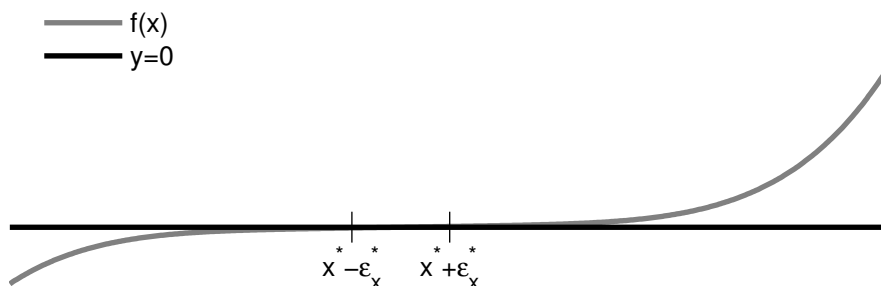


kterého můžeme dosáhnout, je  $\tilde{f}(x_k) = 0$ . V tom případě  $|f(x_k)| \leq \delta$ , takže

$$|x_k - x^*| = \frac{|f(x_k)|}{|f'(\xi)|} \leq \frac{\delta}{|f'(\xi)|} \approx \frac{\delta}{|f'(x^*)|} =: \varepsilon_x^*,$$

pokud se  $f'$  v blízkosti kořene příliš nemění. Vypočítat  $x^*$  s menší chybou než  $\varepsilon_x^*$  nelze. Proto se  $\varepsilon_x^*$  nazývá *dosažitelná přesnost kořene*  $x^*$ . Všimněte si: když je velikost směrnice  $|f'(x^*)|$  v kořenu  $x^*$  malá, je dosažitelná přesnost  $\varepsilon_x^*$  velká, viz obr. 6.5. V takovém případě je výpočet kořene  $x^*$  *špatně podmíněný problém*: malá změna  $f$  vyvolá velkou změnu  $x^*$ .



Obr. 6.5: Dosažitelná přesnost kořene

Podobná úvaha pro kořen násobnosti  $q$  dává dosažitelnou přesnost

$$\varepsilon_x^* = \left( \frac{\delta \cdot q!}{f^{(q)}(x^*)} \right)^{1/q}.$$

Exponent  $1/q$  je příčinou toho, že výpočet násobného kořene je obecně špatně podmíněná úloha. Tak třeba pro  $f(x) = x^q$  je  $x^* = 0$  kořen násobnosti  $q$  a  $\varepsilon_x^* = \delta^{1/q}$ . Pro  $q = 15$  a  $\delta = 10^{-15}$  dostaneme  $\varepsilon_x^* = 0,1!$   $\square$

**Poznámka** (*O kořenech polynomů*). Polynom  $p_n(x)$  stupně  $n$  má  $n$  obecně komplexních kořenů. Pro výpočet jednoduchých reálných kořenů funkce  $f(x) = p_n(x)$  lze použít libovolnou z dosud uvedených metod. O tom, jak se vypořádat s případnými násobnými kořeny, pojednává výše uvedená poznámka. Pro výpočet komplexních kořenů lze použít např. Newtonovu metodu, v níž jako počáteční aproximaci volíme komplexní číslo.

Pokud nás zajímají všechny kořeny polynomu, tak po nalezení reálného kořene  $x^*$  polynom  $p_n(x)$  dělíme členem  $x - x^*$ . Tak dostaneme polynom  $p_{n-1}(x) = p_n(x)/(x - x^*)$  stupně  $n - 1$  a dále hledáme jeho kořeny. Když je  $x^*$  komplexní kořen, pak je kořenem také komplexně sdružené číslo  $\bar{x}^*$ . V tom případě dělíme  $p_n(x)$  kvadratickým polynomem  $(x - x^*)(x - \bar{x}^*)$ , jehož koeficienty jsou reálná čísla. Tak dostaneme polynom  $p_{n-2}(x)$  stupně  $n - 2$  s reálnými koeficienty a pokračujeme hledáním jeho kořenů.

