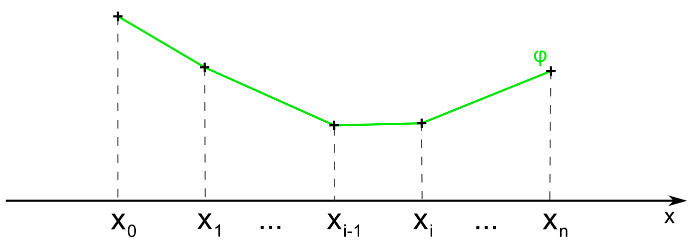
5.5 Interpolace lineárními spline funkcemi

Použití algebraických či trigonometrických interpolačních polynomů je velice omezené. V případě velkého počtu interpolačních uzlů totiž začné velmi narůstat řád interpolačního polynomu a polynom samotný se velmi „rozkmitá“.
V takovém případě se jako vhodnější ukazuje použití tzv. *spline funkcí*, které jsou postupně definovány jako polynomy nižších stupňů na intervalech ohraničených uzly interpolace. Nejjednodušším případem spline funkce je tzv. *lineární spline*, kterou můžeme charakterizovat jako spojitou po částech lineární funkci.



Obr. 5.7: Interpolace lineární spline funkcí.

Definice 5.24. Funkce $\varphi \in C$ se nazývá *lineární spline funkce*, jestliže na síti interpolačních uzlů $x_0, x_1, \ldots, x_n$ splňuje interpolační vlastnost a na jednotlivých disjunktních intervalech

$$\langle x_j, x_{j+1} \rangle, \quad j = 0, \ldots, n-1$$

je lineární.

Uvažujme tedy posloupnost interpolačních uzlů

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \ ,$$

která generuje rozklad intervalu $\langle a, b \rangle$ na $n-1$ podintervalů

$$\langle a, b \rangle = \langle x_0, x_1 \rangle \cup \langle x_0, x_1 \rangle \cup \ldots \cup \langle x_{i-1}, x_i \rangle \cup \langle x_i, x_{i+1} \rangle \cup \ldots \cup \langle x_{n-1}, x_n \rangle \ .$$

Označme podinterval $I_i = \langle x_i, x_{i+1} \rangle, i = 0, \ldots, n-1$ a definujme na něm lineární funkci

$$\varphi_i(x) = a_i + b_i x, x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle \ .$$

Neznámé koeficienty $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ lze snadno určit z požadované interpolační vlastnosti v krajních intervalu, tj. koeficienty jsou řešením soustavy

$$\begin{aligned} f(x_i) &= a_i + b_i x_i \\ f(x_{i+1}) &= a_i + b_i x_{i+1} \ . \end{aligned}$$

Po substituci $h_i = x_{i+1} - x_i$ (velikost uvažovaného intervalu) získáme

$$a_i = \frac{1}{h_i}\begin{vmatrix} f(x_i) & x_i \\ f(x_{i+1}) & x_{i+1} \end{vmatrix} \qquad b_i = \frac{1}{h_i}\begin{vmatrix} 1 & f(x_i) \\ 1 & f(x_{i+1}) \end{vmatrix} .$$

Pak část interpolační funkce φ_i na intervalu I_i má tvar

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} f(x_i) + \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{h_i}(x - x_i) & \text{na } \langle x_i, x_{i+1}\rangle \\ 0 & \text{mimo } \langle x_i, x_{i+1}\rangle \ . \end{cases} \tag{5.15}$$

Pak interpolační funkci φ lze vyjádřit jako součet

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i(x), x \in \langle a, b\rangle \ .$$

Algoritmus 22 INTERPOLACE LINEÁRNÍMI SPLINE FUNKCEMI

Input: $x_0, \dots, x_n, f(x_0), \dots, f(x_n)$

```
for i := 0, ..., n − 1 do
    a_i := f(x_i)
    h_i := x_{i+1} − x_i
    b_i := (f(x_{i+1} − f(x_i))/h_i
end for
```

Output: $a_0, \dots, a_n,\ b_0, \dots, b_n$

Příklad 5.25. Nechť je dána funkce f body a funkčními hodnotami

$$\begin{array}{rclcrcl} x_0 & = & 1 & \qquad & f(x_0) & = & 1 \\ x_1 & = & 3 & & f(x_1) & = & 4 \\ x_2 & = & 4 & & f(x_2) & = & 2 \\ x_3 & = & 5 & & f(x_3) & = & 0 \\ x_4 & = & 8 & & f(x_4) & = & 3 \\ x_5 & = & 9 & & f(x_5) & = & 3 \ . \end{array}$$

Na této síti interpolujte funkci f pomocí lineární spline funkce φ.

