Naj bo $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \dots$ strogo naraščajoče zaporedje celih števil

Označimo:

$$\mathrm{Dec}\{a_k\} := 0.(a_1)(a_2)\dots \qquad a_k \in \mathbb{Z} \quad \forall k$$

Sprašujemo se ali je $\mathrm{Dec}\{a_k\}$ racionalno število.

IZREK 1: Predpostavimo, da je $\mathrm{Dec}\{a_k\} \in \mathbb{Q}$.

Potem obstaja $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$ in pozitivna konstanta C, da velja

$$a_k \geq C x^k \qquad \forall k \geq 1$$

narašča hitreje kot polinom katerekoli stopnje

Z drugimi besedami, če je $\mathrm{Dec}\{a_k\} \in \mathbb{Q}$, potem zaporedje a_k narašča vsaj eksponentno.

POSLEDICA: Predpostavimo, da

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{a_k} = \infty \qquad \text{za } \forall y > 1$$

Potem je decimalno število $\mathrm{Dec}\{a_k\}$ iracionalno.

Dokaz posledice:

Naj bo $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{a_k} = \infty \quad \forall y > 1$

S PROTISLOVJEM: predpostavimo $\mathrm{Dec}\{a_k\}$ je racionalno

PO IZREKU: $\exists x > 1$ in $C > 0$, da

$$a_k \geq C x^k \qquad \forall k \geq 1$$

$$a^k : \backslash \qquad a_k \geq C \cdot (\sqrt{x})^k \cdot (\sqrt{x})^k \quad / : C(\sqrt{x})^k$$

$$\frac{1}{C(\sqrt{x})^k} \geq \frac{(\sqrt{x})^k}{a_k}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{x})^k}{a_k} \leq C^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{x})^k} < \infty$$

geom. vrsta koef. $q = \frac{1}{\sqrt{x}}$

ker je $x > 1$ po predp.

$\implies \sqrt{x} > 1$

$\implies \frac{1}{\sqrt{x}} < 1$

$\implies$ geom. vrsta konvergira

vemo, da $x > 1$, zato $\sqrt{x} > 1$

če definiramo $y := \sqrt{x} > 1$ smo našli tak y, da predpostavka ne bi veljala

$\rightarrow\!\leftarrow$

$\boxtimes$

V članku 1 je Hegyvári dokazal, da je $\operatorname{Dec}\{a_k\}$ iracionalno, če velja, da

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k} = \infty \qquad (*)$$

S tem je podal nov dokaz za to, da je število $0{,}2357111 3\ldots$ iracionalno.

Posledica iz tega članka je močnejša kot Hegyvarijev izrek.

- Po eni strani pogoj $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k} = \infty$ implicira

pogoj iz posledice $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{a_k} = \infty \quad \forall y > 1$.

$$\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k} \underset{y>1}{<} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{a_k}$$

$$\implies \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{a_k} = \infty$$

Članek 1 $\Rightarrow$ članek 2

- Po drugi strani pa posledica pokaže, da je Dec$\{a_k\}$ iracionalno, če:

$$a_k \text{ narašča kot } e^{\sqrt{k}}$$

oz. v splošnem

$$a_k \text{ narašča kot } e^{k^s} \qquad 0<s<1$$

$\uparrow$

recimo, da a_k narašča kot $e^{\sqrt{k}}$

če bo tak a_k izpolnjeval pogoj $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{a_k} = \infty \ \forall y>1$ bo Dec$\{a_k\} \in \mathbb{Q}$

v vlogi a_k zamenjimo z $e^{\sqrt{k}}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{e^{\sqrt{k}}}$$

preverimo konvergenco s korenskim testom

$$r = \lim_{k\to\infty} \sqrt[\cancel{k}]{\frac{y^{\cancel{k}}}{e^{\sqrt{k}}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{y}{e^{\frac{1}{\sqrt{k}}}} \rightarrow 0 =$$

$$= \lim_{k\to\infty} y = y > 1$$

$\Rightarrow$ vrsta divergira

$\Rightarrow$ po POSLEDICI je Dec$\{a_k\} \in \mathbb{Q}$

Ta pogoj pa ni izpolnjen v članku 1

vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\sqrt{k}}}$ konvergira

po INTEGRALSKEM TESTU:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{e^{\sqrt{x}}}\,dx = 2\,\frac{\sqrt{x}+1}{e^{\sqrt{x}}}\Big|_1^{\infty} = 2\Big(\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}+1}{e^{\sqrt{x}}} - \frac{2}{e}\Big) \quad \frac{\infty}{\infty}$$

$$\overset{L.P.}{=} 2\Big(\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\cancel{2\sqrt{x}}}}{\frac{e^{\sqrt{x}}}{\cancel{2\sqrt{x}}}} - \frac{2}{e}\Big) = 2\Big(0 - \frac{2}{e}\Big) = -\frac{4}{e} < \infty \quad \checkmark$$

