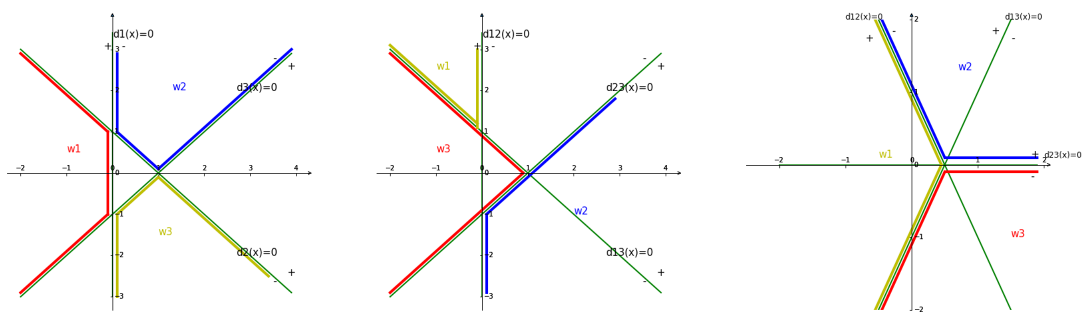
第三章模式识别作业

李佳政201828013229075

1 判别函数数目

因为共3类单独满足多数情况1,也就是说明通过线性判别可以完全分开这三类与剩余7类。3类共需要3个判别函数，额外1个判别函数用来分开另外7类。7类满足多数情况2,所以共需要$7\times(7-1)/2=21$，所以总共需要$3+1+21=25$个判别函数。

2 三个多分类情况



(a) 多类情况1 (b) 多类情况2 (c) 多类情况3

3 判别函数组合

3.1

线性可分的情况下，共需要n+1个权向量（增广矩阵），即4个系数分量。

3.2

二次判别函数共需要$N=\frac{(r+n)!}{r!}\times n!=\frac{5!}{2!3!}=10$

4 二分类感知器

将ω_2的训练样本乘以-1，得到增广向量。
$x_1 = [0,0,0,1], x_2 = [1,0,0,1], x_3 = [1,0,1,1], x_4 = [1,1,0,1]$
$x_5 = [0,0,-1,-1], x_6 = [0,-1,-1,-1], x_7 = [0,-1,0,-1], x_8 = [-1,-1,-1,-1]$
迭代学习率$C = 1$，设置初始权重系数$w_1 = [0,0,0,0]^T$ 然后开始迭代，
1)$w(1)^T x_1 = 0 \ngtr 0, w(2) = w(1) + x_1 = [0,0,0,1]$
2)$w(2)^T x_2 = 1 > 0, w(3) = w(2) = [0,0,0,1]$
到第四轮都正确分类... 权重变化如下：
第1轮迭代，权重为，[0. 0. 0. 1.]
第2轮迭代，权重为，[0. 0. 0. 1.]
第3轮迭代，权重为，[0. 0. 0. 1.]
第4轮迭代，权重为，[0. 0. 0. 1.]
第5轮迭代，权重为，[0. 0. -1. 0.]
第6轮迭代，权重为，[0. 0. -1. 0.]
第7轮迭代，权重为，[0. -1. -1. -1.]
第8轮迭代，权重为，[0. -1. -1. -1.]
第9轮迭代，权重为，[0. -1. -1. 0.]
第10轮迭代，权重为，[1. -1. -1. 1.]
第11轮迭代，权重为，[1. -1. -1. 1.]
第12轮迭代，权重为，[1. -1. -1. 1.]
第13轮迭代，权重为，[1. -1. -2. 0.]
第14轮迭代，权重为，[1. -1. -2. 0.]
第15轮迭代，权重为，[1. -1. -2. 0.]
第16轮迭代，权重为，[1. -1. -2. 0.]
第17轮迭代，权重为，[1. -1. -2. 1.]
第18轮迭代，权重为，[1. -1. -2. 1.]
第19轮迭代，权重为，[2. -1. -1. 2.]
第20轮迭代，权重为，[2. -1. -1. 2.]
第21轮迭代，权重为，[2. -1. -2. 1.]
第22轮迭代，权重为，[2. -1. -2. 1.]
第23轮迭代，权重为，[2. -2. -2. 0.]
第24轮迭代，权重为，[2. -2. -2. 0.]
第25轮迭代，权重为，[2. -2. -2. 1.]
第26轮迭代，权重为，[2. -2. -2. 1.]
第27轮迭代，权重为，[2. -2. -2. 1.]
第28轮迭代，权重为，[2. -2. -2. 1.]
第29轮迭代，权重为，[2. -2. -2. 1.]
第30轮迭代，权重为，[2. -2. -2. 1.]
第31轮迭代，权重为，[2. -2. -2. 1.]
第32轮迭代，权重为，[2. -2. -2. 1.]
第33轮迭代，权重为，[2. -2. -2. 1.]
第34轮迭代，权重为，[2. -2. -2. 1.]
第35轮迭代，权重为，[2. -2. -2. 1.]
第36轮迭代，权重为，[2. -2. -2. 1.]
第37轮迭代，权重为，[2. -2. -2. 1.]

