Ta članek podaja direkten dokaz za trditev, ki pravi, da je decimalno število

$$\alpha = 0,235711\ldots$$

iracionalno.
(dokazali bomo še več)

Izrek: Naj bo $1 \leq a_1 < a_2 < \ldots$ strogo naraščajoče zaporedje celih števil za katera velja
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \infty$$

Potem je decimalno število $\alpha = (a_1)(a_2)\ldots(a_n)\ldots$ iracionalno

Očitno bo potem veljala trditev za praštevila, saj je za zaporedje praštevil $p_1 < p_2 < \ldots$
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i} = \infty$$

IZ WIKIPEDIJE:
$$\sum_{p \text{ praošt.}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots = \infty$$

Dokazal je Euler leta 1737

$\Longrightarrow$ podamo brez dokaza

Definicija: Naj bo B "blok" (zaporedje?) števk $b_1 b_2 \ldots b_s$, kjer je $s \geq 1$ in $0 \leq b_i \leq 9$ $\forall i = 1, \ldots, s$

Naj bo $n \in \mathbb{N}$ tak, da
$$n = \sum_{i=0}^{k} c_i \cdot 10^{k-i}, \quad c_0 \neq 0$$
$$= c_0 \cdot 10^k + c_1 10^{k-1} + \ldots + c_{k-1} 10 + c_k$$
$$= \overline{c_0 c_1 c_2 \ldots c_k}$$

Pravimo, da število n vsebuje "blok" števil B, če $\exists j \geq 0$, da je
$$c_{i+j} = b_i \quad \forall i = 1, 2, \ldots, s$$

Primer: 1402857 vsebuje blok 14

$j=0$ $\quad i+j$ $\quad i = 1\ 2$

Ali je morda tu napaka v notaciji? Bi morali indeksi za b_i teči od 0, torej
$B = b_0 b_1 \dots b_s$
Ali pa vsota teče od 1 in imamo potem
$$\sum_{i=1}^{s} c_i 10^{s-i}$$

Lema: Če $X = X(b_1, b_2, \dots, b_s)$ označuje zaporedje pozitivnih celih števil, ki ne vsebujejo bloka števil $B = b_1 b_2 \dots b_s$, potem
$$\sum_{x \in X} \frac{1}{x} \quad \text{divergira.}$$

najbrž je X narašč. zaporedje → torej vsa $\mathbb{N}$ po vrsti brez tistih z blokom B

Dokaz: označimo delno vsoto naše vrste z S_n
$$S_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}$$

naj bo $t \in \mathbb{N}$ tak, da
$$x_{t-1} < 10^{s} \leq x_t$$

število števk bloka $b_1 \dots b_s$, število 10^s pa ima 5 števk

$\Rightarrow$ vsa števila x_i; $i \leq t-1$ bodo imela največ s števk

$$b_1 \dots b_s = 10^{s-1} \cdot b_1 + 10^{s-2} b_2 + \dots + 10\, b_{s-1} + b_s$$

od tod bo sledilo, da imajo vsi x_i za $i \geq t$ več števk kot je dolg blok iz neenakosti sledi, da:

?? $\left\{ \frac{1}{x_{t+2}} \leq \frac{1}{x_{t+1}} \leq \frac{1}{x_t} \leq \frac{1}{10^s} < \frac{1}{x_{t-1}} \right.$

$$S_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{t-1}} + \frac{1}{x_t} + \frac{1}{x_{t+1}} + \dots + \frac{1}{x_n}$$

$$= 10^{-s} \frac{10^s}{x_{t+1}} = 10^{-s} \frac{1}{\frac{x_{t+1}}{10^s}}$$

$$= \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_{t-1}} + \frac{1}{x_t} + 10^{-s} \left(\frac{1}{\frac{x_{t+1}}{10^s}} + \dots + \frac{1}{\frac{x_n}{10^s}} \right)$$

CELI DEL ŠTEVILA zaokroži realno število navzdol

npr. $\lfloor 2,7 \rfloor = 2$

zato bo $\frac{1}{\frac{x_i}{10^s}} < \frac{1}{\left\lfloor \frac{x_i}{10^s} \right\rfloor}$ ker imenovalec zmanjšaš

a bi moral biti tu strogi neenačaj?

