O nekaterih iracionalnih desetiških ulomkih

Seminar

Gaja Jamnik
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

2. april 2021

1 Uvod

V tem dokumentu bomo obravnavali realna števila zapisana v obliki decimalnega zapisa. Spomnimo se definicije desetiških ulomkov ter decimalnega zapisa.

Definicija 1 Desetiški ulomek *je ulomek, katerega imenovalec je potenca števila* 10. *Zapis desetiškega ulomka navadno nadomestimo z zapisom z decimalno vejico, ki mu pravimo* decimalni zapis. *Če ponazorimo s primerom, namesto* $\frac{23}{1000}$ *pišemo* 0,023

Pri obravnavi številskih množic se že v srednji šoli spoznamo z razliko v decimalnem zapisu racionalnih in iracionalnih števil. Racionalna števila lahko zapišemo s končnim ali neskončnim periodičnim decimalnim zapisom, medtem ko je zapis iracionalnega števila možen le z neskončno neperiodičnimi decimalkami.

Zanimalo nas bo pa ravno obratno. Kaj nam lahko decimalni zapis realnega števila x pove o njegovi racionalnosti oz. iracionalnosti.
OPOMBA: Zaradi poenostavitve privzemimo, da velja $0 < x < 1$.

V ta namen podajmo naslednjo definicijo.

Definicija 2 *Naj bo x realno število, $0 < x < 1$, podano z decimalnim zapisom:*

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{n} c_i 10^{-i} = \\ &= 0{,}c_0c_1c_2 \cdots c_n, \end{aligned}$$

kjer so $0 \leq c_i \leq 9\ \forall i = 1, \ldots, s$.

Z b *označimo celo število sestavljeno iz zaporedja števk* $b_1 b_2 b_3 \ldots b_s$*, kjer je* $s \geq 1$ *in* $0 \leq b_i \leq 9\ \forall i = 1, \ldots, s$*. Pravimo, da število* x vsebuje blok števil $(b) = (b_1 b_2 b_3 \ldots)$*, če obstaja* $j \geq 0$*, da je* $c_{i+j} = b_i$ *za vse* $i = 1, 2, \ldots s$.

Zgled 1 *Število* 0,135627 *vsebuje blok* (356)*, vendar ne vsebuje bloka* (352)*.*

Poljubno decimalno število lahko razumemo kot zaporedje blokov celih števil. Tako je na primer število $0{,}11223344\cdots$ zaporedje blokov (nn), kjer je $n \in \mathbb{N}$.

2 O številu 0,23571113...

Za začetek obravnavajmo število $0{,}23571113\ldots$, ki je zgrajeno iz zaporedja blokov praštevil. Očitno decimalno število ni končno. Iz zapisa pa ne moremo razbrati ali je po nekem členu decimalno število periodično, zato ni očitno ali je število racionalno. Trdimo naslednje:

Trditev 1 *Število* $0{,}23571113\ldots$ *je iracionalno.*

Za dokaz te trditve bomo potrebovali različico **Dirichletovega izreka**, ki pravi naslednje:

Izrek 1 (Dirichletov izrek) *V vsakem zaporedju* $\{an + b\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ *naravnih števil, kjer sta* a *in* b *tuji si naravni števili, je neskončno praštevil.*

Dokaz trditve: Naj bo $s \geq 0$ celo število. Po izreku 1 vsako zaporedje $\{10^{s+1}k + 1\}$, $k \in \mathbb{N}$ vsebuje neskončno praštevil. Torej obstajajo praštevila oblike $(k)\underbrace{00\ldots}_{s}1$, kjer števkam števila k sledi s ničel ter ena enica.

Decimalno število $0{,}23571113\ldots$ očitno vsebuje vse bloke take oblike za $\forall s \geq 0$. Z večanjem števila s narašča tudi število ničel v posameznem bloku, kar pomeni, da po še tako pozni decimalki zapis ne bo periodičen.

