O nekaterih iracionalnih desetiških ulomkih

Gaja Jamnik

Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

2. april 2021

Uvod

Definicija

Desetiški ulomek je ulomek, katerega imenovalec je potenca števila 10.

$$\frac{73}{1000}$$

Za poenostavitev uporabljamo zapis z decimalno vejico:

$$0{,}073$$

Uvod

Definicija

Desetiški ulomek je ulomek, katerega imenovalec je potenca števila 10.

$$\frac{73}{1000}$$

Za poenostavitev uporabljamo zapis z decimalno vejico:

$$0{,}073$$

Kakšna je razlika v decimalnem zapisu racionalnega in iracionalnega števila?

Uvod

Definicija

Desetiški ulomek je ulomek, katerega imenovalec je potenca števila 10.

$$\frac{73}{1000}$$

Za poenostavitev uporabljamo zapis z decimalno vejico:

$$0{,}073$$

Kakšna je razlika v decimalnem zapisu racionalnega in iracionalnega števila?

- racionalna števila: $5{,}6$; $0{,}\overline{26}$
- iracionalna števila: $\pi = 3{,}1415926535\ldots$

Uvod

Definicija

Naj bo x realno število, $0 < x < 1$, podano z decimalnim zapisom:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i 10^{-i} = \\ = 0{,}c_1 c_2 c_3 \ldots,$$

kjer so $0 \leq c_i \leq 9$ za vse $i = 1, 2, \ldots$.
Z b označimo naravno število sestavljeno iz zaporedja števk $b_1 b_2 b_3 \ldots b_s$, kjer je $s \geq 1$ in $0 \leq b_i \leq 9$ za vse $i = 1, \ldots, s$.
Pravimo, da število x vsebuje blok števil $(b) = (b_1 b_2 b_3 \ldots b_s)$, če obstaja $j \geq 0$, da je $c_{i+j} = b_i$ za vse $i = 1, 2, \ldots s$.

Uvod

Definicija

Naj bo x realno število, $0 < x < 1$, podano z decimalnim zapisom:

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i 10^{-i} = \\ = 0{,}c_1 c_2 c_3 \ldots ,$$

kjer so $0 \leq c_i \leq 9$ za vse $i = 1, 2, \ldots$.
Z b označimo naravno število sestavljeno iz zaporedja števk $b_1 b_2 b_3 \ldots b_s$, kjer je $s \geq 1$ in $0 \leq b_i \leq 9$ za vse $i = 1, \ldots, s$.
Pravimo, da število x vsebuje blok števil $(b) = (b_1 b_2 b_3 \ldots b_s)$, če obstaja $j \geq 0$, da je $c_{i+j} = b_i$ za vse $i = 1, 2, \ldots s$.

Primer

0,5934 *vsebuje blok* (593), *ne vsebuje pa* (594) *ali* (43).

O številu 0,23571113 . . .

Poljubno decimalno število lahko razumemo kot zaporedje blokov celih števil.

O številu $0{,}23571113\ldots$

Poljubno decimalno število lahko razumemo kot zaporedje blokov celih števil.

$$0{,}235711131719\ldots$$

O številu 0,23571113 . . .

Poljubno decimalno število lahko razumemo kot zaporedje blokov celih števil.

$$0{,}235711131719\ldots$$

$$0,(p_1)(p_2)(p_3)(p_4)\ldots$$

$\{p_i\}$ predstavlja zaporedje praštevil.

O številu 0,23571113 . . .

Poljubno decimalno število lahko razumemo kot zaporedje blokov celih števil.

$$0{,}235711131719\ldots$$

$$0{,}(p_1)(p_2)(p_3)(p_4)\ldots$$

$\{p_i\}$ predstavlja zaporedje praštevil.

Ali je to število iracionalno?

O številu 0,23571113 . . .

Trditev

Število 0,23571113 . . . *je iracionalno.*

O številu 0,23571113 . . .

Trditev

Število 0,23571113 . . . *je iracionalno.*

Izrek (Dirichletov izrek)

V vsakem zaporedju $\{an + b\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ *naravnih števil, kjer sta* a *in* b *tuji si naravni števili, je neskončno praštevil.*

Trditev

Število 0,23571113 . . . *je iracionalno.*

Izrek (Dirichletov izrek)

V vsakem zaporedju $\{an + b\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *naravnih števil, kjer sta a in b tuji si naravni števili, je neskončno praštevil.*

Dokaz: Naj bo $s \geq 0$ poljubno celo število
Po Dirichletovem izreku $\{10^{s+1}k + 1\}_{k\in\mathbb{N}}$, vsebuje neskončno praštevil.

Trditev

Število 0,23571113 . . . *je iracionalno.*

Izrek (Dirichletov izrek)

V vsakem zaporedju $\{an + b\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *naravnih števil, kjer sta a in b tuji si naravni števili, je neskončno praštevil.*

Dokaz: Naj bo $s \geq 0$ poljubno celo število
Po Dirichletovem izreku $\{10^{s+1}k + 1\}_{k\in\mathbb{N}}$, vsebuje neskončno praštevil. Obstajajo praštevila oblike:

$$(k)\underbrace{00\ldots}_{s}1$$

O številu 0,23571113 . . .

