1.7 Vektorové a maticové normy, skalární součin

Chceme-li popsat, jak moc se liší dvě reálná čísla x a y, řekneme, jaká je jejich vzdálenost. Ta je, jak známo, dána absolutní hodnotou jejich rozdílu $|x - y|$. Jsou-li tedy tato čísla blízká, je $|x - y|$ malé číslo. Jestliže nekonečná posloupnost čísel $\{x_k\}$ má limitu x, znamená to, že $\lim_{k\to\infty} |x_k - x| = 0$, tedy že vzdálenosti čísel x_k od čísla x se s rostoucím k přibližují k nule.

Připomeňme, jak je absolutní hodnota definovaná a jaké má vlastnosti. Pro reálné číslo x klademe

$$|x| = \begin{cases} x & \text{pro } x \geqq 0, \\ -x & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

Hodnota $|x|$ udává vzdálenost čísla x od nuly, tj. od počátku souřadnic na číselné ose. Zřejmě $|x| \geqq 0$, přičemž $|x| = 0$ právě tehdy, když $x = 0$.

Pro libovolná dvě reálná čísla x, y platí následující vztahy:

$$|-x| = |x|, \qquad |x \pm y| \leqq |x| + |y|, \qquad |x \pm y| \geqq \big||x| - |y|\big|,$$
$$|xy| = |x| \cdot |y|, \qquad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (y \neq 0).$$

Hodnota $|x - y|$ udává, jak již bylo řečeno, vzdálenost čísel x a y na číselné ose.

1.7.1 Vektorové normy

V dalším textu budeme pracovat s uspořádanými n-ticemi reálných čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Ty lze chápat jako řádkové matice $[x_1, \dots, x_n]$ nebo sloupcové matice $[x_1, \dots, x_n]^{\mathrm{T}}$ (symbol $^{\mathrm{T}}$ značí transponování). Často se pro ně rovněž používá název (aritmetické) vektory. Rádi bychom také dovedli vyjádřit, že jejich vzdálenost je malá, že se posloupnost takových n-tic přibližuje k nějaké n-tici apod. Pro $n = 2$ a $n = 3$ můžeme dvojice resp. trojice reálných čísel chápat jako souřadnice bodů v rovině resp. prostoru. V těchto případech máme názornou představu, co znamená jejich vzdálenost. Pro $n \geqq 4$ tomu už tak není.

Abychom mohli nějakým způsobem měřit velikost a vzdálenost takových vektorů, zavedeme následující důležitý pojem, jehož definice je motivovaná některými vlastnostmi absolutní hodnoty. Připomeňme, že pro každé dvě n-tice $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ (chápané jako matice) je definován jejich *součet* $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ (sčítají se složky vektorů se stejnými indexy) a pro každé číslo c a každou n-tici $\boldsymbol{x}$ je definován (skalární) násobek vektoru číslem $c\boldsymbol{x}$ (číslem c se násobí každá složka vektoru).

V dalším textu bude vhodnější, když budeme vektory považovat za sloupcové matice. Tedy n-rozměrný vektor označíme $\boldsymbol{x} = [x_1, \dots, x_n]^{\mathrm{T}}$ (zápis pomocí transponování je vhodnější, zabere v textu méně místa). Speciálně $\boldsymbol{0}$ bude nulový vektor, tj. $\boldsymbol{0} = [0, \dots, 0]^{\mathrm{T}}$. Množinu všech takových sloupcových vektorů označíme $\mathbb{R}^n$.

Definice 1.3 Funkce, která každému vektoru $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ přiřazuje reálné číslo $\|\boldsymbol{x}\|$, se nazývá (vektorová) *norma na* $\mathbb{R}^n$, jestliže má následující vlastnosti:

1) $\|\boldsymbol{x}\| \geqq 0$ pro každý vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, přičemž $\|\boldsymbol{x}\| = 0$, právě když $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$;

2) $\|c\boldsymbol{x}\| = |c| \cdot \|\boldsymbol{x}\|$ pro každé číslo $c \in \mathbb{R}$ a každý vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$;

3) $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leqq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ pro každé vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.

Druhá vlastnost se (někdy) nazývá *homogenita*, třetí pak *trojúhelníková nerovnost* nebo *subaditivita*.

Na množině $\mathbb{R}^n$ existuje nekonečně mnoho různých norem. Pokud budeme pracovat s více normami najednou, označíme je vhodným dolním indexem, např. $\|.\|_a$ a $\|.\|_b$, kde a, b jsou nějaké symboly. Uvedeme nyní příklady nejdůležitějších norem, které se praxi používají.

Nechť $p \geqq 1$ je reálné číslo. Pak funkce definovaná vztahem

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \tag{1.3}$$

je vektorová norma. Ověření prvních dvou vlastností normy je snadné, důkaz trojúhelníkové nerovnosti viz např. [15, str. 70].

Nejčastěji užívané speciální případy jsou

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}\|_1 &= |x_1| + \cdots + |x_n| && \text{(součtová norma)},\\
\|\boldsymbol{x}\|_2 &= \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} && \text{(eukleidovská norma)},\\
\|\boldsymbol{x}\|_\infty &= \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} && \text{(maximální norma)}.
\end{aligned}$$

Třetí norma není speciálním případem vzorce (1.3), ale snadno se ověří pomocí věty o limitě tří funkcí (viz [16, str. 70] nebo [33, str. 156]), že $\lim_{p\to\infty} \|\boldsymbol{x}\|_p = \|\boldsymbol{x}\|_\infty$. Označení je tedy logické.

Příklad 1.4 Je dán vektor $\boldsymbol{x} = [-1, 2, 3, -2]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4$. Vypočtěte jeho normy $\|\boldsymbol{x}\|_p$ pro $p = 1, 2, \infty$.

Řešení. Platí:

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}\|_1 &= |-1| + |2| + |3| + |-2| = 8,\\
\|\boldsymbol{x}\|_2 &= \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{18},\\
\|\boldsymbol{x}\|_\infty &= \max\{|-1|, |2|, |3|, |-2|\} = 3.
\end{aligned}$$

▲

Pro dva vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ se číslo $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ nazývá *vzdálenost vektorů* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ *v normě* $\|.\|$ (srovnejte se vzorcem pro vzdálenost dvou čísel). Dále pro vektor $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ a číslo $r > 0$ se množina $K(\boldsymbol{x}_0, r) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| \leqq r\}$ nazývá *uzavřená koule v normě* $\|.\|$ *se středem* $\boldsymbol{x}_0$ *a poloměrem* r. Je to tedy množina všech vektorů, které mají od pevného vektoru $\boldsymbol{x}_0$ vzdálenost nejvýše r. Podobně definujeme *otevřenou kouli*

$O(\boldsymbol{x}_0, r) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| < r\}$ a *kulovou plochu* $S(\boldsymbol{x}_0, r) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| = r\}$. Je-li $n = 2$, používáme místo názvu koule název kruh a místo názvu kulová plocha název kružnice. Pojmenování koule a kulová plocha resp. kruh a kružnice musíme brát s rezervou. Vzdálenost se měří pomocí dané normy, takže tvar těchto množin obecně neodpovídá tomu, co standardně tato slova označují, viz následující příklad.

Příklad 1.5 Nakreslete obrázky kruhů se středem v počátku a poloměrem $r > 0$ v $\mathbb{R}^2$ v normách $\|.\|_p$ pro $p = 1, 2, \infty$.

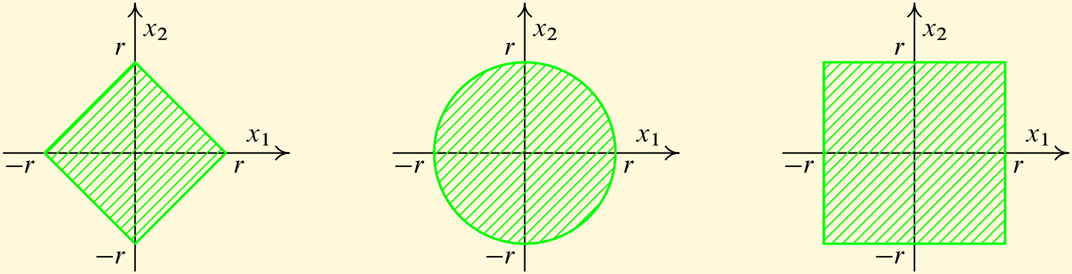
Řešení. Prvky množiny $\mathbb{R}^2$ lze ztotožnit s kartézskými souřadnicemi bodů v rovině. Hledáme tedy dvojice $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^{\mathrm{T}}$, pro něž platí $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{0}\| = \|\boldsymbol{x}\| \leqq r$ v uvedených normách.