$\square$

3 Decimalna števila z naraščajočimi bloki

V prejšnjem razdelku smo dokazali, da je decimalno število sestavljeno iz praštevilskih blokov iracionalno. Kaj pa lahko povemo za decimalno število sestavljeno iz poljubnih blokov?

Naj bo $1 \leq a_1 < a_2 < \ldots$ strogo naraščajoče zaporedje celih števil. Označimo:

$$Dec\{a_k\} = 0{,}(a_1)(a_2)(a_3)... \quad ; a_k \in \mathbb{Z} \; k \in \mathbb{N}$$

Zanimajo nas lastnosti zaporedja $\{a_k\}$, ki nam zagotovijo, da bo $Dec\{a_k\}$ iracionalno.

Izrek 2 *Če za strogo naraščajoče zaporedje celih števil $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ velja*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \infty,$$

potem je $Dec\{a_k\}$ iracionalno.

Ta izrek je posplošitev trditve 1, ki pravi, da je število $0{,}23571113\ldots$ iracionalno. Za zaporedje praštevil $2, 3, 5, 7, \ldots$ namreč velja

$$\sum_{p \text{ praštevilo}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots = \infty,$$

kar je leta 1737 dokazal Leonhard Euler.

Zgled 2 *Decimalno število $Dec\{7n\} = 0{,}714212835\ldots(7n)\ldots$ je iracionalno, saj bo vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{7n}$ divergirala.*

Za dokaz izreka 2 bomo potrebovali naslednjo lemo.

Lema 1 *Naj bo $(b) = (b_1 b_2 b_3 \ldots b_s)$ blok števil. Z $X = X(b_1 b_2 b_3 \ldots b_s)$ označimo zaporedje naravnih števil, ki ne vsebujejo bloka števil (b). Potem*

$$\sum_{x\in X}^{\infty} \frac{1}{x}$$

konvergira.

Opomba 1 *V lemi, v nasprotju z definicijo 2, obravnavamo vsebovanost blokov v celih in ne decimalnih številih. Definicijo v ta namen prilagodimo tako, da le spremenimo potenco števila 10 v vsoti. Celo število x tako zapišemo kot*

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i 10^{n-i} =$$
$$= c_0 c_1 c_2 \cdots c_n \; .$$

Dokaz leme 1: Označimo delno vsoto naše vrste

$$S_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots \frac{1}{x_n} \ .$$

Naj bo $t \in \mathbb{N}$ tak, da velja $x_{t-1} < 10^s \leq x_t$. Število števk bloka $(b) = (b_1 b_2 b_3 \dots b_s)$ je očitno s, število 10^s pa ima $s+1$ števk, kar pomeni, da imajo vsi x_i za $i \geq t$ več števk kot je dolžina bloka. Delno vsoto sedaj preoblikujemo v

$$S_n = \frac{1}{x_1} + \dots \frac{1}{x_t} + 10^{-s}(\frac{1}{\frac{x_{t+1}}{10^s}} + \dots + \frac{1}{\frac{x_n}{10^s}}) \leq \frac{1}{x_1} + \dots \frac{1}{x_t} + 10^{-s}(\frac{1}{\lfloor\frac{x_{t+1}}{10^s}\rfloor} + \dots + \frac{1}{\lfloor\frac{x_n}{10^s}\rfloor}),$$

kjer smo v neenakosti upoštevali, da za poljuben $y > 0$ velja $y \geq \lfloor y \rfloor$.

Ker za vsak $t < i \leq n$ velja $10^s \leq x_i$, bo $\lfloor \frac{x_i}{10^s} \rfloor$ pozitivno celo število. To število lahko interpretiramo kot x_i brez zadnjih s števk. Ker vsi $x_i \in X$ ne vsebujejo bloka (b), ga očitno ne vsebuje niti njegovih prvih nekaj števk. Od tod sledi, da $\forall x_i,\ t < i \leq n\ \exists x_y \in X$ tako da $x_y = \lfloor \frac{x_i}{10^s} \rfloor$.

Novo nastala števila, pa so si lahko med seboj enaka. Tako bi na primer za $s = 2$ veljalo $\lfloor \frac{12345}{10^2} \rfloor = \lfloor \frac{12387}{10^2} \rfloor = 123$.