zakaj strogi neenačaj

$$< \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_t} + 10^{-s} \left(\frac{1}{\left\lfloor \frac{x_{t+1}}{10^s} \right\rfloor} + \dots + \frac{1}{\left\lfloor \frac{x_n}{10^s} \right\rfloor} \right)$$

opazimo, da če je $t < i \leq n$ (torej bo x_i v enem od ulomkov s celim delom), potem je $\left\lfloor \frac{x_i}{10^s} \right\rfloor \in X$

vemo, da so $x_t, \dots, x_n$ taki, da imajo več števk kot blok B (število števk > s)

↳ torej bo $\left\lfloor \frac{x_i}{10^s} \right\rfloor$ imelo vsaj eno števko različno od 0 $\Longrightarrow$ je > 0 ??

ker še $x_i \in X$ ni vseboval bloka B, niti ko mu odrežemo s števk ne bo vseboval bloka B

$\Longrightarrow \left\lfloor \frac{x_i}{10^s} \right\rfloor \in X$

Opazimo:

Blok $b_1 b_2 \dots b_s$ se pojavi v vsaj eni od prvih 10^s naravnih števil

(*) → Posamezen $x_j \in X$ lahko torej zadošča za največ $10^s - 1$ vrednosti $\left\lfloor \frac{x_i}{10^s} \right\rfloor$

↳ x_i so neka števila, ki jim odščipnemo s štev.

npr. $\left\lfloor \frac{123456}{10^2} \right\rfloor = \underset{x_j}{\underset{\|}{1234}}$ $(s=2)$

ampak ta x_j je dober tudi za število

$$\left\lfloor \frac{123499}{10^2} \right\rfloor = 1234$$

torej je lahko na zadnjih dveh mestih karkoli razen bloka $b_1 b_2$

torej $10^2 - 1$ možnosti

ali sem ta del prav razumela? Je res, da je en x_j dober za $10^s - 1$ x_i ali je ravno obratno, da je en x_i dober za $10^s - 1$ x_j-jev?

Do sedaj smo ocenili:

$$S_n < \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_t} + 10^{-s}\left(\frac{1}{\left\lfloor \frac{x_{t+1}}{10^s} \right\rfloor} + \dots + \frac{1}{\left\lfloor \frac{x_n}{10^s} \right\rfloor}\right)$$

ta števila so očitno členi iz S_n (vsi $\left\lfloor \frac{x_i}{10^s} \right\rfloor < x_n$ zato ne bodo v končni višji delni vsoti)

↑

tej členi so pa lahko (po prejšnjim premisleku) med seboj enaki

oz. po največ $10^s - 1$ je lahko enakih

Če vzamemo torej $(10^s-1)\cdot S_n$ bomo s tem zajeli vse člene iz $\left(\frac{1}{\left\lfloor \frac{x_{k+1}}{10^s}\right\rfloor}+\dots+\frac{1}{\left\lfloor \frac{x_n}{10^s}\right\rfloor}\right)$ in tudi vse možne večkratne ponovitve

$$\left(\frac{1}{\left\lfloor \frac{x_{k+1}}{10^s}\right\rfloor}+\dots+\frac{1}{\left\lfloor \frac{x_n}{10^s}\right\rfloor}\right) < (10^s-1)\cdot S_n$$

Sledi:

$$S_n < \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{x_i} + (10^s-1)10^{-s}S_n$$

$$\cancel{S_n} < \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{x_i} + \cancel{S_n} - 10^{-s}\cdot S_n$$

$$10^{-s}S_n < \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{x_i}$$

$$S_n < 10^s\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{x_i}$$

$$\Big\downarrow {\scriptstyle n\to\infty} \qquad\qquad \Big\downarrow {\scriptstyle n\to\infty}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{x_i} < 10^s\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{x_i}$$

$\square$

<u>Dokaz izreka:</u> Naj bo $1 \le a_1 < a_2 < \dots$ strogo naraščajoče zaporedje celih števil za katera velja $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{a_i}=\infty$

DOKAZ S PROTISLOVJEM

predpostavimo, da je $\alpha=(a_1)(a_2)\dots$ racionalno

$\Rightarrow$ torej bo α periodično neskončno dec. št (ker vemo, da ima neskončno členov)