Trditev

Število 0,23571113 . . . *je iracionalno.*

Izrek (Dirichletov izrek)

V vsakem zaporedju $\{an+b\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *naravnih števil, kjer sta a in b tuji si naravni števili, je neskončno praštevil.*

Dokaz: Naj bo $s \geq 0$ poljubno celo število
Po Dirichletovem izreku $\{10^{s+1}k+1\}_{k\in\mathbb{N}}$, vsebuje neskončno praštevil. Obstajajo praštevila oblike:

$$(k)\underbrace{00\ldots}_{s}1$$

Taka števila obstajajo za vsak $s \geq 0$.
0,2357 . . . vsebuje vse bloke takšne oblike, zato ne bo periodično.
$\square$

Decimalna števila z naraščajočimi bloki

Naj bo $1 \leq a_1 < a_2 < \ldots$ strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil. Označimo:

$$Dec\{a_k\} = 0{,}(a_1)(a_2)(a_3)\ldots \quad ; k \in \mathbb{N},\ a_k \in \mathbb{N}$$

Naj bo $1 \leq a_1 < a_2 < \dots$ strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil. Označimo:

$$Dec\{a_k\} = 0{,}(a_1)(a_2)(a_3)\dots \quad ; k \in \mathbb{N},\ a_k \in \mathbb{N}$$

Izrek

Če za strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ velja

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \infty,$$

potem je $Dec\{a_k\}$ iracionalno.

Decimalna števila z naraščajočimi bloki

Ali število 0,23571113 . . . zadošča pogoju izreka?

Decimalna števila z naraščajočimi bloki

Ali število 0,23571113 . . . zadošča pogoju izreka?

$$\sum_{p \text{ praštevilo}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots \stackrel{?}{=} \infty$$

Ali število 0,23571113... zadošča pogoju izreka?

$$\sum_{p \text{ praštevilo}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots \stackrel{?}{=} \infty$$

Divergenco vrste $\sum_{p \text{ praštevilo}} \frac{1}{p}$ je leta 1737 dokazal Leonhard Euler.

Decimalna števila z naraščajočimi bloki

Lema

Naj bo $(b) = (b_1 b_2 b_3 \dots b_s)$ *blok števil. Z* $X = X(b_1 b_2 b_3 \dots b_s)$ *označimo zaporedje vseh naravnih števil, ki ne vsebujejo bloka števil (b). Potem* $\sum_{x \in X}^{\infty} \frac{1}{x}$ *konvergira.*

Dokaz leme:

Dokaz izreka:

$\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil

dokazujemo: $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{a_i}=\infty \Rightarrow Dec\{a_k\}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

Izrek odpove za $Dec\{k^2\}$, saj $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergira.

Izrek odpove za $Dec\{k^2\}$, saj $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergira.

Izrek

Naj bo $Dec\{a_k\} \in \mathbb{Q}$. Potem obstaja $x \in \mathbb{R},\ x > 1$ in pozitivna konstanta C, da velja $a_k \geq Cx^k$ za vsak $k \geq 1$.

Izrek odpove za $Dec\{k^2\}$, saj $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergira.

Izrek

Naj bo $Dec\{a_k\} \in \mathbb{Q}$. Potem obstaja $x \in \mathbb{R},\ x > 1$ in pozitivna konstanta C, da velja $a_k \geq Cx^k$ za vsak $k \geq 1$.

Posledica

Predpostavimo, da velja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{a_k} = \infty$$

za vsak $y > 1$. Potem je decimalno število $Dec\{a_k\}$ iracionalno.

Posledica je močnejša kot izrek 2:

- Pogoj iz izreka 2 ($\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \infty$) očitno implicira pogoj iz zgornje posledice 1 ($\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{a_k} = \infty$, za vsak $y > 1$).

Posledica je močnejša kot izrek 2:

- Pogoj iz izreka 2 ($\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \infty$) očitno implicira pogoj iz zgornje posledice 1 ($\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{a_k} = \infty$, za vsak $y > 1$).
- Izreka 2 ne moremo uporabiti za zaporedja $\{a_k\}$, ki naraščajo kot $e^{\sqrt{k}}$, saj vrsta $\sum_1^{\infty} \frac{1}{a_k}$ konvergira.

Posledica je močnejša kot izrek 2:

- Pogoj iz izreka 2 ($\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \infty$) očitno implicira pogoj iz zgornje posledice 1 ($\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{a_k} = \infty$, za vsak $y > 1$).
- Izreka 2 ne moremo uporabiti za zaporedja $\{a_k\}$, ki naraščajo kot $e^{\sqrt{k}}$, saj vrsta $\sum_1^{\infty} \frac{1}{a_k}$ konvergira.
- Pogoj iz posledice 1 je izpoljen za $Dec\{a_k\}$, kjer $\{a_k\}$ naraščajo kot $e^{\sqrt{k}}$.

Zgled

S pomočjo posledice lahko preverimo ali je $Dec\{k^2\} = 0{,}1491625\ldots$ *iracionalno.*

Zgled

S pomočjo posledice lahko preverimo ali je $Dec\{k^2\} = 0{,}1491625\ldots$ *iracionalno.*
Preveriti moramo ali je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{a_k} = \infty; \ \forall y > 1$$

Dokaz posledice:

dokazujemo: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{a_k} = \infty \Rightarrow Dec\{a_k\} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Vprašanja