Kapitola 6

Aproximace

Průvodce studiem

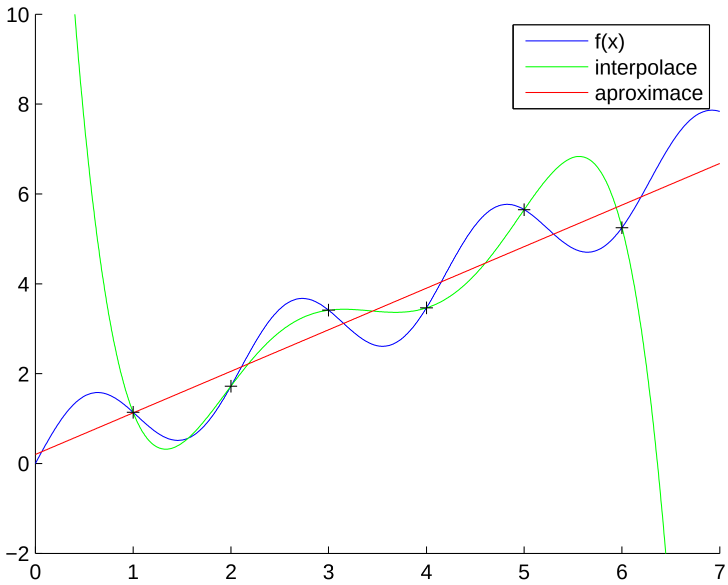
Obdobně jako v případě interpolace se problematika aproximace funkcí zabývá metodami nalezení jednodušších funkcí, které jsou dosatečným přiblížením (aproximací) funkce jiné. V případě aproximačních metod však nebudeme vyžadovat ani splnění interpolačních podmínek, tzn. že výsledná aproximační funkce nemusí dokonce procházet známými funkčními hodnotami funkce aproximované.
V této kapitole se seznámíme s principy teorie aproximací funkcí a se ze základnímí aproximačními metodami.

Aproximace si klade za cíl nahradit danou funkci f z prostoru funkcí $\mathcal{F}$ nějakou jednodušší aproximační funkcí φ z prostoru aproximačních funkcí Φ. Na rozdíl od interpolační funkce však nevyžadujeme, aby se aproximační funkce φ shodovala v předem daných bodech $x_i, i = 0, \ldots, m$ s původní funkcí f (viz Obrázek 6.1).

Za podprostor Φ si obvykle vybíráme konečnědimenzionální podprostory funkcí, neboť se výsledné aproximační funkce dají dobře vyjádřit jako lineární kombinace vektorů báze. Typicky jsou to pak prostory polynomů, konečněrozměrné prostory trigonometrických funkcí apod. Je zřejmé, že chyba aproximace bude závislá především na volbě tohoto prostoru.
Důležitou otázkou v aproximační úloze je tedy otázka „míry vzdálenosti“ aproximační funkce φ od původní funkce f. Čím je tato „vzdálenost“ menší, tím zřejmě lepší aproximační vlastnosti získáváme.
Za tímto účelem nám dobře poslouží prostory funkcí se skalárním součinem (f, g) a normou $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$ indukovanou tímto skalárním součinem. „Míru vzdálenosti“ f od φ pak můžeme měřit metrikou

$$\rho(f, \varphi) = \|f - \varphi\| = \sqrt{(f - \varphi, f - \varphi)}$$

kde $f \in \mathcal{F}$ a $\varphi \in \Phi$.



Obr. 6.1: Porovnání interpolačního polynomu s lineární aproximační funkcí.

