = (double *)malloc(nb_pt * sizeof(double));

    (*u_anc_0)[0] = 0.0; (*u_anc_0)[nb_pt - 1] = 0.0;

    for (int i = 1; i < nb_pt - 1; i++) {
        (*u_anc_0)[i] = h_t * u_1(i * h) + u_anc_1[i];
    }

}
```

Commentaires

- $\|e_{h,h_t}\|_\infty^\infty$ en fonction de h et de h_t :

$\downarrow h \quad h_t \rightarrow$	1/100	1/200	1/500	1/1000
1/100	0.01570926	0.00780545	0.00307972	0.00150733
1/200	∞_f	0.00785414	0.00312801	0.00155531
1/500	∞_f	∞_f	0.00314160	0.00156886
1/1000	∞_f	∞_f	∞_f	0.00157080

  où ∞_f est ou bien l'infini des flottants double précision (`inf`), ou bien une valeur très élevée. On vérifie la proposition énoncée, les valeurs ∞_f sont bien atteintes lorsque $c\dfrac{h_t}{h} > 1$.
- Lorsque h/h_t est fixé, le schéma semble bien converger.
- On ne s'intéresse pas ici aux temps d'exécutions.
- La complexité algorithmique est $O(N \cdot N_t)$.

Équation de la chaleur en dimension 2

Problème

Soient $L, T, a > 0, D :=]0, L[\times]0, L[$, $f : D \times]0, T] \to \mathbb{R}$ continue et bornée et le problème suivant :

Trouver u de classe C^2 telle que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) - a\Delta u(x, y, t) = f(x, y, t) & \forall\, (x, y) \in D,\ \forall\, t \in]0, T] \\ u(x, y, t) = 0 & \forall\, (x, y) \in \partial D,\ \forall\, t \in [0, T]\,. \\ u(x, y, 0) =: u_0(x, y) & \forall\, (x, y) \in D \end{cases}$$

Discrétisation

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) = \frac{1}{h_t}\left(-u(x, y, t) + u(x, y, t + h_t)\right) + E_{h_t}$$

avec

$$E_{h_t} := -\frac{1}{2} h_t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, y, t + \theta_t h_t).$$

Schéma

$$\boxed{u_{i,j}^{k+1} = \alpha u_{i,j}^k + \beta\left(u_{i-1,j}^k + u_{i,j-1}^k + u_{i+1,j}^k + u_{i,j+1}^k\right) + h_t f_{i,j}^k}$$

avec

$$\alpha := 1 - \frac{4ah_t}{h^2} \quad \text{et} \quad \beta := \frac{ah_t}{h^2}.$$

Discrétisation

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t + h_t) = \frac{1}{h_t}\left(u(x, y, t + h_t) - u(x, y, t)\right) + E_{h_t}$$

avec

$$E_{h_t} := \frac{1}{2} h_t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, y, t + (\theta_t + 1) h_t).$$

Schéma

$$\boxed{\alpha u_{i,j}^{k+1} + \beta\left(u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1} + u_{i+1,j}^{k+1} + u_{i,j+1}^{k+1}\right) = u_{i,j}^{k} + h_t f_{i,j}^{k+1}}$$

avec

$$\alpha := 1 + \frac{4ah_t}{h^2} \quad \text{et} \quad \beta := -\frac{ah_t}{h^2}.$$

Schéma sous forme matricielle par blocs

$$\boxed{Au^{k+1} = b^k} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{M} & \boxed{\beta I} & \cdot & \cdot \\ \boxed{\beta I} & \ddots & \ddots & \cdot \\ \cdot & \ddots & \ddots & \boxed{\beta I} \\ \cdot & \cdot & \boxed{\beta I} & \boxed{M} \end{pmatrix}}_{=:A} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1^{k+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-1}^{k+1} \end{pmatrix}}_{=u^{k+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1^k \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{N-1}^k \end{pmatrix}}_{=b^k}$$

