O NEKATERIH IRACIONALNIH DESETIŠKIH ZAPISIH

GAJA JAMNIK

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

V članku so obravnavani načini, kako je mogoče iz zaporedja števk v decimalnem zapisu realnega števila določiti njegovo racionalnost oziroma iracionalnost. Podrobneje je obravnavano decimalno število s števkami, sestavljenimi iz zaporedja praštevil.

ON SOME IRRATIONAL DECIMAL FRACTIONS

In the paper it is discussed how to determine irrationality of a real number based on the properties of the sequence of its decimal expansions. Morover, a number that has sequence of prime numbers for its decimals is examined in more detail.

1. Uvodne definicije

V tem delu obravnavamo realna števila zapisana v obliki decimalnega zapisa. Spomnimo se razlike v decimalnem zapisu racionalnih in iracionalnih števil. Racionalna števila zapišemo z neskončnim periodičnim decimalnim zapisom, kjer velja dogovor da v primeru dveh ekvivalentnih zapisov istega števila izberemo tistega, katerega perioda je 0. Na primer izmed zapisov $0,100\ldots$ in $0,0999\ldots$ izberemo prvega. Po drugi strani je zapis iracionalnega števila možen le z neskončno neperiodičnimi decimalkami.

Včasih pa iz zapisa decimalnega števila z neskončno decimalkami ne moremo razbrati, ali se decimalke periodično ponavljajo od nekega člena dalje. Zanimalo nas bo, kaj lahko iz zaporedja števk v decimalnem zapisu povemo o racionalnosti oziroma iracionalnosti decimalnega števila x. Zaradi poenostavitve privzemimo, da velja $0 < x < 1$.

V ta namen podajmo naslednjo definicijo.

Definicija 1. Naj bo x realno število, $0 < x < 1$, podano z decimalnim zapisom:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{\infty} c_i 10^{-i} = \\ &= 0, c_1 c_2 c_3 \ldots, \end{aligned}$$

kjer so $0 \leq c_i \leq 9$ za vse $i = 1, 2, \ldots$.

Z b označimo naravno število, sestavljeno iz zaporedja števk $b_1 b_2 b_3 \ldots b_s$, kjer je $s \geq 1$ in $0 \leq b_i \leq 9$ za vse $i = 1, \ldots, s$. Pravimo, da število x *vsebuje blok števk* $(b) = (b_1 b_2 b_3 \ldots b_s)$, če obstaja $j \geq 0$, da je $c_{i+j} = b_i$ za vse $i = 1, 2, \ldots s$.

Zgled 1. Število $0,13562777\ldots$ vsebuje blok (356), vendar ne vsebuje bloka (352) ali (72).

Poljubno decimalno število lahko razumemo kot zaporedje blokov celih števil. Tako je na primer število $0,11223344\cdots$ zaporedje blokov (nn), kjer je $n \in \mathbb{N}$.

2. O številu $0,23571113\ldots$

Za začetek obravnavajmo število $0,23571113\ldots$, ki je zgrajeno iz zaporedja blokov praštevil. Po Evklidovem izreku [7] je praštevil neskončno mnogo, zato njegov decimalni zapis ne more biti končen. Iz zapisa pa ne moremo razbrati, ali je po nekem členu decimalno število periodično. Zato ni očitno, ali je število racionalno ali iracionalno. Trdimo naslednje:

Trditev 1. *Število* $0,23571113\dots$ *je iracionalno.*

Za dokaz te trditve bomo potrebovali različico Dirichletovega izreka [6], ki pravi naslednje:

Izrek 2 (Dirichletov izrek). *V vsakem zaporedju* $\{an+b\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *naravnih števil, kjer sta* a *in* b *tuji si naravni števili, je neskončno praštevil.*

Dokaz trditve 1: Naj bo $s \geq 0$ celo število. Po Dirichletovem izreku 2 vsako zaporedje $\{10^{s+1}k+1\}_{k\in\mathbb{N}}$, vsebuje neskončno praštevil. Torej obstajajo praštevila oblike $(k)\underbrace{00\dots}_{s}1$, kjer števkam števila k sledi s ničel ter ena enica.

