O nekaterih iracionalnih desetiških ulomkih
Seminar

Gaja Jamnik
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

2. april 2021

1 Uvod

V tem delu obravnavamo realna števila zapisana v obliki decimalnega zapisa, zato se za začetek spomnimo definicije desetiških ulomkov ter decimalnega zapisa.

Definicija 1 Desetiški ulomek *je ulomek, katerega imenovalec je potenca števila* 10*.*

Zapis desetiškega ulomka navadno nadomestimo z zapisom z decimalno vejico, ki mu pravimo *decimalni zapis.* Če ponazorimo s primerom, namesto $\frac{23}{1000}$ pišemo 0,023.

Pri obravnavi številskih množic se že v srednji šoli spoznamo z razliko v decimalnem zapisu racionalnih in iracionalnih števil. Racionalna števila lahko zapišemo s končnim ali neskončnim periodičnim decimalnim zapisom, medtem ko je zapis iracionalnega števila možen le z neskončno neperiodičnimi decimalkami.

Včasih pa iz zapisa decimalnega števila z neskončno števkami ne moremo razbrati, ali je periodično od nekega člena dalje. Zanimalo nas bo, kaj nam lahko v takem primeru decimalni zapis realnega števila x pove o njegovi racionalnosti oz. iracionalnosti. Zaradi poenostavitve privzemimo, da velja $0 < x < 1$.

V ta namen podajmo naslednjo definicijo.

Definicija 2 *Naj bo x realno število, $0 < x < 1$, podano z decimalnim zapisom:*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i 10^{-i} = \\ = 0{,}c_1c_2c_3\ldots,$$

kjer so $0 \leq c_i \leq 9$ za vse $i = 1, 2, \ldots$.

Z b označimo naravno število sestavljeno iz zaporedja števk $b_1b_2b_3\ldots b_s$, kjer je $s \geq 1$ in $0 \leq b_i \leq 9$ za vse $i = 1, \ldots, s$. Pravimo, da število x vsebuje blok števk $(b) = (b_1b_2b_3\ldots b_s)$, *če obstaja $j \geq 0$, da je $c_{i+j} = b_i$ za vse $i = 1, 2, \ldots s$.*

Zgled 1 *Število* 0,135627 *vsebuje blok* (356)*, vendar ne vsebuje bloka* (352) *ali* (72).

Poljubno decimalno število lahko razumemo kot zaporedje blokov celih števil. Tako je na primer število $0{,}11223344\cdots$ zaporedje blokov (nn), kjer je $n \in \mathbb{N}$.

2 O številu 0,23571113...

Za začetek obravnavajmo število 0,23571113..., ki je zgrajeno iz zaporedja blokov praštevil. Pri algebri smo letos dokazali Evklidov izrek, ki pravi, da je praštevil neskončno mnogo, zato njegov decimalni zapis ne more biti končen. Iz zapisa pa ne moremo razbrati, ali je po nekem členu decimalno število periodično, zato ni očitno, ali je število racionalno. Trdimo naslednje:

Trditev 1 *Število* 0,23571113... *je iracionalno.*

Za dokaz te trditve bomo potrebovali različico Dirichletovega izreka [6], ki pravi naslednje:

Izrek 1 (Dirichletov izrek) *V vsakem zaporedju $\{an + b\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ naravnih števil, kjer sta a in b tuji si naravni števili, je neskončno praštevil.*

Dokaz trditve: Naj bo $s \geq 0$ celo število. Po izreku 1 vsako zaporedje $\{10^{s+1}k + 1\}_{k\in\mathbb{N}}$, vsebuje neskončno praštevil. Torej obstajajo praštevila oblike $(k)\underbrace{00\ldots}_{s}1$, kjer števkam števila k sledi s ničel ter ena enica.

Decimalno število 0,23571113... očitno vsebuje vse bloke take oblike za vsak $s \geq 0$. Z večanjem števila s narašča tudi število ničel v posameznem bloku, kar pomeni, da po še tako pozni decimalki zapis ne bo periodičen.

□

3 Decimalna števila z naraščajočimi bloki

V prejšnjem razdelku smo dokazali, da je decimalno število, sestavljeno iz praštevilskih blokov, iracionalno. Kaj pa lahko povemo za decimalno število, sestavljeno iz poljubnih blokov?