avec

$$M := \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdot & \cdot \\ \beta & \ddots & \ddots & \cdot \\ \cdot & \ddots & \ddots & \beta \\ \cdot & \cdot & \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b^k := u^k + h_t f^{k+1}.$$

Discrétisation

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t)+\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,t+h_t)\right)=\frac{1}{h_t}\left(-u(x,y,t)+u(x,y,t+h_t)\right)+E_{h_t}$$

avec

$$E_{h_t}=O\left(h_t^2\right).$$

Schéma

$$\boxed{\begin{aligned}&\alpha u_{i,j}^{k+1}-\gamma\left(u_{i-1,j}^{k+1}+u_{i,j-1}^{k+1}+u_{i+1,j}^{k+1}+u_{i,j+1}^{k+1}\right)\\&=\beta u_{i,j}^{k}+\gamma\left(u_{i-1,j}^{k}+u_{i,j-1}^{k}+u_{i+1,j}^{k}+u_{i,j+1}^{k}\right)+\frac{1}{2}h_t\left(f_{i,j}^{k}+f_{i,j}^{k+1}\right)\end{aligned}}$$

avec

$$\alpha:=1+4\gamma,\quad \beta:=1-4\gamma\quad\text{et}\quad\gamma:=\frac{ah_t}{2h^2}.$$

Schéma sous forme matricielle par blocs

$$\boxed{Au^{k+1} = b^k} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{M} & \boxed{-\gamma I} & \cdot & \cdot \\ \boxed{-\gamma I} & \ddots & \ddots & \cdot \\ \cdot & \ddots & \ddots & \boxed{-\gamma I} \\ \cdot & \cdot & \boxed{-\gamma I} & \boxed{M} \end{pmatrix}}_{=:A} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1^{k+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-1}^{k+1} \end{pmatrix}}_{=u^{k+\mathbf{1}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1^k \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{N-1}^k \end{pmatrix}}_{=b^k}$$

avec

$$M := \begin{pmatrix} \alpha & -\gamma & \cdot & \cdot \\ -\gamma & \ddots & \ddots & \cdot \\ \cdot & \ddots & \ddots & -\gamma \\ \cdot & \cdot & -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

et

$$\forall\ i,j \in \{1,\dots,N-1\} : b_{i,j}^k := \beta u_{i,j}^k + \gamma\left(u_{i-1,j}^k + u_{i,j-1}^k + u_{i+1,j}^k + u_{i,j+1}^k\right) + \frac{1}{2} h_t \left(f_{i,j}^k + f_{i,j}^{k+1}\right).$$

Proposition Les schémas admettent une unique solution.

Proposition Les schémas sont consistants en espace et en temps : $\lim_{h \to 0} |E_h| = 0$ et $\lim_{h_t \to 0} |E_{h_t}| = 0$.

Remarque

- Les schémas explicite et implicite sont d'ordre 2 pour x et pour y et d'ordre 1 pour t.
- Le schéma semi-implicite est d'ordre 2 pour x et pour y et d'ordre 2 pour t.

Proposition *(admise)* Le schéma explicite est convergent $\Leftrightarrow \beta \leq \frac{1}{4}$.

Remarques

- On vérifiera cette proposition avec un exemple.
- Cette proposition s'appelle la condition de Courant-Friedrichs-Levy (CFL).

Proposition *(admise)* Les schéma implicite et semi-implicite sont convergents.

Équation de la chaleur en dimension 2 – Implémentation

Pour la suite, la fonction à approcher sera avec $L = 1, T = 1, a = 1, \lambda = 2a\pi^2$, $f(x, y, t) = \left(-\lambda + 2a\pi^2\right) \sin(\pi x) \sin(\pi y)\, e^{-\lambda t}$ et $u_0(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$.