Decimalno število $0,23571113\dots$ očitno vsebuje vse bloke take oblike za vsak $s \geq 0$. Z večanjem števila s narašča tudi število ničel v posameznem bloku, kar pomeni, da po še tako pozni decimalki zapis ne bo periodičen.

■

3. Decimalna števila z naraščajočimi bloki

V prejšnjem razdelku smo dokazali, da je decimalno število, sestavljeno iz praštevilskih blokov iracionalno. Kaj pa lahko povemo za decimalno število, sestavljeno iz poljubnih blokov?

Naj bo $1 \leq a_1 < a_2 < \dots$ strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil. Označimo:

$$Dec\{a_k\} = 0,(a_1)(a_2)(a_3)... \;\; ; k \in \mathbb{N},\ a_k \in \mathbb{N}.$$

Zanimajo nas lastnosti zaporedja $\{a_k\}$, ki nam zagotovijo, da bo $Dec\{a_k\}$ iracionalno.

Izrek 3. *Če za strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil* $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *velja*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \infty,$$

potem je $Dec\{a_k\}$ *iracionalno.*

Opomba 1. Obrat izreka ne velja. V nadaljevanju bomo pokazali, da je decimalno število $Dec\{k^2\}$ irracionalno, vendar vrsta $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ konvergira.

Ta izrek je posplošitev trditve 1, ki pravi, da je število $0,23571113\dots$ iracionalno. Za zaporedje praštevil $2,3,5,7,\dots$ namreč velja

$$\sum_{p \text{ praštevilo}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots = \infty,$$

kar je leta 1737 dokazal Leonhard Euler v [1].

Izrek pa lahko uporabimo tudi za druga decimalna števila.

Zgled 2. Decimalno število $Dec\{7n\} = 0,714212835\dots(7n)\dots$ je iracionalno, saj vrsta $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{7n}$ divergira.

Za dokaz izreka 3 bomo potrebovali naslednjo lemo.

Lema 4. *Naj bo* $(b) = (b_1b_2b_3\dots b_s)$ *blok števil. Z* $X = X(b_1b_2b_3\dots b_s)$ *označimo zaporedje vseh naravnih števil, ki ne vsebujejo bloka števil* (b)*. Potem*

$$\sum_{x\in X}^{\infty} \frac{1}{x}$$

konvergira.

Opomba 2. V lemi 4, v nasprotju z definicijo 1, obravnavamo vsebovanost blokov v naravnih in ne decimalnih številih. Definicijo zato prilagodimo tako, da le spremenimo potenco števila 10 v vsoti. Celo število x tako zapišemo kot

$$\begin{aligned} x = \sum_{i=1}^{n} c_i 10^{n-i} = \\ = c_1 c_2 c_3 \cdots c_n \ . \end{aligned}$$

Dokaz leme 4: Označimo delno vsoto vrste

$$S_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \cdots + \frac{1}{x_n} \ .$$

Vzemimo tak $t \in \mathbb{N}$, $t < n$, da velja $x_{t-1} < 10^s \leq x_t$. Število števk bloka $(b) = (b_1 b_2 b_3 \ldots b_s)$ je očitno s, število 10^s pa ima $s+1$ števk, kar pomeni, da imajo vsi x_i za $i \geq t$ več števk, kot je dolžina bloka.

Delno vsoto sedaj preoblikujemo v

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_t} + 10^{-s} \left(\frac{1}{\frac{x_{t+1}}{10^s}} + \cdots + \frac{1}{\frac{x_n}{10^s}} \right) \\ &\leq \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_t} + 10^{-s} \left(\frac{1}{\lfloor \frac{x_{t+1}}{10^s} \rfloor} + \cdots + \frac{1}{\lfloor \frac{x_n}{10^s} \rfloor} \right), \end{aligned}$$

kjer smo v neenakosti upoštevali, da za poljuben $y > 0$ velja $y \geq \lfloor y \rfloor$. Oznaka $\lfloor \cdot \rfloor$ označuje funkcijo celi del.