Pro výpočet kořenů polynomů jsou navrženy také speciální, velmi efektivní metody, o nichž lze získat informace např. v [55].  $\square$

### 6.3. Soustavy nelineárních rovnic

Mnohé z metod určených pro řešení jedné nelineární rovnice lze zobecnit na řešení soustav nelineárních rovnic. Bohužel to neplatí pro metodu bisekce ani pro metodu regula

falsi. A co je ještě horší: pro soustavy nelineárních rovnic není známa žádná univerzální metoda, která by dokázala spolehlivě určit dostatečně dobrou počáteční aproximaci řešení. Uspokojivou počáteční aproximaci proto musíme odhadnout. Pomoci nám může znalost konkrétního problému, který na řešení nelineární soustavy vede. Odhad řešení lze někdy získat také na základě pomocných výpočtů provedených za zjednodušujících předpokladů, například tak, že nelineární problém aproximujeme vhodným problémem lineárním.

Uvažujme tedy soustavu  $n$  nelineárních rovnic o  $n$  neznámých

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \end{aligned} \quad \text{nebo-li} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{o}, \quad (6.10)$$

kde

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Řešením soustavy (6.10) je každý číselný vektor  $\mathbf{x}^*$ , pro který  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{o}$ .

V tomto odstavci budeme automaticky předpokládat, že funkce  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  je spojitá a má tolik spojitých derivací, kolik je jich v dané situaci zapotřebí.

**Newtonova metoda a její modifikace.** Newtonovu metodu odvodíme z Taylorova rozvoje

$$\mathbf{o} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_k) + \dots \doteq \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_k)$$

tak, že přibližnou rovnost nahradíme rovností a místo  $\mathbf{x}^*$  píšeme  $\mathbf{x}_{k+1}$ , tj. počítáme

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_k), \quad (6.11)$$

kde  $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$  je *Jacobiho matice* funkce  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ , tj.

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Výpočet organizujeme tak, že nejdříve vyřešíme soustavu lineárních rovnic

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k) \mathbf{d}_k = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \quad \text{a pak určíme} \quad \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k. \quad (6.12)$$

Když je matice  $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)$  regulární, můžeme lineární soustavu rovnic vyřešit metodami popsanými v kapitole 2 (je-li  $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)$  singulární, je třeba metodu vhodně modifikovat, popř.

výpočet jako neúspěšný ukončit). Pro velké  $n$  a řídkou matici  $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$  lze efektivně použít iterační metody ( $\mathbf{x}_k$  je dobrá počáteční aproximace, navíc  $\mathbf{x}_{k+1}$  není třeba počítat příliš přesně, neboť je to jen mezivýsledek na cestě k nalezení  $\mathbf{x}^*$ ).

Newtonova metoda konverguje, pokud je počáteční aproximace  $\mathbf{x}_0$  dostatečně blízko kořene  $\mathbf{x}^*$ . Rychlost konvergence je kvadratická, tj. existuje okolí  $O(\mathbf{x}^*)$  bodu  $\mathbf{x}^*$  a konstanta  $C$  taková, že

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^*\| \leq C\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|^2 \quad \forall \mathbf{x}_k \in O(\mathbf{x}^*).$$

Pro ukončení iterací použijeme některé ze stop kritérií

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| < \varepsilon, \quad \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| < \varepsilon\|\mathbf{x}_k\| \quad \text{nebo} \quad \|\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1})\| \leq \varepsilon, \quad (6.13)$$

kde  $\varepsilon$  je zadaná přesnost. Tato kritéria jsou obecně použitelná také pro další metody, které si v této kapitole uvedeme.

V každém kroku Newtonovy metody je třeba řešit soustavu lineárních rovnic (6.11), což pro velké  $n$  představuje značný objem výpočtů. Navíc je třeba v každém kroku vypočítat  $n^2$  složek  $\partial f_i(\mathbf{x}_k)/\partial x_j$  matice  $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)$ . To může být také velmi obtížné v případě, že parciální derivace nejsou určeny jednoduchými vzorci. Proto se někdy postupuje tak, že se  $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)$  přepočítává jen občas, např. každých  $m$  kroků, tj.  $\mathbf{x}_{k+1}$  počítáme podle

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_p)(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_k), \quad k = p, p+1, \dots, p+m-1, \quad p = 0, m, 2m, \dots$$

V takovém případě je účelné rozložit matici  $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_p)$  pomocí  $LU$  rozkladu na součin dolní trojúhelníkové matice  $\mathbf{L}_p$  a horní trojúhelníkové matice  $\mathbf{U}_p$ ,