1) Pro $p = 1$ dostaneme nerovnost $\|\boldsymbol{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| \leqq r$. Zjistíme, jak tato podmínka vypadá v jednotlivých kvadrantech.
   V prvním kvadrantu je $x_1 \geqq 0$ a $x_2 \geqq 0$, takže má platit $x_1 + x_2 \leqq r$. Body tudíž leží pod přímkou o rovnici $x_2 = -x_1 + r$.
   Ve druhém kvadrantu je $x_1 \leqq 0$ a $x_2 \geqq 0$, takže má platit $-x_1 + x_2 \leqq r$. Body tudíž leží pod přímkou o rovnici $x_2 = x_1 + r$.

Ve třetím kvadrantu je $x_1 \leqq 0$ a $x_2 \leqq 0$, takže má platit $-x_1 - x_2 \leqq r$. Body tudíž leží nad přímkou o rovnici $x_2 = -x_1 - r$.
Ve čtvrtém kvadrantu je $x_1 \geqq 0$ a $x_2 \leqq 0$, takže má platit $x_1 - x_2 \leqq r$. Body tudíž leží nad přímkou o rovnici $x_2 = x_1 - r$.
Výsledek je znázorněn na obr. 1.2 a). Jedná se o čtverec s vrcholy $[r, 0]$, $[0, r]$, $[-r, 0]$ a $[0, -r]$.

2) Pro $p = 2$ dostaneme nerovnost $\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leqq r$, tj. $x_1^2 + x_2^2 \leqq r^2$. Jedná se tedy o kruh v normálním slova smyslu, viz obr. 1.2 b), což se dalo čekat, protože jde o eukleidovskou normu.

3) Pro $p = \infty$ dostaneme nerovnost $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\} \leqq r$. Musí tudíž platit $|x_1| \leqq r$ i $|x_2| \leqq r$, tj. $-r \leqq x_1 \leqq r$ a současně $-r \leqq x_2 \leqq r$. Body splňující první podmínku leží mezi svislými přímkami o rovnicích $x_1 = -r$ a $x_1 = r$ a body splňující druhou podmínku leží mezi vodorovnými přímkami o rovnicích $x_2 = -r$ a $x_2 = r$. Výsledek je znázorněn na obr. 1.2 c). Jedná se o čtverec s vrcholy $[r, r]$, $[-r, r]$, $[-r, -r]$ a $[r, -r]$. ▲



a) Součtová norma b) Eukleidovská norma c) Maximální norma

Obr. 1.2: Kruh v $\mathbb{R}^2$ v různých normách

V dalším textu budeme pracovat s posloupnostmi vektorů. Protože dolními indexy jsou očíslovány složky vektorů, použijeme, tak jak je obvyklé, pro označení pořadí členů posloupnosti horní indexy v kulatých závorkách. Tedy

$$\boldsymbol{x}^{(k)} = [x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}]^{\mathrm{T}}, \qquad \text{kde } k \in \mathbb{N}.$$

Definice 1.6 Nechť $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$, $k = 1, 2, \ldots,$ je posloupnost vektorů v $\mathbb{R}^n$. Řekneme, že tato posloupnost *konverguje v normě* $\|.\|$ k vektoru $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ a píšeme $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{x}$ nebo $\boldsymbol{x}^{(k)} \to \boldsymbol{x}$ pro $k \to \infty$, právě když $\lim\limits_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}\| = 0$.

Konvergence v normě je tedy definována pomocí konvergence číselné posloupnosti $\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}\|$. Její hodnoty však závisí na volbě normy. Je tedy přirozené položit si otázku, zda je možné, že nějaká posloupnost v jedné normě konverguje, ale v jiné ne. K odpovědi na tuto otázku zavedeme následující pojem.

Definice 1.7 Řekneme, že dvě normy $\|.\|_a$ a $\|.\|_b$ na $\mathbb{R}^n$ jsou *ekvivalentní*, jestliže existují kladné konstanty c_1 a c_2 takové, že pro libovolný vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ platí nerovnosti $c_1\|x\|_a \leqq \|x\|_b \leqq c_2\|x\|_a$.

Je zřejmé, že pro ekvivalentní normy platí, že $\lim\limits_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}\|_a = 0$, právě když $\lim\limits_{k\to\infty} \|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}\|_b = 0$. Tedy ekvivalentní normy určují tytéž konvergentní posloupnosti vektorů. Jako příklad ekvivalentních norem lze uvést dvojici $\|.\|_1$ a $\|.\|_\infty$. Platí totiž:

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}\|_\infty &= \max\{|x_1|,\dots,|x_n|\} = |x_r| \leqq |x_1| + \dots + |x_n| = \\ &= \|x\|_1 \leqq \underbrace{|x_r| + \dots + |x_r|}_{n \text{ krát}} = n|x_r| = n\|\boldsymbol{x}\|_\infty.\end{aligned}$$

Lze tedy zvolit $c_1 = 1$ a $c_2 = n$. Tyto konstanty nelze zlepšit (c_1 zvětšit a c_2 zmenšit), protože pro $\boldsymbol{x} = [1, 0, \dots, 0]^\mathrm{T}$ platí $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1 = \|\boldsymbol{x}\|_1$ a pro $\boldsymbol{x} = [1, 1, \dots, 1]^\mathrm{T}$ platí $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = 1$ a $\|\boldsymbol{x}\|_1 = n$, tedy $\|\boldsymbol{x}\|_1 = n\|\boldsymbol{x}\|_\infty$.

Lze dokázat následující netriviální výsledek (viz např. [8, str. 157], [52, str. 209] nebo [54, str. 93 a 100]).

Věta 1.8 *Libovolné dvě vektorové normy na $\mathbb{R}^n$ jsou ekvivalentní.*

Z předchozí věty vyplývá, že pokud nějaká posloupnost vektorů konverguje v jedné normě, konverguje v jakékoli jiné a limita je vždy stejná. Dále je snadno vidět, že posloupnost vektorů $\boldsymbol{x}^{(k)}$ konverguje v normě $\|.\|_1$ k vektoru $\boldsymbol{x}$, právě když posloupnosti jednotlivých složek $x_i^{(k)}$, $i = 1, \dots, n$, konvergují ke složkám x_i. Ve spojení s větou 1.8 dostáváme následující důležitý výsledek.

Důsledek 1.9 *Posloupnost vektorů* $\boldsymbol{x}^{(k)}$ *konverguje v nějaké vektorové normě na* $\mathbb{R}^n$ *k vektoru* $\boldsymbol{x}$*, právě když* $\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$ *pro každé* $i = 1, \ldots, n$.

Tedy konvergence posloupnosti vektorů v libovolné normě je ekvivalentní s konvergencí číselných posloupností složek (mluvíme o konvergenci po složkách). Zdánlivě by tudíž stačilo vybrat a používat jen jednu normu. Ukazuje se však, že to není pravda, v různých situacích je výhodné pracovat s různými normami.

Poznámka 1.10 Doposud jsme pracovali s vektory, jejichž složky byla reálná čísla. Analogicky je možné uvažovat vektory, jejichž složky jsou komplexní čísla. Množinu všech takových sloupcových matic označíme $\mathbb{C}^n$. Ukazuje se, že všechny pojmy, které jsme zavedli v tomto oddílu, je možné beze změn přenést i na komplexní případ. (U eukleidovské normy musí být místo x_i^2, což nemusí být reálné číslo, $|x_i|^2$.) Rovněž všechna uvedená tvrzení zůstávají v platnosti.

1.7.2 Maticové normy

Podobně jako je v nejrůznějších částech matematiky třeba pracovat s řádky nebo sloupci čísel, je často potřebné pracovat se soubory čísel uspořádanými do obdélníkových schémat, tedy s maticemi. I v případě matic je žádoucí mít možnost posuzovat, jak je daná matice „velká“ nebo jak jsou dvě matice „vzdálené“.

Označme $\mathbb{M}_{m,n}$ množinu všech obdélníkových matic o m řádcích a n sloupcích s reálnými prvky. Je-li $m = n$, tj. jde-li o čtvercové matice, použijeme označení $\mathbb{M}_n$. Připomeňme, že pro libovolné matice $A, B \in \mathbb{M}_{m,n}$ a libovolné číslo $c \in \mathbb{R}$ je definován součet matic $A + B$ a násobek matice číslem cA.

Naskládáme-li prvky matice z množiny $\mathbb{M}_{m,n}$ do jednoho sloupce, dostaneme vlastně vektor z množiny $\mathbb{R}^{m \times n}$. Při tomto ztotožnění si budou odpovídat i operace sečítání matic a násobení matice číslem. Nepřekvapí proto, že definice normy matice bude téměř identická s definicí normy vektoru (což je vlastně sloupcová matice).