Ker za vsak $t < i \leq n$ velja $10^s \leq x_i$, je $\lfloor \frac{x_i}{10^s} \rfloor$ pozitivno celo število. To število lahko interpretiramo kot x_i brez zadnjih s števk. Ker noben $x_i \in X$ ne vsebuje bloka (b), ga očitno ne vsebuje niti njegovih prvih nekaj števk. Od tod sledi, da za vsak x_i, $t < i \leq n$, obstaja tak $x_y \in X$, da $x_y = \lfloor \frac{x_i}{10^s} \rfloor$.

Novo nastala števila, pa so si lahko med seboj enaka. Tako bi na primer za $s = 2$ veljalo $\lfloor \frac{12345}{10^2} \rfloor = \lfloor \frac{12387}{10^2} \rfloor = 123$.

Opazimo, da se blok $(b_1 b_2 b_3 \ldots b_s)$ pojavi v vsaj enem od prvih 10^s naravnih števil. Torej lahko poljuben $x_y \in X$ zadošča za največ $10^s - 1$ možnih x_i, kjer $\lfloor \frac{x_i}{10^s} \rfloor = x_y$. Ponovno si poglejmo primer, ko je $s = 2$, ter vzemimo $x_y = 123$. Za število x_i bomo torej lahko vzeli števila oblike $123\square\square$, ki ne bodo za nobeni dve zaporedni števki imela bloka $(b_1 b_2)$. Zato očitno za zadnji dve števki (označeni s kvadratkoma) ne bomo mogli vzeti števk $b_1 b_2$. Od tod bo sledilo, da obstaja največ $10^2 - 1$ ustreznih števil x_i.

Po zgornjem premisleku lahko sedaj ocenimo izraz

$$\left(\frac{1}{\lfloor \frac{x_{t+1}}{10^s} \rfloor} + \cdots + \frac{1}{\lfloor \frac{x_n}{10^s} \rfloor} \right) < (10^s - 1) S_n.$$

S tem, da smo S_n pomnožili z $(10^s - 1)$, smo zagotovo zajeli vse člene na levi strani neenakosti z upoštevanjem vseh možnih ponovitev v vrednostih $\lfloor \frac{x_i}{10^s} \rfloor$. Če to oceno uporabimo na delni vsoti, dobimo:

$$S_n < \sum_{i=1}^{t} \frac{1}{x_i} + (10^s - 1) 10^{-s} S_n,$$

od koder sledi

$$S_n < 10^s \sum_{i=1}^{t} \frac{1}{x_i}.$$

Desna stran neenačbe je neodvisna od n, zato vrsta konvergira.

■

Dokaz izreka 3: Naj bo $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ strogo naraščajoče zaporedje celih števil, za katero velja $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{a_i}=\infty$. Izrek bomo dokazali s protislovjem. Predpostavimo, da je $Dec\{a_i\}=0,(a_1)(a_2)\cdots\in\mathbb{Q}$. To decimalno število nima končnega decimalnega zapisa in ima torej periodičen decimalni zapis. To pomeni, da obstaja nek blok števil $(b)=(b_1b_2b_3\dots b_s)$, ki se v decimalnem zapisu periodično ponavlja od nekega mesta dalje.

Definirajmo tak blok (c) dolžine $2s$, da velja: če je $(b)=(\underbrace{11\cdots1}_{s})$, naj bo blok $(c)=(\underbrace{22\dots2}_{2s})$, v nasprotnem primeru pa naj bo $(c)=(\underbrace{11\dots1}_{2s})$.

Naj bo $Y=Y(c_1,c_2,\dots,c_{2s})$ zaporedje vseh naravnih števil, ki ne vsebuje bloka (c). Razdelimo vsoto glede na vsebovanost členov a_i v Y:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{a_i}=\sum_{a_i\in Y}\frac{1}{a_i}+\sum_{a_i\notin Y}\frac{1}{a_i}$$

Po predpostavki vrsta na levi strani enačaja divergira in po lemi 4 vrsta $\sum_{a\in Y}\frac{1}{a}$ konvergira. Od tod sledi, da vrsta $\sum_{a\notin Y}\frac{1}{a}$ divergira. To pomeni, da obstaja neskončno a_i v $Dec\{a_i\}=0,(a_1)(a_2)\dots$, ki vsebujejo blok $(c_1c_2\dots c_{2s})$. Ta blok je dvakrat daljši kot blok (b) in z drugačnimi števkami, zato se ne more zgoditi, da bi bil (c) vsebovan v (b) ali sestavljal njegove dele. Blok (b) se zato ne ponovi neskončnokrat in posledično $Dec\{a_i\}$ ne more biti periodično.

