

O nekaterih iracionalnih desetiških ulomkih

Gaja Jamnik

Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

2. april 2021

Definicija

Desetiški ulomek je ulomek, katerega imenovalec je potenca števila 10.

$$\frac{73}{1000}$$

Za poenostavitev uporabljamo zapis z decimalno vejico (*decimalni zapis*):

$$0,073$$

Definicija

Desetiški ulomek je ulomek, katerega imenovalec je potenca števila 10.

$$\frac{73}{1000}$$

Za poenostavitev uporabljamo zapis z decimalno vejico (*decimalni zapis*):

$$0,073$$

Kakšna je razlika v decimalnem zapisu racionalnega in iracionalnega števila?

Definicija

Desetiški ulomek je ulomek, katerega imenovalec je potenca števila 10.

$$\frac{73}{1000}$$

Za poenostavitev uporabljamo zapis z decimalno vejico (*decimalni zapis*):

$$0,073$$

Kakšna je razlika v decimalnem zapisu racionalnega in iracionalnega števila?

- racionalna števila: $5,6$; $0,\overline{26}$
- iracionalna števila: $\pi = 3,1415926535 \dots$

Definicija

Naj bo x realno število, $0 < x < 1$, podano z decimalnim zapisom:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{\infty} c_i 10^{-i} = \\ &= 0, c_1 c_2 c_3 \dots, \end{aligned}$$

kjer so $0 \leq c_i \leq 9$ za vse $i = 1, 2, \dots$

Z b označimo naravno število sestavljeno iz zaporedja števk $b_1 b_2 b_3 \dots b_s$, kjer je $s \geq 1$ in $0 \leq b_i \leq 9$ za vse $i = 1, \dots, s$.

Pravimo, da število x **vsebuje blok števk** $(b) = (b_1 b_2 b_3 \dots b_s)$, če obstaja $j \geq 0$, da je $c_{i+j} = b_i$ za vse $i = 1, 2, \dots, s$.

Definicija

Naj bo x realno število, $0 < x < 1$, podano z decimalnim zapisom:

$$\begin{aligned}x &= \sum_{i=1}^{\infty} c_i 10^{-i} = \\&= 0, c_1 c_2 c_3 \dots,\end{aligned}$$

kjer so $0 \leq c_i \leq 9$ za vse $i = 1, 2, \dots$

Z b označimo naravno število sestavljeno iz zaporedja števk $b_1 b_2 b_3 \dots b_s$, kjer je $s \geq 1$ in $0 \leq b_i \leq 9$ za vse $i = 1, \dots, s$.

Pravimo, da število x **vsebuje blok števk** $(b) = (b_1 b_2 b_3 \dots b_s)$, če obstaja $j \geq 0$, da je $c_{i+j} = b_i$ za vse $i = 1, 2, \dots, s$.

Primer

0,5934 vsebuje blok (593), ne vsebuje pa (594) ali (43).

O številu $0,23571113\dots$

Poljubno decimalno število lahko razumemo kot zaporedje blokov naravnih števil.

O številu $0,23571113\dots$

Poljubno decimalno število lahko razumemo kot zaporedje blokov naravnih števil.

$0,235711131719\dots$

Poljubno decimalno število lahko razumemo kot zaporedje blokov naravnih števil.

$$0,235711131719\dots$$

$$0,(p_1)(p_2)(p_3)(p_4)\dots$$

$\{p_i\}$ predstavlja zaporedje praštevil.

O številu $0,23571113\dots$

Poljubno decimalno število lahko razumemo kot zaporedje blokov naravnih števil.

$$0,235711131719\dots$$

$$0,(p_1)(p_2)(p_3)(p_4)\dots$$

$\{p_i\}$ predstavlja zaporedje praštevil.

Ali je to število iracionalno?

O številu $0,23571113\dots$

Trditev

Število $0,23571113\dots$ je iracionalno.

O številu $0,23571113\dots$

Trditev

Število $0,23571113\dots$ je iracionalno.

Izrek (Dirichletov izrek)

V vsakem zaporedju $\{an + b\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ naravnih števil, kjer sta a in b tuji si naravni števili, je neskončno praštevil.

O številu $0,23571113\dots$

Trditev

Število $0,23571113\dots$ je iracionalno.

Izrek (Dirichletov izrek)

V vsakem zaporedju $\{an + b\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ naravnih števil, kjer sta a in b tuji si naravni števili, je neskončno praštevil.

Dokaz: Naj bo $s \geq 0$ poljubno celo število

Po Dirichletovem izreku $\{10^{s+1}k + 1\}_{k \in \mathbb{N}}$ vsebuje neskončno praštevil.

O številu $0,23571113\dots$

Trditev

Število $0,23571113\dots$ je iracionalno.

Izrek (Dirichletov izrek)

V vsakem zaporedju $\{an + b\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ naravnih števil, kjer sta a in b tuji si naravni števili, je neskončno praštevil.

Dokaz: Naj bo $s \geq 0$ poljubno celo število

Po Dirichletovem izreku $\{10^{s+1}k + 1\}_{k \in \mathbb{N}}$ vsebuje neskončno praštevil. Obstajajo praštevila oblike:

$$(k) \underbrace{00\dots 0}_s 1$$

O številu $0,23571113\dots$

Trditev

Število $0,23571113\dots$ je iracionalno.