Řešení. Nejdříve spočteme jednotlivé diference

$$\begin{array}{rcl} h_0 & = & x_1 - x_0 = 2 \\ h_1 & = & x_2 - x_1 = 1 \\ h_2 & = & x_3 - x_2 = 1 \\ h_3 & = & x_4 - x_3 = 3 \\ h_4 & = & x_5 - x_4 = 1 \end{array}$$

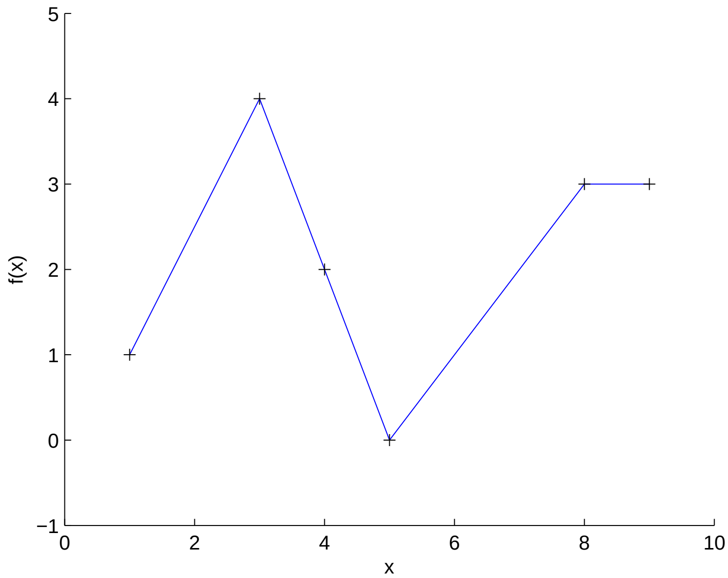
a jednotlivé části hledané interpolační funkce φ zkonstruujeme pomocí předpisu (5.15)

$$
\begin{aligned}
\varphi_0 &= f(x_0) + \tfrac{f(x_1)-f(x_0)}{h_0}(x - x_0) = \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{2} \\
\varphi_1 &= f(x_1) + \tfrac{f(x_2)-f(x_1)}{h_1}(x - x_1) = -2x + 10 \\
\varphi_2 &= f(x_2) + \tfrac{f(x_3)-f(x_2)}{h_2}(x - x_2) = -2x + 10 \\
\varphi_3 &= f(x_3) + \tfrac{f(x_4)-f(x_3)}{h_3}(x - x_3) = x - 5 \\
\varphi_4 &= f(x_4) + \tfrac{f(x_5)-f(x_4)}{h_4}(x - x_4) = 3\ .
\end{aligned}
$$

Pak výsledná interpolační funkce má tvar

$$
\varphi(x) = \begin{cases}
\frac{3}{2}x - \frac{1}{2} & \text{pro } x \in \langle 1, 3) \\
-2x + 10 & \text{pro } x \in \langle 3, 5) \\
x - 5 & \text{pro } x \in \langle 5, 8) \\
3 & \text{pro } x \in \langle 8, 9\rangle\ .
\end{cases}
$$

Výsledná funkce je vykreslena na obrázku 5.8.



Obr. 5.8: Příklad 5.25 - interpolace lineární spline funkcí.

▲

5.6 Interpolace kubickými spline funkcemi

Lineární spline představený v předchozí kapitole sice řeší problém zvyšujícího se stupně polynomu se zvyšujícím se počtem uzlů interpolace, avšak výsledná interpolační funkce díky nediferencovatelnosti v uzlech interpolace není hladká, ačkoliv

bychom to v řadě případů očekávali. V takovém případě je možné využít spline funkcí vyšších řádů, tj. takových, které jsou počástech kvadratické, kubické, kvintické atp. V takovém případě se dá zajistit i určitá hladkost výsledné interpolační funkce.
Jedním s nejčastěji používaných splinů je *kubický spline.* V následujícím textu si tento spline odvodíme.