Pro hledanou aproximační funkci $\varphi^* \in \Phi$ pak požadujeme, aby splňovala vlastnost

$$\rho(f, \varphi^*) \leqq \rho(f, \varphi) \quad \text{pro } \forall \varphi \in \Phi \ ,$$

tj.

$$\|f - \varphi^*\| \leqq \|f - \varphi\| \quad \text{pro } \forall \varphi \in \Phi \ .$$

Velmi často se v aproximačních úlohách volí za prostor funkcí $\mathcal{F}$ prostor $L_2(a, b)$ (tj. $\int_a^b f^2(x)dx < +\infty$) a za prostor aproximačních funkcí Φ můžeme například brát prostor všech polynomů stupně nejvýše n.
Na prostoru $L_2(a, b)$ zavádíme skalární součin

$$(f, g)_2 = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

a normu

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \ .$$

Definujeme-li metriku pro vzdálenost funkcí

$$\rho(f, \varphi) \equiv \rho_2(f, \varphi) = \|f - \varphi\|_2 \ ,$$

pak aproximační úlohu můžeme předepsat jako minilalizační úlohu

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Najdi } \varphi^* \in \Phi \text{ takové, že} \\ \|f - \varphi^*\|_2^2 \leqq \|f - \varphi\|_2^2 \quad \text{pro } \forall \varphi \in \Phi \ . \end{array} \right. . \tag{6.1}$$

Všimněme si, že místo normy $\|f - \phi\|_2$ jsme použili v minimalizační úloze (6.1) její kvadrát $\|f - \phi\|_2^2$. Tento tvar nemá žádný vliv na výsledek minimalizační úlohy a přitom je mnohem vhodnější pro úpravy minimalizované funkce neboť zatímco

$$\|f - \phi\|_2 = \sqrt{(f - \phi, f - \phi)_2} \ ,$$

tak

$$\|f - \phi\|_2^2 = (f - \phi, f - \phi) \ .$$

Pokud je tedy funkce f zadána pouze na diskrétní síti $\{x_i, i = 0, \dots, m\}$, dostáváme funkci f ve tvaru $m + 1$ rozměrného aritmetického vektoru funkční hodnot

$$(f_0, \dots, f_m) \in \mathbb{R}^m \ ,$$

kde $f_i \equiv f(x_i), i = 0, \dots, m$.
Množinu funkcí definovaných na konečných množinách bodů pak můžeme ztotožnit s vektorovým prostorem aritmetických vektorů $\mathbb{R}^{m+1}$, na kterém zavedeme skalární součin a normu ve tvaru

$$(f, g)_{2,m} := \sum_{i=0}^{m} f_i g_i, \quad \|f\|_{2,m} := \left(\sum_{i=0}^{m} f_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \ .$$

Původní aproximační úloha má pak tvar

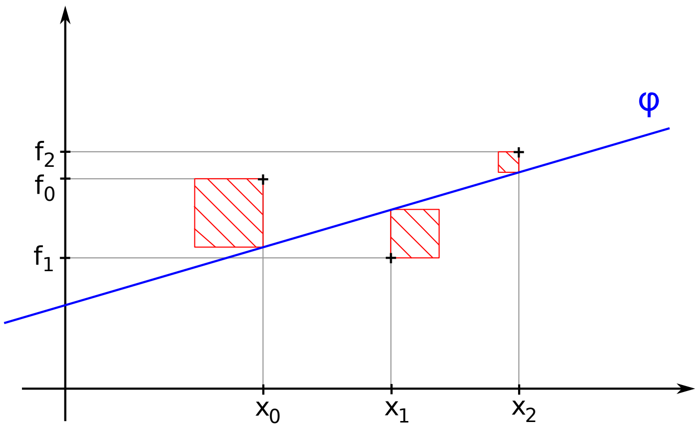
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Najdi } \varphi^* \in \mathbb{R}^{m+1} \text{ tak, že} \\ \|f - \varphi^*\|_{2,m}^2 \leqq \|f - \varphi\|_{2,m}^2 \quad \text{pro } \forall \varphi \in \mathbb{R}^{m+1} \ . \end{array} \right. . \tag{6.2}$$

V obou těchto případech (6.1) a (6.2) se metoda aproximace nazývá *metoda nejmenších čtverců*. Její název vychází z geometrické interpretace této metody v diskrétním případě. Za aproximační polynom se vybírá ten polynom, jehož součet čtverců odchylek od hodnot f_i je nejmenší.
Nejlépe lze princip metody pochopit z Obrázku 6.2.