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_p) = \mathbf{L}_p \mathbf{U}_p.$$

Tato náročná operace se provede jen pro  $k = 0, m, 2m, \dots$ . Aproximaci  $\mathbf{x}_{k+1}$  pak dostaneme řešením dvou soustav lineárních rovnic s trojúhelníkovými maticemi,

$$\mathbf{L}_p \mathbf{y} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_k), \quad \mathbf{U}_p \mathbf{d}_k = \mathbf{y}, \quad \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k.$$

Pro  $k \notin \{0, m, 2m, \dots\}$  tedy provádíme jen „laciné“ zpětné chody. V propracovaných algoritmech se přepočet Jacobiho matice nevolí staticky, tj. každých  $m$  kroků, ale dynamicky, tj. pro  $p = 0 < p_1 < p_2 < \dots$ , a to podle rychlosti poklesu  $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)\|$ .

Parciální derivace v Jacobiho matici  $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$  se často aproximují pomocí diferenčních podílů,

$$\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \approx \Delta_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{h}) := \frac{f_i(x_1, \dots, x_j + h_j, \dots, x_n) - f_i(\mathbf{x})}{h_j},$$

kde  $h_j \neq 0$  jsou vhodně zvolené parametry,  $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)^T$ . Pro malé  $h_j > 0$  je  $\Delta_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{h})$  standardní aproximace  $\partial f_i(\mathbf{x})/\partial x_j$  dopřednou diferencí. Matice  $\Delta(\mathbf{x}, \mathbf{h})$  s prvky  $\Delta_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{h})$  je aproximací Jacobiho matice  $\mathbf{f}'(\mathbf{x})$ . Když tedy v (6.11) nahradíme  $\mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)$  pomocí  $\Delta(\mathbf{x}_k, \mathbf{h}_k)$ , dostaneme *diskretizovanou Newtonovu metodu*

$$\Delta(\mathbf{x}_k, \mathbf{h}_k)(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) = -\mathbf{f}(\mathbf{x}_k). \quad (6.14)$$

Zobecněnou metodu sečen dostaneme, když za  $j$ -tou složku  $h_j^{(k)}$  vektoru  $\mathbf{h}_k$  dosadíme  $h_j^{(k)} = x_j^{(k-1)} - x_j^{(k)}$  (pro  $n = 1$  je pak rovnice (6.14) totožná s předpisem (6.7)) a zobecněnou Steffensenovu metodu obdržíme, když položíme  $h_j^{(k)} = f_j(\mathbf{x}_k)$  (pro  $n = 1$  je pak rovnice (6.14) totožná s předpisem (6.9)). Řád konvergence obou metod je stejný jako v jedné dimenzi, tj. 1,618 pro metodu sečen a 2 pro Steffensenovu metodu. Metoda sečen potřebuje dvě dostatečně dobré počáteční aproximace  $\mathbf{x}_0$  a  $\mathbf{x}_1$ .

**Příklad 6.8.** Newtonovou metodou určíme kořeny soustavy rovnic

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^3 - xy^2 - 1 = 0, \\ g(x, y) &= y^3 - 2x^2y + 2 = 0. \end{aligned}$$

Podle (6.12) určíme  $\mathbf{x}_{k+1} \equiv (x_{k+1}, y_{k+1})^T$  takto:

$$\begin{pmatrix} f_x(x_k, y_k) & f_y(x_k, y_k) \\ g_x(x_k, y_k) & g_y(x_k, y_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f(x_k, y_k) \\ -g(x_k, y_k) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k + a_k \\ y_k + b_k \end{pmatrix}.$$

Soustavu rovnic je výhodné vyřešit pomocí Crammerova pravidla, tj.

$$a_k = -\frac{D_x}{D}, \quad b_k = -\frac{D_y}{D},$$

kde

$$D = f_x g_y - f_y g_x, \quad D_x = f g_y - f_y g, \quad D_y = f_x g - f g_x,$$

přičemž hodnoty všech funkcí se počítají v bodě  $[x_k, y_k]$ .