IZREK 1 je "najbolj primeren" v naslednjem smislu

IZREK 3: Za vsako realno število $z > 1$ $\exists \operatorname{Dec}\{a_k\} \in \mathbb{Q}$ in konstanta $C > 0$, da:

$$a_k \le C z^k \qquad \forall k \ge 1$$

OPOMBA: Izrek eksplicitno poda zaporedje $\{a_k\}$, ki bo zadoščalo pogoju $a_k \le C z^k$

! Pazi: ni res, da za poljuben $r \in \mathbb{Q}$ in realno št. $z > 1$ $\exists$ razcep na bloke $\{a_k\}$ in $C > 0$, da

$$r = \operatorname{Dec}\{a_k\}$$

in velja $a_k \le C z^k \quad \forall k \ge 1$

Dokaz:

namreč eksplicitno

vzemimo $r = \frac{1}{9} = 0,\overline{1} \in \mathbb{Q}$

vemo, da je a_k naraščajoče, zato bo veljalo

$$a_{k+1} \ge 10 a_k \qquad \forall k$$

moraš vzet eno števko več, da narašča

zato bo veljalo

$$a_k \ge 10^{k-1} \qquad \forall k$$

? torej npr. za $z = 1$ (namreč eksplicitno, ker dokazuješ nesmiselnost izjave)

$$a_1 \ge 10^0 = 1 \overset{?}{\ge} C \cdot 1$$

$$a_k \ge 10^{k-1} \overset{?}{\ge} C \cdot 1$$

$\Rightarrow$ ne obstaja tak C, ki bi bil dober za vse k

↳ a_k prehitro narašča

$\Rightarrow$ trditev ne velja $\boxtimes$

<u>Dokaz izreka 1:</u>

Predpostavimo $Dec\{a_k\} \in \mathbb{Q}$

Dokazujemo: $\exists x \geq 1,\ C > 0 : \quad a_k \geq C x^k \quad \forall k \geq 1$

Ker je $Dec\{a_k\} \in \mathbb{Q}$ je periodično, recimo

$\underbrace{b_1 \dots b_p}_{p}$, $0 \leq b_i \leq 9$ je perioda $Dec\{a_k\}$

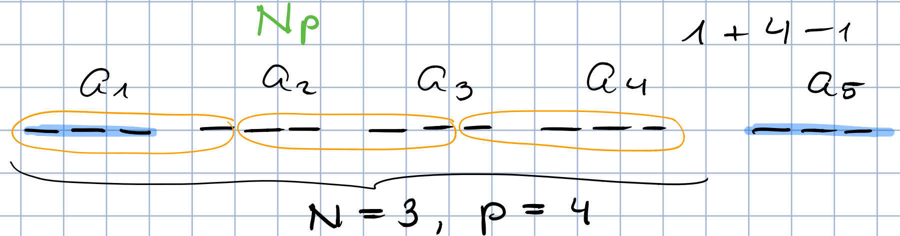
Naj bo (a_m) prvi blok, ki se pojavi v periodičnem delu decimalnega zapisa

Velja: a_{k+p} ima vsaj eno števko več kot a_k $\forall k \geq m$

↳ predpostavimo, da a_k in a_{k+p} imata oba N števk

$\Rightarrow$ ker je zaporedje $\{a_i\}$ naraščajoče bodo imeli vsi $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+p}$ N števk

$\Rightarrow$ $\underbrace{(a_k)(a_{k+1}) \dots (a_{k+p-1})}_{Np}$ ima Np števk



$\Rightarrow$ ker je perioda enaka p bo veljalo

$$a_k = a_{k+p}$$

↑ to ne more biti res, ker je $\{a_i\}$ narašč

ali je ta sklep pravi - zakaj to
ni nujno res

Sledi, da a_{k+2p} ima vsaj eno števko več kot a_{k+p}, $\forall k \geq m$
in zato vsaj 2 števki več kot a_k

$$\Longrightarrow \quad a_{k+2p} \geq 10 \cdot a_k \qquad \forall k \geq m$$

Z indukcijo lahko dokažemo, da $\boxed{a_{k+2np} \geq 10^n a_k}$

Vzemimo poljuben $\ell \geq m$

Označimo $n := \left\lfloor \frac{\ell - m}{2p} \right\rfloor$

$$a_\ell \overset{*}{\geq} a_{m+2np} \overset{**}{\geq} 10^n a_m \overset{***}{\geq} 10^{\frac{\ell-m-2p}{2p}} \cdot a_m$$

