O nekaterih iracionalnih desetiških ulomkih

Gaja Jamnik

Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

2. april 2021

Definicija

Desetiški ulomek je ulomek, katerega imenovalec je potenca števila 10.

$$\frac{73}{1000}$$

Za poenostavitev uporabljamo zapis z decimalno vejico:

$$0,073$$

Definicija

Desetiški ulomek je ulomek, katerega imenovalec je potenca števila 10.

$$\frac{73}{1000}$$

Za poenostavitev uporabljamo zapis z decimalno vejico:

$$0,073$$

Kakšna je razlika v decimalnem zapisu racionalnega in iracionalnega števila?

Definicija

Desetiški ulomek je ulomek, katerega imenovalec je potenca števila 10.

$$\frac{73}{1000}$$

Za poenostavitev uporabljamo zapis z decimalno vejico:

$$0,073$$

Kakšna je razlika v decimalnem zapisu racionalnega in iracionalnega števila?

- racionalna števila: $5,6$; $0,\overline{26}$
- iracionalna števila: $\pi = 3,1415926535\ldots$

Uvod

Definicija

Naj bo x realno število, $0 < x < 1$, podano z decimalnim zapisom:

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i 10^{-i} =$$
$$= 0, c_0 c_1 c_2 \cdots c_n,$$

kjer so $0 \leq c_i \leq 9 \ \forall i = 1, \ldots, s$.
Z b označimo celo število sestavljeno iz zaporedja števk $b_1 b_2 b_3 \ldots b_s$, kjer je $s \geq 1$ in $0 \leq b_i \leq 9 \ \forall i = 1, \ldots, s$.
Pravimo, da število x vsebuje blok števil $(b) = (b_1 b_2 b_3 \ldots)$, če obstaja $j \geq 0$, da je $c_{i+j} = b_i$ za vse $i = 1, 2, \ldots s$.

Uvod

Definicija

Naj bo x *realno število,* $0 < x < 1$*, podano z decimalnim zapisom:*

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i 10^{-i} =$$
$$= 0, c_0 c_1 c_2 \cdots c_n,$$

kjer so $0 \leq c_i \leq 9 \ \forall i = 1, \ldots, s$.
Z b *označimo celo število sestavljeno iz zaporedja števk* $b_1 b_2 b_3 \ldots b_s$*, kjer je* $s \geq 1$ *in* $0 \leq b_i \leq 9 \ \forall i = 1, \ldots, s$.
Pravimo, da število x *vsebuje blok števil* $(b) = (b_1 b_2 b_3 \ldots)$*, če obstaja* $j \geq 0$*, da je* $c_{i+j} = b_i$ *za vse* $i = 1, 2, \ldots s$.

Primer

$0,5934$ *vsebuje blok* (593)*, ne vsebuje pa* (594) *ali* (43).

O številu $0,23571113\dots$

Poljubno decimalno število lahko razumemo kot zaporedje blokov celih števil.

Poljubno decimalno število lahko razumemo kot zaporedje blokov celih števil.

$$0,235711131719\ldots$$

O številu $0,23571113\ldots$

Poljubno decimalno število lahko razumemo kot zaporedje blokov celih števil.

$$0,235711131719\ldots$$

$$0,(p_1)(p_2)(p_3)(p_4)\ldots$$

$\{p_i\}$ predstavlja zaporedje praštevil.

O številu $0,23571113\ldots$

Poljubno decimalno število lahko razumemo kot zaporedje blokov celih števil.

$$0,235711131719\ldots$$

$$0,(p_1)(p_2)(p_3)(p_4)\ldots$$

$\{p_i\}$ predstavlja zaporedje praštevil.

Ali je to število iracionalno?

O številu $0,23571113\ldots$

Trditev

Število $0,23571113\ldots$ *je iracionalno.*

O številu $0,23571113\ldots$

Trditev

Število $0,23571113\ldots$ *je iracionalno.*

Izrek (Dirichletov izrek)

V vsakem zaporedju $\{an+b\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *naravnih števil, kjer sta a in b tuji si naravni števili, je neskončno praštevil.*

Trditev

Število $0,23571113\ldots$ *je iracionalno.*

Izrek (Dirichletov izrek)

V vsakem zaporedju $\{an+b\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *naravnih števil, kjer sta* a *in* b *tuji si naravni števili, je neskončno praštevil.*

Dokaz: Naj bo $s \geq$ poljubno celo število
Po Dirichletovem izreku $\{10^{s+1}k+1\}$, $k \in \mathbb{N}$ vsebuje neskončno praštevil.

O številu $0,23571113\ldots$

Trditev

Število $0,23571113\ldots$ *je iracionalno.*

Izrek (Dirichletov izrek)

V vsakem zaporedju $\{an+b\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *naravnih števil, kjer sta a in b tuji si naravni števili, je neskončno praštevil.*

Dokaz: Naj bo $s \geq$ poljubno celo število
Po Dirichletovem izreku $\{10^{s+1}k+1\}$, $k \in \mathbb{N}$ vsebuje neskončno praštevil. Obstajajo praštevila oblike:

$$(k)\underbrace{00\ldots}_{s}1$$

O številu $0,23571113\ldots$

Trditev

Število $0,23571113\ldots$ *je iracionalno.*

Izrek (Dirichletov izrek)

V vsakem zaporedju $\{an+b\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *naravnih števil, kjer sta a in b tuji si naravni števili, je neskončno praštevil.*

Dokaz: Naj bo $s \geq$ poljubno celo število
Po Dirichletovem izreku $\{10^{s+1}k+1\}$, $k \in \mathbb{N}$ vsebuje neskončno praštevil. Obstajajo praštevila oblike:

$$(k)\underbrace{00\ldots}_{s}1$$

Taka števila obstajajo za $\forall s \geq 0$. $0,2357\ldots$ je sestavljeno iz blokov takšne oblike, zato ne bo periodično. $\square$

Decimalna števila z naraščajočimi bloki

Naj bo $1 \leq a_1 < a_2 < \dots$ strogo naraščajoče zaporedje celih števil. Označimo:

$$Dec\{a_k\} = 0,(a_1)(a_2)(a_3)... \quad ; a_k \in \mathbb{Z} \;\; k \in \mathbb{N}$$

Decimalna števila z naraščajočimi bloki

Naj bo $1 \leq a_1 < a_2 < \dots$ strogo naraščajoče zaporedje celih števil. Označimo:

$$Dec\{a_k\} = 0,(a_1)(a_2)(a_3)\dots \quad ; a_k \in \mathbb{Z} \ k \in \mathbb{N}$$

Izrek

Če za strogo naraščajoče zaporedje celih števil $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ velja

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \infty,$$

potem je $Dec\{a_k\}$ iracionalno.

Ali število $0,23571113\dots$ zadošča pogoju izreka?

Ali število $0,23571113\ldots$ zadošča pogoju izreka?

$$\sum_{p \text{ praštevilo}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots \stackrel{?}{=} \infty$$

Ali število $0,23571113\ldots$ zadošča pogoju izreka?

$$\sum_{p \text{ praštevilo}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots \stackrel{?}{=} \infty$$

Divergenco vrste $\sum_{p \text{ praštevilo}} \frac{1}{p}$ je leta 1737 dokazal Leonhard Euler.