Commentaires

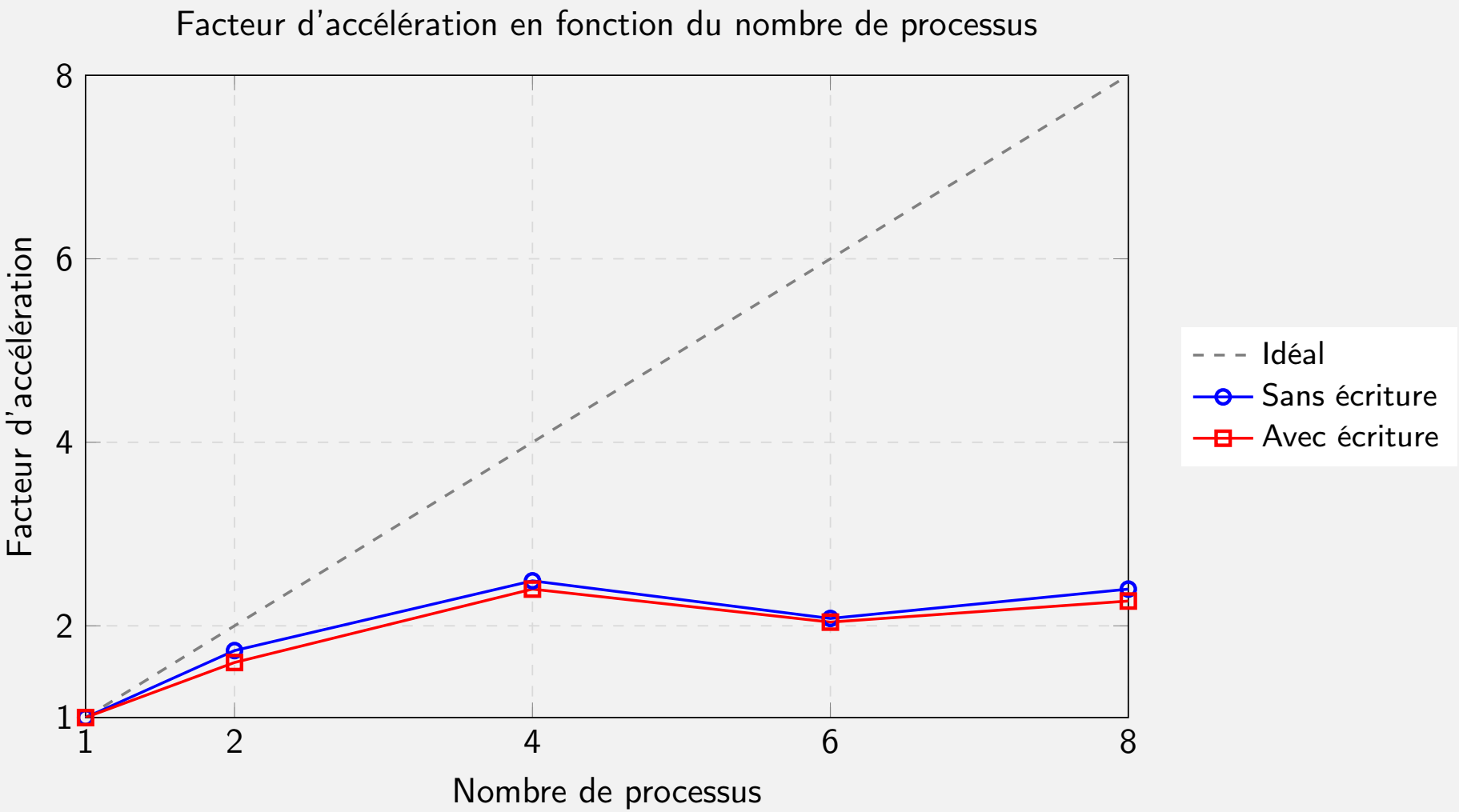
- $\|e_{h,h_t}\|_\infty^\infty$ en fonction de h et de h_t :

$\downarrow h \quad h_t \rightarrow$	1/10000	1/20000	1/50000	1/100000
1/10	0.00266777	0.00284805	0.00295614	0.00299216
1/20	0.00039394	0.00057533	0.00068410	0.00072034
