2 Exkurze do funkcionální analýzy

Cíl kapitoly

Tato kapitola tvoří teoretický základ pro metody probírané v dalších dvou kapitolách. Protože prostor, který lze této problematice věnovat, je velmi omezený, pokusíme se zde vysvětlit jen nejnutnější pojmy. Pokud by někoho odrazovala přílišná teoretičnost a „vědeckost” této kapitoly a spokojil by se s tím, **že** metody popsané v kapitolách 3 a 4 fungují, aniž by se zajímal o to, **proč** fungují, mohl by snad následující text přeskočit.

2.1 Metrický prostor

Studenti určitě umí vypočítat vzdálenost dvou reálných čísel na číselné ose nebo vzdálenost dvou bodů v rovině či v prostoru. Podobně se dá určovat „vzdálenost” různých jiných objektů. Této zobecněné vzdálenosti se říká metrika.

Definice. Buď X množina (prvků jakéhokoli typu). Řekneme, že na této množině je definována **metrika** d, jestliže každým dvěma prvkům $x, y \in X$ je přiřazeno reálné číslo $d(x, y)$ tak, že

1) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in X \quad , \quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$

3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x,y,z \in X$ (trojúhelníková nerovnost)

Množinu X s metrikou d pak nazýváme **metrický prostor**.

Příklady metrických prostorů
Asi nejjednodušším příkladem metrického prostoru je množina všech reálných čísel $\mathbb{R}$ s metrikou d definovanou jako $d(x, y) = |\, x - y|$.
Jako množinu X však nemusíme brát celé $\mathbb{R}$, může to být i jakákoli jeho podmnožina, např. interval nebo množina všech racionálních čísel $\mathbb{Q}$.
Jiným příkladem je množina všech uspořádaných n-tic reálných čísel. Je-li $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, metriku d můžeme definovat různě. Jako nejpřirozenější se jeví obvyklá vzdálenost dvou bodů:

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}, \tag{2.1}$$

existují však i jiné možnosti, např.

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = |\, x_1-y_1| + |\, x_2-y_2| + \cdots + |\, x_n-y_n| \tag{2.2}$$

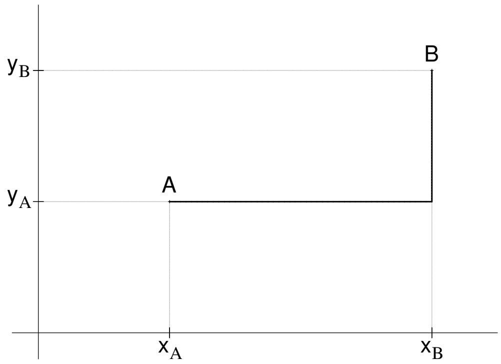
nebo

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \max\Big(|\, x_1-y_1|, |\, x_2-y_2|, \ldots, |\, x_n-y_n|\Big). \tag{2.3}$$

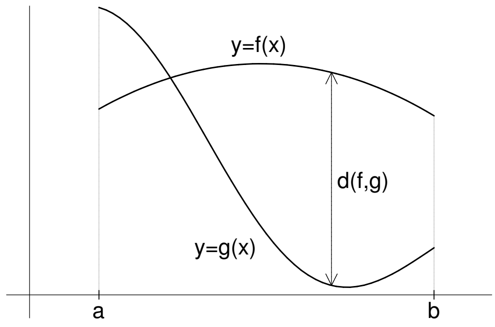
Jako poslední příklad uvedeme množinu všech funkcí definovaných a spojitých na intervalu $< a, b >$, která se označuje jako $C(< a, b >)$. Jsou-li $f, g \in C(< a, b >)$, definujeme

$$d(f,g) = \max_{x \in <a,b>} |\, f(x) - g(x)|. \tag{2.4}$$

Obrázky 2.1 a 2.2 poslouží k objasnění některých uvedených metrik.



Obrázek 2.1: „Vzdálenost” bodů A, B podle metriky 2.2 je délka silné černé čáry.