第38轮迭代，权重为，[2. -2. -2. 1.]
第39轮迭代，权重为，[2. -2. -2. 1.]
第40轮迭代，权重为，[2. -2. -2. 1.]
程序如下所示：

```python
import numpy as np
xs = np.array([
    [0, 0, 0, 1],
    [1, 0, 0, 1],
    [1, 0, 1, 1],
    [1, 1, 0, 1],

    [0, 0, -1, -1],
    [0, -1, -1, -1],
    [0, -1, 0, -1],
    [-1, -1, -1, -1],
])

w = np.zeros((xs.shape[1], 1))

for i in range(100):
    err = False
    for j, x in enumerate(xs, 1):
        if np.matmul(w.T, x) <= 0:
            w += x.reshape(-1, 1)
            err = True
    if not err: break
```

5 多分类感知器

将模式样本写成增广形式，即$x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

取初始值为$w_1 = w_2 = w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

1) 第一次迭代，以x_1为样本，$d_1(x_1) = d_2(x_1) = d_3(x_1) = 0$. 因为$d_1(x_1) \not> d_2(x_1)$ 且$d_1(x_1) \not> d_3(x_1)$，所以更新权重得到：

$w_1(2) = w_1(1) + x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$，

$w_2(2) = w_2(1) - x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，

$w_3(2) = w_3(1) - x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2) 第二次迭代以x_2为样本，$d_1(x_2)=1, d_2(x_2)=-1, d_3(x3)=-1$. 因为$d_2(x_2)\not> d_1(x_2)$ 且$d_2(x_2)\not> d_3(x_2)$，所以更新权重得到：

$w_1(3)=w_1(2)-x_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$,

$w_2(3)=w_2(2)+x_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$,

$w_3(3)=w_3(2)-x_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$

3) 第三次迭代以x_3为样本，$d_1(x_3)=-2, d_2(x_3)=2, d_3(x3)=0$. 因为$d_3(x_3)\not> d_2(x_3)$, 所以更新权重得到：

$w_1(4)=w_1(3)=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$,

$w_2(4)=w_2(3)-x_3=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$,

$w_3(4)=w_3(3)+x_3=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$

4) 第四次迭代以x_1为样本，$d_1(x_1)=2, d_2(x_1)=-1, d_3(x1)=-5$. 分类正确，更新权重得到：

$w_1(5)=w_1(4)=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$,

$w_2(5)=w_2(4)=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$,

$w_3(5)=w_3(4)=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$

5) 第五次迭代以x_2为样本，$d_1(x_1)=0, d_2(x_1)=-1, d_3(x1)=-1$. 因为$d_2(x_2)\not> d_2(x_1)$, 且$d_2(x_2)\not> d_3(x_2)$，所以更新权重得到：

$w_1(6)=w_1(5)-x_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$,

$w_2(6)=w_2(4)+x_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$,

$w_3(6)=w_3(4)-x_2=\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$

6) 第六次迭代以x_3为样本，$d_1(x_3)=-3, d_2(x_3)=0, d_3(x3)=2$. 分类正确，更新权重得到：$w_1(7)=w_1(6)$，$w_2(7)=w_2(6)$，$w_3(7)=w_3(6)$

7) 第七次迭代以x_1为样本，$d_1(x_1)=1, d_2(x_3)=0, d_3(x3)=-6$. 分类正确，更新权重得到：$w_1(8)=w_1(7)$，$w_2(8)=w_2(7)$，$w_3(8)=w_3(7)$
8) 第八次迭代以x_2为样本，$d_1(x_2)=-1, d_2(x_2)=0, d_3(x2)=-2$. 分类正确，更新权重得到：$w_1(9)=w_1(8)$，$w_2(9)=w_2(8)$，$w_3(9)=w_3(8)$
由于第6、7、8次迭代对三个样本均正确分类，所以结果向量$w_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}, w_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, w_3=\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$
三个判别函数为$d_1=-x_1-x_2-1, d_2=0, d_3=2x_1+2x_2-2$

6 梯度法准则函数

准则函数的导数
$\frac{\partial J}{\partial w}=\frac{1}{4||x||^2}[(w^Tx-b)-|w^Tx-b|]\times[x-x\times sgn(w^Tx-b)]$,其中$sgn(x)=\begin{cases}1 & x>0\\-1 & x\leqslant 0\end{cases}$
所以$w(k+1)=w(k)+C\times\frac{\partial J}{\partial w}$
即分类函数迭代公式如下，

$$w(k+1)=w(k)+C\times\begin{cases}0 & w^Tx-b>0\\ \frac{(b-w^Tx)}{||x||^2}x & w^Tx-b\leqslant 0\end{cases}$$