Z výše uvedeného je patrné, že výsledný aproximační polynom závisí na volbě metriky pro vzdálenost funkcí. Změnou normy resp. skalárního součinu tak můžeme dostat jiné aproximační funkce, jejichž aproximační vlastnosti se budou lišit v závislosti na metrice.

Kromě metody nejmenších čtverců se pro aproximace taktéž často používá tzv. *stejnoměrná aproximace*, kdy za normu f volíme

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in \langle a,b \rangle} |f(x)|, \quad \text{kde} f \in C(\langle a, b \rangle) \ .$$



Obr. 6.2: Metoda nejmenších čtverců minimalizuje obsah čtverců.

Pokud si za třídu aproximačních funkcí vezmeme opět prostor všech polynomů stupně nejvýše n, pak aproximační úloha má tvar

$$\begin{cases} \text{Najdi } \varphi^* \in \Phi \text{ takové, že} \\ \min\limits_{\phi} \max\limits_{x \in \langle a,b \rangle} |f(x) - \phi(x)| \ . \end{cases}$$

Pokud funkce f je opět známa pouze na konečné množině bodů, můžeme volit normu

$$\|f\|_{\infty,m} := \max_{i=0,\dots,m} |f_i|$$

a aproximační úloha má tvar

$$\begin{cases} \text{Najdi } \varphi^* \in \Phi \text{ takové, že} \\ \min\limits_{\varphi} \max\limits_{i=0,\dots,m} |f(x_i) - \varphi(x_i)| \ . \end{cases}$$

Pokud se zamyslíme nad rozdílem mezi metodou nejmenších čtverců a stejnoměrnou aproximací, tak výsledná „vzdálenost“ aproximační funkce nepřesáhne určitou mez, danou právě normou $\|f - \phi^*\|_\infty$, zatímco v případě metody nejmenších čtverců takováto mez není garantována, ale za to funkce ϕ^* se přibližuje k funkci v průměru po celé délce intervalu, na které aproximuje.

6.1 Metoda nejmenších čtverců

V předchozím textu jsme již definovali metodu nejmenších čtverců jako minimalizaci kvadrátu Eukleidovské normy chyby aproximace. Řekněme, že prostor Φ má uspořádanou bázi $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$. Pak $\forall \varphi \in \Phi$ platí

$$\varphi = c_0\varphi_0 + \dots + c_n\varphi_n \ ,$$

kde $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ jsou souřadnice funkce φ v dané bázi.
Budeme se tedy snažit nalézt takové $c_0^*, \dots, c_n^* \in \mathbb{R}$, že

$$\|f - c_0^*\varphi_0 - \ldots - c_n^*\varphi_n\|_2^2 \leqq \|f - c_0\varphi_0 - \ldots - c_n\varphi_n\|_2^2$$

pro $\forall c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

Dostáváme tedy minimalizační úlohu

$$\min_{c_0,\dots,c_n} \rho_2(f, c_0, \dots, c_n)^2$$

s $\rho_2(f, c_0, \dots, c_n)^2 = (f - c_0\varphi_0 - \ldots - c_n\varphi_n, f - c_0\varphi_0 - \ldots - c_n\varphi_n)_2$.
Pro tuto úlohu si můžeme předepsat nutnou podmínku existence minima ve tvaru

$$\frac{\partial \rho_2^2(c_0, \dots, c_n)}{\partial c_k} = 0, k = 0, \dots, n$$

Tedy

$$\rho_2^2(c_0, \dots, c_n) = (f, f)_2 - 2\sum_{i=0}^{n} c_i(f, \varphi_i)_2 + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} c_i c_j(\varphi_i, \varphi_j)_2$$

a

$$\frac{\partial \rho_2^2(c_0, \dots, c_n)}{\partial c_k} = -2(f, \varphi_k)_2 + 2\sum_{i=0}^{n} c_i(\varphi_i, \varphi_k)_2 = 0.$$

Nutná podmínka má tedy tvar

$$\sum_{i=0}^{n} c_i(\varphi_i, \varphi_k)_2 = (f, \varphi_k)_2, \quad k = 0, \dots, n$$

což představuje soustavu lineárních rovnic s neznámými $c_0, \dots, c_n$.