Naj bo $1 \leq a_1 < a_2 < \ldots$ strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil. Označimo:

$$Dec\{a_k\} = 0{,}(a_1)(a_2)(a_3)... \;\; ; k \in \mathbb{N},\ a_k \in \mathbb{N}.$$

Zanimajo nas lastnosti zaporedja $\{a_k\}$, ki nam zagotovijo, da bo $Dec\{a_k\}$ iracionalno.

Izrek 2 *Če za strogo naraščajoče zaporedje naravnih števil $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ velja*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \infty,$$

potem je $Dec\{a_k\}$ iracionalno.

Ta izrek je posplošitev trditve 1, ki pravi, da je število $0{,}23571113\ldots$ iracionalno. Za zaporedje praštevil $2, 3, 5, 7, \ldots$ namreč velja

$$\sum_{p \text{ praštevilo}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots = \infty,$$

kar je leta 1737 dokazal Leonhard Euler v [1].

Zgled 2 *Decimalno število $Dec\{7n\} = 0{,}714212835\ldots(7n)\ldots$ je iracionalno, saj vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{7n}$ divergira.*

Za dokaz izreka 2 bomo potrebovali naslednjo lemo.

Lema 1 *Naj bo $(b) = (b_1 b_2 b_3 \ldots b_s)$ blok števil. Z $X = X(b_1 b_2 b_3 \ldots b_s)$ označimo zaporedje vseh naravnih števil, ki ne vsebujejo bloka števil (b). Potem*

$$\sum_{x\in X}^{\infty} \frac{1}{x}$$

konvergira.

Opomba 1 *V lemi, v nasprotju z definicijo 2, obravnavamo vsebovanost blokov v naravnih in ne decimalnih številih. Definicijo zato prilagodimo tako, da le spremenimo potenco števila 10 v vsoti. Celo število x tako zapišemo kot*

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{n} c_i 10^{n-i} = \\ &= c_1 c_2 c_3 \cdots c_n \;. \end{aligned}$$

Dokaz leme 1: Označimo delno vsoto vrste

$$S_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \cdots + \frac{1}{x_n}\ .$$

Vzemimo tak $t \in \mathbb{N}$, da velja $x_{t-1} < 10^s \le x_t$. Število števk bloka $(b) = (b_1 b_2 b_3 \ldots b_s)$ je očitno s, število 10^s pa ima $s+1$ števk, kar pomeni, da imajo vsi x_i za $i \ge t$ več števk kot je dolžina bloka.

Delno vsoto sedaj preoblikujemo v

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_t} + 10^{-s}\left(\frac{1}{\frac{x_{t+1}}{10^s}} + \cdots + \frac{1}{\frac{x_n}{10^s}}\right) \\ &\le \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_t} + 10^{-s}\left(\frac{1}{\lfloor\frac{x_{t+1}}{10^s}\rfloor} + \cdots + \frac{1}{\lfloor\frac{x_n}{10^s}\rfloor}\right), \end{aligned}$$

kjer smo v neenakosti upoštevali, da za poljuben $y > 0$ velja $y \ge \lfloor y \rfloor$.

Ker za vsak $t < i \le n$ velja $10^s \le x_i$, je $\lfloor \frac{x_i}{10^s} \rfloor$ pozitivno celo število. To število lahko interpretiramo kot x_i brez zadnjih s števk. Ker noben $x_i \in X$ ne vsebuje bloka (b), ga očitno ne vsebuje niti njegovih prvih nekaj števk. Od tod sledi, da za vsak x_i, $t < i \le n$, obstaja $x_y \in X$, tako da $x_y = \lfloor \frac{x_i}{10^s} \rfloor$.

Novo nastala števila, pa so si lahko med seboj enaka. Tako bi na primer za $s = 2$ veljalo $\lfloor \frac{12345}{10^2} \rfloor = \lfloor \frac{12387}{10^2} \rfloor = 123$.