Opazimo, da se blok $(b_1 b_2 b_3 \dots b_s)$ pojavi v vsaj eni od prvih 10^s naravnih števil. Torej lahko poljuben $x_j \in X$ zadošča za največ $10^s - 1$ možnih x_i, kjer $\lfloor \frac{x_i}{10^s} \rfloor = x_y$. V zgornjem primeru (za $s = 2$) torej število 123 zadošča za vsa števila $123\square\square$ kjer lahko na zadnji dve mesti postavimo poljubno dvomestno število, razen bloka $b_1 b_2$. Takih števil pa je ravno $10^2 - 1$.

Po zgornjem premisleku lahko sedaj ocenimo izraz

$$(\frac{1}{\lfloor\frac{x_{t+1}}{10^s}\rfloor} + \dots + \frac{1}{\lfloor\frac{x_n}{10^s}\rfloor}) < (10^s - 1) S_n.$$

S pomnožitvijo $(10^s - 1)$ s S_n smo tako zagotovo zajeli vse člene na levi strani neenakosti z upoštevanjem vseh možnih ponovitev v vrednostih $\lfloor \frac{x_i}{10^s} \rfloor$. Če to oceno uporabimo na delni vsoti, dobimo:

$$S_n < \sum_{i=1}^{t} \frac{1}{x_i} + (10^s - 1)10^{-s} S_n$$

$$S_n < 10^s \sum_{i=1}^{t} \frac{1}{x_i}$$

Desna stran neenačbe je neodvisna od n, zato vrsta konvergira.

$\square$

Dokaz izreka 2: Naj bo $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ strogo naraščajoče zaporedje celih števil za katero velja $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \infty$. Izrek bomo dokazali s protislovjem. Predpostavimo, da je $Dec\{a_i\} = 0{,}(a_1)(a_2)\cdots \in \mathbb{Q}$. To decimalno število očitno ni končno, torej je periodično. To pomeni, da obstaja nek blok števil $(b) = (b_1 b_2 b_3 \dots b_s)$, ki se v decimalnem zapisu periodično ponavlja od nekega mesta dalje.

Definirajmo blok (c) dolžine $2s$, tak da velja: če je $(b) = (11\cdots 1)$, naj bo blok (c) iz samih dvojic, v nasprotnem primeru pa naj bo (c) iz samih enic.

Naj bo $Y = Y(c_1, c_2, \dots, c_{2s})$ zaporedje naravnih števil, ki ne vsebuje bloka (c). Razdelimo našo vsoto glede na vsbovanost členov a_i v Y:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \sum_{a \in Y} \frac{1}{a} + \sum_{a \notin Y} \frac{1}{a}$$

Po predpostavki vsota na levi strani enačaja divergira in po lemi vsota $\sum_{a\in Y} \frac{1}{a}$ konvergira. Od tod sledi, da bo $\sum_{a\notin Y} \frac{1}{a}$ divergirala. To pomeni, da bo obstajalo neskončno a_i v $Dec\{a_i\} = 0{,}(a_1)(a_2)\dots$, ki vsebujejo blok $(c_1 c_2 \dots c_{2s})$. Ta blok je dvakrat daljši kot blok (b) in z različnimi števkami, zato se ne more zgoditi, da bi bil (c) vsebovan v (b) ali sestavljal njegove dele. Blok (b) se zato ne bo ponavljal v neskončnosti, posledično $Dec\{a_i\}$ ne more biti periodično.

$\square$

Dokazan izrek nam poda kriterij iracionalnosti števila $Dec\{a_k\}$, ki pa odpove za marsikatero zaporedje $\{a_k\}$. Tako na primer kriterij ne pove nič o iracionalnosti števila $Dec\{k^2\}$, saj $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergira.