* poglejmo indekse

$$\begin{aligned} m + 2np &= m + 2 \cdot \left\lfloor \frac{\ell-m}{2p} \right\rfloor \cdot p \\ &\leq m + \cancel{2}\left(\frac{\ell-m}{\cancel{2p}}\right)\cdot \cancel{p} \\ &= m + \ell - m = \ell \end{aligned}$$

celi del je vedno manjši

Ker je $\{a_i\}$ naraščajoče bo očitno veljalo

$$a_{m+2np} \leq a_\ell$$

** velja po prejšnji ugotovitvi

*** velja $10^n \geq 10^{\frac{\ell-m-2p}{2p}}$, ker

$$n \geq \frac{\ell-m}{2p} - 1$$

$$\left\lfloor \frac{\ell-m}{2p} \right\rfloor \geq \frac{\ell-m}{2p} - 1$$

po pravilih za računanje z celim delom je

$$x < \lfloor x \rfloor + 1$$

oz. $x - 1 < \lfloor x \rfloor$

Vzemimo $C' := 10^{\frac{-(m+2p)}{2p}}$ $\quad x := 10^{\frac{1}{2p}}$ > 1

$$C' x^{\ell} = 10^{\frac{-(m+2p)}{2p}} \cdot 10^{\frac{\ell}{2p}} = 10^{\frac{\ell-m-2p}{2p}}$$

Ker je $\{a_i\}$ zaporedje pozitivnih celih števil, je $a_i \geq 1 \ \forall i$

$$10^{\frac{\ell-m-2p}{2p}} a_m \geq 10^{\frac{1-m-2p}{2p}}$$

iz prejšnje neenačbe

$a_m \geq 1$

$$\Longrightarrow \quad a_\ell \geq C' x^{\ell} \quad \text{za } \forall \ell \geq m$$

Če spremenimo C' na manjši $C > 0$ bo ta neenakost veljala za vse $k \geq 1$

Torej: našli smo $x > 1$ in $C > 0$, da

$$a_k \geq C x^k \quad \forall k \geq 1$$

$\boxtimes$

Dokaz izreka 3:

Dokazujemo $\forall z \in \mathbb{R}\ z > 1\ \exists D \in c\ \{a_k\} \in \mathbb{Q}\ \exists c > 0$, da:

$$a_k \leq C z^k \quad \forall k \geq 1$$

Vzemimo polj. $z > 1$ in polj. $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$

$$n := q!$$

Naj bo $r \in \mathbb{Q}$ n-periodično, tako da

$$r = 0,\overline{\underbrace{11\ldots1}_{n-1}2}$$

(*) Trdimo, da $\exists$ razpad r na bloke (a_k) in $C>0$, da
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k} = \infty$$
za vsak dovolj velik g.

- Najprej obravnavajmo prvih $n(n+1)$ števk in jih razdelimo na n blokov po $n+1$ števk

$$r = \overbrace{\underbrace{\overset{n}{1\ldots1}2}_{n+1}\ \underbrace{\overset{n}{1\ldots1}2}_{n+1}\ \ldots\ldots\ \underbrace{\overset{n}{1\ldots1}2}_{n+1}\ \underbrace{\overset{n}{1\ldots1}2}_{n+1}}^{n+1}$$

Prvi blok označimo z $a_1^{n+1} = 1\ldots121$
p-ti blok z a_p^{n+1} in zadnji (n-ti blok)
$$a_n^{n+1} = 21\ldots12$$

Očitno velja $a_p^{n+1} < a_{p+1}^{n+1} \quad \forall p \in \{1, \ldots, n-1\}$

$a_1^{n+1} = 1\ldots\ldots121$ $\leftarrow$ dvojka se pomika vedno bolj levo
$a_2^{n+1} = 1\ldots1211$

$a_p^{n+1} = 1\ldots121\ldots2$ $\leftarrow$ od nekem trenutku dobimo še novo dvojko

zato se členi večajo

- Naslednje opazujmo $\frac{n(n+2)}{2} = n\left(\frac{n}{2}+1\right)$ naslednjih števk in jih razdelimo na
$\frac{n}{2}$ blokov po $n+2$ števk