Z obrázku 6.6 zjistíme, že soustava má celkem tři kořeny. Vybereme si třeba ten, který leží ve čtverci  $\Omega := \{[x, y] \mid -2 \leq x \leq -1, 1 \leq y \leq 2\}$ , a jako počáteční aproximaci zvolíme  $x_0 = -1$ ,  $y_0 = 1$ . Výpočet ukončíme, když

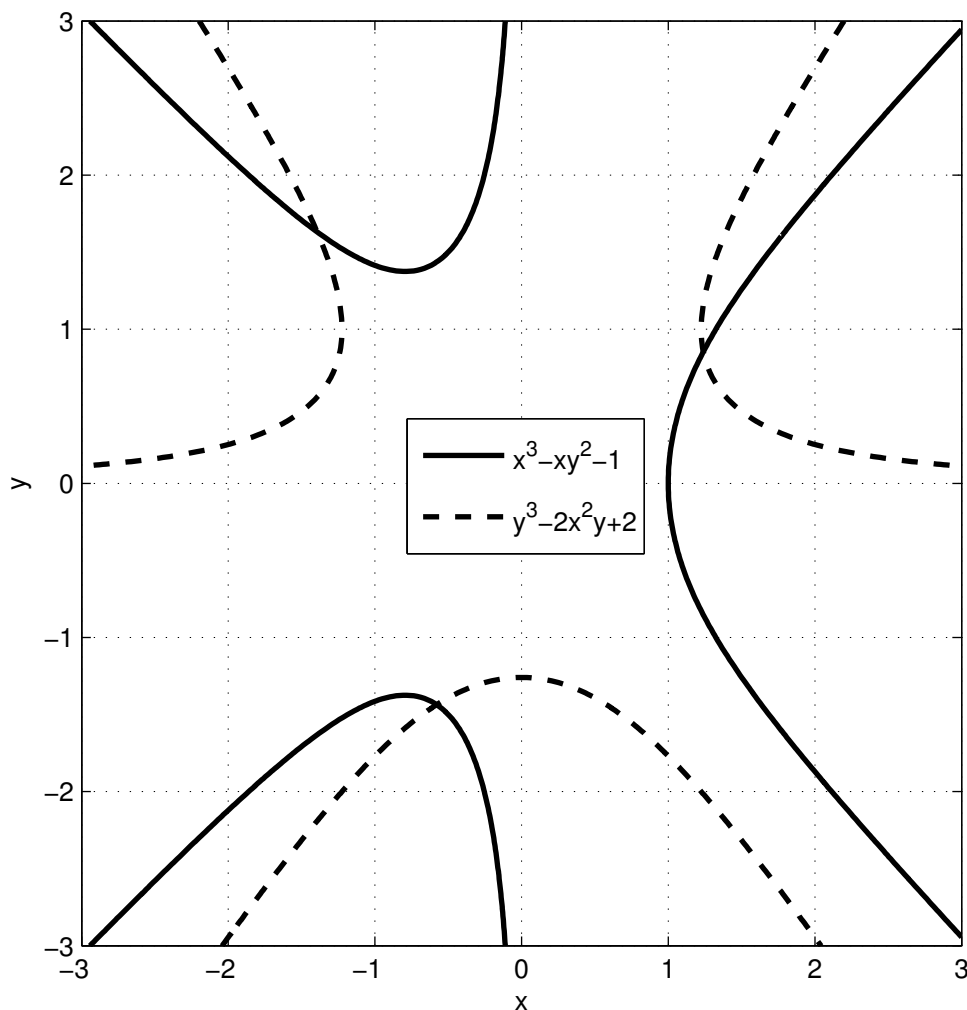
$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1})\|_\infty = \max\{|f(x_{k+1}, y_{k+1})|; |g(x_{k+1}, y_{k+1})|\} < 10^{-5}.$$

Výpočet je zaznamenán v následující tabulce ( $f_k$  a  $g_k$  označuje hodnotu v bodě  $[x_k, y_k]$ ).