Tyto rovnice se nazývají *normální rovnice* a jejich maticový zápis vypadá následovně

$$Ac = b$$

$$A = \begin{bmatrix} (\varphi_0, \varphi_0)_2 & (\varphi_0, \varphi_1)_2 & \dots & (\varphi_0, \varphi_n)_2 \\ (\varphi_1, \varphi_0)_2 & (\varphi_1, \varphi_1)_2 & \dots & (\varphi_1, \varphi_n)_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_n, \varphi_0)_2 & (\varphi_n, \varphi_1)_2 & \dots & (\varphi_n, \varphi_n)_2 \end{bmatrix} = [(\varphi_i, \varphi_j)], \quad b = \begin{bmatrix} (f, \varphi_0)_2 \\ (f, \varphi_1)_2 \\ \vdots \\ (f, \varphi_n)_2 \end{bmatrix}.$$

Postačující podmínkou existence minima je pak positivní definitnost Hessiánu $D^2\rho_2^2(c_0, \dots, c_n)$, což je právě matice A.
Tato matice se nazývá *Grammova* a je o ní známo, že je symetrická a positivně definitní pokud $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ jsou nezávislé, což v našem případě platí (neboť tvoří bázi prostoru Φ).

Aproximační funkce nalezená touto metodou tedy má požadované minimalizační vlastnosti. V diskrétním případě získáváme stejné normální rovnice, ve kterých se pouze vyskytuje jiný skalární součin.
Konkrétně

$$A = \left[(\varphi_i, \varphi_j)_{2,m} \right], b = \left[(f, \varphi_i)_{2,m} \right] \ ,$$

kde

$$(f, g)_{2,m} = \sum_{i=0}^{m} f_i g_i \ .$$

Poznámka 6.1. Je nutné poznamenat, že pro velká n je matice A zkonstruovaná výše uvedeným předpisem velmi špatně podmíněná pro běžné polynomiální báze jako je báze $\varphi_i(x) = x^i$.
To nás přivádí k využití ortogonálních systémů v aproximaci nejmenších čtverců (viz další podkapitola 6.2).

Algoritmus 24 — METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

Input: f, $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$

```
for i := 0, ..., n do
    for j := 0, ..., n do
        [A]_{i,j} := (φ_i, φ_j)
    end for
    [b]_i := (f, φ_i)
end for
[c_0, ..., c_n]^T := c je řešení soustavy Ac = b
```

Output: $c_0, \dots, c_n$

Příklad 6.2. Nechť funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je zadána v bodech

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f(2) &= 2 \\ f(3) &= -1 \end{aligned}$$

Aproximujte tuto funkci polynomem prvního stupně $p \in \mathcal{P}_1$ metodou nejmenších čtverců.

Řešení. Budeme tedy hledat polynom p ve tvaru

$$p(x) = c_0 + c_1 x.$$

V ideálním případě by hledaná funkce interpolovala dané body, tedy body by ležely na přímce a „míra vzdálenosti“ by byla nulová. To by ovšem znamenalo, že hledané koeficienty řeší soustavu sestavenou pro hledání interpolačního polynomu (viz Příklad 5.3)

$$Ac = b \ ,$$

kde

$$A = \begin{bmatrix} x_0^0 & x_0^1 \\ x_1^0 & x_1^1 \\ x_2^0 & x_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix}.$$

