derivace funkce g v absolutní hodnotě v okolí pevného bodu menší, tím rychleji metoda prosté iterace konverguje.
Přibližné řešení rovnice je $x_3 \doteq -1,68$

Jiná možnost, jak z rovnice vyjádřit x, je

$$x = \ln(3 - x^2) \quad , \text{tj.} \quad g(x) = \ln(3 - x^2).$$

V tomto případě by na intervalu $\langle -2, -1\rangle$ podmínky konvergence splněny nebyly. Podívejme se, jak se budou chovat postupné aproximace, zvolíme-li $x_0 = -1$:

$$\begin{aligned} x_0 &= -1 \\ x_1 &\doteq 0,69315 \\ x_2 &\doteq 0,92408 \\ x_3 &\doteq 0,76364 \\ x_4 &\doteq 0,88247 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Nakonec bychom našli kladný kořen rovnice, který již jsme hledali metodou půlení a metodou regula falsi.

Poznámka. Způsobů, jak z rovnice $f(x) = 0$ vyjádřit x, je nekonečně mnoho. Jedna z možností je vydělit rovnici $f(x) = 0$ derivací funkce f, pak rovnici vynásobit -1 a nakonec na obě strany přičíst x. Dostaneme

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

vztah, který by nám měl být povědomý.
Newtonova metoda je tedy speciálním (a obvykle nejvhodnějším) případem metody prosté iterace.

4.2 Numerické metody řešení soustav nelineárních rovnic

Budeme se zabývat řešením soustavy n nelineárních rovnic o n neznámých

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{4.13}$$

kterou můžeme přepsat vektorově jako

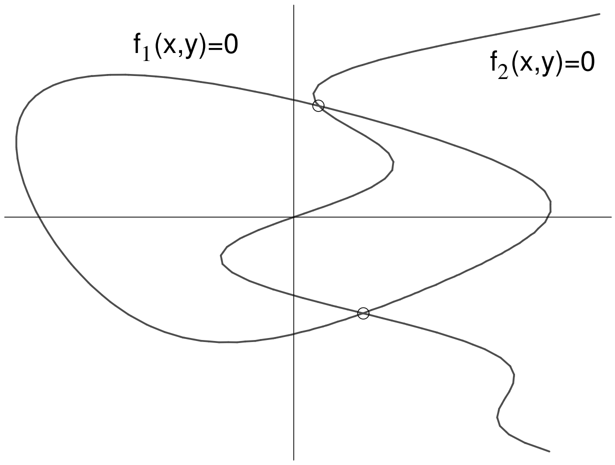
$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{o}, \tag{4.14}$$

kde $\mathbf{F} = (f_1, \ldots, f_n)^T$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ a $\mathbf{o}$ je nulový vektor.

Přesné řešení této soustavy opět budeme značit $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^T$.

Ukážeme zde metodu prosté iterace a Newtonovu metodu. Obě tyto metody vypadají velice podobně jako pro jedinou nelineární rovnici. Ve skutečnosti je ale vícedimenzionální případ mnohem složitější, protože na rozdíl od jediné rovnice je velmi nesnadné získat dobré informace o poloze kořene. Podmínky konvergence obou uvedených metod se také ověřují mnohem obtížněji než u jediné rovnice.

V případě, že řešíme dvě rovnice, hledáme vlastně průsečíky dvou křivek v rovině daných implicitně rovnicemi $f_1(x, y) = 0$ a $f_2(x, y) = 0$ - viz obrázek 4.13



Obrázek 4.13: Grafický význam řešení dvou nelineárních rovnic

4.2.1 Metoda prosté iterace

Soustavu 4.13 upravíme na tvar

$$\begin{aligned} x_1 &= g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ x_2 &= g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n &= g_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{4.15}$$

což můžeme zapsat vektorově jako

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}(\mathbf{x}), \tag{4.16}$$

kde $\mathbf{G} = (g_1, \ldots, g_n)^T$

Podobně jako u jedné rovnice zvolíme počáteční aproximaci $\mathbf{x}^{(0)}$ a počítáme posloupnost postupných aproximací z iteračního vztahu

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{G}(\mathbf{x}^{(k)}) \tag{4.17}$$

Jsou-li funkce $g_1, \dots, g_n$ diferencovatelné, lze vyslovit podmínky konvergence pro metodu prosté iterace, podobné těm z věty 4.3.
Protože pracujeme s n funkcemi n proměnných, v roli derivace zde bude vystupovat matice

$$\mathbf{G}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ & & \ddots & \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Věta 4.4 *Nechť* $\mathbf{G}$ *zobrazuje uzavřenou oblast* D *do sebe a je v této oblasti diferencovatelná. Jestliže existuje číslo* $\alpha \in \langle 0, 1)$ *tak, že*

$$\| \mathbf{G}'\| \leq \alpha \quad \forall \mathbf{x} \in D\,, \tag{4.18}$$

kde $\| \mathbf{G}'\|$ *je řádková nebo sloupcová norma matice* $\mathbf{G}'$*, pak v oblasti* D *existuje pevný bod* ξ *zobrazení* G *a posloupnost postupných aproximací získaná předpisem 4.17 k němu konverguje pro libovolnou počáteční aproximaci* $\mathbf{x}^{(0)} \in D$*.*

Pro odhad chyby platí podobné vztahy jako 4.11, 4.12 u jedné rovnice.

