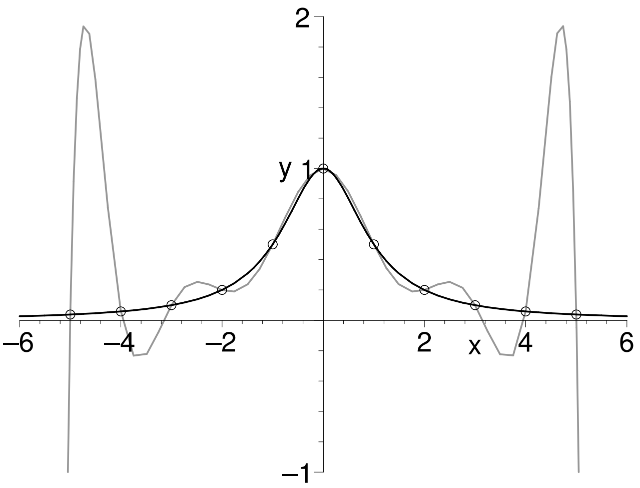
Aproximace ale v některých případech nemusí být dobrá ani v bodech relativně blízkých uzlovým bodům. To ilustruje obrázek 5.4, na němž je graf funkce $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ a interpolační polynom daný vyznačenými uzlovými body.



Obrázek 5.4: Nevhodná aproximace interpolačním polynomem

Situace by se příliš nezlepšila, ani kdybychom přidali více uzlových bodů.
Zde je velká odchylka funkce a polynomu taktéž způsobena velkými hodnotami součinu $(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$, především poblíž konců interpolačního intervalu.

Proto je někdy vhodné nenahrazovat funkci, zvláště chceme-li ji aproximovat na delším intervalu, jedním interpolačním polynomem, ale interval rozdělit na malé části a na každé z nich funkci nahradit polynomem nízkého stupně. To bude námětem následující kapitoly.

5.2 Interpolace pomocí splajnů

Základní myšlenka interpolace pomocí splajnů je obdobná jako u Lagrangeovy interpolace. Máme zadány uzlové body $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ a funkční hodnoty v nich, které označíme $f_0, f_1, \dots, f_n$. Stejně jako předtím hledáme funkci $S(x)$ takovou, že platí $S(x_i) = f_i,\ i = 0, 1, \dots, n$, ale tentokrát je funkce $S(x)$ po částech polynom (obecně na každém intervalu $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$, $i = 0, 1, \dots n-1$, jiný) a splňuje určité požadavky hladkosti (tj. spojitosti derivací).

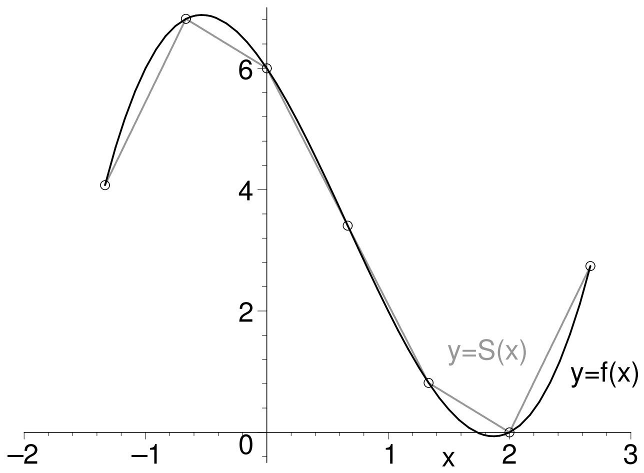
Konkrétně **splajnem řádu** k pro uzly $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ rozumíme funkci, která je v každém intervalu $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$, $i = 0, \dots n-1$, polynom stupně k a která má v celém intervalu $\langle a, b\rangle$ spojité derivace až do řádu $k-1$ včetně.

Poznámka. Slovo „splajn” pochází z anglického „spline”, což znamená pružné konstruktérské pravítko. V české literatuře se někdy píše splajn a někdy spline.