Definice 1.11 Funkce, která každé matici $A \in \mathbb{M}_{m,n}$ přiřazuje reálné číslo $\|A\|$, se nazývá (maticová) *norma na* $\mathbb{M}_{m,n}$, jestliže má následující vlastnosti:

1) $\|A\| \geqq 0$ pro každou matici $A \in \mathbb{M}_{m,n}$, přičemž $\|A\| = 0$ právě tehdy, když $A = O$;
2) $\|cA\| = |c| \cdot \|A\|$ pro každé číslo $c \in \mathbb{R}$ a každou matici $A \in \mathbb{M}_{m,n}$;
3) $\|A + B\| \leqq \|A\| + \|B\|$ pro každé matice $A, B \in \mathbb{M}_{m,n}$.

Druhá vlastnost se (někdy) nazývá *homogenita*, třetí pak *trojúhelníková nerovnost* nebo *subaditivita*.

Na množině $\mathbb{M}_{m,n}$ existuje nekonečně mnoho různých norem. Pokud budeme pracovat s více normami najednou, označíme je vhodným dolním indexem, např. $\|.\|_a$ a $\|.\|_b$, kde a, b jsou nějaké symboly. Uvedeme nyní příklady tří norem, které jsou analogiemi vektorových norem $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ a $\|.\|_\infty$.

$$\|A\|_S = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{(součtová norma)},$$

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} \qquad \text{(Frobeniova}^1 \text{ norma)},$$

$$\|A\|_M = \max_{\substack{i=1,\dots,m,\\ j=1,\dots,n}} \{|a_{ij}|\} \qquad \text{(maximální norma)}.$$

[1] **Ferdinand Georg Frobenius** (1849–1917) — německý matematik. Zabýval se zejména algebrou.

Frobeniova norma je také známá pod názvy Hilbertova[1]-Schmidtova[2] norma nebo Schurova[3] norma.

Pro maticové normy se zavádějí obdobné pojmy a platí obdobné výsledky jako pro vektorové normy. Nebudeme je podrobně vypisovat, uvedeme jen stručný přehled.

1. Pro posloupnost matic $A^{(k)} \in \mathbb{M}_{m,n}$, $k = 1, 2, \ldots,$ a matici $A \in \mathbb{M}_{m,n}$ definujeme, že $\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)} = A$ v normě $\|.\|$, právě když $\lim\limits_{k\to\infty} \|A^{(k)} - A\| = 0$ (definice 1.6).
2. Stejným způsobem se zavádí ekvivalentní maticové normy (definice 1.7). Ty určují tytéž konvergentní posloupnosti matic v $\mathbb{M}_{m,n}$.
3. Všechny maticové normy v $\mathbb{M}_{m,n}$ jsou ekvivalentní (věta 1.8).

---

[1] **David Hilbert** (1862–1943) — významný německý matematik. Ovlivnil řadu matematických oborů. Je považován za jednoho z nejvýznamnějších matematiků všech dob. Na 2. mezinárodním kongresu matematiků v Paříži v roce 1900 předložil 23 otevřených problémů, dnes nazývaných Hilbertovy problémy, které považoval za klíčové pro další rozvoj matematiky. Ne všechny byly dodnes vyřešeny.

[2] **Erhard Schmidt** (1876–1959) (čti šmid) — německý matematik. Zabýval se integrálními rovnicemi a topologií.

[3] **Issai Schur** (1875–1941) (čti šur) — německý matematik židovského původu narozený v Rusku. Zabýval se reprezentací grup.

4. Posloupnost matic $A^{(k)} \in \mathbb{M}_{m,n}$ konverguje v nějaké normě k matici $A \in \mathbb{M}_{m,n}$ právě tehdy, když konvergují posloupnosti jednotlivých složek, tj. $\lim\limits_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ (důsledek 1.9).

Pro matice však existuje ještě jedna důležitá operace, a to násobení matic. Pro matici $A \in \mathbb{M}_{m,n}$ a vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je jejich součin $A\boldsymbol{x}$ vektorem v $\mathbb{R}^m$ a pro matice $A \in \mathbb{M}_{m,n}$ a $B \in \mathbb{M}_{n,p}$ je jejich součin AB maticí v $\mathbb{M}_{m,p}$. Na začátku oddílu 1.7 jsme mluvili o absolutní hodnotě, která byla inspirací pro definici normy. Jednou z vlastností absolutní hodnoty je, že pro součin dvou čísel platí $|ab| = |a| \cdot |b|$. Tento požadavek však pro normy nelze rozumně splnit. Nicméně v mnoha aplikacích je podstatné umět odhadnout normu součinu pomocí norem činitelů. Proto se zavádějí následující dva důležité pojmy.

Definice 1.12

1) Nechť $\|.\|_a$ je vektorová norma na $\mathbb{R}^n$, $\|.\|_b$ je vektorová norma na $\mathbb{R}^m$ a $\|.\|$ je maticová norma na $\mathbb{M}_{m,n}$.
   Řekneme, že *maticová norma* $\|.\|$ *je souhlasná s vektorovými normami* $\|.\|_a$ *a* $\|.\|_b$, jestliže nerovnost $\|A\boldsymbol{x}\|_b \leqq \|A\| \cdot \|\boldsymbol{x}\|_a$ platí pro libovolnou matici $A \in \mathbb{M}_{m,n}$ a libovolný vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.
   Speciálně, je-li $\|.\|_a = \|.\|_b$ (nemusí nutně platit $m = n$, touto rovností se myslí, že normy jsou dány obdobnými vzorci, viz např. (1.3)), říkáme, že *maticová norma* $\|.\|$ *je souhlasná s vektorovou normou* $\|.\|_a$.
2) Nechť $\|.\|$ je maticová norma definovaná na $\mathbb{M}_{m,n}$ pro libovolné rozměry m a n.
   Řekneme, že *maticová norma* $\|.\|$ *je submultiplikativní*, jestliže nerovnost $\|AB\| \leqq$ $\leqq \|A\| \cdot \|B\|$ platí pro libovolnou dvojici matic $A \in \mathbb{M}_{m,n}$ a $B \in \mathbb{M}_{n,p}$.

Požadavek submultiplikativity se často zahrnuje do definice 1.11 maticové normy.

Lze např. ukázat, že Frobeniova maticová norma je souhlasná s eukleidovskou vektorovou normou, tj. platí $\|A\boldsymbol{x}\|_2 \leqq \|A\|_F \cdot \|\boldsymbol{x}\|_2$. Dále platí, že Frobeniova norma je submultiplikativní, tedy $\|AB\|_F \leqq \|A\|_F \cdot \|B\|_F$.

Konstrukce operátorové normy

V obecném případě však bohužel výše uvedené dvě důležité vlastnosti norem neplatí. Proto si nyní popíšeme konstrukci, která ke dvojici vektorových norem přiřadí jistou „nejmenší“ souhlasnou maticovou normu.

Nechť $\|.\|_a$ je vektorová norma na $\mathbb{R}^n$, $\|.\|_b$ je vektorová norma na $\mathbb{R}^m$ a $A \in \mathbb{M}_{m,n}$ je libovolná matice. Uvažujme množinu všech jednotkových vektorů v $\mathbb{R}^n$, tj. takových vektorů $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, pro něž platí $\|\boldsymbol{x}\|_a = 1$. Tyto vektory tvoří jednotkovou kulovou plochu $S(\boldsymbol{0}, 1)$ v normě $\|.\|_a$ v $\mathbb{R}^n$. Lze ukázat, že reálná nezáporná funkce $\|A\boldsymbol{x}\|_b$ na $S(\boldsymbol{0}, 1)$ nabývá největší i nejmenší hodnotu. Největší hodnotu označíme symbolem $\|A\|_{a,b}$. Tedy

$$\|A\|_{a,b} = \max_{\|\boldsymbol{x}\|_a=1} \|A\boldsymbol{x}\|_b. \tag{1.4}$$

Věta 1.13 *Funkce $\|A\|_{a,b}$ definovaná vztahem (1.4) je maticová norma na $\mathbb{M}_{m,n}$.*

Důkaz. Zřejmě $\|A\|_{a,b} \geqq 0$ a $\|O\|_{a,b} = 0$. Je-li $A \neq O$, existuje $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\|\boldsymbol{x}\|_a = 1$, takový, že $A\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, takže $\|A\boldsymbol{x}\|_b > 0$. Tedy musí platit $\|A\|_{a,b} > 0$.

Pro $c \in \mathbb{R}$ je $\|cA\boldsymbol{x}\|_b = |c| \cdot \|A\boldsymbol{x}\|_b$, takže $\max\limits_{\|\boldsymbol{x}\|_a=1} \|cA\boldsymbol{x}\|_b = |c| \max\limits_{\|\boldsymbol{x}\|_a=1} \|A\boldsymbol{x}\|_b$. To znamená, že $\|cA\|_{a,b} = |c| \cdot \|A\|_{a,b}$.