Definice 5.26. Nechť jsou dány dvojice $(x_i, f_i), i = 0, \dots, n$ a nechť $f(x_i) = f_i$. Funkci $\varphi(x)$ nazýváme *kubickou spline funkcí* jestliže

1. $\varphi \in C^2(\langle a, b\rangle)$
2. φ je kubický polynom na $\langle x_i, x_{i+1}\rangle, \forall i = 0, \dots, n-1$
3. $\varphi(x_i) = f_i, i = 0, \dots, n$

Poznámka 5.27. Z definice je patrné, že kubická spline funkce φ není určena jednoznačně.
Abychom jednoznačně určili interpolační funkci a její části na jednotlivých intervalech

$$\varphi(x) := \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_i(x)$$
$$\varphi_i(x) := a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3 \quad \text{na } \langle x_i, x_{i+1}\rangle$$

je nezbytné pro jednotlivé intervaly určit $4n$ neznámých $a_i, b_i, c_i, d_i,\ i = 0, 1, \dots, n-$ -1.
Z interpolačních podmínek

$$\varphi(x_i) = f_i, i = 0, \dots, n$$

dostáváme $n+1$ rovnic. Ze spojitosti $\varphi, \varphi', \varphi''$ v bodech interpolace $x_i, i = 1, \dots, n-1$ dostáváme dalších $3(n-1) = 3n-3$ rovnic.
Celkem tedy máme $4n$ neznámých a $4n-2$ rovnic.
Dvě podmínky tedy musíme dodat.
Například

1. $\varphi'(a) = f_0', \varphi'(b) = f_n'$
2. $\varphi''(a) = f_0'', \varphi''(b) = f_n''$
3. $\varphi''(a) = 0, \varphi''(b) = 0$ (tzv. přirozený kubický spline)

Tyto podmínky nazýváme *okrajové podmínky.*

5.6.1 Konstrukce spline funkce

Na každém intervalu interpolace budeme hledat kubický spline ve tvaru

$$\varphi_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, i = 0, \dots, n - 1 \qquad (5.16)$$

φ_i'' je tedy polynom prvního stupně a tudíž φ'' je funkce po částech lineární a spojitá neboť $\varphi \in C^2(\langle a, b\rangle)$.
Označme $\varphi''(x_i) := M_i, i = 0, \dots, n$ jako *i-tý moment spline funkce.*

Můžeme sestavit interpolaci po částech lineárními funkcemi (viz 5.5)

$$\varphi_i''(x) = \varphi_i''(x_i)\frac{x_{i+1} - x}{h_i} + \varphi_i''(x_{i+1})\frac{x - x_i}{h_i}, x \in \langle x_i, x_{i+1}\rangle, i = 0, \dots, n - 1 \; .$$

$$\varphi_i''(x) = M_i\frac{x_{i+1} - x}{h_i} + M_{i+1}\frac{x - x_i}{h_i}$$

Integrováním ϕ_i'' dostáváme

$$\varphi_i'(x) = \int \varphi_i''(x)dx = -M_i\frac{(x_{i+1} - x)^2}{2h_i} + M_{i+1}\frac{(x - x_i)^2}{2h_i} + A_i$$

a následně

$$\varphi_i(x) = \int \varphi_i'(x)dx = M_i\frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + M_{i+1}\frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + A_i(x - x_i) + B_i \; .$$

Z podmínek interpolace plyne

$$\varphi_i(x_i) = f(x_i), \varphi_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}), i = 0, \dots, n - 1 \; ,$$

tedy

$$\varphi_i(x_i) = M_i\frac{h_i^2}{6} + B_i = f(x_i)$$

a

$$\varphi_i(x_{i+1}) = M_{i+1}\frac{h_i^2}{6} + A_ih_i + B_i = f(x_{i+1}) \; .$$

Řešením této soustavy 2 rovnic o 2 neznámých A_i, B_i dostáváme

$$B_i = f(x_i) - M_i\frac{h_i^2}{6}$$

$$A_i = \frac{f(x_{i+1} - f(x)}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_{i+1} - M_i) \; .$$

Poznámka 5.28. Pomocí M_i lze jednoznačně spočítat všechny funkce φ_i, tzn. můžeme určit a_i, b_i, c_i, d_i následujícími předpisy

$$\begin{aligned} a_i = &\ \varphi_i(x_i) = f(x_i) \\ b_i = &\ \varphi_i'(x_i) = -M_i\tfrac{h_i}{2} + A_i = \tfrac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{h_i} - \tfrac{2M_i+M_{i+1}}{6}h_i \\ c_i = &\ \tfrac{1}{2}\varphi_i''(x_i) = \tfrac{1}{2}M_i \\ d_i = &\ \tfrac{1}{6}\varphi_i'''(x_i^+) = \tfrac{M_{i+1}-M_i}{6h_i} \end{aligned} \tag{5.17}$$

kde $\varphi_i'''(x_i^+)$ je derivace φ_i'' zprava v x_i.