Spet označimo:
$$a_1^{n+2} = 1\ldots121 1$$
$$\vdots$$
$$a_{n/2}^{n+2} = 121\ldots12$$

! n je deljiv z 2, ker je $n = p!$ vedno sodo

$$\frac{n}{2} = \frac{1\cdot\cancel{2}\cdot\ldots\cdot p}{\cancel{2}}$$

Podobno kot prej velja:

$$a_p^{n+2} < a_{p+1}^{n+2} \qquad \forall p \in \{1, \dots, \tfrac{n}{2}-1\}$$

Očitno velja tudi

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{zadnji člen} \\ = \underbrace{21\dots12}_{n+1}}}{a_n^{n+1}} < \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prvi člen} \\ = \underbrace{1\dots1211}_{n+2}}}{a_1^{n+2}}$$

neenakost velja že zaradi razlike v 1. členu

Skupaj:

$$a_1^{n+1} < a_2^{n+1} < \dots < a_n^{n+1} < a_1^{n+2} < \dots < a_{\frac{n}{2}}^{n+2}$$

- Ta postopek ponavljamo:
  - fiksirajmo poljuben $d \mid n$
  - predpostavimo, da smo za vse $d' \mid n$ $d' < d$ (za vse manjše delitelje) že naredili razdelitev na

    $\frac{n}{d'}$ blokov po $n + d'$ štev

    in označili vsak blok z $a_p^{n+d'}$

  - zdaj obravnavajmo naslednjih $\frac{n(n+d)}{d} = n\left(\frac{n}{d}+1\right)$ štev in jih razdelimo na

    $\frac{n}{d}$ blokov po $n+d$ štev

    in označimo

    $$a_1^{n+d} = 1\dots12\underbrace{1\dots1}_{d \text{ novih enk}}$$

    $\vdots$

$$a_n^{n+d} = \underbrace{1 \ldots 1}_{d-1 \text{ novih enk}}\, 2\, 1 \ldots 12$$

$d-1$ novih enk, 1 nova dvojka

Spet velja:

$$a_p^{n+d} < a_{p+1}^{n+d} \qquad \forall p \in \{1, \ldots, \tfrac{n}{d} - 1\}$$

- Tako konstruiramo $\frac{n}{d}$ blokov po $n+d$ števk za vsak delitelj števila n

Očitno za $d' < d$ (je $n+d' < n+d$) velja

$$a_{p'}^{n+d'} < a_p^{n+d} \qquad \forall p' \in \{1, \ldots, \tfrac{n}{d'}\}$$
$$\forall p \in \{1, \ldots, \tfrac{n}{d}\}$$

- Ko je $n = d$ dobimo samo 1 blok ($\frac{n}{d} = 1$) po $2n = n+d$ števk

$$a_1^{n+n} = 1 \ldots 12\, 1 \ldots 12$$

Število a_1^{n+n} bo $\ell(n)$-ti člen iz našega razcepa na bloke:
(ang. block of our decomposition)

$$\ell(n) = \sum_{d \mid n} \frac{n}{d}$$

vsota po vseh deliteljih → za vsak delitelj imamo $\frac{n}{d}$ blokov

- Ko porabimo vse delitelje lahko postopek ponovimo tako, da vzamemo naslednjih $n\,(2n+1)$ števk in jih razdelimo na

n blokov po $2n+1$ elementov

Označimo z $a_1^{2n+1}, \ldots a_n^{2n+1}$

$\vdots$ ponovimo za vse delitelje $d \mid n$

... naslednjih $\frac{n}{d}(2n+1)$ elementov razdelimo na

$\frac{n}{d}$ blokov po $2n+1$ elementov

itd.

- To naredimo za vsak $k \geq 1$, torej delimo števke na

$\frac{n}{d}$ blokov po $kn+d$ elementov

- Tako smo definirali razdelitev (ang. decomposition) racionalnega števila r

$$r = (a_1^{n+1}) \dots (a_n^{n+1}) \dots (a_1^{kn+d}) \dots (a_{\frac{n}{d}}^{k}) \dots$$

- Z tako razčlenitvijo dokažimo naš pogoj (*)

za d vzameš kar n

a_1^{n+n} ima $2n$ števk
a_1^{2n+n} ima $3n$ števk
$\vdots$
a_1^{kn+n} ima $(k+1)n$ števk $\quad \forall k \geq 1$