Samozřejmě, tato soustava nemá řešení (protože body na přímce neleží, řádky nejsou lineárně závislé).
Můžeme však nalézt „co nejlepší“ řešení, tj. takové, aby chyba řešení

$$err(c) := Ac - b$$

byla co nejmenší.
Ve smyslu nejmenších čtverců budeme uvažovat co nejmenší chybu s kvadrátem, tj.

$$c = \arg\ \min \|Ac - b\|^2.$$

Nejdříve upravme

$$\|Ac - b\|^2 = (Ac - b, Ac - b) = c^T A^T A c - 2c^T A^T b + b^T b \ .$$

Jelikož minimum je nezávislé na konstantě $b^T b$, lze minimalizační úlohu přepsat do tvaru

$$\min \frac{1}{2} c^T A^T A c - c^T A^T b \ .$$

Nutná podmínka minima (jedná se o kvadratickou funkci s symetrickou positivně definitní maticí, viz Věta 3.24) má tvar

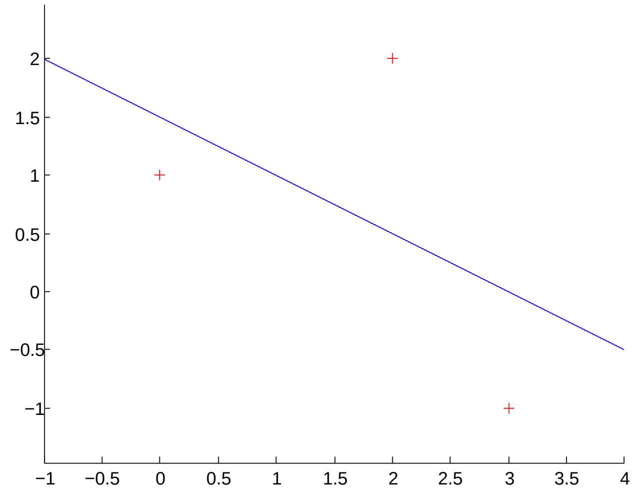
$$A^T A c = A^T b \ .$$

Tedy místo původní interpolační soustavy budeme řešit tuto soustavu.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 13 \end{bmatrix}, \quad A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Konkrétním řešením je $c_0 = 1.5, c_1 = -0.5$. Porovnání zadaných bodů a aproximační funkce je vykresleno na Obrázku 6.3. Tento způsob řešení odpovídá výše uvedené teorii. Zvolíme-li standardní bázi vektorového prostoru $\mathcal{P}_1$, tj. (φ_0, φ_1), kde

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= x^0 \\ \varphi_1 &= x^1, \end{aligned}$$



Obr. 6.3: Příklad 6.2 - řešení, aproximace lineární funkcí.

pak odpovídající Grammova matice má tvar

$$\left[\begin{array}{cc} (\varphi_0,\varphi_0)_2 & (\varphi_0,\varphi_1)_2 \\ (\varphi_1,\varphi_0)_2 & (\varphi_1,\varphi_1)_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \sum\limits_{i=0}^{2}\varphi_0(x_i).\varphi_0(x_i) & \sum\limits_{i=0}^{2}\varphi_0(x_i).\varphi_1(x_i) \\ \sum\limits_{i=0}^{2}\varphi_1(x_i).\varphi_0(x_i) & \sum\limits_{i=0}^{2}\varphi_1(x_i).\varphi_1(x_i) \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cc} 0^0.0^0 + 2^0.2^0 + 3^0.3^0 & 0^0.0^1 + 2^0.2^1 + 3^0.3^1 \\ 0^1.0^0 + 2^1.2^0 + 3^1.3^0 & 0^1.0^1 + 2^1.2^1 + 3^1.3^1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 3 & 5 \\ 5 & 13 \end{array}\right]$$

a pravá strana normální rovnice

$$\left[\begin{array}{c} (f,\varphi_0)_2 \\ (f,\varphi_1)_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \sum\limits_{i=0}^{2} f(x_i).\varphi_0(x_i) \\ \sum\limits_{i=0}^{2} f(x_i).\varphi_1(x_i) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 1.0^0 + 2.2^0 + (-1).3^0 \\ 1.0^1 + 2.2^1 + (-1).3^1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}\right] .$$

▲

Příklad 6.3. Pro funkci $f(x) := \cos(x)$ nalezněte na intervalu $\langle 0,\pi\rangle$ aproximaci polynomem třetího stupně $\varphi(x)$ pomocí metody nejmenších čtverců.