■

Dokazan izrek poda kriterij iracionalnosti števila $Dec\{a_k\}$, ki pa odpove za marsikatero zaporedje $\{a_k\}$. Tako, na primer, kriterij ne pove nič o iracionalnosti števila $Dec\{k^2\}$, saj vrsta $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ konvergira. Z naslednjim izrekom bomo pokazali, da je tudi to decimalno število iracionalno.

Izrek 5. *Naj bo $Dec\{a_k\}\in\mathbb{Q}$. Potem obstajata tak $x\in\mathbb{R},\ x>1$, in taka pozitivna konstanta C, da velja $a_k\geq Cx^k$ za vsak $k\geq 1$.*

Izrek pove, da če je $Dec\{a_k\}$ racionalno, potem zaporedje a_k narašča vsaj eksponentno.

Posledica 6. *Predpostavimo, da velja*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{y^k}{a_k}=\infty$$

za vsak $y>1$. Potem je decimalno število $Dec\{a_k\}$ iracionalno.

Zgornja posledica je močnejša kot izrek 3. Pogoj iz izreka 3, ki zahteva divergenco vrste $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{a_i}$, očitno implicira pogoj iz zgornje posledice, torej da $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{y^k}{a_k}$ divergira za vsak $y>1$.

Zgled 3. S pomočjo posledice 6 lahko sedaj preverimo, ali je $Dec\{k^2\}$ iracionalno. Po posledici je število $0,149162536\dots$ iracionalno, če je $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{y^k}{k^2}=\infty$ za vsak $y>1$. Uporabimo kvocientni kriterij in preverimo konvergenco vrste.

$$L=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{y^{k+1}}{(k+1)^2}}{\frac{y^k}{k^2}}=y\lim_{k\to\infty}\Big(\frac{k}{k+1}\Big)^2=y>1$$

Vrsta divergira, zato je $Dec\{k^2\}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Dokaz posledice 6: Dokazujemo s protislovjem. Predpostavimo, da je $Dec\{a_k\}\in\mathbb{Q}$. Po izreku 5 obstajata tako realno število $x>1$ in taka konstanta $C>0$, da velja $a_k\geq Cx^k$ za vsak $k\geq 1$. Ta izraz preoblikujemo in dobimo:

$$\frac{\sqrt{x^k}}{a_k}\leq\frac{1}{C\sqrt{x^k}}.$$

Od tod sledi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x^k}}{a_k} \leq C^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^k}} < \infty.$$

Desna vsota je ravno geometrijska vrsta, ki konvergira, saj je $x > 1$ in s tem $\sqrt{x} > 1$. To pa je v protislovjem s predpostavko, ki pravi, da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{a_k} = \infty$ za vsak $y > 1$. Torej bo $Dec\{a_k\}$ iracionalno.

■

Dokaz izreka 5: Predpostavimo, da $Dec\{a_k\} = 0,(a_1)(a_2)\cdots \in \mathbb{Q}$, torej je decimalni zapis periodičen od neke decimalke dalje. Naj bo $(b_1b_2\dots b_p)$, $0 \leq b_i \leq 9$ za vsak $i = 1,\dots p$, perioda in naj bo (a_m) prvi tak blok, ki je v celoti vsebovan v periodičnem delu decimalnega zapisa. To pa ne pomeni nujno, da je $(a_m) \subseteq (b_1b_2\dots b_p)$. Lahko se zgodi, da je prvih par števk (a_m) vsebovanih v prvi ponovitvi periode, ostale števke pa v drugi. Če je število števk v (a_m) večje kot p, lahko blok (a_m) pokriva tudi več ponovitev periode.