Pro zastavení výpočtu se používá kriterium

$$\| \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\| < \varepsilon,$$

kde $\| \cdot \|$ je některá z norem 2.13, 2.12.

Příklad 4.7 *Metodou prosté iterace najděte kořen soustavy rovnic*

$$\begin{aligned} 3x + x^2 y - 3 &= 0 \\ x^2 - 5y &= 0, \end{aligned}$$

který leží v oblasti $D = \langle 1/2; 1\rangle \times \langle 0; 1/2\rangle$ *s přesností* 0,01.

Řešení: Iteračních funkce mohou být např. $g_1(x,y) = 1 - \frac{x^2 y}{3}$, $g_2(x,y) = \frac{x^2}{5}$. Ověříme, zda jsou splněny podmínky konvergence.
$\mathbf{G} = (g_1, g_2)^T$ zobrazuje D do sebe: Jestliže $x \in \langle 1/2; 1\rangle$ a $y \in \langle 0; 1/2\rangle$, pak $\frac{x^2 y}{3} \in \langle 0; 1/6\rangle$ a tedy $g_1(x,y) \in \langle 5/6; 1\rangle \subseteq \langle 1/2; 1\rangle$. Podobně $g_2(x,y) \in \langle 1/20, 1/5\rangle \subseteq \langle 0; 1/2\rangle$.
Nyní ověříme, zda $\| \mathbf{G}'\|_\infty \leq \alpha < 1$, neboli zda $|\frac{\partial g_1}{\partial x}| + |\frac{\partial g_1}{\partial y}| \leq \alpha$ i $|\frac{\partial g_2}{\partial x}| + |\frac{\partial g_2}{\partial y}| \leq \alpha$.

$$\mathbf{G}' = \begin{pmatrix} -\frac{2xy}{3} & -\frac{x^2}{3} \\ \frac{2x}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

Jestliže $x \in \langle 1/2; 1\rangle$ a $y \in \langle 0; 1/2\rangle$, pak $| - \frac{2xy}{3}| + | - \frac{x^2}{3}| \leq 1/3 + 1/3 = 2/3 < 1$ a $|\frac{2x}{5}| \leq 2/5 < 1$. (Tedy $\alpha = 2/3$.) Podmínky konvergence jsou splněny.

Jako počáteční aproximaci můžeme zvolit např. $(x_0, y_0) = (1, 0)$. Další aproximace pak budeme počítat podle vzorců

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= g_1(x_k, y_k) = 1 - \frac{x_k^2 y_k}{3} \\ y_{k+1} &= g_2(x_k, y_k) = \frac{x_k^2}{5}. \end{aligned}$$

Postupně dostaneme

$$\begin{array}{lll} x_0 = 1 & & y_0 = 0 \\ x_1 = 1 & & y_1 = 0,2 \\ x_2 = 0,933 & & y_2 = 0,2 \\ x_3 = 0,942 & & y_3 = 0,174 \\ x_4 = 0,948 & & y_4 = 0,177. \end{array}$$

Protože $|x_4 - x_3| < 0,01$ i $|y_4 - y_3| < 0,01$, můžeme výpočet ukončit. Přibližné řešení soustavy je $x \doteq 0,95, y \doteq 0,18$.

Protože ověření podmínek konvergence může být dost problematické, je vhodné předem stanovit maximální počet kroků metody a je-li překročen, výpočet ukončit s tím, že metoda diverguje. Pak je potřeba zvolit jinou počáteční aproximaci, jiné iterační funkce, nebo jinou metodu.

Poznamenejme, že **najít vhodné iterační funkce může být velmi obtížné**.

4.2.2 Newtonova metoda

Předpokládejme, že již máme aproximaci řešení $\mathbf{x^{(k)}}$.
Podobně jako u diferencovatelné funkce jedné proměnné platilo pro x_k blízké ke kořeni ξ

$$f(\xi) \doteq f(x_k) + f'(x_k)(\xi - x_k),$$

platí pro n-tici diferencovatelných funkcí n proměnných $\mathbf{F} = (f_1, \ldots, f_n)^T$

$$\mathbf{F}(\xi) \doteq \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) + \mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)}) \cdot (\xi - \mathbf{x}^{(k)}),$$

kde

$$\mathbf{F}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ & & \ddots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

a $\cdot$ značí násobení matic.