Predpostavimo, da zaporedje a_k narašča kot $e^{\sqrt{k}}$. Z uporabo integralskega kriterija za konvergenco vrst lahko preverimo, da pogoj izreka 2 za tako zaporedje ne bo izpolnjen:

($\frac{1}{e^{\sqrt{x}}}$ je zvezna, pozitivna in padajoča na $[1, \infty)$ zato integralski kriterij lahko uporabimo)

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{e^{\sqrt{x}}} dx = 2e^{-\sqrt{x}}(-\sqrt{x} - 1)\Big|_1^{\infty} = \\ = -\frac{4}{e}$$

Zgornji integral konvergira, zato bo tudi vrsta $\sum_1^{\infty} \frac{1}{e^{\sqrt{x}}}$ konvergentna in s tem tudi vrsta $\sum_1^{\infty} \frac{1}{a_k}$.

V nadaljevanju bomo pokazali, da je $Dec\{a_k\}$ iracioanlno, tudi kadar $\{a_k\}$ narašča kot $e^{\sqrt{k}}$.

Izrek 3 *Naj bo* $Dec\{a_k\} \in \mathbb{Q}$. *Potem obstaja* $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$ *in pozitivna konstanta* C, *da velja* $a_k \geq Cx^k$ *za vsak* $k \geq 1$.

Izrek pove, da če je $Dec\{a_k\}$ racionalno, potem zaporedje a_k narašča vsaj eksponentno.

Posledica 1 *Predpostavimo, da velja*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{a_k} = \infty$$

za vsak $y > 1$. Potem je decimalno število $Dec\{a_k\}$ iracionalno.

Zgornja posledica je močnejša kot izrek 2. Pogoj iz izreka 2 ($\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \infty$) očitno implicira pogoj iz zgornje posledice ($\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{a_k} = \infty,\ \forall y > 1$). Po drugi strani pa bo iz posledice sledilo, da so $Dec\{a_k\}$ iracionalna tudi za zaporedja $\{a_k\}$, ki naraščajo kot $e^{\sqrt{k}}$, oz. kot e^{k^s} za $0 < s < 1$:

S korenskim kriterijem preverimo konvergenco.

$$r = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{y^k}{e^{\sqrt{k}}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{y}{e^{\frac{1}{\sqrt{k}}}} = y$$

Po predpostavki iz posledice je $y > 1$, zato vrsta divergira in bo zato $Dec\{a_k\}$ iracionalno.

Zgled 3 *S pomočjo posledice 1 lahko sedaj preverimo ali je $Dec\{k^2\}$ iracionalno. Po posledici bo število 0,149162536... iracionalno, če bo $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{a_k} = \infty$ za vsak $y > 1$. Uporabimo kvocientni kriterij in preverimo konvergenco vrste.*

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{y^{k+1}}{(k+1)^2}}{\frac{y^k}{k^2}} = y \lim_{k\to\infty} \Big(\frac{k}{k+1}\Big)^2 = y > 1$$

Vrsta divergira, zato bo $Dec\{k^2\} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Dokaz posledice 1: Dokazujemo s protislovjem. Predpostavimo, da je $Dec\{a_k\} \in \mathbb{Q}$. Po izreku 3 obstaja realno število $x > 1$ in konstanta $C > 0$, da velja $a_k \geq Cx^k\ \forall k \geq 1$. Ta izraz preoblikujemo in dobimo:

$$\frac{\sqrt{x}^k}{a_k} \leq \frac{1}{C\sqrt{x}^k}$$

Od tod sledi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x}^k}{a_k} \leq C^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}^k} < \infty.$$

Desna vsota je ravno geometrijska vrsta, ki bo konvergirala saj je $x > 1$ in s tem $\sqrt{x} > 1$. To pa je v protislovjem s predpostavko, ki pravi da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{a_k} = \infty\ \forall y > 1$. Torej bo $Dec\{a_k\}$ iracioanlno.

□

Dokaz izreka 3: Predpostavimo, da $Dec\{a_k\} = 0{,}(a_1)(a_2)\cdots \in \mathbb{Q}$, torej bo periodično od nekega člena dalje. Naj bo $(b_1 b_2 \dots b_p)$, $0 \le b_i \le 9\ \forall i = 1, \dots 9$, perioda in naj bo (a_m) prvi blok, ki se pojavi v periodičnem delu decimalnega zapisa.