Řešení. Hledaná funkce je polynom třetího stupně

$$\varphi(x) := c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 ,$$

tedy úkolem je nalézt konstanty $c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.
Uvažujme standardní bázi vektorového prostoru polynomů nejvýše třetího stupně

$$\begin{array}{rclcrcl} \varphi_0(x) & := & 1 & \qquad & \varphi_2(x) & := & x^2 \\ \varphi_1(x) & := & x & & \varphi_3(x) & := & x^3 \end{array}$$

a sestavme normální rovnice. Za tímto účelem bude nutno spočítat dané skalární součiny.

$$
\begin{aligned}
(\varphi_0,\varphi_0)_2 &= \int_0^\pi 1\cdot 1\ \mathrm{dx} = [x]_0^\pi = \pi \\
(\varphi_1,\varphi_1)_2 &= \int_0^\pi x\cdot x\ \mathrm{dx} = \left[\tfrac{x^3}{3}\right]_0^\pi = \tfrac{\pi^3}{3} \\
(\varphi_2,\varphi_2)_2 &= \int_0^\pi x^2\cdot x^2\ \mathrm{dx} = \left[\tfrac{x^5}{5}\right]_0^\pi = \tfrac{\pi^5}{5} \\
(\varphi_3,\varphi_3)_2 &= \int_0^\pi x^3\cdot x^3\ \mathrm{dx} = \left[\tfrac{x^7}{7}\right]_0^\pi = \tfrac{\pi^7}{7} \\
(\varphi_0,\varphi_1)_2 &= \int_0^\pi 1\cdot x\ \mathrm{dx} = \left[\tfrac{x^2}{2}\right]_0^\pi = \tfrac{\pi^2}{2} \\
(\varphi_0,\varphi_2)_2 &= \int_0^\pi 1\cdot x^2\ \mathrm{dx} = \left[\tfrac{x^3}{3}\right]_0^\pi = \tfrac{\pi^3}{3} \\
(\varphi_0,\varphi_3)_2 &= \int_0^\pi 1\cdot x^3\ \mathrm{dx} = \left[\tfrac{x^4}{4}\right]_0^\pi = \tfrac{\pi^4}{4} \\
(\varphi_1,\varphi_2)_2 &= \int_0^\pi x\cdot x^2\ \mathrm{dx} = \left[\tfrac{x^4}{4}\right]_0^\pi = \tfrac{\pi^4}{4} \\
(\varphi_1,\varphi_3)_2 &= \int_0^\pi x\cdot x^3\ \mathrm{dx} = \left[\tfrac{x^5}{5}\right]_0^\pi = \tfrac{\pi^5}{5} \\
(\varphi_2,\varphi_3)_2 &= \int_0^\pi x^2\cdot x^3\ \mathrm{dx} = \left[\tfrac{x^6}{6}\right]_0^\pi = \tfrac{\pi^6}{6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\varphi_0,f)_2 &= \int_0^\pi 1\cdot\cos(x)\ \mathrm{dx} = [\sin(x)]_0^\pi = 0 \\
(\varphi_1,f)_2 &= \int_0^\pi x\cdot\cos(x)\ \mathrm{dx} = [x\sin(x)+\cos(x)]_0^\pi = \pi \\
(\varphi_2,f)_2 &= \int_0^\pi x^2\cdot\cos(x)\ \mathrm{dx} = [x^2\sin(x)+2x\cos(x)-2\sin(x)]_0^\pi = -2\pi \\
(\varphi_3,f)_2 &= \int_0^\pi x^3\cdot\cos(x)\ \mathrm{dx} = [x^3\sin(x)+3x^2\cos(x)-6x\sin(x)-6\cos(x)]_0^\pi \\
&= 12-3\pi^2
\end{aligned}
$$