Konečně pro libovolný vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\|\boldsymbol{x}\|_a = 1$, je $\|(A+B)\boldsymbol{x}\|_b = \|A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{x}\|_b \leqq \|A\boldsymbol{x}\|_b + \|B\boldsymbol{x}\|_b \leqq \|A\|_{a,b} + \|B\|_{a,b}$, takže musí platit nerovnost $\|A+B\|_{a,b} \leqq \|A\|_{a,b} + \|B\|_{a,b}$. □

O maticové normě $\|.\|_{a,b}$ říkáme, že je *indukovaná vektorovými normami* $\|.\|_a$ *a* $\|.\|_b$ nebo že je *přidružená k vektorovým normám* $\|.\|_a$ *a* $\|.\|_b$.

Je-li $\|.\|_a = \|.\|_b$ (nemusí platit $m = n$, touto rovností se myslí, že normy jsou dány obdobnými vzorci), používáme (pokud nemůže dojít nedorozumění) pro normu matice A rovněž označení $\|A\|_a$ a říkáme, že *maticová norma* $\|.\|_a$ *je indukovaná vektorovou normou* $\|.\|_a$ nebo že *maticová norma* $\|.\|_a$ *je přidružená k vektorové normě* $\|.\|_a$.

Maticová norma indukovaná nějakými vektorovými normami se nazývá *operátorová maticová norma*.

Uvedeme dva další vztahy, pomocí nichž lze ekvivalentně maticovou normu $\|.\|_{a,b}$ definovat.

Pro nenulový vektor $\boldsymbol{x}$ platí $\left\|\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|_a}\right\|_a = \left\|\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|_a}\boldsymbol{x}\right\|_a = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|_a}\|\boldsymbol{x}\|_a = 1$ (použili jsme homogenitu normy). Dále $A\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|_a}\right) = A\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|_a}\boldsymbol{x}\right) = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|_a}A\boldsymbol{x}$ (podle pravidel pro násobení matice číslem). Tedy (opět použijeme homogenitu normy) platí, že $\left\|A\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|_a}\right)\right\|_b =$

$= \left\| \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|_a} A\boldsymbol{x} \right\|_b = \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|_a} \|A\boldsymbol{x}\|_b$. Probíhá-li $\boldsymbol{x}$ všechny nenulové vektory v $\mathbb{R}^n$, pak $\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|_a}$ probíhá všechny vektory v $S(\boldsymbol{0}, 1)$. Platí tudíž, že

$$\|A\|_{a,b} = \max_{\|\boldsymbol{x}\|_a = 1} \|A\boldsymbol{x}\|_b = \max_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_b}{\|\boldsymbol{x}\|_a}\,. \tag{1.5}$$

Z předchozího vztahu plyne důležitý poznatek, že pro libovolný nenulový vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ je splněna nerovnost $\|A\boldsymbol{x}\|_b \leqq \|A\|_{a,b} \cdot \|\boldsymbol{x}\|_a$. Ta platí triviálně i pro nulový vektor. Přitom číslo $\|A\|_{a,b}$ je nejmenší konstanta k, pro niž platí pro všechna $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ nerovnost $\|A\boldsymbol{x}\|_b \leqq k\|\boldsymbol{x}\|_a$. Dostáváme následující tvrzení.

Důsledek 1.14 *Maticová norma $\|.\|_{a,b}$ je souhlasná s vektorovými normami $\|.\|_a$ a $\|.\|_b$, které ji indukují.*

Ze vztahu (1.5) rovněž plyne, že norma $\|.\|_{a,b}$ je nejmenší maticová norma, která je souhlasná s vektorovými normami $\|.\|_a$ a $\|.\|_b$.

Nechť $A \in \mathbb{M}_{m,n}$ a $B \in \mathbb{M}_{n,p}$. Jestliže na $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^p$ zvolíme tutéž vektorovou normu $\|.\|_a$, bude pro $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p$ platit, že $\|AB\boldsymbol{x}\|_a \leqq \|A\|_a \cdot \|B\boldsymbol{x}\|_a \leqq \|A\|_a \cdot \|B\|_a \cdot \|\boldsymbol{x}\|_a$. Protože $\|AB\|_a$ je nejmenší číslo k, které splňuje nerovnost $\|AB\boldsymbol{x}\|_a \leqq k\|\boldsymbol{x}\|_a$, dostáváme, že $\|AB\|_a \leqq \|A\|_a \cdot \|B\|_a$. Tudíž:

Důsledek 1.15 *Maticová norma $\|.\|_a$ indukovaná vektorovou normou $\|.\|_a$ je submultiplikativní.*

Nechť $\|.\|_{a,b}$ je maticová norma indukovaná vektorovými normami $\|.\|_a$ a $\|.\|_b$. Pro $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\|\boldsymbol{x}\|_a \leqq 1$, dostaneme, že $\|A\boldsymbol{x}\|_b \leqq \|A\|_{a,b} \cdot \|\boldsymbol{x}\|_a \leqq \|A\|_{a,b}$, odkud $\max\limits_{\|\boldsymbol{x}\| \leqq 1} \|A\boldsymbol{x}\|_b \leqq \|A\|_{a,b}$. Na druhé straně, jelikož $S(\boldsymbol{0}, 1) \subseteq K(\boldsymbol{0}, 1)$, platí, že $\|A\|_{a,b} = \max\limits_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|A\boldsymbol{x}\|_b \leqq \max\limits_{\|\boldsymbol{x}\| \leqq 1} \|A\boldsymbol{x}\|_b$. Tedy $\|A\|_{a,b} = \max\limits_{\|\boldsymbol{x}\| \leqq 1} \|A\boldsymbol{x}\|_b$ a můžeme doplnit vztah (1.5) o třetí ekvivalentní definici. Maticovou normu indukovanou vektorovými normami můžeme tudíž definovat kterýmkoliv z následujících výrazů.

$$\|A\|_{a,b} = \max_{\|\boldsymbol{x}\|_a=1} \|A\boldsymbol{x}\|_b = \max_{\|\boldsymbol{x}\|_a \leqq 1} \|A\boldsymbol{x}\|_b = \max_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_b}{\|\boldsymbol{x}\|_a}\,. \tag{1.6}$$

Nejužívanější operátorové maticové normy

Uvažujme matici $A \in \mathbb{M}_{m,n}$. Na množinách $\mathbb{R}^m$ a $\mathbb{R}^n$ budeme vždy uvažovat tutéž vektorovou normu $\|.\|_p$, kde $p = 1, 2$ nebo ∞. Půjde tedy o součtovou, eukleidovskou nebo maximální vektorovou normu. Lze ukázat, že maticové normy $\|.\|_p$ indukované těmito vektorovými normami mají následující vzorce (viz např. [18, str. 167] nebo [52, str. 210]).

1) $\|A\|_1 = \max\limits_{j=1,\dots,n} \sum\limits_{i=1}^{m} |a_{ij}|.$

   Norma $\|A\|_1$ je tedy rovna maximu sloupcových součtů absolutních hodnot prvků matice A.

2) $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}}$, kde $\lambda_{\max}$ je největší vlastní číslo matice $A^{\mathrm{T}}A$.

3) $\|A\|_\infty = \max\limits_{i=1,\dots,m} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$

   Norma $\|A\|_\infty$ je tedy rovna maximu řádkových součtů absolutních hodnot prvků matice A.

Vzorec pro maticovou normu $\|.\|_2$ potřebuje jisté vysvětlení. Čtvercová matice B se nazývá *symetrická*, jestliže platí $B^{\mathrm{T}} = B$. Je-li $B \in \mathbb{M}_n$ symetrická a pro libovolný nenulový vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ platí $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} B \boldsymbol{x} > 0$ ($\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} B \boldsymbol{x} \geqq 0$), nazývá se matice B *pozitivně definitní* (*semidefinitní*). Viz též str. 225. Uvědomte si, že $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} B \boldsymbol{x}$ je jednorozměrná matice, tj. číslo.

Lze dokázat, že všechna vlastní čísla, tj. kořeny charakteristického polynomu, pozitivně definitní (semidefinitní) matice jsou reálná a kladná (nezáporná). Matice $A^{\mathrm{T}}A$ je symetrická, protože $(A^{\mathrm{T}}A)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A$. Je rovněž pozitivně semidefinitní, protože $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} = (A\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} = \|A\boldsymbol{x}\|_2^2 \geqq 0$. Tudíž $\lambda_{\max} \geqq 0$ a zmíněný vzorec má smysl.

Podle důsledku 1.14 jsou všechny tři výše uvedené maticové normy souhlasné s normou, která je indukuje, tj. platí $\|A\boldsymbol{x}\|_p \leqq \|A\|_p \cdot \|\boldsymbol{x}\|_p$, kde $p = 1, 2, \infty$. Podle důsledku 1.15 jsou tyto normy rovněž submultiplikativní, tj. platí $\|AB\|_p \leqq \|A\|_p \cdot \|B\|_p$, kde $p = 1, 2, \infty$.