$k$	$x_k$	$y_k$	$f_k$	$g_k$	$x_k - x^*$	$y_k - y^*$
0	-1	1	-1	1	0,394069	-0,631182
1	-1,5	2	1,625	1	-0,105931	0,368818
2	-1,379562	1,673966	0,240186	0,318968	0,014507	0,042784
3	-1,392137	1,629879	0,000193	0,012219	0,001932	-0,001303
4	-1,394072	1,631182	-0,000005	-0,000018	-0,000002	0,000000
5	-1,394069	1,631182	-0,000000	-0,000000	0,000000	0,000000

Všimněte si, že v blízkosti kořene je konvergence velmi rychlá. Přesné řešení jsme approximovali pomocí  $\mathbf{x}_5$ .  $x_5 = -1,39407$  a  $y_5 = 1,63118$  mají všechny cifry platné.  $\square$

**Zvýšení spolehlivosti metod Newtonova typu.** Newtonova metoda a její varianty nemusejí konvergovat, když startujeme daleko od kořene. Je však možné přijmout jistá opatření, která oblast konvergence těchto metod podstatně rozšíří.



Obr. 6.6: Soustava dvou nelineárních rovnic

Nejjednodušší je použít *tlumenou Newtonovu metodu*, ve které se Newtonův (nebo aproximovaný Newtonův) krok  $\mathbf{d}_k$  počítá jako obvykle, ale pak se jako další aproximace bere  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k \mathbf{d}_k$ , kde  $\lambda_k$  je číselný parametr. Daleko od kořene bývá krok  $\mathbf{d}_k$  nespolehlivý, mnohdy příliš velký, a tak se můžeme pokusit vybrat  $\lambda_k$  tak, aby  $\mathbf{x}_{k+1}$  byla lepší aproximace  $\mathbf{x}^*$  než  $\mathbf{x}_k$ . Jedním ze způsobů, jak toho dosáhnout, je sledovat  $\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)\|_2$  a zajistit, aby v každé iteraci délka vektoru  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_k)$  dostatečně poklesla. Parametr  $\lambda_k$  je také možné určit minimalizací funkce  $\varphi(\lambda) = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{d}_k)\|_2$  (minimalizaci se věnuje následující kapitola). Ať už parametr  $\lambda_k$  volíme jakkoliv, v blízkosti kořene vždy stačí brát  $\lambda_k = 1$  a dosáhnout tak řádu konvergence netlumené metody.

Poněkud komplikovanější, avšak mnohem spolehlivější, je *Newtonova metoda s lokálně omezeným krokem*, ve které  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k$  a krok  $\mathbf{d}_k$  dostaneme minimalizací funkce  $\varphi(\mathbf{d}) = \|\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_k)\mathbf{d}\|_2$  na oblasti  $\|\mathbf{d}\|_2 \leq \Delta_k$ , kde  $\Delta_k$  je vhodně volený parametr. Pro  $\varphi(\mathbf{d}_k) = 0$  dostaneme standardní Newtonovu metodu (6.12).

Podrobnější (a mnohé další) informace k tomuto tématu čtenář najde ve specializované literatuře, např. v [39].

**Metoda prosté iterace.** Necht'  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \dots, g_n(\mathbf{x}))^T$  je vektorová funkce definovaná a spojitá v uzavřené oblasti  $\Omega$ , tj.  $g_i \in C(\Omega)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , a necht'  $\mathbf{g}$  splňuje následující dvě podmínky:

$$(\alpha) \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) \in \Omega \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$(\beta) \quad \text{existuje číslo } q, 0 \leq q < 1, \text{ takové, že } \|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\| \leq q\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega.$$

Pak rovnice  $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$  má v  $\Omega$  jediné řešení  $\mathbf{x}^*$  a *posloupnost postupných aproximací*  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , konverguje k  $\mathbf{x}^*$  pro každé  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ . Přitom

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^*\| \leq q\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|,$$

tj. rychlost obecně jen lineární konvergence závisí na  $q$ , viz [20].

Řekneme, že  $\Omega$  je *konvexní oblast*, jestliže s každými dvěma body obsahuje také úsečku, která tyto body spojuje, tj.

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega \quad \implies \quad \overline{\mathbf{x}\mathbf{y}} := \{\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \mid 0 \leq t \leq 1\} \in \Omega.$$

Jestliže  $\Omega$  je uzavřená konvexní oblast a  $g_i \in C^1(\Omega)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , pak místo podmínky  $(\beta)$  můžeme použít silnější podmínku

$$(\beta') \quad \|\mathbf{g}'(\mathbf{x})\| \leq q < 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Skutečně, podle věty o střední hodnotě, viz [20],