Najprej dokažimo, da ima blok (a_{k+p}) vsaj eno števko več kot blok (a_k) za $\forall k \ge m$. Predpostavimo, da imata (a_{k+p}) in (a_k) oba po N števk. Ker je zaporedje $\{a_k\}$ strogo naraščajoče bodo imeli vsi $a_k, a_{k+1}, \dots a_{k+p}$ N števk. Število $(a_k)(a_{k+1})\dots(a_{k+p-1})$ ima torej Np števk. Ker pa je perioda enaka p, bo od tod sledilo, da je $a_k = a_{k+p}$, kar ne more biti res, saj je $\{a_k\}$ strogo naraščajoče.

Sledi, da ima a_{k+2p} vsaj eno števko več kot a_{k+p}, in zato vsaj dve števki več kot a_k za $\forall k \ge m$. Torej velja, da je $a_{k+2p} \ge 10 a_k$. Z indukcijo lahko dokažemo, da je

$$a_{k+2np} \ge 10^n a_k;\ \forall k \ge m,\ n \in \mathbb{N}.$$

Vzemimo sedaj poljuben $l \ge m$ in označimo $n := \lfloor \frac{l-m}{2p} \rfloor$ Veljalo bo:

$$a_l \ge a_{m+2np} \ge 10^n a_m \ge 10^{\frac{l-m-2p}{2p}} a_m \tag{1}$$

Dokažimo vsak neenačaj posebaj.

Za dokaz prve neenakosti si poglejmo indekse.

$$\begin{aligned} m + 2np &= m + 2\left\lfloor \frac{l-m}{2p} \right\rfloor p \\ &\le m + 2\left(\frac{l-m}{2p}\right)p \\ &= m + l - m = l \end{aligned}$$

Ker je $\{a_k\}$ strogo naraščajoče bo sledilo $a_{m+2np} \le a_l$. Drugi neenačaj sledi po prejšnji ugotovitvi, da je $a_{k+2np} \ge 10^n a_k$. Za tretjo neenakost pa podrobneje poglejmo eksponenta števila 10.

$$n = \left\lfloor \frac{l-m}{2p} \right\rfloor > \frac{l-m}{2p} - 1,$$

saj po pravilih za računanje s celim delom relanega števila velja $x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Naj bo sedaj $C' := 10^{-\frac{m+2p}{2p}}$ in $x := 10^{\frac{1}{2p}}$.

$$C' x^l = 10^{-\frac{m+2p}{2p}} \cdot 10^{\frac{l}{2p}} = 10^{\frac{l-m-2p}{2p}} \le 10^{\frac{l-m-2p}{2p}} a_m, \tag{2}$$

ker je $\{a_k\}$ zaporedje pozitivnih celih števil in bo zato $a_m \ge 1$.

Če sedaj združimo neeančbi 1 in 2 dobimo $a_l \ge C' x^l;\ \forall l \ge m$. Po potrebi zmanšajmo C' na $C > 0$, da bo neenakost veljala za vse $k \ge 1$.

□

Angleško-slovenski slovar strokovnih izrazov

decimal fraction desetiški ulomek
Dirichlet's theorem Dirichletov izrek
floor function celi del števila
integral test integralski kriterij
iracioanl number iracionalno število
prime number praštevilo
root test korenski kriterij
racional number racionalno število
sequence zaporedje

Literatura

[1] P. Martinez, *Some new irrational decimal fractions*, Amer. Math. Monthly **108(3)** (Mar., 2001), 250-253.

[2] G. H. Hardy in E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, 5.izdaja, Clarendon Press, Oxford, 1970.

[3] N. Hegyvari, *On some irrational decimal fractions*, Amer. Math. Monthly **100(8)** (Okt., 1993), 779-780.

[4] A. McD. Mercer, *A note on some irrational decimal fractions*, Amer. Math. Monthly **101(6)** (Jun.-Jul., 1994), 567-568.