1/50	0.00024223	0.00006052	0.00004843	0.00008473
1/100	∞_f	∞_f	0.00004237	0.00000605

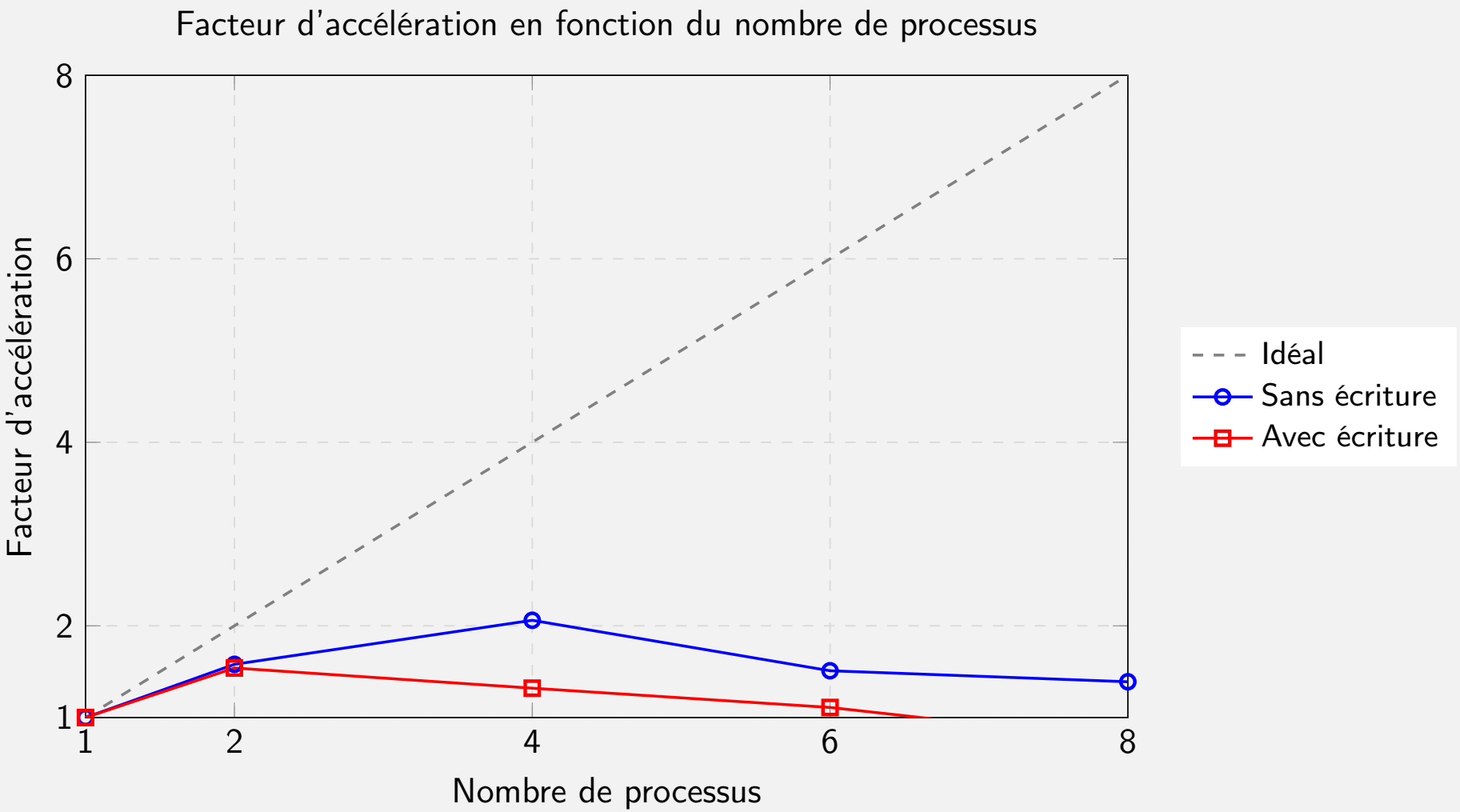
  On vérifie la proposition énoncée, les valeurs ∞_f sont bien atteintes lorsque $\beta > 1/4$.

- La condition sur β est très contraignante.
- La complexité algorithmique est $O(N^2 \cdot N_t)$.