如果分类正确，则$w(k+1)=w(k)$

7 二次势函数

$\omega_1=\{(0,1)^T,(0,-1)^T\}$，$\omega_2=\{(1,0)^T,(-1,0)^T\}$。
二次Hermite多项式, 所以取前九项最低阶的二维的正交函数:
$\varphi_1(x)=\varphi_1(x_1,x_2)=H_0(x_1)H_0(x_2)=1$
$\varphi_2(x)=\varphi_2(x_1,x_2)=H_1(x_1)H_0(x_2)=2x_1$
$\varphi_3(x)=\varphi_3(x_1,x_2)=H_0(x_1)H_1(x_2)=2x_2$
$\varphi_4(x)=\varphi_4(x_1,x_2)=H_1(x_1)H_1(x_2)=4x_1x_2$
$\varphi_5(x)=\varphi_5(x_1,x_2)=H_2(x_1)H_0(x_2)=4x_1^2-2$
$\varphi_6(x)=\varphi_6(x_1,x_2)=H_0(x_1)H_2(x_2)=4x_2^2-2$
$\varphi_7(x)=\varphi_7(x_1,x_2)=H_2(x_1)H_1(x_2)=8x_1^2x_2-4x_2$
$\varphi_8(x)=\varphi_8(x_1,x_2)=H_1(x_1)H_2(x_2)=8x_2^2x_1-4x_1$
$\varphi_9(x)=\varphi_9(x_1,x_2)=H_2(x_1)H_2(x_2)=(4x_1^2-2)(4x_2^2-2)$
按照第一类生成势函数:

$$\begin{aligned}K(x,x_k)&=\sum_{i=1}^{9}\varphi_i(x)\varphi_i(x_k)\\&=...\end{aligned}$$

第一步: 取$x_0=(0,1)^T\in\omega_1$，则$K_1(x)=K(x,x_0)=1+4x_2-4(2x_1^2-1)+4(2x_2^2-1)-16(2x_1^2-1)(2x_2^2-1)-16x_2(2x_1^2-1)$
第二步：取$x_1=(0,-1)^T\in\omega_1$，则$K_1(x_1)=5>0$，所以$K_2(x)=K_1(x)$

第三步：取$x_2=(1,0)^T\in\omega_2$，则$K_2(x_2)=9>0$，所以$K_3(x)=K_2(x)-K(x,x_2)=20x_2-20x_1-16x_1^2+16x_2^2-32x_1^2x_2+32x_1x_2^2$
第四步：取$x_3=(-1,0)^T\in\omega_2$，则$K_3(x_3)=4>0$，所以$K_4(x)=K_3(x)-K(x,x_3)=15+20x_2-56x_1^2-8x_2^2-32x_1^2+64x_1^2x_2^2$
第五步：取$x_0=(0,1)^T\in\omega_1$，则$K_4(x_0)=27>0$，所以$K_5(x)=K_4(x)$
第六步：取$x_1=(0,-1)^T\in\omega_1$，则$K_5(x_1)=-13<0$，所以$K_6(x)=K_5(x)+Kx,x_6=-32x_1^2+32x_2^2$.
...
第七步到第十步模式都分类正确，所以最终的判别函数为$d(x)=-32x_1^2+32x_2^2$.

8 指数势函数

取$\alpha=1$，得到势函数$K(x,x_k)=e^{-[(x_1-x_{k1})^2+(x_2-x_{k2})^2]}$，数据集与上一题相同，步骤如下：
第一步：取$x_0=(0,1)^T\in\omega_1$，则$K_1(x)=K(x,x_0)=e^{-(x_1^2+(x_2-1)^2)}$.
第二步：取$x_1=(0,-1)^T\in\omega_1$，则$K_1(x_1)=e^{-(0+4)}>0$，所以$K_2(x)=K_1(x)$.
第三步：取$x_2=(1,0)^T\in\omega_2$，则$K_2(x_2)=e^{-2}>0$，所以$K_3(x)=K_2(x)-K_2(x,x_2)=e^{-(x_1^2+(x_2+1)^2)}-e^{-[(x_1-1)^2+x_2^2]}$.
第四步：取$x_3=(-1,0)^T\in\omega_2$，则$K_3(x_3)=e^{-2}-e^{-4}>0$，所以$K_4(x)=K_3(x)-K(x,x_3)=e^{-(x_1^2+(x_2+1)^2)}-e^{-[(x_1-1)^2+x_2^2]}-e^{[(x_1+1)^2+x_2^2]}$.
第五步：取$x_0=(0,1)^T\in\omega_1$，则$K_4(x_0)=1-2e^{-2}>0$，所以$K_5(x)=K_4(x)$.
第六步：取$x_1=(0,-1)^T\in\omega_1$，则$K_5(x_1)=e^{-4}-2e^{-2}<0$，所以$K_6(x)=K_5(x)+K_5(x,x_1)=e^{-(x_1^2+(x_2+1)^2)}-e^{-[(x_1-1)^2+x_2^2]}-e^{[(x_1+1)^2+x_2^2]}+e^{-[(x_1^2+(x_2+1)^2)]}$.
....
第七步到第十步模式都分类正确，所以最终的判别函数为

$$d(x)=e^{-(x_1^2+(x_2+1)^2)}-e^{-[(x_1-1)^2+x_2^2]}-e^{[(x_1+1)^2+x_2^2]}+e^{-[(x_1^2+(x_2+1)^2)]}$$