Obrázek 2.2: „Vzdálenost” dvou spojitých funkcí v metrice 2.4

2.2 Úplný metrický prostor

Již na střední škole se studenti seznámili s posloupnostmi reálných čísel a (snad) i s jejich limitami.
Připomeňme, že limita posloupnosti reálných čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je, populárně řečeno, takové číslo a, ke kterému se členy posloupnosti pro n jdoucí do nekonečna přibližují. Přesněji: Reálné číslo a se nazývá limitou posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje přirozené číslo N tak, že pro všechna $n > N$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$.
Neboli: ať zvolíme ε libovolně malé, od jistého indexu N se členy posloupnosti budou od a lišit méně než o ε.
Posloupnosti však můžeme sestavovat i z jiných objektů než z reálných čísel. Stejně tak můžeme u takových posloupností říci, zda mají, nebo nemají limitu. Pro posloupnosti sestavené z prvků obecného metrického prostoru se limita definuje velmi podobně, jen je třeba zobecnit ono „lišení se o méně než ε”. To se provede pomocí metriky.

Definice. Buď X metrický prostor s metrikou d a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost prvků z X. Řekneme, že $x \in X$ je **limitou** této posloupnosti, píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje přirozené číslo N tak, že pro všechna $n > N$ platí $d(x_n, x) < \varepsilon$.

Posloupnost, která má limitu, se nazývá **konvergentní**.

Nyní definujeme další vlastnost posloupností.

Definice. Buď X metrický prostor s metrikou d a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost prvků z X. Řekneme, že tato posloupnost je **cauchyovská**, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje přirozené číslo N tak, že pro všechna $n > N$ a každé přirozené číslo k platí $d(x_n, x_{n+k}) < \varepsilon$.

Dá se říci, že cauchyovská posloupnost je taková, jejíž členy se výše popsaným způsobem zahušťují.
Dá se dokázat, že každá konvergentní posloupnost je cauchyovská. Intuitivně by se mohlo zdát, že to musí být i naopak. Existují ale prostory, v nichž najdeme cauchyovské posloup-

nosti, které v daném prostoru limitu nemají. Ukážeme to na následujícím příkladu: Mějme například množinu všech reálných čísel a v něm posloupnost $a_1 = 3.1, a_2 = 3.14, a_3 = 3.141, a_4 = 3.1415, \ldots$. Tato posloupnost má limitu π a tedy je cauchyovská. Nyní vezměme tutéž posloupnost, ale v množině všech racionálních čísel $\mathbb{Q}$. Je to posloupnost cauchyovská, ale limitu v $\mathbb{Q}$ nemá (protože $\pi \notin \mathbb{Q}$).

Existují tedy prostory, v nichž „něco schází”, neobsahují limity některých posloupností, které se jinak chovají tak, jako by limitu mít měly. Tím se dostáváme k definici úplného prostoru.

Definice. Metrický prostor se nazývá **úplný**, jestliže každá cauchyovská posloupnost v něm má limitu.

Příklady úplných a neúplných prostorů
Množina $\mathbb{R}$ s metrikou $d(x, y) = |\, x - y|$ je úplný metrický prostor.
Jakýkoli uzavřený interval $\langle a, b\rangle$ s toutéž metrikou je také úplný prostor.
Otevřený interval s toutéž metrikou není úplný. To můžeme ukázat na příkladu intervalu $(0, 1)$ a posloupnosti $x_n = \frac{1}{n}$. Tato posloupnost je cauchyovská a přitom v intervalu $(0, 1)$ nemá limitu $(0 \notin (0, 1))$.
Dá se dokázat, že prostor všech uspořádaných n-tic reálných čísel s kteroukoli z metrik 2.1, 2.2, 2.3 je úplný.

2.3 Pevný bod zobrazení, iterační proces

Definice. Řekneme, že F je zobrazení množiny X do množiny Y, píšeme $F : X \to Y$, jestliže každému prvku $x \in X$ je pomocí F přiřazen právě jeden prvek $y \in Y$, $y = F(x)$.