Nejjednodušším příkladem je splajn řádu 1, **lineární splajn**. Funkce je na každém subintervalu $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$, $i = 0, \dots n-1$, nahrazena úsečkou, jejíž rovnice je

$$S_i(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i), \quad x \in \langle x_i, x_{i+1}\rangle$$

U splajnu 1. řádu požadujeme spojitost derivací do řádu 0 včetně, tj. spojitost samotné funkce $S(x)$. Snadno se přesvědčíme, že hodnoty jednotlivých funkcí $S_i(x)$ v krajních bodech příslušného intervalu $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$ jsou rovny $f(x_i)$, resp. $f(x_{i+1})$, čímž je zaručeno, že na sebe tyto funkce v uzlových bodech spojitě navazují (viz obrázek 5.5). Zlepšení aproximace dosáhneme zjemněním intervalů mezi uzlovými body.



Obrázek 5.5: Nahrazení funkce lineárním splajnem

Nejčastěji užívané jsou tzv. **kubické splajny**, kdy k=3.

Definice a konstrukce kubického splajnu

Kubický splajn pro funkci f s uzlovými body $x_0, x_1, \dots, x_n$ je funkce $S(x)$, která je kubický polynom označený $S_i(x)$ na každém subintervalu $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, vyhovuje podmínkám

$$S_i(x_i) = f(x_i), \qquad i = 0, \dots, n \tag{5.14}$$

$$S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1}), \; i = 0, \dots, n-2 \tag{5.15}$$

$$S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1}), \; i = 0, \dots, n-2 \tag{5.16}$$

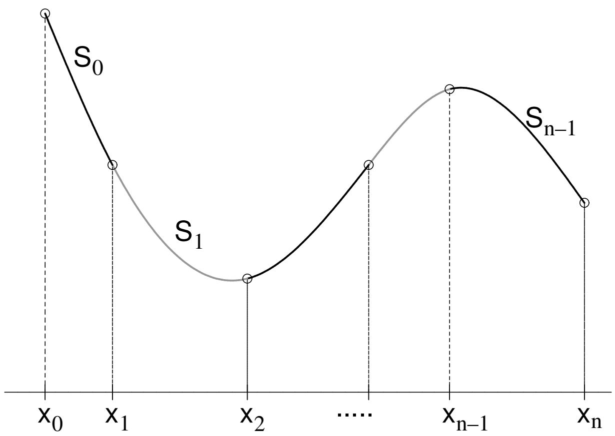
$$S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1}), \; i = 0, \dots, n-2 \tag{5.17}$$

a okrajovým podmínkám a), b) nebo c)

$$\begin{array}{lrcl} \text{a)} & S''(x_0) & = & S''(x_n) = 0 \\ \text{b)} & S''(x_0) & = & f''_0,\ S''(x_n) = f''_n \\ \text{c)} & S'(x_0) & = & f'_0,\ S'(x_n) = f'_n \end{array}$$

(f''_0, f''_n, f'_0 a f'_n jsou předem zadané konstanty).

Podmínky 5.15 znamenají spojitost funkce S v uzlových bodech, podmínky 5.16 a 5.17 spojitost prvních, resp. druhých derivací.



Obrázek 5.6: Přirozený kubický splajn

Kubický splajn splňující okrajové podmínky a) se nazývá **přirozený kubický splajn**.

Na obrázku 5.7 je znázorněna aproximace funkce $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pomocí přirozeného kubického splajnu. Můžeme porovnat s obrázkem 5.4, kde byla tatáž funkce nahrazena interpolačním polynomem daným stejnými uzlovými body.

Nyní se budeme zabývat problémem, jak k zadaným uzlovým bodům a hodnotám funkce v nich sestrojit přirozený kubický splajn. (Splajn vyhovující jiným okrajovým podmínkám by se našel podobně.)