Nyní stačí pouze určit momenty $\varphi''(x_i), i = 0, \ldots, n$. K tomu využijeme spojitost φ' v $x_i, i = 1, \ldots, n-1$, tzn.

$$\varphi_{i-1}'(x_i^-) = \varphi_i'(x_i^+), i = 1, \ldots, n-1 \ .$$

Vyjádříme si příslušné jednostrané derivace

$$\varphi_{i-1}'(x_i^-) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h_{i-1}} + \frac{h_{i-1}}{3}M_i + \frac{h_{i-1}}{6}M_{i-1} \ ,$$

$$\varphi_i'(x_i^+) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i} - \frac{h_i}{3}M_i - \frac{h_i}{6}M_{i+1} \ .$$

Dosazením do podmínek spojitosti φ' dostaneme rovnice

$$\begin{aligned} \tfrac{h_{i-1}}{6}M_{i-1} + \tfrac{h_{i-1}+h_i}{3}M_i + \tfrac{h_i}{6}M_{i+1} = &\ \tfrac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{h_i} - \tfrac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{h_{i-1}}, \\ i \ = &\ 1, \ldots, n-1 \end{aligned}$$

Čtenář si určitě všimnul, že se jedná o $n-1$ rovnic pro $n+1$ neznámých. Pro jednoznačnost řešení je proto doplníme libovolnou okrajovou podmínkou.
Označíme-li dále

$$\lambda_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}, \quad \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i} = 1 - \lambda_i = \mu_i \ , \tag{5.18}$$

$$g_i = \frac{6}{h_{i-1} + h_i}\left(\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h_{i-1}}\right) \ . \tag{5.19}$$

Dostáváme třídiagonální soustavu lineárních rovnic, jejíž řešením jsou hledané momenty kubického splinu.

$$\begin{array}{llllll} 2M_1 & +\mu_1 M_2 & & & & = g_1 - \lambda_1 f_0'' \\ \lambda_2 M_1 & +2M_2 & +\mu_2 M_3 & & & = g_2 \\ & & & & & \vdots \\ & & \lambda_{n-2}M_{n-3} & +2M_{n-2} & +\mu_{n-1}M_{n-1} & = g_{n-2} \\ & & & \lambda_{n-1}M_{n-2} & +2M_{n-1} & = g_{n-1} - \mu_{n-1}f_n'' \end{array} \tag{5.20}$$

Lemma 5.29. *Nechť $f \in C^4(\langle a, b\rangle)$, K je konstanta taková, že při dělení $\langle a, b\rangle$ na $h_i, i = 0, 1, \dots, n-1$ platí*

$$\frac{\max h_i}{\min h_i} \leqq K \ .$$

Nechť φ je kubická spline funkce pro funkci f a nechť φ splňuje okrajové podmínky. Pak pro $\forall x \in \langle a, b\rangle$ a $j = 0, 1, 2, 3$ platí

$$|f^{(j)}(x) - \varphi^{(j)}(x)| \leqq CKh^{4-j} \ ,$$

kde $h = \max h_i$, C je konstanta, která nezávisí na x ani na dělení $\langle a, b\rangle$.

Algoritmus 23 INTERPOLACE KUBICKÝMI SPLINE FUNKCEMI

Input: $x_0, \dots, x_n$, $f(x_0), \dots, f(x_n)$, $f''(x_0), f''(x_n)$

for $i := 0, \dots, n-1$ **do**
  $h_i := x_{i+1} - x_i$
end for
for $i := 0, \dots, n-1$ **do**
  $\lambda_i := h_i/(h_i + h_{i+1})$
  $\mu_i := 1 - \lambda_i$
  $g_i := 6/(h_{i-1} + h_i)\left((f(x_{i+1}) - f(x_i))/h_i - (f(x_i) - f(x_{i-1}))/h_{i-1}\right)$
end for