Budeme se zabývat hlavně zobrazeními množiny do sebe sama, tj. zobrazení $F : X \to X$. Takové zobrazení přiřazuje každému prvku $x \in X$ opět (obecně jiný) prvek z X. Nás bude zajímat, jestli existuje takový prvek x, který se zobrazí sám na sebe, případně jak takový prvek najít.

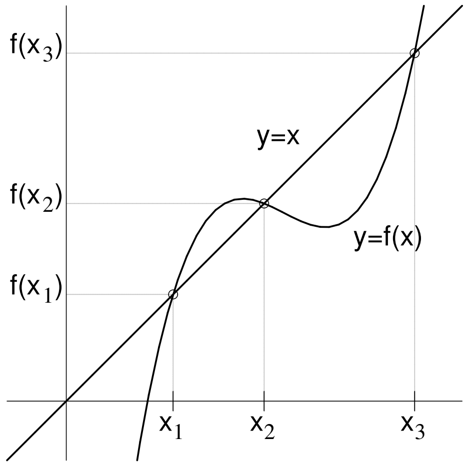
Definice. Prvek $x \in X$ se nazývá **pevný bod** zobrazení $F : X \to X$, jestliže platí

$$F(x) = x.$$

Jestliže za množinu X vezmeme $\mathbb{R}$, pak zobrazení $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je obyčejná funkce jedné proměnné. Na obrázku 7.2 jsou vyznačeny pevné body jisté funkce f. Jsou to body, v nichž se protne graf funkce f s přímkou $y = x$.

Příklad. Funkce $f(x) = x^2$ má právě dva pevné body, a to $x = 0$ a $x = 1$, protože $0^2 = 0$ a $1^2 = 1$.

Hledání pevného bodu zobrazení má v numerické matematice velký význam. Některé úlohy, jejichž zadání zpočátku vypadá úplně jinak, lze převést právě na problém nalezení pevného bodu. Proto se nyní budeme zabývat otázkou, jak ověřit, že nějaké zobrazení pevný bod má a jak jej najít. Dá se dokázat, že jistý druh zobrazení má pevný bod vždy a existuje postup, který nás k němu dovede.



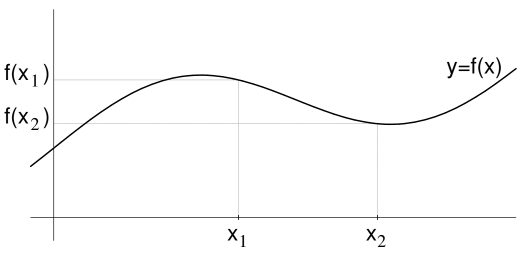
Obrázek 2.3: Pevné body reálné funkce

Definice. Buď X metrický prostor. Řekneme, že zobrazení $F : X \to X$ je **kontraktivní** (**kontrakce**), jestliže existuje $\alpha \in \langle 0, 1)$ tak, že pro každé dva prvky $x, y \in X$ platí

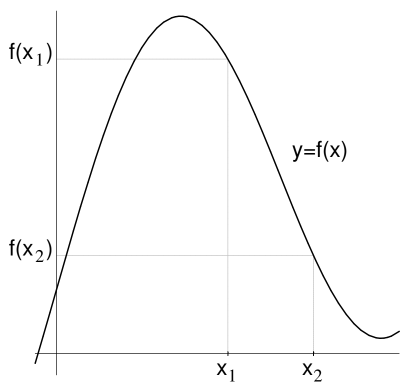
$$d(F(x), F(y)) \leq \alpha\, d(x, y) \tag{2.5}$$

Číslo α nazýváme koeficient kontrakce.

„Kontrakce" česky znamená „stažení". Dá se tedy, byť poněkud nepřesně, říct, že kontraktivní zobrazení je takové, u nějž jsou si obrazy (funkční hodnoty) bližší, než byly vzory.



