

# O nekaterih iracionalnih desetiških ulomkih

Gaja Jamnik

Fakulteta za matematiko in fiziko  
Oddelek za matematiko

2. april 2021

## Definicija

*Desetiški ulomek* je ulomek, katerega imenovalec je potenca števila 10.

$$\frac{73}{1000}$$

*Za poenostavitev uporabljamo zapis z decimalno vejico:*

$$0,073$$

## Definicija

*Desetiški ulomek* je ulomek, katerega imenovalec je potenca števila 10.

$$\frac{73}{1000}$$

*Za poenostavitev uporabljamo zapis z decimalno vejico:*

$$0,073$$

Kakšna je razlika v decimalnem zapisu racionalnega in iracionalnega števila?

## Definicija

*Desetiški ulomek* je ulomek, katerega imenovalec je potenca števila 10.

$$\frac{73}{1000}$$

*Za poenostavitev uporabljamo zapis z decimalno vejico:*

$$0,073$$

Kakšna je razlika v decimalnem zapisu racionalnega in iracionalnega števila?

- racionalna števila:  $5,6$ ;  $0,\overline{26}$
- iracionalna števila:  $\pi = 3,1415926535 \dots$

## Definicija

Naj bo  $x$  realno število,  $0 < x < 1$ , podano z decimalnim zapisom:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^n c_i 10^{-i} = \\ &= 0, c_0 c_1 c_2 \cdots c_n, \end{aligned}$$

kjer so  $0 \leq c_i \leq 9 \ \forall i = 1, \dots, s$ .

$Z$  b označimo celo število sestavljeno iz zaporedja števk

$b_1 b_2 b_3 \dots b_s$ , kjer je  $s \geq 1$  in  $0 \leq b_i \leq 9 \ \forall i = 1, \dots, s$ .

Pravimo, da število  $x$  **vsebuje blok števil**  $(b) = (b_1 b_2 b_3 \dots)$ , če obstaja  $j \geq 0$ , da je  $c_{i+j} = b_i$  za vse  $i = 1, 2, \dots, s$ .

## Definicija

Naj bo  $x$  realno število,  $0 < x < 1$ , podano z decimalnim zapisom:

$$\begin{aligned}x &= \sum_{i=1}^n c_i 10^{-i} = \\&= 0, c_0 c_1 c_2 \cdots c_n,\end{aligned}$$

kjer so  $0 \leq c_i \leq 9 \ \forall i = 1, \dots, s$ .

$Z$  b označimo celo število sestavljeno iz zaporedja števk  $b_1 b_2 b_3 \dots b_s$ , kjer je  $s \geq 1$  in  $0 \leq b_i \leq 9 \ \forall i = 1, \dots, s$ .

Pravimo, da število  $x$  **vsebuje blok števil**  $(b) = (b_1 b_2 b_3 \dots)$ , če obstaja  $j \geq 0$ , da je  $c_{i+j} = b_i$  za vse  $i = 1, 2, \dots, s$ .

## Primer

0,5934 vsebuje blok (593), ne vsebuje pa (594) ali (43).

Poljubno decimalno število lahko razumemo kot zaporedje blokov celih števil.

## O številu $0,23571113\dots$

Poljubno decimalno število lahko razumemo kot zaporedje blokov celih števil.

$0,235711131719\dots$



Poljubno decimalno število lahko razumemo kot zaporedje blokov celih števil.

$$0,235711131719\dots$$

$$0,(p_1)(p_2)(p_3)(p_4)\dots$$

$\{p_i\}$  predstavlja zaporedje praštevil.

## O številu $0,23571113\dots$

Poljubno decimalno število lahko razumemo kot zaporedje blokov celih števil.

$$0,235711131719\dots$$

$$0,(p_1)(p_2)(p_3)(p_4)\dots$$

$\{p_i\}$  predstavlja zaporedje praštevil.

Ali je to število iracionalno?

# O številu $0,23571113\dots$

Trditev

*Število  $0,23571113\dots$  je iracionalno.*

# O številu $0,23571113\dots$

## Trditev

*Število  $0,23571113\dots$  je iracionalno.*

## Izrek (Dirichletov izrek)

*V vsakem zaporedju  $\{an + b\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  naravnih števil, kjer sta  $a$  in  $b$  tuji si naravni števili, je neskončno praštevil.*

# O številu $0,23571113\dots$

## Trditev

*Število  $0,23571113\dots$  je iracionalno.*

## Izrek (Dirichletov izrek)

*V vsakem zaporedju  $\{an + b\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  naravnih števil, kjer sta  $a$  in  $b$  tuji si naravni števili, je neskončno praštevil.*

*Dokaz:* Naj bo  $s \geq$  poljubno celo število

Po Dirichletovem izreku  $\{10^{s+1}k + 1\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  vsebuje neskončno praštevil.

# O številu $0,23571113\dots$

## Trditev

*Število  $0,23571113\dots$  je iracionalno.*

## Izrek (Dirichletov izrek)

*V vsakem zaporedju  $\{an + b\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  naravnih števil, kjer sta  $a$  in  $b$  tuji si naravni števili, je neskončno praštevil.*

*Dokaz:* Naj bo  $s \geq$  poljubno celo število

Po Dirichletovem izreku  $\{10^{s+1}k + 1\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  vsebuje neskončno praštevil. Obstajajo praštevila oblike:

$$(k) \underbrace{00\dots}_s 1$$

# O številu $0,23571113\dots$

## Trditev

*Število  $0,23571113\dots$  je iracionalno.*

## Izrek (Dirichletov izrek)

*V vsakem zaporedju  $\{an + b\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  naravnih števil, kjer sta  $a$  in  $b$  tuji si naravni števili, je neskončno praštevil.*

*Dokaz:* Naj bo  $s \geq$  poljubno celo število

Po Dirichletovem izreku  $\{10^{s+1}k + 1\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  vsebuje neskončno praštevil. Obstajajo praštevila oblike:

$$(k) \underbrace{00\dots}_s 1$$

Taka števila obstajajo za  $\forall s \geq 0$ .