$\tilde{M}$ je nulová matice typu $(n-1) \times (n-1)$
$\tilde{m}$ je nulový vektor dimenze $n-1$
$[\tilde{M}]_{1,1} := 2, \quad [\tilde{M}]_{1,2} := \mu_1$
$[\tilde{m}]_1 := g_1 - \lambda_1 f''(x_0)$
for $i := 2, \dots, n-2$ **do**
  $[\tilde{M}]_{i,i-1} := \lambda_i$
  $[\tilde{M}]_{i,i} := 2$
  $[\tilde{M}]_{i,i+1} := \mu_i$
end for
$[\tilde{M}]_{n-1,n-1} := 2, \quad [\tilde{M}]_{n-1,n-2} := \lambda_{n-1}$
$[\tilde{m}]_{n-1} := g_{n-1} - \mu_{n-1} f''(x_n)$
$[M_1, \dots, M_{n-1}]^T := m$ je řešení soustavy $\tilde{M}m = \tilde{m}$

for $i := 0, \dots, n-1$ **do**
  $a_i := f(x_i)$
  $b_i := (f(x_{i+1} - f(x_i))/h_i - h_i(2M_i + M_{i+1})/6$
  $c_i := (1/2)M_i$
  $d_i := (M_{i+1} - M_i)/(6h_i)$
end for

Output: $a_0, \dots, a_n, \ b_0, \dots, b_n, \ c_0, \dots, c_n, \ d_0, \dots, d_n$

Příklad 5.30. Interpolujte funkci f pomocí přirozené interpolace kubickými spline funkcemi na zadaných bodech a příslušných funkčních hodnotách

$$\begin{array}{rclcrcl} x_0 &=& 1\ , & \quad & f(x_0) &=& 1 \\ x_1 &=& 2\ , & & f(x_1) &=& 3 \\ x_2 &=& 3\ , & & f(x_2) &=& 2 \\ x_3 &=& 4\ , & & f(x_3) &=& 3 \\ x_4 &=& 5\ , & & f(x_4) &=& 4\ . \end{array}$$

Řešení. Nejprve je potřeba si všimnout, že zadané uzly jsou ekvidistatní, tj.

$$h_0 = h_1 = h_2 = h_3 = 1\ .$$

To nám vcelku zjednoduší výpočet. Nejdříve spočteme $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ dle předpisu (5.18)

$$\begin{array}{rclcrcl} \lambda_1 &=& \frac{h_0}{h_0+h_1} = \frac{1}{2}\ , & \quad & \mu_1 &=& 1-\lambda_1 = \frac{1}{2} \\ \lambda_2 &=& \frac{h_1}{h_1+h_2} = \frac{1}{2}\ , & & \mu_2 &=& 1-\lambda_1 = \frac{1}{2} \\ \lambda_3 &=& \frac{h_2}{h_2+h_3} = \frac{1}{2}\ , & & \mu_3 &=& 1-\lambda_1 = \frac{1}{2} \end{array}$$

a dosadíme do předpisu pomocných proměnných (5.19)

$$\begin{array}{rcl} g_1 &=& \frac{6}{h_0+h_1}\left(\frac{f(x_2)-f(x_1)}{h_1} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{h_0}\right) = -9 \\ g_2 &=& \frac{6}{h_1+h_2}\left(\frac{f(x_3)-f(x_2)}{h_2} - \frac{f(x_2)-f(x_1)}{h_1}\right) = 6 \\ g_3 &=& \frac{6}{h_2+h_3}\left(\frac{f(x_4)-f(x_3)}{h_3} - \frac{f(x_3)-f(x_2)}{h_2}\right) = 0\ . \end{array}$$

Pak lze sestavit soustavu (5.20) (jelikož se jedná o přirozený spline, tak $f_0'' = f_4'' = M_0 = M_4 = 0$)

$$\begin{array}{llll} 2M_1 & +\mu_1 M_2 & & = g_1 - \lambda_1 f_0'' \\ \lambda_2 M_1 & +2M_2 & +\mu_2 M_3 & = g_2 \\ & \lambda_3 M_2 & +2M_3 & = g_3 - \mu_3 f_4'' \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{llll} 2M_1 & +\frac{1}{2}M_2 & & = -9 \\ \frac{1}{2}M_1 & +2M_2 & +\frac{1}{2}M_3 & = 6 \\ & \frac{1}{2}M_2 & +2M_3 & = 0 \end{array}\ .$$