Izrek (Dirichletov izrek)

V vsakem zaporedju $\{an + b\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ naravnih števil, kjer sta a in b tuji si naravni števili, je neskončno praštevil.

Dokaz: Naj bo $s \geq 0$ poljubno celo število

Po Dirichletovem izreku $\{10^{s+1}k + 1\}_{k \in \mathbb{N}}$ vsebuje neskončno praštevil. Obstajajo praštevila oblike:

$$(k) \underbrace{00\dots 1}_s$$

Taka števila obstajajo za vsak $s \geq 0$.

$0,2357\dots$ vsebuje vse bloke takšne oblike, zato ne bo periodično.



Decimalna števila z naraščajočimi bloki

Naj bo $1 \leq a_1 < a_2 < \dots$ strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil. Označimo:

$$Dec\{a_k\} = 0,(a_1)(a_2)(a_3)\dots \quad ; k \in \mathbb{N}, a_k \in \mathbb{N}$$

Decimalna števila z naraščajočimi bloki

Naj bo $1 \leq a_1 < a_2 < \dots$ strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil. Označimo:

$$\text{Dec}\{a_k\} = 0,(a_1)(a_2)(a_3)\dots \quad ; k \in \mathbb{N}, a_k \in \mathbb{N}$$

Izrek

Če za strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ velja

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \infty,$$

potem je $\text{Dec}\{a_k\}$ iracionalno.

Decimalna števila z naraščajočimi bloki

Ali število $0,23571113\dots$ zadošča pogoju izreka?

Decimalna števila z naraščajočimi bloki

Ali število $0,23571113\dots$ zadošča pogoju izreka?

$$\sum_{p \text{ praštevilo}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots \stackrel{?}{=} \infty$$

Decimalna števila z naraščajočimi bloki

Ali število $0,23571113\dots$ zadošča pogoju izreka?

$$\sum_{p \text{ praštevilo}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots \stackrel{?}{=} \infty$$

Divergenco vrste $\sum_{p \text{ praštevilo}} \frac{1}{p}$ je leta 1737 dokazal Leonhard Euler.

Decimalna števila z naraščajočimi bloki

Lema

Naj bo $(b) = (b_1 b_2 b_3 \dots b_s)$ blok števil. Z $X = X(b_1 b_2 b_3 \dots b_s)$ označimo zaporedje vseh naravnih števil, ki ne vsebujejo bloka števil (b) . Potem $\sum_{x \in X}^{\infty} \frac{1}{x}$ konvergira.

Dokaz leme:

Dokaz izreka:

$\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil

dokazujemo: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \infty \Rightarrow Dec\{a_i\} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Izrek odpove za $Dec\{k^2\}$, saj $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergira.

Izrek odpove za $\text{Dec}\{k^2\}$, saj $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergira.

Izrek

Naj bo $\text{Dec}\{a_k\} \in \mathbb{Q}$. Potem obstaja $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$ in pozitivna konstanta C , da velja $a_k \geq Cx^k$ za vsak $k \geq 1$.

Izrek odpove za $\text{Dec}\{k^2\}$, saj $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergira.

Izrek

Naj bo $\text{Dec}\{a_k\} \in \mathbb{Q}$. Potem obstaja $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$ in pozitivna konstanta C , da velja $a_k \geq Cx^k$ za vsak $k \geq 1$.

Posledica

Predpostavimo, da velja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{a_k} = \infty$$

za vsak $y > 1$. Potem je decimalno število $\text{Dec}\{a_k\}$ iracionalno.

Posledica je močnejša kot izrek 2:

- Pogoj iz izreka 2 ($\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \infty$) očitno implicira pogoj iz zgornje posledice 1 ($\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{a_k} = \infty$, za vsak $y > 1$).

Posledica je močnejša kot izrek 2:

- Pogoji iz izreka 2 ($\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \infty$) očitno implicira pogoj iz zgornje posledice 1 ($\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{a_k} = \infty$, za vsak $y > 1$).
- Izreka 2 ne moremo uporabiti za zaporedja $\{a_k\}$, ki naraščajo kot $e^{\sqrt{k}}$, saj vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ konvergira.

Posledica je močnejša kot izrek 2:

- Pogoj iz izreka 2 ($\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \infty$) očitno implicira pogoj iz zgornje posledice 1 ($\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{a_k} = \infty$, za vsak $y > 1$).
- Izreka 2 ne moremo uporabiti za zaporedja $\{a_k\}$, ki naraščajo kot $e^{\sqrt{k}}$, saj vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ konvergira.
- Pogoj iz posledice 1 je izpoljen za $Dec\{a_k\}$, kjer $\{a_k\}$ naraščajo kot $e^{\sqrt{k}}$.

Zgled

S pomočjo posledice lahko preverimo ali je
 $\text{Dec}\{k^2\} = 0,1491625\dots$ *iracionalno.*

Zgled

S pomočjo posledice lahko preverimo ali je

$\text{Dec}\{k^2\} = 0,1491625 \dots$ iracionalno.

Preveriti moramo ali je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{k^2} = \infty; \quad \forall y > 1$$

Dokaz posledice:

dokazujemo: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{a_k} = \infty; \forall y > 1 \Rightarrow Dec\{a_k\} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