$0,2357\dots$  je vsebuje vse bloke takšne oblike, zato ne bo periodično.

# Decimalna števila z naraščajočimi bloki

Naj bo  $1 \leq a_1 < a_2 < \dots$  strogo naraščajoče zaporedje celih števil.  
Označimo:

$$Dec\{a_k\} = 0,(a_1)(a_2)(a_3)\dots ; a_k \in \mathbb{Z} \ k \in \mathbb{N}$$



# Decimalna števila z naraščajočimi bloki

Naj bo  $1 \leq a_1 < a_2 < \dots$  strogo naraščajoče zaporedje celih števil.  
Označimo:

$$\text{Dec}\{a_k\} = 0,(a_1)(a_2)(a_3)\dots \quad ; a_k \in \mathbb{Z} \quad k \in \mathbb{N}$$

## Izrek

*Če za strogo naraščajoče zaporedje celih števil  $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  velja*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \infty,$$

*potem je  $\text{Dec}\{a_k\}$  iracionalno.*

# Decimalna števila z naraščajočimi bloki

Ali število  $0,23571113\dots$  zadošča pogoju izreka?

# Decimalna števila z naraščajočimi bloki

Ali število  $0,23571113\dots$  zadošča pogoju izreka?

$$\sum_{p \text{ praštevilo}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots \stackrel{?}{=} \infty$$

# Decimalna števila z naraščajočimi bloki

Ali število  $0,23571113\dots$  zadošča pogoju izreka?

$$\sum_{p \text{ praštevilo}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots \stackrel{?}{=} \infty$$

Divergenco vrste  $\sum_{p \text{ praštevilo}} \frac{1}{p}$  je leta 1737 dokazal Leonhard Euler.

# Decimalna števila z naraščajočimi bloki

## Lema

*Naj bo  $(b) = (b_1 b_2 b_3 \dots b_s)$  blok števil. Z  $X = X(b_1 b_2 b_3 \dots b_s)$  označimo zaporedje naravnih števil, ki ne vsebujejo bloka števil  $(b)$ .*

*Potem*

$$\sum_{x \in X}^{\infty} \frac{1}{x}$$

*konvergira.*

*Dokaz leme:*

*Dokaz izreka:*

Izrek odpove za  $Dec\{k^2\}$ , saj  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  konvergira.

Izrek odpove za  $Dec\{k^2\}$ , saj  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  konvergira.

### Izrek

*Naj bo  $Dec\{a_k\} \in \mathbb{Q}$ . Potem obstaja  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x > 1$  in pozitivna konstanta  $C$ , da velja  $a_k \geq Cx^k$  za vsak  $k \geq 1$ .*



Izrek odpove za  $\text{Dec}\{k^2\}$ , saj  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  konvergira.

### Izrek

*Naj bo  $\text{Dec}\{a_k\} \in \mathbb{Q}$ . Potem obstaja  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x > 1$  in pozitivna konstanta  $C$ , da velja  $a_k \geq Cx^k$  za vsak  $k \geq 1$ .*

### Posledica

*Predpostavimo, da velja*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{a_k} = \infty$$

*za vsak  $y > 1$ . Potem je decimalno število  $\text{Dec}\{a_k\}$  iracionalno.*

Posledica je močnejša kot izrek 2:

- Pogoj iz izreka 2 ( $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \infty$ ) očitno implicira pogoj iz zgornje posledice 1.

Posledica je močnejša kot izrek 2:

- Pogoji iz izreka 2 ( $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \infty$ ) očitno implicira pogoj iz zgornje posledice 1. ( $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{a_k} = \infty$ ,  $\forall y > 1$ ).
- Izreka 2 ne moremo uporabiti za zaporedja  $\{a_k\}$ , ki naraščajo kot  $e^{\sqrt{k}}$ , saj vrsta  $\sum_1^{\infty} \frac{1}{a_k}$  konvergira.

Posledica je močnejša kot izrek 2:

- Pogoj iz izreka 2 ( $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \infty$ ) očitno implicira pogoj iz zgornje posledice 1. ( $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{a_k} = \infty$ ,  $\forall y > 1$ ).
- Izreka 2 ne moremo uporabiti za zaporedja  $\{a_k\}$ , ki naraščajo kot  $e^{\sqrt{k}}$ , saj vrsta  $\sum_1^{\infty} \frac{1}{a_k}$  konvergira.
- Pogoj iz posledice 1 je izpoljen za  $Dec\{a_k\}$ , kjer  $\{a_k\}$  naraščajo kot  $e^{\sqrt{k}}$ .

## Zgled

*S pomočjo posledice lahko preverimo ali je*  
 $\text{Dec}\{k^2\} = 0,1491625 \dots$  *iracionalno.*

## Zgled

*S pomočjo posledice lahko preverimo ali je*

*$\text{Dec}\{k^2\} = 0,1491625 \dots$  iracionalno.*

*Preveriti moramo ali je*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{a_k} = \infty; \quad \forall y > 1$$

*Dokaz posledice:*