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\| \leq \max_{0 \leq t \leq 1} \|\mathbf{g}'(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}))\| \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq q\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Jestliže  $\Omega = \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon\}$ ,  $\varepsilon > 0$ , pak podmínka  $(\alpha)$  plyne z podmínky  $(\beta)$ :

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}^*\| = \|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}^*)\| \leq q\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \quad \implies \quad (\mathbf{x} \in \Omega \implies \mathbf{g}(\mathbf{x}) \in \Omega).$$

Přibližný výpočet kořene  $\mathbf{x}^*$  rovnice  $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$  podle formule  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_k)$  se nazývá *metoda prosté iterace* nebo také *metoda postupných aproximací*. Podmínky  $(\alpha)$  a  $(\beta)$  nebo  $(\beta')$  jsou postačující pro konvergenci této metody.

**Příklad 6.9.** Metodou prosté iterace určíme řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x &= 0,2 + 0,1(-xy^2 + 3x), \\ y &= 0,6 + 0,1(-x^2y^3 - 2y) \end{aligned}$$

v oblasti  $\Omega = \{[x, y] \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ . Nejdříve ověříme, že funkce

$$g_1(x, y) = 0,2 + 0,1(-xy^2 + 3x), \quad g_2(x, y) = 0,6 + 0,1(-x^2y^3 - 2y)$$

splňují podmínky  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$ .

Protože pro  $[x, y] \in \Omega$  platí

$$0 \leq 0,2 + 0,1(-xy^2 + 3x) \leq 1, \quad 0 \leq 0,6 + 0,1(-x^2y^3 - 2y) \leq 1,$$

tj.  $[g_1(x, y), g_2(x, y)] \in \Omega$ , podmínka  $(\alpha)$  je splněna.

Abychom ověřili podmínku  $(\beta)$ , vyjádříme si Jacobiho matici

$$\mathbf{g}'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial g_1(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial g_2(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,1y^2 + 0,3 & -0,2xy \\ -0,2xy^3 & -0,3x^2y^2 - 0,2 \end{pmatrix}$$

a odhadneme např. v  $\|\cdot\|_\infty$  normě

$$\|\mathbf{g}'(\mathbf{x})\|_\infty = \max\{|-0,1y^2 + 0,3| + |-0,2xy|; |-0,2xy^3| + |-0,3x^2y^2 - 0,2|\}.$$

Zřejmě

$$\|\mathbf{g}'(\mathbf{x})\|_\infty \leq \max\{0,3 + 0,2; 0,2 + 0,5\} = 0,7 \quad \text{pro } \mathbf{x} = [x, y] \in \Omega,$$

takže podmínka  $(\beta)$  je splněna pro  $q = 0,7$ .

Výpočet zahájíme třeba z počáteční aproximace  $x_0 = y_0 = 0$  a pro ukončení iterací použijeme stop kritérium

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\|_\infty = \max\{|x_{k+1} - x_k|; |y_{k+1} - y_k|\} < 10^{-5}.$$

Výpočet je zaznamenán v následující tabulce.

$k$	$x_k$	$y_k$	$x_k - x_{k-1}$	$y_k - y_{k-1}$	$x_k - x^*$	$y_k - y^*$
0	0	0			-0,275892	-0,499211
1	0,2	0,6	0,2	0,6	-0,075892	0,100789
2	0,252800	0,479136	0,052800	-0,120864	-0,023092	-0,020075
3	0,270036	0,503470	0,017236	0,024334	-0,005856	0,004259
$\vdots$						
8	0,275882	0,499209	0,000025	-0,000009	-0,000010	-0,000001
9	0,275889	0,499211	0,000007	0,000002	-0,000003	0,000000

Přesné řešení jsme aproximovali pomocí  $\mathbf{x}_{15}$ .  $x_9 = 0,27589$  a  $y_9 = 0,49921$  mají všechny cifry platné.  $\square$

**Poznámka.** Když  $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}\mathbf{x} + \mathbf{c}$  je lineární funkce, pak  $\mathbf{g}'(\mathbf{x}) = \mathbf{T}$ . Pokud  $\|\mathbf{T}\| < 1$ , pak jsou postačující podmínky  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  splněny pro každé  $\mathbf{x}$ , takže  $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{x}^*$  pro libovolnou počáteční aproximaci  $\mathbf{x}_0$ . Tento výsledek jsme dokázali v kapitole 2, viz (2.32).