Opazimo, da se blok $(b_1 b_2 b_3 \ldots b_s)$ pojavi v vsaj enem od prvih 10^s naravnih števil. Torej lahko poljuben $x_y \in X$ zadošča za največ $10^s - 1$ možnih x_i, kjer $\lfloor \frac{x_i}{10^s} \rfloor = x_y$. Ponovno si poglejmo primer, ko je $s = 2$, ter vzemimo $x_y = 123$. Za število x_i bomo torej lahko vzeli števila oblike $123\square\square$, ki ne bodo za nobeni dve zaporedni števki imela bloka $(b_1 b_2)$. Zato očitno za zadnji dve števki (označeni s kvadratkoma) ne bomo mogli vzeti števk $b_1 b_2$. Od tod bo sledilo da obstaja največ $10^2 - 1$ ustreznih števil x_i.

Po zgornjem premisleku lahko sedaj ocenimo izraz

$$\left(\frac{1}{\lfloor\frac{x_{t+1}}{10^s}\rfloor} + \cdots + \frac{1}{\lfloor\frac{x_n}{10^s}\rfloor}\right) < (10^s - 1) S_n.$$

S pomnožitvijo $(10^s - 1)$ s S_n smo tako zagotovo zajeli vse člene na levi strani neenakosti z upoštevanjem vseh možnih ponovitev v vrednostih $\lfloor \frac{x_i}{10^s} \rfloor$. Če to oceno uporabimo na delni vsoti, dobimo:

$$S_n < \sum_{i=1}^{t} \frac{1}{x_i} + (10^s - 1) 10^{-s} S_n,$$

od koder sledi

$$S_n < 10^s \sum_{i=1}^{t} \frac{1}{x_i}.$$

Desna stran neenačbe je neodvisna od n, zato vrsta konvergira.

$\square$

Dokaz izreka 2: Naj bo $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ strogo naraščajoče zaporedje celih števil za katero velja $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{a_i}=\infty$. Izrek bomo dokazali s protislovjem. Predpostavimo, da je $Dec\{a_i\}=0{,}(a_1)(a_2)\cdots\in\mathbb{Q}$. To decimalno število očitno ni končno, torej je periodično. To pomeni, da obstaja nek blok števil $(b)=(b_1b_2b_3\dots b_s)$, ki se v decimalnem zapisu periodično ponavlja od nekega mesta dalje.

Definirajmo tak blok (c) dolžine $2s$, da velja: če je $(b)=(\underbrace{11\cdots1}_{s})$, naj bo blok $(c)=(\underbrace{22\dots2}_{2s})$, v nasprotnem primeru pa naj bo $(c)=(\underbrace{11\dots1}_{2s})$.

Naj bo $Y=Y(c_1,c_2,\dots,c_{2s})$ zaporedje vseh naravnih števil, ki ne vsebuje bloka (c). Razdelimo vsoto glede na vsebovanost členov a_i v Y:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{a_i}=\sum_{a_i\in Y}\frac{1}{a_i}+\sum_{a_i\notin Y}\frac{1}{a_i}$$

Po predpostavki vrsta na levi strani enačaja divergira in po lemi vrsta $\sum_{a\in Y}\frac{1}{a}$ konvergira. Od tod sledi, da vrsta $\sum_{a\notin Y}\frac{1}{a}$ divergira. To pomeni, da obstaja neskončno a_i v $Dec\{a_i\}=0{,}(a_1)(a_2)\dots$, ki vsebujejo blok $(c_1c_2\dots c_{2s})$. Ta blok je dvakrat daljši kot blok (b) in z drugačnimi števkami, zato se ne more zgoditi, da bi bil (c) vsebovan v (b) ali sestavljal njegove dele. Blok (b) se zato ne ponavlja v neskončnosti in posledično $Dec\{a_i\}$ ne more biti periodično.

$\square$

Dokazan izrek poda kriterij iracionalnosti števila $Dec\{a_k\}$, ki pa odpove za marsikatero zaporedje $\{a_k\}$. Tako na primer kriterij ne pove nič o iracionalnosti števila $Dec\{k^2\}$, saj vrsta $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ konvergira.

Predpostavimo, da zaporedje a_k narašča kot $e^{\sqrt{k}}$. Ker je $\frac{1}{e^{\sqrt{x}}}$ zvezna, pozitivna in padajoča na $[1,\infty)$, lahko konvergenco vrste preverimo z uporabo integralskega kriterija.