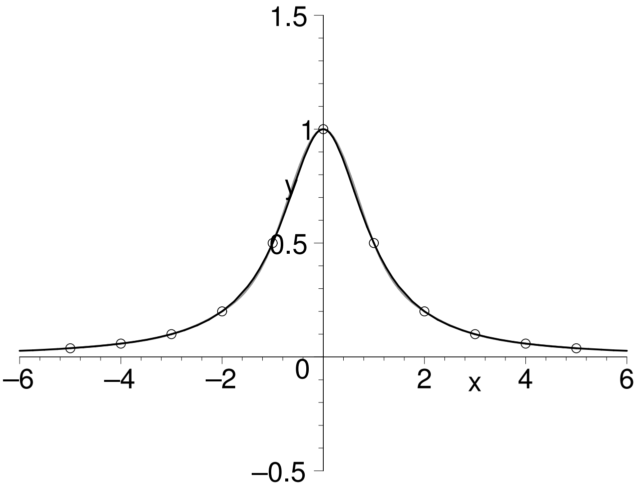
Na jednotlivých intervalech $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, budeme splajn hledat ve tvaru

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

Z podmínek 5.14 dostaneme $a_i = f(x_i), i = 0, 1, \ldots n-1$. Odtud, z podmínek 5.15, 5.16, 5.17 a z okrajových podmínek $S''_0(x_0) = S''_{n-1}(x_n) = 0$ lze po jistém úsilí odvodit soustavu rovnic s neznámými c_i, $i = 0, \ldots, n$

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3\left(\frac{\Delta f_i}{h_i} - \frac{\Delta f_{i-1}}{h_{i-1}}\right), \quad i = 1, \ldots, n-1 \quad (5.18)$$

$$c_0 = c_n = 0$$



Obrázek 5.7: Nahrazení funkce $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ přirozeným kubickým splajnem.

kde $h_i = x_{i+1} - x_i$ a $\Delta f_i = f(x_{i+1}) - f(x_i),\ i = 0, \ldots, n-1$.
Po rozepsání a dosazení za c_0 a c_n soustava vypadá takto:

$$\begin{array}{cccccccc} 2(h_0+h_1)c_1 & + & h_1c_2 & & & = & 3(\frac{\Delta f_1}{h_1} - \frac{\Delta f_0}{h_0}) \\ h_1c_1 & + & 2(h_1+h_2)c_2 & + & h_2c_3 & = & 3(\frac{\Delta f_2}{h_2} - \frac{\Delta f_1}{h_1}) \\ & & & \ddots & & \vdots & \\ & & h_{n-2}c_{n-2} & + & 2(h_{n-2}+h_{n-1})c_{n-1} & = & 3(\frac{\Delta f_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{\Delta f_{n-2}}{h_{n-2}}) \end{array} \tag{5.19}$$

Jedná se o třídiagonální soustavu rovnic a lze ji vyřešit např. pomocí Gaussovy eliminační metody přizpůsobené pro třídiagonální soustavu.

Koeficienty b_i a d_i pak dopočítáme pomocí c_i ze vztahů (také odvozených z podmínek 5.14 – 5.17)

$$b_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i} - \frac{c_{i+1} + 2c_i}{3} h_i \qquad i = 0, \ldots, n-1 \tag{5.20}$$

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} \qquad i = 0, \ldots, n-1 \tag{5.21}$$

Příklad 5.5 *Funkci $f(x) = \sqrt{x}$ aproximujte přirozeným kubickým splajnem s uzlovými body*

x_i	1	1,69	2,25	2,89	4

a pak pomocí tohoto splajnu vypočtěte přibližně hodnotu $f(2)$.

Řešení: Dopočítáme funkční hodnoty v uzlových bodech a pak vypočteme $h_i, i = 0, 1, 2, 3$, tj. délky jednotlivých intervalů, a $\Delta f_i, i = 0, 1, 2, 3$. Vypočtené hodnoty jsou zapsány v následující tabulce