Uvědomíme-li si, že $\mathbf{F}(\xi) = \mathbf{o}$, můžeme odtud ξ přibližně vyjádřit, čímž získáme jeho další aproximaci $\mathbf{x}^{(k+1)}$. Dostaneme

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \left(\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)})\right)^{-1} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) \tag{4.19}$$

Při výpočtu další aproximace řešení vzorec 4.19 nepoužíváme. Museli bychom počítat inverzní matici, což je velmi pracné, zvlášť pro matice velkých rozměrů. Místo toho postupujeme následovně:
Vzorec 4.19 přepíšeme na tvar

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)}) \cdot (\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})\,.$$

Označíme

$$\delta^{(k)} = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} = (\delta_1^{(k)}, \dots, \delta_n^{(k)})^T \tag{4.20}$$

a vyřešíme soustavu rovnic

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}^{(k)}) \cdot \delta^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) \tag{4.21}$$

s neznámými $\delta_1^{(k)}, \dots, \delta_n^{(k)}$.

Řešíme-li dvě rovnice, hodí se pro řešení soustavy 4.21 Cramerovo pravidlo.
Máme-li velký počet rovnic, použijeme některou z dalších metod popsaných v kapitole 3.

Novou aproximaci řešení pak vypočteme z 4.20 jako

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \delta^{(k)}.$$

Ve výpočtu pokračujeme tak dlouho, dokud není splněna podmínka

$$\|\,\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\| < \varepsilon \quad \text{, neboli} \quad \|\,\delta^{(k-1)}\| < \varepsilon,$$

nebo dokud není překročen předem stanovený maximální počet kroků (v takovém případě je nutno zvolit jinou počáteční aproximaci).

V každém kroku Newtonovy metody musíme vyřešit soustavu lineárních rovnic.
Z toho je vidět, že Newtonova metoda je pracná a časově náročná. Na druhou stranu, začneme-li blízko kořene, konverguje obvykle velmi rychle.

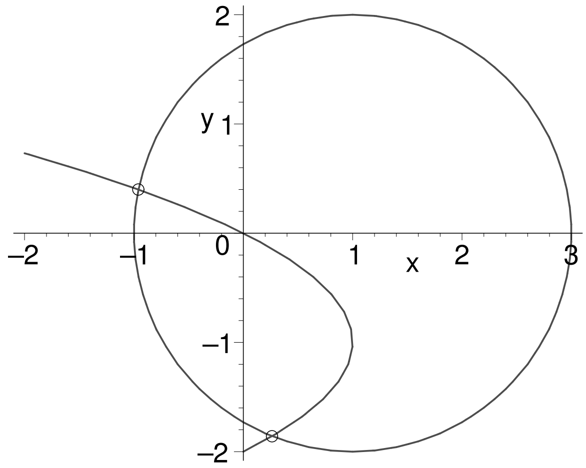
Příklad 4.8 *Newtonovou metodou najděte řešení soustavy rovnic*

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + y^2 - 4 &= 0 \\ x + (y+1)^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

s přesností $\varepsilon = 0,01$.

Řešení: Počet a polohu kořenů můžeme v tomto případě odhadnout graficky. První rovnice je rovnicí kružnice a druhá rovnice je rovnicí paraboly - viz obrázek 4.14.
Vidíme, že soustava má dvě řešení. Budeme hledat např. kořen ležící ve čtvrtém kvadrantu.
Jako počáteční aproximaci můžeme zvolit $\mathbf{x}^{(0)} = (0, -2)$.
Dále musíme vypočítat matici parciálních derivací funkcí

$$f_1(x,y) = (x-1)^2 + y^2 - 4 \quad , \quad f_2(x,y) = x + (y+1)^2 - 1$$



Obrázek 4.14: K příkladu 4.8 - odhad polohy kořenů.

Dostaneme

$$\mathbf{F}\,' = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x-1) & 2y \\ 1 & 2(y+1) \end{pmatrix}$$

1. krok

Dosadíme bod $\mathbf{x}^{(0)} = (0, -2)$ do matice derivací a do funkcí f_1 a f_2:

$$\mathbf{F}\,'(0,-2) = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{F}(0,-2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soustava rovnic pro neznámé δ_1 a δ_2 (horní index, označující krok, pro přehlednost vynecháme, je ale nutno mít na paměti, že v každém kroku budeme počítat jiné δ_1 a δ_2) bude

$$\begin{array}{rcrcr} -2\,\delta_1 & - & 4\,\delta_2 & = & -1 \\ \delta_1 & - & 2\,\delta_2 & = & 0 \end{array}$$

Snadno zjistíme, že řešením této soustavy je $\delta_1 = \frac{1}{4} = 0,25, \delta_2 = \frac{1}{8} = 0,125$.
Odtud $\mathbf{x}^{(1)} = (0 + 0,25\,; -2 + 0,125) = (0,25\,;\ -1,875)$.