Obrázek 2.4: Funkce, která je kontraktivní



Obrázek 2.5: Funkce, která není kontraktivní

Věta 2.1 *Buď X úplný metrický prostor a $F : X \to X$ kontraktivní zobrazení. Pak existuje právě jeden pevný bod tohoto zobrazení $\hat{x}$, pro nějž platí*

$$\hat{x} = \lim_{n\to\infty} x_n, \tag{2.6}$$

kde $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je tzv. posloupnost postupných aproximací, která je definována takto: x_0 je libovolný prvek z X a další členy posloupnosti jsou definovány předpisem

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots \tag{2.7}$$

Dále pro všechna přirozená čísla n platí:

$$d(\hat{x}, x_n) \;\leq\; \frac{\alpha}{1-\alpha}\, d(x_n, x_{n-1}) \tag{2.8}$$

$$d(\hat{x}, x_n) \;\leq\; \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\, d(x_0, x_1), \tag{2.9}$$

kde α je koeficient kontrakce.

Tato věta nám dává návod, **jak pevný bod** zadaného zobrazení alespoň přibližně **najít**.

Zvolíme $x_0 \in X$. Tomuto bodu se říká **počáteční aproximace**.

Pak počítáme další členy posloupnosti podle předpisu 2.7. Tomuto výpočtu se říká **iterační proces**, k-tý člen posloupnosti, x_k, se nazývá **k-tá aproximace**.

Protože podle 2.6 je pevný bod limitou posloupnosti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, postupné aproximace se k němu budou přibližovat. Kdybychom v iteračním procesu mohli pokračovat donekonečna, dostali bychom se nakonec k pevnému bodu. To ale není možné, a proto se v určitý moment zastavíme a řekneme, že pevný bod $\hat{x}$ je přibližně roven poslednímu vypočtenému členu posloupnosti.

Kdy iterační proces zastavit, rozhodneme podle toho, s jakou přesností chceme mít pevný bod vypočtený. Můžeme k tomu použít např. odhad 2.8, který říká, jak je n-tá aproximace nanejvýš vzdálena od pevného bodu. K tomu ovšem musíme znát hodnotu koeficientu kontrakce α, která může být u některých úloh velmi obtížně zjistitelná. Proto se častěji používají empirická kritéria, jež pro konkrétní úlohy později popíšeme.

2.4 Normovaný vektorový prostor

V prvním semestru se studenti seznámili s vektorovými prostory.

Prvky vektorových prostorů mohou být objekty nejrůznějšího typu. Nemusí to být pouze „vektory” v tom smyslu, jaký si člověk obvykle pod tímto pojmem představí (tj. uspořádané n-tice reálných čísel).

Nejjednodušším příkladem vektorového prostoru je množina všech reálných čísel $\mathbb{R}$ s obvyklými operacemi $+$ a $\cdot$.

Vektorovým prostorem je i množina všech matic typu (m, n) s operacemi $+$ (sčítání matic) a $\cdot$ (násobení matice konstantou).

Vektorový prostor může být tvořen též funkcemi jedné nebo více proměnných s určitou vlastností. V některých oblastech matematiky se často setkáváme např. s prostorem všech funkcí spojitých na daném intervalu $\langle a, b\rangle$, či s prostorem všech funkcí na intervalu $\langle a, b\rangle$ integrovatelných.

Studenti jistě vědí, co je absolutní hodnota čísla nebo délka vektoru. Tyto veličiny udávají velikost daného čísla, resp. vektoru bez ohledu na jeho znaménko, resp. směr. „Velikost” lze různým způsobem určovat i u jiných objektů. Jakési zobecnění velikosti, které zachovává její přirozené vlastnosti, se nazývá norma.