Příklad 1.16 Vypočtěte maticové normy $\|A\|_S$, $\|A\|_F$, $\|A\|_M$, $\|A\|_1$, $\|A\|_2$ a $\|A\|_\infty$ pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Pomocí výše uvedených vzorců dostaneme:

$$\begin{aligned}
\|A\|_S &= |2| + |-1| + |0| + |-3| + |1| + |-2| = 9,\\
\|A\|_F &= \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2 + (-3)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{19},\\
\|A\|_M &= \max\{|2|, |-1|, |0|, |-3|, |1|, |-2|\} = 3,\\
\|A\|_1 &= \max\{|2| + |-3|, |-1| + |1|, |0| + |-2|\} = 5,\\
\|A\|_\infty &= \max\{|2| + |-1| + |0|, |-3| + |1| + |-2|\} = 6.
\end{aligned}$$

K určení normy $\|A\|_2$ musíme nejprve spočítat matici $A^{\mathrm{T}}A$, najít její charakteristický polynom a vypočítat jeho kořeny. Vyjde:

$$A^{\mathrm{T}}A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -5 & 6 \\ -5 & 2 & -2 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\det(A^{\mathrm{T}}A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 13-\lambda & -5 & 6 \\ -5 & 2-\lambda & -2 \\ 6 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 19\lambda^2 - 21\lambda.$$

Jeden kořen je $\lambda_1 = 0$. Zbývající dva dostaneme řešením kvadratické rovnice $\lambda^2 - 19\lambda + 21 = 0$:

$$\lambda_{2,3} = \frac{19 \pm \sqrt{277}}{2}.$$

Tedy

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}} = \sqrt{\frac{19 + \sqrt{277}}{2}} \doteq 4{,}222.$$

▲

Poznámka 1.17 Je-li $\|.\|$ operátorová norma na $\mathbb{M}_n$ indukovaná nějakou vektorovou normou na $\mathbb{R}_n$, je z její definice zřejmé, že $\|E\| = 1$, kde $E \in \mathbb{M}_n$ je jednotková matice. Protože $\|E\|_F = \sqrt{n}$, je jasné, že Frobeniova norma není pro $n > 1$ operátorová.

Poznámka 1.18 Výsledky tohoto oddílu platí i pro matice, jejichž prvky jsou komplexní čísla — srovnejte poznámku 1.10. Je pouze třeba provést několik drobných modifikací. Vektory budou prvky množiny $\mathbb{C}^n$.

V definici Frobeniovy normy je třeba změnit a_{ij}^2 (což nemusí být reálné číslo) na $|a_{ij}|^2$. Ve vzorci pro maticovou normu $\|.\|_2$ je třeba matici $A^{\mathrm{T}}A$ nahradit maticí A^*A. Zde A^* značí matici *konjugovanou* k A^{T}. Ta je rovna matici A^{T}, jejíž prvky se nahradí komplexně sdruženými čísly. Čtvercová matice $B = A^*A$ je pak tzv. *hermitovská*, což znamená, že pro ni platí $B^* = B$. Definice pozitivně definitní resp. semidefinitní matice se zavádí pro hermitovské matice. Pro nenulové vektory $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ musí platit $\boldsymbol{x}^* B \boldsymbol{x} > 0$ resp. $\boldsymbol{x}^* B \boldsymbol{x} \geqq 0$, kde B je hermitovská matice. (Lze ověřit, že $\boldsymbol{x}^* B \boldsymbol{x}$ je pro hermitovskou matici reálné číslo.) Všechna vlastní čísla pozitivně definitních resp. semidefinitních matic jsou reálná a kladná resp. nezáporná.

1.7.3 Číslo podmíněnosti čtvercové matice

Předpokládejme, že $\|.\|$ je maticová norma na množině čtvercových matic $\mathbb{M}_n$, která je submultiplikativní, je souhlasná s vektorovou normou $\|.\|$ na $\mathbb{R}^n$ a platí, že $\|E\| = 1$. Například to může být operátorová maticová norma indukovaná nějakou vektorovou normou — viz důsledky 1.14, 1.15 a poznámka 1.17.

Připomeňme, že čtvercová matice A se nazývá *regulární*, právě když $\det A \neq 0$. Tato vlastnost je současně ekvivalentní existenci inverzní matice A^{-1}.

Definice 1.19 Nechť A je regulární čtvercová matice. Číslo $\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ se nazývá *číslo podmíněnosti matice* A.

Jak uvidíme v kapitole 3, číslo podmíněnosti matice má zásadní význam při vyšetřování citlivosti numerického řešení soustav lineárních algebraických rovnic na chybách ve vstupních datech a zaokrouhlovacích chybách.

Číslo podmíněnosti závisí pochopitelně na volbě konkrétní maticové normy. V aplikacích to však většinou nehraje podstatnou roli.

Vzhledem k předpokladům, které jsme udělali o použité maticové normě, platí

$$1 = \|E\| = \|AA^{-1}\| \leqq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \kappa(A).$$

Pro libovolnou čtvercovou matici je proto $\kappa(A) \geqq 1$. Je-li $\kappa(A) \approx 1$, nazývá se matice *dobře podmíněná*. Je-li $\kappa(A)$ hodně větší než jedna, je matice *špatně podmíněná* — srovnejte definici podmíněnosti korektní úlohy na str. 30.

Na závěr uvedeme ještě jedno vyjádření čísla podmíněnosti matice. Je-li A regulární matice a vektor $\boldsymbol{x}$ probíhá všechny nenulové vektory množiny $\mathbb{R}^n$, pak také vektory $A\boldsymbol{x}$ probíhají celou tuto množinu. Jak již bylo zmíněné před vztahem (1.4), funkce $\|A\boldsymbol{x}\|$ nabývá na $S(\boldsymbol{0}, 1)$ i minimum, které musí být pro regulární matici kladné, protože $A\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ pro $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$. Vypočítáme nyní normu inverzní matice. Vyjde:

$$\|A^{-1}\| = \max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\|A^{-1}\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} = \max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\|A^{-1}A\boldsymbol{x}\|}{\|A\boldsymbol{x}\|} =$$

$$= \max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\|\boldsymbol{x}\|}{\|A\boldsymbol{x}\|} = \frac{1}{\min\limits_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}} = \frac{1}{\min\limits_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|A\boldsymbol{x}\|}.$$

Dostáváme tak, že

$$\kappa(A) = \frac{\max\limits_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|A\boldsymbol{x}\|}{\min\limits_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|A\boldsymbol{x}\|} = \left(\max_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\right) \cdot \left(\min_{\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\right)^{-1}.$$

Pro singulární matici je $\min\limits_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|A\boldsymbol{x}\| = 0$, proto je pro takovou matici rozumné položit $\kappa(A) = \infty$.

1.7.4 Spektrální poloměr

Uvažujme čtvercovou matici A s reálnými nebo komplexními prvky. Připomeňme, že vlastní čísla matice A jsou kořeny charakteristického polynomu $\det(A - \lambda E)$. Obecně jsou to komplexní čísla (i v případě, že matice A je reálná).

Definice 1.20 Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice A. Číslo

$$\rho(A) = \max_{i=1,\ldots,n} |\lambda_i| \tag{1.7}$$

se nazývá *spektrální poloměr matice* A.

Spektrální poloměr hraje důležitou roli např. při vyšetřování konvergence iteračních metod řešení soustav lineárních rovnic. Určit jej je obecně poměrně obtížné, avšak jeho velikost lze odhadnout pomocí vhodné maticové normy.

V následující větě předpokládáme, že použitá maticová norma je souhlasná s nějakou vektorovou normou. Protože vlastní čísla mohou být komplexní, a tudíž složky příslušných vlastních vektorů mohou být rovněž komplexní, je třeba obecně pracovat s vektorovými normami na $\mathbb{C}^n$ a maticovými normami, které jsou určeny pro matice s komplexními prvky — viz poznámky 1.10 a 1.18.