2. krok

$$\mathbf{F}\,'(0,25\,;-1,875) = \begin{pmatrix} -1,5 & -3,75 \\ 1 & -1,75 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{F}(0,25\,;-1,875) \doteq \begin{pmatrix} 0,07812 \\ 0,01562 \end{pmatrix}$$

Budeme řešit soustavu

$$\begin{array}{rcrcr} -1,5\,\delta_1 & - & 3,75\,\delta_2 & = & -0,07812 \\ \delta_1 & - & 1,75\,\delta_2 & = & -0,01562 \end{array}$$

Řešení této soustavy můžeme najít pomocí Cramerova pravidla:

$$\delta_1 = \frac{\begin{vmatrix} -0,07812 & -3,75 \\ -0,01562 & -1,75 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1,5 & -3,75 \\ 1 & -1,75 \end{vmatrix}} \doteq 0,01225 \quad , \quad \delta_2 = \frac{\begin{vmatrix} -1,5 & -0,07812 \\ 1 & -0,01562 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1,5 & -3,75 \\ 1 & -1,75 \end{vmatrix}} \doteq 0,01593$$

Odtud $\mathbf{x}^{(2)} = (0,25 + 0,01225\,; -1,875 + 0,01593) = (0,26225\,; -1,85907)$.

3. krok

$$\begin{aligned} \mathbf{F}'(0,26225\,; -1,85907) &\doteq \begin{pmatrix} -1,47549 & -3,71814 \\ 1 & -1,71814 \end{pmatrix} \\ \mathbf{F}(0,26225\,; -1,85907) &\doteq \begin{pmatrix} 0,00040 \\ 0,00025 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Budeme řešit soustavu

$$\begin{aligned} -1,47549\,\delta_1 &- 3,71814\,\delta_2 = -0,00040 \\ \delta_1 &- 1,71814\,\delta_2 = -0,00025 \end{aligned}$$

Řešení této soustavy pomocí Cramerova pravidla:

$$\delta_1 = \frac{\begin{vmatrix} -0,00040 & -3,71814 \\ -0,00025 & -1,71814 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1,47549 & -3,71814 \\ 1 & -1,71814 \end{vmatrix}} \doteq -0,00004 \;, \quad \delta_2 = \frac{\begin{vmatrix} -1,47549 & -0,00040 \\ 1 & -0,00025 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1,47549 & -3,71814 \\ 1 & -1,71814 \end{vmatrix}} \doteq 0,00012$$

Odtud $\mathbf{x}^{(3)} = (0,26221\,; -1,85894)$.

Protože $|\,\delta_1| < 0,01$ i $|\,\delta_2| < 0,01$ (tj. $\|\,\delta\|_\infty < 0,01$), můžeme výpočet ukončit. Přibližné řešení je $(0,26\,; -1,86)$.

Shrnutí pojmů

Řešíme-li jednu nelineární rovnici $f(x) = 0$, musíme napřed zjistit, kolik má kořenů a kde. To nejlépe uvidíme z grafu funkce f - kořeny rovnice jsou body, v nichž graf protíná osu x. Jiná možnost, použitelná jen u některých rovnic, je převést rovnici na tvar $f_1(x) = f_2(x)$ a podívat se, kde se protínají grafy funkcí f_1 a f_2.
Víme-li už, kde zhruba kořen rovnice leží, můžeme jeho polohu upřesnit.
Je-li funkce f spojitá a jsou-li znaménka funkčních hodnot v bodech a, b opačná, je jisté, že v intervalu $\langle a, b\rangle$ leží kořen rovnice $f(x) = 0$.
Z tohoto faktu vychází metoda půlení intervalu a metoda regula falsi. U těchto metod začneme s intervalem $\langle a, b\rangle$ obsahujícím kořen a pak tento interval postupně zužujeme tak, aby další, užší, interval opět obsahoval kořen. U metody půlení intervalu nový interval získáme rozpůlením předchozího a ve výpočtu pokračujeme tak dlouho, dokud se interval dostatečně nezúží. U metody regula falsi je novým krajním bodem intervalu a zároveň novou aproximací kořene průsečík sečny vedené body $[a, f(a)]$, $[b, f(b)]$.