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{e^{\sqrt{x}}}dx=2e^{-\sqrt{x}}(-\sqrt{x}-1)\Big|_1^{\infty}=$$
$$=-\frac{4}{e}$$

Zgornji integral konvergira, zato je vrsta $\sum_1^{\infty}\frac{1}{e^{\sqrt{x}}}$ konvergentna in s tem tudi vrsta $\sum_1^{\infty}\frac{1}{a_k}$.

V nadaljevanju bomo pokazali, da je $Dec\{a_k\}$ iracionalno, tudi kadar $\{a_k\}$ narašča kot $e^{\sqrt{k}}$.

Izrek 3 *Naj bo $Dec\{a_k\} \in \mathbb{Q}$. Potem obstaja $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$, in pozitivna konstanta C, da velja $a_k \geq Cx^k$ za vsak $k \geq 1$.*

Izrek pove, da če je $Dec\{a_k\}$ racionalno, potem zaporedje a_k narašča vsaj eksponentno.

Posledica 1 *Predpostavimo, da velja*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{a_k} = \infty$$

za vsak $y > 1$. Potem je decimalno število $Dec\{a_k\}$ iracionalno.

Zgornja posledica je močnejša kot izrek 2. Pogoj iz izreka 2, ki zahteva divergenco vrste $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i}$, očitno implicira pogoj iz zgornje posledice, torej da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{a_k}$ divergira za vsak $y > 1$.

Po drugi strani pa bo iz posledice sledilo, da so $Dec\{a_k\}$ iracionalna tudi za zaporedja $\{a_k\}$, ki naraščajo kot $e^{\sqrt{k}}$, oz. kot e^{k^s} za $0 < s < 1$. Pogoj iz posledice preverimo z uporabo korenskega kriterija za konvergenco vrste:

$$r = \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{\frac{y^k}{e^{\sqrt{k}}}} = \lim_{k \to \infty} \frac{y}{e^{\frac{1}{\sqrt{k}}}} = y.$$

Po predpostavki iz posledice je $y > 1$, zato vrsta divergira. Sledi, da je $Dec\{a_k\}$ iracionalno.

Zgled 3 *S pomočjo posledice 1 lahko sedaj preverimo ali je $Dec\{k^2\}$ iracionalno. Po posledici je število $0{,}149162536\ldots$ iracionalno, če je $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{k^2} = \infty$ za vsak $y > 1$. Uporabimo kvocientni kriterij in preverimo konvergenco vrste.*

$$L = \lim_{k \to \infty} \frac{\frac{y^{k+1}}{(k+1)^2}}{\frac{y^k}{k^2}} = y \lim_{k \to \infty} \Big(\frac{k}{k+1}\Big)^2 = y > 1$$

Vrsta divergira, zato je $Dec\{k^2\} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Dokaz posledice 1: Dokazujemo s protislovjem. Predpostavimo, da je $Dec\{a_k\} \in \mathbb{Q}$. Po izreku 3 obstaja realno število $x > 1$ in konstanta $C > 0$, da velja $a_k \geq Cx^k$ za vsak $k \geq 1$. Ta izraz preoblikujemo in dobimo:

$$\frac{\sqrt{x^k}}{a_k} \leq \frac{1}{C\sqrt{x^k}}.$$

Od tod sledi
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x^k}}{a_k} \leq C^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^k}} < \infty.$$
Desna vsota je ravno geometrijska vrsta, ki konvergira, saj je $x > 1$ in s tem $\sqrt{x} > 1$. To pa je v protislovjem s predpostavko, ki pravi, da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{a_k} = \infty$ za vsak $y > 1$. Torej bo $Dec\{a_k\}$ iracionalno.

$\square$

Dokaz izreka 3: Predpostavimo, da $Dec\{a_k\} = 0{,}(a_1)(a_2)\cdots \in \mathbb{Q}$, torej je periodično od nekega člena dalje. Naj bo $(b_1 b_2 \dots b_p)$, $0 \leq b_i \leq 9$ za vsak $i = 1, \dots 9$, perioda in naj bo (a_m) prvi blok, ki se pojavi v periodičnem delu decimalnega zapisa.