Commentaire On note ces résultats :



Commentaire On note ces résultats :



Commentaires

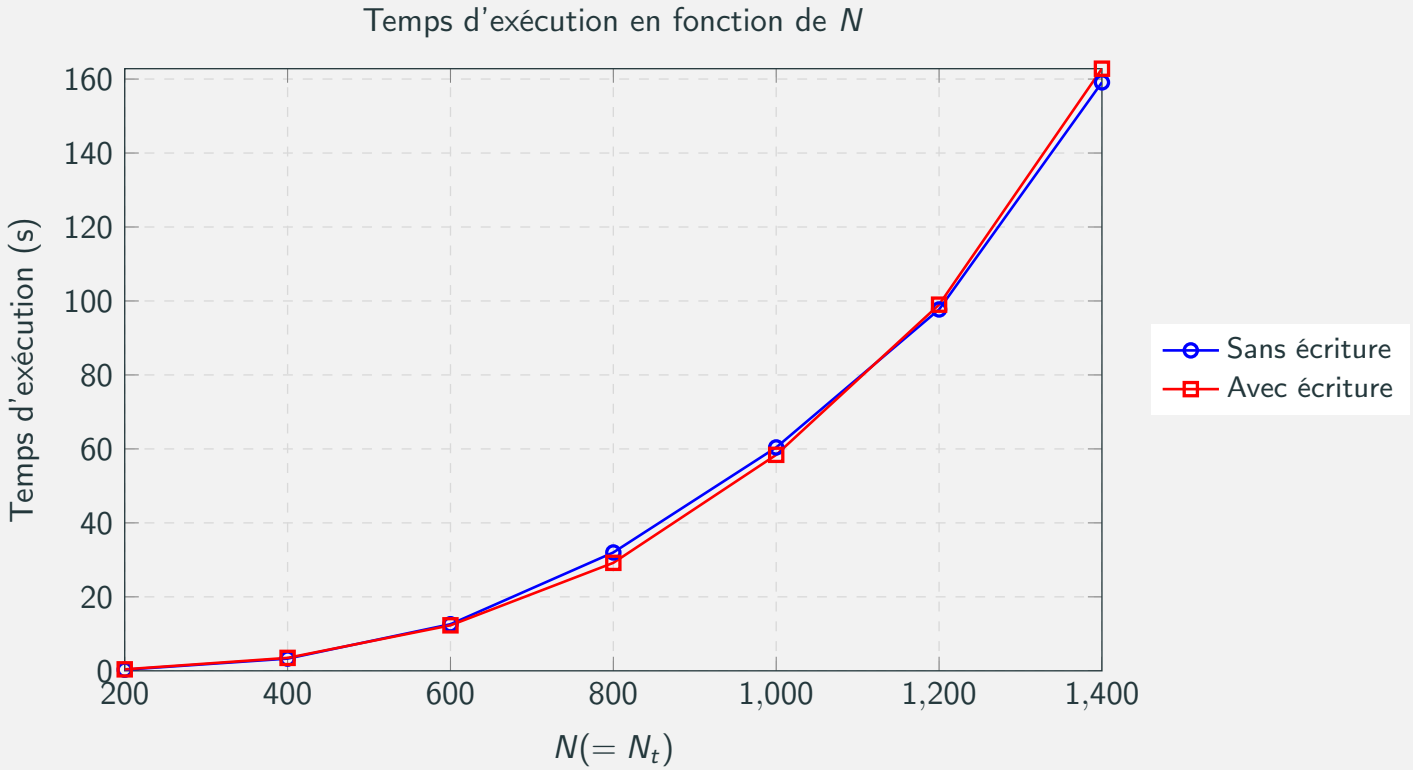
– $\|e_{h,h_t}\|_\infty^\infty$ en fonction de h et de h_t :

$\downarrow h \quad h_t \rightarrow$	1/10000	1/20000	1/50000	1/100000
1/10	0.00338798	0.00320815	0.00310018	0.00306418
1/20	0.00111862	0.00093767	0.00082903	0.00079281
1/50	0.00048370	0.00030244	0.00019361	0.00015732
1/100	0.00039301	0.00021171	0.00010286	0.00006656

– Les valeurs ∞_f obtenues pour le schéma explicite deviennent proches de 0.

Commentaires

– On note ces résultats :



– La stabilité du schéma implicite est inconditionnelle, ce qui permet d'exécuter sur des pas de temps plus grands.