Definice. Buď V vektorový prostor. Řekneme, že na tomto prostoru je definována **norma**, jestliže každému prvku $v \in V$ je přiřazeno reálné číslo $\|v\|$ (norma v) tak, že

1) $\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in V \quad , \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

2) $\|k \cdot v\| = |k| \cdot \|v\| \quad \forall v \in V, \forall k \in \mathbb{R}$

3) $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\| \quad \forall v_1, v_2 \in V$ (trojúhelníková nerovnost)

Prostor V pak nazýváme **normovaný vektorový prostor**.

Je známo, že absolutní hodnota rozdílu dvou reálných čísel udává vzdálenost těchto čísel na číselné ose. Podobně si lze normu rozdílu dvou prvků vektorového prostoru $\|u - v\|$ představit jako vzdálenost těchto dvou prvků. To znamená, že na vektorovém prostoru můžeme definovat metriku předpisem

$$d(v_1, v_2) = \| v_1 - v_2\|. \tag{2.10}$$

Příklady normovaných vektorových prostorů:
Na množině všech reálných čísel $\mathbb{R}$ lze zavést normu jako $\|x\| = |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Na „obvyklém” vektorovém prostoru všech uspořádaných n-tic reálných čísel V_n můžeme zavést normu různým způsobem.
Je-li $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in V_n$, pak jeho norma může být např. definována jako délka tohoto vektoru

$$\| \mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}\ . \tag{2.11}$$

Tato norma se často značí jako $\| \mathbf{v}\|_2$ a nazývá se eukleidovská norma. Existují však i jiné možnosti. V dalším textu se setkáme s normami

$$\| \mathbf{v}\|_1 = |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n| \tag{2.12}$$
$$\| \mathbf{v}\|_\infty = \max(|v_1|, |v_2|, \ldots, |v_n|) \tag{2.13}$$

U matic lze normu počítat podobně jako u vektorů. V kapitole 3 budeme pracovat s následujícími normami ($\mathbf{A}$ je matice typu (m, n) s prvky $a_{ij}, i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$):

$$\| \mathbf{A}\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{řádková norma} \tag{2.14}$$

$$\| \mathbf{A}\|_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \qquad \text{sloupcová norma} \tag{2.15}$$

Příklad 2.1 *Vypočtěte řádkovou a sloupcovou normu matice*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Řešení: Řádková norma matice je maximum ze součtů absolutních hodnot prvků v jednotlivých řádcích.
Součet absolutních hodnot prvků v prvním řádku matice je $|-3|+|2|+|5| = 10$, ve druhém řádku je součet roven 7 a ve třetím 8. Největší z těchto čísel je 10 a proto $\|\mathbf{A}\|_\infty = 10$.
Sloupcová norma je maximum ze součtů absolutních hodnot prvků v jednotlivých sloupcích. Tedy $\|\mathbf{A}\|_1 = \max(7, 7, 11) = 11$.

Čtenář si možná povšiml značné podobnosti norem 2.11, 2.12 a 2.13 s metrikami uvedenými v kapitole 2.1. Skutečně, všechny tyto metriky můžeme dostat z výše uvedených norem pomocí 2.10.

Nabízí se otázka, proč jsme označili řádkovou normu matice 2.14 stejně jako normu vektoru 2.13 a sloupcovou normu matice 2.15 stejně jako normu vektoru 2.12.
Tyto normy skutečně mají mnoho společného. Představíme-li si vektor $\mathbf{v}$ dimenze n jako **sloupec**, můžeme jej považovat za matici o n řádcích a jediném sloupci. Vypočteme-li nyní řádkovou normu této matice, dostaneme právě normu vektoru 2.13, vypočteme-li sloupcovou normu matice, dostaneme normu vektoru 2.12.

Dále platí, a to je pro další úvahy podstatnější, že

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Av}\|_\infty &\leq \|\mathbf{A}\|_\infty \cdot \|\mathbf{v}\|_\infty \\ \|\mathbf{Av}\|_1 &\leq \|\mathbf{A}\|_1 \cdot \|\mathbf{v}\|_1 \end{aligned}$$

Můžeme říct, že řádková norma matice je **přidružená** vektorové normě 2.13 a sloupcová norma matice je přidružená vektorové normě 2.12.
(Obecně se maticová norma přidružená vektorové normě definuje docela složitě, o tom zde mluvit nebudeme. Např. maticová norma přidružená eukleidovské normě vektoru se počítá zcela odlišně.)