Pak soustava normálních rovnic má tvar

$$
\begin{bmatrix} \pi & \frac{\pi^2}{2} & \frac{\pi^3}{3} & \frac{\pi^4}{4} \\ \frac{\pi^2}{2} & \frac{\pi^3}{3} & \frac{\pi^4}{4} & \frac{\pi^5}{5} \\ \frac{\pi^3}{3} & \frac{\pi^4}{4} & \frac{\pi^5}{5} & \frac{\pi^6}{6} \\ \frac{\pi^4}{4} & \frac{\pi^5}{5} & \frac{\pi^6}{6} & \frac{\pi^7}{7} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2\pi \\ 12-3\pi^2 \end{bmatrix}
$$

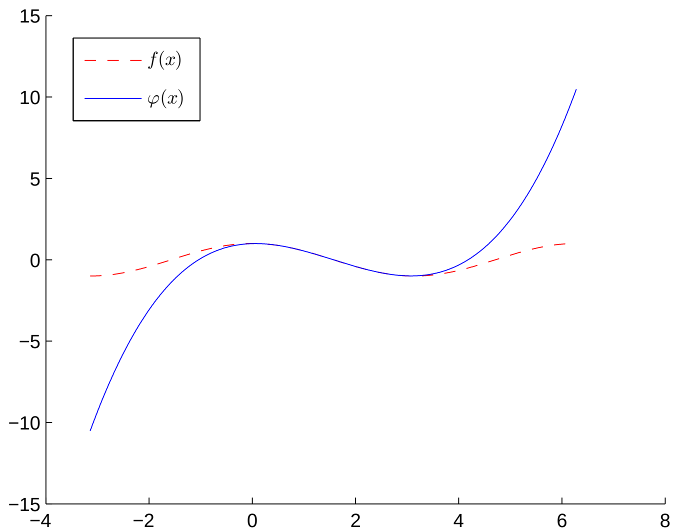
Tuto soustavu lze řešit numericky (viz kapitola 3)

$$
c_0 \doteq 0.9910, \quad c_1 \doteq 0.0850, \quad c_2 \doteq -0.6836, \quad c_3 \doteq 0.1451\ .
$$

Zbývá dosadit řešení do předpisu hledaného polynomu a získáme aproximační funkci

$$\varphi(x) = 0.9910 + 0.0850x - 0.6836x^2 + 0.1451x^3 \ .$$

Porovnání zadané funkce f a aproximační funkce φ je vykresleno na Obrázku 6.4. ▲



Obr. 6.4: Příklad 6.3 - řešení, aproximace metodou nejmenších čtverců.

6.2 Ortogonální systémy funkcí

V poznámce 6.1 jsme upozornili na skutečnost, že volba standardních polynomických bází jako je $\phi_i = x^i$ vede na velmi špatně podmíněné soustavy normálních rovnic. Této situaci se dá elegantně vyhnout pokud za bázi zvolíme ortogonální systém funkcí. Nejprve si tedy připomeňme, co rozumíme pod pojmem *ortogonální systém funkcí*.

Definice 6.4. Nechť je dán vektorový prostor Φ se skalárním součinem (f,g), $f,g \in \Phi$. Říkáme, že množina $\{\varphi_0,\dots,\varphi_b\} \subset \Phi$ je *ortogonální*, jestliže

$$(\varphi_i,\varphi_j) \begin{cases} = 0 & \text{pro } i \neq j \\ \neq 0 & \text{pro } i = j \end{cases}$$

Zobecněme skalární součin $(f,g)_2$ na prostoru $L_2(a,b)$ následovně

$$(f,g)_{2,\omega} = \int\limits_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx \ ,$$

kde $\omega(x)$ je tzv. *váhová funkce*, $\forall x \in (a, b) : \omega(x) > 0$.