Commentaires

- $\|e_{h,h_t}\|_\infty^\infty$ en fonction de h et de h_t (avec $L = 1$, $T = 1$, $a = 1$ et $\lambda = 2a\pi^2$) :

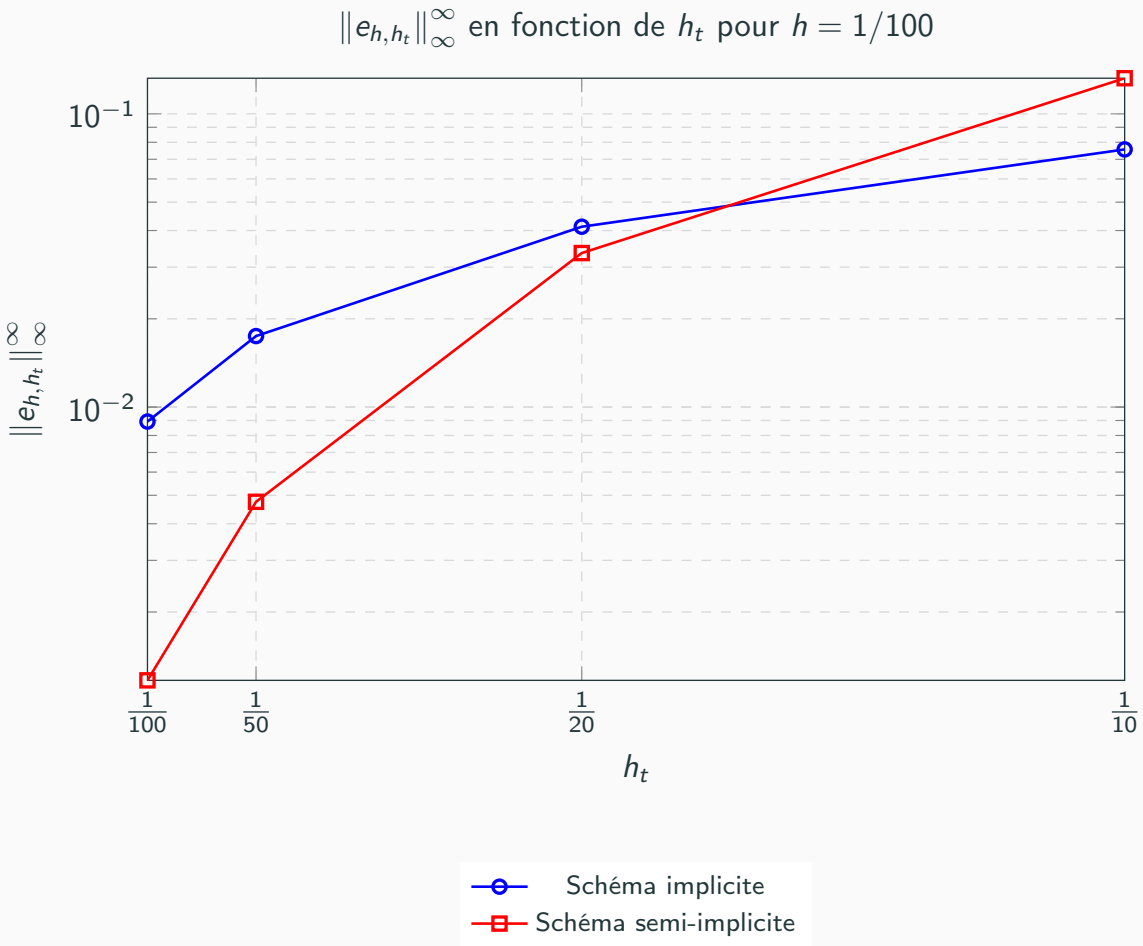
$\downarrow h \quad h_t \rightarrow$	1/10000	1/20000	1/50000	1/100000
1/10	0.00302805	0.00302814	0.00302817	0.00302817
1/20	0.00075646	0.00075655	0.00075657	0.00075658
1/50	0.00012091	0.00012100	0.00012103	0.00012103
1/100	0.00003014	0.00003023	0.00003025	0.00003026

- Les temps d'exécutions sont environ les mêmes que pour le schéma implicite.