Řešením soustavy jsou hledané momenty

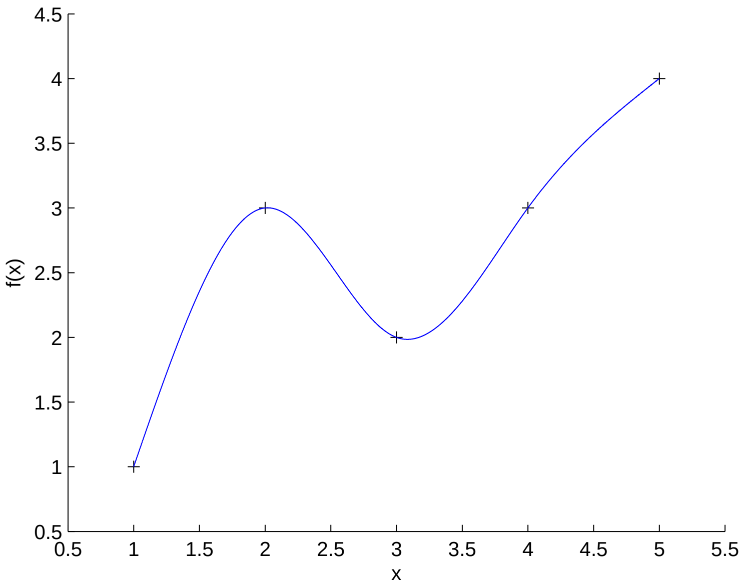
$$M_0 = 0, \quad M_1 = -\frac{159}{28}, \quad M_2 = \frac{33}{7}, \quad M_3 = -\frac{33}{28}, \quad M_4 = 0\ ,$$

které lze následně dosadit do předpisů koeficientů pro kubické polynomy (5.17) na jednotlivých intervalech

$$\begin{array}{rlcrl} a_0 = & f(x_0) = 1 & \quad & a_2 = & f(x_2) = 2 \\ b_0 = & \frac{f(x_1)-f(x_0)}{h_0} - \frac{2M_0+M_1}{6}h_0 = \frac{165}{56} & & b_2 = & \frac{f(x_3)-f(x_2)}{h_2} - \frac{2M_2+M_3}{6}h_2 = -\frac{3}{8} \\ c_0 = & \frac{1}{2}M_0 = 0 & & c_2 = & \frac{1}{2}M_2 = \frac{33}{14} \\ d_0 = & \frac{M_1-M_0}{6h_0} = -\frac{53}{56} & & d_2 = & \frac{M_3-M_2}{6h_2} = -\frac{55}{56} \\ & & & & \\ a_1 = & f(x_1) = 3 & & a_3 = & f(x_3) = 3 \\ b_1 = & \frac{f(x_2)-f(x_1)}{h_1} - \frac{2M_1+M_2}{6}h_1 = \frac{3}{28} & & b_3 = & \frac{f(x_4)-f(x_3)}{h_3} - \frac{2M_3+M_4}{6}h_3 = \frac{39}{28} \\ c_1 = & \frac{1}{2}M_1 = -\frac{159}{56} & & c_3 = & \frac{1}{2}M_3 = -\frac{33}{56} \\ d_1 = & \frac{M_2-M_1}{6h_1} = \frac{97}{56} & & d_3 = & \frac{M_4-M_3}{6h_3} = \frac{11}{56}\ . \end{array}$$

Tedy výsledná interpolační funkce (5.16) má předpis

$$\varphi(x)\begin{cases} = 1 + \frac{165}{56}(x-1) - \frac{53}{56}(x-1)^3 & \text{pro } x \in \langle 1, 2\rangle \\ = 3 + \frac{3}{28}(x-2) - \frac{159}{56}(x-2)^2 + \frac{97}{56}(x-2)^3 & \text{pro } x \in (2, 3\rangle \\ = 2 - \frac{3}{8}(x-3) - \frac{33}{14}(x-3)^2 - \frac{55}{56}(x-3)^3 & \text{pro } x \in (3, 4\rangle \\ = 3 + \frac{39}{28}(x-4) - \frac{33}{56}(x-4)^2 + \frac{11}{56}(x-4)^3 & \text{pro } x \in (4, 5\rangle\ . \end{cases}$$



Obr. 5.9: Příklad 5.30 - interpolace kubickými spline funkcemi.

▲