Najprej dokažimo, da ima blok (a_{k+p}) vsaj eno števko več kot blok (a_k) za vsak $k \geq m$. Predpostavimo, da imata (a_{k+p}) in (a_k) oba po N števk. Ker je zaporedje $\{a_k\}$ strogo naraščajoče bodo imeli vsi $a_k, a_{k+1}, \dots a_{k+p}$ po N števk. Število $(a_k)(a_{k+1})\dots(a_{k+p-1})$ ima torej Np števk. Ker pa je perioda enaka p, bo od tod sledilo, da je $a_k = a_{k+p}$, kar ne more biti res, saj je $\{a_k\}$ strogo naraščajoče zaporedje.

Sledi, da ima a_{k+2p} vsaj eno števko več kot a_{k+p}, in zato vsaj dve števki več kot a_k za vsak $k \geq m$. Torej velja, da je $a_{k+2p} \geq 10a_k$. Z indukcijo dokažemo, da je
$$a_{k+2np} \geq 10^n a_k;\ \forall k \geq m,\ n \in \mathbb{N}.$$

Vzemimo sedaj poljuben $l \geq m$ in označimo $n := \lfloor \frac{l-m}{2p} \rfloor$. Velja

$$a_l \geq a_{m+2np} \geq 10^n a_m \geq 10^{\frac{l-m-2p}{2p}} a_m, \tag{1}$$

za kar dokažimo vsak neenačaj posebej.

Za dokaz prve neenakosti si poglejmo indekse obeh členov.

$$\begin{aligned} m + 2np &= m + 2\left\lfloor \frac{l-m}{2p} \right\rfloor p \\ &\leq m + 2\left(\frac{l-m}{2p}\right)p \\ &= m + l - m = l \end{aligned}$$

Ker je $\{a_k\}$ strogo naraščajoče sledi $a_{m+2np} \leq a_l$. Druga neenakost sledi po prejšnji ugotovitvi, da je $a_{k+2np} \geq 10^n a_k$. Za tretjo neenakost pa podrobneje poglejmo eksponenta števila 10. Velja

$$n = \left\lfloor \frac{l-m}{2p} \right\rfloor > \frac{l-m}{2p} - 1,$$

saj je po pravilih za računanje s celim delom realnega števila $x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Definirajmo $C' := 10^{-\frac{m+2p}{2p}}$ in $x := 10^{\frac{1}{2p}}$, za kar velja

$$C'x^l = 10^{-\frac{m+2p}{2p}} \cdot 10^{\frac{l}{2p}} = 10^{\frac{l-m-2p}{2p}} \leq 10^{\frac{l-m-2p}{2p}} a_m, \tag{2}$$

kjer smo upoštevali, da je $\{a_k\}$ zaporedje naravnih števil in je zato $a_m \geq 1$.

Če sedaj združimo neenačbi 1 in 2, dobimo $a_l \geq C'x^l$ za vsak $l \geq m$. Po potrebi zmanjšamo C' na $C > 0$, da bo neenakost veljala za vse $k \geq 1$.

□

Angleško-slovenski slovar strokovnih izrazov

decimal fraction desetiški ulomek

digit števka

Dirichlet's theorem Dirichletov izrek

floor function celi del števila

integral test integralski kriterij

irracional number iracionalno število

prime number praštevilo

ratio test kvocientni kriterij

root test korenski kriterij

racional number racionalno število

sequence zaporedje

series vrsta

Literatura

[1] L. Euler, *Variae observationes circa series infinitas*, Commen. Academ. Scient. Petropolitanae **9** (1737), 160-188.

[2] G. H. Hardy in E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, 5. izdaja, Clarendon Press, Oxford, 1970.

[3] N. Hegyvari, *On some irrational decimal fractions*, Amer. Math. Monthly **100(8)** (Oct., 1993), 779-780.

[4] P. Martinez, *Some new irrational decimal fractions*, Amer. Math. Monthly **108(3)** (Mar., 2001), 250-253.

[5] A. McD. Mercer, *A note on some irrational decimal fractions*, Amer. Math. Monthly **101(6)** (Jun.-Jul., 1994), 567-568.

[6] J. Vogrinc, *Dirichletov izrek in karakterizacija praštevil*, magistrsko delo, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani, 2013.