Équation de la chaleur en dimension 2 – Implémentation

Comparaison des performances des méthodes

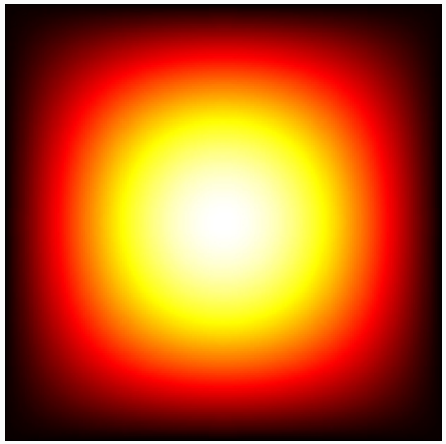
$\|e_{h,h_t}\|_\infty^\infty$ en fonction de h (pour $h = 1/100$) et du schéma (implicite et semi-implicite) :



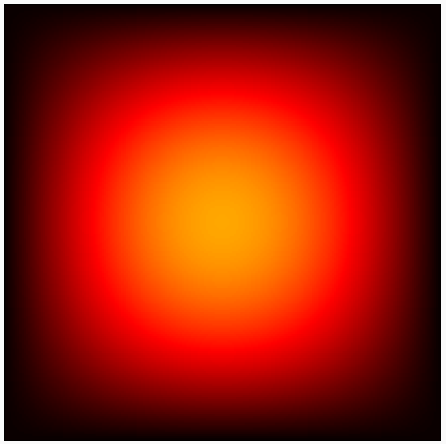
Équation de la chaleur en dimension 2 – Visualisation

On peut visualiser la simulation avec `Python` et `matplotlib`.

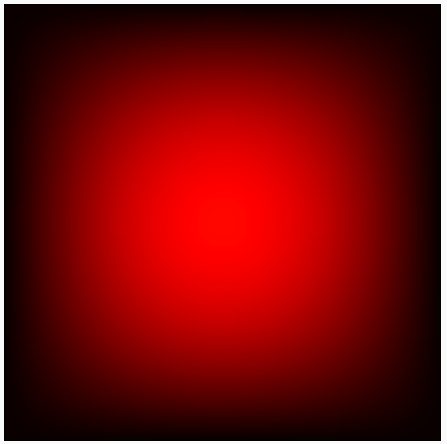
Diffusion de la chaleur



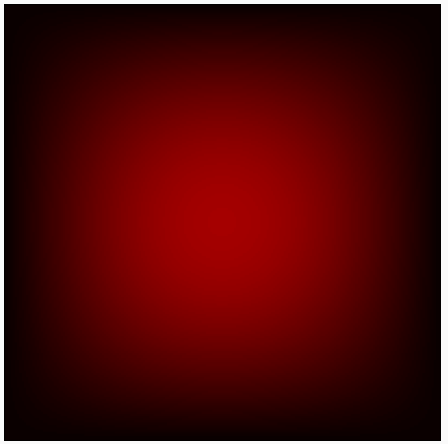
État initial : $t = 0.0$



État après diffusion : $t = 0.1$



État après diffusion : $t = 0.2$



État après diffusion : $t = 0.3$

Bibliographie et supports

- *Rappels de calcul scientifique.* (2008) par Patrick Ciarlet
- *Finite-Difference Approximations to the Heat Equation* (2004) par Gerald W. Recktenwald
- *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations* par Habib Ammari et Konstantinos Alexopoulos
- *Lecture 6: Finite difference methods* par Habib Ammari
- *SUITESPARSE : A SUITE OF SPARSE MATRIX SOFTWARE*
- *Direct Methods for Sparse Linear Systems* par Timothy A. Davis
- Cours de calcul numérique (M1 CHPS) par Serge Dumont
- Cours d'analyse et calcul numérique (L3 Maths) par Francesco Bonaldi
- Cours d'algorithmique et programmation parallèle (M1 CHPS) par David Defour
- Forums d'aides

Conclusion

Lien vers le dépôt récent GitHub du projet

`https://github.com/gaillot18/PDE-FDM-HPC`

(contient le rapport écrit, la présentation et le projet)

Lien vers le dépôt initial GitHub du projet

`https://github.com/gaillot18/Stage-M1-CHPS.git`

Merci pour votre attention.