Pro $f, g \in \mathbb{R}^{m+1}$ pak zobecňujeme Eukleidův skalární součin následovně

$$(f, g)_{2,\omega,m} = \sum_{i=0}^{m} f_i g_i \omega_i \ ,$$

kde $\omega_i > 0, i = 0, \dots, m$.

Uveďme příklady některých ortogonálních systémů:

Příklad 6.5.

a) spojitý případ
Funkce $\varphi_j(x) = \cos jx, j = 0, 1, \dots$ tvoří na $\langle 0, \pi\rangle$ ortogonální systém s $\omega(x) \equiv 1$

b) diskrétní případ
Funkce $\varphi_j(x) = \cos jx, j = 0, 1, \dots, m$ tvoří na síti bodů $x_i = \frac{2i+1}{m+1}\frac{\pi}{2}, i = 0, \dots, m$ s $\omega(x) \equiv 1$ ortogonální systém

Příklad 6.6. *Čebyševovy polynomy*

a) Polynomy $T_j(x) = \cos(j \arccos x), j = 0, 1, \dots$ tvoří na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ ortogonální systém s $\omega(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Tyto polynomy můžeme taktéž získat rekurentním vzorcem

$$T_0(x) \equiv 1, T_1(x) = x, T_{j+1}(x) = 2xT_j(x) - T_{j-1}(x)$$

b) Polynomy $T_j(x) = \cos(j \arccos x), j = 0, 1, \dots, m$ jsou ortogonální na síti $x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{m+1}\frac{\pi}{2}\right), i = 0, \dots, m$ s $\omega_i \equiv 1$

Příklad 6.7. *Legendrovy polynomy*
Polynomy

$$P_0(x) \equiv 1, P_j(x) = \frac{1}{2^j j!}\frac{d^j}{dx^j}\left[(x^2 - 1)^j\right], j = 1, 2, \dots$$

tvoří na $\langle -1, 1\rangle$ ortogonální systém s $\omega(x) \equiv 1$.
Tyto polynomy je taktéž možno získat rekurentním vzorcem

$$P_0(x) \equiv 1, P_1(x) = x, P_{j+1}(x) = \frac{2j+1}{j+1} x P_j(x) - \frac{j}{j+1} P_{j-1}(x) \ .$$

Poznámka 6.8. Polynomy v Příkladech 6.6 a 6.7 lze rozšířit z intervalu $\langle -1, 1\rangle$ na interval $\langle a, b\rangle$ prostřednictvím transformace

$$y = \frac{x+1}{2}(b - a) + a, x \in \langle -1, 1\rangle \ .$$

Lemma 6.9. *Nechť funkce $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ jsou ortogonální. Pak řešení normálních rovnic má tvar*

$$c_i = \frac{(f, \varphi_i)}{(\varphi_i, \varphi_i)}, i = 0, \dots, n \ .$$

Důkaz. Vyplývá přimo z vlastností ortogonality, tj.

$$(\varphi_i, \varphi_j) \quad \text{pro } i \neq j$$

$$c_0(\varphi_i, \varphi_0) + \cdots + c_i(\varphi_i, \varphi_i) + \cdots + c_n(\varphi_i, \varphi_n) + = (f, \varphi_i)$$

$$c_i = \frac{(f, \varphi_i)}{(\varphi_i, \varphi_i)}$$

□

Z uvedeného Lemattu 6.9 tedy plyne, že při použití ortogonálního bázového systému funkcí není potřeba řešit soustavu normálních rovnic, neboť její matice je diagonální a řešení tudíž můžeme vypočíst přímo dosazením do rovnic

$$c_i = \frac{(f, \varphi_i)}{(\varphi_i, \varphi_i)} \ .$$

Tento postup pochopitelně zcela eliminuje jakýkoliv vliv numerické nestability na hledání aproximační funkce.