Najprej dokažimo, da ima blok (a_{k+p}) vsaj eno števko več kot blok (a_k) za vsak $k \geq m$. Predpostavimo, da imata (a_{k+p}) in (a_k) oba po N števk. Ker je zaporedje $\{a_k\}$ strogo naraščajoče, bodo imeli vsi $a_k, a_{k+1}, \dots a_{k+p}$ po N števk. Število $(a_k)(a_{k+1})\dots(a_{k+p-1})$ ima torej Np števk. Ker pa je perioda enaka p, bo od tod sledilo, da je $a_k = a_{k+p}$, kar ne more biti res, saj je $\{a_k\}$ strogo naraščajoče zaporedje.

Sledi, da ima a_{k+2p} vsaj eno števko več kot a_{k+p}, in zato vsaj dve števki več kot a_k za vsak $k \geq m$. Torej velja, da je $a_{k+2p} \geq 10a_k$. Z indukcijo dokažemo, da je

$$a_{k+2np} \geq 10^n a_k;\ \forall k \geq m,\ n \in \mathbb{N}.$$

Vzemimo sedaj poljuben $l \geq m$ in označimo $n := \lfloor \frac{l-m}{2p} \rfloor$. Velja

$$a_l \geq a_{m+2np} \geq 10^n a_m \geq 10^{\frac{l-m-2p}{2p}} a_m, \tag{1}$$

za kar dokažimo vsak neenačaj posebej.

Za dokaz prve neenakosti si poglejmo indekse obeh členov.

$$\begin{aligned} m + 2np &= m + 2\left\lfloor \frac{l-m}{2p} \right\rfloor p \\ &\leq m + 2\left(\frac{l-m}{2p}\right)p \\ &= m + l - m = l \end{aligned}$$

Ker je $\{a_k\}$ strogo naraščajoče, sledi $a_{m+2np} \leq a_l$. Druga neenakost sledi po prejšnji ugotovitvi, da je $a_{k+2np} \geq 10^n a_k$. Za tretjo neenakost pa podrobneje poglejmo eksponenta števila 10. Velja

$$n = \left\lfloor \frac{l-m}{2p} \right\rfloor > \frac{l-m}{2p} - 1,$$

saj je po pravilih za računanje s celim delom realnega števila $x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Definirajmo $C' := 10^{-\frac{m+2p}{2p}}$ in $x := 10^{\frac{1}{2p}}$, za kar velja

$$C'x^l = 10^{-\frac{m+2p}{2p}} \cdot 10^{\frac{l}{2p}} = 10^{\frac{l-m-2p}{2p}} \leq 10^{\frac{l-m-2p}{2p}} a_m, \tag{2}$$

kjer smo upoštevali, da je $\{a_k\}$ zaporedje naravnih števil in je zato $a_m \geq 1$.

Če sedaj združimo neenačbi (1) in (2), dobimo $a_l \geq C'x^l$ za vsak $l \geq m$. Po potrebi zmanjšamo C' na $C > 0$, da bo neenakost veljala za vse $k \geq 1$.

■

LITERATURA

[1] L. Euler, *Variae observationes circa series infinitas*, Commen. Academ. Scient. Petropolitanae **9** (1737), 160-188.

[2] G. H. Hardy in E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, 5. izdaja, Clarendon Press, Oxford, 1970.

[3] N. Hegyvari, *On some irrational decimal fractions*, Amer. Math. Monthly **100(8)** (Oct., 1993), 779-780.

[4] P. Martinez, *Some new irrational decimal fractions*, Amer. Math. Monthly **108(3)** (Mar., 2001), 250-253.

[5] A. McD. Mercer, *A note on some irrational decimal fractions*, Amer. Math. Monthly **101(6)** (Jun.-Jul., 1994), 567-568.

[6] J. Vogrinc, *Dirichletov izrek in karakterizacija praštevil*, magistrsko delo, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani, 2013.

[7] *Euclid's theorem (mathematics)*, v: Wikipedia, The Free Encyclopedia, [ogled 8. 7. 2022], dostopno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Euclid%27s_theorem`.