Torej:
$$a_1^{kn+n} \leq 10^{(k+1)n}$$

$(k+1)n$ števk $\quad 2(k+1)n$ števk

Oziroma
$$a_1^{kn+d} \leq a_1^{kn+n} \leq 10^{(k+1)n}$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{(k+1)n} \leq \frac{1}{a_1^{kn+d}}$$

$$\sum_{i=1}^{\frac{n}{d}} \left(\frac{1}{10}\right)^{(k+1)n} \leq \sum_{i=1}^{\frac{n}{d}} \frac{1}{a_1^{kn+d}}$$

$\forall \quad \forall \quad \forall$

od tod naj bi sledil (*) ampak ne razumem kako

Po drugi strani je

a_1^{n+m} $l(n)$-ti člen razdelitve
a_1^{2n+m} $2l(n)$-ti člen razdelitve
$\vdots$
a_1^{kn+m} $kl(n)$-ti člen

Če označimo

$$\left.\begin{aligned} A_1 &:= a_1^{n+1} \\ A_2 &:= a_2^{n+1} \\ &\vdots \\ A_{l(n)} &:= a_1^{n+m} \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \text{vse člene po vrsti označiš z } A_i$$

potem velja

$$\underbrace{A_{kl(n)}}_{= a_1^{kn+m}} \leq 10^{n(k+1)}$$

od kod sledi:

$$A_k \leq 10^{2n}\left(10^{\frac{n}{l(n)}}\right)^k = 10^{2n + \frac{kn}{l(n)}} \quad \forall k \geq c$$

vemo, da

po vseh $d \mid n$

$$\underset{A_1}{a_1^{n+1}} < \underset{A_2}{a_2^{n+1}} < \ldots < a_n^{n+1} < a_1^{n+2} < a_2^{n+2} < \ldots$$

$\stackrel{d}{=}$

$$\ldots < \underbrace{a_1^{n+m}}_{A_{l(n)}} < a_2^{n+m} < \ldots < a_1^{2n+1} < \ldots$$

$$\ldots < \underbrace{a_1^{2n+m}}_{A_{2l(n)}} < \ldots$$

torej bo za $k = \ell(n)$

$$A_{\ell(n)} \leq 10^{2n}\left(10^{\frac{n}{\cancel{\ell(n)}}}\right)^{\cancel{\ell(n)}}$$

$$\underbrace{a_1^{n+n} \leq 10^{2n+n}}_{\text{to pa že vemo od zgoraj}}$$

$$\boxed{a_1^{kn+n} \leq 10^{(k+1)n}}$$

ta neenakost torej velja za vse A_i, kjer $i = k\,\ell(n)$
za vse nižje indekse pa že vemo, da velja neenakost

$$A_1 \leq A_2 \leq \ldots \leq A_{\ell(n)} \leq 10^{2n+n}$$

Sedaj lahko ocenimo $\frac{n}{\ell(n)}$:

$$\frac{n}{\ell(n)} = \frac{\cancel{n}}{\sum_{d|n} \frac{\cancel{n}}{d}} = \frac{1}{\sum_{d|n} \frac{1}{d}} \leq \frac{1}{\sum_{d=1}^{q} \frac{1}{d}} \leq \frac{1}{\ln q}$$

vsota po vseh deliteljih števila $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot q = q!$

$$\sum_{d=1}^{q} \frac{1}{d} < \sum_{d|n} \frac{1}{d}, \text{ ker}$$

je deliteljev n sigurno več kot le števke $1 \ldots q$

$$\ln q \leq \sum_{d=1}^{q} \frac{1}{d},$$ ker po integralskem testu velja

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} > \int_1^{k+1} \frac{1}{x}\,dx = \ln(k+1)$$

za dovolj velik q bo torej

$$\frac{n}{\ell(n)} \leq \frac{1}{\ln q}$$

$$10^{\frac{n}{\ell(n)}} \leq 10^{\frac{1}{\ln q}} \xrightarrow{q \to \infty} 10^0 = 1 < z$$

od prej vemo:

$$A_q \leq 10^{2n} \left(10^{\frac{n}{\ell(n)}}\right)^2 < 10^{2n} \cdot z^2 =: C$$

$\square$

kaj smo uporabili (*)

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1} \quad / e$$

$$1 + \frac{1}{n} \overset{?}{\leq} e^{\frac{1}{n+1}}$$

$$1 \overset{?}{\leq} e^{\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n}$$

$n = 1$: $\quad e^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \approx 1{,}15 > 0$

$n \to \infty$

$$e^0 - 0 = 1$$