Věta 1.21 *Nechť A je čtvercová matice. Pak pro její spektrální poloměr platí nerovnost $\rho(A) \leqq \|A\|$, kde $\|.\|$ je libovolná maticová norma, která je souhlasná s nějakou vektorovou normou.*

Důkaz. Nechť uvažovaná maticová norma je souhlasná s vektorovou normou $\|.\|_a$. Předpokládejme, že λ je vlastní číslo matice A příslušné vlastnímu vektoru $\boldsymbol{x}$. Ze vztahu $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ dostaneme:

$$|\lambda| \cdot \|\boldsymbol{x}\|_a = \|\lambda\boldsymbol{x}\|_a = \|A\boldsymbol{x}\|_a \leqq \|A\| \cdot \|\boldsymbol{x}\|_a.$$

Protože $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, je $\|\boldsymbol{x}\|_a > 0$, takže z předchozí nerovnosti dostaneme, že $|\lambda| \leqq \|A\|$. Jelikož vlastní číslo λ bylo libovolné, platí dokazovaná nerovnost. □

1.7.5 Skalární součin

V oddílu 4.3 budou použity některé poznatky o ortogonálních vektorech v $\mathbb{R}^n$. Uvedeme nyní proto stručný přehled potřebných pojmů a výsledků.

Definice 1.22 Funkce, která každé dvojici vektorů $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ přiřazuje reálné číslo $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, se nazývá *skalární součin na* $\mathbb{R}^n$, jestliže jsou splněny následující čtyři vlastnosti:

1) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ pro každé vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$;

2) $(c\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ pro každé číslo $c \in \mathbb{R}$ a každé vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$;

3) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ pro každé vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$;

4) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0$ pro každý nenulový vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

První vlastnost se nazývá *komutativní zákon*, druhá *homogenita v první složce* a třetí *pravý distributivní zákon*. Poznamenejme, že v elementární analytické geometrii a ve fyzice se skalární součin obvykle značí tečkou, tj. $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$. Naše označení má však své přednosti, zejména při zápisu složitějších výrazů.

Z definice skalárního součinu se snadno odvodí další vlastnosti, které pro něj platí.

a) $(\boldsymbol{x}, c\boldsymbol{y}) = (c\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = c(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ pro každé číslo $c \in \mathbb{R}$ a každé vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.
Platí tedy i homogenita ve druhé složce.

b) $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$ pro každé vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$.
Platí tedy i levý distributivní zákon.

c) $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}) = (0 \cdot \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}) = 0(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}) = 0$ pro každý vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.
Tedy skalární součin nulového vektoru s libovolným dalším vektorem je číslo nula. Čtvrtou vlastnost skalárního součinu lze proto zformulovat také tak, že $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqq 0$ pro každý vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, přičemž rovnost nastane pouze pro nulový vektor.

Skalární součin úzce souvisí s vektorovou normou, což je obsahem následující věty. Ta říká, že na prostoru se skalárním součinem je dána jistá přirozená norma.

Věta 1.23 *Nechť je na $\mathbb{R}^n$ dán skalární součin. Pak funkce $\|.\|$ daná vztahem*

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{1.8}$$

je vektorová norma na $\mathbb{R}^n$. Říkáme, že tato norma je indukovaná skalárním součinem.

Důkaz. První vlastnost normy je zřejmá. Ověření druhé vlastnosti normy je snadné. Pro $c \in \mathbb{R}$ a $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ s využitím homogenity v obou složkách vyjde

$$\|c\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(c\boldsymbol{x}, c\boldsymbol{x})} = \sqrt{c^2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = \sqrt{c^2}\sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = |c| \cdot \|\boldsymbol{x}\|.$$

Třetí vlastnost, trojúhelníková nerovnost, se odvodí pomocí důležité nerovnosti, známé pod jmény *Cauchyova*[1]*-Bunjakovského*[2]*-Schwarzova*[3], která říká, že pro libovolné vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leqq \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|, \tag{1.9}$$

kde $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ a $\|\boldsymbol{y}\| = \sqrt{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})}$. Důkaz viz např. [36, str. 66]. S využitím

[1] **Augustin-Louis Cauchy** (1789–1857) (čti koši) — vynikající francouzský matematik, autor 789 prací. Položil základy současné matematiky, zejména analýzy.

[2] **Viktor Jakovlevič Bunjakovskij** (1804–1889) — ruský matematik. Zabýval se teorií čísel, geometrií a aplikovanou matematikou.

[3] **Hermann Amandus Schwarz** (1843–1921) (čti švarc) — německý matematik. Zabýval se analýzou a jejími aplikacemi v geometrii.

distributivního a komutativního zákona a této nerovnosti dostaneme:

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 &= (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) = \\ &= \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2 \leqq \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{y}\|^2 = \\ &= (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2.\end{aligned}$$

Po odmocnění obdržíme trojúhelníkovou nerovnost. □

Nejdůležitějším příkladem skalárního součinu na $\mathbb{R}^n$ je tzv. *standardní skalární součin*, který je dán vzorcem

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Jím indukovaná vektorová norma je pak

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2},$$

což je nám již známá eukleidovská norma, kterou značíme $\|\boldsymbol{x}\|_2$.

Není těžké popsat všechny skalární součiny na $\mathbb{R}^n$. Protože však v dalším textu budeme potřebovat právě standardní skalární součin, další příklady nebudeme uvádět. Nicméně následující výsledky platí pro libovolné skalární součiny.

Poznámka 1.24 Viděli jsme, že eukleidovskou vektorovou normu lze indukovat skalárním součinem. Je přirozené položit si otázku, zda každá vektorová norma může být indukovaná nějakým skalárním součinem. Odpověď je negativní.

Pomocí vlastností skalárního součinu se snadno ověří, že pro normu indukovanou skalárním součinem, tj. danou vztahem (1.8), platí identita

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = 2\|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\|\boldsymbol{y}\|^2.$$

Lze ukázat, že tato podmínka je i postačující. Důkaz není triviální, viz např. [32, str. 68].

Pravoúhlý průmět vektoru na podprostor

V oddílu 4.3 budeme potřebovat umět rozložit daný vektor na součet dvou kolmých vektorů. Zavést pojem kolmosti nám umožní právě skalární součin.

Definice 1.25 Předpokládejme, že na $\mathbb{R}^n$ je dán skalární součin $(\cdot, \cdot)$.
Řekneme, že dva vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ jsou *ortogonální* neboli *kolmé* (vzhledem k tomuto skalárnímu součinu) a píšeme $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$, jestliže platí

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0. \tag{1.10}$$

Dále řekneme, že vektor $\boldsymbol{x}$ je *ortogonální* nebo *kolmý* k množině vektorů $A \subset \mathbb{R}^n$ a píšeme $\boldsymbol{x} \perp A$, jestliže je vektor $\boldsymbol{x}$ ortogonální ke každému vektoru $\boldsymbol{y} \in A$.

V případě množin $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem, jejichž geometrickými modely jsou rovina a (trojrozměrný) prostor s eukleidovskou vzdáleností, jde o obvyklý pojem kolmosti, jak ho známe z analytické geometrie.

Nechť $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \dots, \boldsymbol{x}^{(m)} \in \mathbb{R}^n$ je daná množina m vektorů. Uvažujme nyní množinu $U \subset \mathbb{R}^n$ všech vektorů $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tvaru

$$\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{x}^{(1)} + c_2\boldsymbol{x}^{(2)} + \cdots + c_m\boldsymbol{x}^{(m)}, \tag{1.11}$$

kde $c_1, c_2, \ldots, c_m$ jsou libovolná reálná čísla. Říkáme, že vektor $\boldsymbol{x}$ je *lineární kombinací vektorů* $\boldsymbol{x}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(m)}$ *s koeficienty* $c_1, \ldots, c_m$. Množina U se nazývá *podprostor* $\mathbb{R}^n$ *generovaný vektory* $\boldsymbol{x}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(m)}$ a použijeme pro ni označení

$$U = [\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(m)}].$$

Snadno je vidět, že pokud $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U$ a c je libovolné číslo, pak také $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in U$ a $c\boldsymbol{x} \in U$. Vektory $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ mají totiž vyjádření $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{x}^{(1)} + \cdots + c_m\boldsymbol{x}^{(m)}$ a $\boldsymbol{y} = d_1\boldsymbol{x}^{(1)} + \cdots + d_m\boldsymbol{x}^{(m)}$, takže

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} &= (c_1 + d_1)\boldsymbol{x}^{(1)} + \cdots + (c_m + d_m)\boldsymbol{x}^{(m)},\\ c\boldsymbol{x} &= cc_1\boldsymbol{x}^{(1)} + \cdots + cc_m\boldsymbol{x}^{(m)},\end{aligned}$$

což jsou opět vektory mající vyjádření ve tvaru (1.11). Tedy množina U s každými dvěma vektory obsahuje jejich součet a s každým vektorem obsahuje jeho libovolný násobek.

Právě podmnožiny $\mathbb{R}^n$ mající tyto dvě vlastnosti se nazývají podprostory $\mathbb{R}^n$. Všimněte si, že zejména $\boldsymbol{x}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(m)} \in U$. Pro libovolné $i = 1, \ldots, m$ stačí položit $c_i = 1$ a $c_j = 0$ pro $i \neq j$. Pak $c_1\boldsymbol{x}^{(1)} + \cdots + c_m\boldsymbol{x}^{(m)} = \boldsymbol{x}^{(i)}$.