Shrnutí pojmů

Metrický prostor je množina X, na níž je definována metrika d - funkce s jistými vlastnostmi, která každým dvěma prvkům $x, y \in X$ přiřadí číslo $d(x, y)$, které lze popsat jako „vzdálenost" x od y. V metrickém prostoru můžeme definovat limitu posloupnosti složené z jeho prvků. Má-li posloupnost limitu, řekneme, že je konvergentní. Cauchyovská posloupnost je posloupnost, jejíž prvky se určitým, v předchozím textu přesně popsaným, způsobem zahušťují. Je-li v metrickém prostoru X každá cauchyovská posloupnost konvergentní, mluvíme o prostoru úplném.
Mnoho úloh numerické matematicky se dá převést na hledání pevného bodu nějakého zobrazení. Pevný bod daného zobrazení $F : X \to X$ je takové $x \in X$, které se zobrazí samo na sebe, tj. $F(x) = x$.

Kontraktivní zobrazení je zobrazení, pro které platí $d(F(x), F(y)) \leq \alpha\, d(x, y)$, kde $\alpha \in \langle 0, 1)$. Je-li X s metrikou d úplný metrický prostor, pak každé kontraktivní zobrazení $F : X \to X$ má právě jeden pevný bod. Tento pevný bod je roven limitě posloupnosti $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, kterou získáme tak, že $x_0 \in X$ zvolíme libovolně a další členy posloupnosti jsou dány vztahem $x_{k+1} = F(x_k), k = 0, 1, 2, \ldots$. Pevný bod přibližně najdeme pomocí tzv. iteračního procesu. Počítáme členy posloupnosti $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, dokud podle nějakého kriteria nerozhodneme, že už jsme pevný bod s požadovanou přesností našli.
Normovaný prostor je vektorový prostor V, na němž je definována norma $\|\cdot\|$ - funkce s jistými vlastnostmi, která každému prvku $v \in V$ přiřadí číslo $\|v\|$, které lze popsat jako „velikost” v.
Na prostoru všech n-rozměrných vektorů můžeme kromě obvyklé eukleidovské normy definovat normu předpisem $\|\mathbf{v}\|_1 = |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n|$, resp. $\|\mathbf{v}\|_\infty = \max(|v_1|, |v_2|, \ldots, |v_n|)$.
Důležitým příkladem normovaného prostoru je prostor všech matic typu $m \times n$ s řádkovou nebo sloupcovou normou. Řádková norma matice A je maximum ze součtů absolutních hodnot prvků této matice v jednotlivých řádcích, sloupcová maximum ze součtů ve sloupcích.

2.5 Otázky a příklady ke cvičení

U následujících výroků rozhodněte, zda se jedná o výrok pravdivý či nepravdivý.

Otázka 2.1 *Může se stát, že pro dva různé prvky metrického prostoru x a y je $d(x, y) = 0$.*

Otázka 2.2 *Každá posloupnost, která má limitu, je cauchyovská.*

Otázka 2.3 *Každý metrický prostor je úplný.*

Otázka 2.4 *Pevný bod funkce $f(x) = \sin x$ je 0.*

Otázka 2.5 *Každá funkce jedné reálné proměnné má aspoň jeden pevný bod.*

Otázka 2.6 *Je-li $F : X \to X$ kontrakce a $x, y \in X$, pak $d(F(x), F(y)) < d(x, y)$.*

Otázka 2.7 *Iterační proces je postup, který slouží k nalezení pevného bodu.*

Otázka 2.8 *V praxi pomocí iteračního procesu vždy najdeme přesnou hodnotu pevného bodu.*

Otázka 2.9 *Řádková norma čtvercové matice je vždy různá od sloupcové normy.*

Odpovědi na otázky viz 9.2