$\Rightarrow$ obstaja neko blok št., recimo $b_1b_2\dots b_s$, ki se periodično ponavlja

$$\alpha = 0,\underbrace{\dots\dots}_{\text{končno št. členov prej}}\overline{b_1b_2\dots b_s}$$

Če je B blok samih enic $B = \overline{11\ldots1}$, definirajmo C kot blok samih dvojic dolžine $2s$:

$$C = c_1 c_2 \ldots c_{2s} = \overline{22\ldots2}$$

Če B nima samih enic pa naj $C = c_1 \ldots c_{2s} = \overline{1\ldots1}$

definirajmo $Y = Y(c_1, c_2, \ldots, c_{2s})$ zaporedje naravnih števil, ki ne vsebujejo bloka števil $c_1 c_2 \ldots c_{2s}$

zapišimo

$$\underset{\text{div.}}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i}} = \underset{\text{konv.}}{\sum_{a \in Y} \frac{1}{a}} + \sum_{a \notin Y} \frac{1}{a}$$

vsi členi iz $\alpha = 0,(a_1)(a_2)\ldots$

tisti a_i, ki ne vsebujejo bloka št. $c_1 \ldots c_{2s}$

a_i, ki vsebujejo blok

po predp. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i}$ divergira

po LEMI $\sum_{a \in Y} \frac{1}{a}$ konvergira

$\Longrightarrow \sum_{a \notin Y} \frac{1}{a}$ divergira

ZANIKANA LEMA

$\Longrightarrow$ obstaja neskončno število a_i v $\alpha = 0,(a_1)(a_2)\ldots$, ki vsebujejo blok $c_1 c_2 \ldots c_{2s}$

$c_1 c_2 \ldots c_{2s}$ je dvakrat daljši kot $b_1 \ldots b_s$ in je različen od njega

ne more se zgodit to, da bi bil C vsebovan v B oz. da bi sestavljal njegove dele

npr. $b_1 b_2 b_3 \ldots b_{s-1} b_s \, b_1 b_2 b_3 \ldots b_{s-1} b_s$

$$b_{s-1} = c_1, \quad b_s = c_2, \quad b_1 = c_3, \quad b_2 = c_4$$

to se nemore zgodit ker je C za dve njegove dolžine

$\Longrightarrow$ blok $b_1 \ldots b_s$ se zato ne more ponavljat v neskončnost

$\rightarrow\!\leftarrow$

$\blacksquare$

(*) Torej bo za število $\left[\frac{x_i}{10^s}\right]$ največ $10^s - 1$ možnih vrednosti

zakaj to velja?
kaj če ima x_i npr. 10^{3s} števk torej ima $\left[\frac{x_i}{10^s}\right]$ 10^{2s} števk $\Rightarrow$ kaj ne bi bilo potem za $\left[\frac{x_i}{10^s}\right]$ več možnosti, npr. $10^{2s} - 1$ možnosti?

označimo $x_j := \left[\frac{x_i}{10^s}\right]$

ugotovili smo, da je $10^s - 1$ možnih takih x_j-jev

$$S_n < \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_t} + 10^{-s}\underbrace{\Bigg(\frac{1}{\underbrace{\left[\frac{x_{t+1}}{10^s}\right]}_{x_{j_{t+1}}}} + \dots + \frac{1}{\underbrace{\left[\frac{x_n}{10^s}\right]}_{x_{j_n}}}\Bigg)}_{\text{to je del vsote } S_n}$$

vsa števila $\left[\frac{x_{t+1}}{10^s}\right] \dots \left[\frac{x_n}{10^s}\right]$ so očitno manjša od x_n, zato bo to res v tej vsoti (nebo v končni večji)

$$S_n < \sum_{i=1}^{t} \frac{1}{x_i} + 10^{-s} \cdot S_n \left(10^s - 1\right)$$

povečamo vsoto do cele

za vsak x_j je toliko možnosti

$$\cancel{S_n} < \sum_{i=1}^{t} \frac{1}{x_i} + \cancel{S_n} - 10^{-s} S_n$$

$$10^{-s} S_n < \sum_{i=1}^{t} \frac{1}{x_i}$$

$$S_n < \underbrace{10^s \sum_{i=1}^{t} \frac{1}{x_i}}_{} < \infty$$

$n \to \infty$ neodvisne od n

$$\underline{\underline{S < \infty}}$$

$\square$