Dále uvažujme vektory $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, které jsou ortogonální k množině U, tj. $\boldsymbol{x} \perp U$. Množinu všech takových vektorů nazýváme *ortogonální doplněk* U a značíme ji $U^\perp$. Tedy

$$\boldsymbol{x} \in U^\perp, \text{ právě když } (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \text{ pro každý vektor } \boldsymbol{y} \in U.$$

Pomocí vlastností skalárního součinu (distributivního zákona a homogenity) se snadno ověří, že pokud $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U^\perp$ a c je libovolné číslo, pak také $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in U^\perp$ a $c\boldsymbol{x} \in U^\perp$. Pro libovolný vektor $\boldsymbol{z} \in U$ totiž platí:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) &= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 0 + 0 = 0,\\ (c\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) &= c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = c \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Tudíž ortogonální doplněk $U^\perp$ je také podprostor $\mathbb{R}^n$.

Protože všechny vektory $\boldsymbol{x}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(m)}$ leží v U, musí k nim být libovolný vektor $\boldsymbol{y} \in U^\perp$ ortogonální, tj. musí platit, že $\boldsymbol{y} \perp \boldsymbol{x}^{(i)}$, $i = 1, \ldots, m$. Platí však i opačné tvrzení, tzv. *kritérium kolmosti*: Je-li některý vektor $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ ortogonální ke všem vektorům

$\boldsymbol{x}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{x}^{(m)}$, pak $\boldsymbol{y} \in U^{\perp}$. Skutečně. Libovolný vektor $\boldsymbol{x} \in U$ má tvar (1.11). Tedy

$$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y}, c_1\boldsymbol{x}^{(1)} + \dots + c_m\boldsymbol{x}^{(m)}) = c_1(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}^{(1)}) + \dots + c_m(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}^{(m)}) =$$
$$= c_1 \cdot 0 + \dots + c_m \cdot 0 = 0,$$

takže vektor $\boldsymbol{y}$ je kolmý ke každému vektoru z podprostoru U.

Nyní již můžeme zformulovat hlavní výsledek.

Věta 1.26 *Nechť $U = [\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \dots, \boldsymbol{x}^{(m)}]$ je podprostor $\mathbb{R}^n$ a $U^{\perp}$ je jeho ortogonální doplněk.*

K libovolnému vektoru $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ existuje právě jedna dvojice vektorů $\boldsymbol{x} \in U$ a $\boldsymbol{z} \in U^{\perp}$ taková, že $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}$.

Důkaz viz např. [36, str. 96]. Vektor $\boldsymbol{x}$ se nazývá *pravoúhlý průmět vektoru $\boldsymbol{y}$ na podprostor U*. Věta říká, že libovolný vektor lze jednoznačně rozložit na součet ortogonálních složek, přičemž jedna z nich leží v daném podprostoru.

Pravoúhlý průmět $\boldsymbol{x}$ má důležitou vlastnost. Je nejlepší aproximací vektoru $\boldsymbol{y}$ ze všech vektorů $\hat{\boldsymbol{x}} \in U$, tj. minimalizuje výraz $\|\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{x}}\|$. Skutečně. Platí totiž, že $\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} - \hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{z}$, kde $\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}} \in U$ a $\boldsymbol{z} \in U^{\perp}$, takže $(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{z}) = 0$.

Odtud

$$\|\boldsymbol{y}-\hat{\boldsymbol{x}}\|^2 = \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}-\hat{\boldsymbol{x}}\|^2 = (\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}) + \\ + (\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}) + (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}) = \|\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}\|^2 + \|\boldsymbol{z}\|^2.$$

Pro $\boldsymbol{x} \neq \hat{\boldsymbol{x}}$ je proto

$$\|\boldsymbol{y}-\hat{\boldsymbol{x}}\|^2 = \|\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}\|^2 + \|\boldsymbol{z}\|^2 > \|\boldsymbol{z}\|^2 = \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|^2.$$

Tudíž

$$\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\| = \min_{\hat{\boldsymbol{x}} \in U} \|\boldsymbol{y}-\hat{\boldsymbol{x}}\|, \tag{1.12}$$

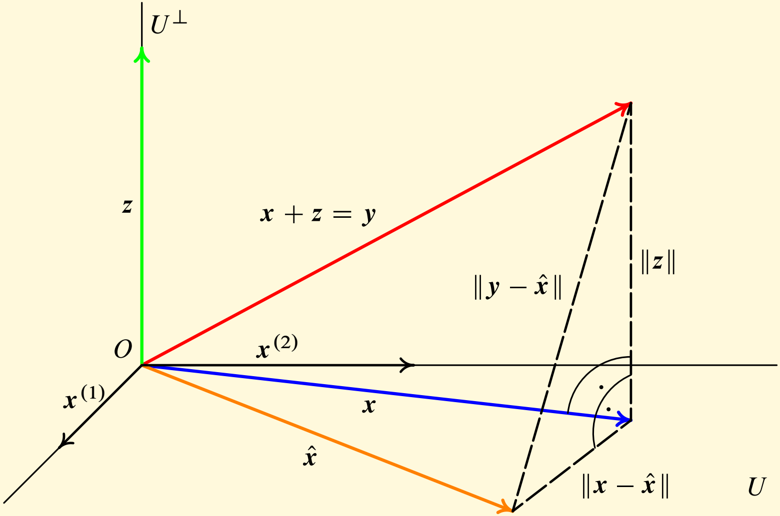
přičemž pravoúhlý průmět $\boldsymbol{x}$ je jediný vektor, v něž se toto minimum nabývá. Dále je vidět, že číslo $\|\boldsymbol{z}\|$ udává, jaké chyby se při náhradě vektoru $\boldsymbol{y}$ vektorem $\boldsymbol{x}$ dopustíme.

Pro lepší představu znázorníme pravoúhlý průmět vektoru $\boldsymbol{y}$ v množině $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem, která je modelem trojrozměrného prostoru s běžnou eukleidovskou metrikou. Kolmost má tedy běžný význam a vše si dokážeme představit. Vektory umístíme do počátku O. Trojici čísel chápeme jako souřadnice koncového bodu vázaného vektoru, tj. orientované úsečky, jejímž počátečním bodem je počátek.

Nechť $U = [\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}]$ a předpokládejme, že vektory $\boldsymbol{x}^{(1)}$ a $\boldsymbol{x}^{(2)}$ jsou nekolineární (jeden není násobkem druhého). Pak trojice tvaru $c_1\boldsymbol{x}^{(1)} + c_2\boldsymbol{x}^{(2)}$, kde c_1 a c_2 jsou libovolná čísla, odpovídají bodům, které leží v rovině procházející počátkem a jejímiž směrovými vektory jsou právě $\boldsymbol{x}^{(1)}$ a $\boldsymbol{x}^{(2)}$. Vlastně jde o parametrické rovnice této roviny.

Zvolme pro jednoduchost $\boldsymbol{x}^{(1)} = [1, 0, 0]^{\mathrm{T}}$ a $\boldsymbol{x}^{(2)} = [0, 1, 0]^{\mathrm{T}}$ (v analytické geometrii tyto vektory obvykle značíme $\boldsymbol{i}$ a $\boldsymbol{j}$). Potom podprostor U splývá s půdorysnou a ortogonální doplněk $U^{\perp}$ splývá s přímkou, která je k půdorysně kolmá a prochází počátkem — viz obr. 1.3.

Nechť vektor $\boldsymbol{y}$ neleží v podprostoru U. Jeho pravoúhlý průmět $\boldsymbol{x}$ dostaneme tak, že z koncového bodu spustíme kolmici na půdorysnu. Dále $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$ a tento vektor leží v $U^{\perp}$. Zvolme vektor $\hat{\boldsymbol{x}} \in U$, $\hat{\boldsymbol{x}} \neq \boldsymbol{x}$. Pak koncové body vektorů $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}$ a $\hat{\boldsymbol{x}}$ určují pravoúhlý trojúhelník. Délky jeho stran jsou $\|\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{x}}\|$ (přepona), $\|\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}\|$ a $\|\boldsymbol{z}\|$ (odvěsny). Vztah $\|\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{x}}\|^2 = \|\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}\|^2 + \|\boldsymbol{z}\|^2$ tedy představuje Pythagorovu větu. Z obrázku je zřejmé, že délka $\|\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{x}}\|$ je minimální, právě když je $\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}$.



Obr. 1.3: Pravoúhlý průmět vektoru v $\mathbb{R}^3$

Nalezení pravoúhlého průmětu

Na závěr popíšeme, jak lze složky jednoznačného rozkladu $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}$ určit. Předpokládejme, že $U = [\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(m)}]$. Protože $\boldsymbol{x} \in U$, lze tento vektor vyjádřit ve tvaru $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{x}^{(1)} + c_2\boldsymbol{x}^{(2)} + \cdots + c_m\boldsymbol{x}^{(m)}$. Po dosazení dostaneme

$$\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{x}^{(1)} + c_2\boldsymbol{x}^{(2)} + \cdots + c_m\boldsymbol{x}^{(m)} + \boldsymbol{z}.$$

V předchozí rovnici neznáme konstanty $c_1, c_2, \ldots, c_m$ a vektor $\boldsymbol{z}$. Toho se však elegantně zbavíme. Víme totiž, že leží v $U^{\perp}$, takže je ortogonální ke všem vektorům $\boldsymbol{x}^{(1)}$, $\boldsymbol{x}^{(2)}$ až $\boldsymbol{x}^{(m)}$, tudíž $(\boldsymbol{x}^{(i)}, \boldsymbol{z}) = 0$, $i = 1, \ldots, m$. Předchozí rovnost proto postupně těmito vektory skalárně vynásobíme. Dostaneme:

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{y}) &= c_1(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(1)}) + c_2(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}) + \cdots + c_m(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(m)}),\\
(\boldsymbol{x}^{(2)}, \boldsymbol{y}) &= c_1(\boldsymbol{x}^{(2)}, \boldsymbol{x}^{(1)}) + c_2(\boldsymbol{x}^{(2)}, \boldsymbol{x}^{(2)}) + \cdots + c_m(\boldsymbol{x}^{(2)}, \boldsymbol{x}^{(m)}),\\
&\ \vdots\\
(\boldsymbol{x}^{(m-1)}, \boldsymbol{y}) &= c_1(\boldsymbol{x}^{(m-1)}, \boldsymbol{x}^{(1)}) + c_2(\boldsymbol{x}^{(m-1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}) + \cdots + c_m(\boldsymbol{x}^{(m-1)}, \boldsymbol{x}^{(m)}),\\
(\boldsymbol{x}^{(m)}, \boldsymbol{y}) &= c_1(\boldsymbol{x}^{(m)}, \boldsymbol{x}^{(1)}) + c_2(\boldsymbol{x}^{(m)}, \boldsymbol{x}^{(2)}) + \cdots + c_m(\boldsymbol{x}^{(m)}, \boldsymbol{x}^{(m)}).
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

To je soustava m lineárních rovnic pro m neznámých. Nazývá se *normální soustava rovnic*. Věta 1.26 zaručuje, že tato soustava má řešení. Jakmile známe konstanty $c_1, c_2, \ldots, c_m$, můžeme určit vektor $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{x}^{(1)} + c_2\boldsymbol{x}^{(2)} + \cdots + c_m\boldsymbol{x}^{(m)}$ a následně i vektor $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$.

Na závěr si všimneme, kolik má soustava (1.13) řešení. Matice soustavy má tvar

$$
G(\boldsymbol{x}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(m)}) = \begin{pmatrix}
(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(1)}) & (\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}) & \ldots & (\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(m)})\\
(\boldsymbol{x}^{(2)}, \boldsymbol{x}^{(1)}) & (\boldsymbol{x}^{(2)}, \boldsymbol{x}^{(2)}) & \ldots & (\boldsymbol{x}^{(2)}, \boldsymbol{x}^{(m)})\\
\hdotsfor{4}\\
(\boldsymbol{x}^{(m-1)}, \boldsymbol{x}^{(1)}) & (\boldsymbol{x}^{(m-1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}) & \ldots & (\boldsymbol{x}^{(m-1)}, \boldsymbol{x}^{(m)})\\
(\boldsymbol{x}^{(m)}, \boldsymbol{x}^{(1)}) & (\boldsymbol{x}^{(m)}, \boldsymbol{x}^{(2)}) & \ldots & (\boldsymbol{x}^{(m)}, \boldsymbol{x}^{(m)})
\end{pmatrix}.
$$

Nazývá se Gramova[1] matice systému vektorů $\boldsymbol{x}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{x}^{(m)}$. Je symetrická a lze o ní dokázat, že $\det G(\boldsymbol{x}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{x}^{(m)}) \geqq 0$, přičemž rovnost nastane právě tehdy, když jsou vektory $\boldsymbol{x}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{x}^{(m)}$ lineárně závislé, tj. když je hodnost matice, která má za sloupce právě tyto vektory, menší než m.

Pokud jsou tedy vektory $\boldsymbol{x}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{x}^{(m)}$, které generují podprostor U, lineárně nezávislé, je matice soustavy regulární a soustava (1.13) má jediné řešení. Jsou-li závislé, má soustava nekonečně mnoho řešení závisejících na jednom nebo více parametrech, ale díky jednoznačnosti pravoúhlého průmětu vyjde tento vektor vždy stejný (parametry se po dosazení za $c_1, \dots, c_m$ do vzorce pro $\boldsymbol{x}$ vyruší).

Příklad 1.27 V prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem jsou dány vektory $\boldsymbol{x}^{(1)} = [1, -1, 2]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{x}^{(2)} = [-3, 1, -2]^{\mathrm{T}}$ a $\boldsymbol{y} = [3, -1, 1]^{\mathrm{T}}$. Najděte pravoúhlý průmět vektoru $\boldsymbol{y}$ na podprostor $U = [\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}]$.

Řešení. Podle věty 1.26 lze vektor $\boldsymbol{y}$ vyjádřit ve tvaru $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}$, kde $\boldsymbol{x} \in U$ a $\boldsymbol{z} \in U^{\perp}$. Tedy $\boldsymbol{x} = c_1\boldsymbol{x}^{(1)} + c_2\boldsymbol{x}^{(2)}$ a

$$\boldsymbol{y} = c_1\boldsymbol{x}^{(1)} + c_2\boldsymbol{x}^{(2)} + \boldsymbol{z}.$$

[1] **Jørgen Pedersen Gram** (1850–1916) — dánský matematik.

Předchozí rovnost skalárně vynásobíme postupně vektory $\boldsymbol{x}^{(1)}$ a $\boldsymbol{x}^{(2)}$. Dostaneme:

$$(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{y}) = c_1(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(1)}) + c_2(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}) + (\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{z}),$$
$$(\boldsymbol{x}^{(2)}, \boldsymbol{y}) = c_1(\boldsymbol{x}^{(2)}, \boldsymbol{x}^{(1)}) + c_2(\boldsymbol{x}^{(2)}, \boldsymbol{x}^{(2)}) + (\boldsymbol{x}^{(2)}, \boldsymbol{z}).$$

Víme, že $(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}^{(2)}, \boldsymbol{z}) = 0$. Vypočítáme zbývající skalární součiny.

$$(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(1)}) = 6, \qquad (\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}) = -8, \qquad (\boldsymbol{x}^{(2)}, \boldsymbol{x}^{(2)}) = 14,$$
$$(\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{y}) = 6, \qquad (\boldsymbol{x}^{(2)}, \boldsymbol{y}) = -12.$$

Soustava lineárních rovnic má tvar

$$\begin{aligned} 6c_1 - 8c_2 &= 6, \\ -8c_1 + 14c_2 &= -12. \end{aligned}$$

Jejím jediným řešením je

$$c_1 = -\frac{3}{5}, \qquad c_2 = -\frac{6}{5}.$$

Po dosazení máme

$$\boldsymbol{x} = -\frac{3}{5}\,[1, -1, 2]^{\mathrm{T}} - \frac{6}{5}\,[-3, 1, -2]^{\mathrm{T}} = \left[3, -\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right]^{\mathrm{T}}$$

a

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} = [3, -1, 1]^{\mathrm{T}} - \left[3, -\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right]^{\mathrm{T}} = \left[0, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right]^{\mathrm{T}}.$$

Podle (1.12) pak

$$\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| = \min_{\hat{\boldsymbol{x}} \in U} \|\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{x}}\| = \|\boldsymbol{z}\| = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

je nejmenší chyba, které lze dosáhnout při náhradě vektoru $\boldsymbol{y}$ vektorem z U. ▲

Poznámka 1.28 Skalární součin lze zavést i pro vektory z $\mathbb{C}^n$, jejichž složky jsou komplexní čísla. Skalární součin $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, kde $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$, bude komplexní číslo.

V definici 1.22 je třeba udělat jedinou změnu a to ve vlastnosti 1). Místo komutativního zákona musí platit, že $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}$, kde pruh značí komplexně sdružené číslo. Vše ostatní je stejné. Vlastnost 4) navíc říká, že $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ je vždy reálné číslo. Místo homogenity ve druhé složce dostaneme, že platí $(\boldsymbol{x}, c\,\boldsymbol{y}) = \bar{c}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

Standardní skalární součin se definuje vzorcem $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1\bar{y}_1 + \cdots + x_n\bar{y}_n$.